АКАДЕМИЯ НАУК СССР

В. В. ШУЛЕЙКИН

ФИЗИКА МОРЯ

ИЗДАНИЕ ЧЕТВЕРТОЕ,
ПЕРЕРАБОТАННОЕ И ДОПОЛНЕННОЕ



ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»

МОСКВА
1968

УК 53(551.46)

Выпускаемая 4-м изданием книга включает в себя итоги важнейших, преимущественно отечественных исследований, а также наиболее существенных иностранных.

Новое содержание получила 3-я глава «Кинематика, динамика и расчет ветровых волн». В ней приведены результаты отечественных исследований, позволивших заложить физические основы расчета и прогноза элементов ветровых волн по заданной скорости ветра, времени его воздействия, расстоянию от наветренной границы шторма, заданной глубине моря — при заданной обеспеченности волн. В книгу включена глава «Магнитные и электрические явления в море». Эти явления представляют большой интерес как в теоретическом, так и в практическом отношении и требуют постановки все новых и новых исследований в океане и во внутренних морях. Переработаны и дополнены 5-я глава «О физических корнях климата и погоды», а также и другие главы.

Монография рассчитана в основном на исследователей в области физики моря, в сопредельных областях геофизики и физической океанографии, а также на практиков (работников морских обсерваторий, морских экспедиций), на аспирантов, студентов старших курсов соответствующего профиля в университетах и других высших учебных заведениях.

2-9-6
403-68 (I полугодие)

ПРЕДИСЛОВИЕ

Четырнадцать лет отделяют выход в свет 4-го издания этой книги от выхода в свет предыдущего издания. За истекший срок много новых работ по физике моря выполнено в нашей стране и за ее пределами. Естественно, не все отрасли нашей науки развивались одинаково. Некоторые разделы динамики моря, прежде лишь намечавшиеся, находившиеся в зачаточном состоянии, ныне широко развились и дали ценный вклад в практику, расширили общетеоретические представления. Некоторые разделы термики моря стали развиваться в новых направлениях, обеспечивающих решение задач до конца, до числа. Среди задач термогидродинамических выступили на первый план такие, которые сейчас особо нуждаются в дружной напряженной совместной работе геофизиков, физиков, математиков: они одновременно и очень сложны, и перспективны. Зато целый ряд разделов акустики моря вышел за рамки исследовательской работы физика-мореведа и стал достоянием инженеров, успешно развивающих новые направления технической гидроакустики. Еще дальше ушли в область техники те задачи прикладной механики, которые связаны с поведением корабля на волне, с проблемой использования энергии приливов. Здесь появляется специализированная техническая литература.

Все эти соображения подсказали: *что* именно следует добавить в книгу, готовя ее к новому изданию, *что* надо иметь под рукой исследователю моря — геофизику, в первую очередь для работы в наиболее важных направлениях нашей науки. Не рискуя увеличивать объем книги, пришлось одновременно решить: *что* следует изъять из содержания книги, предназначенной для геофизиков-мореведов?

Именно с таких позиций рассматривалась перестройка содержания книги, пополнение и даже замена некоторых ее глав.

Глава первая, как и прежде, посвящена теории морских течений, причем для большей определенности отмечено, что течения эти либо связаны с ветром, либо они — конвекционные, вызванные неоднородностями поля плотности морской воды. Теория течений, предложенная шведским геофизиком В. Экманом, выдержала испытания десятилетиями и по-прежнему лежит в основе всех новых построений. Сейчас в книгу внесены дочерние теории, касающиеся так называемого бета-эффекта (концентрации мощных потоков у западных берегов Атлантического и Тихого океанов), учитывающие неоднородность водных масс в океанах и морях, позволяющие рассчитывать элементы океанических течений по заданному полю ветра над океаном с помощью современных электронных счетных машин. Небольшой специальный раздел посвящен динамике течения Ломоносова, открытого советскими исследователями в экваториальном поясе Атлантического океана.

Во вторую главу — о приливах и других длинных волнах — вошли материалы важных исследований по проблеме катастрофических наводнений, вызываемых длинными волнами от подводных землетрясений. Это — и теоретические работы, и опыты по моделированию волн, порожденных подводными импульсами.

Заново написана *вся* глава третья, которая теперь носит название «Кинематика, динамика и расчет ветровых волн». За истекшие годы в нашей стране

удалось найти новые методы экспериментальных исследований волн на начальных стадиях их развития,— до таких размеров, при которых возможно определять погрешности, вносимые в лабораторных условиях. Тем самым была обеспечена коренная перестройка кинематических представлений о ветровой волне и создалась возможность вывода новой, фундаментальной, теоремы, освещающей причину и закон нарастания *длины* волн под воздействием ветра. В результате удалось построить замкнутую систему соотношений, составить дифференциальное уравнение поля ветровых волн и найти его точный интеграл. Потери энергии волн вычисляются на основе полуэмпирической теории турбулентных процессов при волнении. Измерения предельно развитых волн в океане позволили определить единственную недостававшую константу. В результате были построены рабочие диаграммы, которые позволяют рассчитывать элементы волн по заданным метеорологическим и географическим условиям. В настоящее время эти диаграммы служат в нашей стране для систематического расчета волн в океанах и морях, на электронных машинах, по текущим синоптическим материалам.

Глава четвертая пополнилась новыми материалами, которые касаются *внутренних* составляющих теплового баланса моря: за ряд лет удалось проследить за ходом истинного теплосодержания деятельного слоя моря и найти количество тепла, переносимого адвекционными потоками из прибрежной зоны в открытое море и в обратном направлении.

Широкое развитие в нашей стране и за границей получили исследования турбулентного теплообмена в водных массах. Мы вправе ждать от специалистов в этой области отдельных монографий по турбулентным процессам в море. В рамках нашей книги пришлось ограничиться лишь немногим: для главы четвертой § 6, 8, 9, 10 и часть 7-го написала А. А. Сперанская, читающая соответствующий раздел курса физики моря на физическом факультете Московского университета. Приношу ей за это искреннюю благодарность.

Идеи о мощных термогидродинамических процессах в неразрывной системе океан — атмосфера — материки, с легкой руки отечественных исследователей, широко распространились среди геофизиков во всех странах. До настоящего времени эти идеи продолжают, в основном, привлекать внимание советских геофизиков. Естественно, что соответствующая глава книги — «О физических корнях климата и погоды» — получила значительные дополнения. В частности, в нее включен новый материал по термобарическим сейшам в атмосфере над Европой и Атлантическим океаном. Он связан с важнейшим вопросом о своевременном прогнозе наиболее опасных морозов зимой и засушливых условий в летнее время.

В главу шестую, посвященную оптике моря, включены новые материалы, которые касаются сложных явлений многократного рассеяния и одновременного поглощения света в морской воде и в искусственных мутных средах. Описана новая оригинальная аппаратура, применяемая отечественными исследователями в экспедициях и в лабораторных условиях, для изучения этих процессов. В последние годы появилось много работ по исследованию поляризации света в рассеивающих и поглощающих средах. Результаты этих работ также отражены в главе шестой.

В области акустики моря (которой посвящена глава восьмая) сделаны важные исследования распространения звука в неоднородной среде, причем неоднородность водной среды, ведущая к изменениям скорости звука, вызывается не только различием в температуре и в солености тех или иных слоев, но и возрастанием гидростатического давления на глубинах. Именно этому обстоятельству обязан своим происхождением так называемый звуковой канал в водах океанов и морей.

В главе восьмой не рассматриваются задачи чисто инженерные. Основное внимание уделено вопросам, которые связаны с явлениями, представляющими интерес для физика-мореведа.

В главу девятую, посвященную биологической физике моря, внесена работа автора, позволяющая определять *скорости миграции* рыб, дельфинов, китов по заданным размерам их тела. Отметим, что работы советских исследователей в этой области, так же как и работы английского физиолога А. Грэя, впервые получившего киноснимки движущихся рыб, явились зачатками новой области точной науки, широко развивающейся в настоящее время,— бионики. С другой стороны, можно с удовлетворением установить, что даже наши прежние материалы по *максимальным* скоростям движения рыб пригодились практикам-инженерам для проектирования активных орудий лова в океане.

Было бы нецелесообразно сохранять в книге последнюю главу, которая посвящалась вопросам технической физики моря: все эти вопросы ныне нашли самостоятельные пути и получают отражение в различных специализированных изданиях. Взамен в книгу включена новая, десятая по счету, глава— о магнитных и электрических явлениях в море. Вероятно, нет надобности доказывать целесообразность помещения этой главы в монографии по физике моря; магнитные и электрические явления с каждым годом обнаруживают все новые и новые связи с другими явлениями в море и в особенности с теми, о которых идет речь в первой, второй и пятой главах книги.

Первые же строки текста новой главы должны напомнить читателю, что, в отличие от других областей геофизики, область электромагнитных явлений на нашей планете до сих пор *не располагает ни одной теорией*. Такое обстоятельство, с одной стороны, может обескураживать исследователя при выборе тем для работы: малые шансы на успех в построении хотя бы достаточно веской *гипотезы* здесь очевидны каждому. Но, с другой стороны, делом чести для геофизика должны быть настойчивые попытки построения таких гипотез, которые в будущем могут дозреть до теории электромагнитных явлений на нашей планете и, в частности, на просторах океана, где эти явления издавна служат важным практическим целям кораблевождения. Содержание главы десятой, в ее оригинальной части,— не исключение из общего правила: предлагаемые гипотезы еще шатки; но вместе с тем, работая в этой области, нашим исследователям удалось добыть *нестареющий документальный материал*, который не может быть опорочен скудностью нынешних теоретических знаний в этой области геофизики.

Развитие морской науки, по-видимому, протекает почти по закону цепных реакций, и это сказывается на выходе в свет больших монографий, что легко проследить на примере книг, так или иначе связанных с вопросами физики моря. Ведь пятьдесят лет тому назад моряки-исследователи располагали лишь *океанографическими* изданиями, т. е. книгами *географического* профиля: это — замечательная «Океанография» Ю. М. Шокальского, «Гидрология моря» И. Б. Шпиндлера у нас и обстоятельный хандбух О. Крюммеля в Западной Европе. В области *геофизики* ровесницей первого издания нашей «Физики моря» (1932 г.) была лишь книга А. Дефанта «Динамическая океанография», содержавшая и исследования самого автора, и работы скандинавских исследователей по гидродинамическим вопросам. Этим же вопросам несколько позже была посвящена «Динамика моря» Вс. А. Березкина (1938 г.; переиздана в 1947 г.). После выхода в свет второго издания «Физики моря» (1941 г.) появилась большая монография трех авторов: Свердрупа, М. Джонсона, Р. Флеминга «Океаны, их физика, химия и общая биология». Физической океанографии посвящены те главы, которые написаны Г. Свердрупом.

После выпуска в свет третьего издания нашей книги (1953 г.) появляется довольно много объемистых сборников, содержащих статьи различных авторов в родственных отраслях морской науки и носящих название «Физическая океанография». Важно подчеркнуть, что все они полностью оправдывают это заглавие. В них всесторонне освещены физические явления, допускающие *картирование*. В них приведено большое количество формул, полученных

различными исследователями. Но ни в одной из этих монографий не даны выводы формул и не описаны экспериментальные работы по физике моря с соответствующими экспериментальными установками. Между тем, всякому геофизику необходимо всегда держать под рукой *именно такой* материал: ведь и математический аппарат предшественников, и их экспериментальные установки всегда будут либо прямо использованы последующими работниками в родственных областях науки, либо дадут толчок к созданию новых, более совершенных.

Именно поэтому в новом издании «Физики моря» сохранен прежний обычай: приводятся не только окончательные результаты исследований, но и выкладки, и экспериментальные работы, послужившие исследователям на их путях.

При таком построении книги в ее объем, разумеется, не оказалось возможным уложить исчерпывающий обзор даже одних лишь отечественных исследований. По-прежнему основное внимание уделено работам коллектива тех научных учреждений, в которых зародилась советская физика моря: Черноморской гидрофизической станции АН СССР и выросшего из нее Морского гидрофизического института. Из работ других советских коллективов и — тем более — из работ иностранных авторов пришлось изложить лишь то, что так или иначе связано с той же идейной линией. Иначе предлагаемое издание превратилось бы в многотомный компилятивный справочник.

В предыдущем издании книги товарищи по профессии обнаружили опечатки, авторские описки, пропуски, ускользнувшие от внимания автора и корректоров. За указания на такие погрешности приношу благодарность С. В. Доброклонскому, Л. Г. Лебедкиной, Л. А. Корневой, П. Н. Успенскому.

П. Н. Успенскому благодарен также и за внимательное редактирование текста книги.

Василий Шулейкин

Кацивели, 1967 г.

ГЛАВА ПЕРВАЯ

ТЕОРИЯ МОРСКИХ ТЕЧЕНИЙ, СВЯЗАННЫХ С ВЕТРОМ И КОНВЕКЦИОННЫХ

§ 1. Основные силы, вызывающие течения и сопутствующие им

В этой главе рассматриваются морские течения, так или иначе порожденные тепловым воздействием Солнца на Землю, в отличие от гл. II, в которой будут рассмотрены приливные течения, вызванные полем тяготения (притяжением к Луне и к Солнцу).

В настоящее время приходится признать, что из всех видов теплового воздействия Солнца на нашу планету при изучении морских течений нас больше всего должно интересовать воздействие, которое проявляется в создании мощных воздушных потоков над океаном и над отдельными морями: самые важные и самые сильные течения возникают под действием ветра на поверхность вод.

Наблюдения в море и лабораторные опыты показывают, что при скорости ветра V (*см/сек*) и плотности воздуха δ_a (*г/см*^{3}) на каждый сантиметр поверхности моря действует тангенциальная сила трения f, которая выражается формулой

$$f = k\delta_a V^2 \ дин/см^2. \tag{1}$$

Здесь k — коэффициент пропорциональности (коэффициент поверхностного трения), числовая величина которого может быть принята равной около 0,002.

Если ветровое течение (или, как его иначе называют, дрейфовое) встречает на своем пути какие-то препятствия, то в море может возникать подъем, а при некоторых условиях — опускание поверхности воды. Тем самым создается непостоянство давления на единицу горизонтальной площади, выделенную на какой-то глубине z под нормальным уровнем моря, т. е. создается градиент давления p

$$\operatorname{grad} p_z = -\frac{\partial p}{\partial r}$$

по некоторому выбранному направлению r. Можно найти такое направление r, при котором $\frac{\partial p}{\partial r} = 0$. Именно в этом направлении через исследуемую точку проходит изобара. Напротив, если мы исследуем градиент давления по нормали n к этой изобаре, то обнаружим, что здесь он будет наибольшим. Именно такую величину

$$\operatorname{grad} p = -\frac{\partial p}{\partial n} \tag{2}$$

в дальнейшем будем называть градиентом давления вблизи исследуемой точки.

Градиенты давления могут возникать в толщах океанических и морских вод не только по указанной причине, но и вследствие неоднородностей водной

среды: различий температуры, солености, а следовательно, в конечном счете,— плотности вод. Как увидим, в таких случаях создаются конвекционные течения, роль которых, вообще говоря, менее значительна, чем роль ветровых (дрейфовых) течений.

Кроме поверхностных сил и сил, обусловленных наличием градиента давления, т. е. сил, порождающих течения, необходимо исследовать силы иного рода — сопутствующие движению вод в море. Прежде всего это силы внутреннего трения между соседними горизонтальными слоями воды. Переходя от слоев конечной толщины к бесконечно тонким, обычно записывают основное соотношение для вязкой жидкости в таком виде:

$$f_\eta = \eta \frac{du}{dz}, \tag{3}$$

где f_η — сила внутреннего трения, η — коэффициент вязкости (или коэффициент трения) данной среды, dz — элемент вертикальной прямой, u — скорость, меняющаяся в вертикальном направлении.

При чрезвычайно малых скоростях течения и столь же малых размерах областей, охваченных ими (например, где-то в лабораторных приборах, в тонких трубках и т. д.), можно было бы пользоваться соотношением (3), подразумевая, что в нем η — коэффициент молекулярной вязкости, величина которого весьма незначительна.

Именно, для дистиллированной воды при температуре около 0°опыты дают значение молекулярной вязкости

$$\eta = 0{,}018\ см^{-1} \cdot г \cdot сек^{-1}.$$

Молекулярная вязкость быстро уменьшается с возрастанием температуры: при температуре 25° $\eta = 0{,}0081$. Соленость сказывается значительно меньше: океанская вода с соленостью $35^0/_{00}$ обладает молекулярной вязкостью, которая лишь на 5% больше вязкости дистиллированной воды при той же температуре.

В природных условиях молекулярная вязкость не играет никакой роли: при существующих скоростях течений и при громадных размерах областей, ими охваченных, на сцену выступает турбулентный режим, при котором из слоя в слой переносятся водные массы, обладающие различным запасом количества движения. С достаточной для практики точностью при этом режиме можно сохранить те же формальные соотношения, которые выведены применительно к ламинарному режиму в вязкой жидкости, заменив коэффициент η коэффициентом турбулентного внутреннего трения μ. Иными словами, вместо (3) следует применять на практике аналогичное соотношение

$$f_\mu = \mu \frac{du}{dz}, \tag{4}$$

где u — скорость течения, а du/dz — ее градиент в вертикальном направлении, взятый с измененным знаком.

Наблюдения над морскими ветровыми течениями позволили различным авторам обнаружить зависимость коэффициента турбулентной вязкости μ от скоростей течений, а значит, от скорости ветра V, порождающего эти течения. С достаточной надежностью можно считать, что связь между V и μ характеризуется следующими данными:

V, $м \cdot сек^{-1}$	1	3	5	7	10	20
μ, $см^{-1} \cdot г \cdot сек^{-1}$	1	28	110	220	430	1720

Здесь не надо доверять лишь первой цифре ввиду трудности и ненадежности измерений при малых скоростях ветра. Следует отметить, что приведенные данные относятся к более или менее однородной воде, т. е. когда имеет место лишь медленное изменение плотности с глубиной. В случае резко расслоен-

ных вод затрудняется обмен количеством движения между соприкасающимися слоями, вследствие чего заметно уменьшается коэффициент μ, характеризующий турбулентное трение между этими слоями.

В настоящее время установлено, что в некоторых задачах физики моря трение между горизонтальными слоями может отойти на задний план по сравнению с силами трения, которые возникают внутри тех же водных масс при их движении относительно боковых слоев, являющихся как бы «жидкими берегами» для важнейших морских течений. Градиенты скоростей du/dn в горизонтальных направлениях значительно меньше градиентов этих скоростей в вертикальном направлении. Однако необходимо учесть, что турбулентный обмен в горизонтальном направлении осуществляется значительно сильней, чем в вертикальном. В связи с этим соответствующее значение коэффициента «бокового» трения (μ_L) должно значительно превышать упомянутые значения μ при прочих равных условиях. К этому обстоятельству мы еще возвратимся в § 19.

Чем больше глубина моря, тем большее значение приобретает еще один класс сил, сопутствующих течениям: силы, вызванные вращением Земли вокруг ее оси (так называемые силы Кориолиса).

Обозначим через $\mathbf{u}$ вектор, выражающий скорость водных масс относительно вращающейся координатной системы, связанной с нашей планетой, через $\boldsymbol{\omega}$ — угловую скорость вращения самой координатной системы. Как известно, при этом водные массы должны приобрести поворотное ускорение $\mathbf{a}$, которое определяется из соотношения между векторами

$$\mathbf{a} = 2[\boldsymbol{\omega}\mathbf{u}]. \tag{5}$$

Символ [ ] обозначает векторное произведение векторов $\boldsymbol{\omega}$ и $\mathbf{u}$. Известно, что модуль вектора $\mathbf{a}$ можно представить так:

$$a = 2\omega u \sin(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{u}), \tag{6}$$

направление $\mathbf{a}$ перпендикулярно к обоим векторам $\boldsymbol{\omega}$ и $\mathbf{u}$. Если наблюдатель смотрит по направлению кориолисова ускорения $\mathbf{a}$, то для совмещения вектора $\mathbf{u}$ с вектором $\boldsymbol{\omega}$ кратчайшим путем ему придется вращать вектор $\mathbf{u}$ вокруг $\mathbf{a}$, как вокруг оси против часовой стрелки. Тем самым определяется направление $\mathbf{a}$.

Пусть частица воды с массой m движется относительно поверхности Земли с некоторой скоростью $\mathbf{u}$. Как центробежная сила всегда направлена в сторону, противоположную центростремительному ускорению, так и кориолисова сила направлена в сторону, противоположную кориолисову ускорению. Абсолютная величина этой силы будет

$$f_c = 2m\omega u \sin(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{u}). \tag{7}$$

Эта сила лежит в плоскости горизонта только тогда, когда скорость u направлена вдоль меридиана. Во всех остальных случаях кориолисову силу можно разложить на две составляющие: горизонтальную и вертикальную. Из них последняя не может иметь никакого существенного значения, так как она либо ничтожно увеличивает, либо ничтожно уменьшает действие поля тяжести. Напротив, горизонтальная составляющая кориолисовой силы играет решающую роль во многих явлениях, происходящих в море.

Можно показать, что величина горизонтальной составляющей кориолисовой силы будет

$$f_{hc} = 2m\omega u \sin\varphi, \tag{8}$$

где φ — широта исследуемой точки земного шара. В дальнейшем под словами «кориолисова сила» будем подразумевать именно ее горизонтальную составляющую, определяемую по формуле (8) (для краткости будем пользоваться обозначением f_c).

Исходя из сказанного о направлениях векторов, можно вывести правило: кориолисова сила в северном полушарии направлена вправо от относительной скорости течения u, а в южном — влево.

Как видно из формуы (8), кориолисова сила достигает наибольшей величины в полярных областях (максимум на полюсах при $\varphi = 90°$ С и Ю), на экваторе она (точнее, как говорилось уже, горизонтальная составляющая), напротив, обращается в нуль, ибо здесь $\varphi = 0$.

Вспомнив, что угловая скорость вращения Земли $\omega = 7{,}29 \cdot 10^{-5}$ *сек*$^{-1}$, найдем, что максимальная величина кориолисовой силы составляет $f_c = 1{,}46 \cdot 10^{-4}$ *и дин* на каждый грамм массы воды. Скорость u здесь выражена в *см* · *сек*$^{-1}$.

§ 2. Силовые поля и распределение водных масс

В настоящей главе будем характеризовать гравитационное поле только величиной ускорения g в поле тяжести, не принимая во внимание силы притяжения к Луне и к Солнцу. Как известно, эта величина связана с широтой φ из-за отличия формы Земли от формы правильного шара.

На Международном геофизическом конгрессе 1930 г. принято следующее выражение g как функции φ, вполне достаточное по точности для всех геофизических вычислений:

$$g = 978{,}049\,(1 + 0{,}005302 \sin^2\varphi - 0{,}000006 \sin^2 2\varphi). \qquad (9)$$

Известно, что величину g можно рассматривать как градиент гравитационного потенциала Г по высоте, характеризующий собой напряженность поля тяжести:

$$g = -\frac{d\Gamma}{dz}. \qquad (10)$$

Строго говоря, здесь одновременно учитывается и поле тяжести, и поле центробежных сил, вызванное вращением Земли вокруг оси. Наложение этого второго поля также способствует увеличению g на полюсах и уменьшению его близ экватора.

По формуле (10) вычисляется значение g для точек, лежащих на уровне моря, а также на его глубинах, потому что изменениями g в зависимости от глубины вполне можно пренебречь (в пределах глубин океанов). Направление z в формуле (10) совпадает с направлением отвеса в данной точке, так как отвесная прямая нормальна к поверхности уровня (эквипотенциальной поверхности гравитационного поля). В направлении, перпендикулярном к отвесу, $\frac{d\Gamma}{ds} = 0$. Значит, при перемещениях в подобных направлениях не совершается никакой работы против силы тяжести. Условие $\frac{d\Gamma}{ds} = 0$, вообще говоря, определяет собой некоторую эквипотенциальную поверхность, или поверхность уровня. В частности, одной из поверхностей уровня является спокойная поверхность моря. Для нее естественно принять гравитационный потенциал равным нулю. Тогда на глубине h, отсчитываемой по отвесу, потенциал окажется равным $\Gamma = -gh$.

Представим себе семейство таких поверхностей уровня, пронизывающих толщу морской воды, причем каждые две соседние поверхности отличаются между собой на единицу потенциала. Расстояние между такими двумя соседними поверхностями условились называть динамическим дециметром. Это расстояние, очевидно, должно меняться в зависимости от изменений величины g от точки к точке при изменениях широты φ. Изменениями g с глубиной, разумеется, здесь можно пренебречь. В среднем примем, что $g = 9{,}81$ *м* · *сек*$^{-2}$, и положим $gh = 1$. Тогда окажется, что динамический дециметр соответствует приблизительно 1,02 геометрического дециметра. Не следует упускать из

вида, что это лишь соответствие числовых величин и что размерности этих величин совершенно разные: размерность динамического дециметра соответствует L^2T^{-2}, а размерность геометрического — L.

На практике пользуются кратной динамической единицей, равной 10 *дин дм* (динамических дециметров). Это — динамический метр. Когда выражают глубину исследуемой точки в динамических метрах, то обычно ее обозначают буквой D. На основании сказанного $D = \frac{gh}{10}$. Стало быть, на глубине D значение потенциала

$$\Gamma = -10D. \tag{11}$$

В задачах физики моря приходится иметь дело еще с полем давления в толще вод. На некоторой глубине h (*м*) давление должно равняться

$$p = \int_0^h \delta g dz \cdot 10^4 \ дин/см^2.$$

Если осреднить плотность морской воды δ от поверхности до исследуемой глубины h, то через осредненную величину δ давление выразится проще

$$p = \bar{\delta} g h \cdot 10^4 \ дин/см^2.$$

На практике в физике моря пользуются более крупной единицей для измерения. Эта единица — 1 *дбар* (децибар) — равна 10^5 *дин/см*^{2}. Кратная единица — 1 *бар* — равняется 10^6 *дин/см*^{2}. Само слово «*бар*» было предложено потому, что нормальное атмосферное давление, по старой терминологии, равно давлению ртутного столба высотой 750 *мм*. Это соответствует $1{,}013 \cdot 10^6$ *дин/см*^{2}. Как известно, в настоящее время в метеорологии атмосферное давление измеряется уже не в миллиметрах ртутного столба, а в миллибарах.

Если глубина исследуемой точки измерена в геометрических метрах, а g в *м·сек*$^{-2}$, то в новых единицах давление p будет выражено так:

$$p = \bar{\delta} \frac{gh}{10} дбар.$$

Вспоминая, что $gh/10$ непосредственно выражает динамическую глубину точки D, измеренную в динамических метрах, давление запишем еще проще

$$p = \bar{\delta} D. \tag{12}$$

То же соотношение можно записать иначе, внеся в него осредненный удельный объем $\bar{\alpha}$ вместо осредненной плотности $\bar{\delta}$:

$$D = \bar{\alpha} p. \tag{13}$$

Точные соотношения легко получить, учитывая плотность (или удельный объем) в отдельности на каждой глубине и интегрируя в пределах от 0 до D или соответственно от 0 до p):

$$p = \int_0^D \delta dD, \tag{14}$$

$$D = \int_0^p \alpha dp. \tag{15}$$

По формулам (12) и (14) нетрудно вычислить давление в любой точке поверхности уровня по заданной динамической глубине D этой поверхности, Аналогично по формулам (13) и (15) вычисляется динамическая глубина любой точки изобарической поверхности по заданному давлению p на ней.

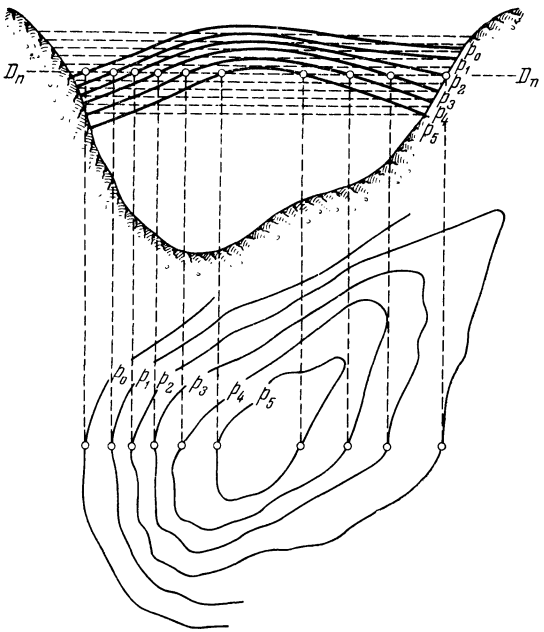


Рис. 1а. Эквипотенциальные и изобарические поверхности (метеорологический вариант)

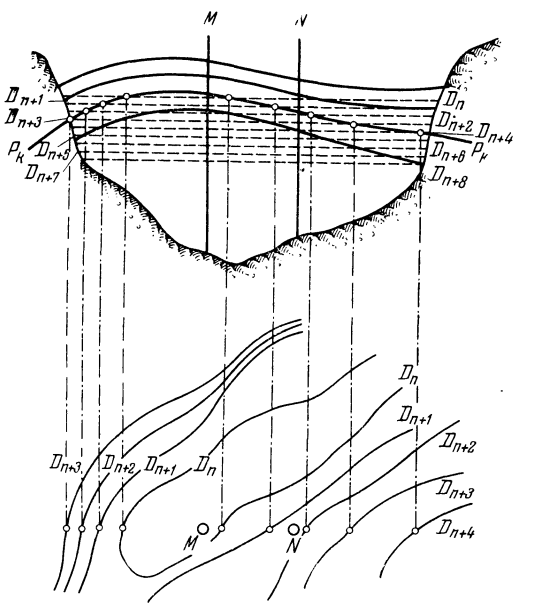


Рис. 1б Эквипотенциальные и изобарические поверхности (океанографический вариант)

Сравнивая поле давления с гравитационным полем, судят о состоянии водных масс: при статическом равновесии во всех точках эквипотенциальной поверхности возникает одно и то же давление, при этом все точки какой-то определенной изобарической поверхности лежат на одной и той же динамической глубине.

При наличии движения вод хорошее представление об этом движении можно получить, сопоставляя семейство эквипотенциальных поверхностей с семейством изобарических поверхностей. Само сопоставление ведется двумя путями, из которых один получил преимущественное распространение в динамической метеорологии, а другой — в физике моря и физической океанографии.

Первый вариант иллюстрируется рис. 1 а, на котором изображено в профиле и в плане пересечение различных изобарических поверхностей с одной избранной эквипотенциальной поверхностью. Кривые, видные на плане рис. 1а, аналогичны изобарам, вычерчиваемым на синоптических картах.

Второму варианту соответствует рис. 1 б, где изображено пересечение нескольких эквипотенциальных поверхностей с одной определенной изобарической поверхностью. Кривые, видные на плане рис. 1 б, называются динамическими изобатами (изогипсами). Они характеризуют динамический рельеф соответствующей изобарической поверхности совершенно так же, как обычные изобаты характеризуют рельеф дна или изогипсы — рельеф суши. Чем чаще располагаются на плане динамические изобаты, тем круче динамический профиль в соответствующем районе и тем дальше от статического равновесия отходит режим вод, свидетельствующий о наличии течений.

Но искривление изобарических поверхностей всегда связано с перегруппировкой водных масс, обладающих различными удельными

объемами (вследствие неодинаковых температур и неодинаковых соленостей). В связи с этим большое значение представляет анализ поверхностей равных удельных объемов, так называемых изостерических поверхностей.

Удельный объем морской воды всегда больше 0,9. Поэтому для краткости в таблицах и на картах никогда не пишут цифры, соответствующие полной величине удельного объема, а заменяют их более удобными цифрами, характеризующими величину так называемого условного удельного объема v:

$$v = (\alpha - 0{,}9) \cdot 10^3.$$

Иногда вместо изостерических поверхностей и их следов на чертеже — изостер пользуются поверхностями равных плотностей, т. е. изопикническими поверхностями, и их следами на плоскости чертежа — изопикнами. Никогда не пишутся в таблицах и на чертежах полные значения плотностей морской воды, а даются лишь значения так называемой условной плотности σ:

$$\sigma = (\delta - 1) \cdot 10^3.$$

При статическом равновесии в толщах воды изобарические и изостерические поверхности нигде не пересекаются. Напротив, при наличии какого-либо течения в исследуемом районе изобарические и изостерические поверхности, а соответственно и изобары с изостерами на чертежах пересекаются и образуют сложную сетку.

В качестве примера на рис. 2 изображена такая сетка. На ней сплошными жирными кривыми нанесены изобары, соответствующие давлениям p_0, p_1, p_2,... Тонкие пунктирные линии представляют собой изостеры, при которых записаны соответствующие значения удельного объема v_k, v_{k+1}, v_{k+2},...

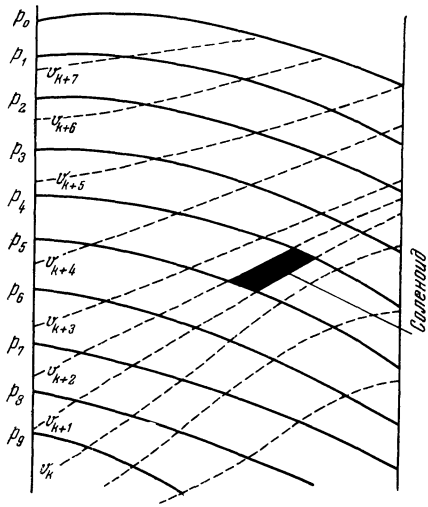


Рис. 2. Соленоиды

Как видим, две соседние изобарические поверхности и две соседние изостерические поверхности заключают внутри ограниченного ими пространства трубку, заполненную водой. Если разность значений давления и разность значений удельного объема между граничными поверхностями трубки равняются единице, то самую трубку, заключенную между ними, рассматривают как единичную трубку и называют соленоидом. Чем больше соленоидов пронизывает некоторую поверхность, выделенную в толще вод, тем дальше от статического равновесия находится состояние водной среды в соответствующем районе моря.

§ 3. Некоторые вопросы статики моря

Прежде чем переходить к вопросам кинематики и динамики вод, остановимся на некоторых вопросах равновесия чисто статического характера. Сперва рассмотрим поведение водной частицы, получившей какое-то вертикальное смещение в неоднородной морской воде.

Пусть на прежнем уровне, на котором находилась частица, плотность воды была равна δ и пусть при смещении по вертикали на расстояние Δz частица оказалась в окружении вод с несколько иной плотностью δ_1. Совершенно очевидно, что вследствие этого перемещенная частица должна испытать неко-

торое ускорение $\frac{\delta-\delta_1}{\delta}g$. Его знак определяется знаком величины $\frac{\delta-\delta_1}{\Delta z}$: если $\frac{\delta-\delta_1}{\Delta z}>0$, то поднятая частица ($\Delta z>0$) получит ускорение, совпадающее по знаку с g, т. е. будет стремиться опуститься назад, а опущенная частица ($\Delta z<0$) приобретет ускорение, обратное g по своему знаку, т. е. должна стремится подняться назад; и в том и в другом случаях нарушенное состояние частицы будет восстанавливаться, а стало быть, положительный знак при $\frac{\delta-\delta_1}{\Delta z}$ определит устойчивое равновесие системы. Напротив, отрицательный знак при $\frac{\delta-\delta_1}{\Delta z}$, как легко показать, свидетельствует о неустойчивом равновесии: поднятая частица будет стремиться подниматься выше, а опущенная опускаться ниже.

Итак, предельное значение $\frac{\delta-\delta_1}{\delta}\frac{1}{\Delta z}$ можно считать мерилом устойчивости E:

$$E=\lim\frac{\delta-\delta_1}{\delta}\frac{1}{\Delta z}=\frac{1}{\delta}\frac{d\delta}{dz}.$$

Но ведь плотность морской воды зависит от ее температуры ϑ и от ее солености S. Следовательно, при изменении координаты z на бесконечно малую величину dz полный дифференциал плотности $d\delta$ должен выражаться двучленом, один из членов которого содержит $\partial\delta/\partial\vartheta$, а другой $\partial\delta/\partial S$. Что касается изменения температуры при перемещении частицы на dz, то оно в свою очередь тоже слагается из двух частей: во-первых, сказывается изменение температуры окружающей водной массы на $d\vartheta$ при изменении координаты z на величину dz, во-вторых, при положительном приращении dz наступает адиабатическое охлаждение частицы воды (за счет ее расширения при уменьшении внешнего давления), которое должно быть учтено соответствующей величиной $d\Theta$.

В итоге полный дифференциал $d\delta$ запишется так:

$$d\delta=\frac{\partial\delta}{\partial S}dS+\frac{\partial\delta}{\partial\vartheta}(d\vartheta-d\Theta),$$

а на этом основании и на основании формулы, определяющей E, устойчивость водных масс можно выразить формулой

$$E=\frac{1}{\delta}\left[\frac{\partial\delta}{\partial S}\frac{dS}{dz}+\frac{\partial\delta}{\partial\vartheta}\left(\frac{d\vartheta}{dz}-\frac{d\Theta}{dz}\right)\right]. \tag{16}$$

Множитель перед квадратной скобкой по своей абсолютной величине близок к единице. Заменив его единицей, следует только помнить о том, что размерность его не нулевая, а равна ML^{-3}. Из общего соотношения (16) вытекает следствие, которое оказывается полезным при исследовании устойчивости вод постоянной солености. Действительно, в таком частном случае производная $\frac{dS}{dz}=0$.

Значит, вместо формулы (16) можно записать

$$E=\frac{\partial\delta}{\partial\vartheta}\left(\frac{d\vartheta}{\partial z}-\frac{d\Theta}{dz}\right). \tag{16а}$$

Величина $\partial\delta/\partial\vartheta$, стоящая перед скобкой, существенно отрицательная, так как плотность морской воды уменьшается при повышении температуры. Равновесие вод в исследуемой точке при постоянной солености всецело зависит от того, какой из трех знаков должен быть поставлен между двумя величинами:

$$\frac{d\vartheta}{dz}\lessgtr\frac{d\Theta}{dz}.$$

Верхний знак соответствует устойчивому равновесию, которое существует всегда, когда температура вод либо понижается с глубиной, либо возрастает, но медленней, чем она возрастала бы под влиянием адиабатического сжатия ($d\Theta/dz$). Средний знак определяет собой равновесие безразличное, а нижний соответствует неустойчивому равновесию. На практике изменения плотности δ с глубиной больше всего связаны с изменениями температуры ϑ по вертикали, несколько меньше — с изменениями солености S по вертикали и еще меньше — с величиной $d\Theta/dz$, фигурировавшей в формулах (16) и (16а). Ввиду этого для ориентировочных суждений об устойчивости расположения водных масс оказывается возможным пользоваться совсем простым выражением некоторой величины E', близкой к точному значению E, а именно формулой

$$E' = \frac{d\delta}{dz} = \frac{d\sigma}{dz} \cdot 10^{-3}.$$

В применении к океанографическим материалам последние две формулы дают числовые значения, мало отличающиеся между собой в каждой определенной исследуемой точке. Обе они показывают, что в поверхностных слоях (примерно до 50 *м*) водные массы океана часто оказываются в неустойчивом состоянии ($E < 0$, $E' < 0$). Затем на глубине около 75 *м* наблюдается наибольшая устойчивость. Далее она падает и на больших глубинах стремится к нулю, оставаясь положительной. Значит, в придонных слоях океана воды находятся примерно в безразличном равновесии [1].

§ 4. Некоторые вопросы кинематики течений

В начале XIX в. академик Э. Х. Ленц, участвовавший в замечательных кругосветных плаваниях русских военных кораблей, предложил простейшую схему циркуляции вод мирового океана. Для простоты он рассматривал воды, покрывающие всю Землю слоем постоянной толщины. Принимая во внимание высокую температуру тропических вод на поверхности океана и низкую температуру их у дна, Ленц высказал предположение о том, что холодные воды пришли туда из высоких широт в мощном конвекционном потоке, вызванном резкими различиями в тепловом режиме разных широтных поясов. Из условия неразрывности следует, что приток холодных вод из высоких широт в низкие широты понизу должен сопровождаться оттоком теплых вод в противоположном направлении поверху. Простая схема Ленца, разумеется, далека от истинной картины и представляет интерес лишь как первая кинематическая модель циркуляции в мировом океане.

Действительные кинематические условия в океане и в отдельных морях чрезвычайно сложны ввиду преобладающей роли дрейфовых течений, сложного рассечения мирового океана материками и архипелагами и сложного рельефа океанического дна. Однако из множества частных кинематических схем можно извлечь наиболее типичные, представляющие принципиальный интерес.

На рис. 3 представлены такие типичные схемы. На рис. 3, *а* изображена линия односторонней сходимости (конвергенции) потоков, а на рис. 3, *в* — линия двусторонней сходимости. В большинстве случаев это соответствует опусканию тяжелых масс под массы более легкие, увлекаемые поверхностным течением. На рис. 3, *г* дан вертикальный разрез водных масс плоскостью, перпендикулярной к линии раздела. На рис. 3, *д* представлен другой вариант, соответствующий подходу легких масс слева направо. На рис. 3, *б* изображена линия расхождения (дивергенции) водных потоков, а на рис. 3, *е* — вертикальный разрез водных масс, соответствующий этому случаю (снова плоскостью, перпендикулярной линии раздела). Здесь видно, как поднимаются снизу вверх более тяжелые воды.

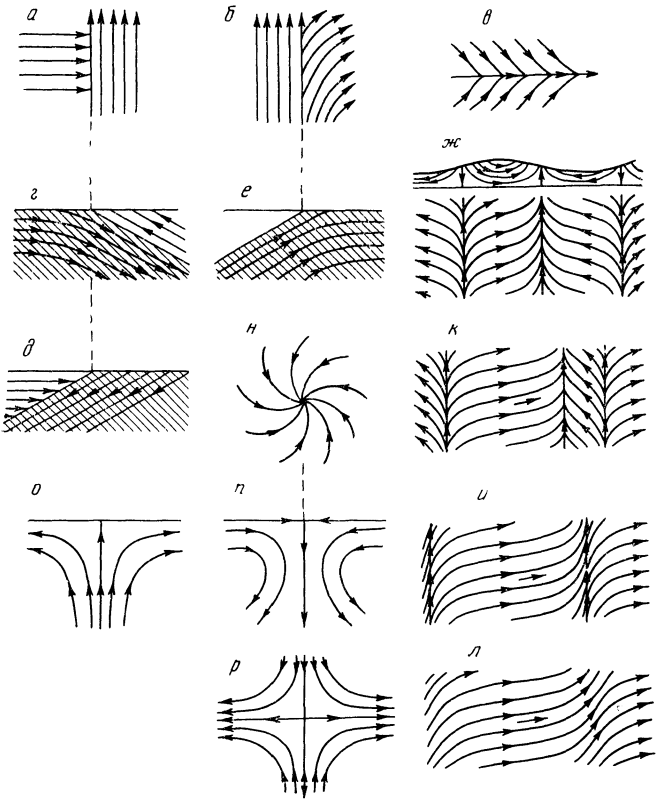


Рис. 3. Особые точки и линии в кинематике течений

Чередующиеся между собой линии сходимости и расходимости свидетельствуют о наличии волновых движений (рис. 3, *ж*) в разрезе вертикальной плоскостью и в плане. Тут линии проходят вдоль склонов волн на половине их высоты, и при простом синусоидальном профиле волн расстояния между каждыми двумя соседними линиями одинаковы.

Иная картина наблюдается при наложении поступательного движения водных масс на движение волновое. Здесь расстояние между двумя линиями растягивается на участке, где направление поступательного движения совпадает с направлением линий тока на волне (рис. 3, *к*), и расстояние между двумя линиями укорачивается там, где поток направлен против линий тока на волне. При достаточно большой скорости поступательного движения водных масс этот второй участок исчезает, соответствующие линии сливаются между собой (рис. 3, *и*). При дальнейшем возрастании скорости поступательного движения исчезает и эта особенность поля скоростей и линии тока в плане приобретают вид, изображенный на рис. 3, *л*.

Помимо линий сходимости и расходимости, в океане наблюдаются также и ясно выраженные точки сходимости или точки расходимоти. На рис. 3, *н* изображены линии тока близ такой точки в плане, а на рис. 3, *п* — в разрезе вертикальной плоскостью. Как видим, сходимость обусловлена здесь опусканием вод близ исследуемой точки. Аналогично точка расходимости создается там, где воды выходят снизу вверх вблизи исследуемой точки. Соответствующие схемы — в плане и в разрезе вертикальной плоскостью — можно получить по рис. 3, *н* и 3, *п*, изменив направления стрелок на противоположные.

В некоторых случаях в океане возникают нейтральные точки, близ которых линии тока напоминают гиперболы (поэтому такие точки иногда называют

гиперболическими). Простейшему из таких случаев соответствует рис. 3, *о*, где линии тока подходят к береговой черте. Возможен и случай, изображенный на рис. 3, *р*. Здесь видны два потока, направленные навстречу друг другу.

§ 5. Основные уравнения гидродинамики

В предыдущих параграфах были обрисованы причины, вызывающие движение в гидросфере, и были намечены характеристики состояния водной среды путем введения понятия о силовых полях и потенциале в различных точках этих полей. Остановимся теперь на основных уравнениях, которые помогут в дальнейшем перейти от качественных суждений к аналитическому исследованию водных потоков.

Заметим, что те же основные уравнения понадобятся и в следующих главах, посвященных периодическим движениям вод.

Исследуя динамическое равновесие какой угодно системы, можно применить к ней принцип д'Аламбера, гласящий, что при всяком динамическом равновесии сумма сил действующих, сил инерции и сил сопротивления равна нулю. Пренебрегая пока силами сопротивления, о которых в будущем придется вспомнить, применим принцип д'Аламбера к единице массы воды, положение которой в гидросфере определяется координатами x, y и z, причем плоскость XOY горизонтальна и совпадает с поверхностью моря, а ось OZ направлена к центру Земли. Координатную систему примем *левую*, т. е. будем полагать, что ось OX приводится в положение OY путем вращения против Солнца.

Допустим, что внешние действующие силы, отнесенные к единице массы, дают по осям координат составляющие X, Y и Z. Тогда, сохраняя обозначения физических величин, найдем

$$\begin{aligned} X - \alpha \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{d^2x}{dt^2} &= 0, \\ Y - \alpha \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{d^2y}{dt^2} &= 0, \\ Z - \alpha \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{d^2z}{dt^2} &= 0. \end{aligned} \tag{17}$$

Второй член в каждой строке представляет собой давление, отнесенное к единице массы, а потому в нем фигурирует $\alpha = 1/\delta$. Третий член выражает силу инерции, присущую единице массы.

Для решения всевозможных проблем гидродинамики, помимо уравнений (17), необходимы еще только граничные условия, а также уравнение неразрывности, которое можно записать в форме

$$\frac{\partial \delta}{\partial t} + \operatorname{div} \delta \mathbf{U} = 0. \tag{18}$$

Но для интегрирования эти уравнения в таком виде не пригодны. Поэтому их необходимо преобразовать, придав им либо форму Эйлера, либо форму Лагранжа. Первую форму нетрудно получить, принимая за неизвестные в задаче *составляющие скорости* **U** по осям координат u, v и w, а также давление p и рассматривая все эти величины как функции времени и координат данной точки пространства x, y и z.

Полное изменение скорости в данной точке будет происходить тогда и от того, что меняется время, и от того, что непрерывно меняется положение самой точки в пространстве. Поэтому

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} u + \frac{\partial u}{\partial y} v + \frac{\partial u}{\partial z} w. \tag{19}$$

Совершенно аналогичные соотношения напишутся для производных d^2y/dt^2 и d^2z/dt^2. Подставив выражение (19) и два других, подобных ему,

в (17) и группируя члены в левой и правой частях равенств, получим уравнения Эйлера

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} &= X - \alpha\frac{\partial p}{\partial x},\\
\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} &= Y - \alpha\frac{\partial p}{\partial y},\\
\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z} &= Z - \alpha\frac{\partial p}{\partial z}.
\end{aligned} \tag{20}$$

Совместно с граничными условиями и уравнением неразрывности (18) эти уравнения позволяют разрешать многочисленные гидродинамические проблемы. Но в некоторых случаях оказывается более удобным пользоваться иным методом преобразования основных уравнений (17). Именно, можно рассматривать x, y и z как координаты движущейся частицы жидкости, которые в некоторый начальный момент времени $t = t_0$ соответственно равняются a, b и c. Тогда, умножив уравнения (17) соответственно на $\partial x/\partial a$, $\partial y/\partial a$, $\partial z/\partial a$ и складывая, затем умножив на $\partial x/\partial b$, $\partial y/\partial b$, $\partial z/\partial b$ и складывая и, наконец, умножив на $\partial x/\partial c$, $\partial y/\partial c$, $\partial z/\partial c$ и складывая, получим три уравнения гидродинамики в форме Лагранжа

$$\begin{aligned}
\left(\frac{d^2x}{dt^2} - X\right)\frac{\partial x}{\partial a} + \left(\frac{d^2y}{dt^2} - Y\right)\frac{\partial y}{\partial a} + \left(\frac{d^2z}{dt^2} - Z\right)\frac{\partial z}{\partial a} + \alpha\frac{\partial p}{\partial a} &= 0,\\
\left(\frac{d^2x}{dt^2} - X\right)\frac{\partial x}{\partial b} + \left(\frac{d^2y}{dt^2} - Y\right)\frac{\partial y}{\partial b} + \left(\frac{d^2z}{dt^2} - Z\right)\frac{\partial z}{\partial b} + \alpha\frac{\partial p}{\partial b} &= 0,\\
\left(\frac{d^2x}{dt^2} - X\right)\frac{\partial x}{\partial c} + \left(\frac{d^2y}{dt^2} - Y\right)\frac{\partial y}{\partial c} + \left(\frac{d^2z}{dt^2} - Z\right)\frac{\partial z}{\partial c} + \alpha\frac{\partial p}{\partial c} &= 0.
\end{aligned} \tag{21}$$

Если силы X, Y и Z обладают потенциалом Γ, то уравнениям может быть придан вид

$$\begin{aligned}
\frac{d^2x}{dt^2}\frac{\partial x}{\partial a} + \frac{d^2y}{dt^2}\frac{\partial y}{\partial a} + \frac{d^2z}{dt^2}\frac{\partial z}{\partial a} &= \frac{\partial\Gamma}{\partial a} - \alpha\frac{\partial p}{\partial a},\\
\frac{d^2x}{dt^2}\frac{\partial x}{\partial b} + \frac{d^2y}{dt^2}\frac{\partial y}{\partial b} + \frac{\partial^2z}{dt^2}\frac{\partial z}{\partial b} &= \frac{\partial\Gamma}{\partial b} - \alpha\frac{\partial p}{\partial b},\\
\frac{d^2x}{dt}\frac{\partial x}{\partial c} + \frac{d^2y}{dt^2}\frac{\partial y}{\partial c} + \frac{d^2z}{dt^2}\frac{\partial z}{\partial c} &= \frac{\partial\Gamma}{\partial c} - \alpha\frac{\partial p}{\partial c}.
\end{aligned} \tag{22}$$

К этим уравнениям по-прежнему следует добавить уравнение неразрывности, которое для несжимаемой жидкости можно записать так:

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial a}, & \frac{\partial y}{\partial a}, & \frac{\partial z}{\partial a} \\ \frac{\partial x}{\partial b}, & \frac{\partial y}{\partial b}, & \frac{\partial z}{\partial b} \\ \frac{\partial x}{\partial c}, & \frac{\partial y}{\partial c}, & \frac{\partial z}{\partial c} \end{vmatrix} = 0. \tag{23}$$

К сожалению, все же далеко не при всех граничных условиях уравнения гидродинамики могут быть проинтегрированы.

§ 6. Понятие о циркуляции

Применим теперь найденные гидродинамические уравнения (в форме Лагранжа) к выводу соотношений, имеющих чрезвычайно важное значение в задачах о морских течениях. Прежде всего введем понятие о *циркуляции*.

Пусть некоторый поток задан линиями тока, изображенными на рис. 4. Выделим в нем некоторый замкнутый контур, проходящий через определенные частицы жидкости, и будем перемещаться по такому контуру от точки

к точке, причем для каждой из них будем находить *скорость* жидкости, проектировать эту скорость на элемент контура и умножать полученную проекцию на длину соответствующего элемента. Другими словами, для каждого бесконечно малого участка контура $d\lambda$ будем находить произведение

$$U\cos(U, d\lambda)\,d\lambda.$$

Сумма таких произведений, полученная при полном обходе по замкнутому контуру, называется *циркуляцией* вдоль данного контура. Попытаемся ее вычислить, применяя манеру *Н. Е. Жуковского* [2].

Согласно определению, циркуляция C выражается линейным интегралом по замкнутому контуру

$$C = \oint U\cos(U, d\lambda)\,d\lambda. \qquad (24)$$

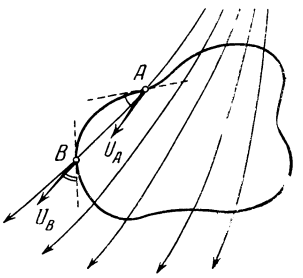


Рис. 4. Схема циркуляции

Допустим, что сам контур определяется параметрическими уравнениями

$$a = \xi(\lambda), \quad b = \eta(\lambda), \quad c = \zeta(\lambda),$$

причем за параметр принята длина кривой λ, отсчитываемая от некоторой точки на кривой. Отнесем к точке с координатами a, b, c, выбранной на кривой, уравнения (22) и умножим их соответственно на

$$\frac{da}{d\lambda}, \quad \frac{db}{d\lambda}, \quad \frac{dc}{d\lambda}.$$

Сложив полученные три уравнения и вспоминая соотношения между полными и частными дифференциалами, найдем

$$\frac{d^2x}{dt^2}\frac{dx}{d\lambda} + \frac{d^2y}{dt^2}\frac{dy}{d\lambda} + \frac{d^2z}{dt^2}\frac{dz}{d\lambda} = \frac{d\Gamma}{d\lambda} - \alpha\frac{dp}{d\lambda}.$$

Нетрудно видеть, что левая часть этого уравнения может быть представлена несколько иначе:

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{dx}{dt}\frac{dx}{d\lambda} + \frac{dy}{dt}\frac{dy}{d\lambda} + \frac{dz}{dt}\frac{dz}{d\lambda}\right] - \frac{1}{2}\frac{d}{d\lambda}\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right] = \frac{d\Gamma}{d\lambda} - \alpha\frac{dp}{d\lambda}. \qquad (25)$$

Величины, стоящие в круглых скобках, представляют собой составляющие скорости u, v и w, а, стало быть, сумма их квадратов равняется квадрату *скорости*

$$\{u^2 + v^2 + w^2\} = U^2. \qquad (26)$$

Выражение, стоящее в первых квадратных скобках, тоже легко преобразовать. Оно равно

$$\frac{dx}{dt}\frac{dx}{d\lambda} + \frac{dy}{dt}\frac{dy}{d\lambda} + \frac{dz}{dt}\frac{dz}{d\lambda} = u\cos(u, d\lambda) + v\cos(v, d\lambda) + w\cos(w, d\lambda) = U\cos(U, d\lambda). \qquad (27)$$

Подстановка выражений (26) и (27) в (25) дает

$$\frac{d}{dt}[U\cos(U, d\lambda)] - \frac{1}{2}\frac{d}{d\lambda}\{U^2\} = \frac{d\Gamma}{d\lambda} - \alpha\frac{dp}{d\lambda},$$

откуда

$$\frac{d}{dt}[U\cos(U, d\lambda)\,d\lambda] = d\left\{\Gamma + \frac{U^2}{2}\right\} - \alpha dp. \qquad (28)$$

Если проинтегрировать уравнение (28) по всему контуру, то в квадратных скобках левой части появится, очевидно, выражение *циркуляции* (24), а сама левая часть будет представлять собой производную от циркуляции по времени, т. е. dC/dt. Что касается правой части, то, будучи проинтегрирована, она дает выражение этой производной через элементы поля. Здесь интересно рассмотреть *два случая*.

а) Однородная среда с постоянным во всей массе удельным объемом α. Так как по всему контуру сумма кинетической и потенциальной энергий постоянна

$$\oint d\left[\Gamma + \frac{U^2}{2}\right] = 0$$

и

$$-\oint \alpha dp = 0,$$

то

$$\frac{d}{dt}\oint U\cos(U, d\lambda)\,d\lambda = \frac{dD}{dt} = 0. \qquad (29)$$

Это — выражение теоремы Томсона, которую можно сформулировать так: *Если силы, под действием которых движется однородная жидкость, имеют потенциал, то циркуляция скорости по замкнутому контуру, проводимому постоянно через одни и те же точки жидкости, не изменяется во времени.*

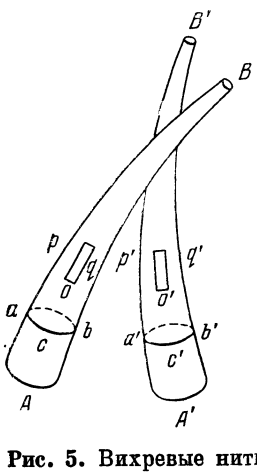


Рис. 5. Вихревые нити

Из этой теоремы непосредственно может быть выведен принцип о *сохранении вихрей*.

В самом деле, пусть AB (рис. 5) представляет некоторую вихревую нить. Вообразим некоторый замкнутый бесконечно малый контур abc, опоясывающий нить, и другой бесконечно малый контур opq, лежащий на поверхности нити. По прошествии некоторого промежутка времени Δt жидкость, заполнявшая AB, переместится в новое положение $A'B'$, причем частицы жидкости, лежавшие ранее на контурах abc и opq, лягут теперь на некоторые иные контуры: $a'b'c'$ и $o'p'q'$.

Согласно указанной теореме, циркуляция по контуру $o'p'q'$ должна равняться циркуляции по контуру opq, но так как последний лежит на поверхности вихревой нити, то циркуляция по нему равна *нулю*. Следовательно, циркуляция по $o'\,p'\,q'$ тоже равна нулю, а бесконечно тонкая трубка $A'B'$ тоже является *вихревой нитью*.

Что касается циркуляции по abc, то она выражает собой удвоенное *напряжение* вихревой нити AB. Следовательно, из теоремы вытекает еще одно заключение: напряжение вихревой нити $A'B'$ (половина циркуляции по $a'b'c'$) остается равным напряжению вихревой нити AB. В итоге мы получили принцип Гельмгольца: *при движении жидкости под действием сил, имеющих потенциал, часть жидкой массы, образующая вихревую нить, движется, оставаясь вихревой нитью с постоянным напряжением вихря.*

Таким образом, в случае отсутствия вихрей в жидкости в начальный момент течение всегда будет оставаться *невихревым* при условии, что все силы имеют потенциал.

б) Среда с меняющимся значением удельного объема α. В этом случае, как и в предыдущем,

$$\oint d\left[\Gamma + \frac{U^2}{2}\right] = 0.$$

Но второй интеграл, $\oint \alpha dp$, уже *не обращается* в нуль. Следовательно, для циркуляции получаем уравнение

$$\frac{dC}{dt} = -\oint \alpha dp, \tag{30}$$

которое лежит в основе известной *циркуляционной* теории течений.

Для перехода к случаю реальных морских течений необходимо вспомнить, что в действительности наша система координат (выбранная в предыдущем параграфе) не остается неподвижной: она непрерывно переносится в пространстве благодаря вращению Земли вокруг оси (другими движениями Земли можно пренебречь).

Все проделанные выкладки относятся к абсолютному движению, стало быть, и к абсолютной циркуляции C, которая складывается из циркуляции C_0 относительно земного шара и циркуляции самой Земли $C_З$. Для практических целей важно знать циркуляцию относительно земного шара

$$C_0 = C - C_З. \tag{31}$$

Величина $C_З$ в этом уравнении может быть выражена через угловую скорость вращения Земли ω и проекцию площади F исследуемого контура на плоскость экватора ($F_э$):

$$C_З = 2\omega F_э. \tag{32}$$

Прежде чем написать выражение для величины dC_0/dt, т. е. для скорости изменения относительной циркуляции по времени, будет уместно вспомнить еще об одном дополнении, или, вернее, уточнении, которое можно внести в окончательную формулу для циркуляции. Именно при выводе уравнений (20) и (21) были отброшены все силы сопротивления, зависящие в случае ламинарного движения от коэффициента внутреннего трения η, а в случае турбулентного движения — от турбулентной вязкости μ.

С внутренним трением молекулярного характера в гидродинамических задачах, касающихся морских течений, можно не считаться. Но если течение турбулентно, то в большинстве случаев турбулентная вязкость дает себя знать. Если бы она была учтена при выводе уравнений (20), то в правых частях всех трех уравнений появилось бы соответственно по новому слагаемому (со знаком плюс):

$$\alpha\mu\nabla^2 u, \quad \alpha\mu\nabla^2 v, \quad \alpha\mu\nabla^2 w, \tag{33}$$

где лапласовский оператор обозначает сумму трех частных производных

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Снова, не приводя вывода, укажем, что в дальнейшем слагаемое, обусловленное турбулентной вязкостью, вошло бы во все промежуточные выкладки и в результате выражение для производной dC_0/dt пополнилось бы новым членом со знаком минус. Обозначим его сокращенно буквой R. Тогда, вспомнив еще соотношения (30) — (32), получим полное выражение интересующей нас величины

$$\frac{dC_0}{dt} = -\oint \alpha\, dp - 2\omega \frac{dF_э}{dt} - R. \tag{34}$$

В следующем параграфе будут даны практические приемы, посредством которых обычно вычисляется интеграл, входящий в правую часть уравнения, а также выводы из теории морских течений.

Здесь же следует упомянуть еще об одном следствии соотношения (34) — о вихреобразовании в морской воде непостоянного удельного объема.

В § 1 была уже речь о том, что, согласно наблюдениям, в морской воде неоднородной плотности трение оказывается значительно меньшим, чем в воде

однородной, пресной. Соотношение (34) подводит под это явление математическую базу. В самом деле, ведь трение в большинстве случаев обусловлено турбулентной вязкостью, зависящей от интенсивности процесса вихреобразования. Однако нетрудно видеть, что в случае непостоянства удельного объема α в водной среде теорема Томсона становится неприменимой: в общем случае правая часть равенства не обращается в нуль, а оказывается всегда *отрицательной*. Это значит, что напряжение вихря в какой-нибудь возникшей вихревой нити непрерывно *уменьшается* и сам вихрь быстро вырождается. Вот почему в морской воде вихри, вызывающие турбулентную вязкость, не могут развиваться в такой степени, как развиваются они в пресной воде однородной плотности.

§ 7. Применение теории циркуляции к исследованию установившихся морских течений

Циркуляционная теория одинаково применима как в динамической метеорологии, так и в динамике морских течений. Посмотрим, к каким результатам она приводит при анализе гидрологических материалов, полученных в экспедиции.

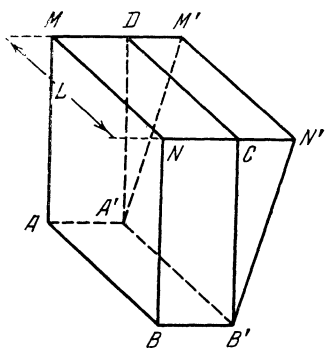


Рис. 6. Схема двух гидрологических разрезов

Пусть гидрологические станции были сделаны в точках M и N (рис. 6), отстоящих одна от другой на расстоянии L. Как мы увидим далее, для успешного исследования течения необходимо прокладывать курс экспедиционного судна по возможности нормально к предполагаемому направлению течения. Пока допустим, что это условие выполнено в точности, а потом несколько обобщим вывод.

Если прямая AB (рис. 6) представляет собой какую-либо изобару, которой соответствует давление p_1, то, очевидно, эта изобара вместе с линией уровня моря MN и двумя вертикалями MA и NB, по которым погружались батометры, образует замкнутый контур. По-видимому, ничто не мешает применить к нему принцип циркуляции, вычислив интеграл в формуле (34) на основании крайне простых условий задачи. Что касается последнего члена, характеризующего трение, то здесь мы снова отбросим его; вернуться к нему придется в следующем параграфе.

Так как верхняя сторона (MN) прямоугольного контура представляет собой одну из изобар, соответствующую $p_0 = 0$, то по ней, так же как и по изобаре p_1, интеграл $\int \alpha dp$ равняется нулю. Следовательно, полная величина интеграла составлена всего из двух слагаемых — интегралов по вертикалям MA и NB

$$-\int \alpha dp = \left[-\int_{p_1}^{p_0} \alpha dp\right]_M + \left[-\int_{p_0}^{p_1} \alpha dp\right]_N. \tag{35}$$

Но на основании равенства (15)

$$\left[\int_{p_0}^{p_1} \alpha dp\right]_M = D_M \quad \text{и} \quad \left[\int_{p_0}^{p_1} \alpha dp\right]_N = D_N,$$

а стало быть,

$$-\int \alpha dp = D_M - D_N. \tag{36}$$

Остается теперь вычислить второй член первой части уравнения (34). В данном конкретном случае это нетрудно сделать. В самом деле, приращение $dF_э$ проекции площади на экваториальную плоскость, как легко показать, равно приращению проекции той же площади на горизонтальную плоскость $MNN'M'$, умноженной на синус широты. Следовательно, $dF_э/dt$ будет также весьма просто выражаться через соответствующую производную, умноженную на синус широты.

Проекция контура $MABN$ на горизонтальную плоскость равна нулю. Но за время dt цепочка частиц воды, лежавшая на этом контуре, перенесется в некоторое новое положение $M'A'B'N'$, причем новый контур, охватывающий те же выделенные частицы воды, даст некоторую конечную проекцию на горизонтальную плоскость $M'DCN'$ (рис. 6). Таким образом, за время dt проекция на горизонтальную плоскость изменится на величину $M'DCN'$.

Если бы скорости течения на изобарах p_0 и p_1 были равны, то эта площадка равнялась бы нулю, но ввиду неравенства скоростей частицы, движущиеся по изобаре p_0, обгонят частицы, движущиеся по изобаре p_1.

Если скорости на изобарах p_0 и p_1 мы обозначим соответственно u_0 и u_1, то обнаружим, что $AA' = BB' = u_1 dt$ и $MM' = NN' = u_0 dt$; $CN' = NN' - BB' = (u_0 - u_1)\, dt$. Принимая во внимание, что расстояние CD равняется $MN = L$, вычислим прирост проекции на горизонтальную плоскость за время dt. Он будет равен $(u_0 - u_1)\, L dt$.

Разделив обе части равенства на dt и умножив полученную величину на синус широты, найдем окончательно искомый второй член уравнения (34)

$$\omega \frac{dF_э}{dt} = (u_0 - u_1) L\omega \sin\varphi. \tag{37}$$

Отсюда, пренебрегая, как было сказано, членом — R, находим

$$\frac{dC_0}{dt} = D_M - D_N - 2(u_0 - u_1) L\omega \sin\varphi. \tag{38}$$

Посмотрим, каков физический смысл найденного соотношения. Прежде всего оно показывает, что под влиянием течения, возникшего по направлению нормали к плоскости $AMNB$, томсоновская циркуляция в неоднородной по плотности воде начинает нарастать. Но скорость нарастания циркуляции dC_0/dt постепенно начинает падать, по мере того как кориолисова сила нагоняет воды *вправо* (в северном полушарии) от направления их течения. В конце концов устанавливается некоторое динамическое равновесие при определенной разности динамических глубин D_M и D_N. Тогда в случае установившегося течения величина dC_0/dt превращается в нуль, а уравнение (38) принимает вид

$$D_M - D_N - 2(u_0 - u_1) L\omega \sin\varphi = 0,$$

откуда

$$u_0 - u_1 = \frac{D_M - D_N}{2\omega L \sin\varphi}. \tag{39}$$

Важное соотношение (39) позволяет вычислить разность скоростей *установившегося* течения на двух изобарах, если известны динамические глубины этих изобар на станциях M и N. Разумеется, подобным же образом могут быть исследованы всевозможные слои гидросферы, соответствующие различным изобарическим поверхностям. В качестве нижнего слоя, характеризуемого давлением p_1, удобнее всего брать либо придонный слой, либо, во всяком случае, такой, где скорость течения ничтожно мала. Тогда вычитаемое в формуле (39) обращается в нуль, и формула дает непосредственно величину скорости u_0 [3].

Правда, не всегда можно поручиться, что предположение о неподвижности нижнего слоя соответствует действительности, а потому обычно на цифры, получаемые указанным методом, смотрят как на относительные. Зато совер-

шенно достоверные абсолютные цифры могут быть получены тем же методом, если на одном каком-либо горизонте проделать непосредственные измерения скоростей течения посредством морской вертушки или иного достаточно надежного прибора. Тогда, последовательно применяя формулу (39) к различным «парным» слоям, легко будет найти полную картину распределения скоростей по вертикали.

Выше было указано, что для динамической обработки желательно выбирать курс судна по нормали к предполагаемому направлению течения. В том случае, когда это почему-либо невозможно и когда известен угол β между направлением течения и нормалью к контуру $AMNB$, можно определить истинную скорость течения u_β по нормальной составляющей u, вычисленной описанным способом. Для этого следует только воспользоваться соотношением

$$u_\beta = \frac{u}{\cos\beta}. \tag{40}$$

Теперь несколько слов о самой технике вычислений по формуле (39). На величинах, входящих в знаменатель, кроме L нет надобности останавливаться, так как их произведение дает просто некоторый числовой коэффициент, постоянный для данной широты. Рассмотрим выражение $\frac{D_M - D_N}{L}$ — разность динамических глубин, отнесенную к расстоянию между станциями, т. е. характеризующую «динамический рельеф» данного района.

Если бы мы стали вычислять самые величины динамических глубин, D_M и D_N, то это повело бы к операциям над громоздкими цифрами, в которых пришлось бы заботиться о весьма далеких десятичных знаках.

Действительно, ведь в выражение (15), откуда определяется D, входит удельный объем α, изменения которого приходится тщательно учитывать; однако величина этих изменений обычно весьма невелика. Вот почему в западноевропейской практике установился обычай вычислять не самые динамические глубины D, а так называемые аномалии динамических глубин, выражаемые в динамических метрах, умноженных на 10^{-5}. За «норму» принимается динамическая глубина, которая соответствовала бы данной изобаре, если бы над ней располагался слой совершенно однородной воды с соленостью $35^0/_{00}$ и температурой 0°. Разность между действительной динамической глубиной и такой «нормальной» носит название «аномалии» и определяется по специальным таблицам. У нас в СССР вместо «аномалий удельного объема» по предложению Н. Н. Зубова [4] пользуются аналогичной величиной, получившей название условного удельного объема $(\alpha - 0{,}9) \cdot 10^3$. Так как сверх того Зубовым было дано еще и популярное изложение динамического метода, то в литературе иногда можно встретить не вполне точный термин «динамический метод Зубова». Как показал В. Б. Штокман [5], популярный вывод формулы (39), применяемый Зубовым, может в некоторых конкретных случаях повлечь за собой совершенно ошибочные заключения о характере течений. Но сам вычислительный прием, предложенный им для работы с формулой (39), очень удобен для практики.

Зубов вводит понятие об *условной* динамической глубине, совершенно естественно связанной с условными удельными объемами. В самом деле, подставим в формулу (15) вместо удельного объема α его выражение через условный удельный объем v [см. формулу (15)]. Тогда окажется, что

$$D = \int_0^p \alpha dp = \int_0^p v \cdot 10^{-3} dp + \int_0^p 0{,}9\, dp = 10^{-3} \int_0^p v dp + 0{,}9\, p. \tag{41}$$

Второй член правой части этой фомулы является величиной, постоянной для данной изобары, а потому никакого интереса при дальнейших операциях не

представляет. Поэтому Зубов предлагает пользоваться при динамической обработке только первым членом правой части — *условной* динамической глубиной данной изобары

$$10^{-3}\int_0^p v\,dp.$$

Практически при вычислении условных динамических глубин приходится находить *средние* значения условных удельных объемов между двумя изобарами, умножать их на расстояния между этими изобарами и затем суммировать получаемые произведения. Что касается самих промежутков между изобарами, то их выбирают тем большими, чем однородней вода, заключенная в соответствующем слое.

Следует отметить, что величины условных удельных объемов берутся на глубинах соответственно местным условиям, принимая поправку на сжимаемость воды. Для вычисления пользуются таблицами.

До сих пор мы говорили о различии динамических глубин в точках какой-либо одной изобары. Но совершенно очевидно, что в действительности изобарическая поверхность, на которой скорость течения равна нулю, должна быть горизонтальной плоскостью. Поэтому «динамические глубины» всевозможных ее точек мы должны рассматривать как *высоты* соответствующих точек физической поверхности моря над этой горизонтальной плоскостью. Вот почему при динамической обработке очень удобно располагать вычисления по схеме, которая будет совершенно ясна из рассмотрения следующего примера [4].

Исследуются две гидрологические станции (табл. 1 и 2). В таблицах обозначено: p — изобары (в *дбар*); $t°$ — температура воды; S — соленость; v_t — условный удельный объем, вычисленный по соответствующей температуре и солености; $v_{pt}\,S$ — тот же условный удельный объем, но исправленный за давление; Ср. $v_{pt}\,S$ — средние значения исправленного условного удельного объема в слое между двумя изобарами; $\frac{v_{pt}\,S\Delta_p}{100}$ — результаты умножения этой средней величины на промежуток между изобарами и деления на 100; последняя операция производится для того, чтобы получить условные динамические глубины, выраженные в динамических миллиметрах. В восьмом столбце выписаны условные динамические глубины, полученные *суммированием* цифр седьмого столбца от *поверхности моря до данной изобары*.

Результаты вычислений условных динамических глубин сведены в табл. 3 (во втором и третьем столбцах). Как только что было упомянуто, вместо динамических глубин нижней изобары, на которой по предположению течений нет, можно рассматривать динамические высоты соответствующих точек физической поверхности моря над этой горизонтальной *плоской* изобарой.

Таблица 1

Станция М

p	$t°$	S	v_t	$v_{pt}\,S$	Ср. $v_{pt}\,S$	$\frac{v_{pt}S\Delta_p}{100}$	d
0	8,6	34,33	400	400	397	40	0
10	8,7	36	400	395	371	55	40
25	7,2	63	359	343	—	—	95
50	5,4	72	331	308	328	82	177
100	5,2	72	329	285	296	148	325
200	4,0	94	299	211	248	248	573
300	3,6	90	298	166	188	188	761
338	—	—	—	—	—	—	—

Таблица 2

Станция N

p	$t°$	S	v_t	$v_{pt}\ S$	Ср. $v_{pt}\ S$	$\frac{v_{pt}S\Delta p}{100}$	d
0	8,6	34,49	390	390	387	39	0
10	8,3	45	390	385	362	54	39
25	6,8	67	350	339	310	77	93
50	4,2	90	304	281	268	134	170
100	4,0	92	300	256	232	232	304
200	3,9	96	296	208	186	186	536
300	4,0	98	296	165	—	—	722
386	—	—	—	—	—	—	—

«300». Но ведь с таким же успехом мы можем говорить о высотах точек, лежащих на других изобарах, относительно изобары «300». Если воспользоваться разностями динамических глубин станций (M и N), сведенными в четвертом столбце, то нетрудно по ним определить разности динамических высот над изобарой «300» *для точек*, соответствующих различным изобарам на этих станциях. Эти числа приведены в пятом столбце табл. 3. Остается только подставить их в формулу (39) вместо разности $D_M - D_N$; тогда в левой части ее вместо разности $u_0 - u_1$ окажется разность $u_p - u_1$, где u_p—скорость течения на изобаре p. А так как по основному предположению скорость u_1 равна нулю, то формула (39) даст, очевидно, непосредственно скорость течения на соответствующей изобаре. В последнем, шестом, столбце табл. 3 приведены скорости, вычисленные таким образом для разных точек вертикали.

Таблица 3

p	d_1	d_2	$d_1 - d_2$	$h_1 - h_2$	u
0	0	0	0	39	5,1
10	40	39	1	38	5,1
25	95	93	2	37	5,0
50	177	170	7	32	4,3
100	325	304	21	18	2,4
200	573	536	37	2	0,3
300	761	722	39	0	0

В рассмотренном примере скорости течения находились путем сопоставления различных гидрологических элементов на двух определенных станциях. Как известно, по измерениям, производимым на отдельных станциях, всегда вычерчивают кривые, представляющие распределение температур и соленостей в гидросфере на данном гидрологическом разрезе. Однако наряду с изотермами и изогалинами можно, очевидно, построить систему *изостер*, а по ней составить представление о динамических высотах какого угодно числа точек любой изобары над плоской изобарой (на которой течение отсутствует).

Такой динамический *профиль* может быть построен для целого ряда разрезов, выбранных по возможности нормально к предполагаемому направлению течения. По системе же отдельных динамических профилей легко составить представление о динамическом *рельефе* на любой изобарической поверхности. Изобразить его можно тем же способом, которым пользуются в топографии: нанося на карту динамические *горизонтали*.

В общих чертах об этом было уже упомянуто на стр. 12. Теперь же на основании формулы (39) оказывается возможным получить величину скорости течения по такой динамической карте.

Действительно, каждым двум соседним горизонталям, нанесенным на карте, должно соответствовать некоторое определенное значение разности $D_M - D_N$, или разности динамических высот. Следовательно, скорость течения, определяемая по формуле (39), всегда обратно пропорциональна расстоянию L между горизонталями, которое в данном случае заменяет расстояние между двумя гидрологическими станциями. Измерив по карте это расстояние (по кратчайшему направлению между горизонталями), легко получить скорость по формуле (39).

Чем чаще расположены на карте динамические горизонтали, тем больше, очевидно, будет скорость течения.

Что касается *направления* скоростей, то они должны совпадать с касательными к горизонталям в любой их точке, если только на частицы воды не действуют никакие иные силы, кроме силы тяжести и силы Кориолиса. В дальнейшем будет показано, в каких случаях подобное допущение законно и в каких оно не соответствует действительности.

Динамический метод обработки гидрологических элементов получил в настоящее время широкое распространение.

§ 8. Возникновение и распространение морских течений при участии сил трения. Теория В. Экмана

В предыдущем параграфе изложены методы определения скорости *установившегося* течения, применяемые в современной океанографии и основанные на теории циркуляции. Как было уже упомянуто, точная трактовка вопроса сопряжена с весьма большими трудностями ввиду неопределенности члена R, входящего в формулу (34) (см. § 6). Вот почему все вычисления предыдущего параграфа исходят из упрощенного допущения, что трение отсутствует, а потому $R = 0$. Однако подобное допущение не всегда законно. Оно привело бы к неверным результатам, если бы мы стали исследовать процесс *развития* течения хотя бы под воздействием ветра («дрейфового» течения). Даже в случае установившегося течения оно дало бы превратное представление о распределении скоростей по вертикали, если бы мы захотели проследить за изменением вектора скорости по глубине в поверхностном слое дрейфового течения, поддерживаемого исключительно ветром.

Такое же неправильное суждение составилось бы и по отношению к придонному течению в море ограниченной глубины независимо от того, вызывается ли это течение неоднородностями водной среды (различием плотностей) или разностью уровней поверхности моря, появившейся хотя бы под влиянием нагона или сгона вод у береговой черты.

Нечего и говорить о том, что различные *нестационарные* задачи заставляют считаться с наличием внутреннего трения в водных массах. Словом, *внутреннее трение* в море играет решающую роль в большинстве современных задач физики моря, так или иначе связанных с течениями.

В настоящее время четко наметились *два* рода таких задач, идейно связанных между собой, поскольку они преследуют общую цель (исследование потоков в море), но формально решаемых различными путями.

В первой, более старой группе задач рассматривается лишь трение между *горизонтальными слоями* вод и совершенно пренебрегается трением между массами, которые отделены одна от другой вертикальными границами. Основание для такой схематизации явлений понятно: вообще говоря, вертикальная протяженность исследуемых пространств, пронизанных морскими течениями, весьма мала по сравнению с горизонтальной протяженностью. Следовательно, градиенты скоростей по вертикали значительно превышают градиенты

скоростей по горизонтальным направлениям. Как известно, сила трения выражается произведением соответствующего градиента скоростей на коэффициент трения (молекулярного или турбулентного — в зависимости от значения рейнольдсова числа); значит, при одинаковом порядке коэффициентов трения между горизонтальными или между вертикальными слоями силы трения первого рода должны преобладать над силами трения второго рода.

Подобные условия (условия преобладания сил трения первого рода) действительно соблюдаются в ряде случаев: там, где сильно выражен турбулентный обмен между горизонтальными слоями на всех глубинах, там, где потоки проходят в мелководных областях моря, обеспечивая перемешивание водных масс до самого дна, и т. п. Однако в очень большом числе случаев эти условия не соблюдаются, заставляя тем самым сомневаться в справедливости первой схемы. Не соблюдаются эти условия в *сильно неоднородном* (по плотности) море с большими глубинами; в переслоенной водной среде, с большим градиентом плотностей по вертикали, слабо развивается турбулентный обмен между горизонтальными слоями, а потому коэффициент трения между ними оказывается весьма малым.

Здесь вступают на сцену задачи второго рода, сравнительно недавно привлекшие к себе внимание исследователей. При решении их учитывают силы трения на *вертикальных* границах между водными массами, исходя из экспериментально определенных величин соответствующего коэффициента трения μ_L, которые в 10^6 и даже в 10^7 раз превышают значения коэффициентов трения μ между горизонтальными слоями вод. Считаясь с таким большим различием в порядках коэффициентов μ_L и μ, пренебрегают трением потоков о дно океана, ибо без подобного упрощения не удалось бы решить задачи второго рода современными математическими методами.

Как увидим ниже, задачи второго рода вообще решаются еще в сильно схематизированном виде: не удается получать распределение скоростей потока по вертикали, а приходится говорить лишь о *полных результирующих потоках в океане*. Поэтому для суждения о вертикальном строении потока мы пока вынуждены использовать схему задач первого рода даже там, где она применима с заведомой натяжкой.

По той же причине в настоящее время мы вынуждены рассматривать преобладающее число конкретных примеров, приводимых ниже, исходя именно из первой схемы, за неимением возможностей трактовать их сейчас на основе второй схемы. По всей вероятности, недалекое будущее принесет новые методы, которые позволят распространить применение второй схемы столь же широко, как к настоящему времени распространилась в мореведении первая схема.

Начнем изложение со случая *чисто дрейфового* течения, вызванного ветром постоянной силы и постоянного направления. Допустим, что плотность воды всюду постоянна и что вода несжимаема. Единственной силой, вызывающей движение водных масс, здесь оказывается сама сила трения, а потому ее удастся исключить из получаемых соотношений посредством приема, предложенного шведским геофизиком В. Экманом: она войдет в выражение величины, которая измеряется непосредственно в море [6].

В § 4 было упомянуто, что благодаря наличию сил внутреннего трения в уравнениях движения (20) появляются новые члены типа (33). При учете их уравнения движения приобретают форму

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} &= X - \alpha\frac{\partial p}{\partial x} + \alpha\mu\nabla^2 u,\\
\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} &= Y - \alpha\frac{\partial p}{\partial y} + \alpha\mu\nabla^2 v,\\
\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z} &= Z - \alpha\frac{\partial p}{\partial z} + \alpha\mu\nabla^2 w.
\end{aligned} \tag{42}$$

По-прежнему к ним следует прибавить уравнение неразрывности (18), которое в случае $\delta = \text{const}$ запишется в форме

$$\operatorname{div} \mathbf{U} = 0, \tag{18a}$$

и граничные условия.

Координатная система расположена так, что начало координат лежит на поверхности моря, а плоскость XOY горизонтальна. Ось OX смещена против часовой стрелки относительно оси OY. Положим, что ось OY ориентирована в направлении *ветра*. Море будем пока считать простирающимся неограниченно во все стороны; что же касается его глубины, то о ней речь будет ниже.

Так как нет никаких оснований ожидать вертикальных составляющих скоростей в рассматриваемых условиях, то, очевидно, $w = 0$, а потому третья формула в (42) превращается в уравнение гидростатики и отпадают члены двух других формул, содержащие w. Затем большое упрощение вносит условие равномерности поля ветра. Именно при этом условии

$$\frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial u}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial y}$$

должны равняться нулю. Нетрудно видеть также, что в данных условиях должны равняться нулю и частные производные $\partial p/\partial x$ и $\partial p/\partial y$.

Предполагая, что единственной внешней, вертикально направленной силой является сила тяжести, а горизонтальные слагающие X и Y дает только сила Кориолиса, найдем

$$X = 2v\omega \sin \varphi, \quad Y = -2u\omega \sin \varphi.$$

Операторы $\nabla^2 u$ и $\nabla^2 v$ в исследуемом случае содержат только по одному члену, а потому два уцелевших уравнения из системы (42) принимают чрезвычайно простую форму

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= 2v\omega \sin \varphi + \alpha\mu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= -2u\omega \sin \varphi + \alpha\mu \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}. \end{aligned} \tag{43}$$

Рассмотрим сначала случай *установившегося движения*. В этом простейшем случае в уравнениях (43) обращается в нуль левая часть, ибо u и v не меняются во времени. Приняв это во внимание и введя сокращенное обозначение

$$\sqrt{\frac{\omega \sin \varphi}{\alpha\mu}} = a,$$

нетрудно из (43) получить уравнения движения воды

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u}{dz^2} + 2a^2 v &= 0, \\ \frac{d^2 v}{\alpha z^2} - 2a^2 u &= 0. \end{aligned} \tag{44}$$

Общий интеграл этих уравнений имеет вид

$$\begin{aligned} u &= C_1 e^{az} \cos(az + \psi_1) + C_2 e^{-az} \cos(az + \psi_2), \\ v &= C_1 e^{az} \sin(az + \psi_1) - C_2 e^{-az} \sin(az + \psi_2), \end{aligned} \tag{45}$$

где C_1, C_2, ψ_1 и ψ_2 — константы интегрирования, определяемые на основании граничных условий.

Проще всего задача разрешается в случае *бесконечной* глубины, но в дальнейшем будет видно, что практически те же условия удовлетворяются при глубинах конечных и даже не слишком больших. Итак, пусть глубина моря *бесконечно* велика. Тогда, очевидно, при условии конечных скоростей течения необходимо, чтобы члены уравнений (45), содержащие e^{az}, отсутствовали, т. е. чтобы C_1 равнялось *нулю*. Что касается C_2 и ψ_2, то их можно определить, продифференцировав по z уравнения (45), принявшие вид

$$\begin{aligned} u &= C_2 e^{-az}\cos(az+\psi_2),\\ v &= -C_2 e^{-az}\sin(az+\psi_2), \end{aligned} \tag{45'}$$

и вспоминая, что производные

$$\begin{aligned} \frac{du}{dz} &= -a\sqrt{2}\,C_2 e^{-az}\sin(az+\psi_2+45^\circ),\\ \frac{dv}{dz} &= -a\sqrt{2}\,C_2 e^{-az}\cos(az+\psi_2+45^\circ) \end{aligned} \tag{46}$$

всегда оказываются связанными с силами, действующими на поверхность воды, как это вытекает из уравнения (4) § 1.

Действительно, градиент скорости по вертикали, коэффициент турбулентной вязкости μ и сила трения T между воздухом, проносящимся над поверхностью моря, и водой, неразрывно между собой связаны.

Так как по условию скорость ветра направлена по оси Y, то с этой осью должна совпадать сила T, вызывающая дрейфовое течение, а стало быть,

$$\mu\left(\frac{du}{dz}\right)_{z=0}=0,\quad -\mu\left(\frac{dv}{dz}\right)_{z=0}=T,$$

откуда после подстановки производных из (46) оказывается, что

$$\psi_2=-45^\circ,\quad C_2=\frac{T}{\mu a\sqrt{2}}.$$

С другой стороны, из (45′) вытекает, что при $z=0$, т. е. на поверхности моря,

$$u^2+v^2=C_2^2.$$

Следовательно, константа C_2 представляет собой не что иное, как абсолютную величину скорости поверхностного течения, которую мы обозначим буквой U_0.

Подставляя все полученные выражения в (45*a*), найдем

$$\begin{aligned} u &= U_0 e^{-az}\cos(45^\circ-az),\\ v &= U_0 e^{-az}\sin(45^\circ-az), \end{aligned}$$

где

$$U_0=\frac{T}{\mu a\sqrt{2}}=\frac{T}{\sqrt{2\mu\delta\omega\sin\varphi}}. \tag{47}$$

Напомним, что через δ обозначена плотность, равная обратной величине удельного объема α.

Итак, оказывается, что *абсолютная величина* скорости дрейфового течения на поверхности моря U_0 пропорциональна тангенциальной силе трения, возникающей при движении воздуха над поверхностью воды. *Направление* же этой скорости поверхностного течения *составляет угол* 45° с направ-

лением ветра, причем течение отклоняется вправо от ветра в северном полушарии. Можно показать, что в южном полушарии отклонение происходит в левую сторону от направления ветра.

Чрезвычайно любопытно ведет себя вектор скорости течения при погружении в глубину — при увеличении z: по абсолютной величине он непрерывно уменьшается по экспоненциальному закону, а направление его все больше и больше поворачивается вправо.

Наконец, на некоторой глубине вектор скорости оказывается направленным в сторону, *противоположную* скорости поверхностного течения. Из формулы (47) вытекает, что это должно случиться при $z = \frac{\pi}{a}$.

Обозначая эту глубину через D и вспоминая выражение величины a, входящей в уравнение (44), получим

$$D = \frac{\pi}{a} = \pi \sqrt{\frac{\alpha\mu}{\omega \sin \varphi}}. \tag{48}$$

Отсюда видно, что глубина D зависит от *трения* — от коэффициента турбулентной вязкости μ. Поэтому D называется *глубиной трения* (или глубиной «действия трения»).

При $z = 2D$ вектор скорости совпадает по направлению с вектором поверхностной скорости U_0, ибо в этом случае $az = 2\pi$. Но очевидно также, что ниже глубины трения скорости течения, вообще говоря, ничтожно малы. Так, при $z = D$ $U_D = \frac{1}{23} U_0$; при $z = 2D$ $U_{2D} = \frac{U_0}{535}$.

На рис. 7 изображена полярная диаграмма скоростей, причем стрелками обозначены скорости на глубинах, меняющихся через определенный промежуток, равный $^1/_{10}$ от глубины трения D. Наибольший вектор, отклоненный на 45° от направления ветра (от оси OY), как было указано, представляет собой скорость поверхностного течения.

Годографом векторов служит логарифмическая спираль, быстро приближающаяся к полюсу.

Из рисунка видно, что вектор, представляющий скорость на глубине $5D/10$, т. е. на половине глубины трения, перпендикулярен к вектору U_0. Векторы, лежащие выше него, дают некоторую слагающую в направлении поверхностного течения U_0. Векторы же, лежащие между ним и глубиной $1{,}5\,D$, дают слагающие, направленные в противоположную сторону. Следовательно, можно констатировать, что в слое толщиной $D/2$ возникает течение, направленное согласно с U_0: это — течение поверхностного слоя. Под ним непосредственно лежит слой глубинного течения, направленного в общей сложности в противоположную сторону (слагающие, нормальные к основным направлениям, рассмотрим после).

Интересно вычислить полные *потоки* воды во всей толще, охваченной дрейфовым течением. Пусть поток в направлении оси OX (перпендикулярно к ветру) будет Φ_x, а в направлении оси OY (по направлению ветра) Φ_y. Тогда, интегрируя выражения udz и vdz по всей толще воды (относя поток к единице длины, т. е. предполагая, что он пронизывает полосу шириной в 1 *м* и глубиной от поверхности моря до дна), найдем

$$\Phi_x = \int_0^\infty u\,dz = \frac{U_0 D}{\pi \sqrt{2}} = \frac{T}{2\delta\omega \sin \varphi},$$

$$\Phi_y = \int_0^\infty v\,dz = 0. \tag{49}$$

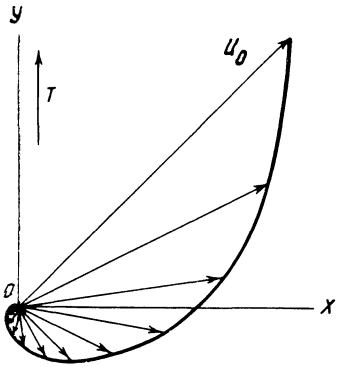


Рис. 7. Векторы в плане

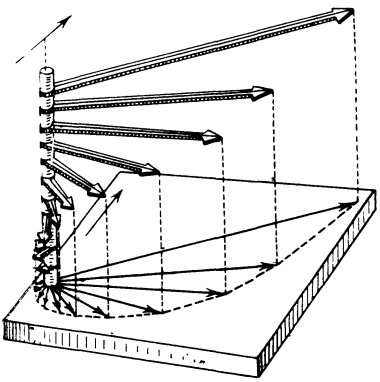


Рис. 8. Векторы в перспективе

На первый взгляд может показаться странным, что результирующий поток оказывается направленным перпендикулярно к силе T, действующей на поверхность воды ($\Phi_y = 0$). Но в сущности этого следовало бы ожидать. Действительно, если глубина моря достаточно велика и можно распространять интегрирование до бесконечности, то на всю массу воды не могут действовать никакие силы, кроме тангенциальной движущей силы T, совпадающей по направлению с ветром, и силы Кориолиса, перпендикулярной к скорости потока и направленной вправо от нее. Следовательно, при установившемся движении сила, вызывающая движение, должна быть уравновешена силой Кориолиса, приложенной к *центру инерции* течения. Иными словами, кориолисова сила, приложенная в этой точке, должна быть равна по величине и направлена в сторону, противоположную T, а для этого необходимо, очевидно, чтобы центр инерции течения двигался *вправо* от ветра, под прямым углом к нему.

На рис. 8 для наглядности изображено расположение векторов скоростей в перспективе. На плоскости «подставки» модели нанесен годограф рис. 7.

В § 1 упоминалось, что коэффициент турбулентной вязкости μ, к сожалению, остается величиной, чрезвычайно изменчивой. О какой-нибудь его универсальности, о каком-нибудь постоянстве говорить не приходится. Вот почему чрезвычайно ценным является то обстоятельство, что коэффициент трения может быть выражен через совершенно реальную величину, правда не всегда легко находимую в море, именно через глубину трения D. Выражение его вытекает из (48)

$$\mu = \frac{D^2\omega \sin\varphi}{\alpha\pi^2}. \tag{50}$$

Обратимся теперь к случаю *конечной глубины*. Положим, что она равна H. Здесь константы интегрирования C_1, C_2, ψ_1 и ψ_2 обязаны быть такими, чтобы при $z = H$ обе составляющие скорости u и v обращались в нуль [см. уравнение (45)]. Для определения этих констант удобнее будет сделать некоторую замену переменных — положить $H - z = \zeta$. Новая переменная ζ выражает собой, очевидно, высоту исследуемой точки над дном моря. Из условий на дне вытекает, что константы C_1 и C_2 равны между собой. Обозначим каждую из них через $^1/_2\, C$. Кроме этого, можно показать, что константы ψ_1 и ψ_2 отличаются одна от другой только знаками, а потому их естественнее всего заменить через $+\psi = \psi_1$ и $-\psi = \psi_2$. Словом, уравнения (45) придется переписать в форме

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{2} C\,[e^{a\zeta}\cos(a\zeta + \psi) - e^{-a\zeta}\cos(a\zeta - \psi)], \\ v &= \frac{2}{2} C\,[e^{a\zeta}\sin(a\zeta + \psi) + e^{-a\zeta}\sin(a\zeta - \psi)]. \end{aligned} \tag{51}$$

Но от этой формы легко перейти к более компактной, пользуясь известными соотношениями между экспоненциальными и гиперболическими функциями

$$\frac{e^x + e^{-x}}{2} = \operatorname{ch} x, \quad \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \operatorname{sh} x.$$

Приняв во внимание эти соотношения, нетрудно привести уравнения (51) к виду

$$\begin{aligned} u &= A \operatorname{sh} a\zeta \cos a\zeta - B \operatorname{ch} a\zeta \sin a\zeta, \\ v &= A \operatorname{ch} a\zeta \sin a\zeta + B \operatorname{sh} a\zeta \cos a\zeta. \end{aligned} \tag{52}$$

Константы A и B выражаются через элементы, о которых уже была речь ранее. Именно

$$\begin{aligned} A &= \frac{TD}{\pi\mu} \frac{\operatorname{ch} aH \cdot \cos aH + \operatorname{sh} aH \cdot \sin aH}{\operatorname{ch} 2aH + \cos 2aH}, \\ B &= \frac{TD}{\pi\mu} \frac{\operatorname{ch} aH \cdot \cos aH - \operatorname{sh} aH \cdot \sin aH}{\operatorname{ch} 2aH + \cos 2aH}. \end{aligned} \tag{53}$$

Исследование полученных уравнений показывает прежде всего, что в случае конечной глубины скорость поверхностного течения U_0 может составлять с направлением ветра весьма различные углы в зависимости от того, какова глубина моря *по сравнению с глубиной трения*. Действительно, тангенс угла между U_0 и скоростью ветра (осью OY) легко найти, разделив u_0 на v_0. Выполнив простые преобразования, получим

$$\operatorname{tg}(U_0, Y) = \left(\frac{u}{v}\right)_{\zeta=H} = \frac{\operatorname{sh} 2aH - \sin 2aH}{\operatorname{sh} 2aH + \sin 2aH}. \tag{54}$$

Аргументом в этом выражении служит величина $2aH$, которая зависит исключительно от отношения H/D. Действительно, при выводе уравнений (44) для сокращения было обозначено

$$a = \sqrt{\frac{\omega \sin \varphi}{\alpha\mu}}.$$

Вспомнив это, нетрудно прийти к заключению, что угол (U_0, Y) зависит только от величины H/D:

$$D = \frac{\pi}{a} = \pi \sqrt{\frac{\alpha\mu}{\omega \sin \varphi}},$$

следовательно, $2aH = 2\pi \frac{H}{D}$. При увеличении H/D угол сначала возрастает, доходит до некоторой максимальной величины около 45°,5, а затем медленно уменьшается, стремясь к предельной величине 45°. Это видно из следующего ряда цифр:

$H = 0{,}25\,D$	$0{,}5\,D$	$0{,}75\,D$	$1\,D > D$	
$< (U_0, Y) = 21°{,}5$	45°	45°,5	45°	45°

Дальнейшее увеличение глубины не отражается на исследуемом угле.

Расположение векторов скоростей на других горизонтах при различных величинах H изображено на рис. 9. Горизонты взяты через промежутки, равные $^1/_{10}$ глубины моря ($H/10$). Точки на годографах по-прежнему обозначают концы стрелок, изображающих скорости течения на соответствующих горизонтах (чтобы не затемнять чертеж, стрелки на нем не нанесены).

Из рис. 9 отчетливо видно, что расположение векторов скоростей течения, найденное по формулам (52), для случая *конечной глубины*, становится

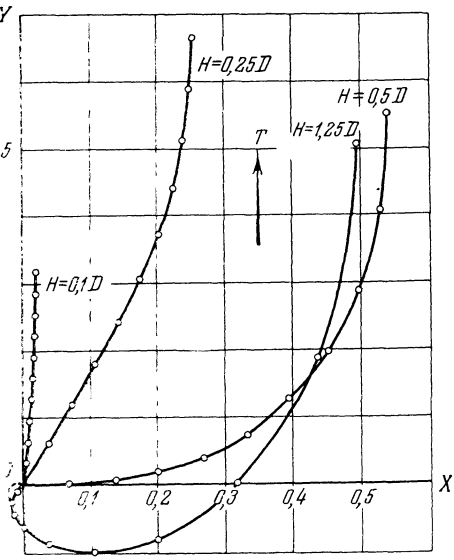


Рис. 9. Диаграмма для разных значений глубины моря

совершенно подобным расположению тех же векторов на рис. 8, когда глубина моря H *превышает глубину трения* D, т. е. практически при таких глубинах моря его можно полагать бесконечно глубоким. Так, при $H = 1{,}25\ D$ (рис. 9) годограф векторов только совсем ничтожно отличается от годографа рис. 8 и притом в области, где скорости течения очень малы. Для сравнения на рис. 9 нанесена пунктиром кривая, соответствующая бесконечно большой глубине моря. Она мало отличается от кривой, построенной на том же рисунке для глубины $H = 1{,}25\ D$. Это обстоятельство чрезвычайно важно для исследования дрейфовых течений.

В дальнейшем будет видно, что глубина трения в средних широтах и при средних скоростях ветра бывает невелика (примерно порядка 100 *м*). Следовательно, уравнения (52) можно применять в простой форме (47) во всяком море со сколько-нибудь значительной глубиной. Исключение составляет область мирового океана, лежащая по соседству с экватором, где $\sin\varphi$ стремится к нулю, а глубина трения — к бесконечности. Разумеется, пока здесь речь идет об открытом море; что касается прибрежной зоны, то о ней придется много говорить в дальнейшем.

Уравнения (52) позволяют вычислить полные потоки воды по направлению координатных осей X и Y, пользуясь тем же приемом, что при выводе соотношений (49), но только интегрируя до конечной глубины (или, точнее, от высоты над дном $\zeta = 0$ до высоты над дном $\zeta = H$):

$$\Phi_x = \int_0^H u\,d\zeta = \frac{TD^2}{2\mu\,\pi^2}\,\frac{\operatorname{ch} 2aH + \cos 2aH - 2\operatorname{ch} aH\cdot\cos aH}{\operatorname{ch} 2aH + \cos 2aH}\,,$$

$$\Phi_y = \int_0^H v\,d\zeta = \frac{TD^2}{\mu\pi^2}\,\frac{\operatorname{sh} aH\cdot\sin aH}{\operatorname{ch} 2aH + \cos 2aH}\,. \qquad (55)$$

Курьезно, что полный поток дает составляющую по Y, которая в некоторых случаях оказывается направленной против ветра. Правда, эта составляющая чрезвычайно мала; заметнее всего она сказывается в том случае, когда глубина моря равна $5\ D/4$. Но даже и в этом случае полный результирующий поток отклоняется в сторону, противоположную ветру, только на 1°,5 от перпендикулярного направления, которое он занимал бы при бесконечно большой глубине моря.

Следует отметить, что построения, изображенные на рис. 7 и 9, не зависят от точности, с которой удалось до настоящего времени изучить коэффициент виртуальной вязкости μ; величина этого коэффициента элиминирована очень простым приемом: все построения приурочены к такой скорости ветра, при которой тангенциальная движущая сила T оказывается равной $\mu\pi/D$. Следовательно, при уточнении в определениях μ останется только отнести чертежи к другой скорости ветра.

С появлением теории Экмана некоторые мореведы, поверхностно ознакомившиеся с ней, утверждали, что на основании экмановских соотношений угол отклонения между ветром и поверхностным течением якобы совершает противоестественный скачок: при переходе через экватор правое отклонение на 45° якобы мгновенно переходит в левое отклонение на 45°.

Подобное нелепое заключение выводилось из уравнений (47), которые пытались применять к океану на экваторе лишь потому, что глубина океана там «очень велика». В действительности совершенно очевидно, что как бы ни было велико абсолютное значение глубины океана в близэкваториальной полосе, вместо уравнений (47) там должны применяться уравнения (52), выведенные применительно к морю *конечной* глубины. Ведь при оценке глубин критерием должна служить не сама абсолютная величина H, а ее *отношение* к глубине трения H/D. Но, с другой стороны, глубина трения обратно пропорциональна корню квадратному из синуса широты. Следовательно, критерий H/D прямо пропорционален корню квадратному из синуса широты (при всех прочих равных условиях). Из данных, приведенных выше (см. стр. 33), видно, как меняется угол ψ при изменениях критерия H/D от 0,25 до бесконечности.

Для большей наглядности на рис. 10 изображена кривая, показывающая, как меняется угол отклонения ψ при приближении к экватору с севера и с юга. Чтобы сделать чертеж применимым ко всем частным значениям коэффициента μ, по оси ординат отложены не градусы широты, а значения квадрата интересующего нас критерия, т. е., другими словами, значения

$$\frac{H^2\omega\delta}{\pi^2\mu}\sin\varphi.$$

По оси абсцисс нанесены соответствующие значения угла отклонения ψ. Отклонение вправо принято положительным, влево — отрицательным. Как видим, при переходе через экватор угол отклонения меняется не скачком, а постепенно, проходя через значение нуль.

Те же поверхностные толкователи нередко утверждают, что на основе теории скорость дрейфового течения якобы должна обращаться в бесконечность на экваторе. Подобное утверждение снова основано на незаконном применении уравнений (47) там, где критерий глубины H/D обращается в нуль.

В действительности на экваторе скорость установившегося дрейфового течения в самом поверхностном слое должна определяться на основании чрезвычайно простого и естественного условия: *сила трения между воздухом и водой уравновешивается силами, действующими в поверхностном слое воды.* В первом приближении здесь ограничивались обычно учетом силы, выражаемой через коэффициент турбулентного внутреннего трения μ и градиент соответствующей скорости течения по вертикали $\left(\mu\left(\frac{du}{dz}\right)_{z=0}\right)$. Однако, как показал В. Б. Штокман [7], необходимо учитывать еще количество движения, отнимаемое у поверхностного слоя за счет *вертикального потока масс*, обусловленного турбулентностью.

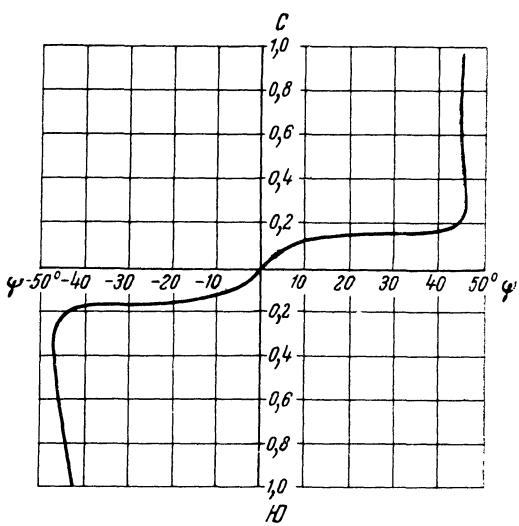


Рис. 10. Отклонение течений у экватора

До сих пор рассматривалось только установившееся дрейфовое течение. Но можно также проследить и за *постепенным развитием* такого течения под действием возникшего и продолжающего работать ветра.

Пусть над морем, находившимся в состоянии полного покоя, подул ветер с некоторой определенной и постоянной скоростью. Примем этот момент за начало отсчета времени и вспомним, что в данном случае левая часть уравнений (43) больше не обращается в нуль, так как составляющие скорости u и v непрерывно возрастают, начиная с нуля.

По истечении некоторого промежутка времени t_1, u и v приобретут значения

$$u = \frac{T}{\sqrt{\delta\mu\pi}} \int_0^{t_1} \sin 2\bar{\omega}t \, \frac{e^{-\frac{\delta z^2}{4\mu t}}}{\sqrt{t}} \, dt,$$

$$v = \frac{T}{\sqrt{\delta\mu\pi}} \int_0^{t_1} \cos 2\bar{\omega}t \, \frac{e^{-\frac{\delta z^2}{4\mu t}}}{\sqrt{t}} \, dt. \tag{56}$$

Здесь для сокращения записи в несколько громоздких формулах принято обозначение

$$\omega \sin\varphi = \bar{\omega}, \tag{57}$$

которое будет встречаться и в дальнейшем.

Более убедительный вид соотношения (56) принимают в том случае, если ввести в них величину D — глубину трения и выразить истекшее время не в обычных единицах (звездных), а в некоторых иных, так называемых *маятниковых* [6].

Эта новая единица соответствует промежутку времени, в течение которого плоскость качания *маятника Фуко* описывает в своем движении дугу, равную половине окружности. В литературе принято называть эту единицу «12 маятниковых часов». На полюсах она в точности равна 12 звездным часам, а на некоторой широте φ становится равной 12 звездным часам, деленным на $\sin\varphi$.

Пусть теперь промежуток времени, в течение которого работал ветер, выражается в этих новых единицах и равняется τ_1. Тогда, как можно показать, между величиной τ и величиной t, измеренной в обычных единицах времени, должно существовать соотношение

$$\tau = \frac{\bar{\omega}}{\pi} t^*.$$

Пользуясь им и вспоминая выражение глубины трения (48), представим формулы (56) в ином виде

$$u = \frac{\pi T}{\delta D\bar{\omega}} \int_0^{\tau_1} \frac{\sin 2\tau\tau}{\sqrt{\tau}} e^{-\frac{\pi z^2}{4D^2\tau}} \, d\tau,$$

$$v = \frac{\pi T}{\delta D\bar{\omega}} \int_0^{\tau_1} \frac{\cos 2\pi\tau}{\sqrt{\tau}} e^{-\frac{\pi z^2}{4D^2\tau}} \, d\tau. \tag{58}$$

* Если бы за новую единицу времени был принят не промежуток, равный 12 маятниковым часам, а просто один маятниковый час, то переходное соотношение пришлось бы, очевидно, переписать так: $\tau = 12 \frac{\bar{\omega}}{\pi} t$. На полюсах, где $\bar{\omega} = \pi/12$, получилось бы $\tau = t$, что и следовало ожидать.

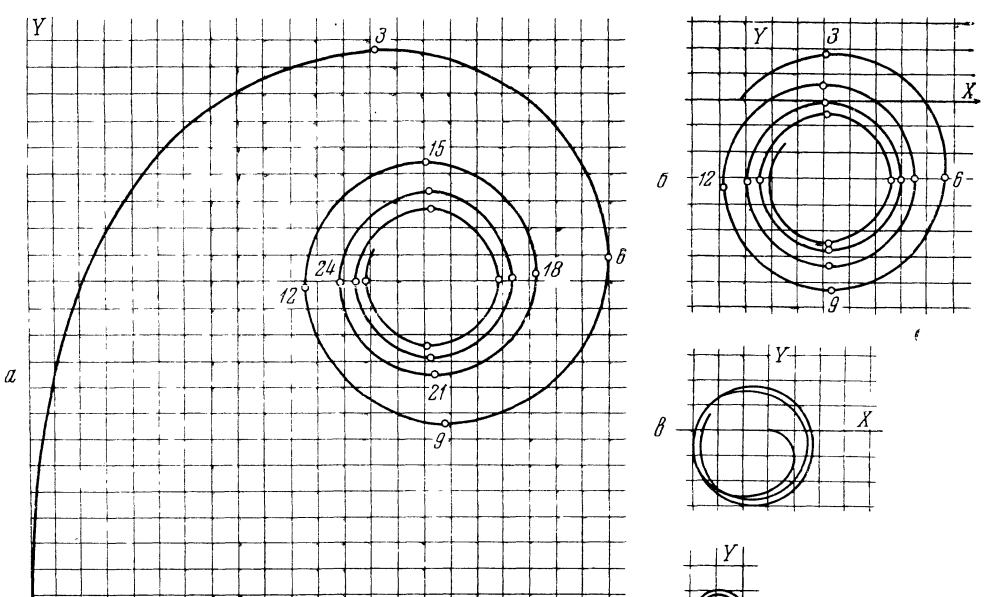


Рис. 11. Развитие течений во времени

В эти два уравнения, выражающие составляющие скорости, входит в качестве параметра величина z/D. Следовательно, на различных горизонтах течение будет развиваться по особому закону, причем чем глубже под поверхностью моря лежит исследуемый слой, тем медленнее там будет устанавливаться движение, несмотря на то, что абсолютные величины скоростей непрерывно уменьшаются с глубиной.

На рис. 11 изображены очень интересные годографы векторов скоростей, вычисленные по формулам (58) для различных горизонтов. Рис. 11, *а* соответствует поверхности моря ($z = 0$), 11, *б* — глубине $z = 0{,}5\ D$, 11, *в* — глубине $z = D$ и, наконец, 11, *г* — глубине $z = 2D$. Масштаб всех четырех частей рисунка одинаков. Цифры у точек показывают, через сколько маятниковых часов после начала работы ветра вектор скорости оказывается в этой точке. Как видим, конец вектора описывает замысловатую кривую и очень долго не может успокоиться в точке, лежащей внутри завитков спирали и соответствующей установившемуся течению. На глубинах $z = D$ и $z = 2D$ «блуждание» вектора протекает особенно долго, причем сперва конец его постепенно удаляется от стационарного положения и только после начинает к нему приближаться (на рис. 11, *г* такое приближение даже еще и не замечается; оно проявляется впоследствии).

Замечательно, что конец вектора скорости, двигаясь по спирали, описывает один оборот вокруг стационарного положения в течение 12 маятниковых часов. Можно с достаточной степенью точности считать поэтому, что поверхностная скорость, средняя за 24 маятниковых часа, равна по величине и направлению скорости установившегося течения на том же горизонте z.

С другой стороны, 12-часовой период вращения конца вектора примерно совпадает с периодом приливо-отливных течений (см. следующую главу), а это обстоятельство иногда может дать себя чувствовать при анализе течений в том или ином море. Значение его усугубляется еще тем, что *отклонение*

вектора от стационарного положения в каждый данный момент времени происходит в *одну* и *ту же сторону* на всех глубинах.

Разумеется, и соотношения между абсолютными величинами скоростей для различных глубоких горизонтов в случае неустановившегося течения резко отличаются от тех же соотношений, вычисленных для течения установившегося. Так, на глубине $z = D$ течение через 24 *часа* достигает скорости, равной $^1/_7$ скорости поверхностного течения; между тем в случае установившегося течения скорость эта составляла бы только $U_0/23$.

Следовательно, даже через 24 *часа* скорость превышает стационарную более чем в 3 раза. На глубине $z = 2D$ подобное явление сказывается еще ярче: через 24 *часа* работы ветра скорость течения на этой глубине составляет $^1/_{20}$ скорости поверхностного течения, между тем как в случае установившегося движения она была бы равна всего лишь $^1/_{535}$; следовательно, здесь она примерно в 30 раз превышает стационарную свою величину.

§ 9. Теория градиентных и конвекционных течений

Действуя на поверхность воды, ветер вызывает, как мы видели, дрейфовые течения, которые могут иной раз переносить громадные массы воды. При вычислении элементов таких течений предполагалось, что на эти водные массы не действуют никакие силы, кроме силы Кориолиса и сил трения (в частности, на самой поверхности моря — силы трения между струями воздуха и воды).

Но в действительности работа ветра в течение того или иного промежутка времени приводит к *наклону* самой физической поверхности моря, и наклон этот бывает особенно резко выражен по соседству с *берегом*. Совершенно очевидно, что подобный наклон поверхности моря должен создать некоторый *градиент давления* в гидросфере, а под влиянием этого градиента режим течения неминуемо изменится. Впоследствии мы постараемся проследить за поведением масс воды, находящихся одновременно и под действием дрейфа, и под действием градиента давления, а пока допустим для простоты, что ветер затих и что движение морской воды происходит лишь под влиянием одного оставшегося градиента [6].

Пусть направление градиента совпадает с осью OY и пусть угол наклона поверхности моря в этом направлении равняется γ. Тогда в уравнениях (42) и (44) появятся составляющие внешних сил

$$X = 0, \quad Y = g \sin \gamma.$$

Вместо уравнений (44) придется написать

$$\begin{aligned} &\frac{d^2u}{dz^2} + 2a^2v = 0, \\ &\frac{d^2v}{dz^2} - 2a^2u + \frac{\delta g \sin \gamma}{\mu} = 0. \end{aligned} \tag{59}$$

В выражениях общего интеграла

$$\begin{aligned} u &= C_1 e^{az} \cos(az + \psi_1) + C_2 e^{-az} \cos(az + \psi_2) + \frac{\delta g \sin \gamma}{2a^2\mu}, \\ v &= C_1 e^{az} \sin(az + \psi_1) - C_2 e^{-az} \sin(az + \psi_2) \end{aligned} \tag{60}$$

константы определяются на основании граничных условий

$$\left(\frac{du}{dz}\right)_{z=0} = \left(\frac{dv}{dz}\right)_{z=0} = 0,$$

откуда

$$C_1 = C_2, \quad \psi_1 = -\psi_2;$$

они имеют место на поверхности моря ввиду отсутствия ветра. Другие граничные условия

$$(u)_{z=H} = (v)_{z=H} = 0$$

вызваны тем, что по-прежнему предполагается равенство нулю скорости течения в тонком придонном слое воды.

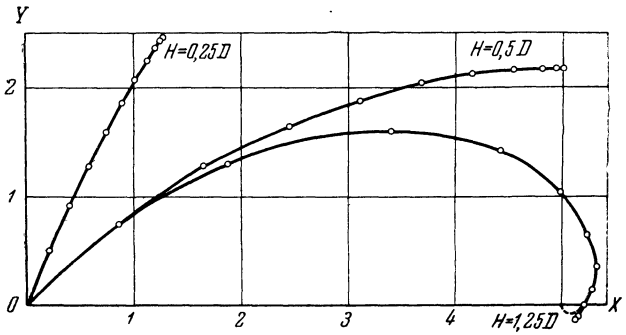


Рис. 12. Градиентные течения

Приняв во внимание перечисленные условия, подставив вместо $a^2\mu$ его выражение $\delta\omega\sin\varphi$ и, наконец, заменив экспоненциальные функции гиперболическими, можно уравнения (60) привести к окончательному виду

$$u = -\frac{g\sin\gamma}{2\omega\sin\varphi}\,\frac{\operatorname{ch} a(H+z)\cos a(H-z) + \operatorname{ch} a(H-z)\cos a(H+z)}{\operatorname{ch} 2aH + \cos 2aH} + \frac{g\sin\gamma}{2\omega\sin\varphi},$$

$$v = +\frac{g\sin\gamma}{2\omega\sin\varphi}\,\frac{\operatorname{sh} a(H+z)\sin a(H-z) + \operatorname{sh} a(H-z)\sin a(H+z)}{\operatorname{ch} 2aH + \cos 2aH}. \qquad (61)$$

На основании этих соотношений вычислены годографы скоростей на различных горизонтах, воспроизведенные на рис. 12. Три кривые отвечают случаям, когда *глубина моря* равна соответственно 0,25 D, 0,5 D и 1,25 D. Как видим, в мелководном море течение на всех горизонтах мало отклоняется от направления градиента, но уже при глубине моря 0,5 D отклонение в поверхностных слоях значительно превышает 45°.

В тех случаях, когда глубина моря превышает глубину трения D, распределение скоростей происходит по закону, имеющему громадное значение, как увидим в дальнейшем. Именно *вся толща морской воды*, лежащая *над дном выше, чем* D, движется в *одном и том же направлении—перпендикулярно к градиенту*. Только в слое высотой D, лежащем непосредственно над дном, скорости течения меняются по величине и направлению в зависимости от расстояния от самого дна. Высоту D, следовательно, можно назвать «*нижней* глубиной трения».

Легко видеть, что она играет здесь роль, совершенно аналогичную «*верхней* глубине трения» в дрейфовом течении. Ведь можно вообразить, что *дно* моря *движется* относительно гидросферы, и трение между дном и придонным слоем воды играет ту же роль, что и тангенциальная сила T при дрейфе. Вот почему скорость течения в слое, непосредственно прилегающем ко дну, отклонена на угол 45° от действующей силы.

Таким образом, все *течение* распадается на две основные части: на *придонное*, охватывающее слой D над дном (со скоростями, различными по

величине и направлению), и *глубинное*, охватывающее всю остальную толщу до самой поверхности. Скорости в этой второй части оказываются примерно равными одной и той же величине, определяемой составляющими

$$u_0 = \frac{g \sin \gamma}{2\omega \sin \varphi}, \quad v_0 = 0. \tag{62}$$

Пользуясь прежним методом, можно вычислить также составляющие *полного потока* в градиентном течении исходя из выражений

$$\Phi_x = \int_0^H u dz = \left[\frac{1}{2a^2}\frac{dv}{dz} + \frac{\delta g z \sin \gamma}{2a^2 \mu}\right]_{z=0}^{z=H},$$

$$\Phi_y = \int_0^H v dz = \left[-\frac{1}{2a^2}\frac{du}{dz}\right]_{z=0}^{z=H}.$$

Именно на основании (61)

$$\Phi_x = \frac{Dg \sin \gamma}{4\pi\omega \sin \varphi}\left[2aH - \frac{\operatorname{sh} 2aH + \sin 2aH}{\operatorname{ch} 2aH + \cos 2aH}\right],$$

$$\Phi_y = \frac{Dg \sin \gamma}{4\pi\omega \sin \varphi}\frac{\operatorname{sh} 2aH - \sin 2aH}{\operatorname{ch} 2aH + \cos 2aH}. \tag{63}$$

Второе из этих уравнений показывает, что при неограниченном возрастании глубины моря H поток в направлении действующей силы (Φ_y) стремится к конечной величине

$$\frac{Dg \sin \gamma}{4\pi\omega \sin \varphi}.$$

Исследование *развития* градиентного течения сопряжено с еще бóльшими математическими трудностями, чем в случае чисто дрейфового течения. Рассмотрим сперва процесс, который протекал бы в *отсутствии трения*. При таком упрощенном допущении развитие градиентного течения шло бы согласно уравнениям

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 2\bar{\omega}v, \quad \frac{\partial v}{\partial t} = -2\bar{\omega}u + g \sin \gamma,$$

откуда определились бы обе составляющие скорости (одинаковые для всех горизонтов) как функции времени, протекшего с момента возникновения градиента:

$$u = \frac{g \sin \gamma}{2\bar{\omega}} - \frac{g \sin \gamma}{2\bar{\omega}} \cos 2\bar{\omega}t,$$

$$v = \frac{g \sin \gamma}{2\bar{\omega}} \sin 2\bar{\omega}t. \tag{64}$$

Однако нетрудно убедиться, что уравнения (64) выражают движение по *циклоиде*, стóит только найти из них переменные координаты любой частицы

$$x = x_0 + \frac{g \sin \gamma}{4\bar{\omega}^2}[2\bar{\omega}t - \sin 2\bar{\omega}t],$$

$$y = y_0 + \frac{g \sin \gamma}{4\bar{\omega}^2}[1 - \cos 2\bar{\omega}t].$$

Эти соотношения определяют, как известно, точки циклоиды. А если это так, то сложное движение частиц воды можно разложить на два простых движения: на поступательное движение со скоростью

$$U_1 = \frac{g \sin \gamma}{2\bar{\omega}}$$

и вращательное движение с угловой скоростью $2\bar{\omega}$ по окружности радиуса

$$\frac{g \sin \gamma}{4\bar{\omega}^2}.$$

Линейная скорость в этом втором движении, очевидно, будет равна

$$U_2 = \frac{g \sin \gamma}{2\bar{\omega}},$$

причем она даст колеблющиеся во времени составляющие по осям координат, равные u_2 и v_2.

В действительности *трение* сильно осложняет развитие градиентного течения, но нетрудно видеть, какого рода изменений следует ожидать в только что рассмотренных движениях водных частиц. Прежде всего скорость поступательного движения частиц U_1 при наличии трения будет вести себя примерно так, как вела себя скорость развивающегося дрейфового течения [см. уравнения (58) и рис. 11]. Только «затухание» колебаний вектора здесь пойдет значительно быстрей, и скорость U_1 через непродолжительное время приобретет установившиеся величину и направление.

Что касается *вращательного* движения частиц, то составляющие *нестационарного* режима u_2 и v_2 *не исчезнут очень долго.*

Сама форма зависимости между u_2 и v_2 и промежутком времени τ (в маятниковых единицах, см. стр. 36), в продолжение которого развивается градиентное течение, чрезвычайно сложна. Ее можно представить так:

$$u_2 = -u_2^{\infty}\left[1 - W\left(\frac{z\sqrt{\pi}}{2D\sqrt{\tau}}\right)\right],$$

$$v_2 = -v_2^{\infty}\left[1 - W\left(\frac{z\sqrt{\pi}}{2D\sqrt{\tau}}\right)\right],$$

где символ $W(a)$ обозначает так называемую функцию *вероятности*

$$W(a) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^a e^{-a^2} da,$$

для которой имеются специальные таблицы. Символ ∞ обозначает асимптотические значения u_2 и v_2.

Среди градиентных течений особое место занимает важная их разновидность — *конвекционные течения*, возникающие благодаря различию плотностей морской воды на одной и той же глубине. Подобное различие создает неравенство давлений на одной и той же глубине, создает соответствующий градиент давлений. О таких течениях нам приходилось уже говорить в предыдущих параграфах настоящей главы: их элементы мы определяли, пользуясь динамическим методом анализа гидрологических разрезов и применяя к ним теорему о циркуляции (см. § 6 и 7).

Там при выводе соотношения (39) пришлось пренебречь силами трения, и оставалось неясным, насколько законно ими пренебрегать. Здесь будет уместно вернуться к этому важному вопросу, вооружившись новым методом исследования, позволяющим детально проследить за распределением скоростей течения по вертикали.

Первая попытка такого исследования, принадлежащая Экману, повела к недоразумению, распространившемуся весьма широко и остававшемуся необнаруженным десятки лет. Оно было обнаружено В. Б. Штокманом в 1949 г. [8].

Изложим здесь его выводы, позволяющие по-новому смотреть на строение конвекционных течений.

Пусть $\partial p/\partial x$ и $\partial p/\partial y$ будут, вообще говоря, составляющие градиента давления по осям координат и пусть полный градиент давления обусловлен каким-то распределением плотностей в слое H_1, охваченном конвекционным течением. Ниже этого слоя будем предполагать отсутствие конвекционных течений. Уравнения движения запишем в форме

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + 2a^2 v &= \frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial x}, \\ \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - 2a^2 u &= \frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial y}. \end{aligned} \tag{65}$$

Экман в свое время задавался граничным условием на глубине H_1: $u_{H_1} = 0$, $v_{H_1} = 0$, однако он не обратил внимания на то, что на этой глубине у него производные от u и от v по z *не* обращались в нули. В действительности же они *обязаны* обращаться в нули, так как, по самой сути явления, на глубине H_1 должны отсутствовать какие бы то ни было тангенциальные напряжения, вызванные трением. Иными словами, на глубине H_1 должны соблюдаться граничные условия

$$\begin{aligned} \left(\mu\frac{\partial u}{\partial z}\right)_{H_1} &= \left(\mu\frac{\partial v}{\partial z}\right)_{H_1} = 0, \\ \left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_{H_1} &= \left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)_{H_1} = 0. \end{aligned} \tag{66}$$

Помимо этих граничных условий, Штокман вводит еще условие неразрывности

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \tag{67}$$

Перенесем начало коодинат на нижнюю границу слоя, охваченного конвекционным течением, и направим ось Z вверх. Тогда условия (66) будут соответствовать, в новом обозначении, $z = 0$, а значению $z = H_1$ будут соответствовать условия на поверхности моря.

Проинтегрируем (67) в пределах от $z = 0$ до $z = H_1$. Тогда окажется

$$\int_0^{H_1} \frac{\partial u}{\partial x}\,dz + \int_0^{H_1} \frac{\partial v}{\partial y}\,dz + w_{H_1} - w_0 = 0. \tag{68}$$

На нижней границе слоя H_1 скорость равна нулю, следовательно, $w_0 = 0$. На поверхности моря вертикальная составляющая скорости *не* равна нулю, ибо эта поверхность — наклонная. Можно показать, что здесь вертикальная составляющая связана с наклоном поверхности моря и с составляющими u и v соотношением

$$w_{H_1} = u_{H_1}\frac{\partial H_1}{\partial x} + v_{H_1}\frac{\partial H_1}{\partial y}, \tag{69}$$

в котором $\partial H_1/\partial x$ и $\partial H_1/\partial y$ представляют наклон поверхности моря соответственно вдоль осей X и Y. На основании (69) перепишем (68) в новой форме

$$u_{H_1}\frac{\partial H_1}{\partial x} + v_{H_1}\frac{\partial H_1}{\partial y} = -\int_0^{H_1}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right)dz. \tag{70}$$

Оставив пока это уравнение, займемся основными уравнениями движения (65). Продифференцируем первое из них по y, а второе по x и вычтем второе полученное уравнение из первого. При этом, очевидно, исключатся смешанные производные от p по x и y

$$-\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) + 2a^2\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) = 0. \tag{71}$$

Выражение, стоящее в скобках первого члена, тождественно с выражением одной из составляющих вихря в трехмерном поле. Остальные две составляющие, как известно, получаются там круговой подстановкой частных производных. Здесь и в дальнейшем (в теории горизонтальной циркуляции морских течений, в самых общих случаях) нам приходится иметь дело с *двумерным* (плоским) полем. Следовательно, никаких иных составляющих вихря тут быть не может. Сам вихрь является понятием до некоторой степени относительным. Однако для краткости и четкости обозначений примем условно и будем применять в дальнейшем следующее обозначение:

$$\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} = \mathrm{rot}_z \mathbf{U}, \tag{72}$$

где $\mathbf{U}$ — вектор полной скорости.

Отметим, что (71) несколько отличается по форме от оригинала. Во-первых, мы пренебрегли изменениями плотности воды, записав уравнение неразрывности в форме (67), и тем самым упростили дальнейшие соотношения (в данном случае это может отразиться лишь на далеком десятичном знаке числовых значений скоростей). Во-вторых, мы пренебрегли изменениями кориолисовой силы при изменениях широты, иными словами, считали величину a постоянной в пространстве. При исследовании течений, не слишком широко раскинувшихся вдоль меридиана, погрешность, вносимая таким образом, ничтожна. При исследовании обширных пространств, в пределах которых широта меняется значительно, несомненно вносится какая-то погрешность, но какая именно, пока еще нельзя установить даже по материалам оригинальной цитированной работы Штокмана; попытка уточнения, содержащаяся там, привела к неубедительным результатам.

Подставим символическое обозначение (72) в (71) и проинтегрируем уравнение в пределах от дна до поверхности моря. Тогда

$$-\left|\mathrm{rot}_z\left(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial z}\right)\right|_{H_1} + \left|\mathrm{rot}_z\left(\frac{d\mathbf{U}}{dz}\right)\right|_0 + 2a^2 \int_0^{H_1} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) dz = 0. \tag{73}$$

Согласно (66) (для $z = 0$, с учетом переноса начала координат)

$$\left|\mathrm{rot}_z\left(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial z}\right)\right|_0 = 0. \tag{74}$$

На основании законов трения у самой поверхности моря должно соблюдаться соотношение между тангенциальной силой трения $\mathbf{T}$ воздуха о поверхность воды и производной от полной скорости $\mathbf{U}$ по z

$$\mu \left(\frac{d\mathbf{U}}{dz}\right)_{H_1} = \mathbf{T}. \tag{75}$$

Отсюда, как нетрудно видеть,

$$\mathrm{rot}_z\left(\frac{d\mathbf{U}}{dz}\right)_{H_1} = \frac{\mathrm{rot}_z \mathbf{T}}{\mu}, \tag{76}$$

где аналогично (72) символически обозначено

$$\mathrm{rot}_z \mathbf{T} = \frac{\partial T_y}{\partial x} - \frac{\partial T_x}{\partial y}. \tag{77}$$

На основании (74) и (77) уравнение (73) перепишем в ином виде

$$\int_0^{H_1} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) dz = \frac{\mathrm{rot}_z \mathbf{T}}{2a^2\mu}. \tag{78}$$

Здесь левая часть соответствует правой части уравнения (70). Подставляя вместо правой части (70) ее выражение из (78) найдем

$$u_{H_1}\frac{\partial H_1}{\partial x}+v_{H_1}\frac{\partial H_1}{\partial y}=\frac{\mathrm{rot}_z\,\mathbf{T}}{2a^2\mu}. \tag{79}$$

Левая часть уравнения может быть представлена в более компактном и удобном виде. Именно, приняв обозначения углов между векторами и координатными осями в соответствии с рис. 13 и обозначая через γ вектор, характеризующий *наклон поверхности моря*, запишем соотношения

$$\left.\begin{aligned}u_{H_1}&=U_{H_1}\cos\alpha,\\ v_{H_1}&=U_{H_1}\sin\alpha,\end{aligned}\right\} \tag{80}$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial H_1}{\partial x}&=-\gamma\cos\beta,\\ \frac{\partial H_1}{\partial y}&=-\gamma\sin\alpha.\end{aligned}\right\} \tag{81}$$

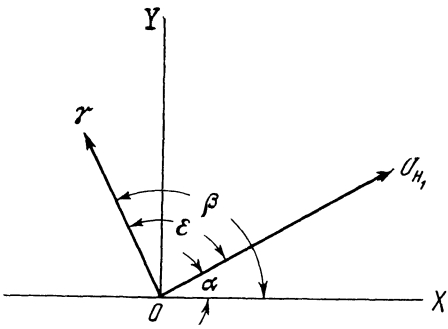


Рис. 13. Схема векторов для конвекционного течения

Учтя их, а также известное тригонометрическое соотношение между функциями углов α и β и функциями угла ε, являющегося разностью β и α, получим

$$u_{H_1}\frac{\partial H_1}{\partial x}+v_{H_1}\frac{\partial H_1}{\partial y}=-U_{H_1}\gamma\cos\varepsilon. \tag{82}$$

Значит, вместо (79) можно будет записать

$$U_{H_1}\gamma\cos\varepsilon=\frac{\mathrm{rot}_z\,\mathbf{T}}{2a^2\mu}, \tag{83}$$

откуда

$$\cos\varepsilon=\frac{\mathrm{rot}_z\,\mathbf{T}}{2a^2\mu U_{H_1}\gamma}. \tag{84}$$

Так определяется угол ε между векторами $\mathbf{U}_{H_1}$ и $\boldsymbol{\gamma}$. Из этого уравнения Штокмана вытекают очень важные практические следствия. Прежде всего при отсутствии ветра ($\mathbf{T}=0$) и при равномерном поле ветра ($\mathbf{T}=\mathrm{const}$) вихрь вектора $\mathbf{T}$ обращается в *нуль*. Следовательно, в нуль обращается и $\cos\varepsilon$, а сам угол ε становится равным 90°. Значит, *при отсутствии ветра скорость течения* $\mathbf{U}_{H_1}$ *перпендикулярна к вектору* $\boldsymbol{\gamma}$, *выражающему наклон поверхности моря, т. е.* $\mathbf{U}_{H_1}$ *направлено вдоль горизонталей* наклонного уровня моря. Как видим, в этом случае динамический метод обработки гидрологических разрезов может быть применен без всяких погрешностей, невзирая на существование внутреннего трения в морской воде.

Физически это значит, что в уравнениях движения (65) на поверхности моря исчезают члены, связанные с внутренним трением: $\partial^2u/\partial z^2$ и $\partial^2v/\partial z^2$, а исчезнуть они могут по одной из следующих двух причин: а) либо когда $\frac{du}{dz}=0$, б) либо когда $\frac{du}{dz}=\mathrm{const}$. Нетрудно видеть, что первый вариант соответствует полному отсутствию ветра ($\mathbf{T}=0$), а второй — *равномерному полю ветра* ($\mathbf{T}=\mathrm{const}$).

На рис. 14 воспроизведены три схемы распределения скоростей по вертикали (по Штокману). Для всех трех является общим плавное падение скоростей до нуля по мере погружения на глубины. В двух первых случаях (случаях конечной толщины слоя H_1, охваченного конвекционным течением) на нижней границе обращается в нуль не только сама скорость, как это было у Экмана, но и производная от скорости по z. Другими словами, в отли-

чие от теории Экмана, здесь полностью соблюдается естественное требование: отсутствие какого бы то ни было горизонтального напряжения трения на нижней границе слоя H_1. Крайний правый вариант соответствует бесконечно большой толщине слоя, охваченного конвекцией. Первый слева вариант отвечает отсутствию ветра: здесь производная от скорости по z обращается в нуль не только на нижней, но и на верхней границе слоя. Второй слева вариант соответствует равномерному полю ветра, дающему вполне определенную величину тангенциальной силы **T** на поверхности моря. Именно ей отвечает наклон кривой близ верхней границы в согласии с уравнением (75).

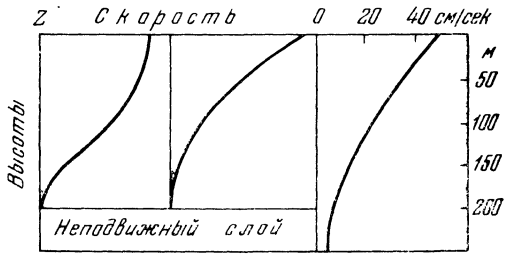


Рис. 14. Распределение скоростей по вертикали (по В. Б. Штокману)

Важное уравнение (84) позволяет еще заключить, что динамический метод обработки гидрологических разрезов может дать хорошие результаты даже при неравномерном поле ветра, если только произведение $\mathbf{U}\gamma$ достаточно велико, т. е. велик наклон поверхности моря γ и велика скорость течения **U**.

Попробуем вместе с цитированным автором испытать на простом числовом примере, каковы отклонения угла ε от прямого при тех или иных значениях скоростей течения и скоростей ветра, встречающихся на практике. Для простоты допустим, что линии тока ветра — прямые, параллельные между собой. Тогда выражение вихря приобретет наиболее простой вид

$$|\mathrm{rot}_z \mathbf{T}| = \left|\frac{dT}{dn}\right|. \tag{85}$$

Здесь n — нормаль к направлению ветра. Как известно, сила **T** может быть связана со скоростью ветра **V** и плотностью воздуха δ_a соотношением (4)

$$\mathbf{T} = k\delta_a V^2.$$

Стало быть, выражение вихря от **T** можно теперь записать в виде

$$|\mathrm{rot}_z \mathbf{T}| = \left|\frac{dT}{dn}\right| = 2\delta_a k V \left|\frac{dV}{dn}\right|.$$

Вместо (84) теперь будет

$$\cos\varepsilon = \frac{\delta_a k V}{a^2 \mu U_{H_1} \gamma}\left|\frac{dV}{dn}\right|. \tag{86}$$

Подставим сюда числовые значения величин, близкие к встречающимся на практике:

$$\delta_a = 1{,}3\cdot 10^{-3}, \quad k = 2{,}6\cdot 10^{-3}, \quad V = 500 \text{ см/сек},$$
$$a^2\mu = 5\cdot 10^{-5}, \quad U_{H_1} = 100 \text{ см/сек}, \quad \gamma = 10^{-5}.$$

Тогда окажется, по (86),

$$\cos\varepsilon = 0{,}034, \quad \varepsilon = 88°.$$

Даже при меньшей скорости течения, при $U_{H_1} = 50$ *см/сек*, по (86) оказывается

$$\cos\varepsilon = 0{,}068, \quad \varepsilon = 86°50',$$

т. е. даже здесь угол ε весьма близок к прямому.

§ 10. Теория прибрежной циркуляции В. Экмана. Сгоны и нагоны вод

Чисто дрейфовые течения, теория которых была изложена в § 8, могут иметь место только в открытом океане, вдали от берегов. Вблизи же береговой черты, как было уже упомянуто в предыдущем параграфе, всякий дрейф неминуемо приводит либо к понижению, либо к повышению уровня моря, вызывая *сгоны* или *нагоны* вод [6].

Явления эти представляют весьма большой интерес, как теоретический, так и практический, и в дальнейшем нам придется к ним вернуться в связи с обзором исследований в конкретной природной обстановке. На основании сказанного в предыдущих параграфах можно составить представление об основных чертах прибрежной циркуляции.

К сожалению, до настоящего времени еще никому не удалось дать полное решение задачи применительно к граничным условиям, представляющим наибольший практический интерес: к условиям *наклонного дна*, постепенно понижающегося по мере удаления от берега. При этих условиях приходится обязательно учитывать *вертикальные* составляющие скоростей течения, иными словами, приходится иметь дело со всеми *тремя* уравнениями из системы типа (42). До настоящего времени полное решение задачи давалось лишь для случая отвесной береговой стенки при постоянной глубине моря до самого берега и для особого случая, описанного в § 13.

Рассмотрим режим прибрежной зоны, предполагая, что *береговая линия — прямая*, *протянувшаяся безгранично* в обе стороны. Допустим сперва, что ветер направлен под каким угодно углом β к береговой линии, но так, что берег находится *вправо* от него. Такой ветер, очевидно, должен вызвать дрейфовый поток, одна из составляющих которого будет направлена к *берегу* (см. стр. 31), а потому он является *нагонным*.

Но нагон поверхностных вод ведет к повышению уровня моря по направлению к берегу, другими словами, к возникновению градиента давления. Со своей стороны создавшийся градиент вызывает градиентное течение, которое в главной толще воды направляется, очевидно, перпендикулярно к градиенту, а стало быть, *вдоль* берега и притом *вправо*, если смотреть с берега на море.

Оставив пока в стороне это преобладающее «глубинное» течение, вспомним о течении «придонном». Оно, как следует из (63) и из рис. 12, обладает составляющими скоростей, *перпендикулярными* к *береговой линии*.

В самом начале работы ветра, когда поверхность моря близ берега обладала малым наклоном к горизонтальной плоскости, градиент давлений был, очевидно, невелик, а потому *нормальная* к берегу составляющая *дрейфового* потока Φ_n' преобладала над нормальной составляющей *градиентного* потока Φ_n''. Но последняя непрерывно возрастала, пока, при некотором определенном угле наклона поверхности моря (γ), не наступило равновесие. Это условие равновесия перепишем в простой форме

$$\Phi_n' + \Phi_n'' = 0. \tag{87}$$

Воспользовавшись этим соотношением, определим сперва *величину* и *направление поверхностного течения*, предполагая, что берег чрезвычайно приглубый, а потому глубину моря до самой *отвесной* стенки берега можно считать бесконечно большой. В таком случае можно построить весьма простую векторную диаграмму, которая позволит находить искомые течения для каких угодно *направлений ветра*.

Как помним, составляющая дрейфового потока, взятая перпендикулярно к направлению ветра, на основании (49) равняется $\frac{U_0 D}{\pi\sqrt{2}}$. Но если ветер сам направлен под углом β к береговой линии, то, очевидно, эта составляющая

образует такой же угол с нормалью к берегу. Поэтому нормальная к берегу составляющая дрейфового потока должна быть равна

$$\Phi_n' = -\frac{U_0 D}{\pi \sqrt{2}} \cos \beta. \tag{88}$$

Что касается нормальной к берегу составляющей градиентного потока, то она на основании (63), в случае $H = \infty$, равна

$$\Phi_n'' = \frac{Dg \sin \gamma}{4\pi\omega \sin \varphi}.$$

Подставляя в (87) выражения обоих потоков, найдем, что

$$-\frac{U_0 D}{\pi \sqrt{2}} \cos \beta + \frac{Dg \sin \gamma}{4\pi\omega \sin \varphi} = 0,$$

или

$$U_0 \sqrt{2} \cos \beta = \frac{g \sin \gamma}{2\omega \sin \varphi}. \tag{89}$$

Но правая часть этого равенства на основании (62) представляет не что иное, как *скорость глубинного течения, идущего* в направлении, перпендикулярном к градиенту, т. е. в *направлении береговой линии*. Скорость эта, как мы видели в § 9, сохраняет постоянную величину и постоянное направление во всех слоях, за исключением *придонного*, толщина которого не превышает примерно D. Обозначим эту скорость буквой G. Тогда уравнение (89) даст

$$G = U_0 \sqrt{2} \cos \beta. \tag{90}$$

Это соотношение весьма замечательно. Прежде всего оно устанавливает связь между поверхностной скоростью, которая имела бы место в случае чистого дрейфа, и скоростью реально существующего глубинного течения. Затем на основании этого уравнения оказывается возможным построить векторную диаграмму, о которой идет речь.

Совершенно очевидно, что действительная скорость на самой поверхности моря должна представлять собой *геометрическую сумму* двух векторов: а) скорости градиентного течения G, простирающегося до самой поверхности моря, и б) скорости «дрейфа», вызываемого ветром (U_0).

На рис. 15 представлено геометрическое сложение обоих векторов. Стрелка OA изображает в некотором масштабе U_0, составляя угол 45° с осью T (т. е. с направлением ветра). Стрелка AB проведена под углом β к той же оси, стало быть, ее направление совпадает с G (а тем самым и с *береговой линией*). Величина AB в том же масштабе представляет G. Но ведь на основании (90) она равняется $U_0 \sqrt{2} \cos \beta$. А если это так, то при изменении угла β между ветром и береговой линией конец вектора AB будет скользить *по окружности*, построенной, как на диаметре, на отрезке AC, величина которого равна $U_0 \sqrt{2}$, а направление — параллельно оси T. Легко видеть, что окружность эта коснется оси T и что по ней же будет скользить конец искомого вектора OB, выражающего по величине и направлению *действительную скорость* на поверхности моря.

Следовательно, для определения величины и направления скорости на поверхности моря, при всевозможных направлениях ветра, практически следует поступать так. Надо построить вектор OA, представляющий по направлению и по величине (в некотором заданном масштабе) скорость чисто дрейфового течения, которая, как увидим в дальнейшем, может быть весьма просто вычислена на основании эмпирических соотношений по известной скорости ветра. Затем следует построить окружность на отрезке $AC = OA\sqrt{2}$, как на диаметре: она коснется оси T, совпадающей с направлением ветра.

Если известен угол между этим направлением и направлением береговой черты, то нетрудно провести хорду AB параллельно береговой черте (под углом β к AC, параллельному T). Тогда останется только провести замыкающий вектор OB, который представит по направлению и (в том же масштабе) по величине истинную скорость течения на поверхности моря.

На рис. 16 изображены некоторые элементы течения, определенные посредством такой круговой диаграммы для различных значений угла β. Знак плюс относится к таким направлениям *нагонных* ветров, когда ветер обладает слагающей, направленной с моря к берегу. Знак минус относится к тем направлениям *нагонных* ветров, когда соответствующая слагающая ветра направлена с берега в море. Как нетрудно видеть, в последнем случае ничто не мешает ветру все же оставаться *нагонным*, т. е. вызывать нормальную слагающую поверхностного *течения* в сторону берега. Нормальная слагающая придонного течения при нагонах остается, очевидно, всегда направленной от берега в море.

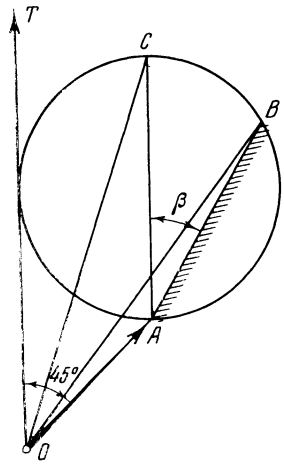


Рис. 15. Круговая диаграмма сгонно-нагонных течений

Кривая U/U_0 выражает изменение величины истинной скорости поверхностного течения при изменении β. За единицу принята скорость чисто дрейфового течения, которая имела бы место в открытом море под действием того же ветра. Наибольшая скорость на поверхности получается, как видим, когда ветер направлен примерно под углом 13° к береговой черте. Напротив, при направлении, перпендикулярном к оптимальному, скорость проходит через минимум. Максимальная и минимальная скорости относятся одна к другой примерно, как 8 : 3.

На том же рисунке кривая G/U_0 изображает изменения скорости *глубинного течения* G в зависимости от угла β. Легко убедиться, что наибольшая скорость G, а стало быть, и наиболее резкий *нагон* [на основании (63)] соответствуют тому случаю, когда ветер направлен в точности *вдоль* береговой черты,— слева направо, если смотреть на море. Максимальная скорость глубинного течения, очевидно, в $\sqrt{2}$ раз превышает скорость чисто дрейфового течения U_0.

Если бы ветер был не нагонным, а *сгонным*, т. е. если бы он обладал слагающей, направленной *слева направо* (смотря с берега на море), то все построения сохранили бы силу, но только вместо нормальной слагающей поверхностного течения, направленной к берегу, появилась бы нормальная слагающая, направленная от берега в море и вызванная своего рода присасывающим действием ветра. Придонное течение в этом случае дало бы нормальную слагающую, направленную к берегу.

Посмотрим теперь, как распределяются скорости течения *по вертикали* в слоях, лежащих под поверхностным. Так как глубина моря пока предполагается весьма большой, то во всей толще гидросферы можно выделить *три* основных слоя, составляющих *элементарный поток*:

1. Самый нижний слой, охваченный *придонным* течением, занимает по вертикали некоторое протяжение D'', которое можно назвать *нижней* глубиной трения. Скорости его изменяются по закону, представленному на рис. 12.

2. На высоте D'' над дном начинается область *глубинного* течения с постоянной скоростью G, направленной параллельно береговой черте. Оно простирается до самой поверхности моря.

3. В поверхностном слое толщиной D', где D' можно назвать верхней глубиной трения, развивается *поверхностное* течение, представляющее собой суммарный *поток* из глубинного течения со скоростью G и *чисто* дрейфового, скорости которого изменяются по вертикали согласно закону, изображенному на рис. 7 и рис. 8.

При уменьшении глубины моря все более и более сокращается промежуточный слой глубинного течения; поверхностный и придонный слои все более и более приближаются друг к другу. Если предположить, что верхняя и нижняя глубины трения одинаковы, то легко видеть, что промежуточный слой совершенно выпадает при глубине моря, равной удвоенной глубине трения, когда поверхностный слой непосредственно переходит в придонный.

На рис. 17 представлена схема такого «элементарного потока» в разрезе и в плане.

На рис. 18 приведены диаграммы, соответствующие распределению скоростей по вертикали для различных направлений ветра по отношению к береговой черте, а также для различных конечных значений глубины моря d.

Проследим за строением только одной из диаграмм рис. 18, соответствующей направлению ветра *вдоль* береговой черты и значению глубины моря $d = 2{,}5\,D$. Эту диаграмму легко построить, вспомнив векторный треугольник рис. 15. Вектор, начинающийся в точке A и оканчивающийся в точке C, представляет в некотором масштабе скорость *глубинного* течения G, в данном случае наблюдающуюся лишь в тонком слое, на стыке поверхностного и придонного слоев. Вектор OC выражает собой истинную скорость на самой поверхности моря. Он равняется геометрической сумме векторов $AC = G$ и OA, из которых последний, как выше было указано, представляет скорость *чисто* дрейфового течения.

Для получения скоростей *поверхностного* течения в других точках вертикали, до глубины D' под уровнем моря, остается только вместить между точками A и O логарифмическую спираль, изображенную на рис. 7. Тогда каждый вектор, начинающийся в точке A и оканчивающийся в некоторой точке спирали (годографа), даст скорость чисто дрейфового течения на соответствующем горизонте, а геометрическая сумма этого вектора с $AC = G$ представит полную скорость течения на данном расстоянии под уровнем моря. Искомый результирующий вектор будет начинаться в точке C и оканчиваться в соответствующей точке логарифмической спирали между O и A.

Между точками A и C надо вместить годограф вектора, выражающего скорость градиентного течения вблизи дна — в пределах слоя толщиной D''. Скорости течения в этом придонном слое можно найти так же просто, как скорости, определяемые диаграммой рис. 12.

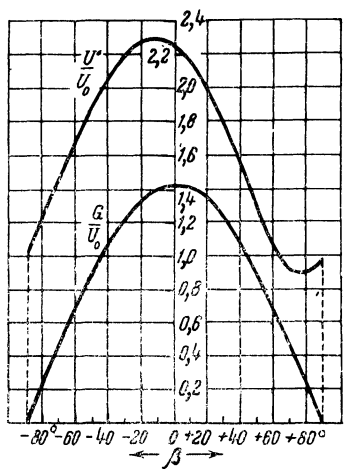


Рис. 16. Поверхностное и глубинное течения у берега

Точки, видные на ветвях годографа, взяты через каждую десятую долю глубины моря, а в тех случаях, когда глубина моря превышает $2D$, — через каждую пятую глубины трения (предполагается, что $D' = D'' = D$). На рис. 18, *а* представлены четыре кривые, соответствующие тому же случаю ветра, направленного вдоль береговой черты, но различным значениям глубины моря: $H = 2{,}5\,D$; $1{,}25\,D$; $0{,}5\,D$; $0{,}25\,D$.

Основным условием для нахождения соотношений между элементами поверхностного и градиентного потоков служило соотношение между нор-

мальными составляющими потоков дрейфового и градиентного, о котором достаточно было сказано выше.

На диаграммах ясно видно, как по мере уменьшения глубины моря скорости течения на различных глубинах стремятся совпасть с направлением ветра. У весьма отмелого берега (при $H = 0{,}25\,D$ и $0{,}5\,D$) ветер гонит воду по своему направлению, и только абсолютные величины скоростей течения меняются от поверхности ко дну.

На рис. 18 даны еще три серии кривых, соответствующих направлениям ветра: на угол 45° в сторону моря (рис. 18, *б*), причем ветер остается тем не менее по-прежнему нагонным; на угол 45° в сторону берега (рис. 18, *в*) и, наконец, перпендикулярно к берегу (рис. 18, *г*). Все рисунки так ориентированы, что направление ветра на них соответствует тому же вектору **T**, нанесенному на последний из них (рис. 18, *г*).

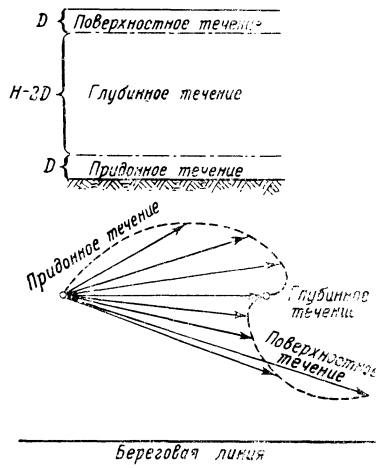


Рис. 17. Схема элементарного потока

Глубины моря, для которых построены соответствующие диаграммы, отмечены возле каждой кривой. Для всех кривых вертикаль от поверхности до дна разбита на одно и то же число частей — на *десять*. Следовательно, точки, нанесенные на все годографы, представляют собой окончания векторов, выражающих по величине и направлению скорости течения на горизонтах, отстоящих друг от друга на $^1/_{10}$ глубину моря. Начало векторов на каждом годографе обозначено точкой, заключенной в кружке.

Что касается вопроса о *развитии* сгонных и нагонных течений, то он чрезвычайно сложен. Вычисления здесь нельзя произвести так просто, как это было проделано для случая развития чисто дрейфового течения; в частности значительное влияние на результаты анализа оказывает гипотетическая величина D, которую в других случаях удавалось остроумно элиминировать.

Однако примерное представление о ходе явления можно составить по следующей схеме. Допустим, что поверхность моря выражена некоторым уравнением

$$z = f(x, t),$$

где координата z, являющаяся функцией времени t и расстояния от берега x, представляет собой высоту точек поверхности моря над некоторой произвольной плоскостью.

Наклон поверхности моря к горизонтальной плоскости в некоторый момент времени пусть будет γ, а его предельное значение, к которому он стремится, пусть равняется γ_0. Тогда, очевидно,

$$\gamma = \frac{\partial z}{\partial x}. \tag{91}$$

Напомним, что направление x взято перпендикулярно береговой черте. Если бы течение развивалось только под действием ветра, а градиентного течения не было, то поток, нормальный к береговой черте, был бы равен некоторой величине Φ_0. В действительности же полный поток Φ, зависящий и от дрейфа и от градиента, выразится приближенным уравнением

$$\Phi = \Phi_0 \frac{\gamma_0 - \gamma}{\gamma_0}. \tag{92}$$

Обе величины, и Φ,и Φ_0, отнесены к единице длины береговой черты. Но нетрудно доказать, что

$$-\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial t}.$$

Подставив сюда из (92) выражение Φ через Φ_0, найдем

$$\frac{\Phi_0}{\gamma_0}\frac{\partial \gamma}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial t},$$

или, вспоминая (91),

$$\frac{\Phi_0}{\gamma_0}\frac{\partial^2 \gamma}{\partial x^2} = \frac{\partial \gamma}{\partial t}. \tag{93}$$

При интегрировании уравнения (93) условия таковы. Прежде всего в начальный момент времени, когда только что возник ветер, т. е. при $t = 0$ $\gamma = 0$. Затем у самого берега, т. е. при $x = 0$, $\gamma = \gamma_0$.

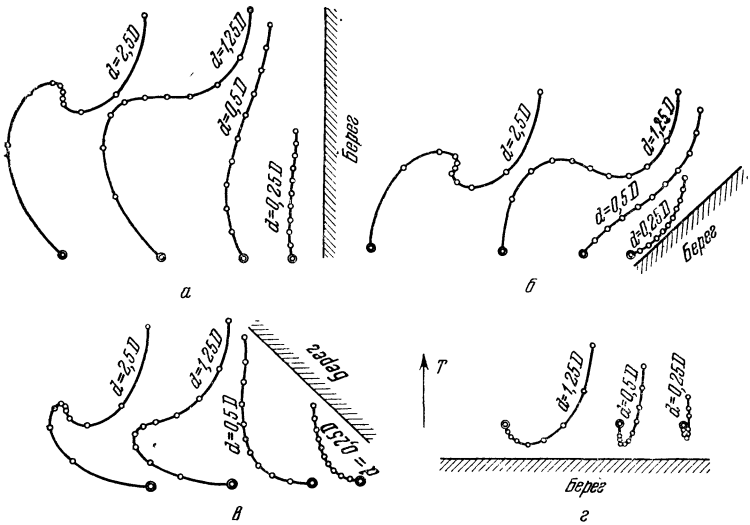


Рис. 18. Диаграммы (в плане) для различных направлений ветра

Интеграл уравнения (93) выражается довольно сложно: он содержит функцию *вероятности*

$$W(a) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^a e^{-a^2} da,$$

которая встречалась нам при изучении развития градиентного течения. Здесь роль аргумента a будет играть радикал $\sqrt{\frac{\gamma_0 x^2}{4\Phi_0 t}}$, а именно

$$\gamma = \gamma_0 \left[1 - W\left(\sqrt{\frac{\gamma_0 x^2}{4\Phi_0 t}}\right)\right]. \tag{94}$$

Там же, при исследовании градиентных течений, мы видели, что поток Φ_y [согласно уравнению (63)] приблизительно равен $\frac{D g \gamma_0}{4\pi\omega \sin\varphi}$. В данном случае роль потока Φ_y играет поток Φ_0.

Подставляя выражение Φ_0 в (94) и принимая во внимание, что для малых значений аргумента a функция вероятности может быть заменена линейным выражением $W(a) \approx 1{,}1a$, найдем

$$\frac{\gamma_0 - \gamma}{\gamma_0} = 1{,}1\sqrt{\frac{\pi\omega \sin\varphi}{Dg}\frac{x^2}{t}}. \tag{95}$$

Отсюда можно определить время, в течение которого наклон поверхности моря γ достигает той или иной доли своей предельной величины γ_0. Допустим, например, что желательно определить, в течение какого времени наклон поверхности моря достигнет 0,7 величины γ_0, соответствующей установившемуся равновесию. Тогда, подставив в (95) вместо $\frac{\gamma_0 - \gamma}{\gamma_0}$ числовую величину 0,3, а также заменив π, ω и g их числовыми величинами, получим для искомого промежутка времени t_1 выражение

$$t_1 = \frac{3{,}1x^2 \sin\varphi}{D} \cdot 10^{-4} \text{ сек}. \qquad (96)$$

Числовой коэффициент 3,1 обладает размерностью $см^{-1} \cdot сек$. Полагая, что $D = 75$ *м*, найдем для широты 45° и для различных расстояний x от берега следующие значения t_1:

Время t_1	3 *сек*	5 *мин*	8 *час*	8,5 дня	34 дня
Расстояние x, *км*	1,0	10	100	500	1000

Разумеется, эти вычисления грубо приблизительные. Есть основания думать, что в действительности глубина трения значительно больше 75 *м* и что, следовательно, промежуток времени, необходимый для достижения заданного наклона уровня моря, значительно меньше вычисленного. Вот почему нет смысла вносить дальнейшие уточнения в только что приведенные выражения, а следует стремиться к получению истинной картины путем сопоставления схемы с наблюдениями в природных условиях.

В следующем параграфе будет показано, что схема эта в общих чертах хорошо согласуется с данными непосредственных измерений в море. В настоящее время накопился весьма большой материал по изучению течений как чисто дрейфовых, так и сгонно-нагонного типа.

Единственным неприятным обстоятельством является лишь *непостоянство* величины D — глубины трения, этой величины, которая была элиминирована везде, где только представлялась возможность, но которая все же не может быть окончательно исключена из анализа течений.

Так, на стр. 47 мы видели, как просто связываются между собой скорости чисто дрейфового течения U_0, которое имело бы место в открытом море, и течения *глубинного* G по соседству с береговой чертой [см. соотношение (90)]. Величина U_0, как увидим в следующем параграфе, может быть связана простым линейным соотношением со скоростью ветра. Стало быть, зная скорость ветра, нетрудно вычислить скорость глубинного течения под берегом так же точно, как и скорость простого дрейфового течения.

Но совсем иначе обстояло бы дело, если бы мы попытались определить абсолютную величину нагонного *потока*: в его выражение неминуемо вошла бы величина D.

Несколько иначе к разрешению проблемы о сгонах и нагонах подходит Джефрис. Этот автор пытается обойтись без специальных гипотез, но гипотетические элементы входят в его формулы в скрытом виде и в сущности даже не могут быть оттуда исключены [9]. Именно, в соотношения входит коэффициент внутреннего трения μ в морской воде и коэффициент поверхностного трения k между водой и дном.

Введем обозначения: δ_1 — плотность воздуха; δ — по-прежнему плотность воды; V — скорость ветра; β — угол, который она составляет с береговой чертой; α — угол между той же чертой и направлением *придонного* течения; G — скорость *градиентного* течения, а $\overline{\omega}$ — величина угловой скорости

Земли, умноженная на синус широты. Тогда в случае глубокого моря

$$\frac{\sin^2\alpha\cos\alpha}{1-\sin\alpha} = \frac{\delta_1}{\delta}\frac{k^2}{4\nu\omega}V^2\cos\beta, \tag{97}$$

$$G = \frac{k}{2\sqrt{\nu\omega}}\frac{\delta_1}{\delta}\frac{\sin\beta}{\sin\alpha\cos\alpha}. \tag{98}$$

Здесь ν — кинематическая турбулентная вязкость.

Уравнение (97) показывает, что направление придонного течения должно зависеть от скорости ветра V. Именно, при очень больших скоростях ветра, направленного вдоль берега ($\beta = 0$), при возрастании величины правой части равенства, угол α стремится к предельному значению: $\alpha = \pi/4$. Напротив, при очень слабых ветрах, когда правая часть равенства весьма мала угол α стремится к нулю, т. е. направление придонного течения приближается к направлению береговой черты.

Если ветер направлен перпендикулярно к береговой черте ($\beta = \pi/2$), то на основании уравнения (98) скорость градиентного течения обращается в *нуль* (в полном соответствии с рис. 16).

Наиболее любопытно заключение, вытекающее из (97): оказывается, что слабый и сильный ветры должны вызвать течения, в сущности направленные совсем неодинаково. Что же касается абсолютных значений скоростей течения, вычисляемых по заданной скорости ветра на основании (98), то они вызывают некоторые сомнения, поскольку за достоверность значения $\mu = 100$ ручаться еще нельзя. Впрочем порядок величины скорости течения получается весьма вероятный: при скорости ветра (урагана) 40 *м/сек* скорость градиентного течения G оказывается равной 4 *м/сек*. При такой величине G повышение уровня моря, вызванное нагоном, достигнет 6 *см* на каждый километр полосы, охваченной ураганом. Следовательно, если ураган работает в прибрежной полосе шириной 10 *км*, повышение уровня у самого берега достигнет 60 *м*. Само вычисление повышения уровня ведется по формуле, совершенно аналогичной формуле (62) для градиентного течения: если через γ обозначить наклон уровня моря к горизонтальной плоскости, то, очевидно,

$$\gamma = \frac{2\omega}{g}G.$$

Любопытно также, что на основании уравнений (97) и (98) слабый ветер, направленный вдоль берега, вызывает эффект, аналогичный весьма сильному ветру, направленному *почти* нормально к береговой черте.

В обоих этих случаях правая часть уравнения (97) весьма мала, и можно считать, что угол α определяется простым соотношением

$$\sin\alpha = V\frac{k}{2}\sqrt{\frac{\delta_1}{\delta}\frac{\cos\alpha}{\omega\nu}}. \tag{99}$$

Приняв его во внимание, получим из (98)

$$G = V\sqrt{\frac{\delta_1}{\delta}\cos\beta}. \tag{100}$$

Итак, при слабом ветре, направленном вдоль берега, или при сильном ветре, направленном приблизительно перпендикулярно береговой черте, в обоих случаях, во-первых, угол α оказывается очень малым, а стало быть, придонное течение примерно скользит вдоль берега, во-вторых, скорость градиентного течения G является прямо пропорциональной первой степени скорости ветра V.

Следует отметить, что на основании непосредственных измерений, о которых будет речь далее, скорость как поверхностного, так и градиентного течения можно считать пропорциональной первой степени скорости ветра даже тогда, когда скорость эта весьма велика. Объясняется это тем, что коэффициенты трения, входящие в уравнения (97) и (98) в роли констант, в действительности сами изменяются при изменении скорости ветра вне известных узких пределов.

Уравнение (100) при $V\sqrt{\cos\beta} = 5$ *м/сек* дает $G = 18$ *см/сек*, $\gamma = 0{,}3$ *см/км*. Заметим, что, согласно изложенной теории, при слабых ветрах скорость поверхностного, дрейфового, течения оказывается равной скорости градиентного течения G.

В случае весьма *мелкого* моря для скорости градиентного течения получаем выражение

$$G = \frac{kV^2}{2\bar{\omega}H}\frac{\delta_1}{\delta}\sin\beta, \tag{101}$$

а для γ

$$\gamma = \frac{kV^2}{gH}\frac{\delta_1}{\delta}\sin\beta. \tag{102}$$

Эти выражения применимы тогда, когда глубина моря значительно меньше 60 *м*, и весьма существенно отличаются от уравнения (98). Действительно, если угол $\beta = 0$, т. е. если ветер направлен вдоль береговой черты, то в глубоководном море возникло бы наиболее резко выраженное сгонно-нагонное течение. Напротив, согласно (101), в мелководном море такой ветер совсем не вызовет ни сгона, ни нагона воды. С другой стороны, при $\beta = \pi/2$ градиентное течение в глубоководном море отсутствовало бы, а в мелководном, согласно (101), оно достигло бы максимума.

Последние результаты вполне согласуются с § 10 и с непосредственными наблюдениями в мелководных морях: там наибольшие нагоны вод наблюдаются при ветрах, направленных с моря на берег, а сгоны — при ветрах, направленных с берега в море, и в обоих случаях — нормально к береговой черте.

Что касается числовых значений наклона поверхности моря, то, на основании уравнения (102), при условиях: скорость ветра $V = 10$ *м/сек*, глубина моря $H = 10$ *м* и угол $\beta = \pi/4$ наклон $\gamma = 0{,}167$ *см/км*.

Можно определить также и промежуток времени, необходимый для достижения состояния равновесия: для появления окончательного подъема или опускания уровня у берега под влиянием нагона или сгона. Этот промежуток времени t_2 оказывается равным

$$t_2 = \frac{2\bar{\omega}\delta x^2 G}{kg\delta_1 V^2\cos\beta}. \tag{103}$$

Если заменить некоторые величины, входящие в (103), другими, употреблявшимися нами при изложении, и в то же время ввести некоторые простые преобразования в уравнения (95) и (96), то уравнения (96) и (103) дадут для вычисляемых промежутков времени t_1 и t_2 одно и то же выражение

$$A\frac{\nu x^2}{g\delta D^3}.$$

Только числовой коэффициент A, стоящий в этом выражении, будет, разумеется, неодинаковым, в зависимости от того, по какому пути мы пойдем.

В первом случае, как нетрудно вспомнить, исследовалось *постепенное* нарастание уровня, причем была введена функция W, обычно характеризующая нестационарный процесс. Промежуток t_1 отсчитывается с момента начала работы ветра и до того момента, когда наклон поверхности моря до-

стигнет 0,7 своей предельной, *равновесной*, *величины*. Напротив, во втором случае анализ явления идет при помощи некоторых *приблизительно* осредненных величин, которые находятся для сгонно-нагонного потока, и промежуток времени t_2 отсчитывается до некоторого не вполне определенного момента, когда уровень почти достигнет предельной, равновесной высоты.

Весьма важно отметить, что оба соотношения, полученные совершенно различными и вполне независимыми путями, дают *один* и *тот же порядок* исследуемого промежутка времени.

В частном случае, когда нагон (или сгон) вызывается *ураганом*, направление которого *вдоль* берега, соотношение (103) на основании (98), в котором $2\sin\alpha\cos\alpha = 1$, обратится в

$$t_2 = \frac{\bar{\omega}^{-\frac{3}{2}} x^2}{g\nu^{1/2}}. \tag{104}$$

Задаваясь гипотетическим значением $\nu = 100$ *см*^{2}/*сек*, получаем, что в охваченной ураганом 200-километровой полосе уровень достигнет предельного наклона через 3 *часа*. Любопытно, что сама скорость ветра явным образом не входит в уравнение (104).

Уравнение это может оказаться весьма полезным для определения важного коэффициента турбулентной вязкости μ. Такого рода определения совершенно необходимо поставить в самом широком масштабе. К сожалению, наиболее слабым пунктом в (104) является присутствие величины x— ширины прибрежной полосы моря, охваченной ураганом; найти ее не всегда возможно (она может быть достаточно надежно найдена только при хорошо поставленной гидрометеорологической службе на плавающих судах и достаточно большом числе их в данном районе).

При весьма слабых ветрах уравнение (104) принимает новый вид

$$t_2 = \frac{2\bar{\omega}^2 x^2}{kGg} \text{ сек}. \tag{105}$$

При приведенных выше значениях k и G уравнение (105) дает для 200-километровой полосы промежуток времени, равный 12 *час*.

Для случая весьма *мелководного* моря также получается соотношение, определяющее искомый промежуток времени. Именно в этом случае на основании (81) оказывается, что

$$t_2 = \frac{\bar{\omega} x^2}{gH} \operatorname{tg}\beta \text{ сек}. \tag{106}$$

Здесь, как и в (104), явным образом не фигурирует сама скорость ветра. Особенно замечательно, что, в отличие от (104), она не входит сюда даже в скрытом виде, ибо величина μ, зависящая от скорости ветра, тут отсутствует. Для 200-километровой полосы при $H = 10$ *м* и $\beta = \pi/4$ промежуток времени оказывается равным 4,5 *часа*.

§ 11. Изучение дрейфовых течений в природных условиях

Как было уже не раз упомянуто, серьезным недостатком экмановской теории дрейфовых течений является косвенная связь между скоростью ветра и скоростью течения, им вызываемого. Остается, следовательно, искать эту связь путем *непосредственных измерений* в природных условиях.

Наибольшее число таких измерений производится на плавучих маяках, причем в некоторых случаях пункты наблюдения вполне достаточно удале-

ны от берега, для того чтобы можно было, хотя бы в первом приближении, отрешиться от его влияния на всю картину течений.

Впрочем, приходится все же пожалеть, что *глубины* моря почти во всех случаях невелики, а потому об исчерпывающем материале пока говорить рано.

Причина отсутствия вполне надежного материала для течений, возникающих в *глубоких* районах океана, совершенно очевидна: для выяснения полной картины течений в различных типичных случаях нельзя ограничиваться кратковременными наблюдениями. Для этого необходим весьма большой промежуток времени, в течение которого и ветер, и вызванные им движения воды успеют измениться в широких пределах. Однако как раз такого-то большого промежутка времени и не имеется в распоряжении глубоководных экспедиций. Вот почему в настоящее время приходится довольствоваться по большей части материалами, полученными на различных плавучих маяках. Что касается методов измерения самих скоростей течений в море, то мы здесь не будем на них останавливаться: чаще всего пользуются обычными поплавками, несколько реже — морскими вертушками [10, 11].

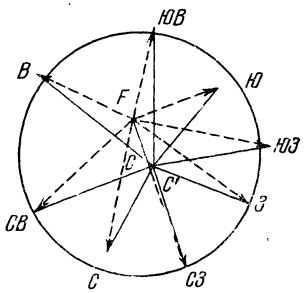


Рис. 19. Выделение остаточного течения

Наиболее существенным является вопрос о выделении *истинной* скорости чисто дрейфового течения, которое обычно всегда бывает несколько искажено благодаря присутствию более или менее сильного *остаточного* течения, сохранившегося от предыдущей фазы изменений ветра.

Простой и удобный метод отделения дрейфового течения от остаточного предложил Свердруп [12]. Прежде всего весь материал разбивается на группы, соответствующие более или менее одинаковым по *абсолютной величине* скоростям ветра. Затем скорости наблюдавшихся течений, соответствовавшие одной какой-либо абсолютной величине, но различным направлениям ветра, наносятся на *векторную* диаграмму так, чтобы начало всех векторов приходилось в одной точке. Достаточно выбрать восемь различных направлений, как это сделано было при построении диаграммы рис. 19.

Если бы все векторы, нанесенные на основании непосредственных измерений в море, действительно соответствовали *чисто* дрейфовым течениям, то, как легко убедиться, концы всех векторов лежали бы на окружности, центр которой совпадал бы с началом векторов. В действительности это не так. Проведя окружность, проходящую как можно ближе к концам всех векторов, заметим, что ее центр *C не* совпадает с началом векторов *F*. Следовательно, при обработке наблюдений необходимо будет учесть некоторое остаточное течение, скорость которого выражается отрезком *FC* (в том же масштабе, в котором были нанесены все остальные векторы).

Другой также весьма простой графический метод для определения величины и направления остаточного течения был предложен Пальменом [13]. Этот автор также наносит на векторную диаграмму скорости течений, наблюдавшихся при ветрах одной силы, но различных направлений. Если бы остаточное течение отсутствовало, то *результирующая* всех полученных векторов равнялась бы *нулю*. В действительности она равна некоторому определенному вектору, обозначенному на рис.19 буквами *FC'* и выражающему скорость остаточного течения.

Нетрудно видеть, что по обоим описанным способам получаются хорошо совпадающие результаты: векторы *FC* и *FC'* лежат весьма близко один к другому и мало отличаются по абсолютной величине.

На рис. 19, кроме наблюденных скоростей течений (пунктирные линии) и скорости остаточного течения, нанесены также *истинные* скорости дрейфовых течений (сплошные линии), которые получаются, очевидно, путем геометрического вычитания скорости остаточного течения из скорости наблюдаемого.

В случае весьма обширного материала наблюдений надобность в таких построениях отпадает, как это показал Н. Н.Струйский [14]. В этом случае, *средняя* скорость U_m, определяемая на основании очень большого числа N наблюдений, выражается равенством

$$U_m = \frac{\Sigma U}{N} + \frac{\Sigma R}{N}. \tag{107}$$

Здесь U — наблюденные скорости, а R — скорости остаточного течения. Но по мере возрастания числа N *вероятности* различных направлений остаточного течения все больше и больше выравниваются, а потому второй член суммы в правой части (107) непрерывно уменьшается, стремясь в пределе к *нулю*.

Вот почему при весьма большом числе наблюдений N можно полагать (как это делает Струйский), что скорость дрейфового течения, возбуждаемого ветром данной силы, равна *алгебраической сумме всех наблюденных скоростей течений*, совпадающих по направлению с течениями, вызываемыми действием данного ветра (или ему противоположными), *деленной на число этих наблюдений*.

Весьма замечательно, что определения скоростей дрейфовых течений, производившиеся большим числом авторов, приводят к одной и той же простой зависимости между *скоростью ветра* V и *скоростью* вызываемого им *дрейфового течения* U_0. Именно, оказывается, что

$$U_0 = \frac{n}{\sqrt{\sin\varphi}} V. \tag{108}$$

Если и скорость ветра, и скорость течения выражены в одних и тех же единицах — в метрах в секунду, то величина константы в формуле (108) в среднем, по данным Струйского и других авторов, может быть принята равной $n = 0{,}0127$.

Итак, *скорость дрейфового течения прямо пропорциональна скорости ветра*. Но если это так, то на основании (47) следует ожидать зависимости между скоростью ветра и коэффициентом турбулентной вязкости (см. стр. 8), или, что то же самое, зависимости между *глубиной трения* и *скоростью ветра*.

На основании большого числа наблюдений полагают, что зависимость эта такова:

$$D = \frac{7{,}6V}{\sqrt{\sin\varphi}}. \tag{109}$$

Это чисто эмпирическое соотношение может оказаться весьма полезным для ориентировочного определения величины D, играющей громадную роль в теории морских течений. Но, разумеется, о точности подобного вычисления пока говорить еще преждевременно.

Пользуясь формулами (108) и (109), можно получить еще одно интересное соотношение: между поверхностной скоростью U_0 дрейфового течения и глубиной трения. Исключая из (108) и (109) скорость ветра V, найдем

$$D = 600U_0. \tag{110}$$

В § 24 мы еще вернемся к связи между D и U_0 и найдем вместо 600 более точное числовое значение коэффициента.

§ 12. Методика исследования сгонно-нагонного режима в природных условиях

Как мы только что видели, наблюдения над течениями, производимые на плавучих маяках, дают возможность эмпирически вычислять чрезвычайно важные константы, определяющие собой элементы дрейфового течения. Значительно сложнее обстоит дело с теми движениями вод, которые возникают в непосредственном соседстве с береговой чертой; здесь, в полосе, охваченной сгонно-нагонными явлениями, чисто теоретический анализ процессов возможен только в крайне ограниченном числе случаев: когда можно сильно упростить граничные условия.

Среди упрощающих допущений, которые в подобных случаях вносятся, наиболее существенным является предположение о *постоянстве глубины* в непосредственной близости *от отвесной береговой стенки*. Но совершенно очевидно, что подобные простые условия обычно не выполняются в природе: чаще глубины уменьшаются плавно и постепенно по мере приближения к берегу. Особенно осложняется задача в тех случаях, когда скорость и направление ветра *меняются*, когда, следовательно, имеет место *неустановившийся гидродинамический режим* в прибрежной зоне моря.

А между тем именно эти вопросы, именно эти сложные явления и приобретают в настоящее время все больший и больший интерес как с теоретической стороны (применительно к гидрологии прибрежной зоны), так и с прикладной (применительно к проблемам хода рыбы во время резких изменений температуры воды, к проблемам падения уровня при сгонах, опасного для навигации в прибрежной полосе, к проблемам режима медицинских пляжей и пр.).

Необходимо, следовательно, создать такую методику изучения сгонно-нагонных явлений, которая позволила бы обойти трудности чисто математического анализа и привела бы к цели *косвенным* путем. Подобная методика разработана *В. В. Шулейкиным* и дала уже некоторые совершенно определенные результаты.

Исследование динамики сгонов и нагонов расчленяется на несколько отдельных этапов, связанных между собой. Прежде всего, вспоминая § 10, и, в частности, формулу (90), нетрудно прийти к заключению, что глубинное течение, возникающее у берега, неразрывно связано с поверхностным дрейфовым. Скорость этого глубинного течения G оказывается прямо пропорциональной скорости чисто дрейфового течения U_0, которое возникло бы в *открытом море* под действием того же ветра. Но, с другой стороны, сама скорость дрейфа U_0 [см. формулу (108)] оказывается пропорциональной скорости ветра. Следовательно, объединив формулы (90) и (108) и подставив в последнюю из них числовое значение эмпирической константы $A = 0{,}0127$, можно полагать, что

$$G = \frac{0{,}018}{\sqrt{\sin\varphi}} V \cos\beta. \qquad (111)$$

В конечном счете, как видим, скорость глубинного течения является *прямо пропорциональной проекции скорости ветра на касательную к береговой черте* (иными словами, тангенциальной слагающей ветра) [1]. Количество воды, перенесенное глубинным течением за некоторый промежуток времени, должно быть поэтому прямо пропорциональным *тангенциальной слагающей воздушного потока*, проносящегося над береговой полосой в тот же промежуток времени.

Необходимо, следовательно, прежде всего зарегистрировать эту слагающую воздушного потока, которую можно рассматривать как *аргумент* исследуемых функций.

[1] В частном случае, для широты $\varphi = 45°$, формула (111) принимает вид $G = 0{,}0254\ V \cos\beta$.

Прибор для ее регистрации был сконструирован *В. В. Шулейкиным* [15]. На рис. 20 представлен внешний вид прибора, а на рис. 21 — его устройство. Запись производится на бумажной ленте, которая сматывается с ролика, надеваемого на ось A, и тянется валиком B, снабженным по концам зубчиками (зубчики входят в отверстия перфорированной ленты и служат для точного ее перемещения). В приборе нет никаких часовых механизмов. Движение валика B производится посредством червячной передачи от оси C. В свою очередь ось C, на которой сидит стрелка нижнего счетчика D, видного на рисунках, приводится в движение электромагнитом. Последний при каждом замыкании тока передвигает на один зубец зубчатое колесо F, сидящее на оси C. Электрический ток замыкается обычным контактным приспособлением анемометра с робинзоновым крестом, а потому прибор может быть приспособлен к любой анемометрической установке с электрической передачей. При таком устройстве, очевидно, скорость вращения валика B, а стало быть, и скорость движения бумажной ленты должны быть пропорциональными скорости ветра.

Но для определения потока воздуха по направлению касательной к береговой черте необходимо на той же ленте записать изменения косинуса угла между касательной и скоростью ветра. Для других целей, о которых будет речь в гл. IV, для исследования в области *термики моря* регистрируются также потоки по направлению *нормали* к береговой черте. Для этого требуется записывать на ленте изменения синуса угла между касательной и скоростью ветра, или, что то же самое, косинуса угла между нормалью и скоростью ветра.

Запись обеих тригонометрических функций производится двумя перьями G и H, которые соединены с несложным механизмом, видным на рис. 21. Основной частью этого механизма является диск L, закрепленный под некоторым постоянным углом к оси K. Сама ось K сочленена посредством конической зубчатой передачи с флюгером Салейрона, установленным над крышей станции, и вращение ее в точности следует за вращением флюгера.

На диск L опираются ролики двух ползунов M и E, скользящих по горизонтальным направляющим (они прижимаются к диску нитями с грузами P и S); можно легко доказать, что перемещение одного ползуна пропорционально косинусу угла, на который флюгер отклонится от нормали к береговой черте, а перемещение другого — синусу того же угла. Другими словами, перья G и H, связанные жестко с ползунами, должны в некотором масштабе записывать значения синуса и косинуса при всех положениях флюгера.

Вспомнив, что скорость перемещения бумажной ленты пропорциональна скорости ветра, нетрудно истолковать смысл к р и в ы х, вычерчиваемых обоими перьями. Ведь элемент площади, заключенной между каждой из этих кривых и нулевой линией, оказывается пропорциональным следующим величинам:

$$dS_1 = aV \cos\beta\, dt,$$

$$dS_2 = aV \sin\beta\, dt.$$

Следовательно, сами площади, отсеченные нулевой линией, представляют не что иное, как величины нормальной и тангенциальной составляющих воздушного потока через береговую черту за истекший промежуток времени $t_2 - t_1$, считая на единицу поверхности. Именно

$$S_1 = a \int_{t_1}^{t_2} V \cos\beta\, dt = aQ_t,$$

$$S_2 = a \int_{t_1}^{t_2} V \sin\beta\, dt = aQ_n.$$

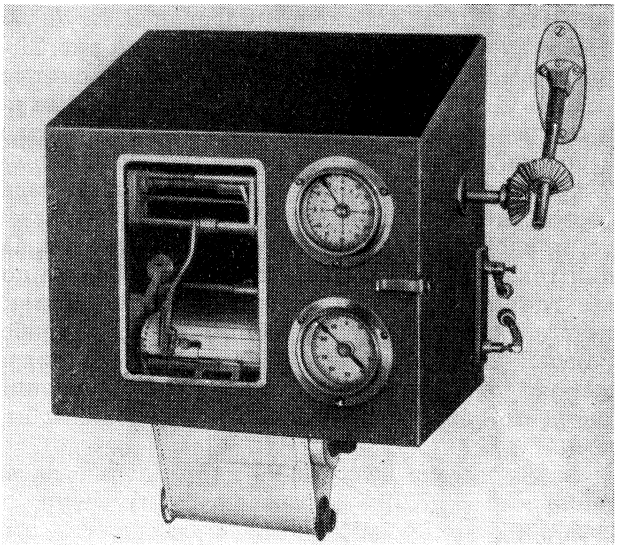


Рис. 20. Внешний вид анемоинтегратора

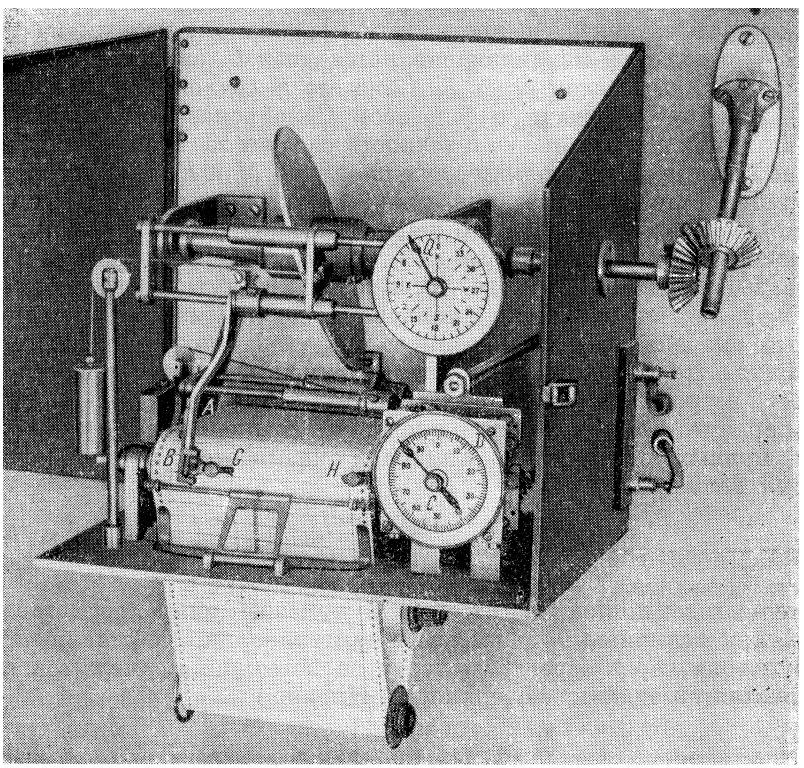


Рис. 21. Внутреннее устройство анемоинтегратора

Этот промежуток времени может быть выбран равным суткам или половине суток — останется только отрезать вытравленный кусок ленты. Для удобства прибор снабжен приспособлением, которое регистрирует на ленте моменты времени через 1 *час*. Для этого служит печатка, прижимаемая к бумаге электромагнитом. Контактное приспособление, замыкающее ток через 1 *час* или через 0,5 *часа*, легко пристроить к любым обыкновенным часам. Это приспособление для достижения основной цели не обязательно, но оно позволяет получать регистрацию не только воздушного потока, но и средних скоростей ветра (за часовые или получасовые промежутки времени). Для определения мгновенных значений скорости ветра (поскольку можно говорить о мгновенной скорости, даваемой крестом Робинзона с электрической передачей) служит счетчик D, о котором уже упоминалось выше.

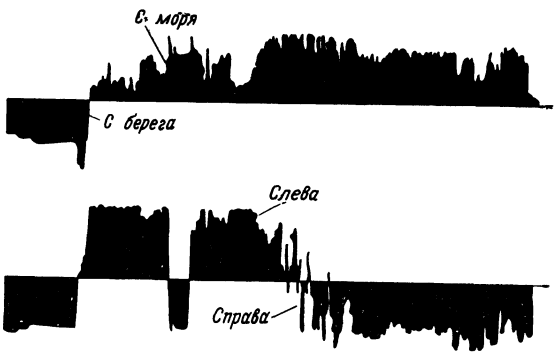


Рис. 22. Запись анемоинтегратора

«Мгновенное» направление ветра показывает стрелка указателя Q, расположенного над счетчиком D.

На рис. 22 воспроизведена запись прибора, сделанная в течение одних суток. Для наглядности площади между кривыми и нулевыми линиями залиты тушью. Верхняя часть рисунка представляет *нормальную слагающую* воздушного потока: площадь, лежащая над осью абсцисс, в некотором масштабе дает количество воздуха, прошедшего через «ворота» размером 1 $м^2$ в направлении с моря на берег; площадь же, лежащая под осью абсцисс, выражает количество воздуха, прошедшего в обратном направлении — с берега на море.

Нижняя часть рисунка дает *тангенциальную слагающую* воздушного потока, которая нам сейчас нужна. Площадь, находящаяся *над* осью абсцисс, выражает в прежнем масштабе количество воздуха, прошедшего сквозь 1 $м^2$ в направлении слева направо, если смотреть с берега на море. Площадь же *под* осью абсцисс выражает количество воздуха, прошедшего в обратном направлении — справа налево. Первый случай (ветер слева), как помним, соответствует *нагону*, а второй (ветер справа) — *сгону* вод.

Только что описанный прибор, который можно назвать *анемоинтегратором*, позволяет, следовательно, непрерывно регистрировать количество воздуха, проносящегося через береговую черту как в направлении касательной, так и в направлении нормали. В данном случае, как было упомянуто, нас интересует *тангенциальная* слагающая, которая играет роль *аргумента*, определяющего собой весь динамический режим прибрежной полосы.

Следующим этапом к изучению этого режима должна явиться регистрация движения самих *водных масс*. Непосредственная запись движения воды в береговой полосе чрезвычайно затруднена тем, что приборы для измерения скоростей течения легко могут быть разрушены прибоем. Но и по-

мимо этого, при изучении сгонов и нагонов записью скоростей течения нельзя было бы ограничиться, так как подобная запись совершенно *обезличила* бы воду, прошедшую через приборы: оставалось бы неизвестным, *какая* вода, с *какого* горизонта, с *какого* примерно расстояния от берега пошла к береговой черте.

Между тем нет ничего проще, как поставить регистрацию именно таких элементов, которые дали бы полную характеристику проходящей воды. А элементами этими являются, с одной стороны, *температура*, а с другой — *соленость* морской воды.

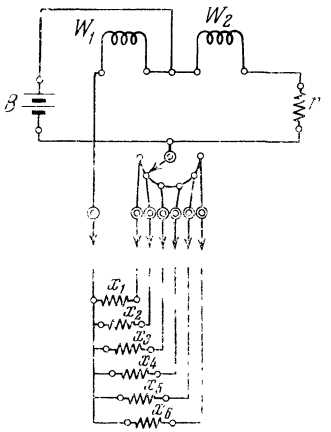


Рис. 23. Мультитермограф. Электрическая схема

Для измерения температур и для регистрации их на расстоянии применяются термометры сопротивления, соединенные подводным кабелем и затем воздушной проводкой с так называемым *мультитермографом*, или логометром. Термометры представляют собой обмотку из тонкой железной проволоки, наложенную на изолирующий стержень и покрытую снаружи водонепроницаемой оболочкой. Так как внешний слой этой оболочки свинцовый, то оставлять его без защиты от ударов нельзя. В качестве защиты пригодны длинные железные трубы. Кабели от всех термометров входят в распределительную будку, из которой дальше следуют провода, идущие на станцию. Там они присоединяются к *мультитермографу*, электрическая схема которого изображена на рис. 23. Это — особого рода гальванограф (логометр) с двойной катушкой, так называемой *крестовидной* катушкой.

Обе обмотки такой двойной катушки W_1 и W_2 закреплены на оси таким образом, что составляют постоянный угол одна с другой (рис. 24). Когда в системе электрический ток отсутствует, то они находятся в безразличном равновесии, так как, в отличие от обычных гальванометров, никаких спиральных пружин для установки на нуль в приборе нет. Но как только в катушках возникает ток, система автоматически устанавливается в совершенно определенном положении, причем положение это зависит от соотношения сил токов в той и другой обмотках. Действительно, магнитный поток F_1, создаваемый первой обмоткой, пропорционален силе тока в ее витках. Совершенно так же магнитный ток F_2, вызываемый второй обмоткой, должен быть пропорционален силе тока, проходящего по ее витком. Вот почему положение равнодействующей F, равной геометрической сумме F_1 и F_2, всецело обусловлено *отношением сил токов* в обеих обмотках, но не самими силами токов в них.

Совершенно очевидно, что всякий раз система будет устанавливаться в поле постоянного магнита таким образом, чтобы равнодействующая F совпадала с направлением магнитных силовых линий СЮ (рис. 24). Через одну из них (W_2) проходит ток от батареи B по ветви, заключающей в себе *постоянное* сопротивление. Оно обозначено на рис. 23 буквой r.

Сквозь обмотку W_1 идет ток, проходящий через один из термометров сопротивления x. При повышении температуры сопротивление последнего увеличивается, а благодаря этому сила тока во второй обмотке падает. Но, следовательно, должна уменьшиться слагающая F_1 магнитного потока, а результирующий магнитный поток F должен изменить свое направление, как это схематически представлено на рис. 24 (пунктиром).

В результате крестовидная катушка должна, очевидно, повернуться на такой угол, чтобы с внешним магнитным полем совпала новая равнодействующая магнитного поля обмоток. Поворот системы отмечается поворотом

стрелки, сидящей на общей оси с катушкой, как это видно на рис. 25, на котором катушка обозначена буквами Sp, а стрелка — буквой Z_1.

Шкала прибора Sk, по которой перемещается стрелка, разделена непосредственно на градусы, так что отсчет температуры чрезвычайно удобен. Но прибор, как было отмечено, не только показывает, но и регистрирует температуры на бумажной ленте L, перематываемой с катушки G на барабан V. Достигается это следующим образом.

Между бумагой и стрелкой находится одна из цветных лент (подобная ленте пишущей машины), а шкала Sk, расположенная над стрелкой Z_1, устроена так, что через каждые 30 *сек* она падает вниз и прижимает стрелку к ленте, ленту к бумаге, а бумагу к острому краю P_1 рамы P. После такого удара на бумаге отпечатывается цветная точка. Ударив по стрелке, шкала вновь поднимается часовым механизмом, причем в то же время коммутатор Y переключает прибор на цепь другого термометра, а обойма E подводит под стрелку ленту иного цвета. В результате на бумажной ленте, которую тянет ролик V, приводимый в движение часовым механизмом U, отпечатываются *шесть* разноцветных пунктирных кривых, из которых каждая соответствует совершенно определенной цепи (термометра сопротивления или, как увидим ниже, иного приемного прибора).

Следует отметить, что все кривые отнесены к ортогональной *прямолинейной* системе координат, так как удары по бумаге происходят всегда в точках, лежащих на *одной прямой* (они расположены вдоль ребра рамы P).

Разумеется, необходимо предварительно выверить прибор и исключить погрешности, которые могло бы внести сопротивление внешних проводов и кабеля. Для этого показания прибора сличаются с показаниями водяных термометров, и возможные отклонения компенсируются дополнительными сопротивлениями, вводимыми в каждую отдельную цепь. Кроме них в приборе имеется общее компенсирующее сопротивление r_1, поставленное на случай общего удлинения или укорочения линии проводов.

Далее (см. гл. IV) будет описан прибор, который обладает известными преимуществами по сравнению с мультитермографом,— электронный потенциометр. Он не нуждается в точной установке на щите, по отвесу, а потому не нуждается в карданове подвесе на корабле. С другой стороны, электронный потенциометр в некоторых отношениях уступает мультитермографу — прежде всего в простоте и надежности конструкции.

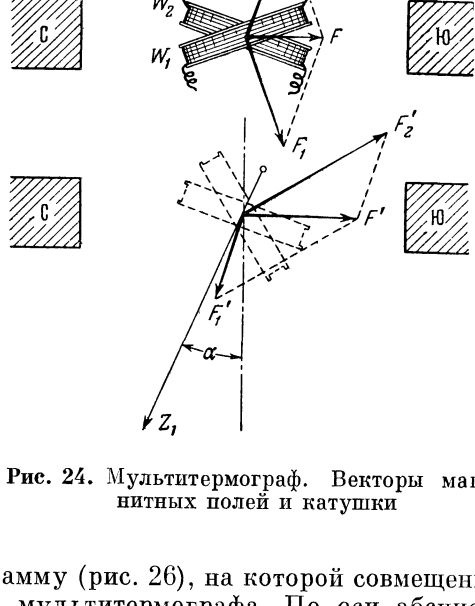


Рис. 24. Мультитермограф. Векторы магнитных полей и катушки

В качестве примера приведем диаграмму (рис. 26), на которой совмещены и запись анемоинтегратора, и запись мультитермографа. По оси абсцисс здесь отложено не время, а путь, пройденный частицами воздуха. Площадь кривой Q_t выражает проекции воздушного потока на касательную к береговой черте, а площадь кривой Q_n — на нормаль к ней. Кривая ϑ представляет изменение температуры поверхностной воды. Как видим, по мере продвижения слева направо, т. е. по мере нарастания площади, расположенной ниже оси абсцисс кривой Q_t, температура непрерывно падает — идет сильный *сгон*

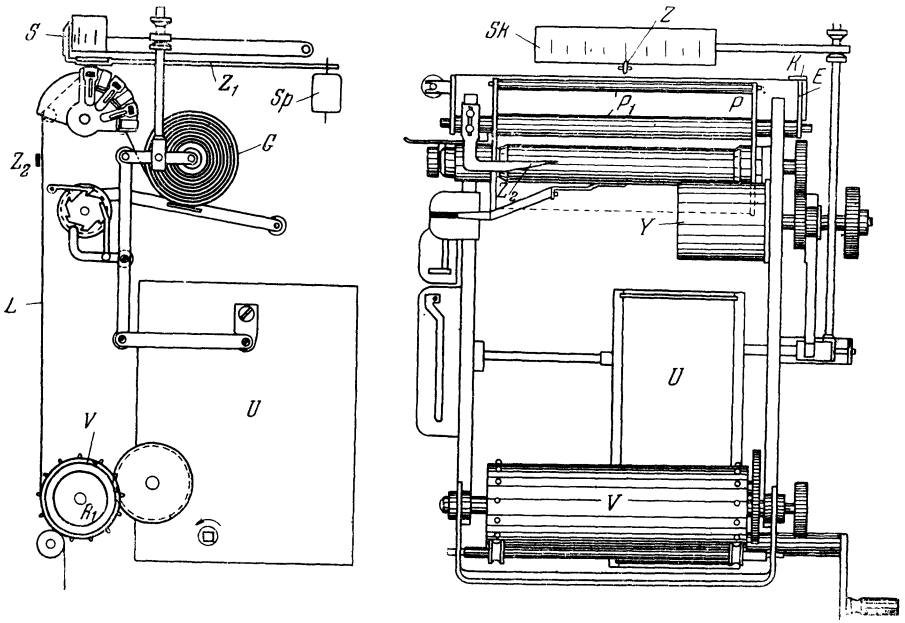


Рис. 25. Общее устройство мультитермографа

воды. Но стоит только появиться нагонной слагающей — площади, расположенной над осью абсцисс,— как тотчас же температура повышается.

Что касается нормальной составляющей воздушного потока, то она, как видно на рис. 26, совершенно не сказывается на возрастании температурной кривой, что находится в полном согласии с теорией и, в частности, с формулой (111).

На рис. 27 результаты той же записи изображены несколько иначе. Кривая ϑ^0 представляет изменение температуры во времени; время отложено по оси абсцисс; кривая Q_l выражает нарастание воздушной массы, прошедшей вдоль береговой черты (сквозь 1 $м^2$), причем направление движения считается отрицательным в направлении *сгона*. Появление нагонных слагающих приводит к уменьшению ординат кривой Q_l (*отсчитываемых от верхнего края диаграммы*), так как некоторые массы воздуха уходят в *положительную* сторону. Этот рисунок, дополняющий рис. 26, также отчетливо показывает, как изменяется температура в зависимости от сгонно-нагонного режима.

Следует отметить чрезвычайно типичный вид температурной кривой на тех участках, где наблюдается *неустановившийся* режим. Это — характерная кривая «охлаждения» и «нагревания», находящаяся в полном согласии с уравнениями типа (94).

Как видим, сопоставление записей воздушных потоков и температур воды дает хороший материал для изучения сгонно-нагонных явлений. Но материал этот будет еще более полным и ценным, если мы сумеем зарегистрировать изменения *солености* воды; тогда станет совершенно ясным *происхождение* этой воды — место, откуда она пришла под действием прибрежной циркуляции: достаточно только проследить на гидрологическом разрезе местоположение слоев, характеризуемых данной температурой и данной соленостью.

Было предложено несколько методов регистрации солености на ходу судна, в том числе и метод, описанный в предыдущем издании этой книги. Но все эти методы оказались недостаточно надежными при длительной проверке их в экспедиционных условиях. По всей вероятности, наилучшие результаты даст чрезвычайно остроумный метод, предложенный В. И. Лопатниковым

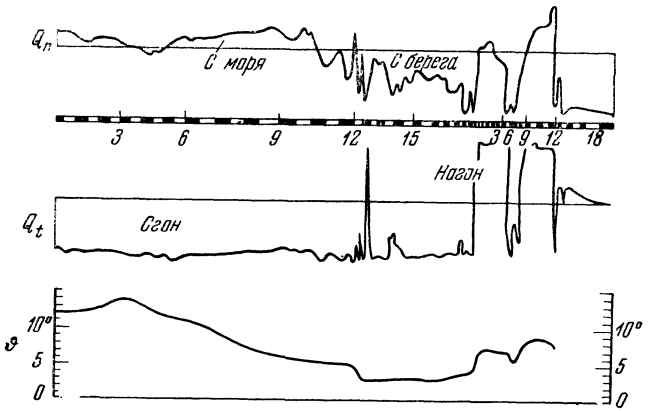


Рис. 26. Сгонный поток и падение температуры

[16]. Приоритет этого автора от 31 июля 1956 г. закреплен авторским свидетельством в 1957 г. Опишем его, следуя изложению В. И. Лопатникова в его журнальной статье [17].

Метод основан на применении раздельных замкнутых магнитопроводов, на возбуждении индуцированных токов в морской воде и их регистрации. Магнитопроводы обладают обмотками, образующими соленоиды. Один из

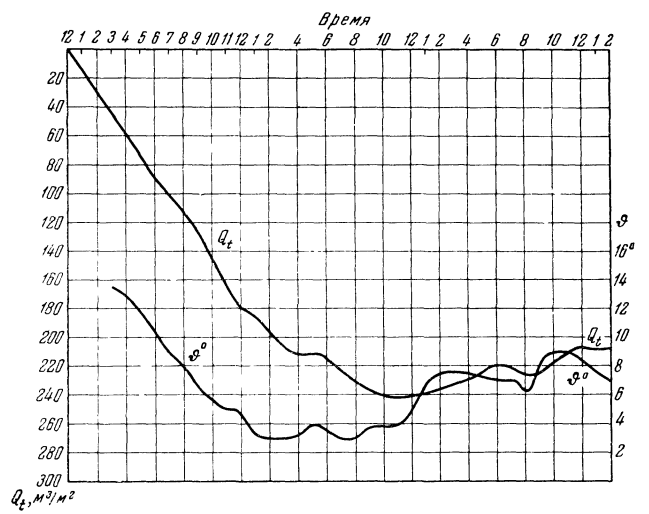


Рис. 27. Изменения во времени

соленоидов подключен к генератору переменного тока, а другой — к усилителю. Чтобы устранить связь между соленоидами через емкость и индуктивность рассеяния, магнитопроводы взяты в форме колец, а обмотки их и подводящие провода электростатически экранированы. Несмотря на это, была обнаружена слабая индуктивная связь между соленоидами, которую удалось устранить, повернув один из соленоидов вокруг их общей оси. На рис. 28 изображен схематический разрез установки.

Замкнутый стеклянный сосуд *1* содержит морскую воду, которая может оставаться неподвижной, но может и протекать сквозь сосуд, поступая из-за

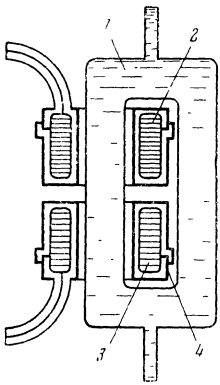


Рис. 28. Схематический разрез прибора В. И. Лопатникова

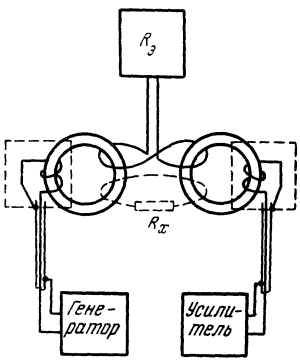


Рис. 29. Схема компенсации магнитных полей (по В. И. Лопатникову)

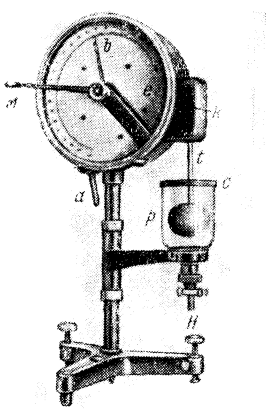


Рис. 30. Микровесы для определения плотности и солености

борта через один из патрубков, видных на схеме, и уходя через второй. Сосуд охватывается двумя кольцевыми соленоидами с подразделенными сердечниками из пермаллоя *2*, *3*. Обмотки наложены в один слой и заключены в электростатические экраны *4*. Первый кольцевой магнитопровод возбуждает электрический ток в воде внутри сосуда, а этот ток в свою очередь возбуждает магнитное поле во втором кольце и связанный с ним ток в обмотке второго соленоида. Тем самым обеспечивается применение любых усилительных систем, не перегруженных воздействием самого первичного поля, а реагирующих лишь на ток в сосуде, который полностью зависит от *электропроводности* морской воды. При частоте питания первичной схемы, равной 1 *кгц*, и применении резонансного усилителя автору метода удавалось оценивать качество дистиллированной воды, вносимой в сосуд. С повышением частоты до 10 *кгц* и заменой пермаллоевых сердечников ферритовыми ($\mu = 1000$) чувствительность прибора становилась еще более высокой. Она выражалась формулой

$$E_0 = \frac{\mu^2 n_1 n_2 S_1^2 \omega^2 I_0 \sigma S_2}{l_1^2 l_2}.$$

Здесь E_0 — э. д. с. в соленоиде, связанном с усилителем; μ — магнитная проницаемость сердечников; n_1, n_2 — числа витков соленоидов; S_1 — площадь поперечного сечения сердечников; l_1 — длина магнитных силовых линий; σ — удельная электропроводность воды; S_2 — поперечное сечение стеклянного сосуда; l_2—длина линий тока в нем. Все величины выражены в практической системе единиц.

Для осуществления компенсационного способа измерений на магнитопровод наматывается дополнительный проводник, замкнутый на магазин сопротивлений $R_э$, как изображено на рис. 29. На том же рисунке весь стеклянный прибор схематически обозначен пунктиром с отметкой R_x. Контур с магазином сопротивлений $R_э$ и контур R_x создают магнитные потоки противоположного направления в сердечнике соленоида, подключенного к усилителю. Если подобрать сопротивления в $R_э$ так, чтобы усилитель-индикатор показал *нуль*, т. е. полную компенсацию, то при всех прочих равных условиях это будет означать равенство сопротивлений $R_э$ и R_x. Разумеется, для определения удельной электропроводности воды в сосуде необходимо предварительно произвести калибровку прибора стандартным раствором.

Замечательным свойством метода В. И. Лопатникова является отсутствие каких-либо электродов в измерительной цепи, а следовательно, и связанных с электродами погрешностей при измерениях.

Какие бы самописцы ни работали по регистрации той или иной величины, показания их должны непрерывно контролироваться путем достаточно надежных непосредственных измерений, производимых в нормальные установленные сроки. С большим удобством и достаточно надежно измерение солености морской воды производится аппаратом, предложенным В. В. Шулейкиным и представляющим собой соединение ареометра постоянного объема (полного погружения) с точными торзионными микровесами.

Общий вид установки изображен на рис. 30. Шарик *р* с весьма малой отрицательной плавучестью подвешен на тонкой платиновой нити к навесочному крючочку микровесов, скрытому внутри защитного кожушка *к*. В нерабочем состоянии этот шарик покоится на трех остриях, установленных на дне порожнего стеклянного сосуда *с*, а стало быть, не нагружает нить. В таком состоянии прибор можно переносить с места на место, не рискуя оборвать нить.

Проба воды, предназначенная для исследования, вводится в сосуд и разгружает наибольшую часть веса шарика. После этого освобождается арретир весов *а*, и поворотом рычажка *м* пружина торзионных микровесов начинает натягиваться. Движение этого рычажка против часовой стрелки прекращают в тот момент, когда указатель равновесия *е* встанет на отметку. В этот момент шарик окажется полностью уравновешенным в воде посредством натяжения пружины микровесов. Сила натяжения пружины в свою очередь определяется по непосредственному отсчету деления шкалы, на котором остановился указатель *b* рычажка *м*. Вся шкала рассчитана на диапазон в 500 *мг*. Каждое деление шкалы соответствует нагрузке в 1 *мг*.

Микровесы, использованные нами для работы, так называемые торзионные весы ЭМИБ, изготовлены в мастерских при Киевском институте биологии и патологии. Работают они четко и дают совершенно однозначные показания при нескольких повторных измерениях.

Для перехода от полученного деления шкалы к значению плотности служит градуировочная кривая, которую снимают раз навсегда применительно к данному размеру шарика и его весу. Проще всего градуировать прибор, пользуясь *нормальной водой*.

Расчет всей установки элементарно прост. Совершенно очевидно, что наивыгоднейший объем V шарика *р* связан с диапазоном плотностей, в котором придется работать. Пусть наибольшая возможная плотность морской воды в данном районе равна δ_1, а наименьшая δ_2. Тогда, помня, что шкала охватывает 500 *мг*, или 0,5 *г*, найдем

$$V = \frac{0{,}5}{\delta_1 - \delta_2}\ см^3.$$

Полость шарика должна быть загружена настолько, чтобы полная масса шарика с грузом оказалась равной $m = \delta_1 V$.

Для наибольшей надежности следует поверхность шарика платинировать. Однако можно пользоваться и хромированными и стеклянными шариками. Разумеется, после смены неисправного шарика необходимо заново проградуировать установку. Опыт показал, что никаких неполадок от этой системы ожидать нельзя: она добросовестно работает 3 раза в день в продолжение длительного срока. Полезно промывать сосуд *с* после работы пресной водой, спуская ее через кран *Н*.

Точность измерения плотности зависит от диапазона плотностей в данном районе. Так, например, если максимальная возможная плотность отличается от минимальной возможной на 0,01, то, очевидно, этому диапазону соответствуют все 500 делений шкалы микровесов. Следовательно, каждое деление их соответствует изменению плотности на 0,00002. Это — точность, более чем достаточная для обычной гидрологической практики.

Для определения *солености* морской воды, по измеренной плотности ее, пользуются отсчетом *температуры* воды по термометру t, опущенному в сосуд c. С этой температурой и с плотностью, определенной на установке рис. 30, входят в океанографические таблицы или на диаграмму. Словом, поступают так же, как при обычном ареометрировании. Точность определения солености тоже обусловлена диапазоном колебания солености в районе, для которого предназначена установка. Так, например, если соленость там колеблется в пределах $4^0/_{00}$, то измерение солености может производиться с точностью до $0{,}008^0/_{00}$. Эта точность также более чем достаточна для гидрологических работ. Весь процесс определения солености и плотности занимает гораздо меньше времени, чем обычное ареометрирование или титрование.

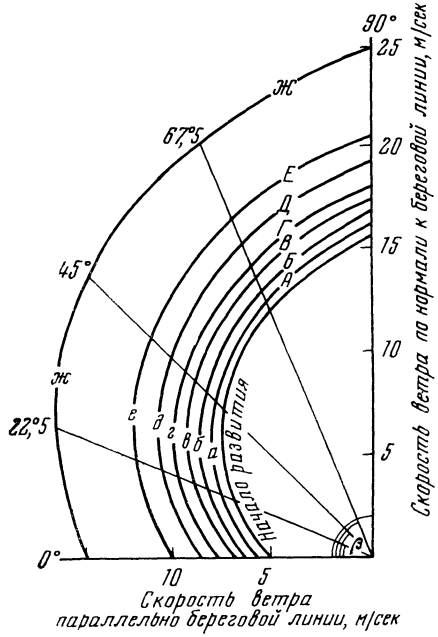


Рис. 31. Номограмма Ю. Г. Рыжкова для расчета сгонных эффектов

Наблюдения над изменениями температуры поверхностной воды летом и над изменениями солености в любое время года позволяют судить о том, какую воду поднял сгон на поверхность, с какой глубины она пришла.

Подобные же наблюдения, проделанные с судна на различных расстояниях от береговой черты, дают возможность определить, на какое расстояние от берега согнана теплая вода, существовавшая летом у самого берега до наступления сгона, на какое расстояние согнана поверхностная сравнительно менее соленая вода.

Такие исследования на судах проводил Ю. Г. Рыжков как на Черном море, так и в различных районах Мирового океана: у Сомалийского побережья в Индийском океане, в районе сгонного Бенгельского течения, аналогичного течения у мыса Игольного, в районе Канарского течения у западных берегов Африки, где также резко выражен сгон. Рыжков обнаружил, что, во-первых, сгонный режим всюду хорошо вяжется с теоретической диаграммой рис. 16, освещающей зависимость глубинного течения от угла между направлением ветра и направлением береговой черты; во-вторых, глубина, с которой поднята вода, вышедшая на поверхность моря у самого берега, пропорциональна расстоянию, на которое согнана в открытое море поверхностная вода. И та и другая величины тесно связаны со скоростью ветра и направлением его относительно береговой черты [18].

На рис. 31 приведена диаграмма, заимствованная из цитированной статьи Ю. Г. Рыжкова. По ней можно рассчитывать подъем глубинных вод и дальность сгона поверхностной воды, если заданы скорость установившегося ветра и его направление относительно береговой линии. Здесь вдоль береговой черты и вдоль нормали к ней отложены скорости ветра в одном масштабе. В том же масштабе следует их откладывать и в иных направлениях (при том или ином направлении ветра). На номограмме за внешней кривой проставлены цифры, которые указывают эти направления в градусах, отсчитываемых от береговой черты: 0°; 22,5; 45; 67,5 и 90°. Разумеется, легко нанести и промежуточные направления

Кривые на рис. 31 позволяют определять графически и глубину, с которой поднята вода на поверхность, и дальность отгона поверхностной воды

в открытое море. Именно самая внутренняя кривая соответствует началу развития сгона, который только лишь начинает сказываться при скорости ветра 5 *м/сек*, направленной вдоль берега, при скорости 7 *м/сек*, направленной под углом 22°,5 к берегу, при скорости 10 *м/сек*, направленной под углом 45°, или при скорости 16 *м/сек*, направленной по нормали к береговой черте.

Кривая *аА* отвечает подъему глубинных вод на 5 *м* и сгону поверхностных вод на 1 милю; кривая *бБ* — подъему глубинных вод на 10 *м* и сгону поверхностных вод на 2 мили; кривая *вВ* — подъему глубинных вод на 15 *м* и сгону поверхностных вод на 3 мили; кривая *гГ* — подъему глубинных вод на 20 *м* и сгону поверхностных вод на 4 мили; кривая *дД* — подъему глубинных вод на 25 *м* и сгону поверхностных вод на 5 миль; кривая *еЕ* — подъему глубинных вод на 30 *м* и сгону поверхностных вод на 6 миль; кривая *жЖ* — подъему глубинных вод на 35 *м* и сгону поверхностной воды на 7 миль в открытое море.

Пусть, например, требуется определить, какие сгонные явления произойдут при достаточно долгой работе ветра, направление которого составляет угол 56° с береговой чертой, а скорость равна 16 *м/сек*? Найдя на рис. 31 направление, составляющее заданный угол с горизонтальной осью диаграммы, и отложив на нем в масштабе чертежа заданную скорость ветра, увидим, что найденная точка легла между кривыми *дД* и *еЕ* приблизительно посредине. Значит, надо ожидать, что будут подняты на поверхность воды с глубины около 27—28 *м*, а поверхностная вода будет отогнана примерно на 5,5 миль от берега. Если известны температура и соленость вод на глубине 27—28 *м* до сгона, то можно судить, какие условия окажутся на поверхности моря после исследуемого сгона.

Таким образом, в частности, можно предвидеть, что в прибрежной полосе возникнет туман, если температура поднятой воды будет достаточно низка, а воздух близок к состоянию насыщения водяным паром. Можно будет предвидеть, что у берега создадутся благоприятные условия для лова тех или иных видов холоднолюбивых рыб и, наоборот, теплолюбивые рыбы будут спасаться от похолодания, стремиться к берегу и даже выбрасываться на гальку.

Номограмма рис. 31 построена для определенных характеристик воды, уществующей в данном море; в иных морях могут быть и иные условия устойчивого равновесия вод, а следовательно, иные масштабы сгонных явлений. В частности, в Атлантическом океане, у западного побережья Африки, летом существует постоянный сгон вод в районе Канарского течения. Там в этом сезоне работает очень устойчивый муссон (см. гл. V, § 23), направленный с севера на юг. Он поднимает воды с глубины около 60 *м*, а поверхностную воду сгоняет почти на 100 миль в открытый океан. В то время как в открытом океане, на той же широте, температура поверхностной воды достигает 27—28°, у берегов она едва доходит до 15—16°, несмотря на непосредственное соседство раскаленного побережья.

В полном согласии с замечаниями Рыжкова в этом типичном сгонном районе очень часто залегает туман над холодной водой, которая оказывается «пришелицей» снизу. Эта «пришелица» всегда мутная из-за большого количества посторонних взвешенных частиц — ила, продуктов разложения, поднятых с глубин, иногда с самого дна океана. Поверхность океана здесь зеленоватая, а не синяя, как в открытом океане (см. гл. VI, § 9). Обилие веществ, пригодных для питания обитателей океана, привлекает сюда большие косяки рыб. Отовсюду, даже из далекой Японии, в эти районы устремляются рыбопромышленные флотилии.

К сожалению, схема расчета сгонно-нагонных процессов далеко не всегда так проста, как представлялось еще лет 10 тому назад. В некоторых частных случаях эти процессы настолько осложняются, что оказываются недоступными для полного количественного анализа.

Самое большое (и часто наступающее) осложнение создает *перенос водных масс поверхностными волнами* (см. гл. III, § 35). В старых теориях так называемых трохоидальных волн отсутствовало какое-либо упоминание об этом явлении (считалось, что водные частицы на волне движутся по совершенно замкнутым орбитам); в действительности на это движение налагается еще некоторая *поступательная* составляющая, направленная в сторону движения волн. В гл. III будет рассмотрено влияние подобной составляющей на сгонно-нагонные явлении в различных конкретных условиях.

Второе осложнение создается там, где береговой склон обладает *изломами профиля*. Вместо простой картины, описываемой уравнениями В. Экмана в применении к дрейфовым и градиентным составляющим, возникает картина значительно более сложная. О ней будет речь в следующем параграфе.

§ 13. Возникновение вихрей с горизонтальными осями над изломом профиля дна

Теория сгонно-нагонных явлений, построенная В. Экманом, рассматривает только горизонтальные составляющие скоростей течений, возникающих близ берега под действием дрейфа и градиента давлений. Берег предполагается отвесным или настолько крутым, что в исследуемом прибрежном районе можно не считаться с изменением глубин, вообще говоря конечных, и с вертикальными составляющими скоростей течений.

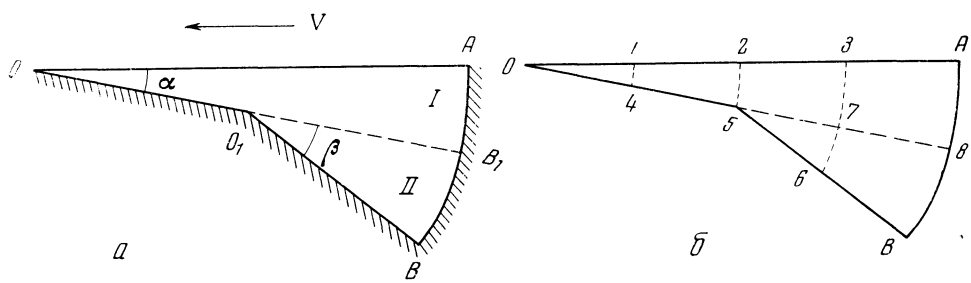


Рис. 32. Схема бассейна с изломом дна

Очень большой интерес представляет прибрежная циркуляция в случае *пологого* берегового склона и, в частности, берегового склона с *изломом* профиля на некотором конечном расстоянии от уреза воды. По инициативе А. А. Дмитриева был произведен теоретический анализ такой циркуляции — именно при наличии излома профиля дна — в работе И. Д. Постновой [19].

Форма бассейна, подлежащего исследованию, представлена в разрезе на рис. 32. Здесь OA — уровень воды, наклон которого под действием ветра не представлен ввиду малости. Профиль дна OO_1B испытывает излом в точке O_1. Дуга AB_1 с центром в O и радиусом R и сопряженная с ней дуга B_1B с центром в O_1 и радиусом r замыкает исследуемый объем. Первоначально считалось, что здесь расположена твердая изогнутая стенка бассейна, а потом выяснилось, что сопряженные дуги могут быть приняты просто за одну — замыкающую — линию тока. Бассейн естественно разделяется на две секториальные области: I (OAB_1O) и II ($O_1B_1BO_1$), что позволяет воспользоваться двумя системами полярных координат (при малых масштабах явлений кориолисовы силы отсутствуют и задача оказывается плоской): (ρ_1, α) в области I и (ρ_2, β) в области II. Начала координат выбираются соответственно в точках O и O_1; полярные оси направляются вдоль прямых OA и O_1B_1, а углы α и β отсчитываются по часовой стрелке. Автор имел в виду в дальнейшем исследовать аналогичную циркуляцию в лабораторной модели при неболь-

ших скоростях ветра, а потому считал тангенциальную силу воздействия ветра на воду пропорциональной квадрату разности скоростей ветра V и нагонного течения u_0, не пренебрегая последним по сравнению с первым:

$$\tau = c(V - u_0)^2. \tag{112}$$

При небольших глубинах и небольших скоростях течений в общих уравнениях Навье — Стокса можно пренебречь силами Кориолиса и конвективными членами по сравнению с силами внутреннего трения в воде и силами, вызванными градиентом давления. Поэтому в полярной системе координат эти уравнения запишутся так:

$$\mu\left(\frac{\partial^2 v_\rho}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 v_\rho}{\partial \alpha^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial v_\rho}{\partial \rho} - \frac{2}{\rho^2}\frac{\partial v_\alpha}{\partial \alpha} - \frac{v_\rho}{\rho^2}\right) = \frac{\partial p}{\partial \rho},$$

$$\mu\rho\left(\frac{\partial^2 v_\alpha}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 v_\alpha}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial v_\alpha}{\partial \rho} + \frac{2}{\rho^2}\frac{\partial v_\rho}{\partial \alpha} - \frac{v_\alpha}{\rho^2}\right) = \frac{\partial p}{\partial \alpha}. \tag{113}*$$

Из уравнения неразрывности в полярных координатах

$$\frac{\partial v_\rho}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial v_\alpha}{\partial \alpha} + \frac{v_\rho}{\rho} = 0\ *$$

вытекает, что составляющие скорости течений — радиальные v_ρ, и трансверсальные v_α, v_β — можно представить таким образом:

$$v_\rho = -\frac{1}{\rho_1}\frac{\partial \Psi}{\partial \alpha}, \qquad v_\alpha = \frac{\partial \Psi}{\partial \rho_1};$$

$$v_\rho = -\frac{1}{\rho_2}\frac{\partial \psi}{\partial \beta}, \qquad v_\beta = \frac{\partial \psi}{\partial \rho_2}. \tag{114}$$

Здесь $\Psi(\rho_1, \alpha)$ — функция тока для области I, $\psi(\rho_2, \beta)$ — функция тока для области II.

Обычным приемом перекрестного дифференцирования можно исключить из уравнений (113) давление p, воспользовавшись выражениями (114). Тогда для каждой из областей можно будет записать:

для области I $$\nabla^4\Psi(\rho_1, \alpha) = \nabla^2\left[\frac{1}{\rho_1}\frac{\partial}{\partial \rho_1}\left(\rho_1\frac{\partial}{\partial \rho_1}\right) + \frac{1}{\rho_1^2}\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2}\right]\Psi(\rho_1, \alpha), \tag{115}$$

для области II $$\nabla^4\psi(\rho_2, \beta) = \nabla^2\left[\frac{1}{\rho_2}\frac{\partial}{\partial \rho_2}\left(\rho_2\frac{\partial}{\partial \rho_2}\right) + \frac{1}{\rho_2^2}\frac{\partial^2}{\partial \beta^2}\right]\psi(\rho_2, \beta). \tag{115а}$$

Для интегрирования этих бигармонических уравнений необходимо составить граничные условия. Пусть v_s представляет собой тангенциальную составляющую скорости на границах OO_1B и BB_1A, а v_n — нормальную составляющую в точках тех же границ. Тогда во всех точках этих границ будет $v_s = 0$ и $v_n = 0$; последнее условие соблюдается также и на поверхности воды OA при установившемся режиме, который исследуется.

Вместо этого можно на основании (114) записать аналогичные условия для производных от функций тока:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial n} = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial n} = 0 \text{ на контуре } OO_1BB_1A.$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial s} = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial s} = 0 \text{ на контуре } OAB_1BO_1O, \tag{116}$$

* В области II α заменяется на β.

Последнее условие равносильно заданию на контуре нулевого значения функций тока

$$\Psi(\rho, \alpha) = \psi(\rho, \beta) = 0 \text{ на контуре } OAB_1BO_1O. \tag{117}$$

Это значит, что отмеченный контур является нулевой линией тока. Динамическое условие на верхней границе (112) автор преобразует

$$\tau_{\rho,\alpha} = c(V - u_0)^2 \approx 2cV\left(\frac{1}{2}V - u_0\right) = k(W - u_0).$$

После этого, пользуясь обозначениями $k=2\,cV$, $W=1/2\,V$, он записывает то же самое условие, переходя от радиальной скорости u_0 на поверхности воды к соответствующему выражению через производную от функции тока:

$$\mu\frac{1}{\rho_1^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial\alpha^2}\Big|_{\alpha=0} = k\left(W + \frac{1}{\rho_1}\frac{\partial\Psi}{\partial\alpha}\Big|_{\alpha=0}\right) \text{ на } OA. \tag{118}$$

Легко убедиться, что левая часть этого уравнения представляет собой выражение тангенциальной силы $\tau_{\rho_1,\alpha}$ через коэффициент вязкости μ и градиент скоростей по вертикали.

Кроме этих условий, необходимо еще учесть, что на воображаемой границе между областями *I* и *II* (на прямой O_1B_1) должно осуществляться сопряжение функций тока. После преобразований, основанных на уравнениях (114), условия сопряжения функций тока на прямой O_1B_1 записываются в форме

$$\begin{gathered}\frac{1}{\rho_1}\frac{\partial\Psi}{\partial\alpha} = \frac{1}{\rho_2}\frac{\partial\psi}{\partial\beta}, \qquad \frac{\partial\Psi}{\partial\rho_1} = \frac{\partial\psi}{\partial\rho_2},\\ -\frac{1}{\rho_1^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial\alpha^2} - \frac{1}{\rho_1}\frac{\partial\Psi}{\partial\rho_1} = -\frac{1}{\rho_2^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\beta^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial\rho_2^2} - \frac{1}{\rho_2}\frac{\partial\psi}{\partial\rho_2},\\ \frac{1}{\rho_1}\frac{\partial^2\Psi}{\partial\rho_1\partial\alpha} - \frac{1}{\rho_1^2}\frac{\partial\Psi}{\partial\alpha} = \frac{1}{\rho_2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\rho_2\partial\beta} - \frac{1}{\rho_2^2}\frac{\partial\psi}{\partial\beta}.\end{gathered} \tag{119}$$

С учетом всего изложенного автор формулирует поставленную задачу математической физики таким образом: найти бигармонические функции $\Psi(\rho_1, \alpha)$ и $\psi(\rho_2, \beta)$, которые непрерывны вместе со своими первыми производными внутри и на границах областей *I* и *II* соответственно; внутри этих областей существуют производные от функций, до четвертой включительно, удовлетворяющие бигармоническим уравнениям (115) внутри области *I* и (115а) внутри области *II*, а также граничным условиям, перечисленным выше.

Задача решалась приближенным конечно-разностным методом, предложенным М. Г. Слободянским [20] и В. Н. Фаддеевой [21] для решения уравнений Лапласа и Пуассона, также — в первой из цитированных статей — для решения бигармонического уравнения. Это — так называемый «метод прямых», представляющий собой видоизменение метода сеток, при бесконечно малом значении одного шага и конечном значении другого шага.

В результате решение сводится к нахождению произвольных постоянных из системы *двадцати* алгебраическихуравнений, составленных по условиям задачи в точках 1, 2, 3,..., 7, 8, отмеченных на рис. 32, *б*. В промежуточных точках исследуемого поля значения функций тока находились интерполяцией.

Вычисления были произведены на электронной счетной машине Московского университета при $V = 5{,}4$ *м/сек* и $\mu = 0{,}762$ *г/см·сек*. Были исследованы три варианта рельефа дна, изображенные на рис. 33. Стрелками показаны направления ветра и линий тока. Расстояния между линиями тока взяты в логарифмическом масштабе. Переходя от верхнего варианта (*а*) к среднему (*б*) и к нижнему (*в*), мы видим интересную картину развития *их-*

рей с горизонтальными осями, возникающих благодаря излому профиля дна. Аналогичную картину вертикальной циркуляции И. Д. Постнова получила в небольшом экспериментальном лотке с прозрачными стенками.

Но самым примечательным подтверждением ее теоретической схемы явились исследования непосредственно в *море*, проделанные совершенно независимо от изложенной теоретической работы Ю. Г. Рыжковым [22].

Этот автор, ничего не зная о схеме И. Д. Постновой (еще не появившейся в печати), обнаружил аналогичные и притом мощно выраженные вихри с горизонтальными осями, возникшие благодаря излому профиля дна. На рис. 34 изображена диаграмма, составленная Ю. Г. Рыжковым для исследованного района по материалам его гидрологических исследований 22—24 марта 1962 г. на разрезе, нормальном к берегу.

На диаграмме представлены изолинии вертикальной устойчивости. Как видим, над изломом дна возникает своеобразный «клин», очерченный изолиниями отрицательной вертикальной устойчивости. Здесь проходит фронт *конвергенции*. Свободно пущенные поплавки, затопленные на различных уровнях, показали, что движение вод с обеих сторон фронта конвергенции происходит так, как оно происходило бы при наличии твердой стенки, протянувшейся параллельно берегу вдоль фронта конвергенции. Так же, как и на схеме Постновой, в нижней ее части (рис. 33, *в*) движение поверхностных частиц воды в мористом вихре происходило против ветра.

Чем же обусловлено возникновение именно такого варианта вихрей с горизонтальными осями, параллельными береговой линии,— *третьего* (нижнего) варианта в схеме И. Д. Постновой?

Ю. Г. Рыжков полагает, что установившиеся вихри на трех диаграммах рис. 33 формируются в том или ином из трех вариантов в зависимости от угла наклона дна при урезе воды (вариант *а* соответствовал $\alpha_0 = 5°$, вариант *б* $\alpha_0 = 10°$ и вариант *в* $\alpha_0 = 15°$; во всех трех вариантах сумма углов была одинакова: $\alpha_0 + \beta_0 = 35°$). Но ведь совершенно несомненно, что осуществление того или иного варианта должно было зависеть от скорости ветра V и от турбулентной кинематической вязкости воды ν. В связи с этим Ю.Г. Рыжков естественно заключил, что становление каждого из трех вариантов И. Д. Постновой определяется числовым значением какого-то безразмерного критерия, содержащего в себе V и ν. Столь же естественным было и его предложение: принять в качестве такого безразмерного критерия величину P, построенную аналогично критерию Рейнольдса:

$$P = \frac{VZ}{\nu}. \qquad (120)$$

Разумеется, аналогия здесь — только чисто формальная: критерий Рейнольдса служит для суждения о том, насколько близко подходит к критическому режиму поток ламинарный, с одной стороны, и поток турбулентный, с другой стороны. В данном случае поток — заведомо турбулентный, а потому значение нового критерия P позволяет судить о возможности возникновения *больших* вихрей (макротурбулентности) того или иного строения. Роль характерного линейного размера Z здесь, по Рыжкову, играет *глубина моря над изломом дна*. Наконец, в отличие от критерия Рейнольдса, новый критерий P содержит в числителе не скорость исследуемого потока (в данном случае водного), а скорость ветра V, линейно связанную со скоростью водных потоков дрейфового происхождения, как мы видели в начале настоящей главы.

Ю. Г. Рыжков определил значения P, осуществлявшиеся в трех вариантах теоретических расчетов И. Д. Постновой. Если сохранить буквенные обозначения этих вариантов, принятые на рис. 33, то $P_а = 2{,}8 \cdot 10^3$, $P_б = 5{,}7 \cdot 10^3$, $P_в = 8{,}5 \cdot 10^3$. При измерениях, проводившихся Ю. Г. Рыжковым в море, давших диаграмму рис. 34, параметры были таковы: V — 600 *см/сек*, $Z = 5000$ *см*, $\nu = 158$ *см²/сек*. Последняя величина вычисле-

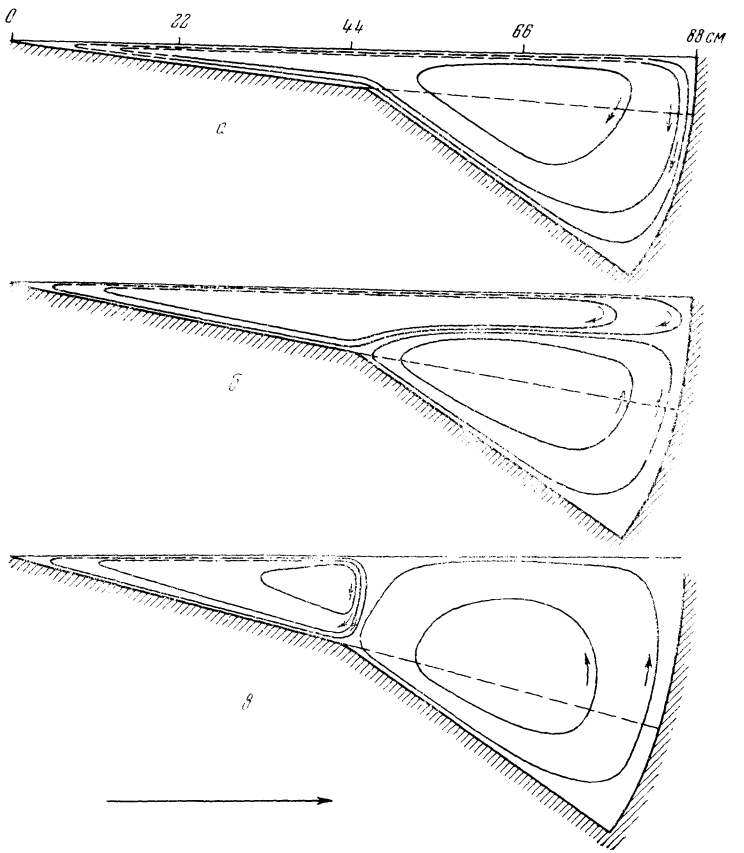


Рис. 33. Три теоретические схемы И. Д. Постновой

на согласно формулам В. Экмана и В. Шмидта. Следовательно, в данном случае критерий был $P = 19 \cdot 10^3$. Он превышал то критическое значение $P_в$, при котором у И. Д. Постновой получался теоретический вариант вихрей рис. 33, *в*.

И старые и современные работы [23] позволяют считать ν пропорциональной квадрату скорости ветра. Следовательно, по Ю. Г. Рыжкову, линии

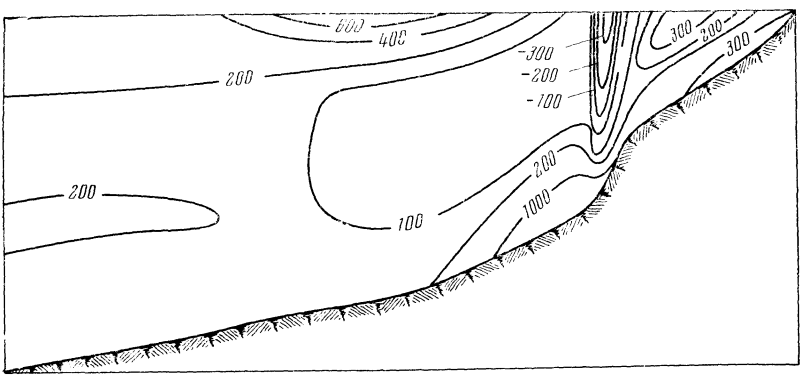


Рис. 34. Вихри с горизонтальными осями (по Ю. Г. Рыжкову) (изолинии устойчивости)

тока вихрей с горизонтальными осями будут обладать той или иной постоянной формой, если соблюдается простое соотношение

$$Z/V = \text{const}. \tag{121}$$

Описанные исследования имеют не только теоретическое значение с точки зрения физики моря, но и практическое значение при решении различных задач океанографии: они объясняют устойчивое расположение зон конвергенции и дивергенции, приуроченных к тем или иным особенностям рельефа океанского дна. В ряде экспедиций на исследовательском судне «Михаил Ломоносов» и других исследовательских судах Ю. Г. Рыжков систематически находит подтверждение и материалы к дальнейшему развитию изложенных концепций.

§ 14. Горизонтальная циркуляция в морских течениях. Влияние рельефа дна

В §§ 8 — 10 предполагалось, что морское дно — совершенно плоское и горизонтальное; были изложены выводы, основанные на таком упрощенном предположении.

Но теория В. Экмана распространяется и на случай сложной формы дна, когда глубина моря меняется от точки к точке. К сожалению, далеко не во всех случаях полученные общие уравнения Экмана могут быть проинтегрированы; но даже те из них, в которых были получены решения, дают интересный и ценный материал для изучения реальных морских течений [6].

Рассмотрим прежде всего общие условия, в которых происходит движение вод в гидросфере. Как было уже упомянуто в § 10, «элементарный поток» можно разбить на три главных слоя: 1) придонное течение с потоком Φ'', охватывающее слой толщиной D'', где D'' может быть названо «нижней» глубиной трения; 2) глубинное течение с постоянной скоростью G, охватывающее слой между поверхностным и придонным; 3) поверхностное течение с потоком Φ', скорости которого на разных глубинах слагаются из скоростей чисто дрейфового и глубинного течений. Это поверхностное течение проникает до глубины D', которую можно назвать «верхней» глубиной трения. В свою очередь придонное и глубинное течения образуют *градиентное* течение, обусловленное наклоном поверхности моря.

Из формулы (49) следует, что поток в чисто дрейфовом течении, направленный перпендикулярно к тангенциальной силе трения T, равен

$$\Phi' = \frac{D'U_0}{\pi\sqrt{2}} = cT, \tag{122}$$

где через c обозначено для краткости выражение

$$c = \frac{1}{2\delta\omega\sin\varphi}. \tag{123}$$

Вообще говоря, в произвольной точке моря тангенциальная сила T может менять свое направление, а потому для общности лучше представить ее в виде двух составляющих по координатным осям T_x и T_y. В таком случае полный поток в дрейфовом течении представится также в виде двух составляющих Φ'_x и Φ'_y, связанных с T_x и T_y соотношениями

$$\Phi'_x = cT_y, \quad \Phi'_y = -cT_x. \tag{124}$$

Такую же операцию можно проделать и над элементами градиентного течения. Скорость этого течения, на основании формулы (62) (в которой ввиду малости угла γ положим $\sin\gamma = \gamma$), равна

$$G = k\gamma, \tag{125}$$

где

$$k = \frac{g}{2\omega \sin\varphi}. \tag{126}$$

Но падение уровня моря на единицу длины в направлениях оси OX и оси OY, которые ввиду малости угла наклона тоже можно считать равными непосредственно γ_x и γ_y, связывается аналогичными же соотношениями с составляющими скорости G_x и G_y

$$G_x = k\gamma_y, \qquad G_y = -k\gamma_x. \tag{127}$$

Измеряя высоту ζ точек поверхности моря над некоторой основной горизонтальной плоскостью, можно выразить составляющие градиента γ следующим образом:

$$\gamma_x = -\frac{\partial\zeta}{\partial x}, \qquad \gamma_y = -\frac{\partial\zeta}{\partial y}. \tag{128}$$

С другой стороны, полный поток градиентного течения Φ'' может быть разложен на две составляющие, из которых одна направлена в сторону градиента давления, а другая — в направлении глубинного течения. Обе пропорциональны градиенту давления γ.

Первая из них пусть равняется $B\gamma$, а вторая $b\gamma$. На основании формулы (126) величины B и b выражаются так:

$$B = \frac{gD''}{4\pi\omega\sin\varphi} = \frac{kD''}{2\pi},$$
$$b = B\left(\frac{2\pi H}{D''} - 1\right) = kH - B. \tag{129}$$

Приняв во внимание все приведенные соотношения, легко представить обе составляющие градиентного потока таким образом:

$$\Phi''_x = B\gamma_x + b\gamma_y, \qquad \Phi''_y = B\gamma_y - b\gamma_x. \tag{130}$$

Общие соотношения (129) и (130) позволяют чрезвычайно просто проанализировать два частных случая: 1) возникновение дрейфового течения вблизи прямой береговой черты, протянувшейся безгранично; 2) возникновение подобного же течения в замкнутом море ограниченных размеров. Так, в первом случае, очевидно,

$$\gamma_x = 0, \qquad \Phi'_y + \Phi''_y = 0$$

при условии, что ось OX направлена вдоль береговой черты в установившемся движении. Но тогда из (124) и (130) следует, что

$$-cT_x + B\gamma_y = 0 \quad \text{или} \quad \gamma_y = \frac{c}{B}T_x. \tag{131}$$

С другой стороны, принимая во внимание (123), (125), (126), (129) и (131), нетрудно найти, что

$$G_y = 0, \qquad G_x = \frac{kc}{B}T_x = \frac{\pi T_x}{D''\delta\omega\sin\varphi}. \tag{132}$$

Совершенно очевидно, что полученное выражение скорости градиентного течения может быть отнесено не только к прибрежной зоне, но и к любой области открытого моря, в которой по тем или иным причинам оказывается

равным нулю поток, нормальный к определенному фиксированному направлению. А такого рода условие имеет место в ряде случаев, когда в море встречаются друг с другом два отдельных течения, образуя в гидросфере некоторую поверхность разрыва.

Второй случай—случай течения в замкнутом море—тоже крайне просто трактуется с точки зрения общих соотношений. Именно, здесь обращаются в нуль потоки по всем направлениям, коль скоро мы доходим до береговой линии. Стало быть,

$$\Phi'_x + \Phi''_{x_1} = 0, \quad \Phi'_y + \Phi''_y = 0.$$

Если выбрать направление оси OY таким образом, чтобы оно совпало с направлением ветра, а стало быть и с T, то на основании общих соотношений (124) и (130), полагая в них $T_x = 0$ и $T_y = T$, нетрудно получить

$$cT + B\gamma_x + b\gamma_y = 0, \quad B\gamma_y - b\gamma_x = 0.$$

Из этих уравнений определяются оба неизвестных γ_x и γ_y:

$$\gamma_x = -\frac{cBT}{B^2 + b^2}, \quad \gamma_y = -\frac{cbT}{B^2 + b^2}. \tag{133}$$

Полный градиент γ, определяемый слагающими γ_x и γ_y, составляет, очевидно, некоторый угол β с осью X. Этот угол можно найти из соотношений (129):

$$\beta = \operatorname{arctg} \frac{b}{B}. \tag{134}$$

С осью OY, т. е. с направлением ветра, градиент составляет тупой угол $\frac{\pi}{2} + \beta$, ибо обе слагающие обладают знаком минус. Но если это так, то направление *нагона* вод, обратное направлению градиента давлений, должно составить острый угол $\frac{\pi}{2} - \beta$ с направлением ветра. Вычисления показывают, что угол β очень близок к 90°: если глубина моря равна глубине трения D', то $\beta = 79°19'$. Если глубина моря в 10 раз превышает глубину трения, то $\beta = 89°04'$, и, наконец, если глубина моря равна $50D$, то β отличается от 90° всего лишь на 11′. Отсюда следует, что при работе ветра постоянного направления над *всей* поверхностью моря, малого по площади, но весьма глубокого, нагон вод происходит приблизительно в направлении ветра.

Из этих же соотношений (133) определяется абсолютная величина градиента $\gamma = \sqrt{\gamma_x^2 + \gamma_y^2}$

$$\gamma = \frac{cT}{\sqrt{B^2 + b^2}} = \frac{c}{b} T \sin\beta = \frac{c}{B} T \cos\beta. \tag{135}$$

Зная градиент γ, остается только вычислить скорость глубинного течения G:

$$G = k\gamma = \frac{kc}{b} T \sin\beta. \tag{136}$$

Рассмотрев эти простые примеры, попытаемся теперь найти общие соотношения, которые можно было бы впоследствии распространить на самые сложные случаи.

Пока будем по-прежнему полагать, что глубина моря H везде постоянна, и не будем обращать внимания на изменения широты от точки к точке, а также на вариации величины D. Тогда величины c, k, B и b, определяемые из соотношений (123), (126) и (129), окажутся постоянными. Но, совершенно независимо от этого ограничительного допущения, в море должны всегда выполняться два следующих *безусловных* соотношения.

1. Прежде всего, вспоминая выражения γ_x и γ_y в формулах (128), легко заключить, что

$$\frac{\partial \gamma_y}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_x}{\partial y} = \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y\, \partial x} - \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x\, \partial y} = 0, \tag{137}$$

или, пользуясь сокращенными обозначениями векторного анализа,

$$\mathrm{rot}_z \gamma = 0. \tag{138}$$

2. Затем условие *неразрывности* требует, чтобы всегда расхождение (дивергенция) вектора Φ равнялось *нулю*:

$$\mathrm{div}\, \mathbf{\Phi} = 0.$$

Как мы видели, полный поток $\mathbf{\Phi}$ слагается из поверхностного $\mathbf{\Phi}$ и глубинного $\mathbf{\Phi}''$. Следовательно, необходимо, чтобы всегда было

$$\mathrm{div}\,(\mathbf{\Phi}' + \mathbf{\Phi}'') = \mathrm{div}\, \mathbf{\Phi}' + \mathrm{div}\, \mathbf{\Phi}'' = 0. \tag{139}$$

Так как эти два основных условия чрезвычайно компактно выражаются в векторной форме, то другие соотношения, которые нам понадобятся, будем писать, также пользуясь обозначениями, принятыми в векторном анализе. Именно, будем помнить, что расхождение некоторого вектора $\mathbf{A}$ в поле, распространенном на плоскость XY, выражается всегда

$$\mathrm{div}\, \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y}. \tag{140}$$

Вихрь того же вектора $\mathbf{A}$ связан с частными производными соотношением

$$\mathrm{rot}_z \mathbf{A} = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}. \tag{141}$$

Так как поле векторов, с которыми придется оперировать, является *двумерным*, то вихрь вектора ($\mathrm{rot}_z \mathbf{A}$) не будет сам по себе вектором (каковым он был в поле трехмерном).

Соотношения (140) и (141) позволят выразить ряд закономерностей в морских течениях, если мы будем подставлять в них вместо неопределенного вектора $\mathbf{A}$ векторы $\mathbf{\Phi}'$, $\mathbf{\Phi}''$, $\mathbf{T}$, $\mathbf{G}$, γ.

Действительно, продифференцируем первое из уравнений (124) по x, а второе по y и результаты сложим. Тогда окажется, что

$$\mathrm{div}\, \mathbf{\Phi}' = c\, \mathrm{rot}_z \mathbf{T}. \tag{142}$$

Подобным же образом, изменив порядок дифференцирования, найдем

$$\mathrm{rot}_z \mathbf{\Phi}' = -c\, \mathrm{div}\, \mathbf{T}. \tag{143}$$

Те же операции, проделанные над уравнением (130), дают

$$\mathrm{div}\, \mathbf{\Phi}'' = B\, \mathrm{div}\, \gamma, \tag{144}$$

$$\mathrm{rot}_z \mathbf{\Phi}'' = -b\, \mathrm{div}\, \gamma. \tag{145}$$

Наконец, из уравнений (127) получим (вспоминая (138))

$$\mathrm{div}\, \mathbf{G} = 0, \tag{146}$$

$$\mathrm{rot}_z \mathbf{G} = -k\, \mathrm{div}\, \gamma. \tag{147}$$

Остается только связать γ с $\mathbf{T}$ и $\mathbf{G}$ с $\mathbf{T}$. Чтобы получить эту связь, подставим (142) и (144) в условие *неразрывности* (139) и решим уравнение относительно γ. Тогда окажется

$$\mathrm{div}\, \gamma = -\frac{c}{B}\, \mathrm{rot}_z \mathbf{T}. \tag{148}$$

Подставив это выражение в (147), найдем

$$\mathrm{rot}_z \mathbf{G} = \frac{kc}{B} \mathrm{rot}_z \mathbf{T}. \tag{149}$$

Эти соотношения позволяют связать вихри и расхождения всех векторов $\mathbf{\Phi}'$, $\mathbf{\Phi}''$, $\boldsymbol{\gamma}$ и $\mathbf{G}$ с элементами поля известного вектора $\mathbf{T}$. Любопытно, что, в частности, уравнение (149) обнаруживает прямую пропорциональность между вихрями векторов $\mathbf{T}$ и $\mathbf{G}$, причем коэффициент пропорциональности kc/B оказывается таким же, какой входил в формулу (132), выражавшую связь между действием ветра и скоростью глубинного течения (в случае длинной прямой береговой черты).

Теперь распространим уравнения (142) — (149) на случай *реального* моря, где глубина моря и широта места непрерывно меняются от точки к точке. Глубину трения будем считать постоянной. Правда, Экман в своей общей теории учитывает и изменения этой величины, но так как закон изменения ее в пространстве никогда не бывает известен, то, в сущности, не стоит усложнять и без того сложные соотношения.

Чтобы проще было учесть влияние изменений широты места, направим ось OY на север (в северном полушарии), а ось OX — на восток. Тогда, очевидно,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{1}{R}, \tag{150}$$

где R — радиус Земли.

Зная зависимость c и k от φ, выражаемую уравнениями (123) и (126), и принимая во внимание (150), легко найти, что

$$\frac{\partial c}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial c}{\partial y} = -\frac{c}{R \operatorname{tg} \varphi}; \tag{151}$$

$$\frac{\partial k}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial k}{\partial y} = -\frac{k}{R \operatorname{tg} \varphi}. \tag{152}$$

Столь же просто определится зависимость между B и φ

$$\frac{\partial B}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial B}{\partial y} = -\frac{B}{R \operatorname{tg} \varphi}. \tag{153}$$

Что касается параметра b, входящего в основные уравнения, то на нем отражается не только изменение φ, но, что особенно существенно, и изменение *глубины моря* H. Именно, как можно показать при помощи уравнений (129):

$$\frac{\partial b}{\partial x} = k \frac{\partial H}{\partial x}, \qquad \frac{\partial b}{\partial y} = k \frac{\partial H}{\partial y} - \frac{B \operatorname{tg} \beta}{R \operatorname{tg} \varphi}. \tag{154}$$

Опираясь на только что найденные соотношения (150) — (154), можно прежними путями прийти к *обобщенным* уравнениям, которые появятся на смену уравнениям (142) — (149):

$$\operatorname{div} \mathbf{\Phi}' = c \, \mathrm{rot}_z \mathbf{T} + \frac{cT_x}{R \operatorname{tg} \varphi}, \tag{155}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{\Phi}'' = B \operatorname{div} \boldsymbol{\gamma} + k \left[\gamma_y \frac{\partial H}{\partial x} - \gamma_x \frac{\partial H}{\partial y} \right] + \frac{B}{R \operatorname{tg} \varphi} [\gamma_x \operatorname{tg} \beta - \gamma_y], \tag{156}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{G} = \frac{k \gamma_x}{R \operatorname{tg} \varphi} = -\frac{G_y}{R \operatorname{tg} \varphi}, \tag{157}$$

$$\mathrm{rot}_z \mathbf{G} = -k \operatorname{div} \boldsymbol{\gamma} + \frac{k \gamma_y}{R \operatorname{tg} \varphi}. \tag{158}$$

Условие неразрывности (139) после подстановки в него (155) и (156) и после деления на B будет

$$\operatorname{div}\gamma = -\frac{c}{B}\operatorname{rot}_z \mathbf{T} - \frac{k}{B}\left[\gamma_y \frac{\partial H}{\partial x} - \gamma_x \frac{\partial H}{\partial y}\right] - \frac{1}{R\operatorname{tg}\varphi}\left[\gamma_x \operatorname{tg}\beta - \gamma_y + \frac{c}{B}T_x\right]. \tag{159}$$

Подстановка найденного выражения (159) в уравнение (158) даст

$$\operatorname{rot}_z \mathbf{G} = \frac{kc}{B}\operatorname{rot}_z \mathbf{T} + \frac{k^2}{B}\left[\gamma_y \frac{\partial H}{\partial x} - \gamma_x \frac{\partial H}{\partial y}\right] + \frac{k}{R\operatorname{tg}\varphi}\left[\gamma_x \operatorname{tg}\beta + \frac{c}{B}T_x\right]. \tag{160}$$

Исследуем сперва новое выражение (157). Как видим, в общем случае **div G** не равно нулю, но легко доказать посредством наглядной геометрической интерпретации, что очень часто с достаточной степенью точности его можно полагать равным нулю. В самом деле, допустим, что исследуемый район океана находится вблизи точки Q (рис. 35). Пусть плоскость, проведенная через две касательные EQ и MQ, совпадает с поверхностью океана. Она пересекается с плоскостью экватора по линии ME. Как видно из чертежа, касательная MQ проведена в плоскости меридиана точки Q, а касательная EQ — по направлению градиентного течения **G**. Вектор **G** дает на ось Y, совпадающую с MQ, проекцию G_y, также нанесенную на чертеж.

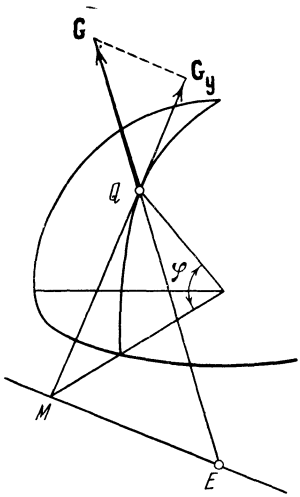


Рис. 35. Учет влияния широты

Из подобия треугольников следует, что

$$EQ\,;\,MQ = G : G_y,$$

$$\frac{G \cdot MQ}{G_y} = EQ = L.$$

Но, с другой стороны,

$$MQ = R\operatorname{tg}\varphi, \quad \frac{G_y}{R\operatorname{tg}\varphi} = \frac{G}{L}.$$

Следовательно, на основании (157),

$$\operatorname{div}\mathbf{G} = \pm\frac{G}{L}.$$

Отсюда явствует[1], что div **G** в высоких широтах невелика благодаря большой длине отрезка L.

Поправку, найденную выше, приходится поэтому вводить только для зоны Мирового океана, близкой к экватору. В наших морях можно полагать

$$\operatorname{div}\mathbf{G} = 0.$$

Переходим теперь к исследованию очень важного уравнения (160). Не останавливаясь пока на первом члене правой части, посмотрим, каков геометрический смысл *второго* члена:

$$\frac{k^2}{B}\left[\gamma_y \frac{\partial H}{\partial x} - \gamma_x \frac{\partial H}{\partial y}\right].$$

Вспомним, что γ_x и γ_y представляют слагающие вектора γ, выражающего по величине и по направлению уклон поверхности моря. Но ведь совершенно

[1] Знак плюс берется в тех случаях, когда скорость **G** обладает составляющей, направленной к экватору, а знак минус, когда составляющая направлена к полюсу.

таким же образом можно охарактеризовать наклон морского дна по величине и по направлению, введя некоторый новый вектор **Г**. Абсолютная величина **Г** равняется углу наклона дна к горизонтальной плоскости, а направление его, показывающее, в какую сторону покато дно, составляет, вообще говоря, какой-то угол A с осью OX, считая против часовой стрелки (рис. 36).

Если вектор γ составляет с той же осью OX угол α (отсчитываемый тем же порядком), то новый вектор **Г** должен быть направлен под некоторым углом $\varepsilon = \alpha - A$ вправо от вектора γ. Но если это так, то, очевидно,

$$\frac{\partial H}{\partial x} = \Gamma \cos A, \quad \frac{\partial H}{\partial y} = \Gamma \sin A, \quad \gamma_x = \gamma \cos \alpha, \quad \gamma_y = \gamma \sin \alpha.$$

А потому исследуемый второй член может быть представлен в виде

$$\frac{k^2}{B} \Gamma\gamma \,]\sin \alpha \cos A - \cos \alpha \sin A] = \frac{k^2}{B} \Gamma\gamma \sin \varepsilon.$$

Подставив это выражение в уравнение (160) и обозначив для краткости составляющую по оси Z вихря вектора **G** ($\mathrm{rot}_z \mathbf{G}$) через W, получим

$$W = \frac{kc}{B} \mathrm{rot}_z \mathbf{T} + \frac{k^2}{B} \Gamma\gamma \sin \varepsilon + \frac{k}{R \operatorname{tg} \varphi} \left[\gamma_x \operatorname{tg} \beta + \frac{c}{B} T_x\right] = W_T + W_H + W_\varphi. \tag{161}$$

Это чрезвычайно важное соотношение показывает, что в природных условиях течение, возникшее под действием ветра, приводит к образованию трех составляющих вихрей: *анемогенного* (W_T), *топогенного* (W_H) и *планетогенного* (W_φ).

Рассмотрим их каждый в отдельности.

Первая составляющая вихря W_T зависит от действия ветра — от силы **Т**. Она совершенно идентична с правой частью уравнения (149). Только изменчивость глубины трения D'' (которую мы здесь не принимаем во внимание) может в некоторых случаях увеличить величину $\mathrm{rot}_z \mathbf{G}$ на 50 %.

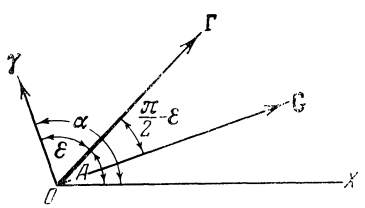


Рис. 36. Взаимное расположение векторов

Вторая составляющая вихря W_H обусловлена непостоянством глубины моря, другими словами, топографией дна. Дадим ей еще иную форму, которая в некоторых случаях окажется наиболее удобной для анализа течений.

Вспомним, что $k\gamma = G$ и $\frac{k}{B} = \frac{2\pi}{D''}$. Примем также во внимание, что синус угла ε равен косинусу дополнительного угла между вектором **Г** и вектором глубинного течения **G**. Обозначив через ds элемент длины в *направлении* **G**, нетрудно установить, что

$$\mathbf{\Gamma} \sin \varepsilon = \mathbf{\Gamma} \cos (\mathbf{\Gamma}, \mathbf{G}) = \frac{\partial H}{\partial s}.$$

Величина эта, очевидно, определяет собой понижение дна в направлении глубинного течения **G**.

Учитывая все три последние соотношения, можно придать выражению топогенной составляющей вихря W_H вид

$$W_H = G \frac{2\pi}{D''} \frac{\partial H}{\partial s}. \tag{162}$$

Направление вихря rot_z **G** легче всего проследить, предполагая, что член W_H является единственным в правой части (151), а остальными можно пре-

небречь. Тогда условие

$$\mathrm{rot}_z \mathbf{G} = G \frac{2\tau}{D''} \frac{\partial H}{\partial s}$$

приводит к интересному правилу, которому должно следовать глубинное течение G:

Если глубинное течение проходит над повышающимся дном, то возникает вихрь, направленный по часовой стрелке.

Если же глубинное течение проходит над понижающимся дном, то возникающий вихрь направлен против часовой стрелки.

Наконец, если глубинное течение направлено вдоль горизонталей дна, то вихреобразование отсутствует.

В действительности первый и третий члены правой части уравнения (161) могут иногда совершенно исказить картину, если они оказываются способными изменить знак правой части.

Что касается величины *уклона* дна, которая заметно отражается на морских течениях, то по поводу нее можно высказать следующие соображения.

При теоретическом определении элементов морского течения глубина моря может считаться постоянной только на том участке дна, где изменения глубин во много раз меньше глубины трения D''.

Но совершенно очевидно, что при обычных уклонах дна порядка 1 : 300 и при величине D'' порядка 100—200 *м* условие это может быть удовлетворено лишь на крайне ограниченном участке — протяжением не более 10—30 *км*, даже если допустить изменение глубины моря на 100 *м*.

Особенно важно, что на морские течения влияет не относительное изменение глубины, а *абсолютное*.

Такой, парадоксальный на первый взгляд, вывод объясняется той исключительно важной ролью, какую играет в экмановском «элементарном потоке» его придонная часть. А эта часть, очевидно, самым тесным образом должна быть связана с топографией дна.

Третья составляющая вихря обусловлена изменением широты от точки к точке, другими словами, *шаровидной* формой Земли. Так как в ее выражение входит множитель $1/R \operatorname{tg} \varphi$, то влияние ее должно заметнее всего сказываться в *низких* широтах, в тропической зоне океана. Мы не будем здесь останавливаться на выяснении ее роли, тем более что точный анализ здесь чрезвычайно затруднен. Отметим только, что шаровидная форма Земли вызывает *искривление* линий тока в таком направлении, что *вогнутая* сторона оказывается обращенной *на восток*, а *выпуклая — на запад*.

Любопытно, что не при всяком направлении течения форма Земли дает себя чувствовать. Действительно, выполнив некоторые простые преобразования, можно выражение W_φ представить в виде

$$W_\varphi = -G \frac{\sin \alpha \operatorname{tg} \beta}{R \operatorname{tg} \varphi}, \qquad (163)$$

где α — угол между направлением глубинного течения и осью OX (последняя по-прежнему обращена на восток). Но ведь из (163) следует, что при $\alpha = 0$ или при $\alpha = \pi$, W_φ обращается в нуль. Другими словами, *при направлении течений по параллелям* (на восток или на запад — безразлично) *планетогенные вихри не возникают*. Можно видеть здесь причину того явления, что течения в тропической зоне океана обычно всегда следуют вдоль параллелей как в Атлантическом, так и в Тихом океане. В более высоких широтах, как было уже упомянуто, влияние формы Земли отходит на второй план.

Посмотрим теперь, в каких условиях могут существовать безвихревые течения, невзирая на наличие W_H и W_φ. Формально для этого необходимо, очевидно, чтобы удовлетворялось требование

$$W_H + W_\varphi = 0.$$

Подставив сюда выражения (162) и (163) и разделив на G, получим

$$\frac{2\pi}{D''}\frac{\partial H}{\partial s} - \frac{\sin\alpha \operatorname{tg}\beta}{R \operatorname{tg}\varphi} = 0.$$

Но на основании (129) и (134) можно полагать приблизительно

$$\frac{2\pi}{D''} H = \operatorname{tg}\beta,$$

а стало быть,

$$\frac{\partial H}{\partial s} = H \frac{\sin\alpha}{R \operatorname{tg}\varphi}.$$

Но здесь в свою очередь величина $R \operatorname{tg}\varphi$ представляет собой отрезок $MQ = L \sin\alpha$, фигурировавший уже на рис. 35. Следовательно,

$$\frac{\partial H}{\partial s} = \pm\frac{H}{L} \qquad (164)$$

(о знаках — см. сноску на стр. 80).

Чтобы уяснить геометрический смысл условия (164), прибегнем снова к вспомогательному простому построению. Допустим, что касательная плоскость к поверхности моря проведена в некоторой точке O (рис. 37) и что эта плоскость пересекается с экваториальной плоскостью по прямой EM. К поверхности дна (непосредственно под точкой O) проведем касательную плоскость, которая пусть пересечется с первой касательной плоскостью по прямой EN. Вектор **Г** пусть по-прежнему указывает направление, в котором наклонено дно моря. Тогда отрезок NO, совпадающий с ним по направлению и, очевидно, перпендикулярный EN, представит собой кратчайшее расстояние от точки O до прямой EN.

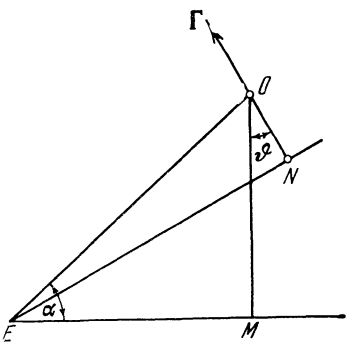


Рис. 37. Условие безвихревого течения

Заметим, что точка E принадлежит одновременно и плоскости, касательной к поверхности моря, и плоскости, касательной ко дну. Заметим также, что последняя плоскость под точкой O спускается на глубину H. Но если это так, то уклон дна под точкой O в направлении EO выразится отношением $H : L$.

Следовательно, *безвихревое течение возможно либо в направлении EO, либо в направлении OE*. Напомним, что точка E есть точка пересечения одновременно трех плоскостей: касательной к поверхности, касательной ко дну и экваториальной.

Найденные направления зависят, вообще говоря, от широты места, от глубины моря и от величины и направления уклона дна. Но нетрудно показать, что в данной точке Мирового океана, при данной глубине и данном уклоне дна не все направления безвихревых течений могут иметь место.

Вспомним, что фигурировавший уже на рис. 35 отрезок

$$MQ = R \operatorname{tg}\varphi.$$

С другой стороны, отрезок ON (рис. 37), представляющий кратчайшее расстояние от O до NE, равен $H : \Gamma$. Допустим, что даны оба эти отрезка, иными словами, даны φ, H и абсолютная величина **Г**. Что касается направления уклона дна **Г**, которое можно учесть, введя угол ϑ, указанный на чертеже, то это направление, очевидно, определяет собой *возможное направление* безвихревого течения G.

Если $ON \leqslant OM$, а стало быть

$$\Gamma \geqslant \frac{H}{R \operatorname{tg} \varphi},$$

то все направления безвихревых течений могут существовать в зависимости от того или иного угла ϑ.

Если же $ON \geqslant OM$, т. е.

$$\Gamma \leqslant \frac{H}{R \operatorname{tg} \varphi},$$

то безвихревые течения могут существовать только в узких пределах, определяемых соотношением

$$0 \leqslant |\sin \alpha| \leqslant \frac{\Gamma R \operatorname{tg} \varphi}{H}.$$

Уклон дна $\Gamma = \frac{H}{R \operatorname{tg} \varphi}$ носит название критического уклона. В табл. 4 приведены значения его, вычисленные для различных широт и для двух глубин моря: $H = 5000$ *м*, 3000 *м*.

Таблица 4

$\varphi°$	$R\operatorname{tg}\varphi$, *км*	Критический уклон дна	
		$H = 5000$ *м*	$H = 3000$ *м*
10	1 120	1 : 224	1 : 373
20	2 320	1 : 464	1 : 773
30	3 680	1 : 735	1 : 1220
40	5 340	1 : 1070	1 : 1780
50	7 600	1 : 1520	1 : 2540
60	11 000	1 : 2200	1 : 3670

Таблица 5

$\varphi°$	Предельные углы (для $H = 5000$ *м*)	
	$\Gamma = 1 : 200$	$\Gamma = 1 : 400$
1	6	3
2	13	6
3	19	10
5	26	13
5	34	16
6	42	19

Как видим, в низких широтах весьма легко может оказаться, что уклон дна меньше критического и что безвихревые течения должны протекать по направлениям, лежащим в узких пределах: течения эти не могут тогда отклоняться от параллели больше чем на некоторый острый угол. В табл. 5 приведены такие предельные углы, вычисленные для глубины моря 5000 *м* и различных широт от 1 до 6° (северной или южной — безразлично). Уклон дна взят в двух вариантах: $\Gamma = 1 : 200$ и $\Gamma = 1 : 400$. Оба значения, как нетрудно видеть, меньше критического.

Подобные условия обычны как в Тихом, так и, особенно, в Атлантическом океане, а потому влияние их на направление течений в тропической полосе весьма существенно. Возможно, поэтому-то *здесь главные течения проявляют тенденцию идти вдоль параллелей, несмотря на неспокойный рельеф дна.* Напротив, *в широтах более высоких (начиная с 30—40°) преобладающее влияние на направление течений должна оказывать топография дна.*

§ 15. Применение обобщенной теории В. Экмана к вычислению элементов течений в некоторых конкретных случаях

В предыдущем параграфе были выведены основные уравнения, которые в векторной форме [см. (138) — (149)] приобретают чрезвычайно изящный и простой вид. Даже в сложных условиях моря непостоянной глубины уравнения легко интерпретируются геометрически. Однако, несмотря на это,

далеко не во всех случаях, не при всех граничных условиях могут быть проинтегрированы дифференциальные уравнения, скрытые за скромными символами векторных операторов. Остановимся здесь на тех немногих примерах, которые были проанализированы до конца [6].

Сперва посмотрим, каковы граничные условия, при которых подобный анализ возможен. Представим себе прямую береговую линию неограниченного протяжения и допустим, что берег обрывается отвесно, благодаря чему непосредственно под берегом глубина превышает сумму $D' + D''$, т. е. сумму верхней и нижней глубин трения.

В этих условиях могут свободно развиться обе составляющие «элементарного» потока: и чисто дрейфовое течение и течение градиентное, охватывая всю прибрежную зону вплоть до стенки берега. В природе обычно бывает иначе: берег образует сначала пологую материковую отмель, а потом, начиная примерно с глубины 200 *м*, дно чрезвычайно быстро понижается до нормальных морских глубин. В таких случаях приходится «отвесной стенкой» считать границу материковой отмели и к ней применять граничные условия. Тогда сами эти условия приобретают весьма простую форму — одного условия: *полный поток в направлении нормали к «стенке» должен равняться нулю.*

Пусть n будет нормалью к береговой линии (положительное направление ее от берега в море). Нормальные составляющие дрейфового и градиентного потоков пусть будут соответственно Φ'_n и Φ''_n. Указанное условие запишется тогда в форме

$$\Phi'_n + \Phi''_n = 0. \tag{165}$$

Направим ось абсцисс по нормали n, а ось ординат — вдоль береговой линии. Если известен ветер, а стало быть, и поле тангенциальной силы трения T, то поток Φ'_n можно считать заданным. Что касается потока Φ''_n, то его можно выразить, воспользовавшись соотношениями (128), (130) и (134):

$$\Phi''_n = -\sqrt{B^2 + b^2}\left[\frac{\partial \zeta}{\partial x}\cos\beta + \frac{\partial \zeta}{\partial y}\sin\beta\right].$$

Это выражение значительно упростится, если рассмотреть понижение уровня моря не вдоль координатных осей, а по некоторому направлению ν, составляющему угол β с нормалью n. Угол β отсчитывается здесь против часовой стрелки, а понижение уровня будет, очевидно, выражаться производной $\partial\zeta/\partial\nu$. Приняв это во внимание и подставив новое, упрощенное выражение Φ''_n в (165), найдем

$$\sqrt{B^2 + b^2}\,\frac{\partial \zeta}{\partial \nu} = \Phi'_n. \tag{166}$$

Это и есть граничное условие, которому должно удовлетворять течение в прибрежной зоне.

Исходными для анализа такого течения служат уравнения (148) и (128), характеризующие наклон уровня моря γ при условии плоского горизонтального морского дна. Для подготовки к интегрированию из них можно, очевидно, получить дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} = \frac{c}{B}\,\mathrm{rot}_z\,\mathbf{T}. \tag{167}$$

В более общем случае, имеющем особо важное значение *при сложной топографии дна*, уравнение это необходимо дополнить еще двумя членами, приняв во внимание выражение (159). После преобразований уравнение примет вид

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} + \frac{k}{B}\left(\frac{\partial H}{\partial x}\frac{\partial \zeta}{\partial y} - \frac{\partial H}{\partial y}\frac{\partial \zeta}{\partial x}\right) = \frac{c}{B}\,\mathrm{rot}_z\,\mathbf{T}. \tag{168}$$

Мы не будем здесь считаться с изменениями глубины трения D'' и широты φ. В противном случае получились бы необыкновенно сложные и громоздкие соотношения, не искупающиеся теми небольшими поправками, которые вносятся благодаря им в окончательные результаты выкладок.

Вооружившись уравнением (168) и помня граничное условие (166), переходим к исследованию конкретных случаев.

1. *Ветер дует вдоль берега.* Дно моря покато *вдоль* береговой линии: по направлению нормали глубина не меняется. Направим ось OY по нормали к береговой линии, а ось OX вдоль береговой линии *вправо* от оси OY, уходящей в море.

Понижения дна в направлении OY не будет, а понижение дна в направлении X мы будем считать равномерным. Пусть на протяжении некоторого отрезка L вдоль оси OX понижение дна равняется D'', или

$$\frac{\partial H}{\partial x} = \frac{D''}{L}.$$

При таких условиях уравнение (168) приобретает весьма простую форму, так как здесь

$$\mathrm{rot}_z \mathbf{T} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial \zeta}{\partial x} = 0.$$

Приняв это во внимание, найдем из (168), что

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} + \frac{kD''}{BL} \frac{\partial \zeta}{\partial y} = 0. \tag{169}$$

Вспоминая, что на основании (129) $\frac{kD''}{B} = 2\pi$, и интегрируя полученное уравнение, найдем

$$\frac{\partial \zeta}{\partial y} = \gamma_0 e^{-\frac{2\pi y}{L}} \tag{170}$$

или на основании (125)

$$G = G_0 e^{-\frac{2\pi y}{L}}. \tag{171}$$

Здесь γ_0 и G_0 — константы интегрирования. Из них G_0 выражает собой скорость глубинного течения непосредственно близ береговой линии. Она определяется на основании граничного условия

$$G_0 = \frac{kc}{B} T_x.$$

Следовательно, окончательно

$$G = \frac{kc}{B} T_x e^{-\frac{2\pi y}{L}}. \tag{172}$$

Это соотношение показывает, что в случае покатого дна, уклон которого направлен вдоль береговой черты, скорость глубинного течения быстро убывает по экспоненциальному закону при удалении от берега; так, на расстоянии $L/2$ скорость убывает в e^{π}, т. е. в 23 раза.

Иными словами, *глубинное течение прижимается непосредственно к береговой черте, а во всей остальной зоне, охваченной ветром, глубинные воды остаются почти неподвижными.*

На рис. 38 внизу изображен профиль дна вдоль береговой черты, а вверху — распределение скоростей глубинного течения (в *плане*). Буква X поставлена у оси абсцисс, проходящей вдоль береговой черты. Стрелка T обозначает вектор тангенциальной силы трения, вызванной ветром. Пунктирной линией нанесен годограф, который соответствует скоростям течения,

вычисленным в предположении, что глубина трения меняется пропорционально скорости течения G. Как видим, здесь эта поправка на изменчивость глубины трения приводит к довольно существенным изменениям результатов: скорости течения в действительности, по-видимому, убывают не так резко при удалении от берега, как это следует на основании упрощенного анализа, приведенного выше. Но во всяком случае даже этот упрощенный анализ дает правильную общую картину явления.

2. *В открытом море ветер дует вдоль того направления, в котором наклонено плоское дно.* В этом случае выбор осей остается тем же, как в предыдущем: ось OX в направлении понижения дна, а ось OY в направлении перпендикулярном. Только теперь граничные условия берега не стесняют более движения вод. По-прежнему

$$\frac{\partial H}{\partial x} = \frac{D''}{L}, \quad \frac{\partial H}{\partial y} = 0, \quad \mathbf{T} = \text{const}.$$

Так как глубинное течение в данном случае не зависит от y, то

$$\frac{\partial \zeta}{\partial y} = -\gamma_1 = \text{const}.$$

Но тогда уравнение (168) обращается в

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} - \frac{2\pi}{L}\gamma_1 = 0,$$

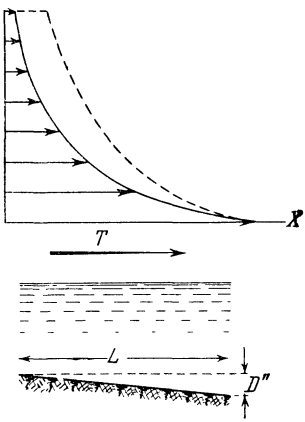


Рис. 38. Течение вдоль покатого берега

откуда, полагая произвольную постоянную интегрирования равной нулю,

$$\frac{\partial \zeta}{\partial x} = \frac{2\pi\gamma_1}{L} x.$$

Составляющие глубинного течения оказываются равными

$$G_x = k\gamma_1, \quad G_y = \frac{2\pi k\gamma_1}{L} x,$$

а стало быть, уравнение линий тока будет

$$\frac{dy}{dx} = \frac{G_y}{G_x} = \frac{2\pi x}{L}, \qquad y = \frac{\pi}{L} x^2 = \text{const}.$$

Итак, линии тока здесь — параболы с полупараметром $L/2\pi$. Параболы эти изогнуты против Солнца, когда течение идет в сторону понижения дна, и по Солнцу, когда течение направлено в сторону повышения дна.

Отметим, что поправка на непостоянство величины D'' здесь чрезвычайно незначительна.

3. *Случай волнистого профиля дна в открытом море. Ветер дует перпендикулярно к «гребням волн» дна.* В этом любопытном случае, так же как в предыдущем, положим

$$\mathbf{T} = \text{const}, \quad \text{rot}_z \mathbf{T} = 0, \quad \frac{\partial \zeta}{\partial y} = -\gamma_1,$$

а потому уравнение (168) может быть представлено в простой форме

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} = \frac{k\gamma_1}{B}\frac{\partial H}{\partial x} = \frac{2\pi\gamma_1}{D''}\frac{\partial H}{\partial x}.$$

Интегрирование приводит к уравнению

$$\frac{\partial \zeta}{\partial x} = \frac{2\pi\gamma_1}{D''}(H - H_0),$$

где H_0 — глубина моря в некоторой точке, удовлетворяющей условию

$$\frac{\partial \zeta}{\partial x} = 0.$$

Нетрудно показать, что линии тока определяются здесь уравнением

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{2\pi}{D''}(H - H_0),$$

где, вообще говоря, H может быть какой угодно функцией x. Допустим, что это простая периодическая функция, хотя бы такого вида:

$$H = H_0 + A\cos\frac{2\pi x}{L}.$$

Другими словами, допустим, что дно моря имеет волнистую форму, постоянную для всех профилей вдоль направления ветра. Тогда составляющие скорости глубинного течения получат выражения

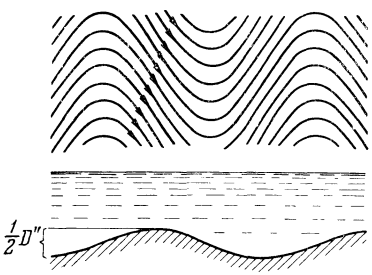


Рис. 39. Течение над волнистым дном

$$G_x = k\gamma_1, \quad G_y = \frac{2\pi Ak\gamma_1}{D''}\cos\frac{2\pi k}{L}, \qquad (173)$$

откуда

$$\frac{dy}{dx} = \frac{G_y}{G_x} = \frac{2\pi A}{D''}\cos\frac{2\pi x}{L}.$$

Проинтегрировав это уравнение, найдем для линий тока

$$y = \frac{AL}{D''}\sin\frac{2\pi x}{L} + \text{const}. \qquad (174)$$

Эти любопытные линии тока изображены в плане на рис. 39 в верхней его части. Внизу того же рисунка дан профиль дна вдоль направления ветра. Как видим, изгибы линий тока подчиняются тому же правилу, которое было обнаружено при исследовании предыдущего примера. Изгибы эти весьма резкие; так, при высоте «волны» на профиле дна, равной $D''/2$, углы отклонения струй превышают 100°.

На том же примере можно проследить за влиянием рельефа дна на абсолютную величину скорости течения. При первом взгляде на рис. 39 кажется, что волнистый профиль дна приводит к возрастанию скоростей над гребнями и впадинами дна: над ними линии тока проходят теснее одна около другой. Но это — только кажущийся эффект; в действительности, как можно доказать, волнистое дно сильно уменьшает абсолютную величину скорости глубинного течения.

4. *Влияние уединенной отмели* или *впадины в открытом море.* Пусть течение проходит над впадиной, очерченной по кругу (рис. 40, 41), и пусть глубина моря вокруг этой впадины равна H_0, а в пределах самой впадины равна H, причем величина $H - H_0$ весьма мала по сравнению с D'' и меняется по некоторому закону по мере удаления от центра впадины к ее периферии.

Для первичного потока можно положить

$$\frac{\partial \zeta}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \zeta}{\partial y} = -\gamma_1 = \text{const};$$

по-прежнему считаем $\text{rot}_z\,\mathbf{T} = 0$. Тогда уравнение (168) примет вид

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} = \frac{2\pi\gamma_1}{D''}\frac{\partial H}{\partial x}.$$

С формальной, математической, стороны задача сводится к определению логарифмического потенциала положительных и отрицательных масс, распределенных на впадине с некоторой поверхностной «плотностью»

$$\frac{\gamma_1}{D''}\frac{\partial H}{\partial x}.$$

Но, с другой стороны, при удалении в бесконечность исчезают не величины $\frac{\partial\zeta}{\partial x}$ и $\frac{\partial\zeta}{\partial y}$, а величины $\frac{\partial\zeta}{\partial x}$ и $\frac{\partial\zeta}{\partial y} + \gamma_1$. Следовательно, выражение для потенциала будет типа

$$\zeta = V - \gamma_1 y.$$

Однако удобнее вычислять логарифмический потенциал P, исходя из поверхностной плотности

$$\frac{-\gamma_1 (H - H_0)}{D''}.$$

Линии постоянного уровня ζ, очевидно, совпадают с линиями тока для глубинного течения. Если радиус круга, ограничивающего впадину, равняется R, а расстояние от центра впадины $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, то для впадины с плоским дном и глубиной $H = H_0 + \frac{nD''}{\pi}$ нетрудно получить уравнение линий тока в форме

$$\zeta = \gamma_1\left[nx\frac{R^2}{r^2} - y\right] \text{ вне впадины } (r > R),$$

$$\zeta = \gamma_1 [nx - y] \text{ над впадиной } (r < R).$$

Ход самих линий тока изображен на рис. 40.

Для впадины *конической* формы, в которой глубина выражается уравнением

$$H = H_0 + 3\frac{R - r}{R}\frac{nD''}{\pi},$$

уравнение линий тока вне впадины остается прежним, а уравнение этих линий (в сущности уравнение «горизонталей поверхности моря») в пределах впадины приобретает вид

$$\zeta = \gamma_1\left[3nx - 2nx\frac{r}{R} - y\right].$$

Этому случаю соответствует рис. 41. Если бы течение проходило не над впадиной, а над круглой *банкой*, то ход линий тока был бы таким, как изображено на рис. 42 (для плоской банки) и 43 (для банки конической формы).

5. *Некоторые особенности Атлантического течения в районе Ньюфаундлендской банки. Критика теории Экмана.* Общая теория горизонтальной циркуляции в морских течениях, изложенная в предыдущих параграфах, впервые позволила понять замечательное поведение морских течений в тех районах океана, где, невзирая на громадные глубины, струи течений чутко реагируют на топографию *дна*. Океанографические исследования на каждом шагу обнаруживают, что в северном полушарии течения, входящие в район повышения дна, отклоняются вправо, а течения, вступающие в район с понижающимся дном, — влево. В южном полушарии, в таком же согласии с теорией, меняется направление отклонений на противоположное.

В самой работе Экмана собрание конкретных приложений теории заканчивается примером, интересным в историческом отношении,— рассматривается поведение Северо-Атлантического течения в районе Ньюфаундлендской банки. Здесь в XIX в. были произведены обстоятельные исследования норвежской экспедицией, по материалам которой впоследствии были составлены подробные динамические карты для изобарических поверхностей

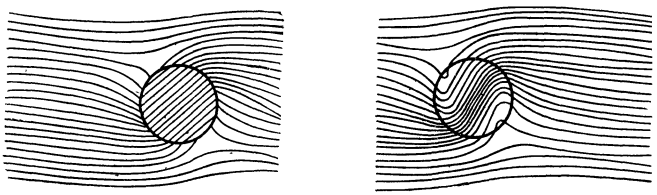


Рис. 40—41. Течения над впадиной

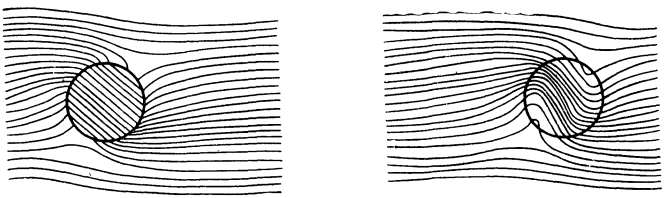


Рис. 42—43. Течения над банкой

20, 60 и 100 *бар*. На всех этих картах прежде всего бросается в глаза резкий двойной изгиб, который делают динамические изобаты на участке, лежащем к югу от Ньюфаундленда, примерно на широте 40° С и долготе 48° З. Особенно хорошо выражен изгиб на картах для 60 и 100 *бар*.

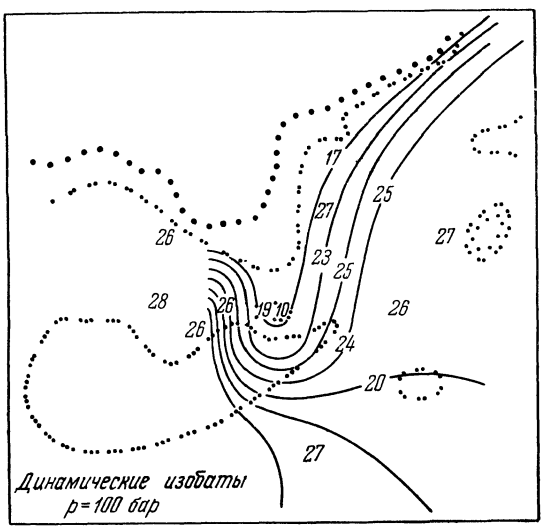


Рис. 44. Строение дна и динамическая карта у Ньюфаундлендской банки

На рис. 44 в крупном масштабе воспроизведена детальная карта для этого района, соответственно поверхности 100 *бар*. Сплошными линиями проведены динамические изобаты, которые, согласно § 9, мы можем одновременно рассматривать как линии тока Северо-Атлантического течения. Пунктирными линиями нанесены обычные (не динамические) изобаты, отвечающие различным глубинам океана: одиночные точки — глубина 1000 *м*, двойные — 2000 *м* и тройные — 3000 *м*. На карте, кроме того, проставлены значения отдельных глубин, причем каждая цифра выражает соответствующую глу-

бину в *сотнях метров*. Как видим, в согласии с теорией, струи, входящие в область повышения дна, отклоняются вправо, а потом они же, войдя в область понижения дна, отклоняются влево. В правой верхней части карты струи стелются вдоль изобат дна и, как видим, не проявляют никакой склонности от них отрываться ввиду постоянства глубин на пути следования; значит, и здесь они ведут себя в согласии с теорией.

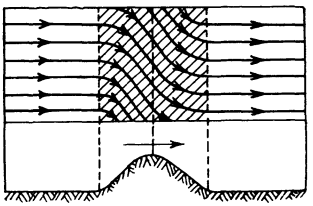


Рис. 45. Течение над банкой (по В. Экману)

Однако история науки знает множество ценных теорий, которые удовлетворяли исследователей своим согласием с опытами и наблюдениями лишь до поры до времени. Достаточно упомянуть хотя бы теорию строения атома, предложенную в 1913 г.: она очень хорошо согласовывалась с рядом физических опытов и астрофизических наблюдений. Но согласие продолжалось лишь до тех пор, пока опыты и наблюдения не были уточнены и пока не была уточнена сама теория. Немедленно после такого *двустороннего* уточнения выявились важные и принципиальные расхождения между теорией и опытом и потребовалась *коренная перестройка* теории.

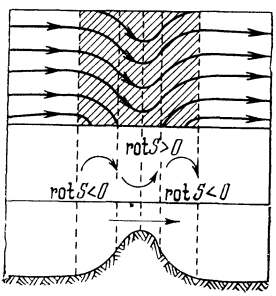


Рис. 46. Течение над банкой (по В. Б. Штокману)

Так случилось и с теорией морских течений, предложенной Экманом в самом начале нашего столетия. За истекшее время долго не уточнялись океанографические материалы, на основании которых можно проверять теорию, не расширялся их круг. Однако совсем недавно исследование «вторгающихся струй» среди инородных вод океана потребовало учета *новых сил*, не входивших в рассмотрение до тех пор,— *сил бокового трения*. При этом обнаружилось, что в ряде практически важных случаев боковое трение должно играть бо́льшую роль, чем трение между горизонтальными слоями океанской воды. В § 18 и 19 мы познакомимся с результатами современных исследований в этом направлении. Пока же отметим, что характерный двойной изгиб струй на рис. 44 только в первом приближении вяжется с теорией Экмана. На самом деле, как впервые показал В. Б. Штокман, на рис. 44 струи как бы «переваливают» через район с повышающимся дном, а затем вступают в более глубоководный район [24].

Экмановская схема, стилизованная для такого случая, должна приводить к возникновению картины, воспроизведенной на рис. 45: никакого U-образного искривления потока здесь не существует; пройдя район местного поднятия дна, струи возвращаются к направлению, согласному с первоначальным, с тем, которое было им присуще до вступления в мелководный район. Значительно лучше вяжется с рис. 44 схема Штокмана, воспроизведенная на рис. 46: здесь явно обнаруживается U-образный изгиб потока. Эта схема построена на основании теории цитированного автора, учитывающей *боковое трение* струй течения. Согласно этой теории, $\mathrm{rot}_z\, \mathbf{G}$ пропорционален не первой производной от глубины по элементу пути следования [в духе формулы (162)], а *второй производной*, как будет видно в § 19, по формуле (292). Однако и эта формула, возникшая в новой теории морских течений, еще не может в настоящее время считаться окончательно установленной, проверенной на материалах непосредственных океанографических работ. Сам ее автор справедливо указывает, что район Ньюфаундлендской банки чрезвычайно сложен для исследования: ведь Северо-Атлантическое течение здесь встречается *с противоположно направленным* холодным Лабрадорским те-

чением. На основании новых исследований, связанных с так называемым международным Ледовым патрулем, можно установить, что в месте встречи этих двух важных и мощных течений возникает круговорот, схематически изображенный на рис. 47. Весьма вероятно, что этот круговорот уже сам по себе может вызвать характерный двойной изгиб струй Атлантического течения.

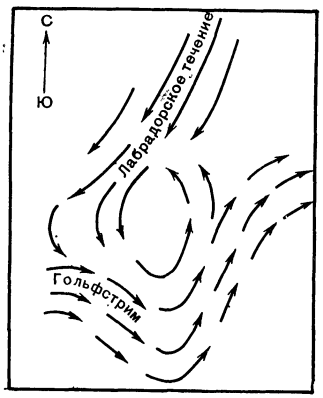


Рис. 47. Круговорот у Ньюфаундлендской банки

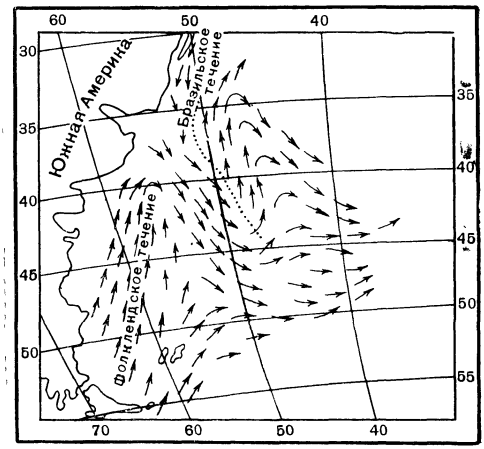


Рис. 48. Круговорот близ берегов Южной Америки

В. Б. Штокман склонен принять подобное объяснение еще потому, что современные исследования морских течений в различных океанах обнаруживают аналогичный «двойной изгиб» струй даже там, где есть только встреча двух противоположно направленных течений, но *нет никаких достопримечательностей дна*, характерных для Ньюфаундлендской банки. На рис. 48 воспроизведена схема течений близ южной оконечности материка Южной Америки. Здесь встречаются Фолклендское и Бразильское течения. Как нетрудно заметить, благодаря такой встрече оба течения испытывают характерный двойной изгиб струй, невзирая на то, что рельеф дна тут весьма спокойный.

Аналогичная картина наблюдается на Тихом океане, в районе, где встречаются теплое течение Куро-Сио и холодное Курильское течение.

Как видим, перед современными исследователями моря возникла важная задача: детально изучить поведение струй различных течений в зависимости от строения дна, строения поля ветра и других факторов. Только после таких углубленных и расширенных океанографических работ можно будет по-настоящему оценить и роль бокового трения, и роль трения между горизонтальными слоями океанических вод.

§ 16. Морские течения при неравномерном поле ветра

Конкретные условия распространения морских течений, описанные в предыдущем параграфе, характеризуются всюду равномерностью поля ветра. Посмотрим, как изменится решение задачи в тех случаях, когда ветром бывает охвачена лишь полоса конечных размеров и когда к границам этой полосы скорость ветра падает до нуля. Подобные варианты были исследованы В. В. Шулейкиным [25] на основе уравнения, связывающего между собой вихрь тангенциальной силы поверхностного трения ($\mathrm{rot}_z \mathbf{T}$), расхождение вектора γ, определяющего собой наклон поверхности моря ($\mathrm{div}\,\gamma$), и

составляющие вектора $\boldsymbol{\gamma}$, а также аналогичного вектора $\boldsymbol{\Gamma}$, учитывающего наклон морского дна,— на основе уравнения (159). Последним членом этого уравнения, имеющим практическое значение лишь в самых низких широтах, естественно, можно пренебречь.

Воспроизведем здесь выводы, полученные автором в работе [25].

1. *Глубина моря постоянна. Поле ветра неравномерно.* Пусть ветер с установившейся скоростью направлен вдоль некоторой прямой, которую мы примем за координатную ось X. Пусть тангенциальная сила трения T_x вызванная этим ветром, меняется по какому угодно закону при удалении в обе стороны от оси X

$$T_x = F(y). \tag{175}$$

Напротив, от x сила трения не будет зависеть, поскольку мы примем скорость ветра не меняющейся вдоль оси X. Но в таком случае будет

$$\gamma_x = 0, \tag{176}$$

$$\operatorname{div}\boldsymbol{\gamma} = \frac{\partial \gamma_y}{\partial y}, \tag{177}$$

$$\operatorname{rot}_z \mathbf{T} = -F'(y). \tag{178}$$

Условие постоянной глубины запишется так:

$$\boldsymbol{\Gamma} = 0. \tag{179}$$

Следовательно, в уравнении (159) пропадут второй и третий члены правой части. Вместо него можно будет теперь написать

$$\frac{\partial \gamma_y}{\partial y} - \frac{c}{B} F'(y) = 0, \tag{180}$$

откуда

$$\gamma_y = \frac{c}{B} F(y) + A. \tag{181}$$

Так как поверхность моря была бы горизонтальна, если бы величина $F(y)$ равнялась нулю, то, следовательно,

$$A = 0. \tag{182}$$

С другой стороны скорость G_x глубинного течения прямо пропорциональна γ_y

$$G_x = k\gamma_y, \tag{183}$$

где

$$k = \frac{g}{2\omega \sin \varphi}. \tag{184}$$

Но в таком случае, исходя из (161) — (163) и основного условия (176), можно написать

$$G_x = \frac{kc}{B} T_x. \tag{185}$$

Следовательно, независимо от вида функции F и от закона убывания скорости ветра при удалении в обе стороны от оси X скорость G_x одинаково связана с величиной T_x, измеренной на том же расстоянии от оси X.

Из (185) непосредственно вытекает

$$\operatorname{rot}_z \mathbf{G} = \frac{kc}{B} \operatorname{rot}_z \mathbf{T}, \tag{186}$$

что находится в полном согласии с общей теорией.

Однако следует заметить, что, в отличие от задач, относившихся к равномерному полю ветра, в данном случае условие $\mathrm{rot}_z\,\mathbf{G} \neq 0$ не означает существования изгиба линий тока, оно говорит лишь о том, что скорость глубинного течения **G** убывает (при удалении в сторону от оси X) по тому же закону, по какому убывает **T**:

$$\frac{\partial G_x}{\partial y} = \frac{kc}{B}\,\frac{\partial T_x}{\partial y}. \tag{187}$$

Разумеется, масштабы обеих кривых убывания отличаются на постоянный множитель.

2. *Наклонное плоское дно. Поле ветра неравномерно.* Рассмотрим два типичных случая: а) когда направления векторов **T** и **Γ** взаимно перпендикулярны; б) когда направления их одинаковы или противоположны.

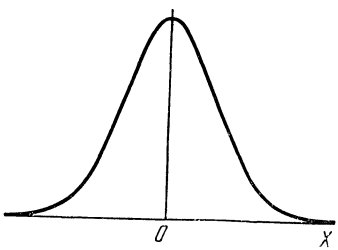


Рис. 49. Неравномерное поле ветра

В случае а), очевидно, будет

$$\gamma_x = 0, \tag{188}$$

$$\Gamma_y \neq 0, \tag{189}$$

$$\Gamma_x = 0. \tag{190}$$

Выражения для $\mathrm{div}\,\boldsymbol{\gamma}$ и $\mathrm{rot}_z\,\mathbf{T}$ будут соответственно подобны выражениям (177) и (178). Следовательно, уравнения (180) и (181) снова появятся на сцене и в результате G_x будет так же связано с T_x, как они были связаны в только что рассмотренном первом случае постоянной глубины. Слагающая $\mathbf{G}_y$ будет равна нулю.

Итак, при каком угодно законе убывания скорости ветра по мере удаления от оси X глубинное течение будет так же проходить вдоль *изобат*, как оно проходило в равномерном поле ветра при условии, что векторы **T** и **Γ** перпендикулярны.

Рассмотрим теперь более интересный случай б), соответствующий условию $\mathbf{T} \parallel \mathbf{\Gamma}$. Чтобы интегрирование дифференциальных уравнений было возможным, зададимся наиболее простым видом функции $F(y)$. Положим, что тангенциальная сила T_x убывает при удалении в обе стороны от оси X по закону

$$T_x = T_0 e^{-my^2}, \tag{191}$$

представленному графически на рис. 49.

Теперь уже глубинное течение будет обладать составляющими G_x и G_y, из которых ни одна не равна нулю. В первом приближении можно принять, что слагающая G_x остается связанной с T_x прежним соотношением (185), чрезвычайно распространенным в теории глубинных течений. Но тогда, на основании уравнения (183), окажется, что

$$\gamma_y = \frac{c}{B}\,T_0 e^{-my^2} = \gamma_0 e^{-my^2}, \tag{192}$$

откуда

$$\mathrm{div}\,\gamma = \frac{\partial \gamma_x}{\partial x} - \frac{2mc}{B}\,T_0 y e^{-my^2}. \tag{193}$$

Для вихря от **T** получим, исходя из (191),

$$\mathrm{rot}_z\,\mathbf{T} = 2mT_0 y e^{-my^2}, \tag{194}$$

или, внеся сокращенное обозначение γ_0 из (192),

$$\frac{c}{B}\,\mathrm{rot}_z\,\mathbf{T} = 2m\gamma_0 y e^{-my^2}. \tag{195}$$

Приняв во внимание, что, согласно условию для случая б),

$$\Gamma_x = \Gamma, \quad \Gamma_y = 0, \tag{196}$$

основное уравнение (159), пренебрегая функцией $f(\varphi)$, перепишем в виде

$$\frac{\partial \gamma_x}{\partial x} - \left[4m\gamma_0 y - \frac{k}{B}\Gamma\gamma_0\right] e^{-my^2} = 0. \tag{197}$$

Отсюда для компоненты γ_x получим выражение

$$\gamma_x = \left[2m\gamma_0 y - \frac{k}{B}\Gamma\gamma_0\right] e^{-my^2} x. \tag{198}$$

Составляющая глубинного течения G_y связана с γ_x соотношением, аналогичным (183):

$$G_y = -k\gamma_x. \tag{199}$$

Но нетрудно показать, что частное от деления составляющей G_y на G_x выражает собой угловой коэффициент соответствующего элемента *линии тока*. А в таком случае дифференциальное уравнение линий тока запишется в форме, которую легко получить, исходя из равенств (183), (192), (193) и (199):

$$\frac{dy}{dx} = -\left(4my - \frac{k\Gamma}{B}\right) x. \tag{200}$$

Разделив переменные и проинтегрировав, получим для семейства линий тока общее уравнение

$$y = \frac{k\Gamma}{4mB} + Ce^{-2mx^2}. \tag{201}$$

В частности, для линии тока, проходящей через начало координат, константа C окажется равной

$$C = -\frac{k\Gamma}{4mB}, \tag{202}$$

а потому уравнение этой линии тока будет

$$y = \frac{k\Gamma}{4mB}(1 - e^{-2mx^2}). \tag{203}$$

Переписав его в форме

$$y = \frac{k\Gamma}{4mB}\left(\frac{e^{2mx^2} - 1}{e^{2mx^2}}\right),$$

легко показать, что при малых m оно превращается в уравнение параболы

$$y = \frac{k\Gamma}{2B} x^2. \tag{204}$$

Все остальные линии тока при этом также превратятся в параболы; уравнения их будут отличаться от (204) лишь постоянным членом, который появится в правой части.

Но ведь при непрерывном уменьшении параметра m в исходном условии (191) поле ветра делается все более и более равномерным (кривая, приведенная на рис. 49, теряет свою остроту) и в пределе стремится к равномерному полю

$$\mathbf{T} = \text{const}, \quad \text{rot}_z \mathbf{T} = 0.$$

А для такого поля (см. стр. 87) была получена параболическая форма линий тока, совпадающая с предельной формой (204).

Легко показать, что линии тока в неравномерном поле, выражаемые уравнениями (201) или (203), при очень малых значениях x проходят близко к параболам, затем они загибаются значительно круче — скорее отходят от оси X. Но в некоторой точке наступает *перегиб* линии тока, после чего угол, составляемый ею с осью X, начинает уменьшаться.

Продифференцировав уравнение (203) по x, легко получить выражение для углового коэффициента линии тока через один лишь аргумент x (в отличие от (200), куда входила и величина y):

$$\frac{dy}{dx} = \frac{k\Gamma}{B} xe^{-2mx^2}. \tag{205}$$

Абсцисса точки перегиба определится из условия

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{k\Gamma}{B}(1 - 4mx^2)\, e^{-2mx^2} = 0, \tag{206}$$

откуда

$$x = \frac{1}{2\sqrt{m}}. \tag{207}$$

Подобный перегиб линий тока служит хорошей иллюстрацией действия *анемогенного* вихря.

3. *Волнистое дно. Неравномерное поле ветра.* Пусть ось абсцисс координатной системы снова совпадает с направлением тангенциальной силы $\mathbf{T}$, изменяющейся по закону (191). В отличие от только что рассмотренного случая 2, пусть профиль дна выражается уравнением

$$H = H_0 + A\cos nx, \tag{208}$$

где H — переменная глубина моря.

Пусть, наконец, эта глубина совершенно не зависит от y; другими словами, дно моря представляет собой волнистую цилиндрическую поверхность с образующими, параллельными оси Y.

Соотношение (194) остается в силе. С другой стороны, в первом приближении (193) и (195) также останутся в силе. Зато вместо (196) теперь придется написать, исходя из (208),

$$\Gamma_x = -\frac{\partial H}{\partial x} = An\sin nx. \tag{209}$$

В результате основное уравнение примет вид

$$\frac{\partial \gamma_x}{\partial x} - \left[4m\gamma_0 y - \frac{Ak}{B} n\gamma_0 \sin nx\right] e^{-my^2} = 0. \tag{210}$$

Отсюда определится составляющая γ_x:

$$\gamma_x = \left[4m\gamma_0 yx + \frac{Ak}{B}\gamma_0 \cos nx\right] e^{-my^2}. \tag{211}$$

Угловой коэффициент элемента линии тока выразится равенством

$$\frac{dy}{dx} = -4myx - \frac{Ak}{B}\cos nx. \tag{212}$$

Уравнения самих линий тока найдутся путем интегрирования (212)

$$y = Ce^{-2mx^2} + \frac{Ak}{B} e^{-2mx^2} \int_0^x e^{2mx^2} \cos nx\, dx. \tag{213}$$

Второй член правой части, к сожалению, не может быть выражен никакой аналитической функцией. Но, поскольку мы задались целью найти лишь тенденцию линий тока (охарактеризовать их в первом приближении),

достаточно будет проследить за поведением функции

$$y_1 = \pm \frac{Ak}{B} e^{-2mx^2} \int e^{2mx^2} dx, \tag{214}$$

представив ее графически (после графического интегрирования). Функция эта по абсолютной величине будет возрастать при увеличении x от нуля до некоторого определенного значения (зависящего от параметра m), а затем станет непрерывно падать, асимптотически приближаясь к нулю в бесконечности.

Так как, с другой стороны, совершенно очевидно, что по абсолютной величине

$$|e^{mx^2} \cos nx| \leqslant e^{mx^2}, \tag{215}$$

то неизвестная функция, выражаемая вторым членом (213), будет периодически изменяться в пределах, заданных уравнением (214). Следовательно. 1) линии тока будут извиваться в горизонтальной плоскости, первоначально ориентируясь относительно гребней и впадин дна примерно так, как ориентируются они в аналогичной задаче, решенной Экманом применительно к равномерному полю ветра; 2) однако, в отличие от упомянутого случая, отклонения линий тока вправо и влево здесь сперва нарастают по мере увеличения x, а затем, при дальнейшем нарастании x, непрерывно затухают; 3) особенно любопытно, что по мере возрастания x все линии тока стремятся приблизиться к оси X, ибо первый член правой части (213) стремится к нулю при любом конечном значении константы C.

В итоге оказывается, что ветер, работающий в пределах некоторой дискретной полосы, стремится втянуть воды глубинного течения (в горизонтальном направлении) как можно ближе к осевой линии воздушного потока, охарактеризованного диаграммой рис. 49.

В связи с этим уместно вспомнить, что уравнение (213) дает лишь первое приближение к истине, и оценить характер погрешностей, возникающих вследствие упрощения условий задачи.

Прежде всего приходится установить, что, в отличие от предыдущих случаев 1 и 2, условие независимости компоненты G_n от координаты x здесь явно не соблюдается, ибо, как только что говорилось, линии тока все ближе и ближе стягиваются к оси X по мере нарастания x (стало быть, составляющая G_x все возрастает). Однако, задавшись каким угодно законом нарастания G_x, можно без труда показать, что основные тенденции глубинного течения, выраженные приближенным уравнением (213), будут лишь усилены в уравнениях уточненных. Вот почему нет надобности искать второе приближение.

§ 17. Дрейфовые и конвекционные течения в муссонном поле

Адмирал С. О. Макаров был первым исследователем, обстоятельно сопоставившим несколько причин, которые порождают те или иные морские течения, одновременно воздействуя на воды моря. В своем капитальном труде «„Витязь“ и Тихий океан» он проанализировал физико-географическую обстановку, в которой находятся области некоторых известных течений, и отметил как роль непосредственного воздействия ветра на поверхностный слой воды, так и роль конвекции, возникающей благодаря различию температур и соленостей в водных массах океана. Кроме того, Макаров сделал попытку моделирования подобных конвекционных потоков в лаборатории, воспользовавшись простой и остроумной экспериментальной установкой [26].

В настоящее время мы располагаем общими уравнениями гидродинамики морских течений и соотношениями между тепловыми характеристиками моря и теми *ветрами*, которые создаются благодаря различию температур воздуха над морем и его температур над материком. Как увидим в гл. V, ветры *муссонного* типа, порождаемые таким температурным различием, над самой подстилающей поверхностью, дуют зимой с материка на море, а летом — в обратном направлении. С достаточным приближением можно считать, что на рубеже между морем и материком скорость ветра направлена под углом 45° к нормали, проведенной в данной точке к береговой линии. С другой стороны, под действием холодных зимних потоков с берега от моря отнимается большое количество тепла благодаря теплообмену между относительно теплой поверхностной водой и более холодным воздухом.

Наши отечественные работы по теории муссонов позволяют сейчас нарисовать и общую картину ветрового режима над морем, определяющего собой дрейфовые течения, и общую картину охлаждения морской воды на различных расстояниях от береговой черты. Следовательно, мы можем попытаться вычислить и скорости дрейфовых течений, вызванных непосредственным механическим действием ветра в муссонном поле, и скорости конвекционных течений, порожденных различием в охлаждении тех или иных поясов моря, по-разному удаленных от берега.

Вычислив скорости дрейфового течения и скорости конвекционного течения, сопоставим их между собой и посмотрим, какое из них играет преобладающую роль в общих потоках, наблюдаемых в природе.

Как и в предыдущих параграфах, при исследовании движений вод в горизонтальной плоскости будем исходить из общего уравнения (168), помня условные обозначения k, c и B. В преобладающей толще морской воды будем считать скорость течений G одинаковой по величине и направленной всюду одинаково — перпендикулярно к тому направлению, в котором падает уровень моря, уменьшается величина ζ [27].

Легко показать, что изогипсы поверхности моря — линии равных ζ — служат одновременно и линиями тока глубинного течения.

Пусть море, обладающее формой круга, всюду характеризуется одной и той же глубиной H. Радиус его пусть равен R. Начало координат принято в центре. В *муссонном* поле скорость ветра будем считать плавно убывающей от берега к центру и направленной всюду под углом α к радиус-вектору r. Не слишком отклоняясь от истины, будем считать для простоты, что абсолютная величина тангенциальной силы трения, с которой ветер действует на поверхность воды, может быть выражена так:

$$T_r = T_0 \frac{r}{R} \sin\alpha = \overline{T}_0 \frac{r}{R}, \qquad (215а)$$

где T_0, $\overline{T}_0$ — величины, соответствующие границе моря. В подобных условиях общее уравнение (168) приобретает крайне простую форму: выражение в круглых скобках левой части обращается в нуль, а правая часть превращается в простой одночлен

$$\frac{\partial T_y}{\partial x} - \frac{\partial T_x}{\partial y} = \pm 2 \frac{T_0}{R} \sin\alpha = \pm 2 \frac{\overline{T}_0}{R}. \qquad (216)$$

Через $\overline{T}_0$ обозначена составляющая силы трения у берега моря, направленная по касательной к береговой черте. Знак зависит от сезона. Перейдем к полярной системе координат и учтем, что ввиду симметрии $\partial^2\zeta/\partial\varphi^2 = 0$. Тогда вместо основного уравнения окажется

$$\frac{\partial^2\zeta}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\zeta}{\partial r} = \pm 2 \frac{c\overline{T}_0}{BR}. \qquad (217)$$

При установившемся сгонно-нагонном режиме условие на границе записывается в форме

$$\left(\frac{\partial\zeta}{\partial r}\right)_{\text{берег}} = \frac{c}{B}\overline{T}_0. \tag{218}$$

Исходя из этого условия, приняв за начало отсчета *средний* уровень моря и учтя постоянство полного объема воды в море, получим интеграл уравнения (217) в виде

$$\zeta = \frac{1}{2}\frac{c}{B}\frac{\overline{T}_0}{R}r^2 + \text{const} = \pm\frac{1}{4}\frac{c\overline{T}_0}{BR}(2r^2 - R^2). \tag{219}$$

Как в выражении (216), так и в (219), верхний знак соответствует зимнему, а нижний — летнему муссонному сезонам. Формула (219) позволяет определить, как должен меняться уровень моря от сезона к сезона к сезону без всякого изменения объема воды в море. Тем самым вводится существенная поправка в общепринятые вычисления водного баланса.

Легко заметить, что дифференцирование (219) по r дает возможность выразить скорость G. Направление ее тут всюду перпендикулярно к радиусу r, а величина определяется уравнением

$$G = k\frac{\partial\zeta}{\partial r} = \frac{kc}{B}\overline{T}_0\frac{r}{R}. \tag{220}$$

В дальнейшем будет сказано несколько слов о численных подсчетах.

Рассмотрим теперь течения, которые должны возникнуть в более сложном случае: в замкнутом море, муссонное поле которого несимметрично. Пусть тангенциальная слагающая силы трения выражается теперь так:

$$\overline{T} = \frac{\overline{T}_0}{1+\nu}\frac{r}{R}(1 + \nu\cos\varphi). \tag{221}$$

Здесь $\overline{T}_0$ обозначает ее величину, соответствующую той точке на берегу моря, где $\varphi = 0$; ν — некоторый числовой коэффициент.

Уравнение примет теперь, после подстановок, форму

$$\frac{\partial^2\zeta}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\zeta}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\zeta}{\partial\varphi^2} = 2a(1 + \nu\cos\varphi), \tag{222}$$

причем

$$a = \frac{1}{1+\nu}\frac{c\overline{T}_0}{BR}.$$

Граничное условие (218) приобретает вид

$$\left(\frac{\partial\zeta}{\partial r}\right)_{\text{берег}} \approx aR(1 + \nu\cos\varphi). \tag{223}$$

Общий интеграл уравнения (222) запишем в форме

$$\zeta = m_0r^2 + (m_1r + n_1r^2)\cos\varphi + n_2r^2\cos 2\varphi + \sum_\lambda n_\lambda r^\lambda\cos\lambda\varphi + C. \tag{224}$$

Ограничимся простым случаем, в котором оказывается возможным отбросить все члены ряда, объединенные под знаком суммы, и сохранить лишь члены, выписанные отдельно. Подстановка (224) в (222) дает $m_0 = {}^1/_2\,a$, $n_1 = {}^2/_3\,a\nu$. Граничное условие перепишем в виде

$$\frac{\partial\zeta}{\partial r} = ar + \left(m_1 + \frac{4}{3}a\nu r\right)\cos\varphi + 2n_2r\cos 2\varphi \approx ar(1 + \nu\cos\varphi). \tag{225}$$

Пусть береговая линия служит одной из изогипс и одновременно одной из линий тока. Пусть расстояние от берега до начала координат при $\varphi = 0$

будет вдвое больше, чем при $\varphi = \pi$, т. е. $R_\pi = 2R_0$. Тогда граничное условие будет заведомо удовлетворяться в обеих отмеченных точках, если окажется, что

$$n_2 = \frac{a\nu}{18}, \quad m_1 = -\frac{4}{3} a\nu R_0, \quad \nu = \frac{9}{11} = 0{,}818.$$

Определив эти константы, перейдем к системе безразмерных величин. Положим прежде всего $\frac{r}{R_0} = \rho$ и перепишем в новом виде (224)

$$\frac{2\zeta}{aR_0} = \rho^2 + (1{,}09\rho^2 - 0{,}73\rho)\cos\varphi + 0{,}091\rho^2\cos 2\varphi. \tag{226}$$

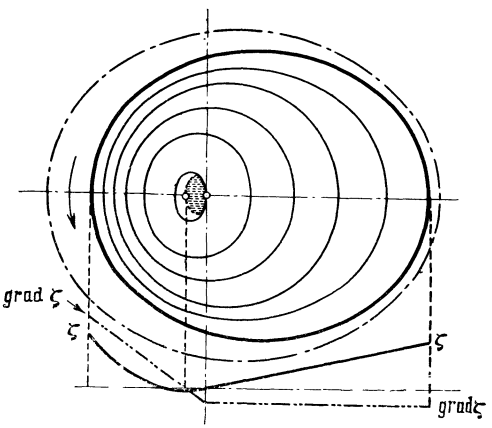


Рис. 50. Дрейфовые течения в муссонном поле

Для граничной точки при $\varphi = 0$ положим

$$\left(\frac{2\zeta}{aR_0^2}\right)_{\varphi=0} = 1{,}45 = z_0, \quad \frac{z}{z_0} = \eta. \tag{227}$$

Тогда в безразмерных функциях уравнение линий тока приобретет простейшую форму

$$(1 + 1{,}09\cos\varphi + 0{,}091\cos 2\varphi)\rho^2 - \\ - 0{,}73\cos\varphi\,\rho - 1{,}45\eta = 0. \tag{228}$$

На рис. 50 вычерчены эти линии тока. Жирной линией представлена береговая черта. Штрих-пунктирная линия, окаймляющая всю диаграмму, изображает поле тангенциальной силы $\overline{T}$ на берегах моря: абсолютная величина ее всюду пропорциональна отрезку соответствующего радиус-вектора, заключенному между штрих-пунктирной кривой и жирной кривой, ограничивающей море. Стрелка указывает направление составляющей $\overline{T}$ во время зимнего муссона.

Под основной диаграммой нанесен профиль сечения моря вертикальной плоскостью, проходящей через радиус-векторы $\varphi = 0$ и $\varphi = \pi$. Там же представлены *уклоны* поверхности моря на таком вертикальном разрезе. Они определены по уравнениям, которые легко получить из уравнения поверхности моря:

для $\varphi = 0$

$$\frac{1}{aR_0}\operatorname{grad}\zeta = -0{,}363 + 2{,}18\rho,$$

для $\varphi = \pi$ (229)

$$\frac{1}{aR_0}\operatorname{grad}\zeta = -0{,}363.$$

Любопытно, что в последнем направлении уклон *постоянен*, несмотря на сложность внешних условий.

Вспомним, что по условию (220) скорость ветра обращается в нуль в полюсе координатной системы и что муссон работает над морем в направлении, указанном стрелкой (зимний муссон). В то же самое время $\operatorname{grad}\zeta$, а стало быть и скорость течения $\mathbf{G}$ обращаются в нуль не в полюсе координат, а в другой точке, отмеченной на рис. 50 малым кружочком. Приняв это во внимание и сопоставив поле ветра с семейством линий тока, легко прийти к любопытному выводу, что на некоторой небольшой площадке, лежащей между двумя указанными точками, скорости глубинного течения $\mathbf{G}$ обладают

составляющей, *противоположной* направлению ветра. На рисунке эта площадка заштрихована.

Попытаемся вычислить изменения уровня моря у береговой черты. Для этого подставим в (226) выражение a, записанное после (222). Тогда окажется, что

$$\left(\frac{2\zeta}{aR_0}\right)_{\text{берег}} = 2(1+\nu)\frac{B}{cT_0}\left(\frac{\zeta}{R_0}\right)_{\text{берег}}. \tag{230}$$

Подставим в (230) численные значения, применявшиеся выше, и, в частности, вспомним, что продольный размер L моря будет $R_0 + R_\pi = 3R_0 = L$. Тогда в результате простейших выкладок можно будет записать

$$\frac{\zeta}{L} = 0{,}127\,\frac{c}{B}\,\overline{T}_0 = \frac{0{,}254\pi}{g\delta D''}. \tag{231}$$

Вспомним теперь выражения (123) и (129) для величин c и B и примем во внимание, что глубина трения D'' может быть приближенно выражена через скорость поверхностного течения $\mathbf{w}$ (чисто дрейфового) и далее [27] через скорость ветра $\mathbf{V}$

$$D'' \approx D' = Nw = \frac{NAV}{\sqrt{\sin\varphi}}.$$

С другой стороны, с той же скоростью ветра $\mathbf{V}$ связана тангенциальная сила $\mathbf{T}_0$:

$$T_0 = \varkappa_a \delta_a V^2,$$

где δ_a — плотность воздуха, $\varkappa_a$ — коэффициент поверхностного трения.

Но в таком случае легко показать, что

$$\frac{c}{B}\,T_0 = \frac{2\pi\varkappa_a}{gNA}\,\frac{\delta_a}{\delta_w}\,V. \tag{232}$$

Подставив в (230) численные значения различных величин, определенные из надежных измерений, вместо (231) получаем

$$(\zeta/L)_{\text{берег}} = 1{,}8\cdot 10^{-3}V, \tag{233}$$

причем тут предусмотрено, что, в отличие от принятой выше абсолютной системы мер CGS, скорость ветра выражается в метрах в секунду.

Пусть в конкретном частном случае $L = 9\cdot 10^5$ *м*, $V = 10$ *м/сек*. Тогда на основании (233) $\zeta = 0{,}16$ *м* (над средним уровнем).

При смене муссонов понижение уровня достигнет размеров порядка 0,2—0,3 *м* в полном согласии с наблюдениями на морях соответствующей величины: именно такого порядка бывает та «невязка» между зимним и летним уровнем, которая возникает при анализе водного баланса моря без учета влияния муссонных сезонов. Для объяснения этой невязки обычно предлагались различные совершенно искусственные гипотезы.

Что касается самой *скорости* течений G в различных районах моря, при поставленных усложненных условиях, то она может быть определена, без всякого труда, на основании уравнения

$$G = kar(1 + \nu\cos\varphi). \tag{234}$$

В частности, у береговой черты выражение скорости вполне совпадает с тем, какое получается из (220) при подстановке в него $r = R$. Но в таком случае скорость G потока, охватывающего основную толщу воды в прибрежной полосе, можно определить просто по диаграмме рис. 15, вспомнив, что угол между направлением ветра и береговой чертой составляет примерно 45° (в муссонном поле). При этом значении угла диаграмма дает $G/U_0 \approx 1$ и

для скорости на поверхности $U/U_0 \approx 2$. С другой стороны, U_0 связано со скоростью ветра V эмпирической формулой (108). Учтя все это, нетрудно убедиться, что на широте $\varphi = 43°$ при скорости ветра $V = 10$ *м/сек* скорость прибрежного потока в основной толще воды будет $G = 0{,}16$ *м/сек*, а скорость прибрежного дрейфового течения на поверхности моря $U = 0{,}32$ *м/сек*.

Порядок полученных величин совсем неплохо совпадает с результатами непосредственных измерений в природных условиях.

Совсем иной порядок величин характеризует *конвекционные* течения в том же муссонном поле: течения, которые вызваны неодинаковым тепловым состоянием вод на различных расстояниях от берега. Такое различие больше всего сказывается в зимнее время, когда холодный ветер, дующий с берега, отнимает большое количество тепла у прибрежных вод, нагревается сам и потому слабее охлаждает поверхностные воды на больших расстояниях от берега.

Можно показать, что потеря некоторого количества тепла dq порождает прирост dp давления воды на единицу площади на глубине, до которой проникает конвекционное течение. При этом

$$\frac{dp}{dq} = \frac{gn}{c}. \tag{235}$$

Здесь n — коэффициент объемного расширения воды, c — ее теплоемкость и g — ускорение в поле тяжести. С другой стороны, как будет показано далее (см. гл. IV, § 5), потеря тепла на подогревание воздуха пропорциональна разности температур между поверхностной водой и воздухом, соприкасающимся с ней. В свою очередь, на основании теории муссонного поля, можно вычислить эту разность температур для различных районов моря, по-разному удаленных от береговой линии.

Проделав такие вычисления, В. В. Шулейкин [28] определил поле давления воды, вызывающее появление конвекционного течения в море. Чем меньше размеры моря, тем меньше и градиент давления, вызванный различием в температурном режиме районов моря. Для простой круглой формы моря результаты вычислений были таковы:

Радиус моря, *км*	250	1000	2000
Скорость конвекционного течения, *м/сек*	0,01	0,03	0,09

Как видим, скорость конвекционного течения чрезвычайно мала по сравнению со скоростью дрейфового течения.

§ 18. Теория экваториальных противотечений

В предыдущем параграфе было показано, что главную роль в образовании морских течений играет *ветер*; конвекция, вызванная неравномерным распределением плотностей воды, отступает перед ним на второй план. В связи с этим особый интерес приобретают чрезвычайно мощные течения, существующие в Атлантическом, Тихом и Индийском океанах, близ экватора, направленные *против* ветра или проходящие в полосе постоянного штиля. Они носят общее название *экваториальных противотечений*.

На рис. 51 для примера изображена общая картина экваториальных течений в Тихом океане для лета в северном полушарии, а на рис. 52 — для зимы в северном полушарии (по Ю. М. Шокальскому [10]). Буквой A здесь обозначено экваториальное противотечение, буквами B и C — соответственно северное экваториальное и южное экваториальное течения. На рис. 53 воспроизведен вертикальный разрез Тихого океана и по меридиану 140° З. Цифры, проставленные при изотахах, выражают соответствующие скорости течений в сантиметрах в секунду. Здесь обозначено: W — области северного и южного экваториальных течений, направленных к западу, E — область экваториального противотечения, направленного к востоку.

Как видим, скорости противотечения превышают скорости основных течений, несмотря на то, что противотечение направлено *против ветра* и частично лежит в штилевой полосе.

Совершенно естественно, что над проблемой экваториальных противотечений в Атлантическом, Индийском и особенно в Тихом океанах думали

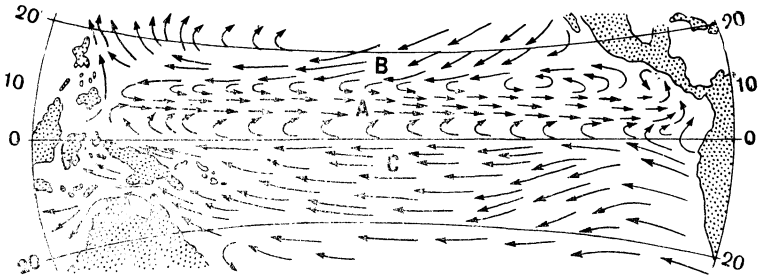


Рис. 51. Противотечение в Тихом океане. Лето северного полушария (по Ю. М. Шокальскому)

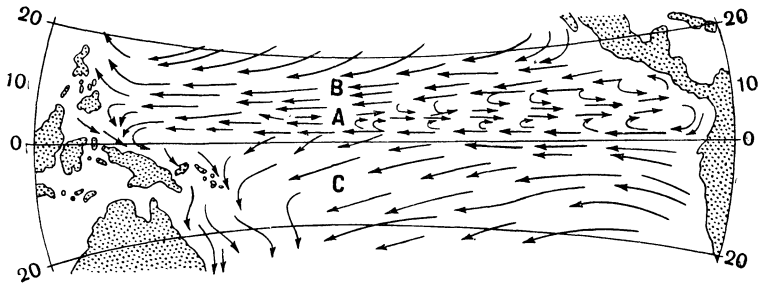


Рис. 52. Противотечение в Тихом океане. Зима северного полушария (по Ю. М. Шокальскому)

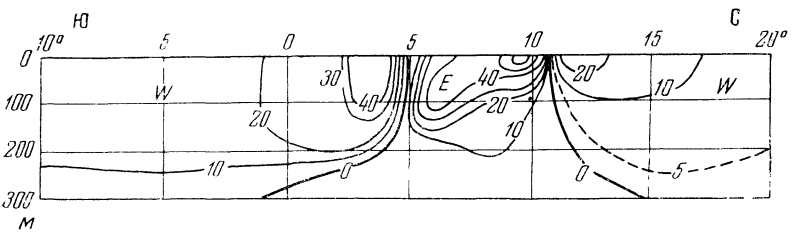


Рис. 53. Вертикальный разрез по меридиану 140° з. д.

многие современные исследователи во многих странах, как географы, так и геофизики. Любопытно, что когда один из них высказывал какое-либо теоретическое предположение, казавшееся естественным и правдоподобным, то вслед за ним впадали в ошибку другие исследователи, столь же серьезные и вдумчивые. Еще любопытней, что заблуждение последователей продолжалось дольше, чем заблуждение самого автора неправильной гипотезы, который успевал от нее отказаться раньше других.

Среди таких исследований особое место занимают работы, проделанные в нашей стране В. Б. Штокманом [29]. В них теоретический анализ не прерывается на полпути, немедленно после того как впереди появился просвет, сулящий удачу, но не преодолены еще трудности математических операций.

В отличие от своих предшественников, этот автор доводит анализ до конца и сопоставляет результаты с непосредственными наблюдениями в природе.

Исходными уравнениями служат выражения составляющих дрейфового потока (124) и составляющих градиентного потока (130). На основании их записываются выражения составляющих полного потока Ф:

$$\Phi_x = B\gamma_x + b\gamma_y, \tag{236}$$

$$\Phi_y = B\gamma_y - b\gamma_x - cT_x(y). \tag{237}$$

Пусть исследуемая область океана представляет собой полосу, протянувшуюся на расстояние L между крайними меридианами и занимающую промежуток l между крайними параллелями. Положим, что l весьма мало́ по сравнению с L. В области пассатов, особенно в Тихом океане, преобладающую роль играет зональная их составляющая, направленная по оси X. В связи с этим можно считать, что подъем уровня океана при удалении на расстояние x от крайнего меридиана является линейной функцией x. Следовательно, можно положить $\gamma_x = \text{const}$. В то же время подъем уровня в меридиональном направлении выразится неизвестной пока функцией расстояния y от оси абсцисс. Также неизвестной остается пока функциональная зависимость между этим расстоянием и составляющей градиента по оси Y. Обозначим ее через $\gamma_y\ (y)$.

Перепишем уравнения (236) и (237) в связи с изложенными обстоятельствами

$$\Phi_x = B\gamma_x + b\gamma_y(y), \tag{238}$$

$$\Phi_y = B\gamma_y(y) - b\gamma_x - cT_x(y). \tag{239}$$

Если исследуемая область океана содержит неизменное количество воды, то для нее должны быть справедливы следующие основные соотношения:

$$\int_0^l \Phi_x dy = 0, \tag{240}$$

$$\int_0^L \Phi_y dx = 0. \tag{241}$$

Но тогда из (238) и (240) нетрудно вывести

$$\gamma_x = \frac{b}{Bl}(\zeta_l - \zeta_0). \tag{242}$$

Подставим (242) в (239) и учтем (241). Тогда окажется, что

$$\frac{\partial \zeta}{\partial y} = \frac{b^2}{B^2 l}(\zeta_0 - \zeta_l) - \frac{c}{B}T_x(y), \tag{243}$$

или после интегрирования

$$\zeta(y) = \frac{b^2}{B^2 l}(\zeta_0 - \zeta_l)\, y - \frac{c}{B}F(y) + \zeta_0, \tag{244}$$

где сокращенно обозначено

$$F(y) = \int T_x(y)\, dy. \tag{245}$$

В исследуемой области океана сохраняется постоянный объем воды. Следовательно, подъем уровня океана в одних местах и опускание его в других должны подчиняться условию

$$\int_0^l \zeta(y)\, dy = 0. \tag{246}$$

Применим условие (246) к (244)

$$\zeta_l - \zeta_0 = \frac{2B^2}{b^2}\zeta_0 - \frac{2cB}{b^2 l}\int F(y)\,dy. \tag{247}$$

Подставив (247) в (242), получим

$$\gamma_x = \frac{2}{bl}\left[B\zeta_0 - c\overline{F(y)}\right] = \text{const}, \tag{248}$$

где через $\overline{F(y)}$ обозначено среднее значение $F(y)$ на протяжении от $x = 0$ до $x = l$.

Подставим (247) в (244). Тогда

$$\zeta(y) = \frac{2\zeta_0}{l}\left(\frac{l}{2} - y\right) + \frac{c}{B}\left[\frac{2}{l}\overline{F(y)}\,y - F(y)\right]. \tag{249}$$

Подстановка (247) в (243) даст

$$\gamma_y = -\frac{\partial\zeta}{0y} = \frac{2\zeta_0}{l} - \frac{c}{B}\left[\frac{2}{l}\overline{F(y)} - T_x(y)\right]. \tag{250}$$

Произвольную постоянную ζ_0 Штокман определяет, исходя из распределения тангенциальной силы трения T_x вдоль меридиана

$$T_x = \overline{T} + T_x(y), \tag{251}$$

обозначая через $\overline{T}$ среднее значение этой силы на исследуемом участке. Он показывает, что ζ_0 выражается через $\overline{T}$ следующим образом:

$$\zeta_0 = \frac{Blc\overline{T}}{2(B^2 + b^2)}. \tag{252}$$

Подстановка этого выражения в (248) дает наклон поверхности океана в направлении основной, зональной, составляющей ветра

$$\gamma_x = \frac{c}{b}\left[\frac{B^2\overline{T}}{B^2 + b^2} - \frac{2}{l}\overline{F(y)}\right]. \tag{253}$$

Совершенно так же после подстановки (252) в (249) и (250) получаются выражения для наклона поверхности океана в меридиональном направлении

$$\gamma_y = \frac{cB\overline{T}}{B^2 + b^2} - \frac{c}{B}\left[\frac{2}{l}\overline{F(y)} - T_x(y)\right] \tag{254}$$

и окончательное выражение для меридионального профиля поверхности океана

$$\zeta(y) = \frac{cBl\overline{T}}{2(B^2 + b)^2}\left(1 - \frac{2y}{l}\right) + \frac{c}{B}\left[\frac{2}{l}\overline{F(y)}\,y - F(y)\right]. \tag{255}$$

Чтобы получить схему топографии поверхности океана в области противотечений и связанные с нею линии тока, задается простое косинусоидальное распределение тангенциальной силы T_x вдоль меридиана

$$T_x(y) = -\frac{T_0}{y}\left(1 + \cos\frac{2\pi y}{l}\right), \tag{256}$$

откуда следует $\overline{T} = -\frac{T_0}{2}$.

На основании (248) и (256)

$$F(y) = -\frac{T_0}{2}\int\left(1 + \cos\frac{2\pi y}{l}\right)dy = -\frac{T_0}{2}y - \frac{T_0 l}{4\pi}\sin\frac{2\pi y}{l}, \tag{257}$$

откуда следует $\overline{F(y)} = -\frac{T_0 l}{4}$.

Подставляя полученные выражения в формулы (253) — (255), после преобразований находим

$$\zeta(y) = \frac{clT_0}{2B}\left[\frac{\frac{y}{l}-\frac{1}{2}}{1+\left(\frac{b}{B}\right)^2}+\frac{1}{2\pi}\sin\frac{2\pi y}{l}\right], \tag{258}$$

$$\gamma_y = -\frac{\partial\zeta(y)}{\partial y} = -\frac{cT_0}{2B}\left[\frac{1}{1+\left(\frac{b}{B}\right)^2}+\cos\frac{2\pi y}{l}\right],$$

$$\gamma_x = -\frac{\partial\zeta}{\partial x} = \frac{cbT_0}{2(B^2+b^2)} = \text{const}. \tag{259}$$

Отсюда непосредственно определяются составляющие G_x и G_y глубинного течения на основании известных формул (127)

$$G_x = k\gamma_y = -\frac{kcT_0}{2B}\left[\frac{1}{1+\left(\frac{b}{B}\right)^2}+\cos\frac{2\pi y}{l}\right],$$

$$G_y = -k\gamma_x = -\frac{kcbT_0}{2(B^2+b^2)}. \tag{260}$$

Было бы ошибочным ограничиться этими составляющими, непосредственно связанными с динамической топографией океана: в действительности к ним добавляются весьма значительные составляющие *дрейфового* течения, которое налагается на глубинное, охватывающее всю толщу океана от поверхности до придонного слоя. Что касается составляющих дрейфа, то их обычное выражение

$$U_{0x} = U_{0y} = \frac{\pi T}{2D\omega\sin\varphi}$$

заменяется здесь иным, более удобным для дальнейших выкладок. На основании (129) запишем

$$U_{0x} = U_{0y} = \frac{kcT_x}{2B}.$$

В свою очередь при принятом распределении ветра (256) это выражение переходит в следующее:

$$U_{0x} = U_{0y} = \frac{kcT_0}{4B}\left(1+\cos\frac{2\pi y}{l}\right). \tag{261}$$

Но тогда, суммируя соответствующие составляющие, следует записать

$$U_{1x} = G_x + U_{0x} = -\frac{kcT_0}{4B}\left[\frac{2}{1+\left(\frac{b}{B}\right)^2}+1+3\cos\frac{2\pi y}{l}\right],$$

$$U_{1y} = G_y + U_{0y} = \frac{kcT_0}{4B}\left[Q+\cos\frac{2\pi y}{l}\right], \tag{262}$$

где сокращенно обозначено

$$Q = \frac{(B-b)^2}{B^2+b^2} = \frac{\left(\pi\frac{H}{D}-1\right)^2}{\left(\pi\frac{H}{D}-1\right)^2+\left(\pi\frac{H}{D}-\frac{1}{2}\right)}. \tag{262а}$$

Найдя эти выражения, Штокман получает из них уравнения линий тока *результирующих* течений, составленных из глубинных и дрейфовых. Как

обычно, сперва пишется дифференциальное уравнение линий тока [1]

$$\frac{dy}{dx} = \frac{U_{1y}}{U_{1x}} = -\frac{Q + \cos y}{\frac{2B^2}{B^2 + b^2} + 1 + 3\cos y},$$

из которого после интегрирования вытекает

$$x = \frac{3(Q-1)}{\sqrt{1-Q^2}}\left(\frac{2B^2}{B^2+b^2} + 1\right)\ln\frac{\sqrt{1-Q}\,\mathrm{tg}\,\frac{y}{2} + \sqrt{1+Q}}{\sqrt{1-Q}\,\mathrm{tg}\,\frac{y}{2} - \sqrt{1+Q}} - 3y + C. \qquad (263)$$

На рис. 54 воспроизведены линии тока, построенные на основании формулы (263). Слева от диаграммы изображен в плане закон распределения тангенциальной силы T_x вдоль меридиана. Пунктирными линиями обозначены

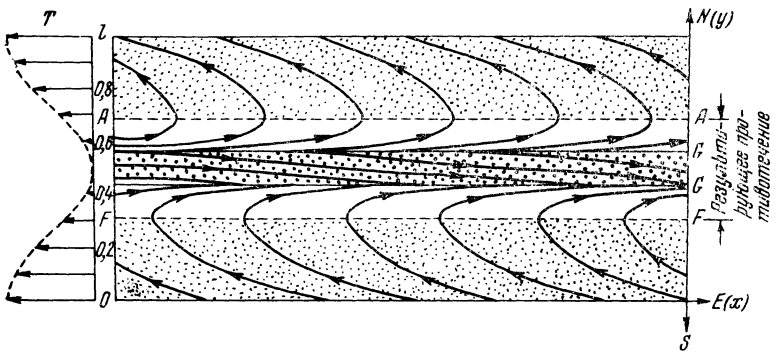


Рис. 54. Линии тока

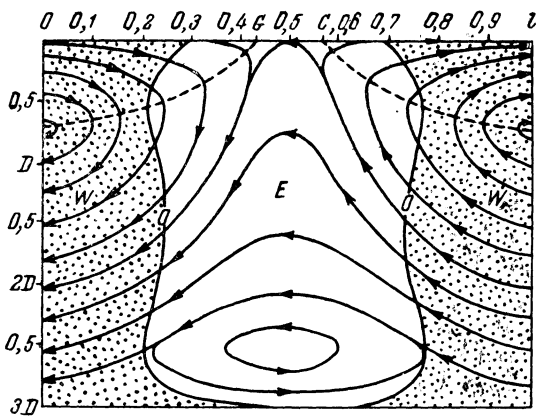


Рис. 55. Вертикальная циркуляция

границы противотечения, заключенного между двумя поясами экваториальных течений (северным и южным). Отчетливо видно, что противотечение всюду направлено *против* зональной составляющей ветра. Только посредине диаграммы эта составляющая обращается в нуль. Близ границ противотечения скорость ветра и порожденная ею тангенциальная сила весьма значительны. Таким образом, теория хорошо разъясняет самую замечательную

[1] Для простоты принято $\frac{2\pi y}{l} = y_1$, но индекс 1 далее опущен.

особенность экваториального противотечения, подводит под нее рациональную физическую основу.

Все выводы сделаны в наиболее общем виде, применительно к какому-то среднему значению отношения глубины океана H к глубине трения D и соответствующему значению величины Q в (262а). Поэтому на диаграмме рис. 54 возникло своеобразное «ядро противотечения», покрытое точками и расположенное между линией расхождения струй G и линией схождения струй G. При чрезвычайно больших значениях отношения H/D обе эти линии смыкаются между собой и ядро противотечения вырождается в прямую, идущую вдоль его оси.

Линии расхождения (дивергенции) и схождения (конвергенции) струй наблюдаются в океане при океанографических исследованиях. Совершенно очевидно, что у первой из них должны наблюдаться *восходящие* потоки, а у второй — *нисходящие* потоки вод. В связи с этим представляет интерес теоретическая диаграмма Штокмана, вычисленная им для вертикального разреза океана плоскостью меридиана. Не приводя выкладок, воспроизведем на рис. 55 эту диаграмму вертикальной циркуляции в области северного и южного экваториальных течений W и в области противотечения E, расположенной между ними.

Как и на диаграмме рис. 53, здесь в области течений W основная составляющая скоростей направлена к западу. В области противотечения E она направлена к востоку.

§ 19. Полные потоки в океане при преобладающем влиянии бокового трения

Морские течения рассматривались до сих пор на основе *первой схемы*, упомянутой в § 8: всюду молчаливо допускалось, что среди сил внутреннего трения преобладают силы, возникающие между горизонтальными слоями; всюду исключались из рассмотрения те силы трения, которые могут возникать на *вертикальных* границах водных масс, исключались из анализа силы «бокового трения» в воде.

Как говорилось в § 8, первая схема позволяет решить до конца (до числа) задачи о распределении скоростей течения как по горизонтальным, так и по вертикальному направлению; в большинстве случаев это не представляет особого труда, так как с формальной стороны эти задачи аналогичны давно решенным задачам о поле логарифмического потенциала.

К сожалению, подобное решение связано с большими погрешностями, когда в океане существует очень большой градиент плотности вод по вертикали. В этих случаях сильно затрудняется перемешивание между горизонтальными слоями и снижается величина коэффициента турбулентного трения между ними; коэффициент бокового трения здесь может превысить в 10^6 и даже в 10^7 раз величину коэффициента межслойного трения. Следовательно, даже при сравнительно небольших значениях горизонтального градиента скоростей произведение этого градиента на коэффициент бокового трения может значительно превысить произведение вертикального градиента скоростей на коэффициент межслойного трения. Другими словами, силы бокового трения здесь должны играть бóльшую роль по сравнению с силами межслойного трения. При наличии очень большой глубины океана в соответствующем районе, придется признать, что трение вод *о дно* пренебрежимо мало́ по сравнению с трением между водами исследуемого потока и окружающей водной средой по бокам потока. Значит, для возможно большего приближения к истине здесь надо по-новому схематизировать картину потоков, выдвинув на передний план влияние *бокового трения*.

До настоящего времени эта, вторая, схема потоков позволила решить сравнительно ограниченное число задач и притом решить их, как правило, лишь в обобщенном виде — в виде уравнений, описывающих *результирующие потоки*.

В нашей стране такие задачи решил В. Б. Штокман, с работами которого следует познакомиться всем интересующимся морскими течениями как с теоретической, так и с практической стороны. Здесь мы изложим основные мысли этого автора [29].

В переслоенном океане с большим градиентом плотностей по вертикали коэффициент межслойного трения μ нельзя принимать постоянным на всех глубинах. Напротив, коэффициент бокового трения μ_L, значительно превышающий его по порядку величины, может быть принят одинаковым как на поверхности океана, так и на глубинах. Исходя из этих соображений, операторы ∇^2 в уравнениях движения расчленим на две части, одна из которых будет связана с μ, а другая — с μ_L. По умножении всех членов уравнений на плотность δ эта величина сохранится только в члене, который учитывает кориолисову силу, и система примет вид

$$\begin{aligned} \mu_L\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial z}\right)+2\bar{\omega}\delta v &= \frac{\partial p}{\partial x}, \\ \mu_L\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\mu\frac{\partial v}{\partial z}\right)-2\bar{\omega}\delta u &= \frac{\partial p}{\partial y}. \end{aligned} \tag{264}$$

Умножим все члены уравнений на толщину dz элементарного слоя и проинтегрируем каждый член полученного нового уравнения по вертикали в пределах от $z=0$ до $z=H$, где H — глубина океана в исследуемой точке.

При таком интегрировании придется учесть, что

$$\int_0^H u\,dz=\Phi_x,\quad \int_0^H v\,dz=\Phi_y; \tag{265}$$

$$\int_0^z \delta\,dz=q,\quad \int_0^H \delta\,dz=Q; \tag{266}$$

$$p_z-p_0=g\int_0^z \delta\,dz; \tag{267}$$

$$\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_z=g\frac{\partial q}{\partial x},\quad \left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)_z=g\frac{\partial q}{\partial y}. \tag{268}$$

В соответствии с этим нетрудно убедиться, что интегрирование дает

$$\begin{aligned} \mu_L\left(\frac{\partial^2\Phi_x}{\partial x_2}+\frac{\partial^2\Phi_x}{\partial y^2}\right)+\left[\left(\mu\frac{\partial u}{\partial z}\right)_H-\left(\mu\frac{\partial u}{\partial z}\right)_0\right]+2\bar{\omega}\delta\Phi_y &= g\frac{\partial Q}{\partial x}, \\ \mu_L\left(\frac{\partial^2\Phi_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi_y}{\partial y^2}\right)+\left[\left(\mu\frac{\partial v}{\partial z}\right)_H-\left(\mu\frac{\partial v}{\partial z}\right)_0\right]-2\bar{\omega}\delta\Phi_x &= g\frac{\partial Q}{\partial y}. \end{aligned} \tag{269}$$

Величины, стоящие в квадратных скобках, определяются на основании граничных условий. Именно, на верхней границе должны соблюдаться соотношения

$$\left(\mu\frac{\partial u}{\partial z}\right)_0=-T_x,\quad \left(\mu\frac{\partial v}{\partial z}\right)_0=-T_y, \tag{270}$$

в которых по-прежнему через T_x и T_y обозначены составляющие тангенциальной силы трения ветра, отнесенной к единице поверхности моря. На нижней границе, у дна моря с сильно переслоенной водой, практически должна

отсутствовать какая-либо тангенциальная сила ввиду отсутствия передачи количества движения сверху на такую глубину. Следовательно, здесь будет

$$\left(\mu \frac{\partial u}{\partial z}\right)_H = \left(\mu \frac{\partial v}{\partial z}\right)_H = 0. \tag{271}$$

Отметим, что при интегрировании величина δ была заменена некоторой средней величиной плотности, так как составляющие скорости u и v меняются по вертикали значительно быстрей, чем меняется δ.

На основании изложенного вместо уравнений (264) запишем новые

$$\begin{aligned} \mu_L \left(\frac{\partial^2 \Phi_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi_x}{\partial y^2}\right) + T_x + 2\bar{\omega}\delta\Phi_y &= g \frac{\partial Q}{\partial x}, \\ \mu_L \left(\frac{\partial^2 \Phi_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi_y}{\partial y^2}\right) + T_y - 2\bar{\omega}\delta\Phi_x &= g \frac{\partial Q}{\partial y}. \end{aligned} \tag{272}$$

Остается добавить к ним уравнение неразрывности, которое может быть получено из обычного

$$\frac{\partial (\delta u)}{\partial x} + \frac{\partial (\delta v)}{\partial y} + \frac{\partial (\delta w)}{\partial z} = 0. \tag{273}$$

Умножим все члены (273) на dz и проинтегрируем полученное уравнение в прежних пределах — от $z = 0$ до $z = H$. Тогда окажется

$$\frac{\partial}{\partial x}(\bar{\delta}\Phi_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\bar{\delta}\Phi_y) + \bar{\delta} w_H - \bar{\delta} w_0 = 0. \tag{274}$$

Это выражение можно упростить, учтя, что вертикальная составляющая w обращается в нуль как на поверхности океана, так и на дне, и приняв во внимание, что осредненная по вертикали плотность $\bar{\delta}$ меняется в горизонтальных направлениях медленней, чем меняются составляющие потока u и v. После учета этих обстоятельств можно будет вместо (274) записать

$$\frac{\partial \Phi_x}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_z}{\partial y} = 0,$$

или

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\Phi} = 0. \tag{275}$$

Система уравнений (272) неудобна в том отношении, что в правых частях имеются члены, связанные с распределением масс. Чтобы исключить эти члены и получить в чистом виде связь между полем ветра и потоком Φ, продифференцируем первое из уравнений (272) по y, а второе — по x и вычтем одно уравнение из другого. Тогда получим новое чрезвычайно интересное соотношение

$$\mu_L \left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 \Phi_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi_x}{\partial y^2}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 \Phi_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi_y}{\partial y^2}\right)\right] + \frac{\partial T_x}{\partial y} - \frac{\partial T_y}{\partial x} = 0. \tag{276}$$

Как и прежде в применении к двумерному полю, воспользуемся условной векторной символикой. В векторной форме (276) будем иметь вид

$$\nabla^2 \operatorname{rot}_z \boldsymbol{\Phi} = -\frac{\operatorname{rot}_z \mathbf{T}}{\mu_L}. \tag{277}$$

Чтобы получить здесь нечто аналогичное «линиям тока» для полного переноса вод, Штокман вводит представление о *функции полных потоков* ψ, связанной с составляющими потока следующими соотношениями:

$$\Phi_x = -\frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \Phi_y = \frac{\partial \psi}{\partial z}. \tag{278}$$

Они удовлетворяют уравнению неразрывности (275). В любой точке океана вектор $\boldsymbol{\Phi}$ совпадает с направлением касательной к изолинии $\psi = \text{const}$,

причем бо́льшие значения ψ находятся справа от него, а меньшие — слева (если смотреть в направлении вектора Φ). Следовательно, изолинии $\psi = \text{const}$ действительно напоминают по своим свойствам линии тока, хотя они рисуют не движение отдельных частиц воды, а только общую картину переноса вод. Вместо дифференциальных уравнений линий тока теперь можно будет получить дифференциальное уравнение, которое связывает ψ с полем ветра. Для этого следует лишь подставить (278) в (267). Тогда после простых преобразований получим

$$\frac{\partial^4\psi}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4\psi}{\partial x^2\partial y^2} + \frac{\partial^4\psi}{\partial y^4} = -\frac{\operatorname{rot}_z \mathbf{T}}{\mu_L}, \tag{279}$$

или в символической форме

$$\nabla^4\psi = -\frac{\operatorname{rot}_z \mathbf{T}}{\mu_L}, \tag{280}$$

где, как известно,

$$\nabla^4 \equiv \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right). \tag{281}$$

Любопытно, что уравнение (279) по своей форме совершенно аналогично уравнению *изгиба пластины* под действием приложенных к ней сил, широко применяемому при решении задач теории упругости. Функция потока здесь играет формально ту же роль, какую в упругостных задачах играет прогиб пластины; роль величины $\operatorname{rot}_z \mathbf{T}$ здесь та же, что и у нагрузки, приложенной к пластине; коэффициент бокового турбулентного трения формально занимает то же место, что и коэффициент цилиндрической жесткости пластины в упругостных задачах.

Аналогия между упомянутыми, совершенно разнородными задачами распространяется и на граничные условия: в случае защемленной изгибаемой пластины на границе защемления одновременно обращаются в нуль и прогиб, и производная от прогиба по нормали; в гидродинамическом варианте уравнения у береговой черты обязаны обращаться в нуль величина функции потока ψ и ее производная по нормали

$$\psi_{\text{берег}} = 0, \quad \left(\frac{\partial\psi}{\partial n}\right)_{\text{берег}} = 0. \tag{282}$$

Как известно, решение задач теории упругости обычно бывает более сложным по сравнению с задачами гидродинамики, связанными с интегрированием уравнений в частных производных лишь второго порядка: на сцену вступают уравнения в частных производных четвертого порядка. Именно этим объясняется также и трудность решения до конца задач о морских течениях, связанных с учетом *бокового* трения; мы видели, что уравнение Штокмана (279) содержит частные производные четвертого порядка.

Те же осложнения встречаются на пути исследования *полей масс*, связанных с полем ветра. В этой области основные соотношения были получены тем же автором. Воспроизводя их вывод, прежде всего выразим составляющую потока Φ_x из второго уравнения системы (272).

$$\Phi_x = \frac{\mu_L}{2\bar{\omega}\delta}\left(\frac{\partial^2\Phi_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi_y}{\partial y^2}\right) + \frac{T_y}{2\bar{\omega}\delta} - \frac{g}{2\bar{\omega}\delta}\frac{\partial Q}{\partial y}.$$

Подставив это выражение в первое уравнение системы (272), получим

$$2\bar{\omega}\delta\Phi_y = g\frac{\partial Q}{\partial x} - T_x + \frac{\mu_L g}{2\bar{\omega}\delta}\frac{\partial}{\partial y}\nabla^2 Q - \frac{\mu_L}{2\bar{\omega}\delta}\nabla^2 T_y - \frac{\mu_L^2}{2\bar{\omega}\delta}\nabla^4\Phi_y. \tag{283}$$

Совершенно так же окажется, что

$$2\bar{\omega}\delta\Phi_x = -g\frac{\partial Q}{\partial y} + T_y + \frac{\mu_L g}{2\bar{\omega}\delta}\frac{\partial}{\partial y}\nabla^2 Q - \frac{\mu_L}{2\bar{\omega}\delta}\nabla^2 T_x - \frac{\mu_L^2}{2\bar{\omega}\delta}\nabla^4\Phi_x. \tag{284}$$

Продифференцируем (283) по y, а (284) по x и сложим результаты. В результате получим

$$2\bar{\omega}\delta \operatorname{div}\mathbf{\Phi} = \operatorname{rot}_z \mathbf{T} + \frac{\mu_L g}{2\bar{\omega}\delta}\nabla^4 Q - \frac{\mu_L}{2\bar{\omega}\delta}\nabla^2 \operatorname{div}\mathbf{T} - \frac{\mu_L^2}{2\bar{\omega}\delta}\nabla^4 \operatorname{div}\mathbf{\Phi}. \quad (285)$$

Но на основании (275) расхождение вектора $\mathbf{\Phi}$ равно нулю. Следовательно

$$\nabla^4 Q = \frac{1}{g}\left(-\frac{2\bar{\omega}\delta}{\mu_L}\operatorname{rot}_z \mathbf{T} + \nabla^2 \operatorname{div}\mathbf{T}\right). \quad (286)$$

Вместо Q можно внести в уравнение (286) выражение, содержащее среднюю динамическую высоту $\overline{D}$ изобарических поверхностей, выраженную в динамических сантиметрах:

$$\nabla^4 \overline{D}H = \frac{1}{10^3}\left(-\frac{2\bar{\omega}\delta}{\mu_L}\operatorname{rot}_z \mathbf{T} + \nabla^2 \operatorname{div}\mathbf{T}\right). \quad (287)$$

В частном случае постоянной глубины H океана в исследуемой области величину H можно вынести за знак оператора или перенести в правую часть уравнения, где она войдет в знаменатель множителя перед скобкой. Как видим, уравнение, связывающее поле масс с полем ветра, также содержит частные производные четвертого порядка.

Связь между полем масс и *полными потоками* выражается уравнением более низкого порядка. Продифференцируем первое уравнение из системы (272) по x, а второе по y и сложим результаты. Тогда получим искомую связь

$$g\nabla^2 Q = 2\bar{\omega}\delta \operatorname{rot}_z \mathbf{\Phi} + \operatorname{div}\mathbf{T} + \mu_L \nabla^2 \operatorname{div}\mathbf{\Phi}.$$

Вспомним, что на основании (275) $\operatorname{div}\mathbf{\Phi} = 0$. Поэтому можно записать

$$\nabla^2 Q = \frac{1}{g}(2\bar{\omega}\delta \operatorname{rot}_z \mathbf{\Phi} + \operatorname{div}\mathbf{T}), \quad (288)$$

или, снова переходя к средним динамическим высотам, выраженным в динамических сантиметрах,

$$\nabla^2 \overline{D}H = \frac{1}{10^3}(2\bar{\omega}\delta \operatorname{rot}_z \mathbf{\Phi} + \operatorname{div}\mathbf{T}). \quad (289)$$

Как и в уравнении (287), величину H можно перенести в знаменатель множителя перед скобкой в правой части, если в исследуемом районе океана можно полагать глубину H постоянной.

Исходя из своих основных уравнений, Штокман решил несколько конкретных задач, позволяющих сопоставить теоретическое вычисление с результатами непосредственных наблюдений в природе. В частности, им было проделано вычисление результирующего потока вод в муссонном поле круглого моря. Деля величину результирующего потока на толщину слоя, охваченного им, Штокман получил значение осредненной скорости дрейфового течения, которое почти вдвое превышает цифру, полученную Шулейкиным без учета бокового трения (с учетом трения о дно). Порядок величин одинаков, а потому сейчас — при наличии весьма скудных материалов непосредственных наблюдений — трудно отдать предпочтение первой или второй схеме. Надо полагать, что в прибрежном, не слишком глубоководном районе первая схема (учитывающая трение о дно) едва ли серьезно грешит против истины.

Иная картина должна получаться в открытом океане, в областях с весьма значительными глубинами: там, по всей вероятности, вторая схема (учитывающая боковое трение) должна дать результаты, более близкие к природе. С этой точки зрения весьма интересны соображения, высказанные

Штокманом в отношении океанических течений в областях с очень большой и *переменной* глубиной. Там развернутое уравнение (289) должно быть записано в виде

$$H\left(\frac{\partial^2\overline{D}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\overline{D}}{\partial y^2}\right)+\overline{D}\left(\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 H}{\partial y^2}\right)+2\left(\frac{\partial\overline{D}}{\partial x}\frac{\partial H}{\partial x}+\frac{\partial\overline{D}}{\partial y}\frac{\partial H}{\partial y}\right)=$$
$$=\frac{1}{10^3}(2\overline{\omega}\delta\,\mathrm{rot}_z\,\mathbf{\Phi}+\mathrm{div}\,\mathbf{T}). \qquad (290)$$

Допустим для простоты вместе с автором, что ветер отсутствует и что поэтому величина $\mathrm{rot}_z\,\mathbf{\Phi}$ зависит только от поля масс, характеризуемого в свою очередь распределением средних динамических высот $\overline{D}$ над меняющейся глубиной океана.

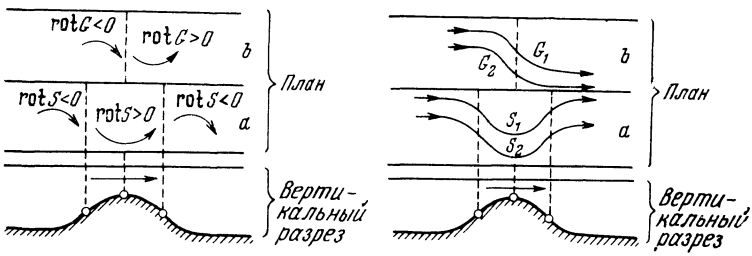


Рис. 56. Поток с боковым трением над поднятием дна

Пусть изолинии средних динамических высот за пределами области переменных глубин представляют собой семейство прямых, параллельных оси X, и пусть изобаты дна представляют собой прямые, параллельные оси Y. Тогда полученное уравнение перепишется в более простом виде

$$\mathrm{rot}_z\,\mathbf{\Phi}=\frac{10^3}{2\overline{\omega}\delta}\left(\overline{D}\frac{d^2H}{dx^2}+H\frac{d^2\overline{D}}{dy^2}\right). \qquad (291)$$

Интересуясь *только* влиянием топографии дна, допустим теперь, что средняя динамическая высота $\overline{D}$ меняется по какому-то линейному закону в направлении оси Y. Тогда вторая производная от $\overline{D}$ по Y автоматически обратится в нуль, и уравнение (291) приобретет наиболее простой из всех возможных вид

$$\mathrm{rot}_z\,\mathbf{\Phi}=\frac{10^3}{2\overline{\omega}\delta}\overline{D}\frac{d^2H}{dx^2}. \qquad (292)$$

Положительное значение rot_z здесь соответствует направлению вращения против часовой стрелки. На рис. 56 изображено схематизированное поведение потока при прохождении над поднятием дна в соответствии с формулой (292). Как видим, этот рисунок существенно отличается от рис. 39, на котором были воспроизведены экмановские линии тока над волнистым дном. На рис. 39 линии тока начинали отклоняться вправо от прямолинейного направления тогда, когда наступали первые признаки поднятия дна; над вершиной поднятия, где наступает понижение, линии тока начинали отклоняться влево. На рис. 56 решающую роль играет не наклон дна, идущего на подъем или на понижение, а *изменение наклона*. Там, где крутизна подъема дна возрастает, поток отклоняется вправо; там, где крутизна подъема убывает или начавшееся понижение дна идет с возрастающей крутизной, поток отклоняется влево; там, где убывает крутизна понижения дна, поток снова отклоняется вправо. Все сказанное относится к северному полушарию; в южном полушарии должна наблюдаться противоположная по знаку картина.

К сожалению, материал непосредственных точных исследований течений в условиях волнистого строения дна пока очень скуден. Но имеющиеся данные заставляют предполагать, что уравнение Штокмана лучше описывает поведение течений в неоднородном глубоком океане, чем соответствующее уравнение Экмана. Следовательно, в неоднородном глубоком океане боковое трение действительно играет решающую роль, а трение о дно отступает на задний план.

§ 20. Теория вторгающейся струи в применении к Гольфстриму

В предыдущем параграфе было показано, что при исследовании течений в открытом океане с неоднородным строением вод и большими глубинами необходимо учитывать *боковое трение*. В связи с весьма серьезными трудностями при этом приходится пренебрегать трением потоков о нижележащие слои океанской воды. По всей вероятности, ошибка, проистекающая отсюда, не может оказаться существенной, так как неоднородное строение вод препятствует передаче количества движения по вертикали, резко снижая коэффициент турбулентного трения между слоями.

Совершенно очевидно, что учет бокового трения особо важен в тех случаях, когда морское течение *вторгается* в окружающие воды как четко оформленная струя большей или меньшей мощности, как некоторый «луч», за которым легко проследить посредством гидрологических разрезов, а иногда даже простым глазом, наблюдая изменение окраски вод. Самым замечательным примером подобного «луча» является Гольфстрим. Здесь по бокам «луча», несомненно, возникают мощные вихри с вертикальной осью, обладающие большой живучестью. В то же время хорошо известно, какой поразительной живучестью обладает сам «луч».

Рассмотрим причину подобной живучести «луча», отвлекаясь пока от учета системы ветров над Северной Атлантикой, которая тоже, несомненно, должна поддерживать существующее поступательное движение теплых вод. Будем придерживаться тех работ, которые были сделаны применительно к «лучу» финским геофизиком Толмином [30] и к Гольфстриму, в частности, норвежским геофизиком Россби [31].

Последний отмечает, что для характеристики самих вихрей необходимо учитывать действие кориолисовой силы на отдельные частицы воды, участвующие в вихревом движении, а не ограничиваться только введением силы Кориолиса, вычисленной применительно к какому-то осредненному движению водных масс. Используя идеи о моменте количества движения во вращающейся системе координат, приходим к выводу, что при прямолинейном параллельном расположении струй скорость течения должна непрерывно уменьшаться в направлении, перпендикулярном оси течения, по закону

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -2\vartheta \sin\varphi, \tag{293}$$

где все обозначения прежние. На широте $\varphi = 43°$ это составляет примерно 1 *см/сек* на каждые 100 *м* удаления от стрежня. В 1932 г. Тэйлор доказал следующую важную теорему: «Пусть ψ представляет собой функцию тока в двумерном движении вязкой несжимаемой жидкости, происходящем в системе, которая вращается с угловой скоростью Ω вокруг некоторой оси, перпендикулярной к плоскости движения. Пусть p выражает давление в обычном смысле слова. Эффект вращения системы может быть полностью учтен путем замены p на величину

$$p + 2\delta\Omega\psi + \frac{1}{2}\delta\Omega^2 r^2, \tag{294}$$

где через r обозначено расстояние от центра вращения. Ни напряжения, вызванные вязкостью, ни напряжения, вызванные турбулентностью, не изменяются при вращении».

В случае вращающейся Земли последний член $(\frac{1}{2}\delta\Omega^2 r^2)$ нас не будет интересовать, так как он войдет просто в дополнение к силе тяжести. Что же касается члена с первой степенью угловой скорости, то Россби учитывает его в своей гидродинамической задаче, вводя в нее *добавочный* градиент давления — «кориолисов» градиент. Слагающие его таковы:

$$-\frac{\partial p_c}{\partial x} = -2\delta\bar{\omega}v, \quad -\frac{\partial p_c}{\partial y} = +2\delta\bar{\omega}u. \tag{295}$$

Приняв во внимание, что слагающие полного градиента во вращающейся системе будут

$$\frac{\partial p_r}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial p_c}{\partial x}, \quad \frac{\partial p_r}{\partial y} = \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial p_c}{\partial y}, \tag{296}$$

можно применить к этой системе важные соотношения, выведенные для «луча», вторгающегося в вязкую жидкость (в покоящейся системе). Именно, обозначая через τ_{xy} и τ_{yx} компоненты напряжений сдвига, можно показать, что

$$\begin{aligned} \delta\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y}\right) &= -\frac{\partial p_r}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}, \\ \delta\left(\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y}\right) &= -\frac{\partial p_r}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x}. \end{aligned} \tag{297}$$

Сверх того, должно быть удовлетворено условие неразрывности

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

Это условие вместе с первым уравнением (297) дает

$$\delta\frac{\partial (u^2)}{\partial x} + \delta\frac{\partial (uv)}{\partial y} = -\frac{\partial p_r}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}. \tag{298}$$

При установившемся движении $\frac{\partial u}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial t} = 0.$

Проинтегрируем по y уравнение (298) при условии, что на границах u и τ_{xy} обращаются в нуль:

$$\frac{\partial}{\partial x}\int \delta u^2 dy = -\int \frac{\partial p_r}{\partial x}\, dy. \tag{299}$$

Интегрирование распространим на всю область течения. Теория и наблюдения показывают, что правая часть последнего равенства весьма мала. Поэтому можно принять, что приблизительно

$$\int \delta u^2 dy = \text{const}. \tag{300}$$

Итак, поток количества движения через поперечное сечение остается приблизительно *постоянным*. Но, приняв эту величину за постоянную, необходимо заключить, что

$$\frac{\partial p_r}{\partial x} = 0,$$

а в таком случае уравнение (298) перепишется в форме

$$\delta\frac{\partial (u^2)}{\partial x} + \delta\frac{\partial (uv)}{\partial y} = \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}. \tag{301}$$

Для напряжения сдвига берется выражение Прандтля

$$|\tau_{xy}| = \delta l^2 \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2, \tag{302}$$

в котором через l обозначена длина так называемого пути перемешивания, до некоторой степени аналогичного средней длине свободного пути в молекулярной кинетике. В данном случае ее можно считать связанной с x линейным соотношением

$$l = cx, \tag{303}$$

в котором c — константа.

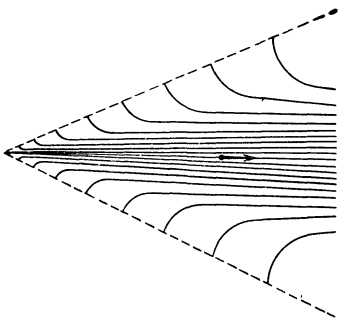


Рис. 57. Вторгающийся «луч» течения

Пусть функция тока представляется уравнением вида

$$\psi = \sqrt{x} F(\eta) = \sqrt{x} F\left(\frac{x}{y}\right), \tag{304}$$

где y отсчитывается от оси симметрии и возрастает влево. Тогда интеграл уравнения движения запишется в форме

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{x}} F', \qquad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{1}{\sqrt{x}}\left[\frac{1}{2} F - \eta F'\right], \tag{305}$$

где

$$F' = \frac{dF}{d\eta}.$$

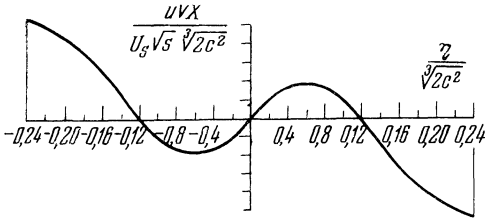


Рис. 58. Распределение поперечных составляющих скорости

Но по условию на границах обращаются в нуль и u и τ_{xy}, а вслед за ними и $\partial u/\partial y$. Стало быть, границами плоского потока должны служить две прямые линии

$$\eta = \eta_1,$$

$$\eta = \eta_2 = -\eta_1.$$

На рис. 57 воспроизведены эти границы, изображенные пунктиром. Сплошные линии представляют собой линии тока, вычисленные Россби. Как видим, «луч», внедряющийся в спокойную воду, постепенно засасывает с боков все новые и новые массы. Поэтому поток *масс* Ф сквозь поперечное сечение непрерывно *возрастает* при увеличении x. Закон нарастания определяется уравнением

$$\Phi = \delta \sqrt{x}\,[F(\eta_2) - F(\eta_1)]. \tag{306}$$

На рис. 58 воспроизведена диаграмма, показывающая распределение поперечных слагающих скорости v, а на рис. 59 — подобная же диаграмма для продольных слагающих u. По осям отложены безразмерные величины. Точки нанесены по экспериментальным измерениям. Совпадение между теорией и опытом здесь очень хорошее.

В природных условиях эта теория оказалась чрезвычайно ценной для исследования «луча», простирающегося над устойчивой подстилающей поверхностью *более плотной воды*. Именно в такой обстановке движутся воды Гольфстрима у берегов Северной Америки.

На рис. 60 воспроизведена теоретическая схема, построенная для случая совершенно неподвижных *боковых* масс воды, залегающих над той же более плотной подстилкой, как и «луч». Распределение скоростей в поперечнике течения принято здесь таким же, как на рис. 59. Как видим, поле кориолисовой силы приводит к характерному перегибу поверхности моря на оси течения и к резкому различию между глубинами залегания плотного неподвижного слоя слева и справа от «луча».

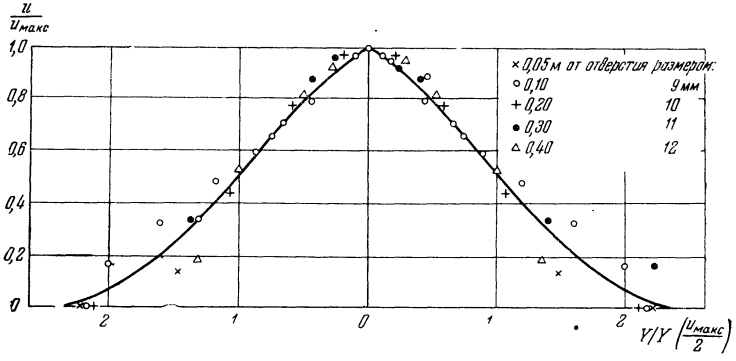


Рис. 59. Распределение продольных составляющих скорости

Перенос масс в самом луче выражается так:

$$\Phi = \frac{g}{2\omega}\frac{\delta}{\delta'}(\delta' - \delta)\,D_m\,(D_r - D_l). \qquad (307)$$

Здесь δ — плотность морской воды в верхнем слое, δ' — плотность в подстилающем слое, D_m — среднее арифметическое между слоями слева и справа от «луча».

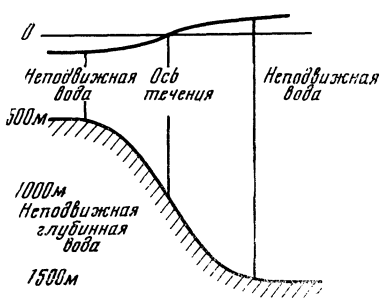


Рис. 60. Схема для случая неподвижных боковых масс

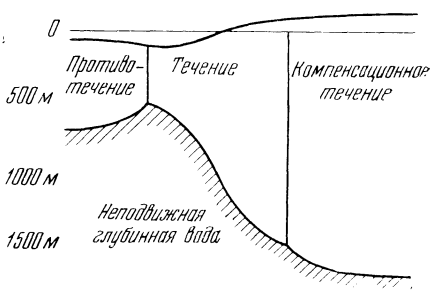


Рис. 61. Схема с учетом бокового вихреобразования

Еще большее приближение к действительной картине дает вторая теоретическая схема, воспроизводимая на рис. 61. Здесь учтено *вихреобразование* по бокам «луча», приводящее к возникновению *противотечения* слева от него и к компенсационному течению справа. Так как первое из них локализовано в более тонком слое, чем второе, то и скорость его, очевидно, должна быть соответственно больше.

Теоретическая схема рис. 61 хорошо передает основные черты распределения струй Гольфстрима и лежащих по обеим его сторонам струй *вторичных* течений. Обмен массами между этими струями непосредственно в Атлантике исследовался с применением метода ϑ — S-диаграмм; были получены результаты, согласные с теорией, хотя, правда, и не вполне достаточные для *количественной* ее проверки.

§ 21. Влияние изменений параметра Кориолиса с широтой на распределение скоростей течений в океане

Теория вторгающейся струи хорошо объясняет некоторые черты таких мощных течений, как Гольфстрим и Куро-Сио, но она не вскрывает происхождение этих течений: не отвечает на вопрос, созданы ли эти течения воздействием тангенциальных сил трения, вызванных ветром, или различиями в тепловых условиях между высоко- и низкоширотными поясами в Атлантическом и в Тихом океанах?

В § 17 мы видели, что течения, зарождающиеся в муссонном поле, обязаны своим происхождением первой из упомянутых причин и лишь сравнительно ничтожные скорости течений там могут вызываться конвекцией. Хотя некоторые авторы и склонялись ко второму предположению, но в настоящее время его следует считать несостоятельным: роль *тепловой* конвекции заведомо мала при формировании Гольфстрима, Куро-Сио, и несомненно их *дрейфовое* происхождение.

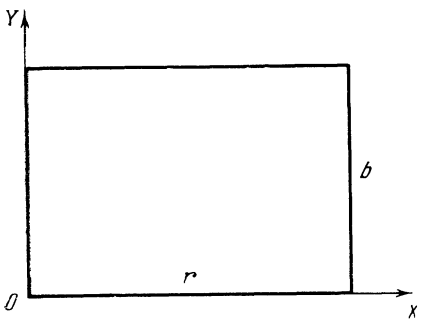


Рис. 62. Схема Г. Стоммела

Теория Экмана в той форме, в какой она была изложена в § 14, казалось бы, могла послужить для вычисления современными средствами скоростей течения в Атлантическом и в Тихом океанах по заданному среднеклиматическому полю давления над ними. Однако ни одна из попыток, предпринятых в этом направлении, не могла объяснить (на основании теории Экмана в оригинальной ее форме) одну важнейшую особенность всех наиболее мощных дрейфовых течений в обоих океанах: сгущение линий тока близ западных берегов океанов и разрежение их в восточных районах (в обоих полушариях).

Только в 1948 г. появилась работа Г. Стоммела [32], в которой было дано объяснение этого интересного и важного эффекта, носящего в настоящее время название «бета-эффекта».

Оказалось, что причина его возникновения кроется в непостоянстве кориолисова параметра $2\,\omega$ на различных широтах, в уменьшении его с уменьшением широты места. Сам В. Экман вносил некоторые уточнения в свои выкладки, учитывая это непостоянство, но он не проанализировал простую схему, позволившую Стоммелу обнаружить физическую сущность бета-эффекта.

Рассмотрим эту простую схему; следуя Стоммелу, представим себе прямоугольный участок плоскости, изображенный на рис. 62. Автор заменяет им участок поверхности океана, не внося тем самым существенных погрешностей в принципиальную сторону задачи. Обозначения, принятые на рисунке и в дальнейшем тексте изложения, отличаются от принятых в первоначальной статье этого автора и в основном взяты из его более поздней монографии [33].

Здесь ось X направлена на восток, а ось Y — на север. Берега океана прямолинейны. Координаты вершин прямоугольника $x = 0$, r и $y = 0$, b. При отсутствии ветра глубина океана считается постоянной, равной H. Под действием ветра возникают изменения этой глубины за счет подъема или опускания уровня моря в соответствующих точках на ζ, подлежащие определению. На юге выделенной области океана работают пассаты, а на севере — ветры с преобладающей составляющей, направленной на восток

(западно-восточный перенос). Тангенциальная сила трения, зависящая от y, выражается простым соотношением $F_y = -F \cos \pi y/b$.

Для упрощения решения задачи допускается, что компоненты сил трения пропорциональны компонентам скоростей течения — они равны соответственно $-Ru$ и $-Rv$. В свою очередь u и v считаются не зависящими от глубин, и *все* силы принимаются *массовыми*; в том числе массовыми считаются и силы трения воздуха о воду. При таких условиях установившийся режим $\left(\frac{\partial u}{\partial t} = 0,\ \frac{\partial v}{\partial t} = 0\right)$ течений можно описать приближенными уравнениями

$$(H + \zeta) fv - F \cos \pi \frac{y}{b} - Ru - (H + \zeta) g \frac{\partial \zeta}{\partial x} = 0, \tag{308}$$

$$-(H + \zeta) fu - Rv - (H + \zeta) g \frac{\partial \zeta}{\partial y} = 0. \tag{309}$$

Здесь f — параметр Кориолиса $2\bar{\omega}$, являющийся функцией координаты y.

Уравнение неразрывности записывается в форме

$$\frac{\partial [(H + \zeta) u]}{\partial x} + \frac{\partial [(H + \zeta) v]}{\partial y} = 0. \tag{310}$$

Обычным приемом перекрестного дифференцирования из уравнений (308) и (309), пользуясь также (310), можно получить новое уравнение, в котором величиной ζ в сумме $(H + \zeta)$ пренебрегается по сравнению с H. Для сокращения вводятся обозначения

$$\beta = \partial f / \partial y \text{ и } \gamma = F\pi / Rb. \tag{311}$$

Тогда новое уравнение приобретает вид

$$\frac{H}{R} \beta v + \gamma \sin \pi \frac{y}{b} + \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0. \tag{312}$$

В уравнении (310) пренебрегалось величиной ζ по сравнению с H и тем самым сохранены лишь частные производные от компонент скорости. В свою очередь эти компоненты обычно связываются с функцией тока ψ: $u = \partial\psi/\partial y$, $v = -\partial\psi/\partial x$. Следовательно, на основании этих соотношений, на основании упрощенного уравнения (310) и уравнения (312), запишется важное уравнение

$$\nabla^2 \psi + \frac{H}{R} \beta \frac{\partial \psi}{\partial x} = \gamma \sin \pi \frac{y}{b}. \tag{313}$$

В низких и даже в средних широтах можно принять линейную зависимость f от y, положив $f \approx \beta y$. В таком случае общий интеграл уравнения (313) запишется в форме

$$\psi = XY - \gamma \left(\frac{b}{\pi}\right)^2 \sin \pi \frac{y}{b}, \tag{314}$$

причем

$$Y = \sum_{j=1}^{j=\infty} (c_j \sin n_j y + d_j \cos n_j y), \tag{315}$$

$$X = \sum_{j=1}^{j=\infty} (p_j e^{A_j x} + q_j e^{B_j x}); \tag{316}$$

в свою очередь

$$A_j = -\frac{H\beta}{2R} + \sqrt{\left(\frac{H\beta}{2R}\right)^2 + n_j^2}; \quad B_j = -\frac{H\beta}{2R} - \sqrt{\left(\frac{H\beta}{2R}\right)^2 + n_j^2}. \tag{317}$$

Константы интегрирования c_j, d_j, p_j и q_j определяются на основании граничных условий: считается, что течения вплотную примыкают к сторонам

прямоугольника на рис. 62, т. е. сами эти стороны могут рассматриваться как краевые линии тока. Следовательно, на границах

$$\psi(0, y) = \psi(r, y) = \psi(x, 0) = \psi(x, b) = 0. \tag{318}$$

При таких граничных условиях обращаются в нуль константы d со всеми индексами и константы c со всеми индексами, *кроме* индекса 1. При существующих обозначениях в (314)—(316) величина c_1 будет умножаться на p_1 и q_1, что дает новую константу n_1. Что касается величины n_1, которая тоже войдет в окончательное выражение интеграла, то $n_1 = \pi/b$. В результате окажется, что

$$\psi = \frac{F\pi}{Rb}\left(\frac{b}{\pi}\right)^2 \sin \pi \frac{y}{b}\,(pe^{Ax} + qe^{Bx} - 1). \tag{319}$$

Здесь

$$p = \frac{1 - e^{Br}}{e^{Ar} - e^{Br}}, \quad q = 1 - p. \tag{320}$$

Для численных расчетов линий тока, а также изогипс уровня океана Стоммел задается следующими значениями: $r = 10\,000$ *км* $= 10^9$ *см*; $b = 6283$ *км* $= 2\pi \cdot 10^8$ *см*; $H = 200$ *м* $= 2 \cdot 10^4$ *см*; $F = 1$ *дин/см*^{2}; $R = 2 \cdot 10^{-2}$. Последняя величина выбрана с таким расчетом, чтобы скорости течений оказались близкими к существующим в природе.

Рассматриваются *три* случая возникновения установившихся течений на модели рис. 62.

1. *Не вращающаяся модель.* С достаточным приближением можно считать, что

$$p = e^{-\pi r/b}, \quad q = 1. \tag{321}$$

Уравнение для функции тока вместо общего (319) принимает вид

$$\psi = \frac{F\pi}{Rb}\left(\frac{b}{\pi}\right)^2 \sin \pi \frac{y}{b}\,[e^{(x-r)\,\pi/b} + e^{-x\pi/b} - 1]. \tag{322}$$

Уравнение (322) описывает семейство линий тока, симметричных как относительно средней параллели, так и относительно среднего меридиана. Линии тока, вычисленные по этому уравнению, представлены на рис. 63. С другой стороны, уравнение (322) совместно с (309) позволяет построить *изогипсы* уровня океана относительно положения покоя (при отсутствии ветра). Эти кривые представлены на рис. 64. Они также симметричны относительно средней параллели и относительно среднего меридиана, вдоль которых всюду $\zeta = 0$.

2. *Модель, вращающаяся равномерно*; $f = 0{,}25 \cdot 10^{-4} = \text{const}$. В этом случае $\partial f/\partial y = \beta = 0$. Следовательно, на основании уравнений (317) A и B оказываются равными по абсолютной величине, подобно первому случаю. Схема линий тока сохраняется в том же виде, в каком она изображена на рис. 63. Только изогипсы приобретают теперь совсем иную форму: градиент давления, вызываемый наклоном уровня океана, теперь должен содействовать компенсации силы Кориолиса. Схема изогипс, вычисленная применительно ко второму случаю, представлена на рис. 65. Она напоминает схему линий тока рис. 63, но заметно отличается от нее в углах: там слегка нарушается симметрия относительно среднего меридиана и относительно средней параллели.

3. *Равномерно вращающаяся модель. Параметр Кориолиса меняется при изменениях широты места.* В низких широтах можно считать, что $f = \beta y$, причем $\beta = 10^{-13}$ *см/сек*. В этом, наиболее интересном случае уравнения (317) дают для A и B неодинаковые абсолютные величины и показатели

степени в экспоненциальных функциях выражаются сложней, чем в уравнении (322). По осложненному уравнению, возникшему взамен (322), Стоммел построил линии тока, изображенные на рис. 66.

На этом рисунке отчетливо проявилось сгущение линий тока к западной границе океана и разрежение их в восточных областях. Изогипсы уровня океана, вычисленные Стоммелом для того же случая, изображены на рис. 67. Они также сгущаются на западе и разрежаются на востоке. Замечательное явление — бета-эффект — получило свое объяснение. Всегда после разгадки какого-то непонятного явления множеству читателей начинает казаться, что в сущности «так оно и быть должно»: бессмертен прецедент «колумбова яйца». Так и в данном случае многие читатели могут отметить, что асимметрию поля линий тока, поля изогипс, поля скоростей течений относительно среднего меридиана «надо было бы ожидать, даже не производя выкладок Стоммела». Против такого заявления трудно возразить: наличие кориолисовых сил порождает геострофические течения в воздушной и водной среде, которые в *чистом виде* всегда перпендикулярны к вектору, изображающему градиент давления в среде; это относится к полю, в котором параметр Кориолиса постоянен; если при перемещении из одной точки меридиана в другую меняется проекция угловой скорости вращения Земли на вертикаль — меняется параметр Кориолиса,— то тем самым вносится асимметрия кориолисова поля относительно средней параллели; а эта асимметрия должна вносить асимметрию поля линий тока относительно перпендикулярной оси, т. е. относительно среднего меридиана. Как и на рис. 65, на рис. 67 видна (и притом усилившаяся) асимметрия изогипс относительно средней параллели.

Это — вторичное явление, которое заставляет вспомнить размывание правого берега рек в северном полушарии и левого в южном: это — асимметрия относительно вектора скорости движущихся масс воды, независимая от азимута самого вектора.

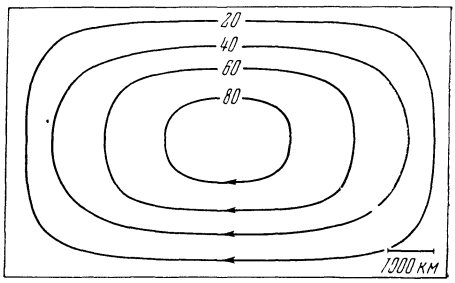


Рис. 63. Линии тока на неподвижной модели

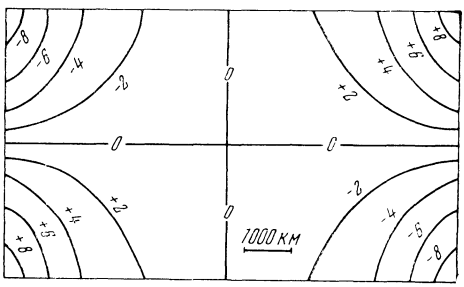


Рис. 64. Изогипсы уровня воды на неподвижной модели

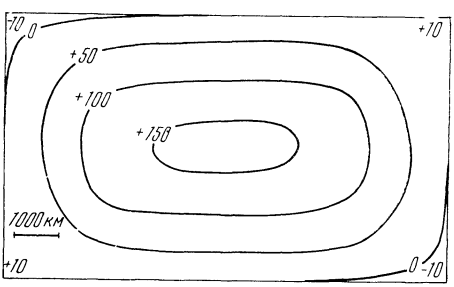


Рис. 65. Изогипсы на вращающейся модели при $f = \text{const}$

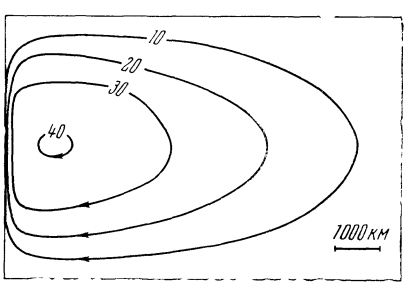


Рис. 66. Линии тока на вращающейся модели при переменном f

Может возникнуть вопрос: почему поле линий тока в южном полушарии ведет себя так же, как и в северном, — линии сгущаются близ западных берегов океана и разрежаются на востоке.

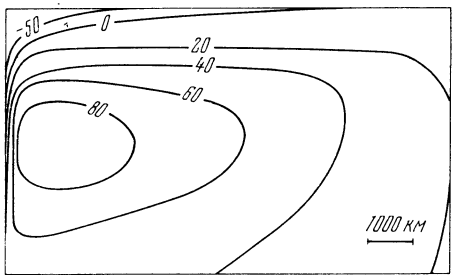


Рис. 67. Изогипсы на вращающейся модели при переменном f

Это потому, что все схемы южного полушария можно рассматривать как зеркальные отображения схем северного полушария в плоскости экватора: то, что было левым относительно меридиана в северном полушарии, лежит вправо от него в южном и, наоборот, что лежало вправо от меридиана в северном полушарии, легло влево от него в южном.

§ 22. Бароклинный слой в неоднородном море и течения, возбуждаемые в нем ветром

На всем протяжении выкладок, заимствованных из оригинальных работ Экмана и других исследователей, развивавших его теорию, пока предполагалось, что водная среда моря однородна по температуре, солености и, следовательно, по плотности. В таких условиях легко определялась глубина, на которой практически обращается в нуль скорость дрейфового течения — это так называемая глубина трения D, на которой скорость течения составляет $1/e^{\pi} = 0{,}043$ от скорости поверхностного дрейфа. Между тем исследования течений в океане и на глубоких морях показывают, что нередко на весьма больших глубинах существуют течения с довольно большими скоростями. Они порождены *перестройкой поля плотностей*, происходящей главным образом благодаря возникновению дрейфовых течений в верхних слоях, при *неоднородной* среде вод моря или океана. Одним из первых исследователей подобных сложных явлений был П. С. Линейкин, показавший, что весьма важные результаты можно получить, анализируя течения в неоднородной среде при учете *диффузии плотности*.

В своей первой работе [34] по этой проблеме он исходит из пяти основных уравнений

$$\delta\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + w\frac{\partial u}{\partial z}\right) - 2\bar{\omega}\delta v = \mu_x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu_z\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{\partial p}{\partial x}, \tag{323}$$

$$\delta\left(\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + w\frac{\partial v}{\partial z}\right) + 2\bar{\omega}\delta u = \mu_x\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \mu_z\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}, \tag{324}$$

$$g\delta - \frac{\partial p}{\partial z} = 0, \tag{325}$$

$$\frac{\partial \delta}{\partial t} + \frac{\partial(\delta u)}{\partial x} + \frac{\partial(\delta w)}{\partial z} = 0, \tag{326}$$

$$\frac{\partial \delta}{\partial t} + u\frac{\partial \delta}{\partial x} + w\frac{\partial \delta}{\partial z} = \mu_x\frac{\partial^2 \delta}{\partial x^2} + \mu_z\frac{\partial^2 \delta}{\partial z^2}. \tag{327}$$

Здесь μ_x и μ_z —соответственно коэффициенты горизонтального и вертикального турбулентного обмена количеством движения, причем считается возможным отождествить их с соответствующими коэффициентами плотностной диффузии в тех же направлениях.

Рассматриваются течения, возбуждаемые ветром в бесконечно глубоком канале, ограниченном с боков отвесными параллельными стенками. Считается, что в начальный момент поверхность воды горизонтальна, течения отсутствуют, плотность воды линейно возрастает по вертикальной оси, направленной *вниз* (оси Z). Ось Y совпадает с направлением стенок и ветра, дующего вдоль канала. Следовательно, искомые проекции скорости u, v, w, давление воды p, плотность ее δ и понижение уровня ζ не должны зависеть от y.

В начальный момент при $t = 0$

$$u = v = w = \zeta = 0, \quad \delta = \delta_* = \delta_0(1 + bz), \tag{328}$$

при $z = \zeta$

$$\mu_z \frac{\partial u}{\partial z} = -T_x, \quad \mu_z \frac{\partial v}{\partial z} = T_y,$$

$$p = p_a, \quad w = \frac{d\zeta}{dt}, \quad \frac{d\delta}{dz} = \delta_0 b, \tag{329}$$

при $x = 0, L$

$$u = v = 0, \quad \frac{\partial \delta}{\partial x} = 0, \tag{330}$$

при $z \to \infty$

$$u \to 0, \quad v \to 0, \quad w \to 0, \quad \delta - \delta_* \to 0, \quad \frac{\partial p}{\partial x} \to 0. \tag{331}$$

Условие (331) основано на допущении, что ни ветер, ни течения не меняют теплового режима на поверхности моря.

Выражения (325), (329) и (331) позволяют исключить из уравнений давление p. Для изменений уровня ζ записывается выражение

$$\zeta = \frac{1}{\delta_0} \int_0^\infty (\delta - \delta_*)\, dz. \tag{332}$$

Возмущения плотности $\delta - \delta_*$ считаются малыми по сравнению с δ_*, причем δ_* близко к δ_0, а $\partial\delta/\partial z$ мало отличается от b. Это позволяет линеаризировать задачу, заменив производную $d\zeta/dt$ частной производной $\partial\zeta/\partial t$ и применив условия (329) не только при $z = \zeta$, но и при $z = 0$. Последующая проверка результатов автором работы оправдала эти упрощающие допущения.

Все переменные величины, входящие в уравнения, заменяются безразмерными переменными путем внесения некоторых масштабных значений. Например, вместо координаты x рассматривается безразмерная координата $\bar{x} = x/L$, причем L — ширина канала. Остальные масштабы построены как комбинации μ_x, μ_z, L и других заданных параметров.

После этого сложная система уравнений (323) — (327) приводится к линейной системе из четырех уравнений в частных производных второго и первого порядков. Начальные и граничные условия выводятся из уравнений (328) — (331), путем упомянутой замены переменных.

В результате интегрирования искомые компоненты скоростей течений на поверхности и на различных глубинах, искомые изменения плотности воды при перестройке масс и изменения уровня моря представляются в виде быстро сходящихся рядов. С достаточной степенью точности можно ограничиться первыми членами этих рядов. Тогда окажется, что при значениях параметров, близких к существующим в природе (в частности, при скорости ветра 5 *м/сек*), скорости течений будут определяться по годографу *б* (рис. 68). Концы векторов скоростей на различных глубинах отмечены точка-

ми, при которых проставлены цифры, выражающие глубины в метрах. Для сравнения на том же рисунке нанесена кривая *а*, которая представляет собой годограф, построенный по теории Экмана.

Уравнения П. С. Линейкина показывают, что истинные скорости течения на любых глубинах, отмеченных на кривой *б*, можно представить как геометрическую сумму экмановского дрейфового вектора и вектора градиентно-конвекционного. Векторы первого рода стремятся к хорошо известной незначительной величине на глубине трения D_1, причем точное выражение для D_1 таково:

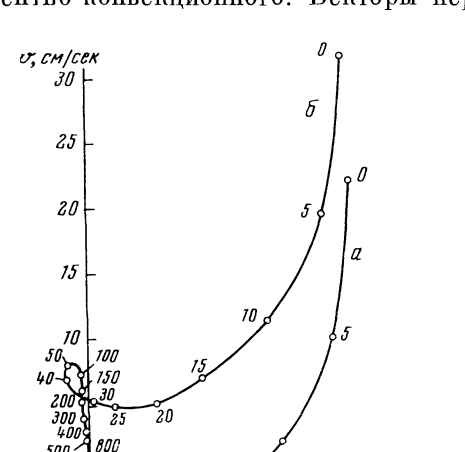


Рис. 68. Годографы П. С. Линейкина

$$D_1 = \sqrt{\frac{\mu_z}{\sqrt{\delta^2\bar{\omega}^2/\pi^4 + \mu_x^2/4L^4} + \mu_x/2L^2}}. \quad (333)$$

С достаточным приближением вместо этого сложного выражения можно записать $D_1 \approx \pi\sqrt{\mu_z/\delta\bar{\omega}} = D$, где D — выражение глубины трения, полученное Экманом.

Существенно новым является выражение, которое Линейкин нашел для глубины H, где становится ничтожно малой скорость градиентно-конвекционного течения и где это течение составляет $1/e^{\pi} = 0{,}043$ от поверхностной скорости:

$$H = L\sqrt{\frac{4\bar{\omega}^2}{bg} + \frac{\pi^4\mu_x^2}{bg\delta^2L^4}} \approx \frac{2\bar{\omega}L}{\sqrt{bg}}. \quad (334)$$

Напомним, что b, зависящее от градиента плотности по вертикали, выражено третьей слева формулой в (329).

Величина H представляет собой *толщину бароклинного слоя* в неоднородных водах океана или моря

При заданных параметрах оказалось $D = 45$ *м*, $H = 1000$ *м*, т. е. толщина бароклинного слоя примерно в 22 раза больше, чем глубина трения по Экману.

Из рис. 68 видно, что отрезок между точкой O на кривой *б* и точкой O на кривой *а* составляет примерно $^1/_3$ от вектора, проведенного из начала координат в точку O на кривой *а*. Следовательно, добавочное векторное слагаемое, обусловленное градиентно-конвекционным течением, здесь достигает $^1/_3$ от экмановского чисто дрейфового вектора. За счет этого слагаемого модуль полной скорости на поверхности моря возрастает на 12,5%. Эта поверхностная скорость составляет с направлением ветра угол 32° вместо 45° — величины, характеризующей направление чисто дрейфового течения.

Изложенная работа П. С. Линейкина опирается на ряд допущений, не всегда оправдывающихся в природных условиях: предполагается заданной некоторая невозмущенная стратификация водных масс, одинаковая для всей исследованной акватории океана или моря; перенос плотности течениями связывается лишь с вертикальными токами в океане; вместо нелинейных уравнений диффузии вводится линеаризированная система.

Ввиду важности определения истинной толщины бароклинного слоя в различных областях океана (в теоретическом отношении и для практики уточненного вычисления скоростей течений на глубинах посредством динамического метода) Линейкин произвел трудоемкое исследование топографии нижней границы бароклинного слоя для важной области Атлантического океана — от 2°30′ с. ш. до 42°30′ с. ш. и почти от берега Северной и Южной

Америки до берегов Европы и Африки. Этот район был выбран не только ввиду его принципиальной важности, но также и потому, что результаты теоретических вычислений здесь можно сопоставить с результатами определений нижней границы бароклинного слоя другими, более старыми методами [35].

Исходные уравнения были того же типа, что и уравнения (323) — (327), но ввиду новых осложнений задачи уравнения движения записывались без конвективных членов, условие неразрывности не учитывало изменений плотности (в данном случае это вполне законно), а уравнение турбулентной диффузии бралось в полной, нелинейной форме

$$u\frac{\partial\delta}{\partial x}+v\frac{\partial\delta}{\partial y}+w\frac{\partial\delta}{\partial z}=\nu_z\frac{\partial^2\delta}{\partial z^2}+\nu\left(\frac{\partial^2\delta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\delta}{\partial y^2}\right). \tag{335}$$

Здесь, как и в [34], ν_z и ν — коэффициенты турбулентной вязкости по вертикали и горизонтали, отождествляемые с коэффициентами плотностной диффузии; в отличие от μ это — коэффициенты *кинематической* вязкости.

Величина вертикальной составляющей w скорости при переходе из слоев глубинных течений в экмановский слой трения должна изменяться непрерывно. Следовательно, надо найти из уравнений Экмана закон изменений составляющих u и v близ этого слоя, исходя из условий на поверхности моря. где расположено начало координат. Ось X направлена вдоль меридиана на юг, ось Y — вдоль параллели на восток.

Для компонент скорости ветра T_x и T_y при $z=0$ имеем

$$\mu_z\frac{\partial u}{\partial z}=-T_x,\quad \mu_z\frac{\partial v}{\partial z}=-T_y. \tag{336}$$

При $z=D$ из уравнения неразрывности в этой постановке задачи получим

$$w_{z=D}=-\int_0^D\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)dz. \tag{337}$$

Вместе с уравнениями Экмана это даст после подстановки соответствующих выражений из (336):

$$w_{z=D}=w_0=-\frac{1}{\delta}\,\mathrm{rot}_z\frac{\mathbf{T}}{f}-\frac{\beta g D}{f^2}\frac{\partial\xi}{dy}. \tag{338}$$

Здесь предусмотрен корректирующий множитель β, который учитывает уменьшение параметра Кориолиса с уменьшением широты места:

$$\beta=-\frac{\partial f}{\partial x}.$$

В дополнение к уравнению (338), выражающему значение w_0 на границе между слоем трения и областью глубинных течений, Линейкин получил из упомянутых основных уравнений еще и уравнение, описывающее изменения w при изменениях z:

$$\frac{\partial\delta w}{\partial z}=\frac{\beta}{f^2}\frac{\partial p}{\partial y}. \tag{339}$$

Вертикальная составляющая w вызывает перенос вод различной плотности из одного слоя в другой. Но, кроме того, изменения плотности должны зависеть от теплового баланса океана, от результирующих потоков тепла по вертикали. Все это сказывается на градиенте плотности по вертикали — на $\Gamma=\frac{\partial\delta}{\partial z}$.

Для обеспечения дальнейших сложных выкладок цитированный автор вводит вспомогательную функцию Q, построенную так:

$$Q = \int_{\infty}^{z}\int_{\infty}^{z} \delta' dz^2. \tag{340}$$

Через эту функцию Q просто выражаются все неизвестные величины

$$u = -\frac{g}{\delta_0 f}\frac{\partial^2 Q}{\partial z \partial y}, \quad v = \frac{g}{\delta_0 f}\frac{\partial^2 Q}{\partial z \partial x}, \quad w = \frac{\beta g}{\delta_0 f^2}\frac{\partial Q}{\partial y},$$

$$p = g\frac{\partial Q}{\partial z}, \quad \delta = \frac{\partial^2 Q}{dz^2}. \tag{341}$$

Подставив эти выражения в уравнение диффузии (335) и произведя замену размерных переменных беразмерными, Линейкин получает весьма сложное уравнение в производных четвертого порядка, которое невозможно решить существующими методами. Поэтому он переходит от него к новому уравнению, найденному путем интегрирования обеих частей по z, в пределах от нуля до некоторой глубины h. Длинный ряд преобразований приводит к уравнению

$$\frac{13}{60}\frac{\beta g}{\delta f^2}\Psi H^3\frac{\partial H}{\partial y} + (6v_x + 3w_0 H) = 0, \tag{342}$$

в котором, вообще говоря,

$$\Psi = \Gamma + \frac{6f}{13}\frac{\partial \Gamma}{\partial x}. \tag{343}$$

Автор ограничивается случаем $\Gamma = \Gamma(x)$, вполне реальным, так как внешний тепловой режим можно считать меняющимся лишь от одной широтной зоны к другой. Интеграл уравнения (342) вычисляется по формуле

$$y = y_1(x) = \frac{13}{180}\frac{\beta g}{\delta f^2}\Psi\int_{H}^{H_1}\frac{H^3 dH}{2v_x + w_0 H}. \tag{344}$$

Для практического использования этой формулы необходимо задаться некоторыми параметрами, заимствованными из других исследований. Прежде всего можно использовать какой-то *профиль* нижней границы бароклинного слоя (профиль *нулевой поверхности* в океане), найденной иным способом.

Из существующих интуитивных способов определения топографии нулевой поверхности наибольшего доверия заслуживает способ, опубликованный в 1941 г. А. Дефантом [36]. Этот автор строит для различных океанографических станций кривые разностей динамических глубин, соответствующих различным изобарическим поверхностям. Обычно на таких кривых отчетливо видны довольно короткие участки, на которых кривая идет вертикально. Обозначив через Δ разности динамических глубин, можно записать для таких коротких вертикальных участков кривых $\frac{\partial \Delta}{\partial z} = 0$. Но подобное условие равносильно вытекающим из него условиям $\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial v}{\partial z} = 0$ или, исходя из основных уравнений, которыми пользовался Линейкин, $\frac{\partial \delta}{\partial x} = \frac{\partial \delta}{\partial y} = 0$. Дефант считает, что с достаточной надежностью можно полагать середину наметившегося вертикального отрезка точкой, находящейся на нулевой поверхности. Исходя из этого предположения, он построил карту изобат нулевой поверхности для всего Атлантического океана. На рис. 69 изображена лишь та часть его карты, которая относится к поясу между $\varphi = 2°30'$ с. ш. и $\varphi = 42°30'$ с. ш. Линейкин воспользовался данными Дефанта, относящимися к меридиану $\lambda = 37°30'$ з. д.; они необходимы для вычисления интеграла по формуле (344) применительно *ко всему* упомянутому широтному поясу.

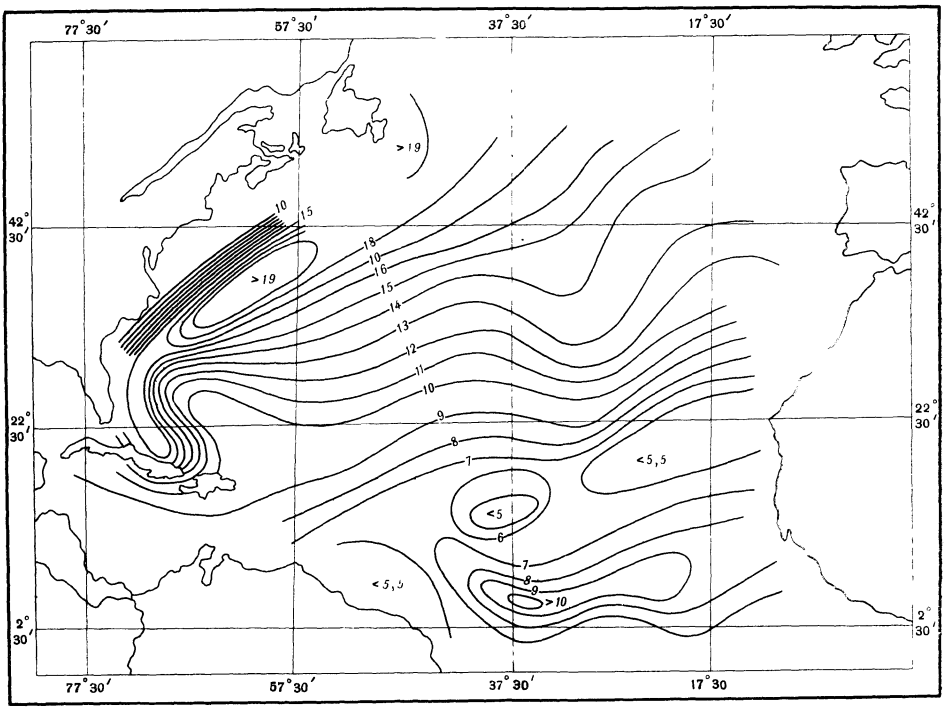


Рис. 69. Часть карты изобат нулевой поверхности (по А. Дефанту)

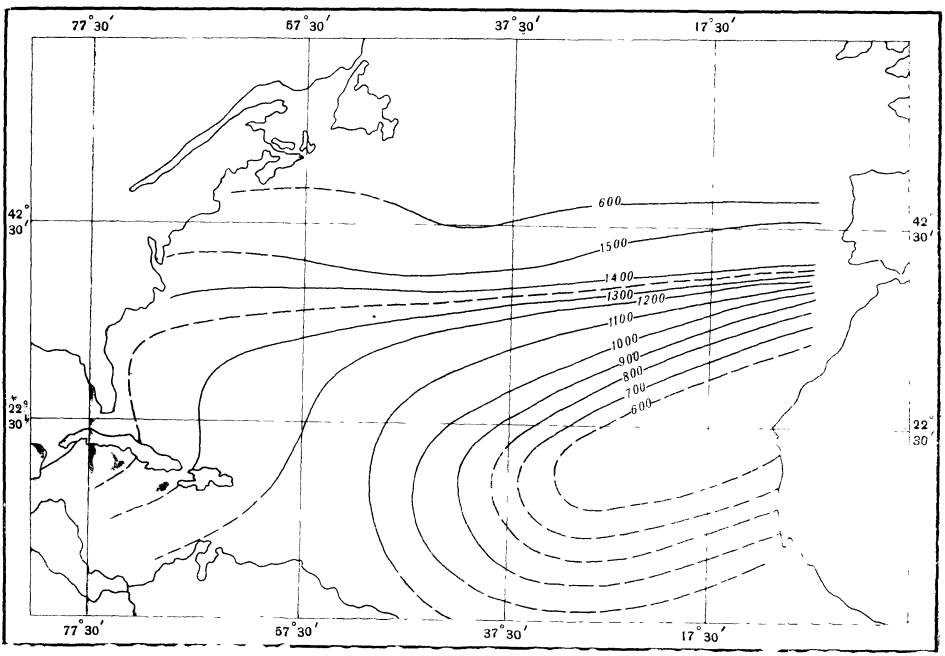


Рис. 70. Карта теоретически вычисленных изобат (по П. С. Линейкину)

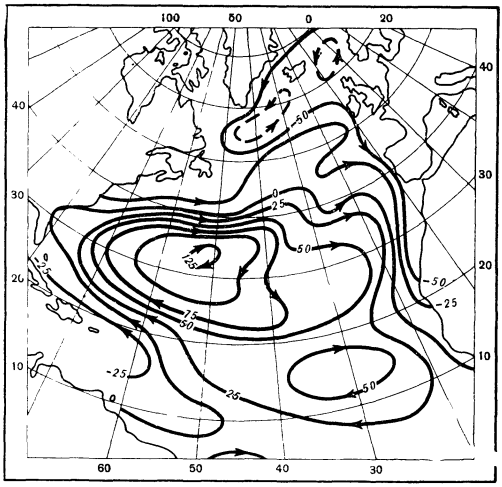


Рис. 71. Теоретические линии тока в Атлантике (по А. С. Саркисяну)

Кроме того, им были использованы значения w_0, вычисленные К. Хидака [37], а также значения, необходимые для вычисления интеграла (344).

В результате трудоемких вычислений П. С. Линейкин построил *теоретическую* карту нулевой поверхности, изображенную на рис. 70. Как видим, между обеими картами (рис. 69 и 70), вычисленными двумя совершенно различными методами, имеется большое сходство. Оно нарушается лишь в северо-западном углу карт, т. е. в районе особо мощной циркуляции, созданной Гольфстримом. Выше в изложенных выкладках фигурировал коэффициент β, который учитывает уменьшение параметра Кориолиса при уменьшении широт φ места. Но нельзя ожидать столь же резкого β-эффекта в сложнейшем построении теоретической карты нулевой поверхности, каким он выявился на специализированной простой схеме Г. Стоммела (см. § 21). С другой стороны, даже это различие между двумя картами (рис. 69 и 70) Линейкину удалось объяснить и почти полностью устранить. На этих, дополнительных, рассуждениях цитированного автора мы здесь не будем останавливаться, рекомендовав ознакомиться с ними в подлинной работе [35].

Упоминая о разностях динамических глубин на различных изобарических поверхностях, исследованных А. Дефантом и другими авторами, необходимо отметить, что после короткого вертикального отрезка кривых Дефанта (где $\frac{\partial \Delta}{\partial z} = 0$) кривые вновь изгибаются. Следовательно, *под* нулевой поверхностью, проходящей через середины всех этих вертикальных отрезков, находится еще новая область глубинных вод, охваченная какими-то течениями. Вопреки старым воззрениям в этой области (до самого дна океана) могут существовать довольно большие скорости течений. Величины и направления скоростей там определяют по наклону кривых *под* вертикальными участками с помощью динамического метода, а все вычисленные скорости относят к *неподвижной* границе — нулевой поверхности.

Интересные материалы, касающиеся использования нулевой поверхности, а также и некоторых методов ее определения, можно найти в книге О. И. Мамаева [38].

В настоящее время теоретические исследования по динамике течений, охватывающие всю поверхность того или иного океана и все слои его вод, направлены по двум основным путям.

Одни исследователи рекомендуют уточнять топографию нулевой поверхности на всем протяжении мирового океана (и путем интуитивным, которым шел А. Дефант, и путем математическим, предложенным П. С. Линейкиным), а вслед за тем строить уточненные динамические карты на основании теории В. Бьеркнеса.

Другие исследователи считают целесообразным решать во всей сложности гидродинамическую задачу о течениях в переслоенной водной среде, налагая граничные условия лишь на поверхности и *на дне океана*. Разумеется, в столь сложной постановке и в столь обширном объеме решение задач можно производить только на электронных счетных машинах.

Попытки решения задачи таким естественным, но чрезвычайно сложным путем были сделаны А. С. Саркисяном [39]. Первоначально его карты течений Атлантического океана, построенные на основании машинного счета, были менее совершенны, чем его же карты *полных потоков*, одна из которых представлена на рис. 407—*б*. В настоящее время ему удалось ближе подойти к системе Атлантических течений, учтя дрейфовые составляющие.

На рис. 71 представлена одна из карт Саркисяна для глубинных течений.

§ 23. Течение Ломоносова

Современные методы исследования течений в океане позволяют регистрировать скорости и направления течений на различных глубинах одновременно, в продолжение длительных сроков, измеряемых сутками. На поверхность океана ставится большой буй с тросом, достигающим дна. Внизу этот трос крепится к якорю, а на различных высотах над дном он несет на себе буквопечатающие вертушки, например БПВ Алексеева [11]. Посредством таких серий самописцев изучаются, например, Атлантические течения на исследовательском судне «Михаил Ломоносов». В мае 1959 г. это судно совершало очередной рейс в Атлантическом океане и, в частности, проводило гидрологические работы на меридиане 30° з. д. На экваторе была организована буйковая станция, причем БПВ зарегистрировали отчетливо выявленное течение, направленное *на восток*, с максимальной скоростью 80 *см/сек* на глубине 100 *м*. На глубинах 200 и 500 *м* течение оказалось направленным на запад

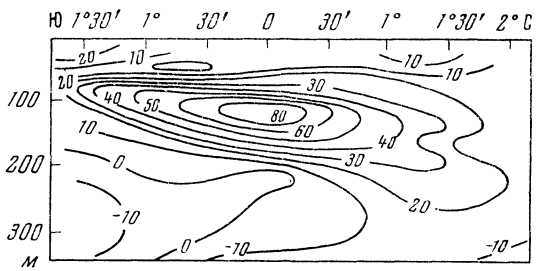


Рис. 72. Изотахи течения Ломоносова

В § 18 описаны поверхностные течения, направленные на восток, т. е. *против* пассатных течений и *против* широтной составляющей скорости ветра в зоне пассатов. В данном случае резко выявленное новое течение, направленное на восток, локализовано на глубине 100 *м* и точно приурочено к экватору. С 1961 по 1964 г. Морской гидрофизический институт провел несколько экспедиций по исследованию этого течения, и новое течение получило название «Экваториальное противотечение Ломоносова» в честь первого великого русского ученого, пропагандировавшего физические исследования моря. По своей природе течение Ломоносова, по-видимому, аналогично течению Кромвелла, открытому недавно в Тихом океане американскими исследователями. Институтом подготовлен специальный сборник, посвященный течению Ломоносова [40]. Здесь мы вкратце изложим новейшие материалы по физике этого интересного течения, заимствуя их из специальной сводки, выпущенной в свет ко II Международному океанографическому конгрессу [41].

На рис. 72 представлены изотахи на меридиональном разрезе 30° з. д. протяжением от 1°30′ ю. ш. до 2° с. ш. и до глубины 350 *м*. Цифры у кривых — скорости течения, направленного на восток. Как видим, ось течения в точности легла под экватором. Изотахи сгущаются к глубине 100 *м* в южном полушарии и несколько разрежаются в северном. Систематические исследования показали, что максимальные скорости в ядре течения возрастают к востоку от меридиана 30° з. д. и достигают 100—120 *см/сек*, т. е. почти до 2,5 узлов. Расход течения Ломоносова на разрезе 18° з. д. составляет

$(30—40)\cdot 10^6$ *м*^{3}/*сек* и почти в 2 раза превышает расход того же течения на меридиане 35° з. д.

Интересно, что воды течения Ломоносова обладают повышенной соленостью по сравнению с окружающими водами Атлантики: течение переносит воды повышенной солености с запада на восток; на западе соленость внутри ядра достигает 36,4‰, а к востоку она падает весной до 36,0‰, и осенью — даже до 35,8‰.

После открытия течения Ломоносова в Атлантическом океане, течение, аналогичное ему и тихоокеанскому течению Кромвелла, было обнаружено и в Индийском океане, также в точности на экваторе. В то время как течение Ломоносова обладает максимальной скоростью 120 *см/сек*, течение Кромвелла — максимальной скоростью 150 *см/сек*, экваториальное Индоокеанское противотечение достигает лишь максимальной скорости 60 *см/сек*. Подобное различие связано с неодинаковой протяженностью океанов (на Тихом океане отрезок экватора в 2,5 раза больше, чем на Атлантическом, и в 2,65 раза больше, чем на Индийском), с неодинаковым строением поля ветра на этих океанах и отчасти даже с неодинаковым распределением температуры и солености.

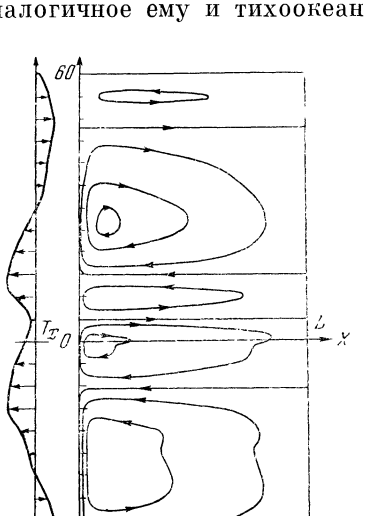


Рис. 73. Эпюра поля ветра (слева) и изолинии полных потоков (справа)

В Морском гидрофизическом институте были произведены теоретические исследования полных потоков, возникающих в неравномерном поле ветра, применительно к своеобразной модели Атлантического океана: прямоугольному бассейну постоянной глубины, протянувшемуся вдоль экватора на расстояние $L = 5000$ *км* и по обе стороны от экватора — вдоль меридиана—на расстояние $b = 6660$ *км* к северу и к югу. Было принято не вполне естественное значение глубины — $H = 200$ *м* и значение $\mu = 50$ *г/см·сек*.

Эпюра распределения скоростей ветра вдоль меридиана представлена на рис. 73, слева (она является расширенной эпюрой, фигурировавшей на рис. 54, но, в отличие от последней, не схематизирована, а построена по осредненным климатологическим данным для северного и для южного полушарий; важно отметить, что поэтому эпюра получилась несимметричной относительно экватора). Справа на рис. 73 изображена исследуемая модель океана в плане с нанесенными на нем изолиниями интегральной функции тока ψ. Как видим, асимметрия поля ветра относительно экватора создала асимметрию этих изолиний. Сама интегральная функция тока ψ связана известными соотношениями с составляющей полного потока вдоль параллели S_x и составляющей полного потока вдоль меридиана S_y:

$$S_x = -\frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad S_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \tag{345}$$

По найденным полным потокам были вычислены распределения скоростей течений вдоль меридиана на различных глубинах — от $z = 0$ до $z = 0{,}9\,H$. Были определены и направления этих течений на различных глубинах.

Первые исследования привели к распределению скоростей по вертикали, сильно отличающемуся от действительного распределения скоростей в течении Ломоносова. Тогда была поставлена осложненная задача: было учтено,

что в экваториальном поясе существует резко выраженный скачок плотности океанской воды примерно на глубине 100 *м*. Было принято, что верхний слой простирается до глубины h, причем $H/h = m$; вязкость верхнего слоя μ_1 отличается от вязкости нижнего μ_2, причем μ_2/μ_1

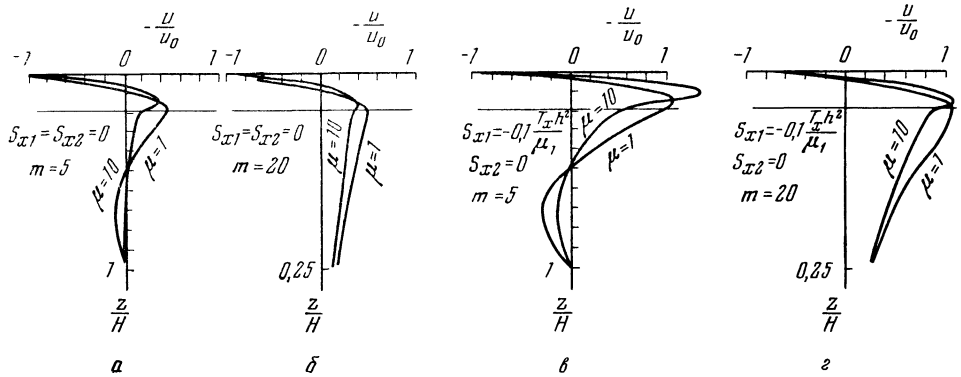


Рис. 74. Зависимость безразмерной скорости от безразмерной вертикальной координаты в двуслойной жидкости

Пришлось определять две интегральные функции тока — для верхнего и для нижнего слоев. После этого нашли наклоны уровня океана и поверхности раздела между слоями, а также составляющие скоростей в обоих слоях на различных глубинах z. В частности, на экваторе, *зональные* составляющие u_1 в верхнем и u_2 в нижнем слоях выразились формулами

$$u_1 = \frac{T_x h}{\mu_1}\left[\left(1-\frac{z}{h}\right)-\left(1-\frac{z^2}{h^2}\right)\frac{m+2n-1}{2\left(m+\frac{4}{3}n-1\right)}-\frac{m-1}{6\left(m+\frac{4}{3}n-1\right)}\right]+$$

$$+\frac{S_{x1}}{h}\frac{2n}{m+\frac{4}{3}n-1}\left[\left(1-\frac{z^2}{h^2}\right)+\frac{m-1}{2m}\right]+\frac{S_{x2}}{H-h}\frac{3n}{m+\frac{4}{3}n-1}\left[-\left(1-\frac{z^2}{h^2}\right)+\frac{2}{3}\right], \tag{346}$$

$$u_2 = \frac{T_x H}{2\mu_2}\left(1-\frac{z}{H}\right)\left(\frac{z}{H}-\frac{m+2}{3m}\right)\frac{m}{(m-1)\left(m+\frac{4}{3}n-1\right)}+$$

$$+\frac{S_{x1}}{h}\left(1-\frac{z}{H}\right)\frac{m\left[2(1+2m)-3m\left(1+\frac{z}{H}\right)\right]}{(m-1)\left(m+\frac{4}{3}n-1\right)}+$$

$$+\frac{S_{x2}}{H-h}\left(1-\frac{z}{H}\right)\frac{6m\left[m\left(m+\frac{1}{3}n-1\right)\left(1+\frac{z}{H}\right)-\left(m^2+\frac{2}{3}n-1\right)\right]}{(m-1)^2\left(m+\frac{4}{3}n-1\right)}. \tag{347}$$

Расчеты, произведенные по этим формулам, привели к эпюрам распределения безразмерных зональных скоростей на экваторе вдоль вертикали (рис. 74). Эпюра *а* соответствует случаю $S_{x1} = S_{x2} = 0$; $m = 5$. Эпюра *б* предусматривает превращение полных потоков (зональных) в нуль в обоих слоях, но $m = 20$. Эпюра *в* отвечает случаю, когда в верхнем слое $S_{x1} = -0{,}1 \cdot \frac{T_x h^2}{\mu_1}$, а в нижнем полный поток обращается в нуль; $m = 5$. Эпюра *г* построена для таких же полных потоков, как и эпюра *в*, но $m = 20$.

Как видим, введение *двуслойности* дало картину распределения скоростей по вертикали, очень близкую к действительной картине, характеризую-

щей и течение Ломоносова, и течение Кромвелла: максимальная скорость оказалась на поверхности раздела между слоями при двух вариантах для отношения $\mu_2/\mu_1 = n$: при $n = 0$ и даже при $n = 1$. Кроме того, двуслойность позволила объяснить и некоторые другие характеристики течения Ломоносова и течения Кромвелла: наличие западных течений под этими течениями, а также поднятие поверхности раздела у экватора по сравнению с ее положением к северу и к югу от экватора на том же меридиане.

§ 24. Дрейф ледяных полей

В ледовитых морях ветер действует тангенциальной силой трения не непосредственно на поверхность моря, а на плавающие льды, которые при своем движении увлекают водные массы и создают под собой дрейфовые течения. Нет надобности говорить, как велико значение передвижек льда для навигации и как важно, стало быть, знать основные законы дрейфа льдов и законы образования подледных дрейфовых течений. Много труда было затрачено на изучение движений льдов целой армией полярных исследователей. Однако никому, нигде и никогда не удавалось проделать измерения в таких замечательных и таких чистых условиях, в каких были проделаны измерения на Советской дрейфующей полюсной станции Папаниным, Ширшовым, Кренкелем и Федоровым. Даже краткие сводки, которые передавались ежедневно с папанинской льдины, позволили составить достаточно полное представление о механизме дрейфа ледяных полей; проанализировав движение льдины на основе современной динамики морских течений и сопоставив дрейф с действовавшим ветром В. В. Шулейкин получил возможность построить приближенную теорию дрейфа ледяных полей в открытом океане [42]. Впоследствии, когда появились в печати труды дрейфующей станции, эта теория была уточнена и распространена на очень интересный этап дрейфа — у берегов Гренландии.

Вслед за работой этого автора появились и другие, исходившие из несколько измененных теоретических представлений. В настоящее время есть возможность критически разобраться во всех этих работах, откинуть ошибочные допущения и выбрать пути исследования, наиболее близкие к истине.

Прежде чем излагать работу Шулейкина и других авторов, анализировавших дрейф папанинской льдины, рассмотрим *старые* воззрения на дрейф льдов, установившиеся до той поры.

Обширное исследование ветрового дрейфа ледяных полей было произведено Г. Свердрупом [43] на судне норвежской полярной экспедиции «Мод». Им было найдено приближенное эмпирическое соотношение между скоростью ветра и скоростью дрейфа, вызванного ветром, и было показано, что судно вместе с зажавшими его льдами дрейфовало исключительно под действием ветра: никакого постоянного (в строгом смысле слова) течения в том районе мелководья не оказалось.

Что касается теоретических построений Свердрупа, то они основаны на четырех допущениях, с которыми никак нельзя согласиться.

Основную движущую силу, действующую на лед, — силу трения между воздухом и поверхностью льда — Свердруп считает пропорциональной *первой* степени скорости ветра. Между тем даже при слабых ветрах соответствующее рейнольдсово число здесь оказывается настолько большим, что в выражение для силы поверхностного трения на верхней границе льда никак не может не войти *квадрат* скорости ветра. Нечего и говорить, что при скоростях ветра, имеющих особенно большое практическое значение (при ветрах умеренных и крепких) квадратичная зависимость тем более обеспечена.

Свердруп полагает, что опресненный слой морской воды толщиной в несколько десятков метров, несущий на себе лед, как бы свободно *скользит*

по нижележащей толще гидросферы ввиду незначительной величины сил внутреннего трения в *слое скачка плотностей*. Пренебрегая таким образом сопротивлением трения, Свердруп предполагает, что дрейфу ледяных полей противятся окружающие ледяные поля и что силы, развивающиеся при торошении, должны считаться единственными реальными силами сопротивления.

Совершенно несомненно, что при близости от материка, в том районе, где дрейфовала экспедиция «Мод», эти силы должны были как-то сказаться на передвижках льдов. Но так же несомненно и то, что Свердруп был не прав, приписывая им доминирующее значение и совершенно отметая *главные* силы, действительно сопротивлявшиеся движению льдов,— силы трения. Ведь каковы бы ни были свойства воды в слое скачка, лежавшем на глубине 30—40 *м*, всегда над ним располагался весьма однородный (опресненный) слой воды, толщина которого может ориентировочно приниматься равной *половине глубины трения*. Следовательно, даже если бы направление ветра оставалось неизменным, то и тогда нельзя было бы ожидать простой подвижки всего 30- или 40-метрового слоя в направлении ветра: наибольшая величина соответствует слагающей потока, направленной не по ветру, а перпендикулярно к нему. В действительности же, при постоянных изменениях направления ветра, развитие экмановской спирали никогда не будет заканчиваться, поверхностные «импульсы» ветра практически *не будут доходить* до слоя скачка. Вот почему, невзирая на особенности этого подстилающего слоя, практически можно рассматривать развитие дрейфового течения так, как делается в случае непереслоенного моря.

Следует отметить, что наблюдения дрейфующей станции полностью подтверждают подобную точку зрения и опровергают воззрения Свердрупа. Между тем, как будет показано далее, есть все основания думать, что опресненный слой залегал и под их льдиной.

Итак, основным препятствием для дрейфующих полей, особенно при их движении на таком просторе, как по соседству с полюсом, служат силы трения между льдом и морской водой. Но в таком случае не может соответствовать истине также и третье основное допущение Свердрупа: сила, сопротивляющаяся движению льдов, не может быть направлена в сторону, противоположную абсолютному движению. Эта сила должна направляться в сторону, противоположную скорости движения льдов *относительно* поверхностного дрейфового течения (ниже будет показано, как определяются все основные направления).

Не может соответствовать истине и четвертое допущение Свердрупа, аналогичное первому: сила, сопротивляющаяся движению ледяных полей, пропорциональна не первой степени (как полагает Свердруп), а второй степени скорости и притом скорости движения льдов *относительно* поверхностной воды, в свою очередь увлекаемой дрейфовым течением.

В заключение настоящего обзора существовавших теоретических воззрений упомянем о попытке Н. Н. Зубова [44] разобраться в механизме дрейфа отдельных небольших льдин; к сожалению, эта попытка тоже основана на явно противоестественном предположении — автор пренебрегает движением поверхностного слоя воды. К тому же в случае движения ледяных полей лобовое сопротивление льдов, рассматриваемое Зубовым, становится исчезающе малым по сравнению с сопротивлением поверхностным.

Переходим к выводу В. В. Шулейкиным *некоторых основных соотношений*.

Пусть, как обычно, T — тангенциальная сила трения, действующая на единицу поверхности воды; D — глубина трения; V — скорость ветра; w — скорость дрейфового течения; k_a — коэффициент трения между воздухом и водой; δ_a — плотность воздуха; δ_w — плотность воды; ω — угловая скорость вращения Земли вокруг оси; $\overline{\omega} = \omega \sin \varphi$ — ее проекция на нормаль

в данной точке земного шара;] n — ветровой фактор. Тогда

$$D = \pi \sqrt{\frac{\mu}{\delta_w \omega}}, \tag{348а}$$

$$w = \frac{TD}{\mu\pi\sqrt{2}}, \tag{348б}$$

$$w = \frac{nV}{\sqrt{\sin\varphi}}, \tag{348в}$$

$$T = k_a \delta_a V^2. \tag{348г}$$

Легко показать, что из приведенных соотношений вытекает выражение для D

$$D = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \frac{k_a}{\omega n^2} \frac{\delta_a}{\delta_w} V = NV. \tag{349}$$

С достаточной точностью можно считать $k_a = 2 \cdot 10^{-3}$. На основании работ Струйского [14] и других $n = 1{,}27 \cdot 10^{-2}$. Подставляя эти значения (и другие известные) в (349), получим $N = 473$.

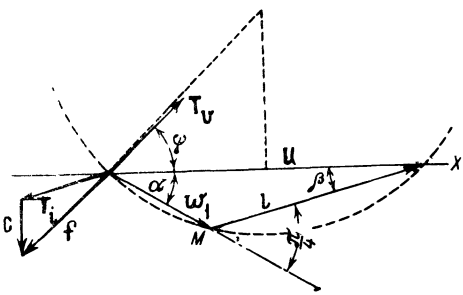


Рис. 75. Диаграмма скоростей и сил

Числовое значение N, найденное из (349) на основе безупречных данных для k_a и n, несколько отличается от старого, экмановского —600. При выводе предполагалось, что тангенциальная сила T, действующая на каждый квадратный сантиметр поверхности моря, обусловлена *ветром*. Но ведь течение w может быть вызвано также и другой тангенциальной силой — силой поверхностного трения между льдом и водой. На виде соотношения (349) это, разумеется, не отразится. Есть все основания думать, что численное значение коэффициента N также не изменится сколько-нибудь заметно: ведь турбулентный режим, влияющий на величину D, устанавливается под влиянием той или иной скорости поверхностного течения w независимо от того, будет ли эта скорость порождена тангенциальной силой T ветрового происхождения или же силой T_i, обусловленной трением льдов о воду.

Правда, в поверхностном слое коэффициент турбулентной вязкости воды должен находиться под влиянием волнения, которого не существует при дрейфе ледяных полей. Однако, с другой стороны, воздействие неровных нижних поверхностей льдов (очень часто с подбитыми снизу ледяными глыбами, с торосистыми образованиями) на поверхностный слой воды является значительно более грубым, чем непосредственное воздействие ветра на водную поверхность. Вот почему можно, за неимением ничего лучшего, считать, что дрейфовое течение, возникающее под ледяными полями и обладающее поверхностной скоростью w_i, будет характеризоваться глубиной трения $D = Nw_i$, причем коэффициенту N будет приписано прежнее числовое значение 473, найденное выше.

Попытаемся теперь найти соотношение между основными элементами ледового дрейфа. Будем исходить из заданной скорости u дрейфа ледяных полей и направим вдоль по этому вектору ось X координатной системы. Скорость дрейфового течения, возникающего подо льдом (w_i), будет направлена относительно X под некоторым углом α, пока еще неизвестным (рис. 75).

Абсолютная величина w_i определяется соотношением, объединяющим (348а) и (348б). Вместо T туда придется подставить T_i — тангенциальную

силу трения между водой и льдом:

$$T_i = k_w \delta_w r^2, \tag{350}$$

где r — скорость льда *относительно* воды, движущейся в дрейфовом потоке; k_w — коэффициент трения между льдом и водой. Вспомнив (348а) и (348б) и приняв во внимание (350), получим

$$w_i = \frac{k_w r^2}{\sqrt{2\omega}} \sqrt{\frac{\delta_w}{\mu}}. \tag{351}$$

Но, как легко показать,

$$\sqrt{\frac{\delta_w}{\mu}} = \frac{\pi}{D\sqrt{\omega}} = \frac{\pi}{Nw_i\sqrt{\omega}}.$$

Следовательно, на основании (350) и (351)

$$w_i = \zeta r, \tag{352}$$

где сокращенно обозначено

$$\zeta = \sqrt{\frac{\pi k_w}{N\omega\sqrt{2}}}. \tag{353}$$

Итак, модули векторов $\mathbf{w}_i$ и r связаны между собой соотношением (352). С другой стороны, сами векторы связаны со скоростью u дрейфа льдов векторным соотношением

$$\mathbf{r} = \mathbf{u} - \mathbf{w}_i. \tag{354}$$

Сверх того, в случае дрейфа в море, глубина которого не менее $D/2$, должно выполняться очевидное условие

$$\angle \mathbf{w}_i, \mathbf{r} = \frac{\pi}{4}, \tag{355}$$

ибо сила трения $\mathbf{T}_i$, порождающая дрейфовое течение подо льдом, направлена одинаково с вектором r.

На рис. 75 представлены все три вектора u, $\mathbf{w}_i$, r, причем на основании (355) и известного свойства внешнего угла, очевидно,

$$\angle \mathbf{r}, \mathbf{u} = \frac{\pi}{4} - \alpha, \tag{356}$$

где, как помним,

$$\alpha = \angle \mathbf{w}_i, \mathbf{u}.$$

Но в таком случае можно еще записать

$$\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)}{\sin\alpha} = \frac{w_i}{r} = \zeta, \tag{357}$$

откуда

$$\operatorname{ctg}\alpha - 1 = \frac{\zeta}{\sin\frac{\pi}{4}},$$

или

$$\operatorname{ctg}\alpha = \zeta\sqrt{2} + 1. \tag{358}$$

Итак, зная k_w и другие величины, входящие в (353), легко найти ζ. Вслед за тем определится и угол α на основании (358). Но тогда окажется возмож-

ным выразить модули $\mathbf{w}_i$ и $\mathbf{r}$ через $\mathbf{u}$:

$$w_i = u:\left[\cos\alpha + \frac{1}{\zeta}\cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)\right], \tag{359}$$

$$r = u:\left[\zeta\cos\alpha + \cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)\right]. \tag{360}$$

Найдем теперь выражения для проекций силы трения $\mathbf{T}_i$ на оси координат

$$T_x = k_w\delta_w r^2\cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right), \tag{361}$$

$$T_y = k_w\delta_w r^2\sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right).$$

Сила Кориолиса $\mathbf{C}$ даст проекции

$$C_x = 0,\ C_y = -2m\bar{\omega}u, \tag{362}$$

где m — масса ледяного слоя, приходящаяся на 1 *см*^{2} его площади.

Суммируя проекции по соответственным осям и обозначая проекции равнодействующей через f_x и f_y, найдем выражение для угла ψ между этой равнодействующей и осью X.

Но ведь тот же угол ψ составляют между собой сила $\mathbf{T}_v$ трения между воздухом и льдом (подгоняющая льды) и абсолютная скорость дрейфа $\mathbf{u}$: при установившемся движении $\mathbf{T}_v$ должна уравновешивать $\mathbf{f}$ (за исключением особых случаев, о которых речь будет ниже).

Найдем развернутое выражение для ψ, вспомнив проекции на координатные оси:

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{k_w\delta_w r^2\sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) + 2\bar{\omega}mu}{k_w\delta_w r^2\cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)}. \tag{363}$$

После простых преобразований, учтя (360), получим из (363)

$$\operatorname{tg}\psi = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) + \frac{b}{u}, \tag{364}$$

где сокращенно обозначено

$$B = \frac{2m\bar{\omega}\left[\zeta\cos\alpha + \cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)\right]^2}{k_w\delta_w\cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)]}. \tag{365}$$

Важное соотношение (364) показывает, что, вопреки утвердившемуся мнению, угол между направлением ветра и направлением дрейфа ледяных полей *зависит от скорости* дрейфа, а тем самым от скорости ветра. Он лежит, очевидно, в пределах

$$\frac{\pi}{2} > \psi > \left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right), \tag{366}$$

причем к $\pi/2$ он стремится при уменьшении скорости, когда кориолисова сила значительно превышает силу трения. К значению $(\frac{\pi}{4} - \alpha)$ он стремится при неограниченном возрастании скорости, когда влияние кориолисовой силы отступает на задний план перед силой трения.

Само собой разумеется, что угол ψ зависит также и от фактора ζ, в свою очередь являющегося функцией k_w. При изменениях k_w, а стало быть и ζ, должны меняться стороны $\mathbf{w}_i$ и $\mathbf{r}$ векторного треугольника, изображенного на рис. 75. При этом, очевидно, вершина M этого треугольника будет перемещаться по дуге окружности, нанесенной на рис. 75 пунктиром, поскольку

внешний угол при вершине обязан оставаться постоянным и равным половине прямого.

Геометрические элементы рис. 75 соответствуют частному значению коэффициентов трения: $k_a = 0{,}002$ и $k_w = 0{,}004$. В этом случае углы треугольника скоростей получают значения $\alpha = 30°$, $45° - \alpha = 15°$.

Остается еще определить величину скорости *ветра*, соответствующую тому или иному значению скорости дрейфа. Для удобства выкладок будем искать выражение для отношения u/V.

Прежде всего на основании (360) и (361) и на основании геометрических соотношений рис. 75 можно будет записать

$$f = \frac{k_w \delta_w u^2 \cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)}{\left[\zeta \cos\alpha + \cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)\right]^2 \cos\psi}. \qquad (367)$$

С другой стороны, та же сила уравновешивает силу трения T, определяемую из соотношения (348г). Приравнивая абсолютные величины обеих сил, легко найти из (367) и (348г)

$$\frac{u}{V} = \left[\zeta \cos\alpha + \cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)\right] \sqrt{\frac{k_a}{k_w}\frac{\delta_a}{\delta_w}\frac{\cos\psi}{\cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)}}. \qquad (368)$$

На основании (368) и (364) можно считать, что и отношение u/V, и угол ψ являются функциями V.

При выводе наших теоретических соотношений молчаливо делались те же самые предположения и допущения, которые приходится делать всем авторам при решении современных задач на обтекание твердого тела. Ведь всем известно, что пограничный слой жидкости как бы прилипает к поверхности твердого тела; однако это никому не мешает оперировать с потенциальным потоком на достаточном расстоянии от поверхности обтекаемого тела и говорить о конечной скорости жидкости относительно твердого тела. В частности, так решалась (многократно) задача обтекания тела дирижабля при его полете; результаты, полученные теоретически, хорошо согласовались с результатами непосредственных замеров давления и скоростей вокруг тела дирижабля. Вторым примером может служить повседневная практика корабельных инженеров, которые вычисляют волновое сопротивление корабля, игнорируя наличие «прилипающего» пограничного слоя, а потом учитывают совсем отдельно эффект поверхностного трения, исходя из конечной величины скорости корабля относительно воды.

Как ни странно, диаграмма рис. 75 смутила трех авторов и заставила их сомневаться в методах решения задач на обтекание твердого тела. Уже в 1940 г. появилась работа Р. Г. Геворкяна и Е. И. Чаплыгина [45], в которой отрицается возможность вычисления силы трения между льдом и водой по относительной скорости r. По мнению авторов, скорость дрейфа ледяных полей (в нашей транскрипции) u должна равняться скорости w верхнего слоя дрейфового потока подо льдами. Повод к такому заключению дали измерения скоростей, проделанные при помощи морских вертушек, непосредственно погруженных в прорубь: близ само́й поверхности льда относительная скорость оказалась равной нулю; вода как бы прилипала ко льду. Забыв о пограничном слое, авторы заявляют, что сила трения льда о воду пропорциональна квадрату абсолютной скорости дрейфа ледяных полей и направлена в сторону, прямо противоположную.

Ошибочность последнего заключения отмечена в последующей работе одного из цитированных авторов — Геворкяна [46]. В этой работе Геворкян справедливо отмечает, что сила трения между льдом и водой не может совпадать с прямой, вдоль которой направлен дрейф льдов, а обязана состав-

лять с этой прямой некоторый угол. Угол между ними он определяет из граничных условий, при интеграции уравнений Стокса — Навье, в экмановской форме. Исходя из обычного условия о равенстве между тангенциальным напряжением трения и произведением вертикального градиента скоростей на коэффициент вязкости воды, Геворкян показывает, что сила трения, с которой вода воздействует на ледяное поле, должна составлять угол 135° с направлением поверхностной скорости воды.

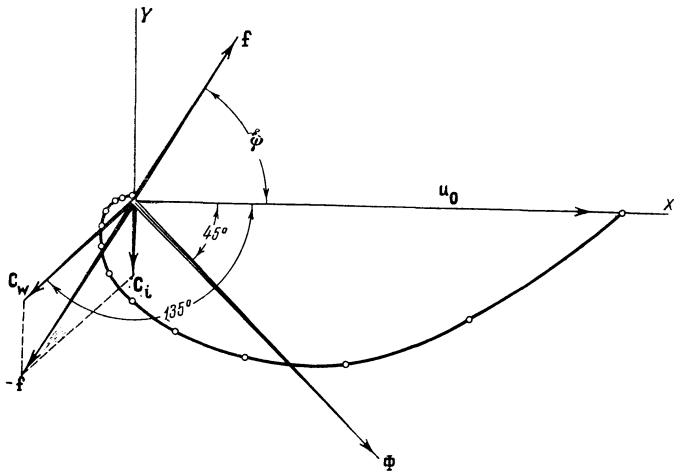


Рис. 76. Второй вариант диаграммы скоростей и сил

Сделав такой совершенно справедливый вывод из принятых им допущений, Геворкян почувствовал естественно затруднения с дальнейшей трактовкой задачи: при любой попытке количественного подсчета скоростей дрейфа по скоростям ветра и количественного подсчета угла между направлением дрейфа и направлением ветра у него неминуемо должны были получаться большие разногласия между вычислениями, сделанными на основе его допущений, и результатами непосредственного анализа дрейфа станции «Северный полюс». По-видимому, именно эта причина заставила цитированного автора отказаться от подобных окончательных вычислений, отложив их «впредь до уточнения картины турбулентных потоков в море».

Более решительно взялся за количественные подсчеты третий автор, отвергающий справедливость диаграммы рис. 75 — М. Б. Швец [47]. В его работе повторены ошибки Геворкяна и Чаплыгина, частично исправленные Геворкяном. В частности, вопреки этим исправлениям, он снова полагает, что сила, с которой вода воздействует на нижнюю поверхность ледяного поля, направлена строго противоположно абсолютной скорости движения льдов. Результаты получаются явно абсурдные, в чем легко убедиться хотя бы на примере простого установившегося дрейфа льдов. Действительно, положим, что толщина ледяного покрова меняется, благодаря чему меняется масса m льда, приходящегося на единицу его площади. Тогда при непрерывном уменьшении толщины льда по уравнениям Швеца направление скорости дрейфа льдов должно было бы непрерывно приближаться к направлению скорости ветра (см. уравнение (5) и (6) цитированной работы). При полном исчезновении льда, по Швецу, скорость дрейфового течения на самой поверхности глубокого моря была бы обязана совпадать по направлению со скоростью ветра, вызывающего дрейф. Но это противоречит современной гидродинамике дрейфовых морских течений, согласно положениям которой скорость дрейфового течения на чистой поверхности моря должна отклоняться на угол 45° от направления ветра.

Но допустим, что эта погрешность в работе Швеца [47] исправлена в согласии с работой Геворкяна [46]. Допустим, что сила трения составляет соответствующий конечный угол с направлением дрейфа ледяных полей. В то же время сохраним другой основной тезис, которого придерживаются и Геворкян, и Чаплыгин, и Швец: положим временно, что потенциальный дрейфовый поток непосредственно соприкасается с нижней поверхностью льда (без пограничного слоя, залегающего между ними в действительности) и что «поверхностная» скорость дрейфового потока w совпадает по величине и по направлению с абсолютной скоростью дрейфа ледяных полей u_0. Тогда, как во всяком дрейфовом потоке, концы векторов, изображающих по величине и по направлению скорости дрейфового течения на различных глубинах, должны будут скользить по спирали, показанной на рис. 76. Начало этих векторов всегда совпадает с началом координат.

Как было отмечено выше, результирующий дрейфовый поток, охватывающий толщу морской воды от поверхности до дна, а практически до некоторой глубины D (так называемой «глубины трения», где скорости уже весьма малы), может быть изображен вектором Ф, составляющим прямой угол со скоростью ветра, или, другими словами, угол 45° с направлением поверхностного течения. Он нанесен на рис. 76. Величина этого потока выражается через поверхностную скорость u_0 и через глубину трения D

$$\Phi = \frac{u_0 D}{\pi \sqrt{2}}.$$

Припишем этому результирующему потоку кориолисову силу, которая будет направлена под прямым углом вправо от него, а по абсолютной величине будет равна

$$C_w = 2\delta_w \bar{\omega} \Phi.$$

Здесь δ_w — плотность морской воды, а $\bar{\omega}$ — произведение угловой скорости вращения Земли на синус широты места. Прежде чем подставить в это соотношение величину Ф, освободимся от ненужной нам величины D. Для этого вспомним, что

$$D = N u_0, \tag{369}$$

причем

$$N = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \frac{k_a}{\omega n^2} \frac{\delta_a}{\delta_w}. \tag{370}$$

Здесь k_a — коэффициент трения между воздухом и водой (или воздухом и льдом), δ_a и δ_w — соответственно плотности воздуха и воды, а n — так называемый ветровой фактор, представляющий собой отношение скорости чисто поверхностного дрейфового течения к скорости ветра, деленной на корень квадратный из синуса широты.

На основании выражений для Ф, C_w и D можно записать новое выражение для полной кориолисовой силы, воздействующей на весь столб морской воды с единичным поперечным (горизонтальным) сечением

$$C_w = \frac{\sqrt{2}}{\pi} N \delta_w \bar{\omega} u_0^2. \tag{371}$$

На рис. 76 эта сила, в условном масштабе, изображена в виде вектора C_w.

Если бы поверхность моря была свободна ото льда, то тангенциальное напряжение трения, возникающее на поверхности моря от ветра, было бы обязано в точности уравновесить эту силу C_w. Легко показать, что и направление ветра, необходимого для этого, и абсолютная величина скорости ветра при этом в точности соответствовали бы известной теории дрейфовых морских течений. Если стать временно на точку зрения Геворкяна, Чаплыгина и Швеца, положив, что на поверхности моря дрейфует лед с абсолютной ско-

ростью, равной скорости поверхностного дрейфового течения, то придется к полной кориолисовой силе $\mathbf{C}_w$, действующей на водный поток, геометрически прибавить кориолисову силу, действующую на подвижный слой льда. Она будет равна по абсолютной величине

$$C_i = 2m\bar{\omega}u_0, \tag{372}$$

где m — масса льда, приходящаяся на единицу его поверхности.

В отличие от прежней задачи, теперь напряжение трения, вызванного ветром на верхней поверхности льда, будет обязано уравновесить уже не одну силу $\mathbf{C}_w$, а геометрическую сумму $\mathbf{C}_w + \mathbf{C}_i = -\mathbf{f}$. На рис. 76 изображен вектор $\mathbf{C}_i$, направленный под прямым углом вправо от вектора $\mathbf{u}_0$, и геометрическая сумма векторов $\mathbf{C}_w + \mathbf{C}_i = -\mathbf{f}$. В сторону, противоположную от суммарного вектора, направлен вектор $\mathbf{f}$, который изображает, в том же масштабе, напряжение трения, вызванного ветром. Он составляет некоторый угол ψ с направлением дрейфа ледяных полей $\mathbf{u}_0$.

Определим этот угол через его тангенс, который в свою очередь выражается известным соотношением через проекции сил на оси координат. Проекция силы $\mathbf{f}$ на ось абсцисс (f_x) равна по величине и противоположна по знаку проекции силы $\mathbf{C}_w$ на ту же ось. Сила $\mathbf{C}_i$ перпендикулярна к этой оси, а потому никакой проекции не дает. Проекция силы $\mathbf{f}$ на ось ординат (f_y) равна сумме проекций сил $\mathbf{C}_w$ и $\mathbf{C}_i$ на ту же ось, взятой с обратным знаком. Легко показать, что поэтому

$$f_x = \frac{N}{\pi}\bar{\omega}u_0^2, \tag{373}$$

$$f_y = \frac{N}{\pi}\delta_w\bar{\omega}u_0^2 + 2m\bar{\omega}u_0,$$

откуда следует

$$\frac{f_y}{f_x} = \operatorname{tg}\psi = 1 + \frac{2\pi}{N}\frac{m}{\delta_w u_0}. \tag{374}$$

В правой части формулы (374) известны все величины; следовательно, задаваясь различными значениями u_0, можно по ней определять соответствующие значения угла ψ. Как видим, этот угол зависит от u_0. В свою очередь u_0 зависит от скорости ветра V. Остается найти эту зависимость. Для этого воспользуемся двояким выражением напряжения трения f. С одной стороны, f, очевидно, равно его проекции f_x, деленной на $\cos\psi$. С другой стороны, f равно произведению коэффициента трения между воздухом и льдом на плотность воздуха и на квадрат скорости ветра.

Вспомним выражение проекции f_x из (373) и приравняем друг другу оба выражения для f. Тогда окажется

$$\frac{f_x}{\cos\psi} = \frac{N}{\pi}\frac{\delta_w\bar{\omega}u_0^2}{\cos\psi} = k_a\delta_a V^2, \tag{375}$$

откуда непосредственно вытекает

$$\frac{u_0}{V} = \sqrt{\frac{\pi}{N}\frac{k_a}{\bar{\omega}}\frac{\delta_a}{\delta_w}\cos\psi}. \tag{376}$$

Это выражение можно привести к чрезвычайно простому виду, подставив в него выражение N из (370). После такой подстановки отношение скорости дрейфа u_0 к скорости ветра V выразится по-новому

$$\frac{u_0}{V} = \sqrt[4]{2}\sqrt{\cos\psi\, n},$$

или (377)

$$\frac{u_0}{V} = 1{,}19\sqrt{\cos\psi\, n}.$$

Легко вскрыть физический смысл уравнения (377). В самом деле, как известно, $\sqrt{2}$ представляет собой cos 45°. Следовательно, уравнение (377) можно еще записать так:

$$\frac{u_0}{V} = n \sqrt{\frac{\cos\psi}{\cos 45°}}. \qquad (378)$$

С другой стороны, уравнение (374) показывает, что по мере уменьшения массы льда, приходящейся на единицу площади ледяного покрова, т. е. по мере уменьшения толщины ледяного покрова, tg ψ приближается к единице. Это

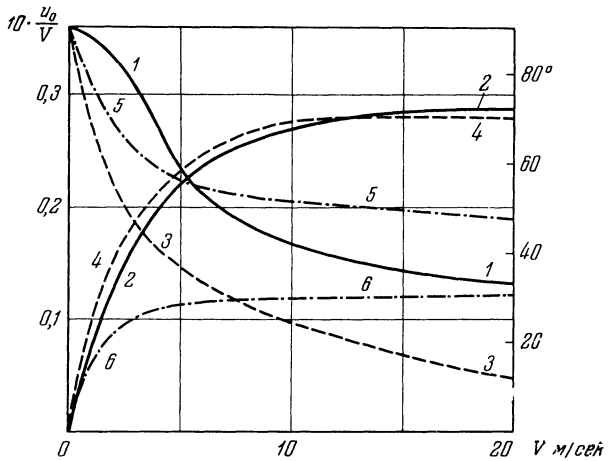


Рис. 77. Сводная диаграмма (по работам трех авторов)

значит, что по мере уменьшения толщины ледяного покрова угол ψ непрерывно приближается к 45°.

Но в таком случае из уравнения (377) вытекает любопытное и важное заключение: при отсутствии ледяного покрова под корнем в числителе окажется та же величина cos 45°, что и в знаменателе, а, стало быть, множитель при n обратится в *единицу*. При появлении ледяного покрова числитель становится тем меньше по сравнению со знаменателем, чем толще ледяной покров.

Значит, по формуле (378), вытекающей из схемы рис. 76, скорость дрейфа ледяных полей должна быть *всегда меньше* скорости поверхностного дрейфового течения при полном отсутствии льда. Но этот вывод противоречит всем наблюдениям; в действительности ледяные поля дрейфуют со скоростями, *примерно вдвое превышающими* скорости чисто дрейфовых течений на поверхности чистой воды.

Для наглядности на рис. 77 представлены кривые, изображающие изменения угла ψ и отношения u_0/V при изменениях скорости ветра. Каждая пара соответствующих кривых (ψ, u_0/V), вычислена по-разному: кривые *1* и *2* построены по формулам (363), (368) теории Шулейкина [42] (соответственно значению $k = 0{,}008$, определенному из анализа дрейфа станции «Северный полюс»); кривые *3* и *4* воспроизведены на основании работы Швеца, содержащей неверный тезис о направлении силы трения; кривые *5* и *6* вычислены нами после исправления этой погрешности, отмеченной еще Геворкяном, но с сохранением другого основного тезиса, которого придерживаются и Геворкян, и Чаплыгин, и Швец: тезиса, отрицающего конечную разность скоростей между верхней поверхностью пограничного слоя воды и нижней его поверхностью. Как видим, кривая Швеца *4*, построенная на основе двух неверных тезисов, случайно проходит довольно близко к нашей кривой *2*: по-видимо-

му, обе погрешности приводят к отклонениям от истины в противоположные стороны, а потому до некоторой степени взаимно компенсируются. Напротив, при устранении одной из этих погрешностей — при учете наличия конечного угла между направлением дрейфа и направлением силы трения воды о лед (по примеру Геворкяна) — во всей полноте проявляется ошибочность основного тезиса всех трех цитированных авторов: если бы, в согласии с их гипотезой, не существовало конечной разности скоростей между верхней и нижней поверхностями пограничного слоя воды, то скорость дрейфа ледяных полей была бы примерно вдвое меньше наблюдаемой в природе. В последнем обстоятельстве легко убедиться, сопоставив кривую *6* на рис. 77 с точками, полученными из анализа дрейфа станции «Северный полюс» и воспроизведенными на рис. 80. Значит, и другой, *основной*, тезис работ Геворкяна, Чаплыгина и Швеца не соответствует природным условиям. Ведь из предшествовавшего изложения видно, что тангенциальное напряжение трения ветра о поверхность льда обязано уравновешивать полную кориолисову силу, воздействующую на весь суммарный дрейфовый поток воды, а также значительно меньшую по величине кориолисову силу, воздействующую на самый ледяной покров. Следовательно, очень большая скорость дрейфа ледяных полей, действительно наблюдаемая в природе, обязана своим происхождением именно тому, что эта скорость превышает по абсолютной величине поверхностную скорость дрейфового потока, развивающегося под пограничным слоем.

Итак, после трех попыток изменения граничных условий в задаче о дрейфе ледяных полей мы снова возвращаемся к схеме, изображенной на рис. 75. Пройденный этап принес много полезного для познания механизма дрейфа льдов. Во избежание новых недоразумений остановимся подробней на физическом смысле вектора $\mathbf{r}$ — относительной скорости дрейфа ледяных полей.

На основании современной теории обтекания твердого тела мы вправе считать, что непосредственно на поверхности раздела лед — вода нет никакого взаимного скольжения — вода как бы прилипает ко льду. Именно по этой причине морские вертушки, погруженные в прорубь на станции «Северный полюс», обнаружили отсутствие такого скольжения.

Но так ведет себя вода лишь вблизи верхней поверхности пограничного слоя. По мере погружения вниз, в пределах этого слоя, должно наблюдаться непрерывное нарастание скорости воды относительно льда (в свою очередь движущегося). Как известно, между нарастанием скорости и тангенциальным напряжением трения существует простая связь

$$\mathbf{f}_r = -\mu \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z}. \tag{379}$$

Известно также, что направление $\mathbf{r}$ должно совпадать с направлением тангенциальной силы трения; μ обозначает коэффициент внутреннего трения воды; как всегда в задачах о морских течениях, трение — турбулентное.

В данном случае средняя величина $\partial \mathbf{r}/\partial z$ выражается так:

$$\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z}\right)_{\text{ср}} = -\frac{\mathbf{r}}{z_1}, \tag{380}$$

где z_1 — толщина пограничного слоя. Было бы чрезвычайно интересно определить эту толщину, анализируя эпюру скоростей течения под слоем льда. Во всяком случае надо отметить, что даже в задачах, с которыми встречаются корабельные инженеры, толщина пограничного слоя бывает порядка метров. В нашей задаче, при протяжении ледяных полей на целые километры, следует ожидать еще большего значения z_1.

Основное требование, касающееся направлений $\mathbf{r}$ и тангенциальной силы трения $\mathbf{f}_r$ льда о воду, здесь, очевидно, вполне соблюдается. На нижней поверхности пограничного слоя скорость воды относительно льда достигает максимального значения — $\mathbf{r}$. Глубже, вниз, развивается экмановский дрей-

фовый поток, в котором роль «поверхностной» скорости **w** играет абсолютная скорость воды непосредственно под нижней поверхностью пограничного слоя. Легко видеть, что вектор **r** совпадает с касательной к спирали, начинающейся в точке M, как это и должно быть согласно основным положениям теории дрейфовых течений: направление **r** здесь играет ту же роль, какую играет направление ветра в обычных задачах о дрейфе в море, свободном от ледяного покрова. Гидродинамическое условие, аналогичное (10), *автоматически удовлетворяется*.

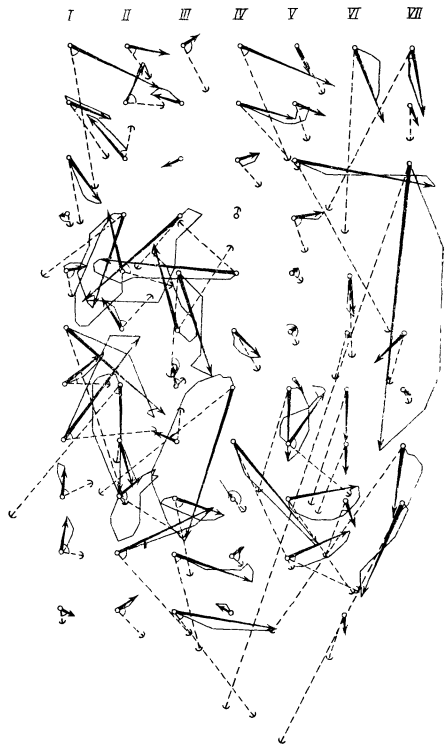


Рис. 78. Многоугольники ветра

Именно по этой причине оказалось возможным записать соотношения между абсолютными величинами скоростей r и w, приведенные выше.

Теоретические формулы (364), (365), (368) Шулейкин сперва сопоставил с элементами дрейфа и ветра, которые передавались со льдины и печатались в газетах. Впоследствии их удалось сопоставить с результатами анализа дрейфа и ветра по материалам «Трудов дрейфующей станции „Северный полюс“» [48].

Анализ дрейфа прежде всего показал, что весь путь папанинской льдины следует разбить на три основных (разнородных) этапа:

1) дрейф в открытом Ледовитом океане, характеризующийся наиболее чистыми, четкими и определенными местными условиями;

2) дрейф на подступах к «воротам» в Гренландское море, условия которого были, напротив, весьма сложными, наименее определенными; с просторов Ледовитого океана льды проходят между Гренландией и Шпицбергеном, как-то сложно взаимодействуя между собой при вынужденной перегруппировке; близость больших архипелагов порождает очень сложные системы ветров местного характера;

3) дрейф вдоль берегов Гренландии.

При современном состоянии наших знаний едва ли возможно разобраться в сложной картине дрейфа льдов на втором этапе. По той же причине в настоящее время едва ли возможно извлечь надежные характеристики дрейфа ледяных полей в открытом океане из материалов дрейфа ледокольного парохода «Седов», протекавшего в условиях значительно менее чистых, чем дрейф станции «Северный полюс».

Вот почему мы ограничиваемся только анализом первого этапа дрейфа папанинской льдины, дающим наиболее надежные значения всех коэффициентов, и анализом третьего этапа, позволяющим вскрыть интереснейший механизм дрейфа ледяных полей по соседству с землей.

Элементы дрейфа мы брали с пятнадцати карт крупного масштаба (1 *см* = 1 миле), приложенных к «Трудам». На них нанесены линии положения, по которым определялись координаты станции «Северный полюс». Те астрономические пункты, которые охарактеризованы более чем двумя линиями положения, позволяют судить о размерах возможных погрешностей при определении координат: искомая точка лежит внутри некоторого определен-

ного треугольника, четырехугольника и т. д. Для контроля над теорией дрейфа были проделаны вычисления элементов дрейфа двумя приемами: сперва по более крупным промежуткам, а затем по мелким промежуткам, отделяющим каждые два соседних астропункта.

По обычаю, принятому для удобства в работах станции «Северный полюс», все направления отсчитывались не от местного меридиана, а от меридиана 345° В (следовательно, 15° З) как *основного*. Значит, на некоторой долготе λ квазиазимут A' выражался через истинный азимут A посредством простого соотношения

$$A' = A - (15° + \lambda). \qquad (381)$$

За время, отделявшее одно определение координат от другого, ветер менялся не только по силе, но и по направлению. Связь между скоростью ветра и скоростью дрейфа, по теории Шулейкина, отличается от линейной. Угол отклонения дрейфа от направления ветра по этой теории зависит от скорости ветра. Следовательно, применение многоугольников ветра и построение равнодействующей для анализа дрейфа заведомо должны вести к неизбежным погрешностям. Однако иной путь здесь невозможно наметить при указанных изменениях ветра между соседними астропунктами. С другой стороны, обилие точек, которые можно построить на основе наблюдений станции в открытом океане, позволяет несколько компенсировать их неизбежный досадный разброс на диаграммах путем вычисления значений, сосредоточенных по этапам, не слишком длинным и достаточно однородным с точки зрения местных условий.

Итак, для каждого промежутка времени, от одного астропункта до другого соседнего, строились многоугольники ветра, воспроизведенные в сильно уменьшенном виде на рис. 78 [1]. Стрелка всюду обозначает результирующий ветер для данного промежутка времени. Пунктирный отрезок с дужкой на конце обозначает дрейф льдины за тот же промежуток времени. Очевидно, что первый вектор, в некотором условном масштабе, представляет осредненную скорость ветра, а второй вектор, в некотором другом масштабе,— осредненную скорость дрейфа.

Зная эти масштабы, легко определить по полученным диаграммам числовые значения u_0/V — отношения скорости дрейфа к скорости ветра. По тем же диаграммам непосредственно определяется и ψ — угол отклонения дрейфа от ветра. В качестве аргумента для этих двух функций была принята средняя скорость ветра на пути от одного астропункта до другого (за неимением лучшего). Разумеется, что тоже должно повести к разбросу точек; но и положительные, и отрицательные знаки у ошибок здесь одинаково вероятны, а потому общая картина зависимости двух исследуемых функций (ψ и u_0/V) от скорости ветра не может не проявиться.

При построении графиков рис. 79 и 80, представляющих эти функции, были приняты следующие условные обозначения:

а) малые кружки соответствуют точкам, полученным при исследовании ветра и дрейфа между какими-либо двумя соседними астропунктами;

б) малые кружки с указателями соответствуют большим протяжениям дрейфа, о которых говорилось выше; указатели отмечают направления дрейфа, причем оси ординат чертежей считаются направленными на север, а оси абсцисс — на восток;

в) самые большие кружки получены путем осреднений значений ψ (и соответственно u_0/V) применительно к некоторым интервалам скорости ветра:

[1] На рис. 78 векторы наносились посредством специально изготовленного треугольника с углами 22°5; 45 и 112° 5 для удобства и для ускорения работы. Обычно модули векторов одного и того же направления предварительно суммировались алгебраически. Вертикальные столбцы I—V соответствуют дрейфу в открытом океане, столбцы VI и VII — дрейфу у берегов Гренландии. Векторы двух последних столбцов вычерчены в масштабе, вдвое меньшем по сравнению с масштабом пяти первых столбцов, во избежание громоздкости чертежа.

на рис. 79 интервал соответствует изменению скорости ветра $\pm$ 1 *м/сек*, а на рис. 56 — скорости ветра $\pm$ 0,5 *м/сек*;

г) черные кружки соответствуют дрейфу у берегов Гренландии, а потому о них речь будет ниже.

Пунктирная кривая *1* (рис. 79) построена по теоретической формуле (364) Шулейкина применительно к значению $k_w = 0{,}004$, принятому в работе [42]. На основании более обширного материала, полученного не из предварительных газетных сообщений, а из вышедших отчетных работ, следует думать, что числовое значение k_w было там преуменьшено: кривая 2, построенная применительно к значению $k_w = 0{,}008$, лучше вяжется с осредненными точками (большими кружками), чем кривая *1*.

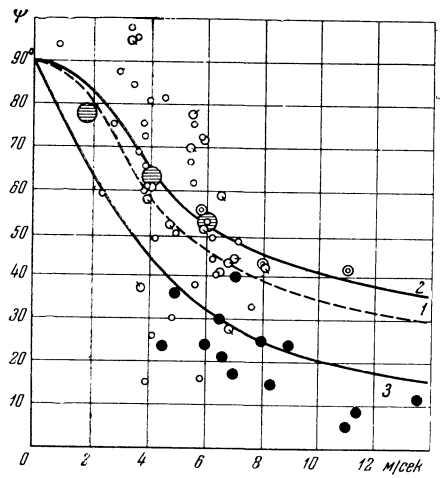


Рис. 79. Зависимость угла отклонения от скорости ветра

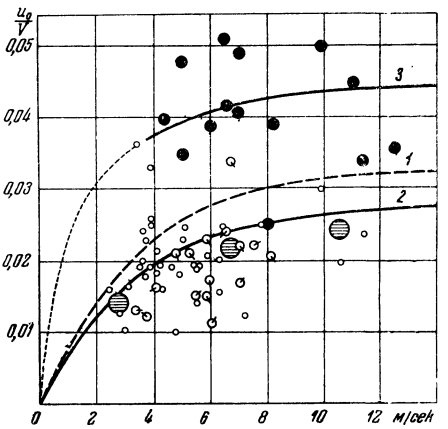


Рис. 80. Зависимость между отношением скорости дрейфа к скорости ветра — и скоростью ветра

Как уже отмечалось выше, досадный разброс точек, к сожалению, неизбежен при тех методах исследования дрейфа, которыми наука располагает в настоящее время. Отчасти он обязан своим происхождением и тому, что направление ветра обычно дается в румбах: значит, азимут его бывает известен лишь с точностью до 22°,5.

Большие отклонения всех исследуемых величин от стационарных значений неизбежно возникают при частном и резком изменении ветрового режима. В частности, это заставило нас воздержаться от анализа дрейфа на тех участках, где льдина по нескольку дней подряд описывала причудливые петли: здесь заведомо невозможно было получить значения коэффициентов, характеризующих стационарный дрейф. Самый промежуток времени, необходимый для того, чтобы процесс установился, оказался более значительным, чем ожидалось по теории. По всей вероятности, задержка обусловлена длительным формированием дрейфового течения под ледяным покровом.

Эти замечания относятся и к рис. 80, на котором условные обозначения точек сохраняют прежний смысл. На нем кривая *1* построена по теоретической формуле (368), соответственно неисправленному коэффициенту $k_w = 0{,}004$, кривая *2* — по той же формуле (368), но вместо заниженного значения k принято $k_w = 0{,}008$.

Как видим, осредненные значения u_0/V, отмеченные большими кружками, лежат немного ниже такой исправленной теоретической кривой: для полного совпадения пришлось бы принять примерно $k = 0{,}01$. Следовательно, на основании диаграмм рис. 79 и 80 надо полагать, что истинное значение коэффициента трения льда о морскую воду лежит в пределах 0,008—0,01.

Видно, как резко обособились на диаграммах черные кружки, соответствующие различным участкам дрейфа у берегов Гренландии. Даже при наличии сильного разброса всех точек на этих диаграммах ясно, что черные кружки принадлежат к семейству, не имеющему ничего общего с точками, которые отвечали дрейфу в открытом океане.

Следовательно, и сам процесс дрейфа по соседству с землей должен чем-то существенно отличаться от процесса, протекающего в океане. Нетрудно показать, что подобное различие в основном зависит от сгонно-нагонных явлений, обусловленных наличием берега. В частном случае — у берегов Гренландии — должен чрезвычайно резко сказаться постоянный нагонный режим, который порожден местными сильными ветрами, практически не меняющими своего направления круглый год: они дуют с холодного плато гренландских ледников к неизменно более теплой подстилающей поверхности Гренландского моря и направлены примерно под углом 45° к нормалям, проведенным к береговой линии во всех ее точках.

Следует полагать, что при таком постоянстве и соответствующей очень большой силе ветра нагонные явления должны охватить весьма широкую полосу Гренландского моря, простирающуюся вдоль восточного побережья Гренландии. В результате, много тысячелетий тому назад, в этом районе возникло мощное нагонное дрейфовое течение, поверхностная скорость которого состоит из двух слагающих: так называемой «глубинной» (G), направленной всегда параллельно генеральной береговой черте, и чисто дрейфовой, склонной к более заметным изменениям при изменениях ветрового режима.

Так как папанинская льдина непрерывно проявляла тенденцию приближаться к берегу, то мы выберем, для простоты, из коллекции годографов (рис. 18) именно тот, который ярче всего подчеркивает эту тенденцию,— тот, который дает совпадение направлений тангенциального напряжения поверхностного трения и вектора поверхностной скорости. В этом простейшем случае можно показать, что

$$\alpha = 0,\ \beta = 0,\ \ w \approx r = \frac{1}{2} u_0. \tag{382}$$

Но тогда

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{B'}{u_0}. \tag{383}$$

Здесь в свою очередь, константа B' расшифровывается так:

$$B' = \frac{8m\bar{\omega}}{k_w \delta_w}. \tag{384}$$

Отношение скорости дрейфа к скорости ветра выражается простой формулой

$$\frac{u_0}{V_0} = 2 \sqrt{\frac{k_a}{k_w} \frac{\delta_a}{\delta_w} \cos \psi}, \tag{385}$$

в которой все обозначения прежние.

По формулам (383) и (384) построена кривая *3* (рис. 79), а по формуле (385) — кривая *3* (рис. 80).

Разумеется, нельзя требовать, чтобы схематизированный анализ по самому простому из экмановских годографов дал результаты, вполне совпадающие с действительностью. Однако кривые *3* на обоих рисунках совсем неплохо согласуются с черными кружками, соответствующими дрейфу у берегов Гренландии. Также неплохо согласуется с непосредственными наблюдениями та теоретически определенная составляющая течения, которую называют «глубинной». В 1938 г. Шулейкин вычислил эту составляющую по данным о барическом рельефе у берегов Гренландии, полученным из климатологического атласа В. Горчинского [49]. Тогда оказалось, что в разгар зимы (январь — февраль) средняя величина «глубинной» составляющей должна рав-

няться примерно 10,5 *см/сек*. Следовательно, можно было ожидать, что во время штиля, после почти полной ликвидации чисто поверхностной дрейфовой составляющей, льды должны дрейфовать вдоль берегов Гренландии примерно с такой скоростью.

Наблюдения дрейфующей станции «Северный полюс» полностью подтвердили это положение теории: в работе [48] для дрейфа в январе — феврале вдоль берегов Гренландии в штилевые дни дана скорость именно 0,21 мили в час, т. е. примерно 10,5 *см/сек*. Но это — средняя величина «глубинной» составляющей. В некоторые дни эта составляющая достигала более 15 *см/сек*, что вполне естественно. В тот год, когда работала станция «Северный полюс», ветровой режим у берегов Гренландии был значительно обострен по сравнению со средними многолетними нормами: именно поэтому папанинская льдина прошла все расстояние вдоль берега Гренландии значительно скорей, чем можно было ожидать по старым материалам, характеризующим гидрометеорологический режим в районе Восточно-Гренландского течения.

§ 25. О турбулентной вязкости воды и законах подобия

Во всех уравнениях, описывающих морские течения, важную роль играет коэффициент внутреннего турбулентного трения μ, или, как его называют иначе, коэффициент турбулентной вязкости воды.

В частности, этим коэффициентом μ заменяют в уравнениях Навье — Стокса коэффициент молекулярной вязкости η, поскольку в морских масштабах, при весьма больших значениях критерия Рейнольдса, молекулярная вязкость несоизмеримо мала по сравнению с турбулентной.

Как известно, сам механизм турбулентного трения можно трактовать в форме переноса *количества движения* из одного слоя жидкости в другой, движущийся с иной скоростью, точнее как *обмен* количествами движения между этими слоями, из которых один движется с большей, а другой с меньшей осредненной скоростью. В гл. IV мы познакомимся с аналогичным обменом между слоями морской воды, происходящим благодаря наличию турбулентности, но это будет не обмен количествами движения, а обмен *теплом*, *солями*, *газами* или иными веществами, содержащимися в море — и притом в различных количествах, в различных концентрациях. В этой главе, посвященной морским течениям, будем исследовать лишь узкий круг явлений турбулентного характера, создающих именно то, что называется *турбулентной вязкостью*, или внутренним *турбулентным трением*. При изложении вопроса ограничимся пока лишь теми представлениями, которые были введены в гидродинамику Л. Прандтлем и Т. Карманом [50].

Попытаемся применить основные уравнения гидродинамики к сложному движению вод, расчленив это сложное движение на основное движение с какой-то осредненной скоростью и на пульсации частиц воды, которые налагаются на основное движение.

Допустим для простоты, что поток — плоскопараллельный, направленный вдоль по оси X, и пренебрежем физической (молекулярной) вязкостью воды, поскольку ее влияние отходит далеко на задний план по сравнению с турбулентной вязкостью. Тогда общий вид уравнений движения будет таков:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\delta}\frac{\partial p}{\partial x}, \tag{386}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\delta}\frac{\partial p}{\partial y}. \tag{387}$$

Полная компонента скорости движения по оси X состоит из компоненты U осредненного, упорядоченного, движения, вообще говоря, зависящей от ко-

ординаты y (и не зависящей от x), и компоненты u_1 — пульсационной:

$$u = U + u_1. \tag{388}$$

По оси Y существует лишь единственная компонента скорости v_1 — пульсационная:

$$v = v_1. \tag{389}$$

При этом u_1 и v_1 зависят как от координат, так и от времени

$$u_1 = u_1(x, y, t), \qquad v_1 = v_1(x, y, t). \tag{390}$$

Подставив выражения (388) и (389) в основные уравнения (386) и (387), получим

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + (U + u_1)\frac{\partial u_1}{\partial x} + v_1\left(\frac{dU}{dy} + \frac{\partial u_1}{\partial y}\right) = -\frac{1}{\delta}\frac{\partial p}{\partial x}, \tag{391}$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial t} + (U + u_1)\frac{\partial v_1}{\partial x} + v_1\frac{\partial v_1}{\partial y} = -\frac{1}{\delta}\frac{\partial p}{\partial y}. \tag{392}$$

Чтобы исключить члены уравнений, содержащие производные от давления p, продифференцируем уравнение (391) по y, а уравнение (392) по x и результаты вычтем один из другого. Тогда в правой части взаимно уничтожатся два одинаковых члена $\frac{\partial^2 p}{\partial x\,\partial y}$, вычитаемые один из другого, и возникнет одно уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u_1}{\partial y} - \frac{\partial v_1}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial v_1}{\partial y} - \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{dU}{dy}\right) +$$

$$+ (U + u_1)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u_1}{\partial y} - \frac{\partial v_1}{\partial x}\right) + v_1\frac{d^2U}{dy^2} + v_1\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u_1}{\partial y} - \frac{\partial v_1}{\partial x}\right) = 0. \tag{393}$$

Его можно упростить, введя функцию тока ψ для пульсационных движений, через производные которой выразятся составляющие u_1, v_1 скоростей пульсаций:

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{\partial \psi}{\partial y}, \\ v_1 &= -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \end{aligned} \tag{394}$$

Легко заметить, что выражения в формуле (393), стоящие в круглых скобках, теперь получат простой вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial y} - \frac{\partial v_1}{\partial x} &= \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \nabla^2 \psi, \\ \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} &= \frac{\partial^2 \psi}{\partial x\,\partial y} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x\,\partial y} = 0. \end{aligned} \tag{395}$$

В результате вместо (393) запишем

$$\frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial t} + \left(U + \frac{\partial \psi}{\partial y}\right)\frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x}\left(\frac{d^2U}{dy^2} + \frac{\partial \nabla^2 \psi}{dy}\right) = 0. \tag{396}$$

Уравнение (396) справедливо при каком угодно распределении осредненной скорости U на различных расстояниях y от оси X. Разложим U как функцию y в ряд Тэйлора вблизи точки с координатами x_0 и y_0, где осредненная скорость равна U_0:

$$U = U_0 + \left(\frac{dU}{dy}\right)_0 (y - y_0) + \left(\frac{d^2U}{dy^2}\right)_0 \frac{(y - y_0)^2}{1 \cdot 2} + \cdots \tag{397}$$

и допустим, что вся наша координатная система движется вдоль оси X со скоростью U_0. Тогда, пренебрегая в формуле (397) членами, содержащими производные выше первого порядка, запишем выражение осредненной относительной скорости жидкости в виде

$$U - U_0 \approx \left(\frac{dU}{dy}\right)_0 (y - y_0). \tag{398}$$

Пренебрежем изменением лапласиана функции тока пульсационных движений во времени, положив в формуле (396)

$$\frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial t} = 0, \tag{399}$$

и подставим вместо U в упрощенное уравнение (396) выражение относительной осредненной скорости уравнения (398), а вместо d^2U/dy^2 выражение второй производной относительной скорости. Тогда окажется на основании уравнения (398) с отброшенными членами высоких порядков

$$\left(\frac{dU}{dy}\right)_0 (y - y_0) \frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x}\left[\left(\frac{d^2U}{dy^2}\right)_0 + \frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial y}\right] = 0,$$

или, иначе,

$$\left(\frac{dU}{dy}\right)_0 (y - y_0) \frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x}\left(\frac{d^2U}{dy^2}\right)_0 + \left[\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial x}\right] = 0. \tag{400}$$

Попытаемся вместо уравнения (400) получить обобщенное уравнение, которое должно быть справедливым при любых масштабах турбулентных явлений. Для этого перейдем к безразмерным координатам ξ, η вместо прежних линейных координат x, y.

Формулы пребразований будут иметь вид

$$\begin{aligned} x - x_0 &= l\xi, \\ y - y_0 &= l\eta, \\ \psi &= Af(\xi, \eta). \end{aligned} \tag{401}$$

Отсюда следует, что масштабный отрезок l войдет в выражения производных первого и второго порядков:

$$\begin{gathered} \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{1}{l} \frac{\partial}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial}{\partial y} = \frac{1}{l} \frac{\partial}{\partial \eta}, \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{1}{l^2} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2}, \quad \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{1}{l^2} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}. \end{gathered} \tag{402}$$

Подставим выражения (401) в (400) и учтем (402). Тогда окажется после простейших преобразований, что

$$\frac{A}{l^2}\left(\frac{dU}{dy}\right)_0 \frac{\partial \nabla^2 f}{\partial \xi} \eta - \frac{A}{l}\left(\frac{d^2U}{dy^2}\right)_0 \frac{\partial f}{\partial \xi} + \frac{A^2}{l^4}\left[\frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial \nabla^2 f}{\partial \xi} - \frac{\partial f}{\partial \xi} \frac{\partial \nabla^2 f}{\partial \eta}\right] = 0. \tag{403}$$

Нетрудно заметить, что в уравнении (403) величины η, $\partial f/\partial \xi$ и все выражение в квадратных скобках безразмерные. Следовательно, множители при них $\frac{A}{l^2}\left(\frac{dU}{dy}\right)_0$, $\frac{A}{l}\left(\frac{d^2U}{dy^2}\right)_0$ и $\frac{A^2}{l^4}$ должны обладать какой-то одной и той же размерностью. Они могут отличаться друг от друга только числовыми коэффициентами α, β, γ. Иными словами, можно записать

$$\alpha \frac{A}{l^2}\left(\frac{dU}{dy}\right)_0 = \beta \frac{A}{l}\left(\frac{d^2U}{dy^2}\right)_0 = \gamma \frac{A^2}{l^4}. \tag{404}$$

Это — условие механического подобия при произвольных изменениях масштаба турбулентных явлений.

Обозначив отношение безразмерных числовых коэффициентов α/β через k, можно получить из уравнения (404) прежде всего весьма важное соотношение

$$l = k \frac{(dU/dy)_0}{(d^2U/dy^2)_0}, \tag{405}$$

Масштабный отрезок l пропорционален частному от деления $(dU/dy)_0$ на $(d^2U/dy^2)_0$. Этот масштабный отрезок l можно рассматривать как некоторый путь перемешивания при турбулентном движении жидкости (по Прандтлю и Карману). Скорость пульсаций пропорциональна произведению $l\,(dU/dy)_0$. На основании уравнения (405) можно записать

$$l\left(\frac{dU}{dy}\right)_0 = k \frac{(dU/dy)_0^2}{(d^2U/dy^2)_0}. \tag{406}$$

С другой стороны, те же авторы показали, что в расчете на единицу пограничной поверхности сила трения τ турбулентного потока равна произведению плотности жидкости δ на квадрат скорости пульсаций. Значит, можно утверждать, что

$$\tau = \delta k^2 \frac{(dU/dy)_0^4}{(d^2U/dy^2)_0^2}. \tag{407}$$

Но ведь в теории течений мы видели, что, обозначив через μ коэффициент турбулентной вязкости, можно записать

$$\tau = \mu \left(\frac{dU}{dy}\right)_0. \tag{408}$$

Следовательно, на основании уравнений (407) и (408) получим

$$\frac{\mu}{\delta} = k^2 \frac{(dU/dy)^3_0}{(d^2U/dy^2)^2_0}. \tag{409}$$

Левая часть уравнения (409) представляет собой кинематическую турбулентную вязкость ν. Нетрудно показать, что ее выражение, стоящее в уравнении (409) справа, вполне аналогично выражению величины A, входившей во все предыдущие соотношения, начиная с уравнения (401). Действительно, вспомнив, что первый и третий члены в уравнении (404) тождественно равны друг другу, и приняв $\alpha/\gamma = 1$, можно записать

$$A = l^2 \left(\frac{dU}{dy}\right)_0. \tag{410}$$

На основании уравнений (410) и (405) найдем

$$A = k^2 \frac{(dU/dy)_0^3}{(d^2U/dy^2)^2_0}. \tag{411}$$

Отсюда следует, что коэффициент A, обладающий размерностью $см^2 \cdot сек^{-1}$, можно рассматривать как коэффициент кинематической турбулентной вязкости ν; в то же время A — коэффициент обмена в турбулентном потоке.

Третья формула в системе (401) дает возможность рассматривать A еще и с другой стороны: если l в первой и второй формулах (401) является масштабом линейных величин, то A в третьей формуле играет роль масштаба для функции тока турбулентных пульсаций скоростей.

И в выражение (405), и в выражение (411) входит числовой множитель k (в первой и во второй степени). Опыты над потоками в трубах показали, что при изменениях условий движения в широких пределах значение k лежало в границах от 0,36 до 0,40.

Теоретические построения Прандтля и Кармана применимы к любым формам движения в сплошной среде, не испытывающей разрывов: и к турбулентным потокам, обладающим каким-то определенным направлением, и даже к волнообразному движению водной среды. Далее (см. гл. III) мы познакомимся с тем, как С. В. Доброклонский впервые применил формулу Т. Кармана (411) к вычислению коэффициента турбулентной вязкости, отнимающей энергию волн,— по заданным параметрам волнения [51]. Впоследствии В. В. Шулейкин воспользовался выводами Доброклонского для вычисления характеристической величины k по результатам измерений предельно развитых штормовых волн в океане [52]. При этом (см. гл. III) получилось числовое значение $k = 0{,}1$, отличающееся от цифр Кармана.

С. Г. Богуславский, исследуя турбулентный обмен в океанских течениях и учитывая различие между коэффициентом обмена и коэффициентом турбулентной вязкости, пришел к выводу, что соотношение Кармана (411), применяемое к течениям в условиях океана, должно содержать величину k, близкую к 0,1, а не к тем значениям, которые получены при лабораторных опытах в трубах. Этот автор совершенно основательно утверждает, что турбулизация в любых естественных условиях открытого океана — и на волне, и в потоках — должна сильно отличаться от той, которую получил в лаборатории Карман.

В настоящее время отношение ν/A коэффициента турбулентной кинематической вязкости к коэффициенту обмена теплом, солями, газами известно еще недостаточно хорошо. Поэтому Шулейкин попытался определить числовое значение k в формуле (409) применительно к морским течениям, пользуясь *только* уравнениями гидродинамики и несколькими эмпирическими соотношениями, успевшими получить очень хорошую проверку [52].

Запишем в комплексной форме уравнения дрейфовых течений Экмана [44]

$$\frac{d^2}{\partial z^2}(u + iv) = 2ia^2(u + iv). \tag{412}$$

Все обозначения здесь прежние. Комплексный метод позволил объединить два уравнения в одно, необходимое для определения производных в формуле (411). Условимся отсчитывать угол поворота вектора $u + iv$ (на различных глубинах z) от направления вектора U_0 скорости поверхностных частиц воды. Тогда интеграл уравнения (412) можно представить в наиболее простом виде

$$u + iv = U_0 e^{-(1+i)\,az}. \tag{413}$$

Отсюда можно найти производные, входящие в (411):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz}(u + iv) &= -a(1 + i)\,U_0 e^{-(1+i)\,az}, \\ \frac{d^2}{dz^2}(u + iv) &= a^2(1 + i)^2\,U_0 e^{-(1+i)\,az}. \end{aligned} \tag{414}$$

Подставим эти выражения в (409). Для поверхностного слоя при $z = 0$ получим

$$\nu = k^2 \left| \frac{U_0}{a(1 + i)} \right| = k^2 \frac{U_0}{a\sqrt{2}}. \tag{415}$$

Это соотношение позволяет определить k двумя различными путями.

1. Скорость U_0 поверхностных частиц воды связывается со скоростью ветра V хорошо проверенным эмпирическим соотношением (108). На основа-

нии этого соотношения и (415) можно записать, вспомнив выражение для a^2:

$$\nu = k^2 \frac{nV}{\sqrt{2\omega}} \frac{\sqrt{\nu}}{\sin\varphi}.$$

Отсюда вытекает первая формула, пригодная для вычисления k:

$$k = \left(2\omega \frac{\nu}{V^2}\right)^{1/4} \left(\frac{\sin\varphi}{n}\right)^{1/2}. \tag{416}$$

Здесь удвоенная угловая скорость вращения Земли $2\omega = 1{,}46 \cdot 10^{-4}$. На основании исследований Н. Н. Струйского, Е. Пальмена, Г. Тораде $n = 1{,}27 \cdot 10^{-2}$, а на основании работ В. Экмана и В. Шмидта $\nu/V^2 = 4{,}3 \cdot 10^{-4}$ при условии, что ν и V выражены в единицах *CGS*. Так как определения n производились в средних широтах, то положим $\varphi = 45°$. Тогда согласно формуле (416) окажется, что

$$k = 0{,}117.$$

2. Скорость U_0 можно связать с тангенциальной силой, с которой ветер воздействует на единицу поверхности моря: посредством формулы (47). С другой стороны, сила T выражается известным соотношением через скорость ветра V и плотность воздуха δ_a

$$T = \varkappa \delta_a V^2. \tag{417}$$

Это соотношение надежно при $V > 600$ *см/сек*. На основании (415) выразим k через другие величины, входящие в него. Тогда в результате простых преобразований получим

$$k = \left(\frac{2\omega}{\varkappa} \frac{\delta}{\delta_a} \frac{\nu}{V^2} \sin\varphi\right)^{1/2}. \tag{418}$$

Здесь δ — плотность воды; остальные обозначения прежние.

Примем $\delta/\delta_a = 800$. На основании данных А. Дефанта [23] положим $\varkappa = 2{,}9 \cdot 10^{-3}$; остальные числовые значения сохраним те же, что и в предшествовавшем вычислении. Тогда вторым способом по (418) найдем

$$k = 0{,}109. \tag{419}$$

До сих пор все выкладки были проведены при упрощенном условии, которым широко пользуются в динамике течений: $\nu = \text{const}$. В природе явления осложняются непостоянством ν, уменьшением его примерно по тому закону, по которому уменьшаются модули скоростей течений на глубинах. Чтобы учесть это обстоятельство, воспользуемся интегралом *осложненных* уравнений В. Экмана, который был давно им получен [6] и редко цитируется.

В отличие от оригинальной работы, запишем его в комплексной форме. Вместо (413) будет

$$u + iv = U_0 \left(1 - 0{,}8 \frac{z}{D_1}\right)^3 \exp\left[3{,}46\, i \ln\left(1 - 0{,}8 \frac{z}{D_1}\right)\right]. \tag{420}$$

Повторив все наши выкладки, вместо (415) получим

$$\nu = 0{,}364\, k^2 U_0 D_1. \tag{421}$$

При этом новое значение глубины трения — при переменном коэффициенте турбулентной вязкости на глубинах — может быть выражено через скорость ветра V по цитированной работе В. Экмана

$$D_1 = \frac{7{,}5\, V}{\sin\varphi}. \tag{422}$$

Снова воспользовавшись надежными эмпирическими данными для n и для ν/V^2, придем к третьему числовому значению

$$k = 0{,}102. \tag{423}$$

Отметим, что числовые значения k, полученные в формулах (416), (418) и (421), именно $k = 0{,}117$, $k = 0{,}109$, $k = 0{,}102$ меньше отличаются одно от другого, чем отличались друг от друга коэффициенты, найденные Карманом при различных опытах в лабораторных условиях. Из всех трех числовых значений, полученных В. В. Шулейкиным для морских течений, надо отдать предпочтение *последнему*, вычисленному с учетом изменений турбулентной вязкости на глубинах.

В свою очередь в последнем варианте ($k=0{,}102$) нет оснований сохранять двойку в третьем знаке после запятой: методика определения всех использованных параметров не позволяет ручаться за 2% вычисленной величины. Следовательно, в качестве характеристики турбулентных процессов в *морских течениях* есть все основания принять значение $k = 0{,}1$.

В гл. III мы увидим, что то же самое характеристическое число k позволяет с достаточной надежностью вычислять коэффициент турбулентной вязкости для *волнения* и что при одном и том же числовом значении k коэффициент турбулентной кинематической вязкости, определяющий собой потерю энергии волн, будет *несравненно меньше* коэффициента кинематической турбулентной вязкости, применяемого при исследованиях течений.

ГЛАВА ВТОРАЯ

ТЕОРИЯ ПРИЛИВНЫХ И ДРУГИХ ДЛИННЫХ ВОЛН

§ 1. Возникновение приливной волны

Изменение взаимного расположения Земли, Солнца и Луны, как известно, весьма заметно отражается на гравитационных силах, действующих на какую-либо материальную точку, находящуюся на земной поверхности. Вчастности, такие периодически меняющиеся силы должны действовать и на частицы вод Мирового океана, вызывая в конечном счете *приливные явления*.

В этой книге мы не будем касаться элементарных схем, объясняющих возникновение приливов, а рассмотрим только физико-математические законы возникновения и распространения приливных волн.

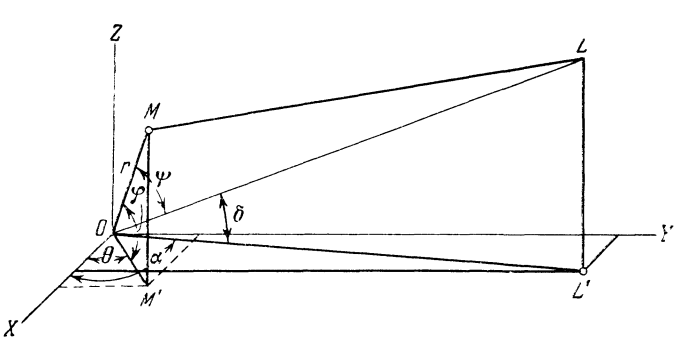


Рис. 81. Возникновение приливообразующей силы

Что касается первой части этой задачи — вопроса о механизме *возникновения* такой волны, то здесь удобнее всего будет проследить за периодическим изменением *гравитационного потенциала* под влиянием движения светила *относительно* земного шара. Сперва рассмотрим действие одной только *Луны*.

Пусть начало декартовой системы координат совпадает с центром Земли O (рис. 81), причем координатная плоскость XOY лежит в плоскости экватора, а ось OX проходит в том направлении, от которого отсчитывается угол θ, выражающий звездное время. Пусть, наконец, M представляет собой исследуемую точку гидросферы, описанной радиусом r вокруг O, а L — центр Луны, находящийся на расстоянии $OL = R$ от центра Земли.

При движении Луны вокруг Земли будет, очевидно, непрерывно изменяться часовой угол светила $(\theta - \alpha)$, а также склонение δ. В результате по некоторому определенному закону будет изменяться угол LOM, обозначенный на рис. 81 буквой ψ и характеризующий видимое движение Луны для наблюдателя, находящегося в точке M.

На частицу воды, находящуюся в точке M, действуют *три* силовых поля (если оставить пока в стороне поле тяготения Солнца): а) поле притяжения к центру Земли, б) поле притяжения к Луне и в) поле центробежных сил, обусловленных движением Земли вокруг *общего* центра тяжести системы Земля — Луна.

Как известно, центробежная сила, развивающаяся благодаря движению Земли вокруг общего центра тяжести, *одинакова* во всех точках земного шара (и на его поверхности, и в его толще), причем она в точности равна силе *лунного притяжения в центре Земли.*

Следовательно, суммарное поле, которое действует на исследуемую частицу воды, складывается из двух частей: а) постоянной части, обусловленной полем земного притяжения; б) переменной части, равной разности между силой лунного притяжения, действующей в центре Земли, и силой лунного же притяжения, но действующей в данной точке M.

Как всегда, векторное вычитание полных сил можно заменить алгебраическим вычитанием слагающих по трем координатным осям. Слагающие же эти нетрудно выразить, зная массу Луны m, гравитационную постоянную f, координаты центра Луны ξ, η и ζ, координаты x, y и z точки M, а также расстояние $OL = R$ и расстояние ML, которое для краткости обозначим одной буквой Δ.

Сила лунного притяжения в точке M равняется, очевидно, $f\frac{m}{\Delta^2}$, а в центре Земли $f\frac{m}{R^2}$.

Следовательно, принимая во внимание, что косинусы углов, составляемых направлениями Δ и R с координатными осями, соответственно равны

$$\frac{\xi - x}{\Delta},\quad \frac{\eta - y}{\Delta},\quad \frac{\zeta - z}{\Delta}$$

и

$$\frac{\xi}{R},\quad \frac{\eta}{R},\quad \frac{\zeta}{R},$$

найдем, что составляющие искомых *избыточных* сил должны быть равны

$$\begin{aligned} X_L &= fm\frac{\xi - x}{\Delta^3} - fm\frac{\xi}{R^3},\\ Y_L &= fm\frac{\eta - y}{\Delta^3} - fm\frac{\eta}{R^3},\\ Z_L &= fm\frac{\zeta - z}{\Delta^3} - fm\frac{\zeta}{R^3}. \end{aligned} \tag{1}$$

Но расстояние Δ легко выразить через другие геометрические элементы:

$$\Delta = \sqrt{R^2 + r^2 - 2Rr\cos\psi} = R\sqrt{1 - 2\frac{r}{R}\cos\psi + \frac{r^2}{R^2}},$$

откуда

$$\frac{1}{\Delta^3} = \frac{1}{R^3}\left[1 - 2\frac{r}{R}\cos\psi + \frac{r^2}{R^2}\right]^{-\frac{3}{2}}.$$

Или, пренебрегая весьма малой величиной r^2/R^2,

$$\frac{1}{\Delta^3} = \frac{1}{R^3}\left(1 + 3\frac{r}{R}\cos\psi\right). \tag{2}$$

Подставив (2) в уравнения (1), найдем после некоторых простых преобразований

$$\begin{aligned} X_L &= f\frac{m}{R^3}\left(-x + 3\frac{r\xi}{R}\cos\psi\right),\\ Y_L &= f\frac{m}{R^3}\left(-y + 3\frac{r\eta}{R}\cos\psi\right),\\ Z_L &= f\frac{m}{R^3}\left(-z + 3\frac{r\zeta}{R}\cos\psi\right). \end{aligned} \tag{3}$$

Воспользовавшись известным соотношением $\cos\psi = \frac{\xi x + \eta y + \zeta z}{Rr}$, можно переписать уравнения (3) в иной форме

$$\begin{aligned} X_L &= -f\frac{mx}{R^3} + 3f\frac{m}{R^5}\xi(\xi x + \eta y + \zeta z), \\ Y_L &= -f\frac{my}{R^3} + 3f\frac{m}{R^5}\eta(\xi x + \eta y + \zeta z), \\ Z_L &= -f\frac{mz}{R^3} + 3f\frac{m}{R^5}\zeta(\xi x + \eta y + \zeta z). \end{aligned} \tag{4}$$

Но, зная все три составляющие избыточных сил, нетрудно определить силовую функцию [1] Γ_L этих избыточных сил, обусловленных лунным тяготением. Так как силовая функция связана с X_L, Y_L и Z_L соотношениями

$$X_L = \frac{\partial\Gamma_L}{\partial x}, \quad Y_L = \frac{\partial\Gamma_L}{\partial y}, \quad Z_L = \frac{\partial\Gamma_L}{\partial z},$$

то, как легко убедиться,

$$\Gamma_L = -\frac{fm}{2R^3}(x^2 + y^2 + z^2) + \frac{3fm}{2R^5}(\xi x + \eta y + \zeta z)^2 = \frac{fmr^2}{2R^3}(3\cos^2\psi - 1). \tag{5}$$

Напомним, что здесь учтена как сила непосредственного притяжения к Луне, так и сила, возникающая благодаря движению Земли вокруг общего центра тяжести системы Земля — Луна.

С другой стороны, поле *земного* тяготения совместно с полем второй центробежной силы, возникающей благодаря суточному вращению Земли вокруг собственной оси, можно учесть некоторой *постоянной* во времени силовой функцией Γ_T.

Если влиянием *второй* центробежной силы пренебречь, то эта функция окажется, очевидно, равной $\Gamma_T = f\frac{m_T}{r}$, где m_T — масса Земли.

Полная силовая функция в точке m (если игнорировать действие Солнца) выразится так:

$$\Gamma = \Gamma_T + \Gamma_L = \frac{fm_T}{r} + \frac{fmr^2}{2R^3}(3\cos^2\psi - 1). \tag{6}$$

Если бы было принято во внимание также солнечное притяжение, то в правой части уравнения (6) появился бы третий член, отличающийся от второго только тем, что вместо m в нем стояла бы масса Солнца, вместо R — расстояние от Земли до Солнца и, наконец, вместо ψ — аналогичный же угол между земным радиусом и направлением к Солнцу.

В уравнении (6) второй член правой части представляет собой сложную функцию времени, которая замаскирована чрезвычайно простой зависимостью от угла ψ.

Попытаемся раскрыть примерный вид этой функции для того, чтобы получить суждение о периодичности изменения сил, действующих на частицу морской воды. Для этого прежде всего выразим декартовы координаты исследуемой точки и центра Луны через полярные координаты тех же точек

$$\begin{aligned} x &= r\cos\varphi\cos\theta, & \xi &= R\cos\delta\cos\alpha, \\ y &= r\cos\varphi\sin\theta, & \eta &= R\cos\delta\sin\alpha, \\ z &= r\sin\varphi, & \zeta &= R\sin\delta. \end{aligned} \tag{7}$$

Но, как уже было отмечено выше, через декартовы координаты точек может быть очень просто выражен $\cos\psi$. Вспоминая это выражение и внося в него

[1] Не следует смешивать силовую функцию Γ_L с вектором Γ, который встречался в конце предыдущей главы.

величины, определяемые из (7), легко обнаружить, что

$$\cos\psi = \frac{\xi x + \eta y + \zeta z}{Rr} = \cos\varphi\cos\delta\cos(\theta - \alpha) + \sin\varphi\sin\delta. \qquad (8)$$

Зная же связь между $\cos\psi$ и другими элементами, входящими в (8), элементами чисто астрономическими, можно выразить через эти астрономические элементы переменный множитель $(3\cos^2\psi - 1)$, играющий решающую роль в уравнении (6):

$$3\cos^2\psi - 1 = 3\cos^2\varphi\cos^2\delta\cos^2(\theta - \alpha) + 6\sin\varphi\cos\varphi\sin\delta\cos\delta\cos(\theta - \alpha) +$$
$$+ 3\sin^2\varphi\sin^2\delta - 1 = \frac{3}{2}\cos^2\varphi\cos^2\delta + 3\sin^2\varphi\sin^2\delta - 1 +$$
$$+ \frac{3}{2}\sin 2\varphi\sin 2\delta\cos(\theta - \alpha) + \frac{3}{2}\cos^2\varphi\cos^2\delta\cos 2(\theta - \alpha). \qquad (9)$$

Как видим, множитель $3\cos^2\psi - 1$, определяющий собой колебание потенциала возмущающих сил, выражается через сумму *трех* членов, изменения которых характеризуются *несколькими* определенными периодами.

Первый член не содержит часового угла $\theta - \alpha$, а изменяется только в зависимости от аргумента δ — *склонения Луны*. Так как тригонометрические функции этого аргумента входят в него в квадрате, то периодом для изменения его величины должна служить *половина месяца*; в течение такого краткого промежутка времени, как сутки, можно не считаться с колебанием величины этого члена. *Второй член* суммы содержит *часовой угол* светила $\theta - \alpha$, а потому в основном его колебание обладает периодом, равным *одним суткам*. В течение половины месяца его величина тоже должна несколько колебаться благодаря присутствию множителя 2δ. *Третий член* содержит в качестве одного из множителей *двойную* величину часового угла, а потому его основным периодом является *половина суток*. Другой множитель, входящий в этот член, $\cos^2\delta$, указывает на наличие второго колебания, налагающегося на основное и характеризуемого периодом *полмесяца*.

Разумеется, все сроки, о которых только что говорилось (месяцы, сутки и пр.),— *лунные* (так, например, под полусуточным периодом понимается период, равный 12 *час* 25 *мин* солнечного времени).

Итак, потенциал, или обратная ему по знаку силовая функция, возмущающих сил колеблется по очень сложному закону, причем в колебаниях его явно выделяются периоды: полусуточный, суточный и полумесячный. Наиболее важными являются колебания с периодами полусуточным и суточным, причем второй род колебаний особенно явственно сказывается в высоких широтах (где φ велико) и притом у восточных берегов материков, архипелагов и больших островов (о причинах этого явления легко будет догадаться в дальнейшем).

Совершенно очевидно, что всякое периодическое изменение величины потенциала неминуемо должно повести к *перемещению* водных масс вблизи исследуемой точки гидросферы, и на первый взгляд может показаться, что после всякого такого перемещения вода будет последовательно принимать то или иное состояние *равновесия* в зависимости от структуры силового поля.

На подобном простом предположении базировалась самая ранняя теория приливных явлений, так называемая *теория равновесия*.

Как известно, с точки зрения этой теории, поверхность Мирового океана должна была бы принять форму *эллипсоида* (если бы не препятствовали материки) с большой осью, проходящей через центр Луны, причем по мере движения Луны эта ось должна была бы следовать за нею, вызывая периодические подъемы и опускания уровня океана в различных его частях.

Легко видеть, однако, что подобное *синхронное* перемещение водных масс вместе с перемещением оси, проходящей через Луну, *невозможно*: ему пре-

пятствуют *силы инерции*, которые действуют на воду и которых совершенно не учитывает *статистическая* теория.

Вот почему на смену ей появилась теория *динамическая*, предложенная П. С. Лапласом [1].

Но и теория Лапласа в чистом виде не дает истинной картины приливных явлений, ибо в основе ее лежит также одно упрощающее предположение, не соответствующее действительным, природным, условиям: предполагается, что весь земной шар покрыт слоем воды постоянной и чрезвычайно большой толщины. Колебания вод, возникающие в этом слое под действием периодических изменений силовой функции Г, пошли бы, очевидно, по иным законам, чем те, по которым протекают колебания реальных океанских вод, сжатых со сторон материками, а снизу подстилаемых дном причудливого рельефа.

Вот почему мы остановимся только на *другой динамической* теории приливов, предложенной Дж. Эри [2] и позволяющей несравненно ближе подойти к истинной картине, наблюдающейся в природе.

Эри достигает этого, внося в свой анализ приливных явлений элементы, характеризующие *ложе* гидросферы: глубину бассейна и его ширину в различных местах. Сам *процесс возникновения* приливных колебаний в океане теория Эри описывает, разумеется, основываясь на тех же общих уравнениях, на которых базируется и теория Лапласа. Удобнее всего в данном случае пользоваться этими уравнениями в форме Эйлера [см. гл. I, формулу (20)], которую в применении к приливам можно несколько упростить.

Скорости движения частиц воды u, v и w, входящие в (20) гл. I, в данном случае невелики, а стало быть, произведениями этих скоростей на величины $\partial u/\partial x$, $\partial v/\partial y$ и $\partial w/\partial z$ можно *пренебречь*. Затем, так как компоненты возмущающих сил X, Y и Z являются частными производными от силовой функции Г, то для компактности соотношений эту функцию можно непосредственно ввести в уравнения.

После таких преобразований уравнения Эйлера (20) гл. I принимают вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial x}(\Gamma - \alpha p), \\ \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial y}(\Gamma - \alpha p), \\ \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial z}(\Gamma - \alpha p), \end{aligned} \tag{10}$$

где по-прежнему α — удельный объем морской воды, p — давление в данной точке гидросферы.

Уравнения (10) показывают, что благодаря колебаниям силовой функции Г, определяемым соотношениями (6) и (9), координаты водной частицы x, y и z также должны периодически *изменяться*. Частица воды должна прийти в колебательное движение.

Постараемся же по методу Эри проследить за этим колебательным движением и его распространением в различных конкретных условиях.

§ 2. «Каналовая» теория приливов

Прежде всего отметим, что в своем движении во время приливов и отливов частицы воды проходят обычно весьма значительные расстояния по *горизонтальному* направлению (как это будет видно дальше), а по вертикальному направлению в то же время они проходят совсем небольшие расстояния. Так, если по горизонтальному направлению частица проходит пути, измеряемые километрами, то в вертикальном направлении она пройдет путь, не превышающий нескольких метров.

Но если это так, то ускорения, характеризующие вертикальные перемещения частиц, должны быть весьма малы по сравнению с ускорением силы тяжести, а стало быть, давление p, фигурирующее в формулах (10), можно рассматривать как чисто гидростатическое давление, вполне определяемое глубиной залегания соответствующего слоя [2].

Пусть эта глубина (на которой находится исследуемая частица жидкости) характеризуется разностью координат данной частицы (y) и поверхности моря над ней ($y_0 + \eta$), где y_0 — координата невозмущенной поверхности моря, а η — отклонение от нее (вверх или вниз), происходящее во время прилива или отлива[1]. Тогда, не принимая во внимание постоянного внешнего давления, можно написать, что

$$p = g\delta(y_0 + \eta - y),$$

откуда

$$\frac{\partial p}{\partial x} = g\delta\frac{\partial \eta}{\partial x}. \tag{11}$$

Допустим сначала, что жидкость *колеблется свободно без воздействия* внешних возмущающих сил, т. е. при условии

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial x} = \frac{\partial \Gamma}{\partial \eta} = 0.$$

Тогда из первого уравнения системы (10) найдем

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = -\alpha\frac{\partial p}{\partial x}. \tag{12}$$

Но сюда можно подставить вместо $\partial p/\partial x$ его выражение из (11), причем величины удельного объема α и плотности δ после умножения дадут единицу. Затем переменная координата x движущейся частицы составляется, очевидно, из координаты состояния покоя x_0 и налагающейся на нее величины горизонтального смещения ξ частицы во время ее колебаний, т. е. $x = x_0 + \xi$.

Приняв все это во внимание, легко из (12) получить более компактное соотношение

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -g\frac{\partial \eta}{\partial x}, \tag{13}$$

которое связывает вертикальное перемещение η частицы с ее горизонтальным перемещением ξ.

Для полной характеристики движения остается составить *условие неразрывности*. В конкретном случае *узкого и длинного канала*, с глубиной H и шириной b, условие это нетрудно получить. Пусть за некоторое время, благодаря колебательному движению, подверглась *деформации* некоторая масса морской воды, заключенная в пределах от x до $x + \Delta x$. Объем, который она занимала, равняется, очевидно, $bH\Delta x$.

После деформации глубина сделалась равной $H + \eta$, а расстояние между границами стало равным $\Delta x + \frac{\delta \xi}{\delta x}\Delta x$. Разумеется, если глубина возросла, то границы сблизились, и наоборот. Объем жидкости, заключенной между границами, выражается теперь так:

$$b(H + \eta)\left(\Delta x + \frac{\partial \xi}{\partial x}\Delta x\right).$$

Но ввиду *неразрывности* этот объем должен равняться прежнему — тому, который та же масса жидкости занимала до деформации. А стало быть,

$$bH\Delta x = b(H + \eta)\left(\Delta x + \frac{\partial \xi}{\partial x}\Delta x\right),$$

[1] Ось OY направлена вверх, ось OX — горизонтально вдоль направления, в котором распространяется прилив.

или, пренебрегая членами высших порядков,

$$\eta = -H\frac{\partial \xi}{\partial x}. \tag{14}$$

Это условие неразрывности помогает исключить одну из переменных в уравнении движения (13). Произведя такое исключение, получим дифференциальное уравнение чрезвычайно распространенного типа

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = gH\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}. \tag{15}$$

Как известно, в многочисленных задачах математической физики это уравнение определяет собой *волну*, распространяющуюся вдоль оси OX со скоростью

$$c = \sqrt{gH}, \tag{16}$$

в чем легко убедиться.

Действительно, общий интеграл уравнения (15) напишется в форме

$$\xi = F_1(x - ct) + F_2(x + ct); \tag{17}$$

на основании (14) отсюда вытекает

$$\frac{\eta}{H} = -F_1'(x - ct) - F_2'(x + ct)\ *. \tag{18}$$

Сначала примем во внимание только первый член правой части. В момент $t = 0$ он дает

$$\frac{\eta}{H} = -F_1'(x).$$

Это — профиль поверхности моря в начальный момент времени вблизи данной точки. Прибавим ко времени одну секунду, а к линейному элементу величину c. Тогда получим, очевидно, уравнение того профиля поверхности моря, который будет иметь место через секунду вблизи пункта, отстоящего на расстояние c от начального. Уравнение это будет

$$\frac{\eta}{H} = -F_1'[(x + c) - c(0 + 1)] = -F_1'(x),$$

т. е., как видим, через секунду тот же самый профиль поверхности моря перейдет в другую точку, отстоящую от начальной на расстояние c. А такого рода перемещение профиля наблюдается именно в случае движения *волны*, распространяющейся вдоль оси OX со скоростью c.

В действительности уравнения (17) и (18) содержат еще второй член того же типа только с противоположным знаком при c. Этот член выражает вторую волну, бегущую также вдоль оси OX, но в противоположную сторону. Профиль ее, вообще говоря, может быть задан функцией F_2' иного вида.

Что касается самого вида функций F_1 и F_2, то они зависят от природных условий *возникновения* волны, о чем придется не раз вспомнить в дальнейшем. Из уравнений (17) и (18) вытекает, что вид этих функций, иными словами, *форма* профиля волны, никак не отражается на законе распространения волны и на ее скорости. Следует, однако, заметить, что подобное обстоятельство имеет место только в тех случаях, когда высота волны *мала* по сравнению с глубиной моря. Случай *конечных* высот (конечных амплитуд колебания) будет исследован в специальном параграфе (см. § 5).

До сих пор исследовались *свободные* колебания, происходящие в океане при распространении *свободных* же длинных волн. Теперь посмотрим, как

---

* $F_1' = \frac{\partial F_1}{\partial (x - ct)}$, $F_2' = \frac{\partial F_2}{\partial (x + ct)}$.

будут вести себя воды океана под действием периодически колеблющейся силовой функции Г.

Формально дифференциальное уравнение движения в этом сложном случае будет отличаться от (15) только новым членом $\partial\Gamma/\partial x$, который войдет туда из (10). Оно приобретет вид

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} + \frac{\partial\Gamma}{\partial x}. \tag{19}$$

Что касается самого нового члена $\partial\Gamma/\partial x$, то его нетрудно выразить, зная соотношение (6). Если бы учитывалось также действие Солнца, то, как было уже упомянуто, в (6) пришлось бы только внести третий член, аналогичный первому, «лунному». Мы по-прежнему будем пока пренебрегать действием Солнца.

Для общего анализа нет нужды рассматривать отдельно все детали сложного движения Луны, описываемые уравнением (9). Достаточно будет представить аргумент ψ — *зенитное расстояние Луны* — в более удобной и несложной форме, приняв во внимание, что Луна движется с угловой скоростью ω_1 вокруг Земли в плоскости экватора, а Земля в свою очередь вращается с угловой скоростью ω вокруг собственной оси, в результате чего угловая скорость *относительного* движения Луны определяется разностью n обеих угловых скоростей ω_1 и ω

$$n = \omega_1 - \omega.$$

Рассмотрим сперва тот конкретный случай, когда канал тянется вдоль *экватора*. В этом случае зенитное расстояние можно представить в виде

$$\psi = nt + \frac{x}{r} + \varepsilon, \tag{20}$$

где дуга x/r отсчитывается по экватору к востоку, а ε выражает зенитное расстояние Луны в момент времени $t = 0$ и в точке, для которой $x/r = 0$.

Но при таком выражении аргумента ψ производная $\partial\Gamma/\partial x$ [входящая в уравнение (19)] вычислится очень просто. Именно, сопоставляя (6) и (20) и принимая во внимание, что $\frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{1}{r}$, найдем

$$\frac{\partial\Gamma}{\partial x} = -\frac{3}{2}f\frac{mr^2}{R^3}\sin 2\psi\frac{\partial\psi}{\partial x} = -\frac{3}{2}f\frac{mr}{R^3}\sin 2\left(nt + \frac{x}{r} + \varepsilon\right) = -q\sin 2\left(nt + \frac{x}{r} + \varepsilon\right), \tag{21}$$

где

$$q = \frac{3}{2}f\frac{mr}{R^3}.$$

А подставив (21) в (19), получим

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} - q\sin 2\left(nt + \frac{x}{r} + \varepsilon\right). \tag{22}$$

Это дифференциальное уравнение выражает закон возникновения *вынужденных колебаний* в гидросфере. Его интеграл имеет вид

$$\xi = A\sin 2\left(nt + \frac{x}{r} + \varepsilon\right), \tag{23}$$

где постоянная интегрирования A определяется двукратным дифференцированием (23) как по t, так и по x. В результате подстановки полученных вторых частных производных в (22), синус переменного угла пропадет после сокращения, а останется лишь простое уравнение

$$-4n^2A = -c^2\frac{4}{r^2}A - q,$$

откуда

$$A = -\frac{1}{4}\frac{qr^2}{c^2 - r^2n^2}$$

и окончательно

$$\xi = -\frac{1}{4}\frac{qr^2}{c^2 - r^2n^2}\sin 2\left(nt + \frac{x}{r} + \varepsilon\right) \tag{24}$$

и на основании (14)

$$\eta = \frac{1}{2}\frac{qHr}{c^2 - r^2n^2}\cos 2\left(nt + \frac{x}{r} + \varepsilon\right). \tag{25}$$

Как и следовало ожидать, период колебания воды — период прилива — оказался равным половине суток; это соответствует упрощенному предположению, лежащему в основе (20). Подобное упрощение в большинстве случаев вполне законно, так как последний (полусуточный) член в уравнении (9) обычно значительно превышает все остальные.

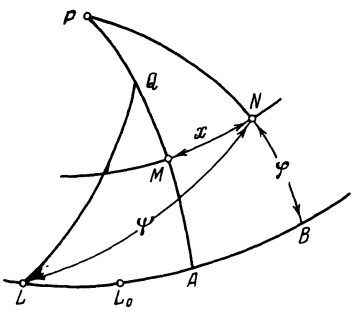


Рис. 82. Схема расположения каналов на Земле

Легко обнаружить прежним методом, что уравнения (24) и (25) определяют собой волну (в данном случае *вынужденную*), бегущую вслед за Луной. Так же легко обнаружить, что в природных условиях неминуемо должна наблюдаться инверсия прилива, т. е. в тот момент, когда Луна проходит через зенит, наступает не полная, а *малая* вода. Действительно, когда Луна находится в зените, то

$$nt + \frac{x}{r} + \varepsilon = 0,$$

а стало быть,

$$\eta = \frac{1}{2}\frac{qHr}{c^2 - r^2n^2}. \tag{26}$$

Но скорость распространения свободной волны c в действительности всегда меньше скорости rn, с которой перемещается по поверхности земного шара проекция центра Луны, что видно из простого числового подсчета

$$\frac{c^2}{r^2n^2} = \frac{gH}{r^2n^2} = \frac{g}{rn^2}\frac{H}{r} = 311\frac{H}{r}.$$

Так как глубина океана H нигде не превышает 1/600 радиуса Земли r, то, очевидно, всегда

$$c \leqslant 0{,}7\ rn,$$

а стало быть, величина η, определяемая из (26), отрицательная, что соответствует *малой воде*.

Почти так же просто разрешается задача в случае канала, расположенного параллельно экватору на *произвольной широте* φ.

Пусть, например, канал проходит в направлении MN (рис. 82). Как и в предыдущем случае, предположим, что склонение Луны равно нулю. Тогда центр ее в некоторый момент времени t будет проектироваться в точку экватора L, над которой, следовательно, Луна в данный момент будет стоять в зените. Пусть, с другой стороны, в момент $t = 0$ Луна находилась в зените над другой точкой экватора, L_0, от которой, согласно условию (20), отсчитываются промежутки x вдоль экваториального канала. Но если это так, то дуга $L_0A = \varepsilon$ [на основании того же условия (20)] и $LA = nt + \varepsilon$.

Если расстояние между точками M и N нашего теперешнего канала, измеренного по дуге *большого круга*, равно x, то промежуток MN в радианах выразится, очевидно, как x/r. На основании известных соотношений сферической тригонометрии с этим промежутком свяжется дуга экватора AB

$$AB = \frac{MN}{\cos\varphi} = \frac{x}{r\cos\varphi}.$$

Зная же экваториальные дуги LA и AB, найдем их сумму LB

$$LB = nt + \frac{x}{r\cos\varphi} + \varepsilon.$$

Но в свою очередь дуга LB вместе с двумя другими дугами большого круга BN и LN образует *треугольник* LNB, в котором сторона BN также известна, ибо она выражает собой просто *широту* φ той зоны земного шара, где пролегает канал MN.

На основании тех же соотношений сферической тригонометрии легко выразить косинус дуги LN, замыкающей этот треугольник и, как нетрудно видеть, выражающей непосредственно зенитное расстояние Луны

$$\cos\psi = \cos LN = \cos\varphi\cos\left(nt + \frac{x}{r\cos\varphi} + \varepsilon\right). \tag{27}$$

Подставив (27) в (6), получим по примеру (21)

$$\frac{\partial\Gamma}{\partial x} = -q\cos\varphi\sin 2\left(nt + \frac{x}{r\cos\varphi} + \varepsilon\right). \tag{28}$$

Внеся же (28) в (19) и проинтегрировав полученное дифференциальное уравнение, найдем, что

$$\xi = A\sin 2\left(nt + \frac{x}{r\cos\varphi} + \varepsilon\right). \tag{29}$$

В (28) буквой q, как и ранее, обозначено выражение $\frac{3}{2}f\frac{mr^2}{R^3}$. Константа интегрирования A определяется также прежним приемом. Найдем ее и подставим в (29), тогда окончательно

$$\xi = -\frac{1}{4}\frac{qr^2\cos^2\varphi}{c^2 - r^2n^2\cos^2\varphi}\sin 2\left(nt + \frac{x}{r\cos\varphi} + \varepsilon\right) \tag{30}$$

и аналогично

$$\eta = \frac{1}{2}\frac{qrH\cos^2\varphi}{c^2 - r^2n^2\cos^2\varphi}\cos 2\left(nt + \frac{x}{r\cos\varphi} + \varepsilon\right). \tag{31}$$

Так выражается закон приливных явлений, которые происходят в канале, протянувшемся вдоль *параллели*.

Между прочим, при возрастающей широте $\cos\varphi$ может достигнуть такой малой величины, что при значительной глубине моря скорость свободной волны c окажется *больше* скорости вынужденной ($rn\cos\varphi$). Тогда, в отличие от предыдущего, *не будет* инверсии прилива [знаменатель в (31) будет положителен], т. е. в момент верхней кульминации Луны в данной точке будет наступать *полная вода*.

В обоих исследованных случаях предполагалось, что склонение Луны равно нулю; в случаях произвольного склонения задача несколько усложняется. Рассмотрим ее применительно к каналу, проходящему на произвольной широте в направлении круга параллели.

Зенитное расстояние ψ теперь свяжется с другими элементами соотношением

$$\cos\psi = \sin\varphi\sin\delta + \cos\varphi\cos\delta\cos(\theta - \alpha), \tag{32}$$

где, напомним, $\theta - \alpha$ выражает собой так называемый *часовой угол* светила,

отсчитываемый от меридиана данной точки. Этот угол можно выразить очень просто, если пренебречь изменениями склонения светила за исследуемый короткий промежуток времени. Именно

$$\theta - \alpha = nt + \frac{x}{r\cos\varphi} + \varepsilon. \tag{33}$$

Основываясь на (32) и (33) и следуя прежним путем, придем к окончательному выражению

$$\eta = \frac{1}{2}\frac{qrH\sin 2\varphi}{c^2 - r^2n^2\cos^2\varphi}\sin 2\delta\cos\left(nt + \frac{r}{r\cos\varphi} + \varepsilon\right) + \\ + \frac{1}{2}\frac{qrH\cos^2\varphi}{c^2 - r^2n^2\cos^2\varphi}\cos^2\delta\cos 2\left(nt + \frac{x}{r\cos\varphi} + \varepsilon\right). \tag{34}$$

Закон колебания частиц морской воды в горизонтальном направлении выразится аналогично.

Как видим, колебание уровня воды в канале происходит по весьма сложному закону, характеризуемому *тремя* различными периодами:

1. Прежде всего, основным колебанием является то, которое дается вторым членом правой части в (34). Это — *полусуточный* прилив с амплитудой, пропорциональной квадрату косинуса склонения. При склонении, равном *нулю*, этот член тождествен с правой частью уравнения (31).

2. Первый член правой части (34) выражает *суточную* слагающую прилива, амплитуда которой пропорциональна *синусу* двойного угла склонения. При склонении, равном *нулю*, эта суточная слагающая, очевидно, *исчезает*. Напротив, при больших склонениях в *высоких широтах* (в северных и южных полярных морях) она может проявиться весьма рельефно, в особенности у восточных берегов материков и архипелагов, которые служат *экраном* для полусуточной волны, приходящей из более низких широт.

3. Третье колебание уровня, налагающееся на оба других, происходит с весьма большим — *полумесячным* — периодом, так как в первый член входит в качестве множителя величина $\sin 2\delta$, а во второй — величина $\cos^2\delta$, обладающая тем же периодом.

Остановимся теперь на последнем частном случае: на случае, когда канал проходит *вдоль меридиана*, например в направлении AQ (рис. 82). В этом случае зенитное расстояние $\psi = LQ$ найдется из сферического треугольника LAQ аналогично расстоянию LN, определявшемуся формулой (27):

$$\cos\psi = \cos\frac{x}{r}\cos(nt + \varepsilon). \tag{35}$$

Окончательные выражения для колебаний в горизонтальном и вертикальном направлениях будут иметь вид

$$\xi = -\frac{qr^2}{8c^2}\sin\frac{2x}{r} - \frac{qr^2}{8(c^2 - a^2n^2)}\sin\frac{2x}{r}\cos 2(nt + \varepsilon), \tag{36}$$

$$\eta = \frac{qHr}{4c^2}\cos\frac{2x}{r} + \frac{qHr}{4(c^2 - a^2n^2)}\cos\frac{2x}{r}\cos 2(nt + \varepsilon). \tag{37}$$

Первый член уравнения (37) показывает, что *средний* уровень воды в меридиональном канале *непрерывно меняется* по мере удаления от экватора. Относительно этого уровня происходят *полусуточные* колебания с амплитудой, *непрерывно меняющейся вдоль канала*. При этом амплитуда не только меняется по величине, но изменяет и знак при переходе через параллель широты 45°: в широтах, меньших 45°, в момент кульминации Луны наступает *малая вода*, а в широтах, бо́льших 45°,— *полная вода*.

Замечательно, что на каждом из этих «квадрантов» меридиана в отдельности колебания уровня происходят совершенно *синхронно*: *без всякой разности фаз*.

§ 3. Длина приливной волны и ее энергия

Дифференциальное уравнение (15) в предыдущем параграфе определяет собой, как мы видели, *волну* [1], распространяющуюся вдоль канала со скоростью по формуле (16)

$$c = \sqrt{gH}.$$

Так как, вообще говоря, длина волны λ, период T и скорость распространения c всегда связаны соотношением

$$\lambda = cT, \tag{38}$$

то для *полусуточного* прилива (для которого $T = 12$ *час* 25 *мин*) длина волны λ получается чрезвычайно значительной (табл. 6).

Таблица 6

Глубина моря, *м*	Скорость волны, *м/сек*	Длина волны, *км*	Глубина моря, *м*	Скорость волны, *м/сек*	Длина волны, *км*
10	9,9	444	1 000	99	4 440
50	21	992	5 000	210	9 920
100	31	1 400	10 000	310	14 000
500	70	3 130			

Даже в последнем столбце, соответствующем наибольшей на земном шаре глубине — 10 тыс. *м*, длина волны в 1400 раз превышает глубину моря, а при меньших глубинах разница становится еще значительней; так, при $H = 1000$ отношение λ/H равно 4440, а при $H = 100$ оно равно 14 000.

При подобных длинах волн динамические условия на всех глубинах оказываются одинаковыми: всюду давление p, фигурирующее в основных уравнениях (10), может считаться равным чисто гидростатическому. Следовательно, все смещения частиц воды как в горизонтальном, так и в вертикальном направлении протекают одинаково во всех точках одной и той же вертикали.

Разумеется, все это остается справедливым лишь до тех пор, пока не проявляются силы трения о дно или же о ледяной покров, как это показали исследования Г. Свердрупа [3] в полярной экспедиции на судне «Мод» (о роли этих сил и об искажении приливного режима, вызываемом ими, будет речь впереди — (см. § 12).

Основываясь на уравнениях движения частиц воды на приливной волне и принимая во внимание тождество условий во всех точках, лежащих на какой-либо одной вертикали, можно вычислить энергию приливной волны.

Потенциальная энергия на элементарном участке dx найдется, если подсчитать работу, совершаемую при подъеме массы воды $\delta b \eta\, dx$ (где b — ширина канала) на высоту $\frac{1}{2}\eta$, т. е. на высоту центра тяжести слоя воды, появившегося над невозмущенным уровнем моря.

На участке канала длиной λ (и по-прежнему шириной b) потенциальная энергия будет поэтому

$$E_p = \frac{1}{2}\delta g b \int_0^{\lambda} \eta^2 dx. \tag{39}$$

[1] В предыдущем параграфе было доказано, что волна распространяется со скоростью c. Легко также проверить правильность заключения, что $c = \sqrt{gH}$. Для этого необходимо только дважды продифференцировать уравнение (17) или (18) как по x, так и по t, и полученные вторые производные подставить в (15).

Кинетическая энергия элементарного объема воды E_c вычислится по скорости $d\xi/dt$, с которой движутся частицы воды в горизонтальном направлении (вертикальными слагающими здесь можно пренебречь).

На участке длиной λ и шириной b кинетическая энергия равна

$$E_c = \frac{1}{2}\delta H b \int_0^{\lambda} \left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2 dx. \tag{40}$$

Но и из уравнения (15) и путем сопоставления (24) и (25) можно заключить, что

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{c}{H}\eta, \tag{41}$$

а подставляя (41) в (40), нетрудно обнаружить, что

$$E_p = E_c = \frac{1}{2}E, \tag{42}$$

где E — полная энергия приливной волны, равная сумме энергии потенциальной и кинетической.

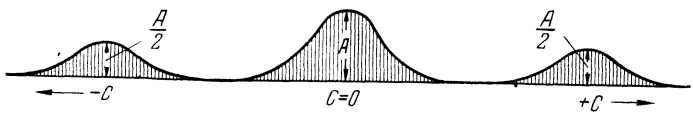


Рис. 83. Возникновение двух волн, бегущих в противоположные стороны

Чрезвычайно важное соотношение (42), справедливое, вообще говоря, для всякой *распространяющейся* волны, можно доказать еще другим способом, рассмотрев следующую простую схему.

Пусть где-то, на некотором участке канала (рис. 83), создалось некоторое возмущение, изображаемое на рисунке в виде «холма», появившегося над спокойной поверхностью воды. Согласно предыдущему, «холм» этот должен породить *две* совершенно одинаковые волны, которые побегут в противоположные стороны.

Из условия неразрывности и условия симметрии вытекает, что по поверхности моря должны бежать два «холма», очерченных подобно начальному, но заключающих в себе каждый половину воды, находившейся в нем. Следовательно, ординаты кривых, очерчивающих каждый из двух бегущих «холмов», должны быть ровно вдвое меньше соответствующих ординат начального «холма».

Но если это так, то потенциальная энергия каждого из бегущих «холмов» равняется четверти потенциальной энергии начального, а общая потенциальная энергия системы — половине начальной. Совершенно очевидно, что вторая половина начальной энергии превращается в кинетическую энергию колеблющихся частиц воды.

Формулы (39) и (40) справедливы для какой угодно формы профиля приливной волны. В большинстве случаев профиль этот очерчен по простой гармонической кривой типа

$$\eta = a\cos\frac{2\pi}{\lambda}x, \tag{43}$$

где a — амплитуда волны.

Иногда, к сожалению, термин «амплитуда прилива» отождествляется с высотой прилива, т. е. с расстоянием по вертикали от вершины до подошвы приливной волны. Высота волны, очевидно, равна удвоенной амплитуде, выражающей максимальное удаление частицы от плоскости равновесия. Остается только пожалеть о таком смешении двух различных понятий, получившем весьма широкое распространение.

Задавшись простым законом (43) изменения η в пространстве (в данный фиксированный момент времени), можно подставить выражение (43) в (39). Тогда потенциальная энергия приливной волны выразится так:

$$E_p = \frac{1}{4} g\delta b\lambda a^2, \tag{44}$$

или на единицу площади моря

$$\frac{1}{4} g\delta a^2. \tag{45}$$

Согласно (42), той же величине должна равняться и кинетическая энергия приливной волны. А полная ее энергия на единицу площади, на основании (42) и (45), будет равна

$$\frac{1}{2} g\delta a^2. \tag{46}$$

§ 4. Движение приливной волны в канале переменного сечения

До сих пор предполагалось, что глубина канала и его ширина остаются постоянными на всем протяжении, а потому выводы предыдущих параграфов могут быть применены только к случаю движения волны в открытом море, где глубина и расстояние между берегами не меняются.

Но наблюдения над приливами, происходящими у берегов, показывают, что в действительности здесь волна, во-первых, входит на мелководье, а во-вторых, попадает во всевозможные заливы, проливы и бухты. Для того чтобы удобнее было проследить за поведением приливной волны в таких случаях, заменим снова море каналом, но только каналом переменного сечения, т. е. переменной глубины и ширины.

Сперва рассмотрим простую энергетическую задачу. Вспомнив уравнения (16), (38), (42) и (44), напишем выражение полной энергии приливной волны в несколько измененной форме, а именно

$$E = \frac{1}{2} g^{3/2}\delta T b H^{1/2} a^2 = A b H^{1/2} a^2, \tag{47}$$

где константа A объединяет все постоянные множители.

Процесс входа волны на мелководье может протекать двояко:

1. Если глубина канала H или ширина его b, или и та и другая вместе изменяются резко, внезапно, то величина E дробится на две части, одна из которых отражается обратно, а другая продолжает распространяться по мелководью. Разумеется, и ту и другую части энергии несут две волны — отраженная и проходящая.

2. Если сечение канала — его глубина H и ширина b — меняется плавно, без скачков, то вся энергия E несется вперед проходящей волной, а отражения, даже частичного, не происходит.

Рассмотрим сначала *первый* случай. Допустим, что в некоторой точке A канала (рис. 84) ширина его b_1 внезапно делается равной b_2, а глубина H_1 обращается в H_2. Изменение глубины немедленно отразится на скорости распространения волны, которая до этой точки равнялась c_1, а затем превратилась в c_2. Совершенно очевидно, что

$$c_2 = c_1 \left(\frac{H_2}{H_1}\right)^{1/2}.$$

Как уже было упомянуто, в точке A происходит частичное отражение волны, причем, следовательно, в области, лежащей до A, оказываются *две* волны, распространяющиеся в противоположные стороны,— падающая и отражен-

ная. Наложение этих двух волн можно, очевидно, представить простым уравнением

$$\eta_1 = F\left(t - \frac{x}{c_1}\right) + f\left(t + \frac{x}{c_1}\right), \tag{48}$$

где первый член выражает падающую волну, а второй — отраженную.

Зная закон колебания η_1, нетрудно найти скорости горизонтальных движений частиц

$$u_1 = \frac{g}{c_1} F\left(t - \frac{x}{c_1}\right) - \frac{g}{c_1} f\left(t + \frac{x}{c_1}\right). \tag{49}$$

На новом участке канала, за точкой A, появляется только одна волна — *проходящая*, причем энергия этой волны должна равняться энергии падающей за вычетом энергии отраженной волны.

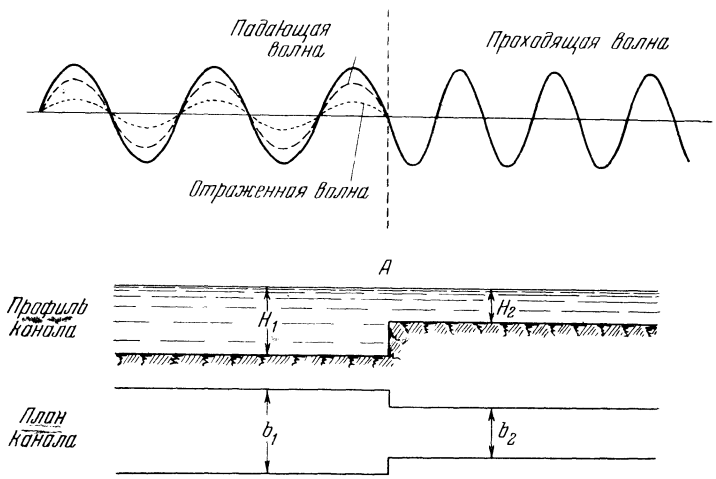


Рис. 84. Отражение волны при резком изменении сечения канала

Пусть уравнение *проходящей* волны будет

$$\eta_2 = \varphi\left(t - \frac{x}{c_2}\right), \tag{50}$$

а закон изменения горизонтальных составляющих u_2 скоростей водных частиц

$$u_2 = \frac{g}{c_2} \varphi\left(t - \frac{x}{c_2}\right). \tag{51}$$

Условие неразрывности требует, чтобы в точке A (при $x = 0$) выполнялось соотношение

$$b_1 H_1 u_1 = b_2 H_2 u_2.$$

Кроме того, в этой точке не может меняться скачком величина η, а потому в этой точке должно быть $\eta_1 = \eta_2$.

Подставляя $x = 0$ в уравнения (48) — (51), оба указанных требования можно выразить в такой форме:

$$\frac{b_1 H_1}{c_1} [F(t) - f(t)] = \frac{b_2 H_2}{c_2} \varphi(t), \tag{52}$$

$$F(t) + f(t) = \varphi(t),$$

откуда

$$\frac{f}{F} = \frac{b_1c_1 - b_2c_2}{b_1c_1 + b_2c_2} \tag{53}$$

и

$$\frac{\varphi}{F} = \frac{2b_1c_1}{b_1c_1 + b_2c_2}. \tag{54}$$

Нетрудно видеть, что формулы (53) и (54) позволяют определить отношения амплитуды как отраженной (53), так и проходящей (54) волны к амплитуде падающей волны, а также соответствующие отношения для любого мгновенного значения η. Из них вытекает, что чем больше изменяются размеры сечения канала, тем больше амплитуда отраженной волны и тем меньше амплитуда проходящей.

В двух предельных случаях: когда $b_2 = H_2 = 0$, волна полностью отразится ($f = F$, $\varphi = 0$) и, когда $b_2 = b_1$, $H_2 = H_1$, волна полностью пройдет дальше ($f = 0$, $\varphi = F$).

Что касается энергии отраженной E_1 и проходящей E_2 волн, то эти величины также нетрудно выразить через энергию падающей волны, воспользовавшись соотношениями (39), (42), (53) и (54). Именно

$$E_1 = E\left(\frac{b_1c_1 - b_2c_2}{b_1c_1 + b_2c_2}\right)^2, \tag{55}$$

$$E_2 = E\left(\frac{2b_1c_1}{b_1c_1 + b_2c_2}\right)^2 \frac{b_2\lambda_2}{b_1\lambda_1} = \frac{4b_1c_1b_2c_2}{(b_1c_1 + b_2c_2)^2} W. \tag{56}$$

Разумеется, если сложить обе полученные величины E_1 и E_2, то в сумме они дадут энергию падающей волны E.

Переходим теперь к случаю плавного изменения глубины или ширины канала или обоих измерений вместе.

На основании закона сохранения энергии, примененного к соотношению (47), следует, что на всем протяжении канала должно быть

$$bH^{1/2}a^2 = \text{const}. \tag{57}$$

Обозначим через b_0, H_0 и a_0 величины, относящиеся к той части канала, где глубина оставалась постоянной («открытое море»), а теми же буквами без индексов — величины, меняющиеся от одного сечения к другому. Тогда на основании (46) найдем

$$a = a_0\left(\frac{b_0}{b}\right)^{1/2}\left(\frac{H_0}{H}\right)^{1/4}, \tag{58}$$

т. е. при изменении сечения *амплитуда приливной волны* меняется обратно пропорционально корню квадратному из ширины и корню четвертой степени из глубины канала.

Это важное соотношение было найдено как Эри, так и Грином [4]. Оно получило самое широкое распространение и постоянно применяется при вычислении изменения амплитуд, вызванного непостоянством сечения. Но, к сожалению, оказывается, что применимость его в природных условиях весьма ограничена благодаря одному обстоятельству, остающемуся обычно в тени. Это обстоятельство осталось в тени и при том элементарном выводе формулы (58), который был только что изложен.

Дело в том, что трактовать о деформации волны по упрощенной схеме можно только тогда, когда эта деформация происходит на участке, вмещающем несколько целых волн. В противном случае, хотя бы профиль канала менялся и без скачков, не вызывая отражения волны, закон деформации волны будет совсем иной: применение простого энергетического соотношения (57) к части волны незаконно.

Попытаемся убедиться в этом, а также выясним, в каких пределах возможно еще пользоваться формулой (58). Для этого рассмотрим процесс деформации волны, используя метод Грина, несколько видоизмененный Г. Лэмбом [2].

Пусть приливная волна возникла в канале переменного сечения. Тогда благодаря вертикальному смещению частиц воды на расстояние η между двумя пограничными параллельными плоскостями появляется некоторый объем $b\,\eta\,\Delta x$, выступающий над поверхностью спокойной воды. Здесь, как при выводе условия (14), Δx — начальное расстояние между пограничными плоскостями, отсчитываемое вдоль перпендикулярной к ним оси абсцисс (вдоль канала).

Ввиду постоянства объема каждой данной массы воды, этот выступающий объем должен быть чем-то скомпенсирован. А компенсируется он теперь не только благодаря изменению расстояния между пограничными поверхностями, обусловленному горизонтальными смещениями частиц ξ, но также и благодаря изменению глубины H и ширины b канала при перемещении частиц вдоль канала.

Нетрудно показать, что в силу названной причины условие неразрывности запишется теперь не в форме (14), а в более общей форме

$$\eta b = -\frac{\partial}{\partial x}(\xi H b),$$

из которой как частный случай вытекает (14), если положить $H = \text{const}$, $b = \text{const}$.

Перепишем новое обобщенное условие неразрывности в форме

$$\eta = -\frac{1}{b}\frac{\partial(\xi H b)}{\partial x}. \tag{59}$$

Пользуясь (59), выразим ξ через η и подставим полученное выражение в дифференциальное уравнение (15), которое, очевидно, по-прежнему сохраняется в силе. Тогда окажется, что

$$\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2} = \frac{g}{b}\frac{\partial}{\partial x}\left(Hb\frac{\partial\eta}{\partial x}\right). \tag{60}$$

Приливная волна движется теперь в канале с переменной скоростью (см. формулу (16))

$$c = \sqrt{gH}.$$

Пусть за некоторый промежуток времени $d\tau$ она пройдет участок пути dx, причем

$$dx = \sqrt{gH}\,d\tau. \tag{61}$$

Пользуясь этим соотношением, заменим в (60) дифференцирование по x дифференцированием по τ. Тогда вместо (60) получится новое уравнение

$$\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2} = \eta'' + \left(\frac{b'}{b} + \frac{1}{2}\frac{H'}{H}\right)\eta', \tag{62}$$

в котором η'', η', b' и H' — производные по τ. Если бы b и H были постоянны интегралом уравнения (62) служила бы очень простая функция

$$\eta = F(\tau - t).$$

Разумеется, для получения общего интеграла ее можно былобы дополнить так, как это сделано в (17) и (18). Но так как и ширина канала, и его глубина непрерывно меняются, то вид интеграла должен быть несколько сложнее.

Посмотрим, нельзя ли удовлетворить уравнению (62), предположив, что его интегралом служит функция

$$\eta = \Theta F(\tau - t), \tag{63}$$

где Θ — пока неопределенная величина, зависящая только от τ.

Продифференцируем выражение (63) всеми способами, требуемыми уравнением (62), и подставим в (62) все полученные производные. Тогда окажется, что функции θ и F, так же как и их производные, обязаны удовлетворять условию

$$2\frac{\Theta'}{\Theta}\frac{F'}{F} + \frac{\Theta''}{\Theta} + \left(\frac{b'}{b} + \frac{1}{2}\frac{H'}{H}\right)\left(\frac{F'}{F} + \frac{\Theta'}{\Theta}\right) = 0. \tag{64}$$

Это условие приводит к (58) лишь тогда, когда возможно пренебречь величинами Θ'/Θ и Θ''/Θ по сравнению с величиной F'/F.

Если такое упрощение условия (64) оказывается законным, то тогда из него нетрудно вывести, что

$$2\frac{\Theta'}{\Theta} + \frac{b'}{b} + \frac{1}{2}\frac{H'}{H} = 0,$$

а отсюда

$$\Theta = Ab^{-1/2}H^{-1/4}, \tag{65}$$

где A — постоянная. Другими словами, на основании (63)

$$\eta = Ab^{-1/2}H^{-1/4}F(\tau - t), \tag{66}$$

что совершенно аналогично простому закону (58), полученному элементарным путем.

Можно, однако, показать, что часто в природных условиях пренебрегать величинами Θ'/Θ и Θ''/Θ' недопустимо.

Пользуясь соотношениями (63) и (65), нетрудно установить, что Θ'/Θ только тогда оказывается малым по сравнению с F'/F, когда величины $\frac{1}{b}\frac{\partial b}{\partial x}$ и $\frac{1}{H}\frac{\partial H}{\partial x}$ малы по сравнению с $\frac{1}{\eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}$. Но сама по себе величина $\partial\eta/\partial x$ всегда бывает того же порядка, что и отношение η/λ.

Следовательно, упрощенное уравнение (66) [а стало быть, и (58)] может соответствовать действительности только тогда, когда $\frac{1}{b}\frac{\partial b}{\partial x}$ весьма мало́ по сравнению с $1/\lambda$, а $\frac{1}{H}\frac{\partial H}{\partial x}$ весьма мало́ по сравнению с $1/\lambda$.

Легко расшифровать эти условия, допустив, что на протяжении участка длиной Δx ширина сечения меняется на Δb, а глубина — на ΔH. Тогда условия будут соблюдены, если $\Delta b/b$ весьма мало́, по сравнению с $\Delta x/\lambda$, а $\Delta H/H$ весьма мало́ по сравнению с $\Delta x/\lambda$. А это может иметь место только тогда, когда участок Δx весьма велик. Строго говоря, он должен, во всяком случае, значительно превосходить длину волны.

Но из табл. 6 видно, что длина приливной волны всегда чрезвычайно велика, а потому расстояние, на которое простирается мелководная зона перед материками, равняется обычно только небольшой части от длины волны. Но тогда амплитуда волны не может изменяться по простому закону (58), а определяется как-то иначе. Ввиду большой важности этого вопроса остановимся на нем подробно и рассмотрим, как в действительности происходит изменение амплитуды прилива в зависимости от местных природных условий.

Допустим, что профиль волны определяется простой функцией

$$\eta = a\cos\frac{2\pi}{T}t. \tag{67}$$

Но если это так, то в уравнении (60) вторая производная, стоящая в левой части, может быть выражена чрезвычайно просто

$$\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2} = -\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 a\cos\frac{2\pi}{T}t = -\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2\eta,$$

а потому вместо (60) можно написать

$$\frac{g}{b}\frac{\partial}{\partial x}\left(Hb\frac{\partial\eta}{\partial x}\right) + \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2\eta = 0. \tag{68}$$

Это уравнение может быть уже совсем легко приведено к виду, удобному для решения, применительно к каждому конкретному случаю.

Рассмотрим *три* таких конкретных случая.

а) *Глубина H постоянна. Ширина постепенно уменьшается до нуля к концу канала по закону* $b = b_0\frac{x}{d}$, причем x отсчитывается от конца канала, а d обозначает длину той части, где ширина непостоянна; на всем остальном протяжении канал предполагается однородного сечения.

Выполнив дифференцирование в (68), приняв во внимание, что по условию

$$\frac{\partial H}{\partial x} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial b}{\partial x} = \frac{b_0}{d},$$

и производя несложные преобразования, получим для данного случая

$$\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2} + \frac{1}{x}\frac{\partial\eta}{\partial x} + \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2\eta = 0. \tag{69}$$

Это довольно распространенное уравнение математической физики, интегралом которого служит так называемая бесселева функция нулевого порядка. Ее обозначают всегда символом $J_0(z)$, где z — некоторый аргумент.

В данном случае аргументом бесселевой функции оказывается величина $2\pi\frac{x}{\lambda}$. Значит

$$\eta = NJ_0\left(2\pi\frac{x}{\lambda}\right), \tag{70}$$

где N включает и константу интегрирования, и множитель, зависящий от времени. Константа интегрирования определяется на основании того соображения, что при $x = d$, т. е. там, где канал становится постоянным по ширине, амплитуда приливной волны равняется определенной, постоянной и заранее заданной величине η_0. Что касается множителя, зависящего от времени, то он дан уравнением (67).

На основании изложенного

$$N = \frac{\eta_0\cos 2\pi\frac{t}{T}}{J_0\left(2\pi\frac{d}{\lambda}\right)}$$

и окончательно

$$\eta = \eta_0\frac{J_0\left(2\pi\frac{x}{\lambda}\right)}{J_0\left(2\pi\frac{d}{\lambda}\right)}\cos\frac{2\pi}{T}t. \tag{71}$$

Для вычисления бесселевых функций составлены весьма удобные таблицы, пользование которыми чрезвычайно просто [5]. Для иллюстрации приводим здесь результат вычислений для того случая, когда длина сужающейся части канала d в 2π раз меньше длины волны. В данном случае амплитуда возрастает по закону, представленному сплошной кривой на рис. 85. Пунктирная кривая изображает изменение амплитуды по «приближенной» форму-

ле (58). Как видим, приближение здесь получается очень плохое, как и следовало ожидать на основании рассуждений на стр. 171.

б) *Ширина постоянна. Глубина постепенно уменьшается по закону* $H = H_0 \frac{x}{d}$, *где все обозначения прежние.* Сокращая постоянные множители b в числителе и знаменателе уравнения (68), подставляя выражение H через H_0, d и x и деля все уравнение (68) на gH_0, получаем для этого случая дифференциальное уравнение распространенного вида

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(x \frac{\partial \eta}{\partial x}\right) + d\left(\frac{2\pi}{\lambda_0}\right)^2 \eta = 0. \quad (72)$$

Его интеграл также выражается бесселевой функцией нулевого порядка, но только аргументом этой функции теперь служит величина $\frac{4\pi}{\lambda_0}\sqrt{dx}$.

Определив постоянную интегрирования и внеся множитель, зависящий от времени, найдем окончательный вид интеграла в форме

$$\eta = \eta_0 \frac{J_0\left(\frac{4\pi}{\lambda_0}\sqrt{dx}\right)}{J_0\left(\frac{4\tau}{\lambda_0} d\right)} \cos \frac{2\pi}{T} t. \quad (73)$$

Здесь λ_0 — длина волны до входа прилива в «переменную» часть. На рис. 86 изображен закон изменения амплитуды прилива, выражаемый уравнением (73) (сплошная кривая), причем, так же как и в предыдущем случае, предполагалось, что $\frac{2\pi d}{\lambda} = 1$, т. е. длина переменной части канала составляет меньше 1/6 от длины приливной волны. Пунктирная кривая вычислена на основании приближенной формулы (58); как видим, здесь она снова грешит против истины и по прежней же причине.

в) И ширина, и глубина канала постепенно убывают по мере приближения к концу согласно соотношениям $b = b_0 \frac{x}{d}$, $H = H_0 \frac{x}{d}$. Подставив выражения b и H в (68), получим

$$x \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial \eta}{\partial x} + d\left(\frac{2\pi}{\lambda_0}\right)^2 \eta = 0. \quad (74)$$

Это дифференциальное уравнение тоже приводит к бесселевой функции, но толь-

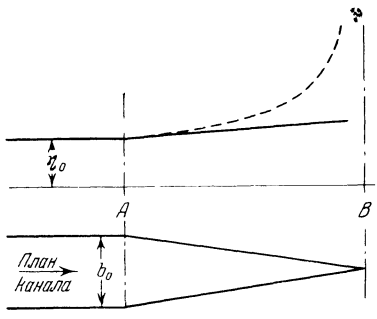


Рис. 85. Канал с уменьшающейся шириной

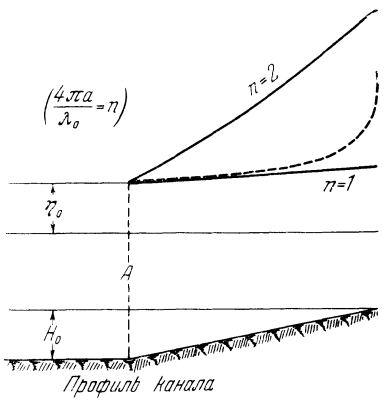


Рис. 86. Канал с уменьшающейся глубиной

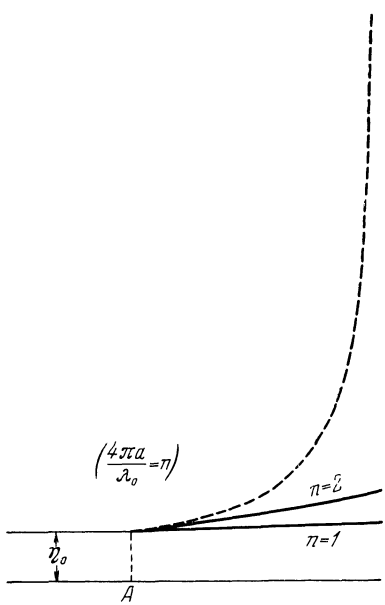


Рис. 87. Канал с уменьшающимися шириной и глубиной

ко не нулевого, как в предыдущих примерах, а первого порядка. Ее обозначают символом $J_1(z)$, где в данном случае аргумент $z = \frac{4\pi}{\lambda_0}\sqrt{dx}$.

После определения постоянной интегрирования и введения множителя, зависящего от времени, интеграл принимает окончательный вид

$$\eta = \eta_0 \frac{J_1\left(\frac{4\pi}{\lambda_0}\sqrt{dx}\right)}{J_1\left(\frac{4\pi}{\lambda_0}d\right)}. \qquad (75)$$

Здесь по-прежнему λ_0 — длина волны в «постоянной» части канала.

На рис. 87 сплошной кривой изображен закон нарастания амплитуды приливной волны, вошедшей в конечный участок канала, где и ширина, и глубина постепенно уменьшаются до нуля. По-прежнему длина этого участка выбрана с таким расчетом, чтобы $2\pi d/\lambda$ равнялось единице, т. е. участок простирается меньше чем на 1/6 длины волны.

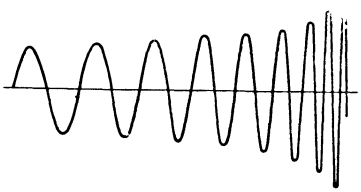


Рис. 88. Распространение короткой волны

Как и в двух предыдущих случаях, приближенная формула (58) привела бы к неправильным результатам, изображенным пунктирной кривой.

Из исследованных трех конкретных случаев очевидно, что при определении амплитуды приливной волны, входящей в заливы и проливы с изменяющимся поперечным сечением, необходимо тщательно проследить за соотношениями между длиной приливной волны и порядком продольных размеров, которые характеризуют данный участок моря. Если окажется, что размеры эти малы по сравнению с длиной волны, то изменение амплитуд придется вычислять по таблицам бесселевых функций. Если же, напротив, исследуемый участок велик по сравнению с длиной волны, то можно с очень большой точностью вычислять амплитуду по формуле Грина (58). Так, кривая, изображенная на рис. 88, построена по точной формуле случая б), но в то же время ее ординаты хорошо укладываются в уравнение (58). Кривая эта выражает нарастание ординат и одновременное уменьшение длины волны при входе прилива на длинный участок с непрерывно уменьшающейся глубиной (ширина постоянна).

В промежуточных случаях приходится пользоваться как тем, так и другим методом вычисления амплитуд в зависимости от соотношений между длиной участка, на котором ширина и глубина спадают до нуля, и, с другой стороны, *длиной* приливной волны.

§ 5. Искажение профиля приливной волны при ее движении на мелководье (по теории Дж. Эри)

Мы только что видели, как деформируется волна, входящая в канал переменного сечения, и как при этом меняется либо амплитуда волны, либо одновременно и амплитуда, и длина волны (если глубина канала переменна).

Деформация волны может произойти даже тогда, когда волна движется в канале постоянной глубины и постоянной ширины: если амплитуда a приливной волны соизмерима с глубиной канала H. Дело в том, что в данном случае (когда амплитуда *конечна*) теряет силу интеграл волнового дифференциального уравнения, полученный применительно к бесконечно малой амплитуде.

Для уточнения картины явления Дж.Эри[2] пользовался методом последовательных приближений. Проследим за ходом его анализа. Допустим, что в точке $x = 0$ канал примыкает к открытому морю, в котором прилив идет по простому гармоническому закону

$$\eta = a \sin \frac{2\pi}{T} t. \tag{76}$$

Так как длина волны по-прежнему чрезвычайно велика по сравнению с амплитудой прилива, то силами инерции, направленными по вертикали, можно снова пренебречь и полагать давление p чисто гидростатическим. Тогда, подставляя $g \frac{\partial \eta}{\partial x}$ вместо $\alpha \frac{\partial p}{\partial x}$ в первое из уравнений Эйлера (20) гл. I и считая, что горизонтальные смещения частиц для всех точек поперечного сечения канала одинаковы, напишем

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = -g \frac{\partial \eta}{\partial x}. \tag{77}$$

Налагая условие неразрывности, придется считаться с тем, что приращение η — конечное по сравнению с глубиной H. Условие это будет аналогично прежнему

$$\frac{\partial}{\partial x}[(H + \eta) u] = -\frac{\partial \eta}{\partial t}, \tag{78}$$

или, дифференцируя по x и объединяя в левой части производные от η,

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + u \frac{\partial \eta}{\partial x} = -(H + \eta) \frac{\partial u}{\partial x}. \tag{79}$$

В качестве *первого* приближения положим, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= -g \frac{\partial \eta}{\partial x}, \\ \frac{\partial \eta}{\partial t} &= -H \frac{\partial u}{\partial x}. \end{aligned} \tag{80}$$

Проинтегрировав эти приближенные уравнения и приняв во внимание граничное условие в устье канала (76), найдем

$$\begin{aligned} \eta &= a \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right), \\ u &= \frac{ga}{c} \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right). \end{aligned} \tag{81}$$

Чтобы получить *второе* приближение, подставим отсюда выражения η и u в (77) и (79). Тогда окажется, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= -g \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\pi g^2 a^2}{c^2 \lambda} \sin 4\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right), \\ \frac{\partial \eta}{\partial t} &= -H \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{2\pi g a^2}{c\lambda} \sin 4\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right). \end{aligned} \tag{82}$$

Интеграл этих уравнений, после сопоставления с (76) и исключения произвольной постоянной, приобретает форму

$$\eta = a\left[\sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) + \frac{3\pi}{2} \frac{a}{H} \frac{x}{\lambda} \sin 4\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)\right], \tag{83}$$

$$u = \frac{ga}{c}\left[\sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) + \frac{3\pi}{2} \frac{a}{H} \frac{x}{\lambda} \sin 4\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{8} \frac{a}{H} \cos 4\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)\right]. \tag{84}$$

Уравнение (83), полученное Эри, дает профиль волны, распространяющейся на мелководье,— во *втором приближении*. Как видно, в правой части равенства появился второй член, содержащий множитель $\frac{3\pi}{2}\frac{a}{H}\frac{x}{\lambda}$. Этот множитель был бы пренебрежимо мал, если бы глубина моря H была весьма велика по сравнению с амплитудой приливной волны a. В условиях мелководья H и a соизмеримы, а потому должен непрерывно возрастать второй член в квадратных скобках (83), по мере того как возрастает путь x, проходимый в мелководном районе. На рис. 89 схематически изображено постепенное искажение профиля приливной волны в соответствии с уравнением Эри (83); в нижнем ярусе рисунка для наглядности представлено постепенное нарастание второго члена в квадратных скобках (83). Это — нарастание второго обертона, обладающего периодом в 2 раза меньшим, чем период основной приливной волны.

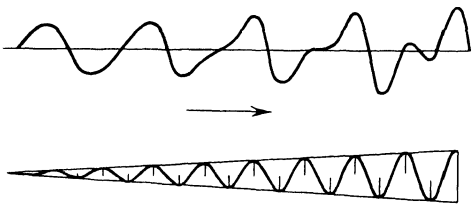


Рис. 89. Постепенное изменение профиля волны на мелководье (по Дж. Эри)

Аналогичные выкладки произвел Эри применительно к тому случаю, когда приливная волна входит в *реку* и распространяется *против течения реки*. Если скорость речного течения равна u_1, то по теории Эри профиль приливной волны здесь должен искажаться особо резко — он должен выражаться уравнением

$$\eta = a\left[\sin 2\pi\left(\frac{c-u_1}{c}\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}\right)+\frac{3\pi}{2}\frac{a}{H}\frac{c}{c-u_1}\frac{x}{\lambda}4\pi\left(\frac{c-u_1}{c}\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}\right)\right]. \qquad (85)$$

Как видим, здесь относительная величина амплитуды второго гармонического растет тем быстрей, чем больше отношение скорости c распространения

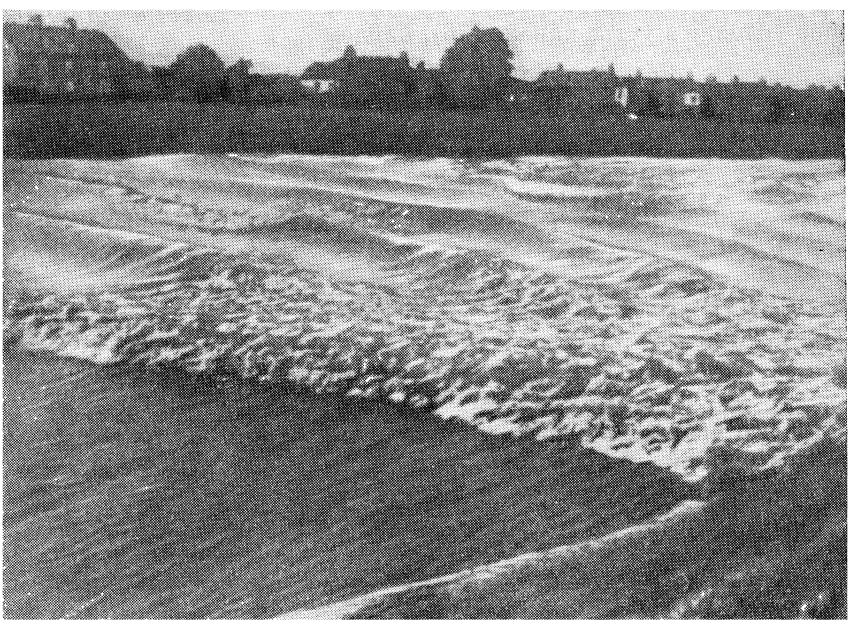


Рис. 90. Бор на реке Трент

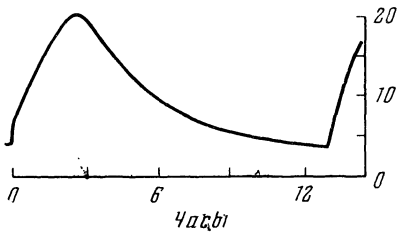


Рис. 91. Кривая изменения уровня воды в реке

приливной волны относительно воды к разности между этой скоростью и скоростью речного течения.

В природных условиях это явление иногда чрезвычайно обостряется, и фронт волны, распространяющейся против речного течения, становится *отвесным*. Прилив входит в реку внезапно, как бы стеной. В некоторых странах такой прилив называют *бором*, во Франции — *маскарэ*.

На рис. 90 приведена фотография бора на реке Трент (Англия), а на рис. 91 — кривая изменения уровня воды в реке во время бора.

§ 6. Отличие действительной картины распространения приливной волны на мелководье от той, какую описывает теория Эри

За много десятилетий, прошедших после опубликования обширных исследований Эри по каналовой теории приливов, почему-то не обращала на себя внимание одна черта, свойственная уравнению (83): нарушение закона сохранения энергии, заложенное в самой форме правой части этого уравнения. Действительно, по мере нарастания пути x, проходимого приливной волной на мелководье, растет амплитуда второго обертона и, следовательно, увеличивается энергия этого дополнительного колебания, налагающегося на основное, а между тем амплитуда основного колебания остается прежней и ни из какого внешнего источника дополнительная энергия не поступает.

Эту шероховатость в выводе попытался исправить В. В. Шулейкин уже в первом издании «Физики моря»: сохранив неизменным то отношение амплитуды нарастающего второго обертона к амплитуде основного колебания, которое следует из формулы Эри (83), Шулейкин наложил на *суммарное* колебание дополнительное условие — *постоянства полной энергии сложной* (искаженной на мелководье) *волны*. В результате была получена диаграмма, позволяющая определять, как растет амплитуда второго обертона и как (именно в связи с этим) уменьшается амплитуда основного колебания уровня моря. Однако эта поправка далеко не исчерпала расхождений между действительной картиной явления и той схемой, которая была создана во втором приближении, в каналовой теории приливов Эри.

Еще более серьезные расхождения возникли, когда Г. Джефрис распространил уравнение (83) на очень важный случай искажения *ветровых* волн и *мертвой зыби* при движении их на мелководье и постепенном частичном разрушении их вершин [6]. В гл. III будет сказано о выводах Джефриса и о том, какие противоречия встретились при попытке проверить их в природных и в лабораторных условиях. Выяснилось, что при нормальном распространении волн на мелководье *никогда* не происходит столь резкое развитие второго обертона; этот обертон нарастает значительно медленней, чем следует из уравнения (83), но зато одновременно растут очень многочисленные обертоны более высоких порядков. При этом, разумеется, увеличение амплитуд всех обертонов сопровождается уменьшением амплитуды основного

колебания — в полном соответствии с законом сохранения энергии. В результате, после прохождения некоторого критического пути $x_{кр}$ на мелководье, передний фронт волны становится *отвесным* [каким он никогда не мог бы стать по уравнению (83)] и волна частично разрушается — опрокидывается ее вершина. Именно так ведет себя волна бора, входящего в реку, хотя применительно к условиям движения волн против течения никому еще не удалось вывести корректированное уравнение взамен (85). Зато применительно к распространению волн любой длины — и приливных, и ветровых, и мертвой зыби — в настоящее время можно считать задачу решенной (см. гл. III, § 11). Далее будет показано, по каким законам нарастают обертоны различных порядков и как убывает при этом амплитуда основной волны, еще не искаженной под действием мелководья. Уравнения, которые будут приведены там, позволят найти для *приливных* волн важное соотношение, которое приведем здесь, забегая вперед. Это — соотношение, которое дает возможность очень просто определять, насколько *полная вода* опережает тот срок, когда должна была бы наступить полная вода при неискаженной форме профиля синусоидальной волны? То же самое соотношение дает возможность определить, насколько *малая вода* отстает от срока, который отвечал бы наступлению малой воды при неискаженном профиле приливной волны?

Если опережение и соответственно отставание обозначим символом $\pm \Delta t$, высоту приливной волны h, длину ее λ, глубину моря H и расстояние, пройденное волной на мелководье, x, то окажется, что

$$\frac{\pm \Delta t}{T} = \frac{1}{4} \frac{h}{H} \frac{x}{\lambda}; \quad h = 2a. \tag{86}$$

Здесь период волн T измеряется в часах, как и искомая величина Δt [7].

Между новой концепцией и концепцией Эри различие сказывается, в частности, по отношению к двум практическим заключениям:

а) второй обертон должен был бы нарастать по линейному закону при увеличении длины пути x волн на мелководье; по новой теории (см. гл. III) нарастание второго обертона лишь на начальном коротком этапе идет по этому закону, а далее кривая становится все более и более пологой;

б) по теории Эри опережение полной воды и отставание малой воды должны были бы нарастать (при нарастании x) по криволинейному закону, причем кривая шла бы все более и более полого; по новой теории величина Δt связана простым *линейным* соотношением (86) с длиной пути x на мелководье. Кстати, этот сдвиг не может превзойти критического значения $\Delta t = 1/6\ T$. Следовательно, для полусуточной приливной волны $\Delta t \leqslant 2$ *час* 04 *мин*, а для суточной $\Delta t \leqslant 4$ *час* 08 *мин*.

При взгляде на искаженные профили синусоидальной волны, изображенные на рис. 139 (см. гл. III) и на рис. 89, заимствованном из работ Эри, может возникнуть естественный вопрос: почему на некоторых морях, в некоторых точках побережья, возникают профили искаженной приливной волны, отличные от рис. 139 и в точности совпадающие с правыми участками рис. 89? Например, кривые типа рис. 92 встречаются на мареограммах в некоторых заливах Белого моря, в частности, рис. 92 почти копирует кривую изменения уровня моря в Кандалакшском заливе. Здесь явно выражен второй обертон и «недоразвиты» обертоны более высоких порядков. На том же Белом море есть районы, в которых второй обертон выделяется еще резче и приводит к еще большей задержке *падения* уровня на участке близ средней воды — к так называемой «манихе». Эти явления — *чисто местные*, не укладывающиеся в *общую* теорию искажения волн на мелководье — в новом ее виде: эти явления вызваны *гидродинамическим резонансом* на второй обертон приливных колебаний уровня.

Точное значение периода собственных колебаний вод в заливе, соответствующее резонансу со вторым гармоническим *полусуточной* приливной волны, очевидно, равно 6 *час.* 12 *мин.* Следовательно, явление резонанса на этот обертон должно возникнуть в заливе, в котором укладывается четверть волны, иными словами, в заливе, который волна полусуточного пролива пробегает примерно 1,5 *часа* от устья до вершины залива. Проследив за движением приливной волны, входящей в такой залив, и за движением *отраженной* волны, можно показать, что на некотором расстоянии ξ от вершины

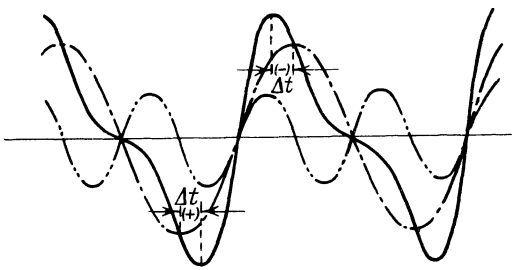


Рис. 92. Сильное развитие второго обертона

залива амплитуда второго гармонического колебания $(M_4)_\xi$ связана с амплитудой (M_4) колебаний того же гармонического в вершине залива простым соотношением

$$(M_4)_\xi = (M_4)\frac{\cos 2\pi\frac{\xi}{\lambda}}{\cos 2\pi\frac{L}{\lambda}}.$$

Здесь L — длина залива.

Проверка этой формулы по материалам регистрации приливов на Белом море дала хорошие результаты: действительно, колебания уровня моря в вершине залива должны описываться сплошной кривой на рис. 92, а амплитуда второго гармонического, в условиях гидродинамического резонанса, должна достигать размеров, отвечающих кривой, которая вычерчена черточками с двумя промежуточными точками на том же рисунке.

§ 7. Вычисление элементов приливных течений по «каналовой» теории

В § 5 было выведено соотношение (84), выражающее закон изменения скорости u приливного течения.

Вспомним теперь, каков физический смысл этой величины: величина u представляет собой горизонтальную слагающую полной скорости движения водной частицы на приливной волне. Так как горизонтальные смещения частицы от положения покоя выражаются величиной ξ, то

$$u = \frac{\partial \xi}{\partial t}.$$

Следовательно, по самому существу явления, движение частицы, определяемое скоростью u, оказывается не просто поступательным, а гармоническим колебательным (прямолинейным).

В то время как уравнение (83) выражает закон колебаний частиц воды в вертикальном направлении, уравнение (84) дает закон горизонтальных колебаний. Опираясь на это уравнение, можно вычислить некоторые чрезвы-

чайно важные элементы приливного течения для того или иного конкретного случая.

Заранее нужно ожидать, что вычисление элементов течений даст менее надежные результаты, чем вычисление фаз или амплитуд прилива, потому что высота уровня воды наблюдается у берегов, а течения исследуются на некотором расстоянии от них, где уже имеется подчас очень сложная интерференция падающих и отраженных волн. Сильное изменение картины течений вызывает и кориолисова сила, о которой речь будет ниже.

Однако можно все же попытаться приближенно определить скорости течений, моменты их смены, а также вычислить траектории водных частиц на приливной волне и наибольшие отклонения их в горизонтальном направлении от положения покоя [2].

Для вычисления максимальной скорости пренебрежем в уравнении (84) вторым и третьим членами. Тогда максимальная скорость окажется, очевидно, равной

$$U_{\text{макс}} = \sqrt{g}\,\frac{a}{\sqrt{H}}. \tag{87}$$

Она будет прямо пропорциональна амплитуде прилива и обратно пропорциональна корню квадратному из глубины в данной точке моря. Амплитуда тоже в свою очередь зависит от глубины, но для вычислений удобнее прямо подставлять глубину и амплитуду в выражение (87). Для получения из него скорости, выраженной в метрах в секунду, необходимо, разумеется, величины g, a, H тоже выражать в метрах. Тогда

$$U_{\text{макс}} = 3{,}14\,\frac{a}{\sqrt{H}}\ м/сек. \tag{87а}$$

Для получения скорости в узлах надо эту формулу изменить так:

$$U_{\text{макс}} = 6{,}1\,\frac{a}{\sqrt{H}}\ \text{узлов}. \tag{87б}$$

В предыдущих параграфах мы не останавливались на деталях расчета котидальных линий по каналовой теории Эри ввиду того, что в настоящее время устарели соотношения между расстоянием x, пройденным приливной волной на мелководье, и сдвигом моментов полной воды (вперед) и малой воды (назад), которые вытекают из уравнения Эри (83). Все эти детали легко уясняются в свете новых соотношений, с которыми мы встретимся в гл. III: там они понадобятся для решения важной задачи — построения метода расчета ветровых волн на морях произвольной глубины.

Здесь же пока следует остановиться лишь на некоторых характеристиках приливных *течений*, которые можно найти из уравнений Эри (83) и (84), применительно к случаям резкого возрастания амплитуды второго обертона, при резонансе в заливах. По-новому трактуя вопрос о происхождении такого резко выраженного второго обертона, можно будет чисто формально описать профиль волны типа рис. 92 уравнением (83), а режим приливного течения, связанный с таким профилем, столь же формально характеризовать уравнением (84).

Тогда, проинтегрировав по времени уравнение (84), можно будет найти закон *горизонтальных* колебаний частиц воды на искаженной приливной волне, а зная горизонтальные смещения ξ этих частиц и вертикальные смещения их η, описываемые уравнением (83), нетрудно будет построить *траекторию* водных частиц в вертикальной плоскости. На рис. 93 изображена одна из таких траекторий, вычисленная В. В. Шулейкиным. Этот рисунок объясняет причину несовпадения моментов смены течений — приливного на отливное и отливного на приливное — с наступлением средней воды, т. е. с прохождением частиц через средний уровень моря. Действительно, моменты смены

направления течений, обозначенные на рис. 93 буквами R, *опережают* моменты O прохождения частиц через средний уровень моря. Эти опережения, оба, составляют по 1 *час* 02 *мин*. На рис. 93, кроме того, видно, что время нарастания уровня на 4 *час* 08 *мин* короче, чем время падения уровня: кружочки на траектории, к которым идут пунктирные радиус-векторы, представляют положения поверхностной водной частицы на траектории через 1 *час* времени. Необходимо отметить, что на рис. 93 масштаб вертикальных перемещений в 3600 раз более крупный, чем масштаб горизонтальных перемещений частиц.

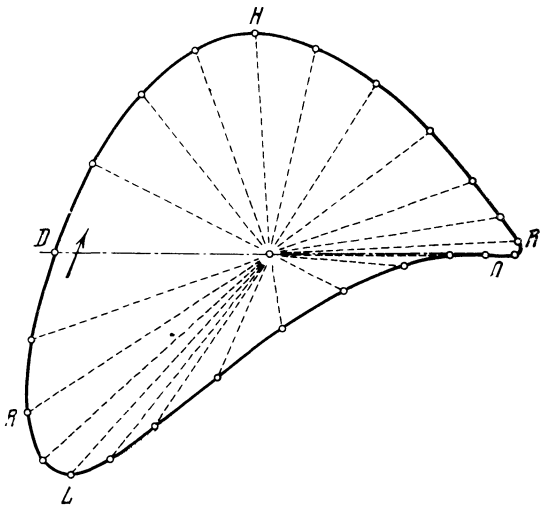


Рис. 93. Орбита частиц при растянутом мелководье

Любопытно вычислить абсолютные размеры орбит и, в частности, найти пределы, между которыми движутся в горизонтальном направлении частицы воды, описывающие свои причудливые траектории. Для этого нужно лишь из интеграла уравнения (84) вычислить максимальные горизонтальные смещения частиц от их положения покоя. В первом приближении можно считать, что они происходят в те моменты, когда горизонтальные компоненты их скоростей, т. е. скорости течений, обращаются в нуль.

Пренебрегая поправочными членами, несущественными в данном случае, найдем, что максимальное отклонение δ частицы от ее положения покоя выражается формулой

$$\delta = \frac{T\sqrt{g}}{2\pi}\frac{a}{\sqrt{H}},$$

где все величины выражены в одних и тех же единицах (сантиметрах и секундах). Чтобы получить δ в морских милях, выражая a и H в метрах, надо ввести переходный множитель. Вычислив его и подставив вместо T и g их числовые значения, получим окончательно

$$\delta = 12\frac{a}{\sqrt{H}}.$$

Если для данного пункта известна максимальная скорость приливного течения в узлах, то предельные отклонения частицы (в морских милях) проще вычислить по формуле, которая просто выводится из предыдущих:

$$\delta = \pm 2U_{\text{макс}}.$$

Таким образом, поступательное движение водных масс во время прилива только кажущееся: всякая отдельная частица проходит в общем потоке лишь очень короткий, строго ограниченный путь, не превышающий 10 миль.

Каждая такая частица вечно странствует на коротком участке между двумя точками, несмотря на то, что наблюдателю видны мощные потоки, как бы вливающиеся в широкий бассейн моря.

§ 8. Более строгий анализ двумерного распространения приливной волны. Возникновение сейш

Тот анализ приливных явлений в замкнутом море (сообщающемся с океаном), который был приведен в предыдущих параграфах, дал возможность отметить ряд интересных и важных моментов в динамике прилива.

Но, как было уже указано выше, на подобный элементарный анализ следует смотреть лишь как на некоторое приближение к истинной картине явлений. Более совершенного приближения наши современные аналитические методы не могут дать для природного бассейна, обладающего весьма сложной конфигурацией *дна и берегов*. Требования *точности* привели бы тут к необходимости *эмпирического* изучения, а не исследования физической *сути* явлений.

Однако некоторые стороны вопроса оказывается возможным осветить, прибегнув к *схематизации* самого изучаемого объекта, к упрощению граничных условий до такой степени, когда становятся применимыми точные методы динамического анализа. В данном случае придется рассмотреть такую упрощенную схему, на которой окажется возможным проследить за распространением волны *на плоскости*, а не в одном только направлении, как в случае узкого длинного канала.

Итак, допустим, что граничные условия задачи весьма простые: допустим, что море обладает формой либо прямоугольника, либо круга и что глубина его всюду постоянна. Наперед можно сказать, что даже в этих двух простых случаях мы встретимся с одним совершенно неизбежным осложнением задачи, которое не проявлялось в канале неограниченной длины. Это — явление интерференции между волной, набегающей на берег, и волной *отраженной*. В скрытом виде такая отраженная волна была уже учтена в § 4 при выводе соотношений (71), (73) и (75), рисующих закон колебания уровня в канале, сечение которого постепенно уменьшается до нуля по мере приближения к *концу* канала: она-то и вызвала непрерывное изменение *амплитуды* прилива при изменении координаты x (рис. 85—87).

Вообще говоря, при всякой интерференции волн, падающей и отраженной, образуются, как правило, *стоячие* волны. Так, при сложении волн

$$\eta_1 = a\cos 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) \text{ и } \eta_2 = a\cos 2\pi\left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda}\right), \tag{88}$$

бегущих, очевидно, в противоположные стороны, возникает система *стоячих* волн, определяемая уравнением

$$\eta = \eta_1 + \eta_2 = 2a\cos\frac{2\pi x}{\lambda}\cos\frac{2\pi t}{T}. \tag{89}$$

Амплитуда здесь оказывается периодической функцией от координаты x, так что при

$$x = \frac{\lambda}{4}, \ \frac{3}{4}\lambda, \ \frac{5}{4}\lambda, \ \ldots, \ \frac{2n+1}{4}\lambda$$

амплитуда обращается в *нуль*: здесь лежат *узлы*. Напротив, при

$$x = 0, \quad \frac{2}{4}\lambda, \quad \frac{4}{4}\lambda, \quad \frac{6}{4}\lambda, \quad \ldots, \quad \frac{2n}{4}\lambda$$

амплитуда оказывается *максимальной*: здесь находятся *пучности*.

Возникновения таких *стоячих* волн мы должны ожидать и в случае, к исследованию которого сейчас приступаем. Только, разумеется, расположение узлов и пучностей (точнее, узловых линий, хребтов и борозд) там не может быть таким простым.

Исходные условия исследования аналогичны тем, с которых у нас всегда начинался анализ волнового движения. Так, условие *неразрывности* здесь легко найти, рассмотрев объем воды, заключенной внутри вертикального столба с основанием, равным $\Delta x \Delta y$. При деформации этого объема вследствие возникновения волны, сама величина объема должна остаться постоянной. Стало быть, пренебрегая членами высших порядков, можно полагать, что

$$\frac{\partial}{\partial x}(uH\Delta y)\Delta x + \frac{\partial}{\partial y}(vH\Delta x)\Delta y = -\frac{\partial}{\partial t}[(H+\zeta)\Delta x \Delta y],$$

откуда

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -H\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right). \tag{90}$$

При исследовании *свободных* колебаний воды отбросим члены, зависящие от внешних возмущающих сил. Тогда уравнения Эйлера [см. гл. I, уравнения (20)] запишутся в виде

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\alpha \frac{\partial p}{\partial x},$$
$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\alpha \frac{\partial p}{\partial y},$$

где давление p без большой погрешности снова считаем гидростатическим Оно равно, очевидно,

$$p = g\delta(z_0 + \zeta - z),$$

где z_0 — координата *спокойной* поверхности воды.

Пользуясь этими соотношениями, найдем

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -g\frac{\partial \zeta}{\partial x} \text{ и } \frac{\partial v}{\partial t} = -g\frac{\partial \zeta}{\partial y}, \tag{91}$$

и, исключая из (90) переменные u и v, посредством подстановки из (91)

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = gH\left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2}\right). \tag{92}$$

Это уравнение определяет собой *волну*, распространяющуюся *на плоскости* xy, а не вдоль какой-то определенной прямой, как это было в случае длинного узкого канала. Скорость распространения такой волны оказывается, как и во всех предыдущих случаях, равной $c = \sqrt{gH}$.

Следовательно, в § 5 мы имели право применить «каналовую» теорию к исследованию *скорости* распространения приливной волны в *море*.

Уравнение (92) применимо к волне какого угодно профиля. Но обычно профиль этот выражается простой гармонической функцией типа (67). Следовательно, как и при выводе уравнения (68), можно вместо второй производной $\partial^2\zeta/\partial t^2$ подставить в (92) ее выражение, полученное посредством двукратного дифференцирования (67) по времени. Тогда вместо (92) получим

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} + \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 \zeta = 0. \tag{93}$$

Простое соотношение (67) позволяет также легко выразить *граничные* условия *для берегов*. На основании (67) и уравнений (91) оказывается, что горизонтальные компоненты скоростей u и v связаны с производными от вертикальных смещений

$$\frac{\partial \zeta}{\partial x} \text{ и } \frac{\partial \zeta}{\partial y},$$

именно

$$u = \frac{gT}{2\pi}\frac{\partial \zeta}{\partial x}, \quad v = \frac{gT}{2\pi}\frac{\partial \zeta}{\partial y}. \tag{94}$$

Но у *берегов* горизонтальные составляющие соответственно обращаются в нуль

$$u = 0 \text{ при } x = 0,$$
$$v = 0 \text{ при } y = 0.$$

Очевидно, что в этих случаях должна соответственно обращаться в нуль одна из производных от ζ

$$\frac{\partial \zeta}{\partial x} = 0 \text{ при } x = 0, \tag{95}$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial y} = 0 \text{ при } y = 0. \tag{96}$$

Вообще говоря, если мы приближаемся к берегу по направлению *нормали* n, проведенной к береговой черте, то всегда должно быть

$$\frac{\partial \zeta}{\partial n} = 0. \tag{97}$$

Если море обладает формой *прямоугольника* с длиной L и шириной b, то интеграл уравнения (93) выражается двойным рядом Фурье

$$\zeta = \sum\sum A_{m,n} \cos\frac{m\pi x}{L} \cos\frac{n\pi y}{b}, \tag{98}$$

т. е. море может дробиться на произвольное число участков, колеблющихся одновременно: под буквами m и n может подразумеваться *любое целое число* или *нуль*.

Дифференцируя (98) дважды как по x, так и по y и подставляя в (93) производные и самую функцию, найдем связь между T и числами m и n

$$\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 = \pi^2\left(\frac{m^2}{L^2} + \frac{n^2}{b^2}\right),$$

откуда

$$\frac{1}{T^2} = \frac{1}{4} gH\left(\frac{m^2}{L^2} + \frac{n^2}{b^2}\right). \tag{99}$$

Наибольший возможный период — период *основного* колебания — найдем из (109), если положить $m = 1$ и $n = 0$. Этот период равен, очевидно,

$$T = \frac{2L}{\sqrt{gH}}. \tag{100}$$

С таким периодом в море будут происходить основные, *одноузловые* сейши: узел получится, как нетрудно видеть, посредине, в точке $x = \frac{L}{2}$, когда

$$\cos\frac{\pi x}{L} = 0.$$

У берегов же, находящихся один напротив другого (отстоящих на расстоянии L друг от друга), вертикальные колебания частиц воды оказываются

наибольшими, причем уровень у одного берега понижается в то время, когда уровень у другого берега поднимается.

Узловая линия проходит параллельно наименьшей стороне. Примером такой *одноузловой сейши* могут служить колебания уровня, происходящие на Черном море. На рис. 94 приведена запись двух мареографов, установленных на этом море на противоположных берегах.

Очень интересны колебания, возникающие в море, очерченном *по кругу*. Рассмотрим этот случай, по-прежнему полагая, что глубина моря H постоянна. Для удобства перейдем от декартовой к полярной системе координат,



Рис. 94. Сейши у противоположных берегов моря

расположив полюс в центре круга. Если море совершенно симметрично относительно вертикальной оси, проходящей через полюс, то полярную ось можно как угодно ориентировать в горизонтальной плоскости. В случае каких-либо отклонений от симметрии легко сообразить, каким образом следует ориентировать полярную ось в данных конкретных условиях. В следующем параграфе будет показано, как, вообще говоря, сказываются конкретные, *природные* условия на отклонениях от упрощенной геометрической модели, которую мы сейчас исследуем.

Если r обозначает радиус-вектор какой-либо точки, а ϑ — угол, составленный им с полярной осью, то, как всегда,

$$x = r\cos\vartheta, \quad y = r\sin\vartheta.$$

Подставив эти выражения в (93), получим

$$\frac{\partial^2\zeta}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\zeta}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\zeta}{\partial\vartheta^2} + k^2\zeta = 0, \tag{101}$$

где для краткости обозначено $k = \frac{2\pi}{\lambda}$.

Согласно теореме Фурье, интеграл этого уравнения распадается на ряд гармонических функций типа

$$\begin{aligned} &f(r)\cos n\vartheta, \\ &f(r)\sin n\vartheta, \end{aligned} \tag{102}$$

где n — любое целое число.

Каждый из членов ряда обязан удовлетворять уравнению (101), а потому если мы выполним дифференцирования, указанные в (101), то для каждого члена оправдается соотношение

$$f''(r) + \frac{1}{2}f'(r) + \left(k^2 - \frac{n^2}{r^2}\right)f(r) = 0. \tag{103}$$

Но полученное уравнение — одно из типичных уравнений математической физики. Оно приводит к *бесселевым функциям* n-го порядка, которые обозначаются символом $J_n(z)$. Аргумент z в данном случае равняется $\frac{2\pi}{\lambda}x$. С функ-

циями нулевого и первого порядков мы уже встречались выше. Здесь же, благодаря возможности для n принимать значение любого целого числа, колебание ζ сложится из n простых гармонических колебаний типа

$$\zeta = A_n J_n\left(\frac{2\pi}{\lambda} r\right) \cos n\vartheta \cos \frac{2\pi}{T} t, \qquad (104)$$

где вместо функции $\cos n\vartheta$ может стоять и $\sin n\vartheta$.

В случае $n = 0$ уравнение (104) выражает колебания, *симметричные* относительно полюса координатной системы. Вся поверхность моря покрывается кольцеобразными гребнями и бороздами; положение их нетрудно определить на основании *граничного* условия (97), которое запишем в форме

$$\frac{\partial \zeta}{\partial r} = 0 \text{ при } r = a.$$

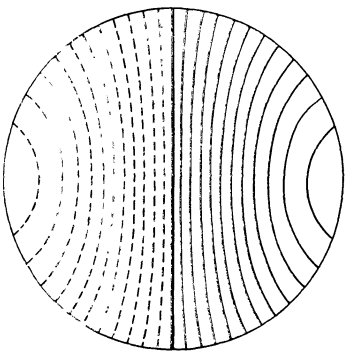


Рис. 95. Сейши с одной узловой линией

Основное колебание симметричного типа характеризуется узловой линией в форме окружности, радиус которой составляет 0,628 радиуса моря. В центре моря возникает *пучность*.

Очень интересны колебания, соответствующие значению $n = 1$. Это — колебания, *несимметричные* относительно центра моря. Их уравнение имеет вид

$$\zeta = AJ_1\left(\frac{2\pi}{\lambda} r\right) \cos\vartheta \cos \frac{2\pi}{T} t. \qquad (105)$$

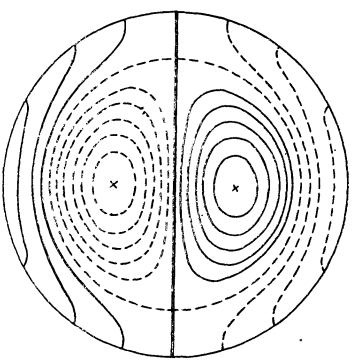


Рис. 96. Сейши более сложные

Этому уравнению могут удовлетворить *два* вида несимметричных колебаний.

1. Возникает узловая линия, пересекающая море по диаметру, причем если море слегка уклоняется от круглой формы в сторону формы эллиптической, то узловая линия проходит либо по малой, либо по большой оси, в соответствии с чем определяется и сам период колебаний. На рис. 95 изображены такие колебания, причем кривые, нанесенные сплошными линиями, соответствуют той части волны, которая в данный момент возвышается над горизонтальной плоскостью (над положением покоя). Пунктирные кривые изображают ту часть волны, которая в данный момент опустилась под эту горизонтальную плоскость. Горизонтальные колебания частицы совершают *перпендикулярно* к элементу соответствующей кривой.

По этой причине все кривые подходят к берегам под прямым углом (иначе не исчезали бы нормальные составляющие скоростей, как об этом упоминалось выше).

2. Появляется узловая линия в форме окружности, радиус которой составляет 0,719 радиуса моря, и колебания происходят по схеме, изображенной на рис. 96. Здесь, как и на рис. 95, сплошными кривыми нанесены контуры, в данный момент лежащие *поверх* исходной горизонтальной плоскости, а пунктирными кривыми — контуры, лежащие в данный момент *под* этой исходной плоскостью. Крестиками отмечены точки, в которых образуются пучности. Они лежат по обе стороны от центра моря и удалены от него на расстояние 0,346 радиуса моря.

Само собой разумеется, что в следующую половину периода колебаний пунктирные и сплошные кривые придется поменять местами: там, где вода опускалась ниже исходной плоскости, она будет подниматься, и наоборот.

§ 9. Сейши в морях со сложным рельефом дна

Только что произведенный анализ показывает, что даже при простом очертании берегов замкнутого моря и при постоянной его глубине закон свободных колебаний в нем выражается сложной функцией. Совершенно очевидно, что в реальных природных условиях явление еще больше осложняется благодаря особенностям рельефа дна и очертаний берегов.

Однако существуют способы исследования собственных колебаний вод в таком сложно очерченном море, позволяющие находить достаточное приближение к истинной картине даже в случае весьма сложной конфигурации морского ложа.

Рассмотрим здесь исследования в этом направлении, принадлежащие Д. Кристэлу [8]. Его метод заключается в следующем.

Прежде всего трехмерная задача приводится к двумерной: определяется профиль дна некоторого *эквивалентного* моря, обладающего более простой формой, но теми же самыми гидродинамическими характеристиками. Ширина такого эквивалентного моря выбирается постоянной, очертания его принимаются прямоугольными, а глубина изменяется только в продольном направлении, в поперечном же глубина для каждого сечения сохраняется неизменной.

Для нахождения *профиля дна* этого эквивалентного моря оказывается достаточным проделать весьма простую операцию: в направлении наибольшей протяженности в море выбирают некоторую стрежневую линию и разбивают ее на достаточно большое число участков. Во всех нанесенных точках строят поперечные сечения моря и вычисляют их площади S_k, которые затем умножают каждую на соответствующую ширину сечения b_k (считая по поверхности моря).

Кроме того, определяют величину площади F_k, ограниченной с одной стороны отрезком b_k, а с другой стороны берегами, лежащими между ним и началом отсчета. Величину такой площади принимают за аргумент и откладывают на некоторой диаграмме по оси абсцисс. По оси же ординат на такой диаграмме откладывают величины $b_k S_k$, вычисленные для соответствующих точек «стрежневой» линии.

Полученная кривая представляет собой *профиль дна эквивалентного* моря; в плане это море, как было уже сказано, имеет прямоугольную форму. Но далеко не для всякого профиля дна задача о свободных колебаниях вод еще может быть разрешена. Ее удалось разрешить только для нескольких типичных форм, очертание которых укладывается в простые аналитические соотношения. Во всех остальных случаях приходится определять, к какой из этих типовых форм ближе всего подходит профиль того или иного эквивалентного моря.

Во всех случаях решение сводится к интегрированию дифференциального уравнения типа

$$(1 \mp w^2)\frac{d^2P}{dw^2} + cP = 0,$$

приводящей к очень сложным периодическим функциям, которым дано название «сейшевых» функций. Не останавливаясь на их изучении, приведем только окончательные выводы, которые относятся к профилям дна, изображенным на рис. 97.

Особенности каждого отдельного случая проявляются наиболее ясно при сравнении периодов сейш, возникающих в данном случае, с периодом сейш

образующихся в море постоянной глубины (и такой же прямоугольной формы). В этом наиболее простом случае, как помним, на основании (100) возникает основное колебание с периодом

$$T_1 = \frac{2L}{\sqrt{gH}}.$$

Помимо основного колебания с периодом T_1, в море постоянной глубины и прямоугольной формы согласно (98) могут возникать еще высшие гармонические колебания с периодами T_2, T_3, T_4, ..., равными соответственно $T_1/2$, $T_1/3$, $T_1/4$, ...

При других профилях, изображенных на рис. 97, таких простых соотношений между периодами T_1, T_2, T_3, ... не будет, так как узловые линии расположатся совсем иначе. Индексы 1, 2, 3. ... теперь будут обозначать только число возникающих *узлов*, а не кратность. Сам период одноузловой сейши также зависит от формы профиля дна, как это показывает первый столбец прилагаемой табл. 7; период T_0, соответствующий постоянной глубине, принят за единицу. В остальных столбцах приведены отношения периодов многоузловых сейш к периоду одноузловой — для всех типов профиля, изображенных на рис. 97.

Таблица 7

Обозначения на рис. 97	Форма профиля дна	Отношение периодов сейш				
		$T_1 : T_1$	$T_2 : T_1$	$T_3 : T_1$	$T_4 : T_1$	$T_5 : T_1$
а	Горизонтальная прямая . . .	1,000	0,500	0,333	0,250	0,200
б	Вогнутая парабола	1,110	0,577	0,408	0,316	0,258
в	Выпуклая парабола	0,950	0,474	0,311	0,236	—
г	Вогнутая полупарабола . . .	1,050	0,548	0,378	0,289	0,234
д	Две наклонные прямые . . .	1,305	0,628	0,434	0,343	—

На более сложных профилях не останавливаемся.

Недостатком метода Кристэла является его сложность. К тому же он позволяет определять только периоды многоузловых сейшей, но не дает указаний о расположении самих узлов и пучностей. В этом отношении от него выгодно отличается другой метод, предложенный А. Дефантом [9] и основанный на последовательных приближениях.

Чтобы познакомиться с ним, вспомним основное уравнение движения (13) и условие неразрывности (59), в которое вместо Hb подставим величину площади S сечения, перпендикулярного к направлению распространения волны. Из этого условия неразрывности

$$\eta = -\frac{1}{b}\frac{\partial}{\partial x}[S\xi] \tag{106}$$

и уравнения (14) можно исключить одну из переменных и после интегрирования и известных преобразований получить периодическую зависимость между отклонениями водной частицы (как в горизонтальном, так и в вертикальном направлениях) и временем t

$$\xi = \xi_0 \cos\frac{2\pi t}{T}, \quad \eta = \eta_0 \cos\frac{2\pi t}{T}. \tag{107}$$

Здесь величины ξ_0 и η_0 играют роль переменных амплитуд, зависящих только от координаты x исследуемой точки. Они должны, очевидно, удовлетворять условиям (13) и (106), т. е.

$$\frac{4\pi^2}{T^2}\xi_0 = g\frac{\partial \eta_0}{\partial x}, \tag{108}$$

$$\eta_0 = -\frac{1}{b}\frac{\partial}{\partial x}[S\xi_0]. \tag{109}$$

Можно приближенно положить, что на основании (108) удовлетворяется аналогичное соотношение между *конечными* приращениями величин $\Delta\xi$ и $\Delta\eta$

$$\Delta\eta_0 = \frac{4\pi^2}{gT^2}\,\xi_0\Delta x. \tag{110}$$

С другой стороны, интегрируя уравнение (109) от начала отсчета до некоторой точки с координатой x, нетрудно получить

$$\xi_0 = -\frac{1}{S}\int_0^x \eta_1 b dx. \tag{111}$$

Полный размах частицы в вертикальном и горизонтальном направлениях выразится, очевидно, удвоенными соответственными величинами $2\eta_0$ и $2\xi_0$. Чрезвычайно важно отметить, что у обоих концов «стрежневой линии», выбранной в море, 2ξ должно обращаться в нуль. Разобьем эту стрежневую линию на большое число участков и зададимся произвольной амплитудой волны в начальной точке ($x = 0$). Допустим хотя бы, что она равна 100 *см* и что она остается постоянной на коротком промежутке между начальной точкой ($x = 0$) и *первым* сечением моря, перпендикулярным к «стрежневой линии». Тогда нетрудно вычислить *объем воды*, который проходит сквозь первое сечение, вызывая подъем уровня моря на 100 *см*. Именно этот объем q должен равняться

$$q = \int_0^{x_1} 2\eta_0 b dx. \tag{112}$$

Но, зная эту величину, можно будет по (111) определить горизонтальное смещение ξ_0 частиц сквозь *первое* сечение, разделив q на S и взяв обратный знак.

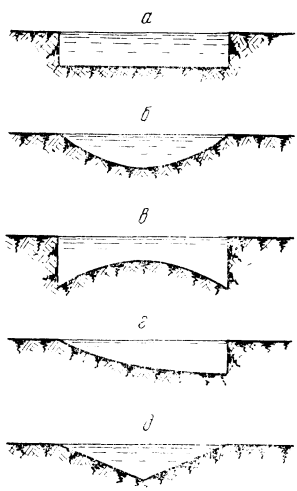


Рис. 97. Схемы различных профилей дна

После того как определилась величина ξ_0, в уравнении (110) осталось, очевидно, только одно неизвестное $\Delta\eta_0$, ибо период T_1 в первом приближении может быть найден по формуле (100).

Вычислим $\Delta\eta_0$ по формуле (110). Тогда окажется известным подъем воды над первым сечением. Он будет, очевидно, равен $100 + \Delta\eta_0$. Зная эту величину, можно перейти к следующему, второму, сечению моря и вычислить объем воды, проходящей сквозь него при подъеме уровня на $100 + \Delta\eta_0$. Продвигаясь от второго к третьему, от третьего к четвертому сечению и дальше по «стрежневой линии», мы дойдем в результате до противоположного конца моря, где, согласно условию, должно быть $\xi_0 = 0$ и $q = 0$. Но так как период T_1, найденный по формуле (100), заведомо не отвечает действительности, то вычисления дадут для последнего сечения величину q, *отличную от нуля*.

Допустим, что эта величина положительная. Зададимся теперь новым значением T_1, несколько бо́льшим, чем вычисленное по (100), и проделаем с ним те же действия. Если в результате величина q в противоположном конце моря снова будет отлична от нуля и притом отрицательна, то, очевидно, истинное значение периода колебаний лежит где-то между первым и вторым выбранными значениями. Это истинное значение легко может быть найдено по обычным правилам графической интерполяции. Если окажется, что смещение в противоположном конце моря обладает по-прежнему знаком плюс, то и тогда нетрудно найти решение, задавшись еще новым значением периода.

Таким несложным методом будет подобрана, наконец, величина T_1, при которой смещение через конечное сечение моря окажется равным нулю.

Совершенно очевидно, что в данном случае можно будет воспользоваться вычисленными $\Delta\eta_0$ для нахождения истинного профиля колеблющейся поверхности моря для фазы максимального отклонения: необходимо будет только по оси абсцисс отложить расстояния x от начала отсчета, а по оси ординат — сумму величин $\Delta\eta_0$, соответствующую всем отрезкам «стрежневой линии» вплоть до данной ее точки.

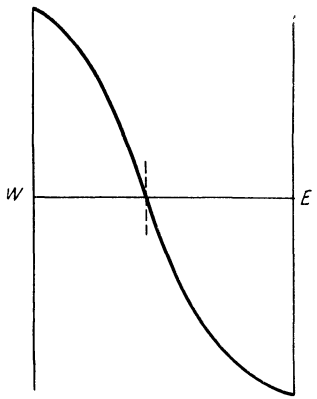


Рис. 98. Схема профиля поверхности моря

В табл. 8 приведены численные значения для типичного внутреннего моря, а на рис. 98 — профиль одноузловой сейши, построенный по этим данным. «Стрежневая линия» проведена примерно с запада на восток и мало отличается от прямой. Длина этой линии около 1200 *км*.

Период колебания для такой сейши оказался равным 5,113 *часа*. Таблица и рисунок соответствуют значению периода 5,118, которое послужило для окончательной интерполяции между 5,118, дающим значение $q = 0{,}921$ *км*^{3}, и 5,10 дающим $q = 1{,}29$ *км*^{3}.

Формула (100) приводила к значению $T_1 = 5{,}938$, при котором оказывалось $q = 58{,}84$ *км*^{3}. Следовательно, приходилось произвести несколько серий вычислений для получения последнего, вполне удовлетворительного приближения. Совершенно очевидно, что различие между числами 5,118 и 5,113 в сущности никакого значения не имеет и что можно было бы ограничиться и более грубым приближением, учитывая сложность местных условий.

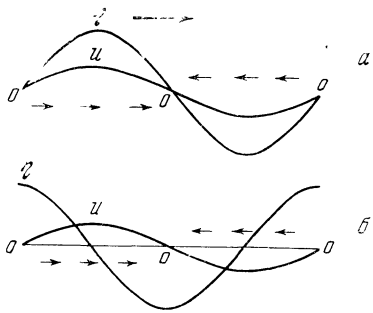


Рис. 99. Волны

а — распространяющаяся; *б* — стоячая

В заключение обзора свойств стоячих волн необходимо упомянуть о распределении *скоростей течений* при возникновении такого рода волн. При интерференции падающей и отраженной волн, выражаемых уравнениями (88), как помним, образуется стоячая волна, определяемая уравнением (89). Но совершенно таким же образом можно было бы показать, что при интерференции этих волн горизонтальные смещения водных частиц выражаются уравнением

$$\xi = -2a \sin \frac{2\pi x}{\lambda} \cos \frac{2\pi t}{T},$$

из которого следует, что

$$u = \frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{4\pi a}{T} \sin \frac{2\pi x}{\lambda} \sin \frac{2\pi t}{T}. \qquad (113)$$

Как видим, колебание *скоростей течения отличается* по *фазе* от колебания уровня (89) на *четверть периода*, т. е. моменту полной и малой воды соответствует скорость течения, равная нулю (смена течений), а моменту нулевого уровня соответствует максимальная скорость течения.

Между тем, как следует из уравнений (81), в случае *распространяющейся* волны фазы колебаний уровня и колебаний скоростей течений всегда *совпадают*.

Таблица 8

$T = 5{,}118$ *часа*

Сечение	Δx, км	$b(x)$, км	$S(x)$, км^2	q, км^3	2ξ, м	$2\Delta\eta$, см	$2h$, см
0	85,1	0	0	0	0	—	100,1
1	85,1	280	218	11,91	—54,6	—5,52	94,6
2	85,1	402	365	39,31	—107,7	—10,86	83,0
3	85,1	433	449	69,02	—153,7	—15,52	68,5
4	85,1	516	518	96,51	—186,3	—18,81	49,3
5	85,1	479	499	117,38	—230,4	—23,26	26,0
6	85,0	271	402	125,68	—312,6	—31,52	—5,5
7	85,1	313	538	124,31	—231,1	—23,33	—28,8
8	85,1	380	539	115,82	—214,9	—21,69	—50,5
9	85,0	395	597	99,16	—166,1	—16,75	—67,3
10	85,1	358	600	77,61	—129,4	—13,06	—80,3
11	85,1	332	553	54,03	—97,7	—9,86	—90,2
12	85,0	265	350	31,15	—89,0	—8,97	—99,2
13	85,1	221	251	10,65	—42,4	—4,28	—103,4
14	—	0	0	0,92	—	—	—105,0

На рис. 99 наглядно изображено различие между распределением скоростей в случаях распространяющейся (рис. 99,*а*) и стоячей (рис. 99, *б*) волн. Следует еще отметить, что рисунок представляет собой, так сказать, «мгновенное» положение систем. В действительности система течений при распространяющейся волне перемещается вместе с волной, а в случае стоячей волны расположение максимумов и «узлов» течений сохраняется постоянным, но фаза колебаний, разумеется, меняется. На рис. 99 изображена фаза наибольших отклонений уровня от положения покоя (полная вода в одних местах и малая в других).

§ 10. Приливные явления в окраинных морях

Свободные колебания, сейши, о которых была речь в предыдущих параграфах, возникают в замкнутых морях благодаря самым разнообразным причинам. Но очень часто на эти колебания налагаются колебания другого рода, именно колебания *вынужденные*, вызванные приливообразующей силой. Особенно резко бывает выражено это явление в тех случаях, когда период собственных колебаний близок к периоду полусуточного прилива.

Но еще сложнее протекают приливные явления в *окраинных* морях типа Северного, Берингова, Охотского. В таких морях, наиболее тесно связанных с *океаном*, всегда возникают *две* основные системы колебаний:

1. Прежде всего приливообразующая сила может вызвать *собственные* приливы с характерным для нее периодом. Мы не будем останавливаться на выводе закона этих приливов для случая окраинного моря идеально прямоугольной форме с длиной L, шириной b и глубиной H. Укажем только, что собственные колебания в таком воображаемом случае выражаются соотношениями

$$\xi = \frac{X_0 T^2}{2\pi^2 \cos \nu\pi} \sin \frac{\nu\pi x}{2L} \sin \nu\pi \left(1 - \frac{x}{2L}\right) \cos \frac{2\pi t}{T}, \qquad (114)$$

$$\eta = \frac{X_0 L}{q\nu\pi} \frac{\sin \nu\pi \left(\frac{x}{L} - 1\right)}{\cos \nu\pi} \cos \frac{2\pi t}{T}. \qquad (115)$$

Здесь x отсчитывается от места сообщения с океаном. Коэффициент ν выражает отношение периода приливообразующей силы T к периоду свободных колебаний данного моря T_1, т. е. $\nu = \frac{T}{T_1}$.

Так как при выводе соотношений (114) и (115) не учитывается сила трения, то, совершенно естественно, при резонансе амплитуда вертикальных и горизонтальных колебаний частиц обращается в бесконечность. Нетрудно убедиться в этом, заметив, что при $\nu = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \ldots$ $\cos\nu\pi$, стоящий в знаменателе, обращается в нуль. Наконец, через X_0 обозначена наибольшая величина приливообразующей силы, колеблющейся, вообще говоря, по гармоническому закону

$$X = X_0 \cos\frac{2\pi t}{T}.$$

2. Кроме только что упомянутых собственных приливов в окраинном море могут весьма ярко проявиться колебания, зависящие от *связи* этого моря с океаном. Их можно назвать *индуцированными* приливами. В море, обладающем схематической простой формой прямоугольного параллелепипеда, эти колебания выразятся формулами

$$\xi = -a_0 \frac{L}{\nu\pi H} \frac{\sin\nu\pi\frac{x}{L}}{\cos\nu\pi} \cos\frac{2\pi t}{T}. \qquad (116)$$

$$\eta = a_0 \frac{\cos\nu\pi\frac{x}{L}}{\cos\nu\pi} \cos\frac{2\pi t}{T}, \qquad (117)$$

где a_0 — амплитуда прилива в океане. Уровень океана колеблется по закону $\eta = a_0 \cos\frac{2\pi t}{T}$.

На рис. 100 изображены различные типы колебаний первого и второго рода, найденные А. Дефантом [10] по формулам (114), (115), (117) и (118) для различных значений коэффициента ν. Соответствующие значения ν нанесены на рисунке близ каждой диаграммы.

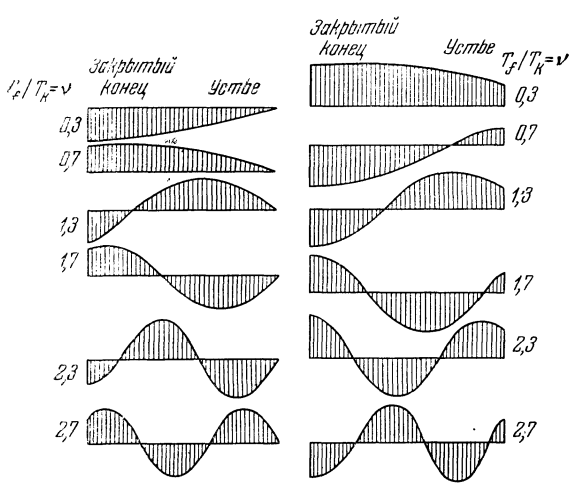


Рис. 100. Типы волн в окраинных морях

В природных условиях явление протекает значительно сложнее благодаря непостоянству глубины и сложности очертания берегов окраинного моря. С другой стороны, громадное влияние на приливы в окраинных морях оказывает кориолисова сила, к рассмотрению которой мы перейдем в следующем параграфе. Как увидим, аналитически учесть ее удается только в исключительно простых случаях. Тем не менее иногда оказывается весьма полезным исследование приливов в окраинном море, даже без учета влияния вращения Земли по способу, предложенному Дефантом.

Способ этот является естественным развитием метода того же автора, разработанного им применительно к исследованию сейш в замкнутом море и изложенного в предыдущем параграфе. Исходными формулами, служащими для

вычисления объема проходящей воды и отклонений уровня от положения покоя, служат формулы (110) — (112). Само вычисление ведется путем довольно длинным, но несложным.

Рассмотрим сперва индуцированный прилив. Обозначим индексами 1 и 2 элементы, которые характеризуют *предыдущее и последующее* сечения моря (вдоль «стрежневой линии»), и для краткости положим

$$\frac{4\pi^2}{gT^2}\Delta x = \alpha.$$

Тогда, как нетрудно видеть,

$$\eta_2 - \eta_1 = \alpha\frac{\xi_1+\xi_2}{2},\quad \xi_2 = -\frac{1}{S_2}\left(q_1 + \frac{\eta_1+\eta_2}{2}v_2\right).$$

Решая эти уравнения относительно неизвестных ξ_2 и η_2, получаем

$$\xi_2 = -\frac{2}{S_2\left(1+\frac{\alpha v_2}{4S_2}\right)}\left[q_1 + \left(\eta_1 + \alpha\frac{\xi_1}{4}\right)v_2\right], \tag{118}$$

$$\eta_2 = \eta_1 + \alpha\frac{\xi_1+\xi_2}{2}. \tag{119}$$

Для контроля может служить третье соотношение

$$q_2 = q_1 + \frac{\eta_1+\eta_2}{2}v_2, \tag{120}$$

которое удобно применять, переходя от одного сечения к другому и на каждом этапе проверяя предшествовавшие вычисления.

Если в эти вычисления не вкралась ошибка, то должно быть всегда

$$q_2 = -\xi_2 S_2.$$

Любопытно, что при вычислении элементов прилива в окраинном море метод Дефанта не требует того ряда последовательных приближений, который неизбежен при вычислении элементов сейш в замкнутом море (см. § 9). Порядок вычисления здесь значительно проще.

Прежде всего задаются произвольной амплитудой вертикальных колебаний в *конце* окраинного моря (в пункте, наиболее удаленном от океана). Принимают эту амплитуду хотя бы равной 100 *см*. Так как, кроме того, известно, что в этой точке амплитуда горизонтальных колебаний равняется нулю, то не представляет никакого труда вычислить по формулам (118) и (119) амплитуды η и ξ *первого* сечения (элементы нулевого сечения при этом будут играть роль ξ_1 и η_1, а элементы первого сечения ξ_2 и η_2).

От первого сечения перейдем подобным же образом ко второму, от второго к третьему и так до последнего, n-го, сечения, отделяющего исследуемое море от океана. Пусть при этом вычисленная амплитуда вертикальных колебаний на n-м сечении оказалась равной η_n. Так как действительная величина ее η_m предполагается *известной* (хотя бы из непосредственных измерений футштоком или мареографом), то остается только найти, во сколько раз необходимо изменить все промежуточные амплитуды, получаемые на основании предыдущих вычислений. В частности, действительная амплитуда в исходной точке — в самом конце окраинного моря — окажется равной

$$\eta_0 = 100\frac{\eta_m}{\eta_n}\ см.$$

Легко убедиться, что в том же отношении изменится масштаб горизонтальных отклонений частиц ξ.

Совершенно аналогичным способом вычисляются элементы *собственных* приливов, возникающих в окраинном море. Только вместо уравнения (118)

приходится пользоваться несколько иным, отличающимся от него лишь одним лишним членом, зависящим от *приливообразующей силы*.

Пусть эта сила колеблется по-прежнему по закону

$$X = X_0 \cos \frac{2\pi t}{T}$$

и пусть буквой β для краткости обозначена величина

$$\frac{X_0 \Delta X}{g}.$$

Тогда можно показать, что

$$\xi_2 = -\frac{1}{S_2\left(1 + \frac{\alpha v_2}{4S_2}\right)}\left[q_1 + \left(\eta_1 + \frac{\alpha}{4}\xi_1 + \frac{\beta}{2}\right)v_2\right]. \qquad (121)$$

Уравнение (121) совместно с (119) позволяет шаг за шагом определить горизонтальные смещения ξ сквозь площади различных сечений, проведенных нормально к «стрежневой линии» через ряд ее точек, а также вертикальные смещения η уровня окраинного моря, происходящие во время собственного прилива. По-прежнему уравнение (120) может служить для контроля вычислений.

Но что касается *граничных условий*, то в случае собственного прилива они оказываются совсем иными, чем в случае прилива индуцированного. Именно, у открытого конца моря, сообщающегося с океаном, вертикальное смещение η_u должно равняться *нулю*. У противоположного, закрытого, конца по-прежнему остается $\xi_0 = 0$.

Последнее условие является, как всегда, чрезвычайно удобным для вычислений. Напротив, условие, касающееся вертикальных смещений у последнего, «устьевого», сечения моря, не может быть удовлетворено сразу: задавшись произвольной величиной над «нулевым» сечением и произведя всю цепь вычислений, мы неизбежно получим над устьевым сечением величину η_u, отличную от нуля.

Идти путем последовательных приближений в данном случае неудобно и утомительно, но существует другой, косвенный прием, позволяющий чрезвычайно быстро закончить решение задачи.

Получив какое-то значение η_u для устьевого сечения, определяют по способу, описанному выше, каковы должны быть *индуцированные* колебания, чтобы в открытом конце моря получилась амплитуда вертикальных колебаний, равная $-\eta_u$.

Если теперь наложить одну на другую *обе* системы колебаний, и собственные, и воображаемые индуцированные, то результат будет удовлетворять и дифференциальному уравнению, и граничному условию $+\eta_u - \eta_u = 0$. Это и будет, следовательно, искомое решение задачи о собственных приливах окраинного моря.

Исходная величина η_0, которой приходится задаваться для нулевого сечения, вообще говоря, совершенно произвольна. Но естественнее всего задаваться той величиной, которая получается из уравнения (115), относящегося к морю прямоугольной формы и постоянной глубины. Тогда амплитуда η, подлежащая «уничтожению», окажется меньше, чем при каком-нибудь совершенно произвольном исходном значении.

§ 11. Влияние вращения Земли на приливные явления

До сих пор, исследуя приливные явления в самых разнообразных условиях, мы либо молчаливо, либо с соответствующей оговоркой, полагали, что все эти явления протекают *вне* влияния кориолисовой силы, возникающей благодаря вращению Земли. Такое предположение значительно упрощало

задачу и делало ее решение возможным в таких случаях, когда вполне строгое, полное решение оказалось бы невыполнимым.

Но теперь, когда мы познакомились с основной картиной приливов и с методами, позволяющими такую картину нарисовать, пора вспомнить о вращении нашей планеты и о коррективах, которые придется ввести в теорию приливов, учитывая это вращение. Такие коррективы в некоторых случаях имеют решающее значение: там, где они не просто уточняют числовые значения элементов прилива, а в *корне меняют* весь облик явления.

Попытаемся же найти эти коррективы применительно к случаям, поддающимся наглядному анализу. Прежде всего вспомним исходные уравнения движения, которые в § 8 служили для исследования *двумерного* распространения длинной приливной волны.

Оба уравнения (91) пополнятся новым членом, если будет необходимо учесть влияние вращения Земли. С таким дополнительным членом, выражающим силу *Кориолиса*, мы встречались на каждом шагу в гл. I. Внеся его в уравнения (91), получим два уравнения движения

$$\frac{\partial u}{\partial t} - 2\bar{\omega}v = -g\frac{\partial \zeta}{\partial x}, \tag{122}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + 2\bar{\omega}u = -g\frac{\partial \zeta}{\partial y}, \tag{125}$$

в которых по-прежнему $\bar{\omega}$ обозначает проекцию угловой скорости вращения Земли на вертикаль, проведенную в данной точке моря, т. е.

$$\bar{\omega} = \omega \sin \varphi.$$

Условие неразрывности, как и раньше, будет

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -\frac{\partial (Hu)}{\partial x} - \frac{\partial (Hv)}{\partial y}.$$

Наиболее простое решение задачи было дано В. Кельвином для бесконечно *длинного*, *узкого канала* постоянной глубины H и ширины b. Одним концом канал примыкает к океану, где колебания уровня происходят по простому гармоническому закону

$$\eta = a \cos \frac{2\pi t}{T} = a \cos \sigma t.$$

В этом случае путем несложных преобразований можно из уравнений (122) и (123) и уравнения неразрывности исключить одно из переменных и показать, что

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} + \frac{\sigma^2 - 4\bar{\omega}^2}{gH}\zeta = 0. \tag{124}$$

Предполагается, что ось абсцисс направлена вдоль канала и проходит по его середине. Интеграл уравнения (124) имеет вид

$$\zeta = ae^{-\frac{2\bar{\omega}}{c}y} \cos \sigma \left(t - \frac{x}{c}\right), \tag{125}$$

или

$$\zeta = ae^{-\frac{2\bar{\omega}}{c}y} \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right). \tag{125а}$$

Форма уравнения (125а) отличается от обычной формы волнового уравнения только множителем-экспонентой $e^{-\frac{2\bar{\omega}}{c}y}$, который показывает, что *амплитуда* волны, бегущей по каналу, *неодинакова* в точках одного и того же поперечного сечения: амплитуда эта, равная $ae^{-\frac{2\bar{\omega}}{c}y}$, зависит от расстояния y.

Принимая во внимание нормальное направление координатной оси Y и правило знаков, нетрудно прийти к заключению, что у *правого*[1] *берега* амплитуда оказывается *больше*, чем на середине канала, а у *левого* — *меньше*.

Итак, приливные явления в длинном узком канале благодаря эффекту вращения Земли усложняются лишь в том отношении, что у правого берега амплитуда полной воды оказывается *больше*, а малой воды *меньше*, чем у левого берега.

Физический смысл такого заключения чрезвычайно прост. Действительно, в своем движении на приливной волне частицы воды, как мы видели выше, проходят довольно большие расстояния в горизонтальном направлении и перемещаются в этом направлении с большими скоростями, образуя *приливные течения*. Но, как мы видели в гл. I, всякое течение, возникающее в море, находится под действием *кориолисовой* силы, стремящейся отклонить его *вправо* (в северном полушарии).

Следовательно, во время *прилива*, когда частицы воды движутся по направлению от океана в глубь окраинного моря, течение должно прижиматься к правому берегу, причем название «правый» условимся здесь понимать в том смысле, что правым является берег для наблюдателя, стоящего спиной к океану. Вследствие этого уровень полной воды окажется у правого берега выше, чем у левого.

Во время *отлива* картина изменится: частицы воды будут двигаться по направлению к океану, а потому течение станет прижиматься к правому берегу относительно своего направления, но левому по определению наблюдателя, смотрящего в глубь континента. Стало быть, уровень *малой* воды у правого берега окажется ниже, чем у левого. Отсюда и вытекает, что амплитуда прилива (или его высота — удвоенная амплитуда) у правого должна быть больше, чем у левого.

Подобное элементарное рассуждение может быть несколько продолжено. Именно, можно легко показать, что результат (125), полученный в первом приближении, выводится из *статического* анализа. Весьма просто подсчитать угол наклона поверхности моря, возникающего благодаря воздействию кориолисовой силы на приливное течение.

Пусть u будет скорость этого течения. Тогда на единицу массы воды, очевидно, действуют одновременно две силы: сила тяжести, равная g, и сила Кориолиса, равная $2\bar{\omega}u$.

Поверхность моря расположится, очевидно, перпендикулярно к равнодействующей обеих сил, а потому угол наклона ее к горизонтальной плоскости определится из соотношения

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{2\bar{\omega}u}{g}. \tag{126}$$

Соотношение (126) было получено и Н. Н. Зубовым [11]. Нетрудно убедиться, что оно выражает с некоторым приближением то же, что уравнение (125), выведенное более строгим путем. Для этого стоит только найти из (125) максимальную разность уровней между серединой какого-либо сечения канала и его левым берегом

$$\Delta a = a\left(1 - e^{-\frac{2\bar{\omega}}{c}\frac{b}{2}}\right) = a\left[\frac{\bar{\omega}b}{c} - \frac{1}{2!}\left(\frac{\bar{\omega}b}{c}\right)^2 + \frac{1}{3!}\left(\frac{\bar{\omega}b}{c}\right)^3 - \cdots\right].$$

Если знать Δa, в выражении которого можно, для приближенного вычисления, взять один первый член ряда, останется только найти тангенс угла на-

[1] Считая относительно направления движения волны.

клона поверхности моря к горизонту, который равен

$$\operatorname{tg}\alpha = \Delta a : \frac{b}{2} = \frac{2\bar{\omega}}{c}\, a = \frac{2\bar{\omega}a}{\sqrt{gH}} = \frac{2\bar{\omega}u}{g}.$$

Следовательно, при *весьма малых* углах наклона поверхности моря можно довольствоваться упрощенной формулой (126), полагая, что поперечный профиль очерчен *по прямой*, а не по экспоненциальной линии, задаваемой уравнением (125).

Итак, «статический» метод исследования эффекта вращения Земли в этом случае дал такое же хорошее выражение для $\operatorname{tg}\alpha$, как и динамический метод. Но было бы ошибочным думать, что этот статический метод может охватить все характерные особенности явления. Так, под влиянием периодического колебания скоростей течения должна с тем же периодом колебаться кориолисова сила, а стало быть, не может не меняться с тем же периодом *отклонение* водных масс в *поперечном* направлении. Иными словами, должны возникнуть поперечные колебания уровня в окраинном море, заливе или канале, а амплитуда таких колебаний коренным образом связана с отношением периодов $T_1 : T$ — свободных и вынужденных колебаний. В частности, поперечные колебания с таким же успехом могут повести к возникновению резонанса, как и колебания продольные. Этого обстоятельства статическая теория не учитывает.

Особенно сложно должны протекать приливные явления в *окраинных* морях, где эффект вращения Земли может вызвать не только изменение величины амплитуды у правого и левого берегов, но и до неузнаваемости изменить всю картину явления.

Анализ, приведенный в предыдущем параграфе и не учитывающий влияние вращения Земли, показывает, что в таком море должна была бы произойти интерференция падающей и отраженной волн, ведущая к возникновению стоячих волн.

В действительности явление чрезвычайно осложняется в силу того обстоятельства, что основная волна (125) и волна, бегущая ей навстречу

$$\zeta = ae^{+\frac{2\bar{\omega}}{c}y}\cos\sigma\left(t + \frac{x}{c}\right),$$

не могут удовлетворить граничному условию $u = 0$ для всех значений y, т. е. во всех точках задней стенки в конце канала. Следовательно, *простое полное отражение волны здесь произойти не может.*

Действительный механизм явления станет понятным после следующих элементарных и схематических рассуждений. Допустим, что в некотором окраинном море возникли стоячие волны в продольном направлении и притом так, как будто никакого вращения Земли не существует. Спрашивается: как на движение вод должно повлиять вращение Земли, если оно, наконец, проявится?

Как было уже упомянуто выше, колебания уровня сопровождаются всегда интенсивными *продольными* колебаниями водных частиц в горизонтальном направлении. На эти-то горизонтальные колебания и подействует возникшая сила Кориолиса, вызвав *поперечные* отклонения частиц.

Но поперечные колебания уровня в свою очередь также будут носить периодический характер, причем фаза их должна совпадать с фазой продольных колебаний частиц, т. е. с фазой колебания *скоростей* течений.

Колебания же скоростей течения, как видно из сопоставления (89) и (113), отличаются по фазе на *четверть* периода от продольных колебаний уровня.

Итак, благодаря влиянию вращения Земли в окраинном море должны происходить *продольные и поперечные* колебания уровня, *сдвинутые по фазе на четверть периода*. Но сложение такого рода колебаний, как правило,

приводит к возникновению *вращательного движения*, в данном случае вращательного движения наклонной поверхности моря вокруг некоторой неподвижной точки.

В самой этой точке, носящей название *амфидромии*, никакого колебания уровня, очевидно, не *будет*. Напротив, вокруг нее будет как бы *обегать* приливная волна, вызывающая периодический подъем и падение воды. Но если это так, то часы полной воды (или малой воды) в различных точках берега будут различны, как это имело бы место не в случае стоячей, а в случае *распространяющейся* волны. Только котидальные линии здесь не будут располагаться последовательными рядами, а расположатся *лучами*, исходящими из амфидромии.

К сожалению, точный анализ прилива в окраинном море, происходящего под действием вращения Земли, возможен только применительно к самым простым условиям. Так, Д. Тэйлор [12] произвел его для случая моря прямоугольной формы и постоянной глубины. Не будем приводить здесь чрезвычайно сложных выкладок этого автора, а отошлем интересующихся либо к подлиннику, либо к книге А. Дефанта [10], которому удалось несколько упростить математические операции Тэйлора.

Приведем только два рисунка, изображающих картину прилива, полученную им.

Рис. 101 дает представление о расположении котидальных линий в прямоугольном море длиной 930 *км*, шириной 465 *км* и глубиной 74 *м* (глубина, как было сказано, постоянна). При каждой котидальной линии проставлен соответствующий котидальный час, причем время «0» соответствует положению приливной волны на половине длины моря.

Как видим, приливная волна, входящая из океана, бежит вдоль «правого» берега, причем левый фланг ее оказывается связанным с одной из двух амфидромий, изображенных на рисунке. Пунктирные кривые, нанесенные на том же рисунке, представляют собой линии равных амплитуд.

Совершенно очевидно, что в амфидромиях амплитуда равна нулю и что она должна возрастать по мере удаления от амфидромий. На рис. 101 проведены пунктиром линии равных амплитуд, хорошо обрисовывающие общую картину явления; как видим, наибольшая амплитуда получается в двух *углах* в самом конце моря.

На рис. 102 изображены горизонтальные проекции *орбит*, описываемых частицами воды на приливной волне. Как и следовало ожидать, близ берегов частицы движутся везде в плоскости, параллельной береговой стенке. В мористой половине окраинного моря частицы движутся, естественно, в вертикальных плоскостях, параллельных продольной оси. Напротив, во внутренней половине моря движение частиц чрезвычайно осложнено, причем горизонтальные проекции орбит представляют собой эллипсы, описываемые в направлении против часовой стрелки (т. е. в том самом направлении, в каком пробегает внутри окраинного моря приливная волна).

Схемы рис. 101 и 102 с полной очевидностью показывают, что в исследованном случае в окраинном море приливные явления протекают по закону *распространяющейся* волны, а совсем не по закону *стоячей* волны, к которому привел бы анализ, не учитывающий эффект вращения Земли.

Как должны протекать приливные явления в том или ином *природном* бассейне, в том или ином окраинном море, заранее сказать нельзя: необходимо предварительно учесть все местные условия. Важнейшими же факторами, от которых зависит *тип* приливной волны, являются очертания берегов, рельеф дна, отношение длины моря к его ширине (понимая под длиной размер, отсчитываемый от места соединения с океаном до противоположного берега), а также *средняя широта* той зоны, в которой расположено данное море. Чем *выше* широта, тем, очевидно, больше будет кориолисова сила и тем резче проявится эффект вращения Земли.

Благодаря этому эффекту волна, отраженная от берега, будет очень сложно интерферировать с падающей; близ береговой линии приливные явления будут ближе напоминать свободно распространяющуюся волну, чем волну стоячую; вдали от берега неизбежно возникнут расхождения между действительным поведением волн и элементарной схемой, которую рисует каналовая теория.

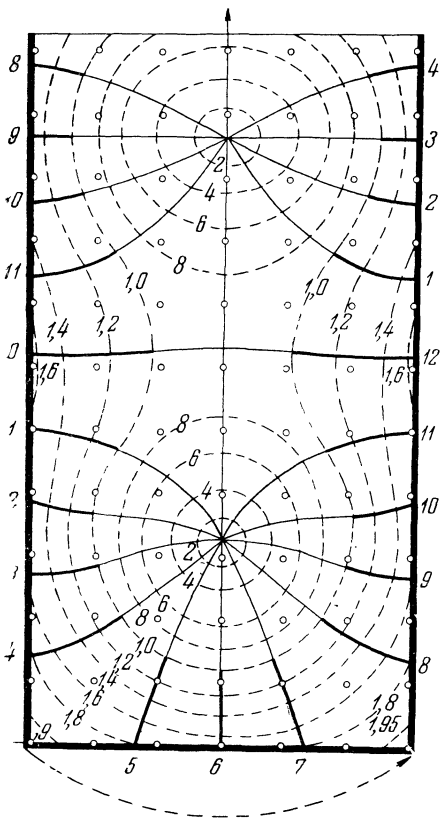


Рис. 101. Котидальные линии в поле кориолисовой силы

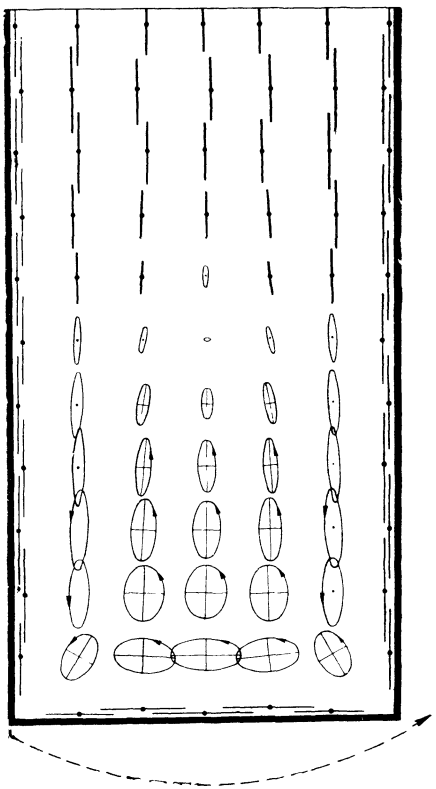


Рис. 102. Орбиты частиц в плане

Как увидим в § 13, близкие к действительности карты типа рис. 106 строятся на основе обширного материала трудоемких исследований в море и на сети береговых станций. Однако для *ориентировочных* суждений о характере приливов в некоторых морях, происходящих под решающим воздействием кориолисовой силы, можно обойтись без столь длительных и громоздких мероприятий: иногда на помощь исследователю может прийти *опыт на вращающейся модели*.

Ведь в каждой точке земного шара кориолисова сила обусловлена не самой угловой скоростью вращения Земли, а проекцией ее *на вертикаль в данной точке*. Следовательно, для наблюдателя, находящегося в каком-то районе, все явления протекают так, как будто видимая им горизонтальная плоскость вращается вокруг вертикали с угловой скоростью $\bar{\omega} = \omega \sin \varphi$. Но если это так, то эти явления можно попытаться воспроизвести на *модели моря, вращающейся вокруг вертикальной оси*. Разумеется, придется только позаботиться о выполнении условий *подобия*, как и во всех иных задачах экспериментальной гидродинамики. К сожалению, условия подобия

не могут быть выполнены применительно к *дрейфовым* течениям (неосуществима соответствующая глубина трения), но для явлений *приливных* они легко выполнимы.

На первый взгляд может показаться, что процессы будут замаскированы действием центробежной силы, значительно превышающей кориолисову. Однако легко видеть, что поле центробежной силы является, так сказать, квазистатическим: оно исказит поверхность моря на модели, раз навсегда превратив ее из плоской в параболоидальную, а на распространение волн не окажет никакого влияния.

Модель можно отлить из цемента, осуществив рельеф дна на основании батиметрической карты. Скорость вращения вокруг вертикальной оси выбирается исходя из соображений подобия: время прохождения «приливной» волны (от волнопродуктора той или иной системы) через все море на модели должно составлять ту же долю от периода полного оборота вокруг вертикальной оси, какую долю составляет время прохождения действительной приливной волны через все море от периода оборота Земли вокруг ее оси (разделенного на синус широты).

Для суждения о траекториях частиц воды на поверхности модели моря следует воду окрасить тушью, а на ее поверхность пустить маленькие белые бумажные кружочки. Тогда, прикрепив над моделью жестко связанный с ней киносъемочный аппарат (с автоматом), легко получить серии кинокадров, по которым определятся «поверхностные течения». Такой опыт на модели впервые осуществила Л. Г. Лебедкина.

§ 12. Влияние трения на приливы

Остается учесть еще один фактор, который не учитывался в предыдущих параграфах, а именно *трение*. В гл. I ему было уделено достаточное место при изложении теории морских течений. Но очевидно, что он не может не оказывать заметного влияния на тот вид морских течений, который обусловлен приливами.

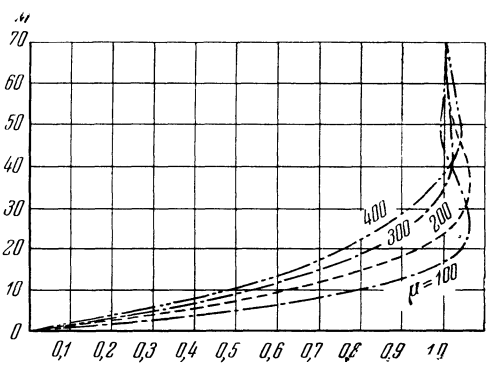


Рис. 103. Влияние трения на приливы

Действительно, до сих пор, рассматривая движение водных частиц в горизонтальном направлении, мы полагали, что скорости такого движения постоянны во всех точках одной и той же вертикали. Это было бы справедливо в том случае, если бы на частицы воды не действовали никакие силы, кроме силы тяжести, приливообразующей силы, силы инерции и силы Кориолиса; тогда все частицы, расположенные на одной вертикали от поверхности до самого дна, находились бы в совершенно одинаковых условиях и вся масса воды перемещалась бы сквозь любое сечение однородным потоком.

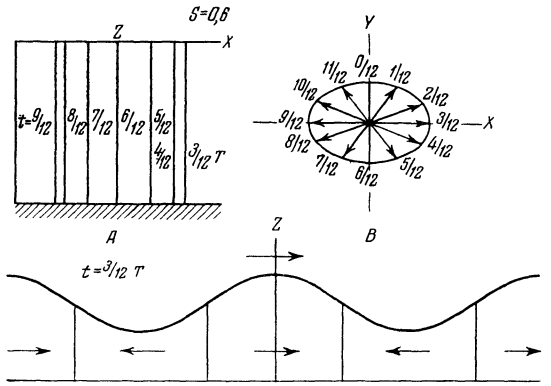


Рис. 104. Приливы на мелководье без трения

Но в природе этого никогда не бывает: вследствие сил *трения*, возникающих между водой и дном, придонные слои воды замедляются в своем движении, а вследствие *внутреннего* трения между слоями воды замедляется движение и слоев, расположенных выше придонного, возникает некоторый *градиент* скоростей по вертикали.

Благодаря периодическому изменению скоростей приливного течения и сравнительно небольшой величине периода этих изменений в данном случае не *успевает развиваться* то распределение скоростей, которого следовало бы ожидать на основании общей теории для постоянного течения (см. гл. I); но, во всяком случае, намеченные тенденции должны и здесь как-то проявиться. Полный анализ приливных явлений, учитывающий и влияние силы трения, и влияние вращения Земли, чрезвычайно сложен. В применении к Ирландскому морю он был проделан Д. Тэйлором [12]. На рис. 103 изображено то распределение скоростей течения по вертикали, которое им было получено для различных значений коэффициента турбулентной вязкости μ (см. гл. I, § 2). Как видим, постоянными можно считать только скорости течения в слоях, лежащих выше 30—40 *м* над дном. В нижнем же слое скорости

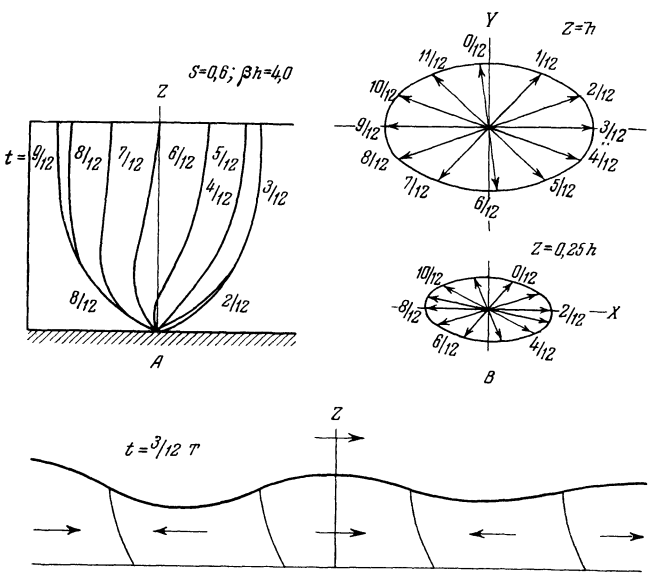


Рис. 105. Приливы на мелководье с трением

течения убывают по направлению ко дну, и тем резче, чем больше коэффициент μ.

Более простой является аналогичная задача в случае безграничного моря. Для такого случая ее разрешил Г. Свердруп [3], который произвел исследование по динамике приливов в полярном бассейне, когда под его руководством там работала экспедиция на судне «Мод».

На рис. 104 и 105 для сравнения изображена картина явления, найденная им сначала (рис. 104) для прилива без трения, а затем (рис. 105) — с учетом сил трения. Вращение Земли принимается во внимание.

§ 13. Определение элементов прилива по скоростям приливных течений

При взгляде на сложную картину приливных явлений в морях с причудливым очертанием берегов и неспокойным рельефом дна становится совершенно очевидным, что по одним только наблюдениям береговых станций невозможно составить полную и точную карту котидальных линий, а стало быть, невозможно и получить сколько-нибудь надежные сведения об элементах прилива в *промежуточных* точках берега, в которых не производилось специальных долговременных наблюдений.

Между тем необходимость такого рода сведений диктуется и требованиями теоретического порядка, и требованиями практики каждого дня, ибо число береговых пунктов, посещаемых судами, непрерывно растет. Вот почему, помимо береговых наблюдений над уровнем воды, совершенно необходимыми оказываются наблюдения *экспедиционные*, наблюдения над приливными явлениями в *открытом море*.

Наиболее распространенным видом подобных экспедиционных работ является *изучение скорости и направления приливных течений*, позволяющее строить карты течений для нужд мореплавания.

Но между колебанием скоростей приливного течения и колебанием уровня моря, как мы видели, существует органическая связь, а потому совершенно естественным является вычисление *элементов* прилива и, в частности, построение котидальных линий, на основании измеренных скоростей течений в открытом море.

Такого рода вычисления производятся в настоящее время двумя методами, один из которых был в 1923 г. предложен А. Дефантом [3], а другой, независимо от него, Д. Праудменом и А. Дудсоном в 1924 г. [14].

В основе первого метода лежит условие неразрывности, которое, как мы видели, в случае двумерного распространения волн может быть представлено в виде

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -H\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right). \tag{127}$$

Колебания какого-либо элемента прилива в различных точках отличаются между собой *фазами*. Так, если в некоторой точке колебания уровня выражаются уравнением

$$\zeta = a\cos\sigma t,$$

то в какой-нибудь другой точке уравнение колебания уровня будет

$$\zeta = a\cos(\sigma t - \gamma). \tag{128}$$

Подобным же образом от точки к точке должны меняться и горизонтальные компоненты скоростей приливных течений u и v.

Но вместо того чтобы вносить в уравнение самую величину разницы фаз γ, можно условиться изображать каждый из элементов прилива в виде *суммы двух членов*, изменяющихся во времени с тем же самым периодом. Тогда за-

кон колебания величин ζ, u и v в любой точке представится так:

$$\begin{aligned} \zeta &= \zeta_1 \cos \sigma t + \zeta_2 \sin \sigma t, \\ u &= u_1 \cos \sigma t + u_2 \sin \sigma t, \\ v &= v_1 \cos \sigma t + v_2 \sin \sigma t. \end{aligned} \tag{129}$$

Величины ζ_1, ζ_2, u_1, u_2, v_1 и v_2, влияющие как на амплитуду, так и на фазу, не зависят от времени, а только от координат данной точки. Что касается самой разности фаз, то она очень просто связана с соответствующими парными величинами. Так, например,

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{\zeta_2}{\zeta_1}.$$

Основываясь на соотношениях (129), можно несколько иначе выразить условие неразрывности, написанное выше. Именно теперь оно принимает вид

$$\begin{aligned} \zeta_1 &= \frac{H}{\sigma}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y}\right), \\ \zeta_2 &= -\frac{H}{\sigma}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y}\right), \end{aligned} \tag{130}$$

в чем нетрудно убедиться, приняв во внимание (127). Эти-то уравнения и служат для нахождения амплитуд и фаз прилива. Для вычисления ζ_1 и ζ_2, определяющих как амплитуду, так и фазу вертикальных колебаний, необходимо измерить изменение составляющих u_1 и u_2 при перемещении в море на некоторое расстояние Δx по направлению оси OX, а также изменение составляющих v_1 и v_2 при перемещении на расстояние Δy вдоль оси OY.

После того как будут вычислены и амплитуды, и фазы прилива в различных точках моря, останется только построить кривые равных фаз, т. е. котидальные линии, и кривые равных амплитуд, также имеющие существенное значение.

Во всех точках, лежащих на какой-либо котидальной линии, должно выполняться соотношение

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{\zeta_2}{\zeta_1} = \text{const},$$

а во всех точках линии равных амплитуд

$$\zeta_1^2 + \zeta_2^2 = \text{const}.$$

Для работы по первому методу требуется обширный и надежный материал по измерению скоростей течения на всей площади моря. Однако часто под рукой имеются только измерения, произведенные во время отдельных гидрологических *разрезов*, которые были проложены *вдоль* некоторых линий, пересекающих море. В таких случаях значительно удобнее пользоваться вторым методом. Этот метод основан на уравнениях движения, в которых учитывается и влияние вращения Земли, и влияние турбулентной вязкости. Пусть компоненты силы трения по осям OX и OY будут соответственно F и G (в расчете на единицу площади дна). Тогда при отсутствии других внешних воздействующих сил основные гидродинамические уравнения можно будет представить в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - 2\bar{\omega} v &= -g\frac{\partial \zeta}{\partial x} - \frac{F}{H}, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + 2\bar{\omega} u &= -g\frac{\partial \zeta}{\partial y} - \frac{G}{H}. \end{aligned} \tag{131}$$

Но величины u, v, $\frac{\partial u}{\partial t}$, $\frac{\partial v}{\partial t}$, $\frac{\partial \zeta}{\partial x}$, $\frac{\partial \zeta}{\partial y}$ могут быть выражены через u_1, u_2, v_1, v_2, ζ_1, ζ_2 на основании трех уравнений системы (129). Для полноты к этой системе

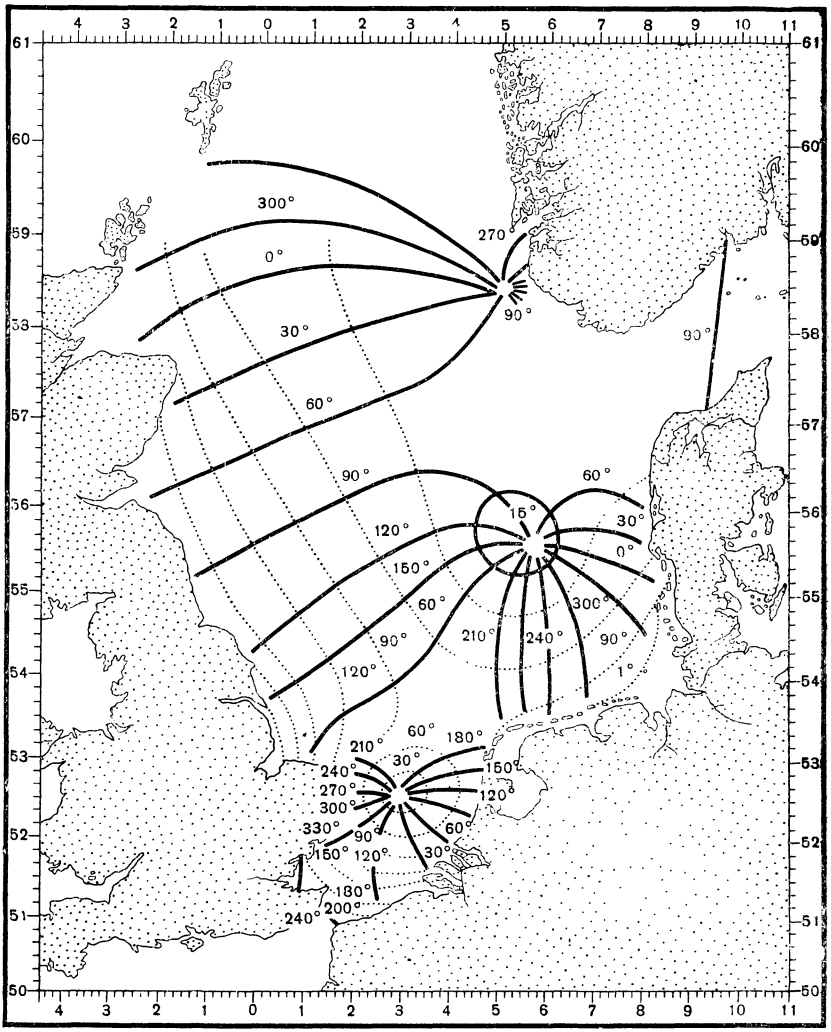


Рис. 106. Сложные приливы на Северном море

следует добавить еще два совершенно аналогичных уравнения, относящихся к компонентам сил трения:

$$\begin{aligned} F &= F_1 \cos \sigma t + F_2 \sin \sigma t, \\ G &= G_1 \cos \sigma t + G_2 \sin \sigma t. \end{aligned} \tag{132}$$

После подстановки всех перечисленных выражений вместо уравнений (131), можно будет написать *четыре* новых, очень удобных для вычисления элементов: $\frac{\partial \zeta_1}{\partial x}$, $\frac{\partial \zeta_1}{\partial y}$, $\frac{\partial \zeta_2}{\partial x}$, $\frac{\partial \zeta_2}{\partial y}$, по заданным элементам *скоростей* течения

$$\begin{aligned} \frac{\partial \zeta_1}{\partial x} &= -au_2 + bv_1 + eF_1, \\ \frac{\partial \zeta_1}{\partial y} &= -av_2 - bu_1 - eG_1, \\ \frac{\partial \zeta_2}{\partial x} &= au_1 + bv_2 - eF_2, \\ \frac{\partial \zeta_3}{\partial y} &= av_1 - bu_2 - eG_2, \end{aligned} \tag{133}$$

где для краткости введены обозначения

$$a = \frac{\sigma}{g},\quad b = \frac{2\bar{\omega}}{g},\quad e = \frac{1}{gH}.$$

Произведя измерения скоростей течения в экспедиции, вычисляют по уравнениям (133) *градиенты* величин ζ_1 и ζ_2 для тех точек, в которых производились измерения скоростей. Затем посредством графической интерполяции отыскивают градиенты для промежуточных точек. Но для окончательного решения задачи необходимо, кроме того, знать еще значения ζ_1 и ζ_2 *для берегов*, между которыми производился гидрологический резрез. Тогда между этими точками вместятся все остальные, и решение будет совершенно определенное и однозначное. Результат будет тем точнее, чем чаще лежат на разрезе точки, в которых делались непосредственные и надежные измерения скоростей и направлений течений, и чем тщательнее произведена интерполяция.

В качестве примера на рис. 106 изображена карта приливов Северного моря. На ней видны три амфидромии, вокруг которых обегают котидальные линии (сплошные кривые). Пунктиром нанесены кривые равных амплитуд.

§ 14. Непосредственное определение элементов приливной волны в открытом море

Как бы ни были тщательно проделаны измерения скоростей течения и вычисления, описанные в предыдущем параграфе, все же результаты их приведут к элементам приливной волны только *косвенным путем*. Нечего и говорить о том, что «цепочка» Праудмена может оказаться весьма ненадежной, если некоторые участки ее будут определены с погрешностью: тогда сдвинутся со своих мест *все* остальные ее участки.

Метод Дефанта не страдает этим недостатком, позволяя определять все элементы для каждой точки в отдельности. Но он зато требует, как мы видели выше, широкого охвата *всей площади* моря и в то же время все же остается методом *косвенным*.

Вот почему издавна делались попытки к конструированию *экспедиционных мареографов* для непосредственной регистрации самой приливной волны в открытом море. Но обычно все эти попытки терпели неудачу. С успехом работал, правда, экспедиционный мареограф Хонда, но применимость его ограничена: он может работать только на борту какого-нибудь плавучего маяка и притом на небольшой глубине [15].

Мареограф Фаве, основанный на очень интересном принципе, отличается очень сложным устройством. Еще сложнее обработка его записей, получаемых на особых круглых пластинах в совсем необычной системе координат. Глубина, на которой он может работать, также весьма ограничена.

В германской южноатлантической экспедиции на судне «Метеор» применялся экспедиционный мареограф системы Кульмана, но прибор этот непрерывно выходил из строя, ввиду того что лопались от высокого давления трубки, в которые перед опусканием нагнетался воздух.

Существует, однако, весьма простой и надежный принцип, который позволяет и упростить конструкцию прибора, и расширить пределы его применимости, и достигнуть простоты в обработке записей. На этом принципе основан экспедиционный мареограф Шулейкина.

На рис. 107 представлено несколько разрезов, поясняющих устройство этого мареографа, а на рис. 108 — общий вид прибора со снятой боковой крышкой, благодаря чему виден регистрирующий механизм.

Механизм этот заимствован от маленького карманного альтиграфа, служащего для записи высоты полета или профиля горных дорог, причем в нем сделано одно только изменение: в анероидном барабане 2 (рис. 107) было просверлено отверстие, через которое внутрь барабана вошел воздух. К отверстию

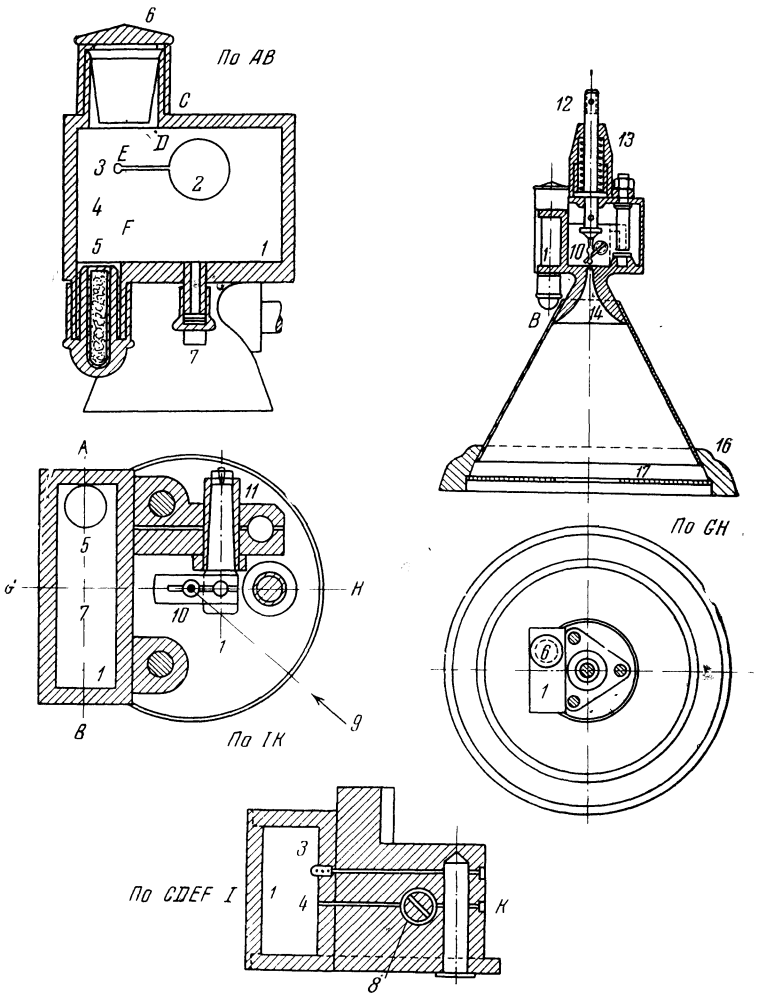


Рис. 107. Разрезы мареографа Шулейкина

примыкает тонкая трубка *3*, припаянная к барабану. На рис. 107 не изображены другие детали пишущего механизма, чтобы не затемнять чертежа. Другой конец трубки *3* входит в вертикальный канал *11*, сообщающийся с пространством под колоколом *15* посредством тонкого канала *9*.

Кроме трубки *3*, в тот же вертикальный канал *11* входит еще узкий канал *4*, рассеченный «самоварным» краном *8*. Когда этот кран открыт, то устанавливается сообщение между пространством под колоколом *14* и камерой *1*, в которой находится самописец. Вследствие этого внутреннее давление в камере *1* оказывается в точности равным внешнему давлению, и давление на стенки чувствительного барабана *2* как снаружи, так и изнутри остается одинаковым, на какую бы глубину прибор ни погружался.

Открывание и закрывание крана *8* происходит автоматически посредством штанги *12*. При опускании и подъеме мареографа прибор висит на тросе, прикрепленном к кольцу наверху штанги *12*. При этом пружина *13* остается сжатой, а кран *8* — *открытым*. Под действием гидростатического давления воздух под колоколом *14* все более и более сжимается по мере опускания на глубину. Тем самым достигается автоматическое и точное уравновешивание внешнего и внутреннего давления. Никакого избыточного давления никакие

детали прибора не испытывают, и не приходится бояться за их прочность и водонепроницаемость. В тот момент, когда прибор касается дна, собственный вес его перестает действовать на штангу *12*, и пружина *13*, освободившись, немедленно поднимает эту штангу в верхнее положение, закрывая при этом кран *8*. С этого момента мембрана чувствительного барабана *2* начинает ощущать все *колебания внешнего давления*, вызываемые приливами, и движения ее передаются пишущему механизму.

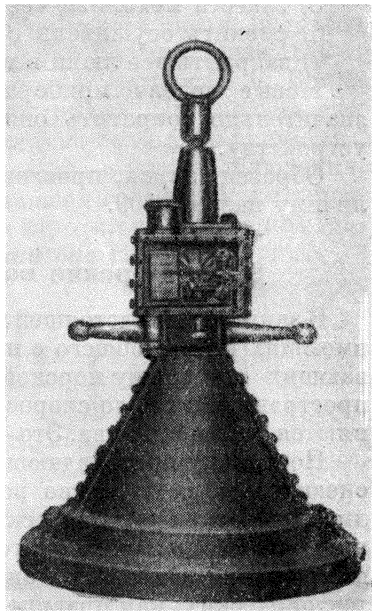


Рис. 108. Общий вид прибора

Прибор можно оставлять на дне на время 25 или 13 *час* (соответственно случаям суточной или полусуточной станции), причем свободный конец троса крепится на небольшом буе с вехой, служащей для легкого нахождения места установки.

Под конец периода регистрации судно подходит к бую, и прибор поднимается на борт, причем с самого момента отделения от дна штанга *12* вновь оказывается под действием веса прибора, и устанавливается сообщение между внешним миром и пространством внутри камеры *1*.

Как видим, для работы с мареографом этой конструкции совсем не требуется предварительно знать глубину моря в данном пункте (надо только быть уверенным, что глубина эта не превосходит некоторого предела, существующего для данной *модели*).

Если требуется работать на бóльших глубинах, то достаточно только увеличить размеры воздушного колокола.

Все операции, которые приходится проделывать с прибором в экспедиции, крайне просты, а именно:

1) прежде всего надо отвинтить крышки *5*, *6*, *7*;

2) свести вместе валики, на которых перекатывается бумага;

3) через отверстие *6* извлечь старую бумагу с записью и поставить новую для очередной регистрации;

4) ввести чернила на перо через отверстие 6;

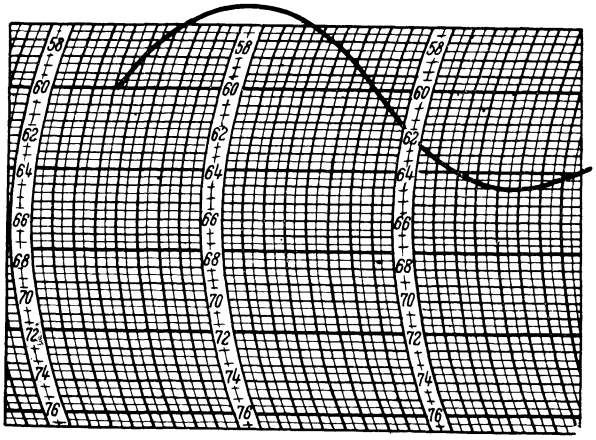


Рис. 109. Запись прибора

5) завести механизм через люк 7;
6) сменить осушитель с хлористым кальцием, находящийся в трубке 5;
7) задраить все люки в приборе, после чего он будет готов к спуску.

Новые модели прибора, строящиеся в настоящее время, позволяют значительно сократить описанные процедуры благодаря более простому устройству.

Образец записи, произведенной прибором, изображен в натуральную величину на рис. 109.

§ 15. Морские волны, вызванные землетрясениями

В заключение настоящей главы необходимо коснуться особого рода волн, не имеющих ничего общего с приливами по своему происхождению, но охватывающих *всю* толщу морской воды, подобно приливным волнам, и потому распространяющихся со скоростями примерно такими же, с какими распространяются волны прилива. Это—волны, вызванные подводными землетрясениями.

Поскольку преобладающая часть земного шара покрыта водами Мирового океана, весьма вероятно возникновение землетрясений именно под водой: либо благодаря тектоническим процессам, приводящим к смещениям громадных пластов дна, либо благодаря извержению подводных вулканов. Из этих двух причин наибольшее значение имеет *первая*, причем сила землетрясений тектонических, как правило, превышает силу землетрясений вулканического происхождения.

Если внезапный сдвиг, приводящий к подъему или обвалу морского дна на некотором большом протяжении, сообщит короткий, но чрезвычайно мощный импульс морской воде, лежащей над ним, то тем самым может быть создана так называемая *уединенная волна*.

До настоящего времени нет полной ясности ни в теории уединенной волны, ни в тех опытах, которые производились с нею различными авторами начиная с XIX в. Однако, с достаточной для практики надежностью, можно принять следующее хорошо известное выражение для профиля уединенной волны:

$$\zeta = h \operatorname{sech}^2 \frac{1}{2}\left(\frac{x}{b}\right), \tag{134}$$

по которому построена кривая рис. 110. Параметр b, входящий в уравнение зависит от соотношения между глубиной моря H и высотой волны h:

$$b = H\sqrt{\frac{H+h}{3h}}. \tag{135}$$

Скорость c распространения уединенной волны зависит также от этих двух величин

$$c = \sqrt{g(H+h)}. \tag{136}$$

В океане обычно h бывает значительно меньше, чем H. Поэтому скорость уединенной волны весьма близка к скорости *приливной* волны, определяемой на основании формулы (16). Само по себе понятие о «длине волны» для уединенной волны условно. В некоторых отношениях ее можно рассматривать как бесконечно протянувшуюся от вершины «положительную» часть волны, так как «отрицательной»части у нее совсем нет. Теория показывает, что этой «отрицательной» части вообще не может существовать у такой волны: *впадина не может распространяться* в стороны от своего зарождения, как распространяется *гребень*.

Иными словами, в море не может распространяться уединенная волна в форме вогнутой *воронки*, вызванной каким-либо отрицательным импульсом, а может распространяться лишь некоторый «холм».

Одним из типичных примеров возникновения такого гигантского водяного «холма», перемещавшегося с громадной скоростью через весь океан, является волна, возникшая при землетрясении у берегов Перу, в Иквике, в мае 1877 г. По описанию Ю. М. Шокальского, высота волны здесь достигла 5 *м*. Волна пересекла Тихий океан и дошла до Японии и Австралии. На Сандвичевых о-вах высота волны была равна 11 *м*. Такое нарастание волны, по-видимому, следует объяснить очертаниями берегов и рельефом дна в месте наблюдения. С другой стороны, несомненно, что волна, сохранившая громадную амплитуду через 14 *час* после своего возникновения, могла зародиться только под действием мощного импульса *на большом протяжении дна* [16].

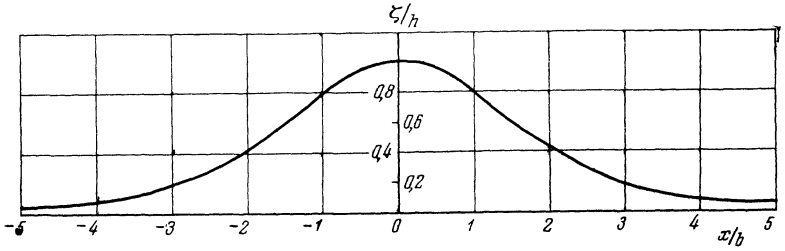


Рис. 110. Профиль уединенной волны

Столь же типичным является и знаменитое землетрясение в Лиссабоне в ноябре 1775 г. Здесь страшные разрушения и гибель большого числа людей вызвала волна, порожденная *вторым* толчком. Она достигла в Кадиксе высоты 18 *м*, разрушила набережную, стену крепости и размыла перешеек, соединявший город с материком. По Шокальскому, она была отмечена и в Марокко, и на о. Мадейра, и даже по другую сторону Атлантического океана (у Антильских о-вов), где она еще обладала высотой в 4 *м*.

Однако, помимо уединенной волны, описанной выше, землетрясения могут, по-видимому, вызывать и *ритмические* колебания уровня моря, порожденные подобными же ритмическими колебаниями пластов дна. Это явление получило у японцев название «цунами», вошедшее в литературу на других языках. Период колебаний тут составляет от 15 до 60 *мин*. На основании характеристики скоростей волн *всех диапазонов*, приведенной в следующей главе, можно убедиться, что и эти волны, как и уединенная волна, родственны *приливной* волне по скорости распространения. Действительно, пусть глубина океана в среднем составляет 4000 *м* в том районе, где распространяются волны «цунами». Тогда при периоде $T = 20$ *мин* $= 1200$ *сек* будет

$$\frac{H}{T^2} = 2{,}8 \cdot 10^{-3}.$$

На этом участке, как можно показать, кривая, изображенная на рис. 179, совпадает с отрезком параболы

$$\frac{c}{T} = \sqrt{g}\,\sqrt{\frac{H}{T^2}}.$$

Умножив обе части этого равенства на период T, получим известную формулу (16), по которой определяется скорость *приливной* волны. Итак, подобные волны также распространяются со скоростями, пропорциональными корню квадратному из глубины океана, подобно приливным и уединенным волнам. Косвенно это доказывает, что все три рассмотренных рода волн характеризуются охватом толщи океанских волн от поверхности до самого дна.

Лучшим примером периодических воздействий дна на массы океанских вод служит землетрясение в Арике, на Перуанском берегу, описанное

Шокальским. В августе 1868 г., после первого толчка землетрясения, на берег набежала волна высотой 2—3 *м*. Потом море отхлынуло от берега на расстояние не меньше мили, после чего на берег набежала гигантская волна высотой 17 *м*. Явление повторялось через каждые 15 *мин*.

Значительно реже наблюдаются волны, которые возникают в океане под действием *извержения* вулканов. Так возникла, например, волна во время извержения вулкана Кракатоа, на острове того же имени, лежащем посреди Зондского пролива. Шокальский считает это извержение самым сильным из всех известных за историческое время. 26 августа 1883 г. возник первый сильный взрыв. На другой день в 5 *час* 30 *мин* утра последовал второй взрыв, а в 10 *час* вечера — третий, самый жестокий. После каждого взрыва возникала волна, заливавшая берега пролива. Во время последнего, самого сильного взрыва, были совершенно затоплены о-ва Себуку и Себези, причем с них были смыты не только все жители, но и вся почва.

Высота волны была, видимо, также наибольшая из всех, наблюдавшихся при извержениях: местами она доходила до 25—35 *м*. В одном из портов на о. Яве сорвало с якорей канонерку, которая потом была отнесена на 3 *км* в глубь острова и поднята на 9 *м* выше нормального уровня моря. По данным Шокальского, период волны составлял 3480 *сек*, скорость 189 *м/сек* [16].

При подводных извержениях, помимо непосредственного действия громадных волн, могут представить опасность и те газы, которые вырываются из воды, давая картину мощного взрыва. Следует также отметить, что всякое землетрясение под водой порождает в самой воде *продольные упругие волны*, аналогичные звуковым. Эти волны при встрече с корпусом корабля дают впечатление настоящего *удара*. Весьма многочисленны записи в вахтенных журналах на кораблях о подобных «ударах» в таких областях океана, где никак нельзя допустить возможность действительного удара о подводную скалу: удар наносится не подводной скалой, а упругими волнами землетрясения. Именно в этих районах океана подводные землетрясения достаточно часты для того, чтобы служить причиной для подобных ошибочных записей.

Каких же размеров могут достигать смещения дна во время землетрясений, смещения, которые вызывают громадные волны в океане?

Весьма убедительный ответ на этот вопрос дает карта, воспроизведенная на рис. 111. Это карта залива Сагами, на восточном побережье Японии, недалеко от Токио. На ней нанесены изменения глубины океана, возникшие после сильного землетрясения 1 сентября 1923 г.

Синяя краска соответствует тем площадям дна, где произошло опускание, а красная — где произошло поднятие дна. Изолинии проведены через каждые 50 *м* смещения дна; цифры указывают величину изменений глубин в соответствующую сторону. Как видим, самые сильные изменения рельефа дна возникли на участке, лежащем примерно в 18 *км* к юго-западу от Мисаки, на площади около 150 *км*^{2}. Одна часть этой площади резко поднялась, причем местами поднятие дна достигло 230 *м*. Другая часть площади, расположенная совсем близко, опустилась, причем понижение дна достигло 400 *м*. Здесь, несомненно, произошел какой-то своеобразный «излом» пластов дна, резкий перекос их на угол, который легко подсчитать, пользуясь картой. Именно, кратчайшее расстояние между точкой, опустившейся на 400 *м*, и точкой, поднявшейся на 230 *м*, составляет всего 2000 *м* по горизонтальному направлению. Следовательно, угол α перекоса поверхности дна определится на основании простого соотношения

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{400 + 230}{2000} = 0{,}316,$$

откуда

$$\alpha = 17°{,}5.$$

Есть основания полагать, что подъем дна на одних участках и опускание его на других произошли не одновременно. Из теории уединенных волн известно, что они возникают только с положительной ординатой, т. е. не существует уединенных волн в форме впадины, а существуют лишь уединенные волны в форме холмов на поверхности воды. Поэтому рассмотрим лишь волны, возникшие при *поднятии* дна на соответствующих участках. Планиметрирование площадей изобат, выражающих поднятие (через каждые 50 *м*), показало, что количество воды, вытесненной поднявшимся дном, достигло громадной величины

$$\Omega = 22{,}6\ км^3 = 2{,}26 \cdot 10^{10}\ м^3.$$

Совершенно очевидно по условию неразрывности, что именно этот объем воды должна была нести в себе та уединенная волна, которая возникла благодаря подъему дна. Эта волна частично ушла в океан сквозь проход между мысами Симода и Суносари, частично же набежала на берега залива, заключенные между этими мысами, залила их, отразилась и только после этого ушла в океан.

Если бы дно залива было плоское, то можно было бы совершенно точно вычислить высоту образовавшейся волны, исходя из этих соображений. Объем воды, заключенный в «холме» уединенной волны, определяется путем интегрирования выражения, вытекающего из (134):

$$\Omega = 2hL\int_0^\infty \operatorname{sech}^2 \frac{1}{2}\left(\frac{x}{b}\right) dx = 4hbL, \tag{137}$$

где L — длина фронта волны. В данном случае под L следует подразумевать периметр берегов залива, на которые набегала волна, и периметр «свободного фронта» волны, сразу вырвавшейся в открытый океан, сквозь проход между крайними мысами. На основании (135) выражение b можно подставить в (137). Тогда окажется, что

$$\Omega = 4hLH\sqrt{\frac{H+h}{3h}}. \tag{138}$$

Если глубина H велика по сравнению с высотой h волны, то из (138) может быть получена более удобная расчетная формула. Именно, пренебрегая величиной h, по сравнению с H, в числителе дроби под корнем и выполнив простые преобразования, найдем

$$h = \frac{3}{16H^3}\left(\frac{\Omega}{L}\right)^2. \tag{139}$$

При сложном рельефе дна в настоящее время не только еще невозможно найти точное выражение, аналогичное (139), но нельзя даже судить о сколько-нибудь строго установленном законе изменения элементов уединенной волны при движении ее в бассейне с переменными глубинами. Однако о порядке величины h можно составить примерное суждение, воспользовавшись формулой (139) и подставив в нее какое-то достаточно характерное значение глубины моря в данном районе. Примем в качестве такого характерного значения $H = 800$ *м*. На основании определений З. К. Григораш, $\Omega = 2{,}26 \cdot 10^{10}\ м^3$, $L = 1{,}62 \cdot 10^3\ м$. В таком случае по (139) оказывается $h = 7{,}1$ *м*. На карту нанесены в некоторых местах следующие цифры, записанные по показаниям очевидцев и позволяющие судить о действительных значениях высоты волны, набежавшей на берег: близ Камакура — около 3,3 *м*, близ Цуруги — около 6 *м*, близ Нодзима — около 10 *м*. Как видим, даже грубые теоретические соображения дают правильный порядок для высоты уединенной волны, порожденной землетрясением [17].

§ 16. Некоторые теоретические и экспериментальные исследования по проблеме цунами

Недавние катастрофические наводнения, порожденные подводными землетрясениями на Тихом океане, вызвали к жизни целую серию новых исследований по этой проблеме как теоретических, так и экспериментальных, — и в нашей стране, и в Японии, особо подверженной вторжениям волн цунами.

В совершенно общем виде была поставлена и решена гидродинамическая задача об отражении волн цунами от берегов океана в работах Л. Н. Сретенского [18, 19]. Наиболее полным является второе из этих исследований. Уравнения Эйлера, включающие компоненты кориолисовой силы, и уравнение неразрывности, записанное применительно к району океана с конечной глубиной H, приводят к осложненному волновому уравнению

$$\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2} - 2\omega H\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right) = gH\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}\right), \tag{140}$$

где ζ — подъем уровня над положением покоя, и к уравнению, также вытекающему из основных уравнений гидродинамики,

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right) + \frac{2\omega}{H}\zeta = F(x, y). \tag{141}$$

Даже при переменной глубине океана H сопоставление (141) с (140) дает уравнение, которое принципиально можно интегрировать:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2} + 4\omega^2\zeta - g\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(H\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(H\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right)\right]\right\} + 2\omega g\frac{D(\zeta, H)}{D(x, y)} = 0. \tag{142}$$

Но это — уравнение третьего порядка, которое, по всей вероятности, будет проинтегрировано в будущем. В первую очередь следует остановить внимание на варианте, позволяющем проще подойти к цели и в то же время дающем достаточно близкие к истине результаты. Это — вариант постоянной глубины H океана в данном районе. Здесь задача сводится к интегрированию уравнения, получаемого при $H = \text{const}$ путем сопоставления (141) с (140):

$$\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2} + 4\omega^2\zeta = gH\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}\right) + 2\omega HF(x, y). \tag{143}$$

Сложность интегрирования этого, на первый взгляд простого, уравнения заключается в том, что функция F пока — неопределенная; ее приходится связывать со вспомогательными функциями A, B и вспомогательным аргументом τ, который может быть связан с F промежуточным соотношением

$$u(\tau) = \int_0^\tau F(t)\,dt.$$

В результате длинной цепи преобразований Сретенский получает обыкновенное уравнение четвертого порядка

$$\frac{d^4u}{d\tau^4} + s^2\frac{d^2u}{d\tau^2} + 4\omega^2k^2c^2u^2 = 2i\omega kc^2f'(0, k) + c^2\frac{\partial B(\tau, 0, k)}{\partial\eta}, \tag{144}$$

для интегрирования которого, очевидно, нужны четыре начальные условия:

$$\begin{gathered} u(0) = 0, \left(\frac{du}{d\tau}\right)_0 = f(0, k), \left(\frac{d^2u}{d\tau^2}\right)_0 = \varphi'(0, k), \\ \left(\frac{d^3u}{d\tau^3}\right)_0 = c^2f''(0, k) - s^2f(0, k). \end{gathered} \tag{145}$$

Следовательно, для решения полной задачи, с учетом поля кориолисовой силы, требуется составить эти условия применительно к заданной физико-

географической картине, проинтегрировать обыкновенное уравнение четвертого порядка, из которого определится u. Затем надо путем дифференцирования u найти F, а по нему — вспомогательную функцию A и, наконец, искомый закон изменения $\zeta(x, y, t)$.

На путях к решению этой чрезвычайно сложной общей задачи Л. Н. Сретенский совместно с А. С. Ставровским дал в окончательном виде решение упрощенной задачи о высотах волн цунами в различных точках береговой черты (без учета влияния кориолисовой силы) [20].

Считается заданным закон изменения во времени вертикальной скорости f точки (x, y) на дне океана постоянной глубины H. В этом случае уравнения Эйлера (без компонент кориолисовой силы) совместно с уравнением неразрывности при постоянном H приводят к волновому уравнению

$$\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2} = gH\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}\right) + \frac{\partial f}{\partial t}. \tag{146}$$

Естественно считать и скорости движений, и вертикальное смещение дна равными нулю в момент, предшествовавший подводному землетрясению, т. е. при $t = 0$. Поэтому уравнение (146) надо интегрировать при начальных условиях

$$\zeta = 0, \quad \frac{\partial\zeta}{\partial t} = f(x, y, 0). \tag{147}$$

Авторы применяют к определению интеграла метод Вольтерра, введя вместо t новое независимое переменное, обладающее размерностью *длины* $\tau = t\sqrt{gH}$. После этого уравнение (146) заменяется более простым по форме

$$\frac{\partial^2\zeta}{\partial\tau^2} = \frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2} + F(x, y, \tau), \tag{148}$$

причем

$$F(x, y, \tau) = \frac{1}{\sqrt{gH}}\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{t=\frac{\tau}{\sqrt{gH}}}. \tag{149}$$

Ось X направлена вдоль берега, считающегося прямолинейным в исследуемом районе; ось Y перпендикулярна берегу и направлена в океан. Интеграл уравнения (148) записан в [20] применительно к произвольно заданному закону изменения f. Простейшее решение получается, если $f(x, y, \tau) = K\tau$, причем K — постоянная величина, отличная от нуля только на протяжении отрезка, параллельного оси X, с концами, отстоящими от оси Y на расстояния $\pm l$. Этот отрезок удален от оси X на расстояние y_0. Во всем остальном пространстве $K = 0$.

При таких условиях интеграл от (148) записывается в виде

$$\zeta(x_1, y_1, \tau_1) = \frac{G}{2\pi}\iint\limits_{(D)} \frac{dx\,dy}{\sqrt{(\tau_1 - \tau)^2 - (x_1 - x)^2 - y_1^2}}. \tag{150}$$

Величина G, входящая сюда и позволяющая судить о масштабах диаграмм для профилей волн цунами, выражается так:

$$G = \frac{1}{\sqrt{gH}}\lim_{dy\to 0}(K\,dy). \tag{150а}$$

Область интегрирования D можно найти, если представить себе систему координат x, y, τ, в которой построен конус

$$(\tau_1 - \tau)^2 = (x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2.$$

Область D определяется пересечением этого конуса с полоской в той же системе координат, определяемой условиями: $-l < x < l$; $0 < \tau < T$; $y = 0$.

Л. Н. Сретенский и А. С. Ставровский вычислили, в условном масштабе, возвышения уровня океана вдоль береговой черты. На диаграммах по оси абсцисс отложены расстояния x от начала координат в километрах, по оси ординат не сами возвышения ζ, а значения $\frac{2\pi}{G}\zeta$. На рис. 112 эти величины даны применительно к различным значениям независимого переменного τ *до*

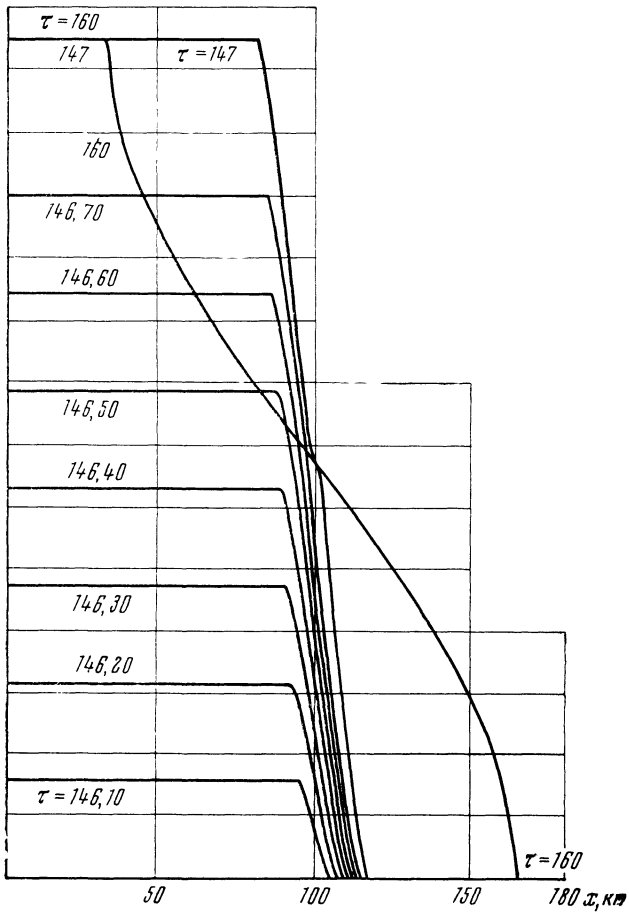


Рис. 112. Подъем воды вдоль береговой черты, для последовательных моментов, до образования пикообразного гребня

возникновения пикообразного гребня, на рис. 113 — аналогичная диаграмма для значений τ *после* возникновения пикообразного гребня. При вычислениях считалось, что глубина океана в исследуемом районе $H = 3000$ *м*, а длина отрезка, вдоль которого произошло поднятие дна при землетрясении, $2l = 200$ *км*. Расстояние до берега $y_0 = 146$ *км*. Цифры при кривых показывают, какому значению τ отвечает каждая из них. Вместо этих значений легко найти, какому моменту времени после подземного толчка соответствует та или иная кривая (ведь при глубине океана 3000 *м* скорость длинных волн $c = 172$ *м/сек*). Следовательно, расстояние до ближайшей точки берега, равное 146 *км*, волна цунами пройдет за 850 *сек*, т. е. 14,3 *мин*. Первая кривая на рис. 112, отмеченная цифрой 146,10, соответствует времени пробега на 5,8 *сек* больше, а последняя кривая, отмеченная цифрой 160, — моменту времени через 930 *сек*, т. е. 15,5 *мин* после подземного толчка. Наивысший

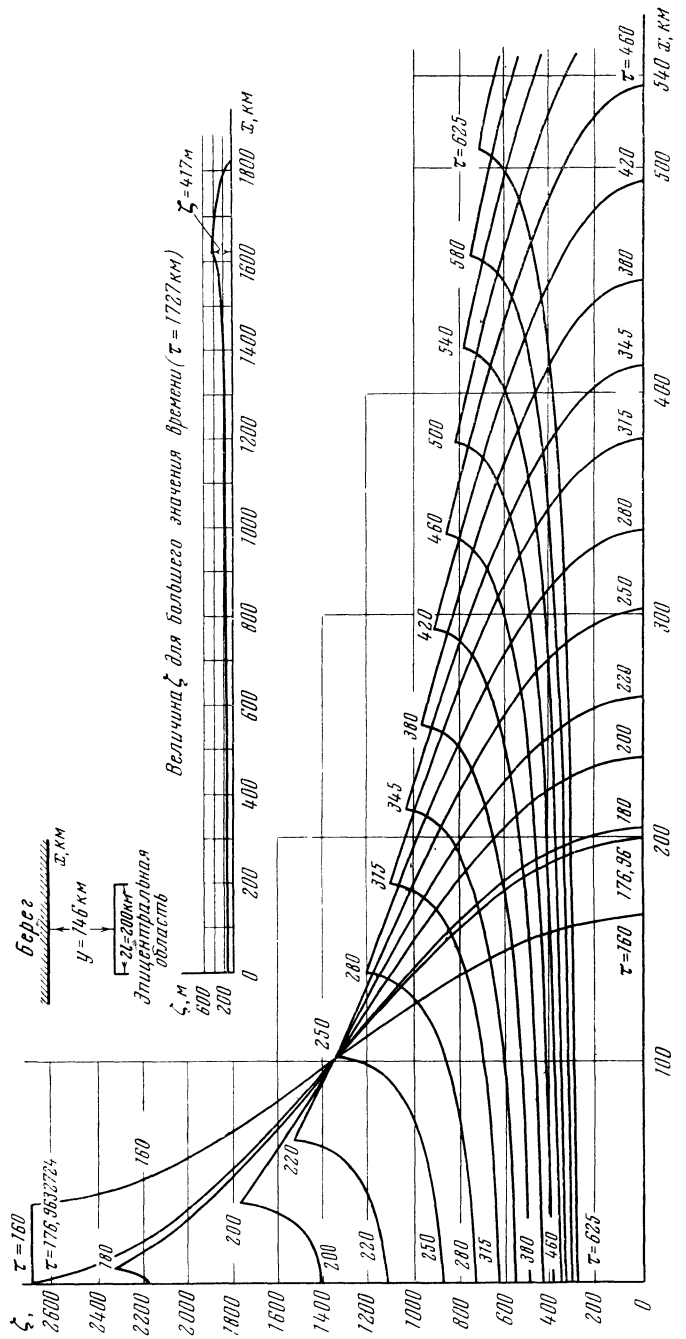


Рис. 113. Подъем воды вдоль береговой черты, для последовательных моментов, после возникновения пикообразного гребня

пик у ближайшей точки побережья возникает через 5 *сек* после того, как до него добежала волна цунами ($\tau = 146{,}858$). Затем уровень начинает падать довольно медленно, как видно на рис. 113: через 6,7 *мин* после толчка землетрясения уровень падает на $^2/_7$ от максимального, через 16,7 *мин* — на 0,52 от максимального (соответствующий профиль для этого момента дан в уменьшенном масштабе на врезке к рисунку).

Очень интересна диаграмма Л. Н. Сретенского и А. С. Ставровского, представленная на рис. 114. Она по-иному освещает исследованное ими явление: показывает, по какому закону изменяется во времени уровень океана в различных пунктах побережья. Расстояния каждого из этих пунктов от начала координат записаны при каждой кривой. По оси абсцисс вместо времени отмечены в оригинале значения независимого переменного τ, связанного с t прежним соотношением. Добавлены отметки времени, отсчитываемого в минутах, с момента подводного толчка. Из диаграммы видно, что в точках побережья, удаленных от начала координат не более чем на 100 *км*, уровень океана стремительно подымается до пика, а затем монотонно падает; в точках побережья, лежащих далее 100 *км* от начала координат, подъем происходит все более и более плавно, приближаясь к максимальному уровню, а после него уровень все медленней и медленней падает.

Авторы произвели вычисление также и для второго варианта: вместо $2l = 200$ *км* задались протяжением отрезка, на котором происходит подъем дна, $2l = 10$ *км*. Применительно к такому условию возвышение уровня океана над положением покоя, вдоль береговой черты, меняется так, как показано на рис. 115. Над пиками отмечены соответствующие значения независимого переменного τ, а близ максимальных ординат проставлены их значения в прежнем условном масштабе.

Определение этого условного масштаба и переход от цифр, проставленных на осях ординат всех трех диаграмм, станет возможным тогда, когда сейсмологи найдут закон изменения скоростей f подъема дна во время подводных землетрясений и позволят наилучшим образом аппроксимировать гипотетическое соотношение (151).

Уравнение третьего порядка в частных производных (142), возникшее при учете изменений глубины H океана, должно привести, в конечном счете, к несравненно более сложному уравнению в обыкновенных производных, чем уравнение четвертого порядка (144). Совсем непреодолимые затруднения возникали бы при попытках аналитического решения задач применительно к волнам цунами в *проливах*, где меняется не только глубина H, но и расстояние между берегами.

Между тем именно в проливах увеличивается опасность волн цунами и возрастает потребность в детальном изучении возможных наибольших высот этих волн. В частности, это относится ко Второму Курильскому проливу, берега которого нередко подвергаются опасности. Вот почему большой практический интерес представляет *моделирование* длинных волн применительно к условиям этого пролива.

Такое моделирование было произведено З. К. Григораш и А. Б. Заклинским в подмосковной лаборатории Морского гидрофизического института Академии наук СССР [21]. Размеры модели были $8 \times 6{,}4$ *м*, причем горизонтальный масштаб брался 1 : 5000, а вертикальный — при лепке рельефа дна в бетоне — 1 : 200. При возникшем искажении пропорций в 25 раз масштаб для скорости оказался $m_c = \sqrt{1:200} \approx 0{,}07$, масштаб для времени $m_t = \frac{l}{L\sqrt{1:200}} = 0{,}0028$. Здесь l — отрезок на модели, который соответствует отрезку в натуре L. Эти соотношения получены в предположении, что для вычисления скоростей длинных волн можно пользоваться формулой Лагранжа $c = \sqrt{gH}$.

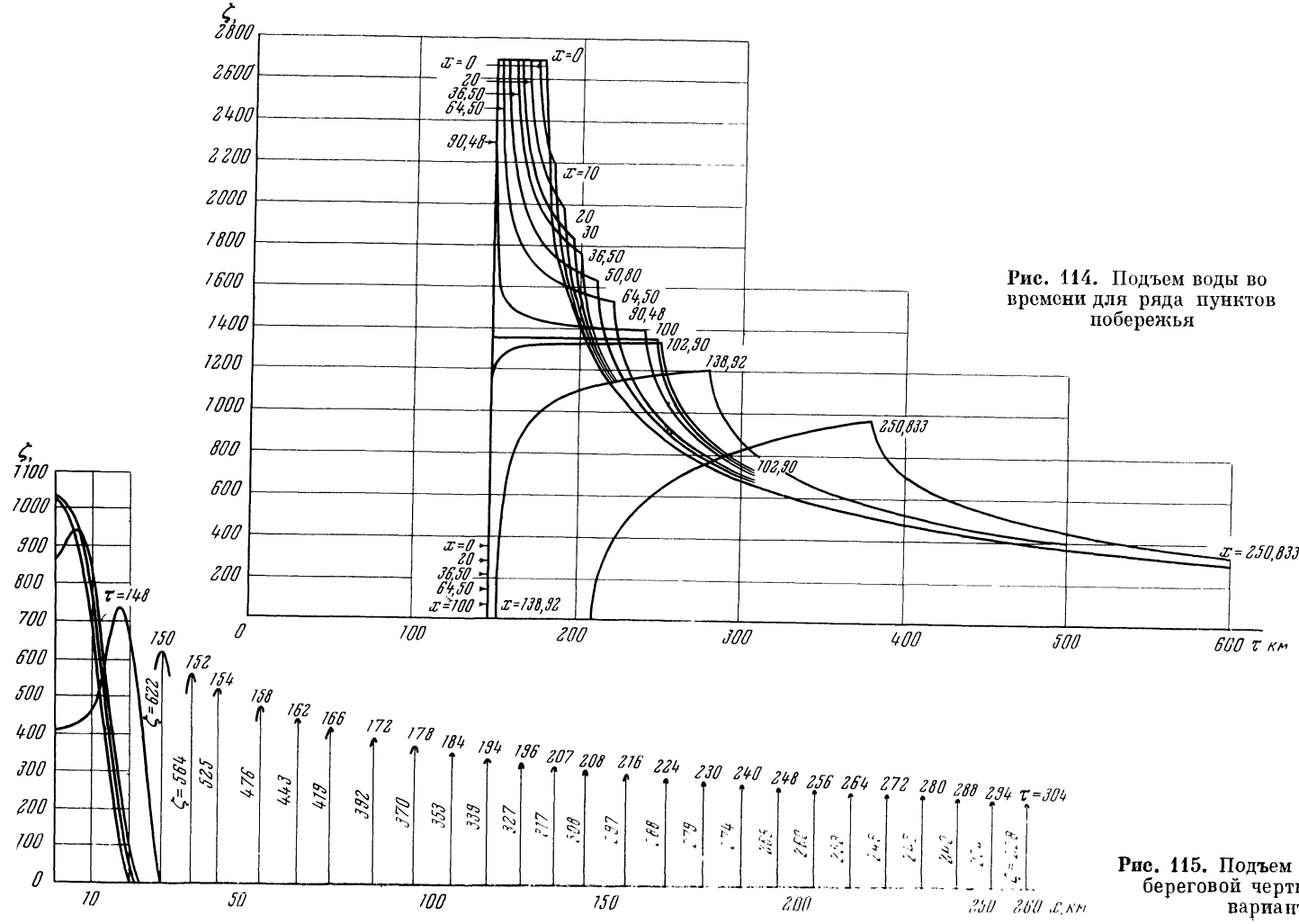


Рис. 114. Подъем воды во времени для ряда пунктов побережья

Рис. 115. Подъем воды вдоль береговой черты. Второй вариант.

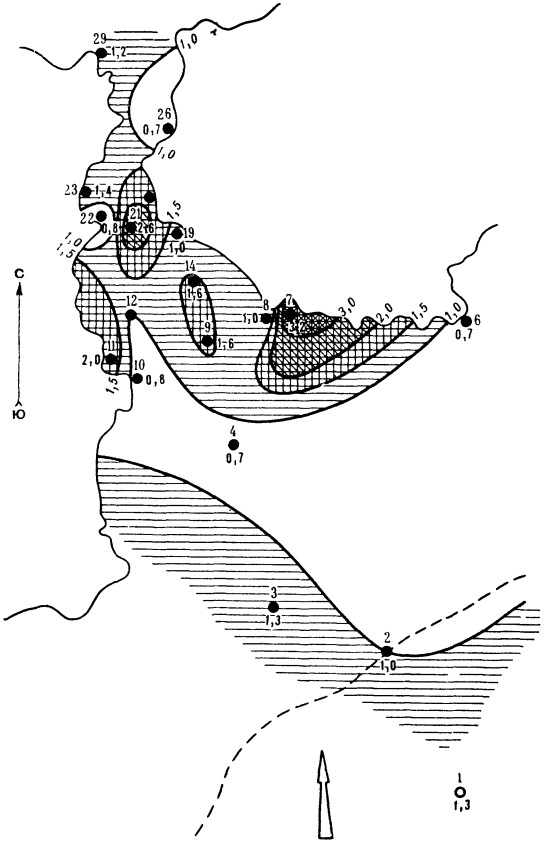


Рис. 116. Изолинии относительных возвышений. Волна с юга

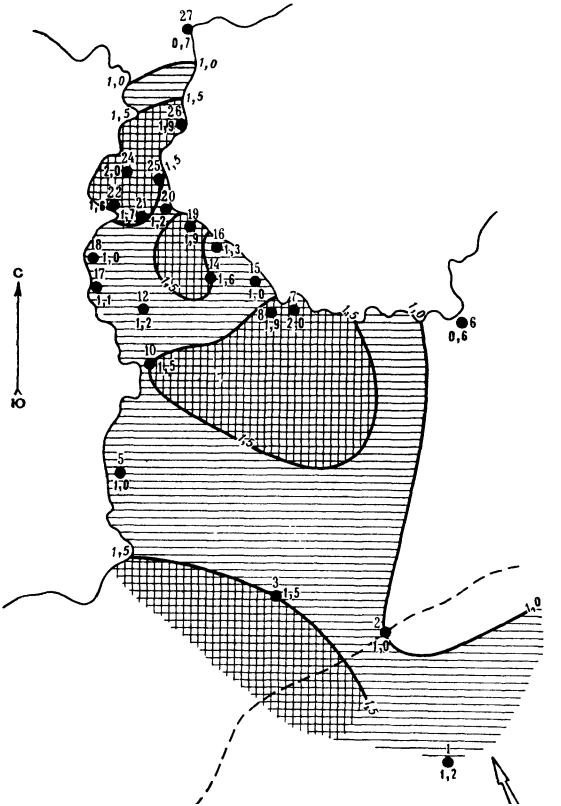


Рис. 117. Изолинии относительных возвышений. Волна с юго-востока

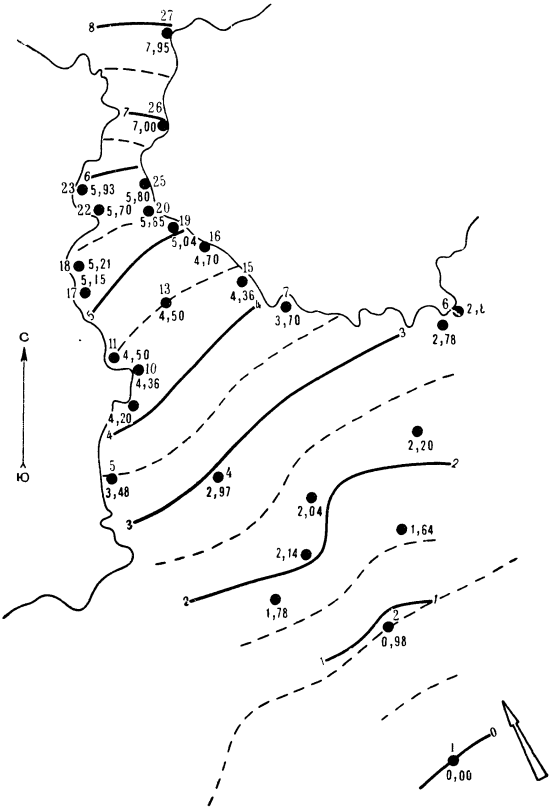


Рис. 118. Карта времен перемещения. Волна с юга

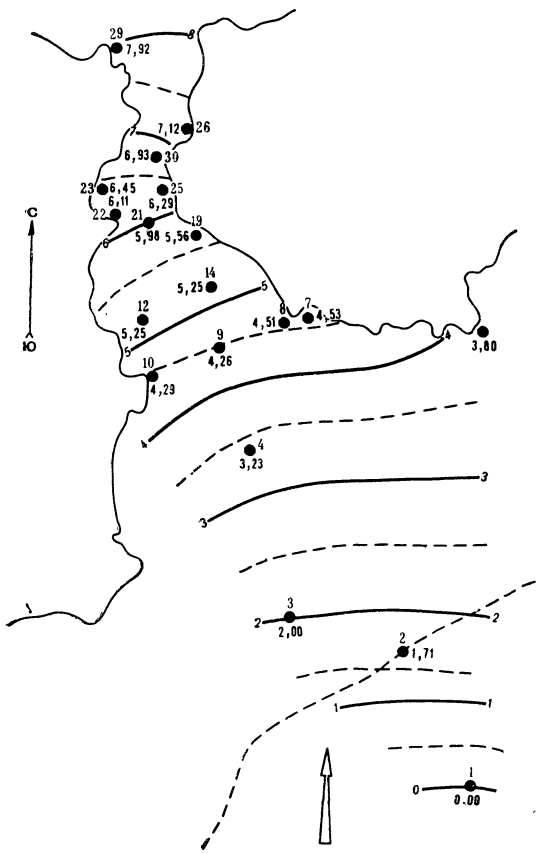


Рис. 119. Карта времен перемещения. Волна с юго-востока

Естественными границами на модели служили берега. Одна из искусственных границ была параллельна фронту волны, создаваемой при быстром опускании бруса-волногона. Две другие границы были перпендикулярны этому фронту — они осуществлялись волногасительными приспособлениями. На некотором протяжении, до входа в пролив, глубина бассейна была постоянная: воду можно было наполнять до высоты слоя около 29 *см* (в одной серии было принято $H = 28{,}9$ *см*, в другой — 29,5 *см*). Датчики, служившие для регистрации колебаний уровня воды в проливе, были основаны на принципе изменения сопротивления в электрической цепи. В каждом датчике было по два серебряных цилиндрических электрода, отделенных друг от друга водой бассейна. При колебаниях уровня колебалась длина столба воды между электродами. Одновременно работали девять таких датчиков, включенных в цепь шлейфов двух осциллографов МПО-2. Вся система работала на переменном токе с напряжением 4,5 *в* и частотой 50 *гц*. Запись на пленках осциллографов получалась в виде широких волнообразных полос. На тех же лентах осциллографов автоматически отмечались моменты времени. За начало отсчета условно принимался момент прохождения волны через дагчик № 1. Температура воды была постоянной во всех точках бассейна : 19,4°.

На рис. 116 и 117 черными кружочками отмечены точки, в которых располагались датчики, при двух вариантах опыта. На первом из этих рисунков изображены результаты опытов с уединенной волной, которую волногон посылал «в направлении меридиана, с юга»; на втором рисунке видны результаты опытов «при поступлении волны с юго-востока». Близ каждой точки отмечены относительные высоты подъема уровня над положением покоя, причем за единицу принят подъем уровня у датчика № 2. Жирные кривые на рисунках представляют собой изолинии подъема уровня, проведенные на основании многократных измерений, в каждом из двух вариантов. На рис. 118 и 119 представлены изохроны, показывающие, как перемещался фронт уединенной волны при поступлении ее в тех же двух направлениях. Жирные кривые проведены через интервалы 1 *сек*, а пунктирные — через 0,5 *сек*. Изгибы изохрон хорошо отмечают особенности рельефа пролива, а сгущения их соответствуют тем пунктам, где наблюдаются особо большие подъемы уровня при набегании уединенной волны.

И карты подъемов уровня, и карты изохрон доказали возможность пользоваться моделью для детальных количественных исследований цунами. Опыты дали отчетливое представление о расположении наиболее опасных участков побережья. Совершенно бесспорно, что в будущем, при выборе места для каких-либо населенных пунктов или новых сооружений, необходимо предварительно проводить подобные опыты по моделированию волн цунами, поступающих в различных вероятных направлениях.

Что касается количественных результатов опытов З. К. Григораш и А. Б. Заклинского, то они свидетельствуют о полной законности применения простой формулы Лагранжа для определения скорости длинных волн, хотя, строго говоря, не были лишены основания сомнения в точности таких вычислений при наличии высоты волн, соизмеримой с глубиной океана в прибрежной полосе. С другой стороны, опыты этих авторов обнаружили, что высоты подъема уровня в различных частях пролива *были больше*, чем вычисленные по формуле Грина. Например, у мыса Озерного, где относительная высота подъема была довольна близка к действительно наблюдавшейся в натуре 4 ноября 1952 г., формула Грина дала высоту на 50% меньшую, чем экспериментальная. Относительная высота подъема у мыса Левашева, рассчитанная по формуле Грина, оказалась на 26% меньше экспериментальной.

§ 17. Внутренние волны

В § 8 была исследована теория стоячих волн (сейш), возникающих на морях под действием импульсов при резких изменениях атмосферного давления, а иногда под действием приливообразующей силы. Амплитуды таких стоячих волн обычно невелики и не выходят за пределы долей метра.

Однако при наличии неоднородностей в вертикальном строении водных масс в море могут возникать значительно более высокие волны на поверхностях раздела между слоями различной плотности. Подобные *внутренние волны* могут достигать амплитуд свыше 100 *м*. Период этих волн в большинстве случаев измеряется часами, а иногда даже днями, а потому методика их исследования должна приближаться к методике анализа приливных явлений и уединенных волн, несмотря на то, что в их возникновении часто бывает виновен ветер.

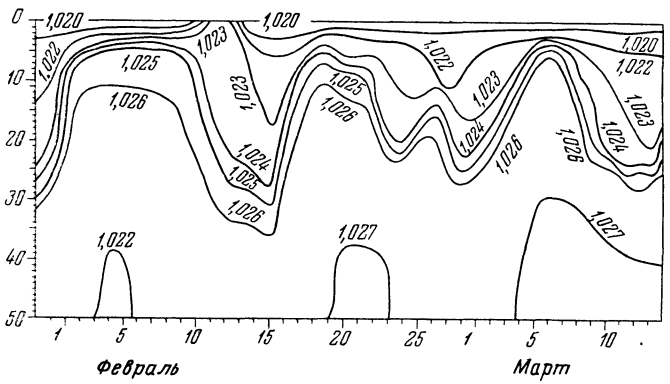


Рис. 120. Внутренние волны в Гюльмарфиорде

Теория внутренних волн разработана давно, причем она может быть применена не только к водной среде, но и к атмосфере, в которой также нередко возникают мощные слои воздуха различной плотности, движущиеся один относительно другого. Хорошим индикатором таких волн в атмосфере могут служить волнистые облака.

В толщах океанической воды, разумеется, нельзя видеть какие-либо аналогичные индикаторы, но зато здесь можно обнаружить внутренние волны весьма совершенным методом, пользуясь обильными материалами океанографических экспедиций и анализируя слои различных плотностей в разные моменты времени и в разных районах моря. Иногда на диаграммах гидрологических разрезов различные изолинии — изотермы, изогалины, изопикны — образуют замысловатый волнистый узор. Очень часто, не рассматривая физическую причину такого узора, пользуются сырым материалом разреза для составления динамических карт течений и в результате получают формально построенные динамические изобаты, которые создают ложную картину многочисленных «завихрений», колец, будто бы имеющихся в системе течений исследуемого района. В действительности волнистое строение изолиний на разрезе чаще всего свидетельствует о наличии внутренних волн на поверхностях раздела между слоями различной плотности и требует исключения погрешностей, которые возникают при пренебрежении этим обстоятельством.

Наилучшее представление о колебаниях поверхностей раздела в толще морской воды дают материалы суточных и более продолжительных станций: в продолжение срока наблюдений на одних и тех же горизонтах обнаруживается колебание значений температур, соленостей, а значит, и плотностей.

Но совершенно очевидно, что на глубинах эти элементы не могут так быстро меняться в пределах одной и той же массы воды. Значит, в действительности приборы принесли пробы воды, попавшей в данную точку с различных глубин во время периодических колебаний слоев воды.

На рис. 120 изображена схема колебаний, вызванных внутренними волнами (характера сейш), с периодом около четырнадцати дней. Эти интересные внутренние сейши были обнаружены в Гюльмарфиорде [22]. На рисунке проведены изопикны, около которых проставлены цифры, выражающие соответствующие значения плотности морской воды. По оси абсцисс отложено текущее время — числа февраля и марта, по оси ординат — глубина, на которой наблюдалась та или иная плотность. Как видно из рис. 120, слои одной плотности непрерывно совершали вертикальные колебания с амплитудой, превышавшей 15 *м*. Причину этих колебаний первоначально приписывали полумесячным неравенствам приливообразующей силы, но в результате более детального изучения, проделанного впоследствии, оказалось, что сейши возникают здесь под действием ветровых импульсов.

Посмотрим, каковы свойства внутренних волн, вытекающие из основных уравнений гидродинамики. Прежде всего без вывода запишем формулу, которая связывает скорость c_i внутренних волн со скоростью c поверхностных волн, если море чрезвычайно глубокое и толщина верхнего слоя воды с плотностью δ_2 тоже весьма велика. В этом (простейшем) случае оказывается, что

$$c_i = c\sqrt{\frac{\delta_1 - \delta_2}{\delta_1 + \delta_2}}. \qquad (151)$$

Следовательно, чем меньше разность плотностей соприкасающихся слоев морской воды, тем меньше скорость волн, возникающих на поверхности раздела между ними.

Так как разность плотностей может быть весьма мала, то скорость c_i внутренних волн оказывается во много раз меньшей, чем скорость поверхностных волн c. Так, предполагая, что $\delta_1 + \delta_2 \approx 2$, по формуле (151) найдем, что при разности плотностей 10^{-2} c_i будет в 14 раз меньше c, при $\delta_1 - \delta_2 = 5 \cdot 10^{-3}$ c_i будет в 20 раз меньше c, а при $\delta_1 - \delta_2 = 10^{-3}$ c_i будет в 45 раз меньше c. В общем случае и верхний слой воды с плотностью δ_2, и нижний с плотностью δ_1 обладают конечными толщинами H_2 и соответственно H_1. Применительно к этому случаю вместо формулы (151) записывается более сложное выражение

$$c_i^4\left[\operatorname{cth} kH_2 \operatorname{cth} kH_1 + \frac{\delta_2}{\delta_1}\right] - c_i^2\left[\operatorname{cth} kH_2 + \operatorname{cth} kH_1\right]\frac{g}{k} + \frac{\delta_1 - \delta_2}{\delta_1}\left(\frac{g}{k}\right)^2 = 0, \qquad (152)$$

в котором сокращенно обозначено $k = \frac{2\pi}{\lambda}$.

Биквадратное уравнение (152) обладает двумя вещественными корнями. Следовательно, на поверхности раздела могут возникать две системы внутренних волн, характеризующиеся двумя различными скоростями распространения. Проще всего они разделяются в двух предельных случаях.

В первом случае, когда длина волн весьма мала по сравнению с глубиной, помимо внутренних волн, распространяющихся со скоростью c_i, определяемой по формуле (151), возникнут еще волны, которые будут распространяться со скоростью

$$c = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}.$$

Как увидим в гл. III, это — фазовая скорость волн, бегущих по поверхности моря.

Если длина волн весьма велика по сравнению с глубиной моря, то уравнение (152) приводит к другому предельному значению второго корня:

волны здесь могут обладать свойствами, напоминающими свойства приливных волн, уединенных волн — волн большого периода. Иногда их называют квазистатическими на том основании, что силами динамического происхождения — инерционными, действующими в вертикальном направлении, здесь можно с полным правом пренебречь. Для этого второго предельного случая уравнение (152) дает два таких корня:

$$c_1^2 = \frac{\delta_1 - \delta_2}{\delta_1} g \frac{H_1 H_2}{H_1 + H_2}, \qquad c_2^2 = g(H_1 + H_2). \tag{153}$$

Но ведь сумма $(H_1 + H_2)$, стоящая во втором выражении, представляет собой не что иное, как глубину моря. Следовательно, вторая система волн, возникающих в таком «переслоенном» море, характеризуется той же скоростью, с какой чрезвычайно длинные волны распространяются в море с однородной по плотности водой в соответствии с формулой (16).

Первое из уравнений (153) дает скорость, несравненно меньшую. Ее выражение может быть несколько упрощено применительно к тем морям, где толщина H_2 верхнего слоя мала по сравнению с толщиной H_1 слоя нижнего. В этом случае, полагая в уравнении (153) $H_1 + H_2 \approx H_1$, запишем

$$c_1 = \sqrt{gH_2}\sqrt{\frac{\delta_1 - \delta_2}{\delta_1}}. \tag{154}$$

Значит, при определении c_1 можно рассматривать воды нижнего слоя как своего рода «жидкий грунт», над которым длинные волны распространяются в ограниченном слое H_2. Обычные волны бо́льших периодов распространялись бы в таком слое толщиной H_2 со скоростью $\sqrt{gH_2}$, а внутренние волны, как видим, распространяются со скоростью, которая составляет от нее лишь очень малую долю

$$\sqrt{\frac{\delta_1 - \delta_2}{\delta_1}}.$$

Выше был приведен пример возникновения внутренних волн, имеющих характер сейш с чрезвычайно большим периодом. Из приведенных формул нетрудно получить значение периода T_1 таких внутренних сейш

$$T_1 = \frac{2L}{\sqrt{\frac{g(\delta_1 - \delta_2)}{\frac{\delta_1}{H_1} + \frac{\delta_1}{H_2}}}}. \tag{155}$$

Здесь L — длина водоема, в котором возникают сейши (одноузловые), остальные обозначения прежние.

Применительно к сейшам в Гюльмарфиорде [22], изображенным на рис. 120, формула (155) дает $T_1 = 13{,}9$ дня. В действительности этот период оказался равным 14 дням. Значит, формула (155) дает хорошие результаты.

Помимо внутренних сейш, следует еще упомянуть об интересных внутренних волнах, которые возникают на границе раздела между разнородными слоями морской воды, когда по поверхности моря идет корабль. Существование таких внутренних корабельных волн было открыто при исследовании явления, носящего название «мертвой воды» и замеченного Нансеном во время его экспедиции на «Фраме». Оказалось, что судно это, обладавшее, вообще говоря, средним ходом, целыми часами было не в состоянии выйти за пределы небольшого участка, охваченного «мертвой водой». Подобные участки встречались преимущественно в устьях рек и фиордов, где слой пресной

воды располагался поверх соленой. В лаборатории при наложении двух разнородных слоев воды и протягивании вдоль канала модели корабля, обнаружились внутренние волны, бежавшие по поверхности раздела между слоями. На создание и поддержание этих волн затрачивалась очень большая часть мощности судовой машины, а потому скорость «Фрама» резко падала.

В природных условиях очень редко бывает такой внезапный скачок плотностей между двумя соприкасающимися слоями. Это наблюдается только в районах, о которых сейчас говорилось. Обычно благодаря процессам перемешивания граница между разнородными массами вод бывает несколько сглажена. Тем не менее полученные выводы можно в качестве первого приближения применять там, где градиент плотности в слое скачка очень велик. При более плавном переходе от слоя к слою более верные результаты могут быть получены, если разбить толщу морской воды не на два, а на три (или больше) слоя различных плотностей, лежащих один нал другим.

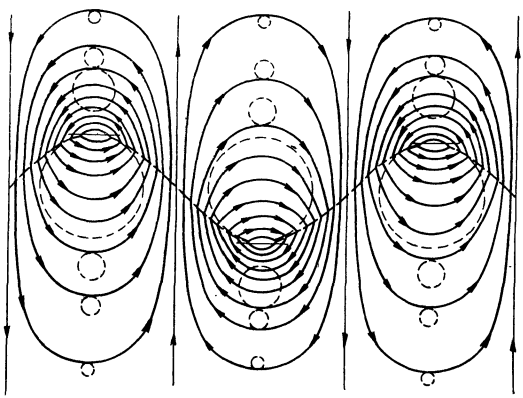


Рис. 121. Линии тока и орбиты частиц на внутренних волнах

Методика анализа таких более сложных случаев пригодна для исследования какого угодно числа слоев, на которые разбивается толща морской воды. Для удобства выкладок вместо обычных геометрических единиц длины вводятся динамические глубины D, или разности гравитационных потенциалов, которые, как помним (см. гл. 1), включают и геометрические глубины, и напряженность поля тяжести.

Так, например, вместо обычной формулы для скорости волн большого периода можно принять

$$c = \sqrt{D}. \tag{156}$$

Формулу (154) перепишем в виде

$$c_1 = \sqrt{D}\sqrt{\frac{\delta_1 - \delta_2}{\delta_1}}, \tag{157}$$

или с достаточным приближением

$$c_1 = \frac{\delta_1 - \delta_2}{2\delta_1}\sqrt{D}. \tag{158}$$

Во все выражения, связанные с распространением внутренних волн, входит в качестве главного параметра величина $\frac{\delta_1 - \delta_2}{\delta_1}$. Естественно ожидать, что этот параметр скажется и на амплитуде внутренних волн. Действительно, при образовании поверхностной волны совершается определенная работа на подъем масс воды в среднем на высоту, пропорциональную амплитуде.

Но совершенно очевидно, что эта работа должна быть значительно меньше, когда воде с плотностью δ_2 приходится подниматься не в воздушной среде, а в воде, только с плотностью δ_1, близкой к δ_2. При подъеме каждого кубического метра на высоту 1 *м* здесь будет совершаться работа, равная $g(\delta_1 - \delta_2)$.

Иными словами, при совершении одной и той же работы вода в среде с плотностью δ_2 поднимется на значительно бо́льшую высоту по сравнению с тем случаем, когда ей приходилось подниматься в воздушной среде.

Вот почему под влиянием совсем небольших возмущений в переслоенной морской воде могут возникать внутренние волны с громадной амплитудой, иногда превышающей 100 *м*.

По мере удаления от поверхности раздела, на которой возникли внутренние волны, амплитуды колебаний водных частиц убывают как по направлению вниз, так и по направлению вверх. Это изображено на диаграмме рис. 121, построенной В. Бьеркнесом [23]. Сама поверхность раздела между разнородными слоями воды нанесена пунктирной кривой. Тонкие пунктирные окружности представляют орбиты частиц, различно удаленных от поверхности раздела, а сплошные линии со стрелками на них — линии тока.

В заключение этого краткого параграфа надо сказать еще об одном особом виде внутренних волн — *о внутренних уединенных* волнах. Теорией таких волн и лабораторными экспериментами над ними занимался Г. Кейлеген [24]. Задача ставилась так.

В океане или в море над слоем более плотной воды толщиной H располагается слой менее плотной воды толщиной H'. Какое-то возмущение на поверхности раздела между вторым слоем и воздухом вызывает соответствующее возмущение на поверхности раздела между двумя разнородными слоями морской воды.

Если бы амплитуда уединенной волны, возникшей таким образом на поверхности раздела, была бесконечно мала, то на основании выкладок Кейлегена скорость распространения c_0 уединенной волны выразилась бы простой формулой

$$c_0^2 = g\,\frac{HH'}{H+H'}\,\frac{(\delta-\delta')}{\delta}\,. \tag{159}$$

Здесь, так же, как и во всех иных задачах, касающихся внутренних волн, решающую роль играет разность плотностей $\delta - \delta'$ нижнего и верхнего слоев.

Обычно амплитуды внутренних волн, в том числе и уединенных, настолько велики́, что их нельзя считать бесконечно малыми.

Если амплитуда внутренней уединенной волны равна a, то скорость ее распространения c выражается через c_0 следующим образом

$$c = c_0\sqrt{1+\left(\frac{H'-H}{H'H}\right)a}\,. \tag{160}$$

Г. Кейлеген получил также уравнение профиля внутренней уединенной волны

$$\zeta = a\,\mathrm{sech}^2 n\left(\frac{x}{H}-\frac{ct}{H}\right), \tag{161}$$

где ζ — возвышение над уровнем покоя, а через n сокращенно обозначено

$$n = \sqrt{\frac{1}{2}\,\frac{(H'-H)}{H'}\,\frac{a}{H'}}\,. \tag{162}$$

Может вызвать недоумение то обстоятельство, что при толщине H' верхнего слоя меньшей, чем толщина нижнего слоя H, величина n в формуле (162) становится мнимой. Цитированный автор обнаружил, что в этом случае у внутренней уединенной волны должна быть *отрицательная амплитуда* a, т. е. по поверхности раздела бежит не «холм», а «впадина».

Перевод статьи Г. Кейлегена и еще четырнадцать переводных статей различных авторов, посвященных внутренним волнам, изданы в отдельном сборнике [24].

ГЛАВА ТРЕТЬЯ

КИНЕМАТИКА, ДИНАМИКА И РАСЧЕТ ВЕТРОВЫХ ВОЛН

§ 1. Общие соображения

При исследовании приливных волн, а также волн типа уединенных, вызванных подводными землетрясениями, можно было считать высоту волн бесконечно малой по сравнению с их длиной. С другой стороны, оказывалось возможным считать длину волн бесконечно большой по сравнению с глубиной моря, даже в самых глубоких частях Мирового океана. Эти два обстоятельства сильно упрощали анализ явлений с его формальной (математической) стороны и в то же время упрощали подход к явлению с точки зрения его физической сущности.

Сейчас, приступая к изучению ветровых волн и мертвой зыби, можно было бы начать с самого простого случая: распространения бесконечно низкой зыби в весьма глубоком море. Но и в этом случае от признаков, с которыми мы познакомились в гл. II, уцелел бы лишь правильный, простой синусоидальный профиль волн. Скорость распространения волн коренным образом отличалась бы от того выражения, которое было получено для волн прилива. Совсем иными являются орбиты частиц. Возникает непостоянство размеров орбит на различных расстояниях от поверхности моря в противоположность тому постоянству, которое характеризовало движение водных частиц на приливной волне, искажаемое лишь трением в придонном слое моря.

Ни с точки зрения принципиальной, ни с точки зрения практической нет смысла в настоящее время рассматривать идеализированный случай синусоидальной волны с бесконечно малой высотой. Поэтому положим, что отношение высоты волн к их длине — конечная величина, и пока будем ее считать все же не очень большой, допускающей применение классических основных соотношений.

Впоследствии выясним, до какого предела применимы подобные соотношения.

§ 2. Вывод классических соотношений для глубокого моря

Наблюдения и опыты давно показали, что при движении волн на поверхности воды сами водные частицы не переносятся со скоростью волн, а движутся по замкнутым или почти замкнутым орбитам вокруг той точки, в которой находилась соответствующая частица в состоянии покоя.

Именно поэтому, исследуя такое движение, удобно применить уравнения гидродинамики в форме Лагранжа, задавшись координатами (a, b) частицы в состоянии покоя. Третья координата не будет применяться в задаче, так как волны будут считаться двумерными (плоскими) и здесь, и в преобладающем числе задач настоящей главы. Там, где будут рассматриваться волны

иного типа (трехмерные, или пространственные), это будет особо оговорено в тексте.

Начало координатной системы поместим на спокойной поверхности моря, ось X направим вдоль нее, а ось Y — вертикально вниз. Составляющие внешних сил будут соответственно $X = 0$, $Y = g$.

Уравнения движения в форме Лагранжа запишем так:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\frac{\partial x}{\partial a} + \left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - g\right)\frac{\partial y}{\partial a} + \frac{1}{\delta}\frac{\partial p}{\partial a} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\frac{\partial x}{\partial b} + \left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - g\right)\frac{\partial y}{\partial b} + \frac{1}{\delta}\frac{\partial p}{\partial b} = 0. \tag{1}$$

Условие неразрывности в форме Лагранжа дополняет систему

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial x}{\partial a}\frac{\partial y}{\partial b} - \frac{\partial x}{\partial b}\frac{\partial y}{\partial a}\right) = 0. \tag{2}$$

Всем этим уравнениям удовлетворяет частное решение, соответствующее круговращательному движению каждой частицы воды вокруг своего положения покоя. Запишем его в следующей форме:

$$x - a = r\sin\theta,$$

$$y - b = r\cos\theta, \tag{3}$$

где r — радиус орбиты, как-то зависящий от радиуса орбиты поверхностных частиц r_0 и от расстояния b от поверхности моря, а θ — линейная функция текущего времени t и координаты a точки покоя частицы:

$$r = f(r_0, b),$$

$$\theta = ka - \omega t. \tag{4}$$

За время одного периода волн T фаза перемещается вдоль оси X на расстояние, равное длине волн λ. Следовательно, можно положить, что

$$k = \frac{2\pi}{\lambda},$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T}. \tag{5}$$

Для определения зависимостей, скрытых в формулах (4) и (5), прежде всего учтем условие неразрывности (2), в котором придется заменить частные производные их выражениями на основании (3), (4):

$$\frac{\partial x}{\partial a} = 1 + kr\cos\theta, \quad \frac{\partial x}{\partial b} = \sin\theta\frac{\partial r}{\partial b};$$

$$\frac{\partial y}{\partial a} = -kr\sin\theta, \quad \frac{\partial y}{\partial b} = 1 + \cos\theta\frac{\partial r}{\partial b}. \tag{6}$$

Подставив (6) в форму (2), получим

$$\frac{\partial x}{\partial a}\frac{\partial y}{\partial b} - \frac{\partial x}{\partial b}\frac{\partial y}{\partial a} = (1 + kr\cos\theta)\left(1 + \cos\theta\frac{\partial r}{\partial b}\right) + kr\sin^2\theta\frac{\partial r}{\partial b} =$$
$$= 1 + kr\frac{\partial r}{\partial b} + \left(kr + \frac{\partial r}{\partial b}\right)\cos\theta.$$

Но согласно формуле (2) производная по времени от этого выражения должна равняться нулю. С другой стороны, θ заведомо является функцией

времени, меняющейся между своими амплитудными значениями в пределах одного периода волн. Значит, условие неразрывности может быть удовлетворено только тогда, когда множитель при $\cos\theta$ тождественно равен нулю:

$$kr + \frac{\partial r}{\partial b} = 0.$$

Отсюда следует

$$\frac{dr}{r} = -kdb$$

и после интегрирования

$$\ln r = -kb + C.$$

Постоянная C определяется на основании условия на границе: при $b = 0$ $r = r_0$. Подставив ее найденное значение и вспомнив, что на основании формул (5) $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, запишем окончательно

$$r = r_0 e^{-kb} = r_0 e^{-2\pi \frac{b}{\lambda}}. \tag{7}$$

Итак, по мере *удаления вниз* от поверхности моря *радиусы орбит r уменьшаются по экспоненциальному закону* тем быстрее, чем короче волна. Решающей является величина отношения b/λ. Остальные зависимости получим, воспользовавшись уравнениями движения (1), в которые надо подставить выражения вторых производных от x и y по t, записанные на основании уравнения (7):

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = -r\omega^2 \sin\theta = -r_0\omega^2 e^{-kb} \sin\theta,$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -r\omega^2 \cos\theta = -r_0\omega^2 e^{-kb} \cos\theta, \tag{8}$$

а также выражения первых производных $\partial x/\partial a$, $\partial x/\partial b$, $\partial y/\partial a$ и $\partial y/\partial b$ тоже с учетом уравнения (7)

$$\frac{\partial x}{\partial a} = 1 + kr_0 e^{-kb} \cos\theta, \quad \frac{\partial x}{\partial b} = -kr_0 e^{-kb} \sin\theta;$$

$$\frac{\partial y}{\partial a} = -kr_0 e^{-kb} \sin\theta, \quad \frac{\partial y}{\partial b} = 1 - kr_0 e^{-kb} \cos\theta. \tag{9}$$

В результате получаются два промежуточных соотношения

$$\frac{1}{\delta}\frac{\partial p}{\partial a} = (1 + kr_0 e^{-kb}\cos\theta)\omega^2 r_0 e^{-kb} \sin\theta - (\omega^2 r_0 e^{-kb}\cos\theta + g)kr_0 e^{-kb}\sin\theta =$$
$$= r_0 e^{-kb}(\omega^2 - kg)\sin\theta,$$

$$\frac{1}{\delta}\frac{\partial p}{\partial b} = -kr_0 e^{-kb}\sin\theta\omega^2 r_0 e^{-kb}\sin\theta + (\omega^2 r_0 e^{-kb}\cos\theta + g)(1 - kr_0 e^{-kb}\cos\theta) =$$
$$= g - k\omega^2 r_0^2 e^{-2kb} + r_0 e^{-kb}(\omega^2 - kg)\cos\theta.$$

Первое из них умножим на da, а второе — на db. Тогда при сложении левых частей получится полный дифференциал давления, деленный на плотность, а при сложении правых — тоже простое выражение. Поэтому

$$\frac{1}{\delta}\left(\frac{\partial p}{\partial a}da + \frac{\partial p}{\partial b}db\right) = \frac{1}{\delta}dp = r_0 e^{-kb}(\omega^2 - kg)\sin\theta\, da +$$
$$+ [g - k\omega^2 r_0^2 e^{-2kb} + r_0 e^{-kb}(\omega^2 - kg)\cos\theta]\, db. \tag{10}$$

Интегрирование уравнения (10) дает

$$\frac{1}{\delta}p = C_1 + gb + \frac{1}{2}\omega^2 r_0^2 e^{-2kb} - \frac{r_0}{k}e^{-kb}(\omega^2 - kg)\cos\theta. \tag{11}$$

В частности, для самой поверхности моря из уравнения (11) найдем важное соотношение, подставив $b = 0$ и $p = p_0$:

$$\frac{1}{\delta} p_0 = C_1 + \frac{1}{2} \omega^2 r_0^2 - \frac{r_0}{k} (\omega^2 - kg) \cos \theta. \tag{12}$$

При *полном безветрии* можно считать, что во всех точках взволнованной поверхности моря давление p_0 *постоянно*, независимо от фазового угла θ. Следовательно, для удовлетворения этого граничного условия необходимо равенство нулю множителя в круглых скобках перед косинусом в уравнении (12):

$$(\omega^2 - kg) = 0, \text{ или } \omega^2 = kg. \tag{13}$$

Разделим обе части полученного равенства на k^2. Тогда в левой части окажется на основании формул (5)

$$\left(\frac{\omega}{k}\right)^2 = \left(\frac{\lambda}{T}\right)^2 = c^2,$$

а в правой части

$$\frac{g}{k} = \frac{g\lambda}{2\pi}.$$

Следовательно, *скорость* c распространения волн в *глубоком море зависит только от длины волн*

$$c^2 = \frac{g\lambda}{2\pi} \tag{14}$$

при условии, что λ чрезвычайно мала по сравнению с глубиной моря H.

Можно внести c в соотношение (4) для θ. Тогда окажется, что

$$\theta = k(a - ct).$$

Вспомнив также выражение r из соотношения (7), перепишем общие формулы (3)

$$\begin{aligned} x - a &= r_0 e^{-kb} \sin k(a - ct), \\ y - b &= r_0 e^{-kb} \cos k(a - ct). \end{aligned} \tag{15}$$

Нетрудно видеть, что это уравнения волнового движения поверхности, отстоявшей на расстояние b от уровня моря (вниз) в спокойном состоянии. Эта поверхность в спокойном состоянии так же, как и поверхность моря, граничащая с воздушной средой, являлась плоскостью. Теперь по ней распространяются со скоростью c волны, амплитуда которых убывает по экспоненциальному закону при удалении вниз.

Легко показать, что во всех точках каждой такой волнующейся поверхности сохраняется определенное постоянное давление p, не зависящее от t.

Действительно, вспомнив, что в уравнении (12) исчез последний член, запишем выражение константы интегрирования C_1:

$$C_1 = \frac{1}{\delta} p_0 - \frac{1}{2} \omega^2 r_0^2.$$

Но тогда, подставив это выражение в уравнение (11), где тоже пропадет последний член, получим после простых преобразований

$$p - p_0 = \delta g b - \pi \left[\frac{r_0^2}{\lambda} \left(1 - e^{-2\pi \frac{b}{\lambda}}\right) \right]. \tag{16}$$

Итак, волнующаяся поверхность действительно оказывается здесь настоящей изобарической поверхностью: давление p во всех ее точках не зависит

от времени t, а зависит лишь от того расстояния b, которое отделяло соответствующую плоскость внутри воды от плоской поверхности спокойного моря.

На практике чаще приходится сталкиваться с необходимостью определения не давления на какой-то колеблющейся изобарической поверхности, а законов колебания давления в неподвижной точке, находящейся на заданном постоянном расстоянии вниз от уровня спокойной поверхности моря. Такая задача легко разрешима посредством формулы (16).

Действительно, при волнении через точку, лежащую на расстоянии b ниже спокойного уровня моря, будут последовательно проходить различные изобарические поверхности. В частности, два раза за один период волн будет проходить та изобарическая поверхность, которая соответствует значению p при подстановке заданного расстояния b в формулу (16); это случится при положении колеблющейся изобарической поверхности приблизительно посредине между крайним верхним и крайним нижним ее расположением.

Следовательно, можно утверждать, что в неподвижной точке (например, на конце какой-то вехи, укрепленной в грунте) на глубине b под спокойным уровнем моря давление будет колебаться около величины $p_{\text{ср}} = \delta g b$ приблизительно на

$$\Delta p \approx \pm \delta r_0 e^{-2\pi \frac{b}{\lambda}}.$$

О том, почему такое соотношение лишь приближенное, и о том, как оно может быть уточнено, будет сказано в § 3.

Посмотрим теперь, каков профиль волн конечной (но не слишком большой) амплитуды, описываемых уравнениями (15). Найдем уравнения этого профиля в параметрической форме, приняв в качестве параметра переменный угол θ, который уже фигурировал в уравнениях, начиная с уравнений (3).

На уровне спокойной поверхности моря $b = 0$, а потому после внесения параметра θ уравнения (15) приобретут простой вид

$$x - a = r_0 \sin\theta, \tag{17}$$

$$y = r_0 \cos\theta,$$

где на основании предыдущих выкладок

$$\theta = \frac{2\pi}{\lambda}(a - ct). \tag{18}$$

Выразим a через другие величины, входящие в уравнение (18):

$$a = \frac{\lambda}{2\pi}\theta + ct,$$

и подставим это выражение в уравнения (17). Тогда окажется, что

$$x = \frac{\lambda}{2\pi}\theta + r_0 \sin\theta + ct,$$

$$y = r_0 \cos\theta. \tag{19}$$

Как видим, искомый профиль движется вдоль оси X со скоростью c — так называемой фазовой скоростью волн. Остановим это движение, положив, например, $t = 0$. Тогда можно будет воспроизвести профиль, как бы застывший в пространстве, вычертив его посредством следующей простой операции: достаточно будет взять диск радиусом

$$R = \frac{\lambda}{2\pi}, \tag{20}$$

катящийся без скольжения по горизонтальной прямой, и укрепить на нем (перпендикулярно его плоскости) пишущий штифт, острие которого отстоит от центра диска на расстоянии r_0. На неподвижном вертикальном экране такой штифт вычертит кривую, выражаемую в параметрической форме уравнениями

$$x = R\theta + r_0 \sin\theta,$$
$$y = r_0 \cos\theta. \tag{21}$$

Как известно, это — уравнения *трохоиды*, записанные в параметрической форме.

Круг радиусом R называется кругом качения, окружность радиусом r_0 — *производящей окружностью*.

Если r_0 очень мало по сравнению с R, то вычерченная трохоида весьма близка по форме к синусоиде с той же длиной волн λ и с той же их высотой $h = 2r_0$.

Чем больше значение r_0/R, тем явственнее сказывается различие между трохоидальным и синусоидальным профилями, — тем острее становятся *вершины* волн и тем положе их *подошвы*. К количественному сопоставлению различных профилей волн мы вернемся в § 8 настоящей главы.

§ 3. Вывод классических соотношений для мелководного моря

В предыдущем параграфе было показано, что круговращательное движение частиц, заданное уравнениями (3), в чрезвычайно глубоком море обязано затухать по экспоненциальному закону при удалении вниз на все большие и большие расстояния b. Это вытекает из условия неразрывности, т. е. уравнения (2). Посмотрим теперь, *как* должно на подобного рода движениях сказаться *влияние дна*, находящегося не так глубокс под поверхностью моря.

Чтобы выпуклей обрисовать *физическую* сущность влияния дна, отступим от стандартного вывода и воспользуемся приемом, получившим широкое применение в других задачах гидродинамики, где тоже требуется учитывать влияние близкого дна. Пусть прямая $X'OX$ на рис. 122 представляет след пересечения чертежа с плоскостью дна моря и положительным направлением оси Y считается сейчас направление вертикально вверх. Сперва вообразим, что дно исчезло и водная среда продолжена неограниченно вниз от $X'OX$. Тогда естественно будет полагать, что на высоте центра орбиты η над $X'OX$ водная частица описывает по-прежнему круговую орбиту с каким-то радиусом r и что на самом уровне $X'OX$ радиус такой круговой орбиты будет меньше в соответствии с уравнением (7). Обозначив его через r_H, найдем, что

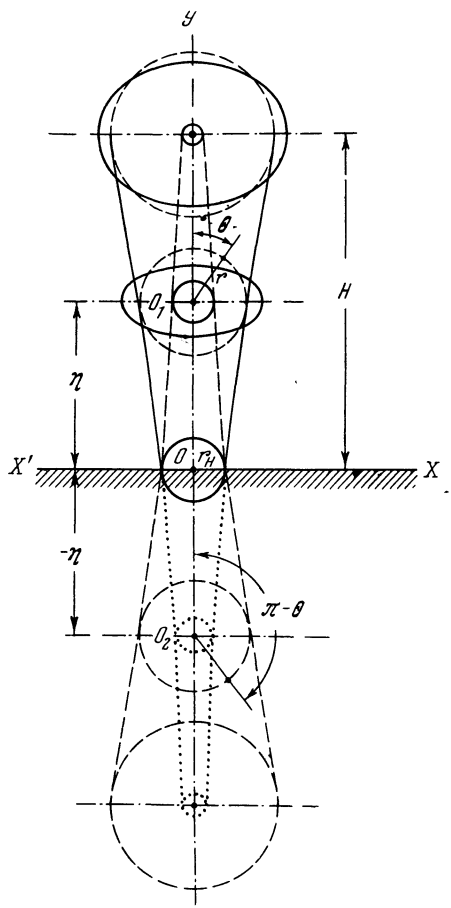


Рис. 122. Схема влияния дна на волнение

$r_H = re^{-k\eta}$. Иначе

$$r = r_H e^{k\eta}. \tag{22}$$

Для горизонтальных и вертикальных отклонений частицы запишем уравнения, аналогичные уравнениям (15):

$$\begin{aligned}(x-a)_1 &= r_H e^{k\eta}\sin\theta,\\ (y-b)_1 &= r_H e^{k\eta}\cos\theta,\end{aligned} \tag{23}$$

где θ — фазовый угол, который отсчитывается от положительного направления оси Y. Он отмечен на рис. 122, где принято движение частицы по часовой стрелке вокруг центра орбиты.

В многочисленных задачах гидродинамики принято учитывать влияние дна, рассматривая как бы *зеркальное изображение* тела, движущегося в водной среде, причем зеркалом служит плоскость дна. Найдя такое зеркальное изображение, можно удалить дно и рассматривать движение исследуемого тела совместно с движением его «двойника» в *безграничной* водной среде.

Попытаемся последовать этому примеру и нанесем на рис. 122 зеркальное изображение частицы, движущейся по окружности вокруг центра O_1. Получим двойник, который должен описывать такую же орбиту радиусом r, но только против часовой стрелки вокруг точки O_2, которая находится на расстоянии η ниже координатной оси OX.

Легко заметить, что в исследуемый момент времени радиус-вектор, проведенный из O_2 в зеркальное изображение движущейся точки, составит угол $\pi - \theta$ с положительным направлением оси Y.

Влияние движения двойника на циркуляцию вод близ точки будет тем меньше, чем больше расстояние $O_2O_1 = 2\eta$. Влияние должно убывать снизу вверх по прежнему экспоненциальному закону.

Следовательно, для учета влияния дна необходимо на движение частиц, описываемое уравнениями (23), наложить следующие добавочные составляющие:

$$\begin{aligned}(x-a)_2 &= r_H e^{k\eta}e^{-2k\eta}\sin(\pi-\theta) = r_H e^{-k\eta}\sin\theta,\\ (y-b)_2 &= r_H e^{k\eta}e^{-2k\eta}\cos(\pi-\theta) = -r_H e^{-k\eta}\cos\theta.\end{aligned} \tag{24}$$

Алгебраическое сложение составляющих уравнений (23) и (24) дает составляющие результирующего движения

$$\begin{aligned}(x-a) &= (x-a)_1 + (x-a)_2 = r_H(e^{k\eta}+e^{-k\eta})\sin\theta = 2r_H\operatorname{ch}k\eta\sin\theta,\\ (y-b) &= (y-b)_1 + (y-b)_2 = r_H(e^{k\eta}-e^{-k\eta})\cos\theta = 2r_H\operatorname{sh}k\eta\cos\theta.\end{aligned} \tag{25}$$

Формулы (25) справедливы для каких угодно значений η, в том числе и для предельного значения $\eta = H$, где H — глубина моря. Следовательно, подставив в формулы (25) это частное значение координаты, легко определить закон движения поверхностных частиц воды

$$\begin{aligned}(x-a)_0 &= A\sin k(ct-a),\\ (y-b)_0 &= B\cos k(ct-a),\end{aligned} \tag{26}$$

где сокращенно обозначено

$$A = 2r_H\operatorname{ch}kH, \quad B = 2r_H\operatorname{sh}kH.$$

Однако, исходя из таких обозначений, удобнее выразить A и B через величину, поддающуюся *непосредственным измерениям*, — через высоту волн h.

Действительно,

$$B = \frac{h}{2}, \quad A = \frac{h}{2}\operatorname{cth} kH, \quad \frac{B}{A} = \operatorname{th} kH. \tag{27}$$

Разделим обе части первого уравнения (26) на A, а обе части второго уравнения — на B, возведем в квадрат полученные левые и правые части, а потом сложим квадраты левых и правых частей. Тогда окажется, что

$$\frac{(x-a)_0^2}{A^2} + \frac{(y-b)_0^2}{B^2} = 1. \tag{28}$$

Но ведь это — каноническое уравнение эллипса. Значит, *поверхностные частицы на волнах в мелководном море описывают эллиптические орбиты* с полуосями A и B.

Как видно из уравнений (27), отношение полуосей B/A должно тем более уменьшаться по сравнению с единицей (эллипс должен делаться тем более растянутым), *чем меньше* величина $kH = 2\pi\frac{H}{\lambda}$, т. е. *чем меньше* глубина моря H по сравнению с длиной волны λ.

На рис. 123 графически изображена зависимость величины B/A от H/λ. Практически можно считать, что при глубине моря, составляющей всего лишь *половину длины волн*, малая полуось эллипса B отличается от большой A только на 0,4%. При бо́льших глубинах орбиту можно считать строго круговой. Даже при отношении $\frac{H}{\lambda} = 0{,}3$ малая ось эллипса оказывается короче большой лишь на 4,5%. Очень сильно растягиваться начинает эллипс при значениях H/λ, меньших 0,2.

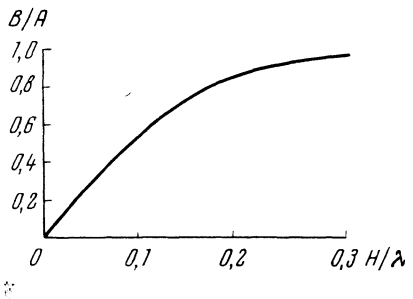


Рис. 123. Зависимость эллиптичности орбит от глубины моря

На основании уравнений (25) — (27) можно получить закон горизонтальных и вертикальных колебаний частиц на любом расстоянии от поверхности моря, или, по нашим обозначениям, на любой высоте η над дном мелководного моря, а именно

$$\begin{aligned} x - a &= \frac{h}{2}\frac{\operatorname{ch} k\eta}{\operatorname{sh} kH}\sin k(ct-a), \\ y - b &= \frac{h}{2}\frac{\operatorname{sh} k\eta}{\operatorname{sh} kH}\cos k(ct-a). \end{aligned} \tag{29}$$

Как видим, траекториями частиц здесь тоже служат эллипсы, но более вытянутые, с полуосями

$$\begin{aligned} A_\eta &= \frac{h}{2}\frac{\operatorname{ch} k\eta}{\operatorname{sh} kH}, \\ B_\eta &= \frac{h}{2}\frac{\operatorname{sh} k\eta}{\operatorname{sh} kH}. \end{aligned} \tag{30}$$

Легко убедиться, что у самого дна при $\eta = 0$ большая и малая полуоси соответственно превращаются в

$$\begin{aligned} A_{\eta=0} &= \frac{h}{2\operatorname{sh} kH}, \\ B_{\eta=0} &= 0. \end{aligned} \tag{31}$$

Как и следовало ожидать, у самого дна *исчезают вертикальные колебания частиц*: «зеркальное изображение», введенное нами для учета влияния дна, правильно передало роль дна как препятствия для существования вертикальных колебаний частиц. Что касается горизонтальных колебаний частиц, то их амплитуда у самого дна приблизительно вдвое превышает ту амплитуду, которая возникла бы на той же глубине H, если бы там не было дна. Действительно, учтя связь между гиперболическими и экспоненциальными функциями, следует записать на основании уравнений (31), что

$$\frac{A_{\eta=0}}{\frac{h}{2}e^{-kH}} = \frac{2}{1-e^{-2kH}}. \tag{32}$$

При $\frac{H}{\lambda} = 0{,}25$ соотношение (32) дает $\frac{A_{\eta=0}}{\frac{h}{2}e^{-kH}} = 2{,}09$, а при больших глубинах доходит до 2,0.

Легко понять, что это обстоятельство непосредственно вытекает из условия неразрывности: прекращение вертикальных колебаний у самого дна порождает удвоение горизонтальных перемещений частиц на этом уровне.

Попытаемся теперь найти *фазовую скорость волн* c на мелководье, применив иной вывод по сравнению с предыдущим параграфом, относившимся к глубокому морю.

Прежде всего из уравнений (26) определим составляющие скоростей *поверхностных* частиц

$$\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)_{\eta=H} = Akc\cos\theta,$$
$$\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)_{\eta=H} = -Bkc\sin\theta. \tag{33}$$

Дадим мысленно всей воде, охваченной волнением, скорость поступательного движения, которая равна по величине и противоположна по знаку искомой фазовой скорости волн, т. е. скорость $-c$. Тогда гребни и подошвы волн застынут на местах, а частицы воды будут двигаться по каким-то волнистым линиям тока со скоростями, которые будут обладать составляющими

$$u = -c + Akc\cos\theta,$$
$$v = -Bkc\sin\theta. \tag{34}$$

Если отношение высоты волн к их длине не превосходит некоторый предел, то при нашем выводе можно полагать, что линии тока для поверхностных частиц выражаются простым уравнением косинусоиды

$$y = B\cos\theta. \tag{35}$$

К такому установившемуся движению жидкости вполне применимо уравнение Бернулли, связывающее гидростатическое давление на плоскости спокойного уровня моря, скоростной напор и полное давление p:

$$p = -\delta gy - \frac{1}{2}\delta(u^2 + r^2) + \text{const}. \tag{36}$$

Подставив в (36) выражения u и v из уравнений (34), отбросим члены, содержащие квадраты полуосей A и B (после возведения в квадрат величин u и v). Тогда окажется, что

$$u^2 + v^2 \approx c^2 - 2Akc^2\cos\theta;$$

учтя, кроме того, уравнение (35), запишем вместо уравнения (36)

$$p \approx -\delta g B \cos\theta - \frac{1}{2}\delta c^2 + A\delta k c^2 \cos\theta + \text{const}. \tag{37}$$

При полном безветрии можно считать p строго постоянным на всей волнистой поверхности раздела между водой и воздухом. Иными словами, в данном случае следует считать, что

$$\delta(-gB + Akc^2)\cos\theta = \text{const}, \tag{38}$$

а это значит, что множитель при косинусе обязан тождественно равняться нулю

$$-gB + Akc^2 = 0.$$

Отсюда следует что

$$c^2 = \frac{g}{k}\frac{B}{A},$$

или после подстановки k из уравнений (5) и B/A из уравнений (27) получим

$$c^2 = \frac{g\lambda}{2\pi}\operatorname{th} 2\pi\frac{H}{\lambda}. \tag{39}$$

Как видим, выражение квадрата фазовой скорости в мелководном море отличается от подобного выражения для глубокого моря дополнительным множителем, которого не было в уравнении (14), а именно множителем $\operatorname{th} 2\pi\frac{H}{\lambda}$, полностью зависящим от величины H/λ.

Как и при оценке влияния мелководья на форму орбиты, так и теперь придется сказать, что заметное различие наступает только при очень малых значениях H/λ. При $\frac{H}{\lambda} = \frac{1}{2}$ фазовая скорость лишь на 0,2% отличается от скорости в глубоком море. Значит, практически можно пользоваться для расчетов поверхностной скорости формулой (14), во всяком случае для значений глубин H, больших половины длины волны. При $\frac{H}{\lambda} = 0{,}2$ фазовая скорость отличается от находимой по формуле (14) на 8%, а при дальнейшем уменьшении глубины это отличие резко возрастает.

Строение общей формулы (39) показывает, что невозможно представить фазовую скорость волн на мелководье как *явную* функцию одной лишь глубины, так как в формулу (39) входит величина λ, которая в свою очередь тоже зависит от глубины H. Однако можно построить диаграмму, удобную для практических целей, на которой искомая связь будет дана в параметрической форме: придется лишь в качестве аргумента принять величину H/T^2, а в качестве зависимой переменной величину c/T, где T — период волн. К этому вопросу мы еще вернемся в § 30.

На практике широко распространены исследования волн посредством регистрации *придонного давления*. В связи с этим полезно привести здесь (не останавливаясь на выкладках) соотношение, которое существует между высотой волн h и разностью Δp, отличающей наибольшее значение придонного давления от наименьшего при прохождении волн длиной λ:

$$h = \Delta p \operatorname{ch} 2\pi\frac{H}{\lambda}\cdot 10^{-3}. \tag{40}$$

Здесь разность давлений Δp измеряется в миллиметрах водяного столба, а высота волн h, длина их λ и глубина моря H — в метрах.

При выводе выражения (40) предполагалось, что потенциал скоростей изменяется по простому гармоническому закону с периодом T, равным периоду волн. Как увидим в § 7—9, на самом деле волны на поверхности моря обла-

дают *заостренной* формой, в особенности при сильном ветре. Значит, кроме основного периода колебаний потенциала скоростей, следует учитывать *высшие гармоники*, характеризующие действительный профиль волн. Эти высшие гармоники — даже вторая из них — практически дают значения Δp_n у дна, равные нулю. Следовательно, во-первых, форма кривой изменения придонного давления всегда близка к простой синусоиде и не похожа на форму профиля волн; во-вторых, действительная высота волн должна оказываться большей, чем то значение h, которое определяется по (40) на основании измеренного значения Δp у дна (об этом будет сказано в § 9) [1,2,9].

§ 4. Групповая скорость волн

В двух предыдущих параграфах было показано, что фазовая скорость волн c зависит от длины волн λ. Следовательно, при наличии весьма *сложного профиля* волн такой профиль *не может оставаться постоянным*: разложив сложную волну на составляющие, мы увидим, что каждая из них должна распространяться со своей особой фазовой скоростью, и в каждый последующий момент времени придется заново производить сложение всех составляющих, продвинувшихся на различные расстояния от начальной точки пути.

В природе никогда не наблюдаются абсолютно простые волны. Всегда волны представляют собой сумму того или иного числа простых волн, так или иначе отличающихся одна от другой по длине и высоте. Чаще всего можно встретить наложение волн, которые близки между собой по длинам, разумеется, если речь идет об основных, крупных волнах, а не о мелких обертонах, осложняющих их профиль.

Рассмотрим поведение двух таких систем волн, совместно распространяющихся в море по общему направлению.

Пусть одна из них обладает высотой h, длиной λ_1 и периодом T_1, а другая той же высотой h (для простоты выкладок), длиной λ_2 и периодом T_2. Введя обозначения

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{T_1}, \quad k_1 = \frac{2\pi}{\lambda_1}, \quad \omega_2 = \frac{2\pi}{T_2}, \quad k_2 = \frac{2\pi}{\lambda_2},$$

запишем уравнения, характеризующие вертикальные колебания y_1 и y_2 уровня моря под действием каждой из этих двух волн в отдельности:

$$y_1 = \frac{1}{2} h \sin(\omega_1 t - k_1 x),$$

$$y_2 = \frac{1}{2} h \sin(\omega_2 t - k_2 x).$$

Сложив алгебраически составляющие y_1 и y_2, найдем общий закон вертикальных колебаний уровня моря

$$y = h \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t - \frac{k_1 - k_2}{2} x\right) \sin\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t - \frac{k_1 + k_2}{2} x\right). \tag{41}$$

На основании этого общего закона в какой-то одной точке поверхности моря (при $x = 0$) отметим колебания

$$y = h \cos \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t \sin \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t. \tag{42}$$

Они характеризуются двумя периодами, один из которых близок к периоду самих волн, взятых в отдельности:

$$T = \frac{4\pi}{\omega_1 + \omega_2} = \frac{2T_1 T_2}{T_1 + T_2},$$

а другой значительно превышает период волн и тем больше, чем меньше разность между периодами T_2 и T_1 обеих систем. Обозначим этот период медлен-

ных колебаний поверхности через τ. Тогда

$$\tau = \frac{4\pi}{\omega_1 - \omega_2} = \frac{2T_1T_2}{T_2 - T_1}. \quad (43)$$

Как видим, это — *удвоенный период биений* (удвоенный потому, что знак перед $\cos\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t$ не играет роли, а важна лишь абсолютная величина).

Благодаря появлению *биений* результирующая амплитуда сложных волн будет попеременно то достигать удвоенной амплитуды $2\frac{h}{2} = h$, то уменьшаться до нуля.

Разумеется, подобный характер биений возникает лишь при отмеченном простейшем условии: $h_1 = h_2 = h$. В случае неравенства высот h_1 и h_2 мак-

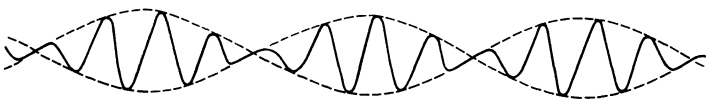


Рис. 124. Схема групп волн

симальная суммарная амплитуда биений будет $h_1 + h_2$, а минимальная $h_2 - h_1$.

Именно такая *интерференция* двух волн, близких между собой по периоду, приводит к так называемому «девятому валу», когда через несколько волн следует волна особо высокая. Разумеется, совсем необязательно, чтобы это была именно девятая волна после восьми промежуточных: она может быть седьмая, десятая и т. д. (рис. 124).

Вообще говоря, ее порядковый номер (N) зависит от отношения величины τ к периоду составляющих волн T

$$N = \frac{\tau}{2} : T. \quad (44)$$

Рассмотрев осложненные колебания уровня в одной точке ($x = 0$), проследим за тем, как будут происходить колебания в других точках и как будут перемещаться по пути волн *максимум и минимум* амплитуд колебаний. На этот вопрос отвечает уравнение (41). Оно прежде всего показывает, что изменением амплитуд управляет первый множитель правой части. Если бы он не зависел от времени и от положения точки на пути волн (от координаты x), то правая часть выражала бы самый обыкновенный и самый простой закон волнообразного движения. Следовательно, закон изменения амплитуд во времени и в пространстве можно найти, исследовав поведение этого первого множителя в уравнении (41). Попытаемся проделать такое исследование.

Пусть в некоторый момент времени t_0 максимальная амплитуда наблюдалась в точке с координатой x_0, а в момент времени t_1 максимум амплитуд волн переместился в точку с координатой x_1. Тогда на основании уравнения (41) можно будет записать

$$\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t_0 - \frac{k_1 - k_2}{2}x_0 = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t_1 - \frac{k_1 - k_2}{2}x_1, \quad (45)$$

потому что по условию первый множитель остался неизменным, отвечающим максимальной амплитуде колебаний.

В свою очередь из уравнения (45) вытекает

$$(\omega_1 - \omega_2)(t_1 - t_0) = (k_1 - k_2)(x_1 - x_0),$$

или

$$\frac{x_1 - x_0}{t_1 - t_0} = \frac{\omega_1 - \omega_2}{k_1 - k_2}. \quad (46)$$

Но совершенно очевидно, что отношение $\frac{x_1 - x_0}{t_1 - t_0}$ выражает собой скорость перемещения максимума колебаний вдоль пути волн.

Столь же просто было бы показать, что с той же самой скоростью перемещаются вдоль пути волн и минимумы колебаний, и промежуточные значения амплитуд волн. Следовательно, с этой скоростью перемещаются вдоль пути *группы волн*, заключенные между последовательными «узлами» колебаний и обладающие в промежутках пучностями.

Обозначим найденную *групповую скорость* волн через $c_{гр}$. Тогда на основании уравнения (46) запишем

$$c_{гр} = \frac{\omega_1 - \omega_2}{k_1 - k_2}. \tag{47}$$

Это выражение групповой скорости можно привести к более удобному виду. Прежде всего, заменив ω_1, ω_2, k_1 и k_2 выражениями их через периоды и длины волн, найдем

$$c_{гр} = \frac{\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}}{\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2}} = \frac{T_2 - T_1}{\lambda_2 - \lambda_1} \frac{\lambda_1 \lambda_2}{T_1 T_2}. \tag{47а}$$

С другой стороны, разность длин волн, стоящая в знаменателе, выражается еще и так:

$$\lambda_2 - \lambda_1 = c_2 T_2 - c_1 T_1 = c_2 (T_2 - T_1) + c_1 (T_2 - T_1) + c_2 T_1 - c_1 T_2.$$

Но ведь в случае глубокого моря оказывается возможным подставить сюда вместо λ_1 и λ_2 их выражения через скорость и период из уравнения (14). Тогда выражение сильно упростится, так как следующие два члена суммы взаимно уничтожаются:

$$c_2 T_1 - c_1 T_2 = \frac{g}{2\pi} (T_2 T_1 - T_1 T_2) = 0.$$

В связи с такими преобразованиями вместо уравнения (47а) можно будет теперь записать

$$c_{гр} = \frac{c_1 c_2}{c_1 + c_2}. \tag{48}$$

При близких между собой значениях периодов T_1 и T_2 соответствующие скрости c_1 и c_2 также близки между собой. Приравняв эти фазовые скорости некоторой средней арифметической величине c, можно будет на основании уравнения (48) заключить, что

$$c_{гр} \approx \frac{c}{2}. \tag{49}$$

т. е. в *глубоком море групповая скорость* $c_{гр}$ волн равна *половине фазовой скорости* c, или, иными словами, *половине скорости простых волн, распространяющихся в отдельности.*

Этот важный вывод тут сделан применительно к двум системам волн, обладающим близкими между собой периодами T_1 и T_2. Подобный же вывод (разумеется, более сложным путем) можно получить применительно к любому числу систем волн, которые обладают периодами, лежащими в узких пределах, и которые налагаются одна на другую. Всюду в таких случаях групповая скорость волн в глубоком море составлет половину от скорости простых волн, бегущих самостоятельно (половину фазовой скорости волн).

В самом общем случае, когда глубина моря не может считаться ни достаточно большой, ни чрезвычайно малой по сравнению с длиной волн, групповая скорость волн выражается через фазовую скорость c соотношением, которое содержит в качестве параметра величину H/λ, уже встречавшуюся выше.

Для краткости введем обозначение, которое будем применять в ряде задач:

$$2\pi \frac{H}{\lambda} = \alpha. \tag{50}$$

В результате довольно несложных выкладок можно показать, что в самом общем случае

$$c_{\text{гр}} = \frac{c}{2}\left(1 + \frac{2\alpha}{\operatorname{sh} 2\alpha}\right). \tag{51}$$

В простом случае $\frac{H}{\lambda} = \infty$, к которому относился наш вывод, формула (51) дает то же значение, что и формула (49), ибо гиперболический синус возрастает быстрее, чем возрастает его аргумент, и второй член в скобке в уравнении (51) стремится к нулю при неограниченном возрастании глубины моря (возрастании α).

В противоположном предельном случае при длинах волн λ, значительно превышающих глубину моря, $\operatorname{sh} 2\alpha$ мало отличается по величине от своего аргумента 2α. Поэтому при неограниченном возрастании длины волн по сравнению с глубиной моря (при неограниченном уменьшении α) величина, в скобке в формуле (51) стремится к 2, а групповая скорость $c_{\text{гр}}$ — к значению фазовой скорости волн c.

§ 5. Энергия волн

Без всяких выкладок очевидно, что *кинетическая энергия* частиц воды, движущихся по своим круговым орбитам (в глубоком море), *не меняется* при различных положениях на орбите, т. е. при изменениях фазового угла θ. Как всегда, кинетическая энергия равна половине произведения массы частицы на квадрат ее линейной скорости, а скорость не меняется по абсолютной величине на всем круговом пути.

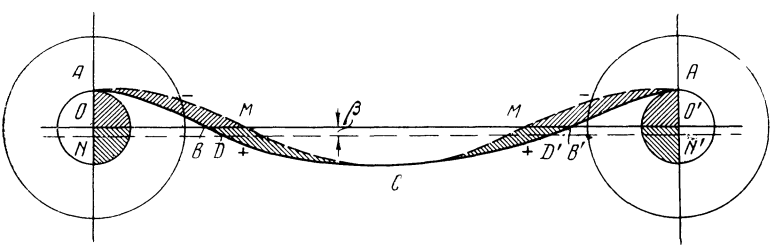


Рис. 125. Схема для вычисления потенциальной энергии волн

Напротив, *потенциальная энергия* частиц непрерывно *меняется* при изменениях высоты, на которой находится частица в тот или иной момент времени. Обычно не интересуются этими колебаниями потенциальной энергии в продолжение каждого периода волн, а подразумевают под понятием «потенциальная энергия волн» ее величину, *осредненную* за один период [3].

Сначала вычислим такую *осредненную потенциальную энергию* для поверхностной частицы, обладающей некоторой массой m.

На рис. 125 кривая $ABCB'A'$ изображает трохоидальный профиль волны, на котором лежат поверхностные частицы. Частицы A и A' лежат на вершинах волн, а частица C — на подошве. На *среднем* уровне лежат точки B и B', в которых профиль пересекается с прямой OO', проведенной через центры орбит поверхностных частиц.

Легко показать, что *средний* уровень OO' лежит *выше* того уровня, на котором все поверхностные частицы находились в состоянии *покоя*. Действительно, сравним трохоиду $ABCB'A'$ с синусоидой $AMCM'A'$ рис. 125.

На основании уравнений (21) можно показать, что участок площади AMB, недостающий трохоиде по сравнению с синусоидой поверх прямой OO', равновелик *четверти площади круга*, являющегося орбитой поверхностной частицы. Точно такой площадью обладает участок BMC, являющийся у трохоиды излишком по сравнению с синусоидой. Совершенно такие же соотношения характеризуют вторую половину картины, изображенной на рис. 125 «недостающий» участок $A'B'M'$ и «излишний» участок $M'B'C$.

В результате оказывается, что нижний участок площади трохоиды BCB' больше суммы верхних участков $ABO + B'A'O'$ на величину, равную *площади* орбиты частицы πr_0^2.

Теперь легко найти уровень покоя поверхностных частиц NN': ведь прямая NN' должна пересекать трохоиду в таких точках D и D', которые обеспечивают выполнение условия: сумма площадей $NAD + D'A'N'$ должна быть равновелика площади DCD'.

Расстояние между точками N и N' равно длине волны λ. Следовательно, на основании изложенного определяется расстояние β_0, на которое следует опустить прямую NN' ниже прямой OO':

$$\beta_0 = \frac{\pi r_0^2}{\lambda} = \frac{1}{2}\frac{r_0^2}{R}, \tag{52}$$

где R — радиус круга качения.

Итак, средний уровень поверхностных частиц за один период лежит выше уровня покоя на расстояние β_0, определяемое из уравнения (52).

Но отсюда следует, что осредненная за один период потенциальная энергия поверхностной частицы (с точностью до произвольной постоянной) будет

$$mg\beta_0 = \frac{1}{2} mg \frac{r_0^2}{R}. \tag{53}$$

Так же легко определится осредненная потенциальная энергия бесконечно тонкого слоя воды, лежащего на каком угодно расстоянии y от уровня моря:

$$d\overline{E}_p = \frac{1}{2}\delta g \frac{r^2}{R} dy = \frac{1}{2}\delta g \frac{r_0^2}{R} e^{-2\frac{y}{R}} dy \tag{54}$$

она отнесена к единице поверхности слоя).

На основании формулы (54) вычисляется осредненная потенциальная энергия всей толщи вод взволнованного моря, отнесенная к единице поверхности моря:

$$\overline{E}_p = \frac{1}{2}\delta g \frac{r_0^2}{R} \int_0^\infty e^{-2\frac{y}{R}} dy = \frac{1}{4}\delta g r_0^2 = \frac{1}{16}\delta g h^2. \tag{55}$$

Теперь определим кинетическую энергию бесконечно тонкого слоя, лежащего на глубине y. Прежде всего запишем выражения для линейной скорости v частиц на этой глубине

$$v = 2\pi \frac{r}{T} = 2\pi \frac{r}{\lambda} c = \frac{r}{R} c. \tag{56}$$

Здесь T — период волн, c — их фазовая скорость, R — радиус круга качения, характеризующий все трохоидальные профили на всех глубинах при заданной длине волн λ.

Исходя из формулы (56), запишем выражение кинетической энергии элементарного слоя толщиной dy (применительно к единице поверхности)

$$dE_v = \frac{1}{2}\delta v^2\,dy = \frac{1}{2}\delta\frac{r^2}{R^2}c^2\,dy = \frac{1}{2}\delta\frac{r^2}{R^2}gR\,dy = \frac{1}{2}\delta g\frac{r^2}{R}dy. \qquad (57)$$

Как видим, кинетическая энергия элементарного слоя на глубине y в точности равна осредненной за период потенциальной энергии того же самого слоя. Несомненно, после интегрирования по всей толще вод взволнованного глубокого моря получится результат, совершенно тождественный с формулой (55). Отсюда следует, что кинетическая энергия волн равна потенциальной энергии волн, осредненной за период:

$$E_v = \bar{E}_p. \qquad (58)$$

Полная энергия волн, отнесенная к единице поверхности моря, равна сумме $\bar{E}_p + E_v$. Следовательно, в результате всех выкладок

$$E_v = \frac{1}{2}\delta g r_0^2 = \frac{1}{8}\delta g h^2. \qquad (59)$$

Очень важно подчеркнуть, что ни в выражение кинетической, ни в выражение потенциальной энергии, приходящихся на единицу поверхности моря, не входит длина волн λ.

Можно показать, что выражения (55), (58) и (59) остаются в силе даже тогда, когда глубина моря H соизмерима с длиной волн, т. е. даже в мелководных морях.

Впрочем, все это относится только к нашим приближенным выводам, результаты которых вполне достаточны для практических расчетов. Весьма строгий вывод, сделанный А. И. Некрасовым [4], дал несколько иные результаты; а именно, *кинетическая* энергия волн в море глубиной H может быть представлена *точной* формулой

$$E_v = \frac{1}{16}\delta g h^2 \exp\left\{3\pi\frac{h}{\lambda}\operatorname{cth} 2\pi\frac{H}{\lambda}\right\}. \qquad (60)$$

В глубоком море при стремлении $\frac{\lambda}{H}$ к нулю, по Некрасову, должно иметь место соотношение, вытекающее из формулы (60):

$$E_v = \frac{1}{16}\delta g h^2 e^{3\pi\frac{h}{\lambda}}. \qquad (61)$$

Как видим, даже в условиях глубокого моря здесь вводится поправочный множитель к выражению (57).

В выражение потенциальной энергии, осредненной за период, теория А. И. Некрасова не внесла никаких изменений по сравнению с классическим выражением (55). В большинстве задач, исследуемых ниже, окажется возможным пользоваться общепринятым выражением (59) полной энергии для получения компактных, практически удовлетворительных соотношений. Однако в § 18 встретится весьма важная задача, которую необходимо решать с обязательным учетом поправки, внесенной Некрасовым в выражение для кинетической энергии (61), и с учетом новой поправки, предложенной Шулейкиным для выражения потенциальной энергии волн.

§ 6. Перенос энергии волнами

Рассмотрим вновь орбитальное движение частицы воды на некоторой глубине, схематически представленное на рис. 126.

Стрелка, изображенная над уровнем моря, показывает направление фазовой скорости волн c. Векторы $\mathbf{v}$ обозначают линейную скорость движения

частицы M по орбите, соответствующую значениям фазового угла θ_1 и θ_2. При этом движущаяся частица M пересекает одну и ту же вертикальную плоскость AB сначала в движении слева направо (в направлении движения волн), а потом в движении справа налево (против направления движения волн).

Кинетическая энергия частицы одинакова в обоих случаях, а потенциальная различна ввиду того, что точка M_1 находится выше, чем точка M_2.

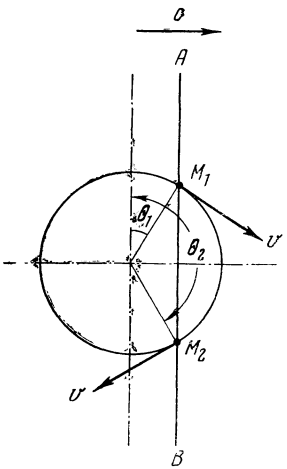


Рис. 126. Пояснение переноса энергии волнами

На основании прежних соображений кинетическая энергия частицы с массой m равна осредненной за период потенциальной энергии ее, т. е. по формуле (53) величине $mg\beta$.

Колебания потенциальной энергии определяются на основании формул (21). Именно, при каком-то значении фазового угла θ потенциальная энергия частицы должна равняться

$$mg\beta_0 + mgr\cos\theta.$$

Следовательно, при том же значении фазового угла *полная энергия* частицы составляет

$$mg(2\beta_0 + r\cos\theta).$$

В этот момент времени проекция линейной скорости частицы на направление движения волн (т. е. на горизонтальную ось) выражается произведением v на $\cos\theta$.

Значит, поток энергии, переносимой частицей по направлению движения волн, найдется как произведение энергии частицы на горизонтальную составляющую линейной скорости

$$\Phi = mg(2\beta_0 + r\cos\theta)\, v\cos\theta. \tag{62}$$

Легко убедиться, что поток энергии в направлении движения волн должен быть больше, чем поток энергии в противоположном направлении. Обычно, говоря о переносе энергии волнами, учитывают поток энергии, осредненный за один период волн.

Такое осреднение произведем, проинтегрировав (62) в пределах от $\theta = 0$ до $\theta = 2\pi$ и затем разделив результат интегрирования на величину 2π. Тогда окажется, что осредненный поток энергии $\overline{\Phi}_m$ с учетом формулы (56) будет равен

$$\overline{\Phi}_m = \frac{mgv}{2\pi}\int_0^{2\pi}(2\beta_0 + r\cos\theta)\cos\theta\, d\theta = \frac{1}{2}mgvr = \frac{1}{2}mgr\frac{r}{R}c = \frac{1}{2}mg\frac{r^2}{R}c. \tag{63}$$

Но ведь множитель, стоящий перед фазовой скоростью c в формуле (63), представляет собой на основании (53) осредненную потенциальную энергию частицы с массой m, т. е. половину полной энергии той же частицы. Обозначим через E_m полную энергию этой частицы. Тогда вместо формулы (63) можно записать

$$\overline{\Phi}_m = E_m\frac{c}{2}. \tag{64}$$

Значит, поток энергии представляет собой перенос полной энергии частицы со скоростью $c/2$, т. е. с групповой скоростью волн $c_{\text{гр}}$.

Совершенно аналогичным путем можно доказать, что весь поток энергии Φ, переносимой во всей толще взволнованного моря, выражается простым

соотношением

$$\Phi = Ec_{\text{гр}}. \tag{65}$$

В глубоком море и E, и $c_{\text{гр}}$ выражаются простыми соотношениями (59), (49) и (14). Следовательно, вместо выражения (65) можно записать

$$\Phi = \frac{1}{2}\delta g r_0^2 c_{\text{гр}} = \frac{g^{3/2}\delta}{4\sqrt{2\pi}} r_0^2 \lambda^{1/2}. \tag{66}$$

Впоследствии мы увидим, что при изменениях высоты волн и их длины значительно медленней меняется *отношение* высоты к длине $2r_0/\lambda$ (или обратная величина $\lambda/2r_0$). В связи с этим для суждения о связи между Φ и размерами волн полезно переписать (66) несколько иначе, выделив быстро и медленно меняющиеся множители, а именно

$$\Phi = \frac{1}{4}\frac{\delta g^{3/2}}{\pi^{1/2}}\left(\frac{\lambda}{2r_0}\right)^{1/2} r_0^{5/2}. \tag{67}$$

§ 7. Уточнение кинематики морских волн

Еще в XIX в. гидродинамиками было отмечено, что хотя кинематическая схема, рассмотренная выше, удовлетворяет граничным условиям на поверхности моря, она все же не выдерживает строгой критики: при безвихревом движении немыслимы замкнутые траектории водных частиц.

Дж. Стокс (см. [5]) показал, что безвихревое движение возможно при условии наложения некоторого поступательного движения частиц на их движение по круговым орбитам, причем скорость w этого поступательного движения должна убывать на глубинах быстрей, чем размеры орбит и линейные скорости орбитального движения:

$$w_y = r_0^2\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 ce^{-4\pi\frac{y}{\lambda}}. \tag{68}$$

Скорость «волнового» течения w, теоретически вычисленная Стоксом, может рассматриваться как скорость некоторого *переносного* движения водных масс, на которую накладывается фазовая скорость, вычисляемая по формуле (14) для глубокого моря — без учета поправки Стокса. Если бы в формуле (68) не существовало экспоненциальной функции в правой части, т. е. скорость «волнового» течения не убывала бы с глубиной, то истинная фазовая скорость волн, при движении с потенциалом скоростей, была бы $c_1 = c + w_0$, а групповая соответственно $c_{\text{гр}} + w_0$.

Действительная картина явления очень сложна и не ясна во всех деталях: никто еще не проанализировал распространение волн с *единой* реальной фазовой скоростью при наличии резко изменяющихся скоростей переносного движения на глубинах. Заранее можно предвидеть, что единая реальная фазовая скорость c_1 должна оказаться меньшей, чем $c + w_0$. Так оно и есть в действительности: по теории Стокса $c_1 = c + {}^1/_2 w_0$, где w_0 — скорость «волнового» течения на самой поверхности моря.

По Стоксу, эта скорость постоянна во времени, если сохраняются постоянными размеры волн. Но подобное — равномерное — переносное движение не может отразиться на профилях волн, которые получаются по приближенному способу, описанному выше.

Между тем в действительности профили морских волн явно отличаются от трохоидальных. Даже в отсутствие ветра простая мертвая зыбь тем меньше напоминает трохоиду, чем больше *крутизна* волн, т. е. отношение высоты волн к их длине. Еще в прошлом веке Стокс, Рэлей и Мичелл исследовали математические условия, при которых могут существовать самые крутые

безветровые волны. На рис. 127 воспроизведен профиль такой предельно крутой безветровой волны, вычисленный Дж. Мичеллом [6]. Он вычерчен здесь пунктиром. Как видим, этот профиль не имеет ничего общего с трохоидой, хотя бы изображенной на рис. 125. Вершина волны здесь значительно острей, а подошва значительно более пологая. Кроме того, на рис. 127 видно острое ребро на вершине (пунктирная кривая), дающее в сечении угловую точку. Угол между касательными в этой точке и вертикалью равен 60°, а следовательно, угол между касательными составляет 120°.

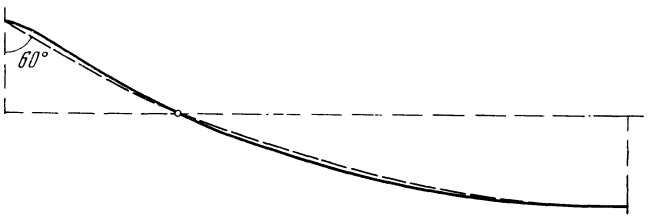


Рис. 127. Профиль предельно крутой волны

Еще интересней поведение *ветровых* волн. Их профиль *никогда не похож* на трохоиду. Отличия были подмечены при обработке первых же стереофотографий ветровых волн в море: всегда вершины ветровых волн оказывались более острыми, а подошвы — более пологими по сравнению с трохоидами, обладающими тем же самым отношением высоты к длине волны.

Но в природной обстановке всегда бывает затруднительно выделить в чистом виде профиль какой-то определенной системы волн, так как на него обычно налагаются сложные системы волн более высоких порядков и даже волны совсем иного происхождения, пришедшие из других районов, при очень сложных природных синоптических условиях. Возникает трехмерное волнение, которое еще невозможно во всей полноте исследовать при современном состоянии теории, не позволяющем во всех деталях осветить поведение даже двумерных волн.

§ 8. Профиль и основные параметры морских волн

Для изучения кинематики двумерных волн, как ветровых, так и мертвой зыби, оказался весьма удобным тот метод, который был предложен В. В. Шулейкиным в основном для исследований динамики волн (см. далее). В Морском гидрофизическом институте Академии наук СССР был построен большой кольцевой бассейн, в котором волны могут бегать по окружности как угодно долго под воздействием ветра со скоростью до 19 *м/сек* и затухают в продолжение определенного времени после прекращения ветра. Один сектор этого *штормового бассейна* застеклен в обеих стенах, благодаря чему создана возможность кино- и фотосъемок зарождающихся, развивающихся, установившихся и затухающих волн. Железная арматура стекол одновременно служит координатной сеткой.

Посреди кольца бассейна стоит трехэтажная башенка, в которой сосредоточены средства управления воздушным потоком, создаваемым над водой. В самом низу, в центре кольца, установлена регистрирующая фото- и киноаппаратура. На рис. 128 дан внешний вид фотоаппарата с фокусным расстоянием 1200 *мм* и диаметром объектива 180 *мм*. Обтюратор, видный перед объективом, предназначен для нанесения масштаба времени на фотографии светящихся поплавков, которые пускаются в толщу воды в бассейне при фоторегистрации *траекторий* водных частиц во время волнения на разных глуби-

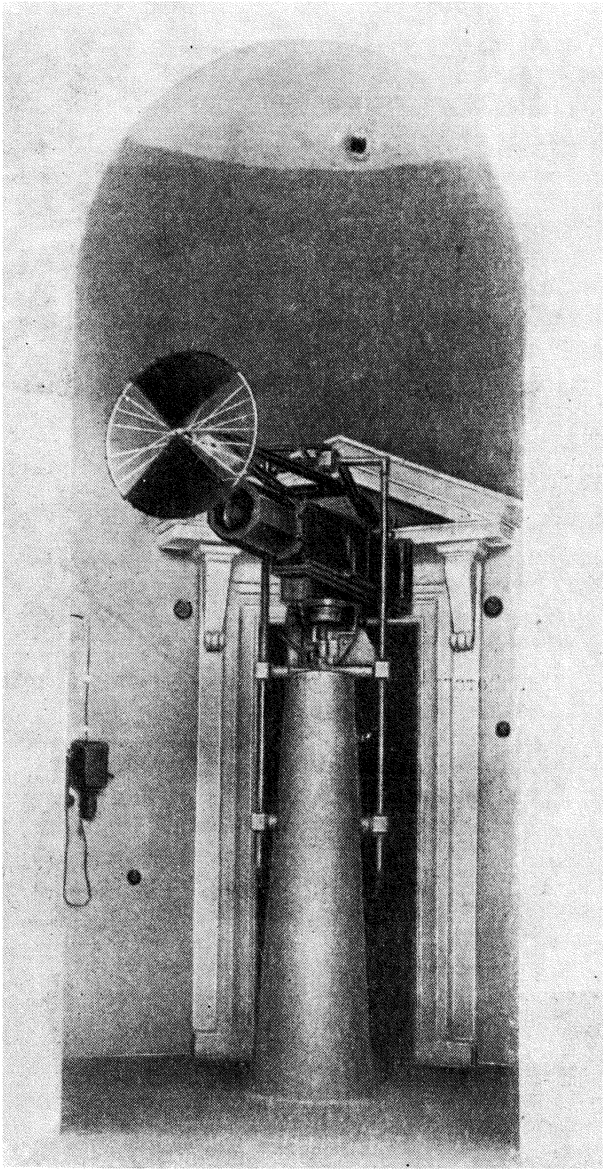


Рис. 128. Фотоаппаратура штормового бассейна

нах. При производстве обычных моментальных снимков черные секторы обтюратора отводятся на 90° по отношению к тому положению, которое они занимают на рис. 128.

На рис. 129 воспроизведена фотография *мертвой зыби*, полученной в бассейне. Здесь профиль приблизительно трохоидальный (хотя, как увидим ниже, даже и в случае подобной зыби он все же отличается от трохоиды).

На рис. 130 приведена фотография *ветровой волны* в том же бассейне. У нее уже нет ничего общего с трохоидой: при вершине видна угловая точка, как у «максимально крутой» безветровой волны (рис. 127), формально изучавшейся гидродинамиками, но угол при вершине здесь более тупой.

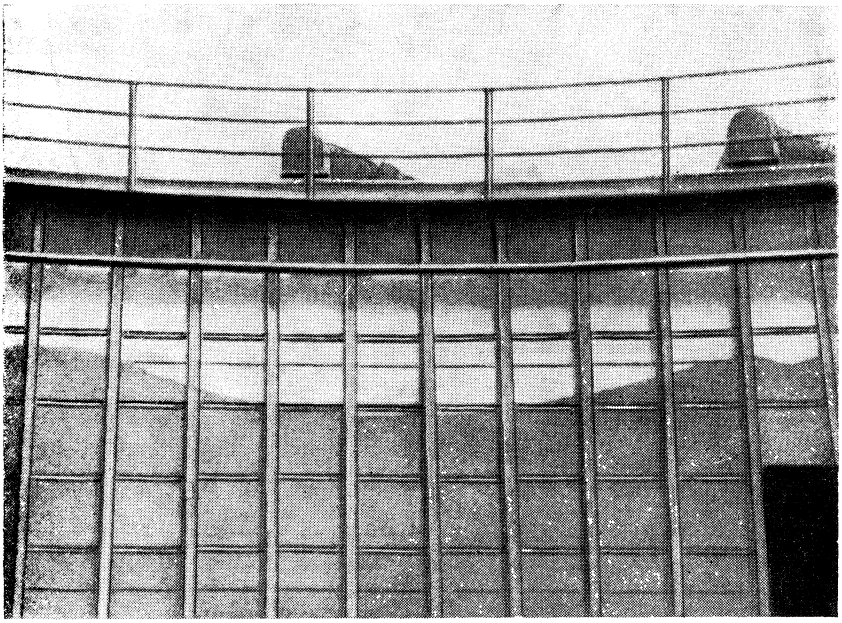


Рис. 129. Фотография профиля мертвой зыби в бассейне

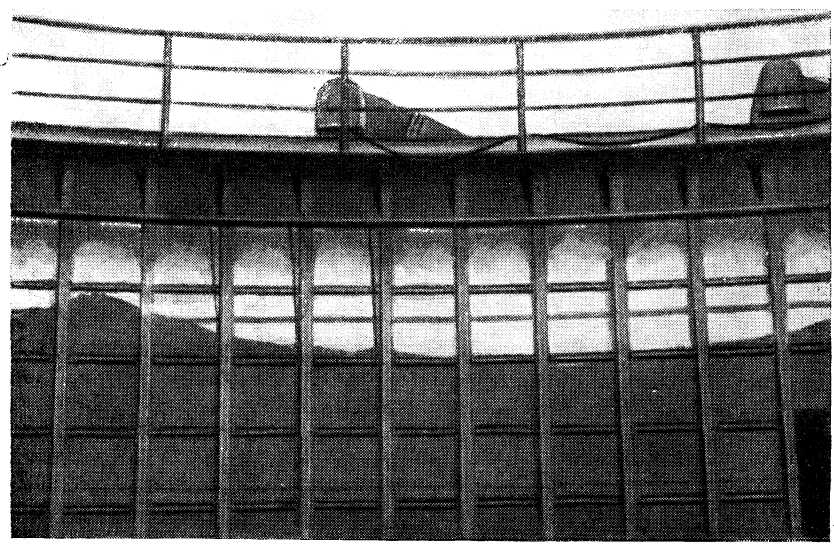


Рис. 130. Фотография профиля ветровой волны в бассейне

При современных исследованиях [7, 8] удалось найти *общие уравнения семейства кривых*, к которому принадлежат наблюдаемые профили ветровых волн и к которому в качестве частного вида принадлежат трохоиды.

Пусть высота ветровой волны равна $h=2b$, а ее длина λ. Направим ось X координатной системы вдоль прямой, проходящей через середины высот волн в направлении движения волн. Ось Y направим вертикально вверх. Волны будем считать двумерными (плоская задача).

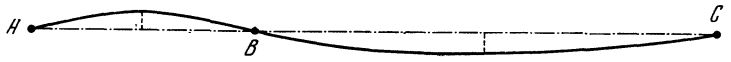


Рис. 131. Характеристика заостренности вершин волн

Общие уравнения семейства кривых, оказывается, можно записать в форме напоминающей уравнения (21):

$$\begin{aligned} x &= R\theta + a\sin\theta, \\ y &= b\cos\theta. \end{aligned} \tag{69}$$

По-прежнему здесь $R = \frac{\lambda}{2\pi}$. Но в первое уравнение входит большая полуось некоторого *эллипса* (a), во второе уравнение — малая полуось того же эллипса (b). Этот эллипс пока будем считать только вспомогательным. В § 9 будет сказано о том, как современный анализ вскрыл *физический смысл* такой кривой.

По уравнениям (69) легко построить профиль ветровой волны, если заданы параметры a и b: можно вычертить эллипс с полуосями a и b, разметить на нем точки, соответствующие различным значениям θ, перемещать центр эллипса вдоль оси X на отрезки, равные $R\theta$, и отмечать на неподвижном листе бумаги соответствующие положения точки, движущейся по эллипсу. Легко убедиться в том, что при правильном выборе значений параметров a и b полученная кривая изобразит типичный профиль ветровой волны, соответствующий этим значениям параметров.

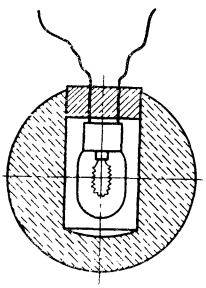


Рис. 132. Подводный фонарик

На рис. 131 изображен один из профилей, полученных посредством киносъемки в штормовом бассейне. Вершины волн здесь отсекают на оси X отрезки AB, которые значительно короче отрезков BC, отсекаемых подошвами волн.

Исходя из способа построения профиля по уравнениям (69), легко показать, что

$$AB = \frac{\lambda}{2} - 2a,$$

$$BC = \frac{\lambda}{2} + 2a.$$

Обозначим отношение AB к BC через σ. Тогда окажется, что по фотографии профиля можно определить оба параметра a и b, зная значение σ, высоту h и длину волн λ, а именно

$$a = \frac{1-\sigma}{1+\sigma}\frac{\lambda}{4}, \qquad b = \frac{h}{2}. \tag{70}$$

Определив по уравнениям (70) оба параметра и проделав описанное построение, цитированный автор получил хорошее совпадение с профилями, зафиксированными на кадрах киносъемки. Любопытно, что предлагаемые

параметры пригодны даже для характеристики «предельно крутой» волны, о которой говорилось выше. Для такой волны измерения дают

$$\sigma = 0{,}38; \quad \frac{a}{\lambda} = 0{,}112; \quad \frac{b}{\lambda} = 0{,}0715.$$

На рис. 127 нанесена сплошная кривая, построенная по уравнениям (69), при таких значениях параметров. Небольшие расхождения с пунктирной кривой заметны только у самой вершины волны.

Уравнения (69) позволяют найти на профиле точки, в которых крутизна склона волны достигает максимума,— это те точки, где вторая производная от y по x обращается в нуль. Простые выкладки показывают, что в этих точках касательная к профилю составляет с вертикальной осью угол γ_0, определяемый из соотношения

$$\operatorname{tg}\gamma_0 = \sqrt{\left(\frac{R}{b}\right)^2 - \left(\frac{a}{b}\right)^2}. \tag{71}$$

Это соотношение также хорошо подтверждается результатами непосредственных измерений на кинокадрах. Для предельно крутой волны оно дает совсем небольшое расхождение с теорией Мичелла [6]. По уравнению (71) оказывается, что в данном случае $\gamma_0 = 58°$, т. е. угол при вершине пунктирной кривой рис. 127 $2\gamma_0 = 116°$. В действительности же точная теория давала здесь значение 120°. Различие между этими цифрами, составляющее всего 3%, вызвано упомянутым небольшим расхождением кривых при самой вершине.

Так определяются очертания волн после измерения отрезков AB, BC на снимке и вычисления σ. Столь же легко проследить за изменением характеристической величины σ в пределах семейства кривых в зависимости от различия, существующего между полуосями вспомогательного эллипса. Действительно, обозначим величину b/a через n, а величину $\frac{h}{\lambda}$ через N. Тогда после элементарных преобразований уравнений (70) можно записать

$$\sigma = \frac{n - 2N}{n + 2N}. \tag{72}$$

Это соотношение позволяет судить о степени заострения волн, профиль которых принадлежит к исследуемому семейству. В частности, при $n = 1$ выражение (72) дает значение σ для трохоиды. В пределе, при $N = 0$, σ обращается в единицу, как и следовало ожидать в случае синусоидальных волн, у которых h бесконечно мало по сравнению с λ.

Для суждения о форме орбит водных частиц в штормовой бассейн были пущены шарообразные фонарики, выточенные из органического стекла, такого типа, какой представлен в разрезе на рис. 132. В теле шара был выточен цилиндрический канал, в котором находилась низковольтная электрическая лампочка. Тонкие эмалированные провода к лампочке подводились сверху сквозь резиновую пробку, которой закрыт канал. Вес шара был подобран приблизительно равным весу вытесняемой им воды, вследствие чего он находился почти в безразличном равновесии в водной среде и при волнении послушно следовал за движением окружающих водных частиц. Регистрация движений производилась в темное время суток. После открытия объектива фотоаппарата, изображенного на рис. 128, на неподвижной фотопластинке фиксировалось движение фонарика (после проявления на ней видна прерывистая кривая, причем каждый разрыв на кривой соответствует прохождению одного из секторов обтюратора перед объективом фотоаппарата).

Число оборотов оси обтюратора в единицу времени известно. Следовательно, известны промежутки времени, отделяющие одно положение фонарика на траектории от другого, соседнего.

На рис. 133 изображена траектория фонарика-поплавка, зарегистрированная при одном из опытов. Кружочками отмечены середины отрезков, полученных на фотографии в те промежутки времени, когда обтюратор открывал доступ света в объектив прибора. Вместо замкнутой орбиты создалась сложная траектория с петлями: на круговращательное движение, рассматриваемое в элементарной теории трохоидальных волн, наложилось поступательное движение, вызванное эффектом Стокса («волновое» течение) и, кроме того, еще усиленное благодаря дрейфу под действием ветра.

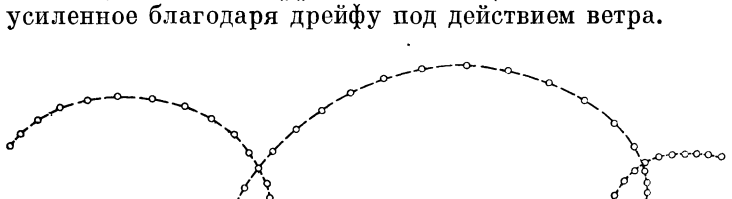


Рис. 133. Траектория фонарика-поплавка

Непостоянство параметров волн, следующих одна за другой в экспериментальном бассейне, затрудняет обработку таких регистраций и выделение чисто орбитального движения. Однако большая серия опытов позволила установить несомненное наличие одного из двух явлений: а) если считать скорость «волнового» стоксова течения и скорость дрейфового течения постоянными в продолжение одного периода волн, то необходимо признать *переменной угловую скорость* орбитального движения частиц; б) если принять угловую скорость орбитального движения постоянной, то необходимо отказаться от установившегося представления о постоянстве стоксова течения и течения дрейфового,— необходимо заключить, что и та и другая составляющие поступательного движения *пульсируют* в пределах одного периода волн.

Легко видеть, что первый вариант несовместим с принципами динамики. Ведь заостренная форма волн, при соответствующей их крутизне, возможна и в отсутствие ветра, а следовательно, при полном отсутствии внешних действующих сил; между тем всякое изменение угловой скорости орбитального движения может возникать лишь под воздействием каких-то внешних сил. Значит, необходимо остановить внимание на *втором* варианте и, рассмотрев его, выяснить физические причины заострения вершин волн конечной крутизны.

§ 9. Физические причины заострения вершин волн конечной крутизны

Начнем исследование с простейшего случая — с волн мертвой зыби, распространяющейся при полном отсутствии ветра. Прежде всего отметим, что при наличии *потенциального* движения воды [8], т. е. при отсутствии вихрей, всякий отрезок, проведенный через соседние частицы воды, должен двигаться *без вращения* (см. аналогичное движение в системе Земля — Луна, описанное в гл. II). Проще всего представить такое движение применительно к волнам бесконечно малой крутизны, т. е. волнам, у которых $\lim \frac{h}{\lambda} = 0$. На рис. 134, *а* схематически изображены две орбиты частиц, одна из которых в условиях покоя лежала на поверхности моря, а другая — на отрезок y ниже первой. При наличии упомянутого соотношения между h и λ радиусы

орбит обеих частиц равны. Когда частица A_1 переходит в положения A_2, A_3, A_4, то частица B_1 оказывается в положениях B_2, B_3, B_4, причем всюду расстояния между частицами η сохраняются постоянными: $\eta = y = \text{const}$. Значит, между A и B неизменно сохраняется одно и то же число частиц воды. Условие неразрывности может быть записано в простейшей форме

$$\frac{d}{d\theta}(\omega r \eta) = 0, \tag{73}$$

где θ — фазовый угол, меняющийся во времени.

При действительно существующих (конечных) значениях $\frac{h}{\lambda}$, как мы знаем, радиусы орбит частиц непрерывно уменьшаются по мере удаления

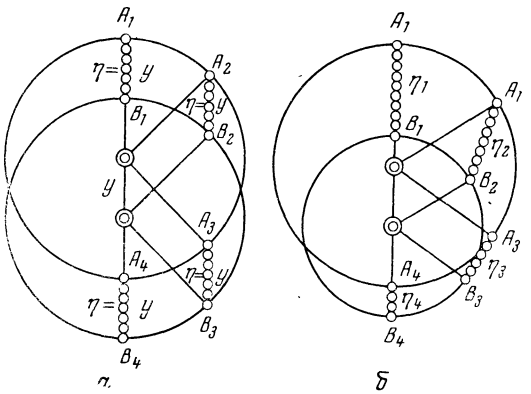


Рис. 134. Схемы для выяснения природы волнового течения

их вниз от поверхности моря. Значит, вместо схемы рис. 134, *а* здесь вступает в силу схема рис. 134, *б*. Уменьшение радиуса орбиты здесь утрировано; в действительности при малых y различие между радиусами орбит верхней и нижней частиц не так велико и отрезки A_2B_2, A_3B_3 мало отклоняются от вертикального направления.

С достаточным приближением можно считать, что всюду

$$\eta = y - (r_0 - r)\cos\theta = y - r_0\left(1 - e^{-\frac{y}{R}}\right)\cos\theta \approx y\left(1 - \frac{r_0}{R}\cos\theta\right). \tag{74}$$

Именно по этой причине слой воды, который в состоянии покоя был ограничен параллельными плоскостями с расстоянием y между ними, становится утолщенным при вершине волн и утонченным — у подошвы волн. При перемещениях частицы A_1 в положения A_2, A_3, A_4 частица B_1 последовательно занимает положения B_2, B_3, B_4, причем расстояние между этими крайними частицами последовательно уменьшается. Значит, должно уменьшаться число промежуточных частиц воды, находящихся между ними, при переходе с вершины волны к ее подошве. *Вытесненные* частицы должны удаляться куда-то вперед, образуя в пределах выделенного слоя воды *поток* Φ, направленный в сторону движения волн. В связи с этим, условие неразрывности, записанное применительно к схеме рис. 134, *а*, теперь изменяется и приобретает новую форму

$$\frac{d}{d\theta}(\omega r \eta) + \frac{d\Phi}{d\theta} = 0. \tag{75}$$

Приняв во внимание уравнения (74) и (75), запишем

$$d\Phi = \omega \frac{r_0^2}{R} y \sin\theta \, d\theta. \tag{76}$$

От этого изменения потока Φ перейдем к изменению скорости w поступательного движения вод, разделив $d\Phi$ на переменную площадь поперечного сечения $1 \times \eta$ и изменив знак на обратный (поскольку скорость w возрастает благодаря убыванию η):

$$dw = -\omega \frac{r_0^2}{R} \frac{\sin\theta}{1 - \frac{r_0}{R}\cos\theta} d\theta. \tag{77}$$

Проинтегрировав уравнение (77), найдем выражение для скорости w:

$$w = -\omega r_0 \ln\left(1 - \frac{r_0}{R}\cos\theta\right) + N \approx \omega \frac{r_0^2}{R}\cos\theta + N. \tag{78}$$

При разложении логарифма в ряд пренебрегалось остальными членами и делалась ошибка менее 10% при не слишком больших значениях r_0/R. При вершине волн «орбитальный» поток идет сквозь наибольшее возможное поперечное сечение; следовательно, поступательное компенсационное течение здесь приостанавливается. В связи с этим, подставив в уравнение (78) частное значение $\theta = \pi$, запишем

$$-\omega \frac{r_0^2}{R} + N = 0.$$

Следовательно,

$$w = \omega \frac{r_0^2}{R}(1 + \cos\theta). \tag{79}$$

Итак, скорость поступательного движения вод действительно колеблется на протяжении длины волны. На основании уравнения (79) осредненное значение скорости w равно той величине, которую еще в прошлом веке определил Дж. Стокс чисто формальным методом [5] и которую до настоящего времени считали постоянной; действительно, осреднив выражение (79) на протяжении от $\theta = 0$ до $\theta = 2\pi$, получим

$$\overline{w} = \bar{\omega} \frac{r_0^2}{R} = r_0^2 \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 c. \tag{80}$$

Нетрудно заметить, что при подстановке в уравнение (68) частного значения $y = 0$ (для поверхностных частиц) получается та же самая величина. Напомним, что через c обозначена фазовая скорость волн относительно водных масс.

Теперь рассмотрим поведение водных частиц, увлекаемых дрейфовым течением при наличии волн конечной крутизны. Вопреки установившимся представлениям, скорость дрейфового течения здесь не может оставаться неизменной в пределах одного периода волн — во времени, или, что то же самое, в пределах одной длины волн — в пространстве. Причина аналогична той, которая вызывает пульсации стоксова «волнового» течения: непостоянство толщины тех горизонтальных слоев морской воды, которые были разграничены параллельными горизонтальными плоскостями при отсутствии волнения. Для большей ясности добавляем к схеме рис. 134, *б* еще схему слоев волны, изображенную на рис. 135. Здесь видно, как слои, обладавшие толщиной y в отсутствие волн, приобретают переменную толщину η при волнении. Обозначим мгновенное значение скорости дрейфового течения на поверхности моря через u, а осредненное на протяжении всей длины волны — че-

рез $\bar{u}$. Тогда можно будет записать условие неразрывности применительно к дрейфовому течению

$$u\eta = \bar{u}y. \tag{81}$$

Подставив η из формулы (74) в (81), получим

$$u = \frac{\bar{u}}{1 - \frac{r_0}{R}\cos\theta}. \tag{82}$$

Подобно соотношению (78), упростим соотношение (82), внеся некоторую небольшую погрешность; с точностью до величин первого порядка запишем

$$u \approx \bar{u}\left(1 + \frac{r_0}{R}\cos\theta\right). \tag{83}$$

Остается учесть еще горизонтальную составляющую «круговращательного» движения водной частицы на поверхности моря. Если сама скорость

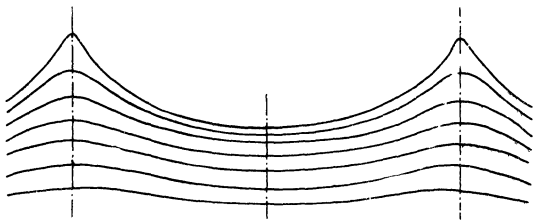


Рис. 135. Строение волны

«круговращательного» движения равна v, то горизонтальная составляющая должна равняться

$$v\cos\theta = \omega r_0 \cos\theta.$$

Теперь сложим мгновенные значения всех трех горизонтальных составляющих, причем в правой части полученного выражения выделим две группы: постоянную во времени и переменную

$$v\cos\theta + w + u = \left(\omega\frac{r_0^2}{R} + \bar{u}\right) + \left(\omega r_0 + \omega\frac{r_0^2}{R} + \bar{u}\frac{r_0}{R}\right)\cos\theta. \tag{84}$$

Двучлен, стоящий в первых круглых скобках, выражает сумму осредненной скорости «волнового» течения, т. е. именно той скорости, которую вычислил Стокс, и осредненного значения скорости дрейфового течения, т. е. того значения, которое дают обычные морские вертушки. Особый интерес представляет трехчлен во вторых круглых скобках, умноженный на $\cos\theta$. Представим его иначе

$$U_x = \omega\left(r_0 + \frac{r_0^2}{R} + \frac{\bar{u}}{\omega}\frac{r_0}{R}\right)\cos\theta = \omega a\cos\theta. \tag{85}$$

Здесь U_x — мгновенное значение переменной части горизонтальной составляющей скорости водной частицы на поверхности моря. Вертикальная составляющая связана только с «круговращательным» движением частицы. Она равна

$$U_y = -\omega r_0 \sin\theta = -\omega b\sin\theta. \tag{86}$$

Совершенно очевидно, что совокупность уравнений (85) и (86) определяет собой движение поверхностной частицы по *эллипсу* с полуосями a, b. Именно

таково происхождение эллипса, которым мы пользовались в предыдущем изложении (например, записывая формулы (69), (70) и др.). Там он рассматривался пока лишь как вспомогательное построение. Сейчас он приобрел физический смысл.

Для удобства дальнейшего анализа преобразуем выражение a, вытекающее из (85): умножим числитель и знаменатель третьего члена в круглых скобках (85) на r_0 и вспомним, что $\omega r_0 = v$. Тогда окажется, что

$$a = r_0 + \frac{r_0^2}{R} + \frac{\bar{u}}{v}\frac{r_0^2}{R}. \tag{87}$$

Учтя, что $b = r_0$, найдем отношение полуосей a/b, которое характеризует растянутость эллиптической орбиты в горизонтальном направлении:

$$\frac{a}{b} = 1 + \frac{r_0}{R}\left(1 + \frac{\bar{u}}{v}\right). \tag{88}$$ [1]

Как видим, эллипс растягивается тем больше, чем больше крутизна волн, непосредственно связанная с r_0/R, и чем больше отношение осредненной скорости дрейфового течения $\bar{u}$ к скорости орбитального движения v.

При отсутствии ветра (в простейшем частном случае) получим из общей формулы (88)

$$\frac{a}{b} = 1 + \frac{r_0}{R}. \tag{89}$$

Применим это соотношение к профилю предельно крутой волны, изображенному на рис. 127 в двух вариантах: пунктиром — по вычислениям Мичелла [6], основанным на теории Стокса, и сплошной кривой — по нашей системе [8] уравнений (69). Здесь $h/\lambda = 1/7$; следовательно, $\frac{r_0}{R} = \pi\frac{h}{\lambda} = 0{,}45$. Формула (89) дает применительно к такому случаю $\frac{a}{b} = 1{,}45$.

В § 8 настоящей главы непосредственные промеры профиля и применение формулы (70) дали $\frac{a}{b} = 1{,}56$. Различие между значениями a/b, полученными двумя независимыми путями, составляет всего лишь 7%.

Итак, даже в самых глубоких морях частицы воды движутся на волне по *эллипсам*, эксцентриситет которых увеличивается при увеличении отношения полуосей a/b. В свою очередь, центр эллипса движется в направлении распространения волн со скоростью, которая выражена двучленом в первых круглых скобках (84): это — сумма скоростей «волнового» и дрейфового течений, осредненных на протяжении одной волны в пространстве, или одного периода во времени. Возможно и второе определение: как в классических схемах, частица движется с угловой скоростью ω вокруг некоторого центра, находясь постоянно на расстоянии $r_0 = \frac{h}{2}$ от него; сам центр вращения совершает горизонтальные колебания около своего среднего положения со скоростью $\omega a \cos\theta$; наконец, это «среднее положение» непрерывно переме-

[1] Столь же просто, но менее точно решается обратная задача: по фотографии профиля волн можно посредством уравнения (70) определить отношение $\frac{a}{b}$; подставив же найденное значение $\frac{a}{b}$ в уравнение

$$\frac{\bar{u}}{v} = \frac{R}{r_0}\left(\frac{a}{b} - 1\right) - 1, \tag{88а}$$

вытекающее непосредственно из уравнения (88), легко определить осредненную скорость $\bar{u}$ дрейфового течения (точнее, проекцию скорости течения на направление движения волн).

щается в направлении распространения волн с постоянной скоростью, равной $\overline{w} + \bar{u}$.

На рис. 136 изображены три варианта движения [9]. Элементарный случай движения частиц по окружностям с *неподвижными* центрами в соответствии со старыми теориями трохоидальных волн Герстнера и Рэнкина изображен на рис. 136, *а*. Профиль волн здесь — чисто трохоидальный. Схема движения частиц на потенциальной волне приведена на рис. 136, *б*. Центр

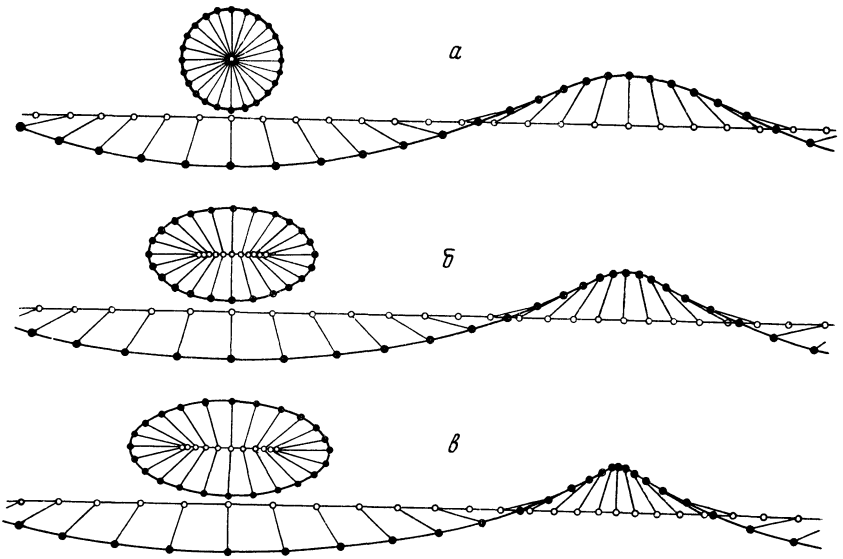


Рис. 136. Три варианта движения водных частиц на волне

эллипса движется в направлении распространения волн со скоростью $\overline{w} + \bar{u}$. Около него колеблется по гармоническому закону (85) центр орбиты частицы. Профиль волн отличается от трохоиды большим заострением вершин и притупленными подошвами. На рис. 136, *в* изображен предельный случай заострения вершин при заданном отношении h/λ. Здесь $h/\lambda = 0{,}12$, т. е. меньше, чем $^1/_7$. Это потому, что, в отличие от волны Мичелла, перед нами *ветровая* волна с конечным значением $\bar{u}/v$. Эллиптическая орбита здесь сильней растянута по сравнению с предыдущим случаем. Вершина очень сильно заострена.

До сих пор говорилось о движении водных частиц на самой поверхности моря. Можно добавить, что под $\bar{u}$ подразумевалась та составляющая дрейфового течения (осредненная), которая направлена в сторону распространения волн, т. е. в сторону движения воздушного потока над морем. Составляющая дрейфового течения, нормальная к ней, не может менять исследуемый профиль одномерной волны; однако она должна отражаться на профилях *трехмерных* волн, полученных при пересечении взволнованной поверхности с вертикальной плоскостью, нормальной к направлению ветра. К этому обстоятельству, вероятно, вернутся исследователи, когда физика трехмерных волн получит достаточное развитие.

Как уже говорилось выше, скорость стоксова течения резко уменьшается на глубинах в соответствии с формулой (68). Значит, столь же резко должны уменьшаться амплитуды колебаний центра вращения частиц около их среднего положения, в свою очередь перемещающегося в сторону распространения волн, и сама скорость перемещения. В итоге отклонение профиля волн от трохоидальной формы должно очень быстро уменьшаться на глубинах. С фор-

мальной стороны этот процесс отмечался уже на стр. 236 в связи с формулой (40), характеризующей колебания давления на глубинах при прохождении волн. Тот — формальный — подход к анализу явления не самоочевиден: ведь если всякий сложный профиль волн (например, описываемый уравнениями (69) при большом различии полуосей a и b) можно разложить в ряд Фурье, то это совсем не означает, что все обертоны могут распространяться в направлении движения волн с различными скоростями, зависящими от соответствующего значения λ_n для n-го обертона: еще в XIX в. было доказано, что профиль волн Мичелла — Стокса *устойчив*, т. е. все обертоны распространяются с общей скоростью, зависящей от длины основной волны.

В свое время В. В. Шулейкин сделал попытку вычислить отношение между амплитудой заостренных волн, измеренной на поверхности моря, и амплитудой вертикальных колебаний водных частиц на глубинах — до самого дна (в случае не слишком глубокого моря, где регистрация волн ведется на придонных волнографах). Анализ указал на наличие «фильтрации» высоких гармоник, налагающихся на основное колебание частиц. В связи с этим, во-первых, получило объяснение почти чисто синусоидальное очертание профилей, зарегистрированных на глубинах, при наличии сильно заостренных профилей волн на поверхности моря; во-вторых, было показано, что амплитуда волн должна на глубинах уменьшаться быстрей, чем вытекает из классической теории *трохоидальных* волн. Но многочисленные измерения амплитуд на глубинах, в особенности тщательные измерения, произведенные Л. А. Корневой и в море, и в штормовом бассейне, обнаружили, что в действительности амплитуды колебаний давления на глубинах уменьшаются еще быстрей, чем вытекает из анализа «фильтрации» гармоник. Интересно, что расхождение *не* увеличивается стремительно при переходе ко все бо́льшим и бо́льшим глубинам: это расхождение ограничено каким-то пределом [2]. Поэтому представляет интерес новый анализ явления, произведенный совсем иным путем [9].

Обратимся снова к уравнениям заостренной волны (69), записанным в параметрифческой форме. Внесем в анализ лагранжевы коодинаты α и β частиц в начальный момент времени. Следовательно, можно будет считать уравнения (69) равносильными уравнениям

$$x - \alpha = a \sin\theta, \quad y - \beta = b \cos\theta, \tag{90}$$

в которых $\theta = k\alpha - \omega t$, где $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, $\omega = \frac{2\pi}{T}$, T — период волн, β — координата начального положения частицы, отсчитываемая от «нулевого» уровня.

Запишем условие неразрывности в форме Лагранжа (2), отметив, что само уравнение (2) содержит вместо принятых буквенных обозначений α, β обозначения a, b, неудобные сейчас ввиду того, что этими буквами обозначаются полуоси эллипса.

Возьмем частные производные от x, y по α, β, найденные на основании (90). Тогда получим условие

$$1 + \left(\frac{\partial b}{\partial \beta} + ka\right)\cos\theta + ka\,\frac{\partial b}{\partial \beta}\cos^2\theta + kb\,\frac{\partial a}{\partial \beta}\sin^2\theta = \text{const}. \tag{91}$$

Условие (9 1) удовлетворяется лишь тогда, когда одновременно

$$\frac{\partial b}{\partial \beta} + ka = 0, \quad a\,\frac{\partial b}{\partial \beta} = b\,\frac{\partial a}{\partial \beta}. \tag{92}$$

При распространении заостренных волн на глубинах вместо условия (88) должно удовлетворяться условие

$$\frac{a}{b} = 1 + n\,\frac{b}{R}, \tag{93}$$

в котором n сокращенно обозначает величину в круглых скобках в (88). В случае очень крутых волн, заведомо не подчиняющихся *линейным* уравнениям, нельзя ожидать удовлетворения одновременно трем условиям (обоим (92) и условию (93)) двух функций a, b. Поэтому испытаем, каковы следствия, вытекающие из сопоставления их попарно. Сопоставление двух уравнений (92) дает

$$a = a_0 e^{-\frac{a}{b}k\beta}, \quad b = b_0 e^{-\frac{a}{b}k\beta}. \tag{94}$$

Сопоставление первого уравнения из системы (92) с уравнением (93) приводит к выражению

$$\frac{\partial b}{\partial \beta} + kb\left(1 + \frac{b}{R}\right) = 0. \tag{95}$$

Проинтегрировав это уравнение, получим

$$b = \frac{b_0}{e^{k\beta} + \frac{b_0}{R}(e^{k\beta} - 1)}. \tag{96}$$

Определив из (96) b, воспользуемся еще раз выражением (93) и найдем a, умножив b на правую часть (93).

Выражения (94) и (96) показывают, что размеры орбит, описываемые частицами, на глубинах уменьшаются быстрей, чем это вытекает из теории трохоидальных волн. Вариант (94) не дает количественного описания процесса: и потому, что эллипсы здесь уменьшаются с сохранением *подобия*, и потому, что множитель a/b при $k\beta$ в экспоненциальных функциях требует слишком быстрого затухания. Ближе к истине выражение (96), которое хорошо согласуется с результатами наблюдений Л. А. Корневой и других авторов.

Действительно, отметим, что при $e^{k\beta} \gg 1$ выражение (96) стремится в пределе к такому виду:

$$b = \frac{b_0 e^{-k\beta}}{1 + \frac{b_0}{R}}. \tag{97}$$

Здесь в числителе дроби, в правой части, находится выражение радиуса орбиты на глубине β, вытекающее из теории трохоидальных волн; в знаменателе — величина, которая равна отношению полуосей a_0/b_0 эллипса на поверхности моря. В случае предельно заостренной волны Мичелла $a_0/b_0 = 1{,}45$ или, по непосредственным промерам на чертеже профиля, 1,56. В случае, изображенном на рис. 136, эта величина для *ветровой* волны равнялась 2,0.

Значит, на одной и той же определенной глубине полуось b эллипса должна уменьшаться в 1,45—2 раза больше, чем уменьшились бы радиусы трохоидальных волн. При неизбежном разбросе точек на диаграммах в работе [9] среднее различие между фактическим уменьшением и тем, которое вытекало из теории трохоидальных волн, было именно такого порядка. В соответствии с этим колебания давления на глубинах должны быть меньше, чем вычисленные по классическим соотношениям, и пересчитанная высота волн по формуле (40) соответственно *больше*, о чем уже упоминалось в § 3 (см. стр. 236).

Было бы напрасно пытаться связать уравнения последней пары: второе из системы (92) с уравнением (93). Совокупность этих уравнений удовлетворяется либо при стремлении b_0/R к нулю, либо, в случае конечных b_0/R, при единственном значении величины n, равном 0,5. Но такое требование невыполнимо, поскольку всегда $n > 1$.

Итак, кинематическое исследование движения частиц на глубинах, существующего при наличии *заостренных* волн на поверхности моря, позволяет уточнить формальный анализ, который был, в частности, проведен в прежней работе В. В. Шулейкина [1], в результате рассмотрения отдельных обертонов, налагающихся на основную волну.

Как видим, теперь не понадобилось применять анализ к системе *неразрывно связанных* между собой обертонов, которые обязаны обладать *общей* фазовой скоростью волны. Профиль, зарегистрированный на глубинах, приближается к синусоиде *не* вследствие «фильтрации» обертонов, а вследствие резкого уменьшения пульсаций стоксова потока на глубинах и быстрого стремления отношения полуосей эллипсов к *единице*.

Одновременно удалось, хотя и приближенно, определить погрешности, которые должны возникать при вычислении размеров орбит на глубинах по формулам, выведенным применительно к трохоидальной, а не заостренной форме волн.

§ 10. Кинематика предельно крутых волн

В § 7 и 8 говорилось о предельно крутой волне, исследованной гидродинамиками прошлого века. Ими было установлено, что профиль такой волны (рис. 127), обладающей углом 120° при вершине, соответствует значению $\frac{h}{\lambda} = 0{,}143$. В цитированных исследованиях совсем не рассматривалось движение частиц воды относительно неподвижной системы координат. Напомним, что ветер не воздействовал на эту волну.

В настоящее время появилась возможность исследовать истинную картину [10] исходя из кинематических соображений, приведенных в § 9.

Как и в § 9, начнем анализ с простейшего случая волн, распространяющихся при полном безветрии. Прежде всего попытаемся применительно к этим условиям построить *траектории* поверхностных водных частиц на предельно крутой волне.

Преобразуем уравнение (79), разделив левую часть его на v, а правую на равную величину ωr_0. Тогда окажется, что

$$\frac{w}{v} = \frac{r_0}{R}(1 + \cos\theta). \tag{98}$$

При движении частицы от вершины до подошвы волны, т. е. при изменениях фазового угла от $\theta = \pi$ до $\theta = 2\pi$, величина w/v на основании уравнения (98) должна меняться от 0 до $2\frac{r_0}{R}$. Ее среднее значение на этом промежутке составляет, очевидно, $\frac{\overline{w}}{v} = \frac{r_0}{R}$. Но тогда нетрудно заключить, что, описав половину окружности, частица пройдет по орбите путь, равный πr_0, и в то же время продвинется вперед по горизонтальному направлению на расстояние

$$x_{\pi\to 2\pi} = \pi r_0 \frac{\overline{w}}{v} = \pi r_0 \frac{r_0}{R} = \pi \frac{r_0^2}{R}.$$

Так определяется абсцисса точки, в которую приходит водная частица, опустившись с вершины волны на подошву. Промежуточные точки траектории частицы тоже легко нанести на чертеж. Действительно, разобьем весь путь частицы по ее круговой орбите хотя бы на 24 части. Тогда определится средняя длина отрезка, на который продвигается вперед та же частица за $^1/_{24}$ времени полного оборота. На основании только что изложенного это будет длина, соответствующая

$$\frac{2wr_0}{24}\frac{r_0}{R} = \frac{\pi}{12}\frac{r_0^2}{R}.$$

Продвижения частицы вперед за все остальные промежутки определяются по эпюре, построенной вверху слева на рис. 137. Здесь на основании уравнения (98) вычерчена косинусоида, которая вверху касается оси, а внизу отстоит от нее на максимальное расстояние $\frac{\pi}{6}\frac{r_0^2}{R}$. Очевидно, среднее расстояние равно $\frac{\pi}{12}\frac{r_0^2}{R}$.

Длина каждого отрезка, видного на эпюре, в масштабе чертежа дает длину пути, проходимого частицей вперед в горизонтальном направлении за соответствующий промежуток $^1/_{24}$ времени полного оборота. Построение траектории ведется так: определяется смещение частицы по орбите с вершины до

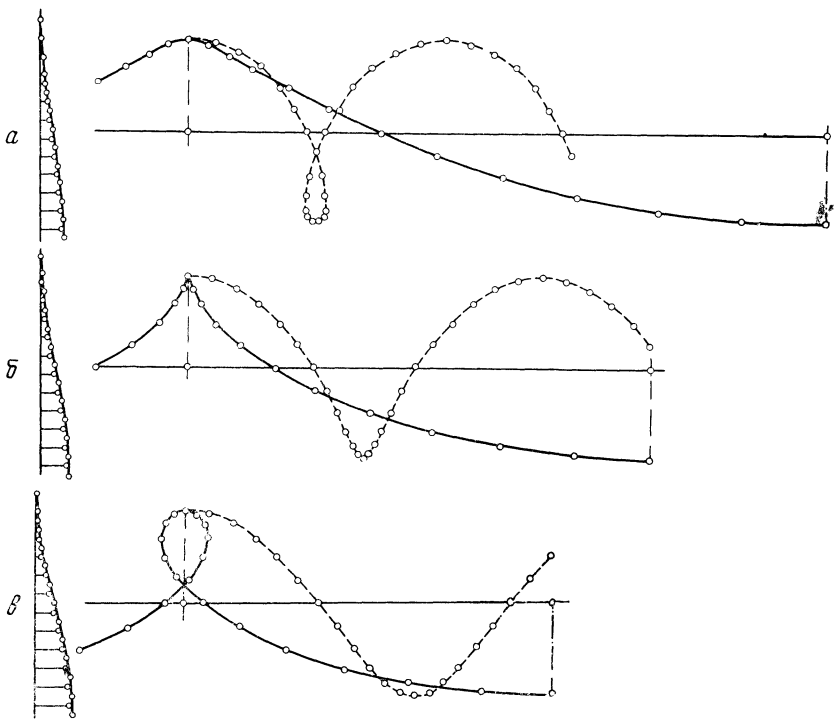


Рис. 137. Схема заостренности вершин волн

точки, отстоящей на $^1/_{24}$ окружности; от этой точки откладывается по направлению вперед небольшое горизонтальное смещение (на основании эпюры) за тот же промежуток времени; после этого определяется вертикальное и горизонтальное смещения частицы на втором этапе, причем по горизонтали суммируется смещение за счет орбитального движения и смещение вперед на основании эпюры; аналогичным образом находится смещение частицы на третьем, четвертом и на остальных этапах сложного движения.

На рис. 137, *а* кружками обозначены полученные таким образом точки траектории, в которые частица попадает к концу того или иного очередного этапа. Сама траектория вычерчена пунктиром. Так же просто строится и *профиль волны*. Учтя по той же эпюре смещения в переносном движении, отметим на оси абсцисс точки, в которые приходит центр круговой орбиты в моменты, отделенные друг от друга промежутками времени $^1/_{24}$ периода волны. При этом учитывается и отставание по фазе на дугу $2\pi/24$ в орбитальном движении частицы при смещении вперед на каждый новый этап. В ре-

зультате получается профиль волны, изображенный на рис. 137, *а* сплошной кривой.

В соответствии с параметрами предельно крутой волны здесь было принято значение $\frac{r_0}{R} = 0{,}45$. Следовательно, для вычисления использовался числовой вариант уравнения (98)

$$\frac{w}{v} = 0{,}45\,(1 + \cos\theta). \qquad (99)$$

Легко видеть, что профиль, воспроизведенный на рис. 137, *а*, получился таким же, каким он представлен на рис. 127. Следовательно, два совершенно независимых между собой способа, основанных на современной кинематике волн, привели к результатам, совсем мало отличающимся от выводов *точного* (формального) анализа.

На рис. 137, *а* профиль по-прежнему характеризуется прямолинейными очертаниями на подходах к вершине, причем угол между прямыми здесь в точности равен 120° в полном соответствии с точной формальной теорией. Неточность получилась у нас лишь у самой вершины, где отсутствует особая (угловая) точка. Следует полагать, что эта неточность была бы устранена, если бы мы пожертвовали компактностью формул, удобством анализа соотношений и учли много членов при разложении в ряд логарифма, выводя формулу (78).

Было бы незаконно игнорировать неточность наших соотношений и стремиться к формальному получению угловой точки на вершине. Можно показать, что такая особая точка получилась бы при условии $a = R$ и соответственно $\frac{r_0}{R} = 0{,}618$, $\frac{h}{\lambda} = 0{,}197$.

Подобный вариант изображен на рис. 137, *б*, причем, как легко убедиться, здесь угол между касательными к склонам равен 0°. Этот формальный вариант столь же нереален, как была бы нереальна циклоида среди трохоидальных профилей. Зато достаточно убедителен анализ последствий сверхмерного нарастания величины h/λ. Действительно, дадим этой величине заведомо завышенное значение. Например, положим $\frac{h}{\lambda} = 0{,}25$ и соответственно $\frac{r_0}{R} = 0{,}785$. Тогда прежние приемы, основанные на уравнении (98), дадут профиль, изображенный на рис. 137, *в*. Эта схема выявляет причину разрушения волн при переходе через предельное значение величины h/λ: сложение орбитального и поступательного движений приводит к возникновению *петли* на кривой профиля волн, а при этом, разумеется, невозможно устойчивое движение частиц воды. Столь же очевидно, что при вполне точном решении кинематической задачи такая петля получилась бы непосредственно при переходе через значение параметров, характеризующее случай, представленный на рис. 137, *а*, т. е. при $\frac{r_0}{R} = 0{,}45$.

Вспомним теперь уравнение (70), связывающее между собой a, λ и коэффициент σ, который характеризует заостренность волн. Учтя при этом, что $R = \frac{\lambda}{2\pi}$, получим для предельно крутой волны (рис. 137, *а*) $a = 0{,}65\ R$ вместо $a = R$, соответствовавшего формальному и неосуществимому случаю, представленному на рис. 137, *б*.

Таково кинематическое условие устойчивости волн.

Исследуем те выводы, которые вытекают из него в случае распространения *ветровых волн*. Докажем, что на ветру волны могут разрушаться при меньших значениях h/λ и при более тупых углах у вершин.

По примеру уравнения (98), полученного из уравнения (79), найдем аналогичное соотношение между скоростью дрейфового течения u и скоростью

орбитального движения частиц v. Для этого разделим обе части равенства (83) на v

$$\frac{u}{v} = \frac{\bar{u}}{v}\left(1 + \frac{r_0}{R}\cos\theta\right). \qquad (100)$$

В уравнениях (98) и (100) сложим между собой соответственно левые и правые части. Тогда возникнет обобщенное уравнение

$$\frac{w+u}{v} = \left(\frac{r_0}{R} + \frac{\bar{u}}{v}\right) + \frac{r_0}{R}\left(1 + \frac{\bar{u}}{v}\right)\cos\theta, \qquad (101)$$

позволяющее сделать для ветровых волн такие же самые построения, какие были сделаны выше для волн при отсутствии ветра.

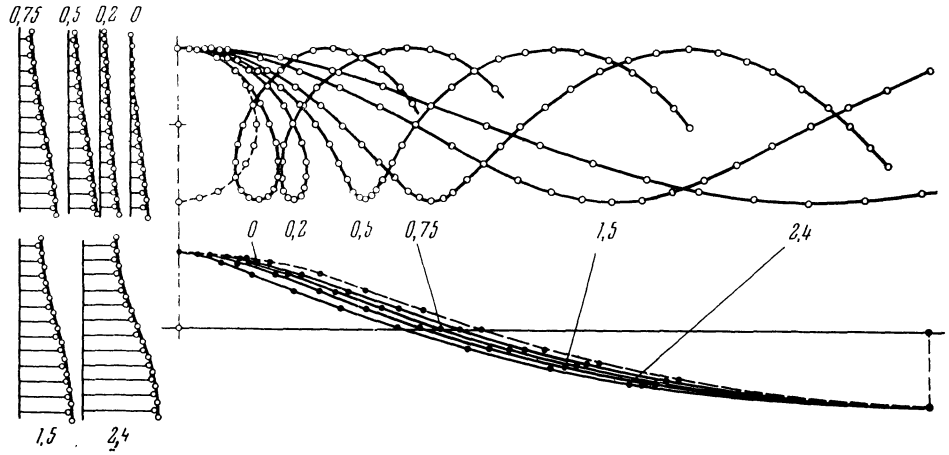


Рис. 138. Воздействие пульсирующего дрейфового течения

На рис. 138 слева изображены шесть эпюр, вычисленных по уравнению (101) для конкретного заданного значения величины h/λ, наблюдаемого в природе: $\frac{h}{\lambda} = 0{,}1$ и в соответствии с ним $\frac{r_0}{R} = 0{,}314$. При эпюрах проставлены цифры, которые показывают, какому значению величины $\bar{u}/v$ соответствует та или иная эпюра: $\frac{\bar{u}}{v} = 0; 0{,}2; 0{,}5; 0{,}75; 1{,}5$ и $2{,}4$. Траектории частиц построены в верхнем ярусе чертежа по тому же способу, по которому строились траектории на рис. 137, но, разумеется, с использованием новых соответствующих эпюр скоростей поступательного движения (вернее, смещений частиц по направлению вперед). Под каждой траекторией проставлено значение $\bar{u}/v$, которое ей отвечает. Положения кружков на траекториях по-прежнему разделены промежутками времени в $^1/_{24}$ периода волн.

Для сравнения с профилями волн на рис. 138 пунктиром нанесена трохоида; непосредственно под ней лежит сплошная кривая, к которой идет указка от цифры 0: профиль *мертвой зыби* с отношением высоты к длине 0,1. Как видим, даже профиль мертвой зыби несколько отличается от трохоиды. Еще ниже расположены профили волн, соответствующие значениям $\bar{u}/v$: 0,75; 1,5 и 2,4. Все они построены по тому способу, по какому строились профили на рис. 137. Они все больше и больше заостряются по мере нарастания $\bar{u}/v$, т. е. нарастания скорости ветра, вызывающего дрейфовое течение, при всех прочих равных условиях. Коэффициент σ, характеризующий заостренность вершин при данной величине отношения h/λ, последовательно принимает значения 0,583 (без ветра); 0,53; 0,47; 0,41, в то время как для трохоиды с тем же отношением h/λ он составляет 0,667.

Но ведь отсюда следует, что при некотором определенном значении $\bar{u}/v$ заостренность вершин должна оказаться критической, после которой невозможно устойчивое движение частиц на ветровой волне.

Действительно, вспомним соотношение (88а), приведенное в сноске к стр. 253, и дадим величине a, входящей в него, предельное значение $a = 0{,}65\,R$, найденное выше. Учтем, что $b = r_0$. Тогда окажется, что критическая скорость $\bar{u}_{кр}$ дрейфового течения (осредненная за период) определяется простой формулой

$$\left(\frac{\bar{u}}{v}\right)_{кр} = 0{,}65\left(\frac{R}{r_0}\right)^2 - \frac{R}{r_0} - 1. \qquad (102)$$

При повышении скорости ветра сверх этого предела на волнах должны были бы возникать неустойчивые образования типа схемы рис. 137, *в*. Именно в таких условиях на вершинах ветровых волн возникают *пенистые белые барашки* («беляки»).

В нашем частном случае при $\frac{h}{\lambda} = 0{,}1$, соответствующем рис. 138, формула (102) дает $\left(\frac{\bar{u}}{v}\right)_{кр} = 2{,}4$. Этому значению соответствует предельно крутой профиль ветровой волны, построенный на рис. 138. Так же, как и на схеме рис. 137, *а*, здесь нет угловой точки при вершине из-за неточности наших формул. Однако по-прежнему хорошо виден основной характер предельно крутой волны с ее прямолинейными участками профиля близ вершины. Угол между ними равняется здесь 140°.

Возникновение пенистых барашков должно облегчаться тем, что на поверхности основных штормовых волн распространяются более крутые и более короткие вторичные и третичные волны, обладающие меньшими значениями орбитальной скорости v и меньшими значениями R/r_0. Согласно формуле (102), такие волны высоких порядков должны разрушаться в первую очередь.

Траектории частиц, изображенные на рис. 138, вполне соответствуют тем, которые были получены фотографированием подводных фонариков в штормовом бассейне (см., например, рис. 133).

Отметим, что, измерив разность абсцисс L максимума и минимума на траектории, легко вычислить осредненную скорость дрейфового течения по формуле, которая выводится из (101).

Действительно, выразим на основании формулы (101) длину отрезка L, представляющего путь водных масс в их поступательном движении за половину периода волн ($T/2$):

$$L = \int_{T/2}^{T} (w + u)\,dt = \frac{r_0}{R} v \frac{T}{2} + \bar{u}\frac{T}{2} + \frac{r_0}{R}(v + \bar{u}) \int_{T/2}^{T} \cos\theta\,dt = \frac{r_0}{R} v \frac{T}{2} + \bar{u}\frac{T}{2}.$$

Иначе можно записать

$$\frac{r_0}{R} + \frac{\bar{u}}{v} = \frac{L}{v\frac{T}{2}} = \frac{L}{\pi r_0},$$

откуда следует. что

$$\frac{\bar{u}}{v} = \frac{L}{\pi r_0} - \frac{r_0}{R}. \qquad (103)$$

Разумеется, кроме промеров по фотографиям типа рис. 133, необходимо еще определение периода волн (для вычисления линейной скорости орбитального движения v).

§ 11. Разрушение волн под действием мелководья

Возникновение пенистых барашков, описанное в предыдущем параграфе, может разрушать вершины волн на сколь угодно глубоком море, лишь бы скорость ветра, создающего дрейфовое течение, была достаточно велика и осредненная скорость возникшего дрейфа превосходила бы предел, установленный формулой (102). Отметим, кстати, что при этом независимо от значения правой части (102) профиль штормовой волны в глубоком море сохраняет симметрию относительно вертикальной оси, проходящей через вершину. Подобный вывод теории, следующий из §§ 9 и 10, подтверждается многочисленными стереофотографиями штормовых волн в океане.

Однако существует и иная, чрезвычайно важная причина разрушения волн, нисколько не связанная с ветром и дрейфовым течением. Это — *воздействие мелководья* на волны (на их профиль).

В мелководном море волны никогда не достигают предельной высоты, которая определяется балансом энергии, поступающей от ветра и расходуемой на внутреннее трение в воде. Не успев достигнуть этой высоты, они разрушаются вследствие постепенного и непрерывного искажения их профиля под воздействием мелководья, по которому они распространяются. При этом разрушение гасит несравненно больше энергии, чем тот эффект образования пенистых барашков на гребнях волн, о котором говорилось в § 10. Сейчас мы не будем учитывать этот эффект, а займемся лишь основным явлением, подлежащим исследованию.

Влияние мелководья было первоначально исследовано применительно к чрезвычайно длинным (приливным) волнам. Из уравнений гидродинамики было выведено приближенное уравнение профиля приливной волны, первоначально обладавшей простой формой косинусоиды и искаженной под действием мелководья. Был найден приближенный закон нарастания второго гармонического колебания по мере распространения волн в мелководном районе моря.

Напомним, что появление второго обертона здесь предрешается в связи с двумя обстоятельствами [11]. Во-первых, в уравнениях Эйлера учитывается конвективный член типа $u\frac{\partial u}{\partial x}$, который всегда отбрасывается при исследованиях волн *малой* амплитуды (малой по сравнению с глубиной моря); во-вторых, условие неразрывности записывается в виде

$$\frac{\partial}{\partial x}[(H+\eta)u] = -\frac{\partial \eta}{\partial t}. \tag{104}$$

Иными словами, здесь учитывается, что в момент подъема уровня воды на η выше положения покоя глубина моря становится равной $H+\eta$, а при опускании уровня воды на η глубина моря уменьшается до значения $H-\eta$.

Как известно, в результате нахождения двух последовательных приближений получают форму профиля, искаженную вторым обертоном. При этом не только не предусматриваются появление и постепенное нарастание обертонов более высоких порядков, но даже не учитывается неизбежное уменьшение амплитуды основного колебания в результате передачи все большей и большей части энергии обертонам. Тем самым вводятся весьма грубые ошибки даже в теорию приливных волн, длина которых заведомо очень велика по сравнению с глубиной моря (см. стр. 175).

Совершенно незаконными являются рассуждения Г. Джеффриса [12], автоматически распространившего такое грубо приближенное исследование на поверхностные волны и пытавшегося подобным образом выяснить условия разрушения их на мелководье.

Этот автор совсем произвольно полагает, что поверхностные волны разрушаются в тот момент, когда амплитуда второго обертона становится рав-

ной амплитуде основного косинусоидального колебания. При таком ничем не оправданном условии оказывается, что разрушение волн будто бы должно произойти тогда, когда они пройдут в мелководном районе расстояние $x_{дж}$, определяемое следующим образом:

$$\frac{x_{дж}}{\lambda} = \frac{4}{3\pi}\frac{c^2}{gh}. \qquad (105)$$

Здесь λ — длина волн, c — их фазовая скорость, g — ускорение в поле тяжести, h — высота волн.

В результате получается, что даже в очень глубоком море волны должны разрушаться, пробежав расстояние, вытекающее из неверной формулы (105). Действительно, если глубина моря очень велика, то фазовая скорость c от нее не зависит; от глубины моря не зависит и знаменатель правой части формулы (105), содержащий лишь g и h. Значит, волны должны разрушаться при любом значении отношения высоты волн к глубине моря.

В действительности же волны могут бежать в глубоком море без всякого искажения их профиля неограниченно далеко.

Однако предположение Джеффриса не оправдывается не только на глубоком море, но даже и на самом типичном мелководье: никакие наблюдения не подтверждают произвольное допущение о том, будто бы волна разрушается, когда амплитуда второго обертона делается равной (или приблизительно равной) амплитуде основной волны. Напротив, тщательные наблюдения, которые были произведены в штормовом бассейне (см. § 14), показали, что профиль волны, долго бежавшей на мелководье, может быть описан лишь суммой, содержащей *множество обертонов*, среди которых не видно резкого преобладания второго обертона.

Теперь становится совершенно ясным, что и в случае приливов резкое выделение второго обертона происходит только там, где местное строение берегов и дна заливов создает условия для настоящего гидродинамического *резонанса* по отношению к этому обертону. В иных случаях искаженная приливная волна содержит большое количество обертонов, среди которых второй выражен нормально.

Наблюдения над поведением поверхностных волн на мелководье показали, что волны здесь разрушаются несравненно позже, чем это вытекает из формулы (105). Непосредственно перед разрушением передний склон волн бывает на некотором участке совершенно отвесным. Однако это обстоятельство никак не связано со вторым обертоном: оно зависит от присутствия обертонов весьма высоких порядков.

Для строгого решения задачи пришлось бы вслед за вторым обертоном вносить в дифференциальные уравнения Эйлера все новые и новые обертоны для получения все новых и новых приближений при интегрировании. Нельзя было бы ограничиться 20—25 подобными операциями: пришлось бы налагать на всю систему условие *сохранения энергии*, которое игнорировалось предыдущими авторами. В результате задача стала бы чрезвычайно громоздкой, хотя, по всей вероятности, все же разрешимой.

Можно пойти и по иному пути, более простому и в то же время недалекому от истины [13]. Этот путь подсказан уравнением (104). Действительно, если в уравнении неразрывности решающую роль играет *фаза* колебаний, то как может случиться, чтобы фаза колебаний не влияла на значение *скорости* распространения волн? Если в теории приливов при выводе скорости распространения не учитывается высота приливной волны, то высота всегда учитывается в родственной задаче о распространении уединенной волны; скорость распространения уединенной волны зависит от суммы глубины моря и высоты волны.

Наше предположение о *непостоянстве* фазовой скорости (в пределах одной волны), о зависимости фазовой скорости от фазы, подтверждается даже той грубой и примитивной теорией искажения приливной волны, о которой была речь выше. Ведь при постепенном нарастании амплитуды второго обертона вершина искаженной волны все более и более смещается вперед, а подошва все более и более отстает от движения тех точек профиля волн, которые лежат на средней высоте над подошвой. Иными словами, фазовая скорость в «верхней» фазе оказывается действительно большей, чем та осредненная, которую вычисляют по формуле (39), а фазовая скорость в «нижней» фазе оказывается соответственно меньшей.

Итак, при исследовании движения волн, амплитуда которых соизмерима с глубиной моря, представление о *средней* глубине оказывается чисто формальным. В действительности при движении частиц у вершины волны они должны вести себя так, как подобает движению в случае глубины моря $H + \frac{h}{2}$, а при движении этих частиц у подошвы волны они должны вести себя так, как это соответствует глубине моря $H - \frac{h}{2}$. Фазовая скорость должна быть разной в различных фазах: она должна достигать наибольшего значения у вершин волн и наименьшего — у подошв.

Не уклоняясь далеко от истины, можно положить, что

$$c_1^2 = \frac{g\lambda}{2\pi} \operatorname{th} \alpha_1, \quad c_2^2 = \frac{g\lambda}{2\pi} \operatorname{th} \alpha_2, \tag{106}$$

причем здесь сокращенно обозначено

$$\alpha_1 = \frac{2\pi}{\lambda}\left(H + \frac{h}{2}\right), \quad \alpha_2 = \frac{2\pi}{\lambda}\left(H - \frac{h}{2}\right). \tag{107}$$

На основании выражений (106), составим разность квадратов $c_1^2 - c_2^2$ и разложим ее на множители. Тогда окажется, что

$$(c_1 + c_2)(c_1 - c_2) = \frac{g\lambda}{2\pi}(\operatorname{th} \alpha_1 - \operatorname{th} \alpha_2) = \frac{g\lambda}{2\pi} \frac{\operatorname{sh}(\alpha_1 - \alpha_2)}{\operatorname{ch} \alpha_1 \operatorname{ch} \alpha_2}. \tag{108}$$

Вообще говоря, α_1 весьма мало отличается от α_2, а c_1 столь же мало отличается от c_2. Следовательно, можно положить, что $c_1 + c_2 = 2c_0$:

$$\begin{gathered} \operatorname{ch} \alpha_1 \operatorname{ch} \alpha_2 = \operatorname{ch}^2 \alpha_0, \quad \operatorname{sh}(\alpha_1 - \alpha_2) = \alpha_1 - \alpha_2; \\ c_0 T = \lambda, \quad 2\pi \frac{H}{\lambda} = \alpha_0, \quad \frac{g\lambda}{2\pi} = \frac{c_0^2}{\operatorname{th} \alpha_0}. \end{gathered} \tag{109}$$

С другой стороны,

$$\alpha_1 - \alpha_2 = \frac{2\pi}{\lambda}\left(H + \frac{h}{2}\right) - \frac{2\pi}{\lambda}\left(H - \frac{h}{2}\right) = 2\pi \frac{h}{\lambda}. \tag{110}$$

Значит, на основании формул (108) — (110) получим

$$(c_1 - c_2)\, T = \frac{2\pi h}{\operatorname{sh} 2\alpha_0}. \tag{111}$$

Левая часть уравнения (111) выражает собой отрезок, на который смещается вперед вершина искаженной волны по отношению к ее подошве за промежуток времени, равный одному периоду волн T. Сокращенно обозначим этот отрезок через $2\xi_T$, подразумевая, что за один период T ее вершина пробежит расстояние, которое на ξ_T длиннее, чем расстояние, пройденное точкой профиля в средней фазе (т. е. на средней линии между вершинами и подошвами). Аналогично подошва волны за то же время T пробежит расстояние, которое будет на ξ_T короче, чем путь точки профиля в средней фазе.

Вместо уравнения (111) запишем соотношение, которое будет полезно в дальнейшем:

$$\xi_T = \frac{\pi h}{\operatorname{sh} 2\alpha_0}. \qquad (112)$$

Отрезок ξ_T связан с высотой волн h простой линейной зависимостью. Следовательно, есть основания полагать, что «опережения» и «отставания» всех иных точек профиля волн, отстоящих по вертикали на y от средней линии, выразятся общим соотношением. Запишем его для произвольно заданного

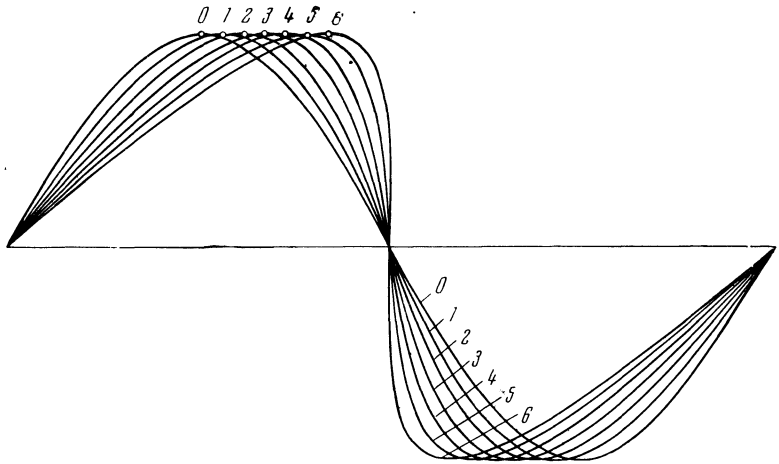


Рис. 139. Схема искажения профиля волн на мелководье

времени τ, в продолжение которого волны движутся в пределах мелководья:

$$\xi_y = \xi_T \frac{\tau}{T} \frac{2y}{h}. \qquad (113)$$

На основании изложенных соображений сперва проследим за изменением профиля, который для простоты примем простейшим, синусоидальным, в момент входа волн на мелководье. Для удобства зададимся не протяжением времени τ, отмечающим движение волн в мелководном районе, а непосредственно значениями $\pm\,\xi$ для вершины и подошвы волн к концу исследуемого промежутка времени их движения.

Тогда на основании формулы (113) можно будет простейшим графическим приемом построить профили волн, которые будут соответствовать заданным значениям ξ/λ. На рис. 139 изображены эти профили применительно к значениям $\xi/\lambda = 1/36, 1/18, 1/12, 1/9, 5/36$ и $1/6$ (т. е. $\frac{\xi}{\lambda}$ здесь меняется через интервалы $1/36$).

Индекс 0 обозначает начальный профиль (не искаженный), остальные индексы соответствуют отдельным значениям ξ/λ.

Как видим, последний из профилей, изображенных на рис. 139, круто обрывается вниз, пересекая ось абсцисс под прямым углом. С нашей точки зрения, именно таким должен стать профиль волн непосредственно перед разрушением.

Посмотрим теперь, как ведут себя *основная* волна и *обертоны* различных порядков при постепенном искажении профиля волн от условного синусоидального до предельно крутого на переднем склоне. Разложение шести искаженных кривых рис. 139, выполненное посредством гармонического анализатора, дало весьма интересную картину.

Таблица 9

Номер гармоники	Кривая (рис. 139)						
	0	1	2	3	4	5	6
1	1000	+958	+953	+934	+906	+878	+843
2	0	—90	—163	—238	—290	—325	—358
3	0	+19	+40	+85	+130	+180	+210
4	0	—10	—18	—40	—75	—110	—150
5	0	0	0	+16	+48	+78	+107
6	0	0	0	—10	—25	—57	—82
8	0	0	0	0	—12	—37	—60
16	0	0	0	0	0	—8	—23

В табл. 9 сведены значения коэффициентов при синусах в ряде Фурье, выраженные в тысячных долях от единицы. В свою очередь за единицу принята амплитуда первоначальной синусоидальной волны, только что вступившей на мелководье. Чтобы не загромождать таблицу, в ней пропущены коэффициенты гармоник 7-й и с 9-й по 15-ю включительно. Разумеется, ряд продолжается дальше 16-й гармоники, но они заметно выражены лишь у 6-й кривой. Как видим, ряд знакопеременный: нечетные гармоники входят со знаком плюс, а четные — со знаком минус. Под № 1 значится в таблице основная синусоида.

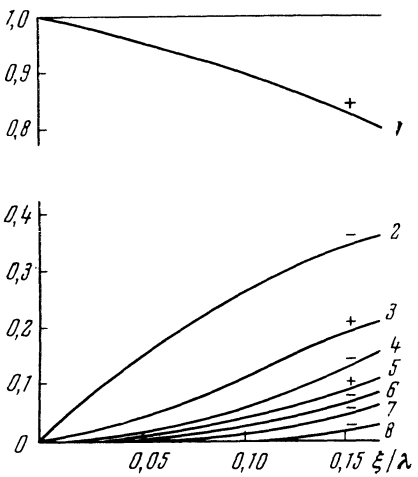


Рис. 140. Нарастание обертонов и понижение основной волны

На основании табл. 9 построены кривые на рис. 140, изображающие то же изменение коэффициентов при синусах в ряде Фурье при изменении сдвига ξ вершин волн вперед (и подошв назад). По оси абсцисс отложены значения величины $\frac{\xi}{\lambda}$, а по оси ординат — арифметические значения соответствующих коэффициентов, измеренных в прежних единицах. Соответствующий знак поставлен при каждой кривой. Номер соответствующего обертона также отмечен. По-прежнему № 1 относится к основной синусоиде.

Таблица 9 и рис. 140 показывают, как по мере продвижения волн по мелководью непрерывно нарастают обертоны, отнимая часть энергии от основной волны. Любопытно, что ход кривых для второго и третьего обертонов свидетельствует о частичной передаче их энергии более высоким обертонам по мере того, как те появляются и начинают нарастать: рост второго обертона вначале идет быстрей, а потом постепенно замедляется; третий обертон на начальных этапах своего развития растет все быстрей, а потом скорость нарастания его стабилизируется на некоторое время и вслед затем нарастание третьего обертона замедляется ввиду отдачи большой части энергии обертонам высших порядков.

Контрольное вычисление показало, что сумма квадратов всех коэффициентов ряда всегда отличается от единицы лишь на несколько процентов Это различие вызвано неизбежными погрешностями, которые связаны с работой гармонического анализатора.

На рис. 140, как и в табл. 9, не приведены данные для обертонов 7-го и с 9-го по 15-й включительно. При суммировании, разумеется, учитывались квадраты коэффициентов и для этих пропущенных обертонов. Сумма более высоких обертонов отбрасывалась, и это тоже вело к некоторой погрешности, небольшой по сравнению с единицей. При отсутствии погрешностей сумма квадратов амплитуд всех обертонов равнялась бы в точности единице в полном соответствии с законом сохранения энергии всей системы волн: основной волны и ее обертонов. В этом обстоятельстве заключено существенное различие между нашим анализом и чисто формальными построениями Дж. Эри [11] и Г. Джеффриса [12] — авторов, игнорировавших как закон сохранения энергии, так и нарастание весьма высоких обертонов.

Совершенно очевидно, что требование, предъявляемое нами к полной энергии всего семейства волн, составляющих в совокупности искаженный профиль, выполняется здесь совершенно автоматически и не может не выполняться при нашем способе построения искаженных профилей.

Действительно, ведь все кривые рис. 139 получены путем смещения отдельных бесконечно тонких слоев воды в *горизонтальном* направлении на соответствующие расстояния ξ_y. Ни один из этих слоев не поднимается и не опускается. Ни в одном не прибывает и не убывает масса воды, поднятой на ту или иную соответствующую высоту. Следовательно, потенциальная энергия искаженной волны здесь не меняется, остается той же, какой обладала волна в начальной форме при входе ее в мелководный район.

Рис. 139 и 140 позволили разобраться в *физике* явления. Для применения того же физического метода к природным условиям необходимо учесть, что простейшая морская волна с конечной амплитудой — волна мертвой зыби — очерчена не по синусоиде, а приблизительно по *трохоиде* (см. §§ 8—10).

Ветер еще больше удаляет форму профиля морской волны от синусоидальной, как было показано в упомянутых параграфах. Ветровую волну на мелководье исследуем несколько позже, а сначала рассмотрим поведение трохоидальной волны мертвой зыби, проследим за постепенным искажением ее профиля при распространении на мелководье.

По-прежнему обозначим через $R = \frac{\lambda}{2\pi}$ радиус круга качения и через $\frac{h}{2} = r_0$—радиус производящей окружности (в то же самое время r_0—радиус орбиты поверхностной частицы). Допустим, что за время движения волн по мелководью возникло «опережение» вершины ξ и соответствующее «отставание» подошвы — ξ. Тогда профиль *искаженной* волны (вместо трохоиды) определится двумя совместными уравнениями.

$$\left.\begin{aligned} x &= R\theta + r_0 \sin\theta + \frac{\xi}{r_0} y, \\ y &= r_0 \cos\theta. \end{aligned}\right\} \tag{114}$$

После подстановки y из второго уравнения системы (114) в первое можно записать выражение тангенса угла между касательной к искаженной кривой и осью абсцисс следующим образом:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\sin\theta}{\frac{R}{r_0} + \cos\theta - \frac{\xi}{r_0}\sin\theta}. \tag{115}$$

Место наибольшей крутизны склона на профиле (т. е. соответствующее значение аргумента θ) найдем, приравняв нулю вторую производную от y по x. Очевидно, что в этом месте лежит точка перегиба кривой. В иной форме то же условие выразим, приравняв нулю числитель дроби, полученной при дифференцировании уравнения (115) по x:

$$\cos\theta\left(\frac{R}{r_0} + \cos\theta - \frac{\xi}{r_0}\sin\theta\right) - \sin^2\theta - \frac{\xi}{r_0}\sin\theta\cos\theta = 0. \tag{116}$$

Предположим, что волна разрушается в тот момент, когда передний склон ее становится *отвесным* именно на этом самом участке. Тогда придется заключить, что при соответствующем значении аргумента θ правая часть равенства (115) обращается в бесконечность, или, что то же самое, знаменатель дроби в правой части обращается в нуль

$$\frac{R}{r_0} + \cos\theta - \frac{\xi}{r_0}\sin\theta = 0. \tag{117}$$

Совместное решение уравнений (116) и (117) дает значение аргумента θ_k, при котором касательная к кривой направлена вертикально, и значение величины $\xi_{кр}$, при котором осуществляется подобное наибольшее возможное искажение профиля бывшей трохоидальной волны непосредственно перед ее разрушением. Именно:

$$\theta_k = -\operatorname{arctg}\frac{\xi}{r_0}, \tag{118}$$

$$\xi_{кр} = \sqrt{R^2 - r_0^2}. \tag{119}$$

Сравним теперь найденную *критическую* величину $\xi_{кр}$ с той величиной ξ_T, которая возникает в продолжение одного периода волн T. Нетрудно заметить, что частное от деления $\xi_{кр}$ на ξ_T равно частному от деления критического времени пробега $\tau_{кр}$ волны по мелководью на период T волн. Значит,

$$\frac{\tau_{кр}}{T} = \frac{\xi_{кр}}{\xi_T} = \frac{\operatorname{sh} 2\alpha_0}{\pi h}\sqrt{\frac{\lambda^2}{4\pi^2} - \frac{h^2}{4}} = \left(\frac{H}{h}\right)\frac{\operatorname{sh} 2\alpha_0}{\pi}\sqrt{\frac{1}{\alpha_0^2} - \left(\frac{h}{2H}\right)^2}. \tag{120}$$

Обычно оказывается возможным пренебречь под радикалом квадратом величины $h/2H$ по сравнению с квадратом величины $1/\alpha_0$. Следовательно, вместо уравнения (120) можно записать выражение более простое и очень удобное для исследования, а именно

$$\frac{\tau_{кр}}{T} = \frac{\operatorname{sh} 2\alpha_0}{\pi\alpha_0}\left(\frac{H}{h}\right). \tag{121}$$

Очевидно, столько периодов волн укладывается в промежутке времени, необходимом для возникновения *отвесного* переднего склона бывшей трохоидальной волны [13], и столько же длин волн укладывается в длине *критического пробега* волн на мелководье.

Интересно сопоставить полученную формулу (121) с тем выражением критического пробега (105), которое вытекает из чисто формальных соображений Джеффриса. Для такого сопоставления выразим величину c^2 (применительно к произвольной глубине H) через H и α. Тогда после простых преобразований вместо формулы (105) получим

$$\frac{x_{дж}}{\lambda} = \frac{\tau_{дж}}{T} = \frac{8}{3\pi}\frac{\operatorname{th}\alpha_0}{\alpha_0}\left(\frac{H}{h}\right). \tag{122}$$

Строение этой формулы напоминает строение формулы (121). Однако в отличие от формулы (122), полученной по Джеффрису, формула (121) Шулейкина не приводит к неправильным заключениям ни при каких условиях распространения поверхностных волн независимо от того, распространяются ли они на мелководье или на глубоком море.

Действительно, при нарастании отношения H/h и одновременном нарастании величины α_0 правая часть равенства (121) очень быстро возрастает, стремясь к бесконечности. Физически это означает, что на глубоком море трохоидальные волны могут распространяться на неограниченные расстояния, не изменяя своего профиля и поэтому не разрушаясь. Разумеется, это относится к безветрию, в случае же штормового ветра профиль волн делается неустойчивым по другой причине, описанной в §§ 9 и 10. Сейчас мы не инте-

ресуемся этой стороной дела, связанной, как помним, с сильным пульсирующим дрейфовым течением.

Легко убедиться, что даже на мелководье величина $\tau_{дж}$, вычисляемая по соображениям Г. Джеффриса [12], сильно занижена по сравнению с истинным значением времени критического пробега, весьма близким к величине $\tau_{кр}$, определяемой по формуле (121). Взяв отношение соответствующих частей уравнений (121) и (122), найдем

$$\frac{\tau_{кр}}{\tau_{дж}} = \frac{3}{4} \operatorname{ch}^2 \alpha_0. \qquad (123)$$

В частности, во время опытов в штормовом бассейне при длине волн $\lambda = 3{,}5$ *м* и толщине слоя воды в бассейне $H = 2{,}4$ *м* соответствующее значение α_0 было равно 4,3. Подставив эти числовые величины в формулу (121),

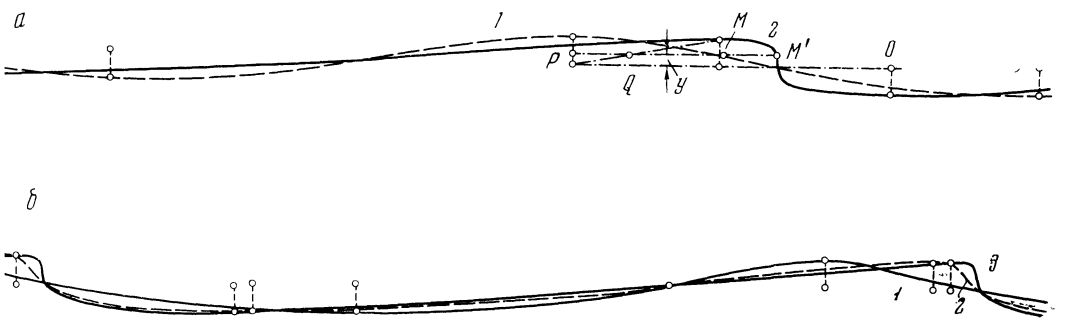


Рис. 141. Искажение мертвой зыби и ветровой волны на мелководье

получим значение $\tau_{кр}/T$, которое хорошо согласуется с наблюдениями над разрушением волн в бассейне. Между тем, исходя из формулы (123), заключаем, что в данном случае $\frac{\tau_{кр}}{\tau_{дж}} = 1000$, т. е. формула Джеффриса занижает время критического пробега в данном случае примерно в 1000 раз.

На рис. 141,*а* кривая *1* воспроизводит в сильно уменьшенном масштабе трохоидальный профиль волны, только что вступившей на мелководье. Значения r_0 и R в натуре здесь были взяты применительно к тем размерам, которыми обладали волны при опытах в бассейне: $r_0 = \frac{h}{2} = 10$ *см*, $R = \frac{\lambda}{2\pi} = 55$ *см*.

На основании формулы (119) надо принять в соответствии с этими натурными размерами, что $\xi_{кр} = 54$ *см* (в натуре).

На рис. 141,*а* построен профиль волны, искаженной под действием мелководья до состояния, предшествующего разрушению. Этот профиль изображен кривой *2* в таком же уменьшенном масштабе, как и кривой *1*. Вершина волны здесь смещена вперед на отрезок, который соответствует в натуре 54 *см*. Все прочие точки профиля построены простейшим графическим приемом. Именно, вершина кривой *2* была соединена наклонной прямой с той точкой оси абсцисс, которая лежит непосредственно под вершиной кривой *1*. Затем эта наклонная прямая была продолжена на такое же расстояние вниз под осью абсцисс (см. наклонную прямую на рис. 141,*а*). Смещение произвольной точки M начального профиля *1* равно отрезку горизонтальной прямой PQ между ординатой вершины трохоиды и вспомогательной наклонной прямой. Остается лишь отложить отрезок $MM' = PQ$ от точки M начального профиля в ту же сторону, в какую наклонена прямая относительно ординаты вершины трохоиды. Иными словами, смещения точек, лежащих выше оси

абсцисс (выше средней линии), должны быть направлены в сторону движения волн, вперед. Смещения точек, лежащих ниже средней линии, будут направлены назад.

Отметим, что сам средний уровень, с которым приходится здесь оперировать, не точно совпадает с уровнем моря в спокойном состоянии, как об этом говорилось в § 5: средний уровень выше уровня покоя на отрезок β_0, определяемый по формуле (52).

Значит, строго говоря, расстояние от среднего уровня до дна равно не H, а $H + \pi \frac{r_0^2}{\lambda}$. Однако нет необходимости осложнять приведенные соотношения за счет такой весьма незначительной поправки.

Посредством описанного графического приема на рис. 141,*а* построен профиль искаженной волны в *критическом* состоянии. Как и следовало ожидать, наиболее крутой участок профиля здесь совершенно отвесный. Эта кривая напоминает профиль весьма низких волн мертвой зыби, набегающих на песчаную отмель и разрушающихся там.

Однако полученный профиль *2* на рис. 141,*а* мало похож на профиль ветровых волн, разрушающихся на мелководье, в частности тех волн, которые были исследованы в штормовом бассейне. Это совершенно естественно: ведь *ветровые волны никогда не обладают трохоидальным профилем*. Значит, их поведение надо описывать не уравнениями (114), а аналогичными уравнениями, составленными применительно к иному начальному профилю волн.

В §§ 8—10 было показано, что профиль ветровой волны с достаточным приближением описывается параметрическими уравнениями (69). Воспользуемся этими уравнениями и запишем вместо уравнений (114) аналогичные уравнения, которые будут выражать *искажение ветровой волны* на мелководье:

$$\begin{aligned} x &= R\theta + a \sin\theta + \frac{\xi}{b} y, \\ y &= b \cos\theta. \end{aligned} \tag{124}$$

Повторив прежние выкладки применительно к новым условиям задачи, легко доказать, что передний фронт такой искаженной ветровой волны будет на некотором участке *отвесным* тогда, когда смещение вершины ξ достигнет значения ξ_{90}:

$$\xi_{90} = \sqrt{R^2 - a^2}. \tag{125}$$

На рис. 141,*б* кривая *1* представляет профиль ветровой волны, только что вошедшей на мелководье. При прежних значениях высоты волн $h = 20$ *см* и длины ее $\lambda = 345$ *см* положено: $a = 30$ *см*, $b = 10$ *см*, $R = 55$ *см*. Как и на рис. 141,*а*, при воспроизведении масштаб чертежа значительно уменьшен. По-прежнему уменьшения вертикального и горизонтального масштабов одинаковы.

На том же рис. 141,*б* вычерчен профиль ветровой волны, *искаженной* под действием мелководья, в двух вариантах. Сейчас мы говорили об искаженной волне, передний фронт которой на некотором участке стал отвесным. Этому случаю соответствует кривая *3*, которая вычерчена посредством графического приема, описанного выше (применительно к кривой *2* рис. 141,*а*). Для смещения вершины формула (125) дает здесь в натуре $\xi_{90} = 46$ *см*. Кривая *3* очень близка к тем профилям, которые были получены посредством киносъемки разрушающихся ветровых волн в бассейне. Один из таких снимков воспроизведен на рис. 142.

Однако исследование серии кинокадров, предшествующих моменту разрушения, и наблюдение на экране результатов ускоренной («рапидной») съемки показали, что нарастание крутизны перед моментом, изображенным на рис. 141,*б* (кривая *3*) и 142, идет *скорее*, чем это следует из формул (112) и (113). По-видимому, волна делается неустойчивой ранее этого момента.

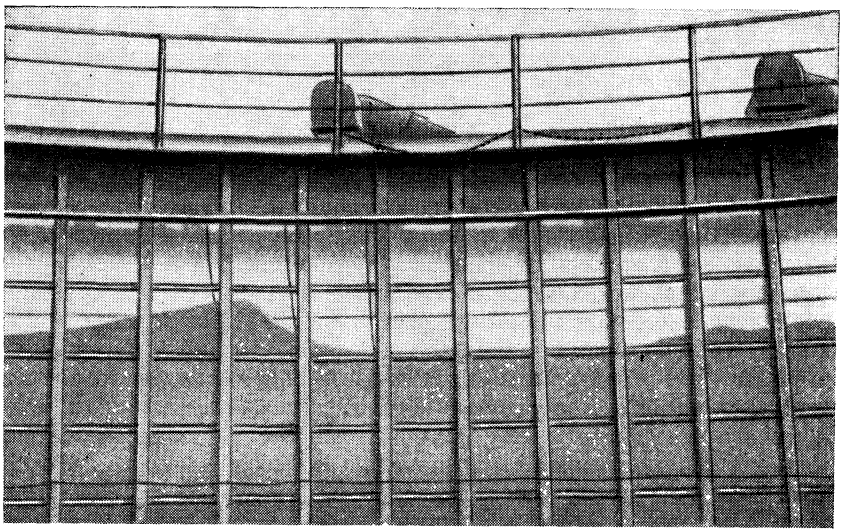


Рис. 142. Фотография профиля ветровой волны перед разрушением

Естественно ожидать, что физическая причина неустойчивости здесь аналогична рассмотренной в § 10. Но ведь там граница устойчивости профиля определялась углом порядка 120° между касательными при вершине предельно крутой волны (в зависимости от скорости пульсирующего дрейфового течения). В нашей новой задаче заведомо утрачена симметрия профиля относительно вертикальной прямой, проходящей через вершину волны. Тем не менее даже при различии углов γ_1 и γ_2 между этой вертикалью и касательными к «переднему» и «заднему» склонам сумма $\gamma_1 + \gamma_2$, по всей вероятности, будет близка к 120° в *критическом* случае.

Исходя из таких соображений, попытаемся найти критический сдвиг ξ_Λ вершины волн, при котором наступает предел устойчивости движения. На основании формул (124) легко показать, что условия устойчивости по новому признаку будут

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}\gamma_1 &= -\frac{\xi}{b} + \frac{R}{b\sin\theta} + \frac{a}{b}\operatorname{ctg}\theta, \\ \operatorname{tg}\gamma_2 &= \frac{\xi}{b} + \frac{R}{b\sin\theta} + \frac{a}{b}\operatorname{ctg}\theta, \\ \gamma_1 + \gamma_2 &= \frac{2}{3}\pi. \end{aligned} \tag{126}$$

На основании последнего из этих условий

$$\operatorname{tg}\gamma_2 = \frac{\operatorname{tg}\frac{2}{3}\pi - \operatorname{tg}\gamma_1}{1 + \operatorname{tg}\frac{2}{3}\pi\operatorname{tg}\gamma_1}.$$

На основании двух первых найдутся точки наибольшей крутизны склонов. Им соответствует значение θ, определяемое из равенства

$$-\operatorname{ctg}\theta = \frac{a}{\sqrt{R^2 - a^2}}. \tag{127}$$

Совместное решение уравнений (126) и (127) дает для искомого критического сдвига ξ_Λ выражение

$$\xi_\Lambda = \sqrt{R^2 - (a^2 + b^2)} - 1{,}16b\sqrt{R^2 - a^2}. \qquad (128)$$

Числовой коэффициент под корнем представляет собой приближенное значение $2\operatorname{tg}\frac{2}{3}\pi$. Подставив в формулу (128) прежние значения R, a, b, послужившие для построения кривой *3* на рис. 141,*б*, найдем теперь в натуре $\xi_\Lambda = 39{,}5$ *см*. В прежнем уменьшенном масштабе рис. 141,*б* построена кривая *2*, которая соответствует такому смещению вершины.

Нетрудно убедиться, что угол между касательными к самым крутым участкам переднего и заднего склонов кривой *2* рис. 141,*б* действительно равен 120°. Значит, кривую *2* мы вправе рассматривать как нижний предел устойчивого профиля ветровой волны, искаженной на мелководье. Верхний предел, непосредственно предшествующий разрушению волн, задан кривой *3*.

Если бы в промежутке между этими двумя состояниями искажающейся зоны смещение вершины возрастало по тому же простому закону, о котором говорилось в связи с формулой (113), то даже и тогда был бы совсем невелик промежуток времени $\Delta\tau$ между стадиями, представленными кривыми *2* и *3* (рис. 141,*б*). Действительно, на основании предыдущих рассуждений можно показать, что при линейном законе нарастания ξ во времени существовало бы соотношение

$$\frac{\Delta\tau}{\tau_{90}} = \frac{\xi_{90} - \xi_\Lambda}{\xi_{90}} = 0{,}14.$$

Угол 120° при вершине, как предел устойчивости, характеризует волну с острым гребнем (с угловой точкой), где касательные внезапно перебрасываются с переднего склона на задний, поворачиваясь при этом на 120°. Волна, описанная уравнениями (124), обладает *закругленной* вершиной (хотя и с малым радиусом кривизны) без угловой точки. Следовательно, есть некоторые основания полагать, что ее устойчивость будет сохраняться несколько дольше срока, определяемого условием (128). По-видимому, разрушение начнется где-то в границах промежутка времени $\Delta\tau$, входящего в только что написанное ориентировочное соотношение. Значит, приняв момент разрушения в середине промежутка времени $\Delta\tau$, мы сделаем ошибку во всяком случае меньше 7 % от предельной величины τ_{90}. В действительности эта ошибка должна быть еще меньше. Ведь, как было уже упомянуто, нарастание ξ в пределах $\Delta\tau$ идет быстрее, чем следует из простого линейного закона (113).

§ 12. Аналитическая проверка гипотезы о переменной фазовой скорости волн на мелководье

В предыдущем изложении считалось, что фазовую скорость волн, меняющуюся в продолжение одного периода (или на протяжении одной волны) под влиянием мелководья, можно вычислять по известным формулам, выведенным применительно к *постоянной* скорости волн на мелководье. На основе этой гипотезы были вычислены профили мертвой зыби и ветровой волны, распространяющихся на мелководье вплоть до стадии частичного разрушения вершины. Результаты показали, что вычисленные профили очень хорошо соответствуют профилям волн в природе, полученным на фотографиях, и в особенности в чистых условиях штормового бассейна, где застекленные стены позволяют фотографировать волны в профиль.

В разделе динамики ветровых волн (см. § 24, стр. 316) будет показано, что, определив критический пробег волн — до частичного разрушения вершин, можно вычислить мощность, затрачиваемую волнами на частичное раз-

рушение вершин, в условиях мелководного моря или озера. Тем самым вносится важный член энергетического баланса волн в те уравнения, которые послужат нам в дальнейшем для расчета волн в соответствующих условиях. Но если это так, то становится очевидным значение теории, изложенной в предыдущем параграфе, и, в частности, гипотезы об изменениях фазовой скорости волн, служившей основой дальнейших построений.

Хотя косвенной проверке этой гипотезы служат профили волн, вычисленные на ее основании и хорошо совпавшие с фотографиями действительных профилей, но совсем не лишней является новая, аналитическая, проверка гипотезы, проделанная в двух вариантах — посредством оценки погрешностей по методу Н. Е. Кочина и путем интегрирования *нелинейного* уравнения на большой электронной счетной машине [14].

Ограничимся лишь случаем распространения весьма пологой волны, начальный профиль которой, перед вступлением на мелководье, можно считать синусоидальным. Практически это будет либо волна очень длинной и очень низкой мертвой зыби, нередко наблюдающейся после выхода волн далеко за пределы штормовой области, или волна прилива. Здесь заведомо можно пренебречь членом $u\frac{\partial u}{\partial x}$ в уравнении Эйлера и членом $u\frac{\partial \eta}{\partial x}$ в развернутом уравнении неразрывности (104), которое приобретет теперь вид

$$(H+\eta)\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial \eta}{\partial t}. \tag{129}$$

Это уравнение совместно с упрощенным уравнением Эйлера (см. гл. II, § 2) после повторного дифференцирования и обычных преобразований приведет к одному уравнению

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - (H+\eta)^{-1}\left(\frac{\partial \eta}{\partial t}\right)^2 = g\,(H+\eta)\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}, \tag{130}$$

справедливому при $H \ll \lambda$, где по-прежнему λ — длина волн, а H — глубина моря, η — отклонение уровня воды от «нулевого» состояния. Как видим, здесь $g\,(H+\eta)$ занимает место квадрата фазовой скорости в обычном, линейном, волновом уравнении, качественно оправдывая гипотезу о переменной фазовой скорости (зависящей от η).

Перейдем к безразмерным переменным

$$y = \frac{\eta}{H}, \quad s = \frac{x}{H}, \quad \tau = t\sqrt{\frac{g}{H}}. \tag{131}$$

Тогда вместо (130) запишем

$$\frac{\partial^2 y}{\partial \tau^2} - (1+y)^{-1}\left(\frac{\partial y}{\partial \tau}\right)^2 = (1+y)\frac{\partial^2 y}{\partial s^2}. \tag{132}$$

В общем виде это нелинейное уравнение не интегрируется. Для численного интегрирования любыми средствами необходимо задать конкретные параметры.

На основании изложенного в предыдущем параграфе критический профиль искаженной волны, с отвесным фронтом, должен возникнуть при условии $x/\lambda = 2H/3h$, где $h = 2a$ по-прежнему обозначает высоту (удвоенную амплитуду) волн.

Пусть такой профиль возникает после того, как волна пробежала от границы мелководья путь $x = 4\lambda$. Тогда должно быть $H/h = 6$. Зададимся значением $H = 10\,м$. Тогда окажется, что $h = 1{,}66\,м$, $a = 0{,}83\,м$. На основании (131) безразмерная амплитуда волн будет $a/H = y_0 = 0{,}083$.

Безразмерный период $\mathcal{T}$ выражается так:

$$\mathcal{T} = T\sqrt{\frac{g}{H}} = \frac{\lambda}{\sqrt{gH}}\sqrt{\frac{g}{H}} = \frac{\lambda}{H}. \tag{133}$$

Учитывая порядок периодов длинных волн зыби, наблюдаемых в природе, примем значение $\mathcal{T} = 20\pi$. Это соответствует длине волн зыби более 600 *м*. Значит, удовлетворяется требование $H \ll \lambda$. При таких заданных параметрах правильные синусоидальные волны, приходящие со стороны глубокого района моря, должны вызвать в самом начале мелководья колебания уровня, описываемые уравнением

$$y = 0{,}083 \cdot \sin 0{,}1\tau. \tag{134}$$

Постановка задачи вполне соответствует начальным условиям, которыми впервые задавался Дж. Эри, а впоследствии Г. Джеффрис [12]: в пределах глубокой части моря волнение считается установившимся, а после вступления на мелководье — постепенно искажающимся. Строго говоря, уравнение (134) учитывает наличие частичного отражения волн от границы мелководья в сторону глубокого моря; однако принципиального значения такая оговорка не имеет, поскольку для интегрирования уравнения (132) в пределах мелководья выражение (134) важно просто как начальное условие. По этой причине никаких оговорок не содержится и в работах цитированных двух авторов.

На основании изложенного в предыдущем параграфе будем считать, что колебания уровня на волне, происходящие на расстоянии s от границы мелководья, совершаются по закону

$$y = \sum_{n=1}^{n=\infty} B_n(s) \sin 0{,}1n\,(\tau - s). \tag{135}$$

Здесь коэффициент $B_n(s)$ ряда зависит только от безразмерного расстояния s, пройденного на мелководье. Эта зависимость легко выводится на основании диаграммы рис. 140 в применении к принятым параметрам задачи.

Если бы выражение (135) было идеально точно, то подстановка выражений y и соответствующих производных по τ и s в (132) привела бы к тождеству между левой и правой частью (132) во всех фазах колебания уровня на расстоянии s от границы мелководья.

В действительности нельзя ожидать полного тождества, но можно будет произвести анализ результатов, применив метод, который позволил Н. Е. Кочину впервые получить из неинтегрируемых уравнений гидродинамики упрощенную систему уравнений, достаточно точно описывающую общую циркуляцию атмосферы. Это — метод оценки погрешностей, вносимых благодаря упрощениям.

На основании (135) в левую часть (132) войдут

$$\frac{\partial^2 y}{\partial \tau^2} = -\sum_{n=1}^{n=\infty} 0{,}01n^2 B_n \sin 0{,}1n\,(\tau - s), \tag{136}$$

$$\left(\frac{\partial y}{\partial \tau}\right)^2 = \left[-\sum_{n=1}^{n=\infty} 0{,}1nB_n \cos 0{,}1n\,(\tau - s)\right]^2, \tag{137}$$

причем (137) придется еще делить на значение $1 + y$ в каждой фазе. В правой части будет

$$\frac{\partial^2 y}{\partial s^2} = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\partial^2 B_n}{\partial s^2} \sin 0{,}1n\,(\tau - s) -$$

$$-2\sum_{n=1}^{n=\infty} 0{,}1n \frac{\partial B_n}{\partial s} \cos 0{,}1n\,(\tau - s) - \sum_{n=1}^{n=\infty} 0{,}01n^2 B_n \sin 0{,}1n\,(\tau - s). \tag{138}$$

Это выражение надо умножать на $1 + y$, вычисляемое для каждой фазы. При заданных параметрах отвесный фронт искаженной волны, перед частич-

ным разрушением ее вершины, должен возникнуть на безразмерном расстоянии $s_{кр} = 4 \cdot 20\pi = 251$ от границы мелководья. Но здесь все ряды в (136) — (138) становятся расходящимися, так как все производные обращаются в бесконечность. Поэтому проведем вычисления для профиля волн, пробежавших половину критического пути, т. е. $s = 126$. Здесь можно будет ограничиться суммированием семи членов ряда в (136) и (138) и восьми членов ряда в (137).

Даже при этом на кривых, вычисленных по упомянутым формулам, остаются небольшие зубцы, не имеющие реального смысла и совершенно несущественные. Поэтому (а также для контроля) наряду с вычислениями по (137) было произведено вычисление путем непосредственного нахождения производной по заданному искаженному профилю волны на полпути до места частичного разрушения.

На рис. 143 кривая *2* изображает этот профиль, построенный в соответствии с предыдущим параграфом, применительно к $s = 126$. Кривая *1* — начальный профиль волн, только что вошедших на мелководье, а кривая *3* — профиль волн перед частичным разрушением их вершин ($s_{кр} = 251$).

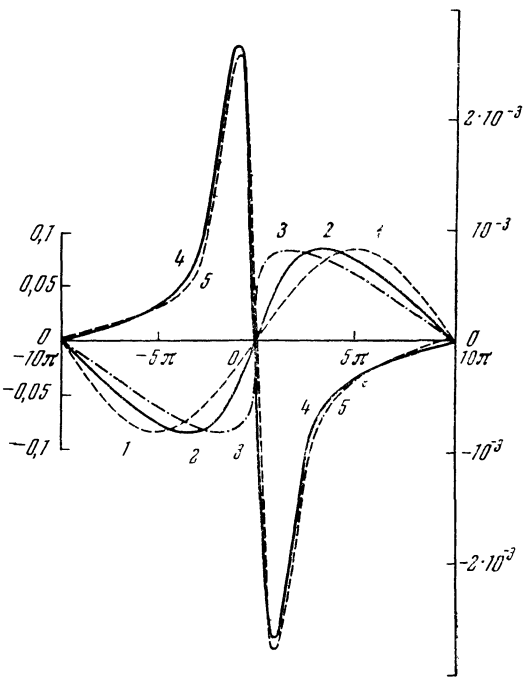


Рис. 143. Безразмерная функция и производные

Оба способа дали близкие между собой результаты: двукратное дифференцирование функции y на основании графика рис. 143 хорошо представляет предел, к которому стремится «зубчатая» кривая, вычисленная по (137) при неограниченном возрастании числа гармоник n.

Ввиду того, что сама величина, вычисляемая по (137),— малая более высокого порядка, чем величина, вычисляемая по (136), такие мелкие детали не представляют интереса. Результаты вычислений по (136) и (138) были тоже сглажены графически с учетом этого обстоятельства. В итоге были построены кривые: одна, описывающая поведение левой части (132), а другая — поведение правой части (132) в различных фазах колебаний.

На рис. 143 обе эти кривые совмещены. Кривая *4* представляет изменения левой части, а кривая *5* — изменения правой части (132).

Как видим, расхождения между этими кривыми относительно малы. Максимальные ординаты их отличаются одна от другой примерно на 5%. Сдвиг фаз близ прохождения через нуль также незначителен.

Еще убедительней проверка, произведенная посредством интегрирования уравнения (132) на большой электронной вычислительной машине Московского университета. Б. И. Волкову удалось составить программу и получить на машине закон колебаний уровня на волне при двух значениях безразмерного параметра s. Точки, найденные им, нанесены на рис. 144 кружочками, по которым проведены: кривая *1* — для значения $s = {}^3/_4\, s_{кр} = 188$ и кривая *2* — для значения $s_к = 251$. Диаграмма позволяет оценить погреш-

ности, вносимые гипотезой Шулейкина (см. § 11) еще лучше, чем рис. 143.

На основании гипотезы сдвиг точек искаженного профиля относительно первоначальной синусоиды 0 должен быть пропорционален расстоянию y соответствующей точки по вертикали от нулевого уровня. В полном согласии с этим прямые *3* —*10* представляют геометрические места концов отрезков, выражающих смещения; начала отрезков приняты на ординатах, проходящих через вершину и через подошву синусоиды 0. Прямая *3* построена на основании изложенного в предыдущем параграфе. Прямая *5* соответствует

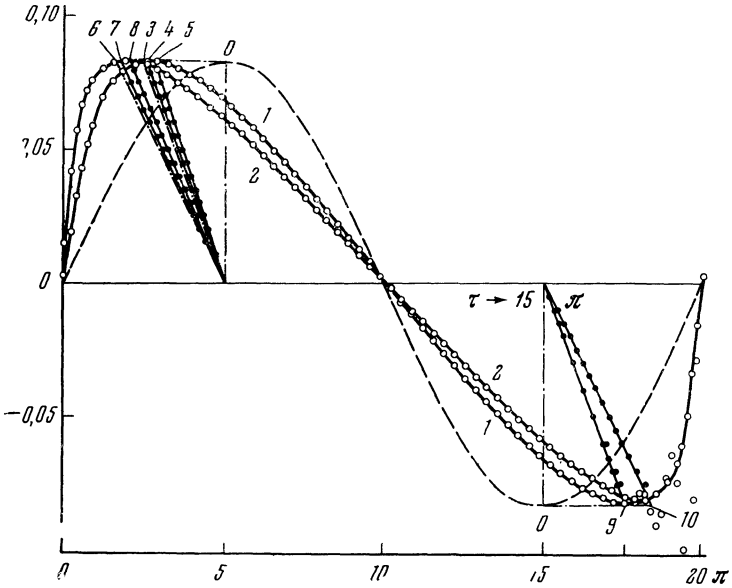


Рис. 144. Результат интегрирования уравнения на машине

начальному участку кривой *1*; *4* — участку от ее вершины до оси абсцисс; *9* — всей нижней части кривой *1*; *6* построена для критического значения s; *8* — соответствует начальному участку кривой *2*; *7* — ее участку от вершины до оси абсцисс; *10* — от оси абсцисс до подошвы волны. Далее наблюдается разброс точек, который вызван, по-видимому, особенностями уравнения (132) при критическом значении s.

Общий вывод из построений таков: на восходящих начальных участках машина дала точки, которые соответствуют расстояниям s на 10 % меньшим, чем полученные на основании гипотезы Шулейкина; на ниспадающих участках до оси абсцисс расхождения составляют всего лишь 2 %; участки кривых ниже оси абсцисс (где нет разброса точек) совершенно точно согласуются с гипотезой, на основании которой проведены прямые *9*, *10*. Условие неразрывности не допускает различий в сдвиге точек на восходящем и соответственно нисходящем участках искаженного профиля волн при неизменной высоте волн. Следовательно, вероятная погрешность, вносимая гипотезой, не может превышать полусуммы 10 и 2 %, т. е. 6 %. Отсутствие погрешностей на участках ниже оси абсцисс показывает, что вероятная погрешность даже *меньше* 6 %.

§ 13. Зарождение ветровых волн на гладкой поверхности воды

Если бы ламинарный воздушный поток, проносящийся над гладкой поверхностью воды, не встречал на ней абсолютно никаких неоднородностей — незначительных поднятий и углублений,— зарождение волн было бы немыслимым: абсолютно гладкая поверхность навсегда оставалась бы абсолютно гладкой. Однако в действительности само строение воздушного потока никогда не бывает однородным, в нем всегда существуют хотя бы небольшие завихрения, в связи с которыми давление воздуха на двух близлежащих участках поверхности воды может оказываться не вполне одинаковым.

Тем самым обусловлено возникновение мельчайших неоднородностей поверхности воды, лишь кажущейся абсолютно гладкой, а в действительности не являющейся таковой.

Независимо друг от друга В. Кельвин [15] и Г. Гельмгольц [16] впервые показали, что при наличии подобных мельчайших возвышений или впадин на гладкой поверхности воды воздушный поток, проносящийся над ней, может вызвать *нарастание* этих неоднородностей при наличии некоторых определенных условий. Однако условия, необходимые для роста случайных возвышений или впадин на гладкой поверхности воды, на самом деле оказываются совсем не теми, какими они являются в теории Кельвина — Гельмгольца.

На это несоответствие указывали последующие авторы, но лишь одному из них — П. Н. Успенскому [17] — удалось найти приближенное истолкование явлений и устранить противоречия в теории зарождения начальных волн. Не останавливаясь на выкладках этого автора, отметим, что он уточнил выражения *давления* на элементы поверхности воды *сверху* и *снизу*. В отличие от задачи, рассмотренной нами в § 2, в задаче о мелких (капиллярных) волнах приходится считаться с наличием *разности давлений* $p_1 - p_2$, вызванной *поверхностным натяжением*; на вершине капиллярной волны вода испытывает давление, превышающее атмосферное, а у подошвы — меньшее, чем атмосферное, именно за счет кривизны натянутого поверхностного слоя.

Как известно,

$$p_1 - p_2 = \alpha \frac{d^2y}{dx^2}, \tag{139}$$

причем α здесь обозначает константу, характеризующую поверхностное натяжение. Она измеряется в динах на погонный сантиметр растянутого поверхностного слоя и численно равна количеству поверхностной энергии в эргах на квадратный сантиметр поверхности моря.

Обозначив через p_2 давление, приходящееся на единицу поверхности воды, Успенский показывает, что это давление колеблется вместе с колебаниями координаты y исследуемой точки поверхности по закону

$$p_2 = Py, \tag{140}$$

причем

$$P = -g\frac{2\delta_a\delta}{\delta_a+\delta} + \delta\frac{k^2\alpha}{\delta_a+\delta} - \frac{k\delta_a\delta(\delta-\delta_a)}{(\delta_a+\delta)^2}V^2 + \\ + \frac{2k\delta_a\delta}{\delta_a+\delta}V\left[\frac{g}{k}\frac{\delta-\delta_a}{\delta_a+\delta} + \frac{k\alpha}{\delta_a+\delta} - \frac{\delta_a\delta}{(\delta_a+\delta)^2}V^2\right]^{1/2}. \tag{141}$$

Здесь g — ускорение в поле тяжести, δ — плотность воды, δ_a — плотность воздуха, $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, где λ — длина волн, α — по-прежнему поверхностное натяжение, V — скорость ветра.

Если энергия, приходящаяся на полосу единичной ширины длиной λ, равна E_λ, то изменение ее в единицу времени может быть представлено инте-

гралом на протяжении длины волны λ

$$\frac{\partial E_\lambda}{\partial t} = -\int_{(\lambda)} p_2 \frac{\partial y}{\partial t}\, dx, \tag{142}$$

где $\partial y/\partial t$, очевидно, представляет собой скорость вертикальных перемещений элемента поверхности. Подставляя в (142) выражение p_2 через P, Успенский пишет

$$\frac{\partial E_\lambda}{dt} = -P \int_{(\lambda)} y \frac{\partial y}{\partial t} dx = -\frac{1}{2} P \frac{\partial}{\partial t} \int_0^\lambda y^2\, dx. \tag{143}$$

Интеграл, входящий в формулу (143), выражает среднее значение квадрата возвышения элемента поверхности в пределах одной волны. Следовательно, при возрастающей амплитуде колебаний уровня производная от этого интеграла по времени — существенно положительная величина.

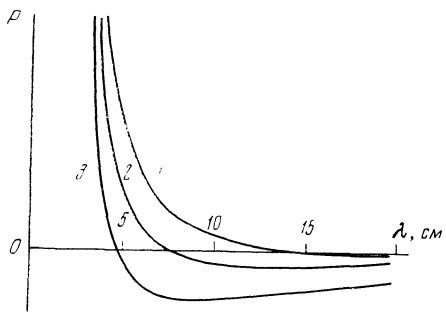


Рис. 145. Зависимость P от λ (по П. Н. Успенскому)

Знак производной $\partial E_\lambda/\partial t$ полностью определяется тем знаком, которым обладает величина P: если значение P *отрицательно*, то производная $\partial E_\lambda/\partial t$ оказывается положительной, следовательно, энергия волн *растет*. Если значение P *положительно*, то производная обладает отрицательным знаком, следовательно, мелкие случайные возмущения на гладкой поверхности воды должны *затухать*, они не могут переходить в ясно выраженные и растущие волны. Но ведь на основании формулы (141) P является функцией скорости ветра V и длины волн λ. Задавшись тремя определенными значениями скорости ветра $V = 200$, 250 и 300 *см/сек*, Успенский построил по формуле (141) соответствующие им три кривые, представляющие графически зависимость P от λ.

Эти кривые воспроизведены на рис. 145. Они пересекают ось абсцисс в трех точках, играющих роль *критических*: область *ниже* оси абсцисс соответствует условию *возможности развития начальных волн*. Напротив, область *выше* оси абсцисс отвечает условию *гашения* случайных неровностей, возникающих на гладкой поверхности воды. Совершенно очевидно, что решающую роль при этом играет *поверхностное натяжение*, охарактеризованное величиной α в формуле (141).

Как видно по кривым Успенского, при скорости ветра 2 *м/сек* минимальная длина волн, зарождающихся на поверхности воды, составляет около 13 *см*; при скорости ветра 2,5 *м/сек* минимальная длина волн равна приблизительно 7 *см* и, наконец, при скорости ветра 3 *м/сек* она составляет 5 *см*.

Иными словами, нет какой-то единой критической длины начальных волн, а при каждой определенной скорости ветра существует свое значение критической длины.

Сами значения критической длины волн, по Успенскому, лучше согласуются с опытами, чем значения, вычисленные по Кельвину и Гельмгольцу; но при скоростях ветра более 5 *м/сек* теория все еще дает противоречивые результаты и нуждается в усовершенствовании.

§ 14. Некоторые гипотезы о нарастании энергии волн

Вспомнив соотношение (59), можно записать выражение для нарастания полной энергии волн во времени (в расчете на единицу поверхности моря)

$$\frac{dE}{dt} = \delta g r_0 \frac{dr_0}{dt}. \tag{144}$$

Совершенно очевидно, что нарастание энергии E вызывается воздействием ветра, передающего энергию воде, и что только часть передаваемой энергии идет на увеличение высоты волн: некоторая часть поглощается *внутренним трением* в воде. В. М. Маккавеев [18] сделал попытку определения dE/dt из уравнения баланса энергии

$$\frac{dE}{dt} = W_V - W_\mu. \tag{145}$$

Здесь W_V — количество энергии, передаваемой ветром в расчете на единицу поверхности моря в единицу времени; W_μ — количество энергии, которая в единицу времени поглощается внутренним трением в столбе воды с основанием, равным единице площади. Маккавеев предполагал, что W_V обусловлено тангенциальной силой поверхностного трения, т. е. трения воздуха о воду.

Ввиду отсутствия экспериментальных средств для проверки подобного предположения гипотеза о роли тангенциальной силы при передаче энергии волнам продержалась у ряда авторов до нашего времени. Между тем можно показать, что количество энергии, получаемой волнами по этому каналу, *ничтожно мало* по сравнению с тем, какое в действительности получается от ветра. Рассматривая движение поверхностных водных частиц по их орбитам, следует заключить, что на *верхней* половине орбиты тангенциальная сила должна способствовать *увеличению* линейной скорости частиц; но ведь зато на *нижней* половине орбиты тангенциальная сила трения воздуха о поверхность воды должна *тормозить* орбитальное движение частиц, так как здесь она направлена в сторону, противоположную линейной скорости частиц.

Правда, аэродинамикам хорошо известно, что скорость воздушного потока над выпуклостями всегда бывает больше, чем скорость воздушного потока над впадинами тела, над которым проносится воздух; следовательно, скорость ветра над вершинами волн всегда несколько больше, чем скорость ветра над подошвами. Отсюда следует, что тангенциальная сила, стремящаяся увеличить линейную скорость частиц на верхних частях орбит, будет несколько больше, чем сила, тормозящая движение тех же частиц на нижних частях орбит. Но *разность* между соответствующими значениями сил трения воздуха о воду *весьма мала*. Современные средства исследования энергетики волн (см. § 29) показывают, что за счет такой незначительной разности сил (ускоряющей и тормозящей) не обеспечивается существующий в действительности поток энергии в воду.

Иную гипотезу о питании волн энергией ветра высказал Г. Джеффрис [19]. Этот автор полагал, что вследствие вихреобразования в воздухе, обтекающем волны, может возникнуть перераспределение аэродинамического давления на поверхность воды по схеме, воспроизведенной на рис. 146. По Джеффрису, энергия, передаваемая ветром волне в единицу времени (на единицу поверхности моря), должна равняться

$$W_V = \frac{p_1 - p_2}{\lambda} c,$$

где p_1 — горизонтальная составляющая результирующей силы давления воздушного потока на наветренный склон волны, p_2 — подобная же составляющая, вычисленная для подветренного склона; c — скорость волн; λ — длина волны.

Ввиду отсутствия средств для экспериментальной проверки гипотезы о питании волн энергией, Джеффрис был вынужден прибегнуть к весьма ненадежному *косвенному* способу проверки некоторых основных положений гипотезы: по наблюдениям над самым первым этапом образования волн на поверхности небольшого пруда. С современной точки зрения, не выдерживает критики даже исходная диаграмма распределения давления над волной, которую построил Джеффрис (рис. 146). В действительности максимум на кривой аэродинамического давления всегда лежит приблизительно над подошвой волны, а минимум — над вершиной.

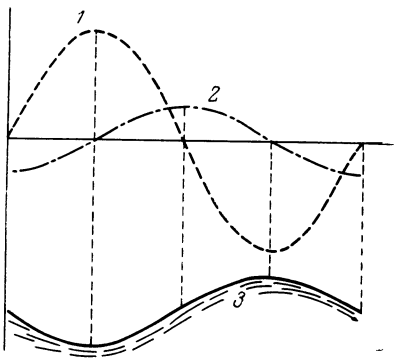


Рис. 146. Распределение давления вдоль профиля волн по Джеффрису

Попытка усовершенствования схемы питания энергией принадлежит К. К. Федяевскому [20]. Этот автор считал, что решающую роль в энергетике должно играть воздействие ветра на *мелкие, короткие и крутые капиллярные волны*, которые бегут по поверхности исследуемых гравитационных волн. При этом несколько искусственно предполагается, что скорость капиллярных волн, обусловленная значением поверхностного натяжения, равняется скорости гравитационных волн, зависящей в глубоком море от длины волн и от ускорения в поле тяжести. Федяевский пытался проверить справедливость своей гипотезы, наблюдая *минимальную скорость ветра* $V_{\text{мин}}$, при которой начальные волны с высотой h_0, возникшие на поверхности воды, могут нарастать. Обозначив через h_k высоту капиллярных волн, возникших на поверхности гравитационных, Федяевский получил теоретическое соотношение

$$V_{\text{мин}} > 1{,}22 \sqrt[9]{\frac{h_0^2}{h_k}},$$

в котором множитель перед корнем, разумеется, обладает размерностью скорости, деленной на длину в степени $^1/_9$. Как видим, неравенство Федяевского, служащее для определения минимальной скорости ветра, содержит в правой части корень девятой степени из частного двух остальных величин, подлежащих непосредственному определению на опыте. Совершенно очевидно, что при изменении подкоренного выражения в широких пределах корень такой высокой степени может меняться лишь немного, а потому косвенная проверка гипотезы ненадежна.

Работая в области физики вязких жидкостей, оригинальную гипотезу предложил П. Л. Капица [21]. Не вдаваясь в детали аэродинамической картины над волной, этот автор считает, что энергия W_V, передаваемая ветром волне, в расчете на единицу поверхности моря в единицу времени равна $\gamma\tau_m c$, причем τ_m — интеграл горизонтальных составляющих давления воздуха на протяжении длины волны λ, деленный на λ, а γ — некоторый поправочный множитель, меньший единицы. Свою гипотезу этот автор предлагает проверять по выведенной им формуле, характеризующей минимальную скорость ветра V_m, при которой возможно развитие (нарастание) волн на поверхности воды,

$$V_m = 3c_m = 3\left(\frac{\pi\mu g}{2\gamma\delta}\right)^{1/3}.$$

Здесь μ — коэффициент вязкости воды, а c_m — минимальная фазовая скорость волн.

Существенно отметить, что Капица придает большое значение заостренным волнам высоких порядков, появляющимся на поверхности основных волн. В дальнейшем мы увидим (см. § 17), что это предположение Капицы подтверждается на современных опытах, произведенных посредством новых методов.

§ 15. Постановка опытов в штормовом бассейне

Теория развития и затухания ветровых волн в течение долгого времени не получала сколько-нибудь существенного движения вперед из-за невозможности проверить теоретические предположения на прямых опытах. В природных условиях также не представлялось возможности произвести такую проверку ввиду сложности картины волнообразования в море при обычных синоптических условиях.

Теоретические схемы, предлагавшиеся различными авторами, как отечественными, так и иностранными, можно было подвергать лишь ориентировочной проверке по весьма ненадежному признаку, упомянутому в § 14, т. е. по установлению наименьшей скорости ветра, при которой могут возникать и развиваться первые мелкие волны на поверхности воды.

До последнего времени не существовало средств наблюдать развитие ветровых волн в достаточно чистых лабораторных условиях и в достаточно большом промежутке времени. Пытались наблюдать начальные стадии развития волн в аэрогидродинамической трубе, длина которой не достигала даже 20 *м*. Вследствие такого короткого пути, доступного для распространения волн, высота волн могла достигать лишь нескольких сантиметров (не более 8 *см*).

В 1938 г. В. В. Шулейкиным был предложен новый метод, который позволяет наблюдать в лабораторных условиях зарождение ветровых волн и их развитие в продолжение неограниченно долгого времени. После этого столь же легко и удобно наблюдать затухание мертвой зыби, оставшейся по прекращении ветра. Применимость метода была проверена на модели аспирантом В. Г. Дыбченко, после чего началось проектирование, а по окончании Отечественной войны— постройка предложенного бассейна.

На рис. 147 изображен общий вид штормового бассейна Морского гидрофизического института Академии наук СССР [1]. В отличие от предшественников, Шулейкин предложил получать ветровые волны в *замкнутом кольцевом пространстве* между стенами бассейна. Нижняя часть бассейна содержит воду, а верхняя охвачена потоком воздуха, создаваемым над водой.

Волны не встречают на своем пути никаких препятствий и бегут по кругу, испытывая, кроме воздействия ветра, также воздействие мелководья, если отношение длины волн к глубине слоя воды превосходит пределы, исследованные в § 3, и до некоторой степени воздействие трения о стены бассейна; разумеется, часть энергии поглощается *внутренним* трением в воде. Ниже будет сказано, как учитывается внутреннее трение и трение о стены бассейна (отсутствующее в море). Будет показано, что паразитическая роль стен бассейна *невелика* и что ее легко количественно учесть и исключить из выкладок при пересчете на натурные условия.

На первый взгляд может показаться, что какие-то существенные изменения вносятся за счет криволинейной формы пути волн в бассейне. Однако легко доказать, что при существующем соотношении между шириной кольца и его радиусом кривизны возникает лишь единственное (и притом несущественное) отличие от природных условий: высота волн, измеренная у внешней стены бассейна, может несколько отличаться от высоты волн у внутренней стены. Это вытекает из результатов, полученных в свое время Джеппертом при совершенно абстрактном исследовании распространения волн по круговому пути. Как правило, гребни волн в бассейне располагаются по радиусам и лишь очень редко отклоняются от этого направления — при возникновении радиальных колебаний уровня, расстраивающих двумерную картину явления. Мы не будем останавливаться на этих побочных (непостоянных) явлениях, а везде будем считать волнение двумерным, каким оно почти всегда наблюдается в штормовом бассейне. В будущем не представит особого труда распространить полученные выводы на трехмерное волнение, внеся соответствующие поправки и обобщения.

В § 8 уже было сказано несколько слов о регистрации элементов волн в штормовом бассейне большим фотоаппаратом, изображенным на рис. 128, а также о киносъемке волн сквозь застекленные стены бассейна. Для точного исследования непрерывных изменений высоты и длины волн во времени наиболее удобным оказался фотографический метод, впервые примененный А. Н. Крыловым [22] для регистрации качки корабля и усовершенствованный А. А. Ивановым [23]. В. В. Шулейкин внес дальнейшие изменения в методику применительно к условиям регистрации волн в штормовом бассейне.

[1] Теперь — Морской гидрофизический институт Академии наук УССР.

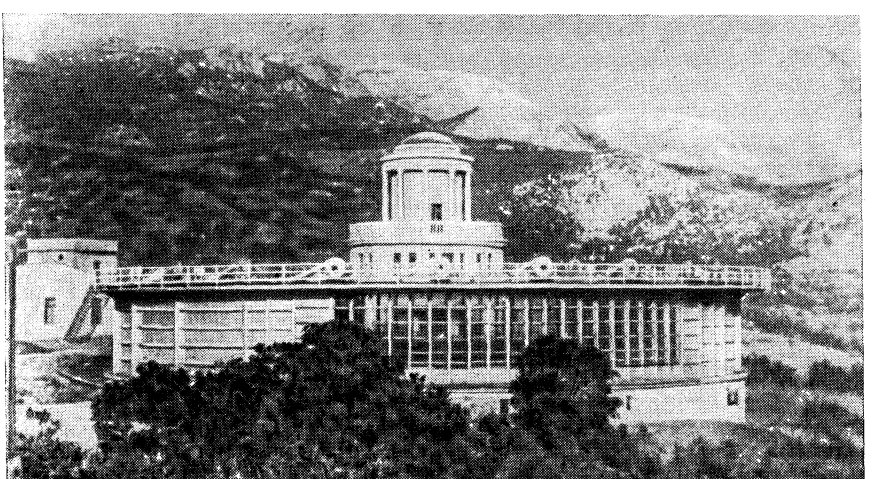


Рис. 147. Общий вид штормового бассейна

Длиннофокусный объектив аппарата (рис. 128) отбрасывает изображение границы раздела вода — воздух на ленту фотобумаги сквозь тонкую вертикальную щель, позади которой бумажная лента протягивается с одного барабана на другой. Кассета, заряженная фотобумагой, ставится взамен обычной, предназначенной для фотопластинок; в ней находится маленький электромотор с постоянной скоростью вращения. Скорость перематывания бумаги подобрана с таким расчетом, чтобы расстояние между двумя соседними отверстиями перфорации на краях ленты в точности соответствовало пути, проходимому бумагой за одну секунду. Тем самым исключается надобность в специальном нанесении масштаба времени на светочувствительную ленту.

Большое фокусное расстояние объектива позволяет достигнуть относительно небольшого уменьшения высот волн на регистрации по сравнению с натурой; с другой стороны, небольшая скорость движения бумажной ленты дает возможность достаточно сжать масштаб по оси абсцисс и уложить тысячи волн на протяжении одного рулона бумаги. Измерение высоты волн обеспечивается с достаточной точностью благодаря тому, что на стекле бассейна нанесены черные штрихи через каждые 10 *см* высоты; они дают на бумаге белые тонкие линии на негативном темном фоне неба [24].

На рис. 148 воспроизведен отрезок ленты, соответствующий самому началу опыта. Отчетливо видно, как прямолинейная граница вода — воздух сначала покрывается тончайшими зубчиками и как эти зубчики — первые мелкие волны — быстро растут.

Рис. 149 соответствует промежуточному этапу: здесь волны уже выросли, но еще продолжают расти. Хорошо заметны группы волн: амплитуды волн периодически нарастают и убывают, копируя те же самые явления, какие наблюдаются в природной обстановке (в море).

На рис. 150 зарегистрированы высокие волны, которые достигли предельной высоты, соответствующей заданной скорости ветра в условиях мелководья.

Сжатие регистрации волн по оси абсцисс очень резко подчеркнуло отличие профиля ветровых волн от трохоид: вершины волн всюду чрезвычайно острые, а подошвы — тупые, что находится в полном соответствии с кинематическими исследованиями, изложенными в § 8—10.

Расстояния между соседними вершинами или соседними подошвами волн на ленте соответствуют периоду волн в постоянном масштабе времени (по перфорации). Определив период T, можно было бы в случае отсутствия дрейфового течения вычислить длину волны по формуле, вытекающей из формулы (14), если H/λ достаточно велико:

$$\lambda = \frac{g}{2\pi} T^2. \qquad (146)$$

Однако при опытах длина волн нередко превышает глубину бассейна, а с другой стороны, явно сказывается дрейфовое течение, скорость которого u налагается на фазовую скорость волн c. В связи с этими причинами величина периода, определяемого по ленте, является кажущейся, искаженной за счет дрейфового течения; длина же волн вообще не связывается в явной форме с периодом при малых значениях величины H/λ.

Для определения истинного периода и длины волн следует пользоваться номограммой, которую легко построить на основании элементарных соображений. Прежде всего, как из-

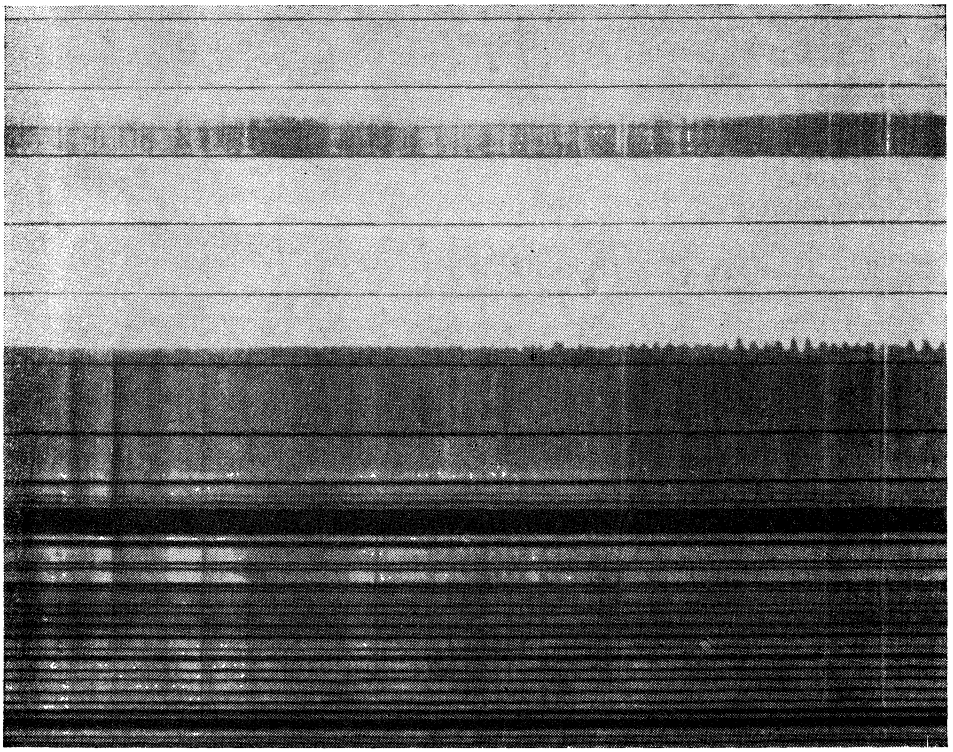


Рис. 148. Регистрация начальных волн *

вестно, истинная фазовая скорость волн относительно водной массы на мелководье выражается формулой (39). Помножим обе части равенства (39) на H/λ^2. Тогда в левой части окажется

$$\frac{Hc^2}{\lambda^2} = \frac{H}{T^2},$$

а в правой — некоторая функция от величины H/λ

$$\frac{g}{2\pi}\frac{H}{\lambda}\operatorname{th} 2\pi\frac{H}{\lambda}.$$

Приравняем друг к другу левую и правую части и извлечем из них квадратный корень. Тогда окажется, что

$$\frac{\sqrt{H}}{T} = \sqrt{\frac{g}{2\pi}\frac{H}{\lambda}\operatorname{th} 2\pi\frac{H}{\lambda}}. \qquad (147)$$

Таким образом, получено одно уравнение, связывающее между собой неизвестные величины λ и T. Для определения этих величин необходимо составить второе уравнение, в которое должны войти не только λ, T и заданное значение H, но также и заданная скорость u дрейфового течения.

Отметим, что видимая фазовая скорость c_1 представляет собой сумму истинной фазовой скорости c и переносной скорости u самих водных масс в их поступательном движении. Следовательно, видимый период T_1 волн, зафиксированный на бумажной ленте, должен выражаться через эти величины и длину волн λ таким образом:

$$T_1 = \frac{\lambda}{c+u}. \qquad (148)$$

* На рисунках 148—150 изображения позитивные.

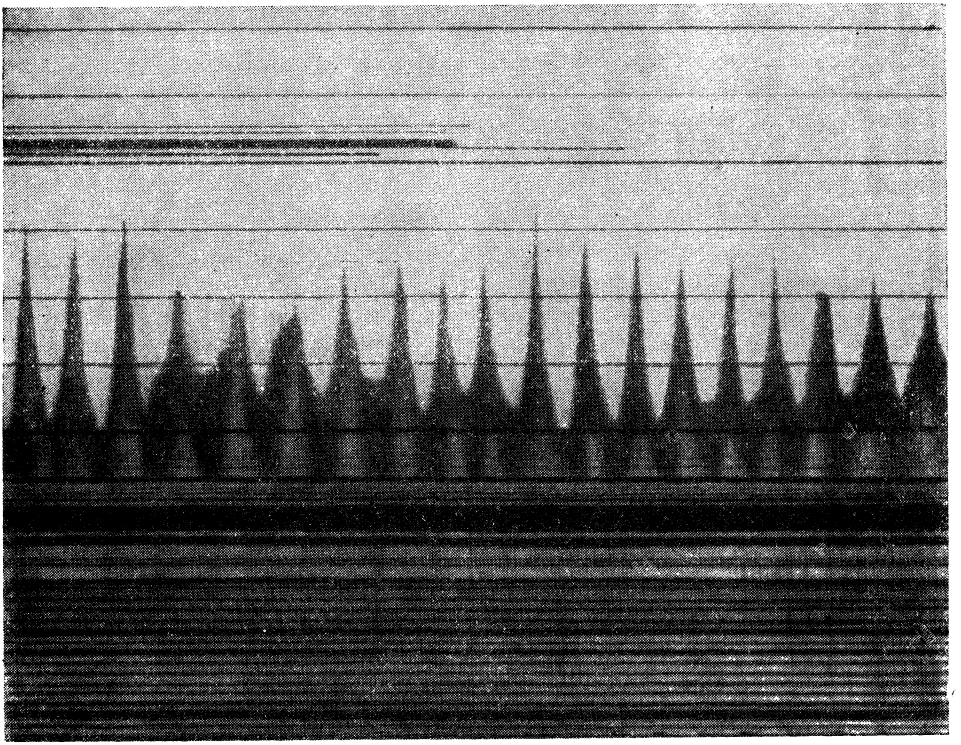


Рис. 149. Регистрация ясно выраженных групп волн

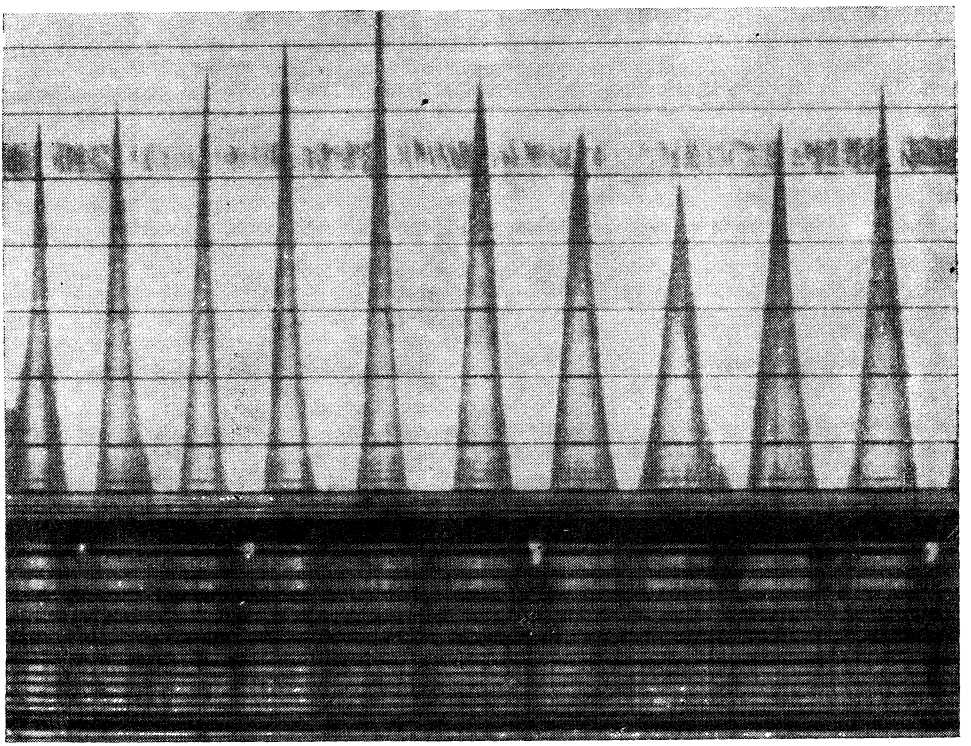


Рис. 150. Регистрация установившихся волн в бассейне

Приняв во внимание, что истинный период волн T равен просто λ/c, запишем на основании формулы (148)

$$\frac{1}{T} = \frac{1}{T_1} - \frac{u}{\lambda}. \tag{149}$$

Уравнение (149) позволяет найти второе, независимое выражение для функции $\sqrt{H}/T$, стоящей в левой части формулы (147). Действительно, умножим левую часть равенства (149) и первый член его правой части на $\sqrt{H}$, а второй член на тождественно равную величину $H/\sqrt{H}$. Тогда окажется, что

$$\frac{\sqrt{H}}{T} = \frac{\sqrt{H}}{T_1} - \frac{u}{\sqrt{H}}\frac{H}{\lambda}. \tag{150}$$

Здесь $\sqrt{H}/T$ и $u/\sqrt{H}$ не известны. В результате $\sqrt{H}/T$ выражается через H/λ вторым способом, не зависимым от формулы (147).

Систему уравнений (147) и (150) удобно решать графически, как это сделано для примера на номограмме рис. 151.

Здесь кривая *1* выражает собой функциональную зависимость (147). Она годится для всех значений H/λ, имеющих практический интерес при опытах в штормовом бассейне; при больших значениях H/λ можно обходиться без номограммы, применяя простой и очевидный вычислительный прием, основанный на уравнении (146). С другой стороны, уравнение (150) представляет некоторую прямую, отсекающую на оси ординат отрезок $\sqrt{H}/T_1$ и наклоненную к оси абсцисс на угол, тангенс которого равен $u/\sqrt{H}$.

На рис. 151 нанесена такая прямая *2* для частного значения величин $\sqrt{H}/T_1$ и $u/\sqrt{H}$, заимствованных из опытов в бассейне. Совершенно очевидно, что точка пересечения этой прямой *2* с кривой *1* на рис. 151 определяет обе искомые величины: ее абсцисса представляет собой величину, обратную искомой длине волн λ, умноженную на известное значение H; ордината дает величину, обратную искомому истинному периоду волн, умноженную на известное значение $\sqrt{H}$.

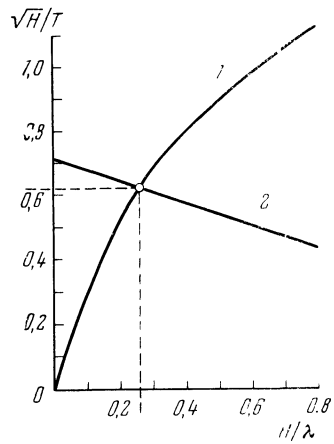


Рис. 151. Номограмма для определения истинных элементов волн

При пользовании киноснимками длина волн определяется непосредственно по промерам на кадрах. Для определения видимой скорости волн и видимого периода служат электрические часы и электрический секундомер, установленные в поле киноаппарата на стене бассейна. Стрелка секундомера совершает один оборот в секунду и позволяет отмечать на кадрах сотые доли секунды. По найденному значению длины волн, видимому периоду T_1 и известной скорости дрейфового течения u, измеренной посредством поплавков, определяется истинный период волн T посредством формулы (149).

Весьма ответственным является измерение высот волн, свидетельствующих о том или ином запасе полной энергии взволнованной воды. Опыты обнаружили, что в штормовом бассейне весьма быстро возникают группы волн, которые хорошо видны не только на рис. 149, но в зачаточной форме даже на рис. 148.

Как известно, групповая скорость связана с фазовой скоростью соотношением, которое в случае мелководья записывается в форме (51). Непосредственные измерения в штормовом бассейне применительно к некоторым частным значениям $\alpha = 2\pi\frac{H}{\lambda}$ удовлетворительно согласовались с формулой (51).

Наличие групп волн осложнило задачу вычисления полной энергии, нарастающей под действием ветра: в известное теоретическое выражение энергии волн (59) входит высота h, которая различна у разных волн группы.

Пусть число волн в одной группе равно N. Тогда, как нетрудно видеть, среднее количество энергии (потенциальной и кинетической вместе), отнесенное по-прежнему к единице площади моря, будет

$$\overline{E} = \frac{1}{8}\delta g\,\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{k=N} h_k^2. \tag{151}$$

Это среднее значение непрерывно растет благодаря питанию волн энергией ветра. Именно за его нарастанием необходимо следить при изучении развития волн в штормовом бассей-

не. В большинстве задач оказывается более удобным отмечать нарастание величины, непосредственно связанной со средним значением полной энергии, вычисленной для данного момента времени. Эта величина — средняя квадратичная высота $\bar{h}$ волн в группе. Ее выражение вытекает из формулы (151)

$$\bar{h}^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{k=N} h_k^2. \tag{152}$$

Следовательно, на основании формул (151) и (152)

$$E = \frac{1}{8} \delta g \bar{h}^2. \tag{153}$$

Несложные соотношения, приведенные здесь, позволили впервые проследить за энергетикой ветровой волны, используя и записи нарастания волн при работе ветра различной силы, и записи затухания волн под действием тех же сил, которые поглощали часть энергии на отмеченном первом этапе опытов (при нарастании волн).

Описанная установка и новая методика создали условия для первых экспериментальных исследований, на основе которых оказалось возможным построить элементы теории ветровых волн и мертвой зыби. Динамическая часть работы оказалась еще более плодотворной, чем та, о которой говорилось в § 8—10 настоящей главы в связи с новыми сведениями по кинематике ветровых волн и мертвой зыби.

§ 16. Баланс энергии волн и нарастание их высоты

На первый взгляд может показаться наиболее естественным вычислять энергию волн, покрывающих весь периметр кольцевого бассейна, в некоторый выбранный момент времени и следить за постепенным нарастанием этой величины под действием ветра. Однако практически вопрос неизбежно сводится к вычислению энергии волн, пробегающих мимо поля зрения регистрирующего фотоаппарата и оставляющих след на светочувствительной ленте. Именно в связи с этим обстоятельством возникает принципиальное затруднение на пути точного учета энергии.

Действительно, мимо поля зрения аппарата бегут одиночные волны с соответствующей *фазовой* скоростью и в то же время проходят группы волн с *групповой* скоростью $c_{гр}$, почти вдвое меньшей, чем фазовая скорость [см. формулу (51), которая переходит в частный вид — формулу (49), когда отношение H/λ достаточно велико]. Допустим, что огибающая группы волн — синусоида (в действительности она близка к синусоиде). Тогда в простейшем случае при чрезвычайно большом числе волн в одной группе вместо суммы квадратов амплитуд будет удобно исследовать некоторую величину S, выражающуюся следующим образом:

$$S = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sin^2 \varphi \, d\varphi = \frac{1}{2} (\varphi_2 - \varphi_1) - \frac{1}{4} (\sin 2\varphi_2 - \sin 2\varphi_1) =$$
$$= \frac{1}{2} (\varphi_2 - \varphi_1) - \frac{1}{2} \sin (\varphi_2 - \varphi_1) \cos (\varphi_2 + \varphi_1). \tag{154}$$

Здесь φ_2 и φ_1 — фазовые углы, характеризующие огибающую в момент начала отсчета и в тот момент, когда одиночные волны обегут периметр бассейна. Обозначим через Δ разность этих фаз. Тогда вместо формулы (154) получим

$$S = \frac{1}{2} \Delta - \frac{1}{2} \sin \Delta \cos (2\varphi_1 + \Delta). \tag{155}$$

Отсюда видно, что результат вычисления энергии волн, покрывающих периметр бассейна, может колебаться в пределах, характеризуемых значениями $S_{макс}$ и $S_{мин}$ при заданной разности фаз Δ. В свою очередь $S_{макс}$ и $S_{мин}$ зависят от выбора начального момента на том этапе, к которому приурочено

осреднение энергии. В зависимости от выбора этого момента косинус в формуле (155) может достигать своих крайних значений ± 1. Следовательно, на основании формулы (155)

$$\frac{S_{\text{мин}}}{S_{\text{макс}}} = \frac{\frac{1}{2}\Delta - \frac{1}{2}|\sin\Delta|}{\frac{1}{2}\Delta + \frac{1}{2}|\sin\Delta|}. \tag{156}$$

Этой величиной должен характеризоваться разброс точек на диаграммах, представляющих рост средней квадратичной высоты волн во времени. При

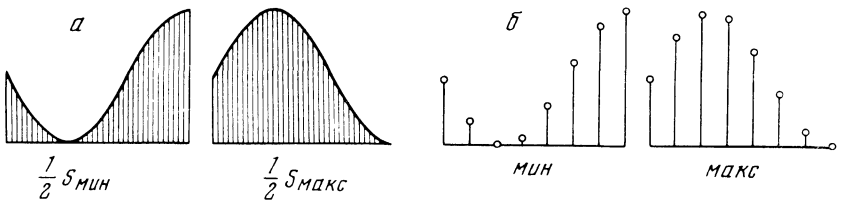


Рис. 152. Схемы осреднения высот волн

этом вычисленная средняя квадратичная высота волн может оказаться в пределах от $\bar{h}_{\text{макс}}$ до $\bar{h}_{\text{мин}}$ в зависимости от случайного выбора границы этапа осреднения. В свою очередь, очевидно,

$$\frac{\bar{h}_{\text{мин}}}{\bar{h}_{\text{макс}}} = \left(\frac{S_{\text{мин}}}{S_{\text{макс}}}\right)^{1/2} = \left(\frac{\frac{1}{2}\Delta - \frac{1}{2}|\sin\Delta|}{\frac{1}{2}\Delta + \frac{1}{2}|\sin\Delta|}\right)^{1/2}. \tag{157}$$

Вертикальные линии (скобки) здесь, в формуле (156) и в дальнейшем показывают, что берется абсолютная величина синуса.

Допустим, например, что $\Delta = \frac{3}{2}\pi = 4{,}71$. Тогда $|\sin\Delta| = 0{,}5$; $2S_{\text{макс}} = 4{,}71 + 0{,}5 = 5{,}21$; $2S_{\text{мин}} = 4{,}71 - 0{,}5 = 4{,}21$;

$$\frac{S_{\text{мин}}}{S_{\text{макс}}} = 0{,}81; \quad \frac{\bar{h}_{\text{мин}}}{\bar{h}_{\text{макс}}} = \sqrt{0{,}81} = 0{,}9.$$

Все это касалось простейшего случая, к которому относилась схема рис. 152,*а* для весьма большого числа волн в одной группе: непрерывно покрыта вся площадь диаграммы. На самом деле число волн на периметре бассейна и число волн в каждой группе конечное, ему соответствуют отдельные отрезки на диаграмме рис. 152,*б*.

Легко показать, что в таких случаях разброс точек, полученных путем осреднения квадратов ординат, может оказаться значительно большим, чем это следует из формулы (157). Так, например, в одном из типичных опытов в штормовом бассейне число N волн в группе было равно 14. На основании диаграммы рис. 152,*б* можно было показать, что при синусоидальной форме огибающей группы суммы квадратов амплитуд заключались в пределах от $\Sigma_{\text{мин}}$ до $\Sigma_{\text{макс}}$, причем $\frac{\Sigma_{\text{мин}}}{\Sigma_{\text{макс}}} = 0{,}61$ и в соответствии с этим $\frac{\bar{h}_{\text{мин}}}{\bar{h}_{\text{макс}}} = \sqrt{0{,}61} = 0{,}78$.

В действительности на построенной диаграмме нарастания $\bar{h}$ во времени разброс точек оказался почти таким же — он характеризовался числом 0,8.

На рис. 153 самая высокая кривая построена в качестве примера описанным способом: по точкам, которые были получены путем осреднения (квадра-

тичного) высот волн по всему периметру бассейна через промежутки времени в 1 *мин* (на первых этапах) и затем через 0,5 *мин*. Именно здесь виден весьма большой разброс точек: близ значения абсциссы 10 *мин* ординаты двух соседних точек относятся между собой как 0,8 : 1,0.

По этой причине оказалось более удобным применять иной метод осреднения квадратов высот: вся лента разбивалась на участки протяженностью 0,5 *мин* каждый. До и после каждого момента вычислялись полусуммы квадратов, например, $\frac{1}{2}\sum_{k-2}$ и $\frac{1}{2}\sum_{k}$ близ $(k-1)$-го, $\frac{1}{2}\sum_{k-1}$ и $\frac{1}{2}\sum_{k+1}$ близ k-го и т. д.

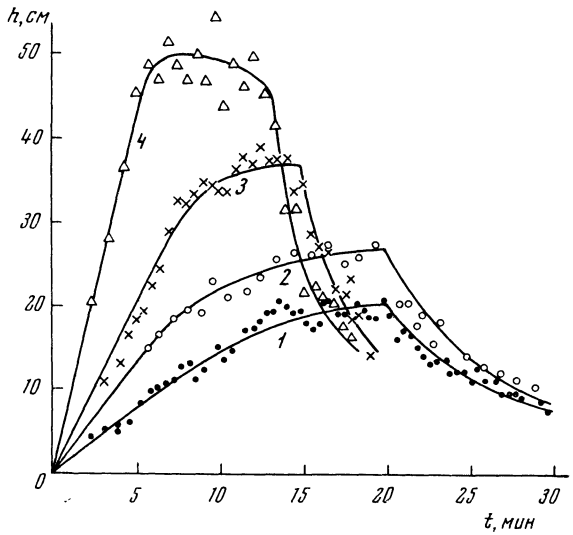


Рис. 153. Результаты опытов над нарастанием волн

Затем велось осреднение по «скользящим» этапам. Например, $(k-1)$-му этапу приписывалось значение суммы квадратов высот $\frac{1}{2}\sum_{k-2} + \frac{1}{2}\sum_{k}$; k-му этапу — значение $\frac{1}{2}\sum_{k-1} + \frac{1}{2}\sum_{k+1}$ и т. д.

Кривые *1—3* на рис. 153 построены таким способом для трех частных значений скорости ветра меньших, чем та скорость, которая соответствовала верхней кривой на том же рисунке. Здесь тоже сохранился неизбежный разброс точек, вызванный случайными расположениями групп волн. Однако этот разброс здесь значительно меньше, чем при верхней кривой. Тем самым обеспечено более надежное вычерчивание кривой по разбросанным точкам.

Если бы огибающая группы волн была совершенно правильной синусоидой, а число отдельных волн в группе было бы чрезвычайно велико, то, как известно, средняя квадратичная составляла бы $\sqrt{0{,}5} = 0{,}707$ от максимального значения высот волн. В действительности огибающая группы волн может оличаться от синусоиды, а число волн в группе не столь велико. Однако практически можно считать, что средняя квадратичная чаще всего составляет около 0,7 от максимальной высоты волн, хотя при опытах отмечены единичные случаи, когда максимальная высота вдвое превышала среднюю квадратичную. В частности, при той же скорости ветра, для которой построена кривая *4* на рис. 153, в некоторых случаях наблюдалась высота отдельных волн до 100 *см*, в то время как средняя квадратичная высота не выходила за пределы 50 *см*.

На рис. 153 кривые, соответствующие меньшим скоростям ветра, нарастают в продолжение 20 *мин*, после чего воздушный поток прекращается и волны начинают затухать. Кривые, соответствующие большим скоростям, нецелесообразно было продолжать далее на их восходящем этапе. При таких размерах волн далее выступало непрерывное разрушение их под действием мелководья в соответствии с теорией, изложенной в § 11.

И восходящая, и нисходящая части каждой кривой равно необходимы для вычисления баланса энергии волн [24]. Действительно, ордината каждой точки кривой позволяет вычислить полную энергию волн (осредненную) в соответствующий момент времени по формуле (153). Тем самым создается возможность определить изменение энергии в единицу времени, т. е. dE/dt. На восходящей части кривой, очевидно,

$$\frac{dE}{dt} = W_V - (W_\mu + W_{ст}), \tag{158}$$

где W_V — полная мощность, передаваемая ветром единице поверхности взволнованного моря; сумма, стоящая в круглых скобках, выражает потери мощности: W_μ — на внутреннее трение в воде и $W_{ст}$ — на трение о стены бассейна, существующие в экспериментальных условиях, в отличие от условий природных.

До настоящего времени никому еще не удавалось определить на опыте величину W_V — мощность, которую передает ветер. Штормовой бассейн позволил определить эту величину по значениям dE/dt, найденным на основании рис. 153 и по значениям $(W_м + W_{ст})$, которые также определяются на основании этой диаграммы. Для такой цели используется нисходящая часть каждой кривой, где величина dE/dt может быть с достаточным приближением выражена так:

$$\frac{dE}{dt} = -(W_\mu + W_{ст} + W_{обт}) \approx -(W_\mu + W_{ст}). \tag{159}$$

Мы пренебрегаем здесь добавочным членом правой части $W_{обт}$, который обязан своим происхождением обтеканию волн мертвой зыби, движущейся относительно неподвижного воздуха. Этот член в настоящей задаче пренебрежимо мал по сравнению с суммой двух первых. Впоследствии нам придется вспомнить о нем в иной задаче, где он будет играть важную роль.

Остановимся детально на упрощенном соотношении (159). На основании гидродинамических исследований прошлого века [11] мощность, теряемая на внутреннее трение (в расчете на единицу поперечного сечения столба воды), выражается так:

$$W_\mu = \frac{1}{2}\,\mu\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^3 c^2 h^2. \tag{160}$$

Здесь μ — коэффициент внутреннего трения. Остальные обозначения прежние. Значит, мощность, теряемая на внутреннее трение, пропорциональна квадрату высоты волн, и ее можно без всяких погрешностей вычислять, внося в формулу (160) значение средней квадратичной высоты, о которой говорилось в связи с осреднением энергии.

Для определения порядка сил трения о стены достаточно воспользоваться соотношением, которое веками проверялось в гидравлической практике,— формулой Шези, связывающей между собой скорость потока u, так называемый гидравлический радиус канала ρ и уклон уровня воды в канале γ:

$$u = C\sqrt{\rho\gamma}. \tag{161}$$

Выразим отсюда уклон γ:

$$\gamma = \frac{u^2}{C^2\rho}. \tag{162}$$

Коэффициент C, так называемый коэффициент Шези, зависит от шероховатости стенок канала.

Выделим в канале некоторый объем воды, простирающийся вдоль оси на расстояние x. Если стены вертикальны, глубина равна H, а ширина канала B, то при перемещении выделенного элементарного объема воды на расстояние dx силы тяжести совершат работу

$$dP = g\delta(BHx)\gamma\, dx, \tag{163}$$

необходимую для преодоления сил трения о стены. Отнесем эту работу к единице поверхности воды, учтя, что участок поверхности будет $S = Bx$:

$$\frac{dP}{S} = \delta g H \gamma\, dx. \tag{164}$$

Искомая потеря мощности $W'_{ст}$, очевидно, представляет собой частное от деления $\frac{dP}{S}$ на истекший элементарный промежуток времени dt

$$W'_{ст} = \delta g H \gamma \frac{dx}{dt} = \delta g H \gamma u. \tag{165}$$

Подставим в (165) выражение γ из формулы (162), учтя попутно, что гидравлический радиус ρ равен частному от деления площади поперечного сечения канала, занятого водой, на периметр этого сечения, т. е.

$$\rho = \frac{BH}{B + 2H}. \tag{166}$$

Тогда вместо формулы (165) получим

$$W'_{ст} = \frac{g\delta}{C^2}\left(1 + \frac{2H}{B}\right)u^3. \tag{167}$$

Коэффициент C хорошо известен из многочисленных опытов в каналах с различными стенками, а потому формула (167) пригодна для вполне надежного вычисления мощности, теряемой потоком на трение о стенки, в пересчете на единицу площади зеркала воды. Попытаемся перейти от формулы (167) к потерям $W_{ст}$ в случае волнового движения, не претендуя на ту же надежность вычислений.

Теперь частицы воды будут двигаться не по прямой, как было в случае, интересующем обычно гидравликов, а по орбитам, почти круговым у поверхности воды и эллиптическим, все более сплюснутым в вертикальном направлении, по мере приближения ко дну. Перенесем наш вывод на такое движение водных частиц и допустим, что на некоторой глубине y потери на трение о стенки выражаются на основании формулы (167) сходным соотношением, в котором эти потери отнесены не к единице площади зеркала воды, а к единице площади стенок:

$$W''_{ст} = \frac{g\delta}{C^2}u_y^3. \tag{168}$$

Скорость u_y, вообще говоря, выражается через свои проекции на горизонтальную u_{ya} и вертикальную u_{yb} оси. Вспомнив соотношения (30) между элементами орбит частиц на различных глубинах, можно показать, что мгновенное значение куба скорости на глубине y выражается через амплитудное значение проекции скорости поверхностных частиц на горизонтальную ось u_a следующей формулой:

$$u_{yt}^3 = u_a^3\left(\frac{\operatorname{ch}\alpha_y}{\operatorname{ch}\alpha}\right)^3\left[1 - \frac{\sin\omega t}{\operatorname{ch}^2\alpha_y}\right]^{3/2}. \tag{169}$$

Соотношения (168) и (169) дают возможность вычислить мощность, затрачиваемую на трение о стенки на элементарном участке, лежащем на глубине y, в расчете на единицу площади в момент времени t.

Примем во внимание, что здесь $\alpha = 2\pi\frac{H}{2}$, $a_y = \frac{2\pi}{\lambda}(H - y)$, где в свою очередь H — глубина бассейна, заполненная водой, а $\omega = \frac{2\pi}{T}$ (T — период волн). Проинтегрируем полученное выражение на всем протяжении от поверхности воды до дна и осредним его во времени, т. е. вычислим среднюю мощность, теряемую водой. Тогда после некоторых неизбежных упрощений окончательно получим

$$W_{ст} = \frac{3}{2}\pi^3 \frac{g\delta}{C^2\alpha\,\mathrm{th}^2\alpha}\frac{H}{B}\left(\frac{h}{T}\right)^3 \tag{170}$$

Как видим, в отличие от потерь на внутреннее трение, потери на трение о стены пропорциональны не квадрату, а кубу высоты волн. Следовательно, строго говоря, надо было бы, кроме средней квадратичной высоты, вычислять еще среднюю кубическую высоту волн для подстановки в формулу (170) при вычислении потерь на трение о стены. Однако можно показать, что сама эта составляющая потерь весьма мала по сравнению с потерями на внутреннее трение в преобладающем большинстве случаев, исследованных в штормовом бассейне. Значит, не делая больших ошибок, можно и в формулу (170), так же как и в формулу (160), подставлять значения средней квадратичной высоты волн, которые вычисляются описанным способом на основании непрерывной фоторегистрации.

Не будем ставить условную черту над буквой h при выкладках, содержащих среднюю квадратичную. Вспомнив выражения (153), (159) и (170), запишем уравнение баланса энергии для ниспадающей части кривых рис. 153

$$\frac{1}{4}\delta g h\frac{dh}{dt} = -q_1h^2 - s_1h^3, \tag{171}$$

где коэффициенты q_1 и s_1 выражаются на основании формул (160) и (170). После сокращения на $h/4$ окажется

$$\frac{dh}{dt} = -qh - sh^2, \tag{172}$$

причем

$$q = \frac{4q_1}{\delta g},\quad s = \frac{4s_1}{\delta g}.$$

Интеграл дифференциального уравнения (172) записывается в виде

$$h = \frac{q}{\left(\frac{q}{h_0} + s\right)e^{qt} - s}. \tag{173}$$

Таков закон затухания волн под действием внутреннего трения и трения о стенки бассейна при постоянных значениях q и s. Практически оказывается более надежным пользоваться не этой интегральной формой, связанной с обязательным постоянством коэффициентов q и s, а самим дифференциальным уравнением (172), в котором второй член правой части может быть вычислен либо по формуле (170), либо по формуле, которая будет дана ниже. После этого на основании экспериментальных кривых рис. 153 в их ниспадающей части определяется dh/dt, и, наконец, величина q, характеризующая внутреннее трение, находится как единственное неизвестное, оставшееся в формуле (172).

В связи с этим возвратимся к широко известному классическому соотношению (160) и заменим λ и c, входящие туда, более удобными величинами

H и α. Тогда окажется, что коэффициент q_1 в формуле (171) может быть выражен так:

$$q_1 = \frac{1}{2}\mu g \left(\frac{\alpha}{H}\right)^3 \operatorname{th}\alpha. \tag{174}$$

Приняв во внимание сокращенные обозначения формулы (172) и учтя, что частное от деления коэффициента внутреннего трения μ на плотность воды δ представляет собой кинематическую вязкость ν, получим формулу для определения ν на основании опытов в бассейне

$$\nu = \frac{1}{2}\left(\frac{H}{\alpha}\right)^3 \frac{q}{\operatorname{th}\alpha}. \tag{175}$$

Здесь все величины измерены в абсолютных величинах.

Опыты, проделанные в штормовом бассейне при самых разнообразных скоростях ветра, показывают, что *кинематическая вязкость ν чрезвычайно велика по сравнению с молекулярной кинематической вязкостью воды. Значит, ее происхождение несомненно турбулентное.* Тем самым опровергается метафизическое утверждение некоторых иностранных исследователей, считающих, что при волнении проявляется не турбулентное, а только молекулярное трение в воде.

В настоящее время мы пока еще лишены возможности установить, какая доля в турбулизации воды принадлежит орбитальному движению частиц и какая разрушению волн под действием мелководья, а также разрушению их вершин под действием ветра. Теоретическую оценку турбулизации за счет обмена количеством движения между частицами на соседних орбитах сделал С. В. Доброклонский (о его работе будет сказано в § 19 настоящей главы) [25].

Итак, ниспадающие участки кривых типа рис. 153 позволили определить мощность W_μ, теряемую на внутреннее трение, и мощность $W_{ст}$, затрачиваемую на трение о стенки бассейна.

Теперь, воспользовавшись уравнением баланса энергии (158) на восходящей части кривой, можно определить *полную мощность*, передаваемую ветром волне:

$$W_V = \frac{dE}{dt} + W_\mu + W_{ст}.$$

Результаты большой серии опытов в бассейне при скоростях ветра от 6 до 18 *м/сек* показали, что на стадиях развития, характеризующихся какой-то одной определенной крутизной, мощность W_V точно пропорциональна квадрату разности между скоростью ветра V и фазовой скоростью волн c, т. е. квадрату относительной скорости ветра

$$W_V = Ar_0(V - c)^2. \tag{176}$$

Долгое время не удавалось установить закон изменения крутизны волн, от которой зависит A, и тем более не удавалось найти причину нарастания *длины* волн. Только через два года после начала работ в штормовом бассейне удалось найти и закон, и причину нарастания их длины и построить замкнутую систему уравнений для расчета элементов ветровых волн (см. §§ 18—23).

§ 17. Теория питания волн энергией ветра

В § 14 уже упоминалось о нескольких попытках построения схем, которые могли бы объяснить механизм передачи энергии от ветра волне. Гипотезы, предлагавшиеся различными авторами, не могли быть проверены на опытах, поскольку тогда еще отсутствовала возможность наблюдения ветровых волн

в чистых лабораторных условиях и притом в продолжение сколь угодно долгого времени.

Сейчас штормовой бассейн предоставил экспериментаторам все условия, необходимые для подобной проверки: пробным камнем послужило вычисление *мощности*, передаваемой ветром единице поверхности моря, и сопоставления цифр, полученных по каждой из схем, с теми цифрами, которые определены на непосредственных опытах и объединены достаточно надежной эмпирической формулой (176).

Как и следовало ожидать, на основании соображений, изложенных в § 14, схема Маккавеева [18] дает очень сильно заниженные величины W_V. Схема Джеффриса [19] вообще отпадает, поскольку она исходит из неправильных представлений о размещении максимума и минимума давления на поверхности волны. Вычисления, произведенные по схеме Федяевского [20] и по схеме Капицы [21], дают бо́льшие значения W_V, чем вычисления по схеме Маккавеева. Однако и эти две схемы не вяжутся с действительными величинами W_V, найденными из опытов.

Помимо численных расхождений с опытами, необходимо отметить еще одну принципиальную особенность, общую для всех предшествовавших исследований: эти исследования, касавшиеся движения *формы волны* с фазовой скоростью c, ничего не могли сказать *о внутреннем механизме* передачи энергии самим частицам воды, движущимся по своим орбитам (и отчасти продвигающимся в поступательном движении). В сущности, не было известно, можно ли вообще описывать приращение энергии *колебательной* системы или системы, обладающей каким-то моментом количества движения, рассматривая движение *формы волны*, на которую действует та или иная горизонтальная сила. Ведь нельзя же, например, сопоставлять период колебаний маятника часов с натяжением пружины, воздействующей на основной, ведущий валик этих часов. При изменении завода пружины от полного до предельно малого период колебаний маятника меняется столь ничтожно, что в обычных часах с этим не считаются; постоянство вращающего момента обеспечивают (посредством «улитки») лишь в точных хронометрах. Совершенно так же нельзя ожидать, что горизонтально направленная сила (будь то тангенциальная сила трения или составляющая избыточного давления) сообщает волне *ускорение* по той же схеме, по какой сообщается ускорение, например, вагону, способному катиться по рельсам. Исходя из таких соображений, нарушим традиции и будем рассматривать воздействие внешних сил не на форму волны, а на *частицы воды*, движущиеся по своим орбитам.

Прежде всего обнаружим, что необходимо изменить *граничное условие*, которое налагается при классическом выводе уравнений профиля волн из уравнений гидродинамики в форме Лагранжа (см. § 2). Согласно обычно принимаемому условию, атмосферное *давление* на поверхности моря считается *постоянным*. Это условие приемлемо при исследовании *мертвой зыби* (и то, как увидим в § 27, лишь в первом приближении). При ветре такое классическое условие явно нарушается в природе.

Действительно, пусть на некотором участке возникла в данный момент вершина волны. Теория обтекания тел и непосредственные опыты показывают, что давление над вершиной меньше давления над средним уровнем при тех же метеорологических условиях; по той же причине давление воздуха над подошвой волны больше, чем давление над средним уровнем при колебаниях на волне.

Легко показать, что возникшие отклонения давления автоматически нивелируются за счет подъема уровня воды над вершиной на соответствующую небольшую дополнительную высоту и за счет столь же небольшого понижения уровня воды у подошвы, ниже вычисленного по классической теории. Смещения масс воды происходят здесь со скоростью, свойственной длинным волнам (типа уединенных) в море данной глубины. Значит, компенсационное

смещение уровня может практически считаться мгновенным. Иными словами, при подъеме площадки до ее амплитудной высоты одновременно будет нарастать над вершиной добавочный компенсирующий слой воды. Совершенно аналогично при нисходящем движении уровня на исследуемом участке компенсирующий слой исчезнет в момент перехода через средний уровень; при дальнейшем смещении уровня создается отток воды от рассматриваемого участка и в конечном счете обеспечивается понижение подошвы волны ниже уровня, вычисляемого по классической теории.

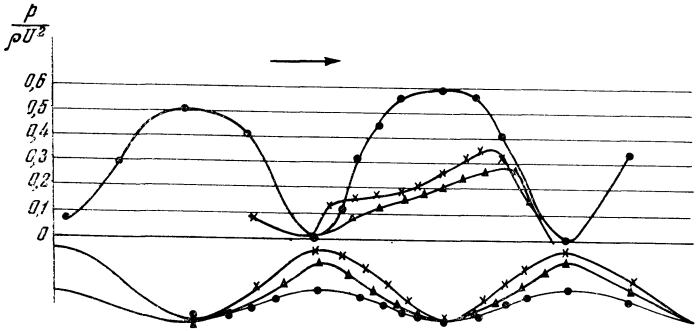


Рис. 154. Распределение давления вдоль профиля волн (по Т. В. Бончковской)

Описанное явление приводило бы лишь к получению некоторой дополнительной энергии водных частиц на протяжении *одной* части периода волны и к обратной отдаче такого же количества энергии на протяжении *другой* части периода, если бы аэродинамическое поле над волнами было совершенно *симметричным*. Амплитуда пульсаций энергии при этом была бы значительно больше той величины W_V, которая определяется эмпирической формулой (176). Весь процесс можно уподобить раскачиванию качелей: не вся энергия, затрачиваемая человеком при его ритмических движениях на качелях, передается системе безвозвратно; часть ее соответствует обратимому процессу, и лишь некоторая часть поступает на питание системы энергией, непрерывно нарастающей во времени. В интересующем нас случае такая необратимая передача энергии создается благодаря *асимметрии* аэродинамического поля над волной (относительно вертикальной прямой, проходящей через вершину).

На рис. 154 воспроизведена диаграмма распределения аэродинамического поля над моделью взволнованной поверхности по опытам Т. В. Бончковской [26] в аэродинамической трубе. Вопреки схеме Джеффриса, минимумы давления тут приходятся не над склонами волн, а над вершинами. В то же время отчетливо видно, что, несмотря на симметричную форму профиля волн, давление воздуха на наветренный склон всюду *превышает* давление на подветренный в точках, лежащих соответственно (попарно) на одних и тех же высотах над подошвой. Это вызвано отклонением воздушного потока от законов ламинарного движения за счет *вихреобразования*.

Теперь представим себе схему орбитальных движений частиц воды на поверхности волны, изображенную на рис. 155, где волна движется слева направо [24]. На левой, наветренной стороне частицы M_1 и M_2 находятся в фазах *нисходящего* движения. На правой, подветренной стороне изображены две частицы N_1 и N_2, находящиеся в фазах *восходящего* движения по орбитам. На основании диаграмм, аналогичных рис. 154, полученных различными авторами, известно, что в точке M_1 аэродинамическое давление должно быть больше, чем в точке N_1, находящейся на той же высоте над подошвой, и

в точке M_2 давление обязательно будет больше, чем в соответствующей точке N_2 на общем с ней уровне.

Следовательно, каждые две «парные» частицы, пересекающие одну и ту же горизонтальную плоскость, будут испытывать бóльшую силу давления сверху при их движении *вниз* сквозь эту плоскость и *меньшую* силу давления сверху при движении *вверх* сквозь ту же плоскость. Иными словами, каждый участок поверхности будет испытывать бóльшее давление на *спуске* сквозь некоторую плоскость и *меньшее* давление при *подъеме*. Пусть в обоих случаях он смещался на расстояние dy по вертикали и пусть давление на единицу поверхности при спуске было p''_y, а при подъеме p'_y. Тогда должен возникать

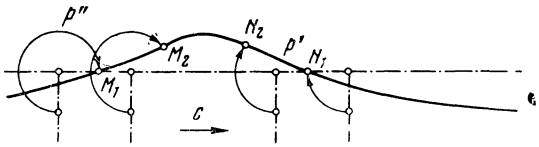


Рис. 155. Схема питания волн энергией ветра

прирост энергии волн $(p''_y - p'_y)\cos\psi\, dy$ в расчете на единицу поверхности моря. Здесь ψ — угол между элементом поверхности моря и горизонтальной плоскостью.

Полный прирост энергии частиц, вызванный перемещением поверхности воды от подошвы волны до вершины и от вершины до подошвы, выразится интегралом, взятым в пределах от нуля до h:

$$E_T = \int_0^h (p''_y - p'_y)\cos\psi\, dy \quad эрг/см^2. \tag{177}$$

Вообще говоря, значение $\cos\psi$ мало отличается от единицы, в особенности близ вершин и подошв волн. Принимая во внимание неизбежность различных погрешностей при расчетах (погрешностей, бóльших в процентном отношении), будем считать этот поправочный множитель просто равным единице. Отметим, что прирост энергии E_T, представленный формулой (177), происходит в продолжение одного периода T волны. Следовательно, осредненную мощность, передаваемую ветром волне, в расчете на единицу поверхности моря можно на основании формулы (177) выразить так:

$$W_V = \frac{10^{-3}}{T}\int_0^h (p''_y - p'_y)\, dy \quad вт/м^2. \tag{178}$$

Переходный множитель 10^{-3} появился ввиду замены абсолютных единиц измерения другими, удобными для практики: мощность выражена не в эргах на квадратный сантиметр в секунду, а в ваттах на квадратный метр. Давление по-прежнему выражено в динах на квадратный сантиметр.

Схема рис. 155 и рассуждения, которые привели к формуле (178), показывают, что ветер в прямом смысле как бы *нагнетает* мощность W_V сквозь каждый квадратный метр поверхности моря, передавая эту мощность водным частицам, движущимся по орбитам. Часть полученной ими мощности затрачивается на внутреннее турбулентное трение (а в штормовом бассейне еще и на трение о стены, хотя эта составляющая потерь отступает на второй план). Остаток мощности идет на повышение кинетической и потенциальной энергии масс воды на волнении. Поскольку кинетическая энергия пропорцио-

нальна квадрату скорости, мы сейчас пренебрегаем той частью ее, которая затрачивается на создание «волнового течения» с малой скоростью w. Что касается скорости *дрейфового* течения u, возникающего одновременно с волнами, то она черпается не за счет описанного «нагнетания», а за счет воздействия *тангенциальной* силы трения между воздухом и поверхностью воды. По этой причине из мощности, определяемой формулой (178), нисколько не расходуется на создание дрейфового течения.

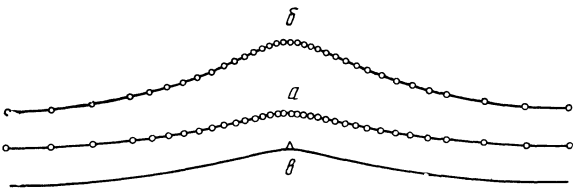


Рис. 156. Профили волн, испытанные в аэродинамической трубе

Материалы § 16 позволяют проверить справедливость предлагаемой теории, сопоставив результаты вычислений по формуле (178) с результатами вычислений по эмпирической формуле (176). Необходимо лишь как можно надежней определить значения $p'' - p'$, соответствующие каждому значению y в формуле (178).

Диаграммы типа рис. 154, полученные ранее другими авторами, не позволяют произвести столь надежные определения. Прежде всего они были получены при продувке в аэродинамических трубах моделей волн, существенно отличавшихся по своему профилю от ветровых волн. Ни трохоиды, ни синусоиды, ни отрезки дуг окружности не могут представить тот профиль, который получался при стереосъемках в море и при фото- и киносъемках в штормовом бассейне (см. § 8—10).

Кроме того, при вычитании отдельно измеренной величины p' из отдельно измеренной величины p'' безусловно возможны погрешности, сравнимые по величине с самой искомой разностью $p'' - p'$, поскольку эта разность вообще невелика. Несравненно надежнее измерять непосредственно *разность* $p'' - p'$ при помощи специального микроманометра.

По изложенным причинам были поставлены опыты в аэродинамической трубе, в которую помещались модели волн с профилями, удовлетворяющими уравнениям (69) и (70). Параметр σ, входящий в формулу (70) и характеризующий заостренность ветровых волн, был взят равным 0,48. Модели были изготовлены в двух вариантах: $\frac{h}{\lambda} = 0{,}06$ и $\frac{h}{\lambda} = 0{,}12$.

Соответствующие профили воспроизведены на рис. 156 (кривые *а* и *б*). Поверхность волн была выполнена из тонкого трансформаторного железа, наложенного на точно выпиленные шаблоны. Длина каждой волны была $\lambda = 50$ *см*. Вдоль рабочей части аэродинамической трубы укладывалось пять волн, причем вход воздушного потока на модель и сток с нее осуществлялись на подошвах волн.

Исследованиям подвергался участок впереди и такой же участок позади центральной вершины: от вершины до подошвы на наветренной и подветренной сторонах.

В железе были просверлены отверстия диаметром 1,2 *мм*, одно из которых располагалось в точности на вершине центральной волны, в осевой вертикальной плоскости трубы. На склонах находилось по 17 отверстий, расположенных попарно на общих высотах. Последняя пара располагалась на подошвах волн.

Под отверстиями были выведены сквозь нижнюю стенку трубы медные трубки, от которых шли шланги к распределительной доске с гнездами. В эти гнезда можно было вставлять наконечники шлангов, идущих к микроманометрам. Один из этих приборов подключался к каждой из соответствующих пар гнезд для измерения величины $p''_y - p'_y$. Полученный отсчет исправляли, вычитая из найденной величины тот перепад давления в аэродинамической трубе, который вызван сопротивлением по отношению к воздушному потоку.

Для определения поправки служил отсчет по второму микроманометру, постоянно присоединенному к гнездам $+17$ и -17. Понятно, что разность давления между этими точками, лежащими на двух подошвах волн, вызвана именно градиентом давления в трубе за счет трения. Найдя эту разность и приняв закон падения давления вдоль трубы (за счет внутреннего сопротивления) *линейным*, легко вычислить поправки для любой пары точек.

Третий микроманометр был присоединен к обычной измерительной трубке типа ЦАГИ, посредством которой определялась скорость потока воздуха в аэродинамической трубе.

Скорость ветра V на оси трубы составляла 22,5 *м/сек*. Следовательно, приняв за характеристический размер длину волн и положив, что кинематическая вязкость воздуха $\nu_a = 1{,}45 \cdot 10^{-5}$ *м*$^2 \cdot$*сек*$^{-1}$, можно отметить, что значение критерия Рейнольдса в опытах было $\mathrm{Re} = 7{,}8 \cdot 10^5$. Есть основания полагать, что такой порядок величины Re гарантирует достаточную надежность при пересчетах с модели на натуру.

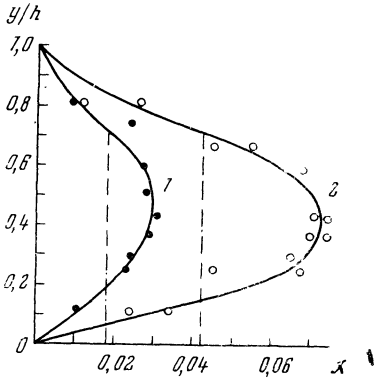


Рис. 157. Результаты продува моделей волн в аэродинамической трубе

На рис. 157 графически изображены результаты опытов в аэродинамической трубе. По оси абсцисс отложены значения безразмерной величины

$$\chi = \frac{p''_y - p'_y}{\delta_a V^2}, \qquad (179)$$

которая соответствует той или иной высоте пары точек над подошвой волны. Здесь δ_a — плотность воздуха. По оси ординат отложены значения безразмерной величины y/h.

Кривая *1* соответствует опытам с первой моделью $\left(\frac{h}{\lambda} = 0{,}06\right)$, а кривая *2* — со второй моделью $\left(\frac{h}{\lambda} = 0{,}12\right)$. Определив площади кривых на рис. 157, нетрудно вычислить среднее значение $\overline{\chi}_1$ и $\overline{\chi}_2$ на протяжении от подошвы волны до вершины по вертикали. Оказалось, что $\overline{\chi}_1 = 0{,}018$ и $\overline{\chi}_2 = 0{,}042$.

С другой стороны, зная эти величины, остается лишь вычислить мощность, передаваемую волне ветром. Действительно, сопоставим соотношения (176) и (179). Условимся выражать скорость ветра V и фазовую скорость волн c в метрах в секунду, а плотность воздуха δ_a в килограммах на кубический метр. Тогда получим простую формулу, которую обобщим на случай потока над *движущимися волнами* (соответственно естественным условиям в природе или в штормовом бассейне):

$$W_V = \overline{\chi} \frac{h}{T} \delta_a (V - c)^2 \ вт/м^2. \qquad (180)$$

Легко показать, что формула (180) остается в силе без всяких переходных множителей, если все величины, входящие в нее, выражены в абсолютных единицах системы *CGS*.

Если отношение высоты к длине волн не равно отмеченным частным значениям, то можно вычислять соответствующую величину $\overline{\chi}$, интерполируя между найденными $\overline{\chi}_1$ и $\overline{\chi}_2$ или в случае надобности производя экстраполяцию.

Применив такой прием, попытаемся сличить результаты, полученные по теоретической формуле (180), с результатами опытов в штормовом бассейне. Для надежности рассмотрим только те этапы волнообразования, на которых заведомо еще не начиналось разрушение волн под действием мелководья, т. е. начальные этапы.

Будем выбирать для вычислений по обеим формулам одни и те же значения высоты волн h и находить величины h/λ по лентам, на которых регистрировались волны (в соответствии с приемами, изложенными в § 15 и 16). По найденным величинам h/λ определятся соответствующие значения $\overline{\chi}$. В результате для четырех серий опытов применительно к четырем различным скоростям ветра получим следующие данные:

V, *м/сек*	8	10	13	17
$W_{\text{теор}}$, *вт/м*^{2}	0,051	0,120	0,60	1,2
$W_{\text{опыт}}$, *вт/м*^{2} . . .	0,059	0,172	0,93	2,9

Как видим, при не слишком свежем ветре согласие между теорией и опытами хорошее. По мере того как ветер крепчает, это согласие ухудшается. Наконец, при очень сильном ветре возникают расхождения между теорией и опытом более чем вдвое.

Есть основания полагать, что непредвиденно большое *нарастание* мощности, передаваемой волне в этих условиях, вызвано появлением *островерхих волн высоких порядков* на вершинах основных исследуемых волн. Тем самым должен значительно облегчаться *срыв струй* воздуха с заострившихся вершин волн в согласии с предположением, высказанным П. А. Капицей (см. § 14), и в конечном счете должна увеличиваться асимметрия поля давления над волнами.

Для проверки этого эффекта Шулейкин поместил над вершинами всех пяти волн модели $\left(\frac{h}{\lambda} = 0{,}06\right)$ жестяные уголки, простирающиеся вдоль гребней и направленные ребром вверх. Высота образовавшихся призм была равна 4 *мм*, т. е. в 7,5 раза меньше высоты волн. На рис. 156 (кривая *в*) представлено сечение такого уголка вертикальной плоскостью, направленной вдоль оси трубы, т. е. поперек оси уголка. Масштаб уменьшен во столько же раз, во сколько и масштаб самих профилей волн.

При продувке такой слегка измененной модели обнаружилось, что значения $p''_y - p'_y$ (а стало быть, и значение $\overline{\chi}$) возросли в 6 раз по сравнению с полученными на той же модели без «островерхих гребешков».

Разумеется, нет возможности предвидеть все параметры действительных волн высоких порядков, возникающих на поверхности основных волн при очень сильном ветре. Но можно утверждать, что формула (180) правильно рисует основную картину явлений и что отклонения от формулы при очень сильном ветре удовлетворительно объясняются теорией. Опыты в аэродинамической трубе дали для коэффициента $\overline{\chi}$ значения, приблизительно пропорциональные *крутизне* волн h/λ. Впоследствии при расчете волн меньшей крутизны (между 0,06 и 0,05) мы убеждались в том, что $\overline{\chi}$ можно считать пропорциональным крутизне с достаточной для практики надежностью. Следовательно, в самом общем случае вместо (180) можно записать

$$W_V = \varkappa_1 \delta_a \left(\frac{h}{\lambda}\right) \frac{h}{T} (V - c)^2. \qquad (181)$$

Это соотношение будет нами использовано в дальнейшем при изложении теории *поля ветровых волн*.

Коэффициент пропорциональности $\varkappa_1$ должен играть решающую роль в построении такой теории. Поэтому вполне естественным является вопрос: можно ли вычислять его на основании опытов в аэродинамической трубе, в которой пьезометры определяют давление над *твердыми* профилями волн? Не лучше ли вычислять его из опытов непосредственно в штормовом бассейне, исходя из уравнения баланса энергии? На этот вопрос следует ответить так: контрольные опыты в аэродинамической трубе были бы излишни, если бы в уравнении баланса энергии фигурировали потери энергии на внутреннее турбулентное трение и на трение о стенки, не вызывающие никаких сомнений в правильности их оценки. Но сомнения все же останутся до той поры, когда у нас в руках появится безукоризненный метод определения всех потерь. Возникает и второй вопрос: не лучше ли попытаться измерить давление в различных точках профиля *естественных* волн на поверхности воды, а не на поверхности твердых моделей?

Такую попытку впервые сделал Р. Н. Иванов, который построил небольшую камеру, напоминающую сплющенный эллипсоид вращения, и пустил эту камеру на поверхность волн в штормовом бассейне. Вверху камеры было отверстие, к которому примыкала тонкая трубка, идущая к микроманометру. Положение мениска жидкости в трубке микроманометра непрерывно регистрировалось на движущейся ленте светочувствительной бумаги. Опыты Иванова, к сожалению, обнаружили *искажающее* влияние плавающей камеры на аэродинамическое поле над волнами: по той же причине, по какой ничтожные заостренные призмочки при наших опытах в трубе изменяли давление над моделями в 6 раз. Вслед за Р. Н. Ивановым подобные попытки были сделаны несколькими авторами, но результаты, полученные ими, внушают не большее доверие по прежней причине: всякое инородное тело, помещенное на поверхность волн, должно искажать поле давления значительно больше, чем искажает замена натуральных волн твердой моделью.

К счастью для исследователей, в настоящее время отпала необходимость уточнения наших данных по отношению к величине $\varkappa_1$ применительно к *начальным стадиям* развития ветровых волн; в § 22, 26 будет показано, что для построения теории *расчета* больших ветровых волн приходится искать некоторый *инвариант*, содержащий коэффициент $\varkappa_1$, и что для построения расчетной схемы достаточно пользоваться даже не вполне точными значениями $\varkappa_1$ на начальных этапах, но с большей точностью определять косвенным методом значение $\varkappa_1$ на *конечных* стадиях развития океанских ветровых волн. Тем самым обеспечивается надежное вычисление элементов больших, опасных волн, а все неизбежные погрешности в расчетах приходятся на начальные этапы волнообразования, не имеющие никакого принципиального и практического значения.

18. Теория нарастания длины волн под действием ветра

Увеличение кинетической и потенциальной энергии волн непосредственно проявляется в нарастании высоты волн, поскольку энергия их, приходящаяся на единицу поверхности моря, пропорциональна квадрату высоты [см. формулы (58) и (59)]. Как известно, длина волн не входит в соотношение, определяющее эту величину. Именно поэтому физическая причина нарастания длины волн под действием ветра всегда ускользала от исследователей, подходивших к энергетическим задачам.

Но ведь в теоретической механике есть задачи, которые не могут быть решены на основании одних лишь энергетических соотношений, а требуют

одновременного исследования величины, столь же важной, как и энергия системы: *количества движения*, а в некоторых случаях *момента количества движения* (так называемого *кинетического момента* системы). В качестве примера можно было бы привести задачи, касающиеся удара шаров.

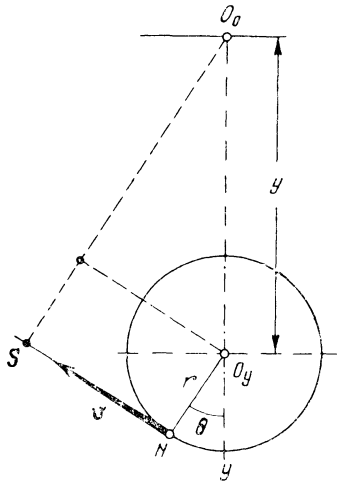


Рис. 158. Определение момента количества движения

Попытаемся доказать, что причина и закономерности нарастания длины волн под действием ветра могут быть обнаружены и изучены весьма легко, если мы применим теорему о *кинетическом моменте* к частицам воды, описывающим почти круговые орбиты на волне [27].

Введем обозначения: ω — угловая скорость их движения, r_0 — радиус орбиты поверхностной частицы, y — глубина залегания некоторого элементарного слоя воды толщиной dy, δ — плотность воды, λ — длина волны в некоторый момент времени. В дальнейшем вместо λ будем применять для удобства величину $R = \frac{\lambda}{2\pi}$, о которой часто упоминалось в предыдущих параграфах.

Выберем центр моментов в центре орбиты одной из поверхностных частиц и будем считать положительным направление вертикальной оси координат вниз от этой точки, обозначенной буквой O_0 (рис. 158). Если единица длины мала по сравнению с длиной волны, то можно считать фазу кругового движения частиц везде одной и той же в пределах этой единицы. Пусть это та фаза, в которой изображена частица N на рис. 158, где она отошла на угол θ от оси Y и обладает линейной скоростью, изображенной вектором $\mathbf{v}$.

Отрезок $O_0O_y = y$. Значит, на глубине y скорость v выражается

$$v = \omega r = \omega r_0 e^{-\frac{y}{R}}. \tag{182}$$

С другой стороны, плечо O_0S также связано с y:

$$O_0S = r + y\cos\theta = r_0 e^{-\frac{y}{R}} + y\cos\theta. \tag{183}$$

Следовательно, взяв момент количества движения dQ_0 для элементарного слоя dy относительно центра моментов O_0, получим по-прежнему в расчете на единицу поверхности моря

$$dQ_0 = \delta\omega\left(r_0^2 e^{-2\frac{y}{R}} + r_0 y e^{-\frac{y}{R}}\cos\theta\right)dy. \tag{184}$$

Глубину моря здесь будем считать чрезвычайно большой по сравнению с длиной волны. Поэтому, проинтегрировав выражение (184) от нуля до бесконечности, найдем следующее выражение для полного кинетического момента в фазе θ:

$$Q_0 = \delta\omega\left(\frac{1}{2}r_0^2 R + r_0 R^2\cos\theta\right). \tag{185}$$

Как видим, амплитуда колебаний второго члена правой части формулы (185) в продолжение одного периода волн во столько раз превышает первый (постоянный) член в скобке, во сколько раз удвоенный радиус круга качения превышает радиус орбиты поверхностной частицы. Это обстоятельство вполне естественно: ведь, наблюдая движение поверхностных водных частиц из

точки O_0, легко видеть, что в продолжение половины периода эти частицы движутся в одну сторону относительно точки O_0, а в продолжение другой половины — в противоположную сторону. Эти колебания тесно связаны с колебаниями потенциальной энергии волн около ее средней величины в продолжение одного периода волн.

Теорему о кинетическом моменте, очевидно, следует применить не к величине Q_θ, выражаемой уравнением (185), а к величине $\overline{Q}$, осредненной за период, т. е. к величине, выражаемой первым членом в круглых скобках, умноженным на $\delta\omega$:

$$\overline{Q} = \frac{1}{2}\delta\omega r_0^2 R. \tag{186}$$

Здесь уместно напомнить аналогичное осреднение потенциальной энергии, давно узаконенное при выводе формул (53) и (59).

Подставим в формулу (186) вместо ω ее выражение $2\pi/T$ и учтем, что $\frac{2\pi R}{T} = c$. Тогда вместо (186) можно будет записать более удобное соотношение

$$\overline{Q} = \frac{1}{2}\delta r_0^2 c. \tag{187}$$

В § 17 мы видели, что внешняя сила, передающая волне энергию от ветра, меняется в различных фазах орбитального движения в связи с изменением аэродинамического коэффициента χ согласно рис. 157. Осредним за один период волн T момент этой силы относительно точки O_0 и обозначим такое *осредненное* значение момента через $\overline{M}$. Тогда можно будет записать теорему механики о моменте количества движения водных масс в форме

$$d\overline{Q} = \overline{M}\,dt. \tag{188}$$

С другой стороны, за тот же бесконечно малый промежуток времени полная энергия волн получит приращение

$$dE = \overline{M}\,d\theta. \tag{189}$$

Здесь $d\theta$ — бесконечно малый угол поворота частицы по орбите ($d\theta = \omega dt$). Значит, приняв во внимание выражение (188), можно записать

$$dE = \overline{M}\omega\,dt = \omega\,d\overline{Q}, \tag{190}$$

или иначе

$$\frac{d\overline{Q}}{dt} = \frac{1}{\omega}\frac{dE}{dt}. \tag{191}$$

На основании выражения (187) левая часть выражения (191) представится так:

$$\frac{d\overline{Q}}{dt} = \delta c r\frac{dr}{dt} + \frac{1}{2}\delta r^2\frac{dc}{dt}. \tag{192}$$

Индекс нуль у r здесь и в дальнейшем не пишем для краткости.

В правую часть выражения (191) необходимо подставить *уточненное* выражение полной энергии волн E, слагающейся из кинетической их энергии и энергии потенциальной.

Исходя из работы А. И. Некрасова [4], уточненное выражение кинетической энергии записывается в форме (61), приведенной в § 5.

Разложим в ряд экспоненциальную функцию в этом выражении и ограничимся первыми двумя членами ряда. Тогда будет

$$E_{\text{кин}} = \frac{1}{4}\delta g r^2\left(1 + 3\frac{r}{R}\right). \tag{193}$$

В теории Некрасова потенциальная энергия была представлена классической формулой, применяемой всюду, так как профиль волн считался трохоидальным. В действительности ветровые волны обладают профилем, уравнения которого представлены в параметрической форме (69), как указывалось в § 8. Физические причины заострения волн были объяснены в § 9, где было показано, что при отсутствии особо сильного дрейфового течения полуоси a и b эллипса, входящие в (69), связаны между собой простым соотношением (89).

Полуось a тем более превышает полуось b по своей длине, чем больше оказывается отношение r/R.

В § 5 было показано, что потенциальная энергия чисто трохоидальных волн пропорциональна высоте β_0, на которую подняты центры орбит поверхностных частиц над уровнем невозмущенного моря. Это следует из классического соотношения (52).

В случае реальных — *заостренных* — волн вместо выражения (52) необходимо записать иное, уточненное выражение β_0, в которое вместо квадрата радиуса круговой орбиты должно войти произведение полуосей эллипса, представляющего траекторию поверхностной частицы в подвижной системе координат (см. § 9).

При учете выражения (89) новое выражение β_0 приобретает вид

$$\beta_0 = \frac{1}{2}\frac{ab}{R} = \frac{1}{2}\frac{r^2}{R}\cdot\frac{a}{b} = \frac{1}{2}\frac{r^2}{R}\left(1+\frac{r}{R}\right). \tag{194}$$

Итак, в формулы для потенциальной энергии (53) — (55) необходимо внести поправочный множитель $\left(1+\frac{r}{R}\right)$. После этого потенциальная энергия волн, отнесенная к единице поверхности моря, выразится [27] так:

$$E_{\text{пот}} = \frac{1}{4}\delta g r^2\left(1+\frac{r}{R}\right). \tag{195}$$

На основании преобразованной формулы Некрасова (193) и формулы Шулейкина (195) полная энергия волн, приходящаяся на единицу площади моря, будет

$$E = \frac{1}{2}\delta g r^2\left(1+2\frac{r}{R}\right). \tag{196}$$

Подставим это выражение в правую часть (191), выполним дифференцирование E по t и разделим результат на ω. Тогда получим уравнение

$$\frac{1}{\omega}\frac{dE}{dt} = \left(\delta g r\frac{dr}{dt} + 3\delta g\frac{r^2}{R}\frac{dr}{dt} - \delta g\frac{r^3}{R^2}\frac{dR}{dt}\right)\frac{1}{\omega}. \tag{197}$$

Исходя из выражения (191), приравняем между собой правые части уравнений (192) и (197) и умножим обе части возникшего нового уравнения на фазовую скорость волн c. После сокращений окажется

$$3g\frac{dr}{dt} - g\frac{r}{R}\frac{dR}{dt} = \frac{1}{4}\frac{d(c^2)}{dt} = \frac{1}{4}g\frac{dR}{dt}, \tag{198}$$

или иначе

$$\frac{dr}{dt} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}+\frac{r}{R}\right)\frac{dR}{dt}. \tag{198а}$$

Введем в анализ новое переменное, характеризующее крутизну волн, $y = \frac{r}{R}$. Тогда можно будет записать

$$r = Ry,\quad \frac{dr}{dt} = y\frac{dR}{dt} + R\frac{dy}{dt}. \tag{199}$$

Ввиду этого исключим r из (198а) и запишем на основании (198а) и (199)

$$R\frac{dy}{dt} + y\frac{dR}{dt} = \frac{1}{12}\frac{dR}{dt} + \frac{1}{3}y\frac{dR}{dt}. \qquad (200)$$

Легко убедиться, что отсюда вытекает простое дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными

$$\frac{dy}{\frac{1}{8} - y} = \frac{2}{3}\frac{dR}{R}. \qquad (201)$$

В выражении интеграла уравнения (201)

$$\ln\left(y - \frac{1}{8}\right) = -\frac{2}{3}\ln R + K, \qquad (202)$$

постоянная K определяется по начальному условию. Именно: допустим, что в какой-то момент времени волны длиной $2\pi R_0$, возникшие на поверхности моря, обладали *наибольшей возможной* крутизной, о которой говорилось в § 9[1]. На основании сказанного там можно положить

$$y_0 = \frac{r_0}{R_0} = 0{,}45. \qquad (203)$$

В таком случае после определения константы K в выражении (202) и подстановки $y = \frac{r}{R}$ окажется

$$\frac{r}{R} = \frac{1}{8} + 0{,}325\left(\frac{R_0}{R}\right)^{2/3}. \qquad (204)$$

Теперь разделим левую часть выражения (204) на левую часть (203), правую часть (204) на правую часть (203) и учтем, что $\frac{r}{r_0} = \frac{h}{h_0}$, $\frac{R}{R_0} = \frac{\lambda}{\lambda_0}$, где индексами нуль отмечены размеры волн в момент достижения ими максимальной крутизны. Тогда получим очень важное уравнение

$$\frac{h}{h_0} = 0{,}278\frac{\lambda}{\lambda_0} + 0{,}722\left(\frac{\lambda}{\lambda_0}\right)^{1/3}. \qquad (205)$$

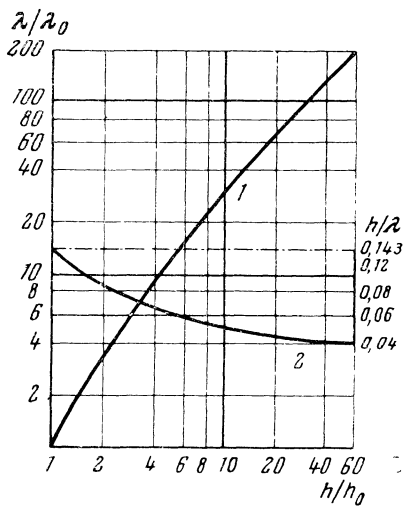


Рис. 159. Зависимость относительной длины волн и крутизны от относительной высоты волн

Оно показывает, что *при нарастании высоты волн h неминуемо должна нарастать длина волн λ*, причем *нарастание λ должно происходить быстрей, чем нарастание h* [27, 28].

Непрерывное уменьшение крутизны волн, связанное с этим обстоятельством, уже описано уравнением (204). Внеся в него h и λ вместо r и R, найдем

[1] Очень интересно, что всегда на начальных этапах развития ветровых волн крутизна их сперва довольно быстро увеличивается; затем она достигает максимума, который при достаточных скоростях ветра отвечает наибольшей возможной крутизне волн; некоторый небольшой промежуток времени позволяет наблюдать, как удерживается эта наибольшая крутизна, причем заметно частичное разрушение вершин маленьких волн, несмотря на то, что длина их чрезвычайно мала по сравнению с глубиной штормового бассейна. На конец наступает момент, после которого крутизна волн начинает уменьшаться в полном соответствии с изложенной теорией.

Тот же автор сделал попытку [29] теоретически объяснить этот интересный эффект — прохождение крутизны волн через максимум, — по-прежнему исходя из теоремы о моменте количества движения.

зависимость между чаще применяемыми величинами

$$\frac{h}{\lambda} = 0{,}04 + 0{,}103\left(\frac{\lambda_0}{\lambda}\right)^{2/3}. \qquad (206)$$

На рис. 159 в логарифмической координатной сетке кривая *1* представляет закон нарастания λ/λ_0 при нарастании h/h_0 по выражению (205). Кривая *2* на той же теоретической диаграмме выражает закон уменьшения крутизны волн h/λ по мере нарастания h/h_0. Как и следует из формулы (206), кривая *2* асимптотически стремится к значению

$$\left(\frac{h}{\lambda}\right)_\infty = 1 : 8\pi \approx 1 : 25 = 0{,}04.$$

§ 19. Вычисление потерь энергии волн на турбулентную вязкость

Формула (160) позволила определить потери энергии волн на турбулентную вязкость, отделив их от сравнительно незначительных потерь на трение о стены штормового бассейна. Для большей надежности мы произвели еще вычисление потерь вторым — независимым — способом, воспользовавшись очень интересной работой С. В. Доброклонского [25]. Этот автор исходил из представлений Прандтля и Кармана о механизме обмена количеством движения между слоями турбулизированной жидкости, движущимися с различными скоростями.

В гл. I мы изложили содержание работы Кармана, в которой дано выражение (411) для коэффициента кинематической турбулентной вязкости. Опираясь на это соотношение и найдя частные производные, входящие в него (применительно к волновому движению), Доброклонский получил следующее общее выражение для коэффициента ν кинематической турбулентной вязкости:

$$\nu = \frac{\pi k^2}{18}\frac{h^2}{T}e^{-4\pi\frac{y}{\lambda}}\left(1 - \pi^2\frac{h^2}{\lambda^2}e^{-4\pi\frac{y}{\lambda}}\right)^3. \qquad (207)$$

Здесь k — коэффициент Кармана, h — высота волн, λ — их длина, T — их период, y — расстояние от поверхности моря до слоя, для которого вычисляется коэффициент ν

При тех значениях крутизны волн h/λ, с какими приходится встречаться в случае практических расчетов морских волн, второй член в круглых скобках может считаться пренебрежимо малым по сравнению с единицей. Поэтому можно ограничиться лишь множителями, стоящими перед скобкой.

Через три года после опубликования работы С. В. Доброклонского появилась в печати работа английского океанографа К. Боудена на ту же тему [30]. Этот автор справедливо утверждает, что по соображениям размерности коэффициент ν должен, вообще говоря, выражаться такой функцией от амплитуды волн r, их длины λ и периода T, размерность которой L^2T^{-1}. Подобному условию удовлетворяет формула Доброклонского (207), а также формула, предложенная Боуденом, построенная специально по такому принципу:

$$\nu = K\frac{r\lambda}{T}.$$

Константу K Боуден определяет из наблюдений над затуханием волн в океане при распространении их на очень большие расстояния. Но подобные наблюдения до настоящего времени весьма ненадежны, а потому результат вычислений ν по ним столь же ненадежен. Кроме того, преимущества рассуждений Доброклонского перед рассуждениями Боудена видны и при анализе физического смысла обеих формул. Действительно, строение формулы

Доброклонского подсказывает естественную мысль о том, что кинематическая вязкость ν пропорциональна высоте волн и скорости *орбитального* движения. Напротив, строение формулы Боудена приводит к противоестественному заключению о том, что кинематическая вязкость зависит от высоты волн и *фазовой* скорости волн. Совершенно очевидно, что орбитальное движение порождает турбулентные процессы, а движение *геометрического профиля* волн не может самостоятельно влиять на турбулентные процессы в волнах.

Потери энергии волн на внутреннее трение выражаются хорошо известной формулой (160), выведенной в предположении, что μ — коэффициент *молекулярной* вязкости, постоянный во всей толще воды. Все задачи, касающиеся *турбулентного* движения, успешно решаются при замене коэффициента молекулярной вязкости коэффициентом вязкости турбулентной (соответственно динамической или кинематической). Но в формуле (160) нельзя просто заменить μ произведением $\delta\nu$, где под ν подразумевается турбулентная вязкость, вычисленная для поверхностного слоя по (207) при $y = 0$. Столь же неверный результат получился бы, если бы мы разбили толщу морской воды на элементарные слои, вычислили для них соответствующие значения ν, убывающие на глубинах, и тем самым допустили бы независимое затухание волновых движений на различных глубинах.

Впредь до точного решения очень сложной задачи о результирующем затухании *всей* волновой системы — от поверхности и до глубин, на которые практически проникает волновое движение,— будем считать, что фактическое значение, которое следует подставить в формулу (160), выражается с достаточным приближением так:

$$\nu = \alpha \frac{\pi k^2}{18} \frac{h^2}{T}. \tag{207а}$$

Для поправочного множителя α примем то же значение, которое связывает скорость стоксова волнового потока на поверхности моря со скоростью *общего* переносного движения, обусловленного этим потоком. Между двумя сопоставляемыми процессами есть прямая аналогия. Итак, положим $\alpha = 0{,}5$. В дальнейшем увидим, что это значение вполне оправдывается на основании многочисленных работ по измерениям волн в океане.

Теперь подставим выражение μ в формулу (160). Получим для вычисления потерь энергии волн на турбулентную вязкость формулу

$$W_\mu = \frac{2\pi}{9} k^2 \delta g \frac{r^4}{R^2 T}. \tag{208}$$

Здесь k — коэффициент Кармана, δ — плотность, g — ускорение в поле тяжести, r, R, T — элементы волн в прежних обозначениях.

Чтобы получить по формуле (208) то же значение потери энергии волн в *штормовом бассейне*, какое вытекало из формулы (175), пришлось бы принять для k числовые значения, близкие к тем, которые получал Карман при лабораторных опытах в трубах [31]. Напротив, расчеты, произведенные на основании измерений волн в открытом океане, заставляют полагать, что в естественных условиях характеристическое число $k = 0{,}1$. Выше (см. гл. I, § 25) было показано, что формула Кармана (411) и константы, определенные с предельной надежностью при изучении морских *течений*, дают для этого характеристического числа такое же значение $k = 0{,}1$. Там же было отмечено, что впервые С. Г. Богуславский объяснил отличие этой цифры от цифр Кармана громадным различием в масштабах турбулентных явлений (с одной стороны, в лабораториях и, с другой стороны, на просторе океанов).

Есть все основания рассматривать ныне число $k = 0{,}1$ как *единую характеристику турбулентной вязкости для морских волн и течений* [32].

Но нельзя забывать, что и k, и кинематическая турбулентная вязкость *никак не связаны с самим веществом*, они позволяют описывать лишь *кинематику* движения вещества и в результате определять элементы динамики движения. Легко убедиться в этом, вычислив по приводившимся формулам путь перемешивания l и кинематическую турбулентную вязкость ν для морских течений и для волнового движения в море, исходя из одного и того же числового значения $k = 0{,}1$.

По формуле (405) гл. I вычислим $l_т$, подставив в нее первую и вторую производные от U по z, на основании формул (414) гл. I. Тогда окажется

$$l_т = \left| \frac{k}{a(1+i)} \right| = \frac{k}{a\sqrt{2}}.$$

Здесь a можно выразить через параметры, встречавшиеся в теории течений: либо через глубину трения D, либо через скорость ветра V. Тогда можно будет записать две расчетные формулы

$$l_т = \frac{kD}{\pi\sqrt{2}} \approx \frac{D}{45}, \tag{209а}$$

$$l_т = k\sqrt{\frac{\nu}{2\omega}} = \frac{1{,}72}{\sqrt{\sin\varphi}} kV \approx 0{,}2V. \tag{209б}$$

Кроме того, в формулу (405) гл. I подставим выражения производных, по С. В. Доброклонскому [25], применительно к волновому движению

$$\left(\frac{dU}{dz}\right)_{z=0} \approx \frac{2{,}3}{T}\left(\frac{h}{\lambda}\right)^2,$$

$$\left(\frac{d^2U}{dz^2}\right)_{z=0} \approx \frac{12\pi^4}{\lambda T}\left(\frac{h}{\lambda}\right)^2.$$

Окажется, что

$$l_в = \frac{k\lambda}{6\pi} \approx \frac{\lambda}{188}.$$

Далее мы увидим, что длина *установившихся* волн в океане при скорости ветра V может быть выражена формулой

$$\lambda = 21 \cdot 0{,}0205V^2 = 0{,}43V^2.$$

Следовательно, в конечном счете

$$l_в = 0{,}00228V^2. \tag{209в}$$

При очень больших скоростях ветра волнение устанавливается весьма долго и еще дольше устанавливается режим дрейфовых течений. Поэтому данные, приведенные ниже при больших значениях V, надо рассматривать как чисто иллюстративный материал. Здесь, применительно к установившимся условиям, приведены значения $l_т$ и $l_в$, вычисленные по формулам (209) и (209в) при $k = 0{,}1$, а также значения $\nu_т$ по Экману — Шмидту и значения $\nu_в$, вычисленные по (207а) тоже при $k = 0{,}1$. Высоты h и периоды T установившихся волн определены по диаграммам В. В. Шулейкина (см. § 26) для соответствующих скоростей ветра V.

V, *м/сек*	10	15	20	25	30	35
$l_т$, *м*	2	3	4	5	6	7
$l_в$, *м*	0,23	0,52	0,91	1,4	2,0	2,8
$\nu_т$, *см²/сек*	430	970	1720	2700	3870	5270
$\nu_в$, *см²/сек*	1,2	3,9	9,3	18,1	31,3	49,8

Из приведенных данных видно, как резко отличаются друг от друга турбулентные явления в волнах и в потоках дрейфового течения при едином ха-

рактеристическом числе $k = 0{,}1$. Если бы развитие волн и развитие дрейфовых потоков управлялось *молекулярной* вязкостью, то, разумеется, коэффициент вязкости оставался бы одним и тем же в обоих случаях — зависящим только от молекулярных сил. В отличие от него формальный коэффициент турбулентной кинематической вязкости описывает *не* качества самой воды, а особенности кинематических условий (411) гл. I (в различных случаях относительного движения водных масс). Аналогичными кинематическими условиями (405) определена длина пути перемешивания. Именно поэтому так резко отличаются друг от друга $l_т$ и $l_в$ и особенно $\nu_т$ и $\nu_в$. На это резкое различие впервые обратил внимание Г. Джеффрис, полагавший, что тут перед нами необъяснимый парадокс в области механики сплошной среды [19, 33].

Как видим, в настоящее время выясняется, что *единой* должна оставаться в море лишь константа $k = 0{,}1$, а резкое различие между $\nu_т$ и $\nu_в$ вполне закономерно и естественно.

§ 20. Постановка задачи о расчете элементов ветровых волн

В § 14 уже было сказано, что В. М. Маккавеев [18] предложил исследовать энергетический баланс ветровых волн для определения закона нарастания их высоты во времени. В левой части уравнения (145), предложенного этим автором, записана мощность, идущая непосредственно на увеличение высоты волн; в правой части содержится разность мощностей: доставляемой воде от ветра и расходуемой на внутреннее трение при волнении. Предполагалось, что передаваемая мощность вызвана наличием тангенциальной силы трения между потоками воздуха и поверхностью бегущих волн.

Во время второй мировой войны иностранные авторы — главным образом норвежский геофизик Г. Свердруп и американский океанограф В. Мунк — задались целью построить полуэмпирические формулы для предвычисления элементов волн по заданной скорости ветра, времени его воздействия и известным особенностям океанического района. При этом в основу было положено уравнение, аналогичное (145). Работы этих авторов содержат большой фактический материал наблюдений волн в океанах, представляющий неизменный интерес. Некоторые эмпирические соотношения удовлетворительно согласовались с этим материалом. Однако *никакой теории предвычисления здесь не было создано* ввиду отсутствия в то время методов *прямой* проверки основных сделанных *гипотез*.

В настоящее время противоречия, к которым привели эти гипотезы при последовательном их развитии, заставили иностранных авторов отойти от попыток построения физико-математической теории развивающихся ветровых волн и заняться формально-статистическим анализом накопленного материала наблюдений.

Ввиду широкого распространения, которое получили неподтвердившиеся гипотезы, здесь необходимо вкратце отметить, как выглядят эти гипотезы в свете *современных данных динамики и кинематики ветровых волн*.

1. Прежде всего и отечественные опыты в штормовом бассейне, и теоретические исследования С. В. Доброклонского (равно как и появившиеся после них исследования Боудена) показали, что волнение сопряжено с возникновением весьма сильного *турбулентного* трения в водных массах. Вопреки гипотезам иностранных авторов, цитированных выше, этим трением *нельзя* пренебрегать в уравнениях баланса энергии волн на самых главных стадиях развития *штормовых* волн в океане: на конечном этапе установившееся волнение определяется условием $W_V - W_р = 0$.

2. Как будет показано в § 29, вопреки мнению Свердрупа и Мунка, роль тангенциальной силы воздействия ветра на поверхность волн в процессе передачи энергии волнам весьма мала по сравнению с ролью *нормального* аэро-

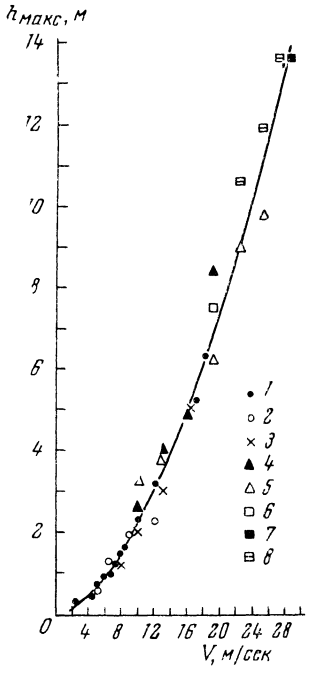


Рис. 160. Наибольшая измеренная высота волн 5%-ной обеспеченности при заданной скорости ветра в океане

1 — А. А. Иванов (фоторегистрация); *2* — Туапсинская морская обсерватория; *3* — Л. Ф. Титов (стереофото); *4* — Шумахер (стереофото); *5* — Шотт (барометрический способ); *6* —Вейнблюм (стереофото); *7* — А. Н. Крылов; *8* — Корниш

динамического давления в несимметричном поле. В настоящее время удается *вычислять* мощность, передаваемую волнам за счет асимметрии аэродинамического поля над взволнованной поверхностью (см. § 17).

3. До появления исследований, изложенных в § 18, не были известны причины и законы нарастания *длины волн* под воздействием ветра. Некоторые иностранные авторы вразрез с принципами механики полагали даже, что «часть энергии, передаваемой ветром, идет на нарастание высоты волн, а другая часть — на увеличение фазовой скорости волн» (иными словами, на увеличение длины волн). В настоящее время мы знаем причину и законы нарастания длины волн (см. § 18). Эти теоретические построения, как будет показано ниже, полностью подтверждаются на материалах анализа предельно больших и вообще очень больших штормовых волн в океане.

4. Самые сложные условия развития ветровых волн существуют на *мелководных* морях, где некоторая доля энергии волн непрерывно расходуется на частичное разрушение вершин волн, деформирующихся под воздействием мелководья. Учет этой составляющей энергетического баланса волн стал возможен только после построения теории искажения профиля волн на мелководье, изложенной в § 11.

5. Совершенно бесспорно, что энергия, передаваемая волнам от ветра, пропорциональна величине $(V-c)^2 = \left(1-\frac{c}{V}\right)^2 V^2$. В связи с этим очевидно, что величина c/V играет большую роль в энергетике ветровых волн. Однако совсем *неудачен* термин, который принят в иностранной литературе и широко распространился также у нас: величину c/V называют «возрастом волн». Всякий возраст должен увеличиваться со временем, но величина c/V стремится к совершенно определенному *пределу*, дальше которого она не может расти, сколь долго ни работал бы ветер, создавший волны. На это указывают многочисленные инструментальные измерения *штормовых* волн в океанах. Это неизбежно вытекает из современного теоретического анализа предельно больших волн (см § 21).

6. Столь же неудачен другой термин, получивший широкое распространение: «разгон волн» или, по иному варианту, «разгон ветра». В действительности волны *не могут* «разгоняться», потому что профиль их, бегущий с фазовой скоростью c, *не обладает массой*; с другой стороны, материальные частицы воды не бегут с такой большой скоростью в горизонтальном направлении. Нет никакого физического смысла и в «разгоне ветра»: на любом расстоянии от наветренного берега воздействие частиц воздуха на поверхность волн совершенно одинаково. В действительности *расстояние от наветренного берега* совсем иначе сказывается на развитии ветровых волн. Оно влияет на величину новой составляющей энергетического баланса ветровых волн, о которой сказано в §§ 22 и 25.

Естественная неудовлетворенность гипотезами иностранных авторов вызвала и у нас [33, 34], и в других странах [35] возникновение эмпирических

соотношений, таблиц, номограмм, предназначенных для практики *волновых расчетов* (а при наличии исчерпывающих синоптических данных и для прогнозирования элементов волн в океане и на морях). Все они основаны на более или менее достоверных материалах инструментальных измерений, приводящих к столь же достоверной зависимости между скоростью ветра и наибольшими возможными высотами океанских волн заданной обеспеченности, которую можно положить равной 5%.

Эта зависимость представлена на рис. 160, заимствованном из работ А. А. Иванова. И работы этого автора, и обширные исследования Л. Ф. Титова, и новые серии инструментальных измерений волн в океане — все они позволяют найти истинные значения *параметров в теоретических соотношениях*, которые оказалось возможным вывести в настоящее время.

В последующих параграфах воспроизведены выкладки, дающие возможность построить *физико-математическую* основу расчета элементов волн по заданной скорости ветра, времени его воздействия на волны и по заданным местным условиям: глубине моря и расстоянию от наветренной границы шторма, в частности, по расстоянию от наветренного берега.

§ 21. Анализ измерений наибольших ветровых волн в океане

В бесконечно глубоком океане, на бесконечно большом расстоянии от наветренного берега ветровые волны нарастали бы до такой высоты, при которой вся мощность, передаваемая волнам от ветра, поглощается внутренним турбулентным трением. Пусть это будет высота h_∞, которая равна удвоенной предельной величине r_∞ радиуса орбиты поверхностной частицы. Предельная длина волн $\lambda_\infty = 2\pi R_\infty$ связана с высотой волн h_∞ соотношением, которое было найдено нами в § 18.

Мощность W_V, передаваемая волнам, при таких размерах от ветра, скорость которого равна V, может быть выражена соотношением, вытекающим из (181) после простых преобразований:

$$W_{\infty, V} = 2\varkappa\delta_a \frac{r_\infty^2}{R_\infty T_\infty} (V - c_\infty)^2. \tag{210}$$

При тех же размерах волн формула (208) даст соответствующие потери на турбулентное трение, если в ней заменим r на r_∞, R на R_∞ и T на T_∞. Остается приравнять мощность, получаемую волнами от ветра (при окончательном их развитии), мощности, расходуемой на внутреннее турбулентное трение. Решив найденное уравнение относительно r_∞, получим для него выражение

$$r_\infty = \frac{9}{\pi} \frac{\varkappa}{k^2} \frac{\delta_a}{\delta} \left(\frac{R}{r}\right)_\infty \frac{(V - c_\infty)^2}{g}. \tag{211}$$

Итак, предельная высота ветровых волн в открытом океане пропорциональна квадрату относительной скорости ветра — величине $(V - c_\infty)^2$, в которой c по-прежнему обозначает фазовую скорость волн,— в полном соответствии с результатами наших опытов в штормовом бассейне. Но, с другой стороны, многочисленные инструментальные измерения многих авторов дают зависимость, графически представленную на рис. 160. Здесь по оси абсцисс отложены *абсолютные* скорости ветра V, а по оси ординат — высоты волн, которые мы считали предельными, возможными при данной скорости в океане с обеспеченностью 5%. В настоящее время необходимо внести лишь одну поправку: действительные значения предельных высот волн в океане (если бы он простирался беспредельно) надо считать бо́льшими на 10% по сравнению с представленными на рис. 160 [43]. Рис. 160 и до и после поправки свидетельствует о том, что предельная высота волн в океане должна быть пропор-

циональной квадрату *абсолютной* скорости ветра. Одновременное существование обоих одинаково надежных соотношений — теоретического (211) и эмпирического (рис. 160) — показывает, что предельная высота волн *всегда* устанавливается при одном и том же определенном значении $\left(\frac{V-c_\infty}{V}\right)$. Иными словами, при всякой скорости ветра устанавливается такая предельная длина волн, которая соответствует одному и тому же предельному значению c_∞/V, поскольку фазовая скорость однозначно связана с длиной волн в океане.

Этот вывод теории вполне совпадает с результатами многочисленных инструментальных измерений *ветровых* волн в океане. Необходимо подчеркнуть, что речь идет только о чисто ветровых волнах, ибо скорость *мертвой зыби*, пришедшей из какого-то иного района, *никак* не связана со скоростью ветра, измеренной в данной определенной точке. В то же время этот важный вывод следует и из нашей теории нарастания длины волн под воздействием ветра.

Действительно, обозначим через N_∞ предельное значение R/r на конечном этапе развития ветровых волн, которые никогда не могут достигать бесконечной длины в природных условиях, а через f — отношение фазовой скорости ветровых волн к скорости ветра, причем в пределе будет

$$f_\infty = \frac{c_\infty}{V}. \tag{212}$$

Тогда можно будет записать формулу (211) в ином виде

$$\frac{r_\infty}{V^2} = \frac{9}{\pi} N_\infty \frac{\varkappa}{k^2} \frac{\delta}{\delta} \frac{(1-f_\infty)^2}{g}. \tag{213}$$

С другой стороны, на основании (14)

$$c_\infty = g^{1/2} R_\infty^{1/2} = N_\infty^{1/2} g^{1/2} r_\infty^{1/2}, \tag{214}$$

откуда

$$\frac{r_\infty}{V^2} = \frac{1}{gN_\infty}\left(\frac{c_\infty}{V}\right)^2 = \frac{f_\infty^2}{gN_\infty}. \tag{215}$$

В уравнениях (213) и (215) величина r_∞/V^2 известна — она легко определяется по надежной кривой рис. 160 (параболе); после внесения поправочного множителя 1,1 (поправка на 10%) исправленное значение $r_\infty/V^2 = 0{,}0103$. Неизвестными в этих двух уравнениях являются лишь f_∞ и $\varkappa/k^2$. Они могут быть определены из системы (213) и (215). Именно для f_∞ получается выражение

$$f_\infty^2 = g\left(\frac{r_\infty}{V^2}\right)_\infty. \tag{216}$$

После определения f_∞ по уравнению (216) легко найти второе неизвестное

$$\frac{\varkappa}{k^2} = \frac{\pi}{9N_\infty^2} \frac{\delta}{\delta_a} \frac{f_\infty^2}{(1-f_\infty)^2}. \tag{217}$$

В дальнейшем (см. § 26) будет показано, как в отдельности определяется величина $\varkappa$.

Если бы предельная длина волн, возможная при заданной скорости ветра, была бесконечно велика по сравнению с λ_0 в формуле (206), то крутизна предельно длинных волн была бы равна $1/25$, как упоминалось в § 18. В действительности, на основании новейших исследований, надо считать, что при всех скоростях ветра крутизна предельно длинных волн составляет $\left(\frac{h}{\lambda}\right)_\infty = 1/21$.

В связи с этим предельное значение $(R/r)_\infty$ следует считать равным 6,7. Подставив в (216) значение $(R/r)_\infty$ и приведенное выше исправленное значение $\frac{r_\infty}{V^2} = 0{,}0103$, получим в пределе

$$f_\infty = \frac{c_\infty}{V} = 0{,}82.$$

Это числовое значение c_∞/V так же хорошо согласуется с материалами новейших измерений в океане, как и крутизна $^1/_{21}$ предельно длинных волн. Разумеется, если скорость ветра начинает уменьшаться, то будут расти наблюдаемые значения c/V, которые могут не только превысить единицу, но и обратиться в бесконечность при наступлении штиля. Совершенно очевидно, что в таких условиях наблюдаемые значения c/V теряют физический смысл с точки зрения изложенной теории развития ветровых волн.

О поведении волн при уменьшении скорости ветра и при изменении его направления будет сказано в § 27.

§ 22. Дифференциальное уравнение поля ветровых волн в океане

Приравняв между собой правые части уравнений (208) и (210), мы записали тем самым уравнение энергетического баланса волн в их установившемся состоянии и притом на очень большом расстоянии от наветренного берега. Сейчас, в отличие от предыдущего параграфа, исследуем *поле ветровых волн* в самой общей форме и учтем его развитие на произвольном расстоянии от наветренного берега. Для этого внесем в уравнение баланса энергии два новых члена. Один из них, $\frac{\partial E}{\partial t} = \delta g r \frac{\partial r}{\partial t}$, запишем в левой части уравнения для характеристики увеличения энергии E волн во времени.

Другой новый член должен будет учесть непостоянство потока энергии волн в пространстве при постепенном удалении от наветренного берега. Именно при таком постепенном удалении возрастает полувысота волн, через которую можно выразить поток энергии Ф в океане, опираясь на уравнение (66). В отличие от (67), запишем выражение Ф в несколько иной форме

$$\Phi_x = \frac{1}{4} \delta g^{3/2} \left(\frac{R}{r}\right)^{1/2} r^{5/2}. \tag{218}$$

Выделим в толще океана вертикальную призму, подвешенную к площадке с основанием $1 \times dx$. При этом ось X направим прочь от наветренного берега, по направлению ветра. В наветренную грань призмы будет входить поток Φ_x, а из подветренной грани будет выходить несколько бо́льший поток

$$\Phi_{x+dx} = \Phi_x + \frac{\partial \Phi}{\partial x} dx. \tag{219}$$

В результате выделенная элементарная водяная призма должна терять в расчете на единицу площади основания мощность W_φ, как бы «уносимую вперед» волнами (как бы «высасываемую» из призмы). Пренебрегая производной от $\left(\frac{R}{r}\right)^{1/2}$, получим

$$W_\varphi = \frac{5}{8} \delta g^{3/2} \left(\frac{R}{r}\right)^{1/2} r^{3/2} \frac{\partial r}{\partial x}. \tag{220}$$

Учтя все члены, запишем дифференциальное уравнение энергетического баланса волн в общей форме, справедливой в любой точке поверхности

океана (или достаточно глубокого моря):

$$\delta g r \frac{\partial r}{\partial t} = 2\varkappa \left(\frac{r}{R}\right) \frac{r}{T} \delta_a (V-c)^2 - \frac{2\pi}{9} \delta g \frac{k^2}{T} \left(\frac{r}{R}\right)^2 r^2 - \\ - \frac{5}{8} \delta g^{3/2} \left(\frac{R}{r}\right)^{1/2} r^{3/2} \frac{\partial r}{\partial x}. \qquad (221)$$

Сократим обе части выражения (221) на $\delta g r$ и вслед за тем разделим все члены на выражение предельной полувысоты r_∞ волн (211). Новейшие исследования [36, 37] показывают, что произведение трех сомножителей $\varkappa \left(\frac{R}{r}\right) (V-c)^2$ практически остается неизменным при развитии волн от длины 0,5 до предельных длин в сотни метров, возможных при штормах в океане. Поэтому от громоздкого уравнения (221) оказывается возможным перейти к изящному уравнению поля ветровых волн в океане, записанному в безразмерной форме:

$$\frac{\partial \eta}{\partial \tau} = 1 - \eta - \eta^{1/2} \frac{\partial \eta}{\partial \xi}. \qquad (222)$$

До недавнего времени приходилось ограничиваться лишь приближенным решением задач, относящихся к полю ветровых волн. В связи с этим записывались [37] приближенные соотношения между безразмерными аргументами τ, ξ и соответствующими практическими аргументами t, x. Пренебрегалось производными от медленно изменяющихся величин. Сейчас запишем *совершенно точные* соотношения в дифференциальной форме взамен старых масштабных отрезков

$$dx = 0{,}895 g^{1/2} \frac{T}{k^2} \left(\frac{R}{r}\right)^{5/2} r_\infty^{1/2} d\xi, \qquad (223)$$

$$dt = \frac{9}{2\pi} \frac{T}{k^2} \left(\frac{R}{r}\right)^2 d\tau, \qquad (224)$$

$$r = \eta r_\infty. \qquad (225)$$

Легко убедиться в справедливости (223) — (225), сопоставив исходное уравнение энергетического баланса (221) с уравнением (222).

§ 23. Точный интеграл уравнения поля ветровых волн в океане и его физическое значение

Несмотря на весьма простой вид дифференциального уравнения (222), в продолжение некоторого времени приходилось довольствоваться лишь результатами приближенного его интегрирования. Впоследствии Шулейкин нашел *точный интеграл* этого уравнения и выявил его физическое значение [38].

Уравнения типа (222) в частных производных первого порядка не встречались прежде в гидродинамических задачах и вообще уравнения такого типа, относящиеся к классу квазилинейных дифференциальных уравнений, были до недавнего времени совсем недостаточно изучены. Точное интегрирование уравнения (222) оказалось возможным на основе исследований А. Н. Тихонова и А. А. Самарского [39], посвященных новой теории квазилинейных уравнений.

Прежде чем искать общий интеграл (222), остановимся на частных решениях, ранее опубликованных в печати [37]. Допустим сперва, что ветер работал очень долго и успел всюду развить установившееся волнение. В этом частном случае левая часть (222) обращается в нуль, а интеграл уравнения без левой части легко находится в виде

$$\xi = 2 \operatorname{Arth} \eta^{1/2} - 2\eta^{1/2} \qquad (226)$$

при граничном условии: когда $\xi = 0$, то и $\eta = 0$.

В полном соответствии с наблюдениями в океане и на глубоких морях высота ветровых волн у самого наветренного берега равна нулю (море здесь только «кипит»: мелкие волны разрушаются, согласно § 10, и превращаются в пену). При удалении от наветренного берега высота установившихся волн резко возрастает: кривая $\eta(\xi)$, выражаемая уравнением (226), касается оси η. Далее возрастание высоты волн замедляется и, наконец, прекращается на достаточно большом расстоянии от наветренного берега.

Легко видеть, что это давно известное явление объясняется наличием последнего члена правой части (222): эффектом своеобразного «высасывания» энергии волн потоком энергии, идущим прочь от берега. Никакого «разгона волн» или «разгона ветра» тут не требуется, оба эти устаревших термина чужды физике.

Теперь рассмотрим второй частный случай: исследуем развитие волн во времени на весьма большом (теоретически бесконечном) расстоянии от наветренного берега. При этом можно будет считать последний член правой части (222) равным нулю в соответствии со свойствами поля, обнаруженными в первой частной задаче.

Но уравнение (222) без члена, содержащего $\partial\eta/\partial\xi$, очень просто интегрируется при граничном условии: когда $\tau = 0$, то $\eta = 0$. Именно

$$\eta = 1 - e^{-\tau}. \tag{227}$$

Математические исследования [39] показывают, что на некоторой плоскости в прямоугольной системе координат τ, ξ должна существовать очень интересная линия $\xi(\tau)$: по одну сторону от нее соблюдается условие $\partial\eta/\partial\tau = 0$, а по другую — условие $\dfrac{\partial\eta}{\partial\xi} = 0$.

По методу [39] ищется дифференциальное уравнение этой линии посредством перехода от $\Delta\xi/\Delta\tau$ к пределу $d\xi/d\tau$. Отметим здесь, что последний член правой части (222) может быть представлен как $\dfrac{\partial}{\partial\xi}\left[\dfrac{2}{3}\eta^{3/2}\right]$. Обозначим функцию η близ искомой линии: на одном конце весьма малого отрезка $\Delta\xi$ через $\eta(\tau)$, а на другом конце отрезка через $\eta(\xi)$. Тогда по методу [39] окажется в пределе

$$\frac{d\xi}{d\tau} = \frac{2}{3}\,\frac{\eta(\tau)^{3/2} - \eta(\xi)^{3/2}}{\eta(\tau) - \eta(\xi)}. \tag{228}$$

Легко видеть, что искомая линия на плоскости $\tau\xi$ представляет закон постепенного продвижения «берегового эффекта» в открытое море. В момент начала работы ветра все точки в океане были равноправны, и берег никак не сказывался даже на небольших расстояниях от него. Значит, надо принять, что при $\tau = 0$ было $\xi = 0$.

Кроме того, в формуле (228) при бесконечно малых τ и ξ числитель является бесконечно малой высшего порядка по сравнению со знаменателем. Следовательно, здесь $\dfrac{d\xi}{d\tau} = 0$ при $\tau = 0$.

В уравнении (228) функция $\eta(\tau)$ задана формулой (227) в явном виде. Напротив, функция $\eta(\xi)$ здесь задается формулой (226) в *неявном* виде. Следовательно, интегрирование уравнения (228) в квадратурах невыполнимо. Оно может быть выполнено по приближенному числовому методу Эйлера — Коши [40]. В результате оказывается, что найденная линия $\xi(\tau)$ обладает очень важным свойством: в каждой ее точке координата τ соответствует тому же значению η по (227), какому соответствует координата ξ, вычисленная по (226). Но в таком случае можно утверждать, что сама функция η меняется *непрерывно* на протяжении всей искомой поверхности $\eta(\xi, \tau)$, графически представляющей точный интеграл уравнения (222).

Это важное свойство искомой функции позволило для контроля построить линию $\xi(\tau)$ еще вторым, значительно более простым и более точным способом на рис. 161. Именно задавшись каким-то определенным значением τ, Шулейкин находил по (227) соответствующее значение η, подставив полученную величину η в (226), определял то расстояние ξ до наветренного берега, на котором η соответствует установившемуся волнению. Иными словами, на рис. 161 по оси абсцисс отложены выбранные значения времени τ, в продолжение которого «береговой эффект» успевает продвинуться в море на расстояние ξ, отмеченное на оси ординат рис. 161.

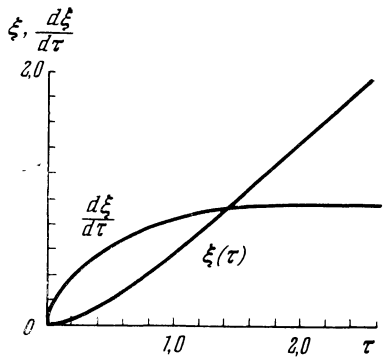


Рис. 161. Вспомогательная диаграмма

Линия $\xi(\tau)$ делит координатную плоскость $\tau\xi$ на две области, подсказывающие физический смысл явлений:

1. На начальной стадии возникновения ветровых волн, даже очень близко к наветренному берегу, еще не может сказаться неравенство потоков энергии, учитываемое в (220). Поэтому практически на всем протяжении океана волны могут развиваться в соответствии с уравнением (227): расход мощности на единицу поверхности тут вызывается только турбулентным трением в воде во время волнения.

2. Развиваясь с течением времени по закону (227), волны на каком-то расстоянии ξ_k от наветренного берега успеют вырасти лишь до той высоты η_k, которая соответствует установившемуся волнению на данном расстоянии ξ_k. Это произойдет по истечении срока τ_k, который отвечает ординате ξ_k на кривой $\xi(\tau)$ рис. 161.

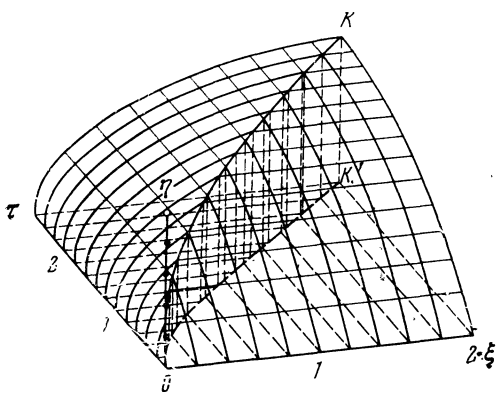


Рис. 162. Интеграл уравнения поля ветровых волн в океане

3. После этого на расстоянии ξ_k от наветренного берега будет существовать установившееся волнение, а само расстояние ξ_k будет непрерывно увеличиваться с течением времени, поскольку все дальше и дальше от наветренного берега будет наступать своего рода «насыщение».

4. В итоге линия $\xi(\tau)$ на рис. 161 опишет закон продвижения своеобразного «берегового эффекта» от наветренного берега в открытый океан. Позади будет установившееся волнение, характеризуемое уравнением (226). Впереди высота волн будет расти по закону (227).

5. В точках, лежащих на линии $\xi(\tau)$ рис. 161, высота волн однозначно определяется и по (226), и по (227).

Располагая вспомогательной кривой $\xi(\tau)$ рис. 161, построим на диаграмме рис. 162 в диметрической проекции поверхность $\eta(\xi, \tau)$, которая дает геометрическое представление точного интеграла уравнения (222). Это весьма интересная поверхность, отчетливо рисующаяся в координатной системе ξ, τ, η. Она распадается на два «крыла», которые пересекаются по линии двоякой кривизны OK. Оба «крыла» являются цилиндрическими поверхно-

стями в общем смысле этого слова и могут быть развернуты на плоскости. В свою очередь, заставляя вертикальную прямую (параллельную оси η) скользить по линии OK, получим третью цилиндрическую, тоже в общем смысле слова, поверхность, которая пересекается с координатной плоскостью $\tau\xi$ по кривой OK'. Легко видеть, что OK' — это вспомогательная кривая, перенесенная с рис. 161 на рис. 162, но при иной ориентации осей ξ, τ. Значит, на рис. 162 найденная поверхность $\eta(\xi, \tau)$ с изломом по линии OK дает полное представление о поле ветровых волн в океане: слева от ребра OK лежит область *установившихся* волн, а справа от OK — область волн, *нарастающих* во времени.

Под осями τ и ξ проставлены целые значения соответствующих величин, а промежутки разбиты на отрезки 0,2. Такие же отрезки отмечены точками на оси η.

На всех расстояниях ξ от наветренного берега нарастание η идет по одному и тому же закону (227), но оно заканчивается тем ранее, чем меньше ξ. При дальнейшем увеличении τ, η остается неизменным, как показывают прямые линии, параллельные оси τ (рис. 162).

Столь же универсален закон распределения высот *установившихся* волн (226): все вертикальные плоскости на рис. 162, параллельные оси ξ, дают одинаковые кривые при пересечении с поверхностью $\eta(\xi, \tau)$ [в соответствии с (226)]. Но при различных значениях срока работы ветра τ отрезки этих кривых от оси $O\tau$ до ребра OK неодинаковы: чем дольше работал ветер, тем дальше от берега успела распространиться область установившегося волнения; за ее пределами, справа от ребра OK на рис. 162 все высоты нарастающих волн в этот момент одинаковы, как показывают на рис. 162 прямые, параллельные оси ξ.

Легко убедиться, что во всех точках найденной поверхности $\eta(\xi, \tau)$ на рис. 162 удовлетворяется дифференциальное уравнение поля ветровых волн в океане (222).

Пока мы исследовали здесь поведение безразмерной функции η при изменениях двух безразмерных аргументов ξ, τ. На основании масштабных соотношений (223) — (225) осуществляется переход от этих (весьма удобных для исследования) величин к величинам, наиболее важным практически. Воспользуемся здесь этими масштабными соотношениями, чтобы выяснить до конца физический смысл продвижения «берегового эффекта» от наветренного берега в открытый океан. Прежде всего возвратимся к рис. 161, где постепенное продвижение «берегового эффекта» представлено кривой $\xi(\tau)$.

Скорость продвижения уже задавалась формулой (228), служившей для приближенного численного интегрирования. Для надежности $d\xi/d\tau$ была определена еще по кривой $\xi(\tau)$ на рис. 161. В результате получена кривая $d\xi/d\tau$, также нанесенная на рис. 161 и показывающая, что уже по истечении срока $\tau = 1{,}2$ величины $d\xi/d\tau$ начинают превышать 0,9, а затем стремятся к конечному значению $\frac{d\xi}{d\tau} = 1$.

С другой стороны, на основании (223) и (224) можно по найденной величине $d\xi/d\tau$ определить практически важную величину dx/dt — истинную скорость продвижения «берегового эффекта». Эта скорость сперва быстро, а потом медленно нарастает. Определим ее только применительно к конечному этапу развития волн, на котором масштабные отношения $dx/d\xi$ и $dt/d\tau$ меняются очень медленно. В числителе и в знаменателе выражения, полученного на основании (223) и (224), окажутся общие множители. После сокращения на эти общие множители получим

$$\frac{dx}{dt} = 0{,}895\,\frac{2\pi}{9}\,\frac{d\xi}{d\tau}\,f_\infty V. \qquad (229)$$

Здесь (как и в § 21) f_∞ обозначает частное от деления фазовой скорости c_∞

наибольших волн, возможных при скорости ветра V, на самую скорость V. Значит, $f_\infty V = c_\infty$.

Подставим в (229) найденное конечное значение $\frac{d\xi}{d\tau} = 1{,}0$. Тогда окончательно запишем

$$\frac{dx}{dt} = 0{,}625c. \tag{230}$$

Не следует придавать особое значение цифре 0,625 в (230). Есть основания полагать, что она отличается от $^1/_2$ лишь потому, что во все исходные уравнения баланса энергии волн подставлялось классическое выражение энергии волн (чтобы задача разрешалась в квадратурах). В действительности же на основании (196) надо считать, что на конечном этапе развития волн их энергия на 25% превышает величину, получаемую по классической формуле. С другой стороны, поток энергии, переносимой волнами, равен произведению энергии волн на половину их фазовой скорости. Именно изменчивость этого потока при удалении от наветренного берега порождает последний член в уравнении (222).

Сохраним прежнюю величину потока энергии и уменьшим на 25% множитель при c в (230). Тогда окажется, что скорость продвижения «берегового эффекта» равна *групповой скорости* волн, т. е. *скорости переноса энергии.*

§ 24. Развитие ветровых волн на мелководном море на большом расстоянии от наветренного берега

На мелководном море как угодно далеко от наветренного берега волны никогда не могут достигнуть той «физически предельной» высоты, которая определялась формулой (211) § 21 применительно к условиям океана или весьма глубокого моря. Действительно, *разрушение вершин волн под влиянием мелководья* должно наступать значительно раньше той стадии волнообразования, когда потери мощности на внутреннее турбулентное трение становятся сравнимыми с мощностью, передаваемой от ветра волне.

Как было показано в § 11, критическое время пробега волн на мелководье $t_{кр}$ выражается формулой (121). Для краткости перепишем ее сейчас в ином виде

$$t_{кр} = \frac{T}{\pi}\frac{H_1}{r}. \tag{231}$$

В свою очередь

$$H_1 = H\frac{\operatorname{sh} 2\frac{H}{R}}{2\frac{H}{R}} \tag{232}$$

и по-прежнему $R = \frac{\lambda}{2\pi}$.

Допустим, что по прошествии такого промежутка времени наступает частичное разрушение вершин, отнимающее некоторую долю ε от полной энергии волн (в расчете на единицу поверхности моря). В таком случае средняя мощность, теряемая волнами, в расчете на ту же единицу поверхности благодаря воздействию мелководья должна выражаться простой формулой

$$W_H = \frac{\varepsilon E}{t_{кр}}. \tag{233}$$

Подставим в (233) классическое выражение энергии волн E через полувысоту их r и выражение $t_{кр}$ из (231). Тогда получим [41] окончательно

$$W_H = \frac{\pi\varepsilon}{2}\frac{\delta g}{TH_1}r^3. \tag{234}$$

Этот новый член баланса энергии волн добавим к правой части уравнения, записанного применительно к районам моря, очень далеким от наветренного берега. Тогда получим слева то же выражение, как и в условиях океана, а справа — трехчленное выражение

$$\delta g r \frac{\partial r}{\partial t} = 2\varkappa \left(\frac{r}{R}\right) \frac{r}{T} \delta_a (V-c)^2 - \frac{2\pi}{9} \delta g \frac{k^2}{T} \left(\frac{r}{R}\right)^2 r^2 - \frac{\pi\varepsilon}{2} \frac{\delta g}{TH_1} r^3. \quad (235)$$

Разделим обе части (235) на $\delta g r$ и введем сокращенные обозначения

$$\frac{2\varkappa}{T}\left(\frac{r}{R}\right)\frac{\delta_a}{\delta}\frac{(V-c)^2}{g} = a, \quad \frac{2\tau}{9}\frac{k^2}{T}\left(\frac{r}{R}\right)^2 = b, \quad \frac{\pi\varepsilon}{2TH_1} = e. \quad (236)$$

Тогда закон нарастания высоты волн в мелководном море далеко от наветренного берега представится простым дифференциальным уравнением

$$\frac{dr}{dt} = a - br - er^2. \quad (237)$$

Высота волн перестает нарастать и достигает предельной величины $2r_2$, возможной на мелководье при заданном ветре, когда обращается в нуль правая часть (237). Отсюда следует, что сама предельная величина r_2 должна выражаться формулой

$$r_2 = \frac{1}{2e}\left[-b + \sqrt{4ae + b^2}\right]. \quad (238)$$

Как и в предыдущих параграфах, перейдем теперь от величин r и t к соответствующим безразмерным величинам η и τ, связанным с ними масштабными соотношениями

$$\frac{t}{\tau} = \frac{2}{\sqrt{4ae + b^2}}, \quad (239)$$

$$\frac{r}{\eta} = r_2. \quad (240)$$

Тогда окажется возможным записать закон нарастания волн на мелководном море (вдали от наветренного берега) в очень простой интегральной форме

$$\eta = \operatorname{th}\tau. \quad (241)$$

На рис. 163 графически представлен закон нарастания η по мере нарастания безразмерного времени работы ветра. Очень характерной является точка *наибольшей кривизны* на гиперболической тангенсоиде, отмеченная кружком. Трижды дифференцируя соотношение (241) и выражая затем полученные гиперболические функции через th τ, т. е. через η, придем к заключению, что при $\frac{d^3\eta}{d\tau^3} = 0$ будет $-2 + 4\eta_0^2 = 0$. Отсюда определяется ордината $\eta_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ точки, отмеченной на рис. 163.

Очень интересно, что совершенно такие же «колена» с точками наибольшей кривизны видны на экспериментальных кривых рис. 153, полученных в штормовом бассейне (нельзя поручиться лишь за протекание наиболее высокой кривой благодаря сильному разбросу точек). Для большей наглядности экспериментальные точки с рис. 153 перенесены на диаграмму рис. 164. Кривые, видные на рис. 164, в отличие от рис. 153, проведены не на глаз, а *вычислены* по формуле (241) с учетом (232) применительно к различным частным значениям H/R. Как видим, теоретические кривые удовлетворительно проходят между экспериментальными точками, несмотря на то, что единственный неопределенный параметр ε был вычислен лишь по одной серии точек.

Подробно остановимся на самом интересном случае — на случае особо резко выраженного мелководья. Здесь оказывается законным пренебречь

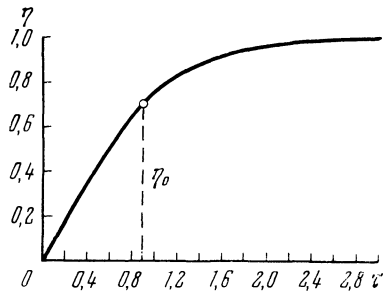


Рис. 163. Нарастание высоты ветровых волн на мелководном море вдали от наветренного берега

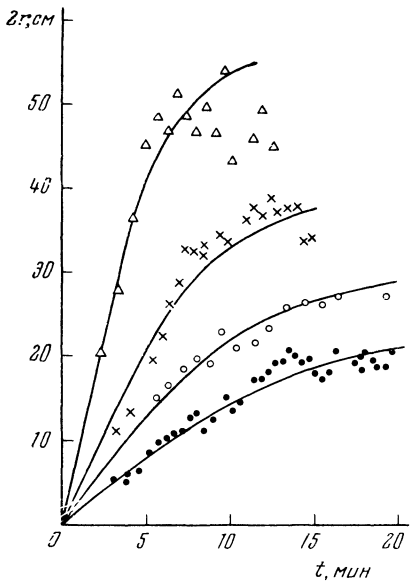


Рис. 164. Проверка теории по опытам в штормовом бассейне

потерями энергии на турбулентное трение по сравнению с потерями на частичное разрушение вершин волн под воздействием мелководья. Поэтому в (237) величиной br мы пренебрежем по сравнению с величиной er^2 и в выражении (238) пренебрежем величиной b, дважды входящей в правую часть. С другой стороны, в данном случае формула (232) приводит к равенству $H_1 = H$.

В результате, вспомнив сокращенные обозначения (236), можно будет вместо (238) записать

$$r_2 = 2(V - c)\sqrt{\frac{\varkappa}{\pi\varepsilon}\left(\frac{r}{R}\right)\frac{\delta_a}{\delta}\frac{H}{g}}. \quad (242)$$

Эта формула, выведенная А. П. Хваном [42], аналогична формуле В. В. Шулейкина, полученной на основе иных выкладок, применительно к условиям штормового бассейна, в работе [41]. Обе формулы приводят к одинаковым заключениям:

1. Предельная полувысота волн на мелководном море в достаточном удалении от наветренного берега пропорциональна *первой степени* скорости ветра относительно бегущих волн, а не квадрату скорости, как было на глубоком море [см. § 23, формулу (211)].

2. Полувысота волн в чрезвычайно мелководном море пропорциональна также корню квадратному из *глубины* моря.

Оба теоретических заключения отлично оправдываются на материалах, полученных в условиях чрезвычайно мелководного, но достаточно большого по площади озера — озера Белого, при измерениях А. П. Хвана. Отлично оправдывались они и при опытах В. В. Шулейкина в штормовом бассейне.

§ 25. Поле ветровых волн на мелководном море

Общее дифференциальное уравнение полного энергетического баланса волн в любой точке мелководного моря должно содержать еще один дополнительный член по сравнению с уравнением (235), записанным для района, удаленного от наветренного берега. Этот дополнительный член учтет «высасывание» энергии волн, о котором уже говорилось применительно к океанским условиям [см. выше, формулу (220)].

В отличие от условий океана, групповая скорость волн на резко выраженном мелководье равна фазовой скорости волн и может быть представлена той же формулой, какой пользуются в теории приливов:

$$c_{гр} = c = g^{1/2}H^{1/2}. \quad (243)$$

Здесь H — глубина мелководного моря.

Классическое выражение полной энергии волн E в расчете на единицу поверхности сохраняет тот же вид, как и в океанских условиях. Поэтому новое выражение потока энергии, входящего в наветренную грань водяной призмы, теперь запишется так:

$$\Phi_x = \frac{1}{2}\delta g^{3/2} H^{1/2} r^2. \tag{244}$$

Из подветренной грани той же призмы должен выходить несколько бо́льший поток Φ_{x+dx}. В результате водяная призма должна терять в расчете на единицу поверхности моря мощность W_φ, которая применительно к условиям резко мелководного моря выражается формулой

$$W_\varphi = \delta g^{3/2} H^{1/2} r \frac{\partial r}{\partial x}. \tag{245}$$

Как видим, в отличие от формулы (220), сюда вошла глубина моря H, а полувысота волн r здесь входит в первой степени вместо степени $^5/_2$.

После нахождения точного интеграла поля ветровых волн в океане приведем точное решение задачи для столь мелководного моря, что вполне законными являются и формула (243), и равенство $H_1 = H$, заменяющее сложную формулу (232). Столь же законным будет пренебрежение потерями энергии на внутреннее турбулентное трение по сравнению с потерями на частичное разрушение вершин волн под действием мелководья.

После таких вполне законных и очень существенных упрощений уравнение баланса энергии ветровых волн на весьма мелководном море запишется в виде

$$\delta g r \frac{\partial r}{\partial t} = 2\varkappa \left(\frac{r}{H}\right) \frac{r}{T} \delta_a (V - c)^2 - \frac{\pi\varepsilon}{2} \frac{\delta g}{TH} r^3 - \delta g^{3/2} H^{1/2} r \frac{\partial r}{\partial x}. \tag{246}$$

Легко видеть, что по прошествии очень большого срока работы ветра обращается в нуль левая часть равенства (246), а на достаточно большом расстоянии от наветренного берега становится равным нулю последний член правой части (246). При этом полувысота волн r достигает своего наибольшего значения r_2, возможного на море с глубиной H при относительной скорости ветра $(V - c)$.

Разделив все члены формулы (246) на $\frac{\pi\varepsilon}{2} \frac{\delta g}{TH} r$, увидим, что первый член, получившийся в правой части, может считаться приблизительно равным r_2 на основании формулы (242) и на основании соображений, высказанных на стр. 312 по поводу формулы (221). Приняв во внимание все это, можно привести выражение (246) к виду, еще более простому, чем (222):

$$\frac{\partial \eta}{\partial \tau} = 1 - \eta^2 - \frac{\partial \eta}{\partial \xi}. \tag{247}$$

Легко показать, что масштабные соотношения теперь запишутся таким образом:

$$dx = \frac{2}{\pi\varepsilon} g^{1/2} T \frac{H^{1/2}}{r_2} d\xi, \tag{248}$$

$$dt = \frac{2}{\pi\varepsilon} T \frac{H}{r_2} d\tau, \tag{249}$$

$$r = \eta r_2. \tag{250}$$

В отличие от (222), уравнение (247) совершенно симметрично относительно частных производных $\partial\eta/\partial\tau$ и $\partial\eta/\partial\xi$. В связи с этим частные решения для развивающихся волн вдали от наветренного берега и для установившихся волн на всем протяжении мелководного моря должны быть аналогичны

друг другу:

$$\text{если } \frac{\partial \eta}{\partial \xi} = 0, \text{ то } \eta = \operatorname{th} \tau, \tag{251}$$

$$\text{если } \frac{\partial \eta}{\partial \tau} = 0, \text{ то } \eta = \operatorname{th} \xi. \tag{252}$$

Но это значит, что *точный интеграл* уравнения (247) может быть геометрически представлен только поверхностью η (ξ, τ), совершенно симметричной относительно линии разрыва или относительно *ребра* на этой поверхности.

Такую поверхность для случая чрезвычайно мелководного моря построил А. П. Хван [42]. Она воспроизведена на рис. 165.

Вместо *кривой OK'* рис. 162 на рис. 165 появилась *прямая OM'*, которая делит пополам угол между координатными осями τ и ξ. Над этой прямой проходит *плоская* кривая *OM*, которая служит ребром найденной новой поверхности η (ξ, τ). Сама поверхность, выражающая точный интеграл уравнения (247), на рис. 165 состоит из двух совершенно одинаковых «крыльев». Сечения левого «крыла» построены по формуле (252), а сечения правого «крыла» — по уравнению (251).

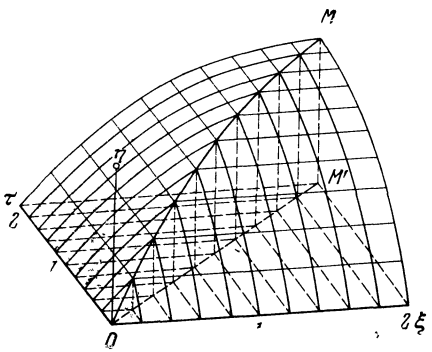


Рис. 165. Интеграл уравнения поля ветровых волн на весьма мелководном море или озере

Так же как и на поверхности, представлявшей интеграл уравнения (222) (рис. 162), в новой задаче происходит лишь разрыв первых частных производных на *ребре*. Сама функция η всюду меняется совершенно непрерывно.

Как и в условиях океана, на всех расстояниях ξ от наветренного берега нарастание η идет во времени по общему закону, в данном случае по закону (251). Оно заканчивается тем ранее, чем меньше расстояние ξ от наветренного берега, а вслед за тем η сохраняется без изменений, как показывают прямые линии, параллельные оси τ (рис. 165).

Закон распределения высот *установившихся* волн снова оказывается универсальным. Он выражается теперь уравнением (252), по которому построены все сечения поверхности η (ξ, τ) вертикальными плоскостями, параллельными оси ξ (рис. 165). Так же как в океанских условиях, при различных сроках τ работы ветра отрезки соответствующих кривых от оси $O\tau$ до ребра *OM* неодинаковы. Чем дольше работал ветер, тем дальше от наветренного берега продвинулась в открытое море область установившегося волнения. За пределами этой области (справа от ребра *OM*) все высоты нарастающих волн одинаковы, как показывают прямые, параллельные оси ξ (рис. 165).

Интересно проследить за скоростью, с которой продвигается в открытое море своеобразный «береговой эффект», существующий здесь, как и в океане. На основании сказанного о прямой *OM'* на рис. 165 следует считать, что на мелководном море при чрезвычайно малых значениях H/R величина $d\xi/d\tau$ всюду *постоянна*. Именно $\frac{d\xi}{d\tau} = 1$.

Теперь перейдем от величины $d\xi/d\tau$ к *истинной скорости* dx/dt, с которой продвигается в море «береговой эффект». Для этого воспользуемся очевидным соотношением между dx/dt и $d\xi/d\tau$, а также масштабными отрезками

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial x/\partial \xi}{\partial t/\partial \tau} \frac{d\xi}{d\tau}. \tag{253}$$

Подставим сюда выражения (248) и (249). Тогда получим интересное выражение для dx/dt

$$\frac{dx}{dt} = g^{1/2} H^{1/2} = c. \tag{254}$$

Второй знак равенства поставлен здесь на основании (243). Но применительно к (243) уже было отмечено, что *фазовая* скорость волн c в точности равна *групповой* скорости волн при резко выраженном мелководье.

Значит, и на резко мелководном море «береговой эффект» продвигается от наветренного берега в открытое море с *групповой* скоростью — с той скоростью, с какой происходит перенос *энергии* волнами.

В отличие от предыдущей задачи, решенной применительно к океанским условиям, сейчас не выявилось никаких неточностей в исходных формулах. Это объясняется полной симметрией уравнения (247) по отношению к частным производным $\partial\eta/\partial\tau$ и $\partial\eta/\partial\xi$ и полной точностью выражения E на мелководье, при $H/R \ll 1$.

§ 26. Построение рабочих диаграмм для расчета океанских волн

Точный интеграл дифференциального уравнения (222), описывающий поле ветровых волн в океане или глубоком море, дает возможность определять безразмерную высоту η волн, развивающихся за безразмерный срок τ действия ветра, или волн, установившихся на безразмерном расстоянии ξ от наветренной границы шторма (в частности, от наветренного берега). Для практических расчетов элементов волн необходимо перейти от безразмерных аргументов τ, ξ к заданным реальным аргументам: времени t, выраженному в часах, и расстоянию x, выраженному в километрах. Что касается искомой высоты волн h, то она, как помним, просто связана с η; $h = \eta h_\infty$, где h_∞ — предельная высота волн, которая при заданной скорости ветра V была бы возможна в бесконечно простирающемся океане. Для получения масштабов, необходимых для перехода от безразмерных величин к реальным заданным, начнем именно с масштаба высот волн, их длин и их периодов [37].

На рис. 166 по оси абсцисс отложены скорости ветра, выраженные в метрах в секунду, по оси ординат слева — значения h_∞ в метрах и соответствующие значения предельных периодов волн T_∞, возможных при той же скорости ветра. Справа отмечены значения VT_∞, которые также будут необходимы в дальнейшем.

Парабола h_∞ построена на основании диаграммы рис. 160 с поправкой на $+10\%$, о которой говорилось выше. Ее ординаты дают значения h_∞ для заданного значения V: все измеренные наибольшие высоты волн примерно на 10% меньше предельных, которые были бы возможны в безграничном океане.

Зависимость предельной величины периода волн T_∞ от V получена на основании тождества

$$T_\infty = \frac{2\pi}{g} c_\infty = \frac{2\pi}{g}\left(\frac{c_\infty}{V}\right) V. \tag{255}$$

Подставив в (255) предельное значение $\frac{c_\infty}{V} = 0{,}82$ (см. стр. 311), получим уравнение прямой T_∞, нанесенной на рис. 166. Зная зависимость T_∞ от V, остается построить вторую параболу VT_∞, позволяющую определить значение этого масштабного отрезка для заданной скорости ветра V.

Для замыкания системы уравнений вспомним соотношения (205) и (206), полученные в § 18, и предельное значение $(h/\lambda)_\infty = 1/21$, о котором говори-

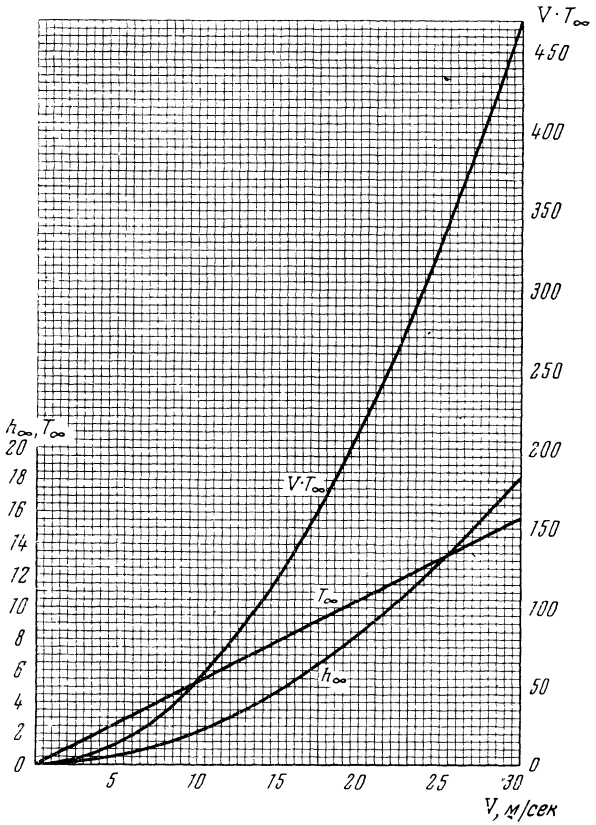


Рис. 166. Предельные элементы ветровых волн 5%-ной обеспеченности как функции скорости ветра

лось выше (см. стр. 310). При этом предельном условии нетрудно получить из упомянутых соотношений

$$\frac{\lambda_\infty}{\lambda_0} = 50 \text{ и } \frac{h_\infty}{h_0} = 16{,}7. \tag{256}$$

Располагая этими цифрами, запишем два очевидных тождества

$$\frac{h}{h_0} = \frac{h_\infty}{h_0}\eta = 16{,}7\,\eta, \quad \frac{\lambda}{\lambda_0} = \frac{\lambda_\infty}{\lambda_0}\frac{\lambda}{\lambda_\infty} = 50\frac{\lambda}{\lambda_\infty}. \tag{257}$$

Выражая с помощью этих соотношений в уравнении (205) h/h_0 через η и λ/λ_0 через λ/λ_∞, получим для η:

$$\eta = 0{,}833\frac{\lambda}{\lambda_\infty} + 0{,}16\left(\frac{\lambda}{\lambda_\infty}\right)^{1/3}. \tag{258}$$

На рабочую диаграмму рис. 167 нанесена кривая λ/λ_∞, построенная по этому уравнению, причем λ/λ_∞ рассматривается как функция η.

Классические соотношения между элементами волн в океане позволяют найти вторую функцию T/T_∞:

$$\frac{T}{T_\infty} = \left(\frac{\lambda}{\lambda_\infty}\right)^{1/2}. \tag{259}$$

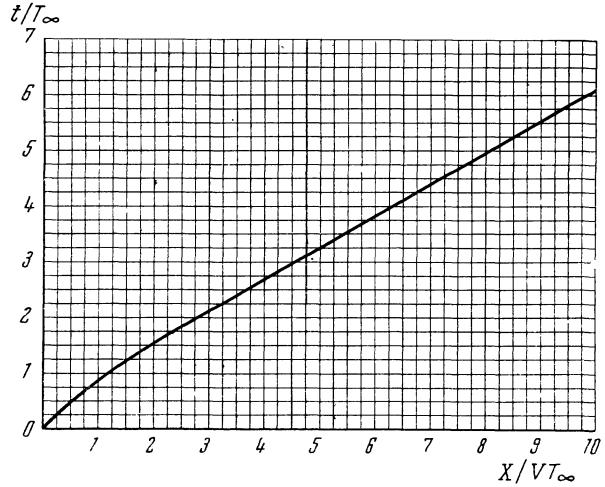


Рис. 167. Вспомогательная диаграмма

На основании первого равенства (256) можно записать вспомогательное соотношение

$$\left(\frac{\lambda_0}{\lambda}\right)^{2/3} = 50^{-2/3}\left(\frac{\lambda}{\lambda_\infty}\right)^{-2/3}.$$

Это уравнение вместе с уравнением (206) дает важную формулу

$$\frac{\lambda}{h} = \left[0{,}04 + 0{,}00757\left(\frac{\lambda}{\lambda_\infty}\right)^{-2/3}\right]^{-1}. \qquad (260)$$

По этой формуле вычислена кривая λ/h, изображенная на рис. 170.

Теперь исследуем масштаб времени. В соотношение (224) внесем вместо величины R/r, удобной для сокращения формул, величину $\lambda/\pi h$, более удобную для практики. Кроме того, вместо T подставим величину, тождественно равную $T_\infty\left(\frac{T}{T_\infty}\right)$. Тогда (224) заменится равносильным соотношением

$$dt = \frac{9}{2\pi^3}\left(\frac{T}{T_\infty}\right)\left(\frac{\lambda}{h}\right)^2\frac{T_\infty}{k^2}d\tau. \qquad (261)$$

Вместо $d\tau$ подставим в (261) ее выражение через $d\eta$, полученное из уравнения (222), в котором положено $\frac{\partial\eta}{\partial\xi} = 0$, что соответствует развивающемуся волнению. Тогда после перестановки постоянных множителей можно будет записать в интегральной форме

$$\frac{t}{T_\infty} = \frac{9}{2\pi^3k^2}\int\left(\frac{T}{T_\infty}\right)\left(\frac{\lambda}{h}\right)^2\frac{d\eta}{1-\eta}. \qquad (262)$$

Все сомножители под знаком интеграла являются функциями от η. В частности, (T/T_∞) и (λ/h) снимаются с рабочей диаграммы рис. 170, с одноименных кривых, применительно к последовательно меняющимся значениям η. Согласно сказанному на стр. 305, положим $k = 0{,}1$. Для удобства будем выражать t в часах, а T_∞ — в секундах. Тогда придется в формуле (262) разделить правую часть на 3600.

На рабочей диаграмме рис. 168 верхняя кривая вычислена по уравнению (262). Эта кривая относится к условиям океана и очень глубокого моря.

Для каждого значения аргумента t/T_∞ эта кривая позволяет найти безразмерную высоту η волн, развивающихся в океане.

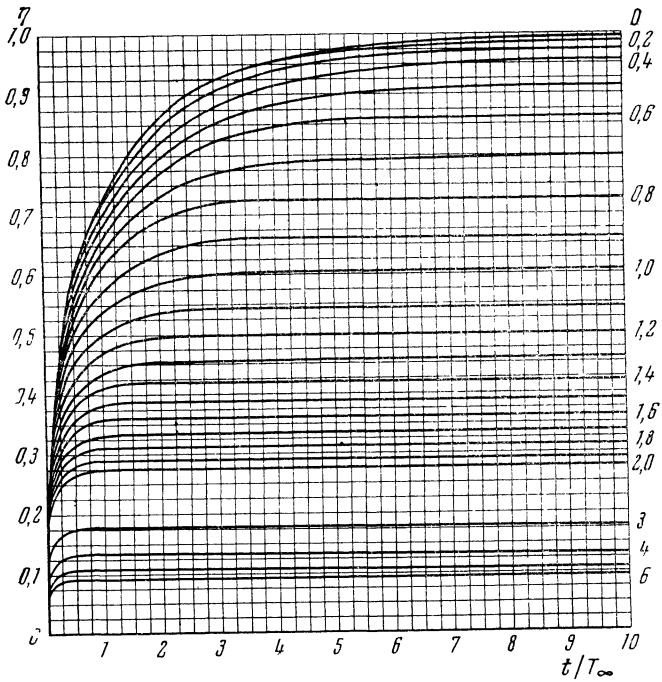


Рис. 168. Диаграмма для расчета развивающихся волн

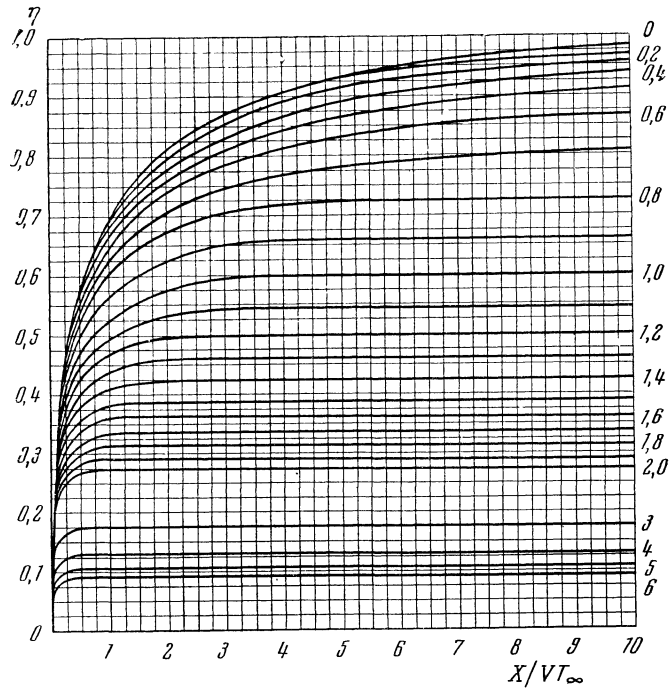


Рис. 169. Диаграмма для расчета установившихся волн

Величина T_∞, входящая в аргумент, отсчитывается по одноименной кривой на рабочей диаграмме рис. 166. С той же диаграммы снимается значение h_∞ для заданной скорости ветра V [43]. В результате определяется искомая высота волн $h = \eta h_\infty$. Аналогично определяется масштаб расстояний от наветренной границы. Прежде всего, в масштабном соотношении (223) надо преобразовать некоторые сомножители. Это можно сделать на основании тождества

$$0{,}895\, g^{1/2} r_\infty^{1/2} = 0{,}895\, c_\infty \left(\frac{r}{R}\right)_\infty^{1/2} = 0{,}895 \left(\frac{c_\infty}{V}\right)\left(\frac{r}{R}\right)_\infty^{1/2} V,$$

на основании другого тождества, содержащего T_∞ и уже использованного в предыдущем выводе, и на основании очевидного выражения

$$\left(\frac{R}{r}\right)^{5/2} = \pi^{-5/2}\left(\frac{\lambda}{h}\right)^{5/2}.$$

Кроме того, надо заменить $d\xi$ его выражением через $d\eta$ из уравнения (222), в котором следует положить $\frac{\partial \eta}{\partial r} = 0$, соответственно случаю установившегося волнения. Тогда окончательно (в интегральной форме) запишется

$$\frac{x}{VT_\infty} = \frac{0{,}895}{\pi^{5/2} k^2}\left(\frac{c_\infty}{V}\right)\left(\frac{r}{R}\right)_\infty^{1/2} \int \left(\frac{T}{T_\infty}\right)\left(\frac{\lambda}{h}\right)^{5/2} \frac{\eta^{1/2}\, d\eta}{1-\eta}. \qquad (263)$$

Здесь под интегралом стоят величины, которые все являются функциями η. В частности T/T_∞ и λ/h снимаются с диаграммы рис. 170, как и в предыдущем случае. Все величины, находящиеся перед знаком интеграла, известны; в частности, по-прежнему $k = 0{,}1$.

По формуле (263) построена рабочая диаграмма рис. 169. Она позволяет находить η для каждого значения аргумента, которым на этой диаграмме служит величина x/VT_∞. Удобно выражать x в километрах, а масштабный отрезок, определяемый по диаграмме рис. 166, VT_∞ в метрах. Поэтому величину, стоящую перед интегралом в (263), необходимо разделить на 1000. Как и на предыдущей диаграмме (рис. 168), условиям океана и очень глубокого моря на рис. 169 соответствует верхняя кривая. Как и для развивающегося волнения, теперь, в случае волнения установившегося, искомая высота волн $h = \eta h_\infty$, где значение h_∞ взято с рис. 166.

На основной теоретической диаграмме рис. 162 видно, что характерное *ребро* поверхности η (ξ, τ) в проекции на координатную плоскость $\xi\tau$ дает кривую OK', которая является своего рода рубежом: на ту часть плоскости, которая лежит между осью ξ и кривой OK', проектируются точки поверхности, соответствующие режиму развивающегося волнения; на ту часть плоскости, которая лежит между кривой OK' и осью τ, проектируются точки, соответствующие режиму установившегося волнения. На вспомогательной диаграмме, изображенной на рис. 167, воспроизведена эта *рубежная* кривая, отнесенная к новой, практически удобной системе координат. По оси абсцисс здесь отложены значения аргумента $\frac{x}{VT_\infty}$, а по оси ординат — значения аргумента t/T_∞. Каждая точка рубежной кривой соответствует какому-то *общему* значению η, определенному по рис. 168 и 169. Например, точка с абсциссой 1,0 и ординатой 0,9 на рис. 167 соответствует значению $\eta = 0{,}69$ на обоих этих рисунках; точка с абсциссой 4,4 и ординатой 3,0 отвечает значению $\eta = 0{,}925$ и на рис. 168, и на рис. 169. Именно это обстоятельство послужило для построения рубежной кривой на рис. 167.

Приведем пример расчета элементов волн по описанным рабочим диаграммам Шулейкина. Пусть требуется определить элементы волн, возникших в океане через 6,5 *час* работы ветра, скорость которого равна 19 *м/сек*. Расстояние данной точки от наветренного берега составляет 560 *км*.

По рис. 166 находим: $h_\infty = 7{,}4$ *м*, $T_\infty = 10{,}2$ *сек*, $VT_\infty = 193$ *м*. Следовательно, $\frac{x}{VT_\infty} = 2{,}91$ и $\frac{t}{T_\infty} = 0{,}637$. На рис. 167 точка с таким и координатами лежит ниже рубежной кривой. Это значит, что волнение еще не установившееся, а потому его надо рассчитывать, пользуясь диаграммой рис. 168.

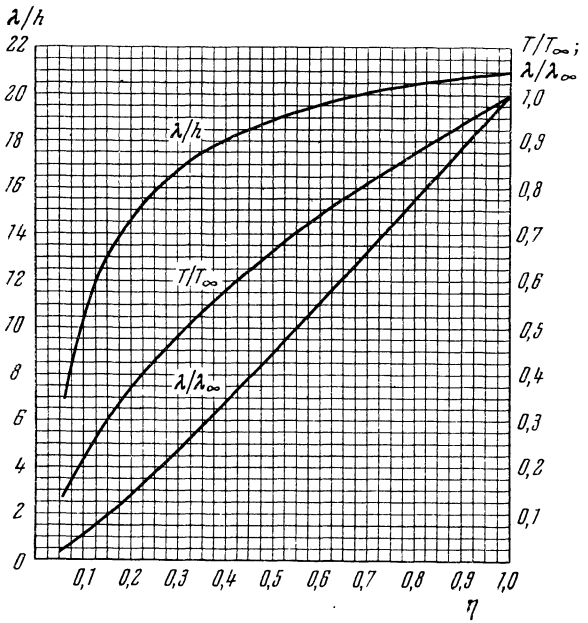


Рис. 170. Диаграмма для расчета длины волн и их периода

На рис. 168 значению $\frac{t}{T_\infty} = 0{,}637$ соответствует $\eta = 0{,}645$. Следовательно, искомая высота волн будет $h = 0{,}645 \cdot 7{,}4 = 4{,}8$ *м*. На рис. 170 значению $\eta = 0{,}645$ отвечают $\lambda/h = 19{,}8$ и $\frac{T}{T_\infty} = 0{,}775$. Следовательно, искомая длина волн $\lambda = 19{,}8 \cdot 4{,}8 = 95$ *м*; искомый период волн $T = 0{,}775 \cdot 10{,}2 = 7{,}9$ *сек*.

Если бы потребовалось определить элементы волн через 24 *часа* после начала шторма, в той же точке океана, при той же скорости ветра, то соответствующая точка на рис. 167 легла бы выше рубежной кривой, а потому расчет пришлось бы вести по рис. 169. В рассматриваемом же случае для установившегося волнения абсцисса $\frac{x}{VT_\infty} = 2{,}9$ дает значение $\eta = 0{,}87$. Следовательно, здесь установившиеся волны могут достигнуть высоты $h = 0{,}87 \cdot 7{,}4 = 6{,}5$ *м*. На рис. 170 значению $\eta = 0{,}87$ отвечают $\frac{\lambda}{h} = 20{,}6$ и $\frac{T}{T_\infty} = 0{,}925$. Поэтому длина установившихся волн $\lambda = 20{,}6 \cdot 6{,}5 = 134$ *м*, а период их $T = 0{,}925 \cdot 10{,}2 = 9{,}4$ *сек*.

Те же рабочие диаграммы позволяют рассчитать постепенное нарастание ветровых волн при *увеличивающейся скорости ветра*. Необходимо разбить кривую нарастания скорости ветра на этапы и заменить ее ступенчатой линией, причем на каждой ступени скорость ветра будет приниматься постоянной. В качестве примера на рис. 171 изображены результаты такого расчета, здесь начальная скорость ветра была равна 12 *м/сек*; затем, на следующей

ступени, она достигла 15 *м/сек*, а на третьей ступени она равнялась уже 18 *м/сек*. Точки смены скоростей обозначены кружками, а близ соответствующих отрезков полученной кривой проставлены значения скорости ветра. На рисунке нанесены еще два отрезка пунктирных кривых. Один из них показывает, как нарастала бы во времени высота волн, если скорость ветра оставалась бы равной 12 *м/сек* в продолжение 20 *час* исследований; второй отрезок показывает, как быстро нарастала бы высота волн, если скорость ветра с самого начала и до конца исследованного периода времени равнялась бы 18 *м/сек*.

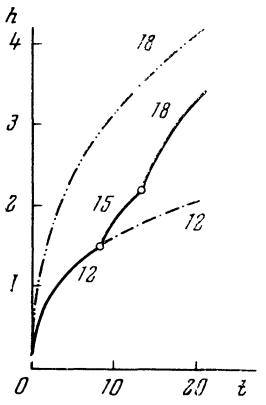


Рис. 171. Законы нарастания высоты волн при различных режимах ветра

Все формулы, послужившие для построения рабочих диаграмм, выведены из уравнения (222) с учетом его точного интеграла. Но само уравнение (222) было получено из громоздкого начального уравнения (221) путем деления всех его членов на $\delta g r$ и на выражение

$$\varkappa \left(\frac{R}{r}\right)(V-c)^2,$$

которое считалось инвариантом, несмотря на то, что все три сомножителя, входящие в него, заведомо меняются при развитии волн от начальной стадии до конечной.

Располагая большим количественным материалом, проверим, насколько законно можно считать *произведение* этих трех переменных множителей постоянным? Примем скорость ветра равной 15 *м/сек*. На основании (217), учтя, что $1/N_\infty^2 = \left(\frac{r}{R}\right)_\infty^2$, запишем выражение для аэродинамического коэффициента на конечной стадии развития волн в океане

$$\varkappa_\infty = \frac{\pi}{9}\,\frac{f_\infty^2}{(1-f_\infty)^2}\,\frac{\delta}{\delta_a}\left(\frac{r}{R}\right)_\infty^2 k^2. \qquad (264)$$

Подставив в (264) все известные нам числовые значения, получим $\varkappa_\infty = 1{,}2$. Следовательно, произведение трех множителей здесь будет

$$1{,}2 \cdot 6{,}7\ [(1-0{,}82)\cdot 15]^2 = 58{,}6.$$

При той же скорости ветра, на начальной стадии волнообразования, при $\lambda_1 = 1{,}24$ *м* крутизна волн $h_1/\lambda_1 = 0{,}12$. Соответственно с этим, на основании измерений в аэродинамической трубе, можно положить начальное значение $\varkappa_1 = 0{,}11$, фазовая скорость волн $c_1 = 0{,}89$ *м/сек*. Следовательно, $(V - c_1) = 14{,}1$ *м/сек*. Наконец, $\left(\frac{r}{R}\right)_1 = 0{,}37$; $\left(\frac{R}{r}\right) = 2{,}66$.

В данном случае произведение трех множителей оказывается

$$0{,}11 \cdot 2{,}66\,(14{,}1)^2 = 58{,}4.$$

Как видим, различие между начальным и конечным значениями этого выражения ничтожно, оно составляет лишь около $^1/_3\%$.

Следует отметить, что даже в отсутствие такого счастливого совпадения (при отсутствии инварианта, облегчившего вывод всех соотношений) ход вычислений не изменился бы с принципиальной стороны: в рабочих формулах пришлось бы лишь добавить переменный коэффициент в подынтегральном выражении, который был бы графически связан с аргументом η. Это нисколько не затруднило бы графическое интегрирование нового, слегка осложненного выражения.

§ 27. Расчет затухания океанских волн при уменьшении скорости ветра и при изменении его направления. Волны в системе тропических ураганов

Анализ явлений, возникающих при уменьшении скорости ветра и при изменении его направления, едва ли был бы возможен, если бы одновременно менялись высота волн, их длина и период.

К счастью для исследователя, действительная картина не настолько сложна. Именно, наблюдения в океане, сделанные Л. Ф. Титовым, и некоторые наши исследования показали, что иногда после достижения высоты волн, наибольшей возможной в заданных условиях при заданной скорости ветра, длина волн может слегка возрастать. Но при прохождении скорости ветра через временный максимум и последующем уменьшении длина волн и их период практически остаются постоянными. По всей вероятности, здесь происходит своеобразная компенсация двух явлений, противоречащих одно другому. Такая компенсация, несомненно, проявилась во время шторма на Тихом океане, описанного в работе М. Раттрея и В. Барта [44]: при прохождении скорости ветра через максимум наблюдалось практически постоянство длины волн и периода.

В соответствии с этим допустим, что при переходе скорости ветра через максимальное значение V длина волн достигла значения $\lambda_1 = 2\pi R_1$, период — значения T_1 и фазовая скорость волн — значения c_1. Пусть уменьшение скорости ветра после максимума происходит по ступеням и пусть на исследуемом этапе скорость ветра равна v на протяжении достаточно большой области океана [45][1].

Вместо прежнего уравнения баланса энергии (221) запишем иное уравнение

$$\delta g r \frac{dr}{dt} = 2\varkappa \left(\frac{r}{R_1}\right) \frac{r}{T_1} \delta_a (v - c_1)^2 - \frac{2\pi}{9} k^2 \delta g \left(\frac{r}{R_1}\right)^2 \frac{r^2}{T_1}. \qquad (265)$$

Его можно преобразовать по способу, применявшемуся по отношению к (221), после чего возникнет уравнение, которое будет обладать новыми качествами: а) будет отсутствовать третий член в правой части; б) вместо единицы в правой части появится величина, которая может оказаться не только меньше единицы, но и меньше нуля в зависимости от того, насколько v мало́ по сравнению с V. Согласно сказанному, вместо (222) запишем

$$\frac{d\eta}{d\tau} = \pm \left[\frac{v - c_1}{V - c_1}\right]^2 - \eta. \qquad (266)$$

Разделим на V числитель и знаменатель дроби, стоящей в скобках, и примем во внимание тождество

$$\frac{c_1}{V} = \frac{c_\infty}{V} \frac{c_1}{c_\infty} = 0{,}82 \frac{c_1}{c_\infty} = 0{,}82 \frac{T_1}{T_\infty}.$$

Для сокращения введем обозначение

$$\pm \left[\frac{\frac{v}{V} - 0{,}82 \frac{T_1}{T_\infty}}{1 - 0{,}82 \frac{T_1}{T_\infty}}\right]^2 = \pm n^2. \qquad (267)$$

Здесь верхний знак будем принимать, когда числитель в (267) положительный, т. е. когда скорость ветра v еще превышает фазовую скорость волн c_1; нижний знак появляется в случае отрицательной величины в числителе дроби

[1] Некоторые числовые коэффициенты в § 27 уточнены.

(267), т. е. когда скорость ветра v становится меньше фазовой скорости волн, развившихся под действием ветра, который обладал скоростью V.

Приняв эти условия, на основании (266) и (267) запишем

$$d\tau = \frac{d\eta}{\pm n^2 - \eta}. \tag{268}$$

Это выражение безразмерного времени надо теперь подставить в уравнение (261) вместо имевшейся там явной функции от η и $d\eta$. Тогда определится конечное приращение времени Δt, которое будет отвечать конечному приращению безразмерной высоты волн $(\eta_2 - \eta_1) < 0$:

$$\frac{\Delta t}{T_\infty} = \frac{9}{2\pi^3 k^2} \int_{\eta_1}^{\eta_2} \left(\frac{T}{T_\infty}\right)\left(\frac{\lambda}{h}\right)^2 \frac{d\eta}{\pm n^2 - \eta}. \tag{269}$$

По принятому условию λ_1 и T_1 сохраняются постоянными, а следовательно, их можно вынести за знак интеграла; кроме того, можно сократить обе части равенства на $1/T_\infty$. Учтем еще, что

$$\left(\frac{1}{h}\right)^2 = \left(\frac{1}{\eta h_\infty}\right)^2,$$

и вынесем $1/h_\infty^2$ за знак интеграла. Величину $(\lambda_1/h_\infty)^2$, которая появится при этом, заменим тождественно равной

$$\left(\frac{\lambda_1}{h_\infty}\right)^2 = \left(\frac{\lambda_\infty}{h_\infty}\right)^2 \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_\infty}\right)^2 = 440 \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_\infty}\right)^2.$$

В результате получим, условившись измерять t в часах:

$$\Delta t = \frac{9 \cdot 440 \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_\infty}\right)^2 T_1}{2\pi^3\, 0{,}01 \cdot 3600} \int_{\eta_1}^{\eta_2} \frac{d\eta}{\eta^2 (\pm n^2 - \eta)}, \tag{270}$$

откуда

$$\Delta t = 1{,}77 \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_\infty}\right)^2 \Delta\Psi T_1. \tag{271}$$

Здесь для краткости обозначено

$$\Delta\Psi = \int_{\eta_1}^{\eta_2} \frac{d\eta}{\eta^2 (\pm n^2 - \eta)}. \tag{272}$$

В свою очередь η_1 — значение η в самом начале исследуемого промежутка времени Δt, а η_2 — значение η в конце этого промежутка.

Как и в предыдущем параграфе, здесь t измеряется в часах, а T_1 — в секундах. На начальных этапах уменьшения скорости ветра, когда еще $v > c_1$, интегрирование (272) дает

$$\Delta\Psi = \frac{1}{n^4}\left[\ln \frac{1 - \frac{n^2}{\eta_1}}{1 - \frac{n^2}{\eta_2}} - \left(\frac{n^2}{\eta_2} - \frac{n^2}{\eta_1}\right)\right]. \tag{273}$$

На конечных этапах, когда $v < c_1$, оказывается

$$\Delta\Psi = \frac{1}{n^4}\left[\left(\frac{n^2}{\eta_2} - \frac{n^2}{\eta_1}\right) - \ln \frac{1 + \frac{n^2}{\eta_2}}{1 + \frac{n^2}{\eta_1}}\right]. \tag{273а}$$

Условное обозначение (267) показывает, что в частном случае может оказаться $n = 0$. Проанализировав (272) применительно к этому значению n, легко показать, что в данном случае

$$\Delta\Psi = -\int_{\eta_1}^{\eta_2} \frac{d\eta}{\eta^3} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\eta_2^2} - \frac{1}{\eta_1^2}\right). \qquad (273б)$$

Наконец, при весьма больших абсолютных величинах n^2, входящих со знаком минус, оказывается возможным в скобках, в знаменателе (272), пренебречь величиной η по сравнению с n^2, поскольку всегда $\eta \leqslant 1$. В этом предельном случае выражение интеграла будет

$$\Delta\Psi = -\int_{\eta_1}^{\eta_2} \frac{d\eta}{n^2\eta^2} = \frac{1}{n^2}\left(\frac{1}{\eta_2} - \frac{1}{\eta_1}\right). \qquad (273в)$$

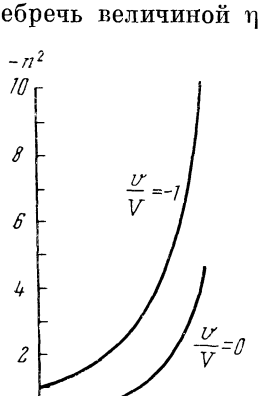


Рис. 172. Вспомогательная диаграмма

Из пояснений, данных к формуле (267), видно, что расчет ветровых волн при изменении направления на прямо противоположное должен производиться по тому же описанному способу: в числителе дроби (267) заведомо появится отрицательная величина при этом новом условии, поскольку теперь отрицательный знак окажется не только при втором, но и при первом члене числителя, при скорости ветра, изменившего свое направление на противоположное ветру V. Следовательно, здесь надо всегда пользоваться значением интеграла, которое дается формулой (273а) или соответственно (273в), при очень больших абсолютных значениях n^2, входящих с отрицательным знаком.

На основании многочисленных наблюдений в океане можно полагать, что в данном случае хорошо соблюдается условие консервативности величин λ_1, T_1 до полного гашения волн встречным ветром. Для практики полезна вспомогательная диаграмма, приведенная на рис. 172, для двух частных случаев, нередко встречающихся: для гашения зыби при наступившем штиле $\left(\frac{v}{V}\right) = 0$) и при встречном ветре, скорость которого обладает прежней абсолютной величиной $\left(\frac{v}{V}\right) = -1$. В соответствии с формулой (267) здесь величина n^2 должна зависеть только от отношения периода T_1 волн, созданных при скорости ветра V, к предельному значению периода T_∞, доступному при такой скорости ветра V. На рис. 172 по оси абсцисс отложены значения T_1/T_∞, а по оси ординат — значения параметра — n^2. При каждой из кривых проставлены соответствующие частные значения v/V.

Все величины, стоящие в правой части (271) перед T_1, определяются так, как определялись в задаче о нарастании ветровых волн, рассмотренной в предыдущем параграфе. Но вдобавок к рабочим диаграммам, содержавшимся там, теперь необходимо построить еще одну рабочую диаграмму, которая даст возможность вычислять высоту затухающих волн на различных последовательных этапах. Это — диаграмма, выражающая зависимость между вспомогательной функцией Ψ и безразмерной высотой волн η при различных значениях параметра n.

Для построения такой диаграммы вполне достаточны формулы (273) — (273в), которые должны применяться в соответствии с каждым этапом уменьшения скорости v и, следовательно, в соответствии с изменениями параметра n.

Действительно, положим в этих формулах $\eta_1 = 1$ и будем придавать величине η_2 различные, постепенно уменьшающиеся значения. Тогда по со-

ответствующей формуле из названных четырех найдем значения Ψ, которые будут отвечать заданным значениям η_2.

Нанесем на рис. 173 полученные точки, приняв Ψ за абсциссы, а η — за ординаты кривых. Возникнет семейство кривых, при каждой из которых справа проставлены значения параметра n. Для практических целей следует построить побольше таких кривых, соответствующих промежуточным значениям n, чтобы облегчить и уточнить интерполяцию между соседними кривыми. В масштабе рис. 173 они перегрузили бы диаграмму.

Теперь, пользуясь диаграммой рис. 173, остается проследить за уменьшением высоты волн на последовательных этапах.

Для наглядности рассмотрим поведение ветровых волн в поле *тропического урагана*, изображенном на рис. 174. Эта синоптическая карта заимствована из книги И. Таннхилла «Ураганы» применительно к одному из последовательных положений «ока урагана» на его пути мимо п-ова Флорида. Выбраны условия, характерные для ураганов в Атлантическом океане, на этапах их полного развития — северней тропика Рака: движение системы урагана через исследуемую точку происходит в продолжение 24 *час* со скоростью 23 узла, т. е. 11,5 *м/сек*. Диаметр круга, охваченного ураганом, равен около 550 *миль*, т. е. около 1000 *км*. Максимальная скорость ветра достигает 60 *м/сек*. Она нарастает от нуля в продолжение 11 *час* и после максимума падает до нуля в продолжение 1 *часа* (в «оке»). После прохождения центра урагана через исследуемую точку скорость ветра меняет направление на прямо противоположное, нарастает до максимума в продолжение 1 *часа* и, наконец, падает до нуля в продолжение 11 *час*. Строго говоря, абсолютные значения скоростей ветра после смены его направления будут меньше: составляющая, вызванная собственным движением системы урагана, тут будет направлена в противоположную сторону. Но на современной стадии расчета волн в поле урагана, еще несовершенной, нет смысла вносить в анализ эту деталь. Вот почему на рис. 175 кривая под осью абсцисс представляет собой зеркальное изображение кривой над осью абсцисс, повернутое вокруг оси V на 180°. То же можно сказать и относительно ступеней, изображенных над и под осью абсцисс на этом рисунке.

Нарастание волн за время от 0 до 11 *час*, отмеченных ординатой максимума, вычислено по способу, описанному в предыдущем параграфе. Так получена восходящая часть кривой h на рис. 176, на котором воспроизведена пунктиром кривая изменения скорости ветра от нуля до 60 *м/сек*, затем до нуля, далее — со сменой направления — снова до 60 *м/сек* и, наконец, до нуля после прохождения всей системы урагана через исследуемую точку.

На рис. 175 видно, каковы были скорости *встречного* ветра на различных этапах гашения волн после прохождения первого максимума скорости ветра. Пусть в самый момент достижения этого максимума скоростью ветра высота волн успела дорасти до некоторого значения h_6 и пусть максимальная высота волн, мыслимая при скорости ветра $V = 60$ *м/сек*, составляет h_∞. В таком случае наибольшая достигнутая безразмерная высота волн составляет $\eta_6 = \frac{h_6}{h_\infty}$. С другой стороны, по кривой $v/V = 0$ (рис. 172) найдем для условий наступившего штиля величину параметра n, войдя в диаграмму с соответствующим значением T_1/T_∞, где по-прежнему T_1 — достигнутое значение периода волн, а T_∞ — максимальное возможное при скорости ветра в океане V.

С найденным параметром n выбираем на рис. 173 соответствующую ему кривую, промежуточную между двумя наиболее близкими к этому значению n. На выбранной кривой отмечаем точку, ордината которой равна η_6, и определяем абсциссу Ψ_6, которой обладает отмеченная точка. Теперь надо найти приращение абсциссы $\Delta\Psi$, которое отвечает заданному промежутку времени Δt — длительности штиля на диаграмме рис. 172. Это приращение

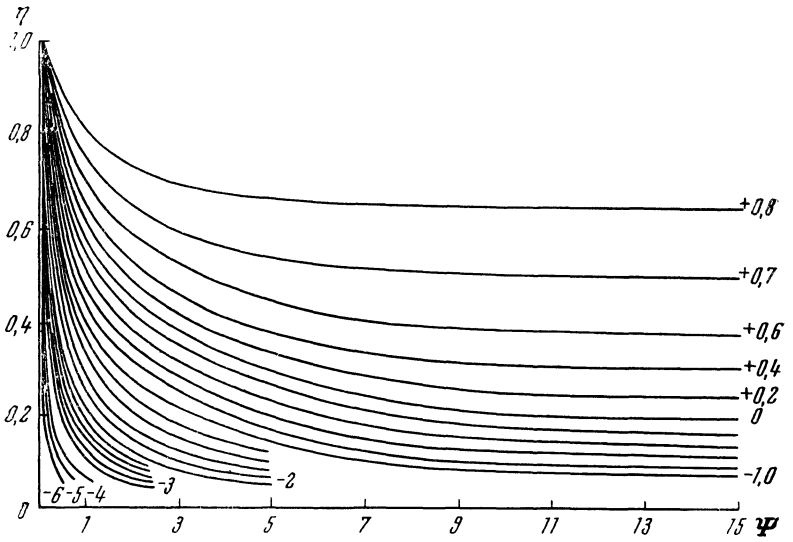


Рис. 173. Диаграмма для расчета затухания ветровых волн

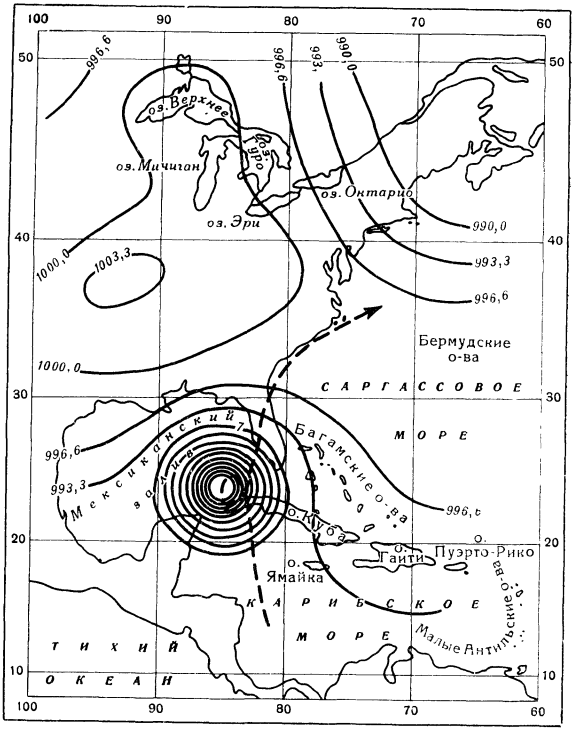


Рис. 174. Поле тропического урагана

удобно вычислять по рабочей формуле, непосредственно вытекающей из (271):

$$\Delta\psi = 0{,}566\left(\frac{\lambda_\infty}{\lambda_1}\right)^2 \frac{\Delta t}{T_1}. \qquad (274)$$

Определив $\Psi_7 = \Psi_6 + \Delta\Psi$, входим снова на диаграмму рис. 173 и ищем на прежней кривой ординату η_7 точки, обладающей абсциссой Ψ. Зная η_7, вычисляем $h_7 = \eta_7 h_\infty$.

На следующем этапе волны высотой η_7 (безразмерной) оказываются под воздействием ветра, скорость которого равна V, а направление — противоположное первоначальному. Следовательно, на вспомогательном рис. 172 этому этапу отвечает кривая — *1*. Войдя на нее с прежним значением T_1/T_∞, найдем новое значение параметра n.

Возвращаемся к рис. 173 и ищем на нем кривую, которая соответствует такому значению n, или строим промежуточную кривую посредством интерполяции. Находим абсциссу Ψ_7' такой точки на кривой, у которой ордината равна η_7. Вычисляем по (274) приращение абсциссы $\Delta\Psi'$, которое соответствует промежутку времени Δt, когда работает ветер со скоростью V, направленной противоположно начальному. Вычисляем $\Psi_8 = \Psi_7 + \Delta\Psi'$ и ищем на рис. 173, на только что использованной кривой, ординату η_8 по абсциссе Ψ_8. Новое очередное значение высоты волн будет $h_8 = \eta_8 h_\infty$.

На новом очередном этапе уменьшения высоты волн параметр n придется искать не по диаграмме рис. 172, а непосредственно по формуле (267), подставив в нее соответствующее значение v/V и прежнее значение T_1/T_∞. По этому новому параметру n на рис. 173 строится кривая, выражающая новый закон уменьшения безразмерной высоты η. Исходное значение Ψ_8'' определится теперь по ординате η_8, отмеченной на новой кривой. По-прежнему необходимо будем вычислять $\Delta\Psi''$ по формуле (274), подставляя в нее новые значения величин. По-прежнему найдется $\Psi_9 = \Psi_8'' + \Delta\Psi''$, а зная Ψ_9, определим η_9 по той же новой использованной кривой на рис. 173. К концу этапа высота волн будет $h_9 = \eta_9 h_\infty$. Так определятся и последующие очередные значения высоты волн, постепенно уменьшающиеся под воздействием встречного ветра.

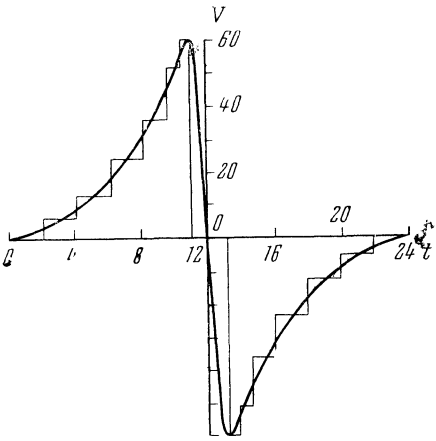


Рис. 175. Изменения скорости ветра при прохождении урагана

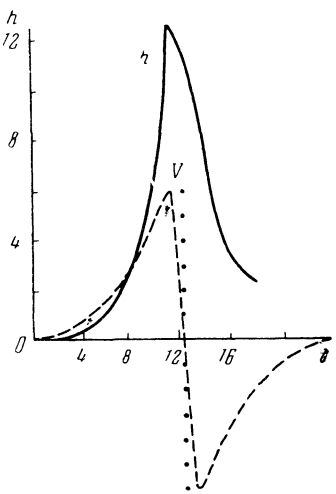


Рис. 176. Нарастание и падение высоты волн при прохождении урагана

На основании синоптических карт, аналогичных рис. 174, можно считать, что в точке, через которую прошел центр урагана, дует ветер, противоположный начальному направлению. В иных случаях, возможных в океане, новое направление ветра будет отличаться от первоначального не на 180°, а на меньший угол. Здесь задача будет осложнена. Впредь до детальных

обстоятельных исследований придется считать, что соображения, изложенные выше, удовлетворительно осуществляются по отношению к той *составляющей* скорости ветра, которая совпадает со старой скоростью ветра V или прямо противоположна ей. Другая составляющая новой скорости, по-видимому, должна развивать новую систему волн, налагающуюся на первоначальную, — об этом свидетельствуют многочисленные наблюдения в природе. При будущих исследованиях необходимо выяснить, насколько развитие этой новой системы волн отличается от развития начальной системы на гладкой поверхности океана, до стадии наибольшей высоты.

На рис. 176 приведена ниспадающая часть кривой, вычисленная по описанному методу [45].

Таким образом, оказалось, что при прохождении тропического урагана с упомянутыми характеристиками могут развиться волны высотой до 12,6 *м*. Их длина по расчетам, описанным в предыдущем параграфе, оказалась равной 230 *м*, а период — 12,1 *сек*. Скорость распространения таких волн составляет 19 *м/сек*. На основании диаграммы рис. 168 можно заключить, что для развития волн такой же высоты при длительном шторме потребовалась бы скорость ветра всего лишь 24 *м/сек*.

§ 28. Расчет ветровых волн на море произвольной глубины

В § 24 и 25 было показано, что высота установившихся волн на резко выраженном мелководном море или озере подчиняется совсем иным соотношениям по сравнению с теми, которые были найдены для условий океана или очень глубокого моря. Так, на основании формулы (242), полученной А. П. Хваном на озере Белом, в полном соответствии с теоретическими соображениями В. В. Шулейкина и его опытами в штормовом бассейне, предельная полувысота установившихся волн на весьма большом расстоянии от наветренного берега пропорциональна не квадрату, а первой степени разности между скоростью ветра и фазовой скоростью волн. Для практических расчетов желательно получить *универсальную* зависимость по аналогии с той, которая давно утвердилась в аэродинамике для коэффициента лобового сопротивления твердого тела как в турбулентных, так и в ламинарных потоках. Там условно принимают квадратичную зависимость коэффициента сопротивления от скорости потока, или от скорости тела относительно среды, на всем диапазоне скоростей, включая область, где ламинарный поток переходит в турбулентный. В то же время приводят зависимость коэффициента пропорциональности в формулах от числа Рейнольдса.

Так и в рассматриваемой задаче надо построить рабочие диаграммы, которые были бы применимы не только к случаю волн в океане или к случаю резко мелководного моря, но и к морям *произвольной* глубины, характеристики которых являются промежуточными между двумя крайними случаями.

На первый взгляд подобная задача может казаться неразрешимой, и она действительно очень долго не поддавалась решению.

Однако несколько лет тому назад под руководством В. В. Шулейкина она была решена с достаточной для практики точностью, исходя из общей теории поля ветровых волн, изложенной в § 22—26 [46]. Отослав читателя к цитированной работе касательно детальных выкладок, изложим здесь основы вывода универсальных соотношений. Вспомним уравнение баланса энергии волн (235), записанное для моря произвольной глубины, на бесконечно большом расстоянии от наветренного берега. При сокращенных обозначениях (236) это уравнение можно переписать в форме (237). В случае океана или глубокого моря обращается в нуль третий член правой части (237), содержащий множитель e, который зависит от потерь на частичное разрушение вершин волн под действием мелководья. При этом полувысота ус-

тановившихся волн (r_∞) получается путем приравнивания нулю левой части (237). А так как, кроме того, можно записать эмпирическое соотношение, полученное на основании большого числа измерений наиболее высоких волн в океане и согласующееся с теорией

$$r_\infty = 0{,}0103\,V^2,$$

то, объединяя два соотношения, запишем $r_\infty = \frac{a}{b} = 0{,}0103\ V^2$.

Если в море произвольной глубины мощность расходуется и на внутреннее турбулентное трение (W_μ), и на частичное разрушение вершин волн (W_H), то полувысота установившихся волн r_2 окажется иной: она определится из квадратного уравнения

$$r_2^2 + \frac{b}{e} r_2 - 0{,}0103\,V^2 \frac{b}{e} = 0. \tag{275}$$

Учитывая значения b и e в (275), можно представить корень этого уравнения так:

$$r_2 = \frac{H_1}{A}\left[-1 + \sqrt{1 + B\frac{V^2}{H_1}}\right]. \tag{276}$$

Для удобства разделим и умножим правую часть (276) на квадрат заданной скорости ветра и перейдем от полувысоты r_2 установившихся волн к высоте их h_2. Тогда получим первое универсальное соотношение

$$h_2 = FV^2. \tag{277}$$

Здесь F — функция от аргумента V^2/H_1.

В отличие от работы [46] внесем в вычисления уточненное значение $(\lambda/h)_\infty = 21$ и соответственно $(R/r)_\infty = 6{,}7$. Кроме того, примем во внимание, что λ_2/h_2 отличается от предельного значения $(\lambda/h)_\infty$ в океане в зависимости от частных значений аргумента V^2/H_1. Обозначив, для общности, величину λ_2/h_2 через χ_2, получим в результате промежуточных вычислений корректированный вид функции F:

$$F = \frac{-1 + \sqrt{1 + 0{,}019\,\chi_2^2 \frac{V^2}{H_1}}}{0{,}91\,\chi_2^2 \frac{V^2}{H_1}}. \tag{278}$$

При вычислениях было принято значение ε, найденное из надежных измерений А. П. Хвана на озере Белом: $\varepsilon = 0{,}02$ [42].

Теперь проследим за простыми рассуждениями, вытекающими из общей теории. Прежде всего, учтя (277) и выражение λ через R, можно считать, что на рабочей диаграмме рис. 170 по оси абсцисс отложены значения функции $2\pi R/FV^2$. С другой стороны, как помним, $h_\infty = nV^2$, где $n = 0{,}0205$. Отсюда следует, что $\eta_2 = \frac{h_2}{h_\infty} = \frac{F}{n}$, т. е. $F = n\eta_2$, где η_2 — максимальная безразмерная высота волн, возможная в море произвольной конечной глубины [43]. Значит, по оси абсцисс на рис. 170 отложены величины F/n, которые связаны с V^3/H_1 зависимостью, вытекающей из (278). По оси ординат вместо прежней величины $\frac{2\pi R}{FV^2} = \frac{2\pi R}{n\eta V^2}$ можно отложить произведения этой функции на значение аргумента η_2, т. е. величины $\frac{2\pi}{n}\frac{R}{V^2}$.

Воспользовавшись связью между F и V^2/H_1, даваемой в (278), отложим по оси абсцисс значения не F, а соответствующих V^2/H_1, по оси ординат не $\frac{2\pi}{n}\frac{R}{V^2}$, а R/V^2. Перемножив V^2/H_1 и R/V^2, получим функцию R/H_1. Отложим ее значения по оси ординат, сохранив по оси абсцисс значения аргумента V^2/H_1.

С другой стороны, выражение (232), для H_1 можно написать иначе

$$\frac{H_1}{H_1} = \frac{\operatorname{sh} 2\alpha}{2\alpha} \frac{2}{\cdot} \tag{232a}$$

Следует задаться отдельными значениями $\alpha = H/R$ от 0,5 до 3,0 и вычислить соответствующие значения H_1/H. Умножив найденные величины H_1/H на H/R, получим значения R/H_1, которые должны отвечать различным значениям R/H.

На основании изложенного определится связь между V^2/H_1 и H_1/H, т. е. выяснится, какому значению V^2/H отвечают прежние аргументы V^2/H_1, которые входят в формулу (278) для функции F.

Останется построить график, который будет выражать связь между функцией F и новым аргументом $\frac{V^2}{H_1}\frac{H_1}{H} = \frac{V^2}{H}$.

На рис. 177, откорректированном по новым данным, вместо значений этого нового аргумента по оси абсцисс отложены величины, просто с ним связанные и притом безразмерные: это — значения своего рода *критерия мелководности* $\frac{V}{\sqrt{gH}}$. Строение его формально напоминает корень квадратный из так называемого критерия Фруда «по глубине», но вместо скорости движения твердого тела в воде здесь входит скорость ветра V. По оси ординат вместо значений самой функции F отложены значения *искомой* величины η_2, просто с ней связанной: $\eta_2 = F/n$.

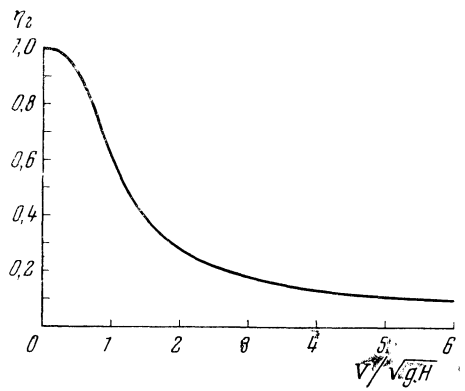


Рис. 177. Связь между критерием мелководности и наибольшей безразмерной высотой волн

Рис. 177 имеет чрезвычайно важное значение. Он показывает, что предельная безразмерная высота волн η_2 в море произвольной глубины полностью определяется значением критерия мелководности. В свою очередь критерий мелководности зависит не только от глубины моря H, но и от скорости ветра, создающего установившееся волнение. Моря средней глубины могут рассматриваться как очень глубокие — при весьма малых скоростях ветра, и, напротив, как моря весьма мелководные — при очень больших скоростях ветра.

Такая же цепь выкладок произведена в цитированной работе и при нахождении высот установившихся волн на различных расстояниях от наветренного берега при заданной скорости ветра и заданной глубине моря. Здесь общее уравнение энергетического баланса волн пополняется членом $d\Phi/dx$, учитывающим расход мощности, который вызван изменениями потока энергии Φ при изменениях расстояния x от наветренного берега. При установившемся волнении, когда $\frac{\partial r}{\partial t} = 0$, это уравнение записывается так:

$$W_V - (W_\mu + W_H) = \frac{d\Phi}{dx}. \tag{279}$$

После ряда преобразований левая часть (279) приобретает вид

$$\frac{T_\infty}{T}\left[K\left(\frac{h}{\lambda}\right)^2 \eta - L\left(\frac{h}{\lambda}\right)^3 \eta \operatorname{th} \alpha \frac{1}{2} - M\eta^3 \frac{2\alpha}{\operatorname{sh} 2\alpha}\frac{V^2}{H}\right] V^3 = f\left(\eta, \frac{V^2}{H}\right) V^3. \tag{280}$$

Здесь коэффициенты K, L, M отличаются от принятых в цитированной работе ввиду того, что ряд основных параметров пришлось уточнить в последовавших новых работах.

В мелководных морях и в морях средней глубины поток энергии Ф зависит от величины $\alpha = H/R$. В свою очередь α зависит от непрерывно изменяющейся величины η, а величина η — от расстояния x. Следовательно, вместо правой части (279) можно поставить выражение, тождественно равное:

$$\frac{d\Phi}{dx} = \frac{d\Phi}{d\alpha}\frac{d\alpha}{d\eta}\frac{d\eta}{dx}. \tag{281}$$

Авторы работы [46] показали, что произведение двух первых множителей в (281) можно представить в виде довольно громоздкого выражения, которое в конечном счете является некоторой функцией от η и V^2/H, умноженной на скорость ветра в пятой степени. Иными словами,

$$\frac{d\Phi}{dx} = S\left(\eta, \frac{V^2}{H}\right) V^5 \frac{d\eta}{dx}. \tag{282}$$

На основании исходного условия (279) приравняем друг другу выражение левой части (280) и правой части (282) формулы (279). Тогда после сокращения обеих частей на V^3 получим

$$f\left(\eta, \frac{V^2}{H}\right) = S\left(\eta, \frac{V^2}{H}\right) V^2 \frac{d\eta}{dx}. \tag{283}$$

Вместо x внесем в (283) новое переменное

$$y = \frac{x}{V^2}. \tag{284}$$

Тогда на основании (283) и (284) можно будет записать

$$dy = \frac{S\left(\eta, \frac{V^2}{H}\right)}{f\left(\eta, \frac{V^2}{H}\right)} d\eta, \tag{285}$$

откуда следует, что

$$y = \int_0^{\eta} Q\left(\eta, \frac{V^2}{H}\right) d\eta, \tag{286}$$

причем $Q = S/f$.

Авторы [46] вычисляли графически значения этого интеграла применительно к частным значениям параметра V^2/H. Но каждому значению такого параметра отвечает определенное значение критерия мелководности $V/\sqrt{gH}$, принятого при построении диаграммы рис. 177. В результате оказалось возможным построить вспомогательные кривые, выражающие закон нарастания безразмерной высоты установившихся волн η при нарастании вспомогательного аргумента y для соответствующего значения критерия мелководности.

С другой стороны, формула (255) дает линейную связь между скоростью ветра V и максимальным возможным периодом волн T_∞ при этой скорости ветра в океане. На основании (255) и (284) легко связать между собой вспомогательный аргумент y и тот аргумент, который был принят при построении рабочей диаграммы рис. 169:

$$\frac{x}{VT_\infty} = \frac{g}{2\pi}\left(\frac{c_\infty}{V}\right)^{-1} y = 1{,}91\, y. \tag{287}$$

Корректированные кривые $\eta\left(\frac{x}{VT_\infty}\right)$ нанесены на общую диаграмму рис. 168 для различных значений критерия мелководности, начиная с $\frac{V}{\sqrt{gH}} = 0{,}2$

и кончая $\frac{V}{\sqrt{gH}} = 6{,}0$. В отличие от кривой, построенной для океана и соответствующей критерию, равному нулю, остальные кривые нанесены тонкими линиями. Каждая из них в пределе стремится к значению $\eta = \eta_2$, фигурирующему на рис. 177 для соответствующего значения критерия. Таким образом, ординаты кривой на рис. 177 послужили для контроля вычислений [43].

Закон нарастания высоты волн на море произвольной глубины можно записать в такой форме:

$$\frac{dr}{dt} = 2\left[\varkappa\left(\frac{R}{r}\right)(V-c)^2\right]\frac{\delta_a}{\delta g T}\left(\frac{r}{R}\right)^2 - \frac{2\pi}{9}\frac{k^2}{T}\left(\frac{r}{R}\right)^2 r\,\mathrm{th}\,\alpha - \frac{\pi\varepsilon}{2}\frac{r^2}{TH}\frac{2\alpha}{\mathrm{sh}\,2\alpha}. \quad (288)$$

Приняв во внимание, что $r = 0{,}0103\eta\, V^2$ и вычислив некоторые часто встречающиеся параметры, выражение (288) перепишем иначе

$$V\frac{d\eta}{dt} = \frac{T_\infty}{T}\left[A\left(\frac{h}{\lambda}\right)^2 - B\left(\frac{h}{\lambda}\right)^2\eta\,\mathrm{th}\,\alpha - C\eta^2\frac{2\alpha}{\mathrm{sh}\,2\alpha}\frac{V^2}{H}\right]. \quad (289)$$

Коэффициенты A, B, C в (289) отличаются от принятых в работе [46] по упомянутой причине. Вся правая часть (289) является некоторой функцией $f\left(\eta, \frac{V^2}{H}\right)$ от аргумента η и параметра V^2/H, встречавшихся выше. С другой стороны, на основании (255) можно в левую часть (289) внести выражение

$$\frac{dt}{V} = \frac{2\pi}{g}\left(\frac{c_\infty}{V}\right)\frac{dt}{T_\infty}. \quad (290)$$

В результате, перейдя к интегральной форме, получаем

$$\frac{t}{T_\infty} = \frac{g}{2\pi}\left(\frac{c_\infty}{V}\right)^{-1}\int_0^\eta \frac{d\eta}{f\left(\eta, \frac{V^2}{H}\right)}. \quad (291)$$

Это — уравнение семейства кривых, описывающих нарастание безразмерных высот η волн на море произвольной глубины применительно к различным значениям параметра V^2/H, равного квадрату критерия мелководности $V/\sqrt{gH}$. На рабочей диаграмме рис. 168 также нанесены кривые, которые соответствуют тем же отдельным значениям критерия мелководности, какие фигурируют на рис. 169. На обеих диаграммах эти значения отмечены справа от кривых [43]. Разумеется, при построении принималось во внимание, что правую часть (287) надо делить на 1000, а правую часть (291) — на 3600, если условиться по-прежнему, что x выражается в километрах, а t — в часах.

Анализ новых диаграмм показал, что нет смысла наносить на вспомогательную рабочую диаграмму рис. 167 дополнительные кривые, отвечающие различным значениям критерия мелководности: эти кривые практически совпадали бы с основной, соответствующей океану, при значениях критерия от нуля до *единицы*. При бо́льших его значениях — на весьма мелководных морях и озерах — кривые отходили бы от основной вдали от начала координат; однако сами различия между ординатами кривых на рис. 168 и 169 при больших значениях абсцисс были бы ничтожно малыми, не представляющими никакого интереса ни с теоретической, ни с практической точки зрения. В заключение сопоставим в табл. 10 вычисленные элементы развивающихся (р) и установившихся (у) волн с полученными по измерениям на морях различной глубины H[1].

[1] Ко времени выхода книги из печати получены еще более убедительные подтверждения правильности теоретических вычислений.

Таблица 10

	V	H	$\frac{V}{\sqrt{gH}}$	t	x	h_∞	T_∞	$\frac{t}{T_\infty}$	$\frac{x}{VT_\infty}$	Состояние волнения	η	h	$h_н$	T	$T_н$	Δh, %	ΔT, %
1	6	146	0,158	18	200	0,8	3,15	5,7	10,8	р	0,980	0,78	0,7	3,13	3,7	+11	—16
2	7	76	0,256	10	250	1,0	3,65	2,75	10,0	р	0,915	0,92	1,0	3,46	3,6	—8	— 4
3	8—9	180	0,20	4	40	1,5	4,4	0,31	1,05	р	0,70	1,05	1,0	3,59	3,6	+5	0
4	8—9	180	0,20	12	40	1,5	4,4	2,73	1,05	у	0,70	1,05	1,0	3,59	3,6	+5	0
5	8—9	43	0,41	18	200	1,5	4,4	4,1	5,3	у	0,90	1,35	1,5	4,14	?	+10	?
6	8—9	450	0,128	22	400	1,5	4,4	5,0	10,8	р	0,975	1,46	1,8	4,26	4,2	—19	+1
7	9	30	0,523	11	120	1,7	4,7	2,34	2,86	у	0,815	1,4	1,4	4,16	4,0	0	+4
8	9	30	0,523	18	120	1,7	4,7	3,83	2,86	у	0,815	1,4	1,5	4,16	4,6	—7	—10
9	9—10	86	0,326	9	160	1,9	5,0	1,8	3,4	р	0,925	1,76	1,8	4,78	4,5	—2	+6
10	9—10	86	0,326	11	160	1,9	5,0	2,2	4,7	р	0,955	1,82	1,8	4,87	4,5	+1	+8
11	10—11	220	0,22	12	170	2,3	5,5	2,18	2,9	у	0,87	2,0	2,0	5,05	5,1	0	—1
12	11	43	0,535	26	200	2,5	5,75	4,53	3,1	у	0,82	2,05	2,0	5,11	?	+2	?
13	11—12	61	0,47	14	400	2,7	6,0	2,34	5,7	р	0,92	2,48	2,9	5,71	6,0	—18	— 5
14	12	60	0,495	3	30	3,0	6,3	0,48	0,39	у	0,51	1,53	1,1	4,25	3,7	+39	+15
15	12	60	0,5	7	30	3,0	6,3	1,11	0,395	у	0,5	1,5	1,1	4,2	3,7	+36	+13
16	12	220	0,26	18	150	3,0	6,3	2,86	1,97	у	0,81	2,43	2,0	6,6	?	+21	?
17	12	85	0,42	2,5	180	3,0	6,3	0,4	2,37	р	0,54	1,62	1,2	4,4	3,7	+35	+19
18	12	85	0,42	5	180	3,0	6,3	0,8	2,37	р	0,67	2,01	1,8	4,9	4,3	+11	+12
19	13	85	0,45	7	180	3,5	6,8	1,03	2,02	р	0,695	2,43	2,2	5,5	5,3	+10	+ 4
20	13	85	0,45	8	180	3,5	6,8	1,18	2,02	р	0,73	2,56	2,2	5,7	5,3	+16	+ 7
21	14	85	0,48	10	180	4,0	7,35	1,37	1,74	р	0,74	2,95	2,5	6,2	5,6	+20	+10
22	15	85	0,52	12	180	4,6	7,85	1,53	1,52	у	0,72	3,31	3,1	6,5	6,0	+ 7	+ 8
23	15	85	0,52	13	180	4,6	7,85	1,66	1,52	у	0,72	3,31	3,9	6,5	6,4	0	+ 1
24	15	60	0,62	22	400	4,6	7,85	2,81	3,37	у	0,79	3,53	3,9	6,85	6,4	—12	+ 5
25	14	38	0,72	11	170	4,0	7,35	1,5	1,64	у	0,69	2,76	2,5	6,0	?	+10	?
26	14	85	0,48	11	180	4,0	7,35	1,5	1,74	у	0,75	3,0	2,5	6,2	5,6	+20	+10
27	14	2415	0,09	44	600	4,0	7,35	1,9	5,8	р	0,85	3,4	4,0	6,7	?	—15	?
28	14	3780	0,07	20	1000	4,0	7,35	2,73	9,65	р	0,91	3,64	3,7	7,0	6,5	—10	+ 7
29	15	340	0,26	13	300	4,6	7,85	1,66	3,53	р	0,82	3,77	4,1	7,0	7,0	—7	0
30	15	340	0,26	16	300	4,6	7,85	2,04	2,53	у	0,85	3,91	4,1	7,54	?	— 5	?
31	15	67	0,54	18	400	4,6	7,85	2,3	3,37	р	0,81	3,73	4,5	6,94	7,0	—28	— 2
32	16	88	0,83	14	170	5,2	8,4	1,67	1,27	у	0,63	3,38	3,9	6,4	?	—16	
33	20	6370	0,08	20	300	8,2	10,5	1,90	1,43	у	0,755	6,2	6,4	8,9	?	— 3	?
34	21	3350	0,116	25	900	9,0	11,0	1,91	3,89	у	0,89	8,0	8,0	10,3	?	.0	?

§ 29. Роль тангенциальной силы воздействия ветра в приращении энергии волн

Теория питания волн энергией ветра, изложенная в § 17, позволила построить целую цепь выводов, завершившихся точным интегралом уравнения поля ветровых волн в океане и на морях произвольной глубины. В свою очередь теоретические выкладки дали возможность построить рабочие диаграммы для вычисления элементов волн 5%-ной обеспеченности по заданной скорости ветра, времени его воздействия и заданными местным условиям — глубине моря и расстоянию от наветренного берега.

Для полноты изложения остается еще показать, что на всех этапах наших выводов мы законно пренебрегали ролью тангенциальной силы воздействия ветра на волны.

Эта сила вообще никак не изменяла бы энергию волн, если бы скорость воздушных частиц над вершинами волн не отличалась от скорости воздушных частиц над подошвами волн: момент количества движения водных частиц по их орбитам не мог бы тогда меняться за счет тангенциальных сил, так как за одну половину оборота водных частиц по орбитам ветер действовал бы на них с такой силой в сторону вращения, с какой действует он за другую половину оборота в сторону, противоположную вращению. Вопреки мнению некоторых авторов, к исследованию энергетики волн нет никаких оснований привлекать действие тангенциальной силы на поступательное движение вод: оно никак не отражается на круговом движении частиц, а просто ведет к нарастанию скорости дрейфового течения. Та небольшая доля, которую вносит тангенциальная сила в баланс энергии волн, обусловлена исключительно неравенством скоростей ветра над вершинами и над подошвами волн. Действительно, продувки моделей волн в аэродинамических трубах показали, что давление воздуха над подошвой превышает давление над вершиной на небольшую величину Δp. В случае волн, бегущих с фазовой скоростью c, можно связать Δp со скоростью ветра V_0 посредством соотношения

$$\Delta p = 2\gamma\delta_a (V_0 - c)^2. \tag{292}$$

Здесь γ — безразмерный коэффициент, довольно надежно измеренный несколькими авторами.

Разность давлений Δp возникает вследствие того, что скорость ветра V_1 над вершиной больше, чем скорость ветра V_2 над подошвой, как следует из уравнения Бернулли:

$$\Delta p = \frac{1}{2}\delta_a V_1^2 - \frac{1}{2}\delta_a V_2^2 = \frac{1}{2}\delta_a (V_1 + V_2)(V_1 - V_2). \tag{293}$$

С другой стороны, так как $^1/_2 (V_1 + V_2) \approx V_0$, то на основании (292) и (293) можно записать приближенное соотношение

$$V_1 - V_2 = 2\sigma V_0, \tag{294}$$

в котором сокращенно обозначено

$$\sigma = \gamma \left(1 - \frac{c}{V_0}\right)^2. \tag{294а}$$

Между своими крайними значениями V_1 и V_2 скорость ветра V над волнами колеблется при изменениях фазового угла θ, характеризующего положение водной частицы на орбите. В первом приближении запишем выражение V, удовлетворяющее условию (294):

$$V = (1 + \sigma \cos\theta) V_0. \tag{295}$$

Но в таком случае тангенциальная сила трения f, с которой ветер воздей-

ствует на единицу поверхности волн, выразится через тот же фазовый угол θ

$$f = k\delta_a (1 + \sigma \cos\theta)^2 V_0^2. \tag{296}$$

Здесь k — коэффициент трения между воздухом и водой. Знакопеременная горизонтальная составляющая v_x орбитальной скорости поверхностных частиц воды выражается через фазовый угол θ, радиус орбиты (полувысоту волн) r_0 и период волн T

$$v_x = -2\pi \frac{r_0}{T} \cos\theta. \tag{297}$$

На основании (296) и (297) записывается выражение для мгновенного значения мощности W_θ, передаваемой волне за счет воздействия *тангенциальной силы трения*:

$$W_\theta = f v_x = 2\pi k \delta_a \frac{r_0}{T} V_0^2 (1 + \sigma \cos\theta)^2 \cos\theta. \tag{298}$$

Передаваемая мощность, осредненная за период обращения частиц по их орбитам, выразится так:

$$W_f = \frac{1}{\pi} \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} W_\theta \, d\theta. \tag{299}$$

Подставим выражение (298) в (299) и проинтегрируем полученную функцию в пределах от нуля до π, после чего разделим интеграл на π. Тогда получим выражение для W_f:

$$W_f = 2\pi\sigma k \delta_a \frac{r_0}{T} V_0^2. \tag{300}$$

Вспомнив (294а), подставим в (300) выражение σ. Тогда в результате окажется

$$W_f = 2\pi\gamma k \delta_a \frac{r}{T} (V - c)^2. \tag{301}$$

Это соотношение показывает, что, вопреки сохраняющемуся мнению, мощность W_f, обусловленная воздействием тангенциальной силы трения, в конечном счете зависит от квадрата *разности* скоростей ветра и волн так же, как и основная мощность W_V, обязанная своим происхождением воздействию нормальных сил.

Физический смысл (301) легко понять: при уменьшении относительной скорости $(V - c)$ уменьшается разность давлений Δp и разность скоростей $V_1 - V_2$. Следовательно, уменьшается разность между мощностью, передаваемой волне силой f за одну половину периода обращения частицы воды, и мощностью, *отнимаемой* у волн той же силой за другую половину периода.

В § 21 была приведена формула (210), которая выражает мощность W_V, доставляемую волнам благодаря *нормальным* давлениям в асимметричном аэродинамическом поле. Сравним с этой основной мощностью, получаемой волнами, ту *добавочную* мощность W_f, которую мы не учитывали в наших выкладках по теории волн и которая обусловлена *тангенциальной* силой трения f. Тогда окажется после сокращения числителя и знаменателя на общие множители

$$\frac{W_f}{W_V} = \pi\gamma \frac{k}{\varkappa} \frac{R}{r}. \tag{302}$$

Даже при полном развитии ветровых волн, когда R/r стремится к своему пределу, частное от деления W_f на W_V по формуле (302) оказывается *чрезвычайно малым по сравнению с единицей*.

Значит, пренебрежение дополнительной мощностью W_f вполне законно.

§ 30. Рефракция волн на материковой отмели

Наблюдая волны, движущиеся поблизости от берега, нетрудно обнаружить, что направление их движения здесь не остается постоянным. Даже если в открытом море направление движения волн параллельно берегу, то в пределах материковой отмели они постепенно *заворачивают к берегу* и подходят к нему иногда почти по направлению *нормали*.

Легко видеть, что это явление обусловлено непрерывным уменьшением глубины при приближении к береговой черте. Схема явления представлена на рис. 178. Само явление известно с да чих пор и получило правильное

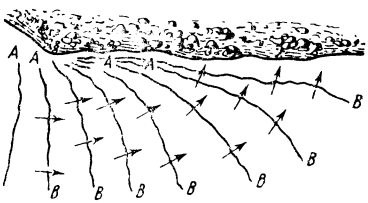


Рис. 178. Схема рефракции волн на мелководье

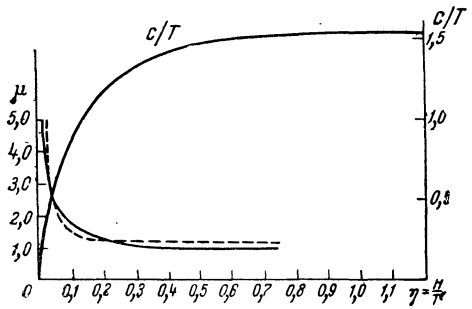


Рис. 179. Условная скорость волн и показатель преломления

качественное объяснение столь же давно. При произвольном направлении движения волн мористый фланг их как бы обгоняет бережной ввиду того, что глубина моря, как правило, тем меньше, чем ближе к берегу расположена та или иная полоса; следовательно, скорость элементов фронта волн должна быть тоже тем меньше, чем ближе к берегу проходит путь данного элемента.

Однако объяснение это чисто качественное. Между тем само явление чрезвычайно интересно как с теоретической (в связи с кинематикой и динамикой волн), так и с практической стороны. Ведь внимательное наблюдение показывает, что волны прибоя подходят к береговой черте далеко не всегда по направлению нормали; весьма часто они идут под довольно значительным углом к нормали.

К каким последствиям ведет такой «косой прибой», знает всякий, кому приходилось высаживаться со шлюпки на берег без всяких причальных приспособлений. Но, помимо того, совершенно несомненно, что косой прибой совсем иначе действует на береговые породы, разрушает берег и влияет на портовые сооружения по сравнению с прибоем, идущим по нормали к береговой черте.

Следовательно, применительно к отмеченным случаям весьма полезно знать наперед, при каких условиях волны будут подходить к берегу в направлении, близком к нормали, или под каким углом должна подходить волна в тех или иных конкретных условиях.

В переводе на язык точного анализа это значит, что необходимо: а) найти связь между направлением подхода волн к данной точке и условиями распространения волн в исследуемом районе, а также характеристическими элементами самой волны; б) найти уравнения луча в том смысле, в котором понятие о луче применяется в оптике.

Задача была полностью решена советскими исследователями еще в 1935 г. [47, 48], и эти работы были широко опубликованы в журналах Академии наук СССР и в других изданиях, читаемых в различных странах. Однако в

иностранной литературе появились пересказы содержания советских работ за подписями иностранных авторов и без ссылок на первоисточник.

В связи с этим уместно будет сейчас напомнить отечественную теорию рефракции морских волн на материковой отмели. Она исходит из интересных исторических изысканий А. Н. Крылова, которому удалось расшифровать метод Ньютона, применявшийся для исследований по астрономической рефракции [49].

Прежде всего отметим, что во всех рефракционных задачах в качестве главного характеристического фактора выступает *показатель преломления* среды, меняющийся от точки к точке. Совершенно необходимо в нашем случае ввести в анализ аналогичную величину, прежде не появлявшуюся на страницах гидродинамических трактатов. Строение основного соотношения, выражающего этот коэффициент n, здесь будет обычное, а именно

$$n = \frac{c_\infty}{c}, \tag{303}$$

где c — фазовая скорость волн в исследуемой точке, а c_∞ — скорость в *бездонном* море (практически в достаточно глубоком море). Последняя величина играет ту же роль, что и скорость света в пустоте в задачах оптики.

Как помним, c_∞ может быть выражено формулой (14), в которой длина волн тоже является функцией скорости

$$\lambda_\infty = c_\infty T,$$

где T — период волн. Следовательно, величину c_∞ можно выразить как явную функцию периода

$$c_\infty = \frac{g}{2\pi} T. \tag{304}$$

Значительно сложней выражается скорость c на мелководье формулой (39), в которую входит и глубина моря H, и длина волн на мелководье λ.

Постараемся *графически* представить функцию, совершенно необходимую для дальнейшего исследования. С этой целью запишем выражения в параметрической форме, выбрав в качестве параметра величину $\alpha = 2\pi \frac{H}{\lambda}$.

Учтя, что всегда $\lambda = cT$, на основании формулы (39) запишем

$$\frac{c}{T} = \frac{g}{2\pi} \operatorname{th} \alpha. \tag{305}$$

С другой стороны, из определения

$$\alpha = \frac{2\pi H}{\lambda} \tag{306}$$

следует

$$\frac{H}{cT} = \frac{\alpha}{2\pi}. \tag{307}$$

Перемножая почленно формулы (305) и (307), получаем

$$\frac{H}{T^2} = \frac{g}{4\pi^2} \alpha \operatorname{th} \alpha. \tag{308}$$

Как видим, величины H/T^2 и c/T оказываются функциями единственного аргумента — параметра α. Следовательно, мы можем графически получить функциональную зависимость между c/T и H/T^2, которая будет совершенно *универсальной*: она пригодится для исследования волн любого периода T.

Подставляя в уравнения (305) и (308) различные числовые значения параметра α, мы определили эту зависимость, выражаемую кривой c/T на

рис. 179. Как уже упоминалось, диаграмма рис. 179 является универсальной. Для пользования ею необходимо лишь условную глубину моря η измерять не в метрах, а в единицах, равных 1 *м*, деленному на квадрат периода волны в секундах. Другими словами,

$$\eta = \frac{H}{T^2}. \tag{309}$$

Для измерения скорости волн необходимо также пользоваться условной единицей, равной 1 *м* в секунду, деленному на величину периода.

Диаграмма рис. 179 показывает, что изменение скорости волн резко сказывается лишь до глубин порядка $\eta = 0{,}5 \div 0{,}7$ условных единиц; на больших глубинах условная скорость асимптотически приближается к значению

$$\frac{c}{T} = 1{,}56, \tag{310}$$

характеризующему бездонное море.

В качестве иллюстрации отметим, что для волн с периодом в 6 *сек* критической зоной окажется полоса с глубинами 18—25 *м*, для волн с периодом 10 *сек* — полоса с глубинами 50—70 *м*.

Любопытно отметить, что с этими величинами хорошо совпадают границы полосы взмучивания ила, наблюдаемые во время штормов, что является вполне естественным: ведь появление формулы (39) на смену формуле (14) физически означает, что придонные частички воды начали принимать участие в волнообразном движении; по мере уменьшения величины H/λ роль их проявляется все заметнее и заметнее, стремясь сравняться с ролью поверхностных частиц в предельном случае, когда $\frac{H}{\lambda} = 0$ и процессы протекают так, как в приливной волне, где, отрешившись от трения, можно полагать, что весь слой гидросферы движется как одно целое.

Получив кривую c/T (рис. 179), остается лишь найти искомую связь между показателем преломления n и глубиной η, измеренной в условных единицах. Легко видеть, что

$$n = \frac{c_\infty}{T} : \frac{c}{T}, \tag{311}$$

а потому для нахождения n, соответствующего любому значению η, на рис. 179 достаточно просто разделить предельное значение ординаты $\frac{c_\infty}{T} = 1{,}56$ на значение ординаты c/T, отвечающее данной абсциссе η.

В результате подобных простых вычислений была получена сплошная кривая n, нанесенная внизу на том же рис. 179. Как и следовало ожидать, за пределами зоны с глубинами 0,5—0,7 условных единиц кривая весьма близко прилегает к прямой $n = 1$, асимптотически к ней приближаясь. Для некоторых вычислений (о них будет речь впереди) весьма полезно было бы выразить полученную кривую хотя бы приближенным уравнением. Проделанная проба показала, что к этой кривой довольно близко подходит гипербола, отнесенная к оси n и к прямой $n = 1$ как к асимптотам и выражаемая в такой системе координат уравнением

$$n = 1 + \frac{m}{\eta}, \tag{312}$$

или уравнением

$$n = 1 + \frac{mT^2}{H}, \tag{313}$$

где на основании пунктирной кривой рис. 179 можно полагать приблизительно $m = 0{,}05$.

Уравнение (312) вполне удовлетворяет предельным условиям: при $\eta = 0$ оказывается $n = \infty$ и при $\eta = \infty$ (в бездонном море) $n = 1$. Остается добавить, что кривая n, изображенная на рис. 179, позволяет также определить, во сколько раз уменьшается длина волны при входе на мелководье, ибо, как легко показать, между первоначальной длиной волны λ_∞ (в бездонном море) и длиной волны в пределах материковой отмели λ существует простая связь

$$\lambda = \frac{\lambda_\infty}{n}. \tag{314}$$

На основании рис. 179 длина волны уменьшается в 1,5 раза на глубине 0,125 условных единиц, в 2 раза на глубине 0,075 условных единиц, в 3 раза на глубине 0,025 условных единиц и т. д.

Перейдем теперь к выводу *основных уравнений рефракции* для морских волн. Следует заметить, что эта задача значительно упрощается по сравнению с аналогичной астрономической задачей. В отличие от последней, в нашем случае приходится рассматривать луч, отнесенный к прямоугольной, а не к полярной системе координат. В качестве одной из осей (X) естественно выбрать прямую, идущую вдоль береговой черты (положительным будет считаться направление слева направо). В качестве другой оси (Y) мы выберем нормаль к береговой черте, считая положительным ее направление от берега в море.

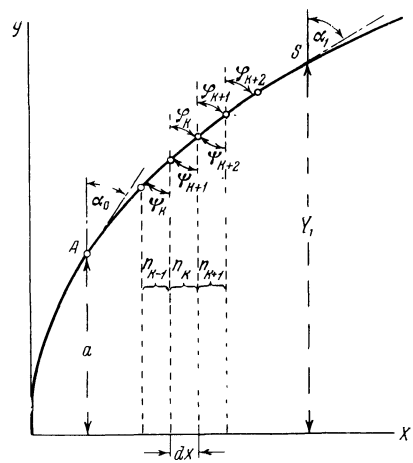


Рис. 180. Построение луча при рефракции

Пусть движение волн изображается лучом SA (рис. 180). В какой-то точке S элемент этого луча составляет некоторый угол α_1 с нормалью (с осью Y), в другой точке на пути волн, в точке A, угол, под которым движутся волны, будет α_0. Разность $\alpha_1 - \alpha_0$ выражает собой непосредственно *рефракцию* волн на пути SA, ибо в данном случае не существует осложнения, вносимого кривизной земного шара, благодаря которой зенитные расстояния светил отсчитываются от прямых (земных радиусов), не параллельных одна другой. По примеру А. Н. Крылова [49] разобьем весь путь SA на бесконечно малые элементы, причем деление произведем, проводя прямые, параллельные оси Y и отстоящие одна от другой на расстоянии dx.

На рис. 180 изображены три таких элемента пути, в пределах каждого из которых можно полагать глубину, а стало быть, и показатель преломления n постоянными; меняется он только при переходе от одного элемента к другому. На рисунке приведены значения, которые принимает n на каждом из трех бесконечно малых этапов: n_{k-1}, n_k и n_{k+1} (нумерация принята в направлении от берега в море).

На основании элементарного закона преломления

$$n_k \sin \psi_{k+1} = n_{k+1} \sin \varphi_{k+1}. \tag{315}$$

С другой стороны, ввиду параллельности всех секущих прямых

$$\sin \varphi_k = \sin \psi_{k+1}. \tag{316}$$

Перемножение соответствующих частей равенств (315) и (316) дает

$$n_k \sin \varphi_k = n_{k+1} \sin \varphi_{k+1}. \tag{317}$$

Аналогично можно было бы показать, что

$$n_{k-1} \sin \varphi_{k-1} = n_k \sin \varphi_k. \tag{318}$$

Следовательно, опуская индексы, надо полагать, что

$$n \sin \varphi = n_0 \sin \varphi_0 = n_0 \sin \alpha_0 = \sigma, \tag{319}$$

ибо, очевидно, $\varphi_0 = \alpha_0$, а отсюда непосредственно вытекает зависимость между функциями углов α_1 и α_0, характеризующих движение волн в двух произвольных точках S и A:

$$\sin \alpha_0 = \frac{n_1}{n_0} \sin \alpha_1. \tag{320}$$

Далее будет показано, какое соотношение, важное для практических расчетов, выводится из формулы (320). Теперь же постараемся использовать эту формулу для вывода *уравнения луча*.

Из элементарных геометрических соотношений, которые легко получить на основании рис. 180, следует, что

$$\operatorname{ctg} \varphi = \frac{dy}{dx} \tag{321}$$

и, стало быть,

$$\sin \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}. \tag{322}$$

Но, согласно формулам (319) и (322),

$$\frac{n}{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}} = \sigma. \tag{323}$$

Остается лишь решить это уравнение относительно производной dy/dx, после чего получится *дифференциальное уравнение луча*

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\left(\frac{n}{\sigma}\right)^2 - 1}. \tag{324}$$

Воспользуемся уравнением (320) для вывода некоторых приближенных соотношений, весьма полезных для прикладных целей. Вспомним, что точная зависимость между показателем преломления n и глубиной η в условных единицах, выражаемая нижней кривой n на рис. 179, может быть с некоторым приближением заменена гиперболической зависимостью (312). Вспомним также, что величина η просто связана соотношением (309) со значением глубины H, измеренной не в условных единицах, а в метрах. Тогда, приняв во внимание все перечисленные соотношения, мы можем написать

$$\sin \alpha_0 = \frac{1 + \frac{mT^2}{H_1}}{1 + \frac{mT^2}{H_0}} \sin \alpha_1. \tag{325}$$

Здесь H_1 — глубина в точке S, а H_0 — глубина в точке A. Наконец, m представляет собой фактор с размерностью $м \cdot сек^{-2}$. Численная величина его на основании рис. 179, как помним, равна 0,05. Угол α в соотношении (325) может меняться в пределах от 0 до 90°. О тех случаях, когда $\alpha_1 > 90°$ (ветер с берега), будем говорить далее, пока же отметим, что наибольший инте-

рес представляет случай, когда в точке S волны распространяются *параллельно* береговой черте ($\alpha_1 = 90°$). В этом случае, очевидно,

$$\sin\alpha_0 = \frac{1+\frac{mT^2}{H_1}}{1+\frac{mT^2}{H_0}}. \qquad (326)$$

Интересны также случаи, когда задано направление, в котором распространяются волны вдали от берега, в открытом море, где глубину H_1 можно практически считать бесконечно большой. Тогда, если волны в открытом море идут под углом α_1 к оси Y, к полосе с глубиной H_0 они будут подходить под углом α_0, которое определяется из соотношения

$$\sin\alpha_0 = \frac{H_0\sin\alpha_1}{H_0+mT^2}. \qquad (327)$$

По аналогии с формулой (326) найдем, что если волны в открытом море идут в направлении, параллельном берегу, то они будут подходить к полосе с глубиной H_0 под углом α_0, который легко найти из соотношения

$$\sin\alpha_0 = \frac{H}{H_0+mT^2}. \qquad (328)$$

Замечательно, что вид соотношений (325)—(328) *совершенно не зависит* от формы дна на пути между точками S и A; значение имеют лишь глубины в самих этих точках (в частности, глубина в точке S может оказаться бесконечно большой, в соответствии с чем формула (325) перейдет в формулу (327), а формула (326) — в формулу (328)).

Все перечисленные соотношения свидетельствуют о том, что у самого уреза воды при $H_0 = 0$ угол α_0 тоже должен обратиться в нуль. Другими словами, если бы волна не разрушалась на некотором расстоянии от уреза воды, то она подходила бы к нему всегда по нормали независимо от предыдущей истории движения. Однако в действительности волна неизбежно разрушается на том или ином расстоянии a от уреза воды, а потому в формулы (325) — (328) необходимо вместо H_0 подставлять именно глубину, существующую на этом расстоянии от уреза (считая по нормали к береговой черте) в том случае, когда исследуется направление волны, набегающей на берег. Разумеется, если требуется определить, в каком направлении подходят волны, воздействующие на то или иное береговое (например, портовое) сооружение, то вместо H_0 следует подставлять значение глубины именно в соответствующем пункте. Для иллюстрации приведем табл. 11, показывающую, под какими углами будут подходить волны к точкам, где глубина равна соответственно 1 и 2 *м*, при условии, что в открытом море волны идут в направлении, параллельном береговой черте. Вычисления проделаны (в круглых цифрах) по формуле (328) соответственно трем различным значениям периода волны: 4, 6 и 10 *сек*.

Таблица 11

H, *м*	$\alpha_1 = 90°$			$\alpha_1 = 45°$		
	T, *сек*					
	4	6	10	4	6	10
1	45°	22°	9°	31°	15°	7°
2	57	32	16	37	22	12

Как видим, направление подхода волн здесь заметно отклоняется от нормали. Для сравнения в правой половине табл. 11 приведены углы,

под которыми подходят волны при тех же значениях периода и при тех же значениях глубины в исследуемой точке, но при условии, что волны в открытом море идут по направлению, составляющему 45° с нормалью к береговой черте. Цифры вычислены по формуле (327). Отклонения от нормали здесь меньше, чем в случае волн, которые в открытом море шли вдоль берега.

Несмотря на чрезвычайно простой, казалось бы, вид дифференциального уравнения луча (324), оно в аналитической форме не интегрируется, ибо даже при самом простом рельефе дна и при замене n его приближенным выражением (313) через η подынтегральная функция оказывается неинтегрируемой.

Однако ничто не мешает решить задачу графическим методом, исходя из диаграммы рис. 179. Легко показать, что решение может быть выполнено применительно к любому профилю дна (при условии, что глубина моря является функцией одного лишь расстояния от берега), но мы ограничимся здесь лишь наиболее простым и в то же время наиболее распространенным случаем. Положим, что глубина возрастает по линейному закону

$$\eta = ky, \quad k = \frac{d\eta}{dy}. \tag{329}$$

Но тогда на основании формул (324) и (329) можно будет написать

$$dx = \frac{dy}{\sqrt{\left(\frac{n}{\sigma}\right)^2 - 1}} = \frac{d\eta}{k\sqrt{\left(\frac{n}{\sigma}\right)^2 - 1}}. \tag{330}$$

Вспомнив соотношение (319), нетрудно прийти к заключению, что параметр σ зависит от направления, в котором идут волны в пределах полосы с глубиной η_1. Остановимся сначала на том варианте, когда в открытом море волны идут в направлении, параллельном берегу. Тогда в формуле (319) придется положить

$$n_1 = 1, \quad \sin\alpha_1 = 1.$$

Следовательно, по этой формуле будет $\sigma = 1$, а вместо формулы (330) можно написать

$$kdx = \frac{d\eta}{\sqrt{n^2 - 1}}, \tag{331}$$

или

$$kx = \int_0^{\eta_1} \frac{d\eta}{\sqrt{n^2 - 1}}. \tag{332}$$

Располагая кривой $n(\eta)$, представленной на рис. 179, легко графически найти интеграл, входящий в формулу (332). В результате интегрирования получается зависимость между η и kx, или, другими словами, по условию (329) зависимость между ky и kx. Она представлена графически на рис. 181 (кривая *1*). Совершенно очевидно, что кривая *1* представляет форму луча для любого значения периода T и любого уклона дна dH/dy. Действительно, ведь на диаграмме рис. 181 по оси абсцисс отложены не просто расстояния вдоль берега, а по оси ординат — не просто расстояния от берега, но соответствующие расстояния, умноженные на коэффициент k, от которого, следовательно, зависит масштаб чертежа. Этот коэффициент, определяющий собой масштаб, выражается через период волны и уклон дна, ибо на основании формул (309) и (329)

$$k = \frac{1}{T^2}\frac{dH}{dy}. \tag{333}$$

Легко найти, в каких «рамках» заключена диаграмма рис. 181 в том или ином конкретном случае. Так, например, вспоминая три отдельных значения периода T, не раз приводившиеся выше, и полагая, что уклон дна равен 0,1, можно показать, пользуясь формулой (333), что при периоде в 4 *сек* наибольшее расстояние от берега на рис. 181 будет соответствовать 160 *м*, а наибольшее смещение вдоль берега —400 *м*. При том же уклоне дна $\frac{dH}{dy}=0{,}1$ и периоде в 6 *сек* соответствующие расстояния будут 360 и 900 *м*, а при периоде 10 *сек* — 1000 и 2500 *м*. Если уклон иной, например, если $\frac{dH}{dy}=0{,}15$, то при тех же частных значениях периода T рамки диаграммы рис. 181. разумеется, будут иные: при периоде 4 *сек* — соответственно 107

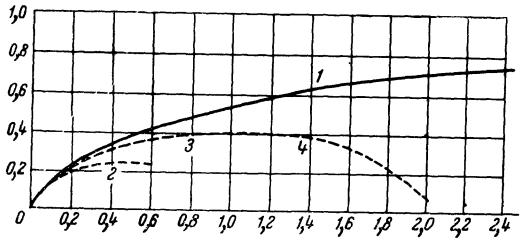


Рис. 181. Лучи на мелководье

и 270 *м*; при периоде 6 *сек* — 240 и 600 *м*; при периоде 10 *сек* — 670 и 1670 *м*. Вычисления формы луча нисколько не усложнятся, если окажется, что волны идут вдоль берега не в открытом море, как только что предполагалось, а в зоне, характеризующейся некоторой глубиной η_1 условных единиц. Только в формуле (332) вместо n^2 появится величина $(n/\sigma)^2$. Знаменатель последней дроби применительно к каждому частному случаю легко определить из соотношения (319), в которое придется внести заданные значения угла α_1 и показателя преломления n_1 в той зоне, где волны идут под углом α_1. В свою очередь n_1 определится по диаграмме рис. 179, ибо глубина моря η_1 условных единиц должена быть известна в заданной начальной зоне. Тогда останется лишь определить σ по формуле

$$\sigma = n_1 \sin \alpha_1, \qquad (319а)$$

подставить его значение в соотношение, которое возникает взамен формулы (332) и произвести графическое интегрирование.

Для примера на рис. 181 изображены кривые *2* и *3*, вычисленные таким образом. Кривая *2* соответствует случаю, когда волны идут параллельно берегу в зоне, где глубина равна 0,25 условных единиц. Кривая же *3* соответствует аналогичному направлению волн в зоне, где глубина равняется 0,40 условных единиц.

Кривые *1*, *2* и *3* подходят к началу координат под прямым углом к оси абсцисс, как и следовало ожидать на основании сказанного выше. Действительно, при всех условиях волна подходила бы по нормали к береговой черте, если бы она могла достигнуть самого уреза воды. В природе же волна разрушается, достигнув зоны с некоторой конечной глубиной η_0 условных единиц (H_0, *м*).

Следовательно, в природных условиях приходится говорить об углах, которые составляют найденные лучи с нормалью (с осью Y) на том или ином конечном расстоянии от оси абсцисс. Как видно на рис. 181, круче всего подходит к берегу первый луч (кривая *1*). Чем ближе к берегу лежит зона, в которой волны распространяются вдоль береговой черты, тем больше угол,

составляемый с нормалью соответствующим лучом, когда он подходит к урезу воды на то или иное заданное расстояние.

Мы не будем здесь рассматривать те случаи, когда скорость волн даже в открытом море обладает составляющей, направленной к берегу: без объяснений ясно, как будут проходить соответствующие лучи при этом условии. Напротив, совершенно необходимо сказать несколько слов по поводу поведения волн, разводимых *береговым ветром*, т. е. тех волн, начальная скорость которых обладает некоторой составляющей, направленной прочь от берега. Поведение же их весьма любопытно. Так как формальная сторона теории рефракции совершенно не зависит от того, исследуются ли волны света или волны морские, то свойство сопряженных точек, известное из оптики, мы можем свободно перенести в гидродинамику. Сопряженными будут, например, точки S и A (рис. 180), а потому луч, идущий из точки A в точку S, в точности совпадает с лучом, шедшим из точки S в точку A. Вот почему волны, созданные береговым ветром и первоначально распространяющиеся прочь от берега, могут проходить по направлению лучей, аналогичных тем, которые представлены кривыми *1*, *2* и *3* на рис. 181, но, разумеется, в противоположную сторону (от берега в море).

Посмотрим, какова будет дальнейшая судьба этих волн, определяемая всецело величиной угла α_0, имеющего место в зоне с глубиной η_0, и соответствующим показателем преломления n_0.

Нетрудно показать, что при условии

$$n_0 \sin \alpha_0 > 1 \tag{334}$$

волны достигнут некоторой зоны с глубиной η_1 и соответствующим показателем n_1, определяемым из соотношения

$$n_1 = n_0 \sin \alpha_0, \tag{335}$$

и здесь пойдут *вдоль берега*. Но в таком случае они должны направиться дальше по пути, являющемуся *зеркальным изображением первой части луча*. Один из таких лучей, в конце концов загибающихся *снова к берегу*, представлен на рис. 181, его начальная часть отмечена цифрой *4*; в дальнейшем он продолжается веткой, отмеченной цифрой *2* (о ней говорилось выше).

При условии

$$n_0 \sin \alpha_0 = 1 \tag{336}$$

волны пойдут вдоль луча, совершенно аналогичного кривой *1* на рис. 181 (но от берега в море). Где-то в *открытом море* они приобретут направление движения вдоль берега и когда-то вновь подойдут к береговой черте, перемещаясь «из бесконечности».

Наконец, при условии

$$n_0 \sin \alpha_0 < 1 \tag{337}$$

волны *никогда* не повернут к берегу, а будут непрерывно уходить прочь от него.

При выводе всех соотношений в предыдущих параграфах по необходимости были сделаны некоторые упрощающие допущения. Прежде всего предполагалось, что давление ветра на гребни волн *не влияет* на поведение волн.

Кажется весьма вероятным, что никаких существенных погрешностей здесь не возникает, за исключением варианта, касающегося волн при береговом ветре: движение волн, характеризуемое лучом *4* (рис. 181), будет точно следовать теории лишь в том случае, если береговой ветер, разведя волну, на некоторое время затихнет.

Второе упрощающее допущение, лежащее в основе выводов, заключается в том, что считается законным применять формулу (39) к случаю движения

волны в районе с *переменной* глубиной, между тем как, строго говоря, эта формула выведена в предположении постоянства данной глубины H. Нетрудно показать, что это второе допущение совершенно законно.

Действительно, из всех участков кривых c/T и n, изображенных на рис. 179, наименьшие сомнения могут вызывать те, которые соответствуют большим значениям η, когда глубины велики по сравнению с длиной волны, изменения скорости волны вообще невелики. Напротив, наибольшего неблагополучия можно ожидать в применении к участкам, для которых η весьма мало́, т. е. в применении к участкам, где длина волн весьма велика по сравнению с глубиной. Если удастся доказать, что к этим наиболее сомнительным участкам применимо соотношение, выведенное для постоянных глубин, то тем самым, очевидно, будут реабилитированы все остальные части кривых рис. 179. Доказать это нетрудно. Пусть длина волны так велика по сравнению с глубиной, что скорость распространения волны выражается известным соотношением

$$c = \sqrt{gH}, \tag{338}$$

выведенным в предположении, что значение H постоянно. Посмотрим, какова будет в действительности связь между c и H, если глубина будет заведомо меняться по мере приближения волн к берегу.

Если в открытом море колебания уровня выразить простой гармонической функцией

$$\zeta = a_0 \cos\left(\frac{2\pi}{T} t + \varphi\right), \tag{339}$$

то, как известно, закон колебаний в любой точке прибрежной зоны можно выразить совершенно точно, проинтегрировав дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(x \frac{\partial \zeta}{\partial x}\right) + \varkappa \zeta = 0, \tag{340}$$

в котором для краткости обозначено

$$\varkappa = \frac{4\pi^2}{gT^2} \frac{dH}{dx}. \tag{341}$$

В результате оказывается, что на некотором расстоянии x от берега колебания уровня происходят по закону

$$\zeta = \frac{a_0}{A} J_0\left(2\varkappa^{1/2} x^{1/2}\right) \cos\left(\frac{2\pi}{T} t + \varphi\right), \tag{342}$$

где, как обычно $J_0(\xi)$ — бесселева функция нулевого порядка, A — постоянная. Профиль волн, выраженный этим уравнением, изображен на рис. 182. Он соответствует, очевидно, и стоячей волне, и распространяющейся применительно к некоторому определенному моменту времени. Но в таком случае расстояния NL, LG, GE, EC и CA распространяющаяся волна пройдет в одинаковые промежутки времени, равные каждый половине периода волны. Если формула (338) верна, то средние скорости на соответствующих этапах должны относиться как корни квадратные из глубин H_M, H_K, H_F, H_D и H_B, отмеченных на рис. 182, или на основании известных простых геометрических соотношений как корни квадратные из абсцисс точек M, K, F, D, B. Другими словами, формулу (338) можно проверить, посмотрев, будет ли оставаться постоянным на всех этапах отношение половины длины волны к корню квадратному из абсциссы соответствующего гребня или подошвы волны, т. е. будет ли справедливо соотношение

$$\frac{x_N - x_L}{\sqrt{x_M}} = \frac{x_L - x_G}{\sqrt{x_K}} = \frac{x_G - x_E}{\sqrt{x_F}} = \frac{x_E - x_C}{\sqrt{x_D}} = \frac{x_C - x_A}{\sqrt{x_B}}. \tag{343}$$

Так как речь идет не об абсолютных величинах, а лишь об их отношениях, то все величины, входящие в формулу (343), будет удобнее выразить в некотором условном масштабе. Так, вместо разностей абсцисс x_N, x_L и т. д. можно взять соответственные разности квадратов аргументов ξ бесселевой функции $J_0(\xi)$, при которых эта функция обращается в нуль, ибо, как следует из формулы (342)

$$x = \frac{\xi^2}{4\varkappa}. \tag{344}$$

Вместо корней квадратных из абсцисс точек M, K, F, D и B можно будет взять *первые* степени тех аргументов бесселевой функции, при которых эта функция обладает соответственно максимумом или минимумом. Все операции чрезвычайно просты, ибо необходимые корни табулированы в

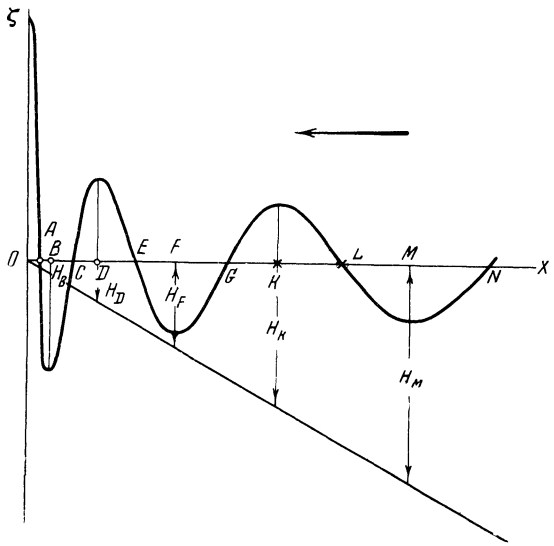


Рис. 182. Проверка теории в наиболее неблагоприятном случае

математических справочниках. Взяв их оттуда, легко получить табл. 12, из которой видно, что отношение $\frac{\xi_{n+2}^2 - \xi_n^2}{\xi_{n+1}}$ практически остается постоянным на всех этапах движения волны (лишь у самого берега наблюдается отклонение на 1,6% на этапе CA). Следовательно, на всех этапах должно удовлетвориться и соотношение (343).

Итак, формула, выражающая связь между скоростью волн и глубиной, оказывается так же хорошо приложимой к движению при переменной глубине, как приложима она к движению при постоянной глубине. Разумеется, крутизна склона dH/dx при этом считается не слишком большой: в пределах одной длины волны глубина изменяется лишь на некоторую ее долю.

Для проверки теории В. В. Шулейкина [47] А. А. Иванов произвел ряд измерений, построив прибор — полуавтомат для изучения рефракции волн на материковой отмели. Измерения дали хорошие результаты.

Впоследствии Ю. М. Крылов [48] развил эту теорию применительно к нескольким конкретным случаям: к острову круглой и треугольной формы и к мысу, к которым подходят волны. Он отметил, что, пользуясь этой теорией, можно вычислить изменения амплитуды волн, подходящих к берегу (за счет изменения промежутков между двумя какими-либо волновыми лучами).

Таблица 12

Точка	$J_0(\zeta)^{\text{мин}}_{\text{макс}}$ ξ_{n+1}	$J_0(\xi)=0$ ξ_n	ξ_n^2	$\xi_{n+2}^2-\xi_n^2$	$\frac{\xi_{n+2}^2-\xi_n^2}{\xi_{n+1}}$
A		2,4	5,77		
B	3,83			24,7	6,4
C		5,52	30,5		
D	7,01			44,6	6,3
E		8,65	75,0		
F	10,17			64,0	6,3
G		11,79	139,0		
K	13,32			83,0	6,3
L		14,93	222,0		
M	16,47			104,0	6,3
N		18,07	326,0		

Если S_0 обозначает расстояние между лучами на глубокой воде, S — расстояние между теми же лучами в месте с глубиной H, то отношение γ амплитуды волн на глубокой воде к амплитуде в месте с глубиной H можно выразить формулой

$$\gamma = \sqrt{\frac{S}{S_0}} \sqrt{\operatorname{th} 2\pi \frac{H}{\lambda}\left(1 + \frac{4\pi \frac{H}{\lambda}}{\operatorname{sh} 4\pi \frac{H}{\lambda}}\right)}. \tag{345}$$

§ 31. О трехмерных волнах в море

Все изложенное в этой главе относилось, строго говоря, к *двумерным волнам*, т. е. волнам, профиль которых не меняется в направлении, перпендикулярном к вектору скорости волн. Все задачи о двумерных волнах — по существу плоские. Именно такие плоские задачи решены к настоящему времени.

Однако всем известно, что двумерные волны в строгом смысле существуют в море лишь на двух стадиях: либо на начальной стадии зарождения и довольно кратковременного роста, либо на стадии мощной штормовой зыби. На промежуточных стадиях волнение, как правило, бывает *трехмерным*: профиль волн значительно меняется в направлении, перпендикулярном к вектору скорости.

На рис. 183 представлена фотография трехмерных волн, снятая с самолета. Здесь отчетливо видно, что волны представляют собой как бы холмы, склоны которых направлены не только в сторону, куда распространяются волны, а также и в противоположную ей, но и в другие стороны. На рис. 184 воспроизведена, по Н. Е. Скибко [50], теоретическая идеализированная схема трехмерного волнения, распространяющегося по направлению оси X. Сплошными кривыми изображены изогипсы поверхности моря в тех частях, где наблюдается подъем над спокойным уровнем воды, а пунктиром — в тех частях, где вода опустилась ниже спокойного уровня. Как всегда, λ — длина волны, L — длина гребня волн (новый параметр, с которым не приходилось встречаться в предыдущих параграфах). Уравнение поверхности моря при трехмерном волнении типа рис. 184 приближенно представляют в таком виде

$$\zeta = a \cos \frac{2\pi}{\lambda}(x - c_3 t) \cos \frac{2\pi}{L} y. \tag{346}$$

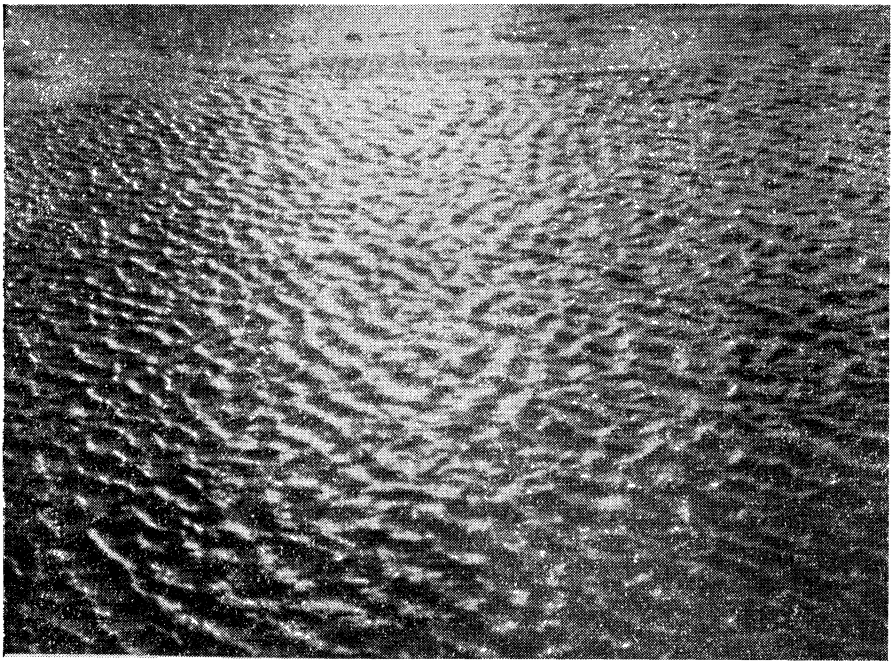


Рис. 183. Трехмерные волны, сфотографированные с самолета

Чем же вызван переход двумерного волнения в трехмерную форму при развитии волнения, а также обратный переход трехмерного волнения в двумерное при полном развитии мощной штормовой зыби? Ответ на этот вопрос содержится в современной теории питания волн энергией ветра, изложенной в § 16 и 17.

Действительно, при возникновении начальных двумерных волн на поверхности моря высота этих волн не может быть одинаковой на всем протяжении фронта: ввиду непостоянства поля ветра на одних участках фронта волн высота неизбежно будет больше, чем на других участках. Но ведь в соответствии с формулой (181) мощность, поступающая от ветра, будет больше именно там, где высота волн оказалась большей. Следовательно, возникнут условия неустойчивости: неравенство высот вдоль фронта волн будет непрерывно нарастать, волны приобретут трехмерный вид (рис. 183 и 184). Однако такой вид может сохраняться лишь на промежуточной стадии волнения: по мере приближения высоты волн к предельной (для данной скорости ветра и данного расстояния от наветренного берега) нарастание высоты волн будет замедляться тем больше, чем ближе высота к ее предельному значению; тем самым будет выравниваться фронт волн и уменьшаться различие в высоте волн вдоль одного и того же первоначального фронта. В результате штормовая зыбь будет стремиться к двумерному типу. К этому вопросу мы вернемся в § 34.

Кроме описанного процесса возникновения трехмерных волн, в природе очень часто имеет место иной процесс. Именно в море могут распространяться две системы волн в направлениях, которые составляют какой-то угол между собой, например система волн, набегающих на крутой скалистый берег, и система отраженных волн. В общем случае углы падения и отражения не равняются прямому углу, а потому на поверхности моря возникает своеобразная «решетка». Она отличается от схемы рис. 184 тем, что вместо

прямоугольников, разграничивающих отдельные ячейки, здесь возникают параллелограммы или в частном случае ромбы.

В настоящее время еще нет полной теории трехмерных волн. Известно лишь, что фазовая скорость c_3 распространения трехмерных волн превышает фазовую скорость c двумерных волн. Между этими величинами существует простое соотношение

$$c_3 = c\sqrt[4]{1+\left(\frac{\lambda}{L}\right)^2}. \quad (347)$$

Как и следовало ожидать, решающее значение имеет характеристическая величина λ/L. На основании формулы (347) легко заключить, что при изменениях λ/L от 0 до 1 поправочный множитель c_3/c должен меняться в пределах от 1 до 1,19.

Неполнота теории трехмерных волн не мешает пользоваться на практике теми основными выводами и соотношениями, которые были сделаны в предыдущих параграфах применительно к двумерному волнению. Для уточнения картины всегда можно разбить трехмерную волну на отсеки плоскостями, которые параллельны вектору фазовой скорости. К каждому отдельному отсеку с достаточной надежностью применимы все изложенные соотношения при заданных значениях высоты и длины волн.

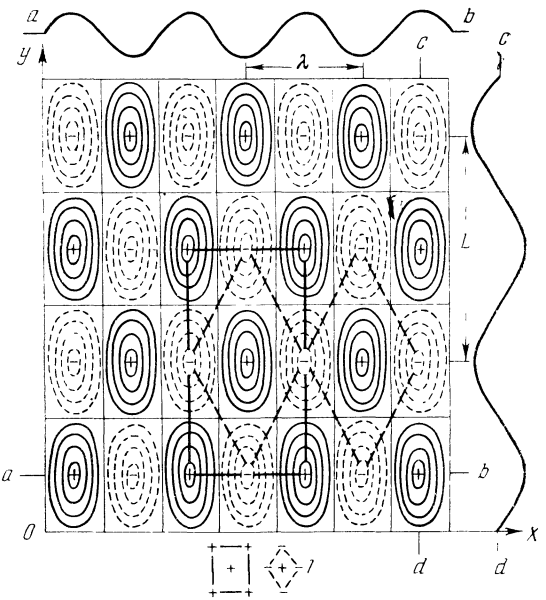


Рис. 184. Трехмерные волны (по схеме Н. Е. Скибко)

§ 32. Основные статистические характеристики неправильного волнения

Во всех предыдущих параграфах, за исключением § 31, рассматривалось *правильное двумерное* волнение. В § 31 было внесено дополнение к этому циклу, касающееся *трехмерных* волн. Но, как видно из элементарного анализа формулы (347), сама трехмерность вносит очень малую поправку к такому важному элементу волнения, как фазовая скорость волн: даже в предельном случае волн, симметричных относительно вертикальной оси, фазовая скорость трехмерной волны лишь на 19% превышает фазовую скорость волны двумерной; если $\frac{\lambda}{L} = 0{,}5$, то различие сводится к 6%, если $\frac{\lambda}{L} = 0{,}25$, то оно падает до 3%. Следовательно, никакие заметные погрешности не могут быть внесены в выкладки предыдущих параграфов за счет того, что волнение в море на *промежуточных стадиях развития* не является двумерным, а представляет собой трехмерное образование. Тем более неосновательными были бы опасения о погрешностях на *конечных* стадиях развития волн: там волны снова возвращаются к *двумерной* форме, с какой всегда начинается волнообразование в море. Единственное и очень важное для практики значение трехмерной формы ветровых волн проявляется при исследовании *качки корабля*: если при двумерной волне судоводитель легко

может выбрать наиболее безопасный курс, считаясь с особенностями того или иного судна в отношении килевой и бортовой качки, то при трехмерном волнении — на промежуточных стадиях развития волн — подобное маневрирование несколько осложняется.

Но если замена трехмерного волнения двумерным не могла повредить надежности выкладок при разработке методики *расчета* элементов волн, то еще далеко не так ясна правомочность этих выкладок относительно волнения, весьма *неправильного* по высоте, длине, периодам (а следовательно, и фазовым скоростям), отдельных волн. Многочисленные инструментальные измерения элементов волн в океане и на внутренних морях позволяют в настоящее время составить совершенно объективное суждение об отличии действительного характера волнения от того *правильного*, какое по необходимости принимается при изучении *физики* ветрового волнения. Как было видно в предыдущих параграфах, даже применительно к такому, правильному, волнению лишь в самое последнее время удалось найти уточненные кинематические характеристики, сформулировать фундаментальную теорему о нарастании *длины* волн под действием ветра, найти уравнение поля ветровых волн в океане, для моря произвольной глубины и интеграл этого дифференциального уравнения, который послужил для составления рабочих формул и графиков для практического расчета волн заданной (5%-ной) обеспеченности.

Разумеется, для практических целей нельзя ограничиться расчетом элементов волн только этой заданной обеспеченности: необходимо знать кривые действительного распределения элементов волн в их статистическом аспекте. Кроме того, для решения задач, касающихся *качки* корабля на неправильной волне, необходимо еще научиться строить энергетические *спектры* ветрового волнения [51, 52]. Если на нынешней стадии можно считать вопрос о расчете волн заданной (5%-ной) обеспеченности исчерпанным с достаточной для практики надежностью, то нельзя этого сказать о нынешнем состоянии *статистики* и, в особенности, *спектральной* теории ветровых волн.

Если в § 8 и в последующих параграфах удалось отказаться даже от трохоидального профиля волн и исследовать ветровые волны истинной — сильно заостренной у вершин — формы, то при выводе статистических соотношений (а в особенности при попытках построения спектральной теории волн) авторы современных исследований уходят в противоположную сторону: заменяют даже несовершенные трохоидальные профили вполне идеализированными *синусоидами*, совершенно самостоятельно распространяющимися в различные стороны на поверхности моря.

Между тем длительная дискуссия, происходившая в XIX в. относительно *устойчивости* трохоидального профиля волн, закончилась категорическим положительным утверждением. В настоящее время можно с такой же категоричностью утверждать, что даже сильно заостренные ветровые волны, в океане и в глубоких морях, всегда должны распространяться с определенной фазовой скоростью, невзирая на то, что их профиль можно разложить на множество синусоид до весьма высоких порядков включительно. Весь этот сложный профиль *устойчив* (если он не достиг предельной заостренности в том смысле, в каком это излагалось в § 8 и 9), а потому *все* синусоиды, на которые его можно разложить, обязаны перемещаться вдоль пути волн с единой фазовой скоростью сложной волны.

Сейчас еще невозможно заранее предвидеть, на каких этапах и при каких статистических выкладках могут возникнуть особо грубые погрешности, вызванные моделированием истинного волнения суммой множества синусоид, самостоятельно распространяющихся в море. Поэтому чрезвычайно важно как можно шире поставить волномерные работы в океане и на внутренних морях и организовать исследования по статистике неправильного волнения на основе *физики ветровых волн*. Поучительным примером для подобных ис-

следований должна служить кинетическая теория газов, основанная на строгих принципах термодинамики: уравнение кривой распределения скоростей молекул по Максвеллу содержит константу k, прямо связанную с константой R из уравнения состояния газа, и связывает скорости молекул с абсолютной температурой вещества. Но в то же время нельзя упускать из виду (как это иногда делается), что между статистикой волн и статистикой молекулярных движений существуют очень серьезные принципиальные различия: а) молекулы вещества при столкновениях обмениваются энергией, количеством движения; волны, бегущие по поверхности моря в различных направлениях и с различными скоростями, никогда не обмениваются энергией и количеством движения: волна, бегущая с большей скоростью, нагоняет волну, обладающую меньшей скоростью, интерферирует с ней и бежит дальше, оставив позади себя медленную волну прежнего профиля; б) молекулярное движение существовало и будет существовать вечно, а потому принципиально возможны сколь угодно большие скорости их движения, кривая распределения скоростей простирается теоретически в область бесконечно больших скоростей; ветровое волнение создается ветром, который работает в продолжение конечного срока, а размеры океанов — также конечны; поэтому кривые распределения высот, длин, периодов и фазовых скоростей волн не могут простираться в сторону бесконечно больших значений этих элементов волнения; в) еще в прошлом веке было доказано, что максимальный возможный угол наклона касательной к профилю волн при вершине составляет 30° (угол между касательными при вершине не может быть меньше 120°); новые кинематические соображения, изложенные в § 8 и 9, показали, что вершины ветровых волн даже в океане и глубоком море (при соответствующих скоростях ветра) могут разрушаться раньше, чем был бы достигнут такой предельный угол наклона касательных; следовательно, кривые распределения крутизны морских волн должны автоматически обрываться на некотором, предельном, возможном значении крутизны.

К сожалению, до настоящего времени еще не построены теоретические кривые распределения элементов волн, которые удовлетворяли бы этим элементарным и совершенно необходимым условиям. Приходится привлекать к исследованиям по математической статистике морского волнения (и ветровых волн в частности) те кривые распределения, которые созданы для описания других явлений, не стесненных подобными особыми условиями.

Работы Л. А. Корневой и В. П. Ливерди в Морском гидрофизическом институте, основанные на обильном материале инструментальных измерений в Атлантическом океане и на Черном море, показали, что очень часто распределение элементов морских волн — в очень большом диапазоне — удовлетворительно описывается кривой Гаусса. Несколько бо́льшие отклонения отмечены при использовании кривой Рэлея. Но, с другой стороны, рэлеевское распределение лучше изучено, в применении к волнам, авторами, показавшими, что функции Рэлея весьма удобны для различных вторичных операций. Большую работу в этом направлении проделали Ю. М. Крылов [53] и И. С. Бровиков, а также С. С. Стрекалов [54].

Для функции плотности вероятности высот $\varphi(h)$ двумерных ветровых волн использовалось распределение Рэлея

$$\varphi(h) = \frac{\pi}{2}\frac{h}{\bar{h}^2} e^{-\frac{\pi}{4}\left(\frac{h}{\bar{h}}\right)^2}. \tag{348}$$

Обеспеченность высот двумерных ветровых волн находится из (348) посредством интегрирования

$$F(h) = e^{-\frac{\pi}{4}\left(\frac{h}{\bar{h}}\right)^2}. \tag{349}$$

Высоту волн различной обеспеченности h_n можно связать со средней высотой $\overline{h}$, использовав выражение (349):

$$\frac{h_n}{\overline{h}} = \sqrt{\frac{4}{\pi} \ln F_n}. \tag{350}$$

Легко видеть, что (350) позволяет выразить высоту любой обеспеченности F_n, если известна, например, высота волн 5%-ной обеспеченности:

$$h_n = h_5 \sqrt{\frac{\ln F_n}{\ln F_5}}. \tag{351}$$

Рэлеевское распределение обладает положительной асимметрией с коэффициентом $S = 0{,}635$. Наибольшая повторяемость соответствует высоте $0{,}8\overline{h}$. Коэффициент изменчивости $k = 0{,}52$.

Ю. М. Крылов распространяет тот же закон распределения и на длины волн и использует классические соотношения между длиной, периодом и фазовой скоростью волн; в частности, принимает линейную зависимость между периодом T и скоростью c. Тогда функция распределения периодов $\varphi(T)$ и функция распределения скоростей $\varphi(c)$ оказываются одинаковыми. Плотность вероятности выражается так:

$$\varphi(T) = 4\Gamma^5\left(\frac{5}{4}\right)\frac{T^3}{\overline{T}^4} e^{-\Gamma^4\left(\frac{5}{4}\right)\left(\frac{T}{\overline{T}}\right)^4}, \tag{352}$$

обеспеченность

$$F(T) = e^{-\Gamma^4\left(\frac{5}{4}\right)\left(\frac{T}{\overline{T}}\right)^4}. \tag{353}$$

Период (и скорость) любой обеспеченности выражается через среднее значение формулой

$$\frac{T}{\overline{T}} = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)} \sqrt{-\ln F}. \tag{354}$$

Исходя из той же гипотезы — о возможности рэлеевского распределения для длин волн, — Ю. М. Крылов получил, как следствие, закон распределения для крутизны δ неправильных волн; плотность вероятности $\varphi(\delta)$ оказалась равной

$$\varphi(\delta) = \frac{\pi^2}{2}\frac{\delta}{\overline{\delta}} \frac{1}{\left[1 + \frac{\pi^2}{4}\left(\frac{\delta}{\overline{\delta}}\right)^2\right]^2}. \tag{355}$$

§ 33. Сравнение теории с результатами инструментальных измерений в океане и на Черном море

На рис. 185 изображена диаграмма Л. А. Корневой и В. П. Ливерди [55], характеризующая теоретическое и опытное *интегральное* распределение высот волн — их обеспеченность. По оси абсцисс отложены *относительные* высоты, т. е. отношения высот той или иной обеспеченности к средней высоте волн, по оси ординат — обеспеченность этих относительных высот. Как видим, различие между теоретической кривой, построенной по формуле (349), и результатами измерения в океане здесь незначительно и сказывается главным образом при малых высотах, обладающих большой обеспеченностью. Коэффициент изменчивости волн в океане часто оказывался меньше, чем 0,52.

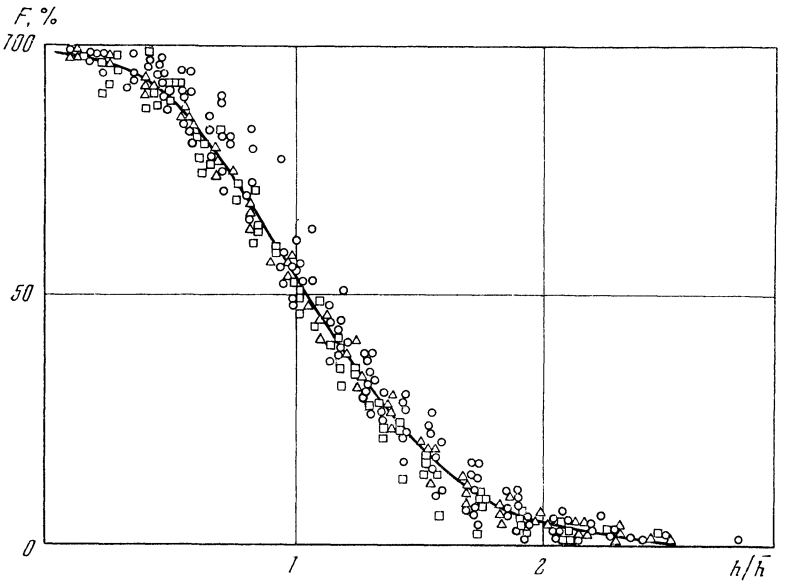


Рис. 185. Обеспеченность относительных высот волн (по Л. А. Корневой)

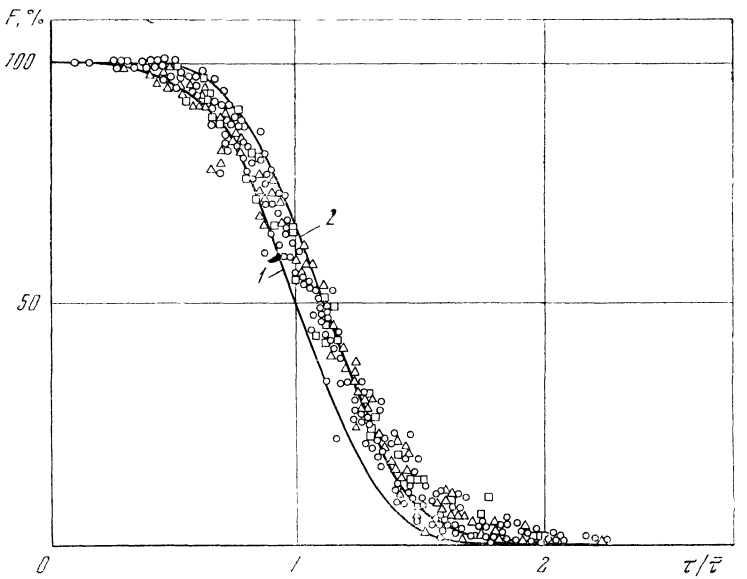


Рис. 186. Обеспеченность относительных периодов

На рис. 186 изображены две теоретические кривые: кривая *1* построена для обеспеченности различных периодов волн по формуле

$$F(\tau_i) = 100\% \int_{\infty}^{\tau} \varphi(\tau_i)\, d\tau.$$

Она довольно далеко отходит от точек, полученных в результате обработки свыше 100 инструментальных измерений. Напротив, кривая *2*, вычисленная путем суммирования по конечным интервалам $\Delta\tau$

$$F(\tau_i) = 100\% \sum_{n=\infty}^{n=i} \varphi(\tau_i)\, d\tau,$$

легла совсем близко от точек, полученных на основании измерений в океане. По оси абсцисс отложены относительные величины — значения $h/\bar{h}$.

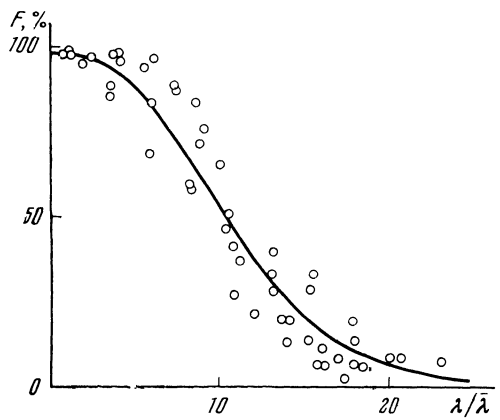


Рис. 187. Обеспеченность относительных длин волн

Не так надежны материалы цитированных авторов, касающиеся распределения длин волн. Прежде всего здесь единственным методом для получения массовых результатов пока продолжает оставаться фотографирование на движущуюся фотобумагу сквозь щель (аналогично тому, как это делалось при работе на штормовом бассейне, см. § 8). Количество измерений, проделанных по этому методу, значительно меньше, чем количество измерений высоты волн и периодов посредством волнографа ГМ-16, применяемого на экспедиционном судне «Михаил Ломоносов». Отчасти поэтому пока еще затруднительно судить об оправдываемости теоретической кривой обеспеченности длин волн на рис. 187 при большом разбросе точек, полученных на основании измерений. По оси абсцисс здесь отложены отношения $\lambda/\bar{\lambda}$, а по оси ординат — значения F, %.

Совсем не оправдалась, при измерениях в природных условиях, кривая распределения плотности вероятности *крутизны* волн, построенная по формуле (355). На рис. 188 эта кривая нанесена пунктиром применительно к двум значениям средней крутизны: 0,028 и 0,036. Сплошные кривые здесь проведены по точкам, полученным путем расчета по данным фотоволнографа. Как и следовало ожидать на основании сказанного в предыдущем параграфе, действительная кривая распределения круто обрывается при определенном максимальном значении крутизны, между тем как кривая, построенная по формуле (355), простирается в область совершенно абстрактных значений крутизны волн.

Интересны выводы Л. А. Корневой, касающиеся распределения *периодов* волн. Многочисленные измерения показали ей, что коэффициент изменчивости часто бывает близок к значению $k = 0{,}28$, причем коэффициент асимметрии S приближается к *нулю*. Это значит, что кривая распределения плотности вероятности может считаться симметричной. Вообще говоря, плотность вероятности периодов хорошо выражается законом нормального распре-

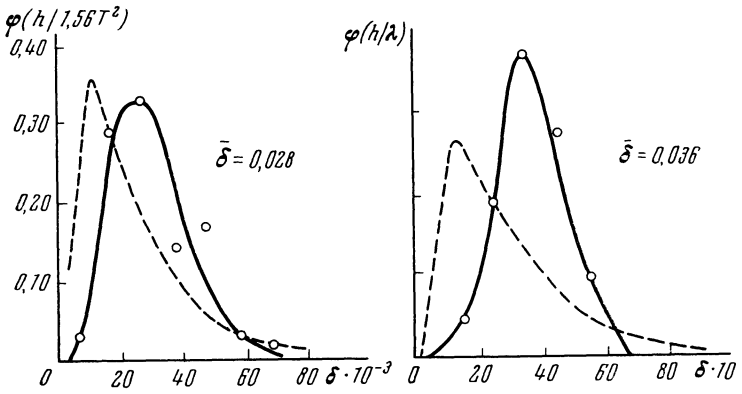


Рис. 188. Плотность вероятности крутизны волн

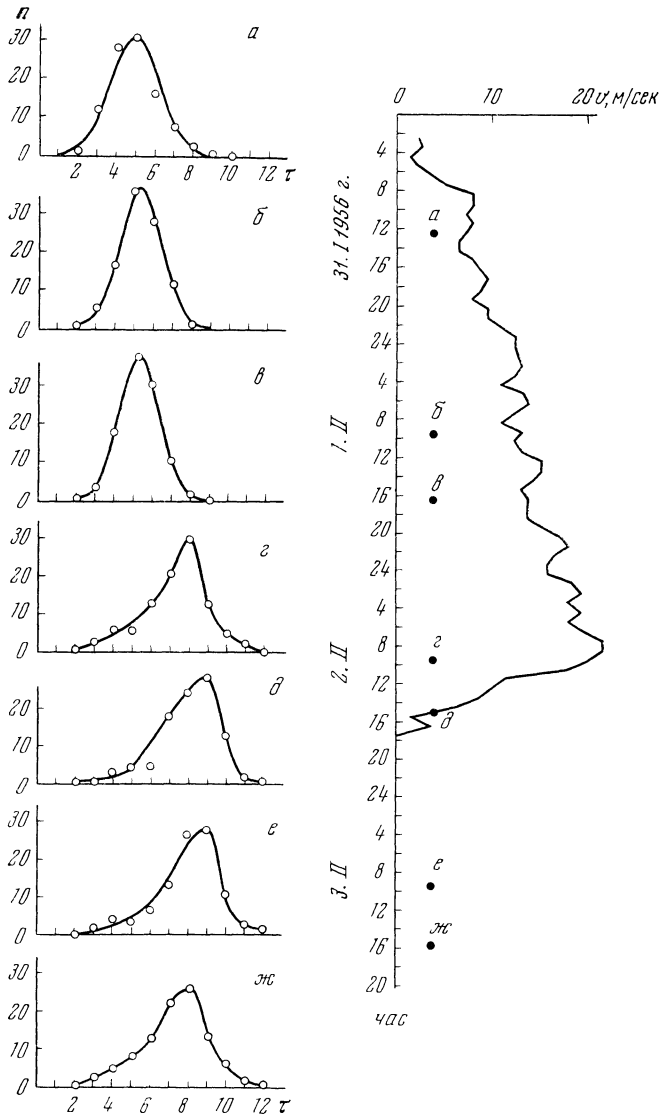


Рис. 189. Плотность вероятности периодов и среднечасовые значения скорости ветра (справа) с 31.I по 3.II 1956 г.

деления Гаусса

$$\varphi(T) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(T-\overline{T})^2}{2\sigma^2}} \qquad (356)$$

где σ — среднее квадратичное отклонение.

Интересно, что при $k_т = \frac{\sigma}{\overline{T}} = 0{,}28$ кривая Гаусса очень мало отличается от кривой, вычисленной по (354) [56].

В экспедиционных условиях, к сожалению, невозможно организовать автоматический учет *периодов* волн, следующих одна за другой, для построения кривых распределения по обильному материалу: направление, в котором распространяются волны, может составлять самые различные углы с курсом корабля, а потому исключается вычисление поправок за счет этих углов. Но в береговых условиях в Кацивели несколько лет работал автоматический счетчик периодов волн, сконструированный В. В. Шулейкиным (см. § 35), и Л. А. Корнева, С. Т. Машков, Е. А. Никитина получили весьма показательные характеристики периодов мертвой зыби, ветрового волнения при различных скоростях ветра и, в частности, штормового волнения в различных стадиях его развития и затухания. Кривые распределения, полученные во время смены направлений зыби, характеризуются двумя максимумами. Развивающееся волнение после длительного штиля дает острую кривую типа Гаусса, совершенно симметричную относительно максимума.

Примечательны серии кривых распределения периодов, полученные во время двух десятибалльных штормов, перед ними и после них, показывающие, как постепенно смещаются максимумы этих кривых в различных фазах шторма. На рис. 189 приведены результаты, полученные посредством упо-

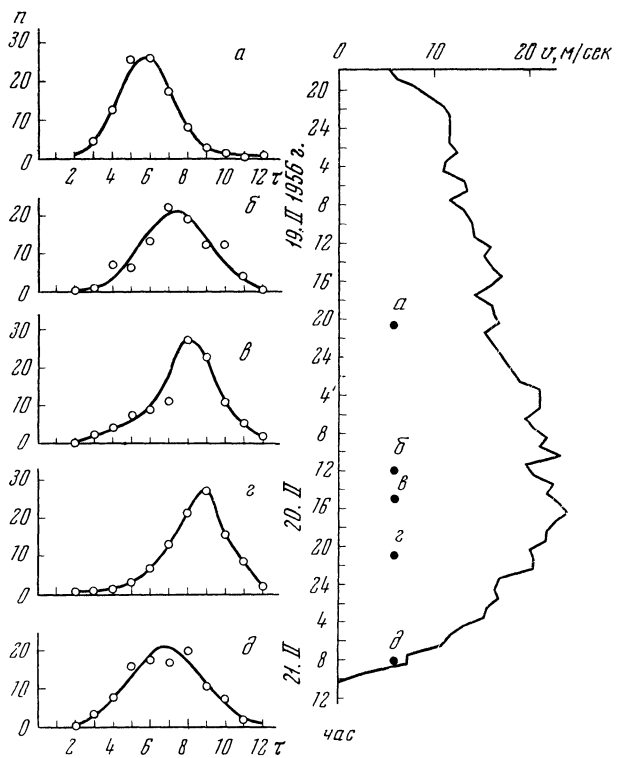


Рис. 190. Те же функции с 19.II по 21.II 1956 г.

мянутого автоматического счетчика периодов волн с 31 января по 3 февраля 1956 г., а на рис. 190 — аналогичный материал, касающийся срока с 19 февраля по 21 февраля 1956 г. На обоих рисунках справа помещена диаграмма, показывающая, как менялись среднечасовые значения скорости ветра в различные часы. Точками с соответствующими буквами при них обозначены моменты, которые отвечают середине каждой из серий — семи на рис. 189 и пяти на рис. 190. Надо особо отметить, что на обоих рисунках четко выявилось одно свойство ветровых волн при прохождении скорости ветра через максимум: особенно ярко оно выражено на рис. 189, где максимум на кривой распределения сдвинут дальше всего в сторону больших периодов — к $T = 9$ *сек*— на кривых *д*, *е*, которые соответствуют сериям, снятым *после* прохождения максимума на кривой скоростей ветра. Кривая *д* снята через 6 *час* после прохождения этого максимума, а кривая *е* — даже через сутки. Разумеется, и в случае *д*, и в случае *е* регистрировались периоды *мертвой зыби*, оставшейся от шторма и, как обычно, растущей в длину. На рис. 190 наибольший сдвиг максимума на кривой распределения — тоже к $T = 9$ *сек*— виден на кривой *г*, снятой через 6 *час* после прохождения максимума на кривой скоростей ветра.

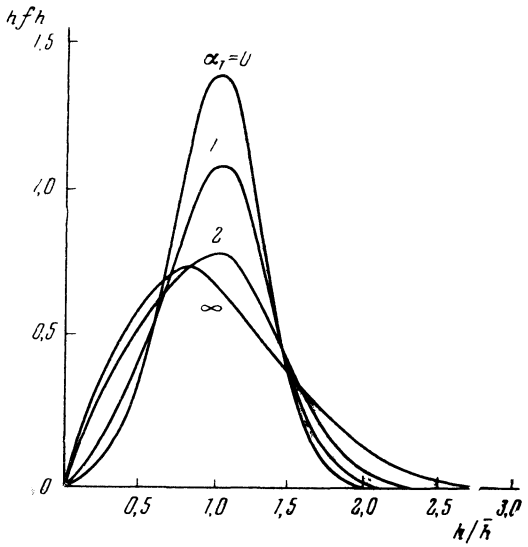


Рис. 191. Кривые Ю. М. Крылова

До настоящего времени еще недостаточно разработан вопрос об изменениях формы кривых распределения при входе волн на мелководье. По наблюдениям Л. А. Корневой и некоторых других авторов можно установить, что в зависимости от глубины почти не меняются кривые распределения периодов, а потому описанные серии автоматического счета периодов представляют *общий* интерес. Все статистические характеристики *высот* волн меняются при изменениях глубин, но при изменениях кривых распределения почти не меняется средняя высота волн. По-видимому здесь сказывается лишь разрушение отдельных волн и притом — частичное, присущее волнам, которые искажаются при вступлении на мелководье (см. § 11). Л. А. Корнева полагает, что такое поведение волн сохраняется даже при довольно больших уклонах дна — до $^1/_{20}$. Совсем иная картина наблюдается на постоянном мелководье: например, в штормовом бассейне при толщине слоя воды $H = 2{,}5$ *м* коэффициент изменчивости периодов волн падал до 0,13—0,17 вместо значения $k = 0{,}28$ для глубокого моря, хотя величина $\alpha = 2\pi\frac{H}{\lambda}$, характеризующая мелководье, здесь была того же порядка, как при наблюдениях в прибрежной зоне Черного моря [57].

На основании уравнений (348) и (352) Ю. М. Крылов рассчитал изменения формы кривых распределения высот волн при изменениях параметра α, причем он пользовался классическим соотношением

$$T = \sqrt{\frac{2\nu}{g}\lambda \operatorname{cth} 2\pi\frac{H}{\lambda}}.$$

На рис. 191 изображены кривые, построенные по его вычислениям. При

уменьшении α от бесконечности до нуля кривые распределения непрерывно сужаются. В действительности волны ведут себя именно так, когда они подходят к берегу.

Функции распределения *скоростей* волн рассчитала Л. А. Корнева. Чисто аналитический расчет их невозможен ввиду связи скорости волн с периодом только через параметр α. Но Корнева воспользовалась приемом, описанным в § 30: установила связь между исследуемыми элементами в параметрической форме. В результате получилась диаграмма рис. 192, связывающая скорость волн с их периодом при различных значениях глубины моря.

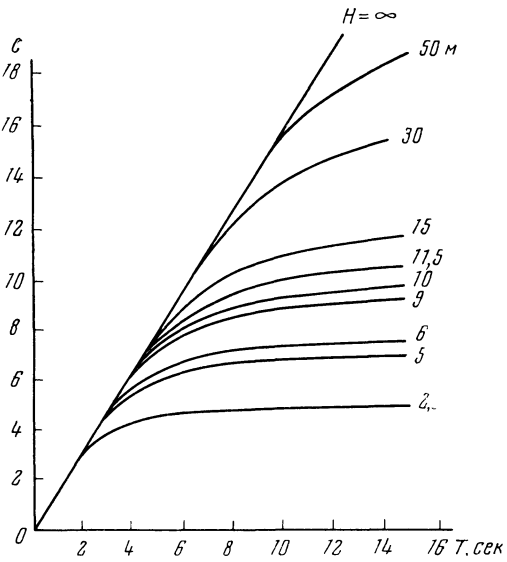


Рис. 192. Функции распределения скоростей волн (по Л. А. Корневой)

Пользуясь этими графиками, Корнева получила четыре диаграммы, описывающие изменения кривых распределения скоростей волн, при вступлении на мелководье,— применительно к четырем различным начальным значениям скоростей. Эти диаграммы приведены на рис. 193.

Как было уже сказано выше, для некоторых важных практических задач недостаточно сведений, вытекающих из анализа правильной волны. Решение этих задач не может удовлетвориться даже теми кривыми распределения плотности вероятности и кривыми обеспеченности, которые были описаны в предыдущем и в настоящем параграфе. В частности, это относится к теории качки на неправильной волне, разработка которой впервые была начата А. Н. Крыловым [22] и Ю. А. Крутковым [51].

В настоящее время и в отечественной, и в иностранной литературе существует довольно много работ в той области математической статистики, которая со временем приведет к надежному решению подобных задач, в области *энергетических спектров* сложного неправильного волнения. В этих работах взволнованная поверхность моря $\eta\,(x, y, t)$ пока рассматривается как результат взаимодействия множества элементарных *синусоидальных* волн с различными амплитудами A, частотами ω, направлениями распространения θ и случайными фазами $\varepsilon\,(\omega, \theta)$. Колебание поверхности воды в точке рассматривается не как функция x, y, θ, а как некоторый интеграл от бесконечно малых составляющих

$$\eta(t) = \int_0^\infty \cos[\omega t - \varepsilon(\omega)] \sqrt{e(\omega)\,d\omega}. \qquad (357)$$

Здесь $e\,(\omega)$ — количество энергии на единицу площади моря, которым обладают элементарные волны. Амплитуда волны, имеющая энергию $e\,(\omega)d\omega$, выражается так:

$$A(\omega)\,d\omega = \sqrt{\frac{e(\omega)}{\delta g}\,d\omega},$$

где δ — плотность. Функцию $A^2\,(\omega)$ называют *частотным спектром энергии.*

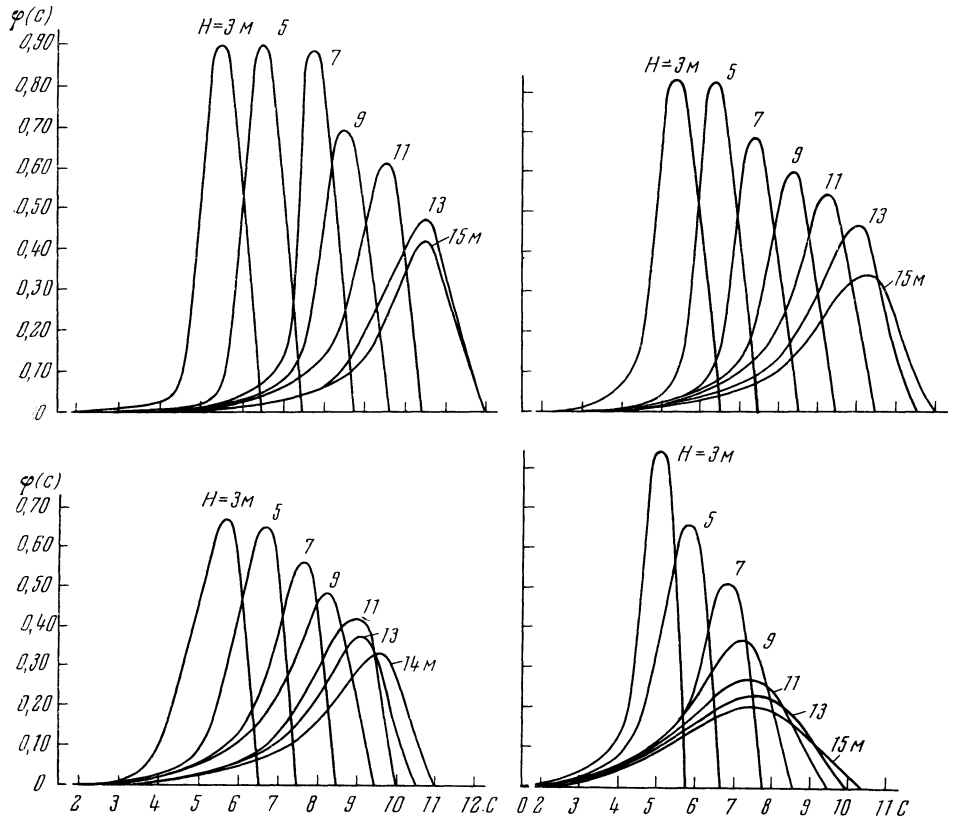


Рис. 193. Кривые распределения скоростей волн, вошедших на мелководье, при различных начальных скоростях (по Л. А. Корневой)

Интеграл

$$\varepsilon = \int_0^\infty A^2(\omega)\, d\omega = \int_0^\infty \frac{e(\omega)}{\delta g}\, d\omega \tag{358}$$

пропорционален общей удельной энергии

$$E = \int_0^\infty e(\omega)\, d\omega. \tag{359}$$

Считается, что высоты волновых колебаний уровня подчинены закону Рэлея. В итоге оказывается, что средняя высота $\overline{h}$ и средний период $\overline{T}$ определяются соотношениями

$$\overline{h} = \sqrt{\pi}\left[\int_0^\infty A^2(\omega)\, d\omega\right]^{1/2} = \sqrt{\pi\varepsilon}, \tag{360}$$

$$\overline{T} = 2\pi\left[\frac{\int_0^\infty A^2(\omega)\, d\omega}{\int_0^\infty A^2(\omega)\,\omega^2\, d\omega}\right]^{1/2}. \tag{361}$$

Таким образом, вид частотного спектра $A^2(\omega)$ определяет собой и распределение энергии $e(\omega)$, и полную удельную энергию E, средние высоты, и период видимых волн, и другие статистические характеристики волнения.

Различные авторы, исходящие из таких положений, строили спектры по эмпирическим данным, но даже на одной и той же стадии развития волнения эти спектры не согласуются между собой,— у всех авторов они полу-

чались различными. Даже для предельно развитого волнения, спектр которого должен зависеть лишь от одной скорости ветра (при одинаковых географических условиях), спектры получались различные. Искусственное допущение, лежащее в основе построения спектров,— сугубо идеализированная форма профиля волн — привело к особо странным последствиям в работах Неймана: этот автор считает, что высота предельно развитых волн должна быть пропорциональной скорости ветра в степени 2,5. Между тем

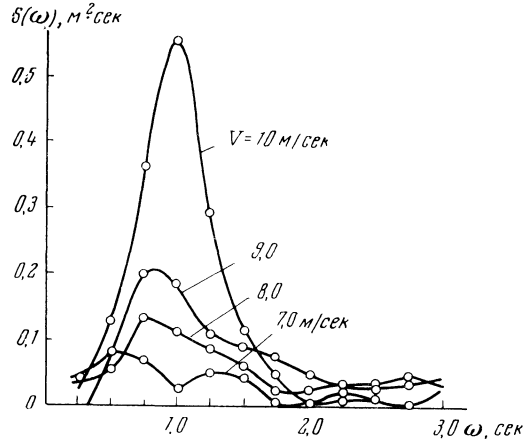


Рис. 194. Спектры предельно-развитого волнения (по Л. А. Корневой и В. П. Ливерди)

не только выкладки, основанные на принципах механики (о которых говорилось в предыдущих параграфах), и не только теоретические работы многих других авторов, но и надежные инструментальные измерения в океане свидетельствуют о том, что высота предельно развитых волн в океане пропорциональна *квадрату* скорости ветра [58].

Квадратичная зависимость получилась, в частности, у С. С. Стрекалова, дающего для частотного спектра волн следующее уравнение [54]:

$$A^2(\omega) = \frac{Ag^{n-3}}{\omega^n V^{n-5}} \exp\left[-\left(\frac{Bg}{\omega V}\right)^m\right]. \qquad (362)$$

Для предельно развитого волнения $n = 6$, а параметры A, B, m можно определить по уравнениям (360) и (361); $\frac{h_{\infty\,5\%}}{V^2} = 0{,}0205$; $\frac{T_\infty}{V} = 0{,}515$. При таких данных надо найти максимум спектральной функции, приравняв нулю производную $\frac{d[A^2(\omega)]}{d\omega}$.

На рис. 194 приведены некоторые спектры предельно развитого волнения, полученные Л. А. Корневой и В. П. Ливерди [59] по материалам инструментальных измерений в пассатной зоне Атлантического океана. Значения скоростей ветра проставлены близ кривых. Из рисунка видно, как при увеличении скорости ветра растет общая энергия установившихся волн.

§ 34. Законность применения основных принципов механики к неправильному волнению

Многолетние исследования по статистике неправильного волнения, проводившиеся в Морском гидрофизическом институте, позволяют в настоящее время проверить законность применения основных принципов механики, послуживших для расчета правильных волн, к волнению *неправильному* [60].

Для суждения об этом применительно к волнам *установившегося* типа весьма удобной и надежной оказалась зона пассатов в Атлантическом океане: очень редко отбор измерений чисто ветровых волн оказывается испорченным благодаря вторжению мертвой зыби, пришедшей издалека и искажающей всю статистическую картину. Так, в числе 28 измерений, отобранных Л. А. Корневой и В. П. Ливерди из очень большого экспедиционного материала, имеются лишь два случая, когда предельное значение c_∞/V заметно выше теоретического значения, вытекающего из выкладок § 21: именно за счет посторонней зыби, проникшей в пассатную зону из более высоких широт. Если откинуть эти два случая, то среднее значение c_∞/V окажется на 0,5% ниже теоретического; если не откидывать, то настолько же выше теоретического.

Отношение $h_{\infty\,5\%}/V^2$ оказалось равным 0,0205, т. е. тому же, какое было получено в § 21. Отношение $\dfrac{\lambda}{h_{\infty\,5\%}} = 21$, т. е. оно тоже совпадает с теоретическим, заложенным в основу рабочих формул и диаграмм. Л. А. Корнева проанализировала, почему оказалось возможным применять к неправильному волнению выводы В. В. Шулейкина, сделанные на основании исследований по механике правильной волны.

Оказалось, что, во-первых, это достигнуто благодаря составлению и решению уравнений, в которые входит *безразмерная* высота волн $\eta = \dfrac{h}{h_\infty}$. А эта величина одинакова для волн любой обеспеченности благодаря одинаковости распределения высот волн на всех стадиях развития, в том числе и на предельной стадии. Во-вторых, уравнение поля ветровых волн в форме (222) отражает баланс энергии нерегулярных волн, несмотря на то что волны избранной обеспеченности растут независимо от волн другой обеспеченности и при этом волны 5%-ной обеспеченности не сохраняют свое положение в группах волн: вследствие интерференции максимальная высота перемещается с одной волны на другую. Но Л. А. Корнева составила баланс энергии для нерегулярных волн и учла, что отдельные элементы волн принимают случайные значения; поэтому составляющие баланса энергии, являющиеся функциями этих элементов, также оказываются случайными. Энергия отдельных волн E_i, поток энергии Φ_i, мощность, передаваемая волнам от ветра W_{V_i}, мощность, расходуемая волнами на внутреннее турбулентное трение W_{μ_i}, — все они были приняты различными при таком анализе. Ряд их значений для большого числа волн обязан подчиняться статистическим законам. Поэтому Л. А. Корнева воспользовалась законами распределения элементов волн (348), (352) и нашла средние значения величин

$$\overline{E} = \frac{\Sigma E_i \lambda_i}{n\overline{\lambda}}, \quad \overline{\Phi} = \frac{\Sigma \Phi_i T_i}{n\overline{T}}, \quad \overline{W}_V = \frac{\Sigma W_{V_i} T_i}{n\overline{\lambda}}, \quad \overline{W}_\mu = \frac{\Sigma W_{\mu i} \lambda_i}{n\overline{\lambda}}, \qquad (363)$$

а также для $\dfrac{\partial E}{\partial t}$, $\dfrac{\partial \Phi}{\partial x}$. При этом обнаружилось [60], что каждая из составляющих, вычисленных для нерегулярного волнения, отличается на некоторый множитель (близкий к единице) от соответствующих значений тех же функций для средних элементов. Так как эти коэффициенты близки друг к другу (от 1,27 до 1,32), то они не влияют на окончательную форму уравнения поля нерегулярных ветровых волн: оно практически оказывается таким же, каким было уравнение (222). Именно поэтому измеряемые волны определенной обеспеченности удовлетворяют этому уравнению.

Приняв во внимание это свойство неправильных волн, значительно облегчающее их исследование, интересно проследить за переходом двумерных волн, образовавшихся на начальных этапах развития, в волны *трехмерные* на промежуточном этапе волнообразования и, наконец, снова в двумерные волны установившейся *штормовой зыби*, которая движется правильными ря-

дами при постоянной скорости ветра (не убывающей!) и которая лишь слегка искажена составляющими высоких порядков на ее поверхности.

На основании общих теоретических соображений, изложенных в § § 22, 23 и 26, проанализируем этот процесс по работе В. В. Шулейкина [61].

Не будем рассматривать различия длин волн, а допустим, что длина волн нарастает одинаково во всех частях бывшего фронта двумерных волн и лишь сам фронт искажается: в одних местах высота волн растет быстрей, а в других медленней, приводя к возникновению трехмерности на промежуточных стадиях волнообразования. По-прежнему будем характеризовать развитие волн значением η. Не отклоняясь далеко от истины, можно положить, что правильная двумерная форма еще сохраняется у мелких волн при $\eta = 0{,}005$, хотя неоднородности воздушных потоков и неодинаковая частота поверхности воды вызвали и тут некоторые, пока еще очень малые, отклонения от прежней, идеализированной картины. Зададимся распределением этих отклонений по закону Гаусса

$$\varphi(\nu)\,d\nu = (2\pi\nu_0^2)^{-1/2} e^{-\frac{\nu^2}{2\nu_0^2}}\,d\nu. \tag{364}$$

Здесь ν — относительное отклонение высоты волн от наиболее вероятной; $\varphi(\nu)$ — плотность вероятности; $\sqrt{\overline{\nu^2}} = \nu_0$ — среднеквадратичное отклонение.

Мощность, поступающую от ветра не единицу поверхности волн, выразим формулой (181) и учтем, что практически произведение $\varkappa\left(\frac{R}{r}\right)(V-c)^2$ можно считать ничтожно меняющимся на всем протяжении развития волн. Из § 19 заимствуем выражение (209) для мощности, теряемой волнами на внутреннее турбулентное трение. После простых преобразований окажется, что за небольшой промежуток времени Δt энергия волн должна увеличиться на $(W_V - W_\mu)\,\Delta t$, причем

$$\frac{(W_V - W_\mu)\,\Delta t}{10^{-4} h_{\infty}^2} \approx 3\left(\frac{\lambda_\infty}{\bar{\lambda}}\right)^2 \frac{\Delta t}{T}(\eta^3 - \eta^4). \tag{365}$$

С другой стороны, на основании классической динамики волн

$$(W_V - W_\mu)\,\Delta t = \frac{1}{8}\delta g\,(h_{k+1}^2 - h_k^2) = \frac{1}{4}\delta g\left(\frac{h_{k+1} + h_k}{2}\right)\Delta h. \tag{366}$$

Подставив (366) в (365) и вспомнив связь между h, h_∞, η, запишем

$$\eta\Delta\eta = 1{,}22\cdot 10^{-4}\left(\frac{\lambda_\infty}{\lambda}\right)^2 \frac{\Delta t}{T}(\eta^3 - \eta^4).$$

Отсюда определяется искомое приращение высоты волн

$$\Delta\eta = 1{,}22\cdot 10^{-4}\left(\frac{\lambda_\infty}{\lambda}\right)^2 \frac{\Delta t}{T}(1-\eta)\,\eta^2. \tag{367}$$

На всем протяжении развития волн величины слева от круглой скобки в (367) будут общими для всего распределения волн; они определяют изменения масштабов, но никак не влияют на относительные отклонения ν. Напротив, произведение $(1-\eta)\,\eta^2$ должно полностью определять все изменения распределения волн, все отклонения их высот от наиболее вероятной. Пусть, например, на какой-то стадии волны достигли высоты $\eta_k + \nu_k$. Тогда на основании (367) можно утверждать, что в любой области кривой распределения приращение высот будет пропорционально величине

$$[1 - (1+\nu_k)\,\eta_k]\,(1+\nu_k)^2\,\eta_k^2.$$

Для числовых расчетов мы построили на рис. 195 кривую $(1-\eta)\eta^2$ как функцию аргумента η. На участке от $\eta = 0$ до $\eta = 0{,}16$ кривая достаточно хорошо аппроксимируется параболой второго порядка, и это позволяет очень просто вычислять спектральные кривые для начальных стадий.

Допустим, что малые высоты $\eta_1(1+\nu_1)$ получили приращения, пропорциональные квадрату соответствующих высот $\Delta\eta_1 = a(1+\nu_1)^2\eta_1^2$. Выберем их с таким расчетом, чтобы в области наивероятной высоты (при $\nu = 0$) было $\Delta\eta_1 = \eta_1$. Тогда при подобном выборе $a = \frac{1}{\eta_1}$ и, значит,

$$\Delta\eta_1 = (1+\nu_1)^2\eta_1 \approx (1+2\nu_1)\eta_1.$$

Но в таком случае в любой области кривой распределения высота волн после приращения будет очень просто выражаться через основные величины

$$\eta_2 = (1+\nu_1)\eta_1 + (1+2\nu_1)\eta_1 = (2+3\nu_1)\eta_1.$$

Иными словами, относительные отклонения теперь будут выражаться через прежние значения ν_1, умноженные на коэффициент 3/2. При этом среднеквадратичное отклонение возрастет в полтора раза, и новая кривая распределения построится по прежней формуле (364), в которую должен быть внесен этот поправочный множитель перед средним квадратичным.

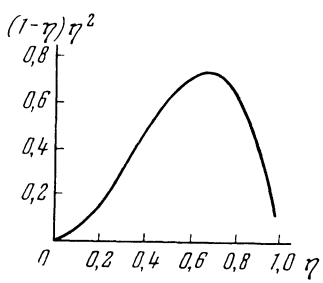


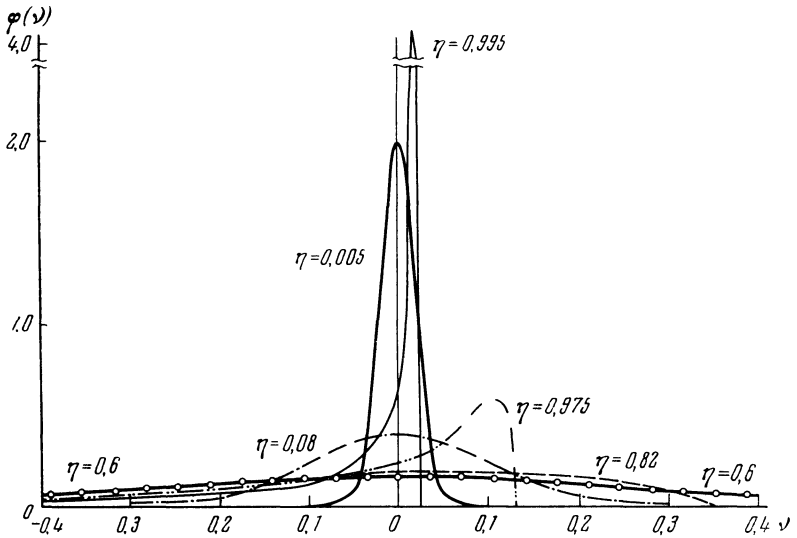
Рис. 195. Вспомогательная диаграмма

Точки кривой рис. 195, соответствующие абсциссам 0,4 и 0,6, лежат на прямой, проходящей через начало координат. Такой же предварительный анализ показал, что тем самым обусловлено равенство средних квадратичных при соответствующих значениях аргумента η. В результате дальнейших численных расчетов были найдены кривые распределения для последовательно возрастающих значений η. В качестве исходного условия было принято, что при самом малом аргументе $\eta = 0{,}005$ среднеквадратичное отклонение равно 0,02. Показано, что до значения $\eta = 0{,}5$ отклонения непрерывно растут, причем их гауссовское распределение сохраняется. Это хорошо видно на рис. 196, где представлены три гауссовские кривые для $\eta = 0{,}005$; 0,08 и 0,06. В последнем случае среднеквадратичное отклонение высот от наивероятного достигло значения 0,25.

На рис. 195 видно, что вскоре после $\eta = 0{,}6$ кривая резко падает. Это означает, что чем больше положительная величина ν, тем меньшее приращение получают высоты волн в соответствующей части спектра. Напротив, при отрицательных ν приращения будут больше, чем при $\nu = 0$. На рис. 196 изображены три кривые, которые отвечают этой интересной области развития волн, именно: значениям наивероятных η: 0,82; 0,975; 0,995.

В полном согласии с наблюдениями в природных условиях наши вычисления показывают, что простое двумерное волнение, характеризовавшееся первой (острой) кривой, постепенно переходит в трехмерное, поскольку высоты в различных точках бывшего единого гребня описываются все более и более «размытыми» кривыми распределения. Так продолжается до значения $\eta = 0{,}6$. После этого своеобразного рубежа начинается обратный процесс: кривые распределения постепенно сужаются, и на конечной стадии приобретают форму, еще более острую, чем начальная. На рис. 197 кривая *1* дает представление о том, как меняется среднеквадратичное отклонение при различных значениях η. Однако эта характеристика недостаточно показательна по отношению к кривым, резко отличающимся от гауссовских. Поэтому на

рис. 197 приведена еще кривая *2*, которая характеризует заостренность вероятностных кривых. Ее ординаты показывают, какова ширина соответствующей кривой на высоте, равной $1/\sqrt{2}$ от максимальной ординаты этой кривой.



Риг. 196. Переход двумерных волн в трехмерные и снова в двумерные

Как видим, при развитии ветровых волн вероятностная кривая сперва сильно расширяется: от значения характеристики 0,03 до значения 0,41 приблизительно при $\eta = 0{,}5$. После этого кривая распределения сужается, и на конечной стадии острый пик кривой характеризуется числом 0,01.

В природе нельзя наблюдать резкого обрыва кривой, как на рис. 196. Но продление кривых в сторону возрастающих ν должно происходить не за счет нарастания энергии отдельных ветровых волн, а за счет интерференции. Действительно, когда от нашей простой схемы удастся перейти к полному статистическому анализу развития волн, будет учтено, что весьма вероятны волны, мало отличающиеся одна от другой по длине. Более длинная волна должна догонять более короткую, интерферировать с ней и уходить вперед. При этом высота волн удвоится без нарушения законов сохранения энергии. На основании § 10 такая волна двойной высоты будет кинематически устойчива на всех стадиях развития волн, после значения $\eta = 0{,}18$: отношение высоты простых волн к длине будет заведомо меньше $^1/_{14}$; следовательно, это отношение у волны удвоенной высоты не выйдет за предел $^1/_7$. Устойчивы и промежуточные значения η. Будущие детальные исследования, несомненно, покажут, что вероятность подобного события при движении *трехмерных* волн должна быть меньше: «догоняющая» холмообразная волна может пройти вперед по различным путям относительно вершин и впадин «догоняемых» волн. Столь же очевидно, что ничтожно мала вероятность утроения высот

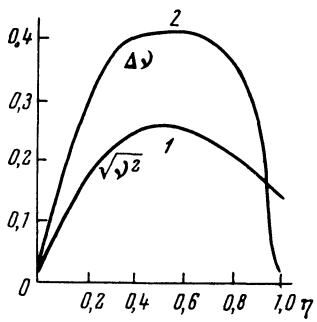


Рис. 197. Характеристики распределения волн

простых волн при движении их с неодинаковыми скоростями по описанной схеме.

До настоящего времени еще не совсем ясен вопрос: почему трехмерные волны, подходящие к береговой линии из открытого моря, приобретают *двумерную форму*, которой всегда обладают волны *прибоя*? Наиболее правдоподобной является гипотеза, высказанная Ю. М. Крыловым. Этот автор полагает, что склоны трехмерных волн, направленные под различными азимутами, испытывают поворот вокруг вертикальной оси по тем же причинам, по каким волны, идущие в различных направлениях в открытом море, направляются близко к нормали к береговой черте, когда подходят к ней (в соответствии с соотношениями В. В. Шулейкина, которые приведены в § 30).

§ 35. Роль «волнового» течения при сгонно-нагонных явлениях

В § 7 было сказано о важной поправке к теории волн, которую внес еще в XIX в. Стокс [5]. Этим автором было показано, что частицы воды на волне, при движении с потенциалом скоростей, не могут описывать замкнутые орбиты: на движение по замкнутым орбитам непременно налагается *поступательное* движение со скоростью, которая выражается по Стоксу формулой (68). Выше (см. § 9) говорилось, что в действительности эта, стоксова, скорость не постоянна во времени, что она пульсирует в пределах одного периода волн и тем самым вносит существенные изменения даже в самый профиль ветровых волн и мертвой зыби. Но сейчас мы не будем касаться этих деталей кинематики волн, а ограничимся выражением (68), которое дает скорость «волнового» течения, осредненную по времени в пределах одного периода волн. Проинтегрировав выражение (68), умноженное на толщину dz элементарного слоя воды, в пределах от $z = 0$ до $z = \infty$, легко получить выражение для полного потока «волнового» стоксова течения, который проходит под единицей длины, воображаемой на поверхности моря.

Как ни странно, никто не думал о практическом значении этого, «волнового», потока, пока не появилась работа Е. Г. Никифорова, в которой впервые было обращено пристальное внимание на этот поток, неразрывно связанный с волнением [62]. Но автор цитированной работы впал в другую крайность: он отрицает существование дрейфового течения, описываемого уравнениями В. Экмана, сводит весь перенос вод при ветре к «волновому» потоку, а так называемую глубину трения, определяемую по Экману уравнением (48) гл. I, — к глубине, на которую практически проникает волнообразное движение водных частиц. Несмотря на эти крайности, работа Никифорова сыграла важную роль, дав толчок к детальному анализу всех видов поступательного движения вод в море.

Такой детальный анализ совместного действия дрейфового, «волнового» и градиентного течений был проведен Р. Н. Ивановым и С. Т. Каминским. Обнаружилось, что наибольшее значение имеет этот анализ по отношению к сгонно-нагонным явлениям, и притом далеко не одинаковое в различных местных условиях [63].

В гл. I было показано, что — на основании уравнений В. Экмана — надо рассматривать установившийся наклон поверхности моря при нагоне близ отвесного берега как результат равновесия между притоком вод в дрейфовом потоке и оттоком их от берега в потоке градиентном. Исходя из этих уравнений, Р. Н. Иванов записывает выражение для угла наклона γ_d уровня моря при дрейфовом нагоне

$$\gamma_d = -\frac{2\tau}{g}\sqrt{\frac{\omega}{\delta\mu}}\,\frac{f_1}{f_2}\sin\beta. \qquad (368)$$

Здесь для краткости введены обозначения для функций Экмана [см. гл. I, уравнения (55)], [83]:

$$f_1 = \frac{\operatorname{ch} 2aH + \cos 2aH - 2\operatorname{ch} aH \cos aH}{\operatorname{ch} 2aH + \cos 2aH}, \tag{369}$$

$$f_2 = \frac{\operatorname{sh} 2aH - \sin 2aH}{\operatorname{ch} 2aH + \cos 2aH}. \tag{370}$$

Как всегда, сохраняется обозначение $a = \sqrt{\frac{\delta\omega}{\mu}}$. В (368) τ — касательное напряжение, создаваемое ветром на поверхности воды; δ — плотность воды; g — ускорение в поле тяжести; ω — произведение угловой скорости враще-

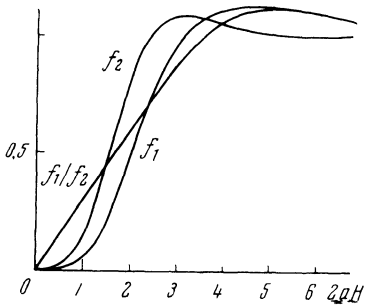


Рис. 198. Функции f_1 и f_2 и f_1/f_2

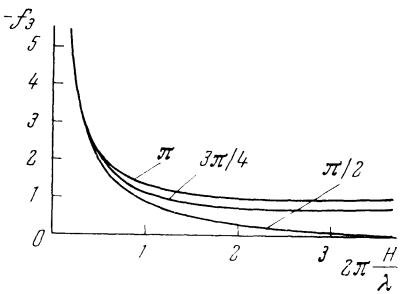


Рис. 199. Функция f_3 при трех направлениях ветра

ния Земли на синус широты; μ — коэффициент турбулентной вязкости в течениях; β — угол между мористым направлением нормали к береговой черте и скоростью ветра; H — глубина моря, которую приходится пока считать постоянной. В настоящее время есть надежные эмпирические данные, позволяющие выразить и τ, и μ через скорость ветра V. Воспользовавшись ими, Р. Н. Иванов подставляет все известные числовые коэффициенты в (368) и получает рабочую формулу для вычисления угла γ_d, создаваемого чистым дрейфом и градиентным течением близ берега:

$$\gamma_d = -0{,}264 \cdot 10^{-6} V \frac{f_1}{f_2} \sin\beta \ рад. \tag{371}$$

Изменения двух функций — f_1, зависящей от дрейфового потока, и f_2, зависящей от потока градиентного, — при изменениях общего для них аргумента $2aH$ также были вычислены Р. Н. Ивановым и представлены в виде кривых, воспроизведенных на рис. 198. На том же рисунке изображена кривая, описывающая поведение функции f_1/f_2 при изменениях аргумента $2aH$.

Поскольку известна зависимость (квадратичная) μ от скорости ветра V и известны числовые значения δ, ω, Иванов пользуется для вычисления аргумента $2aH$ формулой

$$2aH = 0{,}692 \frac{H}{V}. \tag{372}$$

При *малых* значениях этого аргумента все функции, описываемые диаграммой рис. 198, могут быть выражены простыми формулами

$$f_1 = \frac{5}{6}(aH)^4, \quad f_2 = \frac{4}{3}(aH)^3, \quad \frac{f_1}{f_2} = \frac{5}{8} aH. \tag{373}$$

При вычислении f_1 и f_2 эти формулы дают погрешность не более 2,5%, если $aH < 0{,}4$, и при вычислении f_1/f_2 — такую же самую погрешность, если $aH < 1{,}2$.

Наклон уровня моря γ_s под действием «волнового» течения Р. Н. Иванов вычисляет, приравнивая друг другу стоксов «волновой» поток и поток градиентный, вызванный этим наклоном уровня воды. После преобразований искомый угол γ_s выражается простой формулой

$$\gamma_s = \frac{\pi\bar{\omega}}{g}\sqrt{\frac{\delta\bar{\omega}}{\mu}}\,\frac{h^2}{T}\,\frac{f_3}{f_2}\ рад, \tag{374}$$

в которой f_2 — прежняя функция, описывающая градиентный поток, а f_3 — новая функция, описывающая поведение стоксова «волнового» потока при изменениях иного аргумента $2\pi\frac{H}{\lambda}$ и изменениях угла α между мористым направлением нормали к береговой черте и направлением, в котором подходят волны:

$$f_3 = \cos\alpha \cdot \operatorname{th}\left(2\pi\frac{H}{\lambda}\right). \tag{375}$$

Этот угол α Р. Н. Иванов связывает с углом β, пользуясь теорией рефракции волн на мелководье, изложенной в § 30. Что касается выражения h^2/T, входящего в (374), то его он вычисляет, пользуясь рабочими диаграммами В. В. Шулейкина для предельно-развитого волнения, как для наиболее опасного (см. § 26).

На рис. 199 представлены три кривые, вычисленные Р. Н. Ивановым применительно к трем различным значениям угла β (цифры у кривых), по которому он определял α для формулы (375).

Подставив в (374) числовые значения, которые могли быть определены, Р. Н. Иванов вывел в результате рабочую формулу для вычисления угла γ_s наклона поверхности моря, возникающего при равновесии между чисто «волновым» потоком и потоком градиентным:

$$\gamma_s = 0{,}211\cdot 10^{-3} V^2 \frac{f_3}{f_2}. \tag{376}$$

Р. Н. Ивановым и его соавторами были проделаны вычисления по формулам (371) — для чисто дрейфового нагона и (376) — для чисто «волнового» нагона применительно к различным местным условиям. Обнаружилось следующее: а) в океане и глубоком море наклон поверхности моря, вызываемый «волновым» потоком, мал по сравнению с наклоном, который вызывается дрейфовым потоком; б) на морях средней глубины удельный вес того и иного явления зависит от скорости действующего ветра: при слабых ветрах сохраняются результаты, полученные применительно к глубоким морям и океану; при сильных ветрах преобладает наклон уровня моря, который вызван «волновым» потоком; дрейфовый поток играет второстепенную роль, и при штормах им можно пренебрегать по сравнению с потоком «волнового» происхождения; в) на мелководных морях только при самых слабых ветрах дрейфовый поток практически соизмерим с потоком «волновым». При ветрах средней силы и в особенности штормовых очень сильный нагон вызывается «волновым» потоком, а дрейфовым нагоном в таких условиях можно пренебрегать.

Примером мелководных морей служит Азовское море: там уже при скоростях ветра более 10 *м/сек* нет надобности учитывать роль дрейфового нагона; напротив, нагон под действием «волнового» потока может оказаться очень сильным.

На рис. 200 представлены три эпюры, показывающие распределение скоростей течения при нагоне, вызванном у восточного побережья Азовского мо-

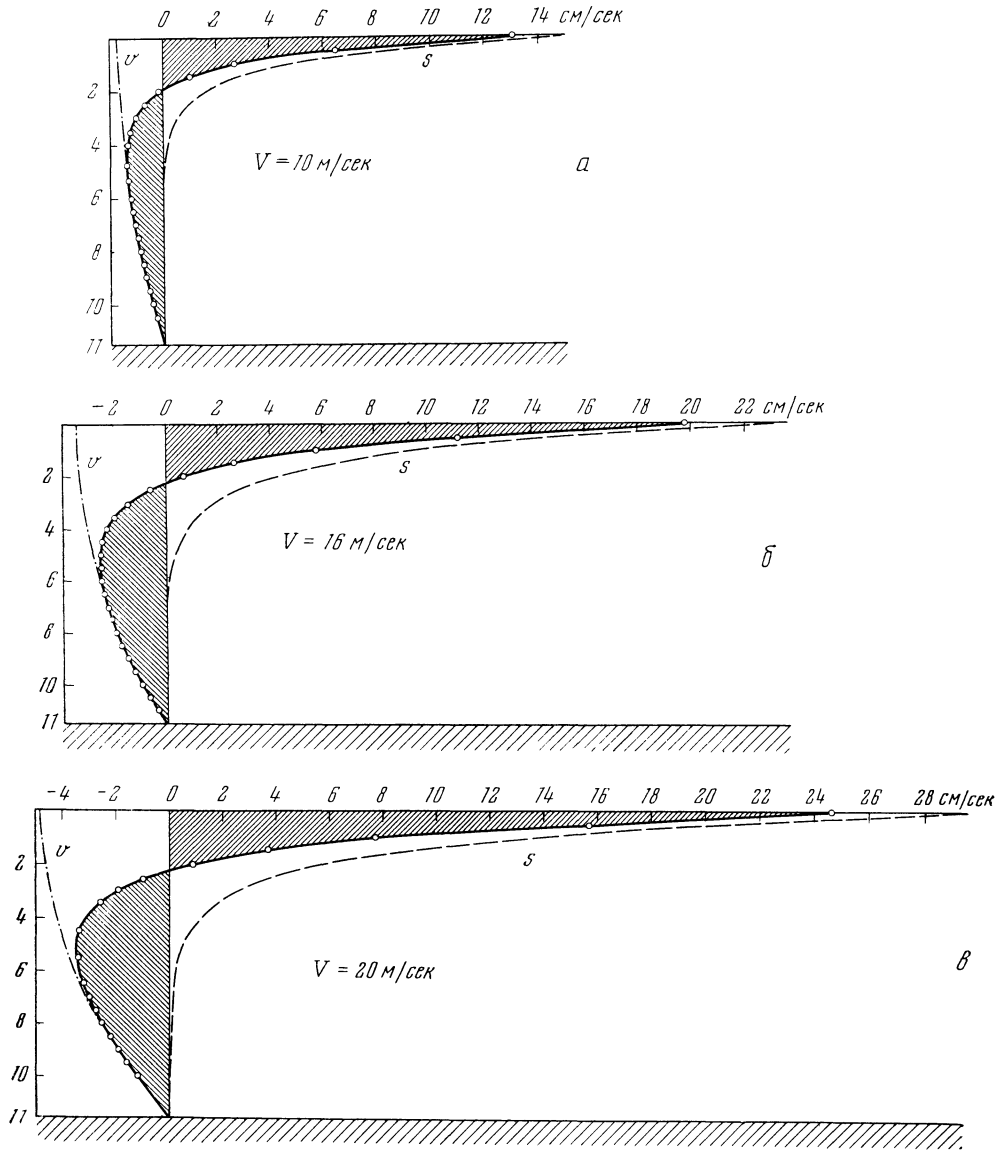


Рис. 200. Три эпюры скоростей на различных уровнях при нагоне

ря наиболее опасным по направлению ветром, скорость которого равна 10, 16 и 20 *м/сек* (рис. *а*, *б*, *в* соответственно). Пунктиром обозначено геометрическое место концов векторов «волнового» течения, штрих-пунктиром — концов векторов градиентного течения и сплошной кривой — концов векторов результирующих скоростей течения. Эти эпюры были вычислены В. А. Лукьяновым [64] по формулам Р. Н. Иванова и В. Экмана. Кроме того, им были вычислены подъемы уровня при нагонах, вызванных главным образом волновым течением, в той же точке Азовского побережья. Эффектом дрейфа можно было вполне пренебречь. Повышение уровня у берега вычислялось по формуле

$$\Delta\xi = \gamma_s L. \qquad (377)$$

Здесь L — протяжение, на котором можно считать угол наклона γ_s постоянным, пренебрегая (в случае Азовского моря) сравнительно небольшим протяжением от наветренного берега до места, на котором можно считать волнение установившимся при заданной скорости ветра. Для пяти наиболее надежных записей мареографа ниже приведены сопоставления зарегистрированных повышений уровня с вычисленными:

Дата нагонов . . .	4. II 1959 г.	23. VIII 1960 г.	19. VIII 1961 г.	4. IX 1963 г.
По мареографным записям, *см*	20	106	50	32
Расчетные величины нагонов, *см*	20	99	52	29
Отклонения, *см* . . .	0	7	2	3

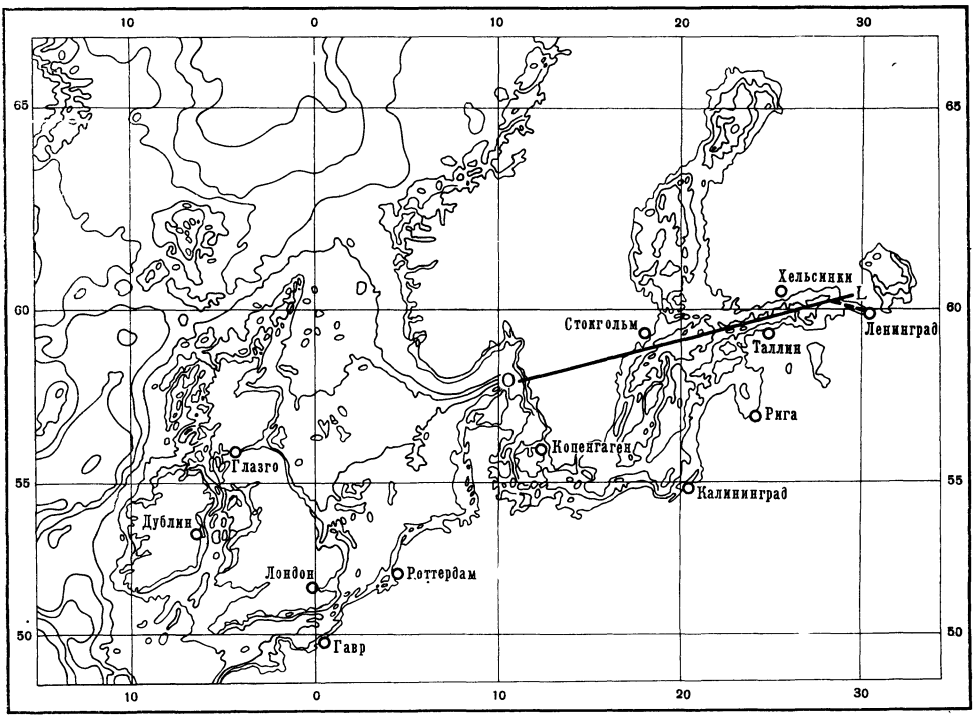


Рис. 201. Осевая линия Финского залива

Работа Е. Г. Никифорова [62] подала мысль Н. А. Лабзовскому, Л. Ф. Титову и другим авторам [65] пересмотреть чрезвычайно важный вопрос о причине ленинградских наводнений и об условиях, в которых они достигают наиболее опасных размеров. Эти наводнения никак нельзя было объяснить дрейфовым нагоном, так как известные формулы В. Экмана давали во всех случаях сильно преуменьшенные подъемы уровня воды в р. Неве. С другой стороны, после появления работы Е. Г. Никифорова, Л. Ф. Титов показал, что коэффициент корреляции между повышением уровня в восточной части Финского залива и высотой волн в его западной части весьма высок — он достигает 0,75. Получив рабочие формулы для расчета дрейфового и «волнового» нагона — (371) и (376),— Р. Н. Иванов и С. Т. Каминский произвели *количественную* оценку всех факторов, вызывающих опасный подъем уровня в восточном конце Финского залива и в р. Неве [66]. Результаты их исследования очень интересны и в принципиальном, и в практическом отношении. На рис. 201 представлена схематическая карта, заимствованная из

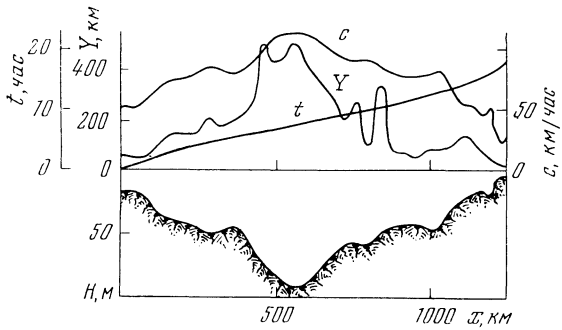


Рис. 202. Изменения различных величин вдоль оси залива

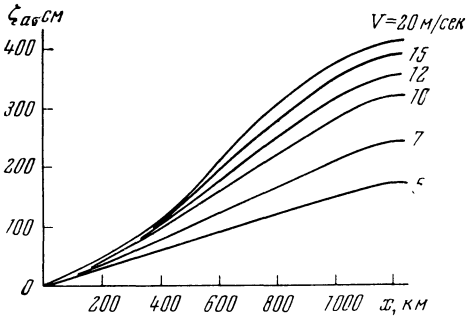


Рис. 203. Условный подъем уровня, вызванный дрейфовым нагоном

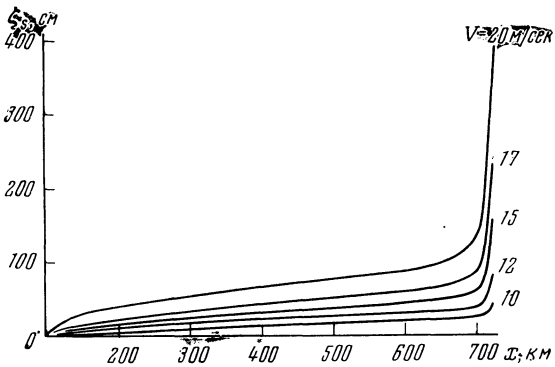


Рис. 204. Условный подъем уровня, вызванный волновым нагоном

работы [66]. Прямая OL проведена по оси Финского залива; она указывает наиболее опасное направление ветра, вызывающего наводнение.

На рис. 202, взятом из этой же работы, представлены: график изменения глубины моря H вдоль оси OL, изменение ширины моря Y при следовании вдоль этой оси, изменение скорости *с длинных* волн, которые могут заходить в Балтийское море и распространяться вдоль той же оси, и, наконец, график времен t, необходимых для прохождения такой волной расстояния x от начала отсчета O. Эта точка, принятая за начало отсчета пути, представляет собой проекцию западного конца Балтийского моря на ось OL.

На рис. 203 изображены подъемы уровня моря вдоль оси OL, вызванные одним лишь дрейфовым нагоном, при различных скоростях ветра, отмеченных близ каждой кривой, а на рис. 204 — подъемы уровня моря в точках вдоль оси OL, вызванные одним лишь «волновым» нагоном (по Р. Н. Иванову и С. Т. Каминскому). Как видим, действие обоих факторов проявляется по-разному: дрейфовый нагон растет довольно быстро на протяжении относительно глубокой части Балтийского моря и продолжает расти уже медленней на мелководье Финского залива; напротив, «волновой» нагон меньше сказывается в относительно глубоких районах Балтийского моря и стремительно нарастает на мелководье Финского залива.

Р. Н. Иванов и С. Т. Каминский тщательно проанализировали поведение уровня моря в Таллине и в Ленинграде с 14 по 16 октября 1955 г. Обнаружилось, что между наступлением пика поднявшегося уровня в этих двух точках существует явно выраженный сдвиг во времени, составляющий

примерно 6,8 часа. По диаграмме рис. 202 можно определить теоретическое значение срока Δt, необходимого для того, чтобы путь от Таллина до Ленинграда пробежала *длинная* волна. Кривая t дает значение $\Delta t = 6{,}4$ часа, т. е. значение, очень близкое к фактически наблюдавшемуся.

По кривой изменения уровня в Таллине авторы определили амплитуду длинной волны в этой точке ее пути, затем воспользовались формулой Грина (58) гл. II и вычислили амплитуду длинной волны, проникшей в мелководную и узкую Невскую губу. Так был учтен вклад этой волны в повышение уровня воды в Ленинграде.

Зная скорости ветра в различных точках вдоль оси OL в разные моменты времени, авторы вычислили составляющие нагона вод в Ленинграде, вызванные дрейфовым и «волновым» потоками, для двух случаев: когда в Ленинграде была зарегистрирована скорость ветра 11 и 9,5 *м/сек*.

Для первого случая получилось:

	см
Подъем уровня в Таллине за вычетом влияния длинной волны	60
Повышение уровня в Ленинграде за счет длинной волны	91
Разность уровней между Ленинградом и Таллином за счет дрейфового нагона	70
Разность тех же уровней за счет «волнового» нагона	70
В общей сложности	291

Наблюдавшийся подъем уровня (на пике) был равен 292 *см*. Как видим, вычисления дали отличные результаты и позволили расчленить *три составляющие* общего подъема уровня в Ленинграде.

Для второго случая получилось не столь четкое совпадение:

	см
Подъем уровня в Таллине	30
Разность уровней между Ленинградом и Таллином за счет дрейфового нагона	70
Разность тех же уровней за счет «волнового» нагона	20
В общей сложности	120

Наблюдения дали 102 *см*.

Р. Н. Иванов и С. Т. Каминский проанализировали также происхождение штормовых наводнений на южном побережье Северного моря, вызвавших большие бедствия в феврале 1953 г. [67].

Как известно, эти стихийные бедствия заставили многих исследователей в западноевропейских институтах рассмотреть различные схемы гидродинамических явлений, способных создать наблюдавшиеся громадные повышения уровня моря у берегов [68]. В нашей стране также была сделана попытка объяснения катастрофического наводнения, исходящая из представлений теории В. Экмана и из анализа синоптической обстановки [69] на Северном море в соответствующие дни.

В отличие от предшественников, Иванов и Каминский остановили свое внимание не на явлениях обычного ветрового дрейфа и не на каких-либо длинных волнах, вторгающихся с Северной Атлантики, а на стоксовом волновом потоке. Вычисления наклона поверхности моря производились по тем же формулам, о которых говорилось выше. В данном случае ветер был практически чисто северный, и авторы наметили меридиан 3° в. д. в качестве оси Северного моря, вдоль которой направлены воздушные потоки над морем.

На рис. 205 внизу представлен осредненный рельеф дна, причем глубины отмечены справа. Ось абсцисс ориентирована с юга на север. Кривые ζ вычислены Ивановым и Каминским применительно к равномерным полям ветра над всем морем; цифры у кривых — скорости ветра в километрах в секунду.

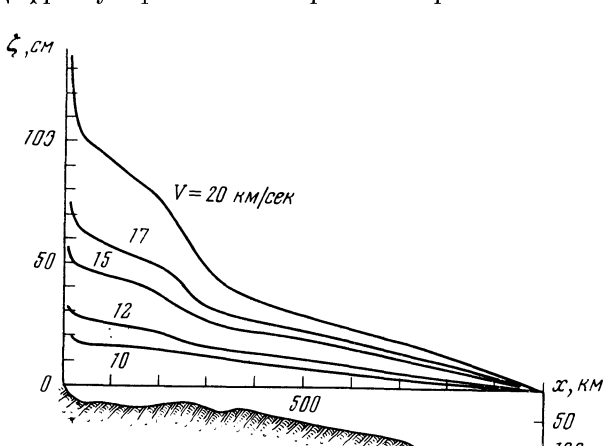


Рис. 205. Рельеф дна Северного моря (внизу) и подъем уровня моря в различных точках при различных скоростях ветра

На рис. 206 сплошная кривая представляет повышение ζ уровня Северного моря вдоль осевого меридиана — от северной границы моря (справа) до порта Остенде (слева),— вычисленные Ивановым и Каминским применительно к синоптическим условиям 1 февраля 1953 г.

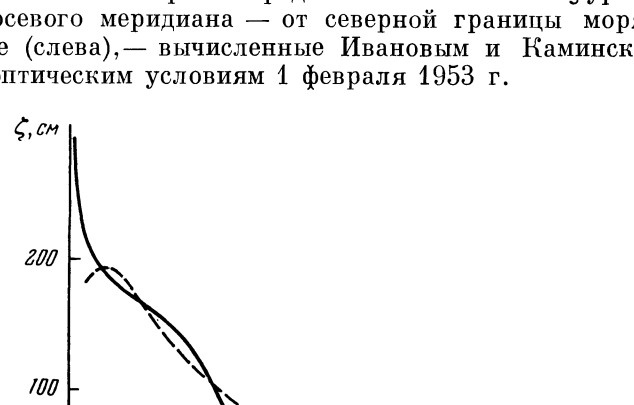


Рис. 206. Вычисленные (сплошная кривая) и наблюдавшиеся (пунктир) подъемы уровня в разных точках меридиана Остенде

У северной границы моря скорость ветра равнялась 22 *м/сек*; на расстоянии около 700 *км* от Остенде она уже достигала 23 *м/сек*; на расстоянии 500 *км* — 24 *м/сек* и, наконец, на расстоянии от 300 *км* и до самого Остенде — держалась равной 26 *м/сек*. При вычислениях Иванов и Каминский учитыва-

ли профиль дна, осредненный по параллелям,— тот, который изображен на рис. 205.

Сплошная кривая, вычисленная ими, была сопоставлена с пунктирной кривой (рис. 206), которую они построили по данным наблюдений за уровнем моря на береговых и островных станциях на основании материалов наблюдений, приведенных в статье К. Н. Федорова [69].

Как видим, пунктирная кривая проходит в удовлетворительном согласии с теоретической (сплошной). На лучшее совпадение этих кривых нельзя было претендовать по следующим причинам: а) пунктирная кривая построена на основании наблюдений за уровнем на различных расстояниях (вдоль параллелей) от осевого меридиана 3° в. д., и всякий пересчет к точкам меридиана сопряжен с погрешностями; б) в работе Иванова и Каминского невозможно было учесть сток вод из Северного моря на юго-запад через Дуврский пролив. По-видимому, именно влияние этого стока отразилось на некотором снижении пунктирной кривой близ самого побережья.

Во всяком случае надо признать, что теоретическая схема Иванова привела и в этом важном примере к результатам, близким к истине.

§ 36. Некоторые методы измерения элементов волн, применяемые на береговых станциях

Отсылая за систематическими описаниями к обширной океанографической литературе [70], мы остановимся здесь только на некоторых методах, описание которых можно найти лишь в научной периодической печати. Рассмотрим прежде всего метод А. П. Лоидиса [71], позволяющий весьма просто и удобно измерять *длину волны*, *ее период*, *скорость*, *направление движения и высоту*.

В прибрежной зоне, в виду станции, ставятся в море три вехи (или три буйка) на якорях. Устанавливаются они по вершинам A, B и C равнобедренного прямоугольного треугольника (рис. 207), один из катетов которого параллелен береговой черте NR, а другой, следовательно, направлен по нормали AN.

Наблюдатель замечает момент времени t_1, когда какой-либо ясно выраженный гребень волны проходит через веху A, и моменты t_2 и t_3 прохождения той же волны через вехи B и C.

Разумеется, порядок пересечения вех волной зависит от направления движения волны и потому в каждом отдельном случае может быть иной. Обозначим через t_u момент времени (из трех перечисленных), который соответствует пересечению *последней* очередной вехи. Наблюдателю придется еще заметить момент времени t_0, когда через ту же последнюю веху пройдет *следующий*, новый гребень волны.

На рис. 207 положения одного и того же гребня в моменты t_1, t_2 и t_3 изображены соответственными прямыми AM, BD и EC. Направление движения волны выражается вектором AP, перпендикулярным к ним и составляющим некоторый угол α с нормалью AN.

Из геометрических соотношений, вытекающих из построений рис. 207, следует, что треугольник AFB равен треугольнику BDC, а стало быть,

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{BF}{FA} = \frac{FE}{FA} = \frac{AE - AF}{FA}.$$

Но на небольшом участке, занятом треугольником, скорость распространения волны можно считать постоянной, а стало быть, отношения отрезков легко заменить отношением промежутков времени, потребных для их прохождения волной. Иными словами,

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{t_3 - t_2}{t_2 - t_1}.$$

С другой стороны, за время $t_0 - t_u$ волна успевает переместиться на расстояние, равное ее длине λ, а за время $t_3 - t_1$ только на расстояние AE. Но AE также легко определить, если известны длина гипотенузы треугольника $AC = b$ и угол α, найденный по предыдущей формуле. В конечном счете

$$\lambda = b\,\frac{t_0 - t_u}{t_3 - t_1}\sin(45^\circ + \alpha), \quad c = \frac{b\sin(45^\circ + \alpha)}{t_3 - t_1}.$$

Как видим, для определения длины волны λ и угла α, характеризующего направление движения, не требуется знать абсолютных величин промежутков времени $t_3 - t_2$, $t_2 - t_1$ и $t_0 - t_u$; необходимо знать только *отношение* этих величин.

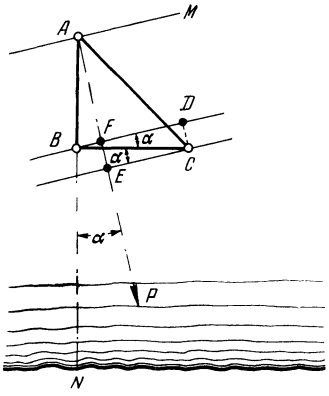


Рис. 207. Треугольник А. П. Лоидиса

Следовательно, если требуется определить только длину волны и направление ее движения, то для измерения этих промежутков времени можно либо отсчитывать удары пульса, либо просто считать про себя, называя цифры с достаточно постоянным темпом счета.

Разумеется, если необходимо определить также *период* волны $T = t_0 - t_u$ и скорость c, то для измерения времени необходимо пользоваться *секундомером* (особенно удобен в данном случае секундомер с двумя стрелками). Но удобнее всего работать с *метрономом*, отбивающим секунды.

К сожалению, в условиях открытого моря слабым местом методики Лоидиса оказались *вехи*, которые очень часто срывались во время штормов. Вот почему Шулейкиным было предложено видоизменение метода Лоидиса, заключающееся в следующем.

Представим себе, что в поле зрения трубы или монокуляра запечатлелись те места, на которых видны три вехи Лоидиса. Тогда, очевидно, сами вехи оказались бы лишними. Но, с другой стороны, ничто не мешает предвычислить эти места в плоскости, в которой обычно помещают окуляр-микрометр, и просто нанести на плоское стекло соответствующие точки.

Такая операция была проделана Шулейкиным, причем монокуляр был наведен на тот именно участок поверхности моря, где должны стоять воображаемые три вехи. С этой целью в море был послан ялик, пошедший по заданному курсу и остановившийся на требуемом расстоянии от берега. Само расстояние измерялось посредством секстана — по угловому расстоянию ялика от черты горизонта. После того как монокуляр был наведен на ялик, пришедший в требуемую точку, осталось только основательно закрепить прибор в этом положении навсегда.

Для быстроты определения длины волны и направления движения Г. П. Пономаренко и С. В. Доброклонский построили номограммы по формулам Лоидиса. Тем самым работа весьма упростилась.

Описанный волномер очень удобен для измерения элементов *штормовой зыби*, так как совершенно не требуется, чтобы в его поле зрения поместился сколь бы то ни было значительный отрезок волны. Что касается скорости распространения такой зыби, то и она легко и надежно может быть определена, ибо расстояние между воображаемыми вехами может быть легко доведено до 20 *м* при условии, что они «поставлены» на воображаемом расстоянии 750 *м* от наблюдателя, а монокуляр взят 12-кратный.

Но для измерения элементов *обычных* ветровых волн (трехмерных и не слишком длинных) более удобным оказался другой простой прибор, также построенный В. В. Шулейкиным и усовершенствованный С. В. Доброклонским и Р. Н. Ивановым [72].

Здесь в поле окуляра помещена сетка (рис. 208), построенная с таким расчетом, чтобы при данном угле наклона трубы к горизонту кривые представляли собой проекции окружностей на поверхность моря. Расстояние между каждыми двумя соседними воображаемыми окружностями зависит, разумеется, от удаленности наблюдательного пункта от моря, или, другими словами, от высоты наблюдательного пункта над поверхностью моря (так как угол

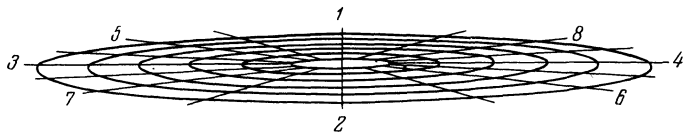


Рис. 208. Сетка волномера В. В. Шулейкина

наклона трубы фиксируется у всех моделей постоянным). Зная высоту наблюдательного пункта над морем, легко определить по таблице константу прибора для данного наблюдательного пункта — расстояние, соответствующее промежутку между соседними линиями сетки. Через центр окружностей проведены на сетке 16 радиусов, соответствующих различным румбам.

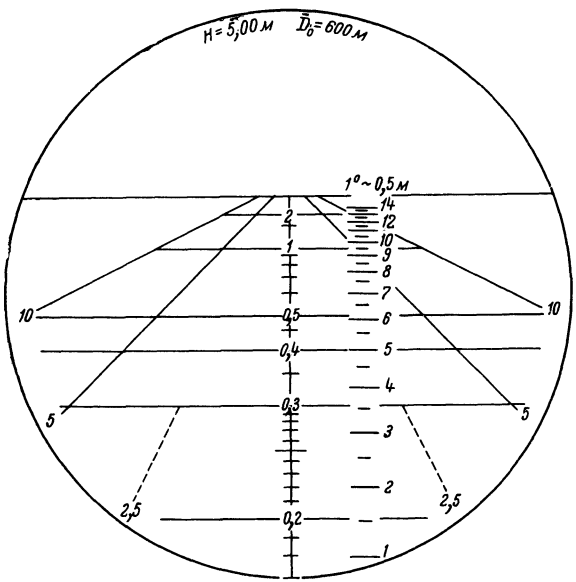


Рис. 209. Сетка перспектометра Р. Н. Иванова

Многолетние работы позволили Р. Н. Иванову значительно усовершенствовать волномерную методику, в частности оптические волномеры. Наиболее совершенным и наиболее распространенным следует считать его прибор, основанный на принципе перспектометра. На рис. 209 в сильно увеличенном виде изображена сетка, помещаемая перед окуляром этого прибора. Горизонтальные прямые представляют собой геометрические места точек, удаленных от наблюдателя на 200, 300 *м*,...; 1, 2, 3 *км*,... Наклонные прямые, сходящиеся в перспективе, в действительности перпендикулярны к прямым первого семейства. Расстояния между ними равны 10 *м* [73].

Если волны идут по направлению, близкому к нормали к береговой черте, то наблюдатель поворачивает трубу прибора с таким расчетом, чтобы гребни волн шли вдоль прямых первого семейства. Тогда нетрудно будет опреде-

лить длину волны, замечая положения двух последовательных гребней на сетке и отсчитывая соответствующие цифры при прямых первого семейства и интерполируя между ними.

Если волны идут приблизительно вдоль берега, то удобней пользоваться прямыми второго семейства. После соответствующего небольшого поворота прибора вокруг вертикальной оси можно будет измерить длину волн, отсчитав цифры при прямых второго семейства и интерполируя между ними.

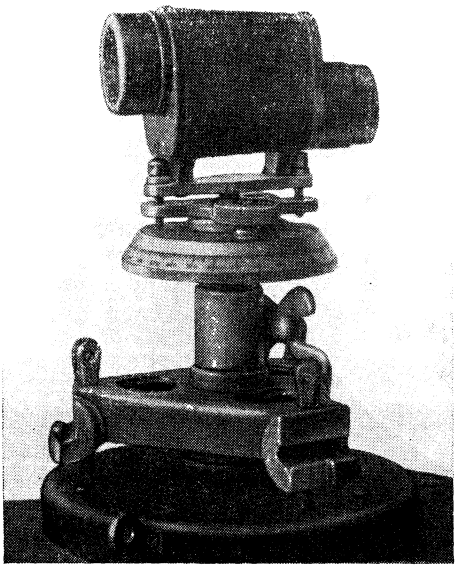


Рис. 210. Общий вид перспектометра Р. Н. Иванова

И в том и в другом случаях легко также определить скорость распространения волн: необходимо лишь засечь на секундомере время, требующееся для прохождения волны между двумя прямыми окулярной сетки, и разделить расстояние, отсчитанное по сетке, на измеренный промежуток времени.

Для измерения скорости поверхностного течения с берегового наблюдательного пункта наблюдатель, забросивший с берега или со шлюпки поплавок, должен следить за его прохождением в поле сетки перспектометра Иванова. Если скорости течения невелики, то достаточно проследить за поплавком в пределах поля зрения, не изменяя направления оптической оси прибора. Однако чаще всего приходится в определенные моменты времени отмечать расстояние до поплавка по сетке перспектометра и азимут направления на поплавок, отсчитываемый по азимутальному кругу прибора при визировании поплавка на осевую линию перспектометра.

Тот же прибор Иванова позволяет определять и *высоту волн*. Для этого на его окулярной сетке нанесена своеобразная «шкала переменного масштаба», видная на рис. 209 справа. Поворачивая прибор вокруг вертикальной оси, направляют его оптическую ось так, чтобы вдоль этой шкалы происходили вертикальные колебания буйка, поставленного на рейде, или — при отсутствии такого специального предмета — колебания какого-либо клочка белой пены, какой-либо щепки, чайки или иного предмета, качающегося на волне. Шкала так рассчитана, что независимо от расстояния до буйка или до случайного качающегося предмета промежуток между соседними делениями шкалы соответствует вертикальному расстоянию 0,5 *м*.

На рис. 210 изображен общий вид перспектометра Иванова. В настоящее время он широко распространен на морских обсерваториях и гидрометеорологических станциях. Измерив высоту и длину волны, можно судить о ее крутизне, пользуясь приведенным соотношением между a/λ, b/λ и синусом максимального угла наклона касательной к трохоиде.

Но в действительности форма волны всегда более или менее отличается от трохоидальной даже тогда, когда волны *двумерные*, идущие параллельными рядами. В случае *трехмерных* волн, находящихся под воздействием сильного ветра, говорить о трохоидальном профиле совсем не приходится, а потому и крутизну волны нельзя определить исходя из известных длины и высоты волны.

Между тем иногда бывает необходимо знать именно крутизну волн, а не какие то бы ни было другие их элементы. В частности, это весьма важно для

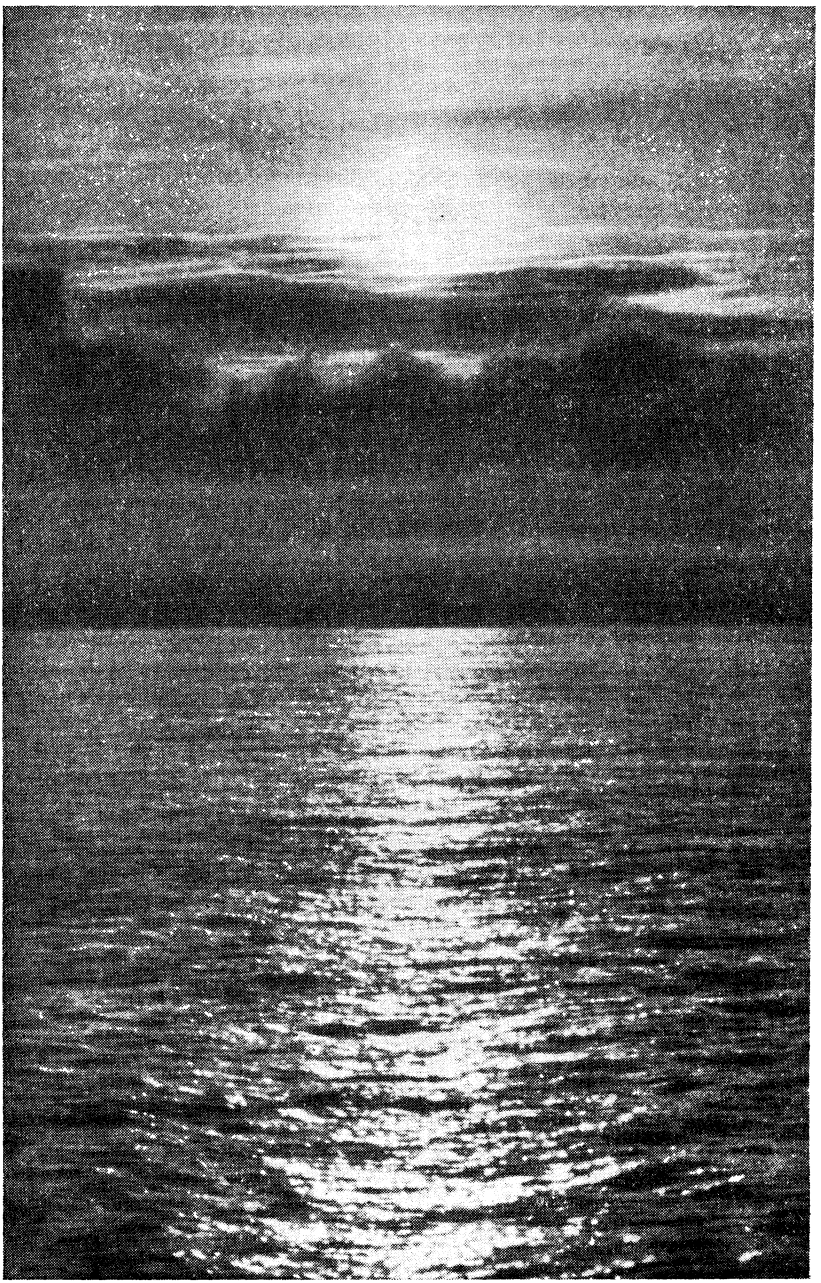


Рис. 211. Блики на волнах под солнцем

расчета поплавков гидросамолетов и для оценки их общих мореходных качеств.

Нечего и говорить о том интересе, который имеет изучение крутизны волн с точки зрения волновой динамики: хотя бы с точки зрения проблемы о наибольшей возможной волне и проблемы об устойчивости движения волны, о возникновении бурунов, барашков и т. п.

Наконец, измеряя крутизну волн, можно будет подойти к разрешению задачи о действии *масла* на взволнованную поверхность — о *гашении* мелких и наиболее опасных волн жировыми веществами (см. стр. 276—286).

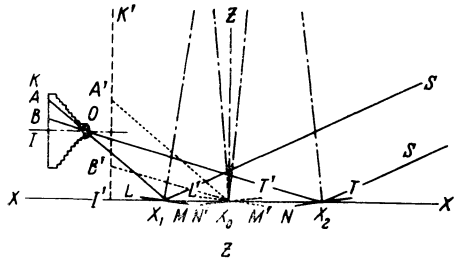


Рис. 212. Путь лучей

Для всех подобных исследований может оказаться полезным *оптический метод измерения крутизны волн*, предложенный В. В. Шулейкиным [74]. Сущность этого метода чрезвычайно проста: он основан на наблюдении световых бликов, возникающих на поверхности моря под солнцем или луной. Если бы солнечные лучи падали на совершенно спокойную (зеркальную) поверхность воды, то наблюдатель увидел бы на этой поверхности одно отраженное изображение светила в точке, отстоящей на такое же угловое расстояние вниз от горизонта, на какой угловой высоте стоит в данный момент светило над горизонтом.

Обычно в природе вместо одного такого изображения по волнам бежит целая светлая полоса бликов, которую поэты называют «дорогой к счастью» (рис. 211). Она свидетельствует об отражении Солнца от очень большого числа зеркал — от различно наклоненных элементов морских волн.

Проследив за ходом световых лучей, можно найти связь между положением светового блика на поверхности моря и наклоном соответствующего элемента волны.

Но для практических целей такая аналитическая форма решения задачи является неудобной: соотношения получаются весьма громоздкими, во всяком случае *синоптической картины* явления в данном районе они не дают.

Для создания такой картины волнения лучше всего может служить *сетка изоклин* (кривых равного наклона волны), проектируемая на поверхность моря в том месте, где под светилом ложится полоса бликов.

Кроме того, положение каждого блика на поверхности моря зависит не только от наклона элемента волны, но и от направления субнормали к нему, совпадающего (для двумерных волн) с направлением, в котором движется данный элемент волны. В дальнейшем мы будем называть это направление *азимутом* волны, отсчитывая его от прямой, идущей под солнечным диском от горизонта к наблюдателю.

Следовательно, кроме кривых равного наклона волны (изоклин), надо построить еще кривые одинаковых азимутов (изогоны). Тогда такая сетка позволит судить о всей картине по одному только простому фотографическому снимку или даже по одному взгляду в трубу, о конструкции которой будет сказано ниже.

Построение сеток изоклин и изогон с помощью одного лишь анализа оказалось задачей неоправданной сложности, а потому Шулейкин применил здесь другой способ, связанный с экспериментом и основанный на одном очень простом и любопытном геометрическом соотношении.

Предположим сначала для простоты, что волны бегут параллельными рядами в направлении оси XX, изображенной на рис. 212, и что на фотографическую пластинку IK попали в точках A и B изображения светлых бликов га

элементах волн LM и NT, в которых отражается солнечный диск (SX_1 и SX_2 — направления солнечных лучей).

Вообразим в произвольной точке X_0 на прямой XX подвижное зеркальце, а на некотором расстоянии от него (X_0I') — вертикальный экран $I'K'$. Дадим зеркальцу такое положение $L'M'$, чтобы оно оказалось параллельным элементу волны LM. Тогда на экране $I'K'$ появится светлое пятно A', причем совершенно очевидно, что треугольник $X_0I'A'$ подобен треугольнику OIA и, значит,

$$A'I' : X_0I' = AI : OI.$$

Повернув затем зеркальце в положение $N'T'$ параллельно элементу волны NT, получим на экране другое светлое пятно B', положение которого определится аналогичным соотношением

$$B'I : X_0I' = BI : OI.$$

Из двух этих соотношений найдем, что

$$B'I' : A'I' = BI : AI,$$

т. е. *пропорции* картин на пластинке и на экране *одинаковы*.

Сколько бы ни было на линии XX светлых бликов, дающих на пластинке свои изображения по линии IK, мы всегда можем получить на экране $I'K'$ соответственные изображения, поворачивая зеркальце X_0 параллельно всем отражающим элементам волн.

Если последние бегут не по направлению XX, а по различным, совершенно произвольным направлениям, то на фотографической пластинке получатся изображения бликов в виде широкой дорожки. *Очевидно, ту же картину можно получить на экране $I'K'$, если зеркальце X_0 поворачивать не только вокруг горизонтальной оси YY (нормальной к чертежу в точке X_0), но и вокруг вертикальной оси ZZ на некоторый угол, равный азимуту волны. Масштаб картины на экране будет относиться к масштабу фотографического снимка, как расстояние X_0I' относится к фокусному расстоянию аппарата (OI).*

На основании описанного соотношения были построены сетки изоклин и изогон для различных высот Солнца над горизонтом. С обыкновенного теодолита была снята труба, и вместо нее на специальной оси, снабженной полукругом с градусами наклонения, было помещено небольшое зеркальце с черным крестом посредине. Роль Солнца исполняла электрическая лампочка, которую можно было устанавливать на различной высоте и лучи которой сводились линзой в параллельный пучок, падающий на зеркальце. По другую сторону теодолита на стене укреплялся бумажный экран, на который падало светлое пятно с черным крестом посредине. Дав зеркальцу некоторый постоянный уклон к горизонту (например 5, 10, 15° и т. д.), теодолит вращали вокруг вертикальной оси, отмечая на экране положения креста, соответствующие различным азимутам. Кривые, проведенные через полученные точки, представляли собой *изоклины*, соответствующие наклону «волн» в 5, 10° и т. д. Соединяя же точки, лежащие на различных изоклинах, но отвечающие одним и тем же углам поворота вокруг вертикальной оси, нетрудно было построить семейство *изогон*.

Нет необходимости строить сетки для высот Солнца, отличающихся одна от другой меньше известного предела, так как даже ограниченное число таких сеток — именно *шесть* — позволяет определять крутизну волн с точностью примерно около 1—2°.

Высот Солнца, больших 20°, следует избегать как по чисто фотографическим соображениям, так и потому, что при больших высотах полоса бликов теряет резкость своих очертаний и море кажется иногда равномерно покрытым искрящимися точками.

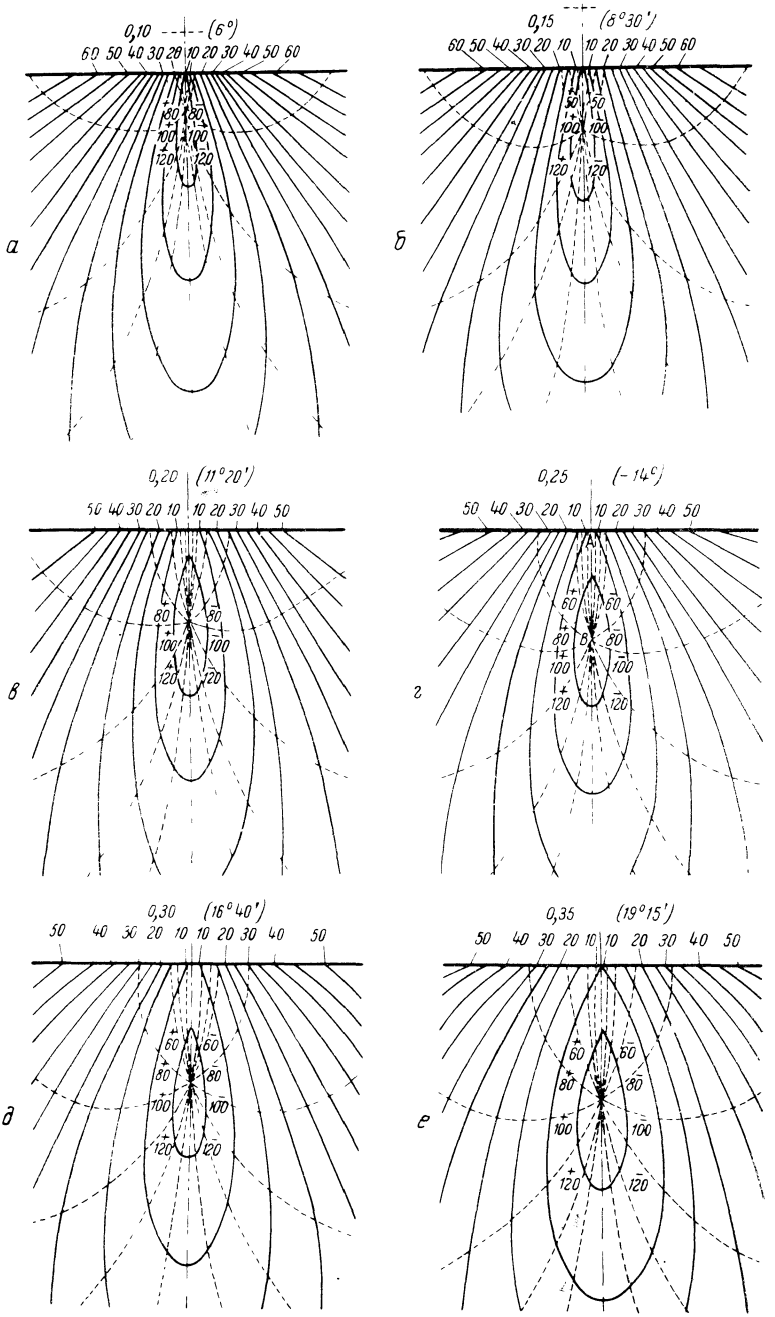


Рис. 213. Сетки волномера-бликомера

Так как высоты Солнца на снимках пропорциональны тангенсам угловой высоты Солнца (tg α), то при составлении сеток через равные интервалы менялся не угол α, а tg α.

Именно шесть прилагаемых сеток, изображенных на рис. 213, построены для значений tg α, равных соответственно 0,10; 0,15; 0,20; 0,25; 0,30; 0,35.

С шести сеток (рис. 213) надо приготовить диапозитивы в таком масштабе, чтобы отрезок AB на рис. 213, *г* равнялся *четверти фокусного расстояния* того фотоаппарата, которым были произведены снимки бликов. Тогда крутизна волн и их азимуты определятся без всяких вычислений, простым наложением негатива (с полосой бликов) на сетку, соответствующую данной высоте Солнца.

В качестве примера приводим снимок (рис. 214), совмещенный с сеткой, для которой $h/f = 0{,}15$ (масштаб рис. 214 отличен от масштаба рис. 213). Как видим, преобладающая крутизна равняется здесь около 15°. Азимут главных волн равен около 160°. Крутизна мелких (вторичных и третичных) волн, бегущих по поверхности главных, достигает примерно 30°.

Любопытно, что порывом ветра надувает, по-видимому, капиллярные волны с азимутом 120°, как это отчетливо видно по бликам, ложащимся на соответствующую кривую. Заметим еще раз, что азимуты отсчитываются от прямой, идущей от наблюдателя через узкий пучок изогон, который совпадает с местоположением диска светила, отраженного от зеркально гладкой поверхности воды.

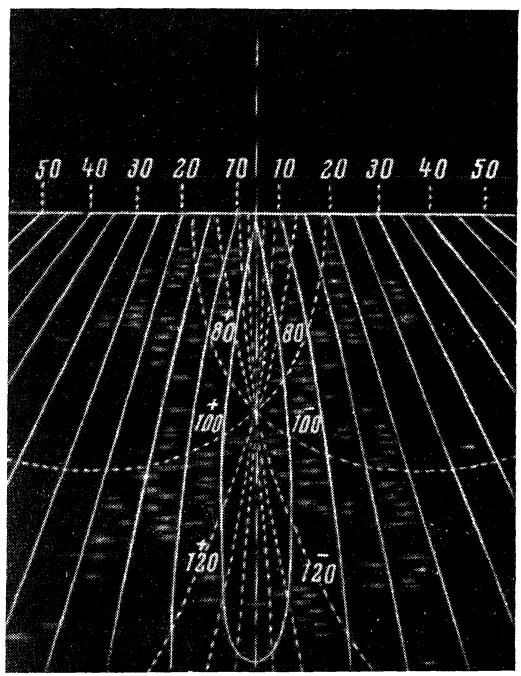


Рис. 214. Сетка, проектирующаяся на полосу бликов

Поворот против стрелки часов отмечен знаком плюс, а по стрелке часов — знаком минус.

В сущности для получения подобного рода снимков совсем не требуется фотографического аппарата, ведь снимать приходится с самой малой диафрагмой и с наибольшей скоростью «моментального» затвора. Поэтому для фотографирования можно приспособить просто камеру-обскуру, которую легко сделать местными средствами и для которой только должны быть припасены кассеты.

Это обстоятельство делает описанный метод весьма доступным для сбора массового материала. Если наблюдения ведутся не с корабля, а с берега, то фотографических снимков можно вообще не производить: достаточно проектировать непосредственно на поверхность моря соответствующие сетки изоклин и изогон.

Для таких наблюдений В. В. Шулейкиным сконструирован прибор, общий вид которого изображен на рис. 215. Перед окуляром O зрительной трубы OS (рис. 212) помещен в плоской коробке револьверный диск с шестью сетками, скопированными с рис. 213 в таком масштабе, что фокусное расстояние объектива S соответствует расстоянию X_0I' на рис. 212 или учетверенному

расстоянию AB на диаграмме рис. 213, *г*: Буква A стоит на линии горизонта.

Установив прибор по круглому уровню, наблюдатель вращает его вокруг вертикальной оси до тех пор, пока изображение солнечного (или лунного) диска не попадет на визирную линию видоискателя. Для точной установки служит микрометрический винт. В новых моделях прибора видоискатель помещается в самой стойке прибора, благодаря чему конструкция получается еще проще и удобнее.

На визирной линии сделаны засечки, соответствующие тем же шести высотам Солнца, для которых построены сетки. Все они снабжены номерами; подобные же номера проставлены и на головке, посредством которой вращается револьверный диск.

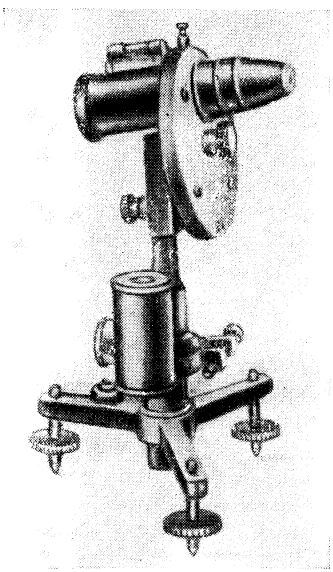


Рис. 215. Общий вид прибора В. В. Шулейкина

Заметив, близ какой засечки лежит изображение светила в видоискателе, наблюдатель вращает барабан и ставит перед окуляром сетку того же номера. Сетка проектируется теперь непосредственно на поверхность моря со светлой полосой бликов под светилом, причем наблюдатель может легко и быстро отсчитать по кривым как крутизну волн, так и направление их движения.

Для того чтобы в поле зрения поместилось как можно больше изоклин, ось трубы слегка наклонена к горизонту и линия последнего не проходит через центр поля зрения. Для предварительной установки трубы при помощи микрометрического винта служит уровень, которому придан соответствующий наклон относительно оси трубы. Точная установка производится непосредственно путем совмещения линии горизонта с видимым горизонтом.

С помощью такого прибора В. В. Шулейкин и М. Г. Волобуев произвели массовые наблюдения в различных метеорологических условиях. Выяснилось, что при малых скоростях ветра — около 3 *м/сек*, когда гребни волн не загораживают часть бликов, преобладающая крутизна волн в прибрежной полосе составляет около 15°.

Максимальная крутизна мелких волн высоких порядков *никогда* не выходит за предел 30° — в полном соответствии с теоретическими работами, о которых говорилось в первых параграфах настоящей главы: как известно, теория дает для угла между касательными к профилю волн, при вершине, наименьшее значение 120°, которое соответствует именно максимальной крутизне склона 30°.

Что касается преобладающего значения угла наклона 15°, то в случае чисто трохоидальных волн этот угол соответствует значению отношения высоты волн к их длине (h/λ) $0{,}085 = {}^1/_{12}$. Для заостренного при вершине профиля ветровой волны тот же преобладающий угол наклона 15° может соответствовать значению $h/\lambda = {}^1/_{18}$.

Во всяком случае волны в открытом океане с таким значением h/λ следовало бы считать *растущими*, не установившимися. В условиях прибрежных, при учете мелководной зоны, на которую входят волны, их можно считать близкими к установившемуся состоянию.

Метод измерения крутизны волн по наблюдению бликов был предложен В. В. Шулейкиным еще в 1922 г. после плавания на судне «Пахтусов» и первоначально опубликован в 1923 г. [74]. Затем он был описан с приложением

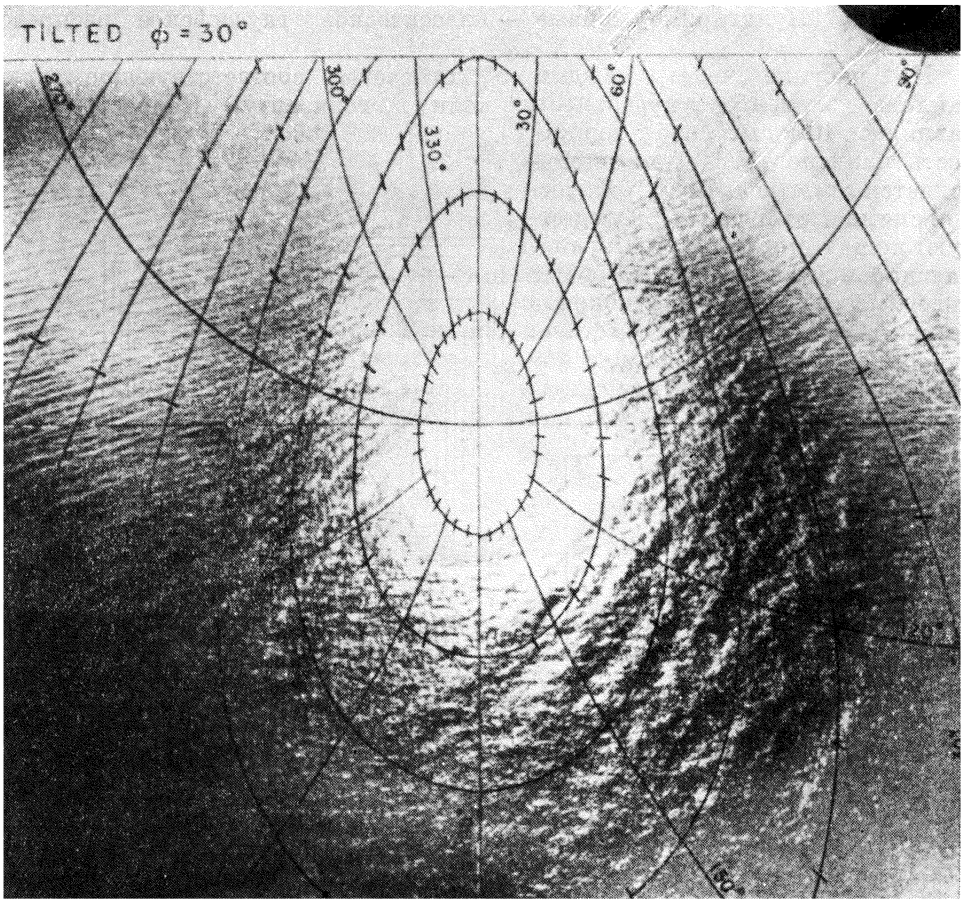


Рис. 216. Одна из фотографий бликов, сделанных Ч. Коксом и В. Мунком

фотографий сеток и общего вида прибора в 1924 г. [75]. После этого метод получил широкую известность, он описан в журнале, который читается во всех странах [76]. Это не помешало некоторым иностранным авторам приписать приоритет исследователям, опубликовавшим свои работы на 10 и более лет позже. Метод солнечных бликов был использован Ч. Коксом и В. Мунком для статистических исследований крутизны волн. В первой своей статье [77] эти авторы совсем не ссылаются на первоисточник метода; во второй статье [78] упоминают, в числе последних, книгу «Физика моря» (изд. 1941 г.). Рис. 216, взятый из первой статьи Кокса и Мунка, показывает, что «изоклины» и «изогоны» тут совершенно такие же, как на наших сетках рис. 213. Эти авторы пишут, что они вычисляли свои сетки. Отметим, что у нас они были построены по точкам, которых было в общей сложности свыше *тысячи*. Представляется, что рациональней было бы авторам воспользоваться для построения тем же прибором, каким за 30 лет до них пользовался Шулейкин: этот прибор — геодезический теодолит, позволяющий выполнять даже более ответственные задания,— дал бы им возможность построить тысячи точек без всяких вычислений.

В результате обработки фотоснимков Кокс и Мунк обнаружили, что кривые распределения крутизны волн очень близки к обычным *гауссовским*. В качестве примера на рис. 217 изображены две кривые (сплошные), построенные применительно к двум взаимно перпендикулярным сечениям: вдоль плос-

кости, в которой лежит направление ветра, и перпендикулярно к этой плоскости. Пунктирные кривые — классическое гауссовское распределение.

На рисунке через каждые 5° отмечены соответствующие углы наклона элементов поверхности волн к горизонту. Скорость ветра равнялась 10 *м/сек*. Малая вероятность наклонов от 25 до 30° объясняется тем, что на фотографическом снимке этим углам соответствуют лишь одиночные блики, занимающие ничтожную часть общей поверхности, которая покрыта бликами. Это вполне соответствует сказанному выше о физическом смысле таких одиночных бликов: они возникают при отражении

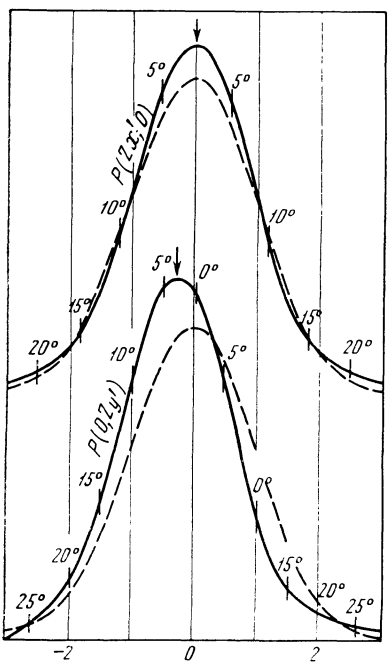


Рис. 217. Кривые распределения крутизны волн (по Ч. Коксу и В. Мунку)

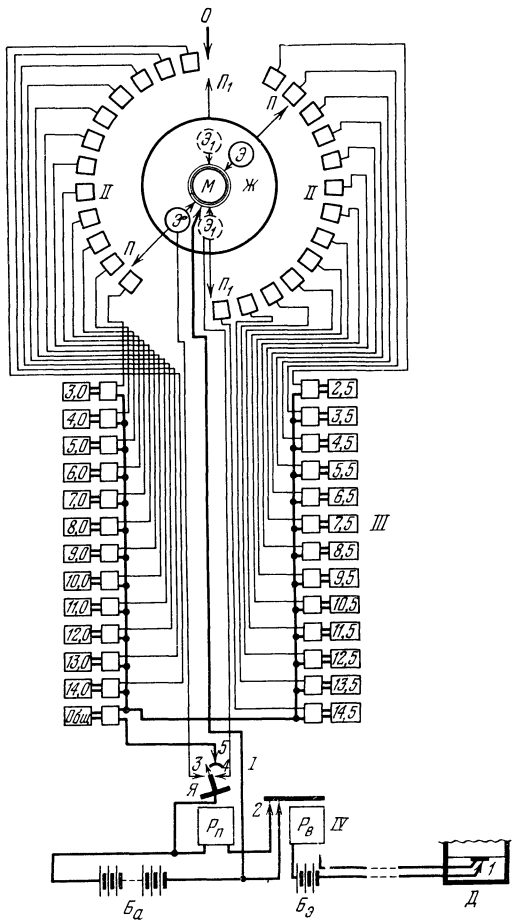
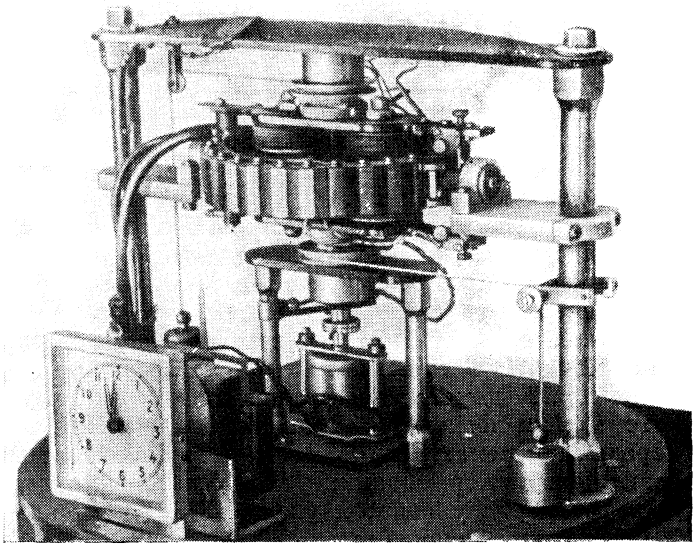


Рис. 218. Схема автоматического счетчика периодов волн

солнечных лучей от поверхности самых мелких волн высоких порядков. Интересно сопоставить кривые рис. 217 со сплошными кривыми, изображенными на рис. 188 (см. стр. 361), по непосредственным измерениям Л. А. Корневой и В. П. Ливерди: там тоже получено почти точное гауссовское распределение. Напротив, пунктирные кривые на рис. 188, построенные по теоретической формуле Ю. М. Крылова (355), не совпадают ни со сплошными кривыми на том же рисунке, ни с кривыми иностранных авторов, изображенными на рис. 217.

Из всех элементов волн, анализируемых методами статистики, легче других учитывается *период*. Для суждения о статистике периодов волн в Черноморском отделении Морского гидрофизического института впервые был предложен С. Т. Машковым простой способ: на рейде близ Кацивели на дне



стояла резиновая камера, внутри которой было помещено контактное приспособление, замыкающее цепь при прохождении каждой волны. В цепь был включен сигнальный прибор, по которому наблюдатель отсчитывал промежуток времени между двумя последовательными замыканиями. По достаточному количеству записанных цифр строилась кривая распределения периодов волн. Разумеется, систематический учет периодов волн по такому способу утомителен и полностью отрывает наблюдателя от других работ. Поэтому вскоре В. В. Шулейкиным был сконструирован автоматический счетчик периодов, впоследствии усовершенствованный Л. А. Корневой и С. Т. Машковым [79].

Принципиальная схема этого прибора изображена на рис. 218. Датчиком сигналов при прохождении каждой волны здесь служит та же резиновая камера $Д$, которой пользовался Машков. Проходящая волна замыкает в ней контакт *1* и замыкает тем самым батарею сухих элементов $Б_э$ на входное реле $Р_в$, которое замыкает вторичный контакт *2* и включает батарею аккумуляторв $Б_а$ на реле-преобразователь $Р_п$. Здесь якорь $Я$ притягивается к сердечнику реле и поочередно замыкает либо цепь электромагнитов $ЭЭ$, либо цепь электромагнитов $Э_1Э_1$, с ползунками $ПП$ и $П_1П_1$, через контакты *3* и *4*.

Под сердечниками этих электромагнитов непрерывно вращается с постоянной скоростью 2 *об/мин* диск $Ж$ из мягкого железа. При замыкании тока в обмотках электромагнитов $ЭЭ$ их сердечники мгновенно притягиваются к железному диску, и тот ведет их вместе с ползунками $ПП$ по пластинкам коллектора $П$,

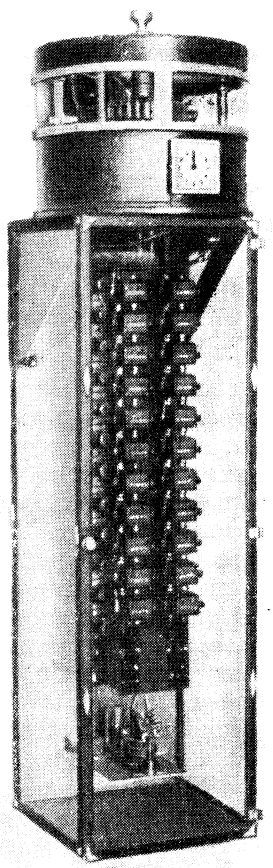


Рис. 219. Общий вид прибора

поочередно замыкая пластины то левой, то правой его части. Такое движение происходит до тех пор, пока над датчиком *Д* пройдет следующая волна, система реле замкнет контакты *2* и *3*. При этом размыкается цепь электромагнитов *ЭЭ*, освобождаясь от диска *Ж*, и одновременно замыкается цепь электромагнитов $Э_1Э_1$ через контакт *4*. В момент прохождения якоря *Я* через среднее положение между *3* и *4* на мгновение замыкается контакт *5* в цепи того счетчика, до которого успел дойти ползунок *П*. Тем самым показание этого счетчика увеличивается на единицу. Одновременно с этим счетчиком всегда замыкается ток в «общем счетчике», учитывающем полное число волн, которые прошли над датчиком *Д*. Движение ползунков всегда начинается с одного и того же места, отмеченного буквой *О*. Поэтому номер контактной пластинки коллектора *II* всегда соответствует периоду волн.

Поскольку «очередными» теперь являются электромагниты $Э_1Э_1$, их ползунки $П_1П_1$, увлекаемые диском *Ж*, пойдут скользить по пластинкам коллектора *II* до того момента, когда над датчиком *Д* пройдет еще одна волна. В этот момент повторится та же последовательность в работе реле, и настанет очередь электромагнитов *ЭЭ* вести ползунки *П*. Снова, перед сменой электрических цепей, якорь *Я* замкнет контакт *5*, пошлет ток в счетчик, который соответствует периоду волн, и увеличит его показания на единицу.

Общий вид прибора представлен на рис. 219.

Коллектор *II* снабжен 25 пластинами, каждая из которых присоединена к счетчику периодов, учитывающих число волн с периодами от 2,5 до 14,5 *сек*. Такой диапазон вполне достаточен для работы прибора на побережье Черного моря. «Общий счетчик», учитывающий полное число волн, автоматически выключает всю систему через определенное число волн, прошедших над датчиком *Д* (200—500). Испытания прибора показали, что он фиксирует периоды с точностью до 1—2%.

Основные погрешности вносятся контактным механизмом датчика *Д*, который иногда может сработать не от основных волн, а от обертонов, если они сильно выражены. Этот узел следует усовершенствовать.

§ 37. Регистрация профиля волн на корабле. Некоторые особенности движения корабля на волне, важные в океанографическом отношении

По прежним мотивам мы не будем здесь останавливаться на обзоре тех методов, которые применяются на корабле для измерения длины волн, их высоты, периода и скорости распространения. Что касается измерения крутизны волн, то оно, как только что было изложено в предыдущем параграфе, чрезвычайно просто может производиться посредством транспаранта, на который накладываются фотографические снимки бликов, бегущих по поверхности волн под солнцем: такой метод с одинаковым успехом может применяться как при работе с берега, так и на корабле или даже на самолете.

В силу всего этого мы остановимся здесь подробно только на методике *регистрации профиля волн*, применимой на корабле и позволяющей одновременно изучить некоторые весьма важные особенности движения самого корабля на волне.

Подобная регистрация может быть осуществлена приборами, основанными на *двух* по существу различных принципах: 1) либо прибор будет воспринимать и записывать изменения *атмосферного давления*, происходящие при подъеме корабля на вершину волны и при спуске его к ее подошве; 2) либо прибор воспримет и запишет *силы инерции*, возникающие при гармоническом колебательном движении корабля на волне.

Общим для обоих типов приборов является то обстоятельство, что они неизбежно должны регистрировать *колебания центра тяжести корабля на волне*.

Вот почему запись их *не всегда может представить профиль волны в чистом виде*. Первым основным условием для получения истинного профиля оказывается следующее: *корабль не должен сильно врезаться в волну*. Следовательно, запись может быть вполне точной независимо от тоннажа, если судно идет лагом к волне или стоит на месте. В противном случае истинный профиль может быть получен только на маломерном судне, идущем с небольшой скоростью.

Второе основное условие весьма часто упускается из вида. Заключается же оно в том, что *период собственных колебаний центра тяжести корабля должен сильно отличаться от периода волн*.

При нарушении этого условия, в особенности *вблизи резонанса*, *амплитуда колебаний центра тяжести корабля может в несколько раз превысить амплитуду волн*.

Следует отметить, однако, что в подобных случаях регистрация движения центра тяжести корабля на волне является чрезвычайно ценной даже тогда, когда она не дает непосредственно чистого профиля волны. Дело в том, что вопрос о вертикальных перемещениях центра тяжести корабля был до настоящего времени освещен весьма мало: при исследовании движений корабля на волне чрезвычайно подробно описываются всевозможные виды вращения корпуса вокруг осей, проходящих через центр тяжести; выводятся условия, характеризующие килевую, бортовую качку и рысканье. В то же время значительно меньше внимания уделяется движению самого центра тяжести корабля на волне, ибо *предполагается*, что амплитуды таких колебаний *невелики*.

В классических работах А. Н. Крылова [22] дан общий анализ всех видов колебаний, в том числе и колебаний центра тяжести, но исследовать полученные выражения в *общем виде* чрезвычайно затруднительно, числовые же примеры, приводимые Крыловым, относятся к частным случаям, когда амплитуда не превышает 1,5—2,5 *м*.

А между тем в некоторых случаях амплитуды таких колебаний могут достигнуть *громадной величины*, как это показали непосредственные измерения В. В. Шулейкина [80] на пароходе «Трансбалт».

Нетрудно видеть, что при наличии таких громадных амплитуд судно может весьма сильно обнажаться ниже расчетной ватерлинии, а стало быть, и все расчеты на остойчивость *потеряют силу*. Вместе с тем при значительном погружении судна выше расчетной ватерлинии может возникнуть опасность другого рода, если район плаванья глубоко сидящего судна мелководный или обильный рифами.

Следует отметить, что каким бы методом ни измерялась с корабля *высота* волны, эти движения центра тяжести корабля *относительно* самой поверхности *воды* неизбежно приведут к *преувеличенным* результатам. Следовательно, и с этой точки зрения является очень важным проанализировать процесс вертикального колебательного движения центра тяжести корабля при всех возможных условиях.

Отметить размах колебаний может даже такой прибор, как *статоскоп* Ришара, но, к сожалению, во-первых, чувствительность его весьма невелика, поэтому он непригоден для измерения *малых* размахов, во-вторых,— и это важнее всего — статоскоп *не дает возможности записать профиль* волны, так как барабан его вращается слишком *медленно*.

Оба указанных недостатка отсутствуют в *микробарографе* В. В. Шулейкина, впервые примененном во время дальнего плавания в Индийском океане и морях Средиземном, Эгейском, Красном, Южно-Китайском, Восточно-Китайском и Японском.

Общий вид прибора представлен на рис. 220.

Полая латунная коробка может сообщаться с атмосферой посредством крана. В верхней стенке ее сделано круглое отверстие, затянутое тонкой эластич-

ной резиновой мембраной. Если, закрыв кран, поднимать и опускать прибор, то мембрана будет оказываться под действием разности давлений: внешнего и внутреннего, причем внутреннее будет, разумеется, оставаться постоянным, а внешнее меняться с высотой.

Под действием возникающих разностей давлений мембрана будет выгибаться либо внутрь, либо наружу. Такие деформации ее сообщают движение коленчатому рычажному механизму от обычного барографа, записывающему их в сильно увеличенном размере на вращающемся барабане.

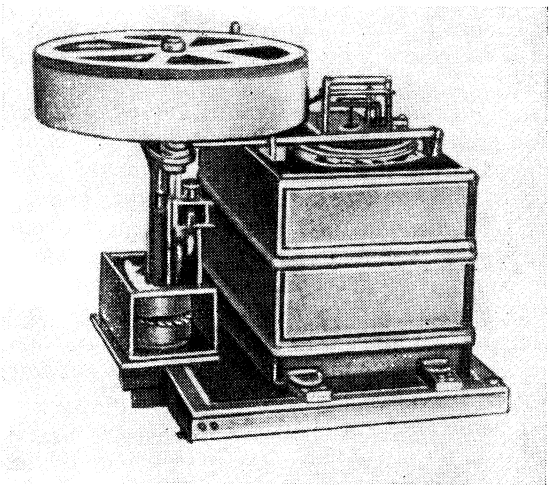


Рис. 220. Микробарограф В. В. Шулейкина

Прибор легко может быть сделан настолько чувствительным, что вертикальное перемещение его на 1 *м* вызовет отклонение пера на 8—10 *мм*. Но так как неизменность константы прибора была еще не совсем выяснена, то рискованно было в экспедиционных условиях пользоваться слишком тонкой резиной, и поэтому пришлось ограничиться мембраной такой толщины, что чувствительность была в полтора раза меньше.

Разумеется, чувствительность прибора может быть еще увеличена за счет увеличения площади мембраны.

Барабан с наложенной на нем миллиметровой бумагой вращался посредством граммофонного механизма, причем число оборотов его ведущей оси понижалось промежуточной зубчатой передачей в 360 раз. Длина бумажной ленты, облегающей барабан, была равна 90 *см*, линейная скорость на его окружности равнялась 0,5 *см/сек* (ее можно было очень точно устанавливать посредством центробежного граммофонного регулятора); барабан делал, следовательно, один оборот в 3 *мин*. В некоторых случаях на ленте производилась запись за два или несколько оборотов, причем кривые, налагающиеся на одну и ту же ленту, нетрудно было различить между собой благодаря неодинаковой их толщине: по мере того как истощались чернила на пере, кривые делались все тоньше и бледнее.

Пришлось позаботиться о надежной тепловой изоляции коробки: она была тщательно обложена войлоком. В противном случае ничтожные колебания температуры воздуха (даже приближение экспериментатора к прибору) вызвали бы заметные смещения стрелки.

Перед работами и для контроля после рейса определялась постоянная прибора: барабан приводился в движение, а весь прибор поднимался на точно измеренную высоту. Выяснилось, что полуторамесячное тропическое плава-

ние не изменяет постоянной: по-видимому, сохранению эластичности резиновой мембраны способствует большая влажность морского воздуха.

Чтобы в любое время суток можно было быстро пустить в ход самописец, он был установлен непосредственно в каюте (на спардеке). Последняя находилась настолько близко к вертикали, проходящей через центр тяжести корабля, что влиянием килевой качки можно было совершенно пренебречь, а бортовая искажала кривые совершенно незначительно, и то только при самых больших кренах. Во всяком случае на величине предельных вертикальных перемещений прибора она отразиться не могла, так как максимальный крен никогда не совпадал с нахождением корабля на гребне или у подошвы волны.

Чрезвычайно важно было освободиться от искажающего влияния ветра, порывы которого могли вносить изменения давления динамического происхождения. Оказалось, что от таких наслоений можно легко освободиться, закрывая на время наблюдений дверь и иллюминаторы каюты; в то же время плавные изменения давления, вызываемые вертикальными перемещениями судна на волне, прекрасно передавались сквозь различные щели.

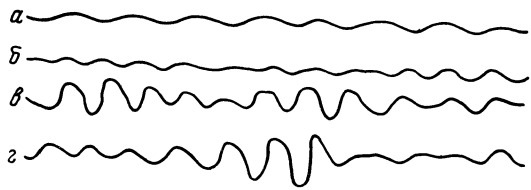


Рис. 221. Запись волн микробарографом

Действие такой защиты было тщательно проверено путем сопоставления записей прибора, сделанных: а) на мертвой зыби, при полном штиле, б) на такой же зыби, при порывах ветра, в) на гладкой штилевой поверхности моря (в порту), при резких порывах ветра. При сильном ветре на диаграммах иногда появлялись зубцы, но их легко было отделить от «волновой» записи, настолько они характерны.

На рис. 221 воспроизведены четыре типичные кривые, взятые из большого материала, собранного во время рейса парохода «Трансбалт». Кривая *а* получена в Индийском океане во время мертвой зыби, кривая *б* — в Южно-Китайском море, где наблюдалось волнение ветрового типа. Наконец, кривые *в* и *г* сняты во время штормов в Восточно-Китайском и Японском морях.

Следует отметить, что перо самописца двигалось не по прямой, а по дуге окружности. Поэтому для суждения об истинном виде профиля волн необходимо было переносить записи рис. 221 на декартову ортогональную координатную сетку. Впрочем, эта операция не требовалась для тех записей, которые характеризуются небольшой амплитудой волны (например, в Индийском океане и в Южно-Китайском море); искажения, вносимые криволинейной системой координат, здесь заметно не сказывались.

Благодаря счастливому совпадению почти всегда судно шло лагом к волне, а потому, несмотря на свой громадный тоннаж, не разрезало волны, а перекатывалось через нее. Исключением явилось волнение на Черном море; там курс лежал почти в лоб волнам, и последние все время рассекались. Вот почему записи на этом море никакого интереса не представляли.

Как видим, характер колебаний, записанных на кривых рис. 221, двоякий: либо это движение на плавной, длинной, спокойной зыби (кривая *а*), либо более или менее порывистое движение на крутой волне с резко меняющейся амплитудой (кривые *в*, *г*). Записи, соответствующие Южно-Китайскому морю (кривая *б*), представляют собой переходное звено общей цепи — от движений первого рода к движениям второго рода.

Одной из характернейших особенностей последнего рода колебаний является чрезвычайное непостоянство их амплитуды, дающее возможность предполагать наличие *биений*. Но ни направление ветра, оставшееся постоянным, ни удаленность берегов не позволяли предполагать, что эти биения вызывают-

ся интерференцией двух или нескольких систем волн: причина здесь лежит в возникновении *собственных колебаний* центра тяжести судна относительно поверхности волн.

Исследуем поступательное движение корпуса корабля в вертикальном направлении. Такое движение можно, например, вызвать, нагрузив судно некоторым грузом (равномерно увеличивающим осадку) и внезапно разгрузив его.

Пусть увеличение осадки, вызывавшееся грузом, равно z. Предположим для простоты, что площадь ватерлинии *не изменяется* при вариациях осадки порядка z; это предположение вполне законно для кораблей с длинным и очень высоким корпусом, миделевое сечение которых ограничено приблизительно отвесными бортами. При обводах ледокольного или полуледокольного типа оно, разумеется, не соответствует действительности. Если площадь ватерлинии равна S, то вертикальная сила, действующая на корпус корабля, лишенного дополнительного груза, должна равняться

$$f = gSz, \tag{378}$$

где g — ускорение силы тяжести.

Кроме нее, на корабль действует еще сила инерции, равная

$$f_i = -m\frac{d^2z}{dt^2}, \tag{378а}$$

где m — масса корабля, а d^2z/dt^2 — ускорение в его поступательном, вертикально направленном движении. По принципу д'Аламбера (пренебрегая силами, сопротивляющимися движению)

$$f + f_i = 0,$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} - \frac{gS}{m}z = 0. \tag{378б}$$

Проинтегрировав это уравнение, нетрудно найти закон вертикального движения центра тяжести корабля. В некоторый момент времени t отклонение его (z) от положения равновесия будет равно

$$z = z_0 \cos\frac{2\pi}{T}t, \tag{379}$$

где T — период собственных колебаний, равный

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{gS}}. \tag{380}$$

Для парохода «Трансбалт»

$$m = 21\,500\ т, \quad S = 2320\ м^2.$$

Следовательно, по формуле (380) его период собственных колебаний должен быть около 6,1 *сек*.

Разумеется, такое вычисление не может отличаться большой точностью благодаря некоторой схематизации явления и упрощенному представлению о форме обводов. Но большей точности добиваться было бы нерационально, ибо и форма волн никогда не бывает синусоидальной, каковой ее приходится считать при исследовании движения корабля.

Во всяком случае формула (380) позволяет получить достаточное приближение, как в этом легко будет убедиться далее. Ее можно считать удовлетворительной даже в том случае, если судно обладает колебательным движением вокруг осей, проходящих через центр тяжести; движение самого центра тяжести она выразит почти с тою же степенью приближения, как и в случае чистого поступательного движения корпуса.

Вид кривой *а* (рис. 221), полученной в Индийском океане, заставляет думать, что центр тяжести корабля в точности следовал за движением поверхности волн: волны здесь длинные, период их велик — 10 или даже 11 *сек*; никаких следов налагающихся собственных колебаний (с периодом 6,1) не видно. Если вспомнить к тому же, что направление движения зыби было перпендикулярным к курсу судна (волна не рассекалась), то станет очевидным, что эти кривые представляют профиль волны.

Масштаб для высот волн определен предварительной градуировкой прибора. Масштаб горизонтальных измерений нетрудно найти, воспользовавшись соотношением (14) между длиной волны λ и скоростью ее распространения (при достаточно большой глубине) c:

$$c = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}.$$

Но, с другой стороны,

$$\lambda = cT_1,$$

где T_1 — период волн. Отсюда

$$\lambda = \frac{g}{2\pi} T_1^2 = 1{,}56T_1^2. \tag{381}$$

Благодаря некоторым чрезвычайно благоприятным обстоятельствам удалось сравнить результаты вычисления по формуле (381) на основании данных записи и результаты *непосредственных* измерений длины волны.

Зыбь была невысокая и очень пологая $\left(\frac{h}{\lambda} = \frac{1}{65}\right)$; поэтому не только нельзя было заметить ее очертания, но поверхность океана представлялась абсолютно гладкой, зеркальной. Однако оказалось, что очертания зыби прекрасно видны на линии *горизонта*, если смотреть в направлении, перпендикулярном к движению волн; вертикальные размеры их сильно увеличивались благодаря рефракции, и на таком профиле отчетливо вырисовывались отдельные гребни. Наблюдая их в бинокль с артиллерийской сеткой, нетрудно было измерить отношение длины волны к расстоянию от наблюдателя до горизонта. Оно колебалось в пределах 0,10—0,12.

Так как высота глаза над уровнем моря была известна (наблюдения велись с боддека), то по мореходным таблицам можно было найти расстояние до видимого горизонта. Оно оказалось равным 14 *км*.

Следовательно, на основании непосредственных измерений надо было заключить, что длина волн колебалась в пределах 140—168 *м*. В то же время самописец показал, что период T_1 волн был равен 10 *сек*. Подставляя эту цифру в формулу (381), найдем для длины волны значение 156 *м*, которое прекрасно укладывается в пределах, даваемых наблюдением.

Такой результат указывает, что, во-первых, при помощи описанного выше самописца можно исследовать профиль волн, устанавливая прибор на судне, если только, разумеется, судно идет лагом к волне и если период последней достаточно превышает период собственных колебаний корабля (в данном случае период волны был в 1,66 раза больше периода корабля); во-вторых, этот результат можно рассматривать как проверку формулы (381), произведенную непосредственно в открытом океане.

Для более точной регистрации волн самописец лучше всего устанавливать на буе, период собственных колебаний которого очень мал по сравнению с любыми волнами и который поэтому будет совершать практически только вынужденные колебания, давая возможность получить на ленте микробарографа действительный профиль волны. Разумеется, в конструкцию механизма, вращающего барабан, надо в данном случае внести некоторые изменения: механизм должен работать в течение продолжительного времени, прежде чем

его придется снова заводить; пуск в ход следует производить с берега — в тот момент, когда окажется желательным произвести запись волн; для этой цели может служить обычное пусковое реле, употребляемое в подобных случаях и питаемое током по тонкому водонепроницаемому кабелю (одножильному), так как обратным проводом может служить вода).

Для каждого наблюдения достаточен срок около 3 *мин*, а потому завод механизма будет расходоваться медленно. Занося в журнал каждое наблюдение, нетрудно установить связь волнения с различными метеорологическими факторами, после того как длинная лента, поставленная на буе, будет израсходована и снята с прибора. Разумеется, лента здесь не может облегать барабан единственным витком, а должна перематываться с одного барабана на другой.

Выше был вычислен период собственных колебаний парохода «Трансбалт»; такое приближенное вычисление дало значение периода 6,1 *сек*. Но, как можно найти по кривым *в*, *г* (рис. 221), период волны в Восточно-Китайском и Японском морях был около 6,5—7,0 *сек*.

Следовательно, в данном случае колебания судна были близки к резонансу с волной, чем и объясняются резко выраженные *биения*, особенно хорошо видные на кривой *г* (рис. 221), где максимальные размахи (удвоенная амплитуда) достигали 13,5 *м*.

Проанализируем также сложные колебания корабля, ведя исследование совершенно элементарным путем, ибо точное решение задачи в данном случае не имеет смысла: и период волн непостоянен, и форма ее отлична от синусоиды.

Допустим, что уровень воды колеблется по закону

$$\zeta = a \cos \omega_1 t, \tag{382}$$

где a — амплитуда волны (половина высоты от подошвы до гребня), а через ω_1 обозначено выражение $2\pi/T_1$ (T_1 — период волны).

Относительно той же неподвижной горизонтальной координатной плоскости, совпадающей с уровнем спокойной воды, выразим закон вертикальных колебаний центра тяжести корабля. Закон этот

$$z = z(t) \tag{383}$$

подлежит определению.

На основании соотношений (382) и (383) можно найти уравнение движения центра тяжести корабля *относительно* колеблющейся поверхности воды. Очевидно, что вертикальные перемещения его относительно этой поверхности выразятся разностью между z и ζ

$$z - \zeta = a \cos \omega_1 t. \tag{384}$$

Найденная разность определяет собой величину силы, действующей на центр тяжести корабля по вертикальному направлению и аналогичной той силе f, которую мы нашли на стр. 396, исследуя собственные колебания корабля. Сопоставляя (384) с (378), найдем, что действующая сила теперь будет

$$f = Sg(z - \zeta). \tag{385}$$

Сила инерции при вертикальных колебаниях центра тяжести относительно неподвижной координатной системы определится из уравнения (378а).

Как и в (378б), мы пренебрежем силами, сопротивляющимися движению; это только лишит нас возможности точно вычислить амплитуду колебаний, сам же характер движения определится достаточно верно.

Применив принцип д'Аламбера, в данном случае получим

$$Sg(z-\zeta)-m\frac{d^2z}{dt^2}=0, \tag{386}$$

или, подставляя z и ζ из (379) и (382) и производя преобразования,

$$\frac{d^2z}{dt^2}+\frac{Sg}{m}[z-a\cos\omega_1 t]=0. \tag{387}$$

Интеграл этого дифференциального уравнения выражается так:

$$z=2a\frac{\omega^2}{\omega^2-\omega_1^2}\cos\frac{\omega-\omega_1}{2}t\cos\frac{\omega+\omega_1}{2}t. \tag{388}$$

Здесь ω оказывается равным $2\pi/T$, где T — период собственных колебаний корабля, вычисленный выше:

$$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{Sg}}.$$

Разумеется, формулой (388) нельзя пользоваться для вычисления амплитуды колебаний при резонансе: она дает в этом случае ($\omega=\omega_1$)

$$2h\frac{\omega^2}{\omega^2-\omega_1^2}=\infty,$$

так как мы пренебрегли влиянием сил, сопротивляющихся движению,— пренебрегли затуханием. Но зато формула (388) позволяет проверить правильность картины явления, которая только что была нарисована; она дает возможность вычислить период собственных колебаний на основании записи микробарографа и сравнить результат с вычислением по формуле (379).

Ведь в формуле (388) функция $\cos\frac{\omega-\omega_1}{2}t$ выражает закон изменения амплитуды колебания при появлении биений.

Обозначим через ϑ промежуток между двумя соседними «узлами» (или между двумя соседними «пучностями»). Тогда, очевидно,

$$\omega-\omega_1=\frac{2\pi}{\vartheta},$$

или, заменяя ω_2 и ω_1 их выражениями через периоды T и T_1,

$$\frac{1}{T}-\frac{1}{T_1}=\frac{1}{\vartheta}. \tag{389}$$

Как было уже указано, биения особенно ярко выражены на кривой $г$ (рис. 221). Поэтому представляет большой интерес детальнее исследовать эту кривую. Прежде всего ее надо перенести в декартову систему координат (на миллиметровой бумаге микробарографа вертикальные перемещения представлялись эквидистантными дугами окружностей, и отсутствие специальной сетки, аналогичной сеткам обычных барограмм, затрудняло точную обработку; к сожалению, перед рейсом не удалось своевременно заказать специально приготовленную бумагу для прибора). Можно легко проследить за всеми особенностями *биений*, возникающих вблизи резонанса (см. рис. 221, $г$). Амплитуда колебаний уровня воды лежит, по-видимому, в пределах 2—2,25 *м*, т. е. высота *волны* в пределах 4,0—4,5 *м*. Между тем при возникновении биений амплитуда колебаний центра тяжести корабля достигает очень больших размеров — 7 *м* (вниз от уровня спокойной воды). Даже несмотря на то, что отклонение в противоположную сторону (вверх), имевшее место в предыдущую половину периода, было несколько меньше, все же полный размах достиг здесь громадной величины — 13,5 *м*.

Наибольшая амплитуда колебаний центра тяжести судна относительно поверхности воды достигла, по-видимому, величины 7—2,25 = 4,75 *м*. Только благодаря очень большой высоте фальшборта над водой (около 6 *м* у миделя) корпус судна не погружался даже при таких увеличениях осадки.

На кривой *г* (рис. 221) можно заметить положение «узлов». Промежуток времени межу ними $\vartheta = 52$ *сек*. Воспользовавшись формулой (389), нетрудно найти период T собственных колебаний корабля на основании записи микробарографа. В самом деле, по кривой *г* (рис. 221) в области максимальных размахов период сложных колебаний $\tau = 6{,}6$ *сек*.

Этот период на основании формулы (388) выражается через T и T_1 следующим образом:

$$\frac{\omega + \omega_1}{2} = \frac{2\pi}{\tau}, \qquad \frac{1}{T} + \frac{1}{T_1} = \frac{2}{\tau}. \tag{390}$$

Складывая почленно равенства (389) и (390), найдем

$$\frac{1}{T} = \frac{1}{\tau} + \frac{1}{2\vartheta}. \tag{391}$$

Подставляя в (391) $\vartheta = 52$ и $\tau = 6{,}6$, вычислим период собственных колебаний T. Он оказывается равным 6,2 *сек*. Как мы видели, вычисление, произведенное совершенно иным методом по формуле (390), дало период 6,1 *сек*. Такое хорошее совпадение результатов указывает на законность сделанных допущений и правильность представления о характере биений. Хорошие результаты получаются и при исследовании других кривых типа 221, *б* и *в*, хотя так явление выражено не так отчетливо, как на рис. 221, *г*.

Мы только что вывели закон колебания центра тяжести корабля, пренебрегая *затуханием* колебаний. Такое упрощенное решение задачи позволило проследить за явлением биений, но не дало возможности судить об *амплитуде* сложных колебаний, для которой формула (338) дает при резонансе бесконечно большую величину.

Посмотрим теперь, какие факторы ограничивают в действительности эту амплитуду. Учтем затухание и выясним его влияние на колебательный процесс. При этом мы будем считаться только с затуханием *собственных* колебаний корабля, так как рассматривать затухание волн нет оснований.

Положим по-прежнему, что колебания уровня воды относительно спокойного уровня выражаются соотношением

$$\zeta = a \cos \omega_1 t,$$

а колебания центра тяжести корабля относительно той же неподвижной координатной плоскости

$$z = z(t).$$

Тогда гидростатическая сила, действующая на корабль, будет

$$f_{\text{действ}} = -Sg(z - \zeta),$$

а сила инерции

$$f_{\text{инерц}} = -m\frac{d^2z}{dt^2}.$$

На основании принципа д'Аламбера найдем

$$f_{\text{действ}} + f_{\text{инерц}} + f_{\text{сопр}} = 0,$$

$$m\frac{d^2z}{dt^2} + Sg(z - \zeta) + f_{\text{сопр}} = 0,$$

или

$$\frac{d^2z}{dt^2} + \frac{f_{\text{сопр}}}{m} + \frac{Sg}{m} z = \frac{Sg}{m} \zeta. \tag{392}$$

Можно положить, что

$$\frac{f_{\text{сопр}}}{m} = 2\alpha \frac{d}{dt}(z - \zeta) = 2\alpha \frac{dz}{dt} - 2\alpha\omega_1 \sin \omega_1 t.$$

Тогда, как можно показать,

$$\frac{Sg}{m} = \omega^2 + \alpha^2,$$

где ω имеет то же значение, как в (388). Подставляя эти выражения в (392) и принимая во внимание выражение (382), получаем дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2z}{dt^2} + 2\alpha \frac{dz}{dt} + (\omega^2 + \alpha^2) z = a(\omega^2 + \alpha^2) \cos \omega_1 t + 2a\alpha\omega_1 \sin \omega_1 t. \tag{393}$$

Проинтегрировав его, найдем

$$z = a \sqrt{\frac{4\alpha^2\omega_1^2 + (\omega^2 + \alpha^2)^2}{4\alpha^2\omega_1^2 + (\omega^2 - \omega_1^2 + \alpha^2)^2}} [\sin(\omega_1 t + \varphi_1) + e^{-\alpha t} \sin(\omega t + \varphi_2)]. \tag{394}$$

Здесь

$$\varphi_1 = \operatorname{arctg}\left[\frac{4a^2\omega_1^2 - (\omega^2 + \alpha^2)^2 + \omega_1^2(\omega^2 + \alpha^2)}{2\alpha^2\omega_1(2\omega^2 + 2\alpha^2 - \omega_1^2)}\right],$$

$$\varphi_2 = \operatorname{arctg}\left[\frac{2\alpha^2\omega_1(\omega_1^2 + \alpha^2 + \omega^2) + \omega(\omega^2 + \alpha^2)(\omega_1^2 - \alpha^2 - \omega^2)}{\alpha(\omega^2 + \alpha^2)(\omega_1^2 + \alpha^2 + \omega^2) + 2\alpha\omega_1\omega(\omega_1^2 - \alpha^2 - \omega^2)}\right].$$

Не претендуя на большую точность вычислений, можно положить, что максимальная амплитуда центра тяжести, $z_{\text{макс}} = M$, выражается через амплитуду волны так:

$$M \approx 2a \sqrt{\frac{4\alpha^2\omega_1^2 + (\omega^2 + \alpha^2)^2}{4\alpha^2\omega_1^2 + (\omega^2 - \omega_1^2 + \alpha^2)^2}}. \tag{395}$$

Как запись микробарографов в областях, далеких от резонанса, так и непосредственное наблюдение волн показали, что для случая рис. 221, *г* было $a = 2$ *м*, $M = 7$ *м*, т. е. $M/a = 3{,}5$.

Вычисление по формуле (395) дает для коэффициента α громадную величину: 0,3. Разумеется, такого большого затухания колебаний не могло быть, если бы оно вызывалось действительно одними только силами сопротивления и «излучением» волн, вызываемых благодаря колебаниям корабля относительно поверхности воды. Очевидно, главную роль здесь играет *непостоянство периода* волн, на которое указывал в цитированных работах А. Н. Крылов.

Если бы период волн был абсолютно постоянен, то при возникновении резонанса корабль попал бы в тяжелое положение, ибо отношение M/a могло бы достигнуть громадных размеров.

В сводной табл. 13 приведены элементы волн, найденные при обработке записей прибора. В нее входят как истинные высоты h (удвоенные амплитуды $2a$) волн, полученные из вычислений, так и полные размахи ($2M$) центра тяжести судна при возникновении биений.

На основании изложенного видно, что элементарное исследование движений центра тяжести корабля на волне позволяет открыть ряд интересных особенностей явлений, имеющих не только теоретическое, но и практическое значение.

Таблица 13

№	Дата	φ (С)	L (В)	Скорость ветра, м/сек	T_1, сек	$\lambda = 1{,}58\ T_1^2$	h (2a)	h/λ	2M	M/a
1	17.II	5°52′	82°50′	1,0	10,0	156	1,9	1:84	2,0	1,0
2	18.II	5 52	87 20	1,0	10,0	156	3,9	1:40	4,0	1,0
3	18.II	5 52	87 40	0,0	11,0	190	2,0	1:95	2,0	1,0
4	19.II	5 52	89 40	0,0	10,0	156	2,4	1:65	2,5	1,0
5	3.III	20 00	119 30	2,5	7,0	76	1,2	1:63	2,3	1,9
6	3.III	20 30	120 00	5,0	7,0	76	1,3	1:58	2,4	1,8
7	3.III	21 05	120 16	6,5	6,9	74	1,3	1:57	3,1	2,4
8	3.III	21 15	120 45	7,0	6,9	74	1,3	1:57	2,6	2,0
9	4.III	22 50	121 25	8,5	7,1	79	3,1	1:26	4,6	1,5
10	5.III	26 09	122 50	9,5	7,2	80	3,5	1:23	7,4	2,1
11	6.III	29 50	125 30	6,0	7,2	80	4,3	1:19	8,6	2,0
12	8.III	30 45	129 00	5,0	6,9	74	3,2	1:23	9,4	2,9
13	9.III	39 20	131 00	5,0	6,6	68	4,0	1:17	14,0	3,5

Период собственных колебаний может быть вычислен исходя из геометрических размеров корабля и его водоизмещения. Сопоставляя найденное число с величиной периода волн, можно получить суждение о характере колебаний корабля. Если период волн значительно превышает период собственных колебаний центра тяжести, то последний на волне будет совершать простые вынужденные колебания, а потому самописец, установленный вблизи центра тяжести, даст более или менее правильный *профиль волны* (если судно идет лагом к волне, а потому не разрезает ее).

Длина волн может быть определена по формуле $\lambda = 1{,}56\ T_1^2$, которую удалось проверить, измеряя расстояния между гребнями волн на линии *горизонта* посредством бинокля с сеткой. Так определяется масштаб горизонтальных расстояний на лентах самописца. Вертикальный масштаб находится непосредственной градуировкой прибора, причем константа последнего не меняется за все время плавания (даже в тропиках).

Наиболее точный профиль волн может быть получен, если самописец установлен на буе, непрерывно воспроизводящем колебания уровня воды.

В том случае, когда период собственных колебаний центра тяжести и период волн близки друг к другу, наступают *биения*, причем амплитуда колебаний может во много раз превысить амплитуду волны.

На основании записи микробарографа в данном случае легко вычислить период собственных колебаний центра тяжести корабля, причем полученный результат хорошо совпадает с вычислениями по первому методу.

При таких записях необходимо выбирать промежутки времени, в продолжение которых скорость ветра падает до возможного минимума. Это необходимо для исключения погрешностей, порождаемых неоднородностью *аэродинамического* поля над волнами. Разумеется, при регистрации мертвой зыби подобные погрешности незначительны. Но при ветровом волнении (см. § 17) аэродинамическое давление в различных точках профиля волн неодинаково. За счет этого различия возможно завышение амплитуд колебаний, регистрируемых микробарографом, по сравнению с теми значениями, которые создаются разностями высот между вершиной и подошвой волн. Колебания аэродинамического давления, описанные в § 17, могут быть вычислены по материалам, содержащимся там,—исходя из заданной скорости ветра. Эти погрешности убывают при увеличении высоты микробарографа над ватерлинией и притом

убывают по экспоненциальному закону, анологичному тому, по какому убывают размеры орбит водных частиц при погружении на глубины. Следовательно, для уменьшения погрешностей полезно ставить микробарограф как можно выше над ватерлинией корабля.

Опыт показал, что при регистрации волн микробарографом значительно трудней выбирать промежуток времени относительного затишья, чем при одиночных отсчетах по положению стрелки того же прибора (на вершинах и у

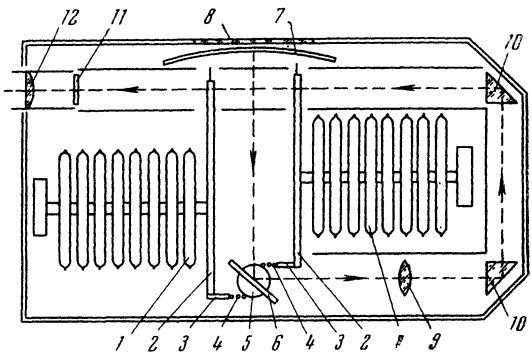


Рис. 222. Схема баронивелира В. В. Шулейкина

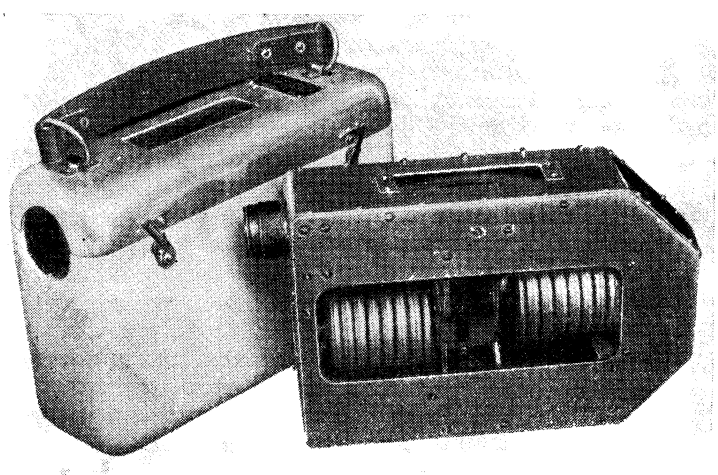


Рис. 223. Внешний вид и внутренние детали баронивелира

подошв отдельных волн). По этой причине вместо микробарографа тот же автор стал применять *баронивелир* своей конструкции, значительно более удобный для одиночных отсчетов и весьма компактный по своему устройству. Этот прибор нашел широкое применение при ориентировочных ускоренных нивелировках на суше и при определении глубин штолен в шахтах — в горном деле. На корабле он тоже хорошо себя зарекомендовал [81].

На рис. 222 изображена схема баронивелира В. В. Шулейкина, вошедшего в практику геодезистов. Здесь *1* — две стопки так называемых коробок Види, применяемых в метеорологических барометрах-анероидах и барографах; они сжимаются по оси при повышении внешнего давления и растягиваются при понижении давления. Внешние концы стержней, к которым прикреплены коробки, жестко связаны с опорным шасси прибора. Внутренние концы

упираются в рычажки *2*, которые могут легко поворачиваться вокруг их верхних концов. Нижние концы стерженьков *2* посредством отростков *3* соединены с тонкими цепочками Галля *4*, обмотанными вокруг барабанчика *5*. Этот барабанчик легко поворачивается вокруг своей горизонтальной оси, перпендикулярной к плоскости чертежа. Для наблюдений за поворотами барабанчика *5* служит зеркальце *6*, в котором отражаются тончайшие деления шкалы *7*, нанесенные делительной машиной. На схеме стрелки показывают, как отражение делений шкалы передается вдоль своеобразного «оптического рычага» весьма большой длины: изображение, упавшее на зеркальце *6*, передается на линзу *9* и призму *10*, с полным внутренним отражением (того типа, какой применяется в призменных биноклях), далее на такую же призму вверху и, наконец, проходит сквозь стекло с горизонтальной тонкой риской *11* и выходит сквозь обычный окуляр бинокля *12* в глаз наблюдателя.

При изменениях давления в точке, где находится наблюдатель, стопки коробок *1* либо сжимаются, либо растягиваются. Перед глазом наблюдателя проходит участок шкалы *11*, сильно увеличенный, пересеченный тонкой риской на стекле *11*. Чувствительность прибора такова, что смещение на одно деление шкалы соответствует приблизительно изменению высоты на 1 *м*. Изменения высоты на 0,5 *м* хорошо улавливаются наблюдателем, но, разумеется, нельзя ручаться за отсчеты высоты с точностью до 0,5 *м*.

При барометрической нивелировке ручаться за 0,5 *м* нельзя потому, что в точке наблюдения и в контрольной точке, где стоит на постоянной высоте второй прибор, атмосферное давление может меняться не вполне одинаково при различных метеорологических процессах.

На корабле, при измерениях высоты волн, за 0,5 *м* нельзя поручиться потому, что поправки, вносимые на динамическое действие ветра при обтекании волн, вычисляются не вполне точно.

Весь прибор очень легок. Он защищен дюралевым корпусом, в котором проделано окно с матовым стеклом *8* для освещения шкалы *7*. Внешний вид и внутренние детали прибора изображены на рис. 223.

Самая обширная серия измерений волн в океане описанным баронивелиром была произведена В. С. Назаровым во время его плаваний с китобойной флотилией «Слава» в южном полушарии [82]. В частности, ему удалось установить, насколько уменьшается высота волн при том же самом штормовом ветре под действием *внутренних волн* (см. гл. II, § 17), возбуждаемых на поверхности раздела между соленой океанской водой и водой сильно опресненной, вокруг айсбергов в антарктических водах: внутренние волны отнимают очень большую долю энергии, передаваемой ветром поверхностным волнам.

Наибольшая высота штормовых волн в южной части Атлантического океана — вдали от районов таяния айсбергов и близко к «ревущим сороковым широтам» — достигала 15 *м* после внесения поправки на динамику обтекания волн ветром.

Волны до 8 *м* высотой были измерены В. В. Шулейкиным тем же баронивелиром в северо-западной части Атлантического океана на борту океанографического судна «Седов». Прибор находился близ миделевого сечения корабля, в командирском салоне, на такой высоте над ватерлинией, что поправки на аэродинамический эффект обтекания волн ветром сводились до минимума — во время уменьшения скорости ветра. «Седов» шел лагом к волне, не рассекал ее и не вносил тем самым никаких погрешностей в измерения вертикальных колебаний. Он был далек от резонанса с волной, а следовательно, вертикальные колебания не искажались и за счет этого эффекта (в отличие от некоторых случаев измерений на «Трансбалте», описанных выше).

Измеренная высота волн очень хорошо соответствовала вычисленной теоретически на основании метода, описанного в § 20—23, 26.

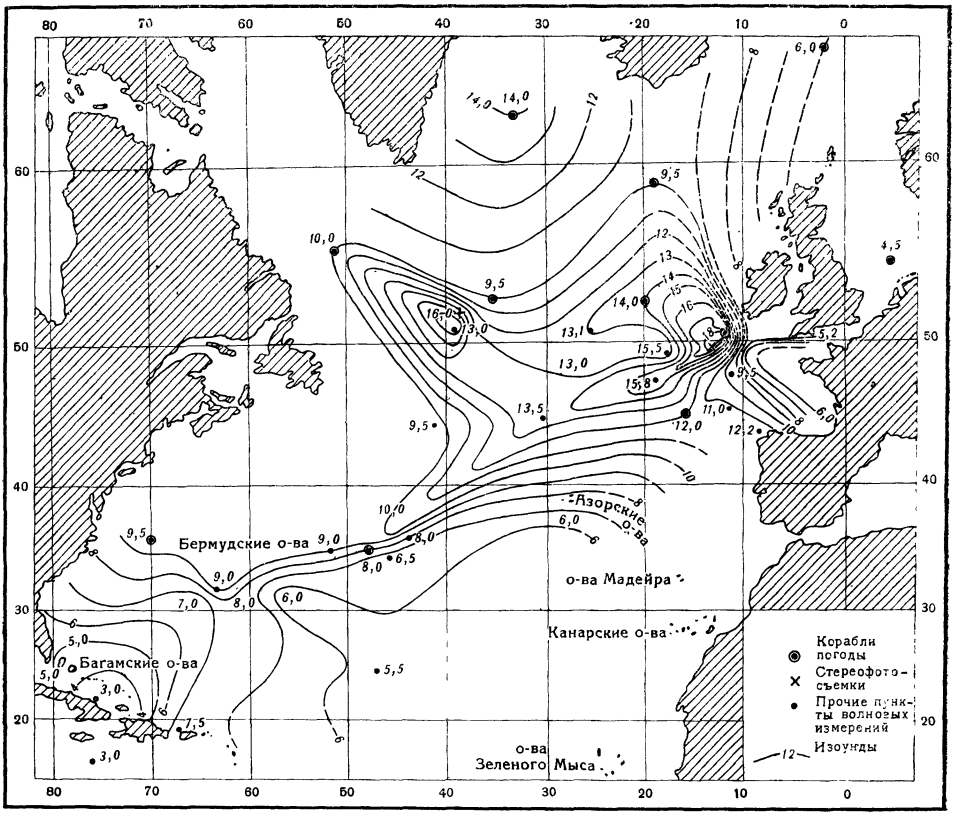


Рис. 224. Наибольшие высоты волн в Северном Атлантическом океане (карта по Э. Брунсу)

Давно назрела необходимость организации *систематических* измерений элементов волн на всем протяжении мирового океана и в первую очередь в районах плавания транспортных судов всех стран. Только такое систематическое исследование позволит выявить наиболее опасные районы и связать появление наибольших штормовых волн с синоптической обстановкой в океане. Вероятно, первой картой таких (особо опасных) районов в северной части Атлантического океана следует считать карту Э. Брунса, представленную на рис. 224 [35]. Здесь на основании тщательного анализа измерений, проделанных на кораблях погоды, на основании обработки стереосъемок и других надежных материалов, нанесены линии равных высот наибольших измеренных волн («изоу̀нды» по терминологии Э. Брунса).

ГЛАВА ЧЕТВЕРТАЯ

ТЕРМИКА МОРЯ

§ 1. Приход тепла. Прямая солнечная радиация и диффузная радиация небесного свода

Если бы земной шар не окружала атмосфера, то количество солнечного тепла, проходящего сквозь каждый квадратный сантиметр поверхности моря в единицу времени, можно было бы весьма просто вычислить раз навсегда для каждой высоты Солнца над горизонтом.

Именно, если I_0 калорий падает в минуту на 1 $см^2$ поверхности, перпендикулярной к солнечным лучам, то на горизонтальную поверхность падало бы количество тепла, связанное с высотой Солнца α простым соотношением

$$I = I_0 \sin \alpha. \qquad (1)$$

В действительности атмосфера, облекающая земной шар, чрезвычайно осложняет условия распространения лучистой энергии, ослабляя поток прямых солнечных лучей и внося новый — диффузный — поток, обусловленный рассеянием света молекулами воздуха. Но еще бóльшие осложнения вносятся не сухим воздухом, оптические свойства которого можно было бы учесть более или менее простыми путями, а *водяным паром*, всегда присутствующим в атмосфере, притом в крайне непостоянных количествах, и вызывающим весьма заметное *поглощение* лучистой энергии.

Нечего и говорить, что при появлении сколько-нибудь плотных облаков условия распространения тепловой радиации еще больше изменяются: часто до поверхности моря доходит в таких случаях лишь очень небольшая доля всей посылаемой Солнцем энергии, наибольшая же ее часть рассеивается облаками *обратно* в межпланетное пространство, а отчасти поглощается капельками воды, из которых состоят облака.

Вот почему непрерывное измерение напряжения солнечной радиации над поверхностью океана является важнейшей задачей, от удовлетворительного разрешения которой зависят все наши знания в области *термики моря*. А термика моря таит в себе ключ к термике всех материков, как будет показано в гл. V.

Между тем именно над водами мирового океана измерения солнечной радиации *чрезвычайно малочисленны*: карта пунктов, в которых когда-либо кто-либо произвел актинометрические наблюдения, была в свое время составлена Калитиным и обнаружила в самых существенных частях мирового океана позорные белые пятна, уничтожение которых лежит на обязанности современных мореведов и актинометристов. К сожалению, первые из двух этих групп исследователей обычно мало уделяют внимания актинометрии, а вторые обычно редко работают в море.

Именно по этой причине — по причине традиционной оторванности актинометрических работ от обычного комплекса морских экспедиционных ис-

следований — будет уместным остановиться здесь на кратком описании современных методов измерения лучистой энергии.

На рис. 225 изображен общий вид прибора, предназначенного для *абсолютных* измерений. Это — так называемый *пиргелиометр* Онгстрема.

Солнечные лучи падают здесь на одну из двух зачерненных металлических (манганиновых) полосок, видных в просвете рамы. Другая полоска защищена от солнечных лучей, но вместо них может нагреваться электрическим током, мощность которого измеряется обычными приборами.

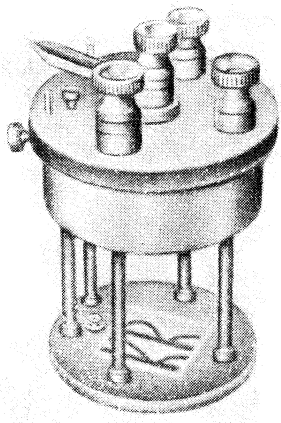


Рис. 225. Пиргелиометр Онгстрема

К задним поверхностям обеих полосок примыкают два спая термопары; на рисунке видны изогнутые провода, идущие от этих спаев к вводным клеммам.

Направив плоскость полосок перпендикулярно к солнечным лучам, замечают отклонение гальванометра, присоединенного к термопаре, и подбирают такую мощность нагревательного тока, чтобы стрелка гальванометра стала на нуль, и следовательно, нагревание обеих полосок было совершенно одинаковым.

В этом случае, как нетрудно видеть, мощность нагревательного тока будет в точности равна количеству лучистой энергии, падающей в единицу времени на полоску, освещаемую Солнцем. Останется только перечислить ватты в калории и отнести полученную величину к единице площади полоски.

Прибор Онгстрема дает, как видим, абсолютную величину напряжения солнечной радиации на перпендикулярную поверхность. К сожалению, в экспедиционных условиях всегда бывает желательно свести до минимума число вспомогательных измерительных приборов: гальванометров, вольтметров, миллиамперметров и пр., а потому иной раз бывает удобнее пользоваться хорошо проградуированным прибором, дающим *относительные* величины, но не требующим никаких вспомогательных приборов.

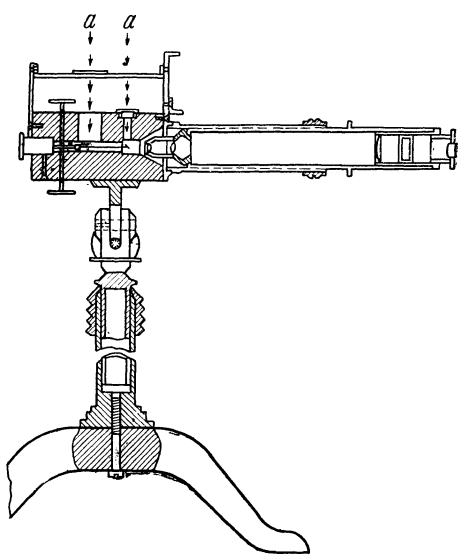


Рис. 226. Актинометр Михельсона

Наиболее распространенным из такого класса актинометрических инструментов является *актинометр* В. А. Михельсона, разрез которого представлен на рис. 226 [1].

Солнечные лучи, проникающие в прибор сквозь продолговатую щель *a*, падают на тонкую пластинку, прокатанную из двух металлов, сложенных вместе: платины и сплава инвара. Поверхность такой «биметаллической» пластинки покрыта чернью.

При нагревании платиновый слой удлиняется, а слой инвара, обладающего ничтожно малым коэффициентом расширения, сохраняет прежние размеры. Благодаря этому пластинка изгибается, увлекая с собой тонкую нить с указателем на конце, находящимся в поле объектива микроскопа. Перед окуляром этого микроскопа помещена шкала, по которой удобно отсчитывать перемещения указателя (волоска) и таким образом судить о нагревании пластинки.

Сам метод измерения напряжения солнечной радиации посредством актинометра Михельсона чрезвычайно прост: прибор наводят на Солнце, пользуясь простым приспособлением, затем открывают небольшой щиток, находящийся перед щелью, и замечают, на сколько делений при этом отклоняется волосок на шкале окуляр-микрометра. Отклонение это оказывается прямо пропорциональным падающей энергии.

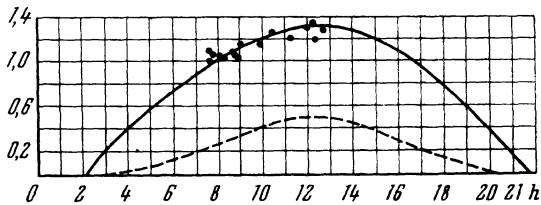


Рис. 227. Суточный ход солнечной радиации

Так как температура всех деталей прибора несколько изменяется с течением времени (несмотря на то, что стенки его сделаны чрезвычайно массивными), то необходимо проделать еще третий отсчет по микрометру, закрыв щель щитком и заметив, к какому делению шкалы возвращается волосок. После этого вычисляют «нулевое» положение волоска как среднее из первого и третьего отсчетов шкалы.

Актинометр Михельсона отличается замечательным постоянством переходного множителя; его показания достаточно сличать с показаниями абсолютного прибора через большие промежутки времени, или после различных перевозок прибора с места на место: цена деления, раз определенная, меняется совсем ничтожно.

Для непрерывной *регистрации* напряжения солнечной радиации служат *актинографы*. Одним из наиболее распространенных приборов этого типа является актинограф С. И. Савинова. Нагреванию подвергаются здесь спаи небольшой термобатарейки, имеющей форму звезды; другие спаи защищены от действия солнечных лучей, благодаря чему создается разность температур между ними, пропорциональная падающей энергии.

Прибор непрерывно наводится на Солнце посредством *гелиостата* с часовым механизмом. Термобатарея присоединяется к *гальванографу*, дающему такую же «точечную» запись, как мультитермограф, о котором говорилось выше (см. гл. I, § 12).

Актинометры, пиргелиометры и актинографы дают, следовательно, возможность построить кривую хода солнечной радиации на плоскость, перпендикулярную к прямым лучам. Для получения напряжения радиации на *горизонтальную* плоскость необходимо ординаты полученной кривой умножить на значения синуса угла, соответствующего высоте Солнца в каждый момент времени. В качестве примера приводим на рис. 227 обе кривые для ясного солнечного дня. Верхняя, сплошная, кривая выражает ход радиации на перпендикулярную к лучам, а нижняя, пунктирная,— на горизонтальную плоскость.

Спланиметрировав площади обеих кривых, легко определить сумму *тепла*, посылаемого за сутки на плоскость, перпендикулярную к лучам, и пло-

скость горизонтальную. Последняя величина, как нетрудно видеть, особенно важна в деле изучения *термики моря*.

К сожалению, весьма редко удается на судне производить непрерывные измерения актинометрами, актинографами или пиргелиометрами: этому препятствует, с одной стороны, качка, с другой — рысканье корабля, выводящие прибор из необходимого положения.

Если с качкой еще можно бороться, устанавливая приборы на карданном подвесе, то влияние рысканья исключить совершенно невозможно.

Вот почему для работы на корабле удобнее всего пользоваться приборами, носящими название *соляриметров* и *солярнграфов*. Приемная часть их представляет собой термобатарею, освещаемые спаи которой располагаются не перпендикулярно к солнечным лучам, а в *горизонтальной* плоскости. Для защиты от дождя и снега над ними помещается тонкий стеклянный колпачок [2].

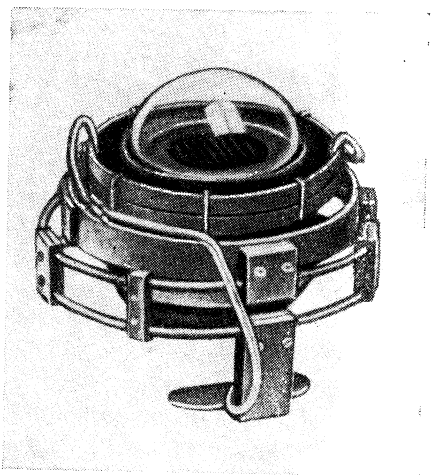


Рис. 228. Морской солярнграф Шулейкина, датчик

На рис. 228 изображен морской солярнграф, построенный В. В. Шулейкиным и установленный в *компасном котелке* на карданном подвесе. Прибор крепится на топе мачты, где измерения не могут быть искажены ни влиянием случайных теней, ни тепловой радиацией сильно нагретых предметов (например, труб и пр.).

Совершенно очевидно, что на показаниях такого прибора не отразятся ни качка, ни рысканье, каковы бы ни были размеры волны. Весьма важным свойством его является еще то, что, помимо энергии прямых солнечных лучей, он регистрирует и энергию *диффузного* света, падающего на поверхность моря от облачного неба.

Для разрешения проблем термики моря это обстоятельство является в высшей степени ценным: ведь во многих областях мирового океана Солнце бывает весьма редко не покрыто облаками, в большинстве же случаев вся тепловая радиация исходит от облаков; ясно, что в таких районах актинометры совершенно бессильны дать сколько-нибудь близкую к истине картину радиационного режима, между тем как соляриметр с этой задачей прекрасно справляется.

В качестве приемника энергии для морского соляриметра Шулейкин воспользовался термобатареей из очень большого числа элементов. Поэтому *регистрацию энергии* оказалось возможным производить посредством довольно грубого, а потому надежного в экспедиционной обстановке гальванографа.

Этот прибор крепился на массивной железной плите, подвешенной на кардане под книжной полкой в каюте (рис. 229). Он не отказывался работать даже при сильных штормах, когда крен корабля превышал 45°. Образец записи (за сутки) воспроизведен на рис. 230 в уменьшенном виде.

После этой первой серии записей прямой и диффузной солнечной радиации на корабле морские экспедиции постепенно оснащаются приборами, предназначенными для такой цели. Очень часто вместо регистрирующих гальванометров — гальванографов — в настоящее время применяют так называемые электронные потенциометры, например типа ЭПП-09, получившего широкое распространение в технике. Схема его представлена на рис. 231 [3].

Основой потенциометра служит четырехплечий мостик, питаемый от сухой батареи $Б$. Последовательно с этой батареей в диагональ мостика включены два реостата $R_р$, служащие для грубой и для точной регулировки

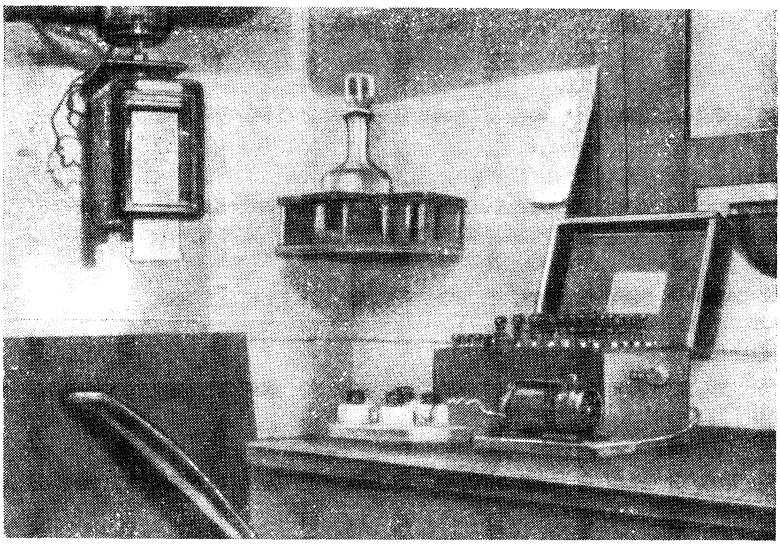


Рис. 229. Пишущая часть прибора в каюте

рабочего тока. Термобатарея соляриграфа или другого датчика e_x включена навстречу падению напряжения на реохорде R, который представляет собой потенциометрическое сопротивление с серебряным съемным ползунком, наложенное на круглый барабан. Такое соединение обеспечивается переключателем *ПК*, изображенным на схеме именно в этом положении. При неизменном значении рабочего тока компенсирующее напряжение определяется положением ползунка на реохорде R. Перемещения ползунка, до компенсации э. д. с., производятся посредством привода от реверсивного электродвигателя РД-09. Одновременно с передвижением ползунка по реохорду посредством гибкой нити перемещается каретка, которая несет на себе стрелку и пишущее приспособление. Напряжение между точками A'' и A' определяет собой область применения прибора.

При положении переключателя *ПК*, изображенном на рис. 231, ток, идущий под действием разности потенциалов между измеряемой э.д.с. термобатареи e_x и падением напряжения на реохорде R, поступает через *ПК* в электронный усилитель *УЭ*. Каждому значению измеряемой э.д.с. соответствует определенное положение ползунка на реохорде, при котором компенсация э.д.с. доводит разностный ток до нуля. В усилителе *УЭ* сигнал трансформируется вибрационным прерывателем в переменное напряжение с частотой, равной частоте питания реверсивного двигателя РД-09. Сигнал усиливается в *УЭ* и заставляет ротор электродвигателя вращаться в такую сторону, чтобы уменьшалась разность потенциалов между измеряемой величиной и падением потенциала в реохорде. В идеальном случае движение ползунка должно прекращаться при разностном сигнале, равном нулю. Практически это происходит при сигнале меньшем, чем чувствительность системы усиления.

Прибор автоматически (через определенные промежутки времени) или по желанию наблюдателя производит калибровку рабочего тока по нормальному элементу *НЭ*. Для этого механическая система перекидывает переключатель *ПК* левой его стороной в нижнее положение (к контакту сопротивления R_z) и включает фрикционную передачу от электродвигателя РД-09 к реостату $R_р$ для регулирования рабочего тока. В это время на усилитель подает-

ся сигнал, создаваемый разностью между э.д.с. нормального элемента и падением напряжения в сопротивлении R_k. При достижении номинального рабочего тока система успокаивается. Для компенсации влияний температуры помещения на элементы схемы в потенциометр вмонтировано медное сопротивление $R_м$, чувствительное к изменениям температуры прибора. При номинальном падении напряжения в сопротивлении R_k это приводит к изменениям рабочего тока, а значит, и к изменению положения начала отсчета на шкале прибора.



Рис. 230. Образец записи

Строятся потенциометры описанного типа, которые могут регистрировать изменения э.д.с. не в одной цепи, а в нескольких цепях датчиков (как это делается мультитермографами с гальванометрической базой, см. гл. I). В таких потенциометрах, снабженных автоматическими коммутаторами на несколько измерительных цепей, вместо регистрации пером применяется точечная регистрация, причем все точки, отпечатывающиеся на движущейся бумажной ленте, обладают различными цветами. В результате на ленте легко различаются цветные кривые.

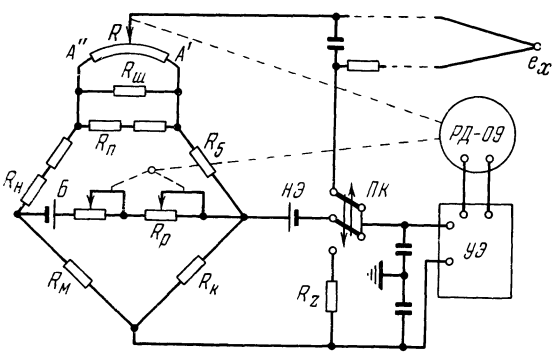


Рис. 231. Схема электронного потенциометра ЭПП-09

Как было уже упомянуто в гл. I, потенциометры не нуждаются в точной установке по отвесу (что было необходимо для регистрирующих гальванометров). Поэтому они очень удобны в судовой обстановке, позволяя обходиться без карданова подвеса: потенциометры можно просто крепить к переборке или к лабораторному столу в каюте.

Вид кривых, выражающих напряжение солнечной радиации, падающей на плоскость, перпендикулярную к конечным лучам, отчетливо показывает, что даже при постоянстве угла между направлением солнечных лучей и освещаемой плоскостью (90°) напряжение радиации резко меняется в течение дня.

Совершенно очевидно, что причина этого лежит в *непостоянстве* толщины воздушного слоя, который пронизывается лучами Солнца, находящегося на различных высотах над горизонтом.

Процесс изменения пронизываемой толщины проще всего можно проследить, представив себе, что весь атмосферный воздух располагается вокруг земного шара слоем *однородной* плотности. При том же количестве воздуха

такая «эквивалентная» атмосфера достигала бы в толщину всего лишь 8 *км*.

На рис. 232 этот 8-километровый слой схематически изображен в виде слоя высотой h. Плоскость HH' изображает горизонтальную плоскость в точке O, где стоит наблюдатель. Солнечные лучи проходят по направлению S_1O, S_2O, S_3O и т. д.

Даже при таком — явно преуменьшенном — отношении радиуса Земли R к толщине эквивалентной атмосферы h, как это изображено на рисунке, весьма резко проявляется различие в длинах путей, проходимых солнечными лучами при различных высотах Солнца над горизонтом. Разумеется, при значении $R : h = 796$, существующем в природе, различие это должно сказаться еще резче.

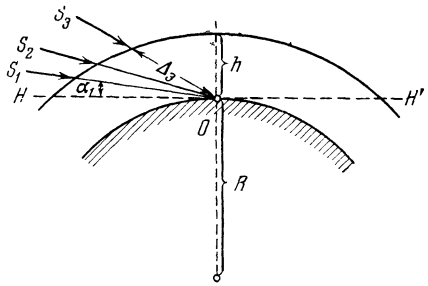


Рис. 232. Ход солнечных лучей в атмосфере

Принимая во внимание истинные геометрические соотношения и внося поправки на непостоянство температуры и другие уточнения, астрофизики вычислили пути, проходимые в действительности солнечными лучами при различных высотах Солнца α. Результаты вычислений приведены в табл. 14, где за единицу принята толщина эквивалентной атмосферы, иными словами, путь, проходимый солнечными лучами тогда, когда Солнце стоит в зените ($\alpha = 90°$). Учтена рефракция.

Как видим, лучи восходящего или заходящего Солнца пронизывают слой, в 81 раз более толстый, чем лучи Солнца, стоящего над головой наблюдателя.

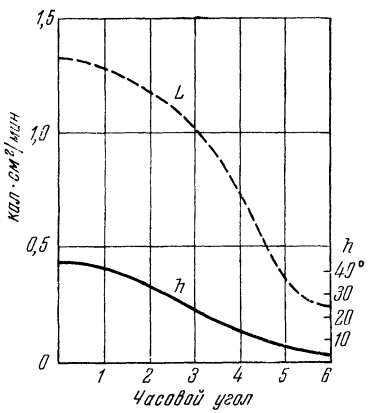


Рис. 233. Высота Солнца и радиация при разных часовых углах

В гл. VI, посвященной вопросам *оптики моря*, нам придется непрерывно оперировать с задачами об ослаблении света, проходящего сквозь слой той или иной толщины. Там будет доказано, что из всей первоначальной энергии света I_0 сквозь слой толщиной Δ пройдет только энергия I, связанная с I_0 соотношением

$$I = I_0 e^{-m\Delta}.$$

Здесь m может быть названо коэффициентом полного ослабления света (не разделяя эффектов поглощения и рассеяния).

В актинометрии чаще пользуются другим соотношением, которое можно просто получить из только что написанного, положив в нем $e^{-m} = a$. Именно

$$I = I_0 a^{\Delta}. \qquad (2)$$

Пусть коэффициент *прозрачности* a определен для того случая, когда Солнце находится в зените, и пусть тогда он равняется некоторой величине a_{90}. Очевидно, для каждой высоты Солнца может быть найдено, во сколько раз путь лучей превышает толщину эквивалентной атмосферы. Допустим, что при высоте Солнца α отношение

$$\frac{\Delta_\alpha}{\Delta_{90}} = n$$

Таблица 14

α	n	α	n
0°	81,4	7°	8,1
1	39,8	8	7,1
2	24,9	9	6,3
3	17,8	10	5,7
4	13,7	15	3,8
5	11,1	30	2,9
6	9,1	40	1,99
		90	1,00

Склонение	Дата		Склонение	Дата	
23°27′	21 июня	22 июня	—5°	9 марта	6 октября
20°	21 мая	24 июля	—10	23 февраля	20 »
15	2 »	13 августа	—15	9 »	3 ноября
10	16 апреля	28 »	—20	21 января	25 »
5	3 »	11 сентября	—23°27′	22 декабря	23 декабря
0	21 марта	25 »			

и что при этом $I = I_\alpha$. Тогда на основании (2) можно написать

$$I_\alpha = I_0 a_{90}^n. \qquad (3)$$

Этим-то соотношением и пользуются чаще всего в актинометрии, приурочивая очень часто наблюдения к таким высотам Солнца, чтобы n равнялось целым числам. Но как было уже упомянуто, сами актинометрические измерения *на морях* проводились пока еще в крайне недостаточном количестве. Вот почему до настоящего времени, для определения *притока* тепловой энергии от прямых солнечных лучей и от диффузной радиации неба применительно к различным районам, придется пока пользоваться приемом, который был предложен в 1932 г. В. В. Шулейкиным. Прежде всего, на основании ряда надежных инструментальных измерений этим автором были вычислены *возможные* суммы тепла, приходящегося на 1 *см*^{2} поверхности моря за сутки; эти вычисления были проделаны применительно к различным значениям склонения Солнца и широты места. Затем в экспедиционных условиях в течение насколько можно более продолжительного времени определяется отношение *действительной* радиации (суммарной: солнечной плюс диффузная) к максимальной возможной радиации прямой одного лишь Солнца (без учета диффузного потока от неба). За неимением лучшего приходится считать это отношение характерным для данного района и затем умножать ординаты кривых максимальной возможной радиации на коэффициент, выражающий это отношение. Тем самым создается возможность использования экспедиционных наблюдений в различных точках моря и в различные дни года для приближенных вычислений годичного хода кривой радиации.

В настоящее время непосредственные измерения радиации в ряде новых точек подтвердили цифры, полученные Шулейкиным для возможных сумм тепла путем вычислений. Поэтому здесь будет уместно воспроизвести этапы их построения.

Прежде всего была построена кривая L (рис. 233) суточного хода солнечной радиации на перпендикулярную поверхность. Затем, для того же числа, была построена кривая h, изображающая изменения высоты Солнца при соответствующем склонении в течение суток.

Но данные относятся к некоторому среднему значению коэффициента прозрачности атмосферы. При наблюдениях в ясный день прозрачность была больше, и есть основания принять ее за наибольшую для данного района. Зная высоту, на которой стояло Солнце при измерениях в ясный день, нетрудно было по кривым h и L рис. 233 определить, на сколько процентов наибольшая возможная радиация превышает радиацию при средней прозрачности и той же высоте Солнца над горизонтом.

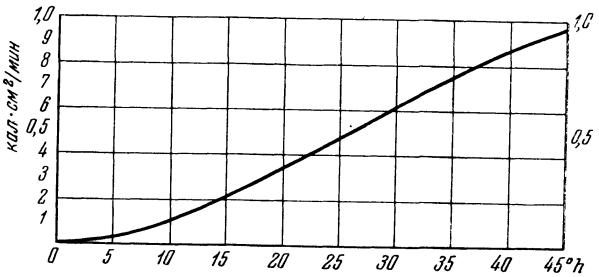


Рис. 234. Радиация при разных высотах Солнца

Определив таким способом поправочный коэффициент, В. В. Шулейкин перечислил данные применительно к идеальной прозрачности атмосферы, а затем, умножая величины радиации на перпендикулярную поверхность и на косинусы соответствующих высот Солнца, нашел суточный *ход радиации на горизонтальную плоскость*.

Но для дальнейшей работы важно знать не суточный ход этой радиации в какой-то один определенный день года и на какой-то одной определенной широте: необходимо получить подобные же данные для любого дня и для любой зоны. Вот почему от кривой суточного хода надо перейти к кривой, изображающей изменение радиации на горизонтальную поверхность, *в зависимости от изменений высоты Солнца*.

Эта кривая, послужившая основой для всех последующих вычислений, приведена на рис. 234.

Располагая этой кривой, можно было до конца решить поставленную задачу.

Максимальная возможная радиация является однозначной функцией *высоты* Солнца над горизонтом (во всяком случае может считаться однозначной в том приближении, которое вообще сейчас доступно при подобных геофизических вычислениях). С другой стороны, для каждой широты легко определить суточный ход высот Солнца, соответствующий тому или иному склонению.

Оставалось только для нескольких определенных широт построить диаграммы, на которых был дан *суточный ход* возможной *радиации* на горизонтальную поверхность, для различных склонений Солнца: всякий раз на диаграммы вместо высоты Солнца в данное время дня наносилась величина радиации, взятая с кривой рис. 234.

Зная суточный ход возможной радиации, легко найти суточные *суммы тепла* для различных значений склонения и для всех перечисленных широт; достаточно только спланиметрировать площади всех кривых и затем умножить полученные цифры на соответствующий переходный коэффициент, обусловленный масштабами рисунка.

С другой стороны, каждое значение склонения Солнца соответствует двум определенным дням в году, для удобства ориентировки приведенным в табл. 14.

По данным этой таблицы на диаграмме отмечаются на оси абсцисс (оси времен) точки, соответствующие тому или иному значению склонения Солнца, от +23°27′ до −23°27′. По оси ординат (оси суточных сумм тепла) откладываются величины *возможных* суточных сумм тепла, вычисленные указанным выше способом.

Полученная новая диаграмма даст полное представление *о годичном ходе возможных* суточных сумм тепла.

Кривые годового хода суточных сумм тепла позволяют довести до конца решение поставленной задачи; остается теперь только определить по карте средние координаты корабля, к которым можно приурочить ту или иную суточную запись экспедиционного соляриграфа и, зная склонение Солнца на каждый день, определить путем двойной *интерполяции возможную* суточную сумму тепла для данного дня.

На рис. 235 для примера воспроизведены кривые суточного хода, построенные применительно к шести значениям широты: φ = 65, 70, 75, 80, 85 и 90°. По оси абсцисс отложены влево и вправо от нуля, соответствующего полудню, значения часового угла, а по осям ординат — количества тепла в калориях на квадратный сантиметр поверхности моря в минуту. При каждой кривой проставлена цифра, которая показывает значение склонения в соответствующий день. Площади кривых пропорциональны количеству тепла, поступающего на квадратный сантиметр поверхности моря за сутки в отмеченный день года.

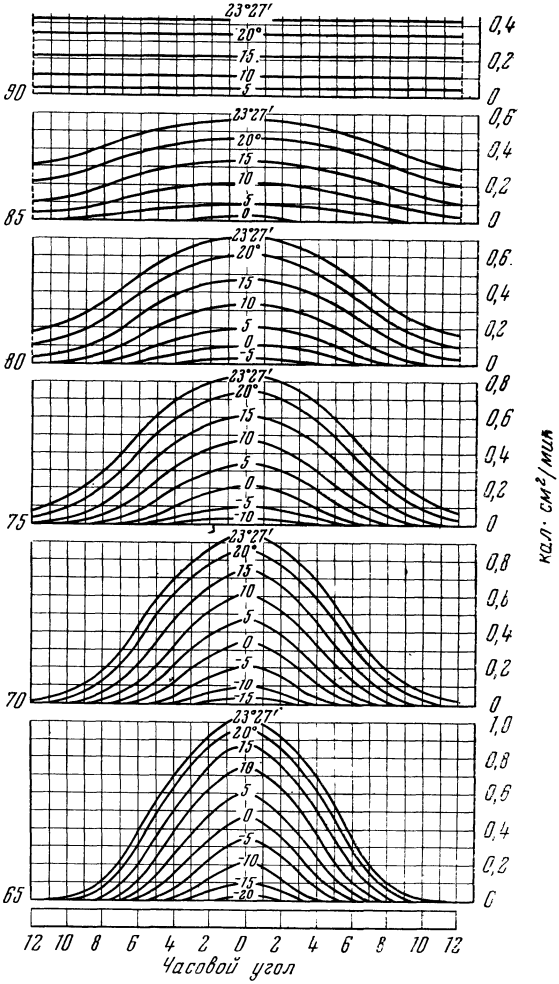


Рис. 235. Радиация при различных часовых углах, различных склонениях Солнца и на различных широтах

Определив эти суточные количества тепла, нетрудно по 22 точкам построить кривые годового хода суточных количеств тепла. Такие кривые приведены на рис. 236, где охвачены все широтные пояса от экватора до полюса через каждые 10° широты. Для широт от 0 до 50° вычисления произвел Н. И. Егоров [4], а для широт от 60 до 90° — В. В. Шулейкин [2], исходя из упомянутых суточных диаграмм.

Надо отметить, что кривые, соответствующие широтам 0 и 10°, обладают резко выраженными двумя максимумами. На кривой для широты 20° видна дуга, почти совпадающая с прямой, параллельной оси абсцисс, а на ней

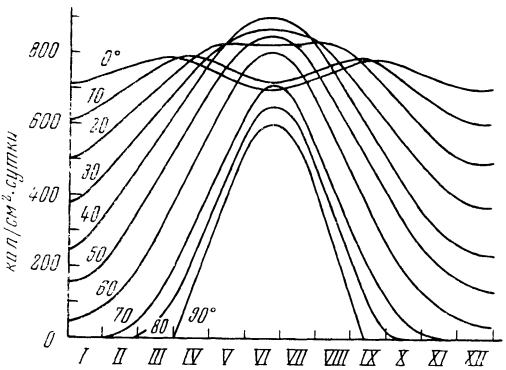


Рис. 236. Годовой ход максимальных возможных сумм тепла прямых солнечных лучей на различных широтах

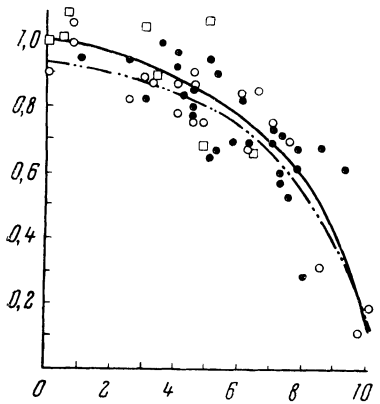


Рис. 237. Коэффициент использования при различной облачности

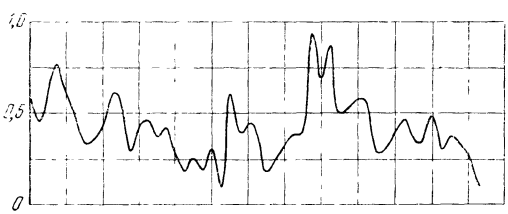


Рис. 238. Изменение коэффициента использования радиации

слабо намечены следы таких двух максимумов. Максимумы лежат вблизи весеннего и осеннего равноденствия.

Любопытно, что на экваторе суточное количество тепла, поступающего от Солнца при летнем солнцестоянии, совершенно такое же, как и при зимнем солнцестоянии. Оно только на 100 *кал/см²·сутки* превышает количество тепла, поступающего при летнем солнцестоянии близ полюса, и на 200 *кал меньше*, чем поступает на широте 40°.

Таковы суточные суммы тепла, получаемые при *абсолютно ясном, безоблачном небе* и при прозрачности воздуха, доступной в соответствующем районе.

Для приближенного определения наиболее вероятного *действительного* количества тепла, поступающего в море за сутки, необходимо найти своего рода *коэффициент использования* этого тепла, зависящий в первую очередь от облачности и представляющий отношение измеренных сумм тепла к возможным.

На рис. 237 воспроизведена приближенная кривая, проведенная по точкам, взятым из наблюдений. По оси абсцисс отложена характеристика облачности в баллах, а по оси ординат — значения коэффициента использования. Такая зависимость получена во время плавания в тропиках и в средних широтах [4, 5].

На рис. 238 представлено изменение величины коэффициента использования во время плавания в северных морях. Здесь следует считать среднее значение этого коэффициента равным приблизительно 0,4.

Именно такие диаграммы надо строить применительно к изучаемым районам океана, сопоставляя суточные суммы тепла, полученные посредством судового соляриграфа, и наибольшие суточные суммы тепла, доступные в то же время года и в том же районе. Каждая такая диаграмма является морской

климатологической характеристикой, по которой можно с каким-то приближением вычислять вероятные суточные суммы тепла в промежуточных районах океана.

До сих пор говорилось только об интегральном потоке лучистой энергии во всем солнечном спектре. Исследования показали, что при изменении высоты Солнца над горизонтом и при изменении «числа эквивалентных атмосфер» n, пронизанных солнечными лучами, сильно меняется сам спектральный состав излучения, падающего на поверхность моря (рис. 239). Здесь по оси абсцисс отложены длины световых волн в микронах, а по оси ординат — количество энергии, которое приходится на элементарную область спектра в пределах $\Delta\lambda = 10$ *ммк*. Это количество выражено в сотых долях калории на квадратный сантиметр в минуту.

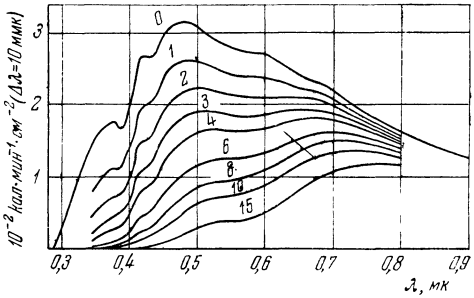


Рис. 239. Распределение энергии в спектре Солнца при различных высотах

Цифры у кривых показывают, сколько эквивалентных атмосфер прошли солнечные лучи при различных высотах Солнца над горизонтом. Кривая *0* (рис. 239) получена посредством экстраполяции. Она выражает распределение энергии в спектре солнечных лучей, которые только что вошли в атмосферу и еще не ослаблены ею.

На рис. 240 представлена диаграмма, которая может оказаться полезной при определении прозрачности атмосферы в зависимости от содержания водяного пара и от числа n. Внизу этой диаграммы дана кривая, выражающая изменение поглощения лучистой энергии водяным паром при изменении некоторого аргумента nw, причем n по-прежнему обозначает число эквивалентных атмосфер, а $w = 2{,}3\,e$, где e — упругость водяного пара в миллиметрах ртутного столба. Вверху диаграммы построены кривые, выражающие изме-

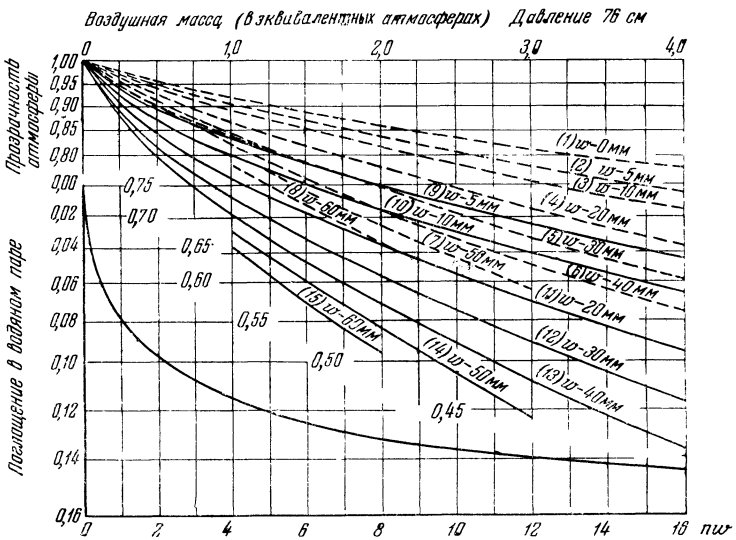


Рис. 240. Поглощение тепла в водяном паре и прозрачность атмосферы

нения прозрачности атмосферы в зависимости от числа w. При каждой кривой поставлена цифра, выражающая значение w от 0 до 60 *мм*, на высоте обычных наблюдений.

Посредством этих кривых можно, в частности, сопоставить прозрачность тропического воздуха с прозрачностью полярного. Действительно, при температурах воздуха, близких к нулю (не говоря уже о температурах более низких), величина e колеблется около 4 или 5. Следовательно, величина w, служащая параметром кривых рис. 240, близка к 9—11 *мм*. Из семейства кривых рис. 240 (вверху) выбираем ту, которая соответствует 10 *мм*, и видим, что при толщине слоя 1 *экв. атм* прозрачность атмосферы здесь должна быть 0,8, а при толщине слоя 2 *экв. атм* она станет равной 0,71. В то же время при температуре воздуха около 30° упругость пара в морском воздухе бывает около 25 *мм*, что соответствует значению w около 60. По диаграмме определяем, что при такой влажности слой воздуха толщиной в 1 *экв. атм* обладает прозрачностью всего лишь 0,65, а слой толщиной 2 *экв. атм* — прозрачностью, равной только 0,51. Прозрачность теплого морского воздуха оказывается при толщине в 1 *экв. атм* на 23%, а при толщине в 2 *экв. атм* — на 40% меньше, чем прозрачность холодного воздуха. К сожалению, такому учету не поддается влияние облаков на количество тепла, доходящего до поверхности моря. Существуют лишь грубые чисто эмпирические формулы, предложенные для ориентировочной оценки роли облаков, например, формула Кимбелла

$$Q = Q_0 [0{,}29 + 0{,}71 (1 - C)], \qquad (4)$$

где Q_0 — суточная сумма тепла, приходящаяся на единицу поверхности моря при абсолютно ясном небе; Q — суточная сумма тепла, поступающего на поверхность моря при условии, что некоторая часть C небесного свода покрыта облаками.

§ 2. Потери тепла на эффективное излучение

Часть тепла, получаемого морем от Солнца, теряется на эффективное лучеиспускание в инфракрасной области спектра. Потери были бы весьма велики, если бы тепло, излучаемое поверхностью моря в длинноволновой части спектра, не возвращалось частично из атмосферы, которая посылает тепловые лучи во все стороны, в том числе и вниз, к поверхности моря. Разность величин радиационных потоков, излучаемых морем и получаемых морем от атмосферы в длинноволновой части спектра, носит название *эффек-*

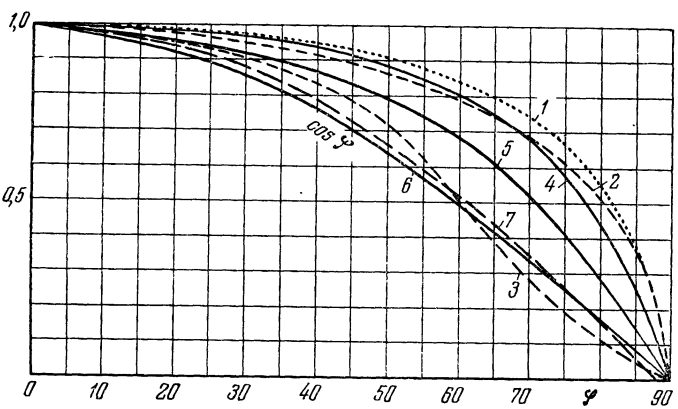


Рис. 241. Эффективное излучение по различным направлениям

тивного излучения. Именно эта величина должна нас интересовать при исследовании различных потерь тепла с поверхности моря.

Обмен лучистой энергией между морем и атмосферой сказывается очень убедительно при измерениях эффективного излучения по различным направлениям. На рис. 241 графически изображены результаты подобных измерений, произведенных несколькими авторами в весьма разнообразных условиях [2].

В частности, наибольшее эффективное излучение соответствует кривой *1*, полученной при работах на высокогорной обсерватории. Как здесь, так и при других измерениях определялось эффективное излучение не с поверхности воды, а с поверхности черного тела, входившего в состав измерительного прибора. Кривые *2—5* получены в условиях материка на уровне моря. Особый интерес представляет кривая *7*, полученная на самом берегу моря. Здесь чрезвычайно резко сказывается различие между эффективным излучением по направлению в зенит ($\psi = 0$) и излучением в других направлениях. Необходимо обратить внимание на то, что кривая *7* пересекает ось абсцисс при значении зенитного расстояния $\psi = 87$. Это происходит потому, что над морем залегает толстый слой воздуха, весьма богатый водяным паром, который дает ярко выраженную положительную радиацию: излучение от атмосферы к морю преобладает над излучением морской поверхности в атмосферу. Вообще же говоря, кривая *7* проходит довольно близко к кривой *6*, нанесенной на рис. 241 для сравнения, это — косинусоида

$$y = \cos\psi.$$

Физический смысл кривых рис. 241 ясен: чем толще слой атмосферы в направлении, характеризуемом зенитным расстоянием луча ψ, тем большее количество тепла возвращается морю из потока, излучаемого им, и тем меньше уходит в межпланетное пространство. В особенности четко это видно на примере кривой *7*, где уже на высоте 3° над горизонтом оба потока лучистой энергии взаимно уравновешиваются и эффективное излучение равно нулю. Результаты измерений, соответствующих кривой *7* на рис. 241, изображены несколько иначе на рис. 242, *а*, где представлена своего рода «радиационная топография» небесного свода в ночное время. В полюсе диаграммы находится зенит. Тонкими прерывистыми линиями изображены пояса небесного свода, разделенные промежутками 10° зенитного расстояния. Сплошные линии представляют собой кривые равного эффективного излучения. За единицу принято эффективное излучение по направлению к зениту. При каждой кривой проставлена цифра, отмечающая значение эффективного излучения в соответствующем направлении в условных единицах. Тонкими концентрическими линиями заштрихован пояс, лежащий ниже горизонта,— это море, поверх-

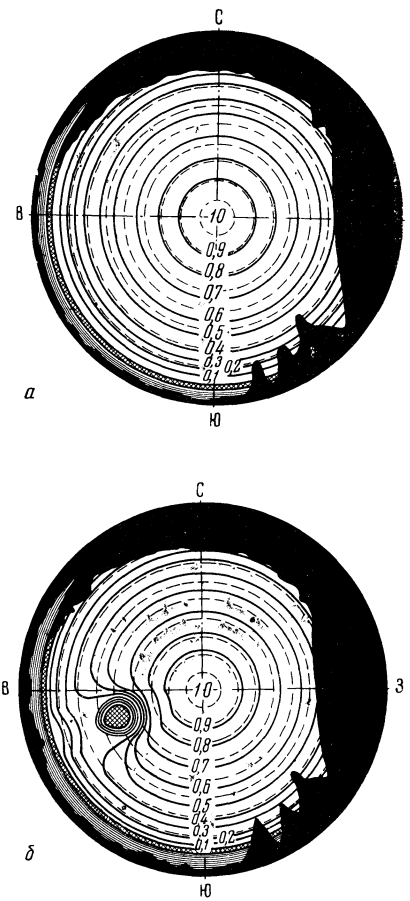


Рис. 242. Распределение энергии по небесному своду ночью (*а*) и днем (*б*)

ность которого была недоступна там, где изображены черные силуэты деревьев, здания и т. д. Над морем лежит тонкий пояс, покрытый штриховкой в клетку,— это пояс шириной 3°, в пределах которого излучение неба по направлению к морю преобладает над излучением моря к небу.

Дневному времени при безоблачном небе соответствует аналогичный схематический рис. 242, *б*. Как видим, здесь, кроме такого же узкого пояса над горизонтом, существует еще участок, покрытый штриховкой в клетку. Это — небольшой участок небесного свода близ самого Солнца; на его границах эффективное излучение равняется нулю, а от его поверхности идет к морю излучение, которое преобладает над обратным излучением моря. На рис. 243 изображены разрезы небесного свода: по вертикалу Солнца (*а*) и в горизонтальной плоскости (*б*), проходящей через диск Солнца. По оси абсцисс отложены значения угла $\alpha = 90 - \psi$, по оси ординат — эффективное излучение, принимаемое за единицу при направлении к зениту. Ему придан знак минус (отсчитывается вверх от оси абсцисс). Под осью абсцисс лежит область, где излучение небесного свода к морю преобладает над обратным излучением моря. При уменьшении прозрачности атмосферы под влиянием повышенного содержания в ней водяного пара «положительный» участок небесного свода вокруг Солнца увеличивается на схемах, аналогичных рис. 242, и своеобразная «воронка» на схемах, аналогичных рис. 243, становится более широкой.

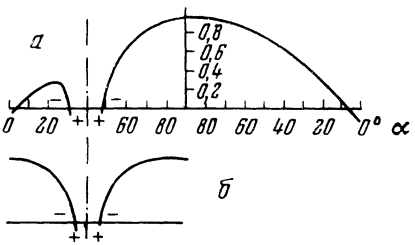


Рис. 243. Разрез через центр солнечного диска

При решении обычных задач термики моря чаще всего приходится вычислять эффективное излучение в полупространстве над морем, т. е. полное эффективное излучение по направлению ко всем участкам небесного свода. Если бы атмосфера отсутствовала, то каждый квадратный сантиметр поверхности моря терял бы на лучеиспускание в межпланетное пространство количество тепла

$$q' = \sigma T^4 \ кал/см^2 \cdot мин. \qquad (5)$$

Здесь T — абсолютная температура поверхности моря, σ — коэффициент излучения, который для черного тела, как известно, равняется $0{,}821 \cdot 10^{-10}$ *кал/см*$^2 \cdot$ *мин* $\cdot$ *град*^{4}. Опыты показали, что поверхность моря в отношении теплового излучения следует считать серым телом, т. е. телом, излучающим длинные волны примерно в той же пропорции, как черное тело, но только в несколько меньшем количестве.

Коэффициент σ_1 для поверхности моря можно полагать равным 0,9 σ.

Часть энергии, определяемой по формуле (5), атмосфера возвращает морю. Эта возвращенная часть энергии в свою очередь зависит главным образом от количества водяного пара, содержащегося в воздухе, а кроме того, от вертикального градиента температур воздуха.

Учет последнего фактора можно найти в специальной литературе. Для практических целей оказывается достаточным учитывать абсолютную влажность e воздуха над морем (на высоте нескольких метров). В конечном счете потеря тепла q_R на эффективное излучение может быть выражена эмпирической формулой Онгстрема, справедливой при ясном небе *над сушей*:

$$q_R = \sigma_1 T^4 (0{,}255 + 0{,}32 \cdot 10^{-0{,}069e}). \qquad (6)$$

В формуле (6) q_R выражено в *кал/см*$^2 \cdot$ *мин* при подстановке e в *мм*. Практически при работах на палубе обычно определяют относительную влажность

воздуха в процентах. Для перехода от нее к абсолютной влажности e надо учесть, что упругость пара, насыщающего воздух над морем, обусловлена температурой поверхностной воды. Следовательно, по измеренной поверхностной температуре и по измеренной относительной влажности воздуха можно вычислить e. Вместо этой цепи вычислений, требующихся для определения q_R, можно пользоваться готовыми вычисленными кривыми, воспроизведенными на рис. 244, на котором по оси абсцисс отложены значения температуры [в градусах Цельсия, а не абсолютной, как в формуле (6)], по оси ординат — значения относительной влажности в процентах. Цифры, проставленные у кривых, показывают значение величины q_R в *кал/см²·мин*, которому соответствует та или иная кривая. Искомые значения q_R определяются посредством интерполяции по диаграмме рис. 244. Например, из рисунка видно, что при температуре поверхностной воды 20° и относительной влажности 85% $q_R = 0{,}167$ *кал/см²·мин*.

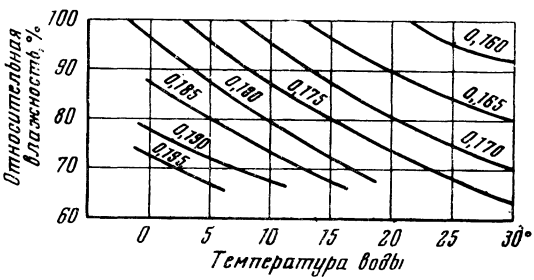


Рис. 244. Эффективное излучение (по А. Онгстрему и Г. Свердрупу)

В экспедиции на океанографическом судне «Седов» В. В. Шулейкин применил формулу Онгстрема (6) для вычисления потерь на эффективное излучение водами Атлантического океана при составлении полного теплового баланса поверхности Северной Атлантики. В результате полный баланс, о котором будет речь ниже, оказался *отрицательным* даже в тропической зоне (разумеется, в зимнее время). Это заставило организовать в следующем рейсе «Седова» непосредственные измерения эффективного излучения. В мастерских Главной геофизической обсерватории были заказаны датчики длинноволнового излучения для установки на мачтах. Такой датчик, сконструированный Ю. Д. Янишевским, состоит из полосок манганина и константана шириной 0,45 *мм*, толщиной 0,019 *мм* и длиной 8 *мм* [1]. Нечетные спаи расположены на медных штифтах, изолированных в электрическом отношении от массивной металлической пластины, в которой они прикреплены. Эта пластина находится в тепловом контакте с корпусом и принимает температуру окружающего воздуха.

Верхняя — излучающая — поверхность термобатареи покрыта черной краской (хотя в этой области спектра — инфракрасной, вероятно, таков же коэффициент излучения и других существующих красителей). От восхода до захода солнца излучатель выключается, чтобы присоединяемый к нему электронный потенциометр не зашкаливал при поступлении *положительной* радиации от солнца. После захода солнца отрицательное *серое* излучение прибора превышает тот поток тепла, который поступает сверху, от атмосферы, и прибор начинает нормальную работу. Малая толщина манганиновой и константановой фольги способствует увеличению чувствительности прибора, в особенности, если принять во внимание, что в батарею входят 120—130 последовательно включенных термоэлементов. Для предохранения излучающей поверхности от попадания дождя, снега и увлажнения в условиях океанского плавания над этой поверхностью крепится *полиэтиленовая* пленка, натянутая на металлическое кольцо, которое навинчивается на корпус прибора. Чтобы дождевые капли и случайные соринки скатывались с этой пленки, под ней помещается проволочный каркас соответствующей формы. Такая защита излучателя впервые была применена В. И. Шляховым во время Третьей Антарктической экспедиции Академии наук СССР. При толщине такой пленки в 30 *мк* полиэтилен пропускает 94—95% инфракрасной радиации.

С. М. Попов, работавший на «Седове» с этими излучателями, установил их на трех высотах: верхний был поставлен на антенрее, на высоте 55,5 *м* над ватерлинией, второй — на ноке марсареи, на высоте 25,0 *м*, и третий — на бушприте, на высоте 13,5 *м* над ватерлинией. От захода солнца до восхода потенциометр, стоявший в лаборатории, непрерывно регистрировал показания всех трех излучателей [6]. Для предварительной градуировки прибора перед работами и для контрольной градуировки после окончания рейса, в судовых условиях, применялась модель «черного тела», излучающая часть которого поддерживалась при постоянной температуре 0,4° посредством ванны, наполненной пресной водой с плавающим в ней льдом.

В результате работ, проведенных С. М. Поповым на «Седове», им была получена эмпирическая формула, предназначенная для вычисления потерь тепла в *океане* на эффективное излучение:

$$q_R = \sigma T^4 (0{,}0674 + 2{,}27 \cdot 10^{-0{,}084e}). \qquad (6a)$$

Сравнение этой формулы с формулой Онгстрема показывает, что особо заметные различия между ними возникают при наибольших значениях влажности e.

Через два года после С. М. Попова той же аппаратурой на «Седове» и на другом экспедиционном судне воспользовались Г. М. Дегтярев, Ю. А. Меньшов и Б. Е. Алемасов, которые провели аналогичные измерения в иных районах Атлантического океана [7].

Эти авторы также обнаружили уменьшение энергии, излучаемой в условиях океана, по сравнению с теми значениями, какие дает формула А. Онгстрема, выведенная на основании *материковых* исследований. Но различие получилось не таким большим, как при измерениях С. М. Попова. Цитированные авторы полагают, что цифры С. М. Попова оказались заниженными примерно на 25% и правильно объясняют причину этого занижения: все измерения С. М. Попова проводились в западной области Атлантического океана, недалеко от берегов материка Африки. Даже некоторые оптические явления в атмосфере, например рубиновая окраска облаков во время восхода и после заката солнца и контрастирующие с ней зеленые тона неба,— все это свидетельствует о сильной *запыленности* воздуха в этом районе, где он поступает к океану с пустынь Африки. Общеизвестно, что даже на островах Зеленого Мыса, совсем не близких к материку, отлагается мельчайший песок африканского происхождения. Именно эта тончайшая и обильная коллоидальная взвесь в атмосфере должна уменьшать эффективное излучение с поверхности Атлантического океана в этой, западной, его части.

Облачность понижает потери тепла на эффективное лучеиспускание при всех прочих равных условиях. При этом по-разному влияют различные формы облаков высокого, среднего и нижнего ярусов. Общее влияние их принято оценивать по эмпирической формуле

$$Q'_R = Q_R (1 - n_H C_H - n_M C_M - n_L C_L), \qquad (7)$$

где Q_R — эффективное излучение при ясном небе по формуле (6); Q'_R — эффективное излучение при облачном небе; n_H, n_M, n_L — облачность, выраженная в долях всей поверхности небесного свода соответственно для высокого, среднего и нижнего ярусов; C_H, C_M, C_L — коэффициенты, характеризующие влияние облаков верхнего, среднего и нижнего ярусов. Ввиду преобладания остальных потерь тепла в морских условиях над потерями на эффективное излучение с поверхности моря достаточно нескольких цифр из большого числа, рекомендуемого различными авторами для оценки этих коэффициентов. Можно полагать, что C_H при перистых облаках меняется в пре-

делах 0,1—0,2, а при перистослоистых и перисто-кучевых — в пределах от 0,2 до 0,3. Коэффициент C_M при высоко-кучевых облаках равен 0,5—0,6, а при высоко-слоистых облаках 0,6—0,75. Коэффициент C_L играет очень большую роль: при слоисто-кучевых облаках он равен 0,6—0,75, при кучевых достигает 0,75—0,85 и при дождевых — от 0,88 до 0,95.

§ 3. Радиация, отраженная от поверхности океана

При современном состоянии учета различных составляющих теплового баланса обычно принимают во внимание потери лучистой энергии, отраженной от поверхности океана и потому не проникающей в воду (ΔQ).

На непосредственные измерения этих потерь в экспедиционных условиях нередко затрачивается немало труда, но надо признать, что качество подобных измерений не может быть удовлетворительным при обычном расположении измерительных приборов — альбедометров: совершенно случайными оказываются действительные значения углов, под которыми поступает

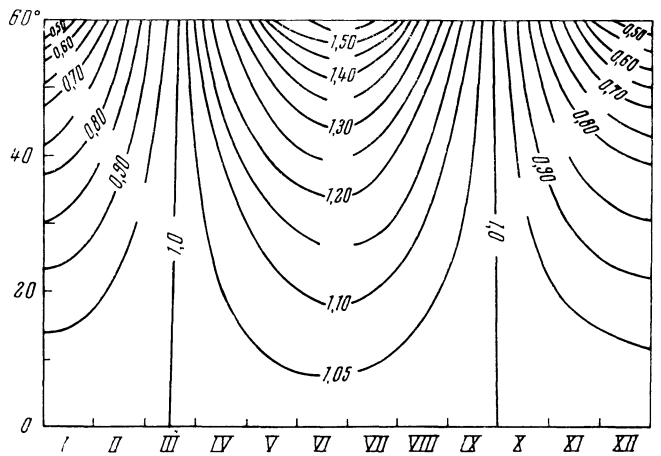


Рис. 245. Расчет отраженной радиации (по Г. М. Дегтяреву и др.)

с поверхности воды отраженный луч, очень большие погрешности вносит излучение, поступающее от бортов экспедиционного судна. Совсем несостоятельны предложения некоторых авторов об окраске бортов судна в тот или иной цвет, ибо по отношению к наиболее важной компоненте радиации — инфракрасной — все краски будут вести себя, как серые.

По этой причине В. В. Шулейкин сделал попытку *вычислить* количество лучистой энергии, отражаемой от поверхности океана, при различных условиях [5]. Оказалось, что с достаточным приближением можно считать эту энергию связанной очень простым эмпирическим соотношением с коэффициентом использования η энергии прямых солнечных лучей

$$\Delta Q = -K\eta\xi \ кал/см^2 \cdot сутки. \qquad (8)$$

Эмпирический коэффициент K оказался близким к 33, а коэффициент ξ, зависящий от широты и от склонения Солнца, можно было считать в тропической зоне и в сезон работы цитированного автора мало отличающимся от единицы.

Эту формулу, полученную графоаналитическим путем с использованием известных уравнений Френеля, очень обстоятельно проверили и уточнили

Г. М. Дегтярев, А. А. Сорокин и Ю. А. Меньшов. Работая в различных районах Атлантического океана и в различные сроки, они подвешивали измерительный прибор (пиранометр Ю. Д. Янишевского) *очень далеко* от корпуса корабля («Седова»): к концу бушприта, на расстоянии 14 *м* от форштевня и на высоте 7 *м* над водой. В результате очень большой серии измерений они дали уточненную формулу для расчета количества ΔQ лучистой энергии, отражаемой от поверхности океана [8]:

$$\Delta Q = -38\eta\xi \ кал/см^2 \cdot сутки, \qquad (8а)$$

в которой коэффициент ξ можно определить для любой широты от 0 до 60° и для любого времени года по номограмме рис. 245.

В работе [8] приведен табличный материал, который позволяет убедиться в надежности предлагаемой авторами уточненной эмпирической формулы и построенной ими же номограммы. Дальнейшие трудоемкие и ненадежные инструментальные измерения величины ΔQ следует считать излишними.

§ 4. Потери тепла на испарение морской воды

Каждый грамм испарившейся морской воды отнимает у моря количество тепла, равное скрытой теплоте λ_1 парообразования, т. е.

$$\lambda_1 = 607 - 0{,}7\vartheta \ кал/г,$$

где ϑ — температура воды в градусах Цельсия. Это очень большое количество, а потому испарение должно являться весьма важной составляющей среди всех потерь тепла с поверхности моря.

Количественное определение зависимости между скоростью испарения воды и метеорологическими условиями издавна производилось метеорологами в сухопутных условиях. Работа на борту корабля сопряжена с техническими затруднениями, связанными с качкой и с выдуванием части воды из испарителя при сильном ветре. Совершенно очевидно, что всякий весовой метод может привести к грубым и недопустимым погрешностям в подобных условиях.

В связи с этим измерения скорости испарения на корабле стали производиться только после того, как были найдены невесовые способы определения количества испарившейся воды в приборах на палубе.

Первым по времени явился способ, основанный на измерениях солености морской воды в испарителе либо посредством ареометрирования, либо посредством титрования на хлор. По увеличению солености воды в испарителе легко найти количество испарившейся воды.

Однако прирост солености при испарении небольшого количества воды чрезвычайно мал. Поэтому для сколько-нибудь надежных измерений требуется сильно растягивать промежуток времени между начальным и конечным определениями солености. За такой большой промежуток времени легко могут измениться метеорологические явления и безусловно изменится температура воды в самом испарителе.

Значительно удобней второй способ, применяемый в советских морских экспедициях и на морских обсерваториях, основанный на измерении *понижения температуры* воды в испарителе за счет потери тепла при испарении.

Для того чтобы исследовать испарение в самых разнообразных условиях, на самых различных широтах, В. В. Шулейкин произвел зимой 1926/27 г. систематические измерения на борту парохода «Трансбалт» во время его рейса из Черного моря во Владивосток через Средиземное и Красное моря, Индийский океан, Южно-Китайское, Восточно-Китайское и Японское моря.

На рис. 246 черными точками обозначены станции, где брались пробы воды.

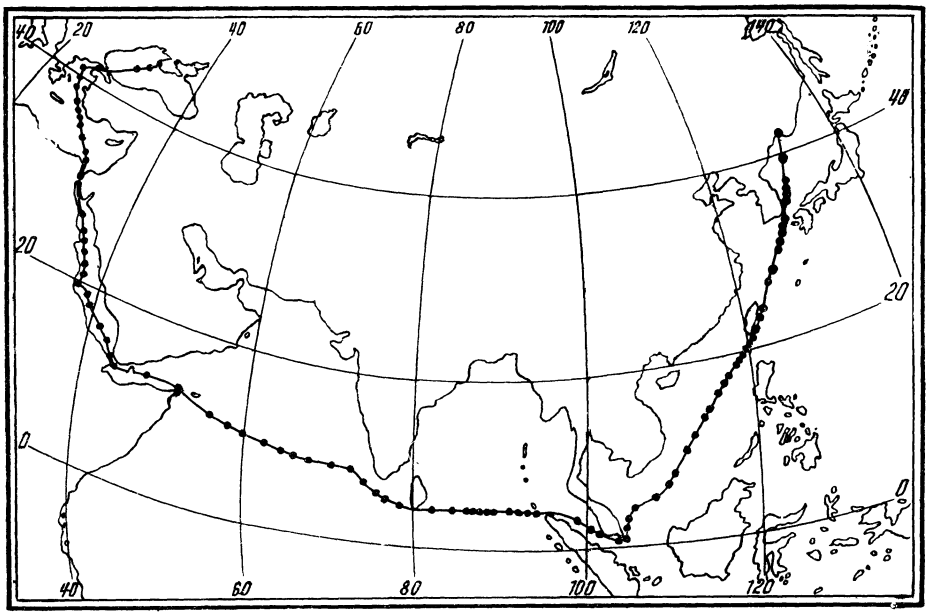


Рис. 246. Рейс с испарителем

Прибор был установлен на шлюпочной палубе, где он обтекался более или менее правильными струями воздуха и был в то же время защищен от действия прямых солнечных лучей тенью от штурманской рубки или вельботов [9].

Морская вода, взятая с поверхности парусиновым ведром, вводилась в дьюаровский сосуд D специальной формы, изображенный на рис. 247; на рис. 247 представлен также внешний вид прибора. Когда крышка C металлического котелка, в котором монтирован сосуд, закрыта, то вода сохраняет в нем свою начальную температуру, указываемую термометром.

Но если внезапно отвести в сторону обе половинки крышки C (как показано на рис. 247, *а*, в плане), то вода начнет испаряться под действием ветра, омывающего ее поверхность. Скрытая теплота испарения, теплоемкость, объем ее и величина ее свободной поверхности известны.

Нетрудно вычислить количество испаряющейся воды, наблюдая *понижение ее температуры* (по термометру).

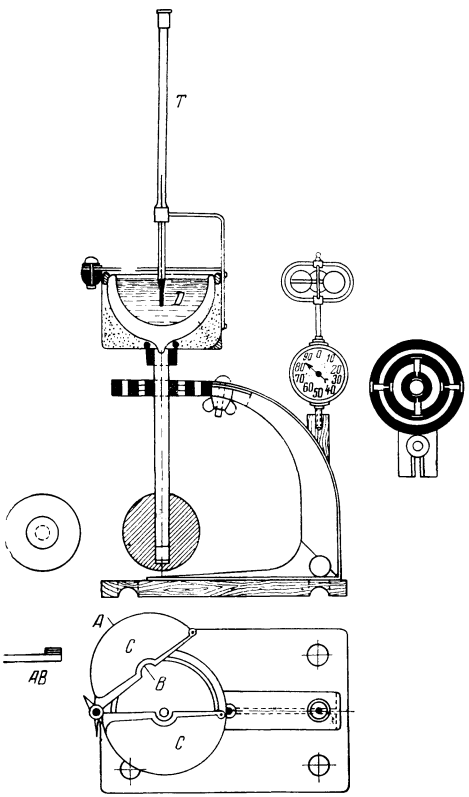
Промежуток времени, достаточный для заметного охлаждения воды, не превышает нескольких минут. Шкала термометра может быть разделена на $^1/_5$ градуса. Удобно пользоваться термометрами от психрометра Асмана.

Однако нетрудно видеть, что понижение температуры воды зависит не только от испарения воды в сосуде, но и от *теплообмена* между этой водой и атмосферным воздухом.

Обычно температура поверхностной морской воды бывает *выше* температуры воздуха. Поэтому последний, протекая над поверхностью испарителя, будет уносить с собой не только водяной пар, но и некоторое добавочное количество тепла, тем большее, чем больше разность температур между водой и воздухом. Теплообмен прекратится, когда температура воды сравняется с температурой воздуха: охлаждение воды тогда будет происходить исключительно за счет ее испарения. Но при дальнейшем охлаждении ее картина, очевидно, снова изменится: более теплый воздух будет отдавать воде обратно часть тепла, расходуемого на испарение.

Для измерения количества тепла, расходуемого на одно только испарение, необходимо производить отсчет по термометру в те моменты, когда температура воды немного выше и примерно на столько же ниже температуры воздуха. Заметив время, протекшее между двумя этими моментами, нетрудно вычислить скорость испарения воды. Но производить вычисление на основании одних только двух таких отсчетов нерационально по двум причинам.

Прежде всего при этом возможны довольно большие случайные погрешности, обусловленные неточностью отсчетов по термометру. При небольшом температурном интервале погрешность может оказаться значительной в процент-



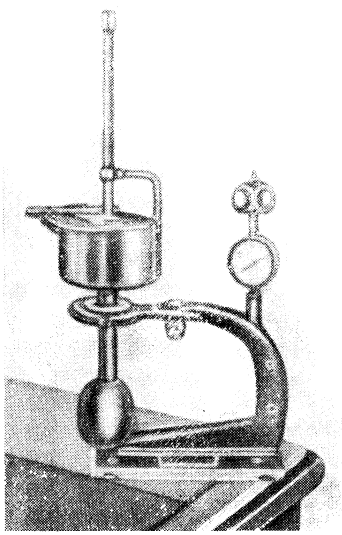


Рис. 247. Морской испаритель Шулейкина.
Разрез и общий вид прибора

ном отношении. Затем является чрезвычайно заманчивым воспользоваться одними и теми же наблюдениями как для измерения скорости испарения воды, так и для исследования теплообмена между водой и воздухом. Последнюю же задачу можно просто разрешить, определяя, сколько тепла теряется водой дополнительно, помимо скрытого тепла испарения, когда температура воды превышает температуру воздуха, и, наоборот, сколько тепла вода отнимает у воздуха, если последний оказывается теплее ее.

Вот почему для разрешения обеих поставленных задач желательно строить *кривые охлаждения* воды. Пусть такая кривая построена при условии, что скорость ветра остается постоянной за все время наблюдений. Пусть она выражает функцию $\vartheta = \psi(t)$, где ϑ — температура воды, а t — время. Тогда количество тепла, теряемого водой (на каждый квадратный сантиметр ее поверхности) в единицу времени, будет равно

$$\frac{dq}{dt} = c\frac{Q\delta}{F}\frac{d\vartheta}{dt}. \qquad (9)$$

Здесь Q — объем воды в сосуде, F — величина ее свободной поверхности, c — ее удельная теплоемкость, δ — плотность. Количество тепла, расходуемого на одно только испарение, нетрудно вычислить, найдя графически величину $d\vartheta/dt$ для точки, соответствующей $\vartheta_{вод} = \vartheta_{возд}$.

Другие точки послужат нам в дальнейшем для исследования теплообмена (см. § 5). При построении кривой элиминируются случайные погрешности отдельных отсчетов температур, если кривая достаточно плавно проводится между точками.

Обычно во время наблюдений скорость ветра непрерывно меняется и точки кривой $\vartheta = \psi(t)$ не могут быть приведены к одной какой-нибудь скорости ветра, так как зависимость между нею и скоростью испарения только лишь подлежит определению. Чтобы обойти такое серьезное, на первый взгляд, затруднение, достаточно при построении кривых охлаждения брать в качестве независимой переменной не время, *а путь* L, пролетаемый за время опыта частицами *воздуха*, обтекающего испаритель. Отсчитывать его можно непосредственно по анемометру.

Пусть такая кривая $\vartheta = \Psi(L)$ построена. Нетрудно видеть, что, проведя касательную в любой ее точке, можно узнать величину $d\vartheta/dL$. Определив же последнюю и зная, чему в данный момент равнялась скорость ветра V, остается только вычислить $d\vartheta/dt$ из соотношения

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \frac{d\vartheta}{dL}\frac{dL}{dt} = \frac{d\vartheta}{dL}V.$$

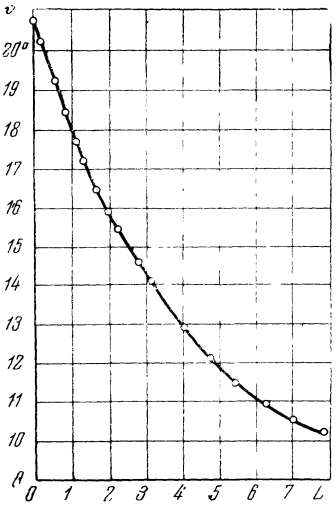


Рис. 248. Паде и т мпературы в испарителе

На рис. 248 изображена кривая $\vartheta = \Psi(L)$, соответствующая одной из наиболее полных серий наблюдений (теплое течение Куро-Сио; $\varphi = 26°09'$ С; $\lambda = 122°50'$ В); температура поверхностной воды здесь была на 6,5° выше температуры воздуха: $\vartheta_{вод} = 20{,}5°$; $\vartheta_{возд} = 14{,}0°$, благодаря чему можно было следить за охлаждением воды в очень широком температурном интервале — от 20,5 до 10,0°.

В данном случае для вычисления скорости испарения надо провести касательную к кривой рис. 248 в той точке, которая соответствует температур 14°, так как в этот момент температуры воды и воздуха были равны и охла ждение воды шло только за счет ее испарения; излучением при этом прене брегаем.

Во время рейса было построено очень много таких кривых, но все они был тщательно разделены на три группы. К первой группе относятся диаграммы построенные на основании совершенно безукоризненных наблюдений. Во вторую группу включены удовлетворительные наблюдения, за абсолютную точность которых, однако, нельзя поручиться либо благодаря резко изменявшимся внешним условиям, либо благодаря каким-либо случайным причинам, затруднявшим наблюдения. Наконец, третью группу наблюдений пришлось совершенно откинуть ввиду ее ненадежности; к последней категории относятся, например, те серии наблюдений, когда во время работы ветер внезапно направлял в сторону прибора струю горячих газов из дымовой трубы парохода или когда, при изменении курса, прибор оказывается освещенным прямыми солнечными лучами. Температура и влажность воздуха определялись при помощи психрометра Асмана — Фюсса, подвешенного на том же уровне, как и испаритель.

На рис. 249 изображен ход температуры воды (сплошная линия) и температуры воздуха (пунктирная линия). На всем пути, представленном на

рис. 249 и направо и налево от вертикальной оси, проведенной на чертеже, широты только северные, но левая часть диаграммы соответствует пути судна *до*, а правая — *после Сингапура* (самой южной точки пути) [9].

Различные этапы плавания обозначены буквами. Так, *Ч* обозначает Черное, *Э* — Эгейское, *СЗ* — Средиземное, *К* — Красное моря, *ИО* — Индийский океан, *М* — Малаккский пролив, *Ю-К* — Южно-Китайское, *В-К* — Восточно-Китайское и *Я* — Японское моря.

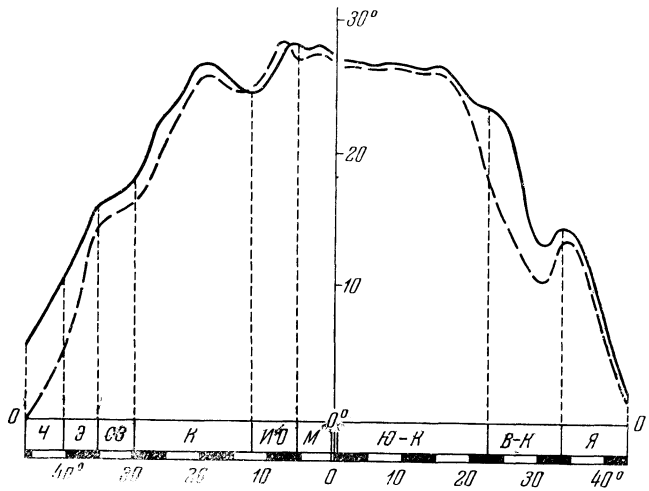


Рис. 249. Распределение температур воды и воздуха

Как видим, температура воды, за малыми исключениями, всюду была выше температуры воздуха; иногда, особенно в течении Куро-Сио, разность температур этих двух сред была чрезвычайно значительной. Любопытно отметить характерные изгибы кривой, совпадающие с географическими границами морей.

Особенно резко заметны эти изгибы в Красном море: там, по-видимому, очень сухой воздух, идущий с раскаленных пустынных берегов, способствует сильному испарению в прибрежной зоне и происходящему за счет него охлаждению воды. Упомянутый рейс парохода «Трансбалт» был сделан в феврале и начале марта, т. е. в период зимнего затишья в Индийском океане и усиленных штормов в Китайских и Японском морях. Но совершенно аналогичные изгибы кривых были получены К. Р. Олевинским и В. С. Самойленком во время их рейса по тому же самому курсу, но с апреля по июнь. Это дает возможность предполагать, что изгибы на границах морей вызваны именно усиленным испарением в прибрежной зоне, а не сгонно-нагонными явлениями.

Пусть абсолютная влажность воздуха равна e, а упругость пара, насыщающего пространство при температуре, равной температуре воды, — e_0. Тогда, очевидно, скорость испарения должна зависеть от разности $e_0 - e = \Delta$, от влажного дефицита (Δ).

На рис. 250 представлены графически результаты всех наблюдений первой и второй групп. По оси абсцисс отложены скорости ветра V, а по оси ординат — скорость испарения E, отнесенная к влажному дефициту Δ, т. е. величина E/Δ. Точки, обозначенные кружками с черной серединой, соответствуют наиболее надежным наблюдениям (первая группа). Нетрудно видеть, что они ложатся близко от некоторой прямой, проходящей через начало координат. Следовательно, скорость испарения можно выразить через влажный

дефицит и скорость ветра такой эмпирической формулой:

$$\frac{E}{\Delta} = AV. \qquad (10)$$

Если скорость испарения измеряется в миллиграммах в минуту на каждый квадратный сантиметр водной поверхности, скорость ветра — в метрах в секунду, а влажный дефицит — в миллиметрах ртутного столба, то коэффициент A на основании рис. 250 оказывается равным $5{,}52 \cdot 10^{-2}$. Итак,

$$\frac{E}{\Delta} = 5{,}52 \cdot 10^{-2} V. \qquad (11)$$

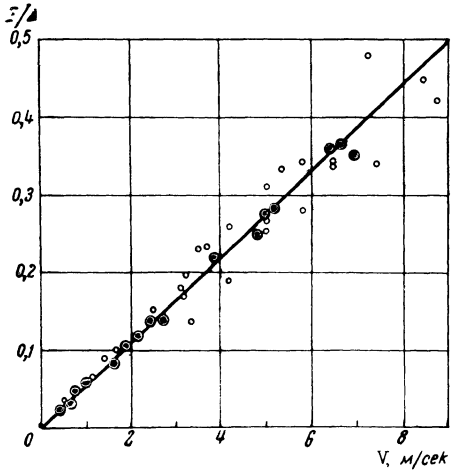


Рис. 250. Связь между скоростью испарения, ветром и влажностью

Надо предостеречь от ошибочного применения формулы (11), иногда практикуемого начинающими исследователями. В формулу (11) входят значения Δ и V, относящиеся к той же самой плоскости, в которой лежит уровень воды в приборе. При измерениях, послуживших для вывода константы A в формуле (11), испаритель, анемометр и психрометр находились на борту парохода. На практике же требуется вычислять скорость испарения с поверхности моря. Но ведь над самой поверхностью моря и скорость ветра, и влажный дефицит несомненно должны быть меньше, чем на палубе, где всегда производится измерение скорости ветра и измерение влажности воздуха. Значит, необходимо уметь делать пересчет величин Δ и V, измеренных на палубе, к условиям, существующим на уровне воды. Для таких перечислений исследовалось распределение влажности и скорости ветра по вертикали над морем. Результаты представлены на рис. 251 и 252.

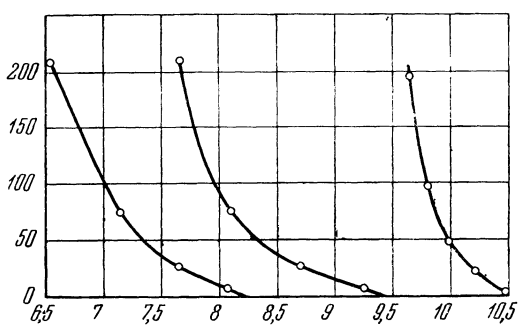


Рис. 251. Изменение влажности по высоте

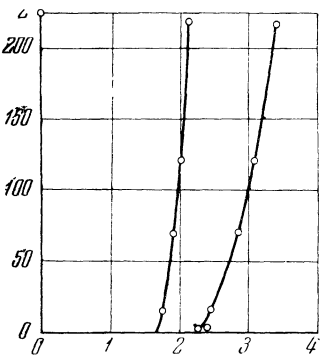


Рис. 252. Изменение скорости ветра по высоте

На основании большой серии подобных измерений следует полагать, что нет надобности каждый раз производить исследование вертикального градиента влажности воздуха и скорости ветра, а достаточно внести в формулу (11) поправочный множитель, который уменьшит числовое значение A

Для исследований в области термики моря существенным является не само количество испаряющейся воды, а количество тепла, которое при этом отнимается с поверхности моря. После первых измерений температуры и градиентов влажности воздуха над морем, проделанных Шулейкиным в 1928 г. и приведших к диаграммам рис. 251 и 252, исследователи в различных странах производили аналогичные измерения. В результате были получены эмпирические формулы совершенно одинакового строения, позволяющие вычислять количество тепла, затрачиваемого морем на испарение воды,— по заданному влажному дефициту и заданной скорости ветра. Пусть упругость водяного пара, насыщающего воздух при температуре поверхностной воды, равна e_0 *мбар*, а упругость пара, измеренная в воздухе на высоте z *м* над водой — e_z *мбар*. Пусть скорость ветра на этой высоте равна V_z *м/сек*. Тогда суточный расход тепла на испарение оказывается равным

$$Q_1 = N(e_0 - e_z)V_z \ кал/см^2 \cdot сутки. \qquad (12)$$

К подобной формуле пришли не только К. Р. Олевинский, В. С. Самойленко и другие исследователи, продолжившие измерения Шулейкина в океане и на внутренних морях, но и авторы теоретических исследований: Г. Свердруп, М. И. Будыко, о работах которых будет сказано в гл. VIII, и другие авторы, анализировавшие турбулентный перенос пара в приводном слое воздуха. Оказалось, что подобный анализ также приводит к линейной зависимости (12) в диапазоне скоростей, имеющем практическое значение в геофизике. За истекшие годы выяснилось также, что для практических расчетов рационально пользоваться именно эмпирической формулой (12), а не сложными теоретическими формулами различных авторов: ввиду сильной изменчивости параметров, входящих в теорию турбулентного переноса тепла и пара.

С другой стороны, за последние годы успели измениться: и рекомендуемая высота z, которую прежде принимали равной 6 *м*, а ныне целесообразно принимать 10 *м*, и числовое значение эмпирической константы N в формуле (12). На основании большого числа современных работ, произведенных отечественными и иностранными авторами, следует полагать $N = 7{,}0$.

§ 5. Теплообмен между морем и атмосферой

При рассмотрении вопроса об эффективном излучении поверхности моря выяснилось, что это излучение, представляющее собой разность двух потоков лучистой энергии поверхности моря и атмосферы, может обладать двумя знаками: в некоторых случаях потеря тепла с поверхности моря оказывается больше, чем поступление лучистой энергии (длинноволновой) от небесного свода, в других случаях, как бы в качестве исключения из общего правила, приток лучистого тепла от небесного свода преобладает над излучением тепла с поверхности моря.

Сейчас, расширяя понятие о теплообмене между морем и атмосферой, следует отметить, что конвекционные явления в атмосфере над морем обычно играют бо́льшую роль в теплообмене, чем явления радиационные. При этом конвекционный теплообмен тоже происходит либо в прямом направлении (более распространенном) — от моря в атмосферу, либо в обратном направлении — из атмосферы в море.

В экспедиционных условиях количественные определения полного теплообмена (и конвекционного, и лучистого) между водой и воздухом производились одновременно с исследованием испарения морской воды.

Вспомним в связи с этим кривую охлаждения воды в испарителе, изображенную на рис. 250. Здесь скорость охлаждения, пропорциональная тангенсу наклона касательной к кривой, служила мерилом скорости испарения только в той точке кривой, где температура воды становилась в точности равной температуре воздуха над ней. До этой точки кривая на рисунке падала

круче, а после нее шла положе. Нетрудно видеть, что это свидетельствовало о прямом теплообмене между водой и воздухом на первом из двух отмеченных этапов и о наличии обратного теплообмена на втором этапе.

Попытаемся вывести отсюда количественные соотношения между величиной теплообмена и разностью температур двух соприкасающихся сред — воды и воздуха.

Прежде всего, пользуясь формулами (9) и (10), вычислим по кривой рис. 250, каковы были значения производной dq/dt в различных точках кривой. Затем найдем разности между температурой воды в испарителе и температурой воздуха над водой. Отложив разности температур (положительные и отрицательные) по оси абсцисс на рис. 253, нанесем на ось ординат значения dq/dt, соответствующие им. Тогда через полученные точки диаграммы пройдет кривая *1* (рис. 253). Ордината кривой *1*, соответствующая абсциссе *0*, выражает в условном масштабе расход тепла на испарение (поскольку в этой точке отсутствует влияние теплообмена между водой и воздухом). По формулам термодинамики и кинетической теории испарения нетрудно определить закон уменьшения величины dq/dt при уменьшении температуры воды. Этот закон выражен пунктирной кривой в левой части рис. 253. Аналогично найдется и закон нарастания величины dq/dt при повышении температуры воды (пунктирная кривая в правой части рис. 253).

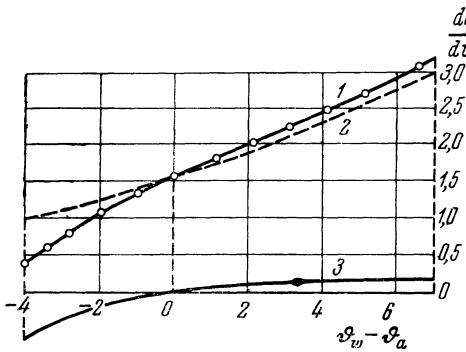


Рис. 253. Определение теплообмена

Сопоставление пунктирной кривой *2* со сплошной кривой *1* показывает, что в левой части диаграммы рис. 253 вода теряет меньше тепла, чем требуется на испарение воды в приборе, так как некоторое количество тепла воздух, более теплый, чем вода, возвращает воде при «обратном» теплообмене. Напротив, в правой части рис. 253 вода теряет в единицу времени больше тепла, чем требуется на испарение, так как некоторое количество тепла вода отдает более холодному воздуху при «прямом» теплообмене.

Количество тепла, отдаваемого или получаемого водой в единицу времени, можно определить, вычтя ординаты кривой *2* из ординат кривой *1*. Результаты вычитания изображены на рисунке кривой *3*; там, где ординаты кривой *3* поднимаются над осью абсцисс, теплообмен идет в прямом направлении (вода отдает тепло более холодному воздуху), а там, где ординаты кривой *3* лежат ниже оси абсцисс, теплообмен происходит в обратном направлении.

Первоначальный анализ серии кривых типа *3* заставлял предполагать, что при прямом теплообмене количество тепла, отдаваемого водой воздуху, зависит только от разности их температур и не зависит от скорости ветра; при обратном теплообмене сразу выявилась более естественная зависимость. В. С. Самойленко обнаружил, что количество тепла, получаемого водой от более теплого воздуха, пропорционально разности температур между воздухом и водой и скорости ветра

$$Q_2 = B(\vartheta_w - \vartheta_a)\, V \quad кал/см^2 \cdot сутки. \tag{13}$$

Коэффициент B в этой эмпирической формуле следует полагать равным 5,2, если скорость ветра V выражается в метрах в секунду ($z = 10$ *м*).

Многочисленные измерения количества тепла, поступающего от воды в воздух и в обратном направлении, показали, что по формуле (13) достаточно надежно определяется теплообмен и в прямом, и в обратном направлениях.

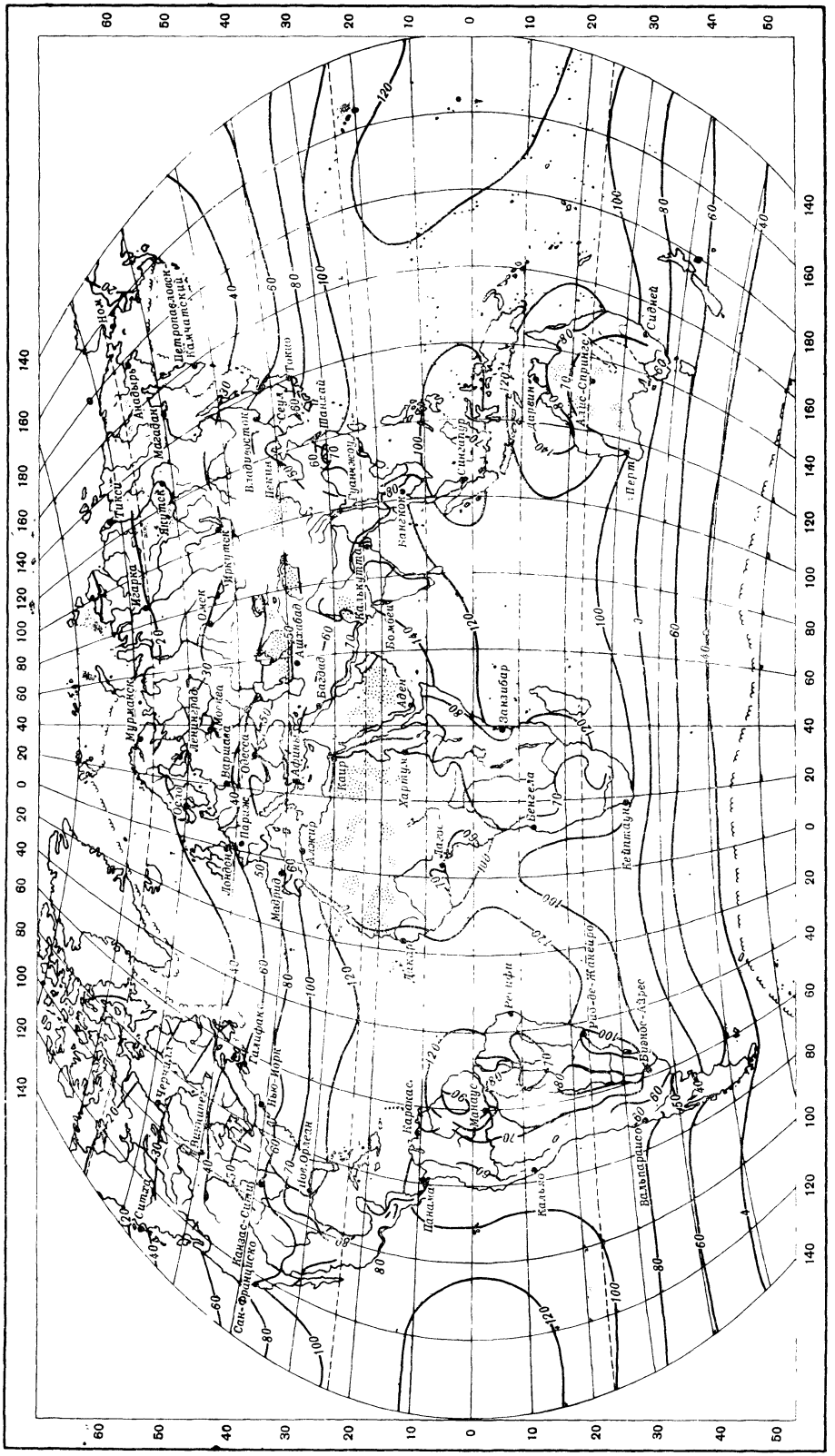


Рис. 251. Радиационный баланс поверхности Земли (по ГГО)

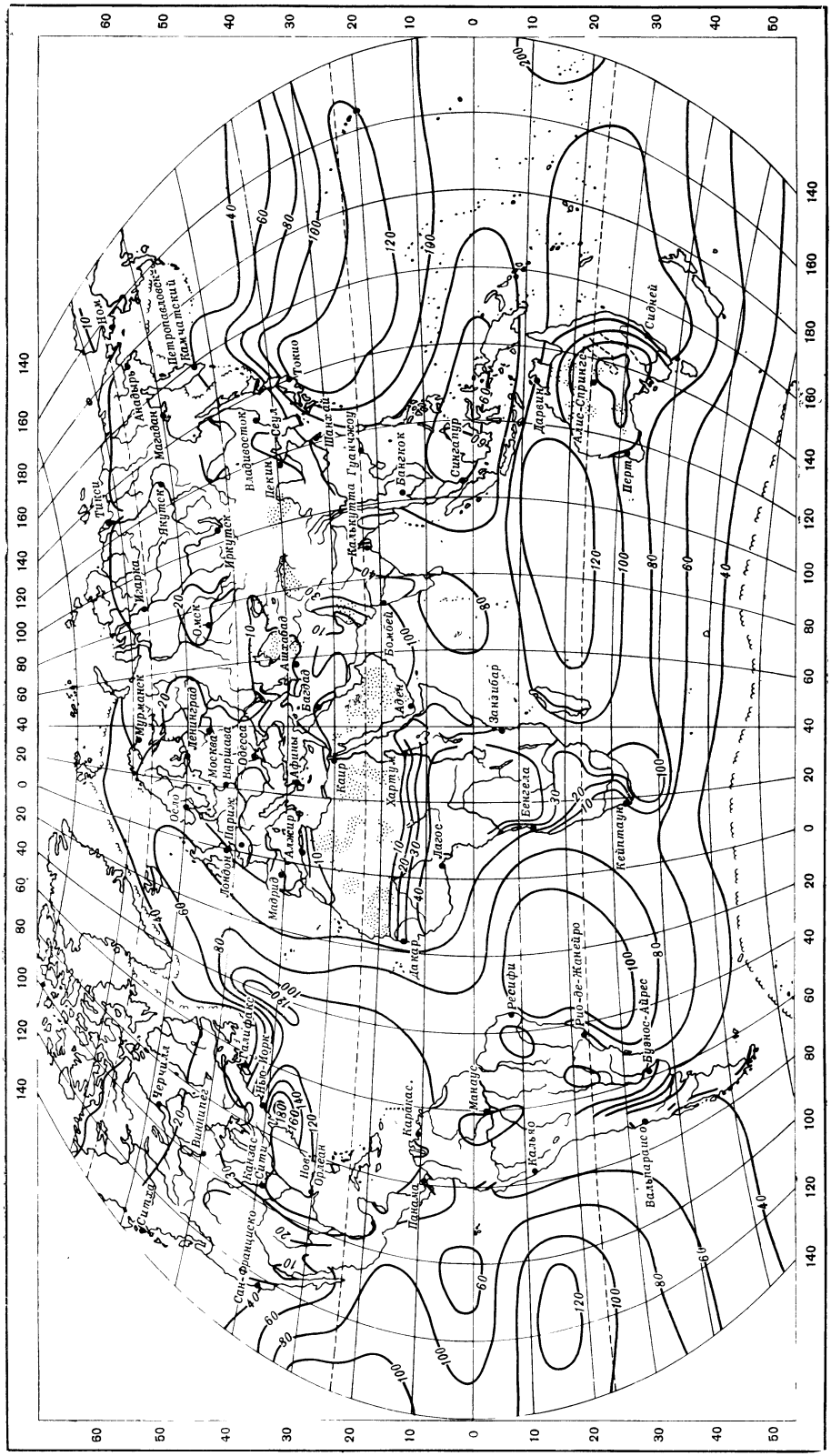


Рис. 255. Затраты тепла на испарение с подстилающей поверхности (по ГГО)

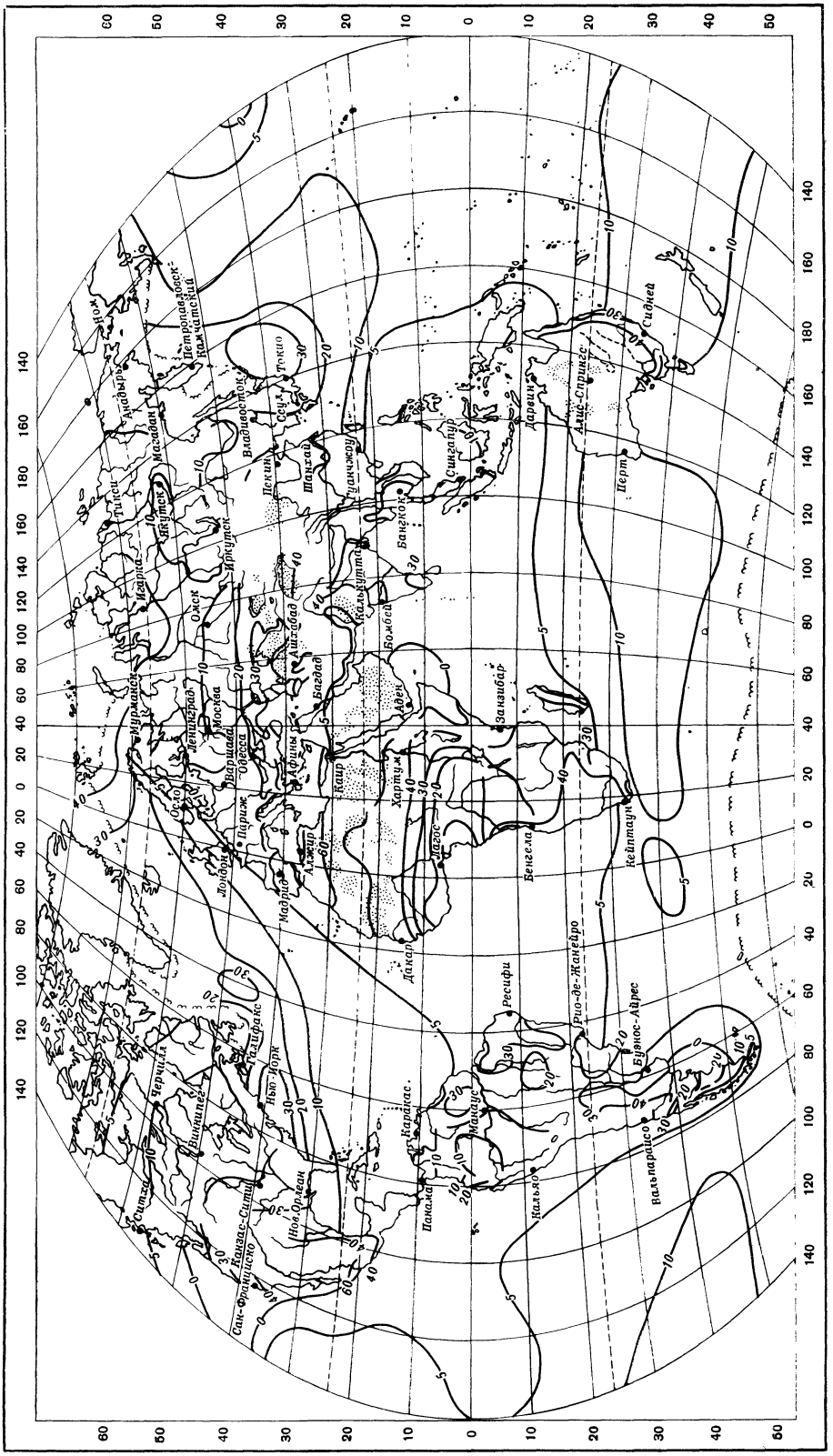


Рис. 256. Затраты тепла на турбулентный обмен с атмосферой (по ГГО)

Что касается старой формулы Шулейкина, выведенной для прямого теплообмена и не учитывавшей роль скорости ветра, то она давала полное совпадение с формулой (13) при средних значениях скорости ветра (около 7 *м/сек*). При других скоростях возникали методические погрешности, зависящие от резкого падения температуры в тончайшем поверхностном слое воды, находящейся в приборе. При различных скоростях ветра цилиндрик термометра, проходящий через слой, неоднородный по температуре, различным образом осреднял температуру и маскировал действительную роль ветра. Так же, как и (12), формула (13) не может претендовать на точность ввиду изменчивости местных условий теплообмена. Но для практических расчетов она оказывается более надежной, чем сложные формулы, вытекающие из теории турбулентного теплообмена. Значение эмпирической постоянной $B = 5{,}2$, приводимое сейчас на основании новых измерений, лишь на 24% превышает старые данные В. В. Шулейкина, Г. Свердрупа и др.

В настоящее время есть возможность оценки хотя бы осредненных климатологических данных, касающихся радиационного баланса, затрат тепла на испарение и на турбулентный теплообмен с атмосферой в различных областях нашей планеты, и притом не только в материковой части ее поверхности (как было еще сравнительно недавно), но и в части океанической. Очень большую вычислительную работу в этом направлении проделали сотрудники Главной геофизической обсерватории под общим руководством М. И. Будыко. Вышли уже два издания большого климатологического атласа обсерватории с картами, построенными для всех месяцев в отдельности и для года в целом. Здесь на рис. 254 — 256 приведены уменьшенные копии трех карт: карта радиационного баланса поверхности Земли в *ккал/см²·год* (рис. 254), карта затрат тепла на испарение с подстилающей поверхности в *ккал/см²·год* (рис. 255), карта затрат тепла на турбулентный теплообмен с атмосферой в *ккал/см²·год* (рис. 256) [10].

§ 6. Турбулентный обмен внутри водных масс

В гл. I уже говорилось о важной роли, которую играет в море *обмен количеством движения* между водными массами, движущимися в море с различными скоростями: там рассматривался узкий специальный вопрос, касающийся физического смысла *турбулентного трения*, или турбулентной вязкости. Большую пользу приносит до настоящего времени представление о подобии [11], внесенное в гидродинамику Л. Прандтлем и Т. Карманом, несмотря на необходимость сохранения в теории некоторых чисто эмпирических данных. В частности, полуэмпирический метод помог определить важные константы, характеризующие турбулентное трение в морских течениях (см. гл. I) и при волновых движениях (см. гл. III). Сейчас, занимаясь *тепловыми* явлениями в море, придется значительно расширить понятия, связанные с турбулентными движениями в водной среде, и главным образом исследовать передачу тепла за счет турбулентного обмена между массами, которые обладают различными температурами.

Работая в море, можно быть уверенным, что все движения, совершающиеся в нем, характеризуются сверхкритическими значениями критерия Рейнольдса, т. е. они заведомо турбулентные, далекие от режима ламинарных потоков: ведь даже при малых скоростях какого-либо течения критерий Рейнольдса оказывается очень большим за счет громадных *масштабов* явления.

Рейнольдс предложил использовать для описания турбулентных движений осредненные уравнения Навье — Стокса. При этом турбулентное течение рассматривается [12] как некоторое среднее, на которое налагаются беспорядочные пульсации. Компоненты мгновенной скорости в точке с координатами (x, y, z) можно представить в виде:

$$u = \bar{u} + u_1,\ v = \bar{v} + v_1,\ w = \bar{w} + w_1. \qquad (14)$$

Здесь $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$ — компоненты средней скорости, u_1, v_1, w_1 — компоненты турбулентных пульсаций скорости. Значения $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$ находят с помощью осреднения скорости по времени, в данной точке, или по пространству, в определенный момент времени.

Подставим выражения (14) в уравнения Навье — Стокса (42) гл. I и в уравнение неразрывности (18) той же гл. I и затем проведем осреднение величин, входящих в эти уравнения. Тогда получим уравнения Рейнольдса, справедливые для турбулентных потоков несжимаемой жидкости. Они описывают перенос количества движения пульсациями скорости

$$\delta\left(\frac{\partial\bar{u}}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial\bar{u}}{dx}+\bar{v}\frac{\partial\bar{u}}{\partial y}+\overline{w}\frac{\partial\bar{u}}{\partial z}\right)=$$

$$=-\frac{\partial p}{\partial x}+\mu\nabla^2\bar{u}+\frac{\partial}{\partial x}(-\delta\overline{u_1^2})+\frac{\partial}{\partial y}(-\delta\overline{u_1v_1})+\frac{\partial}{\partial z}(-\delta\overline{u_1w_1}), \qquad (15а)$$

$$\delta\left(\frac{\partial\bar{v}}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial\bar{v}}{\partial x}+\bar{v}\frac{\partial\bar{v}}{\partial y}+\overline{w}\frac{\partial\bar{v}}{\partial z}\right)=$$

$$=-\frac{\partial p}{\partial y}+\mu\nabla^2\bar{v}+\frac{\partial}{\partial x}(-\delta\overline{v_1u_1})+\frac{\partial}{\partial y}(-\delta\overline{v_1^2})+\frac{\partial}{\partial z}(-\delta\overline{v_1w_1}), \qquad (15б)$$

$$\delta\left(\frac{\partial\overline{w}}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial\overline{w}}{\partial x}+\bar{v}\frac{\partial\overline{w}}{\partial y}+\overline{w}\frac{\partial\overline{w}}{\partial z}\right)=$$

$$=-\frac{\partial p}{\partial z}+\mu\nabla^2\overline{w}+\frac{\partial}{\partial x}(-\delta\overline{w_1u_1})+\frac{\partial}{\partial y}(-\delta\overline{w_1v_1})+\frac{\partial}{\partial z}(-\delta\overline{w_1^2}), \qquad (15в)$$

$$\frac{\partial\bar{u}}{\partial x}+\frac{\partial\bar{v}}{\partial y}+\frac{\partial\overline{w}}{\partial z}=0. \qquad (15г)$$

Здесь δ — плотность воды, t — время, p — давление, μ — коэффициент молекулярной вязкости, x, y, z — декартовы координаты точки. Черта сверху означает осреднение по выбранному интервалу. В дальнейшем изложении, говоря о средних величинах, будем иметь в виду осреднение по времени.

Для морских условий понятие среднего значения любой физической величины не является определенным и зависит от масштаба осреднения, что относится как к осреднению по времени, так и к осреднению по пространству. Это объясняется непрерывностью спектра турбулентных вихрей, от самых больших, размеры которых определяются размерами всего потока, до самых малых, где кинетическая энергия потока благодаря механизму вязкости превращается в тепло. В зависимости от выбранного масштаба осреднения одни и те же колебания скорости могут рассматриваться либо как турбулентные пульсации, либо как медленные, плавные изменения среднего значения скорости. При решении любой задачи морской турбулентности необходимо тщательно выбирать оптимальный период или область осреднения, так как от этого существенно зависят результаты расчетов.

По сравнению с уравнениями Навье — Стокса в уравнениях Рейнольдса появились новые члены вида $\delta\overline{u_1^2}$, $\delta\overline{u_1v_1}$, $\delta\overline{u_1w_1}$, ... Они возникли при учете турбулентных флуктуаций скорости и характеризуют собой средние скорости переноса количества движения через соответствующие поверхности. Эти члены называют напряжениями Рейнольдса. Они образуют симметричный тензор второго ранга, тензор турбулентных напряжений:

$$\begin{pmatrix} \delta\overline{u_1^2} & \delta\overline{u_1v_1} & \delta\overline{u_1w_1} \\ \delta\overline{v_1u_1} & \delta\overline{v_1^2} & \delta\overline{v_1w_1} \\ \delta\overline{w_1u_1} & \delta\overline{w_1v_1} & \delta\overline{w_1^2} \end{pmatrix}. \qquad (16)$$

Система уравнений Рейнольдса правильно описывает движение в турбулентной среде. Однако эта система не может быть решена, так как в ней

число неизвестных превышает число уравнений: в 4 уравнения входят 10 неизвестных — 3 компоненты скорости, 6 турбулентных напряжений и давление. Таким образом, уравнения Рейнольдса лишь свидетельствуют о том, что турбулентные характеристики потока функционально связаны. Для решения же этой системы необходимо независимым методом выразить статистические характеристики турбулентности через осредненные характеристики потока.

По аналогии с уравнениями движения можно получить уравнения турбулентной *температуропроводности* и турбулентной *диффузии*. Для этого придется использовать уравнение молекулярной температуропроводности

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} + u\frac{\partial \vartheta}{\partial x} + v\frac{\partial \vartheta}{\partial y} + w\frac{\partial \vartheta}{\partial z} = K\nabla^2\vartheta \tag{17}$$

и уравнение молекулярной диффузии

$$\frac{\partial S}{\partial t} + u\frac{\partial S}{\partial x} + v\frac{\partial S}{\partial y} + w\frac{\partial S}{\partial z} = D\nabla^2 S. \tag{18}$$

При этом фактическую температуру ϑ и концентрацию какого-либо вещества S (например, соленость, содержание кислорода и т. д.) надо рассматривать как сумму их средних величин и турбулентных пульсаций, т. е. положить

$$\vartheta = \overline{\vartheta} + \vartheta_1, \quad S = \overline{S} + S_1. \tag{19}$$

После подстановки выражений (19) в уравнения (17) и (18) полученные новые выражения осредняют. Окончательно уравнение турбулентной температуропроводности приобретает вид

$$\frac{\partial \overline{\vartheta}}{\partial t} + \bar{u}\frac{\partial \overline{\vartheta}}{\partial x} + \bar{v}\frac{\partial \overline{\vartheta}}{\partial y} + \bar{w}\frac{\partial \overline{\vartheta}}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x}\left(K\frac{\partial \overline{\vartheta}}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(K\frac{\partial \overline{\vartheta}}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(K\frac{\partial \overline{\vartheta}}{\partial z}\right) + \left\{-\frac{\partial}{\partial x}(\overline{u_1\vartheta_1}) - \frac{\partial}{\partial y}(\overline{v_1\vartheta_1}) - \frac{\partial}{\partial z}(\overline{w_1\vartheta_1})\right\}, \tag{20}$$

а уравнение турбулентной диффузии записывается в форме

$$\frac{\partial \overline{S}}{\partial t} + \bar{u}\frac{\partial \overline{S}}{\partial x} + \bar{v}\frac{\partial \overline{S}}{\partial y} + \bar{w}\frac{\partial \overline{S}}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x}\left(D\frac{\partial \overline{S}}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(D\frac{\partial \overline{S}}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(D\frac{\partial \overline{S}}{\partial z}\right) + \left\{-\frac{\partial}{\partial x}(\overline{u_1S_1}) - \frac{\partial}{\partial y}(\overline{v_1S_1}) - \frac{\partial}{\partial z}(\overline{w_1S_1})\right\}. \tag{21}$$

Уравнения (20) и (21) отличаются от уравнений (17) и (18) последней скобкой, которая связана с турбулентными потоками тепла и с турбулентной диффузией вещества по осям X, Y, Z.

В настоящее время исследования законов турбулентного обмена ведутся по двум основным направлениям. Первое возникло на основе аналогии между хаотическим движением молекул и случайными перемещениями конечных объемов жидкости в турбулентном потоке; это привело к созданию так называемой полуэмпирической теории турбулентности. Различные модификации этой теории стремятся выразить турбулентные потоки какой-либо субстанции через осредненные характеристики среды.

Второе направление — статистическая или спектральная теория турбулентности — исследует собственно структуру турбулентного потока, изучая статистические свойства турбулентных пульсаций различных гидродинамических величин.

В отличие от спектральной теории турбулентности, которая строит модели динамических процессов главным образом на основе физических соображений, в последние годы появились работы, пытающиеся использовать аналитические аппроксимационные схемы и чисто математически описывающие структуру турбулентности.

Сравнение уравнений движения, теплопроводности и диффузии для ламинарных потоков с соответствующими уравнениями для турбулентной среды подсказывает *аналогию* между молекулярными и турбулентными коэффициентами вязкости, температуропроводности, диффузии.

По Буссинеску [13], турбулентные напряжения, подобно вязким напряжениям, пропорциональны градиенту средней скорости. Используя эту идею Буссинеска, можно записать

$$\tau_{xx} = -\delta\overline{u_1^2} = \delta\nu_x \frac{\partial \bar{u}}{\partial x},$$

$$\tau_{yx} = -\delta\overline{u_1 v_1} = \delta\nu_y \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}, \qquad (22)$$

$$\tau_{zx} = -\delta\overline{u_1 w_1} = \delta\nu_z \frac{\partial \bar{u}}{\partial z}.$$

Таким же образом, вводя коэффициенты пропорциональности между турбулентными потоками какого-либо свойства (теплосодержания, солености, концентрации кислорода) и градиентом осредненной величины этого свойства, определяют коэффициенты турбулентной температуропроводности и диффузии. В частности, коэффициент турбулентной диффузии впервые был введен В. Шмидтом [14].

В гл. I и III было уже отмечено, что турбулентная вязкость, в отличие от молекулярной, не является физической константой среды. То же самое надо сказать о коэффициенте турбулентной температуропроводности и коэффициенте турбулентной диффузии. По абсолютной величине все коэффициенты турбулентного обмена значительно превосходят одноименные молекулярные коэффициенты, меняются от точки к точке потока и зависят от характеристик потока в целом. При небольших градиентах плотности, вдали от границ потока, вихревой перенос значительно больше молекулярного, и величинами коэффициентов молекулярного обмена пренебрегают.

Но в море совсем неодинаковы и коэффициенты турбулентного обмена в различных направлениях. Если коэффициенты турбулентной вязкости, температуропроводности и диффузии в вертикальном направлении (ν_z, K_z, D_z) колеблются в пределах от долей единицы до 10^3 *см*^{2}/*сек*, то соответствующие коэффициенты по горизонтали изменяются от 10^5 до 10^8 *см*^{2}/*сек*. Это объясняется прежде всего огромным различием горизонтальных и вертикальных размеров областей, охваченных в море турбулентным обменом. Кроме того, вертикальный градиент плотности оказывает гораздо большее влияние на интенсивность вертикального турбулентного обмена, чем на интенсивность горизонтального обмена. Таким образом, в море процессы вертикального и горизонтального перемешивания обычно рассматриваются раздельно.

Введение коэффициентов турбулентного обмена еще не дает возможности решить систему уравнений Рейнольдса, так как при этом одни неизвестные величины (турбулентные напряжения) заменяются другими (коэффициентами турбулентного обмена). Снова оказываются необходимыми дальнейшие гипотезы относительно этих величин. Правдоподобные же предположения о характере изменения коэффициентов турбулентного обмена строить достаточно трудно. Первая попытка связать коэффициенты турбулентного обмена с осредненными параметрами среды принадлежит Л. Прандтлю [15]. По аналогии со средней длиной свободного пробега молекул в кинетической теории газов Прандтль ввел для турбулентного потока характерную длину l, которую он назвал *путем смешения*. На протяжении пути l определенное свойство потока, заключенное в конечном объеме жидкости, принимается неизменным. Затем рассматриваемое свойство потока меняется скачком. На этой основе Прандтль разработал теорию переноса количества движения, при-

няв элементарное количество движения за величину, неизменную на пути l, а Г. Тэйлор [16] построил теорию переноса завихренности, в которой на пути l сохраняется завихренность или момент количества движения.

Введенная Прандтлем длина пути смешения l является удобным, но недостаточно определенным параметром с размерностью длины. Преимущество формулы Прандтля по сравнению с формулой Буссинеска заключается в том, что хотя для практического использования зависимости Прандтля необходимо ввести дополнительные предположения относительно величины l, однако для целого класса турбулентных движений жидкости сделать это значительно легче, чем для коэффициента турбулентного обмена. Это относится в частности к турбулентности при волнении и вообще к задачам о турбулентности, в которых характерные величины обладают размерностью длины.

Дальнейшее развитие полуэмпирической теории принадлежит Т. Карману, предположившему, что в различных частях среднего потока движение отличается лишь масштабами длины и времени. При этом за масштаб длины Карман принимает путь смешения l, а в качестве масштаба времени — величину $\left(\frac{d\bar{u}}{dz}\right)^{-1}$. Как было указано в конце гл. I, применение теории подобия к турбулентному потоку позволило Т. Карману выразить длину пути смешения l через осредненные характеристики движения — формулой (405). В ней через k обозначена постоянная Кармана, которая при анализе опытов в трубах колебалась примерно на 10%. В гл. I и III было показано, что в *морских* условиях эта величина также может рассматриваться в качестве универсального параметра и при вычислениях коэффициента турбулентной кинематической вязкости ν_z в случае течений, и для вычислений ν применительно к турбулентной вязкости при волнении. Однако само значение k при этом сильно отличается от найденного в лабораторных условиях — оно должно быть принято равным 0,1.

В случае турбулентного потока у твердой стенки, в области, где τ можно считать постоянным, и в предположении, что l связано с z зависимостью $l = (z + z_0)k$, теория Прандтля — Кармана дает логарифмический закон распределения скоростей

$$\bar{u} = \frac{1}{k} V_* \ln \frac{z + z_0}{z_0}. \tag{23}$$

Здесь $V_* = \sqrt{\tau/\delta}$ — так называемая динамическая скорость, или скорость трения; z_0 — параметр шероховатости, высота, на которой скорость обращается в нуль; z отсчитывается от уровня z_0. Из (23) непосредственно следует, что

$$\nu_z = kV_*(z + z_0). \tag{24}$$

Аналогично, если принять поток тепла $F = -c_p \delta k_z \frac{\partial \vartheta}{\partial z}$ постоянным по высоте, можно получить логарифмический закон распределения средних температур

$$\vartheta_z = \frac{F}{c_p \delta k V_*} \ln z + C. \tag{25}$$

Здесь c_p — теплоемкость при постоянном давлении, C — постоянная интегрирования, величина z_0 положена равной нулю.

В условиях *безразличной* стратификации логарифмический закон распределения средней скорости и средней температуры подтвержден не только многочисленными экспериментами в гидродинамических лотках, но и наблюдениями в природных условиях: в придонных турбулентных потоках, в слоях, непосредственно примыкающих к ледяному покрову замерзающих водоемов, в приводном и в приземном слое атмосферы.

Полуэмпирическая теория турбулентности нашла свое отражение в так называемых косвенных методах определения коэффициента турбулентного обмена, использующих упрощенные дифференциальные уравнения теплопроводности, движения или диффузии или частные решения этих уравнений.

§ 7. Некоторые косвенные методы определения коэффициента турбулентного обмена тепла

1. Приближенные методы, основанные на допущении постоянства коэффициента турбулентной температуропроводности K

Допустим, что в исследуемом районе моря температура воды ϑ меняется только в вертикальном направлении по оси Z. Тогда при наличии турбулентного обмена между горизонтальными слоями воды изменения температуры во времени в исследуемой точке толщи вод выразятся совершенно таким же уравнением, с каким приходится иметь дело во всех задачах теплопроводности:

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = K \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial z^2}. \tag{26}$$

Особый принципиальный и практический интерес представляет задача о распространении температурных волн в толще морской воды при периодических изменениях температуры поверхностного слоя. Исследование этих волн позволяет определять K, а следовательно, и количество тепла, поступающего от одних слоев к другим.

Пусть колебания температуры воды на самой поверхности выражаются простым соотношением

$$\vartheta_0 = \theta + \theta_0 \sin(\omega t - \gamma), \tag{27}$$

где θ_0 — амплитуда колебаний; θ — некоторая средняя температура воды на поверхности; $\omega = \frac{2\pi}{T}$, причем в свою очередь T — период колебаний, γ — сдвиг фаз, зависящий от выбора начала отсчета времени. При таком условии на верхней границе интеграл уравнения (27) записывается в форме

$$\vartheta_0 = \theta_z + \theta_0 e^{-\beta z} \sin(\omega t - \beta z - \gamma). \tag{28}$$

Здесь сокращение обозначено

$$\beta = \sqrt{\frac{\pi}{KT}}. \tag{29}$$

Как видим, колебания температуры на глубине z происходят с амплитудой $\theta_0 e^{-\beta z}$, уменьшающейся по экспоненциальному закону при возрастании z и со сдвигом фаз βz по отношению к колебаниям поверхностной температуры; в свою очередь этот сдвиг фаз нарастает по линейному закону при увеличении z. В формулу (29) входит период T колебаний температуры, который таким образом оказывает решающее влияние на уменьшение амплитуды и на возрастание сдвига фаз.

В частности, на основании формулы (29) следует заключить, что суточные колебания температуры должны на глубинах затухать значительно резче, чем колебания годовые. Ведь величина β здесь оказывается у годовых колебаний в $\sqrt{365} = 19$ раз меньшей, чем у колебаний суточных.

Большой интерес представляют задачи о выравнивании температур водных масс, связанные с интегрированием уравнения (26) применительно к заданным начальным условиям [17].

В общем виде распределение температур водных масс в начальный момент задается некоторой функцией типа Фурье — функцией $\Phi(\alpha)$. В самом об-

щем виде интеграл уравнения (26) запишется так:

$$\vartheta = \frac{1}{2K\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(\alpha) e^{-\frac{(\alpha - z)^2}{K^2 t}} d\alpha. \qquad (30)$$

В частном случае может оказаться, что в начальный момент времени соприкасаются между собой две водные массы, причем температура первой отлична от температуры второй на $\Delta\vartheta$.

Процесс выравнивания температур под влиянием турбулентной теплопроводности изображен на рис. 257 применительно к частному случаю

$$\Delta\vartheta = 5°, \; K = 5 \; см^2 \cdot сек^{-1}.$$

По оси ординат на рис. 257 отложены расстояния по вертикали от границы между двумя исследуемыми массами: вверх и вниз. Эти расстояния выражены в метрах. Кривые показывают распределение температур через 1,16; 11,6; 57,9 и 220 дней после начального момента — момента соприкосновения водных масс с разностью температур 5° между ними.

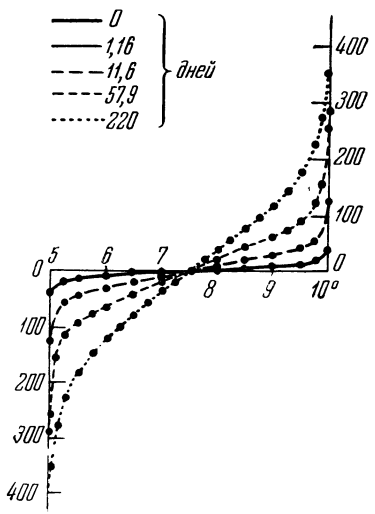


Рис. 257. Выравнивание температуры за различные сроки (по А. Дефанту)

Весьма интересен и другой конкретный случай, когда струи теплового течения вторгаются в холодные воды или, наоборот, струи холодного течения распространяются среди вод более теплых. Здесь по-прежнему должно происходить непрерывное перемешивание, благодаря которому часть тепла будет переноситься в вертикальном направлении от одного слоя к другому. Это тепло приносится течением или отнимается им. Следовательно, по мере вертикального перемешивания вод неминуемо должно происходить изменение теплосодержания в струях течения. Иными словами, должен возникнуть градиент температур по горизонтальному направлению. В случае холодного течения температура вносимых вод станет повышаться по мере продвижения струй в массу окружающих теплых вод. В случае теплого течения температура вторгающихся струй будет падать по мере продвижения вперед.

Если скорость течения равна u, то через единицу поперечного сечения струи течения проносят в каждую секунду количество тепла, равное $\delta c \vartheta u$. За то же самое время сквозь другое поперечное сечение, отстоящее на расстоянии dx вдоль струи от первого, проносится иное количество тепла, равное

$$\delta c \left[u\vartheta + \frac{\partial (u\vartheta)}{\partial x} dx \right].$$

Следовательно, внутри элементарной призмы, заключенной между обеими выделенными границами и опирающейся на единицу площади, в секунду появляется избыточное количество тепла, равное $\delta c \frac{\partial (u\vartheta)}{\partial x}$.

В случае *установившегося* режима это тепло будет полностью расходоваться в вертикальном направлении благодаря турбулентному перемешиванию. Поэтому можно записать

$$\delta c \frac{\partial (u\vartheta)}{\partial x} = \frac{\partial q}{\partial t}, \quad \frac{\partial (u\vartheta)}{\partial x} = \frac{\partial \vartheta}{\partial t} \qquad (31)$$

или на основании формулы (26)

$$K\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - \frac{\partial (u\vartheta)}{\partial x} = 0. \tag{32}$$

Подобное же уравнение можно получить для самого общего случая переноса какой угодно величины. В частности, можно аналогичным путем исследовать изменение солености при вторжении более соленых вод в воды опресненные.

Интеграл уравнения (32) можно записать в виде

$$\vartheta = C_0 + C_n e^{-\frac{K}{u}n^2 x}\frac{\cos}{\sin} nz. \tag{33}$$

Здесь C_0 и C_n — постоянные, которые определяются на основании начальных условий (при $x = 0$). Давая величине n, входящей в формулу (33), значения различных целых чисел, можно представить ϑ в виде ряда Фурье, все члены которого определяются на основании граничных условий.

Пусть, например, течение охватывает слой толщиной $2h$. Тогда можно показать, что

$$\vartheta = \psi(z) = \frac{1}{2}b_0 + b_1\cos\frac{\pi}{h}z + b_2\cos\frac{2\pi}{h}z + \ldots + \\ + a_1\sin\frac{\pi}{h}z + a_2\sin\frac{2\pi}{h}z + \ldots, \tag{34}$$

где в свою очередь

$$a_n = \int_{-h}^{h}\psi(z)\sin n\frac{\pi}{h}z\,dz, \\ b_n = \int_{-h}^{h}\psi(z)\cos n\frac{\pi}{h}z\,dz. \tag{35}$$

Эти соотношения позволяют решить задачу для какого угодно начального распределения температур в сечении, для которого $x = 0$. Самым простым является тот случай, когда распределение температур в этом основном вертикальном сечении можно выразить простой тригонометрической функцией глубины z. В этом случае выражение (23) будет содержать только один или два члена. Допустим, например, что в сечении $x = 0$ распределение температур задано выражением

$$\vartheta = 8 - 3\cos\frac{\pi}{15\,000}z. \tag{36}$$

Тогда, сравнив формулы (36) и (33), найдем, что $n^2 = \left(\frac{\pi}{15\,000}\right)^2 = 4{,}38\cdot 10^{-8}$. Так как величина коэффициента K меняется в довольно широких пределах в зависимости от различных местных условий, то удобней всего будет задаться каким-либо круглым значением K. Пусть $K = 10$ *см*^{2}/*сек* и $u = 5$ *см*/*сек*. Тогда, подставив числа в формулу (33), получим выражение

$$\vartheta = 8 - 3e^{-8{,}8x\cdot 10^{-8}}\cos(2{,}1\cdot 10^{-4}z). \tag{37}$$

На рис. 258 графически представлены результаты вычисления по формуле (37). По оси абсцисс отложены расстояния от начальной плоскости, выраженные в километрах, а по оси ординат — глубины соответствующих горизонтов (полная глубина слоя, охваченного течением, равна 150 *м*. Осевая линия проходит на глубине 75 *м*). Возле каждой изотермы, нанесенной на диаграмму, проставлено значение соответствующей температуры.

Как видим, изотермы образуют характерные языки, которые внедряются в окружающие воды. Холодный «клин», образованный течением, на большом протяжении сохраняется внутри окружающих более теплых масс; только пройдя расстояние 200 *км* вдоль осевой линии, воды холодного течения приобретают температуру, отличающуюся на 0,5° от окружающей водной среды.

Диаграмма рис. 258 напоминает распределение температур в некоторых районах Черного моря в зимнее время. Холодное течение, создаваемое благодаря сильному охлаждению вод северо-западной его части, проходит вдоль

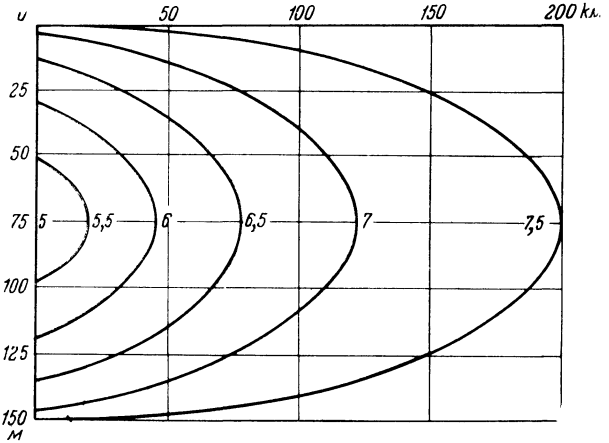


Рис. 258. Вторжение холодной струи

берегов, затем в юго-западной части поворачивает к востоку, прижимаясь к берегам, и вступает в восточную часть моря, неся в нее весьма холодные воды. То выравнивание температуры, которое происходит в дальнейшем в струях этого холодного течения, объясняется не только качественно, но и количественно, на основании изложенной теории перемешивания вод.

Разумеется, формула (33) и диаграмма рис. 258 могут быть использованы также и при исследовании распространения теплого течения среди окружающих более холодных вод. Таким образом можно, например, исследовать проникание Нордкапского течения в воды Баренцева моря или распространение теплого течения Куро-Сио близ японских берегов Тихого океана. Однако следует оговориться, что вычисления по формулам (33) — (35) не могут претендовать на большую точность: по мере продвижения струй течения в глубь окружающих водных масс изменяется не только температура (и соленость) движущихся вод, но и сама скорость течения u. Ее изменения также следуют закону, аналогичному формуле (33), но учесть одновременно и изменение температуры, и изменение скорости чрезвычайно затруднительно.

В настоящее время приходится довольствоваться тем изображением, которое было получено при $u = \text{const}$ [18, 19].

Здесь были изложены решения задач, которые являются обратными по отношению к задаче определения коэффициента турбулентной температуропроводности K: поля температур на рис. 257 и 258 строились по предварительно заданной величине K. Но совершенно очевидно, что такая — обратная — задача может быть использована и для приближенного определения коэффициента K по структуре температурного поля, найденной на основании непосредственных измерений температур при гидрологических работах в море. Придется лишь решать прямую задачу методом последовательных приближений: задаваться различными значениями K и строить кривые, аналогич-

ные тем, которые представлены на упомянутых двух рисунках. Вслед за тем надо будет определить, при каком значении K вычисленные изотермы лучше всего приближаются к существующим в природе?

2. Метод И. Фьелдстада

Уравнения (16) и (17) позволяют определять коэффициент турбулентной температуропроводности K по измерениям суточного и годового хода температур воды на различных глубинах z. Величина K непосредственно входит и в выражение амплитуды температурных колебаний, и в выражение сдвига фаз, так как от K зависит важнейшая величина β в формулах распространения температурной волны. Но, с одной стороны, такое постоянство ветрового режима встречается довольно редко, а с другой — изменения температуры в продолжение одних суток весьма невелики даже в слоях, близких к поверхности моря; на глубине порядка 10 *м* они совсем не значительны. Ввиду этого в большинстве случаев коэффициент турбулентной температуропроводности приходится определять иными способами. В частности, можно пользоваться так называемыми $\vartheta - S$-диаграммами, которые, вообще говоря, служат для характеристики различных водных масс в толще океана. Остроумный прием для определения коэффициента температуропроводности по таким диаграммам предложил И. Якобсен [20]. К сожалению, он применим только в некоторых частных случаях для определения обмена масс промежуточного слоя с выше и нижележащими, а потому нашел ограниченное применение на практике.

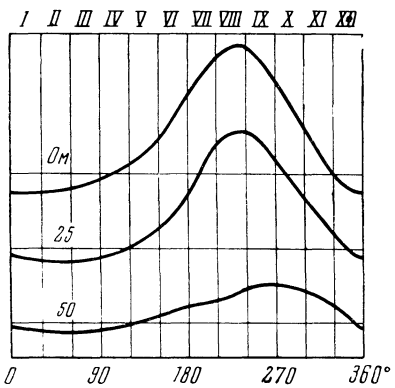


Рис. 259. Изменения температур воды в Атлантическом океане (по Гелланд-Гансену)

Обстоятельное исследование теплопроводности вод океана в самом общем виде проделал И. Фьелдстад [21]. Его выкладки очень обширны, поэтому мы ограничимся лишь изложением основных идей цитированного автора и окончательных результатов его работы. Фьелдстад обратил внимание на характерный вид кривых изменения температуры в продолжение года на различных глубинах, полученных Гелланд-Гансеном в Атлантическом океане (в районе Бискайского залива). На рис. 259 воспроизведены три такие кривые: соответственно для поверхности моря, для глубины 25 и 50 *м*.

Как видим, на полпути между самым верхним и самым нижним из трех горизонтов наблюдалась сравнительно мало измененная амплитуда колебаний температуры и столь же мало измененная форма кривой годового хода. Напротив, изменения температуры на глубине 50 *м* характеризовались резким уменьшением амплитуды и столь же резким изменением температурной кривой. Это значит, что теплопроводность верхних слоев значительно больше, чем теплопроводность нижних, и что существует какое-то изменение теплопроводности во времени, вызывающее искажение кривой на глубине 50 *м*. Взглянув на отметки месяцев над верхним краем диаграммы рис. 259 (или на отметки фазовых углов под нижним краем диаграммы), легко заметить, что на кривой, соответствующей глубине 50 *м*, не только сдвинут максимум, но и сама кривая как бы «перекосилась назад». Мы не воспроизводим здесь кривые, полученные Гелланд-Гансеном на глубинах 100 и 200 *м*, а только добавим, что там совсем незначительны температурные колебания, а годовой ход еще более искажен. Следовательно, на глубине 100 *м* и ниже теплопроводность, вы-

званная турбулентными процессами в воде, очень мала по сравнению с турбулентной теплопроводностью в верхних слоях моря. Даже без анализа кривых тут видно, что в продолжение года коэффициент турбулентной температуропроводности меняется. Основанием тому служит, во-первых, повышение турбулентного перемешивания во время зимних штормов, вызванное увеличением волнения и скоростей дрейфовых течений, а во-вторых, повышение перемешивания вследствие уменьшения зимой вертикального градиента плотности морской воды (вместе с уменьшением вертикального градиента температур), а значит, и уменьшения *устойчивости* слоев воды.

Вместо уравнения (26) Фьелдстад пишет более общее дифференциальное уравнение, в котором сперва пытается считать коэффициент турбулентной температуропроводности K зависящим лишь от глубины z слоя, но не зависящим от времени года. В наших обозначениях его уравнение выглядит так:

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z}\left(K \frac{\partial \vartheta}{\partial z}\right) + f(z, t). \tag{38}$$

Искомая функция времени t и координаты z, которая получится после интегрирования уравнения (38), должна быть периодической с периодом T. В случае кривых Гелланд-Гансена период T равен одному году. Значит,

$$\vartheta(z, t + T) = \vartheta(z, t) \text{ и } f(z, t + T) = f(z, t).$$

Задается изменение температуры в продолжение года на *поверхности моря* (в данном случае верхняя кривая рис. 259), т. е.

$$\vartheta = \varkappa(t) \text{ при } z = 0.$$

Решение ищется в виде суммы трех членов

$$\vartheta = \vartheta_0 + \vartheta_1 + \vartheta_2. \tag{39}$$

Здесь первый член *стационарный*, не связанный со временем. Он определяется путем интегрирования уравнения

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(K \frac{\partial \vartheta_0}{\partial z}\right) = 0 \tag{40}$$

при граничных условиях

$$\vartheta_0 = 0 \text{ при } z = 0,$$
$$\vartheta_0 = \theta \text{ при } z = h.$$

Здесь h — глубина, на которой колебания температуры совсем малы.

Второй член суммы (39) представляет собой интеграл однородного уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial \vartheta_1}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z}\left(K \frac{\partial \vartheta_1}{\partial z}\right), \tag{41}$$

удовлетворяющий граничным условиям

$$\vartheta_1 = \varkappa(t) \text{ при } z = 0,$$
$$\vartheta_1 = 0 \quad \text{при } z = h.$$

Наконец, третий член суммы (39) может быть найден посредством интегрирования уравнения

$$\frac{\partial \vartheta_2}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z}\left(K \frac{\partial \vartheta_2}{\partial z}\right) + f(z, t) \tag{42}$$

при граничных условиях

$$\vartheta_2 = 0 \text{ при } z = 0,$$

$$\vartheta_2 = 0 \text{ при } z = h.$$

Проще всего находится ϑ_0. Действительно, перемещаясь на расстояния s вниз от поверхности моря (на пути от $s = 0$ до $s = z$ и от $s = 0$ до $s = h$), мы будем встречать различные значения коэффициента температуропроводности $K(s)$. В результате окажется, что

$$\vartheta_0 = \theta \frac{\int_0^z \frac{\partial s}{K(s)}}{\int_0^h \frac{\partial s}{K(s)}}, \tag{43}$$

где θ представляет собой первую составляющую температуры на глубине h согласно граничным условиям, при которых интегрировалось уравнение (40). При нахождении ϑ_1 и ϑ_2 Фьелдстад, естественно, предполагает, что это — периодические функции времени, которые можно представить в виде рядов Фурье. Если n — номер члена ряда, то каждый такой член должен содержать множитель $e^{in\omega t}$, в котором $\omega = \frac{2\pi}{T}$, а T — период колебаний температуры (т. е. год, раздробленный в секунды).

При интегрировании уравнения (41) в условии на верхней границе следует полагать в связи со сказанным

$$\varkappa(t) = \Sigma \varkappa_n e^{in\omega t}, \tag{44}$$

где $\varkappa_n$ под знаком суммы обозначают коэффициенты n-х членов ряда Фурье. Учтя это, запишем выражение интеграла (41)

$$\vartheta_1 = \Sigma \varkappa_n \Phi_n(z)\, e^{in\omega t}. \tag{45}$$

Здесь Φ — функция, удовлетворяющая дифференциальному уравнению

$$\frac{d}{dz}\left(K \frac{d\Phi}{dz}\right) - in\omega\Phi = 0 \tag{46}$$

и граничным условиям

$$\Phi = 1 \text{ при } z = 0,$$
$$\Phi = 0 \text{ при } z = 0.$$

Аналогично находится и третий член суммы (39) посредством интегрирования (42), в котором $f(z, t)$ также периодическая функция времени, разлагаемая в ряд Фурье. Фьелдстад показывает, что

$$\vartheta_2 = \int_0^h ds \sum' f_n(s)\, \Gamma_n(z, s)\, e^{in\omega t}, \tag{47}$$

причем Γ — так называемая функция Грина, удовлетворяющая дифференциальному уравнению, аналогичному уравнению (46), но при наличии граничных условий

$$\Gamma = 0 \text{ при } s = 0,$$
$$\Gamma = 0 \text{ при } s = h.$$

Именно при наличии таких граничных условий функция Γ определяется путем интегрирования уравнения

$$\frac{d}{ds}\left(K \frac{d\Gamma}{ds}\right) - in\omega\Gamma = 0. \tag{48}$$

Аналитическое решение задачи до конца по формулам (39), (43), (45) и (47) неосуществимо при обычных природных условиях. Поэтому Фьелдстад использует эти формулы для вывода приближенных соотношений, приспособленных к *численному* решению задачи.

Прежде всего он отмечает, что на какой-то достаточно большой глубине h_1 коэффициент температуропроводности K *перестает* изменяться по вертикали. Но в таком случае для глубин $z > h_1$ оказывается достаточно точным интеграл уравнения (46), в котором положено $K = \text{const}$. Легко видеть, что он записывается так:

$$\Phi = e^{-\sqrt{\frac{n\omega}{2K}}(1+i)z}. \tag{49}$$

Отрезок вертикальной прямой от $z = 0$ до $z = h$ цитированный автор делит на достаточно мелкие отрезки Δz и находит приближенные выражения для функций Ф и Г, аргумент которых получает конечные приращения. В результате довольно длинных выкладок Фьелдстад получает, наконец, дифференциальное уравнение, связывающее между собой амплитуды R_n n-х гармонических колебаний температуры, фазовые углы этих колебаний δ_n и значения искомого коэффициента турбулентной температуропроводности K,

$$\frac{d}{dz}\left(KR_n^2\frac{d\delta_n}{dz}\right) + n\omega R_n^2 = 0. \tag{50}$$

Интеграл этого уравнения таков:

$$KR_n^2\frac{d\delta_n}{dz} = n\omega\int_z^h R_n^2\,dz, \tag{51}$$

а отсюда следует, что

$$K = \frac{n\omega}{R_n^2\dfrac{d\delta_n}{dz}}\int_z^h R_n^2\,dz. \tag{52}$$

Вычисления по этой рабочей формуле весьма просты. Действительно, исследовав годовой ход температуры вод на различных глубинах и построив соответствующие кривые типа рис. 259, можно разложить эти кривые на гармонические составляющие (хотя бы посредством гармонического анализатора) и найти их амплитуды R_n и сдвиги фаз δ_n для исследованных горизонтов. Вслед за тем строятся кривые $R_n(z)$ и $\delta_n(Z)$, проходящие через такие отдельные точки на рис. 260, заимствованном из упомянутой работы Фьелдстада. Отметим, что на диаграмме начало отсчета времени принято таким, что для поверхностного слоя вод $\delta = 0$.

Над диаграммой проставлены цифры, по которым можно судить о масштабе соответствующих величин. Сдвиг фаз δ_1 дается в угловых градусах, амплитуда первого гармонического (основного колебания) R_1 — в градусах Цельсия.

Обладая кривыми $R_n(z)$ и $\delta_n(z)$, легко определить как величины R_n^2, так и величины производных $d\delta_n/dz$, необходимые для подстановки в формулу (52). Интегрирование здесь производится либо графическим путем, либо по формуле Симпсона.

На той же диаграмме Фьелдстада (рис. 260) изображена кривая K, показывающая, как меняется искомый коэффициент температуропроводности K по вертикали на основании формулы (52). На поверхности он достигает значения $K = 16{,}4$ *см*^{2}/*сек*, падает до значения $K = 1{,}8$ *см*^{2}/*сек* на глубине 40 *м*, затем медленно растет с глубиной, стремясь к значению 3,8 *см*^{2}/*сек* на глубине 100 *м*.

Определив значения $K(z)$, Фьелдстад попытался построить *теоретическую* кривую изменений температуры в продолжение года на некоторой выбранной глубине (на глубине 50 *м*), к которой относится нижняя кривая на диаграмме Гелланд-Гансена (рис. 259). При этом вместо вычисления коэф-

фициентов ряда Фурье посредством интегралов Фурье

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T k(t)\cos n\omega t\,dt.$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T k(t)\sin n\omega t\,dt, \qquad (53)$$

он вычислял их по простым формулам суммирования, разбив год на 24 равновеликих промежутка с номерами от $i = 0$ до $i = 23$:

$$a_n = \frac{1}{12}\sum_0^{23} k_i \cos 15ni,$$

$$b_n = \frac{1}{12}\sum_0^{23} k_i \sin 15ni. \qquad (54)$$

Вычисленный годовой ход температуры на глубине 50 *м* изображен кривой *A* на рис. 261, который заимствован из той же работы Фьелдстада. Сравнив эту кривую с нижней кривой рис. 259, полученной в Атлантическом океане, видим, что между ними существует явное различие. Так, нарастание температуры начинается слишком поздно; кроме того, на теоретической кривой нет

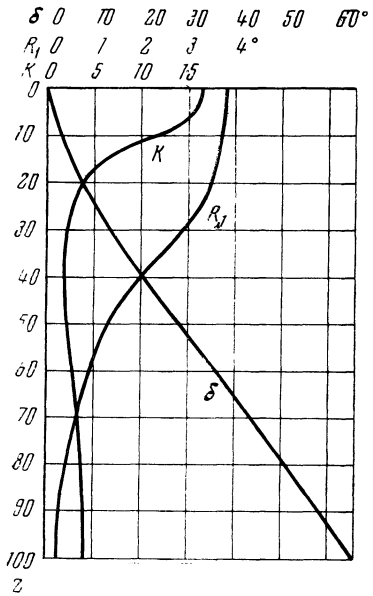


Рис. 260. Определение коэффициента перемешивания (по И. Фьелдстаду)

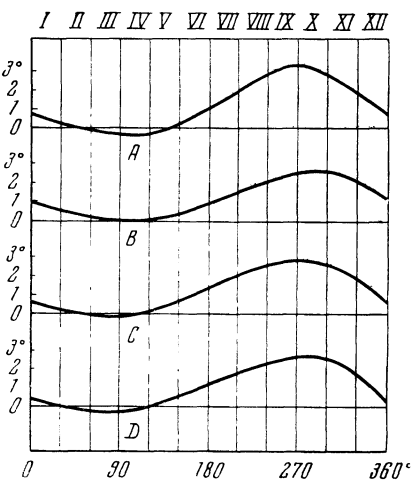


Рис. 261. Годовой ход расчетных температур

ни следа асимметрии, присущей действительному облику кривой годового хода температуры на глубине 50 *м*.

Такое расхождение между теоретической кривой и кривой, полученной на основании непосредственных измерений, объясняется *упрощенным подходом* к анализу теплопроводности морской воды. По всем признакам в действительности коэффициент турбулентной температуропроводности меняется *не только по вертикали, но и во времени*, в продолжение года.

Для подтверждения этого и для уточнения теории Фьелдстад производит дальнейший анализ явлений, внося в уравнение (38) новый (поправочный) множитель при первом члене правой части, учитывающий, что коэффициент температуропроводности должен выражаться по крайней мере произведением двух функций: одной, зависящей только от z, и другой, зависящей только от t. Иными словами,

$$K = \nu(t)\, k(z)$$

и потому вместо уравнения (38) записывается

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = \nu(t)\, \frac{\partial}{\partial z}\left(K \frac{\partial \vartheta}{\partial z}\right) + f(z, t). \tag{55}$$

Несмотря на кажущееся серьезное осложнение дифференциального уравнения, интегрирование может быть выполнено прежними методами, если только внести во все выкладки вместо времени t новое переменное t_1, связанное со временем следующим образом:

$$t_1 = \int_0^t \nu(t)\, dt, \tag{56}$$

при этом масштаб для измерения t_1 можно подобрать так, чтобы оказалось

$$\int_0^T \nu(t)\, dt = 1. \tag{57}$$

Тогда интегрированию будет подлежать видоизмененное уравнение

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t_1} = \frac{\partial}{\partial z}\left(K \frac{\partial \vartheta}{\partial z}\right) + \frac{f(z, t)}{\nu(t)}, \tag{58}$$

в котором и $f(z, t)$ и $\frac{f(t, z)}{\nu(t)}$ будут периодическими функциями от t_1, меняющимися с периодом T.

Что касается новой функции $\nu(t)$, то ее Фьелдстад выбирает в форме

$$\nu(t) = 1 + \gamma \cos(\omega t - \zeta),$$

причем доводит до конца вариант, отвечающий частным значениям,

$$\gamma = 0{,}6 \text{ и } \zeta = 30,\ 43,\ 53 \text{ и } 67°.$$

Вычисления, проделанные применительно к двум из этих вариантов, дали годовой ход температуры на глубине 50 *м*, воспроизведенный на кривых B и C (рис. 261). Вид этих кривых напоминает действительную кривую температурного хода, изображенную в нижнем ярусе рис. 259. Однако расхождения здесь все же сохранились, хотя они и не так резки, как у прежней теоретической кривой A, построенной в предположении постоянных во времени коэффициентов температуропроводности K. Кривые B и C показывают, что коэффициент температуропроводности слишком рано уменьшается, а потому повышение температуры начинается слишком поздно. По всей вероятности, коэффициент температуропроводности остается довольно большим всю зиму. Затем он сохраняет приблизительно постоянное значение до середины июня и только тогда очень быстро падает до меньших значений. К концу года коэффициент температуропроводности снова возрастает до своей наибольшей (зимней) величины. В связи с этим Фьелдстад делает попытку приблизиться к действительной картине явлений, выбрав для функции $\nu(t)$ следующую (несколько искусственную) форму:

$$\nu(t) = \nu_0 \{1 + \gamma \cos[\omega t - \zeta - \rho \sin(\omega t - \zeta)]\}. \tag{59}$$

Синус, входящий в аргумент, вызывает искажение косинусоиды, причем ее выпуклая часть становится удлиненной и пологой, а вогнутая — укороченной и потому более крутой. В частном случае $\gamma = \rho = 0{,}7$ кривая годового хода принимает вид, воспроизведенный на рис. 261 (кривая D). Эта кривая ближе всего подходит к действительной кривой годового хода температуры на глубине 50 *м*, изображенной внизу на рис. 259.

3. Метод А. А. Пивоварова [22]

Автор видоизменил метод И. Фьелдстада и получил более удобную формулу для вычисления коэффициента турбулентного обмена. Предполагается, что распространение тепла по вертикали обусловлено не только вертикальной турбулентной теплопроводностью, но и потоком лучистой энергии. Коэффициент турбулентной температуропроводности принимается постоянным во времени. Солнечная радиация, проникающая в море на глубину z, выражается формулой

$$I(z, t) = \frac{1-\alpha}{\delta c_p} I_0(t) \sum_1^m I_m e^{-\beta_m z}. \tag{60}$$

Здесь α — альбедо водной поверхности; I_0 — суммарная солнечная радиация, падающая на поверхность воды; I_m и β_m — относительная доля и коэффициент ослабления m-го участка спектра лучистой энергии. Принятые предположения позволяют записать уравнение распространения тепла по вертикали в море в виде

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z}\left[K(z)\frac{\partial \vartheta}{\partial z}\right] + \frac{1-\alpha}{\delta c_p} I_0(t) \sum_1^m I_m \beta_m e^{-\beta_m z}. \tag{61}$$

Температура воды на глубине z и ход потока суммарной радиации во времени представляются в виде суммы членов, описывающих установившиеся периодические колебания.

Вся толща воды разбита на ряд тонких слоев, причем внутри каждого из них коэффициент обмена принимается постоянным.

Выражение для коэффициента турбулентного обмена $K_{z_1 z_2}$ в слое $(z_1 - z_2)$ тогда можно будет записать в виде

$$K_{z_1 z_2} = \frac{\int_{z_2}^{z_1} [n\omega A_n^2 - S^{(1)}_{n,m}(z)]\, dz}{\left[A_n^2 \frac{d\varphi_n}{dz}\right]_{z_2} - \left[A_n^2 \frac{d\varphi_n}{dz}\right]_{z_1}}. \tag{62}$$

Здесь A_n и φ_n — амплитуда и сдвиг фаз колебаний температуры n-й гармоники, $S^{(1)}_{n,m}$ — член, учитывающий влияние объемного поглощения лучистой энергии.

Формула (62) лишена недостатков метода Фьелдстада, связанных с выбором глубины h. Кроме того, учет объемного поглощения солнечной радиации в морской воде улучшает результаты расчета коэффициента K для верхних слоев моря.

4. Метод С. Г. Богуславского

Из уравнения турбулентной теплопроводности, учитывающего объемное поглощение солнечной радиации, определяется вертикальный коэффициент

обмена тепла [23]. В этом случае выражение для K_{z_1} можно записать в виде

$$K_{z_1} = \frac{\int\limits_{z_1}^{H} \frac{\partial \vartheta}{\partial z}\, dz - \frac{1-\alpha}{\delta c_p} I_0 \beta \int\limits_{z_1}^{H} e^{-\beta z}\, dz.}{\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial z}\right)_{z_1}}. \tag{63}$$

Здесь обозначения прежние. Этот метод учитывает объемные источники тепла в виде солнечной радиации, проникающей под поверхность моря.

5. Метод теплового баланса

В этом методе [24] используются уравнение теплопроводности с учетом объемного поглощения солнечной радиации

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z}\left(K \frac{\partial \vartheta}{\partial z}\right) + I_0 (1-\alpha) \frac{\beta}{\delta c_p} e^{-\beta z} \tag{64}$$

и уравнение теплового баланса водной поверхности

$$R = E + P + B, \tag{65}$$

где R — радиационный баланс, E — затраты тепла на испарение, P — конвективный теплообмен с атмосферой, B — теплообмен с нижележащими слоями воды. Интегрируя уравнение (64) по z и используя уравнение теплового баланса, получаем выражение для K

$$K = \frac{R - (E+P) + I_0 (1-\alpha) e^{-\beta z} - \delta c_p \frac{\partial}{\partial t} \int\limits_0^z \vartheta\, dz}{-\delta c_p \frac{\partial \vartheta}{\partial z}}. \tag{66}$$

Как видим, здесь коэффициент вертикального обмена тепла является функцией не только глубины, но и времени. Однако метод этот очень сложен, так как требует знания временно́го хода составляющих теплового баланса водной поверхности и временно́го хода температур воды на нескольких глубинах в море. Кроме того, метод обладает малой точностью, поскольку все составляющеи теплового баланса определяются с большими погрешностями.

Необходимо отметить, что косвенные методы вообще позволяют лишь приближенно определить величину коэффициента обмена, но не дают представления о физической природе процессов турбулентного перемешивания.

Полуэмпирические теории турбулентности, разработанные Буссинеском, Шмидтом, Прандтлем, Тэйлором, Карманом и другими на основании исследования турбулентных потоков в аэродинамических и гидродинамических трубах и каналах, оказались весьма плодотворными для решения целого ряда практических задач гидродинамики. В настоящее время результаты исследований, имеющие практическое значение для решения задач, связанных с турбулентным обменом в море, по большей части остаются в рамках полуэмпирической теории турбулентности.

Однако для дальнейшего исследования турбулентных процессов в море необходимо научиться правильно вскрывать *механизм* турбулентного движения, внутреннюю структуру пульсационного поля в турбулентных потоках, что сделать на основе полуэмпирических теорий турбулентности невозможно.

§ 8. Понятие о статистической теории турбулентных процессов

Случайный характер турбулентных пульсаций определяет метод изучения внутренней структуры турбулентного потока. Выявление закономерностей временны́х и пространственных изменений структуры полей различных гидрофизических величин возможно лишь с позиций статистических методов, применяемых при исследованиях случайных функций.

Простейшей статистической характеристикой случайного процесса является его среднее значение. Вместо самого случайного процесса часто рассматривают лишь пульсации, т. е. отклонения исследуемой величины от ее среднего значения. В этом случае пульсации представляют собой случайный процесс с нулевым средним значением.

При статистическом исследовании пульсаций в море соответствующие пульсациям случайные функции в течение некоторого, обычно небольшого, промежутка времени можно с достаточным основанием рассматривать как стационарные. *Все* вероятностные характеристики стационарного случайного процесса не зависят от времени.

В случае поля скоростей среднее значение квадрата пульсаций скорости определяет средний уровень энергии турбулентности на единицу массы жидкости ($\overline{u_1^2}$, $\overline{v_1^2}$, $\overline{w_1^2}$). Средние квадратичные значения составляющих пульсаций скорости, отнесенные к осредненной скорости потока, характеризуют продольную, поперечную и вертикальную интенсивности турбулентности $\sqrt{\overline{u_1^2}}/\bar{u}$, $\sqrt{\overline{v_1^2}}/\bar{u}$, $\sqrt{\overline{w_1^2}}/\bar{u}$.

Основной характеристикой стационарного случайного процесса служит *корреляционная функция*. Статистическая линейная связь между пульсирующими величинами в различных точках потока в определенный момент времени или в различные моменты времени в определенной точке потока описывается с помощью соответственно пространственных и временны́х корреляционных функций. Для поля скорости временна́я корреляционная функция имеет вид

$$R_{ij}(\tau) = \overline{u_{1i}(t)\, u_{1j}(t+\tau)}. \tag{67}$$

Пространственная функция применительно к направлению OX записывается в виде

$$R_{ij}(\xi) = \overline{u_{1i}(x)\, u_{1j}(x+\xi)}. \tag{68}$$

Здесь ξ — линейный сдвиг, τ — сдвиг во времени, $ij = (1, 2, 3)$, u_{1i} и u_{1j} — одна из компонент пульсаций скорости. Если величины u_{1i} и u_{1j} статистически не связаны, то корреляционные функции $R_{ij}(\tau)$ и $R_{ij}(\xi)$ обращаются в нуль. Корреляционная функция для одной и той же пульсирующей величины называется автокорреляционной функцией.

Вид автокорреляционной функции зависит от частотного состава случайной функции. В расчетах часто используются нормированные корреляционные функции

$$r_{ij}(\xi) = \frac{\overline{u_{1i}(x)\, u_{1j}(x+\xi)}}{\sqrt{\overline{u_{1i}^2}}\sqrt{\overline{u_{1j}^2}}}. \tag{69}$$

При фиксированном аргументе $r(\xi)$ называют коэффициентом корреляции. С ростом сдвига ξ величина $r(\xi)$ обычно уменьшается. Это, при условии сходимости интеграла (70), позволяет определить некоторую характерную длину l_0:

$$l_0 = \int_0^\infty r(\xi)\, d\xi. \tag{70}$$

Величина l_0, называемая *масштабом* турбулентности, есть среднее расстояние, на котором момент корреляции обращается в нуль. Масштаб турбулентности l_0 обычно отождествляют со средним размером турбулентных вихрей. Можно рассматривать продольные, поперечные и вертикальные масштабы турбулентности. По аналогии с l_0 получают так называемый *временно́й радиус* корреляции

$$\tau_0 = \int_0^\infty r(\tau)\, d\tau. \tag{71}$$

Он характеризует средний период пульсаций. При незначительной интенсивности турбулентности и малом временно́м радиусе корреляции τ_0 последний может быть связан с масштабом турбулентности l_0 простым соотношением $l_0 = \bar{u}\tau_0$. Эта связь основана на гипотезе «замороженной турбулентности» [25], выдвинутой Тэйлором. Согласно этой гипотезе, турбулентные вихри без искажений переносятся потоком со средней скоростью $\bar{u}$.

При исследовании структуры турбулентности в природных водоемах, где обычно наблюдаются плавные, медленные изменения среднего уровня гидрофизических величин, удобно пользоваться структурными функциями, предложенными А. Н. Колмогоровым [26, 27]. В основе структурных функций лежит разность значений рассматриваемой случайной величины в двух точках пространства или в два момента времени. При этом, если среднее значение какой-либо случайной функции $f(t)$ не является постоянным, т. е. если данная случайная функция нестационарна, то функция вида $[f(t+\tau) - f(t)]$ может оказаться стационарной, если τ не слишком велико. В этом случае $f(t)$ линейно меняется с ростом t. Для случая поля скорости временна́я структурная функция может быть записана в виде

$$D_{ij}(\tau) = \overline{[u_i(t) - u_i(t+\tau)]\,[u_j(t) - u_j(t+\tau)]}. \tag{72}$$

Для одной составляющей пульсаций скорости структурная функция запишется так:

$$D_{u_i}(\tau) = \overline{[u_i(t) - u_i(t+\tau)]^2}.$$

Корреляционная функция зависит от пульсаций всех периодов, существующих в потоке, в то время как D_{ij} характеризует интенсивность пульсаций, период которых меньше или сравним со сдвигом во времени τ. Структурная функция так же, как и корреляционная, может быть пространственной. Для стационарных случайных процессов структурная и корреляционная функции связаны соотношением

$$D_{ij}(\tau) = 2\,[R_{ij}(0) - R_{ij}(\tau)]. \tag{73}$$

Построение структурных функций предпочтительней в тех случаях, когда стационарность исследуемого случайного процесса недостоверна.

Проведенные в настоящее время измерения свидетельствуют о существовании в море очень широкого диапазона периодов турбулентных пульсаций — от 0,01 *сек* до нескольких суток. Причем сверху измеренные периоды обычно ограничены длительностью записи, а снизу — инерционностью и чувствительностью аппаратуры.

Пульсации скорости или какой-либо другой гидрофизической величины могут быть разложены на сумму элементарных гармонических колебаний с непрерывным спектром, т. е. представлены в виде интеграла Фурье. Дисперсия турбулентных пульсаций как-то распределена по спектру частот. В случае поля скорости говорят о распределении энергии по частотам спектра, или о распределении энергии между вихрями различного масштаба. Плотность распределения энергии по частотам непрерывного спектра оценивается с помощью *спектральной функции*, определяющей долю общей

энергии потока, которая связана с индивидуальной частотой ω. Если $\overline{u_1^2}$ выражает средний уровень энергии турбулентности, отнесенный к единице массы и обусловленный флуктуациями всех существующих в потоке частот, то $\mathscr{E}(\omega)\,d\omega$ — вклад в $\overline{u_1^2}$ энергии пульсаций с частотами, лежащими в интервале от ω до $\omega + d\omega$.

Спектральная функция характеризует внутреннюю структуру турбулентного потока: показывает, какие именно пульсации несут максимум энергии. Но спектральная функция не является самостоятельной характеристикой турбулентного потока, она полностью определяется корреляционной функцией, с которой связана прямым преобразованием Фурье

$$\mathscr{E}(\omega) = 4\int_0^\infty R(\tau)\cos 2\pi\omega\tau\, d\tau,$$
$$R(\tau) = \int_0^\infty \varepsilon(\omega)\cos 2\pi\omega\tau\, d\omega. \qquad (74)$$

В рамках статистической теории турбулентности наибольшее развитие получили исследования *изотропной и локально изотропной* турбулентности.

Понятие изотропной турбулентности — простейшей формы турбулентного движения — было введено Тэйлором [25]. Средние свойства турбулентности в изотропных потоках не меняются при вращении или отражении системы координат. При этом диагональные компоненты тензора напряжений равны друг другу: $\overline{u_1^2} = \overline{v_1^2} = \overline{w^2}$, а недиагональные равны нулю: $\overline{u_1 v_1} = \overline{u_1 w_1} = \overline{v_1 w_1} = 0$. Отсюда следует, что турбулентность не получает энергию от осредненного движения и в свою очередь не оказывает влияния на это движение. Поля различных гидрофизических величин в море практически никогда не удовлетворяют условиям изотропии. Именно поэтому в задачах *морской* турбулентности весьма мало используются исследования изотропной турбулентности.

Несравненно большее значение для изучения природных потоков имеет теория локально изотропной турбулентности, выдвинутая А. Н. Колмогоровым [26, 27].

Кратко остановимся на физических предпосылках этой теории. Спектр турбулентных вихрей предполагается непрерывным: от самых крупных, масштабы которых ограничены лишь размерами потока в целом, до самых малых, которые обладают локальным числом Рейнольдса, меньшим критического,— где влияние молекулярной вязкости ограничивает образование вихрей еще более высокого порядка.

Самые крупные пульсации, или вихри, являются анизотропными. Они получают свою энергию непосредственно от осредненного движения и передают ее последовательно все более и более мелким возмущениям. Энергия самых мелких вихрей переходит в тепло за счет молекулярной вязкости. В условиях стационарной турбулентности энергия, переходящая в тепло от самых мелких вихрей, должна быть равна энергии, передаваемой по каскаду частот. Случайный характер дробления вихрей в турбулизированной среде приводит к представлению о том, что турбулентные неоднородности, начиная с некоторого масштаба, можно рассматривать как изотропные. Другими словами, мелкомасштабная турбулентность как бы утрачивает непосредственную связь с крупными анизотропными вихрями, и ее свойства уже не зависят от типа потока. Для мелкомасштабного турбулентного движения приближенно выполняется условие статистического равновесия. Так приходят к понятию *локальной* изотропии.

Для турбулентных потоков при очень больших значениях критерия Рейнольдса А. Н. Колмогоров предложил следующие гипотезы подобия:

1) средние свойства локально изотропной турбулентности определяются только средней скоростью диссипации энергии ε в единице массы жидкости и кинематической вязкостью ν;

2) при достаточно больших числах Рейнольдса область мелкомасштабной турбулентности можно разбить на две подобласти — инерционную и вязкостную. При этом в инерционной подобласти спектра пренебрегается силами вязкости. Здесь средние свойства определяются лишь средней скоростью диссипации энергии в единице массы жидкости (ε).

Теория локально изотропной турбулентности позволила определить ряд универсальных закономерностей для потоков при больших числах Рейнольдса. Так, используя метод размерностей, А. Н. Колмогоров и А. М. Обухов [26, 28] установили «закон $^2/_3$» для пространственных структурной и корреляционной функций, справедливый в инерционной подобласти спектра:

$$D(\xi) = C_1(\varepsilon\xi)^{2/3}$$
$$R(\xi) = 1 - C_2\xi^{2/3} \qquad (l_{00} \ll \xi \ll L). \tag{75}$$

Здесь l_{00} — размер мельчайших вихрей, L — размер самых крупных анизотропных вихрей, C_1 и C_2 — безразмерные постоянные. Отсюда для спектральной функции получается «закон — $^5/_3$»

$$\mathscr{E}(k) = C_3\varepsilon^{2/3}k^{-5/3}, \tag{76}$$

где k — волновое число, C_3 — безразмерная постоянная. Отсюда же вытекает, для коэффициента обмена, «закон $^4/_3$»

$$\nu = C_4\varepsilon^{1/3}\xi^{4/3}. \tag{77}$$

Следовательно, турбулентная вязкость увеличивается с ростом масштаба движения.

Для локально изотропной турбулентности А. М. Обуховым [29] установлен также вид структурной функции поля *температур*. При этом температура рассматривается как консервативная пассивная «примесь» в турбулентном потоке, т. е. предполагается, что теплосодержание элемента объема жидкости не меняется при перемещении объема в пространстве и что температура не влияет на динамический режим турбулентности. Последнее положение может быть приближенно принято лишь для пульсаций температуры малого масштаба, так как динамический режим турбулентности зависит от профиля температуры, поскольку с ним связаны архимедовы силы. Исходя из упомянутых предположений, А. М. Обухов установил, что

$$D_\vartheta(\xi) = C_5^2\frac{\overline{N}}{\varepsilon^{1/3}}\xi^{2/3}, \tag{78}$$

где $l_{00} \ll \xi \ll L$; l_{00} и L — минимальный и максимальный размеры температурных неоднородностей; $\overline{N} = a\,\overline{(\operatorname{grad}\vartheta_1)^2}$ — мера неоднородности температуры, исчезающая в единицу времени за счет молекулярной температуропроводности a; величина $\overline{N}$ аналогична скорости диссипации энергии ε; C_5 — безразмерная постоянная.

Статистическая теория вооружила геофизиков мощным аппаратом для исследования турбулентных процессов. В последние годы широкое распространение получил так называемый *прямой инструментальный* метод, основанный на статистической обработке непрерывных и синхронных записей турбулентных пульсаций температуры и составляющих пульсаций скорости течений,— при одновременной регистрации среднего гидрометеорологического фона, на котором развивается исследуемый турбулентный процесс. В этом методе пользуются известными соотношениями для турбулентного

потока тепла и количества движения: $f = -\delta c_p \overline{\vartheta_1 w_1}$, $\tau = -\delta \overline{u_1 w_1}$. Отсюда, располагая записью пульсаций температуры и скорости течения и зная вертикальные градиенты средней скорости течения и средней температуры, находят вертикальные коэффициенты турбулентного обмена тепла и количества движения

$$K = -\frac{\overline{\vartheta_1 w_1}}{d\bar{\vartheta}/dz}, \quad \nu = -\frac{\overline{u_1 w_1}}{d\bar{u}/dz}. \tag{79}$$

При статистической обработке записей турбулентных пульсаций обычно пользуются эргодическим свойством стационарных случайных функций: предполагается, что одна реализация случайного процесса достаточной продолжительности заменяет при обработке множество отдельных реализаций той же общей продолжительности, т. е. среднее по множеству реализаций заменяют средним по времени. Это значительно упрощает методику статистической обработки исходного опытного материала.

Правомерность использования эргодического свойства можно оценить по виду корреляционных кривых [30].

§ 9. Инструментальное изучение турбулентности в море

Применение прямого инструментального метода дает возможность выявить физические закономерности турбулентного обмена, исследовать структуру турбулентного потока путем изучения статистических свойств пульсаций различных гидрофизических величин, определить надежные связи турбулентных характеристик потока с осредненными характеристиками полей скорости и плотности, что, как уже упоминалось выше, необходимо для замыкания системы осредненных уравнений движения, теплопроводности и диффузии.

Вместе с тем надо иметь в виду, что точность метода, основанного на записи пульсаций, зависит от применяемой аппаратуры и времени осреднения. Формулы, описывающие перенос количества движения и тепла, по пульсациям скорости и температуры, учитывают действие турбулентных вихрей всех размеров, существующих в рассматриваемом случае. Между тем при реальных измерениях исследуется лишь некоторый участок из всего спектра турбулентных пульсаций, зависящий как от инерции аппаратуры, так и от периода осреднения. Вопрос же о том, вихри *каких* размеров переносят максимум энергии в толщах морской воды, еще почти не исследован.

Специфическими чертами морской турбулентности являются подвижная, легко деформируемая поверхность, через которую осуществляется термическодинамическое взаимодействие атмосферы и океана, неоднородное поле плотности, всегда существующее в море, и крайняя нестационарность внешних условий. Эти особенности морской турбулентности очень сильно осложняют лабораторное моделирование, а иногда делают его невозможным. Поэтому исследование закономерностей природных турбулентных потоков приходится проводить непосредственно в природных условиях, где исследователь неизбежно сталкивается с одновременным существованием разнородных процессов, влияющих на турбулентный обмен.

Следует также отметить, что применение прямого инструментального метода в природных условиях встречает большие трудности и может дать надежные результаты лишь при выполнении измерений в возможно более чистых условиях — в условиях, приближающихся к экспериментальным и позволяющих выделить влияние отдельных факторов на турбулентный режим. Последнее осуществляется, например, на сравнительно небольших пресных водоемах, где легче организовать наблюдения; на водоемах, покрытых льдом: лед позволяет обходиться без учета особенностей быстропеременной метеорологической обстановки и изучать турбулентный обмен в достаточ-

но стационарных условиях. На морях приходится вести исследования в условиях штиля, что не позволяет учитывать турбулизирующую роль ветровых волн.

В Советском Союзе применение прямого инструментального метода исследования турбулентной структуры вод морей и пресноводных водоемов было впервые осуществлено под руководством А. Г. Колесникова в 1954 г. в Морском гидрофизическом институте АН СССР и на кафедре физики моря в Московском университете.

Исследование турбулентности естественных водоемов прямым инструментальным методом сопряжено с дистанционной регистрацией элементов, характеризующих поля скорости, температуры и плотности в воде. Иными словами, нужно иметь возможность дистанционно определять временно́й ход и пространственное распределение средних величин и микропульсаций скорости, температуры и солености в море, располагая чувствительной и малоинерционной аппаратурой либо на корабле, либо на автономном агрегате, поставленном в море.

Для регистрации составляющих пульсаций скорости чаще всего применяют различные типы термогидрометров. Их чувствительный элемент состоит из тонких проволок или полупроводников, перегреваемых электрическим током относительно окружающей водной среды. Такой датчик, помещенный в поток, теряет тепло главным образом благодаря вынужденной конвекции. Температура, а следовательно, и омическое сопротивление чувствительного насадка меняются с изменением скорости набегающего потока.

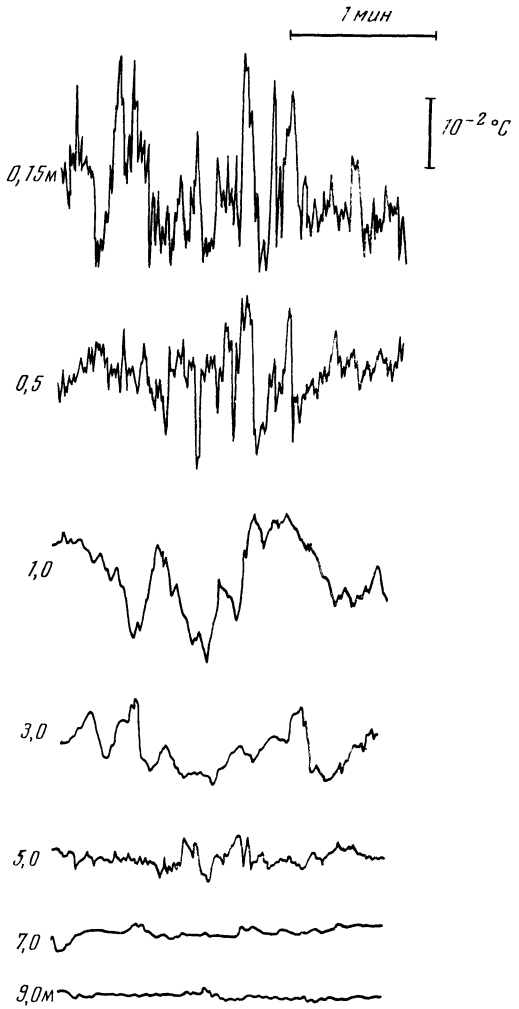


Рис. 262. Регистрация пульсаций температуры (по А. А. Сперанской)

При пользовании термогидрометром устанавливается связь между скоростью потока и омическим сопротивлением датчика, нагреваемого током определенной силы, или же температура датчика поддерживается постоянной, а скорость определяется по измерениям тока, необходимого для поддержания такой постоянной температуры.

Грант, Стюарт и Муалье [31] при измерении высокочастотной части спектра пульсаций скорости пользовались термогидрометром с чувствительным элементом в виде платиновой пленки длиной 1 *мм* и толщиной $4 \cdot 10^{-5}$ *мм*. Прибор позволял фиксировать пульсации скорости с частотами до 500 *гц*. Термогидрометр с полупроводниковым точечным датчиком типа МТ-54 для измерения модуля пульсаций скорости описан Н. В. Контобойцевой [32].

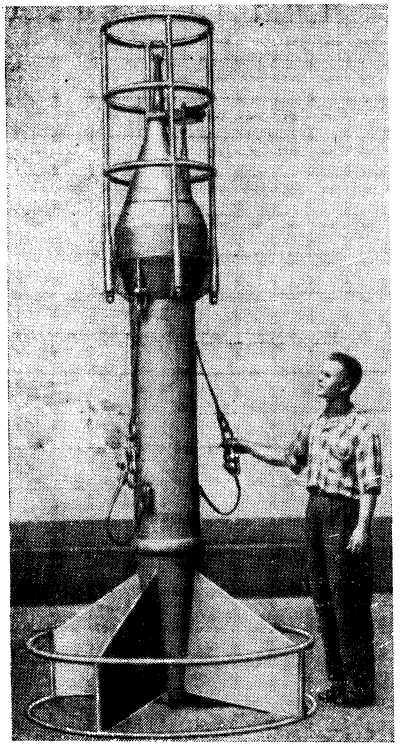


Рис. 263. Глубоководный турбулиметр МГУ

В аппаратуре, разработанной на кафедре физики моря Московского университета [33] применялась V-образная проволока накала. Чувствительность таких термогидрометров составляла 0,05—0,1 *мм/сек* на 1 *мм* шкалы регистрирующего устройства.

Для измерения пульсаций температуры пользуются приборами, чувствительными элементами которых служат металлические и полупроводниковые термометры сопротивления [33, 34] и различные типы термобатарей. Чувствительность последних достигает $3{,}5 \cdot 10^{-4}$ °С/*мм* шкалы записывающего устройства [35, 36].

На рис. 262 представлен результат регистрации пульсаций температуры одним из таких приборов. Запись произведена при полном штиле, на семи горизонтах под водой. Глубины этих горизонтов, выраженные в метрах, отмечены при каждой из кривых. Масштаб времен соответствует 1 *мин*, масштаб пульсации изображен отрезком справа, соответствующим отклонению температуры на 10^{-2} °С. Как видим, в слое воды, находящемся на глубине 0,15 *м*, температура пульсировала примерно на $\pm$ 0,015° С. Зубчики кривой здесь позволяют обнаружить колебания температуры с периодами от 2 до 13 *сек*, не считая неправильных колебаний с бо́льшими периодами.

Высокочастотные пульсации температуры значительно меньше сказались на глубине 0,5 *м* и еще слабей они выражены на бо́льших глубинах. На глубине 9 *м* колебания температуры совсем незначительны.

На кафедре физики моря под руководством А. Г. Колесникова было разработано несколько конструкций турбулиметров — приборов, позволяющих синхронно измерять целый комплекс гидрофизических величин, необ-

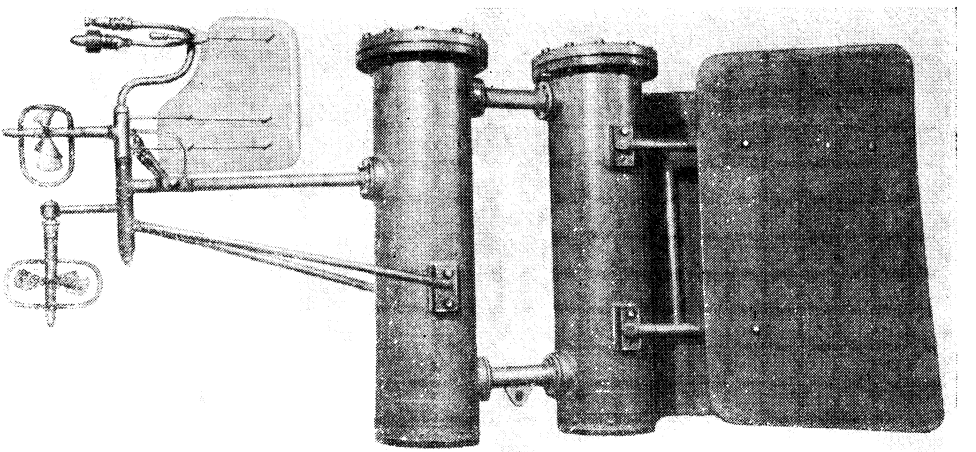


Рис. 264. Турбулиметр МГУ

ходимый для исследования турбулентных явлений в море [37, 38]. Число одновременно регистрируемых элементов меняется в различных типах турбулиметров от 4 до 9 в соответствии с задачами исследований. На рис. 264 показан один из таких приборов для измерения средних величин и пульсаций скорости и температуры на глубинах до 500 *м*. Вверху видны датчики температуры, ниже — малоинерционные пропеллеры для регистрации двух составляющих скорости, колеблющихся с не слишком малыми периодами. Позади цилиндров, заключающих внутри себя блок питания и блок управления с блоком регистрации, видны мощные рули, ориентирующие весь агрегат по оси потока. На рис. 263 представлен автономный турбулиметр, предназначенный для глубоководных (до 12 *км*) исследований микроструктуры полей скорости и температуры.

Для исследования крупномасштабных пульсаций гидрофизических характеристик в океане обычно пользуются стандартной аппаратурой длительного действия, в частности потенциометрами ЭПП-09 с соответствующими датчиками температур и скоростей потоков, построенных для производства гидрометеорологических измерений на расстоянии.

§ 10. Некоторые результаты исследований турбулентности в море

Большинство работ по статистическому исследованию механизма турбулентности в море посвящено вопросу применимости законов локально изотропной турбулентности к конкретным морским условиям. Авторам работ [39, 40] удалось показать справедливость «закона $^4/_3$» для морской горизонтальной турбулентности в довольно широком диапазоне масштабов — от долей метра до нескольких километров. «Закон $^2/_3$» в применении к вертикальной турбулентности проверялся А. Г. Колесниковым с его сотрудниками [37, 41] при исследовании микроструктуры турбулентности в Атлантическом и Индийском океанах, на Черном море и на дрейфующей станции «Северный полюс-4». Во всех этих работах были обнаружены участки частот турбулентных микропульсаций, для которых «закон $^2/_3$» выполнялся удовлетворительно.

Грант, Стюарт и Муалье [31] провели спектральный анализ микропульсаций скоростного поля в приливных течениях. Длительность отдельных измерений составляла 10—15 *мин*. Ими получены положительные результаты при проверке на одномерной спектральной функции «закона — $^5/_3$» в диапазоне волновых чисел от 1 до значений, определяемых максимальными периодами, которые фиксировались прибором. Законы локально изотропной турбулентности для временны́х масштабов от 0,2 до 1,2 *сек* подтверждены также работами Н. В. Контобойцевой для деятельного слоя моря при ветровом волнении [32].

Однако теория локальной изотропии, сосредоточив свое внимание на узком участке спектра турбулентных пульсаций в потоке, при больших числах Рейнольдса, описывает физические закономерности, которые свойственны лишь микроструктуре турбулентности. Основной же вклад в турбулентный перенос количества движения, тепла и диффундирующего вещества вносят именно крупномасштабные, *анизотропные* компоненты турбулентного движения. В этом состоит одно из ограничений применимости законов локально изотропной турбулентности в морских условиях. Второе ограничение связано с консервативностью системы, которая рассматривается теорией локально изотропной турбулентности. Предполагается, что энергия извне поступает только к самым крупным вихрям и перенос энергии возможен лишь от бо́льших вихрей к меньшим. В условиях же морской турбулентности возможно непосредственное поступление энергии практически к вихрям любого из существующих масштабов. Источниками этой энер-

гии могут быть ураганы, штормы, местные ветры, сгонно-нагонные и приливные течения и т. д.

Как уже говорилось выше, помимо очень большой изменчивости внешних факторов, особенности *морского* турбулентного обмена сводятся к двум моментам. Первый определяется наличием в морях поля неоднородной плотности вод и влиянием этого поля на характеристики вертикального турбулентного обмена. Второй момент связан с существованием на поверхности моря подвижной границы, форма которой определяется взаимодействием турбулентного ветрового потока с водной поверхностью.

Связь турбулентного трения с элементами ветровых волн рассматривалась в § 19, гл. III. Здесь мы остановимся на поле плотности, как на одном из факторов, формирующих вертикальный турбулентный обмен.

О наличии тесной связи между коэффициентом вертикального турбулентного обмена и *устойчивостью* водных масс свидетельствует ряд исследований. С ростом устойчивости коэффициент турбулентного обмена уменьшается и, наоборот, в слоях минимально устойчивых турбулентный обмен достигает наибольшего значения.

Показано также, что основной характеристикой, оказывающей решающее влияние на вертикальный турбулентный обмен, является интенсивность вертикальной составляющей $\sqrt{\overline{w_1^2}}$ пульсаций скорости течения. Таким образом, именно эту величину важно в первую очередь выразить через осредненные термическо-динамические характеристики моря, т. е. через среднюю плотность воды, среднюю скорость течения и их вертикальные градиенты.

Будем исходить из предположения, что изменение кинетической энергии пульсаций пропорционально работе против сил тяжести при вертикальном перемещении вихрей в стратифицированной воде:

$$\delta \frac{\overline{w_{01}^2}}{2} - \delta \frac{\overline{w_1^2}}{2} = g \frac{d\bar{\delta}}{dz} \frac{l_w^2}{2} . \tag{80}$$

Здесь l_w — вертикальный масштаб турбулентных вихрей, g — ускорение в поле тяжести. Знак «0» означает, что данная величина рассматривается в условиях *безразличной* стратификации среды.

Воспользуемся известным полуэмпирическим соотношением

$$l_w^2 = \alpha_1 \frac{\overline{w_1^2}}{\left(\frac{d\bar{u}}{dz}\right)^2}$$

и запишем уравнение (80) в виде

$$\delta \frac{\overline{w_{01}^2}}{2} - \delta \frac{\overline{w_1^2}}{2} = \alpha_1 g \frac{\overline{w_1^2}}{2} \frac{d\bar{\delta}/dz}{(d\bar{u}/dz)^2} . \tag{81}$$

Отсюда находим

$$\sqrt{\overline{w_1^2}} = \frac{\sqrt{\overline{w_{01}^2}}}{\sqrt{1 + \alpha_1 \mathrm{Ri}}} , \tag{81а}$$

причем, α_1 — безразмерная постоянная, $\mathrm{Ri} = \frac{g}{\delta} \frac{d\bar{\delta}/dz}{(d\bar{u}/dz)^2}$ — критерий устойчивости, или динамическая устойчивость, представляющая собой отношение потенциальной энергии в единице объема к кинетической энергии. Это — аналог критерия Ричардсона.

Материалы наблюдений над интенсивностью вертикальной составляющей пульсаций скорости в безразлично стратифицированной среде, для ши-

рокого диапазона чисел Рейнольдса, дают

$$\sqrt{\overline{w_{01}^2}} = \beta_0 \bar{u},$$

где β_0 — постоянный множитель. Отсюда окончательно следует

$$\sqrt{\overline{w_1^2}} = \frac{\beta_0 \bar{u}}{\sqrt{1 + \alpha_1 \mathrm{Ri}}}. \tag{82}$$

Используем принятое в полуэмпирической теории турбулентности выражение коэффициента турбулентной вязкости через интенсивность вертикальной составляющей пульсаций скорости и градиент средней скорости

$$\nu_z = \beta_1 \frac{\overline{w_1^2}}{|d\bar{u}/dz|}. \tag{83}$$

Тогда можно будет получить зависимость коэффициента турбулентной вязкости от динамической устойчивости Ri

$$\nu_z = \frac{\beta_2 \overline{u^2}}{(1 + \alpha_1 \mathrm{Ri}) \left| \frac{d\bar{u}}{dz} \right|}. \tag{83а}$$

Отсюда можно найти выражение для потока количества движения, так как

$$-\delta \overline{u_1 w_1} = \delta \nu_z \frac{d\bar{u}}{dz} = \delta \frac{\beta_2 \overline{u^2}}{1 + \alpha_1 \mathrm{Ri}}. \tag{83б}$$

Выражения (82), (83а) и (83б) проверялись на материалах наблюдений. В качестве эталона использовался прямой инструментальный метод, который позволяет надежно исследовать функциональные связи между турбулентными характеристиками, но пока еще не дает возможности точно определить величину отдельных турбулентных характеристик потока. Так, величина тангенциального напряжения трения, измеренная через корреляцию между вертикальной и продольной составляющими пульсаций скорости, может оказаться значительно меньше действительно существующей. Инструментальная проверка формул (82), (83а) и (83б) дает вполне удовлетворительные результаты.

На рис. 265 приведены результаты проверки формулы (83а) на материале натурных наблюдений А. А. Сперанской при $\alpha_1 = 0{,}4$ и $\beta_2 = 1{,}0 \cdot 10^{-3}$. Ею получены материалы для расчета величины ν_z по формулам (83а) и (83б) в процессе исследований подледного термическо-динамического режима озера Байкал.

Большой интерес представляет исследование соотношения между коэффициентами *турбулентного обмена тепла и количества движения*.

Вопрос о соотношении между коэффициентом турбулентной температуропроводности K и кинематической турбулентной вязкости ν различными авторами решается по-разному. До сих пор еще не построена количественная зависимость $\alpha = \frac{K}{\nu}$ от числа Ричардсона (Ri). Качественные материалы говорят о том, что α не является константой: α возрастает с убыванием Ri и превышает единицу при «свободной конвекции». Числовые значения коэффициента турбулентной температуропроводности K и турбулентной диффузии D обычно считают равными.

Исследуя вопрос о соотношении между ν и K, можно воспользоваться работой Тэйлора [42], показавшего, что при $4 < \mathrm{Ri} < 10$ величина $\alpha = \frac{D}{\nu} = \frac{K}{\nu}$ колеблется от 0,03 до 0,05. Близкие значения $\alpha = \frac{K}{\nu}$, пример-

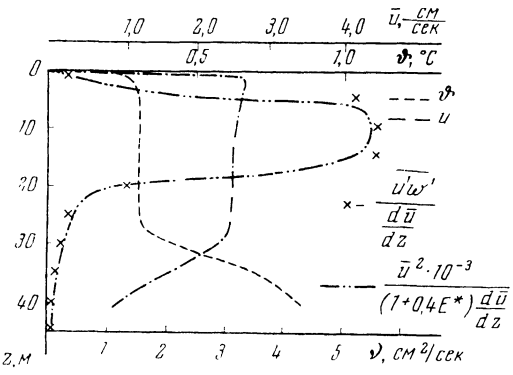


Рис. 265. Проверка формулы для турбулентной вязкости

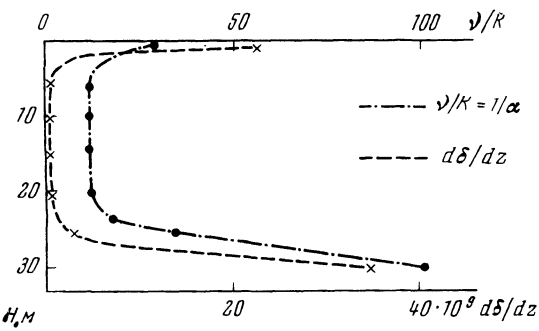


Рис. 266. Зависимость K/ν от устойчивости (по А. А. Сперанской)

но от 0,02 до 0,05, были получены А. А. Сперанской [43] по формулам (79) в процессе исследования турбулентных характеристик водных масс подледного слоя озера Байкал в районе бухты Лиственичной. На рис. 266 приведены вертикальный ход величины $\frac{1}{\alpha} = \frac{\nu}{K}$ и градиента плотности $d\delta/dz$, полученные на одной из станций в подледном 50-метровом слое Байкала. Как видно из рисунка, $\nu/K > 1$, причем это отношение увеличивается с ростом градиента плотности ($d\delta/dz$).

Эллисон и Тернер [44] косвенным методом определяли величины D и ν в трубе, где искусственно создавалось турбулентное движение соленой воды с вертикальным градиентом солености. При этих опытах также обнаружена тенденция убывания $\alpha = \frac{D}{\nu}$ с ростом числа Ричардсона (Ri).

Все сказанное в § 6—10 свидетельствует лишь о весьма скромных успехах в исследовании турбулентности природных водоемов.

Изучение турбулентных потоков находится на стадии накопления материалов наблюдений с целью выявления закономерностей временны́х и пространственных изменений полей гидродинамических величин в зависимости от формирующих их внешних факторов.

На современной ступени исследований представляется наиболее перспективным изучение влияния отдельных факторов (таких, как осредненные поля скорости, плотности, ветрового волнения и т. д.) на статистические характеристики турбулентности.

Для достижения поставленной цели необходимо пользоваться как приемами, разработанными полуэмпирической теорией турбулентности, так и приемами статистической теории турбулентности, позволяющими выявлять физический механизм турбулентности.

§ 11. Термика ледяного покрова

Подводя итог материалам предыдущих параграфов, нельзя не прийти к выводу, что оба тепловых потока (поток приходящего тепла и поток тепла, расходуемого гидросферой) находятся в непрерывной борьбе между собой, причем в низких широтах (в тропической зоне), как правило, побеждает приход тепла, а в высоких — расход тепла. В промежуточных зонах перевес берут попеременно то первый, то второй из упомянутых процессов в зависимости от времени года.

Таким образом тепло как бы поступает через некоторые «входные ворота», лежащие в тропиках, и затем, проделав более или менее сложный путь в гидросфере, расходуется сквозь «выходные ворота», роль которых играют холодные шапки полярных морей.

Но как раз здесь, в этих «выходных воротах», тепловые процессы в море чрезвычайно сильно осложняются новым агентом, вступающим в действие,— *морским льдом*.

Роль льда в термике моря и в термике земного шара вообще громадна и многообразна. Однако можно наметить *два* основных фактора, вклинивающихся в проблему термики моря благодаря льду.

Прежде всего часть тепла, отнимаемого у морской воды в холодную пору, не обнаруживается при всевозможных измерениях температуры воды: помимо того, что вода охладилась до температуры замерзания, потеря тепла ведет еще к образованию некоторого количества *льда*, и лед этот, растаяв весной или летом, в *свою очередь отнимет* от окружающей воды определенное количество тепла, потребное для его плавления.

Еще более существенным является второй фактор, обусловленный наличием льда и играющий важнейшую роль в термике холодных морей. Это — теплоотдача сквозь ледяной покров, теплоотдача, которая коренным образом меняется под действием такого хорошего теплового изолятора, как лед.

Что касается учета первого из упомянутых факторов, то в этом направлении особенно интересные исследования принадлежат Н. Н. Зубову [45], связавшему между собой таяние полярных льдов и происхождение так называемого *промежуточного холодного слоя* в гидросфере.

Схема Зубова заключается в следующем. После таяния некоторой массы льда на ее месте образуется соответствующее количество холодной воды, которая не в состоянии опуститься вниз благодаря своей малой солености. Затем, при дальнейшем воздействии Солнца, вода эта начинает все больше и больше прогреваться с самой поверхности, между тем как под этим прогретым слоем продолжает оставаться холодная и распресненная вода.

Под конец лета, когда прогревание, вследствие турбулентных процессов, распространится на довольно большую глубину, от холодного прежде слоя распресненной воды останется только тонкий промежуточный слой, который будет заключен между верхними прогретыми слоями, испытывающими непрерывное перемешивание, и нижними, наиболее стойкими, наименее подвижными слоями. Температура этих слоев будет по-прежнему выше, чем температура промежуточного холодного слоя.

Любопытно, что по толщине этого промежуточного слоя можно судить о том, насколько сурова была предшествовавшая зима и насколько обильно вслед за тем поступало тепло в летнее время.

При такого рода исследованиях большую роль играет определение *происхождения* тех или иных льдов, встреченных экспедицией в данном районе. Сам внешний вид льдины редко дает какие бы то ни было указания в этом отношении. Значительно лучшим показателем может служить *плотность* льда, как это предполагал еще С. О. Макаров [46].

Согласно исследованиям этого автора, морской лед обладает сильно выраженной *зернистой структурой*, возникающей благодаря специфическим особенностям ледообразования в море: при замерзании пресной воды кристаллики льда образуют компактную, сплошную массу, в которой только иногда бывают вкраплены отдельные пузырьки воздуха и всевозможные соринки, заключавшиеся в воде. Напротив, при замерзании *соленой* морской воды ни одна из солей не образует с водой твердого раствора, а либо выкристаллизовывается, либо переходит в рассол, который в виде небольшой капельки остается включенным между отдельными иглистыми кристаллами льда.

Чем ниже температура, при которой идет замерзание, тем большее количество капель рассола остается в массах морского льда.

Когда наступает весна и солнечные лучи обогревают лед, то, по исследованиям Мальмгрена, таяние льда начинается именно вокруг каждого такого маленького «очага». С течением времени между отдельными ячейками возникают мельчайшие каналы, по которым капли рассола постепенно стекают, «как слезы».

Но даже и до этого внутри каждой ячейки неминуемо должен возникать некоторый вакуум: ведь удельный объем льда больше, чем удельный объем воды, следовательно, при таянии льда должна появиться некоторая *избыточная* доля объема, которая заполняется в первое время лишь насыщенным водяным паром.

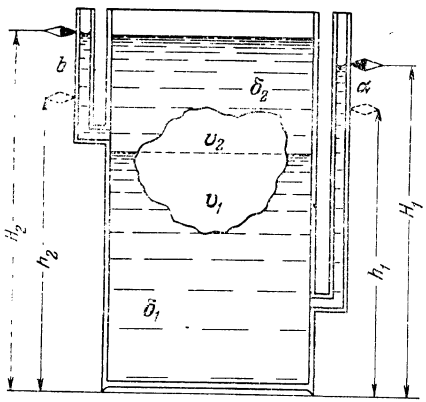


Рис. 267. Ледяной пикнометр В. В. Шулейкина

Но в дальнейшем, как в эти небольшие «пустоты», так и в полости, возникшие при стекании рассола, *сверху* вступает *воздух*, а в случае наблюдаемого иногда переворачивания льдины — *снизу* засасывается морская вода.

В результате лед, переживший *лето*, должен коренным образом отличаться от свежего льда своей *плотностью*.

И действительно, С. О. Макарову [46] удалось наблюдать в Баренцовом море лед, плотность которого упала до 0,846, между тем как плотность компактного льда, образованного из пресной воды, равняется 0,9176 [47]. По наблюдениям Мальмгрена, свежий, вновь образованный морской лед обладает обычно плотностью около 0,914—0,915. В самом начале подтаивания плотность его делается равной обычно 0,911, а к концу лета редко бывает выше 0,900.

Старый лед, по его наблюдениям, очень часто обладает плотностью около 0,86—0,87.

Если льдина, подвергающаяся исследованию, когда-то переворачивалась, то, как было уже сказано, в полости ее могла поступить морская вода большой плотности. А если к тому времени объем полостей был довольно велик, то в результате может оказаться, что плотность такого льда сделается даже *больше* плотности льда из пресной воды. Так, у Мальмгрена встречаются пробы, показавшие плотность 0,920; 0,923 и даже 0,924 [48].

Отсюда следует, что для определения «возраста» льда необходимо исследовать и *пористость* льда и его плотность.

О пористости льда придется говорить несколько дальше, а что касается измерения *плотности* льда, то во время зимовок его лучше всего определять обычным методом гидростатического взвешивания, когда это делал и Мальмгрен.

Сложнее обстоит дело с измерением плотности льда *на судне*, подверженном качке; работа с весами здесь совершенно исключается. Однако в такой обстановке можно пользоваться методом, который был предложен В. В. Шулейкиным [49] и применялся в ряде экспедиций.

Этот метод основан на применении своего рода *пикнометра* с *двумя жидкостями*. Сущность его чрезвычайно проста. Пусть в некоторый сосуд цилиндрической формы налиты две жидкости, не смешивающиеся между собой, как это изображено на схематическом рис. 267. Плотность одной из них (нижней) пусть будет δ_1, а другой, более легкой, δ_2. Необходимо, чтобы δ_1 было больше, а δ_2 — меньше плотности льда, которую мы обозначим через x.

В частности, первой жидкостью с успехом может служить вода, хотя бы морская, а второй — керосин.

Пусть в начале измерения уровень воды в сосуде стоит на высоте h_0 над дном (на рисунке не отмечено), а уровень керосина — на высоте h_2 над той же плоскостью. В трубках, сообщающихся с сосудом, уровни будут таковы: в одной из них вода установится на некоторой высоте h_1, которая будет больше h_0, но меньше h_2; в другой керосин достигнет того же уровня h_2, как и в сосуде, если отвлечься от капиллярных сил (о них см. дальше).

Опустим в сосуд исследуемый кусок льда. Он утонет в керосине и отчасти погрузится в воду, как изображено на рисунке. Вода при этом пусть установится на уровне H_1, керосин—на уровне H_2. Нетрудно найти условия равновесия его в системе двух жидкостей. Пусть подводная часть льда занимает объем v_1, а выступающая над поверхностью вода—объем v_2. Тогда,

$$v_1\delta_1 + v_2\delta_2 = (v_1 + v_2)\,x,$$

т. е. потеря веса в воде плюс потеря веса в керосине равна полному весу льда.

Отсюда определяется искомая плотность льда x:

$$x = \frac{\delta_1 v_1 + \delta_2 v_2}{v_1 + v_2}. \tag{84}$$

Объемы v_1 и v_2, входящие в (84), легко выразить через поднятия уровней воды и керосина в манометрических трубках.

Пусть поднятие воды будет

$$H_1 - h_1 = a,$$

поднятие керосина

$$H_2 - h_2 = b,$$

площадь сечения сосуда — F. Здесь H_1 и H_2 — уровни воды и керосина в манометрических трубках после погружения льда, а H_0 — новая высота границы раздела воды и керосина в сосуде (не отмечена на рисунке). Имеем:

$$v_1 = (H_0 - h_0)\,F;$$

$$H_1 - H_0 = (H_2 - H_0)\,\frac{\delta_2}{\delta_1};$$

$$H_0 = \frac{H_1\delta_1 - H_2\delta_2}{\delta_1 - \delta_2}.$$

Аналогично

$$h_0 = \frac{h_1\delta_1 - h_2\delta_2}{\delta_1 - \delta_2};$$

отсюда определяется v_1:

$$v_1 = \frac{a\delta_1 - b\delta_2}{\delta_1 - \delta_2}\,F. \tag{85}$$

Затем

$$v_2 = (H_2 - H_0)\,F - (h_2 - h_0)\,F;$$

подставив выражения, найденные выше, получим

$$v_2 = \frac{(b-a)\,\delta_1}{\delta_1 - \delta_2}\,F. \tag{86}$$

Подставив выражения (85) и (86) в (84) и произведя преобразования, найдем чрезвычайно простое выражение для искомой плотности льда.

Именно

$$x = \frac{a}{b}\delta_1. \qquad (87)$$

Особенно любопытно, что это выражение совершенно не содержит δ_2: для вычисления, следовательно, совсем не надо знать плотность керосина, употребляемого при опыте. Достаточно только знать плотность воды.

Другая чрезвычайно ценная особенность метода заключается в том, что в выражение (87) входят не высоты воды и керосина в трубках, а только их приращения. Тем самым исключаются все поправки на капиллярные силы.

Для исследования могут быть взяты очень большие куски льда (надо только построить достаточно большой сосуд), в то же время отсчеты по трубкам могут быть произведены весьма точно. Значительной качки в полосе льдов обычно не бывает; небольшие же колебания судна не отразятся на точности измерений, если взять очень тонкие трубки с большим внутренним трением и поместить их рядом.

Когда будет известно количество льда, образующегося зимой и тающего летом в арктических и антарктических морях, можно будет определить количество тепла, участвующего в этом важном цикле, пользуясь тепловыми константами морского льда.

Среди такого рода констант прежде всего надо остановиться на *скрытой теплоте таяния льда*.

В сущности, по отношению к *морскому* льду понятие о скрытой теплоте является несколько *условным*. Ведь при плавлении какого бы то ни было простого тела температура плавления всегда бывает постоянной. Между тем в такой сложной системе, как морской лед, процесс плавления должен протекать при всех температурах, начиная с температуры, при которой появляются первые кристаллы льда, и до весьма низких температур, встречающихся в природе.

Выше было указано, что между иглистыми кристаллами чистого льда в толщах морского льда оказываются включенными капли рассола, который становится все более и более концентрированным по мере понижения температуры. Каждой концентрации раствора, как известно, соответствует определенная температура замерзания, а потому при понижении температуры льда внутри его полостей должно вымерзнуть такое количество воды, чтобы оставшийся в ячейках рассол, растворив в себе соли из вымерзшей воды, оказался именно на границе замерзания.

Напротив, при повышении температуры вокруг капелек рассола должно растаять такое количество льда, чтобы при новой, пониженной концентрации рассол оказался снова на границе замерзания.

Следовательно, то тепло, которое может называться скрытой теплотой таяния, *непременно* фигурирует при всевозможных изменениях температуры льда. Это было впервые отмечено Ф. Мальмгреном [48].

Что касается самой величины скрытой теплоты, то она зависит и от температуры, и от солености. Температурная зависимость для пресного льда может быть выражена эмпирической формулой

$$\lambda_\vartheta = 80 + 0{,}5\vartheta. \qquad (88)$$

Если лед образовался из морской воды, то скрытая теплота таяния для него может быть определена на основании данных, полученных при температуре — 6°:

S, ‰	0	10	20	30	35	50
$\lambda_{-6°}$	77,0	67,5	60,6	54,5	52,0	49,5

Процесс перманентного таяния, отмеченный Мальмгреном, играет решающую роль во всей термике льда. Но особенно любопытно его влияние на *теплоемкость* морского льда, открытое тем же автором.

Собственно, если можно было условно принять для морского льда термин «скрытая теплота таяния», то понятие об удельной теплоемкости этого конгломерата следует считать более чем условным.

Действительно, пусть для повышения температуры 1 *г* морского льда на 1° требуется сообщить ему количество тепла, равное c_ϑ. Посмотрим, какова природа величины c_ϑ, играющей роль удельной теплоемкости системы.

Если в 1 *г* морского льда содержится некоторое количество A_ϑ *чистого льда*, а масса $1 - A_\vartheta$ приходится на долю рассола, находящегося в ячейках, то величина A_ϑ, вообще говоря, является функцией температуры

$$A_\vartheta = f(\vartheta).$$

Если теплоемкость чистого льда равняется c, его скрытая теплота плавления при той же температуре λ_ϑ и теплоемкость рассола C, то при повышении температуры морского льда на $d\vartheta°$ расходуемое тепло $c_\vartheta d\vartheta$ пойдет, во-первых, на нагревание чистого льда, затем на нагревание рассола и, наконец, на плавление некоторого количества dA_ϑ чистого льда, окружающего ячейки.

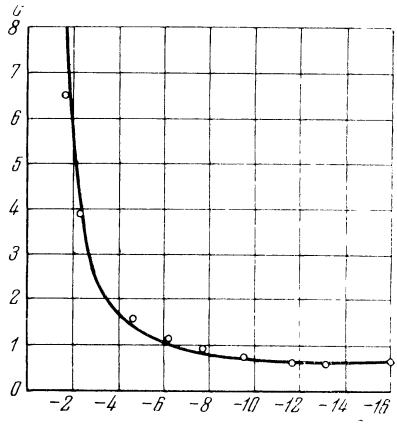


Рис. 268. Кажущаяся теплоемкость морского льда (по Ф. Мальмгрену)

Величина $c_\vartheta d\vartheta$ выразится, стало быть, следующей трехчленной суммой:

$$c_\vartheta d\vartheta = A_\vartheta c\, d\vartheta + C(1 - A_\vartheta)\, d\vartheta + \lambda_\vartheta dA_\vartheta, \qquad (89)$$

откуда

$$c_\vartheta = cA_\vartheta + C(1 - A_\vartheta) + \lambda_\vartheta f'(\vartheta).$$

Но так так A_ϑ весьма близка к единице, то это выражение можно переписать в первом приближении так:

$$c_\vartheta = c + \lambda_\vartheta f'(\vartheta). \qquad (90)$$

Если соленость льда равна не $1‰$, а $S‰$, то при переходе от температуры ϑ к температуре $\vartheta + d\vartheta$ должно расплавиться количество чистого льда, равное $S\, dA_\vartheta$. Но тогда вместо (90) получится более общее соотношение

$$c_\vartheta = c + S\lambda_\vartheta f'(\vartheta). \qquad (91)$$

Итак, коэффициент c_ϑ, играющий роль удельной теплоемкости морского льда, оказывается *функцией от скрытой теплоты плавления* льда, *солености* и *величины* $f'(\vartheta)$, определяющей пропорцию, в которой в морском льду существуют чистый лед и рассол. Коэффициент c_ϑ учитывает, следовательно, суммарный эффект, происходящий в морском льду при изменении его температуры: тепло, получаемое льдом, затрачивается не только на повышение его температуры, но и на переход некоторого количества льда в жидкое состояние.

Разумеется, помимо этого, существуют в толще льда и иные процессы физико-химического характера, например затрата некоторого количества тепла на растворение солей и т. д., но ими здесь можно пренебречь.

Соотношение (91), найденное Мальмгреном, показывает, что «теплоемкость» морского льда может во много раз превосходить теплоемкость чистого льда, образующегося при замерзании пресной воды. Экспериментальные определения, проделанные им во время зимовки на судне «Мод», подтвердили это заключение, как видно из диаграммы рис. 268, построенной по его данным.

Кривая, нанесенная на рисунке, проведена по точкам, вычисленным Мальмгреном на основании формулы (91), а точки, нанесенные на ту же диаграмму, получены им из непосредственных измерений «теплоемкости» при помощи электрического калориметра.

При составлении диаграммы этого рисунка были использованы только цифры, относящиеся ко льду с соленостью $S = 4{,}72‰$. Но, кроме них, Мальмгреном был получен большой экспериментальный материал для льда с иной соленостью, причем согласие с вычислениями также получилось хорошее.

Как видим, суммарная «теплоемкость» морского льда действительно во много раз превышает истинную теплоемкость пресного льда (равную 0,5), во всяком случае при температурах от 0 до — 6°.

Прежде чем закончить вопрос об учете «первого фактора» в термике льда, необходимо упомянуть еще об одном простом подсчете, сделанном Мальмгреном, именно о подсчете количества тепла, необходимого для расплавления 1 *г* морского льда, обладающего некоторой температурой ϑ.

Если температура замерзания морской воды с соленостью $S‰$ равна ϑ_s и если температура льда лежит вблизи нуля, то теплоту таяния чистого льда можно считать постоянной и равной 80 малым калориям.

Для расплавления *морского* льда требуется прежде всего количество тепла, необходимое для расплавления всего чистого льда в 1 *г* морского, т. е. количество тепла

$$80\,[1 - S(1 - A_\vartheta)].$$

Кроме того, необходимо еще некоторое количество тепла для повышения температуры чистого льда и рассола от ϑ до ϑ_s. Его можно считать примерно равным

$$0{,}5\,(\vartheta_s - \vartheta).$$

Что касается величины A_ϑ, то ее можно выразить через соленость рассола S_ϑ при температуре ϑ. Именно

$$A_\vartheta = 1 - \frac{1}{S_\vartheta}.$$

Приняв все это во внимание, нетрудно найти суммарное количество тепла q (потребное для расплавления 1 *г* морского льда с температурой ϑ):

$$q = 80\left(1 - \frac{S}{S_\vartheta}\right) + 0{,}5\,(\vartheta_s - \vartheta). \qquad (92)$$

По этой формуле Мальмгрен вычислил табл. 15.

Таблица 15

S, ‰ / ϑ°	0	2	4	6	8	10	15
—1	80	72	63	55	46	37	16
—2	81	77	72	68	63	59	48

Переходим теперь к учету второго фактора — влияния ледяного покрова на теплообмен между морем и атмосферой. Здесь, так же как и в предыдущем, приходится пожалеть о крайней скудости имеющихся сведений о распределении льдов в различное время года и о толщине слоя льда, намерзающего в тех или иных районах полярных морей. Зато с *физической* стороны процесс теплопередачи сквозь лед в настоящее время исследован весьма подробно.

Во время зимовок на судне «Мод» Мальмгреном велись постоянные измерения температур льда на различных расстояниях от его поверхности, при-

чем для измерений применялись термометры сопротивления и термопары. Благодаря употреблению такого рода приборов, в которых отсчеты производятся на расстоянии, не было надобности всякий раз во время измерений нарушать естественный режим, извлекая термометр и снова опуская его в шахту.

Подобное нарушение термического режима сильно обесценивает между прочим данные, полученные в этой же области Ф. Нансеном на судне «Фрам», где применялись обычные термометры: тяжелый холодный воздух каждый раз врывался в шахты, в которые закладывались термометры, благодаря чему зимние температуры глубоких слоев льда были получены слишком низкими. Так как летом теплый и легкий воздух не мог этим путем попадать в шахты, то на летних измерениях подобное несовершенство фрамовской методики не отражалось. В результате, как справедливо замечает Мальмгрен, годичные амплитуды температур в экспедиции на «Фраме» получились преувеличенными.

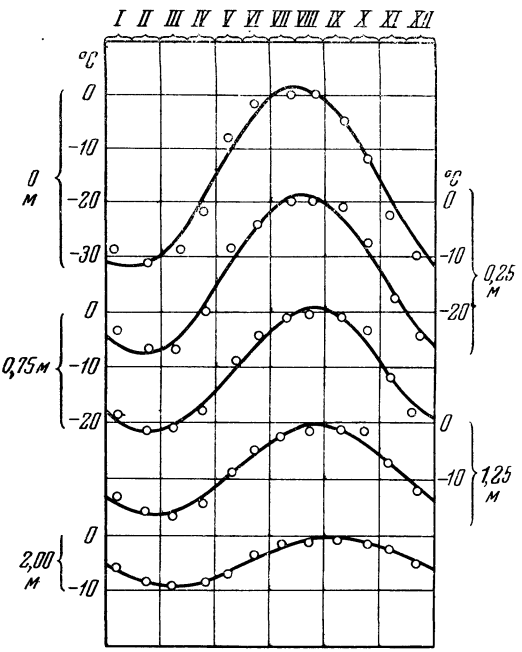


Рис. 269. Температуры в толще льда (по Ф. Мальмгрену)

На рис. 269 воспроизведены кривые, полученные по новому способу Мальмгреном на судне «Мод». Они изображают годичный ход температур льда (на различных глубинах в ледяном слое) и вычислены посредством гармонического анализа на основании наблюденных точек.

Само вычисление проведено Мальмгреном чисто *формально*, исходя из предположения, что колебания температуры могут быть выражены одной простой синусоидой, и невзирая на то, что вычисленные кривые местами выходят вверх над нулем (в сторону положительных температур, не свойственных льду).

Ниже будет дан более строгий анализ явления, а пока отметим только, что мальмгреновские кривые, воспроизведенные на рис. 269, являются синусоидами, удовлетворяющими общему уравнению семейства

$$\vartheta_m = \vartheta_z + \theta_z \sin\left(\frac{2\pi t}{T} + \gamma\right). \qquad (93)$$

Здесь ϑ_m — средняя месячная температура, ϑ_z — средняя годовая температура на данной глубине в толще льда, θ_z — амплитуда колебаний температуры, γ — их начальная фаза на данной глубине, T — период колебаний, равный одному году.

Как и следовало ожидать, по мере углубления в толщу льда уменьшается амплитуда колебаний температуры и увеличивается сдвиг фаз.

Значения ϑ_z, θ_z и γ для разных глубин сведены в табл. 16.

Числа, стоящие в нижней строчке, получены при условии, что время отсчитывается с начала календарного года.

Основываясь на этих измерениях температур, Мальмгрен предпринял вычисление *коэффициента теплопроводности льда*, причем исходил из предположения, что коэффициент этот непостоянен на различных глу-

Таблица 16

z, м	ϑ_z	θ_z	γ
0,00	—15,70°	16,82°	259°,60
0,25	—13,32	14,60	250,90
0,75	—10,65	11,17	240,90
1,25	—8,31	8,36	230,70
2,00	—4,82	4,40	210,40

бинах и что на основную температурную волну, распространяющуюся в толще льда, налагается резко выраженная волна, *отраженная* от нижней границы ледового слоя.

Обе эти гипотезы помешали ему применить простой метод анализа температурной волны, изложенный в § 7, и он избрал путь *косвенный*, сопряженный с хлопотливыми вычислениями, а самое главное — весьма условный. В результате получились значения коэффициента теплопроводности льда, весьма различные для разных глубин; так, на глубине 1—2,15 *м* коэффициент этот оказался равным примерно $5 \cdot 10^{-3}$, а в поверхностном слое — $1{,}7 \cdot 10^{-3}$.

Такое громадное различие в теплопроводности Мальмгрен объясняет наличием *воздушных пузырьков* в верхних слоях льда, где они действительно могут оказаться в значительно большем количестве, чем в слоях глубоких.

Но даже ориентировочный подсчет показывает, что возможное в природе количество газовых включений не в состоянии так резко изменить теплопроводность льда.

Об этом возможном количестве газовых включений во льду легко судить по величине δ *плотности* льда, так как плотность пористого льда и плотность δ_0 льда компактного (не содержащего газов) связаны между собой простым соотношением

$$\delta = \frac{\delta_0}{1 + v}, \tag{94}$$

где v — *объем*, занимаемый газовыми пузырьками в 1 *г* льда.

Зная плотность чистого компактного льда, которая, как было уже указано, равняется 0,9176, и определяя плотность морского льда, нетрудно найти объем, занимаемый всеми газовыми пузырьками внутри 1 *г* льда:

$$v = \frac{0{,}9176 - \delta}{\delta}. \tag{95}$$

Наиболее пористый лед, встреченный С. О. Макаровым, обладал плотностью 0,846. Следовательно, на основании формулы (95) выходит, что этот наиболее пористый лед содержал 0,085 $см^3$ газовых пузырьков в 1 *г* льда, или, другими словами, 0,072 всего объема (только!) были заполнены газом.

Если представить себе это незначительное количество газов распределенным совершенно равномерно в виде мелких шаровидных полостей во льду, то даже тогда не получится слишком резкой разницы в теплопроводности этой «зернистой системы» и компактного льда.

Еще больше убеждает в справедливости сказанного другой метод, предложенный самим Мальмгреном. Метод этот послужит для определения коэффициента теплопроводности в самых разнообразных условиях.

В лед вмораживалась проволока AB (рис. 270), сквозь которую можно было пропускать электрический ток от батареи C.

В той же *горизонтальной* плоскости, как и проволока AB, в лед вмораживалась *термопара*, спаи которой находились на расстояниях a и $a + \Delta a$ от нагревательной проволоки и присоединялись к гальванометру E.

При пропускании электрического тока силой I в течение t *сек* каждый сантиметр длины проволоки выделял количество тепла, равное q. Спустя некоторый промежуток времени все это тепло проходило сквозь боковую поверхность мысленно выделенного цилиндра, ось которого совпадала с AB, а радиус был равен a. Следовательно, через каждый квадратный сантиметр поверхности этого цилиндра проходило количество тепла, равное $q/2\pi a$.

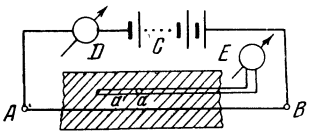


Рис. 270. Определение теплопроводности льда (по Ф. Мальмгрену)

Но то же самое количество тепла можно вычислить, исходя из законов теплопроводности. Именно, если коэффициент теплопроводности льда равен k, то это количество тепла должно равняться

$$k \int_0^\infty \frac{\partial \vartheta}{\partial a}\, dt.$$

Сравнивая между собой оба выражения одного и того же количества тепла, можно определить k:

$$k = \frac{q}{2\pi a \int_0^\infty \frac{\partial \vartheta}{\partial a}\, dt}. \qquad (96)$$

Но ведь градиенту температур $\partial\vartheta/\partial a$ пропорциональна разность температур между спаями термопары, а стало быть, и *отклонение стрелки гальванометра*. Следовательно, надо откладывать по оси ординат некоторой диаграммы текущее время и наносить на ось в качестве ординат отклонения стрелки гальванометра от момента включения тока и до того момента, когда (много позже выключения нагревательного тока) тепловой поток мимо термопары практически исчезнет и стрелка гальванометра возвратится к нулю. Затем останется только измерить площадь между полученной кривой и осью абсцисс. Величина полученной площади, как легко видеть, является пропорциональной интегралу $\int_0^\infty \frac{\partial \vartheta}{\partial a}\, dt$, входящему в (96).

К сожалению, Мальмгрену удалось применить этот замечательный метод только один раз. Получилось значение коэффициента теплопроводности вновь образованного морского льда, равное $k = 5{,}1 \cdot 10^{-3}$. Величина эта весьма близка к той, которая относится к совершенно чистому, компактному льду: для последнего, по тщательным измерениям С. А. Арцыбашева и А. И. Парфиановича [50], $k = 5{,}6 \cdot 10^{-3}$. Между тем нет никаких оснований предполагать, что лед, который был получен Мальмгреном путем искусственного намораживания, мог быть свободен от пузырьков воздуха.

Это обстоятельство также противоречит крайне малым цифрам, полученным Мальмгреном для поверхностных слоев льда *косвенным* методом.

Так как совершенно очевидно исключительное значение, которое имеет величина коэффициента теплопроводности льда в тепловом круговороте полярных морей, то является необходимым окончательно выяснить вопрос

о поверхностных слоях, который, как мы видели, вызывает некоторые сомнения.

С этой целью В. В. Шулейкиным с сотрудниками [51] были произведены измерения коэффициента теплопроводности льда в таких условиях, когда количество газовых включений во льду можно было совершенно точно измерить и когда, с другой стороны, это количество можно было изменять в чрезвычайно широких пределах.

Измерения производились только что описанным методом Мальмгрена, но для удобства расположения источнику тепла была придана несколько иная форма; именно тонкая изолированная константановая проволока была бифилярно свита в маленький клубочек K (рис. 271), покрытый сверху для надежности тонким слоем шеллака. Клубочек этот помещался в середине сосуда цилиндрической формы, диаметром 8 *см* и высотой 15 *см*. Концы проволоки выводились наружу через резиновые трубочки, проходящие сквозь дно сосуда. На расстоянии 2 *см* от центра клубка в одной вертикальной с ним плоскости находился один спай T_1 термопары, другой же спай T_2 был на 0,4 *см* выше.

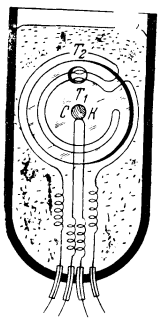


Рис. 271. Схема В.В.Шулейкина

Для обеспечения постоянства во взаимном расположении всех деталей и клубок, и термопара укреплялись на диске C из тонкого целлулоида, в котором были проделаны два круглых окна: в одном из них был вставлен нагревательный клубок, а в другом были натянуты проволоки со спаями термопары с таким расчетом, чтобы оба они были разделены между собой только естественным слоем льда, теплопроводность которого измерялась.

Во избежание искажающего теплового потока, направляющегося по металлу от одного спая к другому, проволочка, соединяющая их, была взята достаточной длины и положена в виде петли на целлулоидном диске (рис. 271).

Совершенно очевидно, что теплопроводность газа может быть принята равной нулю по сравнению с теплопроводностью чистого льда. Поэтому вполне законна замена воздушных пузырьков, имеющихся в природном льде, пузырьками *углекислого газа*, с которым несравненно удобнее работать благодаря прекрасной растворимости его в воде и возможности включить в лед весьма большое количество выделяющихся при замерзании пузырьков.

Для опытов в качестве воды, содержащей растворенный газ, брался обыкновенный *нарзан*. Небольшая примесь солей, имеющаяся в нем, не могла играть никакой роли (на основании исследований Мальмгрена над водами большей солености). Нарзан замораживался при температуре ниже —10°, причем газ выделялся в виде мельчайших пузырьков, вкрапленных в лед. Лед получался совершенно непрозрачный, белый, очень похожий по виду на сахар. Плотность его в некоторых случаях доходила до 0,8, между тем как в природе никогда еще не наблюдался пористый морской лед с плотностью менее 0,84. Причина возникновения газовых пузырьков в данном случае была, очевидно, иная: в природе они образуются благодаря утрате льдом капелек рассола, которые постепенно вытекают из него в начале лета и на место которых в лед всасывается из атмосферы воздух. Но нетрудно видеть, что подобное различие могло повести в конечном счете к получению нами несколько *преуменьшенных* коэффициентов теплопроводности по сравнению с природными, ибо в природе пузырьки должны группироваться в цепочки, вытянутые в вертикальном направлении, что облегчает ток тепла в том же направлении.

Легко было получать лед различной плотности, а стало быть, и различной пористости, лишая нарзан перед замораживанием части растворенного в нем газа. Метод определения количества газа во льду описан ниже.

В такой обстановке, несколько отличающейся от оригинальной мальмгреновской, применялся его метод. Сквозь тонкую константановую проволоку клубочка K (рис. 271) пропускался электрический ток от аккумуляторной батареи 12 *в*, который тщательно измерялся точным миллиамперметром. Тепло, выделявшееся током, распространялось во все стороны вокруг клубочка и, между прочим, проходило также мимо спаев термопары T_1 и T_2, присоединенной к чувствительному зеркальному гальванометру.

В момент включения тока пускался секундомер, и затем замечались отклонения гальванометра, соответствующие различным моментам времени. На рис. 272 изображена одна из полученных кривых. Как видим, ординаты

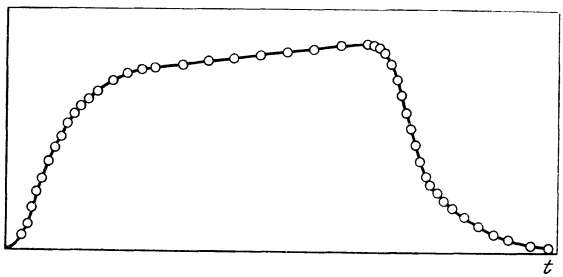


Рис. 272. Отклонения гальванометра

ее нарастают первоначально быстро, а затем асимптотически приближаются к значению, которое соответствует установившемуся тепловому потоку.

В некоторый момент времени, отмечаемый по секундомеру, ток выключался. Этот момент на рис. 272 соответствует точке, в которой кривая начинает падать. Падение ординат также происходит с течением времени все медленнее, и в результате кривая стремится асимптотически к нулю.

Как было уже сказано, площадь кривой прямо пропорциональна *количеству тепла*, выделившемуся в клубочке за все время прохождения в нем электрического тока, и *обратно* пропорциональна коэффициенту теплопроводности исследуемого льда.

Зная разность потенциалов батареи, силу тока и время, в течение которого он пропускался через клубок нагревательной проволоки, а также и геометрические размеры прибора, можно без труда вычислить коэффициент теплопроводности.

Но надежнее элиминировать все случайные ошибки при обмерах прибора, неизбежные ввиду малости расстояний, и вычислять искомый коэффициент теплопроводности, пользуясь в качестве известной величины коэффициентом теплопроводности *чистого* льда, полученного из дистиллированной воды, лишенной растворенных газов.

Определение последней величины производилось рядом авторов, в частности Арцыбашевым и Парфиановичем, о работе которых упоминалось выше.

Дистиллированная вода, предварительно прокипяченная в течение продолжительного времени, замораживалась в том же приборе, и для нее снималась та же кривая отклонения гальванометра, после чего площади кривых, отнесенные к одному и тому же количеству выделившегося тепла, сравнивались между собой.

Для измерения количества газов во льду В. В. Шулейкин сконструировал прибор, удобный как для лабораторных, так и для экспедиционных работ [51].

Он состоит из стеклянного стакана высотой 10 *см* и диаметром 5 *см* (рис. 273), заканчивающегося сверху шлифованным конусом. На последний

надевается полусферическая пришлифованная крышка с бюреткой наверху, разделенной на кубические миллиметры. Над бюреткой находится расширение, которое может быть разобщено от нее посредством крана.

В нижнюю часть стакана входит почти по касательной к кругу основания тонкая стеклянная трубочка, на которую надет тонкий каучуковый шланг со сферическим баллоном на другом конце. Баллон этот может быть установлен на любой высоте над основанием прибора.

Образец исследуемого льда вносится в стакан, на который затем надевается пришлифованная крышка. Кран между бюреткой и расширением открывают и через горло баллона вводят в прибор *скипидар*, проникающий в стакан *снизу*, омывающий кусок льда и уносящий вверх все воздушные пузырьки, которые могут прилипнуть ко льду снаружи. Для надежности следует несколько раз поднять и опустить баллон, заставляя скипидар скользить по поверхности льда. Разумеется, температура скипидара должна быть ниже нуля, чтобы он не вызвал обтаивания образца.

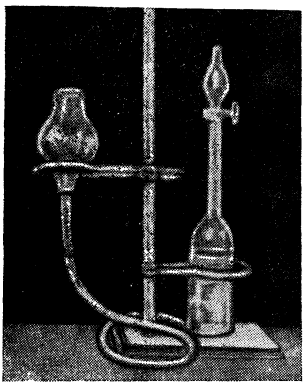


Рис. 273. Определение содержания газов во льду

После такого рода обмывания образца баллон поднимают на такую высоту, чтобы скипидар слегка поднялся над бюреткой в расширение, после чего кран над бюреткой закрывается и прибор вносится в каюту. Для повышения скорости таяния льда стакан можно опускать в теплую воду.

Весь газ, который был заключен в куске льда в виде пузырьков, выделяется и собирается в верхнем конце бюретки, и количество его нетрудно определить по делениям последней. Для большей точности можно подогреть жидкости, находящиеся в приборе, до более высокой температуры, чтобы выделить из воды и скипидара тот газ, который мог в них раствориться, но, вообще говоря, этим добавочным количеством газа можно пренебречь.

Для удобства пробы брались не из прибора, в котором происходило измерение теплопроводности, а из специального металлического стакана таких же размеров, в который вода (нарзан) наливалась из одного и того же сосуда в одно и то же время и в котором она замораживалась одновременно в тех же самых условиях. Для надежности предварительно было сделано сличение нескольких контрольных проб, взятых из того и другого стакана, давшее возможность убедиться в полном их тождестве.

Любопытно было выяснить *давление*, под которым находятся газы, включенные в лед. Для этого достаточно было измерить *плотность* тех образцов, в которых исследовалось количество включенного газа. Простой пересчет, произведенный на основании таких определений, показал, что, несмотря на большие напряжения, которые естественно предполагать внутри льда при его образовании в сосуде, газы находятся в нем под атмосферным давлением.

Выяснив это раз навсегда, можно пользоваться только что описанным прибором для определения не только количества включенного газа, но и *плотности* льда, исходя из формулы (94).

Такой метод определения плотности пористого льда отличается значительно большей точностью, чем методы, в которых плотность находится непосредственно: он позволяет измерить малую величину, которая прибавляется к единице в знаменателе дроби.

Обратно, по величине плотности льда, определенной каким-либо методом, легко найти количество газа, включенного в лед по формуле (95), но подобное вычисление будет значительно менее точным.

Нетрудно видеть, что плотности льда, равной 0,8, соответствует количество газов, равное 0,147 *см³/г*, а плотности 0,85—0,0795 *см³/г*.

Так как сосуды, в которых замораживалась вода, во все время измерения теплопроводности стояли в будке на дворе Физического института, то приходилось измерения вести только при благоприятных температурных условиях, именно, когда температура воздуха держалась по возможности на одном достаточно низком уровне. В противном случае на тепловой поток, исходящий от нагретой проволоки, налагался бы другой тепловой поток, вызванный разностью температур между внутренними слоями льда и атмосферным воздухом. Совершенно очевидно, что в таком случае вся картина была бы искажена.

Опыты показали, что сама по себе температура льда не оказывает никакого заметного влияния на его теплопроводность. Впрочем, при температурах, очень близких к нулю, нельзя было работать, так как возникало опасение, что непосредственно вокруг нагревательного клубочка лед растает.

За полученные цифры можно ручаться хотя на кривой рис. 274 мало точек, но каждая из них проверена контрольными измерениями. Точка, соответствующая отсутствию газов во льду ($v = 0$), как было выше указано, взята из работы [50].

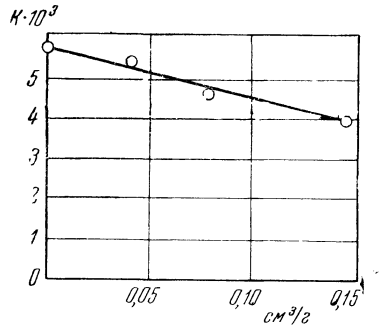


Рис. 274 Теплопроводность пористого и чистого льда

Как видим, даже при весьма большом содержании газов, 0,147 *см³/г* (и соответственно малой плотности: $\delta = 0{,}8$), теплопроводность льда не падает ниже $3{,}9 \cdot 10^{-3}$. Но такой низкой теплопроводности нельзя ожидать в природных условиях, ибо, во-первых, плотность морского льда еще никем не наблюдалась меньше 0,846 (Макаров), а, во-вторых, особые условия возникновения полостей в природном льду заставляют смотреть на полученные нами цифры скорее как на слегка преуменьшенные.

Проделав описанные контрольные измерения в лабораторных условиях, попытаемся составить представление о распространении *температурной волны* в толще природного льда.

Если не считаться с разрыхлением поверхностного слоя льда в летнее время (оно несущественно в данном случае, так как температура льда в этом слое неизменно сохраняется равной нулю), то, на основании только что изложенных соображений, мы можем полагать, что коэффициент теплопроводности природного льда является более или менее постоянным *на всех глубинах*.

Зададимся весьма вероятной величиной: $k = 5 \cdot 10^{-3}$. Что касается изменения толщины ледяного покрова, то для ориентировочного подсчета примем ее постоянной и равной некоторой средней величине 2,9 *м*, исходя из экстраполяции кривой, полученной Мальмгреном для амплитуд температурных колебаний.

Уравнение температурной волны в толще льда можно получить тем же способом, каким было получено аналогичное уравнение для случая турбулентной теплопроводности (28). Только в выражение коэффициента β в показателе придется вместо величины A/δ подставить так называемый коэффициент «термометрической теплопроводности» или «температуропроводности» K:

$$K = \frac{k}{c\delta}. \qquad (97)$$

На основании (97) коэффициент этот равняется обычному коэффициенту теплопроводности k, деленному на произведение плотности δ и теплоемкости c исследуемой среды. Следовательно, дифференциальное уравнение теплопроводности этой среды будет

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = \frac{k}{\delta c} \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial z^2}.$$

Необходимо также принять во внимание, что в рассматриваемом случае температурная волна распространяется сквозь слой конечной толщины и что между пограничными поверхностями слоя существует всегда *разность температур*.

Легко показать, что задача может быть расчленена по следующей простой схеме. Сквозь слой льда идет непрерывный тепловой поток, определяемый простой *разностью средних температур* на верхней и нижней границах, а на этот постоянный тепловой поток *налагается волна*, определяемая уравнением, аналогичным (28). Иными словами, температура ϑ в любой точке ледового слоя на глубине z под верхней поверхностью льда в любой момент времени выражается соотношением

$$\vartheta = \vartheta_z + \theta_0 e^{-\beta z} \sin(\alpha t - \gamma_0 - \beta z), \tag{98}$$

где ϑ_z — *средняя* (за период T) температура на данной глубине z, а

$$\beta = \sqrt{\frac{\pi \delta c}{kT}}, \qquad \alpha = \frac{2\pi}{T}. \tag{99}$$

Разумеется, если закон колебания температуры на верхней границе слоя выражается не простой синусоидой $\theta_0 \sin(\alpha t - \gamma_0)$ или косинусоидой, а некоторой функцией, разлагаемой в ряд Фурье, то и температура ϑ в каждой точке ледяного слоя выразится тоже соответствующим рядом. Что касается фазового угла γ_0, то он зависит от выбора начала отсчета времени и в частном случае может равняться нулю: тогда на всех глубинах придется считаться только *со сдвигом* фаз βz, возрастающим пропорционально глубине z.

Как справедливо замечает Мальмгрен в своей работе (см. [48]) о свойствах морского льда, для учета теплового режима в какой-либо точке ледяного слоя необходимо рассмотреть, помимо падающей температурной волны, еще и вторую температурную волну, *отраженную* от нижней поверхности льда.

Если толщина ледяного покрова равняется Δ, то на основании (98) температура здесь должна была бы колебаться с амплитудой, равной

$$\theta_0 e^{-\beta \Delta}.$$

Однако тут лед соприкасается с морской водой, температуру которой можно практически считать *постоянной* круглый год. Следовательно, амплитуда температурных колебаний на нижней пограничной поверхности в действительности равна *нулю*, а это может быть только в том случае, когда температурная волна здесь *отражается с переменой знака*.

Итак, для получения полной картины необходимо еще учесть эту отраженную волну, начальная амплитуда которой равняется $\theta_0 e^{-\beta \Delta}$, а фаза скачком изменяется на π при отражении. При распространении отраженной волны вверх как амплитуда, так и фаза непрерывно изменяются по закону, выражаемому соотношением (98). Так, например, при подходе отраженной волны к верхней пограничной поверхности амплитуда колебаний будет такова же, как если бы простая падающая волна прошла слой льда

двойной толщины (2Δ), а сдвиг фаз будет равен $2\Delta\beta + \pi$. Но в таком случае нет ничего проще, как *сложить* колебания температуры, вызываемые первой (падающей) и второй (отраженной) волнами, применив хотя бы обычный *векторный* метод.

Для наглядности и в целях контроля проанализируем этим методом тот материал, который был получен Мальмгреном во время зимовки на судне «Мод».

Как было уже упомянуто при описании мальмгреновской диаграммы рис. 269, точки, полученные этим автором из непосредственных наблюдений, строго говоря, *не ложатся* на синусоиду, вычерченную на этом рисунке.

Применив обычный прием гармонического анализа, можно показать, что колебания температуры на поверхности льда хорошо выражаются *двумя* первыми членами ряда Фурье, т. е.

$$\vartheta = \vartheta_0 + \theta' \sin(\alpha t - \gamma_0') + \theta'' \sin(2\alpha t - \gamma_0''). \qquad (100)$$

Здесь

$$\theta' = 15^\circ;\ \theta'' = 1{,}7^\circ;\ \alpha = \frac{2\pi}{T};$$

$$T' = 2{,}7 \cdot 10^7\ сек = 10{,}4 \text{ месяца}.$$

Обе синусоиды — основная и «обертон» — нанесены на рис. 276 пунктиром. Суммарная кривая, как нетрудно видеть, прекрасно проходит по точкам, взятым из работы Мальмгрена.

Не следует смущаться тем обстоятельством, что основной период колебаний оказался равным 10,4 месяца, а не целому году: ведь период этот зависит не от промежутка времени между двумя одноименными календарными месяцами, а от промежутка времени между двумя месяцами с одинаковым температурным режимом. Последний же, очевидно, может *сдвигаться* в зависимости от того, когда начинаются заморозки, каков режим зимы и т. п.

Для вычисления фактора β следует принять, на основании непосредственных измерений Мальмгрена и Шулейкина [1], $k = 5 \cdot 10^{-3}$CGS; $\delta = 0{,}9$; $c = 0{,}55$.

Отметим, что выбор величины c обусловлен тем обстоятельством, что *соленость* льда даже в верхних слоях была чрезвычайно незначительной.

На рис. 275 изображены векторные диаграммы и для основного колебания (левая диаграмма), и для обертона (правая диаграмма). Проследим сначала за построением первой из них. Единичный вектор $\overline{OA}$ изображает амплитуду колебаний, обусловленную одной только *падающей* температурной волной (масштаб длин векторов пока еще не известен) при самом входе ее в лед ($z = 0$). Абсолютная величина векторов $\overline{OB}$, $\overline{OC}$, $\overline{OD}$, $\overline{OE}$ и $\overline{OF}$ представляет в том же масштабе соответственные амплитуды на глубинах 25, 75, 125, 200 и 290 *см* (толщина льда может быть принята равной 290 *см*, детальнее об этом см. ниже).

Каждый вектор сдвинут по отношению к OA на угол, равный соответственной величине βz, причем вращение всех векторов во времени предполагается *против* часовой стрелки, а потому «отстающие» векторы сдвигаются на угол βz по часовой стрелке.

Отраженная волна зарождается на глубине 290 *см*; следовательно, для того чтобы достигнуть четырех перечисленных горизонтов и верхней границы льда, волне этой приходится проходить во льду пути, равные соответственно 380, 455, 505, 555 и 580 *см*.

[1] Об этом коэффициенте см. формулу (96).

На левой диаграмме (рис. 275) нанесены амплитуды и фазы температурных колебаний, вычисленные по формулам (98) и (99) для такого рода путей волны. Полученные векторы $\overline{OG'}$, $\overline{OH'}$, $\overline{OI'}$, $\overline{OK'}$, $\overline{OL'}$ изображены пунктиром. Остается только геометрически сложить эти векторы с основными, предварительно изменив фазу каждого из «пунктирных» векторов на противоположную. Такое сложение выполнено на рис. 275, где, как нетрудно видеть, вектор $\overline{EG}$ равен вектору OG', но направлен в противоположную сторону.

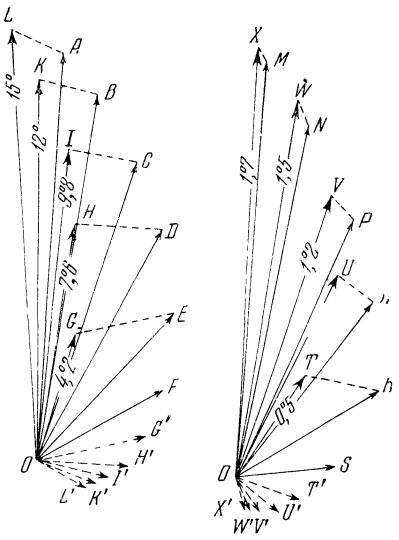


Рис. 275. Векторные диаграммы

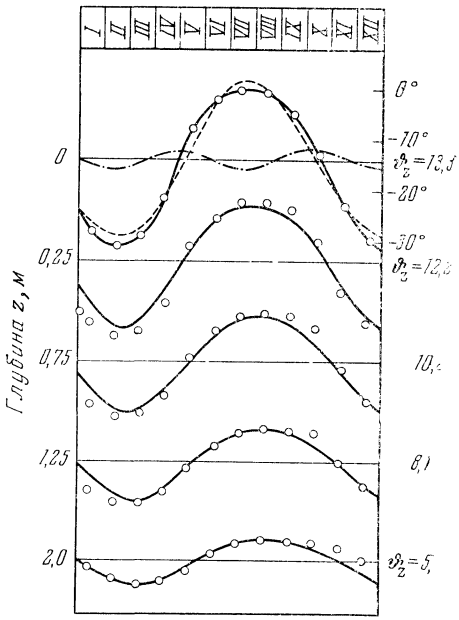


Рис. 276. Теоретические кривые хода температур

равно как соответственно равны между собой по модулю и противоположно направлены векторы $\overline{DH}$ и $\overline{OH'}$, $\overline{CI}$ и $\overline{OI'}$, $\overline{BK}$ и $\overline{OK'}$ и, наконец, $\overline{AL}$ и $\overline{OL'}$.

Совершенно очевидно, что к вектору $\overline{OF}$ приходится геометрически прикладывать равный по модулю и прямо противоположный вектор, а потому в результате сложения амплитуда температурных колебаний на нижней поверхности льда оказывается равной нулю.

Что касается искомых амплитуд колебаний на всех остальных горизонтах, то они выражаются замыкающими сторонами треугольников OG, OH, OI, OK и OL.

Теперь, когда найдены в условном масштабе амплитуды полных температурных колебаний на всех горизонтах, а также действительные сдвиги фаз между поверхностными и глубинными колебаниями, можно определить и истинный масштаб диаграммы, замечая, что амплитуда *основной* синусоиды, полученная на основании упомянутого гармонического анализа наблюдений, равняется $\theta' = 15°{,}0$.

Подобным же образом анализируется распространение волн, падающей и отраженной, для «обертона», обладающего вдвое меньшим периодом. На рис. 275 справа изображена векторная диаграмма, построенная для этого обертона, также в условном масштабе (амплитуда падающей волны OM принята за единицу). Масштаб по-прежнему удается найти после выполнения геометрического сложения векторов. Гармонический анализ дает

для модуля вектора $\overline{OX}$ значение $\theta'' = 1°, 7$, исходя из которого нетрудно определить модули всех векторов полных колебаний $\overline{OT}$, $\overline{OU}$, $\overline{OV}$, $\overline{OW}$, $\overline{OX}$.

Итак, для всех перечисленных горизонтов определены амплитуды и фазы колебаний как основных, так и обертональных. В отдельности эти колебания не изображены на рис. 276, чтобы не затемнять чертежа. Они приведены только для одного верхнего, пограничного слоя. На рисунке вычерчены суммарные кривые, учитывающие и основное колебание, и обертон. Точки, нанесенные на рисунке, взяты непосредственно из наблюдений Мальмгрена (это те же точки, что и на рис. 275). Как видим, они очень хорошо ложатся на кривые, вычисленные на основании изложенной *теории*. Правда, некоторые точки заметно отходят от теоретических кривых, но отклонения — чрезвычайно пестрые, не систематические. Необходимо особенно подчеркнуть, что наилучшее совпадение замечается на кривой, соответствующей самому нижнему горизонту. Однако если бы теоретически вычисленные константы грешили хоть сколько-нибудь против истины, то именно здесь, в слое, наиболее удаленном от верхней границы льда, особо ярко проявились бы погрешности теории.

Некоторое подобие систематических отклонений намечается на кривой, вычисленной для горизонта 0,25 *м*. Но нетрудно видеть, что если бы мы задались не коэффициентом теплопроводности $5 \cdot 10^{-3}$, принятым нами *постоянным* во всей толще льда, а коэффициентом $1{,}7 \cdot 10^{-3}$, который был найден Мальмгреном длинным — косвенным — путем для поверхностного слоя, то отклонения получились бы несоизмеримо большими: температурный градиент в верхних слоях получился бы значительно *бо́льшим* (в 3 раза), а потому амплитуда *вычисленной* кривой оказалась бы еще значительно меньшей.

Естественнее объяснить полученные небольшие отклонения *погрешностями* в наблюдениях, которые для поверхностных слоев были весьма вероятны, хотя они, разумеется, и не могли дать столь преувеличенных амплитуд, как старые наблюдения Нансена на «Фраме».

Итак, как видим, Мальмгрен напрасно опасался исследовать свой обширный материал наблюдений путем анализа распространения во льду падающей и отраженной температурных волн; такой анализ оказывается *весьма простым*, и результаты его лишний раз подтверждают правильность величины коэффициента теплопроводности льда, полученной им же на основании единственного *непосредственного* измерения (его исключительно изящным электрическим методом). Только величину эту *необходимо признать совершенно постоянной для всех слоев* нормального морского льда — от верхней до нижней пограничной его поверхности.

Напротив, косвенный и длинный путь, посредством которого Мальмгрен определял коэффициент теплопроводности на различных горизонтах, неизбежно должен был привести его к ложным выводам, ибо он был основан на *статическом* анализе явления. В действительности же процесс температурных колебаний во льду является процессом *динамическим*, причем сами колебания происходят не по простому синусоидальному закону, а характеризуются основным «тоном» и обертоном.

Последнее обстоятельство приводит, между прочим, к тому, что средняя температура для каждого горизонта *не равна* средней арифметической между наивысшей и наинизшей температурами соответствующего слоя. Так, например, средняя арифметическая для поверхностного слоя равняется — 15°, тогда как истинная средняя температура для этого слоя оказывается равной — 13,3°.

Средние температуры для всех остальных горизонтов легко определить, исходя из совершенно очевидного соотношения, базирующегося на постоянстве среднего температурного градиента во всей толще льда Δ:

$$\vartheta_z = \vartheta_w + (\vartheta - \vartheta_{0w}) \frac{\Delta - Z}{\Delta}, \qquad (101)$$

где ϑ_w — средняя температура морской воды, прилегающей к нижей поверхности льда. Если принять ее равной — 1,2° то на основании (101) получится для слоя $Z = 200$ *см* средняя температура, равная — 5,1° (при $\vartheta_0 = 13{,}3°$) [1]. С другой стороны, на основании диаграммы рис. 276 теоретически вычисленная амплитуда основного колебания на этом горизонте равняется 4,2°, а амплитуда обертона 0,5°. Следовательно, наивысшая летняя температура льда на глубине 2 *м*, по теории, должна быть равной

$$-5{,}1° + 4{,}2° - 0{,}5° = -1{,}4°.$$

Но именно такую наивысшую температуру и дают непосредственные *наблюдения* Мальмгрена.

Это обстоятельство лишний раз подтверждает справедливость принятого предположения о *постоянстве* коэффициента теплопроводности во всей толще льда, причем принятая величина его ($5 \cdot 10^{-3}$) совпадает с результатом *непосредственного* измерения Мальмгрена и с результатом лабораторных измерений Шулейкина и др.

Что касается непостоянства толщины льда, то и оно в действительности мало отражается на ходе процесса при наличии той значительной средней толщины льда, которая наблюдается в полярных морях.

Зная константы, характеризующие термику ледяного покрова, можно вывести соотношения, которые позволят найти потерю тепла морской водой на подогревание зимнего морозного воздуха, отделенного от воды теплоизолирующим слоем льда. В самом общем случае — применительно к ледяному покрову любой толщины D — надо, по предложению А. Г. Колесникова, рассматривать поверхность льда и его толщу как два «сопротивления, соединенных последовательно», а разность температур между водой подо льдом и воздухом над ним — как своего рода «разность потенциалов». Тогда тепловой поток через ледяной покров и последующая отдача тепла с поверхности льда представятся формулой, напоминающей формулу Ома для электрической цепи. На основании предыдущего изложения в этом параграфе и на основании того, что излагалось в § 5, «полное сопротивление» тепловому потоку и отдачу тепла с поверхности можно представить так:

$$R = \frac{1}{5{,}2V} + \frac{D}{432} \quad (D \text{ в } см,\ V \text{ в } м/сек), \tag{102}$$

а следовательно,

$$-Q_2 = \frac{\vartheta_w - \vartheta_a}{\frac{1}{5{,}2V} + \frac{D}{432}} \quad кал/см^2 \cdot сутки. \tag{103}$$

При тонком ледяном покрове в знаменателе дроби главную роль играет первый член, зависящий от скорости ветра. При толстом слое льда основное значение имеет второй член. Если скорость ветра средняя, колеблющаяся около 7 *м/сек*, то оба члена равноправны при толщине льда около 15 *см*.

Учет положительных и отрицательных составляющих теплового баланса в ледовитом море обязательно должен быть пополнен вычислением тепла, выделяющегося при замерзании морской воды и отнимаемого у моря при таянии льдов.

Необходимо отметить, что количество тепла, выделяющегося осенью при образовании ледяного покрова, должно в точности равняться количеству тепла, которое следующей весной и летом отнимается у моря при таянии. Значит, это тепло дважды входит в тепловой баланс с противоположными знаками, а потому не отражается на величине общей суммы. Но не изменяя значения общей суммы, эти дополнительные составляющие должны все же

[1] Значения средних температур, вычисленные по формуле (101), проставлены справа от диаграммы рис. 276.

изменить очертания суммарной кривой, учитывающей годовой ход полного теплового баланса. В осеннее время ординаты этой кривой получат положительное приращение. У морской воды отнимется меньше тепла, чем было бы при отсутствии добавочной составляющей; напротив, весной и летом ординаты суммарной кривой получат отрицательные приращения, соответствующие дополнительному количеству тепла, которое будет отнято у морской воды для расплавления ледяного покрова. Что касается самих суточных сумм тепла, выделяющегося при замерзании и поглощаемого при таянии льда, то вычисление их производится по совсем простой схеме; а именно толщина ледяного покрова изменяется во времени со скоростью dD/dt, причем эта величина обладает положительным знаком, когда толщина ледяного покрова нарастает, и отрицательным, когда толщина ледяного покрова уменьшается.

Пусть λ обозначает скрытую теплоту таяния льда. Вообще говоря, эта величина, как мы видели в § 11, зависит от температуры, но так как результаты вычислений не отражаются на общем балансе тепла за год, а влияют несколько только на форму суммарной кривой, то нет смысла учитывать небольшие изменения, которым подвергается величина λ. Примем ее постоянной, равной 80 *кал* на 1 *г* льда. Количество тепла dq/dt, выделяющегося в единицу времени при ледообразовании, должно выражаться так:

$$\frac{dq}{dt} = \lambda\delta \frac{dD}{dt}. \qquad (104)$$

Практически удобнее определять величину dD/dt, входящую сюда, находя изменение толщины ледяного покрова за десятидневный срок. С другой стороны, вместо dq/dt для наших целей желательно прямо определять связанную с ней величину суточной суммы тепла Q_4, учитывающей те же процессы. Пользуясь формулой (104) и полагая, что за 10 дней слой льда изменился на ΔD *см*, нетрудно показать, что

$$Q_4 = \lambda\delta \frac{\Delta D}{10} \qquad (105)$$

или после подстановки $\lambda = 80$ и $\delta \approx 0{,}915$

$$Q_4 = 7{,}3\,\Delta D. \qquad (106)$$

Разумеется, Q_4 меняет знак вместе с величиной ΔD.

§ 12. Полный тепловой баланс моря

Из предыдущего изложения видно, что в настоящее время еще совсем недостаточно исследованы различные составляющие теплового баланса Мирового океана и внутренних морей. Единственная составляющая, к тому же малая по сравнению с другими, не нуждается в уточнении: это — количество лучистой энергии, отражающейся от поверхности океана, а потому не входящей в воду. Очень важно систематически проводить во всех океанских и морских экспедициях измерения количества тепла, поступающего от прямых солнечных лучей и от облаков; важно систематически измерять и в особенности регистрировать потери тепла на эффективное излучение, поскольку до настоящего времени выяснено лишь, что эта отрицательная составляющая теплового баланса в океанских условиях не такова, как в условиях материковых, и что даже в различных областях Атлантического океана она неодинакова: благодаря дополнительному уменьшению эффективного излучения в западных районах, под влиянием коллоидальных взвесей тончайшей пыли в атмосфере. В особенности скудны наши сведения о дальнейших судьбах тепла, оставшегося в водах океана и распространяющегося в них: либо в адвекционных потоках — из одной области в другую (в частности, от берегов в открытое море или в обратном направлении), либо за счет тур-

булентного перемешивания между отдельными горизонтальными слоями и перемешивания в самых крупных вихрях, возникающих в горизонтальной плоскости. Как мы видели, предстоит еще большая работа по усовершенствованию статистической теории турбулентности и непосредственных инструментальных методов изучения турбулентных пульсаций. Только после создания вполне надежных методов вычисления коэффициентов турбулентного теплообмена и после детального изучения адвекции в открытом море и в прибрежных районах,— только после этого станет возможным во всей полноте вычислять все составляющие теплового баланса океана или внутреннего моря: и составляющие *внешнего* баланса, и составляющие *внутреннего* баланса тепла.

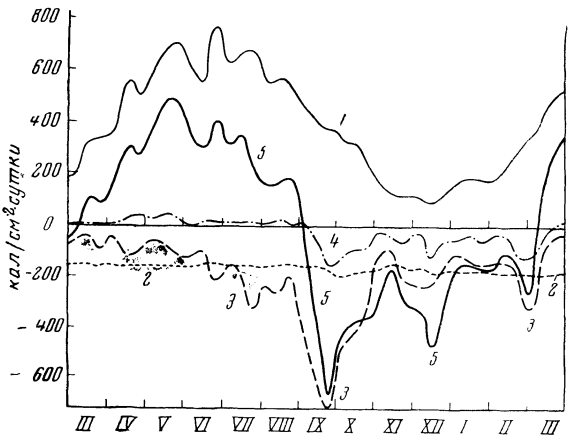


Рис. 277. Внешний тепловой баланс Черного моря (по С. Г. Богуславскому)

В настоящее время мы в состоянии лишь *косвенными* методами вычислять все эти составляющие *полного теплового баланса*. В данном параграфе будут рассмотрены единичные примеры таких расчетов. Но сперва необходимо изложить методику построения *внешнего* теплового баланса, начав с внешнего баланса поверхности того моря, для которого в первую очередь был вычислен этот баланс,— *Черного моря*.

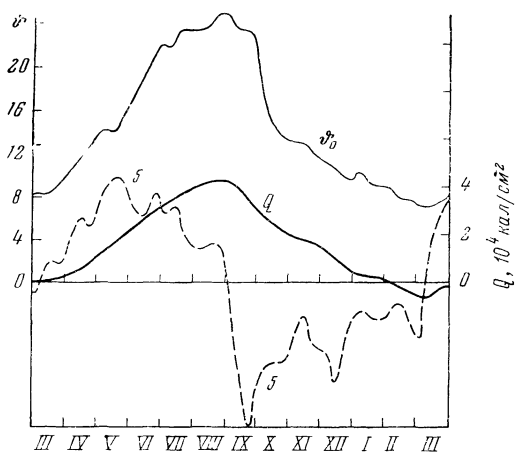


Рис. 278. Внешний тепловой баланс, теплосодержание и температура поверхностной воды

Сначала построим кривые годового хода различных составляющих теплового баланса (рис. 277). Кривая *1* выражает годовой ход поступления солнечного тепла, который вычислен по суточным суммам тепла, зарегистрированным на ленте солярографа: эти суммы пропорциональны площадям соответствующих кривых, снятых за отдельные сутки. Кривая *2* дает представление о годовом ходе эффективного обратного излучения с поверхности моря. Может показаться странным постоянство ее ординат, однако в связи с этим надо напомнить, что при повышении температуры морской воды излучение с поверхности моря несомненно возрастало бы, если бы при этом не повышалось, и весьма значительно, содержание водяного пара в воздухе над морем. Именно водяной пар как бы стабилизирует обратное эффективное излучение. Кривая *3* выражает годовой ход потерь на испарение с поверхности моря. Пики кривой, направленные вниз, обычно соответствуют периодам повышения скоростей ветра. Кривая *4* показывает,

как в продолжение года меняется конвекционный теплообмен между морем и атмосферой.

Алгебраическое сложение ординат всех перечисленных кривых *1*, *2*, *3* и *4* дает кривую *5* полного теплового баланса, вычерченную жирной линией. Как видим, эта кривая в первый раз пересекает ось абсцисс в марте, переходя из области, лежащей ниже оси абсцисс, в область, лежащую выше этой оси. Здесь оканчивается охлаждение моря, происходившее зимой, и начинается его нагревание. В свою очередь нагревание заканчивается в начале сентября, когда кривая *5* вторично пересекает ось абсцисс, опускаясь ниже нее.

Суммарная кривая теплового баланса *5* перенесена на рис. 278 под тем же номером. Совершенно очевидно, что в любой точке этой кривой с абсциссой x и ординатой y осуществляется соотношение, согласно которому элементарный участок площади ydx в некотором масштабе выражает элементарный прирост теплосодержания деятельного слоя моря, т. е. того слоя, в пределах которого совершаются годовые изменения температур воды [52]. Значит, изменение теплосодержания деятельного слоя за конечный промежуток времени с некоторого момента t_1 до некоторого момента t_2 выразится величиной, пропорциональной интегралу $\int_{t_1}^{t_2} ydx$, т. е. пропорциональной площади, которая оконтурена соответствующим участком кривой *5*, ординатами y_1, y_2 и отрезком оси абсцисс $x_2 - x_1$. На рисунке 278 построена такая интегральная кривая Q. Она показывает, как меняется теплосодержание деятельного слоя в продолжение года. За условный нуль тут принято теплосодержание в конце марта исследованного года, наименьшее в году.

Легко показать, что кривая теплосодержания деятельного слоя Q в то же время выражает годовой ход средней температуры деятельного слоя моря в соответствующем новом масштабе, который автоматически определится из соотношения

$$\Delta\bar{\vartheta} = \frac{\Delta Q}{\delta c h}, \qquad (107)$$

где ΔQ — изменение теплосодержания за некоторый промежуток времени, $\Delta\bar{\vartheta}$ — изменение средней температуры деятельного слоя за тот же промежуток времени, δ — плотность, c — теплоемкость воды и h — толщина деятельного слоя (в сантиметрах). В данном случае можно считать, что $h = 75\,м = 7{,}5 \cdot 10^3\,см$.

Для сравнения на рис. 278 в верхней его части нанесена кривая годового хода температуры поверхностной воды ϑ_0 в некотором произвольном масштабе (нанесенном слева), не связанном с формулой (107). Ход кривой ϑ_0 напоминает ход кривой Q: вычисленная средняя температура деятельного слоя и непосредственно измеренная температура поверхностной воды меняются в соответствии между собой.

Вычисление внешнего теплового баланса Черного моря, начатое еще в 1930 г. В. В. Шулейкиным на Черноморской гидрофизической станции, было впоследствии продолжено С. Г. Богуславским и Е. Н. Шутовой. Последним из этих авторов были произведены систематические расчеты за несколько лет, позволившие обнаружить очень существенную роль *недостававшей* составляющей *полного* баланса Черного моря — составляющей, которую дает *адвективный перенос тепла*. Оказалось, что если бы не существовало этой — адвективной — составляющей полного баланса тепла, то прибрежные воды Черного моря, к которым относились расчеты,— с каждым годом повышали бы свою среднюю температуру деятельного слоя. С тех пор как были налажены систематические исследования теплосодержания вод в этом районе, проводимые на экспедиционном судне «Юлий Шокальский», оказалось возможным находить разность между величиной, которую

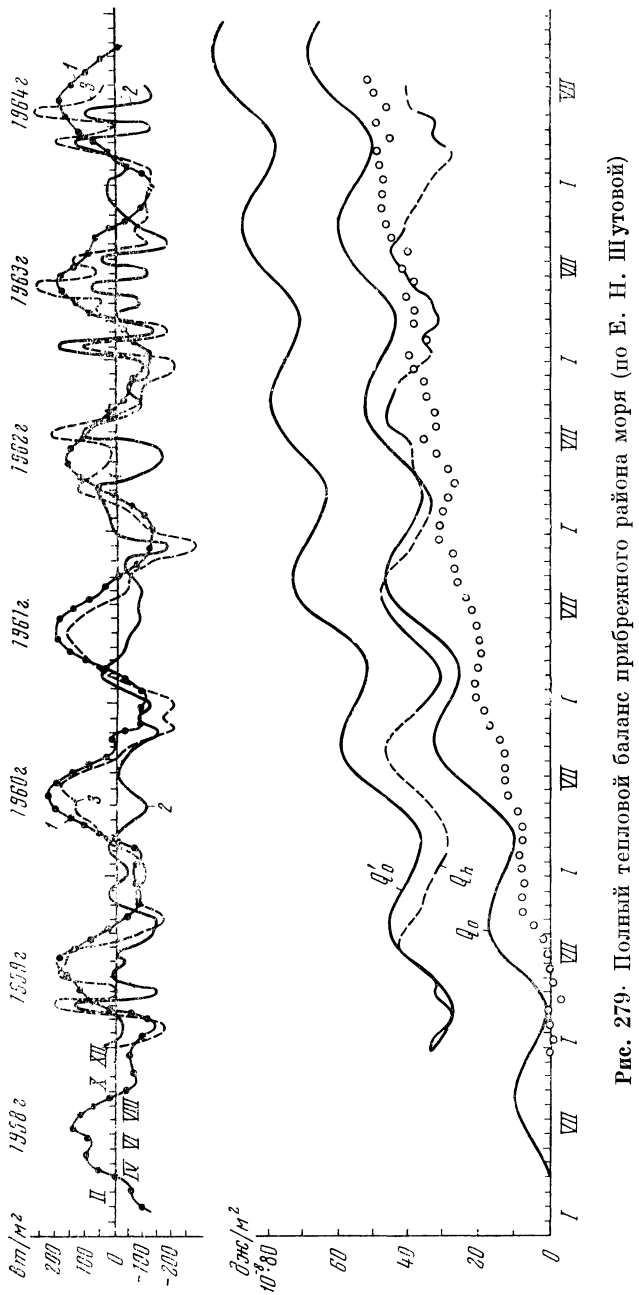


Рис. 279. Полный тепловой баланс прибрежного района моря (по Е. Н. Шуговой)

дает планиметрирование кривой типа Q (рис. 278), и действительным теплосодержанием деятельного слоя. Эта разность равна количеству тепла, уносимого от берегов в открытое море адвекционными потоками.

На рис. 279 кривая *1* представляет сезонные изменения *внешнего* теплового баланса за семь лет (1958—1964 гг.) в прибрежном районе Черного моря, по работе Е. Н. Шутовой [53]. В течение каждого года эта кривая дважды пересекает ось абсцисс — обычно в марте и в сентябре. С марта по сентябрь внешний баланс положителен, и максимальные значения его в рассматриваемом промежутке времени составляли 130—240 *вт/м²*. В остальные части года внешний баланс отрицателен, причем за рассматриваемые годы он доходил до—130 *вт/м²*. В целом за год внешний тепловой баланс оказался не уравновешенным: каждый год оставалась положительная составляющая от $8{,}4 \cdot 10^3$ до $16{,}7 \cdot 10^8$ *дж/м²*.

В связи с этим теплосодержание деятельного слоя, вычисленное *без* учета выноса тепла адвекцией от берега в открытое море, изобразилось кривой Q_0. Здесь за нуль для отсчета теплосодержания принято его значение, которое соответствует 6 апреля 1958 г., т. е. моменту первого пересечения кривой *1* внешнего теплового баланса с осью абсцисс. Кривая Q_0 показывает, как (из года в год) увеличивалось бы теплосодержание деятельного слоя, если бы значительное количество тепла не уносилось от берега в открытое море за счет прибрежной адвекции.

Для определения *истинного* теплосодержания деятельного слоя были использованы данные температурных разрезов, выполняемых Черноморским отделением Морского гидрофизического института по меридиану 34° в. д. и частично — данные разрезов Ялтинской гидрометеорологической станции. Толщина деятельного слоя принималась равной 100 *м*.

Интегральные кривые теплосодержания вообще строятся «с точностью до произвольной постоянной». Как уже указывалось, для удобства построения кривой Q_0 нуль для отсчета был выбран с таким расчетом, чтобы кривая Q_0 начиналась от соответствующего минимума в 1958 г. Теперь будет удобно сместить кривую Q вверх таким образом, чтобы минимум смещенной кривой Q_0' совпал с минимумом *истинного* теплосодержания Q_h в марте 1959 г. (не было данных для кривой Q_h до декабря 1958 г.).

Очевидно, что количество тепла, переносимого адвективными потоками, должно выражаться разностью ординат соответствующих точек на кривых Q_h и Q_0'. На рисунке эти разности ординат, определенные графически, отмечены отдельными точками (кружочками). Вообще говоря, эти разности нарастают во времени, но иногда видны *спады*, которые показывают, что в соответствующие сроки тепло не уносится от берега в открытое море, а поступает из открытого моря в прибрежный район. Зная масштаб ординат нижнего яруса рис. 279 и отнеся найденные количества тепла (уносимого или приносимого к берегу) к одним суткам, Е. Н. Шутова вычислила суточные значения потерь (или притока) тепла за счет адвективного переноса в деятельном слое моря (кривая *2* в верхнем ярусе рис. 279).

Из рисунка видно, что летом тепло в основном уносится от берега в открытое море, а зимой, наоборот, адвективные потоки либо дают положительную составляющую в прибрежном районе, либо они близки к нулю. На общем фоне такой (сезонной) изменчивости видны отдельные резкие колебания. Это — результаты сгонно-нагонных явлений, наблюдаемых в прибрежной полосе близ Кацивели. По абсолютной величине потери тепла на адвективный перенос от берега в открытое море такого же порядка, как и внешний тепловой баланс моря в изучаемом районе моря. Кривая *3* (рис. 279) представляет результат алгебраического сложения ординат кривых *1* и *2*. Это — кривая многолетнего хода *полного теплового баланса* моря, вычисленного для деятельного слоя 100 *м* в прибрежном районе Черного моря.

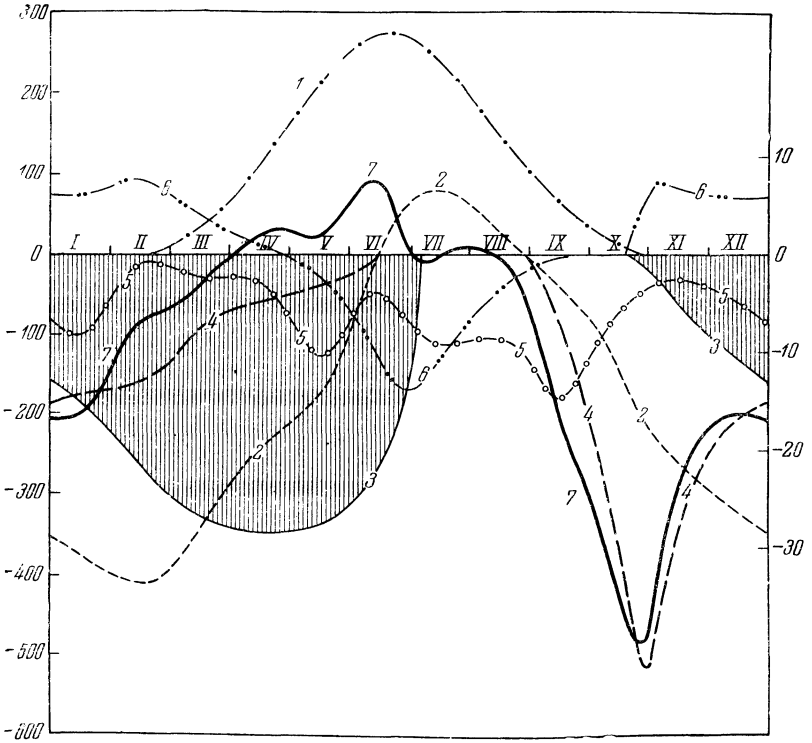


Рис. 280. Внешний тепловой баланс Карского моря (по В. В. Шулейкину)

Сложней вычисляется тепловой баланс *ледовитых* морей, в особенности тех, которые часть года остаются под ледяным покровом, а другую часть года свободны от него. С одной стороны, осложнения вызываются защитной ролью льда, учитываемой по формуле (103), а с другой — необходимостью вычислять количество тепла, выделяющегося при замерзании и поглощаемого при таянии, по формуле (106). В качестве примера рассмотрим тепловой баланс Карского моря, которое впервые подверглось подобному исследованию в 1932 г. во время Таймырской гидрографической экспедиции [2] на гидрографическом судне «Таймыр».

На сводную диаграмму рис. 280 нанесен годовой ход элементов внешнего теплового баланса и некоторых других характеристических величин. Кривая *1* выражает годовой ход поступления солнечного тепла в прямом потоке солнечных лучей и в диффузном потоке от облаков. Она вычислена на основании диаграммы рис. 236, построенной для различных широт и на основании приближенного учета коэффициента использования по примеру рис. 238. Здесь пренебрегается потерями тепла на отражение от поверхности воды, льда, снега и тем самым до некоторой степени компенсируется отсутствие данных о выделении тепла при конденсации водяного пара на поверхности моря, нередкой в этих широтах. Годовой ход температуры воздуха выражает кривая *2*, причем масштаб ее ординат нанесен справа от диаграммы. Кривая *3* представляет изменения толщины ледяного покрова в сантиметрах (цифры, проставленные слева от диаграммы, показывают и эту толщину, и количество калорий, теряемых за сутки с квадратного сантиметра поверхности моря). Лед образовался около 20 октября. Его сплошной слой перестал существовать около 8 июля следующего года, после чего по поверхности моря плавали лишь отдельные льдины, продолжавшие таять до конца сентября.

На протяжении времени между половиной июня и началом сентября нет смысла следить за теплообменом между водой и воздухом: в этот период разность температур между водой и воздухом иногда меняет знак, прямой теплообмен чередуется с обратным и оба вообще незначительны ввиду малой разности температур между водой и воздухом. Не уклоняясь далеко от истины, условимся считать, что результирующий теплообмен в этот период равен нулю. Зато решающее значение приобретает теплообмен между морем и атмосферой, начиная с конца сентября, в октябре и в начале ноября. Потери тепла, вычисляемые по формуле (103), быстро возрастают при осеннем падении температуры, когда еще не возник ледяной покров и когда он еще очень тонок. Нарастание потерь прекращается в октябре, когда возникает утолщающийся ледяной покров и начинает проявлять свои свойства мощного теплового изолятора. Именно поэтому к концу ноября потери сквозь ледяной покров уменьшаются вдвое, несмотря на то, что температура воздуха продолжает падать. Как видно по кривой *2*, падение температуры воздуха продолжается до середины февраля, а между тем к этому времени потери сквозь ледяной покров уменьшаются втрое по сравнению с октябрьскими, как это отчетливо показывает ход кривой *4*. Эти потери на конвекционный теплообмен и на эффективную радиацию (в данном случае они объединены на диаграмме) представляют собой самую главную отрицательную составляющую внешнего теплового баланса полярных морей, в отличие от морей жаркого и умеренного поясов.

Напротив, потери на испарение, игравшие решающую роль в умеренных и жарких поясах, отходят на второй план в полярных морях, где упругость насыщенного пара весьма мала, состояние воздуха близко к насыщению, а потому влажный дефицит не может достичь сколько-нибудь значительной величины. Ввиду малого значения этой составляющей мы не внесем заметных погрешностей в вычисление теплового баланса, если допустим, что скорость испарения с поверхности льда при прочих равных условиях приблизительно такова, как с поверхности воды.

В связи с таким допущением кривая *5* (рис. 280) вычислена по общей формуле (12). Кривая *6* представляет годовой ход составляющей теплового баланса, зависящей непосредственно от процессов замерзания и таяния. Она вычислена по формуле (106), в которой ΔD обозначает изменение толщины льда за 10 суток. Построение кривой *6* допускает очень простой и надежный контроль. Ведь площадь той ее части, которая расположена над осью абсцисс, должна в прежнем масштабе выразить все количество тепла, выделившегося при образовании ледяного покрова максимальной толщины в соответствующем году. В данном случае толщина льда достигала 140 *см*. Значит, при его образовании выделилось $140 \cdot 80 = 11200$ *кал/см*^{2}. Эту цифру подтверждает планиметрирование соответствующей площади на рис. 280 и умножение ее на переводный коэффициент, связанный с масштабом чертежа. Это обстоятельство выводит из затруднительного положения при построении второй части кривой *6*, лежащей под осью абсцисс. Как уже упоминалось, ледяной покров, как целое, перестает существовать примерно около 8 июля. Но после этого срока остается большое количество плавающих льдин, которые тают и продолжают отнимать соответствующее тепло у морской воды. Нет надобности детально учитывать самый ход их таяния, поскольку заранее известно, что общее количество тепла, требующееся для расплавления всего льда,— это те же 11 200 *кал/см*^{2} поверхности моря, выделившиеся при образовании ледяного покрова толщиной 140 *см*. Следовательно, надо лишь подобрать такие очертания замыкающей части кривой *6* под осью абсцисс на рис. 280, чтобы, во-первых, общая площадь ее под осью абсцисс в точности равнялась общей площади кривой *6* над осью абсцисс, и, во-вторых, чтобы замыкающая часть кривой подошла к оси абсцисс в то время года, когда исчезнут последние сколько-нибудь крупные льдины. С таким

расчетом построена замыкающая часть кривой *6*. Располагая кривыми *1—6*, можно найти суммарные тепловые потоки, проходящие сквозь квадратный сантиметр поверхности моря за каждые сутки; остается только алгебраически сложить ординаты всех этих кривых.

Результаты такого сложения изображены на рис. 280 суммарной кривой *7*. Но эта кривая еще не описывает полный тепловой баланс моря. Из рисунка видно, что площадь кривой *7*, лежащая выше оси абсцисс, значительно меньше площади, расположенной под осью абсцисс. Следовательно, расход тепла сквозь поверхность моря значительно преобладает над приходом. Но, с другой стороны, если бы таков был полный баланс моря, то теплосодержание его с каждым годом падало бы и притом чрезвычайно быстро. Значит, в действительности преобладающий расход тепла сквозь водную поверхность компенсируется какими-то иными составляющими теплового баланса, еще не рассмотренными.

Не рассмотренными остались поступление тепла, приносимого реками, и поступление тепла от более теплых морских вод постороннего происхождения.

На первый взгляд может показаться, что северные реки должны играть большую роль в тепловом режиме полярного моря: и площади живого сечения их велики, и течение их отличается большой скоростью, и температура воды в них поднимается летом довольно высоко.

В связи с этим был учтен водный баланс каждой большой реки в отдельности из числа тех рек, которые впадают в Карское море, подсчитано количество тепла, приносимого речными водами в исследуемый район моря, принимающего затем участие в полном тепловом балансе. Добавочное количество тепла было отнесено к 1 $см^2$ поверхности моря, подобно другим составляющим теплового баланса. Оно начинало сказываться в середине июня, достигало максимума в середине августа и фактически падало до нуля в половине декабря. На диаграмму рис. 281 перенесена суммарная кривая *7* с рис. 280 под тем же номером. К ней присоединена кривая *8*, описывающая поступление дополнительного тепла от рек. Другие кривые, фигурировавшие на рис. 280, относились к наиболее холодному году за двадцатилетний период. Кривая *8* построена для другого года, приближающегося к первому по тепловому режиму, а потому может законно рассматриваться совместно с кривой *7*.

Нетрудно видеть, что по сравнению со всеми иными составляющими новая составляющая (речная) является крайне незначительной. Тепло, приносимое в море реками, оказывается очень скудным, если отнести его к единице поверхности моря в том районе, который находится под воздействием речных вод.

Поэтому совершенно естественно, что при алгебраическом сложении ординат кривой *8* с ординатами кривой *7* результирующая кривая *9* лишь немного приподнялась над осью абсцисс по сравнению с кривой *7*: по-прежнему резко преобладает отрицательная составляющая теплового баланса.

В действительности же перед нами протекают явления, которые свидетельствуют о каком-то динамическом равновесии тепловых потоков обоих знаков при наличии некоторых колебаний — из года в год — около среднего теплового состояния моря. Следовательно, необходимо заключить, что неравенство между приходом и расходом тепла (с преобладанием последнего) компенсируется за счет источника тепла, лежащего за пределами моря и пока еще не учтенного в анализе. Таким источником, несомненно, должно являться тепловое течение, внедряющееся в полярное море и несущее воды атлантического происхождения [2].

Планиметрируя площадь кривой *9* (рис. 281), лежащую выше оси абсцисс, и ее площадь, лежащую ниже оси абсцисс, определяя разность площадей и умножая ее на масштабный коэффициент, легко найти, как велико должно

быть количество тепла, приносимого предполагаемым теплым течением, чтобы компенсировать перевес расхода тепла над приходом и тем самым обеспечить тепловое равновесие моря.

Такое элементарное вычисление показало, что искомое количество тепла должно достигать 38 000 *кал* в год в расчете на каждый квадратный сантиметр поверхности моря.

Пока еще рано судить о том, каковы суточные составляющие этой общей суммы, так как еще совершенно неизвестен тепловой режим внедряющихся струй в различные времена года. Но важно отметить, что теоретическое заключение о наличии теплых струй атлантического происхождения

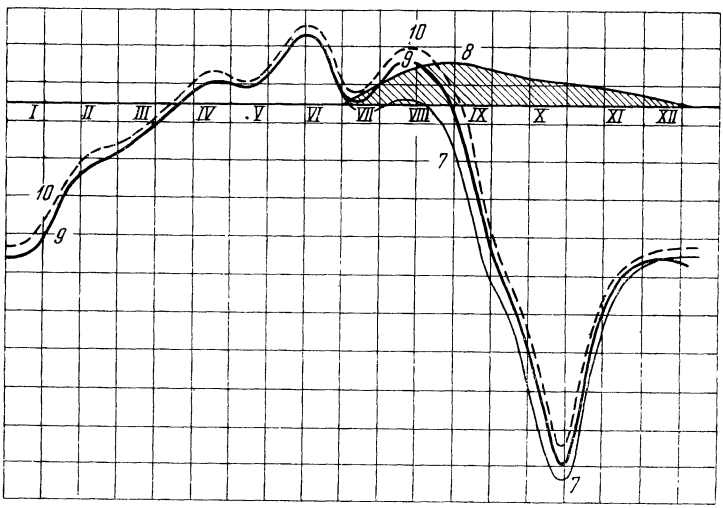


Рис. 281. Учет влияния больших рек на тепловой баланс моря

в исследованном море было полностью подтверждено через три года непосредственными гидрологическими измерениями. Другая экспедиция, пересекшая более северный район моря, обнаружила на глубинах теплое течение атлантического происхождения.

На основании предыдущих выкладок подсчитаем теперь годовые суммы тепла, приходящиеся на долю каждой составляющей теплового баланса в отдельности. Как и прежде, при аналогичных вычислениях необходимо спланиметрировать площади, заключенные между соответствующими частями кривых (рис. 280 и 281) и осью абсцисс, а затем умножить площади на масштабный коэффициент.

При рассмотрении полученных величин, в сущности, можно было бы не затрагивать те суммы тепла, которые характеризуют ледообразование и таяние льда, поскольку оба количества равны между собой по абсолютной величине и противоположны по знаку. Но для полноты обзора они тоже включены в общую сводную табл. 17.

Хотя выше и указывалось, что в настоящее время еще рано судить о колебаниях теплового режима струй, внедряющихся в море, однако даже сейчас можно попытаться составить хотя бы предварительное представление о полном ходе тепловых процессов в морской воде и о периодическом изменении ее теплосодержания.

Для получения такой ориентировочной картины опустим ось абсцисс на такое расстояние, чтобы площадь, ограниченная этой осью и кривой *9* (рис. 281), попадающая ниже оси абсцисс, оказалась равной площади, попав-

Таблица 17

Поступление тепла	*кал/см²·год*	Расход тепла	*кал/см²·год*
От теплого течения атлантического происхождения	38 000	На теплообмен между морем и атмосферой и на обратную радиацию	48 000
От радиации прямых солнечных лучей и диффузной радиации неба	33 700	На испарение	27 800
От речных вод	4 100	На таяние льдов	11 200
От ледообразования	11 200		
Всего . . .	87 000	Всего . . .	87 000

шей выше этой оси. Совершенно очевидно, что подобное действие над кривой *9* равносильно равномерному распределению всех 38 000 *кал* между всеми днями года: равномерному распределению тепла, принесенного из Атлантического океана.

Когда выяснится истинный режим теплого течения, не представит никакого труда внести соответствующие уточнения в предлагаемую схему.

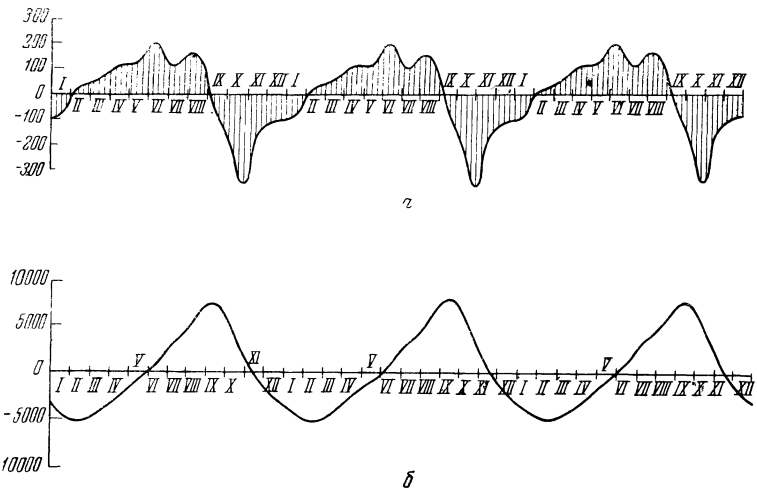


Рис. 282. Полный тепловой баланс (*а*) и теплосодержание (*б*)

Итак, пусть кривая *9* сместилась всеми своими точками вверх на требуемое расстояние (рис. 282, *а*). Для наглядности схемы кривая годового хода суточных сумм тепла здесь продолжена еще на два года. По условию построения теперь площади кривой, располагающиеся над осью абсцисс, будут равны площадям, расположенным ниже этой оси.

Как видно из рисунка, приход тепла должен преобладать над расходом в период примерно с 10 февраля по 10 сентября, причем подъем кривых в различные сезоны весьма неодинаков: насколько медленно притекало тепло в феврале и даже в марте, настолько быстро кривая падает до нуля в августе, после чего начинает чрезвычайно быстро увеличиваться расход тепла, главным образом на подогревание воздуха, который, как мы видели на рис. 280, к этому времени успевает уже сильно охладиться.

На основании диаграммы рис. 282, *б* можно проследить за тем, как в продолжение года изменяется теплосодержание деятельного слоя морской воды. Для этого надо построить интегральную кривую, как делалось применительно к тепловому балансу Черного моря (см. рис. 278). Интегральная кривая, характеризующая *теплосодержание* деятельного слоя, изображена на рис. 282, *б*. Как всегда, при интегрировании появляется произвольная постоянная интегрирования, выбираемая на основании условия задачи. На рис. 278 эта константа была выбрана таким образом, что условный нуль для отсчета ординат лежал на уровне наименьшего теплосодержания в году. На рис. 282, *б* в качестве нуля для отсчета ординат принято среднее за год значение теплосодержания деятельного слоя.

Как всегда, все полученные цифры приурочены к 1 *см*^{2} поверхности моря. Следовательно, теплосодержание относится к столбу воды с поперечным сечением 1 *см*^{2} и высотой, равной толщине деятельного слоя. На основании диаграммы рис. 282, *б* можно показать, что максимальное теплосодержание такого единичного столба воды превышает минимальное его теплосодержание на 23 000 *кал*. Другими словами, такое количество тепла поступает в одну часть года на повышение средней температуры деятельного слоя и такое же количество тепла вновь теряется в другую часть года.

При рассмотрении рис. 278 было уже отмечено, что та же кривая теплосодержания описывает годовой ход средней температуры деятельного слоя в масштабе, который легко определить по формуле (107). В данном случае, полагая плотность и теплоемкость морской воды приблизительно равными единице, а толщину деятельного слоя $D = 7 \cdot 10^3$ *см*, найдем превышение наибольшей средней температуры слоя над наименьшей

$$\Delta\bar{\vartheta} = \frac{23000}{7 \cdot 10^3} = 3{,}3^\circ.$$

Наименьшая средняя температура в исследуемом районе может считаться равной $\bar{\vartheta}_{\text{мин}} = -1{,}5^\circ$. Следовательно, наивысшая средняя температура деятельного слоя в году должна достигать $\bar{\vartheta}_{\text{макс}} = +1{,}8^\circ$.

Непосредственные измерения показали, что и в действительности наибольшая средняя температура деятельного слоя воды в году равна $+1{,}8^\circ$. Итак, теоретический анализ полного теплового баланса моря здесь тоже привел к правильным результатам.

На основании рис. 282, *б* видно, что вдвойне осредненная температура деятельного слоя (осредненная и по вертикали, и по времени) составляет $\vartheta = +0{,}3^\circ$.

Теперь рассмотрим, какие причины могут вызвать наиболее резкие изменения теплового режима моря.

Только что изложенные вычисления велись применительно к наиболее холодному году за большой промежуток лет, но не представляет никакого труда проделать аналогичные вычисления применительно к наиболее теплому году, когда средняя годовая температура воздуха была на 3,6° выше. К сожалению, для самого холодного года не хватает многих данных, касающихся потерь на испарение. Но совершенно очевидно, что чем выше температура, тем бóльших потерь на испарение надо ожидать. Поэтому различие между режимом как холодного, так и теплого года заведомо возрастет, если принять, что ход потерь на испарение остается таким же, как и в холодном году. На этом основании при вычислении новых значений составляющих теплового баланса сохраним две величины постоянными: поступление тепла от солнечной радиации и расход тепла на испарение.

Колебания годовых сумм тепла солнечной радиации в этих широтах не могут быть сколько-нибудь значительными благодаря «регулирующему действию» облаков: их появляется тем больше, чем больше прогрев солнечными

лучами, а увеличение облачности нижнего яруса немедленно уменьшает поступление солнечного тепла на поверхность моря.

Что касается составляющей, обусловленной термикой рек, то ее можно вычислить как для теплого года, так и для холодного.

Результаты пересчетов изображены на рис. 281 (кривая *10*). Как видим, кривая *10* недалеко отстоит от суммарной кривой *9*. Если подсчитать прежним способом, насколько расход превышает приход, то для теплого года получается 34 000 *кал* вместо прежних 38 000 *кал*, найденных для наболее сурового года. Относительно невелико различие между этими двумя цифрами — оно составляет всего 10,5%.

Попытаемся перенести полученные результаты на изменения температур воды. Сначала предположим, что количество тепла, приносимого течением, остается прежним. Тогда придется заключить, что избыточные 4000 *кал*

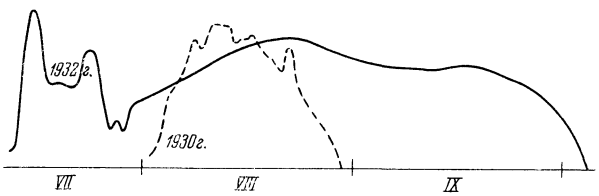


Рис. 283. Сравнение хода температуры воды за два различных года

должны пойти на повышение средней температуры деятельного слоя. Если в холодный год средняя температура была в сентябре на 3,3° выше, чем в феврале, то теперь различие между летней и зимней средней температурой деятельного слоя должна оказаться $\frac{23+4}{23}\,3{,}3 = 3{,}91°$.

Итак, по сравнению с наиболее холодным годом в год наиболее теплый средняя температура деятельного слоя повысилась бы не более чем на 3,91—3,3 = 0,61°. Совершенно очевидно, что в начале и в конце лета повышение температуры было еще меньше. Однако в действительности различие в тепловом режиме моря между отдельными годами может выходить далеко за такие тесные пределы даже тогда, когда общий режим атмосферы не обнаруживает каких-либо исключительных отклонений от средней нормы.

Очень убедителен в этом отношении рис. 283, на котором сопоставлены две кривые: одна из них изображает изменения температуры воды в 1930 г., а другая — такую же температурную кривую для той же точки моря, только в 1932 г. Как видим, между обеими кривыми нет ничего общего: теплосодержание воды летом 1932 г. было несравненно больше, чем летом 1930 г. Подобное же резкое различие замечается между другими элементами, характеризующими тепловой режим морской воды в эти два года, являющиеся настоящими антиподами.

Такое исключительное потепление в 1932 г. по сравнению с 1930 г. нельзя объяснить, исходя из предположения о потеплении воздуха и связанных с этим уменьшенных потерь тепла. Действительно, 1917 и 1924 гг. были антиподами в отношении теплового режима атмосферы: в 1924 г. средняя температура воздуха была на 3,6° выше, чем в 1917 г. Между тем средняя температура деятельного слоя отличалась тогда всего лишь на 0,6°. Напротив, резкое различие теплового режима 1932 и 1930 гг. наблюдалось при относительно малом потеплении атмосферы — всего лишь на 0,8° в 1932 г. по сравнению с 1930 г.

В изменении режима рек также нельзя искать разгадку. Во-первых, количество тепла, принесенного в море за весну и лето 1932 г., было лишь немного больше того тепла, которое реки принесли в 1930 г.; во-вторых, как говорилось выше, составляющая, принадлежащая рекам, играет весьма незначительную роль в тепловом режиме полярного моря.

О незначительности колебаний солнечного тепла, поступающего на поверхность моря, уже было сказано. Многолетние наблюдения над облаками подтверждают справедливость гипотезы о регулирующем влиянии облачности нижнего яруса. Для убедительности и наглядности приведем здесь данные, которые касаются именно интересующих нас лет. На рис. 284 графически изображено распределение числа солнечных дней по месяцам, причем одна кривая соответствует 1930 г., а другая — 1932 г. Как и следовало ожидать, в 1932 г. в летнее время солнечное сияние было более скудным, чем в 1930 г.

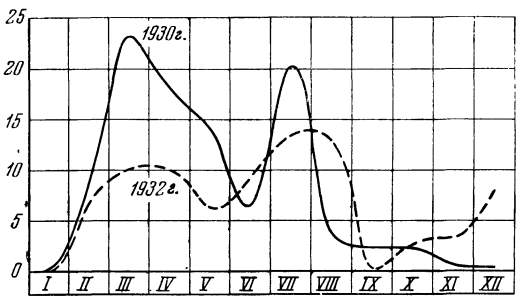


Рис. 284. Годовой ход солнечных дней в различные годы

Итак, методом исключений легко установить, что причиной сильного потепления морской воды в 1932 г. необходимо считать увеличение количества тепла, приносимого теплым течением атлантического происхождения.

После появления в печати работы [2] Шулейкина многие океанографы выражали сомнение в решающей роли теплых вод Атлантического происхождения, вторгающихся в Карское море с севера, и даже в самом существовании этих теплых струй. Однако ровно через 3 года скептики сами обнаружили в Карском море именно эти струи посредством обычных батометров с термометрами, опущенными с борта ледокольного парохода «Садко».

Изложенные соображения показывают, насколько важно организовать систематические исследования адвекционного переноса тепла в море. Такие исследования дадут, наконец, возможность предвычислять годовой ход температур моря по регистрации различных составляющих теплового баланса. С другой стороны, исследования изменений теплового режима течений на подступах к изучаемому району моря позволят выполнять такие предвычисления с достаточной заблаговременностью, поскольку то или иное отклонение от нормального теплового состояния приносимых вод должно распространяться по оси течения со скоростью этого течения.

Громадное значение адвекционного теплообмена между различными районами весьма отчетливо проявляется на примере *Красного моря* [4], тепловой баланс которого исследован применительно к шести различным широтным зонам.

Зона	1	2	3	4	5	6
Средняя широта, *град* . . .	27,5	25,0	22,5	20,0	17,5	15,0

На рис. 285 воспроизведены шесть диаграмм, на которых изображен годовой ход важнейших составляющих теплового баланса на шести зонах, а на рис. 286 представлено расположение самих этих зон на схематической карте Красного моря. Как и следовало ожидать, в этих широтах совсем незначительную роль играет конвекционный теплообмен между морем и атмосферой. Поэтому на диаграммах отсутствуют соответствующие кривые (но при окончательном суммировании всех составляющих эта составляющая

учтена). Кривые Q_s (рис. 285) выражают поступление солнечного тепла, кривые Q_b — потери на эффективное обратное излучение, кривые Q_e — потери на испарение, которые, так же как и на Черном море, преобладают над всеми отрицательными составляющими. Полный тепловой баланс на всех диаграммах обозначен суммарными кривыми B.

Как видим, эти кривые по-разному расположены относительно соответствующих осей абсцисс: в некоторых зонах преобладает площадь кривой, находящаяся под осью абсцисс (расход тепла), а в некоторых — площадь, лежащая выше оси абсцисс (поступление тепла). В итоге 1-я зона теряет за год 14 600 *кал*, которые должны компенсироваться за счет адвекционного переноса тепла из других зон; 2-я зона получает извне больше тепла, чем расходует его сквозь поверхность воды, на 3600 *кал* в год; 3-я зона получает

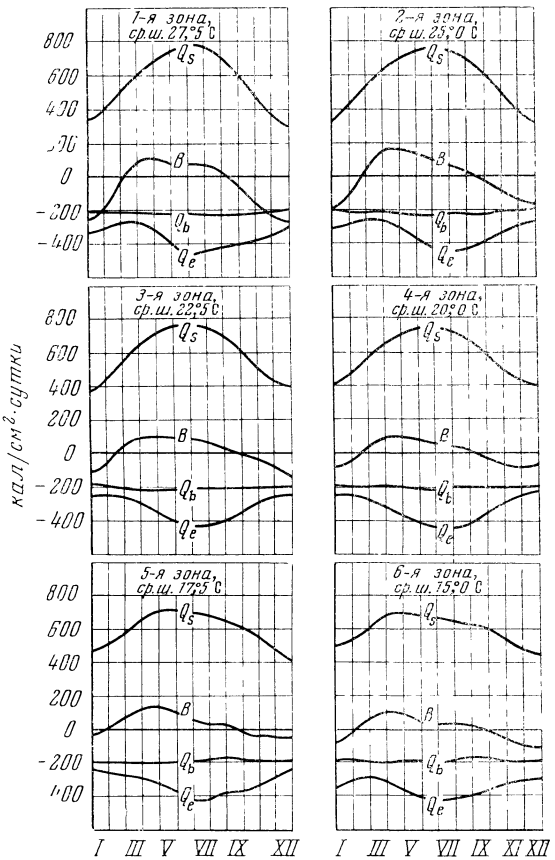


Рис. 285. Кривые теплового баланса для шести зон Красного моря (по Н. И. Егорову)

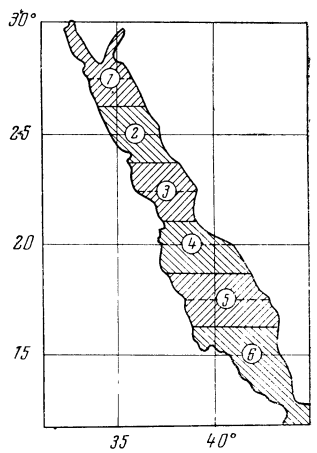


Рис. 286. Расположение зон на схематической карте (по Н. И. Егорову)

извне на 2920 *кал* больше, чем теряет сквозь поверхность; 4-я зона получает на 4000 *кал* больше, чем теряет сквозь поверхность; 5-я зона получает извне на 6560 *кал* больше, чем теряет сквозь поверхность, и, наконец, 6-я зона теряет за год на 1420 *кал* больше, чем получает извне. Все эти цифры отнесены к 1 *см*^{2} поверхности моря.

Такой обзор показывает, что 1-я и 6-я зоны, т. е. зоны, лежащие по концам моря, должны получать дополнительное тепло из остальных зон, характеризующихся избытком тепла в потоке сквозь поверхность моря. Все море в целом характеризуется уравновешенным балансом: вычисления дают для него 1070 *кал* на 1 *см*^{2} избыточного тепла; по всей вероятности, если эта цифра выходит за пределы погрешностей при многократном суммировании, то она означает некоторый отток тепла из Красного моря в Индийский океан сквозь Баб-эль-Мандебский пролив.

При систематическом изучении теплового баланса моря в продолжение нескольких лет выявляется еще одно важнейшее значение подобных исследований: из года в год теплосодержание деятельного слоя в какой-то один избранный месяц оказывается совсем неодинаковым. В частности, совсем неодинаковы те минимальные и максимальные (в данном году) значения теплосодержания деятельного слоя, которые отсчитываются от одного заранее выбранного условного нуля. Это видно хотя бы на рис. 278, где минимальное теплосодержание деятельного слоя в марте 1952 г. оказалось на 7000 *кал* меньше, чем в марте 1951 г. Разумеется, при изменениях теплосодержания меняется и средняя температура деятельного слоя.

Выше отмечалась одна из самых важных причин изменения этих величин в различные годы: колебания режима теплых (или холодных) течений, внедряющихся в исследуемый район моря. Другой весьма распространенной причиной является преобладание сгонного или нагонного режима в исследуемом году.

Действительно, ведь при преобладании сгонного режима во всех прибрежных районах в летнее время выходит на поверхность моря холодная глубинная вода; она подвергается сильному нагреванию на поверхности, а затем вновь попадает на глубины, давая возможность столь же сильно нагреваться все новым и новым массам холодной воды, поступающим снизу. Значит, в годы с преобладающим сгонным режимом в летнее время успевает дополнительно прогреться большое количество глубинной воды, и в результате теплосодержание всего деятельного слоя к концу периода нагревания окажется сильно увеличенным по сравнению со средней многолетней нормой. Соответственно и средняя температура деятельного слоя окажется выше своей средней многолетней нормы.

§ 13. Вычисление суточного хода температуры поверхности моря

Конечной целью исследований в области термики моря является создание методики *предвычисления* температур воды на различных глубинах по заданному ожидаемому ходу составляющих теплового баланса. На путях к этой цели в настоящее время возможно лишь вычисление суточного хода температуры поверхностной воды, которое впервые произвел А. Г. Колесников [54].

Этот автор исходит из заданного на некоторой высоте над уровнем воды хода температуры воздуха ϑ, суммарной прямой и рассеянной радиации Солнца J, эффективного излучения черной поверхности R, измеренного пиргеометром, величины испарения E и конденсации C, измеренных испарителем. По этим данным легко находятся все составляющие теплового баланса в пересчете на самую поверхность моря: теплообмен конвекцией, поток суммарной тепловой радиации, входящей в воду, эффективное излучение поверхности воды и теплообмен посредством испарения и конденсации.

Как наиболее интересный, рассматривается суточный ход температуры воды в период *нагрева*, когда, вообще говоря, положительные составляющие теплового баланса преобладают над отрицательными или уравновешивают их.

Поглощение тепловой радиации рассматривается в *объеме* с учетом экспоненциального закона ослабления входящей энергии. Строго говоря, коэффициент поглощения β непостоянен, так как различные световые и тепловые волны поглощаются по-разному и спектральный состав поэтому меняется с глубиной. Однако для обеспечения возможности решения задач до конца приходится принять коэффициент интегрального поглощения β равным некоторой постоянной осредненной величине в пределах поверхностного слоя воды.

В пределах одних суток — в пределах исследуемого периода времени T — разложим в ряд Фурье все заданные функции времени $\vartheta(t)$, $J(t)$, $R(t)$, $E(t)$ и $C(t)$. При этом ограничимся во всех разложениях одним общим числом гармоник k, исходя из выбранной степени точности для самого трудно сходящегося разложения.

После этого уравнение переноса тепла в вертикальном направлении записывается Колесниковым в виде

$$\frac{\partial\vartheta}{\partial t} = \frac{A_z}{\delta}\frac{\partial^2\vartheta}{\partial z^2} + \frac{1-a}{c\delta}\beta\sum_{n=0}^{n=k}\left[M_n^J\cos\frac{2\pi nt}{T} + N_n^J\sin\frac{2\pi nt}{T}\right]e^{-\beta z}. \qquad (108)$$

Здесь a — альбедо водной поверхности для суммарной радиации, A_z — коэффициент турбулентного обмена по вертикали, M и N — коэффициенты ряда, n — индекс членов; остальные обозначения — обычные в термике моря. Условие на верхней границе, при $z = 0$, принимается в соответствии с балансом тепла на поверхности моря

$$-cA_z\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial z}\right)_{z=0} = \alpha_0\left[\sum_{n=0}^{n=k}\left(M_n\cos 2\pi n\frac{t}{T} + N_n\sin 2\pi n\frac{t}{T}\right)\right]. \qquad (109)$$

Пусть приток тепла от внешней *радиации* становится исчезающе малым на некоторой глубине $z = z_1$. Тогда там должен установиться постоянный градиент температуры γ, осредненный по всему периоду T:

$$\left[\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{T}\int_0^T\vartheta(t)\,dt\right)\right] = \gamma. \qquad (110)$$

В уравнении (109) приняты следующие обозначения: $\alpha_0 = \alpha + 4s\sigma\theta_0^3$; α_0 — суммарный коэффициент, характеризующий теплообмен конвекцией и излучением; α — коэффициент теплообмена конвекцией (в вертикальном направлении); σ — коэффициент излучения абсолютно черного тела; s — лучеиспускательная способность водной поверхности; θ_0 — значение *абсолютной* температуры воздуха, осредненное в промежутке времени T.

Пусть λ — теплота испарения (конденсации), p — переходный множитель для приведения измерений по испарителю к испарению с поверхности моря, p' — тот же множитель, определенный для конденсации. Тогда, при этих обозначениях, коэффициенты M_n и N_n в (109) выразятся следующим образом через коэффициенты при синусах и косинусах в рядах для температуры воздуха, эффективного излучения (измеренного пиргеометром), испарения и конденсации:

$$M_n = M_n^\vartheta - \frac{sM_n^R + \lambda pM_n^E - \lambda p'N_n^C}{\alpha_0},$$
$$N_n = N_n^\vartheta - \frac{sN_n^R + \lambda pN_n^E - \lambda p'N_n^C}{\alpha_0}. \qquad (111)$$

Считая колебания всех составляющих теплового баланса установившимися, Колесников ищет решение уравнения (109) в виде

$$\vartheta = U_0(z) + U_1(t)e^{-\beta z} = \sum_{n=1}^{n=k} V_n(z,t), \qquad (112)$$

причем здесь функция U_0 подчиняется уравнению

$$cA_z\frac{d^2U_0}{dz^2} + (1-\alpha)\beta M_0^J e^{-\beta z} = 0 \qquad (113)$$

с граничными условиями:
при $z = 0$

$$-cA_z\left(\frac{dU_0}{dz}\right)_{z=0} = \alpha_0\left[M_0^{\vartheta} - \frac{sM_0^R + \lambda pM_0^E - \lambda p'M_0^C}{\alpha_0} - U_0\right], \qquad (114)$$

при $z = z_1$

$$\left(\frac{dU_0}{dz}\right)_{z=z_1} = \gamma. \qquad (115)$$

В свою очередь функция U_1 удовлетворяет уравнению

$$\frac{A_z}{\delta}\beta^2 U_1 + \frac{\beta}{c\delta}(1-a)\sum_{n=1}^{n=k}\left[M_n^J\cos 2\pi n\frac{t}{T} + N_n^J\sin 2\pi n\frac{t}{T}\right] = \frac{dU_1}{dt}, \qquad (116)$$

а функция V_n — уравнению

$$\frac{A_z}{\delta}\frac{\partial^2 V_n}{\partial z^2} = \frac{\partial V_n}{\partial t} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots, k) \qquad (117)$$

при условиях на границе ($z = 0$)

$$-cA_z\frac{\partial}{\partial z}[U_1 e^{-\beta z} + V_n]_{z=0} =$$
$$= \alpha_0\left[M_n\cos 2\pi n\frac{t}{T} + N_n\sin 2\pi n\frac{t}{T} - V_n - U_1 e^{-\beta z}\right]. \qquad (118)$$

Объединение отдельных решений уравнений (113), (116) и (117) дает общее уравнение для распределения температур воды в море

$$\vartheta = \frac{1-\alpha}{cA_z}M_0^J\left[\frac{1}{\beta} - \frac{e^{-\beta z}}{\beta} + A_z\frac{c}{\alpha_0}\right] + \gamma\left(z + A_z\frac{c}{\alpha_0}\right) + M_0^{\vartheta} -$$
$$- \frac{sM_0^R + \lambda pM_0^E - \lambda p'M_0^C}{\alpha_0} - \frac{\beta}{c\delta}(1-a)\,e^{-\beta z}\times$$
$$\times\sum_{n=1}^{n=k}\sqrt{\frac{(M_n^J)^2 + (N_n^J)^2}{\left(A_z\frac{\beta^2}{\delta}\right)^2 + \left(\frac{2\pi n}{T}\right)^2}}\cos\left[2\pi n\frac{t}{T} + \operatorname{arctg}\frac{2\pi n\delta}{A_z\beta^2 T} - \operatorname{arctg}\frac{N_n^J}{M_n^J}\right] +$$
$$+\sum_{n=1}^{n=k}\eta_n\sqrt{(M_n^Q)^2 + (N_n^Q)^2}\,e^{-\sqrt{\frac{\pi n\delta'}{A_z T}}z}\cos\left[2\pi n\frac{t}{T} - \sqrt{\frac{\pi n\delta}{A_z T}}z - \varphi_n\right]. \qquad (119)$$

В этом весьма громоздком выражении введены сокращенные обозначения, за которыми кроются также весьма громоздкие формулы:

$$\eta = \sqrt{\frac{(\alpha_0/cA_z)^2}{\frac{2\pi n\delta}{A_z T} + \frac{2\alpha_0}{cA_z}\sqrt{\frac{\pi n\delta}{A_z T}} + \left(\frac{\alpha_0}{cA_z}\right)^2}},$$

$$M_n^Q = \frac{(1-a)\,A_z\beta^2\left(\frac{1}{\alpha_0} + \frac{1}{cA_z\beta}\right)P_n^J}{\delta\left[\left(A_z\frac{\beta^2}{\delta}\right)^2 + \left(\frac{2\pi n}{T}\right)^2\right]} + M_n,$$

$$N_n^Q = N_n - \frac{(1-a)\,A_z\beta^2\left(\frac{1}{\alpha_0} + \frac{1}{cA_z\beta}\right)Q_n^J}{\delta\left[\left(A_z\frac{\beta^2}{\delta}\right)^2 + \left(\frac{2\pi n}{T}\right)^2\right]}, \qquad (120)$$

$$P_n^J = M_n^J A_z \frac{\beta^2}{\delta} + N_n^J \frac{2\pi n}{T},$$

$$Q_n^J = M_n^J \frac{2\pi n}{T} - N_n^J A_z \frac{\beta^2}{\delta},$$

$$\varphi_n = \operatorname{arctg} \frac{1}{1 + \sqrt{\frac{\alpha_0^2 T}{c^2 A_z \pi \delta}}} + \operatorname{arctg} \frac{N_n^Q}{M_n^Q}.$$

Уравнение Колесникова (119) показывает, что распределение температур выражается стационарной частью U_0 и наложенной на нее нестационарной частью

$$U_1 e^{-\beta z} + \sum_{n=1}^{n=k} V_n.$$

Стационарная часть определяется средними за период T значениями составляющих теплового баланса моря. Нестационарная, вообще говоря, описывается суммой k гармонических составляющих, которые колеблются соответственно с теми же периодами, но со сложно выражаемыми амплитудами и сдвигами фаз. Разумеется, и амплитуды, и сдвиги фаз зависят от всех составляющих теплового баланса.

Из общего уравнения (119) вытекает искомое уравнение, выражающее суточный ход *поверхностной* температуры моря:

$$\vartheta_0 = \frac{1}{\alpha_0}\left[(1-a)\,M_0^J + cA_z\gamma + \alpha_0 M_0^\Phi - sM_0^R - \lambda p M_0^E - \lambda_p' M_0^C\right] +$$

$$+ \sum_{n=1}^{n=k} \left\{ \eta_n^2 \left[(M_n^Q)^2 + (N_n^Q)^2\right] + \left[\frac{(1-a)\,\beta}{c\delta}\right]^2 \frac{(M_n^J)^2 + (N_n^J)^2}{\left(A_z \frac{\beta^2}{\delta}\right)^2 + \left(\frac{2\pi n}{T}\right)^2} \right\} +$$

$$+ \frac{2\beta(1-a)\,\eta_n^2}{c\delta\left[\left(A_z \frac{\beta^2}{\delta}\right)^2 + \left(\frac{2\pi n}{T}\right)^2\right]} \left\{ \left[M_n^Q \frac{q_n}{\alpha_0} + N_n^Q \left(1 + \frac{q_n}{\alpha_0}\right) \right] Q_n^J - \right.$$

$$\left. - \left[M_n^Q \left(1 + \frac{q_n}{\alpha_0}\right) - N_n^Q \frac{q_n}{\alpha_0} \right] P_n^J \right\}^{1/2} \cos\left(2\pi n \frac{t}{T} - \psi_n\right), \qquad (121)$$

$$q_n = cA_z \sqrt{\frac{\pi n \delta}{A_z T}},$$

$$\psi_n = \operatorname{arctg} \frac{\eta_n^2 \left[M_n^Q \frac{q_n}{\alpha_0} + N_n^Q \left(1 + \frac{q_0}{\alpha_0}\right) \right] \left[\left(A_z \frac{\beta^2}{\delta}\right)^2 + \left(\frac{2\pi n}{T}\right)^2\right] + (1-a)\frac{\beta}{c\delta} Q_n^J}{\eta_n^2 \left[M_n^Q \left(1 + \frac{q_n}{\alpha_0}\right) - N_n^Q \frac{q_n}{\alpha_0} \right] \left[\left(A_z \frac{\beta^2}{\delta}\right)^2 + \left(\frac{2\pi n}{T}\right)^2\right] - (1-a)\frac{\beta}{c\delta} P_n^J}. \qquad (122)$$

Выражение (121) показывает, что амплитуда колебаний поверхностной температуры моря возрастает вместе с ростом притока суммарной (прямой и рассеянной) солнечной радиации, амплитуды температуры воздуха, конденсации, прозрачности моря для тепловой радиации; амплитуда колебаний поверхностной температуры моря уменьшается с увеличением эффективного излучения, испарения, коэффициента турбулентного обмена и скорости ветра. Так же ведет себя и сдвиг фаз, выражаемый уравнением (122).

Изложенная теория Колесникова проверялась в природной обстановке Трофимовой. Температуры поверхностной воды, вычисленные по форму-

лам Колесникова, хорошо совпадали с результатами непосредственных измерений. Следовательно, по этим формулам можно с успехом вычислять суточный ход поверхностных температур моря по заданному ходу всех составляющих теплового баланса. Для облегчения и ускорения вычислений нетрудно будет на практике приготовить соответствующие вспомогательные таблицы и графики, а также механизировать процесс вычислений.

В будущем необходимо создать аналогичную методику вычисления хода температур на различных глубинах и — в конечном итоге — методику вычисления *годового хода* температур воды также на различных глубинах. За основу придется принять прогнозируемые метеорологические элементы.

Как будет показано в следующей главе, долгосрочные прогнозы этих элементов, в свою очередь, связаны с теорией взаимодействий океана, атмосферы и материков. Следовательно, одновременные работы по физике моря и физике атмосферы должны развиваться и совершенствоваться как неразрывная цепь исследований, направленных к единой цели. В 1945 г. Г. Свердруп писал [55]: «Естественно прийти к заключению, что нельзя порознь изучать атмосферу и океан, а необходимо исследовать всю систему атмосфера — океан. Это обстоятельство известно океанографам, которые никогда не пренебрегают исследованиями атмосферы; но метеорологи еще недостаточно считаются с этим». Вполне соглашаясь с Г. Свердрупом во взгляде на совместное изучение системы океан — атмосфера, надо все же дополнить его фразу утверждением: к сожалению, не только метеорологи, но и океанографы до настоящего времени еще не полностью оценили безусловную необходимость *неразрывных* исследований по физике океана и физике атмосферы, вплоть до самых высоких ее слоев.

ГЛАВА ПЯТАЯ

О ФИЗИЧЕСКИХ КОРНЯХ КЛИМАТА И ПОГОДЫ

§ 1. Некоторые общие соображения

Тепловые явления в море, с которыми мы познакомились в гл. IV, представляют не только специальный интерес, связанный именно с этой областью физики моря: ведь легко видеть, что все градиентные и конвекционные течения, о которых была речь выше (см. гл. I), также должны находиться под непосредственным влиянием *тепловых* факторов. С философских позиций диалектического материализма мы должны ожидать здесь проявления связи *всего со всем*. И эту связь действительно на каждом шагу вскрывает физика. Особенно ярко проявляется эта всеобщая связь при *совместном*, *одновременном* изучении как явлений, протекающих в океане, так и явлений, разыгрывающихся в *атмосфере*. Такое одновременное изучение обеих подвижных оболочек земного шара прежде всего вскрывает *взаимную* связь между *водными* и *воздушными потоками*: с одной стороны, указывает, в каких районах можно ожидать те или иные дрейфовые течения под действием тех или иных типичных ветров; с другой стороны, отмечает, в каких районах следует ожидать наличия того или иного ветрового режима, обусловленного теми или иными *тепловыми противоречиями между морем* (с его теплыми и холодными течениями) и *материками*, как двумя совершенно разнородными подстилающими поверхностями для атмосферы. Но ведь тот же ветровой режим определяет собой не только дрейф океанических вод, но и *волнение*. В свою очередь волнение, равно как и поступательное движение водных масс, всецело определяет *турбулентные* процессы, вызывающие то или иное распределение температур воды по вертикали.

Вот почему современная физика моря игнорирует ту искусственную перегородку, которая, к сожалению, сохранилась еще между *гидрологией* и *метеорологией* в описательной науке. Вместо этой ненужной и вредной перегородки физика строит *мост* между обеими родственными областями точного знания.

В основу такого моста легли принципы термодинамики и гидромеханики, управляющие движением водных и воздушных масс под действием одного и того же потока энергии — потока тепловой энергии солнечных лучей, *неравномерно* нагревающих различные широтные зоны земного шара и *столь же неравномерно* нагревающих атмосферу над океаном и над материками. С точки зрения термодинамики мы вправе рассматривать атмосферу и гидросферу как *тепловые машины*, работающие между нагревателем и холодильником. В частности, в тропосфере легко подметить *два* рода таких тепловых машин.

С одной стороны, в качестве нагревателя работают тропические пояса Земли, где приход солнечной энергии резко преобладает над обратным лучеиспусканием в межпланетное пространство; в «машинах первого рода»

в качестве холодильников работают высокоширотные пояса Земли, где обратное лучеиспускание резко преобладает над приходом солнечного лучистого тепла. С другой стороны, мощными местными нагревателями служат в холодное время года различные области поверхности океана (с внутренними морями в том числе), особенно же области, охваченные теплыми течениями; холодильниками в «машинах второго рода» являются в холодное время года материки.

В большинстве случаев нагреватели и холодильники машин второго рода *меняются местами в теплое время года*. Исключение составляют Антарктида и Гренландия, покрытые ледниковым щитом и круглый год являющиеся холодильниками.

Вдобавок к описанным двум родам «тепловых машин» Шулейкину удалось обнаружить еще машины третьего рода, которые уходят своими физическими корнями в *стратосферу* и которые связаны с тепловыми противоречиями между океаном и материком совсем иначе, чем машины второго рода. О них будет речь ниже (см. § 14).

Нетрудно видеть, что работа машин первого рода проявляется в *зональной* и отчасти в межзональной циркуляции тропосферы, а работа машин второго рода — в *муссонной* циркуляции. Ниже мы увидим, что на муссонную циркуляцию также оказывают влияние (отчасти) машины третьего рода. Для полноты надо добавить, что в стратосфере работают еще тепловые машины четвертого рода, которые вызывают там зональную циркуляцию в направлении, противоположном тропосферной зональной циркуляции,— с востока на запад. Для них нагревателями служат высокоширотные зоны стратосферы, а холодильниками — тропические: на одной и той же высоте стратосфера в тропиках холодней, чем в Арктике и в Антарктике, за счет различия в лучистом балансе энергии.

Общий режим работы тепловых машин всех *четырех* родов описывается нами как *климат* — морской или материковый, со всеми бесчисленными переходными оттенками между этими двумя крайностями.

Нарушения установившегося общего режима в природе, как правило, приводят к возникновению *колебаний*. В системе, непосредственно нас интересующей, колебания также неизбежны. Они описываются как *изменения погоды*.

Разумеется, *устойчивость* режима, или склонность его к тем или иным колебаниям, служат дополнительными климатологическими характеристиками района. Разумеется также, что во всех тепловых процессах, протекающих в атмосфере, громадную роль играет *водяной пар*. Однако на тех этапах анализа работы «машин», которые предложены вниманию читателя в настоящей части, придется отвлечься от учета колебаний влажности воздуха со всеми вытекающими отсюда последствиями. Есть основания думать, что последствия эти не отразятся на главных количественных характеристиках изучаемых систем, не выведут их из пределов возможной точности самого анализа.

Следует отметить, что роль машин второго рода недооценивается еще очень многими исследователями. Вот почему будет не бесполезным остановиться на рассмотрении карты климатологических изобар для июля, воспроизведенной на рис. 287 по данным широко распространенной метеорологической литературы. Совершенно очевидно, что изобары опоясывали бы земной шар правильными кругами параллелей, если бы работали только машины первого рода. В действительности, как видим, на карте полушарий заметны лишь некоторые *следы* от этой простой системы изобар в узкой полосе между 40 и 60° ю. ш.,— и то только потому, что Антарктический материк очерчен почти симметрично относительно Южного полюса. Особенно сильно сказалась работа машин *второго* рода в *северном* полушарии с его большими материками: глубокий минимум давления над северной

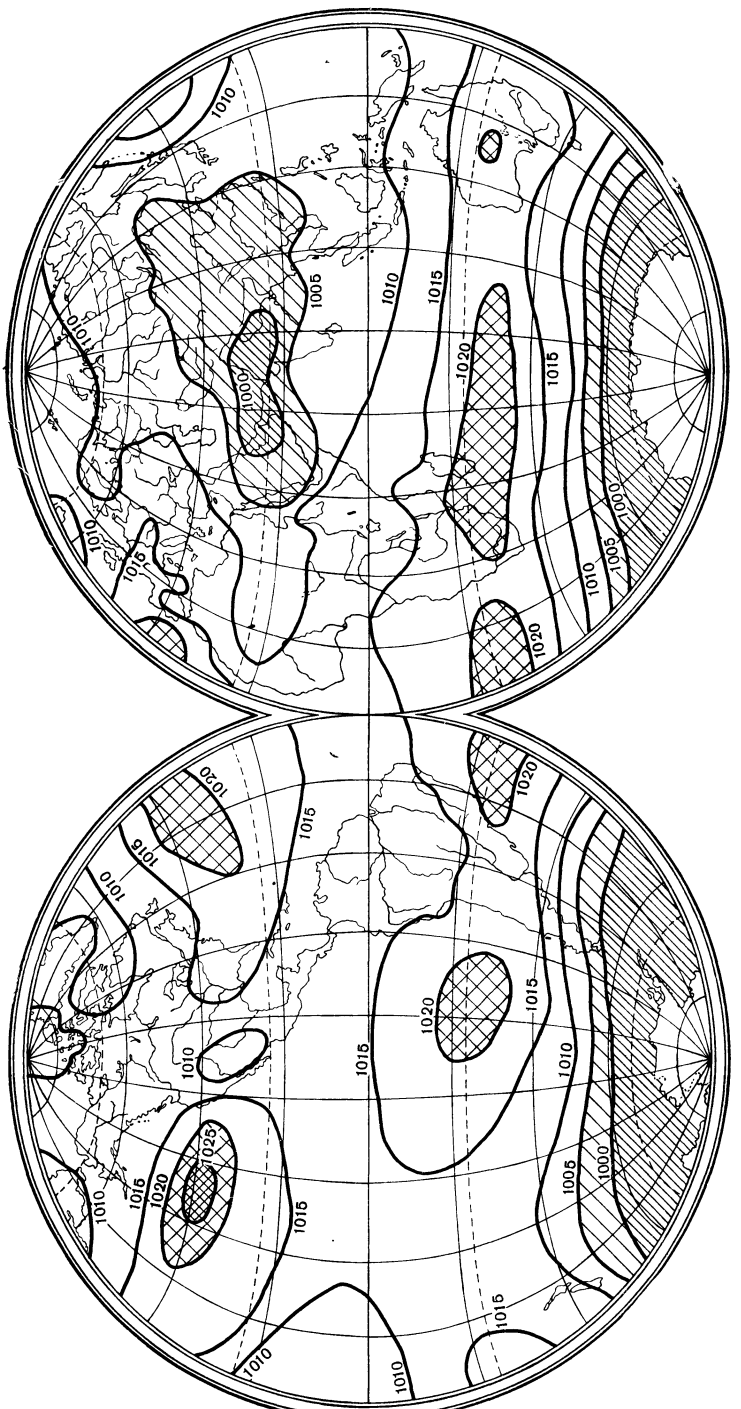


Рис. 287. Изобары для июля

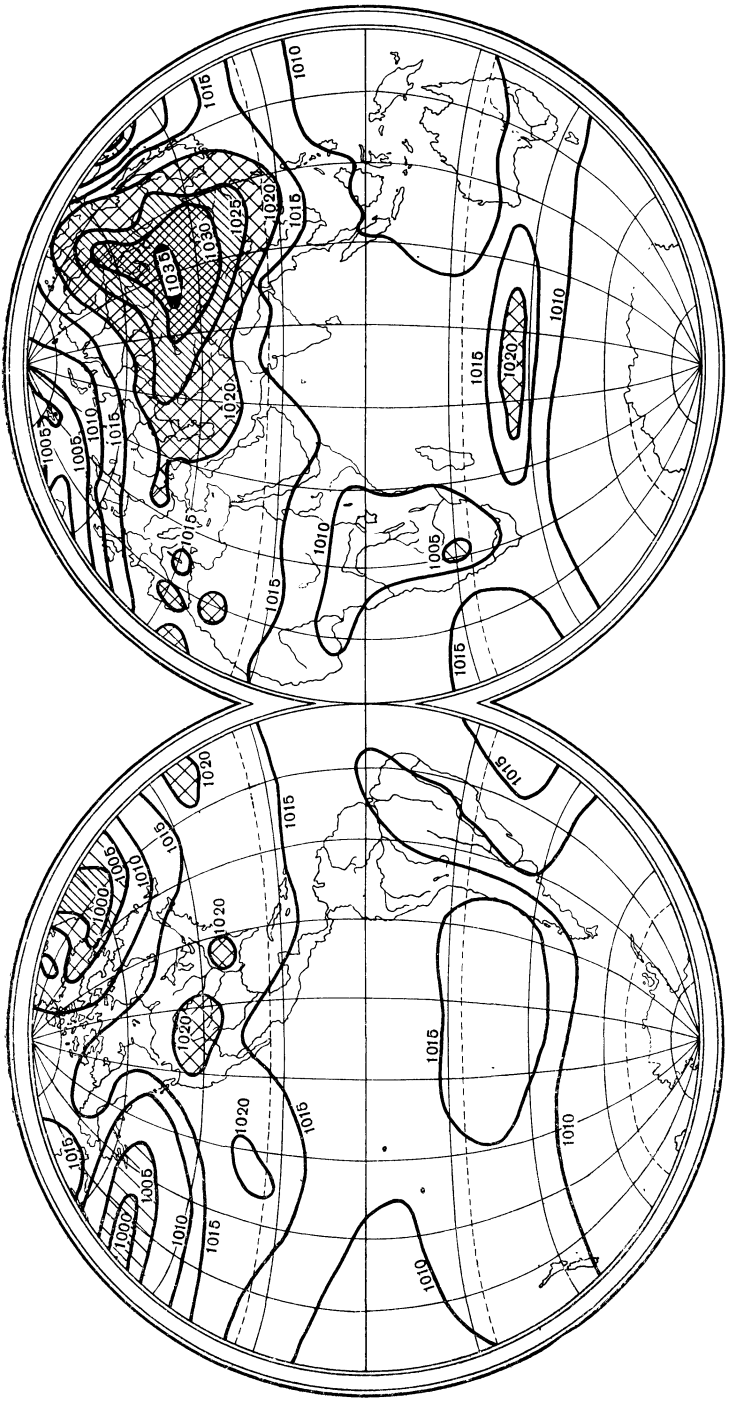


Рис. 288. Изобары для января

частью Индостана и два максимума над океанами (Атлантическим и Тихим) свидетельствуют о мощном развитии *летнего муссона*.

Нечего и говорить о еще более резких проявлениях *зимнего* муссона, наблюдающихся в северном полушарии в холодное время года. Для наглядности на рис. 288 воспроизведена карта климатологических изобар для января. На ней виден чрезвычайно резко выраженный максимум атмосферного давления в середине Азиатского материка и два столь же резко выраженных минимума атмосферного давления над северными частями Атлантического и Тихого океанов.

В современной климатологии и современной синоптике очень заметно сказывается недооценка столь важного фактора, как *перенос тепла* воздушными потоками в атмосфере. Вот почему, вопреки установившимся обычаям, мы займемся *прежде всего* исследованиями этих тепловых потоков.

Но каков сам механизм переноса тепла в атмосфере? Нетрудно видеть, что он может оказаться *двояким*:

а) либо тепло переносится вдоль какого-то направления за счет существования двух воздушных потоков, противоположно направленных и обладающих неодинаковыми средними температурами; направление теплового потока и его дебит определяются в данном случае тепловым балансом сечения, выделенного перпендикулярно к направлению воздушных потоков;

б) либо тепло передается в направлении, нормальном к линиям тока воздуха за счет *турбулентного обмена* массами.

В данном случае количество переносимого тепла связано с так называемым коэффициентом перемешивания в турбулентном потоке. Еще в 1921 г. А. Дефант попытался исследовать перенос тепла вдоль меридианов за счет этого второго эффекта [1]. Он ограничился теми зонами (внеэкваториальными), где ярко выражено движение воздушных масс *вдоль параллелей*, меридиональные же составляющие скоростей выражены значительно слабее.

Несколько позднее А. Онгстрем охватил аналогичным исследованием перенос тепла вдоль меридианов — на всем протяжении от экватора до полюсов [2]. Как увидим ниже, выкладки Онгстрема очень хорошо совпали с результатами непосредственных измерений температур воздуха в различных зонах земного шара, осредненными по каждой параллели.

Но, как известно, характер движения воздуха в тропиках резко отличается от внетропического: по обе стороны экватора четко выражены пассаты в нижних и антипассаты в более высоких слоях воздуха. Пассаты несут к экватору воздух, обладающий меньшей потенциальной температурой, чем воздух, уносимый прочь от экватора антипассатами. Следовательно, в тропической зоне *заведомо* существует перенос тепла вдоль меридиана по схеме а), отмеченной нами выше. Перенос тепла по такой схеме здесь, несомненно, преобладает над переносом тепла по схеме б), если даже последний существует в тропической зоне. Столь же несомненно, что во внетропических зонах перенос тепла по схеме б) может оказаться преобладающим над переносом тепла по схеме а).

Чем же объясняется в таком случае удача Онгстрема, не делающего различия между зонами тропической и внетропической и получившего теоретически очень хорошее распределение температур вдоль *всего* меридиана?

Объясняется эта удача тем, что Онгстрем очень хорошо угадал правильную *формальную* сторону процесса переноса тепла вдоль меридиана.

Действительно, ведь и при переносе тепла по схеме а), и при процессе, идущем по схеме б), количество тепла, проходящего в единицу времени вдоль меридиана над каждым погонным сантиметром параллели, оказывается пропорциональным *одной и той* же чрезвычайно важной физической величине — *градиенту температуры* (осредненной по параллели)

вдоль меридиана. И в первом и во втором случаях эта величина множится на некоторый *условный* коэффициент *теплопроводности*, происхождение которого и физический смысл, разумеется, зависят от схемы явления: от того, будет ли процесс идти по схеме а) или же по схеме б).

Второе счастливое обстоятельство, которое необходимо отметить в работе Онгстрема, заключается в том, что *порядок* величины формального коэффициента «теплопроводности» в обоих случаях остается одним и тем же. Есть даже некоторые основания думать, что расхождение между этими величинами вообще совсем невелико и не выходит за пределы погрешностей, неизбежных при оперировании со статистическими, осредненными величинами.

Вот почему мы не уклонимся далеко от истины, если вместе с Онгстремом проследим за тепловыми потоками *вдоль меридианов* и, сопоставив теорию с результатами наблюдений, вычислим *условный* коэффициент теплопроводности атмосферы.

Вообразим некоторую полосу, протянувшуюся вдоль круга параллели на широте φ° (С). Пусть температурный градиент в направлении, перпендикулярном к ней, равняется $\frac{\partial\vartheta}{\partial\varphi}\frac{1}{R}$ (здесь R — радиус Земли), а коэффициент турбулентной теплопроводности атмосферы (для потока тепла в том же направлении) равен A. Ширина полосы пусть равняется $d\varphi$. Тогда количество тепла, проходящего над южной границей полосы по направлению к северу, выразится соотношением

$$Q_1 = -AH2\pi R\cos\varphi\frac{1}{R}\frac{d\vartheta}{d\varphi} = -AH2\pi\cos\varphi\frac{d\vartheta}{d\varphi}. \tag{1}$$

Здесь H — *высота* слоя воздуха, который участвует в переносе тепла вдоль меридиана, причем предполагается, что тепловой поток сквозь поверхность $2\pi RH\cdot\cos\varphi$ совершенно равномерный или, во всяком случае, что он может быть охарактеризован некоторым средним значением A.

Если мы примем этот коэффициент A *вообще* постоянным на всем земном шаре, то для потока тепла в том же, северном направлении, сквозь *северную* границу полоски $d\varphi$, найдем выражение, аналогичное формуле (1):

$$Q_2 = -AH2\pi\cos(\varphi+d\varphi)\left[\frac{d\vartheta}{d\varphi}+\frac{d^2\vartheta}{d\varphi^2}d\varphi\right]. \tag{2}$$

Разность между Q_1 и Q_2 должна либо израсходоваться полоской в межпланетное пространство (если она окажется положительной), либо она должна быть восполнена солнечной энергией, падающей на полоску $d\varphi$.

Вообще говоря, на основании (1) и (2) разность эта найдется чрезвычайно просто, если мы примем во внимание, что

$$\cos(\varphi+d\varphi) = \cos\varphi - \sin\varphi\,d\varphi.$$

Она выразится так:

$$Q = Q_1 - Q_2 = 2\pi AH\left(\frac{d^2\vartheta}{d\varphi^2}\cos\varphi - \sin\varphi\frac{d\vartheta}{d\varphi}\right)d\varphi. \tag{3}$$

Будем считать энергию, расходуемую в межпланетное пространство, отрицательной, а энергию, поступающую от Солнца, положительной величиной, понимая под словами «расходуемая» и «поступающая» избыточные величины, остающиеся после алгебраического сложения положительной и отрицательной радиации. Введя такое условие, мы можем рассматривать этот положительный или отрицательный избыток энергии как *одну* функцию, непрерывно меняющуюся в зависимости от аргумента φ.

Совершенно очевидно, что $F(\varphi)$ должна всегда равняться количеству тепла $Q_1 - Q_2 = Q$, отнесенному к единице площади полоски, т. е. величи-

не Q, деленной на $2\pi R^2 \cos\varphi\, d\varphi$:

$$F(\varphi) = -\frac{AH}{R^2}\left(\frac{d^2\vartheta}{d\varphi^2} - \frac{d\vartheta}{d\varphi}\operatorname{tg}\varphi\right). \tag{4}$$

Знак *минус* появился потому, что положительной величине Q по смыслу соответствует отрицательная величина $F(\varphi)$.

Полученное дифференциальное уравнение, которое можно представить в более удобной форме

$$\frac{d^2\vartheta}{d\varphi^2} - \operatorname{tg}\varphi\frac{d\vartheta}{d\varphi} = -\frac{R^2}{AH}F(\varphi), \tag{5}$$

может быть проинтегрировано, если окажется, что $F(\varphi)$ представляет собой не слишком сложную функцию широты.

Об истинном виде функции $F(\varphi)$ пока еще судить рано по причинам, о которых не раз уже упоминалось: еще недостаточно хорошо известно, сколько тепла поступает на поверхность моря в различных зонах океана, недостаточно хорошо известно количество тепла, расходуемого океаном на испарение и теплообмен с атмосферой и обратную радиацию (также на различных широтах).

Онгстрем на основании не слишком обильного материала, имевшегося под рукой, пришел к заключению, что функция $F(\varphi)$ грубо приближенно может быть представлена в форме

$$F(\varphi) = m + n\cos^2\varphi, \tag{6}$$

где $m = -8\cdot10^4$ и $n = 12\cdot10^4$ — некоторые чисто эмпирические постоянные.

Но если это так, то дифференциальное уравнение (5) приобретает вполне определенный вид

$$\frac{d^2\vartheta}{d\varphi^2} - \operatorname{tg}\varphi\frac{d\vartheta}{d\varphi} = -\frac{R^2}{AH}(m + n\cos^2\varphi). \tag{7}$$

Интеграл этого уравнения может быть представлен в весьма простой форме, именно

$$\vartheta = M - \frac{a}{4}\sin^2\varphi. \tag{8}$$

Здесь M — неопределенная постоянная интегрирования. Напротив, a тесно связано с величинами m [см. формулу (6)], R, A, H:

$$a = \frac{mR^2}{AH}. \tag{9}$$

Чрезвычайно любопытно, что закон распределения температур на поверхности земного шара, характеризуемый теоретической формулой (8) Онгстрема, хорошо совпадает с эмпирическим законом, который был найден из наблюдений, если не считать, что там внесен в аргумент тригонометрической функции небольшой дополнительный член, характеризующий некоторое понижение температуры на экваторе по сравнению с тропическими зонами (максимальная температура наблюдается в действительности на широтах 6°,5 С и 6°,5 Ю):

$$\vartheta = 27°{,}1 - 44°{,}9\sin^2(\varphi - 6°{,}5). \tag{10}$$

Эта зависимость изображена на рис. 289.

Не обращая внимания на дополнительный член — 6°,5, можно считать, сопоставляя формулы (8) и (10), что

$$M = 27°{,}1, \tag{11}$$

$$\frac{a}{4} = 44°{,}9. \tag{12}$$

Но тогда, подставляя в (9) числовые значения величин m, R и H (в частности, полагая, что $H = 4 \cdot 10^5$ *см*) и сопоставляя результат с числовым значением m, заимствованным из эмпирической формулы, нетрудно получить числовое значение A:

$$A = 1{,}27 \cdot 10^7. \tag{13}$$

Это числовое значение A, вытекающее из работы [2], хорошо совпадает по своему порядку с тем, которое было в свое время найдено при исследованиях внетропической циркуляции атмосферы.

Если бы мы воспользовались числовым значением AH, полученным Онгстремом по только что изложенному методу для определения количества тепла, переносимого вдоль меридиана системой пассаты — антипассаты, то пришли бы к выводу, что при значениях температурного градиента, существующих в области пассатов, тепловой поток составляет 10^{11} калорий в месяц над каждым погонным сантиметром круга параллели. Но ведь тот же тепловой дебит легко вычислить, зная вертикальное распределение скоростей и температур в зоне пассатов.

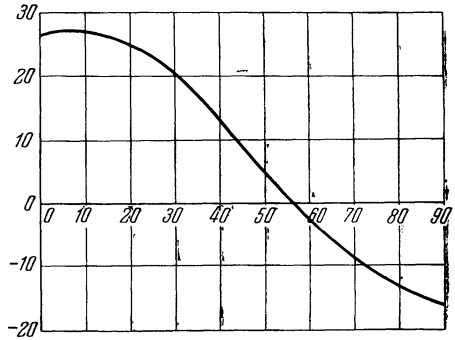


Рис. 289. Распределение температур вдоль меридиана (по А. Онгстрему)

Выполнив соответствующие простые вычисления, мы придем все к той же цифре 10^{11} калорий в месяц над каждым погонным сантиметром параллели. Стало быть, действительно описанный формальный метод очень хорошо рисует количественную сторону процесса «теплопроводности» вдоль меридиана даже в тропической зоне, где процесс весьма отличен от турбулентной теплопроводности, исследованной в областях внетропических.

В дальнейшем будет показано, что совпадение результатов вычислений по двум различным методам — не случайное, и будет выяснен физический смысл этого совпадения. Что касается самих числовых значений A и AH, то в настоящее время они уточнены, о чем также будет речь.

§ 2. Опыт приближенного расчета тепловых потоков с океана на материк

Итак, онгстремовский прием можно считать вполне оправданным даже в той области земного шара, где градиент осредненной температуры воздействует на перенос тепла лишь через длинную цепь промежуточных звеньев: нарастание температур приводит к нарастанию градиентов давления, а последнее — к нарастанию меридиональных слагающих пассатов и т. д.

Возникает естественный соблазн: воспользоваться тем же статистическим приемом для выяснения (с количественной стороны) *влияния океана на климат материков* и для вычисления *тепловых потоков с океана на материки* (или в обратном направлении в зависимости от сезона и от местных условий).

Проследим здесь по этапам за тем анализом, который в этой области произвел В. В. Шулейкин [3].

Прежде всего напомним, что в задаче Онгстрема температуры воздуха всюду были *осреднены по параллели*; никакого учета влияния моря на климат материков при этом не существовало и не могло существовать. А между тем

потоки, направленные с моря на материк, могут во многих районах играть роль даже *бо́льшую*, чем онгстремовские потоки (вдоль меридиана). Действительно, именно тепло, приносимое с Атлантики, создает громадные неравенства температур между точками, лежащими на одной и той же широте. И эта разность температур далеко превосходит ту, которая существует между точками, лежащими на одном меридиане, но одна на крайнем севере, а другая на крайнем юге нашей страны. Для сравнения достаточно лишь указать, что средняя температура января в Ялте только на 14° превышает среднюю температуру января в Мурманске, несмотря на то, что широта последнего почти на 25° выше широты Ялты.

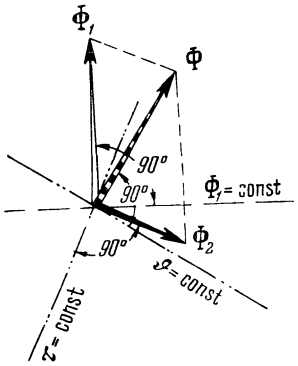


Рис. 290. Разложение тепловых потоков

а) *Разложение градиентов. Физический смысл изаномал.* Числовой пример, только что приведенный, достаточно отчетливо показывает, что тепловые потоки с океана могут играть во всяком случае не меньшую роль, чем тепловые потоки, идущие от низкоширотных поясов Земли к высокоширотным.

Но как же найти числовые характеристики этих потоков? Как определить количество калорий, проносящихся над каждой единицей длины береговой черты в единицу времени?

Легко показать, что путь к этим важным определениям проходит через *карту изотерм*. Действительно, допустим, что в области некоторой точки (рис. 290) в тропосфере проходят два тепловых потока: один из них проносит в единицу времени Φ_1 калорий вдоль меридиана через мысленно выделенные «входные ворота», опирающиеся на 1 *пог. см* и простирающиеся вверх до тех слоев атмосферы, которые практически еще принимают участие в переносе тепла (пусть высота такого деятельного слоя тропосферы будет равна H *см*; в дальнейшем эта величина будет элиминирована).

Другой тепловой поток Φ_2 может быть направлен под каким угодно углом к первому (лишь бы он струился вдоль поверхности земного шара); в частности, он может проходить вдоль круга параллели. «Входные ворота» для потока Φ_2 мы выберем на том же основании, как и для первого потока, причем запомним, что плоскость этих «ворот» будет перпендикулярна к Φ_2.

В нашей задаче нет надобности учитывать резко выраженную анизотропию атмосферы в отношении теплопередачи в вертикальном направлении, по сравнению с теплопередачей в горизонтальных направлениях. Что касается самих горизонтальных направлений, то и там, строго говоря, существует анизотропия: с запада на восток тепло переносится с океана на материки не только муссонными потоками, но и потоками *зональными*; во всех иных направлениях океаническое тепло вносится на материки только муссонными потоками. Теплопередача в направлениях, перпендикулярных к воздушным потокам (за счет турбулентного обмена), также осложняется благодаря наличию двух родов основных потоков в атмосфере. Однако было бы бесполезным пытаться решать задачу о переносе тепла с океана на материки сразу во всей полноте и строгости: она слишком сложна для этого.

Можно и нужно решать ее путем последовательных приближений. В первом приближении будем считать атмосферу изотропной в отношении теплопроводности по всем направлениям вдоль поверхности земного шара. Тогда для характеристики турбулентной теплопроводности можно будет ввести один универсальный коэффициент перемешивания A, одинаково применимый для исследования обоих тепловых потоков — Φ_1 и Φ_2.

Именно, рассматривая изменения температуры ϑ по направлению соответствующего потока, вызванные каждым потоком в отдельности, можно считать, что

$$\Phi_1 = AH \operatorname{grad}_1 \vartheta \tag{14}$$

и аналогично

$$\Phi_2 = AH \operatorname{grad}_2 \vartheta. \tag{15}$$

При наложении одного потока на другой они могут быть сложены геометрически, как всякие векторы:

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 = AH [\operatorname{grad}_1 \vartheta + \operatorname{grad}_2 \vartheta], \tag{16}$$

причем сумма градиентов также может быть заменена некоторым равнодействующим вектором

$$\operatorname{grad}_1 \vartheta + \operatorname{grad}_2 \vartheta = \operatorname{grad} \vartheta, \tag{17}$$

после чего окажется, что

$$\Phi = AH \operatorname{grad} \vartheta. \tag{18}$$

В дальнейшем, в связи с намеченной задачей, нам придется выполнять обратную операцию: искать неизвестный поток Φ_2 по заданному суммарному потоку Φ и по одному из слагаемых Φ_1. Но и эта обратная операция также легко может быть сведена к действию над градиентами температуры; сами же градиенты в свою очередь без труда находятся из обильного материала, взятого из наблюдений.

Ведь совершенно очевидно, что суммарный градиент $\operatorname{grad} \vartheta$ определяется прямо по карте изотерм, составленной либо по средним за месяц (если за единицу времени принимается месяц), либо по средним за год (если определяется поток, отнесенный к году); расстояние между изотермами позволяет судить об абсолютной величине градиента, а нормаль к изотермам дает направление вектора. В настоящей работе Шулейкин пользовался картами изотерм, составленными Главной геофизической обсерваторией по материалам тридцатилетних наблюдений [4].

Что касается градиента ($\operatorname{grad}_1 \vartheta$), характеризующего поток вдоль меридиана, то будем считать его равным градиенту температур, осредненных по параллели. Другими словами, будем полагать, что поток Φ_1 тождествен с тем, который был исследован Онгстремом в его работе [2] и который направляется от экватора к полюсам под действием неодинакового теплового режима на различных широтах. Как было уже упомянуто, во всех точках одной и той же параллели, по Онгстрему, этот поток должен быть одинаков, поскольку вдоль всего круга параллели температуру и ее градиент мы считаем постоянными, осредненными для данной широты. Сами значения осредненных по широте температур — средних месячных для того или иного месяца и средних годовых — мы заимствовали из сводки, составленной Л. Горчинским [5].

Остается, следовательно, по суммарному градиенту $\operatorname{grad} \vartheta$ и по одному из слагаемых — $\operatorname{grad}_1 \vartheta$ — определить второе слагаемое — $\operatorname{grad}_2 \vartheta$. Проще всего эту операцию можно выполнить смешанным графоаналитическим способом, сущность которого чрезвычайно проста.

На минуту забудем о существовании потока Φ_2 и градиента, связанного с ним. В таком случае мы должны будем положить, что во всех точках, лежащих на какой-либо одной параллели, температура (средняя за месяц или за год) будет одна и та же, причем именно та, которую приводит Горчинский в своей сводке.

Посмотрим теперь, каковы действительные средние температуры (месячные, годичные) в различных точках той или иной параллели, насколько будут они отличаться от осредненных цифр Горчинского. Подобное исследо-

вание даст нам возможность определить величины *аномалий* температуры в различных точках земного шара, исходя из предположения, что цифры Горчинского являются *нормальными* для каждой заданной широты. Наконец, соединив плавными линиями точки с одинаковыми аномалиями, мы получим семейство *изаномал*, которые, как нетрудно видеть, будут характеризовать именно *поле* забытого нами вектора Φ_2 совершенно так же, как осредненные изотермы Горчинского характеризуют поле онгстремовского вектора Φ_1, а изотермы действительных температур Геофизической обсерватории — поле суммарного вектора Ф. Вот каков физический смысл изаномал, часто приводимых в климатологических атласах с иллюстративными целями. Но следует отметить, что приводятся только изаномалы двух месяцев-антиподов — января и июля и что обычно они проводятся через интервалы 5° и строятся по устаревшим данным.

Вот почему Шулейкину пришлось совершенно заново построить 13 карт изаномал, проведенных через интервал в 1° для всех месяцев и для года в целом, по новым источникам, о которых выше упоминалось. Построение производилось объективным способом, устраняющим возможность какого бы то ни было тенденциозного проведения кривых. На масштабной линейке, прикладываемой к меридианам, наносились не градусы широты, а «нормальные» температуры, по Горчинскому, для соответствующей параллели (следовательно, таких линеек было построено 13). Линейка постепенно перемещалась по соответствующей карте из атласа Главной геофизической обсерватории с таким расчетом, чтобы она всегда была направлена по меридиану и чтобы соответствующие точки скользили по параллелям. При таком движении наступали моменты, когда та или иная точка линейки с написанной при ней температурой совпадала с одноименной изотермой атласа. Это значило, что в данной точке земного шара аномалия температуры равна нулю. Геометрическое место таких точек дало одну из изаномал — нулевую.

Таким же образом легко было отметить на изотермах точки, где действительная температура на то или иное целое число градусов отличалась от цифр, нанесенных на линейке. Одноименные точки снова соединялись плавными кривыми — изаномалами, причем, как обычно, цифрам, проставленным при каждой такой изаномале, присваивались соответственно знаки *плюс* (когда действительная температура оказывалась выше «нормальной») и *минус* (когда она оказывалась ниже нормы). Необходимо напомнить, что сама «норма» является понятием условным: она является следствием взаимодействий океана, материков и атмосферы над ними. Эти взаимодействия приводят к той или иной температуре, осредненной по параллели. Следовательно, нулевое значение аномалии температур, в принятом смысле слова, также является условным нулем для отсчета всех остальных значений температурной аномалии. В дальнейшем (см. стр. 522) мы введем в исследование понятие истинной, или абсолютной, аномалии температур воздуха. За нуль для ее отсчета будет взята та температура, которую принял бы наземный воздух в исследуемой точке нашей планеты, если бы Земля лишилась океана.

б) *Общий анализ карт изаномал.* Как видим, действительную картину, характеризуемую изотермами, можно представить себе как результат некоторого наложения двух картин: одной, обусловленной тепловыми потоками от экватора к полюсам, и другой (совершенно иного происхождения), обусловленной тепловыми потоками, родившимися благодаря взаимодействию моря и суши. Вот эту вторую картину рисуют во всей полноте полученные карты изаномал (рис. 291—303). Будто какая-то маска снимается с протокольных карт изотерм; расшифрованным оказывается тот физический смысл, который скрывался в их изгибах.

Действительно, проанализируем каждую из прилагаемых карт и проследим, как меняются в течение года расположение и очертание изаномал.

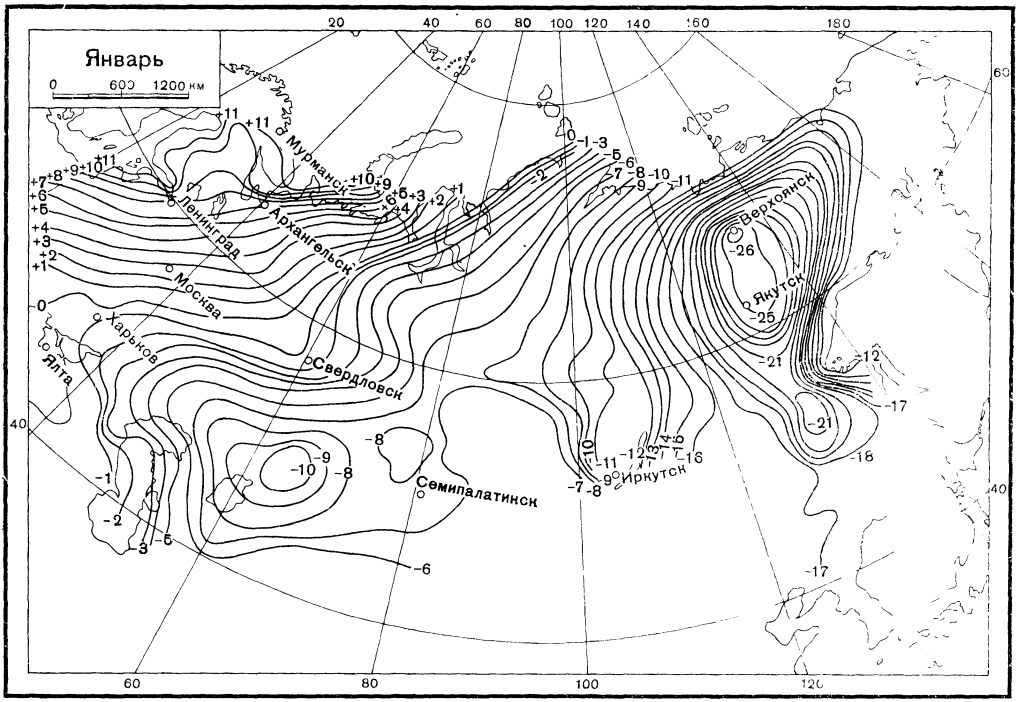


Рис. 291. Изаномалы для января

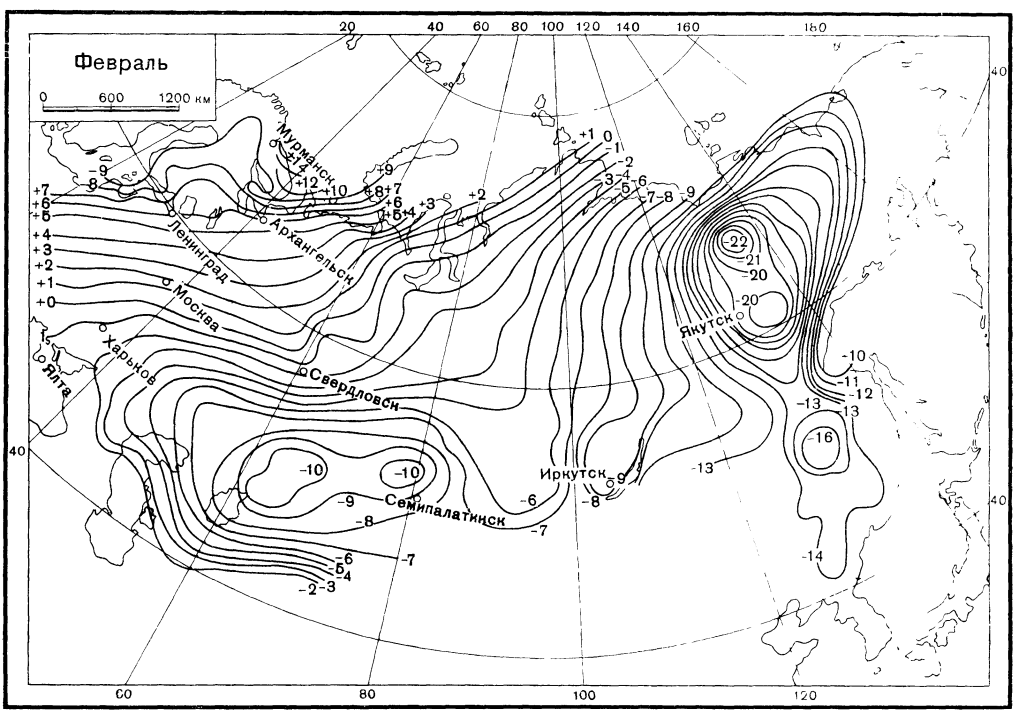


Рис. 292. Изаномалы для февраля

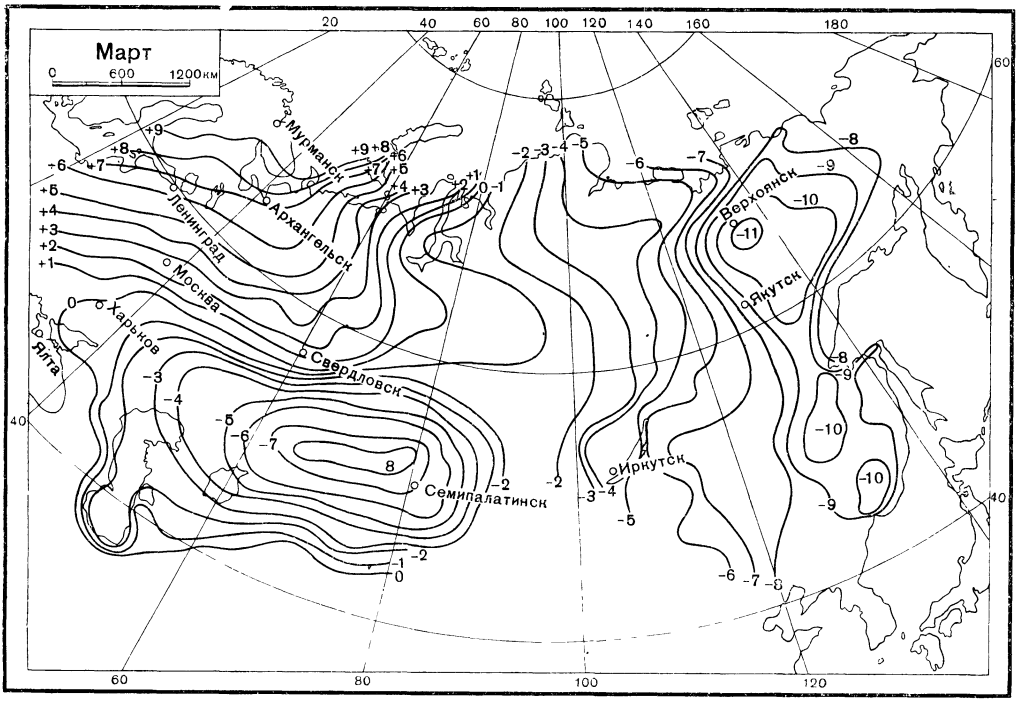


Рис. 293. Изаномалы для марта

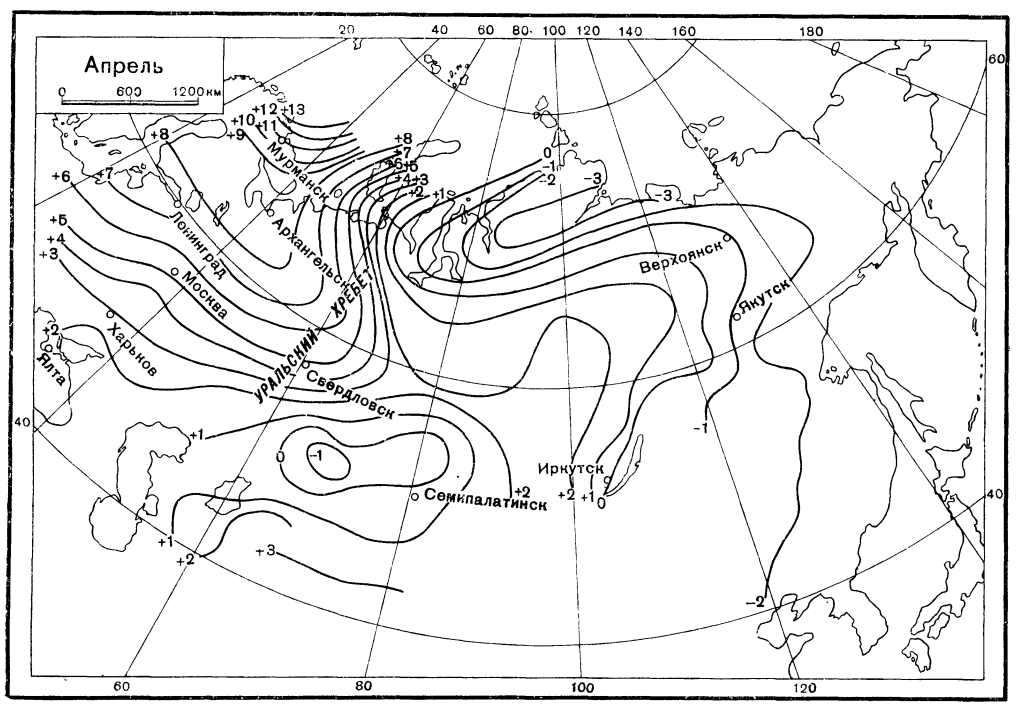


Рис. 294. Изаномалы для апреля

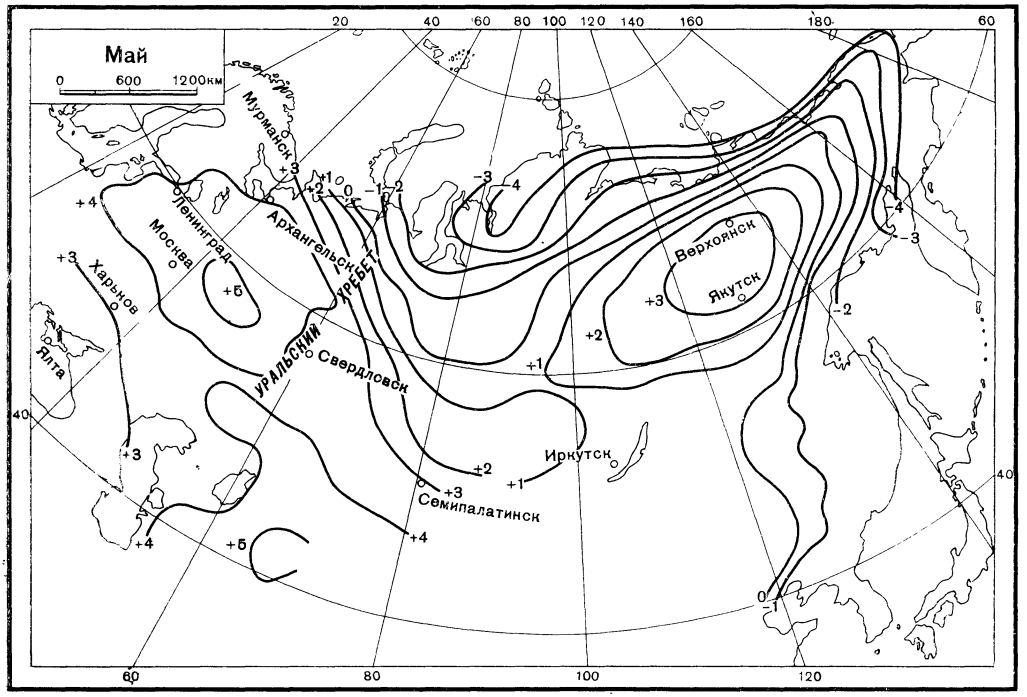


Рис. 295. Изаномалы для мая

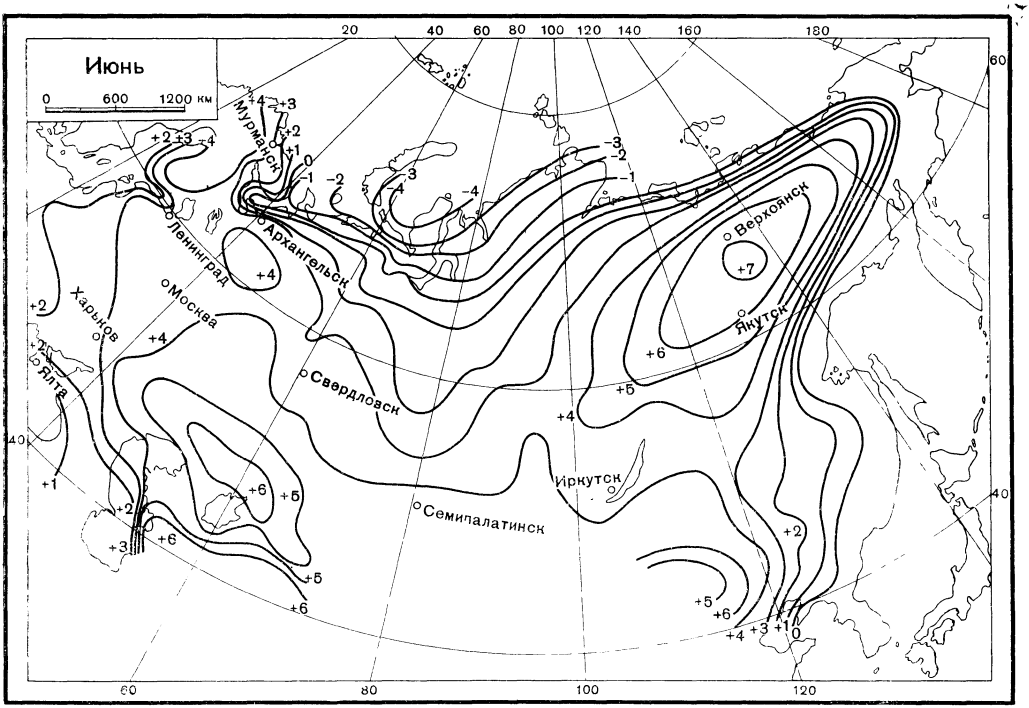


Рис. 296. Изаномалы для июня

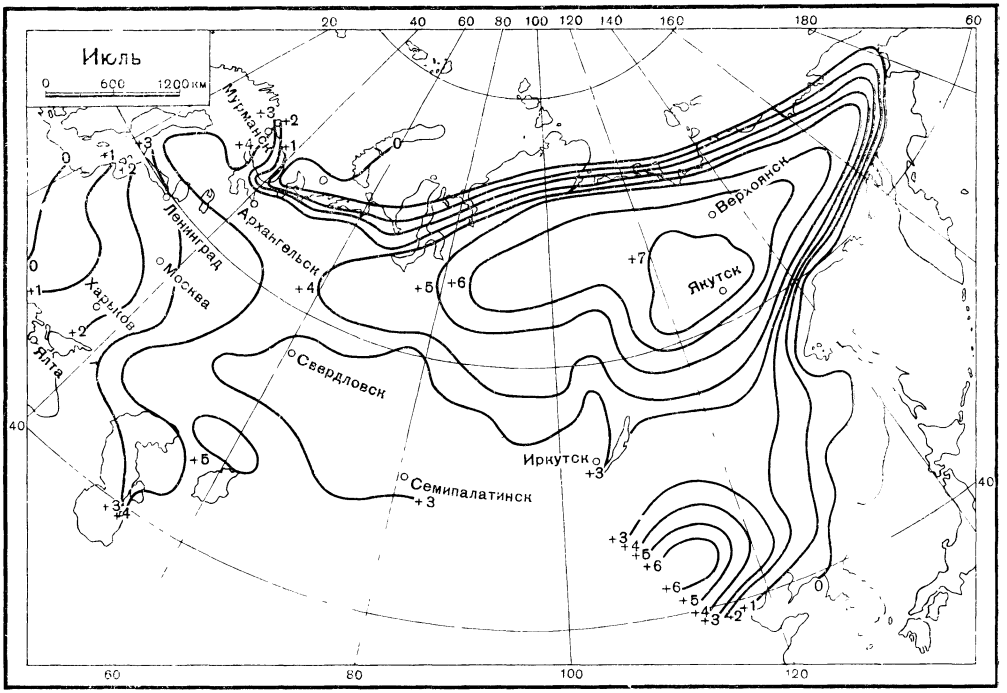


Рис. 297. Изаномалы для июля

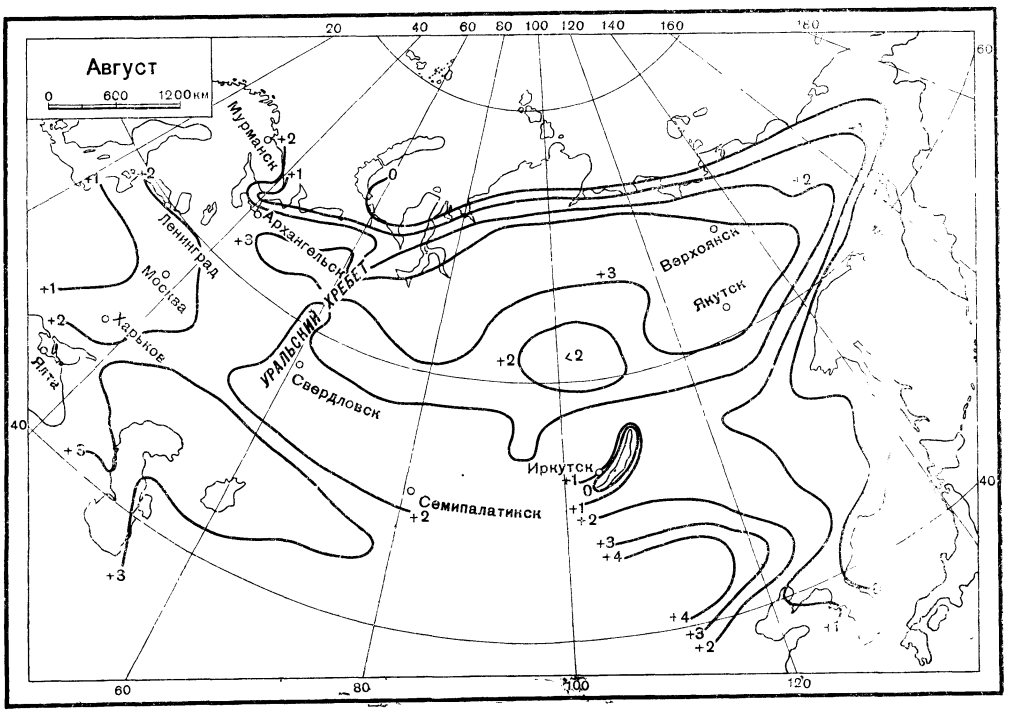


Рис. 298. Изаномалы для августа

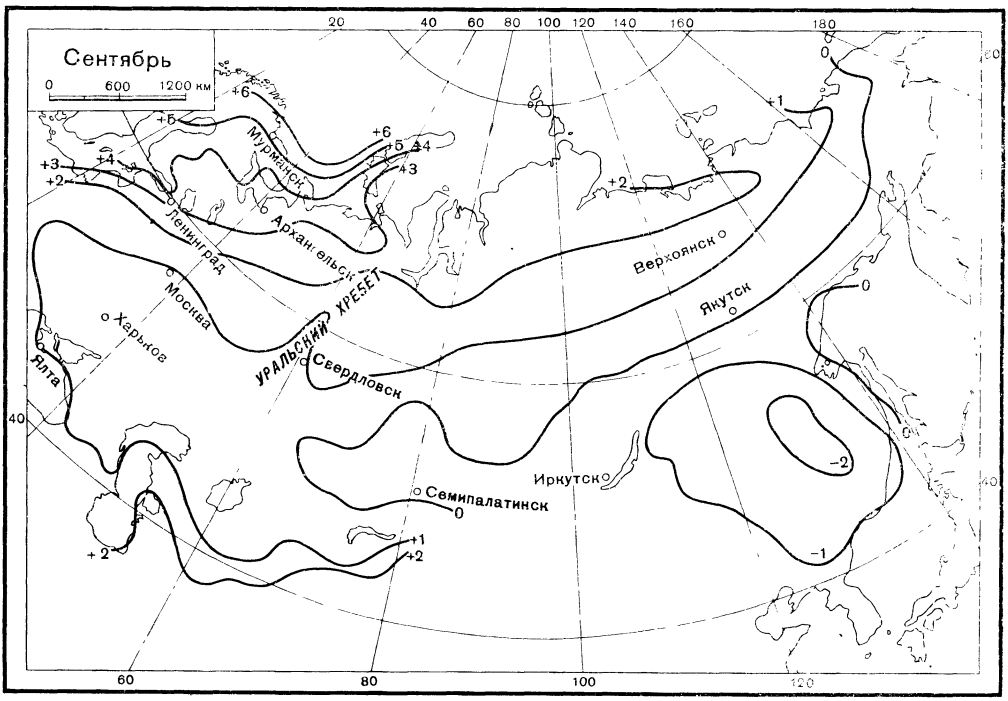


Рис. 299. Изаномалы для сентября

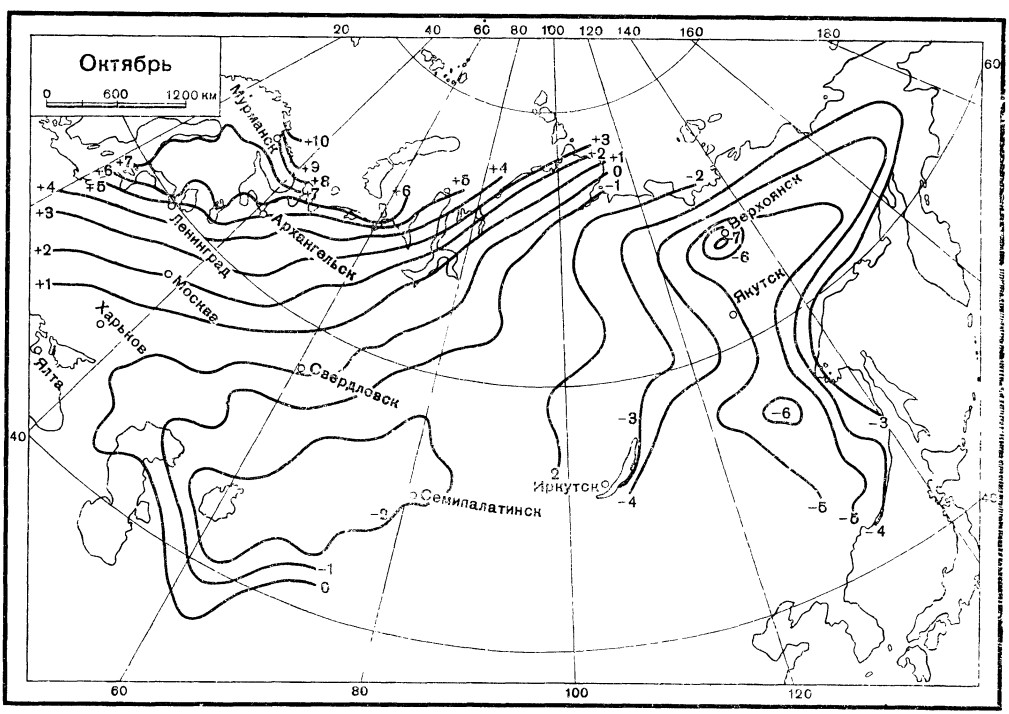


Рис. 300. Изаномалы для октября

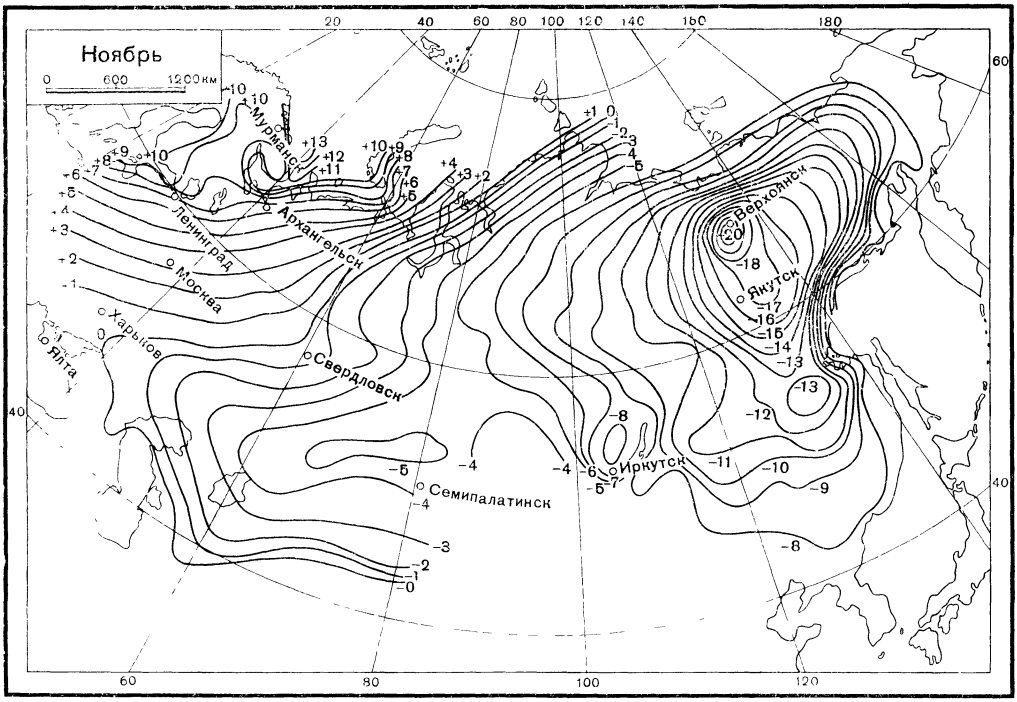


Рис. 301. Изаномалы для ноября

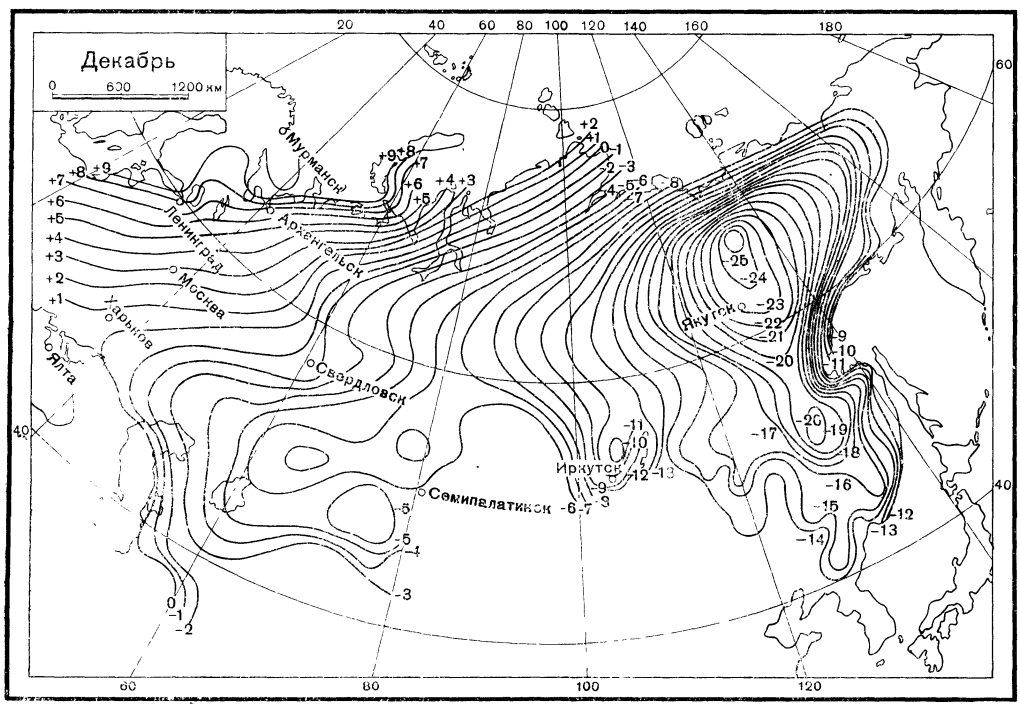


Рис. 302. Изаномалы для декабря

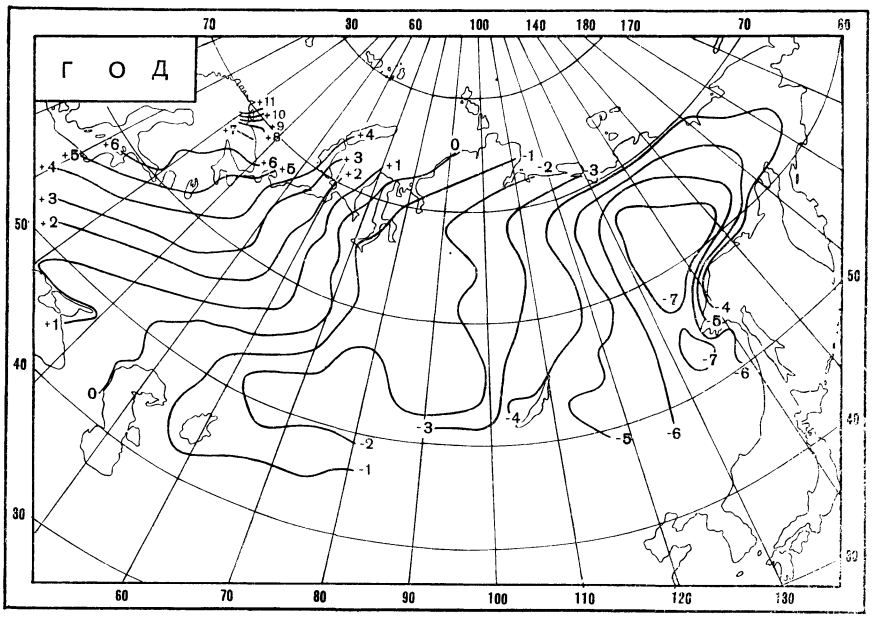


Рис. 303. Изаномалы для года

Прежде всего бросается в глаза резкое различие, которое существует между двумя группами карт: к одной из этих групп относятся карты, построенные для *января* и для трех месяцев, примыкающих к нему с обеих сторон (и до, и после), т. е. для октября, ноября, декабря и февраля, марта, апреля. Это — группа, которую для краткости можно назвать *зимней*. К другой, летней группе принадлежат карты, составленные для *июля* и для двух месяцев, примыкающих к нему с каждой стороны: для мая, июня и для августа, сентября.

На картах зимней группы поле вектора Φ_2 обрисовано чрезвычайно четко: здесь совершенно ясно проявляется действие одного источника тепла, дающего поток сквозь береговую линию. Не менее ясно вырисовываются и два основных стока тепла, а также два вторичных стока. Движение тепла от источника происходит почти везде равномерным потоком, как это видно по изаномалам, располагающимся на картах правильными параллельными рядами. Особенно интересно подчеркнуть эти правильные ряды на Европейской территории Союза.

Напротив, стоки тепла совершенно четко обособлены и сосредоточены.

Чрезвычайно интересно поведение изаномал по соседству с горными хребтами, например с Уралом; приходится удивляться, до чего послушно копируют изаномалы изгибы его хребта (особенно в декабре и в январе). Позади южной оконечности хребта картина напоминает диффракцию волны у края экрана.

Не менее интересна тенденция, которую проявляют изаномалы по соседству с морями: они как бы стремятся огибать моря вдоль береговой линии, что является совершенно естественным следствием выравнивающего действия моря на тепловой режим побережья.

Переходя ко второй группе карт, составленных для теплого времени года (летней группе), приходится прежде всего установить отсутствие прежней стройности в картине изаномал: в разгаре лета сколько-нибудь четко намечается лишь замкнутая область положительной аномалии температур, охватывающая всю Восточную Сибирь. Эта область превращается

летом в сосредоточенный источник тепла, посылающий тепловой поток Φ_2 по направлению с суши к морю. В июне и июле сверх того появляются еще два менее существенных источника тепла. Сток тепла происходит через береговую черту тех морей, которые в зимнее время являлись источником тепла.

Как видим, карты изаномал действительно расшифровали те тепловые процессы, которые оставались скрытыми на картах изотерм,— процессы теплообмена между морем и сушей. Но прежде чем перейти к количественному учету этого теплообмена, являющемуся основной целью настоящей работы, проследим еще за *сменой* времен года на картах изаномал.

Первые признаки наступающей весны появляются в марте, когда, помимо общего смягчения режима, наблюдающегося уже и в феврале (по сравнению с январем), начинается своеобразная деформация изаномал: они выгибаются словно под действием какого-то холодного клина. В апреле этот клин уже резко обозначается на карте, врезаясь со стороны моря. В то же самое время (в апреле) пропадает главный сток тепла. Холодный клин непрерывно перемещается на юго-запад. На востоке к этому времени окончательно формируются источники тепла, а на Европейской территории СССР отчетливо обозначаются очертания теплового потока, идущего с юго-запада. Особенно любопытно отметить, как характерно изгибаются изаномалы, будто «задерживаемые» Уральским хребтом.

Как и следовало ожидать, карты, построенные для июня, июля и августа, не обнаруживают никаких серьезных принципиальных различий: к августу лишь завершаются те процессы, которые наметились достаточно ясно в июне. Но вот в сентябре снова выступает на сцену динамика, вносимая сменой времен года.

Как припомним, с марта по июнь соседство моря сказывалось в форме некоторой тепловой *инерции*: материк весной прогревался скорее, чем море, вызывая появление характерного холодного клина. Теперь, осенью, море снова проявляет ту же тепловую инерцию, но в обратном направлении: оно остывает медленнее, чем материк. При этом совершенно отчетливо всплывает одно замечательное явление, не наблюдавшееся в другие времена года: *все* северные моря ведут себя в сентябре как одно целое, и вся территория СССР (и в Европе, и в Азии) ведет себя *тоже как одно целое*, от крайних западных до крайних восточных границ: сплошным фронтом наступает на сушу тепловой поток, идущий с севера, и возвращает воздуху над материком часть того тепла, которое теряется при осеннем охлаждении материка.

Еще раз отметим любопытное поведение изаномалы (+ 1) на Уральском хребте: снова фронт теплового потока явно задерживается этим хребтом, как было и в июне, когда тепловой поток шел в противоположном направлении. Не лишено интереса и поведение той же изаномалы (+ 1) по соседству с Черным и Каспийским морями: на карте явно заметна тенденция изаномалы стелиться вдоль береговой линии, т. е. тенденция, обязанная роли морей как аккумуляторов тепла.

Если в сентябре только еще наметилось возникновение первого зимнего стока тепла, то в октябре картина изаномал делается типично зимней: и правильные параллельные ряды изаномал в Европейской части СССР, и явно обрисовавшиеся стоки тепла — все это специфические признаки зимы, которым в ноябре и декабре остается только еще более оформиться и заостриться, чтобы к январю вновь возникла картина наиболее сурового зимнего режима.

На только что рассмотренных картах отражены следы смены времен года, приводящей к перемене направлений тепловых потоков. Посмотрим же в заключение настоящего раздела, каков итог такой смены. Как характеризуются тепловые потоки, отнесенные не к месячному периоду, а к целому году?

Подобная характеристика приведена на карте рис. 303, на которой изображены изаномалы года. Как видим (и как можно было ожидать), в итоге одержали верх те потоки, которые были наиболее интенсивными, т. е. мощные потоки тепла, идущие с Атлантики на территорию СССР в самые суровые месяцы года. Потоки, идущие в обратном направлении (с суши на море), так слабы по сравнению с ними, что на этой карте видимым образом не отразились (в скрытом виде влияние их, разумеется, сказалось — оно отразилось на суммарных цифрах). Вот почему общая картина изаномал года очень напоминает картину зимы, лишь несколько смягченную: так же, как зимой, располагаются параллельные ряды изаномал на Европейской территории; почти так же, как зимой, отчетливо очерчиваются стоки тепла.

в) *Определение условного коэффициента теплопроводности.* В предыдущем разделе общий качественный анализ карт изаномал позволил обнаружить ряд тепловых процессов, протекающих в течение года на территории СССР. Попытаемся теперь найти количественные характеристики этих процессов. В первую очередь определим величину AH, которая входит во все выражения, связывающие градиенты с соответствующими тепловыми потоками. Есть смысл определять именно эту величину, а не оба множителя A и H в отдельности, ибо, с одной стороны, высота деятельного слоя тропосферы H трудно поддается точным измерениям, а еще труднее было бы найти величину A для различных частей деятельного слоя, движущихся с различными скоростями; с другой стороны, во всех соотношениях, с которыми нам придется иметь дело, оба множителя всегда входят вместе в виде произведения. Вот почему мы будем сейчас искать числовое значение этого произведения, совершенно не интересуясь значениями A и H порознь.

Выше мы предположили, что атмосфера является изотропной во всех горизонтальных направлениях, в каких только могут проходить потоки Φ_2, что и по этой причине величина AH, стоящая в соотношениях (14) и (15), одна и та же. Но тогда для ее определения можно воспользоваться основными соотношениями теории Онгстрема, описывающей распространение потока Φ_1 вдоль меридиана, как было указано в предыдущем параграфе, в конечном итоге — соотношением (9).

За годы, истекшие после появления работы А. Онгстрема, в литературе появились более надежные числовые значения для m и n, входящих в одну из основных формул Онгстрема — в (8). Именно, на основании работы Л. Горчинского [5] следовало бы вместо (10) записать

$$\vartheta = 26° - 46°{,}5 \cdot \sin^2(\varphi - 10)°. \tag{19}$$

Однако мы не будем приравнивать $a/4$ непосредственно коэффициенту при квадрате синуса в (19), как это делал Онгстрем, пользуясь эмпирическим соотношением (10); ведь необходимо помнить, что в действительности вдоль меридиана, от экватора к полюсам, переносится меньше тепла, чем полагал Онгстрем, поскольку часть тепла доставляется потоками Φ_2, идущими с моря на сушу.

Действительно, если бы не существовало совсем тепловых потоков Φ_2, то температура на какой-либо широте φ не равнялась бы той «нормальной» температуре, которую определяют путем двойного осреднения (и по времени за год, и по всей параллели), а была бы такова, какой она должна быть при полном отсутствии всякого сообщения с морем, далеко в глубине идеального материка. За неимением чего-либо лучшего можно считать идеально материковыми условиями те, в которых находится хотя бы Якутия.

Задавшись таким предположением, придется снабдить формулу (19) несколько иным коэффициентом при втором (переменном) члене правой части в расчете на то, чтобы для Якутии формула давала истинную температуру (среднюю за год), наблюдавшуюся здесь в идеально материковых ус-

ловиях. Тогда видоизмененная формула примет вид

$$\vartheta = 26° - 55° \sin^2(\varphi - 10°). \tag{20}$$

Разумеется, первый член правой части не должен был измениться, ибо близ экватора (при $\varphi = 10°$) температура определяется независимо от каких бы то ни было гипотез о характере коэффициента a; этот первый член нам придется тоже уточнить впоследствии (см. стр. 524).

Итак, можно положить, что $\frac{a}{4} = 55$, откуда

$$a = 220, \tag{21}$$

и, наконец,

$$AH = 1{,}28 \cdot 10^{20} \frac{кал}{см \cdot год \cdot град/см}. \tag{22}$$

Вот какова числовая величина произведения AH, которое мы вправе рассматривать как некоторый условный коэффициент теплопроводности, или, если угодно, как линейный коэффициент теплопроводности: он показывает, сколько малых калорий проходит над отрезком в 1 *см* (во всем деятельном слое атмосферы) за один год при условии, что градиент равняется единице (1 *град/см*).

Определив эту важную величину применительно к потокам, отнесенным к одному году, можно в первом приближении найти и аналогичный коэффициент для потоков, отнесенных к одному месяцу. Правда, заранее можно сказать, что для различных месяцев этот коэффициент в действительности должен быть неодинаков (ввиду неодинаковости ветрового режима в различные времена года), но не будет слишком большой ошибки, если за неимением сведений о характере его изменений мы будем считать его равным некоторой постоянной средней величине, определяемой из равенства (22) путем простого деления коэффициента на число месяцев в году. Во всяком случае погрешность, вносимая при таком произволе, едва ли превышает ту, которую мы делаем, предполагая, что перемешивание воздушных масс происходит всюду по одному и тому же закону в пределах всякой местности со спокойным рельефом (например, в пределах всей Европейской части СССР, лишенной гор, и в равнинных частях Сибири).

Итак, для потоков, отнесенных к одному месяцу, будем полагать, что

$$A'H' = 1{,}0 \cdot 10^{19} \frac{кал}{см \cdot месяц \cdot град/см}. \tag{23}$$

Штрихи у букв A и H проставлены для того, чтобы не смешивать соответствующие величины, относящиеся к годичному или месячному потоку.

г) *Определение количества тепла, переносимого с моря на материк.* Располагая картами изаномал и числовым значением условного коэффициента теплопроводности AH или $A'H'$, легко подсчитать, сколько тепла проникает с моря на материк за год или за один из месяцев года.

Отметим на картах основные направления тепловых потоков СЗ $\rightarrow$ ЮВ, З $\rightarrow$ В, т. е. направления кратчайших путей от источника тепла к стокам тепла.

Определяя по картам величину градиентов (для изаномал года) и затем умножая полученные значения на число, стоящее в соотношении (22), получим табл. 18.

Итак, следует полагать, что на территорию СССР с моря над каждым сантиметром береговой линии проникает за год в среднем около $4{,}1 \cdot 10^{12}$ калорий. Но ведь это тепло в течение года было потеряно морем, следовательно, было бы очень интересно вычислить хотя бы приблизительно, сколько потерянного тепла приходится за год на 1 $см^2$ поверхности моря и такой подсчет не представляет затруднений. Действительно, пусть Φ_2 калорий

переносится за год через каждый сантиметр береговой линии с моря на материк. Пусть L будет длина этой береговой линии, а S — величина поверхности моря, питающей своим теплом материк. Тогда, как нетрудно видеть, потеря тепла с каждого квадратного сантиметра поверхности моря за год будет равна

$$Q = \frac{\Phi_2 L}{S}. \tag{24}$$

Есть основания полагать, что величина S/L для нее равняется приблизительно 10^8 *см*. Но тогда, подставляя в (24) эту величину и принимая на основании предыдущих вычислений $\Phi_2 = 4{,}1 \cdot 10^{12}$, придем к заключению, что

$$Q = 41\,000 \frac{кал}{год/см^2}. \tag{25}$$

Интересно отметить, что, исследуя тепловой режим окраинного Карского моря, Шулейкин пришел к выводу, что это море теряет на теплообмен с атмосферой и на обратную радиацию $Q = 48\,000 \frac{кал}{год/см^2}$, как было уже отмечено ранее (см. гл. IV).

Таблица 18

Направление	Градиент, *град/см* ($\times 10^3$)	Количество тепла (*кал*), переносимого через 1 *см* береговой черты за 1 год ($\times 10^{-12}$)
СЗ→ЮВ	3,5	4,1
З→В . . .	2,9	3,7

Разумеется, если бы можно было исключить отсюда потерю на обратную радиацию, то получилась бы величина, несколько меньшая, чем та, которая получилась в (25), но порядок ее тот же самый, что свидетельствует о правильности вычислений, произведенных совершенно различными путями.

Если упомянутое исследование можно было назвать «вид с моря», то настоящее исследование с таким же успехом может носить название «вид с берега». Как видим, и тот и другой «виды» хорошо согласуются между собой: сколько тепла потеряло море, столько тепла приобрела от него суша (разумеется, за вычетом потерь на обратную радиацию, являющихся безвозвратными, для системы море — суша).

Убедившись в справедливости проделанного исследования, остается еще проанализировать тепловые потоки, которые идут по трем отмеченным путям в различные времена года. Для этого нужно будет определить градиенты не по карте рис. 303, которой мы только что пользовались, а по картам рис. 291—302, составленным для всех месяцев в отдельности. Разумеется, вместо величины AH теперь придется пользоваться аналогичным коэффициентом $A'H'$ из (23). На рис. 304 изображен закон изменения потока Φ_2 по линии СЗ → ЮВ в течение года (цифры, поставленные по оси ординат,— число малых калорий, проходящих над 1 *см* за соответствующий месяц. Обозначения месяцев даны на оси абсцисс).

Положительные ординаты на диаграмме соответствуют направлению потока с моря на сушу; отрицательные ординаты отвечают потокам противоположного направления (с суши на море).

Интересно сравнить найденные тепловые потоки Φ_2 с онгстремовским тепловым потоком Φ_1 вдоль меридиана. Его вычисление легко произвести, пользуясь данными Горчинского для распределения нормальных температур вдоль меридиана. По этим данным следует вычислить значения градиента «нормальных температур» для каждого месяца и умножить полученные значения на тот же коэффициент $A'H'$. Для удобства сравнения результаты вычислений потока Φ_1 нанесены на рис. 304 пунктирной кривой. Как видим, оба потока (Φ_1 и Φ_2) оказываются в среднем величинами одного и того же порядка. В зимнее время в направлении, приблизительно перпендикулярном к меридиану, с моря на сушу проносится даже несколько больше тепла, чем проносится вдоль меридиана, — от низких широт к более высоким.

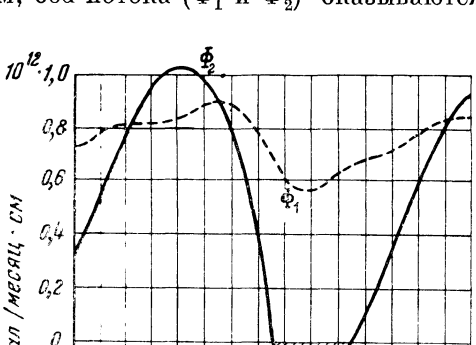


Рис. 304. Изменение тепловых потоков в продолжение года

д) *Определение количества тепла, отдаваемого воздуху потоком на его пути. Абсолютная аномалия температуры.* Поток Φ_2 не имел бы никакого значения для климата материка, если бы он проносился над ним, сохраняя постоянное теплосодержание. В действительности он решающим образом воздействует на климат материка благодаря тому, что он непрерывно расходует тепло, приносимое с океана, расходует на нагревание воздуха до температуры ϑ, более высокой, чем та, до которой он нагрелся бы в *идеально материковых условиях*.

Представим себе, что Земля лишена океана и внутренних морей. Тогда во всех точках параллели на широте φ установится общая температура ϑ_c, связанная с широтой онгстремовским соотношением

$$\vartheta_c = M - \frac{mR^2}{4AH}\sin^2\varphi. \qquad (26)$$

Величина m по-прежнему связана только с солнечной радиацией.

Появление океана меняет тепловой режим в том отношении, что вдобавок к поступлению тепла от солнечной радиации вступает новый источник тепла: некоторое количество тепла q дополнительно нагревает столб воздуха высотой H, опирающийся на единицу поверхности Земли; это количество тепла поступает в единицу времени от потока Φ_2, идущего с океана.

Учитывая строение формулы (6), знак величины m и знак перед вторым членом формулы (26), легко написать, по аналогии с ней, другую формулу, выражающую истинную температуру воздуха в данной точке материка, омываемого океаном:

$$\vartheta = M - \frac{(m-q)R^2}{4AH}\sin^2\varphi. \qquad (27)$$

Разность температур $\vartheta - \vartheta_c = \tau$ следует рассматривать как *истинную*, или *абсолютную*, аномалию температуры, в отличие от относительной аномалии, с которой мы имели дело до сих пор.

Легко видеть, что введение нового понятия *абсолютной* аномалии нисколько не меняет вида карт изаномал. Все кривые остаются на своих местах; только цифры при каждой кривой можно проставить двоякого рода:

либо нанести значения относительных аномалий, снабженные знаком плюс или минус, как это делалось выше, либо значения абсолютной аномалии, всегда существенно положительные зимой. С этой точки зрения изаномала «0» на наших картах имеет примерно такой же условный смысл, как, например, нуль на термометрах Цельсия.

На основании (26) и (27)

$$\tau = \frac{R^2 \sin^2 \varphi}{4AH} q, \tag{28}$$

отсюда

$$q = \frac{4AH}{R^2 \sin^2 \varphi} \tau. \tag{29}$$

Такое количество тепла отдается потоком Φ_2 в продолжение *года* столбу воздуха, высотой H, опирающемуся на 1 $см^2$. По аналогии легко найти также количество тепла, которое отдается потоком Φ_2 тому же столбу, но в продолжение определенного *месяца*:

$$q_2 = \frac{4A'H'}{R^2 \sin^2 \varphi} \tau. \tag{30}$$

Определение величин τ, стоящих в формулах (29) и (30), облегчается тем обстоятельством, что на Земле можно отметить некоторые районы, в которых климат ничтожно мало отличается от *идеально материкового*, т. е. практически никак не зависит от влияния океанского теплового потока Φ_2. Одним из таких районов является район Верхоянска в Якутии. Он и послужил нам для определения значений τ. В качестве примера отметим, что относительная аномалия температуры в этом районе для января равна — 26° (по карте рис. 291). Относительная аномалия температуры в Москве, по той же карте, составляет +3°. Отсюда заключаем, что абсолютная аномалия температуры в Москве для января составляет + 3 — (—26) = 29°. Таким же путем получим по карте абсолютную аномалию 34° для Ленинграда, 25,2° для Харькова и т. д.

В дальнейшем постараемся проверить справедливость сделанной гипотезы об «идеально материковом климате района Верхоянска» и убедимся, что эта гипотеза достаточно хорошо вяжется с действительностью.

На рис. 305 изображены годичные изменения величины q_2, вычисленной по формуле (30), для типичного приморского района СССР — северо-западного района. На том же рисунке изображена кривая S, выражающая колебания количества тепла, доставляемого солнечными лучами 1 $см^2$ поверхности материка в той же точке.

Как видим, в самый разгар зимы, в январе, океанский тепловой поток отдает столбу воздуха высотой H столько же тепла, сколько в конце июля отдает Солнце *основанию* этого столба. В январе непосредственное влияние солнечной лучистой энергии здесь падает практически до нуля.

е) *Роль тепловых потоков вдоль меридиана. Воображаемый режим «обсохшей» Земли. Проверка теории.* В предыдущем разделе для определения абсолютных аномалий температуры по карте относительных аномалий был использован район Верхоянска, в котором, по нашей гипотезе, не может сказываться влияние океанского теплового потока Φ_2. Тепловой режим атмосферы в этом районе создается лишь составляющими баланса лучистой энергии и действием того тепла, которое приносится из более низких широт *меридиональными* тепловыми потоками. Попытаемся учесть влияние этих потоков и затем определить, какой тепловой режим установился бы на различных широтах, если бы весь земной шар оказался лишенным океана. Тем самым удастся по-новому оценить роль океана в образовании климата материков. В заключение настоящего раздела сопоставим результаты некоторых вычислений, сделанных по нашей теории тепловых потоков, с результатами непосредственных наблюдений в природе.

Формула (6), описывающая баланс лучистой энергии *за год*, была получена ее авторами на основании весьма ограниченного материала. Поэтому, строя аналогичное соотношение для *месячного* баланса энергии *меридиональных* потоков, полезно будет уточнить соответствующие постоянные m_ν и n_ν (ν — номер месяца).

Для уточнения *двух* постоянных, относящихся к каждому месяцу в отдельности, придется воспользоваться среднемесячными значениями температур воздуха в *двух* точках земного шара, обладающих идеально материковым климатом: не подверженных действию потоков Φ_2. Одной из таких точек

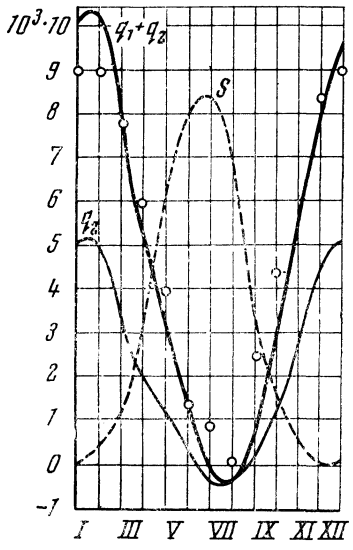


Рис. 305. Тепло, выделяемое потоками с океана и потоками вдоль меридиана

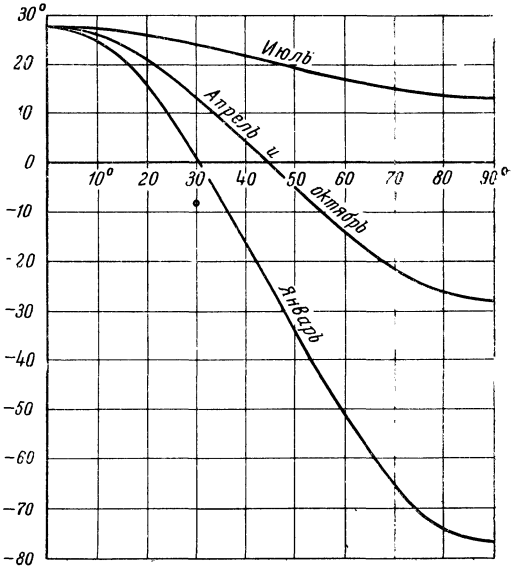


Рис. 306. Воображаемый температурный режим Земли, лишенной океанов

мы уже пользовались при определении абсолютных аномалий температуры, другую нетрудно отыскать в глубине *экваториальной Африки*.

Так как в этой второй точке температура воздуха круглый год остается постоянной, равной 28°, и так как здесь $\sin^2\varphi = 0$, то в уравнении

$$\vartheta_\nu = M_0 - \frac{a_\nu}{4}\sin^2\varphi \qquad (31)$$

сразу определяется уточненное числовое значение константы M_0. С другой стороны, по аналогии с (9) можно записать

$$a_\nu = \frac{R^2}{A'H'}\,m_\nu, \quad m_\nu = \frac{A'H'}{R^2}\,a_\nu, \qquad (32)$$

где в свою очередь m_ν заимствуется из уравнения баланса лучистой энергии

$$w_\nu = m_\nu + n_\nu \cos^2\varphi. \qquad (33)$$

В этом уравнении w_ν обозначает количество тепла, выделяемого за ν-й месяц меридиональным потоком Φ_1 в столбе воздуха высотой H, опирающемся на 1 *см*^{2} земной поверхности.

На экваторе круглый год можно считать

$$(w_1)_0 = (w_2)_0 = \ldots = w_0 = 3{,}3 \cdot 10^3 \frac{кал}{см^2 \cdot месяц}.$$

Следовательно, подставив в (33) значение $\cos^2 \varphi = 1$, можно записать для любого месяца

$$n_\nu = w_0 - m_\nu. \tag{34}$$

В свою очередь m_ν определяется на основании соотношений (31) и (32), из которых непосредственно вытекает

$$m_\nu = \frac{4A'H'}{R^2 \sin^2 \varphi} (M_0 - \vartheta_\nu). \tag{35}$$

Постоянная M_0 определена из наблюдений за температурой на экваторе; величину ϑ_ν для каждого месяца найдем из наблюдений за температурой в районе «полюса холода».

В результате вычислений m_ν по формуле (35) с подставленными в нее значениями величин и последующего вычисления n_ν по формуле (34) была получена таблица значений m_ν и n_ν для всех месяцев года. Она позволяет уточнить соотношения (33) и (31). В конечном счете оказывается возможным определить количество тепла q_1, выделяемого меридиональным потоком за какой-либо ν-й месяц в столбе воздуха высотой H, опирающемся на 1 $см^2$ земной поверхности, и, с другой стороны, вычислить, какая температура приземного воздуха установилась бы на той или иной широте, если бы на Земле не существовало океанов.

На рис. 306 изображено это распределение температур на лишенном океанов земном шаре для середины зимы, середины лета и для переходных сезонов — весны и осени. Строго говоря, для апреля и октября получаются неодинаковые значения температур, но, чтобы не загружать диаграмму, мы предпочли дать вместо двух очень близких между собой кривых одну осредненную.

В южном полушарии июль и январь меняются местами.

На рис. 305 представлена роль, которую играют меридиональные потоки Φ_1 в создании теплового баланса атмосферы. Для каждого месяца к ординатам кривой q_2 прибавлены отрезки, соответствующие величинам q_1: количествам тепла, выделенным меридиональными потоками Φ_1. Суммарная кривая $q_1 + q_2$ выражает годичный ход полного количества тепла, которое выделяется *горизонтальными* потоками в атмосфере на подогревание воздуха. Как видим, роль потоков Φ_2 и Φ_1 в исследуемой области материка примерно одинакова.

Полученная суммарная кривая позволяет подвергнуть нашу теорию теплопередачи в атмосфере надежной проверке. Действительно, непосредственные измерения прямой и обратной солнечной радиации, измерения количества тепла, отдаваемого или поглощаемого подстилающей поверхностью, и измерения температуры воздуха позволяют вычислить все составляющие теплового баланса приземного слоя атмосферы, за исключением количества тепла, выделяемого горизонтальными тепловыми потоками за счет адвекции и турбулентного перемешивания с соседними струями. В частности, подобные вычисления составляющих теплового баланса атмосферы были проведены в Главной геофизической обсерватории на основании непосредственных измерений в Павловске. Обнаружилось, что в бóльшую часть года отрицательные составляющие теплового баланса резко преобладают над положительными. Следовательно, для компенсации этого *дефицита* тепла необходимо привлечь тепло, отдаваемое атмосфере горизонтальными тепловыми потоками Φ_1 и Φ_2. Если наша теория верна, то компенсация должна оказаться полной: дефицит тепла, обнаруженный в Павловске, должен во все времена года равняться величине $q = q_1 + q_2$, взятой с обратным знаком.

На рис. 305 нанесены *точки*, построенные по результатам павловских наблюдений. Как видим, они очень хорошо ложатся близ суммарной кривой,

вычисленной по нашей теории. Следовательно, наше представление о тепловых потоках с океана и тепловых потоках вдоль меридиана близко к действительности. Остается пожалеть, что до сих пор влияние этих потоков на *климат* и на *погоду* еще не учитывается систематически, изо дня в день, в климатологической и метеорологической практике. Современное развитие *аэрологии* позволило бы производить подобный учет весьма точно и строго: не только в обобщенном виде, как делали мы выше, но и раздельно, по различным слоям атмосферы. Как ни странно, вычисления теплового баланса *океана* и внутренних *морей* крепче укоренились на практике, чем вычисления полного теплового баланса атмосферы. Молодая наука о море здесь опередила свою старшую сестру — науку об атмосфере.

Только что произведенная проверка нашей теории может быть дополнена еще в одном отношении: есть возможность оценить, насколько климат «полюса холода», принятый нами за идеально материковый, действительно близок к таковому. Попытаемся произвести такую оценку.

Примем во внимание, что формальная сторона теории турбулентной теплопроводности ничем не отличается от формальной стороны классической теории теплопроводности. Но если это так, то, направив некоторую координатную ось x вдоль потока Φ_2, мы вправе написать известное соотношение между второй производной от τ по x и количеством тепла q, расходуемого на единице пути вдоль по оси x. Именно

$$AH\frac{d^2\tau}{dx^2}\,dx = -q\,dx. \tag{36}$$

Но вместо q можно подставить его выражение из (29). Тогда, как легко убедиться, обе части равенства можно будет сократить на dx и на AH. В результате окажется, что

$$\frac{d^2\tau}{dx^2} = -\beta^2\tau, \tag{37}$$

где

$$\beta = \frac{2}{R\sin\varphi}. \tag{38}$$

Интеграл этого уравнения запишется в следующем виде:

$$\tau = \tau_0 e^{-\beta x}. \tag{39}$$

Это соотношение весьма интересно, ибо оно показывает, что *закон падения температурной аномалии* при проникании потока Φ_2 в глубь материка *не зависит от условного коэффициента теплопроводности* AH, а всецело определяется геометрическими элементами R (радиус Земли) и φ (широта данной точки). Так как величина R весьма велика, то β, наоборот, очень мало́, а потому проверка формулы (38) в природных условиях весьма затруднительна: значительные осложнения вносятся в картину всевозможными побочными причинами. Однако очень удобно можно проверить другое соотношение, непосредственно связанное с (38) и (39),— соотношение между градиентом $\operatorname{grad}\tau$ и само́й величиной истинной аномалии τ.

Действительно, легко видеть, что на основании только что полученных уравнений

$$\left|\frac{d\tau}{dx}\right| = |\operatorname{grad}\tau| = \beta\tau. \tag{40}$$

Итак, градиент истинной аномалии тоже *совершенно не должен зависеть от условного коэффициента теплопроводности, а должен всецело определяться величиной само́й аномалии* τ *и геометрическими элементами* R и φ[1].

[1] Совершенно очевидно (см. стр. 509) что $\operatorname{grad}\tau = \operatorname{grad}_2\vartheta$.

Однако необходимо тотчас же отметить, что оба интересных соотношения (39) и (40) в точности соответствовали бы действительности, если бы в природе коэффициент AH не *изменялся от точки к точке*; лишь тогда были бы законны все операции над онгстремовскими функциями, в которых при интегрировании AH считался постоянным. Вот почему на всей обширной территории, охваченной нашими картами, придется весьма тщательно выбрать участок, который удовлетворял бы подобному строгому требованию.

Любопытно отметить, что подобную проверку можно вести по всем месяцам, а не только по данным, относящимся к средним за год: это вытекает из той же инвариантности уравнения (40). Итак, задавшись выбранным районом, построим на диаграмме рис. 307 линейную зависимость между $\mathrm{grad}\tau$ и самим τ, т. е. построим прямую, выражаемую уравнением

$$|\mathrm{grad}\,\tau| = \frac{2\tau}{R\sin\varphi}. \qquad (41)$$

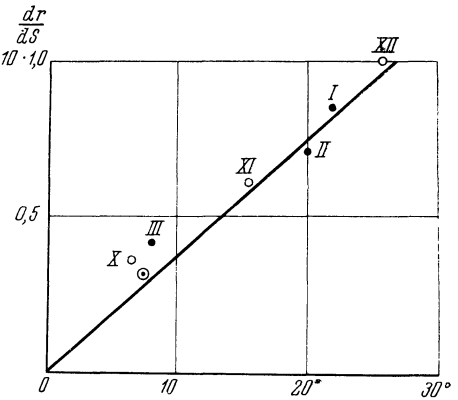


Рис. 307. Связь между аномалией и градиентом аномалий

На ту же диаграмму нанесем значения $\mathrm{grad}\tau$, взятые с карт, по соседству с одной какой-либо точкой. В качестве аргумента по-прежнему будем брать величину τ, также взятую с карты, для того же места и для того же месяца. Тогда получим на диаграмме точки, которые видны на рис. 307. Для удобства ориентации при каждой точке поставлена римская цифра, обозначающая соответствующий месяц. Точка, заключенная в кружок, относится к карте рис. 303, построенной для года в целом.

Как видим, точки, нанесенные на основании фактического материала, очень хорошо ложатся близ теоретической прямой. Интересно, что почти все они (за одним лишь исключением) слегка возвышаются над этой прямой, но подобное небольшое систематическое расхождение только еще подкрепляет теорию. Оно показывает, что в действительности прямая должна была бы проходить где-то несколько выше нанесенной на чертеж, но тогда она пересекалась бы с осью абсцисс, немного отступя от начала координат в отрицательную сторону. Физически это значит, что величина истинной аномалии нами всюду преуменьшена; другими словами, в Якутии режим оказывается несколько мягче того, который имел бы место в идеально материковых условиях. А это, как нетрудно видеть, в порядке вещей. Остается только порадоваться, что, различие между режимом в Якутии и идеально материковым весьма мало́ и что тем самым окончательно оправдывается принятый нами метод вычисления истинных аномалий.

Итак, если бы коэффициент AH не менялся от точки к точке, то его величина совершенно не влияла бы на частоту изаномал: это были бы просто геометрические линии, зависящие только от самой величины истинной аномалии τ. Не представляет никакого труда вскрыть физический смысл такого замечательного свойства изаномал: ведь совершенно ясно, что при больших числовых значениях AH градиент τ был бы мал, если бы при этом не возрастала величина Φ_2. А эта величина должна возрасти, ибо возрастают потери q на подогревание воздуха, согласно уравнению (36). В результате частное от деления Φ_2 на AH, т. е. градиент, оказывается неизменным независимо от того, будут ли делимое и делитель оба велики или оба малы.

Следует подчеркнуть, что уже простой качественный анализ карт (рис. 291—303) позволяет судить о характере зависимости между переменным коэффициентом (AH или $A'H'$) и частотой изаномал на картах (градиентом от τ). На этих картах отчетливо видно, как сгущается сеть изаномал над районами с неспокойным рельефом. Так как один и тот же поток Φ_2 дает здесь бо́льшие градиенты, а над равнинами значительно меньшие, то, следовательно, условный коэффициент теплопроводности в гористых местностях должен быть меньше, чем над равнинами. Нет никакого сомнения, что в будущем, после более детального изучения затронутых вопросов, окажется возможным говорить об условной теплопроводности того или иного горного хребта, окажется возможным подвести физико-математическую основу под теорию происхождения микроклимата различных районов. О первых опытах такого исследования будет речь в разделе «л» этого параграфа и далее — в § 13.

ж) *Несколько слов о происхождении малых температурных амплитуд в приморских районах и больших амплитуд в районах резко материковых.* В предыдущих разделах была выяснена связь между истинной температурной аномалией τ и тем количеством тепла q, которое отдается воздуху потоком Φ_2 при его проникании на материк. Связь эта выражалась уравнением (28), физический смысл которого чрезвычайно прост: чем больше дополнительное количество тепла q, выступающее на сцену благодаря влиянию моря, тем до более высокой температуры может нагреться воздух в данной точке земного шара при всех прочих равных условиях. С другой стороны, постепенная отдача тепла воздуху приводит к постепенному истощению энергетического запаса потока Φ_2, благодаря чему величина «перегрева» — величина температурной аномалии — должна непрерывно уменьшаться по мере продвижения в глубь материка. В случае идеально простых условий (при совершенно гладкой поверхности Земли и отсутствии внутренних морей) уменьшение аномалии τ шло бы по закону, выраженному уравнением (39).

Вот каково количественное физическое объяснение мягкой зимы в приморских районах и суровой зимы в районах материковых.

Но нетрудно видеть, что изложенные теоретические соображения позволяют поставить на физико-математический фундамент также и другую сторону климатологии: они дают возможность количественно объяснить происхождение малых температурных амплитуд в приморских районах и больших амплитуд в районах материковых. Действительно, пусть наивысшая температура, которую принимает воздух летом в материковом районе, равняется ϑ_c^s; тогда в районе приморском максимальная температура ϑ^s должна быть ниже на некоторую величину τ^s, зависящую от обратного потока Φ_2 с суши на море. Эта отрицательная истинная аномалия (по сравнению с идеально материковым районом) будет связана соотношением (28) с количеством тепла q, которое теперь, летом, уносится с суши на море.

Пусть наинизшая температура, которую воздух принимает зимой в материковом районе, равна ϑ_c^w. Тогда в приморском районе минимальная зимняя температура ϑ^w будет выше, чем ϑ_c^w, на некоторую величину τ^w, по-прежнему определяемую по уравнению (28), исходя из количества тепла q, поступающего с моря в исследуемый столб воздуха. Амплитуда температур θ и θ_c в приморском и материковом районах выразится так:

$$\left.\begin{aligned}\theta &= \vartheta^s - \vartheta^w,\\ \theta_c &= \vartheta_c^s - \vartheta_c^w.\end{aligned}\right\} \tag{42}$$

Но согласно сказанному

$$\left.\begin{aligned}\vartheta^s &= \vartheta_c^s - \tau^s,\\ \vartheta^w &= \vartheta_c^w + \tau^w.\end{aligned}\right\} \tag{43}$$

А стало быть, на основании (42)

$$\theta = \theta_c - (\tau^w + \tau^s). \tag{44}$$

Интересно отметить следующее обстоятельство. Как видим, при продвижении в глубь материка непрерывно падают величины τ^w и τ^s обеих истинных аномалий, благодаря чему амплитуды температур все возрастают и возрастают; но из обеих величин τ летняя аномалия τ^s всегда оказывается значительно меньшей, чем зимняя τ^w. Следовательно, если бы величина θ_c, стоящая первой в правой части (44), не зависела от широты φ, то семейство изоамплитуд было бы в точности подобно семейству зимних изаномал. В действительности величина θ несколько возрастает с возрастанием широты φ. Следовательно, мы должны ожидать некоторого искажения картины в том отношении, что южный фланг изоамплитуд отклонится несколько к востоку, а северный — к западу по сравнению с той картиной, которую представляет семейство зимних изаномал (например, изаномал января). Сходство же между обеими картинами сохранится.

Что это действительно так, легко убедиться, сравнив карты рис. 291, 302 или 303 с картой изоамплитуд, помещенной в климатологическом атласе Главной геофизической обсерватории и не воспроизведенной здесь.

з) Приближенная оценка роли Тихоокеанского бассейна. Причина возникновения «полюса холода» в районе Верхоянска.

Попытаемся теперь осветить ту роль, которую играют *неатлантические* воды в создании климата нашей страны. Несколько ниже придется снова вернуться к этому вопросу и сопоставить роль Атлантики с ролью Тихого океана, исходя из уточненных представлений о переносе тепла; там будет учтено влияние *зональных* воздушных потоков в атмосфере, сильно осложняющих картину теплопередачи вдоль параллелей. Сейчас мы ограничимся лишь первым, грубым приближением, вполне достаточным, однако, для выяснения природы «полюса холода» в Восточной Сибири.

Естественно ожидать, что роль Тихого океана в создании климата нашей страны должна быть значительно более скромной, по сравнению с ролью Атлантического океана, даже независимо от резкой асимметрии, с которой мы познакомимся при исследовании влияний зональных потоков. Ведь то тепло, которое приносится потоками Φ_2 от берегов Атлантического океана и связанных с ним морей, доставляется в высокие широты мощными струями Гольфстрима и его продолжений. Это над ним зарождаются потоки Φ_2, идущие на материк с запада, а в некоторых районах даже с севера. Никакой аналогии теплым Атлантическим течениям мы не встретим ни в Охотском, ни в Беринговом, ни даже в Японском морях. Струи Куро-Сио слишком рано отходят к востоку от берегов Японии, да и само количество тепла, приносимое с юга этими струями, относительно невелико, а потому они не могут сколько-нибудь заметно отразиться на климате Сибири. Взглянув на карты рис. 308 и 309, заметим, что на широте 45° С к берегам Европы примыкают воды Атлантического океана с поверхностной температурой, достигающей в феврале около 10°; даже воды Северного моря, прилегающие на этой широте к берегам Европы, обладают в этом месяце поверхностной температурой 5°; между тем воды Тихого океана в феврале на той же широте подходят к берегам Курильской гряды с температурой 0°. В Охотском море температура поверхностной воды падает даже ниже нуля.

В сущности, сопоставляя роли двух океанов, омывающих один западную, а другой восточную границу соединенного Евразийского материка, и обобщая вывод на побережья всех материков земного шара, можно сказать, что распределением тепла между западными и восточными районами материков распоряжается кориолисова сила, которая отклоняет теплые океанские течения к востоку в обоих полушариях, а потому прижимает их к западным берегам материков.

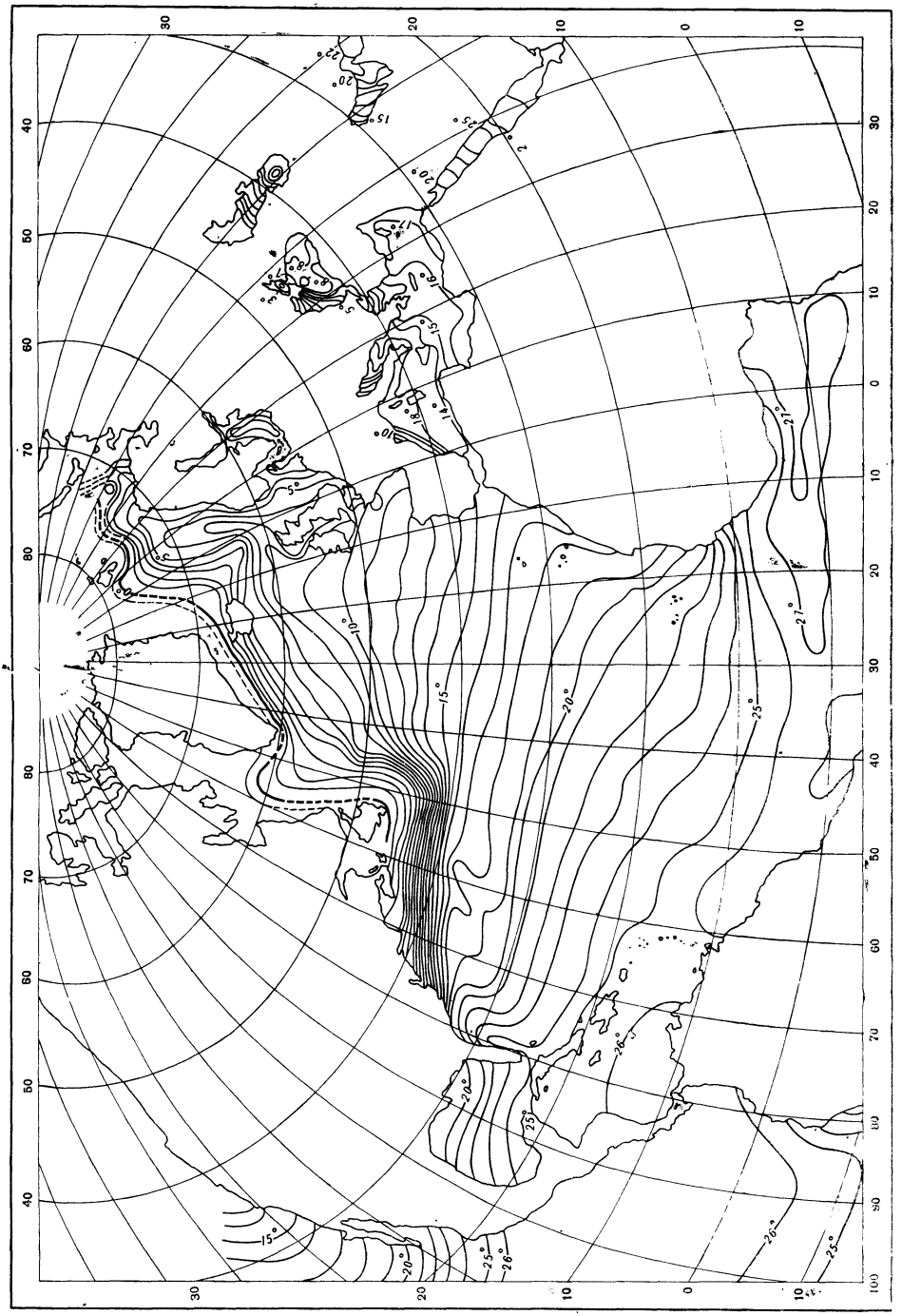


Рис. 308. Изотермы поверхностной воды в Атлантическом океане, февраль

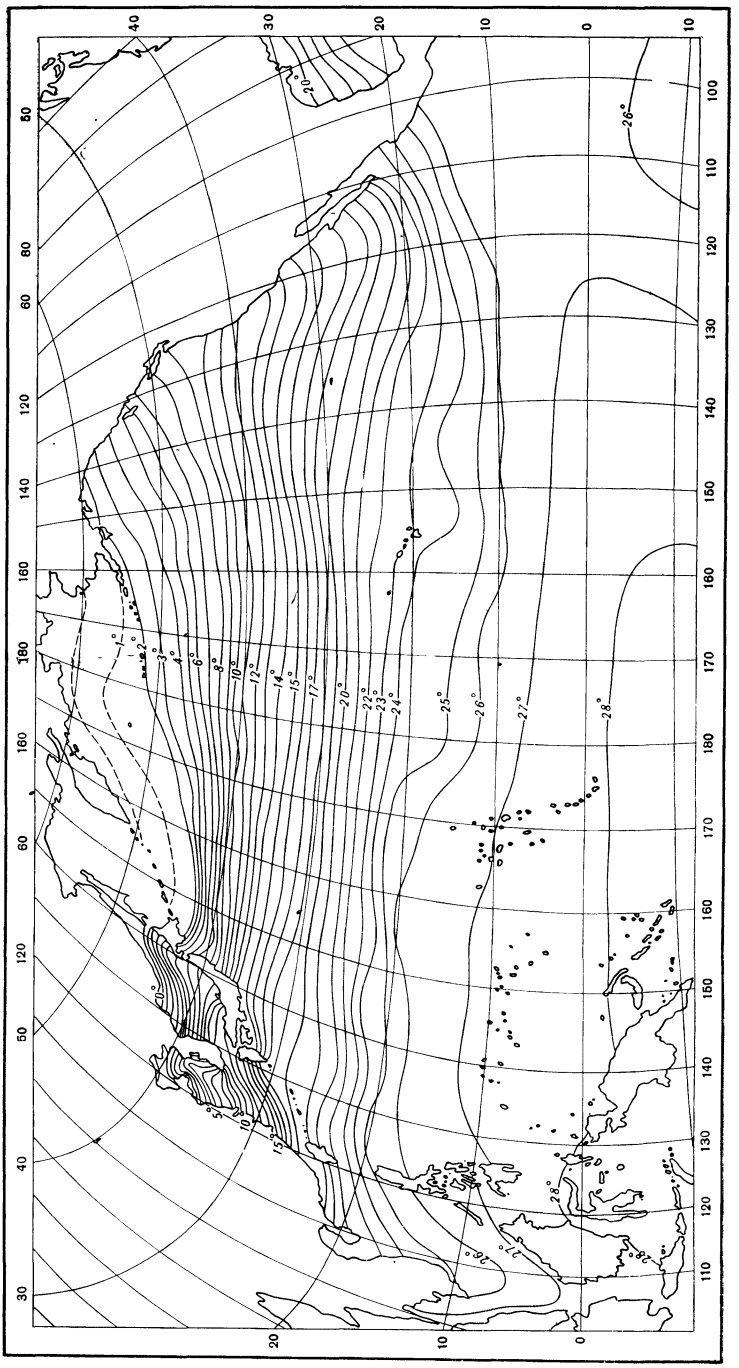


Рис. 309. Изотермы поверхностной воды в Тихом океане, февраль

Но как бы ни было мало влияние тихоокеанского теплового потока по сравнению с влиянием потока атлантического, результирующая картина должна все же зависеть от наложения двух простых картин: одной — исследованной выше и другой — обязанной своим происхождением тихоокеанским тепловым потокам. Скудность материалов и сложный рельеф местности не дают возможности так же полно проанализировать эти потоки, да и роль их, как только что указывалось, не так велика. Однако чрезвычайно интересно будет попытаться приблизительно вычислить меридиан, на котором должен находиться полюс холода.

Для этого воспользуемся соотношением (39), позволяющим определить истинную аномалию температуры, зная величину аномалии в точке, где поток Φ_2 вступает на материк, а также расстояние x, пройденное им в глубь материка. Допустим, что западный поток, идущий с атлантических вод, вступил на материк с аномалией τ_1, а восточный, идущий с тихоокеанских вод,— с аномалией τ_2. Пусть расстояние между точками вступления обоих потоков равно L. Тогда в некоторой произвольной точке, лежащей между ними и отстоящей на расстояние x от точки вступления атлантического потока, истинная аномалия может быть на основании уравнения (39) представлена в виде суммы

$$\tau = \tau_1 e^{-\beta x} + \tau_2 e^{-\beta(L-x)}. \tag{45}$$

Наименьшая аномалия окажется в той точке, где функция $\tau(x)$ будет обладать минимумом. Поэтому для определения координаты x_1 такой точки достаточно просто приравнять нулю производную $d\tau/dx$. Другими словами (после сокращения), положить

$$-\tau_1 e^{-\beta x_1} + \tau_2 e^{-\beta(L-x_1)} = 0.$$

Решение этого уравнения относительно x_1 дает

$$x_1 = \frac{L}{2} + \frac{\ln \frac{\tau_1}{\tau_2}}{2\beta}. \tag{46}$$

Конкретизируя задачу, рассмотрим движение обоих потоков вдоль Полярного круга. Пусть атлантический поток вступает на материк на меридиане 43° В, а тихоокеанский — на меридиане 172° В, что является совершенно естественным, согласно карте изаномал января (наиболее сурового месяца). Так как в первой из указанных точек температура превышает «идеально материковую» на 36°, а во второй — на 26°, то мы можем принять $\tau_1 = 36°$, $\tau_2 = 26°$, приблизительно $L = 6 \cdot 10^8$ и, наконец, $\sin \varphi = 0{,}92$.

Вспоминая выражение (38) для β и подставляя все числовые значения в (46), а вслед за тем откладывая на карте найденное значение x_1, придем к заключению, что полюс холода должен лежать на меридиане 127° В. В действительности он лежит примерно на меридиане 133° В.

Расхождение между этими цифрами невелико, а потому мы вправе считать выясненным физический смысл возникновения *минимума* температурной (истинной) аномалии в этой области материка Азии. На большее сближение этих цифр нельзя претендовать, и не только потому, что гористая местность к востоку от минимума должна смещать его на восток (поскольку горы уменьшают значение AH по сравнению с вычисленным в областях со спокойным рельефом), но еще и по иной причине, которая стала ясной после выхода в свет 3-го издания «Физики моря»: дело в том, что операции с постоянным значением AH законны только на не слишком больших расстояниях от побережья соединенного материка Европы и Азии; по мере приближения к минимуму аномалий коэффициент условной теплопроводности непрерывно уменьшается (см. § 13).

В сущности, решая задачу о движении двух потоков вдоль Полярного круга, мы могли говорить об определении не полюса холода, а собственно «меридиана» холода. Но на этом меридиане тотчас же определилось бы и положение полюса, если бы мы могли тем же способом проанализировать движение двух других потоков, направленных по меридиану,— одного от Чукотского, а другого от Японского морей. Наложение двух полученных картин позволило бы определить и широту, на которой должен лежать искомый полюс холода. К сожалению, эта часть задачи является совершенно неразрешимой ввиду очень большой сложности.

Тем не менее физический смысл картины изаномал, физический смысл полюса холода становится вполне ясным в свете той теории, которая была разработана в настоящем исследовании.

и) Колебания режима атлантических вод и их влияние на изменения климата страны. Развивая теорию происхождения морского и материкового климата, мы оперировали до сих пор с цифровым материалом, полученным в результате осреднения тридцатипятилетних наблюдений на всех станциях гидрометеорологической сети.

Вот почему применение статистического метода к изучению турбулентных процессов здесь явилось вполне законным и дало результаты более чем удовлетворительные и чрезвычайно интересные.

Разумеется, было бы ошибочным ждать столь же хороших результатов от работы над материалами какого-либо одного определенного года по тому же способу, оправдавшему себя в работе над массовым материалом. Однако сто́ит попытаться все же проанализировать по только что разработанной схеме процесс колебания режима атлантических вод в связи с процессом изменения элементов климата нашей страны.

Что касается внутренней сущности процесса, то она проявится весьма рельефно, если мы сравним аномалии и градиенты аномалий, вычисленные, с одной стороны, для тридцатипятилетнего периода, а с другой стороны, для 1932 г.

Такое сравнение, проделанное для теплового потока Φ_2 в направлении СЗ $\rightarrow$ ЮВ, показало, что в 1932 г. истинная аномалия возросла на 23% по сравнению с соответствующей величиной, найденной по материалам тридцатипятилетнего периода в том же месте. Замечательно, что настолько же возросла и величина градиента аномалии в полном согласии с уравнением (35).

Но если это так и если коэффициент AH не претерпел больших изменений, то на те же 23% возрос в 1932 г. и сам тепловой поток Φ_2, зарождающийся над теплыми водами Атлантики и проникающий далеко в глубь двух материков. Через каждый сантиметр береговой черты вступили не $4{,}5 \times 10^{12}$ калорий, как это имело место в среднем за 35 лет, а $5{,}5 \cdot 10^{12}$ калорий.

В столбе воздуха, опирающемся на площадь в 1 $см^2$, выделилось за год этим потоком количество тепла, которое на 4700 калорий [по уравнению (29)] превысило обычное выделение тепла потоком Φ_2. В результате температура воздуха повысилась примерно на 2,5°. Между прочим, легко убедиться, что из 4700 калорий, о которых только что говорилось, лишь очень немного пошло на действительное повышение температуры воздуха (примерно около 10%). Бо́льшая же часть этого дополнительного тепла израсходовалась в межпланетное пространство.

Как видим, попытка Шулейкина определить изменения тепловых потоков с Атлантики для 1932 г. привела к вполне удовлетворительным результатам. Вторая, столь же удачная попытка была сделана через несколько лет Е. В. Осмоловской. Этому автору удалось проследить за изменениями режима тепловых потоков, вторгающихся на территорию нашей страны на громадном протяжении — с запада на восток. Исследованием были охвачены теперь годы с 1935 по 1938. Прежде всего на картах изаномал, построенных Осмоловской, при первом же взгляде видно, что в исследуемые годы сами тепловые потоки

изменили свое направление: изаномалы стали ложиться под меньшим углом к параллелям; следовательно, векторы тепловых потоков, вторгающихся с севера, повернулись на некоторый угол по часовой стрелке. Весьма замечательно, что подобную же тенденцию к повороту обнаружили синоптики по отношению к путям шаров-пилотов, пущенных в зимнее время с различных наблюдательных пунктов. Затем карты Осмоловской показали, что за это время абсолютные величины температурных аномалий заметно возросли. Сильней всего они возросли на западных этапах, что вполне естественно: на этих этапах ярче отражается влияние потепления вод, находящихся под атлантическим влиянием.

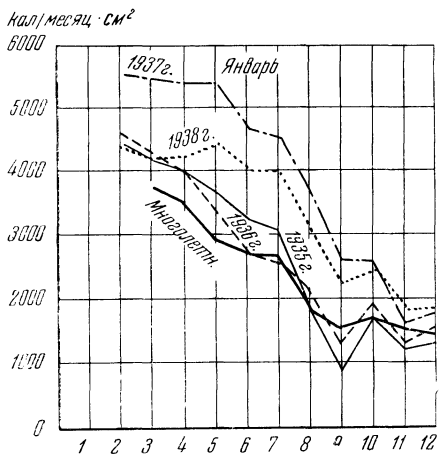


Рис. 310. Тепло, выделявшееся потоками в различные годы (по Е. В. Осмоловской)

На рис. 310, заимствованном из работы Осмоловской, видно, каковы количества тепла, выделявшиеся в различных точках (на 1 $см^2$ поверхности) под действием океанических тепловых потоков в атмосфере. Величины q вычислены здесь по соответствующим значениям τ посредством формулы Шулейкина (30). Как видим, в 1937 г. на западе количество выделявшегося тепла возросло на 2000 калорий (на 1 $см^2$ в месяц) по сравнению с количеством тепла, характеризующим среднее многолетнее состояние (за 50 лет).

Характерный ход кривых (падающих с запада на восток) показывает, что здесь проявляется именно влияние потепления атлантических вод, а не «общее потепление в северном полушарии», о котором еще до сих пор любят говорить некоторые климатологи.

Совершенно бесспорно доказывает это Осмоловская также и другим путем,— сравнивая изменения режима тепловых потоков в атмосфере с изменением температур воды в разрезе по одному и тому же меридиану. Именно, максимальное увеличение теплового бюджета воздушных потоков в точности соответствует тому году (1937), которому со своей стороны соответствует максимальное теплосодержание разреза. Так же точно временное похолодание вод на меридиане совершенно ясно вяжется с временным уменьшением количества тепла (в 1936 г.), выделенного в атмосфере на 1 $см^2$ поверхности материка, в различных точках.

к) Влияние Мирового океана на климат других материков. Опыт, удавшийся в отношении Евразийского материка, легко может быть распространен и на остальные материки. Пользуясь той же методикой Шулейкина, Н. Д. Ершова проделала для них аналогичные построения и вычисления [6]. На рис. 311—323 воспроизведены карты изаномал, построенные ею для различных месяцев и года в целом на основе климатологических атласов, изданных в различных странах.

Обзор этих карт показывает, что ни один материк в мире не испытывает такого благодетельного влияния океана, как Европа. В частности, весьма незавидные условия имеют место в Северной Америке, несмотря на то, что Гольфстрим проходит совсем близко от ее берегов. По-видимому, тепловое влияние его в таких районах, как Ньюфаундленд, сильно парализуется влиянием «холодной стены» Лабрадорского течения, вклинивающегося между струями Гольфстрима и берегом. Что касается Тихоокеанского побережья Северной Америки, то оно испытывает влияние одного лишь очень слабого теплого течения, а потому ни в какой степени не может равняться по климатическим

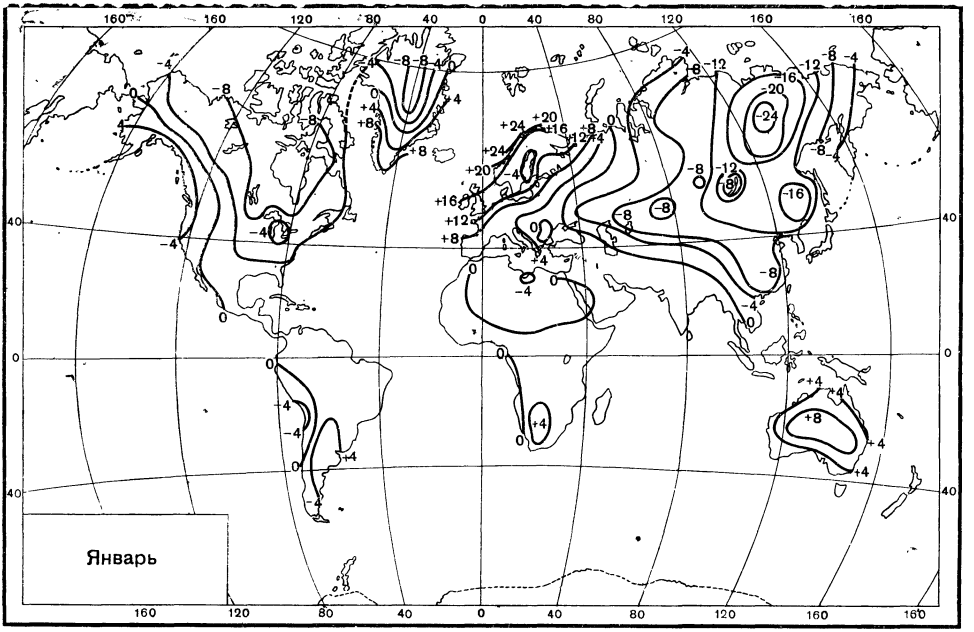


Рис. 311—323. Изаномалы на картах мира (по Н. Д. Ершовой)

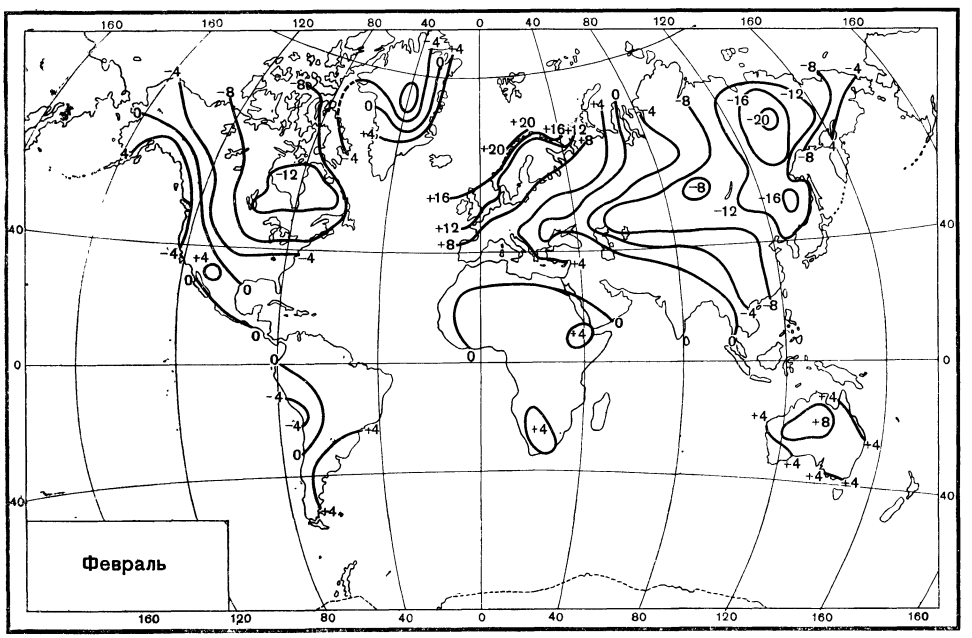


Рис. 312

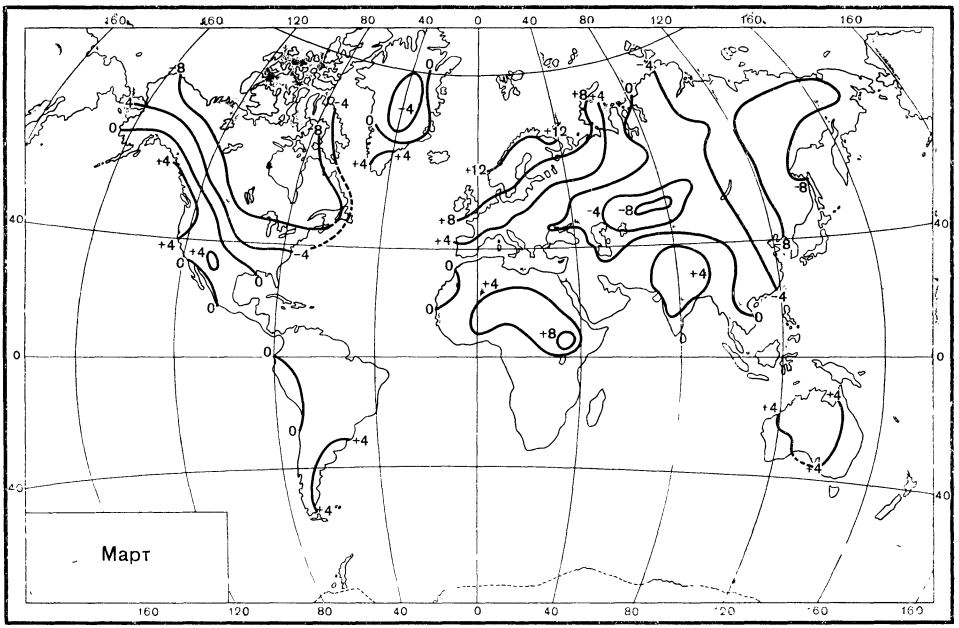


Рис. 313

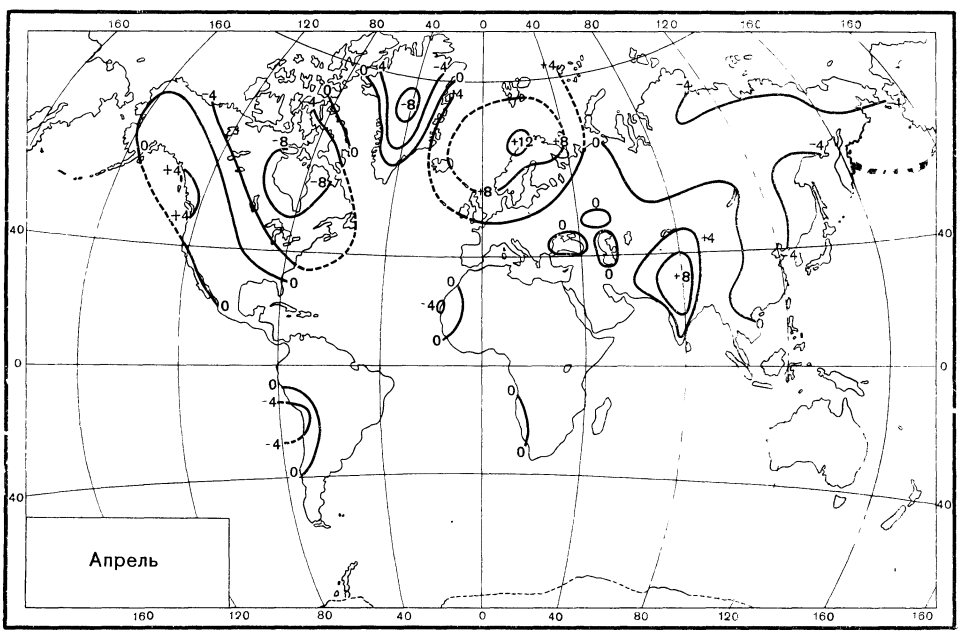


Рис. 314

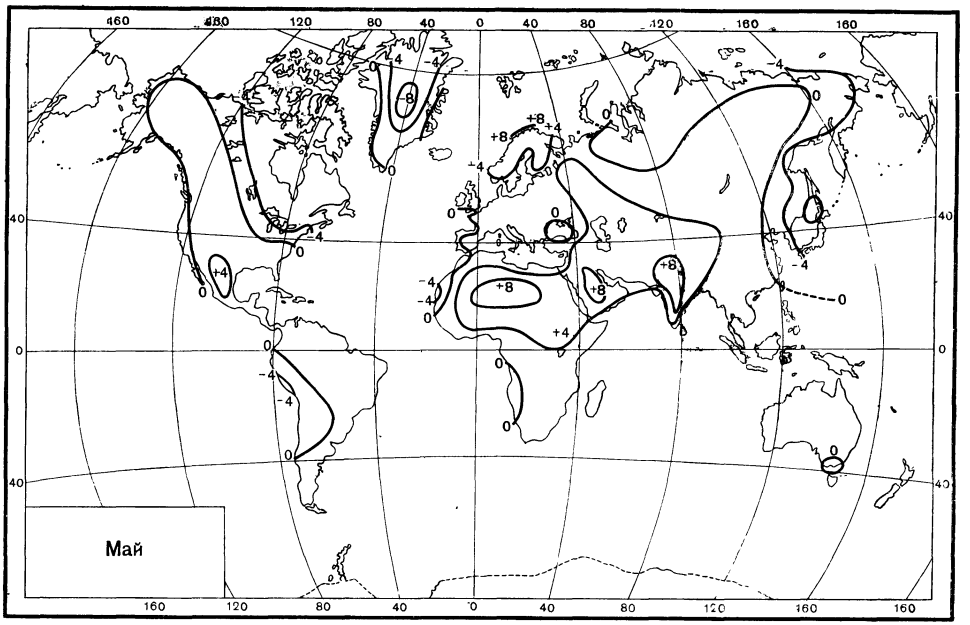


Рис. 315

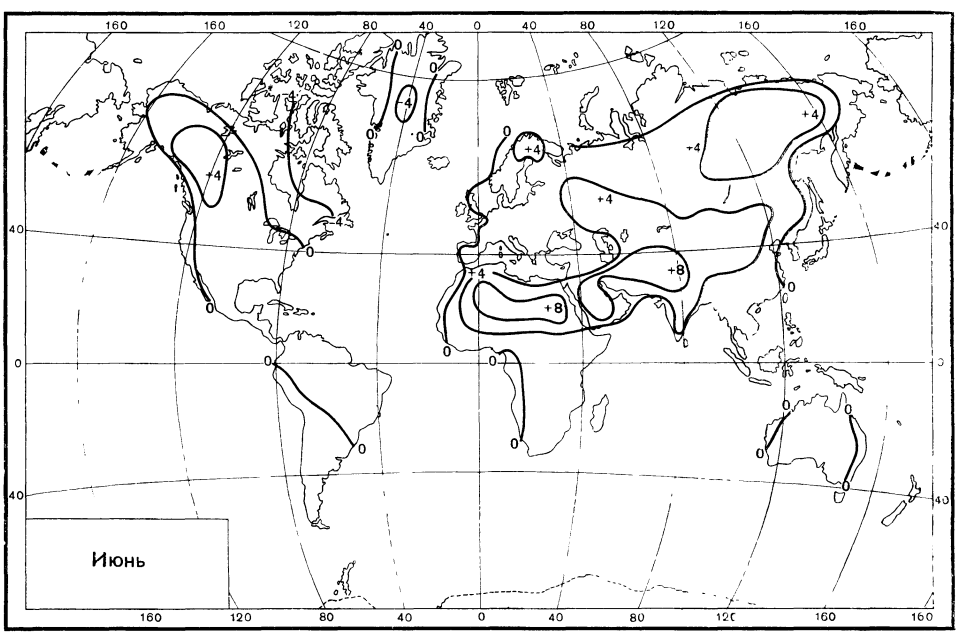


Рис. 316

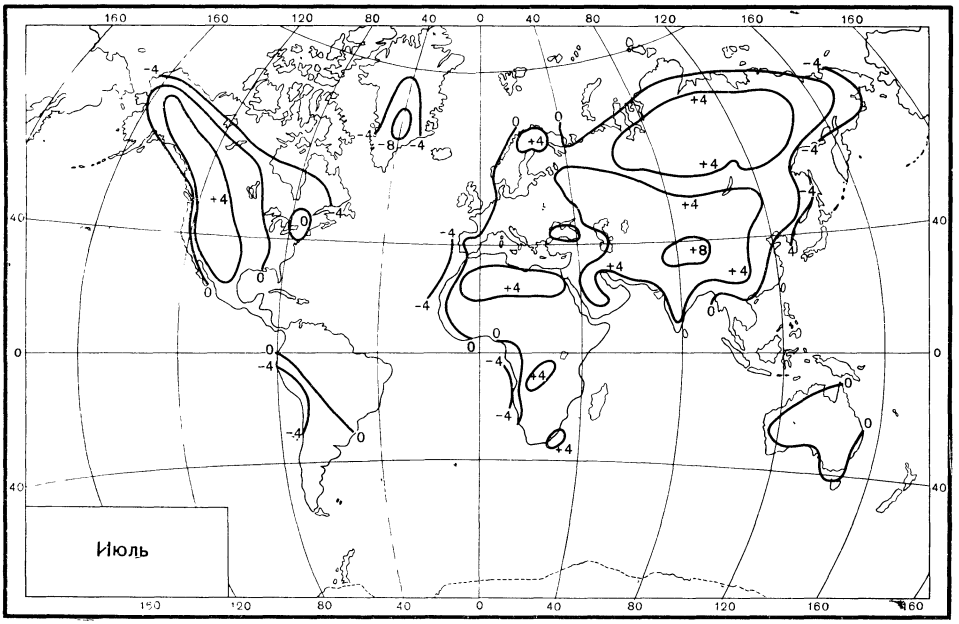


Рис. 317

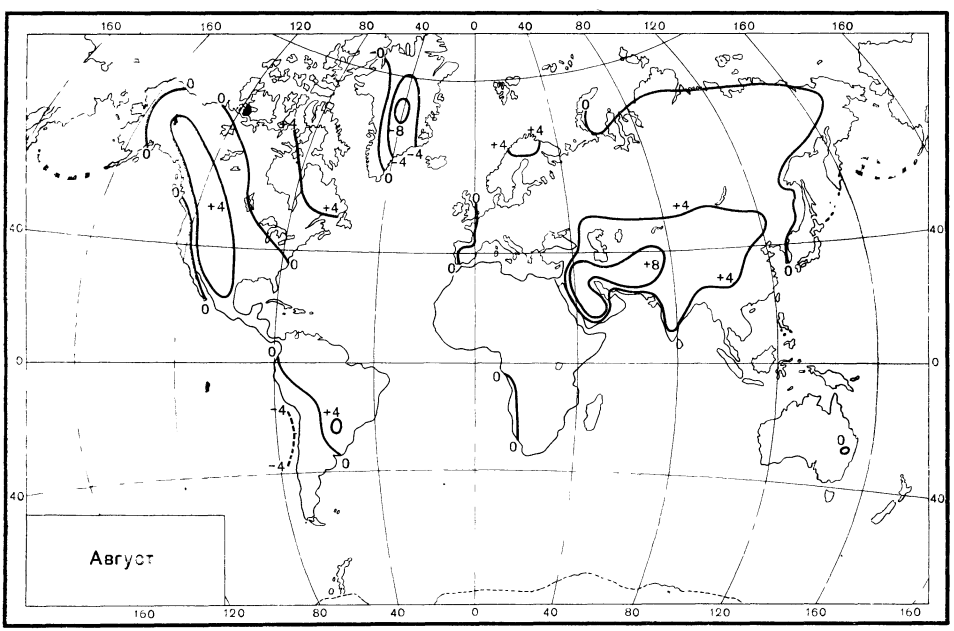


Рис. 318

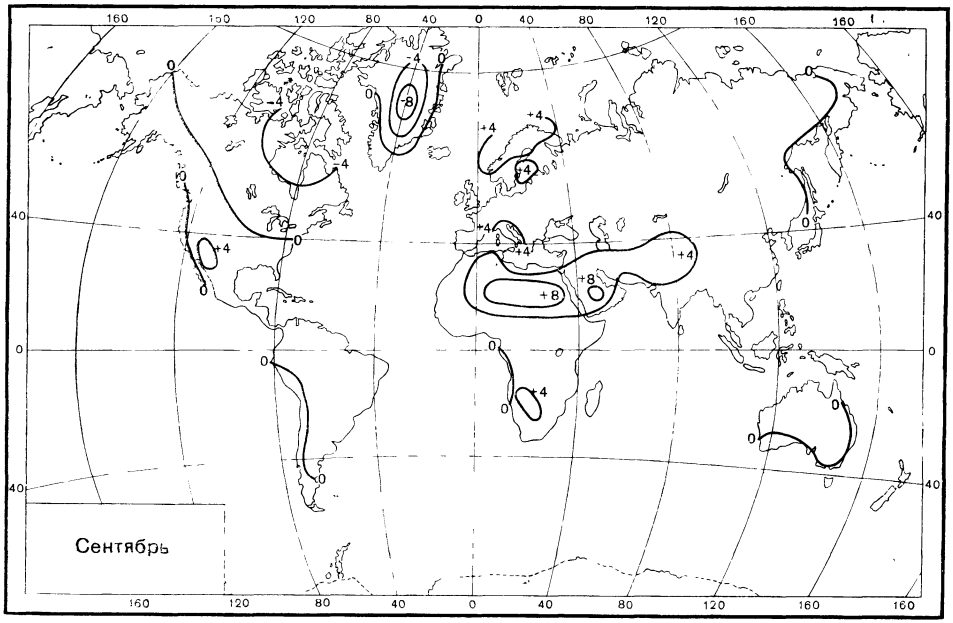


Рис. 319

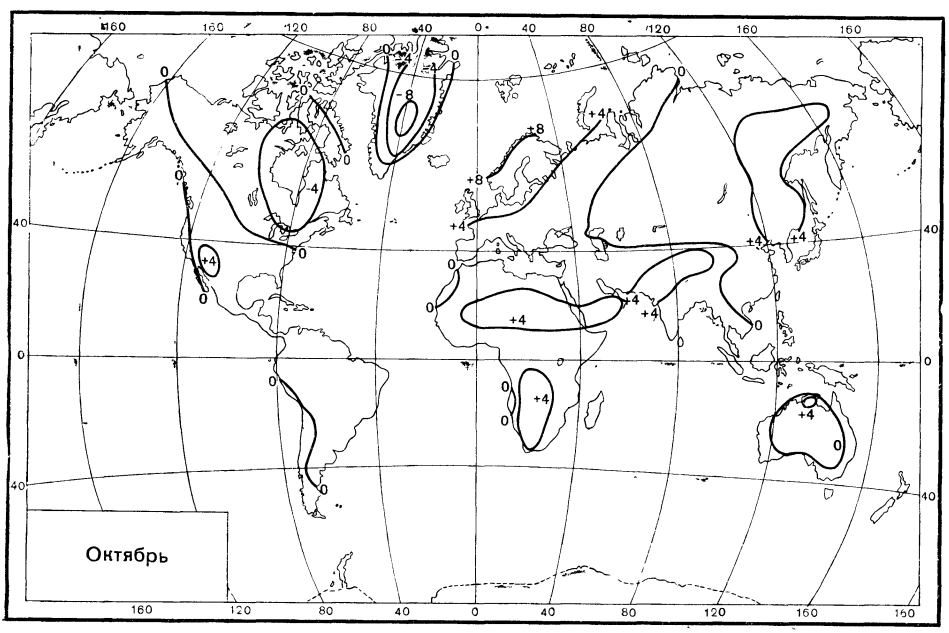


Рис. 320

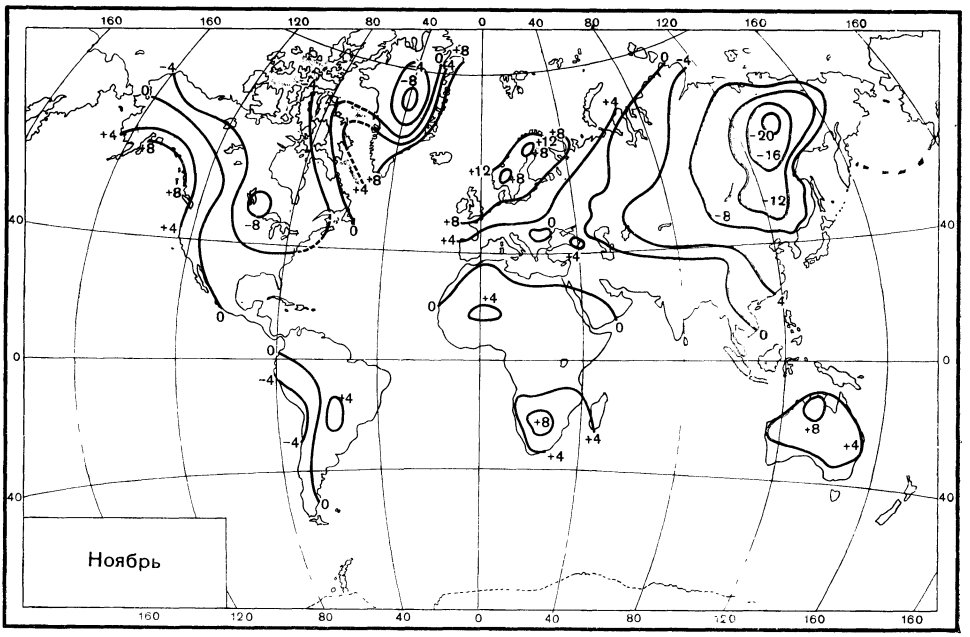


Рис. 321

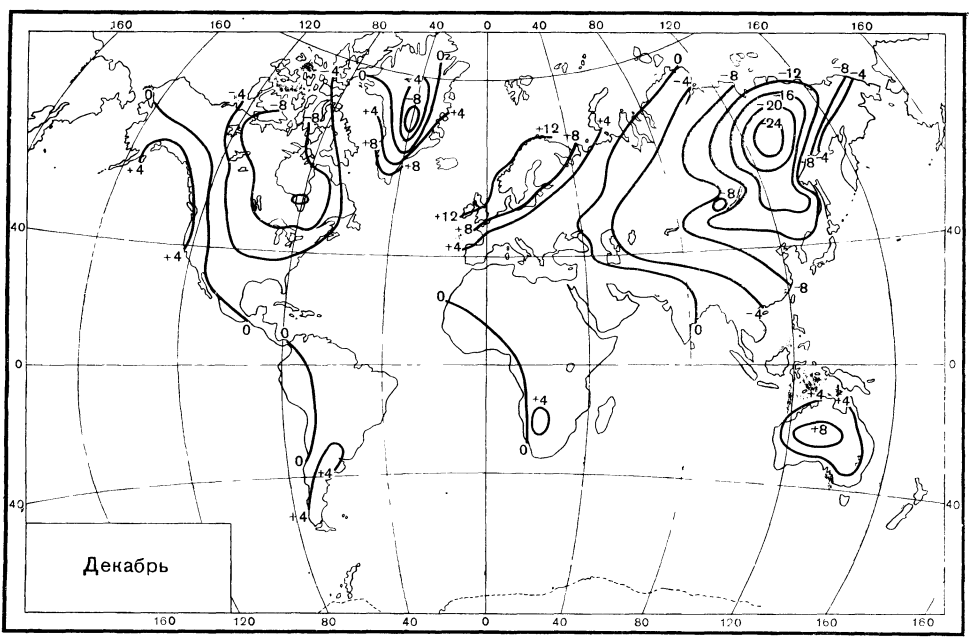


Рис. 322

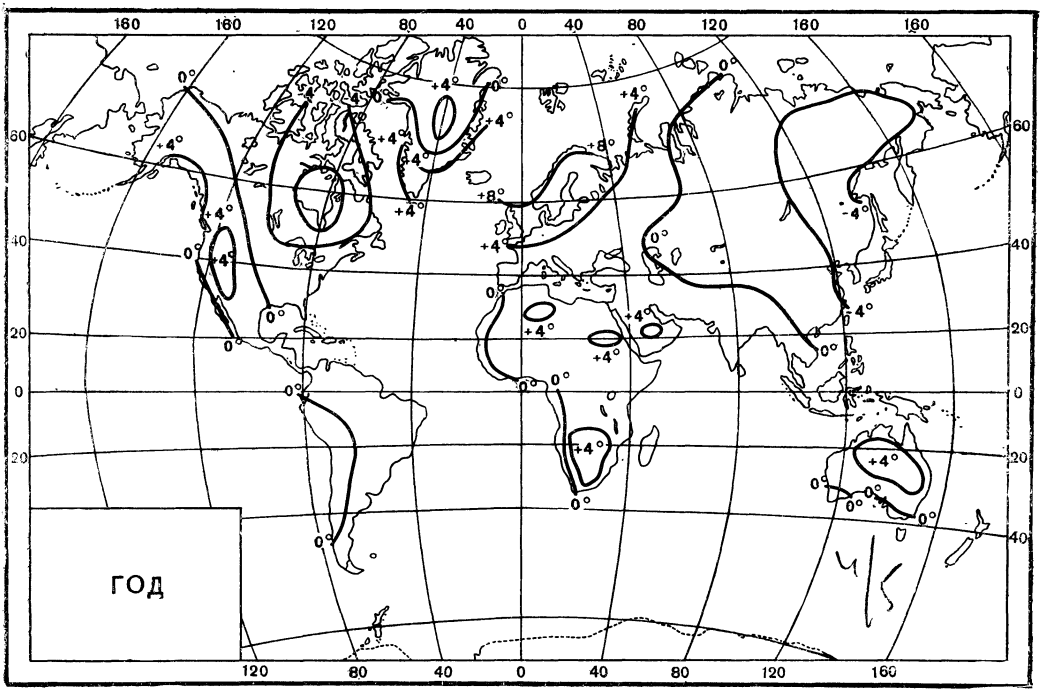


Рис. 323

условиям с берегами Западной Европы, находящимися на тех же самых широтах.

На рис. 324 воспроизведена диаграмма тепловых потоков, построенная Н. Д. Ершовой для двух участков берегов Северной Америки: кривая *1* соответствует участку, расположенному на широте 60°, а кривая *2* — участку, лежащему на широте 45°. Как видим, последний характеризуется весьма большими тепловыми потоками с материка на море в летнее время. Здесь потеря тепла материком в летнее время, обусловленная этими потоками, значительно превышает поступление тепла с океана в зимнее время.

л) *О возможности учета теплоизолирующего действия горных хребтов.* На всем протяжении настоящего раздела принималось при вычислениях, что условный коэффициент турбулентной теплопроводности AH постоянен во всех точках страны. В действительности он, разумеется, зависит от большого числа различных факторов. В частности, в районах горных цепей величина AH, несомненно, должна уменьшаться. На это указывает и элементарное рассмотрение условий, в которых идет здесь перенос тепла; указывает на это также хотя бы беглый анализ карт изаномал для окологорных районов (например, по соседству с Уральским хребтом, вокруг которого как бы загибаются изаномалы).

К вопросу о роли рельефа земной поверхности, о горных хребтах как теплоизоляторах мы еще вернемся в § 13 этой главы.

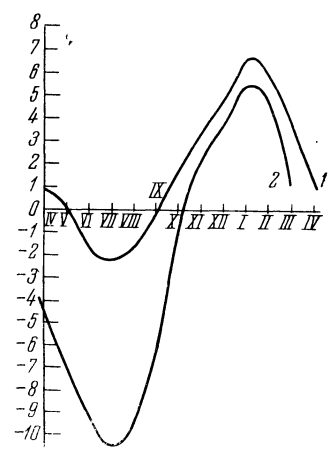


Рис. 324. Изменения тепловых потоков в продолжение года

м) Вычисление средней месячной температуры, которая возможна среди зимы в центре Антарктиды. Рис. 306 показывает, что на Северном полюсе средняя температура января была бы равна около —77°, если бы на Земле отсутствовали океаны. В действительности там средняя температура воздуха никогда не опускается так низко, благодаря подогреванию воздуха океанской водой сквозь лед. Зато в Антарктиде — в разгар зимы (в июле, августе) — рис. 306 дает возможность ожидать такую температуру. Эта цифра была опубликована Шулейкиным еще в 1949 г. (в 3-м издании «Очерков по физике моря»). Она была встречена скептически: температура казалась многим слишком низкой. Как известно, впоследствии, через 10 лет, непосредственные измерения температуры воздуха в Антарктиде в отдельные дни давали даже более низкие значения.

§ 3. Тепловые противоречия между океаном и материком как основа для формирования муссонного поля

В предыдущих параграфах было показано, что все важнейшие характеристики климата материков обусловлены *влиянием океана*: все эти характеристики в корне своем зависят от количества тепла (и влаги), приносимого на материки за счет некоторых сложных процессов, названных нами условной теплопроводностью атмосферы. К сожалению, мы еще не научились учитывать даже в такой приближенной форме количество влаги, переносимой с океана на материк в тех или иных условиях.

В настоящем параграфе и в нескольких последующих мы покажем, что сама условная теплопроводность осуществляется в *муссонных потоках воздуха*, возникающих в системе океан — атмосфера — материк под действием неодинакового прогрева атмосферы над жидкой и над твердой подстилающими поверхностями. В дальнейшем будет рассмотрено значение *зональной циркуляции* воздуха, также играющей очень большую роль в процессе переноса тепла и влаги с океана на материки.

Потоки с моря играют громадную роль по отношению к территории нашей страны, причем на климате ее сказываются не только океаны, но и внутренние небольшие моря, а частично даже такой малый водный бассейн, как озеро Байкал. Без преувеличения можно сказать, что для северо-западной части СССР океанические тепловые потоки в атмосфере не менее важны в климатическом отношении, чем для таких тропических стран, как Индия, Индокитай, с которыми издревле принято связывать само слово «муссон». Разумеется, форма, в которой проявляется влияние муссона, должна быть различной в разных поясах земного шара. Неминуемо должны быть различны и времена года, соответствующие наиболее яркому проявлению муссона. В тропиках, как известно, резко выражен летний муссон, а зимний выражен бледно; напротив, где-нибудь на побережье северных морей, где-нибудь на Мурмане, резко выражен зимний муссон, а летний проявляется очень слабо.

На земном шаре существуют две очень интересные области суши, которые *круглый год* порождают воздушные потоки, вполне тождественные по своей природе с зимним муссоном: это — Гренландия и Антарктида. Их поверхность круглый год покрыта ледниковым щитом, а потому воздух над ними круглый год холодней, чем воздух над прилежащими водами океана. Хотя арабское слово «мауcим», от которого произошло само слово «муссон», означает в переводе «времена года», но в этих двух случаях не приходится приносить физическую сущность явления в жертву старым филологическим корням: воздушные потоки, возникающие между океаном и громадными поверхностями ледников, представляют собой, с точки зрения физики, полноправный муссон, не меняющий, однако, своего направления.

Все языки знают много подобных примеров: ведь слово «чернила» не потеряло своего смысла после того, как стали применять цветные, а не черные чернила. «Стрелять» люди не перестали, после того как вышли из употребления стрелы.

Нетрудно видеть, что *тепловая и гидродинамическая* стороны явления муссонов находятся между собой в *двойной* связи: с одной стороны, различие в прогреве воздушных масс над океаном и материком вызывает различие атмосферного давления над ними и порождает тем самым муссонные потоки; с другой стороны, потоки воздуха в неоднородном температурном поле неизбежно порождают перенос тепла с океана на материк или в обратном направлении и тем самым воздействуют на температурное поле.

Задачи подобного рода возникают при исследовании естественной тепловой *конвекции* и представляют чрезвычайно большие трудности даже в стационарной форме, не говоря уже о случаях нестационарных.

Трудность решения обусловлена тем, что оно связано с интегрированием целой совокупности уравнений, не только уравнений гидродинамики в форме Навье — Стокса

$$\frac{d\mathbf{W}}{dt} + (\mathbf{W}\,\mathrm{grad})\,\mathbf{W} = \mathbf{F} - \frac{1}{\delta}\,\mathrm{grad}\,p + \frac{\mu}{\delta}\,\nabla^2\mathbf{W}, \tag{47}$$

но и уравнений переноса тепла в форме Остроградского — Кирхгофа

$$\frac{d\vartheta}{dt} - K\nabla^2\vartheta + \frac{1}{c}\,(\mathrm{grad}\,c\vartheta\,\mathbf{W}) = 0, \tag{48}$$

где

$$K = \frac{k}{c\delta}, \tag{49}$$

k — теплопроводность, c — теплоемкость. Разумеется, при этом необходимо также учитывать и условие неразрывности

$$\mathrm{div}\,\mathbf{W} = 0. \tag{50}$$

Именно по такой причине задачи свободной тепловой конвекции решены только для нескольких единичных случаев и притом для случаев значительно более простых по сравнению с интересующей нас картиной муссонов в природной обстановке.

В предыдущих изданиях «Физики моря» были изложены результаты наших попыток приближенного решения задачи о зимнем муссоне в поле круглого моря, обрамленного со всех сторон материком, простирающимся в бесконечность [7, 8].

За истекшие десятки лет в отечественной литературе появилось несколько работ, посвященных более строгому решению нестационарной задачи [9, 10].

Несмотря на остроумные приемы, применяемые всеми цитированными авторами, результаты их исследований противоречат в весьма значительной степени целому ряду основных сторон муссонных явлений, действительно наблюдаемых в природе. В свете последних наших исследований, о которых будет речь ниже, становятся понятными причины этих противоречий и причины отклонений от природных условий также и в некоторых наших старых исследованиях. Например, Шулейкин обнаружил, что и в его работах, и во всех без исключения работах других авторов, *неверны* условия на верхней границе муссонного поля: были открыты чрезвычайно важные новые явления, прежде ускользавшие от исследователей. Эти явления в *корне* меняют условия на верхней границе муссонного поля и создают совсем не то распределение градиентов давления на высотах, которое считалось заданным во всех теоретических работах. Истинная картина поля температур и поля давлений в природе оказалась настолько сложнее принятой во всех теоретических

работах, что в настоящее время не может быть и речи о каком-либо простом уточнении предложенных теоретических выкладок: необходимо *заново* строить нестационарную теоретическую модель муссонного поля.

Вот почему, в ожидании построения такой модели, мы приведем здесь материалы, которые, без сомнения, будут полезны каждому из ее строителей.

Прежде всего простейший вид задачи как в старой, так и в любой новой постановке соответствует круглому морю, обрамленному бесконечно простирающимся материком, или круглому материку, обрамленному бесконечно простирающимся океаном.

Применительно к обоим отмеченным случаям интеграл уравнений гидродинамики окажется наиболее простым, если будет возможно представить радиальную составляющую скоростей в форме

$$u = UZ_1 \tag{51}$$

и тангенциальную слагающую в форме

$$v = VZ_2, \tag{52}$$

где U и V будут функциями одного лишь расстояния r от центра моря (материка), а Z_1 и Z_2 — функциями одной лишь высоты над подстилающей поверхностью.

Вертикальная составляющая скоростей w вслед за тем определится из условия неразрывности, которое в цилиндрической системе координат принимает, как известно, общий вид

$$\frac{1}{r}\frac{\partial (ru)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \psi} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \tag{53}$$

где ψ — азимут точки.

В обоих наших случаях оно упрощается ввиду симметрии

$$\frac{\partial v}{\partial \psi} = 0,$$

а значит,

$$\frac{1}{r}\frac{\partial (ru)}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \tag{54}$$

Уравнение теплопередачи Остроградского — Кирхгофа (48) в цилиндрической системе координат приобретает общую форму

$$u\frac{\partial \vartheta}{\partial r} + \frac{v}{r}\frac{\partial \vartheta}{\partial \psi} + w\frac{\partial \vartheta}{\partial z} = K\left(\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \vartheta}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \psi^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial z^2}\right). \tag{55}$$

В наших случаях вследствие симметрии

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial \psi} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \psi^2} = 0,$$

а стало быть,

$$u\frac{\partial \vartheta}{\partial r} + w\frac{\partial \vartheta}{\partial z} = K\left(\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \vartheta}{\partial r} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial z^2}\right). \tag{56}$$

Даже в случае возможности разделения переменных при интегрировании по типу (51) и (52) уравнения гидродинамики и уравнения теплопередачи (56) будут связаны между собой двойной связью, о которой говорилось выше. Поэтому, учитывая сложность строения температурного поля и поля давлений в природных условиях, едва ли можно ожидать удачи при попытках непосредственного интегрирования уравнений гидродинамики совместно даже с упрощенным уравнением (56), полученным для круглого моря или круглого материка.

Зато есть все основания рассчитывать на успех решения задачи по методу *последовательных приближений*. Здесь в ходе решения принесут пользу вспо-

могательные соотношения, которые Шулейкин получил приближенным методом и подтвердил на достаточно надежном и достаточно обильном материале непосредственных наблюдений в природе.

Займемся этими соотношениями.

§ 4. Основное соотношение между элементами температурного и барического наземного поля, приближенно соблюдающееся в муссонах

Непосредственные наблюдения показывают, что в продолжение года температура воздуха колеблется особенно сильно у самой подстилающей поверхности. По мере увеличения высоты амплитуда годичных колебаний быстро падает: на высоте 2 *км* разность горизонтальных температурных градиентов между июлем и январем уменьшается примерно в 7 раз, а на высоте 4 *км* температурные градиенты (горизонтальные) практически могут считаться одинаковыми в июле и в январе. Отсюда и возникло представление, что перенос тепла в горизонтальном направлении происходит преимущественно в слое воздуха высотой 2 *км* или, по мнению других авторов, 4 *км*. Толщину слоя атмосферы, в котором сосредоточены все муссонные явления, многие авторы считали равной 2 *км*. Такого мнения придерживались и мы до последнего времени, пока не пришлось его коренным образом изменить.

Однако, как увидим ниже, современное представление о строении муссонных потоков не противоречит надежно установленному факту спадания почти до нуля разности между горизонтальными температурными градиентами июля и января на высоте около 4 *км*. Именно этим объясняется правильность основного соотношения, которое своевременно было нами выведено, несмотря на недостаточное знание вертикального строения муссонного поля. Сейчас мы его выведем, приняв во внимание уточненное представление о температурных градиентах.

Допустим, что годичные колебания горизонтальных температурных градиентов обращаются практически в нуль на высоте H над подстилающей поверхностью. Тогда давление на уровне моря можно будет положить равным

$$p = gH\delta + p_1, \tag{57}$$

где p_1 — атмосферное давление на высоте H, которое можно будет считать неизменным в пространстве и практически очень медленно меняющимся во времени. Плотность δ, входящая в соотношение (57), в свою очередь связана с давлением p и *средней* температурой $\overline{T}$ деятельного слоя уравнением состояния воздуха, с газовой постоянной R:

$$\delta = \frac{p}{R\overline{T}}. \tag{58}$$

Следовательно, полный дифференциал плотности δ должен выразиться так:

$$d\delta = \frac{dp}{R\overline{T}} - \frac{p}{R}\frac{d\overline{T}}{\overline{T}^2}, \tag{59}$$

а стало быть, на основании (57) и (59)

$$dp = gHd\delta = \frac{gH}{R}\frac{dp}{\overline{T}} - \frac{gH}{R}p\frac{d\overline{T}}{\overline{T}^2}. \tag{60}$$

Введем сокращенное обозначение

$$\frac{gH}{R} = E; \tag{61}$$

тогда после разделения переменных в (60) найдем

$$\frac{dp}{p} = \frac{E d\overline{T}}{E\overline{T} - \overline{T}^2} \tag{62}$$

и после интегрирования

$$p = p_0 \frac{(\overline{T}_0 - E)\,\overline{T}}{(\overline{T} - E)\,\overline{T}_0}\,; \tag{63}$$

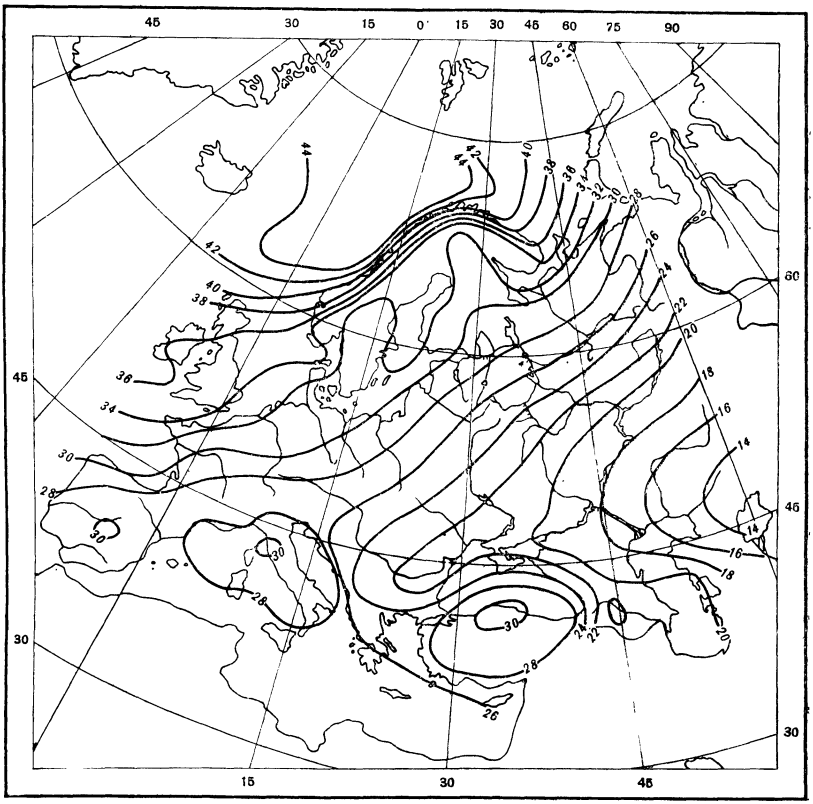


Рис. 325. Изаномалы для февраля в Европе

но отсюда следует, что

$$\operatorname{grad} p = -p_0 \frac{(\overline{T}_0 - E)\,E}{(\overline{T} - E)^2\,\overline{T}_0} \operatorname{grad} \overline{T}, \tag{64}$$

индекс 0 соответствует условиям, принятым за нормальные.

Современные наблюдения показывают, что приблизительно можно принять градиент средней температуры деятельного слоя равным *половине* градиента температур (тоже по горизонтали) у самой подстилающей поверхности

$$\operatorname{grad} \overline{T} \approx \frac{1}{2} \operatorname{grad} T. \tag{65}$$

С другой стороны, в процентном отношении, абсолютная температура не слишком сильно колеблется около значения $\overline{T}_0$, которое может быть принято за нормальное. Следовательно, для построения приближенной картины позволительно будет полагать, что

$$\operatorname{grad} p = -\Pi \operatorname{grad} T, \tag{66}$$

где на основании (64) и (65) с достаточным приближением будет

$$\Pi = \frac{Ep_0}{2\bar{T}_0(\bar{T}_0 - E)} = \frac{p_0}{2\bar{T}_0}\frac{gH}{RT_0 - gH}. \qquad (67)$$

В дальнейшем мы увидим, что уравнение (66) оправдывается на каждом шагу, при сопоставлении градиентов давления и температуры, а также их конечных приращений в пространстве и во времени. Совершенно очевидно,

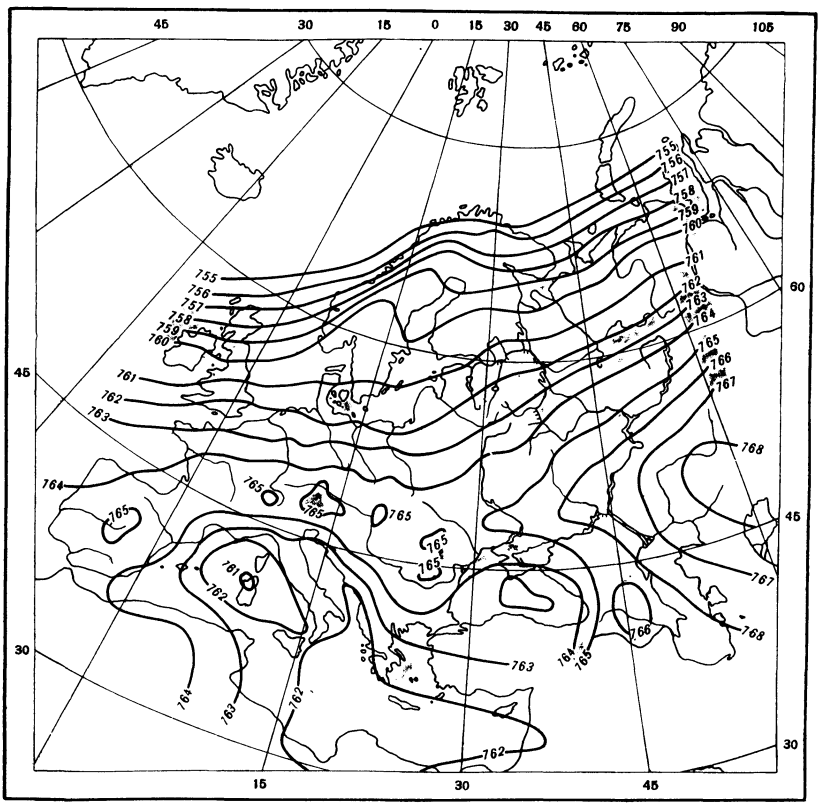


Рис. 326. Климатологические изобары для февраля в Европе

что вместо абсолютной температуры в этом уравнении может стоять температура, отсчитываемая от нуля Цельсия, ибо величина градиента температуры не зависит от выбора нуля.

По той же причине при изучении муссонного поля в чистом виде вместо температуры воздуха в данной точке мы будем в уравнение (66) подставлять *аномалию* температуры τ, созданную влиянием океана. Уравнение

$$\operatorname{grad} p = -\Pi \operatorname{grad} \tau, \qquad (68)$$

так же как и (66), можно рассматривать в качестве основного уравнения муссонного поля, весьма удобного для ряда исследований.

В частности, нетрудно видеть, что из (68) вытекает любопытная связь между картами изаномал температуры и картами климатологических изобар для того же месяца. Допустим в первом приближении, что рассматривается область материка, настолько близкая к океану, что ее температурный режим практически отражает на себе влияние именно этого океана и совсем слабо связан с другими океанами. Допустим также, что климатологические изобары рисуют в основном лишь муссонное поле, поле воздушных потоков, ко-

торые вызваны лишь температурными неоднородностями, отраженными на карте изаномал. При соблюдении *обоих* упомянутых условий мы должны будем ожидать на основании уравнения (68), что расположение изолиний на картах τ и картах *p копируют друг друга*.

Посмотрим, как обстоит дело в действительности. Сопоставим между собой карту температурных изаномал для Европы в феврале (рис. 325) и карту климатологических изобар, построенных для того же материка и для того же месяца (рис. 326).

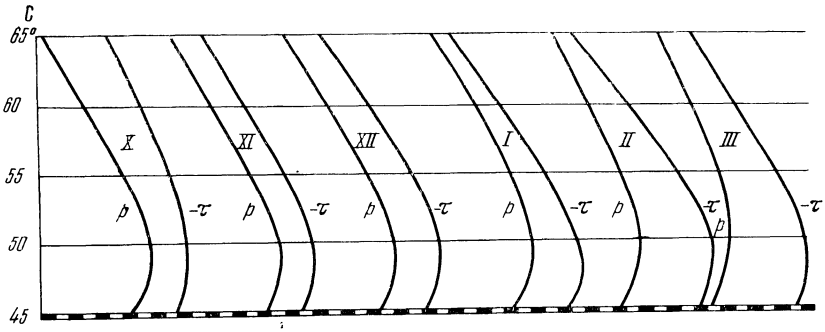


Рис. 327. Разрез по меридиану 40° в. д. поля изаномал и изобар

Как видим, между обеими картами действительно существует замечательное сходство, простирающееся до деталей: чрезвычайно похожи характерные изгибы кривых на обеих картах над Скандинавским п-овом; местное понижение аномалии температуры над Пиренейским п-овом и над Кавказом соответствует местному повышению давления над этими областями материка; местное повышение аномалии температуры над Средиземным и над Черным морями соответствует местному понижению давления над этими морями; характерные «языки» кривых, вторгающиеся из Азии в Европу между Каспийским морем и Уральским горным хребтом, видны на обеих картах и чрезвычайно схожи между собой.

Совокупный анализ карт температурных изаномал и климатологических изобар становится наиболее четким и убедительным при сопоставлении *меридиональных разрезов*. В качестве примера на рис. 327 изображены результаты таких разрезов по меридиану $\lambda = 40°$ в. д. в пределах от $\varphi = 45°$ С до $\varphi = 65°$ С. Для каждого месяца, с октября по март включительно, представлено изменение вдоль меридиана двух величин: температурной аномалии с обратным знаком (кривая — τ) и атмосферного давления (кривая *p*).

Диаграмма рис. 327 показывает замечательное сходство в ходе обеих кривых. Особо интересен неизменный поворот обеих кривых на широте Луганска (около 48° С). Здесь проходит пояс, соответствующий наиболее ярко выраженному материковому климату: к северу сказывается большее влияние Атлантического океана, а к югу приобретает силу непосредственное влияние Черного и отчасти Каспийского морей. Именно этим обстоятельством объясняется характерная форма «языков» на изолиниях, вторгающихся в Европу из Азии на обеих картах. Тем же объясняется запоздалый снег весной и слишком ранний осенью, который видят пассажиры, едущие по железной дороге из Москвы на юг, где-нибудь между Лозовой и Синельниковым, в то время как ни к югу, ни к северу от «наиболее материкового» пояса *снега нет*.

Рассмотрим подробней годовой ход обоих градиентов на северном краю диаграммы рис. 327. Он изображен отдельно на рис. 328, полученном на основании вычислений по рис. 327. Слева на рис. 328 отмечены масштабы для градиента температурных аномалий и градиента давления.

Сдвиг фаз между кривыми *p* и — τ во времени, составляющий около $\frac{\pi}{8}$,

объясняется, видимо, какими-то местными условиями муссонного поля и его годичных изменений, ибо аналогичные сопоставления, проделанные Шулейкиным для других районов, не обнаружили никакого сдвига фаз между ходом температурной аномалии и ходом давления в продолжение года. С другой стороны, многочисленные промеры градиентов, проделанные и этим, и другими авторами [9] для различных районов, показали, что между градиентом давления и градиентом температурной аномалии, как правило, существует зависимость (68).

Значение П, вычисленное как среднее из многих определений, может быть положено $П = 1{,}6 \cdot 10^3$, если градиент давлений выражен в абсолютных единицах (давление — в динах на квадратный сантиметр, т. е. в микробарах). Если давление выражено в единицах, широко применяемых в динамической метеорологии,— в миллибарах, то, очевидно, $П = 1{,}6$.

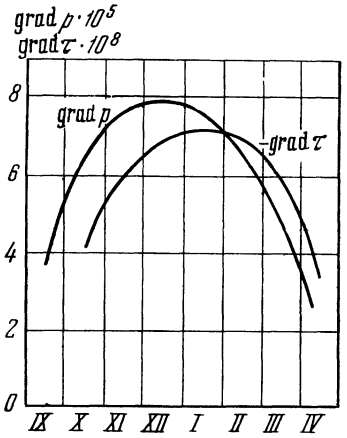


Рис. 328. Годовой ход градиентов

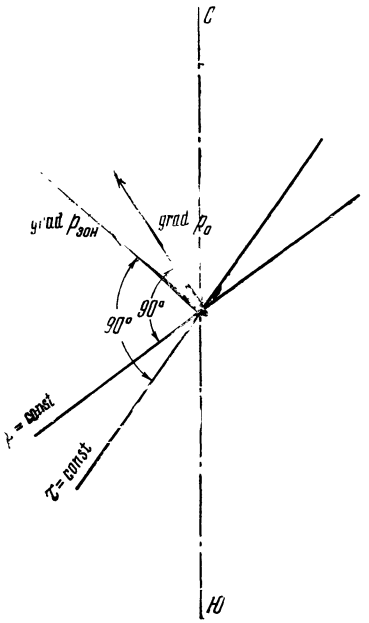


Рис. 329. Разложение векторов

Весьма замечательно, что при изменениях давления в муссонном поле, связанных с изменениями температур *во времени*, конечные приращения давления связаны с конечными приращениями температур *тем же самым* соотношением, с тем же коэффициентом П. В этом мы убедимся ниже, исследуя колебания режима в муссонном поле.

На основании работы А. А. Дмитриева [9] в настоящее время можно утверждать, что соотношение (68) с тем или иным приближением рисует истинную картину в преобладающей части материковых районов. Что касается знака в соотношении (68), то он не соблюдается лишь в совсем ничтожной полосе Азиатского материка и в Аляске. Соотношение (68) совсем неприменимо в районах, которые лежат между «полюсом холода» и районом зимнего стационарного максимума давления в Азии. Последнее обстоятельство не опровергает, а подтверждает наши теоретические соображения. Совершенно очевидно, что район между «полюсом холода» и стационарным максимумом давления *заведомо не удовлетворяет* первому из условий, необходимых для применения уравнения (68); сам сдвиг максимума давления по отношению к минимуму температуры произошел из-за очень серьезных осложнений, которые вносятся в задачу *несколькими* источниками тепла, например Тихим океаном, полярными морями, омывающими берега Сибири, и т. д. В то же время первое условие применимости достаточно хорошо удовлетворяется в Европе: совместное действие Атлантики и небольших внутренних морей

приводит лишь к небольшому сдвигу между местными максимумами температурной аномалии и соответствующими местными минимумами давления, что видно, например, на Черном и на Средиземном морях по картам на рис. 325 и 326.

Соотношение (68) позволяет определить высоту H деятельного слоя, в котором происходят наиболее резкие температурные колебания, в продолжение года: коэффициент П связан с этой величиной посредством формулы (67). Для удобства вычисления преобразуем последнюю, выразив H как явную функцию от П:

$$H = \frac{2\Pi R T_0^2}{g\,(p_0 + \Pi T_0)}\,. \tag{69}$$

Подставим сюда числовые значения «нормальных» величин: $T_0 = 260°$, $p_0 = 10^6$ *мкбар*, $g = 981$ *см/сек*^{2}, $R = 2{,}87 \cdot 10^6$ абс. ед. Тогда окажется, что

$$H \approx 4{,}2 \cdot 10^5 \text{ см} \approx 4 \text{ км}.$$

Мы уже упоминали, что именно на такой высоте практически исчезает различие между горизонтальным температурным градиентом в январе и соответствующим градиентом в июле. Следовательно, мы вновь получили подтверждение справедливости теоретических соображений о муссонном поле вдобавок к тому, что было сказано на стр. 522—533.

В заключение настоящего параграфа отметим еще одно очень важное обстоятельство, вытекающее из сопоставления карт рис. 325 и 326. Именно эти карты должны быть полностью схожи между собой при соблюдении *двух* упомянутых нами условий. Практика показала, что первое условие удовлетворительно соблюдается в ряде областей материка, в частности в Европе. А соблюдается ли *второе условие*? Можно ли считать, что поле давлений, изображенное на рис. 326, обусловлено *только* температурным режимом, отраженным на рис. 325?

Внимательное сопоставление обеих карт показывает, что между ними существует небольшое различие *систематического* характера: не случайно климатологические изобары всюду составляют с меридианами углы, *бо́льшие* по сравнению с теми углами, которые составляют с меридианами температурные изаномалы в соответствующих точках. Совершенно очевидно, что такое систематическое отклонение направлений изобар от направлений соответствующих изаномал температуры вызвано каким-то *иным* барическим полем, налагающимся на муссонное. Этим иным полем является то поле давлений, которое управляет *зональными потоками* в атмосфере.

Пусть в некоторой точке материка пересекаются климатологическая изобара p и температурная изаномала τ. Тогда, как видно на схеме рис. 329, полный вектор градиента давления $\operatorname{grad} p_0$, нормальный к изобаре, можно будет разложить на две составляющие. Одна из них должна быть направлена по прямой, по которой направлен градиент температурной аномалии, т. е. она должна быть параллельна нормали к τ. Другая должна быть направлена на север, прямо по меридиану. Первая, основная, составляющая градиента давления обусловлена чистым мусонным полем, а вторая — полем зональной циркуляции в атмосфере (как известно, градиент давления, управляющий последней, совпадает с меридианом и в средних широтах направлен к полюсу).

Известное тригонометрическое соотношение между синусами углов треугольника и противолежащими сторонами здесь запишется в виде

$$\frac{\operatorname{grad} p_{\text{зон}}}{\sin(\tau, p_0)} = \frac{\operatorname{grad} p_0}{\sin(p_{\text{зон}}, \tau)}\,,$$

откуда

$$\operatorname{grad} p_{\text{зон}} = \operatorname{grad} p_0 \frac{\sin(\tau, p_0)}{\sin(\tau, p_{\text{зон}})}.$$

Проделав вычисления по этой формуле, Н. П. Кашкарова получила для градиента $\operatorname{grad} p_{\text{зон}}$, управляющего зональной циркуляцией на широте 60°, величины около 10^{-8} *мбар/см* на уровне Земли. В то же время полный градиент давления здесь составлял около $7 \cdot 10^{-8}$ *мбар/см*.

Как и следовало ожидать по сходству карт рис. 325 и 326, основная составляющая полного градиента давления создана машинами второго рода.

§ 5. Первоначальная схема распределения скоростей ветра по вертикали в муссонном поле

Сложное барическое поле, наблюдающееся в природных условиях, не дает возможности вычислить истинное распределение скоростей в муссонном поле как по вертикали, так и по горизонтальным направлениям. Поэтому для приближения к истине придется постепенно уточнять результаты теоретических выкладок, продвигаясь по отдельным этапам.

Прежде всего в случае самой простой формы береговой линии — окружности — следует ожидать в зимнее время восходящих потоков воздуха над морем и нисходящих над материком. В летнее время знаки вертикальных составляющих меняются на обратные. Над самой береговой линией вертикальные составляющие муссонных потоков обращаются в нуль.

Исходя из этих естественных соображений, запишем дифференциальные уравнения воздушных потоков в муссонном поле применительно к этому простейшему случаю; обозначив через u радиальную составляющую скорости ветра, а через v тангенциальную, можно положить

$$\frac{\delta}{\mu}\frac{du}{dt} = 2a^2 v + \frac{\Gamma}{\mu} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \tag{70}$$

$$\frac{\delta}{\mu}\frac{\partial v}{dt} = -2a^2 u + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}. \tag{71}$$

Здесь, как и прежде, δ — плотность, μ — коэффициент турбулентной вязкости, $a^2 = \frac{\delta\bar{\omega}}{\mu}$ ($\bar{\omega}$ — проекция вектора ω угловой скорости вращения Земли на вертикаль в данной точке, т. е. $\bar{\omega} = \omega \sin\varphi$, где φ — широта места), Γ — градиент давления атмосферы на высоте z, меняющийся в продолжение года. Начало координат на берегу.

Исходя из старых наблюдений над муссонными потоками, можно было заключить, что собственно муссон простирается до некоторой небольшой высоты, где его радиальная составляющая обязана обращаться в нуль. Далее наступает область антимуссона, направленного в противоположную сторону и достигающего, по старым литературным материалам, высоты около 2 *км* над землей.

На этом основании мы предположили, что схема муссонного поля может быть описана исходя из следующего уравнения для градиента давления:

$$\Gamma = -\frac{\partial p_0}{\partial x}\left(1 - 2\frac{z}{H}\right)\cos\omega_1 t.$$

Здесь H — высота, на которую по сделанной гипотезе простирается весь муссонный слой (включая антимуссон).

Угловая скорость движения Земли вокруг Солнца ω_1 весьма мала по сравнению с угловой скоростью ω вращения Земли вокруг оси. Поэтому при интегрировании уравнений (70) и (71) с подставленным в них выражением

градиента Г можно будет пренебречь членами, содержащими множитель

$$\frac{\omega_1}{2\omega}\sin\omega_1 t \leqslant \frac{1}{730}.$$

Следует отметить, что этими членами нельзя пренебрегать лишь в непосредственной близости к моментам весеннего и осеннего равноденствия, которым соответствуют значения $\sin\omega_1 t$, близкие к единице, и значения $\cos\omega_1 t$, близкие к нулю: легко видеть, что при подобных условиях члены, содержащие $\sin\omega_1 t$, могут на очень короткий срок оказаться не только сравнимыми

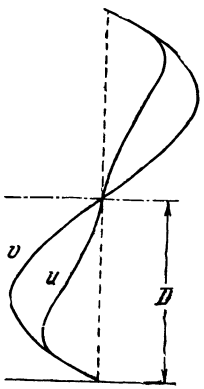


Рис. 330. Схематическое распределение скоростей ветра по вертикали

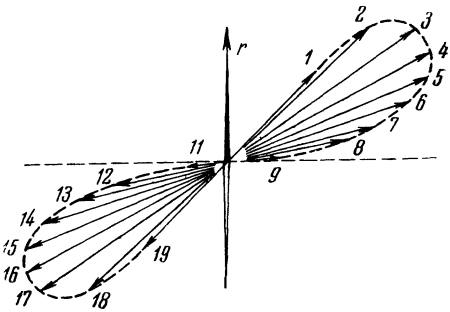


Рис. 331. Векторы полных скоростей на различных высотах

с членами, содержащими $\cos\omega_1 t$, но и превысить их, несмотря на малость величины $\omega_1/2\omega$.

Отказавшись от решения дифференциальных уравнений применительно к отмеченным двум очень коротким промежуткам времени, можно утверждать, что интегралы уравнений (70) и (71) для преобладающей части года выразятся с достаточным приближением так:

$$u = \frac{\partial p_0/\partial x}{2\delta\omega}\left[e^{-az}\sin az\cos(\omega_1 t - \varepsilon) + e^{az-2\pi}\sin az\cos(\omega_1 t + \varepsilon)\right], \qquad (72)$$

$$v = \frac{\partial p_0/\partial x}{2\delta\omega}\left[e^{-az}\cos az\cos(\omega_1 t - \varepsilon) - e^{az-2\pi}\cos az\cos(\omega_1 t + \varepsilon) + \left(2\frac{z}{H} - 1\right)\frac{\cos(\omega_1 t - \varepsilon) + \cos(\omega_1 t + \varepsilon)}{2}\right]. \qquad (73)$$

Эти уравнения, полученные В. В. Шулейкиным для *нестационарного* случая [11], отличаются от его же решения стационарной задачи [12] лишь наличием множителей, зависящих от времени. В моменты зимнего и летнего солнцестояний эпюра скоростей будет *почти* тождественна с той, которая была им получена при решении стационарной задачи.

На рис. 330 воспроизведено соответствующее распределение составляющих скоростей u и v по вертикали, а на рис. 331 — векторы полных скоростей на различных высотах в плане. Цифры проставлены соответственно различным высотам над земной поверхностью, по ступеням через каждую $^1/_{20}$ от гипотетической полной высоты H муссонного слоя.

Как было только что указано, обе диаграммы лишь приблизительно соответствуют новому решению — решению нестационарной задачи. Различие вносится благодаря существованию некоторого определенного *сдвига фаз* ε между колебаниями градиента Г в продолжение года и колебаниями скоростей муссонного и антимуссонного потоков. В итоге колебания скорос-

тей собственно мусонного потока *отстают* по фазе (на 2 ε) от колебаний скоростей антимуссона.

Этот сдвиг фаз в свою очередь органически связан с условиями переноса воздушных масс в собственно муссонном и в антимуссонном потоках. Именно благодаря такому сдвигу фаз в самом начале года с материка на море переносится больше воздуха (в нижнем, собственно муссонном слое), чем переносится с моря на материк (в верхнем, антимуссонном); после смены зимнего муссона на летний (после весеннего равноденствия) количество воздуха, поступающего с моря на материк (в нижнем слое), оказывается меньшим, чем количество воздуха, поступающего с материка на море (в верхнем слое). После летнего солнцестояния картина меняется на противоположную: летний муссон начинает приносить с моря на материк больше воздуха (в нижнем слое), чем уносит с материка на море антимуссон (в верхнем слое); после осенней смены муссонов зимний муссон уносит с материка меньше воздуха, чем приносит зимний антимуссон с моря на материк. В результате ко времени самых суровых морозов над материком оказывается значительно увеличенное количество воздуха по сравнению с летними условиями; количество воздуха над океаном, напротив, уменьшается к зиме по сравнению с летом.

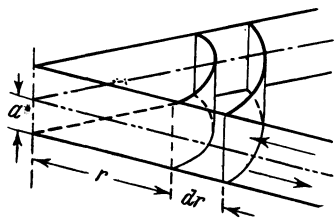


Рис. 332. Условная схема потоков муссона и антимуссона

В отличие от стационарной задачи, условие неразрывности здесь записывается в форме, учитывающей *прирост* или *убыль* воздушных масс над единицей поверхности материка (или океана).

Допустим для простоты, что материк обладает круглой формой. Тогда, вырезав над ним цилиндрическое кольцо воздуха радиусом r, шириной dr и высотой $H = 2a_0$, как изображено на рис. 332, можно будет без труда установить

$$a_0 \frac{\partial}{\partial r} [\delta r (u_1 - u_2)] = r \frac{\partial}{\partial t} (\delta H). \tag{74}$$

В нашей предварительной грубой схеме вертикальное распределение радиальных скоростей u мало отличается от синусоидального (как видно на эпюре рис. 330). Поэтому средняя по вертикали скорость как в верхнем, так и в нижнем ярусе будет равна максимальной, умноженной на коэффициент $2/\pi$. Обозначим максимальное значение скорости через U. Тогда на основании уравнения (74) определим разность между количеством воздуха, переносящегося в нижнем ярусе с материка на море (зимой) и в верхнем ярусе — с моря на материк, над одним погонным метром береговой линии, в единицу времени. Эта разность q_1 выразится так:

$$q_1 = \frac{2}{\pi} U \frac{H}{2} \delta [\cos(\omega_1 t - \varepsilon) - \cos(\omega_1 t + \varepsilon)] \approx -\frac{2}{\pi} UH\delta \sin\varepsilon \sin\omega_1 t. \tag{75}$$

Как и следовало ожидать, в «самый холодный день», при $t = 0$, эта разность обращается в нуль: количество воздуха, переносимого внизу муссоном, в точности равняется количеству воздуха, переносимого в верхнем ярусе антимуссоном. Затем, к весне, появляется и нарастает разность, которая является отрицательной по знаку. Результирующее количество воздуха, *стекающего с материка на океан* в единицу времени, достигает по абсолютной величине максимума через четверть года после того, как устанавливается над материком максимальное количество избыточных масс. К моменту минимума масс над материком (в «самый теплый день» года, при $t = \frac{T}{2}$) результирующее количество переносимого воздуха вновь обращается в нуль. Затем оно меняет знак на положительный: избыточный воздух начинает по-

ступать с океана на материк. Через четверть года после самого теплого дня скорость перетекания избыточных масс с океана на материк проходит через максимум и затем вновь идет к нулю — к наступлению самого холодного дня.

Если длина береговой линии равна $2\pi\rho$, где ρ — радиус материка, то условие неразрывности может быть записано еще в иной форме

$$M_0 = \int_0^{T/2} 2\pi\rho q_1 dt. \tag{76}$$

Здесь T — период колебаний всех элементов муссонного поля, т. е. один год; M_0 — вся избыточная масса, накопляющаяся над материком к самому холодному дню.

Подставим в (76) выражение q_1 из (75) и проинтегрируем по времени от $t = 0$ до $t = \frac{T}{2}$. Тогда окажется

$$M_0 = \frac{4}{\pi} UTH\delta\rho \sin\varepsilon. \tag{77}$$

Если так или иначе определить независимым образом величину M_0, то, зная ее, можно вычислить и сдвиг фаз 2ε, пока остававшийся неопределенным:

$$2\varepsilon = 2 \arcsin \frac{\pi}{4} \frac{M_0}{U_0 TH\delta\rho}. \tag{78}$$

В следующем параграфе мы воспользуемся этим соотношением для определения сдвига фаз между колебанием скоростей собственно муссонных и антимуссонных потоков. Забегая вперед, отметим, что этот сдвиг окажется очень небольшим. Вот почему картина зимнего муссона в самый разгар зимы или картина летнего муссона в разгар лета весьма недалека от картины *стационарного* муссонного поля, рассмотренного в наших старых работах.

Во всяком случае погрешности, обусловленные гипотезой о «стационарности», несомненно тонут в совокупности погрешностей, которые вызываются совсем неверными представлениями всех исследователей о граничных условиях на верхней границе муссонного поля, существовавшими до последних наших исследований.

§ 6. Сезонное перераспределение избыточных масс воздуха над океаном и над материками

Климатологические карты изобар для поверхности Земли дают возможность совершенно объективно судить об изменении количества воздуха, находящегося над единицей поверхности. Исследование этих карт позволяет определять величину переноса избыточных воздушных масс с океана на материк и в обратном направлении, причем все вычисления совершенно не зависят ни от каких теоретических схем, не зависят от уровня, на котором находится ныне учение о муссонных потоках и общей циркуляции атмосферы.

В настоящем параграфе мы займемся вопросом о переносе избыточных воздушных масс, исходя *именно* из совершенно незыблемых объективных материалов — из климатологических карт изобар, на которых запротоколировано среднее месячное количество воздуха, находящегося над единицей поверхности в данной точке нашей планеты.

Если бы климатологи не приводили наблюденные величины атмосферного давления к уровню моря, то задача была бы совершенно проста для всей земной поверхности, как покрытой океаном, так и не покрытой. В действительности осложнения появляются на суше: давление, приведенное к уровню моря, еще ничего не говорит о давлении, фактически наблюдаемом на какой-либо *горной* станции; оно еще ничего не говорит о количестве воздуха, которое наблюдалось над этой горной станцией в среднем за тот или иной месяц

года. К слою воздуха, возвышавшемуся над станцией, климатологи еще *прибавили* несуществующий слой воздуха, высота которого равна высоте станции над уровнем моря.

Вот почему для суждения об *истинных* массах воздуха, находящихся в том или ином месяце над той или иной точной *действительной* поверхностью (над плоскогорьем, над горой и т. д.), необходимо от обычных климатологических карт перейти к картам, на которые должны быть нанесены *истинные* изобары, а не изобары, соответствующие давлениям, приведенным к уровню моря.

Не останавливаемся здесь на технике пересчета: она основана на применении хорошо известной *барометрической формулы*. В последнюю входит не только высота точки над уровнем моря, но и *температура* воздуха, которую необходимо брать из соответствующих климатологических материалов.

Трудоемкие и кропотливые вычисления истинных давлений были проделаны Н. Л. Бызовой [13] для всех материков и для четырех времен года — для января, апреля, июля и октября. В основу были положены современные климатологические материалы, имеющиеся в Главной геофизической обсерватории в Ленинграде.

Истинное количество воздуха над *водной* поверхностью определяется без всякого труда на основании обычных климатологических карт атмосферного давления на уровне моря; никаких поправок к ним не требуется. Соответствующие вычисления для всех областей Мирового океана проделала Т.В. Бончковская [14].

Для суждения о *переносе* избыточных масс, очевидно, необходимо *сравнить* между собой количество воздуха, находящегося над единицей поверхности в той же точке планеты в одно время года и в другое время года, например в январе и июле. Другими словами, надо сравнить между собой давления атмосферы (над океаном — по обычным картам, над материком — по исправленным за высоту) в том и другом месяце. Разности давлений давно применяются в климатологии; они наносятся на так называемые карты *изаллобар*.

Интересующие нас карты «избыточных масс» будут, следовательно, аналогичны соответствующим картам изаллобар, но только изаллобар, исправленных за счет высоты той или иной точки суши над уровнем моря.

На рис. 333 воспроизведена одна из таких карт, построенная Т. В. Бончковской (океаны) и Н. Л. Бызовой (материки). Она дает разности масс, находящихся над единицей поверхности в январе и июле, в десятках килограмм на квадратный метр.

«Теплыми тонами» (красным, оранжевым, желтым) отмечены области, в которых зимой сосредоточены *избыточные* массы. «Холодные тона» (зеленый, синий) соответствуют областям, над которыми зимой наблюдается *недостаток* воздушных масс по сравнению с летом.

На карте отчетливо видно, какие громадные недостачи воздуха зияют над океанами и какие «горы» избыточных воздушных масс возникли над материками. В отличие от обычных — условных, не исправленных за высоту — карт изаллобар здесь впервые вскрылась замечательная особенность этих «гор». Над материком Азии они распались на две основные гряды, между которыми проходит глубокая ложбина, охватывающая оба соединенных материка Старого Света. На западе ложбина начинается у берега Бискайского залива, проходит над Средиземным морем, касается юго-восточного берега Черного моря и южного берега Каспийского моря. Затем она проходит в заповедной области Памира, где, разумеется, еще невозможно судить о точном распределении давлений (ввиду скудности имеющихся сведений), резко поворачивает на северо-восток и подходит к океанским берегам.

Легко видеть, что этот природный рубеж в муссонном поле аналогичен водоразделу; это — своеобразный «муссонораздел». К северо-западу от него

лежат области Европы и Азии, над которыми преобладает *зимний* муссон; здесь громадное различие между январем и июлем в отношении воздушных масс вызвано суровыми морозами, которые формируют мощное зимнее муссонное поле; летний муссон выражен слабо. К юго-востоку от рубежа, обнаруженного Бызовой, лежат области Азии (и отчасти Европы), над которыми преобладает *летний* муссон; здесь еще более резкое различие между январем и июлем вызвано громадной потерей воздушных масс в разгар лета, в разгар формирования муссонных потоков, порождаемых минимумом давления над раскаленным материком и сезонного повышения давления над океаном, над которым в летнюю пору накопляются воздушные массы, утраченные материком.

Карта рис. 333 показывает, что в области преобладающего летнего муссона в свою очередь происходит дробление максимума избыточных масс на два «холма», соединенных между собой гребнем: один из них расположен примерно над берегами Персидского залива, а другой, наиболее резко выраженный, над юго-восточным и восточным Китаем. Все эти образования позволяют совершенно объективно судить о строении муссонного поля с точки зрения переноса избыточных масс между океаном и материками. Истинные пути, по которым переносятся в пространстве эти массы, неизвестны, поскольку сложные очертания береговой линии и действие кориолисовой силы на воздушные потоки делают общую картину недоступной для детального исследования. Однако не представляет никакой трудности судить о *результирующих* направлениях переноса избыточных масс: это — направления от местных «максимумов» к местным «минимумам» на картах изаллобар для двух сопоставляемых месяцев.

Т. В. Бончковская построила серию таких карт: январь — июль, март — апрель, апрель — июнь, июнь — август, август — октябрь и октябрь — декабрь [14]. Между местными максимумами и минимумами избыточных масс она провела предполагаемые результирующие направления переноса и таким образом получила элементарные «трубки», по которым как бы смещаются в *итоге* избыточные массы. На рис. 334 воспроизведена одна из карт результирующих перемещений, построенная Бончковской для срока с января по июль (на основании карты рис. 333). Кроме результирующих направлений, нанесенных пунктиром, здесь изображены изолинии равного переноса (сплошные кривые). Цифры, проставленные близ них, выражают количество избыточного воздуха, перенесенного за полгода, в десятках тысяч тонн над погонным метром контура.

На рис. 335 воспроизведена диаграмма Бончковской, полученная ею на основании анализа всех ее карт. По оси абсцисс отложено время с декабря по февраль, а по оси ординат — изменение давления, выраженное в миллибарах в месяц. Над каждой кривой отмечена долгота места на Тихом океане. Как видим, кривая, соответствующая побережью (долгота 140° В), близка по своей форме к простой синусоиде; она проходит через нуль в половине декабря и в половине июня соответственно зимнему и летнему солнцестояниям; максимальная скорость переноса избыточных масс с материка на океан приходится на март, а максимальная скорость переноса избыточных масс с океана на материк соответствует сентябрю. Все это находится в полном согласии с нашей теоретической схемой, изложенной в § 5 (см. стр. 553).

По мере удаления от береговой линии картина осложняется появлением высших гармонических на кривой годового хода. Соответственно максимальная скорость переноса избыточных масс с материка на океан наступает несколько ближе к началу года, а максимальная скорость обратного переноса наблюдается несколько позже теоретического срока.

Обширный документальный материал позволил Бончковской обнаружить на фоне сезонных колебаний градиента давления некоторый *средний годовой* градиент, обладающий *различными знаками* в разных климатических поясах. Оказалось, что в высоких и средних широтах северного полушария

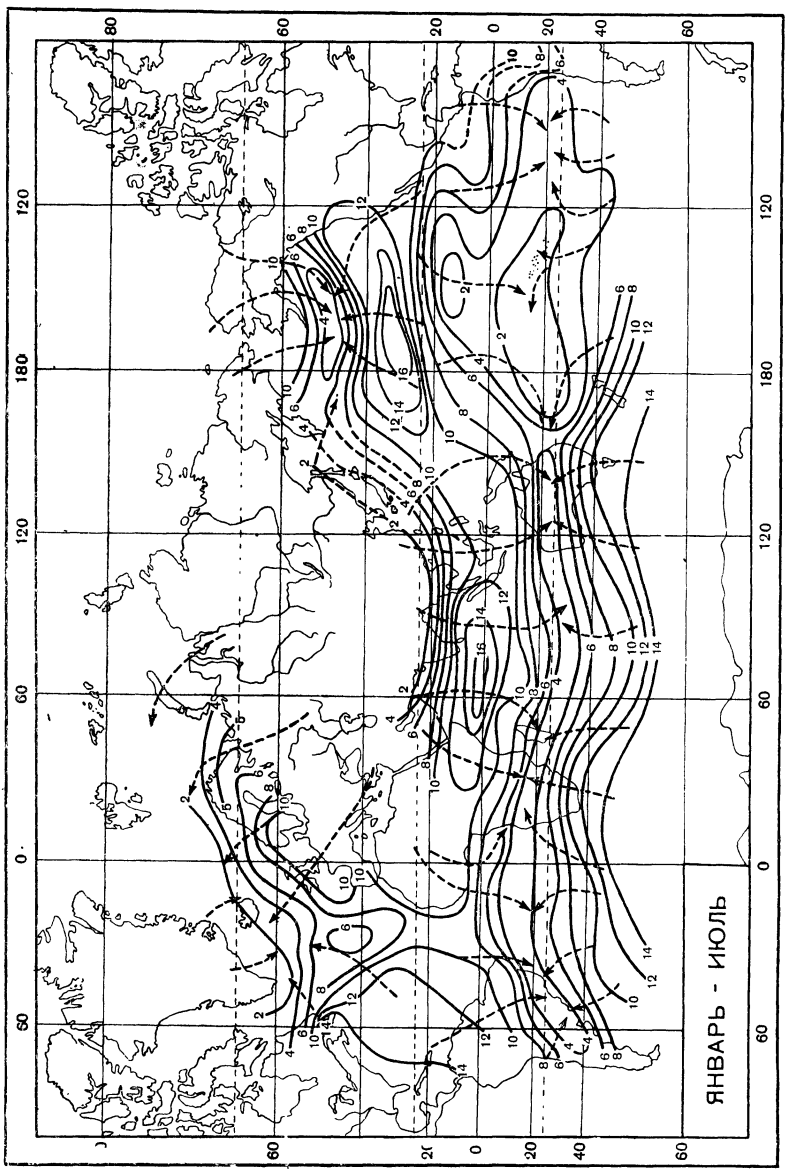


Рис. 334. Результирующие переносы масс воздуха
(по Т. В. Болчковской)

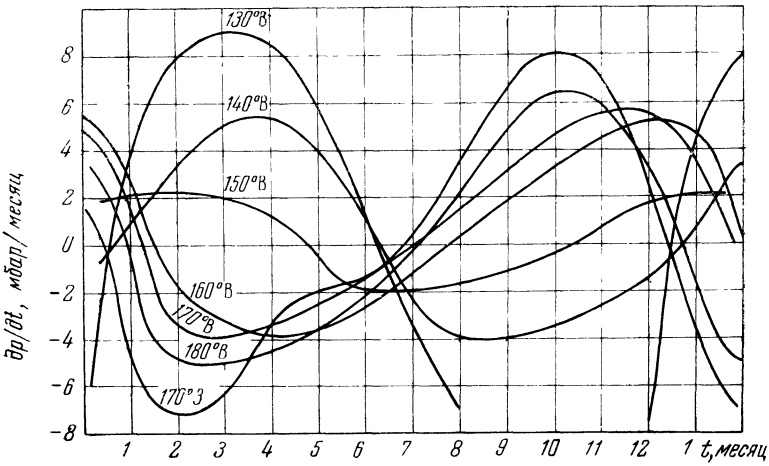


Рис. 335. Годовой ход изменений давления

этот средний градиент направлен с *материка к океану*, в низких широтах направление градиента прямо противоположное.

Это значит, что на муссонные потоки, колеблющиеся во времени, налагаются еще *стационарные потоки* — с материка к океану в высоких и средних широтах и в противоположном направлении в низких широтах северного полушария. Природа этих стационарных потоков, обнаруженных Бончковской, понятна: она связана с тем, что в областях к северо-западу от «муссонораздела» на карте рис. 333 преобладает зимний муссон, а летний выражен очень слабо и, напротив, в областях к юго-востоку от этого рубежа преобладает летний муссон, зимний же выражен крайне слабо [14].

Отсылаем к цитированной работе тех, кто пожелает ознакомиться с деталями описанных явлений, а также с условиями переноса избыточных воздушных масс из южного полушария в северное и в обратном направлении соответственно времени года в том или ином из полушарий. Последнее явление не относится к интересующей нас области; оно было установлено и описано еще в работах Н. Шоу.

В заключение настоящего параграфа вернемся к механизму переноса избыточных воздушных масс с океана на материк и обратно, к механизму, о котором была речь в предыдущем параграфе.

Как помним, перенос избыточных масс обусловлен существованием сдвига фаз ε между основной косинусоидой, которой можно описать колебания температуры воздуха в продолжение года, и косинусоидой, изображающей годовой ход скорости муссонного потока U. В собственно муссонном и в антимуссонном потоках сдвиг фаз ε обладает противоположными знаками, вследствие чего между кривой, описывающей ход скорости собственно муссона, и кривой антимуссона возникает сдвиг фаз, равный 2ε.

Для определения *порядка* величины ε по формуле (78) Шулейкин задался величиной M_0, соответствующей соединенным Европейскому и Азиатскому материкам, задался радиусом круглого материка ρ, равновеликого по площади, и другими величинами, входящими в формулу (78) [11, 15].

В результате вычисления по формуле (78) он получил числовые значения $\sin\varepsilon = 0{,}07$ и соответственно $\varepsilon \approx 4°$. Иными словами, в переводе на время сдвиг фаз ε оказался порядка около 4 суток [15].

В настоящее время следует считать принятое числовое значение U_0 несколько завышенным, а принятое значение H — заниженным. В результате исправления следует полагать, что числовое значение ε, выраженное в единицах времени, близко к *одной неделе*.

§ 7. Колебания земной оси вращения, вызванные сезонным перераспределением избыточных масс воздуха

В предыдущем параграфе было показано, как велики избыточные воздушные массы, периодически смещающиеся с океана на материк зимой и в обратном направлении летом. Карта рис. 333 позволяет установить, что над каждым квадратным метром земной поверхности на востоке Азии лежит в январе воздушная масса, превышающая на *четверть тонны* массу того же столба воздуха в июле. Общий избыток воздуха, лежащего в январе над Азией и Европой, составляет около $5 \cdot 10^{12}$ *т*. В летнюю пору эта масса возвращается к океану.

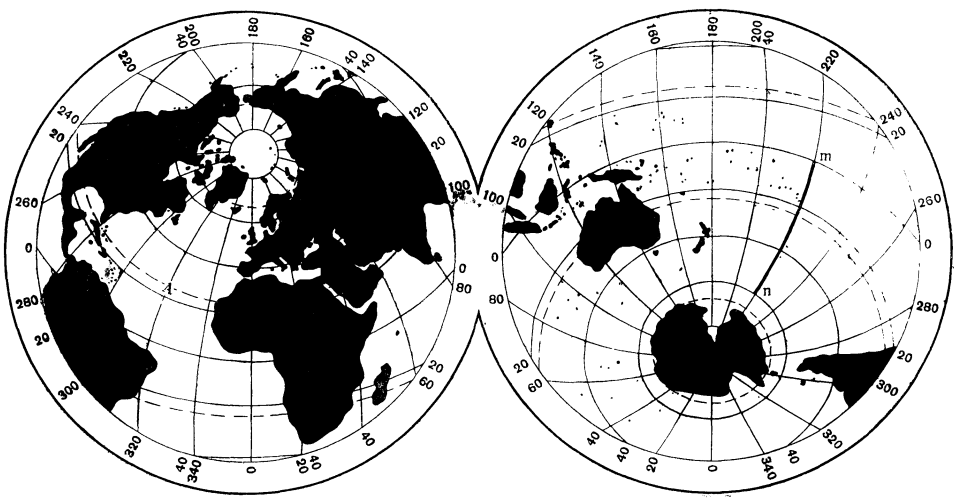


Рис. 336. Полушария материковое и океаническое (по Ю. М. Шокальскому)

Над остальными материками зимой также собираются избыточные воздушные массы, но роль их ничтожна по сравнению с исследованной применительно к Азии и Европе.

Но ведь воды Мирового океана и поверхности материков расположены на Земле совсем несимметрично по отношению к оси вращения планеты. Стоит лишь взглянуть на схематическую карту рис. 336, заимствованную из «Океанографии» Ю. М. Шокальского [16], чтобы убедиться в резко асимметричном их расположении. На карте изображены два полушария: они выбраны с таким расчетом, чтобы одно из них охватило как можно больше суши, а другое — как можно больше вод Мирового океана. Небольшими кружками окружены северный полюс на первом из полушарий и южный полюс на втором. Земная ось пронизывает полушария «наискось».

Асимметрия в расположении океанских вод и суши относительно земной оси должна неминуемо привести к возникновению *переменных* составляющих в моментах инерции масс, имеющихся на нашей планете. В свою очередь существование переменных составляющих в этих моментах должно вызывать непрерывные *смещения земной оси вращения*, смещения полюсов вращения относительно тех средних их положений, которые считаются географическими полюсами Земли. Но смещение действительных полюсов не может не отразиться на *широте места*, которую устанавливают астрономическим путем, наблюдая зенитное расстояние светил, проходящих через меридиан.

Астрономы очень давно обнаружили подобные колебания широты различных точек на Земле и обстоятельно их изучили. Еще в XIX в. была организована так называемая Международная служба широт, опирающаяся на сеть специальных «широтных» обсерваторий. В нашей стране есть ряд таких обсерваторий, работавших в свое время под общим руководством А. Я. Орлова. Главная из них находится в г. Полтаве.

Наше предположение о роли блуждающих масс воздуха высказывалось и прежде, при попытках объяснения причины движений полюсов вращения относительно географических полюсов. Однако в то время не существовало еще современной теории муссонного поля, определение переменных составляющих моментов инерции масс производилось очень грубым методом, не было сводки обширных исследований действительного движения полюсов вращения Земли.

Поэтому большой интерес представляет обстоятельная работа Н. А Бызовой [13], проделанная на основании надежных материалов и надежной методики вычислений.

В основе этих вычислений, как и у других авторов, лежали классические теоремы о моментах инерции и моментах количества движения свободного вращающегося твердого тела.

Как известно, полный момент инерции I твердого тела относительно оси, составляющей углы α, β, γ с осями координат, выражается формулой

$$I = A\cos^2\alpha + B\cos^2\beta + C\cos^2\gamma - 2D\cos\beta\cos\gamma - \\ - 2E\cos\alpha\cos\gamma - 2F\cos\alpha\cos\beta. \qquad (79)$$

Здесь в свою очередь A, B, C представляют собой моменты инерции тел относительно осей координат, определяемые из соотношений

$$\sum\mu(y^2+z^2) = A,$$
$$\sum\mu(z^2+x^2) = B, \qquad (80)$$
$$\sum\mu(x^2+y^2) = C,$$

а D, E, F — так называемые *центробежные* моменты инерции, выражаемые через попарные произведения координат x, y, z и элементарных масс μ, входящих в состав тела:

$$\sum\mu yz = D,$$
$$\sum\mu zx = E, \qquad (81)$$
$$\sum\mu xy = F.$$

Известно также, что тело может свободно вращаться с постоянной угловой скоростью около постоянной оси только в тех случаях, когда все три центробежных момента инерции D, E, F равны нулю. Во всех иных случаях тело вращается вокруг мгновенных осей вращения, непрерывно меняющих свое направление относительно тела.

Закон смещения мгновенной оси определяется связями, которые существуют между моментами количества движения вращающегося тела относительно координатных осей:

$$\frac{dL_1}{dt} = L_2\omega_3 - L_3\omega_2,$$
$$\frac{dL_2}{dt} = L_3\omega_1 - L_1\omega_3, \qquad (82)$$
$$\frac{dL_3}{dt} = L_1\omega_2 - L_2\omega_1,$$

где ω_1, ω_2, ω_3 — проекции мгновенного значения вектора угловой скорости ω вращения тела на оси координат.

Нетрудно убедиться в том, что совокупность этих трех уравнений равносильна условию *постоянства полного момента количества движения* L, дающего проекции L_1, L_2, L_3 на оси координат. Действительно, если

$$L_1^2 + L_2^2 + L_3^2 = L^2 = \text{const}, \tag{83}$$

то, очевидно,

$$\frac{d}{dt}(L^2) = 2L_1\frac{dL_1}{dt} + 2L_2\frac{dL_2}{dt} + 2L_3\frac{dL_3}{dt} = 0. \tag{84}$$

Подставив в (84) выражения производных из (82), найдем, что все члены суммы взаимно уничтожаются, а следовательно, условие (84) представляет собой тождество. Значит физический смысл (82) одинаков с физическим смыслом (83).

Проекции полного момента количества движения L выражаются через моменты инерции и центробежные моменты инерции тела

$$\begin{aligned} L_1 &= A\omega_1 - F\omega_2 - E\omega_3, \\ L_2 &= B\omega_2 - D\omega_3 - F\omega_1, \\ L_3 &= C\omega_3 - E\omega_1 - D\omega_2. \end{aligned} \tag{85}$$

Этих соотношений вполне достаточно для исследования интересующего нас вопроса о колебании Земли под действием избыточных воздушных масс, блуждающих в продолжение года между океаном и материком.

Выберем начало координат в центре Земли и направим ось Z вдоль географической оси планеты на север. Оси X и Y будут находиться в плоскости географического экватора. С осью Z совпадет *малая* ось эллипсоида вращения, каким мы будем для простоты считать Землю. Следовательно, моменты инерции A и B можно будет считать равными между собой, а момент инерции C (относительно оси Z) — несколько бо́льшим.

Обозначив через r малую полуось Земли, а через R — большую (радиус экватора) и вспомнив выражения моментов инерции эллипсоида вращения относительно малой и большой осей, найдем

$$\frac{A}{|C-A|} = \frac{(R^2+r^2)}{|2R^2-(R^2+r^2)|} \approx \frac{2}{1-\dfrac{r^2}{R^2}}.$$

Но знаменатель дроби, как известно, выражает квадрат эксцентриситета ε Земли. Следовательно, окончательно

$$\left|\frac{A}{C-A}\right| \approx \frac{2}{\varepsilon^2}, \quad \frac{C-A}{A} \approx \frac{\varepsilon^2}{2}. \tag{86}$$

Смещения мгновенной оси вращения Земли описываются угловыми скоростями ω_1 и ω_2 вращения относительно осей X и Y, весьма малыми по сравнению с угловой скоростью вращения Земли около своей оси. Так как последняя чрезвычайно мало отклоняется от географической оси, то вполне можно считать, что $\omega_3 = \omega = \text{const}$. Подставим в первое из уравнений системы (82) выражения L_1, L_2, L_3, взятые из (85).

Отбросив, как весьма малые, члены, содержащие произведение малых величин ω_1, ω_2, произведения ω_1 и ω_2 на F или на производную, квадрат ω_2 и т. д., получим (помня, что $B = A$) из первого уравнения системы (82)

$$A\frac{d\omega_1}{dt} = (A-C)\omega_2\omega - D\omega^2, \tag{87}$$

аналогично этому получим из второго и третьего уравнений системы (82)

$$A\frac{d\omega_2}{dt} = (C - A)\,\omega_1\omega - E\omega^2, \tag{88}$$

$$C\frac{d\omega}{dt} = 0 \tag{89}$$

в полном согласии с условием, принятым выше.

Угловые смещения l и m мгновенной оси вращения, как известно, определяются в виде частных от деления ω_1 и ω_2 на $\omega_3 = \omega$

$$l = \frac{\omega_1}{\omega}, \quad m = \frac{\omega_2}{\omega}. \tag{90}$$

Чтобы перейти к этим смещениям, разделим обе части уравнений (87) и (88) на $A\omega$. Тогда получим

$$\frac{dl}{dt} = -\frac{C-A}{A}\omega m + \frac{D}{A}\omega,$$

$$\frac{dm}{dt} = \frac{C-A}{A}\omega l - \frac{E}{A}\omega,$$

или после подстановки выражения $\frac{C-A}{A}$ из (86)

$$\frac{dl}{dt} = -\omega\left(\frac{\varepsilon^2}{2}m + \frac{D}{A}\right),$$

$$\frac{dm}{dt} = \omega\left(\frac{\varepsilon^2}{2}l + \frac{E}{A}\right). \tag{91}$$

Каждое из дифференциальных уравнений содержит обе искомые функции. Чтобы разделить их, применим обычный способ: продифференцируем каждое уравнение второй раз по t и в правые части подставим выражения для первых производных по t, заимствованные из уравнений (91).

После простых преобразований в результате получим два дифференциальных уравнения второго порядка

$$\frac{d^2l}{dt^2} + \left(\frac{\varepsilon^2}{2}\omega\right)^2 l = -\left(\omega^2\frac{\varepsilon^2}{2}\frac{E}{A} + \frac{\omega}{A}\frac{dD}{dt}\right),$$

$$\frac{d^2m}{dt^2} + \left(\frac{\varepsilon^2}{2}\omega\right)^2 m = -\left(\omega^2\frac{\varepsilon^2}{2}\frac{D}{A} - \frac{\omega}{A}\frac{dE}{dt}\right). \tag{92}$$

Они описывают *гармонические колебания* величин l и m. Если бы правые части уравнений равнялись нулю, то это соответствовало бы свободным колебаниям с собственной частотой

$$\nu = \frac{\varepsilon^2}{2}\omega. \tag{93}$$

Двучлены, стоящие в правой части уравнений (92), зависят от центробежных моментов инерции D, E и от их первых производных по времени. Дальше будет показано, *как* связаны величины D, E с переносом избыточных воздушных масс с океана на материк и обратно. Уже без выкладок очевидно что такая перегруппировка масс, происходящая каждый год, должна приводить к колебаниям величин D и E в продолжение года. Следовательно, с соответствующим (годовым) периодом должна колебаться вся правая часть уравнений (92).

Но это значит, что уравнения (92) описывают *вынужденные колебания* оси вращения Земли по двум взаимно перпендикулярным направлениям — вокруг оси X и вокруг оси Y.

Как известно, сложение таких колебаний может дать в результате круговую, эллиптическую, спиральную или какую-либо сложную петлеобразную траекторию мгновенного полюса (северного и южного) в области вокруг географического полюса Земли.

Прежде чем перейти к вопросу о вычислении членов правой части уравнений (92), нужном для определения путей мгновенного полюса, остановимся подробней на исследовании *собственной* частоты *свободных* колебаний оси Земли. Для этого вспомним, что большая полуось Земли равна $6{,}3773 \cdot 10^3$ *км*, а малая полуось — $6{,}3560 \cdot 10^3$ *км*. Следовательно, на основании известного геометрического соотношения, квадрат эксцентриситета Земли будет

$$\varepsilon^2 = \frac{R^2 - r^2}{R^2} = 6{,}72 \cdot 10^{-3}.$$

На основании (93) определится собственная частота ν:

$$\nu = 3{,}36 \cdot 10^{-3}\omega.$$

Другими словами, она в 298 раз меньше угловой скорости вращения Земли. Значит, при отсутствии перемещений масс на Земле наша планета могла бы обладать собственным периодом свободных колебаний, равным 298 суткам, причем эти колебания были бы совершенно правильными, с постоянной амплитудой колебаний и относительно оси X, и относительно оси Y.

Астрономы давно обнаружили, что на фоне действительных колебаний Земли, совершенно беспорядочных на первый взгляд, характеризующихся непрерывными изменениями амплитуды колебаний, анализ выделяет *собственные* колебания с периодом около 14 месяцев (425 суток).

Различие между цифрой, найденной теоретически в первом приближении (298), и результатами непосредственных наблюдений (425) объясняется весьма просто: при выкладках, приведенных выше, предполагалось, что Земля представляет собой простое *недеформирующееся твердое тело*. На самом деле это не так: в действительности наша планета подвержена деформациям (упруго-вязким), проявляющимся хотя бы на примере своеобразных приливов, присущих ее твердой оболочке. В уравнения, которыми мы пользовались при исследовании колебаний, не входят никакие поправочные члены, способные учесть изменения формы Земли под влиянием динамических причин.

Не будем касаться деталей *уточненного* анализа, а учтем влияние упруго-вязких деформаций Земли простым поправочным множителем, который внесем в формулу (93). Именно запишем уточненное выражение собственной частоты свободных колебаний земной оси так:

$$\nu = k\frac{\varepsilon^2}{2}\omega. \tag{94}$$

Сопоставление первого приближения с наблюдаемой частотой дает для поправочного множителя числовое значение $k = 0{,}69$. Его нужно теперь внести в дифференциальные уравнения (92) вынужденных колебаний Земли, заменив в них множитель $\frac{\varepsilon^2}{2}$ множителем $k\frac{\varepsilon^2}{2}$.

Для исследования вынужденных колебаний остается определить колебания центробежных моментов инерции D, E, входящих в правые части уравнений (92), задаваясь перемещениями воздушных масс.

В старых работах использовались устаревшие климатологические карты, на которые наносились условные грубые квадраты с тем или иным значением осредненной избыточной массы в центре каждого квадрата. В отличие от этих работ, у нас применялись новые карты климатологических изобар, по которым были построены карты *истинных* изаллобар. Амплитудные значения брались с карты рис. 333. Амплитуда принималась равной

половине разности масс между январем и июлем. Учитывалось, что сезонные изменения давления над различными областями Мирового океана не влияют на изменения центробежных моментов инерции, так как от областей с повышенным давлением атмосферы *вёды* океана автоматически перемещаются к областям с пониженным давлением воздуха. Тем самым постоянно *выравнивается* полная масса (воды и воздуха), находящаяся над единицей поверхности океанического дна. Изменения центробежных моментов инерции, следовательно, связаны *только* с изменениями количества воздуха над материками.

Вместо учета его по грубым квадратам был произведен несравненно более точный учет, основанный на использовании *ступеней давления*, которые естественно намечаются на картах между каждыми двумя *изаллобарами*.

Пусть каждой такой ступени давления соответствует прирост *массы* воздуха, равный $\Delta\mu$ в расчете на единицу поверхности Земли.

Рассмотрим элементарный участок площади размером $Rd\varphi\ R\cos\lambda d\lambda$, где φ и λ — географические координаты. Каждая ступень давления означает, что над этим участком сосредоточена соответствующая ей элементарная масса, равная площади участка, умноженной на $\Delta\mu$.

На основании формул (81) и известных геометрических соотношений запишем элементарные приращения центробежных моментов, соответствующие той же ступени давления:

$$d\mu yz = \Delta\mu R^4 \cos^2\varphi \sin\varphi \sin\lambda\, d\varphi d\lambda,$$
$$d\mu xy = \Delta\mu R^4 \cos^2\varphi \sin\varphi \cos\lambda\, d\varphi\, d\lambda. \tag{95}$$

Вырежем на карте на какой-то широте φ элементарную полоску шириной $Rd\varphi$ и заметим, на каких долготах λ_1 и λ_2 она пересекает изаллобару, соответствующую заданной ступени давления. Тогда нетрудно будет определить, каковы приращения центробежных моментов инерции, создаваемые одной ступенью избыточных масс над выделенной полоской материка:

$$2dD_0 = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} yz\,d\mu = \Delta\mu R^4 \cos^2\varphi \sin\varphi\,(\cos\lambda_1 - \cos\lambda_2)\,d\varphi,$$
$$2dE_0 = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} xy\,d\mu = \Delta\mu R^4 \cos^2\varphi \sin\varphi\,(\sin\lambda_2 - \sin\lambda_1)\,d\varphi. \tag{96}$$

Практически на картах вырезаются полоски конечной ширины $R\Delta\varphi$, для которых по формулам (96) вычисляются элементарные доли центробежных моментов, соответствующие одной ступени давления. Затем выполняется первое суммирование этих долей — для всех полосок. После этого на карте выбирается следующая ступень давления и определяются долготы точек, в которых соответствующая изаллобара пересекается той или иной элементарной полоской. Вновь суммируются доли моментов, соответствующие всем полоскам новой ступени. Так проводятся вычисления для всех ступеней давления, охарактеризованных изаллобарами на карте. После этого происходит второе суммирование — по всем ступеням давления. В результате амплитуды D_0 и E_0 центробежных моментов инерции будут таковы:

$$D_0 = \frac{1}{2} R^4 \Delta\mu \sum\sum [\cos\lambda_1 - \cos\lambda_2] \cos^2\varphi \sin\varphi \Delta\varphi,$$
$$E_0 = \frac{1}{2} R^4 \Delta\mu \sum\sum [\sin\lambda_2 - \sin\lambda_1] \cos^2\varphi \sin\varphi \Delta\varphi. \tag{97}$$

Таким способом Н. Л. Бызова [13] вычислила амплитуды колебаний центробежных моментов, которые затем были подставлены в уравнения (92) вынужденных колебаний полюса, исправленные множителем k, по формуле (94). Было положено, что D и E меняются по гармоническому закону.

В качестве примера приведем на рис. 337 траекторию, описываемую истинным Северным полюсом Земли вокруг ее северного географического полюса. Кривая, вычисленная Бызовой, нанесена штрих-пунктиром, в пределах от 1 января 1907 г. до 1 января 1909 г. Для сравнения на том же рисунке воспроизведена сплошная кривая, построенная по данным непосредственных наблюдений за движением полюса, обработанным за много лет А. Я. Орловым [17]. Как видим, обе кривые проходят в хорошем согласии между собой.

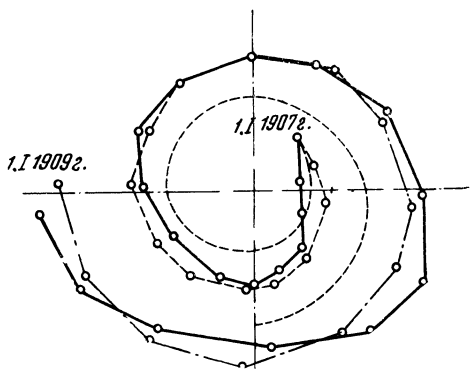


Рис. 337. Траектория Северного полюса

До недавнего времени оставался необъясненным чрезвычайно непостоянный характер движения полюса: в некоторые годы он почти неподвижен, в иные же годы амплитуда колебаний значительно превосходит среднюю за много лет. Таким годом, в частности, оказался 1907, освещенный на диаграмме рис. 337; амплитуда колебаний возросла здесь примерно вдвое.

Некоторые авторы пытались объяснить это интересное обстоятельство влиянием штормовых явлений, будто бы оказывающих динамическое воздействие на Землю. Однако контрольные подсчеты, произведенные Н. В. Зволинским, опровергли подобное объяснение.

В отличие от предшественников Бызова обнаружила истинную причину непостоянства амплитуды колебаний. Эта причина непосредственно связана с близостью между *собственным* периодом свободных колебаний земной оси (14 месяцев, как указывалось выше) и периодом колебания центробежных моментов инерции, создающих *вынужденные* колебания земной оси.

Особо большой интерес представляют такие смежные годы, которые характеризуются большими и прямо противоположными смещениями сезона минимальных температур. Действительно, если в каком-то предыдущем году самые суровые морозы наступили на месяц раньше средней нормы, а в последующем году — на месяц позже среднего срока, то промежуток времени между двумя соседними датами температурных минимумов окажется равным *не* астрономическому году, а своего рода «геофизическому году» с продолжительностью в 14 месяцев.

Тот же необычный промежуток времени создастся и между датами наибольшего накопления избыточных воздушных масс над материками, а следовательно, в правой части уравнений (92) окажутся гармонические функции с периодом в 14 месяцев, который полностью совпадет с собственным периодом свободных колебаний земной оси. В результате Земля как бы «попадает в резонанс»: амплитуда колебаний ее оси должна будет сильно возрасти.

Такое возрастание амплитуды отмечено Бызовой в промежутке времени между зимой 1907 г. и зимой 1908 г.: по данным метеорологического архива Главной геофизической обсерватории, в 1907 г. минимальные температуры наступили в январе, а в 1908 г.— в феврале. Следовательно, продолжительность «геофизического года» здесь оказалась равной 13 месяцам. Именно потому спираль на рис. 337 так далеко отошла от нормальных положений

колеблющегося полюса и в результате вычислений Бызовой и в результате непосредственных наблюдений, обработанных Орловым. Для сравнения Бызова нанесла на тот же рисунок траекторию полюса, вычисленную применительно к периоду колебаний центробежных моментов, равному 12 месяцам; эта кривая воспроизведена на рис. 337 пунктиром. Как видим, даже неполный резонанс вызвал в исследуемом году весьма резкое обострение колебаний по сравнению со средней нормой. Если бы «геофизический год» оказался равным не 13, а 14 месяцам, то резонансный эффект, открытый Бызовой, проявился бы еще сильней.

Любопытно, что малая спираль на рисунке тоже характеризует нарастание амплитуды колебаний полюса после 1 января 1907 г. Это — потому, что предыдущий «геофизический год» был короче астрономического: он равнялся всего лишь 11 месяцам. Следовательно, Земля здесь была дальше от резонансных условий по сравнению со средней нормой и амплитуда вынужденных колебаний соответственно была меньше нормальной.

Как видим, наши современные представления о сезонном переносе избыточных воздушных масс с океана на материк и в обратном направлении позволяют очень хорошо описать величественное явление колебаний земной оси в полном соответствии с итогами многолетних непосредственных наблюдений Международной службы широты, обработанных во всей полноте в нашей стране.

В результате осреднения за все годы наблюдений во всех странах можно считать, что «нормальное» движение полюса описывается эмпирическими уравнениями А. Я. Орлова [17]

$$l = 0'',088 \cos(\omega t + 0{,}31),$$
$$m = 0'',075 \sin(\omega t + 0{,}31). \qquad (98)$$

Это — движение по эллипсу с большой осью 5,3 *м* и малой осью 4,5 *м*.

По вычислениям Н. Л. Бызовой [13] и Т. В. Бончковской [14] построена отличная карта сезонного переноса масс воздуха, помещенная в Морском атласе [18]. Там же, на врезках, даны траектории, которые описывал Северный полюс Земли вокруг своего среднего положения. Эти траектории с 1898 по 1951 г. вычислены А. Я. Орловым [17].

§ 8. Связь между элементами зимнего муссонного поля и тепловым балансом моря

Пройдя первый этап теории муссонного поля, рассмотрев простую схему распределения скоростей ветра по вертикали над береговой чертой и перенос избыточных масс воздуха в сезонном цикле, вернемся к *тепловой* стороне явлений, временно оставшейся в тени, при последовательных приближениях к действительной картине.

В самом начале главы нам весьма пригодился метод исследования теплопередачи в атмосфере, основанный на применении теории физической теплопроводности к процессам теплопередачи за счет адвекции и турбулентной теплопроводности. Результаты теоретических определений достаточно хорошо совпали с результатами надежных непосредственных наблюдений над тепловым режимом приземного воздуха.

Ниже мы увидим, что действительная картина распределения воздушных потоков по вертикали и в горизонтальной плоскости чрезвычайно сложна и недоступна для строгого описания уравнениями гидромеханики и теплопроводности. Следовательно, не рассчитывая в настоящее время на такое строгое описание, естественно применить к исследованию новых задач наш приближенный метод, хорошо зарекомендовавший себя на первом этапе.

Сейчас, приступая ко второму этапу исследований, по-прежнему начнем с *двумерной* задачи. На этот раз будем рассматривать атмосферу как двумерную *пленку*, в которой происходит не только передача тепла путем теплопроводности, но и *потеря* тепла на лучеиспускание в межпланетное пространство. Там, где пленка лежит над водами океана или моря, прибавляется еще одна статья теплового баланса: в холодное время года пленка получает некоторое количество тепла от подстилающей поверхности за счет теплообмена между атмосферой и морской водой, как правило, всегда более теплой, чем воздух в это время. Теплообменом между атмосферой и поверхностью суши пренебрежем.

Представим себе, что Земля совершенно лишена океанов и что атмосфера над ее поверхностью приняла некоторую температуру, всюду равновесную с существующей радиацией Солнца. Примем эту температуру за условный *нуль* при дальнейших отсчетах.

Пусть на такой «обсохшей» Земле появилось единственное море, накопляющее в себе тепло за теплое время года и отдающее его атмосфере в холодное время. Благодаря наличию такого *дополнительного* подогревания атмосферы зимняя температура воздуха возрастет на τ, причем, разумеется, «аномалия» температуры τ будет разной для различных точек над морем и над материком.

Рассмотрим тепловые явления, которые возникнут в атмосфере под действием моря. Заменим атмосферу ее тепловой моделью — тонкой пленкой [3], обладающей некоторой условной теплопроводностью AH. Тогда можно будет записать, что от каждого квадратного сантиметра подстилающей поверхности отнимается (или ей передается — в зависимости от знака производных) количество тепла, равное $AH\nabla^2\tau$.

В расчете на ту же единицу площади наша двумерная модель атмосферы будет терять некоторое количество тепла $\sigma\tau$ на *дополнительную* тепловую радиацию в межпланетное пространство (сверх потерь, имевших место в случае обсохшего земного шара, температуру атмосферы над которым мы приняли за условный нуль).

Ввиду малой теплопроводности и малой теплоемкости пород, покрывающих сушу, можно ограничиться двумя упомянутыми членами при учете теплового баланса атмосферы над материком. Напротив, над морем придется учесть еще один новый член — количество тепла, которое передается атмосфере каждым квадратным сантиметром поверхности воды. Вообще говоря, его можно положить равным $\alpha(\tau_w - \tau)$, где τ_w — температура поверхности воды, которую мы будем здесь считать одинаковой на всем протяжении моря и отсчитывать от того же условного нуля. Выражение это тем ближе к истине, чем резче выступает на первый план тепло, отдаваемое морем за счет теплообмена с атмосферой, по сравнению с другими статьями теплового баланса [19].

В итоге для атмосферы над морем можно записать

$$(\nabla^2 - \varkappa_1^2)\tau + b^2 = 0, \tag{99}$$

а для атмосферы над сушей

$$(\nabla^2 - \varkappa_2^2)\tau = 0, \tag{100}$$

причем оператор Лапласа ∇^2 просто для компактности внесен в скобку, а обозначения, принятые для краткости, таковы:

$$\varkappa_1^2 = \frac{\sigma+\alpha}{AH}, \quad \varkappa_2^2 = \frac{\sigma}{AH}, \quad b^2 = \frac{\alpha\tau_w}{AH}. \tag{101}$$

Здесь ограничимся лишь исследованием случая круглого моря (и круглого острова). Радиус моря обозначим через R; в центре моря поместим полюс координатной системы. Тогда символические уравнения (99) и (100)

перепишутся в развернутом виде

$$\frac{d^2\tau_1}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\tau_1}{dr} - \varkappa_1^2\tau_1 + b^2 = 0, \tag{102}$$

$$\frac{d^2\tau_2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\tau_2}{dr} - \varkappa_2^2\tau_2 = 0. \tag{103}$$

Для ясности через τ_1 обозначены аномалии температуры внутри круга радиусом R, а через τ_2 — вне его. Граничные условия задачи, очевидно, таковы:

$$\left.\begin{aligned} \tau_1 &= \tau_2, \\ \frac{d\tau_1}{dr} &= \frac{d\tau_2}{dr} \end{aligned}\right\} \text{ при } r = R. \tag{104}$$

При этих граничных условиях интегралы уравнений (102) и (103) запишутся в очень простой форме

$$\frac{\tau_1}{\Theta} = 1 - N_1 I_0(\varkappa_1 r), \tag{105}$$

$$\frac{\tau_2}{\Theta} = N_2 K_0(\varkappa_2 r). \tag{106}$$

Здесь, как обычно, для бесселевых и макдональдовых функций мнимого аргумента приняты обозначения

$$I_n(x) = i^{-n} J_n(ix),$$

$$K_n(x) = \lim\left\{\frac{\pi}{2}[I_{-n}(x) - I_n(x)]\operatorname{cosec}\pi n\right\}_{n \to \text{цел. числу}}$$

Константы N_1 и N_2 выражаются через радиус R моря

$$N_1 = \frac{\mu K_1(\varkappa_2 R)}{I_1(\varkappa_1 R)\,K_0(\varkappa_2 R) + \mu I_0(\varkappa_1 R)\,K_1(\varkappa_2 R)}, \tag{107}$$

$$N_2 = \frac{I_1(\varkappa_1 R)}{I_1(\varkappa_1 R)\,K_0(\varkappa_2 R) + \mu I_0(\varkappa_1 R)\,K_1(\varkappa_2 R)}. \tag{108}$$

Величина

$$\Theta = \frac{b^2}{\varkappa_1^2} = \frac{\tau_w}{1 + \frac{\sigma}{\alpha}}, \tag{109}$$

как легко видеть, имеет любопытный физический смысл: это та температура (отсчитанная от условного нуля), которую приняла бы «модель» атмосферы, если бы весь земной шар оделся океаном.

Что касается коэффициента μ, то он связан с постоянной радиации σ и с постоянной теплообмена α

$$\mu = \frac{\varkappa_2}{\varkappa_1} = \sqrt{\frac{\sigma}{\sigma + \alpha}}. \tag{110}$$

В настоящее время постоянная σ может быть приближенно определена на основании формул (29) и (30) § 2, проверенных по диаграмме рис. 307. Постоянная α тоже известна с достаточным приближением из большого числа измерений теплообмена между морем и атмосферой. Воспользуемся этими числовыми значениями и положим

$$\sigma = 6{,}8 \cdot 10^{-5}, \quad AH = 4 \cdot 10^{12}, \quad \alpha = 3{,}3 \cdot 10^{-4}. \tag{111}$$

Тогда, исходя из соотношений (105) — (108), легко будет определить связь между радиусом моря и аномалиями температур, которые возникают в центре самого моря и на берегу. Действительно, подставив в (105) значение $r = 0$, найдем для аномалии в центре моря

$$\frac{\tau_0}{\Theta} = 1 - N_1 I_0(\varkappa_1 R). \tag{112}$$

Подставив же в (105) или в (106) $r = R$, определим аномалию на берегу

$$\frac{\tau_R}{\Theta} = N_2 K_0(\varkappa_2 R). \tag{113}$$

Здесь N_1 и N_2 надо заменить их выражениями (107) и (108) и, подставив числа из (111), вычислить функции I и K по соответствующим таблицам. В результате вычислений получается зависимость, изображенная графически на рис. 338. Кривая *1* выражает аномалию температуры в центре моря в зависимости от размеров моря, кривая *2* — аномалию над берегом. Цифры,

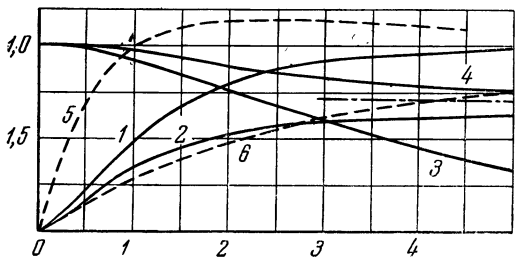


Рис. 338. Элементы муссонного поля

проставленные по оси ординат, дают аномалии в долях от максимальной величины Θ; цифры, проставленные по оси абсцисс, — радиус моря, выраженный в тысячах километров.

Рассмотрим теперь случай *круглого острова*, который уцелел на земном шаре, в то время как вся остальная поверхность Земли покрылась океаном.

Пусть радиус острова равен R и пусть полюс координатной системы находится в его центре. Сохраним индекс 1 для величин, относящихся к области $0 < r < R$, и индекс 2 — к области внешней. Тогда член b^2 переместится из уравнений (99) и (102) соответственно в уравнения (100) и (103). Интегралы их (при прежних граничных условиях) будут соответственно

$$\frac{\tau_1}{\Theta} = N_1 I_0(\varkappa_1 r), \tag{114}$$

$$\frac{\tau_2}{\Theta} = 1 - N_2 K_0(\varkappa_2 r). \tag{115}$$

Выражения для констант N_1 и N_2 сохранят прежний вид (107), (108), но только следует иметь в виду, что теперь

$$\varkappa_1^2 = \frac{\sigma}{AH}, \quad \varkappa_2^2 = \frac{\sigma + \alpha}{AH}, \tag{116}$$

а значит,

$$\mu = \sqrt{\frac{\sigma + \alpha}{\sigma}}. \tag{117}$$

Вспоминая значения σ и α из (111), найдем, что в случае острова

$$\mu = 2{,}43. \tag{117а}$$

На диаграмме рис. 338 приведены кривые, вычисленные по (114), (115) и (118) для аномалий температуры над центром острова различных размеров (кривая *3*) и на берегу того же острова (кривая *4*). Размеры радиуса попрежнему выражены в тысячах километров. Легко показать, что при неограниченном возрастании размеров круглого моря или круглого острова аномалии температуры на берегу стремятся к общему пределу (обозначен-

ному на рис. 338 прямой из точек и черточек)

$$\lim \left| \frac{\tau_R}{\Theta} \right|_{R \to \infty} = \frac{1}{1 + \sqrt{\frac{\sigma}{\alpha + \sigma}}}. \tag{118}$$

На рис. 339 кривая τ изображает распределение температурных аномалий над морем и над материком, окружающим его. По оси абсцисс отложено расстояние от центра моря. Темная полоса под осью абсцисс изображает разрез моря вертикальной плоскостью; совершенно очевидно, что рельеф дна тут не играет никакой роли, а потому разрез схематизирован. За пределами радиуса моря R тянется материк. Чтобы получить пространственную картину, надо вообразить вращение чертежа вокруг вертикальной оси; тогда радиус R опишет поверхность моря, его продолжение — поверхность материка, а кривая τ — кривую поверхность, изображающую распределение температурных аномалий над поверхностью моря и поверхностью материка, вокруг него.

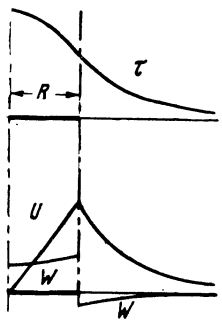


Рис. 339. Температура воздуха и ветер над морем и над материком

Попытаемся теперь перейти от нашей двумерной модели атмосферы к модели трехмерной, вспомнив, с одной стороны, приближенное соотношение (66) между температурным и барическим полями муссона и, с другой — упрощенную схему вертикального распределения скоростей ветра (72) в муссонном поле.

Распространим эту схему, с заведомой погрешностью, на всю исследуемую область, имея в виду определение вертикальных составляющих скоростей из других соотношений. Заменим эпюру радиальных составляющих u, не слишком далекую от синусоиды, простой синусоидой. Тогда получим для радиальных составляющих грубо приближенное выражение

$$u = U \sin az, \quad a = \frac{\pi}{D}, \tag{119}$$

где D — высота трения, а через U для краткости обозначено выражение, вытекающее из уравнения (72):

$$U = \frac{\Pi}{2\delta\bar{\omega}} \frac{d\tau}{dr}. \tag{120}$$

По-прежнему константа Π выражается формулой (67). Через δ обозначена плотность воздуха, через $\bar{\omega}$ — произведение угловой скорости вращения Земли на синус широты.

Но в таком случае соотношения (105), (120) и (106), (120) дают

$$u_1 = -\frac{\Pi \varkappa_1}{2\delta\bar{\omega}} N_1 I_1(\varkappa_1 r) \sin az \tag{121}$$

для пространства над морем. Для пространства над материком аналогично получается

$$u_2 = -\frac{\Pi \varkappa_2}{2\delta\bar{\omega}} N_2 K_1(\varkappa_2 r) \sin az. \tag{122}$$

Мы не будем интересоваться тангенциальными составляющими скоростей ветра, которые таким же путем могут быть найдены при объединении приближенных гидродинамических соотношений и уравнений температурного поля. Легко видеть, что тангенциальные составляющие не играют никакой роли в переносе воздушных масс между морем и материком. Никакой роли они не играют также и в уравнении неразрывности, которое связывает

между собой радиальные и вертикальные составляющие скоростей [см. (54)]:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial (ru)}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

На основании этого уравнения и уравнений (121) и (122) вполне определяются вертикальные составляющие:

$$w_1 = + \frac{\Pi \varkappa_1^2 D}{2\pi\delta\omega} N_1 I_0 (\varkappa_1 r) [1 - \cos az], \tag{123}$$

$$w_2 = - \frac{\Pi \varkappa_2^2 D}{2\pi\delta\omega} N_2 K_0 (\varkappa_2 r) [1 - \cos az]. \tag{124}$$

На рис. 339 кривые U и W изображают изменение радиальных и вертикальных составляющих при удалении от центра моря. Величина U имеет здесь тот же смысл, как в (119). Величина же W представляет собой функцию, стоящую в качестве множителя перед квадратной скобкой в (123) и (124). Разумеется, в природе кривая U несколько сглаживается около пика. Кривая W в действительности проходит через нуль без разрыва. Масштабы обеих кривых на чертеже — разные; масштаб вертикальных составляющих — более крупный.

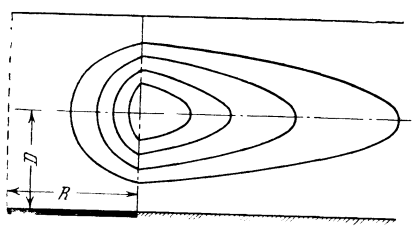


Рис. 340. Проекции схематических линий тока

Диаграмма показывает, что наибольшие скорости муссонных ветров должны наблюдаться *близ берега* (это относится также к тангенциальным составляющим, не нанесенным на чертеж). Скорости радиальные и тангенциальные падают до нуля к центру моря и постепенно приближаются к нулю по мере удаления от моря, на материке.

Вертикальные составляющие направлены вверх над морем и вниз над материком (все относится к зимнему муссону).

Напомним, что на основании диаграммы рис. 338 наземный муссон направлен под углом 45° к градиенту давления, который, очевидно, нормален к береговой черте. Следовательно, муссон должен быть направлен под углом 45° к береговой черте.

Попытаемся теперь обрисовать *схему проекций линий тока* муссона на вертикальную плоскость.

Как известно, дифференциальные уравнения проекций линий тока на вертикальную плоскость записываются в виде

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{w}{u}. \tag{125}$$

Подставим сюда выражения u и w из уравнений (121), (123) и соответственно из (122), (124). Тогда после интегрирования найдем

$$z_1 = \frac{D}{\pi} \arccos \left[1 - \frac{C_1}{rI_1 (\varkappa_1 r)}\right], \tag{126}$$

$$z_2 = \frac{D}{\pi} \arccos \left[1 - \frac{C_2}{rK_1 (\varkappa_2 r)}\right]. \tag{127}$$

Здесь C_1 и C_2 — постоянные интегрирования, выбираемые с таким расчетом, чтобы между каждыми двумя соседними кривыми проносилось одинаковое количество воздуха.

Проекции линий тока, построенные по этим уравнениям, представлены на рис. 340. Для получения пространственной картины следует снова вооб-

разить, что чертеж вращается вокруг вертикальной оси, при этом черная полоса опишет круг радиусом R, изображающий поверхность моря и находящийся в обрамлении поверхности материка. Кривые очертят поверхности *тороидов*, по которым будут укладываться (винтообразно) линии тока. Наша схема показывает, что муссонные потоки должны простираться довольно далеко от моря, вторгаясь на материк.

В заключение отметим, что при неограниченном возрастании радиуса моря скорость муссонного ветра стремится к вполне определенному *конечному* пределу. На береговой черте предельная величина U_∞ выразится так:

$$U_\infty = \frac{\Pi\Theta}{2\delta\bar{\omega}}\left(\frac{\varkappa_1\varkappa_2}{\varkappa_1+\varkappa_2}\right). \tag{128}$$

В свою очередь через эту максимальную величину легко выразить значение U_R, соответствующее тому или иному размеру моря (или острова):

$$\frac{U_R}{U_\infty} = \frac{1+\mu}{\dfrac{K_0(\varkappa_2 R)}{K_1(\varkappa_2 R)}+\mu\dfrac{I_0(\varkappa_1 R)}{I_1(\varkappa_1 R)}}. \tag{129}$$

Закон нарастания величины U_R/U_∞ при увеличении размеров моря или острова изображен на рис. 338. Кривая *5* соответствует первому из упомянутых объектов, а кривая *6* — второму.

При неограниченном возрастании R ординаты обеих кривых, разумеется, стремятся к общему пределу — к единице, что следует как из физического смысла картины, так и из симметрии формулы (120) по отношению к $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$.

Можно отметить, что подстановка числовых значений элементов в (128) дает для предельной величины U_∞ абсолютное значение порядка 18—20 *м/сек*.

§ 9. Особенности летнего муссона

Во всем предыдущем изложении мы условились понимать под словом *муссон* только *зимний* муссон, наиболее важный для умеренного и холодного поясов земного шара.

Посмотрим теперь, как можно охарактеризовать поле *летнего* муссона, вызванного сильным нагревом воздуха над материком и значительно меньшим нагревом морского воздуха.

В гл. IV было показано, что солнечное тепло, падающее на единицу подстилающей поверхности, распределяется весьма неравномерно между воздухом и той средой, которая лежит под поверхностью раздела. Именно на долю воздуха приходится часть Q_a полной радиации Q_s (солнечной и диффузной), выражаемая соотношением

$$Q_a = \frac{\eta}{1+\eta}Q_s,$$

а на долю подстилающей среды

$$Q_{w,\,g} = \frac{1}{1+\eta}Q_s,$$

где вместо η следует подставить либо η_1, выражаемое в свою очередь формулой (52) гл. IV, если подстилающей средой является море, либо η_2, выражаемое формулой (55), гл. IV, если среда эта — твердый грунт.

Вспомним, что в первом случае $\eta = \eta_1$ чрезвычайно малы — составляют примерно от 0,004 до 0,01; напротив, во втором случае $\eta = \eta_2$ весьма велики — они достигают примерно 0,38 для скалистого грунта (гранита) и даже 0,95 для песчаной пустыни. Вот почему воздух над морем получает совсем ничтожную часть солнечной энергии, падающей на поверхность моря,— примерно около *двух процентов*. По той же причине воздух над материком

получает около *половины* энергии, падающей на поверхность песка в пустыне, и около одной *трети* энергии, падающей на обычно встречающиеся грунты.

Следует отметить, что здесь мы не рассматриваем той части падающей энергии, которая либо зеркально, либо диффузно отражается от подстилающей поверхности.

Вспомнив эти результаты исследований, введем раздельно индекс w для моря и индекс g для суши.

Легко видеть, что воздух над морем *недополучает* некоторое определенное количество тепла q по сравнению с воздухом, простирающимся над сушей (q отнесено к единице поверхности и к единице времени). Нетрудно также убедиться в том, что

$$q = \left(\frac{\eta_g}{1+\eta_g} - \frac{\eta_w}{1+\eta_w}\right) Q_s. \tag{130}$$

Это различие является решающим при формировании *летнего* муссонного поля. По сравнению с ним отходит на задний план различие в элементах конвекционного теплообмена с воздухом: ведь нигде на земном шаре летний теплообмен между морем и атмосферой не может сколько-нибудь равняться с зимним теплообменом, играющим основную роль зимой в умеренном и холодном поясах.

Последнее обстоятельство значительно облегчает задачу исследования *летнего* муссона: если бы летний теплообмен играл существенную роль, то учет его представил бы очень серьезные затруднения. Итак, отбросим члены теплового баланса атмосферы, которые связаны с летним конвекционным теплообменом между подстилающей поверхностью и воздухом, и ограничимся учетом различия режимов, представленного формулой (130). Тогда, применяя тот же метод исследования круглого моря, появившегося на «обсохшем» земном шаре, метод, изложенный в предыдущем параграфе, придем к выводу, что тепловой баланс воздуха над *морем* выразится уравнением

$$(\nabla^2 - \varkappa^2)\,\tau - n^2 = 0, \tag{131}$$

а над материком по-прежнему

$$(\nabla^2 - \varkappa^2)\,\tau = 0. \tag{132}$$

Теперь, как видим, существенно положительная величина $\varkappa^2$ оказывается одной и той же для обоих уравнений. Именно

$$\varkappa^2 = \frac{\sigma}{AH}, \tag{133}$$

где все обозначения прежние.

В уравнение (131) входит с *отрицательным* знаком величина n^2, которая здесь появляется вместо b^2, входившего в уравнение (99). Эта важная величина расшифровывается так:

$$n^2 = \frac{q}{AH}, \tag{134}$$

причем q определяется соотношением (130).

Легко видеть, что уравнения (131) и (132) интегрируются совершенно так же, как и уравнения зимнего муссонного поля (99) и (100).

Не останавливаясь на деталях, отметим только, что аномалии τ температуры воздуха, вызванные действием моря, теперь будут уже *отрицательными*.

Если бы весь земной шар оделся океаном, то понижение температуры воздуха по сравнению с условным нулем (соответствовавшим обсохшему земному шару) оказалось бы равным некоторой наибольшей отрицательной аномалии Θ'. При этом, как легко показать, было бы

$$\Theta' = \frac{q}{\sigma}. \tag{135}$$

Сопоставляя величину Θ' с величиной Θ, исследованной в предыдущем параграфе, можно составить количественное представление о том, какой муссон особенно резко выражен в той или иной зоне Земли — муссон зимний или муссон летний.

§ 10. Влияние формы береговой линии на напряженность муссонного поля

До сих пор, исследуя различные элементы муссонного поля, мы полагали, что граница между морем и материком всюду имеет форму *окружности* некоторого определенного радиуса R.

Попытаемся теперь определить, как изменится напряженность муссонного поля в том случае, если форма береговой линии будет иная. Посмотрим, какие особенности возникают в этом поле, против *мысов и полуостровов* остроконечной формы, в *бухтах* и *заливах* (над морем), а также над самими полуостровами и мысами, против бухт и заливов (на материке).

По примеру § 8 и 9 будем решать задачу о некоторой условной теплопроводности вместо задачи непосредственно гидродинамической. Другими словами, будем судить о напряженности муссонного поля по частоте залегания температурных *изаномал* на соответствующей карте или схеме.

Общие уравнения поля температурных аномалий сохранят форму (99) и (100) независимо от вида береговой линии. Чрезвычайно любопытно, что и условие на границе — на самой береговой линии — остается прежним

$$\tau_{\text{берег}} = \text{const}. \tag{104а}$$

Причина этого явления пока еще не ясна, но его необходимо констатировать как безусловный вывод из многочисленных наблюдений (см., например, рис. 344). Разумеется, условие (104а) применимо с двумя оговорками: во-первых, на не слишком большом протяжении берега, во-вторых, за некоторыми исключениями, причина появления которых также пока еще нуждается в выяснении.

В уравнениях (99) и (100), описывающих температурное поле муссона, содержится член $\varkappa^2\tau$, благодаря которому они отличаются от легко интегрируемых уравнений Пуассона и Лапласа. Для случаев сложной береговой линии интегрирование их невозможно впредь до постройки специального интегратора.

Однако о тенденции муссонного поля при сложно очерченной береговой линии мы можем судить в первом приближении, если пренебрежем величиной $\varkappa^2\tau$ по сравнению с лапласианом в уравнении (100). После этого задача о температурном поле при каком угодно сложном очертании береговой линии станет совершенно аналогичной задаче о расположении эквипотенциальных поверхностей вокруг заряженного цилиндра, поперечное сечение которого очерчено по заданной кривой.

Следовательно, нашу задачу можно решить в первом приближении, воспользовавшись приемами, давно и хорошо разработанными для электрического поля.

Пусть, например, требуется охарактеризовать муссонное поле вокруг острова, имеющего форму *эллипса*, или вокруг моря эллиптической формы. В данном случае придется лишь вспомнить известное максвелловское решение задачи для заряженного эллиптического цилиндра. Тогда легко будет записать уравнения семейства температурных изаномал в форме

$$\frac{x^2}{f^2\operatorname{ch}^2\tau} + \frac{y^2}{f^2\operatorname{sh}^2\tau} = 1. \tag{136}$$

Здесь через f обозначена величина

$$f = \frac{a}{\operatorname{ch} \tau_{\text{берег}}} = \frac{b}{\operatorname{sh} \tau_{\text{берег}}},$$

где $2a$ — большая ось эллипса, $2b$ — его малая ось, а $\tau_{\text{берег}}$ — температурная аномалия, соответствующая береговой линии.

На рис. 341 изображена картина муссонного поля вокруг острова эллиптической формы (над морем) или вокруг моря подобной же формы (над материком). Обращает на себя внимание *сгущение* изаномал против вершин эллипса с наибольшей кривизной и разрежение их против тех участков, где кривизна оказывается наименьшей.

Формула (136) позволяет определить, во сколько раз температурный градиент против вершины эллипса (т. е. градиент вдоль оси X) превышает наименьший градиент (вдоль оси Y) у берегов.

Положим в этой формуле $y = 0$. Тогда окажется, что для точек оси X

$$\operatorname{ch} \tau = \frac{x}{f}. \tag{137}$$

Отсюда определяется градиент

$$\frac{d\tau}{dx} = \frac{1}{f \operatorname{sh} \tau}. \tag{138}$$

Совершенно аналогично для точек оси Y будет

$$\operatorname{sh} \tau = \frac{y}{f}, \tag{139}$$

а следовательно,

$$\frac{d\tau}{dy} = \frac{1}{f \operatorname{ch} \tau}. \tag{140}$$

Но в таком случае

$$\frac{d\tau}{dx} \Big/ \frac{d\tau}{dy} = \frac{\operatorname{ch} \tau}{\operatorname{sh} \tau}. \tag{141}$$

У самого берега следует положить $\tau = \tau_0$. Тогда на основании (136) можно будет записать

$$\left[\frac{d\tau}{dx} \Big/ \frac{d\tau}{dy}\right]_0 = \frac{a}{b}. \tag{142}$$

Другими словами, искомое отношение градиентов равно *отношению полуосей эллипса*: градиент против вершин эллипса во столько раз превышает наименьший градиент у пологого берега острова, во сколько раз большая ось эллипса превышает малую.

Совершенно очевидно, что подобное различие обостряется сильней всего у самих *берегов* эллиптического моря. При удалении от них величина $\operatorname{ch} \tau / \operatorname{sh} \tau$ должна постепенно приближаться *к единице*. Иными словами, на большом расстоянии от эллиптического моря его муссонное поле все меньше и меньше отличается от поля *круглого* моря.

Положим теперь, что требуется охарактеризовать муссонное поле против остроконечного полуострова, имеющего форму прямолинейно очерченного клина. Пусть угол при вершине этого клина равняется α. В таком случае уместно будет припомнить вторую аналогичную задачу, решенную Максвеллом для двух заряженных полуплоскостей, сходящихся клином под углом α.

Тогда окажется, что уравнение семейства изаномал можно будет записать (в полярных координатах r, φ) в форме

$$r^{\frac{\pi}{2\pi - \alpha}} \sin \frac{\pi \varphi}{2\pi - \alpha} = \text{const}. \tag{143}$$

На рис. 342 жирными линиями обозначена береговая черта. Тонкие линии вниз от нее представляют собой изаномалы, залегающие против мыса с острым углом $\pi/3$ при вершине (или изаномалы, залегающие над материком против залива той же формы).

Тонкие линии, нанесенные на рисунке выше береговой черты, представляют собой изаномалы, залегающие над заливом, сжатым между берегами, угол между которыми, отсчитываемый над материком, составляет $\pi/3$ (или изаномалы, залегающие над мысом той же формы).

Как видим, на рис. 342 еще резче, чем на рис. 341, проявляется сгущение изаномал против остроконечного выступа береговой черты. Следовательно, здесь мы должны ожидать резкого усиления муссонных ветров. Наоборот, над самим остроконечным мысом поле изаномал характеризуется меньшей напряженностью. Следовательно, ветровой режим здесь тоже будет соответственно мягче.

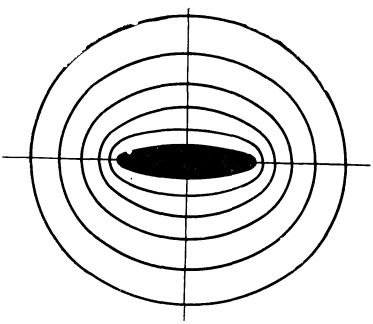


Рис. 341. Муссонное поле вокруг острова эллиптической формы

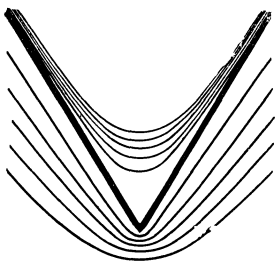


Рис. 342. Муссонное поле клиновидного полуострова и залива

Любопытно, что из формулы (143) может быть получено соотношение, применимое к совсем иной форме береговой линии.

Действительно, положим, что угол α при вершине клина на рис. 342 превратился в нуль, т. е. мыс превратился в полупрямую. Тогда, подставив $\alpha = 0$ в (143), получим для поля против такой полупрямой

$$r^{1/2} \sin \frac{\varphi}{2} = \text{const} = C^{1/2}. \tag{144}$$

Задаваясь какой-то определенной величиной константы, мы получим на плоскости ту или иную кривую $\tau = \text{const}$, т. е. изаномалу. Но любая из них может оконтуривать *берег* залива или полуострова. Следовательно, всё *внешнее* поле мы можем рассматривать как поле залива или полуострова, очерченного по соответствующей кривой.

Посмотрим, что это за кривые, принадлежащие к семейству (144). Непосредственно из (144) вытекает

$$\frac{C}{r} = \sin^2 \frac{\varphi}{2} = \frac{1 - \cos \varphi}{2},$$

откуда

$$\cos \varphi = 1 - 2\frac{C}{2}. \tag{145}$$

Но $\cos \varphi$ можно определить и иначе, пользуясь вспомогательным чертежом рис. 343. Именно

$$\cos \varphi = \frac{y}{r},$$

откуда

$$\frac{y}{r} = 1 - 2\frac{C}{r}, \quad (y + 2C) = r. \tag{146}$$

Радиус-вектор r можно исключить, возведя в квадрат обе части последнего равенства и заменив квадрат r суммой квадратов x и y. После приведения оказывается, что

$$x^2 = 4C(y + C). \tag{147}$$

А это — уравнение *параболы*, отнесенной к *фокусу*, который, очевидно, отстоит на расстоянии C от вершины.

Итак, мы получили семейство парабол, любая из которых может быть принята за очертание *параболического* залива или мыса, или полуострова.

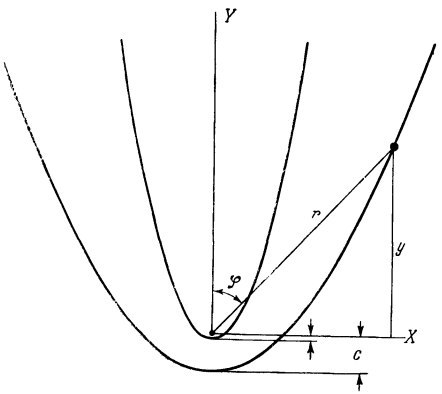


Рис. 343. Вспомогательное построение



Рис. 344. Изаномалы Индостана

Вернемся к простому уравнению семейства в форме (144).

Постоянная $C^{1/2}$, стоящая в правой части уравнения (144), должна меняться пропорционально значениям температурной аномалии, которые соответствуют той или иной кривой из семейства изаномал. Следовательно, на основании соображений о размерности можно будет записать

$$\left(\frac{r}{r_0}\right)^{1/2} \sin\frac{\varphi}{2} = \frac{\tau}{\tau_0}. \tag{148}$$

Для точек, лежащих вдоль оси Y, надо положить $\varphi = \pi$. Значит, здесь

$$\left(\frac{r}{r_0}\right)^{1/2} = \frac{\tau}{\tau_0},$$

откуда определится величина температурного градиента

$$\left(\frac{d\tau}{dr}\right)_y = \frac{1}{2}\frac{\tau_0}{\sqrt{r_0 r}};$$

нетрудно видеть, что она оказывается наибольшей у самого берега при $r = r_0$

$$\left(\frac{d\tau}{dr}\right)_{r=r_0} = \frac{1}{2}\frac{\tau_0}{r_0}. \tag{149}$$

Насколько близко передает действительную картину рис. 342, можно судить, сопоставив верхнюю ее часть (над клином) с картой температурных изаномал, которую построила Н. Д. Ершова для Индостана (рис. 344).

Как видим, природная картина чрезвычайно близко напоминает схему, построенную в первом приближении. Особенно важно отметить, что одна

из изаномал, видных на рис. 344, стелется совсем близко от береговой черты, всюду следуя ее преобладающему направлению. Это обстоятельство как нельзя лучше гармонирует с условием (104*а*), которое было положено в основу рассуждений.

Отметим также, что стрелки, видные около береговой черты и обозначающие преобладающее направление ветров для соответствующего месяца, составляют всюду угол около 45° с береговой чертой, а стало быть, и с соответствующей изаномалой. Это обстоятельство лишний раз подтверждает теснейшую связь между полем изаномал и полем гидродинамическим: ту связь, которая выражается основным уравнением теории муссонов (68).

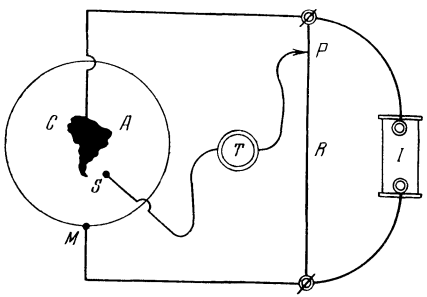


Рис. 345. Электрический интегратор уравнения Лапласа

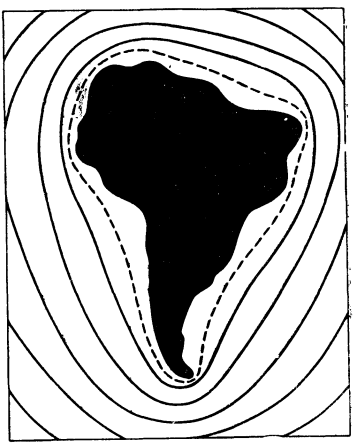


Рис. 346. Поле вокруг модели материка Южной Америки

Подобное бодрящее подтверждение правильности принятого метода внушает мысль попытаться построить модель поля температурных изаномал для очень сложной береговой линии, например для той формы, по которой очерчены берега Южной Америки. Разумеется, теперь уже нельзя будет надеяться на применение каких бы то ни было уравнений семейств кривых. Здесь надо будет прибегнуть к экспериментальному приему.

Именно, составим цепь мостика Уитстона — Кольрауша, изображенную на рис. 345. В круглую кювету с плоским стеклянным дном C и металлической стенкой M поместим второй металлический электрод, очерченный по форме береговой линии Южно-Американского материка, как по производящей A. Наполним кювету водопроводной водой и будем питать цепь переменным током от малой индукционной катушки I и слушать звук ее в телефонной трубке T, включенной между ползунком P реохорда R и тонким электродом-зондом S. Звук будет стихать до минимума, когда этот зонд станет попадать в точки, обладающие тем же потенциалом, как и нож ползунка P, касающийся реохорда.

Но ведь нож ползунка можно помещать в какой угодно точке между концами реохорда, меняя тем самым его потенциал. Следовательно, пользуясь электродом-зондом, можно определить форму и расположение любой эквипотенциальной линии вокруг электрода-«материка». Для наиболее простой фиксации эквипотенциальных линий нанесем на бумаге, подложенной под кюветой, направления основных «галсов», примерно нормальных берегам «материка», и отметим на этих галсах расстояния от берега в миллиметрах. Тогда легко будет зафиксировать в журнале наблюдений положения тех точек на галсах, где потенциал равнялся той или иной заданной величине. Потом через соответственные точки легко будет провести на бумаге эквипотенциальные линии.

На рис. 346 изображены результаты, полученные В. В. Шулейкиным по такому способу [20]. Впоследствии этим способом пользовался А. М. Гусев [21].

Легко видеть, как тесно прилегают одна к другой эквипотенциальные линии против мыса Горн. Здесь должна возникать громадная напряженность муссонного поля. И действительно, мыс Горн, как известно, славится своими ураганными штормами, происхождение которых в наибольшей степени обусловлено именно муссонным полем.

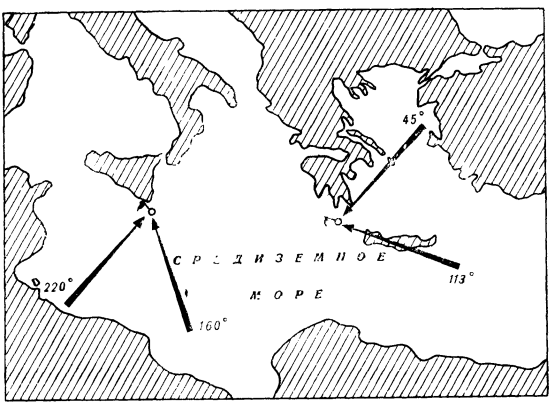


Рис. 347. Изменения направлений ветра на траверзах мысов

Штормы того же происхождения наблюдаются также и у других остроконечных мысов: например, у мыса Доброй Надежды, вполне оправдывающего свое старое название (мыс Бурь), у мыса Фаруэлл (южная оконечность Гренландии), у п-ова Флорида, у Канина Носа, у мыса Желания (северная оконечность Новой Земли) и др.

Во всех аналогичных случаях, характеризующихся чрезвычайно большой напряженностью муссонного поля против остроконечных мысов, полуостровов, необходимо помнить о наличии тангенциальной составляющей муссонных потоков, о которой не было надобности вспоминать в случае круглого моря или круглого материка. Потоки воздуха, стремительно стекающего с мыса, находятся в поле кориолисовой силы, а потому они могут создавать у оконечностей материка мощные вихри, нередко обладающие большой разрушительной силой. По всей вероятности, в таких особых точках муссонного поля должны обостряться и тропические ураганы, траектории которых в Атлантике, как правило, проходят мимо п-ва Флорида, а на Тихом океане — мимо остроконечных образований береговой линии Антильских о-вов. Резкие изменения направления ветра у мысов также объясняются подобным эффектом. В качестве примера на рис. 347 изображены резкие смены направления ветра, которые наблюдались во время прохождения на экспедиционном океанографическом судне «Седов» траверза м. Гранитоло (на о. Сицилия) и траверза м. Матапан (Пелопоннесский п-ов) [22].

На основании теоретических соображений С. М. Попов показал, что полное отклонение ветра может достигнуть 90° при прохождении траверза остроконечного мыса. На рис. 347 первое отклонение составляло 60°, а второе 68°. Скорость ветра при этом возрастала на самом траверзе до 30 *м/сек*. Описанный случай относится к зимнему времени, но даже и весной, при значительно более слабом ветре муссонного типа, ясно сказывается влияние мысов. Например, на рис. 348 представлена регистрация направлений ветра на подходе к тому же м. Матапан во время прохождения его траверза и при дальнейшем

плавании «Седова». Очень интересны два вихря, зародившихся по обе стороны от мыса: они дали пики B и D на диаграмме [23].

Изложенная здесь теория Шулейкина заставляет ожидать на материке, против *остроконечных* берегов морей и больших озер, примерно такое же обострение муссонного поля, какое возникает над морем против остроконечных

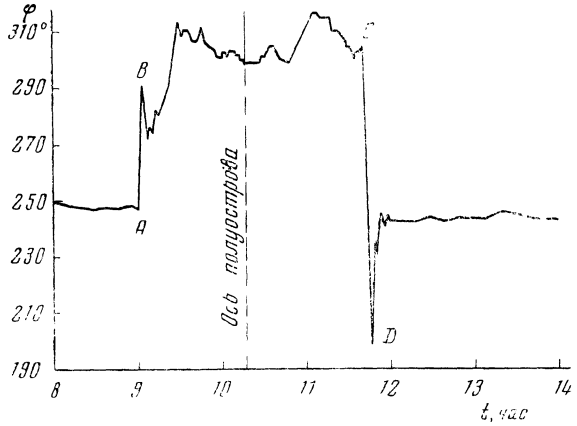


Рис. 348. Регистрация направлений ветра близ м. Матапан

полуостровов и мысов. Наблюдения подтверждают теорию также и в этом варианте; так, например, по концам озера Байкал Б. Л. Дзердзеевский наблюдал постоянное резкое повышение скорости ветра по сравнению с точками, расположенными на спокойно протянувшихся берегах.

§ 11. Уточненное решение задачи для эллиптического острова и параболического мыса

Приближенное решение, приведенное в предыдущем параграфе, дало результаты, удовлетворительно оправдывающиеся в природе с качественной стороны. Для суждения о стороне *количественной* весьма важно попытаться решить задачу более точным методом, хотя бы для ограниченного числа случаев, и сопоставить между собой результаты приближенного и более точного решений.

Такое уточнение решения было произведено Я. И. Секерж-Зеньковичем [24] применительно к двум частным случаям: случаю эллиптического острова и случаю параболического мыса. Воспроизведем здесь основные этапы его работы.

Для первого случая прежде всего строится эллиптическая координатная сетка, исходя из двух комплексных переменных

$$z = x + iy \text{ и } \zeta = \xi + i\eta,$$

связанных между собой условием

$$z = c \cos i\zeta. \tag{150}$$

Здесь c обозначает действительное число, а, i, как обычно, равно $\sqrt{-1}$. Отсюда вытекает

$$x = c \operatorname{ch} \xi \cos \eta, \quad y = c \operatorname{sh} \xi \sin \eta. \tag{151}$$

В свою очередь, на основании (151), можно записать

$$\frac{x^2}{(c\,\mathrm{ch}\,\xi)^2}+\frac{y^2}{(c\,\mathrm{sh}\,\xi)^2}=1, \tag{152}$$

$$\frac{x^2}{(c\cos\eta)^2}-\frac{y^2}{(c\sin\eta)^2}=1. \tag{153}$$

Считается, что ξ может изменяться от 0 до ∞, а η от $-\pi$ до π.

Таким образом, формула (151) устанавливает конформное отображение полуполосы $EBCDC'B'E'$ плоскости (z) (рис. 349, *а*) на всю плоскость (рис. 349, *б*) с разрезом вдоль полуоси $(D-\infty)$.

Формулы (152) и (153) показывают, что отрезки прямых $\xi=\mathrm{const}$, лежащие внутри полосы плоскости (ζ), переходят в эллипсы плоскости (z) и отрезок CC' прямой $\xi=0$—в края разреза CD плоскости (z). Прямая $\eta=0$

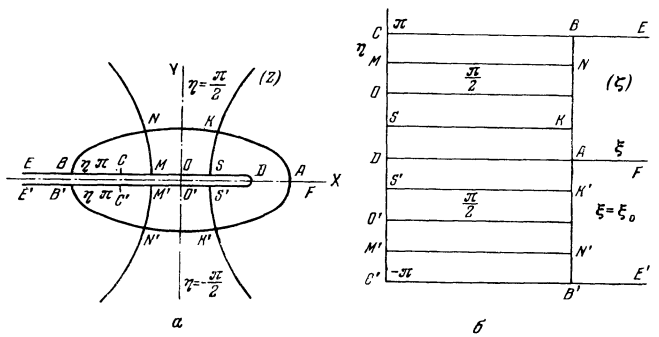


Рис. 349. Конформное отображение (эллипс)

переходит в часть положительной полуоси OX, начиная от точки D. Прямые $\eta=\pm\frac{\pi}{2}$ превращаются в верхнюю и нижнюю половину оси OY, а прямые $\eta=\pm\pi$ — в края разреза вдоль отрицательной действительной полуоси, начиная от точки C.

В результате конформного отображения Секерж-Зенькович получает возможность преобразовать уравнения (99) и (100) применительно к случаю эллиптической береговой линии таким образом, что они допускают интегрирование. Именно на основании (151) он получает вспомогательное уравнение

$$\frac{\partial^2\tau}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2\tau}{\partial\eta^2}=\frac{c^2}{2}(\mathrm{ch}\,2\xi-\cos 2\eta)\left(\frac{\partial^2\tau}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\tau}{\partial y^2}\right),$$

которое позволяет ему записать основные уравнения (99) и (100) в новой форме соответственно эллиптической системе координат

$$\frac{\partial^2\tau_1}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2\tau_1}{\partial\eta^2}=a_1^2(\mathrm{ch}\,2\xi-\cos 2\eta)\,\tau_1-b_1^2(\mathrm{ch}\,2\xi-\cos 2\eta), \tag{154}$$

$$\frac{\partial^2\tau_2}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2\tau_2}{\partial\eta^2}=a_2^2(\mathrm{ch}\,2\xi-\cos 2\eta)\,\tau_2. \tag{155}$$

Здесь новые коэффициенты просто выражаются через старые

$$a_1^2=\frac{c^2}{2}\varkappa_1^2,\qquad b_1^2=\frac{c^2}{2}b^2,\qquad a_2^2=\frac{c^2}{2}\varkappa_2^2. \tag{156}$$

При решении уравнения (155) можно положить, что

$$\tau_2=E(\xi)\,G(\eta), \tag{157}$$

где функция $E(\xi)$ зависит только от ξ, а функция $G(\eta)$ — только от η. В таком случае преобразования уравнения (155) приводят к уравнению

Матье

$$G'' + (\lambda + a_2^2 \cos 2\eta)\, G = 0 \tag{158}$$

и к так называемому присоединенному уравнению Матье

$$E'' - (\lambda + a_2^2 \operatorname{ch} \xi)\, E = 0. \tag{159}$$

Здесь λ представляет собой произвольную постоянную. Выберем ее с таким расчетом, чтобы уравнение (158) обладало периодическим решением с периодом 2π при заданном a^2. В обычных обозначениях, принятых для функций Матье (по Айнсу), пишут

$$-\frac{a_2^2}{2} = \theta, \quad \lambda = a.$$

Не будем a смешивать с нашим параметром a_2^2.

При заданном a_2^2 можно подобрать бесчисленное множество значений λ, каждому из которых будет соответствовать периодическое решение с периодом 2π. Это будут функции Матье первого рода, обозначаемые через ce_n и se_n и выражаемые рядами

$$ce_n = \sum_{m=0}^{\infty} A_{n,\,2m+1} \cos (2m+1)\,\eta,$$

$$se_n = \sum_{m=0}^{\infty} B_{n,\,2m+1} \sin (2m+1)\,\eta \tag{160}$$

в случае n целых нечетных и

$$ce_n = A_{n,\,0} + \sum_{m=1}^{\infty} A_{n,\,2m} \cos 2m\eta,$$

$$se_n = \sum_{m=1}^{\infty} B_{n,\,2m} \sin 2m\eta \tag{161}$$

в случае n целых четных.

Им соответствуют присоединенные функции Матье первого рода, которые обозначаются через $Ce_n^{(1)}$ и $Se_n^{(1)}$.

На основании изложенного, общее решение уравнения (155) записывается в виде ряда

$$\tau_2 = \sum_{n=0}^{\infty} A_n Ce_n^{(1)}(\xi)\, ce_n(\eta) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n Se_n^{(1)}(\xi)\, se_n(\eta). \tag{162}$$

В предыдущем параграфе уже говорилось о том, что многочисленные наблюдения в природе позволяют считать, что береговая линия чаще всего оконтуривается одной из изаномал. Следовательно, как и в предыдущем параграфе, можно записать граничное условие (на береговой линии) в виде

$$\tau_2(\xi_0, \eta) = \tau_0 = \text{const}, \tag{163}$$

причем $\xi = \xi_0$ соответствует эллипсу, совпадающему с береговой линией острова. Налагая это граничное условие, можно показать, что все постоянные интегрирования B_n должны обращаться в нуль. Все A_n с нечетными индексами также обязаны равняться нулю. Остаются лишь постоянные A_n с чет-

ными индексами. После определения их оказывается окончательно, что

$$\tau_2(\xi, \eta) = \tau_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\int_{-\pi}^{\pi} ce_{2n}(\eta)\, d\eta}{Ce_{2n}^{(1)}(\xi_0) \int_{-\pi}^{\pi} [ce_{2n}(\eta)]^2 d\eta} Ce_{2n}^{(1)}(\xi)\, ce_{2n}(\eta). \qquad (164)$$

Эта формула описывает температурное поле над эллиптическим островом. Таким же путем Секерж-Зенькович, исходя из уравнения (154), определил и температурное поле над океаном, простирающимся вокруг острова.

Здесь температурная аномалия τ_1 выразилась так:

$$\tau_1(\xi, \eta) = \frac{b_1^2}{a_1^2} + \left(\tau_0 - \frac{b_1^2}{a_1^2}\right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\int_{-\pi}^{\pi} ce_{2n}(\eta)\, d\eta}{Ce_{2n}^{(2)}(\xi_0) \int_{-\pi}^{\pi} [ce_{2n}(\eta)]^2 d\eta} Ce_{2n}^{2}(\xi)\, ce_{2n}(\eta). \qquad (165)$$

По-прежнему через τ_0 обозначено значение температурной аномалии над береговой линией. Здесь все величины представлены в функции эллиптических координат ξ и η. Для суждения о напряженности поля против вершин эллипса (у концов большой оси $2a$) и против концов малой оси эллипса $2b$ Секерж-Зенькович задается размерами острова: длина его $2a = 600$ *км* и ширина $2b = 60$ *км*. Применительно к этому случаю оказывается, что на осях X и Y

$$x = c \operatorname{ch} \xi - a = 298{,}5 \operatorname{ch} \xi - 300,$$

$$y = c \operatorname{sh} \xi - b = 298{,}5 \operatorname{sh} \xi - 30.$$

Температурные градиенты против концов большой и малой осей $d\tau_1/dx$ и $d\tau_1/dy$ определяются соотношениями

$$\frac{\partial \tau_1}{\partial x} = \frac{1}{Q}\left(\frac{\partial \tau_1}{\partial \xi} \operatorname{sh} \xi \cos \eta - \frac{\partial \tau_1}{\partial \eta} \operatorname{ch} \xi \sin \eta\right), \qquad (166)$$

$$\frac{\partial \tau_1}{\partial y} = \frac{1}{Q}\left(\frac{\partial \tau_1}{\partial \eta} \operatorname{sh} \xi \cos \eta + \frac{\partial \tau_1}{\partial \xi} \operatorname{ch} \xi \sin \eta\right), \qquad (167)$$

где сокращенно обозначено

$$Q = c(\operatorname{sh}^2 \xi \cos^2 \eta + \operatorname{ch}^2 \xi \sin^2 \eta).$$

Для береговых точек (концов осей $2a$ и $2b$) необходимо положить соответственно $y = 0$ или $x = 0$, $\xi = \xi_0$, $\eta = 0$ или $\xi = \xi_0$, $\eta = \frac{\pi}{2}$. Тогда после числовых подсчетов оказывается, что

$$\left|\frac{\partial \tau_1}{\partial x}\right|_{\xi=\xi_0,\ \eta=0} = 0{,}192; \quad \left|\frac{\partial \tau_1}{\partial y}\right|_{\xi=\xi_0,\ \eta=\frac{\pi}{2}} = 0{,}0182.$$

Как видим, отношение градиентов $d\tau_1/dx$ и $d\tau_1/dy$ здесь равно

$$\frac{\partial \tau_1 / \partial x}{\partial \tau_1 / \partial y} = 10{,}4.$$

По нашей упрощенной теории это отношение должно было равняться отношению соответствующих полуосей, т. е. $\frac{a}{b} = 10{,}0$. Полученное расхожде-

ние между нашей приближенной теорией и точным анализом Секерж-Зенькович составляет всего лишь 4%. Следовательно, наша приближенная теория достаточно хорошо — даже с количественной стороны — описывает обострение муссонного поля против вершин эллиптической береговой линии.

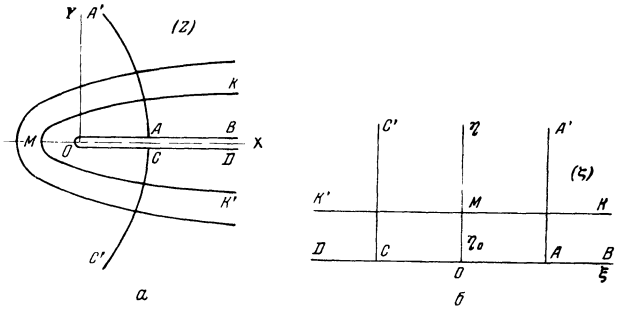


Рис. 350. Конформное отображение (парабола)

Для решения задачи в случае *параболического мыса* (или полуострова) Секерж-Зенькович пользуется параболической координатной сеткой. Он рассматривает две плоскости комплексных переменных $z = x + iy$ и $\zeta = \xi + i\eta$, связанных между собой формулой

$$z = k\zeta^2. \tag{168}$$

Отсюда вытекает

$$y = 2k\xi\eta, \quad x = k(\xi^2 - \eta^2) \tag{169}$$

и далее

$$x = k\left(\xi^2 - \frac{y^2}{4k^2\xi^2}\right), \tag{170}$$

$$x = k\left(\frac{y^2}{4k^2\eta^2} - \eta^2\right). \tag{171}$$

Предполагается, что η может меняться от 0 до ∞, а ξ от $-\infty$ до ∞. Тогда формула (168) устанавливает конформное отображение верхней полуплоскости плоскости (z) (рис. 350, *а*) на всю плоскость (ζ) (рис. 350, *б*) с разрезом вдоль действительной полуоси OX. На обоих рисунках точки и их отображения обозначены одинаковыми буквами.

На основании (170) и (171) полупрямые $\xi = \pm C = \text{const}$ при $\eta > 0$ переходят в верхнюю и в нижнюю половины парабол (170) с вершинами, лежащими на оси OX; их оси симметрии совпадают с отрицательной осью OX. Общий фокус всех этих парабол лежит в начале координат. Прямые $\eta = \eta_0 = \text{const}$ переходят в параболы (171), ортогональные к параболам (170) и конфокальные с ними. В отличие от первых парабол, оси симметрии теперь направлены в сторону положительной оси OX.

Так возникает параболическая координатная сетка, состоящая из взаимно ортогональных парабол. Переход от старых переменных к новым осуществляется по формулам (169). Аналогично случаю эллиптической координатной сетки теперь составляется исходное соотношение

$$\frac{\partial^2\tau}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2\tau}{\partial\eta^2} = 4k^2(\xi^2 + \eta^2)\left(\frac{\partial^2\tau}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\tau}{\partial y^2}\right), \tag{172}$$

которое позволяет представить в параболической системе координат наши

основные уравнения для поля над морем

$$\frac{\partial^2\tau_1}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2\tau_1}{\partial\eta^2}=a_1^2(\xi^2+\eta^2)\tau_1-b_1^2(\xi^2+\eta^2) \tag{173}$$

и над сушей

$$\frac{\partial^2\tau_2}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2\tau_2}{\partial\eta^2}=a_2^2(\xi^2+\eta^2)\tau_2. \tag{174}$$

Здесь обозначено

$$a_1^2=4k^2\varkappa_1^2,\quad b_1^2=4k^2b^2,\quad a_2^2=4k^2\varkappa_2^2, \tag{175}$$

По-прежнему допущено, что τ_2 может быть представлена в виде произведения функции одного лишь переменного ξ на функцию одного лишь переменного η

$$\tau_2=E(\xi)\,G(\eta). \tag{176}$$

Подстановка в (174) приводит к уравнениям

$$E''+(p-a_2^2\xi^2)E=0, \tag{177}$$

$$G''-(p+a_2^2\eta^2)G=0, \tag{178}$$

в которых p — произвольная постоянная. Она выбирается с таким расчетом, чтобы частное решение содержало функцию Эрмита E_{1n} и полиномы Эрмита $H_n(\xi_1)$ [25]. Это частное решение получается в виде

$$E_{1n}=e^{-1/2\xi_1^2}H_n(\xi_1), \tag{179}$$

$$G_{3n}=e^{1/2\eta_3^2}H_n(-i\eta_3) \tag{180}$$

при n четном и

$$G_{3n}=ie^{1/2\eta_3^2}H_n(-i\eta_3) \tag{181}$$

при n нечетном.

Аналогичные выражения получаются для поля над морем.

Общий интеграл для поля над морем записывается в виде

$$\tau_1(\xi,\eta)=\frac{b_1^2}{a_1^2}+\sum_{n=0}^{\infty}B_{2n}e^{-\frac{a_1}{2}\xi^2}H_{2n}(\sqrt{a_1}\xi)\,e^{-\frac{a_1}{2}\eta^2}H_{2n}(-i\sqrt{a_1}\eta)\times$$

$$\times\int_{\sqrt{a_1}\eta}^{\infty}\frac{dx}{e^{x^2}[H_{2n}(-ix)]^2}; \tag{182}$$

аналогично над сушей будет

$$\tau_2(\xi,\eta)=\sum_{n=0}^{\infty}A_{2n}e^{-\frac{a_2}{2}\xi^2}H_{2n}(\sqrt{a_2}\xi)\,H_{2n}(-i\sqrt{a_2}\eta). \tag{183}$$

Коэффициенты B_{2n} и A_n определяются на основании граничного условия

$$\tau_1(\xi,\eta_0)_{\text{берег}}=\tau_2(\xi,\eta)_{\text{берег}}=\tau_0. \tag{184}$$

К сожалению, в результате получаются ряды, которые очень медленно сходятся. Поэтому вычисление напряженности поля против параболического полуострова, мыса или залива производится со значительно меньшей надежностью, чем это удалось сделать Секерж-Зеньковичу применительно к берегам эллиптического моря или эллиптического острова. Задаваясь параболической береговой линией с радиусом кривизны у вершины, равным 250 *км*, и полагая, что температурная аномалия на берегу равна 3°, он получает для температурного градиента у самой вершины параболы значение 0,0164 *град/км*.

Между тем по нашей приближенной формуле (149), при тех же значениях $\tau_0=3°$ и $r_0=250$ *км*, получилось бы значение градиента 0,006 *град/км*.

По-видимому, это расхождение объясняется главным образом погрешностями, которые дает в данном случае наша грубая схема (применимая, однако, к эллиптической форме береговой линии). Несомненно, некоторое влияние здесь могли оказать также и погрешности числового решения задачи посредством медленно сходящихся рядов Секерж-Зенькович.

Во всяком случае уточнение, внесенное им в этот вариант задачи, показывает, что против вершины параболической береговой линии следует ожидать обострения муссонного поля в еще большей степени, чем это предвидится по нашей упрощенной схеме.

§ 12. Уточненное решение задачи для произвольной формы береговой линии

Как мы видели в предыдущем параграфе, даже параболическая форма береговой линии создает большие трудности для расчета напряженности муссонного поля против мыса, или полуострова, и задача приводится к суммированию рядов, которые сходятся очень медленно. Тем более при произвольной форме береговой линии казалось бы должны возникать трудности подобного расчета, к преодолению которых нет пути.

Однако в 1962 г. путь к решению таких сложных задач *чисто аналитическим методом* нашел В. И. Лопатников. Ему удалось создать для этого удобный и очень сильный математический аппарат, к применению которого принципиально нет никаких препятствий, какова бы ни была форма береговой линии [26]. Он ищет частное решение неоднородного уравнения (99), предварительно получив частное решение однородного уравнения. Строит функцию $\tau = \tau_1 + \frac{b^2}{\varkappa^2}$ и записывает

$$\nabla^2\tau = \nabla^2\tau_1 = \varkappa^2\tau_1 = \varkappa^2\left(\tau - \frac{b^2}{\varkappa^2}\right) = \varkappa^2\tau^2 - b^2.$$

Положив $\tau_1 = X(x)\,Y(y)$, Лопатников находит решение однородного уравнения

$$X'' = kX,\quad Y'' = lY,\quad k + l = \varkappa^2. \tag{185}$$

Если, вообще говоря, какое-то частное решение $\tau(x, y)$ уравнения (99) определяет на плоскости замкнутый контур L при $\tau(x, y) = c$, то функция $\tau(x, y)$ в этом случае является решением задачи на контуре L и притом — единственным, если $\tau(x, y)$ удовлетворяет известным требованиям. Допустим теперь, что $\tau_1(x, y)$ является решением однородного уравнения $\nabla^2\tau_1 = \varkappa^2\tau_1$. Так как уравнение (99) линейно, то функция $\psi = \tau + a\tau_1$ также будет решением (99), но применительно к некоторому *иному* контуру L_1, уравнение которого будет $\tau(x, y) + a\tau_1(x, y) = c$. Операцию прибавления функции τ_1 к функции τ можно рассматривать как *деформацию* контура L в контур L_1.

Последовательно производя такие деформации, В. И. Лопатников как бы «*лепит*» контуры, которые все ближе и ближе аппроксимируют действительные очертания береговой линий. В конце концов возникает достаточно близкий контур, определяемый уравнением

$$\tau(x, y) + \sum a_n\tau_n(x, y) = c, \tag{186}$$

и тем самым оказывается возможным решить (99) в конечной форме. Лопатников рассматривает два класса частных решений, построенных в тригонометрических и гиперболических функциях. В качестве примера пользования своим методом он исследует зимнее муссонное поле над Черным морем с его очень сложной береговой линией. Для определенности и удобства решения

принимается:

$$\tau_{\text{берег}} = 0, \quad \varkappa^2 = b^2 = 1.$$

В качестве первого частного решения (99) он берет функцию

$$\tau = 1 - \alpha \operatorname{ch} x - \beta \operatorname{ch} y,$$

составленную из решений второго класса. В таком случае уравнение

$$0{,}025 \operatorname{ch} x + 0{,}75 \operatorname{ch} y = 1$$

определяет на плоскости овал (рис. 351, *а*), а функция

$$\tau = 1 - 0{,}025 \operatorname{ch} x - 0{,}75 \operatorname{ch} y \tag{187}$$

дает решение уравнения (99) для области, ограниченной таким овалом. После этого овал деформируется в бисквитообразную кривую (рис. 351, *б*), описываемую уравнением

$$0{,}025 \operatorname{ch} x + 0{,}75 \operatorname{ch} y + 0{,}077 \operatorname{ch} 1{,}865y \cos 1{,}57x = 1.$$

Здесь поле изаномал определяется уравнением

$$\tau = 1 - 0{,}025 \operatorname{ch} x - 0{,}75 \operatorname{ch} y - 0{,}077 \operatorname{ch} 1{,}865\, y \cos 1{,}57\, x. \tag{188}$$

Следующий шаг позволяет В. И. Лопатникову деформировать бисквитообразную кривую в более сложную и значительно более близкую к действительному очертанию береговой линии Черного моря (рис. 351, *в*). Ее уравнение и уравнение поля записываются так:

$$0{,}025 \operatorname{ch} x + 0{,}75 \operatorname{ch} y + 0{,}077 \operatorname{ch} 1{,}865\, y \cos 1{,}57\, x - \\ - 0{,}313 \operatorname{sh} 1{,}275\, y \cos 0{,}79x = 1,$$

$$\tau = 1 - 0{,}025 \operatorname{ch} x - 0{,}75 \operatorname{ch} y - 0{,}077 \operatorname{ch} 1{,}865\, y \cos 1{,}57x + \\ + 0{,}313 \operatorname{sh} 1{,}275\, y \cos 0{,}79\, x. \tag{189}$$

Но автор работы не ограничивается таким приближением, а идет дальше. Прежде всего он сглаживает юго-западный и юго-восточный углы кривой, внося в уравнение дополнительную функцию от x и y. Тогда береговая линия приобретает форму, изображенную на рис. 351, *г*, где вычерчены и некоторые изаномалы температуры воздуха над морем.

Аналитические выражения поля изаномал позволяют В. И. Лопатникову найти градиенты температурной аномалии в различных наиболее интересных точках береговой линии. Замечательно, что обострение муссонного поля обнаруживается не только там, где его можно было ожидать на основании соображений, изложенных в предыдущих параграфах,— не только против остроконечных мысов, но и на участках береговой линии, протянувшихся спокойно,— несколько южней Новороссийска и затем вблизи от устья р. Дунай.

Дальнейшая детализация картины поля была проведена путем разрыва береговой линии по схеме рис. 351, *д* и аналогичного разрыва в юго-западном углу кривой. Тем самым моделировалось влияние Днепровского лимана, Азовского моря и, с другой стороны, Мраморного моря с Босфором. Оказалось при этом, что местные максимумы градиентов температурной аномалии, а стало быть и градиентов давления, на основании (68), смещаются: один из них, очень резкий, приходится в точности на Новороссийск, а другой — на район между Варной и Бургасом. В первом из этих районов ежегодно наблюдается *бора* — ветер, достигающий скоростей более 40 *м/сек*.

Капитальный труд по изучению физики этого явления принадлежит А. М. Гусеву с пятнадцатью его сотрудниками, которые провели [27] систематиче-

ские исследования на месте (1957—1959 гг.). В частности, ими было установлено, что под одним и тем же названием бора надо подразумевать целых пять типов штормового ветра, из которых четыре — разнородного происхождения, а пятый — смешанный, вызванный одновременным влиянием всех исследованных факторов. Среди этих пяти типов авторы особо выделяют бору *муссонного* происхождения, т. е. вызванную очень большими температурными контрастами между воздухом над морем и воздухом над материком: если бора стокового типа приводит к максимальным градиентам давления 8 *мбар*/1° меридиана, бора фронтальная — 15, внутримассовая — 13, смешанная — 19,4, то чисто муссонная бора может происходить при градиентах свыше 29 *мбар*/1° меридиана. Легко понять в связи с этим, какое большое теоретическое значение приобретает совершенно новая особенность муссонного поля, обнаруженная В. И. Лопатниковым его остроумным и сильным методом. Столь же бесспорны и важны практические выводы, которые будут сделаны исследователями на основании работ экспедиций А. М. Гусева [27] и новой теоретической схемы В. И. Лопатникова [26].

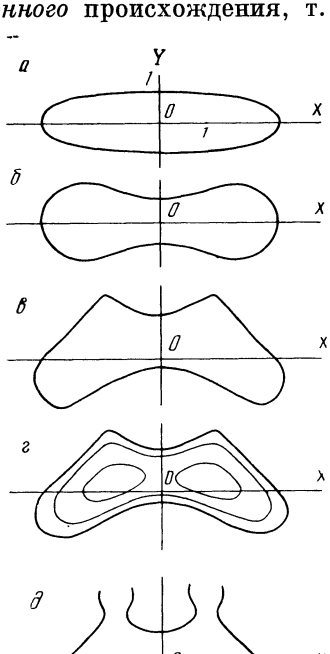


Рис. 351. Изменения границы море — суша (по В. И. Лопатникову)

Второй район обострения зимних штормов, никак не предвиденный в старых схемах и обнаруженный Лопатниковым его методом, — район берегов Болгарии — также очень характерен. В отличие от Новороссийска, здесь не каждый год наблюдаются штормовые ветры и никогда не бывает *чисто местных* ветров, скорость которых быстро уменьшается при удалении от берега, в открытое море. Но зато именно здесь зарождаются самые опасные зимние штормы *затяжного* типа, продолжающиеся двое-трое суток. По-видимому, эффект Лопатникова вызывает здесь обострение средиземноморских циклонов, вторгающихся на Черное море. В качестве наиболее ярких примеров можно привести небывалый шторм 15 января 1931 г., создавший волну высотой до 8 *м* у берегов Крыма при длине волн 170 *м* в открытом море, и шторм 5 января 1966 г., создавший у берегов Крыма волну до 6 *м* высотой. В обоих случаях около двух суток подряд у берегов Болгарии дул ветер в среднем около 22 *м/сек* от юго-запада. На пути к берегам Крыма скорость ветра уменьшалась до 15 *м/сек*, а к берегам Кавказа приходила — при полном штиле — зыбь длиной 170 *м*, обладавшая громадной разрушительной силой. В 1931 г. волны, пришедшие от берегов Болгарии, разбили на куски большую скалу Монах, стоявшую тысячелетиями близ нынешнего поселка Симеиз.

В заключение этого параграфа необходимо еще остановиться на интегрировании уравнения (99) посредством *теплового* интегратора, который, в отличие от описанного выше электрического, позволяет находить решение уравнения (99) в его *полном* виде, не подменяя (99) уравнением Лапласа.

Такое интегрирование — на *тепловой* модели Черного моря — было впервые выполнено Ю. Ф. Васильевым, а позже тепловую модель иной конструкции применил С. М. Попов для исследования зимнего муссонного поля Средиземного моря [28].

Васильев построил модель Черного моря в масштабе $1:3\cdot10^6$, причем роль пленки-атмосферы исполнял лист красной меди толщиной 0,5 *мм*.

По контуру моря, снятому с карты соответствующего масштаба, изгибалась лента из тонкой латуни, которая была припаяна к красно-медному листу. Внутрь создавшейся камеры были внесены увлажненные чугунные опилки, которые при химической реакции с водой выделяли тепло. Поток тепла от такой химической грелки к медному листу был достаточно однороден. Дальше тепло, поступившее в медный лист, частично излучалось в воздух, частично же распространялось в толще листа к «берегам моря», вокруг которых был создан холодильник, охватывавший латунные ленты, припаянные к медному листу. На всей площади «моря» были размещены спаи термопар: в листе были просверлены 130 отверстий, в которые были вставлены и затем впаяны константановые проволочки диаметром 0,5 *мм*. Эти «горячие» спаи располагались вдоль нормалей к береговой линии на различных ее участках. «Холодные» спаи всех термопар были заключены внутри термостата. Провода от термопар, врассечку, могли подводиться к гальванометру посредством коммутатора. Химический нагреватель позволял получать равномерный тепловой поток в продолжение 2 *час*. Другая серия опытов Васильева была произведена с применением электронагрева. Каркас из изоляционного материала, вырезанный по форме нагревательной камеры (в плане), был равномерно простеган нихромовой проволокой диаметром 0,1 *мм*. Выше и ниже этого каркаса был насыпан песок слоями по 10 *мм*. Для нагревания оказалась достаточной мощность тока 0,2 *квт*.

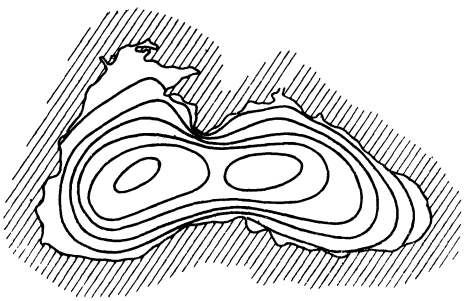


Рис. 352. Изотермы на модели Черного моря (по Ю. Ф. Васильеву)

Результаты измерений температур, на протяжении различных нормалей к береговой черте, изображены на карте изотерм рис. 352, заимствованной из работы Васильева. Интересно отметить, что после опубликования работы никто не обратил внимания на поведение изотерм в двух особых

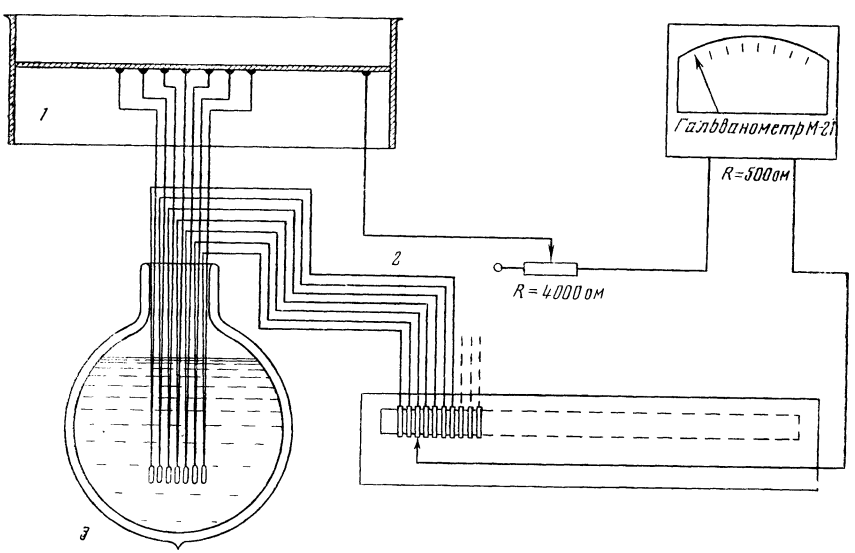


Рис. 353. Схема установки для экспериментов с моделью Средиземного моря

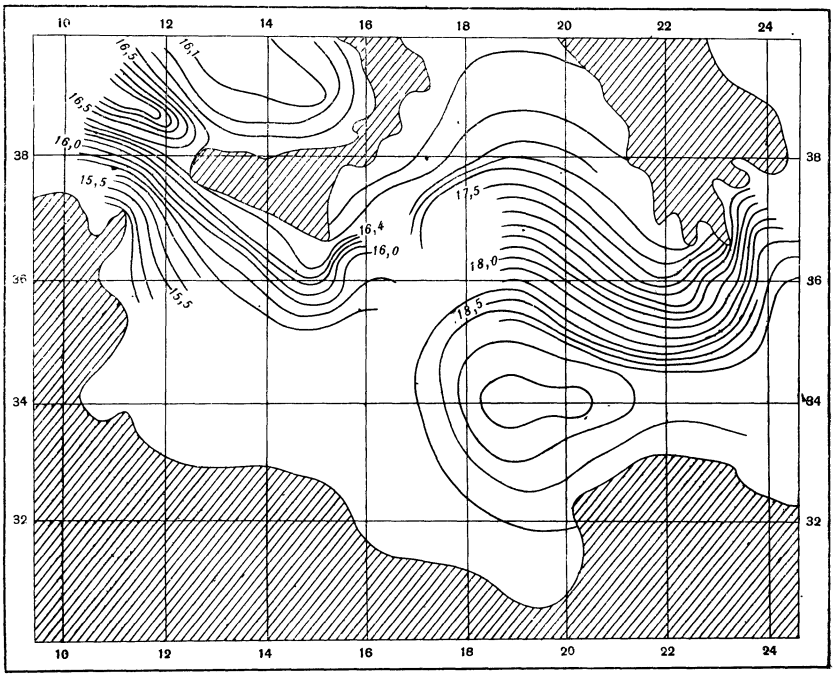


Рис. 354. Изотермы на модели Средиземного моря (по С. М. Попову)

районах, проявивших свои свойства лишь позже, в работе В. И. Лопатникова. Действительно, ведь на рис. 352 изотермы сгущаются не только против мысов, но и близ Новороссийска, и у юго-западных берегов моря в полном соответствии с выводами Лопатникова, изложенными выше.

В работе С. М. Попова нагревание медного листа, имитировавшего пленку-атмосферу — с ее излучением тепла и передачей в металле,— производилось ванной, наполненной горячей водой. Так же как и в работе Васильева, края ванны были выполнены из тонкой латунной ленты, припаянной к медному листу, вдоль контуров Средиземного моря. Схема установки представлена на рис. 353. Медный лист помещался в ванне *1*, и там к нему подходили константановые проволоки *2*; *3* — термостат, заключающий холодные спаи. Сверху наливалась горячая вода, а поверх нее — для устранения потерь тепла на испарение — расплавленный парафин.

Результаты измерений температур при работе тепловой модели представлены на рис. 354, заимствованном из работы Попова. Здесь хорошо видно сгущение изотерм против м. Гранитоло (Сицилия) и против м. Матапан (п-ов Пелопоннесский). Следует отметить, что замкнутые изотермы на широте 34° С и 40° С, видные на рис. 354, находятся именно там, где они располагаются в природе. Даже такие детали отражены на тепловой модели.

§ 13. Зимнее температурное поле над морем и над материком при переменном коэффициенте условной теплопроводности

Представление о тепловых процессах в деятельном слое атмосферы над морем и материком, как о теплопроводности некоторой пленки и о частичном излучении тепла этой пленкой, оказалось весьма плодотворным: оно позволило поставить и решить ряд важных задач, к которым в настоящее время

никак не удается подойти обычными путями динамической метеорологии. При анализе оказалось возможным принять условный коэффициент теплопроводности пленки-атмосферы равным той же величине, с какой приходилось иметь дело при исследовании распределения осредненных температур воздуха на разных широтах во всем северном полушарии.

Однако более детальное изучение температурного поля на материке и в особенности изучение температурного поля вокруг малых внутренних морей озер заставляли догадываться о *непостоянстве* условной теплопроводности: об уменьшении ее по мере уменьшения размеров исследуемого географического объекта, об уменьшении ее при удалении от береговой линии громадного

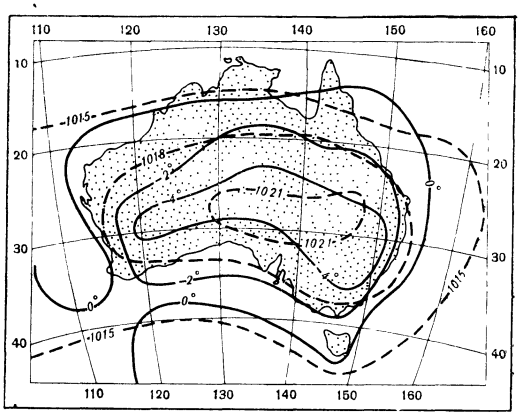


Рис. 355. Изаномалы и климатологические изобары в Австралии, зима

соединенного материка Европы и Азии в глубь Азии, при приближении к азиатскому полюсу холода.

Особо убедительные результаты получились при анализе температурного поля над *Австралией* [29, 30].

Этот небольшой материк очень интересен в двух отношениях. Во-первых, он лежит в широтном поясе, в котором зональная циркуляция атмосферы выражена сравнительно слабо (а пассаты отсутствуют). Во-вторых, форма его береговой линии и строение поверхности — весьма простые.

Именно по этим причинам температурные изаномалы и чрезвычайно похожие на них по форме климатологические изобары представляют собой семейства кривых, приблизительно подобные очертаниям самого материка. На рис. 355 приведена карта и тех и других изолиний, построенная по данным Морского атласа [31]. Цифры, проставленные при сплошных кривых — изаномалах,— выражают значения аномалий температур в том смысле, в каком их понимают обычно в климатологии (это *не* истинные аномалии, о которых говорилось во всех предыдущих параграфах, а величины, отличающиеся от них на константу); цифры, проставленные при пунктирных кривых — изобарах,— выражают давление в миллибарах. Как видим, даже маленький о. Тасмания оконтуривается вместе с Австралией изаномалой 0 и изобарой 1015.

Чтобы решать задачу в квадратурах, придется заменить площадь материка Австралии равновеликим кругом радиусом 1560 *км*. По-прежнему будем рассматривать деятельный слой тропосферы как эквивалентную двумерную пленку, получающую тепло при соприкосновении с океаном вокруг материка, проводящую тепло в горизонтальных направлениях и частично излучающую его в межпланетное пространство. Температура пленки отличается на искомую величину τ от той, которая установилась бы в исследуемой

точке материка, если бы на Земле отсутствовал Мировой океан. Как и в § 8, примем для единицы поверхности пленки поступление тепла от океана (сверх непосредственно получаемого от Солнца), равным $\alpha\,(\tau_w - \tau)$, где τ_w — температура поверхностной воды в океане, отсчитываемая от того же условного нуля. *Дополнительное* излучение, как и в § 8, учтем величиной $\sigma\tau$ (α и σ — коэффициенты, известные из опытов).

Поступление или расход тепла в пленке на единицу поверхности, за счет теплопроводности в ней, учитывались нами в § 8 как величина $AH\,\nabla^2\tau$, причем произведение коэффициента обмена A на высоту H деятельного слоя тропосферы, т. е. некоторый условный коэффициент теплопроводности, считалось постоянным.

Карта климатологических изаномал Австралии, воспроизведенная на рис. 355, показывает, что для получения аналогичного поля истинных аномалий τ близ океанского побережья по цитированной схеме пришлось бы принять для AH числовое значение, которое примерно в 10 раз меньше этого коэффициента, применявшегося при исследовании Евразийского соединенного материка. Но ведь приблизительно во столько же раз площадь Австралии меньше, чем площадь Европы и Азии, взятых вместе. Интересно, что для построения поля τ над некоторыми большими озерами по той же схеме пришлось бы задаться коэффициентом AH, во столько раз меньшим австралийского, во сколько раз (приблизительно) площадь озера меньше площади Австралии.

Итак, есть основания считать коэффициент AH приблизительно пропорциональным площади исследуемого географического объекта, когда требуется исследовать поле τ близ береговой черты.

Для краткости будем в дальнейшем пользоваться обозначением $AH = K$, считая K *переменным*.

Вырежем из пленки-атмосферы над океаном, окружающим материк, кольцо радиусом r и шириной dr. Составив для него выражение теплового баланса, легко будет показать, что

$$K\frac{d^2\tau_1}{dr^2} + \left(\frac{K}{r} + \frac{dK}{dr}\right)\frac{d\tau_1}{dr} + \alpha\,(\tau_w + \tau_1) - \sigma\tau_1 = 0. \tag{190}$$

Аналогично для пленки над материком получится

$$K\frac{d^2\tau_2}{dr^2} + \left(\frac{K}{r} + \frac{dK}{dr}\right)\frac{d\tau_2}{dr} - \sigma\tau_2 = 0. \tag{191}$$

Индексы 1 и 2 снова подчеркивают, что τ описывается двумя различными искомыми функциями — в морской и в сухопутной части пленки. В соответствии с упомянутыми свойствами величины K попытаемся выразить ее простейшей возможной функцией от r. Положим

$$K = nr^2. \tag{192}$$

Тогда, подставив в (190) выражения K и ее производной, запишем вместо (190)

$$r^2\frac{d^2\tau_1}{dr^2} + 3r\frac{d\tau_1}{dr} - \frac{\alpha+\sigma}{n}\tau_1 + \frac{\alpha}{n}\tau_w = 0. \tag{193}$$

Таким же образом вместо (191) получим

$$r^2\frac{d^2\tau_2}{dr^2} + 3r\frac{d\tau_2}{dr} - \frac{\sigma}{n}\tau_2 = 0. \tag{194}$$

Общие интегралы (193) и (194) выражаются так:

$$\tau_1 = \Theta + Ar^\gamma + Br^\beta, \tag{195}$$

$$\tau_2 = Mr^\mu + Nr^\nu. \tag{196}$$

Здесь сокращенно обозначено

$$\Theta = \frac{\alpha\tau_w}{\alpha+\sigma},$$

$$\gamma = -1+\sqrt{\frac{\alpha+\sigma}{n}+1}, \qquad \beta = -1-\sqrt{\frac{\alpha+\sigma}{n}+1}, \tag{197}$$

$$\mu = -1+\sqrt{\frac{\sigma}{n}+1}, \qquad \nu = -1-\sqrt{\frac{\sigma}{n}+1}.$$

В задаче о круглом материке радиусом R, находящемся среди далеко простирающегося океана, граничные условия записываются в виде: а) при $r=\infty$, τ_1, равном конечной величине, $\frac{d\tau}{dr}=0$; б) на берегу при $r=R$, $\tau_2=\tau_1=\tau_R$ $\frac{d\tau_2}{dr}=\frac{d\tau_1}{dr}$, т. е. ни функция τ, ни ее производная не испытывают скачков при переходе с океана на сушу.

В формулы (197) входят величины, легко измеримые в природе, за исключением коэффициента n, подлежащего особому определению. Но это определение чрезвычайно упрощается благодаря одному обстоятельству. Именно, разрезав Австралийский материк по направлениям С — Ю, СЗ — ЮВ, или ЮЗ — СВ, легко обнаружить, что здесь температурная аномалия меняется всюду приблизительно по *линейному* закону. Следовательно, величина $d\tau_2/dr$ в уравнении (194) должна считаться постоянной на протяжении от берега почти до центра материка и соответственно в (194) должно быть $\frac{d^2\tau_2}{dr^2}=0$: $\frac{d\tau_2}{dr}=\frac{\tau_2}{r}$. Но в таком случае непосредственно из (194) вытекает $\sigma/n=3$. В соответствии с этим третье уравнение (197) дает $\mu=1$. Кроме того, из четвертого уравнения системы (197) следует $\nu=-3$. Стало быть, для обеспечения конечного значения τ при $r=0$, $N=0$, и вместо (196) надо будет записать

$$\tau_2 = Mr. \tag{198}$$

На основании многочисленных опытов следует полагать $\alpha=3{,}3\cdot10^4$, $\sigma=6{,}8\cdot10^{-5}$; значит, $n=\frac{\sigma}{3}=2{,}27\cdot10^{-5}$.

Итак, для переменного коэффициента K мы получили интересное выражение

$$K=\frac{\sigma}{3}r^2. \tag{199}$$

Эта связь может показаться неожиданной. Однако она совершенно естественна: условие (199) говорит только о том, что *все тепло, поступающее с океана на материк, неизбежно полностью расходуется на эффективное излучение деятельного слоя тропосферы над этим материком* независимо от того, *каким* путем передается тепло в направлении от берегов океана к центру материка — путем адвекции воздушных масс или путем турбулентного перемешивания. В связи с этим уместно вспомнить то, что говорилось в § 1 об успешном вычислении тепловых потоков вдоль меридиана в работе А. Онгстрема, включившего в анализ не только внетропические части тропосферы, но и пояса, в которых работают пассаты.

Прежде чем перейти к дальнейшим выкладкам, проверим правильность гипотетического соотношения (199). Подставим в него вместо $n=\frac{\sigma}{3}$ найденное числовое значение, вместо $r=R$ — радиус круга, равновеликого площади Европы и Азии, вместе взятых: $R=4{,}1\cdot10^8$ *см*. Тогда, как легко видеть, формула (199) даст $K=3{,}8\cdot10^{12}$. Вспомним теперь выражение (23) и отнесем тепловые потоки не к месяцу, как было там, а к *секунде*. Тогда вместо (23)

получим

$$AH_c = 3{,}86 \cdot 10^{12} \frac{кал}{см \cdot сек \cdot град/см},$$

т. е. практически ту же величину K, какая получена теперь из (199).

Подстановка всех перечисленных величин в первые два уравнения системы (197) дает $\gamma = 3{,}3$, $\beta = -5{,}3$.

Следовательно, над океаном вокруг материка условия на бесконечности заставляют принять в (195) $A = 0$. Поэтому вместо (195) запишем

$$\tau_1 = \Theta + Br^{-5{,}3}. \tag{200}$$

Использовав граничные условия при $r = R$, найдем два уравнения, из которых определятся постоянные M и B:

$$\Theta + BR^{-5{,}3} = MR,$$
$$-5{,}3BR^{-6{,}3} = M. \tag{201}$$

Решив эти уравнения, запишем, после преобразований, вместо (198) и (200)

$$\frac{\tau_2}{\Theta} = 0{,}841 \frac{r}{R}, \tag{202}$$

$$\frac{\tau_1}{\Theta} = 1 - 0{,}159 \left(\frac{R}{r}\right)^{5{,}3}. \tag{203}$$

На рис. 356 изображена кривая τ/Θ для зимнего температурного поля и над круглым материком радиусом R, и над океаном вокруг него. По оси абсцисс отложены значения безразмерной величины r/R. В центре материка τ_2/Θ обращается в нуль, так как в соответствии с (192) здесь должен был бы обращаться в нуль коэффициент условной теплопроводности. На самом деле, разумеется, теплопроводность в «пленке-атмосфере» существует и здесь. Но она очень

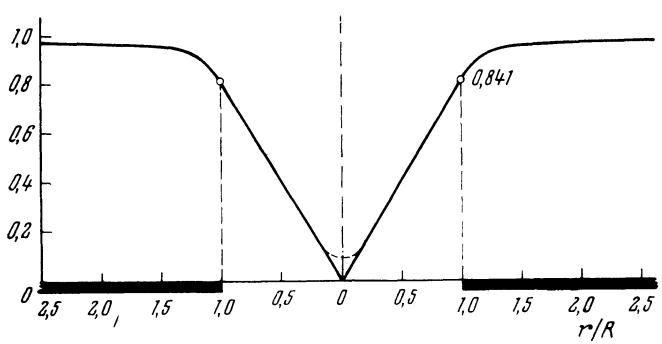


Рис. 356. Теоретический разрез поля изаномал Австралии

мала — с океана доходит сюда весьма мало тепла, и наблюдаемые значения температурных аномалий должны здесь вести себя так, как изображено пунктиром на рис. 356.

На рис. 357 изображен разрез материка Австралии по меридиану, с юга на север. Сплошная кривая представляет ход истинных температурных аномалий. Она построена по точкам на основании карты климатологических изаномал (рис. 355). И на теоретической кривой рис. 356, и на кривой, построенной на основании измерений на рис. 357, все участки аналогичны: и там, и здесь падение зимних температурных аномалий, от берега к центру материка, происходит по *линейному* закону, за исключением района, непосредственно примыкающего к центру. Изгиб кривых над океаном также однотипен, и в соответствии с (203) кривая асимптотически стремится к значению $\tau_1/\Theta = 1$.

В соответствии с (203) и (202) на берегу материка при $z=R$, $\tau=0{,}841$ от этой предельной величины. Что касается величины Θ, входящей в формулы, то ее физический смысл тот же, каков он был в формуле (109): Θ — это та температура воздуха над океаном, которая устанавливается на достаточно большом расстоянии от материка, где нет охлаждающего влияния суши. Как помним, для получения Θ надо температуру поверхностной океанской воды τ_w разделить на $\left(1+\frac{\sigma}{\alpha}\right)$. Последняя величина будет тем ближе к единице, чем меньше σ по сравнению с α: чем меньше эффективное излучение по сравнению с теплом, получаемым воздухом от поверхностной воды океана.

В задаче о круглом море радиусом R, среди далеко простирающегося материка, граничные условия будут отличаться от рассмотренных тем, что при $r=\infty$ будет $\tau=0$. Функции τ_1 и τ_2 поменяются местами относительно начала координат: первая будет описывать поле от $r=0$ до $r=R$, а вторая — от $r=R$ до $r=\infty$. В соответствии с этим вместо (195) и (196) можно записать

$$\tau_1=\Theta+Ar^{3,3}, \qquad (204)$$

$$\tau_2=Nr^{-3}. \qquad (205)$$

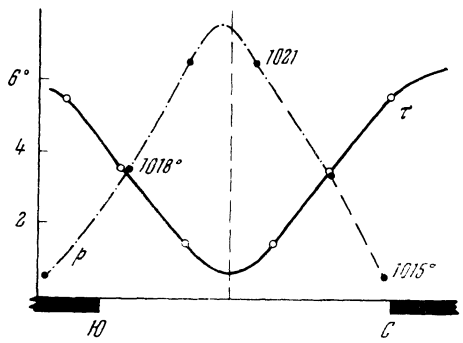


Рис. 357. Действительный ход кривых на том же разрезе; аномалии температур и атмосферное давление зимой

Постоянные B и M приняты равными нулю, потому что τ не может достигать бесконечно больших значений. По-прежнему, используя граничные условия при $r=R$, определим значения A, N и в результате получим

$$\frac{\tau_1}{\Theta}=1-0{,}476\left(\frac{r}{R}\right)^{3,3} \qquad (206)$$

$$\frac{\tau_2}{\Theta}=0{,}524\left(\frac{R}{r}\right)^{3}. \qquad (207)$$

На рис. 358 изображена кривая, описывающая поведение τ/Θ в температурном поле над круглым морем и над материком, простирающимся вокруг него. Что касается последнего из двух уравнений, то оно должно выполняться безукоризненно в природных условиях: на очень больших расстояниях от моря температурная аномалия стремится к нулю. Напротив, уравнение (206) должно выполняться тем точней, чем больше радиус моря: на достаточном расстоянии от берега, где перестанет сказываться охлаждающее действие суши, есть все основания считать $\tau_1=\Theta$. Кстати, подставив в (109) фигурирующие там числовые значения, можно получить $\Theta=0{,}83\,\tau_w$, где τ_w — температура поверхностной воды, отсчитываемая от принятого условного нуля. Если радиус моря невелик, то неминуемы отклонения от зависимости, выражаемой уравнением (206), по той же причине, по какой ход кривой близ центра материка на рис. 356 и 357 отличается от прямой, описываемой уравнением (202).

Уравнения (206) и (207) С. К. Олевинская [32] применила к исследованию температурного поля (зимнего и предзимнего) над Аральским морем и вокруг него. Действительная картина оказалась достаточно близкой к теоретической. Тепловые потоки, вычисленные Олевинской по формулам, которые были приведены выше, хорошо согласуются с результатами ее вычислений по методам М. П. Тимофеева и Д. Л. Лайхтмана, описывающим трансформации воздушных масс над водной подстилающей поверхностью. Распределе-

ние температурных аномалий над Аральским морем и над окружающим материком близко напоминает схематический разрез рис. 358. Очень характерно сгущение изаномал к береговой линии, которое следует из теории и действительно наблюдается на Аральском море. Разумеется, местные условия,

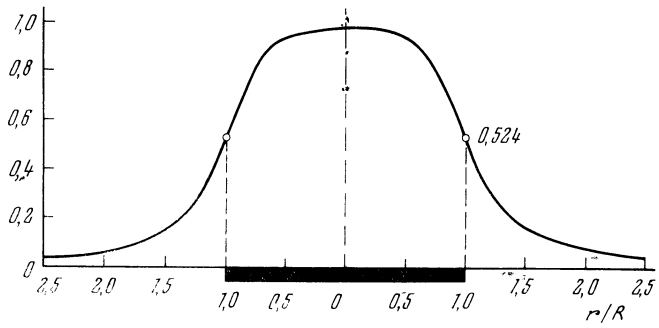


Рис. 358. Теоретический разрез поля изаномал над круглым морем и окружающим его материком, зимой

например очень большое различие в глубинах между юго-западной и северо-восточной частью, отражаются на термике и в природе искажают простую схему.

Исследование зимнего температурного поля над материком, при переменном условном коэффициенте теплопроводности, позволило В. В. Шулейкину найти физический смысл очень сложной кривой, которая описывает распределение температур воздуха в январе, вдоль параллели $\varphi = 67°33'$, проходящей близ азиатского полюса холода (в районе Верхоянска). Воспользовав-

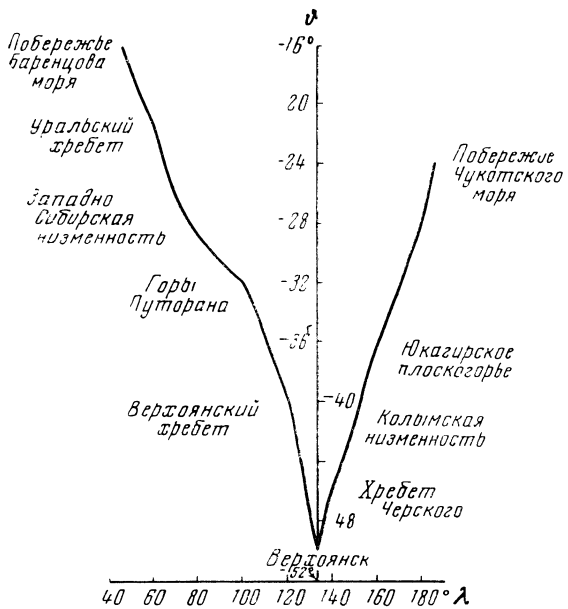


Рис. 359. Разрез температурного поля Европы и Азии по параллели 67°33′, в январе

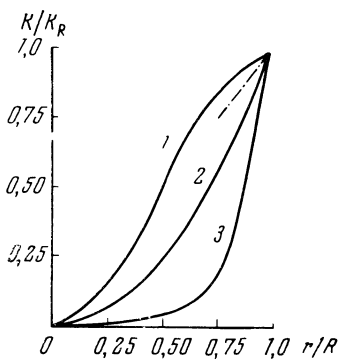


Рис. 360. Влияние горного хребта на тепловой поток моря (модель)

шись изотермами, нанесенными на карту [33] Большого советского атласа мира, он получил на протяжении от побережья Баренцева моря до побережья Чукотского моря кривую, воспроизведенную на рис. 359. Здесь на оси абсцисс отмечены долготы, а на оси ординат — значения среднемесячных температур воздуха. Начало координат принято на долготе г. Верхоянска.

По направлению к нему — и от западного, и от восточного побережья — температура падает по осложненному закону, а не по простому линейному, наблюдавшемуся в случае Австралии [30].

Взглянув на надписи, проставленные близ выпуклых и близ вогнутых участков кривой, нетрудно понять, *чем* вызваны осложнения: Уральский хребет, горы Путорана, Верхоянский хребет, хребет Черского, Юкагирское плоскогорье создали выпуклости кривой в *положительном* направлении оси ординат; промежуточные низменности, равнины, обусловили вогнутости в положительном направлении оси ординат.

Непосредственное приложение теории — в ее современном виде — к кривой рис. 359 не дает возможности произвести какие-либо расчеты *изолирующей* роли горных хребтов. Зато та же теория, учитывающая изменения условного коэффициента теплопроводности, уже сейчас позволяет выяснить физический смысл выпуклостей и вогнутостей на кривой рис. 359 после рассмотрения совсем простой принципиальной схемы явлений.

Допустим, что под влиянием тепловых потоков с океана зимнее температурное поле на *круглом* материке радиусом R характеризуется кривой *1* (рис. 360) и что r обозначает там расстояние от центра материка до исследуемой точки поля. Ординаты кривой *1* выражают значения τ/τ_R, где τ — температурная аномалия в исследуемой точке, а τ_R — на берегу океана. Эта кривая построена по уравнению

$$\tau = ar - b \sin pr \tag{208}$$

при частном значении $\frac{a}{bp} = 1{,}5$.

Подставив выражение τ из (208) в (191), получим дифференциальное уравнение, которое будет выражать *новую* зависимость условного коэффициента теплопроводности K от координаты r:

$$K bp^2 \sin pr + \left(\frac{K}{r} + \frac{dK}{dr}\right)(a - bp \cos pr) - \sigma ar + \sigma b \sin pr = 0. \tag{209}$$

Для упрощения вида (209) введем обозначения: $\frac{a}{bp} = c$; $pr = 2\pi\frac{r}{R} = x$,

$$\frac{K}{\sigma/p^2} = 4\pi^2 \frac{K}{\sigma R^2} = \frac{4}{3}\pi^2 \frac{K}{K_R} = y. \tag{210}$$

Тогда вместо (209) можно записать

$$\frac{dy}{dx} + \left(\frac{1}{x} + \frac{\sin x}{c - \cos x}\right) y + \frac{\sin x - cx}{c - \cos x} = 0. \tag{211}$$

Интегрирование (211) дает

$$y = \frac{{}^1/_3 cx^2 + \cos x - \dfrac{\sin x}{x}}{c - \cos x}. \tag{212}$$

Вычисления, проведенные по (212), применительно к частному значению $c = 1{,}5$ соответственно кривой *1*, дали распределение искомых величин по кривой *3* (рис. 360). На оси ординат отмечены значения K/K_R, где K — условный коэффициент теплопроводности на расстоянии r от центра материка, а K_R — на берегу океана. Для сравнения с полученной кривой *3* на том же рисунке нанесена кривая *2*, которая соответствует простому, совершенно плоскому материку,— она построена по уравнению, вытекающему из (192): $\frac{K}{K_R} = \left(\frac{r}{R}\right)^2$.

Как видим, *выпуклость* на температурной кривой *1* возникла благодаря резкому местному уменьшению теплопроводности K по сравнению с тем значением, которое характеризовало бы совершенно плоский материк. В середине кольцевой зоны, которой соответствует выпуклая часть кривой *1*,

ординаты кривой *3* уменьшены в 4—5 раз по сравнению с соответствующими ординатами кривой *2*,— во столько раз уменьшился здесь условный коэффициент теплопроводности.

В природе такое местное уменьшение условной теплопроводности деятельного слоя тропосферы вызывается горными хребтами, которые уменьшают количество тепла, проникающего с океана в глубь материка. В соответствии с основной связью между теплопроводностью и эффективным излучением тепла, о которой говорилось после вывода соотношения (199), можно утверждать, что тепло, не допущенное в глубь материка, израсходовалось на увеличение эффективного излучения *в прибрежном поясе материка*. Такое излучение неизбежно: при удалении от берега океана температура, согласно кривой *1*, падает медленней, чем падала бы в отсутствие горного хребта — по линейному закону, намеченному отрезком штрих-пунктирной прямой на том же рисунке.

Исследованная принципиальная схема описывает явления, которые хорошо известны в условиях Черноморского побережья Крыма, Кавказа и других аналогичных районов. Эта схема достаточно разъясняет физический смысл выпуклостей и вогнутостей на кривой рис. 359, даже позволяя ориентировочно судить о количественной стороне дела (о которой говорило сопоставление ординат кривых *3* и *2* на рис. 360).

§ 14. Действительное распределение скоростей по вертикали в муссонном поле

Первоначальная схема распределения скоростей по вертикали в муссонном поле, описанная в § 5, сыграла свою роль в построении теории муссонов. В частности, она позволила понять механизм переноса избыточных воздушных масс с океана на материк и в обратном направлении в зависимости от времени года; она позволяет понять механизм подъема кристалликов морских солей на высоту около 2 *км*, где эти кристаллики служат ядрами конденсации, и проникания их вместе с облаками в глубь материков (см. гл. VIII, § 7). Но совершенно очевидно, что первоначальная схема не может претендовать на какую-либо точность описания действительных муссонных потоков. За годы, истекшие после ее появления в печати, в других странах не было сделано ничего существенного в области теории муссонов, а в нашей стране, напротив, появилось много работ, посвященных этой важной и интересной проблеме, преимущественно в Морском гидрофизическом институте АН СССР и отчасти в институтах гидрометеорологической службы. Эти работы позволяют сейчас достаточно близко подойти к истинной картине муссонного поля.

Прежде всего, в первых же исследованиях Шулейкина было установлено, что *деятельный слой* атмосферы, в котором происходит основной перенос тепла с океана на материк в зимнее время, следует разделять *не* на две равные части, фигурирующие хотя бы на схеме проекций линий тока (рис. 340), а на две части, существенно отличающиеся по толщине: нижний, собственно муссонный слой простирается в природе (в наших средних широтах) лишь на 0,5 *км* над уровнем подстилающей поверхности; следовательно, отводя всем муссонным явлениям 2 *км* в высоту, мы должны были допустить, что из них 1,5 *км* занимает слой, пронизанный *антимуссонными* потоками (от 0,5 до 2,0 *км* в высоту).

С этой точки зрения «второй ярус» схемы проекций линий тока (рис. 340) следовало бы растянуть вниз, на половину «нижнего яруса», а последний — соответственно сжать вдвое. Физическую причину подобной асимметрии мы искали в непостоянстве коэффициента турбулентной вязкости, установленной многими гидродинамиками, в частности Н. Е. Кочиным. Полную высоту деятельного слоя H мы были склонны разбить на две части — D_1 и D_2, пропорциональные корню квадратному из соответствующих значений коэффициента μ

турбулентной вязкости воздуха. Так как новая высота трения D_2 в 3 раза больше высоты трения D_1, то следовало бы считать, что μ_2 в 9 раз превышает μ_1.

Распределение скоростей по вертикали в нижнем слое трения, в собственно муссонном слое, не вызвало никаких разногласий и принято всеми авторами. Напротив, распределение скоростей выше этого слоя послужило темой для широкой дискуссии.

Большинство авторов считало невозможным оставлять в выражении интеграла уравнений движения (70) и (71) оба члена; эти авторы оставляли в выражении общего интеграла лишь член, содержащий экспоненциальную функцию с отрицательным знаком в показателе степени, стремящийся к нулю при неограниченном возрастании высоты z; коэффициент при втором члене общего интеграла они полагали равным нулю [9, 10].

Тем самым отрицалось замыкание линий тока на небольшой высоте над подстилающей поверхностью (порядка километров) и утверждалось, что линии тока либо совсем не замыкаются (у одних авторов), либо замыкаются на физически абсурдных высотах (у других авторов).

Одновременно отрицался перенос воздушных масс в зимнем антимуссонном потоке с океана на материк. Один весьма консервативный автор в объемистом труде специально напечатал курсивом, что антимуссон вообще не существует. Перенос избыточных масс с океана на материк и в обратном направлении либо описывался таким образом, что появление максимальной избыточной массы сдвигалось по времени на четверть года против истинного срока, либо никак не связывалось с переносом воздуха в муссонном поле (предполагалось, что избыточные массы заносятся на материки какими-то «иными путями»).

Трудность опровержения или подтверждения той или иной гипотезы здесь обусловлена была тем, что поодаль от береговой линии муссонные составляющие воздушных потоков всегда маскируются значительно более мощными *переменными* составляющими ветра при прохождении отдельных циклонов и антициклонов. С другой стороны, геофизики, совсем не склонные отрицать наличие антимуссонных потоков над нижним слоем трения, предполагали в то же время, что скорости этих потоков весьма малы по сравнению со скоростями *зональной циркуляции*, которые быстро возрастают по мере увеличения высоты над подстилающей поверхностью.

Однако Шулейкину удалось, наконец, *разделить* между собой муссонные составляющие полных потоков в атмосфере и составляющие зональные. При этом был использован обширный аэрологический материал, освобожденный от сложных влияний отдельных циклонов и антициклонов, путем климатологического осреднения [34].

Для средней Европы подобный материал был собран германскими обсерваториями в пределах от земной поверхности до высоты 5 *дин. км*. Для всех исследованных высот были найдены векторы, выражающие среднюю годовую скорость ветра. Средняя месячная скорость для той или иной высоты выражена через такой средний годовой вектор и добавочную составляющую, найденную для соответствующего месяца и соответствующей высоты. В свою очередь каждая такая средняя месячная составляющая разлагалась на меридиональную и на широтную компоненты. Эти компоненты обладают весьма сложным годовым ходом. Однако посредством гармонического анализатора сложные кривые разлагаются на основную синусоиду и на высшие гармонические. Ясно выражены вторая и третья гармонические, которыми мы пока не интересуемся; четвертая гармоническая практически полностью отсутствует; очень резко проявляется *пятая* гармоническая, к которой мы вернемся в § 21 (см. рис. 403).

Пока рассмотрим лишь *основные* гармонические колебания средних месячных составляющих, которые добавляются к среднему годовому вектору на различных высотах.

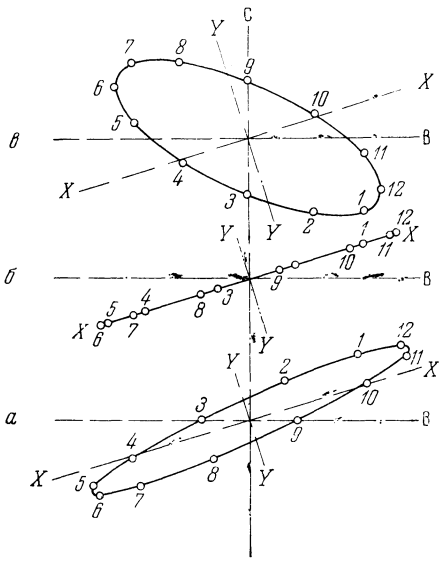


Рис. 361. Годографы отклонений ветра на высотах

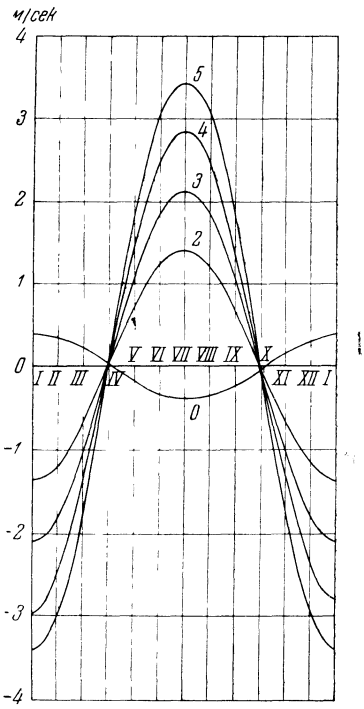


Рис. 362. Годовой ход муссона и высотных потоков

На рис. 361 воспроизведены годографы отклонений от среднего годового вектора скорости полного потока, полученные германскими авторами для трех высот над подстилающей поверхностью: кривая *а* при $z = 0$, кривая *б* при $z = 0{,}5$ *дин. км*; кривая *в* при $z = 2$ *дин. км*. Цифры обозначают, какому месяцу соответствует тот или иной конец вектора, добавляемого к среднему годовому. Начало векторов лежит всюду в точке пересечения соответственных координатных осей. Ось C направлена по меридиану к северу, а ось B — по параллели к востоку на всех трех совмещенных диаграммах рис. 361.

Как известно, на основании всех современных теоретических работ и непосредственных наблюдений в природе, 0,5 *км* представляет собой обычное значение высоты слоя трения в средних широтах. Ниже этого уровня работает общепризнанный муссон. Выше него, по нашим воззрениям, разделяемым многими авторами, должен работать антимуссон, истинное распределение которого по вертикали мы пока еще не определили. На высоте 0,5 *км* должна обращаться в нуль та чрезвычайно важная составляющая муссонного потока, которая совпадает с направлением градиента в муссонном поле.

Это обстоятельство позволяет смотреть на рис. 361, *б* как на своеобразный ключ к решению нашей задачи: мы утверждаем, что годограф среднемесячных составляющих скоростей превратился в отрезок прямой (в отличие от эллипсов ниже и выше его) *именно* по той причине, что на высоте 0,5 *км* обратилась в нуль составляющая муссонного потока, направленная по градиенту давления в муссонном поле.

Нанесем на все три совмещенные диаграммы направление этого градиента, заимствованное с диаграммы рис. 361, *б*: направление YY, перпендикулярное к направлению XX отрезка прямой в средней части рисунка. Спроектируем на оси YY векторы, которые скользят концами по двум остальным годографам. Тогда обнаружится, что годовой ход величины проекций рис. 361, *а* можно выразить кривой *О* рис. 362. Годовой ход проекций рис. 361, *в* соответственно выразится кривой *2* на рис. 362.

Как видим, колебания совершаются в прямо противоположных фазах, если отрешиться от небольшого сдвига точек, в которых кривые пересекают ось абсцисс. Любопытно, что наличие этого небольшого сдвига хорошо вяжется с нашей первоначальной схемой муссонных и антимуссонных потоков — с уравнениями (72) и (73). В полном соответствии с нашими теоретическими представлениями скорости достигают максимумов по абсолютной величине в январе и в июле, а через нуль проходят в апреле и октябре.

Именно таким условиям должны удовлетворять муссон и антимуссон.

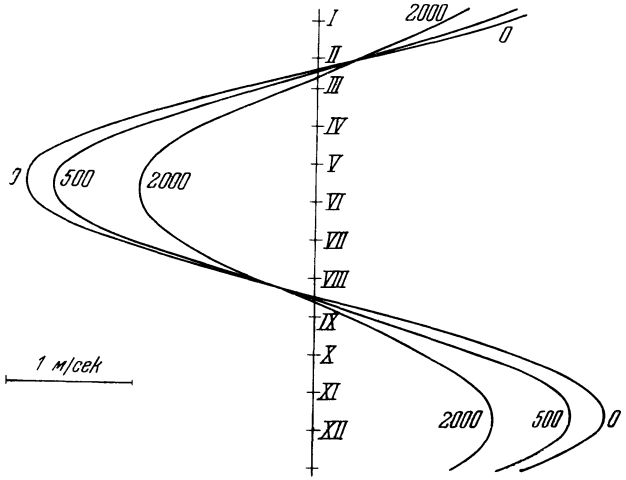


Рис. 363. Проекции скоростей на другую ось

Совсем иначе меняются во времени проекции векторов на XX для рис. 361, *а*, *б* и соответственно проекция на параллель для рис. 361, *в*; все эти величины колеблются практически в *общей фазе*, на всех рассмотренных высотах над земной поверхностью, как видно на рис. 363. Это находится в полном соответствии с существующими воззрениями на *зональную* циркуляцию.

Направление зональных потоков в нижних слоях атмосферы не должно совпадать с параллелями. Следовательно, есть все основания отождествить его с направлением, характерным для оси XX (рис. 361), наклоненным под углом около 17° к параллели. На высоте 2 *дин. км* направление зональных потоков, по всей вероятности, лежит близко к параллели, т. е. почти совпадает с осью B (рис. 361, *в*).

В противоположность старым представлениям (и нашим схемам в том числе) скорости *антимуссона* оказались значительно бóльшими, чем скорости собственно муссона. Нарастание их продолжается даже за пределами слоя 2 *км*, в чем можно убедиться, взглянув на рис. 362, на котором нанесены также кривые, соответствующие высотам 3, 4 и 5 *дин. км*.

Чем же вызвано столь мощное развитие антимуссонных потоков? На этот вопрос не дают никакого ответа цитированные материалы. Они не позволяют также судить об истинных направлениях полных векторов скорости антимуссона, а дают лишь проекции на выбранную ось YY.

Зато главную характеристику потоков — векторы градиентов давления — совсем нетрудно получить по климатологическим картам изобар на высотах, если проанализировать их с соответствующей точки зрения: на всех таких картах видны замечательные изгибы там, где они пересекают берега океана. Разумеется, резче всего выражены изгибы там, где общее направление береговой линии приближается к меридиану: «муссонная» составляющая градиен-

та давления там близка к параллели и, следовательно, перпендикулярна к той составляющей градиента давления, которая управляет зональной циркуляцией. В этом отношении очень большую ценность для нашего исследования представляют высотные карты изобар над побережьем Франции, в районе Бискайского залива (климатологические) [35].

Представим себе такой изогнутый участок изобары, изображенный на рис. 364. Пусть нормаль к изобаре составляет здесь некоторый угол α с меридианом. Измерив этот угол, можно выразить искомую «муссонную» составляющую градиента давления Γ_2 либо через полный градиент давления Γ_0

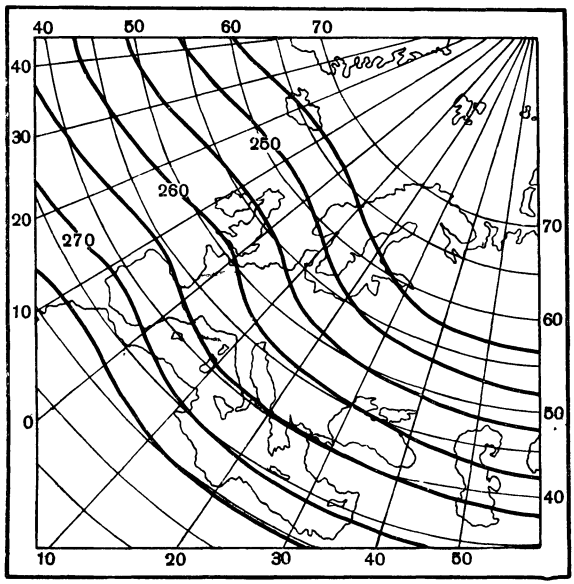


Рис. 364. Климатологические изобары над береговой линией на высоте 10 *км*

(совпадающий по направлению с нормалью к изобаре), либо через меридиональную составляющую Γ_1 полного градиента, управляющую зональными потоками

$$\Gamma_2 = \Gamma_0 \sin \alpha = \Gamma_1 \operatorname{tg} \alpha.$$

Таким образом, Шулейкин определил значения «муссонной» составляющей градиента давления на различных высотах в различные месяцы. На рис. 365 изображены результаты вычислений. На ту же диаграмму нанесены точки, соответствующие поверхности Земли; они определены по обычным климатологическим картам изобар (наземным).

На рис. 366 изображено изменение «муссонных» составляющих градиента давления в продолжение года на земной поверхности (кривая *О*) и на высотах 2, 5 и 10 *км*. Как здесь, так и на рис. 365, при падении давления в направлении с океана на материк направление градиента считается положительным.

Оба рисунка совершенно ясно показывают неожиданную мощь градиентов давления, управляющих антимуссонными потоками; эти градиенты давления резко выражены даже в стратосфере. Но именно потому необходимо найти *тепловые причины*, которые вызывают такую мощь антимуссона. Здесь на помощь приходят высотные карты климатологических *изотерм* того же географического района [35]. На них видны совершенно аналогичные изгибы изотерм близ берегов Атлантического океана, позволяющие столь же элементарным путем определить составляющую температурного градиента в

направлении параллели: составляющую, вызванную тепловыми противоречиями между океаном и материком в районе Бискайского залива. Градиенты температуры на уровне моря определяются по обычным климатологическим картам изотерм [36].

На рис. 367 изображены результаты вычислений Шулейкина, которые вскрывают природу столь мощных антимуссонных потоков на высотах. Ясно видны *три* основных слоя в исследованных пределах, характеризующихся тремя различными типами температурного режима.

Нижний слой находится под непосредственным тепловым влиянием подстилающей поверхности: для него в холодное время года океан служит мощным нагревателем, а материк — холодильником; в теплое время года его подогревает материк и охлаждает океан.

Промежуточный слой — между описанным нижним слоем и тропопаузой — характеризуется очень сложным температурным режимом. При внимательном рассмотрении обнаруживается наличие *температурной волны*, которая распространяется в этом слое снизу вверх и затухает, подходя к тропопаузе. Совершенно очевидно, что она вызвана температурными колебаниями с годичным периодом в нижнем слое. На всех высотах в пределах промежуточного слоя температурный градиент колеблется относительно некоторого среднего годового значения, *оставаясь всюду положительным*; это — потому, что тропосфера над океаном круглый год *теплей*, чем тропосфера над материком.

Самым интересным является верхний слой, лежащий уже в стратосфере. Температурный градиент там оказался *отрицательным круглый год*; круглый год стратосфера над океаном *холодней*, чем стратосфера над материком (на исследуемых высотах — до 20 *км* над уровнем моря).

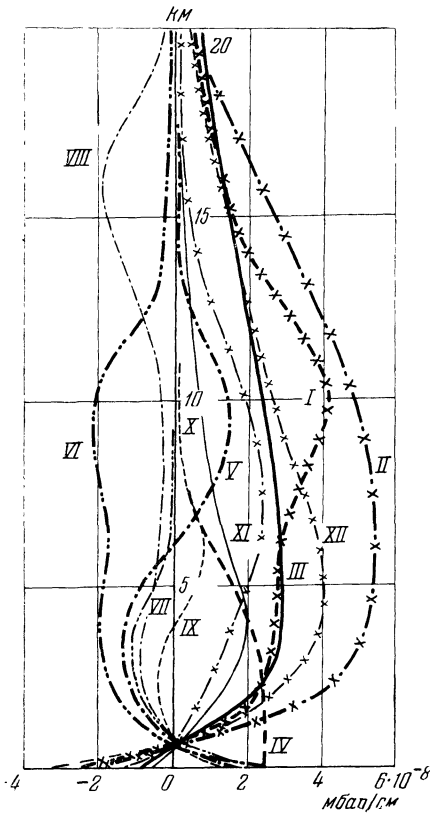


Рис. 365. Градиенты давления на различных высотах над берегом океана

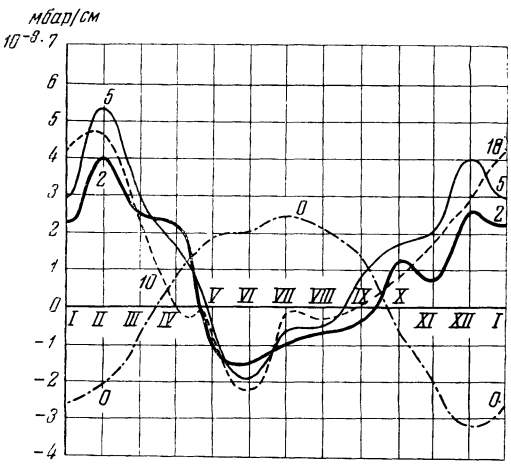


Рис. 366. Годовой ход градиентов давления на различных высотах над берегом океана

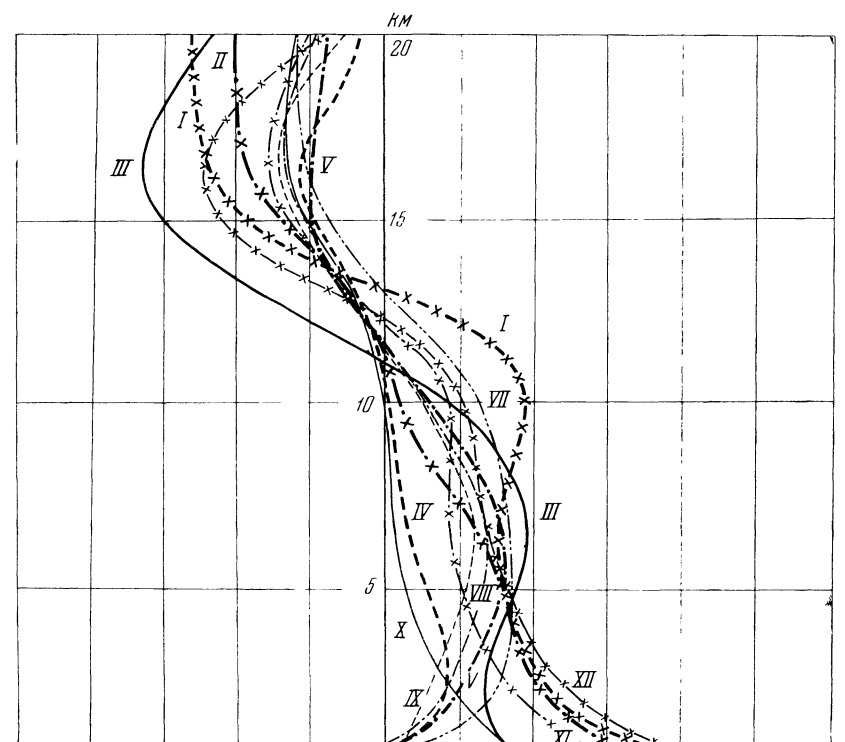


Рис. 367. Градиенты температур на различных высотах над берегом океана

Высотные карты климатологических изотерм и изобар обладают весьма малой точностью, а потому в настоящее время еще рано пытаться вычислять по рис. 367 ожидаемые градиенты давления на высотах для сопоставления результатов с рис. 365. Однако и в настоящее время отчетливо видно, что характерный ход кривых на рис. 367 позволяет понять происхождение мощных антимуссонных потоков на высотах, мощное развитие зимнего муссона вообще (в средних широтах в Европе) и слабое развитие там летнего муссона.

Современная изученность баланса лучистой энергии в стратосфере не позволяет сколько-нибудь строго объяснить охлаждение воздуха в стратосфере над океаном, более сильное, чем над материком. Однако можно с достаточным правом утверждать, что причина этого замечательного явления тождественна с причиной охлаждения воздуха в стратосфере над тропиками, более сильного, чем охлаждение его над высокоширотными поясами Земли: ту же самую роль должен играть *водяной пар*, содержащийся в тропосфере (в тропиках его больше, чем в высоких широтах, а над океаном его больше, чем над материком).

В предыдущих параграфах этой главы зональная и муссонная циркуляция в атмосфере рассматривалась как работа некоторых двух родов «тепловых машин». Машины первого рода созданы различием прогрева воздуха в тропических и в высокоширотных поясах Земли. Машины второго рода возникли благодаря различию в прогреве воздуха над океаном и воздуха над материками, причем подстилающая поверхность непосредственно воздействовала там на нижний слой атмосферы — практически на слой толщиной около 4 *км*.

Теперь мы обнаружили, что муссонная циркуляция должна описываться как работа не только машин второго рода, но и машин *третьего рода*, еще никогда до сих пор не фигурировавших в исследованиях. В отличие от двух первых, работа машин третьего рода обусловлена не непосредственной теплоотдачей подстилающей поверхности, а воздействием *теплового излучения* на воздушные массы стратосферы.

В машинах третьего рода круглый год, как правило, «нагреватель» располагается над материком, а «холодильник» — над океаном.

Для полноты следует отметить еще и «машины четвертого рода», которые так же участвуют в формировании зональных потоков, как машины третьего рода участвуют в формировании муссонных потоков; несомненно, что охлаждение стратосферы над экватором более сильное, чем охлаждение стратосферы над высокоширотными поясами Земли, создает в стратосфере зональные потоки, противоположные по направлению зональным потокам в тропосфере. Эти потоки действительно наблюдаются в природе. Мы не будем здесь на них останавливаться, а потому не будем больше касаться машин четвертого рода, для которых высокоширотные пояса Земли служат нагревателями, а тропический пояс — холодильником.

§ 15. Термобарические сейши в атмосфере

Представление о трех родах (или, точнее, четырех родах) тепловых машин оказалось весьма полезным для развития физической теории *климата*: морского, материкового, со всеми промежуточными оттенками. Климатом мы называем режим работы этих тепловых машин. Но все машины, существующие в природе, в том числе лучшие машины, построенные человеком, работают с неизбежными колебаниями даже при наличии специальных регуляторов движения, созданных современной техникой. Как правило, такие колебания являются самовозбуждающимися. Они питаются энергией от того потока, который идет от источника энергии и затем излучается, пройдя через цепь различных звеньев, входящих в машину.

С нашей точки зрения, в цепи звеньев, входящих в атмосферные тепловые машины, также неизбежны *самовозбуждающиеся колебания*. Именно они-то и приводят к *смене погоды*. Эти колебания питаются энергией от тех потоков, которые идут от нагревателя к холодильнику в муссонном поле или в поле зональной циркуляции.

Непосредственные наблюдения в природе давно натолкнули метеорологов на мысль о волнообразном изменении погоды: о нем писали уже С. Д. Грибоедов [37], Б. П. Мультановский [38] и Л. Г. Данилов [39]. На основе представления о тепловых машинах в атмосфере В. В. Шулейкин в 1939 г. построил теоретическую схему *термобарических сейш* в атмосфере [40] — физико-математическую схему смены погоды.

За истекшие годы не прекратились споры вокруг этой теоретической схемы и в то же время накопились обильный надежный материал непосредственных наблюдений в природе и материал экспериментальный, позволяющие убедиться в полной справедливости наших основ для построения *теории погоды*.

Сейчас мы вправе рассматривать систему океан — атмосфера — материк как настоящую *автоколебательную систему*.

При изучении всякой автоколебательной системы необходимо прежде всего составить четкое представление о ее физической сущности, о ее элементах, приводящих к возможности колебаний. В частности, как известно, обыкновенный часовой маятник вместе с механизмом, доставляющим энергию, является типичной автоколебательной системой. Это обстоятельство стало известным в наше время, когда родилась теория автоколебательных явлений. Однако в незапамятные времена физики познакомились со свойствами физи-

ческого маятника как простой колебательной системы, и установили связь между длиной маятника и периодом его колебаний.

В области, интересующей нас сейчас, также необходимо начинать исследования с анализа динамики самой системы. Надо прежде всего доказать, что она *способна колебаться*, найти связь между ее физическими параметрами и возможным собственным периодом колебаний.

Следует отметить, что в совсем недавнем прошлом среди теплофизиков и метеорологов было распространено убеждение, что конвекционные явления вообще и адвекционные явления в атмосфере в частности не могут порождать никакие колебания температуры и давления на том основании, что в уравнениях теплопередачи якобы отсутствует инерционный член, безусловно необходимый для существования колебаний (член, содержащий массу в уравнениях механических колебаний, член, содержащий индуктивность в уравнениях электрических колебаний, и т. п.). Многочисленные сторонники подобного воззрения упускали из виду, что в атмосфере тепло переносится *именно массами* воздуха, разумеется, обладающими инерцией.



Рис. 368. Повышение атмосферного давления при понижении температуры

Со времени появления первой схемы Шулейкина для термобарических сейш в атмосфере, к сожалению, не было предложено никаких законченных схем, несмотря на то, что в последующем очень отчетливо рисовались особенности явления на основе целого ряда случаев типичных сейш такого рода. Во всех случаях отмечались одновременные противофазные колебания температуры и давления в точном соответствии с уравнением (66), связывающим градиенты давления с градиентами температуры. Это уравнение, отлично проверенное применительно к градиентам в пространстве (как об этом говорилось в § 4 и др.), многократно проверялось применительно к градиентам *во времени* и, как правило, хорошо оправдывалось. В качестве примера на рис. 368 приведены одновременные изменения температуры воздуха и атмосферного давления, наблюдавшиеся Шулейкиным на палубе экспедиционного судна «Седов» в Эгейском море зимой 1957 г. Как видим, одна кривая представляет зеркальное изображение другой. Для константы П тут получилось значение 1,5, которое мало отличается от обычного 1,6. Совершенно очевидно, что такие большие изменения температуры никак нельзя объяснять адиабатическими или политропическими процессами, связанными с колебаниями давления: они могут возникать *только благодаря изменениям режима тепловых потоков с океана (или с моря) на материк, в воздушной среде*. Следовательно, здесь перед нами совсем не гравитационные, не чисто барические волны, которые исследовались Маргулесом и другими иностранными авторами. Здесь — волны термобарические, с одинаково ярко выраженными амплитудами колебаний как давления, так и температуры воздуха.

В настоящее время невозможно анализировать это сложное явление, исходя из действительного распределения температур по вертикали в деятельном слое атмосферы. Ограничимся, как и в первой схеме Шулейкина, анализом поведения *двуслойной* системы, создающейся в тропосфере благодаря

наличию машин второго рода. Допустим, что в нижнем — собственно муссонном — слое холодный воздух стекает с материка на океан с некоторой осредненной скоростью U_0. Над этим слоем располагается второй, в котором с океана на материк поступает *подогретый* океаном воздух, обладающий температурой на Θ выше, чем температура нижнего слоя. Во избежание непреодолимых трудностей придется пока отказаться от описания поведения этого верхнего теплого слоя и присвоить ему лишь такие функции: он замыкает потоки воздуха, циркулирующего зимой между материком и океаном; при этом выполняется условие неразрывности,— в первом приближении считаем, что количество воздуха, стекающего с материка, равно количеству воздуха, поступающего с океана на материк, за то же время. При увеличении скорости потока на каком-то отдельном участке нижнего слоя условие неразрывности требует *утоньшения* нижнего слоя на этом участке; тем самым вызывается повышение средней температуры *двойного слоя* за счет уменьшения количества холодного воздуха над данным участком подстилающей поверхности; Напротив, уменьшение скорости потока в нижнем слое, на каком-то участке, должно привести к *утолщению* нижнего слоя и к связанному с этим понижению *средней* температуры двойного слоя на соответствующем участке. Итак, верхний слой мы вынуждены пока рассматривать лишь в качестве *пассивного* звена общей цепи. Несомненно, между ним и нижним слоем существует обмен массами воздуха и, что особо важно, обмен теплом. Но детали этого важного процесса пока не поддаются описанию, и изменения температуры нижнего слоя мы можем сейчас рассматривать лишь с феноменологической стороны, твердо зная, что эти изменения неизмеримо велики по сравнению с адиабатическими, и полностью доверяя основному соотношению (66). Перепишем это соотношение применительно к отклонениям температуры ϑ от состояния равновесия и соответствующим отклонениям p атмосферного давления от его нормы

$$\operatorname{grad} p = -\Pi \operatorname{grad} \vartheta. \tag{213}$$

Рассмотрим возмущение системы, выражающееся в том, что осредненная скорость потока U_0 в нижнем слое получает приращение, которое дает составляющую u вдоль U_0 и составляющую v перпендикулярно к нему, вправо. Эти возмущения должны быть связаны с изменениями атмосферного давления и другими параметрами посредством уравнений движения [41]

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\delta}\frac{\partial p}{\partial x} - U_0\frac{\partial u}{\partial x} + 2\bar{\omega}v, \tag{214}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{\delta}\frac{\partial p}{\partial y} - U_0\frac{\partial v}{\partial x} - 2\bar{\omega}u, \tag{215}$$

где u и v — упомянутые возмущения скорости U_0, а p — соответствующее изменение среднего (стационарного) давления. Заменим градиент p на градиент того приращения ϑ температуры, которое возникает в результате возмущения скорости потоков. Тогда согласно (213) будет

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\Pi}{\delta}\frac{\partial \vartheta}{\partial x} - U_0\frac{\partial u}{\partial x} + 2\bar{\omega}v, \tag{216}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\Pi}{\delta}\frac{\partial \vartheta}{\partial y} - U_0\frac{\partial v}{\partial x} - 2\bar{\omega}u. \tag{217}$$

В нашей схеме атмосфера рассматривается как некоторая двуслойная пленка: температура верхнего, антимуссонного, слоя отличается на Θ от температуры нижнего, собственно муссонного. Следовательно, изменение осредненной температуры этой пленки можно представить уравнением теплопередачи в

виде

$$\frac{\partial\vartheta}{\partial t} = \Theta\left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right] + U_0\frac{\partial\vartheta}{\partial x}. \tag{218}$$

Потери тепла на излучение здесь не учтены.

Первый член правой части уравнения (218) учитывает изменение осредненной температуры за счет прироста количества воздуха с температурой одного слоя и убыли количества воздуха с температурой второго из слоев. Второй член правой части учитывает изменение температуры воздуха, вызванное тем, что поток U_0 приносит в исследуемую точку воздушную массу из другого района, лежащего на оси X, по пути основного потока.

Выразим $\partial\vartheta/\partial x$ (из 216) и $\partial\vartheta/\partial y$ из (217) через остальные величины и продифференцируем одно из полученных уравнений по x, а другое по y. Тогда:

$$\frac{\partial^2\vartheta}{\partial x^2} = \frac{\delta}{\Pi}\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial t} + U_0\frac{\delta}{\Pi}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\overline{\omega}\frac{\delta}{\Pi}\frac{\partial v}{\partial x}, \tag{219}$$

$$\frac{\partial^2\vartheta}{\partial y^2} = \frac{\delta}{\Pi}\frac{\partial^2 v}{\partial y\,\partial t} + U_0\frac{\delta}{\Pi}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + 2\overline{\omega}\frac{\delta}{\Pi}\frac{\partial u}{\partial y}. \tag{220}$$

Умножим обе части (219) на $\left(\frac{\Theta\Pi}{\delta} + U_0^2\right)$, а обе части (220) на $\frac{\Pi\Theta}{\delta}$ и сложим оба уравнения. В результате получим

$$\left(\frac{\Pi\Theta}{\delta} + U_0^2\right)\frac{\partial^2\vartheta}{\partial x^2} + \left(\frac{\Pi\Theta}{\delta}\right)\frac{\partial^2\vartheta}{\partial y^2} = \Theta\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial t} + \frac{\partial^2 v}{\partial y\,\partial t}\right] + U_0^2\frac{\delta}{\Pi}\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial t} +$$
$$+\left(\frac{\Pi\Theta}{\delta} + U_0^2\right)U_0\frac{\delta}{\Pi}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \Theta U_0\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y} - \frac{2\overline{\omega}\delta}{\Pi}\left(\frac{\Pi\Theta}{\delta} + U_0^2\right)\frac{\partial v}{\partial x} + 2\overline{\omega}\Theta\frac{\partial u}{\partial y}. \tag{221}$$

Обобщим уравнение (218) на случай неконсервативной системы — системы, теряющей часть тепла на лучеиспускание в межпланетное пространство. Положим, что из всего тепла, выражаемого членами правой части, на изменение температуры, выражаемое левой частью, идет лишь некоторая доля η, где η — правильная дробь. Учтя это и внеся поправочный множитель $1/\eta$ в левую часть уравнения (218), продифференцируем измененное таким образом уравнение (218) по времени. Тогда, с учетом выражения $\partial\vartheta/\partial x$ из (216), окажется, что

$$\frac{1}{\eta}\frac{\partial^2\vartheta}{\partial t^2} = \Theta\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial t} + \frac{\partial^2 v}{\partial y\,\partial t}\right] + U_0\frac{\partial^2\vartheta}{\partial x\,\partial t} = \Theta\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial t} + \frac{\partial^2 v}{\partial y\,\partial t}\right] +$$
$$+ U_0\frac{\delta}{\Pi}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + U_0^2\frac{\delta}{\Pi}\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial t} - 2\overline{\omega}U_0\frac{\delta}{\Pi}\frac{\partial v}{\partial t}. \tag{222}$$

Сопоставление правых частей (221) и (222) приводит к заключению, что вторые производные от ϑ по времени и по линейным координатам x, y могут быть связаны между собой классическим *волновым уравнением*, в котором появляются некоторые «искажающие» члены; именно уравнением

$$\frac{\partial^2\vartheta}{\partial t^2} + \varphi(t) = c_1^2\frac{\partial^2\vartheta}{\partial x^2} + c_2^2\frac{\partial^2\vartheta}{\partial y^2} + \psi(x, y, t). \tag{223}$$

Здесь c_1 и c_2 — скорости волн в направлении оси X (т. е. в направлении вектора U_0) и оси Y:

$$c_1^2 = \frac{\eta}{\delta}\Pi\Theta + \eta U_0^2, \tag{224}$$

$$c_2^2 = \frac{\eta}{\delta}\Pi\Theta. \tag{225}$$

Значит, атмосфера является *анизотропной* средой в отношении термобарических волн в муссонном поле; анизотропию вносит основной муссонный поток, характеризующийся направлением вектора U_0.

Легко убедиться, что «искажающие члены», необычные для волнового уравнения, выражаются так:

$$\varphi(t) = \eta \frac{\delta}{\Pi} U_0 \frac{c_2}{c_1} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \tag{226}$$

$$\psi(x, y, t) = 2\bar{\omega}\eta \frac{\delta}{\Pi}\left[c_1^2 \frac{\partial v}{\partial x} - c_2^2 \frac{\partial u}{\partial y} + U_0 \frac{\partial v}{\partial t}\right]. \tag{227}$$

Попытаемся оценить порядок величины искажающих членов и сравнить его с порядком основных членов волнового уравнения. Положим, что $\Theta = 4°$, $\delta = 1{,}2 \cdot 10^{-3}$, $\Pi = 1{,}6 \cdot 10^3$, $c_2^2/c_1^2 = 0{,}5$, $U_0 = 800$ *см/сек*. Допустим, что величины u и v в пучностях достигают того же порядка, что и U_0, и что ϑ в пучностях температурного поля достигает величины 6°.

Тогда вычисления обнаружат, что при сколько-нибудь вероятных значениях η (всегда меньших единицы) искажающий член $\varphi(t)$ в левой части (223) составляет меньше 4% от первого члена уравнения (223)

$$\varphi(t) < 0{,}04 \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial t^2}.$$

Что касается искажающего члена правой части (223) $\psi(x, y, t)$, то его физический смысл нетрудно выяснить: он свидетельствует о наличии вращения системы волн в поле кориолисовой силы и затухания волн на пути их следования. Зададимся экспоненциальным законом затухания волн во времени, внеся множитель $e^{-\beta t}$. Тогда, сохранив принятые числовые значения величин, положив для средних широт $\bar{\omega} = 5 \cdot 10^{-5}$ *сек*$^{-1}$ и условившись затем измерять время в сутках, получим для β грубо приближенное значение

$$\beta < 0{,}56 \frac{1}{\text{сутки}}.$$

Другими словами, затухание волн должно будет повести к суточному изменению температуры, меньшему $1 - e^{-\beta t} = 0{,}43$ от значения, вычисленного по простой формуле, без учета затухания.

Итак, искажающим членом $\varphi(t)$ можно свободно пренебречь. Искажающий член ψ был бы равен нулю в *неподвижной* системе, в которой угловая скорость вращения ω отсутствовала бы. Для такой системы уравнение (223) приобрело бы классическую форму

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial t^2} = c_1^2 \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} + c_2^2 \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2}, \tag{228}$$

типичную для *анизотропной среды*.

Характер самой анизотропии поддается количественному учету. Действительно, пока примем в (224) и (225) $\eta = 1$. Вспомним, что, выражая Π в абсолютных единицах, надо положить $\Pi = 1{,}6 \cdot 10^3$, и примем для осредненной разности температур между слоями воздуха значение $\Theta = 10°$. Среднюю скорость потока в нижнем слое будем считать $U_0 = 800$ *см/сек*. Тогда фазовая скорость волн в направлении U_0 на основании (224) будет $c_1 = 3730$ *см/сек* $= 37{,}3$ *м/сек*.

Фазовая скорость волн c_2 в направлении, перпендикулярном к U_0, определится по (225): $c_2 = 3650$ *см/сек* $= 36{,}5$ *м/сек*.

Как видим, различие между этими значениями фазовых скоростей c_1 и c_2 составляет лишь немного более чем 2%.

Следовательно, в дальнейших выкладках — на нынешней ступени анализа термобарических волн — не надо будет считаться с анизотропией среды и с полным основанием можно будет писать волновое уравнение в простой форме:

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial t^2} = c^2\left[\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2}\right], \tag{229}$$

причем c^2 выражается формулой (225).

Уравнение (229) было получено Шулейкиным посредством намного более грубого приема в 1939 г. [40]. Выражение для c^2 содержало иной множитель перед существенно важной величиной $\Pi\Theta/\delta$; вместо η, учитывающего излучение в межпланетное пространство, там стояла физически связанная с η величина m; это — величина, зависящая от Θ и, разумеется, зависящая в конечном счете от η.

В настоящее время не удается еще применить уточненное уравнение (223) к тем интересным конкретным случаям, к которым было применено простое уравнение (229) в цитированной работе. Поэтому впредь до дальнейших уточнений анализа будем первоначально исходить из простого уравнения (229), а потом несколько уточним полученные выводы, пользуясь достаточно надежными путями.

Многочисленные наблюдения в природе показывают, что термобарические волны почти никогда не проявляются в приземном слое как волны распространяющиеся: в преобладающем большинстве случаев они ведут себя как *стоячие волны* с резко выраженными пучностями, с хорошо заметными на картах узловыми линиями.

Рассмотрим поведение таких стоячих волн внутри узловой линии, имеющей форму *окружности* радиусом ρ. При не слишком большой величине ρ можно пренебречь влиянием кривизны поверхности Земли и решать задачу на плоскости.

Поместим начало координат в центре окружности — узловой линии — и преобразуем уравнение (229) применительно к полярной системе координат r, ψ. При этом учтем, что в любой точке поля ϑ должно быть связано с t и с ψ некоторой функцией, допускающей разложение в ряд Фурье. Тогда дифференциальное уравнение волн перепишется в виде

$$\frac{d^2\vartheta}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\vartheta}{dr} + \left(k^2 - \frac{s^2}{r^2}\right)\vartheta = 0. \tag{230}$$

Это уравнение интегрируется в бесселевых функциях при граничном условии на узловой линии

$$|\vartheta|_{r=\rho} = 0. \tag{231}$$

Нас будет интересовать его интеграл

$$\vartheta = \vartheta_0 J_1(kr)\cos(at + \psi + \varepsilon), \tag{232}$$

в выражении которого на основании (231)

$$J_1(k\rho) = 0, \tag{233}$$

а ϑ_0 — амплитуда. Для определения наибольшего периода собственных колебаний найдем по таблицам

$$k\rho = 3{,}83. \tag{234}$$

Но, с другой стороны,

$$T = \frac{2\pi}{kc}. \tag{235}$$

Следовательно, на основании (225), (234) и (235)

$$T = \frac{2\pi}{3{,}83}\frac{\rho}{c} = 1{,}64\,\rho\sqrt{\frac{\delta}{\eta\Pi\Theta}}. \tag{236}$$

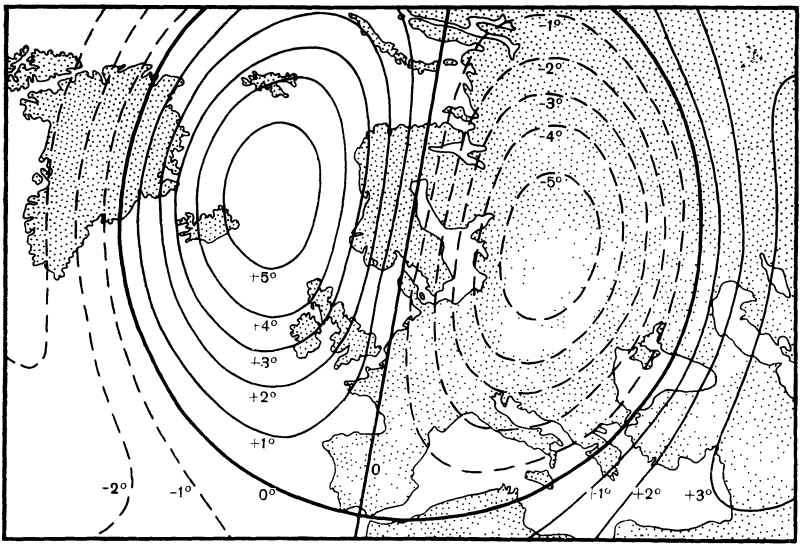


Рис. 369. Теоретическая схема поля термобарических сейш

Это выражение периода отличается от полученного по старому, более грубому способу лишь тем, что в знаменателе под корнем стоит величина η вместо прежней величины m, как-то неявно с ней связанной.

Несмотря на весьма упрощающие допущения, к которым приходится прибегать при современном состоянии наших знаний, теоретические выводы Шулейкина хорошо вяжутся с результатами непосредственных наблюдений в природе.

Взглянем, например, на схематическую карту стоячих термобарических волн, построенную Шулейкиным по формуле (232) для системы Атлантика — Европа, в той фазе, когда узловой диаметр проходит по генеральной береговой линии. Радиус окружности здесь составляет примерно $\rho = 2500$ *км* $= 2{,}5 \cdot 10^8$ *см*.

Как видим, на рис. 369, где воспроизведена эта схематическая карта, отчетливо выступают изоплеты равного «перегрева» и «недогрева» муссонного слоя воздуха. Отклонения от нормы обозначены цифрами с соответствующими знаками — плюс, минус.

Вся полученная картина близко напоминает те карты «перегрева» и «недогрева», которые в свое время получил И. Сандстрем [42], исследовавший связь направления ветра у Лофотена с повышением и понижением температуры воздуха над Атлантикой и над Европой. Этот автор предпринял свое обширное исследование, исходя из совершенно неверной гипотезы. Он предполагал, что все смены погоды происходят ввиду изменений режима теплого Северо-Атлантического течения; направление ветра у Лофотена он считал индикатором подобных изменений в режиме течения. Были обработаны обильные материалы наблюдений температур в Европе и на протяжении Северного Атлантического океана. Отчасти охвачены: на западе — Гренландия и на востоке — часть Азии. Все материалы, за несколько десятилетий, разбиты на 36 групп применительно к различным направлениям ветра у Лофотена с промежутками в 10° между ними. На цветной вкладке, в конце книги, воспроизведены результаты, полученные И. Сандстремом и расположенные здесь для наглядности в виде непрерывной цепи «кадров». Также для наглядности карты расцвечены соответственно потеплению и похолоданию. На рис. 370 и 371 выделены два из этих кадров, соответствующие наиболее резко выра-

женным противоположным состояниям колебательной системы. Кривые представляют собой изоплеты равных отклонений температуры воздуха от нормы (климатологической) — в положительную и в отрицательную стороны.

Вся полученная картина поразительно напоминает нашу теоретическую схему рис. 369. При наибольшем перегреве воздуха над Атлантическим

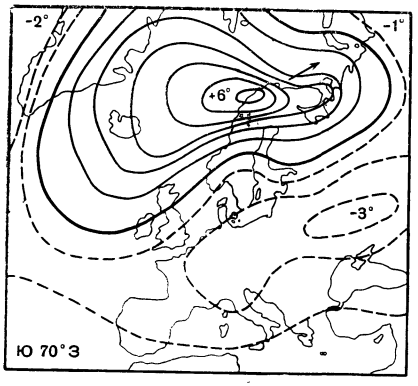


Рис. 370. Фаза наибольшего потепления над Атлантикой (по И. Сандстрему)

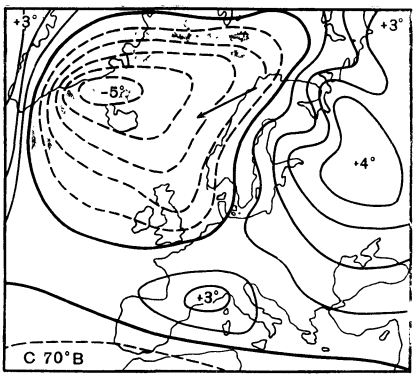


Рис. 371. Фаза наибольшего похолодания над Атлантикой (по И. Сандстрему)

океаном (рис. 370) наступает наибольший недогрев над Европой и над Гренландией. Напротив, наибольший недогрев воздуха над Атлантикой (рис. 371) соответствует наибольшему перегреву над Европой и над Гренландией.

На рис. 372 еще отчетливей видно колебание температурных отклонений от нормы при различных направлениях ветра у Лофотена. Злесь воспроизведено поведение температуры воздуха в трех точках: в г. Перми, лежащем недалеко от пучности колебаний в Европе, в Торсхавне, находящемся на о-ве Фарерском, в Атлантике и в Упернивике в Гренландии. Как видим, температура над Атлантическим океаном (Торсхавн) колеблется в фазе, противоположной Европе (г. Пермь); колебания температуры над Гренландией (Упернивик) происходят в общей фазе с Европой.

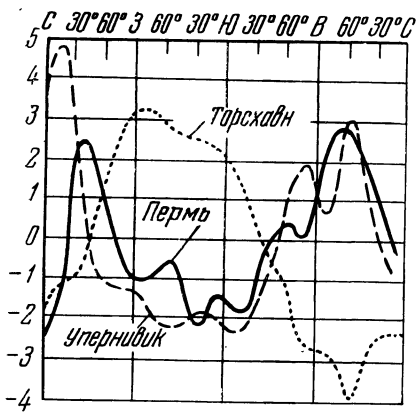


Рис. 372. Колебания отклонения температуры от нормы

Но сходство между нашей теоретической схемой и «кадрами» Сандстрема простирается еще дальше: сама форма изоплет температурных отклонений от климатологической нормы поразительно совпадает. Хотя на кадрах не видно ясно выраженной узловой линии в форме окружности, но прочие кривые размещены совершенно так же, как размещаются они при наличии резко очерченной узловой окружности. Особенно интересен «узловой диаметр», который и на нашей теоретической схеме, и на кадрах явно тяготеет к генеральному направлению береговой линии, отделяющей Европу от океана. Но колебания течений тут не при чем.

Сандстрем ничего не подозревал о существовании термобарических сейш в атмосфере над Европой и над океаном. Его кадры представляют просто

объективную *фотографию* отдельных фаз величественного колебательного процесса. Климатологическое осреднение позволило исключить пестроту влияний отдельных циклонических и антициклонических деталей и выделило *основные* температурные изменения, связанные с изменениями режима *воздушных потоков*. Именно по этой причине каждое определенное направление ветра у Лофотена связано с совершенно определенным строением температурного поля от Гренландии до Урала.

Как видим, в работе Сандстрема совершенно выпало *время*. Он исходил из неправильной гипотезы о «пульсации струй Атлантического течения» и

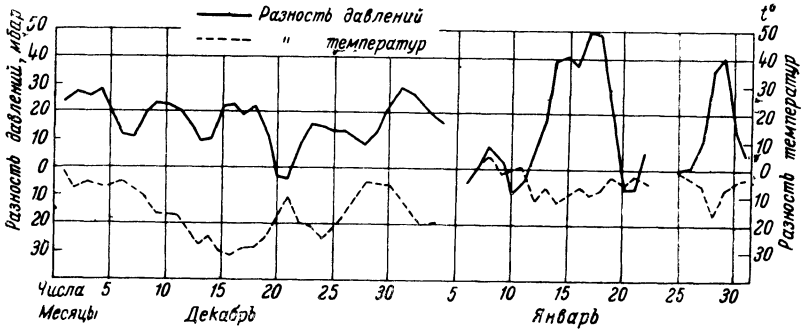


Рис. 373. Колебания температуры и давления (по Е. В. Осмоловской)

не интересовался колебательными явлениями в атмосфере. Совершенно правильно подошла к задаче Е. В. Осмоловская [43]. Ею были исследованы колебания температуры воздуха в Перми, Мурманске, Годхавне (Гренландия) и некоторых других пунктах в функции *времени*. Пришлось позаботиться об исключении тех воздействий, которые вызывались посторонними причинами, не связанными с интересующими нас областями. Все эти воздействия, налагающиеся на основную картину, могут одновременно повышать или одновременно понижать температуру во всех точках пространства от Гренландии до Урала. Поэтому Осмоловская исключила их посредством следующего простого приема.

Ведь если бы термобарические сейши происходили в отсутствие кориолисовой силы, узловой диаметр постоянно простирался бы вдоль Атлантического побережья. В действительности под влиянием кориолисовой силы пучности температурных колебаний и узловой диаметр между ними непрерывно меняют свое положение: узловой диаметр как бы поворачивается вокруг одной точки, лежащей близ г. Осло. Следовательно, колебания температуры, наблюдаемые в самой точке, надо рассматривать как посторонние для рассматриваемой колебательной системы Атлантика — Европа. Значит, вычитая из отклонений температуры (или давления), наблюдаемых в какой-нибудь другой точке, отклонения, найденные в Осло, можно составить представление о той составляющей общего отклонения, которая вызвана ч и с т ы м и колебаниями исследуемой системы.

Цифры, относящиеся непосредственно к Осло, отсутствовали на синоптических картах, которыми располагала Осмоловская. Поэтому вместо них она взяла цифры, относящиеся к Мурманскому побережью, к району, весьма недалекому от «полюса вращения» узлового диаметра сейш.

На рис. 373 и 374 воспроизведены результаты, полученные для 1937—1939 гг. При взгляде на них прежде всего становятся ясно видными резкие колебания температуры и столь же резкие колебания атмосферного давления в исследуемой системе. Период их, разумеется, непостоянен благодаря слож-

ности обстановки, не учитываемой теорией. Однако надо полагать, что он не слишком далеко уклоняется от среднего значения: $T = 8$ суток.

Затем на диаграмме Осмоловской (рис. 374) видно, что колебания исследованных элементов в Перми всегда находятся в одной фазе с колебаниями в Годхавне, в полном согласии с нашей теоретической схемой рис. 369.

Наконец, чрезвычайно интересные результаты получаются при сопоставлении колебаний температуры (на обычном уровне наблюдений метеорологических станций) с колебаниями атмосферного давления. Во-первых, видно,

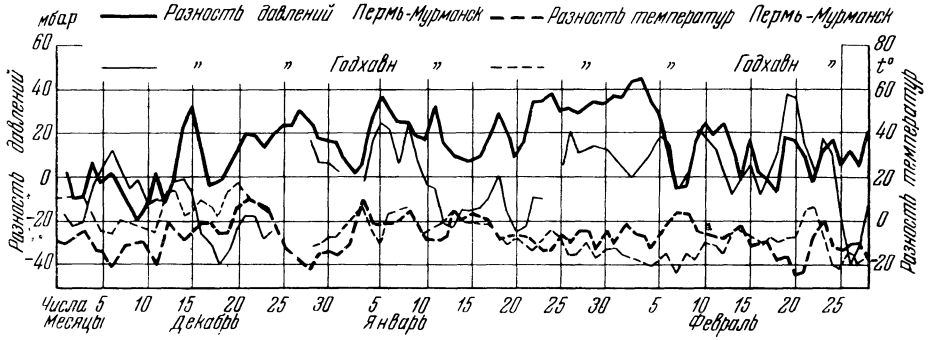


Рис. 374. Колебания температуры и давления

что фазы здесь прямо противоположны: повышению температуры всегда соответствует понижение давления, и наоборот. Во-вторых, сравнение пределов, в которых колеблется давление, с соответствующими пределами колебаний температур позволяет проверить применимость основного уравнения теории муссонов (66) к нестационарной задаче.

Ведь если размах давлений равнялся a_p *дин/см*^{2}, а соответствующий размах температурных колебаний a_ϑ градусов, то на основании этого уравнения следует ожидать

$$\frac{a_p}{a_\vartheta} = \Pi. \tag{237}$$

Определения Осмоловской дали значения: для 1937 и 1938 гг. $a_p = 5 \cdot 10^4$ *дин/см*^{2}, $a_\vartheta = 30°$; для 1939 г. $a_p = 5{,}9 \cdot 10^4$ *дин/см*^{2}, $a_\vartheta = 36°$. Подставив эти числовые значения в формулу (237), она получила значения Π в пределах от $1{,}67 \cdot 10^3$ до $1{,}64 \cdot 10^3$ — в согласии с величиной $\Pi = 1{,}6 \cdot 10^3$, вытекающей из теории Шулейкина.

Значение периода T собственных колебаний системы, найденное Осмоловской, позволяет оценить порядок величины η, фигурировавшей в теоретической формуле (236). Подставим в нее достаточно правдоподобное значение $\Theta = 3$—$4°$, а также значения $\rho = 2{,}5 \cdot 10^3$ *см* (как было указано выше), $\Pi = 1{,}6 \cdot 10^3$ и $T = 8$ *суток* (разумеется, раздробив их в секунды). Тогда окажется, что приблизительно $\eta \approx 0{,}1$, т. е. примерно лишь $^1/_{10}$ количества тепла, дополнительно принесенного воздушными потоками, идет на изменение температурного градиента в муссонном слое и связанное с ним изменение давлений и скоростей в колебательной системе. Разумеется, пока следует считать эту величину η только ориентировочной, свидетельствующей лишь о *порядке* «коэффициента использования» энергии, приносимой потоками в поле термобарических сейш: сколько-нибудь точное решение будет возможно лишь после нахождения интеграла полного уравнения (223), учитывающего эффект кориолисовой силы на основании (227).

§ 16. Картина температурного поля во втором приближении

Получив дифференциальное уравнение термобарических волн в форме (223), мы вынуждены были лишь предварительно проанализировать физический смысл искажающих членов $\varphi(t)$ и $\psi(x, y, t)$. Первый из них отбрасывается совершенно безболезненно, а второй *по существу* влияет на характер колебаний: он показывает, что пучности и узловые линии в поле термобарических сейш обязаны *вращаться* благодаря наличию кориолисовой силы и что амплитуда колебаний должна изменяться во времени (мы описали это изменение экспоненциальной функцией времени для суждения о его порядке).

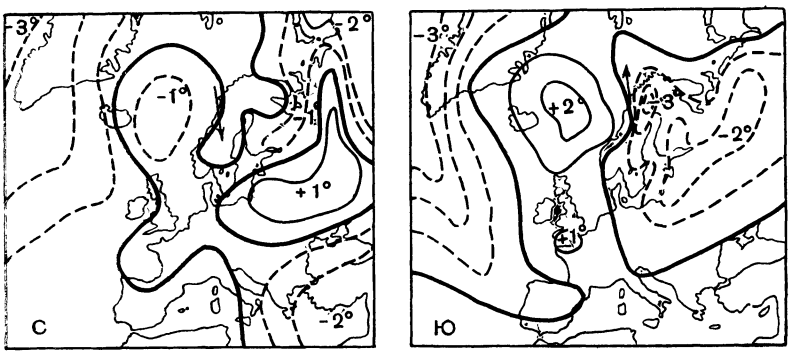


Рис. 375. Промежуточные фазы колебаний в серии Сандстрема

Несовершенство современного математического аппарата не позволило ни Шулейкину, ни последующим авторам найти полный интеграл уравнения (223), а потому пришлось возвратиться к грубо упрощенной форме (229), допускающей интегрирование в конкретных граничных условиях применительно к узловой линии в форме окружности.

Попытаемся теперь *поправить* теоретические выводы, исходя из действительной картины явления, запечатленной на кадрах Сандстрема. Вообразим прежде всего те изменения температурного поля рис. 369, которые должны происходить во времени согласно грубо приближенному уравнению (229).

Легко видеть, что, согласно этому уравнению, вся сетка кривых вместе с узловым диаметром должна будет непрерывно поворачиваться вокруг полюса координатной системы против часовой стрелки с угловой скоростью $\nu = \frac{2\pi}{T}$, где, по-прежнему, T — период сейш.

Очевидно, также по формуле (232) следует ожидать, что во время вращения всей сетки все изоплеты сохранят взаимное положение (одна относительно другой) и при каждой из них сохранится та же самая цифра, какая отмечала значение температурного отклонения в начальной фазе на рис. 369.

В действительности картина сейш несколько иная. Прежде всего кадры Сандстрема явно «*обесцвечиваются*» при переходе от двух *крайних* фаз, изображенных на рис. 370 и 371, к фазам *промежуточным*. Особенно бледная картина получается при повороте системы примерно на прямой угол, как видно на рис. 375, где повторены соответствующие «кадры» цветной вкладки. Вместо отклонения температуры в пучностях на 6 или 5° от климатологической нормы, как это было в крайних фазах, здесь можно отметить лишь отклонения от нормы на 2 или даже на 1°.

Затем, как можно заметить на кадрах, вопреки грубо приближенной формуле (232), угловая скорость вращения *узлового диаметра* сейш не оста-

ется постоянной: эта угловая скорость оказывается весьма малой близ наиболее ярких фаз, когда узловой диаметр проходит примерно вдоль генеральной границы океан — материк; напротив, эта скорость достигает весьма большой величины, когда система приближается к бледным фазам, сдвинутым во времени на четверть периода от ярких фаз.

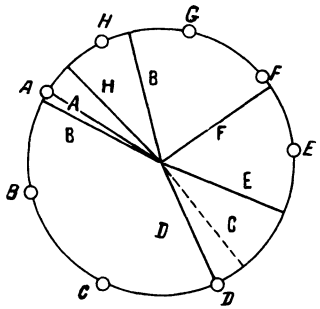


Рис. 376. Выбор точек для анализа колебаний

Какова физическая сущность подобных неувязок? Чтобы ответить на этот вопрос, подвергнем гармоническому анализу колебания температур в нескольких наиболее типичных точках температурного поля. Наметим на кадрах примерный круговой путь, по которому перемещается пучность температурных колебаний, и нанесем на нем восемь некоторых точек с таким расчетом, чтобы в них попадали наиболее интересные участки различных кадров [41].

На рис. 376 изображено расположение этих точек относительно рамки сандстремовских кадров. Значение векторов, нанесенных на том же рисунке, будет пояснено ниже. Отметив такие точки на восковой бумаге и налагая их последовательно на кадры, легко было затем построить диаграмму, показывающую, как меняется во времени температурное отклонение в той или иной из выбранных восьми точек. Сводная диаграмма. содержащая все восемь кривых, воспроизведена на рис. 377. Буква, проставленная при каждой кривой, показывает, какой именно точке соответствует данная кривая.

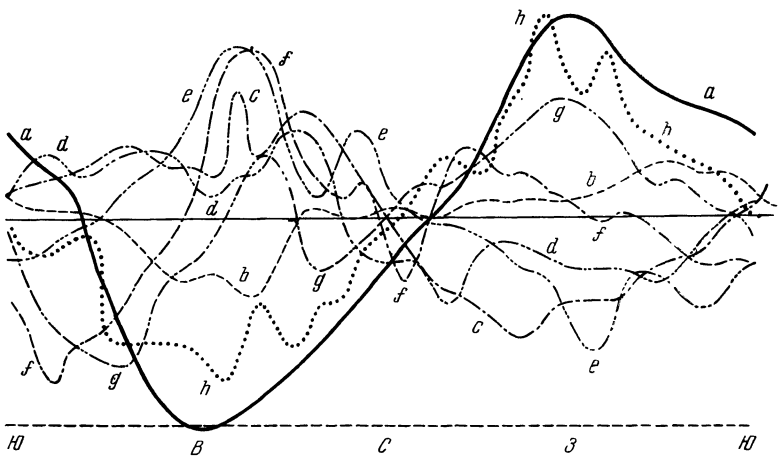


Рис. 377. Кривые колебаний в восьми точках поля

При непосредственном рассматривании полученной совокупности кривых, разумеется, нельзя вывести никаких заключений об интересующих нас закономерностях процесса: тридцатилетний период наблюдений, послуживший Сандстрему для построения его кадров, с точки зрения статистики не так велик, чтобы можно было надеяться на полную ликвидацию всяких случайных, нетипичных деталей картины. Однако этот срок вполне достаточен для того, чтобы из кадров можно было извлечь вполне надежные сведения о процессе сейш путем *гармонического анализа* кривых рис. 377. Во всяком случае *основное* колебание, после отсева всех высших гармонических, даст хорошее

представление об амплитудах и фазах, характеризующих сейши в намеченных точках.

Гармонический анализ кривых был проделан посредством анализатора Мадер — Отта. Результаты сведены в табл. 19.

Таблица 19

Коэффициенты	Точки							
	A	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*	*G*	*H*
$a_0/2$	−1,25	0	+0,15	+0,15	−0,15	−0,35	−0,35	−0,35
a_1	+1,65	+0,40	+0,05	+0,35	−1,25	−1,92	−0,95	+0,35
b_1	−4,77	−1,10	+2,50	+1,70	+2,40	+0,15	−2,00	−3,60
a_2	+0,25	+0,50	+0,40	−0,10	−0,32	−1,32	−0,85	−0,25
b_2	+0,30	−0,15	−0,50	0	−0,25	−1,25	−0,85	+0,20
a_3	+0,25	−0,18	0	+0,50	+0,20	+1,00	+0,75	+0,55
b_3	+0,75	+0,15	+0,45	+0,60	−0,50	−0,60	−0,35	+0,30
a_4	+0,15	−0,30	−0,10	−0,25	+0,10	−0,25	+0,30	+0,15
b_4	0	−0,20	0	−0,20	+0,25	+0,15	+0,25	0

Высшие гармонические дают еще меньшие значения коэффициентов a и b в ряде Фурье.

В табл. 19 через a_0 обозначен постоянный член ряда Фурье, буквами a с соответствующими индексами — коэффициенты при косинусах, а буквами b — при синусах в том же ряде.

Таблица прежде всего позволяет проконтролировать надежность построения самих кадров Сандстрема и правильность отсчетов температур в различных точках и в разные моменты при построении кривых рис. 377. Действительно, при абсолютной точности всех операций постоянный член ряда Фурье здесь должен был бы обращаться в нуль. На самом деле в нуль он не обращается, но достигает значений, весьма малых по сравнению с интересующими нас амплитудами основных температурных колебаний (с индексом 1). Следовательно, исходный материал анализа может быть признан вполне удовлетворительным. Можно отметить еще, что незначительные амплитуды вторых гармонических и беспорядочное их распределение подтверждают наши соображения о том, что единственной физически реальной величиной здесь являются лишь *основные* гармонические колебания. Некоторым исключением из правила, пожалуй, следует считать точку F, в которой почему-то всплыло не только второе, но даже и третье гармоническое. Имеет ли это обстоятельство какой-нибудь физический смысл, пока судить трудно; надо полагать, что едва ли имеет.

Переходим теперь к выводам из гармонического анализа. Заметим, что наиболее надежным элементом основных колебаний придется признать *фазу*: ведь амплитуда этих колебаний должна чрезвычайно резко меняться в зависимости от значения радиус-вектора, а последнее значение не поддается точному измерению ввиду некоторой неопределенности контура, выделенного на рис. 376; значительно меньшая ошибка возможна при определении углов ψ. Вот почему мы ограничимся здесь лишь учетом фазовых углов, которые получаются в результате сопоставления a_1 и b_1 для восьми выбранных точек. В табл. 20 выписаны эти углы.

Азимуты A_1' получены непосредственно по коэффициентам a_1 и b_1 из таблицы. При определении A_1 азимут исходной точки A принимался за 0°.

По вычисленным значениям этих углов на рис. 376 вычерчены восемь радиус-векторов, причем буква, стоящая при каждом из них, указывает, какой именно точке на карте соответствует тот или иной радиус-вектор.

Как принято при выражении законов колебаний посредством векторной диаграммы, надо представлять себе картину следующим образом: весь пу-

Таблица 20

Азимуты векторов			
A_1'	A_1	A_1'	A_1
161°	0°	— 27°31′	188°31′
160	1	— 85 31	246 30
1	160	—154 30	315 30
11°40′	148°20′	—185 30	346 30

чок векторов вращается во времени, против часовой стрелки, причем любая фаза колебаний в точке B будет наступать раньше, чем в точке A, на промежуток времени, пропорциональный углу между векторами **A** и **B**; любая фаза в точке H будет наступать позже, чем в точке A, на промежуток времени, пропорциональный углу между векторами **A** и **H**, и т. д.

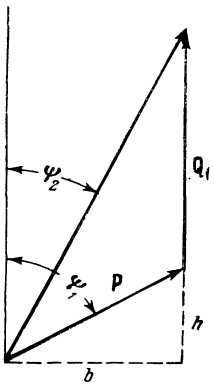


Рис. 378. Сложение векторов

При первом же взгляде на пучок векторов рис. 376 бросается в глаза одна характерная и весьма любопытная особенность. Именно, помимо вектора **A**, служащего для отсчета углов и потому совмещенного с точкой A, и вектора **D**, только *один* еще вектор **F** попадает примерно в соответствующую точку. Все же остальные *явно смещены* с соответствующих точек и смещены *закономерно*: они как бы прижаты, как бы тяготеют к направлению вектора **A** и к направлению, прямо противоположному.

Нетрудно вскрыть *кинематический* смысл этого обстоятельства. Допустим, что каждый из векторов, нанесенных на рис. 376, представляет собой геометрическую сумму *двух* составляющих, одна из которых **P** постоянна по модулю, но непрерывно вращается вокруг полюса координат, а другая $\mathbf{Q}_1$ обладает постоянным направлением (и модулем, постоянным для точек поля с одинаковым азимутом). Такие две составляющие изображены на рис. 378.

Совершенно очевидно, что угол ψ_2, который здесь характеризует результирующий вектор, будет всегда меньше, чем угол ψ_1, который отвечает вращающемуся вектору **P**. Другими словами, «тяготение» большинства векторов рис. 376 к направлению **A** и направлению, прямо противоположному, может быть объяснено существованием двух колебаний, налагающихся одно на другое. Первое колебание происходит по закону, описываемому уравнением (232) и символически изображенному вектором **P** на рис. 378. Второе колебание, которое символически выражено вектором $\mathbf{Q}_1$ на том же рисунке, протекает по закону сейш, происходящих в неподвижной системе. Но если это так, то закон температурных колебаний в поле сейш придется вместо уравнения (232) описать дополненным уравнением, содержащим два члена в правой части:

$$\vartheta = J_1(kr)\,[P\cos(at - \psi_1) + Q\cos\psi_1\cos at]. \qquad (238)$$

Отметим, что здесь положено

$$Q\cos\psi_1 = Q_1. \qquad (239)$$

Иначе говоря, вектор $\mathbf{Q}_1$, нанесенный на рис. 378, зависит от азимута той точки, в которой исследуются колебания. Вот почему вектор $\mathbf{Q}_1$ близок к нулю в точке F, азимут которой близок к 270°; потому-то соответствующий вектор на рис. 376 прошел очень близко к этой точке.

Посмотрим, не может ли служить уравнение (238) вторым приближением в решении нашей задачи? Прежде всего покажем, что сопоставление углов ψ_2 и ψ_1 векторной диаграммы рис. 378 позволяет определить отношение Q/P. Отметим геометрические соотношения

$$b = P\sin\psi_1, \quad h = P\cos\psi_1, \quad Q_1 + h = Q_1 + P\cos\psi_1. \tag{240}$$

С другой стороны,

$$Q_1 + h = b\operatorname{ctg}\psi_2 = P\sin\psi_1\operatorname{ctg}\psi_2. \tag{241}$$

Следовательно, после элементарных преобразований

$$\frac{Q_1}{P} = \sin\psi_1\operatorname{ctg}\psi_2 - \cos\psi_1. \tag{242}$$

Как легко видеть, на основании (242) и (239)

$$\frac{Q}{P} = \frac{\operatorname{tg}\psi_1}{\operatorname{tg}\psi_2} - 1. \tag{243}$$

Это простое соотношение дает возможность судить о порядке величины Q/P на основании материалов рис. 376, полученных по сандстремовским кадрам. Измерив на рис. 378 углы ψ_2 и ψ_1, соответствующие различным точкам, и подставив их в (243), увидим, что интересующее нас отношение, по-видимому, близко к $\frac{Q}{P} \approx 2$.

Зададимся теперь этим значением Q/P, полученным на основании анализа *фаз* колебаний, и вычислим по (238) распределение *температур* в поле для различных фаз. На рис. 379 воспроизведены результаты подобных вычислений. Вертикальная ось диаграммы представляет собой прямую, вдоль которой направлен результирующий вектор основного воздушного потока **U**. Наивысшее температурное отклонение в пучности для исходной фазы принято равным 6°. Четыре последующие фазы разделены промежутками времени в $^1/_{18}$ часть периода сейш. Последняя, шестая, фаза отстоит по времени от предпоследней на $^1/_{36}$ часть периода, а от исходной фазы, следовательно, на четверть периода.

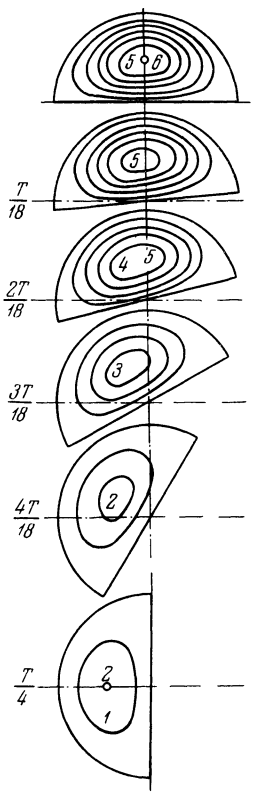


Рис. 379. Сложное температурное поле в различных фазах колебаний

Для компактности на рис. 379 изображена во всех фазах только одна половина той части поля, которая заключена внутри узловой окружности сейш. Без труда можно вообразить и недостающие части поля. Полученная диаграмма чрезвычайно удачно изобразила те особенности колебательного процесса, которые ускользали от анализа в первом приближении и которые проявляются на кадрах Сандстрема. Действительно, прежде всего на рисунке отчетливо видно, как при повороте системы изоплет на прямой угол (за четверть периода сейш) температурные отклонения в пучности и в остальных частях поля резко уменьшаются: в исходной фазе отклонение от нормы в пучности равнялось 6° (по заданию), а через четверть периода оно оказалось равным всего лишь 2°. В этом отношении новые теоретические изоплеты чрезвычайно близко копируют основные черты изоплет, полученных Сандстремом из непосредственных наблюдений в природе (см. цветной вкладыш в конце книги).

Но сходство между теорией и действительностью простирается еще дальше. Именно на рис. 379 отчетливо обнаруживается то непостоянство угловой скорости, которое характеризовало вращение изоплет на цветном вкладыше: за тот же промежуток времени, $^1/_{18}$ периода, узловой диаметр поворачивается сперва очень мало (особенно близ исходной фазы), а потом все быстрей и быстрей; поворот от четвертой к пятой фазе характеризуется примерно таким же углом, как поворот от пятой фазы к шестой (последней на диаграмме), а между тем последний поворот происходит за $^1/_{36}$ периода, предпоследний же — за $^1/_{18}$.

Изменение угловой скорости вращения узловой линии легко может быть определено аналитически на основании уравнения (238).

Уравнение самого узлового диаметра, очевидно, запишется так:

$$P\cos(at-\psi_0)+Q\cos\psi_0\cos at=0. \tag{244}$$

Отсюда

$$\cos at\cos\psi_0+\sin at\sin\psi_0=-\frac{Q}{P}\cos at\cos\psi_0$$

и, как легко показать,

$$\operatorname{tg}\psi_0=-\left(1+\frac{Q}{P}\right)\operatorname{ctg}at. \tag{245}$$

На основании этого промежуточного соотношения легко построить кривую ψ_0 (рис. 380), показывающую, как возрастает с течением времени угол поворота ψ_0 узловой линии, отсчитываемый от исходного направления этой линии.

Дифференцирование (245) по времени дает

$$\frac{d\psi_0}{at}=\frac{\left(1+\frac{Q}{P}\right)(1+\operatorname{ctg}^2at)\,a}{1+\left(1+\frac{Q}{P}\right)^2\operatorname{ctg}^2at}. \tag{246}$$

По такому закону непрерывно меняется угловая скорость вращения узловой линии сейш.

Совершенно очевидно, что в исходной фазе, т. е. при $t=0$,

$$\frac{d\psi_0}{dt}=\frac{a}{1+\frac{Q}{P}} \tag{246а}$$

и что через четверть периода, т. е. при $t=T/4$,

$$\frac{d\psi_0}{dt}=a\left(1+\frac{Q}{P}\right). \tag{246б}$$

Следовательно, отношение предельно большой скорости к предельно малой будет, вообще говоря,

$$\left(\frac{d\psi_0}{dt}\right)_{t=\frac{T}{4}}:\left(\frac{d\psi_0}{dt}\right)_{t=0}=\left(1+\frac{Q}{P}\right)^2. \tag{247}$$

В частном случае, рассмотренном выше, было $\frac{Q}{P}=2$. Следовательно, в этом частном случае, по-видимому, соответствующем природным условиям, будет

$$\left(\frac{d\psi_0}{dt}\right)_{t=0}=\frac{a}{3},\quad \left(\frac{d\psi_0}{dt}\right)_{t=\frac{T}{4}}=3a.$$

Применительно к этому частному случаю вычислены кривые, построенные на рис. 380: кривая ψ_0, о которой была речь выше, и кривая $\frac{d\psi_0}{dt}$, вычисленная по формуле (246), в которой положено $\frac{Q}{P} = 2$.

Как видим, полуэмпирическая, полутеоретическая формула (238) позволяет очень хорошо описать весьма существенные и тонкие детали термобарических сейш, проявившиеся на сандстремовских «кадрах». Поэтому есть все основания полагать, что формула (238) может рассматриваться как искомое *второе приближение* к истине.

Следует помнить, что все исследованные кадры соответствовали направлениям ветра у Лофотена, отличавшимся друг от друга на угловые интервалы 10°. Говоря о закономерностях вращения узлового диаметра, мы молчаливо подразумевали, что вектор скорости ветра проходит эти интервалы за одинаковые промежутки времени, т. е. вектор *равномерно* вращается, обходя картушку компаса. Последнее обстоятельство действительно наблюдается в природе: ветер «заходит» более или менее равномерно в таких морских районах, как Лофотен. Следовательно, схема рис. 380, описывающая вращение узлового диаметра сейш, достаточно правдиво связана со временем.

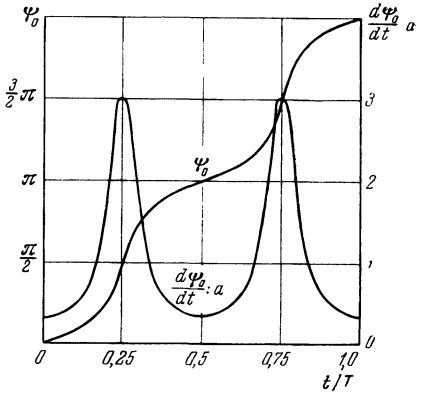


Рис. 380. Скорость вращения узлового диаметра сейш

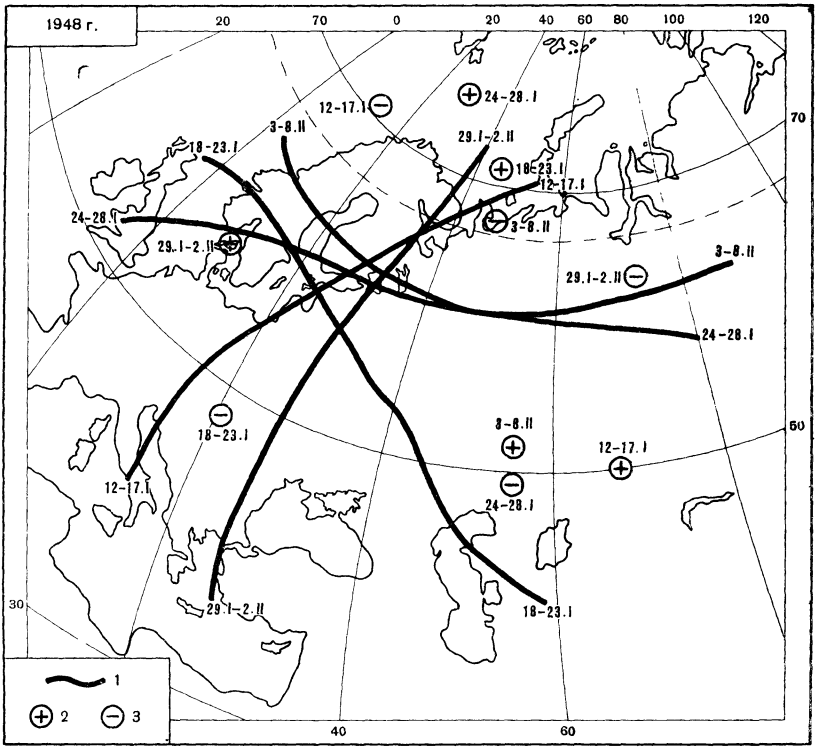
Помимо такого косвенного подтверждения схемы Шулейкина, можно привести еще и другое — прямое подтверждение. Синоптики хорошо знают, что *перестройка* температурных полей и полей давления происходит в полном согласии с описанной схемой: близ крайних фаз явления узловой диаметр смещается очень медленно; зато при самой перестройке на противоположный знак поворот узловой линии происходит с большой угловой скоростью; иногда бывает невозможно за ним проследить, остается лишь констатировать перемену знака явления (похолодание сменяется потеплением, а потепление похолоданием по сторонам узловой линии).

§ 17. Иные формы термобарических сейш в атмосфере

До сих пор мы говорили только о термобарических сейшах в муссонном поле. Тепловое излучение в межпланетное пространство, расходовавшее энергию колебаний, компенсировалось здесь поступлением тепла от потока, переносящего это тепло с океана на материк (в зимнее время). Именно таким путем поддерживались самовозбуждающиеся колебания температуры и давления в атмосфере. За годы, истекшие с появления первых работ Шулейкина в этой области, метеорологи еще очень мало сделали по выявлению более или менее чистых термобарических сейш *муссонного* происхождения. Приведем сперва схематическую карту (рис. 381, *а*), построенную В. Г. Семеновым и полученную им на основе тщательного исследования синоптических процессов [44].

Жирные кривые на рисунке представляют собой положения узловой линии сейш в сроки, отмеченные близ каждой из них. Кружки со знаком плюс соответствуют положениям пучности с наибольшим перегревом воздуха в приземном слое; кружки со знаком минус отвечают пучностям с наибольшим

а



б

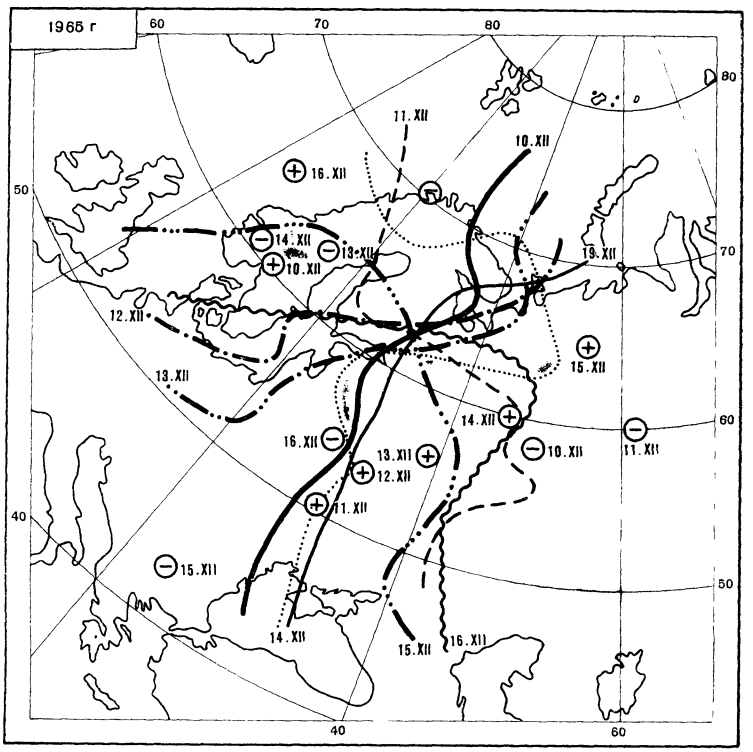


Рис. 381. Карты узловых линий: а — в 1946 году; б — в 1965 году

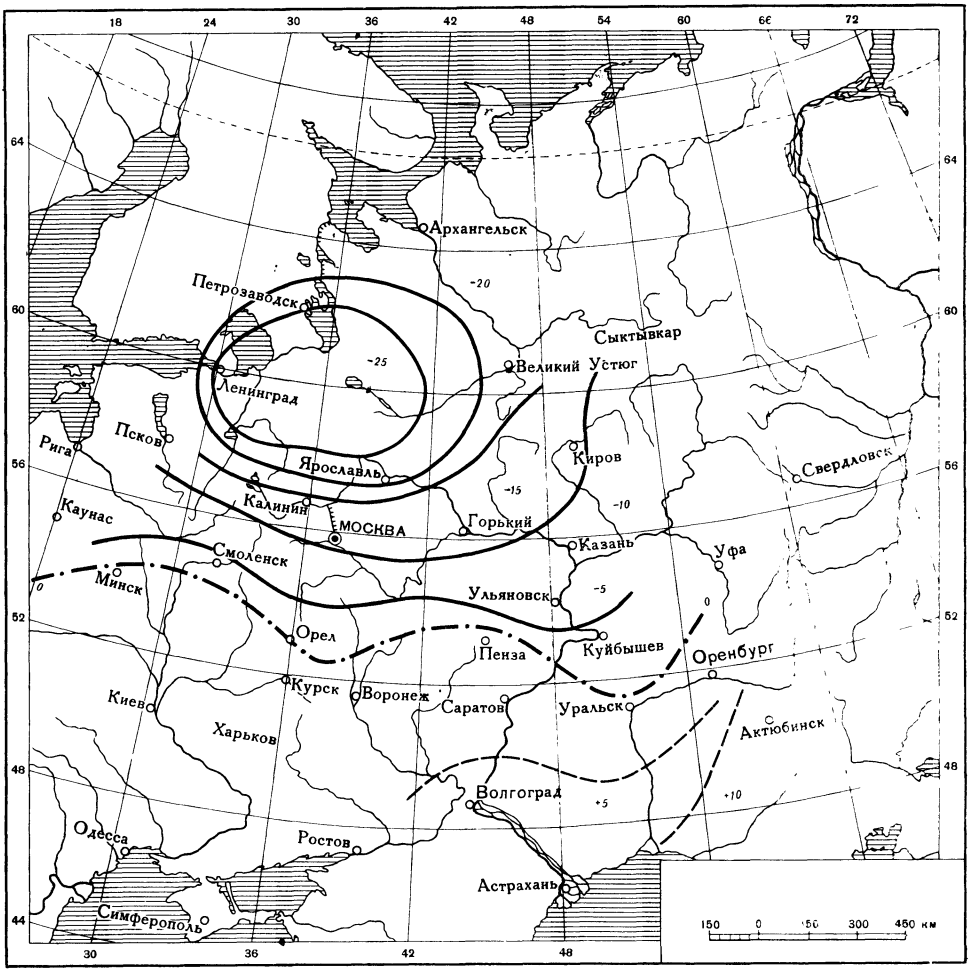


Рис. 382. Отклонеия теимператур во время морозов 1940 г. Первый день

недогревом воздуха. Близ кружков также проставлены сроки, которым они соответствуют.

Карта Семенова очень убедительно показывает, как непрерывно вращается узловая линия в направлении против часовой стрелки и как за ней следуют пучности — с наибольшими отклонениями температуры от средней климатологической нормы того или иного дня.

В большинстве случаев смена температурных условий происходит значительно сложней, чем это было в сроки, описанные Семеновым в цитированной работе; в большинстве случаев термобарические сейши питаются энергией не только от муссонных потоков, но также и от тепловых потоков иного происхождения: от *зональных* потоков, идущих в более высоких слоях атмосферы, и от потоков тепла вдоль меридиана из теплых поясов Земли к поясам холодным [45]. Ниже будет сказано о вращении узловых линий при термобарических сейшах в 1965 г. (рис. 381, *б*) [46]. См. далее о работе С. К. Олевинской на стр. 626—629.

Одним из ярких примеров подобных сложных термобарических сейш могут служить те из них, которые наблюдались во время очень сильных морозов 1940 г. На рис. 382—384 воспроизведены карты температурных отклонений от нормы, построенные Шулейкиным для трех дней.

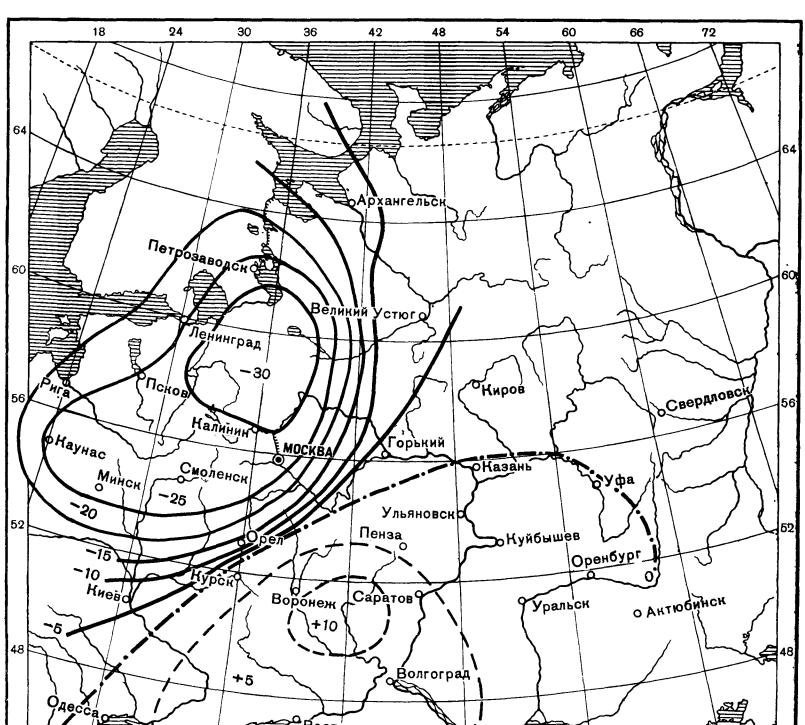


Рис. 383. Отклонения температур во время морозов 1940 г. Второй день

Изоплеты, вычерченные сплошными линиями, проходят через точки с отрицательными отклонениями температуры от нормы. Изоплеты, нанесенные штриховыми линиями, проведены через точки с положительными отклонениями. Отчетливо видно, что одновременно с резким похолоданием в одних районах наблюдалось почти столь же сильное потепление в других районах. Линия раздела между этими контрастирующими районами нанесена штрихпунктирной кривой и отмечена цифрой 0. Она чрезвычайно напоминает узловую линию теоретической схемы рис. 369. Столь же очевидно сходство между семейством изоплет на рис. 382—384 и изоплетами упомянутой схемы. И сходство здесь не внешнее, не случайное. Совершенно несомненно, что в в основе явления лежат аналогичные тепловые и гидродинамические процессы, о которых говорилось выше; только теперь картина осложняется в энергетическом отношении: колебания питаются энергией не только от муссонных потоков, но и от потоков иного происхождения.

На рис. 382—384 резко проявляется поворот всей системы кривых против часовой стрелки и одновременное обострение очагов, по мере того как узловая линия приближается к направлению, параллельному генеральной береговой линии Европейского материка.

Характер колебаний температуры во времени хорошо виден на диаграммах рис. 385, также построенных Шулейкиным. Здесь изображен ход температуры воздуха (на уровне моря). Кривая *1* соответствует району, в котором наблюдалось самое сильное похолодание, по картам рис. 382—384. Кривая *2* относится к району, в котором наблюдалось самое сильное потепление в те

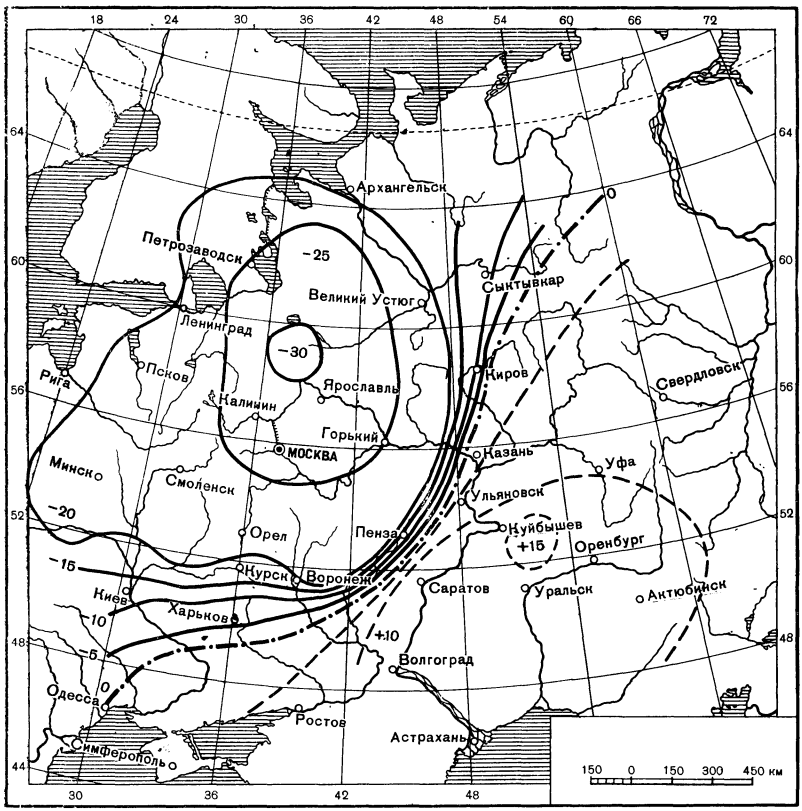


Рис. 384. Отклонения температур во время морозов 1940 г. Третий день

же дни. Как видно на рис. 383, линия, соединяющая эти районы, проходит примерно с ЮЗ на СВ. На рис. 385, *а* совершенно отчетливо вырисовывается, что колебания воздуха в упомянутых двух районах происходили со сдвигом фаз, равным половине периода, в полном согласии с теорией термобарических сейш.

Столь же убедительные результаты дает сопоставление кривой *3* с кривой *4* на рис. 385, *б*. Кривая *3* соответствует точке в северо-восточном районе Европейской части СССР, а кривая *4* — точке в районе юго-западном. Обе точки выбраны с таким расчетом, чтобы прямая, проходящая через них, была перпендикулярна прямой, проведенной через первые две точки.

Легко видеть, что колебания, описываемые кривыми *3* и *4*, как правило, находятся в противоположных фазах. Нетрудно также заметить, что, вообще говоря, одна и та же фаза на всех четырех кривых наступает в последовательности $1 \to 4 \to 2 \to 3 \to 1\ldots$ со сдвигом в четверть периода между каждыми двумя соседними фазами, т. е. снова в полном согласии с теорией сейш во вращающейся системе.

Итак, диаграммы рис. 385 описывают полноправные термобарические стоячие волны (сейши) на территории, окаймленной естественными границами: нашими внутренними морями и Уральским хребтом. Простой подсчет, основанный на формуле типа (29) § 2, показывает, что похолодание 16 января на 30° против климатологической нормы могло наступить лишь при недополучении 165 калорий за сутки в единичном столбе воздуха. А это — примерно половина всего теплового бюджета, осредненный ход которого изображен сум-

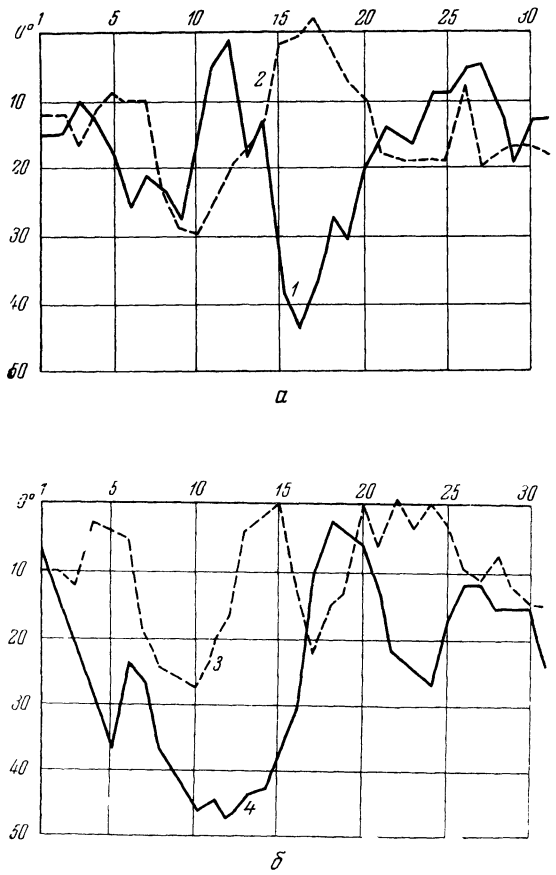


Рис. 385. Диаграммы колебаний температуры в четырех точках поля

марной кривой q_1+q_2 на рис. 305. Надо иметь в виду, что на рисунке эта величина была отнесена не к суткам, а к месяцу.

По всей вероятности, это резкое уменьшение теплового бюджета вызвано одновременным уменьшением количества тепла, поступающего и вдоль параллелей — в муссонных и в зональных потоках, — и вдоль меридианов — от теплых поясов Земли к холодным. По-видимому, в исследуемый промежуток времени обе колебательные системы попали в резонанс, что и привело к необычайному обострению термобарических сейш.

Наиболее интересной, по своей необычной длительности, является последовательность термобарических сейш над Европейской территорией СССР с ноября 1965 г. по февраль 1966 г. За время около 90 суток С. К. Олевинской удалось здесь выделить 11 волн с периодом колебаний около 8 суток [46]. Для анализа колебаний температуры строилась основная кривая изменений температуры в некоторой точке поля по материалам синоптического архива ГУ ГМС. Затем по климатологическому атласу СССР строилась кривая «нормального» сезонного изменения температуры воздуха в этой точке с ноября по февраль. При этом выявилось существование *двух* родов колебаний температуры, налагающихся на «нормальный» ход: наряду с резко

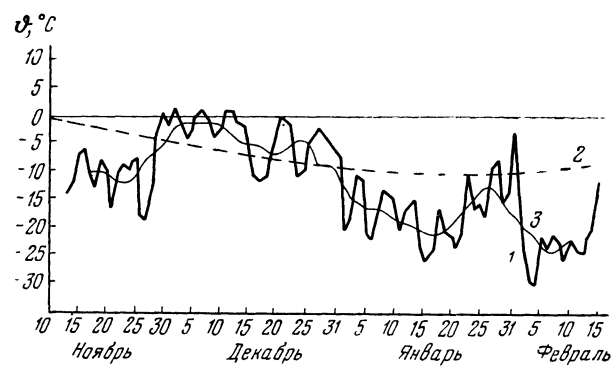


Рис. 386. Термобарические сейши 1965/66 г. (по С. К. Олевинской)

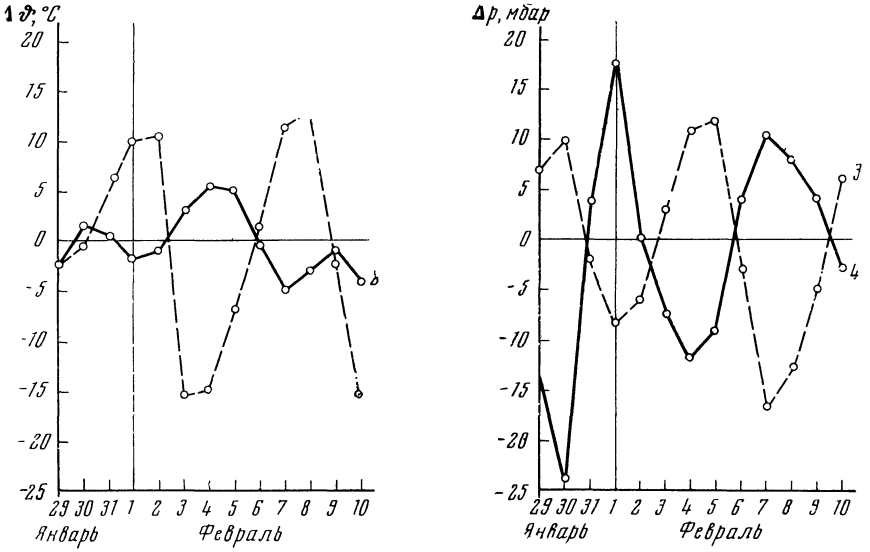


Рис. 388. Колебания температур и давления в Курске и в Рейкьявике

выраженными 8-суточными колебаниями существовали колебания с бо́льшим периодом, происхождение которых пока еще не установлено. С. К. Олевинская приняла суммы ординат «нормального» хода температур и ординат последней кривой за ординаты кривой «хода среднего температурного уровня» на протяжении упомянутых 90 суток. Далее, применительно к каждому пункту определялись отклонения температуры воздуха от такого, «среднего», хода, как представлено на рис. 386.

На рис. 387 представлены результаты подобного анализа колебаний температуры воздуха над Европой и над Атлантическим океаном за наиболее интересную часть всего длительного срока — за время с 31 января по 8 февраля 1966 г. В той же работе дан анализ колебаний атмосферного давления над теми же областями океана и суши за тот же 9-суточный срок. На маленьких картах в левых столбцах на рис. 387 представлены отклонения температуры, а в правых столбцах — отклонения давления от средних значений. Положительные отклонения отмечены *красными* изаномалами, а отрицательные — черными. Отчетливо видно, что и изаномалы температуры, и изаномалы давления *вращаются* вокруг некоторого центра, находящегося на середине расстояния между Пермью и Сыктывкаром. Всюду колебания температуры и колебания давления происходят в *противоположных фазах* в полном соответствии с уравнением (66), связывающим градиенты давления с градиентами температуры, и в пространстве, и во времени. В отличие от этого приближенного теоретического соотношения, амплитуды колебаний давления, выраженные в миллибарах, в 1,5, а не в 1,6 раза превышают амплитуды колебаний температуры.

Очень важно отметить, на основании исследования С. К. Олевинской, что при упомянутых колебаниях температуры и давления на территории Европы (и, в частности, Европейской части СССР) происходили мощные колебания температур и давления над Атлантическим океаном. Для всех дней, исследованных в работе [46], были известны надежные данные, касающиеся Рейкьявика (Исландия). Эта точка представляет большой интерес, так как недалеко от нее проходят пучности стоячих волн на картах Сандстрема (см. цветную вкладку в конце книги). С другой стороны, на рис. 387 видно,

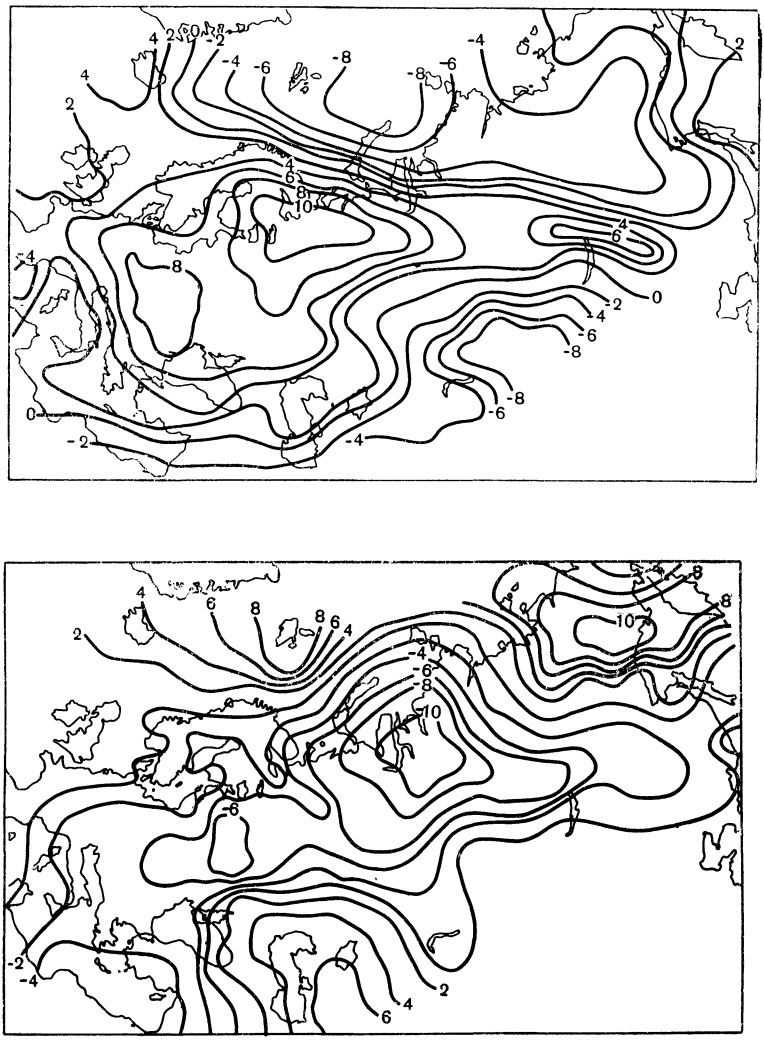


Рис. 389а. Карты отклонений температур на двух материках (по З. И. Гавриловой)

что пучности термобарических сейш над территорией СССР двигались недалеко от г. Курска. На рис. 388 слева сопоставлены колебания температуры в Курске и в Рейкьявике. Как видим, они происходят в точности в противоположных фазах. На том же рисунке справа сопоставлены колебания давления в Курске с колебаниями его в Рейкьявике. Здесь — также колебания в противоположных фазах. В свою очередь колебания температуры и колебания давления в каждой из двух точек соответственно тоже происходят в противоположных фазах. Даже при отсутствии аналогичных надежных данных о колебаниях температуры и давления в других точках Атлантического океана можно утверждать, что замечательный цуг термобарических сейш, в продолжение трех месяцев, наблюдавшийся в Европе и особо четко проявившийся над территорией СССР,— этот цуг сейш над сушей был *неразрывно связан с сейшами над северной частью Атлантического океана*. Но это значит, что основная энергия, питавшая колебательную систему, по-видимому, черпалась от нагревателя тепловых машин второго рода. Именно поэтому период

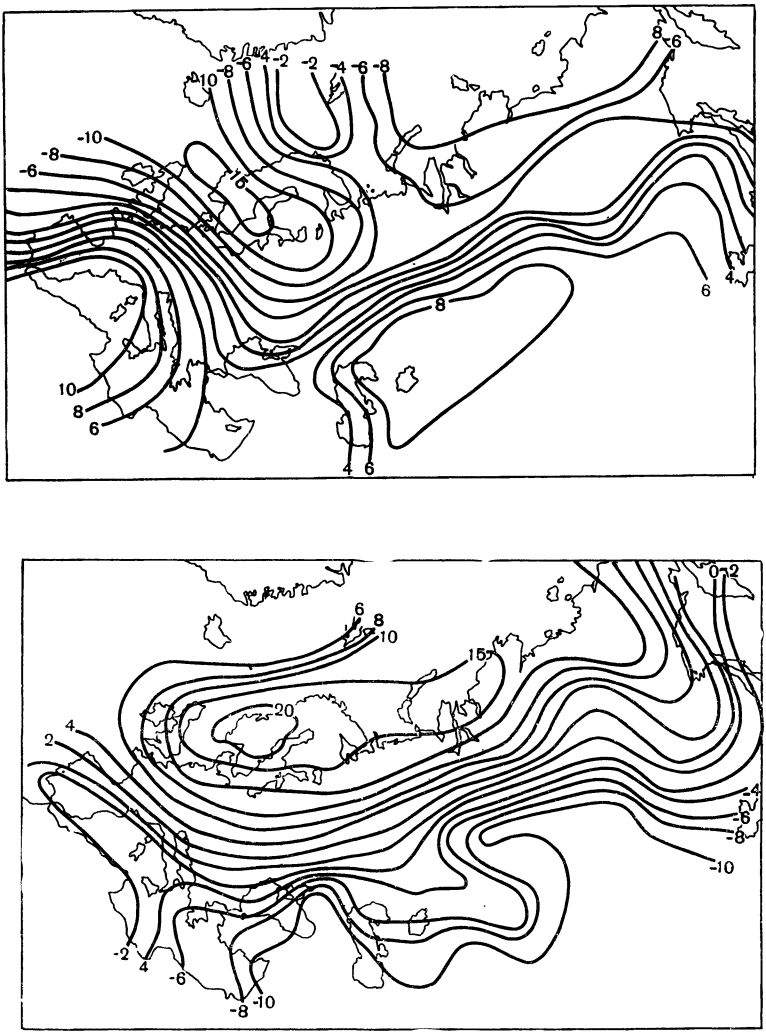


Рис. 389б. Карты отклонений атмосферного давления на двух материках (по З. И. Гавриловой)

колебаний, отмеченный в цитированной работе, оказался тем же, каким обычно характеризуются термобарические сейши в системе Атлантика — Европа.

И простая формула (236), выведенная Шулейкиным, для чисто мусонных термобарических сейш, и непосредственные наблюдения в природе показывают, что *период* колебаний T возрастает вместе с линейными размерами области, охваченной сейшами. По этой причине период может оказаться весьма большим в тех случаях, когда особо велика охваченная область. Иногда рекордных размеров достигает такая область зимой: мощные термобарические сейши охватывают и *Европу*, и *Азию*, распространяясь даже за их пределы — на Атлантический и Тихий океаны. На рис. 389а воспроизведены карты температурных изоплет, построенные З. И. Гавриловой. На верхней из них отчетливо видно сильное потепление сверх климатологической нормы, которое превышает в пучности $+10°$ и распространяется от Атлантического океана до Тихого. К северу и к югу от перегретой полосы видны области похолодания, причем в пучностях похолодание превышает 8°. На нижней карте

запечатлена противоположная фаза температурных колебаний. Замечательно, что общая картина обеих карт почти одинакова. Совершенно одинаковы по абсолютной величине отклонения температуры от нормы в пучности: наибольшее отклонение здесь превышает —10°. Сходство соблюдается даже в такой детали, как вторичная пучность, находящаяся к юго-западу от основной; она видна на обеих картах. К северу и к югу от похолодавших областей на нижней карте лежат области потепления. Здесь также соблюдается сходство как по расположению пучностей, так и по абсолютной величине отклонения температуры от нормы; повышение температуры здесь более +8°.

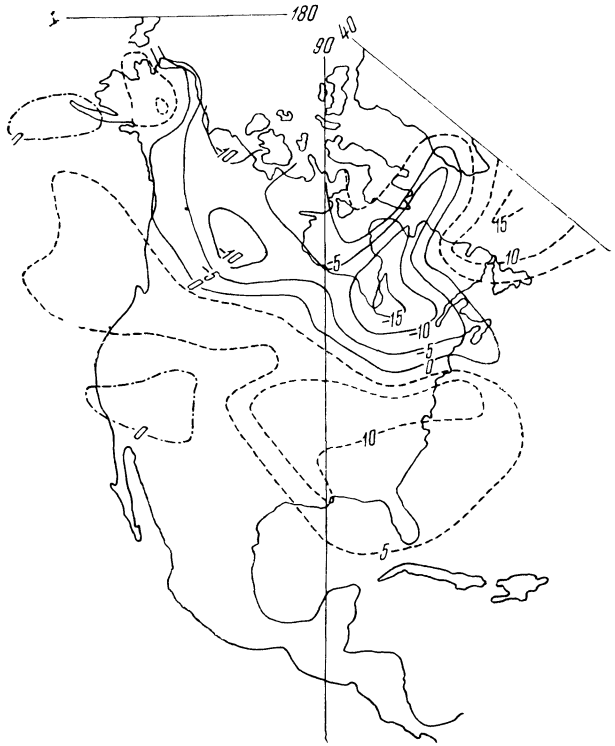


Рис. 390. Сейши над Северной Америкой

Для тех же двух дней, соответствующих противоположным фазам колебаний, Гаврилова построила и карты отклонений *давления* от климатологической нормы. Они воспроизведены на рис. 389б. Как видим, тут нет полного и точного сходства между очертаниями областей, на протяжении которых температура или давление находятся в той или иной фазе. Однако *общая тенденция* здесь вполне соответствует теории: область пониженного давления на рис. 389б соответствует в общих чертах области повышенных температур на рис. 389а; области повышенного давления приблизительно соответствуют областям пониженных температур на этом же рисунке. Такое же приблизительное соответствие с соблюдением обратного знака наблюдается и между нижними картами. Следует отметить, что отклонения давления от нормы в соответствующих пучностях здесь тоже приблизительно равны по абсолютной величине и противоположны по знаку. Остается еще добавить, что отношение амплитуды колебаний давления к амплитуде колебаний температуры в пучностях дает то же числовое значение для коэффициента П, которое было получено выше как для стационарных, так и для нестационарных явлений в муссонном поле. Это обстоятельство показывает еще раз, что теория Шулейкина, несмотря на неизбежные упрощения анализа, дает вполне приемлемое описание истинных явлений природы.

В отличие от материков Старого Света, материки Нового Света представляют значительно меньший интерес с точки зрения сложной картины термобарических сейш; там перераспределение тепловой энергии происходит по простой схеме (рис. 390). На этом рисунке воспроизведена карта температурных изоплет, построенная Н. И. Захаровой для Северной Америки. Сплошными линиями проведены изоплеты, отвечающие понижению температуры против климатологической нормы, а пунктиром — изоплеты, соответ-

ствующие повышенным температурам. Цифры, проставленные на кривых, показывают величину температурных отклонений от климатологической нормы. Главная узловая линия проходит примерно по параллели. Пучности располагаются по обеим ее сторонам, находясь более или менее на общей меридиональной полосе.

Совершенно очевидно, что характер температурных колебаний (а стало быть, и колебаний давления) здесь несравненно проще того, какой наблюдается в Европе и в Азии.

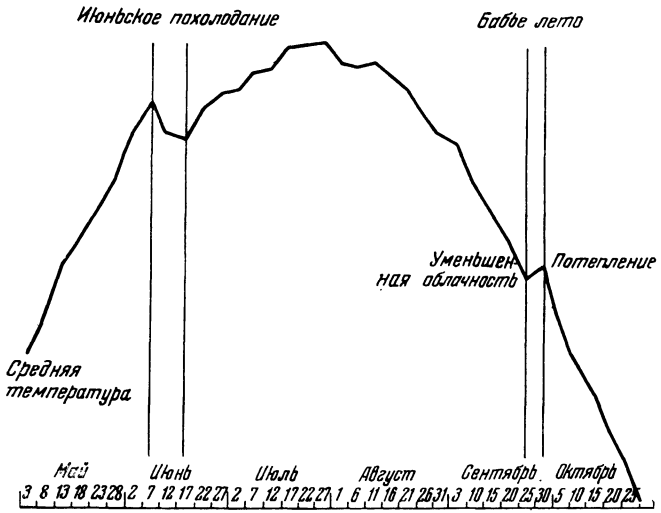


Рис. 391. Годовой ход температуры по пентадам в Праге (по Н. Кончеку)

Из всех видов термобарических сейш, характерных для Европы, наибольший практический интерес представляют чрезвычайно мощные сейши, *всегда* возникающие во время смены зимнего муссонного сезона на летний. Это именно они порождают хорошо известные, часто весьма жестокие *весенние похолодания*. Их зеркальным изображением являются аналогичные сейши, возникающие во время смены летнего муссонного сезона на зимний: на общем фоне постепенного понижения температуры вдруг возникает чрезвычайно теплая погода, носящая в народе название «*бабьего*» *лета*.

Еще ничего не подозревая о существовании термобарических сейш в атмосфере, прямую связь весенних холодов и «бабьего» лета со сменой муссонных сезонов впервые отметил чехословацкий геофизик Н. Кончек [47]. Исследуя годовой ход температуры воздуха в Праге по пентадам, по осредненным обширным материалам, Кончек получил весьма любопытную кривую, воспроизведенную на рис. 391. Она охватывает интересующую нас часть года — с мая по октябрь включительно.

На рисунке хорошо видно, как неумеренно растет температура в конце мая и как затем наступает ее резкое падение. Совершенно бесспорно, что первая фаза колебаний относительно какого-то «нормального» хода характеризуется положительным знаком отклонения, а вторая — отрицательным знаком. Аналогичная картина, только в несколько меньшем масштабе, наблюдается осенью: во время смены муссонных сезонов — летнего на зимний — возникает сперва отрицательное отклонение от нормы, а вслед за ним — отклонение положительное.

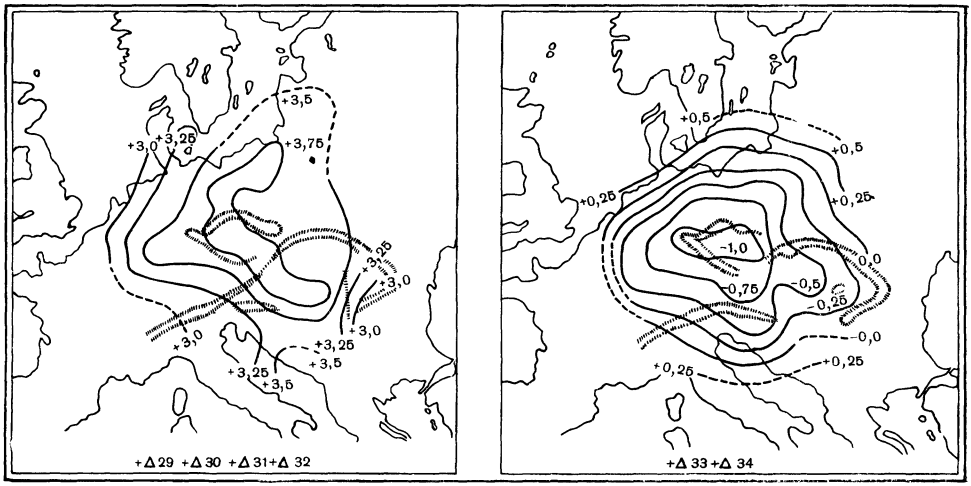


Рис. 392. Изаномалы при весенних похолоданиях (по Н. Кончеку)

На рис. 392 воспроизведены схематические карты отклонений температуры от нормы соответственно первой и второй фазам весенних колебаний температуры. Рис. 393 воспроизводит аналогичное поведение температуры осенью также в двух противоположных фазах.

Эти четыре карты Кончека, с точки зрения теории термобарических сейш Шулейкина, становятся совершенно понятными: здесь изоплеты очерчивают резко выраженные *пучности* температурных колебаний в средней Европе, которые несомненно должны быть связаны с одновременными колебаниями атмосферного давления.

Кончек не интересовался колебаниями давления и процессами, которые происходили за пределами области, охваченной его картами. С современной точки зрения необходимо осветить *всю* цепь явлений, протекающих в Европе во время смены муссонных сезонов.

Обстоятельное освещение этих явлений содержится в работе З. И. Гавриловой о весенних похолоданиях в Европе [48].

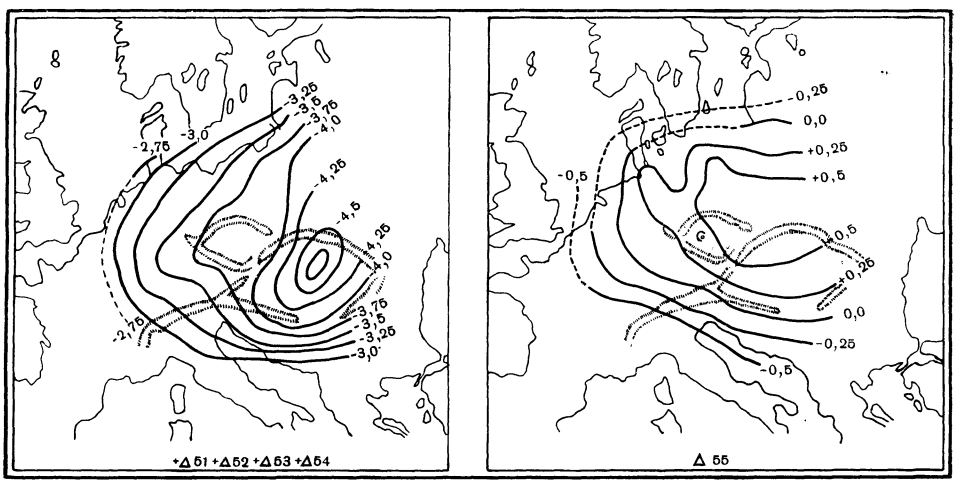


Рис. 393. Изаномалы во время «бабьего лета» (по Н. Кончеку)

На рис. 394 и 395 воспроизведены построенные ею карты отклонений температуры от климатологической нормы для особо интересного года, который характеризовался весьма резкими весенними похолоданиями. На картах отчетливо видно, как фаза отклонений температуры от климатологической нормы через 7 дней изменилась на противоположную: там, где наблюдалось потепление 10 апреля, наступило похолодание 17 и наоборот.

Так же тщательно З. И. Гаврилова проанализировала колебания атмосферного давления в эти дни. Выяснилось, что давление колебалось в противофазе с температурой воздуха. Например, на рис. 396 видно, что 17 апреля давление упало по сравнению с нормой в тех районах, где поднялась температура того же 17 апреля, судя по карте рис. 395. Напротив, там, где на карте (рис. 395) видно понижение температуры, на карте рис. 396 отразилось повышение давления.

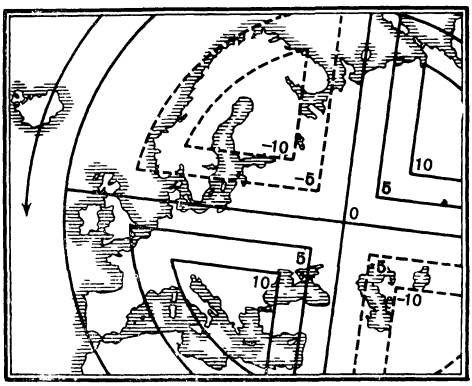


Рис. 397. «Четырехполюсная» схема

Разумеется, контуры изолиний на картах рис. 395 и 396 не так схожи между собой, как на климатологических картах рис. 325, 326, где сглаживаются все случайные отклонения от основных явлений. Естественно отклонение «языка» на рис. 396 не в ту сторону, как на рис. 395: это объясняется наличием дополнительной составляющей градиента давления, о которой говорилось в связи с рис. 329. Интересно, что на рис. 394, 395, по-видимому, выявлен мощно выраженный 2-й обертон основного колебания температуры с периодом 26 суток. Смена знака пучностей при колебаниях температуры и давления здесь характеризуется промежутком времени около 6,5 суток, то-есть $^{26}/_{4}$ суток для обертона.

Общий ход явления вырисовывается так. Над Европой вращается своеобразная «четырехполюсная» система узловых линий и пучностей, схематически изображенная на рис. 397. Вращение происходит против часовой стрелки с непостоянной угловой скоростью в соответствии с теорией Шулейкина. Время полного поворота системы на 360° составляет в среднем 52 дня. Смена пучностей положительного знака на пучности отрицательного знака происходит, разумеется, с периодом вчетверо меньшим — 13-суточным. Отклонения температуры от нормы в пучностях составляют в среднем $\pm 9°$.

Максимальные отклонения давления, деленные на максимальные отклонения температур, в работе Гавриловой давали в частном величины от 1,45 до 1,82 *мбар/град*, т. е. в среднем 1,63 *мбар/град* в соответствии с теорией Шулейкина (см. § 4).

§ 18. Некоторые особенности колебаний с большим периодом во вращающейся системе

В предыдущих параграфах отмечалось, что «диаметральная» узловая линия сейш, происходящих с многосуточным периодом, непрерывно вращается *против стрелки часов* (в северном полушарии). Как известно, плоскость качания маятника Фуко вращается в направлении часовой стрелки, несмотря на то, что и тот и другой повороты происходят под действием одного и того же поля — поля кориолисовой силы. Разберемся подробней в совершенно естественных причинах подобного различия направлений [49].

Представим себе некоторую материальную частицу с массой, равной *единице*, колеблющуюся под действием силы, которая стремится вернуть ее в исходное положение.

Пусть эта сила дает проекции на координатные оси, выражаемые в самой общей форме через смещения частиц x и y и через угловую частоту колебаний σ, именно проекции $\sigma^2 x$ и $\sigma^2 y$ ($\sigma = \frac{2\pi}{T}$). Проекции кориолисовой силы будут зависеть от величины $\bar{\omega} = \omega \sin\varphi$ и от соответствующих проекций скорости частиц $\dot{x}$ и $\dot{y}$. Наконец, проекции силы инерции будут просто равны проекциям ускорения $\ddot{x}$ и $\ddot{y}$.

Итак, дифференциальные уравнения движения исследуемой частицы можно будет записать в форме

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \sigma^2 x - 2\bar{\omega}\dot{y} &= 0, \\ \ddot{y} + \sigma^2 y + 2\bar{\omega}\dot{x} &= 0. \end{aligned} \tag{248}$$

Проинтегрировав эту систему уравнений, легко получить закон изменения смещений x и y во времени

$$\begin{aligned} x &= \frac{x_0}{a_1 + a_2}(a_2 \cos a_1 t + a_1 \cos a_2 t), \\ y &= \frac{x_0}{a_1 + a_2}(a_2 \sin a_1 t - a_1 \sin a_2 t). \end{aligned} \tag{249}$$

Здесь для краткости обозначено

$$\begin{aligned} a_1 &= \sqrt{\sigma^2 + \bar{\omega}^2} - \bar{\omega}, \\ a_2 &= \sqrt{\sigma^2 + \bar{\omega}^2} + \bar{\omega}. \end{aligned} \tag{250}$$

В случае колебаний с такими периодами, как период маятника Фуко, необходимо помнить, что $\sigma \gg \bar{\omega}$, а следовательно, на основании (250) $a_1 \approx a_2$. Но применительно к такому типу колебаний уравнения (249) можно значительно упростить. Именно, окажется, что

$$\begin{aligned} x &= x_0 \cos\sigma t \cos\bar{\omega} t, \\ y &= -x_0 \cos\sigma t \sin\bar{\omega} t, \\ \frac{y}{x} &= -\operatorname{tg}\bar{\omega} t. \end{aligned} \tag{251}$$

Эта система уравнений, как легко видеть, описывает сложное движение, которое разлагается на колебание вдоль некоторой прямой (с тангенсом угла наклона, равным $-y/x$) и на вращение самóй отмеченной прямой около начала координат с угловой скоростью $\bar{\omega}$, т. е. с угловой скоростью, которая задается самóй вращающейся системой. Направление вращения здесь *совпадает с часовой стрелкой* (в северном полушарии).

Переходим теперь к исследованию случая, который непосредственно нас интересует в связи с теорией термобарических сейш.

В этом случае, как легко видеть, $\sigma < \bar{\omega}$, ибо *период сейш значительно превышает период обращения Земли* вокруг ее оси. Но тогда на основании (250) приходится заключить, что $a_2 \gg a_1$. Другими словами, в сложном движении, описанном уравнениями (249), *основу* движения составляет та слагающая, которой соответствуют *первые* члены в круглых скобках. Но нетрудно видеть, что эти первые члены описывают вращение *против часовой стрелки*, происходящее с угловой скоростью a_1, *значительно меньшей, чем угловая скорость вращения координатной системы* ω.

На это основное движение налагается другое, описываемое вторыми членами в круглых скобках (249). Эта другая составляющая также характеризует некоторое вращение, но со значительно меньшим радиусом орбиты, с на-

правлением по стрелке часов и с угловой скоростью, близкой к *удвоенной* угловой скорости вращения самой координатной системы. Доведем анализ до конкретных чисел.

Положим, что период сейш равен восьми суткам. Тогда придется принять

$$\frac{a_1}{\omega} = \frac{1}{8}.$$

Отсюда на основании (250)

$$\frac{\sigma}{\omega} = \sqrt{\left(1+\frac{a_1}{\omega}\right)^2 - 1} \approx 0{,}52.$$

С другой стороны, из (250) очевидно

$$\frac{a_2}{a_1} \approx 17.$$

Иными словами, движение частицы здесь можно рассматривать как движение спутника «планеты», причем «планета» движется *против* часовой стрелки по орбите, в 17 раз превышающей орбиту спутника, вокруг «тяготеющего центра» (вокруг исходного положения точки), а спутник вдобавок движется вокруг планеты по часовой стрелке и с периодом обращения, в 17 раз меньшим, чем период обращения планеты.

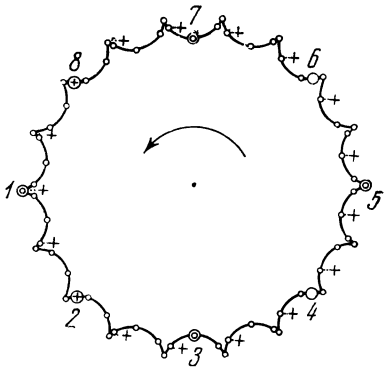


Рис. 398. Сложная траектория частиц воздуха

На рис. 398 крестиками отмечены 17 последовательных положений воображаемой «планеты», которые разделены промежутками времени, равными периоду обращения спутника. Положения самого спутника отмечены на рисунке маленькими кружками. На рисунок нанесены также и промежуточные положения (через четверть оборота спутника): в общей сложности отмечено 68 его положений, через которые проведена плавная кривая — траектория исследуемой частицы. Большими кружками отмечены те точки траектории, в которых частица оказывается через целое число суток. Порядковые номера суток обозначены цифрами.

Итак, в основном исследуемая частица за восемь суток обходит вокруг положения покоя, двигаясь *против* часовой стрелки. Добавочная составляющая движения создает лишь своеобразные зубцы на траектории, причем число этих зубцов должно, очевидно, равняться $17 + 1 = 18$, ибо за время 17 оборотов спутника сама воображаемая планета совершает тоже один оборот (но в противоположную сторону).

Сопоставляя полученную картину с картиной колебаний маятника Фуко, нетрудно найти физическую причину смены направления основного поворота колеблющейся частицы.

Действительно, в обоих случаях, по принципу д'Аламбера, сумма всех сил должна равняться нулю. Что касается случая Фуко, то там угловая скорость поворота системы сравнительно велика, а потому соответственно большая центробежная сила должна быть уравновешена и силой, стремящейся вернуть частицу в исходное положение, и силой Кориолиса, которая обязана поэтому действовать *в ту же сторону*. Следовательно, в случае Фуко вращение частицы должно происходить *по* часовой стрелке (в северном полушарии). Напротив, в случае чрезвычайно медленных колебаний (характерных для термобарических сейш) центробежная сила, возникающая при

обходе вокруг положения покоя, чрезвычайно мала. Для динамического равновесия (по д'Аламберу) необходимо поэтому, чтобы сила Кориолиса была направлена *согласно с центробежной*; только тогда совокупность этих двух сил может уравновесить силу, стремящуюся вернуть частицу в положение покоя. Но если это так, то основное движение частицы вокруг положения покоя должно происходить теперь *против* часовой стрелки.

В заключение этого раздела отметим, что 68 положений частицы, нанесенных на рис. 398, разделены *неодинаковыми* промежутками в пространстве, тогда как промежутки времени здесь были заведомо одинаковые. Следовательно, уже при взгляде на рис. 398 видно, что *скорости* движения частицы сильно и часто меняются. Удобнее всего будет об этом судить, выведя из (251) выражения для составляющих скорости по осям координат. Дифференцирование (251) по времени дает

$$\begin{aligned} u = \dot{x} &= -\frac{x_0 a_1 a_2}{a_1 + a_2}(\sin a_1 t + \sin a_2 t), \\ v = \dot{y} &= \frac{x_0 a_1 a_2}{a_1 + a_2}(\cos a_1 t - \cos a_2 t). \end{aligned} \tag{252}$$

Как видим, в отличие от исходных уравнений (249), оба колебания, и с частотой a_1, и с частотой a_2, характеризуются *равными* амплитудами. Тем самым и определяется причудливое на первый взгляд изменение скоростей частицы.

§ 19. О скоростях ветра в системе термобарических сейш

При выводе дифференциального уравнения термобарических волн (223) в § 15 из уравнений движения и уравнения теплопередачи пришлось исключить те составляющие u и v, которые характеризуют возмущение *скорости потока*. В результате уравнение (223) оказалось способным описать лишь поведение температуры в возмущенном поле.

До настоящего времени никому еще не удалось проделать аналогичный вывод непосредственно для составляющих u и v. Поэтому ограничимся лишь исследованием скоростей в возмущенном муссонном поле, исходя из заданного температурного поля, меняющегося во времени по закону, найденному Шулейкиным, в соответствии с формулой (232).

Не рассчитывая на какую бы то ни было точность выкладок, отбросим в уравнениях (216) и (217) конвективные члены и запишем их в упрощенной, грубо приближенной форме

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\Pi}{\delta}\frac{\partial \vartheta}{\partial x} + 2\bar{\omega}v, \tag{253}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\Pi}{\delta}\frac{\partial \vartheta}{\partial y} - 2\bar{\omega}u. \tag{254}$$

Продифференцируем (253) по времени и примем во внимание выражение (254) для производной dv/dt. Тогда окажется, что

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\Pi}{\delta}\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x\,\partial t} + 2\bar{\omega}\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\Pi}{\delta}\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x\,\partial t} + 2\bar{\omega}\frac{\Pi}{\delta}\frac{\partial \vartheta}{\partial y} - 4\bar{\omega}^2 u, \tag{254а}$$

или окончательно,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 4\bar{\omega}^2 u = \frac{\Pi}{\delta}\left(\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x\,\partial t} + 2\bar{\omega}\frac{\partial \vartheta}{\partial y}\right). \tag{255}$$

Аналогичным способом можно показать, что

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + 4\bar{\omega}^2 v = \frac{\Pi}{\delta}\left(\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y\,\partial t} - 2\bar{\omega}\frac{\partial \vartheta}{\partial x}\right). \tag{256}$$

Итак, полученные новые уравнения (255) и (256) позволяют связать поле температуры с полем скоростей. Остается только подставить в правые части этих уравнений соответствующие выражения для функций температурного возмущения ϑ, найдя их на основании (232). Разумеется, при этом придется воспользоваться формулами преобразования координат (декартовых в полярные: r, ψ). Обозначив для краткости все выражение в круглых скобках (255) через X, а соответствующее выражение в скобках (256) через Y, найдем

$$\frac{X}{\vartheta_0} = \left\{-a\cos\psi\left[kJ_0(kr) - \frac{1}{r}J_1(kr)\right] + \frac{2\bar{\omega}}{r}\cos\psi J_1(kr)\right\}\sin(at-\psi) + \\ + \left\{2\bar{\omega}\sin\psi\left[kJ_0(kr) - \frac{1}{r}J_1(kr)\right] - \frac{a}{r}\sin\psi J_1(kr)\right\}\cos(at-\psi) \quad (257)$$

и подобным же образом

$$\frac{Y}{\vartheta_0} = \left\{-a\sin\psi\left[kJ_0(kr) - \frac{1}{r}J_1(kr)\right] + \frac{2\bar{\omega}}{r}\sin\psi J_1(kr)\right\}\sin(at-\psi) + \\ + \left\{-2\bar{\omega}\cos\psi\left[kJ_0(kr) - \frac{1}{r}J_1(kr)\right] + \frac{a}{r}\cos\psi J_1(kr)\right\}\cos(at-\psi), \quad (258)$$

где, как и в (232), ϑ_0 обозначает амплитуду температурных колебаний, а k связано с периодом T условием (235).

На основании (257) и (258) можно для любой точки поля представить дифференциальные уравнения движения воздуха (255) и (256) в форме, допускающей интегрирование:

$$\frac{d^2u}{dt^2} + 4\bar{\omega}^2u = \frac{\Pi\vartheta_0}{\delta}[M_1\sin(at-\psi) + N_1\cos(at-\psi)], \quad (259)$$

$$\frac{d^2v}{dt^2} + 4\bar{\omega}^2v = \frac{\Pi\vartheta_0}{\delta}[M_2\sin(at-\psi) + N_2\cos(at-\psi)], \quad (260)$$

где M_1 и N_1, M_2 и N_2 — коэффициенты, выражаемые через k, ω и a, r и ψ.

Общие уравнения (259) и (260) совершенно аналогичны по форме дифференциальным уравнениям вынужденных колебаний для системы *без* затухания. Стало быть, в результате интегрирования мы должны ожидать, что обе составляющие скорости будут выражены в виде двучленов, причем один член окажется связанным с колебаниями, обладающими частотой a (частотой самих сейш), а другой, такого же порядка по величине,— с колебаниями, обладающими частотой $2\bar{\omega}$ (удвоенной частотой вращения координатной системы). Другими словами, составляющие *приращения* скорости ветра (u и v) всюду будут меняться во времени по закону (252), найденному в предыдущем параграфе для *одиночной* частицы, колеблющейся с большим периодом в поле кориолисовой силы.

Ограничимся решением задачи до конца для одной лишь точки поля — для начала координат. Легко показать, что здесь (259) и (260) приобретают очень простой вид

$$\frac{d^2u}{dt^2} + 4\bar{\omega}^2u = \Pi\vartheta_0\frac{k}{\delta}\left(\bar{\omega} - \frac{a}{2}\right)\sin at, \quad (261)$$

$$\frac{d^2v}{dt^2} + 4\omega^2v = -\Pi\vartheta_0\frac{k}{\delta}\left(\bar{\omega} - \frac{a}{2}\right)\cos at. \quad (262)$$

Интегрирование этих уравнений дает

$$u = \frac{\Pi\vartheta_0 k}{2\delta(2\bar{\omega}+a)}(\sin 2\bar{\omega}t + \sin at), \quad (263)$$

$$v = \frac{\Pi\vartheta_0 k}{2\delta(2\bar{\omega}+a)}(\cos 2\bar{\omega}t - \cos at). \quad (264)$$

Как мы и ожидали, составляющие приращений скорости ветра в поле термобарических сейш колеблются по закону (252), найденному выше для

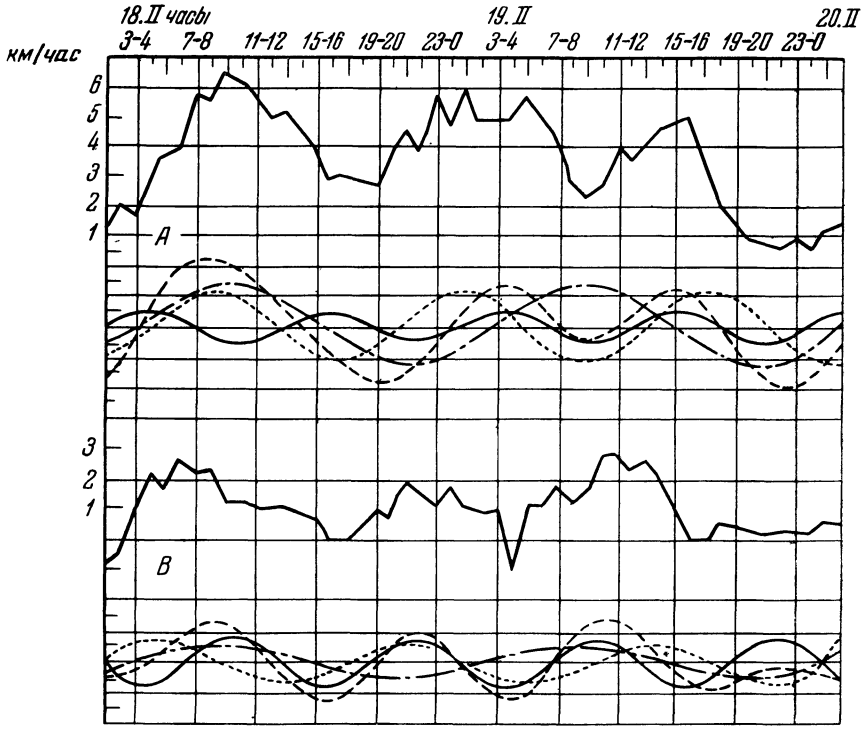


Рис. 399. Разложение кривых записи ветра

скоростей одиночной частицы. Наряду со вторым членом скобок, связанным с *медленными* колебаниями (собственно сейшами), фигурирует первый член скобок, описывающий значительно более быстрые колебания, примерно *полусуточные* в высоких широтах, где $\overline{\omega}$ близко к ω.

Но существуют ли в природе эти полусуточные колебания составляющих u и v, требуемые теорией?—Несомненно существуют. Их давно уже подметили аэрологи как в СССР, так и за границей. В частности, на рис. 399 воспроизведены данные Зоннбликской обсерватории. Верхняя половина (A) диаграммы касается восточной слагающей ветра, а нижняя (B) — северной слагающей (обе выражены в несколько необычных единицах — километрах в час). Под ломаными линиями—результатами регистрации — помещены их разложения на основные гармоники: с периодами 12 *час* (сплошные кривые), 16,5 *часа* (частый пунктир) и 24 *часа* (штрих-пунктирные кривые). Кривые, суммирующие эти три слагающие, нанесены более жирными прерывистыми линиями; они воспроизводят основные черты регистрации. Легко видеть, что полусуточные составляющие достигают здесь вполне ощутимых размеров.

Следует отметить, что действительное существование полусуточных составляющих ветра является *необходимым*, но еще не вполне достаточным подтверждением нашей теории. Как показано в работе [49], составляющие эти должны появляться вообще при нестационарных процессах в атмосфере. Совершенно естественно появляются они и в процессе сейш.

Хорошее дополнительное подтверждение нашей теории сейш дают *низкочастотные* члены в скобках (263) и (264): легко убедиться в том, что эти члены свидетельствуют о непрерывном *вращении* соответствующей слагающей ветра *против часовой стрелки* [1] *с периодом*, равным *периоду сейш*.

[1] В северном полушарии.

Но именно так ведет себя в действительности вся картина поля термобарических сейш, притом не только сейш в муссонном поле, но и родственных сейш, возникающих в поле межширотных тепловых потоков. Последние особенно четко подтвердили теорию во время необычайных морозов в январе 1940 г.

Исходя из уравнений (263) и (264), легко найти траекторию воздушных частиц в поле термобарических сейш, приняв во внимание, что u представляет собой производную по времени от смещений ξ воздушной частицы вдоль стационарного муссонного потока U, а v является аналогичной производной от смещений η перпендикулярно тому же стационарному потоку.

Подставив $d\xi/dt$ и $d\eta/dt$ вместо u и v в (263) и (264), проинтегрировав полученные дифференциальные уравнения и приняв во внимание (235), найдем

$$\xi = -\frac{\Pi\vartheta_0}{2\delta c\,(2\bar{\omega} + a)}\left(\frac{a}{2\bar{\omega}}\cos 2\bar{\omega}t + \cos at\right), \tag{265}$$

$$\eta = -\frac{\Pi\vartheta_0}{2\delta c\,(2\bar{\omega} + a)}\left(\frac{a}{2\bar{\omega}}\sin 2\bar{\omega}t - \sin at\right). \tag{266}$$

Полученные уравнения показывают, что движение воздушной частицы может быть разложено на два простых круговых движения. Именно можно себе представить, что вокруг начала координат *против часовой стрелки* движется по орбите с радиусом

$$r_1 = \frac{\Pi\vartheta_0}{2\delta c\,(2\bar{\omega} + a)} \tag{267}$$

некоторая «планета», делающая полный оборот за один период сейш T (т. е. угловая частота этого движения равна $a = \frac{2\pi}{T}$).

В свою очередь вокруг такой воображаемой «планеты» движется *по часовой стрелке* по орбите с радиусом

$$r_2 \approx \frac{a}{2\bar{\omega}_1} r_1 \tag{268}$$

некоторый «спутник», делающий один оборот вокруг планеты за промежуток времени, равный $\pi/\bar{\omega}$. Вот этот-то «спутник» и будет описывать искомую траекторию воздушной частицы.

Совершенно такой же результат был нами в свое время получен при исследовании общей картины колебаний с большим периодом во вращающейся системе. Там была построена траектория колеблющейся частицы, которая, по нынешним нашим обозначениям, соответствует конкретному случаю

$$\frac{2\bar{\omega}}{a} \approx 17.$$

Форма этой своеобразной траектории изображена на рис. 398.

Как видим, рассмотренный случай соответствует типичным природным условиям: исследуемая частица обходит вокруг положения покоя за 8 суток (за часто встречающийся период сейш). При этом она движется в основном *против* часовой стрелки. Добавочная — полусуточная — составляющая движения создает лишь своеобразные зубцы на траектории, причем в данном конкретном случае число таких зубцов должно равняться $17 + 1 = 18$, так как за время 17 оборотов «спутника» сама воображаемая «планета» совершает тоже один оборот (но в противоположную сторону).

Попытаемся вычислить элементы движения воздушной частицы применительно к конкретному случаю. Для этого прежде всего преобразуем выражение для радиуса главной орбиты (орбиты «планеты»), воспользовавшись

выражением (225) для скорости термобарических волн. Легко видеть, что

$$r_1 = \frac{\vartheta_0}{4\bar{\omega} + 2a} \sqrt{\frac{\Pi}{\eta\delta\Theta}}. \qquad (269)$$

По (269) и (268) определяется радиус r_1 основной орбиты и радиус r_2 вторичной орбиты (орбиты «спутника»).

Заимствуем числовые величины, входящие в (269) из предыдущих параграфов. Что касается амплитуды ϑ_0 температурных колебаний в пучности сейш, то для нее примем числовое значение, заимствованное с кадра Сандстрема, соответствующего наибольшему потеплению воздуха над Атлантическим океаном; именно положим $\vartheta_0 = 6°$. Тогда окажется, что $r_1 = 430$ *км*, $r_2 = 27$ *км*.

Так же просто определяется и максимальное значение нестационарной составляющей скорости. Именно на основании (263) легко показать, что

$$2u_{\text{макс}} = \frac{\Pi\vartheta_0 k}{\delta(2\bar{\omega} + a)}, \qquad (270)$$

причем двойка в левой части поставлена для того, чтобы подчеркнуть, что максимальная скорость возникает при максимальном значении *двучлена*, стоящего в скобках.

Подставим в (270) числовые значения, о которых была речь выше. Тогда окажется, что наибольшее ожидаемое значение *нестационарной* части скорости ветра должно быть $2u_{\text{макс}} = \pm 8$ *м/сек*.

Как числовые значения элементов траектории, так и числовое значение скорости ветра весьма правдоподобны.

§ 20. Самовозбуждающиеся термобарические колебания в лабораторных условиях и сопоставление их с наблюдениями в природе

Вывод дифференциального уравнения термобарических сейш в § 15 был связан с сильной схематизацией явления. Впервые было доказано, что в природной адвекционной системе могут существовать термобарические сейши, но не были установлены параметры, доказывающие, что подобная система является *автоколебательной*. Ее автоколебательный характер вытекал только из непосредственных наблюдений в природе; в этом можно было убедиться на ряде примеров различных термобарических сейш. Сейши такого рода всегда возникают при смене муссонных сезонов — весной и осенью. Очень часто возникают они в другие времена года, и, как увидим дальше, их можно рассматривать как типичную форму и как сущность *смены погоды*.

Наряду с такими косвенными доказательствами существования самовозбуждающихся термобарических сейш в атмосфере представлялось весьма заманчивым получить родственные явления в *лабораторных условиях*, где можно совершенно надежно убедиться в наличии или в отсутствии автоколебательных систем.

По предложению Шулейкина такое исследование было произведено Н. Л. Бызовой на модели конвекционных потоков, где воздух был заменен водой, значительно более удобной для тонких количественных измерений. Опыты проводились в прямоугольном сосуде со стеклянными стенками и металлическим дном, которое было разделено на две равные части теплоизолирующей поперечной прослойкой. Длина сосуда равнялась 100 *см*, ширина 30 *см* и высота 40 *см*. Толщина слоя воды в различных сериях опытов бралась разная [50].

С одной половиной дна соприкасался нагреватель (электрический или керосиновый), а с другой — холодильник, наполненный водой с плавающими

кусками льда. Холодильником служила, очевидно, и свободная поверхность воды в этом своеобразном аквариуме.

Первоначально предполагалось наблюдать неустановившиеся термобарические явления, возникающие при «смене муссонных сезонов». Поэтому нагреватель и холодильник были установлены на вращающемся столике, который позволял быстро подводить холодильник под ту половину металлического дна, под которой стоял нагреватель, а нагреватель одновременно подводить под другую половину, где перед тем стоял холодильник. Сам сосуд с водой был подвешен к стене на надежных креплениях, совершенно исключавших возможность возникновения каких бы то ни было механических возмущений, толчков в системе.

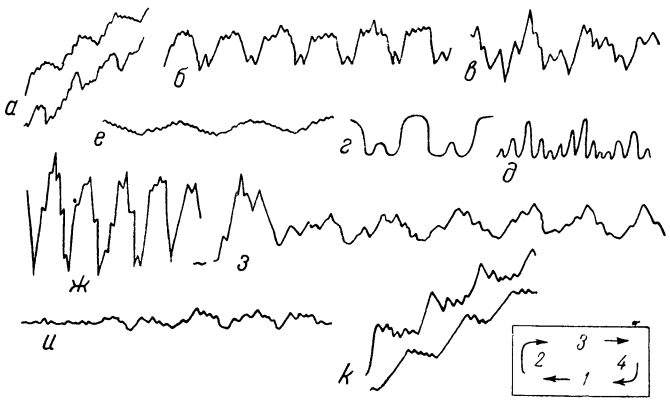


Рис. 400. Самовозбуждающиеся колебания температур при конвекции (по Н. Л. Бызовой)

Для измерения и регистрации температур воды в различных точках служили спаи термопар, которые посредством переключателя можно было присоединять к зеркальному чувствительному гальванометру. Вторые спаи термопар находились в дьюаровском сосуде, служившем в качестве термостата.

Световой луч, отраженный от зеркальца гальванометра, падал на фотографическую бумагу, наложенную на барабан обыкновенного кимографа, и позволял регистрировать повороты зеркальца.

Скорость потоков тепловой конвекции в воде измерялась путем непосредственных наблюдений за влечением всевозможных взвешенных частиц. Для удобного и достаточно надежного наблюдения *изменений скорости* потока были применены легкие шарики диаметром 4—5 *мм*, укрепленные на горизонтальных или вертикальных стеклянных волосках. Позади них помещалась небольшая шкала для отсчета отклонения.

После включения нагревателя в сосуде быстро устанавливался конвекционный круговорот воды. Поворот столика с нагревателем и холодильником вокруг его вертикальной оси «менял муссонные сезоны». При этом всегда наблюдались весьма отчетливые колебания температур воды и скоростей потока в различных точках системы.

Регистрация обнаружила, что колебания температуры *не прекращаются* и после того, как тот или иной «муссонный режим» установится в системе. Эти колебания безусловно оказываются *самовозбуждающимися*: они происходят независимо от того, менялся или не менялся «муссонный режим» в сосуде.

На рис. 400, *а* — *к* воспроизведены копии осциллограмм, полученных Бызовой. Отчетливо видно, что температурные колебания — плавные, незатухающие. Они обладают весьма значительным периодом — от 4 до 10 *мин*. Если разность температур воды в нагретой и в охлажденной частях составля-

ла 2—4°, то амплитуда температурных самовозбуждающихся колебаний достигала примерно 0,2—0,4°, т. е. около 10 % от разности температур, вызывающей конвекционные потоки в воде.

Скорости потока колебались с тем же самым периодом, причем амплитуда их колебаний достигала 30—33 % средней скорости конвекционного потока.

Было установлено, что температурная волна представляет собой волну, *распространяющуюся вдоль потока со скоростью, равной скорости потока.* Горизонтальные скорости в верхнем и в нижнем ярусах «муссона» колеблются в общей фазе, причем поток обладает наибольшей скоростью в те моменты, когда максимум температуры оказывается в верхнем слое. Вертикальная скорость восходящего потока над нагревателем *не* совпадает по фазе с горизонтальной скоростью, а *опережает ее на четверть периода.* Бызова полагает, что это объясняется возникновением дополнительных местных струй, усиливающих теплоотдачу от дна к воде, в той фазе, когда максимум температуры находится в восходящем потоке над нагревателем.

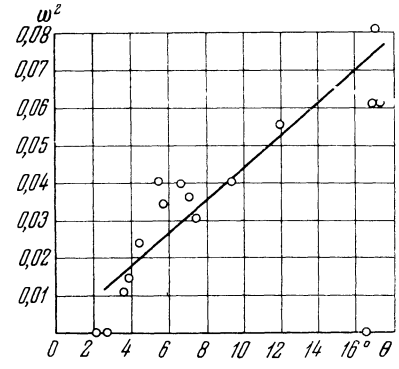


Рис. 401. Связь между разностью температур и частотой колебаний

Обнаружилось существенное значение высоты слоя воды в сосуде. Именно при отношении высоты этого слоя H к длине сосуда L, равном $^1/_3$, колебания температур и скоростей *не возникали*, хотя конвекция существовала. Колебания возникали при уменьшении величины H/L и становились вполне устойчивыми при $H/L \leqslant {}^1/_6$.

Дальнейшее уменьшение величины H/L никак не отражалось на ходе явлений.

Было изучено влияние *вязкости* жидкости при подмешивании глицерина к воде. Оказалось, что увеличение вязкости до *четырехкратной* по сравнению с чистой водой не вызывает никаких изменений в наблюдаемых явлениях. Дальнейшее увеличение вязкости начинает сказываться на амплитуде колебаний, и при *десятикратном* увеличении вязкости колебания температуры и скоростей потока *полностью* исчезают.

Период колебаний температуры воды в любой точке был непосредственно связан со скоростью распространения температурной волны, равной скорости потока, и *длиной пути*, который должны пройти частицы воды вдоль замкнутой линии тока. Если этот путь равен $\sim L$, а скорость волны (скорость потока) u, то

$$T = \frac{L}{u}. \tag{271}$$

В свою очередь скорость u зависит от *мощности тепловой системы*, в конечном счете — от разности Θ температур между нагретой и охлажденной половинами дна.

Припаяв к обеим частям дна спаи термопар, Бызова обнаружила, что период колебаний T связан с разностью температур Θ простым соотношением

$$T = \frac{k}{\sqrt{\Theta}}.$$

Для частоты ω колебаний получается выражение

$$\omega^2 = n\Theta. \tag{272}$$

На рис. 401, заимствованном из ее работы, представлена соответствующая диаграмма. Точки удовлетворительно ложатся близ линии, выраженной эмпирической формулой (272). Разброс их, по всей вероятности, обусловлен несовершенством охлаждения в приборе.

Чрезвычайно интересные опыты были произведены с *раскачиванием* системы посредством попеременного подведения и удаления нагревателя. При *собственном* периоде колебаний системы, равном 4 *мин*, брались периоды *внешних воздействий* от 2 до 8 *мин*. Серия полученных записей колебаний температуры воды воспроизведена на рис. 402.

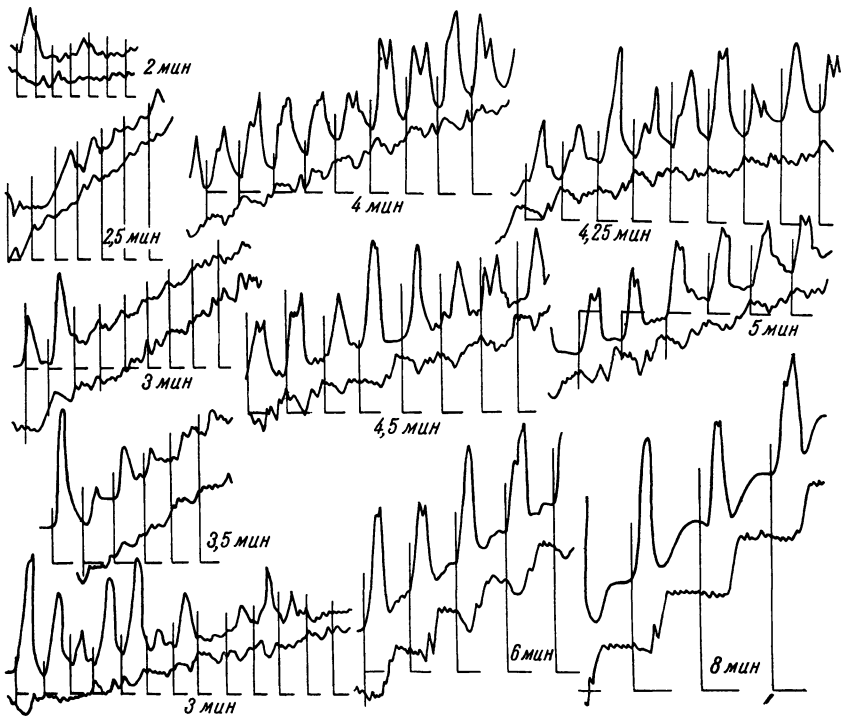


Рис. 402. Вынужденные колебания температур

Здесь всюду верхняя кривая дает температуру над нагревателем, а нижняя кривая — над холодильником. Отрезки прямых внизу указывают ту часть периода колебаний, во время которой нагреватель был включен. Из рисунка видно, что собственные колебания тут отсутствовали. Колебания совсем не возбуждались или плохо возбуждались, или протекали неустойчиво в тех случаях, когда период внешних воздействий был равен 2—3 *мин*, т. е. был меньше, чем собственный период колебаний системы. Когда период внешних воздействий превышал в $1\,^1/_2$ или в 2 раза собственный период колебаний системы, колебания возбуждались очень хорошо и *всегда обладали* ясно выраженной *гармоникой с двойной частотой*.

В случае совпадения периода внешних воздействий с собственным периодом колебаний системы Бызова обнаружила настоящее явление *резонанса* с резким увеличением амплитуд колебаний.

Самовозбуждающиеся колебания температур и скоростей потока, полученные Бызовой в сосуде с водой, происходят по схеме, отличающейся от той, которая рассматривалась в § 15 и далее: термобарическая волна обходит весь сосуд по линии тока, распространяясь со скоростью потока, между тем как ранее мы занимались термобарическими волнами, скорость распро-

странения которых по существу отличалась от скоростей потока [см., например, формулы (224) и (225)].

Разумеется, не все водные частицы двигались в опытном сосуде по определенным замкнутым линиям тока: множество их совершало беспорядочные движения. Но *типичным* для схемы Бызовой является именно поток, вдоль которого распространяется термобарическая волна, с его скоростью.

В связи с этим возникает вопрос, нельзя ли отметить наличие родственных явлений в *атмосфере*? Если непосредственно близ подстилающей поверхности мы всюду наблюдаем *стоячие* волны, сейши, с пучностями внутри каких-то узловых линий, обусловленных теми или иными географическими особенностями области, то выше подстилающей поверхности мы должны ожидать существование *распространяющихся* термобарических волн.

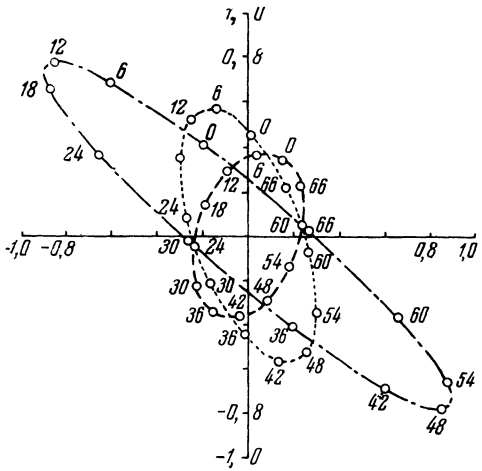


Рис. 403. Годографы векторов для пятой гармоники годовых колебаний

Но ведь значительная часть воздушных масс, переносимых в зональных потоках, движется по *замкнутому пути*, обходя вокруг Земли по параллели. Следовательно, есть все основания посмотреть, не могут ли в этих замкнутых потоках возникать колебательные явления по схеме Бызовой.

Представим себе зональный поток в средних широтах северного полушария. Воздушные массы, увлекаемые этим потоком, периодически проносятся то над «нагревателем», каковым является Северное Атлантическое течение, то над «холодильником», каковым зимой является соединенный Европейско-Азиатский материк (Северная Америка и Тихий океан играют второстепенную роль).

Если в такой системе возникнут самовозбуждающиеся колебания скоростей и температур по схеме Бызовой, то период их будет обязан равняться *времени обхода* воздушных масс вокруг Земли по соответствующей параллели [51].

Вспомним тот анализ многолетних аэрологических материалов, о котором мы говорили в § 14 (см. стр. 600). Там мы использовали лишь основное колебание векторов средних месячных скоростей ветра на различных высотах и отметили, что вторая и третья гармоники не представляют интереса, четвертая полностью отсутствует, а *пятая выражена* очень *резко*. Сейчас пришло время заняться именно этой пятой гармонической составляющей в колебаниях скоростей воздушных потоков на протяжении года.

На основании материалов, цитированных в § 14, следует заключить, что пятая гармоническая составляющая прекрасно прослеживается, во всяком случае выше 5 *км* над Землей. На рис. 403 воспроизведена векторная диаграмма, заимствованная из этих материалов.

Эллипсы, нанесенные различными пунктирными линиями, представляют собой годографы векторов, которые необходимо прибавлять к соответствующему вектору *средней годовой* скорости ветра на данной высоте (вместе с теми добавочными векторами, которые отвечают основному колебанию, второму и третьему гармоническим). Для круглого счета промежутки между отдельными точками, нанесенными на годографы, приняты равными 6 суткам. В действительности период пятой гармоники равен, очевидно, не 72, а 73 суткам.

Эллипс, вычерченный жирными штрихами (самый малый), соответствует

колебаниям скоростей над поверхностью Земли; вычерченный точечным тонким пунктиром — колебаниям скоростей на высоте 2 *км*, вычерченный штрих-пунктиром — на высоте 5 *км*.

За нуль для отсчета времени принят момент максимального отклонения скорости от средней в самом нижнем слое (малый эллипс). Цифры, проставленные при эллипсах, отмечают промежутки времени, прошедшего с момента начала отсчета времени (в сутках). На диаграмме хорошо видно, что максимальное отклонение скорости в слое воздуха на высоте 2 *км отстает на неделю*, а максимальное отклонение скорости на высоте 5 *км отстает на две недели* от момента, принятого за начальный.

Совершенно очевидно, что колебания возбуждаются в слое трения толщиной около 0,5 *км*. Этот слой испытывает возмущения под воздействием *подстилающей поверхности*. По мере того как возбуждения передаются вверх, колебания отстают по фазе на указанные сроки. Амплитуда колебаний тут не убывает (как наблюдается в иных случаях при распространении возмущений), а *нарастает* в направлении снизу вверх; это происходит по той же причине, по какой нарастают все возмущения в неоднородной атмосфере, например, вызванные переходом воздушных потоков через холмы, горные цепи (даже невысокие).

Для самовозбуждения колебаний по схеме Бызовой средняя за год скорость $\bar{u}$ в слое трения должна удовлетворять условию

$$\bar{u} = 2\pi \frac{R}{T} \cos \varphi, \tag{273}$$

которое аналогично условию (271). Здесь T — период колебаний, R — радиус Земли в средних широтах, φ — широта места.

Подставим сюда числовые значения $T = 73$ *суток*, $R = 6366$ *км*, $\varphi = 52°$, предварительно раздробив их соответственно в секунды и метры. Тогда на основании (273) окажется

$$\bar{u} = 3{,}89 \text{ } м/сек.$$

В действительности, по тем же аэрологическим материалам, средняя за год скорость потока в слое трения составляет около 3,5—4 *м/сек*. Значит, условие, необходимое для самовозбуждения колебаний, здесь *удовлетворяется*.

На рис. 403 видно, что векторные приращения, обусловленные пятой гармоникой, достигают примерно 0,4 *м/сек*, т. е. 10 % модуля средней годовой скорости. Но совершенно очевидно, что в природе эти колебания происходят с *неточно фиксированной фазой*, смещающейся из года в год. При осреднении за много лет геометрическое суммирование векторов неизбежно повело к сильному уменьшению суммарного вектора, послужившего для вычисления средней величины пятой гармоники. Сумма могла бы оказаться даже совсем близкой к нулю, если бы в природе не существовали характерные даты, мало смещающиеся в пределах года, отмечающие особо сильные импульсы, например, даты весенних похолоданий.

Отсюда следует, что *фактические* амплитуды самовозбуждающихся колебаний скоростей *значительно превышают* ± 10 % среднего за год модуля скорости потока. Это находится в полном соответствии с опытами Бызовой, где наблюдались колебания скоростей порядка ± 30 % средней величины.

Надо еще отметить, что при соответственно иных условиях в зональных потоках могут самовозбуждаться колебания с другими периодами, отличными от 73 суток. Но если эти периоды не укладываются целое число раз на протяжении одного года, то при суммировании векторов за много лет они выпадут из исследования, так как соответствующие геометрические суммы векторов будут обращаться в *нуль*.

§ 21. Возникновение термобарических сейш в нижней тропосфере при распространении длинных температурных и барических волн на высоте 500-миллибарной поверхности

В работе Н. Л. Бызовой, описанной в § 20, было обнаружено явление резонанса при колебаниях температур и скоростей в потоках тепловой конвекции, когда период колебаний режима нагревателя совпадал с собственным периодом колебаний системы. На этом основании В. В. Шулейкин в 1952 г. высказал предположение о возможности зарождения термобарических сейш в нижней тропосфере — в области, ограниченной естественными узловыми линиями,— в тех случаях, когда на высоте 500-миллибарной поверхности распространяются с запада на восток длинные температурные и барические волны.

По его инициативе А. А. Дмитриев и Т. В. Бончковская произвели теоретические и экспериментальные исследования [52], рассматривая поведение воды в бассейне, у дна которого поставлены невысокие перегородки, а по поверхности распространяются волны, обладающие различными периодами.

Этими двумя авторами было показано, что в нижнем слое воды можно вызвать ясно выраженные стоячие волны, если с их собственным периодом совпадает период волн, распространяющихся в поверхностном слое.

Следовательно, сейши в нижнем слое можно считать как бы «индуцированными» при наличии гидродинамического резонанса.

Выше говорилось о *цуге* термобарических сейш, наблюдавшихся в Европейской части Советского Союза и одновременно над Атлантическим океаном зимой 1965/66 г. После исследования общей картины этих сейш в работе [46] С. К. Олевинская попыталась выяснить, не могли ли эти ярко выраженные сейши возникнуть под действием резонанса между нижним слоем тропосферы, находящимся в областях между естественными узловыми линиями, и слоем воздуха на высоте 500-миллибарной поверхности, где с запада на восток распространяются длинные температурные и барические волны?

Применив надежный «периодоскопический» прием, С. К. Олевинская показала, что в исследованном промежутке времени, охватившем около трех месяцев, на высоте 500-миллибарной поверхности действительно распространялись с запада на восток длинные температурные и барические волны, период которых лежал в пределах от 6 до 10 суток, т. е. был очень близок к собственному периоду, типичному для термобарических сейш в нижнем слое тропосферы [53].

Условия, в особенности близкие к резонансу, проявлялись именно тогда, когда картина термобарических сейш была наиболее отчетливой и амплитуды колебаний температуры и давления в нижнем слое тропосферы были максимальные, т. е. в конце января и начале февраля 1966 г. На рис. 387 были представлены, по С. К. Олевинской, различные фазы термобарических сейш для этого 9-суточного промежутка времени, а на рис. 388 — противофазные колебания температуры и давления в Рейкьявике и в Курске.

Но и в декабре 1965 г.— в самом начале цуга термобарических сейш — условия были близки к резонансу, а о вращении системы температурных изаномал и изаллобар в нижнем слое тропосферы в декабре 1965 г. можно судить по интересной схематической карте Олевинской, представленной на рис. 381, *б*. Весьма замечательно, что центр вращения узловой линии, лежащей около точки с координатами $\varphi=62°$ с. ш. и $\lambda=32°$ в. д., лишь немного смещен к западо-северо-западу от точки, в которой он лежал на карте В. Г. Семенова — на рис. 381, *а*, построенной применительно к термобарическим сейшам 1946 г.

На рис. 381, *б*, так же как и на рис. 381, *а*, кружками обозначены соответствующие положения *пучностей* температурных отклонений от климатологи-

ческой нормы данного дня. Знак плюс соответствует максимальному положительному, а знак минус — отрицательному отклонению.

Итак, работа [53] вполне подтвердила гипотезу В. В. Шулейкина и вполне согласна с гидродинамическими исследованиями А. А. Дмитриева и Т. В. Бончковской [52]. С другой стороны, уже с 1947 г. Е. Н. Блиновой и ее учениками ведутся систематические исследования длинных температурных и барических волн, распространяющихся с запада на восток на высоте 500-миллибарной поверхности [54]. Надо надеяться, что совместные исследования в двух наметившихся направлениях позволят в недалеком будущем найти метод заблаговременного прогноза условий *резонанса* — условий возникновения «индуцированных» термобарических сейш в нижнем слое тропосферы. Трудно переоценить важность такого заблаговременного прогноза, поскольку именно термобарические сейши приводят зимой к наиболее опасным морозам, а летом — к засухе в обширных сельскохозяйственных районах.

§ 22. О физических корнях погоды

В настоящее время можно считать задачу теоретического *краткосрочного* прогноза погоды — принципиально решенной (главным образом советскими гидродинамиками). Совсем иначе обстоит дело с теорией *долгосрочных* прогнозов погоды. Здесь широко распространенные современные методы синоптики и динамической метеорологии основаны на совершенно различных принципах, но обычно страдают одним недугом, общим для всех: в них *мало физики*. С одной стороны, чисто синоптические исследования связывают погоду с блужданием обособленных воздушных масс, наделенных слишком большими правами, слишком большой самостоятельностью и не несущих никаких обязанностей по отношению к закону причинности. С другой стороны, исследования математиков-гидродинамиков очень часто носят формальный характер; они не подкреплены знанием физических процессов, по которым можно было бы сколько-нибудь надежно судить *о граничных условиях* при интегрировании дифференциальных уравнений. Неясными остаются в них не только условия на верхней границе (где, как мы видели в § 14, представления о воздушных потоках нуждаются в коренной перестройке), но и условия на нижней подстилающей поверхности, вполне доступной физическому исследованию. Чаще всего математики склонны ограничиваться исследованием явлений, которые протекают на высоте 5 *км* над подстилающей поверхностью, чтобы не учитывать большие осложнения, которые вносятся теми или иными местными географическими особенностями.

Но ведь в настоящее время известно, что и на высоте 5 *км* отчетливо проявляются различия в условиях, которые существуют в атмосфере над океаном или морем и над материком. Значит, не учитывать различия в условиях здесь также нельзя. Помимо того, в математических работах главное внимание обращается на температурные и барические волны, *распространяющиеся вдоль потока зональной циркуляции*, и это имеет свои основания для более или менее высоких слоев атмосферы. Но *погода*, которую мы наблюдаем и которая представляет наибольшее значение для жизни на земной поверхности (для сельского хозяйства, мореплавания, сухопутного транспорта), меняется по законам, которые никак не вяжутся с представлением о распространяющихся температурных и барических волнах. И это вполне понятно. Всевозможные географические объекты, находящиеся на подстилающей поверхности, неизбежно создают *неоднородности* в среде, в которой распространяются волны, неоднородности в самом нижнем слое атмосферы, непосредственно соприкасающемся с подстилающей поверхностью; береговая линия создает неоднородность в массах воздуха, находящихся по обе ее стороны; горный хребет вызывает местные возмущения воздушных потоков и нарушает одно-

родность их строения, уменьшает «теплопроводность» слоя воздуха в направлении, нормальном к хребту. Какова бы ни была природа термобарической волны, подойдя к границе между двумя неоднородными массами воздуха, волна должна частично или полностью *отразиться* от пограничной поверхности или пограничного слоя, если граница выражена плавно. Интерференция падающих и отраженных волн, как известно, приводит к возникновению *стоячих* волн.

Именно *стоячие термобарические* волны должны возникать в слое атмосферы, находящемся под непосредственным воздействием подстилающей поверхности. Разумеется, термин «стоячие» здесь надо понимать в том смысле, в каком он применяется к *вращающейся системе*.

В предыдущих параграфах мы видели много примеров таких стоячих волн в поле кориолисовой силы: они характеризуются резко выраженными пучностями перегрева и недогрева и столь же резко выраженными пучностями пониженного и повышенного давления атмосферы; области разного знака отделены друг от друга узловыми линиями; и узловые линии, и пучности вращаются вокруг некоторого полюса вращения с периодом в несколько суток или даже десятков суток.

Мы еще ничего не знаем о причинах, по которым возникает и исчезает причудливый узор узловых линий. Можем только догадываться о родстве этого узора с узором хладниевых фигур на вибрирующей пластинке, посыпанной песком; в обоих случаях узловые линии порождаются причинами, которые связаны с дроблением всего поля волн на отдельные участки в соответствии с условиями на границах поля и с неоднородностями среды.

Именно в эту сторону должно устремиться внимание геофизиков; разгадав загадку дробления поля, можно будет перейти к определению связи между параметрами системы и *собственным периодом колебаний* в духе приближенной формулы (236).

Даже и в настоящее время можно уже установить полное тождество между элементами погоды, выявленными в теории термобарических сейш Шулейкина, и теми элементами, которые были обнаружены непосредственно в природе Грибоедовым, Даниловым и Мультановским с его современными продолжателями в области долгосрочных прогнозов погоды. Действительно, область, охваченная замкнутой узловой линией, по терминологии Шулейкина, это — *естественный синоптический район* Мультановского. Собственный период колебаний системы, по терминологии Шулейкина, это — *естественный синоптический период* (точнее, двойной период) Мультановского.

Период самовозбуждающихся колебаний по схеме Бызовой, обнаруженных Шулейкиным в зональных потоках воздуха в атмосфере, по материалам обширных аэрологических наблюдений, это — *один из «ритмов»* Мультановского. В предыдущем параграфе было показано, что этот период самовозбуждающихся колебаний составляет 73 дня. Мультановский много лет тому назад открыл, что изменения погоды характеризуются, помимо коротких периодов, еще плавными ритмами, один из которых примерно равен 75 ± 2 суток.

Как видим, интуитивные открытия замечательного наблюдателя природы Мультановского сейчас смыкаются с результатами современного физико-математического анализа, *взаимно подтверждая* и подкрепляя друг друга.

Лабораторные опыты Бызовой доказали возможность возникновения автоколебательных явлений в системе теплового конвекционного потока. Сейчас не остается никаких сомнений в том, что *смена погоды также* может представлять собой *автоколебательный процесс*.

Как периодические воздействия нагревателя в этих опытах могли вызывать вынужденные колебания в системе, иногда приводя к настоящему *резонансу*, так в природных условиях мы должны ожидать возникновения вынужденных колебаний в системе океан — атмосфера — материк под действием тех периодических возмущений, которые возникают при отшнуровы-

вании циклонов в местах их постоянного зарождения над Атлантикой, при прохождении длинных волн на 500-миллибарной поверхности.

Когда промежутки времени между отшнуровавшимися циклонами бывают близки к собственному периоду колебаний системы, опоясанной узловой линией, термобарические сейши в этой системе достигают наиболее резкого развития. Напротив, когда промежутки времени между моментами отшнуровывания циклонов значительно отличаются от собственного периода колебаний, термобарические сейши быстро затухают, не успев сколько-нибудь заметно развиться.

Итак, *форма узловых линий, собственный период термобарических сейш, амплитуда колебаний — вот три элемента, которыми обязан пристально заниматься современный геофизик, работающий в области исследования физических корней погоды. Потоки энергии с океана на материк, зональные потоки, переносящие тепло, и потоки тепловой энергии вдоль меридиана — вот источники энергии, которые питают самовозбуждающиеся термобарические сейши в атмосфере.*

В гл. X будет сказано о некоторых новых течениях в современной геофизике, освещающих связи между элементами погоды в нижнем слое тропосферы и электромагнитными явлениями на Земле, вызванными солнечной активностью. Важно отметить, что эти связи особо отчетливо проявляются близ береговой линии океанов и морей.

§ 23. Гидродинамический резонанс в потоках летнего муссона как причина возникновения штормов особого рода

В § 21 было описано явление резонанса между колебаниями температуры, давления на 500-миллибарной поверхности, которые вызываются распространяющимися с запада на восток длинными волнами, и колебаниями в нижней тропосфере, происходящими в форме термобарических сейш.

Теперь остановимся на совсем ином виде резонансных явлений в том же муссонном поле — на источнике сильных летних штормов при абсолютно ясном небе, наблюдающихся на некоторых морях.

Метеорологи давно интересовались происхождением таких штормов, в частности ежегодно наблюдающихся на Черном море, но только в 1959 г. удалось полностью раскрыть механизм этого интересного и важного явления во время плавания экспедиционного судна «Седов» близ африканских берегов Атлантического океана [55].

В этом районе Атлантики наблюдался особо четко выраженный суточный ход скорости ветра. После ночного, иногда полного, штиля утром постепенно нарастала скорость ветра; после полудня она проходила через максимум и к ночи падала, в некоторых случаях до нуля.

Ход явлений весьма близко напоминал поведение хорошо известного северо-восточного шторма у крымских берегов Черного моря и на Азовском море, тщательно изученного в работе Е. И. Потаповой [56]. Он наблюдается обычно в разгар лета, при совершенно безоблачном небе, и иногда достигает скоростей выше 25 *м/сек*. Бывали случаи, когда во время такого северо-восточного летнего шторма судам запрещалось входить в порт.

Как показано в [56], возникновение больших скоростей ветра в послеполуденное время и падение его к вечеру, при штиле ночью, вызывается большими контрастами в прогреве воздуха над сушей и морем, обостряющимися при достижении максимума температуры воздуха над сушей. Масштабы явления совсем не соответствуют обычному представлению о *бризах*, обладающих сравнительно малыми скоростями и охватывающих весьма ограниченное протяжение как по вертикали, так и по горизонтали: в работе [56] и

в статье А. С. Зверева, помещенной в известном курсе метеорологии П. Н. Тверского, приведены данные о вертикальной структуре потока во время таких штормов, которые позволяют считать, что процесс охватывает весь слой летнего муссона.

Совершенно очевидно, что в субтропическом и в тропическом поясах на побережье Африки колебания температуры воздуха в продолжение суток должны быть особо велики, и в Лоциях содержится упоминание о том, что, например, близ Порт-Этьена температура воздуха днем может превышать на 10° температуру воздуха ночью. В тех же Лоциях говорится, что на западном побережье Африки очень резко выражены бризы. Постараемся показать, что в действительности это — резкое проявление суточного хода летнего муссона.

Для схематизированного анализа, доступного в настоящее время, представим себе большой материк, береговая линия которого очерчена окружностью. Поместим на ней начало координат, направим ось X по нормали внутрь материка, ось Y — по касательной влево от нее. Обозначим через u составляющую скорости ветра, нормальную к береговой черте, через v — тангенциальную составляющую. Над берегом будет отсутствовать вертикальная составляющая скорости по оси Z. Положительным направлением Z считаем направление вверх.

Пусть δ обозначает плотность воздуха, μ — его коэффициент внутреннего трения (турбулентного). Если градиент Г атмосферного давления, направленный внутрь материка по оси X, колеблется благодаря колебаниям температуры в продолжение суток, то должны колебаться и составляющие u, v скорости муссона, согласно уравнениям Навье — Стокса (70) и (71) § 5.

В отличие от задачи, решённой в § 5 применительно к годовому циклу муссонных потоков, инерционные члены, стоящие в левых частях равенств, приобретают сейчас весьма важное значение, заставляя по-иному оценивать роль всех членов уравнений (70) и (71).

Ориентировочная оценка показывает, что сейчас наименьшей величины достигают последние члены в правых частях уравнений; они примерно в 23 раза меньше, чем член правой части (71), содержащий градиент давления Г: примерно в 15 раз меньше, чем инерциальные члены в левых частях уравнений, и примерно в 10 раз меньше, чем члены, учитывающие кориолисовы силы (первые в правых частях равенств). В связи с этим при предварительном исследовании явлений в уравнениях (1), (2) пренебрежем последними членами в правых частях — силами внутреннего турбулентного трения в воздушной среде, по сравнению с остальными силами.

Умножим все члены уравнения (70) на μ/δ и продифференцируем их по времени, после чего подставим в полученное уравнение выражение из (71). Тогда

$$\frac{d^2u}{dt^2} + 4\left(\frac{\mu}{\delta}\right)^2 a^4 u = \frac{1}{\delta}\frac{d\Gamma}{dt},$$

или на основании обычного соотношения $a^2 = \frac{\delta\bar{\omega}}{\mu}$

$$\frac{d^2u}{dt^2} + 4\bar{\omega}^2 u = \frac{1}{\delta}\frac{d\Gamma}{dt}. \tag{274}$$

Таким же путем, после дифференцирования (71) по времени и после подстановки выражения du/dt из (70), найдем:

$$\frac{d^2v}{dt^2} + 4\bar{\omega}^2 v = -2\frac{\bar{\omega}}{\delta}\Gamma. \tag{275}$$

Производная $d\Gamma/dt$ в (274) и сама функция Г в (275) колеблются с суточным периодом. Следовательно, составляющие u и v скорости муссона связаны со временем посредством типичных уравнений вынужденных колебаний — (274) и (275).

Если бы в этих уравнениях обратились в нуль правые части, то они описывали бы собственные колебания инерционной системы. Как всегда, квадрат собственной циклической части тут должен равняться множителю при самой функции в левой части уравнений. Следовательно, в данном случае циклическая частота свободных колебаний системы должна равняться $2\bar{\omega} = 2\omega \sin\varphi$.

На широте $\varphi = 30°$, $\sin\varphi = 0{,}5$, и потому циклическая частота $2\bar{\omega}$ собственных колебаний системы становится равной циклической частоте ω колебаний возмущающих сил — в правых частях (274), (275) (угловой скорости вращения Земли). Значит, при этом система муссонных потоков попадает в резонанс с возмущающими силами.

В настоящее время ни одна гидродинамическая задача, относящаяся к муссонному полю, не может быть решена точно ввиду чрезвычайно сложных условий на верхней границе и наличия зависимости антимуссонных потоков от режима вышележащих слоев воздуха (включая стратосферу). Однако приближенное решение некоторых задач удалось выполнить, исходя из очень простой рабочей схемы, в которой потоки антимуссона ограничены слоем от высоты D до высоты $2D$ над подстилающей поверхностью.

В свою очередь толщина D слоя трения, как всегда, выражается через μ, δ и $\bar{\omega}$:

$$D = \pi\sqrt{\frac{\mu}{\delta\bar{\omega}}} = \frac{\pi}{a}. \tag{276}$$

Применив такую упрощенную схему, в свое время мы описали механизм сезонного перемещения избыточных масс воздуха с океана на материки (к зиме) и в обратном направлении (к лету). Удалось связать с этим переносом движение мгновенной оси вращения Земли в теле планеты вокруг осредненного ее положения — географической оси (см. § 6 и 7).

Сейчас снова положим, что над береговой линией возникли собственно муссонные потоки, скорость которых обращается в нуль на высоте D, и что выше скорость антимуссона сначала нарастает, а затем падает до нуля на высоте $2D$. Как в § 6 и 7, будем считать, что градиент давления направлен по нормали к береговой линии и меняется с высотой по линейному закону, проходя через нуль на высоте D. В новой задаче циклическая частота колебаний градиента давления Γ во времени равна угловой скорости вращения Земли вокруг оси. Таким образом, для градиента давления на какой-то высоте z над подстилающей поверхностью запишем

$$\Gamma = \Gamma_0\left(1 - \frac{z}{D}\right)(1 - \cos\omega t). \tag{277}$$

На основании (70), (71) и (277) уравнения движения вязкой среды приобретут форму

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\mu}{\delta}\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - 2\bar{\omega}v = \frac{\Gamma_0}{\delta}\left(1 - \frac{z}{D}\right)(1 - \cos\omega t), \tag{278}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\mu}{\delta}\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + 2\bar{\omega}u = 0. \tag{279}$$

Экман и Фредгольм [57] исследовали более простые явления — развитие дрейфового течения при возникновении постоянного ветра и развитие градиентного течения в море при возникновении градиента, постоянного во времени и на различных глубинах. Они получили довольно сложные выражения для составляющих скоростей течений. Важно отметить, что затухание собственных колебаний (так называемых инерциальных) получилось не зависящим непосредственно от μ — в выражениях скоростей на поверхности моря и на глубинах, если только глубины измерялись в относительных единицах (сравнивались с глубиной трения D). Это произошло потому, что

в уравнениях типа (278) и (279) на μ умножается вторая производная от скорости по z, пропорциональная a^2, т. е. обратно пропорциональная μ. В результате в цитированной работе коэффициент затухания оказался просто зависящим только от $\bar{\omega}$.

В нашей задаче должны возникать осложнения благодаря колебаниям градиента давления во времени и непостоянству его на различных высотах над подстилающей поверхностью. Но эти осложнения компенсируются тем, что нам приходится исследовать явления только на конечном отрезке вертикали — от $z = 0$ до $z = 2D$.

Для удобства преобразуем (278) и (279) таким образом, чтобы в них входили только безразмерные аргументы и функции.

Прежде всего умножим обе части каждого из уравнений на $\pi/\bar{\omega}$ и перейдем от времени t к безразмерному времени τ, положив

$$\frac{\bar{\omega}t}{\pi} = \tau. \tag{280}$$

Уравнения (278) и (279) приобретут промежуточную форму

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} - \pi\frac{\mu}{\delta\bar{\omega}}\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - 2\pi v = \pi\frac{\Gamma_0}{\delta\bar{\omega}}\left(1 - \frac{z}{D}\right)(1 - \cos\omega t),$$

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} - \pi\frac{\mu}{\delta\bar{\omega}}\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + 2\pi u = 0.$$

Но множитель, появившийся перед вторыми членами уравнений, на основании (276), равен D^2/π; D^2 автоматически пропадет, если мы заменим вторые производные по z вторыми производными по безразмерной координате ζ, причем $\zeta = z/D$. Та же величина ζ войдет в двучлен, имеющийся в правой части первого преобразованного уравнения. Для краткости примем $\sin\varphi = \gamma$. Тогда в правой части окажется

$$\omega t = \pi\frac{\omega}{\bar{\omega}}\frac{\bar{\omega}t}{\pi},$$

или

$$\omega t = \frac{\pi}{\gamma}\tau.$$

Как известно, скорость геострофического ветра V_g, возникающего при градиенте давления Γ_0, выражается следующим образом:

$$V_g = \frac{\Gamma_0}{2\delta\bar{\omega}}. \tag{281}$$

Для перехода к безразмерным скоростям отметим, что выражение удвоенной скорости геострофического ветра входит в правую часть преобразованного уравнения. Разделим обе части каждого из двух уравнений на V_g и в дальнейшем будем исследовать функции

$$\frac{u}{V_g} = x, \quad \frac{v}{V_g} = y. \tag{282}$$

Тогда вместо уравнений (278) и (279) можно записать с учетом всех промежуточных соотношений

$$\frac{\partial x}{\partial \tau} - \frac{1}{\pi}\frac{\partial^2 x}{\partial \zeta^2} - 2\pi y = 2\pi(1 - \zeta)\left(1 - \cos\frac{\pi}{\gamma}\tau\right), \tag{283}$$

$$\frac{\partial y}{\partial \tau} - \frac{1}{\pi}\frac{\partial^2 y}{\partial \zeta^2} + 2\pi x = 0. \tag{284}$$

В новых обозначениях собственно муссонный слой занимает высоту от $\zeta = 0$ до 1, а схематизированный антимуссонный слой — высоту от $\zeta = 1$ до 2. Условия на границах: при $\zeta = 0$ и $\zeta = 2$ $x = y = 0$. Выражение (277) было записано применительно к естественному выбору начала отсчета вре-

мени: от момента, когда ночью в простейшем случае градиент давления проходит через нуль. Это — момент несколько позже полуночи. От него отсчитывается теперь безразмерное время τ.

Существующие граничные условия позволяют искать интегралы уравнений (283) и (284) в форме бесконечных рядов, в которых каждый член представляет собой произведение функций одной лишь высоты на функцию одного лишь времени:

$$x = \sum_{n=1}^{n=\infty} \sin \frac{\pi n}{l} \zeta \, x_n(\tau), \tag{285}$$

$$y = \sum_{n=1}^{n=\infty} \sin \frac{\pi n}{l} \zeta \, y_n(\tau). \tag{286}$$

В связи с этим разложим в ряд Фурье (тоже по синусам) функцию высоты, которая входит в правую часть (283):

$$1 - \zeta = \sum_{n=1}^{n=\infty} b_n \sin \frac{\pi n}{l} \zeta. \tag{287}$$

В нашей задаче следует положить в (285) — (287) $l = 2$ применительно к границам явления. Коэффициенты Фурье b_n в (287) выражаются известным соотношением

$$b_n = \frac{l}{2} \int_0^l F(\zeta) \sin \frac{\pi n}{l} \zeta \, d\zeta = \int_0^2 (1 - \zeta) \sin \frac{\pi n}{2} \zeta \, d\zeta =$$

$$= \frac{2}{n\pi} \cos n\pi + \frac{2}{n\pi}. \tag{288}$$

Все нечетные коэффициенты равны нулю. Поэтому нумерацию коэффициентов удобней вести по значениям $k = n/2$. Тот же номер k появляется в аргументах синусов благодаря тому, что $l = 2$ и, значит, $n/l = n/2 = k$.

Итак, общее выражение k-го коэффициента Фурье будет $b_k = 2/k\pi$, и вместо (287) запишется

$$1 - \zeta = \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{2}{k\pi} \sin k\pi\zeta. \tag{289}$$

Подставим в (283) и (284) выражения x и y из (285) и (286), заменив в них нумерацию и положив $n/l = k$. В правую часть (283) подставим выражение $(1 - \zeta)$ из (289). Тогда возникнет система из бесконечного числа простых дифференциальных уравнений. В каждом из них все члены сокращаются на общий множитель — синус соответствующего аргумента,— после чего в общем виде получается

$$\dot{x}_k + k^2\pi x_k - 2\pi y_k = \frac{4}{k}\left(1 - \cos \frac{\pi}{\gamma}\tau\right), \tag{290}$$

$$\dot{y}_k + k^2\pi y_k + 2\pi x_k = 0. \tag{291}$$

Существующие распределения скоростей муссона по вертикали в природных условиях таковы, что вполне репрезентативным является ветер на высоте $z = D/2$, или, что то же самое, $\zeta = {}^1/_2$. Из формул (285) и (286) видно, что на этой высоте обращаются в нуль все члены ряда, которым соответствуют четные значения $k = n/l$. В частности, обращаются в нуль x_2 и y_2. При нечетных значениях этого номера k множители при x_k и y_k равняются единице. Но контрольные вычисления показывают, что третьи члены ряда малы по сравнению с первыми. Поэтому для принципиального

исследования явления резонанса оказывается достаточным проанализировать резонансные кривые для первых членов в рядах, которыми выражаются составляющие потоков, применительно к номеру $k = 1$.

Строение правой части (290) позволяет разбить анализ на две стадии: 1) найти результат воздействия колебаний по закону косинуса, 2) определить статическое отклонение системы.

Вначале запишем

$$\ddot{x} + \pi x - 2\pi y = -4\cos \nu\tau, \tag{292}$$

$$\dot{y} + \pi y + 2\pi x = 0, \tag{293}$$

где для краткости принято $\nu = \pi/\gamma$. Интегралы уравнений (292) и (293) будем искать в форме

$$x = A\cos \nu\tau + B\sin \nu\tau, \tag{294}$$

$$y = C\sin \nu\tau + D\cos \nu\tau. \tag{295}$$

Подстановка выражений (294), (295) в (292), (293) приведет к четырем условиям, которые должны соблюдаться в произвольный момент времени: суммы всех членов, содержащих $\cos \nu\tau$, и суммы всех членов, содержащих $\sin \nu\tau$, обязаны равняться нулю. Определитель системы этих четырех уравнений с неизвестными A, B, C, D составляется так:

$$\Delta = \begin{vmatrix} -\nu & \pi & -2\pi & 0 \\ \pi & \nu & 0 & -2\pi \\ 2\pi & 0 & \nu & \pi \\ 0 & 2\pi & \pi & -\nu \end{vmatrix} = 25\pi^4 - 6\pi^2\nu^2 + \nu^4. \tag{296}$$

Это — общий знаменатель для выражений A, B, C, D. Числители этих выражений представятся в виде

$$\Delta_a = -4\pi\nu^2 - 20\pi^3, \tag{297}$$

$$\Delta_b = -4\nu^3 + 12\pi^2\nu, \tag{298}$$

$$\Delta_c = 16\pi^2\nu, \tag{299}$$

$$\Delta_d = -8\pi\nu^2 + 40\pi^3. \tag{300}$$

Записав выражения неизвестных, на основании (296) — (300) примем во внимание, что, согласно нашему обозначению, $\pi/\nu = \sin\varphi$. Тогда окажется, что

$$A = -\frac{4}{\pi}\frac{\sin^2\varphi + 5\sin^4\varphi}{25\sin^4\varphi - 6\sin^2\varphi + 1}, \tag{301}$$

$$B = -\frac{4}{\pi}\frac{\sin\varphi - 3\sin^3\varphi}{25\sin^4\varphi - 6\sin^2\varphi + 1}, \tag{302}$$

$$C = \frac{4}{\pi}\frac{4\sin^3\varphi}{25\sin^4\varphi - 6\sin^2\varphi + 1}, \tag{303}$$

$$D = -\frac{4}{\pi}\frac{2\sin^2\varphi - 10\sin^4\varphi}{25\sin^4\varphi - 6\sin^2\varphi + 1}. \tag{304}$$

Амплитуды колебаний нормальной и тангенциальной составляющих выразятся через эти коэффициенты

$$X = \sqrt{A^2 + B^2}, \tag{305}$$

$$Y = \sqrt{C^2 + D^2}. \tag{306}$$

Чтобы наглядней представить изменения X и Y в зависимости от широты φ, при построении диаграммы примем за единицу значение X_{90} на широте $\varphi = 90°$. Тогда получим две кривые, изображенные на рис. 404. Кривая *1* выражает изменение величины X/X_{90}, а кривая *2* — изменение величины Y/X_{90}.

Как видим, на широте 30° возникает резонанс, наиболее четко выраженный у нормальной составляющей скоростей. Вязкость воздушной среды свела амплитуды при резонансе к сравнительно умеренным значениям. Отметим, что в высоких широтах величина тангенциальной составляющей медленно падает и всюду превышает величину нормальной составляющей. Наоборот, в низких широтах тангенциальная составляющая падает особенно быстро и всюду ее превышает нормальная составляющая.

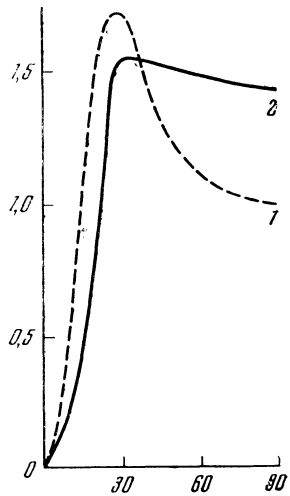


Рис. 404. Резонансные кривые для тангенциальной и нормальной составляющих скорости ветра

Остается найти так называемое статическое отклонение системы, вспомнив первый член в скобках правой части уравнения (290). По-прежнему ограничимся значением $k = 1$ в этом уравнении и будем искать в комплексной форме геометрическую сумму $x_{ст}$ и $y_{ст}$. Она определится из системы двух совместных уравнений

$$\dot{x} + \pi x - 2\pi y = 4, \tag{307}$$

$$\dot{y} + \pi y + 2\pi x = 0. \tag{308}$$

Умножим второе уравнение на мнимую единицу i и сложим с первым. Тогда, обозначив комплекс $x_{ст} + iy_{ст}$ буквой f, получим уравнение

$$\dot{f} + \pi f - i2\pi f = 4. \tag{309}$$

По условию статики $f = \text{const}$. Следовательно, $\dot{f} = 0$ и поэтому

$$f = \frac{4}{\pi}\frac{1}{1-2i} = \frac{4}{5\pi}(1+2i).$$

Отсюда определяются статические значения $x_{ст}$ и $y_{ст}$:

$$x_{ст} = \frac{4}{5\pi} = 0{,}255, \tag{310}$$

$$y_{ст} = \frac{8}{5\pi} = 0{,}510, \tag{311}$$

а также модуль вектора f

$$|f| = 0{,}57. \tag{312}$$

Учтя полученные статические значения, а также абсолютные величины амплитуд колебаний при резонансе (на широте 30°), определим так называемую динамическую восприимчивость колебательной системы при резонансе

$$\Lambda = \frac{\sqrt{(0{,}255+0{,}69)^2+(0{,}51+0{,}62)^2}}{0{,}57} = 2{,}6. \tag{313}$$

На рис. 405 воспроизведены климатологические карты изобар над Атлантическим океаном и над Африкой для января и июля [55]. Они показывают, как четко выражено летнее муссонное поле в охваченной части северного полушария и как мало зимний муссон изменяет барическое поле пассатной циркуляции. Сосредоточим внимание на том участке Атлантического океана, который лежит в квадрате между параллелями 20—30° с. ш. и меридианами 10—20° з. д. На июльской карте ближе всего сходятся изобары 1016 и

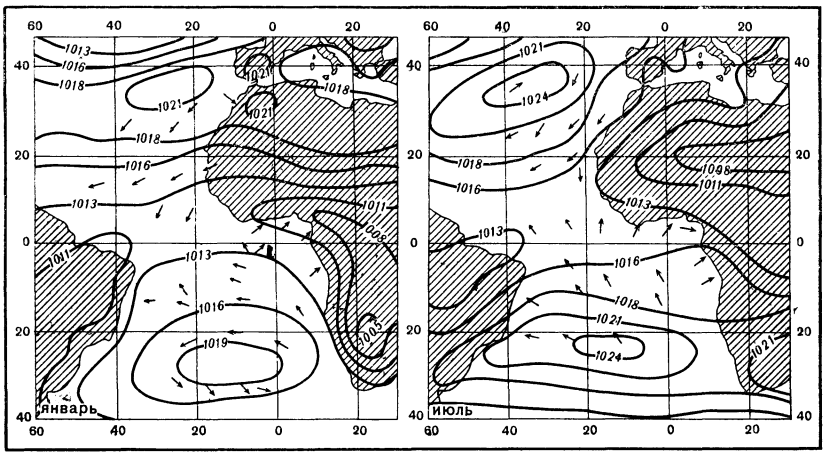


Рис. 405. Климатологические изобары для января и июля в Атлантике

1018 *мбар*, но даже здесь скорость геострофического ветра, вычисленная по таким изобарам, не превышает 4—5 *м/сек*. Между тем в действительности скорости ветра на этом участке океана оказываются значительно бóльшими.

На рис. 406 даны выкопировки с трех гидрометеорологических карт северной части Атлантического океана [58] для июля, августа и сентября. Тонкие линии соответствуют скоростям до 3 баллов включительно; двойные линии — скоростям от 4 до 6 баллов включительно; отрезки затушеванные — скоростям выше 7 баллов. Длина отрезков характеризует повторяемость соответствующих скоростей и направлений ветра в таком масштабе, что, например, в рассматриваемом квадрате океана повторяемость ветра от 4 до 6 баллов в каждом из двух отмеченных направлений соответственно равна 31 и 34 %.

Учтя приведенные материалы, мы получили для этого квадрата в июле среднюю скорость около 9 *м/сек*, т. е. удвоенную скорость геострофического ветра, вычисленного по климатологическим изобарам (рис. 405). Есть все основания полагать, что коэффициент динамической восприимчивости колебательной системы Λ, вычисленный ранее, может превышать теоретическое значение 2,6. В этом можно убедиться, сопоставляя карту рис. 405 для июля и условные обозначения скоростей ветра на карте рис. 406 в различных частях исследуемого района.

Карты рис. 406 показывают, что в согласии с теоретической схемой наблюдается преобладание тангенциальной составляющей ветра над нормальной — к северу от тропика Рака и преобладание нормальной составляющей над тангенциальной — южнее тропика.

В столь же хорошем соответствии с теоретической схемой исследуемый эффект виден на широтах выше 40° — у берегов Португалии. Несомненно, что именно этот эффект вызывает на Азовском море и у крымских берегов Черного моря летние северо-восточные штормы, исследованные в работе [56]: там скорости ветра, иногда достигающие 25—30 *м/сек*, тоже значительно превышают скорость, вычисленную применительно к геострофическому ветру. Дополнительным доказательством мощности исследуемого явления служит постоянное сгонное Канарское течение, которое и в глубину, и в ширину охватывает значительные массы вод у берегов Африки.

До сих пор мы исследовали лишь вынужденные колебания системы. В природных условиях на них могут налагаться собственные колебания системы, которые, вообще говоря, довольно скоро затухают. Интерференция

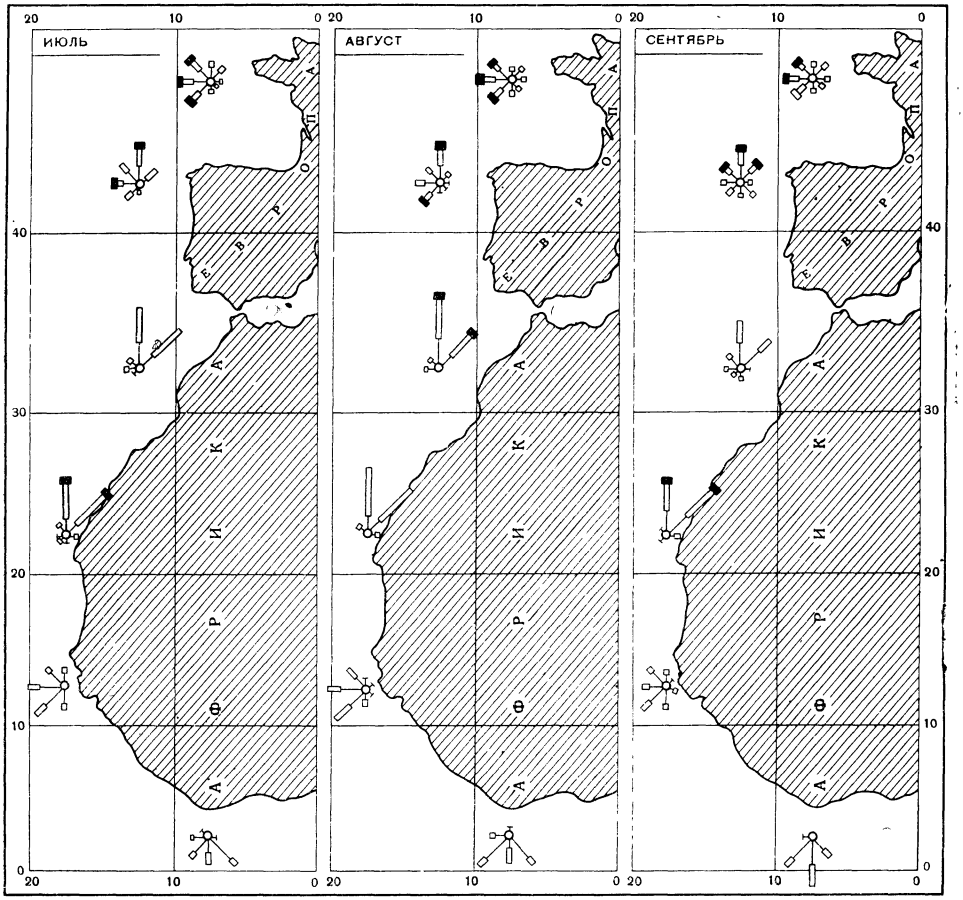


Рис. 406. Карты повторяемости ветра в океане

вынужденных и собственных колебаний, как известно, приводит к возникновению биений: амплитуды колебаний периодически изменяются между максимальными — в пучностях — и минимальными — в узлах.

Расстояние между соседними узлами N, выраженное в сутках, должно быть таким:

$$N = \frac{\omega}{\omega - 2\bar{\omega}} = \frac{1}{1 - 2\sin\varphi}. \qquad (314)$$

В табл. 21 приведены результаты вычислений по (314). Из таблицы видно, сколько суток должен длиться шторм между днями штиля на соответствующей широте.

Таблица 21

φ	N, *сутки*	φ	N, *сутки*
10°	1,5	35°	6,9
15	2,4	40	3,5
20	3,2	45	2,4
25	4,6	50	2,1
30	∞	55	1,2

Интересно, что вблизи широты 30° мощные колебания в муссонных потоках могут быть весьма продолжительными, вызывая здесь, у берегов Африки, сильный ветер, который направлен примерно вдоль береговой черты. Надолго может затягиваться и штиль, в чем мы убедились на «Седове». Столь же интересно, что в условиях Черного моря в широтной зоне от 40 до 45° данные нашей схемы — продолжительность штормов около 3 суток — находятся в отличном соответствии с многочисленными наблюдениями [56]. Приобретает физический смысл широко известная местная примета погоды у черноморских и азовских моряков: «если летний северо-восточный шторм не стих к концу третьего дня, то он продлится еще три дня; если не стих и тогда, то затянется еще на 3 дня». Совершенно очевидно, что народная мудрость уловила здесь изменения штормового ветра между узлами биений: посторонние влияния легче всего могут прекратить колебания системы именно в этих узлах, когда система обладает наименьшей энергией.

Явления, аналогичные описанным, должны протекать и в южном полушарии, в особенности близ м. Доброй Надежды и м. Игольного. Исследованный эффект должен решающим образом сказываться на течениях у берегов Африки, как в Атлантическом, так и в Индийском океанах. В частности, это относится к Канарскому течению — явно сгонному, очень мощному, поднимающему на поверхность океана холодные глубинные воды, а также к Бенгельскому течению и к течению м. Игольного в южном полушарии.

§ 24. Колебания температур поверхностной воды в циклических потоках Атлантики как результат воздействия материков на океан

В гл. I при анализе системы Гольфстрима и Северо-Атлантического течения говорилось о решающей роли барического рельефа и ветрового режима,— созданных при участии машин первого и второго рода,— в *колебаниях* дебита этих течений. В свою очередь дебит вод этой системы неизбежно связан с переносом тепла с юга, юго-запада на северо-восток, к берегам Европы и далее — в Полярный бассейн.

Но тепловая взаимосвязь между океаном и материками этим не ограничивается. В настоящее время есть все основания связывать изменения теплового режима Северного Атлантического океана (а значит, и воздействий его на климат соединенного материка Европы и Азии) еще с одним весьма важным источником колебаний — с циклическими течениями между 10 и 40° с. ш. [59]. На рис. 407, *а* представлена первая схема этих циклов, полученная П. П. Лазаревым и Б. В. Дерягиным [60] на простой модели. Рис. 407, *б* воспроизводит поле течений в той же области, вычисленное А. С. Саркисяном [61] по заданному полю атмосферного давления (и следовательно, по заданному полю ветра). Рис. 407, *в* дает представление о потоках в этой области на основании позже вышедшей работы Г. Стоммела [62]. Совершенно очевидно, что вся эта система течений создалась под воздействием *материков*, которые здесь оконтуривают очень тесно область Мирового океана. Она гораздо меньше, чем та область, которая является ее антиподом на Тихом океане. Достаточно взглянуть на карту материкового и океанического полушарий, по Ю. М. Шокальскому, которая была помещена на рис. 336 (см. § 7), чтобы представить неизбежные воздействия со стороны материков Старого и Нового Света на эту область Атлантического океана.

Можно попытаться дать объективную характеристику различий между температурными условиями на поверхности океана в соответствующих областях Мирового океана: сопоставить температуры поверхностной воды в исследуемом поясе Северной Атлантики в августе с февральскими температурами поверхностной воды в Тихом океане на тех же (но южных) широтах,

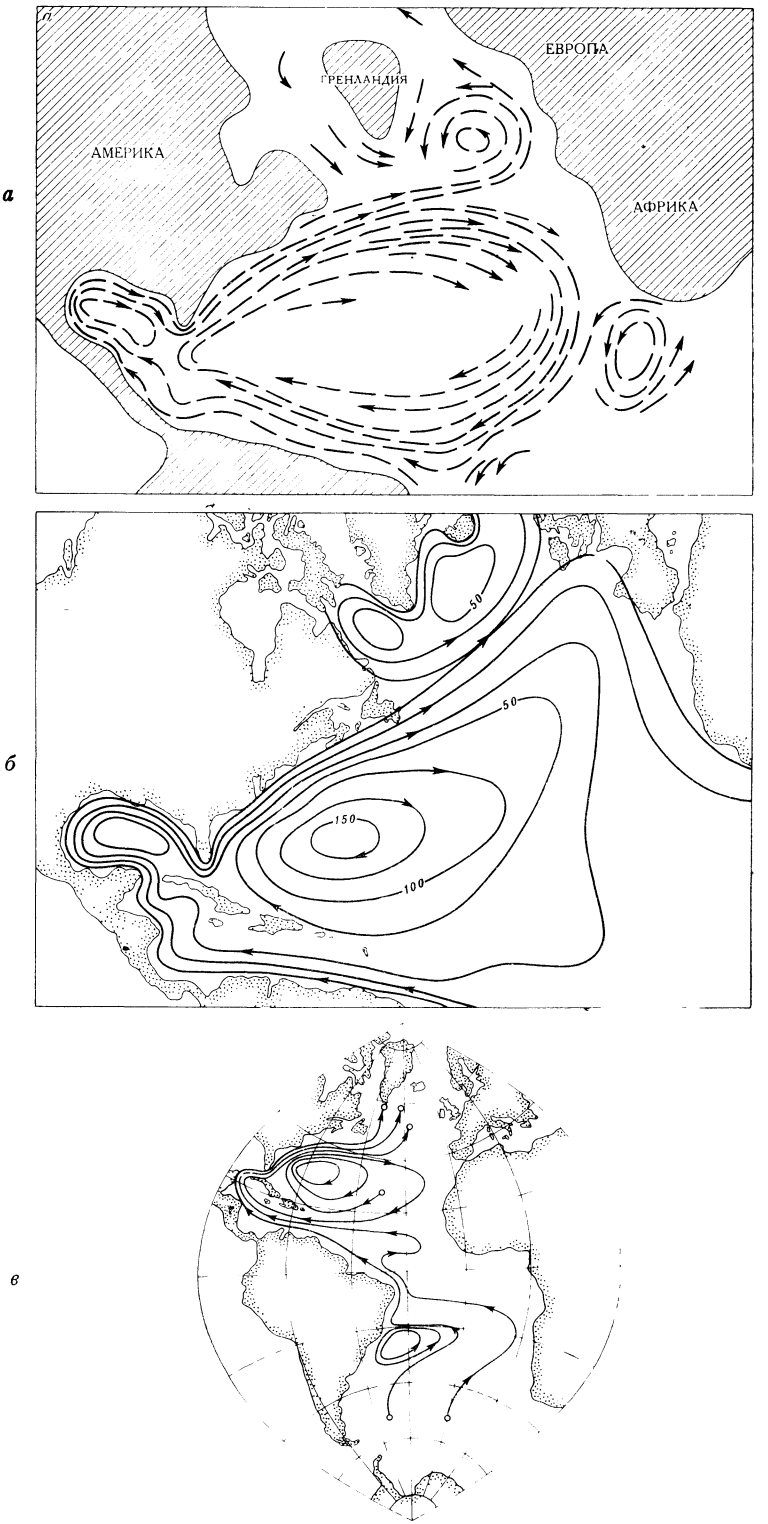


Рис. 407. Схемы циклических потоков в Атлантическом океане

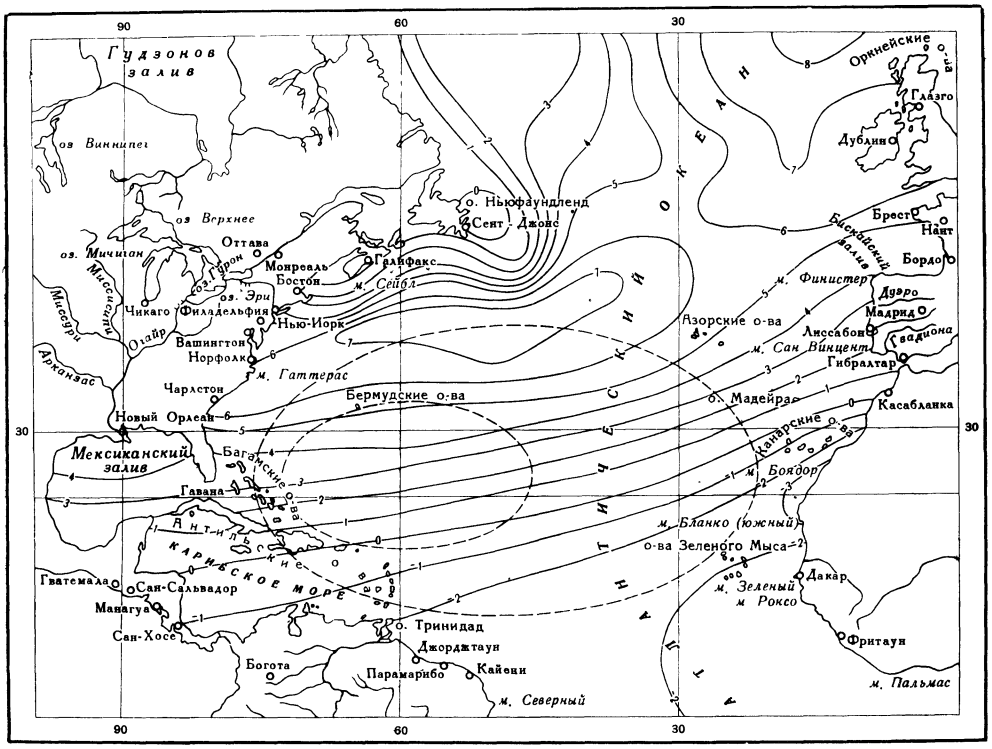


Рис. 408. Изаномалы поверхностной воды для июля

вдоль меридиана, который достаточно удален от материков [63]. На рис. 336 он отмечен утолщенным отрезком дуги между точками m и n.

Таким путем В. В. Шулейкин [59] получил карты *температурных изаномал* для северного лета (рис. 408). Аналогичное сопоставление февральских температур на поверхности воды в исследуемой области Атлантики с августовскими на «чисто океаническом» меридиане в Южном Тихом океане дало карту рис. 409. Это — карта зимних изаномал.

Цифры со знаком плюс, проставленные при изаномалах, показывают, на сколько градусов температура воды в исследуемой точке поверхности Атлантического океана превышает температуру в «чисто океанических» условиях (в соответствующем сезоне), а цифры со знаком минус отмечают соответствующее понижение температуры против «чисто океанической» нормы.

Характерно *косое* расположение изаномал относительно параллелей. И на рис. 408, и на рис. 409 нулевая линия проходит почти одинаково: от о. Гаити примерно к Гибралтарскому проливу. В точках этой кривой температура поверхностной воды в исследуемой области Атлантики соответствует «чисто океанической» норме. Подобное расположение температурных изаномал *в основном* вызвано влиянием замкнутых циклических потоков на температурное поле, как это было показано в [59]. Исследования того же автора о деятельном слое атмосферы, изложенные в настоящей главе, позволяют записать применительно к *водам* поверхностного слоя океана гипотетическое уравнение, которое всегда давало хорошие результаты:

$$\frac{d\vartheta}{dt} = k(\vartheta_1 - \vartheta). \qquad (315)$$

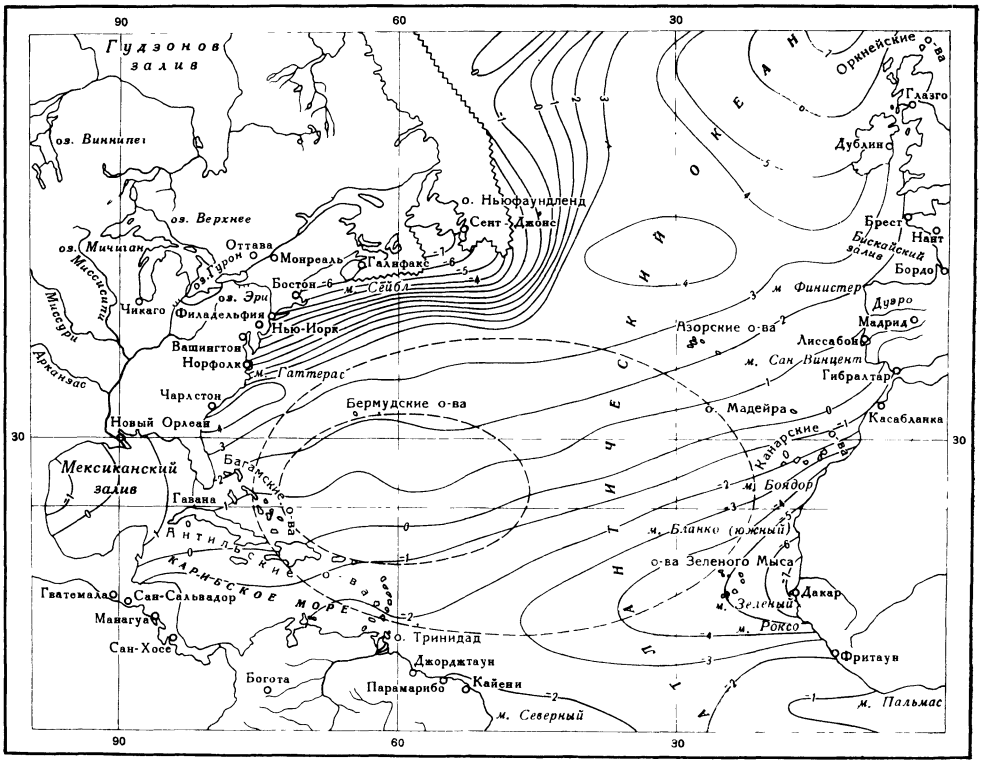


Рис. 409. Изаномалы поверхностной воды для января

Здесь $\partial\vartheta/\partial t$ — скорость изменения температуры поверхностной воды при следовании по замкнутой траектории; ϑ_1 — температура поверхностной воды, которая установилась бы в соответствующей точке при чисто океанических условиях; k — константа, характеризующая теплообмен с пространством *над* и с пространством *под* поверхностью океана.

В простейшем случае, если бы ϑ_1 изменялось на пути по гармоническому закону

$$\vartheta_1 = \Theta_0 + \Theta_1 \sin \omega t; \quad \omega = \frac{2\pi}{T},$$

где скорость движения пока принята постоянной, а T — период обхода цикла, уравнение (315) следовало бы переписать в виде

$$\frac{d\vartheta}{dt} + k\vartheta = k(\Theta_0 + \Theta_1 \sin \omega t). \tag{316}$$

Интеграл этого уравнения выразил бы закон изменения «наблюдаемой» поверхностной температуры в различных точках пути:

$$\vartheta = \Theta_0 + e^{-kt}\left(\vartheta_0 + \frac{k\omega\Theta_1}{k^2+\omega^2}\right) + \frac{k\Theta_1}{\sqrt{k^2+\omega^2}} \sin(\omega t - \gamma), \tag{317}$$

причем $\gamma = \operatorname{arctg} \omega/k$. Второй член в (317) описывает процесс адаптации температур воды к существующим условиям. После его завершения температура воды на траектории, обладающей формой окружности, менялась бы по простому синусоидальному закону, причем колебания были бы сдвинуты по фазе на угол γ относительно изменений ϑ_1 во время цикла. Найдя разности

температур $\vartheta - \vartheta_1$, мы увидали бы, что температурные изаномалы представляют собой прямые, наклоненные под углом $(\pi/2 - \gamma)$ к оси X, которая в данном случае заменяет собой географическую параллель.

В работе [59] задача была исследована и во втором приближении: было учтено, что в действительности частицы поверхностной воды, в рассматриваемой области Атлантического океана, движутся не по окружностям, а по кривым, которые можно аппроксимировать *эллипсами* с общим фокусом в точке 25° с. ш. 70° з. д. , с большими осями, направленными по параллели $\varphi = 25°$ с. ш. На рис. 408 и 409 нанесены по две такие эллиптические траектории. Внешняя траектория представляет собой эллипс с центром на меридиане 49° з. д. с большой осью длиной 5200 *км* и малой осью длиной 3200 *км*. Как известно, циркуляция здесь — антициклоническая. Начало отсчета пути принято в восточной вершине. Длина пути частиц по внешнему эллипсу составляет 13 500 *км*.

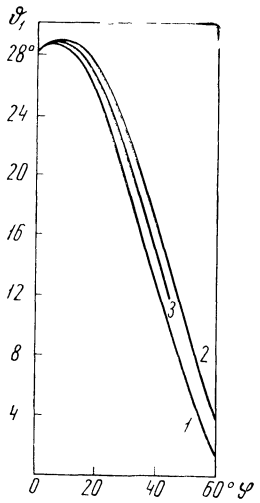


Рис. 410. Распределение температур воды вдоль меридиана в «чисто океанических» условиях

На основании [62] считается, что скорость течения близ западной вершины составляет 1,7 *м/сек*, а близ восточной вершины— 0,2 *м/сек*. Во всех промежуточных точках пути скорость принята обратно пропорциональной радиус-векторам, проведенным из западного фокуса. При таких условиях время обхода полного цикла составляет 14,2 месяца. Располагая траекторией, нанесенной на карту, можно определить сроки поступления какого-то элементарного объема поверхностной воды на ту или иную широту. С другой стороны, на основании карт листов № 16 и 17 Морского атласа [63] было найдено распределение температур поверхностной воды вдоль меридиана, в «чисто океанических» условиях, как в летнее, так и в зимнее время. Это распределение представлено на рис. 410. Здесь кривая *1* соответствует февралю на севере, а кривая *2* — августу на севере. Для решения задачи во втором приближении пришлось *осреднить* эти данные, проведя между кривыми *1* и *2* кривую *3*, которая выражает осредненное за год распределение температур поверхностной воды вдоль меридиана в «чисто океанических» условиях. Именно таким считалось распределение температур ϑ_1 в гипотетическом уравнении (315).

Руководствуясь кривой *3* (рис. 410) и упомянутыми изменениями скоростей потока в различных точках траектории частиц, цитированный автор построил на рис. 411 кривую *1*, которая показывает, по какому закону изменяется во времени «чисто океаническая» температура ϑ_1 при движении вод по внешней эллиптической траектории. Нетрудно понять, что пологий подъем кривой вызван уменьшением скоростей потока на востоке, а крутой спад— увеличением скоростей потока на западе.

Разложение функции описываемой кривой 1 в ряд Фурье показало, что этот ряд содержит только постоянный член и члены с синусами:

$$\vartheta_1 = \Theta_0 + \sum_{n=1}^{n=\infty} \Theta_n \sin n\omega t. \qquad (318)$$

В соответствии с этим интеграл гипотетического уравнения (315) теперь можно представить в виде

$$\vartheta = \Theta_0 + \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{k\Theta_n}{\sqrt{k^2 + n^2\omega^2}} \sin(n\omega t - \gamma_n). \qquad (319)$$

Кривая, вычисленная по (319), описывающая временно́й ход «наблюдаемых» температур поверхностной воды, отмечена на рис. 411 цифрой *2*. Разность ординат кривой *2* и кривой *1* на этом рисунке выражает теоретическое значение температурной аномалии в той точке, в которой оказывается исследуемый элемент объема поверхностной воды через соответствующий срок после прохождения восточной вершины внешнего эллипса.

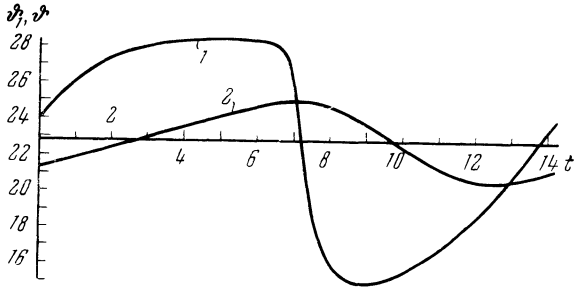


Рис. 411. Чисто океанические стандартные температуры для разных точек замкнутой линии тока. Вычисленные температуры поверхностной воды

На рис. 412 отдельно вычерчены две траектории поверхностных вод и на них нанесены теоретические значения температурных аномалий, полученные посредством диаграммы рис. 411 и аналогичной, построенной для малого эллипса. С достаточным приближением можно изобразить теоретические изаномалы, соединив прямыми линиями точки внешнего эллипса, при которых проставлены одинаковые цифры.

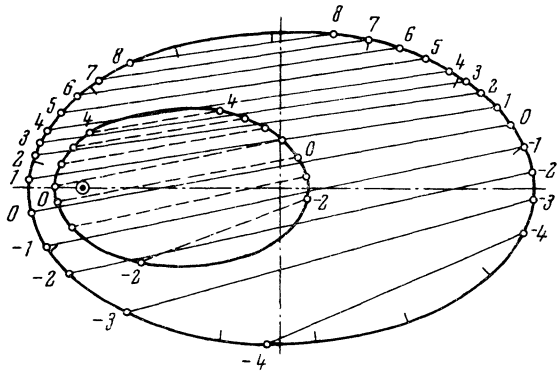


Рис. 412. Две замкнутые траектории поверхностных частиц

Сопоставление теоретической схемы рис. 412 с картами изаномал, приведенными на рис. 408 и 409, показывает, что поле изаномал выше нулевой линии на рис. 412 близко к летней карте; поле изаномал ниже нулевой линии на рис. 412 близко к зимней карте. Нулевая линия на теоретической схеме проходит приблизительно так же, как в действительности: если бы мы в соответствующем масштабе наложили теоретическую диаграмму на карты рис. 408 и 409, совместив эллипсы, то увидали бы, что теоретическая нулевая линия простирается от о. Куба до Гибралтарского пролива. Таковы результаты анализа во втором приближении.

Третье приближение также получено В. В. Шулейкиным [64]. На этот раз было учтено *не* осредненное за год, а действительное распределение тем-

пературы поверхностной воды в «чисто океанических» условиях, в различных точках траектории вод, в различные месяцы,— когда исследуемый элемент объема приходит в ту или иную точку. На листах № 16 и 17 Морского атласа представлены не только уже упоминавшиеся карты температур поверхности вод Мирового океана в феврале и в августе, но также и в мае, и в ноябре. Принято считать, что в феврале и в августе температуры воды проходят соответственно через минимум и максимум (в северном полушарии), а в мае и в ноябре — через какие-то средние значения (вне тропиков). Таковы опорные точки на кривых распределения температур в различные времена года. Для получения промежуточных точек с удовлетворительным приближением был проанализирован ход кривых, описывающих сезонные изменения солнечной радиации на различных широтах, от 0 до 50°, по работе [65], которая легла в основание рис. 236 (см. гл. IV).

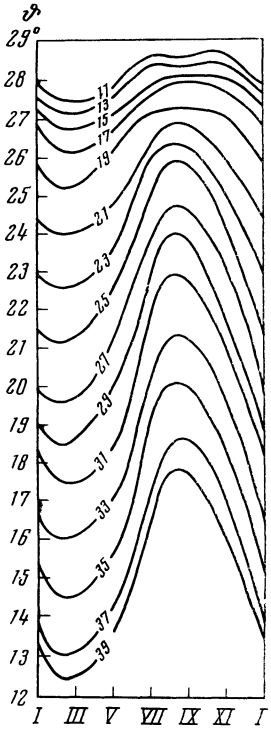


Рис. 413. Предполагаемые изменения температур поверхностной воды в «чисто океанических» условиях на различных широтах

В соответствии с этим считалось, что температурные кривые для пояса от экватора примерно до широты 13° должны обладать двумя максимумами и небольшим вторичным минимумом между ними; но эти участки кривых пришлось сдвинуть от момента летнего солнцестояния в сторону зимы. Считалось также, что в средних широтах максимум температуры поверхностной воды должен быть смещен во времени — с момента летнего солнцестояния к концу лета. На основании таких соображений было построено семейство кривых на рис. 413. Это — предполагаемые изменения температур ϑ_1. Широты отмечены при каждой из кривых. Верхняя кривая *11* может характеризовать «чисто океанический» режим на широте самой южной точки внешнего эллипса. Нижняя кривая соответствует самой северной точке траектории [64].

На основании приблизительно известных скоростей течений в различных точках внешнего эллипса можно было считать, что путь вдоль этой траектории, составляющий примерно 13,5 тыс.*км*, частицы воды проходят за 14,2 месяца. Но при существующих сведениях еще нельзя ручаться за третий десятичный знак в этих цифрах. С другой стороны, от него зависит период *биений* в циклах, поскольку время обхода общего (западного) фокуса отличается от 12 месяцев — от периода сезонных колебаний температуры ϑ_1.

Поэтому впредь до уточнения параметров системы время обхода было принято равным просто 14 месяцам, чтобы не вызывать неоправданных осложнений в приближенных выкладках. Но даже и при таком — округленном — значении периода цикла переход от линейных координат какого-то элементарного объема поверхностной воды на внешней траектории к координатам временны́м создал кривую, значительно более сложную, чем изображенная на рис. (411) (кривая *1*).

Для построения новой — уточненной — кривой надо прежде всего графически представить непрерывное изменение широты тех точек на внешней траектории, в которых оказывается исследуемый элементарный объем воды через тот или иной срок после начала отсчета времени. Выберем это начало отсчета времени и начало отсчета пути таким образом, чтобы исследуемый

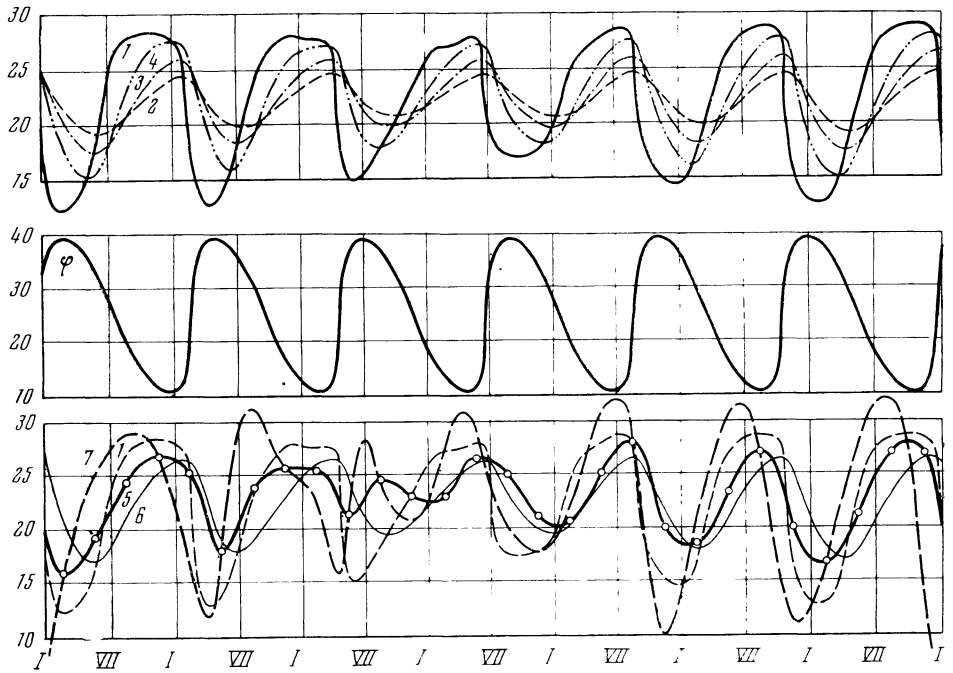


Рис. 414. Изменения различных характеристик в циклических потоках за семь лет

элемент объема оказался в самой северной точке траектории в момент предполагаемого минимума ϑ_1, т. е. 15 февраля. Тогда получим зависимость широты места исследуемого объема воды на внешней траектории от времени t, представленную в среднем ярусе на рис. 414 кривой, которая отмечена φ. Период биений, естественно, оказался равным семи годам: за такой срок частицы поверхностной воды описывают по внешнему эллипсу ровно шесть циклов. В частности, 15 февраля восьмого года частицы окажутся в той же (самой северной) точке траектории, в какой они были 15 февраля первого года. Слева от диаграммы, в среднем ярусе, проставлены значения φ.

По кривой φ (рис. 414) были определены моменты времени, соответствующие вступлению исследуемых частиц на каждую из широт, для которых построены кривые на этом рисунке, в каждый год из семилетия. Зная же широту точки и соответствующий момент времени в году, легко было построить искомую кривую зависимости температуры ϑ_1 («чисто океанической») от времени t.

Ординаты, вычерченные в среднем ярусе рис. 414, были продолжены вверх, и в верхнем ярусе была нанесена сплошная кривая *1*, выражающая закон изменения ϑ_1 при следовании частиц по внешней траектории. Эта кривая значительно сложней, чем кривая *1* на рис. 411. Разумеется, интегрирование уравнения (315) теперь было нецелесообразно производить путем предварительного разложения функции в ряд Фурье: естественно интегрировать осложненное уравнение (315) на электронных машинах. Такое интегрирование было выполнено в Вычислительном центре Академии наук СССР применительно к трем различным числовым значениям параметра k: 0,143; 0,25 и 0,5.

В верхнем ярусе рис. 414 пунктирные кривые представляют результаты интегрирования: кривая *2* отвечает первому значению k, *3* — второму, *4* — третьему. Это — теоретические кривые, которые показывают, как при заданном k должна была бы меняться фактическая температура ϑ поверхно-

стной воды при ее движении по внешнему эллипсу. Значения температур проставлены слева от диаграммы.

Сравним полученные результаты с материалами Морского атласа, характеризующими температурное поле в исследуемой области Атлантического океана. Для этого прежде всего по кривой φ (рис. 414) определим широты тех точек, до которых доходят частицы 15 февраля, 15 мая, 15 августа и 15 ноября каждого года, при условии, что они оказывались в самой северной точке внешней траектории 15 февраля первого года.

Считалось, что к 15 числу соответствующего месяца приурочены среднемесячные данные карт на листах № 16 и 17 атласа. На этих четырех картах была намечена внешняя эллиптическая траектория частиц и по найденным широтам последовательных точек было определено, какова была температура в 28 исследуемых случаях,— по четыре срока в каждом из семи лет. Эти 28 значений температур нанесены на координатную сетку в нижнем ярусе рис. 414, куда продолжены ординаты среднего яруса. Значения температур проставлены слева от диаграммы. Через полученные 28 точек проведена сплошная кривая *5*, которая имеет тот же физический смысл, как три интегральные кривые *2*, *3*, *4* в верхнем ярусе, отвечавшие различным значениям k в дифференциальном уравнении (315). Здесь кривая *5* отражает сведения, которыми мы пока располагаем на основании существующих материалов Морского атласа.

Конечно, нельзя говорить о какой-либо особой надежности, точности климатологических материалов, добытых в совсем немногочисленных экспедициях, пересекавших исследуемую область в разные времена года. Но для выявления природы изучаемых явлений необходимо использовать даже этот, не вполне совершенный материал.

Интерполяция между тремя пунктирными кривыми в верхнем ярусе рис. 414 показала, что наименьшие разногласия с эмпирической кривой *5* получаются, если выбрать значение $k = 0{,}3$. Этому значению соответствует тонкая сплошная кривая *6* в нижнем ярусе рис. 414. Амплитуды температурных колебаний, описываемые этой кривой, приблизительно такие же, как и амплитуды колебаний на эмпирической кривой *5*. Фазы колебаний не совпадают: по материалам использованных карт, колебания ϑ опережают теоретически вычисленные примерно на два месяца. Кроме того, заметно непредвиденное осложнение эмпирической кривой среди лета третьего года пути по орбите. Иными словами, действительная температура поверхностной воды в области замкнутых циклических течений Атлантического океана оказывается в летнее время выше теоретической, а в зимнее время — ниже теоретически вычисленной.

Именно по этой причине подобные разногласия не проявились при решении задачи во втором приближении: там за основу была принята кривая осредненных за год температур ϑ_1, характеризующих «чисто океанический» режим на различных широтах. Эта кривая *3* была проведена на рис. 410 посредине между февральской и августовской. По той же причине теоретические изаномалы на рис. 412 оказались очень близкими к действительно найденным на картах рис. 408 и 409, — либо в области над нулевой линией (летом), либо под нулевой линией (зимой).

Те разногласия между теорией и наблюдениями в океане, которые выявились при более детальном анализе температурного поля (в третьем приближении), указывают, что необходимо учесть какие-то дополнительные тепловые явления, пока оставшиеся в стороне и непосредственно не связанные с самими циклическими потоками.

Эти новые стороны тепловых процессов невозможно обнаружить путем простого сопоставления кривых *5* и *6* рис. 414. Необходимо на основании эмпирической кривой *5* построить новую кривую, которая послужит аналогом кривой ϑ_1, отмеченной номером *1* в верхнем ярусе рис. 414. Под тем же но-

мером эта прежняя кривая перенесена в нижний ярус этого рисунка. Тут она вычерчена тонким пунктиром и соответствует интегральной кривой при прежнем значении $k = 0{,}3$.

Новая кривая $\vartheta_e(t)$ может быть вычислена по заданной интегральной кривой *5*, выражающей эмпирическую зависимость температуры ϑ от t. Для вычисления было записано уравнение, совершенно аналогичное дифференциальному уравнению (315).

$$\vartheta_e = \vartheta + \frac{1}{k}\frac{d\vartheta}{dt}. \qquad (320)$$

По-прежнему было принято $k = 0{,}3$. Вычисления по уравнению (320) дали кривую ϑ_e (t), которая вычерчена толстым пунктиром в нижнем ярусе

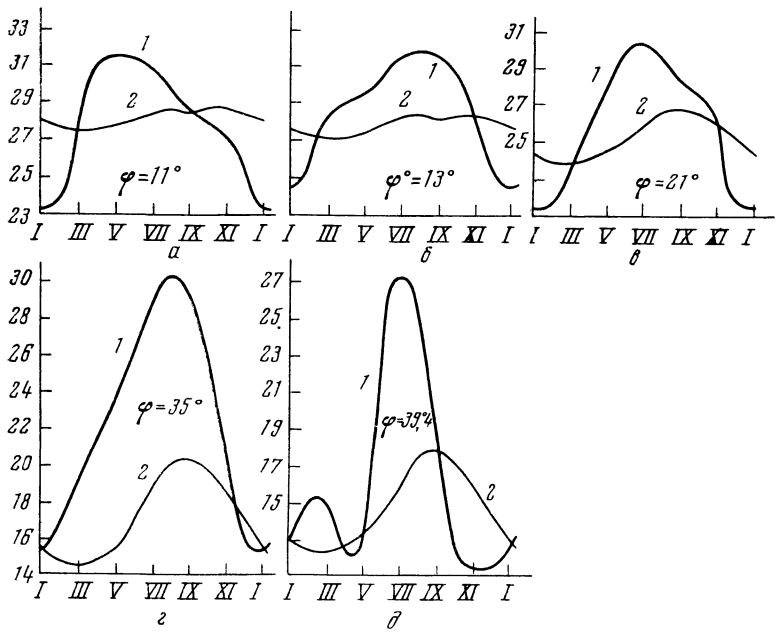


Рис. 415. Годовой ход температур поверхностной воды на различных широтах в океане и в «изолированных» морях

рис. 414 и обозначена цифрой *7*. Эта кривая выражает изменения гипотетической температуры, которая имела бы место в каждой точке орбиты в данное время года, если бы отсутствовал межширотный перенос тепла в исследуемых циклических потоках. Как видим, кривая *7* отличается от исходной кривой *1*, построенной на основании анализа условий «чисто океанической» области, вдали от материков, на Тихом океане. Значит, эти условия не соблюдались бы в Атлантике, в поясе между 10 и 40° с. ш., если бы там отсутствовали циклические потоки.

Посмотрим, каковы же были бы условия в исследуемой области Северной Атлантики, если бы не существовало межширотного адвективного переноса тепла?

Кривая φ (рис. 414) по-прежнему позволяет найти сроки поступления вод (по внешней эллиптической траектории) на ту или иную широту. Они — различные в разные годы, представленные на рис. 414. Найдем такие сроки, например для самой южной точки траектории, на широте 10,6° С, т. е. приблизительно 11° С, и засечем соответствующие точки на кривой *7*. Тогда окажется возможным построить на рис. 415, *а* толстую кривую *1*, которая по-новому осветит гипотетический температурный режим на широте 11° С *без*

влияния переноса тепла циклическими потоками. Для сравнения там же вычерчена еще тонкая кривая *2*, перенесенная сюда из семейства рис. 413. Совершенно так же можно определить новые гипотетические температуры ϑ_e на других широтах, в других точках внешней траектории. На рис. 415, *б*, *в*, *г*, *д* соответственно представлены результаты определения этих значений для точек восточной половины траектории, лежащих на широтах 13, 21, 35, 39,4° С. Толстые кривые *1* везде выражают тут годовой ход поверхностной температуры в соответствующих точках Северного Атлантического океана — тот годовой ход, который существовал бы при отсутствии межширотного переноса тепла циклическими потоками, по новой трактовке. Для сравнения всюду вычерчены тонкие кривые *2*, взятые (в старой трактовке) с рис. 413.

Отчетливо видно, что новые гипотетические температуры поверхности Атлантического океана, полученные применительно к такому условию, *в летнюю пору выше* тех, которые мы считали «чисто океаническими» на основании карт Тихого океана. И это — не случайно. Ведь выбранная область «океанического полушария» на рис. 336 свободно простирается до самых берегов Антарктиды, и хотя «моделирование океанических условий» было ограничено широтой 60° Ю, т. е. на большом расстоянии от антарктических льдов, но весь тепловой режим Тихого океана в южном полушарии, до самого экватора, должен испытывать мощные влияния *холодных потоков, которые тут идут понизу*, из антарктического пояса в тропический. В исследуемой области Атлантического океана почти отсутствует аналогичное влияние арктических глубинных вод: во-первых, благодаря узости Дэвисова пролива и Датского пролива, а также малости расстояний между Исландией и Шотландией; во-вторых,— и это главное — благодаря наличию Гренландско-Исландского порога, Фарерского порога, порога Уайвилл-Томсона и таких преград, как Исландия, Фарерские о-ва. Здесь всюду глубины океана — не более 600 *м*. Все это препятствует доступу наиболее холодных глубинных вод из Арктики в Северную Атлантику. О роли поверхностных холодных течений будет сказано далее.

Очень важно отметить, что, несмотря на неизбежную грубость изложенных схематизированных выкладок, максимальные возможные температуры поверхностных вод в летнее время оказались вполне правдоподобными. Например, максимальная возможная температура поверхностной воды в идеализированном океане получилась равной 32° на широте 13° С. В действительности подобная температура наблюдается на поверхности моря даже на широте 28° С — в Персидском заливе (на основании августовской карты листа № 17 Морского атласа). Максимальная температура около 30° по теоретической схеме оказалась на широте 21° С, и на самом деле на такой широте наблюдается подобная максимальная температура поверхностной воды — в Красном море. На широте 39,4° С вычисленная максимальная температура равняется около 27°. В действительности такие температурные условия наблюдаются именно на этой широте в южной части Каспийского моря (см. ту же карту атласа).

Совсем не случайно результаты вычислений Шулейкина совпали с результатами измерений именно на упомянутых морях: там заведомо отсутствует влияние глубинных холодных потоков из высокоширотных поясов и, разумеется, влияние циклических потоков Атлантики.

Конечно, нельзя говорить о какой-либо точности деталей на кривых рис. 415. В частности, едва ли имеет особый смысл сдвиг температурного максимума с конца лета на июль. В то же время на этом рисунке совершенно правильно выступает все большее и большее различие между максимальными ординатами кривых *1* и *2* по мере продвижения от тропиков в высокие широты: ведь именно в высоких широтах Тихого океана (откуда взята кривая *1*) все больше и больше сказывается влияние глубинных холодных вод антарктического происхождения — потоков, подобных которым нельзя встре-

тить в исследуемой области Атлантического океана. Даже несомненно преувеличенное различие самих максимальных ординат кривых *2* и *1* на рис. 415, *г* и 415, *д* не является парадоксальным: оно составляет около 10°, а на одном и том же меридиане 30° З в пределах одного и того же — Атлантического — океана максимальная летняя температура поверхностной воды на широте 60° С оказывается на 11° выше, чем максимальная летняя температура поверхностной воды на широте 60° Ю (по данным цитированных карт).

Проанализируем теперь *зимнюю картину* процессов, которая позволяет охарактеризовать еще одну дополнительную черту. Отметим, что на сводной диаграмме рис. 414, в нижнем ярусе, зимний минимум кривой *7*, падающий до температуры менее 6°, особо резко выражен там, где исследуемые водные массы проходят по своей внешней траектории в непосредственном соседстве с холодными встречными потоками, поступающими из Лабрадорского течения, вдоль берегов Северной Америки. Естественно полагать, что при отсутствии поступления тепла в циклическом течении — из тропиков — температура поверхностной воды тут действительно была бы очень низкая.

К сожалению, на основании существующих материалов еще невозможно произвести сколько-нибудь надежные вычисления температуры поверхностной воды в этой очень интересной (западной) половине траектории: скорости течений здесь весьма велики, соответствующие части кривой φ на среднем ярусе рис. 414 поднимаются очень круто, а неизбежная неточность в принятой скорости течения должна приводить к грубым погрешностям. Сейчас можно лишь утверждать, что именно влияние холодных вод, поступающих из Дэвисова и из Датского проливов, вызывает понижение температуры поверхностных вод в исследуемой области Атлантического океана. В тропиках совершенно аналогичную роль играют холодные воды Канарского течения: это они повинны в сильно пониженных значениях ординат у кривой *1* на рис. 415 в зимнее время.

Обзор сложных термогидродинамических явлений, связанных с циклическими потоками в Атлантике, показал, что любое нарушение режима этих потоков, в особенности изменение скоростей, способно *расстроить* систему, изменить период *биений*, обусловленных различием между периодом обхода всей траектории и периодом сезонных колебаний температур воды. Несомненно, должны проявляться изменения температурного режима в «узлах» и в «пучностях» при этих биениях, и они действительно намечаются, например, в работе Е. Г. Архиповой [66]. Другие исследования — пока еще не систематизированные — также указывают на колебания температур в изученной области Атлантического океана с периодами около семи лет (в полном соответствии со схемой, описанной выше). С другой стороны, даже небольшие изменения температурного поля в Северной Атлантике нередко приводят к значительным изменениям атмосферной циркуляции между Атлантическим океаном и соединенным материком Европы и Азии и к неизбежным изменениям климата и погоды на этих материках.

§ 25. Еще одна возможная причина изменения климата в наше время

В § 2 были даны некоторые числовые характеристики резкого изменения климата нашей страны примерно после 1932 г. Совершенно очевидно, что было бы бессмысленно относить это изменение за счет повышения притока солнечной радиации, якобы наступившего после последнего ледникового периода: масштабы времени здесь совсем иные, да и сама-то солнечная радиация после ледникового периода, ближайшего к нам, не могла возрастать, а, вероятно, падала, как мы увидим в конце § 26.

Но этого мало. В настоящее время актинометрические измерения и вычисления так называемой солнечной постоянной поставлены в некоторых солнечных обсерваториях на достаточную высоту. И вот на основе этих измерений и вычислений мы должны раз и навсегда принять во внимание, что солнечная постоянная практически действительно не меняется во времени (за истекшие сроки наблюдений): она колеблется не более чем на 3% своей средней величины.

Следовательно, попытки объяснить наблюдаемое изменение климата в нашу эпоху соответствующим повышением солнечной постоянной надо окончательно отбросить как несостоятельные.

Но, быть может, причина изменения климата кроется в изменении толщины озонного слоя, создающего вокруг Земли своего рода защиту от обратной тепловой радиации в межпланетное пространство? Подобное предположение, между прочим, высказывалось некоторыми, склонными твердо верить в его справедливость. Однако другие исследователи категорически отвергают эту гипотезу. Изменения мощности озонного слоя действительно имеют место, но они происходят в разных точках атмосферы в противоположных направлениях и не проявляют никакой определенной тенденции, сколько-нибудь напоминающей тенденцию климатических изменений нашего времени.

Итак, ни изменения притока солнечной энергии, ни изменения ее расхода в межпланетное пространство не могут идти в расчет при обсуждении причин интересующего нас изменения климата.

Необходимо, следовательно, направить все силы исследователей на то, чтобы найти корни этих изменений в пределах самой нашей планеты, в пределах ее жидкой и газовой (а может быть, отчасти и твердой) оболочек.

Всю эту систему, в целом взятую, следует рассматривать как условно консервативную, находящуюся в равновесном состоянии с падающей на нее солнечной энергией, практически постоянной во времени. Но в таком случае повышение температуры, наблюдаемое в одной среде, в некоторой ее точке, неминуемо должно происходить одновременно с понижением температуры в другой точке среды или даже в другой среде, связанной с первой в тепловом отношении.

Совершенно естественным является допущение, сделанное Шулейкиным, что система океан — атмосфера — материк представляет собой систему автоколебательную. По-видимому, мы сейчас являемся свидетелями чрезвычайно интересной фазы тепловых колебаний в этой системе.

Как происходят подобные колебания?

Исчерпывающего ответа на этот вопрос пока еще невозможно дать. Можно только начать поиски тех своеобразных тепловых «маятников», которые спрятаны где-то глубоко под килями наших кораблей и высоко над крышами наших городов.

В качестве иллюстрации к таким поискам остановимся на анализе простой колебательной системы, исследованной В. В. Шулейкиным и Н. Д. Ершовой, системы, настроенной на сравнительно короткий период и локализующейся главным образом в гидросфере (что сильно упрощает ее изучение) [67].

Уже в самом начале нынешнего века Ф. Нансен, Г. Шотт и другие обращали внимание на явно выраженные периодические изменения температуры поверхностной воды в северной части Атлантического океана. В сущности, рассматривая эти колебания, можно подметить несколько периодов, выраженных более или менее ясно.

Отдельные авторы склонны думать, что корень этих колебаний лежит где-то в истоках Гольфстрима.

Однако есть много оснований полагать, что некоторые (если не большинство) температурные волны в океане движутся в противоположном направлении: из арктических морей к югу, в Атлантику. Чтобы убедиться в этом,

достаточно взглянуть хотя бы на рис. 416, на котором воспроизведена диаграмма, составленная Ершовой для промежутка времени с 1921 по 1930 г. Ломаные линии показывают, как менялась температура воздуха над морем из года в год. К сожалению, подобных наблюдений над температурой воды не было, и автору пришлось ограничиться материалом, касающимся воздуха. Но, вообще говоря, в мористых частях океана различие между колебаниями температур воздуха и воды не бывает слишком большим.

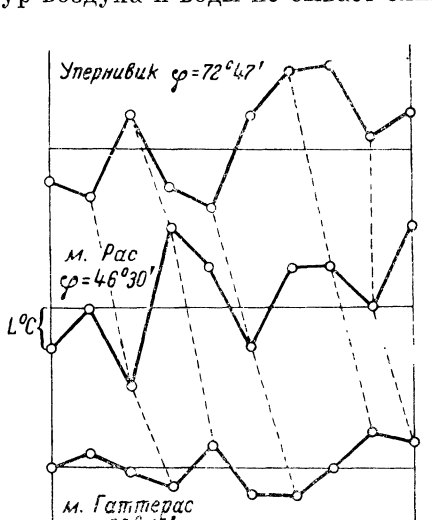


Рис. 416. Колебания температур в Северной Атлантике

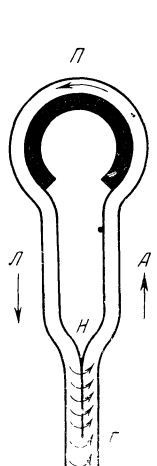


Рис. 417. Схема автоколебательной системы со льдами

На диаграмме рис. 416 ясно видны периодические колебания температуры с периодом около 3,5 года. По мере продвижения к югу, от Упернивика к мысу Рас и от этого мыса к мысу Гаттерас, колебания сдвигаются по фазе (запаздывают) и убывают по амплитуде. Оба отмеченных признака свидетельствуют о том, что соответствующая температурная волна распространяется с севера на юг.

Базируясь на этом выводе Ершовой, Шулейкин попытался найти физические корни температурных колебаний в системе Полярный бассейн — Атлантика. Проследим за теми процессами, которые могут зарождаться в этой системе, воспользовавшись схемой рис. 417, заимствованной из их работы.

На схеме обозначено: *Ф* — полуостров Флорида; *Н* — Ньюфаундленд; *П* — Полярный бассейн; *Г* — Гольфстрим; *Л* — холодный поток вод Лабрадорского и Восточно-Гренландского течений, вливающийся с севера в Атлантику и отрезающий Гольфстрим от американских берегов своей «холодной стеной»; *А* — Северо-Атлантическое теплое течение. Черная дуга схематически представляет полярные льды. Стрелка в районе Полярного бассейна в настоящее время должна быть проставлена в другой плоскости, перпендикулярной к плоскости чертежа. На основании замечательных работ советской дрейфующей полюсной станции теперь известно, что циркуляция, изображенная на схеме рис. 417, идет в вертикальной плоскости. Воды теплого Атлантического течения *А*, попав в Полярный бассейн, опускаются вглубь и, пройдя под всей площадью этого бассейна (даже в районе полюса), смешиваются отчасти с окружающими водами и затем поверху вытекают обрат-

но в Атлантику, через ворота по обеим сторонам Гренландии (в Восточно-Гренландском и в Лабрадорском течениях).

Необходимо отметить, что холодные воды *Л*, выходящие обратно в Атлантику взамен вод теплых, оказываются прижатыми к берегам Америки и вынужденными как-то смешиваться с теплыми струями, проходящими тут же рядом (с *А*). Как именно происходит здесь перемешивание, в точности неизвестно, да это и не нужно для предварительного анализа интересующих нас явлений. Достаточно лишь указать, что холодное течение, проходившее поверху благодаря малой солености его вод, после перемешивания с Атлантическим течением приобретает такую соленость, что воды его становятся более плотными, чем воды окружающие, и поэтому опускаются на глубины, не доходя до п-ова Флориды. На схеме это обстоятельство условно отмечено точками, а перемешивание между холодными и теплыми водами изображено стрелками.

Но ведь всякое изменение режима холодных вод *Л*, отразившись так или иначе на тепловом режиме Атлантического течения *А*, неминуемо должно распространяться вдоль струй *А*, уходя все дальше и дальше от района смешения *Н*. Попав в Полярный бассейн, подобный импульс изменит равновесное состояние между вторгающимися теплыми водами и льдами, плавающими высоко над ними. В свою очередь изменение ледовитости повлечет за собой перемены в режиме холодных струй *Л*. Эти перемены скажутся в районе смешения *Н* на режиме теплого Атлантического течения и т. д.

Попытаемся в первом приближении набросать некоторую количественную схему подобного цикла по цитированной работе.

Пусть при некотором тепловом дебите Q_0 теплого Атлантического течения количество льдов в Полярном бассейне в равновесном среднем состоянии равно I_0. С другой стороны, пусть по тем или иным причинам тепловой дебит Атлантического теплого течения возрос до Q. Тогда, пока отвлекаясь от пространственных факторов, мы должны будем отметить, что ледовитость Полярного бассейна станет уменьшаться по какому-то закону

$$\frac{dI}{dt} = -f(Q - Q_0). \tag{321}$$

Здесь f обозначает некоторую неизвестную функцию, разложимую в степенной ряд. В первом приближении ограничимся одним только членом этого ряда, содержащим первую степень аргумента. Положим, следовательно,

$$\frac{dI}{dt} = -m(Q - Q_0), \tag{322}$$

где m — коэффициент пропорциональности (разумеется, именованная величина).

Как скажется подобное уменьшение массы льда в Полярном бассейне? С одной стороны, благодаря уменьшению толщины ледяной теплоизоляции повысится *охлаждение* морской воды подо льдом и тем самым станет уменьшаться теплосодержание вод в *Л*, а значит и теплосодержание вод, идущих в струе *А* к северу от района смешения *Н*. С другой стороны, повысится количество холодной воды, поступающей к тому же району смешения за счет дополнительно растаявших льдов. Наконец, количество холодной воды, идущей к району смешения *Н*, повысится еще и за счет дополнительного количества айсбергов и берегового припая, освободившихся из проливов, где они стояли неподвижно, и спустившихся значительно южнее, в Атлантику.

Если понижение ледовитости мы обозначим через $I - I_0$, то придется записать, что за районом смешения *Н* тепловой дебит Атлантического течения *А* станет изменяться примерно по следующему закону, очерченному полнее, чем в цитированной работе:

$$\frac{dQ}{dt} = +\varphi_1(I - I_0) + \varphi_2\left(\frac{dI}{dt}\right). \tag{323}$$

Здесь функции φ_1 и φ_2 можно разложить в степенной ряд. Ограничимся только одним первым членом в разложении функции φ_1, а второй функцией φ_2 вообще пренебрежем. Тогда окажется, что

$$\frac{dQ}{dt} = n(I - I_0). \tag{324}$$

Продифференцируем по времени обе части уравнения (322) и подставим вместо dQ/dt в правую часть полученного уравнения его выражение из (324). Тогда придется записать

$$\frac{d^2I}{dt^2} = -m\frac{dQ}{dt} = -mn(I - I_0) \tag{325}$$

или

$$\frac{d^2(I - I_0)}{dt^2} + mn(I - I_0) = 0. \tag{326}$$

Аналогичными приемами найдется и второе подобное уравнение

$$\frac{d^2(Q - Q_0)}{dt^2} + mn(Q - Q_0) = 0. \tag{327}$$

Из дифференциальных уравнений (326) и (327) следует, что Полярный бассейн и Атлантика, вместе взятые, представляют собой колебательную тепловую систему с периодом T, который, очевидно, определяется из соотношения

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{mn}}. \tag{328}$$

Вспомним теперь о пространственном факторе, от которого мы пока отвлеклись. Тогда придется заключить, что вдоль контура НАПЛ должны будут блуждать волны изменений режима. Применительно к тепловому дебиту Атлантического течения можно будет записать, что на некотором расстоянии s от начала отсчета

$$Q_s = Q_{0s} + q_s \sin[\omega t - \varepsilon(u, s)]. \tag{329}$$

Сдвиг фаз $\varepsilon(u, s)$ здесь зависит как от расстояния s, так и от скорости переноса импульсов — скорости течения u.

Предыдущий анализ сохранится в полной силе, если окажется, что вдоль контура укладывается целое число волн, другими словами, если

$$\omega = K\sqrt{mn}, \tag{330}$$

где K — целое число. В противном случае должны будут возникнуть биения в колебаниях режима: сама амплитуда колебаний будет меняться с большим периодом; эпохи, характеризующиеся сильными колебаниями теплового режима, будут сменяться эпохами со слабо выраженными колебаниями его.

При анализе, изложенном выше, система Атлантика — Полярный бассейн рассматривалась как консервативная. В действительности, несомненно, что при всяком потеплении в Атлантическом течении часть дополнительного тепла неминуемо будет израсходована в межпланетное пространство, не доходя до Полярного бассейна. Следовательно, колебания, зародившиеся в системе, казалось бы, должны затухать. В действительности они не затухают, а продолжаются за счет энергии, поступающей в систему со стороны. Источником энергии, поддерживающим колебания, здесь является, повидимому, тот мощный тепловой поток, который идет от экватора к полюсам и в гидросфере, и в атмосфере.

Но в таком случае нашу систему следует рассматривать как типичную автоколебательную. Прототипом ее могут служить самые обыкновенные часы. Ведь физический маятник, изолированный от часов, представляет собой

пример системы линейной, склонной к затухающим колебаниям. Тот же маятник, введенный в состав часов, является прекрасным примером нелинейной автоколебательной системы без затухания. Поток энергии в ней идет от закрученной пружины, сквозь колеса и маятник, в атмосферу, где энергия расходуется на движение воздушных масс вокруг маятника, и в различные детали механизма, где энергия переходит непосредственно в тепло при трении. Если бы мы не пренебрегли вторым членом в уравнении (323), а попытались бы исследовать уравнение полностью, то задача, по-видимому, оказалась бы неразрешимой при современном состоянии математического аппарата. Даже ограничившись одним только вторым членом в уравнении (323) и пренебрегая (в отличие от Шулейкина) первым членом, А. Н. Колмогоров встретил математические трудности, которые, однако, ему удалось преодолеть. Не имея возможности останавливаться здесь на довольно сложных выкладках этого автора, отметим только, что по его выводу интересующую нас систему тоже надо рассматривать как автоколебательную.

§ 26. Возможные причины изменений климата в геологические эпохи

Исследуя процессы теплообмена и воздухообмена между океаном и материком, мы обнаружили тесную количественную связь между элементами теплового баланса моря и теми потоками воздуха и тепла, которые вторгаются с моря на материк, создавая там основные элементы климата. В предыдущих параграфах излагались соображения, позволяющие объяснить изменения климата — иногда очень резкие, — происходящие на наших глазах. В отличие от некоторых современных гипотез, с которыми мы встретимся в главе X, речь шла о чисто земных причинах изменения теплового режима. Сейчас постараемся, также не выходя за пределы нашей планеты, объяснить еще более серьезные изменения теплового режима Земли в далеком прошлом: при чередовании ледниковых и межледниковых эпох.

Выше было показано, что в зимнее время тепло, приносимое воздушными потоками с океана, может иметь значительно большее влияние на температуру воздуха над материком, чем тепло, непосредственно получаемое от солнечных лучей в той же точке земного шара. Но тепло, попадающее с океана на материк, значительно возросло бы, если бы теплые струи морских течений проходили ближе к соответствующим точкам материка. Напротив, количество переносимого тепла должно было бы уменьшиться, если бы расстояние от заданной точки материка до источника тепла почему-либо возросло.

Вот почему в настоящее время чрезвычайно интересно вспомнить схематический эксперимент, проделанный в 1927 г. П. П. Лазаревым над моделями материков, очерченными по данным геологических карт [60].

Модели, вылепленные из гипса, вносились в большую круглую кювету с плоским дном, причем северному полюсу соответствовал центр круга. Над водой, налитой в эту кювету, располагалась кольцеобразная стеклянная трубка с многочисленными отростками, которые все были так наклонены к радиусам, что при продувании по ним воздуха по краям кюветы возникала своего рода система «пассатов». Эти края соответствовали земному экватору по направлению к которому действительно дуют пассаты и в северном, и в южном полушариях. Следовательно, эффект меридиональной слагающей, роль которой здесь исполняла слагающая радиальная, на модели уничтожался у «экватора» действием бортов кюветы так же, как в природных условиях он уничтожается действием пассатов противолежащего полушария.

Тангенциальная слагающая, которая в действительности направлена вдоль экватора, с востока на запад, на модели осуществлялась в виде сла-

гающей, направленной вдоль окружности бортов кюветы. Эта тангенциальная слагающая вызывала интенсивное движение воды, за которым можно было проследить, фотографируя алюминиевые опилки, насыпанные на поверхность воды (последняя для отчетливости картины окрашивалась в черный цвет нигрозином).

В том случае, когда материки обладали «современными» очертаниями, система течений в кювете близко подходила к той, которая действительно наблюдается на земном шаре. В частности, в «Атлантическом океане» возникало сильное течение, весьма напоминавшее Гольфстрим, и своеобразное циклоническое течение, очень похожее на то, которое на самом деле существует вблизи африканских берегов (см. рис. 407, *а*).

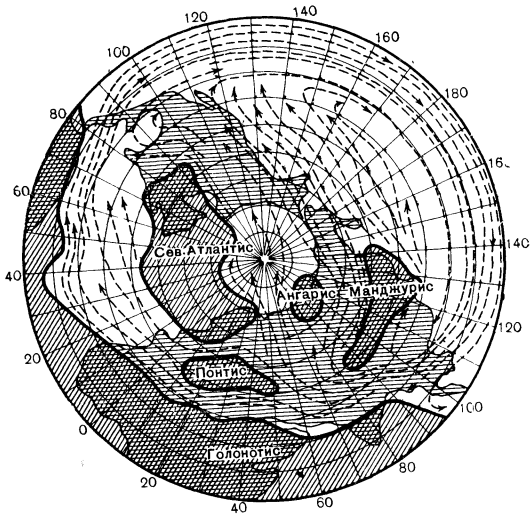


Рис. 418. Схема течений для эокембрия и неодевона (по П. П. Лазареву)

Придавая материкам северного полушария те очертания, которые они приобретали в различные геологические эпохи, Лазарев получил на фотографиях чрезвычайно интересные изменения в системах течений, нанесенные им затем на схематические карты.

На рис. 418 и 419 воспроизведены две из этих карт. Тонкие линии всюду дают для сравнения очертания современных материков. В самые древние периоды, когда еще не было следов современной Евразии, в эпоху, носящую название эокембрий, а также и в эпоху неодевона, когда появились первые участки Азии (так называемые Ангарис и Манджурис), как видно на рис. 418, теплое течение, возникавшее близ экватора, могло совершенно свободно проходить через полюс в одном замкнутом цикле. Очевидно, в эти эпохи климат омываемых им берегов в частности климат Ангарис и Манджурис, должен был быть чрезвычайно теплым.

Напротив, в эпоху альбскую, когда Евразийский материк был слит с Северной Америкой, по схеме рис. 419 на северном полюсе не было моря и к нему не было доступа теплым течениям. В эту эпоху на всем протяжении Европы климат был чрезвычайно суров. Мощные ледники в Европе могли спускаться весьма далеко на юг.

Как видим, эксперимент Лазарева хорошо объясняет мощные колебания климата в геологические эпохи, не прибегая ни к каким искусственным предположениям, а исходя лишь из данных о современном влиянии теплых течений на климат материков и из более или менее вероятных очертаний материков, построенных геологами для различных эпох.

В пользу подобной гипотезы говорит также еще то, что в современной Антарктиде мы можем найти некоторое подобие древней земли Северный Атлантис (рис. 419); там ледники достигают исполинских размеров, даже несмотря на то, что граница океана проходит в среднем всего лишь по параллели 70° Ю. Между тем по схеме рис. 418 древний северный материк начинался в среднем с параллели около 40° С.

Итак, смена ледниковых и межледниковых эпох может быть объяснена, исходя из одних только чисто земных причин. Однако тем самым никак не исключается возможность существования других причин, космического происхождения. Так, в настоящее время нельзя ни утверждать, ни отрицать

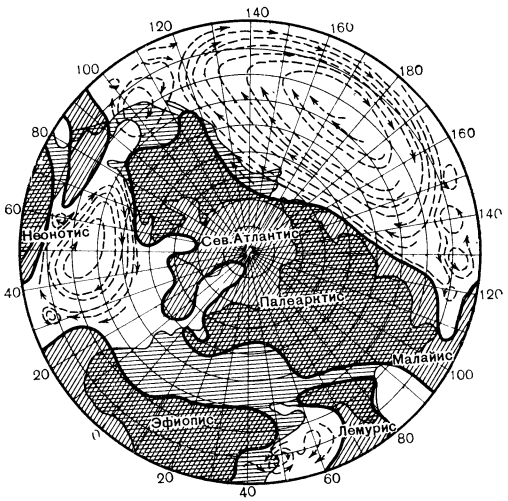


Рис. 419. Схема течений для альбской эпохи (по П. П. Лазареву)

сколько-нибудь категорически, что напряжение солнечной радиации может меняться с громадным периодом — порядка геологических эпох. В то же время работа Д. Симпсона [68], появившаяся в 1938 г., заставляет нас отказаться от широко распространенного представления о характере зависимости, которая должна существовать между напряжением солнечной радиации и оледенением тех или иных зон земного шара, если вообще исходить из гипотезы о возможности периодических колебаний солнечной радиации. На основании этой работы следует думать, что максимальное оледенение могло наступать на Земле не только при временном понижении напряжения солнечной радиации, но также и при временном повышении ее.

Чтобы разобраться в этом кажущемся парадоксе, рассмотрим сперва схематическую диаграмму рис. 420, заимствованную из цитированного источника. По оси абсцисс здесь отложено напряжение солнечной радиации, а по оси ординат — четыре ее функции. Именно, кривая *I* показывает, как меняется абсолютная влажность воздуха при изменении аргумента. Кривая *II* рисует изменение количества той влаги, которая выпадает в форме снега. Как видим, сперва вся влага выпадает в этой форме, а потом все больше и больше начинает выступать на сцену другая форма осадков — дождь (по этой причине кривая снегопада проходит через максимум, а потом идет на убыль). Кривая *III* показывает, как должны меняться испаряемость и таяние снежного и ледяного покрова при изменении напряжения солнечной радиации, падающей в среднем на земной шар. Как видим, в некоторой определенной точке кривая *III* пересекается с кривой *II*. Это показывает, что

при соответствующем значении напряжения солнечной радиации тает и испаряется ровно столько снега и льда, сколько выпадает.

Разность ординат между кривыми *II* и *III* выражает, очевидно, годичное накопление твердой фазы воды на Земле. Ход этой важной величины изображен кривой *IV* (разностной).

Легко видеть, что годичное накопление воды в твердой фазе достигает максимума при некотором определенном значении напряжения солнечной радиации. Накопление снега и льда на Земле будет уменьшаться не только при

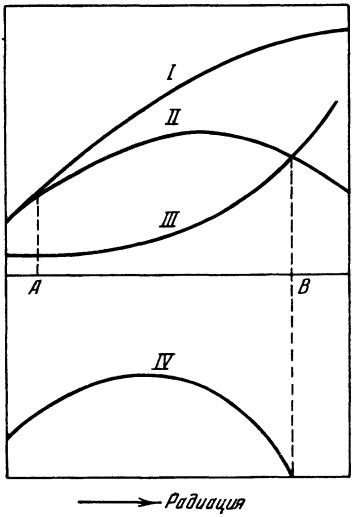


Рис. 420. Схема накопления снега (по Д. Симпсону)

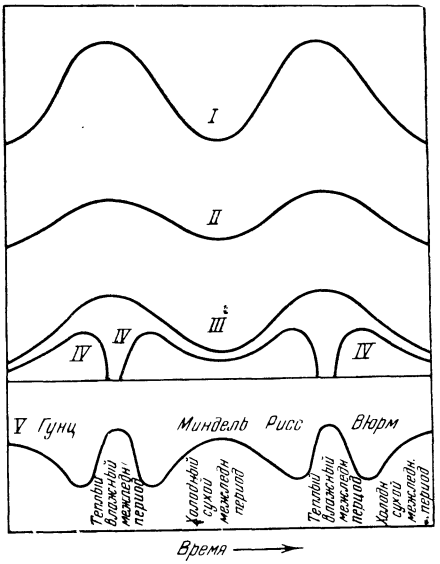


Рис. 421. Наступление и отступание ледников (по Д. Симпсону)

нарастании напряжения солнечной радиации, но также и при уменьшении этого напряжения. Допустим теперь, что солнечная радиация от эпохи к эпохе меняется по некоторому гармоническому закону, изображенному на симпсоновской схеме рис. 421 в виде кривой *I*. Средняя температура воздуха на Земле будет тогда меняться примерно по закону, описываемому кривой *II* на той же диаграмме, а влагосодержание воздуха — по кривой *III*.

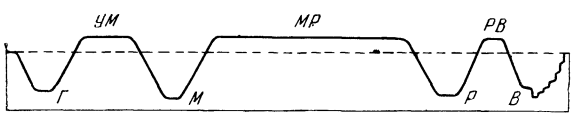


Рис. 422. Схема ледниковых и межледниковых эпох

На основании диаграммы рис. 420 можно заключить, что накопление снега и льда должно будет при этом меняться по сложному закону, описываемому кривой *IV* на диаграмме рис. 421. Для полноты картины строим, пользуясь кривой *IV*, еще последнюю кривую *V*, которая показывает «наступление и отступание ледников». Как видим, наступление ледников должно происходить на обоих склонах кривой напряжения солнечной радиации (и соответственно на обоих склонах температурной кривой): и в эпохи понижения теплового бюджета Земли (с чем исследователи давно свыклись), и в эпохи повышения теплового бюджета, что является новым в цитированной работе.

Над языками кривой V, соответствующими четырем очередным ледниковым периодам, даны названия этих периодов, предложенные геологами. Следует особо отметить, что как продолжительность, так и характер межледниковых эпох на диаграмме получились существенно неодинаковыми: гунц и миндель, а также рисс и вюрм разделены относительно короткими, теплыми и влажными эпохами; напротив, перед гунцем, между минделем и риссом и после вюрма наступали эпохи наиболее длительные, холодные и относительно сухие.

Чрезвычайно важно, что мы сейчас живем именно в такую эпоху: после последнего ледникового периода солнечная радиация и средняя температура воздуха на Земле не возрастали (как обычно принято думать), а непрерывно падали и продолжают падать.

Весьма замечательно, что чередование «коротких» и «длинных» межледниковых эпох, получающееся на диаграмме Симпсона, прекрасно вяжется с подобным же чередованием, которое было установлено геологами для эпох, разделяющих периоды наинизшей границы снега в Альпах. В этом легко убедиться, сравнив диаграмму рис. 421 с диаграммой рис. 422, заимствованной у геологов. По оси абсцисс на обеих диаграммах отложено время, а по оси ординат — смещение нижней границы вечных снегов. Буквы, проставленные под языками кривой, соответствуют тем же четырем ледниковым периодам, о которых была речь выше (начальные буквы названий).

§ 27. Перспективы новых исследований

Несмотря на вынужденную схематизацию явлений, рассмотренных в главе 5-й, достаточно четко выявилось мощное влияние океана на климат материков, влияние материков на тепловые и динамические явления в океане и взаимное влияние океана и материков на изменения погоды в нижней тропосфере. Совсем недавно И. Бьеркнес обнаружил [69] самую тесную связь между изменениями теплового режима в экваториальной зоне Тихого океана и резкими изменениями теплового режима и атмосферной циркуляции не только над материком Северной Америки, но и Гренландским морем, всей Северной частью Атлантического океана и даже западной частью Европейской территории Союза ССР. Еще большее влияние на изменения климата и погоды в нашей стране, несомненно, должен оказывать мощный «очаг тепла», который был исследован В. В. Шулейкиным, уже после верстки настоящей книги [70], неподалеку от берегов Скандинавского полуострова. Выяснилось, что этот «очаг тепла», питаемый Северо-Атлантическим и Норвежским течениями, посылает на Европейскую территорию СССР примерно $^1/_4$ всего тепла, поступающего со всего Атлантического океана. Для прогностических целей необходимо организовать систематические ежегодные исследования теплового режима этого «очага» и дебита Северо-Атлантического и Норвежского течений. Столь же необходимо проводить систематические исследования вдоль меридиана 30° Зап. долготы, пересекающего все важнейшие течения Атлантики,— в том числе и циклические потоки, о которых говорилось в § 24 настоящей главы. Автор [70] еще в 1936 г. выступал с проектом ежегодных четырехразовых рейсов по меридиану 30° Зап. долг. [71] и несомненно, что даже течение Ломоносова, о котором говорилось в § 23 главы I настоящей книги, было бы открыто значительно ранее, если бы предложенный проект был осуществлен своевременно.

ГЛАВА ШЕСТАЯ

ОПТИКА МОРЯ

§ 1. Освещенность поверхности моря. Оптические явления, происходящие на поверхности моря

Световой режим на какой угодно глубине неразрывно связан, очевидно, со световым режимом на поверхности моря. Вот почему перед исследованием оптических свойств самой гидросферы необходимо познакомиться с условиями освещения поверхности моря, а также с теми явлениями, которые происходят на этой поверхности — поверхности раздела между воздухом и водой.

К сожалению, материала по непосредственному измерению освещенности поверхности моря еще значительно меньше, чем материала по морской актинометрии, а потому в большинстве случаев приходится пользоваться данными измерений, проделанных на поверхности Земли, молчаливо полагая, что само по себе море не вносит ничего специфического в исследуемую проблему.

Хотя такое предположение и заведомо неверно, но пока, за неимением лучшего, приходится идти на полумеры, до некоторой степени оправданные тем, что *о точности* при изучении светового режима глубин вообще можно говорить только с осторожностью.

Само измерение освещенности в природных морских и сухопутных условиях часто чрезвычайно сильно обесценивается благодаря тому, что условия, в которых производились все эти измерения, иногда трудно сравнимы между собой. Так, например, если есть некоторая надежда провести полный цикл измерений в течение целого дня в совершенно однородных условиях абсолютно ясного неба, то ни в коем случае нельзя рассчитывать на постоянство условий при какой-нибудь определенной форме облаков, особенно если они покрывают только *часть* небесного свода.

Вот почему при учете влияния облаков мы остановимся только на том случае, когда облака данной формы *равномерно* покрывают все небо. Правда, для освещенности, вызываемой самими облаками, Н. Н. Калитин [1] составил прекрасные таблицы применительно к различной степени покрытия небесного свода, но весьма неясным остается и до настоящего времени вопрос о самой главной составляющей освещенности, которая обусловлена прямыми лучами Солнца, не вполне закрытого облаками.

Что касается самих прямых солнечных лучей, то освещенность, даваемую ими, Шулейкин предложил относить каждый раз к единичной *толщине атмосферы*, пользуясь данными о зависимости толщины слоя от высоты Солнца над горизонтом и принимая во внимание угол падения лучей.

На основании большой серии измерений, произведенных по такому принципу, получена кривая S (рис. 423), выражающая освещенность горизонтальной плоскости прямыми солнечными лучами при различных высотах Солнца над горизонтом.

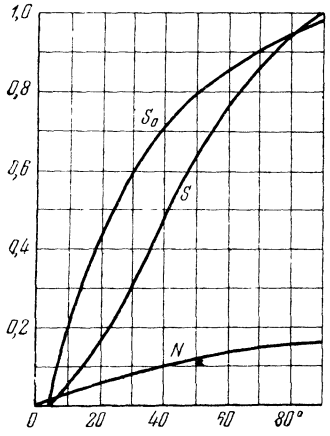


Рис. 423. Освещенность Солнцем и небесным сводом

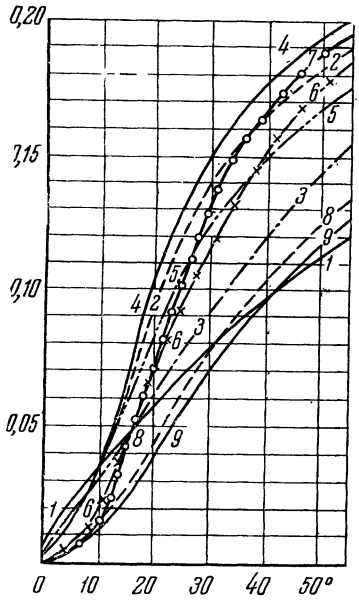


Рис. 424. Освещенность облачным небом (по Н. Н. Калитину)

За единицу принята освещенность горизонтальной плоскости Солнцем, находящимся в зените. Для получения абсолютных значений освещенности (в люксах) достаточно относительные цифры диаграммы рис. 423 умножить на 140 тыс., так как освещенность Солнцем, стоящим в зените, равна именно 140 тыс. *лк*.

На этом же рисунке представлена другая кривая N, выражающая ход освещенности диффузным светом *небесного свода* при совершенно безоблачном небе и различных высотах Солнца над горизонтом. Освещенность и здесь выражена в тех же условных единицах, от которых легко перейти к люксам.

Как и следовало ожидать, при очень малых высотах Солнца освещенность диффузным светом сперва выравнивается с освещенностью прямыми солнечными лучами, а потом начинает даже преобладать над ней. Совершенно естественно также, что непосредственно перед восходом и непосредственно после заката Солнца небо дает некоторую конечную освещенность, и только по окончании вечерних или перед началом утренних сумерек освещенность можно считать равной нулю.

Если Солнце совсем закрыто облаками, то вся освещенность поверхности моря обусловлена исключительно диффузным светом, исходящим от них. Разумеется, говорить о сколько-нибудь определенном режиме здесь можно лишь только тогда, когда слой облаков достаточно однороден. При соблюдении этого условия можно пользоваться для ориентировочного определения освещенности диаграммой рис. 424, на которой приведено семейство кривых, построенных по данным Н. Н. Калитина.

Кривая *1* служит для сравнения: она соответствует случаю абсолютно ясного неба, как и кривая N (рис. 423). Остальные кривые отвечают различным формам облаков: кривая *2* — перистым и перисто-слоистым (Cirrus, Cirrostratus), *3* — перисто-кучевым (барашкам) (Cirrocumulus), *4* — верхнекучевым (Altocumulus), *5* — верхнеслоистым (Altostratus), *6* — слоисто-кучевым (Stratocumulus), *7* — грозовым (Cumulonimbus), *8* — низким слоистым (Stratus), *9* — дождевым (Nimbus).

Так как облака отбрасывают вниз довольно большую часть энергии прямых солнечных лучей, падающих на них, то, естественно, освещенность облачным небом в большинстве случаев должна быть больше, чем освещенность ясным небесным сводом, что видно и на рис. 424.

Только при малых высотах Солнца или при густых облаках, словом, когда рассеивающий слой конденсировавшихся паров весьма велик, освещенность облачным небом резко падает.

Диаграммы рис. 423 и 424 показывают, как изменяется освещенность поверхности моря в зависимости от одного и того же аргумента — от высоты Солнца. Но тот же аргумент определяет собой и дальнейшее поведение световых лучей на поверхности раздела между воздушной и водной средами.

Действительно, у этой поверхности раздела световой поток должен разделиться на две составляющие: часть энергии придется на долю света, *отраженного* от поверхности воды, а другая часть — на долю света, вошедшего в водную среду после *преломления* у ее поверхности.

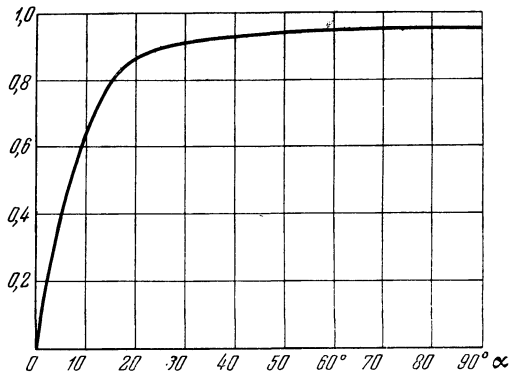


Рис. 425. Яркость света, входящего в воду

Как известно, распределение энергии между обеими составляющими зависит от двух факторов: *от угла падения* φ, который в данном случае дополняет до 90° высоту Солнца α, и *от показателя преломления* n, который здесь равняется 1,32. Зная φ и n, можно просто вычислить угол преломления ψ, пользуясь элементарным соотношением

$$\sin\psi = \frac{1}{n}\sin\varphi.$$

Тогда, предполагая, что падающий свет слабо поляризован, нетрудно найти связь между яркостью отраженного I_1 и преломленного I_2 света и яркостью света I_0, падающего под углом φ к нормали на поверхность моря:

$$I_1 = \frac{1}{2}\frac{\sin^2(\varphi-\psi)}{\sin^2(\varphi+\psi)}\left[1+\frac{\cos^2(\varphi+\psi)}{\cos^2(\varphi-\psi)}\right]I_0, \qquad (1)$$

$$I_2 = \frac{1}{2}\frac{\sin 2\varphi \sin 2\psi}{\sin^2(\varphi+\psi)}\left[1+\frac{1}{\cos^2(\varphi-\psi)}\right]I_0. \qquad (2)$$

Формулы (1) и (2) были выведены Френелем на основании теории упругого эфира, но находятся также в полном согласии с выводами из электромагнитной теории света. Они показывают, что при отвесном падении лучей света на поверхность воды отражается только небольшая часть энергии: числовой расчет дает примерно $I_1 = 0{,}019$ энергии падающего света I_0. В воду входит, следовательно, $I_2 = 0{,}981 I_0$.

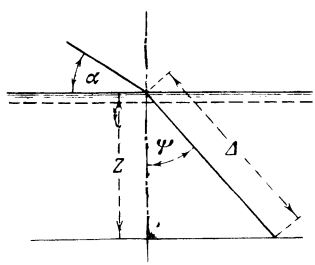


Рис. 426. Преломление света у поверхности моря

По мере возрастания угла φ, т. е. по мере уменьшения высоты Солнца α, энергия отраженного света возрастает, а энергия света, входящего в воду, уменьшается. Наглядно это видно на рис. 425, где изображено изменение энергии света, входящего в воду, в зависимости от изменения высоты Солнца (по оси абсцисс отложена высота Солнца α). Как видим, при высоте Солнца 10° в воду входит 0,655 световой энергии, следовательно, 0,345 отражается. При высоте 2° в воду входит только 0,215 энергии падающего света, а 0,785 отражается.

Так просто можно расчленить два потока, на которые разбиваются прямые солнечные лучи, падающие на поверхность моря. Значительно труд-

нее учесть распределение энергии *диффузного* света, принимая во внимание не только разнообразие углов падения, но и неодинаковую яркость света, исходящего от различных участков небесного свода.

Для ориентировочных подсчетов можно полагать с достаточной степенью приближения, что в среднем 0,95 энергии падающего диффузного света входит в воду, а 0,05 отражается. В дальнейшем, при исследовании окраски моря мы еще раз вернемся к вопросу об отражении света от поверхности моря. Здесь же необходимо еще в двух словах остановиться на поведении лучей, вошедших в воду, непосредственно у поверхности раздела между средами.

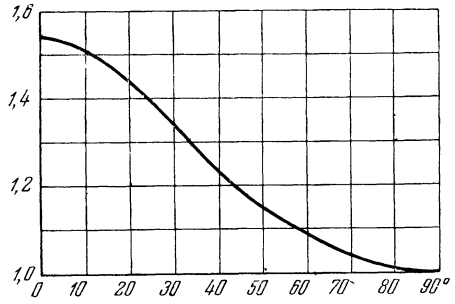


Рис. 427. Длина оптического пути в воде

Как было уже упомянуто, угол преломления ψ всецело определяется величинами φ и n — углом падения и коэффициентом преломления на границе воздуха и воды. Следовательно, направление прямых солнечных лучей, вошедших в воду и продолжающих в ней распространяться, может быть непосредственно определено по заданному углу φ или, что то же самое, по дополнительному углу α — по высоте Солнца над горизонтом. Но ведь при изменении направления лучей, идущих в воде, меняется *длина пути* Δ, проходимого им от поверхности моря *до данной глубины* z, причем, как нетрудно видеть (рис. 426),

$$\frac{\Delta}{z} = \frac{1}{\cos\psi} = \frac{n}{\sqrt{n^2 - \cos^2\alpha}}. \qquad (3)$$

На рис. 427 представлено изменение величины Δ/z в зависимости от высоты Солнца. Как видим, при высоте Солнца 10° лучам приходится проходить в воде путь, в *полтора раза* превышающий расстояние от поверхности моря до данного слоя по вертикали. В дальнейшем будет выяснено, какое большое значение имеет это обстоятельство для светового режима глубин моря.

§ 2. Основные оптические явления в морской воде. Избирательное поглощение света водой

Издавна было замечено, что свет поглощается водой и что поглощение это неодинаково в различных областях спектра: резче всего оно выражено в красной части спектра, а в зеленой и особенно в синей поглощение невелико. Схема установки для точных измерений приведена на рис. 428.

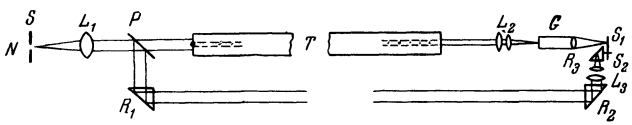


Рис. 428. Схема спектрофотометрической установки

Свет от электролампы проходит сквозь тонкую щель S и сводится линзой L_1 в пучок параллельных лучей. Одна часть светового потока отражается от прозрачной стеклянной пластинки P и, претерпев дважды полное внут-

реннее отражение от призм R_1 и R_2, направляется сквозь линзы L_3 и призму R_3 в одну из щелей S_2 спектрофотометра. Другая часть светового потока, пройдя сквозь пластинку P, поступает в трубу T, наполненную исследуемой водой. Выйдя из этой трубы, свет направляется сквозь линзы L_2 в другую щель S_1 того же спектрофотометра.

На рис. 429 схематически изображено внутреннее устройство спектрофотометра. Два пучка света, прошедшие сквозь входные щели коллиматора S_1 и S_2 и коллиматорную линзу D_1C, разлагаются на спектральные составляющие посредством призмы P (на рисунке изображен ее вид *сбоку*).

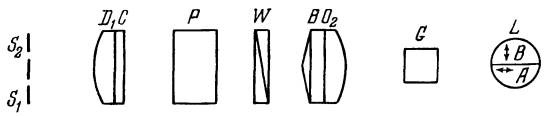


Рис. 429. Схема спектрофотометра

Далее оба пучка, теперь уже разложенные в спектры, проходят сквозь *поляризатор* W и сквозь *бипризму* BO_2, которая поворачивает плоскость поляризации одного из пучков на угол 90° по отношению к плоскости поляризации другого пучка. После этого оба пучка пропускаются сквозь *анализатор* G и попадают в окуляр, сквозь который наблюдателю видно круглое поле, разделенное пополам по диаметру. Схематически это поле представлено на рис. 429 справа и обозначено буквой L. Часть A освещается пучком света, прошедшим первоначально сквозь щель S_1, а часть B — пучком, попавшим в прибор через щель S_2.

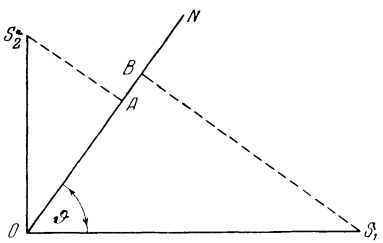


Рис. 430. Схема поляризации лучей

Обе части поля окажутся окрашенными в один и тот же спектральный цвет, зависящий от расположения трубы прибора относительно призмы P. Но плоскости поляризации обоих световых потоков, достигающих глаза, смещены под прямым углом одна к другой, как было уже сказано.

Однако, если это так, то при вращении анализатора G вокруг *продольной оси* (рис. 429) яркость освещения одного из полей A или B должна увеличиваться, тогда как яркость освещения второго поля будет уменьшаться. Допустим, что энергии световых потоков, входящих в прибор сквозь щели S_1 и S_2, *не равны* и что амплитуды электромагнитных колебаний световых волн в этих потоках выражаются векторами $\mathbf{OS}_1$ и $\mathbf{OS}_2$ (рис. 430). Тогда при повороте плоскости анализатора на некоторый угол ϑ относительно вектора $\mathbf{OS}_1$ сквозь анализатор пройдут два потока, в которых плоскость поляризации будет задана анализатором и направлена по ON. Что касается амплитуд колебаний прошедших потоков, то они выразятся *проекциями* векторов $\mathbf{OS}_1$ и $\mathbf{OS}_2$ на направление ON, т. е. они будут равны соответственно OA и OB.

Следовательно, как нетрудно видеть,

$$OB = OS_1 \cos\vartheta, \quad OA = OS_2 \sin\vartheta,$$

Плавно изменяя угол,— поворачивая головку прибора, в которую вставлен анализатор G,— можно добиться полного равенства освещения полей A и B. Тогда окажется, что

$$OS_1 \cos\vartheta = OS_2 \sin\vartheta,$$

откуда определится отношение амплитуд колебаний в обоих пучках света,

вошедших сквозь щели S_1 и S_2:

$$\frac{OS_1}{OS_2} = \operatorname{tg} \vartheta.$$

Но, как известно, *энергия* светового потока всегда пропорциональна *квадрату амплитуды*. Поэтому отношение *яркостей* световых лучей, вошедших сквозь щели, должно равняться *квадрату тангенса* угла ϑ

$$\frac{I_1}{I_2} = \operatorname{tg}^2 \vartheta. \tag{4}$$

Посмотрим теперь, как будет ослабевать яркость света по мере прохождения его сквозь воду в трубе T (рис. 428)?

Поглощение света на бесконечно малом участке пути dx, как известно, прямо пропорционально энергии падающего света I и длине участка пути dx

$$dI = -mI\,dx, \tag{5}$$

Коэффициент пропорциональности m в этом соотношении зависит от среды, в которой распространяется свет: это—так называемый *коэффициент поглощения света*. В случае избирательного поглощения он должен зависеть от *длины волны* λ, характеризующей данный спектральный цвет.

Ослабление света на всем *конечном* пути вдоль трубы T найдется, если проинтегрировать уравнение (5) в пределах от нуля до Δ, где Δ — длина трубы.

Выполнив интегрирование и перейдя от логарифмической функции к экспоненциальной, найдем

$$I = I_0 e^{-m\Delta}. \tag{6}$$

Это — основное соотношение, играющее большую роль в оптике моря. В нем I_0 обозначает энергию светового потока, вступающего в трубу, а I — энергию потока, прошедшего сквозь всю толщу воды Δ. Так как m зависит от λ, то от нее же должна зависеть и величина I.

Воспользовавшись соотношениями (4) и (6), легко определить из опыта величину коэффициента поглощения m.

Действительно, найдя угол поворота анализатора, при котором обе половины поля в спектрофотометре окажутся одинаково освещенными, можно будет написать, что

$$\frac{I_0}{I_1} = e^{m\Delta} = \operatorname{tg}^2 \vartheta,$$

или

$$m = \frac{2 \lg \operatorname{tg} \vartheta}{\Delta \lg e}, \tag{7}$$

где символ lg обозначает обыкновенный десятичный логарифм. В табл. 22 сведены значения m, полученные для совершенно чистой, дистиллированной воды.

Таблица 22

Длина волны, *мк*	Коэффициент поглощения	Длина волны, *мк*	Коэффициент поглощения
0,658	0,320	0,602	0,173
0,643	0,291	0,590	0,089
0,622	0,239	0,579	0,049
0,617	0,244	0,558	0,038
0,612	0,233	0,522	0,002
0,607	0,200	0,494	0,002

Размерность коэффициента m равна, очевидно, обратной размерности длины. И здесь, и в дальнейшем m выражено в *обратных метрах*, т. е. предполагается, что Δ измеряется в метрах.

Данные таблицы воспроизведены графически на рис. 431 пунктирной кривой *1*. Близ $\lambda = 0{,}61$ *мк* ясно выступает максимум поглощения, характерный для простой полосы, но далее он расплывается, свидетельствуя о сложности молекулярного механизма поглощения в воде.

Табл. 22 и рис. 431 показывают, что поглощение света в красной части спектра значительно больше, чем в синей: вода оказывается вполне «прозрачной» только для длин волн короче примерно 0,54 *мк*.

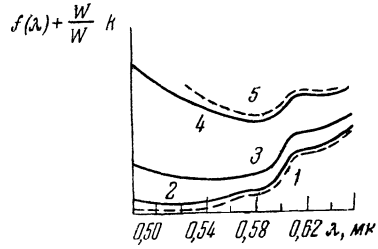


Рис. 431. Фотометрирование проб воды из горных озер

Определив закон поглощения света в чистой, дистиллированной воде, О. Ауфзесс [2] распространил исследования на воду различных баварских *озер*, причем для работ по оптике воды в природных условиях был применен спектрофотометрический метод. Прибор устанавливался на шлюпке. В одну его щель направлялся свет, отраженный от белого диска диаметром 2,37 *м*, находившегося на некоторой глубине в воде. Таким образом, свету приходилось проходить двойной путь в воде — от поверхности озера до диска и обратно. Во вторую щель спектрофотометра падал свет Солнца и неба, служивший для сравнения спектров.

Простой расчет по формуле (7) позволял для каждого участка спектра определять отношение яркости света, падающего на поверхность озера, к яркости света, предварительно прошедшего 2 раза сквозь слой воды.

В результате получено для целого ряда озер собрание кривых, которые все *резко отличались* от кривой *1* рис. 431 и напоминали своим типом кривые *2*, *3* и *4* того же рисунка. На рисунке изображена для сравнения только одна из полученных кривых — пунктирная кривая *5* [2].

Еще более резкие отклонения от кривой *1* (рис. 431) были получены для воды Висконсинских озер. Измерения проведены не в естественных условиях, а в лаборатории, куда вода доставлялась в тщательно промытой посуде. Прежде чем вводить исследуемую воду в трубу, изображенную на рис. 428, ее фильтровали, чтобы освободить от грубых взвешенных частиц [3].

Кривые воспроизведены на рис. 432. Большинство из них сильно поднимается в области *коротких волн*. В этой области спектра свет ослабляется, следовательно, больше всего.

Какова же причина такого ослабления? На этот вопрос старые авторы отвечают одинаково: по их мнению, *окраска вод* различных озер в проходящем свете зависит от каких-то *красящих веществ*, растворенных в воде. Весь процесс, происходящий в толще воды, сводится, следовательно, к чистому *поглощению света* и притом избирательному.

Нетрудно, однако, убедиться в несостоятельности такого рода теории. Действительно, и рассмотрение кривых рис. 431, и взгляд на кривые рис. 432 наводят на мысль о том, что все они относятся к какому-то одному *семейству*, что все они отличаются между собой значениями какого-то одного *параметра*; трудно было бы допустить мысль о том, что «красящие вещества», которые якобы растворены в водах всех исследованных озер, дают такую пр вильную и плавную гамму цветов. Так же трудно допустить мысль об одном каком-либо красящем веществе, которое последовательно меняло бы характер избирательного поглощения, присущего ему.

Напротив, совершенно естественно можно *объяснить* спектр проходящего света, если допустить в водной среде одновременное *существование двух* про-

цессов, налагающихся друг на друга,— именно процессов *поглощения* и *рассеяния света*.

Такое объяснение было в 1921 г. дано Шулейкиным, показавшим, что ординаты кривых рис. 431 можно разбить на две части, одна из которых в точности совпадает с ординатами кривой поглощения света для дистиллированной воды, а другая хорошо укладывается в соотношения, вытекающие из теории рассеяния света мутной средой [4].

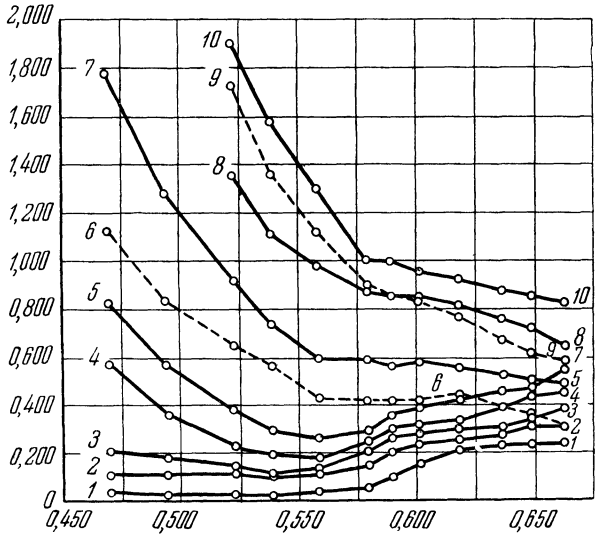


Рис. 432. Спектры проб воды из озер

В настоящее время оптика мутной среды получила весьма широкое развитие, охватив как явления, связанные с чисто молекулярным рассеянием света, так и сложные явления, происходящие вокруг крупных частиц, вкрапленных в некоторую среду.

Остановимся прежде всего на теории молекулярного рассеяния.

§ 3. Молекулярное рассеяние света

Основания теории здесь были заложены Дж. Рэлеем [5], исследовавшим действие весьма малой частицы на световые волны. Всякую мутную среду можно рассматривать как совокупность таких частиц, распределенных в пространстве и нарушающих ход световой волны.

Пусть первоначальное направление движения электромагнитной волны света совпадает со стрелкой S_0, изображенной на рис. 433. Тогда со стрелкой S_0 совпадает так называемый вектор Умова, выражающий по величине и направлению поток *энергии*.

Пусть на пути световой волны, в точке O, оказывается частица. Можно доказать, что под влиянием переменного электромагнитного поля, создаваемого световой волной, на поверхности раздела между частицей и внешней средой возникнут вынужденные электромагнитные колебания, которые породят вокруг частицы новые световые волны. На рис. 434, *а* схематически изображены электрические силовые линии, появляющиеся на поверхности раздела (сплошные кривые) и проходящие подобно меридианам от одного полюса частицы до другого. Разумеется, направление поля, изображенное на рисунке, соответствует только данной половине периода колебаний; в сле-

дующую половину периода положительный и отрицательный полюсы поменяются местами.

На рис. 434, *б* видны (в плане) и магнитные силовые линии, проходящие подобно кругам параллелей.

Детальный анализ явления показывает, что в результате колебаний электрического и магнитного полей на поверхности раздела между веществом частицы и веществом внешней среды вокруг частицы зарождаются *две* системы волн, *поляризованных* в плоскостях, взаимно перпендикулярных. Так, если мы будем смотреть на частицу по направлению *SO* (рис. 433), то первая система волн, попавших в глаз, будет характеризоваться электрическими колебаниями, совпадающими по направлению с вектором $\mathbf{E}_1$, и магнитными

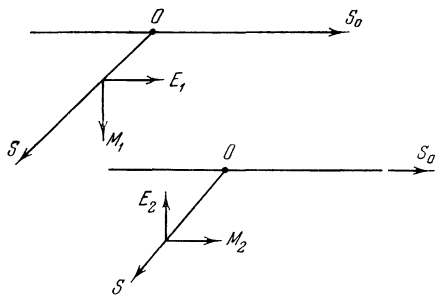


Рис. 433. Молекулярное рассеяние света. Векторы S, E, M

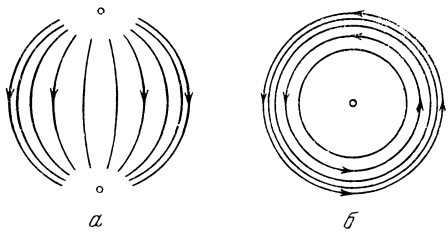


Рис. 434. Силовые линии для мелких частиц

колебаниями в направлении $\mathbf{M}_1$. Другими словами, электрические колебания здесь перпендикулярны к плоскости зрения.

Вторая система волн поляризована в плоскости, повернутой на угол 90° относительно первой. Электрические колебания происходят здесь в направлении вектора $\mathbf{E}_2$, а магнитные — в направлении вектора $\mathbf{M}_2$.

Что касается энергии обеих систем волн, то она, оказывается, неодинакова в различных направлениях. Если за единицу энергии мы примем энергию падающего света, а через I_1 и I_2 обозначим энергии первой и второй систем волн, то для энергии света, исходящего от частицы в некотором направлении, получим выражение

$$I_1 + I_2 = \frac{16\pi^4\rho^6}{\lambda^4 r^2}\left[\frac{n^2-1}{n^2+2}\right]^2(1+\cos^2\gamma). \qquad (8)$$

Здесь γ — угол между направлением, в котором исследуется радиация частицы, и падающим лучом; n — показатель преломления вещества, из которого состоит частица, *относительно* вещества окружающей среды; ρ — радиус самой частицы, а r — расстояние от центра частицы до точки, в которой исследуется энергия света. Самым замечательным и важным является то, что энергия излучаемого света, исходящего от частицы, оказывается *обратно пропорциональной четвертой степени длины световой волны* λ.

Обе составляющие радиации I_1 и I_2, вообще говоря, не равны одна другой. Разность, имеющаяся между ними, зависит от угла, в котором исследуется радиация. Именно, оказывается, что

$$I_1 - I_2 = \frac{16\pi^4\rho^6}{\lambda^4 r^2}\left[\frac{n^2-1}{n^2-2}\right]^2(1-\cos^2\gamma). \qquad (9)$$

Но совершенно очевидно, что разность $I_1 - I_2$, выражаемая формулой (9), определяет собой *поляризацию* света, идущего в данном направлении. Как видим, лишь в двух направлениях поляризация оказывается равной

нулю: при $\gamma = 0$ и при $\gamma = 180°$, т. е. в направлении падающего света и в направлении, прямо противоположном.

Для угла $\gamma = 90°$ и для угла $\gamma = 270°$ (т. е. в направлениях, перпендикулярных к направлению падающего света) формулы (8) и (9) дают $I_1 + I_2 = I_1 - I_2$, а следовательно, $I_2 = 0$, т. е. в этих направлениях свет *полностью поляризован*, причем направление электрических колебаний перпендикулярно к плоскости зрения (плоскости, проведенной через луч зрения и луч падающего света).

Несколько дальше, на рис. 437, графически представлено распределение радиации вокруг излучающей частицы. Внешняя кривая полярной диаграммы выражает полную энергию света, рассеиваемого частицей по всем направлениям. Радиус-вектор, проведенный к этой кривой из полюса (совпадающего с центром частицы) по какому-либо направлению, выражает в условном масштабе энергию, рассеянную в этом направлении. Внутренняя кривая проведена для нахождения *поляризации* света в различных направлениях: отрезок радиус-вектора, заключенный *между* обеими кривыми, дает энергию *поляризованного света*. Как было уже сказано, поляризация оказывается полной по направлениям, перпендикулярным к падающему лучу (направление падающего луча изображено стрелкой).

В сущности полярную диаграмму, изображенную на рис. 437, следует рассматривать как пространственную; картина рассеяния будет совершенно симметрична относительно большой оси кривой, совпадающей по направлению с падающим лучом, а потому достаточно представить себе поверхность вращения, описанную обеими кривыми при вращении их вокруг большой оси,— эта поверхность вращения позволит найти энергию рассеянного света в любом направлении в пространстве.

Найдя распределение рассеянной световой энергии вокруг одной частицы, Рэлей исследовал эффект *множества* частиц, включенных в некоторой однородной среде. Оказалось, что при прохождении света сквозь слой мутной среды толщиной dx из всего потока энергии I рассеивается частицами в разные стороны количество энергии, равное

$$dI = -kI\,dx, \tag{10}$$

где k — *коэффициент рассеяния*, определяемый из соотношения

$$k = \frac{32\pi^3 (n-1)^2}{3N\lambda^4} = \frac{a}{\lambda^4}; \tag{11}$$

где N — число частиц в 1 $см^3$. На первый взгляд может показаться странным, что число это попало в знаменатель; очевидно, чем больше частиц приходится на единицу объема, тем большее рассеяние они должны вызвать.

В действительности формула (11) именно выражает эту мысль, но только в скрытой форме. Дело в том, что (согласно теории) величина $n - 1$, стоящая в круглых скобках, сама оказывается пропорциональной числу частиц в 1 $см^3$, а потому квадрат этой величины, деленный на N, само собой разумеется, будет пропорционален N.

Соотношения (10) и (11) снова вскрывают замечательное свойство рассеивающих частиц: энергия, рассеянная слоем мутной среды, оказывается обратно пропорциональной четвертой степени длины волны. Так, для волн крайнего фиолетового света ($\lambda = 0{,}44$ *мк*) энергия, рассеянная мутной средой, будет в 5,1 раза больше, чем для волн красного света ($\lambda = 0{,}66$ *мк*). Таким образом удалось объяснить происхождение голубого цвета неба: прямые солнечные лучи на пути сквозь атмосферу претерпевают частичное рассеяние, которое в синем конце спектра оказывается наибольшим.

Вот почему в диффузном световом потоке, исходящем от небесного свода, преобладают синие лучи.

С другой стороны, подобным же образом объясняется красная окраска Солнца во время восхода или заката: при малых высотах Солнца, как было не раз упомянуто, солнечным лучам приходится пронизывать значительно более толстый слой воздуха, чем при высотах больших (по Бемпораду, для лучей восходящего и заходящего Солнца слой этот в 81 раз больше, чем для лучей Солнца, стоящего в зените). По этой причине на своем пути прямые солнечные лучи лишаются очень большой части энергии, приходящейся на область коротких волн. Красные же лучи дойдут до поверхности Земли, испытав значительно меньшее рассеяние.

Но, давая такое хорошее объяснение явлениям, происходящим в газах, эта теория не позволяет распространить те же простые представления на *жидкости*. Правда, молекулы жидкости могут быть столь же малы, как и молекулы газов, но расстояние между ними значительно *меньше*, чем в газах. Между тем даже в газах расстояние между отдельными молекулами весьма мало́ по сравнению с длиной световой волны: при атмосферном давлении и температуре около 20° в кубике с ребром, равным длине волны, содержится примерно 10^6 молекул.

В жидкостях же концентрация молекул еще значительно больше. Но ведь благодаря такому тесному расположению молекул световые волны, рассеиваемые каждой из них в отдельности, могут отличаться между собой по фазе только чрезвычайно незначительно, а потому эффект *интерференции* этих волн неминуемо должен вести к *ослаблению* полного потока рассеянного света.

Вот почему даже в газах и, во всяком случае, в жидкостях нельзя объяснить с количественной стороны все рассеяние света, исходя из одного только представления о рассеянии световых волн отдельными, «индивидуальными», частицами. Здесь приходится привлекать на помощь замечательную теорию *флуктуаций плотности*, развитую М. Смолуховским [6] и давшую прекрасные результаты в различных областях молекулярной физики.

Сущность ее чрезвычайно проста. Смолуховский исследует статистически тепловое движение молекул газообразного или жидкого тела, причем выясняются закономерности распределения частиц в некоторой части пространства в различные моменты времени. Нетрудно ожидать прежде всего, что при беспорядочном движении молекулы будут то собираться теснее в какомнибудь малом определенном объеме, то расходиться на большие расстояния. Число молекул в единице объема, которое дается кинетической теорией вещества или определяется физико-химическими методами, следует рассматривать только как *среднее*. В действительности же оно *непрерывно колеблется*, вызывая тем самым *колебания плотности* вещества.

Применив к анализу молекулярного движения методы термодинамической статистики, Смолуховский получил соотношение, позволяющее определить среднее квадратичное отклонение плотности $(\Delta\delta)^2$ от ее нормальной средней величины δ_0. Оказалось, что

$$(\Delta\delta)^2 = \frac{RT\delta_0^2\beta_0}{N_1 V}. \tag{12}$$

Здесь N_1 — число молекул в грамм-молекуле; R — газовая постоянная (из уравнения состояния), отнесенная к тому же количеству газа; V — исследуемый объем вещества; β_0 — коэффициент сжимаемости.

Подобные колебания плотности, или, как их называют, *флуктуации*, очевидно, превращают всякое вещество в *оптически неоднородную* среду, в различных точках которой физические константы неодинаковы. В данном случае особенно важно отметить колебание *диэлектрической константы* среды, вызываемое колебаниями плотности. В свою очередь колебания диэлектрической константы неразрывно связаны с колебаниями, которым подвергается *коэффициент преломления* в различных точках среды, ибо, как известно,

коэффициент преломления пропорционален корню квадратному из диэлектрической постоянной вещества.

Но если диэлектрическая постоянная колеблется, отклоняясь на $\Delta\varepsilon$ от своего среднего значения, то некоторый объем вещества V должен рассеять свет таким образом, что на расстоянии r от него энергия рассеянного света по направлению, перпендикулярному к осям, будет

$$i_\nu = \frac{\pi^2 V^2 (\Delta\varepsilon)^2}{2\lambda^4} \frac{1}{r^2}, \tag{13}$$

если за единицу принята энергия падающего луча.

Между диэлектрической постоянной вещества и его плотностью существует зависимость, известная из молекулярной физики. Именно оказывается, что обычно

$$\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} = A\delta, \tag{14}$$

где A — некоторая постоянная величина.

Если продифференцировать уравнение (14), а затем перейти от дифференциалов $d\varepsilon$ и $d\delta$ к конечным приращениям (при условии их малости), то получим связь между колебанием диэлектрической постоянной и колебанием плотности

$$(\Delta\varepsilon)^2 = \frac{(\varepsilon - 1)^2 (\varepsilon + 2)^2}{9} \left(\frac{\Delta\delta}{\delta_0}\right)^2. \tag{15}$$

Сюда можно подставить выражение (12) для флуктуации плотности. Тогда

$$(\Delta\varepsilon)^2 = \frac{(\varepsilon - 1)^2 (\varepsilon + 2)^2}{9} \frac{RT\beta_0}{N_1}. \tag{16}$$

Приняв во внимание соотношение (13), которое определяет собой интенсивность пучка рассеянного света, направленного перпендикулярно к падающему лучу, легко прийти к формуле

$$i = \frac{\pi^2}{18} \frac{RT\beta_0}{N_1} \frac{(\varepsilon - 1)^2 (\varepsilon + 2)^2}{\lambda^4} V. \tag{17}$$

Удобнее пользоваться соотношением, в котором энергия рассеянного света отнесена к 1 *см*^{3} рассеивающей среды. Выполним такого рода преобразование и, кроме того, подставим вместо диэлектрической постоянной ε приблизительно равную ей величину квадрата показателя преломления n^2. Тогда

$$i = \frac{\pi^2}{18} \frac{RT\beta_0}{N_1} \frac{(n^2 - 1)^2 (n^2 + 2)^2}{\lambda^4}. \tag{18}$$

На формуле (18) Смолуховского зиждется вся современная теория молекулярного рассеяния света. Но нетрудно показать, что формально для случая *газообразной* среды формула эта может быть приведена к формуле (11). Для этого надо будет только принять во внимание, что для газа $\beta_0 = \frac{1}{P}$ и приблизительно $n^2 + 2 = 3$. Что касается величины $n^2 - 1$, то при n, весьма близком к единице, можно полагать $n^2 - 1 = 2(n - 1)$.

Остается еще вспомнить, что для газов на основании уравнения состояния всегда

$$\frac{RT}{N_1} \frac{1}{P} = \frac{V_m}{N_1} = \frac{1}{N}.$$

Подставив все это в уравнение (18), получим

$$i = \frac{2\pi^2 (n - 1)^2}{N\lambda^4}. \tag{19}$$

При наличии подобного выражения для интенсивности света, рассеянного по направлению перпендикуляра к падающему лучу, следует ожидать величину полного потока рассеянного света по всем направлениям именно такую, какая определяется уравнением (11).

Итак, для энергии света, рассеянного молекулами *газа*, обе теории дают один и тот же числовой результат. Но принципиальное различие между положениями обеих теорий весьма велико: с точки зрения первой теории рассеяние вызывается отдельными индивидуальными молекулами, вокруг которых происходит зарождение самостоятельных волн. Напротив, с точки зрения второй теории, агентами, рассеивающими свет, являются *неоднородности* среды, возникающие благодаря случайным местным изменениям плотности, при хаотическом тепловом движении молекул.

Совершенно очевидно, что для молекулярного рассеяния в *жидкостях* вторая теория — теория флуктуаций — даст совершенно иное количество рассеянной энергии, чем первая теория, и что полученный результат должен быть значительно ближе к истине.

Формула Смолуховского (18) выражает, как было уже упомянуто, энергию, рассеянную по направлению перпендикуляра к падающему лучу, причем за единицу принята энергия падающего света. Но, воспользовавшись ею, можно определить количество энергии, рассеиваемой *во все стороны* вокруг данного единичного объема мутной среды, т. е., иными словами, величину k — *коэффициент рассеяния*. Результат, как можно показать, получится простым умножением правой части (18) на постоянную величину $16\pi/3$

$$k = \frac{8\pi^3}{27} RT\beta_0 \frac{(n^2-1)^2(n^2+2)^2}{N_1\lambda^4} \tag{20}$$

Таково выражение коэффициента рассеяния, полученное Смолуховским на основании его теории флуктуаций. Выражается он здесь в обратных сантиметрах. Для того чтобы привести его к единицам, более удобным при исследованиях по оптике моря, необходимо принять во внимание, что длина волн измеряется обычно не в долях сантиметра, а в *микронах*, что коэффициент сжатия относится не к давлению в 1 дину на 1 $см^2$, а к давлению в 1 am и, наконец, что сам коэффициент рассеяния, подобно коэффициенту поглощения, мы условились выражать в *обратных метрах*, а не в обратных сантиметрах. Внеся в (20) все переходные множители, найдем из него соотношение, более удобное для практических подсчетов (в соотношении этом величины R, T и N_1 заменены соответствующими числовыми значениями и перемножены с другими числовыми коэффициентами):

$$k = 1{,}27\cdot 10^{-3}\beta_0 T \frac{(n^2-1)^2(n^2+2)^2}{\lambda^4} = \frac{a}{\lambda^4}. \tag{20а}$$

Если принять для чистой, дистиллированной воды $\beta_0 = 4{,}9\cdot 10^{-5}$, $T = 290°$, то на основании формулы (20а) получится

$$a = 1{,}56\cdot 10^{-4}. \tag{20б}$$

Для длины волны $\lambda = 0{,}494$ *мк* это дает

$$\frac{a}{\lambda^4} = 0{,}0026.$$

Но, как мы видели в табл. 22, из наблюдений получено значение коэффициента «поглощения» для той же длины волны: 0,002.

Следовательно, ослабление света в этой области спектра, которое имеет место в действительности, вызывается не поглощением света, а только его *рассеянием*.

§ 4. Рассеяние света крупными включениями

В предыдущем параграфе были рассмотрены две теории молекулярного рассеяния света; одна из них касалась действия отдельных молекул на падающие световые волны, другая, напротив, учитывала эффект случайных сгущений и разрежений, возникающих в среде при тепловом движении молекул. Но и та и другая теории *одинаково* основывались на предположении, что *рассеивающие агенты* — будь то индивидуальные молекулы или же скопления молекул (как у Смолуховского) — *весьма малы по сравнению со световой волной*.

Такое допущение совершенно законно, когда жидкость является вполне *однородной* в оптическом отношении, т. е. когда в ней нет никаких посторонних включений, которые могут образовать сколько-нибудь значительные конгломераты. Подобной совершенно однородной жидкостью оказывается вода, в которой не *растворено никаких газов*; если при этом в воде растворены какие-либо электролиты, то концентрация их должна быть далекой от насыщения.

Но если в воде заключены молекулы растворенных газов, то они при колебаниях температуры будут, очевидно, изменять свою группировку: при нагревании воды, например, они будут собираться в отдельные скопления, прежде чем выделиться в виде *пузырьков*, заметных на глаз или под микроскопом. При хаотическом тепловом движении такие крупные скопления газовых молекул, несомненно, должны попеременно то увеличиваться, то уменьшаться в объеме, подчиняясь общему закону флуктуаций.

Совершенно очевидно, что такие скопления газов легко могут достигнуть размеров порядка *длины световой волны* и вместе с тем не будут всплывать на поверхность в виде грубых пузырьков. Нетрудно убедиться в этом, вспомнив, что устойчивые взвеси, обнаруживающие так называемое броуновское движение [1], могут заключать в себе частицы диаметром около 1 *мк*, т. е. в 1,5 раза больше длины волны красного света и в 2 раза больше длины волны зеленого света.

Такие крупные частицы будут вызывать весьма сильное рассеяние света, но оно не может, оказывается, подчиняться рэлеевскому закону.

На это обстоятельство обратил внимание Г. Ми, исследовавший рассеяние света тончайшими коллоидальными взвесями золота [7]. Такие коллоидальные растворы получаются при горении вольтовой дуги между золотыми электродами, опущенными в воду. Пары золота быстро конденсируются в воде

[1] Броуновским движением называется беспорядочное движение мельчайших частиц, взвешенных в жидкости и подвергающихся непрерывным ударам со стороны молекул жидкости. Под влиянием этих ударов частицы проделывают сложные, зигзагообразные движения и лишь чрезвычайно медленно перемещаются вниз или вверх под действием силы тяжести (вниз, если их плотность больше плотности воды, и вверх, если их плотность меньше плотности воды; последний случай имеет место при наличии газовых включений в воде).

Скорость v перемещения в вертикальном направлении (под действием силы тяжести) выражается формулой

$$v = \frac{2}{9} r^2 g \frac{(\delta_1 - \delta_2)}{\eta},$$

где r — радиус частицы, $\delta_1 - \delta_2$ — разность плотностей ее и окружающей среды, g — напряжение поля тяжести, η — вязкость жидкости. Положив $r = 1 \cdot 10^{-4}$ *см*, $\delta_1 - \delta_2 = 1$ (газовый пузырек), $g = 981$ *см-сек*$^{-2}$, $\eta = 00{,}1$, найдем, что скорость должна быть около 0,0002 *см/сек*. *Следовательно, пузырек воздуха таких размеров может только ничтожно медленно всплывать на поверхность воды.* Следует отметить еще, что проделанное вычисление дает даже преувеличенную скорость, так как плотность воздуха в пузырьке для упрощения принималась равной нулю (по сравнению с плотностью воды). В действительности же при таких малых размерах пузырька, по всей вероятности, плотность воздуха оказывается соизмеримой с плотностью воды (при самом зарождении пузырька молекулы газа были также распределены, как и молекулы жидкости).

и дают мельчайшие частички диаметром порядка 0,1 *мк*, не обнаруживающие никакой тенденции оседать из коллоидального раствора.

Размеры этих частиц, как видим, одного порядка с длиной световой волны, а потому к ним нельзя применять представление чистой рэлеевской теории.

Физическая причина этого заключается в следующем. При выводе соотношений (11) или (19) предполагалось, что на поверхности раздела между веществом частицы и окружающей средой (или на границе сгущения, возникающего при флуктуациях, по Смолуховскому), возникают электрические

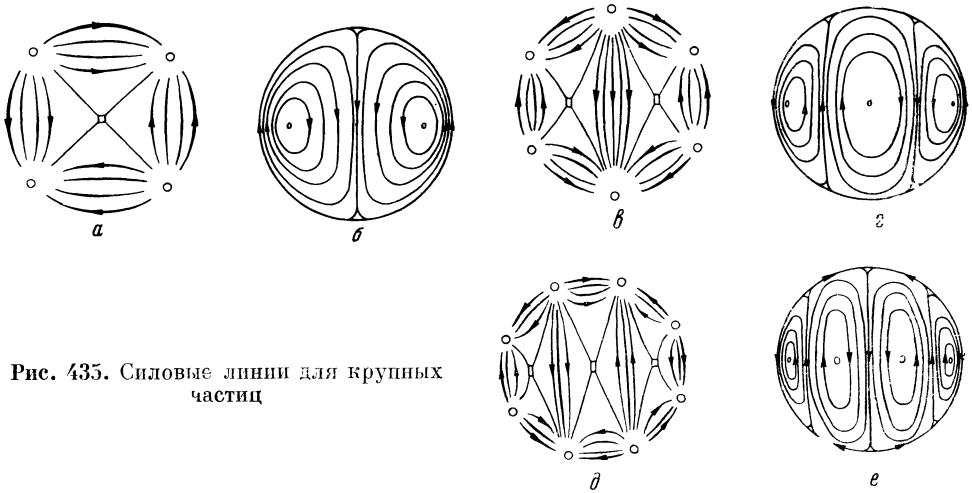


Рис. 435. Силовые линии для крупных частиц

колебания по схеме рис. 434,*а*, т. е. что на поверхности частицы появляются два разноименных электрических полюса, соединенных между собой электрическими силовыми линиями, которые проходят по меридианам; перпендикулярно к ним располагаются магнитные силовые линии, опоясывающие частицу по кругам параллелей (рис. 434,*б*).

В действительности при размерах частиц, *соизмеримых с длиной* световой волны, помимо такого рода простых колебаний, возникает серия *сложных*: поверхность частицы делится на участки, на которых происходят местные колебания между местными полюсами. На рис. 435,*а*, *б* изображены соответственно электрические и магнитные силовые линии при возникновении колебаний *второго* порядка. На рис. 435 *в*, *г* видна подобная же картина колебаний *третьего* порядка, а рис. 435 *д*, *е* соответствует колебаниям *четвертого* порядка.

Чем больше частица, тем больше разнообразия в дроблении ее поверхности. По внешности картина напоминает колебания пластинок, которые тоже распадаются на участки, но только не следует забывать, что в данном случае период колебания для *всех порядков* один и тот же. Эти колебания нельзя, следовательно, сравнивать с колебаниями участков струны, дающей высшие гармонические обертоны.

Частички золота обладают весьма большой *электропроводностью*, а потому, кроме чистого рассеяния света, они должны вызывать еще *поглощение* его в самом веществе частицы (в золоте). Этот процесс, налагающийся на процесс рассеяния, чрезвычайно осложняет анализ, а потому Ми ограничился исследованием явления только для частиц, размеры которых не превышают 0,180 *мк* (т. е. примерно 1/3 волны зеленого света).

В случае частиц, *не проводящих* электричества, анализ значительно упрощается благодаря отсутствию поглощения света веществом частицы, и его,

оказывается, возможно продолжить значительно дальше, распространив на частицы весьма большого диаметра.

Подобный анализ, проделанный Шулейкиным, имеет большое значение именно для проблем *оптики моря*, так как газовые включения, вызывающие рассеяние света наряду с молекулярным рассеянием, являются именно частицами, не проводящими электричества. Так как, помимо газовых включений, в морской воде оказываются взвешенными и мельчайшие твердые частички (измельченный грунт, бактерии, планктон и пр.), то является необходимым исследовать эффект рассеяния света и для частиц с показателем преломления, *бо́льшим* единицы, и для частиц с показателем преломления, *меньшим* единицы. Для вычисления Шулейкин воспользовался методом Ми, основанным на электромагнитной теории света [8].

В свою очередь электромагнитная теория света, как известно, основана на уравнениях Максвелла, связывающих между собой элементы *электрического и магнитного* полей в каждой точке пространства. В векторной форме уравнения применительно к идеальному *диэлектрику*, как известно, записываются так:

$$\frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \operatorname{rot}\mathbf{H}, \tag{21}$$

$$\frac{\mu}{c}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = -\operatorname{rot}\mathbf{E}. \tag{22}$$

Здесь **E** — вектор, выражающий напряженность электрического поля; **H** — вектор, выражающий напряженность магнитного поля; ε — диэлектрическая постоянная среды; μ — ее магнитная проницаемость; t — текущее время; c — скорость света. Символ **rot**, как было указано в гл. I, обозначает *оператор*, носящий название *вихря*: только в данном случае вихрь — *трехмерный*, в отличие от того условного оператора, которым пользовались и в двумерной задаче.

При исследовании рассеяния электромагнитных волн вокруг частицы удобнее пользоваться *полярной* системой координат r, φ, ϑ. Через r здесь обозначен радиус-вектор, исходящий из начала координат (рис. 436), а φ и ϑ — углы, отсчитываемые от двух взаимно перпендикулярных осей, изображенных на том же рисунке.

В такой системе координат вектор **E** разлагается на три составляющие: E_r, E_φ и E_ϑ, а вектор **H** — на составляющие H_r H_φ и H_ϑ. В соответствии с этим уравнения Максвелла (21) и (22) приобретают форму

$$\begin{aligned}
r^2 \sin\vartheta\,\varepsilon\frac{\partial E_r}{\partial t} &= \frac{\partial (r\sin\vartheta\cdot H_\varphi)}{\partial\vartheta} - \frac{\partial (rH_\vartheta)}{\partial\varphi},\\
r\sin\vartheta\varepsilon\frac{\partial E_\vartheta}{\partial t} &= \frac{\partial H_r}{\partial\varphi} - \frac{\partial (r\sin\vartheta\cdot H_\varphi)}{\partial r},\\
r\varepsilon\frac{\partial E_\varphi}{\partial t} &= \frac{\partial (rH_\vartheta)}{\partial r} - \frac{\partial H_r}{\partial\vartheta};
\end{aligned} \tag{23}$$

$$\begin{aligned}
-r^2\sin\vartheta\mu\frac{\partial H_r}{\partial t} &= \frac{\partial (r\sin\vartheta\cdot E_\varphi)}{\partial\vartheta} - \frac{\partial (rE_\vartheta)}{\partial\varphi},\\
-r^2\sin\vartheta\mu\frac{\partial H_\vartheta}{\partial t} &= \frac{\partial E_r}{\partial\varphi} - \frac{\partial (r\sin\vartheta\cdot E_\varphi)}{\partial r},\\
-r\mu\frac{\partial H_\varphi}{\partial t} &= \frac{\partial (rE_\vartheta)}{\partial r} - \frac{\partial E_r}{\partial\vartheta}.
\end{aligned} \tag{24}$$

Эти две системы уравнений можно значительно упростить, замечая, что и электрическое и магнитное поля изменяются во времени по простому гармо-

ническому закону. Пусть амплитуда колебаний каждой из слагающих вектора **E** равняется E с соответствующим индексом внизу, а амплитуда колебаний составляющих вектора **H** равняется H с теми же индексами внизу.

Чтобы исключить константу μ, внесем в уравнения вместо величин H величины *магнитной индукции* M (также с различными индексами в зависимости от характера составляющей), которые связаны с H соотношениями типа

$$\mathbf{M} = \mu\mathbf{H}.$$

Диэлектрическую постоянную также можно включить в выражение одной из переменных, внося в уравнения вместо радиус-вектора r новую величину x, связанную с ним простым соотношением

$$x = \frac{2\pi n_1 r}{\lambda_1} \approx \frac{2\pi\sqrt{\varepsilon}r}{\lambda_1} = \frac{2\pi r}{\lambda}.$$

Здесь n_1 — *показатель преломления* воды относительно пустоты, λ_1 — длина световой волны в пустоте, а λ — длина волны того же цветного луча, но только распространяющегося в *воде*, т. е. там, где она встречается с частицей.

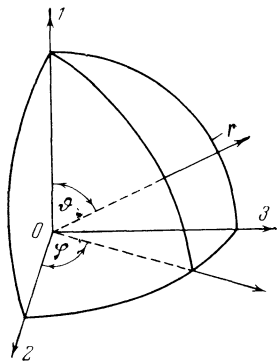


Рис. 436. Координатная система и векторы

Произведя такую замену переменных, можно уравнения (23) и (24) привести к виду, который был подробно исследован в связи с проблемами *теории звука* и который позволяет значительно проще найти интеграл.

Уравнения эти применительно к слагающим E_r и M_r запишутся в виде

$$\frac{\partial^2(x^2E_r)}{\partial x^2} + \frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial E_r}{\partial\vartheta}\right) + \frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2 E_r}{\partial\varphi^2} + x^2E_r = 0, \qquad (25)$$

$$\frac{\partial^2(x^2M_r)}{\partial x^2} + \frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial M_r}{\partial\vartheta}\right) + \frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2 M_r}{\partial\varphi^2} + x^2M_r = 0. \qquad (26)$$

Их интегралы в данном случае распадаются на целый ряд членов, соответствующих различным *парциальным волнам*, которые возникают вокруг частицы, согласно схемам рис. 435.

Аналогично получаются и интегрируются уравнения, охватывающие и другие составляющие электрического и магнитного векторов: E_ϑ, H_ϑ, E_φ и H_φ. Замечательно, что всегда два уравнения для *соответствующих* слагающих обоих векторов симметричны [как (25) и (26)]. Поэтому достаточно будет привести только выражения интегралов для составляющих электрического вектора

$$E_r = \sum_1^\infty \nu a_\nu i \frac{K_\nu(-x)}{x^2} p_\nu,$$

$$E_\vartheta = \sum_1^\infty \nu\left[\frac{a_\nu i}{\nu(\nu+1)}\frac{K'_\nu(-x)}{x}\frac{\partial p_\nu}{\partial\vartheta} + \frac{p_\nu}{\nu(\nu+1)}\frac{K_\nu(-x)}{x\sin\vartheta}\frac{\partial\mathfrak{P}_\nu}{\partial\varphi}\right], \qquad (27)$$

$$E_\varphi = \sum_1^\infty \nu\left[\frac{a_\nu i}{\nu(\nu+1)}\frac{K'_\nu(-x)}{x\sin\vartheta}\frac{\partial p_\nu}{\partial\varphi} + \frac{p_\nu}{\nu(\nu+1)}\frac{K_\nu(-x)}{x}\frac{\partial\mathfrak{P}_\nu}{\partial\vartheta}\right].$$

Совершенно симметричные выражения получатся и для составляющих магнитного вектора **M**.

В уравнениях (27) значок ν показывает *порядок* парциальной волны, возникающей благодаря дроблению поверхности частицы, согласно схемам рис. 435. Чем больше диаметр частицы, тем больше членов появляется под знаком суммы ($\Sigma\nu$).

Функция $K(-x)$ зависит только от x или, в скрытом виде, от радиус-вектора r. Она напоминает по своим свойствам *цилиндрические функции*, о которых была речь в гл. II. $K'(-x)$ — первая производная от этой функции, p_ν и $\mathfrak{P}_\nu$ представляют собой так называемые *шаровые функции* углов ϑ и φ, p'_ν и $\mathfrak{P}'_\nu$ являются их первыми производными.

Функции a_ν и p_ν, входящие во все выражения, определяются на основании *граничных условий*. Это — *комплексные* функции, зависящие от длины волны падающего света, от радиуса частицы и от коэффициента преломления n вещества, из которого состоит частица (по отношению к воде).

Выражения (27) и подобные же выражения для магнитного вектора были бы чрезвычайно неудобны для вычисления, если бы пришлось исследовать поле световых волн в непосредственном соседстве с рассеивающей частицей. Но задача сильно упрощается благодаря тому, что в действительности всегда приходится наблюдать эффект рассеяния на таком расстоянии r от частицы, которое неизмеримо больше радиуса самой частицы ρ.

Зная амплитуды обоих векторов, и электрического и магнитного, в каждой точке пространства вокруг частицы, можно, очевидно, определить *энергию* световых волн, исходящих от такой частицы по различным направлениям. Очевидно, что картина рассеяния света должна быть совершенно симметричной относительно *оси*, проходящей через центр частицы по направлению *падающего луча*. Поэтому достаточно будет рассмотреть только распределение излучаемой энергии по всем направлениям, лежащим в какой-нибудь одной диаметральной плоскости. Для всех остальных диаметральных плоскостей, очевидно, будет иметь место картина, получаемая при вращении найденной кривой распределения вокруг падающего луча, как вокруг оси симметрии.

Рассмотрим хотя бы распределение энергии между лучами, лежащими в диаметральной плоскости *103* (рис. 436).

Пусть на частицу падает *плоская* волна, распространяющаяся в направлении *03*. От направления, противоположного падающему лучу *03*, условимся отсчитывать угол, характеризующий то или иное направление в потоке рассеянного света,— угол γ.

Наблюдатель, который смотрит навстречу вектору, проведенному под углом, увидит свет, который может быть вызван колебаниями двоякого рода: электрические колебания световых волн будут направлены либо так, что они лягут в плоскости, проходящей через луч, падающий и луч зрения, либо так, что они будут перпендикулярны к этой плоскости. Разумеется, в обоих случаях они должны быть перпендикулярны к лучу зрения. Если обе составляющие светового потока в данном направлении будут равны между собой, то свет, исходящий в этом направлении, окажется *естественным* (неполяризованным). Напротив, если одна из компонент будет совсем отсутствовать, то свет окажется *полностью поляризованным*, причем плоскость поляризации сама собой определяется в зависимости от того, какая из составляющих отсутствует в потоке света, рассеянного по данному направлению.

Из уравнений (27) и аналогичных уравнений для магнитного вектора можно вычислить энергию обеих составляющих, вспоминая соотношения между амплитудой колебаний и энергией волны.

При вычислении одной из составляющих придется сделать подстановку

$$\vartheta = \frac{\pi}{2}, \quad \varphi = \frac{\pi}{2} - \gamma.$$

При определении второй составляющей подстановка будет иная:

$$\varphi = \frac{\pi}{2}, \quad \vartheta = \frac{\pi}{2} - \gamma,$$

ибо направление электрических колебаний здесь повернуто на прямой угол по отношению к колебаниям, имевшим место в первом случае.

Как было уже упомянуто, оказывается возможным проделать вычисления только в областях, удаленных от центра частицы на расстояние, весьма большое по сравнению с ее радиусом. Но в данном случае уравнения принимают особенно простую форму за счет введения новых, более простых шаровых функций Π_ν и их производных Π'_ν, зависящих только от одного аргумента ($\cos\gamma$) и от порядка парциальной волны ν.

Обозначим энергию световых волн, соответствующих обеим составляющим, через I_I и I_II. Тогда окажется в результате всех преобразований [1]

$$I_\mathrm{I} = \frac{\lambda^2}{8\pi^2 r^2}\left|\sum_1^\infty \nu\left\{\frac{a_\nu}{\nu(\nu+1)}\Pi_\nu + \frac{p_\nu}{\nu(\nu+1)}[\Pi_\nu\cos\gamma - \Pi'_\nu\sin^2\gamma]\right\}\right|^2, \qquad (28)$$

$$I_\mathrm{II} = \frac{\lambda^2}{8\pi^2 r^2}\left|\sum_1^\infty \nu\left\{\frac{a_\nu}{\nu(\nu+1)}[\Pi_\nu\cos\gamma - \Pi'_\nu\sin^2\gamma] + \frac{p_\nu}{\nu(\nu+1)}\Pi_\nu\right\}\right|^2. \qquad (29)$$

Вертикальные прямые со знаком возведения в квадрат выражают ту мысль, что от комплексного выражения, стоящего между ними, следует взять только *квадрат абсолютной величины* (другими словами, если мы на действительной части комплекса и на коэффициенте при i, как на катетах, построим прямоугольный треугольник, то придется затем найти квадрат гипотенузы).

Шаровые функции Π_ν и их производные Π'_ν выражаются крайне просто, через аргумент $\gamma = c$. Именно

$$\begin{gathered}\Pi_0 = 0, \quad \Pi_1 = 1, \quad \Pi_2 = 3c,\\ \Pi_3 = \frac{15}{2}c^2 - \frac{3}{2}, \quad \Pi_4 = \frac{35}{2}c^3 - \frac{15}{2}c;\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \Pi_\nu = \frac{1}{2^\nu}\sum_0^{\frac{\nu(+1)}{2}} s(-1)^s \frac{(2\nu-2s)!}{(\nu-s)!\,s!}\,\frac{c^{\nu-2s-1}}{(\nu-2s-1)!}.\end{gathered} \qquad (30)$$

Простое дифференцирование по c даст, очевидно, и значения Π'_ν. Значительно сложнее обстоит дело с вычислением функций a_ν и p_ν. Для определения их приходится проделывать цепь различных операций.

Исходной величиной, решающей судьбу всех вычислений, является *отношение радиуса частицы к длине световой волны*. В дальнейшем удобнее будет вместо нее пользоваться величиной, ей пропорциональной:

$$\alpha = \frac{2\pi\rho}{\lambda}. \qquad (31)$$

Напомним, что через λ обозначена длина световой волы в *воде*. Пусть, далее, коэффициент преломления вещества, из которого состоит частица, равняется n (относительно воды). Введем еще обозначение $\beta = n\alpha$; тогда прежде всего придется для каждого номера парциальной волны вычислить *по шесть* функций

$$\begin{aligned} A_\nu &= I_\nu(\alpha), & A'_\nu &= I'_\nu(\alpha);\\ B_\nu &= I_\nu(\beta), & B'_\nu &= I'_\nu(\beta);\\ C_\nu &= K_\nu(-\alpha), & C'_\nu &= K'_\nu(-\alpha). \end{aligned} \qquad (32)$$

[1] В подлинной работе Ми была погрешность, которая привела к неверным значениям множителя перед скобками в (28) и (29). Она переносилась во все последующие работы, в том числе до 3-го издания «Физики моря». Она была обнаружена и исправлена К. С. Шифриным. Начиная с 3-го издания формулы (28) и (29) печатаются в исправленном виде: в знаменателях множителей перед скобками стоит цифра 8 вместо неверной цифры 4, полученной Ми.

Для определения их служат следующие выражения:

$$I_\nu(x) = \sin\left(x - \frac{\nu\pi}{2}\right) + \sum_1^\nu s \sin\left[x - \frac{(\nu - s)\pi}{2}\right] \frac{(\nu + s)!}{(\nu - s)!\, s!} \frac{1}{(2x)^s}, \tag{33}$$

$$I'_\nu(x) = \cos\left(x - \frac{\nu\pi}{2}\right) + \sum_1^{\nu+1} s \cos\left[x - \frac{(\nu - s)\pi}{2}\right] \frac{(\nu + s - 1)!}{(\nu - s + 1)!\, s!} \frac{[\nu(\nu+1) + s(s-1)]}{(2x)^s}. \tag{34}$$

Как следует из обозначений (32), в формулы (33) и (34) надо подставлять сначала α (для определения A и A'), а затем β (для нахождения B и B').

Для вычисления оставшихся двух функций K и K' служат довольно сложные выражения, которые упрощаются только для самых первых номеров парциальных волн ν. Именно

$$K_\nu(-\alpha) = (-1)^\nu \frac{1\cdot3\cdot5\cdot(2\nu-1)}{\alpha^\nu} e^{-i\alpha} \left\{\left[1 + \sum_1^{\frac{\nu(-1)}{2}} \sigma \frac{(\nu-\sigma)_\sigma (-1)^\sigma}{(2\nu-1)(2\nu-3)\ldots(2\nu-2\sigma+1)} \times \right.\right.$$

$$\left.\left. \times \frac{\alpha^{2\sigma}}{1\cdot3\ldots(2\sigma-1)}\right] + i\alpha\left[1 + \sum_1^{\frac{\nu(+1)}{2}-1} \sigma \frac{(\nu'-\sigma-1)_\sigma (-1)^\sigma}{(2\nu-1)(2\nu-3)\ldots(2\nu-2\sigma+1)} \frac{\alpha^{2\sigma}}{1\cdot3\ldots(2\sigma+1)}\right]\right\}, \tag{35}$$

$$K'_\nu(-\alpha) = -(-1)^\nu \nu \frac{1\cdot3\ldots(2\nu-1)}{\alpha^{\nu+1}} e^{-i\alpha} \times$$

$$\times \left\{\left[1 + \sum_1^{\frac{\nu(+1)}{2}} \sigma(-1)^\sigma \frac{(\nu-\sigma)_\sigma + \frac{2\sigma-1}{\nu}(\nu-\sigma)_{\sigma-1}}{(2\nu-1)(2\nu-3)\ldots(2\nu-2\sigma+1)} \frac{\alpha^{2\sigma}}{1\cdot3\ldots(2\sigma-1)}\right] + \right.$$

$$\left. + i\alpha\left[1 + \sum_1^{\frac{\nu(-1)}{2}} \sigma(-1)^\sigma \frac{(\nu-\sigma-1)_\sigma \frac{2\sigma+1}{\nu}(\nu-\sigma-1)_{\sigma-1}}{(2\nu-1)(2\nu-3)\ldots(2\nu-2\sigma+1)} \frac{\alpha^{2\sigma}}{1\cdot3\ldots(2\sigma+1)}\right]\right\}. \tag{36}$$

После того как по формулам (33) — (36) будут вычислены все шесть функций группы (32) для всех номеров парциальных волн ν, нетрудно будет найти искомые функции a_ν и p_ν для тех же парциальных волн, пользуясь следующими уравнениями:

$$a_\nu = +(2\nu+1) i^\nu \frac{A'_\nu B_\nu\beta - B'_\nu A_\nu\alpha}{C'_\nu B_\nu\beta - B'_\nu C_\nu\alpha}, \tag{37}$$

$$p_\nu = -(2\nu+1) i^\nu \frac{A_\nu B'_\nu\beta - B_\nu A'_\nu\alpha}{C_\nu B'_\nu\beta - B_\nu C'_\nu\alpha}. \tag{38}$$

Если отыскивается только абсолютная величина амплитуды для каждой парциальной волны, то при подстановке в (37) и (38) величин K и K' можно отбросить экспоненты i^ν, указывающие направление, но не влияющие на абсолютную величину.

Найдя все функции Π_ν и Π'_ν, a_ν и p_ν, входящие в (28) и (29), остается только вычислить энергии обеих составляющих светового луча.

Совершенно очевидно, что полная энергия выразится *суммой* $I_\mathrm{I} + I_\mathrm{II}$. Разность же $I_\mathrm{I} - I_\mathrm{II}$ непосредственно определит собой энергию *поляризованного света.* При этом знак разности будет свидетельствовать о *плоскости* поляризации: если разность окажется положительной ($I_\mathrm{I} > I_\mathrm{II}$), то это будет значить, что электрические колебания в поляризованном луче перпендикулярны к плоскости зрения; если же разность окажется отрицательной

($I_I < I_{II}$), то это будет означать, что электрические колебания в луче происходят в самой плоскости зрения (разумеется, оставаясь при этом перпендикулярными к лучу зрения).

Пользуясь этим методом, Шулейкин нашел распределение энергии рассеянного света для частиц, диаметр которых менялся в весьма широких пределах. В отличие от коллоидального раствора золота, в данном случае вещество частиц можно было считать идеальным *диэлектриком*, как об этом было уже упомянуто.

В работе [8] Шулейкина вычисления были проделаны для случаев $\lim \alpha = 0$, $\alpha = 1$, $\alpha = 3$, т. е, $\lim \rho = 0$, $2\rho = 0{,}32\lambda$, $2\rho = 0{,}96\lambda$; впоследствии к этому ряду прибавился еще случай $\alpha = 9$, т. е. $2\rho = 2{,}87\lambda$.



Рис. 437. Индикатриса молекулярного рассеяния

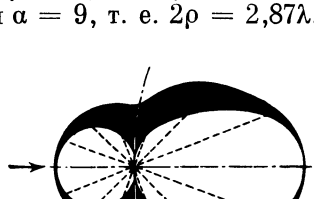


Рис. 438. Индикатриса рассеяния для крупной частицы

Что касается предельно малых частиц, то они вполне подчиняются рэлеевскому закону, выражаемому формулами (8) и (9). Распределение энергии естественного и поляризованного света по различным направлениям вокруг частицы изображено графически на полярной диаграмме рис. 437. Как было уже указано выше, длина какого-нибудь радиус-вектора от полюса до *внешней* кривой выражает в условном масштабе полную энергию света, рассеиваемого по данному направлению. Длина радиус-вектора от полюса до внутренней кривой дает в том же масштабе — энергию *естественного* света в том же направлении, а отрезок радиус-вектора, заключенный между обеими кривыми, показывает, какова энергия света *поляризованного* (в плоскости, перпендикулярной к плоскости зрения).

Как и следует из формул (8) и (9), свет оказывается полностью поляризованным, если смотреть на частицу в направлении, перпендикулярном к падающему лучу. Напротив, если смотреть по направлению самого падающего луча или по направлению, прямо противоположному, то луч света в этих направлениях окажется *естественным* (примесь поляризованного света будет отсутствовать).

Весьма важно отметить, что энергия света, отброшенного частицей в направлении, совпадающем с направлением падающего луча и прямо противоположном, совершенно одинакова.

Из формул (8) и (9) вытекает, что в случае двух ничтожно малых частиц, обладающих различными показателями преломления n_1 и n_2 относительно воды, *энергии света*, исходящего от той и другой частицы в каком бы то ни было одном направлении, *должны относиться* друг к другу, как

$$\left(\frac{n_1^2 - 1}{n_1^2 + 2}\right)^2 : \left(\frac{n_2^2 - 1}{n_2^2 + 2}\right)^2. \qquad (39)$$

В наиболее интересном частном случае, когда одна из сравниваемых частиц — твердая, обладающая показателем преломления *относительно воды*, равным $n_1 = 1{,}33$, а другая — газовый пузырек, обладающий коэффициентом преломления относительно воды, равным $n_2 = \frac{1}{1{,}33}$; *энергии*, соответствующие первой и второй частицам, *будут относиться*, как 0,041 : 0,015.

Посмотрим теперь, какова будет картина рассеяния света в случае частицы, соизмеримой с длиной волны, именно в случае, когда $\frac{2\pi\rho}{\lambda} = 1$.

Оказывается, что в данном случае парциальные волны второго порядка, налагающиеся на основные, уже заметно искажают распределение энергии вокруг рассеивающей частицы. Именно вычисления приводят здесь к полярной диаграмме, изображенной на рис. 438.

По-прежнему направление падающего луча указано стрелкой, видной слева. Рэлеевская фигура испытывает растяжение в сторону падающего света, причем лемниската, отсекавшая на радиус-векторах отрезки «естественного»

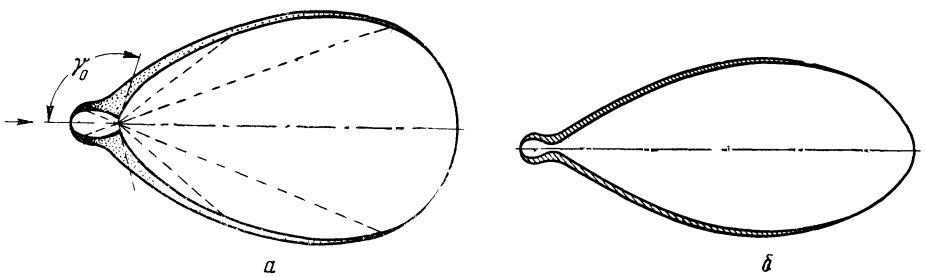


Рис. 439. Индикатрисы рассеяния для еще более крупных частиц

и «поляризованного» света, здесь разрывается и отходит от полюса. Это значит, что полная поляризация не может получиться ни по какому направлению. В частности, если смотреть на частицу в направлении, перпендикулярном к падающему лучу, то обнаружится поляризация только на 91%. Впрочем, в данном случае максимум поляризации не будет уже совпадать с этим направлением, а сдвинется от него примерно на 6° в ту сторону, в которую направлен падающий свет. Максимальная поляризация здесь будет 92%.

Энергия света, отброшенного частицей в направлении падающего света, превышает в 2,37 раза энергию, отброшенную в прямо противоположном направлении, и в 2,85 раза энергию, рассеянную под прямым углом к падающему лучу.

Переходя к третьему случаю, исследованному Шулейкиным, к случаю, когда $\frac{2\pi\rho}{\lambda} = 3$, приходится отметить, что здесь поток рассеянного света еще более усиливается в направлении падающего света и ослабевает в направлении противоположном. Полярная диаграмма рис. 439, *а*, соответствующая этому случаю, показывает, как растягивается здесь кривая *прочь* от источника падающего света: энергия света, рассеянного в направлении падающего света, превышает в 10,7 раза энергию света, отброшенного обратно.

Сверх того, в данном случае намечается еще одно любопытное явление в области *поляризации* света: рассеянные лучи оказываются поляризованными в прежней плоскости (рис. 437 и 438) только для небольшого угла — там, где пространство между обеими пограничными кривыми залито черным; там же, где это пространство покрыто точками, плоскость поляризации оказывается повернутой на прямой угол по отношению к прежней. Степень поляризации, как и следовало ожидать, стала еще меньше, чем в предыдущем случае: поляризация достигает около 78° (в оптимальном направлении, которое еще более сдвигается вперед от перпендикуляра к падающему лучу).

В направлении перпендикуляра поляризация равняется всего лишь 75%.

Чрезвычайно кропотливыми делаются вычисления в случае частиц, размер которых еще втрое больше, т. е. в случае частиц, для которых

$$2\pi\rho/\lambda = 9.$$

Здесь кривая на полярной диаграмме еще более растягивается в одну сторону (рис. 439, *б*).

К сожалению, исследование *еще более* крупных частиц посредством того же метода приводит к громадным трудностям чисто вычислительного характера. За истекшие годы многие авторы пытались упростить громоздкие формулы Ми и получали значительно более удобные расчетные формулы. Однако каждый автор показывал, что его предшественник не учел того или иного обстоятельства и допустил незаконные упрощения. В итоге до настоящего времени еще не существует никаких удобных для вычисления и вместе с тем надежных формул, пригодных для исследования индикатрис в случаях, когда $2\pi\rho/\lambda$ сколько-нибудь значительно превышает единицу.

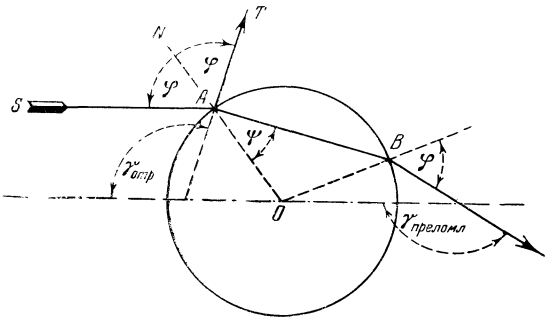


Рис. 440. Ход лучей применительно к предельно большой частице

Зато не представляет никакого особого труда определить, как будут вести себя световые волны вокруг *предельно большой* частицы, для которой отношение диаметра к длине световой волны может быть принято равным бесконечности.

По отношению к такой *предельно большой* частице Шулейкин впервые применил метод, основанный на теории *отражения и преломления света*. Пусть на поверхность сферы, изображающей большую частицу, падают световые волны в направлении, указанном стрелкой SA (рис. 440). В какой-либо произвольной точке A этой сферы падающий луч, очевидно, разделится *на две составляющие*: часть энергии будет продолжать распространяться в воде — в *отраженном* луче AT, а другая часть войдет в вещество частицы с *преломленным* лучом AB.

В § 1 уже были приведены формулы (1) и (2), позволяющие вычислять распределение энергии между этими двумя составляющими. Для удобства примем теперь яркость падающих лучей I_0 за единицу и обозначим сокращенно всю правую часть (1) через $F_1(\varphi)$, а всю правую часть (2) через $F_2(\varphi)$. Разобьем всю поверхность шара радиусом ρ на кольцевые пояски шириной $\rho d\varphi$. Количество энергии, которое отразится от одного такого пояска (в наших условных единицах), будет

$$F_1(\varphi)\,\rho\,d\varphi\cos\varphi\cdot 2\pi\rho\sin\varphi = F_1(\varphi)\,\pi\rho^2\sin 2\varphi\cdot d\varphi.$$

На некотором расстоянии R от центра частицы вообразим сферическую поверхность, сквозь которую будут проходить отраженные лучи. В частности, лучи, упавшие под углом φ к нормали, выйдут сквозь элементарный поясок сферы радиуса R, отстоящий на угол $\pi - 2\varphi$ от направления основного потока падающих лучей. Площадь этого элементарного пояска будет

$$Rd\varphi\,2\pi R\sin 2\varphi.$$

Разделив количество выходящей энергии на эту площадь, найдем яркость

отраженных лучей, уходящих под углом $\pi - 2\varphi$ к основному направлению (по-прежнему считая $I_0 = 1$)

$$I_{\text{отр}} = \frac{1}{2} F_1(\varphi) \left(\frac{\rho}{R}\right)^2. \qquad (40)$$

Аналогично определяется энергия лучей, входящих в шар по направлению AB, сквозь тот же элементарный поясок шириной $\rho d\varphi$: она будет равна

$$F_2(\varphi)\, \pi\rho^2 \sin 2\varphi.$$

В отличие от отраженных лучей, эти, преломленные, лучи выйдут через сферу радиуса R не на расстоянии $\pi - 2\varphi$ от основного направления, а на расстоянии $\pi - \gamma$ от него (угол γ нанесен на рис. 440). Значит, вычисление площади «выходного» пояска здесь будет более сложное: придется принимать

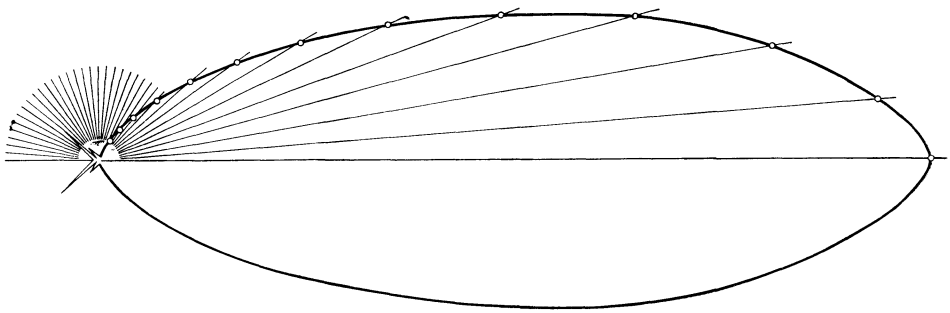


Рис. 441. Индикатриса для предельно большой частицы

во внимание довольно сложную зависимость между шириной «входного» пояска $\rho d\varphi$ и «выходного» $Rd\gamma$. В вычислениях Шулейкина, цитированных во 2-м издании настоящей книги, К. С. Шифрин обнаружил погрешность. С другой стороны, тот же автор показал, что только яркость света, проходящего сквозь шар, можно вычислять, ограничиваясь первичным потоком, изображенным на рис. 440. При вычислении *полной* яркости отраженных лучей оказывается совершенно необходимым рассматривать световые потоки высших порядков: ведь в точке B некоторая часть света *отражается от внутренней поверхности раздела* между шаром и окружающим пространством; этот отраженный свет где-то пронижет поверхность шара и пойдет в направлении к *источнику света*, под каким-то углом к основной оси чертежа рис. 440. Но в точке, где он будет выходить из шара, снова наступит частичное внутреннее отражение, которое после того или иного распространения света внутри шара добавит еще некоторую энергию, отбрасываемую в сторону источника света, под углом к основной оси чертежа. Внеся поправку в выкладки Шулейкина и учтя множество составляющих высших порядков в полном потоке «отраженного» света, Шифрин получил индикатрису «рассеяния» света вокруг предельно большой частицы (рис. 441) [9].

Обращают на себя внимание характерные *отростки* кривой, которые не замечались на индикатрисах сравнительно малых частиц. Они получились именно вследствие учета составляющих высоких порядков в *«отраженном»* потоке света. Их смысл совершенно аналогичен смыслу тех «лепестков», которые получаются в теории дифракции света вдобавок к основному языку индикатрисы. Именно эти «лепестки» порождают *радугу* при дифракции солнечных лучей вокруг дождевых капель: угол между осью «лепестка» и направлением падающих лучей, как известно, зависит от длины световой волны, а потому дифракционные максимумы образуют *цветные дуги* вокруг потока параллельных солнечных лучей.

Мы еще вернемся к этим отросткам индикатрисы в связи с тем значением, которое они имеют в вопросе о рассеянии энергии «вперед» и «назад».

При построении всех других индикатрис была учтена не только полная яркость лучей, отброшенных частицей в том или ином направлении, но и примесь *поляризованного* света в этих лучах. По отношению к предельно большой частице Шулейкин пользовался уравнениями для поляризации отраженного и преломленного света, отличающимися от (1) и (2) только знаком перед последним членом в скобке. Именно, как известно, яркость поляризованного света $I^{\text{отр}}_{\text{поляр}}$ при отражении выражается через яркость падающих лучей I_0 формулой

$$I^{\text{отр}}_{\text{поляр}} = \frac{1}{2}\frac{\sin^2(\varphi-\psi)}{\sin^2(\varphi+\psi)}\left[1-\frac{\cos^2(\varphi+\psi)}{\cos^2(\varphi-\psi)}\right]^2 I_0. \qquad (41)$$

Аналогично выражается и яркость поляризованных лучей при преломлении — формулой, схожей с (2). Приняв в (41) величину I_0 за единицу измерения и обозначив всю правую часть через $F_3(\varphi)$, можно действовать с этой величиной совершенно так же, как прежде с $F_1(\varphi)$. Аналогично обстоит дело и с вычислением поляризации лучей, выходящих во внешнюю среду из частицы: там вместо $F_2(\varphi)$ появляется родственная величина $F_4(\varphi)$.

Шулейкин отметил, что одна из составляющих света, «рассеянного» предельно большой частицей, именно та, которая обусловлена простым отражением по типу луча AT (рис. 440), должна оказаться полностью поляризованной при определенном значении угла φ. Ведь на основании закона поляризации при зеркальном отражении от поверхности диэлектрика полная поляризация должна возникнуть при значении угла $\varphi = \varphi_0$, определяемом из соотношения

$$\operatorname{tg}\varphi_0 = \operatorname{tg}(n). \qquad (42)$$

Значит

$$\gamma_0 = 2\operatorname{arctg}(n). \qquad (43)$$

Здесь кроется физический смысл того обстоятельства, что направление максимальной поляризации все больше и больше отклоняется от перпендикуляра к падающим лучам по мере возрастания диаметра частицы: в пределе оно стремится совпасть с направлением полной поляризации отраженного луча. Для конкретной твердой частицы, исследованной выше (с показателем преломления $n = 1{,}33$ относительно воды), это будет угол $\gamma_0 = 105°40'$. Разумеется, другие составляющие, которые налагаются на «чисто отраженный» свет, делают окончательный поток лучей в этом направлении *не* полностью поляризованным, а только максимально поляризованным.

Как видим, индикатриса «рассеяния» для предельно большой частицы, изображенная на рис. 441, завершает длинный ряд промежуточных форм. На этом длинном пути явление рассеяния, в строгом смысле этого слова, постепенно переходит в явление отражения света от поверхности частицы и явление преломления света сквозь тело частицы. Любопытно, что при этом происходит еще одно явление, которое долгое время не обращало на себя внимания и приводило к некоторым недоразумениям. Именно, как показал Шифрин, вокруг очень больших частиц возникает кирхгофовская дифракция, дающая тонкий пучок лучей в направлении падающего света. В предельном случае энергия, распространяющаяся внутри этого тонкого пучка, в точности равна энергии, «рассеянной» вокруг предельно большой частицы по всем направлениям (в соответствии с индикатрисой рис. 441). В итоге количество энергии, рассеянной такой частицей, *формально* равно удвоенной энергии, падающей на диаметральную плоскость частицы. Фактически же энергия, распространяющаяся внутри тонкого пучка, присоединяется к общему потоку лучей, идущему от источника, и обычно не обнаруживается в дальнейшем как какая-то самостоятельная часть потока. Значит, прак-

тически, в согласии с геометрической оптикой, энергия, рассеянная предельно большой частицей, равна энергии основного потока, рассчитанного на величину площади экваториального сечения частицы.

При сопоставлении всех вычерченных индикатрис особо резко бросается в глаза непрерывное увеличение *асимметрии* светового поля относительно плоскости, перпендикулярной к направлению основных — падающих — лучей: количество энергии, рассеянное *вперед*, все больше и больше превышает энергию, рассеянную *назад*.

Попытаемся вычислить, во сколько раз отличаются между собой полные *потоки энергии*, которые исходят по различным направлениям, лежащим *по одну и по другую стороны* от этой перпендикулярной плоскости, проведенной через частицу. В случае бесконечно малой рэлеевской частицы оба потока, очевидно, равны, так как фигура рис. 437 вполне симметрична относительно плоскости, перпендикулярной к падающему лучу.

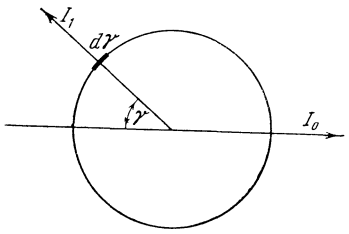


Рис. 442. Схема для вычисления потоков энергии

При конечных размерах частицы вычисление нетрудно произвести на основании чрезвычайно простых пространственных соотношений.

Пусть от частицы, находящейся в полюсе диаграммы (рис. 442), под углом γ к оси исходят лучи, характеризуемые некоторой интенсивностью I_γ. Той же самой интенсивностью будут, очевидно, обладать все лучи, которые образуют конус, описанный при вращении луча I_γ вокруг падающего луча. Следовательно, сквозь бесконечно тонкое кольцо шириной $d\gamma$ и с радиусом $\sin\gamma$, вырезанное на поверхности шара, у которого $R = 1$, пройдет количество энергии, равное

$$dw = 2\pi I_\gamma \sin\gamma \cdot d\gamma.$$

Как мы видели выше, при конечных размерах частиц величина I_γ не может быть представлена в виде аналитической функции от γ.

Но ничто не мешает воспользоваться графическим методом и построить кривую, выражающую зависимость величины $I_\gamma \sin\gamma$ от γ.

Подобная зависимость представлена на рис. 443, причем одна кривая относится к случаю $\alpha = 1$, другая к случаю $\alpha = 3$, третья к случаю $\alpha = 9$, четвертая к случаю $\alpha = \infty$ (масштабы ординат всех кривых взяты разные для компактности чертежа). Совершенно очевидно, что площадь слева от ординаты $\gamma = 90°$ представляет собой суммарную энергию, рассеянную по всем направлениям от $\gamma = 0°$ до $\gamma = 90°$. В то же время площадь справа от этой ординаты выражает в том же масштабе энергию, которая рассеяна по всем направлениям от $\gamma = 90°$ до $\gamma = 180°$. В этом можно убедиться, заметив, что обе интересующие нас части энергии выражаются интегралами

$$|W|_0^{90} = 2\pi \int_0^{\pi/2} I_\gamma \sin\gamma \cdot d\gamma. \quad |W|_{90}^{180} = 2\pi \int_{\pi/2}^{\pi} I_\gamma \sin\gamma \cdot d\gamma.$$

На основании такого рода диаграмм нетрудно определить, какая доля всей рассеянной энергии попадает в область, лежащую по одну сторону от плоскости, перпендикулярной к падающему лучу. Для дальнейшего важно найти ту долю W_1/W всей рассеянной энергии, которая направляется в область, лежащую влево от ординаты 90° на рис. 443, т. е. исследовать лучи, которые возвращаются в сторону источника света.

На рис. 444 графически изображены результаты этого исследования. Как видим, при $\lim \alpha = 0$ (при предельно малых рэлеевских размерах

частиц) «обратно» отбрасывается половина всей рассеянной энергии ввиду полной симметрии рэлеевской кривой относительно «пограничной» плоскости. По мере увеличения диаметра частицы, по мере возрастания величины $\alpha = \frac{2\pi\rho}{\lambda}$ в обратную сторону начинает рассеиваться все меньшее и меньшее *относительное* количество энергии. Так, при $\alpha = 1$ обратно поступает только 0,4 всего рассеянного потока энергии, при $\alpha = 3$ доля энергии, отброшенной обратно, уменьшается до 0,2, при $\alpha = 9$ — до 0,11, а в дальнейшем начинает асимптотически приближаться *к предельному значению*, когда диаметр частицы неограниченно возрастает. Предельной величиной является 0,08. Как видно на рис. 443, в предельном случае решающую роль играют отростки индикатрисы, которые увеличивают общее количество энергии, отброшенной «назад» относительно пограничной плоскости.

Полученные результаты *чрезвычайно существенны*; как видим, асимметрия кривых рассеяния света приводит в сущности совсем не к такой большой

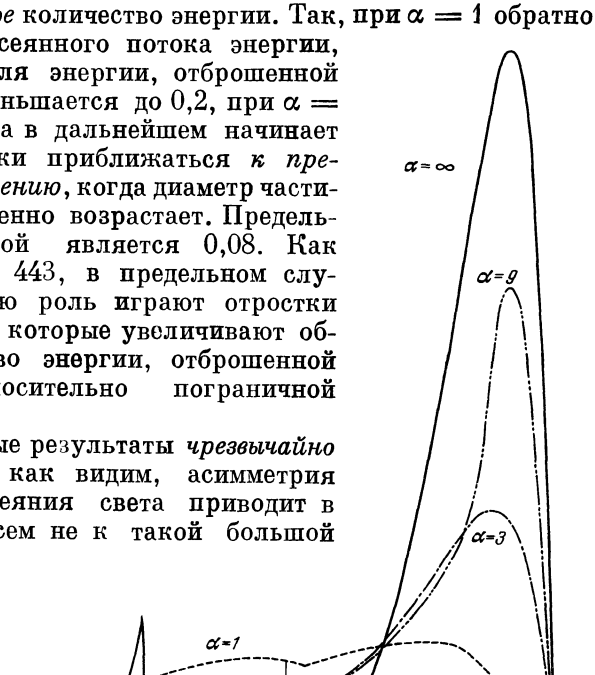


Рис. 443. Кривые потоков энергии

асимметрии в потоках, отброшенных «вперед» и «назад, какую можно было бы ожидать при беглом взгляде на кривые рис. 438 и 439. Вот почему совсем *неправы* Ч. В. Раман [10] и его ученики, полагающие, что относительное количество энергии, отброшенной *назад* крупными частицами, якобы незначительно.

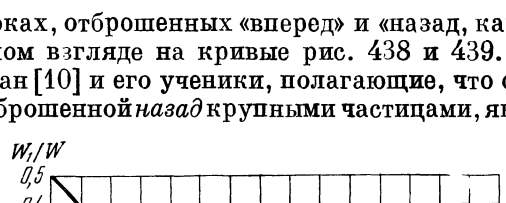


Рис. 444. Относительная энергия, рассеянная «назад»

Все дело в том, что диаграммы типа рис. 438 и 439 *маскируют* одну особенность рассеянного потока: именно то обстоятельство, что наиболее интенсивные лучи (с углами γ, близкими к 180°) соответствуют кольцевым зонам (рис. 442), обладающим *самыми малыми радиусами*. Напротив, большие радиусы, а следовательно, и большие периметры, соответствуют тем кольцевым зонам «единичной сферы» (рис. 442), для которых углы γ близки к 90°.

Но в этой области не так велико различие между энергией лучей, отклоняемых «вперед» или «назад».

В дальнейшем нам придется еще раз вернуться к этому вопросу, а пока будет уместным проделать следующий простой расчет.

Как было упомянуто в предыдущем параграфе, «модуль рассеяния» для *чисто молекулярного* процесса равен $a = 1{,}56 \cdot 10^{-4}$ [см. (20б)]. Но в природе, в естественной морской воде, этот модуль иногда превышает величину 0,030. Другими словами, крупные частицы, взвешенные в воде, могут вызывать *суммарный* эффект рассеяния, примерно в 200 раз превышающий эффект молекулярного рассеяния. Допустим теперь даже, что рассеяние совершалось очень большими частицами, для которых «назад» отбрасывается лишь около 0,11 всего рассеянного потока.

Вспоминая, что в случае симметричного молекулярного рассеяния эта доля равнялась бы 0,50, найдем, что даже при весьма невыгодных допущениях крупные частицы отбросят «назад» в $\frac{0{,}11}{0{,}50} \cdot 200$, т. е. *в сорок четыре* раза, больше энергии, чем было бы отброшено одними молекулами воды.

Остается еще исследовать *спектральный состав* света, рассеиваемого крупными частицами.

Заранее можно предвидеть, что простая рэлеевская формула, содержащая в знаменателе *четвертую степень* длины волны, будет давать результаты, все менее и менее соответствующие действительности, по мере того как размеры частицы будут возрастать. Какова же будет в таком случае зависимость между длиной волны и количеством энергии, которую крупная частица рассеивает в данной области спектра?

Как и в предыдущей задаче, было бы бесплодным занятием искать интересующую нас зависимость аналитически. Однако и здесь приходит на помощь простой графоаналитический прием, который позволяет обойти все трудности. Разумеется, большой точности от него требовать не приходится.

Вспомним прежде всего, что до сих пор основным параметром при анализе явлений служила величина $\alpha = \frac{2\pi\rho}{\lambda}$. Выразим и теперь искомую энергию в виде функции этого параметра.

Для весьма малых (предельно малых) частиц функция эта может быть выражена аналитически. Именно, согласно теории Ми, энергия W световых волн, рассеянных *по всем направлениям* такой маленькой частицей, выражается уравнением

$$W = \frac{\lambda^2}{2\pi} \left| \frac{a_\nu}{3} \right|^2, \tag{44}$$

где можно полагать, что

$$a_\nu = 2\alpha^3 \frac{n^2 - 1}{n^2 + 2}. \tag{44а}$$

Здесь, как и в предыдущем изложении, за единицу интенсивности света принимается интенсивность *падающего света*. Но если это так, то энергия, которая падает на площадь, равную экваториальному сечению частицы, должна быть равной

$$W_0 = \pi\rho^2 = \frac{\alpha^2\lambda^2}{4\pi}. \tag{45}$$

Если мы разделим W на W_0, то найдем отношение между энергией, которую рассеивает частица, и энергией, приходящейся на экваториальное сечение самой частицы.

Произведя деление, примем во внимание равенство (44а). Тогда окажется, что

$$\frac{W}{W_0} = \frac{8}{9} \left(\frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} \right)^2 \alpha^4. \tag{46}$$

Но подобная зависимость между W/W_0 и α будет существовать только, пока частица *весьма мала* по сравнению с длиной волны. Для больших частиц теория Ми дает

$$W = \frac{\lambda^2}{2\pi} \sum_1^\infty \frac{|a_\nu|^2 + |p_\nu|^2}{2\nu + 1}, \tag{47}$$

где a_ν и p_ν — по-прежнему комплексные функции, вычисляемые для различных парциальных волн. Разделив (47) на (45), получим

$$\frac{W}{W_0} = \frac{2}{\alpha^2} \sum_1^\infty \frac{|a_\nu|^2 + |p_\nu|^2}{2\nu + 1}. \tag{48}$$

Формула (48) перешла бы в (46), если бы сумма Σ изменялась пропорционально *шестой* степени α. Но в действительности чем дальше идет увеличение диаметра частицы, тем медленнее возрастает упомянутая сумма. Когда

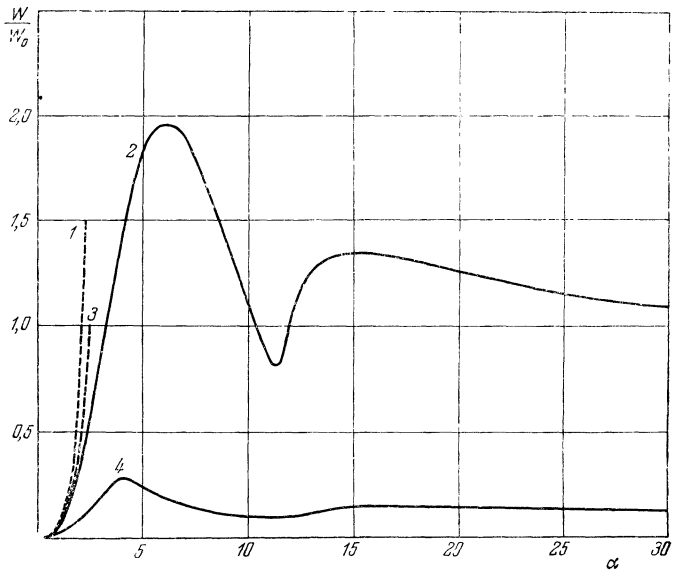


Рис. 445. Рассеянная энергия при различных размерах частиц

частица делается несоизмеримо большой по сравнению с длиной волны, сумма Σ возрастает пропорционально *квадрату* α; к подобному заключению нетрудно прийти, заметив, что бесконечно большие частицы будут практически одинаково рассеивать лучи *всех* цветов, а потому W/W_0 окажется независимым от α.

Шулейкин [8] вычислил по (48) кривую зависимости W/W_0 от α, кривую с максимумом—первым, видным на рис. 445 на кривой *2*. В дальнейшем различные авторы продолжили и уточнили расчеты кривой. На ней был обнаружен второй максимум, после которого кривая асимптотически приближалась к предельному значению $W/W_0 = 1$, при безграничном увеличении аргумента α, как это представлено на рис. 445. В настоящее время выяснено, что в действительности кривая *2* после ее второго максимума протекает сложней: на ней чередуются минимумы и максимумы дифракционного происхождения, причем ниспадающая ветвь кривой *2* как бы осредняет значения ординат осложненной кривой. Первый максимум на кривой *2* соответствует приблизительно $\alpha = 6{,}0$, т. е. $2\rho \doteq 1{,}92\lambda$.

Здесь наблюдается своего рода «оптический резонанс», при котором отношение W/W_0 достигает примерно значения 2,0.

При $\alpha = 11{,}2$, т. е. $2\rho = 3{,}37\ \lambda$, кривая проходит через минимум и после него вновь поднимается до вторичного максимума, лежащего близ $\alpha = 15{,}0$, т. е. $2\rho = 4{,}70\ \lambda$.

Замечательно, что при некоторых размерах частиц энергия, рассеиваемая частицей по всем направлениям, оказывается больше той, которая приходится на ее экваториальное сечение; как всегда, эффект дифракции исключает элементарное понятие о «тени», присущее геометрической оптике. Весь световой поток, приходящийся на экваториальное сечение шара (рис. 440), либо подвергается отражению от его поверхности, либо (в большей своей части) проходит насквозь, причем направление лучей тоже меняется благодаря двукратному преломлению на пограничной поверхности. Здесь мы отвлекаемся от «кирхгофовского луча», о котором говорилось на стр. 703.

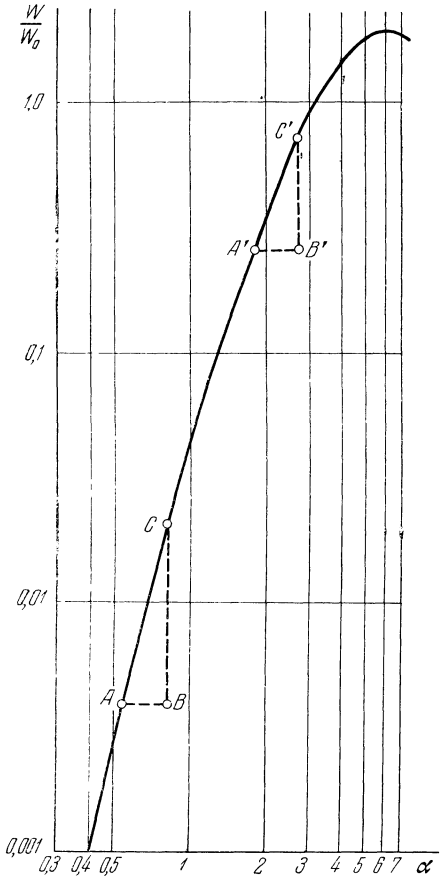


Рис. 446. Спектральный состав

Диаграммой рис. 445 мы воспользуемся для выяснения спектрального состава рассеянного света.

Представим себе частицу некоторого определенного размера и допустим, что на нее будут падать световые волны *разной длины*. В этом случае величина W/W_0 должна меняться уже не вследствие изменения диаметра частицы, а вследствие изменения λ.

Но это нисколько не помешает применить кривую рис. 445 для исследования процесса. На первом ее этапе, как было сказано, рассеяние света следует закону (46), который представляет собой не что иное, как закон Рэлея. Действительно, при постоянном диаметре частицы величина $\alpha^4 = \frac{(2\pi\rho)^4}{\lambda^4}$ оказывается обратно пропорциональной четвертой степени длины волны.

На рис. 445 для сравнения нанесена пунктиром кривая 1, вычисленная по формуле (46), вытекающей из закона Рэлея. На первом этапе при малых значениях α она совпадает с кривой *2*, которую мы сейчас исследуем. Здесь рассеяние света происходит обратно пропорционально *четвертой* степени длины волны, если неизменным является диаметр частицы. При переходе ко все бóльшим и бóльшим диаметрам частиц исследуемая кривая начинает идти более полого, чем пунктирная. Следовательно, на соответствующих этапах правильнее полагать, что рассеянная энергия пропорциональна иным степеням длины волны: степени 3,5; 3,0; 2,5 и т. д. Для удобства определения показателей степени перенесем исследуемую кривую *2* на логарифмическую сетку рис. 446. Цифры на оси абсцисс по-прежнему обозначают величину α, а цифры на оси ординат — величину W/W_0.

Пусть требуется проследить за тем, по какому степенно́му закону меняется рассеяние света в пределах длин волн от $\lambda = 0{,}400$ *мк* до $\lambda = 0{,}600$ *мк*. Оче-

видно, каковы бы ни были размеры частиц, отношение величин α, соответствующих этим крайним значениям λ, будет равно всегда одному и тому же числу 1,5. Но в таком случае исследуемый спектральный диапазон будет укладываться на диаграмме рис. 446 всегда между какими-нибудь двумя ординатами, отстоящими одна от другой на расстояние AB, соответствующее *логарифму* числа 1,5.

Второе чрезвычайно удобное свойство логарифмической сетки позволяет непосредственно определить искомый показатель степени, строя на различных этапах треугольники типа ABC, у которых одним катетом служит только что упомянутый отрезок AB (с точкой A, лежащей на кривой), а другим — отрезок ординаты от точки B до точки пересечения с кривой (до точки C).

Именно, как легко убедиться, искомый показатель n определяется из элементарного соотношения

$$n = \frac{BC}{AB}.$$

Заставляя точку A скользить по кривой, перемещая отрезок AB все выше и выше (оставляя его при этом параллельным оси абсцисс) и следя за изменением отношения BC/AB, легко выбрать на диаграмме такие полосы, в пределах которых выполнялось бы требование

$$\frac{BC}{AB} = 4{,}0;\ 3{,}5;\ 3{,}0;\ 2{,}5;\ \ldots$$

Тогда, вспомнив соотношение (31), останется только перейти от значений α и λ к значению *диаметра* частицы, соответствующего тому или иному диапазону. Пусть, например, при искомом значении диаметра частицы d синему краю выбранной полосы ($\lambda = 0{,}4$ *мк*) соответствует по диаграмме значение α, равное $\alpha_{0,4}$, а красному краю ее ($\lambda = 0{,}6$ *мк*) — значение $\alpha = \alpha_{0,6}$. Тогда, очевидно, на основании (31)

$$d = \frac{0{,}4\alpha_{0,4}}{\pi} = \frac{0{,}6\alpha_{0,6}}{\pi}\ \text{мк}.$$

В результате таких операций Шулейкин получил зависимость между размерами частиц и *показателем* степени при длине волны, которым следует заменять рэлеевскую четверку (табл. 23).

Таблица 23

Показатель степени при λ	Диаметр рассеивающих частиц, *мк*	Показатель степени при λ	Диаметр рассеивающих частиц, *мк*
4,0	$\leqslant$0,10	2,5	0,34
3,5	0,15	2,0	0,45
3,0	0,25	1,5	0,5

Итак, рэлеевский закон рассеяния применим лишь при размерах рассеивающих частиц не выше 0,10 *мк*. При бóльших диаметрах частиц показатель степени при λ начинает быстро убывать (быстро потому, что длины волн здесь превышают диаметр частиц и поляра рассеяния деформируется согласно § 4, причем форма этой поляры чутко реагирует на всякое изменение размеров частиц). Следует отметить, что, во-первых, рассматриваемая степеннáя зависимость, отличная от рэлеевской, относится, строго говоря, только к выбранным *краям* спектральной полосы: от $\lambda = 0{,}4$ *мк* до $\lambda = 0{,}6$ *мк*. В промежутке между ними она будет не вполне точной (это не имеет, однако, практического значения). Во-вторых, надо отметить, что в природных условиях воды содержат обычно рассеивающие частицы различных размеров. Следовательно,

пользуясь приведенной таблицей, можно определять лишь некоторый *осредненный*, эквивалентный размер рассеивающих частиц.

Как было уже указано в § 2, измерения, проделанные разными авторами на очень чистых горных *озерах*, привели Шулейкина к выводу, что рассеяние света в этих водах шло по закону четвертой степени. За время, прошедшее с тех пор, в литературе появился материал по спектрофотометрированию проб *морской воды*, позволяющий вычислить для соответствующих вод связь между длиной волны и рассеянием света.

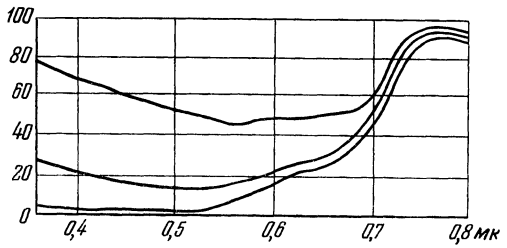


Рис. 447. Фотометрирование проб воды из разных морей

Так, по кривым рис. 447 можно заключить, что в пределах от $\lambda = 0{,}4$ *мк* до $\lambda = 0{,}6$ *мк* рассеяние света идет по таким законам:

	n
В одном из районов очень прозрачного Саргассового моря	3,5
В пределах материковой отмели Атлантического океана Vineyard Sound	2,5
По многочисленным измерениям А. А. Гершуна [11], в мелководных районах наших внутренних морей	1,5

Как показывает исследованная кривая *2* на рис. 445 и она же, перенесенная на логарифмическую сетку рис. 446, после некоторого предельного значения α дальнейшее увеличение α приводит *к падению* величины W/W_0. В этой области частицы, обладающие размерами примерно от 0,8 до 2,0 *мк*, рассеивают длинные волны *сильнее* коротких.

Если бы мы могли выделить одни только эти частицы, то окраска мутной среды в «отраженном» свете была бы не голубоватая, а желтоватая. В действительности они присутствуют в мутных средах вместе с частицами меньших размеров, а так как число последних в устойчивых взвесях преобладает, то окраска всей среды оказывается голубоватой. Но она в коллоидальных взвесях *никогда не бывает чисто голубой* именно благодаря присутствию крупных частиц.

Совершенно так же объясняется белесоватая окраска неба над морем, которая резко отличается от насыщенного синего цвета неба, присущего *сухим и жарким* местностям (например, Казахстану).

Когда влажность еще более повышается, в атмосфере могут появляться частицы еще бо́льших размеров. Для таких крупных частиц длина волны оказывается безразличной: они одинаково рассеивают *все* спектральные лучи. Таковы частицы, появляющиеся в *туманах и облаках*. И в «отраженном» и в проходящем свете они дают *белую* окраску среды.

Вопрос об окраске в *отраженном* свете собственно следует еще уточнить, вспомнив диаграмму рис. 444. Ведь пока мы рассматривали только изменение *полного* потока энергии, рассеянной по всем направлениям вокруг частицы. Что касается «отраженной» его части, то она *вдвойне* связана с длиной волны:

и потому, что величина $\alpha = \frac{2\pi\rho}{\lambda}$ является аргументом кривой *2* (рис. 445), и потому, что та же величина α влияет на распределение энергии между частями потока, отброшенными «назад» и «вперед» (рис. 444).

Достаточно перемножить ординаты кривой рис. 444 и кривой *2* рис. 445, для того чтобы найти, какая доля энергии соответствует потоку, отброшенному «назад». За единицу будет принят по-прежнему поток, падающий на площадь экваториального сечения частицы.

Полученная кривая нанесена на рис. 445 и обозначена цифрой *4*. Близ нее проходит рэлеевская кривая *3*, построенная для сравнения и показывающая распределение энергии в спектре света, отброшенного «назад» предельно малыми частицами.

Как видим, отклонения от закона четвертой степени здесь начинают сказываться раньше, чем в полном рассеянном потоке: уже начиная с диаметра частиц около 0,03 *мк*, следовало бы считать, что энергия рассеянного света обратно пропорциональна *третьей*, а затем второй и первой степеням длины волны.

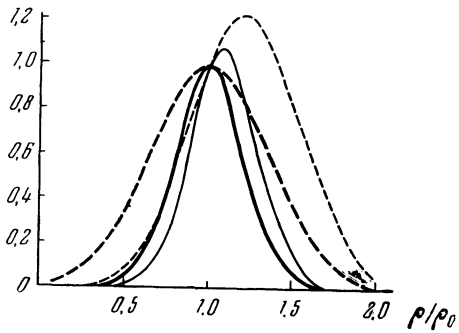


Рис. 448. Вспомогательная диаграмма для графического интегрирования

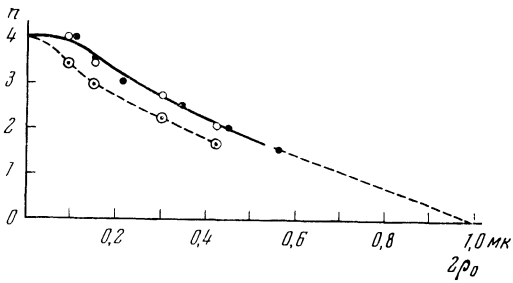


Рис. 449. Связь между преобладающими размерами частиц и показателем степени при λ

Вот чем объясняется белесоватая, не чисто голубая окраска даже таких коллоидальных взвесей, которые в *проходящем* свете дают еще рассеяние по закону четвертой степени.

Пока мы считали, что все рассеивающие частицы обладают одними и теми же размерами, по которым определяли: при каком значении их диаметра 2ρ можно давать показателю степени при λ — величине n — то или иное округленное значение? Сейчас уточним анализ, следуя работе В. В. Шулейкина [12]; положим, что среди множества частиц, соизмеримых с длиной световой волны, диаметры *распределены по закону Гаусса*. Будем искать зависимость между наивероятным значением $2\rho_0$ диаметра рассеивающей частицы и показателем степени n, который должен заменить рэлеевское значение $n = 4$. Чисто аналитическое решение этой задачи невозможно, а потому составим выражение некоторой величины, пропорциональной энергии, рассеянной всеми частицами, удобное для графического интегрирования.

Эту величину $\Phi(\rho_0, \lambda)$, функцию ρ_0 и λ, выразим через плотность вероятности $\varphi(\delta)$ отклонения δ (относительного) от $2\rho_0$, иными словами, через плотность вероятности $\varphi(2\rho)$ существования частиц с диаметром 2ρ:

$$\Phi(\rho_0, \lambda) = \int_0^\infty \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^2 \frac{\varphi(2\rho)}{\varphi(2\rho_0)} F\left(\frac{2\pi\rho}{\lambda}\right) d\rho. \qquad (49)$$

Здесь $\varphi(2\rho_0)$ — плотность вероятности существования частиц, обладающих наиболее вероятным диаметром $2\rho_0$. Функция $F(2\pi\rho/\lambda)$ задана графиком на

рис. 446, откуда ее значения подставляются в подынтегральное выражение в (49). На рис. 448 изображен вид кривых $\varphi(2\rho)/\varphi(2\rho_0)$ и $(\rho/\rho_0)^2 2\varphi(2\rho)/\varphi(2\rho_0)$ применительно к двум частным значениям среднего квадратичного отклонения $\sqrt{\overline{\delta^2}}$: сплошные кривые соответствуют $\sqrt{\overline{\delta^2}} = 0{,}2$, пунктирные — значению $\sqrt{\overline{\delta^2}} = 0{,}35$.

Ввиду чрезвычайно сильного поглощения световых лучей молекулами воды в красной части спектра практический интерес представляет исследование спектра в пределах от фиолетовой части с $\lambda_1 = 0{,}40$ *мк* до оранжевой с $\lambda_2 = 0{,}60$ *мк*. Поэтому мы вычисляли функцию $\Phi(\rho_0, \lambda)$ применительно к этим двум значениям λ. Значения $2\rho_0$ были выбраны такие: 0,09; 0,15; 0,30; 0,42 *мк*. В соответствии с кривыми рис. 448 определялись ординаты для различных абсцисс ρ/ρ_0. В соответствии же с рис. 446 определялись значения F для различных значений аргумента $2\pi\rho/\lambda$. После подстановки всех упомянутых функций в (49) интеграл вычислялся графически по площади кривой $\Phi(\rho_0, \lambda_1)$ и соответственно по площади кривой $\Phi(\rho_0, \lambda_2)$.

Легко видеть, что применительно к каждому из заданных значений наивероятного диаметра $2\rho_0$ частиц искомый показатель степени может быть найден из уравнения

$$n = \frac{\lg \Phi(\rho_0, \lambda_1) - \lg \Phi(\rho_0, \lambda_2)}{\lg \lambda_2/\lambda_1}. \qquad (50)$$

Столь же очевидно, что при весьма малых размерах частиц формула (49) сильно упрощается. Действительно, если $\rho_0/\lambda \ll 1$, то функция F принимает вид

$$F\left(\frac{2\pi\rho}{\lambda}\right) = A\left(\frac{\rho}{\lambda}\right)^4.$$

Следовательно, в какой-то области спектра, характеризуемой длиной волн λ, величина A/λ^4 может быть вынесена за знак интеграла. Тогда окажется

$$\Phi(\rho_0, \lambda) = \frac{A}{\lambda^4} \int_0^\infty \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^2 \frac{\varphi(2\rho)}{\varphi(2\rho_0)} \rho^4 d\rho. \qquad (51)$$

Как и следовало ожидать, при столь малых размерах частиц интеграл перестает быть функцией длины волн, и подстановка (51) в (50) дает просто $n = 4$ независимо от закона распределения размеров весьма малых частиц.

Напротив, при наличии частиц, соизмеримых с длиной волн, формула (50) дала зависимость n и от наивероятного размера частиц $2\rho_0$, и от значения среднего квадратичного отклонения $\sqrt{\overline{\delta^2}}$, что видно на рис. 449, где сплошная кривая, проведенная по малым кружкам, показывает зависимость n от $2\rho_0$, существующую при значении $\sqrt{\overline{\delta^2}} = 0{,}2$. Пунктирная кривая, проведенная по большим кружкам, дает эту зависимость при $\sqrt{\overline{\delta^2}} = 0{,}35$. На этой же диаграмме нанесены черные точки, которые соответствуют простейшему случаю совершенно однородных частиц, обладающих каким-то одним определенным диаметром. Эти черные точки найдены по способу, описанному на стр. 709.

Интересно отметить, что и в случае частиц, размеры которых распределены по закону Гаусса, с $\sqrt{\overline{\delta^2}} = 0{,}2$, и в случае совершенно однородных частиц зависимость показателя степени n от $2\rho_0$ практически одинакова при той точности, какая доступна для графика рис. 446.

При среднем квадратичном отклонении $\sqrt{\overline{\delta^2}} = 0{,}35$ показатель степени снижается примерно на 0,5 для каждого соответствующего значения диаметра частиц $2\rho_0$.

На рис. 449 сплошная кривая экстраполирована, длинными штрихами, до пересечения с осью абсцисс. Формально это показывает, по какому закону убывал бы показатель степени n, если бы можно было по-прежнему заменять соответствующие участки кривой на рис. 446 отрезками прямых. При $2\rho_0 = 0{,}99$ *мк* формально показатель степени обращается в нуль. Физический смысл этого обстоятельства понятен: при таком значении $2\rho_0$ и длине волн 0,6 *мк* оказывается $2\pi\rho/\lambda = 5{,}18$, а при длине волн 0,4 *мк* $2\pi\rho/\lambda = 7{,}76$. Оба значения аргумента дают одинаковое значение функции $F = 1{,}75$, т. е. и фиолетовые лучи с длиной волн $\lambda_1 = 0{,}4$ *мк*, и оранжевые с длиной волн $\lambda_2 = 0{,}6$ *мк* здесь рассеиваются одинаково. Только не следует упускать из вида, что на этом этапе нельзя заменять отрезок кривой отрезком прямой. При доступной точности гидроспектрофотометрии можно еще примириться с подобной заменой не далее тех пределов, которые отмечены соответственно последней черной точкой на правом конце сплошной кривой и последним большим кружком на правом конце пунктирной кривой на рис. 449. Иными словами, степенна́я зависимость может считаться совершенно реальной вплоть до значения $n = 1{,}5$ в качестве нижнего предела показателей степени. От значения 1,5 и до значения $n = 0$ степенна́я зависимость не отражает истину, хотя и не отходит от нее особенно далеко: ведь при только что рассмотренном значении диаметра частиц (0,99 *мк*), как мы видели, фиолетовые и оранжевые лучи рассеиваются одинаково; следовательно, при падении лучей белого цвета на такие частицы окраска света отраженного должна зависеть от рассеяния волн в промежутке между $\lambda = 0{,}4$ и 0,6 *мк*; по диаграмме видно, что тут, например, при 0,5 *мк*, где рассеяние оказалось наибольшим, оно лишь на 11% превышает рассеяние фиолетовых и оранжевых лучей; в результате рассеянный свет (при отсутствии поглощения в среде) должен оказаться совсем слабо окрашенным в весьма бледный зеленоватый цвет. Если бы степенна́я зависимость соблюдалась, то при $n = 0$ рассеянный свет не мог бы отличаться по цвету от падающего на частицы.

§ 5. Суммарное действие множества крупных частиц. Оптика сильно рассеивающей среды

В § 3 были приведены выражения суммарного коэффициента рассеяния света в мутной среде, причем предполагалось, что само рассеяние производится только молекулами воды — частицами, чрезвычайно малыми по сравнению со световой волной. Одно из этих выражений (11) было получено Рэлеем, рассматривавшим каждую молекулу как индивидуальный источник рассеянного света. Другое выражение (20) принадлежало Смолуховскому, внесшему в исследование элементы статистики и показавшему, что в действительности *молекулярное* рассеяние возникает благодаря наличию *флуктуаций* плотности жидкости.

Теперь, когда мы рассматриваем действие *весьма крупных* частиц, нам снова придется вернуться к представлению об *индивидуальных агентах* рассеяния. Разумеется, как мы только что видели в § 4, действие каждого такого агента не будет уже равнозначным действию рэлеевской предельно малой частицы. Встав на такую точку зрения, нетрудно будет найти *коэффициент рассеяния* среды, заключающей в единице объема N частиц. Так как при всех расчетах по оптике моря мы условились в качестве единицы длины употреблять 1 *м*, то величина N должна представлять собой число крупных рассеивающих частиц в каждом кубическом метре морской воды.

Допустим сначала, что концентрация N не слишком велика и что поэтому можно не учитывать вторичного, третичного (и высших порядков) рассеяния света.

Пусть энергия светового потока, приходящаяся на 1 $м^2$ нормальной поверхности, равняется I, а диаметр каждой частицы пусть равен 2ρ микро-

нов. Тогда нетрудно видеть, что каждая частица рассеет во все стороны количество энергии, равное

$$\pi\rho^2 \frac{W}{W_0} I \cdot 10^{-12}. \tag{52}$$

Величина W/W_0, входящая в формулу, берется с диаграммы рис. 445. Числовой коэффициент 10^{-12} появился благодаря тому, что радиус частицы выражен не в метрах.

В слое толщиной dx на каждый квадратный метр сечения потока приходится Ndx частиц, а потому ослабление потока на пути dx должно равняться

$$dI = -N\pi\rho^2 \frac{W}{W_0} I \cdot 10^{-12}\, dx, \tag{53}$$

откуда вытекает, что искомый коэффициент рассеяния может быть выражен формулой

$$k = N\pi\rho^2 \frac{W}{W_0} \cdot 10^{-12}. \tag{54}$$

Принимая закон *аддитивности*, считая, что эффект множества частиц тождествен сумме действия всех их, взятых в отдельности, совершенно естественно прийти к выводу, что и *пространственное распределение* рассеянной энергии должно в данном случае выражаться той же кривой, какая была получена для одной частицы соответствующего размера.

Вопрос осложняется только тем, что в действительности мутная среда всегда содержит частицы самых разнообразных размеров, дающие в совокупности какое-то *среднее* распределение. Вот почему чрезвычайно важно экспериментальное исследование кривых распределения, о котором еще придется говорить впереди.

Подобное же «осреднение» происходит в мутной среде также в отношении поляризации и *спектрального состава*, но об этом было уже упомянуто в предыдущем параграфе.

Перейдем теперь к исследованию весьма важных и интересных явлений, которые протекают в средах с *очень сильным рассеянием света*. Как увидим, в природных условиях, в море, эти явления могут сказаться не только тогда, когда особенно велик коэффициент рассеяния (например, в сильно опресненном и засоренном море вблизи материка), но и тогда, когда при не очень больших коэффициентах рассеяния процесс охватывает весьма значительные толщи воды. Так, с ними придется считаться при исследовании светового режима на *очень больших глубинах*.

Как и в предыдущем параграфе, будем рассматривать *пока* только одно рассеяние света, забывая об эффекте избирательного поглощения его в воде.

Пусть световой поток, проникнув сквозь поверхность моря, распространяется все дальше и дальше в глубину. Для простоты положим, что лучи направлены вертикально.

Дойдя до некоторой глубины z, световой поток окажется ослабленным за счет рассеяния на пути в воде (ослабление за счет поглощения в синей части спектра отходит на второй план).

Если энергия потока, только что вошедшего в воду, была равна I_0, то на глубине z она будет равняться

$$I = I_0 e^{-\cdots z}. \tag{55}$$

Такова будет энергия *прямых* солнечных лучей, дошедших параллельным пучком до данной глубины. Но, как следует из диаграммы рис. 444, ослабление таких параллельных лучей происходит не потому, что вся отнятая от них энергия отбрасывается *назад*, т. е. *вверх*: *наибольшая* часть рассеянного потока *продолжает распространяться* в глубину, но только отклоняясь от первоначального направления в стороны.

Пока I мало отличается от I_0, пока во все стороны рассеяно не слишком много энергии, лучами, отклоняющимися от параллельных, можно свободно пренебречь; нет нужды учитывать их поведение при встрече с новыми рассеивающими агентами. Сопоставление формул (54) и (55) дает возможность установить, что́ именно влияет на законность такого рода пренебрежения вторичным эффектом. Обе эти формулы показывают, что решающую роль должно играть *произведение* концентрации частиц N на толщину пронизываемого лучами слоя воды z: один и тот же эффект может получиться и при большом N на малых глубинах z и, наоборот, при малом N, но на достаточно большой глубине z.

Как бы то ни было, помимо пучка прямых лучей с энергией I, вниз распространяется большая часть *диффузного* потока, энергия которого, очевидно, равна

$$I_0(1 - e^{-\alpha z}). \qquad (56)$$

Обычно при всех вычислениях этой энергией пренебрегают. Но пренебрегают не потому, что она малосущественна (важность этой составляющей не вызовет никаких сомнений, когда ее величина окажется равной, а потом и большей, чем величина I); исключение диффузной составляющей из общего анализа обусловлено другой причиной: *сложностью пространственной* задачи о вторичном, третичном и высших порядков рассеянии.

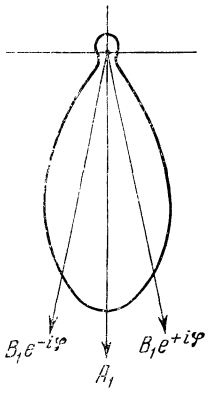


Рис. 450. Схема «равнодействующих потоков»

А сложность такой пространственной задачи действительно весьма велика. Ведь если кривые распределения энергии вокруг одной частицы (рис. 438 и 439) не могли быть выражены в виде аналитических функций, то об анализе дальнейшего поведения рассеянных лучей при встрече их с другими рассеивающими агентами мечтать не приходится.

Можно, однако, обойти все указанные трудности, сведя сложную пространственную задачу к довольно простой *плоской*, двумерной. Для этого следует применить *векторный* метод, предложенный В. В. Шулейкиным [12].

Пусть, например, пространственное распределение энергии рассеянного света вокруг большой частицы выражается полярной диаграммой, представленной на рис. 450. Так как солнечные лучи проникают в воду сверху, то вектор, изображающий падающий свет, должен быть направлен вниз. Проведем через этот вектор вертикальную плоскость. Очевидно, она рассечет на две равные части то тело, которое получается при вращении полярной диаграммы вокруг падающего луча, как вокруг оси.

По обе стороны от секущей плоскости расположатся *два* потока, исходящие от частицы. Но ничто не помешает *заменить каждый из этих двух потоков соответствующей равнодействующей.*

При этом забудем пока о той части рассеянного потока, которая соответствует углам в пределах от 0 до 90°, т. е. о том потоке, который будет непосредственно отбрасываться *вверх*, к поверхности моря. Впоследствии, разумеется, к нему придется вернуться.

На рис. 450 изображены эти равнодействующие каждого из двух потоков в виде *векторов*, исходящих из полюса диаграммы.

Для первоначального анализа таких векторов удобно воспользоваться комплексной формой их символического обозначения.

Как известно, для символического обозначения некоторого вектора A, обладающего модулем (абсолютной величиной) A и направленного под углом φ к полярной оси, употребляют комплекс

$$\mathbf{A} = A\cos\varphi + iA\sin\varphi. \qquad (57)$$

При суммировании, вычитании векторов и при других действиях над ними можно поступать совершенно формально, пользуясь обычными правилами действий над комплексными величинами. При этом не придется бояться потери индивидуальности каждой из слагающих вектора: всегда слагающая, направленная по одной оси, будет изображаться действительной частью комплекса, а слагающая, к ней перпендикулярная,— мнимой его частью.

Таким образом, например, при суммировании векторов будут отдельно складываться действительные части с действительными, а мнимые с мнимыми. В результате останется только возвести в квадрат полученные две суммы и извлечь корень квадратный из суммы этих квадратов; тогда автоматически получится *абсолютная* величина равнодействующей. В то же время частное от деления коэффициента при i на действительную часть суммы даст непосредственно величину тангенса угла, который составляет равнодействующая с осью диаграммы.

Но комплекс (57) можно еще преобразовать, воспользовавшись известными соотношениями между тригонометрическими и экспоненциальными функциями. Тогда вектор A представится в очень компактной форме, позволяющей сразу видеть как его абсолютную величину, так и направление, характеризуемое углом φ:

$$\mathbf{A} = Ae^{i\varphi}. \tag{58}$$

Приняв такое обозначение, можно по-новому выразить закон рассеяния света в бесконечно тонком слое dz. Именно

$$-dI = \frac{I}{2}ke^{i\varphi}dz + \frac{I}{2}ke^{-i\varphi}dz. \tag{59}$$

Каждый из членов правой части изображает собой одну из равнодействующих «полупотоков», образующих вилку рис. 450. Угол φ, отсчитываемый от секущей плоскости, нанесен на рисунке. Допустим, что при данной величине коэффициента рассеяния среды можно пренебречь *вторичным* рассеянием света, пока он пронизывает некоторый слой конечной толщины Δ. Чем больше коэффициент рассеяния, тем меньше может быть принята толщина такого слоя.

Когда поток параллельных лучей I_0 пройдет через этот слой, то прежнее направление сохранят только лучи, энергия которых выразится в виде

$$I_0e^{-k\Delta}. \tag{60}$$

Остальная энергия распределится поровну между двумя векторами, отклоненными в обе стороны на углы φ и $-\varphi$.

Следовательно, поток I_1, вышедший из исследованного слоя, можно будет символически изобразить так:

$$I_1 = I_0e^{-k\Delta} + \frac{I_0}{2}(1 - e^{-k\Delta})e^{i\varphi} + \frac{I_0}{2}(1 - e^{-k\Delta})e^{-i\varphi}. \tag{61}$$

В следующий слой войдут уже три отдельных потока, причем к каждому из них мы можем снова применить тот же прием. Только надо будет принять во внимание, что, опустившись с глубины Δ до глубины 2Δ, лучи, идущие под углами φ и $-\varphi$ к вертикали, пройдут в воде путь, больший, чем Δ, а именно путь $\Delta \sec \varphi$.

В результате световой поток, вышедший из второго слоя, окажется равным

$$I_2 = C_2e^{-2i\varphi} + B_2e^{-i\varphi} + A_2e^{i\cdot 0} + B_2e^{i\varphi} + C_2e^{2i\varphi}, \tag{62}$$

где сокращенно символами A_2, B_2 и C_2 обозначены следующие выражения:

$$A_2 = I_0e^{-2\cdot k\Delta} + I_0(1 - e^{-k\Delta})(1 - e^{-k\Delta\sec\varphi}), \tag{63}$$

$$B_2 = \frac{I_0}{2}(1 - e^{-\lambda\Delta})\, e^{-\lambda\Delta\sec\varphi}, \tag{64}$$

$$C_2 = \frac{I_0}{2}(1 - e^{-\lambda\Delta})(1 - e^{-\lambda\Delta\sec\varphi}). \tag{65}$$

В формуле (62) при символе A_2 поставлен множитель $e^{i\cdot 0}$, очевидно равный единице. Сделано это только для того, чтобы придать выражению совершенно симметричный вид и указать наглядно направление каждого из пяти векторов. Происхождение самого двучленного выражения A_2 также нетрудно проследить: ведь каждый из двух векторов, входивших в (61) с множителями $e^{-i\varphi}$, пройдя через второй слой, даст «вилку», один из векторов которой пойдет в направлении *начального потока* I_0. Так как такие «дополнительные» векторы присоединяются к прямому потоку с обеих сторон, то во втором члене правой части (63) вместо $I_0/2$ вошло, естественно, $2\frac{I_0}{2} = I_0$. Этот-то второй член правой части в сумме с остатком начального потока, равным $I_0 e^{-2\lambda\Delta}$, дает полную величину A_2.

Сложный поток, изображаемый пятью векторами формулы (62), распространяется еще дальше вниз. Когда он выйдет из *третьего слоя* (такой же толщины Δ, как каждый из предыдущих), то каждый из векторов снова распадется на *три*: один, идущий в прежнем направлении, и два, отклоненных от него в обе стороны на угол φ. Выражение этого потока, пронизавшего третий слой, напишется в форме, аналогичной (62):

$$I_3 = D_3 e^{-i3\varphi} + C_3 e^{-i2\varphi} + B_3 e^{-i\varphi} + A_3 e^{i\cdot 0} + B_3 e^{i\varphi} + C_3 e^{i2\varphi} + D_3 e^{i3\varphi}, \tag{66}$$

только A_3, B_3, C_3 и Q_3 обозначают здесь более сложные выражения, чем A_2, B_2 и C_2.

Но ведь таким приемом можно было бы воспользоваться и на следующем этапе и на каком угодно числе этапов, проходимых световыми лучами. Правда, при этом получались бы все более и более сложные выражения для абсолютных величин отдельных векторов, но замечательным и важным является то обстоятельство, что, совершенно независимо от числа пронизанных элементарных слоев Δ, число отдельных векторов оказывается всегда *строго ограниченным* (разумеется, здесь имеется в виду «поворот» векторов только в пределах угла π или, что наиболее существенно для большинства случаев, только в пределах $\pi/2$).

Убедившись в конечности и определенности решения, мы принуждены будем, однако, отказаться от дальнейшего развития вычисления в *общей форме*, так как сложные условия задачи не позволяют для выражений типа (62) и (66) найти какой бы то ни было сходящийся ряд. Впрочем, в подобных случаях даже установление такого ряда не обеспечивает еще нахождения настоящей аналитической зависимости. Примером тому может служить хотя бы цитированная в предыдущем параграфе работа Ми: ряды Ми позволяют разрешать задачу *только в числах*.

Но, не давая аналитической зависимости, рассмотренная схема явления позволяет разработать один весьма простой вычислительный прием, посредством которого задачу оказывается возможным решить до конца. Результаты этих вычислений можно представить в виде таблицы, изображенной на рис. 451.

Основная схема остается той же, которой мы только что пользовались. Будем последовательно вычислять элементы этой таблицы. Горизонтальные строчки ее соответствуют послелдоватеьным слоям воды, все более и более глубоким, но равным друг другу по толщине. Вертикальные столбцы таблицы пусть отвечают направлениям различных векторов, изображающих потоки рассеянного света. Как было показано, все углы, которые они составляют с первоначальным направлением I_0, являются *целыми*, *кратными* φ, а потому число

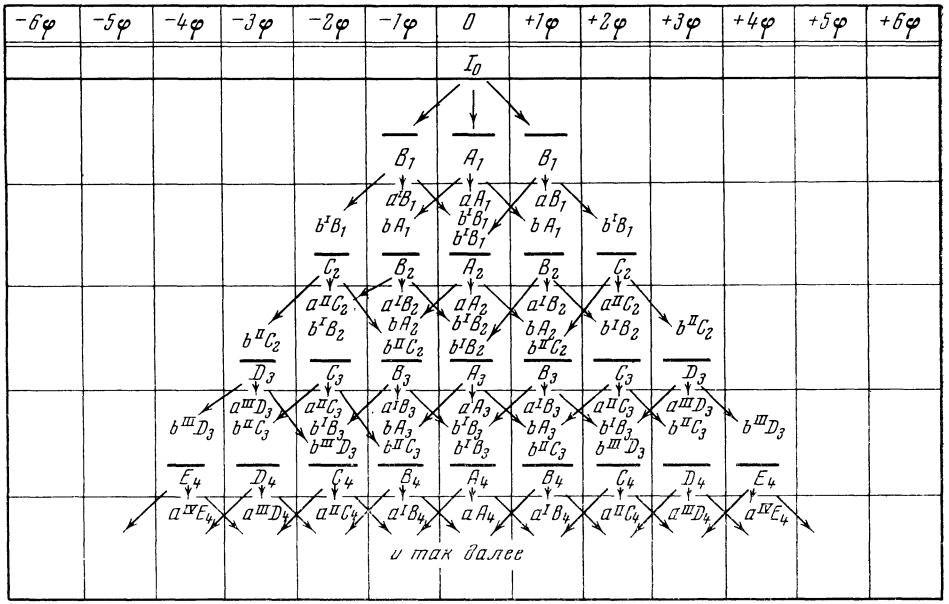


Рис. 451. Схема многократного рассеяния

таких вертикальных столбцов будет строго ограничено. Практический интерес представляют только те векторы, которые отклонены от вертикали меньше чем на прямой угол, ибо все остальные лучи не будут распространяться вниз, а пойдут обратно, к поверхности моря. Так как, с другой стороны, угол φ обычно оказывается не меньше 10°, то в таблице никоим образом не появится более 17 столбцов (соответственно углам: −8φ, −7φ, ..., −φ, 0, +φ, ..., +6φ, +7φ, +8φ).

Для краткости в ней символами a и b обозначены следующие выражения:

$$a = e^{-\Delta}, \quad 2b = 1 - e^{-\Delta}.$$

Как было уже упомянуто, лучи, распространяющиеся под углом φ, должны, опускаясь от слоя к слою, пронизывать каждый раз не толщу Δ, а толщу Δ sec φ. Совершенно так же лучи, распространяющиеся под каким-нибудь углом νφ к вертикали, будут каждый раз пронизывать слой толщиной Δsec νφ. В соответствии с этим в таблицу внесены величины a^{I}, b^{I}, a^{II}, b^{II}, ..., a^{IV}, b^{IV},..., a^{ν}, b^{ν} и т. д. Общее выражение их, очевидно, будет

$$a^{\nu} = e^{-\Delta \sec \nu\varphi}, \quad 2b^{\nu} = 1 - e^{-\Delta \sec \nu\varphi}.$$

Операции непосредственно над *числами* удобны в том отношении, что в каждой «клетке» таблицы после сложения *трех* чисел остается только *одно* и это одно число выражает энергию соответствующего наклонного луча, который дальше продолжает распространяться через следующий слой воды.

Подобные вычисления чрезвычайно просты, но все же для обработки *большого числа* последовательных *этапов* требуется довольно много времени. Поэтому необходимо в результате искать такие соотношения, которые были бы *универсальными* для всех решительно числовых значений *коэффициента рассеяния*.

Это требование можно весьма просто удовлетворить, условившись измерять глубины проникновения света не в метрах, а в некоторых специальных единицах, величина которых *зависит* от коэффициента рассеяния.

Вспомним уравнение (55), которое связывает между собой энергию падающего луча, энергию луча, прошедшего сквозь слой Δ, самую величину Δ и, наконец, коэффициент рассеяния k.

Каков бы ни был коэффициент рассеяния, всегда падающий луч будет ослаблен в *одинаковое число раз*, если он пройдет сквозь слой толщиной в $1/k$ метров.

Вот этот-то линейный элемент и будет естественнее всего принять *за условную единицу* для измерения пути световых лучей в рассеивающей среде. Будем в дальнейшем ее обозначать буквами «у. е.», а длину пути в у. е. через R.

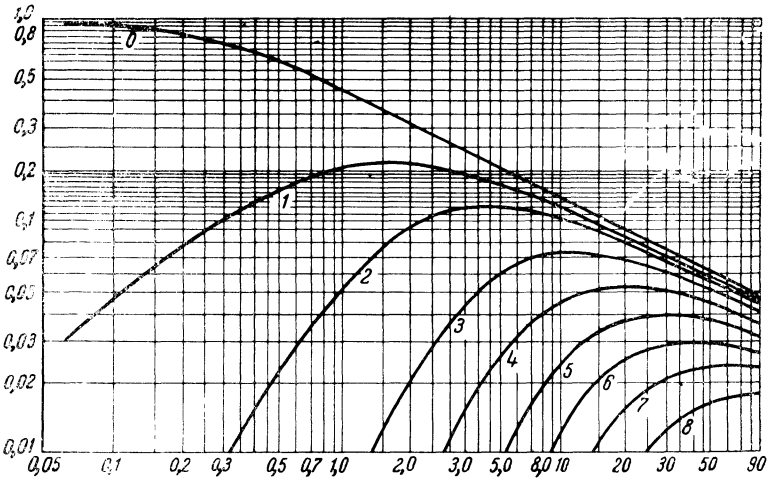


Рис. 452. Изменения яркости лучей различных порядков

Чем больше коэффициент рассеяния данной мутной среды, тем меньшему числу метров будет равна у. е.: она всегда является равной $1/k$ метров.

Условившись в выборе такой единицы, мы, очевидно, прежде всего придем к выводу, что *во всякой* мутной среде поток параллельных лучей ослабляется в e раз (в 2,718... раза), пройдя сквозь слой толщиной в 1 у. е., разумеется, если не будем принимать во внимание вторичного рассеяния, которое мы тоже учтем и эффект которого будет определен также для *всякой* мутной среды.

Пробные вычисления по таблице показали, что первые ее строки следует выбирать через довольно малые промежутки, ибо в противном случае не будет достаточно надежно учтен эффект многократного рассеяния.

По этой причине для верхних слоев морской воды были вычислены восемь строк, укладывающихся в пределах 1 у. е. Толщина каждого элементарного слоя выбиралась, следовательно, равной $^1/_8$ у. е.

Для дальнейших этапов оказалось возможным выбрать толщину элементарного слоя равной $^1/_2$ у. е., причем контрольные вычисления, проведенные для более частого дробления, не обнаружили заметных погрешностей.

Результаты вычислений удобнее всего изобразить на диаграмме, построенной на *логарифмической бумаге*. Тогда совершенно отчетливо всплывают многие замечательные стороны явления. По оси абсцисс в действительности откладываются логарифмы глубин, измеренных в у. е., а по оси ординат — величины, выражающие *энергию* каждого отдельного «луча», распространяющегося под углом φ, 2φ,..., $\nu\varphi$ к вертикали. Но сетка логарифмической бумаги так удобно составлена, что вдоль обеих координатных осей вместо логарифмов чисел надписаны сами числа.

При взгляде на такую диаграмму (рис. 452) прежде всего бросается в глаза замечательный ход *основной кривой 0*, изображающей постепенное ослабление *главного* пучка параллельных лучей, распространяющихся по вертикальному направлению.

Как видим, начиная с глубины $R = 0{,}5$ у. е., убывание энергии основного пучка света выражается на логарифмической бумаге *прямой линией*, причем угловой коэффициент этой прямой равен в точности — 0,5.

Обозначим энергию этого основного потока, соответствующую глубине в 1 у. е., через I_1. Тогда на основании сказанного прямая, нанесенная на диаграмму, должна выразиться уравнением

$$\lg I = \lg I_1 - 0{,}5 \lg R, \tag{67}$$

откуда, переходя от логарифмов к числам, получим

$$I = \frac{I_1}{\sqrt{R}}. \tag{68}$$

Значительно удобнее заменить в этой формуле величину I_1 величиной I_0 — энергией света у самой поверхности моря.

На основании диаграммы рис. 452 I_1 может быть выражено через I_0:

$$I_1 = 0{,}45 I_0, \tag{69}$$

а поэтому из (68) получается

$$I = 0{,}45 \frac{I_0}{\sqrt{R}}. \tag{70}$$

Как видим, *в сильно рассеивающей среде ослабление потока параллельных лучей не следует экспоненциальному закону, а идет по гиперболическому закону, выраженному соотношением* (70) *или* (68).

Следует только помнить, что закон этот применим только к глубинам, *бо́льшим* 0,5 у. е.; при меньших глубинах кривая представляет собой переходную форму от гиперболической к экспоненциальной зависимости. Совершенно точная экспоненциальная зависимость проявляется в самом верхнем слое толщиной примерно в 0,125 у. е.

Каков же второй предел применимости простого закона (70)? До каких глубин происходит падение яркости прямых солнечных лучей по гиперболе третьего порядка?

Прежде чем ответить на этот вопрос, обратимся к семейству кривых, нанесенных на рис. 452. Все они, кроме только что рассмотренной кривой *0*, обнаруживают одну и ту же тенденцию: при $R = 0$ значение всех векторов, наклоненных под углами $v\varphi$ к вертикали, должно, очевидно, равняться нулю; затем, по мере распространения в глубину, энергия вторичных, третичных и высших порядков потоков рассеянного света *сперва возрастает, достигает некоторого максимума и затем начинает падать*. Положение максимумов приведено в табл. 24.

Таблица 24

Порядок рассеянного света	Угол вектора с вертикалью	Глубина, на которой наступает максимум у. е.	Порядок рассеянного света	Угол вектора с вертикалью	Глубина, на которой наступает максимум, у. е.
1	1φ	1,6	5	5φ	30
2	2φ	5	6	6φ	50
3	3φ	10	7	7φ	70
4	4φ	20	8	8φ	80

Очень важно отметить, что векторы различных порядков, величина которых после прохождения максимумов непрерывно уменьшается, *не проявляют тенденции к полному выравниванию энергии*, рассеянной по различным направлениям: *они стремятся лишь к какому-то стационарному распределению, к какой-то установившейся пропорции.*

Попытаемся найти эту пропорцию.

Допустим, что световой поток, дошедший до некоторой глубины, выражается *семнадцатью* векторами, определенными по методу «равнодействующих потоков». Основной вектор по-прежнему направлен вниз, а остальные отклонены от него на углы φ, 2φ, ..., 8φ и на такие же углы со знаком минус. Для конкретизации задачи допустим, как делали и выше, что векторы, идущие под углом 8φ и -8φ к вертикали, близки к горизонтальному направлению и что векторы, составляющие с вертикалью углы 9φ и -9φ, лежат уже *вне* исследуемого пространства: они уходят к поверхности моря. Решение нетрудно было бы обобщить и на другие значения угла φ, и результат анализа оказался бы совершенно аналогичным.

Итак, дойдя до некоторой глубины, световой поток распадается на векторы, абсолютные величины которых можно выразить в долях *основного*, идущего по вертикали, а направления которых определяются табл. 25.

Таблица 25

Величина вектора в долях основного	Направление	Величина вектора в долях основного	Направление	Величина вектора в долях основного	Направление
1	0	u	$\pm 3\varphi$	x	$\pm 6\varphi$
r	$\pm\varphi$	v	$\pm 4\varphi$	y	$\pm 7\varphi$
s	$\pm 2\varphi$	w	$\pm 5\varphi$	z	$\pm 8\varphi$

Если каждый из перечисленных векторов распространится по своему направлению на некоторое расстояние Δ, то в нем произойдут следующие изменения: прежде всего благодаря рассеянию в слое Δ энергия, выражаемая этим вектором, уменьшится и составит некоторую долю a начальной величины. Но в то же самое время этот вектор получит некоторые приращения благодаря тому, что *соседние векторы*, составляющие с ним углы φ и $-\varphi$, передадут ему некоторую долю b своей энергии. В результате вместо величин, приведенных в предыдущей таблице, векторы будут обладать новыми величинами, как вытекает из следующей схемы:

Начальная величина	Величина, возникающая после прохождения через слой Δ (по направлению соответствующего вектора)
1	$a + 2br$
r	$ar + bs + b\cdot 1$
s	$as + br + bu$
u	$au + bs + bv$
. . . . .	. . . . .
z	$az + by$

(71)

Все строки, за исключением первой и последней, составлены совершенно аналогично. В первой строке стоит величина $2br$ потому, что по сторонам основного вектора расположены равные между собой по величине векторы r. Последняя строка составлена в предположении, что энергией, рассеиваемой обратно вниз из *верхнего* слоя воды (до поверхности моря), *можно пренебречь.*

Какое же условие необходимо наложить на величины, входящие в такую схему, чтобы распределение энергии между векторами оказалось *стационарным*? Это условие само собой вытекает из следующих простых рассуждений.

Если распределение энергии установившееся, то *пропорция*, в которой она распределена между различными векторами, *не должна меняться* во время непрерывной потери энергии, уходящей вверх.

Но если это так, то *отношения между величинами любых соседних векторов должны оставаться теми же как до, так и после прохождения через слой* Δ.

Ту же мысль можно выразить и другими словами: *отношение величин вектора — после прохождения через слой* Δ *и до него — должно быть совершенно одним и тем же для всех векторов.*

Последнее условие позволяет, очевидно, составить *восемь* уравнений. Этих уравнений достаточно для определения всех искомых величин.

Уравнения эти таковы:

$$\begin{aligned}
&1) \quad (a+br):1=(ar+bs+b):r,\\
&2) \quad a+br=(as+br+bu):s,\\
&3) \quad a+br=(au+bs+bv):u,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&8) \quad a+br=(az+by):z,
\end{aligned} \tag{72}$$

откуда после приведения к одному знаменателю, приведения подобных членов и сокращения на общих множителей получится

$$\begin{aligned}
&1) \quad 2r^2=s+1,\\
&2) \quad 2rs=r+u,\\
&3) \quad 2ru=u+v,\\
&\cdots\cdots\cdots\\
&8) \quad 2rz=y.
\end{aligned} \tag{73}$$

Очень любопытно, что из уравнений совершенно исчезли величины a и b: наш вывод, следовательно, не зависит от того, каким частным значением толщины слоя Δ задаться при исследовании потоков. Так и должно быть, очевидно, при условии стационарных пропорций между отдельными векторами.

Сами пропорции получаются, как нетрудно видеть, весьма просто — путем решения уравнений (73). Результат сведен в табл. 26.

Таблица 26

Обозначение вектора	Угол с вертикалью	Величина (в долях основного)	Обозначение вектора	Угол с вертикалью	Величина (в долях основного)
Основной	0	1,000	w	$\pm 5\varphi$	0,755
r	$\pm\varphi$	0,990	x	$\pm 6\varphi$	0,655
s	$\pm 2\varphi$	0,960	y	$\pm 7\varphi$	0,545
u	$\pm 3\varphi$	0,910	z	$\pm 8\varphi$	0,415
v	$\pm 4\varphi$	0,840			

То же распределение энергии представлено графически на рис. 453. Оно очень напоминает распределение энергии при диффузном отражении света от матовой поверхности по закону Ламберта. Отличие, которое проявляется в данном случае, совершенно понятно: здесь свет распространяется в одной и той же среде, между тем как в случае отражающей поверхности лучи выходят из более преломляющей среды в менее преломляющую, причем должна иметь место потеря энергии на отражение от пограничной поверхности.

Если бы описанным приемом был исследован такой сложный процесс (следует отметить, что на пути стоят некоторые трудности), то, по всей вероятности, вместо диаграммы рис. 453 получилась бы круговая диаграмма,

выражающая закон Ламберта (это — внутренняя окружность); наибольшие потери испытали бы при переходе через пограничную поверхность именно лучи, наиболее *отклоненные от нормали*, и соответствующие векторы, сократившись в длину, легли бы концами на окружность [1].

Таким образом мы получили косвенное подтверждение *справедливости* проделанных вычислений и самого метода «равнодействующих потоков».

Применим теперь найденные результаты к исследованию дальнейшего протекания кривых на диаграмме рис. 452. Задача и тут облегчается чрезвычайно ценными свойствами логарифмических сеток. Действительно, если удалось установить, к какому пределу стремятся отношения всех векторов $1:r$; $r:s$; $s:u$; ...; $y:z$, то, в переводе на язык логарифмов, это значит, что установлены *разности* $\lg r - \lg s$; $\lg s - \lg u$; . . .; $\lg y - \lg z$, другими словами, установлены предельные расстояния между каждыми двумя соседними кривыми рис. 452. Их можно легко отметить на диаграмме, отыскав на оси ординат цифры *990*, *960*, *910*, *840* и т. д. (разумеется, совершенно безразлично, на каком месте после запятой стоят эти цифры).

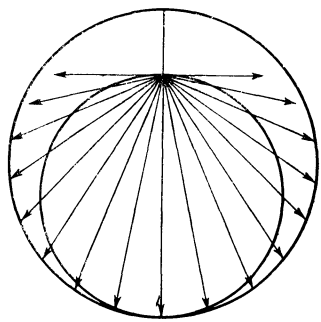


Рис. 453. Установившееся распределение энергии

Но после того как найдены предельные расстояния между кривыми (отсчитываемые по ординатам), остается только наметить их ход, полагая, что *основная* линия *0* по-прежнему сохраняет форму прямой (на логарифмической сетке). Такое экстраполирование не может повести к большим ошибкам, так как характер всех кривых достаточно ярко выражен и отчетливо видны их тенденции.

Так, путем экстраполяции установлено, что (при заданном схематизированном распределении энергии между потоками рассеянного света различных порядков) стационарное распределение энергии между векторами было бы достигнуто на глубине, равной примерно 125 у. е. До такой глубины можно было бы считать применимым гиперболический закон убывания энергии (70). В действительности, как мы увидим в следующем параграфе, распределение энергии между потоками различных порядков, по-видимому, отличается от схемы «равнодействующих потоков» рис. 450. Тем самым сдвигается как верхний предел применимости уравнения (70), значительно ближе, чем 125 у. е., так и нижний предел, несколько дальше, чем принятые нами 0,5 у. е.

После того как выяснилось распределение энергии между различными векторами, изображающими потоки рассеянного света высших порядков, остается произвести наложение двух картин, дополняющих одна другую, и рассмотреть совместное действие: а) многократного рассеяния, преимущественно по направлению *вниз*, и б) слабого, но систематически действующего рассеяния вверх, о котором говорилось в предыдущем параграфе в связи с диаграммами рис. 443 и 444, о которых теперь снова придется вспомнить.

На первый взгляд задача о такой суперпозиции кажется чрезвычайно сложной, но можно попытаться ее решить с достаточной степенью приближения. На помощь приходит здесь одна особенность всех векторных диаграмм типа рис. 438; именно то обстоятельство, что рассеяние по всем направлениям от $\gamma = 0°$ до $\gamma = 90°$ происходит *почти равномерно*; во всяком случае неравенство векторов здесь ничтожно мало по сравнению с неравенством векторов, идущих в пределах от $\gamma = 90°$ до $\gamma = 180°$.

[1] На рис. 453 нанесена еще вторая окружность — внешняя,— ее смысл будет пояснен на стр. 731.

Вот почему при исследовании *потери энергии*, излучаемой *вверх*, можно полагать, что потеря эта выражается простым законом

$$dI = -I\frac{W_1}{W}kdz, \tag{74}$$

где I — *суммарная* энергия, подсчитанная для всех векторов — и для основного и для тех, которые изображают потоки рассеянного света различных порядков. Значения W_1, W и k здесь сохранены те же, что и в предыдущем изложении. В частности, отношение W_1/W берется прямо с диаграммы рис. 444, а k определяется из опыта непосредственным спектрофотометрированием или другими методами, о которых будет сказано в свое время.

Интегрирование уравнения (74) дает

$$\frac{I}{I_0} = e^{-\frac{W_1}{W}kz} = e^{-\frac{W_1}{W}R}, \tag{75}$$

где по-прежнему R — глубина, выраженная в у. е.

Теперь у нас имеются все данные для получения полной характеристики света, прошедшего сквозь слой, равный R у. е.; формула (70) позволяет найти все векторы различных порядков в *долях основного*, что же касается абсолютной величины самого основного вектора, то она определится из уравнения (75).

Это уравнение показывает, во сколько раз уменьшаются *одновременно все векторы* благодаря непрерывной потере энергии на излучение *вверх*.

Но может возникнуть совершенно естественное сомнение в том, имеем ли мы право вычислять ослабление *суммарного* потока по формуле (75), забывая, что многократное рассеяние, характеризуемое диаграммой рис. 452, *также* приводит к некоторому лучеиспусканию энергии по направлению вверх.

Такое сомнение немедленно исчезнет после простого числового подсчета. Допустим, что свет дошел до глубины 20 у. е., тогда, приняв для W/W_0 хотя бы значение 0,15, по формуле (75) найдем

$$\frac{I}{I_0} = e^{-3} \approx 0{,}05,$$

откуда следует, что на протяжении 20 у. е. световой поток израсходовал на рассеяние *вверх* 0,95 своей первоначальной энергии.

Теперь определим по диаграмме рис. 452 для той же глубины 20 у. е. алгебраическую сумму величин, характеризующих энергию, распределенную по различным направлениям. Она оказывается равной 0,87. Следовательно, если бы даже основной поток не ослабевал по пути [согласно формуле (75)], то многократное рассеяние вызвало бы потерю энергии *вверх* в размере всего лишь 1—0,87 = 0,13 начальной величины. В действительности эффект, учитываемый формулами (74) и (75), приводит к непрерывному уменьшению «основного» вектора, а потому и все остальные векторы, связанные с ним, во столько же раз уменьшаются. Следовательно, в действительности потеря энергии *вверх*, вызванная многократным рассеянием, должна быть несравненно меньше 0,13, а стало быть, всю потерю энергии *вверх* совершенно законно можно определять, пользуясь соотношением (75). Тем самым совершенно законно вычислять энергию, приходящуюся, например, на основной вектор, по формуле

$$I = 0{,}45\frac{I_0}{\sqrt{R}}e^{-\frac{W}{W_0}R}. \tag{76}$$

Подобным же образом определяется и величина всех остальных векторов на основании диаграммы рис. 452 и формулы (75).

Для *синей и фиолетовой* областей спектра задача, таким образом, оказывается разрешенной в детальном виде, а именно в этой-то области спектра эффект рассеяния света имеет особенно большое значение.

§ 6. Исследование сложного рассеяния света

После появления изложенной выше работы Шулейкина [8] было проделано несколько теоретических работ, относящихся *к полностью рассеянному* свету. Наиболее интересной из них является работа В. А. Амбарцумяна [14], показавшего, что при какой угодно форме индикатрисы рассеяния свет, полностью рассеянный, ослабляется на пути по экспоненциальному закону. К сожалению, очень долгое время не было экспериментальных работ, которыми можно было бы воспользоваться для проверки теории сложного рассеяния света вообще и в частности на самом интересном участке оптического пути, на котором свет еще не полностью рассеян. Появлялись лишь одиночные исследования, из которых можно было почерпнуть некоторые сведения о той или иной стороне сложного рассеяния света, изученного на опыте. Так, в некоторых работах, преследовавших чисто технические цели, было обнаружено на опыте, что в толще молочного стекла и других рассеивающих сред свет, наблюдаемый под прямым углом к основному потоку, достигает максимальной яркости на некоторой определенной глубине, после чего начинает слабеть — в полном согласии с теорией Шулейкина.

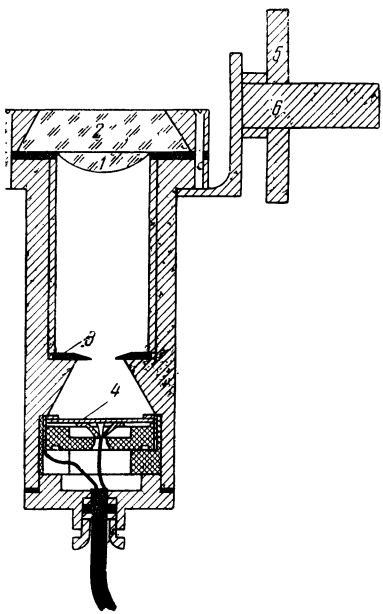


Рис. 454. Разрез прибора В. А. Тимофеевой

Обширные и обстоятельные опытные исследования сложного рассеяния света были впервые проделаны В. А. Тимофеевой [15, 16], на работах которой мы здесь остановимся.

Самая большая трудность при таких опытах заключается в том, что наиболее удобный прибор, широко применяемый в гидрооптических измерениях,— фотоэлемент,— как правило, дает представление лишь об *освещенности* его поверхности с различных сторон. Экспериментаторы на каждом шагу делают грубую ошибку, пытаясь измерять посредством фотоэлемента силу света в каком-то определенном направлении. В дальнейшем нам придется еще раз напомнить об этой весьма распространенной ошибке. Тимофеева вышла из затруднительного положения, заключив фотоэлемент в остроумно сконструированную герметическую камеру, схематический разрез которой воспроизведен на рис. 454. К зеркальному стеклу *2*, герметически закрывающему камеру, приклеена канадским бальзамом плоско-выпуклая линза *1* диаметром 30 *мм* и с фокусным расстоянием 63 *мм*. В главной фокальной плоскости последней находится вставная внутренняя диафрагма *3*. По ее диаметру d и фокусному расстоянию f линзы вычислялся угол зрения ω фотометра

$$\omega = \frac{d}{f}$$

в радианах. Этот угол зрения мог изменяться от 2,5 до 10°, когда требовалось работать с весьма малыми яркостями. Для тщательного изучения светового поля даже такие значения угла зрения оказались слишком большими.

Потребовалось уменьшить их до долей градуса. В связи с этим пришлось воспользоваться объективом с меньшим входным отверстием (18 *мм*). Провода от фотоэлемента *4* выведены через сальник. Детали *5* и *6* позволяют крепить весь прибор к шесту, на котором он погружается в исследуемую мутную среду и может быть установлен под каким угодно углом к вертикали.

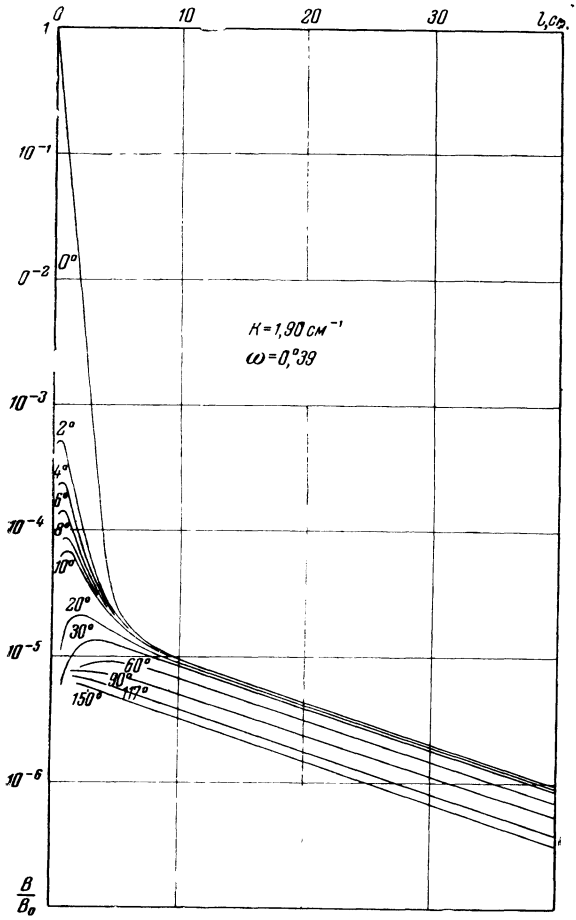


Рис. 455. Диаграмма световых потоков различных порядков (по В. А. Тимофеевой)

Яркость света, измерявшаяся при опытах, менялась в широких пределах (до 10^7 раз). Поэтому пришлось позаботиться о диафрагмировании фотоэлемента посредством внешних и внутренних диафрагм.

В качестве мутной среды применялись слабые растворы молока, от 0,05 до 5,0%, коллоидальные взвеси канифоли, приготовленные обычным способом (насыщенный раствор канифоли в винном спирте смешивался с половинным количеством спирта, и затем этот раствор вводился в дистиллированную воду), коллоидальный раствор мыла в дистиллированной воде. Молочные растворы давали довольно однородную среду с частицами, диаметр которых всегда был близок к 10 *мк*; для отдельных частиц он доходил до 20 *мк*. Канифольные взвеси состояли из броуновских частиц, которые не удалось сфотографировать, и из более крупных частиц неправильной формы, размером около 3 *мк*.

Наиболее надежные опыты были проведены со световым потоком, падающим на поверхность воды в точности по вертикали. Посредством зеркал солнечные лучи направлялись таким образом в экспериментальной сосуд, причем точность направления непрерывно проверялась при помощи особых отметок, нанесенных на зеркалах. Точность была здесь совершенно необходима ввиду того, что рассеяние света изучалось в направлениях, которые иногда были весьма близки к направлению основных (падающих) лучей.

На рис. 455 воспроизведена диаграмма Тимофеевой, характеризующая измеренные световые потоки в мутной среде. По оси абсцисс здесь отмечены глубины (в сантиметрах), на которые погружался фотометр. В отличие от оси абсцисс, ось ординат разбита по *логарифмической* шкале. Цифры здесь обозначают, какую долю от яркости падающих лучей, только что вошедших в воду, составляет яркость лучей, рассеянных под тем или иным углом, на соответствующей глубине. Коэффициент рассеяния среды был равен 1,9 $см^{-1}$, угол зрения фотометра 0°,39.

Как видим, на полулогарифмической бумаге результаты опытов представлены следующим образом: 1) основной поток (кривая 0°) ослабевает сперва по экспоненциальному закону; 2) затем вступает в силу гиперболический закон ослабления света, вызванный многократным рассеянием; 3) обнаружена *третья* стадия рассеяния, которая наступает тогда, когда не остается никаких следов «направленного» потока и все лучи оказываются полностью рассеянными; 4) эта новая стадия, обнаруженная Тимофеевой на опыте, характеризуется *экспоненциальным* законом ослабления света, причем коэффициент ослабления оказывается значительно меньшим, чем наблюдавшийся на *первом* этапе распространения лучей в мутной среде; 5) в соответствии

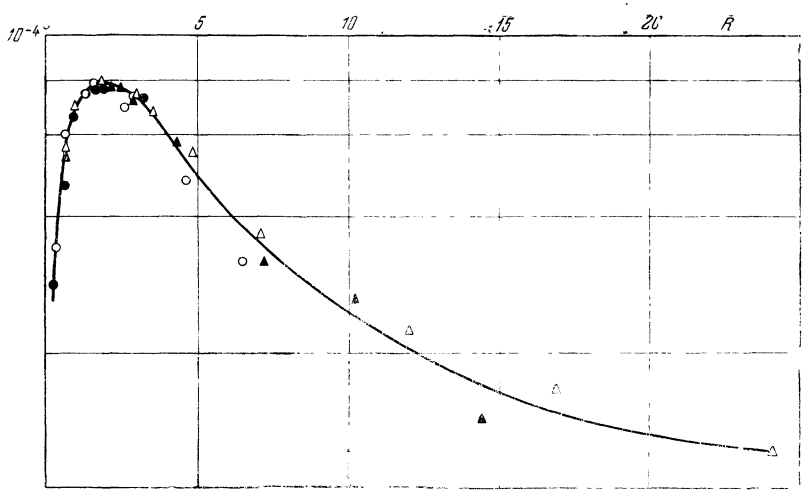


Рис. 456. Изменение яркости лучей, рассеянных под углом 10°

с теорией Шулейкина, лучи, распространяющиеся под различными углами к основному потоку, достигают максимума яркости на некоторой глубине, после чего их яркость убывает; 6) особо резко выражены максимумы у световых потоков, идущих под углами до 30—60°; для бо́льших углов опыт не дает столь четкой картины, а при углах свыше 120° максимум вообще исчезает. О вероятной причине этого обстоятельства скажем далее.

На рис. 456 отдельно изображены результаты опытов над лучами, которые распространяются под углом 10° к направлению основного потока, причем опыты были произведены в мутных средах с различными коэффициентами рассеяния: от 0,32 до 2,4 $см^{-1}$. В отличие от оригинала, мы откладываем по оси абсцисс не глубины (в *см*), а безразмерные величины kz — общие для всех серий. Черные кружки соответствуют наименьшему коэффициенту рассеяния, светлые кружки — коэффициенту 0,65 $см^{-1}$, черные треугольники — коэффициенту 1,44 $см^{-1}$ и, наконец, светлые треугольники — наибольшему упомянутому коэффициенту рассеяния.

Как видим, максимальная относительная яркость лучей, идущих под углом 10° к основному потоку, оказалась совершенно одинаковой во всех четырех сериях опытов (около $8 \cdot 10^{-5}$). Она не зависит от абсолютной величины коэффициента рассеяния и от абсолютного значения глубины наступления максимума; она зависит лишь от глубины, выраженной в условных единицах (R), в полном соответствии с теорией Шулейкина. Неплохо согласуется с этой теорией общий ход кривых: точки, полученные в четырех сериях опытов, не слишком сильно разбросаны на диаграмме, построенной в безразмерных координатах. Чрезвычайно любопытно, что даже глубина наступления максимума здесь получилась в полном соответствии с теоретической

схемой — около 2 у. е. Однако значительное расхождение с теоретической схемой получилось в значениях относительной яркости света как в этом случае, так и в других аналогичных; ослабление света на соответствующих глубинах оказалось на порядок и даже на два порядка больше, чем по схеме. Это показывает, что при действительном распределении рассеянного света вокруг частиц «питание энергией» потоков низшего порядка от потоков высшего порядка оказывается менее значительным, чем выходило по схеме «равнодействующих потоков» (см. стр. 715). По этой причине *дальше* простирается этап, на котором оказывается возможным считать закон ослабления света *экспоненциальным*.

Запоздалый переход к *гиперболическому* закону ослабления света в дальнейшем сопровождается напротив усиленным стремлением потоков к *стационарному*, *полному рассеянию*; этот процесс протекает значительно быстрей, чем в теоретической схеме. В связи с этим максимумы яркости в потоках, отклоненных на углы 20, 30° и т. д. от основного потока, оказываются значительно меньше сдвинутыми по глубине, чем были они сдвинуты при наличии схемы «равнодействующих потоков».

Наиболее важным следствием задержки гиперболического этапа и ускорения полного рассеяния света является значительное *сокращение длины гиперболического* (переходного) *этапа*.

Попытаемся прикинуть длину этого интересного этапа, исходя из результатов Тимофеевой. Решим следующую простую геометрическую задачу: найдем условия, при которых гиперболический — переходный — участок кривой ослабления света *плавно* смыкается с предыдущим экспоненциальным участком и с последующим, тоже экспоненциальным, характеризующимся значительно меньшим коэффициентом рассеяния k_1. Отметим, что Тимофеева установила эмпирическую зависимость между коэффициентом *простого* рассеяния света k и коэффициентом k_1, относящимся к вполне диффузному потоку. Именно

$$k_1 = \sqrt{Ak}. \tag{77}$$

Параметр A оказался постоянным для каждой данной среды независимо от ее концентрации: для молочной среды он равнялся 0,003, для канифольных взвесей 0,008 и, наконец, для мыльных растворов 0,011. Обозначим отношение k_1/k через η. Тогда, на основании (77)

$$\eta = \sqrt{\frac{A}{k}}. \tag{78}$$

Совершенно очевидно, что это соотношение непригодно для экстраполяции в сторону непрерывно уменьшающихся значений k: в пределе оно привело бы к абсурдному, бесконечно большому значению η, в то время как η по самой сущности своей должно быть значительно меньше единицы. Тимофеева проверила применимость формулы (77) в пределах от $k = 0{,}3$ до $k = 12$ *см*$^{-1}$. Надо полагать, что при уменьшающихся величинах k, начиная с какого-то рубежа, A также *уменьшается*, оставаясь всегда значительно меньше k. Применим (77) и (78) в пределах, проверенных Тимофеевой. Обозначим, как прежде, $kdz = dR$, а значит,

$$k_1 dz = \eta dR.$$

На первом — экспоненциальном — этапе свет будет ослабляться по закону

$$I = I_0 e^{-R}, \tag{79}$$

а наклон кривой будет характеризоваться тангенсом угла касательной с осью

абсцисс

$$\frac{dI}{dR} = -I_0 e^{-R}. \tag{80}$$

На какой-то глубине R_1 кривая (79) должна плавно сомкнуться с гиперболой, выражаемой уравнением (70). Значит, касательные к обеим кривым должны совпасть между собой и тангенс угла наклона касательной к гиперболе, определяемый из соотношения

$$\frac{dI}{dR} = -0{,}225 I_0 R^{-3/2}, \tag{81}$$

обязан равняться тангенсу, определяющемуся из (80). Приравнивая между собой правые части (81) и (80), легко получить трансцендентное уравнение

$$R_1^{3/2} e^{-R_1} = 0{,}225, \tag{82}$$

решаемое графически. Корень его будет $R_1 = 3{,}3$. Итак, на этой безразмерной глубине должен начинаться гиперболический участок кривой, который в схематизированных условиях «равнодействующих потоков» начинался при $R_1 = 0{,}5$.

Найдем теперь глубину R_2, на которой *заканчивается* гиперболический этап. В любой точке этого этапа яркость основного потока определится по очевидной формуле, вытекающей из (80) и дальнейшего гиперболического закона затухания

$$I_R = I_0 e^{-R_1} \sqrt{\frac{R_1}{R}}. \tag{83}$$

Легко видеть, что на искомой глубине R_2 тангенс угла наклона касательной будет равен

$$\left|\frac{dI}{dR}\right|_{R_2} = -\frac{1}{2} I_0 e^{-R_1} R_1^{1/2} R_2^{-3/2}. \tag{84}$$

Дальше свет будет ослабляться, согласно дифференциальному соотношению

$$dI = -I_{R_2} \eta dR, \tag{85}$$

так как здесь начинается третий — экспоненциальный — участок кривой. Тангенс угла наклона касательной к этому последнему участку на глубине R_2 выразится на основании (85), куда следует подставить выражение I_{R_2}, основанное на (82). В результате получится

$$\left|\frac{dI}{dR}\right|_{R_2} = -I_0 e^{-R_1} \eta R_1^{1/2} R_2^{-1/2}. \tag{86}$$

Для достижения плавного перехода от гиперболического к экспоненциальному участку необходимо по-прежнему приравнять между собой выражения (84) и (86). Тогда, после элементарных упрощений, окажется

$$\frac{1}{2} R_2^{-1} = \eta$$

или, иначе,

$$R_2 = \frac{1}{2\eta}. \tag{87}$$

Вспомнив эмпирическое соотношение Тимофеевой (78), можно записать еще одну любопытную формулу

$$R_2 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{k}{A}}, \tag{88}$$

приложимую, разумеется, лишь к ограниченному диапазону величин k, подобно самому соотношению (78).

Диаграмма Тимофеевой (рис. 455) была построена для частного случая $k = 1{,}9\ см^{-1}$, причем, как говорилось выше, для молочной среды $A = 0{,}003$. Подставив эти числа в (88), получим искомое значение глубины: $R_2 = 12{,}6$.

Итак, промежуточный участок, характеризующийся гиперболическим законом ослабления света, оказался заключенным приблизительно между 3 и 13 у. е. В действительности, по измерениям Тимофеевой, этот участок несколько шире: он занимает промежуток от 6 до 26 у. е. на диаграмме рис. 455. Но во всяком случае он чрезвычайно короток по сравнению с тем, который был намечен на теоретической схеме «равнодействующих векторов».

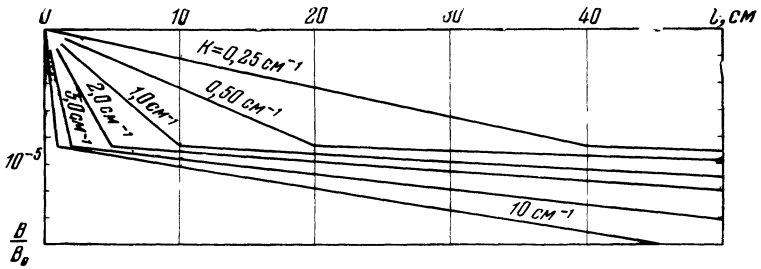


Рис. 457. Три характерных участка кривой

На рис. 457 воспроизведена сводная диаграмма Тимофеевой, на которой (в полулогарифмических координатах) изображены лишь экспоненциальные этапы кривых ослабления света, продолженные навстречу друг другу, до пересечения. По оси абсцисс отложены глубины в сантиметрах. Если перейти от них к глубинам, выраженным в безразмерных единицах, то окажется, что независимо от концентрации мутной среды точка пересечения *всегда лежит на глубине* 10 у. е. Разумеется, ослабление света на воображаемом пути до этой точки всюду совершенно одинаково.

Очень интересны диаграммы Тимофеевой, выражающие закон распределения яркостей по различным направлениям, на различных глубинах. Они воспроизведены на рис. 458. Над каждой диаграммой надписана глубина, которой она соответствует (в сантиметрах). Коэффициент рассеяния равнялся $1{,}9\ см^{-1}$, как и при получении диаграммы рис. 455. По необходимости индикатрисы пришлось оборвать, так как радиус-векторы, направленные близко к основному потоку, чрезвычайно велики по сравнению с радиус-векторами, направленными под углом 180° к основному потоку света. Числа, проставленные внизу, на оси индикатрис, показывают, как велико отношение яркостей между лучами, направленными в эти две противоположные стороны: на глубине 0,5 *см* оно достигает 46 800 и постепенно падает до 122 к глубине 3,0 *см*.

На диаграмме весьма отчетливо видно, как быстро идет процесс диффузии световых лучей, приближаясь к полному рассеянию. На глубине 5,0 *см* в последний раз замечаем следы того «хвоста», который был сильно развит на предыдущих диаграммах. Дальнейшие диаграммы — для 7,0, 10, 20 и 40 *см* — характеризуют уже полностью рассеянный свет. Масштаб двух последних из них по необходимости увеличен в 10 раз против всех остальных.

Весьма замечательно, что *предельный* вид индикатрисы рассеяния света в сильно мутной среде, полученный на опыте Тимофеевой, почти в точности копирует ту векторную диаграмму потоков, которая была получена Шулейкиным на основании упомянутой схемы «равнодействующих потоков». Для удобства сопоставления на теоретической диаграмме рис. 453 проведена тонкой сплошной линией окружность, приблизительно проходящая по кон-

цам стрелок векторов. Она чрезвычайно близка по своей сущности к эмпирической диаграмме предельного рассеяния Тимофеевой: примерно так же смещен тут центр окружности относительно начала векторов и в ту же самую сторону. На рис. 453 отсутствовали векторы, которые обладают составляющей, направленной вверх в сторону основного потока: в схеме Шулейкина не рассматривались лучи, рассеянные в таких направлениях. Однако все остальные векторы позволяют с достаточным основанием провести упомянутую окружность.

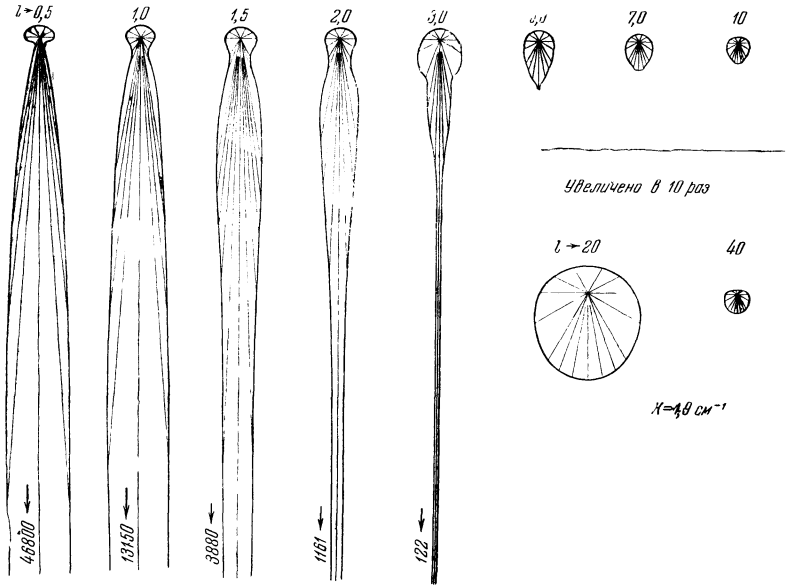


Рис. 458. Индикатрисы сложного рассеяния света (по В. А. Тимофеевой)

Итак, внутренняя окружность на рис. 453 позволяла объяснить физическую сущность закона Ламберта для диффузно отражающей плоскости, а внешняя окружность позволяет убедиться в правильности основной идеи, заложенной в схеме Шулейкина: о законе стационарного распределения энергии между лучами во всех направлениях.

В заключение настоящего параграфа следует отметить, что трудно было бы претендовать на большее число точек соприкосновения между этой элементарной схемой и результатами детальных опытных исследований. Помимо неизбежности погрешностей, которые возникают в результате схематизации «равнодействующих потоков», необходимо учесть еще одно весьма важное обстоятельство, обнаруженное Тимофеевой, именно: как бы ни было ничтожно *поглощение света* по сравнению с рассеянием в среде, его влияние *начинает проявляться все резче и резче по мере повышения порядка рассеянного потока.* Рассеянным потокам высших порядков неминуемо приходится проходить в среде громадные пути. Они испытывают *многократное* поглощение на поверхности самих коллоидных частиц, хотя бы и очень малое в каждом случае. В результате, как показала Тимофеева, ослабление света за счет одного лишь рассеяния составляет около 40%, а 60% падает на долю *поглощения* света. И это — несмотря на то, что непосредственные наблюдения никак не отмечают каких-либо следов поглощения в условиях ее опытов. Само собой разумеется, теоретическая схема Шулейкина не претендовала на какой-либо учет этого обстоятельства.

§ 7. Суммарное действие поглощения и рассеяния при проникании света в глубины моря. Световой режим глубин

В самом конце § 2 указывалось, что экспериментальные кривые можно очень просто проанализировать, исходя из представления *о двух* основных процессах, происходящих в озерной или морской воде [4]: об *избирательном поглощении* света в воде и о *рассеянии* света молекулами воды и различными включениями, взвешенными в ней.

Детально познакомившись с последним из двух процессов, вспомним теперь и о первом.

Есть все основания думать, что процесс этот — поглощение света в самом веществе воды — *совершенно одинаков* во всех точках Мирового океана, во всех внутренних морях и даже во многих озерах: в тех, которые обладают каменистым или песчаным грунтом и не содержат в воде растворенных *гумусовых* веществ.

Эта *универсальность* кривой поглощения сильно облегчает разрешение всевозможных задач в области оптики моря, так как при исследовании в этом направлении необходимо следить только за *одним* фактором, подверженным сильным изменениям: только за *рассеянием* света в воде.

К сожалению, нельзя вывести никакой аналитической зависимости между коэффициентом поглощения света и длиной волны, которой он соответствует. Поэтому приходится задавать эту зависимость *графически* в виде некоторой кривой. Такая кривая $m = f(\lambda)$ изображена на рис. 431, где она обозначена номером *1*. Это — кривая, полученная при тщательном изучении поглощения света в дистиллированной, *оптически чистой* воде.

В § 5 было указано, что часть этой кривой, относящаяся к области спектра от крайних фиолетовых волн и до $\lambda = 0{,}53$ *мк*, выражает в сущности не поглощение, а *молекулярное рассеяние* света. В природных водах, как мы видели, на такое молекулярное рассеяние налагается еще эффект, вызванный всевозможными включениями, взвешенными в воде, благодаря чему ослабление светового потока происходит по более сложному закону. Говоря о всех участках спектра, а не только о его сине-фиолетовой части, мы должны учесть и ясно выраженный эффект рассеяния, и эффект избирательного поглощения света.

В таком случае ослабление света на бесконечно малом участке пути dz окажется равным

$$dI = -I\left[f(\lambda) + \frac{W}{W_0}k\right]dz,$$

где I обозначает *полный* поток, распространяющийся вниз, на данной глубине под поверхностью моря. Значения W/W_0 и k — прежние (см. § 4 и 5).

Пройдя сквозь некоторый слой морской воды конечной толщины Δ, этот поток потеряет часть своей энергии на поглощение и рассеяние. Его энергия окажется при этом равной

$$I = I_0 e^{-\left[f(\lambda) + \frac{W}{W_0}k\right]\Delta}.$$

Буквой I_0 обозначена энергия потока у самой поверхности моря. Ее можно определить, пользуясь данными § 1, в котором содержатся также указания по поводу определения *оптического пути* Δ солнечных лучей в зависимости от заданной глубины z и высоты Солнца над горизонтом α.

Итак, световой режим на данной глубине и при заданной высоте Солнца над горизонтом зависит всецело от величины $(W/W_0)\,k$, которая меняется не только в пределах одного и того же моря, но и в каждом данном пункте и на каждой данной глубине в зависимости от целого ряда условий.

Как было показано в § 4, величина $(W/W_0)k$ может оказаться обратно пропорциональной или четвертой, или иной степени длины волны в зависимости от того, каковы размеры частиц, вызывающих рассеяние света.

На рис. 447 изображены спектральные кривые, полученные на различных морях. Здесь, в отличие от рис. 431, рассеяние идет не по закону Рэлея: показатель степени при λ меньше, чем 4. Очевидно, одно и то же количество энергии может быть рассеяно или бо́льшим числом малых частиц, или меньшим числом бо́льших частиц.

Допустим, что рассеяние света вызвано частицами, диаметр которых не превышает 0,1 *мк*. Такие частицы в море вызывают весьма заметный эффект, и в то же время по отношению к ним еще оказывается в силе закон «четвертой степени» длины волны.

Такой случай был подробно исследован А. Н. Башкирцевой [17] применительно к практическим запросам гидробиологов. На основании теории, изложенной выше, Башкирцева разработала методику определения светового режима на глубинах, причем ею была построена диаграмма, позволяющая чрезвычайно быстро и легко находить искомые величины, не производя сколько-нибудь продолжительных вычислений.

В основу всех построений была положена зависимость между длиной волны и коэффициентом, выражающим *полное* ослабление света. Такая зависимость изображена на рис. 431. На нем над кривой *1* видны еще три сплошные кривые, представляющие зависимость между длиной волны и величиной

$$\left[f(\lambda)+\frac{W}{W_0}k\right],$$

которую можно рассматривать как коэффициент полного ослабления света в морской воде. В те годы, когда была сделана работа [17], еще не было известно об изменениях показателя степени в формуле Рэлея при величине λ и считалось, что на всех морях можно полагать

$$\frac{W}{W_0}k=\frac{a}{\lambda^4}.$$

Величина $f(\lambda)$ принималась постоянной на всех морях, зависящей лишь от избирательного поглощения света молекулами воды, в различных частях спектра. Поэтому величина a в этой формуле рассматривалась как *параметр*, характеризующий оптику того или иного моря. Зная его, можно было пытаться судить о световом режиме на любой глубине. На рис. 431 кривые *2*, *3* и *4* соответствуют значениям $a = 0{,}0005$; 0,002 и 0,01. Для сравнения на этом же рисунке изображена кривая *5*, которая выражает коэффициент ослабления света, найденный О. Ауфзессом путем непосредственных спектрофотометрических измерений на Штаффельском горном озере [2]. Она относится к тому же семейству, как и все три вычисленные кривые, и показывает, что на Штаффельском озере рассеяние света — молекулярное, подчиняющееся в точности закону Рэлея.

Основываясь на таких допущениях, А. Н. Башкирцева вычислила кривые, аналогичные приведенным на рис. 431, для различных значений параметра a и по ним определила лучистую энергию в различных частях спектра для светового потока, прошедшего сквозь 10-метровый слой воды. За единицу принималась энергия в той же части спектра, но в потоке, только что вошедшем в воду. Результаты были нанесены на так называемую полулогарифмическую бумагу, по оси абсцисс которой отложены миллиметры, как на обычной миллиметровой бумаге, а по оси ординат — логарифмы, как на логарифмической бумаге, о которой была речь выше (в § 5 было указано, что по краям логарифмической сетки помечаются те самые числа, логарифмы которых отложены на оси). Такой прием позволяет сильно упростить весь процесс вычис-

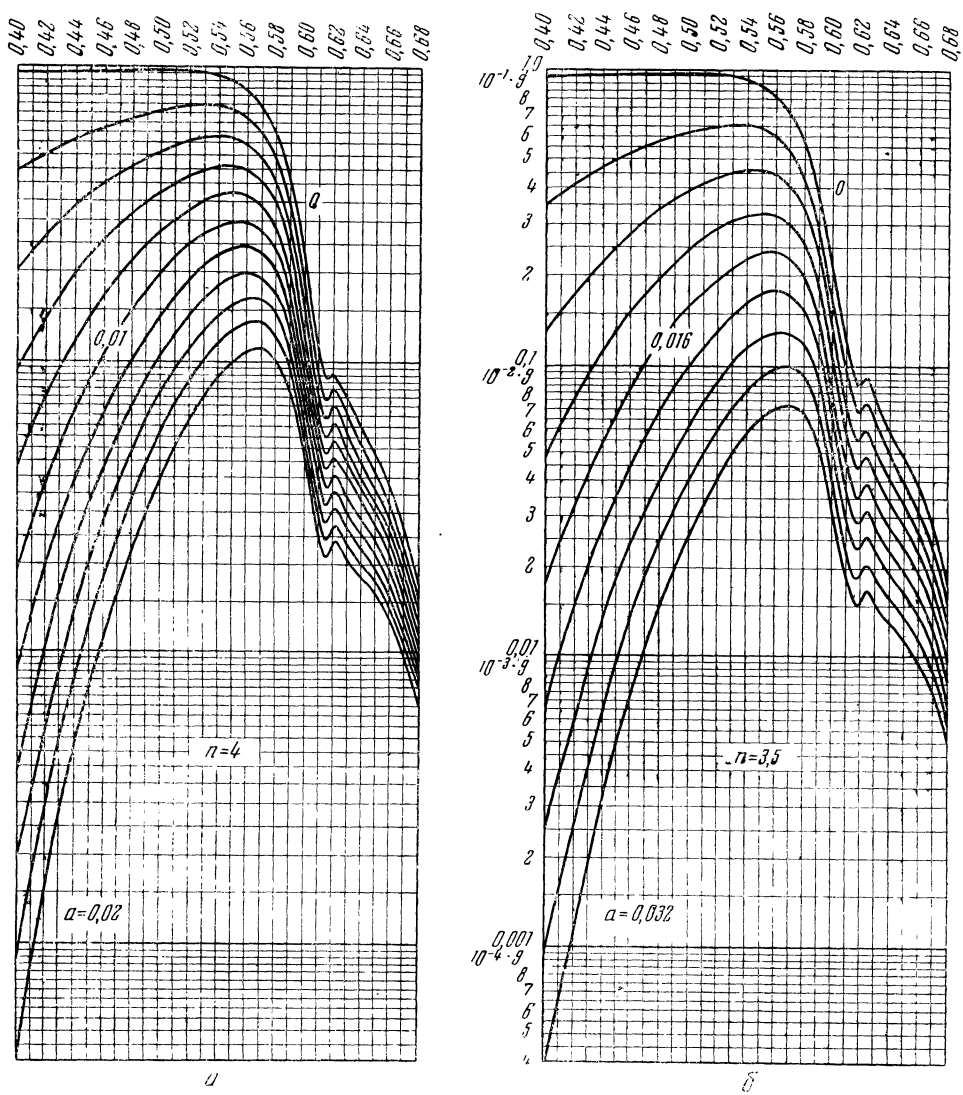


Рис. 459 *а, б.* Стандартные диаграммы спектров на глубинах при различных значениях n и a

лений при пользовании диаграммой, а это обстоятельство очень ценно в экспедиционных условиях.

На рис. 459, *а* приведена диаграмма Башкирцевой для $n = 4$, расширенная в сторону коротких волн до $\lambda = 40$ *мк* и в сторону длинных волн до $\lambda = 0{,}68$ *мк*. Кривая, отмеченная цифрой 0, характеризует избирательное поглощение света морской водой в различных областях спектра. Остальные кривые описывают совместное действие избирательного поглощения и рассеяния при различных значениях параметра a, взятых через интервалы 0,002, от значения нуль до значения $a = 0{,}02$ включительно. Положено, что длина волн измеряется в микронах, а путь лучей в воде — в метрах.

На рис. 459, *б—е* изображены аналогичные диаграммы, построенные применительно к значениям [12] $n = 3{,}5$; 3; 2,5; 2 и 1,5.

На диаграммах рис. 459, *б—е* параметр a каждый раз от значения нуль меняется соответственно через интервал 0,004 до значения 0,032;

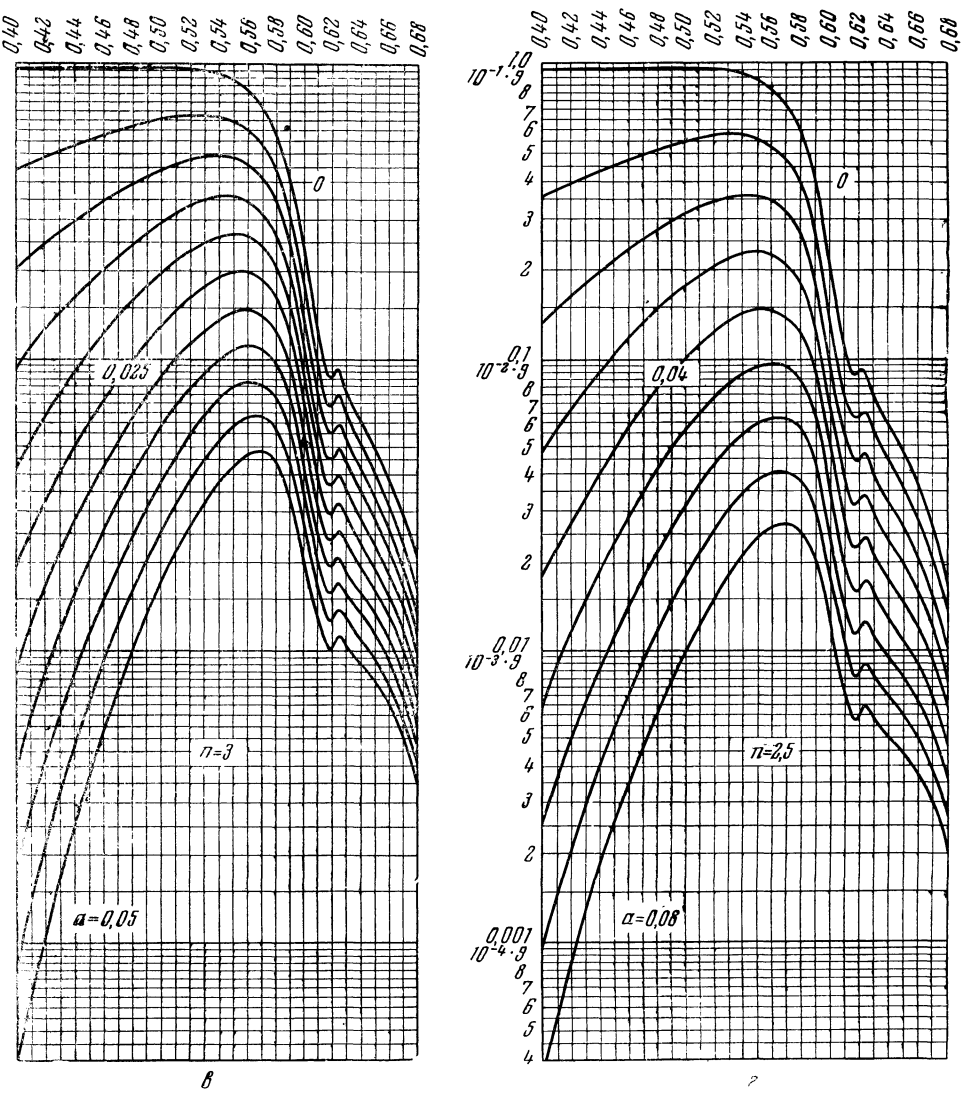


Рис. 459 *в, г.* Стандартные диаграммы спектров на глубинах при различных значениях *n* и *a*.

0,005 — до 0,05; 0,01 — до 0,08; 0,01 — до 0,12; 0,02 — до 0,2. О кривой на рис. 459, *а* уже было сказано.

В настоящее время можно утверждать, что избирательное поглощение, охарактеризованное на всех диаграммах кривой 0, в истинном смысле слова, происходит только в диапазоне от $\lambda = 0{,}51$ *мк* и далее к длинноволновому концу спектра. Волны короче 0,51 *мк* не поглощаются оптически чистой водой, а рассеиваются ее молекулами, по М. Смолуховскому. Приведенная выше и хорошо известная формула (20) этого автора, основанная на теории флуктуаций плотности, дает для коэффициентов ослабления света в диапазоне 0,40—0,52 *мк* те значения, какие представлены ординатами кривой 0. Остальные кривые вычислены по формуле (89), о которой сказано ниже, при $z = 10$ *м*.

По оси абсцисс этих диаграмм, построенных на полулогарифмических сетках, отмечены длины волн в долях микрона. По оси ординат, сверху вниз,

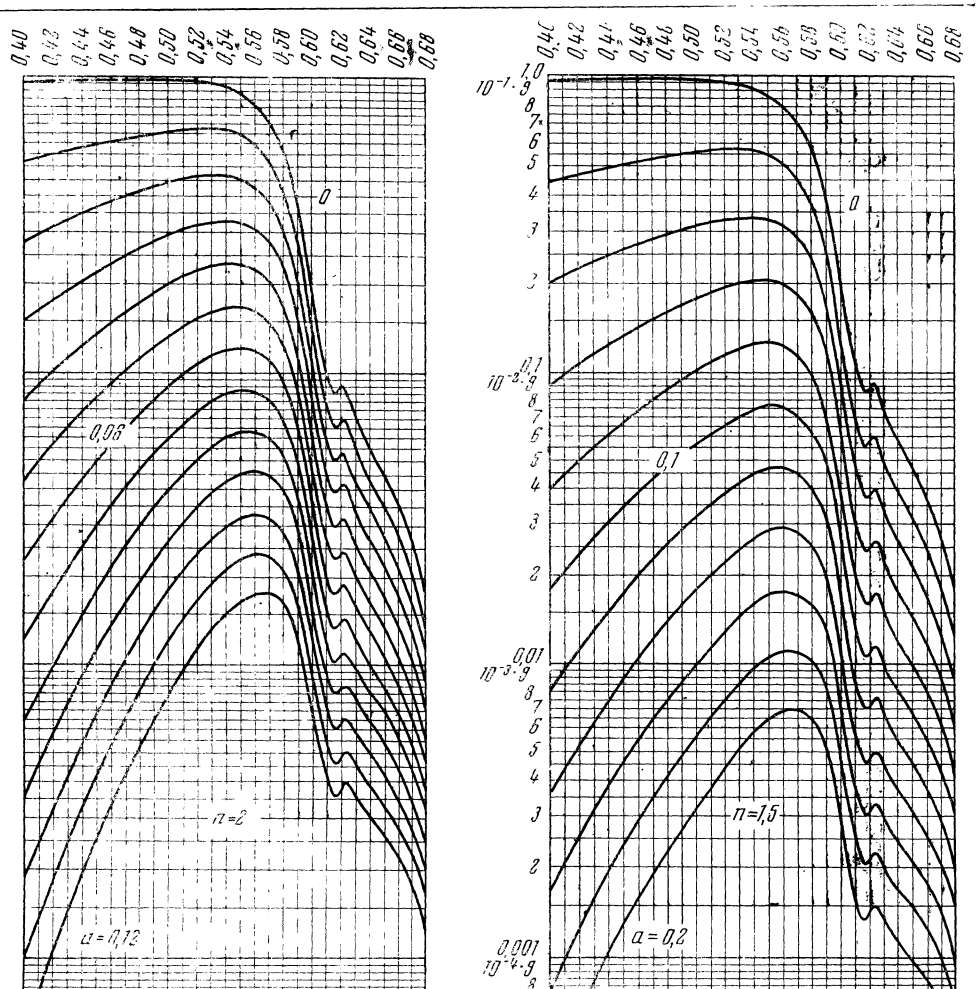


Рис. 459 *д*, *е*. Стандартные диаграммы спектров на глубинах при различных значениях n и a

проставлены цифры, которые позволяют судить, какая доля энергии света, вошедшего сквозь поверхность моря, останется в соответствующей узкой области спектра после того, как световые лучи пройдут в морской воде путь в 10 *м*. Легко убедиться, что, например, при значениях $n = 3{,}0$, $a = 0{,}015$ лучи с $\lambda = 0{,}48$ *мк*, прошедшие в воде 10 *м*, сохранят 0,25 от той энергии, какая вошла из воздуха в воду на поверхности моря; при значении $n = 3{,}5$, $a = 0{,}028$ лучи с $\lambda = 0{,}45$ *мк*, прошедшие тот же путь в воде, сохранят 0,01 от первоначальной энергии и т. д.

В оригинале все диаграммы, как и первая диаграмма А. Н. Башкирцевой, построены в таком масштабе, что отрезок ординат от оси абсцисс 1,0—1,0 до параллельной ей прямой 0,1—0,1 в точности равен 100 *мм*. Ценные свойства полулогарифмической сетки позволяют при таком условии находить простейшим способом освещенность на любой глубине по соответствующей диаграмме [12].

Действительно, пусть, например, требуется определить, какая доля первоначальной энергии осталась в области $\lambda = 0{,}50$ *мк*, если свет прошел 75 *м*

в воде, характеризуемой значениями $n = 2{,}5$ и $a = 0{,}03$? На диаграмме 459 *а*, построенной в упомянутом масштабе, измеряем миллиметровой линейкой расстояние от точки 0,50 оси абсцисс до кривой 0,03 вдоль оси ординат. Оно оказывается равным 71 *мм*. Умножаем эту величину на 75/10 = 7,5 и полученную цифру 532 разбиваем на две: 5 и 32, «отколов» две цифры справа (не считая цифр после запятой, если они возникли). Теперь остается лишь отложить 32 *мм* от оси абсцисс вниз, вдоль рамки диаграммы. У нижнего конца отрезка прочтем примерно: $4{,}75 \cdot 10^{-1}$. Это число надо умножить на 10^{-5} в соответствии с той цифрой, какая получилась слева при «раскалывании» 532. В итоге оказывается, что искомая доля равна $4{,}75 \cdot 10^{-6}$.

Еще проще решается задача, когда «результирующий» отрезок укладывается в пределах рамки диаграмм, по вертикали. Пусть, например, требуется определить, какая доля первоначальной энергии в области $\lambda = 0{,}65$ *мк* сохранится в лучах, прошедших 8,5 *м* в воде, характеризуемой значениями $n = 3{,}5$ и $a = 0{,}024$?

На диаграмме 459, *б* измеряем миллиметровой линейкой расстояние вдоль ординаты, от точки «0,65» на оси абсцисс до кривой 0,024. Оно равно 179 *мм*. Умножаем эту величину на 8,5/10 = 0,85 и получившийся отрезок 152 *мм* откладываем вниз от оси абсцисс, вдоль левой рамки диаграммы. Нижний конец этого отрезка оказался против цифры $3 \cdot 10^{-2}$, следовательно, такова искомая доля.

Нет надобности напоминать свойства мантисс и характеристик десятичных логарифмов, на которых основано столь простое применение диаграмм на полулогарифмических сетках. Все диаграммы, вычерченные здесь применительно к длине пути световых лучей в 10 *м*, как видим, оказались универсальными, пригодными для простого и быстрого построения «стандартной спектральной кривой» для какой угодно заданной глубины, какого угодно заданного значения параметров n и k (в пределах, указанных на рис. 459). Если требуется построение применительно к каким-либо промежуточным значениям параметров, вполне доступна простая графическая интерполяция. Во всякой лаборатории, обладающей надежным фотостатом (без перспективных искажений), *легко увеличить шесть диаграмм, напечатанных здесь в уменьшенном масштабе*; *необходимо проследить, чтобы отрезок ординат между прямыми 1,0—1,0 и 0,1—0,1 в точности равнялся 100 мм.*

Но все кривые, приведенные на шести диаграммах, надо рассматривать лишь как *стандартные* кривые: с ними надо сравнивать спектры света, полученные не осредственно в океане, на морях, на различных глубинах, куда опускались те или иные спектрографы. А применение спектрографов ныне совершенно необходимо; только спектрограф может дать ответ: *какие* явления происходят в воде исследуемого природного бассейна? Поскольку стандартные кривые, помещенные на шести диаграммах, отражают лишь два основных процесса — избирательное поглощение молекулами воды и простое (однократное) рассеяние света по какому-то общему закону с показателем степени n при λ,— надо прежде всего установить, каково численное значение n в данном конкретном случае?

Если ординаты снятой в природе спектральной кривой позволили определить для каждой области видимого спектра (соответственно длине волн λ) отношение энергии света I_z на заданной глубине z к энергии света I_0, вошедшего из воздуха в воду, то, очевидно,

$$S = -\lg \frac{I_z}{I_0} = \left[f(\lambda) + \frac{a}{\lambda^n} \right] z \lg e. \qquad (89)$$

Здесь размерность a — длина в степени $(n - 1)$ — отличается от размерности a в формуле Рэлея со степенью $n = 4$ при λ.

Если, как прежде, $f(\lambda)$ обозначает в (89) коэффициент избирательного поглощения света молекулами воды, то, как указывалось выше, в диапазоне

от $\lambda = 0{,}40$ *мк* до $\lambda = 0{,}51$ *мк* должно быть $f(\lambda) = 0$. Вместо этого слагаемого можно было бы подставить в квадратную скобку весьма малые величины, меняющиеся обратно пропорционально четвертой степени длины волн, т. е. коэффициенты молекулярного рассеяния света в этом диапазоне волн. Но на рис. 459 видно, что в этой области спектра ординаты кривой 0 чрезвычайно малы, а потому ими можно пренебречь по сравнению с ординатами остальных кривых на диаграммах.

В таком случае на основании (89) можно записать применительно к двум длинам волн $\lambda_1 = 0{,}40$*мк* и $\lambda_2 = 0{,}50$*мк*

$$\frac{S_{0,40}}{S_{0,50}} \approx \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^n, \tag{90}$$

ибо все остальные множители сокращаются. Так как $\lambda_2/\lambda_1 = 1{,}25$, то

$$n = \frac{\lg S_{0,40}/S_{0,50}}{\lg 1{,}25} = 10{,}3 \lg \frac{S_{0,40}}{S_{0,50}}. \tag{90а}$$

По формуле (90а) вычислена кривая, представленная на рис. 460. Она показывает, как по вычисленной величине $S_{0,40}/S_{0,50}$ можно определить показатель степени n. Определив этот показатель степени, необходимо найти значение параметра a, которое могло бы удовлетворить результатам непосредственных исследований спектра, полученного в море, если он укладывается в наши стандарты. Запишем второе условие, соблюдающееся на всех шести стандартных диаграммах: условие, которое связывает величину $S_{0,65}$ в красной области спектра и величину $S_{0,50}$ в зеленой области, уже использованную для сравнения при выводе (90)

$$\frac{S_{0,65}}{S_{0,50}} = \frac{f(0{,}65) + a/(0{,}65)^n}{f(0{,}50) + a/(0{,}50)^n}. \tag{91}$$

Формула (91) показывает, что между $S_{0,65}/S_{0,50}$ и a должна существовать гиперболическая зависимость. Можно было бы привести (91) к простейшей форме: к уравнению гиперболы, отнесенной к асимптотам, как прямоугольным координатным осям. При этом выяснилось бы, что обе асимптоты необходимо смещать на отрезки, зависящие от найденного показателя степени n. От n должна зависеть и правая часть уравнения, записанного в новой форме.

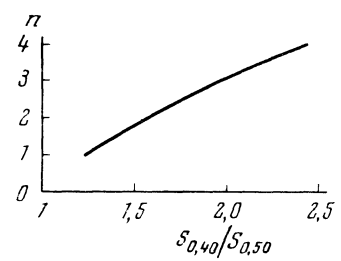


Рис. 460. Диаграмма для определения показателя степени n

Для практических расчетов мы построили эти гиперболы, непосредственно воспользовавшись шестью диаграммами рис. 459, подставляя в (91) числовые значения соответствующих величин. В результате получилось шесть кривых, которые отвечают прежним значениям показателя степени n от 1,5 до 4 (через промежутки 0,5). Ввиду быстрого уменьшения масштаба ординат при увеличении n оказалось удобнее дать две диаграммы в двух масштабах (рис. 461). На обеих диаграммах по оси абсцисс отмечены значения величины $S_{0,65}/S_{0,50}$, которую необходимо задать на основании анализа полученного спектра; по оси ординат — числовые значения a. По концам отрезков гипербол проставлены значения показателя степени n, задаваемого на основании рис. 460.

Теперь в нашем распоряжении есть все данные для выбора спектральной кривой в одном из шести семейств рис. 459 или для построения какой-либо промежуточной кривой по интерполяции между ближайшими соседними. С этим стандартом необходимо сравнить спектр, снятый в море.

Расхождение между снятым спектром и спектром сдандартным позволит судить о том, в какую сторону необходимо направить дальнейший анализ. Именно, если энергия света в сине-фиолетовой части спектра окажется меньше стандартной нормы, то следует ожидать или наличия флуоресценции, вызвавшей трансформацию энергии коротких волн в энергию более длинных, или наличие избирательного поглощения света в каком-либо органическом красящем веществе, не сопровождаемого флуоресценцией. Напротив, если энергия света в фиолетовой (а, может быть, даже и в синей) части спектра оказалась больше стандартной нормы, то есть основание предполагать, что здесь сказалось сложное, многократное рассеяние света, благодаря которому уменьшение энергии прямых лучей на некотором этапе идет по смягченному, гиперболическому, закону, а затем по закону Буге, но с меньшим показателем

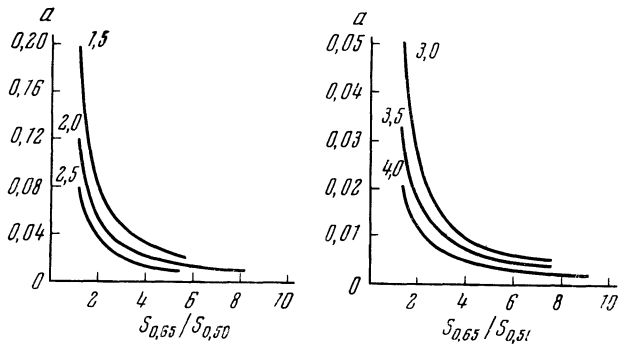


Рис. 461. Диаграммы для определения параметра α

в экспоненциальной функции, чем при простом рассеянии света. Этот эффект, как известно, может сказаться именно в сине-фиолетовой части спектра, где практически отсутствует поглощение света (в соответствующих исключительных условиях Саргассового моря или Бенгальского залива).

В заключение необходимо добавить еще несколько слов о связи между диаметром частиц $2\rho_0$ и показателем степени в формуле (89). Как видно из рис. 449, эта связь однозначно определяется по диаграмме только тогда, когда невелико среднее квадратичное отклонение диаметра частиц от наивероятного; только тогда по найденному значению n можно прямо судить о наивероятном диаметре рассеивающих частиц. Если среднее квадратичное отклонение превышает 0,2—0,25, то по одному лишь найденному значению n нельзя с достаточной уверенностью определить $2\rho_0$: уже при $\sqrt{\overline{\delta^2}} = 0{,}35$ те же значения n возникают при $2\rho_0$, меньших примерно на 0,1 *мк*. Следовательно, в самом общем случае необходимы два условия, по которым однозначно определяются как $\sqrt{\overline{\delta^2}}$, так одновременно и $2\rho_0$. Вдобавок к первому условию, касающемуся n, необходимо научиться налагать еще второе условие — это условие, касающееся поляризации света, рассеянного частицами.

§ 8. Происхождение цветности моря

Многочисленные попытки объяснить окраску морей и озер исходили обычно из следующих двух основных предположений. Авторы одной группы приписывали происхождение окраски собственному цвету воды: сильному избирательному поглощению в воде лучей красной и желтой частей спектра и слабому поглощению лучей синих и фиолетовых, что было уже давно установлено. С появлением работ о цвете мутных сред некоторые авторы пытались

объяснить окраску морей одним рассеянием света взвешенными в воде частицами, вследствие чего якобы диффузный свет, выходящий из воды, приобретает синюю окраску.

Однако такое объяснение не дало удовлетворительных результатов не только количественных, но и качественных, и уже скоро пришлось отказаться от подобного объяснения. Наблюдая коэффициенты абсорбции в разных частях света для ряда проб, взятых из различных озер, пришли к заключению, что рассеяние света—якобы явление второстепенное, а все градации цвета озер вызываются красящими веществами, примешанными к воде и дающими найденную зависимость между коэффициентом ослабления света и длиной волны.

Не возвращаясь уже к доводам, приводившимся против такой теории в § 2, нетрудно показать, что и теория первая в чистом виде, и гипотеза вторая (тоже в чистом виде) *не оправдываются* в действительности: первая привела бы к совершенно *белому*, а вторая — к совершенно *черному* цвету моря, если бы мы попытались получить количественные результаты.

Очень часто бывает, что какая-нибудь проблема физики, долгое время остававшаяся как бы в тени, внезапно получает разрешение одновременно в нескольких самых отдаленных точках земного шара.

Так случилось и с проблемой о цветности моря: в 1921 г. происхождение окраски моря было объяснено одновременно и Шулейкиным [4] (в Москве) и Ч. Раманом [10] (в Калькутте). Район работ обоих авторов отразился на трактовке вопроса: Раман, имевший дело с кристально прозрачными водами Бенгальского залива, дал теорию окраски моря, основанную на представлении *о чисто молекулярном рассеянии* света в воде. Поэтому к морям, обнаруживающим сильное рассеяние света в воде, его теория *неприменима*.

Напротив, Шулейкин, начавший работы на море внутреннем, а потому и не слишком прозрачном, построил совершенно *общую теорию*, применимую ко всем решительно водоемам, при том лишь условии, что в водах их не содержится каких-либо красящих гумусовых веществ. Из формул Шулейкина, как увидим, формула Рамана может быть просто получена как предельный случай, соответствующий оптически чистой воде.

Поэтому перейдем непосредственно к *общей* теории, а затем рассмотрим результат, полученный Раманом как частный случай. В настоящее время придется только внести некоторые уточнения в коэффициенты, принимавшиеся Шулейкиным в первоначальной редакции работы. Именно, на основании современных представлений о несимметричном рассеянии света частицами конечных размеров, необходимо полагать, что каждый элементарный рассеивающий слой морской воды отбрасывает *вверх* лишь долю W/W_0 всей рассеянной энергии. Для очень крупных частиц, взвешенных в воде, поправочный множитель W/W_0 может доходить до 0,11—0,12, и только для предельно малых частиц будет возможно принять его значение 0,5, фигурировавшее в первой редакции. Есть основания думать, что иногда величина W/W_0 достигает примерно 0,25—0,30, что соответствует значениям α около 2,5 и 2 (см. § 4), или, другими словами, диаметрам частиц порядка 0,4—0,3 *мк*. Об экспериментальном определении этой величины, равно как и коэффициента a в формуле (91), было сказано выше.

Внеся такого рода поправку, предположим для простоты, что свет падает на поверхность моря потоком параллельных лучей, направленных отвесно. Тогда на основании формул § 7 энергия, дошедшая до некоторой глубины z, будет равна [1].

$$I = I_0 e^{-\left[f(\lambda)+\frac{a}{\lambda^4}\right]z}. \qquad (92)$$

[1] В цитированной работе Шулейкина буквой a обозначена величина $k\lambda^4$, и коэффициент W/W_0 входит в формулы в виде отдельного множителя 1/2

Элементарный горизонтальный слой dz, вырезанный на этой глубине, рассеет вверх количество энергии

$$\frac{a}{\lambda^4} I dz,$$

которое, на основании (92), оказывается равным

$$di_z = \frac{a}{\lambda^4} I_0 e^{-\left[f(\lambda)+\frac{a}{\lambda^4}\right] z} dz. \tag{93}$$

Свет, исходящий из моря, испускается именно этими элементарными слоями dz, но ясно, что от каждого слоя до поверхности моря лежит пласт воды толщиной z, в котором поглощение и рассеяние определяются аналогичными формулами.

Если через dI_1 мы обозначим количество энергии, дошедшей *снизу* до поверхности моря (от слоя dz), то

$$dI_1 = di_z e^{-\left[f(\lambda)+\frac{a}{\lambda^4}\right] z} = \frac{a}{\lambda^4} I_0 e^{-\left[f(\lambda)+\frac{a}{\lambda^4}\right] 2z} dz. \tag{94}$$

Так как на окраске моря не могут практически сказаться лучи, проникшие на глубины даже нескольких сотен метров, то интегрирование уравнения (94) можно производить, *не принимая* во внимание *морского дна*, т.е. в пределах от 0 до ∞ (разумеется, исключение составляют весьма мелководные водоемы).

Проинтегрировав (94) в этих пределах, найдем, что

$$I_1 = \int_0^\infty I_0 \frac{a}{\lambda^4} e^{-\left[f(\lambda)+\frac{a}{\lambda^4}\right] 2z} dz = \frac{I_0}{2} \frac{a/\lambda^4}{f(\lambda)+\frac{a}{\lambda^4}}. \tag{95}$$

Ясно, что I_1 составляет только часть всей энергии, выходящей из моря. Действительно, рассматривая ослабление элементов энергии di_z на пути от слоя dz до поверхности моря, мы заметим, что некоторая доля этой энергии отбрасывается вниз, откуда снова частично возвращается вверх. Приблизительно, не претендуя на большую точность, можно положить, что вторая порция световой энергии выражается так:

$$I_2 = \frac{I_0}{4} \left[\frac{a/\lambda^4}{f(\lambda)+\frac{a}{\lambda^4}}\right]^2. \tag{96}$$

По-прежнему не претендуя на большую точность, просуммируем бесконечный ряд подобных порций световой энергии. Тогда окажется, что

$$I = I_0 \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} \left[\frac{1}{2} \frac{a/\lambda^4}{f(\lambda)+\frac{a}{\lambda^4}}\right]^\nu = I_0 \frac{\frac{1}{2}\frac{a}{\lambda^4}}{f(\lambda)+\frac{1}{2}\frac{a}{\lambda^4}}. \tag{97}$$

Если обозначить освещенность моря прямыми солнечными лучами через S_0, а освещенность диффузным светом неба через H_0, то освещенность той же поверхности внутренним диффузным светом выразится, очевидно, так:

$$M = \zeta \frac{I}{I_0} (S_0 + N_0), \tag{98}$$

где ζ — некоторый коэффициент, зависящий от распределения энергии в пространстве. При распределении, найденном в § 5, можно положить что ζ

приблизительно равно единице. Тогда на основании (97) и (98)

$$\frac{M_0}{S_0 + N_0} = \frac{\frac{1}{2}\frac{a}{\lambda^4}}{f(\lambda) + \frac{1}{2}\frac{a}{\lambda^4}}; \qquad (99)$$

это выражение определяет собой *спектр диффузного внутреннего света*, исходящего из моря. Это уравнение спектральной кривой было найдено Шулейкиным в работе [4]. В настоящее время оказалось возможным внести некоторое уточнение в постоянный коэффициент, причем, разумеется, структура формулы нисколько не изменилась [формула (99) содержит уточненный числовой коэффициент].

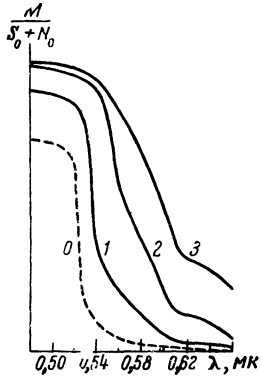


Рис. 462. Спектры света, исходящего из моря

Следует отметить, что в 1923 г. Г. А. Гамбурцевым была сделана попытка исключить несколько схематизированное деление всего потока диффузного света на отдельные «фракции» I_1, I_2, I_3 и т. д. В результате получилось довольно сложное выражение спектральной кривой, которое, как оказалось, с достаточной степенью точности может быть сведено все к той же формуле (99).

Выше было упомянуто, что из той же формулы может быть получена формула Ч. Рамана при условии, что рассеяние света весьма мало.

Положим, что в море существует *только молекулярное рассеяние*. Тогда благодаря его весьма малой величине окажется возможным пренебречь членом $\frac{1}{2}\frac{a}{\lambda^4}$ по сравнению с $f(\lambda)$ в знаменателе правой части (99). В таком случае, отбросив в знаменателе (99) этот член, получим

$$\frac{M_0}{S_0 + N_0} = \frac{a}{2\lambda^4 f(\lambda)}. \qquad (100)$$

Это и есть формула Рамана, причем $f(\lambda)$ обозначает коэффициент избирательного поглощения, фигурирующий в работе Рамана в виде фактора γ.

Совершенно очевидно, что формула эта не дает никакой *индивидуализации окраски* того или иного моря: диффузный свет, исходящий из моря, согласно ей, мог бы меняться только количественно, но не качественно; *спектр* всех морей был бы *одинаковым*, а изменялось бы, в зависимости от величины a, только общее количество энергии света.

Напротив, формула Шулейкина (99) позволяет вычислить различные типичные спектры в зависимости от индивидуальных особенностей каждого моря: тот же фактор a влияет здесь на *спектральное распределение* энергии.

На рис. 462 приведены спектральные кривые *1*, *2* и *3*, вычисленные по формуле (99) для трех различных значений a: 0,008; 0,04; 0,14. На рисунке видно, как резко падает кривая *1* в зеленой части спектра и как сильно поглощены желтая и красная части. С увеличением модуля рассеяния a кривая делается более пологой (кривые *2* и *3*), а цвет моря, следовательно, более зеленоватым и *значительно менее насыщенным* (с большей примесью белого цвета).

На рисунке для сравнения изображена также кривая *0*, вычисленная по формуле (100) Рамана для «оптически чистого» моря.

Метод Шулейкина, приводящий к уравнению спектральной кривой (99), может быть еще обобщен на случай каких угодно процессов, связанных с распространением света в морской воде. В частности, среди таких процессов прежде всего следует упомянуть о *флуоресценции* морской воды, откры-

той К. Раманатханом, и *избирательном отражении света крупными частицами*, исследованном Шулейкиным в цитированной работе. Оба эти процесса особенно ярко сказываются после штормов, но в некоторых морях могут проявляться и более или менее постоянно, влияя на видимую цветность моря.

Еще проще можно модернизировать формулу Шулейкина (99) в смысле изменения показателя степени при λ.

§ 9. Изменение окраски моря под действием взмученных крупных частиц, под действием флуоресценции воды и под непосредственным влиянием волнения

При выводе формулы (99) предполагалось, что взвешенные частицы только рассеивают свет, не поглощая его. В действительности, кроме таких частиц, в воде (особенно после волнения и после паводков и ливней, приносящих в море большое количество речной воды) иногда появляется значительное количество частиц измельченного грунта, планктона и т. п., обладающих очень большими размерами, а потому проявляющих свойство *избирательного поглощения и отражения света.*

Рассеяние света *такими* частицами, разумеется, отступает на задний план, его можно трактовать только так, как трактовался процесс, вызываемый присутствием «*предельно большой*» частицы (см. § 4).

Рассмотрим же совместное действие частиц обоего рода, а также процесс поглощения света самой водой, оставшийся без перемен.

Пусть отражательная способность крупной частицы, соответствующая длине волны λ, будет $\varphi(\lambda)$. Тогда величина $\psi(\lambda) = 1 - \varphi(\lambda)$ может быть названа коэффициентом поверхностного поглощения, характеризующим данную частицу (цветность вещества частицы).

Ослабление света слоем морской воды толщиной dz будет

$$dI = -I\left\{(1-\beta)\left[f(\lambda) + \frac{a}{\lambda^4}\right] + \beta\psi(\lambda)\right\}dz, \tag{101}$$

где β — *вероятность встречи* светового луча с частицей «второго рода» на протяжении 1 *м*. Она зависит от размеров частиц и от их количества в 1 $м^3$.

Отражено вверх теперь будет количество энергии

$$di_z = I\left[(1-\beta)\frac{a}{\lambda^4} + \beta\varphi(\lambda)\right]dz. \tag{102}$$

Продолжая вывод, аналогичный выводу формулы (99), найдем окончательно

$$\frac{M_0}{S_0 + N_0} = \frac{(1-\beta)\frac{1}{2}\frac{a}{\lambda^4} + \frac{1}{2}\beta\varphi(\lambda)}{(1-\beta)\left[f(\lambda) + \frac{1}{2}\frac{a}{\lambda^4}\right] + \beta\left[1 - \frac{1}{2}\varphi(\lambda)\right]}. \tag{103}$$

Для примера Шулейкиным был определен коэффициент $\varphi(\lambda)$ для коричневой глины путем непосредственного спектрофотометрирования поверхности глины. Исходя из формулы (103), были построены спектральные кривые, изображенные на рис. 463. Коэффициент a во всех случаях был положен равным 0,008, как для кривой *1* рис. 462. Та же кривая перенесена и на рис. 463, где она помечена тем же номером. Кривые *4*, *5*, *6* (рис. 463) построены для следующих значений коэффициента вероятности β: 0,02; 0,2; 1,0.

Как видим, в первом случае спектральная кривая обладает максимумом в синей части спектра, но зеленая часть также ясно выражена, следовательно, цвет моря здесь должен быть *сине-зеленым*. Второй случай приводит к мак-

симуму в зеленой части спектра; цвет моря здесь должен быть *правильно зеленым*. Наконец, третья кривая, соответствующая предельному случаю, когда *все* световые лучи встречаются с частицами второго рода на протяжении 1 *м* пути; в этом случае, как видим, окраска моря будет *коричневой* (максимум спектральной кривой лежит в красной части спектра).

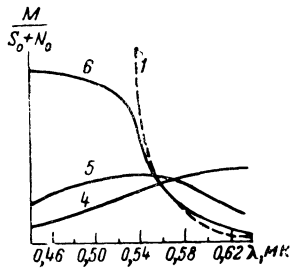


Рис. 463. Спектры взмученных вод

Переходим теперь к исследованию изменения цветности моря под влиянием *флуоресценции* воды. Как было уже упомянуто в конце предыдущего параграфа, флуоресценция морской воды была замечена К. Раманатханом [18], причем оказалось, что она может *двояко* влиять на видимую окраску моря: с одной стороны, сам цвет флуоресценции — *зеленый*, с другой стороны, флуоресценция возбуждается *синими и фиолетовыми* лучами падающего света, а стало быть, сине-фиолетовая часть спектра должна более или менее ослабляться. Нетрудно *количественно* учесть и то и другое обстоятельства, применив метод Шулейкина в данном новом случае.

Пусть каждый элементарный слой dz испускает вверх свет флуоресценции, энергия которого, соответствующая длине волны (λ), равна

$$I\vartheta(\lambda)\,dz. \tag{104}$$

Эта энергия возникла за счет ослабления света в области синих и фиолетовых лучей. Ее удобнее всего будет учесть, положив, что коэффициент *избирательного поглощения воды* стал равным $F(\lambda)$ вместо прежнего $f(\lambda)$, определенного для оптически чистой воды.

В таких (новых) условиях можно будет считать, что полное ослабление света на пути dz равняется

$$dI = -I\left[F(\lambda) + \frac{a}{\lambda^4}\right]dz. \tag{105}$$

С другой стороны, полная энергия, посланная *вверх* элементарным слоем, теперь равняется

$$di_z = I\left[\frac{a}{\lambda^4} + \vartheta(\lambda)\right]dz. \tag{106}$$

Опираясь на соотношения (105) и (106) и поступая так же, как при выводе формулы (99), получим окончательное выражение для спектральной кривой

$$\frac{M_0}{S_0 + N_0} = \frac{\frac{1}{2}\frac{a}{\lambda^4} + \frac{1}{2}\vartheta(\lambda)}{F(\lambda) + \frac{a}{\lambda^4} + \frac{1}{2}\vartheta(\lambda)}. \tag{107}$$

Об экспериментальном изучении функций $\vartheta(\lambda)$ и $F(\lambda)$ было сказано в предыдущем параграфе. Флуоресценция морской воды должна зависеть от следующих трех факторов: от взмучивания грунта, который содержит всевозможные органические и неорганические вещества, способные флуоресцировать в водном растворе; от приноса тех же веществ береговыми пресными водами (особенно после ливней или паводков); от перемешивания поверхностных слоев, включающих в себя пузырьки воздуха: обильное количество таких пузырьков появляется при возникновении гребней *пены* на вершинах волн. В частности, при этом может сказаться *флуоресценция кислорода*, растворенного в воде (флуоресценция кислорода, содержащегося в пресной воде, была открыта С. И. Вавиловым).

Но волны, появляющиеся на поверхности моря, могут и сами по себе непосредственно влиять на окраску моря, *видимую с корабля* или с берега,

словом, видимую тем наблюдателем, который смотрит на поверхность моря не по направлению *вертикали*. Все предыдущие выкладки относились к случаю, когда луч зрения был направлен *нормально* к поверхности моря. Только в этом случае — и при условии солнечного сияния — можно совершенно пренебрегать тем светом, который исходит от небесного свода и затем отражается от поверхности моря, а стало быть, только в этом случае можно говорить о некоторой определенной окраске моря, вызванной внутренним диффузным светом.

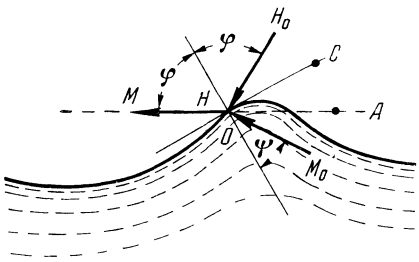


Рис. 464. Поведение светового луча у поверхности волн

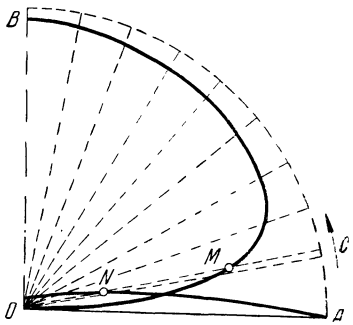


Рис. 465. Полярная диаграмма для световых потоков

Обычно же наблюдателю, смотрящему на поверхность моря под *острым углом к ней*, окраска моря представляется весьма непостоянной — сильно зависящей от целого ряда внешних условий. Нетрудно показать, что главную роль при этом играет состояние поверхности воды — форма и размеры волн, бегущих по ней.

Пусть луч зрения, исходящий от некоторого элемента поверхности моря, составляет с нормалью некоторый угол φ (рис. 464). Очевидно, что этот луч можно разложить на два составляющих. Первый из них принадлежит внутреннему диффузному свету; он достиг элемента поверхности воды, составляя с нормалью некоторый угол ψ и, преломившись, вышел под тем же углом φ (к нормали). Второй луч — луч отраженного света, испускаемого небесным сводом, т. е. луч, упавший на элемент поверхности воды также под углом φ к нормали.

Интенсивность обоих лучей, как известно, зависит от угла с нормалью, под которым они идут. Зависимость эта дается формулами, с которыми пришлось иметь дело и в § 1 [формулы (1) и (2)], и в § 4.

Если M будет *видимая* яркость освещения внутренним диффузным светом, а N — *видимая* освещенность небесным сводом, то, очевидно,

$$M = \frac{1}{2}\frac{\sin 2\varphi \sin 2\psi}{\sin^2(\varphi+\psi)}\left[1 + \frac{1}{\cos^2(\varphi-\psi)}\right]M_0, \tag{108}$$

$$N = \frac{1}{2}\frac{\sin^2(\varphi-\psi)}{\sin^2(\varphi+\psi)}\left[1 + \frac{\cos^2(\varphi+\psi)}{\cos^2(\varphi-\psi)}\right]N_0, \tag{109}$$

где M_0 по-прежнему обозначает освещенность тем же внутренним светом, но только наблюдаемую по направлению нормали к поверхности волны.

На рис. 465 изображена полярная диаграмма, вычисленная на основании формул (108) и (109). Длина радиус-векторов кривой N выражает собой отношение N/N_0; другими словами, кривая N показывает, как возрастает примесь отраженного света при возрастании угла φ между лучом зрения и нормалью. В то же время длина радиус-векторов кривой M представляет отношение M/M_0. Иными словами, кривая M показывает, как уменьшается *видимая*

яркость внутреннего диффузного света при возрастании угла φ. Но на диаграмме рис. 465 отмечены не углы φ, а дополнительные углы между *поверхностью* воды и лучом зрения. Такой угол на рис. 464 обозначен буквами *COA*: наблюдатель смотрит по направлению *MO*.

Из диаграммы рис. 465 видно, что во время штиля, когда поверхность воды горизонтальна, угол *COA* — наиболее острый и море — имеет ту же окраску, что и небо (*M* близко к нулю, *N* — максимально). Уже при сравнительно небольших волнах вектор, представляющий *N*, начинает быстро уменьшаться, а вектор *M* увеличиваться: море начинает быстро *синеть*. Обычно интенсивность окраски увеличивается не столько крупными волнами (сравнительно пологими), сколько мелкими, вторичными, третичными и т. д., бегущими по поверхности первых.

Особенно насыщенную окраску приобретает море при так называемых ветровых волнах, которые, как мы видели в гл. III, отличаются от трохоидальных волн тем, что имеют очень крутой профиль.

Вообще говоря, на внутренних морях, как мы видели, волны обычно круче, чем в океане. Так, например, в открытой части моря даже на довольно глубоких участках крутизна главных волн весьма часто достигает 15—16°, а крутизна мелких волн, бегущих по их поверхности, 30°. Следовательно, на основании диаграммы рис. 465 величины *M* и *N* здесь чаще всего лежат в пределах

$$0{,}81M_0 < M < 0{,}93M_0,$$

$$0{,}19N_0 > N > 0{,}07N_0.$$

Вот почему Черное море подчас оправдывает свое название, между тем как океан, даже при сильном волнении, кажется окрашенным в значительно более светлый цвет.

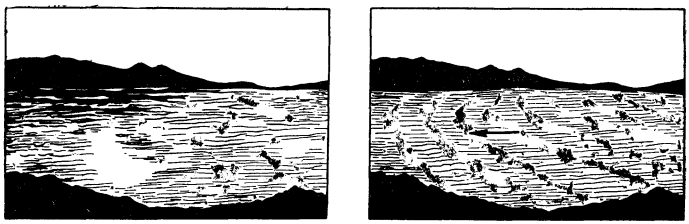
По окраске моря можно издали, с берега, судить о ветре, который работает в открытом море. Так, во время *бриза*, развивающегося близ берегов, море возле самого берега может быть зеркально гладким и светло окрашенным. Напротив, там, где струи воздуха, минуя экранирующий их горный хребет, падают на поверхность моря и разводят волну, море представляется окрашенным в очень темный цвет, образуя близ горизонта характерную темную полосу.

Чрезвычайно любопытны причудливые «узоры», видимые в штилевую погоду на поверхности моря, особенно если наблюдатель смотрит с горы или с самолета, словом, тогда, когда перед ним открывается наибольшее поле зрения. «Узоры» эти объясняются чрезвычайно просто на основании той же диаграммы рис. 465.

Действительно, даже в тихую погоду воздух над морем никогда не бывает абсолютно спокойным: отдельные струйки его движутся над гладкой поверхностью воды и разводят на ней легкую *рябь*. Но там, где такая рябь возникла, наклон луча зрения к поверхности воды оказывается настолько заметным, что начинает явственно выступать темный насыщенный цвет глубинного происхождения.

Остается объяснить то необыкновенное *постоянство*, каким отличается сам «*узор*», появившийся на поверхности моря. На первый взгляд кажется, что он должен был бы непрерывно менять свои очертания, следуя за прихотливыми изменениями воздушных потоков: одновременно с изменением скоростей в этих потоках должна была бы возникать и исчезать рябь то в одних местах, то в других, а между тем изменения картины происходят крайне медленно. Объясняется это тем, что неравенство *крутизны* мелких волн, возникающих на гладкой поверхности моря, вызывается не колебаниями скорости в воздушных струях, а наличием поверхностно-активных пленок.

В этом убеждает следующее наблюдение, сделанное Шулейкиным. В штилевую погоду на поверхности воды в гавани были ясно выражены «узоры» примерно такого характера, как изображено на рис. 466, *а*; первое наблюдение соответствовало *полной воде* в гавани. Через некоторое время начался отлив, и вот тут-то «узор» на поверхности воды, сохранявшийся постоянным, начал резко изменяться. Но изменения не были беспорядочными: все линии, наблюдавшиеся на поверхности воды, стали *вытягиваться вдоль залива*, как будто они были нанесены на поверхности какой-то *упругой пленки*, прикрепленной краями к берегам (примерно так, как изображено на рис. 466, *б*), а сама пленка получила растяжение по направлению отлива.



а *б*

Рис. 466. Схема «узоров» на поверхности воды в гавани

Так оптическим методом можно было убедиться в существовании пленки из поверхностно-активных веществ, уменьшающей крутизну волн мелкой ряби. Происхождение такой пленки в море может быть весьма различным: в ней повинны и жизненные процессы (слизь, выделяемая фукусами и другими растениями, разлагающиеся органические вещества), и пароходы, оставляющие за собой следы из нефтяных остатков и других поверхностно-активных веществ. С древнейших времен было известно влияние поверхностных пленок на освещенность глубин моря. В широко известном курсе навигации, написанном в прошлом веке, Платон Гамалея ссылается на древних греческих авторов, которые описывали поиски жемчуга. Искатели жемчуга ныряли до дна моря, предварительно набрав в рот оливкового масла. Масло, выпущенное ими изо рта, всплывало на поверхность моря, сглаживало мелкие волны и улучшало освещенность дна.

В гл. VIII мы еще вернемся к этому вопросу.

§ 10. Некоторые методы и результаты гидрооптических измерений

В самом начале этой главы описывалась методика определения оптических констант воды, позволившая в лабораторных условиях, а иногда даже и в условиях природных, весьма точно измерять коэффициент поглощения света в воде, в различных областях спектра. Далее, в § 7, были отмечены некоторые черты, позволяющие по спектрам света на глубинах определять происхождение таких спектров: выделять эффект поглощения света в самой воде, характер рассеяния света частицами того или иного преобладающего размера, наличие флуоресценции или избирательного поглощения света какими-либо веществами, растворенными в морской воде. К сожалению, до настоящего времени подводные спектрографические исследования еще не получили достаточного распространения, будучи связаны с весьма большими техническими трудностями. Поэтому часто приходится ограничиваться менее совершенными средствами для проведения исследований по оптике моря.

Самым простым из этих средств продолжает оставаться белый диск, которым впервые пользовался в начале прошлого века О. Коцебу для исследования прозрачности океана во время кругосветных плаваний.

Судьба этого простейшего прибора оказалась очень сложной. Превратности начались с того, что сам он получил имя не его изобретателя — русского ученого-мореплавателя Коцебу,—а швейцарского исследователя озер патера Секки, применившего его значительно позже. Затем при возросших требованиях, предъявляемых к экспедиционным методам исследований океана, сложилось мнение о невозможности посредством наблюдений за глубиной исчезновения диска судить однозначно о прозрачности вод океана. Такой взгляд существовал до тех пор, пока В. В. Шулейкин [4], А. Н. Башкирцева [17] и Р. Н. Иванов [19] не проделали подробные исследования явлений, связанных с исчезновением диска в рассеивающей среде.

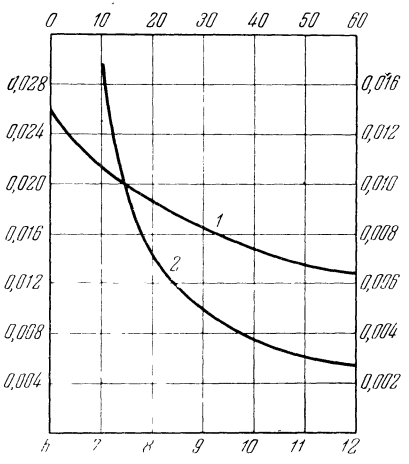


Рис. 467. Диаграмма исчезновения диска в воде

Двумя первыми из перечисленных авторов была найдена гиперболическая зависимость между глубиной исчезновения диска и *модулем* рассеяния, изображенная графически на рис. 467. Для удобства кривая разбита на два участка. Для первого участка глубины исчезновения диска отсчитываются по кривой *1* от 6 до 12 *м* под осью абсцисс, а соответствующие значения модуля *a* — слева от оси ординат, от значения 0,026 до 0,0125. Для второго участка глубины отсчитываются по кривой *2* над верхней линией рамки, от 10 до 60 *м*, а соответствующие значения модуля *a* — справа от диаграммы, от значения около 0,010 до наименьшего значения около 0,003.

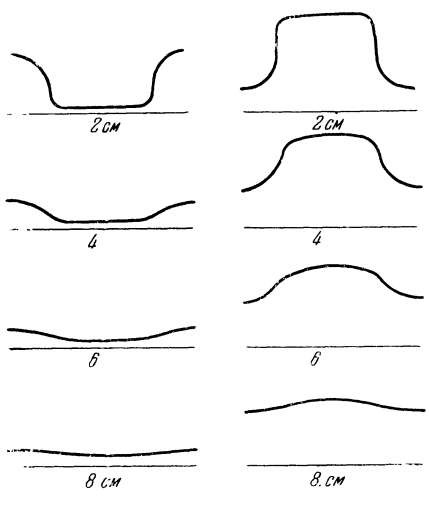


Рис. 468. Опыты Р. Н. Иванова с диском

Имеются основания предполагать, что диск всегда исчезает на одной и той же *оптической глубине*, измеряемой в условных единицах, о которых была речь в § 5.

Для определения более точной зависимости и для выяснения самого механизма исчезновения диска Р. Н. Ивановым были проделаны обстоятельные экспериментальные исследования [19].

В очень чистых лабораторных условиях фотографировался белый диск (диаметром 5 *см*), помещенный на черном фоне и опускаемый в сильно рассеивающую среду. В качестве такой среды брались коллоидальная взвесь канифоли и разбавленное молоко. Коэффициент рассеяния можно было менять в довольно широких пределах. Для удобства фотосъемок над сосудом, в который опускался диск, было помещено зеркало, наклоненное под углом 45° к горизонтальной плоскости и не препятствовавшее нужному освещению диска сверху. Таким образом в фотоаппарат попадало изображение диска,

отраженное от этого зеркала. Для того чтобы при всех глубинах погружения диска его изображение на пластинке получалось одинаковой величины (3 *см*), фокусировка производилась таким образом, что длина пути световых лучей от диска до пластинки оставалась постоянной. Изображение диска, проявленное при совершенно определенных условиях, проносилось затем над щелью регистрирующего микрофотометра, позволявшего измерить почернение пластинки на различных участках. В результате получились записи, часть которых воспроизведена в левом столбце кривых на рис. 468. Они соответствуют глубинам погружения диска 2, 4, 6 и 8 *см*. Ординаты кривых выражают здесь в определенном масштабе отношение яркости света, попавшего в щель микрофотометра сквозь соответствующий участок фотопластинки, к яркости света, падавшего на пластинку от осветителя.

Зная паспорт пластинок и другие фотохимические параметры, Иванов вычислил по записям почернений интенсивность света, попавшего в фотоаппарат от того или иного участка исследуемого поля. Диаграммы, построенные им для интенсивностей, воспроизведены на том же рис. 468, в правом столбце.

Эти диаграммы совершенно ясно вскрывают истинный механизм исчезновения диска. Даже когда диск погружен неглубоко, примерно на четверть глубины исчезновения (в данном случае на 2 *см*), то и тут на диаграмме вскрывается, во-первых, некоторый *ореол* вокруг диска, а во-вторых, некоторое уменьшение видимой яркости света над периферической частью диска. На следующей диаграмме для глубины погружения около половины глубины исчезновения (в данном случае 4 *см*) ореол выступает еще сильнее и распространяется дальше вокруг диска. Диаграмма, соответствующая примерно трем четвертям глубины исчезновения, обнаруживает очень сильный и далеко распространившийся ореол и совершенно ясно выраженное непостоянство яркости поля над самим диском: яркость падает от центра к краям. Здесь диск очерчен уже довольно расплывчато благодаря постепенному падению яркости при удалении от середины поля к периферии; на общем фоне совсем слабо выступает очертание краев диска.

Никаких признаков краев диска нельзя уже найти на самой нижней диаграмме, соответствующей примерно глубине исчезновения (в данном случае 8 *см*). На диаграмме видно только совсем небольшое повышение яркости в середине поля, плавно спадающей по мере удаления от середины.

На основании объективных регистраций Иванова совершенно очевидно, что диск создает вокруг себя настоящую световую завесу, за которой он и исчезает, в полном согласии с точкой зрения Шулейкина.

Столь же четко удалось Иванову определить и *оптическую глубину* исчезновения диска в совершенно чистых экспериментальных условиях. Для создания таких условий он освещал свою установку светом от газосветных трубок и вел наблюдения сквозь светофильтры, выделявшие практически только определенную полосу излучения. Именно, от аргонной трубки бралась линия $\lambda = 0{,}448$ *мк* и от неоновой трубки — линия $\lambda = 0{,}668$ *мк*.

Опыты показали, что:

а) при любом монохроматическом освещении диск данного размера исчезает на одной и той же *оптической глубине*, выраженной в у. е.;

б) глубина исчезновения зависит от относительных (по сравнению с самой глубиной исчезновения) размеров диска. Она уменьшается при уменьшении размеров диска и стремится к определенному пределу;

в) при малых относительных размерах диска глубина исчезновения приближается в *двум* у. е.

В экспедиционной практике диск обычно исчезает на таком расстоянии от наблюдателя, что его угловой диаметр или, точней, телесный угол, под которым он виден, вполне удовлетворяют условию в), отмеченному Р. Н. Ивановым. Если диск белый, то коэффициент рассеяния, соответствующий усло-

виям этого автора, можно относить к спектральной полосе около $\lambda = 0{,}52$ *мк*. Близко к этой полосе лежит область наивысшей чувствительности человеческого глаза при цветном зрении (центральном).

Но результаты, полученные Р. Н. Ивановым,— казалось бы достаточно надежные,— пришлось снова пересмотреть в связи с работами А. А. Гершуна на внутренних морях [11]; на этих морях, содержащих в своей воде большое количество крупных *поглощающих* частиц, было установлено новое эмпирическое соотношение: так, коэффициент *полного* ослабления света (за счет поглощения и рассеяния) оказался равным *восьми*, деленному на значение глубины исчезновения диска. Разделить эффект поглощения и рассеяния А. А. Гершуну не удалось, и вновь применимость диска для количественных измерений гидрооптических констант оказалась под сомнением.

Причину расхождения между данными, полученными различными авторами, удалось установить В. А. Тимофеевой и И. И. Жилиной. Они проделали систематические исследования с набором дисков различных размеров, погружавшихся в искусственно созданные коллоидальные взвеси в воде, причем сама вода окрашивалась нейтральной серой краской для обеспечения одинакового поглощения света в различных областях спектра. Можно было посредством фотометрирования определять раздельно и коэффициент поглощения света в окрашенной воде, и коэффициент рассеяния света коллоидальными взвесями в различных областях спектра. Телесный угол, под каким был виден диск, изменялся в пределах от 0,014 до 0,112. Выяснилось, что при сильном рассеянии, наблюдающемся во внутренних морях и во многих областях океана, глубина исчезновения диска полностью обусловлена эффектом «световой завесы», которую в свое время исследовал Р. Н. Иванов.

Напротив, при *малой* величине модуля рассеяния, характеризующей наиболее прозрачные области Мирового океана (например, Саргассовое море в Атлантике, Бенгальский залив в Индийском океане), глубина исчезновения диска обусловлена физиологическим эффектом *порога* контрастов между освещенным диском и окружающим фоном океанской воды [20]. Следует продолжить работы в этом направлении для вывода окончательных количественных характеристик явлений.

Уже в настоящее время можно считать найденным хороший путь для *разделения* эффектов поглощения и рассеяния света в морской воде. Этот путь также был намечен В. А. Тимофеевой. Она обратила внимание на то, что при отсутствии поглощения света в сильно рассеивающей среде — коллоидальной взвеси в чистой воде, поглощение света в которой весьма мало по сравнению с рассеянием коллоидальными частицами,— индикатриса *полностью рассеянного* света может с достаточным приближением описываться простым уравнением

$$\frac{\rho}{\rho_0} = 0{,}33\cos\varphi + 0{,}67\sqrt{1 - 0{,}25\sin^2\varphi}. \qquad (110)$$

Здесь ρ — длина радиус-вектора, составляющего некоторый угол φ с направлением основного потока света, падающего на среду; ρ_0 — радиус-вектор, направленный в сторону основного потока. При выводе эмпирической зависимости (110) было учтено, что измерения дали, в среднем из нескольких, значение $\rho/\rho_{180} \approx 2{,}9$.

Добавление *красителя* к воде, в которой были взвешены частички коллоида, резко меняло форму индикатрисы: она вытягивалась в направлении основного светового потока, падающего на среду; полюс плоскостной индикатрисы смещался в сторону противоположную так, как это изображено на рис. 469, заимствованном из работы В. А. Тимофеевой [21].

Слева от каждой половины индикатрисы проставлены числовые значения m/k, причем m обозначает коэффициент поглощения, а k — коэффициент рассеяния света, определенные в отдельности.

Яркость света R, рассеянного в некотором направлении φ, оказалась связанной с величиной m/k простой линейной зависимостью

$$R = 1 + N\frac{m}{k}\cdot \qquad (111)$$

За единицу при измерении R принята яркость света, рассеянного в направлении к источнику света. Параметр N характеризует наклон эмпирических прямых на диаграмме Тимофеевой. Строя такие прямые, она определяет величину отношения m/k в данной среде.

На рис. 469 точки при индикатрисах получены из опытов, а сами индикатрисы построены на основании эмпирических графиков, дающих зависимость (111). Систематический отход некоторых точек вверху индикатрис Тимофеева объясняет технической причиной — наличием тени от фотометра.

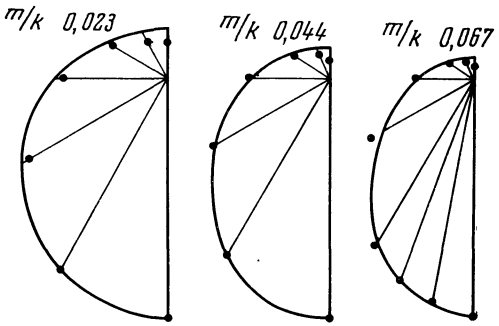


Рис. 469. Влияние поглощения света на индикатрису рассеяния (по В. А. Тимофеевой)

Итак, если в экспедиционных условиях нет возможности применить спектрограф для исследования светового режима на глубинах моря и определения основных характеристик процессов по методике, изложенной в § 7, то простое фотометрирование световых потоков, идущих в различных направлениях, позволит разделить эффект рассеяния и эффект поглощения по приближенному методу В. А. Тимофеевой.

Само фотометрирование в настоящее время производится с достаточной надежностью — посредством приборов, которые застрахованы от погрешностей, систематически вносившихся еще не так давно в обширный материал иностранных экспедиций: некоторые авторы (преимущественно гидробиологи, интересовавшиеся условиями миграции планктона при изменениях светового режима) приходили к заключению, что, например, воды Саргассового моря «прозрачней, чем оптически пустая вода, полученная после двойной перегонки в лабораториях».

Эти авторы упускали из вида, что фотоэлемент, погруженный на ту или иную глубину, без особых конструктивных мероприятий, отмечает *не* освещенность *прямыми* солнечными лучами на той или иной глубине, а освещенность, обусловленную как этими лучами, так и нередко более эффективным светом, *рассеянным* в воде, согласно § 4 и 5.

По этой причине мы не будем здесь останавливаться на результатах многочисленных гидрооптических измерений в океане, проделанных заведомо порочными методами. Опишем лишь усовершенствованный метод Тимофеевой, а также некоторые результаты ее измерений.

Как было уже упомянуто в § 6, цитированный автор впервые применил измерительную аппаратуру, позволяющую выделять лишь очень узкий телесный угол из всего светового потока, поступающего со всех сторон. Только таким образом удалось освободиться от систематических искажаю-

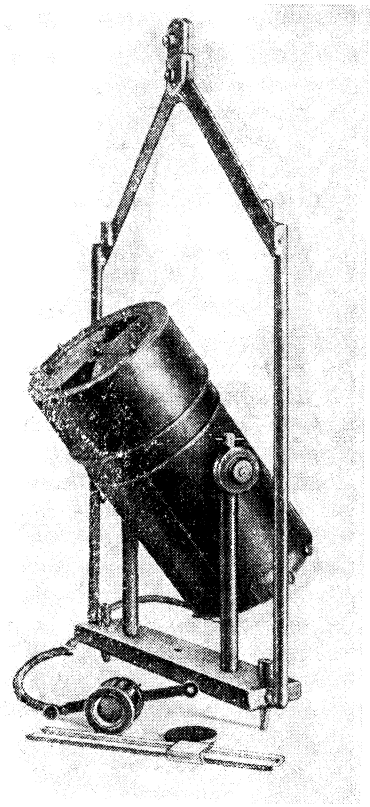


Рис. 470. Общий вид морского фотометра В. А. Тимофеевой

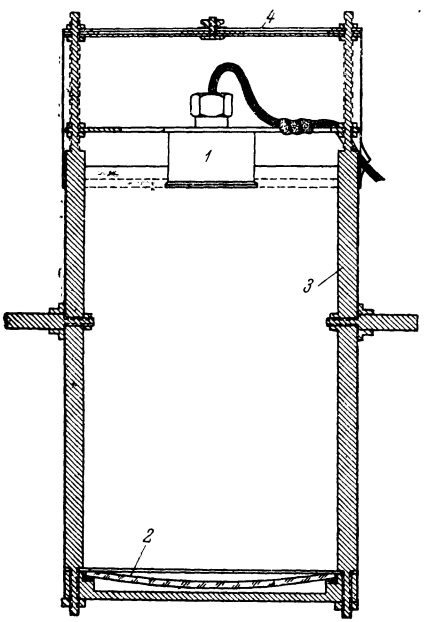


Рис. 471. Разрез прибора

щих погрешностей. Тот же самый принцип лег и в основу построения морского фотометра, примененного Тимофеевой.

На рис. 470 воспроизведен общий вид этого прибора, а на рис. 471 — его продольный схематический разрез. Селеновый фотоэлемент заключен в герметически закрытую коробку *1* с окном из плексигласа, которое помещается в главном фокусе вогнутого зеркала, посеребренного с задней стороны *2*. Диаметр зеркала 16 *см*, фокусное расстояние 26 *см*.

Сплошной кожух прибора *3* защищает фотоэлемент от посторонних боковых лучей. Фактически на фотоэлемент могут падать только лучи, отраженные от зеркала *2*, в пределах небольшого телесного угла, который можно изменять посредством диафрагмирования. Внутрь кожуха *3* свободно поступает морская вода, а потому нет надобности заботиться о герметизации каких бы то ни было деталей, кроме коробки *1* с фотоэлементом. Меняя диафрагмы, можно изменять угол зрения прибора в пределах от 0°,8 до 6°,6.

Для закрепления прибора в какомлибо определенном направлении он опускался в море на двух направляющих тросах, проходящих сквозь ушки. Третий, несущий, трос крепился в зажиме. На концах направляющих тросов подвешивались грузы.

Установка оптической оси прибора под определенным углом к вертикали производилась поворотом вокруг горизонтальной оси, причем угол поворота отсчитывался по лимбу.

Кабель, идущий от фотоэлемента, присоединялся к короткопериодному гальванометру, установленному на судне. Хотя этот гальванометр и не реагирует на крен, но для надежности он был монтирован на карданове подвесе. Прибор давал возможность с достаточной надежностью работать в слоях морской воды на глубинах 0,5—60 *м* под поверхностью моря.

На рис. 472 воспроизведены результаты измерений, произведенных Тимофеевой в море. Первая диаграмма соответствует углам φ между оптической осью прибора и направлением прямых солнечных лучей, отсчитываемым в сторону надира, а вторая — углам — φ, отсчитываемым в сторону зенита. На обеих диаграммах отчетливо видны *максимумы* на

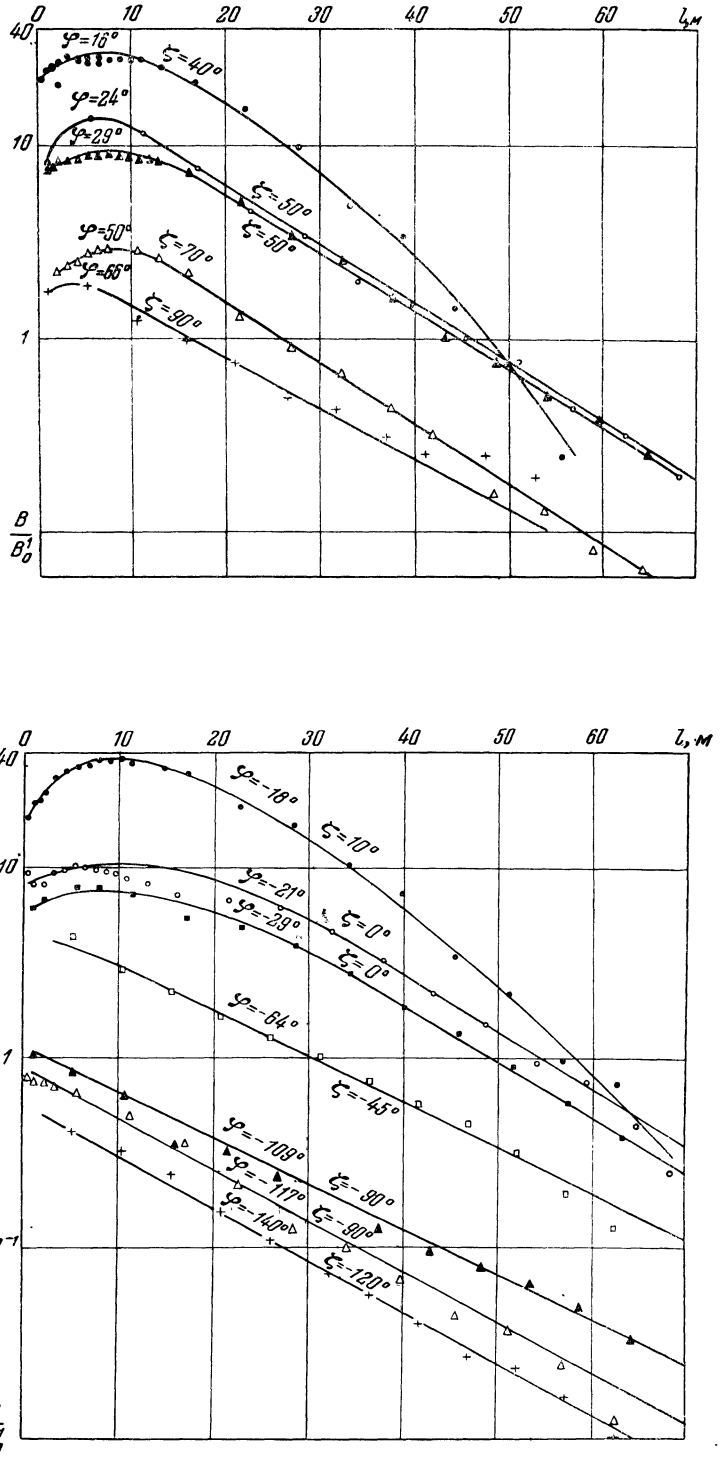


Рис. 472. Результаты измерений в море

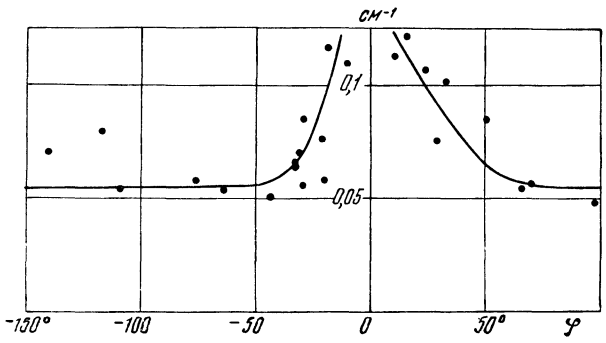


Рис. 473. Условный коэффициент ослабления света

кривых, соответствующих различным углам φ. В морских условиях эти максимумы получены *впервые*: старая методика не позволяла их обнаружить, так как «боковые» лучи, падавшие на фотоэлементы в установках различных авторов, маскировали самую сущность явления. Как и следовало ожидать, в отличие от кривых, полученных тем же автором в лабораторных условиях, здесь максимумы исчезают уже на кривых, соответствующих сравнительно небольшим углам, например 64° (см. вторую диаграмму рис. 472). Это потому, что в море поглощение света в самой воде соперничает с эффектом рассеяния, тогда как в лабораторных условиях поглощение света сказывалось только при очень больших углах, когда рассеянные лучи света проходили в среде весьма значительные расстояния и многократно встречали поверхность взвешенных частиц.

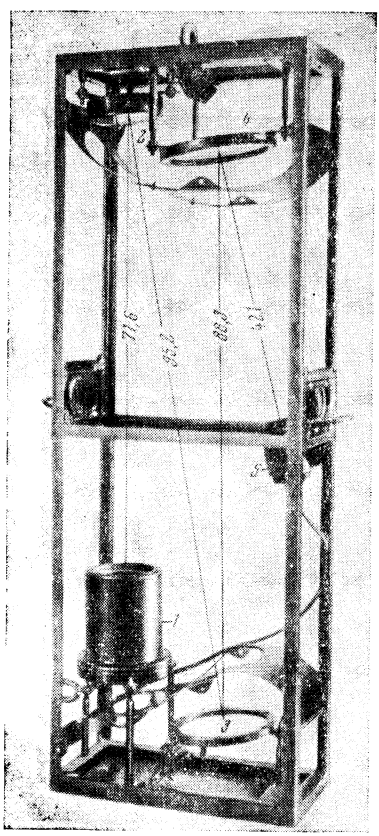


Рис. 474. Прозрачномер ЧО МГИ

Изучая совместное действие рассеяния и поглощения света в морской воде по угловым коэффициентам прямолинейных участков в полулогарифмических координатах, Тимофеева получила зависимость некоторого «условного» коэффициента ослабления света C (выраженного в обратных метрах) от угла φ. Точки, полученные из опытов, нанесены на диаграмму, воспроизведенную на рис. 473.

Несмотря на понятный разброс точек, вызванный трудностью сколько-нибудь точных измерений в морских условиях, диаграмма позволяет ожидать, что *предельное* значение коэффициента для вполне рассеянного светового потока составляет около 0,06 $м^{-1}$.

В. А. Тимофеева отмечает, что на основании некоторых надежных измерений предшествующих авторов тоже можно было получать значения условного коэффициента ослабления вполне рассеянного света, причем числовые значения его получались весьма близкие — около 0,07 $м^{-1}$.

Кроме исследований светового режима на глубинах моря, в настоящее время проводятся систематические измерения *прозрачности* вод в различных глубинных слоях в отдельности. Первый прибор, предназначенный для таких измерений, был предложен Н. Н. Калитиным еще в 1923 г. К тому же времени относится и конструкция прозрачномера Петтерсона. С 1947 г. Шведская глубоководная экспедиция пользовалась прозрачномером Йерлова [22], подробно описанным в статье этого автора [23]. Здесь мы остановимся лишь на конструкции прозрачномера, построенного в Черноморском отделении Морского гидрофизического института и применяемого с 1957 г. в экспедициях на исследовательском судне «Михаил Ломоносов» в Атлантическом океане [24].

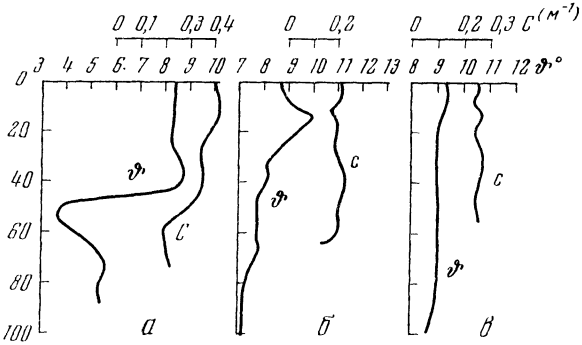


Рис. 475. Образцы записей прозрачности вод

Общий вид прибора, без боковых защитных стенок, представлен на рис. 474. Из осветителя *1* световой поток падает на плоское зеркало *2*, затем на плоское зеркало *3* и, наконец, собирается сферическим вогнутым зеркалом *4* для входа в окно коробки *5* с герметически монтированным в ней селеновым фотоэлементом. Размеры внутренних деталей таковы, что световой поток, прошедший сквозь отверстие вверху и сквозь толстый слой органического стекла, падает на всю поверхность фотоэлемента, находящегося внизу.

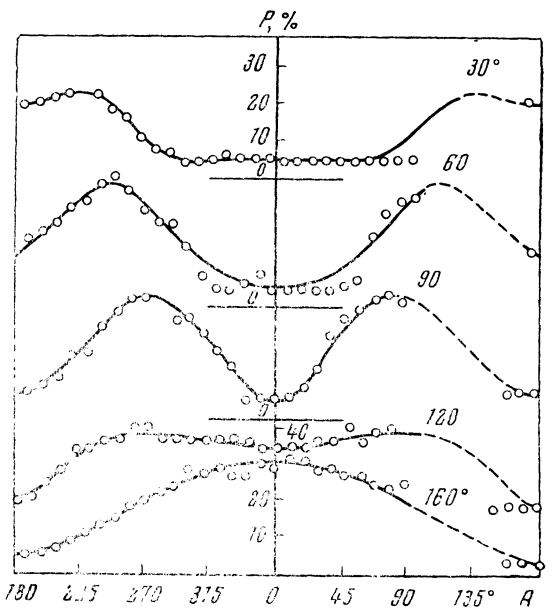


Рис. 476. Поляризация света в зависимости от A и ζ

Длина отдельных этапов пути световых лучей отмечена на рисунке (в сантиметрах). Полная длина пути от осветителя до входа в коробку *5* составляет 297 *см*. При этом обеспечиваются минимальная погрешность измерений и отсутствие заметных погрешностей, в частности от эффекта многократного рассеяния света на пути от *1* до *5*.

На коробку с фотоэлементом надеваются светофильтры: синий СС-5, зеленый ЗС-2 или красный КС-1. Зеркала прибора не защищены ничем, кроме слоя сурика, наложенного сзади серебряного слоя, и тонкого слоя парафина, наложенного на сурик, для скатывания воды: тем самым обеспечена легкая юстировка зеркал в воздухе.

Прибор погружается в воду в таком положении, как представлено на рис. 474, но, разумеется, с глухими боковыми щитами. Вверх на судно идет от

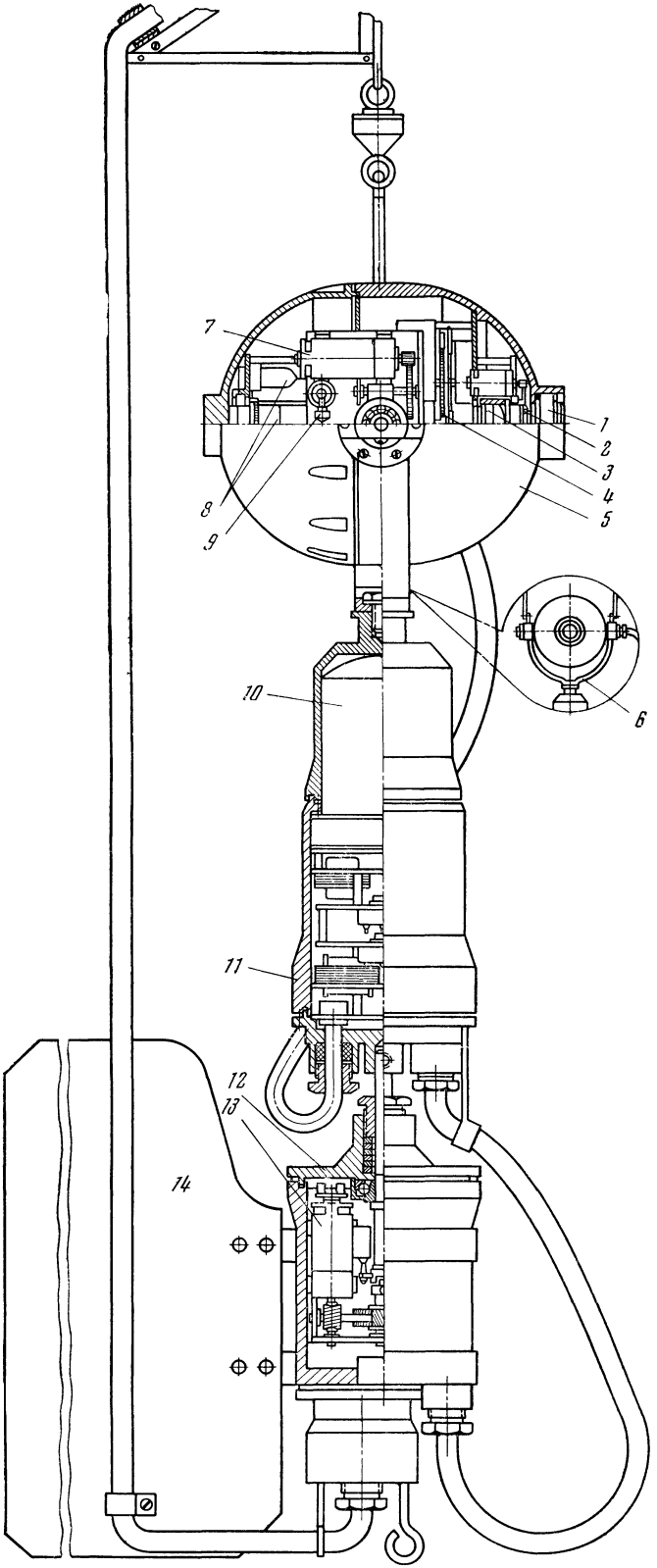


Рис. 477. Морской автоматический **поляриметр**

прибора четырехжильный кабель. Две жилы присоединены к фотоэлементу, а две остальные служат для питания лампочки в осветителе *1*. В качестве регистрирующего прибора взят электронный потенциометр ЭПП-09, описанный в гл. IV.

На рис. 475 приведены образцы записей прозрачности воды на глубинах до 100 *м* в Балтийском море, Северном море и Атлантическом океане. Коэффициент полного ослабления направленного света c измерялся в обратных метрах. На диаграммах приведены также изменения температуры воды ϑ на глубинах.

Вместе с фотометрическими исследованиями прозрачности отдельных слоев морской воды на том же судне «Михаил Ломоносов» ведутся и измерения степени *поляризации* света, также посредством оригинального прибора, построенного в Черноморском отделении Морского гидрофизического института [20]. На рис. 476 представлена сводная диаграмма, показывающая, как меняется степень поляризации света на оптической глубине 11 у. е. в зависимости от *азимутального* угла A и зенитного расстояния ζ. Угол A — это угол между вертикалом Солнца и вертикальной плоскостью, проходящей через оптическую ось поляриметра; он отсчитывается от 0 до 360°. Зенитный угол, т. е. угол между оптической осью прибора и направлением в зенит, отсчитывается от 0 до 180°. При каждой из кривых на рис. 476 проставлены соответствующие значения ζ: 30, 60, 90, 120 и 160°. Значения A даны под осью абсцисс. Интересно отметить, что при самом малом из взятых значений ζ максимальная поляризация (около 20%) наблюдается близко к направлению прочь от Солнца, а минимум — в направлении на Солнце. При наибольшем ζ картина обратная: максимальная поляризация (30%) при направлении на Солнце и минимальная — в противоположном направлении.

Недавно в Морском гидрофизическом институте был построен и прошел испытания в море новый интересный экспедиционный прибор — морской автоматический поляриметр (МАП-63), сконструированный Г. Г. Неуйминым и М. Н. Кайгородовым [25, 26]. Он дает возможность производить измерения пространственного распределения яркости в водной среде, степени поляризации и направления плоскости поляризации естественного дневного света в море — по всей сфере, в нескольких спектральных участках. Прибор может работать на глубинах до 200 *м*.

Схематический чертеж прибора (частично — в разрезах) представлен на рис. 477. Здесь обозначено: *1* — защитное стекло; *2* — анализатор (поляроид); *3* — объектив; *4* — диски с набором цветных и нейтральных светофильтров; *5* — шаровой контейнер; *6* — цапфа; *7* — механизм, служащий для вращения вокруг горизонтальной оси; *8* — фотоэлектронный блок; *9* — кренометр; *10* — гироскопический датчик азимута; *11* — контейнер гироскопа; *12* — крышка контейнера, содержащего механизм для вращения вокруг вертикальной оси; *13* — механизм для вращения вокруг вертикальной оси; *14* — стабилизатор.

Весь агрегат сообщается с экспедиционным судном посредством многожильного кабеля. Дистанционное управление позволяет вращать приемное устройство вокруг горизонтальной оси; для указания угла наклонения оптической оси к горизонтальной плоскости на записи фиксируется положение маленького отвеса; оптическую ось можно направлять тоже и соответственно различным азимутам, контролируемым гироскопом. Вращение вокруг вертикальной оси при этом производится также автоматически.

Прибор МАП-63 позволил подтвердить в природных условиях справедливость выводов теории и выводов из лабораторных опытов В. А. Тимофеевой, произведенных в искусственных мутных средах [15, 16, 20], и одновременно уловил особенности распределения яркости и поляризации света на различных глубинах при различных условиях освещения.

ГЛАВА СЕДЬМАЯ

АКУСТИКА МОРЯ

§ 1. Распространение акустических волн в однородной среде

При исследовании морских течений и ветровых волн, как правило, водная среда считается несжимаемой. Исключением является задача о разрушении волн у придонных препятствий, на которой мы не останавливались в главе III. В главе II о длинных волнах упоминалось, что наряду с волнами цунами подводные землетрясения порождают еще упругие волны, обусловленные сжимаемостью воды. В настоящей главе, посвященной акустике моря, придется особое внимание уделить процессам сжатия и последующего расширения воды, возникающим всегда при распространении в ней звуковых, инфразвуковых или ультразвуковых волн. Пока мы не будем еще разграничивать области всех этих трех разновидностей акустических волн (в широком смысле слова), а займемся рассмотрением общих их свойств.

В дальнейшем видно будет, что, изучая акустику моря, нельзя отрывать гидросферу от атмосферы совершенно так же, как нельзя забывать о какой либо одной из этих сфер при изучении процессов испарения, конденсации, теплового лучеиспускания и т. п. Вот почему здесь же, в первом параграфе, удобнее будет остановиться на случаях распространения акустических волн и в водной и в воздушной среде.

Рассмотрим сперва распространение *плоских волн*. Подобный тип волн соответствует либо весьма отдаленному источнику, либо источнику, находящемуся на конечном расстоянии, но испускающему весьма короткие (ультразвуковые) волны. Пусть ось X взята в направлении распространения волн. Тогда в системе гидродинамических уравнений Эйлера [см. гл. I, уравнение (20)] пропадут все члены, содержащие производные по y и z, ибо во всех точках какой-либо плоскости, перпендикулярной к оси X, все условия будут совершенно одинаковы.

Из всей системы сохранится, следовательно, одно простое уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = -\alpha\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{1}{\delta}\frac{\partial p}{\partial x}. \tag{1}$$

Условие неразрывности [см. гл. I, уравнение (23)] здесь также напишется очень просто. Именно

$$\frac{\partial \delta}{\partial t} + \frac{\partial (\delta u)}{\partial x} = 0. \tag{2}$$

В применении к *сжимаемой* среде можно несколько преобразовать оба полученные уравнения. Прежде всего примем во внимание, что в случае небольших изменений давления Δp их можно полагать пропорциональными возникающим изменениям плотности $\Delta\delta$

$$\Delta p = \varkappa\frac{\Delta\delta}{\delta}. \tag{3}$$

Коэффициент $\varkappa$, играющий роль коэффициента упругости, выражается так:

$$\varkappa = \left| \delta \frac{\partial p}{\partial \delta} \right|_{\delta=\delta_0}, \tag{4}$$

где δ_0 — плотность среды в невозмущенном состоянии. Допустим теперь, что эта плотность несколько изменилась, сделавшись равной некоторой новой величине δ, причем

$$\delta = \delta_0(1+s). \tag{5}$$

Тогда, представив в иной форме правую часть уравнения (1), можно будет на основании (4) и (5) написать

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\delta_0}\frac{\partial p}{\partial \delta}\frac{\partial \delta}{\partial x} = -\frac{\varkappa}{\delta_0}\frac{\partial s}{\partial x}. \tag{6}$$

Подобным же образом на основании (5) уравнение (2) перепишется в форме

$$\frac{\partial s}{\partial t} = -\frac{\partial u}{\partial x}. \tag{7}$$

Члены высших порядков здесь отброшены, так как предполагается, что смещения бесконечно малы.

Если уравнение (6) продифференцировать по t, а уравнение (7) — по x, то в обоих вновь полученных уравнениях окажется член $\frac{\partial^2 s}{\partial x \partial t}$, который, очевидно, может быть исключен. Выполнив операцию исключения, получим одно дифференциальное уравнение в частных производных второго порядка

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{8}$$

где

$$c^2 = \frac{\varkappa}{\delta_0} = \left| \frac{\partial p}{\partial \delta} \right|_{\delta=\delta_0}. \tag{9}$$

Легко видеть, что (8) представляет собой типичное уравнение *волны*, распространяющейся со скоростью c вдоль оси X: оно в точности напоминает уравнение (15) гл. II, полученное там для приливной волны. Разумеется, природа самой волны здесь совершенно иная, а потому и скорость c связана с совсем иными физическими величинами: там волны (поперечные) возникали под действием поля тяготения, здесь волны (продольные) возникают под действием сил упругости.

Но в таком случае общий интеграл (8) должен представляться в виде

$$u = F_1(x-ct) + F_2(x+ct) \tag{10}$$

аналогично уравнению (17) гл. II (см. стр. 160). Так же, как и там, могут существовать одновременно две волны, одна из которых распространяется в положительном, а другая — в отрицательном направлении вдоль оси X. Сопоставляя (10) с (7), можно показать, что

$$cs = -F_1(x-ct) + F_2(x+ct). \tag{11}$$

Следовательно, если из двух возможных волн существует лишь какая-либо одна, то на основании (10) и (11)

$$u = \pm sc. \tag{12}$$

Но ведь величину s мы можем рассматривать как относительное изменение плотности [на основании (5)], весьма малое в обычных случаях. Следовательно, несмотря на большую величину второго множителя c, величина скорости продольных колебаний u в среде оказывается весьма *малой*, а это оправды-

вает упрощающие допущения, которые были сделаны при выводе соотношений (6) и (7).

Нетрудно получить и закон самих продольных колебаний частиц (а не только закон изменения их скоростей); этот закон колебаний непосредственно вытекает из уравнений Лагранжа [см. гл. I, уравнение (21)].

Действительно, отбрасывая все члены системы уравнений Лагранжа, обращающиеся в нуль, найдем, что смещение ξ частицы, обладавшей в состоянии покоя координатой x, связано с временем t, давлением p и первоначальной плотностью δ_0 соотношением

$$\delta_0 \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -\frac{\partial p}{\partial x}. \tag{13}$$

Для вывода условия неразрывности достаточно сообразить, что вещество, находившееся первоначально между плоскостями x и $x + \Delta x$, после смещения стало находиться между плоскостями

$$x + \xi \quad \text{и} \quad x + \xi + \left(1 + \frac{\partial \xi}{\partial x}\right) \Delta x.$$

А так как произведение объема на соответствующую плотность должно было при этом остаться постоянным, то

$$\delta_0 \Delta x = \delta \left(1 + \frac{\partial \xi}{\partial x}\right) \Delta x. \tag{14}$$

Относительное изменение плотности s на основании (14) и (5) выразится так:

$$s = -\frac{\partial \xi / \partial x}{1 + \frac{\partial \xi}{\partial x}}, \tag{15}$$

или, при малых смещениях, когда можно пренебречь производной в знаменателе по сравнению с единицей,

$$s = -\frac{\partial \xi}{\partial x}. \tag{16}$$

С другой стороны, при том же условии малых перемещений

$$p = p_0 + \varkappa s. \tag{17}$$

В таком случае правая часть уравнения (13) может быть выражена через первую производную от s или вторую от ξ по x. Именно

$$\delta_0 \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -\varkappa \frac{\partial s}{\partial x} = \varkappa \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}. \tag{18}$$

Остается только разделить обе части на δ_0 и вспомнить, что $\frac{\varkappa}{\delta_0} = c^2$. Тогда получится столь же характерное уравнение волн, как и уравнение (6), но только теперь в нем будут фигурировать вторые производные от самих смещений ξ частиц среды, а не от скоростей колебательного движения u

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}. \tag{19}$$

Пожалуй, можно было бы и не упоминать о том, что интеграл уравнения (19) должен быть совершенно подобен уравнению (10).

Рассмотрим теперь случай распространения *сферической* волны. При условии *малых* смещений по-прежнему можно будет пренебречь теми членами уравнений Эйлера, в которые входят в качестве множителей компоненты скоростей (в данном случае придется исследовать все три уравнения, а не одно, как было до сих пор). Тогда окажется, что

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\delta_0} \frac{\partial p}{\partial x}; \quad \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{\delta_0} \frac{\partial p}{\partial y}, \quad \frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{1}{\delta_0} \frac{\partial p}{\partial z}. \tag{20}$$

Вспомнив уравнения (16) и (17), можно выразить правые части всех трех уравнений через частные производные от s по x, y и z, а затем полученные выражения проинтегрировать по времени от начального момента до некоторого момента t. Тогда получим

$$u = -c^2 \frac{\partial}{\partial x} \int_0^t s\,dt + u_0,$$

$$v = -c^2 \frac{\partial}{\partial y} \int_0^t s\,dt + v_0, \tag{21}$$

$$w = -c^2 \frac{\partial}{\partial z} \int_0^t s\,dt + w_0,$$

где u_0, v_0, w_0 — составляющие скорости частицы в начальный момент времени ($t = 0$) в точке с координатами x, y, z. В случае *безвихревого* движения составляющие скорости, как известно, выражаются через производные от потенциала скоростей

$$u = -\frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad v = -\frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad w = -\frac{\partial \Phi}{\partial z}. \tag{22}$$

Следовательно, на основании (22) и (21) имеем

$$\Phi = c^2 \int_0^t s\,dt + \Phi_0, \tag{23}$$

откуда

$$c^2 s = \frac{\partial \Phi}{\partial t}. \tag{24}$$

Предположим, что возмущения, происходящие в среде, симметричны относительно одной точки, в которой естественно будет поместить начало координат. Тогда потенциал скоростей окажется функцией только расстояния r от этой точки и времени t.

В добавление к уравнению движения необходимо написать условие неразрывности. Оно найдется весьма просто, если мы примем во внимание, что изменение массы, заключенной между сферами радиусов r и $r + \Delta r$, выражается, с одной стороны, как

$$\frac{\partial m}{\partial t} = 4\pi r^2 \Delta r \frac{\partial \delta}{\partial t}, \tag{25}$$

с другой же стороны, как разность между потоками сквозь обе пограничные поверхности, т. е.

$$\frac{\partial m}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial r}\left[4\pi r^2 \delta \frac{\partial \Phi}{\partial r}\right] \Delta r. \tag{26}$$

Но в таком случае, сопоставляя (25) и (26), можно выразить условие неразрывности в форме

$$r^2 \frac{\partial \delta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial r}\left[\delta r^2 \frac{\partial \Phi}{\partial r}\right]. \tag{27}$$

Вспоминая уравнения (5), можно в случае бесконечно малых смещений переписать (27) в упрощенной форме

$$\frac{\partial s}{\partial t} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}\left[r^2 \frac{\partial \Phi}{\partial r}\right]. \tag{28}$$

Но для производной $\partial s/\partial t$ можно найти иное выражение на основании уравнения (24). Именно

$$c^2 \frac{\partial s}{\partial t} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}. \tag{29}$$

Сопоставление (29) с (28) дает

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = \frac{c^2}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}\left[r^2 \frac{\partial \Phi}{\partial r}\right], \tag{30}$$

или, после некоторой перестановки,

$$\frac{\partial^2 (r\Phi)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 (r\Phi)}{\partial r^2}. \tag{31}$$

Как видим, в уравнении (31) функция $r\Phi$ играет ту же самую роль, которую соответственно играли u и ξ в уравнениях (8) и (19), выведенных для плоской волны. Следовательно, интеграл его должен иметь вид

$$r\Phi = F_1(r - ct) + F_2(r + ct). \tag{32}$$

Допустим, что из двух возможных направлений движения существует только одно — прочь от начала координат. Тогда на основании (32) и (24) получим

$$cs = -\frac{1}{r} F_1'(r - ct). \tag{33}$$

Это значит, что сгущение перемещается прочь от начала координат со скоростью c, причем оно непрерывно убывает обратно пропорционально первой степени расстояния r от начала координат.

Аналогичным приемом можно найти закон изменения скоростей радиальных колебаний частиц среды. Так как радиальная скорость равняется частной производной от Φ по r (со знаком минус), то на основании (32) для нашего случая имеем (движение прочь от начала координат):

$$-\frac{\partial \Phi}{\partial r} = -\frac{1}{r} F_1'(r - ct) + \frac{1}{r^2} F_1(r - ct). \tag{34}$$

Как видим, при малых значениях r закон изменения скоростей отличается от закона изменения радиальных смещений (сгущений). Но по мере возрастания расстояния r второй член в (34) быстро отходит на задний план, и скорость радиальных колебаний начинает уменьшаться обратно пропорционально первой степени расстояния r. Что касается абсолютных величин радиальных скоростей, то они весьма малы, как это легко показать.

Дифференцирование (32) по r дает (в случае одних лишь расходящихся волн)

$$\frac{\partial (r\Phi)}{\partial r} = F'(r - ct) \tag{35}$$

если принять во внимание уравнение (33). Но в таком случае

$$\frac{1}{r} \frac{\partial (r\Phi)}{\partial r} = -cs. \tag{36}$$

А это приводит к тем же заключениям, как и (12), полученным выше для случая плоских волн.

§. 2. Энергия акустических волн. Акустическое сопротивление среды

Пусть в процессе колебания плотности среды единица массы расширилась от объема v_0 до объема v, причем давление с p_0 упало до p. Независимо от того, протекало ли это явление адиабатически или изотермически, мы

можем на основании схематического рис. 478 заключить, что работа, совершенная при этом, выражается площадью полосы, заштрихованной на рисунке. А так как форма полоски приблизительно трапецеидальная, то работа должна выражаться примерно следующим образом:

$$\frac{1}{2}(p + p_0)(v - v_0) = p(v - v_0) + \frac{1}{2}(p_0 - p)(v - v_0). \tag{37}$$

При интегрировании по всем элементам объема (вдоль оси X), опирающимся на единицу площади, первый член правой части (37) обратится в нуль, если, разумеется, общий объем не меняется. Что касается второго слагаемого, то каждая из разностей, входящих в скобки, может быть выражена через основные элементы, встречавшиеся выше. Именно

$$p_0 - p = -\varkappa s, \qquad v - v_0 = sv. \tag{38}$$

Приняв это во внимание, нетрудно видеть, что энергия, возникающая при колебаниях плотности внутри столба длиной L и с площадью основания, равной единице, должна выражаться так:

$$W = \frac{1}{2}\varkappa \int_0^L s^2 dx. \tag{39}$$

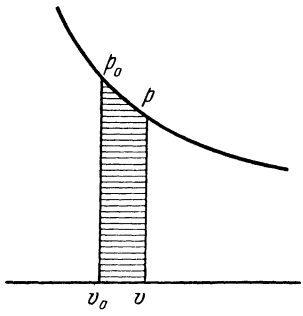


Рис. 478. Диаграмма сжатия

Если колебания плотности происходят *адиабатически*, то энергию W следует рассматривать как *потенциальную*, в строгом смысле этого слова. Если же процесс *изотермический*, то W соответствует *свободной энергии*, рассматриваемой в термодинамике. В дальнейшем, при исследовании скорости распространения акустических волн, будет указано, к какому из двух упомянутых типов приближаются акустические процессы в водной и в воздушной средах.

Совершенно независимо от этих типов *кинетическая* энергия акустических волн (по-прежнему отнесенная к единице поверхности фронта волны) выражается так, как выражается кинетическая энергия всякой массы, движущейся с данной скоростью. Именно для того же столба длиной L

$$V = \frac{1}{2}\delta_0 \int_0^L u^2 dx. \tag{40}$$

Вспомним теперь соотношения (12) и (9). На основании их выражение (39) легко преобразовать следующим образом:

$$W = \frac{1}{2}\frac{\varkappa}{c^2}\int_0^L u^2 dx = \frac{1}{2}\delta_0 \int_0^L u^2 dx. \tag{41}$$

Но тогда на основании (40)

$$W = V. \tag{42}$$

Итак, кинетическая энергия волны равна потенциальной (или свободной) ее энергии.

Для акустики моря особенно важны случаи тех колебаний среды, которые происходят по простому гармоническому закону. Поэтому остановимся на них подробнее. Допустим, что смещения ξ частицы от ее начального положения (вдоль оси X) меняются по закону

$$\xi = a\cos(kx - \omega t + \varphi), \tag{43}$$

где сокращенно обозначено

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}, \qquad \omega = \frac{2\pi}{T}.$$

Тогда, применив общие уравнения (39), (40) и (42) к данному простому случаю и выполнив интегрирование вдоль столба с длиной, равной длине волны λ, найдем

$$V = W = \frac{1}{4}\delta_0 a^2\omega^2\lambda, \qquad V + W = \frac{1}{2}\delta_0 a^2\omega^2\lambda. \tag{44}$$

Любопытно, что так выражалась бы и кинетическая энергия той же массы, если бы последняя двигалась поступательно с максимальной скоростью u, наблюдаемой при ее колебаниях.

Зная полную энергию $(V + W)$, заключенную внутри столба с длиной λ и площадью основания, равной единице, легко найти и *плотность* w энергии (полную энергию, приходящуюся на единицу объема среды). Именно

$$w = \frac{1}{2}\delta_0 a^2\omega^2. \tag{45}$$

В свою очередь, получив выражение для плотности энергии, остается только умножить его на скорость распространения волн c — и в результате определится *поток энергии* акустических волн

$$F = cw = \frac{1}{2}\delta_0 a^2 c\omega^2. \tag{46}$$

Столько эргов в секунду проносится акустическими волнами сквозь каждый квадратный сантиметр площади фронта волны.

Для разрешения некоторых задач физики моря оказывается более удобным выразить F не через амплитуду колебаний частиц среды, а через амплитуду колебаний *давления*, которую мы обозначим через P. Чтобы получить искомое выражение, прежде всего подставим в уравнение (13) вторую частную производную $\partial^2\xi/dt^2$, определенную на основании (43). Тогда найдем, что

$$\delta_0 a\omega^2 \cos(kx - \omega t + \varphi) = \frac{\partial p}{\partial x}. \tag{47}$$

Или, разделяя переменные и интегрируя,

$$p = -\delta_0 \frac{\omega^2}{k} a \sin(kx - \omega t + \varphi) + \text{const}. \tag{48}$$

Но здесь, согласно нашему обозначению,

$$P = \delta_0 \frac{\omega^2}{k} a, \quad a = \frac{P}{\delta_0}\frac{k}{\omega^2}. \tag{49}$$

Подставим теперь выражение a в уравнение (46)

$$F = \frac{1}{2}\delta_0 \frac{P^2}{\delta_0^2}\frac{k^2}{\omega^4} c\omega^2 = \frac{1}{2}\frac{P^2}{\delta_0}\left(\frac{k}{\omega}\right)^2 c. \tag{50}$$

Окончательное соотношение легко получить, вспомнив значения символов k и ω, введенных для сокращения в уравнение (43). Оно оказывается весьма простым и компактным

$$F = \frac{1}{2}\frac{P^2}{\delta_0 c}. \tag{51}$$

Часто вместо амплитуды избыточного давления P пользуются так называемым *эффективным* значением P_e избыточного давления, представляющим

собой *среднее квадратичное* за целый период колебаний. Так как, очевидно,

$$P = P_e \sqrt{2}, \tag{52}$$

то

$$F = \frac{P_e^2}{\delta_0 c}. \tag{53}$$

Поток энергии может быть еще проще выражен через эффективное давление P_e и эффективную величину скоростей колебания частиц u_e. Именно, как легко видеть,

$$F = P_e u_e. \tag{54}$$

Чрезвычайно любопытный результат получается при сопоставлении формул (53) и (54). Именно, приравнивая между собой правые их части, легко обнаружить, что

$$u_e = \frac{P_e}{R},$$

аналогично

$$u = \frac{P}{R}, \tag{55}$$

где

$$R = \delta_0 c. \tag{55а}$$

Если мы сопоставим только что найденные соотношения с известным выражением *закона Ома* для электрического тока, то придем к выводу, что скорость частиц u здесь играет роль *силы тока*, давление P — роль *электродвижущей силы*, а произведение плотности среды δ_0 на скорость акустических волн в ней c — роль *омического сопротивления*. Эту величину ($R = \delta_0 c$) принято называть *удельным акустическим сопротивлением среды*.

Внешняя аналогия между формулами акустики и формулами для электрического тока простирается и дальше. Так, акустическое сопротивление, о котором сейчас говорилось, следует считать *активным* сопротивлением по аналогии с омическим (реактанцем); наряду с ним может существовать и *реактивное* сопротивление, формально ведущее себя так, как ведет себя кажущееся сопротивление индуктивных катушек (индуктанц) и конденсаторов (капацитанц). Совместное действие обоих видов сопротивления — активного и реактивного — приводит к некоторому суммарному эффекту какого-то кажущегося сопротивления, носящего название *импеданц*. В следующем параграфе нам придется сразу же встретиться с этой величиной.

§ 3. Акустическое излучение пульсирующего шара

В § 1 были рассмотрены некоторые свойства сферических волн, имеющие большое значение в акустике моря. Попытаемся теперь проследить, как зарождаются подобные волны вокруг пульсирующей сферы.

В отличие от примеров, встречавшихся нам до сих пор, здесь придется столкнуться с колебаниями некоторых элементов, сдвинутыми по фазе одно относительно другого. А в таких случаях анализ весьма сильно упрощается при введении *комплексных функций*, давно вошедших в обиход электротехнических вычислений и в настоящее время перекочевавших в акустику. С основами этого символического метода нам пришлось уже иметь дело (см. гл. VI) при исследовании весьма сильного рассеяния света в морской воде; для того чтобы показать, что некоторый вектор **A** повернут на угол φ относительно начальной оси, мы там умножали его модуль A на функцию

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i \sin\varphi. \tag{56}$$

С другой стороны, в гл. IV, исследуя температурные волны в ледяном покрове моря, мы применяли метод вращающихся векторов для характеристики периодических процессов, сдвинутых по фазе. Там указывалось уже, что всякую периодически колеблющуюся величину можно в условном масштабе представить в виде проекции некоторого вектора, вращающегося вокруг полюса с соответствующим периодом; для этого надо только взять длину этого вектора (в том же масштабе) равной амплитуде изучаемых колебаний. Всякое иное колебание с тем же периодом, отстающее по фазе от первого, изобразится проекцией другого вращающегося вектора, составляющего с первым совершенно определенный постоянный угол (угол сдвига).

Вооружившись этим символическим аппаратом, можно положить, что скорость колебательного движения частиц на самой поверхности пульсирующей сферы радиуса r_0 выражается функцией

$$u = u_0 e^{i\omega t}. \tag{57}$$

Но ведь радиальная скорость частиц должна равняться всегда частной производной от потенциала скоростей Φ по радиусу, взятой с обратным знаком. В таком случае сам потенциал скоростей, как легко показать, должен выражаться функцией вида

$$\Phi = \frac{A}{r} e^{i[\omega t - k(r - r_0)]} \tag{58}$$

при условии, что излучаются лишь расходящиеся волны.

В пригодности формы интеграла (58) можно убедиться, наложив два граничных условия: одно — формулированное равенством (57) для самой поверхности сферы и другое — заключающееся в том, что для бесконечно удаленных точек потенциал скоростей оказывается равным нулю.

Вспомнив связь между скоростью колебательного движения частиц и производной от Φ, можем написать

$$u = \left[-\frac{\partial \Phi}{\partial r} \right]_{r = r_0} = A \frac{(1 + ikr_0)}{r_0^2} e^{i\omega t}. \tag{59}$$

Так как левые части равенств (57) и (59) одинаковы, то правые части тоже должны быть равны между собой. Но в таком случае константу интегрирования A можно определить из соотношения

$$A = \frac{r_0^2}{1 + ikr_0} u_0 = \frac{r_0^2 (1 - ikr_0)}{1 + k^2 r_0^2} u_0. \tag{60}$$

Подставив ее выражение в формулу для потенциала скоростей (58), найдем

$$\Phi = \frac{r_0^2 (1 - ikr_0)}{r (1 + k^2 r_0^2)} u_0 e^{i[\omega t - k(r - r_0)]}. \tag{61}$$

С другой стороны, на основании общих соотношений (9), (17) и (24) можно определить закон колебаний *избыточного* давления Δp, зная закон колебаний потенциала скоростей:

$$[\Delta p]_{r = r_0} = \varkappa s = \delta_0 c^2 s = \left[\delta_0 \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right]_{r = r_0}, \tag{62}$$

а следовательно,

$$[\Delta p]_{r = r_0} = \frac{r_0 (kr_0 + i)}{1 + k^2 r_0^2} \delta_0 \omega u_0 e^{i\omega t}. \tag{63}$$

Попытаемся теперь связать величины Δp и u соотношением, аналогичным уравнению (55). При этом сейчас же обнаружится, что в данном случае колебания Δp и колебания u больше не будут совпадать по фазе (как совпадали

они в случае плоских волн). Следовательно, по аналогии с задачами электротехническими, здесь придется ввести понятие о *комплексном* акустическом сопротивлении, носящем название *импеданц* (о нем упоминалось в конце предыдущего параграфа). Обозначим его через Z. Тогда окажется, что

$$u = \frac{\Delta p}{Z}, \tag{64}$$

где

$$Z = \delta_0 \omega \frac{r_0 (kr_0 + i)}{(1 + k^2 r_0^2)} = \delta_0 c \frac{(k^2 r_0^2 + ikr_0)}{(1 + k^2 r_0^2)}. \tag{65}$$

В свою очередь, так же как и в случае электрических систем, Z может быть представлено в виде суммы действительной части R_a, играющей роль *активного* сопротивления, и мнимой части Y, ведущей себя как сопротивление *реактивное*:

$$Z = R_a + iY,$$

где

$$R_a = \delta_0 c \frac{k^2 r_0^2}{1 + k^2 r_0^2}, \quad Y = \delta_0 c \frac{kr_0}{1 + k^2 r_0^2}. \tag{66}$$

Оба эти выражения легко привести к чрезвычайно компактному виду, удобному для дальнейшего анализа. Ведь на основании (43) произведение kr_0 представляет собой не что иное, как характеристический параметр, применявшийся в гл. VI при исследовании эффекта Ми [см. гл. VI, формулу (31)]. Обозначая его по-старому, можем положить

$$kr_0 = \frac{2\pi r_0}{\lambda} = \alpha. \tag{67}$$

С другой стороны, на основании (55а) следует считать

$$\delta_0 c = R, \tag{68}$$

где по-прежнему R — удельное акустическое сопротивление среды для *плоских* волн. Но тогда соотношения (66) автоматически превращаются в такие:

$$R_a = R \frac{\alpha^2}{1 + \alpha^2}, \tag{69}$$

$$Y = R \frac{\alpha}{1 + \alpha^2}. \tag{70}$$

При очень малых значениях α — при размерах сферы, весьма малых по сравнению с длиной волны, можно полагать, что приблизительно

$$R_a = R\alpha^2, \tag{69а}$$

$$Y = R\alpha. \tag{70а}$$

Напротив, при весьма больших значениях α, когда длину волны можно считать бесконечно малой по сравнению с размерами сферы, величины R_a и Y стремятся к пределам

$$R_a = R, \tag{69б}$$

$$Y = \lim \left(\frac{R}{\alpha}\right) = 0. \tag{70б}$$

Как легко видеть из (70), удельное реактивное сопротивление Y достигает максимальной величины: $Y_{\text{макс}} = \frac{R}{2}$ при $\alpha = 1$. Однако наибольший сдвиг фаз между колебаниями Δp и u наблюдается не при этом значении α, а при

$\alpha=0$. Действительно, по аналогии с системами электрическими здесь тоже можно считать, что сдвиг фаз φ определяется из уравнения

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{Y}{R_a}. \tag{71}$$

Следовательно, на основании (69) — (71)

$$\varphi=\operatorname{arctg}\frac{1}{\alpha}, \tag{72}$$

т. е. при чрезвычайно малых α, когда длина волны весьма велика по сравнению с размерами сферы, сдвиг фаз практически равен прямому углу: *звуковые волны не излучаются*, а только в непосредственном соседстве со сферой происходит непрерывное превращение кинетической энергии частиц я

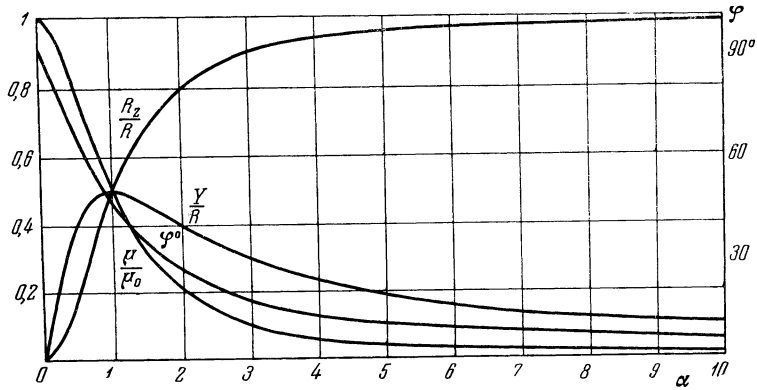


Рис. 479. Излучение пульсирующего шара

энергию сжатия и обратно (совершенно аналогично *безваттным* электрическим колебаниям в цепи, состоящей из конденсатора и индукционной катушки и не обладающей никаким омическим сопротивлением).

Напротив, при весьма больших значениях α, когда длину волны можно практически считать бесконечно малой по сравнению с размерами сферы, сдвиг фаз стремится к нулю и вся энергия колебаний излучается в пространство в виде акустических волн.

На рис. 479 для иллюстрации изображены кривые, выражающие изменение сопротивления в зависимости от α. Для того чтобы сделать диаграмму применимой ко всякой среде и иметь дело с безразмерными величинами, вместо самих величин R_a и Y взяты их отношения к R.

Как видим, при весьма малых α практически можно считать все сопротивление среды *реактивным* (ввиду малости R_a по сравнению с Y). Поэтому при малых α, принимая во внимание (64) и (70) и вспомнив прежние обозначения, можно полагать

$$\Delta p=\dot{Y}u=\delta_0 r_0\omega u. \tag{73}$$

Наличие множителя ωu здесь указывает на инерционное происхождение силы Δp: подобная сила инерции действовала бы на некоторую массу $\delta_0 r_0$, жестко связанную с колеблющейся поверхностью сферы (с каждой единицей поверхности) и поэтому совершающей вместе с нею колебания. Итак, с каждой единицей поверхности пульсирующей сферы оказывается связанной присоединенная масса

$$\mu_0=\delta_0 r_0. \tag{74}$$

На всю поверхность сферы, очевидно, приходится присоединенная масса

$$M = 4\pi r_0^3 \delta_0 = 3m. \tag{75}$$

Оказывается, что она равна утроенной массе m вещества, вытесненного самой сферой. Здесь уместно будет вспомнить, что при поступательном и колебательном движениях сферы присоединенная масса составляет всего лишь половину массы вытесненного вещества.

Исходя из уравнения (70), легко показать, что при возрастании α присоединенная масса уменьшается. Для того чтобы дать характеристику, пригодную для какой угодно среды и для какого угодно размера сферы, на диаграмме рис. 479 нанесена кривая, рисующая изменения μ/μ_0 в зависимости от прежнего аргумента α. Как и следовало ожидать, при непрерывном возрастании α присоединенная масса стремится к нулю, а потому в случае волн, длина которых весьма мала по сравнению с размерами пульсирующей сферы, присоединенная масса практически не играет никакой роли.

В заключение этого параграфа остается еще вычислить *энергию*, излучаемую пульсирующей сферой. Поток энергии, исходящей от каждой единицы ее поверхности, найдется весьма просто: он будет равен среднему за период значению произведения мгновенных значений *скорости* колебательного движения частиц на избыточное давление Δp в соответствующей точке среды [1]. Но, со своей стороны, мгновенное значение u может быть выражено на основании (56) и (59); для этого надо заменить $e^{i\omega t}$ его выражением (56) и, выполнив умножение, отбросить мнимую часть многочлена. Тогда окажется, что

$$u = \frac{A}{r^2}\cos\omega t - \frac{Ak}{r}\sin\omega t. \tag{76}$$

Подобным же образом, на основании (62), (58) и (56), легко найти

$$\Delta p = -\frac{A}{r}\,\delta_0\omega\sin\omega t. \tag{77}$$

Следовательно, из (76) и (77) вытекает, что

$$\begin{aligned} u\Delta p &= \frac{A^2}{r^2}\delta\omega\left[k\sin^2\omega t - \frac{1}{r}\sin\omega t\cos\omega t\right] = \\ &= \frac{A}{2r^2}\delta\omega k\left[1 - \cos 2\omega t - \frac{1}{kr}\sin 2\omega t\right]. \end{aligned} \tag{78}$$

Остается лишь определить *среднюю* за период величину $u\Delta p$, которая представит собой искомое выражение потока энергии

$$F = [u\Delta p]_{\text{ср}} = \frac{Ak^2}{2r^2}\delta c. \tag{79}$$

Если точка лежит не на поверхности шара, то поток энергии выразится этой же самой формулой, где r будет означать расстояние от центра шара. Как видно, поток энергии будет убывать по закону квадрата расстояния.

§ 4. Акустическое излучение колеблющейся плоской стенки

В современной морской акустической технике — и при звуковом измерении глубин, и при сигнализации — широко применяются колеблющиеся мембраны. Поэтому необходимо разобраться в механизме их акустического лучеиспускания при различных соотношениях между длиной испускаемых волн и геометрическими размерами самой мембраны.

[1] Для простоты соотношений возьмем эту точку на самой поверхности пульсирующей сферы.

Если бы исследуемые колебания совершала плоская стенка, простирающаяся на расстояния, весьма большие по сравнению с длиной волны, то акустическое сопротивление, приходящееся на единицу ее поверхности (удельное сопротивление), определилось бы весьма просто, на основании формул (69б) и (70б), ибо весь процесс можно было бы свести к предельному случаю сферы, обладающей бесконечно большим радиусом, не выходя за пределы материала, имеющегося в предыдущем параграфе.

Однако в действительности подобные простые условия осуществляются с достаточным приближением лишь в ультразвуковых излучателях на малых расстояниях от них. Во всех же иных случаях, при большой длине волны, они до некоторой степени имеют место лишь на самых малых расстояниях от излучателя — на расстояниях, весьма малых по сравнению с размерами самой мембраны.

Вот почему для общности выводов нам придется теперь выбрать новый путь и рассмотреть поведение мембраны конечных размеров, представляющей собой участок плоской стенки, очерченный по кругу. За пределами этого круга будем представлять себе неподвижную стенку, в которую мембрана вставлена, как в рамку. Несколько отклоняясь от истины, будем полагать, что вся плоскость мембраны колеблется как одно целое около некоторого положения покоя по направлениям, перпендикулярным к ней самой (так колебался бы поршень, у которого края не были бы защемлены). Вполне точно это условие выполняется в излучателе Ланжевена, о котором речь будет ниже.

Полное излучение колеблющегося круга слагается из элементарных потоков энергии, исходящих от каждого бесконечно малого участка площади. Поэтому сперва попытаемся учесть влияние такого отдельного бесконечно малого участка. Представим себе, что пульсирующая сфера, о которой была речь в предыдущем параграфе, обладает настолько малым радиусом, что для всех употребительных звуковых и даже ультразвуковых волн можно полагать величину

$$\alpha = \frac{2\pi r_0}{\lambda} = kr_0$$

ничтожно малой по сравнению с единицей. Тогда на некотором расстоянии L от такой сферы потенциал скоростей выразится несколько проще, чем в уравнении (61). Именно, пренебрегая только что упоминавшейся ничтожно малой величиной kr_0, мы получим

$$\Phi = \frac{r_0^2 u_0}{L} e^{i[\omega t - kL]}. \tag{80}$$

Так как при пульсации сферы движение элементов ее поверхности происходит в радиальном направлении, то гидродинамическая картина явления нисколько не нарушится, если мы разобщим одну половину шара от другой некоторой плоскостью, проходящей через центр сферы. Не изменится и потенциал скоростей, несмотря на то, что каждое полушарие будет теперь излучать энергию в *полубезграничное* пространство.

Но в таком случае нетрудно подсчитать элементарный потенциал скоростей, обусловленный колебаниями бесконечно малого участка dS пульсирующей сферы: для этого достаточно разделить величину, определяемую формулой (80), на поверхность полушария $2\pi r_0^2$ и умножить на величину dS

$$d\Phi = \frac{u_0 dS}{2\pi L} e^{i(\omega t - kL)}. \tag{81}$$

Как говорилось выше, радиус самой сферы может быть выбран весьма малым. В формулу (81) он совсем не входит, а потому бесконечно малую пуль-

сирующую сферу можно рассматривать просто как *точечный* источник акустических волн.

Для определения потенциала скоростей, обусловленного всей поверхностью колеблющегося поршня, придется проинтегрировать найденное выражение по всей его площади S; при этом некоторые множители выйдут за знак интегрирования, как не зависящие от координат элемента поверхности:

$$\Phi = \frac{u_0}{2\pi} e^{i\omega t} \iint_S \frac{e^{-ikL}}{L} dS. \tag{82}$$

Для определения потенциала скоростей по формуле (82) выберем координатную систему, изображенную на рис. 480. Элементы площади dS будут здесь представлять собой площади тонких колец с радиусом ρ и шириной $d\rho$. Для простоты ограничимся лишь исследованием акустического поля в

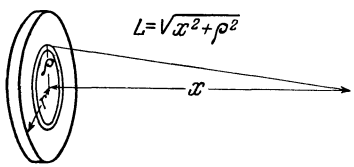


Рис. 480. Колеблющаяся плоская стенка

точках, расположенных по оси X, проходящей через центр поршня, перпендикулярно к его плоскости. Расстояние L какой-либо из этих точек до точек элементарного кольца выразится тоже просто, а именно:

$$L = \sqrt{x^2 + \rho^2}.$$

Следовательно, интеграл (82) примет вид

$$\Phi = \frac{u_0}{2\pi} e^{i\omega t} \int_0^r \frac{2\pi\rho \cdot d\rho}{\sqrt{x^2+\rho^2}} e^{-ik\sqrt{x^2+\rho^2}} = \frac{iu_0}{k} \left[e^{i[\omega t - k\sqrt{x^2+\rho^2}]} \right]_{\rho=0}^{\rho=r}. \tag{83}$$

Взяв, как всегда в аналогичных операциях, лишь вещественную составляющую полученного выражения, найдем для потенциала скоростей

$$\Phi = -\frac{u_0}{k} [\sin(\omega t - k\sqrt{x^2+r^2}) - \sin(\omega t - kx)]. \tag{84}$$

Радикал, стоящий в скобках, весьма затрудняет анализ результатов. Поэтому не будем касаться области, непосредственно прилегающей к излучателю, а отступим от него на такое расстояние (большее утроенного его радиуса), на котором квадрат радиуса диска будет составлять примерно меньше $^1/_{10}$ квадрата расстояния x. Но в таком случае, очевидно, без большой погрешности можно будет положить

$$\sqrt{x^2+r^2} = x\sqrt{1+\left(\frac{r}{x}\right)^2} \approx x + \frac{r^2}{2x}. \tag{85}$$

С другой стороны, разность тригонометрических функций, входящую в выражение потенциала скоростей, удобней заменить произведением других тригонометрических функций (по известным формулам преобразования). В результате всех этих несложных действий окажется, что

$$\Phi = \frac{2u_0}{k} \sin\frac{kr^2}{4x} \cos\left(\omega t - kx - \frac{kr^2}{4x}\right). \tag{86}$$

Вспомним теперь, что, на основании (62), избыточное давление равняется произведению плотности на частную производную от потенциала скоростей

по времени. Но в таком случае *амплитуда* давлений P выразится так:

$$P = \delta_0 \left[\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right]_{\text{макс}} = \frac{2u_0}{k}\delta_0\omega \sin\frac{kr^2}{4x} = 2u_0\delta_0 c \sin\left(\frac{\pi r^2}{2\lambda x}\right). \quad (87)$$

Для определения *потока энергии*, излучаемого колеблющейся мембраной (поршнем), остается только воспользоваться уравнением (51), которое, как мы видели в конце предыдущего параграфа, одинаково применимо к волнам любой формы. Тогда окажется, что

$$F = \frac{1}{2}\frac{P^2}{\delta_0 c} = 2\delta_0 c u_0^2 \sin^2\left(\frac{\pi}{2}\frac{r^2}{\lambda x}\right). \quad (88)$$

Это любопытное выражение очень удобно для исследования акустического поля вдоль оси X. Из него непосредственно вытекает, что на протяжении от $x = 0$ до $x = r^2/\lambda$ аргумент синуса будет много раз периодически принимать такие значения, при которых синус будет обращаться в единицу или в нуль. В соответствующих точках поток энергии окажется равным либо максимальной величине

$$F_{\text{макс}} = 2\delta_0 c u_0^2, \quad (89)$$

либо нулю. Другими словами, вдоль оси будут расположены вперемежку зоны наибольшей слышимости и зоны молчания, совершенно аналогичные светлым и темным полосам, которые возникают при интерференции световых лучей, сопровождающей дифракционные явления. Такая слоистая структура поля, очевидно, вызывается здесь интерференцией акустических волн, исходящих от различных точек площади излучателя. Чрезвычайно важно, что на только что отмеченном протяжении

$$0 < x < \frac{r^2}{\lambda}$$

энергия в «пучностях» оказывается одинаковой. Это показывает, что здесь излучение распространяется в виде пучка параллельных акустических лучей [1].

Напротив, при увеличении расстояния x сверх предела (r^2/λ) пучок этих лучей начинает расходиться. Ведь при очень больших x аргумент синуса в формуле (88) становится очень малым, а, как известно, синус весьма малого аргумента приблизительно равняется самому аргументу. Приняв это во внимание, найдем, что на больших расстояниях x от излучателя поток энергии будет

$$F = \frac{\pi^2}{2}\delta_0 c u_0^2 \frac{r^4}{\lambda^2 x^2}, \quad (90)$$

т. е. поток энергии убывает обратно пропорционально квадрату расстояния от излучателя. Как видим, для сбережения мощности излучения весьма полезно применять короткие волны и возможно большие излучатели, ибо тем самым увеличивается критическое расстояние

$$x_{\text{крит}} = \frac{r^2}{\lambda}, \quad (91)$$

на котором акустические лучи можно еще считать параллельными.

---

[1] Что касается самой величины энергии в «пучностях», то ее можно выразить еще иначе:

$$F_{\text{макс}} = 2\delta_0 c U^2 = 2\delta_0 c \frac{P}{R} U = 2PU.$$

Итак, весьма простые выкладки приводят к выводам, которые могут пригодиться в дальнейшем, при исследовании работы эхолотов. К сожалению, совсем не так просто обстоит дело с определением активного сопротивления излучения плоской стенки и присоединенной массы, появляющейся при ее колебаниях. Отсылая интересующихся к специальной литературе [1—7], приведем здесь лишь некоторые результаты теоретических работ, имеющие большое значение для акустики моря.

Прежде всего следует отметить, что активное сопротивление в случае плоского излучателя в конечном счете выражается так же, как и для пульсирующей сферы (вернее, полусферы, так как излучение идет в полубезграничную среду). Для длинных волн удельное активное сопротивление, умноженное на площадь излучателя, дает величину

$$SR_z = \frac{\delta_0 \omega^2}{2\pi c} S^2, \tag{92}$$

которую можно было бы получить и для полусферы, умножив R_a из формулы (69) на поверхность полусферы. В случае коротких волн удельное активное сопротивление для плоского излучателя оказывается равным тому же произведению плотности на скорость распространения волн, которое не раз встречалось в предыдущем изложении.

Что касается присоединенной массы для всей поверхности S плоского излучателя, то при малых частотах (длинных волнах) она выражается так:

$$M_2 = \delta_0 \frac{8}{3} \left(\frac{S}{\pi}\right)^{3/2}. \tag{93}$$

Между тем для пульсирующей *полусферы* она, на основании (75), равнялась

$$M_1 = 2\pi r^3 \delta_0 = \delta_0 \frac{S^{3/2}}{\sqrt{2\pi}}. \tag{94}$$

Следовательно, при одинаковой величине поверхности S

$$\frac{M_2}{M_1} = \frac{8\sqrt{2}}{3\pi} \simeq 1{,}2, \tag{95}$$

т. е. присоединенная масса плоского излучателя на 20% превышает присоединенную массу полусферы, обладающей той же самой поверхностью S.

В случае высокочастотных излучателей (коротких волн) выражение для присоединенной массы будет иное. Именно для плоского излучателя получится

$$M_2 = \frac{\delta_0 \lambda^2 S^{1/2}}{(2\pi)^{3/2}}. \tag{96}$$

Но, на основании (70б), легко показать, что так же выражалась бы и присоединенная масса пульсирующей полусферы при весьма малых длинах волн. Нетрудно видеть также по формуле (96), что сама по себе эта присоединенная масса, связанная со всей поверхностью излучателя, в случае коротких волн становится совсем ничтожной.

§ 5. Распространение акустических волн в поглощающей среде

В предыдущем параграфе был исследован очень интересный случай испускания акустических волн колеблющейся плоской стенкой, причем выяснилось, что на некотором протяжении плоский вибратор может давать пучок приблизительно параллельных лучей и что лишь за пределами критического расстояния пучок начинает расходиться, и поток энергии начинает убывать по закону квадрата расстояния.

Однако в природных условиях даже такой пучок параллельных лучей непрерывно ослабевает за счет того поглощения энергии акустических волн, которое неизбежно имеет место во всякой физической среде. Поглощение энергии волн происходит по двум причинам; с одной стороны, колебания частиц среды происходят всегда при наличии некоторой *вязкости*, благодаря которой часть кинетической энергии частиц превращается в тепло; с другой стороны, при периодическом сжатии слоев реальной среды процесс протекает не строго адиабатически, как предполагалось при выводе всех соотношений, рассмотренных выше, а с передачей некоторого количества тепла в соседние области среды благодаря наличию *теплопроводности*.

В свое время влияние вязкости на распространение акустических волн было изучено исходя из принципов кинетической теории вещества. Старые авторы оперировали с понятиями *физической* молекулярной вязкости и физической же молекулярной теплопроводности. Но выше (см. гл. I и IV) уже упоминалось, что современная гидродинамика приписывает этим молекулярным процессам весьма незначительную роль,— во всяком случае, когда приходится иметь дело с масштабами, присущими морю и атмосфере; вместо физического коэффициента вязкости в современный анализ вторгается коэффициент турбулентной вязкости (коэффициент турбулентного трения), обусловленной вихреобразованием в воде и воздухе; вместо физической теплопроводности на сцену выступает *турбулентная* теплопроводность.

К сожалению, до настоящего времени далеко не всегда еще удается разграничивать влияние упомянутых молекулярных и статистических процессов. Совершенно несомненными могут считаться лишь два положения: во-первых, что ослабление акустических волн, наблюдаемое в природных водах и в атмосфере, оказывается всегда более значительным, чем то, которое вытекает из чисто молекулярных представлений; во-вторых, что независимо от наличия чисто молекулярных или чисто статистических (молярных) процессов рабочая *схема анализа* остается одна и та же и притом *общая* как для анализа ослабления волн за счет вязкости, так и для анализа их ослабления за счет теплопроводности среды.

Последнее обстоятельство обусловлено тем, что коэффициент вязкости и коэффициент теплопроводности пропорциональны один другому (независимо от того, будут ли это оба виртуальных турбулентных или оба физических коэффициента).

Вот почему эффект теплопроводности легко может быть формально учтен путем введения некоторого увеличенного коэффициента вязкости.

Допустим, что такой «суммарный» коэффициент вязкости равен μ, и не будем входить в рассмотрение, является ли он коэффициентом физическим или коэффициентом турбулентной вязкости. Как упоминалось выше, лишь при адиабатических процессах в среде можно говорить о потенциальной энергии сжатой среды в строгом смысле этого слова хотя бы при исследовании формулы (39). Здесь уместно будет еще добавить, что лишь при отсутствии вязкости работа избыточного давления затрачивается всецело на сжатие среды. Следовательно, при наличии вязкости и теплопроводности, учитываемых коэффициентом μ, вместо уравнения (17) для избыточного давления $(p - p_0)$ придется написать какое-то новое уравнение, дополненное каким-то новым членом.

На основании работ различных авторов это дополненное уравнение записывается так:

$$p = p_0 + \varkappa s + \frac{4}{3}\mu\frac{\partial s}{\partial t}, \tag{97}$$

где все обозначения сохраняют прежний смысл. Но в таком случае должно измениться и уравнение (18), вместо которого теперь надо будет написать

$$\delta_0\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} = -\varkappa\frac{\partial s}{\partial x} - \frac{4}{3}\mu\frac{\partial^2 s}{\partial t\,\partial x} = \varkappa\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} + \frac{4}{3}\mu\frac{\partial^3\xi}{\partial x^2\,\partial t}. \tag{98}$$

Для приведения этого уравнения к каноническому виду по-прежнему следует разделить обе части на δ_0, после чего можно будет, как и раньше, обозначить сокращенно $\frac{\varkappa}{\delta_0} = c^2$. Что касается частного от деления μ на δ_0, то в гидродинамике его называют *кинематической вязкостью*. Обозначим его для краткости одной буквой

$$\frac{\mu}{\delta_0} = \nu.$$

Тогда вместо уравнения (98) получим

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{4}{3} \nu \frac{\partial^3 \xi}{\partial x^2 \partial t}. \tag{99}$$

Интеграл этого уравнения будем искать в форме

$$\xi = ae^{i\omega t + mx}. \tag{100}$$

Исходя из такого символического выражения, легко получить все три частные производные, входящие в основное уравнение (99). После подстановки их выражений и после сокращения на общий множитель получается характеристическое уравнение

$$\omega^2 + c^2 m^2 + \frac{4}{3} i\nu m^2 \omega = 0, \tag{101}$$

из которого остается лишь определить m^2:

$$m^2 = -\frac{\omega^2}{c^2 + \frac{4}{3} i\nu\omega},$$

а затем и m, перед выражением которого придется поставить знак минус, поскольку предполагается, что волны бегут в положительном направлении оси X:

$$m = -\frac{i\omega}{c}\left(1 - \frac{2}{3}\frac{i\nu\omega}{c^2}\right) = -\frac{i\omega}{c} - \frac{2}{3}\frac{\nu\omega^2}{c^3}.$$

После подстановки этого выражения в (100) следует отбросить мнимую часть комплекса, тогда окажется, что

$$\xi = ae^{-\beta x} \cos \omega \left(t - \frac{x}{c}\right), \tag{102}$$

где

$$\beta = \frac{2\nu\omega^2}{3c^3} = \frac{8\pi^2\nu}{3c\lambda^2}.$$

Как видим, в поглощающей среде волна распространяется с прежней скоростью c (строго говоря, в первом приближении, ибо в среде, поглощающей весьма сильно, скорость оказывается меньшей), причем амплитуда продольных колебаний непременно уменьшается по экспоненциальному закону.

Но ведь, на основании (46), поток энергии акустических волн пропорционален *квадрату* амплитуды; следовательно, если некоторый излучатель посылает начальный поток F_0 плоских волн, то на расстоянии x от излучателя поток энергии будет

$$F = F_0 e^{-\frac{16\pi^2\nu}{3c\lambda^2} x}. \tag{103}$$

Физический смысл этого важного соотношения таков же, как и смысл соотношения (6) в оптике моря (стр. 684). Коэффициент поглощения, который мы там обозначали через $f(\lambda)$, здесь выражается не только графи-

чески, но и аналитически

$$f(\lambda) = \frac{16\pi^2\nu}{3c\lambda^2}, \tag{104}$$

где

$$\nu = \frac{\mu}{\delta_0}.$$

Как видим, коэффициент поглощения обратно пропорционален квадрату длины акустической волны. Здесь невольно вспоминается эффект рассеяния света крупными частицами мутной среды: как вытекает из диаграммы гл. VI, в некотором интервале для параметра α коэффициент рассеяния света оказывается тоже обратно пропорциональным квадрату длины волны (световой); однако не следует забывать, что подобное сходство — чисто формальное, ибо рассеяние света приводит лишь к изменению направления вектора Умова, не уменьшая полной энергии светового поля, между тем как только что рассмотренный эффект поглощения акустических волн представляет собой переход энергии волн в энергию *тепловую*, а потому действительно мы в праве отождествлять выражение (104) с $f(\lambda)$.

Исследование акустических сигналов в морской воде показывает, что на самом деле поток энергии уменьшается *значительно сильнее*, чем следовало бы на основании (103), даже при подстановке в него «обобщенного» значения ν, учитывающего теплопроводность воды.

Новые работы, произведенные в последние годы, обнаружили, что некоторое дополнительное молекулярное поглощение звука создают *соли, растворенные в воде*. В частности, оказалось, что интереснее всего ведут себя соли магния: по измерениям Смита, Барретта и Бейера [8], даже существующая небольшая концентрация $MgSO_4$ в океанской воде способна приблизительно в 1,5 раза увеличить молекулярное поглощение ультразвука по сравнению с дистиллированной водой. В области звуковых частот измерения были проделаны А. А. Аревшатяном. При этом оказалось, что хлористый натрий дает эффект, который практически не уступает действию солей магния: хотя относительная величина поглощения звука, рассчитанная на доли моля раствора, здесь меньше на 30—40%, но зато концентрация хлористого натрия в океанской воде в 16 раз превышает концентрацию сернокислого магния. В общей сложности соли, растворенные в океанской воде, должны увеличивать молекулярное поглощение энергии звука в 3—4 раза по сравнению с дистиллированной водой. Теория явления пока отсутствует.

Однако и этот эффект недостаточен для объяснения полного значения коэффициента ослабления звука, наблюдаемого в океане.

Следовательно, ослабление звука связано с иными, более активными явлениями, на которых необходимо остановиться.

§ 6. Рассеяние акустических волн воздушными пузырьками и планктоном. Явление реверберации в море

В предыдущем параграфе было отмечено, что ослабление потока энергии акустических волн, происходящее в природных условиях — в океане и во внутренних морях,— значительно превышает эффект молекулярной внутренней вязкости и отклонения от адиабатических условий. В связи с этим большой интерес представляет исследование иных причин ослабления энергии акустических волн, исходящих от излучателя. В первую очередь необходимо сказать о рассеянии акустических волн воздушными пузырьками, взвешенными в воде, а также планктоном, содержание которого иногда весьма значительно.

И следователи впервые обратили внимание на это явление, занимаясь изучением причин своеобразного «послезвучания» при посылке акустических сигналов в море [9]. Такое послезвучание сопровождает всякий сигнал и происходит на той же частоте, как и сам сигнал (или на тех же частотах, если сигнал нечистый). В акустике оно носит общее название реверберации независимо от того, чем оно порождено: рассеянием в среде или влиянием границ среды.

Желая объяснить происхождение реверберации в море, можно было бы предположить, что она вызвана беспорядочным отражением акустических волн от шероховатого дна и от взволнованной поверхности моря. Однако при наличии этих двух причин реверберация должна была бы наступать поразному в зависимости от расстояния источника звука или ультразвука от дна и от поверхности: чем больше становилось бы это расстояние, тем больше запаздывало бы начало реверберации после сигнала, вызвавшего ее появление; требовался бы все больший и больший промежуток времени для того, чтобы посланные акустические волны отразились от дна или от поверхности морских волн и пришли к выслушивающему прибору.

В действительности никакого запаздывания реверберации не наблюдается: она начинается немедленно после сигнала. Отсюда следует, что реверберацию вызывает отражение акустических волн от каких-то неоднородностей в самой воде. Доказано, что подобное отражение, в сущности, является рассеянием акустических волн вокруг мельчайших частиц, взвешенных в морской воде, а именно вокруг воздушных пузырьков и мелких планктонных организмов. В этом отношении морскую воду надо рассматривать как мутную среду для акустических волн, т. е. совершенно аналогично тому, как она рассматривается в гидрооптике применительно к световым волнам.

Действительно, пусть e будет упругость газового пузырька, взвешенного в воде, а m — присоединенная масса воды, колеблющаяся вместе с ним. По сравнению с m масса самого газа в пузырьке ничтожно мала, а потому ею можно пренебречь при расчете собственной частоты упругих колебаний. Эту собственную частоту ν_0 пузырька можно определить по формуле

$$\nu_0 \approx \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{e}{m}}. \tag{105}$$

Если бы пузырек обладал кубической формой с размерами ребра кубика, равными b, то упругость e можно было бы связать с b, со скоростью звука c_2 в газе и плотностью газа δ_2

$$e = c_2^2\delta_2 b. \tag{106}$$

С другой стороны, присоединенная масса m выражается через объем газового пузырька v и плотность воды δ

$$m = 3\delta v = 3\delta b^3. \tag{107}$$

Из формул (105) — (107) следует, что

$$\nu_0 \approx \frac{c_2}{2\pi b}\sqrt{\frac{\delta_2}{3\delta}}. \tag{108}$$

Для воздушного пузырька с линейными размерами порядка 10^{-2} *см*, находящегося недалеко от поверхности моря, формула (108) дает

$$\nu_0 \approx \frac{3{,}3\cdot 10^4}{6{,}28\cdot 10^{-2}}\sqrt{\frac{10^{-3}}{3}} \approx 10^4\ гц.$$

В действительности пузырьки обладают шаровидной формой и упругость их по мере опускания на глубины возрастает благодаря повышению внеш-

него давления. Однако эти обстоятельства не изменяют порядок величины v_0, вычисленной по (108). Частота порядка 10^4 *гц* широко применяется в современной гидроакустике, использующей ультразвук. Следовательно, есть основания полагать, что газовые пузырьки диаметром около 10^{-2} *см* могут попадать в резонанс с ультразвуковыми волнами и потому должны рассеивать энергию этих волн. Совершенно аналогично более крупные частицы, также часто встречающиеся в морской воде (например, планктонные организмы), должны рассеивать волны меньшей частоты.

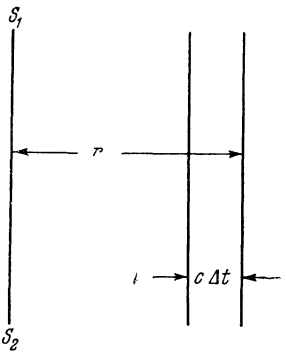


Рис. 481. Схема посылки сигнала

Многочисленные измерения ослабления акустических волн в морской воде подтвердили эти выводы и, в частности, обнаружили, что ослабление акустических сигналов значительно меняется в продолжение суток в прямой связи с суточными миграциями планктона; оно значительно меняется и от одного сезона к другому также в прямой связи с плотностью планктонного населения в соответствующих слоях морской воды.

В простейшем случае распространения плоских акустических волн ослабление их должно описываться формулой

$$J_x = J_0 e^{-\alpha x}. \tag{109}$$

Здесь J_x — энергия акустических волн на расстоянии x от места, где энергия их была J_0; α — эффективный коэффициент уменьшения энергии волн; он зависит от статистического распределения пузырьков различных размеров.

Закон изменения реверберации во времени после посылки сигнала можно вывести проще всего для случая плоских волн [9].

Пусть в плоскости S_1S_2 (рис. 481) помещен отправитель (он же и приемник) сигналов. За время t после начала посылки волны проходят расстояние r, отмеченное на схеме. Если продолжительность самого сигнала равна Δt, то волны от конца сигнала пройдут расстояние, меньшее, чем r, на отрезок $c\Delta t$, также нанесенный на схему.

Полная энергия реверберации, возвратившаяся к плоскости S_1S_2, должна слагаться из элементарных составляющих — из элементарных количеств энергии, отраженных от различных слоев, в которых содержатся воздушные пузырьки. Все эти элементарные составляющие обязаны возвращаться к плоскости S_1S_2 одновременно.

Если этот слой находится на расстоянии r, то волны начала сигнала, отраженные от него, придут к плоскости S_1S_2 через промежуток времени $2r/c$ после начала сигнала. Одновременно к плоскости S_1S_2 придут волны конца посылки, которые отразились от более близкой плоскости, находящейся на расстоянии x от S_1S_2. Совершенно очевидно, что между x и r должно существовать соотношение

$$\frac{2r}{c} = \frac{2x}{c} + \Delta t, \tag{110}$$

или

$$r - x = \frac{c\Delta t}{2}. \tag{111}$$

Аналогично выясняется, что волны середины посылки, приходящие одновременно с рассмотренными, должны отражаться от плоскости, отстоящей на расстояние $r - \frac{c\Delta t}{4}$ от излучателя-приемника S_1S_2.

Полная энергия реверберации, приходящая в какой-то момент t после начала посылки, определяется как сумма элементарных количеств энергии $\Delta I_{\text{рев}}$, которые могут быть выражены формулой

$$\Delta I_{\text{рев}} = nS\beta I_r \Delta r. \tag{112}$$

Здесь n — количество пузырьков со средним значением S поперечного сечения; β — своего рода «коэффициент отражения», который равен отношению энергии волн, рассеянных пузырьками, к энергии падающих волн; Δr — толщина элементарного слоя.

Суммирование таких элементарных количеств энергии

$$I_{\text{рев}} = \frac{1}{2} \sum_{x=r-\frac{c\Delta t}{2}}^{x=r} \Delta I_x e^{-\alpha x} = \frac{1}{2} nS\beta \sum_{x=r-\frac{c\Delta t}{2}}^{x=r} I_0 e^{-\alpha x} \Delta r \tag{113}$$

в пределе заменяется интегрированием

$$I_{\text{рев}} = \frac{1}{2} I_0 nS\beta \int_{x=r-\frac{c\Delta t}{2}}^{x=r} e^{-2\alpha x}\, dx. \tag{114}$$

В результате интегрирования оказывается

$$I_{\text{рев}} = I_0 \frac{ns\beta}{4\alpha} e^{-2\alpha\left(r-\frac{c\Delta t}{2}\right)} (1 - e^{-\alpha c\Delta t}). \tag{115}$$

С другой стороны,

$$\frac{2r}{c} - \Delta t = t_1,$$

где t_1 выражает время, протекшее с момента окончания посылки сигнала до момента, когда исследуется реверберация. Приняв это во внимание, можно переписать уравнение (115) в новой форме

$$I_{\text{рев}} = I_{0p} e^{-\alpha ct}, \tag{116}$$

где в свою очередь

$$I_{0p} = I_0 \frac{ns\beta}{4\alpha} (1 - e^{-\alpha c\Delta t}). \tag{117}$$

Как видим, при плоской форме акустических волн реверберация затухает по экспоненциальному закону. В каждый момент времени она пропорциональна начальной величине I_{0p}, отмеченной на схеме рис. 482 буквой I_0.

Что касается этой начальной величины, то она зависит от длительности Δt посылки. При очень коротких сигналах величину $e^{-\alpha c\Delta t}$, входящую в выражение (117), можно заменить выражением $(1 - \alpha c\Delta t)$. Тогда для очень коротких сигналов получим

$$I_{0p} = I_0 \frac{ns\beta c}{4} \Delta t, \tag{118}$$

т. е. при коротких сигналах сила реверберации пропорциональна длительности самой посылки сигнала. Пропорциональность нарушается не при очень коротких сигналах, а при сигналах весьма продолжительных; сила реверберации практически перестает зависеть от длительности посылки: $e^{-\alpha c\Delta t}$ стремится к нулю и тем самым приближает величину I_{0p} к ее асимптотическому значению, вытекающему из формулы (117).

На практике акустические волны могут сильно отличаться от плоских и приближаться скорее к сферической форме. Тогда нельзя будет применять к ним формулы (117) и (118), а придется анализировать реверберацию иным методом.

Не останавливаясь на выкладках, служащих для определения закона затухания реверберации в этих новых условиях, отметим лишь окончательные результаты выводов, относящихся к трем важным конкретным случаям [10].

Предположим, что сферические волны рассеиваются в воде, в которой равномерно и совершенно хаотично распределены воздушные пузырьки или другие инородные частицы, взвешенные в воде. Тогда, как изображено на рис. 483, к отправителю-приемнику O будут возвращаться акустические волны от различных шаровых слоев. На схеме внутренний радиус R_1 соответствует

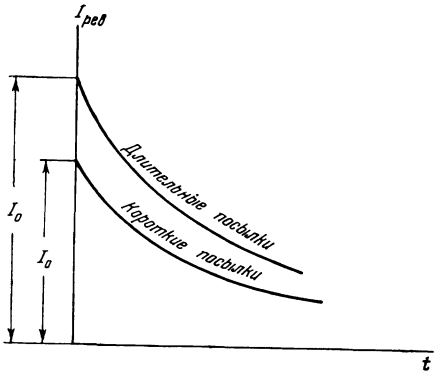


Рис. 482. Затухание реверберации (по В. С. Анастасевичу)

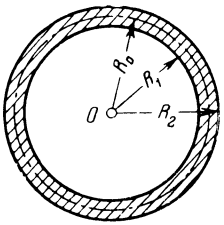


Рис. 483. Сферические волны, первый случай (по Ю. М. Сухаревскому)

волне, пришедшей в исследуемую точку от конца посылки сигнала, а внешний радиус R_2 — волне, пришедшей от начала сигнала. Радиус R_0 отвечает волне, посланной в середине сигнала. Применительно к этому случаю сила реверберации в момент t выражается так:

$$I_р = \frac{\alpha n \Delta t W}{8\pi c} t^{-2}. \qquad (119)$$

Здесь α характеризует рассеивающую способность морской воды со взвешенными в ней инородными частицами, n учитывает концентрацию рассеяния

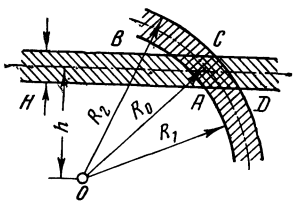


Рис. 484. Сферические волны, второй случай

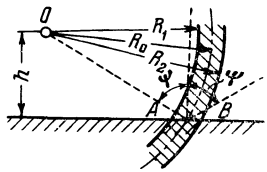


Рис. 485. Сферические волны, третий случай

в направлении на приемник, Δt обозначает длительность посылки сигнала, W — мощность излучения, c — скорость звука в воде. Как видим, в данном случае сила реверберации убывает обратно пропорционально квадрату времени.

На рис. 484 изображена схема второго случая. Здесь рассеяние происходит в некотором слое толщиной H, расположенном выше излучателя-приемника на расстоянии h. В данном случае сила реверберации убывает иначе, а именно

$$I_р = \frac{\alpha n H \Delta t W}{2\pi c^2} t^{-3}, \qquad (120)$$

т. е. убывание идет обратно пропорционально кубу времени.

Схема третьего случая изображена на рис. 485. Здесь рассеяние возникает на дне моря. Излучатель-приемник находится на расстоянии h от дна. Вверх далеко простирается вода. Применительно к этому случаю получена формула

$$I_{\text{р}} = \frac{\Delta t n h W}{\pi c^3} t^{-4}. \qquad (121)$$

Здесь сила реверберации убывает обратно пропорционально четвертой степени времени.

Еще более резкое убывание силы реверберации может происходить тогда, когда акустические волны вполне диффузно рассеиваются очень грубыми неровностями дна. В этом предельном случае

$$I_{\text{р}} = \frac{2\Delta t h^2 W}{\pi c^4} t^{-5}, \qquad (122)$$

т. е. сила реверберации убывает обратно пропорционально пятой степени времени.

Теоретические формулы (119) — (122) сопоставлялись с результатами опытов, проделанных как в глубоком, так и в мелководном море [11]. Сводная диаграммма, полученная на основании таких опытов, воспроизведена на рис. 486. По оси ординат отложены отрезки, пропорциональные логарифму времени t. Сами значения t подписаны под осью абсцисс. По оси ординат отложены отрезки, пропорциональные логарифму силы реверберации. Их выражения (в децибелах) отмечены вдоль оси ординат.

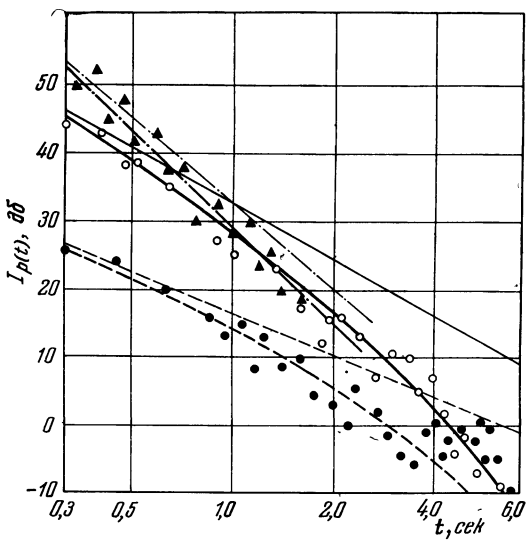


Рис. 486. Результаты измерений затухания реверберации в море

Тонкая пунктирная прямая на рис. 486 выражает закон убывания по формуле (119). Как эта формула, так и три остальные не учитывают ослабление акустических волн за счет рассеяния их на пути от излучателя и обратно. Поэтому опытные точки, изображенные черными кружочками, отходят от теоретической прямой и ложатся около жирной пунктирной кривой, учитывающей затухание волн в 1,5 *дб/км*.

Тонкая сплошная линия на рис. 486 относится к очень распространенным условиям, соответствующим рис. 484 (рассеивающий слой — над излучателем). По прежней причине экспериментальные точки (светлые кружки) отходят от теоретической кривой, выраженной уравнением (120), и ложатся близ жирной сплошной кривой, которая учитывает затухание волн в среде в 2 *дб/км*, или, что то же, в 3 *дб/сек*.

На рис. 486 нанесена еще тонкая штрих-пунктирная прямая. Она вычислена по формуле (122). По-прежнему экспериментальные точки здесь отходят от теоретической линии. Маленькие треугольники, полученные из опыта, тяготеют к жирной штрих-пунктирной кривой. Эта кривая учитывает затухание волн в среде в 1,5 *дб/км* [11].

§ 7. О скорости звука

В первых теоретических работах, посвященных скорости распространения звуковых волн, предполагалось, что сжатия и разрежения среды (воздуха) происходят изотермически. При таком допущении к газу можно было применить закон Бойля, согласно которому

$$\frac{p}{p_0} = \frac{\delta}{\delta_0}. \tag{123}$$

На основании формулы (123) малое изменение давления Δp связывалось с изменением плотности $\Delta\delta$ посредством соотношения

$$\Delta p = p_0 \frac{\Delta\delta}{\delta_0}. \tag{124}$$

В свою очередь формула (124) по своему строению тождественна с формулой (3). Следовательно, в рассматриваемом случае

$$\varkappa = p_0. \tag{125}$$

На основании формул (9) и (125) теперь запишем

$$c = \sqrt{\frac{p_0}{\delta_0}}. \tag{126}$$

Это — известная старая формула для скорости звука в газах. Она может быть представлена в иной (очень интересной) форме. Именно, обозначим через H высоту эквивалентной атмосферы, т. е. ту высоту, на которую простиралась бы атмосфера, если бы весь воздух, окружающий Землю, обладал плотностью, существующей на уровне моря (с этим понятием мы встречались в гл. IV). Тогда можно будет записать

$$p_0 = g\delta_0 H \tag{127}$$

и на основании формулы (126)

$$c = \sqrt{gH}. \tag{128}$$

Как видим, это выражение скорости распространения звука в атмосфере совершенно подобно выражению скорости приливной волны, распространяющейся в море с глубиной H.

Подставим в формулу (126) числовые значения p_0 и δ_0 при температуре 0°

$$p_0 = 10^6 \text{ дин/см}^2,\ \delta_0 = 0{,}00129 \text{ г/см}^3.$$

Тогда по этой формуле окажется

$$c = 2{,}8 \cdot 10^4 \text{ см/сек} = 280 \text{ м/сек}.$$

Но непосредственные измерения скорости звука в воздухе дают значительно бо́льшие значения для c. Причина расхождения заключается в том, что в действительности процессы изменения давления в звуковой волне, распространяющейся в газе, идут не изотермически, а приблизительно адиабатически, ибо при не слишком малых частотах колебаний тепло не успевает отводиться в стороны, или точнее, успевает отводиться лишь отчасти. О последнем уточнении приходилось уже говорить выше в связи с исследованием поглощения акустических волн (см § 5).

Пренебрегая им и считая процесс строго адиабатическим, приходится вместо закона Бойля руководствоваться законом Пуассона, на основании которого вместо формулы (123) следует писать

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{\delta}{\delta_0}\right)^{\gamma} \tag{129}$$

и, значит, вместо формулы (125)

$$\varkappa = \gamma p_0. \tag{130}$$

Но тогда на основании формул (9) и (130) окажется

$$c = \sqrt{\gamma \frac{p_0}{\delta_0}}. \tag{131}$$

Итак, истинная скорость звука должна отличаться от определяемой по старой формуле (128) в $\sqrt{\gamma}$ раз, причем, как известно, γ для каждого газа выражает отношение теплоемкости при постоянном давлении к теплоемкости при постоянном объеме ($\gamma = \frac{C_p}{C_v}$). На основании современных измерений $\gamma = 1{,}402$ для воздуха. Следовательно, здесь

$$\sqrt{\gamma} = 1{,}184$$

Умножим на этот поправочный коэффициент величину, полученную по старой формуле (128). Тогда найдем

$$c = 3{,}32 \cdot 10^4 \text{ см/сек} = 332 \text{ м/сек}$$

при температуре 0° и нормальном давлении в полном согласии с непосредственными измерениями.

По тому же пути пошло исследование скорости звука в воде. Еще сравнительно недавно было широко распространено мнение, будто при исследовании распространения звуковых волн в водной среде можно считать процессы сжатия и расширения изотермическими.

Были исследованы упругие свойства воды в условиях изотермического сжатия, причем в результате была получена эмпирическая формула, которая связывала коэффициент изотермической сжимаемости K_T, т. е. величину, обратную коэффициенту упругости $\varkappa_T$ (модулю сжатия), с температурой воды, соленостью и давлением, под которым находится вода.

Пусть ϑ обозначает температуру воды, σ — условную плотность ее, p — давление, под которым она находится. При этом очевидно, что соленость входит в скрытом виде в σ. На основании опытов при изотермическом сжатии воды оказывается

$$\begin{aligned} 10^8 K_T = {} & \frac{4886}{1 + 0{,}000183\, p} - (227 + 28{,}33\vartheta - 0{,}551\vartheta^2 + 0{,}004\,\vartheta^3) + \\ & + \frac{p}{100}(105{,}5 + 9{,}50\vartheta - 0{,}158\vartheta^2) - \frac{1{,}5p^2\vartheta}{10^6} - \frac{\sigma_0 - 28}{10}\left[147{,}3 - 2{,}72\,\vartheta + \right. \\ & \left. + 0{,}04\vartheta^2 - \frac{p}{1000}(32{,}4 - 0{,}87\vartheta + 0{,}02\vartheta^2)\right] + \frac{(\sigma_0 - 28)^2}{1000} \times \\ & \times \left[4{,}5 - 0{,}1\vartheta - \frac{p}{1000}(1{,}8 - 0{,}06\vartheta)\right]. \end{aligned} \tag{132}$$

Здесь коэффициент K_T отнесен к 1 *бар*, по *метеорологической* терминологии т. е. к давлению 10^6 *дин/см*^{2}. Давление p в формуле (132) выражено в этих метеорологических единицах. Следует пожалеть, что до настоящего времени не устранена двойственность терминологии в этой области: ведь *общефизическая* единица давления *бар* считается равной 1 *дин/см*^{2}.

При современном развитии эхолотирования и гидролокации приходится предъявлять все более и более строгие требования к цифрам, которые кладутся в основу вычисления глубин и расстояний: ведь каждый даже далекий десятичный знак дает себя чувствовать при умножении числовой величины скорости звука на большие величины промежутка времени от сигнала до его эха; с подобными большими промежутками времени приходится встречаться на каждом шагу в гидроакустической практике.

Вот почему при вычислении истинной скорости звука в морской воде необходимо вводить поправку, совершенно аналогичную той, о которой говорилось в связи с вычислением скорости звука в воздухе, несмотря на то что поправка здесь значительно меньше, чем в случае воздуха.

Обозначим через K_S коэффициент адиабатической сжимаемости, тогда можно будет записать на основании известных соотношений термодинамики

$$K_S = \frac{K_T}{\gamma}, \tag{133}$$

а также

$$\frac{1}{\gamma} = 1 - \frac{a^2 \varkappa_T \alpha T}{C_p}. \tag{134}$$

Здесь a — коэффициент объемного расширения, $\varkappa_T$ — изотермический коэффициент упругости, α — удельный объем, T — абсолютная температура, C_p — теплоемкость при постоянном давлении.

Вводя в формулу (9) вместо $\varkappa$ величину $1/K_S$ (или ее выражение через K_T и γ), найдем окончательную формулу для скорости звука в морской воде

$$c_w = \frac{1}{\sqrt{K_S \delta_0}} = \sqrt{\frac{\gamma}{K_T \delta_0}}. \tag{135}$$

Это соотношение отлично согласуется с результатами непосредственных точных измерений в море.

Как известно, первые измерения скорости звука в воде были произведены не в море, а на озере в 1827 г. Измерения в море начались значительно позднее.

Прежде было распространено мнение, будто скорость звука в воде зависит от силы источника звука. Поэтому были произведены измерения в двух вариантах: в воде взрывались либо небольшие заряды пироксилина (в несколько килограммов), либо большие заряды (свыше 100 *кг*). В первом случае взрыв производился с корабля (электротоком), во втором заряды сбрасывались на ходу и взрывались автоматически по достижении определенной глубины (гидростатический запал). Опыты показали, что на достаточных расстояниях от места взрыва, где кончается область ударных волн и начинается область собственно акустическая, никакого различия в скоростях звука нет между первой и второй группами опытов. Следовательно, скорость звука практически не зависит от силы источника там, где не нарушаются линейные соотношения между давлением и смещением частиц воды.

Первоначальные опыты велись по следующей схеме. На дне пролива вдоль намеченного курса истребителя были поставлены гидрофоны, присоединенные к нитям регистрирующих гальванометров. Запись отклонений всех гальванометров велась на общей подвижной бумажной ленте, причем на той же ленте фотобумаги записывались и сигналы времени: через секунду в одном ряду, через полсекунды в другом и через сотую долю секунды в третьем ряду.

Момент запала отмечался очень точно посредством особого сигнала, подаваемого тем же ключом, который замыкал цепь запальника. Предварительные измерения, произведенные по такой схеме, обнаружили недостаточную точность в определении мест взрывов. Поэтому схема была усовершенствована следующим образом. В точках H_1, H_2 и H_3 (рис. 487) на дне стояли гидрофоны, передававшие сигналы на приемную станцию. По направлению MN прокладывался курс истребителя, который должен был идти с возможно постоянной скоростью, причем взрывы вызывались в точках *1*, *2*, *3*, *4*, ..., разделенных одинаковыми промежутками. Для лучшей

ориентировки на линии MN ставился буек в точке A, лежащей на продолжении прямой H_2H_1. По записям сигналов гидрофонов очень точно определялось опоздание, с которым каждый сигнал доходил до гидрофона H_2 по сравнению с гидрофоном H_1. Совершенно очевидно, что по мере продвижения истребителя от точки *1* до точки *6* эти опоздания должны были непрерывно возрастать, а при движении корабля от точки *7* к точке *12* запоздания непрерывно уменьшались, ибо расстояние H_1H_2 больше разности расстояний от точек H_1 и H_2 до какой-либо точки *1*, *2* и т. д.

Максимальное опоздание соответствовало бы той точке, в которой прямая H_2H_1 пересекается с курсом истребителя MN. Но, разумеется, совсем не нужно, чтобы в этой точке A был произведен взрыв: ее все равно было бы затруднительно определить в море с достаточной точностью. Между тем эту точку легко

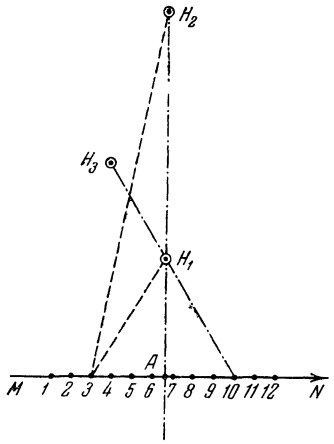


Рис. 487. Расположение гидрофонов

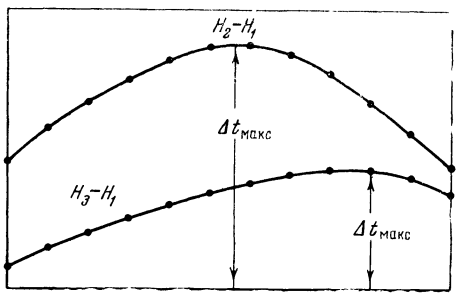


Рис. 488. Результаты опытов

определить с большой точностью, построив несложный график рис. 488.

Действительно, будем по оси абсцисс откладывать текущее время, а по оси ординат — разность времени между сигналами гидрофонов H_1 и H_2. Абсциссы каждых двух точек будут одинаково различаться между собой, ибо взрывы следуют регулярно с одинаковыми интервалами. Как видим, кривая обладает максимумом между точками *6* и *7*. Интерполируя между ними по кривой $H_2 - H_1$, легко определить величину $\Delta t_{макс}$. За такой промежуток времени звук проходит расстояние L между гидрофонами H_1 и H_2. Следовательно, скорость звука определится из соотношения

$$c_w = \frac{L}{\Delta t_{макс}}.$$

Аналогичные кривые строились для каждой пары гидрофонов, стоявших на дне. На рис. 487 видно, что для пары $H_3 - H_1$ максимальное опоздание соответствует примерно месту взрыва в точке *10*. Диаграмма для этой пары также нанесена на рис. 488. Здесь легко определить соответствующее значение $\Delta t_{макс}$, а значит, снова вычислить скорость c_w.

Вычисления, проделанные применительно к четырем парам гидрофонов, привели к среднему значению скорости звука в морской воде $c_w = 1526{,}3 \pm \pm 0{,}3$ *м/сек* при температуре воды 16,95° и солености 35,02‰.

Следует отметить, что материалы описанных опытов позволили с достаточной надежностью найти связь между скоростью звука и двумя основными элементами, характеризующими морскую воду: $\vartheta°$ и $S‰$. Оказалось, что изменение температуры на 1° приводит к изменению скорости звука на $\Delta_\vartheta c_w = 3{,}58$ *м/сек* в ту же сторону (т. е. повышению температуры соответствует увеличение скорости, а понижению — уменьшение).

Температура при различных опытах изменялась в довольно широких пределах — от 6 до 17°, а потому приведенная цифра достаточно надежна.

Изменение солености на $1^0/_{00}$ вызывало изменение скорости звука $\Delta_S c_w$ примерно на 1—1,3 *м/сек* в ту же сторону. Однако эта цифра менее надежна, чем приведенная для температур: к сожалению, при различных опытах соленость изменялась в довольно узких пределах.

Для интерполяционного и экстраполяционного вычисления скорости звука в морской воде предложена эмпирическая формула

$$c_w = 1450 + 4{,}206\vartheta - 0{,}0366\vartheta^2 + 1{,}137\,(S - 35). \qquad (136)$$

По этой формуле составлены практические пособия и таблицы. Но в настоящее время ее следует считать несколько устаревшей. Во-первых, уточнена

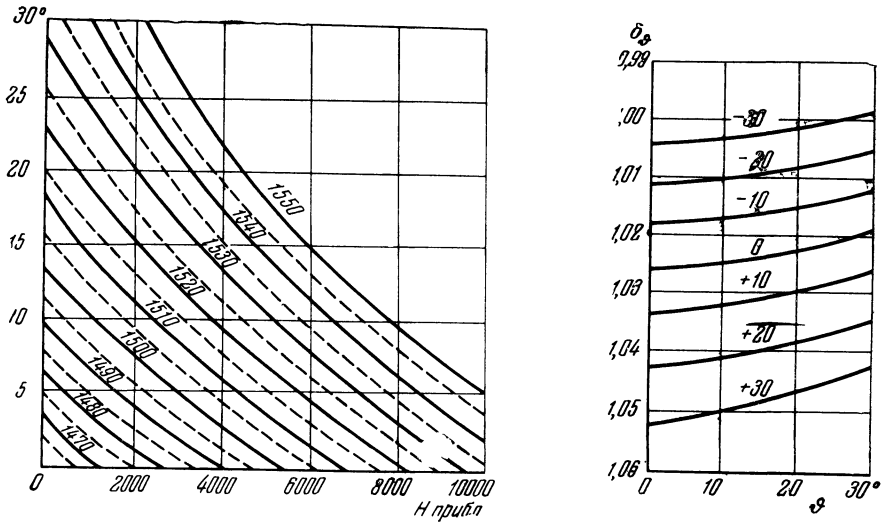


Рис. 489. Номограммы для определения скорости звука в воде

зависимость c от ϑ и S. Во-вторых, — и это очень важно,— в формулу необходимо внести поправку за глубину исследуемого слоя z. С такими поправками, внесенными Дель-Гроссо [12], формула приобрела новый вид

$$c = 1448{,}6 + 4{,}618\vartheta - 0{,}0523\vartheta^2 + 0{,}00023\vartheta^3 + 1{,}25\,(S - 35) - \\ - 0{,}011\,(S - 35)\,\vartheta + 2{,}7\cdot 10^{-8}\,(S - 35)\,\vartheta^4 - 2\cdot 10^{-7}\,(S - 35)^4 \times \\ \times (1 + 0{,}577\vartheta - 0{,}0072\vartheta^2) + 0{,}018z. \qquad (136а)$$

Для практических определений очень удобны номограммы, построенные на основании измерений в море и эмпирических формул, выведенных из результатов измерений. На рис. 489 слева воспроизведена одна из таких номограмм. Она позволяет найти уточненное значение скорости звука по средней температуре воды от поверхности до дна и по приблизительно найденному значению глубины моря (посредством эхолота). Температуры отложены по оси ординат, а глубины — по оси абсцисс. Значения скоростей звука проставлены при соответствующих кривых. Эта номограмма составлена применительно к некоторой средней солености морской воды: $32{,}35^0/_{00}$. Для определения поправки на соленость, имеющую место в действительности, служит вторая номограмма, представленная на рис. 489 справа. Здесь по оси абсцисс отложены температуры воды, а по оси ординат — плотности воды, измеренные при той или иной температуре. Значения поправки со знаком плюс или минус нанесены при соответствующих кривых. Поправка 0 соответствует солености $32{,}35^0/_{00}$.

§ 8. Распространение звука в неоднородной морской воде

В предыдущем параграфе было показано, что скорость звука в морской воде зависит от температуры и солености. Кроме того, из формулы (132) следует, что коэффициент сжимаемости K_T зависит еще от давления, под которым находится вода, значит, от давления должна зависеть и скорость звука, как видно при сопоставлении формул (132), (135), (136а). Благодаря всем этим обстоятельствам при распространении звука в естественных морских условиях почти всегда неизбежна рефракция звуковых волн, как неизбежна рефракция световых волн в переслоенной атмосфере неоднородной плотности и рефракция морских волн на мелководье, где скорость распространения этих волн меняется при изменениях глубин.

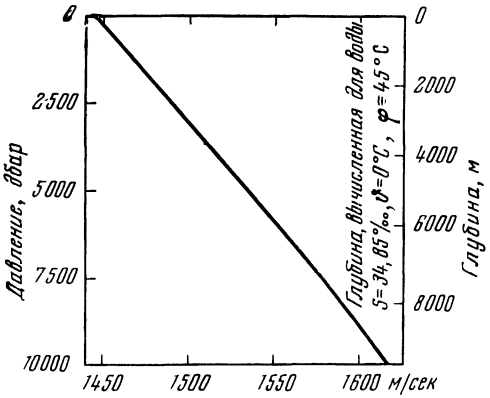


Рис. 490. Изменение скорости звука с глубиной

Если температура воды непрерывно падает от поверхности ко дну и притом глубина моря невелика, то можно легко показать, что путь волн должен выражаться кривыми, загибающимися ко дну. Дойдя до дна, звуковые лучи испытывают частичное отражение, причем довольно значительная доля энергии при этом поглощается дном. Отразившись от дна, лучи сначала поднимаются вверх, затем вновь загибаются ко дну, вновь отражаются от него и т. д. В результате звуковой сигнал из какой-либо точки под поверхностью моря приходит в другую (удаленную) точку с ослаблением, значительно большим, чем то, которое он испытал бы, если бы распространялся

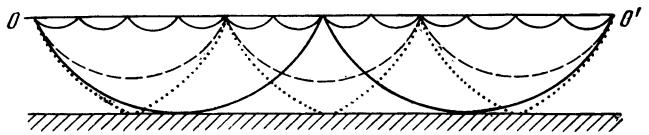


Рис. 491. Дугообразные звуковые лучи двух родов

в однородной воде из первой точки во вторую по прямой. В подобных случаях описанное явление часто служит основной причиной ослабления звуковых сигналов в воде.

Совсем иная картина должна наблюдаться в глубоких морях и океане. Там решающую роль играет увеличение скорости звука с глубиной, вызванное увеличением давления [см. формулы (132), (135), (136а)].

Сперва рассмотрим для простоты случай непрерывного нарастания скорости звука по линейному закону от поверхности до дна аналогично диаграмме рис. 490, где изображено изменение скорости звука от поверхности до глубины 10 000 *м* при $\vartheta = 0°$ и $S = 34{,}85‰$ во всем этом громадном слое. Градиент скорости звука по вертикали составляет здесь примерно 1,8 *м/сек* на каждые 100 *м* глубины.

Пусть источник звука находится на поверхности океана. Можно показать, что звуковые лучи должны обладать здесь формой дуг окружностей, изображенных на схеме рис. 491. В противоположность предыдущему случаю все кривые обращены выпуклостью вниз, а звуковые лучи загибаются к

поверхности океана [13]. Некоторые из лучей загибаются вверх, не дойдя до дна. Таковы, например, лучи, вычерченные штрихами (рис. 491), а также малые дужки близ поверхности океана. Лучи иного рода претерпевают отражения от дна, как, например, лучи, вычерченные точками на рис. 491. Промежуточный вид представляют лучи, которые касаются дна таким образом, как лучи, вычерченные сплошной линией на рис. 491. На пути от излучателя O до приемника O' последние испытывают наименьшее число отражений от поверхности океана (на рис. 491 они отражаются от поверхности только один раз).

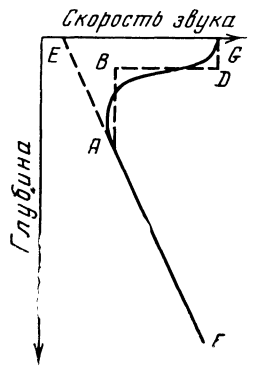


Рис. 492. Распределение скоростей звука по вертикали

Если какой-либо из лучей первого рода покинул излучатель O под углом β к горизонтальной плоскости, то он достигнет максимальной глубины

$$z_{\text{макс}} = \frac{1 - \cos\beta}{a \cos\beta} \tag{137}$$

и вновь возвратится к поверхности океана на расстоянии

$$\Delta x = \frac{2 \operatorname{tg}\beta}{a} \tag{138}$$

от излучателя. Через a здесь обозначено отношение градиента скорости звука по вертикали к скорости звука у поверхности. Числовое значение a таково: $a = 0{,}012$ *км*$^{-1}$.

Такое поведение лучей первого рода вызывает значительное увеличение плотности звуковой энергии близ поверхности воды. Действительно, ведь все лучи, выходящие из излучателя под углами от 0 до β в горизонтальной плоскости, должны концентрироваться в слое толщиной

$$\frac{1 - \cos\beta}{a \cos\beta} \approx \frac{\beta^2}{2a}.$$

При уменьшении β эта толщина убывает, как β^2. Между тем сам угол, а значит и энергия, излучаемая в его пределах, убывает лишь как β, т. е. значительно медленней. Именно поэтому плотность энергии сильно увеличивается близ поверхности воды. В сущности схема рис. 491 приводит к бесконечно большому значению плотности энергии у самой поверхности. Это объясняется несовершенством подобной схемы, отличием ее от действительной картины.

На рис. 492 изображено распределение скоростей звука по вертикали, которое свободно от подобного недостатка [14]. Здесь сплошная кривая соответствует истинной картине. Однако она не дает возможности довести до конца, до числа, анализ явлений ввиду сложности. Поэтому наряду со сплошной кривой на рис. 492 пунктиром изображено схематизированное распределение скоростей, достаточно близкое к натуре. Это распределение скоростей выражено ломаной линией $GDBAF$. Предыдущему (упрощенному) случаю соответствовала прямая EF. На уровне BD лежит слой скачка плотностей. Именно на этом уровне расположим для простоты излучатель и приемник звука. Будем считать, что выше слоя BD звуковые лучи не проходят ввиду их полного внутреннего отражения от слоя скачка.

Пусть приемник находится на расстоянии r по горизонтали от излучателя. Лучи первого рода, не испытывающие отражений от дна, будут испытывать различное число N отражений от поверхности воды, прежде чем дойдут до приемника звука. Каждому определенному числу N будет (как можно показать) соответствовать одно из двух следующих значений начального

угла β_N с горизонтальной плоскостью:

$$\beta_N = \operatorname{arctg}\left[\frac{ar}{4N} \pm \sqrt{\left(\frac{ar}{4N}\right)^2 - q}\right]. \tag{139}$$

Величина a здесь имеет тот же смысл, как и в формулах (137) и (138). Через q обозначено произведение величины a на h:

$$q = ah.$$

Если излучатель дает отдельные импульсы, то каждый импульс, бегущий к приемнику, затрачивает время T_N на пробег по лучу, при этом

$$T_N = \frac{N}{ac_0}\left(\frac{2q}{\sin\beta_N} + \ln\frac{1+\sin\beta_N}{1-\sin\beta_N}\right). \tag{140}$$

Из формулы (140) следует, что первым до приемника доходит луч, для которого значение β_N, определенное из формулы (139), ближе всего примыкает (снизу) к величине $\arccos\frac{1}{1+aH}$, где H — глубина моря. Последним приходит луч, для которого β_N ближе всего примыкает (независимо от того, с какой стороны) к величине $\operatorname{arctg}\sqrt{q}$. Если излучатель дает практически мгновенные импульсы, то полная продолжительность сигнала должна быть такова:

$$T = \frac{ar}{6c_0}(2H + h) \approx \frac{aH}{3c_0}\, r. \tag{141}$$

Соотношение (141) показывает, что T возрастает пропорционально расстоянию r от излучателя до приемника звука. Если импульсы обладают конечной продолжительностью T_0, то полная продолжительность сигнала выражается суммой T и T_0.

Средняя сила звука, доходящего до приемника за единицу времени, определяется числом звуковых импульсов, попадающих в приемник за этот срок, и интенсивностью самих импульсов. В свою очередь интенсивность каждого импульса, попадающего в приемник, зависит от закона расширения лучевой трубки. Эту интенсивность можно охарактеризовать «фактором фокусировки» f по терминологии Л. М. Бреховских. Фактор f представляет собой отношение действительной интенсивности к тому значению интенсивности импульса близ приемника, какое существовало бы при наличии однородной и безгранично простирающейся водной среды.

Теория показывает, что

$$f = \cos\beta\frac{\operatorname{tg}^2\beta + q}{\operatorname{tg}^2\beta - q}. \tag{142}$$

Из формулы (142) следует, что фокусировка может оказаться чрезвычайно большой для лучей, приходящих последними: ведь им соответствует значение $\operatorname{tg}\beta \approx \sqrt{q}$. Физически это значит, что на лучи, исходящие из излучателя под углами к горизонтальной плоскости, близкими к значению $\beta = \operatorname{arctg}\sqrt{q}$, неоднородная среда действует, как линза. В первом (грубом) приближении теория дает бесконечную плотность энергии в точках плоскости BD, отстоящих от излучателя на расстоянии $4\frac{\sqrt{q}}{a}n$, причем n может принимать любое целое значение. Этому условию удовлетворяют точки на кольцах соответствующих радиусов. Такие кольца можно назвать своего рода «кольцевыми фокусами» для звуковых волн. Теория показывает, что полуширина кольцевого фокуса весьма невелика по сравнению с расстоянием между кольцами: она составляет около $\left(\frac{\lambda^2 r}{32}\right)^{1/3}$, где λ — длина волны в однородном слое, r — радиус кольца.

Теория показывает также, что в принимаемом сигнале сила звука растет от начала к концу благодаря непрерывному уменьшению промежутков времени между приходом соседних импульсов, а также благодаря постепенному увеличению фактора фокусировки f. На последнем (самом сильном) луче первого рода сигнал резко обрывается. После него приходят только лучи второго рода, значительно ослабленные вследствие отражений от дна.

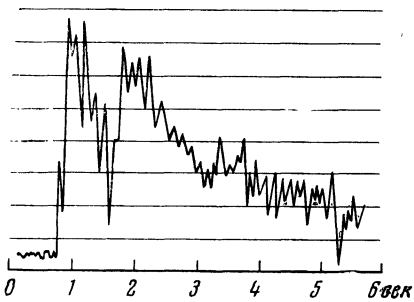


Рис. 493. Тип регистрации на малых расстояниях

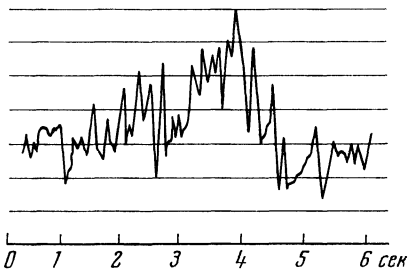


Рис. 494. Тип регистрации на больших расстояниях

В точках, лежащих посредине между двумя соседними кольцевыми фокусами, максимальная сила звука в конце сигнала убывает обратно пропорционально расстоянию в степени $^3/_2$. Если бы отсутствовала фокусировка, то, как известно, сила звука убывала бы обратно пропорционально квадрату расстояния. Замедленное уменьшение силы звука вызывается увеличением фактора фокусировки f для лучей, приходящих последними.

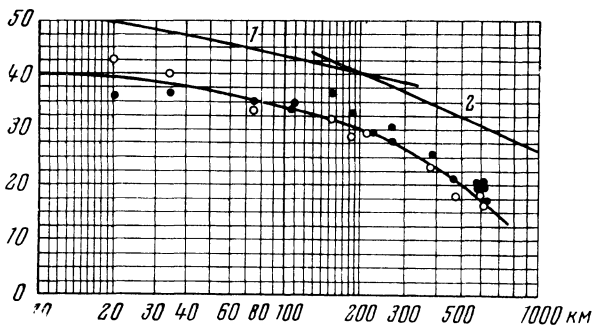


Рис. 495. Уменьшение силы звука с расстоянием

Очень резко выделяется последний пришедший импульс в пределах кольцевого фокуса, где его сила значительно превышает силу других сигналов.

Выводы теории Бреховских подтверждены опытами, проделанными другими советскими авторами на глубоком море [15]. Звуковые импульсы создавались здесь на глубине 100 *м* под поверхностью моря и принимались на различных расстояниях от источника звука. Было установлено, что пьезоэлектрический приемник может регистрировать импульсы во всяком случае на расстоянии свыше 560 *км* благодаря наличию описанного звукового канала.

На малых расстояниях, при $T \ll T_0$, регистрация получалась такого же типа, как на рис. 493, где по оси абсцисс отложено время в секундах, а по оси ординат — логарифмы квадрата среднего звукового давления; расстояние между двумя соседними горизонтальными линиями соответствует 5 *дб*. Как видим, здесь отмечен резкий начальный выброс, после которого сила принимаемого звука падает почти до нуля; затем снова звук нарастает почти

до первоначальной силы и снова ослабевает [15]. Регистрация заканчивается своеобразным «хвостом» на рис. 493, который в соответствии с теорией Бреховских вызван приходом волн второго рода, предварительно отражавшихся от дна моря.

На больших расстояниях вплоть до наибольшего, оказавшегося доступным в условиях опытов (560 *км*), тип регистрации был иной, такой, как на рис. 494. Здесь сила принимаемого звука непрерывно нарастала тоже в соответствии с теорией и оканчивалась резким обрывом. Обрыв был бы еще резче, если бы волны второго рода не вносили бы некоторую небольшую добавочную энергию, достигающую приемника с опозданием. Уменьшение

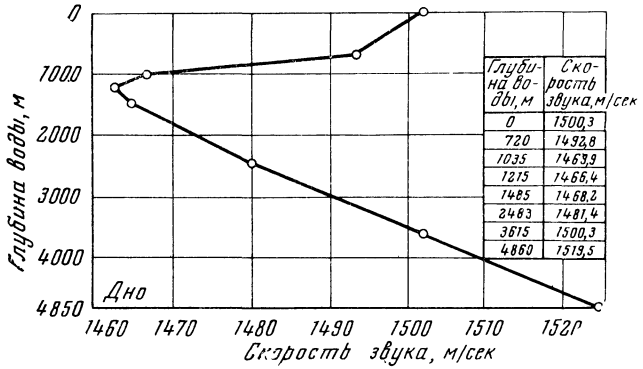


Рис. 496. Типичное среднее распределение скоростей звука в океане

силы принимаемого звука происходило по закону, выражаемому диаграммой рис. 495. По оси абсцисс отложены расстояния от источника звука до приемника, на логарифмической шкале в километрах, по оси ординат — сила звука в децибелах. Между экспериментальными точками проведена плавная эмпирическая кривая. Для сравнения на ту же диаграмму нанесены две прямые *1* и *2*. Из них первая соответствует убыванию силы звука по цилиндрическому закону, т. е. обратно пропорционально первой степени расстояния; вторая отвечает убыванию по сферическому закону, т. е. обратно пропорционально квадрату расстояния. Теоретически в первом приближении на малых расстояниях, при $T \ll T_0$, все импульсы перекрываются, а полное число импульсов в сигнале пропорционально расстоянию; закон уменьшения силы звука был бы цилиндрическим. Как видим, сила звука здесь убывала даже медленнее, чем по цилиндрическому закону на этапе примерно до 100 *км*. Затем уменьшение шло по цилиндрическому закону примерно до 200 *км*. На еще бóльших расстояниях вступал в силу закон, средний между цилиндрическим и сферическим: убывание происходило обратно пропорционально расстоянию в степени $^3/_2$ в соответствии с теорией Бреховских. Но, в отличие от этой теории, такой закон сохранялся ненадолго, примерно после 300 *км* сила звука убывала не только быстрей, чем по этому закону, но даже быстрей, чем по сферическому. По-видимому, происходит дополнительное экспоненциальное затухание звука порядка 0,02 *дб/км*, вызванное рассеянием звука на тепловых неоднородностях морской воды в области слоя скачка плотностей.

Звуковой канал, открытый советскими гидроакустиками в глубоком внутреннем море [14, 15] и независимо от них американскими исследователями в океане, способствует приему сигнала на громадных расстояниях от источника звука. Чем больше глубина моря, тем больше энергии приходится на долю волн первого рода, избежавших отражения от дна при всех прочих равных условиях. Совершенно очевидно, что самое дальнее распрост-

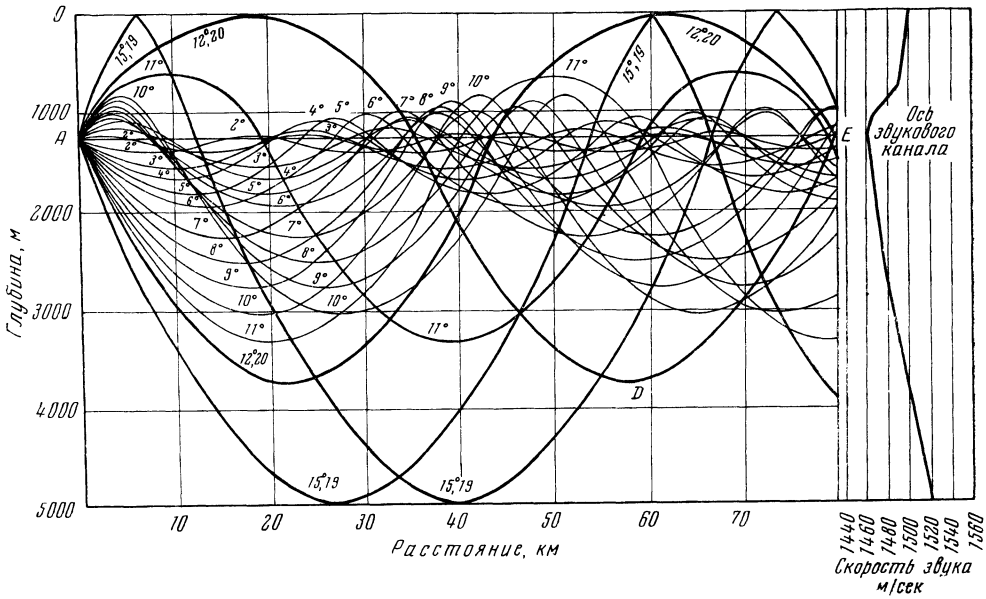


Рис. 497. Звуковые лучи первого рода в океане

ранение звуковых сигналов следует ожидать в океанах, где глубина достигает многих тысяч метров.

В качестве примера на рис. 496 изображено типичное среднее распределение скоростей звука в океане, которое в различные сезоны несколько изменяется в пределах деятельного слоя океана в связи с изменениями температур воды в различные времена года [16]. Вместо плавной кривой, проходящей по точкам, на рис. 496 вычерчены шесть отрезков прямых различной длины, чтобы на основании расположения этих отрезков можно было графически построить акустические лучи, искривленные за счет рефракции в неоднородной среде.

Для такого построения в различных областях геофизики пользуются простым приемом, сущность которого заключается в следующем: 1) началом всех лучей является точка, в которой помещен источник звука; 2) при линейном законе изменения скоростей звука в среде все лучи, исходящие из этой точки, представляют собой дуги окружности; 3) центры таких окружностей лежат на плоскости, на которой скорость звука формально обращалась бы в нуль, если бы отрезок прямой, выражающей ее изменение, был экстраполирован до такого формального предела; 4) найдя эту вспомогательную плоскость и не смущаясь тем, что она может оказаться значительно выше уровня моря, проводят из источника звука дуги окружностей, касательные к которым в начале лучей составляют тот или иной заданный угол с горизонтом; 5) конец каждой такой начальной дуги должен лежать на границе слоя, к которому относится соответствующий отрезок прямой на рис. 496; 6) для следующего слоя отыскивается вновь вспомогательная плоскость, на которой лежат центры вторых дуг окружностей; 7) после этого поступают аналогично пунктам 4, 5 и 6.

На рис. 496 минимум скорости звука отвечает глубине около 1200 *м*. Именно на этом горизонте следует ожидать, по теории Бреховских, фокусирование звуковых волн в звуковом канале. Правильность такого теоретического заключения подтверждается рис. 497. На этом рисунке изображены звуковые лучи, исходящие от источника, который помещен на глубине

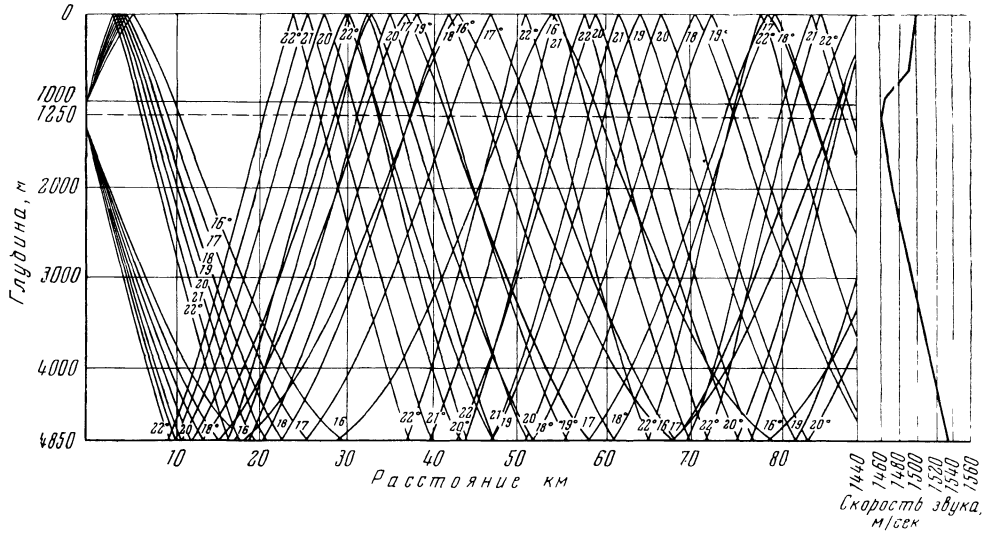


Рис. 498. Звуковые лучи второго рода в океане

1200 *м*. Это лучи первого рода (по терминологии Бреховских), которые построены посредством только что описанного графического приема [16]. Справа на рисунке воспроизведена в сжатом виде диаграмма изменений скорости звука с глубиной, перенесенная сюда с рис. 496 для удобства сопоставления. Необходимо отметить, что, подобно диаграммам гидрологических разрезов, масштабы горизонтальных и вертикальных расстояний здесь неодинаковы: масштаб глубин в 10 раз крупней, чем масштаб расстояний по горизонтальному направлению. В связи с этим при каждом луче, искривленном вследствие рефракции, поставлена цифра, которая показывает, под каким углом к горизонтальной плоскости, вниз или вверх от нее, выходит тот или иной луч из источника звука. Как видим, лучи, не отражающиеся ни от дна, ни от поверхности моря, лежат в пределах от 15—19° ниже горизонтальной плоскости до 12°,20 выше этой плоскости.

На рис. 497 отчетливо видно сгущение лучей близ горизонта 1200 *м* под поверхностью моря. Разумеется, для суждения о концентрации энергии в пределах кольцевых фокусов необходимо еще учесть время, требующееся для пробега звуковых волн вдоль каждого из лучей первого рода.

Для полноты картины на рис. 498 воспроизведены пути лучей второго рода, испытывающих отражения как от дна, так и от поверхности моря. Совершенно очевидно, что на таких путях происходит большая потеря энергии звуковых волн [16].

При первых опытах в Атлантическом океане звук создавался посредством взрыва заряда весом 1,8 *кг*, причем регистрация этого сигнала удавалась на расстояниях до 1700 *км*. Впоследствии приемная аппаратура была усовершенствована и звук от взрыва тех же 1,8 *кг* принимался гидрофоном на расстояниях до 4200 *км*; при взрывах 2,7 *кг* дальность приема увеличилась до 5700 *км*. Полагают, что даже это расстояние не является предельным для такого веса заряда (предел здесь был поставлен уменьшением глубины океана до 1220 *м* в месте установки гидрофона). Формальная экстраполяция дает основание считать, что при больших глубинах на всем пути волн дальность приема звукового сигнала в воде превысила бы 15 000 *км*.

Опыты показали, что затухание звуковых волн на низкой частоте в самой воде весьма мало́. Коэффициент затухания, выраженный в децибелах на километр [12], дается формулой $\alpha = 0{,}036f^2$, где f — частота в кило-

герцах. Следовательно, например, при частоте 50 *гц* энергия звуковой волны из-за поглощения в самой воде уменьшится в 10 раз на расстоянии 26 000 *км*.

В настоящее время детально разработана теория фокусировки звуковых «лучей» при заданном распределении скоростей звука по вертикали. Очень интересная картина получилась, в частности, при элементарно простом распределении, изображенном на рис. 499.

На рис. 500 слой «2H», соответствующий рис. 499, изображен в виде тонкой ленты, в середине которой помещен источник звука. Лучи, исходящие из него под малыми углами к горизонту, не изображены, чтобы не затемнять чертеж. Как видим, остальные лучи ведут себя весьма оригинально: они сгущаются к некоторым огибающим, носящим название *каустик*. На каустиках лежат местные максимумы силы звука. В промежутках между ними сила звука падает до нуля, образуя *зоны молчания* [12].

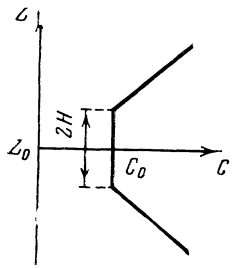


Рис. 499. Простое распределение скоростей звука близ звукового канала

На рис. 501 изображено поведение звуковых лучей в том случае, когда источник звука помещен в слое, отмеченном верхней пунктирной прямой, т. е. в слое, лежащем *вне оси* звукового канала, нанесенного сплошной прямой. Здесь тоже возникают каустики, отмеченные жирными кривыми, но чередования максимумов силы звука и зон молчания теперь должны возникать даже на самой оси звукового канала. В эти зоны может частично проникать некоторая звуковая энергия за счет эффектов дифракции волн. Вообще точная теория явления не может быть дана при *лучевой* трактовке вопроса: необходимо применять аппарат волновой акустики.

Волновая теория представляет звуковое поле в любой точке пространства как совокупность некоторого числа «нормальных волн», налагающихся одна на другую. Каждая из них распространяется вдоль волновода с определенной фазовой скоростью и с характерным для нее распределением амплитуд по вертикали. В «зонах молчания» уменьшение силы звука вызывается интерференцией «нормальных волн».

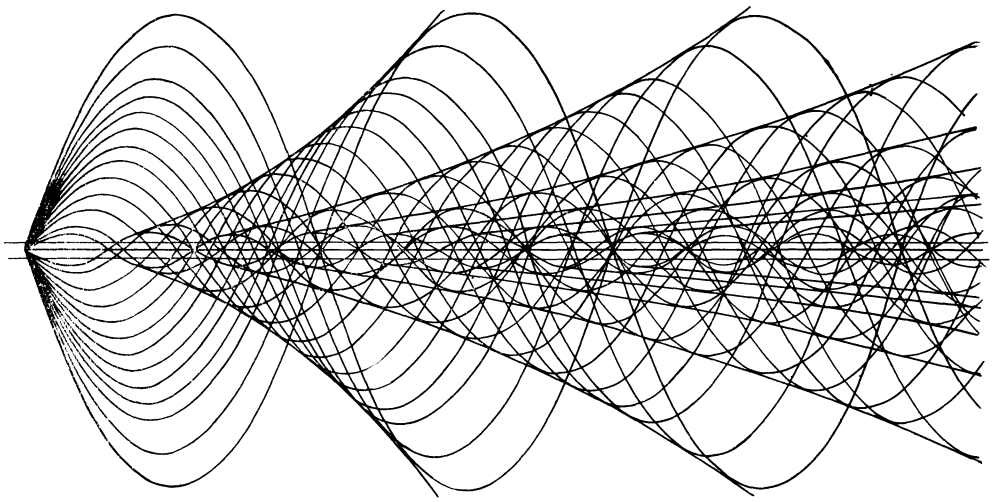


Рис. 500. Образование каустик при расположении источника звука на оси волновода

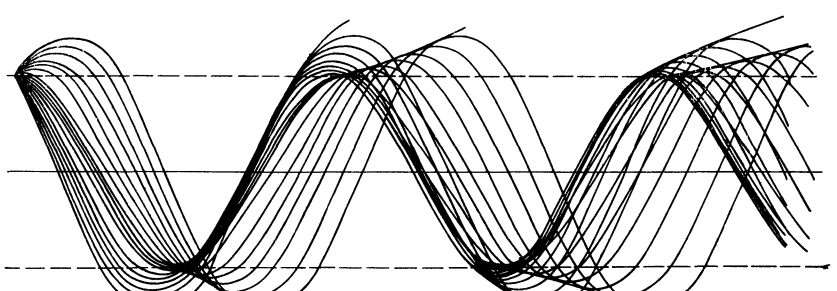


Рис. 501. Каустики и зоны молчания при внешнем положении источника звука

Представим себе, что скорость звука, применительно к некоторой «нормальной волне», на очень большом расстоянии вверх и вниз от оси волновода равна c_1, а на оси она уменьшается до значения $c_1 (1 + M)^{-1}$, где M — число, определяемое по местным условиям. В работе Ю. Л. Газаряна было исследовано поле в волноводе, который характеризовался таким законом изменения скорости звука по вертикали [12]:

$$c\left(\frac{z}{H}\right) = c_1\left(1 + \frac{M}{\operatorname{ch}^2 \frac{z|}{H_i}}\right)^{-1}; \quad M > 0.$$

Величина H здесь представляет собой как бы эффективную ширину волновода. Эта величина вместе с числом M и волновым числом $k_1 = \omega/c_1$ играет

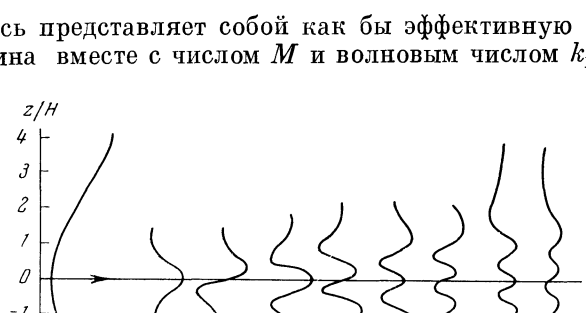


Рис. 502. Поведение нормальных волн (по Ю. Л. Газаряну)

очень большую роль в теории волноводов. Оказывается, что волновод может «удержать волну» только тогда, когда соблюдается условие

$$\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + (k_1 H^2) M} > 2.$$

Отсюда следует, что звуковой канал может удержать волну, максимальная длина которой

$$\lambda_{\text{макс}} = \pi H \sqrt{2M}.$$

Изменения скорости звука по вертикали, принятые в задаче Газаряна, изображены на рис. 502, *а*. Кривые, изображающие зависимость амплитуд некоторых нормальных волн от безразмерного расстояния $\pm z/H$ по работе

цитированного автора, даны на рис. 502, *б*. В данном случае критерий, свидетельствующий об «удержании» волн в звуковом канале, заведомо больше двух — он равняется 8,5.

§ 9. Поведение акустических волн у поверхности раздела двух сред

Для завершения материала, помещенного в предыдущем параграфе, рассмотрим сперва поведение акустических лучей близ поверхности моря в *летнее* время — при наличии большого отрицательного градиента температуры (т. е. при быстром убывании температуры воды по мере увеличения глубины слоя).

На схематическом рис. 503 слева изображено изменение скорости звука по вертикали в исследуемом районе моря, справа — поведение акустических лучей, которые вышли из излучателя слегка расходящимся пучком.

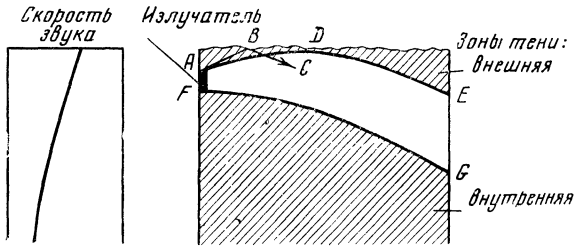


Рис. 503. Звуковые лучи близ поверхности раздела вода — воздух

Как видим, правый край пучка *FG* быстро опускается на глубину. Луч *AB*, ограничивающий пучок слева, сперва доходит до поверхности моря, а потом отражается от нее. Дальнейший путь этого луча не нанесен на схему, чтобы не затемнять ее. Зато на схеме подробно изображен ход луча *ADE*, который *касается поверхности моря* в высшей точке (*D*) дуги, после чего загибается книзу, образуя *границу внешней зоны тени* (*DE*). На рисунке эта внешняя зона тени покрыта штриховкой, так же как и внутренняя зона тени.

Рисунок показывает, что *поверхность моря отбрасывает тень*.

Если бы описанная картина была вполне точна, то в зону тени не проникала бы никакая доля энергии, исходящей от излучателя. Продолжив вниз ход луча, ограничивающего внешнюю зону тени, можно было бы показать, что это явление резко уменьшает дальность распространения акустических волн по горизонтальному направлению от излучателя: вся энергия, посланная излучателем, в конечном счете уходит *вниз*. Значит, можно было бы полагать, что в условиях, изображенных на схеме рис. 503, гидролокатор, пославший пучок акустических лучей, не уловил бы никаких отраженных сигналов при сравнительно небольшом удалении искомого тела; лучи *не дошли бы* до этого тела, а, не доходя до него, погрузились бы на глубины.

В действительности распространение акустических волн сильно осложняется вследствие *дифракции* по тем же причинам, по каким задачи волновой оптики оказываются в аналогичных случаях более сложными, чем задачи геометрической оптики. Не будем приводить здесь весьма сложные выкладки из теории дифракции акустических волн, а отметим только, что благодаря дифракционным явлениям некоторая доля энергии проникает в область, покрытую штриховкой на рис. 503.

При рассмотрении рис. 503 было упомянуто, что от поверхности моря отражаются лучи, которые проходят в части пучка между кривыми *AB* и

AD. Вообще говоря, близ поверхности моря должно происходить частичное поглощение и рассеяние энергии, вызванное местным увеличением количества мути, воздушных пузырей и других неоднородностей в водной среде. Мы не будем касаться здесь этих побочных явлений, а рассмотрим лишь *отражение* части энергии акустических волн от поверхности моря и *проникание* некоторой части этой энергии в другую — смежную — среду.

Пусть плоские волны падают на поверхность раздела между двумя средами. Предположим сперва, что направление падения *нормально* к этой поверхности раздела и обозначим все элементы падающей волны индексами 0, элементы отраженной волны индексами 1, а элементы волны, вышедшей во вторую среду, индексами 2. При переходе через границу скачком меняется скорость распространения волн, что же касается амплитуд скоростей колебания частиц и амплитуд давления, то на основании условия неразрывности для этих элементов следует записать

$$U_0 + U_1 = U_2, \tag{143}$$

$$P_0 + P_1 = P_2. \tag{144}$$

Но ведь, вспомнив уравнения (48) и (53), можно выразить избыточные давления через соответствующие скорости колебаний частиц и вместо уравнения (144) записать

$$\delta_1 c_1 U_0 - \delta_1 c_1 U_1 = \delta_2 c_2 U_2. \tag{145}$$

Знак минус вошел сюда потому, что отраженная волна распространяется в первой среде со скоростью, прямо противоположной скорости падающей волны. Как и в уравнении (55), здесь удобно внести символы R_1 и R_2, обозначающие акустическое сопротивление первой и второй сред. Тогда уравнение (145) примет более простой вид

$$R_1 (U_0 - U_1) = R_2 U_2. \tag{146}$$

Так как уравнения (143) и (146) должны одновременно удовлетворяться, то из них, как из уравнений с двумя неизвестными, легко определить отношения U_1/U_0 и U_2/U_0. Именно

$$\frac{U_1}{U_0} = \frac{R_1 - R_2}{R_1 + R_2}, \tag{147}$$

$$\frac{U_2}{U_0} = \frac{2R_1}{R_1 + R_2}. \tag{148}$$

Уравнения (147) и (148) позволяют определить не только амплитуды скоростей колебаний частиц, но и фазу колебаний в отраженной волне. Действительно, если акустическое сопротивление R_2 второй среды превышает сопротивление R_1 первой среды, то при отражении *меняется знак* у скорости частиц; на основании замечания к уравнению (145) легко убедиться, что давление при этом не будет менять знака. Напротив, если сопротивление второй среды меньше, чем сопротивление первой, то скорости не меняют знака при отражении, а давления должны изменить знак.

Что касается волн, проникающих во вторую среду, то на основании уравнения (148) скорость колебания частиц при прохождении сквозь поверхность раздела *не меняет фазу ни в одном из рассмотренных случаев*. Так как, с другой стороны, скорость c_2 распространения проникающей волны совпадает по направлению со скоростью c_0 распространения падающей волны, то и давление при этом *тоже не меняет фазу*.

Переходя к энергетической стороне явлений, будет уместно напомнить, что *поток энергии* пропорционален квадрату амплитуды скоростей колебаний

частиц. Следовательно,

$$\frac{F_1}{F_0} = \left(\frac{U_1}{U_0}\right)^2, \tag{149}$$

$$\frac{F_2}{F_0} = \left(\frac{U_2}{U_0}\right)^2. \tag{150}$$

Обозначим через φ угол падения акустических лучей на поверхность раздела в самом общем случае, а через φ — угол преломления. Как всегда, эти углы отсчитываются от нормали. Тогда, не останавливаясь на промежуточных выкладках, запишем окончательные выражения для F_1/F_0 и F_2/F_0:

$$\frac{F_1}{F_0} = \left[\frac{R_1\cos\psi - R_2\cos\varphi}{R_1\cos\psi + R_2\cos\varphi}\right]^2, \tag{151}$$

$$\frac{F_2}{F_0} = \frac{4R_1^2\cos^2\varphi}{[R_1\cos\psi + R_2\cos\varphi]^2}. \tag{152}$$

Любопытно, что отражение может отсутствовать не только при

$$\varphi = 0,\ \psi = 0,\ R_1 = R_2,$$

но, как видно из уравнения (152), при условии

$$\frac{\cos\psi}{\cos\varphi} = \frac{R_2}{R_1}, \tag{153}$$

которое приводит еще ко второму значению угла падения φ. При этом значении φ волны не отражаются, несмотря на то, что $R_2 \neq R_1$. Для нахождения этого второго значения φ обозначим сокращенно

$$\frac{R_2}{R_1} = r,\ \frac{c_1}{c_2} = n. \tag{154}$$

Тогда по уравнениям (151), (152) и на основании соотношений между синусами углов

$$r^2 = \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2 = \frac{\cos^2\psi}{\cos^2\varphi} = \frac{1 - \frac{1}{n^2}\sin^2\varphi}{1 - \sin^2\varphi},$$

откуда

$$\sin^2\varphi = \frac{r^2 - 1}{r^2 - \frac{1}{n^2}}. \tag{155}$$

Столь же просто можно было бы рассмотреть вопрос о поведении акустических волн в некоторой *промежуточной* (третьей) среде. Подобные исследования показывают, что промежуточная среда не может играть никакой роли, если ее толщина весьма мала по сравнению с длиной волн. Волны распространяются из первой среды во вторую совершенно так же, как если бы третьей среды между ними не было.

Если толщина промежуточной среды соизмерима с длиной волн, то роль ее может быть двоякой в зависимости от ее акустических характеристик. Именно если удельное акустическое сопротивление ее вещества занимает промежуточное положение между сопротивлениями двух разделяемых сред, то прослойка *уменьшает* коэффициент отражения. Напротив, если удельное сопротивление прослойки либо больше, либо меньше обоих удельных сопротивлений двух основных сред, то прослойка увеличивает коэффициент отражения (уменьшает количество энергии, проникающей из первой среды во вторую сквозь третью прослойку).

§ 10. Основы эхолотирования и гидролокации

Первые измерения расстояния посредством звука произвел русский исследователь академик Я. Д. Захаров. Он совершил 30 июня 1804 г. первый в мире полет на воздушном шаре с *научной целью* и в этом полете воспользовался отражением звука от поверхности земли для определения высоты полета. Находясь в корзине шара, он громко крикнул в рупор, направленный вниз. Через 10 *сек* пришло отчетливо слышное эхо. Отсюда Захаров заключил, что высота шара над землей равнялась приблизительно $5 \times 334 = 1670$ *м*.

Примерно четверть века спустя были сделаны попытки применения отраженного звука для измерения *глубин моря*, но эти попытки очень долго не удавались. Основная причина неудач крылась в неумении точно регистрировать и даже просто измерять в морских условиях короткие промежутки времени, требующиеся для прохождения звуком расстояния от датчика (на корабле) до дна и назад к приемнику (на том же корабле с другого борта). Решающее значение имели изобретения, сделанные в области точного измерения времени.

Само возникновение эха при эхолотировании обеспечивается достаточно надежно. Попадая на поверхность раздела вода — грунт, акустические волны испытывают, как правило, четкое отражение благодаря резко выраженному различию в акустических свойствах воды и песчаного или каменистого грунта, как это должно происходить по формулам (147) и (148). Если каменистый грунт покрыт сверху более или менее толстым слоем *ила*, то современные эхолоты улавливают обе поверхности раздела: и между водой и илом, и между илом и каменистой породой. Обычно первая из них выражена слабей, чем вторая.

При распространении акустических волн в воде приходится считаться с потерями энергии не только на пути от датчика до дна и на самом дне (благодаря неполному отражению), но, разумеется, и на обратном пути. Следовательно, поглощение и рассеяние звука в самой водной среде в данном случае играют важнейшую роль: волнам приходится фактически проходить *двойной* путь в воде.

Еще более сложные условия возникают при *гидролокации*, т. е. при получении отраженных сигналов от какого-либо *препятствия*, находящегося в водной среде. Здесь приходится считаться с влиянием *телесных углов*, внутри которых распространяется поток энергии акустических волн: телесного угла Ω, внутри которого вибратор гидролокатора посылает сигналы, и телесного угла θ, под которым *площадь препятствия* S видна из центра датчика волн.

Пусть на единицу площади такого препятствия падает энергия $J_{\text{пад}}$, которая, вообще говоря, может быть выражена через мощность излучателя W, упомянутый телесный угол Ω, полный коэффициент ослабления звука в воде m и через расстояние x от излучателя до обнаруженного препятствия:

$$J_{\text{пад}} = \frac{W}{\Omega x^2} e^{-2mx}. \tag{156}$$

Мощность, приходящаяся на *всю* площадь препятствия S, будет

$$W_{\text{пад}} = J_{\text{пад}} S. \tag{157}$$

Учтя уравнение (157), можно рассматривать препятствие как своего рода вторичный источник звука, который испускает энергию, тем большую, чем больше коэффициент отражения β поверхности S:

$$W_{\text{отр}} = \beta J_{\text{пад}} S. \tag{158}$$

Эта энергия идет в сторону корабля, пославшего сигнал, внутри телесного угла

$$\theta = 2 \operatorname{arctg} \frac{a}{x}, \tag{159}$$

причем a здесь обозначает радиус круга, площадь которого эквивалентна площади препятствия. Значит, энергия в потоке отраженных волн $J_{отр}$ должна при возврате к кораблю выражаться так:

$$J_{отр} = \frac{W_{отр}}{\theta x^2} e^{-2mx}. \tag{160}$$

Подставим сюда выражение $W_{отр}$, основанное на уравнениях (156) и (158). Тогда вместо уравнения (160) запишется

$$J_{отр} = \frac{W\beta S}{\Omega\theta x^4} e^{-4mx}. \tag{161}$$

Это очень жесткий закон убывания мощности при прохождении акустических волн от локатора до препятствия и обратно.

Пусть порог чувствительности приемника гидролокатора характеризуется какой-то величиной $J_п$. Тогда минимальная сила звука, воспринимаемая локатором $J_{мин}$, должна быть связана с уровнем шумов $\Delta_1 = \ln J_ш/J_п$ и уровнем помех $\Delta_2 = \ln J_{пом}/J_п$. Именно

$$J_{мин} = J_п e^{2(\Delta_1 - \Delta_2)}. \tag{162}$$

Соотношения (161) и (162) дают возможность определить *максимальную дальность действия гидролокатора* $x_{макс}$:

$$x_{макс} e^{mx_{макс}} = \sqrt[4]{\frac{W\beta S}{\Omega\theta J_{мин}}}. \tag{163}$$

Формула (163) дает возможность судить о тех средствах, которые могут служить для увеличения дальности действия гидролокатора, и о тех естественных причинах, которые затрудняют или совсем исключают коренные усовершенствования гидролокации: во власти конструктора повышение мощности W до известного разумного предела, уменьшение телесного угла Ω. Но не во власти конструктора увеличение коэффициента отражения препятствия β и уменьшение уровня помех Δ_2.

§ 11. Пьезоэлектрические и магнетострикционные явления, используемые в гидроакустике

В § 3 и 4 было показано, что весьма выгоден переход к ультразвуковым частотам. При этом, с одной стороны, увеличивается ваттная составляющая колебаний в воде благодаря уменьшению отношения длины волн к размерам излучателя; с другой стороны, при уменьшении этого отношения растет направленность излучения и энергия, излучаемая в воду, практически распространяется внутри конуса с совсем небольшим телесным углом при вершине (порядка 15°).

Идея использования такого узкого потока ультразвуковых лучей первоначально была высказана Шиловским, предложившим во время первой мировой войны 1914 г. применить его для обнаруживания подводных лодок противника и для измерения расстояния до них. Одновременно Шиловский высказал мысль о возможности решить эту задачу, превратив энергию электромагнитных колебаний высокой частоты в энергию упругих колебаний той же частоты. Эта мысль была осуществлена выдающимся французским физиком П. Ланжевеном в 1917 г. Ланжевен воспользовался пьезоэлектрическим эффектом в кварце, открытом еще в 1880 г. Как известно, этот эффект наблюдается в кварцевых пластинках, вырезанных из кристалла по схеме рис. 504. Сначала кристалл разделяют на слои, границы которых перпендикулярны к его оптической оси; затем из такого слоя вырезают пластинки, плоскости которых перпендикулярны к сторонам шестиугольника. Если на эти плоскости произвести давление, то, как известно, между ними возникает электрическая разность потенциалов, которую легко обнаружить, наложив металлические листочки на обе плоскости и соединив их с электроскопом (один полюс необходимо заземлить).

Известно также, что пьезоэлектрический эффект обратим: при наложении некоторой разности потенциалов от внешнего источника между металлическими обкладками кристалл сжимается перпендикулярно обкладкам.

Легко видеть, что при помещении пьезокварцевой пластинки в переменное электрическое поле ее сжатие будет происходить периодически, причем наиболее сильные упругие колебания в ней возникнут тогда, когда пластинка попадет в резонанс с колебаниями электрического поля. Но, исходя из величины упругих констант кварца, можно показать, что условие резонанса удовлетворялось бы лишь в том случае, если бы толщина кварцевой пластинки достигала 75 *мм* при частоте 40 *кгц*. Совершенно очевидно, что подобные размеры диска, обладающего диаметром 20 *см*, неосуществимы.

Однако Ланжевену удалось выйти из затруднительного положения весьма интересным способом. Чтобы увеличить период собственных упругих колебаний кварца, он наклеил по обеим сторонам кварцевой пластинки массивные стальные плитки. Эти же самые плитки послужили обкладками, которые включались в цепь электрических колебаний. Разумеется, при подобном устройстве отпала необходимость в цельной пластинке, вырезанной из одного кристалла; с успехом можно воспользоваться мозаикой из небольших кварцевых пластин, помещенных между стальными электродами (рис. 505). Толщина кварцевого слоя в системе была взята равной 5 *мм*, толщина стальных плиток-электродов — 30 *мм*.

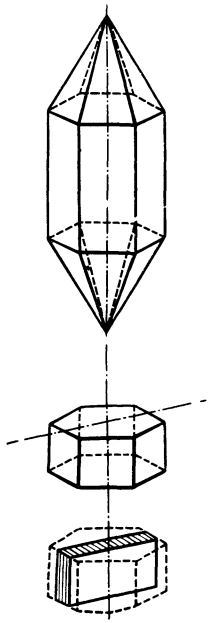


Рис. 504. Изготовление пьезокварцевых пластинок из кристалла

Амплитуда колебаний пластинки a вне области резонанса определяется из соотношения

$$a = RV, \tag{164}$$

где R — так называемая пьезоэлектрическая постоянная Кюри, которая равна $6{,}94 \cdot 10^{-8}$, а V — разность потенциалов (амплитуда). Для излучателя мощностью в 1 *вт/см*^{2} при частоте 40 *кгц* вычисления дают амплитуду около $5 \cdot 10^{-5}$ *см*. Между тем при резонансе легко добиться амплитуд свыше 10^{-4} *см*.

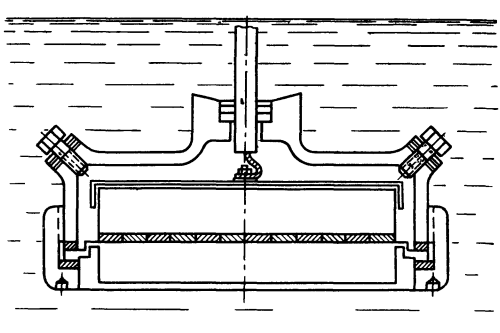


Рис. 505. Разрез пьезокварцевого излучателя

Пьезоэлектрический эффект еще ярче выражен в кристаллах, получивших общее название сегнетоэлектриков. Родоначальником этого замечательного семейства кристаллов в технике явилась сегнетова соль, известная врачам и химикам с 1672 г., исследованная физиками в отношении пьезоэффекта в 1880 г., но только в 40-х годах нашего столетия заинтересовавшая по-настоящему физиков и, в частности, гидроакустиков после работ И. В. Курчатова [3].

Сегнетова соль — это двойная натриево-калиевая соль винной кислоты с четырьмя молекулами кристаллизационной воды, обозначаемая химической формулой

$$NaKC_4H_4O_6 + 4H_2O.$$

Сегнетова соль кристаллизуется в ромбо-тетраэдрическом классе ромбической системы. На рис. 506, *а* — *д* изображена обычная форма кристалла этой соли, а также приведены схемы изготовления различных типов элементов, вырезаемых из кристалла [3].

Пьезоэлектрический эффект в кристаллах сегнетовой соли весьма велик; он также обратим, т. е. при наложении электрического поля происходит деформация кристалла,

смещение его поверхностей, которое может быть использовано для излучения акустических волн.

На рис. 507 изображены кривые, характеризующие прямой пьезоэлектрический эффект в сегнетовой соли. Эти кривые выражают зависимость удлинения пластинки сегнетовой соли от напряженности электрического поля при разных температурах [3]. Наряду с большими удлинениями, возникающими при достаточных значениях напряженности электрического поля (почти 0,001 при напряженности 400 *в/см* и низких температурах),

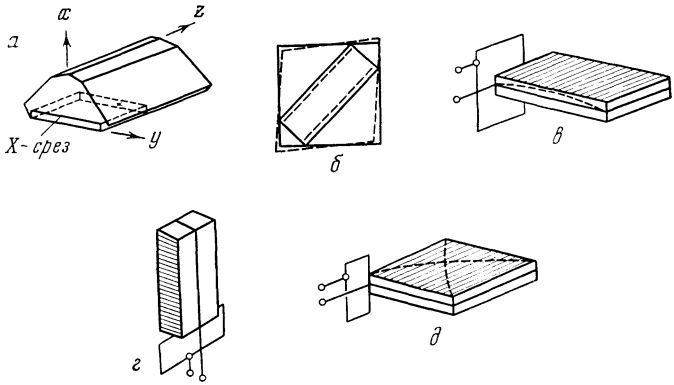


Рис. 506. Кристаллы сегнетовой соли и схемы изготовления из них различных типов пьезоэлементов

диаграмма выявляет слабую сторону кристаллов сегнетовой соли: пьезоэлектрический эффект в них резко падает при повышении температуры. При температуре около 25° сегнетова соль практически непригодна ни для излучения, ни для приема акустических волн. Что касается первого назначения, то оно нередко исключается еще и по другой причине: кристаллы сегнетовой соли, в отличие от кварца, обладают весьма малой механической прочностью, а потому не могут выдержать упругие колебания с большой амплитудой.

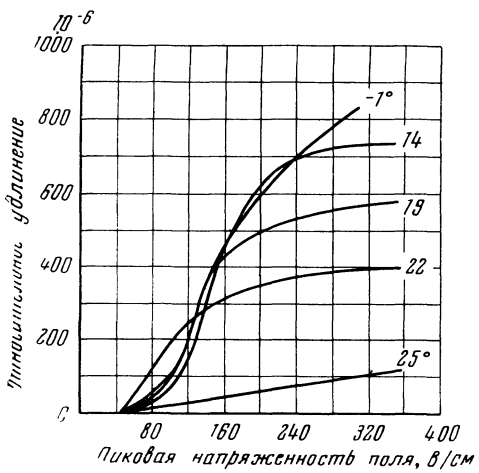


Рис. 507. Характеристики сегнетовой соли

Эти существенные недостатки сегнетовой соли привели к тому, что в последнее время на смену ей в технике эхолотирования и гидролокации пришли иные кристаллы. Среди них следует отметить прежде всего дигидрофосфат аммония $NH_4H_2PO_4$ и дигидрофосфат калия KH_2PO_4. У этих кристаллов коэффициент электромеханической связи хотя и меняется при изменениях температуры, но довольно мало: при изменении температуры от 0 до 80° он уменьшается примерно на 15%.

На рис. 508 изображен внешний вид кристаллической мозаики, предназначенной для гидроакустических целей [3]. Здесь в ряд ячеек вмонтированы пачки кристаллов, размер которых соответствует четверти длины волны. Тем самым достигается резонансный режим упругих колебаний кристаллов и соответственно большая мощность излучения. На рис. 509 приведены индикатрисы излучения для такой системы. Пунктиром обозначены результаты теоретического расчета, а сплошной линией — результаты экспериментальных измерений. Масштаб радиус-векторов логарифмический: цифры на окружностях означают ослабление в децибелах по сравнению с максимальной мощностью в основном лепестке индикатрисы [3].

В гидроакустической практике также получил распространение новый материал для излучателей и приемников: керамика, изготовленная из титаната бария. Она обладает малым температурным коэффициентом изменений электромеханической связи, большой прочностью, и изделиям может быть легко придана любая форма, удобная для построения излучателя или приемника акустических волн.

Наряду с пьезоэлектрическим эффектом современная гидроакустика широко использует также интересное явление в ферромагнитных металлах — магнетострикционный

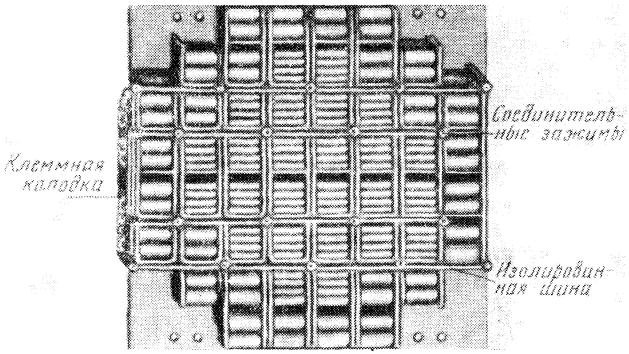


Рис. 508. Внешний вид кристаллической мозаики

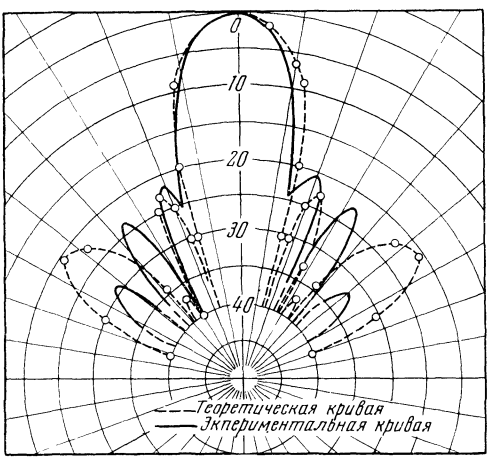


Рис. 509. Индикатрисы излучения

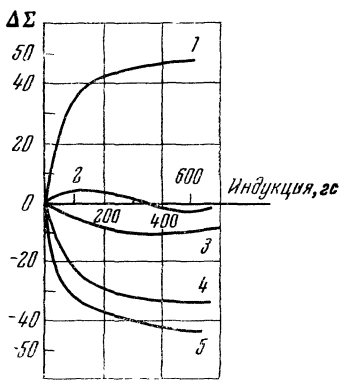


Рис. 510. Диаграмма магнитострикции

1 — кобальтовая сталь; *2* — мягкая сталь; *3* — кобальт; *4* — никель; *5* — отожженный никель

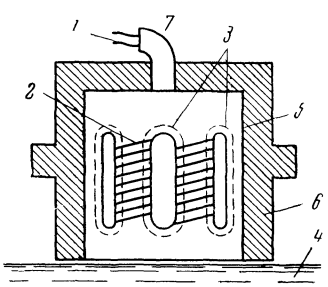


Рис. 511. Схема установки никелевых пакетов

1 — концы обмотки; *2* — обмотка; *3* — средние линии магнитного потока; *4* — забортная вода; *5* — резиновая прокладка; *6* — корпус вибратора; *7* — сальник

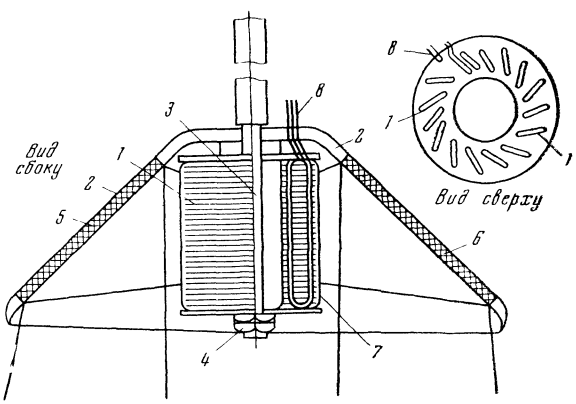


Рис. 512. Кольцевой вариант установки никелевых пакетов

1 — пакет; *2* — отражатель; *3* — стержень; *4* — гайка; *5*, *6* — губчатая резина; *7* — обмотка вибратора; *8* — выводы обмотки

эффект. При намагничивании таких металлов (в том числе некоторых сплавов) они испытывают сжатие или растяжение в направлении вектора магнитной индукции. И, наоборот, при изменении размеров таких тел под внешним воздействием они сами намагничиваются. У различных металлов и сплавов металлов зависимость деформации от величины индукции весьма разнообразна не только по своей величине, но и по знаку. В некоторых металлах деформация даже меняет знак при переходе магнитной индукции через некоторое значение.

На рис. 510 воспроизведена сводная диаграмма, показывающая, как меняется относительная деформация различных ферромагнитных тел при изменении магнитной индукции. По оси абсцисс отложены величины индукции в гауссах, по оси ординат — относительная деформация, выраженная в миллионных долях первоначальной длины тела. На рис. 511 и 512 схематически изображены два способа установки никелевых пакетов в излучателях магнетострикционных эхолотов. В первом случае вибрирующие концы никелевых листов направлены прямо вниз. Обмотка, которая создает переменное намагничение с высокой частотой колебаний, проходит сквозь своеобразные окна в листах, видные на схеме. Во втором случае пакет набирается из кольцевых листов никеля, которые вибрируют в радиальном направлении, когда переменный ток высокой частоты проходит по обмотке, уложенной, как показано на рис. 512 вверху справа. Ультразвуковые волны, испускаемые по направлению радиусов цилиндра на рис. 512, отражаются от конического зеркала из губчатой резины *6*. Этот материал применен потому, что акустическое сопротивление металлов близко к акустическому сопротивлению воды и отражение от их поверхности происходит довольно слабо, между тем акустическое сопротивление воздуха в порах резины весьма резко отличается от акустического сопротивления воды. Именно этим достигается хорошее отражение от конического зеркала *6*.

§ 12. О голосе моря

В предыдущих параграфах говорилось о тех акустических явлениях, которые возникают в море по воле человека. Почти до самого последнего времени гидроакустические исследования были посвящены преимущественно именно этим явлениям. Однако существует ряд акустических явлений, связанных с самим морем и протекающих независимо от вмешательства человека.

Как часто бывает, поводом к открытию этих явлений послужили случайные обстоятельства. Так, аэрологи, работающие на кораблях и на морских гидрометеорологических станциях, давно замечали, что при приближении к уху шара-зонда, наполненного водородом, ощущается как бы давление на барабанную перепонку. Ощущение это (чрезвычайно болезненное) достигает наибольшей силы, когда резиновая оболочка находится на расстоянии около 1 *см* от уха, и пропадает, если шар удалить на расстояние порядка 10 *см*. В. В. Шулейкину это явление продемонстрировал во время плавания метеоролог экспедиции Вл. А. Березкин. Возвратившись из экспедиции, Шулейкин пытался наблюдать это явление в Москве при пуске многочисленных шаров-зондов с обсерватории, но никакого эффекта при этом не обнаружилось. Стало совершенно очевидным, что в эффекте повинно море. С другой стороны, в 1935 г. опыт был повторен на берегу моря с шаром диаметром 65 *см*, наполненным водородом. Здесь эффект снова проявился примерно с той же силой, как и в открытом море, в экспедиции. Однако, когда водород в шаре был заменен воздухом, эффект немедленно прекратился. Отсюда пришлось заключить, что вторым условием, необходимым для возникновения эффекта, является наличие водорода в оболочке шара [17]. При опытах с шаром также можно было прекратить характерную боль в ухе: для этого достаточно было внести между шаром и ухом деревянную дощечку толщиной в 1 *см*, причем в последней могло существовать тонкое отверстие (диаметром около 1 *мм*). Следовательно, ощущение боли в ухе вызывается не каким-либо избыточным давлением, ибо последнее передалось бы сквозь тонкое отверстие, а некоторыми колебаниями воздуха по соседству с оболочкой шара; амплитуда таких колебаний очень велика, судя по боли, ощущаемой в ухе. Правда, волны неминуемо дифрагируют вокруг дощечки и в отверстии, но, по-видимому, действие их уничтожается вследствие интерференции. Диапазон колебаний здесь, несомненно, относится к области

инфразвуковой, ибо при первых наблюдениях в открытом море кругом не было слышно никаких звуков, а наличие ультразвуковых колебаний нельзя заподозрить ввиду того, что они вызывали бы совершенно иные ощущения. Как известно из опытов, ультразвуковые колебания приводят прежде всего к тепловому эффекту.

Итак, перед нами инфразвуковые колебания. Но в таком случае их можно зарегистрировать посредством какого-либо приспособления, связанного с самой оболочкой шара.

Подобная регистрация была осуществлена при помощи установки, изображенной на рис. 513. Резиновый тонкостенный шар-зонд был наполнен

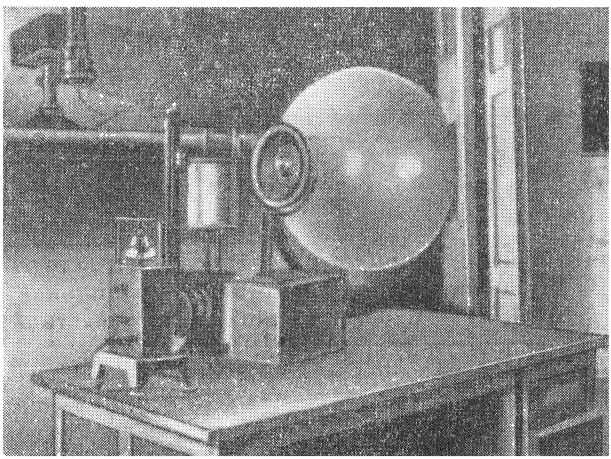


Рис. 513. Шар для улавливания и регистрации инфразвуковых волн

водородом и закреплен в некотором трехгранном углу для того, чтобы он в целом не мог совершать какие бы то ни было колебания под действием движения воздуха в лаборатории. Сам трехгранный угол осуществлялся посредством трех дощечек, вмонтированных на тележке, которой можно было давать микрометрические перемещения вдоль горизонтальной оси.

В первом варианте установки шар приводился в соприкосновение с тонкой резиновой мембраной, натянутой на круглой коробке, которая видна на рис. 513 (коробка была повернута на 180° вокруг вертикальной оси по отношению к тому положению, которое она занимает на рисунке). С этой мембраной в свою очередь было связано подвижное зеркальце. Второй вариант здесь изображен непосредственно. Шар приводился в соприкосновение прямо с тонким легким штифтом, воздействующим на зеркальце, которое видно на рисунке в центре коробки. Следовательно, зеркальце прямо реагировало на колебания самой оболочки шара. Луч света от осветителя, не видного на рисунке, падал на зеркальце и отражался последним на фотографическую бумагу, которая облегала вращающийся барабан кимографа, видного на переднем плане.

При пуске в ход кимографа и включении света на фотобумаге совершенно отчетливо запечатлелись колебания оболочки довольно сложного характера. Они воспроизведены на рис. 514.

Резче всего выступили колебания с частотой от 8 до 13 *гц*, помимо них были заметны и более высокие, по-видимому, порожденные шумом прибоя. При расчете регистрирующего приспособления были приняты все меры к исключению таких деталей, которые могли бы обладать периодом собствен-

ных колебаний, близким к 0,1 *сек*. Следовательно, зарегистрированные колебания безусловно вызваны инфразвуковыми волнами, пришедшими с моря.

Какова же природа этих инфразвуковых волн?

Можно с уверенностью утверждать, что здесь проявился настоящий голос моря — проявились инфразвуки, исходившие от поверхности моря и возникшие при движении воздуха над морскими волнами.

В поле этих инфразвуковых волн, исходящих от моря, попадает наш шар, наполненный водородом и являющийся поэтому как бы инородным телом в воздушной среде. Акустические константы водорода отличаются от акустических констант воздуха значительно больше, чем константы любого иного газа. Именно поэтому при встрече с массой водорода инфразвуковые волны должны воздействовать на нее сильней, чем на массу любого иного газа, встреченную на пути.

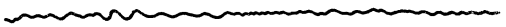


Рис. 514. Запись «голоса моря»

Картину возникновения открытого им голоса моря первоначально пытался описать В. В. Шулейкин [17]. Однако более правильное описание этого явления было дано Н. Н. Андреевым, исходя из известной теории вихреобразования за обтекаемыми телами [18].

В данном случае ветер обтекает гребни морских волн, которые должны формально играть ту же роль, какую в старых соотношениях играет цилиндр некоторого диаметра D. Как известно, частота N акустических колебаний, возникающая при движении воздушного потока со скоростью V относительно цилиндра диаметром D, связана с числом Рейнольдса $\mathrm{Re} = \frac{VD}{\nu}$ (ν — кинетическая вязкость воздуха)

$$\frac{ND}{V} = f(\mathrm{Re}). \qquad (165)$$

При сильных ветрах правая часть уравнения (165) мало меняется за счет изменений Re и равняется для цилиндра примерно 0,2. Но в таком случае, приняв за характеристический размер D высоту волн и положив $D = 200$ *см*, $V = 1{,}5 \cdot 10^3$ *см/сек*, найдем по формуле (165) $N \approx 6$ *гц*, т. е. число того порядка, какое было получено при непосредственной записи голоса моря.

Разумеется, в применении к морской волне формула (165) может рассматриваться только как грубо приближенная: волны должны порождать в воздухе вихри, значительно отличающиеся от тех, которые возникают позади телеграфных проводов и вызывают хорошо известное гудение этих проводов. Однако совпадение порядка частоты заставляет полагать, что схема, предложенная Андреевым для описания механизма зарождения голоса моря, близка к истине.

По-видимому, близко к истине также допущение, согласно которому сила инфразвука, возникающего при обдувании ветром морских волн, пропорциональна квадрату высоты волн и квадрату скорости ветра относительно волн.

За пределами штормовой области инфразвуки распространяются со скоростью звука. Следовательно, они могут послужить штормовыми предостережениями в районах, до которых еще не дошел шторм.

Многолетние попытки построения аппаратуры для приема таких автоматических штормовых предостережений постоянно наталкивались на большие технические трудности, вызванные местными помехами: всякий чув-

ствительный приемник инфразвуковых волн в воздухе неминуемо попадает под воздействие местных колебаний воздуха, порождаемых всяческими местными вихрями. Именно поэтому до настоящего времени удавалось улавливать в воздухе голос моря из далеких штормовых районов только тогда, когда на месте был штиль.

Совершенно несомненно, что аналогичные инфразвуковые волны возникают при штормах в самой морской воде. Давно известно, что, например, медузы уходят подальше от берега задолго до приближения шторма, когда барометр еще не отмечает никаких его признаков; известно также, что мелкие ракообразные, носящие название морских блох, обычно прыгающие по морской

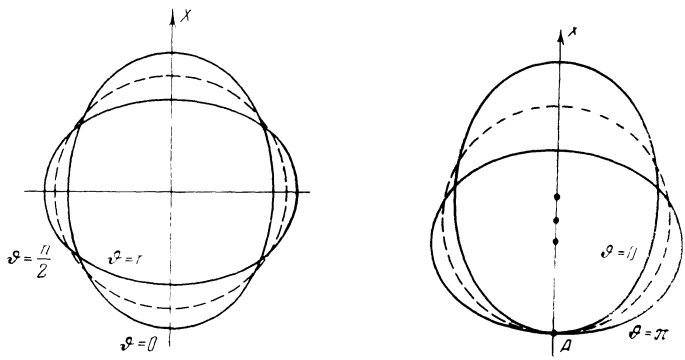


Рис. 515. Типы колебаний оболочки шара (по С. В. Доброклонскому)

гальке близ уреза воды, уходят вверх, на берег, подальше от воды, задолго до шторма, когда еще барометр не чувствует его приближения.

Однако для улавливания инфразвуковых штормовых предостережений в воде также требуется еще преодолеть ряд больших технических трудностей, хотя принципиальных препятствий к практическому решению задачи тут не существует.

В заключение настоящего параграфа посмотрим, как работало самое первое приспособление, которое позволило обнаружить голос моря по болевому ощущению в ухе, как работал шар-зонд, наполненный водородом?

Прежде всего необходимо полагать, что плотность энергии акустических волн в непосредственном соседстве с шаром значительно превышала плотность энергии в окружающем инфразвуковом поле.

Но ведь нечто аналогичное можно наблюдать в родственной области физики — в области рассеяния света крупными частицами. Действительно (см. стр. 708), поток энергии, рассеиваемой во все стороны такой частицей, может значительно превышать энергию света, падающую на плоскость экватора частицы (рассеивающая частица как бы попадает в резонанс).

Резиновый шар, наполненный водородом и играющий в отношении инфразвуковых волн роль рассеивающей частицы, тоже может попасть в резонанс. Как всегда, следует ожидать резонанс при такой частоте падающих волн, которая соответствует частоте собственных упругих колебаний системы.

Среди различных типов колебаний, которые может совершать оболочка шара, наполненного водородом, в данном случае могут иметь значение два типа, отмеченные С. В. Доброклонским [19] по схемам рис. 515. В первом из этих двух случаев, относящемся к совершенно свободному шару, происходит попеременно то сжатие по некоторой оси, сопровождаемое растяжением оболочки по экватору, то сжатие по этому экватору, сопровождаемое

удлинением по оси, перпендикулярной к его плоскости. Во втором случае один из полюсов шара A закреплен неподвижно, а потому колебания оболочки, тождественные с только что описанными (в первом случае), должны сопровождаться еще колебаниями всей массы шара в целом, колебаниями его центра тяжести.

Вариант первый рис. 515 был изучен Рэлеем применительно к колебаниям формы капель жидкости, находящихся под воздействием сил поверхностного натяжения. Второй вариант рис. 515 был исследован Доброклонским с учетом колебаний центра тяжести вдобавок к рэлеевским колебаниям системы. В результате Доброклонский получил для основного периода собственных колебаний T выражение

$$T = \pi a \sqrt{\frac{a}{\alpha}\left(\frac{13}{6}\delta + \frac{7}{6}\delta_1 + \frac{6m_1}{a}\right)}. \tag{166}$$

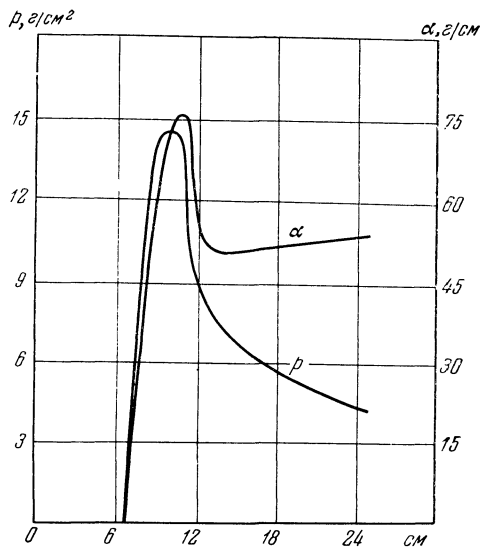


Рис. 516. Натяжение оболочки

Величина α, играющая здесь роль поверхностного натяжения, представляет собой натяжение резиновой оболочки шара-зонда, отнесенное к единице длины. Его можно определить, применив к надутому шару формулу Лапласа, которую прилагают обычно к мыльным пузырям:

$$\alpha = \frac{1}{2}ap. \tag{167}$$

Здесь p — избыточное давление внутри оболочки шара, a — его радиус, δ — плотность водорода, δ_1 — плотность воздуха, m_1 — масса оболочки, отнесенная к единице ее поверхности.

На рис. 516 изображена зависимость между радиусом шара и тем избыточным давлением, которое было измерено при этом значении радиуса. На той же диаграмме нанесена другая кривая, представляющая зависимость α от a; она найдена по формуле (167), в которую были подставлены соответствующие значения a и p.

На основании формул (166) и (167) можно записать

$$T = \pi a \sqrt{\frac{1}{p}\left(\frac{13}{3}\delta + \frac{7}{3}\delta_1 + 12\frac{m_1}{a}\right)}. \tag{168}$$

Вычислив по формуле (168) основной собственный период колебаний шара, Доброклонский сопоставил полученные значения с данными непосредственных опытов, проделанных им. Колебания оболочки возбуждались при помощи импульса, создаваемого при быстром закрывании лабораторной двери или при хлопке в ладони. В результате получилось очень хорошее согласие между теоретическими и экспериментальными значениями периода, в чем можно убедиться, взглянув на следующую табличку:

a, см	p, г/см²	$T_{\text{набл}}$	$T_{\text{выч}}$	$N_{\text{набл}}$	$N_{\text{выч}}$
13,5	7,17	0,075	0,0743	13,33	13,48
17,0	6,08	0,070	0,0852	14,30	11,78
20,2	5,28	0,094	0,0973	10,64	10,28

Итак, действительно, собственная частота колебаний шара-пилота оказывается порядка 10 *гц*, т. е. того же порядка, какой характеризует инфразвуковые волны голоса моря. Следовательно, надо полагать, что детектирующее действие шара по отношению к этим волнам объясняется резонансом шара на обнаруженные инфразвуковые волны [19].

§ 13. О звуках, издаваемых рыбами

Начало прошлого десятилетия внесло в акустику моря сведения о новом классе явлений в море, не связанных с нашей техникой, а обусловленных чисто природными причинами.

Прослушивание подводных шумов в океане в течение длительного времени обнаружило, что в воде стоит несмолкающий шум. Этот шум неизвестного происхождения не был связан с движением кораблей, менял свою силу в продолжение суток, а также в зависимости от сезона.

Естественно, возникло предположение, что шум вызывается какими-то обитателями океанских вод, мигрирующими в зависимости от времени дня и времени года. Дальнейшие исследования полностью подтвердили это предположение [20].

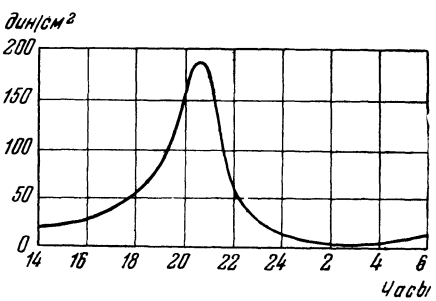


Рис. 517. Изменения силы шума в воде за сутки

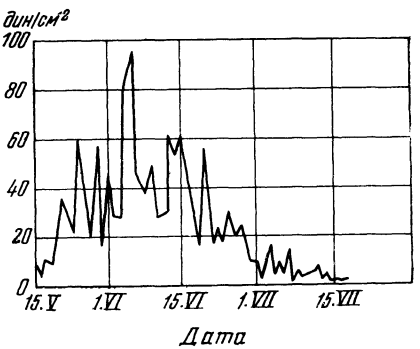


Рис. 518. Изменения максимальной силы шума за несколько месяцев

На рис. 517 воспроизведена диаграмма, показывающая, как меняется сила шума в продолжение суток. По оси абсцисс отложено время и отмечены часы, по оси ординат — общее давление звука, выраженное в динах на квадратный сантиметр. Как видим, наиболее шумным является в океане время около 21 *часа*. К полуночи шум значительно убывает и к 4 *час* почти смолкает, после чего вновь начинает возрастать.

На рис. 518 представлена диаграмма, свидетельствующая об изменениях максимальной (за сутки) силы шума в продолжение некоторых месяцев. Календарные даты отмечены под осью абсцисс. Характеристикой силы шума (максимальной) по-прежнему служит давление звука, выраженное в тех же единицах.

Диаграмма показывает, что в океане наиболее шумно в первых числах июня; в половине мая и в половине июля сила шума совсем незначительная.

Совместные исследования физиков и гидробиологов позволили обнаружить виновников всех этих шумов и записать на пленке их «голоса». После этого в лаборатории воспроизводился звук с полученной записи и происходил спектральный анализ этого звука.

На рис. 519 нанесены шесть спектральных кривых (*1*—*6*), соответствующих шести различным представителям морской фауны (табл. 27).

На рис. 519 по оси абсцисс отложены частоты звуковых колебаний в герцах, в логарифмической шкале; по оси ординат — давления звука, соответствующие спектральной полосе в одну октаву и выраженные в динах на квадратный сантиметр. Экспериментальные точки нанесены соответственно в середине каждой октавы, для которой определено звуковое давление. Масштабы ординат кривых *1* и *2* резко отличаются от масштабов прочих кривых. Они приведены слева (для кривых *1* и *2*) и справа (для кривых *3*, *4*, *5* и *6*) от диаграммы.

Опыты показали, следовательно, что некоторые рыбы издают звук, характеризующийся довольно узкой спектральной полосой, и притом в области музыкальных частот, с пиками около 200 и 500 *гц*.

Разумеется, не следует придавать особого значения абсолютным величинам звукового давления, характеризующего силу шумов в этих опытах: весьма неопределенны были расстояния от воспринимающего гидрофона до животного в преобладающем числе опытов.

Таблица 27

№ п/п	Русское (переводное) название	Латинское название
1	Жаба-рыба	*Opsanus tau*
2	Морской петух	*Prionotus carolinis*
3	Рыба-свинка	*Ortopristis chrystopterus*
4	Рыба-квакун	*Micropogon ondu'atus*
5	Горбыль-пятно	*Leiostomus xanthurus*
6	Рыба-кошка	*Felichtys felis*

Примечание. Все перечисленные рыбы живут в Атлантическом океане и не встречаются в наших отечественных морях; поэтому русские названия их приведены либо по аналогии с родственными формами, обитающими в наших морях, либо в соответствии с иностранными названиями.

Некоторые рыбы либо совсем не издавали звука в неволе, либо издавали звук, значительно более слабый, чем в природных условиях. В природных же условиях, понятно, нельзя было обеспечить сколько-нибудь точное определение расстояний до исследуемой рыбы.

Во всяком случае можно лишь установить, что наиболее интересными были жаба-рыба (*Opsanus tau*) и рыба-квакун (*Micropogon ondulatus*). Последняя рыба издавала звук, весьма схожий с боцманской дудкой [20].

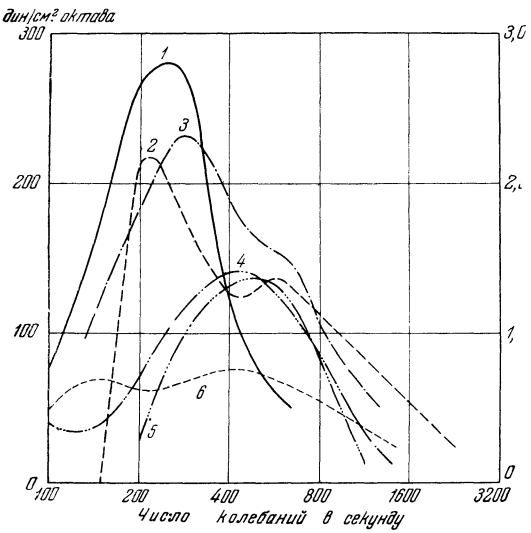


Рис. 519. Спектральные кривые шума для различных видов рыб

Очень интересные сведения о звуках, издаваемых рыбами, можно найти в сравнительно недавно вышедшей книге В. Р. Протасова [21]. Там изложены методы исследования биоакустики рыб; сказано о физических особенностях звуков рыб в связи с устройством и работой их органов звучания; описаны органы слуха у рыб; сказано о чувствительности рыб к различным звуковым частотам, об остроте их слуха; отмечена способность рыб различать направления на источники звука и способность выделять звуки на фоне шумов; сделано сравнение звуков, издаваемых рыбами и воспринимаемых ими.

В книге проанализировано биологическое значение звуков, издаваемых рыбами; сказано о специфике звуков, которые издаются рыбами в тех или иных условиях, в тех или иных случаях их жизни. Отдельная глава посвящена биологическим и практическим сторонам биоакустики рыб, в том числе практическим приемам привлечения и отпугивания рыб в условиях рыбных промыслов и рыбоводства.

ГЛАВА ВОСЬМАЯ

МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА МОРЯ

§ 1. Молекула воды

Среди всех веществ, изучаемых физиками и физико-химиками, вода во многих отношениях является самым трудным. Недаром еще совсем недавно один из физиков заявил, что нет в мире более «грязного» вещества, чем чистая вода, разумеется, «грязного» в том смысле, что физические явления в ней протекают по чрезвычайно сложным путям, обнаруживая на каждом шагу различные аномалии воды.

С этими аномалиями воды приходится сталкиваться в своей работе не только физику-теоретику, но и геофизику-мореведу, для которого вода является основной средой, где протекают все интересующие его процессы.

До самого последнего времени многие из них были совершенно непонятны, и только современные мощные методы, позволяющие физику зондировать молекулы вещества, дали возможность разобраться в их происхождении.

Вот почему геофизик-моревед вместе с физиками-теоретиками должен глубоко проникнуть в недра молекулы воды и разобраться как в расположении атомов в молекуле, так и в расположении самих молекул в водной массе.

Современное исследование физических свойств воды показало, что корни многих из них лежат в самой молекуле воды, в ее строении. В свою очередь строение этой простой молекулы в настоящее время освещено со всех сторон.

В сущности первые шаги к выяснению внутримолекулярной структуры воды были сделаны уже тогда, когда было создано учение о степенях свободы и о распределении молекулярной энергии между этими степенями свободы. Уже тогда оказалось возможным в первом приближении решить вопрос о том, как расположены два атома водорода (точнее, два положительных иона водорода) относительно атома кислорода (точнее, отрицательного иона кислорода) в трехатомной молекуле воды. Именно, расположены ли они по схеме рис. 520 или по схеме рис. 521?

Вообще говоря, в природе существуют трехатомные молекулы и первого и второго типов. Различие между ними всплывает при исследовании теплового движения. Как бы сложно ни было движение каждой молекулы, его всегда можно разложить на шесть составляющих: на поступательные перемещения вдоль трех осей X, Y и Z и на вращения вокруг каждой из этих трех осей.

Пусть скорости поступательного движения равны соответственно $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$, а угловые скорости вращательного движения $\dot{\omega}_x$, $\dot{\omega}_y$, $\dot{\omega}_z$, где точки над буквами означают производные по времени. В таком случае полная кине-

тическая энергия молекулы E_k должна выражаться так:

$$E_k = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 + \frac{1}{2} m\dot{y}^2 + \frac{1}{2} m\dot{z}^2 + \frac{1}{2} I_x \dot{\omega}_x^2 + \frac{1}{2} I_y \dot{\omega}_y^2 + \frac{1}{2} I_z \dot{\omega}_z^2, \quad (1)$$

где I_x, I_y и I_z — величины моментов инерции молекулы относительно соответственных осей вращения, а m — масса молекулы.

Энергия эта, как видим, слагается из шести частей, соответствующих шести отдельным степеням свободы.

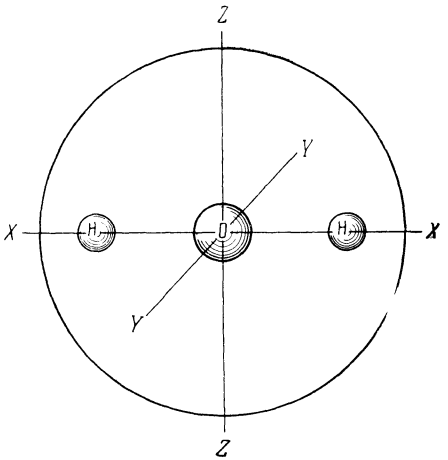


Рис. 520. Модель молекулы воды (неправильный вариант)

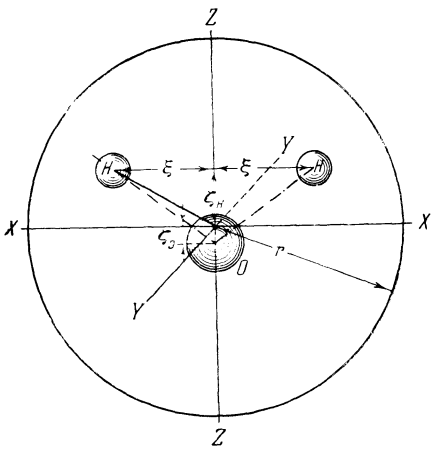


Рис. 521. Модель молекулы воды (правильный вариант)

Как известно, по Максвеллу и Больцману, на каждую из этих степеней свободы приходится одинаковое количество энергии и притом всегда равняющееся $^1/_2\, kT$, где k — константа Больцмана,

$$k = 1{,}380 \cdot 10^{-16}\ эрг/град \cdot моль, \quad (2)$$

а T — абсолютная температура. Но в таком случае полная кинетическая энергия исследуемой молекулы должна равняться

$$E_k = \frac{6}{2} kT = 3kT. \quad (3)$$

Полная кинетическая энергия N_A молекул, содержащихся в грамм-молекуле любого газа ($N_A = 6{,}024 \cdot 10^{23}$—так называемое число Авогадро), выразится так:

$$W = N_A E_k = 3NkT = 3RT. \quad (4)$$

Но, как известно, с W непосредственно связана теплоемкость газа при постоянном объеме

$$C_v = \frac{dW}{dT}. \quad (5)$$

Из (4) и (5) следует, что теплоемкость C_v исследуемого трехатомного газа будет

$$C_v = 3R. \quad (6)$$

Однако это выражение было выведено исходя из условия, что полная кинетическая энергия отдельной молекулы задана шестичленным полиномом (1). Такой полином в действительности может быть написан применительно к трехатомной молекуле типа рис. 521. Но легко видеть, что в том случае,

когда трехатомная молекула построена по схеме рис. 520, момент инерции I_x относительно оси X оказывается исчезающе малой величиной по сравнению с остальными: ведь он практически обусловлен величиной квадрата радиуса инерции ядра относительно оси, проходящей через его центр, т. е. величиной порядка 10^{-26}, тогда как моменты инерции I_y и I_z зависят от квадратов радиусов инерции порядка квадрата радиуса самого атома, т. е. порядка 10^{-16}; следовательно, I_x должен быть здесь примерно в 10^{10} раз меньше, чем I_y или I_z.

Но в таком случае кинетическая энергия молекулы, построенной по схеме рис. 520, должна выражаться не шестичленным, а пятичленным полиномом [в выражении (1) придется вычеркнуть член, содержащий I_x]. А это в свою очередь поведет к тому, что полная кинетическая энергия молекулы типа рис. 520 будет, в отличие от типа рис. 521, выражаться так:

$$E_k = \frac{5}{2} kT. \tag{7}$$

Вместо (4) выражение для кинетической энергии моля напишется так:

$$W = \frac{5}{2} RT. \tag{8}$$

А следовательно, молекулярная теплоемкость при постоянном объеме будет тоже иная:

$$C_v = \frac{5}{2} R. \tag{9}$$

В соотношения (6) и (9) можно подставить числовое значение постоянной R:

$$R = 8{,}313 \cdot 10^7 \ эрг/град \cdot моль = 1{,}986 \ кал/град \cdot моль. \tag{10}$$

Тогда окажется, что молекулярная теплоемкость при постоянном объеме C_v для газа с молекулами типа рис. 521 будет равна

$$C_v = 5{,}96 \ кал/град \cdot моль, \tag{11}$$

а для газа с молекулами типа рис. 520

$$C_v = 4{,}97 \ кал/град \cdot моль. \tag{12}$$

Точные измерения обнаружили, что у некоторых трехатомных газов, например у CO_2 (углекислого газа) и N_2O (закиси азота), величина C_v при низких температурах стремится к значению 4,97. Это показывает, что их молекулы построены по типу рис. 520. Напротив, у водяного пара C_v стремится при низких температурах к теоретически вычисленной величине 5,96, а следовательно, необходимо заключить, что молекулы водяного пара построены по типу рис. 521.

Шар большего радиуса изображает на рис. 521 ядро кислорода, а шары меньшего радиуса — водородные ядра. Вокруг этих ядер как-то движутся электроны, часть которых образует своего рода электронную оболочку (о ней будет речь ниже), а другая часть создает связь между водородными и кислородными атомами.

Но таково ли строение молекулы воды в жидкой фазе?

Чтобы ответить на этот вопрос, придется разобраться именно в характере тех связей, которые удерживают все составные части молекулы воды. Эти связи, как известно, электрического происхождения: вступая в химическое соединение, при образовании воды, атом кислорода присоединяет к своей системе по одному электрону, отнятому от атомов водорода, и тем самым превращается в отрицательно заряженный ион O^{2-}. В свою очередь оба водородных атома, лишившись электронов, превращаются в положительно заряженные ионы H^+ и H^+.

Если бы в жидкой фазе молекулы воды приняли форму рис. 520, то результирующий электрический момент их оказался бы равным нулю: попав в равномерное электрическое поле, такая молекула находилась бы в безразличном равновесии, как бы ни была ориентирована ее ось по отношению к вектору напряженности поля.

Однако в действительности молекулы воды обладают весьма значительным результирующим электрическим моментом: попадая в электрическое поле, они сами воздействуют на это поле, давая сильную поляризацию, которая формально характеризуется большой диэлектрической постоянной ($\varepsilon = 81$), присущей воде. Нетрудно видеть, что такой большой результирующий момент неизбежен именно при строении молекулы по типу рис. 521: ведь попав в равномерное электрическое поле, подобная молекула непременно будет стремиться повернуться таким образом, чтобы ось Z совпала с вектором напряженности поля. Если по условию большой шар изображает отрицательно заряженный ион O^{2-}, то он будет стремиться направить ось Z навстречу электрическому вектору.

Итак, на основании только что высказанных соображений следует признать, что и в жидкой фазе молекулы воды оказываются построенными по типу рис. 521. Остается лишь определить основные константы, основные элементы такой структуры: расстояния между центрами ядер H и O, а также угол HOH.

Эти определения в настоящее время сделаны с весьма большой точностью. Они основаны на некоторых свойствах спектров поглощения. Как известно, подобные спектры, полученные для паров воды, содержат ряд полос, довольно широких, расплывающихся в сторону низких частот и резко ограниченных со стороны высоких частот. При детальном изучении оказывается, что каждая полоса состоит из большого количества отдельных линий, все более и более учащающихся по мере приближения к резко очерченному краю, к так называемой голове полосы.

Эти полосы обязаны своим происхождением вращательному движению атомных ядер, входящих в состав молекулы [1], вокруг осей X, Y или Z. Частоты, соответствующие этим линиям, определяются уравнением, вытекающим из квантовой теории спектров:

$$\nu = A \pm 2Bn + Cn^2, \tag{13}$$

причем

$$A = \nu_k + \nu_e + \frac{h}{8\pi^2 I}, \tag{14}$$

$$B = \frac{h}{8\pi^2 I}, \tag{15}$$

$$C = \frac{h}{8\pi^2}\left(\frac{1}{I'} - \frac{1}{I}\right). \tag{16}$$

Здесь ν_k — собственная частота ядра, ν_e — собственная частота электрона, I и I' — значения момента инерции системы до и после излучения, n — так называемое квантовое число (некоторое целое число, характеризующее данный процесс излучения) и, наконец, h — известная универсальная постоянная Планка:

$$h = 6{,}624 \cdot 10^{-27}\ эрг \cdot сек,$$

обладающая размерностью действия.

На рис. 522 приведены графики, выражающие закономерности в спектрах водяного пара: связь между частотой, характеризующей некоторую линию в пределах полосы, и соответственным квантовым числом n. На диаграмме, помимо положительной ветви, соответствующей верхнему знаку в формуле (13), и отрицательной ветви, соответствующей нижнему

знаку, видна еще третья ветвь — «нулевая», которая соответствует уравнению (13) с пропущенным вторым членом.

Кривые, проведенные между рядами экспериментальных точек, позволяют вычислить по формулам (13) — (16) значения момента инерции I. Аналогично обрабатываются и элементы, найденные для других полос в спектре водяного пара. В результате оказывается возможным вычислить моменты инерции молекулы воды относительно всех трех координатных осей.

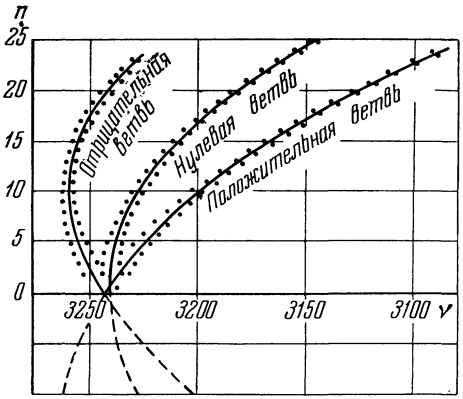


Рис. 522. Закономерности в спектрах водяного пара

Но ведь, приняв обозначения рис. 521, можно написать выражения для этих известных моментов инерции через величины ξ, ζ_H и ζ_O, подлежащие определению:

$$I_x = 2m_H\zeta_H^2 + m_O\,\zeta_O^2,$$
$$I_y = 2m_H(\xi^2 + \zeta_H^2) + m_O\,\zeta_O^2; \qquad I_z = 2m_H\xi^2. \tag{17}$$

К сожалению, лишь два из них являются независимыми друг от друга, ибо, как известно, всегда выполняется общее условие

$$I_y = I_x + I_z. \tag{18}$$

Следовательно, для определения трех неизвестных (ξ, ζ_H, ζ_O) уравнений (17) недостаточно. Однако недостающее уравнение можно написать, руководствуясь измерениями электрического момента M_c молекулы воды:

$$M_c = 2eF(\zeta_H + \zeta_O). \tag{19}$$

Здесь e — элементарный электрический заряд (заряд электрона),

$$e = 4{,}803\cdot10^{-10}\,[CGSE], \tag{20}$$

а F — некоторая функция от $(\zeta_H + \zeta_O)$.

Если измерена величина M_c, то (19) совместно с (17) вполне определяют упомянутые основные размеры. Вычисления показывают, что они таковы*:

$$\xi = 0{,}75\text{ Å}; \qquad \zeta_H = 0{,}43\text{ Å}; \qquad \zeta_O = 0{,}13\text{ Å}. \tag{21}$$

Из геометрического построения вытекает, что при этом

$$\angle\,HOH \approx 106°,\ \overline{OH} = 0{,}96\text{ Å}.$$

Так как уравнение (19) лишь приближенное (электрический момент зависит не только от расположения ядер, но и от расположения электронов), то из

* Как известно, один онгстрем (Å) равен 10^{-8} *см*.

всех геометрических элементов наиболее точно определяется расстояние ξ — из третьего уравнения системы (17). Оба других расстояния (ζ_H и ζ_O), а стало быть, и угол HOH, и «длина гидроксила» (OH) вычислены лишь приближенно.

Итак, в молекуле воды атомные ядра располагаются по вершинам некоторого равнобедренного треугольника, причем центр инерции атома лежит на высоте этого треугольника, недалеко от вершины, занимаемой кислородным ядром. Вокруг этого центра инерции как-то движутся электроны; естественней всего представлять себе электронную оболочку в виде сферы, радиус которой r может быть определен на основании дополнительных соображений, изложенных в § 3. Пока, забегая вперед, можно отметить, что по современным вычислениям $r = 1{,}38$ Å.

§ 2. Роль изотопов кислорода и водорода

Оба химических элемента, входящие в состав воды, послужили, как известно, основанием для построения целой системы классификации элементов по их атомным весам. Известно также, что первоначально атомным весом называлось отношение веса данного атома к весу водорода, причем предполагалось, что атом кислорода ровно в 16 раз тяжелее атома водорода. Атомные веса всех остальных элементов в большинстве случаев определялись путем исследования их кислородных соединений, причем всегда атомный вес кислорода принимался в точности равным 16. Однако впоследствии выяснилось, что атомный вес самого водорода определен не совсем точно: он преувеличен на 0,777%. Следовательно, если был бы сохранен первоначальный обычай относить все веса атомов к весу атома водорода, то пришлось бы изменять все атомные веса, определенные при исследовании кислородных соединений. Химики пошли по иному пути: условно сохранили за атомным весом кислорода его прежнее значение 16, сохранив тем самым все цифры, достаточно точно найденные для других атомов. Но для водорода, разумеется, пришлось принять атомный вес отличный от единицы, именно 1,00777.

К началу нашего столетия закончились все споры, возникшие в среде химиков в связи с этим первым пересмотром атомных весов. Однако вскоре возникла необходимость в новом их пересмотре. Это было вызвано работами, в которых удалось найти методы для определения не условных атомных весов, а абсолютной массы атомных ядер: атомное ядро было взвешено, создан прибор, позволяющий определять массу атомных ядер с точностью до одной двадцатитысячной.

В этом приборе поток исследуемых частиц (ионов) пропускается в электрическом и в магнитном полях, причем оба поля вызывают отклонения частиц от первоначальной прямолинейной траектории, зависящие, с одной стороны, от скорости полета, а с другой стороны, от массы летящей частицы. В результате, пролетев некоторый определенный путь, частицы ударяются в чувствительный слой фотографической пластинки, вставленной в прибор, и оставляют на ней след, разлагая серебряные соли и тем самым вызывая почернение при проявлении пластинки. Прибор так рассчитан, что положение пятна на пластинке всецело определяет собой массу летящей частицы. Если в потоке несутся частицы различного рода, то и на пластинке запечатлеется несколько следов, по которым можно распознать природу этих частиц.

Подобные исследования неожиданно обнаружили, что те вещества, которые прежде считались простыми химическими элементами, в действительности являются смесью нескольких элементов — спутников, обладающих близкими атомными весами. Так, прежде всего выяснилось, что в природе не существует хлора с атомным весом 35,46, а существует смесь нескольких «хлоров» с атомными весами 35, 36, 37 и даже 38. Подобные же спутники бы-

ли обнаружены и у других элементов; их называют *изотопами* соответствующих элементов.

Элементы, непосредственно интересующие нас,— кислород и водород — дольше других оставались нерасчлененными; у них, казалось бы, не было оснований предполагать существования изотопов. Однако в 1931 г. очередь дошла до кислорода; было обнаружено, что, помимо кислорода с атомным весом 16, существуют еще изотопы с атомными весами 17 и 18. Пропорция, в которой они смешаны, по-видимому, такова [2]:

$$O^{16} : O^{17} : O^{18} = 1 : \frac{1}{5 \times 630} : \frac{1}{630} . \tag{22}$$

Итак, строго говоря, лишь один из изотопов (наиболее распространенный) обладает атомным весом 16. Что же касается всей смеси, которую до тех пор считали химически чистым кислородом, то ей в действительности следует приписать средний атомный вес 16,0035.

Но в таком случае оказывается необходимым снова вернуться к атомному весу водорода, поскольку вновь поколебалось основание, служившее для его вычисления. Химические методы в свое время показали, что между массой m_H газа, носившего название чистого водорода, и массой m_O газа, носившего название чистого кислорода, существует отношение

$$\frac{m_H}{m_O} = \frac{1{,}00777}{16} . \tag{23}$$

Теперь непосредственные измерения показали, что масса настоящего кислорода с атомным весом 16 на самом деле в 1,00022* раза меньше, чем осредненная масса кислорода.

Следовательно, отношение массы водорода к массе действительного атома O_{16} кислорода будет равно

$$\frac{m_H}{m_O^{16}} = \frac{1{,}00777}{16} \times 1{,}00022 = \frac{1{,}00799}{16} . \tag{24}$$

Если бы водород был свободен от изотопов, то соотношение это оказалось бы справедливым и применительно к тем ядрам водорода, полет которых в свое время был непосредственно исследован Астоном в его приборе. Однако из своих опытов этот автор заключил, что

$$\frac{m_H^1}{m_O^{16}} = \frac{1{,}00778}{16} , \tag{25}$$

где m_H^1 — масса реального атома водорода.

Так как указанные выше измерения были сделаны с исключительной точностью, то расхождение между (24) и (25) не может быть объяснено погрешностями опытов. Следовательно, приходится заключить, что газ, который считался химически чистым водородом, в действительности также состоит из нескольких изотопов. Если допустить существование изотопа H^2, обладающего ядром, масса которого вдвое превышает массу ядра H^1, то пропорция, в которой смешаны оба изотопа, входящие в состав водорода, будет такова:

$$H^1 : H^2 = 1 : \frac{1}{4500} . \tag{26}$$

Концентрация эта слишком мала для того, чтобы можно было непосредственно обнаружить «тяжелый» изотоп каким-либо способом в нормальном

* $\frac{16}{16{,}0035} = \frac{1}{1{,}00022}$.

водороде, и попытки, предпринимавшиеся в этом направлении, не увенчались успехом. Вот почему физики прибегли к предварительному обогащению смеси тяжелым изотопом. Они подвергли жидкий водород фракционной перегонке. При этом скорее других должен был отгоняться легкий изотоп, обладающий наибольшей упругостью пара. Значительно медленнее должен был перегоняться изотоп H^2 и, наконец, еще медленнее изотоп H^3, если он существует. Надо отметить, что существование в одной двухатомной молекуле водорода одновременно двух «тяжелых» атомов чрезвычайно мало вероятно. Поэтому приходится считаться лишь с возможностью существования водородных молекул типа H^1H^1, H^1H^2 и H^1H^3. Теория показывает, что упругости пара, характеризующие эти три типа молекул, должны быть связаны между собой соотношением

$$p_{11} : p_{12} : p_{13} = 1 : 0{,}37 : 0{,}29. \tag{27}$$

Но если это так, то совершенно естественно было ожидать обогащения смеси тяжелыми изотопами по мере испарения жидкого водорода. Наличие этих тяжелых изотопов упомянутые исследователи попытались установить спектрографическим путем. При этом они исходили из теоретических соображений, что положение спектральных линий так называемой бальмеровской серии зависит не только от движения электронов, но и от движения ядер водорода вокруг общего центра тяжести системы ядро — электрон.

По теории атома так называемая ридберговская постоянная, характеризующая эту спектральную серию водорода, выражается через постоянную Планка h, заряд электрона e, его массу m и массу ядра $m_{\text{н}}$ следующим соотношением:

$$R = \frac{2\pi^2 m e^4}{h^3\left(1 + \dfrac{m}{m_{\text{н}}}\right)}. \tag{28}$$

Подставив в (28) числовые значения массы ядра $m^1_{\text{н}}$ и всех остальных величин, нетрудно получить

$$R_{\text{н}} = 109\,677{,}79 \ см^{-1}. \tag{29}$$

Однако, подставив в (29) числовое значение массы ядра H^2, вдвое большее, чем для ядра H^1, найдем, что

$$R_{\text{н}^2} = 109\,707{,}56 \ см^{-1}. \tag{30}$$

Подставив же числовое значение массы $m^3_{\text{н}}$, втрое большей, чем масса $m_{\text{н}}$, найдем

$$R_{\text{н}^3} = 109\,717{,}5 \ \ см^{-1}. \tag{31}$$

Как и при сопоставлении выражений (24) и (25), здесь придется отметить, что современная экспериментальная техника позволяет открыть расхождения, значительно меньшие, чем расхождения между величинами (29), (30) и (31). Для того чтобы обнаружить смещение спектральных линий, соответствующих (30) и (31), относительно линий, соответствующих общеизвестной постоянной (29), цитированные исследователи воспользовались большой дифракционной решеткой с фокусным расстоянием в 640 *см* и дисперсией 1,3 Å на 1 *мм* в спектре второго порядка. Фотографии спектров исследовались посредством регистрирующего микрофотометра, который автоматически записывал на фотобумаге степень почернения в различных частях пластинки — там, где на ней вышли изображения спектральных линий. Такой микрофотометр дает возможность растянуть масштаб частот во много раз по сравнению с натуральным масштабом самого спектра: каждая линия в ширину занимает на записи значительно больше места, чем занимала она на первоначальном снимке.

На рис. 523 воспроизведены три записи микрофотометра для трех спектров фракционно перегнанного водорода. Верхняя диаграмма соответствует образцу, который был получен из остатков от 6 *л* жидкого водорода, испарявшегося под атмосферным давлением. Средняя и нижняя диаграммы были сняты со спектра газа, взятого из остатков от 4 *л* жидкого водорода, который испарялся при сильно пониженном давлении. Ординаты, нанесенные на диаграмму, имеют следующее значение: та из них, под которой стоят буквы H_β^1, указывает положение основной спектральной линии β «легкого» водорода H^1 (положение максимума на кривой излучения, пик которой не уместился на чертеже). Аналогично ординаты H_β^2 и H_β^3 отмечают те места, где экспериментаторы ожидали появления смещенных линий тяжелого водорода H^2 и H^3, исходя из соотношений (30) и (31).

Как видим, линия, соответствующая изотопу H^2, вышла на регистрации чрезвычайно резко, особенно на нижней, и притом вышла именно там, где ее ожидали экспериментаторы.

Таким образом, существование тяжелого водорода с двойной массой оказалось доказанным.

Напротив, опыт пока не обнаружил существования изотопа H^3: на диаграммах почернения незаметно никаких следов той линии, которая всплыла бы на спектре подобно линии H^2.

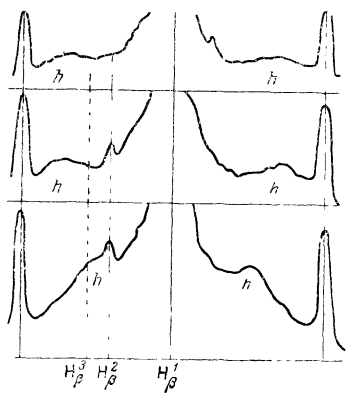


Рис. 523. Спектры водорода

Подводя итог сведениям об изотопах кислорода и водорода, нужно отметить, что вместо одной молекулы воды, которую когда-то знали химики, современная химическая физика открыла вереницу молекул воды, обладающих весьма разнообразными значениями молекулярного веса. Если принять во внимание, что обнаружены изотопы O^{16}, O^{17}, O^{18}, H^1, H^2, то станет очевидным, что в природе могут встречаться девять различных видов молекулы воды, именно:

	Молекулярный вес		Молекулярный вес
$H_2^1O^{16}$	18	$H^1O^{18}H^2$	21
$H_2^1O^{17}$	19	$H_2^2O^{16}$	20
$H_2^1O^{18}$	20	$H_2^2O^{17}$	21
$H^1O^{16}H^2$	19	$H_2^2O^{18}$	22
$H^1O^{17}H^2$	20		

Разумеется, вероятность существования всех перечисленных видов молекулы воды далеко не одинаковая. В частности, в природных водах «кислородно-тяжелая» вода встречается, по-видимому, в концентрациях значительно бóльших, чем «водородно-тяжелая» (по мнению некоторых авторов, в 9 раз бóльших), что является совершенно естественным на основании соотношений (22) и (26).

В табл. 28 сведены константы для молекул H_2O и H_2^2O.

До сих пор фактический материал, касающийся природных вод, собран еще в недостаточном количестве, и пока еще рано говорить о распространенности тяжелых изотопических видов воды. Но уже и сейчас представляется совершенно очевидным, что в некоторых условиях тяжелая вода должна систематически накопляться в природных водоемах. Так, она безусловно

Таблица 28

	H_2O	H_2^2O
Константы решетки близ точки плавления $(Å)_c^h$	4,525	4,505
Объем ячейки ($Å^3$)	131,0	128,3
Относительный молекулярный объем при 20°	1	1,0037
Плотность при 20°	0,9982	1,1056
Точка замерзания	0	3,8
Точка кипения	100	101,42
Температура наибольшей плотности	4	11,6
Теплота испарения	λ	$\lambda+256$
Диэлектрическая константа при 20°	82	80,5
Вязкость при 20°	10,82	14,2
Поверхностное натяжение	72,75	67,8
Коэффициент преломления для линии D при 20°	1,3329	1,3281
Подвижность при 18°:		
K^+	64,2	54,5
Cl^-	65,2	55,3
H^+	315,2	213,7
Растворимость в *г/л* при 25°:		
NaCl	359	305
$BaCl_2$	357	289

должна под действием гравитационного разделения опускаться на дно в глубоких озерах, лишенных или почти лишенных придонной циркуляции. Она, по всей вероятности, должна оседать ко дну в тех частях мирового океана, где имеются «непроточные» впадины, занятые стоячей или почти стоячей водой.

§ 3. Стереометрия воды и льда

Еще совсем недавно жидкости и, в частности вода, считались типичными представителями аморфных тел. Совсем недавно предполагалось, что молекулы воды движутся в полном беспорядке и прилегают одна к другой так близко, как только могут прилегать наиболее компактно уложенные шарики.

Первое отступление от такого взгляда было вызвано исследованиями поверхностных слоев и жидких пленок (о них см. § 10); оказалось необходимым допустить, что на поверхности жидкости, в частности воды, молекулы образуют правильный «частокол», вполне схожий с тем, который имеется на поверхности кристаллического твердого тела.

Необходимость такого допущения диктовалась мотивами из области молекулярной физики поверхностного слоя, учения о поверхностной энергии, о поверхностноактивных веществах, словом, из той области, где применяется обычная методика химической физики.

Однако в руках современного физико-химика оказались методы более мощные, позволяющие проникнуть не только в поверхностный слой, но и в самую толщу жидкости, зондировать жидкую среду и определять взаимное расположение ее молекул. Это — методы рентгенографического анализа, давно применявшиеся к исследованию строения твердых кристаллов и применяющиеся теперь с большим успехом к исследованию жидкостей.

Как известно, первые работы в этом направлении охватывали лишь ограниченный класс кристаллов, заключающих в себе ионы *тяжелых* элементов.

Легкие элементы долго ускользали от исследователя, не давая следов на фотографиях рентгеновских спектров. Однако быстрое развитие рентгенографии привело к преодолению всех первоначальных трудностей; теперь удается обнаруживать в спектрах следы весьма легких элементов, удается изучать порошки и жидкости.

В свете этих новых исследований строение воды представляется совсем иным, в корне отличным от представлений недавнего времени. Строение ее оказывается как бы *кристаллическим* [1]. Но прежде чем говорить о весьма веских экспериментальных доводах в пользу такого предположения, необходимо разобраться в тех стереометрических схемах, пригодность которых придется обсуждать.

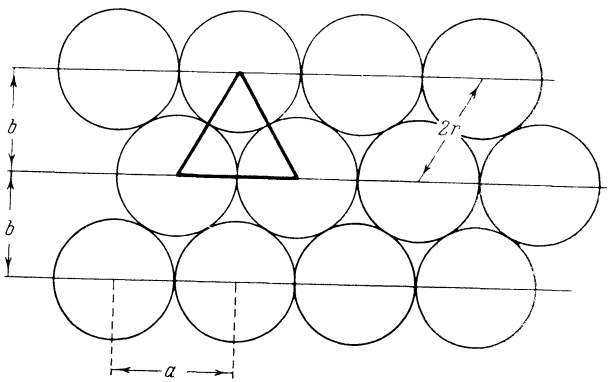


Рис. 524. Плотная упаковка молекул

Рассмотрим сперва старую схему, согласно которой молекулы воды упакованы наиболее плотно. Она изображена на рис. 524. Форму молекул будем считать шарообразной.

Как видно, для наиболее плотной упаковки необходимо шары разложить рядами, причем каждый из шаров следующего ряда касается одновременно двух шаров предыдущего ряда. Его центр вместе с центрами этих двух шаров образует вершины равностороннего треугольника со сторонами, равными удвоенному радиусу шара. Но в таком случае прямая, проходящая через центры шаров второго ряда, должна отстоять от такой же прямой, проведенной через центры шаров первого ряда, на расстояние

$$b = r\sqrt{3}. \tag{32}$$

Наложим теперь новый слой шаров на тот слой, который только что был рассмотрен. Для наибольшей компактности укладки каждый шар нового слоя, очевидно, должен одновременно касаться трех шаров нижнего слоя так, как представлено на вспомогательной схеме рис. 525. Центр этого шара вместе с центрами трех нижних шаров образует вершины некоторой пирамиды, основанием которой служит равносторонний треугольник со сторонами, равными удвоенному радиусу шара, и ребра которой (идущие к центру верхнего шара) все равны тоже удвоенному радиусу.

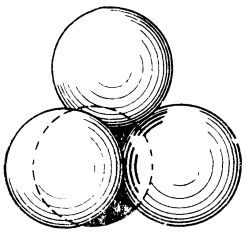
Из простых геометрических соотношений вытекает, что высота этой пирамиды будет

$$c = 2r\sqrt{\frac{2}{3}}. \tag{33}$$

[1] Не следует думать, что в водной среде существует такая же кругом простирающаяся решетка, как в каком-нибудь классическом кристалле: упорядоченное расположение молекул простирается лишь на сравнительно ограниченное расстояние от данной молекулы.

Но ведь высота эта выражает расстояние между плоскостью, проходящей через центры шаров нижнего слоя, и плоскостью, проходящей через центры шаров слоя, лежащего над ним.

Вообразим теперь прямоугольный параллелепипед, в основании которого лежат n_2 рядов шаров с n_1 шарами в каждом ряду и по высоте которого положены n_3 слоев (в каждом слое содержится столько же рядов и столько же шаров, как и в нижнем слое). Тогда, как легко видеть, элементы такого параллелепипеда, на основании (32) и (33), выразятся следующим образом:



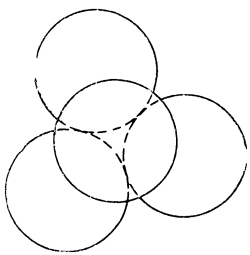


Рис. 525. Наложение слоев

$$\begin{aligned} &\text{длина } 2n_1r,\\ &\text{ширина } n_2r\sqrt{3},\\ &\text{высота } 2n_3r\sqrt{\tfrac{2}{3}}. \end{aligned} \tag{34}$$

Следовательно, объем его Q будет

$$Q = \left(2\sqrt{3}\,2\sqrt{\tfrac{2}{3}}\right) n_1n_2n_3r^3 = 4\sqrt{2}\,Nr^3, \tag{35}$$

где N — полное число шаров, заключенных внутри параллелепипеда. В частном случае, если под N мы будем подразумевать число молекул в 1 $г$ воды, а под r — радиус молекулы, то Q выразит собой удельный объем, которым обладала бы вода, если бы ее молекулы были упакованы наиболее плотно по схемам рис. 524 и 525.

Но, осуществив такую подстановку числовых значений и проделав вычисление, мы получили бы для удельного объема воды величину

$$Q = 0{,}5, \tag{36}$$

которая, разумеется, весьма далека от истины.

Рассмотрим теперь иную схему расположения молекул, изображенную на рис. 526,*а*. Здесь четыре молекулы A, D, F, G, окружающие пятую B, образуют вершины тетраэдра, элементы которого определяются из простых геометрических соотношений. Для удобства они отмечены на отдельном чертеже (рис. 526,*б*), из которого видно, что

$$\begin{aligned} &GD = a = 4r\sqrt{\tfrac{2}{3}},\\ &EF = b = 2r\sqrt{2},\\ &BC = c_1 = \tfrac{2}{3}r,\\ &BA = c_2 = 2r,\\ &\angle ABF = 109°. \end{aligned} \tag{37}$$

Пусть шары G и D лежат в одном из продольных рядов новой схемы (рис. 526,*а*). Тогда n_1 таких шаров займут протяжение, равное

$$n_1a = 4n_1r\sqrt{\tfrac{2}{3}}. \tag{38}$$

Следующий ряд, на основании (37), расположится на расстоянии b от первого ряда, а потому n_2 таких рядов займут в ширину протяжение

$$n_2b = 2n_2r\sqrt{2}. \tag{39}$$

Расстояние от нижнего слоя шаров до следующего над ним, на основании (37), будет равняться: $c_1 = \frac{2}{3} r$, а расстояние от второго слоя до третьего будет равно: $c_2 = 2r$. Следовательно, n_3 слоев должны будут занять в высоту протяжение

$$n_3 \left(\frac{c_1 + c_2}{2} \right) = \frac{4}{3} n_3 r. \tag{40}$$

На основании (38) — (40) объем параллелепипеда, содержащего n_3 слоев с n_2 продольными рядами и с n_1 шарами в каждом ряду, выразится так:

$$Q = \left(4 \sqrt{\frac{2}{3}}\, 2 \sqrt{2}\, \frac{4}{3} \right) n_1 n_2 n_3 r^3 = \frac{64}{3\sqrt{3}} N r^3. \tag{41}$$

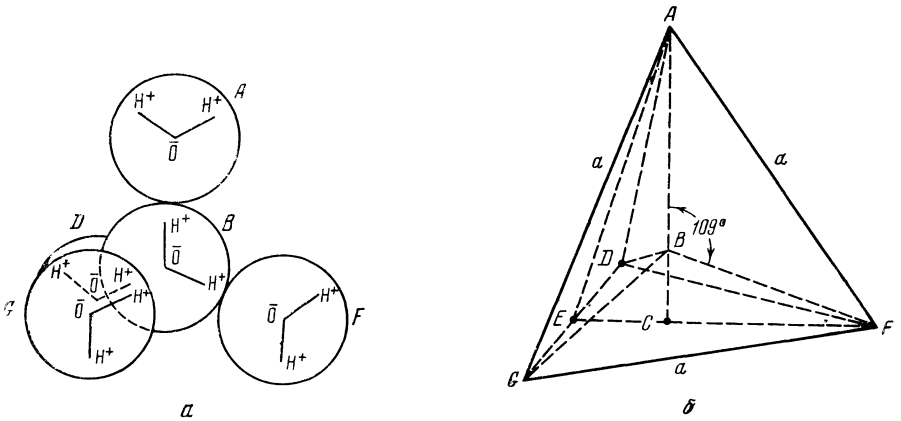


Рис. 526. Иное расположение молекул

Подставив в (41) вместо N число молекул в 1 $г$ воды, а вместо r — значение радиуса молекулы, определенного по рентгенограммам, найдем для удельного объема воды величину

$$Q = 1{,}00 \tag{36а}$$

в полном согласии с действительностью.

Итак, тетраэдрическое расположение молекул воды оказывается весьма вероятным с отмеченной *геометрической* точки зрения. Еще более высокими оказываются мотивы *физические*, говорящие в пользу схемы рис. 526.

Ведь даже $\angle$ HOH между радиус-векторами, проведенными в молекуле воды из центра ядра кислорода в центры двух водородных ядер, как помним, равен примерно 106° [см. рис. 521 и равенства (21)], а это значение крайне близко подходит к значению тетраэдрического угла ABD, ABG, ABF, DBG, DBF и FBG, который образован радиус-векторами, проведенными из центра одной молекулы в центры четырех смежных, как это видно на рис. 526,*б* и из геометрических соотношений (37); как помним, он равен 109°. Но молекула воды обладает резко выраженной полярностью, ее электрический момент весьма велик. Следовательно, при взаимной группировке молекул электрические молекулярные поля должны играть решающую роль. И они действительно играют эту роль при образовании элементарного тетраэдра, изображенного на рис. 526,*а*; как видно на этом рисунке, вершины треугольников, в которых сидят положительно заряженные ионы водорода, всюду оказываются направленными к тем вершинам треугольников в смежных молекулах, где сидят отрицательно заряженные ионы кислорода. С энергетической точки зрения подобное расположение молекул приводит к минимуму

потенциальной энергии, всегда свидетельствующему об устойчивом равновесии системы. А вода действительно представляет пример такой устойчивой системы: ее малый коэффициент сжимаемости показывает, насколько невероятен переход от неплотной упаковки схемы рис. 526,*а* к плотной упаковке рис. 524 и 525. Третий и самый убедительный довод в пользу реальности схемы рис. 526,*а* дает детальный анализ *рентгенограммы* воды. Такой анализ был произведен рядом авторов [3, 4].

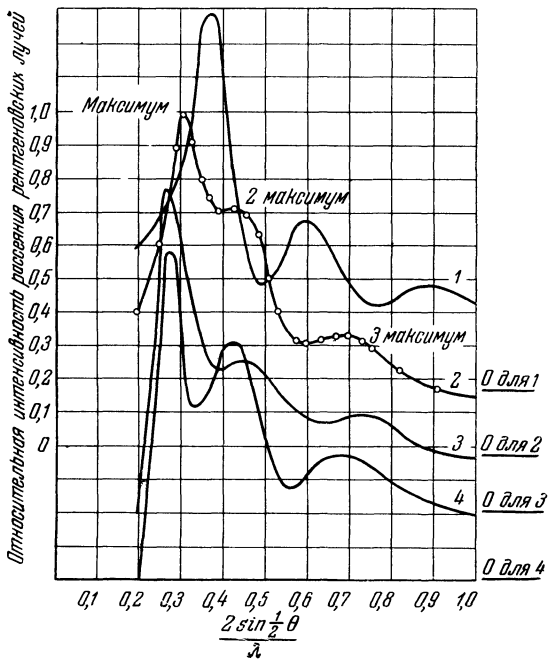


Рис. 527. Рентгенограммы воды

Как всегда, для определения основных плоскостей, занятых рассеивающими центрами (в данном случае — молекулами воды), измерялась интенсивность $I(\theta)$ рентгеновских лучей, рассеянных под различными углами θ к основному пучку. В свою очередь для определения интенсивности рассеянных лучей служили измерения ионизации, вызываемой ими в ионизационной камере.

На рис. 527 воспроизведена кривая *2*, построенная Дж. Берналом, выражающая относительную интенсивность рассеянных рентгеновских лучей в зависимости от угла рассеяния. По оси абсцисс отложены не значения угла θ, а соответствующие значения функции $\frac{2\sin\frac{1}{2}\theta}{\lambda}$, где λ — длина волны рентгеновского потока.

Непосредственно по расположению максимумов, минимумов и точек перегиба на этой экспериментальной кривой еще очень трудно судить о взаимном расположении молекул воды, приводящем к такой кривой. Поэтому Бернал применил обратный прием: задался несколькими схемами расположения молекул и вычислил для каждой из них ту кривую, которая должна была бы наблюдаться при соответствующем расположении рассеивающих агентов.

Вычисление велось по формуле Дебая [5]

$$I(\theta) = \int_0^\infty 4\pi R^2 \{g(R) - \rho\} \frac{\sin sR}{sR} dR. \qquad (42)$$

Здесь для сокращения обозначено

$$s = \frac{4\pi}{\lambda} \sin \frac{\theta}{2},$$

а R означает расстояние от центра молекулы.

Вид кривой всецело зависит от функции

$$2R\{g(R) - \rho\},$$

выражающей собой *вероятность* нахождения центра любой молекулы между расстояниями R и $R + dR$ от центра данной молекулы; ее называют *функцией распределения* молекул.

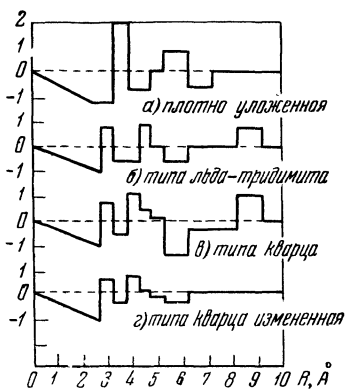


Рис. 528. Вспомогательная диаграмма Дж. Бернала

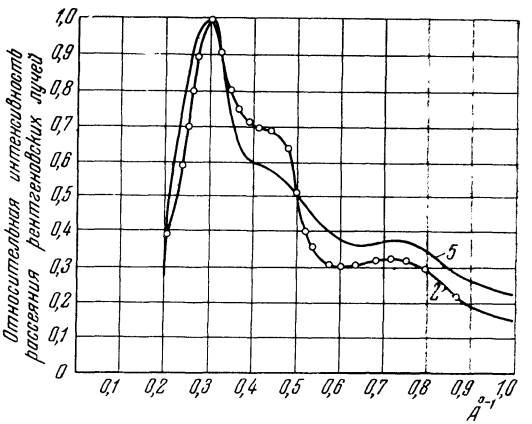


Рис. 529. Сравнение теории с опытом

На рис. 528 воспроизведена вспомогательная диаграмма, на которой видны четыре различных типа функции распределения, положенных авторами в основу расчетов. По оси абсцисс отложены значения R (в онгстремах). Для всех четырех кривых принято свое отдельное начало отсчета ординат, причем по оси ординат отложены величины $2R\{g(R) - \rho\}$.

Верхняя кривая соответствует плотно уложенным слоям молекул по схемам рис. 524 и 525. Там каждая молекула была окружена двенадцатью смежными молекулами воды: шестью, опоясывающими ее кольцом, тремя, касающимися ее сверху, и тремя, касающимися снизу (рис. 525).

Третья сверху кривая на рис. 528 соответствует тетраэдрической схеме рис. 526,*а* (о второй сверху и о самой нижней будет сказано далее). Здесь каждая молекула окружена четырьмя соседними, соприкасающимися с нею. На основании распределения, характеризуемого двумя упомянутыми кривыми рис. 528, вычислены соответствующие кривые *1* (для плотной упаковки) и *3* (для тетраэдрической структуры), приведенные на рис. 527.

Как видно, первая из них не имеет ничего общего с экспериментальной кривой, характеризующей рентгенограмму воды. Напротив, кривая *3* чрезвычайно похожа на экспериментальную. Даже некоторый сдвиг главного максимума, заметный на рис. 527, находит объяснение в цитированной работе. Именно, по мнению авторов, он может быть вызван некоторым небольшим отклонением от правильной структуры в сторону более компактной

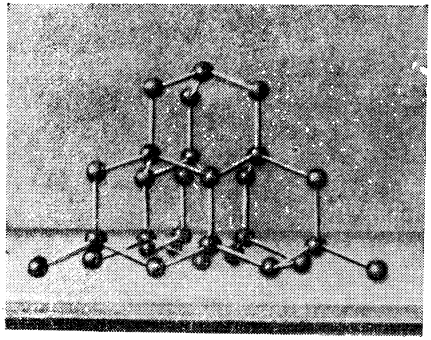


Рис. 530. Схема строения кварца

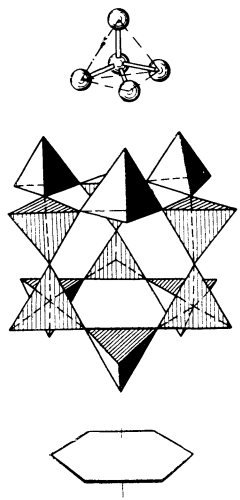


Рис. 531. Схема строения тридимита

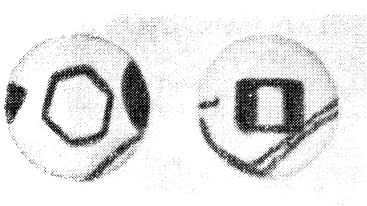


Рис. 532. Монокристаллы льда

группировки. Придав такое отклонение тетраэдрической системе, авторы задались видоизмененной кривой распределения (самой нижней на рис. 528) и по ней вычислили кривую интенсивности, воспроизведенную на рис. 529 (здесь это — кривая *5*). Для сравнения на тот же рис. 529 перенесена экспериментальная кривая *2* с рис. 527. Согласие в ходе кривых получилось вполне удовлетворительное.

Итак, все современные методы исследования дают для структуры воды схему, ближе всего передаваемую схематическим рис. 526,*а*. Однако остается еще выяснить, чем должно отличаться расположение молекул в *жидкой* воде от расположения их во *льду*. Совершенно несомненно, что упаковка молекул во льду должна оказаться еще менее плотной, чем в жидкой фазе, ибо, как известно, удельный объем льда примерно на 10% превышает удельный объем воды.

Решение этого вопроса, весьма трудного на первый взгляд, сильно облегчается благодаря тому обстоятельству, что кристаллографы успели уже близко познакомиться с различиями в расположении молекул некоторых других веществ, дающих кристаллические *модификации*. Так, пáры, подобные воде со льдом, дают, например, с одной стороны, *алмаз с графитом*, с другой стороны, *кварц с тридимитом*. На рис. 530 изображена схема строения *кварца*, а на рис. 531 — схема строения *тридимита*. И тот и другой кристалл состоит из молекул *кремнезема* (SiO_2). И в той и в другой схеме можно найти элементарные тетраэдры из четырех «шариков», окружающих пятый; только на рис. 531, более сложном, чем рис. 530, эти тетраэдры изображены «глухими», чтобы не усложнять схемы; сверху, для пояснения, изображен такой же тетраэдр, как и на рис. 530, а также (пунктиром) «глухой» тетраэдр, построенный на центрах шариков, как на вершинах.

Как видно при сопоставлении обеих схем, рис. 531 соответствует менее плотной упаковке, чем рис. 530. И действительно, удельный объем тридимита превышает удельный объем кварца примерно на 10%. Но в таком случае естественно возникает мысль: нельзя ли строение воды в жидкой фазе уподобить строению кварца, а строение льда — строению тридимита?

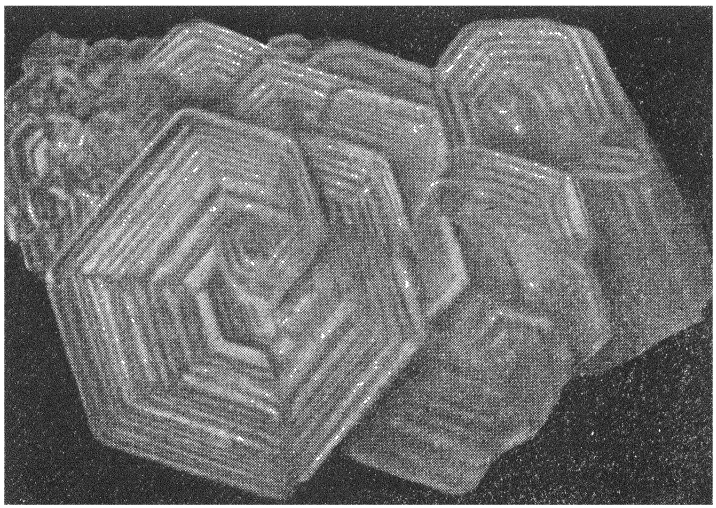


Рис. 533. Монокристаллы льда из Кунгурской пещеры

На этот вопрос в настоящее время следует ответить утвердительно. Задавшись структурой тридимита, Бернал нашел для нее функцию распределения, которая выражается второй сверху кривой на рис. 528. По этой функции распределения он вычислил кривую интенсивности тридимита, изображенную кривой *4* на рис. 527. Непосредственное рентгенографическое *исследование льда* привело к совершенно такой же кривой, и это подтвердило сходство в строении между льдом и тридимитом.

Хорошее подтверждение схемы рис. 531 в применении ко льду можно получить и в совсем иной области исследования кристаллов — при рассмотрении формы монокристаллов льда.

Такие монокристаллы получались и изучались рядом исследователей, которым удавалось выращивать на предметном стекле в поле зрения микроскопа чрезвычайно интересные и сравнительно большие экземпляры.

На рис. 532 воспроизведены две микрофотографии. На первой из них монокристалл вышел в плане, а на второй — сбоку. Как видим, кристаллик льда здесь представляет собой прямую шестигранную призму, напоминающую отдельные ячейки в решетке рис. 531 внизу. Несмотря на то, что высота призмы достигла 0,022 *мм*, а сторона основания 0,02 *мм*, монокристалл в точности скопировал основные элементы структурной решетки. Еще более эффектные монокристаллы возникают в природных условиях, в ледяных пещерах. На рис. 533 воспроизведена фотография В. Я. Альтберга с природных монокристаллов льда, найденных в Кунгурской ледяной пещере [6].

Возвращаясь к рентгенограмме льда, необходимо отметить еще одну важную ее особенность. На кривой *4* (рис. 527) видны резко очерченные вторичные максимумы, соответствующие абсциссам 0,43 и 0,71. Эти максимумы намечались также и на кривой, непосредственно полученной из эксперимента для воды (см. кривую *2* на рис. 527), но были там значительно слабее выражены. Они характерны лишь для воды низкой температуры; с повышением температуры они совсем исчезают. В этом можно убедиться, взглянув на рис. 534, где воспроизведены рентгенограммы воды, полученные при различных температурах (к сожалению, они сняты в более узком интервале по сравнению с кривыми рис. 527, а потому о существовании или отсутствии второго дополнительного максимума можно судить только по одной из кривых, соответствующей температуре 21° и снятой в более широких рамках). Надо иметь

в виду также, что по оси абсцисс отложены непосредственно значения угла рассеяния и что по направлению оси ординат все кривые сдвинуты относительно друг друга.

Как видно, при температуре 2° — самой низкой — первый дополнительный максимум выражен особенно резко, при 7° он несколько сглаживается, при 21° еще более сглаживается; при 40° его можно открыть лишь с большим трудом, а при температурах, более высоких (80—98°), от него не остается никакого следа.

Отсюда вытекает весьма важное следствие: кристаллическая решетка воды *непрерывно деформируется* при изменении температуры, постепенно

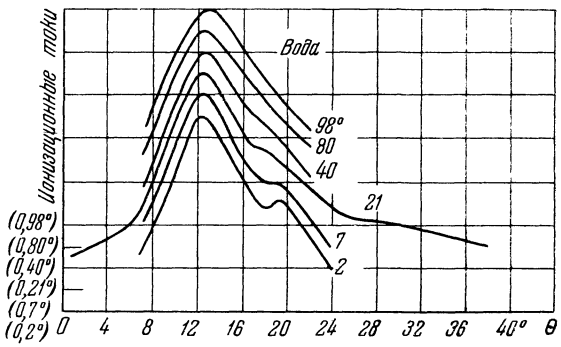


Рис. 534. Рентгенограммы воды

приближаясь к решетке льда при низких температурах. В момент замерзания лишь завершается такой процесс, причем это завершение происходит *скачком.*

С подобной точки зрения становится совершенно понятным существование температуры наибольшей плотности у пресной воды. При понижении температуры шло бы непрерывное уменьшение удельного объема воды, если бы не менялась форма кристаллической решетки. А это изменение начинает особенно резко сказываться при переходе ниже 4°, когда вода быстро приближается по своему строению ко льду, обладающему бóльшим удельным объемом (начинают вырастать на кривой интенсивности дополнительные максимумы, характерные для решетки льда — тридимита).

Полагают, что молекулярные группировки обоих типов никогда не встречаются одновременно: вся вода при всех температурах остается *однородной*, а не состоящей из разнородных составляющих.

Оглядываясь на недалекое прошлое, приходится признать коренное различие между прежними теориями строения воды и теориями современными. Ведь еще совсем недавно физики и химики полагали, что вода является смесью молекулярных комплексов трех различных типов: так называемого *гидрола* (H_2O), *дигидрола* $(H_2O)_2$ и *тригидрола* $(H_2O)_3$. Считали, что молекулы, движущиеся поодиночке,— молекулы гидрола — существуют главным образом в водяном паре и отчасти в только что конденсировавшейся воде. Попарные соединения молекул (дигидрол) считались основной частью воды, находящейся в жидкой фазе, а тройные комплексы (тригидрол) мыслились в качестве основной составной части льда или воды, полученной при таянии льда. Полагали, что при понижении температуры воды растет концентрация молекул тригидрола в основной массе дигидрола, и этим пытались объяснить возникновение максимума плотности при температуре 4°.

В настоящее время нет надобности прибегать к гипотетическим молекулярным комплексам: все физические свойства воды, для объяснения ко-

торых были привлечены эти комплексы, объясняются теперь, без введения каких бы то ни было новых гипотез, на твердой и надежной основе современной кристаллофизики.

Между прочим, на этой же основе теперь строят и теорию модификации воды и льда при высоких давлениях, теорию, которая объясняет результаты опытов П. В. Бриджмена [7], подвергавшего лед давлениям до 10 тыс. *ат*. В табл. 29 сведены некоторые цифры, весьма рельефно очерчивающие поведение кристаллической решетки и самих молекул.

Таблица 29

Давление, *ат*	Форма льда	Объем льда (наблюдаемый)	Относительный объем молекулы воды	Геометрически эквивалентный объем воды
1	I	1,0900	1,000	1,000
2 000	I	1,0571	0,970	0,955
2 000	III	0,8774		
3 500	II	0,8636	0,956	0,922
3 500	V	0,8085		
6 000	V	0,7929	0,937	0,904
6 000	VI	0,7636		
10 000	VI	0,7385	0,906	0,890

Из таблицы видно, что при высоких давлениях наблюдается как уплотнение структуры (на 11%), так и сжатие самих молекул, уменьшение объема каждой из них. Но даже и давление в 10 тыс. *ат* не в состоянии сколько-нибудь близко привести структуру льда к плотной упаковке по схеме рис. 533. Любопытно, что модификации льда III, V и VI обладают плотностью более высокой, чем плотность воды. Это еще лишний раз подтверждает, что расположение молекул воды далеко от плотной упаковки по схеме рис. 533.

К сожалению, до сих пор еще не выяснены те изменения в структуре воды, которые возникают при замене обыкновенного водорода его тяжелым изотопом. Но изменения эти, несомненно, существуют, ибо физические свойства тяжелой воды отличаются от свойств воды обычной.

Выше уже упоминалось о том, что плотность чистой тяжелой воды примерно на 10% превышает плотность обыкновенной воды. При различных концентрациях раствора тяжелой воды в обыкновенной воде удельный вес d воды меняется по закону (найденному для температуры 25°)

$$d = 1{,}0000 + 0{,}1056\,N_2 + \alpha N_1 N_2.$$

Здесь N_1 и N_2 — молекулярные концентрации обоих веществ, H_2^1O и H_2^2O, α — некоторая постоянная, равная 0,0012. Молекулярный объем воды Q связан с теми же концентрациями N_1 и N_2 эмпирическим соотношением

$$Q = 18{,}014 + 0{,}100\,N_2 + 0{,}031\,N_1 N_2.$$

Любопытно, что максимальная плотность чистой тяжелой воды при изменении температуры ведет себя не так, как плотность обыкновенной воды; плотность тяжелой воды возрастает лишь при понижении температуры до 11,6° (здесь она достигает максимума), а затем начинает убывать. В этом можно убедиться, взглянув на рис. 535, на котором воспроизведена экспериментальная кривая, выражающая изменение удельного объема чистой тяжелой воды при изменении температуры. Как видно, минимальный удельнай объем соответствует температуре 11,6°.

Влияние тяжелого изотопа на силы, связывающие между собой элементы решетки, сказывается также отчетливо и на другой константе воды, на

температуре замерзания. Насколько велико это влияние, можно судить по диаграмме рис. 536, построенной по экспериментальным данным Ламера и Эйхельберга. По оси абсцисс отложена концентрация тяжелой воды (в процентах), а по оси ординат — значения температуры замерзания. Как видно, чистая тяжелая вода замерзает при 3,82°. Обе характерные точки — и температура наибольшей плотности, и температура замерзания — оказываются у тяжелой воды сдвинутыми в одну и ту же сторону относительно тех же точек простой воды. Отметим, что температура наибольшей плотности у тяжелой воды лежит на 7,78° выше ее точки замерзания, между тем как у простой воды она, как известно, лежит лишь на 4° выше точки замерзания.

По-видимому, с повышением температуры сглаживается различие в молекулярных полях H_2^2O и H_2^1O; температура кипения тяжелой воды оказывается лишь немного повышенной по сравнению с обыкновенной водой: чистая тяжелая вода кипит при 101,42° (под нормальным атмосферным давлением).

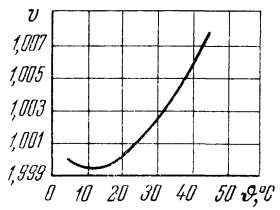


Рис. 535. Удельный объем тяжелой воды

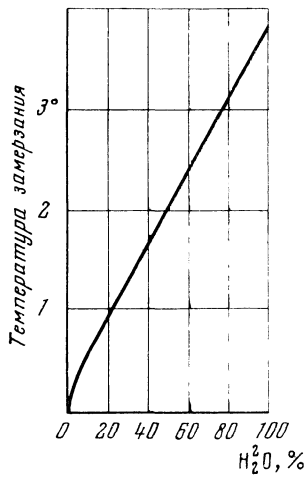


Рис. 536. Замерзание смеси

§ 4. Молекулярные электрические поля и их влияние на физические характеристики воды

Познакомившись с современными воззрениями на структуру воды в жидкой и твердой фазах, посмотрим, как некоторые важные характеристики воды выражаются через элементы молекулярных электрических полей. В частности, большого внимания заслуживает диэлектрическая постоянная воды, от которой во многом зависит поведение воды как *растворителя*.

Выше уже указывалось на крайне большое значение этой постоянной, найденное экспериментальным путем для воды; при температуре 0° она достигает величины $\varepsilon = 88$ при условии, что измерения ведутся либо в постоянном электрическом поле, либо при частоте не выше 10^8 *циклов/сек*. Очень распространено неверное мнение, будто диэлектрическая постоянная льда весьма мала. В действительности диэлектрическая постоянная льда, так же как и у воды, связана с частотой колебаний напряженности поля, служащего для определений. На рис. 537, *а* зависимость эта представлена графически (по данным международных справочных таблиц); как видно, при частотах выше 10^2 диэлектрическая постоянная льда действительно резко падает, достигая при частоте 10^4 весьма низких значений. Но при частотах, меньших 10^2 *циклов/сек*, диэлектрическая постоянная льда весьма близка к соответствующей константе жидкой воды. Уже на рис. 537, *а* видно, что *температура* тоже очень заметно влияет на величину диэлектрической постоянной. Еще убедительней в этом отношении диаграмма рис. 537, *б* построен-

ная по данным различных авторов [4]. Она показывает, что лишь при обычных температурах (около 300° K) диэлектрическая постоянная велика (достигает 85).

Итак, и у льда, и у жидкой воды диэлектрическая постоянная весьма велика, что объясняется, как помним, наличием большого электрического момента молекулы воды. Пусть величина этого момента, рассчитанная применительно к единице объема, будет M_1 и пусть молекулы воды расположены по тетраэдрической схеме рис. 526, *а*. Тогда диэлектрическая постоянная

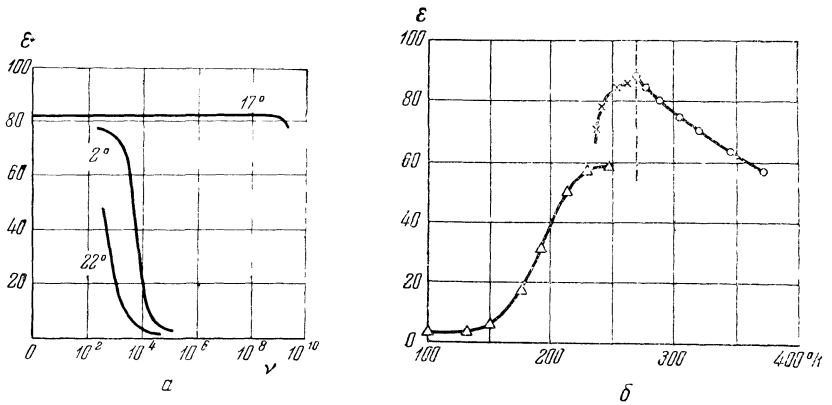


Рис. 537. Диэлектрическая постоянная воды

ε окажется связанной с M_1 посредством тех формальных соотношений, которые были выведены Ланжевеном для элементов магнитного поля в ферромагнитном теле. Только вместо ланжевеновского выражения для намагничивания единицы объема появится подобное же выражение для электризации P

$$P = N_1 M_1 L\left\{\frac{M_1\left[E + \frac{4}{3}\pi P\right]}{kT}\right\}, \tag{43}$$

где N_1 означает число диполей, способных поворачиваться в поле с напряженностью E и обладающих электрическим моментом M_1 (на единицу объема). Через $L\{x\}$ обозначена функция Ланжевена,

$$L\{x\} = \operatorname{cth} x - \frac{1}{x}. \tag{44}$$

Если напряженность поля E не слишком велика, то из (43) и (44), после некоторых упрощений, можно вывести

$$P\left(1 - \frac{4\pi N_1 M_1^2}{9kT}\right) = \frac{N_1 M_1^2}{3kT} E,$$

или

$$P = \frac{N_1 M_1^2}{3k(T - T_c)} E, \tag{45}$$

причем

$$T_c = \frac{4\pi N_1 M_1^2}{9k}. \tag{46}$$

Но через P выразится искомая диэлектрическая постоянная

$$\varepsilon = 1 + \frac{4\pi P}{E}. \tag{47}$$

Следовательно, на основании (45), (47) и (46)

$$\varepsilon = 1 + \frac{4\pi N_1 M_1^2}{3k(T - T_c)} = 1 + \frac{3T_c}{T - T_c}. \qquad (48)$$

Если бы под действием поля E могли поворачиваться все молекулярные диполи, заключающиеся в единице объема воды, другими словами, если бы было

$$N_1 = \frac{6{,}024 \cdot 10^{23}}{18},$$

то для M_1 и T_c получились бы из (48) значения, которые несовместимы с действительностью:

$$M_1 = 1{,}87 \cdot 10^{-18}, \quad T_c = 1200.$$

Такие цифры соответствовали бы несуществующей перманентной поляризации, подобной перманентному намагничиванию ферромагнитного тела. Следовательно, необходимо считать, что лишь ограниченная часть всех молекул-диполей обладает способностью поворачиваться в электрическом поле.

Подставляя в (48) эмпирически найденные значения ε для различных температур T, эти авторы определили из этого соотношения величину T_c, а подставляя затем в (46) эту величину T_c, вычислили предполагаемое *истинное* число поворачивающихся диполей в единице объема. В табл. 30 приведены результаты их вычислений для воды и для льда.

Итак, лишь от $^1/_5$ до $^1/_4$ молекул в водной среде и лишь от $^1/_{10}$ до $^1/_5$ во льду может поворачиваться в электрическом поле при диэлектрической поляризации. Как увидим дальше, это обстоятельство должно иметь большое значение при растворении в воде солей, ионы которых всегда вступают в электрическое взаимодействие с резко полярными молекулами воды. Особенно это касается ионов таких сильных электролитов, как Na^+Cl^-, т. е. ионов, наиболее распространенных в морской воде.

Таблица 30

Вода		Лед	
Температура, абс.	Относительное количество поворачивающихся диполей	Температура, абс.	Относительное количество поворачивающихся диполей
273	0,220	270	0,216
293	0,235	250	0,200
325	0,26	225	0,178
—	—	175	0,118

Если не все молекулярные диполи воды могут поворачиваться во внешнем электрическом поле, то зато все они поворачиваются соответствующим образом под влиянием электрических полей, вызванных соседними молекулами воды; как помним, подобные повороты лежат в основе тетраэдрической структуры воды и родственной структуры льда. Чрезвычайно интересно подсчитать ту потенциальную энергию, которая приходится на долю каждой молекулы, находящейся в таком внутреннем поле. Нетрудно видеть, что эта энергия должна быть численно равна работе, необходимой для разрывания межмолекулярных связей, а последняя, разумеется, может быть определена экспериментальным путем.

Для льда такие вычисления были проделаны применительно к состоянию при абсолютном нуле. В первом приближении потенциальная энергия двух молекул-диполей была определена элементарным путем на основании из-

вестного соотношения

$$V = \frac{M \cos \vartheta}{R^2},$$

где V — потенциал, $M = 2{,}0 \cdot 10^{-18}$ CGSE, $R = 2{,}72 \cdot 10^{-8}$ *см* (наименьшее расстояние между центрами молекул), ϑ — угол между векторами **M** и **R**.

При этом предполагалось, что электрический момент повышен на 11% под действием соседних молекул, вызывающих дополнительную внутримолекулярную поляризацию. Расстояние между молекулами было принято меньше того, с которым мы встречались до сих пор; тем самым учитывалось сжатие, имеющее место при охлаждении до абсолютного нуля.

Оказалось, что в первом приближении потенциальная энергия двух молекул-диполей льда равна

$$U_1 = 0{,}533 \cdot 10^{-12} \text{ эрг}. \tag{49}$$

В действительности потенциальная энергия нетакова. Ее можно выразить в виде *алгебраической* суммы из четырех членов, из которых первый задан равенством (49). Именно полная потенциальная энергия U пары молекул льда будет

$$U = U_1 + U_2 + U_3 + U_4. \tag{50}$$

Здесь U_2 выражает собой потенциальную энергию, обусловленную существованием ван-дер-ваальсовских сил межмолекулярного притяжения. Член U_3 учитывает потенциал, обусловленный *отталкивательными* силами, которые уравновешивают силы притяжения при некотором определенном значении расстояния между молекулами; этот член по существу *отрицательный*. Также отрицательным является и последний член U_4, выражающий потенциал всех молекул, окружающих данную, но не *соприкасающихся* с нею (эти молекулы, очевидно, стремятся сместить молекулу в сторону, противоположную соседней молекуле).

По теории

$$U_2 = +\frac{9}{8} I \alpha^2 R^{-6}, \tag{51}$$

где I — потенциал ионизации, а α — поляризуемость. На основании опытов

$$I = 13\,V, \quad \alpha = 1{,}5 \cdot 10^{-24}.$$

Следовательно, как показывают вычисления по (51),

$$U_2 = 0{,}143 \cdot 10^{-2} \text{ эрг}. \tag{52}$$

На основании соотношений квантовой механики

$$U_3 = -\frac{2\varepsilon}{R} e^{-\frac{2R}{\alpha}} \left(\frac{R}{\alpha} + 1\right), \tag{53}$$

где ε — заряд ядра, а R — радиус боровской электронной орбиты. Однако в данном случае с достаточной степенью точности можно выразить U_3 более простой формулой, правда формулой далеко не универсальной. Полный потенциал можно положить равным

$$-V = F(R) + \frac{C}{R^6} - \frac{B}{R^n}, \tag{54}$$

где $F(R)$ выражает потенциал сил притяжения, аналогичный U_1, а C/R^6 — потенциал ван-дер-ваальсовских сил. Последний член характеризует силы отталкивания. Стационарное состояние молекулы соответствует такому значению $R = R_0$, при котором потенциальная энергия V минимальна. Но тогда

для такого состояния можно будет написать

$$F'(R_0) - \frac{6}{R_0}\frac{C}{R_0^6} + \frac{n}{R_0}\frac{B}{R_0^n} = 0, \tag{55}$$

откуда

$$U_3 = \frac{B}{R^n} = -\frac{R_0}{n}\left[F'(R_0) - \frac{6}{R_0}\frac{C}{R_0^6}\right]. \tag{56}$$

Первый член, стоящий в скобке, был авторами определен графическим способом; он оказался равным $0{,}731 \cdot 10^{-4}$ *дин*. Второй член соответствует ван-дер-ваальсовским силам, о которых уже была речь выше. Он оказался равным $0{,}316 \cdot 10^{-4}$ *дин*. Самым слабым пунктом теории является показатель степени n, который приходилось менять в зависимости от того, какое вещество исследовалось. Однако для воды можно без большой погрешности принять $n = 12$. В таком случае, вспомнив, что $R_0 = 2{,}72 \cdot 10^{-12}$, нетрудно получить из формулы (56)

$$U_3 = 0{,}238 \cdot 10^{-12}. \tag{57}$$

Остается еще последний член суммы (50) U_4. В применении к решетке льда он обусловлен действием *тринадцати* молекул, расположенных позади четырех ближайших. Так как взаимная потенциальная энергия двух диполей изменяется обратно пропорционально кубу расстояния, то влияние этих далеких молекул будет невелико, по подсчету Бернала [1],

$$U_4 = 0{,}038 \cdot 10^{-12}. \tag{58}$$

Итак, подставив в (50) числовые значения всех членов алгебраической суммы и приняв во внимание их знаки, найдем

$$U = (0{,}533 + 0{,}14 - 0{,}238 - 0{,}038) \cdot 10^{-12},$$

т. е.

$$U = 0{,}400 \cdot 10^{-12} \text{ } эрг \text{ на 1 пару молекул}. \tag{59}$$

Но каждая молекула окружена четырьмя соседними молекулами льда: следовательно, на каждую молекулу приходится потенциальная энергия

$$2U = 0{,}800 \cdot 10^{-12} \text{ } эрг \text{ на 1 молекулу}.$$

Другими словами, на 1 грамм-молекулу льда должно прийтись

$$U_\mu = 4{,}85 \cdot 10^{11} \text{ } эрг/моль,$$

или, переведя в килокалории,

$$U_\mu = 11{,}5 \text{ } ккал/моль. \tag{60}$$

По теории такова должна быть скрытая теплота испарения льда при абсолютном нуле. Экспериментальных определений ее при этой температуре, разумеется, не производилось. Но теорию все же нетрудно сравнить с экспериментом, произведенным при других условиях. Именно, исходя из только что полученного теоретического значения скрытой теплоты сублимации льда при температуре 0° K, можно вычислить теоретически скрытую теплоту испарения воды при 0°. Для этого придется к найденной величине U_μ прибавить: а) скрытую теплоту λ_i плавления льда; б) количество тепла q_i, необходимое для нагревания моля льда от 0 до 273° K; в) количество тепла q_v, необходимое для нагревания моля водяного пара в том же температурном интервале. В результате скрытая теплота λ_{273} испарения воды при 273° K выразится так:

$$\lambda_{273} = U_\mu + \lambda_i + q_i + q_v, \tag{61}$$

[1] U_4 — энергия *двух* молекул.

где

$$\lambda_i = 1{,}44 \ \textit{ккал/моль},$$

$$q_i = \int_0^{273} (C_p)_i \, dT = 1{,}28 \ \textit{ккал/моль}, \tag{62}$$

$$q_v = \int_0^{273} (C_v)_i \, dT = 1{,}61 \ \textit{ккал/моль}.$$

Подставив числовые значения (62) в (61), найдем

$$\lambda_{273} = 11{,}81 \ \textit{ккал/моль}. \tag{63}$$

Опыты дают для скрытой теплоты испарения воды при этой температуре

$$\lambda_{273} = 11{,}5 \ \textit{ккал/моль}. \tag{64}$$

Разумеется, нельзя придавать слишком большого значения чрезвычайно близкому совпадению чисел, полученных из теории и из опыта, ибо это — именно совпадение; при современном состоянии вопроса вычисления не могли отличаться сколько-нибудь большой точностью. Но во всяком случае совпадение *порядков* обеих величин доказывает справедливость общих соображений, положенных в основу теории.

Дальнейшее уточнение теории необходимо прежде всего в том разделе ее, который касается взаимного расположения ионов водорода и кислорода в молекуле воды, ибо ничтожное смещение активного центра системы приводит к значительным изменениям всех молекулярных постоянных воды и льда.

Чрезвычайно интересно было бы разобраться и в вопросе о влиянии тяжелых изотопов на потенциальную энергию молекул, в частности, выяснить, почему скрытая теплота λ_2 испарения тяжелой воды оказывается большей, чем скрытая теплота испарения обыкновенной воды:

$$\lambda_2 = \lambda_\vartheta + 0{,}259 \ \textit{ккал/моль}; \tag{65}$$

λ_ϑ — скрытая теплота испарения обыкновенной воды при температуре ϑ.

Подробный анализ структуры воды в жидкой и твердой фазах и такой же подробный анализ внутримолекулярных электрических полей, несомненно, позволят понять происхождение тех аномалий воды, которые современная физика еще не успела объяснить. Насколько аномальными являются вообще все свойства воды, лучше всего показывает сопоставление ее с другими жидкостями, обладающими простым строением молекул. Для иллюстрации к сказанному приведем здесь табл. 31, составленную Берналом. И температура плавления твердой фазы, и температура кипения жидкой, и критическая температура, и постоянные a и b в уравнении Ван-дер-Ваальса, соответствующие воде, выделяются среди числовых значений, присущих другим веществам с простыми молекулами. Но особенно интересна аномально большая теплоемкость воды (этого столбца, к сожалению, нет в таблице). Вероятно, она обусловлена непрерывным разрушением межмолекулярных связей, прогрессирующим при повышении температуры. Аналогично можно объяснить и происхождение высокой скрытой теплоты плавления льда: по-видимому, при таянии рвется одна связь из восьми, ибо скрытая теплота плавления льда равна $^1/_8$ от теплоты испарения (т. е. полного разъединения молекул).

Таблица 31

Вещество	Кристаллическая структура	Молекулярный объем в жидком состоянии (A^3)	Температура, абс.			Постоянные Ван-дер-Ваальса		Скрытая теплота		Вязкость при T° абс.	Диэлектрическая постоянная	Дипольный момент
			плавления	кипения	критическая	a	b	плавления	испарения			
CH_4	*CP*	63	89	109	191	0,0036	0,00162	0,023	—	0,0025 при 34°	—	0
NH_4	*CP'*	45	196	234	405	0,0080	0,00161	1,84	5,6	0,0179 при 0°	25,4	1,5
H_2O	*T*	30	273	373	647	0,0118	0,00151	1,41	9,72	Подвижная	80	1,87
FH	*Pol*	33	190	293	—	—	—	1,09	6,02	—	83,5	—
PH_3	*CP'*	76	140	188	327	0,0094	0,00233	—	—	—	—	0,55
SH_2	*CP'*	63	187	211	373	0,0089	0,00193	—	4,23	0,004350 при 63°	5,93	1,10
ClH	*CP*	65	160	190	325	—	—	0,050	3,54	0,00455 » 45°	8,85	1,03
H_3CCH_3	*HCP*	110	102	184	305	0,0119	0,00312	—	—	—	—	0
H_3CNH_2	—	80	—	267	430	0,0144	0,00272	—	—	0,00236 при 0°	10,5	1,31
H_3COH	—	65	175	338	513	0,0109	0,00318	0,052	11,0	0,0055 » 25°	34	1,73
H_3CF	—	—	—	195	316	0,0092	0,00235	—	—	—	—	—
H_2NNH_2	—	52,5	274	386	653	—	—	—	—	Вязка	—	—
H_2NOH	—	44,5	306	340*	—	—	—	—	—	—	—	—
HOOH	—	38	271	357**	—	—	—	0,25	12,3	Вязка	92,8	—
H_2CCH_2	—	76	103	170	282	0,0089	0,00255	—	—	—	—	0
H_2CO	—	61	181	252	—	—	—	—	—	—	—	—
HNO	*Pol*	—	Твердо при 290°	—	—	—	—	—	—	—	—	—
HCCH	*Pol*	69	—	191	308	0,0087	0,00239	—	—	—	—	—
HCN	*Pol*	64	259	300	457	—	—	—	5,6	0,0020 при 7°	—	—

Примечание. *CP* — кубическая плотная упаковка, *CP'* — полярная модифицированная плотная упаковка, *HCP* — гексагональная плотная упаковка, *T* — структура тридимита, *Pol* — полимеризуется.

* При 60 *мм*; неустойчиво при более высоких температурах.

** При 63 *мм*; неустойчиво при более высоких температурах.

§ 5. Теория теплопроводности льда

В гл. IV был исследован вопрос о роли ледяного покрова в тепловом балансе моря. Как помним, непосредственные измерения показали, что коэффициент теплопроводности морского льда, играющий решающую роль в процессе теплопередачи, весьма мало отличается от коэффициента теплопроводности *чистого* льда; осложнения вносятся лишь там, где во льду оказывается либо весьма большое количество пузырьков воздуха (непосредственное уменьшение теплопроводности), либо весьма большое количество рассола (переменная теплоемкость). Но подобные осложнения не имеют места в основной толще льда, в тех массах его, которые покрывают громадные пространства: большое количество рассола может появиться лишь в весьма тонком поверхностном слое, возникшем при внезапном резком падении температуры воздуха, а заметное количество воздушных пузырьков появляется обычно уже в стадии, предшествующей таянию льда.

Следовательно, процесс передачи тепла в ледяном покрове моря протекает примерно так же, как протекает он в слое чистого льда. Вот почему, познакомившись со строением самого льда, весьма важно и интересно проследить за механизмом распространения тепла от точки к точке внутри кристаллической решетки — выяснить физический смысл теплопроводности.

Как это ни странно, но физический смысл теплопроводности диэлектриков вообще и льда в частности очень долго ожидал своего исследователя. Только в 1934 г. появилась работа А. С. Предводителева, которому удалось построить теорию теплопроводности как жидких, так и твердых диэлектриков [8].

Так как *физическая* (нетурбулентная) теплопроводность морской воды не играет никакой роли в термике моря, то мы не будем здесь останавливаться на исследовании жидкой фазы, отослав интересующихся к подлиннику. Напротив, теорию теплопроводности льда, предложенную Предводителевым, рассмотрим подробно, этап за этапом.

В ее основе лежит представление о тепловом движении молекул как о движении колебательном, как об этом впервые высказывался еще Ломоносов. Но если исходить из такого представления, то надо помнить, что движение тех же молекул может проявляться и иначе, хотя бы тогда, когда твердое тело охвачено системой акустических волн. В свою очередь, каковы бы ни были колебания молекул, возникающие в твердом теле (тепловые, акустические), они неминуемо должны управляться законами теории упругости: упругие постоянные вещества определяют собой и скорость распространения волн, и амплитуду колебаний в каждой точке. Поэтому Предводителев был совершенно прав, когда отождествил дифференциальные уравнения температурной волны с дифференциальными уравнениями волны акустической.

Последние, как известно, могут быть написаны в самой общей форме таким образом:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 D_x}{\partial t^2} &= \frac{\mu}{\delta}\nabla^2 D_x + \frac{\varkappa+\mu}{\delta}\frac{\partial}{\partial x}\operatorname{div}\mathbf{D},\\
\frac{\partial^2 D_y}{\partial t^2} &= \frac{\mu}{\delta}\nabla^2 D_y + \frac{\varkappa+\mu}{\delta}\frac{\partial}{\partial y}\operatorname{div}\mathbf{D},\\
\frac{\partial^2 D_z}{\partial t^2} &= \frac{\mu}{\delta}\nabla^2 D_z + \frac{\varkappa+\mu}{\delta}\frac{\partial}{\partial z}\operatorname{div}\mathbf{D}.
\end{aligned} \tag{66}$$

Здесь D_x, D_y и D_z — составляющие вектора смещения $\mathbf{D}$. Упругие постоянные $\varkappa$ и μ связаны с модулем Юнга E и коэффициентом Пуассона σ посредством соотношений

$$\varkappa = \frac{E}{2(1+\sigma)}, \quad \mu = \frac{\sigma E}{(1+\sigma)(1-2\sigma)}, \tag{67}$$

а все остальные обозначения — обычные. Вырежем мысленно из льда куб и поместим в одной из его вершин начало декартовой системы координат, причем направим координатные оси по ребрам куба.

Положим, что нормальные смещения и тангенциальные напряжения на граничных поверхностях обращаются в нуль. Тогда общий интеграл уравнений (66) окажется возможным представить в следующей форме:

$$\begin{aligned} D_x &= A \sin\frac{a\pi x}{l}\cos\frac{b\pi y}{l}\cos\frac{c\pi z}{l}e^{i\omega t},\\ D_y &= B\cos\frac{a\pi x}{l}\sin\frac{b\pi y}{l}\cos\frac{c\pi z}{l}e^{i\omega t},\\ D_z &= C\cos\frac{a\pi x}{l}\cos\frac{b\pi y}{l}\sin\frac{c\pi z}{l}e^{i\omega t}. \end{aligned} \tag{68}$$

Постоянные интегрирования A, B и C исключатся после подстановки функций (68) и их производных в (66). Прежде всего окажется, что

$$\begin{aligned} A(S_{11}-\delta\omega^2)+BS_{12}+CS_{13}&=0,\\ AS_{21}+B(S_{22}-\delta\omega^2)+CS_{23}&=0,\\ AS_{31}+BS_{32}+C(S_{33}-\delta\omega^2)&=0, \end{aligned} \tag{69}$$

где для краткости введены обозначения

$$\begin{aligned} S_{11}&=\frac{\pi^2}{l^2}[\mu(a^2+b^2+c^2)+(\varkappa+\mu)a^2],\\ S_{22}&=\frac{\pi^2}{l^2}[\mu(a^2+b^2+c^2)+(\varkappa+\mu)b^2],\\ S_{33}&=\frac{\pi^2}{l^2}[\mu(a^2+b^2+c^2)+(\varkappa+\mu)c^2],\\ S_{12}&=\frac{\pi^2}{l^2}(\varkappa+\mu)ab,\\ S_{13}&=\frac{\pi^2}{l^2}(\varkappa+\mu)ac,\\ S_{23}&=\frac{\pi^2}{l^2}(\varkappa+\mu)bc. \end{aligned} \tag{70}$$

Буквы a, b и c, вошедшие сюда из (68), выражают любые целые числа. Все три уравнения (69), очевидно, можно разделить на A, после чего они будут содержать лишь две постоянные B/A и C/A. Тогда для совместимости этих трех уравнений необходимо, чтобы удовлетворялось условие

$$\begin{vmatrix} (S_{11}-\delta\omega^2) & S_{12} & S_{13}\\ S_{21} & (S_{22}-\delta\omega^2) & S_{23}\\ S_{31} & S_{32} & (S_{33}-\delta\omega^2) \end{vmatrix} = 0, \tag{71}$$

причем по существу здесь $S_{21}=S_{12}$, $S_{31}=S_{13}$, $S_{32}=S_{23}$. Чтобы не писать громоздких выражений, произведение $\frac{\pi^2}{l^2}(a^2+b^2+c^2)$ обозначим через $S_0{}^2$. Тогда, развернув определитель (71), найдем

$$(\mu S_0^2-\delta\omega^2)^2[(\varkappa+2\mu)S_0^2-\delta\omega^2]=0. \tag{72}$$

Уравнение (72) удовлетворится в двух случаях:

$$\text{либо при } \delta\omega^2-\mu S_0^2=0, \tag{73}$$

$$\text{либо при } \delta\omega^2-(\varkappa+2\mu)S_0^2=0. \tag{74}$$

Вариант (73) соответствует *поперечным* колебаниям, которые Предводителев полагает неполяризованными. Частота ν_l колебаний в двух взаимно перпен-

дикулярных плоскостях будет одинакова. Она связана с угловой частотой известным элементарным соотношением $\omega_t = 2\pi\nu_t$.

Следовательно, на основании (73)

$$2\pi\nu_t = S_{0t}\sqrt{\frac{\mu}{\delta}}. \tag{75}$$

Вариант (74) отвечает *продольным* колебаниям с частотой ν_l, которая, очевидно, будет равна

$$2\pi\nu_l = S_{0l}\sqrt{\frac{\varkappa + 2\mu}{\delta}}. \tag{76}$$

Нетрудно убедиться, что скорость распространения поперечных колебаний [согласно (75)] будет

$$v_t = \sqrt{\frac{\mu}{\delta}}, \tag{77}$$

а скорость распространения продольных колебаний

$$v_l = \sqrt{\frac{\varkappa + 2\mu}{\delta}}. \tag{78}$$

Длина волны для поперечных колебаний определится из простого соотношения

$$\lambda_t = \frac{2\pi}{S_{0t}} = \frac{2l_t}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}, \tag{79}$$

а длина волны для продольных колебаний — из аналогичного соотношения

$$\lambda_l = \frac{2\pi}{S_{0l}} = \frac{2l_l}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}. \tag{80}$$

Таковы элементы акустических волн. Обратимся теперь к волнам температурным, которые Предводителев исследует в более общей форме по сравнению с формой задачи, встречавшейся уже в гл. IV. Именно он полагает, что температурный импульс задан уравнением

$$\vartheta = \vartheta_1(x, y, z)\, e^{-ipt}. \tag{81}$$

Температура меняется во времени и пространстве, подчиняясь общему дифференциальному уравнению теплопроводности [1]:

$$\frac{\partial\vartheta}{\partial t} = K\nabla^2\vartheta. \tag{82}$$

Но в таком случае, находя по (81) выражения для частных производных, входящих в лапласов оператор (82), и частной производной по времени, можно написать вместо (82)

$$K\nabla^2\vartheta_1 + ip\vartheta_1 = 0. \tag{83}$$

Обозначая здесь для удобства p/K через q^2 и принимая во внимание, что

$$\sqrt{-i} = (1 - i)\frac{1}{\sqrt{2}},$$

Предводителев получает из (83) так называемое дифференциальное уравнение Поккельса

$$\nabla^2\vartheta_1 + \left[\frac{(1 - i)\, q}{\sqrt{2}}\right]^2\vartheta_1 = 0. \tag{84}$$

[1] Как и в гл. IV, $K = \frac{k}{\delta c}$ (k — коэффициент теплопроводности).

Интеграл этого уравнения пишется в форме

$$\vartheta_1 = Ae^{-\left\{\frac{(1-i)}{\sqrt{2}} q\alpha x + \frac{(1-i)}{\sqrt{2}} q\beta y + \frac{(1-i)}{\sqrt{2}} q\gamma z\right\}}. \tag{85}$$

Подстановка соответствующих величин, найденных из (85), в (84) дает

$$\alpha^2 \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}} q\right)^2 + \beta^2 \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}} q\right)^2 + \gamma^2 \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}} q\right)^2 - \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}} q\right)^2 = 0, \tag{86}$$

откуда

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1. \tag{87}$$

Но в таком случае коэффициенты α, β и γ можно рассматривать как направляющие косинусы некоторого вектора $\mathbf{r}$; проекции этого вектора фигурируют в скобке выражения (85). Само же это выражение тогда перепишется в простой форме

$$\vartheta_1 = Ae^{-\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right) qr}. \tag{88}$$

Найдя таким образом вид функции $\vartheta_1(z, y, z)$, входящей в общее выражение (81), Предводителев подставляет ее в это выражение и получает после разделения множителей

$$\vartheta = Ae^{-\frac{qr}{\sqrt{2}}} e^{i\left(-pt + \frac{q}{\sqrt{2}} r\right)}. \tag{89}$$

Это выражение, очевидно, представляет *температурную волну*, распространяющуюся во льду со скоростью

$$v = \frac{p\sqrt{2}}{q}. \tag{90}$$

Но ведь, согласно обозначению,

$$q = \sqrt{\frac{p}{K}}.$$

Следовательно, скорость температурной волны можно выразить иначе

$$v = \sqrt{2Kp}. \tag{91}$$

Множитель с действительным показателем степени, стоящим первым после коэффициента A в (89), показывает, что температурные колебания во льду затухают по мере распространения волны, как и следовало ожидать по аналогии со случаем, рассмотренным в гл. IV.

Как всегда, при распространении затухающей волны, амплитуда колебаний уменьшается в $e^{2\pi}$ раз, когда волна проходит расстояние, равное ее длине λ. Следовательно, при подстановке λ вместо r в показатель степени соответствующего члена (89) этот показатель степени должен превратиться в 2π, или

$$\frac{q\lambda}{\sqrt{2}} = 2\pi, \text{ или } \lambda\sqrt{\frac{p}{2K}} = 2\pi. \tag{92}$$

Отсюда можно найти выражение p через λ и K

$$\sqrt{\frac{p}{2}} = \frac{2\pi}{\lambda}\sqrt{K}. \tag{93}$$

Подстановка этого выражения в (91) дает

$$v = \frac{4\pi}{\lambda} K. \tag{94}$$

Температурный коэффициент теплопроводности K (или, как его называют иначе, *коэффициент температуропроводности*) можно выразить через истинный коэффициент теплопроводности k, который собственно подлежит определению. Именно, как известно,

$$K = \frac{k}{\delta c}.$$

Подставив это выражение в (94) и перегруппировав величины, нетрудно получить формулу, удобную для определения k:

$$k = \frac{\delta c}{4\pi} v\lambda. \tag{95}$$

Итак, *коэффициент теплопроводности непосредственно связан со скоростью распространения температурных колебаний и с длиной температурной волны.* Но согласно гипотезе Предводителева, изложенной в начале этого параграфа, температурные колебания идентичны с акустическими колебаниями, а температурные волны — с волнами акустическими.

В таком случае тепло может переноситься во льду тремя системами акустических волн, описанными выше: двумя системами поперечных (у которых колебания происходят во взаимно перпендикулярных направлениях) и одной системой продольных волн. Каждая из двух систем поперечных волн перенесет в направлении вектора r количество тепла, которое, на основании (95), выразится так:

$$Q_t = \frac{\delta c}{4\pi} v_t \lambda_t \operatorname{grad} \vartheta. \tag{96}$$

Система продольных волн перенесет количество тепла

$$Q_l = \frac{\delta c}{4\pi} v_l \lambda_l \operatorname{grad} \vartheta, \tag{97}$$

а в совокупности будет перенесено тепло

$$Q = Q_l + 2Q_t = \frac{\delta c}{4\pi} (v_l \lambda_l + 2 v_t \lambda_t) \operatorname{grad} \vartheta. \tag{98}$$

Стало быть, истинный коэффициент теплопроводности, равный

$$k = Q : \operatorname{grad} \vartheta,$$

следующим образом выразится через элементы акустических волн (поперечных и продольных):

$$k = \frac{\delta c}{4\pi} (v_l \lambda_l + 2 v_t \lambda_t). \tag{99}$$

Как помним, скорости v_l и v_t связаны с упругими постоянными льда соотношениями (77) и (78). Что касается длины волны λ, то она зависит от трехчлена $(a^2 + b^2 + c^2)$, который в свою очередь связан *со строением* льда. Для сокращения обозначим этот трехчлен одной буквой R^2 и посмотрим, как он определяется Предводителевым.

Прежде всего отмечается, что в среде могут возникнуть акустические колебания с весьма различными частотами (соответственно различным R), но вероятность их далеко не одинакова.

В зависимости от типа кристаллической решетки существуют следующие три возможности для функции R:

1. Все числа a, b и c равны между собой: $a = b = c$. В таком случае распределение молекул можно назвать *одномерным*.

2. Какие-либо два из этих чисел равны между собой

$$a = b, \qquad c \neq b, \qquad c \neq a$$

или

$$a = c, \qquad b \neq c, \qquad b \neq a,$$

или

$$b = c, \qquad a \neq c, \qquad a \neq b.$$

Соответствующее распределение молекул можно назвать *двумерным*.

3. Все числа a, b и c различны. Такое распределение следует назвать *трехмерным*.

В случае одномерного распределения молекул вероятность существования колебаний, отвечающих числу R, выражается так:

$$w = \frac{dR}{R_m}, \tag{100}$$

где R_m — максимальное значение, которое может принимать целочисленная функция.

Предводителев полагает, что длина температурной волны равна *осредненной* длине акустической волны (продольной или поперечной). Следовательно, при одномерном распределении молекул в твердом теле длина волны, на основании (100), должна равняться соответственно

$$\lambda_t = \int_1^{R_{m_t}} \frac{2l}{R_t} \frac{dR_t}{R_{m_t}} = \frac{2l}{R_{m_t}} \ln R_{m_t}, \tag{101}$$

$$\lambda_l = \int_1^{R_{m_l}} \frac{2l}{R_l} \frac{dR_l}{R_{m_l}} = \frac{2l}{R_{m_l}} \ln R_{m_l}. \tag{102}$$

При двумерном распределении осредненные длины волн будут

$$\lambda_t = \int_1^{R_{m_t}} \frac{2l}{R_t} \frac{R_t dR_t}{2R_{m_t}} = \frac{1}{R_{m_t}^2} [R_{m_t} - 1], \tag{103}$$

$$\lambda_l = \int_1^{R_{m_l}} \frac{2l}{R_l} \frac{R_l dR_l}{2R_{m_l}} = \frac{l}{R_{m_l}^2} [R_{m_l} - 1]. \tag{104}$$

Наконец, при трехмерном распределении молекул

$$\lambda_t = \int_1^{R_{m_l}} \frac{2l}{R_l} \frac{3R_t^2 dR_t}{R_{m_t}^3} = \frac{3l}{R_{m_t}^3} [R_{m_l}^2 - 1], \tag{105}$$

$$\lambda_l = \int_1^{R_{m_l}} \frac{2l}{R_l} \frac{3R_l^2 dR_l}{R_{m_l}^3} = \frac{3l}{R_{m_l}^3} [R_{m_l}^2 - 1]. \tag{106}$$

Прежде чем подставлять найденные выражения осредненных длин волн в равенство (99), посмотрим, каково должно быть численное значение функции R_m. Согласно исследованиям различных авторов, число возможных колебаний не превышает величину $3N$, где N — число вибраторов в моле, к которому относятся все рассуждения.

Если бы при заданном значении R был возможен лишь один тип колебаний (только продольные или только поперечные, поляризованные в одной плоскости), то число $3N$ можно было бы представить как объем шарового октанта с радиусом R_m, лежащего в положительной области по отношению к декартовой координатной системе (ибо целые числа a, b, c — существенно положительные). Но в действительности существуют колебания трех родов (продольные и два вида поперечных). Следовательно, для получения числа $3N$ от объема шара с радиусом R_m придется взять не $^1/_8$, а $^3/_8$, Итак,

$$3N = \frac{4\pi}{3} R_m^3 \frac{3}{8} . \tag{107}$$

Отсюда

$$R_m = \left(\frac{6}{\pi} N\right)^{1/3} = (1{,}91\, N)^{1/3}. \tag{108}$$

Так как число R_m всегда весьма велико, то в выражениях (103) — (106) можно пренебречь единицей, стоящей в скобках. Приняв во внимание, что $(1{,}91)^{1/3} = 1{,}24$, и введя обозначение

$$d = \frac{1}{N^{1/3}} , \tag{109}$$

можно переписать выражения для длин волн в упрощенном виде. При этом по Предводителеву можно считать, что соотношение (108) справедливо для *всех* направлений колебаний, и для продольных и для поперечных. Но тогда для одномерного распределения будет

$$\lambda_{l,l} = \frac{d}{1{,}86} \ln(1{,}91\, N), \tag{110}$$

для двумерного

$$\lambda_{l,l} = \frac{d}{1{,}24} , \tag{111}$$

для трехмерного

$$\lambda_{l,l} = \frac{3d}{1{,}24} . \tag{112}$$

Воспользовавшись этими простыми выражениями и вспомнив связь между скоростями акустических волн и упругими постоянными $\varkappa$ и μ, остается лишь написать формулы Предводителева для коэффициента теплопроводности. Соответственно трем возможным типам распределения молекул получим три формулы

$$k_1 = \frac{cd \ln(1{,}91\, N)}{6\pi \cdot 1{,}24} \left[\sqrt{\delta(\varkappa + 2\mu)} + 2\sqrt{\delta\mu}\right], \tag{113}$$

$$k_2 = \frac{cd}{4\pi \cdot 1{,}24} \left[\sqrt{\delta(\varkappa + 2\mu)} + 2\sqrt{\delta\mu}\right], \tag{114}$$

$$k_3 = \frac{3cd}{4\pi \cdot 1{,}24} \left[\sqrt{\delta(\varkappa + 2\mu)} + 2\sqrt{\delta\mu}\right]. \tag{115}$$

Следовательно, между k_1, k_2, k_3 существует такая пропорция:

$$k_1 : k_2 : k_3 = 2\ln(1{,}91\, N) : 3 : 9,$$

или иначе

$$k_2 : k_3 : k_1 = 1 : 3 : 37, \tag{116}$$

ибо $N = 6{,}06 \cdot 10^{23}$, $2\ln(1{,}91\, N) \approx 111$.

Изложенная теория, развитая А. С. Предводителевым в совершенно общей форме, позволила ему вычислить значения коэффициента теплопроводности для девяти различных твердых тел, для которых были известны упру-

гие постоянные, плотность и теплоемкость. Совпадение теоретически вычисленных значений с цифрами, полученными из непосредственных экспериментальных измерений, оказалось вполне удовлетворительным.

В частности, для льда, как известно:

Модуль Юнга	$E = 276$ *кг/мм²*
Коэффициент Пуассона	$\sigma = 0{,}25$
Плотность	$\delta = 0{,}917$
Теплоемкость	$c = 0{,}50$.

Следовательно, на основании (67) $\varkappa = 110$ *кг/мм²*, $\mu = 110$ *кг/мм²*,

$$\varkappa + 2\mu = 330 \text{ кг/мм}^2.$$

Величину d примем равной расстоянию между соприкасающимися молекулами: $d = 2{,}76$ Å.

Природный чистый лед не является монокристаллом, а потому в акустическом отношении анизотропия должна сказываться лишь при сопоставлении какого-либо горизонтального направления с направлением вертикальным. Следовательно, из трех распределений, рассмотренных выше, *лед* следует отнести ко *второму*, приняв в нем *двумерное распределение*.

В соответствии с этим из трех формул Предводителева придется выбрать формулу (114). Прежде чем подставлять в нее числовые значения, приведенные выше, надо их, разумеется, выразить в одной системе единиц. Тогда вычисления по (114) дадут

$$k = 1{,}03 \cdot 0{,}5 \cdot 2{,}76 \cdot 3{,}73 \cdot 10^{-3} = 5{,}3 \cdot 10^{-3} \frac{кал}{см^2 \cdot сек \cdot град/см}. \qquad (117)$$

Чрезвычайно тщательные непосредственные измерения, проделанные С. А. Арцыбашевым и А. И. Парфиановичем [9], показали, что для чистого льда $k = 5{,}6 \cdot 10^{-3}$.

Совпадение между экспериментальным значением и величиной, вычисленной по теории Предводителева, следует признать более чем хорошим. Следовательно, и сама теория, по-видимому, рисует правдоподобную картину распространения тепла во льду. Разумеется, эту теорию нельзя еще сейчас считать вполне законченной: пока еще неясна связь между температурными «микроволнами», которые Предводителев уподобляет волнам акустическим, и температурными «макроволнами», хотя бы того типа, с которым пришлось встретиться в гл. IV. Возможно, что удастся считать эти микроволны чем-то вроде *модуляции* макроволн по аналогии с известной задачей из области радиотелефонии.

§ 6. Кинетическая теория испарения воды и льда

В предыдущем параграфе был вскрыт механизм передачи тепла в ледяном покрове моря. Теперь попытаемся разобраться в механизме другого явления, играющего одну из главных ролей в тепловой жизни моря,— *в механизме испарения воды* (как в жидкой фазе, так и в твердой).

Обычно процесс испарения описывается лишь с термодинамической стороны, причем главное внимание исследователя направляется на энергетику этого процесса и на упругость пара, насыщающего пространство при той или иной температуре. Потребности техники заставили физиков развить именно эту область учения о тепле, оставляя в стороне многие другие.

Однако для мореведа представляет не меньший, а, пожалуй, больший интерес именно та область теплофизики, которая обычно остается неосвещенной совсем и только в редких случаях освещается мимоходом: ему надо знать, что́ именно происходит в поверхностном слое морской воды, когда часть этой воды превращается в пар и переходит из гидросферы в атмосферу. Опыты с эвапорометрами, о которых была речь в гл. IV, дают все, что нужно

для вычисления элементов теплового баланса моря, обусловленных испарением и теплообменом между морем и атмосферой. Но опыты эти ничего не говорят о *физической картине испарения*; из них становится ясным только, что ветер вырывает молекулы пара из слоя, непосредственно прилегающего к поверхности воды, и что количество вырываемых молекул возрастает по линейному закону вместе со скоростью ветра.

В главе, посвященной молекулярной физике моря, уместно будет заглянуть именно в этот поверхностный, пограничный слой и исследовать поведение молекул воды при переходе их из воды в воздух. Такое исследование, основанное не на формальных выводах термодинамики, а на конкретных представлениях кинетической теории вещества, было проделано В. В. Шулейкиным в 1926 г. [10].

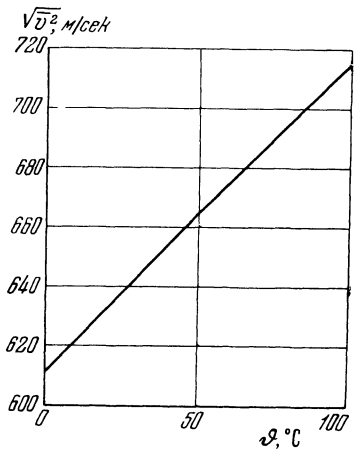


Рис. 538. Скорости молекул воды при различных температурах

Сама кинетическая теория вещества, как известно, была в свое время создана для исследования движения молекул идеального газа. Однако выводы ее оказались настолько всеобъемлющими, что очень скоро были распространены и на реальные газы и даже на жидкости и твердые тела.

Сначала такие обобщения делались очень неохотно и чрезвычайно осторожно, но результаты их всегда оказывались весьма ободряющими, давая повод ко все новым и новым обобщениям, хорошо согласующимся с опытными данными.

В частности, представление о температуре вещества как о мериле кинетической энергии молекул в их тепловом движении оказалось применимым и к жидкостям. Для жидкостей тоже можно выражать так называемую среднюю квадратичную скорость $\sqrt{\overline{v^2}}$ через температуру (абсолютную) T, воспользовавшись соотношением

$$\overline{v^2} = \frac{3kT}{m}, \tag{118}$$

где k — постоянная Больцмана [см. (2)], а m масса молекулы.

В частности, для молекул воды получаются значения скоростей, приведенные на диаграмме рис. 538, где по оси абсцисс отмечены не абсолютные температуры, а температуры по Цельсию. Как видно, в пределах между точкой замерзания и точкой кипения средние квадратичные скорости молекул воды растут от 613 до 715 *м/сек*.

Каково же распределение скоростей среди молекул воды при различных температурах? Шулейкин принимает его таким же, каким оно считается в газах, согласно теории Максвелла.

Как известно, Максвеллу удалось определить, какова вероятность существования тех или иных скоростей при данной температуре вещества; таким образом оказалась освещенной та картина молекулярного движения, которая приводит к соответствующему значению $\overline{v^2}$ в формуле (118).

Пусть из общего числа N движущихся молекул некоторое число dN обладает скоростями, лежащими между v и $v + dv$. Отношение dN/N можно рассматривать как вероятность существования этих скоростей в отмеченном интервале. По Максвеллу, она выражается так:

$$w = \frac{dN}{N} = \frac{4}{\alpha^3 \sqrt{\pi}} v^2 e^{-\frac{v^2}{\alpha^2}} dv, \tag{119}$$

причем физический смысл параметра α легко выяснить, рассмотрев свойства функции от v, фигурирующей в (119). Функция эта обращается в нуль и при $v = 0$ и при $v = \infty$. Следовательно, при каком-то значении v она должна обладать максимумом. Применив обычный прием, можно показать, что максимум возникает при $v = \alpha$.

Другими словами, α представляет собой наивероятнейшую скорость. Абсолютная величина ее должна зависеть от температуры и от массы молекулы, ибо от этих аргументов зависит средняя квадратичная скорость $\sqrt{\overline{v^2}}$.

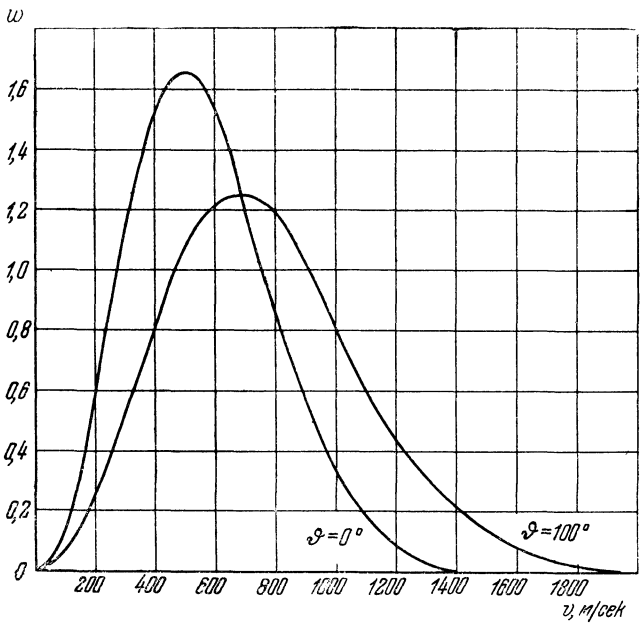


Рис. 539. Распределение скоростей

Воспользовавшись соотношением (119), легко найти аналогичный закон распределения квадратов скоростей, а следовательно, и среднюю квадратичную скорость, выраженную через тот же параметр α. Вычисления показывают, что

$$\sqrt{\overline{v^2}} = \alpha\sqrt{\frac{3}{2}}, \tag{120}$$

а стало быть, на основании (118) и (120)

$$\alpha = \sqrt{\frac{2kT}{m}}. \tag{121}$$

Вычислив по формуле (121) величину α для водяного пара, подставим ее в (119) и допустим, что интервал dv скоростей очень мал, но *конечен*. Пусть, например, он равен 1 *м/сек*. Тогда величина dN/N тоже окажется конечной: это будет относительное количество молекул, скорость которых лежит между v и $v + 1$.

Выразим эту величину в промиллях и вычислим ее по (119) применительно к воде при температуре 273° K (т. е. 0° C) и 373° K (т. е. 100° C). Тогда получим кривые распределения скоростей, изображенные на рис. 539.

Как видно, при повышении температуры наивероятнейшая скорость увеличивается, а вместе с тем несколько сглаживается неравенство в распределении скоростей: максимум лежит на меньшей высоте, а сама кривая распределения растягивается вдоль оси абсцисс.

В нашей задаче об испарении воды сами по себе величины скоростей молекул не играют никакой роли: ведь молекула может обладать весьма большой скоростью, направленной параллельно поверхности жидкости, но как бы велика ни была эта скорость, такая молекула из воды не вылетит, пока не изменится в соответствующую сторону направление ее движения. Поэтому Шулейкин рассматривает распределение *составляющих скорости, нормальных к поверхности воды.*

Пусть из N_1 молекул воды, находящихся в 1 $см^3$ воды, dN_1 молекул обладают такими скоростями, нормальные составляющие которых лежат между u и $u + du$. Тогда, как можно показать, между dN_1 и N_1 будет соотношение, напоминающее (119), но отличающееся от него:

$$\frac{dN_1}{N_1} = \frac{1}{\eta}\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{1/2} e^{-\frac{mu^2}{2kT}} du. \tag{122}$$

Для общности здесь введен поправочный коэффициент η, не принимавшийся во внимание в старой теории Шулейкина, но предложенный Эйкеном. Этот коэффициент учитывает, какая доля единицы объема действительно пронизывается молекулами при их движении. Другими словами, $\eta = 1$, за вычетом относительного объема, приходящегося на долю самих молекул.

К 1 $см^2$ поверхности воды со скоростями u и в секунду будет подлетать по направлению нормали число молекул, равное

$$dn = u dN_1. \tag{123}$$

Величина dN_1, входящая в (123), может быть выражена через элементы, входящие в (122). В свою очередь число молекул в 1 $см^3$ N_1 связано с числом Авогадро N_A, молекулярным весом μ и удельным объемом γ; в итоге

$$dn = \frac{N_A}{\gamma\mu\eta}\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{1/2} e^{-\frac{mu^2}{2kT}} u du. \tag{124}$$

Разумеется, не все молекулы воды, ударяющиеся снизу о поверхность моря, могут вылететь в атмосферу. Вылетают лишь те молекулы, начальная кинетическая энергия которых достаточна для преодоления сил сцепления, стремящихся удержать их в воде. Пусть работа, затрачиваемая на преодоление сил сцепления при отделении одной молекулы от поверхности воды, равна P. Тогда наименьшая скорость, необходимая молекуле для прорыва поверхностного слоя, будет

$$u_m = \left(\frac{2P}{m}\right)^{1/2}.$$

Следовательно, испаряться будут лишь те молекулы, скорости которых заключены в пределах от $(2P/m)^{1/2}$ до бесконечности. Но в таком случае число испаряющихся молекул определится путем интегрирования (124) в только что указанных пределах. В расчете на каждый квадратный сантиметр в секунду это число будет

$$n_0 = \frac{N_A}{\gamma\mu\eta}\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{1/2} \int_{\sqrt{\frac{2P}{m}}}^{\infty} e^{-\frac{mu^2}{2kT}} u du = \frac{N_A}{\gamma\mu\eta}\left(\frac{kT}{2\pi m}\right)^{1/2} e^{-\frac{P}{kT}}. \tag{125}$$

Физический смысл величины P, входящей сюда, нетрудно угадать, но, последовательности ради, ее можно определить, вычислив по (125), чему равна энергия, унесенная из общей массы жидкости улетевшими молекулами.

Кинетическая энергия каждой из них равняется $\frac{1}{2} mu^2$, а потому кинети-

ческая энергия всех вылетевших молекул выразится интегралом

$$\frac{N_A}{\gamma\mu\eta}\left(\frac{m^{3/2}}{2\sqrt{2\pi kT}}\right)\int_{\sqrt{\frac{2P}{m}}}^{\infty} e^{-\frac{mu^2}{2kT}}u^3du. \tag{126}$$

Но ведь ту же величину мы можем выразить и иным образом: улетевшие молекулы унесли с собой средний запас кинетической энергии, присущей им соответственно данной температуре воды, и, сверх того, некоторое количество тепла, называемое скрытой теплотой парообразования. Если мы последнюю величину отнесем к одной молекуле и обозначим ее через ρ_m, то найдем, что каждая молекула уносит с собой кинетическую энергию, равную в среднем

$$kT + \rho_m. \tag{127}$$

Нетрудно видеть, что выражение (127) должно равняться частному от деления интегралов (126) на (125). Произведя интегрирование (126) и выполнив деление с последующими преобразованиями, найдем, что

$$kT + P = kT + \rho_m,$$

или

$$P = \rho_m. \tag{128}$$

Итак, работа P, производимая молекулой при пробивании поверхностного слоя, равна скрытой теплоте парообразования, отнесенной к одной молекуле.

Подставив найденное значение P в (125), получим

$$n_0 = \frac{N_A}{\gamma\mu\eta}\sqrt{\frac{kT}{2\pi m}}e^{-\frac{\rho_m}{kT}}. \tag{129}$$

Вот каково число молекул, вылетающих в атмосферу сквозь каждый квадратный сантиметр поверхности моря в секунду.

Вместо молекулярных постоянных, входящих в выражение этого числа, можно употреблять постоянные, отнесенные к одному молю: стоит только числитель и знаменатель дроби под радикалом, а также числитель и знаменатель дроби в показателе степени умножить на число Авогадро, как получится

$$n_0 = \frac{N_A}{\gamma\mu\eta}\sqrt{\frac{RT}{2\pi\mu}}e^{-\frac{\rho_\mu}{RT}}. \tag{130}$$

Надо отметить, что известную постоянную R под радикалом необходимо выражать в абсолютных единицах; ту же постоянную в показателе степени можно выражать и в абсолютных единицах работы и в калориях в зависимости от того, в каких единицах выражена скрытая теплота испарения ρ_μ.

Зная n_0, нетрудно найти *объемное* количество воды, которая испарилась бы с 1 $см^2$ в секунду, если бы часть молекул не поглощалась снова жидкой фазой. Это будет максимальная возможная «объемная» скорость испарения, которую, в отличие от E, фигурировавшего в гл. IV, обозначим через E_0. Эта величина определится непосредственно из (130) путем деления на число молекул, содержащихся в каждом кубическом сантиметре воды:

$$E_0 = \frac{1}{\eta}\sqrt{\frac{RT}{2\pi\mu}}e^{-\frac{\rho_\mu}{RT}}. \tag{131}$$

Формула (131) без поправочного коэффициента η была выведена Шулейкиным. К сожалению, коэффициент η, внесенный Эйкеном [11], до настоящего времени не может быть определен с той же точностью, как другие величины, входящие в (131). Поэтому на диаграмме рис. 540 приводим кривую, которая выражает изменения не самой скорости испарения E_0 с температурой, а изменения связанной с нею величины $E_0\eta$. По мере уточнения в определении η уточнится и вычисление E_0 (числа, проставленные по оси ординат, останется лишь разделить на η, чтобы получить E_0).

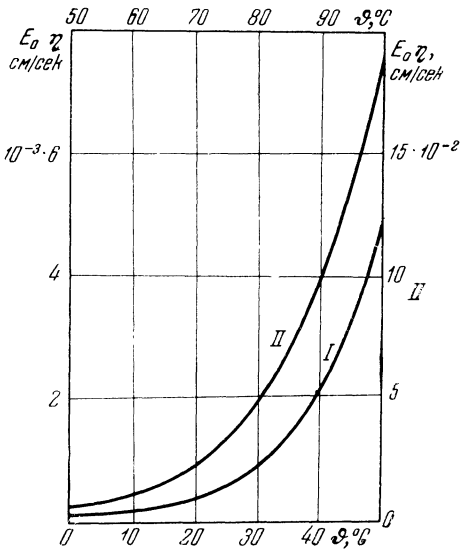


Рис. 540. Скорость испарения воды

Ниже будет показано, что в одном исключительном случае испарение идет в природных условиях со скоростью E_0, определяемой по (131). Обычно же молекулы водяного пара не успевают диффундировать в окружающую воздушную среду с достаточно большой скоростью, а потому часть их отражается обратно и ударяется о поверхность воды. Многие исследователи полагают, что каждая молекула пара, ударившаяся о поверхность воды, поглощается ею. Однако некоторые (Марселен, Шулейкин) придерживаются иного взгляда, не лишенного серьезных оснований. Основания эти станут ясными, если мы вспомним, что поверхность воды, по современным воззрениям, чрезвычайно похожа на поверхность твердого тела, а потому поверхностный слой должен проявлять некоторую «жесткость». Но если это так, то часть ударяющихся о него молекул пара может отскакивать обратно в воздушную среду.

Для общности будем поэтому считать, что из ζ молекул пара, ударяющихся о поверхность воды, поглощается одна. Посмотрим, что будет происходить в слое воздуха, непосредственно прилегающем к воде (чрезвычайно тонком).

Пусть из n_0 молекул, испускаемых водой в воздух, только некоторая часть диффундирует вверх и благодаря этому над поверхностью воды возникает некоторая концентрация молекул пара: ν_0 молекул в 1 $см^3$. Как известно, по кинетической теории газа, число ударов, наносимых единице поверхности в единицу времени этими молекулами, равно

$$\nu_0 \sqrt{\frac{RT}{2\pi\mu}}.$$

Из всего числа ударяющихся молекул по условию водой поглощается лишь $1/\zeta$ часть. Когда непосредственно над водой создается тонкий слой насыщенного пара, то число поглощаемых молекул делается равным числу испускаемых. Следовательно, для концентрации молекул насыщенного пара можно написать условие

$$n_0 - \frac{\nu_0^{\text{нас}}}{\zeta}\sqrt{\frac{RT}{2\pi\mu}} = 0. \tag{132}$$

Сюда надо подставить выражение n_0 из (130). Тогда окажется, что

$$\nu_0^{\text{нас}} = \frac{N_A}{\gamma\mu}\frac{\zeta}{\eta}e^{-\frac{\rho_\mu}{RT}}. \tag{133}$$

Но, как известно, упругость насыщенного пара связана простым соотношением с $\nu_0^{\text{нас}}$

$$p^{\text{нас}} = \nu_0^{\text{нас}} kT. \tag{134}$$

Следовательно [1],

$$p^{\text{нас}} = \frac{RT}{\gamma\mu}\frac{\zeta}{\eta}e^{-\frac{\rho_\mu}{RT}} \text{ [CGS]}. \tag{135}$$

Разумеется, уравнение (135) нельзя считать вполне точным хотя бы уже потому, что при выводе его полагалась постоянной скрытая теплота испарения. В действительности она изменяется с температурой, причем закон ее изменения определен из опыта не совсем надежно. За неимением лучшего можно считать, что

$$\rho = \alpha - \beta\vartheta \quad (\vartheta\,^\circ\text{C}). \tag{136}$$

На основании измерений следовало бы положить для водяного пара

$$\alpha = 596{,}6;\ \beta = 0{,}601\ \left(\text{в } \frac{\text{г}\cdot\text{кал}}{\text{г}}\right), \tag{137}$$

помня, что при критической температуре скрытая теплота испарения должна обращаться в нуль [до этой температуры формулу (136) нельзя экстраполировать].

Впрочем, точностью не отличаются и современные термодинамические формулы, выражающие упругость насыщенного пара. В них приходится вводить некоторые поправочные коэффициенты для примирения их с результатами непосредственных измерений, причем сами введенные коэффициенты пока никак не могут быть обоснованы термодинамически.

Для мореведа формула (135) обладает тем преимуществом перед термодинамическими, что в ней расшифрован *физический смысл* самого процесса испарения, вскрыт его внутренний механизм, который термодинамика таит внутри своих абстрактных функций.

§ 7. Кинетика испарения, управляемого диффузией, в некоторых конкретных случаях

Кинетическая теория испарения, предложенная Шулейкиным, позволяет исследовать процесс испарения при полном отсутствии движения воздуха, а это очень важно для суждения о «нулевом» значении скорости испарения, о котором упоминалось в гл. IV в связи с обсуждением эмпирических формул, предлагаемых различными авторами.

Легко видеть, что при полном отсутствии движения воздуха молекулы, поступающие из воды, могут уноситься в вышележащие слои воздуха только путем диффузии. Уноситься будут, разумеется, лишь те молекулы, которые не поглотились водой при ударах о ее поверхность. Иными словами, число молекул, проходящих вверх сквозь 1 $см^2$ в секунду, будет выражаться разностью

$$n_0 - \frac{\nu_0}{\zeta}\sqrt{\frac{RT}{2\pi\mu}}.$$

С другой стороны, то же число молекул, диффундирующих вверх, может быть выражено на основании закона диффузии; оно должно равняться $-D\frac{\partial\nu}{\partial z}$ (D — коэффициент диффузии).

[1] Чтобы получить выражение $p^{\text{нас}}$ в миллиметрах ртутного столба, надо правую часть (135) разделить на переходный коэффициент, равный 1330.

Соединяя знаком равенства оба выражения одной и той же величины, получим основное уравнение испарения, управляемого диффузией:

$$n = n_0 - \frac{\nu_0}{\zeta}\sqrt{\frac{RT}{2\pi\mu}} = -D\frac{\partial \nu}{\partial z}. \tag{138}$$

Решаться оно будет различными способами в зависимости от граничных условий.

а) Испарение с поверхности моря (при абсолютно неподвижном воздухе). В этом конкретном случае линии тока пара — параллельные прямые, нормальные к поверхности моря. Скорость диффузии определяется градиентом $\partial\nu/\partial z$, постоянным по высоте.

Пусть на высоте h над уровнем моря концентрация молекул пара равняется ν_1. Тогда, очевидно,

$$-\frac{\partial \nu}{\partial z} = \frac{\nu_0 - \nu_1}{h}. \tag{139}$$

Подставив (139) в основное уравнение (138), получим

$$n = n_0 - \frac{\nu_0}{\zeta}\sqrt{\frac{RT}{2\pi\mu}} = D\frac{\nu_0 - \nu_1}{h}, \tag{140}$$

где n — искомое количество молекул пара, уносящееся вверх диффузией (с 1 $см^2$ в секунду). Исключив ν_0 из (140) и выполнив простые преобразования, найдем выражение n через n_0

$$n = n_0\left|\frac{1 - \frac{\nu_1}{\zeta n_0}\sqrt{\frac{RT}{2\pi\mu}}}{1 + \frac{h}{D\zeta}\sqrt{\frac{RT}{2\pi\mu}}}\right|. \tag{141}$$

Но от n_0 и n легко перейти к скоростям свободного E_0 и истинного E испарения путем совершенно очевидных преобразований. В процессе этих преобразований введем для удобства новую величину Δ_1 — *относительный влажный дефицит*

$$\Delta_1 = \frac{p^{\text{нас}} - p_1}{p^{\text{нас}}} = \frac{\nu_0^{\text{нас}} - \nu}{\nu_0^{\text{нас}}}. \tag{142}$$

Сопоставляя (132) с (142), напишем, вместо (141),

$$E = \frac{\Delta_1 E_0}{1 + \frac{h}{D\zeta}\sqrt{\frac{RT}{2\pi\mu}}}. \tag{143}$$

Относительный влажный дефицит Δ_1, измеренный на высоте h сантиметров над уровнем моря, удобно выражать в процентах, а скорость испарения — в миллиграммах в минуту с квадратного сантиметра. При этих условиях формулу (143) придется заменить такой:

$$E = \frac{600\,\Delta_1 E_0 \delta}{1 + \frac{h}{D\zeta}\sqrt{\frac{RT}{2\pi\mu}}}, \tag{144}$$

где E_0 выражено в прежних единицах согласно (131).

Так как коэффициент диффузии D весьма мал, то весьма малой оказывается и скорость испарения E, управляемого диффузией. Она практически равна нулю по сравнению со скоростью испарения при самом слабом ветре.

б) Испарение с поверхности круга (при полной неподвижности воздуха). Задача формально была решена Стефаном посредством метода, предложенного Максвеллом. Воспользуемся максвелловским методом для вывода соотноше-

ний, основанных не на формальных положениях Стефана, а на положениях кинетической теории испарения.

Линии токов пара, исходящие с поверхности воды, уподобим электрическим силовым линиям, исходящим от заряженного диска того же диаметра, как наш сосуд с водой. Роль градиента концентрации пара теперь будет играть градиент потенциала $\partial V/\partial z$, а роль концентрации ν_0 пара в самом нижнем слое воздуха, прилегающем к воде,— потенциал диска V_0. Тогда

$$-\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)_0 = \frac{q}{4\pi a\sqrt{a^2-r^2}}, \tag{145}$$

$$q = \frac{2a}{\pi}V_0. \tag{146}$$

Величина $(\partial V/\partial z)$ с индексом 0 относится также к поверхности диска. Через q обозначен заряд, a — радиус диска, r — расстояние данной точки от центра.

Исключив q из (145) и (146), найдем

$$-\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)_0 = \frac{V_0}{2\pi^2\sqrt{a^2-r^2}}. \tag{147}$$

Возвратимся снова к диффузионной задаче. Тогда ту же самую формальную зависимость придется установить для величин $\partial\nu/\partial z$ и ν, которые вступят на смену $\partial v/\partial z$ и V. Именно придется написать

$$-\left(\frac{\partial \nu}{\partial z}\right)_0 = \frac{\nu_0}{2\pi^2\sqrt{a^2-r^2}}. \tag{148}$$

Основное уравнение испарения (138) примет, следовательно, вид

$$n = n_0 - \frac{\nu_0}{\zeta}\sqrt{\frac{RT}{2\pi\mu}} = \frac{D\nu_0}{2\pi^2\sqrt{a^2-r^2}}. \tag{149}$$

Отсюда, исключив ν_0, найдем для кольцевой зоны радиуса r и ширины dr

$$2\pi r n dr = \frac{2\pi n_0 r dr}{A\sqrt{a^2-r^2}+1}, \tag{150}$$

где для краткости обозначено

$$A = \frac{2\pi^2}{D\zeta}\sqrt{\frac{RT}{2\pi\mu}}. \tag{151}$$

Количество молекул, вылетающих в секунду со всей поверхности воды в сосуде, найдем, проинтегрировав (150) в пределах от $r = 0$ до $r = a$. Оно будет равно

$$\left[\frac{2\pi}{A}a - \frac{2\pi}{A^2}\ln(1+Aa)\right]n_0. \tag{152}$$

Второй член в скобках очень мал по сравнению с первым. Пренебрегая им и переходя от числа молекул к количеству воды Q, испаряющейся *со всей поверхности* круга, получим

$$Q = \frac{D\zeta}{\pi\eta}ae^{-\frac{\sigma_\mu}{RT}}\ \frac{см^3}{сек\cdot вся\ поверхность}. \tag{153}$$

Итак, количество воды, испаряющейся при совершенно неподвижном воздухе с поверхности круглого сосуда, оказывается пропорциональным первой степени радиуса сосуда, а не квадрату его. Другими словами, количество воды, испаряющейся со всей поверхности воды, здесь пропорционально не самой поверхности, а линейным размерам ее. Следовательно, количество воды, испаряющейся с единицы поверхности, здесь зависит от размеров сосуда и оказывается обратно пропорциональным радиусу его.

Этот результат, полученный Стефаном, исходившим из чисто формальных соображений, является совершенно естественным с точки зрения диффузии: чем меньше размеры круга, с площади которого идет испарение, тем ярче выражено расхождение линий тока (подобных силовым линиям электрического поля), стало быть, тем скорее должен протекать процесс диффузии.

Этот вывод Стефана совсем неосновательно переносится иногда на случай испарения, происходящего под действием ветра, чем и объясняется ошибочное мнение, укоренившееся у некоторых метеорологов,— будто размеры испарителя влияют на результаты наблюдения скорости испарения с единицы поверхности.

Контрольные опыты, ставившиеся Шулейкиным над испарителями всевозможных размеров (с диаметрами от 2 до 50 *см*), показали, что при испарении под действием ветра количество воды, испаряющейся с единицы поверхности, совершенно не зависит от размеров сосуда. Процесс испарения под действием ветра протекает по совершенно иным путям: как выше уже упоминалось, ветер вырывает молекулы пара из поверхностного слоя воздуха, непосредственно прилегающего к воде, а потому максвелловские линии тока здесь не играют никакой роли.

При выводе формулы (153) для простоты предполагалось, что на достаточном расстоянии от эвапорометра в атмосфере паров нет. Положим теперь, что в ней имеется некоторая определенная концентрация пара, складывающаяся с концентрацией, вызываемой испарением из сосуда. От наложения двух картин распределения пара величина градиента концентрации, очевидно, не может измениться.

Вывод изменится лишь в том отношении, что вместо n_0 придется подставить

$$n_0 - \frac{\nu_1}{\zeta}\sqrt{\frac{RT}{2\pi\mu}},$$

т. е. из числа испускаемых молекул придется вычесть дополнительное число поглощаемых. Окончательный результат удобнее представить, введя вместо концентраций давления пара $p^{\text{нас}}$, насыщающего пространство, и p_1 существующего в действительности. Если абсолютный влажный дефицит

$$p^{\text{нас}} - p_1 = \Delta$$

выражать в динах на 1 $см^2$, то количество воды, испаряющейся в секунду со всей поверхности, представится так:

$$Q = \left(\frac{D\gamma\mu}{\pi\eta RT}\right)\Delta. \tag{154}$$

Если выразить влажный дефицит Δ в миллиметрах ртутного столба, то придется правую часть (154) умножить на переходный множитель, равный 1330.

в) Испарение капель и брызг. Соли в морском воздухе. Предположим, что капля обладает формой шара с радиусом a, и снова воспользуемся электростатической аналогией. Градиент потенциала на поверхности заряженного шара равняется

$$-\left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)_0 = \frac{q}{a^2}, \tag{155}$$

где, очевидно, заряд q связан с величиной потенциала

$$p = aV_0. \tag{156}$$

Исключив q, найдем $-\left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)_0 = \frac{V_0}{a}$, а заменив здесь V_0 через ν_0 и $\frac{\partial V}{\partial r}$ через

$\frac{\partial v}{\partial r}$, получим

$$-\left(\frac{\partial v}{\partial r}\right)_0 = \frac{v_0}{a}. \tag{157}$$

Исключив v_0 из основного уравнения (138) и перейдя затем от n и n_0 к E и E_0, найдем, что скорость E испарения с поверхности капли будет

$$E = \frac{E_0}{\frac{a}{D\zeta}\sqrt{\frac{RT}{2\pi\mu}} + 1}. \tag{158}$$

До сих пор для простоты полагалось, что в воздухе, на достаточном расстоянии от капли, паров воды нет. Если в воздухе, как это всегда бывает, содержится некоторое количество пара, причем относительный влажный дефицит равняется Δ_1, то скорость испарения выразится так:

$$E = \frac{0{,}01\,\Delta_1 E_0}{\frac{a}{D\zeta}\sqrt{\frac{RT}{2\pi\mu}} + 1}. \tag{159}$$

Относительный влажный дефицит Δ_1 следует определять по формуле (142), в которой упругость насыщенного пара $p^{\text{нас}}$ соответствует температуре *капли*, а не температуре воздуха.

Соотношение (159) показывает, что при очень малых радиусах a капли испаряются практически независимо от величины коэффициента диффузии; если бы в атмосфере пары воды отсутствовали, то мельчайшие брызги воды испарялись бы с той же скоростью, как в вакууме.

Вот почему во время шторма, когда с верхушек волн срывается большое количество воды в виде брызг, испарение идет чрезвычайно интенсивно.

Соли, растворенные в воде, практически не влияют на скорость испарения, пока концентрация их не переходит известного предела.

При испарении брызг, разумеется, этот предел переходится, а потому последняя стадия испарения происходит с несколько пониженной скоростью. Но во всяком случае испарение идет чрезвычайно быстро, несмотря на повышение концентрации солей и на непрерывное падение температуры испаряющейся капельки. В результате в воздухе оказываются взвешенными мельчайшие кристаллики солей, оставшиеся от испарившихся брызг. Размеры их весьма малы, в чем нетрудно убедиться, проделав простой подсчет.

Пусть диаметр капельки, оторвавшейся от поверхности моря под действием ветра, равнялся вначале d и пусть соленость воды равнялась $S^0/_{00}$. Если средняя плотность выкристаллизовавшихся солей равна δ_2, то объем собрания кристалликов, оставшихся в воздухе после окончательного испарения капли, будет

$$q = \frac{\pi}{6}\frac{Sd^3}{\delta_2}10^{-3}. \tag{160}$$

Предположив, что форма кристаллического остатка близка к кубу, найдем, что ребро такого куба должно равняться

$$a = 0{,}08\sqrt[3]{\frac{S}{\delta_2}}d. \tag{161}$$

Подставим сюда числовые значения величин, входящих в (161): $S = 35^0/_{00}$, $\delta_2 = 2{,}2$. Тогда окажется, что примерно $a = d/5$.

Начальные размеры брызг часто бывают порядка 0,1—0,01 *мм*. Следовательно, размеры кристалликов, остающихся после испарения, будут порядка 0,02—0,002 *мм*.

Такие угловатые кристаллики, очевидно, будут падать медленнее, чем стоксовы маленькие шарики. Следовательно, вспоминая известную формулу

Стокса, можно написать, что в данном случае

$$v < \frac{a^2\delta_2}{18\mu} g, \tag{162}$$

где δ_2 — по-прежнему средняя плотность кристаллического остатка, а μ — коэффициент вязкости для воздуха. Положив $a = 0{,}002—0{,}0002$ *см*, $\mu = 0{,}00018$, $\delta_2 = 2{,}2$, найдем, что скорость падения кристалликов $v < 3{,}10^{-3}$ *см/сек*.

Совершенно очевидно, что такие кристаллики солей будут носиться в воздухе, находясь во *взвешенном* состоянии; ветер будет заносить их далеко в глубь суши.

И действительно, опыт показывает, что в прибрежных районах соли оседают на различных предметах, оседают и на земле, проникая в почву. Они должны играть громадную роль при вдыхании морского воздуха, целебное действие которого, несомненно, наполовину вызвано ими, а наполовину, по-видимому, ионами, также носящимися в морском воздухе.

Есть основания считать, что сами кристаллики соли, носящиеся в воздухе, подвергаются воздействию солнечных лучей и вследствие фотоэффекта приобретают электрические заряды. Подобные — активизированные — кристаллики, несомненно, должны обладать физиологическим действием. Первые измерения количества солей, выносимых из моря ветром, после испарения капель, начали С. В. Доброклонский и П. Б. Вавилов в 1937 г. на Черноморской гидрофизической станции (в Кацивели). Сперва был применен метод засасывания морского воздуха посредством аспиратора и пропускания его пузырьками через воду, в которой должны были растворяться соли. Но такой метод оказался очень неточным: много солей оставалось внутри пузырьков воздуха. После этого цитированные авторы выставляли на ветер стеклянные пластинки размером 15×20 *см*, располагая их перпендикулярно к воздушному потоку. По истечении некоторого промежутка времени стекло убиралось и тщательно обмывалось дистиллированной водой, количество которой было точно известно. После такой процедуры эта вода титровалась азотнокислым серебром на хлор. Результаты измерений воспроизведены на рис. 541. По оси ординат здесь отложены высоты над землей, а по оси абсцисс — количество миллиграммов хлора (в солях), приходящееся на каждый квадратный метр площади, перпендикулярной к потоку, в минуту. Как видим, максимум «плотности» приходится на высоту около 1,2 *м* над землей. Цифры, проставленные около кривых, показывают, какому расстоянию от моря соответствует та или иная кривая. Как видим, по мере удаления от моря «плотность» потока непрерывно уменьшается. Закон убывания количества переносимых солей, по мере удаления от моря, станет еще более очевидным, если вместо «плотности» потока рассматривать полное количество солей, переносимых над единицей длины линии, параллельной берегу, в единицу времени. Это количество авторы вычислили, интегрируя графически функцию распределения «плотности» от поверхности земли до той высоты (несколько метров), на которой плотность солевого потока становится совсем малой. Результаты вычислений воспроизведены на рис. 542. По оси абсцисс на нем отложены расстояния от берега, а по оси ординат — количество миллиграммов хлора (в солях), переносимых в минуту над 1 *м* линии, параллельной берегу.

Применявшаяся методика измерений была несколько изменена продолжателями этих работ. Интересные исследования были проделаны Л. И. Беляевым, Т. К. Жаворонкиной, Л. К. Блиновым. Общим недостатком всех работ до недавнего времени являлось отсутствие каких бы то ни было *абсолютных* измерений количества солей, взвешенных в воздухе.

Важный шаг вперед в этих исследованиях сделал Л. И. Беляев. Он произвел первые *количественные* оценки переходных множителей, на которые

следует умножать цифры, получаемые по тому или иному методу для учета выноса солей воздушными потоками. Этот автор справедливо считает, что при обтекании стеклянных экранов воздушными потоками близ самой поверхности стекла траектории воздушных частиц и кристалликов солей, переносимых в потоке, должны обладать очень большой кривизной. При движении по таким траекториям кристаллики различных размеров должны неодинаково вести себя по отношению к окружающим массам движущегося воздуха: часть этих частиц будет оседать на стекле, а другая часть (и притом неодинаковая для различных размеров) будет проноситься мимо, уносясь вместе с воздушным потоком дальше.

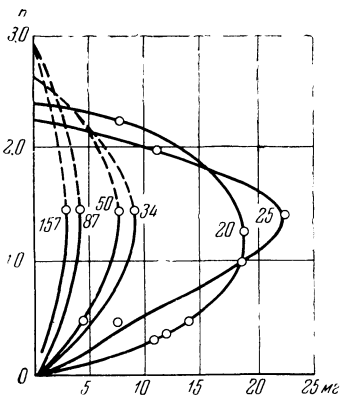


Рис. 541. Вынос солей из моря. Распределение по вертикали

Для исследования количественной стороны дела Л. И. Беляев проделал контрольные опыты в аэродинамической лаборатории (в Кацивели) [12, 13].

В начальной и средней части длинной аэродинамической трубы с поперечным сечением 500 × 500 *мм* было установлено 9 стеклянных пластинок, перпендикулярных потоку. Размер каждой был 55 × 26 *мм*. Они располагались в шахматном порядке для обеспечения более или менее равномерного обтекания потоком.

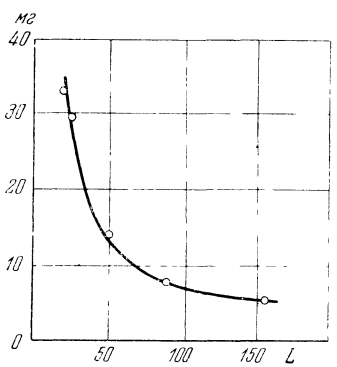


Рис. 542. Распределение по горизонтали (по С. В. Доброклонскому и П. Б. Вавилову)

Морская вода распылялась специальным пульверизатором, и взвесь образовавшихся капелек, а затем кристалликов солей заполняла всю лабораторию. В различных местах лаборатории, на ее стенах, на полу и на потолке также устанавливались контрольные стеклянные пластинки.

Каждый опыт длился 2 *мин*. После этого все пластинки споласкивались дистиллированной водой, а затем раствор солей титровался по Мору. Разумеется, пластинки, стоявшие в трубе, и пластинки контрольные, взятые из различных мест лаборатории, исследовались отдельно.

Опыты Л. И. Беляева показали, что на стеклянных пластинках оседает лишь 6—6,5% того количества солей, какое проносится сквозь поперечное сечение воздушного потока, эквивалентное площади стеклянной пластинки.

Подобные же контрольные опыты произвел цитированный автор и над электрофильтрами, посредством которых засысывался воздух с взвешенными в нем кристалликами солей. Обнаружилось, что хотя электрофильтры улавливают значительно больший процент солей, проносящихся в воздушном потоке, но, к сожалению, никакого надежного переходного коэффициента для них получить не удается: можно лишь утверждать, что фильтры улавливают в 1,5—2 раза меньше солей по сравнению с количеством их, проносящимся в воздухе. Еще надо отметить, что Л. И. Беляев первый обратил внимание на особо важную роль *пены*, срываемой штормовым ветром с поверхности волн. Он показал, что большие клочья пены, поднимаемой в воздух, могут дать после испарения воды значительно больше кристалликов солей, чем простые капли, срываемые тем же ветром с поверхности волн.

Вынос солей из моря происходит также в очень высоких слоях тропосферы, куда кристаллики солей поднимаются восходящими токами воздуха над морем и где они служат центрами конденсации паров, в облаках. Интересны работы Т. К. Жаворонкиной [14], титровавшей пробы свежего *снега*, выпавшего в различных областях Европейской части СССР. Она обнаружила следы морских солей даже в пробах свежего снега, взятых в центральных областях страны. По мере приближения к берегам северных и южных морей количество солей в пробах резко возрастает. Такой метод должен найти применение в метеорологической службе: ведь посредством титрования осадков, выпавших при той или иной синоптической картине, возможно судить о *происхождении* облаков, принесенных в глубь страны; совсем различные результаты даст титрование в случае осадков, выпавших из туч, которые принесены с океана или с внутренних морей, и в случае осадков, которые выпали из туч, возникших в результате конденсации паров *внутриматерикового* происхождения.

Исследования выноса солей с океана и внутренних морей, начатые в нашей стране 30 лет тому назад, впоследствии были продолжены иностранными геофизиками. В частности, интересны работы Д. Бланшара [15], развивающего ту же мысль, что и Л. И. Беляев: о большой роли клочьев пены, срываемых штормовым ветром с поверхности волн. Производя рапидную киносъемку, Бланшар исследовал механизм разрыва оболочки маленьких воздушных пузырьков. При таких разрывах возникают мельчайшие брызги воды, быстро испаряющейся в воздухе и дающей коллоидальную взвесь солей. Кроме того, Бланшар исследовал *электрический* эффект, возникающий всегда, когда лопаются пузырьки воздуха и распыляется их водная оболочка.

§ 8. Испарение с поверхности моря под действием ветра

В отличие от только что рассмотренных конкретных примеров, скорость испарения под действием ветра определяется не столько молекулярными процессами, сколько процессом турбулентного перемешивания воздуха: молекулярная диффузия происходит лишь в весьма тонком — ламинарном или почти ламинарном — слое, лежащем непосредственно над водой; отвод же водяного пара в атмосферу идет посредством непрерывного перемешивания, тем более интенсивного, чем больше скорость ветра.

Из множества попыток различных авторов разобраться в этом чрезвычайно сложном процессе рассмотрим здесь вкратце попытку Г. Свердрупа [16].

Этот автор исходит из современных представлений о пограничном слое, вытекающих из теории Прандтля. Они связаны с понятиями о некоторой величине z_0 (с размерностью длины), характеризующей шероховатость поверхности, и о некоторой величине l (той же размерности), характеризующей так называемый путь перемешивания.

Обозначим сокращенно через f величину $\frac{0{,}623}{p-e}e$, где в свою очередь e обозначает упругость водяного пара, а p — атмосферное давление. Величину f можно назвать удельной влажностью воздуха. Тогда, исходя из теории турбулентного перемешивания, надо полагать, что количество воды E, испаряющейся в единицу времени с единицы поверхности, выразится через коэффициент перемешивания A и через f так:

$$E = -A\frac{df}{dz}. \tag{163}$$

С другой стороны, по Прандтлю, напряжение сдвига τ в вязкой среде, коэффициент турбулентной вязкости μ, характеристика шероховатости z_0,

путь перемешивания l и скорость ветра V_1 на какой-то высоте z_1 связаны между собой соотношениями

$$l = k(z_1 + z_0), \quad \tau = \mu \frac{dV_1}{dz} = \delta l^2 \left(\frac{dV_1}{dz}\right)^2. \tag{164}$$

Числовой коэффициент k может быть принят равным 0,38. Непосредственно отсюда вытекает, что

$$V_1 = \frac{1}{k} \sqrt{\frac{\tau}{\delta}} \ln\left(\frac{z_1 + z_0}{z_0}\right) \tag{165}$$

и, наконец,

$$\mu = \delta k (z_1 + z_0) \sqrt{\frac{\tau}{\delta}} = \delta k^2 \frac{z_1 + z_0}{\ln\left(\frac{z_1 + z_0}{z_0}\right)} V_1. \tag{166}$$

Свердруп показал, что близ поверхности моря можно свободно отождествить коэффициенты A и μ. Но если это так, то на основании уравнений (163)—(166) легко прийти к выводу, что упругость пара e_2 на некоторой высоте z_2 над поверхностью моря будет

$$e_2 = (e' - e_w) + e_w - c \ln\left(\frac{z_2 + z_0}{z_0}\right), \tag{167}$$

и скорость испарения E выразится так:

$$E = \delta k^2 \frac{V_1}{\ln\left(\frac{z_1 + z_0}{z_0}\right)} \frac{(e_w - e_2) + (e_0' - e_w)}{\ln\left(\frac{z_2 + z_0}{z_0}\right)}. \tag{168}$$

Здесь V_1 — скорость ветра, измеренная на высоте z_1; e_2 — упругость пара, измеренная на высоте z_2; e_w — максимальная упругость пара, возможная при данной температуре и солености воды; e_0' — упругость пара непосредственно на верхней границе ламинарного слоя. Последнюю величину, как не поддающуюся непосредственным измерениям, необходимо исключить из (168). Свердруп исключает ее, пользуясь уравнением *молекулярной* диффузии в ламинарном слое λ воздуха над водой:

$$E = D_1 \frac{e_w - e_0'}{\lambda}. \tag{169}$$

После этой операции оказывается, что

$$E = \frac{D_1 V_1 (e_w - e_2)}{D_1 + \psi V_1 \lambda_1} \psi, \tag{170}$$

где, в свою очередь,

$$\psi = \frac{0{,}623}{p} \frac{\delta k^2}{\ln\left(\frac{z_1 + z_0[V]}{z_0[V]}\right) \ln\left(\frac{z_2 + z_0[V]}{z_0[V]}\right)}, \tag{171}$$

$$D_1 = D_2 \frac{273}{T} 1{,}06 \cdot 10^{-6}.$$

Через D_1 обозначен коэффициент диффузии в применении к «рассасыванию» давления пара, а через D_2 — коэффициент, относящийся к диффузии пара в узком смысле слова; T обозначает абсолютную температуру; символ $z_0[V]$ подчеркивает, что сама величина z_0, характеризующая шероховатость поверхности моря, является функцией скорости ветра V. Толщина ламинарного слоя воздуха над водой принимается равной λ. Полагая для простоты, что измерения упругости пара e и скорости ветра V производятся на одной высоте z (например, оба измерения на палубе корабля) и подставляя в (171)

числовые значения различных входящих в нее величин, Свердруп получает окончательно

$$E = \frac{0{,}216\,(e_w - e)}{0{,}0164\left[\ln\left(\frac{z + z_0\,[V]}{z_0\,[V]}\right)\right]^2 + \lambda V} V. \qquad (172)$$

Для удобства числовые коэффициенты здесь взяты с таким расчетом, чтобы скорость ветра выражалась в метрах в секунду, а испарение — в миллиметрах за сутки.

Так как толщина ламинарного слоя λ весьма мала, то формула Свердрупа (172) должна давать для небольших скоростей ветра приблизительно *линейную* зависимость скорости испарения от скорости ветра, в полном согласии с эмпирическим соотношением, которое получил в свое время Шулейкин (см. гл. IV, § 3). При очень сильных ветрах теория Свердрупа устанавливает зависимость гиперболического типа между величинами. К сожалению, до настоящего времени весьма мало еще освещена связь между «шероховатостью» z_0 и скоростью ветра. В первом приближении Свердруп принимает ее пропорциональной высоте тех волн, которые в среднем разводит ветер данной силы. Во всяком случае путь, по которому пошел Свердруп в своем теоретическом исследовании, совершенно правилен. Он сулит в будущем чрезвычайно важные и ценные результаты. Ведь совершенно очевидно, что для практического вычисления испарения с *поверхности моря* будет удобнее и надежнее всего применять именно такую формулу, в которую входят величины, доступные измерению непосредственно на палубе корабля. В настоящее время необходимо только систематически исследовать распределение скоростей ветра и влажности на различных высотах над морем.

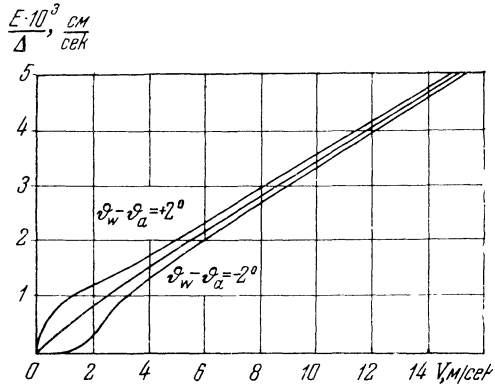


Рис. 543. Диаграмма М. И. Будыко

После проведения такого рода работ при различных скоростях ветра и при различных размерах волн окажется возможным уточнить все элементы теоретической формулы Свердрупа.

Что касается исследований распределения скоростей ветра и влажности над поверхностью моря, то после первых работ В. В. Шулейкина [17] в этом направлении появился весьма обширный и непрерывно умножающийся материал.

При выводе соотношения (172) предполагалось, что вынос молекул пара из слоя, в котором происходит молекулярная диффузия, производится лишь за счет турбулентного перемешивания, вызванного достаточно большими скоростями воздушного потока над водой. При скоростях ветра, бо́льших 2 *м/сек*, это практически соответствует действительности.

Напротив, при меньших скоростях, как показал М. И. Будыко [18], на сцену могут вступить новые, дополнительные явления, если температура воздуха отличается от температуры поверхностной морской воды. Именно в случае положительной разности температур между водой и воздухом над водой возникает дополнительное перемешивание воздуха за счет *тепловой конвекции*, происходящей в вертикальном направлении. Скорость испарения соответственно *возрастает*. В случае отрицательной разности температур между водой и воздухом над водой создается весьма устойчивая подушка

охлажденного воздуха, уменьшающая перемешивание за счет турбулентного строения воздушного потока. Тем самым соответственно уменьшается скорость испарения.

Не будем здесь приводить теоретические формулы, выведенные Будыко для трех случаев: $\vartheta_w > \vartheta_a$, $\vartheta_w = \vartheta_a$ и $\vartheta_w < \vartheta_a$. Они сложны и неудобны для практических подсчетов, а некоторые константы в них еще недостаточно изучены. Приведем лишь очень интересный график, рассчитанный этим автором для этих трех случаев. Он воспроизведен на рис. 543.

Здесь средняя линия, близкая к прямой, выражает зависимость между скоростью испарения (деленной на влажный дефицит) и скоростью ветра. Как видим, теоретические соображения Будыко приводят к практически линейной зависимости, в полном соответствии с измерениями Шулейкина в море, о которых говорилось в гл. IV.

Верхняя кривая Будыко получена для значения разности температур $\vartheta_w - \vartheta_a = +2°$, а нижняя кривая для $\vartheta_w - \vartheta_a = -2°$. При скоростях ветра, бо́льших 2 *м/сек*, дополнительный эффект, вызванный разностями температур между водой и воздухом, становится незначительным и тем менее заметным, чем больше скорость ветра.

Подобное протекание кривых совершенно естественно: ведь при сколько-нибудь значительных скоростях ветра «турбулизирующее» или соответственно «стабилизирующее» (при отрицательных разностях) действие разности температур неминуемо отходит все дальше и дальше на задний план.

§. 9. Замерзание морской воды

В § 3, касающемся стереометрии воды и льда, рассматривалось явление замерзания чистой воды, не содержащей растворенных солей и газов. Замерзание морской воды представляет собой процесс, значительно более сложный, ибо на сцену вступают растворенные вещества, которые должны выделиться при замерзании.

Как известно, вода, в отличие от других растворителей, не дает твердых растворов за одним только исключением: раствор тяжелой воды в обыкновенной воде ведет себя при замерзании как чистое вещество, и никакого выделения H_2^2O из раствора не наблюдается. Это исключение только подтверждает общее правило и позволяет построить весьма правдоподобную гипотезу о причине аномального поведения водных растворов.

Работы различных авторов дают возможность составить хорошее представление о пространственном расположении молекул в жидкой воде и во льду, а также о перегруппировке, происходящей при замерзании воды. Соли, растворенные в морской воде, находятся в диссоциированном состоянии, а следовательно, ионы, на которые они распались, не могут не воздействовать на молекулы воды с их ярко выраженной полярностью. На рис. 544 приведена схема возможных взаимодействий. Как видно на ней, к положительно заряженному иону (рис. 544) молекула воды поворачивается так, чтобы как можно ближе к нему стало ядро кислорода, по соседству с которым всегда находится центр отрицательных зарядов молекулы. Наоборот, против иона, обладающего отрицательным зарядом, располагается одно из водородных ядер (рис. 545), обладающих положительным зарядом. По всей вероятности, особенно большие силы связи возникают между молекулой воды и такими ионами, как Na^+ или Cl^-, а этих ионов в морской воде содержится достаточно много.

При замерзании должны возникать дополнительные связи между молекулами воды, но часть этих связей занята ионами растворенных солей. Следовательно, для обеспечения необходимых межмолекулярных связей и достижения минимума потенциальной энергии в момент замерзания вода должна выделить из себя те вещества, которые были в ней растворены.

Совсем иная, по-видимому, картина получается при замерзании раствора тяжелой воды в обыкновенной воде. Здесь архитектура растворенных молекул мало отличается от архитектуры молекул растворителя, а потому при замерзании такого раствора молекула воды может послужить таким же звеном общей кристаллической структуры, каким служила бы молекула растворителя, если бы она оказалась на ее месте. Говоря образно, молекулы тяжелой воды «не портят» решетки образующегося льда, тогда как ионы ра-

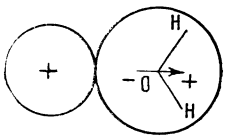


Рис. 544. Схема взаимодействия (положительно заряженный ион)

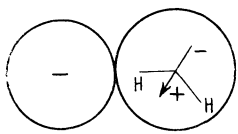


Рис. 545. Схема взаимодействия (отрицательно заряженный ион)

створенных солей неминуемо ее испортили бы, если бы остались внутри твердой фазы.

Как известно, во всех частях Мирового океана пропорция, в какой входят различные соли, остается почти постоянной, меняется только общее количество солей, характеризуемое одним числом $S^0/_{00}$. Пропорция эта приведена в табл. 32.

Таблица 32

Название соли	На 1000 г воды	В % ко всем солям
Хлористый натрий	27,213	77,758
Хлористый магний	3,807	10,878
Сернокислый магний	1,658	4,737
Сернокислый кальций	1,260	3,600
Сернокислый калий	0,863	2,465
Углекислый кальций и следы некоторых других солей . . .	0,123	0,345
Бромистый магний	0,076	0,217

Второй столбец указывает содержание соответствующей соли в граммах на литр, а третий — относительную долю, составляемую данной солью в общем количестве солей в процентах. Первое и совершенно исключительное место, как видно, занимает хлористый натрий. Вот почему эта соль прежде всего должна приниматься во внимание при исследовании процесса замерзания морской воды.

Как известно, полное количество солей в морской воде, характеризуемое числом $S^0/_{00}$ (соленость), определяет собой и *температуру наибольшей плотности* воды θ, и *температуру замерзания* τ. Величина θ может быть выражена следующей эмпирической формулой через соленость $S^0/_{00}$:

$$\theta = 3{,}95^\circ - 0{,}2S - 0{,}0011\,S^2 + 0{,}00002\,S^3. \qquad (173)$$

Аналогичная эмпирическая формула была предложена для вычисления τ:

$$\tau = -0{,}008 - 0{,}0527\,S - 0{,}00004\,S^2 - 0{,}0000004\,S^3. \qquad (174)$$

Но с соленостью связаны плотность морской воды δ и условная ее плотность σ [см. гл. I, стр. 13]:

$$\sigma = (\delta - 1)\cdot 10^3.$$

Поэтому те же авторы предложили еще соотношения, связывающие температуру наибольшей плотности и температуру замерзания с условной плотностью морской воды, определенной при 0° С:

$$\theta = 3{,}95° - 0{,}266\,\sigma_0, \tag{175}$$

$$\tau = -0{,}0086 - 0{,}0646\,\sigma_0 - 0{,}000105\,\sigma_0^2. \tag{176}$$

На рис. 546 графически изображена зависимость температуры наибольшей плотности и температуры замерзания от солености.

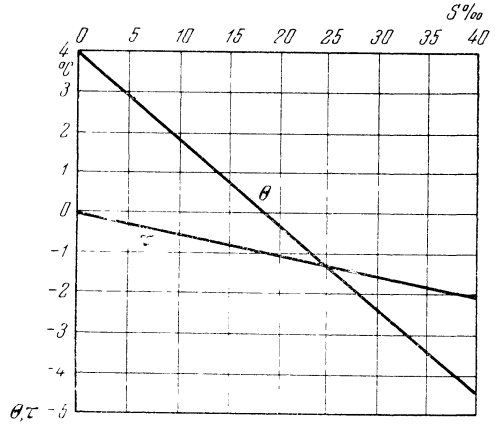


Рис. 546 Температура наибольшей плотности и температура замерзания воды

Как видно, обе линии пересекаются в точке соответствующей солености в 24,7‰, причем тем самым определяется коренное различие в поведении перед замерзанием морской воды с соленостями меньшими и с соленостями бо́льшими этой критической цифры.

Действительно, если в данном районе моря соленость не достигает 24,7‰, то морская вода, подобно пресной, будет сперва охлаждаться до температуры наибольшей плотности, а затем на поверхности начнет возникать лед. Напротив, если соленость превышает 24,7‰, то поверхностная вода до самого замерзания будет делаться все плотнее и плотнее, порождая мощные конвекционные токи.

В итоге, как указывает Ю. М. Шокальский [19], морская вода с соленостью выше 24,7‰ должна замерзать медленнее по трем причинам: 1) температура замерзания ее лежит низко; 2) мощные конвекционные токи подносят к поверхности все новые и новые массы воды, которая, охлаждаясь, опускается вниз, не успев замерзнуть; 3) часть солей, содержавшихся в воде, вмерзает в лед, другая же часть остается в воде, повышая ее плотность и тем самым тоже способствуя усилению конвекции.

Разумеется, различие в поведении морской воды с соленостью меньше и больше критической должно сказываться особенно резко при сопоставлении двух видов, удаленных от критической точки в противоположные стороны. В этом легко убедиться, взглянув на рис. 547, на котором графически изображено изменение разности между максимальной плотностью и плотностью в точке замерзания. Как видно, максимальная разность плотностей $\sigma_\theta - \sigma_\tau$ соответствует солености около 7‰. Напротив, при солености 20—28‰ различие в плотностях σ_θ и σ_τ делается ничтожно малым. После значения $S = 28‰$ различие хотя и возникает вновь, но остается весьма малым.

Выше упоминалось уже о том, что при замерзании морской воды соли, растворенные в ней, не переходят в лед, не дают в нем твердого раствора, а выделяются. Выделение их может идти по двум путям: либо они выкристаллизовываются во льду, либо растворяются в каплях воды, заключенных внутри массы льда.

По наблюдениям Ф. Мальмгрена [20], процесс замерзания идет следующим образом. Сперва на поверхности воды возникают иглистые кристаллы льда, которые по мере увеличения их числа и размеров переплетаются в сложную решетку, заключающую внутри себя морскую воду. Нарастание кристаллов льда продолжает идти за счет вымерзания этой воды, причем с неко-

торого момента времени небольшие ячейки, занятые водой, оказываются отрезанными от внешнего мира. Начиная с этого момента, концентрация рассола, содержащегося в каждой такой ячейке, непрерывно повышается по мере вымерзания воды. При данной определенной температуре замерзание приостанавливается тогда, когда концентрация рассола достигает предельного значения, соответствующего этой температуре; при дальнейшем увеличении концентрации температура замерзания рассола оказалась бы ниже заданной температуры, при которой шло замерзание.

Наблюдения Мальмгрена показали, что «захватывание» капель рассола происходит в тем большем количестве, чем ниже температура, при которой происходит замерзание, и чем тоньше лед.

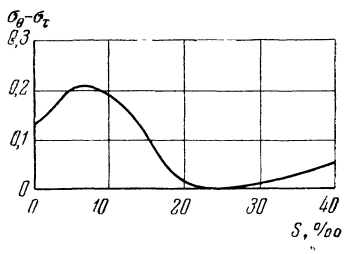


Рис. 547. Разности плотностей

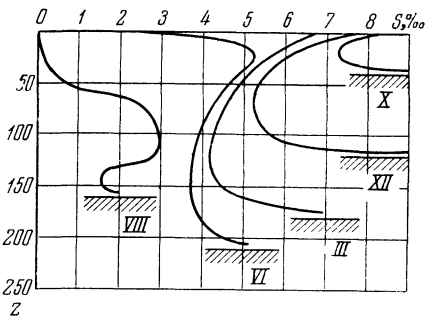


Рис. 548. Распределение рассола во льду (по Ф. Мальмгрену)

Так, в одной из прежних экспедиций был исследован тонкий (19 *см* толщиной) кусок льда, образовавшегося при температуре —33°; в поверхностном слое (5 *см*) этого образца льда соленость оказалась равной 25‰ (титровалась вода, полученная после расплавления); в следующем слое (толщиной в 9 *см*) соленость была 13‰ и, наконец, в самом нижнем слое (толщиной 5 *см*) 12‰.

Но капли рассола не слишком прочно удерживаются в толще льда. Мальмгрен показал, что тончайших трещинок, пор, существующих в толще морского льда, достаточно для того, чтобы с течением времени капли эти постепенно смещались вниз. Вот почему, в отличие от образца свежего, только что возникшего льда, исследованного прежде, морской лед обычно не содержит такого большого количества рассола. Именно, по наблюдениям Мальмгрена, в зависимости от температуры, при которой происходило замерзание, природный морской лед обычно обладает различной соленостью, как видно из табл. 33.

Таблица 33

Температура ϑ, °C	Жидкость, ‰	Твердый NaCl, ‰	Твердый Na_2SO_4, ‰	Чистый лед, ‰
—5	429,5	—	—	570,5
—8,2	281,5	—	—	718,5
—10	234,0	—	1,84	764,2
—15	186,1	—	3,09	810,8
—20	147,9	—	3,58	848,5
—23	134,6	—	3,68	861,7
—30	43,95	20,23	3,95	931,9

Разумеется, под соленостью льда здесь по-прежнему понимается соленость воды, полученной после его расплавления.

Благодаря стеканию капель рассола по капиллярам распределение рассола в толще льда должно непрерывно меняться с течением времени. И действительно, оно меняется примерно так, как изображено на схематическом рис. 548, заимствованном из той же цитированной работы Мальмгрена. Полосы со штриховкой обозначают положение нижней границы льда в октябре, декабре, марте, июне и августе, а кривые, приближающиеся к этим полосам, выражают распределение солености в толще льда соответственно этим месяцам. Цифры, характеризующие соленость, проставлены над осью абсцисс.

Схема Мальмгрена, основанная на непосредственных измерениях, показывает, что осенью, когда только что зарождается новый лед, содержание солей в нем примерно одинаково от верхней границы до нижней (около $8^0/_{00}$). Последующие слои, нарастающие снизу, под тепловой защитой верхнего слоя, оказываются более бедными солями, за исключением самой нижней части слоя, куда стекают капли рассола, просачивающиеся по капиллярам. Такое стекание рассола возникает с особой силой в начале лета, когда под действием солнечных лучей поверхностные слои льда начинают разрыхляться (см. кривую, соответствующую июню). К концу лета поверхностные слои льда оказываются совершенно лишенными солей, что видно на кривой, соответствующей августу. Стекание рассола идет здесь так быстро, что в промежуточном слое (примерно на глубине от половины до $^4/_5$ всей толщины) происходит накопление солей в большем количестве по сравнению с нижележащими.

Мальмгрен заметил, что морской лед начинает таять не с самой верхней поверхности, а первые признаки разрыхления, предшествующего таянию, появляются в массе льда, примыкающей к этой поверхности. По-видимому, первыми очагами, вокруг которых происходит таяние, являются именно капли рассола, и это совершенно естественно: ведь хотя лед и мало прозрачен для инфракрасных лучей, но еще менее прозрачной для них является вода. Зернистая, пористая структура морского льда, длительно подвергавшегося действию солнечных лучей, подтверждает это предположение Мальмгрена.

К сожалению, до настоящего времени весьма слабым остается экспериментальное освещение вопроса о замерзании морской воды и таянии морского льда.

Опыты позволили лишь разобраться в поведении солей при различных температурах. Именно выяснилось, что вода, соленость которой была взята равной $35{,}05^0/_{00}$, начала замерзать при $-1{,}91°$. При понижении температуры до $-8{,}2°$ возникал совершенно чистый лед; все соли продолжали оставаться в воде, повышая концентрацию раствора.

При дальнейшем понижении температуры образование льда начало сопровождаться выделением твердых кристаллов Na_2SO_4, которое шло с такой скоростью, что примерно при температуре $-20°$ лишь $^1/_{10}$ первоначального количества Na_2SO_4 осталась в рассоле. В то же время рассол продолжал сохранять в себе полное количество хлористого натрия вплоть до температуры $-23°$. При еще более низких температурах NaCl также начал выделяться в виде твердых кристаллов.

Общая картина воспроизведена в табл. 33.

§ 10. Поверхностноактивные пленки на море

При первом же взгляде на поверхность моря в тихую погоду, на ней ясно заметен характерный узор, напоминающий муар (рис. 549). Нет сомнения, что узор этот вызван наличием мелкой ряби и притом неодинаковой в различных местах; благодаря неравенству крутизны маленьких волн этой ряби созда-

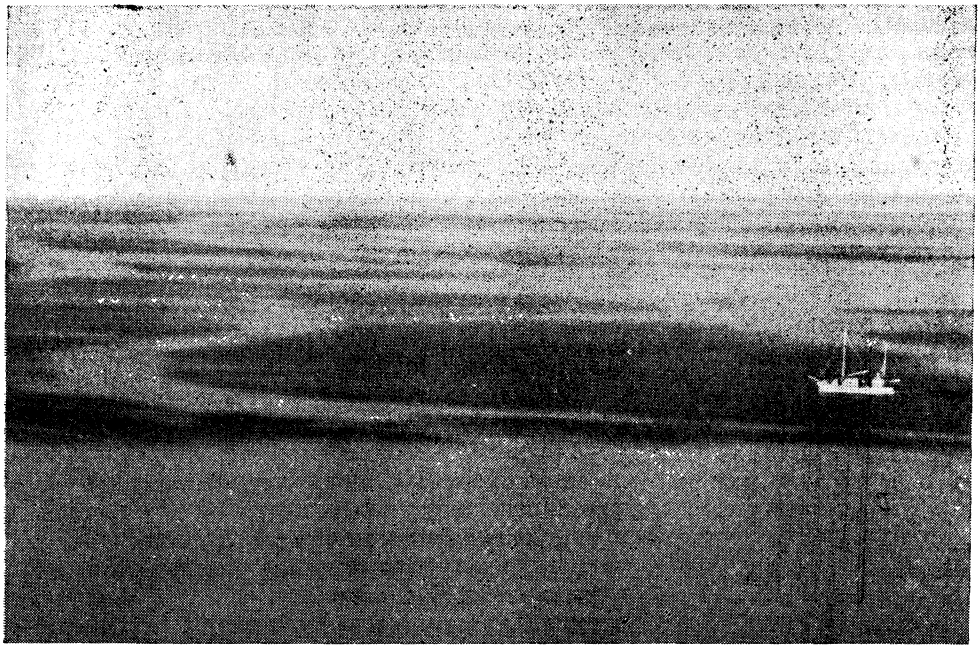


Рис. 549. Поверхностные пленки на море

ется неравенство пропорций, в которых смешивается свет, отраженный от поверхности моря (всегда несколько белесоватый), и внутренний диффузный свет, исходящий из глубин (всегда интенсивно окрашенный).

Как показал Шулейкин в 1921 г. (см. гл. VI, § 8), спокойная поверхность моря, наблюдаемая издали под острым углом, должна окрашиваться в белесоватые цвета, зависящие от цвета небесного свода над морем; напротив, при появлении волн такая белесоватая окраска должна уступать место все более насыщенному цвету, по мере того как будет увеличиваться *крутизна* волн и вместе с ней будет расти количество энергии внутреннего диффузного света, исходящего из-под поверхности моря.

Но чем же вызвано причудливое распределение крутизны волн мелкой ряби, дающее такой характерный узор, надолго застывающий на поверхности моря? Разумеется, не колебаниями скорости ветра, ибо спектр турбулентных потоков воздуха над морем чрезвычайно быстро меняется как в пространстве, так и во времени, а потому и не может повести к возникновению узора, лишь очень медленно изменяющегося с течением времени.

Зато очень хорошо можно объяснить неодинаковое распределение ряби на различных участках, предположив, что оно вызвано наличием на поверхности моря пленок, состоящих из поверхностноактивных веществ, как известно, способных *гасить* мелкие волны. В то же время те участки поверхности моря, которые остаются чистыми, свободными от пленки, оказываются охваченными мелкими волнами даже тогда, когда скорость движения воздуха над морем весьма невелика.

Косвенное подтверждение подобной гипотезы Шулейкина было им получено на одном из заливов, как об этом уже упоминалось в гл. VI. Но для окончательного суждения по этому интересному вопросу необходимы, разумеется, не только качественные наблюдения, но и количественные измерения, именно измерения величины поверхностного натяжения и притом непосредственно в море.

Сама причина гашения волн поверхностными пленками будет исследована ниже (см. § 11, 12), а здесь рассмотрим пока первый фактический материал, полученный на Черноморской гидрофизической станции. Вообще говоря, измерению поверхностного натяжения морской воды было посвящено издавна достаточное число работ. Установлена была связь между поверхностным натяжением чистой морской воды и соленостью ее. Но подобные работы не имеют никакого принципиального интереса, ибо влияние солености на поверхностное натяжение крайне незначительно, и сама соленость распределена в горизонтальных направлениях весьма равномерно. Напротив, большой интерес представляет вопрос о наличии на море таких пленок, в пределах которых поверхностное натяжение было бы значительно изменено.

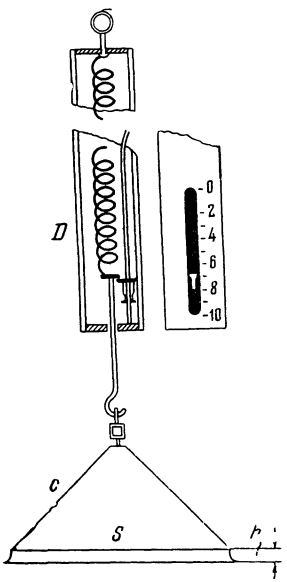


Рис. 550. Прибор Шулейкина для измерения поверхностного натяжения

Так как в этом направлении никаких работ обнаружить не удалось, то на станции пришлось испытать немало всевозможных вариантов, прежде чем можно было остановиться на одном методе для определения поверхностного натяжения непосредственно на самой поверхности моря.

Сама идея этого метода очень стара — она принадлежит Гей-Люссаку. Но до настоящего времени метод этот применялся лишь в лабораторных условиях, не имеющих ничего общего с морскими, и встречал там часто очень холодные отзывы, ибо в лабораторных условиях могут быть применены методы более точные. Однако в море он окажется едва ли не единственным и притом достаточно точным для целей геофизических. Это — метод отрывания пластин от поверхности жидкости, который применительно к работе в экспедиционных условиях или со шлюпки пришлось несколько видоизменить по сравнению со старым оригиналом [21].

Именно, на поверхность моря со шлюпки пускается очень легкий пустотелый конус c, изображенный на рис. 550, основанием которого служит круг диаметром в 30 *см*. Образующие наклонены под углом 45°, вполне достаточным для того, чтобы капли воды, случайно попавшие на боковую поверхность, тотчас же стекали с нее.

В то же время прибор свободно плавает на поверхности моря и не может затонуть, как могла бы затонуть, например, простая плоская пластинка. Необходимо только позаботиться о том, чтобы края прибора у его основания были выполнены как можно тщательнее. (В первой модели дно прибора выполнялось из тонкого стекла, а боковая поверхность из целлулоида; целлулоидное дно оказалось непрактичным, ибо оно от соприкосновения с водой склонно было коробиться. Лучше строить прибор из тонкой листовой нержавеющей стали.)

За кольцо, помещенное в вершине конуса c, можно потянуть крюком, подвешенным к максимальному динамометру D, рассчитанному на силы до 0,25 *кг*. При постепенном увеличении натяжения пружины основание конуса S будет подниматься над поверхностью моря, увлекая за собой некоторый столб воды с таким же основанием S и с возрастающей высотой h. Известно, что в момент отрыва всякой пластинки от поверхности жидкости края мениска будут нормальны к плоскости диска, который в это время поднимется на некоторую критическую высоту h_0. Нижняя часть мениска будет при этом плавно сливаться с горизонтальной поверхностью воды. Но при таких граничных условиях легко найти связь между силой, потребной

для отрывания пластинки (в нашем случае — дна конуса), и величиной поверхностного натяжения.

Из простых соотношений можно определить предельную высоту, на которую поднимается дно конуса перед его отрывом; нужно только вспомнить известную формулу Лапласа, согласно которой давление, производимое на жидкость кривой поверхностью, будет

$$p = \alpha\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right), \tag{177}$$

где α — постоянная поверхностного натяжения, R_1 и R_2 — радиусы кривизны главных сечений кривой поверхности. Это лапласово давление уравно-

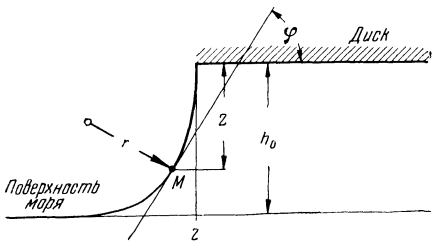


Рис. 551. Схема отрывания конуса от поверхности моря

вешивает собой гидростатическое давление столба z в некоторой точке мениска, изображенного на схеме рис. 551. Следовательно, для всякой произвольной точки мениска можно написать

$$g\delta z = \alpha\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{r}\right). \tag{178}$$

Но в исследуемом случае радиус кривизны r мениска чрезвычайно мал по сравнению с радиусом диска R. Следовательно, в (178) можно смело пренебречь первым членом в скобке по сравнению со вторым и положить

$$g\delta z = \frac{\alpha}{r}. \tag{179}$$

Но, как известно, радиус кривизны всегда может быть выражен через производные, вычисленные применительно к данной точке кривой:

$$r = \frac{\left[1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}{d^2z/dx^2}. \tag{180}$$

Следовательно, на основании (179) и (180)

$$z = \frac{\alpha}{g\delta}\,\frac{d^2z/dx^2}{\left[1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}. \tag{181}$$

Умножим левую часть (181) на dz, а правую на равную ему величину $\frac{dz}{dx}dx$. Тогда окажется, что

$$z\,dz = \frac{\alpha}{g\delta}\,\frac{\frac{d^2z}{dx^2}\frac{dz}{dx}dx}{\left[1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right]^{3/2}} = -\frac{\alpha}{g\delta}\,d\left\{\frac{1}{\left[1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right]^{1/2}}\right\}. \tag{182}$$

Для удобства интегрирования этого дифференциального уравнения введем новую переменную: угол φ, составленный касательной в точке M с горизон-

тальной плоскостью. Тогда можно будет заменить

$$\frac{dz}{dx} = \operatorname{tg}\varphi,$$

и (182) примет простую форму

$$z dz = -\frac{\alpha}{g\delta} d(\cos\varphi), \tag{183}$$

откуда

$$\int_0^{h_0} z dz = -\frac{\alpha}{g\delta} \int_0^{\pi/2} d(\cos\varphi), \tag{184}$$

или

$$h_0^2 = \frac{2\alpha}{g\delta}. \tag{185}$$

Но, зная предельную высоту столба, поднимаемого дном конуса перед отрывом, остается только подсчитать вес воды, заключенной в этом столбе, и прибавить к нему силу натяжения поверхностного слоя мениска. Вес воды можно принять равным $g\delta\, Sh_0$, а силу натяжения поверхностного слоя равной αL, где L — длина окружности дна конуса. Выразив S и L через радиус этого дна и воспользовавшись равенством (185), найдем окончательно, что полная сила f, необходимая для отрывания дна прибора от поверхности моря, будет

$$f = \pi R^2 \sqrt{2\alpha g\delta} + 2\pi R\alpha. \tag{186}$$

Здесь все величины выражены в единицах системы CGS. На практике, разумеется, динамометр проще протарировать, подвешивая к нему различные разновески и наблюдая, какому весу груза соответствует то или иное растяжение пружины. После этого, пользуясь формулой (186), легко построить градуировочную кривую, показывающую, какой величине постоянной α поверхностного натяжения соответствует каждое положение максимального указателя на шкале. Для того чтобы шкала не была слишком длинной, а охватывала только необходимый диапазон растяжений пружины (соответственно пределам, в которых может колебаться поверхностное натяжение), пружине динамометра придано некоторое определенное начальное натяжение. Оно должно быть немного меньше того, которое необходимо для отрывания конуса при самом малом значении поверхностного натяжения, встречающемся в природе.

Опыт показал, что работа с описанным несложным прибором дает очень хорошие результаты. Определения поверхностных натяжений различных чистых жидкостей, произведенные Р. Н. Ивановым, дали цифры, достаточно постоянные и достаточно близкие к табличным. Единственная ощутимая погрешность может возникнуть лишь в том случае, если отрывание дна конуса производить слишком поспешно.

При очень быстром перемещении динамометра вверх пружина его оказывается нагруженной не только статическими силами, подлежащими измерению, но и силами инерции, действующими как на поднимаемый столб воды, так и на самый конус прибора.

Пусть масса этого конуса и мелких деталей прибора равна M, а масса поднятого столба воды m. Пусть отрывание конуса произошло через t *сек* после начала подъема динамометра, причем пружина его успела растянуться на H *см*. Пусть, наконец, ускорение, с которым тянут за кольцо прибора, не меняется. Тогда, как легко показать, отношение ζ ошибки к измеряемой величине будет (в %)

$$\zeta = 100\,\frac{M+m}{m}\,\frac{2H}{gt^2}. \tag{187}$$

В частности, для первой модели прибора, построенной на Черноморской гидрофизической станции, относительная ошибка (в %) выражалась формулой

$$\zeta = \frac{6}{t^2}(\%).$$

Итак, для получения правильных результатов необходимо только заботиться о том, чтобы отрывание конуса происходило достаточно медленно и плавно. Разумеется, работать можно только в тихую погоду при спокойном море. Наличие мертвой зыби измерениям не мешает, напротив, крутая ветровая волна может совершенно исказить полученные результаты.

Измерения поверхностного натяжения, произведенные Шулейкиным посредством описанного прибора, привели к результатам, собранным в табл. 34.

Таблица 34

Район	Состояние поверхности моря	Поверхностное натяжение, *дин/см*
В 2—3 *км* от берега	Чистая поверхность, покрытая ровными мелкими волнами	73
На том же расстоянии	В полосе легкого «узора», видного на поверхности моря	50
	Ясно выраженная пленка, оставшаяся позади моторно-парусной шхуны	34
У самого берега	В пределах района, загрязненного поселком	22
	Чистая поверхность	73

Температура поверхностной воды была равна 19,5°.

Как видно на табл. 34, узор на поверхности моря действительно вызывается влиянием поверхностноактивных пленок, в пределах которых поверхностное натяжение оказывается пониженным по крайней мере до 50 *дин/см* вместо 73 *дин/см*, соответствующих чистой поверхности морской воды при данной температуре.

Еще больше падает поверхностное натяжение в области явно заметной пленки, остающейся за кораблем. Здесь поверхностное натяжение (34 *дин/см*) приближается к величине, которая соответствует нефти. Совершенно исключительное понижение поверхностного натяжения наблюдается в пределах загрязненной полосы пляжа (22 *дин/см*), где несомненно сказываются явления омыления.

В соответствии с этим любопытно отметить, что и вдали от человека могут возникать громадные количества пены, совершенно напоминающей мыльную. Так, на Севере Шулейкину приходилось наблюдать куски пены в форме параллелепипедов размером примерно 80 × 50 × 100 *см*, плававшие в заливах во время прибоя. Там поверхностноактивными веществами являлись выделения фукуса и других водорослей.

Итак, действительно, на поверхности моря, даже в самых заповедных районах Мирового океана, повсюду плавают пленки, состоящие из поверхностноактивных веществ. Даже помимо загрязнений, вносимых человеком, они могут возникать либо под влиянием органической жизни моря (жир, выделяемый некоторыми рыбами, продукты, связанные с жизнью планктона), либо вследствие деятельности морского дна, посылающего вверх струйки нефти, и других аналогичных веществ.

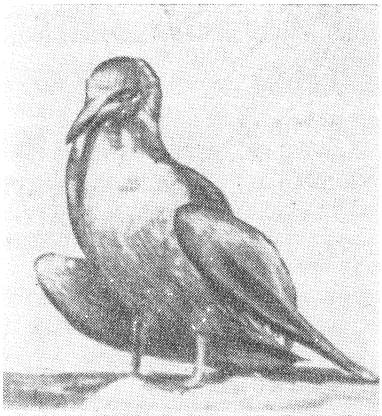


Рис. 552. Птица, загрязнившая перья пленками нефти

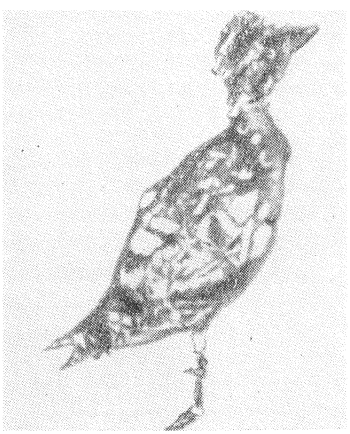


Рис. 553. Птица, облепленная мелкими камешками и песком

Нечего и говорить о том, сколько загрязняющих веществ вносит в море человек со своими кораблями, надолго оставляющими за собой след нефти и смазочных масел, и коллекторами сточных вод, извергаемых многолюдными поселками и городами.

Но среди вод Мирового океана наши советские моря (за исключением Каспийского) могут считаться самыми чистыми. За рубежом к только что упомянутым причинам, вызывающим загрязнение поверхности моря, присоединяется еще одна причина, которая играет несравненно бóльшую роль, чем все они вместе взятые. Это — выливание нефти прямо в море из цистерн нефтеналивных судов (танкеров), часто практикующееся по соседству с большими портами. Нефть из этих районов растекается далеко в море и приводит к гибели громадных количеств перелетной птицы. Птицы, присевшие отдохнуть на поверхность моря, загрязненную нефтью, теряют способность лететь дальше, ибо перья их оказываются склеенными, как видно на рис. 552 [22].

Нефть разъедает кожу, и птица пытается освободиться от едкого налета, катаясь в гальке. При этом она выдирает себе перья и облипает мелкими ракушками и песчинками (рис. 553). В результате берег иногда оказывается усеянным трупами птиц с совершенно вылезшими перьями.

К сожалению, остается невыясненным вопрос о влиянии поверхностноактивных пленок на рыб, на планктон и на других обитателей моря. В пресных водоемах такие пленки уничтожают, как известно, личинок комаров, которые лишаются возможности дышать посредством дыхательных трубочек, соприкасающихся с поверхностью воды. В море, среди морских животных, такие способы дыхания не распространены. Правда, поверхностные пленки, казалось бы, должны уменьшать аэрацию воды, но уменьшение это весьма невелико. У тех рыб, которые, спасаясь от хищников, выбрасываются в воздух, может возникнуть нефтяная пленка на жабрах, по предположению некоторых авторов. Контрольные опыты, ставившиеся с целью выяснения всех перечисленных биологических вопросов, приводили к самым противоречивым результатам, но в большинстве случаев результаты получались отрицательные.

§ 11. Некоторые свойства поверхностных пленок

Таблица, приведенная в предыдущем параграфе и составленная по измерениям Шулейкина, показала, что в открытом море, так же как и в прибрежной зоне, мы можем ожидать появления таких веществ, которые резко понижают поверхностное натяжение морской воды и гасят мелкие волны.

Прежде чем перейти к вопросу об искусственном гашении волн посредством тонких поверхностных пленок, например пленок масла, необходимо остановиться на некоторых важных свойствах их, изучению которых посвящают много сил представители современной химико-физической науки.

Прежде всего необходимо подчеркнуть, что было бы правильным совсем изъять из употребления термин «понижение поверхностного натяжения», ибо в действительности мы всегда наблюдаем не понижение поверхностного натяжения чистой воды (равного примерно 73 *дин/см*), а давление молекул

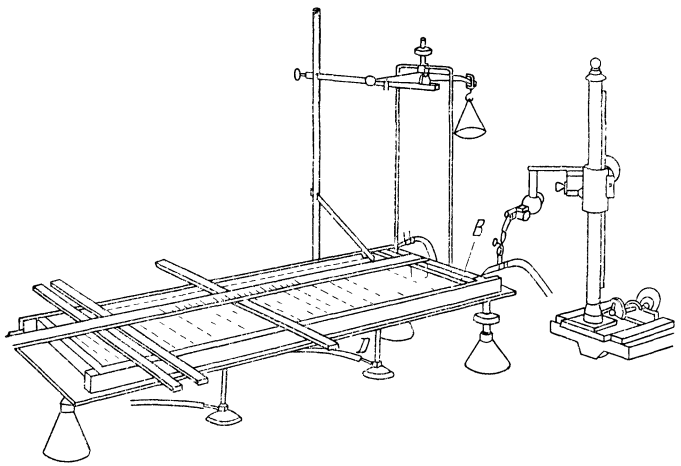


Рис. 554. Прибор Н. Адама для исследования «двумерного газа»

активного вещества, распространяющихся в двумерном мире поверхностного слоя. Это давление, действующее в сторону, противоположную поверхностному натяжению воды, приводит лишь к кажущемуся понижению последнего.

Молекулы активного вещества, попавшие в поверхностный слой, ведут себя в нем либо как двумерный газ, либо как двумерное жидкое или двумерное твердое тело. В этом убеждают работы ряда исследователей [23—25].

В частности, первый из цитированных авторов предложил, а второй усовершенствовал чрезвычайно удобный прибор для исследования сил, возникающих при деформациях таких двумерных тел. Схема его, заимствованная из книги Н. Адама, воспроизведена на рис. 554. В плоскую кювету размером 60 × 14 × 1,8 *см* наливается вода (или другая исследуемая чистая жидкость), с поверхностью которой приходит в соприкосновение бумажная полоска *B*, подвешенная на двух тонких и легких палочках к коромыслу весов. Полоска *B* покрыта тонким слоем воска, препятствующего смачиванию ее водой.

Таким образом, эта полоска в качестве подвижного барьера разобщает между собой две неравные части поверхности кюветы. Меньшая из этих частей, примыкающая к правой торцевой стенке кюветы, остается чистой. На бóльшую же наносят исследуемую поверхностную пленку. Последняя не может распространиться на чистую часть, ибо активное вещество не может пройти ни под барьером, ни над ним. Для того чтобы пресечь последнюю возможность и не дать пленке проникнуть через два тонких прохода, остающихся между концами барьера и продольными стенками кюветы, над этими каналами располагаются две тонкие оттянутые трубочки, сквозь которые непрерывно пропускается воздух, сдувающий пленку назад.

По старой терминологии пришлось бы сказать, что активное вещество пленки понижает поверхностное натяжение, действующее на барьер слева,

а потому его перетягивает поверхностный слой чистой воды вправо. По современной терминологии следует тот же эффект трактовать иначе: молекулы активного вещества давят на барьер слева и заставляют его отклоняться вправо.

Величина поверхностного давления активного вещества измеряется на приборе весьма просто: в чашку, подвешенную к коромыслу весов, кладутся разновески и определяется вес их, необходимый для приведения барьера в его начальное, нулевое положение. После этого остается только принять во внимание соотношение плеч подвижной системы и длину барьера, чтобы вычислить силу давления, приходящуюся на каждый погонный сантиметр барьера. Найденная сила

$$f = \alpha_w - \alpha \qquad (188)$$

выразится, очевидно, в динах на погонный сантиметр. Через α_w здесь обозначено поверхностное натяжение чистой воды, а через α кажущееся поверхностное натяжение, обусловленное поверхностноактивным веществом.

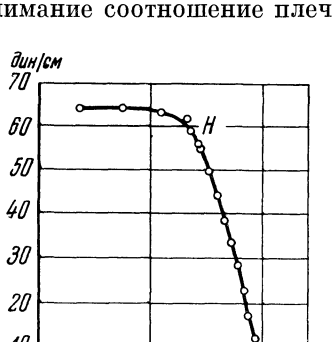


Рис. 555. Силы, возникающие при деформации пленок

Посредством простых приспособлений поверхностную пленку на воде можно подвергать сжатию или растяжению, изменяя тем самым площадь, приходящуюся на каждую молекулу активного вещества. При этом, как показали опыты, пленка ведет себя сначала подобно некоторому двумерному газу, затем, при переходе через некоторый предел сжатия, начинает напоминать жидкость, потом «твердеет» и дальше уже сжимается, как твердое тело, пока не будет разрушена «раздавливанием».

На рис. 555 воспроизведена одна из диаграмм, полученных Лэнгмюром. По ней можно проследить за поведением активной пленки пальмитиновой кислоты. По оси абсцисс отложены величины площади, приходящейся на каждую молекулу активного вещества (в квадратных ангстремах), а по оси ординат — величина силы f (188) в динах на сантиметр.

Как видно, в точке Q кривая касается оси абсцисс. Здесь, до значения площади 21 Å^2, молекулы пальмитиновой кислоты практически не оказывают никакого влияния на свойства поверхности. И действительно, по наблюдениям Лэнгмюра, частицы пыли, попавшие на поверхность воды, при этих условиях обладают полной подвижностью: легкое дуновение смещает их в любую сторону.

При сокращении поверхности, занятой активным веществом (посредством бумажной полоски, покрытой воском, смещаемой вдоль кюветы по направлению к барьеру), наступает сжатие двумерной «жидкости», и давление ее возрастает по кривой Q. В точке S пылинки, попавшие на поверхность, теряют подвижность, и это указывает, что здесь происходит отвердевание слоя.

При дальнейшем сжатии двумерного «твердого тела» давление нарастает по прямой SH, как требует закон Гука, найденный из опытов с обычными твердыми телами.

Близ точки H нарушается прочность «твердого» слоя, и давление дальше возрастает весьма мало, приближаясь к некоторому пределу.

Подобные измерения дают возможность определить с достаточным приближением основные размеры молекул активного вещества. Так, в рассмотренном случае пальмитиновой кислоты Лэнгмюр заключает из своих опытов, что молекулы ее приходят в соприкосновение, когда поверхность, исчисленная на каждую из них, становится равной 21 Å^2. Зная молекулярный

вес пальмитиновой кислоты и число Лошмидта, легко определить объем одной молекулы. Считая же, что 21 Å^2 является величиной поперечного сечения, и зная объем молекулы, остается лишь вычислить ее длину как частное от деления объема на поперечное сечение.

Для пальмитиновой кислоты длина молекулы оказалась равной 24,0 Å. Оба других измерения считают одинаковыми (в первом приближении). Но в таком случае каждое из них выразится корнем квадратным из поперечного сечения 21 Å^2 и будет равно 4,6 Å. Тем же автором подобным образом были определены размеры и других молекул, которые сведены в табл. 35. В этой же таблице даны количества атомов углерода, заключенных в молекуле соответствующего вещества, и значения приведенной длины молекулы, т. е. длины ее, отнесенной к одному атому углерода.

Таблица 35

Вещество	Число углеродных атомов	Поперечное сечение, Å^2	Поперечный размер, Å	Длина молекулы, Å	Длина, отнесенная к одному атому углерода, Å
Кислота:					
пальмитиновая	16	21	4,6	24,0	1,50
стеариновая	18	22	4,7	25,0	1,39
церотиновая	26	25	5,0	31,0	1,20
тристеариновая	57	66	8,1	25,0	1,32
олеиновая	18	46	6,8	11,2	0,62
Триолеин	57	126	11,2	13,0	0,69
Триэлаидин	57	120	11,0	13,6	0,72
Мирицилоный алкоголь	31	27	5,2	41,0	1,37

Как видно из табл. 35, молекулы активных веществ обладают весьма большой длиной и выстраиваются на поверхности воды подобно какому-то частоколу: продольные оси их всегда оказываются направленными нормально к поверхности воды.

Схема такого частокола дана на рис. 556, *а*, где изображен разрез воды плоскостью, нормальной к ее поверхности. Утолщение на нижнем конце каждой молекулы обозначает полярную группу молекулы, взаимодействующую с молекулами воды и поэтому увлекаемую вниз. К такой активной группе обычно бывает присоединена длинная цепочка атомов, являющихся нейтральными.

Особенно ярко выраженной полярностью обладают те молекулы, в которых присутствуют атомы щелочных элементов — натрия, калия — или заменяющая их группа аммония, которая, как известно, ведет себя подобно щелочному металлу. Но эти атомы содержатся в солях жирных кислот, носящих общее название мыла. Интенсивное взаимодействие с молекулами воды и большая длина органической молекулы, связанной с полярной группой, приводят к ряду интереснейших свойств мыльных растворов. Так, известно, что растворы эти способны давать весьма стойкую пену, а также пузыри и пленки, обладающие большой продолжительностью существования.

Схематические разрезы таких пленок представлены на рис. 556, *б* и *в*. Как видно, мыльная пленка может образоваться между двумя пограничными слоями активных молекул, сжимающими некоторое небольшое количество воды, или же такая пленка может представить собой некоторое сдвоенное образование, состоящее из переслоенных молекул активного вещества и воды. В последнем случае полярные концы активных молекул бывают всегда

направлены к воде, заключенной между ними, а нейтральные цепочки направляются одна к другой. Не исключена возможность существования и более сложных образований — с шестью, восемью, десятью и т. д. слоями активных молекул. На существование таких сложных систем указывают измерения толщины мыльных пленок, производимые оптическими методами; на основании подобных измерений приходится заключить, что толщина мыльной пленки всегда является целым кратным некоторой единичной толщины (видимо, той, которая соответствует рис. 556, *б*).

В заключение этого параграфа следует упомянуть еще об одном важном и интересном свойстве поверхностного слоя воды, именно о том, как некоторые жидкости быстро растекаются по водной поверхности, образуя тончайшие пленки.

Механизм самого явления растекания станет понятным из рассмотрения простой схемы, изображенной на рис. 557. Здесь представлена капля некоторого вещества *2*, плавающая на поверхности другого вещества *1*, в данном случае воды. Над ними находится третье вещество *3*, в данном случае воздух. Направления, по которым действуют в пограничных точках силы поверхностного натяжения на всех трех поверхностях раздела, совпадают с касательными, проведенными в этих точках ко всем поверхностям. Для равновесия капли необходимо, чтобы геометрическая сумма всех сил в точках A и B (точнее, на периферии той окружности, которая пересекается с чертежом в этих точках) равнялась нулю, другими словами, чтобы безусловно удовлетворялось известное статическое соотношение между проекциями сил на горизонтальную плоскость

$$\alpha_{13}\cos\varepsilon = \alpha_{23}\cos\gamma + \alpha_{12}\cos\beta. \qquad (189)$$

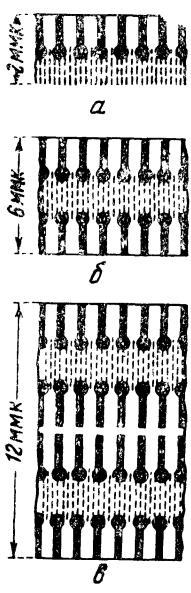


Рис. 556. Схемы поверхностных слоев

Однако далеко не все жидкости *2* могут удовлетворить этому требованию, ибо поверхностное натяжение α чистой воды, граничащей с воздухом, весьма велико. Именно те жидкости, которые нас могут интересовать в связи с задачами мореведения, не удовлетворяют соотношению (189): левая часть оказывается значительно больше правой. Поэтому от капли такого вещества *2* начинают быстро отделяться молекулы, приходящие в движение по радиальным направлениям прочь от капли. Такое движение длится до тех пор, пока активное вещество, распределившись в поверхностном слое воды, создаст в нем кажущееся понижение поверхностного натяжения до некоторого значения α_x, способного удовлетворить условию

$$\alpha_x\cos\varepsilon = \alpha_{23}\cos\gamma + \alpha_{12}\cos\beta. \qquad (190)$$

Если вода заключена в пределах какого-то ограниченного бассейна, то может случиться, что растекание капли в некоторый момент приостановится, когда вся поверхность бассейна будет перекрыта тонким слоем вещества *2* и на ней установится потребное видимое натяжение α_x. Тогда на воде будет продолжать плавать капля вещества *2*, размеры которой, разумеется, будут уменьшены по сравнению с первоначальными. Но в природных условиях обычно вещество *2* распространяется на такой большой свободной поверхности воды, что все оно оказывается израсходованным без остатка: никаких капель при этом не остается.

Совершенно очевидно, что такой процесс не может произойти мгновенно; капля подвергается как бы двумерному испарению, причем, как показали

наблюдения Марселена и др., иногда можно заметить признаки настоящего двумерного кипения капли: в ней возникают круглые «окна», совершенно аналогичные пузырям, появляющимся при «трехмерном» кипении. Если явление происходит в кювете лэнгмюровских весов, то, сокращая поверхность, можно прекратить такое «кипение» и заставить вещество *2* конденсироваться и вызвать обратное увеличение капли.

Способность вещества *2* растекаться по поверхности воды может быть совершенно строго охарактеризована числом, которое показывает, насколько уменьшается поверхностная энергия при растекании исследуемого вещества

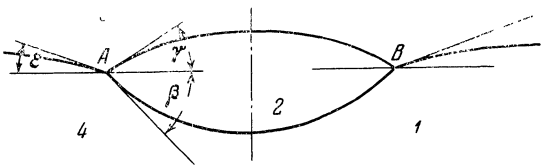


Рис. 557. Схема растекания капли

на 1 $см^2$ водной поверхности (или, вообще говоря, поверхности данного вещества *1*). Но эта убыль поверхностной энергии, как известно, может быть выражена так:

$$S = \alpha_{13} - (\alpha_{23} + \alpha_{12})\ эрг/см^2. \qquad (191)$$

Характеристическое число S можно назвать *коэффициентом растекания*. Если число S для жидкости *2* на поверхности воды оказывается *отрицательным*, то такая жидкость не может растекаться по поверхности воды: она плавает в виде капель, сохраняющих свою начальную величину и не «испаряющихся» в двумерном пространстве поверхностного слоя.

Таблица 36

Растекающиеся жидкости (при 20°)		Нерастекающиеся жидкости (при 20°)	
вещество	S	вещество	S
Октан	0,22	*p*-Бромтолуол	—1,29 (30°)
Нитробензол	3,76	Этилдибромид	— 3,19
Толуол	6,8	Сероуглерод	— 6,94
Бензол	8,94	Бромоформ	— 9,58
Хлороформ	13,0	Керосин	—13,6
Этилбромид	17,9	Ацетилен тетрабромид	—15,6
Олеиновая кислота	24,6	Иодистый метилен	—26,5
Ундециловая кислота	32,0		
Диметилкетон	42,4		
Уксусная кислота	45,2		
Этиловый алкоголь	50,4		

В табл. 36, заимствованной из цитированной книги Райдила и дополненной несколькими цифрами из Адама, даны значения коэффициента растекания S для различных веществ *2*. В левом столбце собраны вещества, способные растекаться (с положительным S), а в правом — нерастекающиеся (с отрицательным S).

§ 12. Критика гипотез, предлагавшихся для объяснения гашения волн маслом

На рис. 549 изображен вид поверхности моря, местами покрытой активными пленками. Как говорилось уже в § 10 по поводу этих пленок, они гасят под собой мелкую рябь и делают поверхность моря гладкой. Такое гасящее действие их проявляется еще резче на рис. 558, на котором воспроизведена фотография, снятая А. Л. Салминым. Здесь видны солнечные блики, положение которых, как известно (см. гл. III), характеризует крутизну волн. Блики, вообще говоря, расходятся далеко от того места, где виднелось бы единственное изображение Солнца, если бы поверхность моря была зеркально гладкая. Следовательно, крутизна волн (мелких) здесь была велика (около 20—25°). Однако в некоторых местах на рис. 558 блики как бы стерты, следовательно, поверхность моря здесь если и не плоская, то, во всяком случае, весьма спокойная. Такая спокойная поверхность возникла именно там, где подействовали поверхностноактивные пленки, и рис. 558 дает возможность составить количественное суждение об их гасящем действии на мелкую волну.

К сожалению, подобного объективного учета не было произведено теми наблюдателями, которые описывают гашение ветровых волн жидкими жирами животного и растительного происхождения. Любопытно отметить, что такой тонкий знаток поверхностных явлений, как А. Марселен [23], считает первыми исследователями в области поверхностных явлений не физиков, а моряков,— настолько обширен и интересен материал, собранный ими. Однако материал этот, в сущности, чисто описательного характера; указывается, какое вещество применялось для гашения и какой видимый эффект оно вызывало. Указывается также, что сильнее всего действуют жидкие животные жиры, несколько слабее растительные и что почти не действуют нефть, мазут и минеральные масла.

Быть может, именно отсутствием количественного изучения вопроса объясняется отсутствие законченной теории явления и наличие взаимно противоречащих, совершенно неверных его объяснений, причем такие неверные объяснения часто попадаются в книгах по физике.

В учебной физической литературе очень распространено одно из них, заключающееся в следующем. Предполагается, что гашение волн возникает благодаря понижению поверхностного натяжения: на вершинах волн концентрация активного вещества увеличивается, а у подошвы уменьшается, а потому якобы поверхностный слой стремится сделать волну более плоской, уменьшить ее амплитуду.

Однако легко убедиться в полной несостоятельности этой гипотезы, приняв во внимание, что силы поверхностного натяжения участвуют здесь в обратимом процессе, а потому отнюдь не могут повести к гашению волны. Разность концентраций поверхностноактивного вещества у подошвы и на вершине волны может отразиться на скорости распространения волны, но она не вызывает никакой потери энергии, между тем как гашение волны свидетельствует о явной и очень большой потере энергии.

Вторая, весьма распространенная гипотеза, неприемлемость которой менее очевидна, объясняет гашение волн понижением коэффициента трения между воздухом и водой, якобы наступающим при появлении масла на поверхности моря. Проверка этой гипотезы, не заключающей в себе на первый взгляд никаких логических противоречий, производилась рядом авторов. Однако методика эксперимента во всех работах вызывает некоторые возражения: в одних случаях чувствительность метода недостаточно велика, в других — сама пленка поверхностноактивного вещества находится в весьма неопределенных граничных условиях.



Рис. 558. Гашение бликов на поверхности моря

От подобных дефектов вполне свободна работа Р. Н. Иванова [26].

Схема прибора Иванова изображена на рис. 559. Круглая плоскодонная кювета C с чистой водой вращается вокруг вертикальной оси, делая 1 *об/сек*. Над поверхностью воды подвешен на бифиляре B легкий стеклянный диск D, отстоящий от воды примерно на 1 *см*. Под действием трения между вращающейся водой и воздухом, находящимся над нею, последний приходит в движение и в свою очередь начинает воздействовать на стеклянный диск. Для того чтобы на диск не могли подействовать струи воздуха, вызванные вращением самого сосуда, вокруг краев сосуда устроено защитное кольцо R. Поэтому диск поворачивается под влиянием лишь тех сил, которые зависят от движения воздуха, увлекаемого вращающейся водной поверхностью.

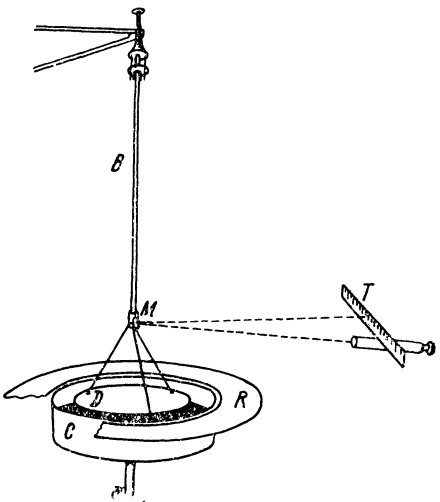


Рис. 559. Схема прибора Р. Н. Иванова

Угол поворота диска при установившемся состоянии системы, очевидно, служит мерилом тех сил трения, которые возникают между диском и воздушными струями, и в конечном счете тех сил, которые возникли между вращающейся жидкостью и воздухом, заключенным между нею и диском. Этот угол поворота отсчитывается зеркальным методом: экспериментатор смотрит в трубу на зеркальце M, которое приклеено к нитям и в котором отражается освещенная шкала T.

Сделав отсчет, экспериментатор пускает на поверхность воды каплю активного вещества или просто касается этой поверхности полоской бумаги, смазанной активным веществом (маслом, олеиновой кислотой и т. д.), и делает новый отсчет.

При опытах Иванова вращение совершенно чистой воды закручивало бифиляр на такой угол, что в трубу, расположенную на расстоянии 150 *см* от зеркальца, было видно смещение делений шкалы на 85 *мм*. Следовательно, чувствительность метода была достаточно велика. Однако при нанесении поверхностноактивного слоя никакого систематического изменения угла закручивания бифиляра не было обнаружено. Отклонения от упомянутой цифры происходили в обе стороны (на ± 2 *мм*). Отметим, что в приборе Иванова были исключены все ошибки, которые в некоторых установках предшественников могли возникать благодаря неопределенной связи между поверхностной пленкой и стенками сосуда: у Иванова вращался весь сосуд с водой, а следовательно, при установившемся движении никаких смещений поверхностного слоя относительно стенок не существовало.

Опыты Иванова с несомненностью показали, что слой поверхностноактивного вещества практически совершенно не влияет на величину коэффициента трения между водой и воздухом (если бы и существовало ничтожное влияние, утопающее в пределах погрешностей, то оно как величина второго порядка не имело бы никакого значения для ветровой волны). Следовательно, масло и другие вещества, гасящие волну, не уменьшают трения между воздухом и поверхностью моря; другими словами, они не уменьшают волнообразующих сил.

Но если волнообразующие силы не уменьшаются, то затухание волн может происходить лишь благодаря каким-то необратимым процессам, протекающим в поверхностном слое и поглощающим очень большую энергию.

§ 13. Поглощение энергии в поверхностной пленке

В природных условиях невозможно проследить за необратимыми процессами, которые, по гипотезе Шулейкина, происходят в поверхностноактивной пленке и которые гасят волну, поглощая ее энергию. Зато в лаборатории нетрудно создать такую обстановку, в которой они всплывут совершенно отчетливо.

Для этого нужно, как предложил Шулейкин, включить активную пленку в какую-либо механическую колебательную систему, в которой она подвергалась бы растяжению; тогда по затуханию колебаний такой системы можно будет вычислить количество энергии, поглощаемой в пленке.

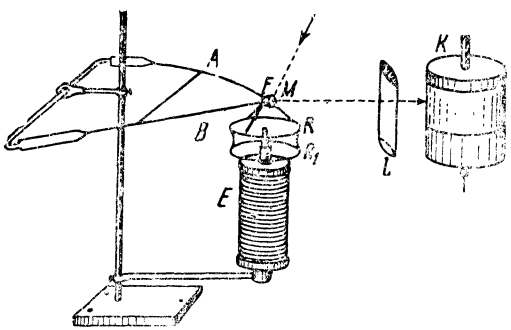


Рис. 560. Установка Р. Н. Иванова для исследования колебаний

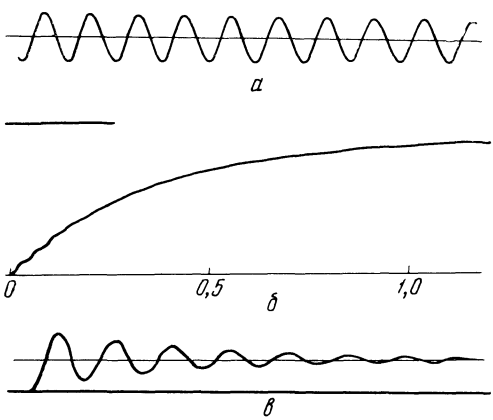


Рис. 561. Регистрация колебаний

Подобная колебательная система была осуществлена Р. Н. Ивановым, продумавшим и сконструировавшим ее чрезвычайно искусно. На рис. 560 изображена схема его установки. Два оттянутых стеклянных волоска A и B сходятся под прямым углом в одной точке, к которой присоединено снизу легкое проволочное кольцо R, а над кольцом — небольшой кусочек железа F и зеркальце M, служащее для оптической регистрации колебаний. Колебания же этой упругой системы могут происходить только в вертикальной плоскости благодаря тому, что волоски сходятся под прямым углом, и тому, что между ними, для поперечной жесткости, напаяны тонкие легкие стеклянные волоски-перемычки (на схеме рис. 560 представлена одна такая перемычка). Сообщив некоторое отклонение этим своеобразным микровесам, можно зарегистрировать возникающие колебания, направив на зеркальце M тонкий пучок света от осветителя и приняв отраженный луч сквозь цилиндрическую линзу L на фотобумагу, наложенную на вращающийся барабан кимографа K. Декремент затухания таких колебаний оказался чрезвычайно малым, как видно на рис. 561, *а*.

Совсем иная картина, однако, получилась при включении активной пленки в колебательную систему. Для создания этой пленки кольцо R прижималось к такому же точно проволочному кольцу R_1 и удерживалось в неподвижном положении посредством электромагнита E, притягивавшего кусочек железа F (рис. 560). Оба соприкасающихся кольца смазывались мыльным раствором, после чего включался свет и выключался ток в электромагните E. Кольцо R оттягивалось упругими силами стеклянных волосков кверху, но теперь уже либо (как правило) никаких колебаний не возникало — микровесы возвращались к своему положению равновесия апериодически,— либо

возникали быстро затухавшие колебания. Так велико было поглощение энергии в двусторонней мыльной пленке.

На рис. 561, *б* и *в* воспроизведены две записи из большого материала, полученного Ивановым при опытах с различными мыльными пленками: кривая рис. 561, *б* соответствует пленке раствора пальмитиновокислого калия. Оказалось, что по мере увеличения молекулярного веса жирной кислоты растет количество энергии, поглощаемой при растяжении пленки. Однако нарастание гасящего действия, видимо, идет лишь до некоторого предела, ибо пленка раствора стеариновокислого калия, соответствующая еще большему молекулярному весу жирной кислоты (стеариновой), не дала апериодического процесса, а привела лишь к затухающим колебаниям, как это видно на рис. 561, *в*.

Уже сам внешний облик кривых, полученных Р. Н. Ивановым, показывает, какое резкое гашение колебаний производится пленками, содержащими соли пальмитиновой или лауриновой кислоты. Для количественной характеристики процесса остается лишь составить уравнение движения всей системы и определить его параметры.

Пусть вертикальные смещения кольца z отсчитываются от некоторого положения равновесия его, наступающего под совместным действием сил тяжести и сил поверхностного натяжения вдоль обеих сторон мыльной пленки. Упругая сила, стремящаяся вернуть кольцо, прикрепленное к микровесам, в это положение равновесия, будет равна kz, где k — упругая константа, определяемая посредством тарировки микровесов. Сила инерции выразится в виде произведения

$$m\frac{d^2z}{dt^2},$$

где m — суммарная масса кольца R, кусочка железа F и др.

Сила, сопротивляющаяся растяжению пленки, вообще говоря, связана со скоростью движения dz/dt какой-то зависимостью, заранее неизвестной. Положим, для общности, что она равна

$$f\left(\frac{dz}{dt}\right),$$

тогда дифференциальное уравнение движения системы можно будет написать в совершенно общем виде

$$m\frac{d^2z}{dt^2}+f\left(\frac{dz}{dt}\right)+kz=0. \tag{192}$$

В частном случае, если

$$f\left(\frac{dz}{dt}\right)=A\frac{dz}{dt},$$

уравнение (192) принимает известную форму

$$\frac{d^2z}{dt^2}+2\beta\frac{dz}{dt}+b^2z=0, \tag{193}$$

где сокращенно обозначено

$$2\beta=\frac{A}{m}\;;\quad b^2=\frac{k}{m}\;. \tag{194}$$

Общий интеграл уравнения (193) напишется в виде

$$z=Me^{x_1t}+Ne^{x_2t}, \tag{195}$$

где x_1 и x_2 являются корнями характеристического уравнения

$$x^2+2\beta x+b^2=0, \tag{196}$$

т. е.

$$x_1=-\beta+\sqrt{\beta^2-b^2};\quad x_2=-\beta-\sqrt{\beta^2-b^2}. \tag{197}$$

Когда силы, сопротивляющиеся движению, не очень велики, то корни (197) получаются комплексные и разные, ибо подкоренное выражение оказывается меньше нуля. В этом случае возникают затухающие колебания типа колебаний рис. 561, *в*.

Как правило, в опытах Иванова силы, сопротивляющиеся движению, были весьма велики, а потому корни (197) оказывались действительными, определяя собой некоторый апериодический процесс.

При $\beta = b$, очевидно, интеграл (195) принимает самую простую форму

$$z = z_0 e^{-\frac{A}{2m}t}; \tag{198}$$

при $\beta > b$ и при данных граничных условиях (195) тоже превращается в простое выражение

$$z = z_0 e^{-\frac{A}{2m}\left[1+\sqrt{1-\frac{4km}{A}}\right]t}, \tag{199}$$

где z_0 — начальное отклонение, т. е. в обоих случаях ($\beta \geqslant b$) кольцо возвращается к положению равновесия по экспоненциальному закону.

Воспользовавшись одним из соотношений (198) и (199), соответственно тому, будет ли $\beta = b$ или $\beta > b$, можно найти коэффициент, характеризующий сопротивление, которое возникает при растяжении мыльной пленки. Определив же A, легко найти коэффициент сопротивления a, отнесенный к единице длины кольца R и к одной из двух поверхностей пленки, ибо, очевидно,

$$a = \frac{A}{2L}, \tag{200}$$

где L — длина кольца.

Коэффициент a показывает, чему равна сила, сопротивляющаяся растяжению пленки, когда 1 *см*^{2} пленки (односторонней) в 1 *сек* растягивается вдвое по одному направлению. При иной скорости растяжения сопротивляющаяся сила возрастает пропорционально скорости, если соблюдено основное условие, принятое при составлении уравнения (193).

Такую пропорциональность Р. Н. Иванов чрезвычайно убедительно доказал большой серией опытов на другой, специально сконструированной им установке (рис. 562) [27].

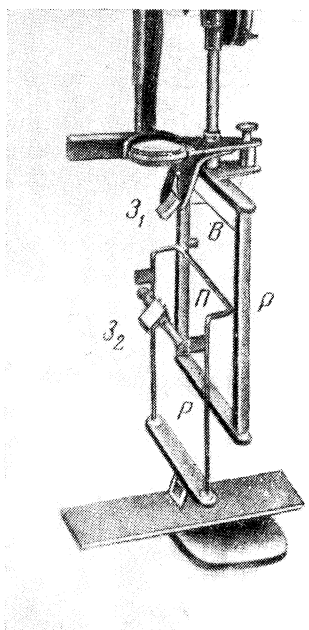


Рис. 562. Вторая установка Р. Н. Иванова

Исследуемая пленка здесь натягивалась на латунной рамке $Р$, между перекладиной $П$ и волоском $В$. Периодические изменения длины пленки производились путем колебаний перекладины в вертикальном направлении. Эти колебания регистрировались на фотобумаге кимографа посредством луча, который падал сверху на зеркальце $З_1$, жестко связанное с системой и перемещающееся то вниз, то вверх параллельно самому себе.

При растяжении пленки возникали натяжения ее, которые вызывали прогиб волоска. В свою очередь этот прогиб регистрировался на той же фотобумаге кимографа посредством луча, падающего на зеркальце $З_2$. К последнему примыкал легкий рычажок, опирающийся на волосок, следующий

за прогибами и тем самым вызывающий повороты зеркальца вокруг горизонтальной оси.

Произведя градуировку прибора и отложив на диаграмме по оси абсцисс относительные растяжения пленки $\Delta l/l$, а по оси ординат — силы, возникающие в ней (на единицу ширины), Иванов получил кривые, которые воспроизведены на рис. 563. Значения частот, соответствовавших колебаниям в нескольких опытах, подписаны под кривыми. Спланиметрировав площади этих кривых, Иванов определил мощности, характеризуемые каждой из таких петель «гистерезиса». Как и следовало ожидать, мощность оказалась пропорциональной *квадрату частоты* колебаний. Следовательно, силу вязкости, сопротивляющуюся деформациям, можно считать пропорциональной первой степени скорости деформаций. При растяжении или сжатии каждого квадратного сантиметра пленки на $d\sigma$ должна совершаться работа, также пропорциональная скорости деформации:

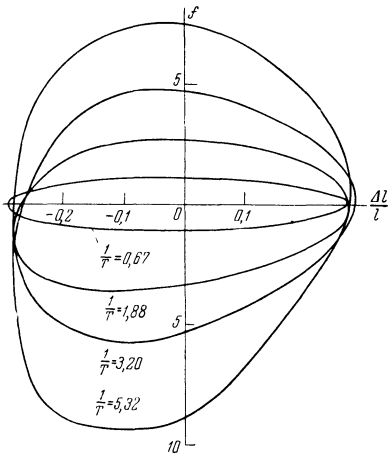


Рис. 563. Петли гистерезиса

$$dP = \beta \frac{d\sigma}{dt} d\sigma. \qquad (201)$$

Коэффициент пропорциональности β, определенный из опытов, оказался зависящим от вещества, нанесенного на поверхность воды. Он оказался наибольшим для пальмитиновой кислоты и ее солей (мыл) и для лауриновой кислоты и ее солей (мыл), т. е. тех членов ряда жирных кислот, которые характерны для китового, дельфиньего и рыбьего жира, обладающих хорошо известным сильным гасящим свойством, когда их наносят на поверхность моря. Довольно велик коэффициент β и у олеиновой кислоты.

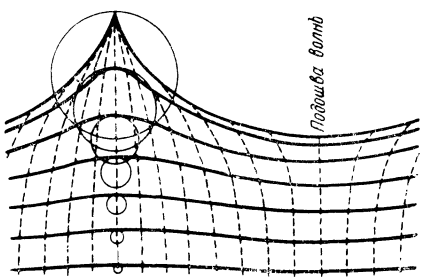


Рис. 564. Схема деформаций вертикальных колонок воды на волне

В гл. III было показано, что в действительности ветровые волны обладают вершинами более острыми по сравнению с трохоидами при соответствующих значениях отношения высоты к длине. Поэтому и скорости пульсаций поверхности раздела должны быть здесь больше, чем в случае трохоидального профиля.

Вспомним приближенные уравнения профиля ветровых волн, фигурировавшие в гл. III:

$$x = R\theta + a \sin\theta, \quad y = b \cos\theta.$$

Дадим величине x бесконечно малое приращение dx, которое выразится так:

$$dx = Rd\theta + a \cos\theta\, d\theta. \qquad (202)$$

Здесь первый член возник за счет изменения абсциссы точки, а второй — за счет элементарного смещения границы вертикального столба (как показано на рис. 564). Легко видеть, что в связи с этим возникло относительное изменение поверхности раздела (приращение единицы площади) σ, которое на

основании формулы (202) записывается в виде

$$\sigma = \frac{dx - Rd\theta}{Rd\theta} = \frac{a}{R}\cos\theta. \tag{203}$$

Скорость изменений σ во времени определяется посредством дифференцирования уравнения (203)

$$\frac{d\sigma}{dt} = -\frac{a}{R}\sin\theta\frac{d\theta}{dt} = -\frac{a}{R}\omega\sin\theta. \tag{204}$$

На основании уравнения (203) определяется также и дифференциал σ, входящий в формулу (201):

$$d\sigma = -\frac{a}{R}\sin\theta d\theta. \tag{205}$$

Подставим выражения (204) и (205) в (201). Тогда окажется

$$dP = \left(\frac{a}{R}\right)^2 \omega\beta\sin^2\theta\, d\theta,\ \omega = \frac{2\pi}{T}\cdot \tag{206}$$

Проинтегрировав уравнение (206) в пределах от $\theta = 0$ до $\theta = 2\pi$, получим выражение работы, совершенной силами внутреннего трения за один период T волны:

$$P = \frac{2\pi^2}{T}\left(\frac{a}{R}\right)^2\beta. \tag{207}$$

Остается разделить эту работу на промежуток времени T, в продолжение которого она была совершена, и тогда получится выражение мощности W_β, отнимаемой у волн гасящими пленками, в расчете на каждый квадратный сантиметр поверхности моря

$$W_\beta = \frac{2\pi^2}{T^2}\left(\frac{a}{R}\right)^2\beta. \tag{208}$$

К сожалению, эта формула должна явно занижать мощность, поглощаемую пленками в действительности, когда ветровые волны обладают острым ребром при вершине. Как помним, параметр a, характеризующий ветровые волны без такого ребра, не позволяет получить точный профиль с ребром. Между тем именно наличие ребра при вершине должно приводить к чрезвычайно резкому возрастанию скорости $d\sigma/dt$ пульсаций поверхности раздела, так как даже при взгляде на приближенную схему рис. 564 видно, что у острой вершины поверхность раздела элементарных столбов с воздухом над ними становится бесконечно малой. Несомненно, что именно здесь, близ острых гребней ветровых волн, силы внутреннего трения между молекулами активного вещества совершают наибольшую работу и отнимают наибольшую мощность у волн.

Приближенное представление об этом может дать формула (208).

Действительно, чтобы получить по уравнениям § 8—10 гл. III заостренный профиль ветровой волны, формально надо принять параметр a (большую ось вспомогательного эллипса) равным R (радиусу круга качения). Подстановка $a = R$ в формулу (208) дает

$$W_\beta = \frac{2\pi^2}{T^2}\beta. \tag{209}$$

Разумеется, нельзя претендовать на сколько-нибудь надежное вычисление по формуле (209) той мощности, которую на самом деле отнимают у волн поверхностные пленки жирных кислот или мыл. Однако, подставив в (209) числовые значения T и β (из опытов с пленками в лабораторных условиях), можно убедиться в том, что величины W_β получаются того же порядка, как

и величины W_V — мощности, передаваемой волнам от ветра (по теории, изложенной в § 17 гл. III).

И теория, и опыты показывают, что поверхностноактивные пленки гасят только мелкие волны и пенистые гребни на штормовых волнах. На большие волны они действуют только косвенным образом: уничтожение волн высоких порядков на поверхности основных сильно уменьшает мощность, передаваемую последним от ветра: тем самым вызывается уменьшение основных волн под действием внутреннего трения в самой воде.

Для практики важно погасить лишь пенистые гребни, представляющие иногда серьезную опасность для корабля или тем более для спускаемой шлюпки. Длинные волны основной зыби не опасны.

§ 14. Гашение мелких волн

Исследования Р. Н. Иванова над гасящим действием поверхностноактивных пленок, описанные в § 13, являются весьма убедительными и позволяют с достаточной надежностью оценить порядок потерь энергии морской волны под действием таких пленок. К сожалению, ни самим Ивановым, ни другими авторами за истекшие годы не было произведено измерений гасящего действия непосредственно в море; подобные измерения связаны с очень большими техническими трудностями, так как измерительная аппаратура, предназначаемая для них, обязана удовлетворять взаимно противоречащим условиям: с одной стороны, она должна быть весьма чувствительной и точной, а с другой стороны, она должна выносить суровые условия, существующие на взволнованной поверхности моря.

Только отсутствием таких непосредственных измерений в море можно, пожалуй, объяснить появление странных попыток у некоторых физиков: попыток возвратиться к устарелому взгляду Лэмба на природу гашения волн активными пленками. Вновь появились высказывания о том, что энергия волн якобы гасится вследствие «повышенной турбулентности, возникающей в волне благодаря присутствию *твердой* пленки постороннего вещества на поверхности воды».

Это недоразумение полностью опровергается работой С. В. Доброклонского и В. А. Тюменевой [28]. Авторы работы исследовали мелкие волны с частотой от 15 до 60 *гц*, создаваемые с помощью оригинального волнообразователя.

Посредством электромотора с регулируемым числом оборотов можно было приводить в вертикальное колебательное движение либо один небольшой пробковый шарик, погружаемый в воду, либо два таких шарика.

В случае совместного колебания обоих по воде бежали две интерферирующие системы волн от двух точечных источников. Освещая экспериментальный сосуд точечным источником света, можно было легко определить *длину волны* по расстоянию на дне сосуда между двумя светлыми или темными полосами, соответствовавшими полуволне.

Во время измерения амплитуды волн использовались волны от одного шарика, причем измерение производилось по способу Доброклонского: от осветителя посылался пучок световых лучей сквозь сферическую линзу с таким расчетом, чтобы действительное изображение нити лампочки возникало несколько выше поверхности воды. Поэтому на водной поверхности, в месте, где измерялась амплитуда волны, возникала размытая световая полоска, ширина которой в то же время была невелика по сравнению с длиной волны. Свет, отраженный от поверхности воды, собирался сферической линзой и сводился затем посредством цилиндрической линзы в четкую точку на фотобумаге, наложенной на барабан кимографа. Плоскость, в которой шли падающий и отраженный лучи, совпадала с направлением одного из «волновых лучей».

При появлении волн на поверхности воды отраженный луч двигался с соответствующей частотой по поверхности фотобумаги, причем, как можно было показать, отклонения его в обе стороны от положения покоя были пропорциональны *амплитуде волн*.

Падающий луч можно было направлять на различные участки поверхности воды и тем самым исследовать амплитуды волн на различных расстояниях r от шарика-волнообразователя.

Легко видеть, что при полном отсутствии потерь энергии амплитуда волн была обязана уменьшаться по закону

$$h = \frac{A}{\sqrt{r}}, \tag{210}$$

(где A — постоянная), так как длина гребня волн непрерывно возрастает пропорционально r по мере удаления от волнообразователя, а энергия остается постоянной.

Всякая потеря энергии волн сказывается в том, что вместо (210) появляется иной закон уменьшения амплитуд, именно

$$h = \frac{A}{\sqrt{r}} e^{-\beta r}. \tag{211}$$

Представляя закон уменьшения амплитуд (211) в логарифмических координатах в виде *прямой* линии

$$\lg h + \frac{1}{2} \lg r = \lg A - \beta r \lg e, \tag{212}$$

легко определить графически величину *коэффициента гашения* β (по пространству).

Нанося на поверхность воды тонкие пленки *олеиновой кислоты*, *рыбьего жира и лауриновой кислоты*, Доброклонский и Тюменева определяли таким способом соответствующие числовые значения величины β для различных частот волн. Полученные опытные результаты они сравнили с числовыми значениями коэффициента гашения, которые можно получить как на основании теории Шулейкина — Иванова, так и на основании устаревшей теории Лэмба. Для полноты картины авторы учитывали и те потери энергии, которые обусловлены *собственной вязкостью воды*. В соответствии с этим гашение волн под действием одной лишь собственной вязкости должно характеризоваться величиной коэффициента β, определяемой из формулы

$$\beta = 2\nu \frac{k^2}{U}. \tag{213}$$

Совместное действие собственной вязкости и эффекта Шулейкина — Иванова в поверхностной пленке приводит к иному выражению для β:

$$\beta = \frac{2\nu k^2 + \frac{1}{2} a \frac{k^3}{\delta}}{U}. \tag{214}$$

Наконец, гипотеза Лэмба о воздействии «твердой границы» на турбулентные явления в волне дает третье выражение для β:

$$\beta = \frac{gk + \alpha' k^3}{2(g + 3\alpha' k^2)} \sqrt{2\frac{\nu k^2}{\omega}} \left[1 + \frac{g + 2\alpha' k^2}{g + 3\alpha' k^2} \sqrt{2\frac{\nu k^2}{\omega}}\right]. \tag{215}$$

Здесь всюду обозначено: $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ (где λ — длина волны), U — групповая скорость волн, ν — кинематическая вязкость воды, $\alpha' = \alpha/\delta$ (где α — поверхностное натяжение), ω — угловая частота колебаний на волне и β — постоянная гашения, введенная Ивановым; ее можно рассматривать как

коэффициент, на который следует умножить относительную скорость деформации пленки, чтобы получить *силу*, вызывающую необратимый процесс потери энергии; в свою очередь эта сила отнесена к единице длины пленки в направлении, перпендикулярном к направлению деформации.

Опыты Доброклонского и Тюменевой очень убедительно показали, что собственная вязкость, учитываемая формулами (213) и (214), влияет на потерю энергии волн ничтожно мало по сравнению с эффектом Шулейкина — Иванова, который описывается вторым членом показателя степени в формуле (214).

Столь же убедительно эти опыты показали, что эффект Лэмба, описываемый формулой (215), также не имеет никакого практического значения: настолько *мал* он по сравнению с действием вязкости самого вещества пленки по схеме Шулейкина — Иванова.

Как и следовало ожидать, в настоящее время нет никаких оснований воскрешать устарелую гипотезу Лэмба.

Между прочим опыты Доброклонского и Тюменевой подтвердили, что при непосредственном гашении волн на поверхности воды постоянная гашения a, введенная Ивановым, действительно не меняется при изменении частот волн в широких пределах.

Отклонения от постоянства были замечены только в тех случаях, когда поверхностноактивная пленка теряла способность выделять молекулы то вверх, то вниз в зависимости от прохождения вершины или подошвы волн. Подобное явление возникало при опытах с *лауриновой кислотой* при *больших частотах* (не имеющих практического значения в море). Здесь, несомненно, пленка лауриновой кислоты начинала себя вести как некий «поверхностный лак».

Любопытно, что числовые значения постоянной a, полученные в опытах Доброклонского и Тюменевой, были меньше тех, которые в свое время получил Иванов, работая не с пленками самих жирных кислот, а с мыльными пленками, содержащими их.

Следовательно, гасящее действие мыльных пленок оказывается более сильным, чем гасящее действие самих жирных кислот, входящих в состав мыла. С молекулярно-физической точки зрения такое различие вполне понятно: молекула *соли* жирной кислоты (молекула мыла) должна быть всегда более «громоздкой» и резко полярной по сравнению с молекулой жирной кислоты. Поэтому блуждания молекул *мыла* вверх и вниз при прохождении волн должны сопровождаться особо большими потерями энергии на преодоление вязкости.

Не исключена возможность влияния *громадного различия* в частотах между опытами Иванова, описанными в § 13, и опытами Доброклонского и Тюменевой; по всей вероятности, в таком обширном диапазоне частот (резко превышающем природный) величина a все же *меняется*: уменьшается по мере нарастания частот. В связи с этим уместно отметить, что частоты морских волн значительно меньше даже частот колебаний арматуры в опытах Иванова, а потому в природе можно рассчитывать на гасящее действие пленок не меньшее, а даже большее по сравнению с опытами Иванова.

С другой стороны, даже чистая олеиновая кислота, будучи нанесена на поверхность *морской* воды (изобилующей сильными ионами), должна быстро давать молекулы ее *натриевой соли*, т. е. молекулы *мыла*. Поэтому гасящий эффект здесь должен быть более значительным, чем при нанесении олеиновой кислоты на поверхность *пресной* воды.

§ 15. Скорость растекания пленок на поверхности воды

В трех предыдущих параграфах было показано, что гашение волн поверхностными пленками вызывается наличием необратимых процессов в самих пленках. Вопреки старым воззрениям, само поверхностное натяжение в пленке непосредственного значения здесь не имеет. В сущности пленка может состоять из вещества, не обладающего никакой поверхностной активностью в прямом смысле этого слова, т. е. из вещества, не изменяющего поверхностного натяжения воды; необходимо лишь, чтобы при растяжении и сжатии поверхностного слоя (на волне) *поглощалась энергия, идущая на перегруппировку молекул пленки.*

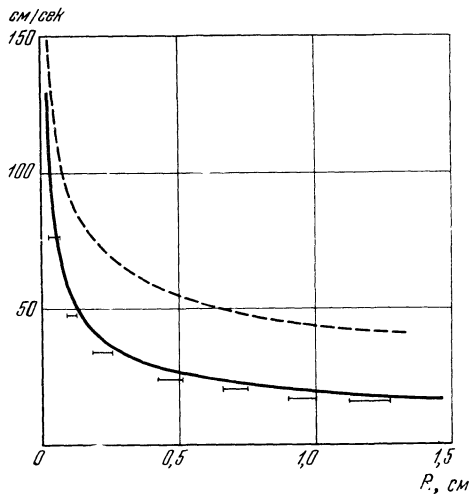


Рис. 565. Растекание поверхностных пленок по воде

Однако при практическом применении поверхностных пленок для гашения волн придется все же считаться и с *активностью* вещества, из которого состоит пленка, ибо от этой активности должна зависеть *скорость растекания пленки* по поверхности моря. А быстрое растекание должно быть обеспечено, как и большое поглощение энергии в пленке: чем быстрее растечется вещество, тем больший участок поверхности моря будет охвачен его действием.

В § 11 упоминалось уже об одном факторе, характеризующем способность капель растекаться по поверхности другой жидкости,— о так называемом коэффициенте растекания. Теперь нас будет интересовать собственно не поведение самой капли, а поведение того тончайшего молекулярного слоя, который возник из нее и скользит по поверхности воды, распространяясь в радиальных направлениях.

За поведением такого слоя впервые попытался теоретически проследить Райдил [25], воспользовавшийся теорией движения тонкой пластинки (в ее плоскости) по поверхности слабовязкой жидкости. В свою очередь теорию подобного движения пластинки дал еще в 1908 г. Блазиус [29].

Однако, применяя соотношения Блазиуса к случаю растекания масляной капли по поверхности воды, Райдил упускает из виду, что в случае радиального движения кинематические условия, а стало быть и условия динамические, на элементарных участках будут совсем не те, с которыми имел дело Блазиус, интегрировавший свои уравнения применительно к движению *прямоугольной* пластинки. В результате Райдил получает такое выражение для скорости растекания капли, которое совсем не согласно с данными его же непосредственных опытов.

На рис. 565 пунктирной кривой представлена та связь между радиусом капли и скоростью растекания, которая следует из теории Райдила (для $\alpha_w - \alpha = 18{,}6$).

Серия отрезков, нанесенных на чертеж, построена на основании опытных данных того же автора. Она показывает, что, например, при изменении радиуса от 0,919 до 1,002 *см* скорость растекания равнялась 16 *см/сек* и т. д.

Как видно, теоретическая кривая (пунктирная) Райдила проходит весьма далеко от экспериментальных точек.

С другой стороны, вполне пригодной является основная идея: воспользоваться теорией движения пластинки для исследования скорости растекания активных пленок.

Поэтому попытаемся проследить за движением отдельных элементов активной пленки, исключив погрешности вывода, о которых выше была речь, и учтя специфические особенности растекания *капли* в радиальных направлениях.

В качестве исходного соотношения возьмем формулу, которая выражает *силу трения* пластинки о поверхность воды, отнесенную к единице поверхности:

$$X = \frac{\beta}{4}\sqrt{\eta\delta u^3}\,\frac{1}{\sqrt{x}}. \qquad (216)$$

Здесь η — коэффициент трения (внутреннего) для воды, δ — плотность воды, u — скорость перемещения элемента поверхности пластинки по воде, x — расстояние от заднего конца пластинки до данного элемента ее (отсчитывается в направлении движения). Наконец, через β обозначен некоторый коэффициент, численное значение которого таково: $\beta = 1{,}327$. Пусть в некоторый момент времени пленка образовала на поверхности моря круг радиусом R. В центре этого круга пусть лежит капля, питающая пленку и ограниченная окружностью радиусом R_0.

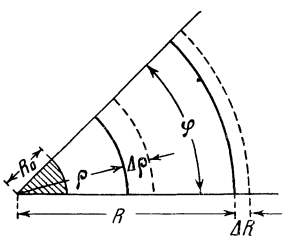


Рис. 566. Схема элементарных колец

Выделим некоторый сектор с произвольным центральным углом φ и рассмотрим силы трения, которые будут действовать на элементарные круговые полоски, на которые его можно разбить по схеме рис. 566.

Согласно (216), на элементарную полоску длиной $\rho\varphi$ и шириной $d\rho$, отстоящую на некоторое расстояние ρ от центра, должна действовать сила трения,

$$df = B\rho^{-1/2}\left(\frac{d\rho}{dt}\right)^{3/2} dS = B\rho^{-1/2}\left(\frac{d\rho}{dt}\right)^{3/2}\rho\varphi\, d\rho = B\rho^{1/2}\left(\frac{d\rho}{dt}\right)^{3/2}\varphi\, d\rho, \qquad (217)$$

где для сокращения обозначено

$$B = 0{,}332\,(\eta\delta)^{1/2}. \qquad (218)$$

Было бы ошибочным думать, что скорость $d\rho/dt$, входящая в (217), равна скорости продвижения вперед внешней границы пленки, т. е искомой скорости растекания u. Ведь в то время, когда внешняя граница продвигается по радиусу на ΔR, дуга радиусом ρ должна продвинуться на такое расстояние Δ_ρ, которое удовлетворяет *условию неразрывности*

$$\rho\varphi\Delta\rho = R\varphi\Delta R. \qquad (219)$$

Но в таком случае скорость $d\rho/dt$ и скорость растекания u должны быть между собой связаны простым соотношением

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{R}{\rho}u. \qquad (220)$$

Воспользовавшись им, придется переписать (217) в виде

$$df = BR^{3/2}u^{3/2}\varphi\,\frac{d\rho}{\rho}. \qquad (221)$$

Для определения полной силы трения, действующей на весь сектор, остается

проинтегрировать (221) в пределах от R_0 до R. Тогда окажется

$$f = Bu^{3/2}R^{3/2}\varphi \ln \frac{R}{R_0}. \tag{222}$$

Вот с какой силой должна растягиваться пленка активного вещества, образовавшая круг с радиусом R. Совершенно очевидно, что она растягивается под действием *разности* поверхностных натяжений чистой морской воды α_w и морской воды, покрытой активной пленкой α. Другими словами, сила

$$f = R\varphi(\alpha_w - \alpha). \tag{223}$$

Приравнивая друг другу правые части (222) и (223), найдем

$$Bu^{3/2}R^{1/2} \ln \frac{R}{R_0} = \alpha_w - \alpha. \tag{224}$$

Вспомнив условное обозначение (218), легко найти из (224) и (218) искомое выражение для u. Именно

$$u = 2{,}1 \sqrt[3]{\frac{(\alpha_w - \alpha)^2}{\eta\delta R \left(\ln \frac{R}{R_0}\right)^2}}. \tag{225}$$

Для проверки этого соотношения, выведенного Шулейкиным, подставим в (225) числовые значения $\eta = 0{,}01$, $\delta = 1$, $\alpha_w - \alpha = 18{,}6$, $R_0 = 0{,}0015$ *см*. Тогда получим зависимость между скоростью растекания u и радиусом R, графически представленную на рис. 565 *сплошной* кривой. Как видно, теоретическая кривая Шулейкина проходит близко к экспериментальным точкам Райдила.

Итак, действительно, активная пленка скользит по воде, как *твердое тело*, но тело, непрерывно растягивающееся в радиальном направлении, с соблюдением условия (219).

Но ведь при выводе формулы (225) не делалось никаких ограничений в отношении *размеров самой капли*, вокруг которой распространяется пленка. Для полной уверенности в справедливости этого вывода [на этапе (219)] можно лишь, пожалуй, потребовать, чтобы радиус круга R, занятого пленкой, был весьма велик по сравнению с радиусом круга R_0, занятого самой каплей. Но и это требование практически всегда выполняется.

А в таком случае формулу (285) с полным правом можно применить к исследованию процесса растекания активной пленки вокруг *мешка с пенькой, пропитанного тем веществом, которое предназначено для гашения волн*. Стоит только в (225) подставить вместо R_0 величину радиуса упомянутого мешка с пенькой.

Для практических подсчетов можно сохранить те числовые значения η и δ, которые фигурировали в частном случае, рассмотренном выше. Вместо натуральных логарифмов, разумеется, удобнее пользоваться десятичными, внеся в (225) соответствующий переходный множитель; второй переходный множитель придется внести в (225) ввиду того, что R и R_0 удобней выражать не в сантиметрах, а в метрах. В результате вместо (225) для расчетов можно будет пользоваться простым соотношением

$$u = 1{,}2 \sqrt[3]{\frac{(\alpha_w - \alpha)^2}{R \left(\lg \frac{R}{R_0}\right)^2}}. \tag{226}$$

Важно отметить, что скорость распространения активного вещества при всех прочих равных условиях пропорциональна «упругости двумерного газа»

$(\alpha_w - \alpha)$ в степени $^2/_3$. Чем больше эта «упругость» (чем больше данное активное вещество «понижает» поверхностное натяжение воды), тем скорее распространится *гасящее* действие пленки вокруг корабля. Соотношение (226) показывает также, что для повышения скорости растекания активного вещества полезно увеличивать *диаметр мешков*, наполненных смоченной этим веществом пенькой R_0, хотя влияние диаметра мешка сказывается не так резко, как влияние величины $(\alpha_w - \alpha)$.

Воспользовавшись формулой (226), легко определить, на какое расстояние от корабля (от мешка) распространится активная пленка за тот или иной промежуток времени. Ведь формула эта выражает производную от R по времени как функцию R

$$\frac{dR}{dt} = f(R). \tag{227}$$

Но в таком случае, задавшись некоторым определенным значением расстояния R, нетрудно будет найти промежуток времени t, потребный для распространения пленки на это расстояние. Именно на основании (227) будет

$$t = \int_0^R \frac{dR}{f(R)}. \tag{228}$$

Но для каждого активного вещества известна величина α. Зная ее и диаметр мешка R_0, легко по (226) построить кривую, выражающую $u^{-1} = \frac{1}{f(R)}$ как функцию R (это — кривая, обратная теоретической кривой Шулейкина, приведенной на рис. 565 для одного из значений α). После этого останется только выполнить графическое интегрирование (определяя соответствующие участки площади).

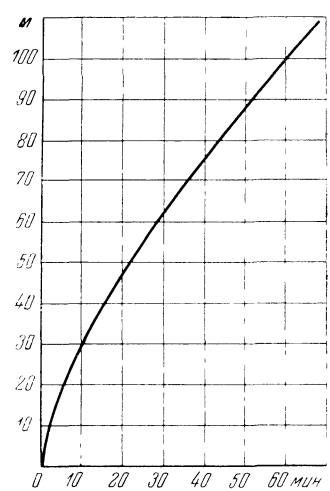


Рис. 567. Растекание по поверхности моря

На рис. 567 в качестве примера приведена диаграмма, полученная Шулейкиным посредством подобных несложных действий. Она соответствует числовым значениям $\alpha = 30$ *дин/см*, $R_0 = 0{,}5$ *м*. По оси абсцисс отложено время в минутах, а по оси ординат — расстояние, на которое распространится пленка за тот или иной промежуток времени, в метрах.

Диаграмма показывает, что уже через 5 *мин* пленка заполнит круг радиусом 20 *м*, через 15 *мин* она распространится на 40 *м*, через 30 мин — на расстояние 63 *м* и т. д. Через час пленка успеет занять круг радиусом 100 *м*, т. е. покроет свыше 30 000 $м^2$ поверхности моря.

Количественные измерения в таком большом масштабе были произведены нами тогда, когда теория, изложенная здесь, не была еще разработана (о них говорилось в гл. VI, § 8). Во всяком случае можно считать, что *порядок* величин получался такой же, как и определенный теоретически. Наибольшая площадь, покрытая пленкой, при этих опытах достигала 40 000 $м^2$. Дальнейшие наблюдения за пленкой были прекращены ввиду того, что ее принесло ветром к берегу.

Следует отметить, что все выводы были сделаны Шулейкиным применительно к тому случаю, когда пленка растягивается под действием *полного* давления «двумерного газа», другими словами, под действием полной разности поверхностных натяжений чистой морской воды и поверхностного натя-

жения, максимально пониженного активным веществом. Но, как показали опыты, максимальное понижение поверхностного натяжения вызывается слоями, толщина которых *превышает* размеры одной молекулы. Эти-то полимолекулярные слои и должны гасить волну благодаря возникновению необратимых процессов в них. После того как пленка растеклась на наибольшее расстояние, допускаемое наличным количеством вещества, от ее краев будут продолжать отделяться молекулы, которые образуют на поверхности моря кольца, утончающиеся по направлению к периферии. Процесс будет идти медленней, и исследование его интереса не представляет.

§ 16. Снос пленок под действием ветра

Расход гасящих веществ был бы совсем невелик, если бы активную пленку не сносило ветром. Сносит же ее весьма быстро именно в тех случаях, когда штормовой ветер заставляет прибегать к ее помощи. По инициативе Шулейкина на экспедиционном судне «Юлий Шокальский» были одновременно проделаны анализ дрейфа пленки (Н. А. Сачковым) и непосредственное определение скорости ее дрейфа (Р. Н. Ивановым).

Воспроизведем здесь подобный анализ.

Пусть пленка дрейфует в таком районе моря, где можно полагать $\frac{H}{D} = \infty$, следовательно, $\psi = 45°$, $w = \frac{AV}{\sqrt{\sin\varphi}}$. Тогда, построив треугольник скоростей на рис. 568, придем к выводу, что между абсолютной скоростью дрейфа пленки **u**, скоростью дрейфового течения на самой поверхности моря **w** и скоростью **r** дрейфа пленки *относительно* движущейся воды должно существовать простое соотношение

$$u^2 = \frac{w^2}{2} + \left(\frac{w}{\sqrt{2}} + r\right)^2,$$

или иначе

$$\left(\frac{u}{w}\right)^2 = \frac{1}{2} + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{r}{w}\right)^2. \qquad (229)$$

В свою очередь величина r связана со скоростью ветра соотношением, вытекающим из рассмотрения двух сил, действующих на пленку: силы трения воздуха о пленку (сверху) и силы трения пленки о поверхность воды (снизу), движущейся в дрейфовом течении:

$$k\delta_w r^2 = k\delta_a V^2. \qquad (230)$$

Нетрудно убедиться, что в этом анализе нет надобности учитывать силу Кориолиса, действующую на самую пленку, в отличие от задачи о дрейфе ледяных полей (см. гл. I); сила эта ничтожно мала ввиду чрезвычайно малой величины *массы* пленки, приходящейся на единицу поверхности моря.

Из соотношения (230) непосредственно следует

$$\frac{r}{V} = \sqrt{\frac{\delta_a}{\delta_w}}. \qquad (231)$$

Стало быть, вспомнив известную связь между w и V (через дрейфовый фактор A), приведенную выше, можно будет записать

$$\frac{u}{w} = \sqrt{\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{A}\sqrt{\frac{\delta_a}{\delta_w}}\sin\varphi^2\right)}. \qquad (232)$$

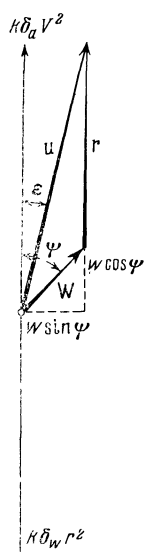


Рис. 568. Векторный треугольник скоростей

Так выражается абсолютная скорость дрейфа пленки u через скорость дрейфового течения w на поверхности моря (поддерживаемую тем же самым ветром со скоростью V).

Угол отклонения дрейфа пленки ε от направления ветра определяется так же просто. Именно, как легко видеть из построений на рис. 568,

$$\operatorname{ctg}\varepsilon = \frac{\frac{w}{\sqrt{2}} + r}{w/\sqrt{2}} = 1 + \frac{r}{w}\sqrt{2}, \tag{233}$$

ли иначе

$$\operatorname{ctg}\varepsilon = 1 + \frac{1}{A}\sqrt{2\,\frac{\delta_a}{\delta_w}\sin\varphi}\,. \tag{234}$$

Доведем анализ дрейфа пленки до числа. Положим

$$\frac{\delta_a}{\delta_w} = 1{,}29\cdot 10^{-3},\quad \varphi = 45^\circ,\quad A = 1{,}2\cdot 10^{-2}.$$

Тогда по формуле (232) окажется

$$\frac{u}{w} = 3{,}16,$$

или

$$u = 0{,}048V \approx \frac{1}{21}V.$$

Наконец, по формуле (234)

$$\varepsilon \approx 13^\circ.$$

Как видим, пленка должна дрейфовать под действием ветра со скоростями, значительно превышающими скорости дрейфа ледяных полей (см. гл. I) при тех же скоростях ветра. Отклонение дрейфа пленки от направления ветра, напротив, оказывается значительно меньшим, чем в случае льдов. Измерения Иванова полностью подтвердили анализ Сачкова.

ГЛАВА ДЕВЯТАЯ

БИОЛОГИЧЕСКАЯ ФИЗИКА МОРЯ

§ 1. Внешняя кинематика рыбы. Общие соображения

Из всех представителей животного мира рыбы и водяные змеи являются наиболее интересными для исследователя внешней и внутренней механики *движения*. Лишь их движения, вызываемые деформациями всего тела, могут быть полностью освещены математическим анализом и описаны с количественной стороны.

Приходится только удивляться тому обстоятельству, что необычайно простые элементы их движения до самого последнего времени оставались замаскированными в громадном количестве исследований, принадлежавших весьма видным экспериментаторам. Это тем более странно, что уже древние индийцы, по-видимому, прекрасно разбирались в особенностях строения тела различных рыб и совершенно правильно связывали их с особенностями в плавании таких рыб. Так, в книге Сузрута-Самгита, относящейся к IV в. до н. э., индийский естествоиспытатель Сузрута высказывает ряд соображений, созвучных с наукой нынешнего дня.

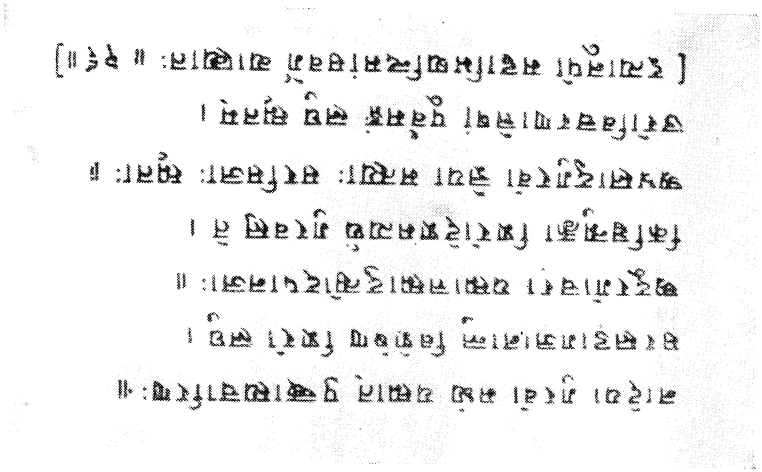
Воспроизводим на стр. 894 факсимиле санскритского текста.

К сожалению, замечательные произведения Сузруты, относящиеся к этой области естествознания, были мало известны даже его соотечественникам, видимо, потому, что санскритологи не интересовались вопросами биологии и биологической физики, а натуралисты не знали санскритского языка.

Только совсем недавно санскритолог Бахадур Чанд Чхабра сообщил своему соотечественнику индийскому зоологу Сундер Лал Хора [1] о предках современных теорий движения рыбы; последний опубликовал воззрения Сузруты в Бенгальском исследовательском журнале. Из статьи упомянутого автора совершенно ясно, что Сузрута считал движителем рыбы *все ее тело*, а не плавники, которым придавали такое большое значение все европейские авторы до 1933 г.

Из европейских биологов правильное качественное описание движения рыбы дал Дж. Грэй [2], получивший много киноснимков различных рыб в аквариуме и заключивший на основании этого экспериментального материала, что рыба отталкивается вперед от окружающей ее водной среды, *изгибая свое тело* наподобие змеи. Однако, получив обширный экспериментальный материал, Грэй занялся исследованием движения отдельных индивидуальных элементов тела рыбы (и притом одного только угря), причем оказалось, что каждый такой элемент описывает сложные восьмерки, не дающие возможности определить ни силы, действующие на все тело, ни другие элементы движения.

Одновременно с Грэем и независимо от него, особенности *змеевидного* движения с точки зрения механики начал исследовать В. В. Шулейкин [3], пошедший по совершенно иному, более простому пути и притом по пути,



Санскритский текст

который привел к вычислению элементов внешней и внутренней кинематики рыбы и к приближенному определению элементов ее внешней и внутренней динамики.

Еще в 1928 г. Шулейкин обнаружил [4], что некоторые особенно быстроходные рыбы — летучие рыбы, скользящие по поверхности моря перед взлетом в воздух,— могут развивать громадную скорость, работая своим движителем. Было вполне очевидно, что достижение таких громадных скоростей возможно лишь при наличии весьма *совершенного движителя*. Но столь же очевидно было и то, что простое колебание хвоста влево и вправо отнюдь не обеспечило бы такое совершенство в работе движителя, особенно в случае движения рыбы не по поверхности воды (как в случае летучей рыбы), а в самой ее толще, как это обычно имеет место.

Ведь движения хвоста здесь должны будут происходить таким образом, чтобы тело рыбы *непрерывно* отталкивалось вперед, чтобы не существовало никаких возвратных тормозящих движений у элементов корпуса рыбы.

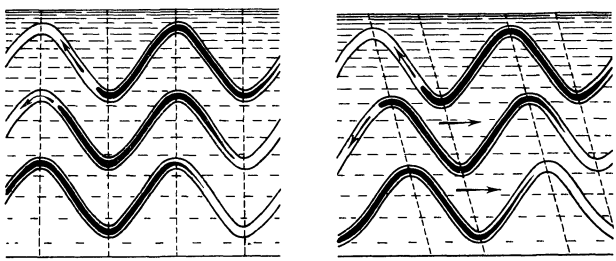
Нетрудно обнаружить, что чрезвычайно просто это условие выполняется при движении *змеевидного* типа, при котором удлиненное тело змеи непрерывно изгибается по синусоиде: в данном случае, как легко убедиться, по телу змеи *бежит волна* поперечных колебаний от головы к хвосту, а потому сам процесс следует трактовать как движение *твердой волны*, перемещающейся в водной среде.

Попытаемся исследовать кинематику и динамику такого движения, распространив анализ и на рыб обычной формы, сильно отличающейся от формы змеи.

§ 2. Движение змеевидного типа: твердая волна с постоянной амплитудой

Ближе всего к этому типу подходит движение угря, хотя, строго говоря, поперечные колебания, совершаемые его головой, обладают амплитудой несколько меньшей, чем амплитуда поперечных колебаний хвоста. Тем не менее здесь мы будем полагать амплитуду колебаний идеально постоянной по всему телу угря, ибо о поправках к такому упрощенному анализу будет легко судить на основании сказанного ниже (см. § 4) [3].

Первоначально допустим, что лобового сопротивления и трения при движении «идеального» угря не существует. Легко видеть, что в таком случае скорость поступательного движения угря может равняться скорости распространения волны по его телу, от головы к хвосту. Если скорость поступательного движения угря будет v, а скорость распространения волны по его телу c (предполагается, что рыба движется в отрицательном направлении по оси абсцисс, а волна — в положительном направлении), то скорость твердой волны *относительно воды*, т. е. $(c - v)$, окажется равной нулю: *форма* волны как бы *застынет* в водной среде, а тело рыбы будет без



а *б*

Рис. 569. Схемы змеевидного движения

сопротивления скользить внутри этой формы, как схематически изображено на рис. 569, *а*.

Никакого взаимодействия между твердой волной и водой здесь не существует, а потому подобный случай не может иметь места при наличии каких бы то ни было сил, сопротивляющихся движению.

Как только возникнут эти силы, так одновременно появится необходимость в непрерывном *отталкивании* тела рыбы по направлению поступательного ее движения. Чрезвычайно просто такое непрерывное отталкивание осуществляется при условии, что по абсолютной величине $v < c$; тогда, как легко показать, *форма* волны будет перемещаться в воде со скоростью $c - v$ по направлению назад, и эта-то форма будет отталкиваться от воды, заставляя угря двигаться вперед со скоростью v. Схематически подобный процесс представлен на рис. 569, *б*, где условно изображен «волновой канал», внутри которого движется рыба, причем канал этот как бы простирается за пределы самого корпуса рыбы; в действительности, разумеется, «форма» волны пробегает в пространстве только отрезок, занятый самим телом рыбы.

Несмотря на простоту и ясность такого механизма *отталкивания* тела рыбы вперед, при движении в сопротивляющейся водной среде, до настоящего времени схема рис. 569 остается непонятой некоторыми читателями. Не так давно в печати появилась заметка, извещавшая о том, что «американские исследователи наконец-то разгадали, *как* движется в воде рыба и почему она развивает большие скорости». В заметке говорится, что за механизмом движения рыбы «лучше всего проследить, «заставив ее плыть посуху». Для этого рекомендуется забить в стол несколько гвоздиков, между которыми поместить тело рыбы. В угоду экспериментаторам рыба будет изгибать свое тело так, что станет быстро продвигаться вперед, отталкиваясь от гвоздиков. Но ведь известно, что в природных водах не существует никаких гвоздиков, расставленных специально для отталкивания рыбы. Всякий гребец знает, что для продвижения вперед гребной шлюпки не надо отталкиваться веслами от каких-либо «гвоздиков»: достаточно отталкиваться веслами от самой водной среды. Если бы гребец плыл по очень узкой речке и доставал бы веслами до берегов, пологих и удобных для подталкивания шлюпки вперед, притом

такое «подталкивание» было бы непрерывным, а не периодическим (каким является, например, «подталкивание» трактора или танка на гусеничном ходу), то скорость движения лопастей относительно шлюпки — от носа к корме — требовалась бы в точности такая, какова скорость продвижения шлюпки относительно берегов. Не такова картина работы весел в *водной* среде: здесь скорость движения лопастей весел относительно шлюпки (от носа к корме) могла бы равняться скорости хода шлюпки относительно водной среды только в том идеализированном случае, если бы не существовало никаких сопротивлений движению шлюпки вперед, иными словами, если бы не требовалось непрерывно сообщать шлюпке импульсы сил, направленных вперед и служащих для преодолевания сопротивлений ее движению.

В действительности гребец вынужден непрерывно сообщать шлюпке такие импульсы, направленные вперед, и эти импульсы получаются за счет *отталкивания* лопастей весел от водной среды. Но по известному принципу механики действие порождает равное и прямо противоположное по направлению противодействие. В данном случае реакция «опоры» принципиально отличается от реакции опоры в случае весел, «доставших до берегов», где были совсем необязательны какие-то смещения твердого грунта: реакция водной среды проявится в вихреобразовании вокруг лопастей весел, хорошо доступном наблюдению (на поверхности воды видны воронки вихрей), в отбрасывании некоторых водных масс *назад по отношению к берегам*. А для этого скорость лопастей весел относительно шлюпки (от носа к корме) непременно должна быть *больше, чем скорость хода шлюпки*.

Схематизированное движение угря, изображенное на рис. 569, *б*, совершенно аналогично рассмотренному случаю гребли на шлюпке: роль лопастей весел там играют *выступы* волнообразно изгибающегося тела. Эти выступы должны отталкиваться от окружающей водной среды, перемещаясь от головы угря к его хвосту со скоростью, которая непременно превышает скорость движения самого угря в воде.

Только в этом случае *выступы*, отталкивающиеся от окружающей водной среды, могут создавать силу, непрерывно толкающую тело угря вперед,— силу, равную сопротивлению его движению в воде.

У нас пока нет возможности измерить эту силу, а потому в дальнейшем мы вынуждены принимать ее равной той силе, какую испытывало бы *спрямленное* тело рыбы, *протягиваемой* в воде с соответствующей скоростью. Тем самым в дальнейшем мы вынуждены завышать силу сопротивления движению против истинного ее значения.

На протяжении тела рыбы, обладающей змеевидной формой, обычно укладываются приблизительно *две* полные волны, а потому динамика ее движения может быть необычайно просто связана с кинематикой.

Именно, нет надобности находить никаких сил взаимодействия между отдельными элементами тела и окружающей водой: достаточно будет представить себе, что рыба, изогнутая в виде синусоиды (на протяжении двух волн), совершенно затвердела и что такое изогнутое тело перемещается *назад* со скоростью $(c - v)$.

Как и во всех задачах экспериментальной гидродинамики, можно полагать, что сила, сопротивляющаяся такому движению, будет пропорциональна квадрату скорости движения в воде, т. е.

$$f_1 = B(c - v)^2, \qquad (1)$$

где B — некоторый коэффициент сопротивления, очевидно, тем больший, чем больше амплитуда синусоиды, определяющей застывшую форму тела.

С достаточной точностью найденную силу можно считать равной той силе, с которой змеевидно изгибающаяся рыба отталкивается при своем естественном движении. Но, с другой стороны, при условии установившегося движения эта сила должна равняться силе f, сопротивляющейся поступатель-

ному движению рыбы и выражаемой соотношением, аналогичным (1):

$$f = bv^2. \tag{2}$$

Здесь b — коэффициент сопротивления, который характеризует скольжение прямолинейно вытянувшегося тела рыбы в водной среде со скоростью v. Хотя здесь тело рыбы скользит не в прямолинейной форме, а в форме, изогнутой по синусоиде, но коэффициент b можно считать тем же. Зато при обычных значениях амплитуд поперечных колебаний придется принять во внимание, что, проходя вперед со скоростью v, рыба должна в действительности скользить внутри синусоидальной формы со скоростью v_1, большей, чем v, и притом большей во столько раз, во сколько длина самой синусоиды превышает длину соответствующего отрезка оси асбцисс.

На основании простых геометрических соотношений можно показать, что

$$v_1 = \left[1 + \frac{\pi}{2}\left(\frac{a}{L}\right)^2\right] v = \varkappa v, \tag{3}$$

где a — амплитуда поперечных колебаний, L — длина тела, причем предполагается, что на протяжении L укладываются две полные волны λ.

Приняв во внимание, что вместо (2) придется записать

$$f = b\varkappa^2 v^2 \tag{4}$$

и что при условии установившегося движения силы f и f_1 должны быть равны между собой по абсолютной величине, нетрудно убедиться, что динамика змеевидного движения определяется уравнением

$$b\varkappa^2 v^2 = B(c - v)^2, \tag{5}$$

из которого непосредственно вытекает, что

$$\frac{c}{v} = 1 + \varkappa \sqrt{\frac{b}{B}}. \tag{6}$$

Таким простым соотношением связаны между собой скорость поступательного движения v, скорость волны, бегущей по телу c, и оба характеристических коэффициента сопротивления b и B.

Из последних величин b может быть определено путем протаскивания тела мертвого угря, предварительно спрямленного и затвердевшего в формалине, а B — путем протаскивания тела той же рыбы, но предварительно наложенного на синусоидальный шаблон и вслед затем погруженного в формалин для фиксации формы. Зная отношение b/B, легко найти отношение c/v. Наоборот, если не известно отношение b/B, то его можно определить по киноснимкам движущейся рыбы, определяя по ним значения c, v и $\varkappa$.

Что касается поправочного коэффициента $\varkappa$, то для суждения о его возможных величинах уместно будет найти по формуле (3), что

при $a : L = 1 : 3$ $\quad \varkappa = 1{,}17,$

при $a : L = 1 : 5$ $\quad \varkappa = 1{,}06.$

Разумеется, при меньших амплитудах поперечных колебаний коэффициент $\varkappa$ можно полагать просто равным единице и считать, что

$$\frac{c}{v} = 1 + \sqrt{\frac{b}{B}}. \tag{7}$$

В. В. Шулейкин воспользовался фотографиями Грэя для вычисления по ним отношения коэффициентов b/B.

Для одного случая, когда угорь двигался вперед со скоростью $v = 4$ *см/сек*, а волна по его телу распространялась со скоростью $c = 6{,}2$ *см/сек*, отношение c/v было равно 1,55, а стало быть, преобразовав для

удобства формулу (7) в

$$\frac{B}{b} = \left(\frac{v}{c-v}\right)^2, \tag{8}$$

можно показать, что здесь было

$$\frac{B}{b} = 3{,}3.$$

Другой очень интересный случай соответствовал движению угря *вспять*. Здесь было $v = 6{,}2$ *см/сек*, $c = 8{,}3$ *см/сек*, а стало быть, $c/v = 1{,}34$. По формуле (8) оказалось, что в данном случае

$$\frac{B}{b} = 8{,}7.$$

Такая большая величина отношения B достигалась здесь за счет довольно большой *амплитуды* поперечных колебаний ($a : L = 1 : 8$).

§ 3. Движение, характерное для большинства рыб: твердая волна с нарастающей амплитудой. Упрощенный анализ

Выше уже упоминалось, что движение угря слегка отличается от движения змеевидного типа, ибо амплитуда поперечных колебаний головы оказывается несколько меньше амплитуды колебаний хвоста. Несравненно резче подобное различие сказывается при движении большинства других типов рыб: там амплитуды колебаний головы бывают чрезвычайно малы по сравнению с амплитудами хвоста [3].

Следовательно, если механизм отталкивания рыбы при движении вперед мы захотим объяснить исходя из того же принципа твердой волны, который дал такие хорошие результаты в применении к угрю, то нам придется предположить, что по телу обычной рыбы (весьма сильно отличающейся от змеи) бежит со скоростью c волна с переменной амплитудой, с амплитудой, *возрастающей* при движении от головы к хвосту.

Допустим, что это возрастание идет по обычному экспоненциальному закону, ибо в противном случае анализ оказался бы чрезвычайно сложным, громоздким и неубедительным. К слову сказать, есть серьезные основания полагать, что такой закон достаточно хорошо описывает процесс; так, например, в случае движения угря отношение амплитуды колебаний хвоста к амплитуде колебаний середины корпуса оказалось в точности равным отношению амплитуды колебаний середины к амплитуде колебаний головы; а это обстоятельство, как известно, соответствует экспоненциальному закону изменения амплитуд колебаний.

Итак, положим, что волна, бегущая вдоль тела рыбы, выражается уравнением

$$y = ae^{\beta x} \sin \gamma \left(t + \frac{x}{c}\right), \tag{9}$$

причем

$$\gamma = \frac{2\pi}{T}.$$

Здесь a — амплитуда поперечных колебаний головы; x — расстояние исследуемой точки от начала координат, совпадающего с передним концом головы рыбы; β — фактор, характеризующий быстроту нарастания амплитуды по мере продвижения волны по направлению к хвосту; t — текущее время; T — период колебаний. Необходимо отметить следующее обстоятельство: как и в предыдущем случае, анализируется только *форма* деформирую-

щегося тела рыбы совершенно независимо от *индивидуальных* колебаний того или иного участка ее тела. Вот почему в рассмотрение не входят те движения, которые будут проделывать эти индивидуальные элементы вдоль синусоиды в случае змеи или вдоль более сложной кривой, исследуемой в настоящем параграфе; следовательно, для каждого определенного x ордината y будет в каждый момент времени измерять отклонение от оси абсцисс одной и той же точки формы, но совсем не одного и того же элемента тела рыбы. Каждый элемент тела описывает восьмерки, которые исследовал Грэй и которые не имеют никакого значения при нашем анализе движения формы. Мало того, исследование движений каждого индивидуального участка тела рыбы не позволило бы так просто разобраться во внешней динамике рыбы, как позволяет исследование движения формы сквозь тело рыбы.

На рис. 570 представлены 10 различных фаз движения твердой волны, причем форма хребта рыбы, изображенного белой линией, вычислена по формуле (9), а тело рыбы нанесено на чертеж лишь для наглядности, чтобы удобнее было сопоставить фазы продвижения волны от головы к хвосту с теми изгибами, которые в действительности совершает рыба. Предположено, что по длине тела помещается одна полная волна: следовательно, длина волны λ равна длине корпуса L.

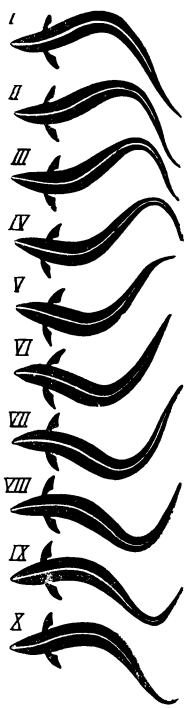


Рис. 570. Десять фаз движения рыбы

Логарифмический инкремент [1] нарастания волны

$$\delta = \beta\lambda \qquad (10)$$

выбран с таким расчетом, чтобы амплитуда колебаний хвоста оказалась в 16 раз большей, чем амплитуда колебаний переднего конца головы. Разность фаз между каждыми двумя соседними изображениями на рисунке соответствует $^1/_{10}$ части периода колебаний, следовательно, $^1/_{10}$ части того промежутка времени, в течение которого рыба успеет сделать одни полный взмах хвостом (и вправо и влево).

Для наглядности чертежа амплитуды поперечных колебаний взяты больше тех, которые обычно наблюдаются в действительности: отклонение хвоста от средней оси (в каждую сторону) составляет 0,4 длины рыбы. В действительности же оно обычно не превышает 0,25 длины рыбы. В дальнейшем будет показано, что подобное преувеличение амплитуд не препятствует определению всех необходимых величин, характеризующих действительное движение рыбы, причем для этого достаточно сделать простой пересчет, соответствующий изменению масштаба поперечных отклонений в отношении 0,25 : 0,4.

В предыдущем параграфе внешняя динамика змеевидного движения рыбы была связана с кинематикой этого движения. Теперь попытаемся вывести основные кинематические соотношения, применительные к *новым* условиям — к движению *возрастающей* твердой волны. Как увидим, они будут в корне отличны от прежних.

В основу анализа снова положим элементарное требование *активного* движения всех участков *формы*. Другими словами, потребуем, чтобы ни один из этих участков не обладал скоростью относительно воды, направленной вперед. Нетрудно облечь это требование в весьма простую функциональ-

[1] Название употреблено по аналогии с *декрементом* затухания волн.

ную форму, воспользовавшись некоторым вспомогательным геометрическим построением.

Положим, что в направлении оси абсцисс слева направо бежит волна, мгновенное положение которой изображено на рис. 571. Представим себе весьма тонкую щель, протянувшуюся параллельно оси X и отстоящую от нее на некотором расстоянии y_1. Тогда сквозь эту щель будет видно движение хребта рыбы, которое на схеме изобразится в виде движения точки пересечения волны с прямой MN, проведенной параллельно оси X на расстоянии y_1 от последней. Совершенно неважно, что в каждый данный момент точка пересечения оказывается смещенной не только по прямой MN, но и по самой кривой, изображающей хребет рыбы; важно только, чтобы *скорость движения точки O по прямой MN не была меньше скорости поступательного движения рыбы* v, направленной в противоположную сторону.

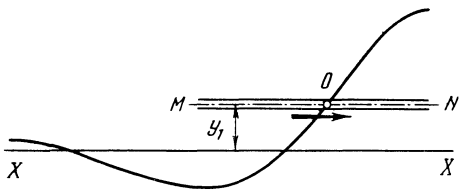


Рис. 571. Схема отталкивания

Разумеется, как и прежде, приняв последнюю формулировку основного условия, приходится считать, что начало координатной системы движется относительно воды вместе с рыбой.

Нетрудно найти выражение для скорости движения точки O по прямой MN в такой подвижной координатной системе. Решив уравнение волны (9) совместно с уравнением прямой

$$y - y_1 = 0,$$

найдем, что абсцисса точки O должна быть связана с временем следующей зависимостью:

$$ae^{\beta x} \sin \gamma \left(t + \frac{x}{c}\right) = y_1. \tag{11}$$

Возьмем полный дифференциал от левой части и приравняем его нулю, так как в правой части стоит постоянная величина. Сокращенно обозначая левую часть через y, найдем

$$\frac{\partial y}{\partial x} dx + \frac{\partial y}{\partial t} dt = 0, \tag{12}$$

откуда

$$\frac{dx}{dt} = - \frac{\partial y / \partial t}{\partial y / \partial x}.$$

Но на основании (9)

$$\frac{\partial y}{\partial t} = a\gamma e^{\beta x} \cos \gamma \left(t + \frac{x}{c}\right) \tag{13}$$

и

$$\frac{\partial y}{\partial x} = a\beta e^{\beta x} \sin \gamma \left(t + \frac{x}{c}\right) + a \frac{\gamma}{c} e^{\beta x} \cos \gamma \left(t + \frac{x}{c}\right), \tag{14}$$

а стало быть, на основании (12) определится непосредственно интересующая нас скорость dx/dt движения точки O вдоль прямой MN. По основному условию должно быть

$$\left|\frac{dx}{dt}\right| \geqslant |v|, \tag{15}$$

или на основании выражений (12) — (14) (после сокращения на $ae^{\beta x}$)

$$\frac{\gamma \cos \gamma \left(t + \frac{x}{c}\right)}{\beta \sin \gamma \left(t + \frac{x}{c}\right) + \frac{\gamma}{c} \cos \gamma \left(t + \frac{x}{c}\right)} \geqslant v. \tag{16}$$

Представим полученное неравенство в несколько иной форме

$$\left[\frac{\beta}{\gamma} v \sin\gamma\left(t+\frac{x}{c}\right)+\frac{v}{c}\cos\gamma\left(t+\frac{x}{c}\right)\right]\leqslant\cos\gamma\left(t+\frac{x}{c}\right). \tag{17}$$

В такой форме особенно отчетливо всплывает кинематическое различие между движением *твердой волны постоянной амплитуды и движением твердой волны возрастающей*. При постоянстве амплитуд по всей длине тела рыбы, т. е. при $\beta = 0$, неравенство (17) удовлетворяется чрезвычайно легко, ибо оно автоматически переходит в неравенство

$$\frac{v}{c}\cos\gamma\left(t+\frac{x}{c}\right)\leqslant\cos\gamma\left(t+\frac{x}{c}\right), \tag{18}$$

а стало быть, $c \geqslant v$.

Как было уже указано в предыдущем параграфе, знак равенства появился бы в (18), если бы движение змееобразной рыбы не встречало в воде никаких сопротивляющихся сил. В реальных условиях, при наличии сопротивления среды, между c и v устанавливается зависимость, которая, как помним, определяется формулой (6) или, проще, формулой (7).

Совсем не так обстоит дело в случае, который теперь нас интересует, т. е. когда *волна возрастает* от головы к хвосту ($\beta > 0$). Здесь оказывается *принципиально невозможным* удовлетворить неравенство (17) при всех значениях аргумента тригонометрических функций, т. е. для любого момента времени и для любого участка вдоль по оси X (равным образом для разных значений y). Это чрезвычайно важное заключение, показывающее, что каждый участок формы волны при своем движении вдоль оси X на некотором отрезке пути неизбежно оказывает тормозящее действие, ибо в течение некоторого промежутка времени для него оказывается

$$\left|\frac{dx}{dt}\right| < |v|.$$

В дальнейшем будет выведено соотношение, которое позволит найти, при каких условиях данный элемент формы волны может продолжать оставаться все же «полезным», т. е. при каких условиях его полная работа за все продвижение по прямой MN (в пределах, соответствующих размерам рыбы) оказывается положительной. Заранее надо сказать, что такое соотношение будет весьма сложным и неудобным для многих сторон исследования. Поэтому для предварительного, неточного, схематического, но зато наглядного исследования заменим неравенство (17) некоторым отдаленным его подобием; другими словами, посмотрим, при каких условиях неравенство (17) удовлетворится применительно к *среднему* значению аргументов тригонометрических функций.

Для получения такой схемы положим, следовательно, что

$$\cos\gamma\left(t+\frac{x}{c}\right)=\sin\gamma\left(t+\frac{x}{c}\right),$$

а стало быть,

$$\frac{\beta}{\gamma}v+\frac{v}{c}\leqslant 1. \tag{19}$$

Хотя полученное выражение и является, строго говоря, фиктивным, но оно позволяет тем не менее выяснить некоторые важные особенности движения возрастающей твердой волны. Подставим в (19) выражения β и γ через другие элементы волны. Именно

$$\beta=\frac{\delta}{\lambda}=\frac{\delta}{cT},$$

$$\gamma=\frac{2\pi}{T}, \tag{20}$$

где по-прежнему δ — логарифмический инкремент волны. Тогда, после простых преобразований, из (19) получится весьма компактное соотношение

$$\frac{c}{v} \geqslant 1 + \frac{\delta}{2\pi}. \tag{21}$$

Помня о некоторой условности вывода, можно все же считать полученное соотношение (21) своего рода добавлением к формулам (6) или (7), соответствовавшим волне с постоянной амплитудой. Здесь, в случае *возрастающей волны*, отношение коэффициентов сопротивления $b : 8$ еще не определяет собой всех кинематических особенностей движения; здесь всплывает еще новый фактор $\delta/2\pi$, который должен «условно» подчиниться схематическому соотношению (21).

Между прочим отметим, что (21) вполне удовлетворяет предельному условию: при $\delta = 0$ оно переходит в знакомое соотношение $c : v \geqslant 1$.

На первый взгляд может показаться, что при неограниченном возрастании скорости волны по телу рыбы путь, проходимый рыбой в воде за один взмах хвоста (за период T), будет также неограниченно возрастать. Однако легко показать, что это неверно.

Умножим числитель и знаменатель левой части (21) на T. Тогда, вспоминая соотношения (20), найдем

$$\frac{\lambda}{vT} \geqslant 1 + \frac{\beta\lambda}{2\pi}, \quad vT \leqslant \frac{\lambda}{1 + \frac{\beta}{2\pi}\lambda}, \tag{22}$$

или, для краткости обозначая через X_1 искомую длину пути, проходимого рыбой за один полный размах хвоста ($X_1 = vT$), и через Λ величину $2\pi/\beta$ (зависящую от нарастания амплитуд),

$$\frac{1}{X_1} \geqslant \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\Lambda}. \tag{23}$$

Любопытные соотношения (22) и (23) показывают что при непрерывном возрастании скорости волны c (T предполагается постоянным), ведущем к возрастанию λ, путь vT, проходимый рыбой за один полный взмах хвоста, стремится к некоторому определенному и конечному пределу

$$\lim |vT|_{c=\infty} = \Lambda = \frac{2\pi}{\beta}. \tag{24}$$

Весьма хорошей и притом универсальной характеристикой движения рыбы может служить *отношение пути* vT (за период) *к длине ее тела* L. Если мы к той же длине L отнесем и предел, к которому стремится vT, то вместо правой части равенства (24) получим дробь, в знаменателе которой будет стоять произведение βL. Но легко видеть, что на основании (9) величина βL должна равняться логарифму (натуральному) отношения амплитуды колебаний хвоста A к амплитуде колебания головы a. Другими словами,

$$\lim \left| \frac{X_1}{L} \right|_{c=\infty} = \frac{2\pi}{\ln A/a}. \tag{25}$$

Итак, отношение $A : a$ определяет собой предел, к которому стремится перемещение рыбы (за взмах хвоста) при неограниченном возрастании скорости волны c по ее телу.

На рис. 572 для примера изображены три кривые, выражающие закон нарастания X_1/L по мере увеличения скорости c. По оси абсцисс отложены величины, пропорциональные c,— значения отношения λ/L, а по оси ординат — интересующие нас величины X_1/L. Одна из кривых соответствует значению $\frac{A}{a} = 8$, другая $\frac{A}{a} = 16$, а третья $\frac{A}{a} = 32$. Как видим, в первом

случае X_1/L стремится к предельной величине, равной 3,27, во втором — к 2,26, а в третьем — к 1,81.

Разумеется, бо́льшая часть каждой из кривых, изображенных на рисунке, соответствует таким большим скоростям волны, каких в природе не существует; отношение λ/L обычно никогда не превышает единицы. Эти «абстрактные» участки кривых приведены лишь для того, чтобы показать тенденцию их протекания. Но весьма любопытно, что, несмотря на произвольное допущение, лежащее в основе нашей *предварительной* схемы, числовые результаты, которые можно получить в *конкретных* случаях из диаграммы рис. 572, *очень хорошо согласуются с наблюдениями.*

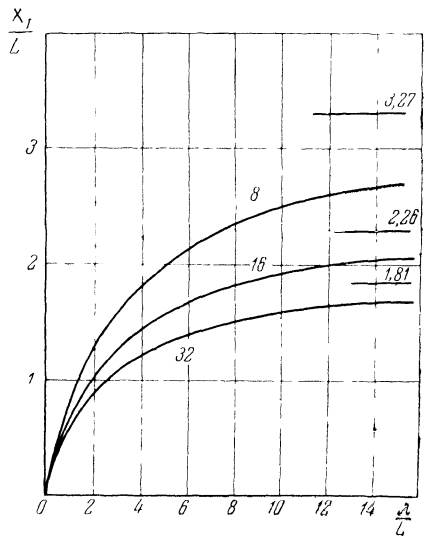


Рис. 572. Приведенный шаг.

В экспериментальной работе [3], цитировавшейся выше, приведен ряд киноснимков различных движущихся рыб (трески, макрели, акулы и др.), причем для них величина λ/L составляла от 0,65 до 0,95, а $X_1 = vT/L$ — около 0,05. Нетрудно видеть, что по диаграмме рис. 572 (по средней из трех кривых) для $\frac{\lambda}{L} = 0{,}75$ получается $\frac{vT}{L} = 0{,}52$.

Как и следовало ожидать, результат, полученный путем вычисления, оказывается несколько преувеличенным, ибо, удовлетворяя фиктивному условию (19), рыба *не* удовлетворяет основному условию абсолютно наивыгоднейшего движения, а потому принуждена двигаться со скоростью, несколько меньшей. Но тем не менее хорошее совпадение порядков вычисленной и наблюденной величин достаточно оправдывает наш предварительный упрощенный анализ.

Что касается самих величин vT и vT/L, то, по справедливости, первую из них можно называть *шагом рыбы*, а вторую — *приведенным шагом рыбы.*

§ 4. Более строгий анализ возрастающей волны. Силы и моменты, действующие на рыбу

Возвратимся теперь к неравенству (16), которому, как было сказано выше, возрастающая волна может удовлетворить не при всех значениях аргумента тригонометрических функций. Рассмотрим не всю волну, а снова только бесконечно малый участок, бегущий вдоль какой-нибудь прямой MN (рис. 571) [3].

Прежде всего преобразуем выражение (16), воспользовавшись соотношением (11), в котором для краткости обозначим амплитуду колебаний в точке с абсциссой x через A_1, другими словами, положим, что

$$ae^{\beta x} = A_1. \tag{26}$$

Тогда, как легко видеть, окажется

$$\sin\gamma\left(t + \frac{x}{c}\right) = \frac{y_1}{A_1},$$

$$\cos\gamma\left(t + \frac{c}{c}\right) = \sqrt{1 - \left(\frac{y_1}{A_1}\right)^2}, \tag{27}$$

а стало быть, вместо (16) напишется (после простейших преобразований)

$$\frac{\gamma\sqrt{A_1^2-y_1^2}}{\beta y_1+\frac{\gamma}{c}\sqrt{A_1^2-y_1^2}}\geqslant v. \tag{28}$$

В свою очередь, радикал $\sqrt{A_1^2-y_1^2}$, входящий и в числитель, и в знаменатель левой части, представляет собой не что иное, как величину катета, построенного на отрезке A_1, как на гипотенузе, и на отрезке y_1, как на другом катете. Чтобы наглядно видеть, как будет изменяться переменный катет $\sqrt{A_1^2-y_1^2}$ при постоянном y_1 и изменяющейся гипотенузе A_1, прибегнем к схематическому построению рис. 573. На нем пунктирная кривая выражает закон нарастания амплитуд по мере приближения от головы к хвосту. Остальные элементы чертежа отмечены соответствующими буквами и в пояснениях не нуждаются. В частности, интересующий нас теперь переменный катет обозначен буквой R, которой условимся его обозначать и в дальнейшем изложении.

Воспользуемся этим обозначением $\sqrt{A_1^2-y_1^2}=R$ и разделим числитель и знаменатель левой части (28) на $\frac{\gamma}{c}R$. Тогда получим соотношение

$$\frac{c}{1+c\,\frac{\beta}{\gamma}\,\frac{y_1}{R}}\geqslant v, \tag{29}$$

очень удобное для исследования.

Прежде всего структура формулы (29) совершенно аналогична формуле (22), что является новым оправданием упрощенного анализа, произведенного в предыдущем параграфе.

Затем из (29) с очевидностью вытекает, что *при малых* величинах R основное кинематическое условие идеального движения неминуемо *будет нарушаться*: скорость движения точки O по прямой MN на рис. 571 при малых R будет меньше скорости поступательного движения рыбы в воде. Другими словами, при малых R соответствующий элементарный участок *формы* волны (в точке O) будет двигаться относительно воды в сторону, совпадающую с направлением движения рыбы, а стало быть, будет *тормозить* ее движение.

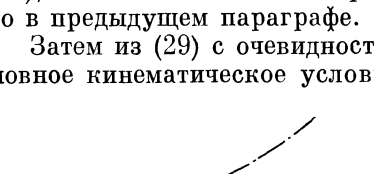


Рис. 573. Вспомогательное построение

Критическое значение дроби y_1/R, при котором активная работа элемента твердой волны переходит в работу паразитическую (тормозящую движение рыбы), весьма просто может быть найдено из (29). Именно, как легко видеть,

$$\left(\frac{y_1}{R}\right)_{\text{кр}}=\frac{\gamma}{\beta}\left(\frac{1}{v}-\frac{1}{c}\right), \tag{30}$$

или, после элементарных преобразований,

$$\left(\frac{y_1}{R}\right)_{\text{кр}}=\frac{2\pi}{\delta}\,\frac{c-v}{c}. \tag{31}$$

Пусть это критическое значение дроби $(y_1/R)_{\text{кр}}$ соответствует некоторой абсциссе x_2 (рис. 573) и пусть, с другой стороны, некоторая абсцисса x_1 (на том же рисунке) соответствует значению $R=0$, и, наконец, пусть при абсциссе, равной x_3, элемент O соскользнет с конца плавника рыбы, перестав существовать реально. Тогда окажется, что на пути, равном отрезку

$x_2 - x_1$, элемент твердой волны O будет производить *отрицательную* работу (тормозя движение рыбы), а на пути, равном отрезку $x_3 - x_2$, он произведет работу *положительную*, способствующую движению вперед.

Обозначим абсолютную величину отрицательной работы на первом из рассмотренных этапов через P_1, а абсолютную величину положительной работы на втором этапе — через P_2. В таком случае для рыбы, представляющей собой возрастающую волну и не удовлетворяющей условию абсолютно наивыгоднейшего движения, мы можем формулировать *новое* условие, при котором движение будет *наиболее выгодным из всех возможных*. Легко видеть, что подобное условие теперь напрашивается само собой. Символическая форма его такова:

$$P_2 \geqslant P_1. \tag{32}$$

Так же нетрудно видеть, что условие (32) *автоматически* выполняется для участков O, скользящих вдоль по самой оси абсцисс, ибо при $y_1 = 0$ исходное выражение (29) переходит в $c \geqslant v$, т. е. в условие, характерное для волны постоянной амплитуды (см. § 1). Причина здесь весьма проста: дробь, стоящая в левой части неравенства (29), выражает собой, как помним, скорость движения элемента O вдоль прямой: при $y_1 = 0$ (когда MN совпадает с осью абсцисс) вся эта левая часть обращается в c, т. е., иными словами, элемент O движется вдоль оси абсцисс с той же скоростью, с которой двигался бы он и при $\delta = 0$ (со скоростью волны).

Совсем иначе обстоит дело с элементами, которые движутся вдоль прямых MN, более или менее удаленных от оси абсцисс. Здесь символическая зависимость (32), будучи расшифрована, приобретает весьма сложную форму. На каждом элементарном участке пути dx работа dP будет пропорциональна квадрату той скорости, с которой элемент O движется *относительно воды*:

$$dP = \varphi(\alpha)\left(\frac{dx}{dt} - v\right)^2 dx, \tag{33}$$

причем сам коэффициент пропорциональности $\varphi(\alpha)$ не будет постоянен, а будет зависеть *от угла атаки* α, характеризующего элемент O в каждом его положении на прямой MN.

Приняв во внимание, что dx/dt выражается непосредственно левой частью формулы (29), можно представить условие (32) в расшифрованном виде

$$\int_{x_1}^{x_2} \Phi\, dx \leqslant \int_{x_2}^{x_3} \Phi\, dx, \tag{34}$$

где

$$\Phi = \varphi(\alpha)\left(\frac{c}{1 + c\,\frac{\beta}{\gamma}\,\frac{y_1}{R}} - v\right)^2.$$

Разумеется, об аналитическом интегрировании этих выражений говорить не приходится, графическое же решение задачи особого труда не представит и может быть произведено в каждом отдельном случае. В результате определится такое соотношение между скоростями c и v, при котором элемент *формы* O, скользящий вдоль прямой MN, будет давать какую-то избыточную полезную работу (в случае знака неравенства) или, по крайней мере, не будет давать избыточной вредной [при знаке равенства в (34)].

Можно показать, что при значениях y_1, не слишком близких к величине A (амплитуды хвоста), подобное условие легко выполняется даже для сравнительно небольших отношений скоростей c/v, во всяком случае при таких величинах c/v, которые встречаются в действительности у рыб (расчеты по

фотографиям дают: для трески $\frac{c}{v} = 1{,}49$, для макрели $\frac{c}{v} = 1{,}81$ и для акулы $\frac{c}{v} = 1{,}9$).

Напротив, при значениях y_1, весьма близких к A, условие (34) может и не удовлетвориться. В частности, оно, видимо, *не удовлетворяется* в отношении *хвостового плавника макрели*, элементы которого на участке $x_3 - x_1$ своего пути вдоль по соответствующей прямой MN совершали бы избыточную отрицательную работу, *если* бы на сцену не вступил *новый процесс*, которого мы до сих пор не рассматривали.

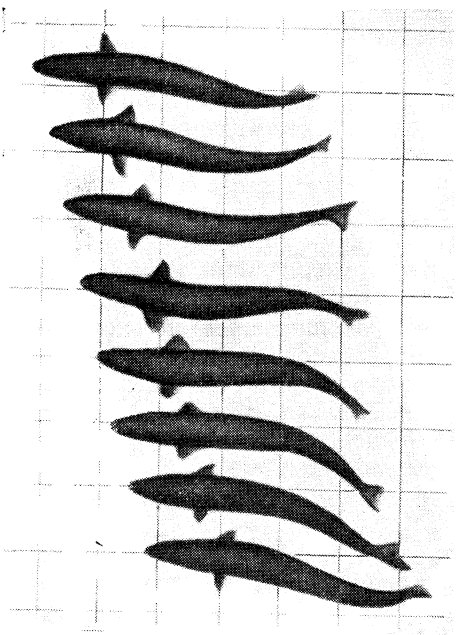


Рис. 574. Киноснимки макрели (по Д. Грэю)

Дело в том, что на киноснимках движущейся *макрели*,— хотя бы на тех, которые воспроизведены на рис. 574,— видно, что в некоторые моменты времени хвостовой плавник этой рыбы *ложится плашмя* в той плоскости, в которой происходят колебания тела. Это значит, что в те моменты, когда хвостовой плавник особенно тормозил бы движение вперед, *он выводится из строя* и свободно рассекает воду, двигаясь в ней подобно тонкой пластинке, идущей ребром вперед. Поведение хвостового плавника здесь, как две капли воды, напоминает поведение лопаток *весел*, которые поворачиваются плашмя, когда их заносят назад, и ставятся вертикально в рабочей фазе гребли. Впрочем, нет оснований думать, что макрель активно поворачивает свой хвостовой плавник; значительно вероятнее, что в нужные моменты она расслабляет соответствующие мышцы, благодаря чему хвостовой плавник сам собой пассивно ложится в воде под действием встречного потока.

Покончив на этом с анализом кинематики возрастающей волны, рассмотрим те силы и моменты, которые действуют на активно плывущую рыбу в различных фазах колебания ее тела.

Разумеется, точное определение всех элементов внешней динамики совершенно невозможно, ибо при условии нарастания амплитуд от головы к хвосту и пограничные условия, и условия неразрывности для водной среды оказываются очень сложными. Однако можно попытаться хотя бы составить грубое представление о силах взаимодействия между водой и рыбой, по телу которой движется *форма* твердой волны.

С этой целью проделаем приближенные и отнюдь не строгие вычисления элементов внешней динамики рыбы применительно к каждой из десяти фаз, изображенных на рис. 570 и частично вновь воспроизведенных на сводном чертеже рис. 575, на котором они тоже перенумерованы [1].

Как и прежде, будем предполагать, что тело рыбы достаточно плоское для того, чтобы можно было отождествлять движение хребта ее с движением краев тела. Следовательно, будем считать, что углы атаки во всех точках граничной

[1] Чтобы не затемнять чертеж рис. 575, на нем нанесены только шесть фаз; недостающие легко вообразить, представив себе зеркальное изображение *II*, *III*, *IV* и *V* (так же, как, например, *VI* — зеркальное изображение *I*).

поверхности равны углам атаки, определяемым в каждой соответствующей точке кривых на рис. 575. Здесь важно будет вспомнить, что масштаб поперечных колебаний на рис. 570, а стало быть, и на рис. 575, *преувеличен* и притом в 1,6 раза, если, в частности, исходить из реальных пропорций движущейся *макрели*. Вот почему при расчетах все углы атаки, условно определенные по чертежу рис. 575, были затем перечислены путем уменьшения тангенсов их в 1,6 раза.

Хотя в действительности каждый из элементов форм волны взаимодействует с водой не как индивидуальное тело, а лишь как часть общей формы, в силу необходимости пришлось сделать заведомо неверное допущение, предположив, что каждый такой элемент (*O* на рис. 571) подвергается действию тех же сил, которые существовали бы при *его изолированном* движении.

Обозначим слагающую элементарной силы по оси X через ΔX, а по оси Y через ΔY. Вспоминая рассуждения при выводе формулы (33), можно положить, что

$$\Delta X = \xi(\alpha)\left(\frac{dx}{dt} - v\right)^2 \Delta S, \tag{35}$$

где ΔS — площадь элемента поверхности, а величина $\xi(\alpha)$, в отличие от $\varphi(\alpha)$ формулы (33), отнесена к *единице* поверхности.

Подобным же образом для элементарной слагающей ΔY найдем

$$\Delta Y = \eta(\alpha)\left(\frac{dx}{dt} - v\right)^2 \Delta S. \tag{36}$$

Что касается самих величин $\xi(\alpha)$ и $\eta(\alpha)$, то они обычно задаются так называемыми *полярами*. В данном случае для ориентировочных вычислений можно воспользоваться хотя бы одной из таких поляр, полученных В. П. Ветчинкиным и найденных при продувании винтовой дужки в аэродинамической трубе.

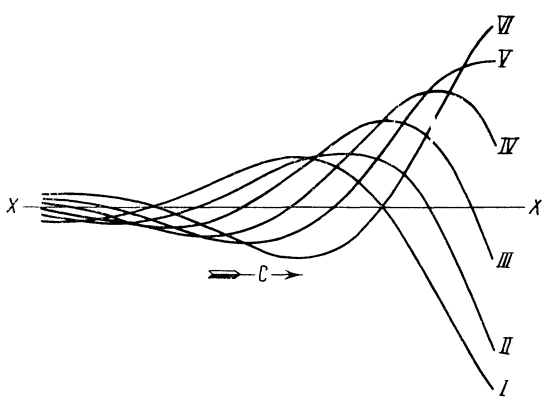


Рис. 575. Сводная диаграмма фаз

Для того чтобы связать вычисления с каким-то конкретным объектом, Шулейкин принял для размеров рыбы и для скоростей c и v числовые значения, пропорциональные тем, которые соответствуют киносъемкам макрели, воспроизведенным на рис. 574. Именно в основу расчетов были положены значения $L=20$ *см*, $c=47$ *см/сек*, $v = 26$ *см/сек*. Так как на фотографиях видна только горизонтальная проекция рыбы, то профиль сечения ее вертикальной плоскостью был заимствован из другого источника [5], причем, разумеется, все размеры были приведены к принятой длине L.

Суммируя все элементарные величины ΔX, вычисленные для каждой из десяти фаз, Шулейкин получил значения полной силы X, толкающей рыбу вперед в соответствующий момент времени. На рис. 576 кривая X изображает найденный закон изменения *движущей силы* X в течение одного периода (по оси абсцисс проставлены номера фаз, соответствующие рис. 570 и 575). На диаграмме за единицу принята средняя за период величина этой силы.

Как видим, движущая сила X меняется в довольно широких пределах, достигая значения 1,5 и падая до 0,5. Первое из них, наибольшее за период,

соответствует положению волны, промежуточному между фазами III и IV и промежуточному между фазами VIII и IX, когда хвостовой плавник движется примерно вдоль оси X (рис. 570 и 575). Напротив, самыми невыгодными в смысле полезного действия оказываются положения, соответствующие примерно фазам V и X, т. е. положения, при которых хвост рыбы подходит к своим крайним отклонениям от оси X.

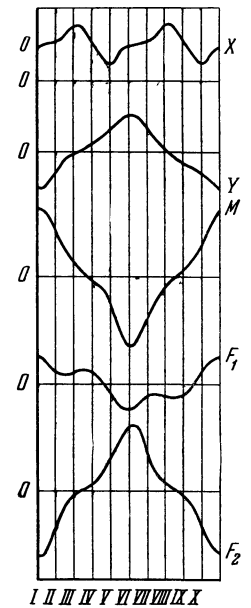


Рис. 576. Изменения сил

Как и должно быть, при кинематических условиях, рассмотренных в предыдущем параграфе, сила X в течение всего периода T остается *положительной*.

Аналогичным способом суммирования элементарных сил ΔY был определен закон изменения *поперечной* силы Y, стремящейся сдвинуть то вправо, то влево тело рыбы во время ее активного движения вперед. На рис. 576 кривая Y изображает этот закон изменения, причем масштаб сил сохранен прежним (за единицу принята средняя величина X за период).

Диаграмма Y (рис. 576) показывает, что поперечная сила достигает весьма большой величины, равной 1,0, причем, разумеется, протекание кривой по обе стороны от оси абсцисс вполне симметрично относительно последней. Положительные ординаты на диаграмме Y соответствуют поперечным силам, стремящимся сместить тело рыбы *вправо* от курса, отрицательные — силам противоположного направления.

С точки зрения величины паразитных поперечных сил Y рыба оказывается в самом невыгодном положении в фазах *I* и *VI*, когда эти силы достигают наибольших величин. Напротив, близ фаз *III* и *VIII* поперечная сила Y обращается в нуль.

Рассмотрим теперь *моменты* действующих сил, стремящиеся *повернуть* движущуюся рыбу вокруг вертикальной оси.

В каждом из положений, представленных на рис. 570 и 574, вращающие моменты слагаются из *двух* частей; первая из них обусловлена тем обстоятельством, что элементарные силы ΔX, о которых была речь выше, приложены все на различных расстояниях от оси абсцисс. Поэтому каждая из них дает элементарный момент, равный

$$\Delta M_x = -\Delta X y. \tag{37}$$

Знак *минус* стоит в правой части потому, что мы условились считать *положительным* момент, стремящийся повернуть голову рыбы *вправо* от курса, а хвост — влево (величину y, разумеется, надо брать с соответствующим знаком, принятым на диаграмме рис. 574, а силу X приходится считать положительной в отрицательном направлении оси X).

Вторая составляющая вращающего момента возникает благодаря тому, что при каждом положении твердой волны элементарные силы ΔY образуют *пары*. Чтобы учесть эти пары, достаточно просто взять моменты всех элементарных сил относительно переднего конца головы, т. е. моменты

$$\Delta M_y = -\Delta Y x. \tag{38}$$

Здесь знак в правой части поставлен с учетом того же условия, касающегося направления вращения.

На основании (37) и (38) можно написать выражение для полного вращающего момента M:

$$-M = \Sigma \Delta X y + \Sigma \Delta Y x. \tag{39}$$

Вычисления, произведенные по формуле (39), привели к зависимости, изображенной кривой M на рис. 576 (моменты выражены в единицах, равных произведению принятой единицы силы на 1 *см*).

Подобно силам Y полные вращающие моменты достигают наибольших величин в положениях, соответствующих фазам *I* и *VI*. Напротив, примерно в фазах *IV* и *IX* вращающие моменты отсутствуют.

Чрезвычайно интересно рассмотреть *совместное* действие вращающих моментов и поперечных сил. Для подобного исследования можно приблизительно наметить точки приложения равнодействующих сил, возникающих в качестве реакций на вращающий момент. При этом, очевидно, можно исходить из представления о «возможных перемещениях», вызываемых моментом. Для простоты предполагалось, что «возможное» вращение происходит вокруг вертикальной оси, пересекающей ось рыбы в середине ее, и что тело рыбы в вертикальном направлении обладает повсюду одними и теми же размерами (таким образом, линейное перемещение везде оказывалось прямо пропорциональным расстоянию от середины тела рыбы).

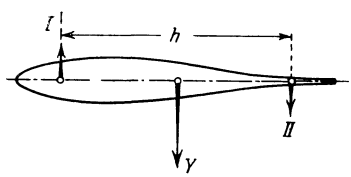


Рис. 577. Схема приложения сил

На схематическом рис. 577 точки приложения сил обозначены римскими цифрами *I* и *II*. Если расстояние между ними равно h, то, очевидно, каждая из сил, которые надо приложить для создания момента M, должна равняться M/h. На той же схеме изображена сила Y, которую, по упомянутым соображениям, будем условно считать приложенной в середине продольной оси рыбы.

Заменим теперь силу Y двумя равными между собой силами $\frac{Y}{2}$, приложенными в точках *I* и *II*. В результате получим *полные* поперечные силы F_1 и F_2, действующие на голову рыбы и на ее хвост. При этом для направлений *I* и *II*, изображенных на рис. 577, величины F_1 и F_2 будут

$$F_1 = \frac{M}{h} - \frac{Y}{2}, \qquad F_2 = \frac{M}{h} + \frac{Y}{2}. \tag{40}$$

Определив h и пользуясь диаграммами Y и M (рис. 576), Шулейкин вычислил по формулам (40) полные поперечные силы, причем получился закон изменения их, изображенный на рис. 576 F_1 и F_2.

Как видим, на голову рыбы действуют сравнительно *небольшие* поперечные силы F_1, которые даже в самые невыгодные моменты (фазы *I* и *IV*) достигают всего лишь 0,8 принятой условной единицы.

Напротив, на *хвостовую* часть тела рыбы действуют *весьма большие поперечные силы* F_2, доходящие до 1,95, т. е. до величины, которая на 30% превышает *максимальную* движущую силу. Только в моменты, промежуточные между фазами *III* и *IV*, а также между фазами *VIII* и *IX*, поперечная сила F_2 делается равной нулю. Эти два момента за период T являются вообще самыми *благоприятными* для движения рыбы, как нетрудно видеть, сопоставляя между собой все диаграммы, приведенные на рис. 576: здесь рыба развивает *наибольшую движущую силу* X и в то же самое время *поперечная сила* F_2 *обращается в нуль*.

Легко видеть, что *паразитные* силы F_1 и особенно F_2 являются *крайне вредными*: они вызывают вибрации корпуса рыбы вправо и влево от курса («рысканье») и, несомненно, приводят к довольно значительным потерям энергии на вихреобразование.

Это — чрезвычайно важное обстоятельство, которое обычно совершенно не учитывается при исследовании гидродинамических качеств рыбы: как бы ни были совершенны обводы ее корпуса, как бы хорошо этот корпус ни обтекался струями воды, преимущества, которые такая «хорошо обтекаемая» рыба имеет перед «плохо обтекаемой» *змеевидной* рыбой, будут сильно обесценены благодаря наличию поперечных паразитных сил (отсутствующих при движении змеевидного типа).

Вот почему, вероятно, из всех рыб, кинематограммы которых имеются в статье Грэя, наибольшее значение величины vT/L (именно значение $\frac{vT}{L} = 0{,}57$) обнаружилось у *угря*, длинный корпус которого далеко не отличается таким совершенством в отношении обтекаемости, как, например, корпус быстроходной *макрели* («быстроходность» ее достигается отнюдь не за счет большой величины vT/L, которую с полным правом мы выше назвали *приведенным шагом рыбы*, а за счет большой частоты колебаний $1/T$).

§ 5. Кинематика мышечных сокращений

Если в будущем элементы внешней динамики рыбы будут уточнены путем более строгих гидродинамических исследований, то, во всяком случае, останутся в полной силе те элементы внешней *кинематики*, которые были рассмотрены в предыдущих параграфах. Попытаемся же продолжить цепь геометрического анализа и на те движения, которые происходят *внутри* тела рыбы при распространении по нему твердой возрастающей волны. Этот геометрический анализ в данном случае представляет очень большой интерес уже в том отношении, что процесс работы мышц рыбы (равно как и мышц змеи) дает, пожалуй, единственный в природе пример необычайно простого гармонического колебательного движения, ничем не замаскированного.

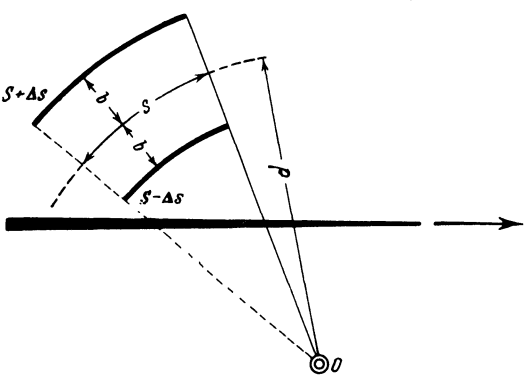


Рис. 578. Схема изгиба

Ведь все те изменения формы, все изгибы, которые представлены хотя бы на рис. 576, возникают исключительно благодаря *ритмическим сокращениям* продольных мышц рыбы и последующим расслаблениям этих мышц (в те фазы колебаний, когда сокращаются мышцы другой стороны). В то же время легко показать, что сам закон мышечных сокращений может быть весьма просто получен путем исследования геометрических элементов возрастающей волны.

Допустим, что в некоторый момент времени один из участков тела рыбы принял форму, изображенную на рис. 578 (в плане), на котором вектор c изображает направление движения всей волны (следовательно, сама рыба движется относительно воды в направлении, прямо противоположном). Совершенно очевидно, что подобная форма исследуемого участка возникла под влиянием *сокращения* мышц левой стороны тела рыбы, сопутствуемого расслаблением мышц правой стороны. Допустим, что в спрямленном состоянии и правая и левая границы вырезанного участка обладают длиной s, т. е. той длиной, которая неизменно соответствует вырезанной части позвоночника (она отмечена на рис. 578). Попытаемся определить, как меняются во времени приращения $\pm \Delta s$ этой длины s.

Пусть точка O изображает центр, а ρ — радиус *кривизны* вырезанного участка позвоночника. Тогда, как легко видеть, длина правой границы тела $s + \Delta s$, длина позвоночника s и длина левой границы $s - \Delta s$ будут связаны весьма простым соотношением с радиусом кривизны ρ и половиной b толщины тела рыбы. Именно

$$\frac{s \pm \Delta s}{s} = \frac{\rho \pm b}{\rho},$$

откуда

$$\sigma = \frac{\Delta s}{s} = \frac{b}{\rho}. \tag{41}$$

Но, как известно, сам радиус кривизны ρ связан с первой и второй производными от y по x (где y и x сохраняют прежний смысл); именно

$$\rho = \frac{[1 + (\partial y / \partial x)^2]^{3/2}}{\partial^2 y / \partial x^2}. \tag{42}$$

При обычных значениях амплитуд колебаний в теле рыбы величина квадрата первой производной может считаться всегда весьма малой по сравнению с единицей. Следовательно, в дальнейшем можно будет вместо формулы (42) применять более простую, вытекающую из нее при указанном допущении:

$$\frac{1}{\rho} \approx \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}. \tag{43}$$

По той же причине при вычислении самой второй производной $\partial^2 y/\partial x^2$, по основному уравнению возрастающей волны (9), можно будет ограничиться лишь *одним* членом и полагать, что

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -a\left[\beta^2 + \left(\frac{\gamma}{c}\right)^2\right] e^{\beta x} \sin\gamma\left(t + \frac{x}{c}\right). \tag{44}$$

Полученные соотношения (41), (43) и (44) позволяют найти закон изменения сокращения мышцы σ во времени. Прежде чем написать его в готовом виде, можно будет внести в (44) некоторые преобразования, вспоминая, что β и γ/c выражаются через длину волны λ и инкремент нарастания δ, и обозначая по-прежнему амплитуду поперечных колебаний тела рыбы на данном участке, согласно (26), через $A_1 = ae^{\beta x}$. Тогда в результате окажется, что относительное сокращение мышцы

$$\sigma = \frac{A_1 b}{\lambda^2}(4\pi^2 + \delta^2) \sin\gamma\left(t + \frac{x}{c}\right). \tag{45}$$

Как видим, оно меняется по тому же простому гармоническому закону, по которому изменяются поперечные отклонения тела от первоначальной оси. Наибольшее сокращение мышцы будет происходить в те моменты, когда соответствующий элемент тела рыбы будет наиболее удален от первоначальной осевой линии.

Сама величина наибольшего относительного сокращения по уравнению (45) определится так:

$$\sigma_{\text{макс}} = \frac{A_1 b}{\lambda^2}(4\pi^2 + \delta^2). \tag{46}$$

До сих пор предполагалось, что сокращающаяся мышца проходит как раз вблизи правой или левой границы тела. Но легко видеть, что те же соотношения (45) и (46) дадут закон сокращения любой внутренней продольной мышцы, если только вместо половины толщины тела мы будем под b подразумевать расстояние соответствующего мышечного волокна от середины позвоночника.

Следует отметить, что при существующих величинах сокращений величина σ, а стало быть, и $\sigma_{\text{макс}}$ практически не зависят от того, расположена

ли мышца параллельно оси или же входит в состав какой-либо косой системы, находящейся на том же расстоянии от позвоночника; в этом легко убедиться, рассмотрев соответствующие приблизительно *пропорциональные* отрезки прямых.

На рис. 579 соответствующая кривая выражает наибольшее сокращение $\sigma_{\text{макс}}$, имеющее место на том или ином участке тела рыбы (вычислено на основании формулы (46)]. Для наглядности на том же рисунке изображены также величины амплитуд поперечных колебаний соответствующих участков тела (величины A_1) и, кроме того, в плане представлена форма тела рыбы. В данном случае масштаб амплитуд поперечных колебаний тот же, что и масштаб продольных измерений.

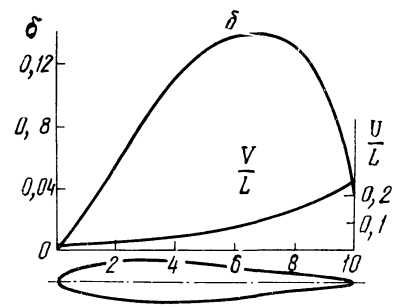


Рис. 579. Амплитуды отклонения от оси и сокращения мышц

Как видим, наибольшие сокращения мышц соответствуют расстоянию от переднего конца, равному 0,7 всей длины корпуса; здесь относительное сокращение достигает почти 0,15 (т. е. каждый сантиметр мышечного волокна сокращается на 1,5 *мм*) при условии, что волокно проходит близ кожного покрова и что амплитуда колебаний хвоста составляет четверть длины корпуса (ae^{qL}= 5 *см*). Сокращения внутренних волокон будут, разумеется, тем меньше, чем ближе они отстоят от позвоночника, причем закон убывания будет, как легко видеть, линейный. Как увидим в следующем параграфе, в задаче *динамики* мышечных сокращений (в задаче о вычислении *работы* мышц) расстояние волокна от позвоночника автоматически элиминируется, а это, разумеется, сильно облегчает теоретическое исследование процесса.

§ 6. Динамика мышечных сокращений. Вычисление работы и коэффициента полезного действия движителя рыбы

Формула (45), выведенная в предыдущем параграфе, позволяет вычислить величину относительного сокращения мышц в любой момент времени. Но ведь зная этот закон мышечных сокращений, можно попытаться определить *работу*, которую производят мышцы в той или иной части движителя рыбы. Для этого нужно будет для каждого элемента времени найти произведение элементарного смещения на величину силы, действующей вдоль по волокнам в рассматриваемый момент времени. Затем найденная элементарная работа должна быть проинтегрирована в пределах от нуля до T (где T по-прежнему обозначает период колебаний), причем получится работа за период, отнесенная к единице длины тела рыбы (ибо смещение рассматривалось именно применительно к единице длины: сокращение Δs относилось к самой длине s на рис. 578).

Попытаемся же определить величину работы мышц, найдя сперва общее выражение для нее.

Прежде всего, как только что было сказано, элементарная работа dP_1 на единице длины за элементарный промежуток времени dt должна равняться

$$dP_1 = F\frac{\partial\sigma}{\partial t}dt, \tag{47}$$

где F выражает силу, действующую на мышцы, а $\frac{\partial\sigma}{\partial t}dt$ — перемещение ее точки приложения. Что касается последней величины, то она может быть

непосредственно определена путем дифференцирования функции (45). Напротив, величину F для каждого момента времени найти не так просто. Легко обнаружить только, что сила F равняется частному от деления *изгибающего момента* M' в данном сечении тела на плечо b, о котором была речь в предыдущем параграфе (b представляет собой расстояние мышц от позвоночника), т. е.

$$F = \frac{M'}{b}. \tag{48}$$

Сама же величина изгибающего момента M' могла бы быть точно вычислена лишь в том случае, если бы была вполне строго разрешена задача о воздействии воды на сложно изогнутое тело рыбы. Но в одном из предыдущих параграфов указывалось уже, что современная гидродинамика не научилась еще разрешать подобных задач, а потому для наших целей — целей гидробиофизических—пришлось прибегнуть к приближенному методу, правда, получившему права гражданства в современной технике воздушных кораблей. Воспользовавшись этим методом,— разбив все тело рыбы на элементарные участки и применив к каждому из них в отдельности поляру,— оказалось возможным приблизительно вычислить силу, движущую рыбу, силу, вызывающую «дрейф» (перпендикулярно к направлению движения), а также момент силы, заставляющий тело рыбы колебаться вокруг вертикальной оси (причем голова и хвост отклоняются всегда в противоположные стороны, наподобие «рысканья» корабля).

Здесь придется снова прибегнуть к тому же приближенному методу, не дожидаясь того времени, когда станет возможным найти вполне строгое гидродинамическое решение.

Итак, основываясь на *законченных и точных кинематических* представлениях предыдущего параграфа, мы можем попытаться приближенно исследовать *динамику* мышечных сокращений. Для этого подставим в (47) выражение частной производной на основании (45), а также выражение силы из (48). Тогда получим

$$dP_1 = \frac{A_1 M'}{\lambda^2} \gamma (4\pi^2 + \delta^2) \cos\gamma \left(t + \frac{x}{c}\right) dt. \tag{49}$$

Как видим, величина b, входившая в выражения σ и F, здесь элиминировалась. Следовательно, для вычисления работы в сущности не надо знать, на каком расстоянии от позвоночника проходят наиболее деятельные мышечные волокна,— анализ может быть проделан в самой общей форме независимо от анатомических особенностей рыбы.

Для вычисления изгибающего момента M' тело рыбы придется рассматривать как *балку*, нагруженную динамическими силами, о которых говорилось в § 3, и одновременно находящуюся под действием реактивных «опорных» сил. При этом последние силы могут быть определены с достаточной надежностью из рассмотрения *возможных перемещений* тела рыбы под действием силы Y, вызывающей дрейф, и момента M (рис. 567), вызывающего «рысканье». Вычисления, несложные принципиально, но весьма кропотливые, приводят к зависимости между изгибающим моментом M' и аргументами x и t, которая, к сожалению, не может быть выражена одной аналитической функцией. Пренебрегая небольшими обертональными колебаниями, можно положить только, что изгибающий момент M' представляет собой следующую функцию:

$$M' = M_1 \cos\gamma \left(t + \frac{x}{c}\right). \tag{50}$$

Здесь величина M_1, которую по аналогии назовем амплитудой моментов, не

выражается никакой аналитической функцией, а потому она представлена на рис. 580 *графически* (кривой, помеченной той же буквой M).

При вычислении моментов за единицу силы принималась, как и выше, *средняя сила*, вызывающая поступательное движение рыбы (рис. 576). Стало быть, если путем эксперимента удастся более или менее точно определить эту силу, то для получения абсолютной величины момента останется только умножить все значения ординат кривой M на соответствующий переходный множитель.

Исходя из закона изменения M по длине тела, любопытно вычислить примерные величины сил, действующих вдоль мышц в различных частях тела рыбы. Для этого в уравнение (48) надо подставить вместо b приблизительно $^2/_3$ расстояния от позвоночника до эпителия в данной части тела, а также заменить M' через M_1, если мы хотим судить о максимальных значениях сил.

Результат подобных вычислений представлен на том же рис. 580 кривой E. Как видим, наибольшая сила, действующая вдоль мышц, может примерно в 7,5 раза превышать среднюю силу, перемещающую рыбу в воде вперед (ту, которая была принята за единицу).

Соотношения (49) и (50) и кривая M (рис. 580) позволяют определить величину *работы*, совершаемой единицей длины тела рыбы *за один период* T. На основании обоих упомянутых соотношений

$$dP_1 = \frac{AM_1}{\lambda^2}\gamma(4\pi^2 + \delta^2)\cos^2\gamma\left(t + \frac{x}{c}\right)dt, \qquad (51)$$

откуда, выполняя интегрирование по времени за период, легко найти

$$P_1 = \pi\frac{AM_1}{\lambda^2}(4\pi^2 + \delta^2). \qquad (52)$$

Результаты вычислений по этой формуле изображены на рис. 580 в виде кривой P_1, ординаты которой представляют величину работы, приходящейся (за один период) на долю каждого погонного сантиметра тела рыбы в разных частях его. По-прежнему при вычислении за единицу силы была принята средняя движущая сила ($X_{ср}$) за период. Для получения абсолютной величины работы следует все величины умножить на тот же переходный коэффициент, о котором говорилось выше в связи с определением сил.

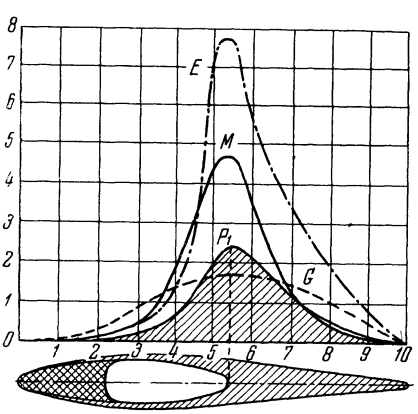


Рис. 580. Распределение мощности по длине

Как видно на рис. 580, распределение работы между различными частями тела рыбы далеко не равномерное: весьма резко выраженный *максимум* наблюдается на расстоянии около 0,55 всей длины от переднего конца головы. Как же соответствует этому положению максимума то *распределение* мышечных масс, которое в действительности имеет место у рыбы?

Для того чтобы ответить на этот вопрос, был подвергнут специальному исследованию один экземпляр макрели (*Scomber scombrus*). Длина его была равна 32 *см*, а все остальные размеры соответствовали тем же пропорциям, которые принимались выше при вычислениях применительно именно к макрели. Поэтому для приведения этих размеров к масштабу диаграмм оставалось только сделать простой пропорциональный пересчет.

Тело макрели было разрезано в горизонтальной плоскости на две примерно равновеликие части — спинную и брюшную. На рис. 580 изображена в схематическом виде брюшная часть, рассматриваемая в плане. Штриховкой

в клетку обозначены части, связанные с черепом и не принимающие никакого участия в работе движителя; совсем не заштрихованы те части, где располагаются внутренние органы рыбы; наконец, косо заштрихованы участки, занятые *мышцами*. Как видно на схеме, максимум кривой приходится как раз над тем местом в теле рыбы, где *все сечение* оказывается занято мышцами (и только отчасти — соединительной тканью).

Что касается спинной половины тела, то здесь распределение мышц не так резко обособлено, но самые тенденции те же. Любопытно отметить, что уменьшение массы мышц к концам тела, изображенное на схематическом разрезе рис. 580, идет значительно резче по направлению к голове, чем по направлению к хвосту. Но ведь совершенно так же обстоит дело и с уменьшением ординат кривых P_1, M и E. Совпадение картин здесь удивительно полное.

Для того чтобы получить хотя бы грубое *количественное* (а не только качественное) сопоставление, обе части тела макрели (спинная и брюшная) были разрезаны на 10 частей (каждая) и все полученные отрезки взвешены по отдельности (не высушивая их). Разумеется, предварительно были удалены все внутренние органы, а также череп. Вес каждых двух соответственных отсеков (спинного и брюшного) выражался в процентах, и полученные величины наносились на ординаты кривой G, изображенной на том же рисунке (координаты брались в середине каждого отсека). Как видим, максимум кривой G в точности совпадает с максимумом работы, приходящейся на соответствующий отсек, т. е. *мышечный материал чрезвычайно рационально распределен в теле рыбы.*

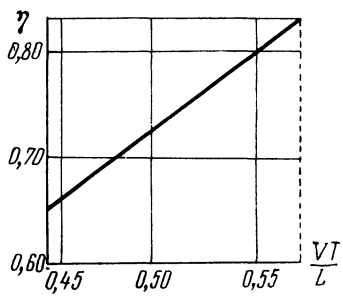


Рис. 581. Коэффициент полезного действия движителя

Есть основания полагать, что при более детальном анатомическом исследовании, когда будут отдельно отпрепарированы одни лишь мышцы, вызывающие изгибы тела (будут удалены все прочие мышцы, кости и соединительная ткань), то совпадут не только положения максимумов кривых G и P_1, но и сама форма кривой G приблизится к форме кривой P_1.

Как указывалось выше, ординаты кривой P_1 выражают величину работы, которая совершается за один период мышцами, заключающимися в теле рыбы на протяжении 1 *см*. Совершенно очевидно, следовательно, что *вся площадь* кривой P_1, покрытая штриховкой, выражает собой *полную работу* P, совершаемую за один период всем движителем рыбы. Но лишь часть этой работы идет на перемещение рыбы в направлении ее движения; кроме этой полезной части работы, существует еще довольно значительная *вредная* работа, идущая на образование вихрей, вызываемых дрейфом и рысканьем рыбы.

Нетрудно видеть, что *полезная* работа рыбы за один период весьма просто выражается через *шаг* рыбы. Именно, так как за единицу силы принята средняя сила $X_{ср}$, то

$$P_{полезн} = vTX_{ср} = vT. \tag{53}$$

Определяя величину площади кривой P_1 (рис. 580) и умножая ее на соответствующий переходный коэффициент, мы можем найти величину полной работы P, а затем, пользуясь величиной $P_{полезн}$, вычисленной по формуле (53), определить *коэффициент* η *полезного действия* движителя рыбы

$$\eta = \frac{P_{полезн}}{P}. \tag{54}$$

Если предположить, что величина шага не связана с величиной потерь на вредные поперечные движения, то можно, пользуясь тем же приемом,

определить значение коэффициента полезного действия для случаев той же полезной работы, но различных значений шага vT. Результаты таких расчетов изображены на диаграмме рис. 581, на которой, для общности, по оси абсцисс отложены не значения шага vT, а значения *приведенного шага* vT/L в тех пределах, которые обычно наблюдаются у рыб. Как видим, при изменении приведенного шага в пределах 0,45—0,57 коэффициент полезного действия движителя рыбы меняется в пределах 0,65—0,83. Любопытно отметить, что коэффициент полезного действия корабельного винта не превышает 0,75.

Следует отметить также, что наибольшая величина приведенного шага (0,57) присуща угрю, у которого благодаря сравнительно небольшому различию амплитуд колебаний головы и хвоста дрейфовые движения и рысканье сказываются менее всего и у которого по этой причине должны быть наименьшие потери, связанные с указанными вредными движениями. Стало быть, строго говоря, полная работа здесь должна быть меньше той величины, которая была при всех прочих равных условиях найдена выше, а потому и коэффициент полезного действия движителя, по всей вероятности, должен превысить формально найденную величину 0,83.

Итак, мы еще раз убеждаемся в том, что хорошая обтекаемость тела рыбы и хороший коэффициент полезного действия ее движителя взаимно противоречат: наиболее совершенная с точки зрения обтекаемости форма тела характерна для таких рыб, как *макрель*, а потому для продвижения их вперед при всех прочих равных условиях требуется наименьшая сила X. Но, с другой стороны, коэффициент полезного действия движителя такого типа рыб оказывается *наименьшим*. Напротив, форма *угря* чрезвычайно несовершенна в смысле обтекаемости, зато коэффициент полезного действия движителя этой рыбы наибольший из всех возможных.

§ 7. Экспериментальное исследование гидродинамических качеств рыб и дельфина

В § 4 были теоретически вычислены силы и моменты, действующие на тело рыбы во время ее активного движения в воде. Однако там уже было отмечено, что при современном состоянии гидродинамики невозможно сколько-нибудь точно определить эти элементы движения, исходя из анализа обтекания изогнутого корпуса рыбы; в настоящее время мы можем говорить только о близком к истине законе колебания интересующих нас величин, абсолютные же значения их определятся тогда, когда будет найден условный масштаб всей картины. Для определения этого условного масштаба необходимо воспользоваться экспериментом: необходимо найти из опыта хотя бы ту силу X, с которой тело рыбы должно отталкиваться вперед, чтобы преодолевать сопротивление среды (см. § 4). Узнав абсолютную величину силы X, можно будет определить и остальные силы и моменты, фигурирующие на диаграмме рис. 576, где они изображены в одном и том же масштабе. Мало того, умножая найденную силу X на скорость движения рыбы, мы можем найти полезную мощность ее, а деля полезную мощность на коэффициент полезного действия η, вычислить полную мощность, развиваемую рыбой при той или иной скорости движения (рис. 581).

Было сделано много попыток определить силу X посредством различных экспериментальных приемов.

Но методика экспериментаторов таила в себе корни неизбежных грубых погрешностей, а потому мы не будем останавливаться здесь на обзоре полученных ими результатов. Наиболее рациональный путь выбрали два автора работы [6], хотя и они, благодаря некоторым обстоятельствам, далеко уклонились от истины.

Попытаемся проследить за отдельными этапами их работ для того, чтобы устранить эти досадные обстоятельства и провести эксперимент по исправленному пути.

Они зашивали в рот рыбе (мертвой) кусок свинца и заставляли ее падать в стеклянном сосуде с водой перед объективом киносъемочного аппарата. На каждом кадре, помимо рыбы, выходила нить маленького маятника, служившая для точного определения момента времени, которому соответствует тот или иной кадр (по положению, которое нить занимала на снимке).

Строя по снимкам кривую падения для рыбы, авторы вычисляли скорости и ускорения, а по ускорениям — силы, под действием которых находилась рыба в различные моменты времени. Вслед за тем вычислялась мощность, которую, по предположению авторов, должна была развивать рыба, движущаяся с данной скоростью.

Однако при вычислениях были допущены систематические погрешности. Прежде всего при пересчетах предполагалось, что мощность возрастает пропорционально первой степени скорости, тогда как в действительности она возрастает пропорционально примерно кубу скорости. Затем движение исследовалось на тех этапах, когда скорость еще не достигает установившейся величины стало быть, нельзя было пренебрегать существованием присоединенной массы, а между тем авторы не учитывали ее при вычислениях (да и при всем желании ее не удалось бы учесть, ибо присоединенную массу можно вычислить лишь для простых геометрических тел).

Но если бы работа этих авторов даже не содержала указанных вычислительных погрешностей (первую из них легко уничтожить), то она все же не дала бы истинных значений сил сопротивления благодаря существованию систематических погрешностей опыта, допущенных ими.

Прекрасные гидродинамические качества рыбы обусловлены обычно чрезвычайно рациональными формами ее тела. В частности, у некоторых быстроходных рыб (например, у пеламиды) боковые плавники на ходу прячутся даже в особые углубления, имеющиеся у рыбы по бокам. Такие «утопленные» плавники, очевидно, никак не могут мешать движению. По той же причине другие рыбы на быстром ходу прижимают к себе вплотную плавники, обладающие для этого достаточной податливостью. А между тем цитированные авторы заставляли падать мертвую рыбу с плавниками, предварительно не отрезанными, жесткими, неподатливыми. Нет ничего удивительного в том, что в ряде случаев такие отвердевшие плавники сыграли в их опытах роль настоящих парашютов.

Суммарное влияние всех перечисленных погрешностей очень трудно оценить, вглядываясь в таблицы тех характеристических величин, которые были предложены авторами работы [6] для определения гидродинамических качеств рыбы. Именно, авторы предлагали характеризовать рыбу четырьмя такими коэффициентами:

$$\frac{\sqrt{L}}{\sqrt[6]{G}}, \quad \frac{v}{\sqrt[6]{G}}, \quad \frac{w}{\sqrt[6]{G}}, \quad \frac{v}{w},$$

где L — длина тела, G — вес, v — скорость и w — мощность, отнесенная к единице веса. Однако наиболее рациональную характеристику гидродинамических качеств рыбы мы получим другим путем, если воспользуемся ньютоновым выражением силы сопротивления f, хорошо оправдывающимся на опытах с телами различной формы:

$$f = k\delta S v^2. \tag{55}$$

Здесь S — площадь наибольшего поперечного сечения тела, δ — плотность воды, а k — коэффициент пропорциональности, зависящий от формы тела.

Со своей стороны, площадь S удобно выразить через высоту a и ширину b тела рыбы [1]. Именно

$$S = \beta ab. \tag{56}$$

Величину β (отвлеченную) можно назвать *коэффициентом полноты поперечного сечения* по аналогии с терминами, употребительными в корабельном деле.

Но легко видеть, что на основании (55) и (56) можно написать

$$f = Nabv^2, \tag{57}$$

где

$$N = k\delta\beta.$$

Мощность, потребная для преодолевания силы f, т. е. полезная мощность рыбы, также легко определяется на основании (57). Именно

$$w = Nabv^3. \tag{58}$$

Итак, главной характеристикой гидродинамических качеств рыбы должен служить коэффициент N, входящий и в выражение силы сопротивления (57), и в выражение полезной мощности (58). Этот-то коэффициент и следует определять из опыта, находя силу сопротивления f_0 применительно к данной скорости v_0 и затем вычисляя N по формуле

$$N = \frac{f_0}{abv_0^2} = \frac{w_0}{abv_0^3}. \tag{59}$$

Формула (59), предложенная Шулейкиным, была применена В. С. Лукьяновой сперва для оценки цифр, полученных двумя авторами [6]. При этом обнаружилось, что на основе этих материалов пришлось бы допустить изменения коэффициента N в пределах 0,028—3,07.

Однако изменения N в столь широких пределах здесь явно невозможны; ведь, как известно, идеально обтекаемое тело встречает в воде силу сопротивления, в 25 раз меньшую, чем пластинка с той же площадью сечения, движущаяся перпендикулярно к своей плоскости, а предельные цифры, отмеченные выше,отличаются одна от другой в 110 раз.С другой стороны, наибольшее значение характеристического коэффициента N, на основе материалов [6], получается для акулы, что тоже неверно; нельзя допустить, что чрезвычайно гармонично построенное тело такого быстроходного хищника, как акула, могло бы характеризоваться таким большим приведенным сопротивлением.

Вот каковы последствия тех недочетов, которые были выше отмечены в работах цитированных авторов.

Однако сам по себе экспериментальный путь, на который они встали, настолько удобен и заманчив, что естественно напрашивается мысль о переделке измерений этих авторов с устранением недочетов. При этом интереснее обследовать качества *морских* рыб, составлявших меньшинство в старых работах.

При организации опытов необходимо было прежде всего позаботиться о том, чтобы при своем падении рыбы непременно достигали установившейся скорости, причем для обеспечения законности пересчетов по степеням скоростей необходимо, чтобы установившаяся скорость была не слишком мала (во всяком случае не менее 1 *м/сек*).

Но в таком случае бассейн, в котором испытываются рыбы, должен быть и достаточно высок (рабочая часть не ниже 2 *м*) и достаточно широк (поряд-

[1] Не следует забывать это упрощенное обозначение, так как, в отличие от него, в предыдущих параграфах через b обозначалась половина ширины.

ка 1 *м* в диаметре), ибо в узком сосуде при больших скоростях движения могут возникнуть вредные силы притяжения к стенке.

Бассейн, вполне удовлетворяющий поставленным требованиям, был построен на Черноморской гидрофизической станции. Внешний вид его представлен на рис.582. Высота бассейна 3,8 *м*, внутренний диаметр 1 *м*. Вода подается насосом «Иматра» из моря. В некоторых случаях для падающих объектов приходится применять киносъемку сквозь небьющееся стекло, вставленное в железобетонной стенке; высота окна в свету 2,2 *м*, ширина 35 *см* [7].

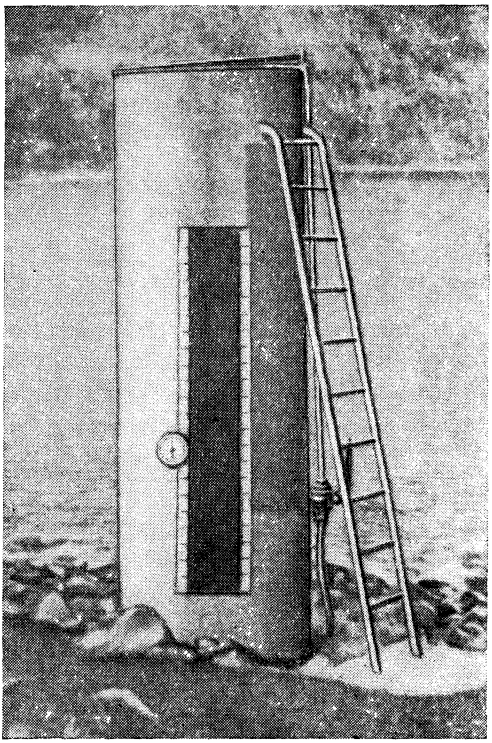


Рис. 582. Опытовая башенка

При экспериментах с одиночными падающими рыбами нет надобности пользоваться этим окном; для съемок сквозь воду требуется большая прозрачность воды (при существующей большой толщине слоя), а в свежую погоду вода у берега бывает мутна; требуется и подходящее освещение внутренней части бассейна, которое не всегда имеется. Значительно удобнее снимать не самую рыбу, а какой-то другой предмет, связанный с нею и движущийся снаружи. Вот почему при опытах Черноморской гидрофизической станции рыба подвешивалась на шелковой нити, перекинутой через два блока. Тот конец нити, на котором находилась рыба, проходил по оси башни; другой же конец свешивался снаружи и нес на себе ватный тампон или легкий деревянный грузик, выкрашенный белилами. При этих опытах окно в башне было задраено деревянной доской, выкрашенной в черный цвет. На снимках очень отчетливо выходил грузик (на негативе черным на белом фоне), положение которого легко было отметить по рейкам, находящимся по бокам от окна. Наличие этих реек на снимках совершенно исключало всякие погрешности за счет перспективного искажения или недостатков объектива аппарата; грузик двигался, почти прилегая к черной доске, однако ее не касаясь; рейки были помещены в одной с ним вертикальной плоскости.

Для определения интервалов времени между кадрами, рядом с окном, на половине высоты, был укреплен хроноскоп, стрелка которого делала 6 *об/сек*. Однако обработка снимков показала, что в сущности можно было бы обойтись и без хроноскопа; съемка производилась киноаппаратом «Кинамо», который был снабжен пружинным механизмом и давал идеально постоянную скорость вращения ведущей оси: он всегда давал ровно 25 кадров в секунду. Разумеется, перед пуском рыбы приходилось заранее пускать механизм, чтобы он успел приобрести установившееся число оборотов; необходимое опережение, впрочем, весьма невелико — не больше полсекунды.

Для обеспечения возможного единообразия масса свинца, зашивавшаяся в рот рыбы, как правило, бралась равной массе самой рыбы. Чтобы устранить помехи со стороны плавников, все плавники, за исключением хвостового, отрезались.

Установившаяся скорость достигалась рыбами довольно быстро, в большинстве случаев через 0,4 *сек* после начала падения. Соответствующий момент и абсолютную величину установившейся скорости очень легко было найти по кривой падения, построенной на основании анализа кинокадров. Для примера на рис. 583 воспроизведены две кривые: одна соответствует кефали (*1*), а другая — бычку (*2*).

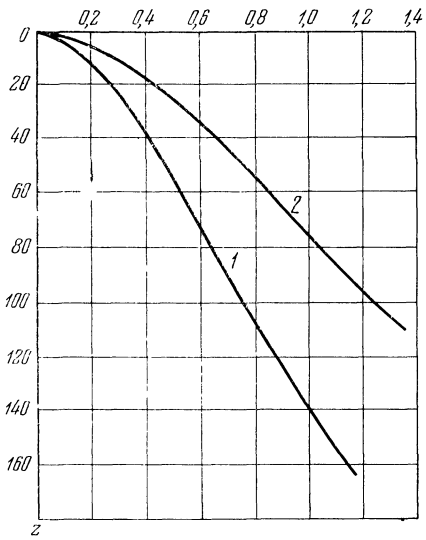


Рис. 583. Кривые падения в воде

По достижении установившейся скорости движение некоторых рыб вступало в новую фазу — неустойчивую. Особенно резко это проявлялось у таких рыб, как камбала и морской язык, отклонявшихся от прямолинейного пути и начинавших делать зигзаги. Однако это обстоятельство не мешало точности определения скорости установившегося движения, которая находилась путем проведения касательной к кривой падения в точке перегиба. На кривых рис. 583 также заметны следы перегиба, но здесь они слабо выражены; форма тела таких рыб, как макрель, кефаль, ставрида и др., способствует сохранению прямолинейного движения при падении.

Получив значения установившейся скорости для каждой из испытанных рыб, оставалось лишь вычислить для них значения характеристического коэффициента N. При этом, на основании измерений П. П. Павлова над черноморскими рыбами, можно было положить среднюю плотность тела рыбы равной плотности морской воды и считать, что архимедова сила в точности уравновешивает ее собственный вес. Но в таком случае сила, вызывавшая движение, должна была равняться

$$f_0 = (m - \mu)\, g, \tag{60}$$

где m — масса свинцового груза, зашитого в глотку рыбы (и в желудок), а μ — масса грузика, подвешенного к наружному концу нити (в случае исследования крупных рыб).

При установившемся движении эта сила уравновешивала силу сопротивления, выражаемую уравнением (57). Следовательно, приравняв между собой правые части (57) и (60), можно было написать

$$Nabv_0^2 = (m - \mu)\, g,$$

откуда

$$N = \frac{(m - \mu)\, g}{abv_0^2}. \tag{61}$$

Результаты вычислений по этой формуле привели Шулейкина, Лукьянову и Стася к тем значениям характеристического коэффициента N, которые приведены в табл. 37.

Для наглядности и удобства сопоставления цифр по таблице была построена диаграмма рис. 584, на которой длина каждого прямоугольника означает в условном масштабе соответствующую величину коэффициента N.

Как видим, из всех испытанных рыб наилучшие мореходные качества оказались у пеламиды. Затем следуют ставрида и кефаль, к которым

Таблица 37

Русское название	Латинское наименование видов	L	a	b	m_1	N
Черноморский дельфин	*Delphinus delphis* L.	85	18	17	10000	0,117
Пеламида	*Pelamys sarda* Bl.	65	12	8,6	3600	0,160
Ставрида	*Trachurus trachurus* L. . . .	12,5	2,5	2,1	34	0,220
Кефаль	*Mugil capito* Cuv.	17,0	3,3	2,5	70	0,228
Акула, катран	*Squalus acanthios* L.	40,0	6,7	6,6	650	0,240
Зеленуха	*Crenilabrus tinca* L.	23,5	7,0	3,2	233	0,248
Морской ерш	*Scorpaena porcus* L.	21,0	6,5	5,5	267	0,254
Морской петух	*Trigla lucerna* L.	38,0	7,8	8,2	873	0,256
Бычок	*Gobius melanostomus* Pal. . .	16,5	4,2	3,6	97	0,260
Морской окунь, смарида	*Smaris chryselis* C. et V. . .	10,5	2,7	1,8	22	0,266
Морской карась, ласкирь	*Sargus annularis* L.	10,5	4,1	1,8	36	0,267
Султанка, барабуля . .	*Mullus barbatus ponticus* Es.	14,0	3,1	2,5	50,6	0,288
Зеленушка	*Crenilabrus ocellatus* F. . . .	14,5	3,5	2,3	39,2	0,310
Каменный налим . . .	*Motella tricirrhatus* Bl. . . .	23,5	3,0	3,8	75	0,351
Морская собачка . . .	*Blenmius sanguinolentus* Pal.	11,5	3,0	2,5	36	0,393
Камбала	*Bothus macoticus* Pal.	19,0	15,1	2,2	267	0,412
Севрюга	*Acipenser stellatus* Pal. . . .	23,0	2,7	2,5	45,6	0,563
Морской язык	*Solea nasuta* Pal.	20,5	7,5	1,6	102	0,643

очень близко примыкают акула, бычок, султанка. Самые худшие качества (наибольшие значения N) характеризуют рыб со сплющенным телом: морского языка и камбалу, а также рыб с сильно выступающими буграми (севрюга) и шипами (морской ерш). У последних главное сопротивление движению, видимо, оказывают именно выступы на теле, а потому коэффициент N, по всей вероятности, должен уменьшаться с возрастом по мере того, как объем тела будет возрастать и отношение объема бугорков к объему тела будет падать.

Для сравнения с рыбами в ту же таблицу и на диаграмму рис. 584 внесены данные, полученные В. С. Лукьяновой и И. И. Стасем для молодого дельфина (*Delphinus delphis*) [7].

Как видим, характеристический коэффициент сопротивления N для него оказался еще меньшим, чем для самой совершенной из рыб — пеламиды.

Подводя итог содержанию этого параграфа, следует отметить один дефект, который все же остается неустраненным при пользовании коэффициентом N как характеристическим. Дело в том, что этот коэффициент, несомненно, должен несколько меняться при изменении *рейнольдсова числа*, — даже тогда, когда *форма* движущегося тела остается неизменной: при увеличении рейнольдсова числа коэффициент N будет медленно уменьшаться (см. § 16).



Рис. 584. Характеристики рыб и дельфина

§ 8. Аэродинамика летучей рыбы

Исследования по динамике рыбы, плывущей в водной среде, как было видно в предыдущих параграфах, показывают, насколько совершенным является движитель рыбы и насколько совершенной является сама обтекаемая форма ее тела. Но существует один частный случай движения рыбы, когда она особенно интересно использует работу своего совершенного движителя в воде для стремительного движения в другой среде, в среде с значительно меньшим сопротивлением — в воздухе. Это — случай движения *летучей* рыбы.

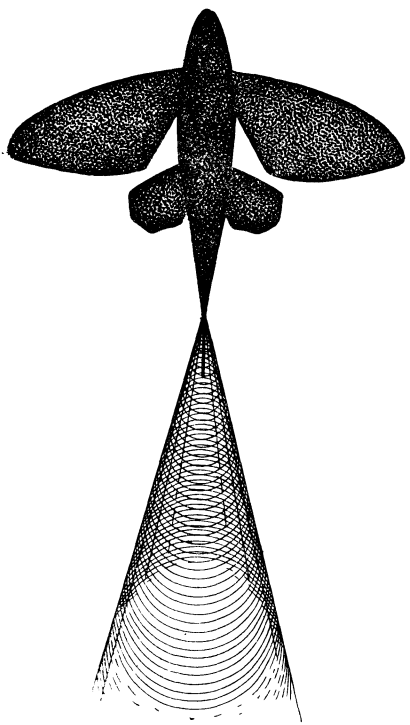


Рис. 585. След летучей рыбы

При описании механизма ее полета обычно предполагали, что она одним резким импульсом выбрасывается из воды и, поднявшись таким образом до некоторой точки, начинает планировать. Однако Шулейкин, наблюдавший летучих рыб в Индийском океане, показал, что это не так. Он обнаружил, что в действительности рыба довольно долго (в течение секунды и больше) не отделяется окончательно от поверхности моря, ее хвост остается погруженным в воду и оставляет за собой характерный след, схема которого воспроизведена на рис. 585 [4].

Во время полного штиля на зеркально гладкой поверхности воды были ясно видны *кольцевые* волны, расходящиеся в стороны (как видно на рисунке) и являющиеся, очевидно, следствием *вибрационных* движений хвостового плавника.

Летучая рыба, следовательно, представляет собой настоящий гидроплан, у которого мотором является хвостовой плавник, работающий в воде в то время, когда весь корпус рыбы находится уже в воздухе и поддерживается сперва небольшим выступом на нижней части головы рыбы, играющим роль «редана» глиссеров, а затем начинает поддерживаться распростертыми крыльями.

Работая хвостовым плавником, нижняя часть которого сильно развита, рыба все более и более увеличивает свою скорость в горизонтальном направлении, пока, наконец, аэродинамическое давление на ее крылья не окажется достаточным для преодоления силы тяжести, и рыба поднимется на воздух.

Для вычисления траектории полета и времени, в течение которого рыба может продержаться в воздухе, необходимо найти аэродинамические качества ее, выяснить зависимость между скоростью полета и аэродинамическими силами, действующими на рыбу. К сожалению, Шулейкину не удалось проделать такого исследования непосредственно над теми рыбами, полет которых он наблюдал в природной обстановке. Пришлось ограничиться исследованиями над муляжем, тщательно исполненным с чучела летучей рыбы (*Exocoleus volitans*) в Московских высших художественных мастерских.

Муляж (рис. 586) подвешивался *вниз спиной* внутри аэродинамической трубы посредством двух тонких (0,1 *мм*) проволочек, которые прикреплялись одним концом к крючочкам, а другим — к малым почтовым весам. Собственный вес муляжа компенсировался посредством противовесов, действовавших на стержни весов по направлению вверх, а потому сумма показаний обоих

весов давала непосредственно величину вертикальной слагающей полной аэродинамической силы, действовавшей на рыбу, когда сквозь трубу продувался воздух.

Горизонтальная слагающая измерялась посредством малых весов Робервaля, которые соединялись тонкой проволокой, перекинутой через блок, с крючком спереди головы муляжа.

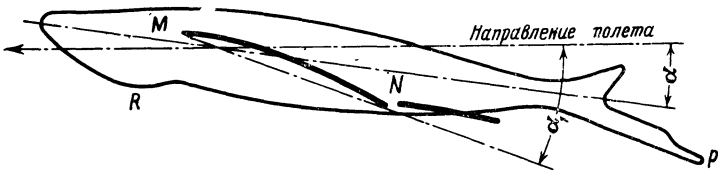


Рис. 586. Профиль летучей рыбы

Оказалось, что и вертикальная сила P, поддерживающая рыбу во время полета, и горизонтальная сила — лобовое сопротивление движению R — пропорциональны квадрату скорости движения v при изменении последней от 3 *м/сек* и выше. Таким образом,

$$P = pv^2, \quad R = rv^2.$$

Коэффициенты p и r зависят от угла между хордой крыла MN (рис. 586) и направлением движения — от так называемого *угла атаки* α_1. Однако при опытах значительно удобнее измерять другой угол, связанный с ним: угол между продольной осью корпуса рыбы и направлением движения (α).

На рис. 587 представлена полярная диаграмма, построенная на основании опытов с муляжем рыбы. По вертикальной оси отложены коэффициенты p, соответствующие различным углам α, а по горизонтальной оси — коэффициенты r для тех же значений углов. Вектор, который можно построить на таких двух слагающих, выражает полную аэродинамическую силу, действующую на рыбу и отнесенную к единице скорости движения. Близ кривой, представляющей, следовательно, годограф этого вектора, поставлены цифры, показывающие, каким углам соответствуют те или иные его значения.

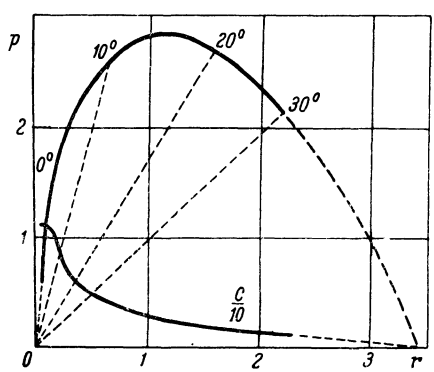


Рис. 587. Полярная диаграмма для летучей рыбы

Как видим, при увеличении угла атаки поддерживающая сила сперва быстро, а затем медленнее возрастает, достигает некоторой максимальной величины, а затем падает постепенно до нуля. Сила лобового сопротивления при этом непрерывно возрастает (сперва медленно, а затем все быстрее)[1].

На основании полученной диаграммы можно исследовать траекторию летучей рыбы. Общее решение задачи представляет очень большие математические трудности, а потому мы ее расчленим на две части: исследуем сначала полет при неизменном угле атаки и найдем закон подъема и спуска рыбы над водой; затем рассмотрим случай движения рыбы на постоянной высоте, но с переменным углом атаки.

[1] Отношение $p : r$ носит название *качества*. Максимальное значение качества для рыбы получилось равным 11 (при $p = 0{,}8$ и $r = 0{,}073$). Его изменение выражает кривая $C/10$.

Полет рыбы при неизменном угле атаки. Начальное условие: работая хвостовым плавником, рыба держит крылья под некоторым очень малым углом атаки; затем, достигнув некоторой скорости v_0, ставит их под углом α', который сохраняется во все время полета. Движение в воздухе начинается, следовательно, со скоростью v_0.

Скорость полета непрерывно уменьшается согласно уравнению

$$dU = d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = mgdz - rv^3dt, \tag{62}$$

которое выражает закон сохранения энергии.

Здесь dU — убыль кинетической энергии рыбы, m — масса рыбы, v — ее скорость, dz — приращение высоты (над поверхностью воды), dt — приращение времени, g — ускорение силы тяжести. Отсюда

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{mv^2}{2}\right) + rv^3 = -mg\frac{dz}{dt} = -mg\frac{dz}{dx}\frac{dx}{dt}. \tag{62a}$$

В таком виде уравнение не интегрируется, но, принимая во внимание, что траектория полета обычно наклонена к горизонтальной плоскости под очень небольшим углом, можно положить величину dz/dx равной некоторой постоянной k — среднему наклону траектории за время подъема.

Заменяя еще dx/dt через v, найдем из (62а)

$$\frac{dv}{dt} = -\left(gk + \frac{r}{m}v^2\right). \tag{63}$$

Проинтегрировав это уравнение, получим закон изменения скорости полета во времени

$$v = \frac{1}{A}\operatorname{tg}\left(\varphi_0 - \frac{rt}{Aw}\right), \tag{64}$$

где

$$A = \left(\frac{r}{mgk}\right)^{1/2}, \quad \varphi_0 = \operatorname{arctg}(Av_0).$$

Движение рыбы по вертикальному направлению определяется условием

$$\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{pv^2}{m} - g = \frac{p}{A^2m}\operatorname{tg}^2\left(\varphi_0 - \frac{rt}{Am}\right) - g. \tag{65}$$

В результате решения этого уравнения и уравнения (64), описывающего движение в горизонтальном направлении, оказывается, что

$$z = \frac{p}{r}v_0t - \left(1 + k\frac{p}{r}\right)\frac{gt^2}{2} - \frac{p}{r}x, \tag{66}$$

$$x = \frac{m}{r}\ln\frac{\cos\left(\varphi_0 - \frac{rt}{Am}\right)}{\cos\varphi_0}. \tag{67}$$

В оба уравнения входит параметр k, который пока остается не определенным. Его можно найти методом последовательных приближений, задаваясь некоторой величиной и находя из уравнений максимальную высоту $z_{\text{макс}}$, до которой, при данной начальной скорости v_0, может подняться рыба, и критическое расстояние по горизонтальному направлению $x_{\text{кр}}$, которое она пролетит за тот же промежуток времени. С достаточной степенью точности можно положить, что $\frac{z_{\text{макс}}}{x_{\text{кр}}} = k$.

Произведя вычисления и найдя отношение $z_{\text{макс}}/x_{\text{кр}}$, нетрудно заключить, насколько удачно выбрана величина k.

Для вычисления $x_{кр}$, $t_{кр}$ и $z_{макс}$ можно пользоваться соотношениями, которые легко получаются из уравнений (66) и (67) для $x_{кр}$:

$$x_{кр} = -\frac{m}{r}\ln\left[\frac{1+\frac{r}{kp}}{1+\frac{rv_0^2}{Gk}}\right], \tag{68}$$

где G — вес рыбы; для $t_{кр}$

$$\cos\left(\varphi_0 - \frac{rt_{кр}}{Am}\right) = \frac{1}{\left(1+\frac{r}{kp}\right)\cos\varphi_0}; \tag{69}$$

$z_{макс}$ найдется из (66) после подстановки в него $x_{кр}$ и $t_{кр}$.

Для перехода от абсолютных единиц к практическим надо ввести соответствующий переходный множитель.

На рис. 588 изображены две траектории полета летучей рыбы, вычисленные на основании изложенной теории. Первая соответствует углу атаки α_1, равному 17°, а вторая 20°. Начальная скорость полета и в том и в другом

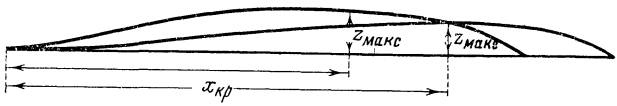


Рис. 588. Две траектории полета рыбы

случаях принята равной 16 *м/сек*. В первом случае рыба может подняться на высоту 3 *м* над водой, во втором — на 4 *м*.

Как видим, она может подняться на довольно значительную высоту [1]. Такие случаи действительно встречаются: по рассказам очевидцев, иногда рыбы выбрасываются на палубу судов или попадают в иллюминаторы. Однако значительно чаще они скользят на небольшой высоте (по наблюдениям Шулейкина — около 0,5—1,0 *м*) почти параллельно поверхности воды, пролетая, таким образом, свыше 100 *м* в воздухе. Время полета часто достигает 10 *сек*. Рассмотрим поэтому полет в таких условиях.

Полет рыбы параллельно поверхности воды (на постоянной высоте). Для того чтобы лететь на постоянной высоте над водой, при непрерывно уменьшающейся скорости, рыбе приходится, очевидно, постепенно увеличивать угол атаки. Так она может держаться до тех пор, пока режим полета определяется восходящей частью кривой (рис. 587). После перехода через точку, соответствующую максимуму коэффициента p, рыба начинает опускаться. Определим время, в течение которого она может лететь параллельно поверхности воды, и длину перелета.

Условия полета

$$pv^2 = G, \tag{70}$$

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = -rv^3\,dt. \tag{71}$$

Так как полет ограничен предельным значением p, то примем p за независимое переменное. Из первого условия (70) имеем

$$v = \frac{G^{1/2}}{p^{1/2}},\quad dv = -\frac{1}{2}\frac{G^{1/2}}{p^{3/2}}dp.$$

[1] Построение нисходящей части траектории очень просто и интереса не представляет; при данных условиях работа сил лобового сопротивления компенсируется (приблизительно) работой силы тяжести, а потому можно полагать при спуске $v = \text{const}$.

Исключая с помощью этих соотношений из (71) v и dv, внося множитель, появляющийся при переходе от абсолютных единиц к практическим, и интегрируя, получим

$$t_{\text{пол}} = 0{,}884 \int_{p_0}^{p_{\text{макс}}} \frac{dp}{rp^{1/2}}. \qquad (72)$$

Так как связь между t и p_0 дана только графически, то интегрирование в правой части равенства можно произвести тоже графически. Результат представлен на рис. 589. По оси абсцисс отложена начальная скорость полета, которой обусловлено соответствующее значение p_0. По оси ординат (для кривой t) отложено время в секундах, в течение которого рыба летит по горизонтальной прямой. Цифры при оси ординат показывают время t, умноженное на 10. Как видим, при $v_0 = 16$ она может держаться так в течение 6,2 *сек*.

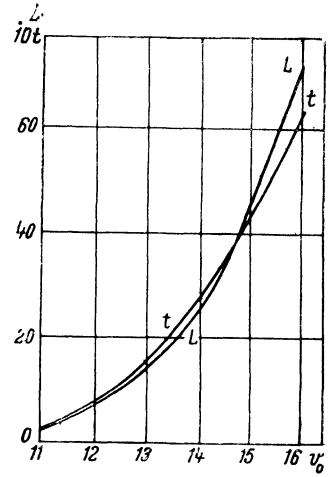


Рис. 589. Продолжительность и длина полета

Аналогично вычисляется и длина перелета:

$$dx = v\,dt.$$

Из (71) имеем $vdt = -\frac{m}{r}\frac{dv}{v}$ или, вводя p после дифференцирования (70):

$$dx = \frac{m}{2}\frac{dp}{rp}.$$

Приняв это во внимание, найдем

$$L = x_{\text{макс}} = 15{,}3 \int_{p_0}^{p_{\text{макс}}} \frac{dp}{rp}. \qquad (73)$$

Здесь, так же как и в (72), введен уже переходный множитель. Результаты графического интегрирования изображены на рис. 589 кривой L. Как видим, при начальной скорости 16 *м/сек* рыба может пролететь по горизонтальному направлению 68 *м*.

Наблюдения Шулейкина в Индийском океане показали, что $t_{\text{пол}}$ может достигать 10 *сек*; расстояние L также соответственно превышает 100 *м*. Отчасти это объясняется тем, что рыба летит при более благоприятных условиях, чем условия, в которых испытывается муляж: поверхность ее покрыта слизью, что уменьшает коэффициент трения; при изменении угла атаки рыба может только деформировать крылья, не изменяя положения туловища и не так сильно увеличивая лобовое сопротивление.

С другой стороны, увеличение времени и длины перелета может быть достигнуто увеличением начальной скорости. Такое увеличение не представляет собой ничего невероятного, ибо для движения корпуса рыбы со скоростью 18—20 *м/сек* хвостовому движущему аппарату ее приходится развивать ту же мощность, что и для движения в воде со скоростью 4—5 *м/сек* [4].

§ 9. Основы кинематики дельфина

Поднимаясь по ступеням эволюционной лестницы, не все животные одинаково приспособляются к среде, в которой им приходится двигаться. Птицы, умеющие и летать и плавать, не могут достигнуть того совершенства в полете, каким отличаются, например, ласточки, для которых воздух является единственной родной средой. Белые медведи и даже тюлени и моржи,

проводящие часть жизни на берегу, не могут состязаться в плавании с макрелью и тунцом. Но такие животные, как зубатые киты, являющиеся мощными хищниками, проводящие всю жизнь в воде и вынужденные преследовать быстроходных рыб, поднявшись на высокую ступень развития, должны были приобрести более совершенный движитель даже по сравнению с рыбами. Однако механизм этого движителя оставался неизученным до самого последнего времени. Лишь в 1934 г. на Черноморской гидрофизической станции Шулейкину и его сотрудникам удалось детально проанализировать кинематику дельфина, оказавшуюся чрезвычайно оригинальной и интересной [8].

Как известно, скорость дельфина может достигать до 10 *м/сек*; дельфины начинают отставать от кораблей только тогда, когда скорость последних превышает примерно 20 узлов.

Перемещаясь в водной среде с такой громадной скоростью, дельфин работает своим движителем со столь большой частотой, что, наблюдая его сквозь воду с корабля, нельзя заметить каких-либо видимых деформаций тела. Однако ключ к разгадке механизма его движения может быть найден при рассмотрении моментальной фотографии, которая была сделана с мостика корабля одним итальянским моряком, приславшим снимок в журнал «Illustration» за 1910 г.

Этот интересный снимок, воспроизведенный на рис. 590, был в дальнейшем перепечатан в ряде работ и послужил к совершенно неправильным толкованиям кинематики дельфина. Так, основываясь на нем, Уссэй [9] предполагал, что дельфин движется благодаря непрерывным колебаниям (в вертикальном направлении) одного лишь хвостового плавника и что винтообразные струи, вышедшие на фотографии, вызываются асимметрией черепа. По мнению этого исследователя, асимметричная форма черепа заставляет струи воды закручиваться вокруг тела дельфина по винтовой линии; следовательно, по его теории, винтовые струи являлись малосущественным элементом вторичного порядка.

Между тем легко можно показать, что рис. 590 прекрасно расшифровывается на основе волновой теории движения дельфина, напоминающей волновую теорию движения рыбы, развитую выше в § 1, 3 и 4.

Действительно, совершенно очевидны следующие простые заключения: а) надо согласиться с Уссэй в том отношении, что извилистые очертания тела дельфинов на рис. 590 вызваны *оптической иллюзией* и что в свою очередь эта оптическая иллюзия обязана своим возникновением каким-то винтовым струям, образующимся вокруг тела дельфина; б) в отличие от гипотезы этого исследователя надо признать, что винтовые струи вызываются самыми существенными и самыми характерными особенностями работы движителя у дельфина; в) пропеллирующее действие этого движителя у дельфина должно быть во всяком случае не хуже, а, вероятно, значительно лучше, чем у рыбы, а потому весьма вероятно наличие поперечных волн, бегущих вдоль по телу дельфина от головы к хвосту и отталкивающихся от водной среды по схеме, о которой говорилось выше.

Сопоставляя пункты а), б) и в), остается прийти к выводу, что тело дельфина как бы ввинчивается в воду и что такое движение достигается благодаря существованию двух систем поперечных волн, бегущих от головы к хвосту; одна из них совершенно подобна той, которая наблюдается у рыб; здесь поперечные колебания совершаются в горизонтальной плоскости по закону

$$y = a_1 a^{\beta_1 x} \sin \gamma \left(t - \frac{x}{c}\right), \tag{74}$$

где y — отклонение некоторого элемента тела от начальной оси (совпадающей с направлением движения); a_1 — амплитуда поперечных колебаний переднего конца головы; x — расстояние от переднего конца головы, отсчиты-



Рис. 590. Дельфины на походе

ваемое вдоль начальной оси тела (оси абсцисс); β_1 — фактор, характеризующий быстроту нарастания амплитуды поперечных колебаний по мере продвижения вдоль тела, от головы к хвосту; γ — частное от деления 2π на период колебаний T; t — текущее время; c — скорость распространения волны.

Другая система волн соответствует поперечным же колебаниям тела, но только происходящим в вертикальном направлении. Эти колебания можно выразить уравнением, аналогичным уравнению (74), именно

$$z = a_2 e^{\beta_2 x} \cos\gamma\left(t - \frac{x}{c}\right). \tag{75}$$

Все обозначения здесь прежние. Индексы под буквами поставлены для общности в предположении, что амплитуды поперечных колебаний данной точки тела в горизонтальном направлении не равны амплитудам вертикальных колебаний тех же точек.

Как известно, совокупность уравнений (74) и (75) свидетельствует о том, что благодаря сложению колебаний в двух взаимно перпендикулярных плоскостях исследуемая точка движется по эллипсу с полуосями

$$A_1 = a_1 e^{\beta_1 x}, \quad A_2 = a_2 e^{\beta_2 x}. \tag{76}$$

В частном случае, если $a_1 = a_2 = a$ и $\beta_1 = \beta_2 = \beta$, эллипс превращается в круг с радиусом

$$A = a e^{\beta x}. \tag{77}$$

Итак, хорошие условия пропеллирования могут быть достигнуты в том случае, когда *по телу дельфина бежит нарастающая (от головы к хвосту) волна, поляризованная по эллипсу или по кругу.*

Для подтверждения этой гипотезы трудно пользоваться методом киносъемки сквозь слой воды, ибо струи, возникающие вокруг тела дельфина,

резко искажают картину, делая ее непригодной для основных измерений. Поэтому был выбран другой путь экспериментальной проверки.

Пойманный посредством аломана дельфин помещался на специально построенном станке с таким расчетом, чтобы головная половина его тела проходила сквозь отверстие в толстой вертикально поставленной доске и покоилась на полке, к которой она крепилась посредством пеньковых концов. Напротив, хвостовая часть тела выступала из отверстия в доске вперед, и можно было удобно фотографировать ее небольшим киносъемочным аппаратом («Кинамо») с пружинным заводным механизмом для автоматической съемки.

Дельфин раздражался электрическим током (электроды вводились ему в рот; разность потенциалов была $110V$) или посредством искусственной задержки дыхания (дыхательное отверстие на некоторое время закрывалось рукой).

В обоих случаях дельфин должен был инстинктивно проделывать те именно движения, которые он совершает, спасаясь от преследования. Только, разумеется, и частота и амплитуды колебаний в воздухе не могли быть такими же, как в воде.

С негативной киноленты были сделаны увеличения всех кадров до размера 9×12, чтобы можно было удобнее проследить за всеми характерными особенностями движения хвостовой части тела дельфина. Образец одного из кадров воспроизведен на рис. 591.

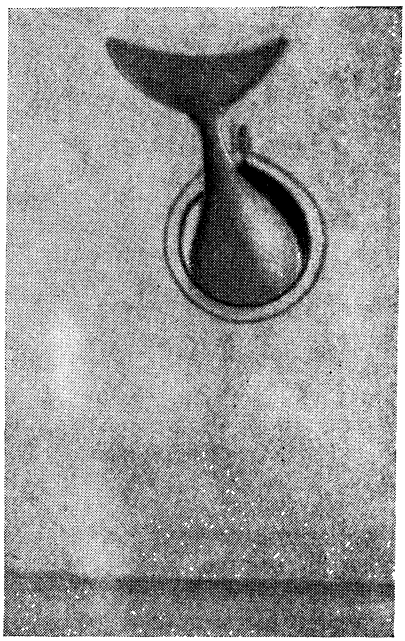


Рис. 591. Кадр киносъемки дельфина

Киносъемка подтвердила только что изложенную гипотезу о характере движения тела дельфина, причем выяснилось, что каждая точка его тела описывает окружность с радиусом, определяемым по уравнению (77).

Для суждения о геометрических элементах орбиты определялось перспективное искажение каждого отдельного снимка, и затем полученная картина движения была схематически изображена на сводной диаграмме рис. 592. Ниже будет указано, почему в положениях C и G *отсутствует* изображение хвостового плавника.

Необходимо отметить, что диаграмма рис. 592, строго говоря, изображает движение хвостовой части дельфина относительно того сечения его тела, которое было закреплено на станке. Допустим, что при движении в водной среде каждая точка этого сечения в свою очередь тоже двигалась бы по некоторой окружности радиуса A и что в действительности каждая точка хвостового плавника описывала бы при этом окружность радиуса A'. В каждый момент времени радиус-вектор $\mathbf{A}$ опережает радиус-вектор $\mathbf{A}'$ на некоторый угол ψ, величина которого зависит от расстояния $(\lambda - x)$ между рассматриваемым сечением и концом хвостового плавника (λ — длина волны). Именно легко показать, что

$$\psi = \gamma\left(\frac{\lambda - x}{c}\right) = 2\pi\,\frac{\lambda - x}{cT}. \qquad (78)$$

При опытах на станке промежуточное сечение было закреплено. В переводе на язык векторов это значит, что ко всем векторам, выражающим движе-

ние различных точек тела дельфина, был прибавлен геометрически вектор, равный по модулю вектору **A** и противоположно направленный.

Как и следовало ожидать, при таком суммировании векторов для промежуточного (закрепленного) сечения получилось

$$\mathbf{A} + (-\mathbf{A}) = 0,$$

а для конца хвостового плавника вместо вектора **A′** возник вектор **A″**, равный геометрической сумме **A′** и (—**A**). Этот-то вектор **A**, изображенный на схеме рис. 593, определяет собой радиус орбиты хвоста, фигурирующий на сводной киносхеме рис. 592, и ту разность фаз, которая должна существовать между действительным движением в воде и «суммарным» движением на станке.

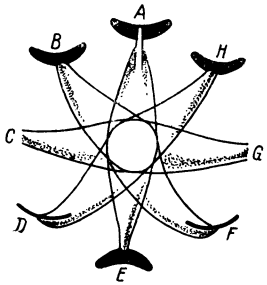


Рис. 592. Сводная схема фаз

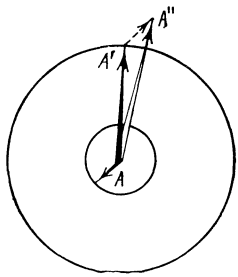


Рис. 593. Векторная диаграмма

Упомянутые поправки показывают, что киносъемка дельфина, укрепленного на станке, дает совершенно отчетливую картину кругового движения каждой точки его тела. Необходимо добавить еще, что такое круговое движение совершается здесь без вращения отдельных точек вокруг центра сечения самого тела, подобно тому, как совершается движение земного шара около общего центра тяжести системы Земля — Луна. Чтобы ясно представить себе такое движение, достаточно взглянуть на рис. 594, на котором буква O означает начальное положение оси тела, а буквы O_1, O_2 и т. д.— последовательные положения, которые занимает центр сечения в различные моменты времени. Буквы K, M и N с различными индексами означают положения одних и тех же точек сечения в те же моменты времени. Как видим, каждая из этих точек описывает в пространстве окружность одного и того же радиуса A. Для наглядности все три окружности нанесены различными пунктирными линиями. Легко видеть, что стороны треугольника KMN перемещаются, оставаясь параллельными самим себе, а это характеризует движение без вращения. Нетрудно видеть также, что движение каждой точки здесь может быть выражено уравнениями, отличающимися от (74) и (75) только тем, что в действительности каждая точка тела дельфина описывает не эллиптическую, а круговую орбиту, радиус которой (A) определяется в свою очередь уравнением (77).

Итак, движение каждой точки тела дельфина выражается уравнениями

$$y = ae^{\beta x} \sin \gamma \left(t - \frac{x}{c}\right), \tag{79}$$

$$z = ae^{\beta x} \cos \gamma \left(t - \frac{x}{c}\right). \tag{80}$$

Они определяют собой нарастающую волну, поляризованную по кругу.

Для того чтобы представить себе периодические изменения формы тела, по которому распространяется такая волна, проще всего поступить следую-

щим образом. Построим в перспективе совокупность орбит, по которым вращаются точки, лежащие на осевой линии тела. Это будут окружности с центрами, расположенными на одной прямой, и с радиусами, возрастающими по экспоненциальному закону от головы к хвосту. Величина этих радиусов по сравнению с длиной тела зависит от амплитуды поперечных колебаний; на рис. 595 она умышленно выбрана побольше — для отчетливости и наглядности чертежа.

Разобьем каждую из окружностей на 10 частей и проставим цифры при точках, нанесенных на самую малую из них — головную. Допустим, что при колебаниях головного конца тела, происходящих по уравнениям (79) и (80), этот конец оказывается последовательно в точках *1*, *2*, *3* и т. д. в течение одного периода. Тогда на второй орбите, отстающей от первой на 0,1 длины тела, номера точек несколько сместятся, повернувшись вокруг оси XX на

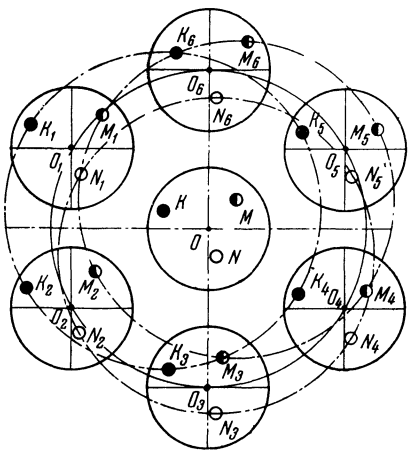


Рис. 594. Движение без вращения

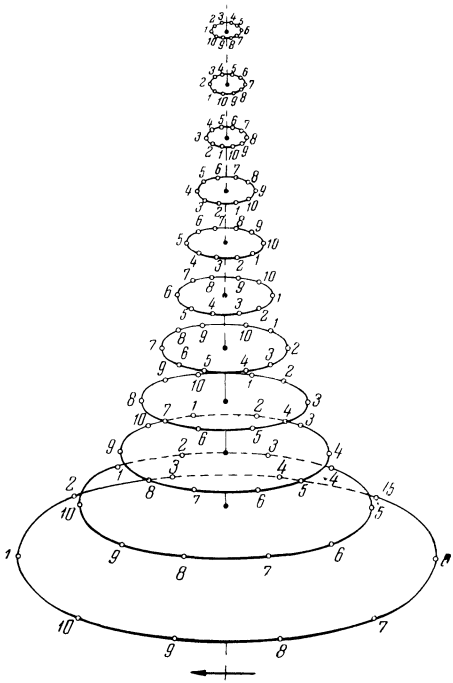


Рис. 595. Орбиты и фазы в различных сечениях

0,1 окружности (в предположении, что на противоположном конце тела поворот происходит на полную окружность, т. е., другими словами, что длина волны равняется длине тела: $\lambda = L$). Как совершенно очевидно, «поворот» точек с соответствующими номерами происходит потому, что колебания участка тела, отстоящего на 0,1 всей длины от переднего конца, запаздывают по фазе на $2\pi/10$ относительно колебаний этого конца.

По той же причине точки, обладающие соответствующими номерами на третьей орбите, повернутся еще на 0,1 полной окружности вокруг оси, точки четвертой орбиты — еще на 0,1 и т. д., до конца хвостового плавника, который, по принятому условию, будет находиться всегда в одной фазе с передним концом тела, а стало быть, все соответствующие точки, в которых он будет находиться за время одного оборота, окажутся в тех же положениях, что и точки первой орбиты.

Теперь остается только провести плавные кривые через все точки *1*, через все точки *2* и т. д. до точек *10*. Полученные кривые дадут перспективное изображение осевой линии тела дельфина, деформирующейся в течение одного периода. Для наглядности все эти линии изображены отдельно на десяти эскизах рис. 596. Чтобы не затуманивать картины, на этих эскизах не

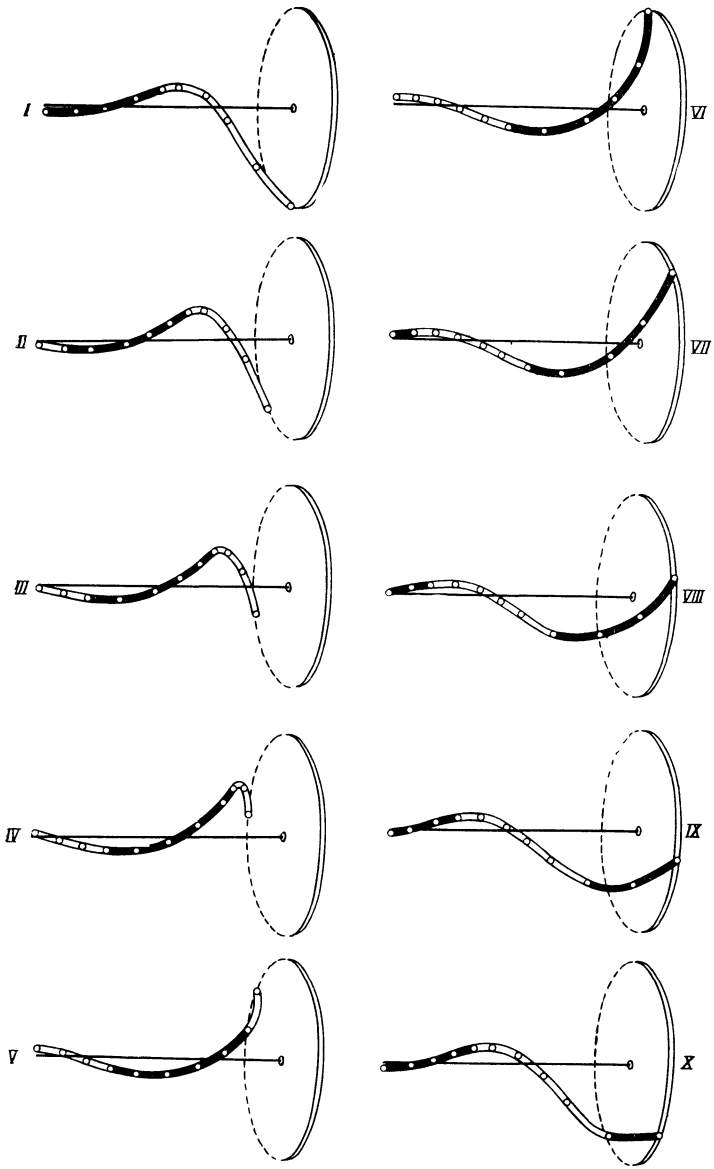


Рис. 596. Схема десяти фаз

нанесены орбиты, а оставлены только руководящие точки, по которым были проведены кривые.

Как видим, тело дельфина «ввинчивается» в воду, несмотря на то, что каждое сечение движется вокруг оси XX без вращения (в согласии с рис. 595).

Кинематограммы, так же как и рис. 590, показывают, что этот винт обладает «левой нарезкой», другими словами, вращение элементов тела происходит против часовой стрелки (если смотреть по направлению хода дельфина). Для облегчения пространственного представления на эскизах рис. 596 тушью залиты те участки винтовой линии, которые лежат между наблюдателем и плоскостью чертежа. Белыми оставлены участки, находящиеся позади плоскости чертежа.

§ 10. Некоторые особенности винтового движения

Вглядываясь в схемы, изображенные на рис. 596, легко прийти к заключению, что винтовое движение дельфина неминуемо должно привести к возникновению не одних только полезных сил, движущих вперед, но и вредных сил, которые поглотят часть затрачиваемой энергии и вызовут добавочные, сложные движения.

При вращении элементов тела вокруг оси XX будут возникать три составляющие силы: одна из них x будет направлена вдоль оси XX и будет служить основной *движущей силой* (полезной); вторая R направится по радиусу и послужит к возникновению *рысканья* дельфина (попеременного отклонения его в разные стороны от курса); наконец, третья составляющая будет перпендикулярна к плоскости, проходящей через радиус-вектор и через ось XX. Эта третья сила, обозначенная на рис. 597 буквой T, даст некоторую слагающую вращающего момента, который будет стремиться повернуть тело дельфина вокруг его продольной оси.

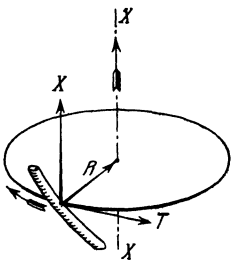


Рис. 597. Действующие силы

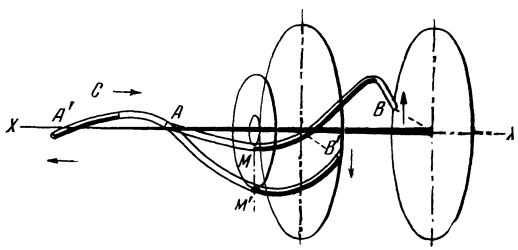


Рис. 598. Два положения волны

Легко показать, что величина всех трех сил зависит от величины разности скоростей $c - v$, от величины β, характеризующей возрастание амплитуды от головы к хвосту, и от абсолютной величины самих амплитуд (другими словами, от абсолютных величин радиусов A).

Если β равняется нулю, т. е. если все элементы тела вращаются по окружностям одного и того же радиуса, то анализ движения оказывается самым простым. Он напоминает анализ змеевидного движения, рассмотренного в § 2. В данном случае все три силы могут оказаться равными нулю по тем же причинам, по каким не возникало никаких сил при движении, изображенном на рис. 569, *а*; для этого необходимо только, чтобы отсутствовало лобовое сопротивление (равно как и сопротивление трения) и чтобы скорость распространения волны c была равна и направлена противоположно скорости поступательного движения v.

На рис. 569, *а* змеевидная рыба как бы проскальзывала без трения внутри некоторого воображаемого канала синусоидальной формы, мысленно выделенного в водной среде. Теперь, в случае *пространственного*, а не плоского движения, тело исследуемого животного будет также легко проскальзывать внутри винтообразного канала, как бы застывшего неподвижно в водной среде.

В природе при движении змеевидной рыбы неминуемо возникает как *лобовое сопротивление*, *так и трение* на поверхности тела. Поэтому, как было упомянуто в § 2, должна существовать какая-то движущая вперед сила, преодолевающая все сопротивления движению. Эта сила, согласно схеме рис. 569, *б*, возникала благодаря «скольжению» самого синусоидального «канала», который как бы «отступал» в водной среде со скоростью, равной $c - v$ (чем больше силы, сопротивляющиеся поступательному движению, тем больше должна быть эта разность скоростей). Теперь в пространственном

случае «скользить» будет сам «винтообразный канал»: он будет отступать назад со скоростью $c - v$, величина которой обусловлена величиной сопротивлений поступательному движению.

Легко убедиться, что в данном конкретном случае наибольшее значение будет иметь движущая вперед сила X; что касается силы T, то она будет тем меньше, чем меньше разность скоростей $c - v$; сила же R вообще будет равна нулю. Ближе всего к рассмотренному случаю подходит движение таких организмов, как спирохеты.

Допустим теперь, что β не равна нулю, и рассмотрим два подкласса, относящихся к этому, наиболее важному для нас классу движения; именно подкласс, соответствующий $c = v$, и подкласс, соответствующий $c > v$.

Если $c = v$, то, как и прежде, фаза должна неподвижно застыть в пространстве, но только, в отличие от ранее рассмотренного случая, радиус-вектор $\mathbf{A}$ при прохождении волны сквозь данную точку внешней среды будет нарастать, как изображено на рис. 598. Здесь представлены два положения «твердой поляризованной волны» в два момента времени, разделенных промежутком, равным половине периода. Как уже упоминалось, предполагается, что $\beta = 0$ и $c = v$.

Как видим, при перемещении тела дельфина из положения AB в положение $A'B'$ фазовая волна успела переместиться вдоль тела по направлению от головы к хвосту на то же самое расстояние, на которое продвинулось относительно воды само тело дельфина. В результате оказалось, что некоторая произвольная секущая плоскость, перпендикулярная оси XX, пересекает и старую и новую осевые линии тела в точках M и M', находящихся в одной и той же фазе.

Но если это так, то, следовательно, при прохождении «волны» сквозь ту же секущую вертикальную плоскость все положения точек M' и M'' и т. д. окажутся на продолжении одного и того же радиус-вектора. Никакого вращения точки M в секущей плоскости не будет, поэтому реактивные силы, которые могли бы создать вращающий момент, будут отсутствовать.

В то же время рис. 598 показывает, что по мере перемещения твердой волны сквозь секущую плоскость длина радиуса вращения непрерывно возрастает. Следовательно, при таком движении должна возникать реактивная сила, препятствующая нарастанию радиуса и, как нетрудно видеть, направленная по радиусу. Это и будет та компонента R, о которой говорилось выше.

Второй подкласс, который именно соответствует реальному движению дельфина, характеризуется условиями $\beta > 0$, $c > v$. Здесь картина будет сложнее той, которая изображена на рис. 598: точка M будет смещена относительно точки M' в тангенциальном направлении благодаря тому, что форма волны теперь будет отступать назад (грубо говоря, по примеру рис. 569, *б*).

Следовательно, в реальном случае на тело дельфина все же будет действовать некоторый момент, стремящийся повернуть его вдоль его же продольной оси. Но момент этот будет тем меньше, чем меньше будет «скольжение» формы в водной среде, т. е., другими словами, чем меньше будет разность скоростей $c - v$.

Если мы вспомним рис. 592, изображавший движение хвостовой части тела дельфина, то можем прийти к выводу, что не все положения хвоста, нанесенные на схему, равнозначащи в отношении тангенциальных импульсов: во всех этих положениях хвост — и главным образом хвостовой плавник — создает далеко не одинаковый вращающий момент. В данном отношении менее всего активны моменты, обозначенные на рис. 592 буквами A и E, где движение происходит вдоль плоскости хвостового плавника. Напротив, моменты C и G дали бы наибольшую активность, если бы хвостовой плавник по-прежнему оставался твердым и плоским.

В действительности, как видим на рис. 592, в этих фазах очертания хвостового плавника на схему не нанесены. Это потому, что ни на одном из сня-

тых кинокадров не вышел плавник в такой фазе: всюду получались размытые очертания, которые, по-видимому, объяснялись расслаблением хвостовых мышц и пассивным (колеблющимся подобно флагу) движением плавника.

На рис. 599 воспроизведен один из таких кадров, на котором нельзя обнаружить даже следа хвостового плавника, хорошо вышедшего хотя бы на рис. 591.

Итак, дельфин обладает механизмом, позволяющим выключать хвостовой плавник в тех фазах, когда работа его создает наибольший вредный вращающий момент. Механизм этот заставляет вспомнить аналогичное приспособление, существующее у весьма быстроходных рыб (например, у макрели), где оно тоже выводит из работы хвостовой плавник во вредных положениях; только там в этих вредных положениях возникало не вращение вокруг продольной оси, как у дельфина, а интенсивное вихреобразование, связанное *с рысканьем* рыбы (см. § 4).

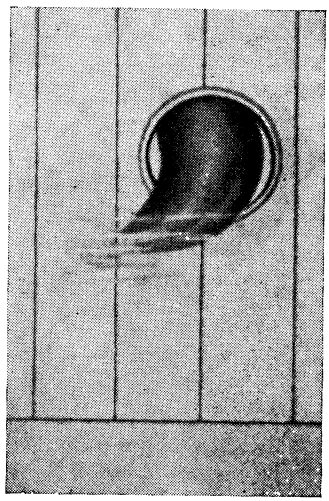


Рис. 599. «Размытое» изображение на кинокадре

Но как бы хорошо ни работал выключающий механизм, он не может полностью уничтожить вращающий момент, ибо во всех фазах, изображенных на рис. 596, все же существует совершенно определенная его составляющая. Но тогда, каким же образом дельфин не поворачивается непрерывно вокруг своей продольной оси? Ведь хотя бы в случае движения торпеды подобное поворачивание предотвращается только лишь путем устройства двух винтов, вращающихся в противоположных направлениях. У дельфина имеется только единственный «винт», следовательно, для компенсации вредного вращающего момента у него должно быть какое-то иное приспособление.

По мнению Уссэй [9], компенсация возникает благодаря существованию спинного плавника, всегда сильно развитого у китовых. Но совершенно очевидно, что само по себе существование этого плавника не гарантирует еще никакого компенсирующего обратного момента; оно может только уменьшить угловую скорость вращения, вызываемого вредным моментом.

Для компенсации же необходимо, чтобы плавник не только существовал, но и был поставлен *асимметрично*, чтобы лежал не в плоскости, проходящей через продольную ось тела, а на некоторой винтовой поверхности (и притом с «левой нарезкой»).

Ту же роль может играть и хвостовой плавник при условии, что он тоже деформирован по некоторой винтовой поверхности (и тоже с левой нарезкой).

Но замечательнее всего, что для компенсации вредного вращающего момента, несомненно, служит та *асимметрия черепа* дельфина, которая давно была подмечена исследователями у всех зубатых китов и которую Уссэй считал причиной возникновения винтовых струй вокруг тела дельфина. Как видим, в действительности причину и следствие надо поменять местами: назначение асимметрии черепа в том, чтобы создавать вращающий момент, обратный основному, вызванному винтообразным движением тела.

§ 11. Некоторые количественные характеристики

В предыдущем параграфе указывалось, что для компенсации вредного вращающего момента у дельфина служит асимметрия головы, обусловленная асимметрией черепа.

На Черноморской гидрофизической станции произведено (В. С. Лукьяновой) систематическое исследование этой асимметрии. Прежде всего пришлось начать с количественного исследования асимметрии самого черепа, лишенного жировых, мускульных и кожных покровов. Для измерений был построен несложный прибор, схема которого изображена на рис. 600. Это своего рода циркуль, ножки которого могут раздвигаться так же, как у штангенциркуля, и к линейке которого прикреплен транспортир с отвесом. Исследуемый череп кладется на какую-либо подставку так, чтобы он не мог сдвинуться во время работы, причем совершенно безразлично, как будет он

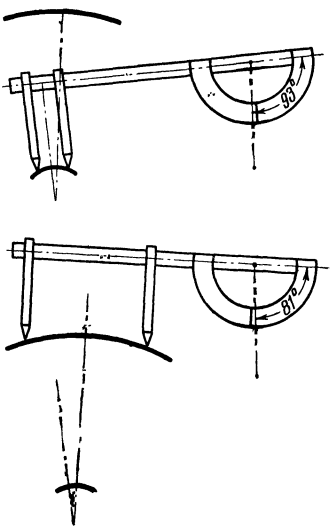


Рис. 600. Измеритель углов

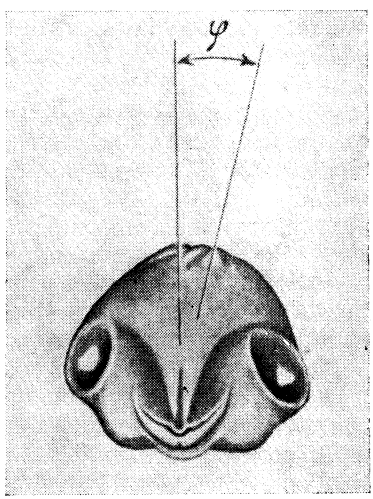


Рис. 601. Череп дельфина

наклонен относительно горизонтальной плоскости. Ножки циркуля ставят всякий раз на две «парные» соответствующие точки черепа и замечают, на каком делении устанавливается при этом нить отвеса. Так, на рис. 600 одно из положений дает угол в 93°, а другое — угол в 81°. Видно, что средняя линия второго сечения оказывается повернутой на $93° - 81° = 12°$. Измерения Лукьяновой показали, что у дельфина-белобочки (*Delphinus delphis*) на протяжении от середины челюсти до верхнечелюстного бугра линия симметрии оказывается сдвинутой на угол до 19°. Для наглядности на рис. 601 приведен снимок черепа, на котором отмечен этот угол φ сдвига.

На первый взгляд при рассматривании рис. 601 кажется странным, почему сдвиг линии симметрии происходит в направлении по часовой стрелке, между тем как выше неоднократно упоминалось, что для компенсации вредного момента череп должен обладать левой «резьбой». Однако легко убедиться в том, что никакого противоречия здесь не возникает. В самом деле, ведь если мы проведем на поверхности черепа линию, которая всюду будет делить пополам расстояние между каждыми двумя симметричными точками, то линия эта будет везде удовлетворять одному непременному условию: вертикальная плоскость, проведенная через какой-либо бесконечно малый ее отрезок, будет перпендикулярна к элементу поверхности черепа в соответствующей точке (разумеется, о вертикальной плоскости здесь говорится в

предположении, что тело дельфина расположено в горизонтальной плоскости, спинным плавником кверху). Взаимное расположение этой «искривленной» оси симметрии и винтовой поверхности, на которой располагаются границы черепа, схематически представлено на рис. 602.

Здесь линия с шагом ξ характеризует тот «винт», по которому закручены передние кости черепа. Другая же винтовая линия с шагом H изображает «осевую линию». На основании изложенного обе винтовые линии пересекаются под прямым углом.

Развернем на плоскости ту цилиндрическую поверхность, по которой проходят обе винтовые линии схемы. Тогда эти линии превратятся в две прямые, идущие под углом α и под углом β к продольной оси. Из известных простых геометрических соотношений между шагом каждой из линий, радиусом r цилиндрической поверхности и углами α и β легко найти

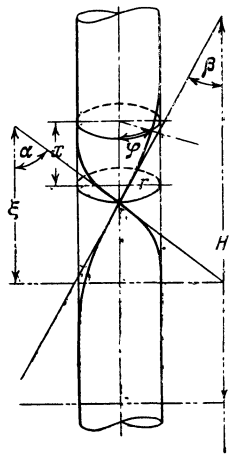


Рис. 602. Схема винтового движения

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{2\pi r}{\xi}, \quad \operatorname{tg}\beta = \frac{2\pi r}{H}. \tag{81}$$

Но условие ортогональности обеих линий требует, чтобы

$$\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta = 1. \tag{82}$$

Следовательно,

$$H = \frac{4\pi^2 r^2}{\xi}. \tag{83}$$

Допустим, что при перемещении на расстояние x вдоль тела линия симметрии сдвигается на угол φ в радианах (рис. 602). Тогда, как легко убедиться по рис. 602, между φ и x должна существовать простая связь

$$\varphi = 2\pi \frac{x}{H}. \tag{84}$$

Отсюда, на основании (83),

$$\varphi = \frac{x\xi}{2\pi r^2}, \tag{85}$$

или

$$\xi = 2\pi r^2 \left(\frac{\varphi}{x}\right). \tag{86}$$

На практике удобнее выражать φ не в радианах, а в градусах. Поэтому подставим в (86) выражение

$$\varphi = \varphi^\circ \frac{\pi}{180}.$$

Тогда окажется

$$\xi = \frac{2\pi^2}{180} r^2 \left(\frac{\varphi^\circ}{x}\right),$$

или, после подстановки чисел,

$$\xi = 0.11 r^2 \left(\frac{\varphi^\circ}{x}\right). \tag{87}$$

Итак, шаг винта, по которому «закручены» кости черепа, можно определить по формуле (87), измеряя описанным способом угол закручивания «осевой линии». Частное от деления этого угла на расстояние (вдоль тела) между соответствующими сечениями φ°/x можно назвать приведенным закручиванием черепа. По измерениям Лукьяновой, его можно в среднем полагать равным 1°,3 на сантиметр. Значительно менее надежны числовые значения радиуса r, ибо это — расстояние от соответствующего элемента черепа до оси тела дель-

фина. Однако без большой погрешности можно в среднем считать для края лобной кости над дыхательным отверстием $r = 8$ *см*.

Подстановка этих числовых данных в формулу (87) приводит к величине шага винта порядка 1 *м*, т. е. того же порядка, что и сама длина тела дельфина. Но ведь таким же шагом обладает и та винтовая линия, по которой изгибается хребет дельфина во время его движения (в предположении, что вдоль тела укладывается как раз одна длина волны). Направление нарезки также совпадает в обоих случаях (легко видеть, что нарезка на рис. 602 — левая и, очевидно, именно потому, что «осевая линия» закручивается вправо).

Как видим, простые промеры черепа дельфина приводят к некоторым любопытным элементам, характеризующим связь между кинематикой дельфина и его анатомией. Назначение асимметрии черепа дельфина и других зубатых китов перестало быть загадочным.

Еще более простые измерения, проделанные непосредственно над фотографией итальянского моряка (рис. 590), позволяют, правда очень грубо, определить дополнительно несколько элементов кинематики дельфина. Не рискуя сделать большую ошибку, можно принять длину тела дельфина равной 1 *м*. Тогда при таком масштабе фотографии окажется, что длина волн, бегущих по поверхности воды косыми рядами над дельфином, равна 14 *см*.

Пользуясь известным соотношением между периодом поверхностной волны и ее длиной, легко показать, что период 14-сантиметровых волн должен равняться примерно: $T = 0{,}3$ *сек*. Но ведь таков же должен быть, очевидно, и период твердой волны, бегущей по телу дельфина, другими словами, период оборота хвоста вокруг продольной оси. С другой стороны, есть основания полагать, что длина этой твердой волны совпадает с длиной тела, т. е. в данном случае ее можно принять равной 100 *см*. Исходя из этой цифры и вспоминая, чему равен период T, легко убедиться, что скорость движения твердой волны по телу дельфина должна быть около $c = 330$ *см/сек*. Порядок скорости поступательного движения самого тела в воде v можно также попытаться определить по рис. 590, замечая, чему равен угол между направлением движения и направлением косых рядов волн.

Действительно, перекос этих волн вызван сложением двух движений «волнового бугра» (по схеме рис. 597): вращения его вокруг продольной оси с линейной скоростью $\frac{2\pi A}{T}$ и отступания его в воде назад со скоростью $c - v$. Нетрудно видеть, что угол γ между гребнями волн и направлением движения дельфина должен удовлетворять условию

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{2\pi A}{(c - v)\,T}. \tag{88}$$

Исходя из пропорций рис. 590 и принимая во внимание найденную выше величину периода T, можно показать, что приблизительно

$$c - v = 100 \text{ см / сек},$$

откуда

$$v = 230 \text{ см / сек}.$$

Но тогда, следовательно, отношение скорости твердой волны к скорости поступательного движения дельфина будет

$$\frac{c}{v} = 1{,}43.$$

Любопытно сравнить найденную величину c/v с теми, которые были получены Шулейкиным для различных рыб. Именно c/v для акулы оказалось равным 1,9, для макрели — 1,81 и даже для угря (с наиболее совершенными кинематическими данными для движителя) равным 1,55.

Как видим, поднявшись на более высокую ступень эволюционной лестницы, дельфин приобрел и более совершенный движитель (отношение $c : v$ представляет собой хорошую кинематическую характеристику). К сожалению, в настоящее время трудно надеяться даже на самое примитивное освещение динамики дельфина (хотя бы по схеме, намеченной в цитированной работе [3] в области динамики рыбы), слишком велики поперечные размеры его тела по сравнению с амплитудами поперечных колебаний. Однако можно найти еще одну характеристическую величину, стоящую на грани кинематики и динамики: величину, с которой связана полезная работа дельфина за один период T. Эта величина — *приведенный шаг* дельфина (не смешивать с шагом винтовой линии, о котором говорилось выше).

Приведенным шагом в §2 была названа величина vT/L. Вспоминая, что по фотографии рис. 590 оказалось: $v = 230$ *см/сек*, $T = 0{,}3$ *сек* и $L = 100$ *см*, легко найти, что для дельфина приведенный шаг достигает примерно величины $\frac{vT}{L} = 0{,}69$. Для макрели он равнялся 0,45, для акулы —0,5 и даже для угря —0,57. Здесь снова сказалось преимущество дельфина перед рыбами: большая величина приведенного шага свидетельствует о том, что и *коэффициент полезного действия движителя* у него должен быть чрезвычайно высок.

§ 12. Внешняя форма головы дельфина и ее динамическое действие

Как мы только что видели, череп дельфина обладает резко выраженной асимметрией, назначение которой теперь стало совершенно ясным. Однако компенсация вредного вращающего момента создается ведь не самим черепом, а внешней лобной поверхностью головы дельфина. Вот почему вслед за измерениями над черепами В. С. Лукьянова произвела измерения над слепком головы дельфина.

С головы дельфина была снята гипсовая маска, вплоть до начала передних ластов. Маска эта была установлена на подъемном столике измерительного прибора, сконструированного Шулейкиным. Вид прибора изображен на рис. 603. Исследуемая маска окружена кольцом, по краю которого перемещается обойма измерительного штифта. Один конец последнего приводится в соприкосновение с маской так, как это изображено на схеме рис. 604, а другой конец несет карандаш, который можно прижимать острием к бумаге, наложенной на столе прибора, вокруг кольца. Перемещая обойму по краю кольца, вокруг маски, и касаясь последней штифтом, отмечают карандашом на бумаге соответствующие положения другого конца штифта (на схеме рис. 604, *а* через все такие точки проведена кривая). После этого поднимают столик с маской выше на несколько сантиметров и строят такую же кривую для нового положения маски; затем вновь поднимают столик, получают новую кривую на бумаге вокруг кольца и так до самого основания гипсового слепка.

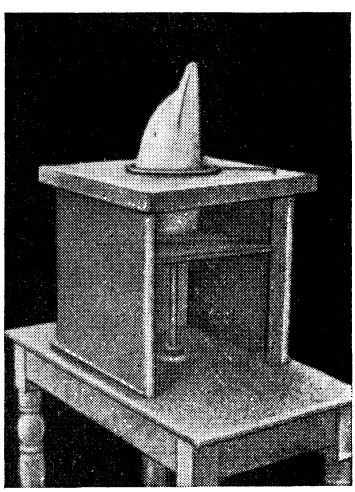


Рис. 603. Измерительный столик и гипсовая маска

Теперь остается лишь перейти к построению контуров поперечных сечений слепка головы. Для этого маска удаляется со столика, а внутрь кольца вставляется планшет с бумагой, предназначенной для нанесения контуров. Штифт перекидывается в положение, изображенное на

схеме рис. 604, *б*, острие располагают над точками кривых, полученными на бумаге вокруг кольца, а острием карандаша оставляют соответствующие следы на планшете внутри кольца. Так возникает на планшете целая система кривых (одна из которых изображена на схеме рис. 604, *б*), представляющих контуры различных поперечных сечений головы дельфина.

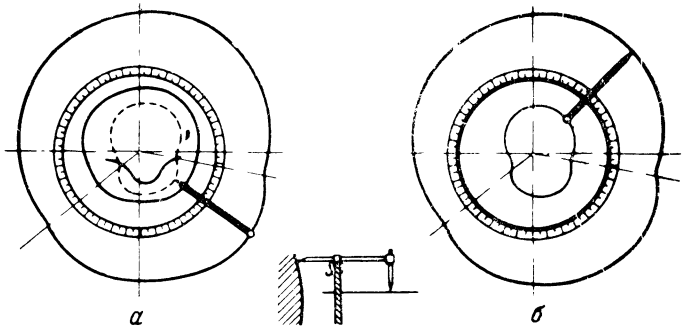


Рис. 604. Схема установки промерного острия

На рис. 605 воспроизведена эта система контуров, полученная для слепка с головы дельфина (вид спереди).

Как видно на рисунке, *внешнее* очертание головы дельфина не менее асимметрично, чем череп: все передние сечения сильно сдвинуты вбок по отношению к сечениям, лежащим сзади, и тем более сдвинуты, чем дальше вперед они выдаются. И теоретически, и экспериментально невозможно учесть величины тех моментов, которые возникают при стремительном движении «извивающегося» дельфина в естественных условиях: направление линий тока при сложном движении воды относительно всех сечений тела *не может* быть ни предвычислено, ни воспроизведено на жесткой модели. Несомненно лишь одно: резкая асимметрия головы должна при движении отклонить результирующую силу лобового сопротивления от продольной оси дельфина. Так как в процессе эволюции лобная кость, естественно, должна была приспособиться к восприятию давления *по нормали* к ней и так как эта кость оказывается оформленной по некоторой левой винтовой поверхности, то следует ожидать, что лобовое сопротивление отклоняется от оси именно в ту сторону, в которую должен действовать компенсирующий вращающий момент.

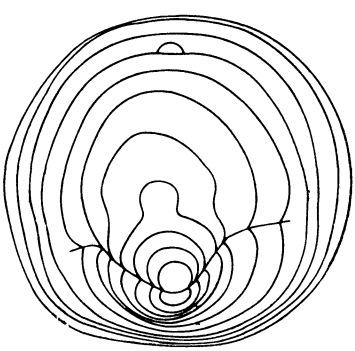


Рис. 605. Поперечные сечения головы дельфина

§ 13. Подтверждение гипотезы о движении дельфина

Гипотеза Шулейкина о поляризованной волне, бегущей по телу дельфина, кинематические соображения, вытекающие из нее, и данное им объяснение причины асимметрии головы зубатых китов были многими гидробиологами встречены более чем прохладно. Чрезвычайно курьезно, что среди противников этой физико-математической теории оказался даже гистолог Нархов, проделавший прекрасное исследование мускулатуры дельфина и обнаруживший, что при сокращении мышечных волокон хвост дельфина может не просто подниматься и опускаться, двигаясь в одной вертикальной плоско-

сти, а совершать одновременно движения в вертикальном и в горизонтальном направлениях. Не заметив этого косвенного подтверждения гипотезы Шулейкина, Нархов, по старому обычаю, полагает, что движение дельфина в воде вызывается быстрыми *ударами хвостового плавника* в вертикальном направлении, попеременно вверх и вниз.

Стоит отметить, что если бы сторонники этой точки зрения попытались вычислить, с какой скоростью должен вибрировать хвостовым плавником дельфин для достижения присущих ему скоростей поступательного движения, то пришли бы к выводу, что хвостовой плавник дельфина обязан был бы совершать *сотни* колебаний в секунду, а потому быстро движущийся дельфин должен был бы гудеть, как шмель.

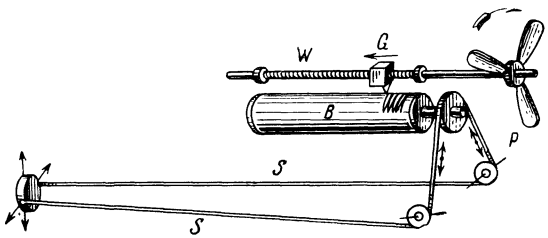


Рис. 606. Самописец И. И. Стася

Киносъемка движений дельфина на станке, описанная в § 9, представлялась многим гидробиологам неубедительной по той причине, что движения здесь происходили не в родной для дельфина водной среде, а в воздухе. Но скептикам надо заметить, что их доводы были бы вполне основательны только тогда, если бы дельфин стоял на значительно более высокой ступени психического развития. В действительности же инстинкт заставляет его работать мышцами по одной и той же схеме независимо от того, в водной или воздушной среде он очутился.

Насколько четко подчинены инстинкту движения дельфина, можно судить хотя бы по такому наблюдению: если каким-либо предметом удержать дельфина некоторое время на дне бассейна в неподвижном состоянии, то вскоре он ставит свой хвостовой плавник *наклонно*. Именно такое положение должен принимать хвостовой плавник *на ходу*, когда дельфину требуется выйти на поверхность моря для дыхания. Однако совершенно очевидно, что в только что описанном опыте, в «противоестественных» условиях, хвостовой плавник не мог уже играть роль руля глубины и дельфин неминуемо задохнулся бы, если бы его своевременно не отпустили на поверхность бассейна.

Но совершенно бесспорно, что все приведенные соображения лишь *косвенным* образом подтверждают гипотезу Шулейкина. Для *прямого* подтверждения ее необходимо как-то *зарегистрировать* движения тела дельфина во время его хода в море.

Такая непосредственная регистрация удалась И. И. Стасю, сконструировавшему легкий и надежный самописец, устанавливаемый на спине дельфина [10].

На рис. 606 воспроизведена схема этого остроумного прибора. Алюминиевый барабан B сидит на общей оси с блоком, который может поворачиваться вправо или влево в зависимости от натяжения шнуров $S - S$, проходящих по бокам дельфина. Задние концы этих шнуров прикреплены к кольцу, которое надевается на хвост дельфина, перед самым хвостовым плавником. Совершенно очевидно, что движения хвоста вверх и вниз не могут двигать барабан вокруг оси, так как натяжения обоих шнуров одинаковы. Напротив, движения хвоста в *горизонтальной* плоскости, *вправо* и *влево*,

непременно должны поворачивать барабан в соответствующую сторону благодаря воздействию шнуров.

Для *регистрации* этих движений над барабаном расположен параллельно его оси тонкий стержень W, снабженный мелкой винтовой нарезкой и присоединенный спереди к маленькому пропеллеру P. При движении дельфина в воде пропеллер вращается, вращает стержень W и заставляет тем самым перемещаться вдоль него гайку G. Гайка снабжена зубцом, препятствующим ее вращению вокруг оси, и острием, оставляющим след на провощенной бумаге, наложенной на барабан.

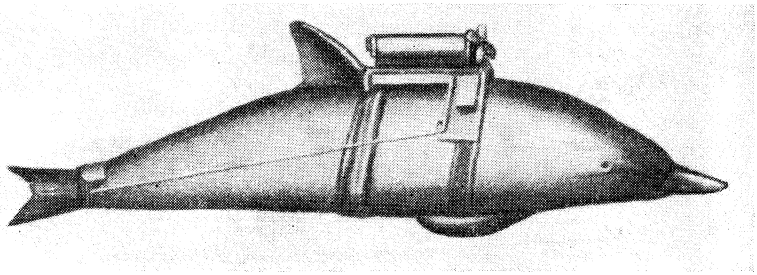


Рис. 607. Крепление прибора на спине дельфина

Самописец крепился на спине дельфина так, как изображено на рис. 607, заимствованном из той же статьи Стася. К мягкому поясу, облегающему тело дельфина, был прикреплен конец лаглиня, дававшего возможность дельфину пройти в море расстояние около 100 *м*. После этого дельфин был извлечен на палубу экспедиционного судна. Самописец был снят, вскрыт, и бумажная лента, покрытая воском, разрезана по образующей и извлечена для исследования.

Если бы старые взгляды гидробиологов соответствовали действительности, если бы дельфин перемещался в воде за счет вибраций хвоста в одном лишь *вертикальном* направлении, то барабан самописца не поворачивался бы вокруг своей оси и острие, движущееся вместе с гайкой над барабаном, прочертило бы на восковом слое *прямую* линию вдоль образующей (разумеется, изредка наблюдались бы все же повороты барабана, соответствующие только моментам *поворота курса* дельфина, моментам работы хвоста как *руля* направления).

В действительности Стась получил запись, воспроизводимую на рис. 608. Как видим, хвост дельфина *непрерывно совершает колебания в горизонтальном направлении*, помимо тех вертикальных колебаний, в существовании которых никто никогда не сомневался. Кроме этих непрерывных колебаний, совершающихся с большой частотой, на регистрации вышли те медленные повороты хвоста, которые соответствуют изменениям курса.

Итак, Стась совершенно отчетливо подтвердил кинематические предположения Шулейкина. Для полноты картины не хватало лишь данных для того, чтобы судить, каково отношение амплитуд горизонтальных колебаний к амплитудам колебаний вертикальных и каков сдвиг фаз между ними. Эти незарегистрированные элементы кинематики дельфина И. И. Стась получил во второй работе на ту же тему [11].

Самописец, о котором только что была речь, получил некоторые дополнительные детали. Параллельно оси барабана B, сбоку, могло двигаться вперед и назад второе острие, к которому крепился передний конец третьего шнура, проходящего вдоль спины дельфина. Задний конец этого шнура был присоединен к кольцу. Таким образом, при одновременном поступательном движении второго острия, вызванном *вертикальными* колебаниями хвоста, и

вращательных движениях барабана, вызванных по-прежнему *горизонтальными* колебаниями хвоста, на восковом слое прочерчивались своего рода *фигуры Лиссажу*. Стась обнаружил, что фигуры эти здесь являлись *эллипсами*, мало отличавшимися от окружности: отношение горизонтальных амплитуд к вертикальным равнялось примерно 1 : 1,5.

Итак, было доказано, что действительно дельфин движется в море благодаря непрерывному изгибанию тела в виде волн, бегущих от головы к хвосту и поляризованных по эллипсу (близкому к окружности).

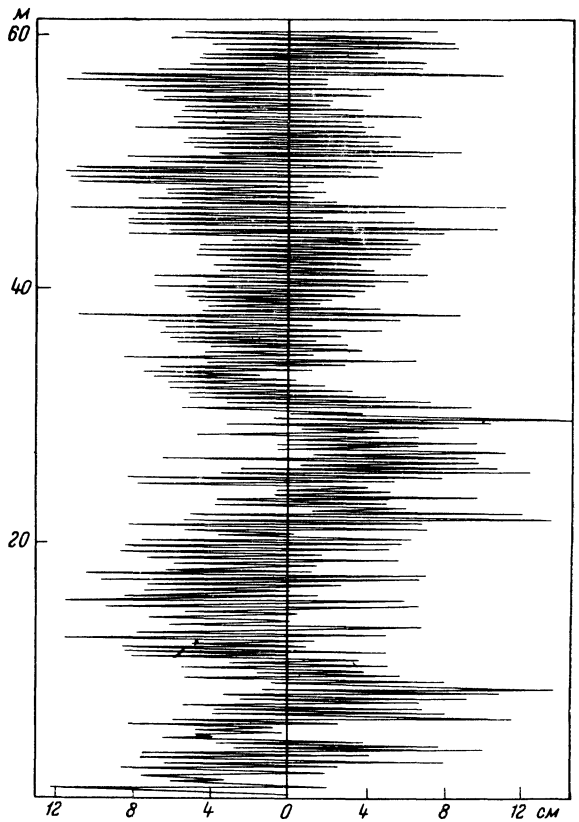


Рис. 608. Запись на восковом слое

Тем самым одновременно получила новое подкрепление и гипотеза Шулейкина о происхождении *асимметрии* головы зубатых китов, о которой говорилось в § 11 и 12; совершенно очевидно с материалистической точки зрения, что в процессе эволюции дельфин должен был приобрести этот *полезный* для него признак, избавляющий его от непрерывного поворачивания тела вокруг продольной оси. Приходится лишь удивляться, что до сих пор из биологической литературы не исчезли гипотезы, стоящие на противоположной, метафизической точке зрения. Авторы подобных гипотез договариваются до того, что асимметрия головы у зубатых китов возникла якобы вследствие утраты... обоняния (!) и что для предохранения дыхала дельфина от водяных брызг «чрезвычайно полезно существующее смещение дыхала *влево*». Спрашивается, какие метафизические соображения говорят о пользе *левого* смещения дыхала для дыхательного акта зубатых китов?

Справедливость требует отметить, что после получения И. И. Стасем документального подтверждения винтообразных движений тела дельфина

появились возражения, требующие ответа. Прежде всего, в иностранной литературе высказывалось предположение о том, что повороты барабана в самописце Стася могли происходить не вследствие появления горизонтальной составляющей колебаний, а только вследствие неодинакового натяжения тросов, шедших через блочки к хвосту животного. На это следует ответить, что Стась тщательно проверял всю кинематику своего механизма и до и после опытов, и никакие даже малые повороты барабана вокруг его оси никогда не возникали при натяжениях тросов вверх и вниз; повороты могли возникать только при появлении горизонтальных смещений хвостового конца относительно миделевого сечения тела дельфина. Серьезные возражения против гипотезы возникли при просмотре многочисленных киноснимков, произведенных французскими исследователями Ж. Кусто и другими в Средиземном и Красном морях с борта «Калипсо». На этих снимках не видно горизонтальных составляющих колебательного движения тел дельфинов. Но надо сказать, во-первых, что и вертикальные колебания там едва уловимы, хотя никто не сомневается в их существовании; а во-вторых, этот ценный материал киносъемок может, в крайнем случае, показать, что дельфин *не всегда* пользуется своими преимуществами перед рыбами: не всегда посылает по своему телу волну, поляризованную по эллипсу (с преобладанием вертикальной составляющей в 1,5 раза над горизонтальной, по последней работе Стася). Возможно, что это движение (винтовое) осуществляется им лишь при форсированном ходе, во время преследования добычи, или во время ухода от опасности (в связи с этим снова приходится вспомнить рис. 592 и 599, которые так же, как и регистрации Стася, *объективно* свидетельствуют о *возможности* винтообразных движений тела дельфина, который инстинктивно стремится уйти от возникшей опасности).

Во всяком случае, есть веские основания считать, что винтовые движения дельфин совершает перед выскакиванием из воды в воздух: наблюдения показывают, что дельфины, выскочившие из воды, заметно поворачиваются вокруг своей продольной оси и падают снова в воду — ложась несколько *набок*. Это понятно: ведь из воды прежде всего появляется голова дельфина, и на этой стадии броска́ перестает действовать *компенсатор* вредного момента, возникающего благодаря винтообразным колебаниям тела (перестает действовать асимметрия головы, прежде врезавшейся в воду и оказавшейся в воздушной среде, где она не может вызвать никакой компенсации). Такое явление не могло бы наблюдаться при наличии одних лишь вертикальных колебаний тела животного. Напомним, что и сама асимметрия черепа и внешних покровов головы зубатых китов была бы *вредным* признаком, если бы животные не пользовались этим признаком при винтообразной работе их движителя. В заключение этого обзора надо упомянуть, что недавно В. В. Меннер обнаружил интересные особенности черепов *ихтиозавров*, заставляющие пристально задуматься над тем же вопросом. Оказалось, что ихтиозавры, жившие в эпоху нижней юры (лейаса), обладали совершенно симметричными черепами; напротив, ихтиозавры верхней юры (мальма) приобрели резко выраженную асимметрию черепа. Значит, признак, отсутствовавший у тех же самых животных 150 млн. лет до нас, возник через 40 млн. лет у их наследников. Такое могло случиться лишь с *полезным* признаком, а уж никак не с признаком вредным.

§ 14. Динамика стаи

До сих пор мы говорили о движении одного объекта — рыбы, летучей рыбы, дельфина. Теперь перейдем к исследованию движения рыбьей стаи, к определению тех сил взаимодействия, которые возникают между отдельными рыбами во время их совместного движения в водной среде.

Первая работа в этом направлении была сделана Шулейкиным, причем толчком к ней послужило одно случайное наблюдение, сделанное им на Черноморской гидрофизической станции, но не над рыбами, а над птицами — над журавлями во время осеннего перелета. Птицы добрались до берега вечером и, видимо, на ночь не были склонны перелетать через море. Они смешались в беспорядочную стаю и долгое время так в беспорядке летели вдоль береговой черты.

При этом необычайно ярко проявились те пондеромоторные силы, которые возникли между ними; птиц резко бросало со стороны в сторону, заставляя отклоняться от курса то влево, то вправо и описывать какую-то зигзагообразную линию. Но эти броски тотчас же прекратились, как только стая журавлей построилась в характерный журавлиный «клин»; расположившись таким образом, птицы полетели совершенно спокойно, не мешая одна другой и двигаясь по прямой линии.

Сопоставляя птиц, движущихся в воздухе, и рыб, перемещающихся в воде, нетрудно прийти к выводу, что в обоих случаях должны возникать какие-то пондеромоторные силы и что при движении в более плотной среде — воде — следует ожидать более яркого проявления этих сил. Так как в настоящее время почти полностью отсутствуют наблюдения над косяками рыб, то приходится обратиться к наблюдениям, сделанным над стаями птиц (журавлей, гусей, уток и других), летящих правильным строем, «строем уступа». Орнитологи предлагали множество всевозможных гипотез для объяснения причины, заставляющей этих птиц лететь именно таким строем. Большинство этих гипотез исходило из предположения, что будто бы вожак стаи, летящий впереди, создает более легкие условия полета для птиц, следующих за ним, когда те держатся указанным строем. Однако Шулейкин показал, что причина здесь совсем не та и что в сущности в некоторых случаях передний член стаи испытывает меньшую силу противодействия, чем следующий за ним второй член стаи.

Для выяснения истинной причины Шулейкин определил те пондеромоторные силы, которые возникают между отдельными птицами или отдельными рыбами, входящими в стаю [12].

Оказалось, что задача решается здесь совершенно так же, как решалась в свое время задача о пондеромоторных силах, действующих между двумя шарами, движущимися в некоторой жидкости. А подобная задача интересовала весьма многих гидродинамиков, искавших аналогии между электродинамическим и гидродинамическим полями. Согласно теории, два шара с радиусами r_1 и r_2, движущиеся в жидкости плотности δ, со скоростями $\mathbf{V}_1$ и $\mathbf{V}_2$, и находящиеся в данный момент на расстоянии L один от другого, действуют друг на друга с силой [13]

$$f = \pi\delta \mathbf{V}_1 \mathbf{V}_2 \frac{r_1^3 r_2^3}{L^4} [\cos(\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2) - 3\cos(\mathbf{V}_1, \mathbf{L})\cos(\mathbf{V}_2, \mathbf{L})]. \qquad (89)$$

Здесь в качестве аргументов тригонометрических функций в круглых скобках стоят углы, образованные скоростями $\mathbf{V}_1$ и $\mathbf{V}_2$ между собой и с отрезком, соединяющим центры обоих шаров.

В частном случае, когда размеры обоих шаров одинаковы и когда они оба движутся с одинаковой скоростью v по одному направлению, формула (89) упрощается и принимает вид

$$f = \pi\delta v^2 \frac{r^6}{L^4}(1 - 3\cos^2\alpha). \qquad (90)$$

Здесь α — угол $(\mathbf{V}, \mathbf{L})$ между направлением скорости движения и продолжением радиус-вектора, проведенного от «заднего» шара к «переднему» (через их центры).

Но ведь из формулы (90) непосредственно вытекает, что при некотором определенном значении α сила f обращается в нуль, именно при

$$\alpha_0 = \arccos \sqrt{\frac{1}{3}}. \tag{91}$$

Отсюда следует, что при критической величине угла $\alpha_0 = 54°40'$ никаких сил взаимодействия между движущимися шарами не существует.

Если угол α больше критического, то правая часть уравнения (90) сохраняет положительный знак. Это значит, что между движущимися шарами действуют силы взаимного притяжения, достигающие (при постоянном расстоянии L) максимальной величины, когда $\alpha = 90°$, т. е. когда оба шара движутся по направлению, перпендикулярному к линии, соединяющей их центры (строем фронта). В данном случае, на основании (90),

$$f_1 = \pi\delta v^2 \frac{r^6}{L^4}. \tag{92}$$

Напротив, при значениях угла α, меньших критического, в правой части уравнения (90) появляется отрицательный знак, а это показывает, что шары взаимно отталкиваются. Наибольшая отталкивательная сила

$$f_2 = -2\pi\delta v^2 \frac{r^6}{L^4} \tag{93}$$

возникает в случае $\alpha = 0$, т. е. когда «задний» шар движется в точности вслед за «передним» (в кильватер).

Итак, для устранения сил взаимодействия, притягательных и отталкивательных, шары должны двигаться таким образом, чтобы линия, соединяющая их центры, составляла угол 54°40′ с направлением движения. Формула (91), которая получена как простое и естественное следствие теории, решает вопрос о выборе угла. Но решение это чисто формальное. Для того чтобы подвести под него физическое основание, Шулейкин рассматривает циркуляцию жидкости вокруг движущихся шаров, относя ее к системе координат, движущейся вместе с шарами.

В случае единственного шара картина получилась бы весьма простая. Как известно, вычисления линий тока приводят здесь к семейству кривых, которое в точности совпадает с семейством силовых линий магнитного диполя, с осью, направленной в сторону движения. Для двух движущихся шаров тоже можно было бы вычислить линии тока, но вычисления эти потребовали бы большого труда и времени. Значительно проще и изящнее решается задача путем использования обратной аналогии с двумя магнитными диполями, которыми мы можем мысленно заменить движущиеся шары. Для практического осуществления такой замены были взяты две телефонные трубки старого типа — с длинными подковообразными магнитами (точнее, камертонообразными). Эти трубки, схематически изображенные в плане на рис. 609, были очень удобны для экспериментов, ибо круглые деревянные оправы их позволяли как угодно ориентировать диполи, сохраняя постоянное расстояние между центрами: очень просто и удобно устанавливался каждый раз и потребный угол между магнитными осями и линией, проходящей через центры диполей. На рисунке видны отметки на краях трубки, совмещая которые можно было давать углу значения 80°, 54°40′ и 30°. Установив системы под одним из этих углов, экспериментатор помещал над диполями фотографическую пластинку, посыпал ее железными опилками и, получив магнитный спектр, фиксировал его теневое изображение на пластинке, зажигая под потолком лампочку. Уже при первом взгляде на полученные спектры стало видно, что силовое поле вокруг магнитных диполей, изображающих движущиеся шары, дробится на отдельные области, контуры которых легко могут быть обрисованы. Однако детальное изучение каждой

такой области удобнее производить не на самих оригинальных спектрах, а на схемах, более отчетливых и даже более правильных. Эти схемы строились путем тщательной копировки контуров всех упомянутых областей и последующей корректуры их для приведения спектра к идеальному тождеству обоих диполей. Подобного тождества в действительном спектре добиться весьма трудно: один из диполей неминуемо будет несколько сильнее другого. Но асимметрия поля весьма легко элиминируется посредством одной очень простой и надежной графической операции над спектрами, основанной на методе зеркальных изображений [12].

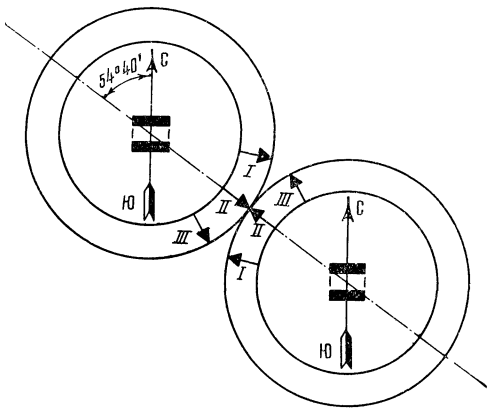


Рис. 609. Магнитные диполи

Корректированные схемы спектров для всех трех случаев ($\alpha = 80°$, 54°40′ и 30°) представлены на рис. 610, *а*, *б* и *в* соответственно. Как видим, на всех трех рисунках выступают характерные области поля, о которых была речь выше:

а) область, лежащая в центре картины, очерченная контурами в форме буквы S; она простирается от одного диполя к другому;

б) две небольшие области, примыкающие к первой, симметричные относительно нее и тесно связанные с каждым диполем в отдельности;

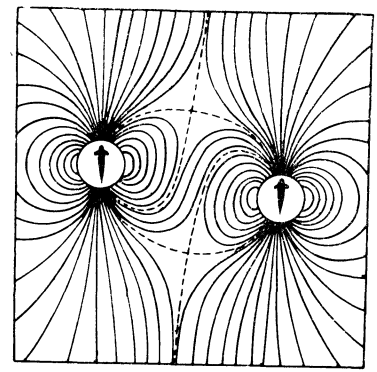
в) две большие области, очерченные дугообразными контурами, связанные каждая со своим диполем и соприкасающиеся между собой краями, асимптотически приближающимися друг к другу.

Можно отметить, что во внешних частях областей в), наиболее удаленных от соседнего диполя, силовые линии проходят примерно так, как они проходили бы и в случае отсутствия этого соседнего диполя.

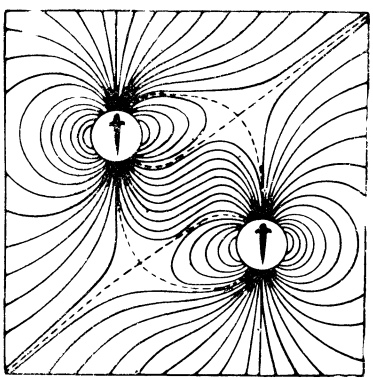
Если бы линии, нанесенные на схемы рис. 610, изображали силовые линии магнитного поля, возникающие вокруг двух диполей, то те из этих силовых линий, которые проходят внутри области а), должны были бы вызывать взаимное притяжение диполей. Напротив, силовые линии, лежащие в области в), вызывали бы отталкивание между диполями. Силовые линии, замыкающиеся сами на себя в области б), не давали бы никакого непосредственного эффекта, они напоминали бы нечто вроде соединительной ткани, проложенной между мышцами живого организма.

Так было бы в случае магнитного поля. Но на рис. 610 совершенно ясно всплывает причина, приводящая к обратной, а не к прямой аналогии между полем магнитным и полем гидродинамическим.

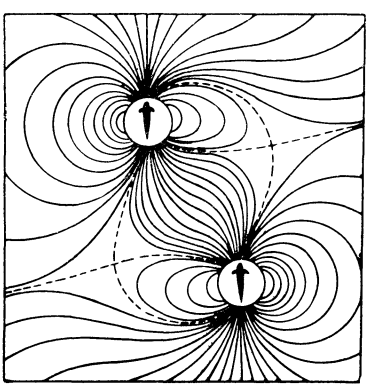
Ведь в случае, непосредственно интересующем нас, линии, нанесенные на чертежах, изображают не силовые линии магнитного поля, а линии тока вокруг движущихся шаров (внутри каждого для указания направления и ориентировки изображена движущаяся рыба). Но если это так, то совершенно очевидно, что струи, проходящие в пределах области а),



а



б



в

Рис. 610. Линии тока вокруг движущихся рыб

благодаря своей характерной изогнутости будут вызывать отталкивание шаров. Очевидно также, что струи, обтекающие вокруг шаров в пределах областей в), будут стремиться сблизить оба шара, давя на них соответственным образом.

В связи с этим любопытно проследить за борьбой сил отталкивания и притяжения при всех трех характерных взаимных расположениях движущихся шаров. Так, на рис. 610, *а* лишь очень ограниченное число линий тока проходит в области а). Эта область здесь выражена очень слабо; малы, следовательно, силы отталкивания, действующие между шарами. Напротив, область в) развита здесь очень сильно, а потому естественно ожидать наличия больших притягательных сил, вызванных давлением соответствующих дугообразных струй. В результате борьбы, естественно, победят силы притяжения — в полном согласии с формулой (90), которая в данном случае дает значение f, близкое к даваемому формулой (92).

Чрезвычайно интересно расположение линий тока на рис. 610, *б*, соответствующем критическому углу $\alpha_0 = 54°40'$. Именно, если мы исключим из рассмотрения немногочисленные линии тока, замыкающиеся на самих себя в области б), то окажется, что все остальные линии «внутренней» половины поля каждого шара (обращенной к соседнему шару), которые тоже замыкались бы на себя при отсутствии соседнего шара, здесь как бы рассечены пополам. Одна «прядь», образовавшаяся при этом, откинута к соседнему шару и присоединена к нему в области а); эта прядь вызывает отталкивание шаров. Вторая прядь откинута в сторону и расстилается вдоль линии раздела сфер влияния обоих шаров; она вызывает силы притяжения. По-видимому, действие обеих прядей взаимно вполне уравновешивается, благодаря чему результирующая сила взаимодействия обращается в нуль.

При угле, меньшем критического, линии тока располагаются так, как изображено на рис. 610, *в*. На нем область а) получает сильное развитие. Как видим, в нее завлекаются частично даже те линии тока, которые на рисунке проходили в области в). Вот почему в данном случае естественно ожидать победы сил отталкивания над силами притяжения — в полном согласии с формулой (90), которая при 30° приводит к значению, близкому к даваемому формулой (93).

Такова картина гидродинамического поля вокруг движущихся шаров. Примерно

такова же она должна быть и вокруг летящих журавлей или вокруг крупных рыб, движущихся близко одна к другой с большой скоростью. Различие заключается лишь в следующем: помимо основного поступательного движения, птицы совершают еще движения в вертикальном направлении, взмахивая крыльями и то поднимая, то опуская центр тяжести над основной траекторией. Аналогично рыбы совершают колебательные движения влево и вправо от курса по причинам, о которых говорилось выше. Само поступательное движение и у птиц и у рыб не является вполне равномерным, и характеризуется некоторыми колебаниями скорости в зависимости от фазы движения. К сожалению, детали всех этих вторичных явлений еще чрезвычайно мало изучены с количественной стороны.

В настоящее время можно только сказать, что для компенсации добавочных сил, возникающих между отдельными членами стаи (будь то птицы или рыбы), вследствие подобных осложнений центры тяжести их должны будут несколько сместиться с того расположения, которое гарантировало спокойный полет в исследованном простом случае чисто поступательного движения шаров.

Наличие только что отмеченных ускорений при полете птиц и при активном движении рыб заставляет упомянуть еще об одном обстоятельстве, которое не интересовало бы нас в случае простого равномерного поступательного движения.

Легко видеть, что все приведенные рассуждения относятся лишь к косякам крупной рыбы (и к стаям крупных птиц), ибо при уменьшении размеров сила уменьшалась бы пропорционально шестой степени этих размеров, если бы притом не изменялось расстояние между соседними особями. Так как последнее расстояние все же уменьшается, хотя и значительно медленней, чем размеры, то можно полагать, что в результате сила взаимодействия уменьшается пропорционально примерно четвертой степени размеров рыбы (или птицы). Вот почему крупные рыбы, идущие с большой скоростью (например, тунцы), придерживаются строя уступа, по свидетельству ряда наблюдателей, подобно тому, как крупные птицы всегда летят строем уступа, группируясь либо в клин, как журавли, либо в косую линию, как бакланы и гуси. Напротив, мелкие рыбы, так же как и мелкие птицы, могут *внутри* стаи строиться в хаотическом беспорядке, не мешая одна другой.

Однако совсем не хаотичным, не случайным, является расположение мелких рыб *на границах* стаи. По наблюдениям И. И. Месяцева и по свидетельству ряда рыбаков, стаи мелких рыб, как правило, принимают форму *капли*. Это замечательное обстоятельство станет совершенно понятным, если мы даже чисто качественно рассмотрим некоторое случайное отклонение от такой *обтекаемой* формы стаи.

Пусть форма почему-либо изменилась. Тогда, очевидно, внешние силы будут действовать на нее в таком направлении, что будут стремиться возвратить ее к форме, при которой внешние воздействия оказываются минимальными. Если от стаи отклонится вбок отдельная рыба, то стая будет *притягивать* ее, как большое тело, движущееся рядом с нею строем фронта (как некоторая большая рыба). В результате отделившаяся рыба будет вынуждена вернуться к стае.

§ 15. Опыты по динамике стаи

Формула (89), положенная Шулейкиным в основу теории движения стаи, в свою очередь базируется на предположении о потенциальном движении воды вокруг отдельных тел. Однако в природных условиях движение всегда сопровождается вихрями, возникающими в окружающей среде.

Вот почему представляет большой интерес экспериментальное исследование пондеромоторных сил, действительно возникающих между отдельными

движущимися объектами. Для сравнения с теорией в качестве таких объектов надо взять шары, а для сопоставления с шарами надо проделать аналогичные опыты с телами обтекаемой формы. Эксперименты над шарами и обтекаемыми телами были проделаны Шулейкиным и Стасем на Черноморской гидрофизической станции в той самой гидродинамической башне, которая была описана в § 12 (она служила, как помним, для определения гидродинамических качеств рыб). Черная доска, о которой там говорилось, была снята, и исследуемые тела были видны сквозь стекло, вставленное в железобетонной стенке башни. Для простоты и надежности шары подвешивались

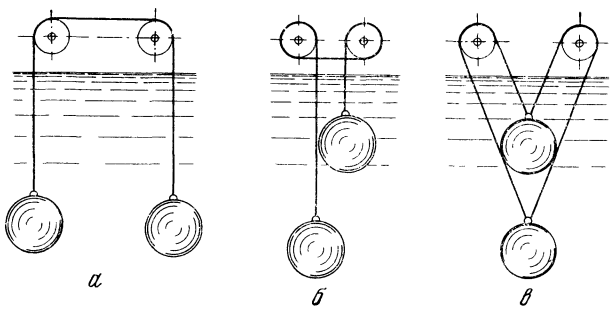


Рис. 611. Крепления шаров на нитях

на одной общей нити либо по схеме рис. 611, *а*, когда требовалось исследовать движение строем фронта, либо по схеме рис. 611, *б*, когда требовалось создать движение, близкое к строю в кильватер. Правда, можно было осуществить также и подвес по типу рис. 611, *в*, но, с одной стороны, схема рис. 611, *б* дала достаточно убедительные результаты для выяснения соответствующих условий движения, с другой стороны, применяя схему рис. 611, *в*, нельзя быть вполне уверенным в надежности спуска.

Сам спуск шаров происходил чрезвычайно просто: бритвой перерезалась нить, на которой они подвешивались. Во всех случаях, кроме соответствовавшего схеме рис. 611, *в*, наблюдался полный синхронизм в начале движения обоих шаров. Шары были взяты двух родов: два шара алюминиевых диаметром 61 *мм* и два шара стальных диаметром 85 *мм*.

Обтекаемые тела (тоже два) были выточены из алюминия по форме, изображенной на рис. 612. Первоначально они не были снабжены хвостовым оперением, но тогда они двигались устойчиво лишь на некотором участке пути, а затем поворачивались на 90° и начинали падать плашмя. Вот почему в верхнем конце их пришлось сделать четыре тонкие лопасти для обеспечения устойчивости движения (рис. 612).

Падающие тела фотографировались сквозь стекло киносъемочным аппаратом «Кинамо». По-прежнему для контроля времени служил хроноскоп с вращающейся стрелкой, подвешенный около окна башни. По-прежнему же оказалось, что киносъемочный аппарат давал в точности постоянную скорость вращения (25 кадров в секунду).

В отличие от случая, рассмотренного в § 12, теперь пришлось корректировать снимки на перспективное искажение (ибо тела падали не в плоскости реек, находящихся по бокам окна) и на преломлении луча при выходе из башни в воздух (на границах трех сред: воды, стекла и воздуха). Совершенно очевидно, что отклонение луча от первоначального направления будет таким же, как в случае непосредственного выхода из воды в воздух (соответственно значению показателя преломления $n = 0{,}752$).

На рис. 613 представлена схема, по которой вычислялась полная поправка высот. В точке O находится объектив киноаппарата. Отрезок AE лежит в пло-

скости окна (толщиной стекла пренебрегаем). Исследуемое тело в данный момент находится в точке B и падает по направлению BF.

Примем за начало отсчета истинных высот h горизонтальную плоскость, проходящую через прямую OF. Введем обозначения:

$$OE = L, \quad EA = z, \quad FB = h;$$
$$\angle MAO = \varphi, \quad \angle BAC = \psi, \quad EF = d.$$

Тогда, как видно из чертежа,

$$h = z + d\operatorname{tg}\psi.$$

Съемка производилась с такого расстояния, при котором углы φ и ψ были невелики, а потому отношение их тангенсов можно было считать

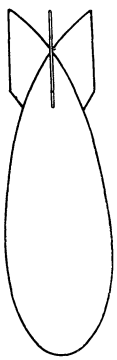


Рис. 612. Рыбообразное тело

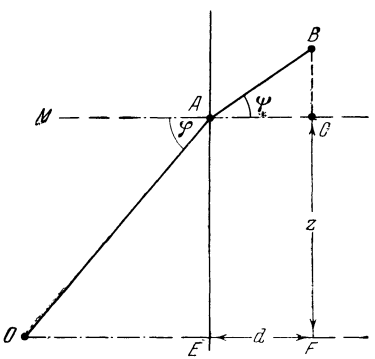


Рис. 613. Поправки на преломление луча

равным отношению их синусов. Но тогда на основании закона преломления

$$h \approx z + dn\operatorname{tg}\varphi = z + dn\frac{z}{L},$$

или окончательно

$$h = \left(1 + n\frac{d}{L}\right)z. \tag{94}$$

Формула (94) показывает, что для определения истинной скорости v падения тел надо лишь по-прежнему построить кривую $z = F(t)$, а потом, проведя касательные, умножить найденные производные от z по времени на постоянный поправочный множитель. Другими словами, надо исходить из простого соотношения

$$v = \left(1 + n\frac{d}{L}\right)\frac{dz}{dt}. \tag{95}$$

Так же просто вычислялось и истинное расстояние между телами по вертикальному направлению. Именно, если истинная высота одного из них над началом отсчета была h_1, а истинная высота другого равнялась h_2, то, как легко видеть,

$$h_1 - h_2 = (z_1 - z_2)\left(1 + n\frac{d}{L}\right). \tag{96}$$

Что касается истинного расстояния между телами в горизонтальном направлении b, то его можно было вычислять по совершенно аналогичной формуле

$$b = \xi\left(1 + n\frac{d}{L}\right), \tag{97}$$

где ξ — кажущееся расстояние, определяемое путем промера на снимках. Разумеется, приходилось следить за тем, чтобы тела находились в плоскости, перпендикулярной к оптической оси аппарата. О силах взаимодействия шаров, разумеется, нельзя было судить по каким-либо динамометрическим измерениям, а приходилось определять их по тем изменениям, которые вносились этими силами в закон движения шаров.

Вот почему сперва следует остановиться в двух словах на исследовании характера движения единственного шара, падающего в башне. Как помним при установившемся движении связь между установившейся скоростью и силами сопротивления определяется очень просто уравнениями (55) и (60). Совсем иначе обстоит дело на том начальном этапе, когда движение шара еще ускоренное и притом характеризующееся переменным ускорением (уменьшающимся с течением времени); помимо силы действующей и силы сопротивления, здесь вступают на сцену силы инерции самого шара и силы инерции присоединенной массы воды.

Пусть плотность шара равна δ_0, его объем Q, площадь экваториального сечения S, плотность воды δ_1. Тогда сила действующая должна равняться

$$Q(\delta_0 - \delta_1)g,$$

а сила инерции

$$Q\left(\delta_0 + \frac{\delta_1}{2}\right)\frac{d^2z}{dt^2},$$

ибо, как известно, при движении шара присоединенная масса равна половине массы воды, вытесненной им.

Сила сопротивления, на основании (55), выразится так:

$$k\delta_1 S\left(\frac{dz}{dt}\right)^2.$$

Подставив вместо Q и S их выражения через радиус r и приняв во внимание знаки перечисленных сил, дифференциальное уравнение падения единственного шара напишем после сокращений в виде

$$\frac{d^2z}{dt^2} + \frac{3}{4}\frac{k\delta_1}{r\left(\delta_0 + \frac{1}{2}\delta_1\right)}\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 - \left(\frac{\delta_0 - \delta_1}{\delta_0 + \frac{1}{2}\delta_1}\right)g = 0. \tag{98}$$

Введем для краткости обозначения:

$$\left(\frac{\delta_0 - \delta_1}{\delta_0 + \frac{1}{2}\delta_1}\right)g = g_1, \tag{99}$$

$$\frac{3}{4}\frac{k\delta_1}{r\left(\delta_0 + \frac{1}{2}\delta_1\right)} = \frac{g_1}{A^2}. \tag{100}$$

Тогда уравнение (98) приобретет более компактный вид

$$\frac{d^2z}{dt^2} + \frac{g_1}{A^2}\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 - g_1 = 0. \tag{101}$$

Общий интеграл этого уравнения может быть представлен в виде

$$z = \frac{A^2}{g_1}\ln\left(c_1 e^{g_1 t/A} + c_2\right). \tag{102}$$

Постоянные интегрирования c_1 и c_2 определяются на основании условий:

$$\text{при } t = 0 \quad \frac{dz}{dt} = 0 \text{ и при } t = \infty \quad \frac{dz}{dt} = A. \tag{103}$$

Продифференцировав (102) по времени и наложив условия (103), придем к выводу, что

$$z = \frac{A^2}{g_1} \ln\left(\operatorname{ch}\frac{g_1 t}{A}\right). \tag{104}$$

Опыт с единственным падающим шаром, проделанный в гидродинамической башне Черноморской гидрофизической станции, показал, что формула (104) очень хорошо выражает действительный закон падения алюминиевого шара в воде; на рис. 614 точки, полученные из опыта (путем промеров на кинокадрах), ложатся близко от теоретической кривой, вычисленной по формуле (104), в которой, применительно к данному частному случаю, числовое значение величин было таково: $g_1 = 520$ *см/сек*^{2}, $A = 210$ *см/сек*.

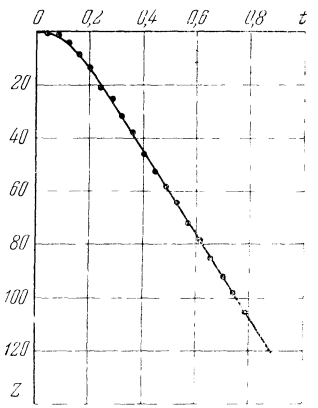


Рис. 614. Кривая падения

Рассмотрим теперь случай падения двух шаров, движущихся один за другим.

Если бы мы дополнили уравнение (98) новым членом, выражающим пондеромоторную силу отталкивания, то получили бы дифференциальное уравнение, которое никоим образом нельзя было бы проинтегрировать. Следовательно, для решения задачи надобно выбрать какой-то окольный путь, например следующий. Ведь если бы не существовало никаких взаимодействий между шарами, то каждый из них двигался бы вниз по закону (104), причем в каждый момент времени каждый из шаров находился бы в полном динамическом равновесии. Пондеромоторная сила отталкивания, возникшая при совместном движении, выводит оба шара из такого равновесия и заставляет их постепенно удаляться друг от друга. В результате передний шар должен несколько обгонять задний. В исследуемом практическом случае он обгоняет его совсем немного, а потому увеличение скорости переднего шара и уменьшение скорости заднего могут считаться весьма малыми по сравнению с абсолютными величинами самих скоростей.

Но если это так, то взаимное смещение обоих шаров мы можем исследовать, забыв о всех силах, кроме силы пондеромоторной и сил инерции, противодействующих смещению.

Пусть в некоторый начальный момент центры шаров находились на расстоянии ζ_0 друг от друга. В этот момент пондеромоторная сила выражалась формулой (93), в которой следует заменить L через ζ_0. Эта сила действует на шар с массой

$$\frac{4}{3}\pi\delta_0 r^3$$

и на присоединенную массу воды, равную $\frac{2}{3}\pi\delta_1 r^3$. Следовательно, начальное ускорение, создаваемое пондеромоторной силой, должно выражаться так:

$$j_0 = \frac{3}{2}\frac{\delta_1}{\left(\delta_0 + \frac{1}{2}\delta_1\right)}\frac{r^3 v^2}{\zeta_0^4}. \tag{105}$$

По мере того как шары будут удаляться один от другого, и пондеромоторная сила и ускорение, создаваемое ею, будут непрерывно уменьшаться по закону

$$\frac{d^2\zeta_1}{dt^2} = \frac{j_0\zeta_0^4}{\zeta^4} = \frac{B}{\zeta^4}. \tag{106}$$

Умножая обе части равенства на $d\zeta/dt$ и интегрируя, найдем

$$\frac{d\zeta}{dt} = \sqrt{D - \frac{2}{3}\frac{B}{\zeta^3}}. \tag{107}$$

Но постоянная интегрирования D определится из условий

$$\text{при } \zeta = \zeta_0 \quad \frac{d\zeta}{dt} = 0.$$

Окончательно, разделив переменные, можно будет написать

$$dt = \left(\frac{\delta_0}{\delta_1} + \frac{1}{2}\right)^{1/2} \left(\frac{\zeta_0}{r}\right)^{3/2} \frac{1}{v}\left[1 - \left(\frac{\zeta_0}{\zeta}\right)^3\right]^{-1/2} d\zeta. \tag{108}$$

Тщательные промеры кинокадров позволили определить числовые значения элементов, входящих в формулу (108). Решение упростилось благодаря тому, что скорость v, входящую в формулу (108), оказалось возможным считать постоянной, ибо на некотором этапе до достижения этой скорости силы

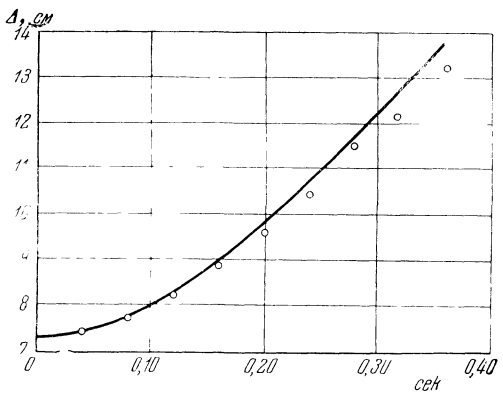


Рис. 615. Кривая смещений шаров

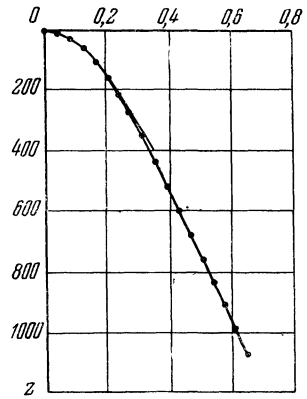


Рис. 616. Кривые падения для двух шаров

взаимодействия были весьма малы, а последующее нарастание скорости (приближение к установившемуся значению) шло весьма плавно.

В результате было выполнено графическое интегрирование выражения

$$t = 0{,}0361 \int_0^{\zeta} \frac{d\zeta}{\sqrt{1 - \left(\frac{7{,}2}{\zeta}\right)^3}}. \tag{109}$$

полученного из (108) после подстановки числовых величин. Интегрирование привело к теоретической кривой, изображенной на рис. 615. По такому закону должны смещаться шары в направлении друг от друга. Действительное поведение двух шаров, падающих в башне, подтвердило теоретические предположения. Кривые падения для них были такие, как на рис. 616, где они проведены из одной общей исходной точки для удобства сопоставления. Как видим, задний шар действительно отстает от переднего, следовательно, опровергается ходячее мнение, что вожаку стаи труднее двигаться, чем следующему за ним члену стаи; в действительности стая помогала бы ему двигаться, отталкивая его вперед, если бы она двигалась в кильватер или близко к кильватерному строю.

Отклонения шаров, вызванные отталкивательными силами, можно было бы определить, сопоставляя обе кривые рис. 616 с кривой рис. 614, полу-

ченной для единственного падающего шара, и определяя разности соответствующих ординат. Однако, как всегда, определение малых разностей двух больших величин не может считаться надежным. Поэтому удобнее поступить иначе: измерить на кадрах непосредственно расстояния между обоими шарами в различные моменты времени и считать смещение каждого шара в каждый данный момент равным

$$\Delta\zeta = \frac{\zeta - \zeta_0}{2}. \qquad (110)$$

Результаты подобных измерений нанесены точками на диаграмму рис. 615. Как видим, опытные данные лишь немного отличаются от вычисленных теоретически по формуле (109). Точки лежат несколько ниже кривой, и это показывает, что при движении двух шаров в воде (движение, сопровождающееся вихрями) пондеромоторные силы отталкивания достигают величин, несколько меньших, чем теоретические, вычисленные в предположении потенциальных течений.

Все сказанное относится к случаю движения в кильватер. Опыты с движением шаров строем фронта привели к совершенно иным результатам. Именно, оказалось, что образование вихрей, сопутствующих движению, в данном случае вызывает резкие отклонения от теории, базировавшейся на гипотезе о ламинарном потоке.

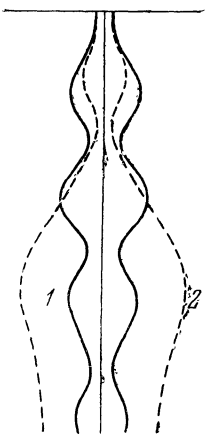


Рис. 617. Падение строем фронта

Для примера на рис. 617 воспроизведена диаграмма, изображающая два случая падения шаров строем фронта. Они отличаются друг от друга величинами масс обоих шаров, а стало быть, и величинами скоростей падения их в воде. Шары были полые, алюминиевые; внутрь полости можно было помещать латунные грузы различной массы (разумеется, для каждого опыта массы грузов в обоих шарах выбирались равными между собой).

Две сплошные кривые *1* соответствуют наименьшей массе падающих шаров и наименьшей скорости падения; две пунктирные кривые *2* — наибольшей массе и наибольшей скорости падения. Для отчетливости масштаб поперечных смещений шаров взят на диаграмме более крупным, по сравнению с масштабом вертикальных их перемещений, при падении в башне.

Как видим, шары, падающие строем фронта, попеременно то отталкиваются, то притягиваются между собой, описывая любопытные волнистые линии. Сравнение кривых *1* с кривыми *2* показывает далее, что «длина волны», вычерчиваемой каждым шаром, уменьшается вместе с уменьшением массы шара и рейнольдсова числа.

Опыты в башне позволяли охватить только ограниченный диапазон рейнольдсовых чисел, так как при слишком больших расхождениях шаров нельзя было ручаться за отсутствие вредных влияний стенок башни. Поэтому опыты были перенесены на море. Большие стальные шары (диаметр 9 *см*) сбрасывались попарно, строем фронта, с кормы шлюпки и во время падения фотографировались сверху, сквозь воду, киноаппаратом. Обнаружилось, что при значении рейнольдсова числа около $5 \cdot 10^5$ шары всегда резко отталкивались и не проявляли никаких тенденций притянуться на всем протяжении процесса, непрерывно удаляясь один от другого [14].

Весьма замечательно, что пондеромоторные силы при этих опытах проявляли себя на громадных расстояниях — *свыше метра* между центрами. Наличие *отталкивательных* сил, вместо ожидаемых сил притяжения между шарами, долго оставалось непонятным. Впервые это интересное явление было объяснено в работе Н. Н. Патарая, которому удалось подойти к исследова-

нию и с аналитической и с экспериментальной стороны. Патарая показал, что, изучая падение больших шаров, нельзя ограничиться теми членами уравнений гидромеханики, с какими обычно имеют дело при исследовании совместного движения двух тел в жидкости. Решающую роль здесь играют члены, содержащие не скорости движения, а *ускорения*,— по крайней мере на некоторых этапах пути. Именно наличие ускорений вызывает отталкивание шаров друг от друга. Свое теоретическое исследование Патарая подкрепил искусно поставленными опытами. Два шара, погруженные в воду, двигались строем фронта, с заданным ускорением, в длинном канале. Опыты подтвердили наличие сил отталкивания, действующих на шары в таких условиях [15].

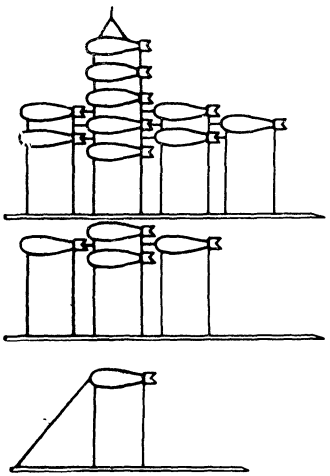


Рис. 618. Модель стаи

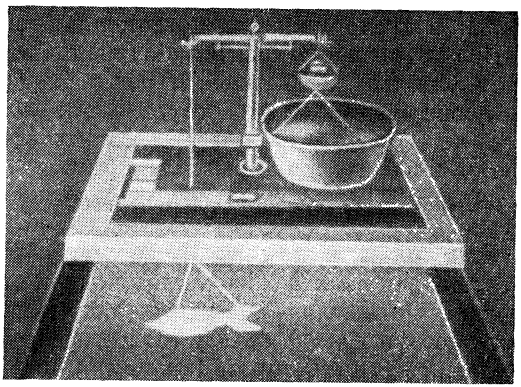


Рис. 619. Опыты И. И. Стася

Тела обтекаемой формы были исследованы И. И. Стасем в той же опытовой башне, в которой он работал с шарами и рыбами. Хотя применительно к таким телам нельзя было точно вычислить присоединенную массу, но можно было установить, что движение шло в согласии с формулой (108), в которой вместо $^1/_2$ в круглых скобках, разумеется, стояла другая величина. Вместо формулы (109) возникала аналогичная, причем интегрирование велось в пределах от $\zeta = \zeta_0$ до $\zeta = 2r$, другими словами, определялся промежуток времени, необходимый для того, чтобы оба тела, притянувшись, ударились друг о друга.

Хорошее совпадение с теорией получилось и в опыте с движением двух обтекаемых тел строем уступа: при значении угла α, близком к критическому (54°40′), никаких взаимных смещений тел при этом не наблюдалось. Разумеется, обстановка опыта не позволила вполне строго проверить теорию в данном случае: при углах, близких к критическому, пондеромоторные силы весьма малы, а потому и смещения, сколько-нибудь заметные, могли бы проявиться лишь на очень большом пути, а не на пути в два с небольшим метра, осуществленном в башне.

Во всяком случае, результаты опытов следует признать положительными: к реальным телам, движущимся в воде, можно применять те формулы для вычисления сил взаимодействия, которые были выведены в предыдущем параграфе. Остается еще отметить результаты экспериментов, проделанных Стасем над макетом стаи *мелких рыб*, о которых говорилось в конце § 14. Эти опыты велись в лотке, через который с различными скоростями пропускалась

вода. «Стая» составлялась из тел обтекаемой формы (типа рис. 618), укрепленных на проволочках с таким расчетом, чтобы при самых больших доступных скоростях потока они оставались на постоянном расстоянии одно от другого. Длина каждого из них была 15 *см*, диаметр 5 *см*.

Одно из тел подвешивалось на проволоке к коромыслу технохимических весов (рис. 619) на том или ином расстоянии от «стаи». При протекании воды «стая» притягивала «отбившуюся рыбу» с силой, которую легко было измерить, уравновешивая ее соответствующей навеской, положенной на чашку весов с другого конца коромысла. Для гашения вибраций, которые могли бы возникнуть, к той же чашке подвешивалось подобное же тело, погруженное в кювету с водой в качестве демпфера

На рис. 620, заимствованном из той же работы, воспроизведены две кривые, показывающие, как изменяется пондеромоторная сила притяжения «рыбы» к «стае» из десяти «рыб» при изменении расстояния от «рыбы» до края «стаи». Верхняя кривая соответствует скорости движения, равной 37 *см/сек*, а нижняя — скорости 18,5 *см/сек*. По оси ординат проставлены величины сил притяжения (в граммах), а по оси абсцисс — расстояния (в сантиметрах).

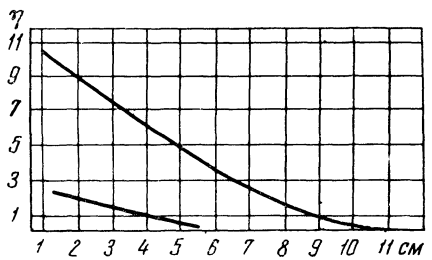


Рис. 620. Силы притяжения к «стае»

Как видно на рисунке, силы взаимодействия были совсем немалые, даже при скоростях, значительно меньших, чем встречающиеся в природе. Следовательно, экспериментально было доказано, что рыбы, отбившиеся от стаи, должны ощущать *значительную* силу притяжения к стае, которая, по всей вероятности, мешает им спокойно двигаться вперед. Поэтому-то рыба инстинктивно должна искать то положение относительно стаи, при котором эта мешающая сила будет сведена до минимума. По всей вероятности, наилучшая компенсация получается тогда, когда все периферийные члены стаи располагаются на хорошо обтекаемой («кометообразной» или, точнее, «каплеобразной») поверхности.

В заключение отметим, что многочисленные наблюдения рыбопромысловой разведки на различных морях к настоящему времени вполне подтвердили теоретические соображения, высказанные в § 14: и тунцы, и дельфины, идущие косяками с большой скоростью, движутся всегда *строем уступа* по типу рис. 610, *б*. Тем же строем движутся и пеламиды, когда они мигрируют с особенно большими скоростями.

§ 16. Сравнительная динамика водных животных

В §7 изложены результаты исследований гидродинамических качеств рыб и дельфина, проделанных в сравнительно небольшом диапазоне рейнольдсовых чисел. В работе [7] отмечалось, что в этом диапазоне есть основания полагать максимальную скорость, доступную рыбе, пропорциональной корню кубичному из линейных размеров ее тела. В настоящем параграфе рассмотрим специально вопрос о *максимальных скоростях*, с которыми могут двигаться водные животные *всех существующих размеров*, и вопрос *энергетический*, неразрывно связанный с первым.

В отличие от водных животных, всем *наземным* животным должна быть присуща *одна и та же* максимальная скорость, начиная от прыжка кузнечика и кончая прыжком кенгуру: ведь бегущее или прыгающее животное вынуждено затрачивать работу на периодические смещения своего центра тяжести в вертикальном направлении и преодолевать при этом силы, пропорцио-

нальные массе тела. Мышечный аппарат, преодолевающий эти силы, обязан возрастать пропорционально возрастающим силам, но тем самым неизбежно вызывается и возрастание массы тела. В результате максимальная доступная скорость оказывается не зависящей от линейных размеров тела наземного животного. Легко видеть, что *водные* животные движутся в совсем иных условиях: им приходится преодолевать силы сопротивления водной среды, пропорциональные *площади* поперечного сечения (следовательно, пропорциональные квадрату линейных размеров), в то время как масса мышц, заключающая в себе энергетические ресурсы, возрастает пропорционально *объему* тела (иными словами, пропорционально кубу линейных размеров тела). С другой стороны, есть основания полагать, что каждый грамм мышечного вещества может развить совершенно определенную максимальную мощность, которая практически едва ли сильно меняется при переходе от мелких животных к крупным. Насколько близко к действительности подобное предположение, будет видно ниже. Пока же отметим, что именно, исходя из этой гипотезы и из только что приведенных степенных зависимостей, В. В. Шулейкин, В. С. Лукьянова и И. И. Стась [16] пришли к выводу о простой связи между линейными размерами тела и максимальными скоростями водных животных: к зависимости, существующей, как было уже отмечено, на очень ограниченном этапе изменения рейнольдсовых чисел.

Обобщим теперь эти соотношения на случай каких угодно значений рейнольдсовых чисел, встречающихся в природных условиях. При этом удастся объединить элементы динамики рыб (взрослых и мальков) с элементами динамики *китов* и с элементами динамики *одноклеточных* жгутиковых.

На одном из промежуточных этапов мы встретимся с маленькими веслоногими рачками — представителями *планктона* и обнаружим некоторые причины, позволившие этим организмам отвоевать для себя (в борьбе за существование) соответствующую область в природе.

Воспроизведем здесь теоретический анализ, проделанный Шулейкиным на основе экспериментальных измерений Лукьяновой и Стася.

Вместо характеристического коэффициента сопротивления N, который прямо связывался с основными линейными размерами тела рыбы в § 7, теперь будет удобнее пользоваться безразмерным коэффициентом ψ, обычно принятым в экспериментальной гидродинамике и связанным, как известно, с силой f, сопротивляющейся движению, скоростью v этого движения, площадью наибольшего поперечного сечения S' и плотностью среды, в которой происходит движение, δ. Именно

$$\psi = \frac{2f}{\delta S' v^2}.$$

Прежде всего было произведено экспериментальное исследование изменений этого безразмерного коэффициента при изменениях рейнольдсова числа $R = \frac{dv}{\nu}$ в очень широких пределах. (Напомним, что через ν здесь обозначена кинематическая вязкость среды, в которой происходит движение, а в качестве d мы будем подразумевать наибольший поперечный линейный размер тела животного.)

В отличие от работы [7] рыбы были выбраны теперь лишь из числа тех, которые обладают наиболее обтекаемой формой. Измерения, соответствовавшие особо большим рейнольдсовым числам (свыше 10^5), проводились над специально построенной моделью рыбы, деревянной, позволявшей удобно менять свинцовые грузы, нисколько не меняя наружных очертаний тела. При самых малых значениях рейнольдсова числа, имеющих теоретический и практический интерес (порядка 10^{-1}), объектами служили металлические модельки (алюминиевая, латунная и свинцовая), падавшие в касторовом масле. Для лучшего контроля над точностью выполнения эти модельки были

изготовлены с совершенно круглым поперечным сечением (а не с эллиптическим, характерным для большинства рыб). Поэтому на основе отрезка кривой, полученного для моделек (обозначенного номером *5* на диаграмме рис. 621), пришлось строить соответствующий отрезок искомой характеристической кривой путем графической экстраполяции.

Сама искомая характеристическая кривая, полученная на основе непосредственных измерений над рыбами, измерений над большой моделью и упомянутой экстраполяции, нанесена на рис. 621 под номером *1* (сплошная кривая). Для сравнения на рисунке представлены еще четыре характеристические кривые, соответствующие движению шара (*2*), круглого цилиндра (*3*), для которого сила сопротивления отнесена к длине, равной диаметру цилиндра, с сечением обтекаемой формы применительно к той же длине (*7*), и идеально обтекаемого тела, длина которого втрое превышает диаметр наибольшего сечения (*6*). Эти четыре кривые заимствованы из физического справочника, где они были воспроизведены по данным ряда экспериментаторов [17].

Как видим, преимущество «обтекаемой» формы тела рыбы перед шарообразной начинает сказываться только после значения рейнольдсова числа около 10^4. Не потому ли тихоходные рыбы, медленно перемещающиеся между водорослями, приобрели в процессе эволюции форму, именно ближе напоминающую шар?

Над кривой *1*, соответствующей рыбам и китам рыбообразной формы, на рис. 621 видна еще кривая *4*, характеризующая коэффициент сопротивления веслоногих рачков (*Paracalanus, Centropages*). Эта кривая получена на основании опытов В. С. Лукьяновой. Опыты были проведены над моделями тел, исполненными в сильно увеличенном масштабе, а потому для осуществления закона подобия рейнольдсово число доводилось до нормы путем замены морской воды весьма вязким концентрированным раствором сахара.

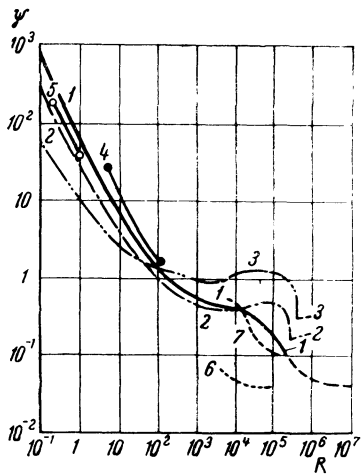


Рис. 621. Характеристические кривые

После того как были получены характеристические кривые для рыбообразных тел (*1*) и планктонных рачков (*4*), оказалось возможным проследить за сравнительной динамикой морских животных значительно шире, чем делалось в начале наших исследований.

Легко видеть, что мощность, потребная для преодоления силы f сопротивления воды, выразится так:

$$W_v = \frac{1}{2}\psi\delta S v^3. \qquad (111)$$

Допустим, что коэффициент полезного действия движителя рыбы равен $\eta_{дв}$ и что масса M ее тела выражена через площадь S наибольшего поперечного сечения, через длину L тела и некоторую осредненную плотность тела δ, практически чрезвычайно близкую к плотности воды:

$$M = \beta_1 \delta S L. \qquad (112)$$

Тогда мощность, затрачиваемая мышцами на преодолевание внешних сил, отнесенная к 1 *г* массы тела, будет

$$w_v = \frac{\psi}{2}\frac{v^3}{\beta_1 \eta_{дв} L}. \qquad (113)$$

Помимо нее некоторая энергия должна затрачиваться на преодолевание внутреннего трения в самом мышечном веществе. Если через σ мы обозначим относительную деформацию мышцы, т. е. изменение длины одного погонного сантиметра мышечного волокна, то работа трения внутри грамма мышц при элементарной деформации $d\sigma$ будет, вообще говоря, выражаться так:

$$dP = \frac{\mu_m}{\delta_m} \frac{\partial \sigma}{\partial t} d\sigma, \tag{114}$$

где μ_m — коэффициент трения мышцы, δ_m — ее плотность. Но закон колебаний σ во времени был найден для рыбы В. В. Шулейкиным [3], как об этом уже говорилось в § 5. Теперь, в отличие от прежней редакции соотношений, полученных этим автором, придется внести уточнение, касающееся осредненной амплитуды $\overline{A}$ поперечных колебаний: следует считать эту амплитуду зависящей от *скорости* движения рыбы в воде.

Ввиду отсутствия точных сведений о подобной зависимости выразим эту связь приближенной формулой, заимствованной из новой работы того же автора [18, 19]:

$$\frac{\overline{A}}{\lambda} = \beta_5 \frac{v}{L}, \tag{115}$$

в которой все символы имеют прежнее значение, кроме нового коэффициента β_5, вошедшего сюда и нуждающегося в определении из опытов, — в совокупности с другими аналогичными коэффициентами, встречавшимися в работе Шулейкина [3]. В частности, там было принято, что так называемый приведенный шаг можно считать постоянным $\left(\frac{vT}{L} = \beta_3\right)$ и что постоянным же можно считать отношение $\frac{\overline{b}}{\lambda} = \beta_4$. При таких условиях в новой работе [18] было записано уточненное выражение для мощности, теряемой каждым граммом на внутреннее трение в мышцах:

$$w_r = 2\pi^2 (4\pi^2 + \Delta^2)^2 \frac{\beta_4 \beta_5^2}{\beta_3^2} \nu_1 \left(\frac{v}{L}\right)^4. \tag{116}$$

Исходя из оставшегося неизменным выражения (113) и нового выражения (116), Шулейкин записывает новое выражение для *максимальной* удельной мощности $w_{\text{макс}}$, затрачиваемой на преодолевание всех внешних и внутренних сопротивлений при движении с максимальной доступной скоростью $v_{\text{макс}}$:

$$w_{\text{макс}} = \frac{\psi}{2} \frac{v_{\text{макс}}^3}{\beta_1 \eta_{\text{дв}} L} + 2\pi^2 (4\pi^2 + \Delta^2)^2 \frac{\beta_4 \beta_5^2}{\beta_3^2} \nu_1 \left(\frac{v_{\text{макс}}}{L}\right)^4. \tag{117}$$

Подчеркнем, что $\eta_{\text{дв}}$ обозначает коэффициент полезного действия *движителя* рыбы, каковым является все ее тело, изгибающееся по законам, о которых говорилось в первых параграфах настоящей главы.

В этом новом соотношении, так же как и в старом, скрыта связь между *длиной тела* рыбы или иного животного, движущегося посредством волнообразных изгибаний тела, и *максимальной скоростью*, доступной ему при условии, что каждый грамм мышечного вещества может развить одну и ту же совершенно определенную мощность независимо от того, какому животному принадлежит это мышечное вещество. Эта единственная *гипотеза*, высказанная Шулейкиным, подтвердилась даже в старой редакции его работы совместной с В. С. Лукьяновой и И. И. Стасем: теоретическая кривая, построенная *по двум* лишь экспериментальным точкам (для малька кефали длиной 1,4 *см* и для большого кита-сейвала длиной 1700 *см*), прошла очень близко к экспериментальным точкам, полученным для рыб различной длины; мало

того, после выхода в свет цитированной старой работы трех авторов В. П. Парибок и С. Д. Заугольников показали [20], что экстраполяция той же самой теоретической кривой далеко в сторону микроорганизмов дает совершенно правильную величину скорости для *жгутиковой инфузории* (Flagellata). Между тем длина этой инфузории примерно в *миллион раз* меньше, чем длина сейвала, которым завершается теоретическая кривая на противоположном конце.

Для построения уточненной кривой, по работе Шулейкина [18, 19], перепишем (117) в иной форме:

$$w_{\text{макс}} = M\frac{v_{\text{макс}}}{L}\psi v^2_{\text{макс}} + N\left(\frac{v_{\text{макс}}}{L}\right)^4. \qquad (118)$$

Коэффициент M определяется путем сопоставления (118) с (117) после подстановки наиболее вероятных числовых значений $\beta_1 \approx 0{,}67$ и $\eta_{\text{дв}} \approx 0{,}75$. В результате оказывается, что $M \approx 1{,}0$.

Прежде чем определять второй коэффициент N, необходимо отметить, что при очень больших значениях L второй член в формуле (118) становится пренебрежимо малым по сравнению с первым. Следовательно, зная, что большой кит — сейвал — при $L = 1700$ *см* развивает максимальную скорость $v_{\text{макс}} = 1500$ *см/сек*, и учитывая, что при соответствующем значении критерия Рейнольдса $\psi = 0{,}04$, можно вычислить максимальную мощность, которую способны развить мышцы при движении с максимальной скоростью [коэффициент M в первом члене формулы (118) уже известен].

Было бы естественно относить эту мощность (и мощность, теряемую на внутреннее трение в мышцах) к единице массы мышц, но придется следовать установившемуся обычаю — относить ее к единице массы всего тела. После подстановки чисел окажется

$$w_{\text{макс}} = 7{,}9\cdot 10^4\ \textit{эрг/г}\cdot\textit{сек} = 7{,}9\ \textit{вт/кг}. \qquad (119)$$

По-прежнему предположим, что максимальная удельная мощность сохраняет свое значение при всех размерах китов и рыб и даже при размерах жгутиковых инфузорий. На противоположном конце кривой, при очень малых значениях L, первый член в (118) становится пренебрежимо малым по сравнению со вторым. Следовательно, уже при размерах порядка $L = 1$ *см* можно полагать

$$w_{\text{макс}} = N\left(\frac{v_{\text{макс}}}{L}\right)^4.$$

Для вычисления коэффициента N по вытекающей отсюда формуле

$$N = w_{\text{макс}}\left(\frac{L}{v_{\text{макс}}}\right)^4 \qquad (120)$$

воспользуемся найденным значением $w_{\text{макс}}$ и измеренной максимальной скоростью $v_{\text{макс}} = 30$ *см/сек* мальков кефали, длина которых была $L = 1{,}2$ *см*. Получим $N = 0{,}202$.

Соотношения (120) и (119) дают возможность просто выразить зависимость между $v_{\text{макс}}$ и L применительно к очень малым и к очень большим значениям L. Действительно, на основании (120) при очень малых значениях L

$$\frac{v_{\text{макс}}}{L} = \left(\frac{w_{\text{макс}}}{N}\right)^{1/4},$$

откуда следует

$$v_{\text{макс}} = 25\,L\ \textit{см/сек}. \qquad (121)$$

На основании (118) и (119) при очень больших L

$$w_{\text{макс}} = M\psi\frac{v^3_{\text{макс}}}{L}, \quad v^3_{\text{макс}} = \frac{w_{\text{макс}}}{\psi M}L.$$

Отсюда после подстановки числовых значений ψ, $w_{макс}$ и M

$$v_{макс} = 125\, L^{1/3}\ см/сек. \qquad (122)$$

Формулой (121) можно пользоваться для определения максимальных скоростей движения мальков рыб с длиной тела не более 1,5 *см*.

Прямая, экстраполированная на логарифмической бумаге в сторону жгутиковых, дает удовлетворительные результаты.

Формула (122) применима к рыбам и китам, у которых длина тела более 150 *см*.

Промежуточные этапы уточненной кривой, как и в старой работе [16], удобно наносить на логарифмическую бумагу. При этом видна степенна́я зависимость $w_{макс}$ от L с меняющимся показателем степени в пределах от 1 (при малых L) до 1/3 (при очень больших L).

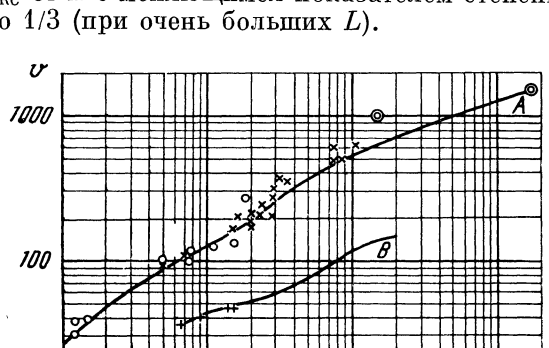


Рис. 622. Зависимость максимальных скоростей (*A*) и скоростей миграции (*B*) рыб, дельфинов и китов от длины их тела

Задаваясь различными значениями скоростей движения v, в [18, 19] определялся соответствующий критерий Рейнольдса, причем характерным линейным размером считалась высота тела в наибольшем поперечном сечении h, связываемая с L отношением $h = \beta_2 L$, где $\beta_2 \approx 0{,}2$. Для найденного критерия по диаграмме рис. 621 определялась величина ψ. Подставив все значения в формулу (118) не для максимальной скорости $v_{макс}$, а для заданной скорости v, можно было вычислить w вместо $w_{макс}$. Таким образом, можно было постепенно приближаться к наибольшему возможному значению скорости $v_{макс}$, при котором w становится равным $w_{макс}$.

Уточненная кривая Шулейкина нанесена на рис. 622, где она обозначена буквой *A*. Она отличается от прежней, приводившейся в [16] и в третьем издании «Физики моря», тем, что между значениями $L = 7$ и $L = 30$ кривая обращена к оси абсцисс выпуклостью.

Близ кривой *A* на рис. 622 удовлетворительно ложатся точки, полученные при опытах В. С. Лукьяновой и И. И. Стася,— они отмечены кружочками. Столь же удовлетворительно легли около кривой крестики, которые нанесены на рис. 622 по данным справочника, составленного Д. В. Радаковым и В. Р. Протасовым на основании наблюдений над максимальными скоростями движения различных рыб [21].

На рис. 622, чтобы не затемнять его дополнительной нагрузкой, не нанесены результаты наблюдений В. С. Лукьяновой над движением *веслоногих*. В работе [16] и в третьем издании «Физики моря» на рис. 546 видно, что эти представители планктона, в диапазоне длин тела от $L = 1$ *см* до $L = 6 \cdot 10^{-2}$ *см*, *перегоняли бы* рыб (мальков) той же длины. В этом диапазоне совсем не

встречаются животные, плавающие по способу рыб,— здесь лежит область, «завоеванная» веслоногими, благодаря явному превосходству их движителя в соответствующих границах. При дальнейшем уменьшении длины тела L кончается преимущество веслоногих, и на сцену выходят *жгутиковые*, которые снова пользуются «змееобразным» движителем. Как уже упоминалось, на основании работы [20] можно считать, что их максимальные скорости движения в воде согласуются с экстраполированной кривой A (рис. 622).

На уточненной диаграмме рис. 622, так же как и на старой диаграмме максимальных скоростей в цитированных работах, только одна точка резко отклоняется от теоретической кривой — это точка, которая соответствует *дельфину* длиной 150 *см*, способному развить максимальную скорость 1000 *см/сек*. Как и прежде, мы склонны приписывать это отступление особо совершенному питанию мышц кислородом у дельфина и (одновременно) винтообразной работе его движителя, дающей ему преимущества не только перед рыбами, но и перед *беззубыми* китами. Как известно, у китов кислород ассимилируется не только гемоглобином крови, но и особым веществом, родственным гемоглобину, находящимся в самих мышцах,— *миоглобином*.

Миоглобин служит емким аккумулятором кислорода и позволяет всем китам очень долго двигаться в воде, не выходя на поверхность моря для дыхательного акта. Возможно, что он способен повысить значение максимальной скорости в каких-то определенных условиях. Но эти условия, по-видимому, осуществляются только у дельфина (и у других зубатых китов, хотя до настоящего времени по отношению к ним нет надежных данных): ведь кривая A в области больших длин L завершается *беззубым* китом — сейвалом. Точка, соответствующая этому животному, послужила конечной точкой при построении кривой A. Значит у зубатого кита — дельфина — выявляется несомненное преимущество перед беззубым китом — сейвалом. Нам попрежнему представляется, что это преимущество — винтообразное изгибание движителя дельфина — во всяком случае, при максимальной скорости хода: беззубые киты не обладают *таким* движителем (а вместе с тем не обладают и асимметрией черепа, им не нужной).

В недавнее время в обзорных статьях были распространены утверждения, будто некоторым иностранным исследователям удалось показать, что особо большие скорости движения доступны дельфину благодаря «способности *гасить вихри*, которой обладает мягкая оболочка тела дельфина». Как видно из совсем свежих обзорных статей, подобное предположение *не оправдалось*.

§ 17. Полный коэффициент полезного действия рыбы

Даже не уточненная диаграмма Шулейкина, связавшая максимальные скорости рыб с длиной их тела, оказалась полезной для практики морских промыслов: инженеры, конструирующие орудия активного лова, воспользовались ею для определения скоростей, с какими необходимо производить траление, чтобы рыбы не могли уйти вперед от трала. Об этом свидетельствуют статьи специалистов-практиков [22, 23]. Еще больший практический интерес представляет задача, на которую обратил внимание физиков И. И. Месяцев более тридцати лет тому назад. Это — определение возможных *скоростей миграции* промысловых рыб,— своего рода скоростей *экономического хода*, с которыми рыбы мигрируют на громадные расстояния.

Первоначально можно было предположить, что *экономической* скоростью является та, при которой рыба обладает наибольшим *полным* коэффициентом полезного действия. В свою очередь такой полный коэффициент полезного действия зависит не только от полезного действия движителя рыбы, о котором была речь в § 6, но и от значения потерь энергии на внутреннее трение

в мышцах, и от расхода окисляемого органического вещества при различных режимах движения и даже в состоянии покоя. Последняя категория потерь окисляемого вещества — в состоянии покоя,— аналогична так называемым потерям *холостого хода* во всех двигателях, применяемых в технике.

На основании таких предварительных соображений были поставлены опыты, проведенные Л. А. Ковалевской в Морском гидрофизическом институте (в Кацивели). Общий вид прибора, применявшегося этим автором, представлен на рис. 623. Из органического стекла был построен замкнутый канал в форме удлиненной буквы О, положенной горизонтально. Длина канала составляла 100 *см*, а диаметр круглого сечения трубы, из которой он был изготовлен, равнялся 13 *см* [24].

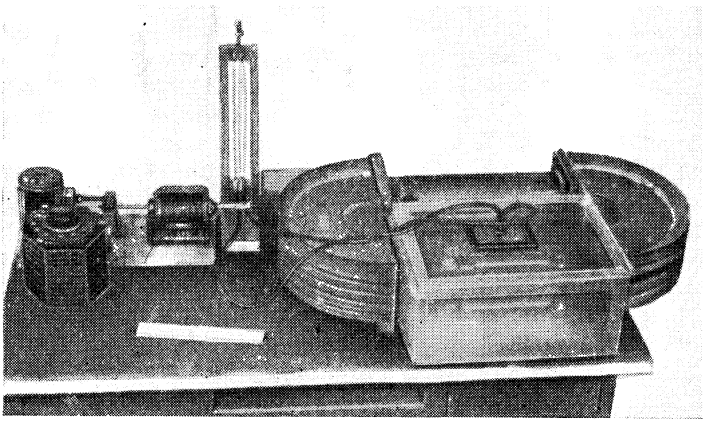


Рис. 623. Прибор Л. А. Ковалевской

Перед опытом канал заполнялся морской водой, причем из него тщательно удалялись все пузырьки воздуха: их легко было заметить сквозь прозрачные стенки. Рыба вносилась в канал сквозь люк, видный наверху. Чтобы предохранить воду в канале от внесения воздуха вместе с рыбой, круглая труба (вместе с люком) полностью перекрывалась водой, налитой в защитную коробку.

Внутри замкнутого кольцевого канала вода приводилась в движение посредством маленького гребного винта, создававшего поток желаемой скорости. Рыба, находившаяся в этом потоке, была защищена от сноса двумя сетками, создававшими в кольце замкнутый отсек. Как известно, у рыб существует инстинкт, вследствие которого они всегда ориентируются против течения и плывут против него с той же скоростью, с какой навстречу им движется вода (разумеется, в пределах своих возможностей). Благодаря этому рыба в экспериментальном отсеке оставалась неподвижной относительно твердых границ и двигалась относительно водной среды с той скоростью, с которой гребным винтом прогонялась вода в канале. Опыты Ковалевской показали, что постоянный режим движения лучше всего сохраняли ставриды, у которых длина тела была от 9 до 18 *см*. Они могли довольно долго плыть против течения, оставаясь на месте, при скоростях потока, доходивших примерно до 0,8 максимальной скорости, возможной для рыб данной длины. Практически это были скорости от 100 до 160 *см/сек*. Скорость потока определялась тахометром, связанным с осью гребного винта. Перед опытами это простое устройство тарировалось с помощью обычной гидрометрической трубки системы ЦАГИ.

При своих движениях в экспериментальном отсеке, относительно потока воды, рыба расходовала ту же мощность, которая была бы ей нужна для движения с соответствующей скоростью в стоячей воде. Эту полезную мощность можно было вычислить по формуле (113), подставляя туда соответствующее значение v вместо $v_{макс}$. Оставалось вычислить *полную мощность*, совершаемую мышечным аппаратом рыбы, или *полную работу* мышц рыбы за тот или иной промежуток времени. Для этого внутри канала, в котором работала рыба, дважды определялось содержание кислорода в морской воде: перед опытом и по прошествии некоторого срока работы движителя рыбы. Одновременно, тоже дважды, Ковалевская определяла содержание углекислоты в той же морской воде: физиологи обнаружили, что энергетический эквивалент

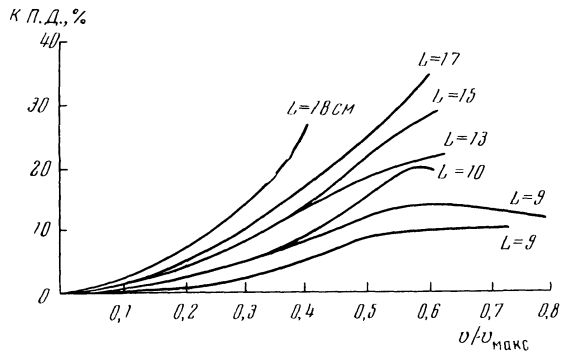


Рис. 624. Изменения полного коэффициента полезного действия
(по Л. А. Ковалевской)

израсходованного кислорода непостоянен, а зависит от того, какие вещества окисляются в мышцах при их работе; узнав расход углекислоты, можно с достаточной надежностью определить истинное значение энергетического эквивалента израсходованного кислорода.

Опыты Л. А. Ковалевской показали, что при возрастании скорости движения рыбы в воде отношение полезной работы к полной работе мышц, т. е. коэффициент полезного действия, сперва возрастает, достигает максимума и затем — у малых рыб — начинает слегка уменьшаться. У рыб, тело которых было длинней 10 *см*, такого максимума на кривых не наблюдалось (L — длина тела рыбы). Но ведь одна и та же скорость движения может оказаться очень высокой для рыб небольшой длины и совсем незначительной для крупной рыбы того же самого вида. Чтобы получить диаграммы, сопоставимые при всех размерах подопытных рыб, по оси абсцисс на диаграммах откладывались не абсолютные значения скоростей, а отношения данной скорости к максимальной возможной, при соответствующей длине тела рыбы. Именно эти цифры отмечены под осью абсцисс на рис. 624, заимствованном из работы Ковалевской.

По оси ординат тут отложены значения коэффициента полезного действия (полного), выраженного в процентах.

Метод исследования обмена у движущейся рыбы, примененный Л. А. Ковалевской, получил одобрение со стороны физиологов и рекомендован ими для применения [25]. Но в то же время в одной из последующих работ — в работе Г. Г. Винберга [26] — были высказаны критические замечания, касавшиеся проведения опытов Ковалевской. Именно указывалось, что перед исследованием в описанном экспериментальном канале необходимо было предварительно выдерживать рыбу в условиях проточного аквариума. Это было недостижимо в условиях, в которых проводились опыты Ковалевской, но

это несомненно будет учтено при продолжении подобных исследований в Институте биологии южных морей или на морских биологических станциях. С другой стороны, следует отметить, что автор цитированной критической работы [26] необычно трактует давно установившееся понятие о коэффициенте полезного действия, отрицая необходимость учета обмена в состоянии покоя, при суммировании всех статей расхода в теле движущегося животного. Давно известно, что к. п. д. всегда равен нулю при холостом ходе, повышается при увеличении мощности, обычно проходит через максимум при некоторой оптимальной отдаче, а далее обычно падает при нарастании мощности до максимальной возможной. Таковы изменения к. п. д. при учете потерь холостого хода.

Интересные данные, полученные именно для потерь в состоянии покоя, т. е. для расхода органического вещества в организме покоящихся рыб, в работах В. С. Ивлева [25] и Г. Г. Винберга [26], стимулировали продолжение исследований В. В. Шулейкина с учетом именно этих новых материалов. Если опыты Л. А. Ковалевской еще не дали окончательных числовых значений полного коэффициента полезного действия рыбы, при различных относительных скоростях движения (т. е. при различных значениях $v/v_{макс}$), то во всяком случае они заставляют серьезно задуматься над двумя выводами, которые несомненно следует сделать из ее работы.

1. Коэффициент полезного действия в некоторых случаях проходит через максимум при изменениях скоростей рыбы. Но он выражен не столь резко, чтобы можно было приписывать ему тот выбор оптимальной скорости, который инстинктивно делает движущаяся рыба.

2. Максимальное доступное значение к. п. д. зависит от длины тела рыбы — возрастает вместе с длиной — в исследованном диапазоне размеров исследованных рыб (ставрид).

Стало быть, надо попытаться проанализировать общую энергетику животного, движущегося в водной среде, и выяснить, *что* заставляет его выбирать для *миграции* на дальние расстояния ту или иную *оптимальную* скорость?

Такой теоретический анализ должен помочь экспериментаторам наметить программы для дальнейших опытов.

Прежде всего, на основании изложенного в предыдущем параграфе, можно вывести теоретическое выражение для *полного* коэффициента полезного действия рыбы.

На основании предыдущих рассуждений будем считать полезной мощностью величину

$$\eta_{дв} M \left(\frac{v}{L}\right) \psi v^2 \; эрг/г \cdot сек.$$

Здесь по-прежнему $\eta_{дв}$ — коэффициент полезного действия рыбы, который можно принять в среднем равным 0,75. При этом мышцы должны развивать мощность, которая представлена выражением, находящимся справа от коэффициента $\eta_{дв}$.

В расчете на 1 *г* внутреннее трение отнимает мощность

$$N\left(\frac{v}{L}\right)^4 \; эрг/г \cdot сек.$$

Кроме того, как говорилось выше, часть органического вещества животного «сжигается» в процессе так называемого обмена покоя. Эквивалентная мощность q, выраженная в тех же единицах, в которых выражаются остальные статьи баланса энергии, можно представить эмпирической формулой, заимствованной из работ В. С. Ивлева [25] и Г. Г. Винберга [26], авторы которых считают, что обмен покоя составляет около 60% от обмена при слабых движениях, неизбежных во время опытов над рыбами. Итак, положим

вместе с цитированными авторами, что

$$q = 1{,}0 \cdot 10^4\, m^{-0{,}2}\ эрг/г \cdot сек.$$

Едва ли мы внесем бо́льшую погрешность в приближенные вычисления, если положим, что масса m пропорциональна кубу длины тела, и на основании ряда промеров запишем

$$m = 6{,}9 \cdot 10^{-3} L^3\ г.$$

Сопоставив между собой эти эмпирические соотношения, получим приближенную формулу для расчета q:

$$q \approx 2{,}7 \cdot 10^4 L^{-0{,}6}\ эрг/г \cdot сек = 2{,}7\ L^{-0{,}6}\ вт/кг.$$

Величина q зависит только от размеров тела животного и должна быть сложена с двумя другими компонентами, о которых говорилось выше, для получения полной эквивалентной мощности, создающейся при движении (за счет окисления органического вещества в теле животного).

Располагая соотношениями, выражающими различные статьи энергетического баланса, представим полный коэффициент полезного действия формулой

$$\eta = \frac{\eta_{дв} M \left(\frac{v}{L}\right) \psi v^2}{q + M\left(\frac{v}{L}\right)\psi v^2 + N\left(\frac{v}{L}\right)^4}. \qquad (123)$$

По этой формуле вычислены значения η при различных скоростях движения для рыб, длины тела которых задавались разными: 7, 12, 20, 50, 100 и 200 *см*. Результаты вычислений представлены на рис. 625 (при кривых указаны значения длин тела). Для удобства сопоставления кривых по оси абсцисс отложены не абсолютные значения скоростей, а отношения каждой соответствующей скорости к максимальной, доступной при той или иной длине тела.

По оси ординат отмечены значения η в процентах.

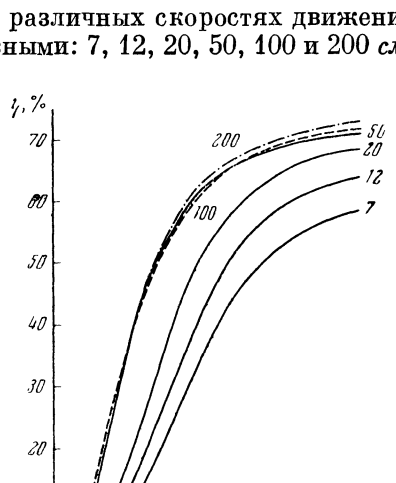


Рис. 625. Изменения коэффициента полезного действия рыб различной длины при изменении скоростей

Характерная S-образная форма всех кривых вообще типична для хода к. п. д. при изменениях аргумента функции. В частности, они похожи на экспериментальные кривые в работе Ковалевской. В данном случае подтверждается вывод, сделанный этим автором относительно зависимости к. п. д. от размеров рыбы: чем больше размеры рыбы, тем больше полный к. п. д. при ее движении в водной среде с той же относительной скоростью (с тем же отношением $v/v_{макс}$). Теперь этот важный вывод получает теоретическое обоснование: при увеличении размеров животного, во-первых, резко уменьшается роль последнего (правого) члена в знаменателе формулы (123), во-вторых, уменьшается значение первого члена q в знаменателе.

Однако ни одна из кривых на рис. 625 не проходит через максимум; они только стремятся к максимумам. Этим они отличаются от кривой, приведенной на диаграмме в работе Л. А. Ковалевской [24]. Отличие заметно и в аб-

солютных значениях η: теоретические значения везде оказались больше экспериментальных.

Пока еще рано обсуждать причину этих расхождений: необходимо повторить опыты, описанные в работе Ковалевской, учтя критические знамечания физиологов о предварительной подготовке рыбы к опытам. Возможно, что на основании достаточно большой серии опытов с рыбами различных размеров в условиях, удовлетворяющих требованиям физиологов, окажется необходимым и возможным внести поправки в наши теоретические выкладки, в основные параметры, которыми мы задавались.

В частности, будет необходимо в дальнейшем учитывать, что во всем громадном диапазоне размеров рыб, китов, с одной стороны, и инфузорий — с другой, постоянной должна оставаться действительно удельная мощность мышечного вещества (у высших животных) или того вещества, которое вызывает волнообразные движения жгутика (у простейших). Между тем до сих пор принято относить развиваемую мощность к единице массы всего тела. Очень важно будет найти действительные соотношения между длиной тела рыбы, кита и другими геометрическими элементами, с которыми мы оперировали при выкладках. Эти соотношения будут иными не только у различных видов, но и у особей различного возраста, относящихся к одному и тому же виду.

Во всяком случае и сейчас очевидно, что если на экспериментальных кривых будут обнаруживаться максимумы, аналогичные двум из кривых в работе Ковалевской, то наверняка они будут слабо выражены. Значит, надо уже сейчас попытаться аналитически найти какую-то иную причину, которая заставляет рыбу инстинктивно выбирать оптимальную скорость для дальних переходов.

§ 18. Скорости миграции рыб, дельфинов, китов

В работах [18, 19] В. В. Шулейкин показал, что решающую роль при инстинктивном выборе *оптимальной* скорости для дальних переходов должен играть *расход окисляемого органического вещества*, который необходим для прохождения того или иного расстояния в водной среде.

Легко видеть, что знаменатель в формуле (123) пропорционален полному количеству органического вещества (отнесенному к 1 *г* массы рыбы), окисляемому в секунду: это его энергетический эквивалент, выражаемый в *эрг/ г ·сек* или, при внесении переходного множителя 10^{-4}, в *вт/кг*. Обозначим этот энергетический эквивалент сжигаемого органического вещества через W. Знаменатель в формуле (123) показывает, как W связывается со скоростью движения рыбы v.

Предположим, что, перемещаясь в море с такой скоростью, рыба за некоторое время t прошла путь x. Тогда окажется, что при этом она израсходовала на окисление количество органического вещества, пропорциональное Wt, т. е. пропорциональное «эквивалентной проделанной работе». Отнесем это количество к единице пути. Тогда можно будет рассматривать «эквивалентную работу», совершаемую при прохождении единицы длины пути

$$\frac{Wt}{x} = j,$$

как объективную характеристику экономичности энергетического режима. Но $\frac{t}{x} = \frac{1}{v}$. Следовательно,

$$j = \frac{W}{v}.$$

Подставим сюда выражение W из знаменателя дроби в правой части уравнения (123). Получится формула, по которой можно вычислять характеристику экономичности режима:

$$j = \frac{q}{v} + \frac{M}{L}\psi v^2 + \frac{N}{L^4}v^3. \qquad (124)$$

На рис. 626 представлены шесть кривых, построенных по этой формуле для соответствующих шести значений длины тел рыб L (они отмечены при каждой кривой). Для удобства сравнения на рис. 626, как и на рис. 625, по оси абсцисс отмечены не абсолютные скорости движения v, а отношения v к максимальной доступной скорости $v_{макс}$. По оси ординат отложены не абсолютные величины j, а отношения j к $j_{макс}$, где $j_{макс}$ — характеристика экономичности режима при движении с максимальной доступной скоростью. На рис. 626 показано, что во всех шести случаях эквивалентная работа оказывается минимальной при каком-то определенном значении $v_0/v_{макс}$. Иными словами, при каком-то определенном значении скорости движения рыба расходует минимальное количество окисляемого органического вещества, проходя один и тот же путь (мы приняли этот путь равным единице длины).

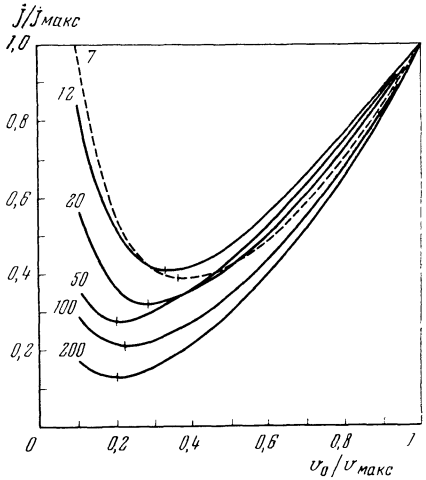


Рис. 626. Расход органического вещества, окисляемого при переходах на одно и то же расстояние с различными скоростями

Естественно предположить, что именно эти экономические скорости движения рыба инстинктивно выбирает при дальних переходах в море. Это наиболее вероятные скорости миграции рыб.

На рис. 626 штрихами отмечены точки, в которых кривые проходят через минимум. Общая тенденция расположения этих точек — уменьшение относительной скорости, при которой расход органического вещества минимален, с увеличением размеров животного: при $L = 7$ *см*, $v_0/v_{макс} = 0{,}36$, а при $L = 200$ *см*, $v_0/v_{макс} = 0{,}20$. Некоторое нарушение порядка видно при переходе от $L = 50$ *см* к $L = 100$ *см*; оно объясняется сложной зависимостью коэффициента сопротивления ψ от критерия Рейнольдса Re, а также изменением q при уменьшении или увеличении L. По данным рис. 626 на основании кривой A (рис. 622) вычислены вероятные значения скоростей миграции v_0 для тех же значений длины L, какими пользовались ранее, и получены такие результаты:

L, *см*	7	12	20	50	100	200
$v_{макс}$, *см/сек*	105	140	190	375	530	700
$\frac{v_0}{v_{макс}}$	0,36	0,32	0,28	0,20	0,22	0,20
v_0, *см/сек*	38	45	53	75	117	140

По этим отдельным значениям на рис. 622 построена плавная кривая B, показывающая, как теоретически должна меняться скорость миграции при возрастании длины тела.

Интересно сопоставить некоторые из полученных цифр с результатами непосредственных наблюдений за поведением рыб в море по статье С. Б. Гюльбадамова [22]. В ней на стр. 212 отмечено, что косяки хамсы с длиной тела

9,5 *см* при испуге совершали броски со скоростью 100 *см/сек*. На кривой *A* (рис. 622) для рыб с длиной тела 9,5 *см* показана максимальная скорость 122 *см/сек*. В статье Гюльбадамова на стр. 220 приведена табл. 4, где в самой нижней строке отмечено, что естественное движение косяков хамсы тех же размеров происходит со скоростями до 40 *см/сек*. На кривой скоростей миграции *B* рис. 622 длине $L = 9{,}5$ *см* соответствует значение $v_0 = 42$ *см/сек*. Как видно, совпадение цифр в обоих случаях удовлетворительное.

Недавно в справочнике Д. В. Радакова и В. Р. Протасова [21] появилась краткая сводка результатов измерений максимальных скоростей и скоростей миграции некоторых рыб. На основании этих данных при кривых *A* и *B* (рис. 622) проставлены косые крестики. Особенно интересно близкое совпадение с теоретической кривой *A* крайнего правого крестика, соответствующего тунцу с длиной тела 106 *см* [1].

Отметим, что величина $j = \frac{W}{v}$, характеризующая экономичность расходования органического вещества, обладает размерностью *см/сек*^{2}, т. е. размерностью ускорения, или размерностью силы, действующей на 1 *г* вещества. Это какая-то эквивалентная сила, которую должно преодолевать животное, движущееся со скоростью *v* в водной среде (здесь учитывается и эквивалент расхода окисляемого вещества в «обмене покоя»). Интересно сравнить эквивалентную силу, вычисленную применительно к максимальной скорости движения, с силой веса *g*, действующей на тот же грамм вещества ($g = 981$ *дин/г*). Результаты сравнения изображены на падающей кривой рис. 627, показывающей, как изменяется $j_{макс}/g$ при изменениях длины тела *L*.

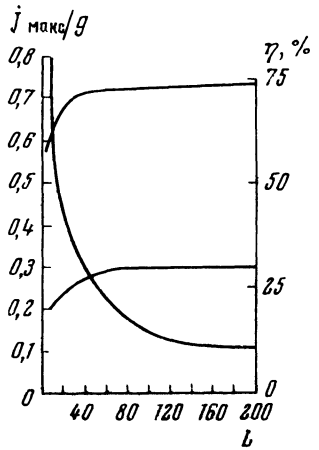


Рис. 627. Эквивалентное сопротивление и коэффициент полезного действия при различных значениях длины тела

При $L = 7$ *см* отношение $j_{макс}/g = 0{,}8$; это отношение с возрастанием *L* падает до 0,11 при $L = 200$ *см*.

Вторая кривая выражает изменение полного коэффициента полезного действия при движении с максимальной скоростью в зависимости от длины *L*. Третья кривая, с наименьшими ординатами, позволяет судить о коэффициенте полезного действия у животных различной длины при их движении с естественными скоростями миграции. Сопоставление этой кривой с кривыми на рис. 625 показывает, что даже при небольших значениях к. п. д. ($< 30\%$) движение с такими скоростями экономично: расход окисляемого органического вещества, приходящийся на единицу длины пути, оказывается минимальным.

Кривая *B* (рис. 622) построена лишь в диапазоне длин тела от 7 до 200 *см*. Для практики неинтересно продолжать ее в сторону меньших длин. Что касается длин, бо́льших 200 *см*, то здесь нет уверенности в законности экстраполяции эмпирической формулы для *q*. Было бы очень важно проследить за скоростями нормального хода очень крупных рыб (например, акул) и выяснить вопрос об экстраполяции формулы для *q*. Очень важно собрать побольше надежных сведений о скоростях китов.

[1] В том же справочнике приведены максимальные скорости барракуды, которые, несомненно, относятся не к обычному движению, а к одному лишь броску, аналогичному броску щуки.

§ 19. Особый случай движения рыбы-лоцмана

Эти небольшие рыбы семейства ставридовых (*Naucrates ductor*), как известно, сопровождают акул при их больших переходах в океане. Существует мнение, что они идут впереди акул и наводят их на пищу. Этим объясняют отсутствие угрозы рыбе-лоцману со стороны хищника. Однако непонятно, с точки зрения изложенных теоретических соображений, каким образом рыба-лоцман не отстает от акулы. В одном из рейсов экспедиционного судна «Седов» в Атлантическом океане были пойманы акула длиной 185 *см* и ее лоцманы длиной 21 *см* (рис. 628). На кривой *A* рис. 622 такой акуле должна соответствовать максимальная скорость движения 770 *см/сек*, а такому лоцману — максимальная скорость 200 *см/сек*. По кривой *B* (рис. 622) вероятная скорость хода акулы при ее миграции составляет 150 *см/сек*, а вероятная

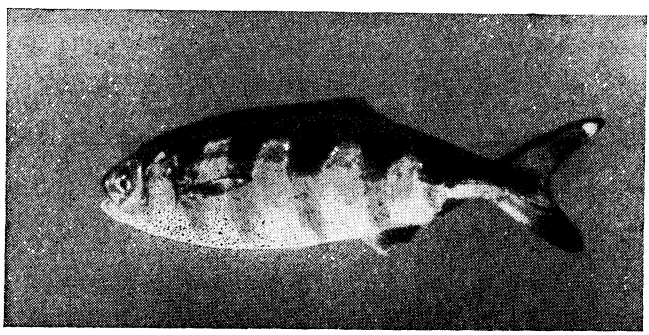


Рис. 628. Рыба-лоцман

скорость нормальной миграции ее рыбы-лоцмана — только 50 *см/сек*. Если даже предположить, что акула на дальних переходах в океане никогда не превышает скорость своего «экономического хода», то и тогда придется допустить на основании третьей сверху кривой (рис. 626), что рыба-лоцман непрерывно расходует окисляемое органическое вещество в удвоенном количестве по сравнению с экономической нормой. В действительности акула несомненно может часто выходить за пределы максимальной скорости, доступной рыбе-лоцману при обычном движении в океане.

Между тем рыба-лоцман может надежно обеспечить совместное плавание с акулой необычным путем. Этот вопрос исследован в статье В. В. Шулейкина [27] исходя из теории так называемого пограничного слоя (иначе, слоя трения). Всякое тело, движущееся в воде или в воздухе, обволакивается таким слоем, в пределах которого скорость жидкости или соответственно газа резко меняется при удалении по нормали от поверхности твердого тела в окружающую среду. В частности, работая над методами расчета дирижаблей, гидродинамики показали, что толщина Δ слоя трения вокруг сигарообразного тела связана с длиной тела L и числом Re:

$$\frac{\Delta}{L} = \frac{C}{\mathrm{Re}^n}. \qquad (125)$$

Само число Re, как известно, зависит от характерного размера h тела, скорости его движения V и кинематической вязкости ν, в данном случае — кинематической вязкости воды. В формуле (125) C — константа, а показатель степени зависит от числа Рейнольдса.

Значение константы C связано с положением исследуемого поперечного сечения на оси тела вращения. В частности, на рис. 629 кривая *1* воспроизводит, по К. К. Федяевскому [28], нарастание относительной толщины Δ/L

пограничного слоя трения при удалении от переднего конца тела на относительное расстояние x/L. Кривая *1* соответствует значению числа $\mathrm{Re} = 15{,}9 \cdot 10^6$, и нам придется сделать пересчет применительно к интересующему нас случаю.

Примем за характерный размер высоту тела акулы у наибольшего поперечного сечения $h = 37$ *см*. Скорость $V = 770$ *см/сек*, $\nu = 10^{-2}$. Следовательно, в нашей задаче $\mathrm{Re} = 2{,}85 \cdot 10^6$.

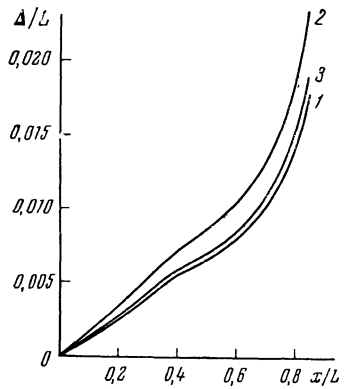


Рис. 629. Относительная толщина слоя трения

На основании другой диаграммы в работе [28] (фиг. 5) можно положить в соответствии с этим $n = 1/6{,}5$. Простой пересчет по формуле дает вместо кривой *1* рис. 629 новую кривую *2* для исследуемой задачи. В частности, для двух точек в хвостовой части корпуса акулы получаются числовые значения:

$$\text{для } x/L = 0{,}82 \quad \Delta/L = 0{,}021,$$
$$\text{для } x/L = 0{,}85 \quad \Delta/L = 0{,}0236.$$

Полагая длину тела акулы L равной 185 *см*, найдем, что на расстоянии 33 *см* от конца хвоста толщина пограничного слоя трения достигает около 4 *см*, а на расстоянии 28 *см* от конца хвоста — около 4,5 *см*. Как известно, в пределах этого слоя скорость движения воды меняется по сложному криволинейному закону, который должен еще более осложниться при наличии в этом слое тела лоцмана. Однако можно поручиться, что «прилипание» внутренней границы слоя трения к корпусу акулы должно обеспечить лоцману движение вперед со скоростью акулы: ведь вода на поверхности раздела с телом акулы движется с этой скоростью. Ширина же корпуса самого лоцмана такова, что она вмещается в пределах слоя трения даже в рассмотренном примере.

Мы произвели расчет лишь применительно к сравнительно небольшой акуле. Некоторые акулы достигают длины 12 *м* и более. В соответствии с этим растут размеры тела их лоцманов, доходя до 70 *см*. При этих условиях скорость акулы, вычисленная по диаграмме рис. 622, может дойти до 1200 *см/сек*, а скорость большого лоцмана, доступная при длине 70 *см*, составляет примерно 440 *см/сек*, т. е. снова около $^1/_3$ от скорости акулы.

Рейнольдсово число здесь $\mathrm{Re} = 12 \cdot 10^6$, а соответствующее ему значение показателя степени в (125) $n = {}^1/_7$ (по работе [28]). Произведя пересчет кривой *1* К. К. Федяевского, воспроизведенной на рис. 629, найдем кривую *3*. В частности, на расстоянии 180 *см* от конца хвоста 12-метровой акулы толщина пограничного слоя трения достигает около 23 *см*. Очевидно, что в пределах такого слоя легко вместится даже большой лоцман, ширина тела которого не превосходит 8 *см*.

Поводом для исследования В. В. Шулейкина, изложенного здесь, послужила фотография акулы с тремя лоцманами, снятая с борта экспедиционного судна «Седов» Н. Г. Клоковым,— перед тем как и акула, и один из ее лоцманов были пойманы и измерены. Эта фотография воспроизведена на рис. 630. Контуры здесь сильно искажены из-за преломления световых лучей на поверхности мелких волн и из-за бликов на них. Но хорошо видно, что лоцманы ходят совсем близко от корпуса акулы. Притом два лоцмана держатся близ хвостовой части, хотя там их должны сильней всего тревожить поперечные колебания тела акулы. Еще лучше видно расположение лоцманов близ самого корпуса акулы — симметрично относительно ее диаметральной плоскости — на рис. 631, на котором воспроизведена фотогра-

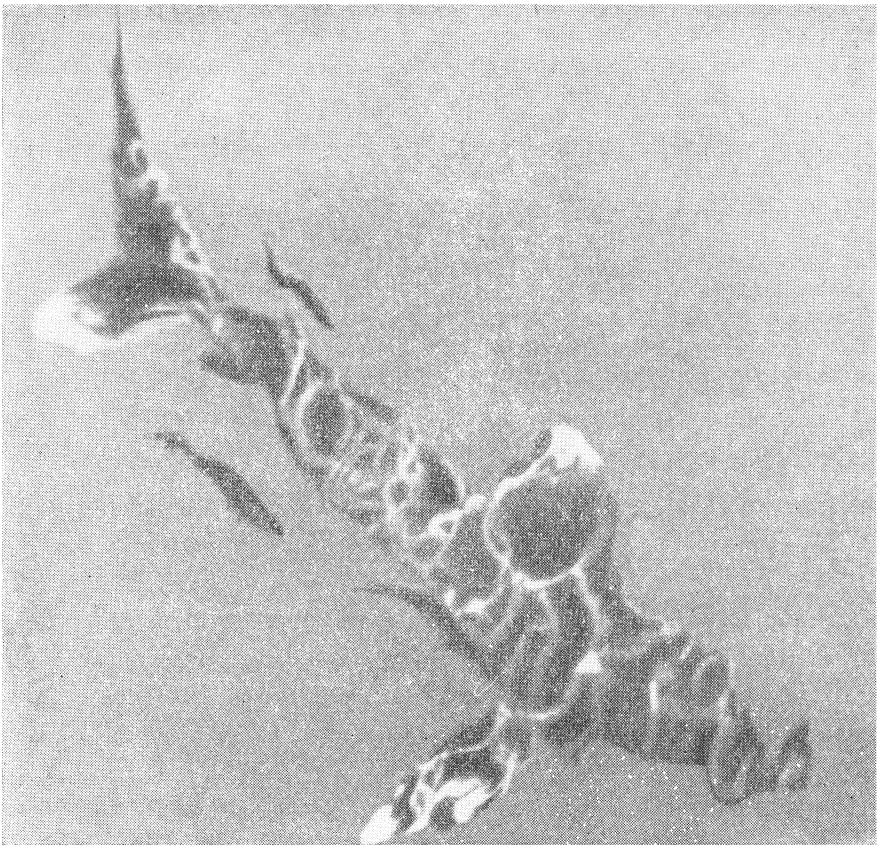


Рис. 630. Акула с тремя лоцманами

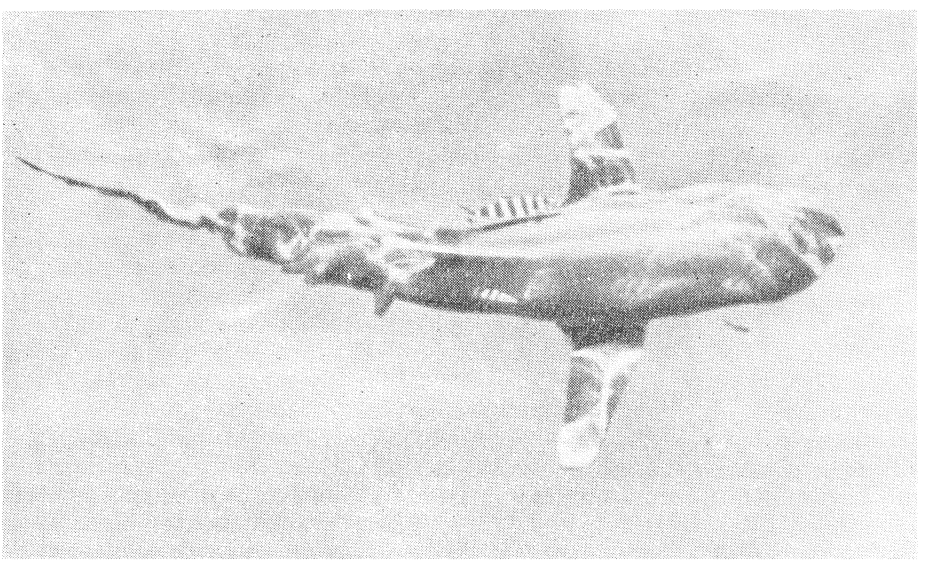


Рис. 631. Акула с двумя лоцманами

фия, снятая позже с палубы научно-исследовательского судна «Михаил Ломоносов». Здесь отчетливо видно, как акула буксирует лоцманов «лагом».

Интересно выяснить, что произойдет с рыбой-лоцманом, если она на ходу случайно выйдет за пределы слоя трения и попадет в область потенциального потока вокруг тела акулы?

Легко показать, что она будет мгновенно возвращена в слой трения под действием громадной пондеромоторной силы притяжения, которая возникает при движении обеих рыб в потенциальном потоке параллельными курсами.

Действительно, если в воде движутся параллельными курсами со скоростью V два шара с радиусами r_1 и r_2, центры которых находятся на расстоянии b один от другого (в плоскости, перпендикулярной к направлению движения), то сила взаимного притяжения f выражается формулой (89) Бьеркнеса (см. § 14, стр. 945), которую запишем в форме

$$f = \pi\delta V^2 \frac{r_1^3 r_2^3}{b^4} \text{ дин}, \tag{126}$$

где δ — плотность воды.

Мы получим заведомо заниженную величину силы f, если заменим корпус акулы (применительно к первому случаю) шаром с радиусом 18,5 *см*, а корпус лоцмана — шаром с радиусом 4 *см*. Расстояние между центрами шаров примем $b = 29$ *см*. Тогда, произведя вычисления по формуле (126) и перейдя от дин к килограммам, найдем, что даже явно заниженная сила притяжения будет $f = 1$ *кг*.

Этот чисто ориентировочный подсчет позволяет предполагать, что рыба-лоцман может двигаться фактически «на буксире лагом» у акулы даже близ передней части ее корпуса: хотя там пограничный слой и тоньше, чем у хвостовой части корпуса, но даже там пондеромоторные силы не дадут лоцману оторваться от корпуса акулы.

По некоторым литературным данным, рыбы-лоцманы иногда сопровождают корабли [29] на тысячи миль. В свете изложенного ясно, что движение лоцманов в пограничном слое трения кораблей обеспечено еще лучше: слой трения тут превышает 100 *см*, и полностью отсутствуют поперечные колебания, которые неизбежны при движении акулы.

ГЛАВА ДЕСЯТАЯ

МАГНИТНЫЕ И ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЯВЛЕНИЯ В МОРЕ

§ 1. Некоторые особенности исследований в области магнитных и электрических явлений на Земле

При современных исследованиях в любой области геофизики большую пользу приносят методы электрических измерений неэлектрических величин. Существует целая широко развитая область техники, где разработаны до деталей весьма совершенные приемы измерений и измерительные приборы, позволяющие не только определять на месте температуру и давление воздуха, скорость ветра и течений, амплитуду и период волны, колебания уровня моря во время приливов, сгонов, нагонов, но также позволяющие передавать на любые расстояния сведения об изменениях измеряемых величин и регистрировать их посредством самописцев с большой точностью. Большую пользу приносит и применение магнитов как постоянных, так и электромагнитов, снабженных сердечниками из новых ферромагнитных сплавов с чрезвычайно большим значением коэффициента магнитной проницаемости, а если требуется, с большим остаточным магнетизмом.

Особенно большое развитие получили измерительная техника и техника самопишущих приборов с электрической и магнитной основой за последние годы, когда электрические методы измерения и регистрации неэлектрических величин распространились всюду, во всех точных науках, в биологии, геологии и даже в медицине.

На этом фоне, казалось бы, можно было ожидать, что современная электроизмерительная техника и техника магнитных исследований будут способствовать если не полному, то хотя бы вполне удовлетворительному решению основных вопросов в области земного магнетизма и земного электричества — вопросов о происхождении магнитного и электрического полей нашей планеты.

Однако электрические и магнитные методы, послужившие для разрешения чрезвычайно сложных задач в других областях геофизики, до сих пор еще не позволили создать физическую теорию ни геомагнитного поля, ни атмосферного электричества и теллурических токов.

До настоящего времени все множится и множится число гипотез, предлагаемых различными авторами в этих заповедных областях, но каждая из подобных гипотез, удовлетворительно объясняя один круг явлений, приводит к грубым расхождениям при попытках количественного описания явлений смежных: к различию между теоретическими значениями и значениями, наблюдаемыми в природе, которое измеряется целыми порядками, а иногда даже несколькими порядками.

Полное неведение природы земного магнитного поля плохо вяжется не только с совершенством методов электрических и магнитных измерений,

но также и с тем, что практическое применение первого магнитного прибора — компаса — известно людям более трех тысяч лет: «„указателем направления на юг" снабжались колесницы в Китае и во Вьетнаме, во всяком случае ранее 1100 г. до нашей эры. Вероятно, столь же давно пользовались компасом и китайские мореплаватели» [1].

В наше время настала очередь использования также некоторых электрических явлений в море, а вместе с тем появилась надобность в предотвращении помех или, во всяком случае, в учете их.

Появилась надобность в уточнении сведений об элементах магнитного поля в океанах и морях, а также в уточнении сведений о так называемых вековых, сезонных, суточных изменениях этих элементов. Наиболее резкие изменения происходят во время полярных сияний, сопровождающихся магнитными бурями.

В связи с этим современная монография по физике моря должна содержать хотя бы краткие сведения о магнитных и электрических явлениях в море, невзирая на то, что в этой области физики моря еще не существует ни одной теории явлений в строгом смысле слова, а существуют лишь гипотезы, оправдывающиеся только в ограниченном круге явлений.

§ 2. Элементы земного магнитного поля

В каждой точке на поверхности Земли, выше или ниже этой поверхности, например в точке O (рис. 632), можно представить вектор напряженности геомагнитного поля $\mathbf{H}_T$ через его проекции на оси координат или на координатную плоскость.

Условимся направлять ось OX прямоугольной системы в горизонтальной плоскости по меридиану, считая положительным направление на север. Ось OY направим по параллели, считая положительным направление на восток. Наконец, ось OZ направим по вертикали, считая положительным направление вниз.

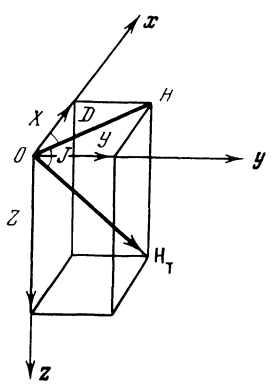


Рис. 632. Разложение вектора напряженности геомагнитного поля

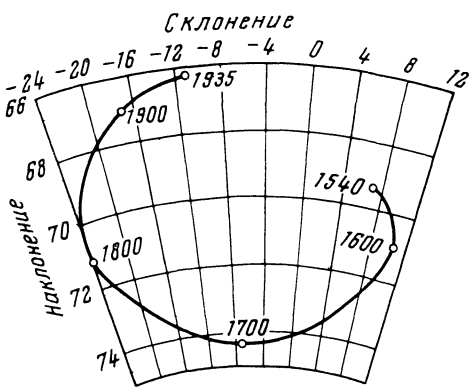


Рис. 633. Изменение магнитного склонения и наклонения за 395 лет

Проекция вектора $\mathbf{H}_T$ на горизонтальную плоскость XY обозначена через H, проекция $\mathbf{H}_T$ на ось OX — через X, проекция на ось OY — через Y и проекция на ось OZ — через Z. Все они связаны с H_T известными простыми соотношениями, в которые входят углы: $\angle XOH = D$ — магнитное склонение, $\angle HO\mathbf{H}_T = J$ — магнитное наклонение. Именно:

$$X = H\cos D, \quad Y = H\sin D, \quad Z = H\,\mathrm{tg}\,J;$$

$$H^2 = X^2 + Y^2, \quad H_T^2 = H^2 + Z^2; \tag{1}$$
$$H_T = H \sec J = Z \operatorname{cosec} J, \quad \operatorname{tg} D = \frac{Y}{X}.$$

Наблюдения, ведущиеся много веков, показывают, что ни один из этих элементов не остается постоянным: меняется и абсолютная величина (модуль) вектора $\mathbf{H}_T$, и его горизонтальная составляющая H, и вертикальная составляющая Z, и угол наклонения J. В особенности же сильно меняется важнейший для морской практики элемент — магнитное склонение D. В качестве примера на рис. 633 изображено изменение магнитного склонения и наклонения в Лондоне с 1540 по 1935 г. Склонение здесь менялось в пределах 35°, а наклонение — в пределах около 8°. Павловская магнитная обсерватория также зарегистрировала [1] очень большие изменения D и J. На навигационных картах печатаются изображения компасной картушки, на которых указаны значения магнитного склонения для эпохи какого-то определенного года. Обычно при почти каждом переиздании карт приходится менять данные о магнитном склонении в соответствующем районе моря на минуту, а иногда и на несколько минут дуги.

Отсюда очевидно, что даже при отсутствии теории происхождения земного магнитного поля для морской практики было бы полезно знать хотя бы причину и законы изменений магнитного склонения. Но причина и законы изменений склонения едва ли могут быть открыты до выяснения природы самого магнитного склонения. В следующем параграфе мы увидим, что при некоторых простейших условиях магнитное склонение должно было бы вообще отсутствовать, а угол D должен был бы равняться нулю.

§ 3. Формальное описание земного магнитного поля и его критика

Первое формальное описание земного магнитного поля было дано в 1835 г. профессором Казанского университета И. М. Симоновым, исследовавшим потенциал магнитных частиц, равномерно распределенных в теле планеты, и показавшим, что это — потенциал диполя [2]. Через три года появилась обширная работа К. Гаусса [3], в которой магнитный потенциал Земли был разложен в ряд по шаровым функциям, причем основной член ряда был тождествен с потенциалом симоновского диполя.

Магнитный момент M такого диполя равняется магнитному моменту однородно намагниченного шара и выражается через среднее намагничивание $I_{\text{ср}}$ известной формулой

$$\mathrm{M} = \frac{4}{3}\pi R^3 I_{\text{ср}}. \tag{2}$$

Остальные члены ряда Гаусса, как показал Н. А. Умов [4], соответствуют полям, которые формально могут быть приписаны различным комбинациям из двух, трех и т. д. диполей (квадруполям, мультиполям). В общей сложности магнитный потенциал U на произвольном расстоянии r от центра Земли выражается двойной суммой

$$U = R \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} \sum_{m=0}^{n} [g_n^m \cos m\lambda + h_n^m \sin m\lambda] P_n(\cos\theta). \tag{3}$$

Здесь R — радиус Земли, g_n^m и h_n^m — постоянные коэффициенты, $P_n(\cos\theta)$ — сферическая функция, θ — дополнение широты до 90°, λ — долгота исследуемой точки поля.

Как известно, напряженность магнитного поля выражается частной производной от потенциальной функции U по соответствующему линейному эле-

менту, взятой с обратным знаком. Следовательно, приняв во внимание, что бесконечно малый отрезок меридиана равен $rd\theta$, а бесконечно малый отрезок круга параллели равняется $r \sin \theta d\lambda$, можно записать

$$X = -\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \theta}, \quad Y = -\frac{1}{r \sin \lambda}\frac{\partial U}{\partial \lambda}, \quad Z = -\frac{\partial U}{\partial r}. \tag{4}$$

На основании формул (3) и (4) получим для точек, лежащих на уровне моря при $r = R$:

$$X = -\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}(g_n^m \cos m\lambda + h_n^m \sin m\lambda)\frac{dP_n^m(\cos\theta)}{d\theta},$$
$$Y = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}(mg_n^m \sin m\lambda - mh_n^m \cos m\lambda)\frac{P_n^m(\cos\theta)}{\sin\lambda}, \tag{5}$$
$$Z = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}[(n+1)g_n^m \cos m\lambda + (n+1)h_n^m \sin m\lambda]P_n^m(\cos\theta).$$

Сначала Гаусс, а затем другие исследователи определяли числовые значения коэффициентов в формулах (5) и получили следующие цифры [1], представленные в табл. 38.

Таблица 38

	Эпоха	g_1^0	g_1^1	h_1^1	g_2^0	g_2^1	g_2^2	h_2^1	h_2^2
Гаусс	1835	−3235	−311	+625	+51	+292	− 2	+ 2	+157
Эрман и Петерсен	1829	−3201	−284	+601	− 8	+257	− 14	− 4	+146
Адамс	1845	−3219	−278	+578	+ 9	+284	+ 4	− 10	+135
Адамс	1880	−3168	−243	+603	−49	+297	+ 6	− 75	+149
Фриче	1885	−3164	−241	+591	−35	+286	+ 68	− 75	+142
Шмидт	1885	−3168	−222	+595	−50	+278	+ 65	− 71	+149
Дайсон и Фурнер	1922	−3095	−226	+592	−89	+299	+144	−124	+ 84
Вестайн	1945	−3057	−211	+581	−127	+296	+164	−166	+ 54
Афанасьева	1945	−3032	−229	+590	−125	+288	+150	−146	+ 48

Среди всех этих величин выделяются g_1^0 и h_1^1, которые соответствуют диполю, описанному Симоновым применительно к однородному намагничиванию земного шара. Чрезвычайно важно отметить, что при очень небольших расхождениях между данными различных авторов для одной и той же эпохи (например, между данными Афанасьевой и Вестайна для 1945 г., Фриче и Шмидта для 1885 г.) наблюдается заметное изменение коэффициентов во времени: важнейшие коэффициенты g_1^0 и h_1^1 за одно столетие уменьшились почти на 7%. Земля как бы несколько размагнитилась.

Но недостаток подобного формального описания геомагнитного поля заключается не только в невозможности физического истолкования таких значительных изменений параметров основного диполя (в такой ничтожный срок с точки зрения истории планеты). Еще большее неудовлетворение вызывает основа всего разложения потенциальной функции U. Ведь при ее разложении Гаусс считал совершенно естественным направление

основного диполя по прямой, не совпадающей с осью вращения Земли. Между тем близость геомагнитной оси к земной оси вращения нельзя считать случайной, несмотря на отсутствие законченной теории, которая когда-либо свяжет намагничение Земли с наличием ее вращения. И эти оси нашей планеты, и аналогичные оси Солнца, некоторых исследованных звезд заставляют полагать, что естественное направление момента простого магнитного поля должно совпадать с направлением момента вращения соответствующего космического тела.

§ 4. Некоторые соображения о магнитном моменте Земли

Профессор Московского университета Н. А. Умов первый высказал [5] мысль, которой заканчивается предыдущий параграф. Анализируя работы Симонова, Гаусса и других авторов, формально описывавших земное магнитное поле, Умов пришел к заключению, что это поле осложнено по сравнению с тем, какое соответствовало бы наиболее естественному намагничению планеты — намагничению с моментом, направленным по оси вращения.

В современной физике встречается много доводов в пользу гипотезы Умова. Само строение атомов таково, что оно связано с гироскопическими и гиромагнитными явлениями. Исходя из схематических представлений о строении атомов ферромагнитных веществ, Барнет произвел принципиально важный опыт, добившись намагничивания железного стержня за счет его быстрого вращения. Однако попытка применения результатов этого опыта к вращающейся Земле дала вычисленное значение магнитного момента, которое оказалось в 10 раз меньше действительного значения этого момента. К тому же Землю нельзя рассматривать в качестве железного шара, как это делал при своих вычислениях Барнет.

Интересную гипотезу о происхождении земного магнетизма высказал выдающийся русский физик П. Н. Лебедев [6]. Он, так же как и Умов, считал, что Земля намагничена в основном благодаря ее вращению, и полагал, что под влиянием центробежной силы, вызванной вращением Земли вокруг ее оси, внутри атомов происходит смещение электронов по направлению, перпендикулярному земной оси. Однако опыты Лебедева с вращением колец из эбонита, латуни, воды и бензола не позволили обнаружить никакого магнитного поля, несмотря на то что скорость вращения доходила до 30 000 и даже до 35 000 *об/мин*.

Смерть П. Н. Лебедева оборвала эти опыты, которые он предполагал продолжать в новых вариантах. До конца своих дней Лебедев оставался убежденным в том, что основное магнитное поле Земли должно обладать осью, совпадающей с осью вращения Земли.

В настоящее время высказано несколько гипотез, защищающих ту же умовско-лебедевскую схему основного намагничивания нашей планеты. Остановимся здесь лишь на одной из таких гипотез, предложенной московским физиком Е. В. Ступоченко [7].

Исследователи давно обнаружили пропорциональность магнитных моментов M Земли и Солнца их угловым моментам Ω

$$\mathrm{M} = C\Omega, \tag{6}$$

где C — постоянная. Эта пропорциональность обнаружилась также и по отношению к звезде 78 в созвездии Девы, но только при маловероятном допущении, что плотность звезды 78 одинакова во всех ее слоях. В действительности плотность там, несомненно, должна быть неодинакова на различных расстояниях от центра звезды. Неодинаковой должна быть плотность и в различных слоях Солнца, на что справедливо указал Ступ-

поченко, исследуя вопрос о вероятном происхождении основного магнитного поля космических тел.

Этот автор сперва рассматривает однородный шар массы m и радиуса R. Внутри шара свободные электроны должны распределиться так, что вес каждого электрона в любой точке внутри шара и на его поверхности практически уравновешивается силой электрического поля, создаваемой облаком электрического заряда внутри шара:

$$eE(r) = m_e g(r). \tag{7}$$

Здесь $g(r)$ — ускорение в поле тяжести на расстоянии r от центра шара, $E(r)$ — напряженность электрического поля в той же точке, e — заряд электрона, m_e — его масса. Вообще говоря, сила эта очень мала, так же как мало и магнитное поле, создаваемое отрицательными зарядами при их вращении в условиях Земли и Солнца.

Положительное ядро каждого атома находится в иных условиях: на него действуют в одном направлении как сила тяжести, так и сила электрического поля. На основании формулы (7) определяется сумма $f(r)$ этих сил

$$f(r) = \left(m_0 + m_e \frac{e_0}{e} \right) g(r). \tag{8}$$

Здесь m_0 — масса положительного ядра, e_0 — его заряд.

Эта сила вызывает поляризацию атома, причем электрический момент β должен быть направлен по радиусу к центру шара и приблизительно пропорционален силе $f(r)$

$$\beta = \varkappa f(r). \tag{9}$$

При вращении такого электрического диполя вокруг оси шара с угловой скоростью ω возникает магнитный момент μ, зависящий не только от ω и от расстояния r до центра шара, но и от угла θ между направлением r и осью вращения:

$$\mu = \frac{\omega}{c} \beta r \sin^2 \theta. \tag{10}$$

Здесь, как всегда, c — скорость света. Магнитный момент M всего вращающегося шара на основании формулы (10) выражается двойным интегралом

$$M = \frac{2\pi}{c} \int_0^R \int_0^\pi n\omega\beta r^3 \sin^3 \theta \, dr \, d\theta, \tag{11}$$

причем n обозначает число диполей в единице объема, иными словами, число атомов в единице объема, поскольку все они поляризованы. Но в таком случае можно сокращенно представить выражение

$$n \left(m_0 + m_e \frac{e_0}{e} \right) = \delta, \tag{12}$$

обозначая через δ плотность шара.

С другой стороны,

$$g(r) = G \frac{4}{3} \pi \delta r, \tag{13}$$

где G — гравитационная постоянная.

В итоге на основании формул (11), (9), (8), (12) и (13) запишем

$$M = \alpha \delta \Omega_0. \tag{14}$$

Здесь сокращенно обозначено

$$\alpha = \frac{4}{3}\pi\frac{G}{c}\varkappa, \quad \Omega_0 = \frac{2}{5}\omega m R^2. \tag{15}$$

Как видим, в формулу (14) входит плотность δ однородного шара. Следовательно, на основании гипотезы Ступоченко соотношение (6) не должно соблюдаться при сопоставлении космических тел, как оно и не соблюдается в природе при учете неравномерной плотности Солнца и звезд. На смену ему следует выдвинуть иное соотношение, которое вытекает из формул (14) и (15). Действительно, во втором из уравнений (15) величина mR^2 пропорциональна $m^2/\delta R$. Значит, подставив выражение углового момента Ω_0 в формулу (14) можно записать

$$\frac{MR}{\omega m^2} = \gamma = \text{const}. \tag{16}$$

Однако это простое соотношение может быть справедливым только применительно к телам, плотность которых приблизительно постоянна, например по отношению к Земле, для которой формула (16) дает $\gamma = 1{,}92\cdot10^{-17}$.

Для Солнца Ступоченко вводит поправочный коэффициент ξ, который позволяет вместо формулы (16) записать

$$\frac{MR}{\xi\omega m^2} = \gamma' = \text{const}. \tag{17}$$

Поправочный коэффициент ξ вычисляется в предположении, что плотность в теле Солнца меняется по политропе с показателем 3. В результате оказывается, что $\gamma = 2{,}14\cdot10^{-17}$, а эта величина весьма близка к значению γ, вычисленному для Земли.

Аналогичное вычисление Ступоченко произвел и в применении к звезде 78 созвездия Девы. Согласие получилось меньшее, однако его можно было бы считать очень хорошим, если бы не обнаружилось, что при определениях R, m и ω для этой звезды астрономы допустили погрешности порядка 15—20%.

Естественно возникает вопрос, какого же порядка должно быть смещение зарядов внутри атома под влиянием гравитационных сил, чтобы возникла поляризация, описываемая уравнением (9). Отвечая на этот важный вопрос, Ступоченко показывает, что такое смещение может не превышать 10^{-10}, т. е. $^1/_{100}$ диаметра атома. Подобное допущение весьма вероятно.

К сожалению, подобно некоторым иным гипотезам в области магнитных и электрических явлений на Земле, изложенная гипотеза также вступает в некоторые противоречия с результатами новейших измерений величин M и Ω_0 для различных звезд. Поэтому еще рано говорить о теории происхождения основного магнитного поля Земли.

Однако и гипотеза Ступоченко, и работы его предшественников, и эксперименты типа барнетовских весьма внушительно подкрепляют идеи Н. А Умова и П. Н. Лебедева: основным магнитным полем Земли следует считать поле с магнитной осью, направленной по оси вращения Земли (от Северного географического полюса к Южному географическому полюсу); на диполь Симонова — Гаусса следует смотреть как на такой же чисто формальный фактор, как и на квадруполи и мультиполи, выдвинутые для формального описания сложного магнитного поля Земли.

В 1947 г. советский физик Я. И. Френкель высказал гипотезу, в которой Земля уподобляется своеобразной самовозбуждающейся динамомашине, создавшей свой магнитный момент за счет конвекционных токов во внутренних — электропроводящих — слоях. По его представлениям, распад радиоактивных элементов в этих слоях вызывает подогрев их снизу и тем

самым порождает конвекцию в расплавленном веществе: для этого оказывается достаточным 1/100 от количества тепла, выделяющегося в наружных слоях земной коры. Даже слабое внешнее магнитное поле, существование которого в космосе ныне доказано, должно вызывать в движущихся электропроводящих массах индуцированные электрические токи. В свою очередь эти токи миллионы лет тому назад непрерывно подмагничивали тело Земли и тем самым увеличивали индукцию токов в движущихся проводящих массах внутри планеты [8].

Аналогичную гипотезу высказал американский физик Эльзассер [9]. Но ни в первой, ни во второй редакции гипотеза о самовозбуждении магнитного поля Земли не получала поддержки среди геомагнетологов: все построения казались абстрактными, не давали возможности количественных расчетов поля, хотя бы схематизированных.

Попытки таких — схематизированных — расчетов принадлежат английскому физику Э. Буллярду [10], заставившему геофизиков внимательно следить за развитием теории «самовозбуждающегося магнитного поля Земли» в его руках и в руках его сотрудников.

На основании современных сейсмологических исследований Буллард считает, что расплавленный металл и другие расплавленные вещества не простираются до центра Земли. В глубочайших недрах планеты залегает твердое ядро с радиусом около 1300 *км*, а вокруг этого твердого ядра находится промежуточный огненно-жидкий слой вещества с плотностью около 11 $г/см^3$ и с внешним радиусом около 3470 *км*. Предполагается, что удельная электропроводность расплавленного вещества достигает приблизительно $3 \cdot 10^3$ $ом^{-1} \cdot см^{-1}$. Поверх такого жидкого слоя располагается земная кора, средняя плотность которой на нижней границе составляет 5 $г/см^3$, а на поверхности — 3 $г/см^3$. По всей вероятности, в жидком слое преобладает железо, а в твердой коре — соединения кремния с железом и магнием. Предполагается, что электропроводность внутренних слоев земной коры — порядка 1 $ом^{-1} \cdot см^{-1}$.

Первые поиски условий, при которых в расплавленном металле может возникнуть самовозбуждение электромагнитного поля, были предприняты по инициативе Буллярда математиками. Удалось доказать, что самовозбуждение могло бы возникнуть в том случае, если бы внутри Земли существовали два расплавленных ядра, которые вращаются вокруг осей, не пересекающихся между собой. Однако такая схема совершенно абстрактна: внутри Земли нет оснований предполагать наличие подобных вращающихся шаров.

Второй шаг сделал Буллард, и хотя, в противоположность упомянутой абстрактной схеме, им пока еще не получено решение задачи до конца, сама схема его не противоречит принципам физики и существующим представлениям о внутреннем строении Земли. Так же, как и Я. И. Френкель, Э. Буллард считает первопричиной всех исследуемых явлений разогревание самых глубоких расплавленных слоев Земли за счет распада радиоактивных элементов. Более горячие, а значит менее тяжелые массы стремятся двигаться от центра к периферии по радиусу, но они не могут двигаться прямолинейно ввиду наличия поля кориолисовой силы. При подъеме жидкие струи должны отклоняться к западу по отношению к вращающемуся центральному ядру планеты; при спуске — в конвекционном цикле — струи будут отклоняться к востоку. Вся Земля вращается в направлении с запада на восток; следовательно, внутренние слои расплавленного вещества неизбежно должны вращаться с большей угловой скоростью по сравнению с наружными слоями.

Значит, в промежуточной жидкой части Земли расплавленные массы совершают сложные движения: в одних местах они поднимаются, в других опускаются, а кроме того, слои, лежащие на различных глубинах, непрерыв-

но перемещаются один относительно другого, вращаясь вокруг географической оси Земли с различными угловыми скоростями.

Именно эти относительные движения расплавленного вещества должны создавать условия для самовозбуждения сложного электромагнитного поля в хорошо проводящей жидкой среде — такова гипотеза Булларда.

Для предварительного анализа явлений, которые могут происходить в такой системе, необходимо рассмотреть поведение расплавленного вещества, обладающего некоторой электропроводностью σ в магнитном поле, напряженность которого характеризуется вектором $\mathbf{H}$. Пусть это расплавленное вещество движется в магнитном поле с линейной скоростью $\mathbf{v}$, которая, вообще говоря, является вектором, составляющим некоторый угол с вектором $\mathbf{H}$. Из двух уравнений Максвелла, написанных для движущейся среды, Буллард исключает вектор напряженности электрического поля $\mathbf{E}$ и получает после обычных преобразований *одно* уравнение в частных производных второго порядка от $\mathbf{H}$ по линейным координатам и первого порядка — по времени.

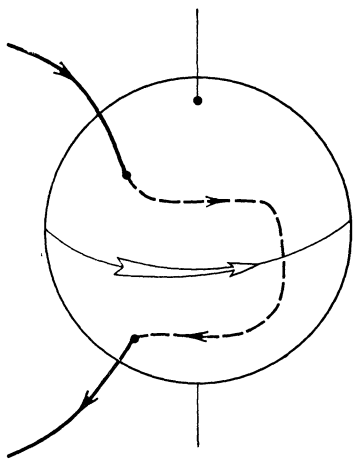


Рис. 634. Растяжение силовой линии (по Э. Булларду)

В векторной форме уравнение записывается так:

$$\nabla^2\mathbf{H} = 4\pi\sigma\left(\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} - \operatorname{rot}[\mathbf{vH}]\right). \qquad (18)$$

Как обычно, здесь ∇^2 обозначает оператор Лапласа, а в правой части ротор строится от функции $[\mathbf{vH}]$, являющейся векторным произведением $\mathbf{v}$ и $\mathbf{H}$.

Уравнение (18) показывает, что при некоторых условиях величина производной $\partial\mathbf{H}/\partial t$ может стать положительной. Это значит, что при таких условиях существующая напряженность магнитного поля *возрастает во времени*.

На основании (18) легко заключить, что $\mathbf{H}$ будет возрастать тогда, когда окажется, что

$$\nabla^2\mathbf{H} + 4\pi\sigma \operatorname{rot}[\mathbf{vH}] > 0. \qquad (19)$$

Нет надобности анализировать, какого происхождения могло быть то *начальное* магнитное поле, которое затем постепенно нарастало в веках и достигло современного значения $\mathbf{H}$. Ныне хорошо известно, что в космическом пространстве безусловно существует некоторое магнитное поле. Его вполне достаточно для начала процесса, описываемого уравнениями (18) и (19). Но сами уравнения еще не дали возможности решить задачу Булларда до числового конца. Пока приходится ограничиваться схемой, поясняющей механизм самовозбуждения земного «динамо». Такая схема, по Булларду, представлена на рис. 634. Здесь внешние участки одной силовой линии видны слева. Они близко напоминают схему силовых линий геомагнитного поля. В отличие от обычной трактовки силового поля, сейчас необходимо проследить за тем, *что* происходит с магнитной силовой линией при ее углублении в расплавленную среду.

Как уже говорилось, внутренние слои этой среды вращаются с большей угловой скоростью, чем внешние. Поэтому, углубляясь в намагниченную среду и будучи связанной с ее молекулами, силовая линия должна растянуться вдоль параллелей, как представлено на рис. 634. Если мы мысленно проследим за дальнейшим движением внутреннего (на чертеже — вертикаль-

ного) отрезка силовой линии, то увидим, что он образует две петли, направленные в противоположные стороны, в северном и в южном полушариях.

Буллард предполагает, что относительная скорость «затягивания петли» в несколько десятых миллиметра в секунду достаточна для создания магнитного поля с напряженностью в сотни эрстед.

В отличие от гипотез, предложенных предшественниками, гипотеза Булларда позволяет объяснить очень важную черту земного магнитного поля, отчасти отраженную на рис. 633: изменчивость магнитного склонения в веках (вероятно, с теми же процессами связано и изменение угла наклонения магнитной стрелки). В § 13 мы еще возвратимся к этому важному вопросу и увидим, что поведение магнитного склонения с 1540 по 1935 г., зарегистрированное обсерваторией в Лондоне и Гриниче, связано с общей тенденцией всех особенностей геомагнитного поля в Европе, Атлантике и Северной Америке — с *дрейфом* этих особенностей с востока на запад. Гипотеза Э. Булларда так объясняет это замечательное явление. Если мы представим, что петля, образованная магнитной силовой линией на рис. 634, будет продолжать растягиваться, то увидим, что она будет опоясывать Землю по двум географическим параллелям. Совершенно так же возникнет целая система магнитных силовых линий, растянутых по параллелям. Оказывается, что подобная система неустойчива: она должна распадаться на своеобразные ячейки, которые будут создавать тороидальное поле.

Все тороидальное поле внутри расплавленного слоя Земли пронизано электрическим током и магнитными силовыми линиями. В свою очередь электрические токи должны частично замыкаться в твердой коре, хотя электропроводность ее внутренних частей примерно в $3 \cdot 10^3$ раз меньше, чем электропроводность расплавленного вещества. Такой, казалось бы, незначительный процесс приводит к очень важным последствиям: оказывается, что благодаря ему вся система тороидального поля в жидком веществе должна непрерывно дрейфовать с востока на запад — под влиянием пондеромоторных сил взаимодействия между токами в двух соприкасающихся средах [11].

По всей вероятности, гипотеза Булларда правильно объясняет основную причину изменчивости геомагнитного поля в веках. Но, вместе с тем, она ничего не говорит о происхождении самих *неоднородностей* этого поля, в частности о происхождении самого *магнитного склонения*.

В заключение этого обзора гипотез необходимо упомянуть об оригинальной гипотезе, выдвинутой индийским физиком Д. Чаттерджи [12]. Она исходит из рассмотрения явлений, родственных так называемому *эффекту Холла* [13].

Известно, что длинная плоская металлическая пластинка, питаемая с двух сторон через массивные подводящие электроды, обтекается током, линии которого почти параллельны боковым краям пластинки. Если эту пластинку поместить в сильное магнитное поле, то электроны, движущиеся в металле, будут отклоняться от их первоначальных путей, и в результате возникнет некоторый перекос эквипотенциальных плоскостей в металле. Практически это выразится в возникновении некоторой небольшой разности потенциалов между двумя точками на краях пластинки, которые прежде находились на одной поперечной эквипотенциальной плоскости.

Де Кудр показал [14], что при питании пластинки и электромагнита, создающего сильное магнитное поле, одним и тем же переменным током, между этими точками должна возникать разность потенциалов *постоянного знака*.

Чаттерджи считает, что аналогичное явление за миллионы столетий возникало на Земле: солнечные корпускулы, летящие во все стороны от светила, создавали в окрестностях Земли переменное магнитное поле и, вместе с тем, создавали переменные токи с теми же периодами в проводящих

слоях атмосферы (в ионосфере). При этом возникала слабая постоянная составляющая, которая, несмотря на незначительную свою величину, слегка *подмагничивала* Землю. Медленно и постепенно усиливался сам эффект Холла — Де Кудра, а вместе с тем медленно и постепенно нарастал магнитный момент Земли.

§ 5. Отличие геомагнитного поля от поля однородного намагничения с осью, направленной вдоль оси вращения Земли

Если бы Земля была однородно намагничена по схеме Умова — Лебедева и ее магнитный момент был бы направлен по оси вращения, то прежде всего полностью отсутствовало бы склонение компаса. В действительности карта изогон, описывающих склонение для эпохи 1950 г., имеет вид, изображенный на рис. 635. Пунктирные линии лежат в области западного склонения, считаемого отрицательным, а сплошные — в области восточного, считаемого положительным. На карте видно, что магнитный полюс, который, с точки зрения физики, является южным (к нему направляется северный конец магнитной стрелки) и который условно принято называть северным, так как он лежит в северном полушарии, смещен в точку с широтой 74° и долготой 100° З. Противоположный магнитный полюс, условно называемый «южным», лежит в точке с широтой 68° Ю и долготой 143° В [1].

Сложное очертание изогон указывает на значительное отличие действительного магнитного поля Земли от поля основного, с точки зрения Умова и Лебедева. Однако карта рис. 635 еще не вскрывает никаких черт, по кото-

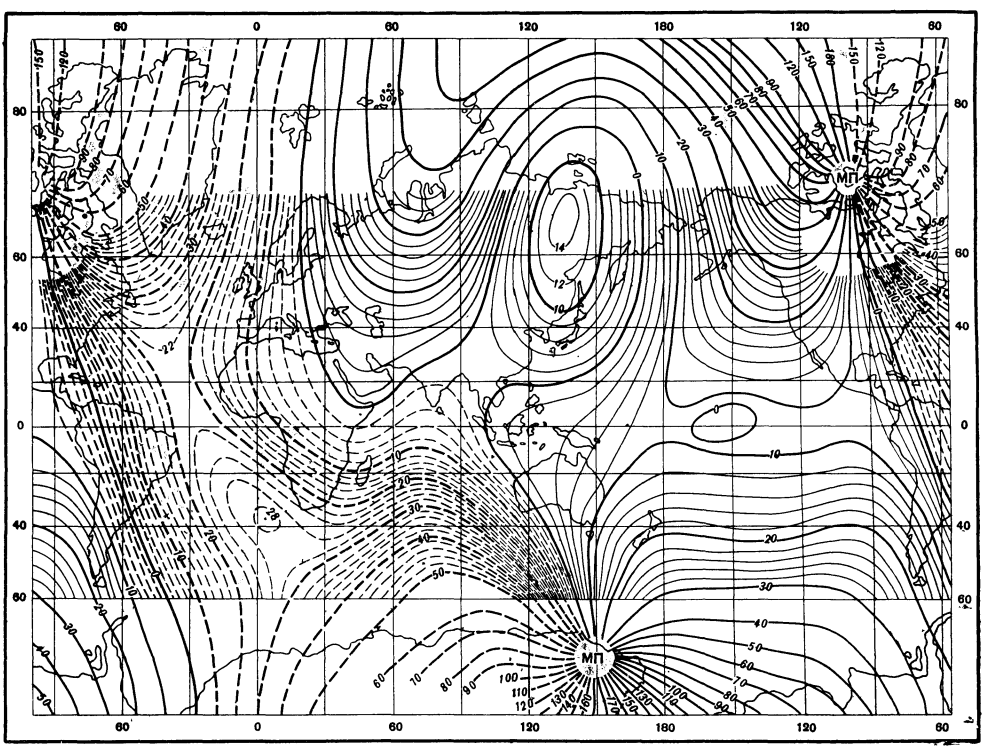


Рис. 635. Карта изогон эпохи 1950 г. (по ИЗМИРАН)

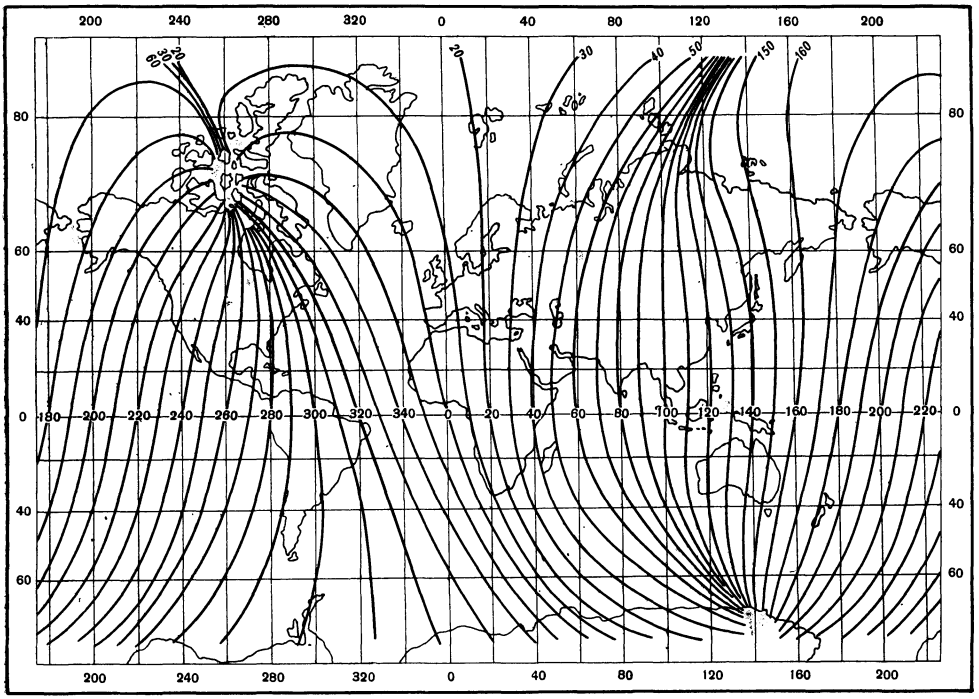


Рис. 636. Карта магнитных меридианов (по В. П. Орлову)

рым можно было бы судить о физическом происхождении дополнительного магнитного поля, налагающегося на основное поле по схеме Умова — Лебедева.

На рис. 636 воспроизведена карта магнитных меридианов, построенная В. П. Орловым [1] на основании материалов Института земного магнетизма, применительно к той же эпохе 1950 г., как и карта изогон рис. 635. Подобно последней, она тоже подчеркивает сложность действительного магнитного поля Земли и не дает никаких намеков на происхождение дополнительного поля. Зато очень рельефно выявляются характерные особенности дополнительного поля на карте, которую построила Л. А. Корнева по иному, более простому и убедительному принципу. Это — карта «восточных» составляющих Y напряженности геомагнитного поля [15, 16], воспроизведенная на рис. 637.

Совершенно очевидно, что при наличии чистого поля, по Умову — Лебедеву, широтная составляющая отсутствовала бы везде. Значит, в каждой точке поля широтная составляющая является бесспорной характеристикой дополнительного поля, налагающегося на поле Умова — Лебедева.

На рис. 637 цифры, проставленные при изолиниях, выражают значения «восточных» составляющих в тысячах гамм, причем положительные соответствуют направлению на восток, а отрицательные — направлению на запад (1 гамма $=10^{-5}$ *эрстед*).

При первом же взгляде на рис. 637 видно, что расположение и форма изолиний неразрывно связаны с расположением и формой океанов и материков. Изолинии оконтуривают берега Африки, побережья Индийского океана, западные берега Европы и восточные берега Азии. Но замечательней всего следующее:

а) «восточная» составляющая Y на материках весьма мала; нулевая изолиния охватывает обширные области Европы и Азии; нулевая линия тянется через материки Северной и Южной Америки;

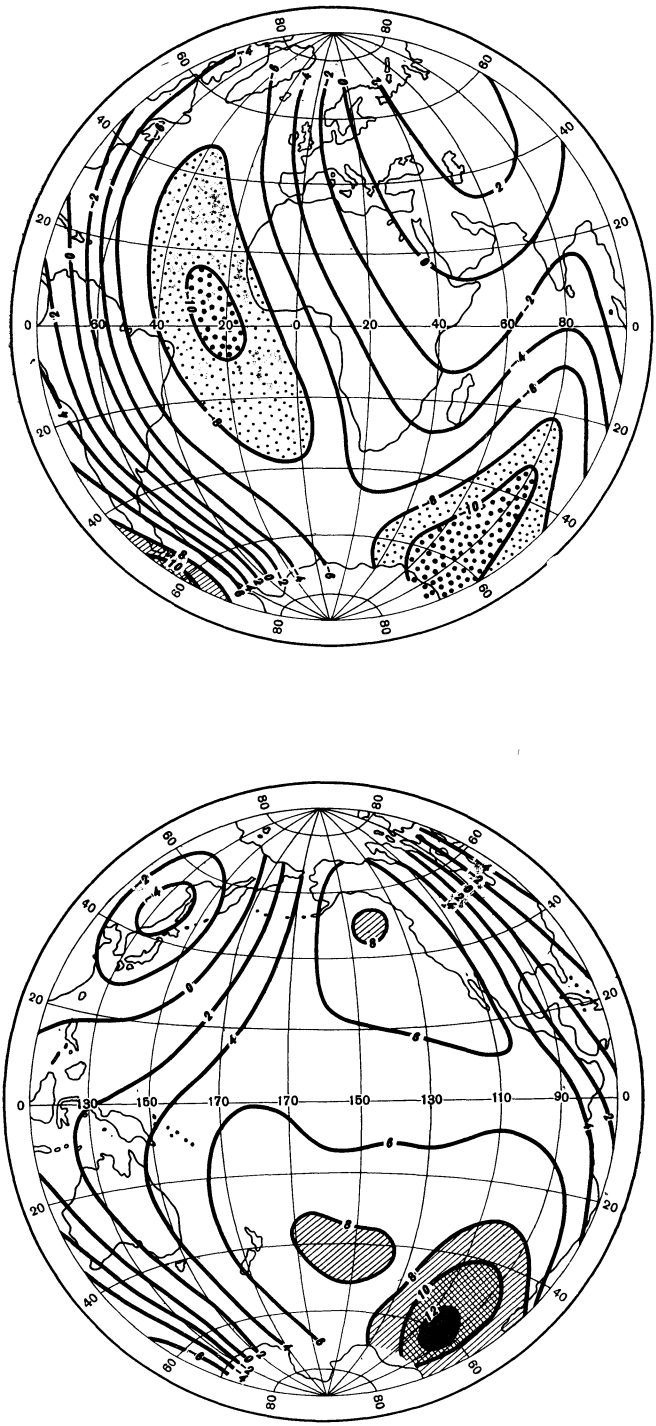


Рис. 637. Карты «восточных» составляющих (по Л. А. Корневой)

б) напротив, над океанами «восточная» составляющая достигает наибольших значений. В особенности интересен резкий максимум (свыше 10 000 гамм) над Атлантическим океаном, в промежутке между Африкой и Южной Америкой, где этот промежуток короче всего; ярко выражены максимумы и в других «узостях»: к западу от м. Горн (свыше 12 000 гамм), к востоку от м. Доброй Надежды (свыше 10 000 гамм), у берегов Аляски.

Физически это значит, что над материками существует сравнительно малоискаженное умовско-лебедевское поле — поле равномерно намагниченного шара с осью, которая совпадает с земной осью вращения. Искажение этого поля под действием налагающегося на него дополнительного поля сильно проявляется над океанами и притом тем сильней, чем у́же расстояние между областями суши, оконтуривающими океаны.

Чрезвычайно интересно, что особая роль океанов, обнаруживающаяся на полушариях рис. 637, подчеркивается также и при исследовании вековых изменений элементов магнитного поля Земли: широтная составляющая сильней всего изменяется именно над океаническими областями, выявленными на карте рис. 637. Об этом будет сказано подробно в § 13.

В § 2 уже говорилось о значительных изменениях элементов геомагнитного поля, происходящих на наших глазах: об относительно быстрых изменениях угла склонения D; в § 3 отмечалось, что за одно лишь столетие потенциал главного диполя (Симонова — Гаусса) уменьшился почти на 7%. Совершенно очевидно, что подобные явления нельзя относить за счет каких-либо геологических изменений в твердом теле Земли. Эти явления «молниеносны» в геологических масштабах времени. Значит, надо искать причину этих явлений в каких-то токах, идущих, вероятней всего, в подвижных частях планеты — в атмосфере, в океане и в расплавленном веществе под мантией Земли. Карта рис. 637 особенно настойчиво подчеркивает такое предположение. Она заставляет думать, что дополнительное магнитное поле, налагающееся на умовско-лебедевское, органически связано с распределением океанов на нашей планете.

§ 6. Приближенное нахождение системы токов, эквивалентных добавочному магнитному полю Земли

Карта рис. 637 рисует распределение «восточных» составляющих, которые полностью принадлежат дополнительному магнитному полю Земли. Несложным способом, на котором не будем останавливаться, могут быть определены также те приращения меридиональной составляющей ΔX, которые в различных частях планеты вызваны тем же дополнительным полем. Следовательно, во всех точках Земли могут быть определены полные приращения горизонтальной составляющей ΔH, которые порождены дополнительным магнитным полем.

Естественно, возникает намерение попытаться найти такую систему электрических токов, которая способна вызвать соответствующие значения ΔH в различных точках земного магнитного поля. Сами значения ΔH проще всего можно определить, геометрически вычтя из действительно существующего значения H в данной точке величину $H_{\text{осн}}$, характеризующую умовско-лебедевское поле в той же точке. В свою очередь, задавшись абсолютной величиной момента $M_{\text{осн}}$, направленного по оси вращения Земли, можно вычислить $H_{\text{осн}}$, пользуясь соотношением

$$H_{\text{осн}} = \frac{M_{\text{осн}}}{R^3} \sin \theta. \qquad (20)$$

Приписав геометрическую разность ΔH между H и $H_{\text{осн}}$ какому-то току, идущему в горизонтальной плоскости и создающему напряженность магнит-

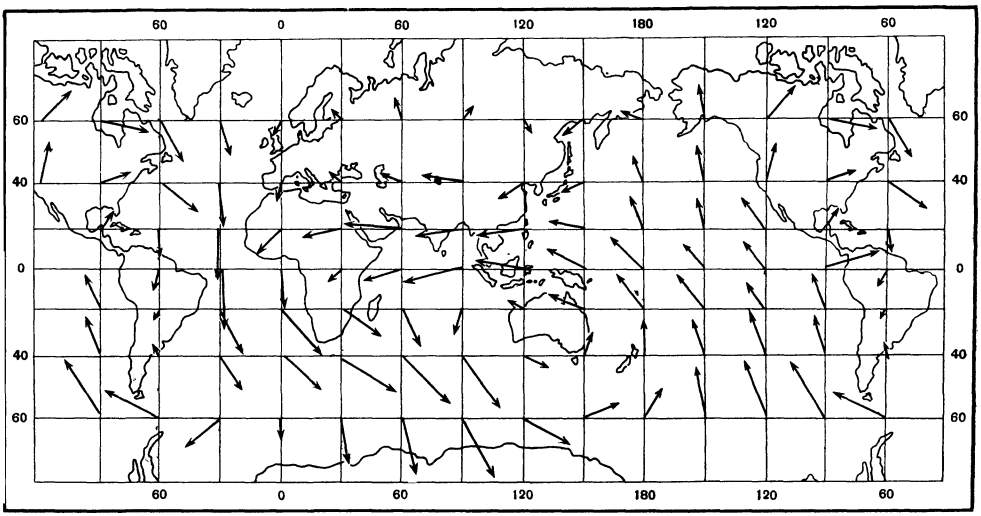


Рис. 638. Карта эквивалентных токов (по Л. А. Корневой)

ного поля ΔH, можно с досточным приближением полагать, что

$$\Delta H = 0{,}2\pi i, \tag{21}$$

где H выражено в эрстедах, а — i плотность тока в амперах на погонный сантиметр пересекаемой черты.

На рис. 638 изображена карта распределения эквивалентных токов, которая была вычислена Л. А. Корневой упомянутыми выше приемами [17, 18]. В формуле (20) было принято значение $M_{осн} = 7{,}25 \cdot 10^{25}$ *г·см*^{3}. Масштаб векторов: 1 *мм* соответствует 2 *а/м*.

Как видим, дополнительное магнитное поле может создаваться токами, которые распределены весьма интересным образом. Именно прежде всего намечается ток, идущий в области Атлантического океана с севера на юг вдоль меридианов. В области Тихого океана намечается ток, идущий примерно в противоположном направлении почти вдоль меридианов. В Индийском океане надо отметить две интересные детали: вокруг Австралии четко выражен кольцевой ток в направлении против стрелки часов, а вдоль побережья Азии ток идет с востока на запад. Как и следовало ожидать по карте рис. 637, над материками не намечаются никакие сколько-нибудь интересные токи.

В последние годы советские исследователи тщательно изучили магнитное поле в Арктике посредством точных измерений на дрейфующих полярных станциях [19]. При этом выявилась замечательная картина прохождения магнитных меридианов, воспроизведенная на рис. 639. Тесно сблизившись между собой, меридианы пересекают узким пучком Северный Ледовитый океан от Таймырского п-ова до магнитного полюса в Канадском архипелаге. Совершенно абсурдным было бы предположение о наличии «магнитного хребта» под Северным Ледовитым океаном, тем более потому, что на всем протяжении пучка меридианов элементы магнитного поля сильно меняются во времени. Естественно искать эквивалентную систему токов, которая могла бы создать расположение меридианов по рис. 639, при наличии основного магнитного поля Земли по-прежнему в свете идей Умова и Лебедева.

На рис. 640 изображено распределение токов, которые могут вызвать результирующее магнитное поле типа рис. 639. Вычисления векторов, представляющих в условном масштабе плотность тока, произведены Л. А. Корневой [18] посредством того же метода, который был применен при построении карты рис. 638. По-прежнему в формуле (20) принималось значение $M_{осн} =$

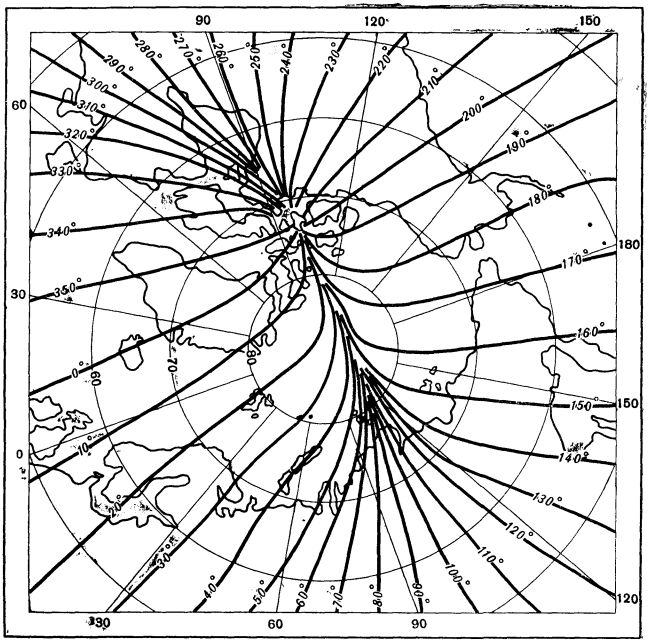


Рис. 639. Карта магнитных меридианов в Арктике (по АНИИ)

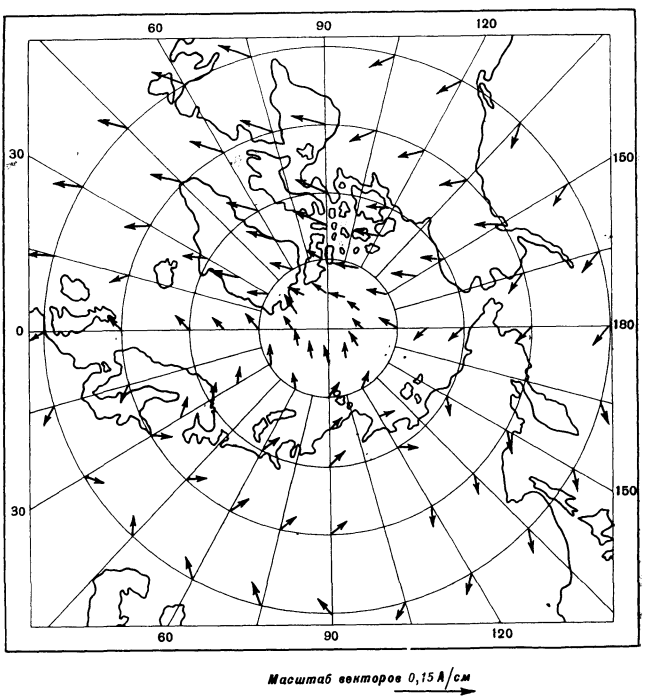


Рис. 640. Карта эквивалентных токов в Арктике (по Л. А. Корневой)

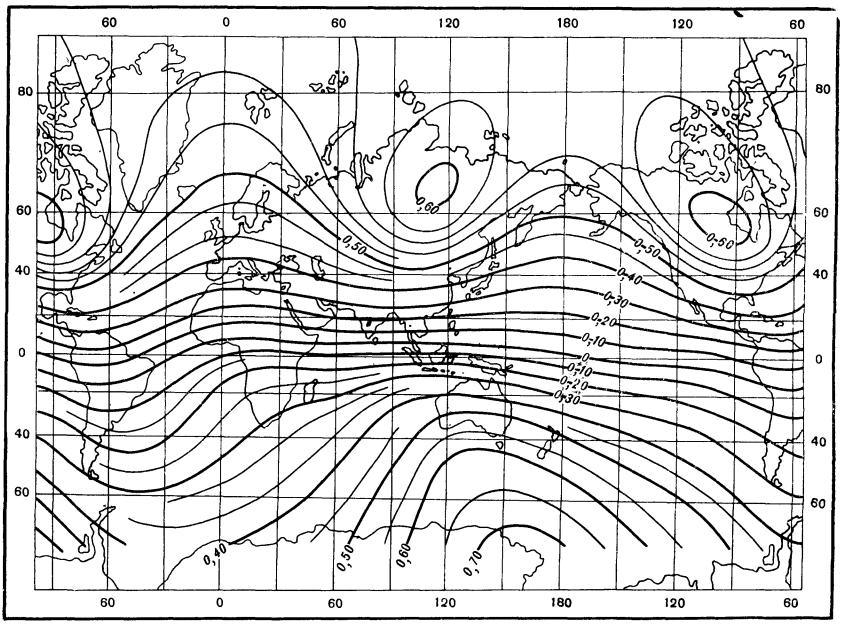


Рис. 641. Карта изодинам вертикальной составляющей (по ИЗМИРАН)

$= 7{,}25 \cdot 10^{25}$ $г \cdot см^3$. Как видим, общее направление токов в области Северного Ледовитого океана намечается таким же, каким оно было намечено на всем протяжении Атлантического океана: система токов Атлантики как бы продолжает систему токов, выходящих в промежутке между Гренландией и архипелагом Шпицбергена.

Гипотеза о токах, создающих дополнительное магнитное поле Земли, косвенно подтверждается при анализе карт вертикальной составляющей напряженности геомагнитного поля. Действительно, если вокруг материков Старого и Нового Света идут гипотетические токи, то вертикальная составляющая напряженности магнитного поля должна увеличиваться внутри материковых областей. Это действительно наблюдается, как показывает карта [1] изодинам вертикальной составляющей (для эпохи 1950 г.), воспроизведенная на рис. 641. На этой карте отчетливо виден значительный максимум на территории Сибири такого же порядка, какой соответствует району близ магнитного полюса ($Z > 0{,}6$).

Согласно гипотезе о токах, следует ожидать резко выраженные максимумы вертикальной составляющей на мысах и полуостровах, вокруг которых обходят гипотетические токи. В природе такие резкие местные максимумы действительно наблюдаются. В качестве примера на рис. 642 приведена карта изаномал вертикальных составляющих, полученная П. Т. Пасальским [20] при магнитной съемке Крымского п-ова.

На рис. 642 хорошо видно, как изаномалы оконтуривают береговую линию полуострова и как ясно выявляются максимумы на мысах.

Есть все основания полагать, что и особенности карты рис. 641, и замечательные тонкие детали карты рис. 642 свидетельствуют о наличии токов которым мы склонны приписывать дополнительное магнитное поле Земли.

Где же, на каком расстоянии от центра Земли находятся поверхности, оживленные этими токами?

Разумеется, полностью отпадает возможность существования сильных токов в слабопроводящей твердой коре Земли: в ней обнаруживаются лишь весьма слабые токи.

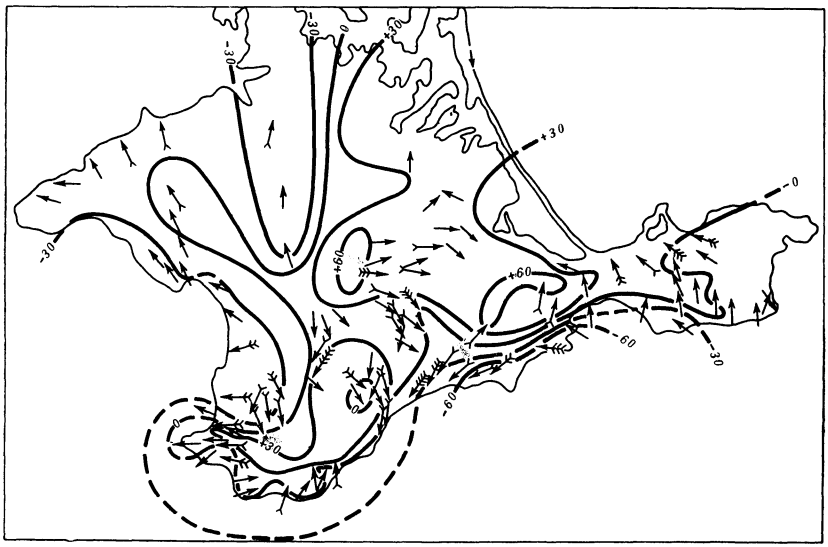


Рис. 642. Особенности магнитного поля над Крымским п-овом (по П. Т. Пасальскому)

Остаются три возможности, подлежащие тщательному исследованию: а) токи могут распространяться в хорошо проводящей массе океанических вод [16—18]; б) токи могут распространяться в хорошо проводящих массах воздуха ионосферы [21]; в) токи могут распространяться в проводящих массах под мантией Земли [10].

§ 7. Электропроводность морской воды

Морская вода представляет собой раствор большого числа солей, среди которых главную роль играет хлористый натрий. Чрезвычайно интересно, что при изменениях общего количества солей в широких пределах относительное количество тех или иных ионов остается практически постоянным во всех морях, связанных с океаном.

В приводимой табл. 39 первый столбец содержит химические обозначения основных ионов, второй — количество граммов соответствующего иона на 1 *кг* воды применительно к общей солености 34,482‰ (средней солености

Таблица 39

Ион	Количество (*г*) иона на 1 *кг* воды	% от общего веса всех ионов	Ион	Количество (*г*) иона на 1 *кг* воды	% от общего веса всех ионов
Cl^-	18,980	55,04	$H_3BO_3^-$	0,026	0,07
Br^-	0,065	0,19	Mg^{2+}	1,272	3,69
SO_4^-	2,649	7,68	Ca^{2+}	0,400	1,16
CO_3^-	0,071	0,21	Sr^{2+}	0,013	0,04
HCO_3^-	0,140	0,41	K^+	0,380	1,10
F^-	0,001	0,00	Na^+	10,556	30,61

океанических вод), третий показывает, сколько процентов от общего веса всех ионов приходится на долю того или иного иона.

Пропорция, в которой отдельные соли входят в общий состав, отличается от пропорции, приведенной в таблице, лишь в Каспийском море, представляющем собой, в сущности, изолированное озеро, а также в других соленых озерах. Поэтому электропроводность вод океана и любого моря (кроме Каспийского) можно считать однозначной функцией солености и температуры.

На рис. 643 изображена диаграмма, которая показывает, как меняется электропроводность в зависимости от S и ϑ. По оси абсцисс отложены значения общей солености морской воды в промилле, а по оси ординат — значения электропроводности в обратных омах на кубический сантиметр. Зависимость приведена для семи значений температуры воды: 0, 4, 8, 12, 16, 20 и 24°. Для промежуточных значений температуры легко найти электропроводность посредством интерполяции между кривыми.

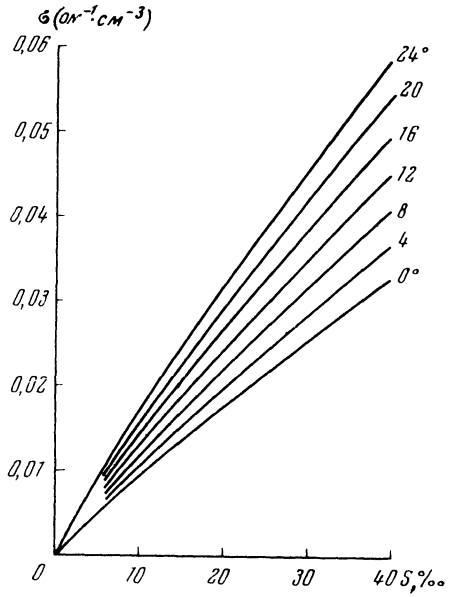


Рис. 643. Зависимость электропроводности морской воды от температуры и солености

Как видим на диаграмме рис. 643, при изменении температуры от 0 до 24°, а солености от 6 до 40‰ электропроводность меняется примерно от 0,006 до 0,06 $ом^{-1} \cdot см^{-3}$. Следовательно, она всегда очень значительно превосходит электропроводность пород, из которых сложена твердая оболочка Земли. Ведь даже электропроводность почв нормальной влажности не превышает 0,001, электропроводность известняка меняется в пределах от 10^{-5} до 10^{-4}, электропроводность вулканических пород еще меньше.

В связи с этим становится малопонятным, почему исследователи, давно обнаружившие теллурические токи в твердой оболочке Земли, очень долго не пытались узнать, не проходят ли значительно бо́льшие токи в водах океана и внутренних морей, обладающих большей электропроводностью?

§ 8. Теллурические токи в море

Теллурические токи в море были впервые обнаружены в 1935 г. А. Т. Мироновым, проводившим научно-промысловые исследования на Баренцевом море [22]. Заметив, что морские промысловые рыбы, в отличие от речных, проявляют положительный электротаксис (не глушатся током и не уходят от электродов, а идут к электродам), он пришел к заключению, что это поведение вызвано приспособлением к жизни в море, а потому в естественных, т. е. морских, условиях рыбы должны ощущать действие каких-то природных токов.

Погрузив в море электроды на расстоянии 200 *м* один от другого, Миронов обнаружил между ними разность потенциалов более милливольта. После систематических испытаний им было показано, что для исключения собственной разности потенциалов между электродами, зависящей от поляризации и других помех, лучше всего пользоваться свинцовыми электродами,

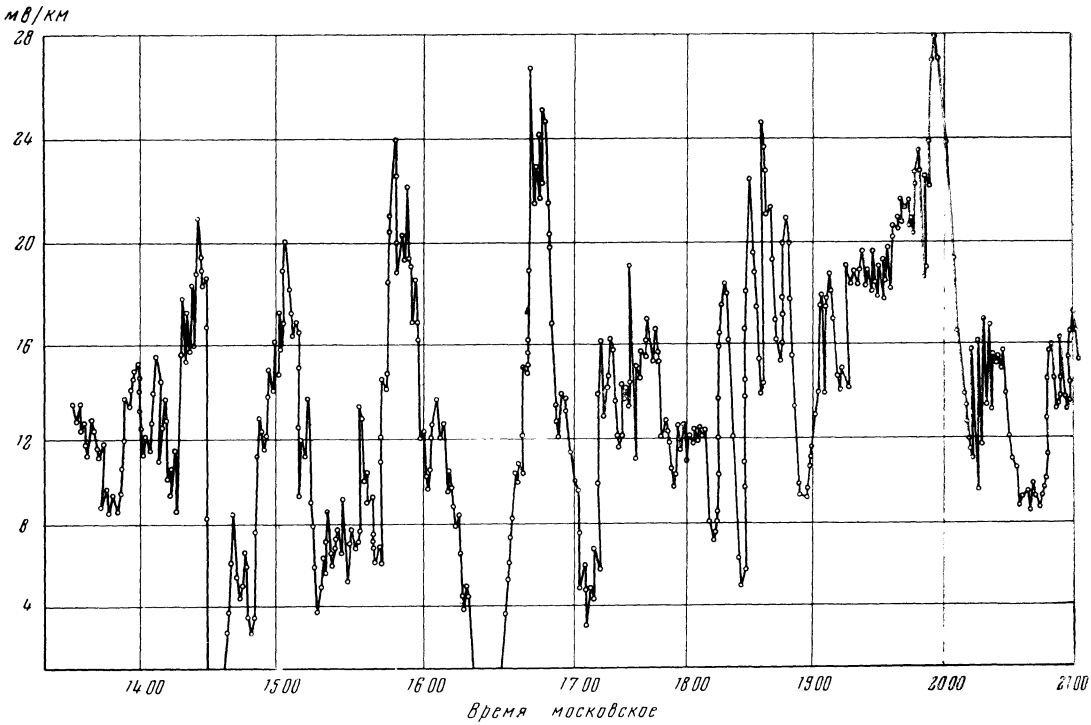


Рис. 644. Колебание теллурических токов в море (по А. Т. Миронову)

отлитыми из общего тигля и несколько дней выдержанными в море в замкнутой цепи. Перед опытами в море и после них электроды испытывали, чтобы убедиться в полном отсутствии собственной разности потенциалов или в ничтожном ее значении.

Разность потенциалов между двумя точками в море, обусловленная наличием теллурических токов, обладала небольшой постоянной составляющей, причем направление поля было на юго-запад. В продолжение суток и ото дня ко дню напряженность электрического поля колебалась с амплитудой, равной нескольким милливольтам на километр, причем иногда амплитуда достигала даже десятков милливольт на километр.

В 1945 г. измерения были поставлены на Черном море [23], причем разности потенциалов между электродами записывались регистрирующим потенциометром. Образец такой записи от 4 июня 1949 г. представлен на рис. 644.

Подобное поведение токов несомненно связано с магнитными бурями и вспышками полярных сияний. Документальным доказательством этой связи может служить рис. 645, где изображены наибольшие амплитуды в различные дни марта и апреля 1947 г. Под рисунком в примечаниях указаны данные, заимствованные из геомагнитных бюллетеней. Отчетливо видна связь между резким нарастанием теллурических токов в море и магнитными бурями.

Как и теллурические токи в твердой оболочке Земли, морские теллурические токи, по существу, обусловлены корпускулярным испусканием Солнца, вызывающим также и полярные сияния. В свою очередь, как известно, корпускулярное испускание меняет силу одновременно с изменением числа и площади солнечных пятен. Поэтому интересно сопоставить изменения амплитуд колебаний теллурических токов в море с изменениями характеристи-

ческого числа C, приводимого во всех бюллетенях по солнечной корпускулярной активности.

Такое сопоставление дано на рис. 646, построенном Мироновым по результатам регистраций токов за 1946, 1948 и 1949 гг. Как видим, между

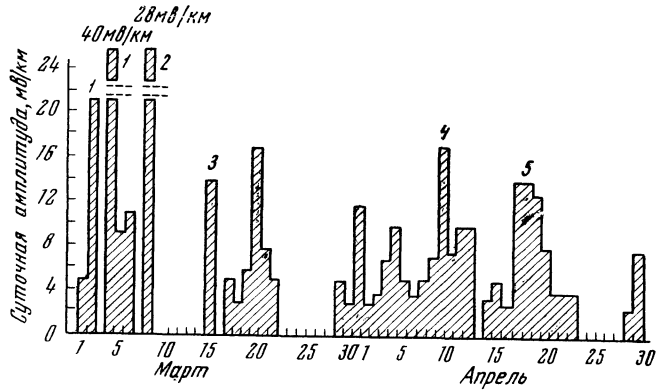


Рис. 645. Диаграмма амплитуд колебаний при магнитных бурях

1 — 2—4.III 1947 г. очень большая магнитная буря; кратковременные токи обратного направления; амплитуда от +20 до —20 *мв/км*; *2* — очень большая магнитная буря; *3* — умеренная магнитная буря; *4* — возмущенное магнитное поле; *5* — очень большая магнитная буря, внезапно начавшаяся в конце 17.IV и быстро окончившаяся

изменениями амплитуд напряженности электрического поля E в морской воде (милливольты на километр) и изменениями характеристического числа C существует четко выраженный параллелизм.

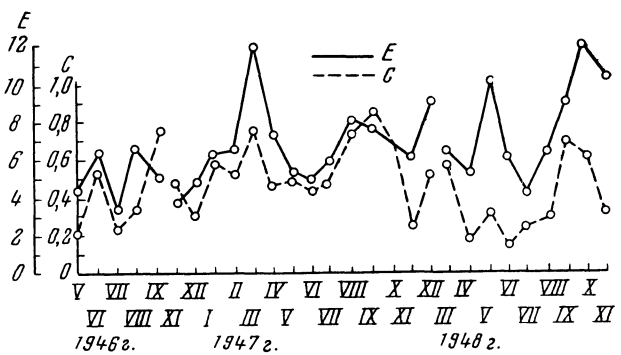


Рис. 646. Сопоставление кривых E и C

Необходимо отметить, что при регистрации разностей потенциалов между электродами, погруженными в море на расстоянии 500 *м* один от другого (вдоль береговой черты), не возникала опасность наложения электродвижущей силы, индуцируемой в петле: измерительный прибор — электрод — путь тока в воде вдоль берега — второй электрод — измерительный прибор. Вычисления показали, что при магнитных бурях колебания вертикальной составляющей геомагнитного поля внутри этой петли индуцируют в цепи электродвижущую силу, которая на *три порядка* меньше разности потенциалов, регистрируемой на записях типа рис. 644.

Регистрация электродвижущих сил, вызывающих теллурические токи в Черном море, была продолжена С. Я. Турлыгиным, Л. А. Корневой и

В. И. Лопатниковым [24]. Сперва применялись свинцовые электроды, предварительно обработанные по способу А. Т. Миронова, а затем — неполяризующиеся электроды различных систем. Наиболее стойкой оказалась система, предложенная В. И. Лопатниковым. Два таких электрода разнесены в прибрежном районе вдоль береговой линии на 200 *м*, два других — на расстояние 160 *м*, вдоль нормали к береговой черте. Чувствительность регистрации на потенциометре — 0,5 *мв/км*; время пробега шкалы потенциометра его кареткой — 1 *сек*.

На рис. 647 представлена сводка результатов измерений э. д. с. [25], составленная В. И. Лопатниковым для пятилетнего периода — с 1959 по 1964 г. включительно, т. е. с года особо интенсивной солнечной деятельности до года спокойного Солнца. Условные обозначения даны под диаграммой для дней, в которые напряженность электрического поля в воде составляла менее 10, от 10 до 25, 25—50 и более 50 *мв/км*.

На рисунке основной является диаграмма *б*, которая построена по принципу развертки времени по каждому синодическому обороту Солнца с целью выявления повторяемости возмущений, с приходом какого-либо меридиана Солнца в плоскость, проходящую через ось вращения Солнца и центр Земли. Следовательно, в каждом вертикальном столбце диаграммы *б* соседние календарные числа отстоят одно от другого на 27 суток. Оценка активности Солнца произведена по пиковым значениям напряженности измеряемого электрического поля в море, за каждые сутки по четырехбалльной шкале, соответствующей различной штриховке квадратиков (как указано под диаграммой).

На диаграмме *б* видно общее уменьшение густоты штриховки клеток при перемещении вниз, от 1959 г. к 1964 г., т. е. при общем спаде солнечной активности. В особенности это относится к возмущениям большой силы, которым соответствуют полностью зачерненные квадратики. На диаграмме *а* горизонтальные отрезки слева выражают количество возмущенных дней (из двадцати семи в каждой горизонтальной строке диаграммы *б*) с напряженностью поля более 50 *мв/км*. Сорок шесть таких дней приходится на первую половину солнечного полуцикла, отраженного на рис. 647, и только пять — на вторую. Вместе с тем редеют возмущения средней силы — свыше 25 *мв/км*. Общий спад поля виден и на кривых, помещенных на диаграмме *а*,— от 1959 к 1964 г.

Очень интересна кривая *в*. Она построена по суммам баллов, характеризующих напряженность электрического поля в море, для каждого вертикального столбца диаграммы *б*. Отчетливо видно, что на поверхности Солнца существуют более активные и менее активные полосы, протянувшиеся вдоль солнечных меридианов. Такая 27-дневная повторяемость менее заметна в годы высокой активности Солнца и отчетливо видна в годы ее спада. Как известно, это же характерно и для картины колебаний элементов геомагнитного поля.

Рис. 647. Диаграмма изменений электрической активности во времени (по В. И. Лопатникову)

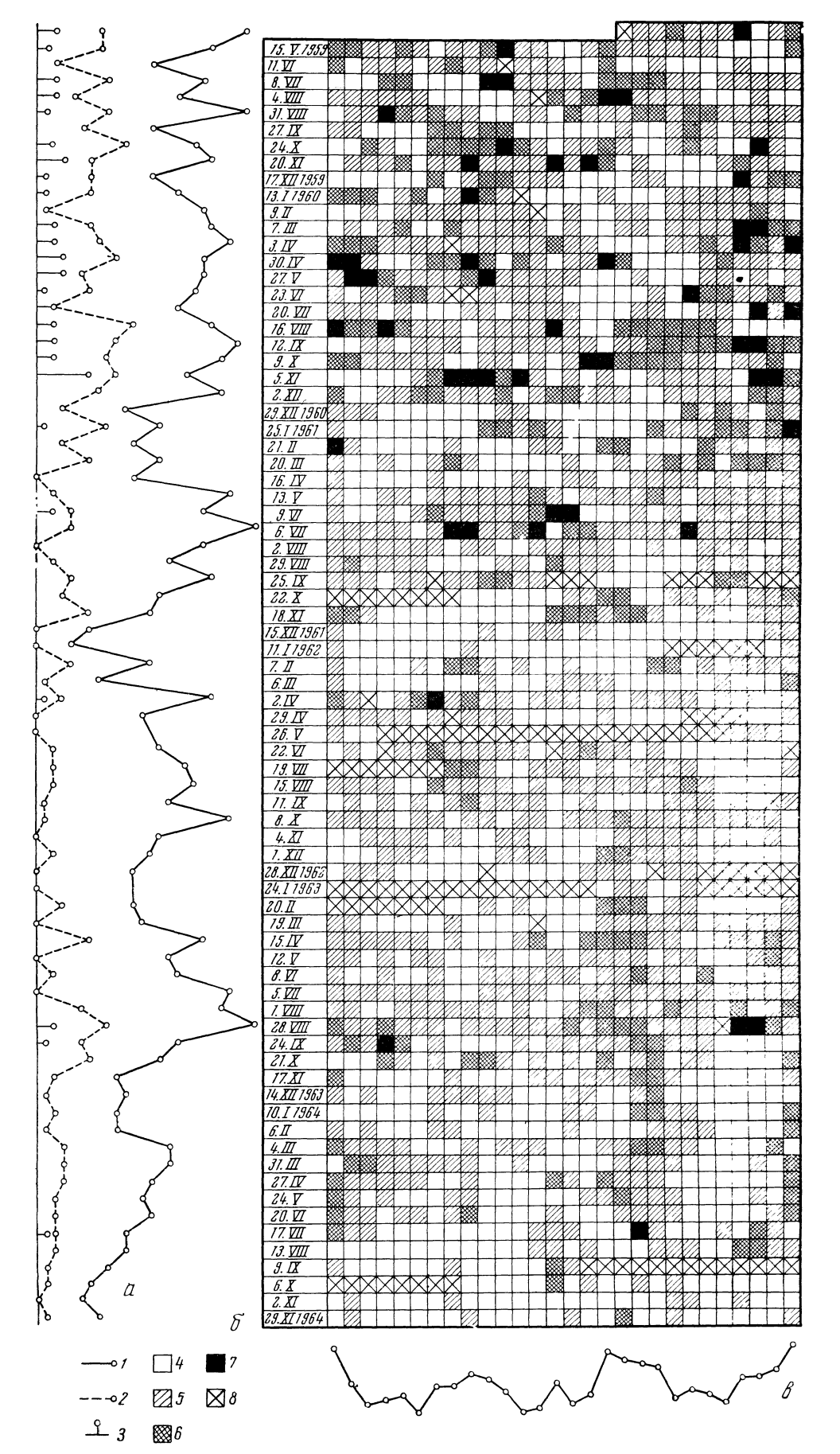
а — сезонный ход электрической активности за полупериод солнечного цикла; каждая точка получена осреднением активности за один синодический оборот Солнца. Число возмущений с напряженностью поля: *1* — > 10 *мв/км*; *2* — > 25 *мв/км*; *3* — > 50 *мв/км*;

б — распределение во времени напряженности электрического поля (построено по пиковым значениям за сутки). В каждом вертикальном столбце соседние календарные числа отстоят друг от друга во времени на период синодического оборота Солнца.

Число возмущений с напряженностью поля:

4 — до 10 *мв/км*; *5* — 10—25 *мв/км*; *6* — 25—50 *мв/км*; *7* — > 50 *мв/км*; *8* — некачественная запись;

в — осредненный ход активности при обращении Солнца вокруг оси. Осреднение проведено по полупериоду цикла


15. V. 1959
11. VI
8. VII
4. VIII
31. VIII
27. IX
24. X
20. XI
17. XII 1959
13. I 1960
9. II
7. III
3. IV
30. IV
27. V
23. VI
20. VII
16. VIII
12. IX
9. X
5. XI
2. XII
29. XII 1960
25. I 1961
21. II
20. III
16. IV
13. V
9. VI
6. VII
2. VIII
29. VIII
25. IX
22. X
18. XI
15. XII 1961
11. I 1962
7. II
6. III
2. IV
29. IV
26. V
22. VI
19. VII
15. VIII
11. IX
8. X
4. XI
1. XII
28. XII 1962
24. I 1963
20. II
19. III
15. IV
12. V
8. VI
5. VII
1. VIII
28. VIII
24. IX
21. X
17. XI
14. XII 1963
10. I 1964
6. II
4. III
31. III
27. IV
24. V
20. VI
17. VIII
13. VIII
9. IX
6. X
2. XI
29. XI 1964
а
б
в
1
2
3
4
5
6
7
8

§ 9. Строение поля теллурических токов в замкнутом море

И первые диаграммы А. Т. Миронова, воспроизведенные на рис. 645 и 646, и надежные документальные материалы, накопленные В. И. Лопатниковым [25], послужившие, в частности, для построения диаграмм рис. 647,— все это давало повод рассматривать теллурические токи в Черном море как часть обширного поля токов, охватывающих весь материк Европы и Азии, а также примыкающие к ним воды океанов. Поэтому еще на самой несовершенной ступени исследований, начатых в Черноморском отделении Морского гидрофизического института, С. Я. Турлыгин сделал попытку гидродинамического моделирования поля токов в Черном море, исходя из исследований Дж. Стокса над движением струй вязких жидкостей. Если функция тока ψ удовлетворяет уравнению Лапласа в тонком слое между твердыми граничными плоскостями, то количество жидкости, протекающей вдоль какой-либо линии тока сквозь единицу поверхности, нормальной к этой линии тока, должно быть пропорциональным кубу расстояния между плоскостями. Следовательно, если на пути потока вязкой жидкости встречаются изменения в толщине слоя между пластинами, то это будет равносильно изменениям «удельного сопротивления» по закону куба толщины слоя.

С. Я. Турлыгин и Н. А. Карелина сделали несколько серий опытов над моделированием различных полей «токов», среди которых особый интерес представляет моделирование *потенциальных* потоков над «материком» и «Черным морем» [26]. На плоское деревянное дно сосуда наливалась расплавленная белая паста, состоявшая из смеси парафина с мелом, и тщательно выравнивалась. На тех участках модели, которые изображали море, паста выскабливалась до нужной глубины, причем вся поверхность «моря» была разбита на две «глубинные зоны»: зону материковой отмели и зону наибольших глубин. Следовательно, самый тонкий слой вязкой прозрачной жидкости — чистого глицерина — находился над материком вокруг «моря» (сверху его ограничивала плоскость зеркального стекла, наложенного на модель), толще был слой над «материковой отмелью» и еще толще слой над «наибольшими глубинами моря». Экспериментаторы исследовали два варианта потенциального течения тонких струй сильно окрашенного глицерина, вводившихся в неподвижный слой прозрачного чистого глицерина: либо в направлении «с севера на юг», либо в направлении «с запада на восток». Получавшиеся картины окрашенных струй фотографировались аппаратом, установленным над моделью и направленным объективом вниз.

На рис. 648 изображен снимок в первом из этих вариантов, а на рис. 649 — снимок во втором варианте.

Отчетливо видно преломление линий тока на границах между материком и началом материковой отмели и между материковой отмелью и зоной наибольших глубин. Очень интересна «тень» от Крымского п-ова, видная на рис. 648, сгущение линий тока по бокам от него и разрежение их при выходе к югу. На рис. 649 видно сгущение линий тока в «узости» между берегами Крыма и берегами Малой Азии и разрежение их к западу и к востоку от этой «узости».

Качественная картина, полученная на этой модели С. Я. Турлыгиным и Н. А. Карелиной, отлично подкрепляется расчетами, которые произвел В. И. Лопатников, исследуя потенциальное поле вокруг сложного контура, заключающего внутри себя «бесконечно проводящую среду». Исследование было выполнено посредством метода конформных отображений применительно к тем же двум вариантам задачи. На рис. 650 видны линии тока, полученные В. И. Лопатниковым применительно к случаю, когда основное поле вдали от «возмущающей области» характеризуется направлением

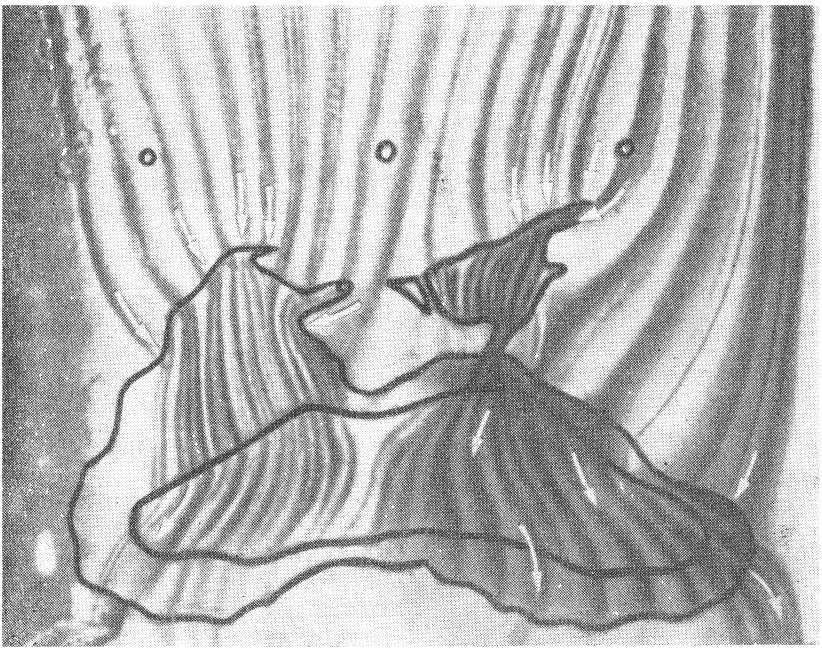


Рис. 648. Моделирование токов «с севера на юг» (по С. Я. Турлыгину)

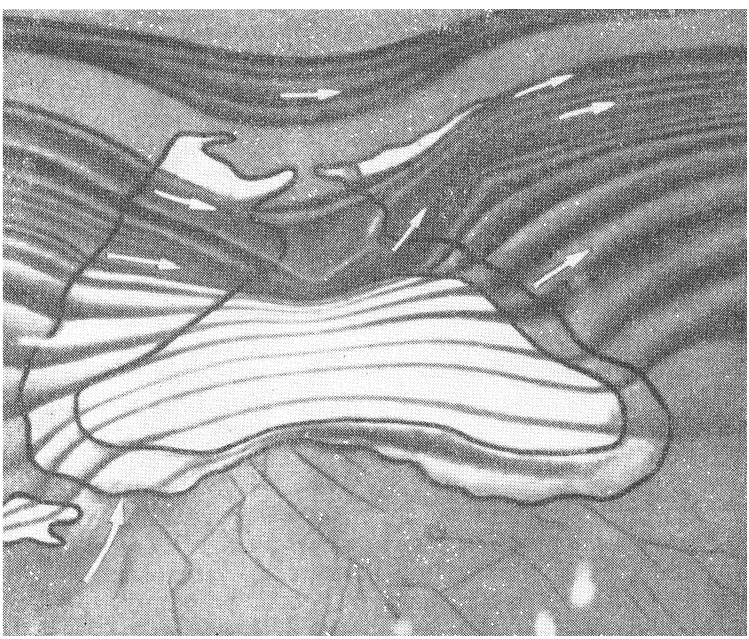


Рис. 649. Моделирование токов «с запада на восток» (по С. Я. Турлыгину)

линий тока с севера на юг. На рис. 651 изображены линии тока, построенные тем же автором применительно к случаю, когда основное поле характеризуется направлением линий тока с запада на восток. Внутри контура, приблизительно копирующего очертания области наибольших глубин в Черном море, в обоих случаях, В. И. Лопатников полагает электропроводность бесконечно большой. Легко установить прямое сходство между схемами С. Я. Турлыгина и В. И. Лопатникова. Схемы получены совершенно различными методами и подкрепляют одна другую.

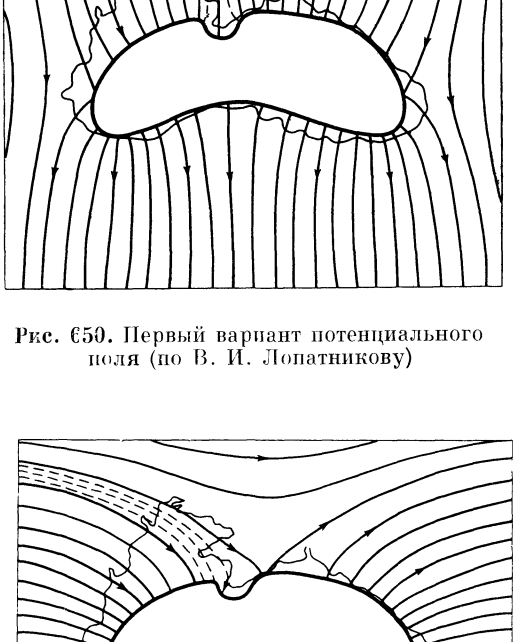


Рис. 650. Первый вариант потенциального поля (по В. И. Лопатникову)

Хорошо объяснимо характерное различие между схемами обоих цитированных авторов: линии тока по-разному подходят к границам между материковой отмелью и областью наибольших глубин. Это — потому, что на модели Турлыгина «электропроводность» среды в центральной области Черного моря принята хотя и большой, но конечной, а на модели Лопатникова она считается бесконечно большой.

В некоторых условиях линии тока могут коренным образом отличаться и от первой, и от второй схемы: в замкнутом море, в частности на Черном море, они могут оказаться полностью замкнутыми. Но это будет свидетельствовать *не о потенциальном*, а о *вихревом* происхождении электрического поля в море.

Рис. 651. Второй вариант потенциального поля (по В. И. Лопатникову)

Такое — чисто вихревое — поле теллурических токов в море должно быть вызвано колебаниями вертикальной составляющей геомагнитного поля. О наличии вихревых токов в океанах и морях В. В. Шулейкин высказал гипотезу еще в 1957 г. в связи с исследованиями, которые будут описаны в § 11. Поэтому он сделал попытку аналитического решения задачи о вихревых токах, индуцируемых в море постоянной глубины, при колебаниях вертикальной составляющей Z магнитного поля [27]. После ряда упрощающих допущений решение было им получено в бесселевых функциях комплексного переменного, причем напряженность электрического поля вдоль береговой линии (окружности) зависела от безразмерного критерия $2R\sqrt{2\pi\sigma\omega}$ (здесь R — радиус моря, σ — удельная электропроводность морской воды, ω — циклическая частота колебаний Z).

Благодаря весьма большим значениям R в природных условиях, в море должен возникать явно выраженный *скинэффект* при частотах ω и при электропроводности σ, ничтожно малых по сравнению с теми, которые встречаются, например, в радиотехнике. Качественные результаты [27] вполне со-

ответствовали наблюдениям в природе: в океанах и на морях действительно наблюдается так называемый береговой эффект.

В то же время, несмотря на очень большие абсолютные глубины моря, есть основания считать, что решение уравнений Максвелла в [27] может оказаться недопустимо грубым при действительном строении электромагнитного поля в море, простирающемся очень далеко в горизонтальных направлениях. Кроме того, в [27] вообще не было учтено влияние отношения глубины моря ζ к его линейным размерам.

Специальные опыты с индуцированными токами в тонких медных и латунных дисках, проделанные В. Б. Федосеевым [28], выявили погрешности, возникающие при схематизированном решении задачи в [27]. Но из этих опытов нельзя было извлечь никаких данных для построения какого-либо критерия подобия с целью перехода от лабораторных опытов к пересчету на натурные условия: не удалось найти какой-либо безразмерный параметр, который учитывал бы и R, и σ, и ω, и отношение ζ/R глубины моря к его радиусу.

Поэтому В. В. Шулейкин возвратился к числовому методу решения задачи, применявшемуся им еще до работы [27].

Рассматривается круглое море с радиусом 355 *км*, глубина которого пока принимается постоянной, равной ζ. В толще морской воды выделяются кольца шириной $\Delta = 10$ *км* и высотой ζ *км*. Если удельная электропроводность морской воды равна σ *ом*$^{-1}\cdot$*см*$^{-3}$, то электропроводность каждого погонного сантиметра такого кольца равна $\sigma_1 = 10^{11}\,\zeta\sigma$ *ом*$^{-1}$.

Ввиду ожидаемого сильного скинэффекта считается достаточным исследовать поле 20 таких колец, начиная со среднего радиуса 350 *км* до среднего радиуса 160 *км*: вполне законно пренебречь полями токов в кольцах с меньшими средними радиусами, где токи должны падать до нуля к центру моря по заведомо линейному закону. Во всяком случае это будет осуществляться при колебаниях вертикальной составляющей Z геомагнитного поля с периодами в несколько минут [29].

Применительно к иным параметрам аналогичную задачу ставил египетский математик А. Ашур [30], который свел ее к решению интегральных уравнений Фредгольма. В настоящее время целесообразней и значительно проще вести решение системы обыкновенных алгебраических уравнений посредством электронных счетных машин. Таким путем В. В. Шулейкин получил универсальную матрицу, позволяющую без всяких затруднений перейти от случая плоского дна к случаям какого угодно сложного строения морского дна, лишь бы оно моделировалось поверхностью вращения. Та же матрица пригодна и для решения задачи о токах в море неоднородном по солености и температуре,— с подобным же ограничением: при условии, что изотермические и изогалинные поверхности являются поверхностями вращения [29].

Временно, чтобы не пользоваться индексами, которые понадобятся в дальнейшем, обозначим силы токов в выделенных 20 кольцах буквами a, b, c, ..., u, v. Тогда, например, в кольце втором от берега ток b (в амперах) окажется связанным с колебаниями z напряженности геомагнитного поля и с токами в различных кольцах посредством уравнения индукции и самоиндукции

$$b = -\frac{1}{2} R_b \sigma_1 \frac{dz}{dt}\cdot 10^{-8} + \frac{\mathcal{M}_{ba}}{2\pi R_b}\sigma_1 \frac{da}{dt}\cdot 10^{-6} + \frac{\mathcal{L}_{bb}}{2\tau R_b}\sigma_1 \frac{db}{dt} - \\ - \frac{\mathcal{M}_{bc}}{2\pi R_b}\sigma_1 \frac{dc}{dt}\cdot 10^{-6} - \ldots - \frac{\mathcal{M}_{bv}}{2\pi R_b}\sigma_1 \frac{dv}{dt}\cdot 10^{-6}. \qquad (22)$$

Здесь R_b — средний радиус второго от берега кольца, а буквами $\mathcal{M}$ и $\mathcal{L}$ с соответствующими индексами обозначены коэффициенты взаимоиндуктивности и самоиндуктивности, выраженные в микрогенри. Они заимствованы

из справочника [31]. Там величины $\mathcal{M}$ выражены формулой

$$\mathcal{M}_{ba} = \mathcal{N}_{ba} \sqrt{R_b R_a}\ мкг, \tag{23}$$

в которой коэффициенты $\mathcal{N}$ зависят от соответствующих отношений $\frac{R_a}{R_b}$, $\frac{R_c}{R_b}$... В цитированном справочнике табулированы значения $\mathcal{N}$ для аргументов, меняющихся в широких пределах. В том же справочнике есть данные для определения $\mathcal{L}$ по заданному радиусу и отношению радиуса к ширине кольца Δ.

Вместо $\mathcal{M}$ и $\mathcal{L}$ в уравнения типа (22) можно подставить более удобные выражения

$$M_{ba} = \frac{\mathcal{M}_{ba}}{R_b} = \mathcal{N}_{ba} \sqrt{\frac{R_a}{R_b}}, \quad L_{bb} = \frac{\mathcal{L}_{bb}}{R_b}, \quad M_{bc} = \mathcal{N}_{bc} \sqrt{\frac{R_c}{R_b}}, \ldots \tag{24}$$

Для еще большего упрощения уравнений умножим обе части их на величину $\frac{2\pi}{\sigma_1} \cdot 10^8$. Тогда, после перегруппировки членов, окажется возможным записать уравнения типа

$$-\frac{2\pi}{\sigma_1} \cdot 10^8 b + 100\, M_{ba} \frac{da}{dt} + 100\, L_{bb} \frac{db}{dt} - 100\, M_{bc} \frac{dc}{dt} - \ldots = \pi R_b \frac{dz}{dt}. \tag{25}$$

Так составятся 20 уравнений, выражающих токи в кольцах. Но кроме этих неизвестных в полученные уравнения входят еще 20 неизвестных: производные от сил тока по времени t. Недостающие 20 дополнительных уравнений легко найти из уравнений типа (25), продифференцировав по времени обе их части. Тогда вместо токов в новых уравнениях окажутся первые производные от токов по времени, а вместо первых производных от токов и от z, входящих в уравнения типа (25),— вторые производные, которые просто равны произведениям квадрата циклической частоты на соответствующий ток (и z), взятые с отрицательным знаком.

В итоге, разделив на ω^2 обе части всех новых уравнений, найдем дополнительные 20 уравнений типа

$$-100\, M_{ba} a - 100\, L_{bb} b + 100\, M_{bc} c + \ldots - \frac{2\pi}{\sigma_1 \omega^2} \frac{db}{dt} \cdot 10^{-8} = -\pi R_b z. \tag{26}$$

Для решения полученных 40 уравнений с 40 неизвестными составим матрицу из всех коэффициентов при неизвестных, помещенную на стр. 1003.

Вдобавок выпишем столбцы, которые должны содержать свободные члены, вычисленные для различных фаз колебания напряженности геомагнитного поля по гармоническому закону:

$$\pi R_i \frac{dz}{dz} = \pi R_i z_0 \omega \sin \omega t, \tag{27}$$

$$-\pi R_i z = \pi R_i z_0 \cos \omega t. \tag{28}$$

Здесь z_0 — амплитуда колебаний.

Как видим, матрица состоит из четырех частей, обладающих характерными свойствами. В левой верхней части по диагонали расположились коэффициенты $-\frac{2\pi}{\sigma_1} \cdot 10^{-8}$ при искомых величинах — силах тока в 20 кольцах. Эти коэффициенты зависят от σ_1, т. е. от удельной электропроводности морской воды σ, от глубины моря ζ и диаметра моря, если ширина Δ каждого из колец составляет определенную долю от R_0, где R_0— средний радиус кольца, ближайшего к берегу. В работе [29] было принято $\Delta/R_0 = 1/35$.

В правой нижней части матрицы, также по диагонали, расположены коэффициенты при производных от сил токов по времени. Они зависят и от σ_1, и от ω. Сами производные не представляют самостоятельного интереса в излагаемой задаче, а служат лишь для замыкания уравнений.

i \ k	1	2	3	....	19	20	21	22	23	....	39	40
1	$-\frac{2\pi}{\sigma_1}\cdot 10^8$	0	0	....	0	0	$100L_{aa}$	$-100M_{ab}$	$-100M_{ac}$	....	$-100M_{au}$	$-100M_{av}$
2	0	$-\frac{2\pi}{\sigma_1}\cdot 10^8$	0	....	0	0	$100M_{ba}$	$100L_{bb}$	$-100M_{bc}$	....	$-100M_{bu}$	$-100M_{bv}$
3	0	0	$-\frac{2\pi}{\sigma_1}\cdot 10^8$	....	0	0	$100M_{ca}$	$100M_{cb}$	$100L_{cc}$	....	$-100M_{cu}$	$-100M_{cv}$
..	.....				.....							
19	0	0	0	....	$-\frac{2\pi}{\sigma}\cdot 10^8$	0	$100M_{ua}$	$100M_{ub}$	$100M_{uc}$	....	$100L_{uu}$	$-100M_{uv}$
20	0	0	0	....	0	$-\frac{2\pi}{\sigma}\cdot 10^8$	$100M_{va}$	$100M_{vb}$	$100M_{vc}$	....	$100M_{vu}$	$100L_{vv}$
21	$-100L_{aa}$	$+100M_{ab}$	$+100M_{ac}$	....	$+100M_{au}$	$+100M_{av}$	$-\frac{2\pi}{\sigma_1\omega^2}\cdot 10^8$	0	0	....	0	0
22	$-100M_{ba}$	$-100L_{bb}$	$+100M_{bc}$	....	$+100M_{bu}$	$+100M_{bv}$	0	$-\frac{2\pi}{\sigma\omega^2}\cdot 10^8$	0	....	0	0
23	$-100M_{ca}$	$-100M_{cb}$	$-100L_{cc}$	....	$+100M_{cu}$	$+100M_{cv}$	0	0	$-\frac{2\pi}{\sigma_1\omega^2}\cdot 10^8$	....	0	0
..	.....				.....							
39	$-100M_{ua}$	$-100M_{ub}$	$-100M_{uc}$	....	$-100L_{uu}$	$+100M_{uv}$	0	0	0	....	$-\frac{2\pi}{\sigma_1\omega^2}\cdot 10^8$	0
40	$-100M_{va}$	$-100M_{vb}$	$-100M_{vc}$	....	$-100M_{vu}$	$-100L_{vv}$	0	0	0	....	0	$-\frac{2\pi}{\sigma_1\omega^2}\cdot 10^8$

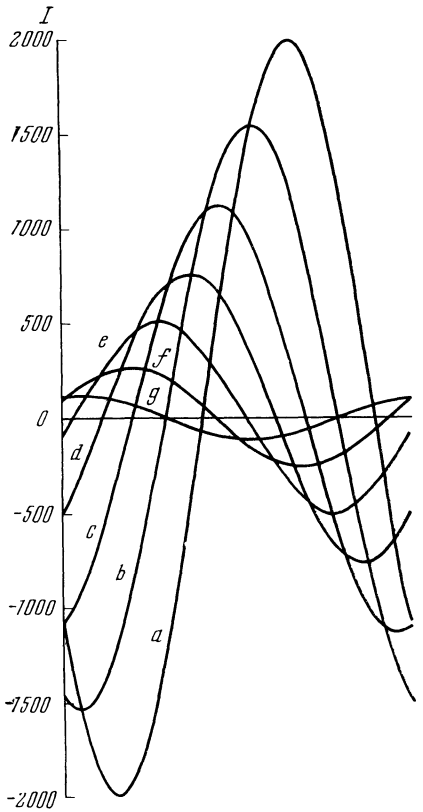


Рис. 652. Теоретические характеристики поля вихревых токов

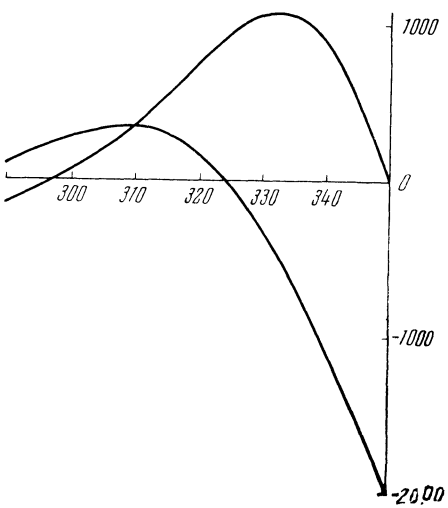


Рис. 653. Электромагнитная волна в двух фазах

В правой верхней и в левой нижней частях матрицы сгруппированы величины, которые могут сохраняться при решении множества задач, поскольку они зависят лишь от того, на сколько колец разбито круглое море и каково отношение ширины Δ колец к среднему радиусу R_0 кольца, ближайшего к берегу.

В работе [29] задана типичная амплитуда колебаний вертикальной составляющей геомагнитного поля $z_0 = 10\gamma = 10^{-4}$ *э*.

Для электропроводности принято значение $\sigma = 0{,}03$ *ом*$^{-1}\cdot$*см*$^{-1}$. Как уже отмечалось, $2R_0 = 700$ *км* $= 7\cdot10^7$ *см*.

Рассмотрены три варианта задачи: а) глубина моря постоянная, $\zeta = 1$ *км* $= 10^5$ *см*; циклическая частота $\omega = 2\cdot10^{-2}$ *сек*$^{-1}$, т. е. период колебаний геомагнитного поля $T = 5{,}23$ *мин*; *б*) глубина постоянная, $\zeta = 0{,}5$ *км*; $\omega = 10^{-2}$ *сек*$^{-1}$, т. е. $T = 10{,}5$ *мин*; в) глубина меняется при удалении от берега по закону, типичному для внутреннего моря, изображенному на рис. 654 под осью абсцисс; $\omega = 2\cdot10^{-2}$ *сек*$^{-1}$, т. е. $T = 5{,}23$ *мин*.

По заданной матрице и столбцам свободных членов, вычисленных применительно к различным фазам колебания z, уравнения были решены Б. И. Волковым на электронной машине Московского университета применительно к перечисленным параметрам.

На рис. 652 изображены колебания силы тока в различных кольцах (кривые a — g) на основании решения задачи по варианту а). Вместо дискретных точек на диаграмму нанесены плавные кривые, проведенные по ним.

На рисунке видно, что колебания силы тока в первом от берега кольце достигают амплитудного значения $2000\,a$ и отстают от колебаний производной dz/dt на фазовый угол 146°. Колебания в остальных кольцах быстро уменьшаются по мере удаления от берега, причем уменьшается и отставание по фазе от колебаний dz/dt.

Следовательно, от центра моря к берегу распространяется электромагнитная волна, у которой амплитуда ничтожна вдали от берега и стремительно нарастает при подходе к берегу. Скорость распространения этой волны

здесь составляет 300 *м/сек*. Интересно отметить, что скорости такого же порядка получались и при схематизированном решении задачи в работе того же автора [27].

На рис. 653 изображен профиль электромагнитной волны в двух фазах: когда ток в ближайшем к берегу кольце равен 0 и — 2000 *а*. Он вычислен на основании материалов рис. 652. По оси абсцисс отложены расстояния от центра моря, выраженные в километрах.

На рис. 654 изображена сводка результатов вычислений во всех трех вариантах (кривые *1*, *2* и *3*). По оси абсцисс отмечены расстояния от центра моря до середины каждого кольца. Так же, как и на рис. 654, не нанесены дискретные точки, а лишь кривые, проходящие через них. Вместо значений сил тока в различных кольцах по оси ординат отмечены амплитудные значения напряженности электрического поля в морской воде, поддающиеся непосредственному измерению в природе. Это — величины, которые связаны с силой тока в кольцах соотношением

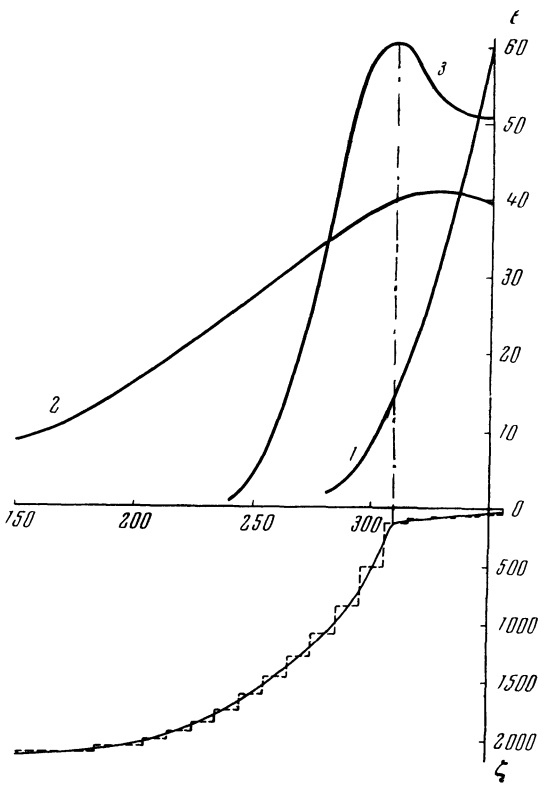


Рис. 654. Береговой эффект

$$E_к = \frac{I_к}{\zeta \Delta\sigma}. \qquad (29)$$

В варианте а) у самого берега $E = 60$ *мв/км*, а отступя от берега, напряженность стремительно уменьшается: уже на расстоянии 60 *км* она падает до 4 *мв/км*.

В варианте б) у самого берега $E = 39$ *мв/км*; сперва E возрастает и на расстоянии 25 *км* от берега достигает максимального значения 41 *мв/км*, после чего падает в открытом море медленней, чем в варианте а): на расстоянии 200 *км* от берега $E = 8$ *мв/км*.

Наибольший интерес представляет вариант в). Для подготовки числовых значений σ_1, входящих в соответствующие клетки матрицы, профиль дна моря, изображенный сплошной кривой ниже оси абсцисс на рис. 654, пришлось заменить ступенчатой линией, которая нанесена пунктиром. Значения глубин, выраженные в метрах, проставлены вдоль нижнего отрезка оси ординат. Как видно на рисунке, максимальная напряженность электрического поля $E = 60$ *мв/км* соответствует той точке кривой *3*, которая находится над краем материковой отмели, где глубины начинают быстро нарастать в направлении открытого моря. Напряженность поля уменьшается до 51 *мв/км* у самого берега и резко падает в открытом море: например, на расстоянии 60 *км* от края отмели $E = 4{,}5$ *мв/км*, а на расстоянии 70 *км* от этого края $E = 1$ *мв/км*.

§ 10. Индуцированные токи в движущихся водах

В предыдущем параграфе были описаны токи, возникающие в океане благодаря электрическим и магнитным явлениям космического происхождения. Эти теллурические токи возникают в морской воде независимо от того, неподвижна она или движется.

Помимо этих токов, аналогичных теллурическим токам в твердой коре Земли, необходимо исследовать токи совсем иного происхождения — индуцированные в водах, при их движении относительно силовых линий земного магнитного поля.

Еще М. Фарадей высказал мысль о том, что пересечение магнитных силовых линий земного поля потоком воды должно индуцировать в этой воде электрический ток, тем более сильный, чем больше электропроводность воды. Подобные условия существуют при распространении морских течений, воды которых непрерывно пересекают силовые линии геомагнитного поля.

В настоящее время электромагнитный метод измерения скоростей морских течений получил широкое распространение [32]. Но, увлекаясь этим интересным методом, многие практики не учитывают многочисленные источники возможных помех, в частности, не учитывают налагающееся поле теллурических токов, телесное распределение электрических токов при тех или иных частных граничных условиях, при тех или иных формах поперечного сечения струй и изменениях электропроводности в пределах живого сечения потока. Именно поэтому обильный материал измерений иногда приводит в конечном итоге к разочарованию. Влияние помех от теллурических токов будет исключаться по мере изучения особенностей и основных параметров этих токов в направлении, описанном в предыдущем параграфе.

Для учета влияния местных особенностей водного потока, его строения, формы живого сечения, близости дна, распределения солености и температуры в сечении и т. д. едва ли можно создать жесткие, законченные инструкции. Однако некоторую пользу уже сейчас может принести хотя бы предварительный теоретический анализ поведения потока морской воды, пересекающего силовые линии геомагнитного поля [33].

Пусть напряженность этого поля в исследуемой точке выражается вектором $\mathbf{H}$, а силовые линии пронизывают некоторую поверхность S, которая оконтурена замкнутой кривой длиной s.

В совершенно общей форме закон индукции записывается так:

$$\frac{d}{dt}\int\int \mathbf{H}d\mathbf{S} + \oint \rho i ds = 0. \tag{30}$$

Здесь ρ — удельное сопротивление воды, а $\mathbf{i}$ — вектор плотности тока. В данном случае общее уравнение должно учитывать движение морской воды со скоростью $\mathbf{v}$. В связи с этим на основании теорем о преобразовании интегралов первый член уравнения (30) следует представить в форме

$$\frac{d}{dt}\int\int \mathbf{H}d\mathbf{S} = \int\int \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} dS + \int\int \mathbf{v}\,\mathrm{div}\,\mathbf{H}dS - \int\int \mathrm{rot}\,[\mathbf{vH}]\,dS. \tag{31}$$

Магнитное поле в не слишком обширной области океана можно считать равномерным и не меняющимся во времени. Поэтому в уравнении (31) обращаются в нуль первый и второй члены правой части. Что касается третьего члена правой части уравнения (31), то его можно преобразовать по теореме Остроградского — Стокса

$$-\int\int \mathrm{rot}\,[\mathbf{vH}]\,dS = -\oint [\mathbf{vH}]\,dS. \tag{32}$$

В результате на основании уравнений (31) и (32) уравнение (30) перепишется в простом виде

$$\oint ([\mathbf{vH}] - \rho i)\,d\mathbf{s} = 0. \tag{33}$$

Но если интеграл по контуру здесь равен нулю, то функцию $[\mathbf{vH}] - \rho\mathbf{i}$ можно рассматривать как градиент некоторой потенциальной функции Φ

$$\operatorname{grad}\Phi = [\mathbf{vH}] - \rho\mathbf{i}. \tag{34}$$

Взяв дивергенцию от обеих частей уравнения (34), получим

$$\nabla^2\Phi = \mathbf{H}\operatorname{rot}\mathbf{v} - \operatorname{div}\rho\mathbf{i}. \tag{35}$$

В простейшем случае, когда температура и соленость постоянны в пределах исследуемой области, а значит постоянно и удельное сопротивление ρ морской воды, можно положить

$$\operatorname{div}\rho\mathbf{i} = 0,$$

и тогда лапласиан потенциальной функции выразится просто через произведение вектора напряженности магнитного поля $\mathbf{H}$ на вихрь вектора скорости течения $\mathbf{v}$:

$$\nabla^2\Phi = \mathbf{H}\operatorname{rot}\mathbf{v}. \tag{36}$$

Это — классическое уравнение Пуассона, которое здесь позволяет найти электрический потенциал Φ в любой точке поля и при каком угодно распределении скоростей течения $\mathbf{v}$.

При интегрировании уравнения (36) граничные условия налагаются в соответствии с уравнением (34). В частности, если течение граничит с непроводящей средой (например, со скалистым грунтом), то, обозначив через $\mathbf{n}$ единичный вектор нормали к граничной поверхности, запишем условие об отсутствии составляющей электрического тока, нормальной к этой поверхности:

$$\mathbf{ni} = 0. \tag{37}$$

Тогда на основании уравнений (34) и (37) окажется, что

$$\frac{\partial\Phi}{\partial n} = \mathbf{n}[\mathbf{vH}]. \tag{38}$$

Если течение граничит с инородными водами, обладающими другим удельным сопротивлением, то на пограничной поверхности нормальные составляющие тока должны быть одинаковы на обеих сторонах, также одинаковы должны быть и значения потенциала Φ.

Применим общую формулу (36) к исследованию электрического поля в простом частном случае [33], т. е. когда течение сосредоточено в верхнем слое толщиной h_1, под которым лежит неподвижный слой воды толщиной $h_2 - h_1$.

Поместим начало прямоугольной системы координат на поверхности моря, ось X направим перпендикулярно к направлению течения, а ось Y — по направлению течения; ось Z направим по вертикали. Составляющие вектора $\mathbf{v}$ по осям X и Z здесь равны нулю. Модуль самого вектора (составляющая по оси Y) пусть убывает в обе стороны от оси X по простому закону

$$v = v_0 \cos \pi \frac{x}{b}. \tag{39}$$

Здесь b — ширина полосы, охваченной течением. Предполагается, что v не зависит от z при изменениях z от нуля до h_1. При $h_1 < z < h_2$ скорость течения везде равна нулю.

На практике измеряют горизонтальные составляющие напряженности электрического поля в морской воде; следовательно, нас будет интересовать лишь вертикальная составляющая напряженности магнитного поля, которую обозначим через H_z. Для простоты положим $H = H_z$.

Подставим значения величин в общее уравнение (36). Тогда будет

$$\nabla^2\Phi_1 = \gamma \sin \beta x, \tag{40}$$

$$\nabla^2\Phi_2 = 0. \tag{41}$$

Индексы 1 и 2 указывают, что потенциал ищется соответственно в верхнем и нижнем слоях. В формулах (40) и (41) введены сокращенные обозначения:

$$\gamma = -H_z v_0 \frac{\pi}{b}, \quad \beta = \frac{\pi}{b}. \tag{42}$$

Допустим, что искомые выражения потенциалов могут быть представлены каждое в виде двух функций:

$$\Phi_1 = Z_1 \sin \beta x, \tag{43}$$

$$\Phi_2 = Z_2 \sin \beta x. \tag{44}$$

Подстановка выражений (43) и (44) в уравнения (40) и (41) дает после сокращений

$$\frac{\partial^2 Z_1}{\partial z^2} - \beta^2 Z_1 = \gamma, \tag{45}$$

$$\frac{\partial^2 Z_2}{\partial z^2} - \beta^2 Z_2 = 0. \tag{46}$$

Общие интегралы этих уравнений записываются в гиперболических функциях

$$Z_1 = A_1 \operatorname{ch} \beta z + B_1 \operatorname{sh} \beta z - \frac{\gamma}{\beta^2}, \tag{47}$$

$$Z_2 = A_2 \operatorname{ch} \beta z + B_2 \operatorname{sh} \beta z, \tag{48}$$

причем постоянные интегрирования A_1, B_1, A_2 и B_2 определяются на основании граничных условий.

На верхней границе при $z = 0$ должно быть

$$\mathbf{ni} = 0. \tag{49}$$

Но ведь на основании уравнения (34) можно представить $\mathbf{i}$ как функцию остальных величин

$$\mathbf{i} = \frac{1}{\rho}([\mathbf{vH}] - \operatorname{grad} \Phi). \tag{50}$$

Подстановка уравнения (50) в уравнение (49) дает

$$\mathbf{n}\,[\mathbf{vH}] - \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0. \tag{51}$$

В исследуемом случае $\mathbf{n}\,[\mathbf{vH}]$ по существу обращается в нуль, следовательно, на верхней границе

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0. \tag{52}$$

Граничное условие на дне моря при $z = -h_2$ записывается так же, как и уравнение (52): ток не проникает в грунт, а потому его вертикальная составляющая равна нулю.

На поверхности раздела между обоими слоями при $z = -h_1$ ни ток, ни потенциал не испытывают разрыва. Следовательно, здесь

$$\Phi_1 = \Phi_2, \tag{53}$$

$$i_1 = i_2. \tag{54}$$

Условие (54) может быть выражено также через производные от потенциальной функции

$$\left|\frac{\partial \Phi_1}{\partial z}\right|_{z=-h_1} = \left|\frac{\partial \Phi_2}{\partial z}\right|_{z=-h_1}. \tag{55}$$

Граничных условий (53) и (55) достаточно для определения A_1, B_1, A_2, B_2:

$$A_1 = \frac{\gamma}{\beta^2}\frac{\operatorname{sh}\beta(h_2-h_1)}{\operatorname{sh}\beta h_2}, \quad B_1 = 0;$$
$$A_2 = -\frac{\gamma}{\beta^2}\frac{\operatorname{sh}\beta h_1}{\operatorname{th}\beta h_2}, \quad B_2 = -\frac{\gamma}{\beta^2}\operatorname{sh}\beta h_1. \tag{56}$$

Подставив выражения (56) в формулы (47) и (48) и исключив γ с помощью (42), запишем окончательно

$$\Phi_1 = \sin\beta x\left[1-\frac{\operatorname{sh}(h_2-h_1)}{\operatorname{sh}\beta h_2}\operatorname{ch}\beta z\right]\frac{v_0}{\beta}H_z, \tag{57}$$

$$\Phi_2 = \sin\beta x\left[\frac{\operatorname{sh}\beta h_1}{\operatorname{th}\beta h_2}\operatorname{ch}\beta z + \operatorname{sh}\beta h_1 \operatorname{sh}\beta z\right]\frac{v_0}{\beta}H_z. \tag{58}$$

Точные выражения (57) и (58) могут быть упрощены без внесения серьезных погрешностей, если ширина полосы, охваченной течением, значительно больше, чем глубина океана. В этом случае, очевидно, $\beta h_2 \ll 1$. Поэтому здесь можно положить с достаточным приближением

$$\operatorname{sh}\beta(h_2-h_1)\approx\beta(h_2-h_1), \quad \operatorname{sh}\beta h_2\approx\beta h_2\approx\operatorname{th}\beta h_2,$$
$$\operatorname{sh}\beta h_1\approx\beta h_1, \quad \operatorname{ch}\beta z\approx 1,$$

и в результате вместо выражений (57) и (58) записываются приближенные, одинаковые для обоих слоев выражения потенциальной функции:

$$\Phi_1\approx\Phi_2\approx\sin\beta x\left[\frac{h_1}{h_2}\right]\frac{v_0}{\beta}H_z. \tag{59}$$

Приближенное выражение напряженности электрического поля в воде в направлении, перпендикулярном к вектору $\mathbf{v}$ скорости течения, получится на основании формулы (59)

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} = \cos\beta x\left[\frac{h_1}{h_2}\right]v_0 H_z. \tag{60}$$

Эта величина, очевидно, достигает максимума на оси течения при $x = 0$

$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)_{\text{макс}} = \left[\frac{h_1}{h_2}\right]v_0 H_z. \tag{61}$$

Как видим, напряженность электрического поля в направлении, перпендикулярном к скорости течения, не зависит от ширины полосы, охваченной течением. Она пропорциональна скорости течения v_0 вертикальной составляющей напряженности геомагнитного поля H_z, а также отношению толщины слоя, охваченного течением h_1, к глубине океана h_2. Последнее обстоятельство чрезвычайно важно: если течение охватывает только очень тонкий поверхностный слой, то замыкание индуцированных токов через мощный нижележащий неподвижный слой неминуемо приводит к уменьшению измеряемой напряженности электрического поля в море; множитель h_1/h_2 в формуле (61) может привести к сильно заниженным значениям исследуемой величины v_0, если он не учитывается при вычислениях.

Рассмотрим теперь электрическое поле в море при условии существования заметной электропроводности грунта в районе течения.

Пусть слой грунта обладает удельным сопротивлением ρ_3 и простирается вниз от $z = -h_2$ до $z = -\infty$.

Для сокращения письма введем обозначение

$$\frac{\rho_2}{\rho_3} = \alpha,$$

причем

$$1 \geqslant \alpha > 0. \tag{62}$$

Условия на границах при $z = 0$ и при $z = -h_1$ останутся прежними. В дополнение к ним теперь следует записать новые условия при $z = -h_2$.

$$\Phi_2 = \Phi_3, \tag{63}$$

$$\frac{\partial \Phi_2}{\partial z} = \alpha \frac{\partial \Phi_3}{\partial z}. \tag{64}$$

В бесконечности потенциал стремится к нулю; следовательно,

$$\Phi_3 = 0 \text{ при } z = -\infty. \tag{65}$$

Вдобавок к основным уравнениям (47) и (48) теперь запишем третье

$$Z_3 = A_3 \operatorname{ch} \beta z + B_3 \operatorname{sh} \beta z. \tag{66}$$

На основании граничного условия (65) должно быть $-B_3 = A_3$. Следовательно, вместо уравнения (66) записывается уравнение с единственной постоянной интегрирования

$$Z_3 = A_3 (\operatorname{ch} \beta z - \operatorname{sh} \beta z). \tag{67}$$

Кроме того, по-прежнему условие (52) дает $B_1 = 0$. Значит, необходимо определить четыре постоянные интегрирования: A_1 и A_2, B_2 и A_3, воспользовавшись граничными условиями (53) и (55), (63) и (64). Из них вытекает, что

$$\begin{aligned}
A_1 \operatorname{ch} \beta h_1 - A_2 \operatorname{ch} \beta h_1 + B_2 \operatorname{sh} \beta h_1 &= \frac{\gamma}{\beta^2}, \\
-A_1 \operatorname{sh} \beta h_1 + A_2 \operatorname{sh} \beta h_1 - B_2 \operatorname{ch} \beta h_1 &= 0, \\
A_2 \operatorname{ch} \beta h_2 - B_2 \operatorname{sh} \beta h_2 - A_3 (\operatorname{ch} \beta h_2 + \operatorname{sh} \beta h_2) &= 0, \\
-A_2 \operatorname{sh} \beta h_2 + B_2 \operatorname{ch} \beta h_2 + A_3 \alpha (\operatorname{sh} \beta h_2 + \operatorname{ch} \beta h_2) &= 0.
\end{aligned} \tag{68}$$

По-прежнему рассмотрим самый распространенный и в то же время простой случай широкого течения, характеризующегося малой величиной отношения глубины океана к ширине течения. Иными словами, положим, что $\beta h_2 \ll 1$. Тогда уравнения (68) запишутся в более простой форме, дающей возможность довести вычисления до конца:

$$\begin{aligned}
A_1 - A_2 + B_2 \beta h_1 + 0 &= \frac{\gamma}{\beta^2}, \\
-A_1 \beta h_1 + A_2 \beta h_1 - B_2 + 0 &= 0, \\
0 + A_2 - B_2 \beta h_2 - A_3 (1 + \beta h_2) &= 0, \\
0 - A_2 \beta h_2 + B_2 + A_3 \alpha (1 + \beta h_2) &= 0.
\end{aligned} \tag{69}$$

Пренебрегая вторыми и более высокими степенями величин βh_1 и βh_2 из системы уравнений (69), найдем

$$\begin{gathered}
A_1 = \frac{\gamma}{\beta^2} \frac{\alpha - \beta (h_2 - h_1)}{\alpha - \beta h_2} = \frac{\gamma}{\beta^2} \frac{\beta (h_2 - h_1) - \alpha}{\beta h_2 - \alpha}; \quad A_2 = -\frac{\gamma}{\beta^2} \frac{\beta h_1}{\beta h_2 - \alpha}, \\
B_2 = -\frac{\gamma}{\beta^2} \beta h_1; \quad A_3 = \frac{\gamma}{\beta^2} \frac{\beta h_1}{(1 + \beta h_2)(\alpha - \beta h_2)}.
\end{gathered} \tag{70}$$

Анализ полученных результатов показывает, что коэффициенты A_1, A_2 и B_2, выражаемые уравнениями (70), должны заметно отличаться от тех же коэффициентов, вычисленных по формулам (56), в тех случаях, когда грунт сложен из песка, либо из ила, пропитанных морской водой. Если грунт скалистый галечный, то удельное сопротивление ρ_3 весьма велико и весьма мала величина $\alpha = \frac{\rho_2}{\rho_3}$. Во всяком случае, здесь $\alpha \ll 0{,}1$, а потому в уравнениях (70) можно пренебречь величиной α по сравнению с другими величинами, а тогда система уравнений (70) автоматически превращается в систему уравнений (56). Электропроводность грунта здесь можно не учитывать.

Мы здесь не будем останавливаться на самой технике измерений скоростей течений по методу Фарадея: эта техника в настоящее время хорошо разработана; строятся специальные небольшие лебедки для кабеля, выпускаемого за борт и несущего на одном конце неполяризующиеся электроды, которые

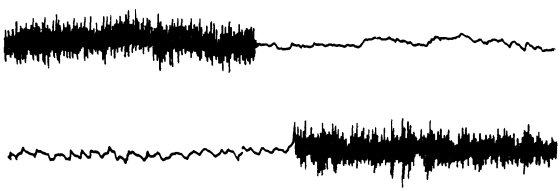


Рис. 655. Суммарная регистрация течений и волн

разнесены на расстоянии 100 *м* один от другого; другим концом кабель присоединяется к специальному пишущему потенциометру. Описание такой аппаратуры можно найти, например, в [32].

Но необходимо остановиться на тех предосторожностях, которые следует иметь в виду, чтобы не получить совершенно искаженные данные о скоростях и о направлениях морских течений.

Прежде всего, на практике обнаружилось, что в соответствии с теоретическими соображениями — формулой (61) — значения скоростей течения, полученные электромагнитным методом (так называемым ЭМИТом), отличаются от значений действительной скорости, измеренной посредством морских вертушек. Отношение действительной скорости течения к скорости, вычисленной по ЭМИТ, без поправок, иногда достигает 10—15 [33, 34].

Для вычисления скорости течения по измеренной напряженности электрического поля в море необходимо с достаточной точностью знать величину H_z — вертикальную составляющую напряженности геомагнитного поля в исследуемой точке. На рис. 641 была приведена карта изодинам вертикальной составляющей, которую обозначают через Z. Как видим, она меняется довольно быстро и изодинамы не совпадают с кругами параллелей, а проходят под различными углами к ним. Кроме того, вертикальная составляющая довольно сильно меняется во времени и в вековом ходе и при магнитных бурях. Все это не может не вносить дополнительные погрешности в вычисления скоростей течения по электромагнитному методу и едва ли позволяет ручаться даже за второй десятичный знак вычисленных цифр.

При всем том электромагнитный метод является очень удобным по простоте и в особенности по быстроте измерений. Реагируя на скорость движения водных масс, электроизмерительные приборы могут регистрировать не только поступательное движение в морских течениях, но и орбитальное движение водных частиц на волне. На рис. 655 воспроизведена слева суммарная запись волн и течения [34], справа вверху и слева внизу видна сглаженная запись одного лишь течения. «Волновые» составляющие почти полностью погашены посредством конденсаторов, включенных в цепь электроизмерительного регистрирующего прибора.

Зная масштаб времени, легко определить период волн, дававших резкие отклонения в левой верхней и правой нижней части записи рис. 655. Зная же масштаб скоростей, можно определить скорости соответствующих орбитальных движений. Наконец, найдя и скорость орбитального движения, и период волн, останется лишь вычислить высоту волн. Разумеется, подобное определение высоты волн не может отличаться большой точностью.

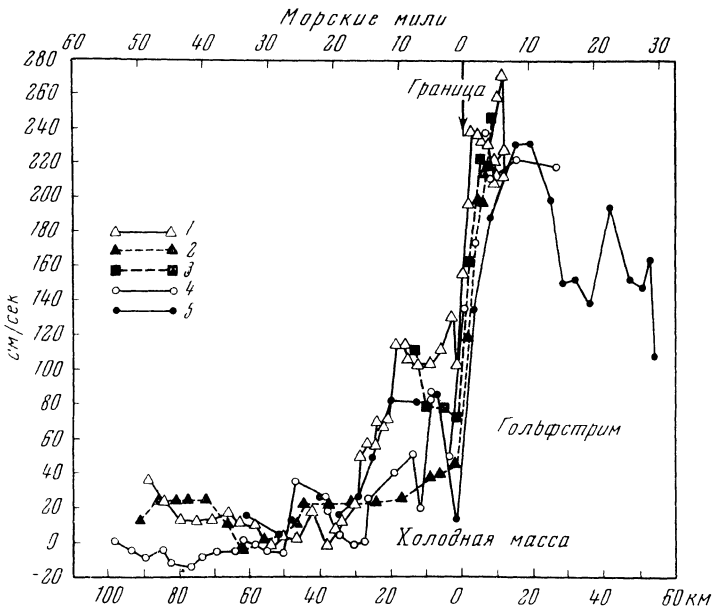


Рис. 656. Измерения скоростей Гольфстрима на различных разрезах

В заключение можно привести график, полученный при исследовании Гольфстрима и смежного с ним холодного прибрежного течения посредством электромагнитного метода (рис. 656). Измерения производились 5 раз на разрезах между 37 и 39° с. ш., перпендикулярных к берегу, от 67 до 74° з. д. Вертикальная черта отмечает границу между двумя разнородными (по температуре и солености) водными массами: Гольфстрима и холодного прибрежного течения.

Регистрирующий прибор записал скорости Гольфстрима и скорости холодного течения, направленного в противоположную сторону в некоторой части диаграммы. Максимальная скорость Гольфстрима оказалась свыше 5 узлов (около 270 *см/сек*). Отчетливо виден турбулентный режим течения — колебания скоростей в пределах живого сечения.

Отличные результаты, полученные исследователями при измерениях скоростей Гольфстрима, не должны давать повод для увлечения электромагнитным методом в тех практических случаях, когда неизбежные погрешности могут превышать измеряемую величину. Если бесспорным является преимущество метода при измерениях, например приливных течений (охватывающих всю толщу вод) в высоких и средних широтах, то столь же бесспорной является *неприменимость* метода при исследовании поверхностных слабых течений, даже в средних широтах, и полная несостоятельность метода при попытках применения его в низких широтах, где вертикальные составляющие напряженности геомагнитного поля малы.

§ 11. Теллурические токи в океане

При регистрации теллурических токов в Черном море уже А. Т. Мироновым было обнаружено очень интересное явление: во время сильных возмущений электродвижущая сила в цепи потенциометра колебалась не около нуля, а около какого-то *среднего* ее значения. Возникала какая-то *постоянная* составляющая э.д.с., налагающаяся на переменную и притом тем бóльшая, чем больше были амплитуды колебаний около среднего значения. В связи с этим В. В. Шулейкин высказал предположение о возможном влиянии аналогичных постоянных составляющих э.д.с. в океане на общую картину магнитного поля [21]: ведь если допустить наличие теллурических токов в Атлантическом океане, направленных вдоль меридиана, с севера на юг, то им можно было бы приписать возникновение «восточной» отрицательной составляющей напряженности геомагнитного поля, достигающей максимума в характерном экваториальном районе на карте Л. А. Корневой (как это видно на рис. 637).

Но элементарный расчет показал, что плотность тока тех порядков, какие наблюдались А. Т. Мироновым, Л. А. Корневой, В. И. Лопатниковым на Черном море, *недостаточна* для создания результирующего тока вдоль меридиана в соответствии с картой рис. 638, также построенной Л. А. Корневой.

В 1956 г. обнаружились новые интересные особенности поля теллурических токов, заставившие вернуться к вопросу об их участии в формировании сложного геомагнитного поля: Ю. Г. Рыжков и Ф. А. Губин, плавая на дизель-электроходе «Обь», проделали несколько измерений э.д.с., вызванной теллурическими токами, в Индийском океане, в Антарктических водах. Они установили, что плотность теллурических токов *возрастает* на глубинах [35]; напряженность электрического поля в воде достигает 30—40 *мв/км* на глубине 500 *м*, в то время как на поверхности она в этом районе океана равна около 7 *мв/км*.

Расположение измерительной базы было близко к плоскости магнитного меридиана. Следовательно, была исключена возможность погрешностей, вызванных индукцией дополнительной э. д. с. в петле, содержащей провода, опускаемые на глубины.

В связи с новым эффектом, обнаруженным Ю. Г. Рыжковым и Ф. А. Губиным, особое значение приобрели исследования теллурических токов на различных глубинах, в том районе экваториальной Атлантики, где на карте Л. А. Корневой (рис. 637) вырисовывается замкнутая линия, оконтуривающая область с «восточной» составляющей напряженности геометрического поля (отрицательной), по абсолютной величине превышающей 10 000 гамм. Именно в этой области были проведены исследования В. В. Шулейкина в 1957 г. на борту экспедиционного судна «Седов» [36].

Особые свинцовые электроды, отлитые из одного тигля и защищенные от споласкивания морской водой, обладали собственной разностью потенциалов, которую можно было уменьшить до 0,5 *мв*. Они опускались с лебедок «Эмит» [1], одна из которых установлена на полубаке, а другая на юте, на расстоянии 100 *м* одна от другой. Провода присоединялись к электронно-ламповому потенциометру той же установки «Эмит» для регистрации разностей потенциалов между электродами, которая велась пером на бумаге.

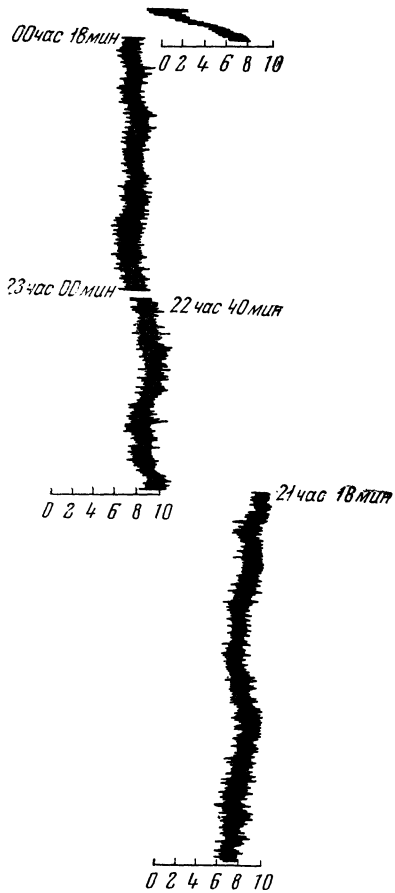
Разность потенциалов между точками самой поверхности моря измерялась посредством обычных плавающих электродов «Эмит», удаленных один

[1] Аппаратура для измерения скоростей течений электромагнитным методом. В исследованном районе скорости течений были ничтожны, малы были значения вертикальной составляющей земного магнитного поля; поэтому индуцированные в воде фарадеевы токи не искажали поля теллурических токов.

на 50, а другой на 150 *м* от кормы корабля, во избежание влияния его металлического корпуса.

Совершенно надежная регистрация разностей потенциалов между электродами была получена 10.XI 1957 г. на широте 17° 05′ С и долготе 31° 57′ З.

В поверхностном слое градиент достигал около 30 *мв/км* и был направлен по меридиану с севера на юг. На глубине 250 *м* разность потенциалов между электродами, находившимися в одной горизонтальной плоскости на расстоянии 100 *м* друг от друга, вела себя так, как представлено на копии регистрации на рис. 657. Судно, лежавшее в дрейфе, преимущественно с курсовым углом 163°, иногда приводилось в меридиан. Это вызывало некоторое увеличение разности потенциалов и показывало, что градиент потенциала тут, так же как и на поверхности океана, направлен с севера на юг. Внеся поправку на остаточную собственную разность потенциалов между электродами, можно было считать, что на глубине 250 *м* градиент потенциала вдоль меридиана равен около 80 *мв/км*. Температура была $\vartheta = 14{,}7°$, соленость $S = 36{,}0‰$. Значит, по таблицам, электропроводность была $\sigma = 0{,}0437\ ом^{-1} \cdot см^{-1}$. При измеренном значении градиента потенциалов плотность тока на глубине 250 *м* должна была достигать $3{,}57 \cdot 10^{-4}\ а/м^2$.



ис. 657. Регистрация теллурических токов в океане на глубинах

И верхний участок кривой на рис. 657, и непосредственные наблюдения за стрелкой потенциометра показали, что при одновременном поднятии электродов разность потенциалов между ними уменьшается по простому линейному закону. Продолжив прямую до дна океана, можно приблизительно экстраполировать значения градиента потенциалов на глубинах и оценить порядок всей силы тока, проходящего вдоль меридиана в исследуемой области Атлантического океана. Такая ориентировочная оценка показывает, что сквозь «ворота» шириной в 1 *м* и высотой 5000 *м* (от поверхности до дна) проходит вдоль меридиана ток около 10 *а*. По вычислениям Л. А. Корневой [15], существующее значение широтной составляющей напряженности геомагнитного поля, а следовательно и существующее магнитное склонение в изученной точке океана, обеспечивается током 15 *а* в этих «воротах». Разумеется, нельзя ручаться за какую-либо надежность экстраполяции плотности тока от поверхности океана до дна, на основе измерений в одном лишь верхнем слое и на глубине 250 *м*. До бо́льших глубин оказалось невозможным погружать электроды: при дрейфе корабля их относило далеко, натягивая провода.

Аналогичная регистрация теллурических токов на глубинах была сделана на борту «Седова» 24. XI 1957 г. во время работ на суточной океанографической станции с координатами $\varphi = 34°02'$ С, $\lambda = 35°54'$З. Здесь электроды опускались до глубины 700 *м*, где был обнаружен градиент потенциала около 150 *мв/км*. С учетом температуры 10,4° и солености 35,55‰

была определена электропроводность воды, а по электропроводности и градиенту — плотность тока на глубине 700 *м*; она оказалась равной $6 \cdot 10^{-4}$ *а/м*^{2}.

Снова выявился линейный закон увеличения плотности тока с глубиной, и экстраполяция до дна показала, что полный ток в океане должен дать около половины того значения, которое, по Корневой, было бы достаточно для создания существующей тут широтной составляющей напряженности геомагнитного поля и существующего склонения. Регистрация разностей потенциалов на потенциометре показала, что в исследуемой точке градиент направлен под углом 115° к меридиану. Это значение только на 12° меньше вычисленного Л. А. Корневой теоретически.

Поразительное явление — резкое увеличение плотности теллурических токов на глубинах — было подтверждено также В. И. Лопатниковым на третьем исследовательском судне — на экспедиционном судне «Михаил Ломоносов» в Атлантическом океане 25. XI 1957 г. на широте 59°06′ С, долготе 16°20′ З и 26. XI 1957 г. на широте 58°30′ С, долготе 16°00′ З.

Отсутствие систематических ошибок за счет какого-то влияния давления воды на электроды на глубинах подтверждается уже тем, что сходные по материалу электроды, опущенные П. А. Виноградовым [37] на 1100 *м* в оз. Байкал, обнаружили в этом пресноводном замкнутом бассейне уменьшение плотности теллурических токов на несколько процентов. Добавочный контроль был нами осуществлен в лабораторных условиях: совместно с Э. Т. Кренкелем и другими сотрудниками Института приборостроения Гидрометслужбы мы наблюдали поведение наших электродов в стальном цилиндре, наполненном водой с соленостью 35‰ под давлением 40 *атм*. Никакого возрастания собственной разности потенциалов между электродами не возникало, наблюдалось даже некоторое уменьшение этой незначительной величины.

В будущем предстоит построить точную теорию теллурических токов, возрастающих с глубиной в океане. В настоящее время рано говорить о ее построении, поскольку еще подвергаются международной дискуссии более простые и давно известные явления в области земного магнитного и земного электрических полей. Можно лишь утверждать, что теллурические токи в океане связаны с корпускулярным излучением Солнца. Причину нарастания их плотности с глубиной можно попытаться объяснить только схематически.

Примем на основании наблюдений простой линейный закон увеличения плотности тока при увеличении координаты y, отсчитываемой вниз от поверхности океана, глубина которого H:

$$i = i_1 + i_2 y / H. \tag{71}$$

Здесь i_1 и i_2 очень слабо меняются при изменении x.

Пусть удельное сопротивление воды равно ρ. Если считать электрическое поле в ее толще чисто потенциальным, то можно записать для потенциала V уравнение

$$\partial V / \partial x = \rho (i_1 + i_2 y / H)$$

и, следовательно,

$$V = \rho i_1 x + \rho i_2 xy / H + \text{const}. \tag{72}$$

В таком случае пришлось бы признать, что

$$\partial V / \partial y = \rho i_2 x / H. \tag{73}$$

Но на основании (73) вертикальная составляющая градиента потенциала могла бы достигнуть громадных значений при практически неограниченном увеличении x (до тысяч километров в океане). На самом деле таких громадных градиентов потенциала по вертикали в океане не существует. Значит, действительную картину явления можно объяснить только наложением каких-то вихревых токов на поле токов, обладающее потенциалом.

Разумеется, планетарный эффект, описываемый здесь, очень сложен. Можно только предполагать, что гипотетические вихревые токи направлены против основных теллурических токов близ поверхности воды и в ту же сторону, как основные токи, у дна океана. Вертикальные составляющие вихревых токов взаимно уничтожаются.

Надо полагать, что зарождение вихревых токов в океане на фоне основного — потенциального — поля вызвано вращением основных линий тока вокруг земной оси с циклической частотой $\omega = 7{,}3 \cdot 10^{-5}$ *сек*$^{-1}$. Именно вследствие такого вращения основные токи, являющиеся постоянными для наблюдателя на Земле, приводят к периодическим колебаниям магнитного поля в точке, не вращающейся вместе с нашей планетой: эта точка непрерывно ометается движущимися силовыми линиями магнитного диполя, созданного токами в Атлантическом и Тихом океанах [16].

В количественном отношении такая гипотеза правдоподобна. Действительно, критерием влияния вихревых токов служит безразмерная величина $D\sqrt{\mu\omega/\rho}$. Здесь D — толщина слоя, охваченного электромагнитным полем; μ — магнитная проницаемость среды, ω — циклическая частота; ρ — удельное сопротивление среды. В нашей задаче числовое значение ω/ρ весьма мало́ по сравнению с техническими задачами, зато значение D чрезвычайно велико; кроме того, D стоит перед корнем, а ω/ρ — под знаком корня. Следовательно, вероятное значение критерия не исключает возможности заметной роли вихревых токов, хотя, понятно, еще не доказывает их существования.

В том же 1957 г. и примерно в те же сроки, но в иной области Атлантического океана — в северной его части — аналогичные исследования поля теллурических токов произвел В. И. Лопатников с борта научно-исследовательского судна «Михаил Ломоносов». Ему — первому из всех исследователей — удалось разделить эффект теллурических токов и эффект Фарадея, вызванный морскими течениями в исследуемой области океана (в районе работ предыдущего автора течения отсутствовали). Так же, как и В. В. Шулейкин, В. И. Лопатников обнаружил в 1957 г. явно выраженное нарастание э.д.с. теллурических токов на глубинах, вновь подтвердив справедливость выводов Ю. Г. Рыжкова и Ф. А. Губина [35].

Специально для проверки этих выводов Институт океанологии командировал М. А. Богданова и Ю. А. Иванова в Антарктический район Индийского океана, и эти два автора в январе 1958 г. вновь обнаружили тот же самый эффект, в точке с координатами 65° 53′ ю. ш. и 114° 11′ в. д. [38].

Наблюдения проводились с неподвижного припайного льда, на расстоянии 15 миль от берега и при глубине 560 *м*. Применялись кадмиевые электроды ЭМИТа. Собственная разность потенциалов была менее 0,05 *мв*. Она не менялась во время наблюдений. Измерения проводились поочередно на базах длиной 150 *м*, перпендикулярных одна к другой, на трех горизонтах: 5, 10 и 25 *м*. Первая была расположена вдоль кромки льда (330 — 150°), вторая — перпендикулярно к кромке (240 — 60°). Самый близкий к судну электрод находился на расстоянии 100 *м* от борта. На каждом горизонте наблюдали в среднем 2 *часа* (по 1 часу на каждой базе). Сигналы регистрировались на потенциометре ЭПП-09, и регистрация позволила выявить следующее:

1, На всех горизонтах величина сигнала колебалась с периодом 15—20 *мин*. На эти колебания налагались колебания с более мелкими периодами. Амплитуда менялась во времени, причем на первой базе была значительно больше, чем на второй.

2. На обеих базах отчетливо наблюдалось увеличение сигнала с глубиной. Вследствие большой изменчивости авторам не удалось получить средний вектор сигнала и они ограничились рассмотрением экстремальных значений сигналов на различных глубинах.

3. Именно, на горизонте 5 *м* первая база давала сигналы от — 2,2 до —1. На глубине 10 *м* сигналы менялись от —3,5 до +3,0; на глубине 25 *м* — от —1,0 до +6,0. На второй базе, на глубине 5 *м*, сигналы менялись от —0,8 до +0,4; на глубине 10 *м* — от —1,1 до +2,1 и, наконец на глубине 25 *м* — от —2,5 до +1,5 *мв*.

4. Следовательно, можно считать, что первая база дала на поверхности изменения градиента потенциала от 8 *мв/км* на глубине 5 *м* до 47 *мв/км* на глубине 25 *м*. Вторая база дала соответственно 8 *в/км* на глубине 5 *м* и 27 *мв/км* на глубине 25 *м*.

Авторы одновременно с этими измерениями исследовали скорости течений посредством буквопечатающих морских вертушек. Оказалось, что если бы они вычисляли скорости течений по формуле, рекомендованной для обработки регистраций э.д.с. (ЭМИТ), то получили бы значения, которые *на два порядка* превышали бы скорости, действительно измеренные посредством морских вертушек. Мало того, величины составляющих за время наблюдений менялись в 1,5—5 раз.

5. Приведенные результаты говорят о том, что величина сигнала определяется *главным образом теллурическими токами*.

Таким образом, М. А. Богданов и Ю. А. Иванов полностью подтвердили рекомендации, исходившие из Морского гидрофизического института: даже для целей чисто практических, для определения истинных скоростей морских течений посредством ЭМИТа — необходимо обстоятельно изучить поля теллурических токов в различных областях Мирового океана. Только тогда окажется возможным вычислять поправки за э. д. с. *космического* происхождения к значениям э.д.с., неправильно приписываемым эффекту Фарадея.

Но главный интерес представляет *принципиальная* сторона задачи о теллурических токах в океане. Ведь на документальной регистрации э.д.с., воспроизведенной на рис. 657, совершенно отчетливо виден наклонный отрезок вверху, возникший при медленном подъеме электродов на борт экспедиционного судна «Седов». Как уже говорилось, полностью исключается возможность погрешностей, внесенных повышенным давлением воды на электроды; добавим еще, что база располагалась близко к плоскости магнитного меридиана, и тем самым исключалась погрешность за счет дополнительной индукции в отрезках кабеля под водой; к тому же такая погрешность вообще не может возникнуть при рассмотрении *постоянной* составляющей, несомненно зарегистрированной прибором и хорошо видной на рис. 657.

Следовательно, регистрация, воспроизведенная на рис. 657, заставляет искать в толщах океана *магнитный эффект* обнаруженной постоянной составляющей теллурических токов.

§ 12. Магнитное склонение на глубинах океана

Регистрации э.д.с. теллурических токов типа рис. 657, полученные во время рейса на экспедиционном судне «Седов» в 1957 г., подсказывают методы исследования дополнительных магнитных полей, которые созданы теллурическими токами, с плотностью, нарастающей на глубинах: необходимо научиться достаточно точно регистрировать магнитное склонение на глубинах океана, которое должно изменяться по мере удаления от поверхности океана вниз. Первый вариант такого регистрирующего устройства был осуществлен В. В. Шулейкиным в 1959 г. На рис. 658 представлен общий вид агрегата, предназначенного для работы на глубинах [39].

Над картушкой 127-миллиметрового корабельного компаса *А* помещена импульсная лампа-«молния» *Б*, применяемая в фотографии. Ток от сухой батареи *В* питает конденсатор большой емкости, заряжая его до 300 *в*. Над батареей помещен сильный — трехпружинный — граммофонный механизм, *Г*, который оживляет всю систему. Во-первых, он приводит в движение ка-

тушку внутри съемной кассеты, на которую с другой катушки перематывается узкая кинолента. Во-вторых, одна из шестеренок механизма посредством кулачка *Д*, сидящего на ней, замыкает контакт *Е* и тем самым вызывает разряд в цепи конденсатора. При этом ионизируется промежуток между электродами вакуумной лампы (с разреженным криптоном) и происходит разряд через U-образную трубку. Освещается и картушка компаса, и маленькие часы, смонтированные на его ободе. Фотообъектив при этой вспышке дает изображение компаса и часов на киноленте, протягиваемой перед окошком кассеты. Так как продолжительность освещения составляет 10^{-3} *сек*, то движение ленты не мешает четкому изображению. Такие изображения автоматически регистрируются через каждые 10 *сек*.

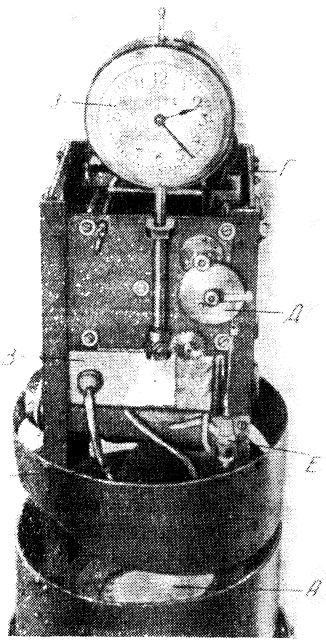


Рис. 658. Глубинный деклинограф Шулейкина, модель первая

К сожалению, даже усиленный граммофонный механизм оказался неспособным протягивать киноленту и замыкать контакт в продолжение срока более 35—40 *мин*. Между тем подготовка аппарата к спуску и сам спуск его на глубины занимают значительно больше времени. Пришлось сконструировать автоматическое пусковое устройство, которое могло начинать действовать через какой угодно заданный промежуток времени.

Основой этого устройства служил обыкновенный будильник *З* (рис. 658). Стрелка его боя устанавливалась с таким расчетом, чтобы к моменту боя компас наверняка был спущен на нужную глубину. При заводе будильника простая система шестеренок воздействовала на стопорную иглу, вводившуюся между двумя зубьями одной из шестеренок регулятора скорости у граммофонного механизма. Благодаря этому заведенный граммофонный механизм начинал работать только тогда, когда наступал момент боя будильника, и стопорная игла извлекалась назад, освобождая регулятор скорости.

Весь регистрирующий аппарат был помещен внутри толстостенного бронзового контейнера, внешний вид которого и разрез представлены схематически на рис. 659. Здесь размеры даны в миллиметрах. Общий вес контейнера с аппаратурой был около 300 *кг*. За два отверстия, видные на ребре крышки, контейнер подвешивался к шарикоподшипниковому вертлюгу, а от вертлюга шел вверх буксирный стальной трос диаметром 6 *мм*. Приходилось буксировать прибор для того, чтобы придавать ему определенную ориентацию относительно меридиана. При этом решающее значение имело рулевое устройство, видное на рис. 658. У руля были два пера достаточно большой площади, которые были отнесены от оси контейнера на 1 *м* назад и обеспечивали устойчивое движение в воде.

С откидной площадки за бортом «Седова» было удобно наблюдать за тем, чтобы при буксировке контейнер шел в точности параллельно диаметральной плоскости корабля. При таких условиях с достаточной надежностью можно было считать, что движение контейнера в воде происходит в направлении, которое указывал на «Седове» гирокомпас.

Показания этого гирокомпаса регистрировались курсографом и — для контроля — отсчитывались через определенные промежутки времени. На

нис. 660 представлено увеличенное позитивное изображение участка компасрой картушки, с курсоуказателем в виде прорези в планке, и часов с тремя стрелками. Сотни таких снимков сопоставлялись с показаниями гирокомпаса в те же сроки для суждения о том, каково магнитное склонение на глубинах.

Способ ориентировки прибора посредством рулей во время буксировки ограничивал возможности экспериментатора: вытравив с лебедки 4000 *м* стального троса, можно было добиться спуска контейнера немного глубже 2000 *м*. Но даже и на такой сравнительно небольшой глубине магнитное склонение *уменьшилось* по крайней мере на 5° по сравнению с тем, какое существовало на поверхности океана. Разброс точек, полученных из наблюдений за картушкой, не превышал значения $\pm$ 1°. Следовательно, изменение склонения на глубине в 2 тыс. *м* можно было считать установленным.

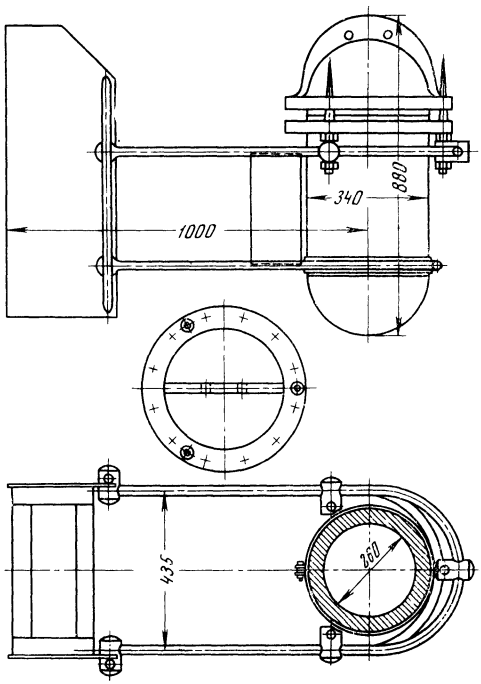


Рис. 659. Контейнер и рулевое устройство

В дальнейшем пришлось позаботиться о конструировании такого нового регистрирующего прибора — деклинографа, который можно было бы опускать значительно глубже *на стоне*, в районе, где отсутствует сколько-нибудь значительный снос на течениях, а потому несущий трос не изгибается дугой. Но в таких условиях суждение об ориентировке контейнера относительно меридиана можно получить, только разместив в нем дополнительный автономный прибор, указывающий направление меридиана. В новом деклинографе В. В. Шулейкина [40] для этого был применен Н. Н. Сигачевым малогабаритный гирокомпас [41]. Он помещался в отдельном контейнере *1*, изображенном схематически на рис. 661, достаточно далеко от магнитного компаса, установленного в меньшем контейнере *2*. До приведения в меридиан гирокомпас питался от судовой сети, а после этого переключался на автономное питание от аккумуляторной батареи *3*. Ток от нее поступал в преобразователь *4*, снабженный стабилизатором частоты и усилителем *5*. Трехфазный переменный ток высокой частоты шел в статор гирокомпаса *6*, подвешенного на карданових кольцах *7*. От того же преобразователя питались статоры сельсинов: датчика, находящегося при гирокомпасе, и приемника *8*, соединенного общим валом с репитером *9*, в верхнем, малом контейнере *2*. Трехфазная проводка между роторами сельсинов шла через тот же канал *10*, соединяющий полости обоих контейнеров. Регистрирующее устройство, применявшееся в работе [39], было переконструировано его автором. Теперь в поле фотообъектива *11* попадали: сегмент картушки магнитного компаса *12*, подвешенного на карданових кольцах *13*, маленькие часы *14* и участок цилиндрической поверхности профильного репитера *9*. Посредством системы полированных стальных немагнитных нержавеющих зеркал изображение всех трех объектов удалось разместить в пределах кадра на узкой кинопленке. Она перематывалась с катушки на катушку внутри кассеты *15*. Шестерня, насаженная на ось приемной катушки, вращалась от редуктора маленького синхронного моторчика *16*. Тот же редуктор приводил в движение простой механизм, замыкающий

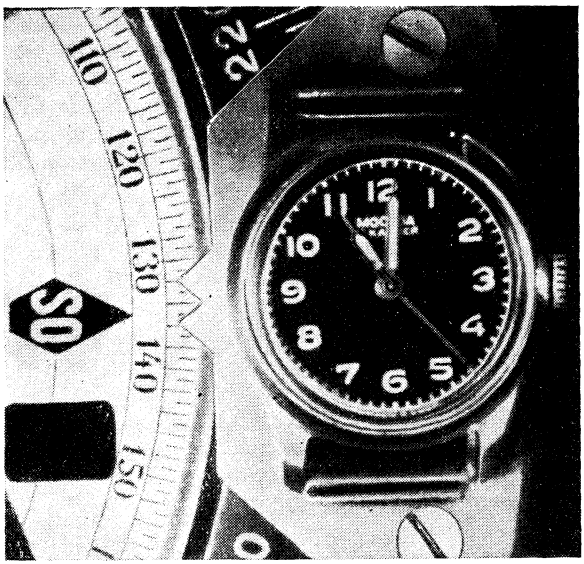


Рис. 660. Регистрация показаний компаса на глубинах

контакт в цепи импульсной лампы «Молния» (*17* — газосветная трубка этой лампы, *18* — футляр с конденсатором и колебательным контуром). На рис. 662 воспроизведено увеличенное позитивное изображение одного из снимков, полученных в лаборатории, при случайном положении картушки магнитного компаса и случайных цифрах репитера.

Легко показать, что изменение магнитного склонения ΔD может быть получено из опытов в океане даже без определения девиации магнитного компаса на палубе судна и без согласования репитера *9* с судовым гирокомпасом. Пусть на некоторой начальной глубине z_0, на которой уже не сказывается воздействие железного корпуса судна, фоторегистрация дала показание M_0 магнитного компаса и показание G_0 репитера *9*. Тогда магнитное склонение на этой глубине можно представить в виде трехчлена

$$D_0 = M_0 - G_0 + N,$$

в котором слагаемое N неизвестно. Опустив агрегат на бóльшую глубину z_1, получим новые показания приборов M_1 и G_1, на основании которых магнитное склонение на новой глубине представится аналогично

$$D_1 = M_1 - G_1 + N,$$

причем значение неизвестного слагаемого N здесь прежнее. Но в таком случае искомое изменение ΔD магнитного склонения на глубине z_1 по сравнению с глубиной z_0 будет

$$\Delta D = (M_1 - G_1) - (M_0 - G_0). \qquad (74)$$

Опыты проводились в экваториальном поясе Атлантического океана, где особо велика широтная составляющая геомагнитного поля (10 000—11 000 гамм). Агрегат опускался со стрелы под поверхность воды и передавался на трос равного сопротивления, шедший с большой лебедки, через блок короткого крамбола, на борту экспедиционного судна «Михаил Ломоносов». К сожалению, операции по спуску и подъему агрегата воздействовали на гирокомпас и вызывали колебания гироскопа вокруг вертикальной оси. Поэтому после первой серии опытов мы обеспечивали срок, достаточный для затухания

таких колебаний. На рис. 663, *а* хорошо виден процесс затухания колебаний на зубчатой кривой, которая представляет закон изменения величины (M_t — G_t) во времени, причем M_t и G_t обозначают соответственно показания магнитного компаса и гирокомпасного репитера, отсчитанные по кадрам киноленки. Промежутки времени между каждыми двумя точками на зубчатой кривой составляют около $^1/_2$ *мин*. Между зубцами проведена осредняющая кривая *1*, которая удовлетворительно ложится среди точек.

Опыты Н. И. Сигачева, произведенные в лаборатории на судне «Михаил Ломоносов», показали посредством регистрации колебаний гироскопа на курсографе, что фактор затухания этих колебаний близ экватора всегда равен 3,0. Колебания затухают под влиянием момента сил, направленного по вертикали. В природных условиях при движении прибора вниз или вверх этот момент изменяется по величине вследствие отклонения вертикальной оси прибора под действием кориолисовой силы: соответствующая компонента этой силы достигает максимума на экваторе. Но при существующих скоростях спуска и подъема (порядка 1 *м/сек*) изменение момента сил, действующего вокруг вертикальной оси, не могло превышать 0,2%. Поэтому фактор затухания при опытах в океане должен был по-прежнему равняться 3,0. Между тем, если бы форма кривой *1* на рис. 663, *а* зависела только от затухания колебаний гирокомпаса, то формальный анализ [41] дал бы для фактора затухания значение 7,1. Это потому, что при наших опытах «смещался нуль», от которого отсчитываются величины (M_t — G_t). В свою очередь «смещения нуля» были вызваны уменьшением магнитного склонения на глубинах. Методом последовательных приближений нам удалось разделить оба эффекта. Кривая *2* построена по уравнению затухающих колебаний с фактором 3,0. Ее ординаты вычтены из ординат осредняющей кривой *1*. В результате получена кривая *3*, которая описывает «смещения нуля». По отсчету времени на кадрах киноленты при сопоставлении с записями длины вытравленного троса по счетчику определены глубины, на которых был прибор в тот или иной момент времени. Эти глубины отмечены на рис. 663, *а* в пределах от 500 до 4200 *м*, где прибор выдерживался достаточно долго.

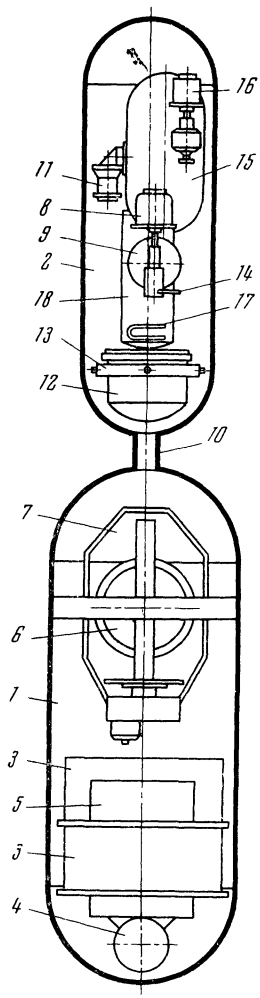


Рис. 661. Глубинный деклинограф Шулейкина, модель вторая

В полном соответствии с работой [39] кривая *3* идет почти параллельно оси абсцисс до глубины порядка 500 *м*: магнитное склонение тут практически не меняется. Склонение слабо меняется до глубины около 900 *м*, после чего меняется резко: кривая *3* круто загибается вниз. На глубине 4200 *м* магнитное склонение приблизительно на 24° меньше, чем на глубине 500 *м* или на поверхности океана. В точке проведения этой серии регистраций, на широте 10°01′Ю и долготе 20°36′ З, склонение на поверхности океана равняется 23°,5′ З. Следовательно, на глубине 4200 *м* оно практически падало до нуля.

Весьма интересны были условия проведения опытов в точке с координатами: широта 00°24″ С, долгота 29°51″ З. Здесь наблюдался довольно сильный дрейф судна под действием существовавшего течения, идеально постоянного

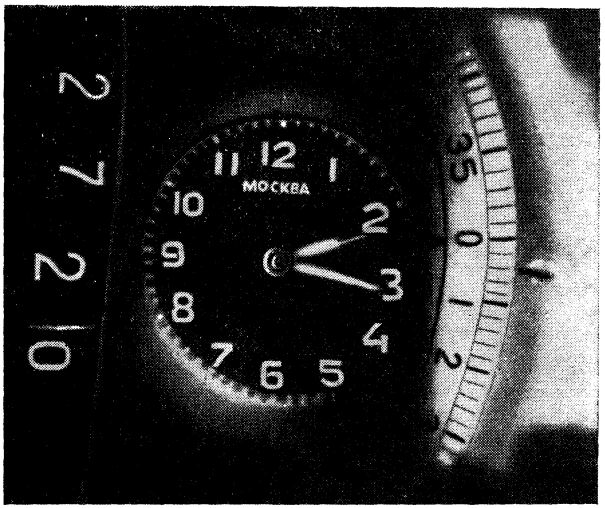


Рис. 662. Регистрация показаний приборов

по скорости и направлению. Контейнеры с приборами, опускавшиеся до глубины 3500 *м*, фактически буксировались судном наподобие варианта 1959 г. Хотя новая модель не обладала рулем, но его роль исполняла рама, на которой были монтированы контейнеры. В результате при выдерживании приборов на глубине регистрация дала лишь мелкие беспорядочные колебания величины $(M_t - G_t)$ около четко выраженного среднего значения, как это видно на рис. 663, *б*. Более крупные колебания, видные на том же рисунке, в стадии опускания приборов и их подъема, несомненно, были бы меньше, если бы не проявился застой репитерной системы, возникший по невыясненной причине. Внизу проставлены отметки глубин по счетчику лебедки. По-прежнему на глубинах до 1000 *м* магнитное склонение уменьшается мало, а после уменьшение идет быстро. Левый — падающий и правый — поднимающийся склоны кривой на рис. 663, *б* удовлетворительно соответствуют друг другу. При наличии упомянутого разброса точек надежно определяется только нижний уровень кривой, где среднее арифметическое значение $(M_t - G_t)$, намеченное пунктиром, отлично вяжется с наиболее часто повторяющимися цепочками точек. Верхний уровень можно определить лишь грубо, осредняя значения этой величины на последнем этапе рис. 663, *б*, где тоже нанесена пунктирная прямая. Мы воспользовались последним, а не первым этапом ввиду того, что после выдерживания на глубине 3500 *м* механическая система должна была вести себя спокойней.

Как видно на рис. 663, *б*, магнитное склонение на глубине 3500 *м* изменилось приблизительно на 36° по сравнению с его значением на поверхности океана. На основании карты, составленной Институтом земного магнетизма [42], склонение на поверхности океана в точке проведения опытов теперь было 22° З. Отсюда следует, что на глубине 3500 *м* оно составляет около 14° В.

К сожалению, даже в этом — усовершенствованном — виде аппаратура не позволила найти точную величину магнитного склонения на разных глубинах из-за вынужденной грубости получаемых данных. Тому виной поведение картушки малого (шлюпочного) магнитного компаса, которая, в отличие от 127-миллиметровой нормальной картушки, неустойчива по отношению к случайным внешним механическим импульсам. Также осложняет работу длительная прецессия малогабаритного гирокомпаса, наступающая после всякого внешнего механического импульса.

В связи с этим, после работ на судне «Михаил Ломоносов» в 1961 г., один из участников этих работ — Н. И. Сигачев — приступил к конструированию новых видов указателей: и указателя истинного географического меридиана, родственного обычному гирокомпасу, но свободного от упомянутого недостатка, и указателя магнитного меридиана, не подверженного действиям внешних механических импульсов. Но прошел максимум солнечной корпускулярной

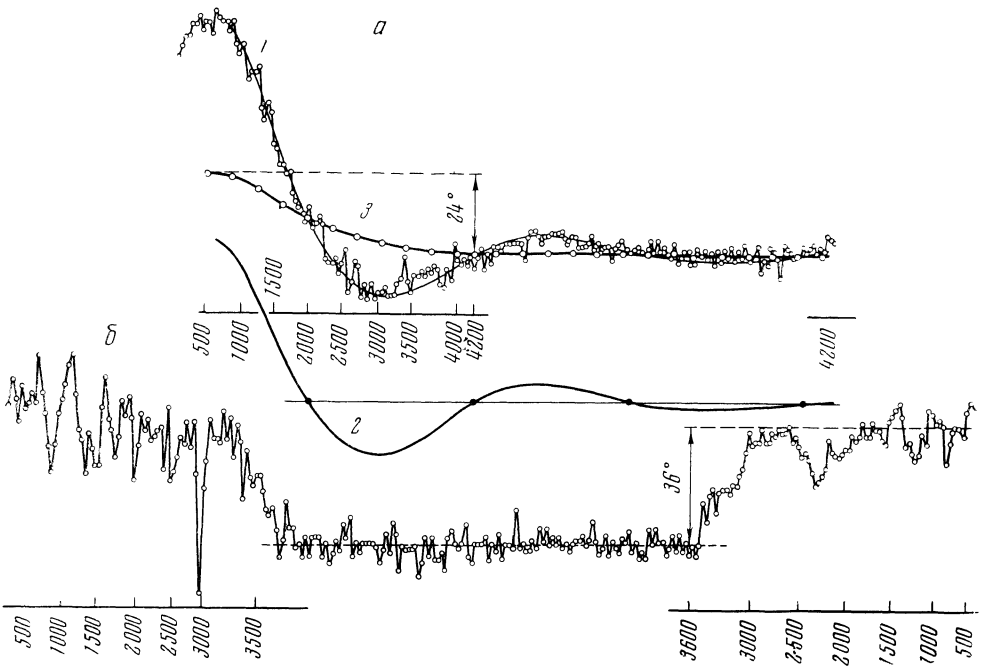


Рис. 663. Результаты обработки записей на глубинах океана

активности, и, когда Н. И. Сигачев с сотрудниками проводил новые серии измерений магнитного склонения посредством третьего и четвертого вариантов деклинографа, плотность теллурических токов в водах Мирового океана, так, же, как и в водах Черного моря, была ничтожно малой. Поэтому изменения магнитного склонения на глубинах оказались также ничтожно малыми.

Приходится заключить, что квазипостоянная составляющая, впервые обнаруженная при регистрации теллурических токов А. Т. Мироновым во время магнитных бурь 1947—1948 гг. и ярко проявлявшаяся в эпоху особо большой активности Солнца с 1957 по 1961 г. в Атлантическом океане,— эта квазипостоянная составляющая практически отсутствует в годы спокойного Солнца. Отсутствует и дополнительное магнитное поле теллурических токов на глубинах, проявлявшееся на пике солнечной активности.

§ 13. Особенности вековых изменений магнитного склонения над океанами

Вековые изменения земного магнитного поля хорошо прослеживаются на материалах, касающихся магнитного склонения: этот элемент поля издавна изучался не только исследователями на обсерваториях, но и практиками-моряками во время многочисленных дальних плаваний. На рис. 664 представлены результаты измерений магнитного склонения в городах, где они были начаты с XVI в.: в Лондоне (*1*), в Париже (*2*) и в Риме (*3*). Даже не прибегая к гармоническому анализу этих кривых, легко видеть, что они представляют

собой почти правильные синусоиды с добавлением слабо выраженной второй гармоники. Отчетливо видно, что во всех трех городах гармоническое колебание налагалось на постоянную составляющую, которая равна в Лондоне 6°,6, в Париже — 6°,0 и в Риме — 2°,8.

В условиях океанских плаваний, понятно, не могли проводиться в продолжение четырех столетий такие же тщательные измерения, как на береговых обсерваториях. Тем не менее И. Флемингу [43] удалось собрать весьма обширный материал измерений в Атлантическом и Индийском океанах, частично на материках Европы, Африки, Азии, Америки (начиная с данных ван-Бемелена по эпохе 1500 г.) и построить диаграмму распределения магнитного склонения на широтах 40° С, 0° и 40° Ю (рис. 665).

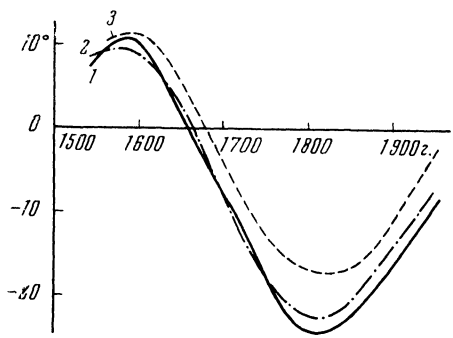


Рис. 664. Вековые изменения склонения в трех городах

Опираясь на эту диаграмму, В. В. Шулейкин построил кривые изменений магнитного склонения в различных точках, через каждые 15° долготы на экваторе и на двух параллелях, отстоящих от него на 40° (рис. 666) [44].

Кривые серии для 40° С хотя и не столь гладкие, как на рис. 664, все же очень напоминают их. В частности, все они налагаются на постоянные составляющие, отмеченные пунктиром; при этом величина постоянной составляющей сперва возрастает, проходит через максимум и затем уменьшается к восточному краю серии. Кривые серии для 0° (экваториальной) и серии для 40° Ю, как правило, не позволяют судить об экстремальных значениях склонения. Здесь можно отметить лишь предельные значения западного и восточного склонения с 1600 до 1937 г. и средние значения его за этот большой промежуток времени.

Собрание кривых, на первый взгляд пестрое, приобретает определенный и важный смысл после переноса всех полученных данных на схематическую карту (рис. 667). Меркаторская проекция дает возможность использовать параллели как оси абсцисс, откладывая значения ординат по направлению меридианов. На основании серии кривых для 40° С (рис. 666) построена кривая с осью абсцисс вдоль параллели 40° С. Значения постоянной составляющей (отрицательной — западной) отложены вниз от оси абсцисс. Площадь между полученной кривой и осью абсцисс заштрихована. Как видим, постоянная составляющая очень мала на материках Европы, Азии, Америки, зато она резко возрастает на Атлантическом океане, достигая примерно — 16° на меридиане 45° З.

Для точек экватора и параллели 40° Ю, опираясь на соответствующие оси абсцисс, построены сплошные жирные кривые, которые описывают изменения среднего склонения на различных долготах. Хоть и не столь резко, как на параллели 40° С, тут сказывается различие между полем материковым и полем океанским: убывание среднего склонения близ «материкового» меридиана 32° В проявилось не только на экваторе, непосредственно над Африкой, но слегка даже на параллели 40° Ю к югу от материка. Явно выражен вторичный максимум среднего склонения на меридиане 60° В в Индийском океане.

На рис. 667 пунктиром нанесены три кривые, которые показывают, как меняются амплитуды колебаний склонения на различных долготах. Амплитуды тоже малы на материках и резко возрастают в Атлантическом океане, обладают вторичным максимумом в Индийском океане. Во избежание недоразу-

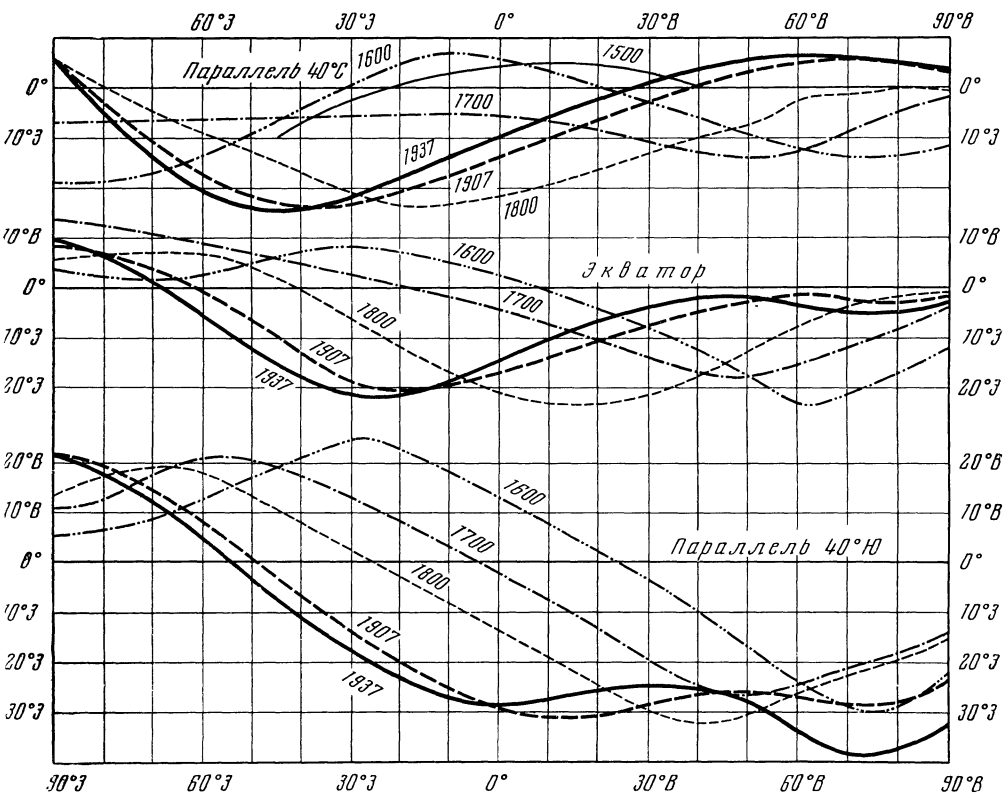


Рис. 665. Магнитное склонение на трех широтах, с 1500 г. (по И. Флемингу)

мений максимумы и минимумы всех пунктирных кривых привязаны штрихпунктирными отрезками к соответствующим осям абсцисс.

Итак, над океанами не только велики значения *постоянной составляющей* магнитного склонения, или средние его значения, но велики и *амплитуды* вековых изменений.

Вновь подкрепляется гипотеза В. В. Шулейкина о той *особой роли*, какую играет Мировой океан и в наибольшей степени — Атлантический в формировании сложного магнитного поля Земли. Не оправдались первоначальные предположения этого автора о наличии постоянной составляющей теллурических токов в водах Атлантического океана, как об источнике дополнительного постоянного магнитного поля, создающего замечательную область максимальных «восточных» составляющих на карте Л. А. Корневой (рис. 637). Но и карта рис. 637, и карта вековых изменений магнитного склонения над Атлантическим океаном и над прилегающими материками, изображенная на рис. 667, представляют собой *документальное* свидетельство о коренном различии между магнитным полем океана и магнитным полем материка. Значимость подобных документов не зависит от того, сколь несовершенны наши современные представления о физическом происхождении этого коренного различия. Несовершенство существующих гипотез должно лишь стимулировать работу над вскрытием истинной физической картины земного магнитного поля и, в частности, над вскрытием причин, создающих всю сложную карту магнитного склонения.

Возможно, что *квазипостоянная* составляющая теллурических токов в Атлантическом океане, появляющаяся во время самых сильных магнитных возмущений Земли, играет такую роль, какую, по гипотезе Чаттерджи [12],

играли в веках переменные потоки солнечных корпускул в полярных шапках ионосферы: возможно, что эта квазипостоянная составляющая «подмагничивала» сложную электромагнитную систему планеты и — в продолжение веков — создала ту постоянную «восточную» составляющую геомагнитного поля в экваториальной Атлантике, которая документально описана на рис. 667 постоянной составляющей магнитного склонения (16° З на широте 40° С).

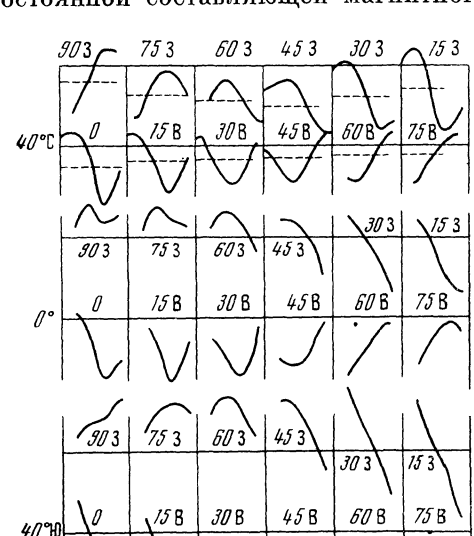


Рис. 666. Вековые изменения магнитного склонения в различных точках

Возможно, что ответ на многие спорные вопросы даст гипотеза Э. Булларда, когда она получит количественное завершение и превратится в теорию происхождения земного магнитного поля. В настоящее же время в своих работах Буллард считает просто заданным и не нуждающимся в объяснениях *сдвиг* магнитной оси Земли относительно ее оси вращения. В этом — слабая сторона его интересных построений. Действительно, ведь палеомагнетологи, считающие положение земной магнитной оси в древнейших эпохах резко переменным, должны, естественно, прийти к мысли о том, что в продолжение древней истории Земли гироскопический эффект упорядочил вихревое движение в расплавленном веществе под мантией, приведя его к современному состоянию.

Но необходимо признать, что магнитная ось Земли должна была при этом совпасть с осью вращения планеты. На самом деле совпадение осей не произошло, и за последние три века угол между осями даже увеличился.— Между тем документальные материалы, послужившие для составления наших рис. 664—667, позволяют сочетать представление о дрейфующих конвекционных ячейках Булларда и представление об естественном основном геомагнитном поле, ось которого совпадает с географической осью Земли. Такое сочетание не только возможно, но и чрезвычайно эффективно: оно по-новому освещает особую роль Мирового океана.

Об этом говорят весьма простые рассуждения:

1. Если электромагнитное поле «вихрей» Булларда взаимодействует со слабопроводящей твердой оболочкой Земли, вызывая дрейф конвекционных ячеек, то тем более необходимо ожидать взаимодействия этого электромагнитного поля с хорошо проводящей средой океанических вод.

2. Когда ячейки проходят под океаном, они вызывают усиленные колебания восточной составляющей напряженности поля и колебания магнитного склонения, значительно более резкие, чем когда те же ячейки проходят под материками. Об этом убедительно свидетельствуют пунктирные кривые на карте рис. 667. Они косвенно подтверждают наличие взаимодействий электромагнитного поля ячеек с проводящей водной средой. В полном соответствии с рис. 667 находятся и три кривые на рис. 664: чем ближе к океану расположена обсерватория, тем больше измеренная постоянная составляющая магнитного склонения и амплитуда его колебаний в веках.

3. Главный результат подобных взаимодействий также виден на рис. 667, в особенности на широте 40°,—это постоянная составляющая магнитного склонения, которая мала на материках и велика над океанами.

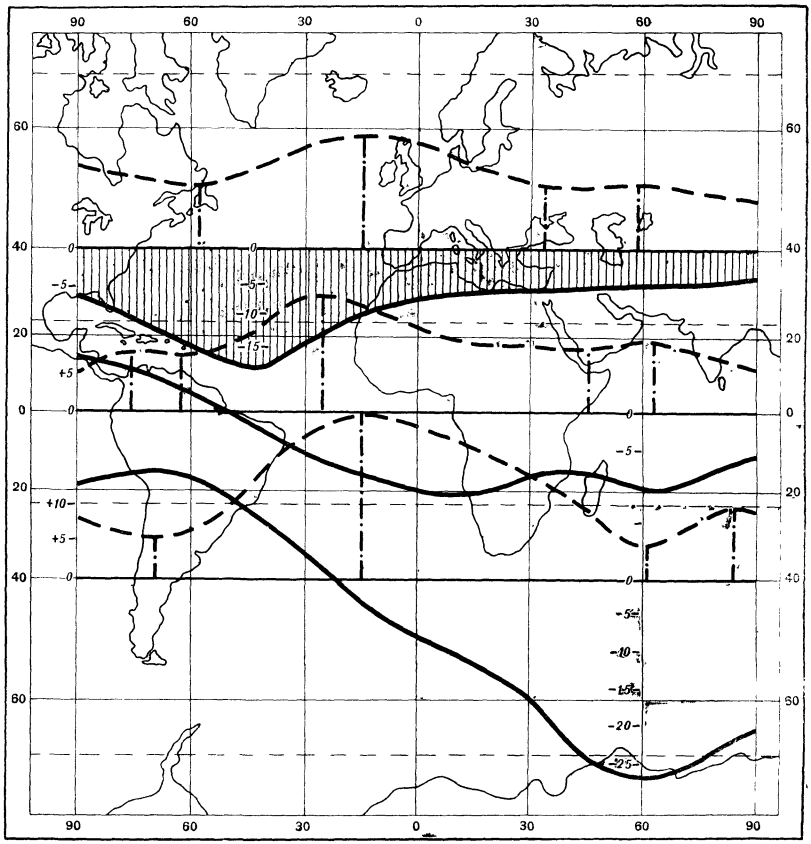


Рис. 667. Карта вековых изменений магнитного склонения над Атлантическим океаном и над материками

4. В итоге необходимо признать, что конвекционные ячейки Булларда могут создавать основное магнитное поле Земли, ось которого совпадает с осью вращения планеты.

5. Взаимодействие электромагнитных полей ячеек со слоями, лежащими сверху, *неодинаково* в области, покрытой водами океана, и в областях, над которыми расположены материки, большие острова, полуостровы.

6. Только при таких различиях могла возникнуть сложная картина земного магнитного поля. На ней не могут быть случайными подробностями те важные характеристики, которые отражены на картах рис. 637 и 667.

§ 14. Особенности электромагнитных явлений, вызванные контрастом в термике океана и материков. Роль береговой линии

В гл. V уделено много места явлениям, которые порождены контрастом в термике моря и материков и которые вызывают мощные термогидродинамические процессы как в атмосфере, так и в водах океана. В § 9 настоящей главы говорилось о резко выраженном скинэффекте, который обычно называют береговым эффектом при исследованиях электромагнитных явлений на стыке сред с различной электропроводностью. В § 11—13 изложено современное состояние вопроса о различии электромагнитных явлений в океане и на мате-

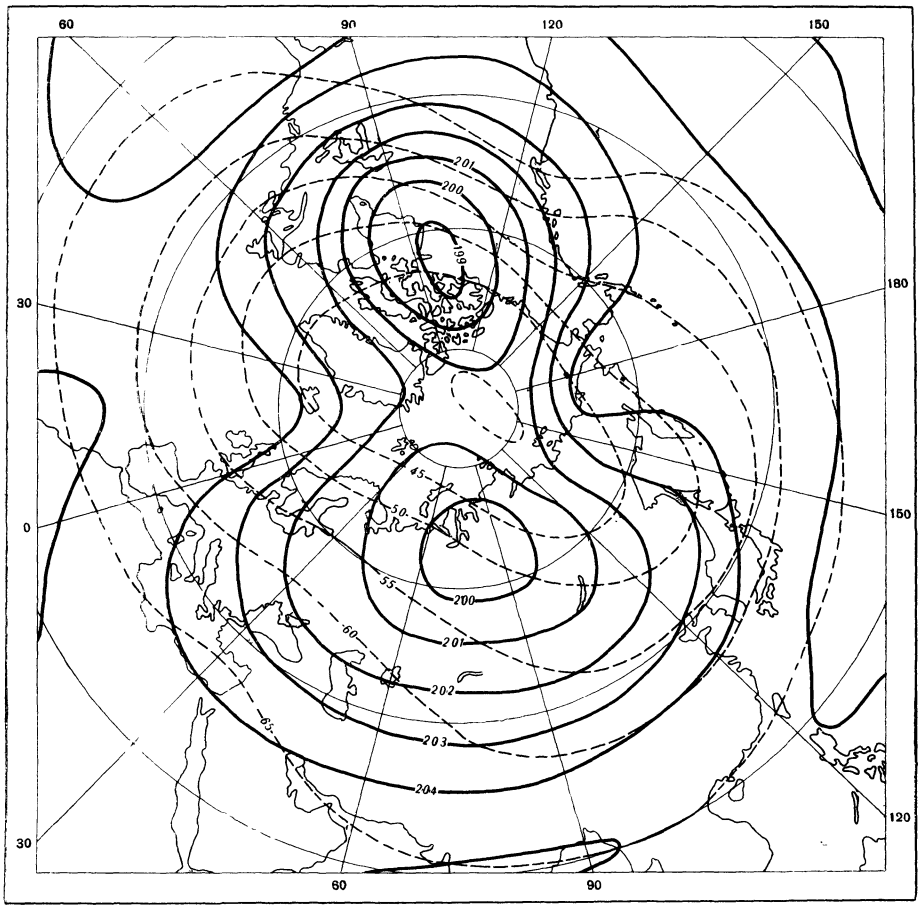


Рис. 668. Изолинии геопотенциала на 50-миллибарной поверхности (по Минчу и Бордену)

риках. Там сказывалось и различие в тепловых явлениях планетарного масштаба между контрастирующими частями поверхности планеты — океаническими и материковыми,— и различие в электропроводности сред. Теперь необходимо сказать о явлениях, вызванных теми же контрастами и пока еще не упоминавшихся в предыдущих параграфах, главах.

Прежде всего вспомним о тепловых машинах третьего рода, работающих в стратосфере, благодаря эффективному излучению снизу,— меньшему над океаном и большему над материками. Рис. 367 (см. гл. V) убедительно свидетельствует о наличии резко выраженного градиента температур воздуха в направлении нормали к береговой черте на протяжении от тропопаузы до высоты 20 *км* над уровнем океана, представленной на рисунке. Целую серию карт, посвященных температурному полю в стратосфере, составила Л. А. Корнева [45]. На них можно проследить за расположением нагревателей и холодильников в термодинамических машинах третьего рода. Наконец, в недавние годы Мюнч и Борден построили ряд карт, характеризующих динамический режим этих машин на больших высотах стратосферы. На рис. 668 изображена одна из карт, заимствованная из их работы [46]. Здесь, в полярной проекции, нанесены изолинии геопотенциала. Цифры выражают высоты изобарической поверхности 50 *мбар*, выраженные в сотнях динамических метров.

На рисунке отчетливо видны различия между областью, лежащей над водами Мирового океана (над Атлантическим и Тихим океанами), и областью, лежащей над материками,— соединенным Европейско-Азиатским и Северной Америкой. Линия «204 сотен дин. *м*» вытянулась далеко на север над Гренландским морем и в особенности далеко на север — над водами Восточно-Сибирского моря. В то же время эта изолиния простирается над материками далеко к югу — к Суэцкому каналу, к Персидскому заливу, к южным склонам Гималаев, а над Америкой проходит над Плато Колорадо.

К сожалению, современная техника не позволяет получать аналогичные динамические карты для высот 100—120 *км* над уровнем океана, относящихся уже к слоям ионосферы: слоям E и $E_{\text{спорад}}$. Разумеется, нет возможности осветить подобными картами более высокие слои ионосферы: F_1 и F_2.

Но можно с уверенностью утверждать, что в слоях, отмечаемых буквой E, должны проявляться влияния контрастов между океанической и материковой подстилающими поверхностями: должны возникать системы воздушных потоков того же происхождения, как и системы потоков в стратосфере. Подобная гипотеза, высказанная В. В. Шулейкиным, нашла подтверждение в результате многочисленных исследований движения неоднородностей в слое E, проделанных отечественными и иностранными авторами во время III Международного геофизического года и во время кампании Международного года спокойного Солнца (1957—1965 гг.). Разумеется, в условиях движения *ионизированного* воздуха уравнения гидродинамики должны записываться с учетом дополнительных членов, вызванных взаимодействием движущейся плазмы с геомагнитным полем.

Первая попытка учета дополнительных сил, проделанная В. В. Шулейкиным и Л. А. Корневой [47], показала, что при не слишком сильной ионизации,— а она именно такова в слое E — происходит своеобразная борьба между силой Кориолиса и силой магнито-гидродинамической: последняя вычитается из кориолисовой силы как направленная точно в противоположную сторону. Разность между этими двумя силами зависит от концентрации ионов в слое E, непрерывно колеблющейся во времени. Тем самым порождаются резкие колебания направлений скоростей ветра в слое E и абсолютного значениях этих скоростей относительно тех параметров, какие характеризовали бы чисто геострофический ветер при том же значении градиента давления на высотах. В работе [47] диаграмма вычисленных скоростей сопоставлена с диаграммой, полученной на иностранной ионосферной станции. Разброс векторов и их расположение относительно вектора, изображающего градиент давления, практически одинаковы как в натуре, так и в первой теоретической схеме.

Впоследствии В. П. Докучаев отметил [48], что необходимо учитывать весьма малое время релаксации свободных зарядов в слое E и предложил иную форму уравнений магнитной гидродинамики для описания потоков ионизированного воздуха в слое E. Но это уточнение решения задачи не отразилось на практических выводах из анализа: в зависимости от концентрации ионов в слое E потоки должны так или иначе отклоняться от направления чисто геострофического ветра, причем отклонения возможны в обе стороны. Что касается слоя F, то там на основании [47] и [48] надо учитывать весьма большую ионизацию и ничтожно малую плотность атмосферы, исключающую представление о ветре в обычном смысле этого слова: до настоящего времени еще неясно, указывают ли современные методы наличие какого-то упорядоченного движения воздуха в слое F или они дают возможность следить лишь за какими-то пульсациями «ионных облаков».

По этой причине в дальнейшем будем говорить лишь о реальных потоках ионизированного воздуха в слое E. Для исследования этих потоков в настоящее время применяются два основных метода: стереофотографирование метеорных следов на соответствующих высотах и измерение скорости дрейфа ионных

неоднородностей в слое E посредством приема отраженных радиоимпульсов. Импульсы, посылаемые датчиком станции, отражаются от неоднородностей в ионизированных слоях, например в слое E, и принимаются на три отдельные антенны, разнесенные по углам A, B, C равнобедренного прямоугольного треугольника. В Черноморском отделении Морского гидрофизического института длина его катетов равна 135 *м*, причем один из них (AB) параллелен генеральному направлению береговой линии, а другой (BC) перпендикулярен к ней. Принятые импульсы через усилитель и коммутатор поступают

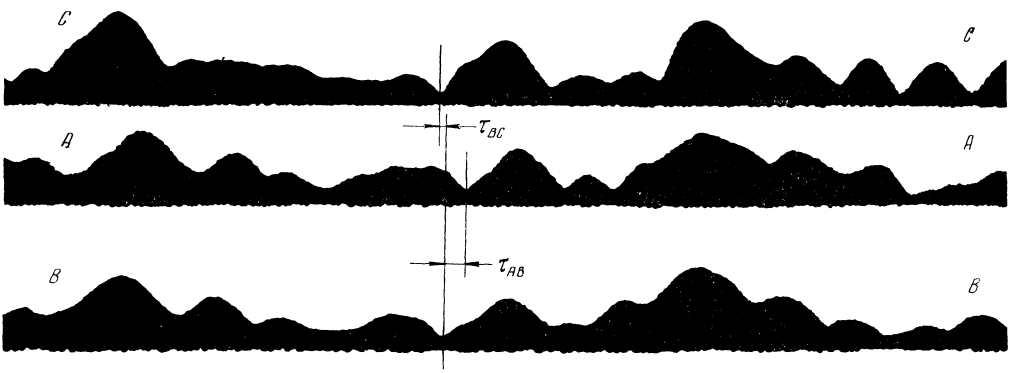


Рис. 669. Движущиеся неоднородности в ионосфере, зарегистрированные на кинопленке, в увеличенном виде (по Н. Н. Карнаушенку)

на флуоресцирующий экран катодного осциллографа, давая там три строчки, расположенные одна над другой. На этот экран направлен объектив фотоприставки, дающий изображения на движущейся негативной киноленте.

На рис. 669 изображен в увеличенном виде кусок негатива с зарегистрированными двигавшимися неоднородностями слоя E ионосферы. На рисунке отмечены минимумы кривых, близких к подобию. Масштаб времен здесь таков, что сдвиг $\tau_{AB} = +0{,}56$ *сек*, а сдвиг $\tau_{BC} = -0{,}1$ *сек*. Наблюдателю приходится делать много подобных промеров на негативной ленте, а затем строить гистограммы или вычислять средние значения промежутков времени $\overline{\tau_{AB}}$, $\overline{\tau_{BC}}$. После этого искомая осредненная скорость $\overline{V}$ дрейфа неоднородностей и угол $\overline{\varphi}$, составленный направлением дрейфа с направлением береговой линии, вычисляются по формулам

$$\overline{V} = 135 \Big/ \sqrt{\overline{\tau_{AB}^2} + \overline{\tau_{BC}^2}}, \quad \overline{\varphi} = \operatorname{arc\,tg} \overline{\tau_{BC}} / \overline{\tau_{AB}}.$$

Расчеты по ленте, от которой отрезан демонстрируемый кусок, дали, в частности, значения $\overline{V} = 228$ *м/сек* и $\overline{\varphi} = 350°$ для движения в слое E.

Сводка результатов измерений на 24 станциях за III Международный геофизический год сделана Э. С. Казимировским [49]. На рис. 670 представлена одна из его карт. Она относится к зимнему режиму в слое ионосферы от 75 до 100 *м* над уровнем океана. Векторы обозначают направления движения ионных неоднородностей, которые тут играют роль настоящих поплавков. Цифры у концов векторов дают значения скоростей, выраженные в метрах в секунду. С точки зрения изложенной гипотезы, большой интерес представляют, например, такие векторы: вектор 50 *м/сек* в точке T на севере Европы (в Тромсё, в Норвегии), в точке C на берегу Черного моря (близ Симеиза, где работала временная станция Физического института), вектор 90 *м/сек* и ряд других. Эти точки лежат на береговой линии, и наивероятнейшая скорость, опреде-

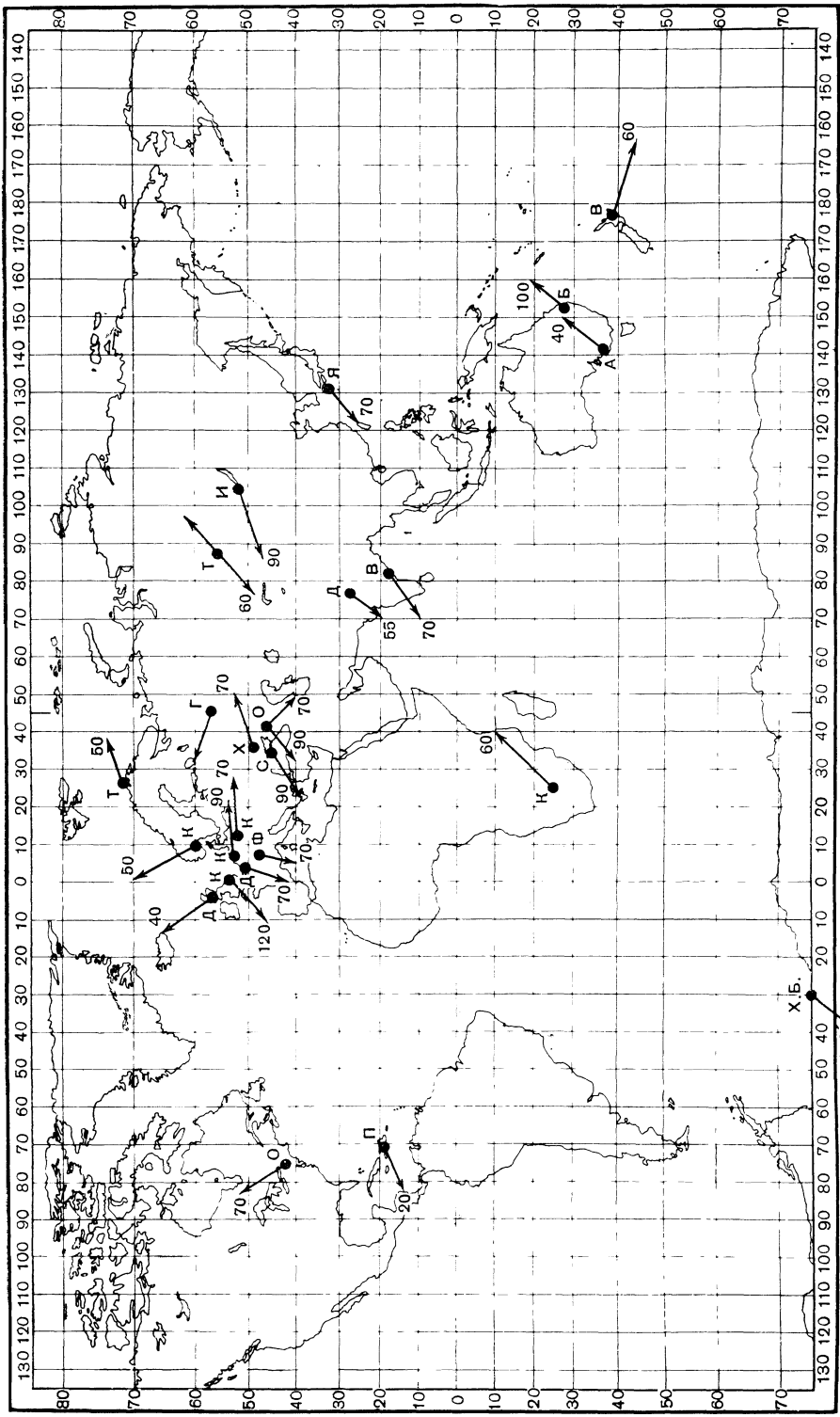


Рис. 670. Дрейф неоднородностей в слое E ионосферы (по Э. С. Казимировскому)

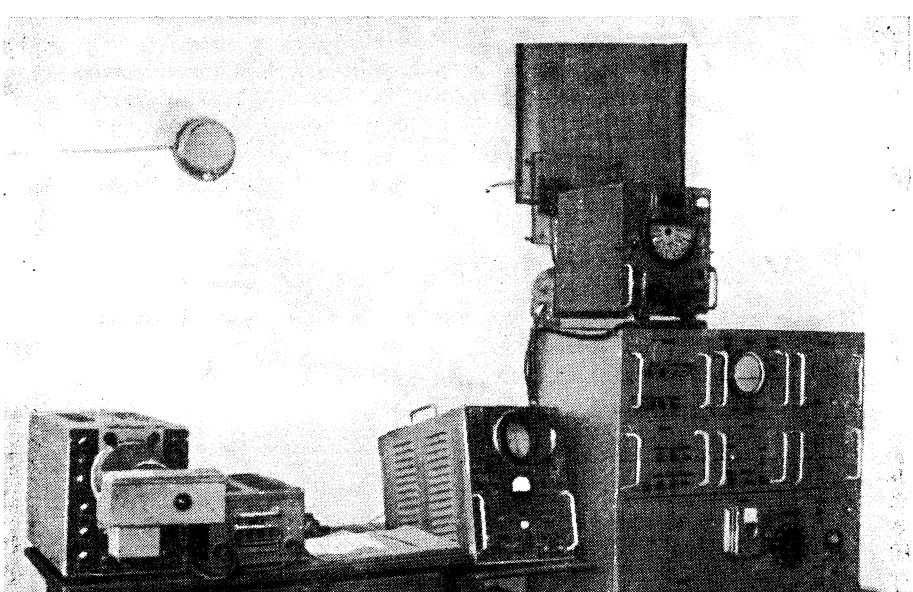


Рис. 671. Общий вид блоков ионосферной станции в Кацивели

ленная Казимировским, там направлена по касательным к береговой черте (в T и C в разные стороны, как и следовало ожидать). Автор отметил сезонные изменения скоростей в слое E: смену направлений при переходе от зимнего сезона к летнему и обратно; близ весеннего и близ осеннего равноденствий картина теряет четкость, векторы скоростей блуждают хаотически. Следовательно, уже на основании работы [49] видно, что гипотеза Шулейкина о роли тепловых контрастов между океанической и материковой подстилающими поверхностями оправдалась. Но оправдалась она с одной поправкой: в отличие от рис. 367 (см. гл. V) и от карт Л. А. Корневой, составленных для стратосферы [45], *знак* контраста не остается в ионосфере (в слое E) постоянным круглый год, как это соответствовало термодинамическим машинам третьего рода; этот знак меняется на обратный при переходе от холодной поры года к теплой. Следовательно, в этом отношении режим в слое E отчасти напоминает *муссонный* режим в тропосфере, созданный машинами второго рода.

Для детальных исследований в этом направлении, начиная с марта 1964 г., в Черноморском отделении Морского гидрофизического института были поставлены измерения направлений и модулей скоростей движения неоднородностей преимущественно в слое E, а также в слоях D и F. Эти работы ведутся под непосредственным руководством Н. Н. Карнаушенка [50]. Ионосферная станция для этих работ была построена в Горьковском радиофизическом институте под руководством Л. В. Гришкевича.

На рис. 671 основной блок станции виден справа. Слева стоит катодный осциллограф с фотоприставкой, а между блоками — контрольный осциллограф для визуальных наблюдений при настройке системы на нужную частоту в импульсе.

На рис. 672 приведены характерные гистограммы, полученные Н. Н. Карнаушенком и его сотрудниками на этой станции (в Кацивели). Несмотря на естественный разброс векторов, вытекающий из работ [47, 48], видна сезонная смена наиболее вероятных направлений потоков в слое E. Так же, как и

в работе [49], в [50] получена хаотическая картина потоков в переходные времена года: близ весеннего и осеннего равноденствий. Преобладающие значения скоростей ветра в слое *E* над Кацивели оказались порядка 40—100 *м/сек*.

К сожалению, направление береговой линии в Кацивели (генеральное направление в этом районе) близко к преобладающему направлению скоростей ветра в слое *E* над Европой. Поэтому колебания направлений потоков влево и вправо от чисто геострофического ветра еще не могли дать окончательного суждения о правильности упомянутой гипотезы.

Хорошим дополнительным подкреплением гипотезы Шулейкина служат материалы ионосферных наблюдений, сделанных в Болгарии Д. Самарджиевым и Г. Несторовым [51]. На рис. 673, *а* представлена гистограмма направлений потоков в слое *E* в зимнее время (преобладающее направление на юго-юго-восток, около 202°), а на рис. 673, *б* — гистограмма, соответствующая теплому времени года (преобладающее направление на северо-северо-восток, около 24°). Так же, как и на гистограммах предшествовавших авторов, здесь видна резкая смена направлений потоков при смене сезонов; но тут уже никаких сомнений не остается относительно направления *преобладающих потоков вдоль береговой черты*: это направление здесь сильно отличается от направления преобладающих потоков в слое *E* над Европой вообще. Здесь, над Болгарским побережьем Черного моря, и зимние, и летние потоки воздуха в слое *E* несомненно следуют вдоль береговой черты (в том или ином направлении в зависимости от сезона). В соответствии с [47, 48] наблюдаются отклонения в обе стороны от направления чисто геострофического ветра.

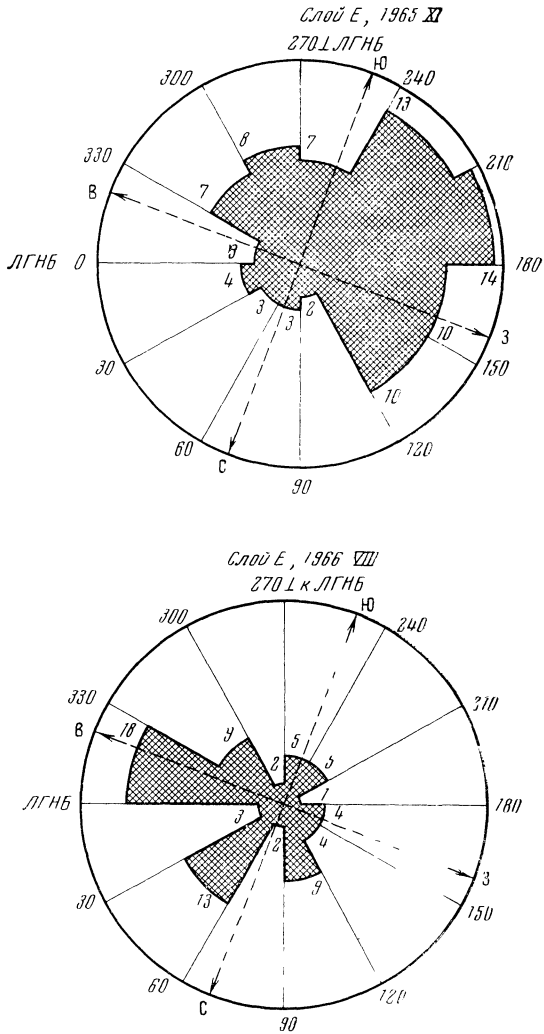


Рис. 672. Гистограммы скоростей движения неоднородностей в слое *E* (по Н. Н. Карнаушенку)

Столь же хорошо упомянутая гипотеза объясняет поведение потоков в слое *E* над берегами Антарктиды: там, по исследованиям А. А. Кашина [52], направление движения неоднородностей (в среднем) остается постоянным круглый год; это потому, что круглый год тепловые контрасты между ионосферой над океаном и ионосферой над вечными льдами Антарктического материка сохраняют постоянный знак. Здесь сказывается полная аналогия с режимом термодинамических машин второго рода в двух «аномальных» областях поверхности нашей планеты: над Антарктидой и над Гренландией, которая

также покрыта вечными льдами и вечными снегами. С уверенностью надо предполагать, что потоки в слое *E* над берегами Гренландии должны сохранять столь же постоянное наиболее вероятное направление.

Как уже упоминалось выше, в настоящее время еще нет установившегося представления о природе движущихся неоднородностей в слое *F*: если в слое *E* ионные облака могут служить отличными индикаторами настоящих потоков воздуха, состоящего из нейтральных молекул и ионов той или иной концентрации, то в слое *F*, при ничтожной плотности нейтральных газов и чрезвычайно большой концентрации ионов, картина движения, получаемая на пленках

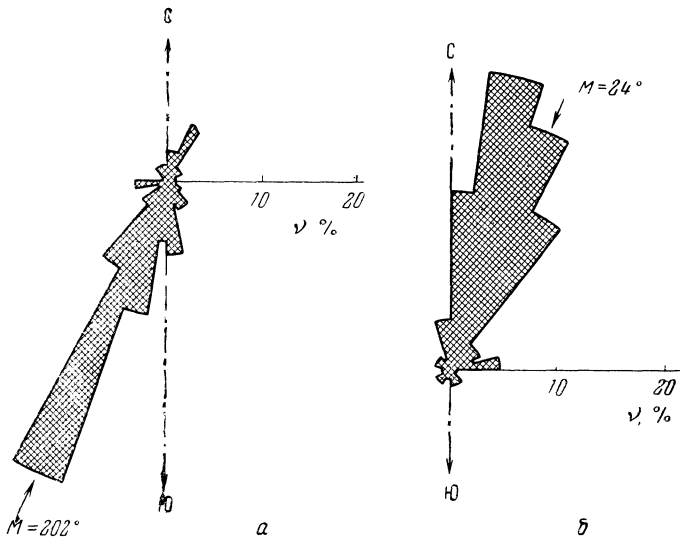


Рис. 673. Гистограммы скоростей движения неоднородностей в слое *E* (по Д. Самарджиеву и Г. Несторову)

в аппаратуре ионосферных станций, неизбежно учитывает эффект пульсации зарядов в ионных облаках; при существующих технических средствах этот эффект нельзя отделить от эффекта чистого дрейфа неоднородностей в слое *F*.

Во всяком случае, из работ [47] и [48] вытекает, что очень большая концентрация ионов в слое *F* должна приводить к полной компенсации кориолисовой силы магнито-гидродинамической силой, направленной в противоположную сторону. В таком случае, на основании цитированных работ, надо ожидать, что в слое *F* воздушные потоки должны следовать в направлении градиента давления, т. е. под прямым углом к геострофическому ветру в нейтральной атмосфере. Наблюдения ионосферных станций [49, 50] подтверждают этот вывод.

Много лет тому назад И. А. Клёмин сообщил В. В. Шулейкину, что австралийские исследователи очень часто наблюдают в слое *E* спорадическом точное изображение береговой линии Австралии. В ту пору не было найдено объяснение этого интересного явления. Ныне мы хорошо представляем происхождение потоков над береговыми линиями материков в слоях на высоте 60—120 *км* над уровнем океана. К сожалению, не удалось найти в литературе описание работ, на которые ссылался И. А. Клёмин. Вместе с тем надо отметить одну работу в родственной области, посвященную так называемой суперрефракции радиоволн над береговой линией Австралии: это — работа Ф. Керра [53]. В его статье речь идет о тех же контрастах, создаваемых в атмосфере различием термики океана и материка. В данном случае эти контра-

сты сказываются на изменениях показателя преломления электромагнитных волн в атмосфере над берегами Австралии.

В заключение настоящего параграфа необходимо сказать о береговом эффекте в той области геофизических явлений, которая лишь в последние годы становится на прочную теоретическую основу. Это — береговой эффект в полярных сияниях, которому посвящена первая в мире сводка работ — книга Ю. А. Надубовича [54].

Цитированный автор напоминает, что еще в 20-х годах прошлого столетия известный русский полярный исследователь Ф. П. Врангель писал об этом эффекте, наблюдавшемся многими, но не находившем объяснения. Вот цитата из отчета о его путешествиях:

«У берегов моря сполохи бывают обыкновеннее и сильнее, нежели в отдалении от него, независимо от широты места. Так, например, по рассказам чукчей с острова Колючина (в широте 67°26′), сполохи там ярче светят и чаще случаются, нежели в Нижне-Колымске под широтой 68°32′. У моря они часто доходят до зенита, что в Нижне-Колымске встречается редко» [55].

Сам автор работы [54] основательно считает, что наличие берегового эффекта в полярных сияниях подтверждается даже качественными наблюдениями: а) береговой эффект приводит к искривлению зоны максимальной частоты появления сияний в соответствии с очертаниями береговой линии и к увеличению числа сияний вблизи берега; б) изохазмы сияний обнаруживают тенденцию повторять форму наиболее характерных выступов материка; в) изохазмы сгущаются в проливах, следовательно, над проливами должны быть наиболее частые и наиболее сильные вторжения заряженных частиц, вызывающих полярные сияния (в следующем параграфе нам придется вернуться к этому важному вопросу); г) эти явления наиболее резко выражены для однородных форм сияний в дни умеренной их активности; д) но береговой эффект наблюдается как в годы максимума солнечной активности, так и в годы минимума.

Количественные исследования были произведены автором работ [54] в сотрудничестве с другими исследователями на Севере СССР: на берегу Баренцева моря и в особо большом масштабе — на берегу моря Лаптевых. Сияния фотографировались специальными камерами С-180 и С-180-S, с последующим увеличением кадров аскафильма и совмещением увеличенного кадра с трансформированной картой береговых линий материка Азии и островов.

На рис. 674 представлены копии карт, заимствованных из [54]. На них видны очертания побережья моря Лаптевых, Новосибирских о-вов, о. Большого Ляховского и проекция фронта полярного сияния, фотографировавшегося с промежутками в 1 *мин*. Отчетливо выражен береговой эффект. В той же работе приведена еще одна интересная серия карт, на которой фронт сияния не так далеко растянут, как на рис. 674, но зато этот фронт еще тесней тяготеет к береговой линии в районе бухты Тикси.

Автор работы [54] дает вполне основательное гипотетическое объяснение берегового эффекта в полярных сияниях: он связывает его с береговым эффектом теллурических токов в море, о котором говорилось в § 8, со скинэффектом, теорию которого применительно к круглому морю дал В. В. Шулейкин [27, 29].

Ю. А. Надубович полагает, что между токами повышенной плотности, идущими в морской воде вдоль береговой линии, и токами в слоях ионосферы во время полярных сияний (точнее, горизонтальными составляющими этих ионосферных токов) возникают пондеромоторные силы, которые содействуют смещению зон полярных сияний к береговой черте. Разумеется, цепь взаимодействий здесь совсем не проста: приходится допускать, что движения ионов в горизонтальных направлениях заметно меняют траектории заряженных частиц солнечного происхождения, вторгающихся в атмосферу и порождающих полярные сияния. Во всяком случае, с точки зрения энергетической такое

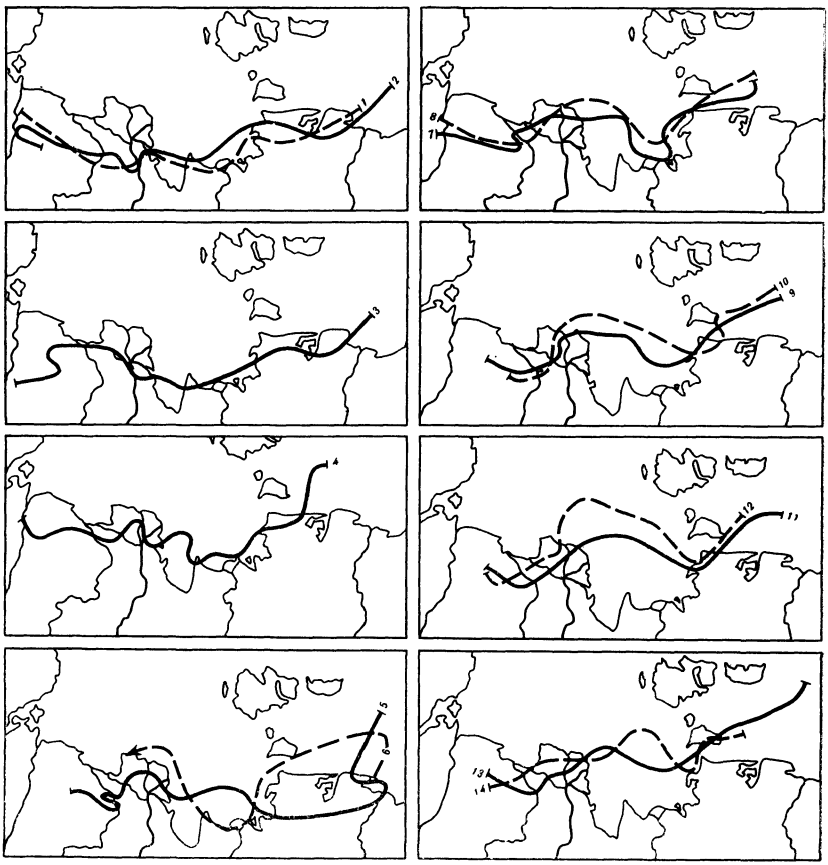


Рис. 674. Береговой эффект в полярных сияниях (по Ю. А. Надубовичу)

предположение правдоподобно: Надубович [54] основательно замечает, что совмещение зоны полярных сияний с береговой линией, в качестве ее проекции, создает условия минимума потенциальной энергии всей системы токов, создает как бы «канаву потенциала», в которую «скатывается» фронт сияния. Косвенным подтверждением гипотезы о пондеромоторных взаимодействиях может служить еще одно обстоятельство: на теоретической диаграмме рис. 654 было показано, что скинэффект в море со сложным рельефом дна приводит к возникновению максимальной напряженности электрического поля в воде, а следовательно, и максимальной плотности тока в воде, не у самой береговой черты, а мористей — на границе материковой отмели, где глубины быстро нарастают. В полном соответствии с этим в работе [54] отмечается, что при береговом эффекте полярных сияний наибольшая сила свечения и наибольшая повторяемость приходятся на полосу, параллельную берегу и лежащую мористей.

§ 15. Обострение контрастов между океаническими и материковыми областями атмосферы при повышении солнечной активности

Уже в 1920 г. Е. Е. Федоров [56] и четыре года спустя В. Ю. Вийзе [57] обнаружили обострение контрастов между циклоническими и антициклоническими областями, наступающее при повышении солнечной корпускулярной активности. Этот «закон акцентации барических полей» привлек внимание

многих исследователей к той проблеме, которая возникла в геофизике триста лет назад,— к проблеме влияния солнечной активности на метеорологические явления. За истекшие столетия появилось более чем достаточное число печатных работ, трактовавших о земных эффектах солнечных пятен; но по большей части их авторы были склонны приписывать солнечным пятнам самые диковинные воздействия на нашу планету: от организации крестовых походов до колебаний числа автомобилей, выпускаемых фирмой Форд, или числа небоскребов, воздвигаемых в США.

Именно такие фантастические выводы вызывали отрицательную реакцию у большинства геофизиков и надолго задержали здоровое течение исследований по солнечно-земным связям. Очень долго не были по достоинству оценены и работы Е. Е. Федорова, В. Ю. Взей и работы П.П. Предтеченского, М. С. Жукова, К. В. Бродовицкого [58], пионеров-энтузиастов, работавших над проблемой 11-летней цикличности метеорологических явлений, 11-летней цикличности изменений климата нашей страны и других областей Земли. Отличный обзор по проблеме солнечной активности дан в книге Б. М. Рубашева [59], в которой пятая глава целиком посвящена проявлениям солнечной активности в нижней атмосфере. Отсылая читателей, интересующихся общими вопросами, к этой книге, мы в настоящем параграфе займемся *частным* вопросом: о роли повышения солнечной активности в обострении, а иногда и в самом возникновении явлений, о которых уже говорилось в других параграфах (см. гл. V и X).



Рис. 675. Повторяемость положительной аномалии температуры воздуха в Ленинграде в 27-дневном солнечном цикле (по Л. А. Вительсу)

Прежде всего надо упомянуть, что в 1946 г. Л. А. Вительс показал особую восприимчивость циклонов над Атлантическим океаном к усилению солнечной активности [60]. Естественно было проследить за объективными характеристиками состояния нижней тропосферы в той области нашей страны, которая находится под несомненным значительным влиянием Атлантического океана. Поэтому тот же автор тщательно изучил отклонения температуры воздуха в Ленинграде от средней нормы того или иного дня года при прохождении различных участков солнечной поверхности через центральный меридиан. Как известно, солнечные пятна, факелы и другие особые участки солнечной поверхности, ответственные за испускание заряженных частиц, весьма стойко сохраняются на одних и тех же так называемых активных меридианах светила в продолжение многих его оборотов вокруг собственной оси. Эта активность иногда остается даже после исчезновения пятна, наблюдавшегося при предыдущих оборотах. Вот почему Вительсу удалось проследить за колебаниями температурных аномалий воздуха в Ленинграде на протяжении длительного срока [61]. Например, на рис. 675 показана повторяемость положительных аномалий температуры воздуха в Ленинграде за две большие серии 27-дневных циклов (синодический период обращения Солнца вокруг

его оси, т. е. видимый с Земли, движущейся в свою очередь вокруг Солнца, составляет приблизительно 27,3 суток). Кривая *1* соответствует 15 оборотам Солнца, с 10 декабря 1950 г. по 22 января 1952 г. Кривая *2* построена по вычислениям аномалий температуры для 10 оборотов Солнца, с 2 июня 1950 г.

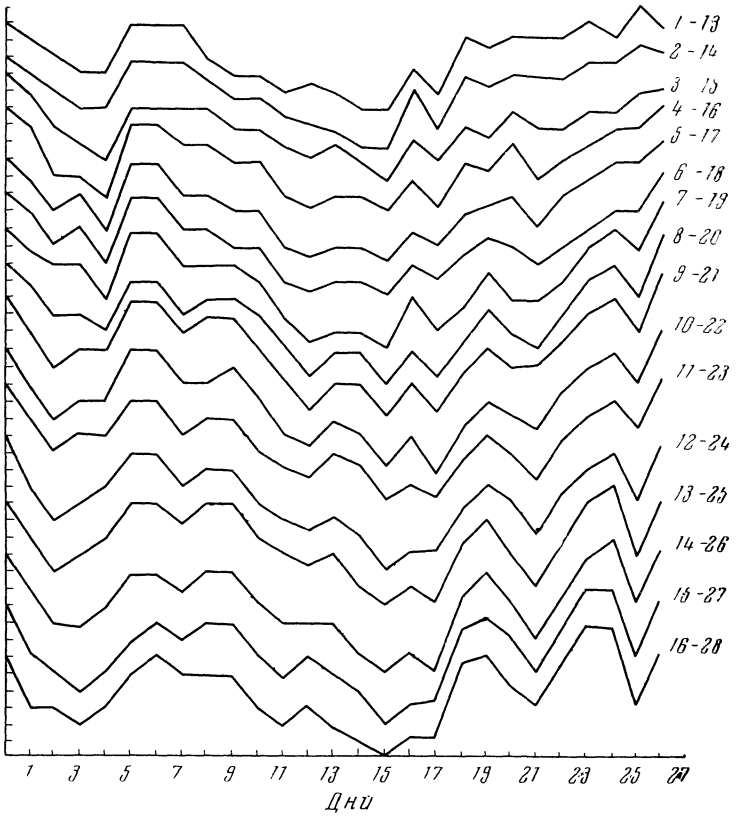


Рис. 676. Повторяемость положительной аномалии температуры воздуха в Ленинграде в 27-дневном цикле. Скользящие кривые (по Л. А. Вительсу)

по 1 марта 1951 г. Тип обеих кривых одинаков: на них видны два наиболее четко выраженных максимума и два наиболее четко выраженных минимума. Это находится в прямом соответствии с наблюдениями астрофизиков, согласно которым наиболее активные меридианы чаще всего расположены в одной плоскости, на противоположных сторонах Солнца.

Очень интересна диаграмма рис. 676, заимствованная из той же работы [61]. Здесь приведены скользящие кривые по 13-оборотным интервалам, также характеризующие повторяемость положительной аномалии температуры в Ленинграде, по 27-дневному солнечному циклу. Форма кривых поразительно сохраняется в деталях. Несомненно, бóльшая или меньшая активность различных участков солнечной поверхности, расположенных на различных меридианах, отражается на метеорологических условиях в нижней тропосфере [62].

Интересны исследования, посвященные последствиям отдельных корпускулярных вторжений, в частности исследования Б. Дюлл и Г. Дюлл [63]. На рис. 677 представлены четыре карты этих авторов, построенные по материалам 16-летних наблюдений в годы относительно «спокойного Солнца», между 1906 и 1937 гг. Здесь вычерчены изаллобары, показывающие, на

сколько миллибар, *в среднем за эти годы*, атмосферное давление отклонялось от климатологической нормы под действием отдельных возмущений. Карта *а* отвечает барическому полю за день до вторжения. На карте *б* видна перестройка поля в день вторжения. На карте *в* явно повысилось давление над Датским проливом и Исландией и понизилось над Скандинавией, Балтийским морем и прилегающими районами Европы через день после вторжения. Наконец, карта *г* характеризует максимальное обострение процесса на второй день после вторжения.

Надо отметить, что везде перестройка барического и температурного полей тут происходит с подобным запаздыванием после вторжения заряженных частиц солнечного происхождения. Местами резкая перестройка наступает быстрей: например, в работе [64] Л. А. Вительс показал, что на другой же день после магнитной бури резко возрастает так называемый индекс Атлантической циркуляции, т. е. сумма средней глубины Исландской депрессии и средней мощности Азорского антициклона — от 7,5 *мбар* он скачком доходит до 8,9 *мбар*. Тот же автор установил [62] очень важное свойство космических вторжений: им обнаружено, что они способствуют возникновению и обострению термобарических сейш, описанных в § 15—19 гл. V. В сущности даже и рис. 677, *г*, заимствованный у Б. Дюлла и Г. Дюлла, напоминает характерную схему расположения пучностей и узловых линий на картах И. Сандстрема и на теоретической схеме В. В. Шулейкина (рис. 369). Это свойство корпускулярных вторжений должно играть важную роль при сменах погоды за счет развития термобарических сейш. Действительно, хотя при опытах Н. Л. Бызовой (см. гл. V, § 20) в потоках тепловой конвекции могли возникать не только вынужденные колебания, но и автоколебания,— в природных условиях, по всей вероятности, для развития сейш в системе Атлантика — Европа необходимы импульсы внешнего происхождения. Именно такие импульсы атмосфера получает во время возмущений космического происхождения.

Эти импульсы способны вызывать в тропосфере стоячие волны еще более сложного типа: с более мелкими ячейками между узловыми линиями и с очень резко выраженными пучностями. Подобный процесс возник, например, в системе океан — материки в 1957 г. в пору наибольшей солнечной активности, когда на Солнце наблюдались не только обычные вспышки, но и исключительно сильные взрывы.

Поводом к исследованию этого процесса послужили сильные штормы, захватившие экспедиционное судно «Седов» в области между параллелями 20° и 35° с. ш., меридианами 34° и 36° з. д. Далее на рис. 679 путь «Седова» изображен в виде своего рода «змейки», причем черными точками отмечены его положения между 14 и 24 ноября 1957 г.

После возвращения из рейса В. В. Шулейкин запросил у Центрального института прогнозов сведения о колебаниях атмосферного давления в различных точках исследуемой области океана и материков за этот срок. Под руководством Н. А. Белинского в Институте прогнозов были вычислены отклонения атмосферного давления во всех исследованных точках от величины, *средней* между двумя крайними значениями. В свою очередь крайними значениями во всех точках оказались те, которые наблюдались 17 и 21 ноября.

На рис. 678 представлены результаты вычислений. Каждая строчка диаграммы соответствует одному из меридианов, выбранных с промежутками в 10° долготы. При этом долгота всюду отсчитывается от нулевого меридиана на восток. Она отмечена цифрами слева от каждой строки. Внизу диаграммы указаны градусы северной широты.

Сплошные кривые соответствуют максимальным отклонениям давления от среднего значения 17 ноября, а пунктирные кривые — максимальным отклонениям 21 ноября. Посредине между левыми строками диаграммы нанесен

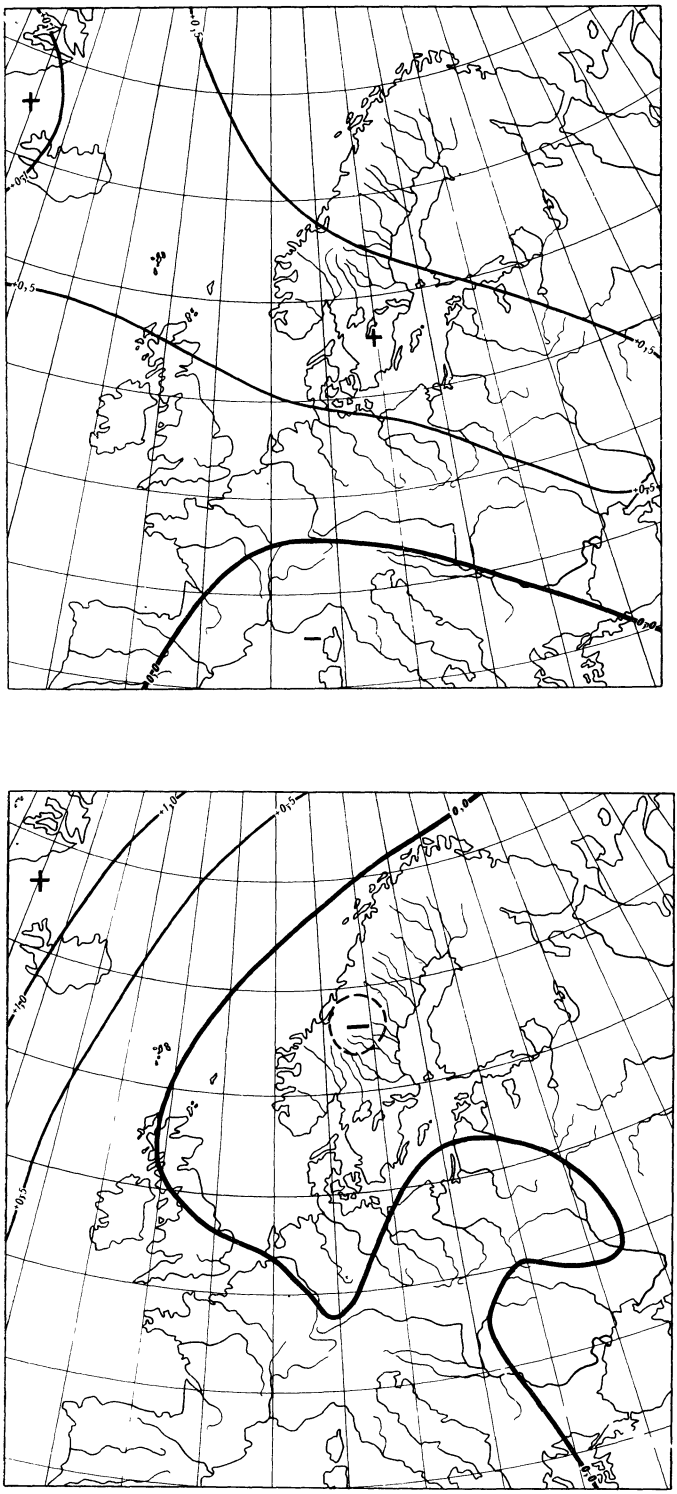


Рис. 677*а*, *б*. Отклонения атмосферного давления от нормы при магнитных бурях (по Б. Дюллу и Г. Дюллу)

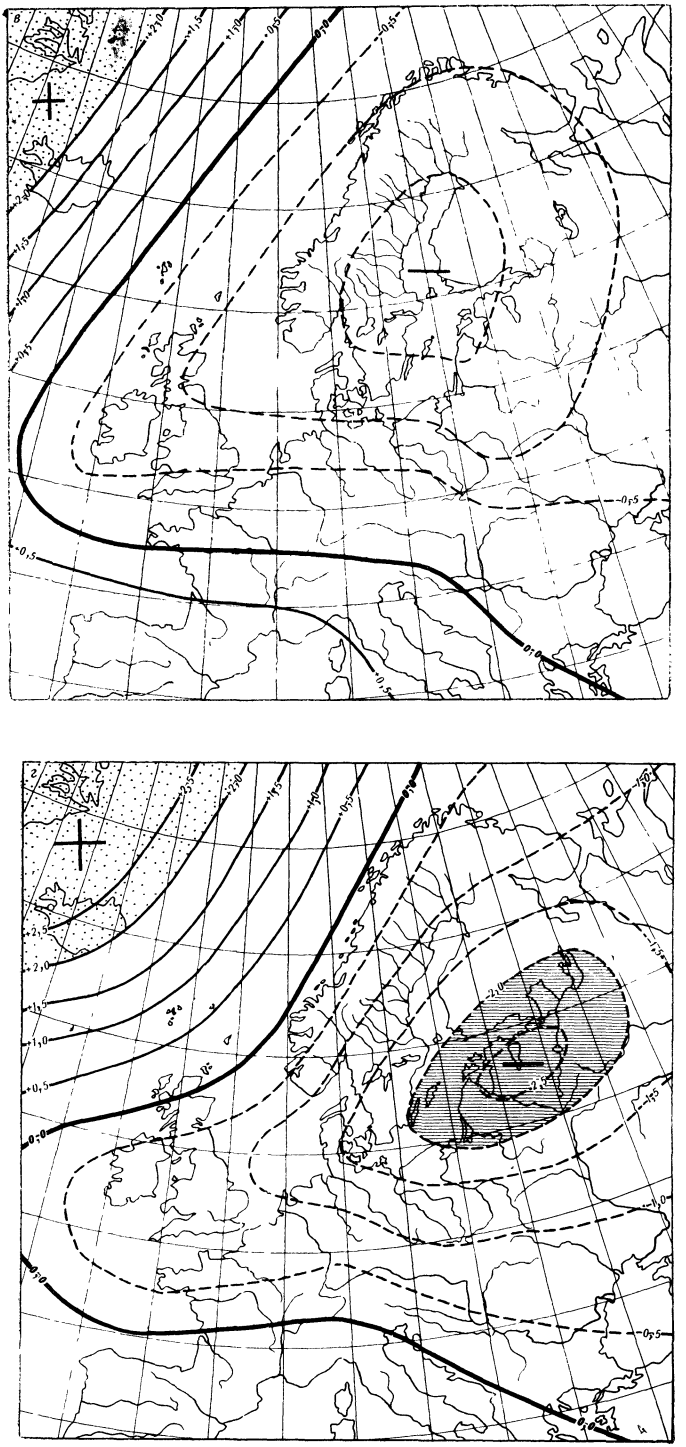


Рис. 677 *в*, *г* (продолжение). Отклонения атмосферного давления от нормы при магнитных бурях (по Б. Дюллу и Г. Дюллу)

масштабный отрезок, отвечающий отклонению от нормы 10 *мбар*. Как показывает эта диаграмма, максимальные отклонения давления от среднего за четверо суток особо велики на меридиане 285° В. и широте около 63° С. Тут они выходят за пределы $\pm$ 30 *мбар*.

На основании разрезов барического поля, представленных на рис. 678, В. В. Шулейкин построил [65] схематическую карту изаллобар, воспроизведенную на рис. 679. Здесь сплошные линии соответствуют положительным

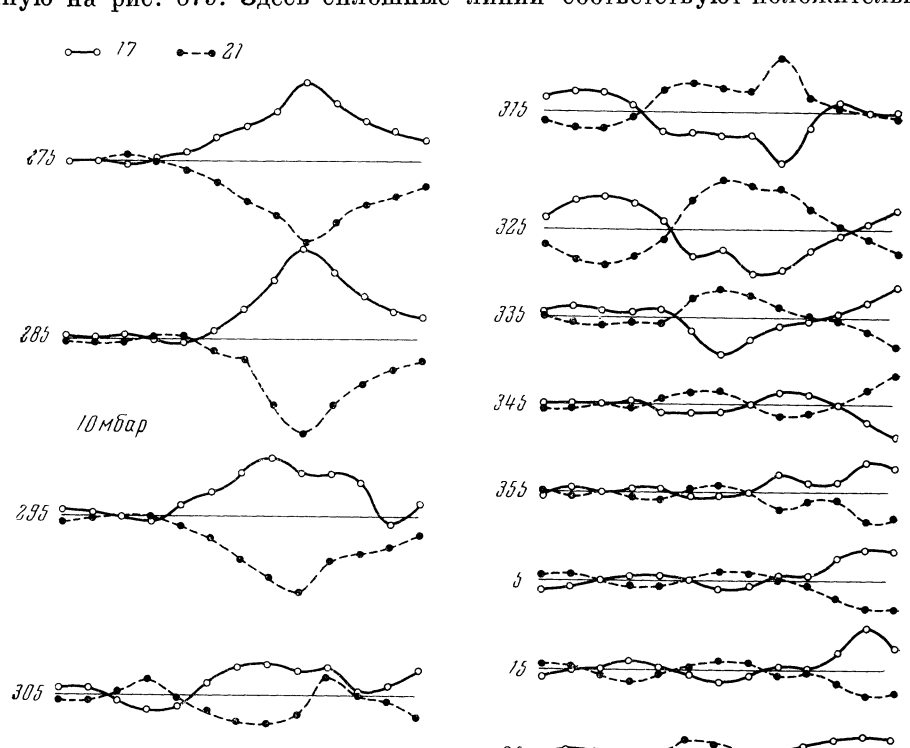


Рис. 678. Колебания атмосферного давления над Атлантическим океаном и материками на 12 меридианах при магнитной буре в ноябре 1957 г.

отклонениям, а пунктирные — отрицательным отклонениям от среднего за четверо суток атмосферного давления. Цифры указывают величину отклонений в миллибарах (17 ноября).

На основании рис. 679 следует заключить, что даже штормовой район, в котором оказался «Седов», уступает несравненно более резко выраженному штормовому району между Канадским архипелагом и Гренландией: максимальные амплитуды колебаний атмосферного давления (более $\pm$ 30 *мбар*) оказались над Гудзоновым проливом.

Чем примечателен этот участок термобарического поля? Чем могли быть вызваны такие необычно большие амплитуды колебания атмосферного давления?

На эти вопросы дают ответы исследования А. П. Никольского, Ю. А. Надубовича, Р. В. Смирнова. Прежде всего следует вспомнить, что первый из цитированных авторов построил на карте Арктики кривую, отмечающую

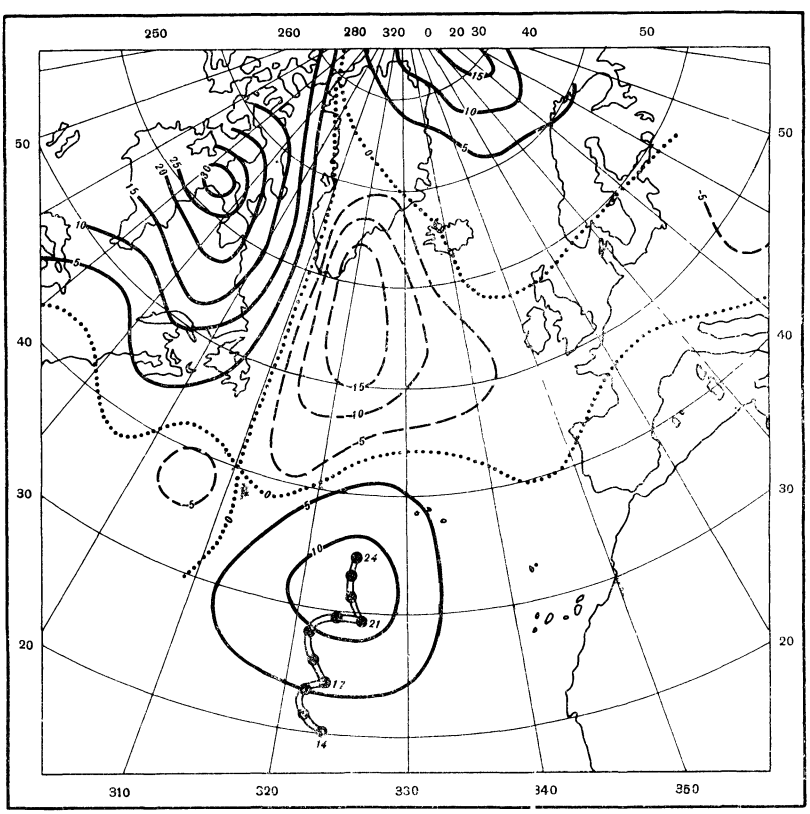


Рис. 679. Изаллобары сейш в атмосфере над Атлантическим океаном и над материками 17 ноября 1957 г.

места наибольшей повторяемости магнитоионосферных возмущений и полярных сияний [66]. Эта кривая проходит по берегу Гудзонова пролива и вблизи от него пересекается с теоретической спиралью осаждения протонов по К. Штермеру [67]. Следовательно, тем самым подчеркивается повышенная вероятность корпускулярных вторжений именно над Гудзоновым проливом. С другой стороны, в предыдущем параграфе говорилось о том, что, на основании работ Ю. А. Надубовича [54], над берегами морей, над проливами и даже над устьями больших рек надо представлять себе своего рода «потенциальные канавы», в которые как бы «скатываются» потоки заряженных частиц солнечного происхождения. Совершенно иным, независимым путем Р. В. Смирнов [68, 69] пришел к заключению, что контрасты между океаническими и материковыми областями атмосферы создают над береговой линией своего рода «цилиндрические линзы», способствующие обострению влияний корпускулярных вторжений на процессы в тропосфере именно над береговой линией.

Но не только эти — чисто статистические — доводы говорят о большой вероятности космического происхождения импульсов, которые вызвали колебания на $\pm$ 30 *мбар* над Гудзоновым проливом и широко раскинувшуюся систему сейш вокруг этого участка поверхности нашей планеты: о том же свидетельствуют данные многочисленных магнитных обсерваторий, проанализированные Р. В. Смирновым и схематически представленные на рис. 680. Здесь внизу нанесены значения трех часовых индексов K_p, характеризующих в условных баллах магнитные возмущения на всей Земле. Под осью абсцисс отмечены соответствующие числа ноября 1957 г. Кривая *1* показывает, как менялись суточные суммы трехчасовых индексов K_p за время от 11 до 26 ноября.

В трех полосах над диаграммой проставлены условные обозначения различных явлений, зарегистрированных на магнитных обсерваториях: *Si* (ромбы) — это внезапные импульсы, по данным всех обсерваторий; *Sc* (*P*) — внезапные начала магнитных бурь, по данным всех *полярных* магнитных обсерваторий; *Sc* (зачерненные треугольники) — внезапные начала по данным всей сети магнитных обсерваторий вне полярной зоны; *Sc* (светлые треугольники) — внезапные начала по данным части этой сети.

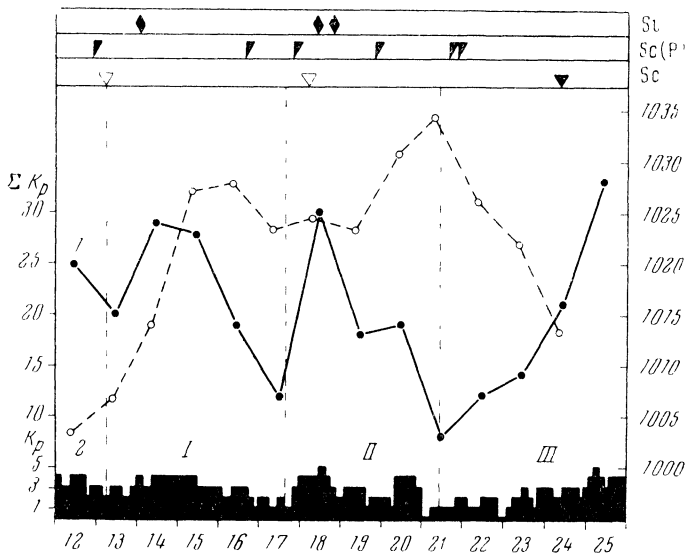


Рис. 680. Характеристики дней ноября 1957 г. во время сейш в атмосфере (по Р. В. Смирнову)

Как видим в интересующий нас период времени было много импульсов в магнитном поле Земли. Примечателен быстрый рост индексов K_p начиная с 13 ноября, т. е. накануне начала сейшеобразования в атмосфере над Канадским архипелагом, Атлантическим океаном и прилегающими областями. Велик общий вклад импульсов к 17 ноября. Еще быстрей нарастают суточные суммы K_p после этого числа и дают большой общий вклад к 21 ноября. Обе эти даты соответствуют наибольшим отклонениям атмосферного давления над Гудзоновым проливом от среднего его значения за четверо суток. Вертикальные пунктирные прямые на рис. 680 проведены Р. В. Смирновым в соответствии с его гипотезой о роли «смены знаков» космического магнитного поля, о которой будет сказано в следующем параграфе. Им же построена пунктирная ломаная линия *2*, показывающая, как менялось атмосферное давление в Кацивели, т. е. в точке побережья Черного моря, находящейся на расстоянии более 6000 *км* от очага процесса — Гудзонова пролива. Даже здесь легко уловить связь между характером линии *2* и линии *1*.

§ 16. Некоторые гипотезы о механизме передачи импульсов от ионосферы в нижнюю тропосферу

Несмотря на убедительность материалов, свидетельствующих о связи явлений в тропосфере над океаном, над материками и в особенности над береговой линией — с вторжением заряженных частиц космического происхождения в ионосферу, несмотря на обильные объективные характеристики этой

связи, полученные к настоящему времени,— доныне отсутствуют сколько-нибудь надежные теоретические схемы, способные описать сам *механизм* передачи возмущений из слоев ионосферы в нижнюю тропосферу, в которой разыгрываются процессы смены погоды. Предложены лишь отдельные гипотезы, у каждой из которых легко найти слабые места.

Не повторяя здесь все сказанное прежде об общем состоянии физики электромагнитного поля Земли, надо еще раз подчеркнуть, что даже полное незнание природы электромагнитного поля нашей планеты не устраняет насущную потребность обсуждения всякой, хотя бы и несовершенной, гипотезы, относящейся к природе солнечно-тропосферных связей: в какой-либо из этих гипотез может оказаться росток будущих теоретических построений, а потому без длительных поисков, сопровождающихся неизбежными неудачами, нельзя рассчитывать на какое-то внезапное появление полноценной теории.

К настоящему времени высказано несколько гипотез, авторы которых пытались обойтись без магнито-гидродинамических схем, для построения «моста» между ионосферой и нижней тропосферой. Одной из первых была предложена схема А. А. Дмитриева [70], основанная на представлении о мощном перемешивании между слоями воздуха, лежащими на больших расстояниях по вертикали. По приближенным расчетам этого автора, следует ожидать удвоения коэффициента перемешивания в верхних слоях атмосферы— изменения его от $1{,}25 \cdot 10^5$ *см*^{2} $\cdot$ *сек*$^{-1}$ до $2{,}5 \cdot 10^5$ *см*^{2} $\cdot$ *сек*$^{-1}$. При этом предполагается изменение разности давления атмосферы между морем и сушей на 0,7 *мбар*.

В другой работе [71] А. А. Дмитриев делает попытку рассчитать увеличение годовой амплитуды колебаний атмосферного давления при возрастании солнечной активности и предлагает критерий для оценки условий перехода циклонической деятельности в антициклоническую.

К той же категории относится гипотеза Л. Р. Ракиповой [72], попытавшейся объяснить перестройку термобарических полей в тропосфере за счет *нагревания* вышележащих слоев воздуха при вторжении солнечных заряженных частиц. В цитированной работе рассмотрено чередование вихрей большого масштаба при переходе от одного характерного слоя воздуха в другой, лежащий над ним. В настоящеее время можно считать установленным, что над циклоном, развившимся в тропосфере, располагается антициклон в стратосфере, затем — циклон в нижней половине мезосферы (в так называемом мезоклине), антициклон в верхней половине мезосферы (в так называемом мезодеклине) и, наконец, циклон в термосфере. Здесь, по-видимому, обобщаются те противоположности, которые, например, давно известны между зональными потоками в тропосфере (с запада на восток) и зональными потоками в стратосфере (с востока на запад).

Л. Р. Ракипова делает попытку количественного расчета взаимодействий между слоями этой сложной структуры при нагревании верхних слоев потоками вторгающихся частиц. По ее вычислениям, 0,5 *дж*, сообщенные 1 *г* воздуха на высоте 100 *км* над уровнем океана, способны вызывать углубление циклона в тропосфере на 5 *мбар*.

Однако едва ли возможно при таких расчетах пренебрегать магнито-гидродинамической стороной явлений, которые порождаются мощными вторжениями *заряженных* частиц в магнитосферу Земли.

К сожалению, доныне не существует удовлетворительных описаний сложной магнито-гидродинамической картины явлений, охватывающих слои ионосферы и передающих энергию в нижние — вполне нейтральные — слои атмосферы, до тропосферы включительно.

Одна из первых попыток такого описания была сделана В. В. Шулейкиным и Л. А. Корневой [47]. Для получения картины явно нестационарных воздушных потоков в слое E ионосферы процесс был схематизирован: считалось, что поток протонов, сильно меняющийся при вращении Солнца с синодичес-

ким периодом 27 суток, создает силу, направленную в сторону, противоположную кориолисовой силе и меняющуюся с этим периодом. Эта сила была принята пропорциональной числу протонов в единице объема воздуха. Считалось, что механическое воздействие протонов на нейтральные молекулы воздуха, при столкновениях с ними, весьма велико по сравнению с воздействием электронов, присутствующих в ионосфере. Градиент давления Γ принимался неизменным во времени, а все изменения скоростей потока воздуха рассматривались в том же аспекте, как обычные изменения в инерциальных потоках, в поле кориолисовой силы.

Поскольку циклическая частота изменений силы электромагнитного происхождения составляет долю $\eta = {}^1/_{27}$ от циклической частоты вращения Земли ω, можно было записать выражение, которое должно войти в уравнения движения на смену параметра Кориолиса:

$$f = 2\bar{\omega} - (a + b \sin \eta\omega t). \tag{75}$$

Здесь, как всегда, $\bar{\omega} = \omega \operatorname{Sin}\varphi$, причем φ — широта места.

В цитированной работе рассматриваются для простоты процессы в высоких широтах, где возможны вторжения заряженных корпускул в слои ионосферы и где $\bar{\omega} \approx \omega$. Для параметров a и b выбираются частные значения $a = \omega$ и $b = {}^1/_2\,\omega$. При таких условиях вместо (75) записывается

$$f = \omega\left(1 - \frac{1}{2}\sin \eta\omega t\right). \tag{76}$$

Вместо времени t в анализ вносится безразмерное время $\tau = \omega t$. После обычных преобразований возникают уравнения, описывающие изменения составляющей скорости ветра u, нормальной к градиенту Γ и к составляющей v, направленной вдоль Γ:

$$\frac{d^2u}{d\tau^2} - \eta\frac{\cos \eta\tau}{2 - \sin \eta\tau}\frac{du}{d\tau} + \left(1 - \frac{1}{2}\sin \eta\tau\right)^2 u - \frac{\Gamma}{2\delta\omega}\left(1 - \frac{1}{2}\sin \eta\tau\right) = 0, \tag{77}$$

$$\frac{d^2v}{d\tau^2} + \eta\frac{\cos \eta\tau}{2 - \sin \eta\tau}\frac{dv}{d\tau} + \left(1 - \frac{1}{2}\sin \eta\tau\right)^2 v - \frac{\eta\Gamma}{2\delta\omega}\frac{\cos \eta\tau}{2 - \sin \eta\tau} = 0. \tag{78}$$

Ввиду малости величины $\eta = {}^1/_{27}$ по сравнению с единицей пренебрегается вторым членом в уравнениях (77), (78) и последним членом левой части в уравнении (78). Тогда оказывается возможным после интегрирования уравнений получить для u и v выражения

$$u = \frac{\dfrac{\Gamma}{2\delta\omega} - C\sin\left(\tau - \dfrac{1}{\eta}\sin^2\dfrac{\eta}{2}\tau\right)}{2 - \sin \eta\tau}, \qquad v = \frac{C\cos\left(\tau - \dfrac{1}{2}\sin^2\dfrac{\eta}{2}\tau\right)}{2 - \sin \eta\tau}. \tag{79}$$

Здесь C — постоянная интегрирования. При $C = \Gamma/2\delta\omega$ эти уравнения описывают движение по кривой, очень близкой к циклоиде, с точкой возврата между двумя соседними звеньями и с постепенным изменением размеров звеньев в продолжение 27 суток. При $C < \Gamma/2\delta\omega$ получается укороченная циклоида (трохоида). Наконец, в случае, представляющем наибольший интерес, при $C > \Gamma/2\delta\omega$ — удлиненная циклоида с петлями. Во всех случаях размер звеньев колеблется в продолжение 27 суток с сохранением подобия между всеми звеньями.

Рис. 681 соответствует частному случаю $0{,}6\ C = \Gamma/2\delta\omega$. Здесь диаграмма *а* дает представление об изменениях составляющей u за один синодический период обращения Солнца вокруг его оси. Диаграмма *б* выражает изменения составляющей v за тот же срок. Закон изменения обеих составляющих свидетельствует об одновременном наличии двух видов движения частиц воздуха: вращательного с переменным диаметром орбиты и переменной угловой скоростью, а также поступательного, перпендикулярно к направлению градиен-

та Г, с переменной линейной скоростью (меняется не только модуль вектора, но и знак).

Графическое интегрирование уравнений (79) дало траекторию частиц, изображенную на рис. 681 *в*: удлиненную циклоиду с переменным размером звеньев, подобных друг другу. Можно доказать, что линейные размеры звеньев пропорциональны квадратам амплитуд u и v, меняющихся в продолжение одного синодического оборота Солнца вокруг его оси. Именно поэтому на рис. 681, *в* так резко меняется масштаб звеньев.

При таком движении естественно возникает разброс скоростей, фиксируемых в различные моменты на обсерваториях и ионосферных станциях.

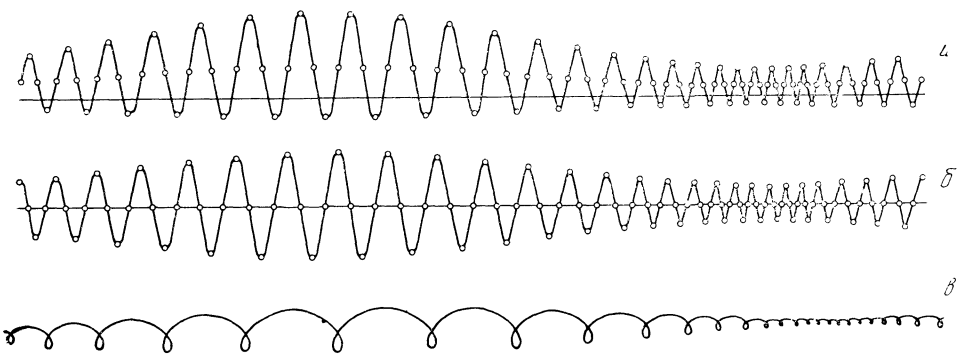


Рис. 681. Колебания скоростей ветра в слое *E* ионосферы с 27-суточным периодом и траектории частиц воздуха

На рис. 682, *а* виден разброс векторов, вычисленных на основании диаграмм рис. 681, в предположении, что вектор Г направлен вдоль меридиана. На рис. 682, *б* представлены данные наблюдений над движением серебристых облаков в Зоннбергской астрономической обсерватории [73]. Вверху нанесен маштаб модулей. Как видим, между результатами вычислений и наблюдений имеется большое сходство, а то различие между ними, которое нетрудно уловить, поддается естественному объяснению. Действительно, градиент Г над Европой направлен заведомо не по меридиану, а под некоторым углом к нему ввиду влияния контрастов между океанической и материковой областями в атмосфере, даже на больших высотах. Именно об этом свидетельствует расположение наибольшего вектора и сектора, свободного от векторов, на рис. 682, *б*.

Невзирая на такое согласие между теоретической *схемой* и результатами наблюдений, существовавших к 1951 г., нельзя удовлетвориться трактовкой задачи в работе [47]. Воздействие геомагнитного поля на конвекционный ток в ионосфере, рассмотренное в этой работе, дает лишь своего рода модель явлений, но отклоняется от их физической сущности: в действительности, как справедливо отметил В.П.Докучаев [48], надо исследовать магнито-гидродинамические процессы, вызванные электропроводностью ионосферы, а не преобладающее механическое воздействие протонов по сравнению с электронами.

Цитированный автор, естественно, не пользуется в своих выкладках так называемой продольной электропроводностью σ_0 — в направлении магнитных силовых линий, а учитывает, с одной стороны, так называемую поперечную электропроводность

$$\sigma_1 = Ne^2\left[\frac{\nu_e}{m_e\left(\nu_e^2+\omega_e^2\right)} - \frac{\nu_i}{m_i\left(\nu_i^2+\omega_i^2\right)}\right] \qquad (80)$$

и, с другой стороны, так называемую электропроводность Холла

$$\sigma_2 = Ne^2\left[\frac{\omega_e}{m_e\left(\nu_e^2+\omega_e^2\right)}-\frac{\omega_i}{m_i\left(\nu_i^2+\omega_i^2\right)}\right]. \qquad (81)$$

Очень важно подчеркнуть, что в оба выражения в качестве множителя входит число ионов N в кубическом сантиметре. В. П. Докучаев не исследует колебания этого числа, но совершенно несомненно, что N должно колебаться, и притом — не только от вторжения солнечных корпускул, но и от вторжения фотонов ультрафиолетовых и рентгеновых лучей, резко проявляющихся при вспышках и взрывах на Солнце. Изменения N будут происходить также и под действием импульсов ударных волн, о которых будет сказано в § 17.

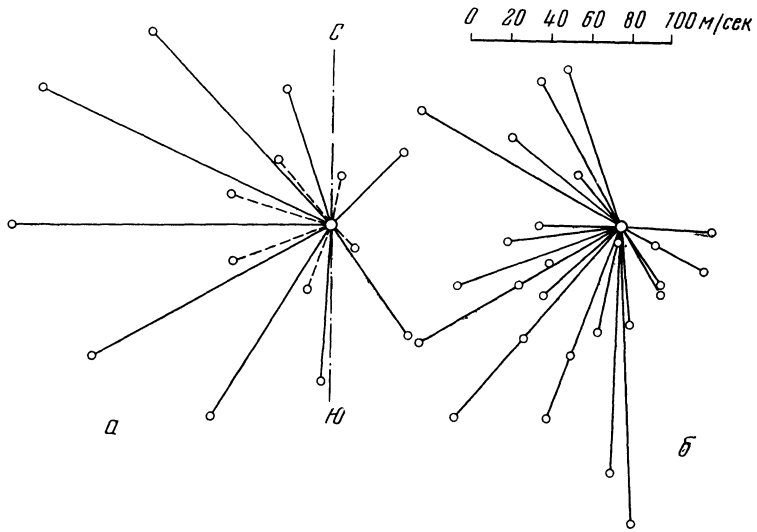


Рис. 682. Вычисленные и наблюденные скорости ветра в ионосфере

Следовательно, все процессы в ионосфере, зависящие от σ_1 и σ_2, должны меняться с синодическим периодом 27 суток, исследованным в [47], и периодом 11 лет и другими периодами, характеризующими солнечную активность. В формулах (80) и (81) ν_i и ν_e обозначают соответственно число соударений положительных ионов и электронов с нейтральными молекулами; m_i и m_e — их массы, а ω_i и ω_e — их гирочастоты, которые определяются выражениями

$$\omega_i = \frac{eH_0}{m_i c}, \quad \omega_e = \frac{eH_0}{m_e c}.$$

В свою очередь e — заряд иона и электрона, H_0 — напряженность геомагнитного поля, c — скорость света.

Как и в [47], в работе [48] пренебрегается объемными силами вязкости воздуха. Вместо вторичного дифференцирования двух уравнений движения по времени В. П. Докучаев пользуется методом комплексных переменных и в результате ряда преобразований получает выражение для полного вектора скорости ветра в ионосфере $V = u + iv$

$$\frac{dV}{dt}+\left[\frac{\sigma_1 H_z^2}{\delta c^2}+i\left(2\bar{\omega}+\frac{\sigma_2 H_0 H_z}{\delta c^2}\right)\right]V = -\frac{1}{\delta}\left(\frac{\partial p}{\partial x}+i\frac{\partial p}{\partial y}\right). \qquad (82)$$

Здесь для общности учтена изменчивость геомагнитного поля с широтой путем введения величины $H_p = 0{,}6\ э$ у полюса, $H_z = H_p \sin\varphi$ и

$H_0 = \frac{1}{2} H_p \sqrt{1 + 3\sin^2 \varphi}$. Также для общности считается, что существуют две компоненты градиента давления: $-\partial p/\partial x$ и $-\partial p/\partial y$ соответственно вдоль параллели и вдоль меридиана.

Легко видеть, что выражение в круглых скобках левой части (82) играет ту же роль, какую в (77) и в (78) играют выражения в круглых скобках, возводимые в квадрат: все они учитывают своеобразную «борьбу» между силой Кориолиса и силой электродинамической; все они обязаны меняться по гармоническому закону, если по гармоническому закону меняется число N, во время вращения Солнца вокруг оси его.

Мало того, при значениях σ_2, δ, принятых в работе [48] для слоя E ионосферы, величина $\sigma_2 H_0 H_z/\delta c^2$, находящаяся в круглых скобках левой части (82), оказывается того же порядка, как ω; а ведь именно это характерно и для частных случаев значений величин a, b в формуле (75), принятых в работе [47]. Следовательно, если бы В. П. Докучаев довел до конца решение *нестационарной* задачи, он получил бы картину движения воздушных частиц в слое E, напоминающую рис. 682. О том, что в ионосфере действительно отсутствуют стационарные или квазистационарные движения, свидетельствует правая часть этого рисунка (*б*), взятая из наблюдений.

Надо оговориться, что решение уравнения (82) все же отличалось бы от схемы, принятой в [47]: за счет существования в (82) первого члена в квадратных скобках. Эта величина составляет примерно $^1/_5$ — $^1/_3$ от аналогичного выражения второго члена в круглых скобках и характеризует *индукционное торможение*, пропорциональное скорости движения и числу N. Докучаев приблизительно оценил отношение объемной электромагнитной силы торможения к силе вязкого трения — квадрат так называемого числа Гартмана [74]. Оказалось, что это отношение может достигать $M^2 = 100$ при наибольшей концентрации ионов в слое E ионосферы. Как в работах [47, 48], так и во всех других пренебрегается силами вязкости, но стократной силой (индукционного торможения) пренебречь нельзя. Это, разумеется, осложняет решение задачи в постановке Докучаева, поскольку пришлось бы в уравнении (82) учитывать изменения такой силы как за счет колебания скорости движения, так и за счет колебания концентрации ионов. Надо полагать, что принципиального, качественного отличия от схемы рис. 862 эта сила не вносит, поскольку на основании расчетов цитированного автора направление стационарного потока (если бы он мог существовать в слое E) отклонялось бы лишь на 10° от геострофического ветра (в сторону градиента давления) под действием электромагнитного торможения. В свою очередь движения в слое E типа рис. 682 при достаточной силе корпускулярных вторжений должны влиять на нижележащие слои воздуха. Именно таким путем может сказываться даже в тропосфере прохождение активных и неактивных меридианов Солнца во время его вращения вокруг собственной оси.

§ 17. Новые черты солнечно-тропосферных связей, обнаруженные посредством ракет и спутников

Новая эра в геофизике и астрономии наступила 4 октября 1957 г., когда Советский Союз послал на орбиту первый искусственный спутник Земли. Сотни спутников и космических ракет летали с той поры, а начиная с космического рейса Ю. А. Гагарина 12 апреля 1961 г. сами люди стали посещать околоземное пространство на управляемых космических кораблях.

За десять истекших лет существенно изменились представления о свойствах пространства между Солнцем и Землей; обнаружены — среди прочих — и такие явления в межпланетном пространстве, которые заставляют по-новому описывать солнечно-тропосферные связи. Прежде чем коснуться этих новых сторон процессов, важных, в частности, для физики моря, необходимо

вкратце описать своеобразную архитектуру околоземных полей в том виде, в каком она представляется сейчас.

На рис. 683 изображено строение этих полей по А. Десслеру и Д. О'Брайену [75]. О масштабах схематического чертежа можно судить по размерам нашей планеты, помещающейся в центре. Вопреки старым представлениям, магнитные силовые линии, исходящие из одного полушария и входящие в другое, резко асимметричны относительно плоскости магнитного меридиана, перпендикулярной к плоскости чертежа: они как бы обжаты давлением, направленным слева направо, с дневной стороны, и сильно растянуты вправо — с ночной стороны; там они образуют своего рода «хвост». Штриховкой покрыты две области захвата заряженных частиц: бо́льшая на дневной стороне и меньшая на ночной. На чертеже отмечены радиус-векторы, направленные от Земли в нейтральные точки, а также — зоны полярных сияний, доступные для прилетающих заряженных частиц, по теории К. Штермера [67].

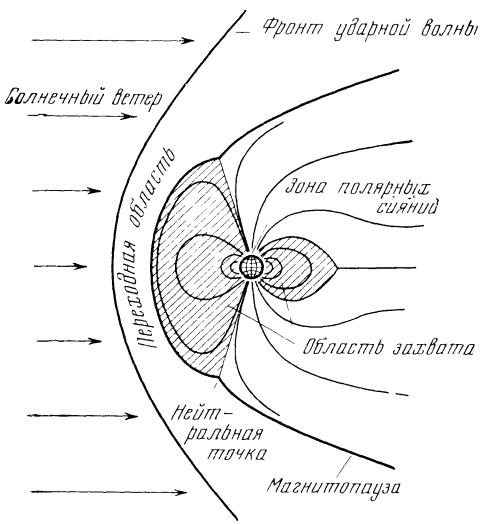


Рис. 683. Строение внешнего геомагнитного поля и распределение захваченной радиации (по А. Десслеру и Д. О'Брайену)

Вопреки старым представлениям, силовые линии собственно земного магнитного поля ограничены некоторой огибающей поверхностью, сплюснутой с дневной стороны и растянутой в сторону ночную. Она носит условное название *магнитопаузы*. На рис. 683 слева нанесены стрелки, указывающие направление так называемого *солнечного ветра* — направление полета солнечных заряженных частиц, космической плазмы. На некотором расстоянии от магнитопаузы, под действием этих частиц, возникает *ударная волна*, фронт которой отмечен на рисунке. Между космическим магнитным полем, находящимся с внешней (солнечной) стороны фронта ударной волны, и геомагнитным полем находится промежуточная зона, пока еще мало изученная. Надо отметить, что и сам рис. 683 дает очень грубую схему, которая, в частности, не учитывает асимметрии геомагнитного поля относительно плоскости магнитного экватора. В действительности потоки космической плазмы, несомненно должны по-разному сжимать магнитные силовые линии в северном и в южном магнитных полушариях. К настоящему времени измерения, произведенные автоматической аппаратурой спутников, позволили пока выявить асимметрию силовых линий в самой плоскости магнитного экватора. В литературе можно найти соответствующий приблизительный эскиз [76].

Что касается скорости солнечного ветра, то она обычно составляет несколько сотен километров в секунду, но во время повышенной солнечной активности может превышать 1500 *км/сек*. В соответствии с изменениями этой скорости должно меняться и очертание условной поверхности — магнитопаузы, изображенной на рис. 683. В том же справочнике [75] на стр. 179 приведена формула (8.6), по которой рекомендуется ориентировочно определять радиальное расстояние от центра Земли до магнитопаузы. Обозначим его через x, радиус Земли через R_τ, напряженность геомагнитного поля на экваторе через H_0, массу и скорость полета протонов (в *см/сек*) соответственно через m, v, а их число в кубическом сантиметре через N. Тогда на основании цитирован-

ного источника, следует записать

$$x \approx R_T \left(\frac{H_0^2}{2\pi N m v^2} \right)^{1/6}. \qquad (83)$$

При спокойном Солнце принимается $N = 10$, $v = 5 \cdot 10^7$; при повышенной активности Солнца — также по измерениям на спутниках — $N = 10^2$ и $v = 1{,}5 \cdot 10^8$. В соответствии с этими цифрами и общеизвестными значениями других величин в (83) оказывается, что при спокойном Солнце $x = 8{,}7\ R_T$, а при повышенной активности $x = 4\ R_T$.

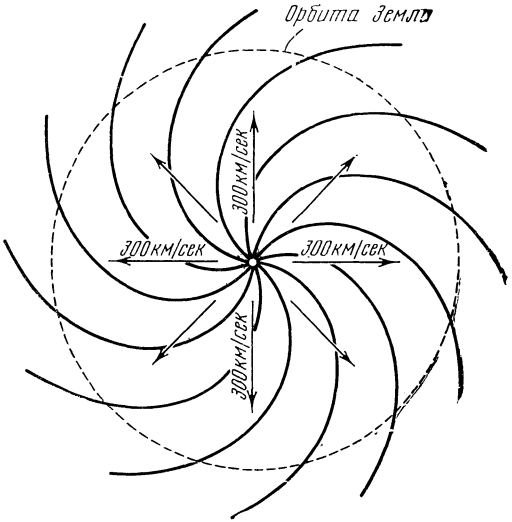


Рис. 684. Силовые линии спокойного межпланетного магнитного поля (по Е. Паркеру)

Эти цифры, по всей вероятности, сильно завышены, так как формула (83) построена по аналогии с соотношениями электростатики; между тем движение заряженных частиц происходит по винтовым линиям, вьющимся вокруг магнитных силовых линий [67]. Как показали исследования А. П. Никольского и других авторов, вторжения корпускул могут выходить далеко за пределы узких областей, намеченных на рис. 683, и осуществляться даже в тропиках; при этом значительное количество корпускул может доходить до слоя F и даже до слоя E ионосферы, принимаемого за нижнюю границу магнитосферы. С другой стороны, до настоящего времени еще не выяснено, какую роль может играть магнито-гидродинамическая ударная волна (ее усиление, ее ослабление) в процессе возникновения того или иного числа зарядов в единице объема воздуха ионосферы. Возможно, что некоторые явления, объяснявшиеся непосредственным вторжением солнечных корпускул, окажутся связанными с воздействием ударной волны.

Особое осложнение потоков солнечного ветра возникает благодаря тому, что сама солнечная корона является весьма неоднородной, а магнитное поле на поверхности Солнца сильно меняется по напряженности и даже *меняет знак* на различных участках. На основании исследований Е. Паркера [77] надо представлять себе магнитные силовые линии Солнца жестко связанными с поверхностью светила на этих участках. При угловой скорости вращения Солнца $2{,}7 \cdot 10^{-6}$ *рад/сек* и скорости солнечного ветра в спокойном поле 300 *км/сек* силовые линии, по Паркеру, могут быть представлены схемой рис. 684, если они отнесены к системе координат, связанной с самим Солнцем. Здесь не учтены различия в знаках между отдельными участками солнечной поверхности. Зато и подтверждение основного характера схемы Паркера, и учет различия знаков был получен Н. Нессом и Дж. Уилкоксом при сопоставлении магнитных измерений на спутнике «I MP-1» с регистрациями магнитных полей на Солнце оптическими методами [78, 79]. На рис. 685 изображены осредненные результаты измерений на спутнике «I MP-1». Поле, пересеченное паркеровскими архимедовыми спиралями, *распадается на отдельные секторы*, внутри которых преобладают направления магнитных силовых линий, указанные стрелками. Статистический анализ, проделанный цитированными авторами, подтвердил приблизительное значение угла, который составляет

архимедова спираль с направлением от Солнца (порядка 50°). Внутри каждого из секторов проносятся частицы солнечной плазмы, увлекая за собой так называемое вмороженное магнитное поле того или иного знака: в зависимости от участка поверхности Солнца, с которым связаны силовые линии.

Именно это расчленение межпланетного поля на секторы, по-видимому, играет большую роль в солнечно-тропосферных связях, как это совсем недавно обнаружил Р. В. Смирнов [80]. Исследуя обобщенные процессы, протекающие в точках береговой черты Черного моря, он столкнулся с трудностями,

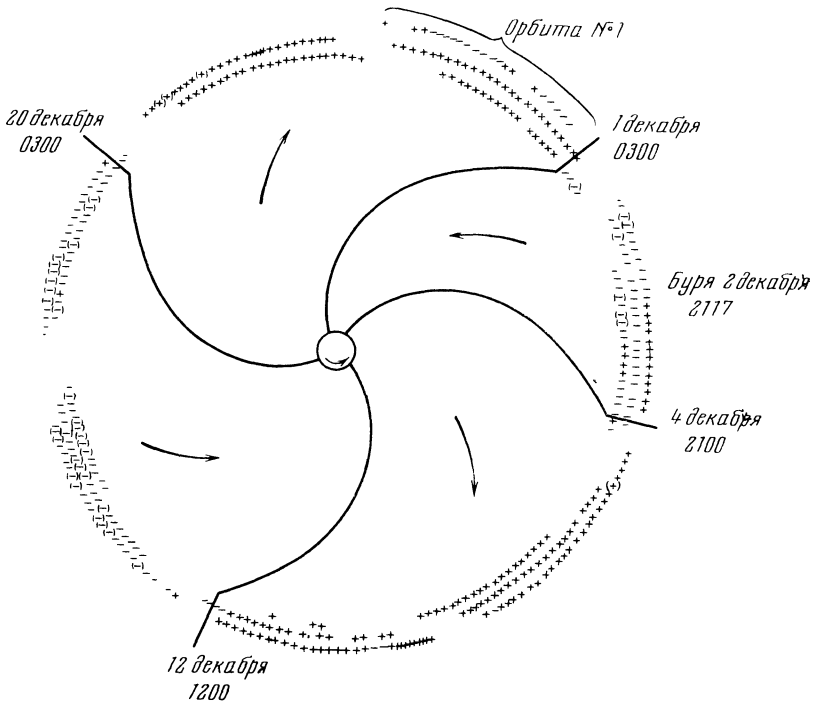


Рис. 685. Секториальное строение межпланетного магнитного поля (по Н. Нессу и Дж. Уилкоксу)

встречавшимися также и на пути других авторов: метеорологические явления в тропосфере хорошо коррелировали с магнитными бурями, но знак связи не оставался постоянным,— иногда связь была прямая, а иногда внезапно переходила на обратную. Это обстоятельство, очень долго не поддававшееся объяснению, хорошо иллюстрируется диаграммами Л. А. Вительса [81], воспроизведенными на рис. 686.

Здесь по оси абсцисс размечены дни, предшествовавшие магнитной буре (они отмечены знаком минус, а сама буря — значком 0), и дни после бури (со знаком плюс). Диаграмма *а* характеризует изменения интенсивности циклонов в районе Исландии, а диаграмма *б*— в восьми иных синоптических районах. По оси ординат проставлены глубины циклонов в миллибарах. Кривые *1* относятся к воздействиям очень сильных магнитных бурь, а кривые *2* — к воздействию менее сильных магнитных бурь.

Ход кривых *1* во всех районах явно противоположен ходу кривых *2*. Цитированный автор объясняет подобное различие неодинаковой *жесткостью* потоков вторгающихся частиц. Р. В. Смирнов подходит к тому же явлению с других позиций [80]. Располагая современными сведениями о космических явлениях, он анализирует поведение температуры приземного воздуха, осредненной по семи районам побережья Черного моря, и изменения высоты тропо-

паузы в те месяцы, когда производил измерения плазмы космический зонд «Маринер-2» [82]. На рис. 687 сопоставлены Смирновым данные статей [83—85] по скоростям солнечного ветра (кривая *1*) с осредненными температурами (кривая *2*) и высотами тропопаузы (кривая *3*). Для каждого оборота внизу нанесены трехчасовые индексы K_p. Зачерненные треугольники под осью абсцисс отмечают внезапные начала магнитных бурь (*Sc*). В верхних частях показаны границы секторов межпланетного магнитного поля и его полярность на основании работы Колмена и Дэвиса [82].

Явно наметилась тенденция к положительной связи при отрицательной полярности сектора и к отрицательной связи при положительной полярности. Анализ материалов обнаружил 27-суточную повторяемость температурных минимумов: они наблюдались 3.IX, 29.IX, 27.X, 23.XI и особенно четко 21.XII. После прохождения границы сектора знак связи менялся на обратный. Рис. 688, заимствованный из той же работы [80], позволяет судить, как четко выражается обратная связь между температурой приземного воздуха (по-прежнему осредненной применительно к побережью), которую характеризует кривая *2*, и скоростью солнечного ветра, измеренной на станции «Пионер-6», которую характеризует кривая *1*. В настоящее время еще рано судить о связи между переходом Земли из одного сектора в другой и изменениями жесткости корпускулярных потоков, но можно ожидать, что схема Р. В. Смирнова и схема Л. А. Вительса описывают взаимосвязанные процессы космического происхождения.

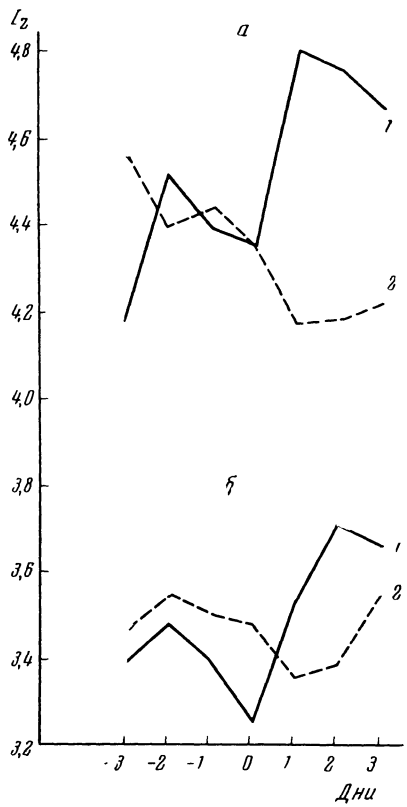


Рис. 686. Изменения интенсивности циклонов в районе Исландии (*а*) и в восьми иных районах (*б*) во время магнитных бурь (по Л. А. Вительсу)

По аналогии с межсекторными переходами, рассмотренными в работе [80], Р. В. Смирнов считает возможным наметить границы секторов *I*, *II* и *III* на рис. 680, о котором говорилось выше, в связи с происхождением мощных колебаний атмосферного давления над Атлантическим океаном и Канадским архипелагом. Он полагает, что 13, 17 и 21 ноября 1957 г. Земля переходила границы этих секторов: в эти дни понижалась скорость солнечного ветра с последующим прохождением ударных волн через магнитосферу Земли (*Sc* — *Si*). Возрастание магнитной активности 13 ноября характеризуется появлением внезапного начала на магнитограммах полярных и даже низкоширотных обсерваторий, а вслед за тем — внезапного импульса. Прохождение двух ударных фронтов (*Sc* — *Si*) через магнитосферу после пересечения границы секторов 13 ноября должно было вызвать смещение магнитопаузы и развитие стоячих магнито-гидродинамических волн с последующей передачей возмущения в тропосферу и возбуждением термобарических сейш, в частности в Северной Атлантике. Появление в макрометеорологическом процессе воздействия солнечно-корпускулярного агента тем более вероятно, чем резче изменяется термобарическое поле, чем больше амплитуда колебаний давления. Пока еще рано говорить о связи этих процессов с полярными сияниями, также обусловленными той или иной жесткостью потоков плазмы. Значительное увели-

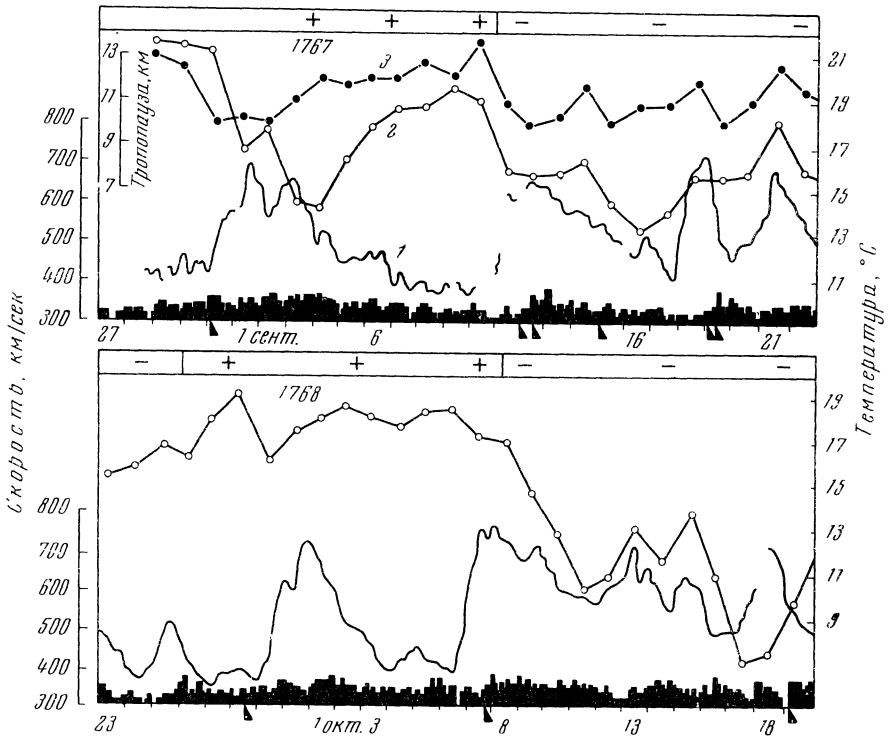


Рис. 687. Изменения температуры приземного воздуха и высоты тропопаузы при изменениях скоростей солнечного ветра (по Р. В. Смирнову)

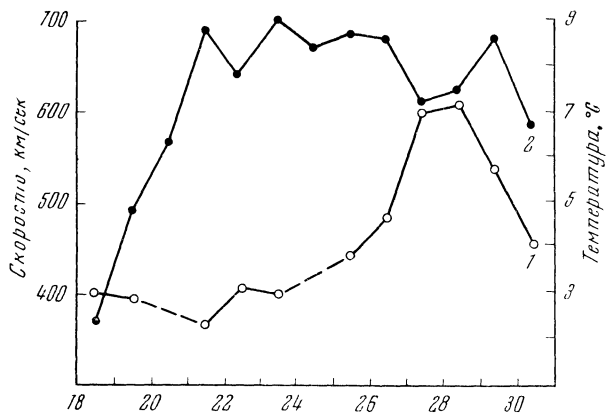


Рис. 688. Изменения температуры приземного воздуха при изменениях скоростей солнечного ветра (по Р. В. Смирнову)

чение скорости изменений K_p наблюдалось 15 ноября, когда скорость потока плазмы начала резко падать, вплоть до минимума 17 ноября. Именно в этот день отмечено наибольшее возмущение термобарического поля над Гудзоновым проливом. Тот же автор считает эту дату датой прохождения границы между секторами, с последующим внезапным возмущением геомагнитного поля и большими скоростями изменения K_p (кривая 1 и 3-часовые K_p). Тем самым давался новый импульс колебательной системе в тропосфере, но уже в противоположном направлении. В связи с этим к концу прохождения второго сектора 21 ноября снова наблюдались максимальные амплитуды термобарических сейш, но в противофазе по отношению к 17 ноября.

Столь же убедительный материал содержится в статье Р. В. Смирнова, вышедшей в свет после верстки настоящей книги [86]. Там приведены кривые, показывающие, как менялась скорость солнечного ветра в продолжение 3,5 синодических оборотов Солнца и как за этот срок менялись некоторые характеристики ионосферы и тропосферы: отклонения критических частот f_0 слоя F_2 ионосферы от месячной медианы и колебания приземного атмосферного давления, осредненного по 7 приморским станциям (на Тихом океане). Две последние кривые всюду являются почти точными зеркальными изображениями кривой изменения скоростей солнечного ветра. В той же статье [86] упоминается еще об одном важном явлении, способном послужить для расшифровки — в недалеком будущем — некоторых деталей механизма гелио-тропосферных связей. Именно: в работе [87] показано, что при мощных вторжениях в ионосферу, особо обостряющихся в зоне концентрации полярных сияний (см. § 14, стр. 1035), оттуда распространяются акустическо-гравитационные волны в слое F_2 ионосферы, бегущие в сторону средних широт со скоростями более 700 *м/сек*.

Все это вновь и вновь заставляет внимательно отнестись к сопоставлению солнечной корпускулярной деятельности с процессами в области зарождения полярных сияний, в области ионосферы вообще, для доступных в настоящее время объяснений несомненной связи между самыми высокими слоями ионосферы и приземным слоем тропосферы.

Подобные объяснения превратятся из весьма вероятных в совершенно достоверные, когда систематические исследования по физике океана и неразрывно связанной с ней физике атмосферы будут проводиться одновременно с детально продуманными исследованиями околоземного пространства посредством спутников, космических кораблей, ракет, а также с тонкими исследованиями по физике Солнца.

Современная наука требует полного объединения работ во всех отраслях геофизики с работами по физике околоземного пространства и по физике космоса в самом широком смысле слова.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

В главе первой

1. О динамической устойчивости.— В кн.: *В. В. Шулейкин.* Физика моря. Изд. 4-е, 1968, гл. IV, § 10, стр. 460.
2. *Н. Е. Жуковский.* Собрание сочинений, вып. 7. М., 1939, стр. 187.
3. *J. Sandström, B. Helland-Hansen.* Über Berechnung von Meeresströmungen.— Rept. Norw. Fish. Marine Exped., 1903, **2**, 43.
4. *Н. Н. Зубов.* Динамический метод обработки гидрологических разрезов.— Зап. по гидрографии, 1929, **58**, 51.
5. *В. Б. Штокман.* Метод определения коэффициентов турбулентного обмена в зависимости от вертикальной устойчивости слоев морской воды.— Ж. геофиз., 1937, **1**, вып. 1, 48.
6. *V. W. Ekman.* On the influence of the earth's rotation on ocean currents.— Arkiv mat. astron. och fys., 1905, **2**, N 11, 1.
7. *В. Б. Штокман.* Стационарные ветровые течения в море при наличии вертикального потока масс, обусловленного турбулентностью.— Изв. АН СССР, серия геогр.-геофиз., 1939, № 1, 69.
8. *В. Б. Штокман.* К теории морских течений.— Метеорология и гидрология, 1949, № 5, 112.
9. *H. Jeffreys.* The effect of steady wind on the sea level near a straight shore.— Philos. Mag., 1923, **46**, 115.
10. *Ю. М. Шокальский.* Океанография. Л., 1959.
11. *В. А. Снежинский.* Практическая океанография. Л., 1954.
12. *H. Sverdrup.* The wind drift of the sea ice.— Scient. Res. Norw. North Polar Exped., 1931, **14**, N 16.
13. *E. Palmen.* Bestimmung des Triftstromes aus Terminbeobachtungen.— J. Conceil, 1931, **6**, N 3, 390.
14. *Н. Н. Струйский.* Связь между действующим ветром и поверхностным течением.— Зап. по гидрографии, 1930, **63**, 17.
15. *В. В. Шулейкин.* Прибор для измерения потока воздуха через береговую черту.— Ж. геофиз., 1931, **1**, вып. 1—2, 251.
16. *В. И. Лопатников.* Авторское свидетельство № 109917, 1957. Приоритет 31 июля 1956 г.
17. *В. И. Лопатников.* К методу бесконтактной кондуктометрии.— Докл. АН СССР, 1961, **138**, № 5, 1066.
18. *Ю. Г. Рыжков.* Расчет развития сгонного явления в глубоком море.— Изв. АН СССР, серия геофиз., 1959, № 9, 1433.
19. *И. Д. Постнова.* Теоретическая схема установившейся дрейфовой циркуляции в бассейне при наличии излома профиля дна.— Изв. АН СССР, серия геофиз., 1962, № 11, 1663.
20. *М. Г. Слободянский.* Способ приближенного интегрирования уравнений с частными производными.— Прикл. матем. и мех., 1939, **3**, вып. 1.
21. *В. Н. Фаддеева.* Метод прямых в применении к некоторым краевым задачам.— Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова, 1949, **28**.
22. *Ю. Г. Рыжков.* Возникновение конвергенции и дивергенции потоков в областях с резким изломом наклона дна.— Изв. АН СССР, серия геофиз., 1963, № 6, 953.
23. *A. Defant.* Physical Oceanography, v. 1. 1961.
24. *В. Б. Штокман.* О причинах отклонения Гольфстрима к югу от Ньюфаундленда.— Метеорология и гидрология, 1949, № 6, 651.
25. *В. В. Шулейкин.* Глубинные морские течения при неравномерном поле ветра.— Изв. АН СССР, ОМЕН, 1937, № 1, 65.
26. *С. О. Макаров.* «Витязь» и Тихий океан. СПб., 1894.
27. *В. В. Шулейкин.* Дрейфовые течения в муссонном поле.— Докл. АН СССР, 1945, **45**, 347.
28. *В. В. Шулейкин.* Конвекционные течения в муссонном поле.— Докл. АН СССР, 1945, **45**, 684.
29. *В. Б. Штокман.* Теория экваториальных противотечений. М., 1948.
30. *W. Tollmien.* Berechnung turbulenter Ausbreitungsvorgänge. — Z. angew. Math. und Mech., 1926, **6**, 468.

31. *C. Rossby.* Dynamics of steady ocean currents in light of experimental fluid mechanics.— Papers Phys. Oceanogr. and Meteorol., 1936, 5, N 1.
32. *H. Stommel.* The westward intensification of wind-driven ocean currents.— Trans. Amer. Geophys. Union, 1948, 29, 202.
33. *Г. Стоммел.* Гольфстрим. М., 1963.
34. *П. С. Линейкин.* Об определении толщины бароклинного слоя в море.— Докл. АН СССР, 1955, 101, № 3, 461.
35. *П. С. Линейкин.* О нулевой поверхности и глубоководных течениях северной части Атлантического океана.— Изв. АН СССР, серия геофиз., 1962, № 6, 776.
36. *A. Defant.* Die absolute Topographie des Meeresniveaus u. s. w. — Meteor-Werke, 1941, 6/2, N 5.
37. *K. Hidaka.* Computation of the wind stress over the ocean.— Res. Oceanogr. Works Japan, 1928, 4, N 1.
38. *О. И. Мамаев.* Нулевая динамическая поверхность Мирового океана. М., 1962.
39. *А. С. Саркисян.* Основы теории и расчета океанических течений. Л., 1966.
40. Течение Ломоносова.— Труды Морск. гидрофиз. ин-та АН УССР, 1966, 34, 3—175.
41. Течение Ломоносова. Морск. гидрофиз. ин-т АН УССР, Киев, 1966.
42. *В. В. Шулейкин.* Дрейф ледяных полей.— Докл. АН СССР, 1938, 19, № 8, 587; Изв. АН СССР, серия геол.-геогр., 1938, № 1, 3; Докл. АН СССР, 1941, 31, № 9.
43. *H. Sverdrup.* The wind-drift of the sea ice in the North Siberian shelf.— Scient. Res. Norw. North Polar. Expedit. 1918—1925, 1925, 4, N 1.
44. *Н. Н. Зубов.* Соображения о движении льдов под влиянием ветра.— Исследования морей СССР, вып. 21, 1935.
45. *Р. Г. Геворкян, Е. И. Чаплыгин.* Дрейф ледяных полей.— Проблемы Арктики, 1940, № 9 и 11.
46. *Р. Г. Геворкян.* Дрейф ледяных полей.— Проблемы Арктики, 1941, № 4.
47. *М. Б. Швец.* Дрейф ледяных полей.— Метеорология и гидрология, 1946, № 6, 58.
48. Труды дрейфующей станции «Северный полюс», 1940, 1.
49. *L. Gorczinsky.* Isotherms nouvelles de l'Europe de la Pologne et, de le globe terrestre. 1930.
50. *T. v. Kârmân.* Mechanische Ähnlichkeit und Turbulenz.— Nachr. Ges. Wiss. Göttingen. Math.-Philos. Kl., 1930, 58.
51. *С. В. Доброклонский.* Турбулентная вязкость в поверхностном слое моря и волнение.— Докл. АН СССР, 1947, 58, № 7, 1345.
52. *В. В. Шулейкин.* Единая характеристика турбулентной вязкости для морских волн и течений.— Докл. АН СССР, 1962, 144, № 4, 781.

В главе второй

1. *P. S. Laplace.* Traité de mécanique céleste, т. 4, 1799, p. 6.
2. *G. Airy.* Tides and waves. Encycl. Metrop., т. 6, 1845; *Г. Лэмб.* Гидродинамика. М.— Л., 1947.
3. *H. Sverdrup.* Dynamics of tides on the North Siberian Shelf.—Geofys. publ., 1926, 4, N 5.
4. *G. Green.* On the motion of waves in a variable canal of small depth and width. Cambridge Trans., 1837, 6.
5. *Р. О. Кузьмин.* Бесселевы функции. М., 1935.
6. *H. Jeffreys.* On water waves near the shore.— Philos. Mag., 1924, 48, 44.
7. *В. В. Шулейкин.* Разрушение волн под действием мелководья.— Изв. АН СССР, серия геофиз., 1954, № 1, 65.
8. *G. Chrystal.* On the hydrodynamical theory of seiches.— Trans. Roy. Soc. Edinburgh, 1905, 41, 599.
9. *A. Defant.* Methode zur Ermittelung der Eigenschwingungen.— Ann. Hydr., 1918, 46, 78.
10. *A. Defant.* Gezeitenproblemen des Meeres in Landnohe. 1925.
11. *Н. Н. Зубов.* Влияние силы Кориолиса на приливную волну.— Зап. по гидрографии, 1934.
12. *G. Taylor.* Tidal oscillations in gulfs and rectangular bassins.— Proc.London Math. Soc., ser. 2, 1920, 20, 6.
13. *A. Defant.* Grundlagen einer Theorie der Nordseegezeiten. Ann. Hydr., 1933.
14. *J. Proudman* a. *A. Doodson.* The principal constituent of the tides of the North Sea.— Philos. Trans. Roy. Soc. (A), 1924, 224.
15. *В. А. Снежинский.* Практическая океанография. Л., 1954.
16. *Ю. М. Шокальский.* Океанография. Л., 1959.
17. *З. К. Григораш.* Обзор работ, посвященных проблеме цунами.— Труды Морск. гидрофиз. ин-та АН СССР, 1957, 10, 73; Цунами. Аннотированная библиография на русском и иностранных языках за период с 1726 по 1962 г. М., 1964.
18. *Л. Н. Сретенский.* Об одной гидродинамической задаче, связанной с проблемой цунами.— Докл. АН СССР, 1960, 131, № 2, 273.

19. *Л. Н. Сретенский.* Об одной гидродинамической задаче, связанной с проблемой цунами.— Труды Морск. гидрофиз. ин-та АН УССР, 1963, 27, 3.
20. *Л. Н. Сретенский, А. С. Ставровский.* Вычисление высоты волн цунами вдоль берега.— Труды Морск. гидрофиз. ин-та АН СССР, 1961, 24, 25.
21. *З. К. Григораш, А. Б. Заклинский.* Моделирование цунами во Втором Курильском проливе.— Изв. АН СССР, серия геофиз., 1962, № 5, 681.
22. *O. Krümmel.* Handbuch der Oceanographie, т. 2, 1911, 185.
23. *V. Bjerknes.* On the dynamics of the circular vortex with application to the atmospheric vortex and wave motion.— Geofys. Publ., 1921, 2, N 4.
24. Внутренние волны. Сборник М., 1964.

В главе третьей

1. *В. В. Шулейкин.* Профиль ветровых волн и его запись на придонных волнографах.— Докл. АН СССР, 1957, 115, № 5, 915.
2. *Л. А. Корнева.* Некоторые результаты исследования затухания волн с глубиной.— Изв. АН СССР, серия геофиз., 1962, № 12, 1815.
3. *Вс. А. Березкин.* Динамика моря. Л., 1947.
4. *А. И. Некрасов.* Точная теория волн установившегося вида на поверхности тяжелой жидкости. М., 1951.
5. *Г. Лэмб.* Гидродинамика. М.— Л., 1947, стр. 524.
6. *J. Michell.* The highest waves in water.— Philos. Mag., 1893, 36, 430.
7. *В. В. Шулейкин.* Профиль и основные параметры ветровой волны.— Докл. АН СССР, 1953, 43, № 2, 265.
8. *В. В. Шулейкин.* Физические причины заострения вершин волн.— Докл. АН СССР, 1954, 45, № 5, 987.
9. *В. В. Шулейкин.* К теории крутых волн.— Докл. АН СССР, 1966, 170, № 4, 837.
10. *В. В. Шулейкин.* Кинематика предельно-крутых волн.— Докл. АН СССР, 1954, 45, № 6, 1185.
11. *Г. Лэмб.* Гидродинамика. М.— Л., 1947.
12. *H. Jeffreys.* On water waves near the shore.— Philos. Mag., 1924, 48, 44.
13. *В. В. Шулейкин.* Разрушение волн под действием мелководья.— Изв. АН СССР, 1954, № 1, 65.
14. *В. В. Шулейкин.* Еще о разрушении волн на мелководье.— Докл. АН СССР, 1966, 168 № 3, 573.
15. Lord *Kelvin* (W. T h o m s o n) Hydrokinetic solutions and observations.— Philos. Mag., 1871, 42, 368.
16. *H. v. Helmholtz.* Über die atmospherishe Bewegungen. (2 Vortr.)— Wiss. Abhandl., 1895, 3.
17. *П. Н. Успенский.* О зарождении и развитии волн на поверхности воды под действием ветра.— Изв. АН СССР, ОМЕН, 1937, № 2, 403.
18. *В. М. Маккавеев.* Развитие волн под действием ветра.— Труды Гос. гидрол. ин-та, 1937, вып. 5.
19. *H. Jeffreys.* On the formation of water waves by wind.— Proc. Roy. Soc. A, 1925, 107, 189; 1926, 110, 241.
20. *К. К. Федяевский.* О возникновении ветровых волн.— Докл. Гос. океаногр. ин-та, 1945, № 40, 1.
21. *П. Л. Капица.* К вопросу об образовании ветром морских волн.— Докл. АН СССР, 1949, 64, № 4, 513.
22. *А. Н. Крылов.* Качка корабля. Л., 1938.
23. *А. А. Иванов.* Фоторегистрация элементов волн с берега и с судна. Труды Морск. гидрофиз. ин-та АН СССР, 1954, 4, 15.
24. *В. В. Шулейкин.* Динамика ветровых волн и мертвой зыби.— Изв. АН СССР, серия геофиз., 1954, № 5, 451.
25. *С. В. Доброклонский.* Турбулентная вязкость в поверхностном слое моря и волнение.— Докл. АН СССР, 1947, 58, № 7, 1345.
26. *Т. В. Бончковская.* Распределение давления над профилем волн.— Труды Морск. гидрофиз. ин-та АН СССР, 1955, 6, 98.
27. *В. В. Шулейкин.* Уточненный закон нарастания длины ветровых волн.— Докл. АН СССР, 1956, 111, № 2, 348.
28. *В. В. Шулейкин.* Нарастание длины больших ветровых волн и роль внутреннего турбулентного трения.— Докл. АН СССР, 1957, 113, № 3, 560.
29. *В. В. Шулейкин.* Развитие ветровых волн от зарождения до наибольшей крутизны.— Докл. АН СССР, 1958, 118, № 3, 472.
30. *K. Bowden.* The effect of eddy viscosity on ocean waves.— Philos. Mag., 1950, 41, N 320.
31. *T. v. Kármán.* Mechanische Ähnlichkeit und Turbulenz.— Nachr. Ges. Wiss. Göttingen. Math.-Philos. Kl., 1930, 58.
32. *В. В. Шулейкин.* Единая характеристика турбулентной вязкости для морских волн и течений.— Докл. АН СССР, 1962, 144, № 4, 781.

33. *Л. Ф. Титов.* Расчет степени волнения по эмпирическим формулам.— Труды НИУ ГУГМС, серия 5, 1946, вып. 12.
34. *А. А. Иванов.* Некоторые выводы из анализа данных наблюдений над ветровым волнением.— Тр. Морск. гидрофиз. ин-та АН СССР, 1956, 8, 44.
35. *E. Bruns.* Handbuch der Wellen der Meere und Ozeane. 1953.
36. *В. В. Шулейкин.* Развитие волн от наветренного берега до подветренного на глубоком море.— Докл. АН СССР, 1954, 48, № 3, 384.
37. *В. В. Шулейкин.* Физические основы прогноза ветровых волн в океане.— Изв. АН СССР, серия геофиз., 1959, № 5, 710.
38. *В. В. Шулейкин.* Точный интеграл уравнения поля ветровых волн в океане и его физическое значение.— Докл. АН СССР, 1959, 121, № 6, 1005.
39. *А. Н. Тихонов, А. А. Самарский.* Квазилинейные уравнения.— Докл. АН СССР, 1954, 99, № 1, 27.
40. *В. И. Смирнов.* Курс высшей математики, т. 2. Л., 1953.
41. *В. В. Шулейкин.* Теория морских волн.— Труды Морск. гидрофиз. ин-та АН СССР, 1956, 9, 5—141.
42. *А. П. Хван.* Поле ветровых волн на мелководном озере.— Изв. АН СССР, серия геофиз., 1958, № 10, 1202.
43. *В. В. Шулейкин.* Уточненный расчет ветровых волн заданной обеспеченности.— Изв. АН СССР, серия геофиз., 1963, № 1, 156.
44. *M. Rattray, W. Burt.* A comparison of methods for forecasting wave generation.— Deep Sea Res., 1956, 3, 140.
45. *В. В. Шулейкин.* Вычисление размеров волн, возможных при атлантических ураганах.— Изв. АН СССР, серия геофиз., 1960, № 7, 1013.
46. *Гао Вэнь-сю, Ван Сяо-нань.* Расчет ветровых волн на море произвольной глубины.— Изв. АН СССР, серия геофиз., 1961, № 10, 1560.
47. *В. В. Шулейкин.* Рефракция волн на материковой отмели.— Изв. АН СССР, ОМЕН, 1935, № 10, 1355; Физика моря. Изд. 2-е. М., 1941.
48. *Ю. М. Крылов.* К теории рефракции морских волн.— Труды ГОИН, 1950, вып. 16, 95.
49. *А. Н. Крылов.* Ньютонова теория астрономической рефракции. М., 1935.
50. *Н. Е. Скибко.* Новое в методах исследования трехмерных волн.— Характеристика режима ветра и волнения в Красном море, Индийском океане, Южно-Китайском и Восточно-Китайском морях.—Труды Морск. гидрофиз. ин-та АН СССР, 1957, 10, 32.
51. Первое теоретическое исследование качки на неправильной волне, по инициативе А. Н. Крылова, произвел Ю. А. Крутков. (Замечания о боковой качке корабля на волнении).— Докл. АН СССР, 1934, 2, № 3, 158.
52. *И. Н. Соколова.* Опытная оценка амплитуд вертикальной качки тел на неправильной волне.— Труды Морск. гидрофиз. ин-та АН СССР, 1955, 5, 47.
53. *Ю. М. Крылов.* Статистическая теория и расчет морских ветровых волн.— Труды ГОИН, 1956, вып. 33; 1958, вып. 42, 3.
54. *С. С. Стрекалов.* К определению аналитического вида энергетического спектра развитого волнения.— Океанология, 1961, № 3, 439.
55. *Л. А. Корнева, В. П. Ливерди.* Статистические характеристики волнения в глубоком море и океане.— Труды Морск. гидрофиз. ин-та АН УССР, 1964, 30, 17.
56. *Л. А. Корнева.* Частотные спектры периодов морских волн.— Труды Морск. гидрофиз. ин-та АН СССР, 1959, 15, 65.
57. *Л. А. Корнева.* Статистические характеристики изменчивости элементов волн в прибрежной зоне глубокого моря.— Труды Морск. гидрофиз. ин-та АН УССР, 1961, 23, 44.
58. *G. Neumann.* On the energy distribution in ocean wave spectra at different wind velocities. Trans. Amer. Geophys. Union, 1953.
59. *В. П. Ливерди.* Некоторые результаты наблюдений над элементами волн в тропической зоне Атлантического океана.— Труды Морск. гидрофиз. ин-та АН УССР, 1966, 35.
60. *Л. А. Корнева.* О составляющих баланса энергии при нерегулярном морском волнении.— Труды Морск. гидрофиз. ин-та АН УССР, 1966, 37, 107.
61. *В. В. Шулейкин.* Уточненный расчет ветровых волн заданной обеспеченности.— Материалы научно-технической конференции, посвященной 100-летию со дня рождения А. Н. Крылова. Л., 1964.
62. *Е. Г. Никифоров.* О связи ветрового течения с ветровым волнением.— Изв. АН СССР, 1956, № 12, 1450.
63. *Р. Н. Иванов.* Волновой и дрейфовый нагоны в море.— Изв. АН СССР, серия Физика атм. и океана, 1965, 1, № 1, 94.
64. *В. А. Лукьянов.* Опыт расчета течений и нагонных повышений уровня воды на устьевом взморье р. Кубани.— Труды Гос. океаногр. ин-та, 1967, 89, 39.
65. *Л. Ф. Титов, Н. О. Солнцева, В. Д. Писаревская.* Расчет колебаний уровня моря в период штормов в западной части Финского залива.— Труды Гос. океаногр. ин-та, 1962, 69, 28.

66. *Р. Н. Иванов, С. Т. Каминский.* Роль стоксова течения в ленинградских наводнениях.— Изв. АН СССР, серия Физика атм. и океана, 1965, 1, 11, 1196.
67. *Р. Н. Иванов, С. Т. Каминский.* Роль стоксова потока в штормовых наводнениях на южном побережье Северного моря.— Труды Морск. гидрофиз. ин-та АН УССР, 38, 42.
68. *J. Rossiter.* The North Sea storm surge of 31 January and 1 February 1953.— Philos. Trans. Roy. Soc. (A), 1954, 246, N 915, 371.
69. *К. Н. Федоров.* Уровень и течения во время катастрофического шторма на Северном море.— Изв. АН СССР, серия геофиз., 1956, № 4, 233.
70. *В. А. Снежинский.* Практическая океанография. Л., 1954.
71. *А. П. Лоидис.* Методы измерения некоторых элементов волн.— Ж. геофиз., 1933, 3, вып. 3, 352.
72. *С. В. Доброклонский.* Оптические волномеры Шулейкина.— Ж. геофиз., 1936, 6, вып. 6, 536.
73. *Р. Н. Иванов.* Инструкция к установке перспектометра и работе с ним. 1950.
74. *В. В. Шулейкин.* Оптический метод изучения морских волн.— Труды Плавучего морск. научн. ин-та, 1923, 3.
75. *В. В. Шулейкин.* Оптический метод изучения морских волн.— Зап. по гидрографии, 1924, 49, 54.
76. Nature, 1924, 114, № 2866, 498.
77. *C. Cox, W. Munk.* Statistics of sea surface determined from sun glitters.— J. Marine Res., 1954, 13, N 2, 198.
78. *C. Cox, W. Munk.* Measurement of the roughness of the sea surface from photography of the sun glitters.— J. Opt. Soc. America, 1954, 44, N 11.
79. *Л. А. Корнева, С. Г. Машков.* Автоматический счетчик периодов морских волн.— Труды Морск. гидрофиз. ин-та АН СССР, 1959, 15, 56.
80. *В. В. Шулейкин.* Колебания центра тяжести корабля на волне.— Ж. прикл. физ., 1928, 5, № 3—4, 211.
81. *В. В. Шулейкин.* Очерки по физике моря. Изд. 4-е. М., 1962.
82. *В. С. Назаров, А. А. Рыбников.* Гидрометеорологические наблюдения на китобойном судне «Слава-15» в Антарктике.— Труды Гос. океаногр. ин-та, 1954, 25.

В главе четвертой

1. *Ю. Д. Янишевский.* Актинометрические приборы и методы измерений. Л., 1957.
2. *В. В. Шулейкин.* Тепловой баланс Карского моря.— Труды Таймырск. гидрограф. эксп. 1932 года. Л., 1935, 21.
3. *О. А. Геращенко, В. Г. Федоров.* Тепловые и температурные измерения. Справочное руководство. Киев, 1965.
4. *Н. И. Егоров.* Тепловой баланс северной части Индийского океана и прилегающих морей в зимнее время. Л., 1954.
5. *В. В. Шулейкин, В. Ф. Гущин, П. И. Пескэв.* Колебания теплового баланса Атлантического океана.— Изв. АН СССР, серия геофиз., 1958, № 6, 729.
6. *С. М. Попов, С. А. Рязанов.* Значение эффективного излучения в тепловом балансе океана.— Изв. АН СССР, серия геофиз., 1961, № 2, 281.
7. *Г. М. Дегтярев, Ю. А. Меньшов, Б. Е. Алемасов.* Характеристика теплового баланса северо-западной части Атлантического океана.— Изв. АН СССР, 1962, № 7, 965.
8. *Г. М. Дегтярев, А. А. Сорокин, Ю. А. Меньшов.* Радиация, отраженная от поверхности открытого океана.— Изв. АН СССР, серия геофиз., 1964, № 10, 1578.
9. *В. В. Шулейкин.* Испарение воды и теплообмен между морем и атмосферой.— Труды Морск. научн. ин-та, 1929, 4, вып. 2, 7.
10. Атлас теплового баланса. Под редакцией М. И. Будыко. Изд. 2-е. Л., 1964.
11. *T. v. Kármán.* Mechanische Ähnlichkeit und Turbulenz.— Nachr. Wiss. Ges. Göttingen, Math.-Philos. Kl., 1930, 58.
12. *O. Reynolds.* On the dynamical theory of incompressible viscous fluids and the determination of the criterion.— Philos. Trans. Roy. Soc. (A), 1895, 186, 123.
13. *T. V. Boussinesq.* Theorie de l'ecoulement tourbillonnant.—Memoires pres. par sav. (A), 1877, 23.
14. *W. Schmidt.* Der Massenaustausch in freier Luft und verwandte Erscheinungen, 1925.
15. *L. Prandtl.* Bericht über Untersuchungen zur ausgebildete Turbulenz.— Z. angew. Math. und Mech., 1925, 5, N 2, 137.
16. *G. J. Taylor.* The transport of vorticity and heat through fluids in turbulent motion.— Proc. Roy. Soc. (A), 1932, N 685, 697.
17. *A. Defant.* Stabile Lagerung ozeanischer Wasserkörper und das dazu gehörige Stromsystem. 1925 Veröff. des Inst. für Meereskunde, Berlin, № 7 (A.), H. 19.
18. *В. В. Шулейкин.* Физика моря. Изд. 2-е. М., 1941.
19. *В. Б. Штокман.* Вертикальное распространение тепловых волн в море и косвенные методы определения коэффициента теплопроводности.— Труды Ин-та океанологии АН СССР, 1946, вып. 1.

20. *J. Jacobsen.* Eine graphische Methode zur Bestimmung des Vermischungskoeffizienten im Meere Gerlands Beitr., Geophys., 1927, **16**, 404.
21. *J. Fjeldstad.* Wärmeleitung im Meere.— Avhandl. Norske vid.-akad., 1929.
22. *Е. П. Анисимова, А. А. Пивоваров.* Расчет коэффициента вертикального турбулентного обмена тепла в море.— Метеорология и гидрология, 1966, № 2, 33.
23. *С. Г. Богуславский.* Зависимость коэффициента турбулентного обмена от параметров морских волн.— Докл. АН СССР, 1957, **115**, № 3, 494.
24. *М. П. Тимофеев.* Метеорологический режим водоемов. Л., 1963.
25. *G. Taylor.* The statistical theory of turbulence.—Proc. Roy. Soc. (A), 1935, **151**, № 873, 421.
26. *А. Н. Колмогоров.* Локальная структура турбулентности в несжимаемой жидкости при очень больших числах Рейнольдса.— Докл. АН СССР, 1941, **30**, № 4, 299.
27. *А. Н. Колмогоров.* Рассеяние энергии при локально-изотропной турбулентности.— Докл. АН СССР, 1941, **32**, № 1.
28. *А. М. Обухов.* О распределении энергии в спектре турбулентного потока.— Докл. АН СССР, 1941, **32**, № 1, 22.
29. *А. М. Обухов.* Структура температурного поля в турбулентном потоке.— Изв. АН СССР, серия геофиз., 1949, № 1, 13.
30. *Е. С. Вентцель.* Теория вероятностей. М.— Л., 1962.
31. *H. Grant, A. Moilliet, R. Stewart.* A spectrum of turbulence of very high Reynolds number.— Nature, 1959, **184**, 808.
32. *Н. В. Контобойцева.* К исследованию некоторых характеристик турбулентности при волнении.— Вестн. Моск. ун-та, серия 3, 1962, № 5, 35.
33. *А. Г. Колесников, Н. А. Пантелеев, Ю. Г. Пыркин, В. П. Петров, В. Н. Иванов.* Аппаратура и методика регистрации турбулентных микропульсаций температуры и скорости течения в море.— Изв. АН СССР, серия геофиз., 1958, № 3, 405.
34. *Е. П. Анисимова, А. А. Сперанская.* Измерение микропульсаций температуры в водоемах.— Вестн. Моск. ун-та, 1964, № 6, 62.
35. *Г. Г. Хунджуа.* Прямая регистрация температуры и солености в антарктическом секторе Тихого океана.— Вестн. Моск. ун-та, 1960, № 4, 47.
36. *Г. Н. Христофоров, Г. Ю. Аретинский.* Измеритель турбулентных флуктуаций электропроводности и температуры морской воды.— Труды Морск. гидрофиз. ин-та АН УССР, 1961, 36, 208.
37. *А. Г. Колесников.* Вертикальный турбулентный обмен в устойчиво стратифицированном море.— Изв. АН СССР, серия геофиз., 1960, № 11, 1614.
38. *А. Г. Колесников, Н. А. Пантелеев, В. Д. Писарев.* Регистрация турбулентных пульсаций в океане.— Докл. АН СССР, 1964, **155**, № 4, 788.
39. *L. Richardson, H. Stommel.* Note on eddy diffusion in the ocean.— J. Meteorol., 1948, 5, N 5.
40. *Р. В. Озмидов.* Исследование среднемасштабного горизонтального турбулентного обмена в океане при помощи радиолокационных наблюдений над плавающими буями.— Докл. АН СССР, 1959, **126**, № 1, 63.
41. *А. Г. Колесников, Н. А. Пантелеев, В. Н. Иванов.* Экспериментальное исследование турбулентности в слое увлечения под льдиной.— Изв. АН СССР, серия Физика атм. и океана, 1965, 1, № 12, 1310.
42. *G. Taylor.* Scient. Papers, 1960, 2.
43. *А. А. Сперанская.* Турбулентный обмен в верхнем подледном слое водоема.— Труды расширенного пленума Океаногр. комиссии. М., 1961.
44. *T. Ellison, J. Turner.* Mixing of dense fluids in a turbulent pipe flow.— Fluid Mech., 1960, 8, N 4.
45. *Н. Н. Зубов.* Промежуточный холодный слой в море.— Труды Морск. научн. ин-та, 1928, 4, вып. 2.
46. *С. О. Макаров.* Ермак во льдах. 1901.
47. *Landolt-Börnstein.* Physisch-Chemische Tabellen, 1930.
48. *Ф. Мальмгрен.* Свойства морского льда. М., 1932.
49. *В. В. Шулейкин.* Метод определения удельного веса льда.— Ж. прикл. физ., 1927, 4, вып. 3, 75.
50. *С. А. Арцыбашев, А. И. Парфианович.* Теплопроводность льда.— Ж. Русск. физ.-хим. об-ва, 1929, 20, 192.
51. *В. В. Шулейкин, Н. И. Русанов, В. А. Рябчиков.* Зависимость между теплопроводностью льда и его структурой.— Ж. геофиз., 1931, 1, вып. 1—2, 179.
52. *С. Г. Богуславский.* Тепловой баланс моря.— Изв. АН СССР, серия геофиз., 1956, № 4, 547.
53. *Е. Н. Шутова.* Выявление адвективной составляющей теплового баланса моря по многолетним данным.— Труды Морск. гидрофиз. ин-та АН УССР, 1966, 37, 83.
54. *А. Г. Колесников.* Вычисление суточного хода температуры поверхности моря.— Докл. АН СССР, 1947, **57**, № 2, 149.
55. *H. Sverdrup.* Oceanography for meteorologists, 1945.

В главе пятой

1. *A. Defant.* Die Zirkulation der Atmospher in den gemässigten Breiten.—Geogr. ann., 1921, 3, H. 3, 209.
2. *A. Angström.* Temperatur auf verschiedene Breitengrade.— Gerlands Beitr. Geophys., 1922, 15, 1926.
3. *В. В. Шулейкин.* Атлантические воды и климат СССР.— Изв. АН СССР, ОМЕН, 1935, № 10, 997.
4. Климатологический атлас Главной геофизической обсерватории. Под редакцией Е. С. Рубинштейн. Л., 1933.
5. *L. Gorczinsky.* Isothermes nouvelles de l'Europe, de la Pologne et de le globe terrestre. 1930.
6. *Н. Д. Ершова.* О влиянии Мирового океана на климат материков.— Изв. АН СССР, серия геофиз., 1938, № 1, 165.
7. В. В. Физическая картина тепловых потоков с моря на материк (основы теории муссонов).— Изв. АН СССР, серия геофиз., 1937, № 3, 277.
8. *А. М. Гусев.* К теории муссонов.— Изв. АН СССР, серия геофиз., 1938, № 4, 329.
9. *А. А. Дмитриев.* Влияние материков и океанов на циркуляцию атмосферы.— Труды Морск. гидрофиз. ин-та АН СССР, 1949, 2, 3.
10. *П. С. Линейкин.* Гидродинамическая теория муссонов над круглым островом.— Изв. АН СССР, серия геофиз., 1947, № 2, 103.
11. *В. В. Шулейкин.* Механизм переноса избыточных масс воздуха с океана на материк и обратно.— Докл. АН СССР, 1949, 65, № 6, 835.
12. *В. В. Шулейкин.* Физика моря. Изд. 2-е. М., 1941.
13. *Н. Л. Бызова.* Влияние сезонного переноса масс воздуха на движение земной оси.— Докл. АН СССР, 1947, 58, № 3, 393.
14. *Т. В. Бончковская.* Некоторые характеристики муссонной деятельности атмосферы.— Труды Морск. гидрофиз. ин-та АН СССР, 1954, 4, 102.
15. *В. В. Шулейкин.* Сезонные колебания количества воздуха над материком.— Докл. АН СССР, 1946, 52, № 5, 413.
16. *Ю. М. Шокальский.* Океанография. Л., 1959.
17. *А. Я. Орлов.* Движение полюса с 1891,5 до 1940,0.— Докл. АН СССР, 1942, 37, № 9, 304.
18. Морской атлас. 2, карта 46. Л., 1953.
19. *В. В. Шулейкин.* Связь между элементами муссонного поля и тепловым балансом моря.— Докл. АН СССР, 1939, 23, № 6, 519.
20. *В. В. Шулейкин.* К теории муссонов.— Докл. АН СССР, 1937, 16, № 6, 313.
21. *А. М. Гусев.* О прогнозах температуры по трассе Северного морского пути.— Изв. АН СССР, серия геофиз., 1940, № 2, 239.
22. *В. В. Шулейкин.* Очерки по физике моря. Изд. 4-е. М., 1962.
23. *С. М. Попов.* О влиянии формы береговой линии на динамический режим ветра.— Изв. АН СССР, серия геофиз., 1960, № 7, 1072.
24. *Я. И. Секерж-Зенькович.* О влиянии формы береговой линии на напряженность муссонного поля.— Изв. АН СССР, серия геофиз., 1949, № 3, 194.
25. *В. И. Смирнов.* Курс высшей математики, т. 3, Л., 1933.
26. *В. И. Лопатников.* Анализ муссонного поля над морем при сложной форме береговой линии.— Докл. АН СССР, 1962, 147, № 2, 353.
27. *А. М. Гусев, Г. Б. Машкова, Е. И. Потапова, Н. С. Потапов* и др. Новороссийская бора.— Труды Морск. гидрофиз. ин-та АН СССР, 1959, 14, 1—139.
28. *Ю. Ф. Васильев, С. М. Попов.* Температурное поле против острых мысов (по опытам на моделях).— Изв. АН СССР, серия геофиз., 1960, № 4, 557.
29. *В. В. Шулейкин.* Зимнее температурное поле над морем и над материком при переменном коэффициенте теплопередачи.— Докл. АН СССР, 1952, 83, № 3, 389.
30. *В. В. Шулейкин.* Зимний перенос тепла с океана и эффективное излучение при сложном строении поверхности материка.— Докл. АН СССР, 1961, 138, № 2, 351.
31. Морской атлас, т. 2, карты 43-б, 45-б. Л., 1953.
32. *С. К. Олевинская.* К теории тепловых взаимодействий между морем, атмосферой и материком.— Изв. АН СССР, серия геофиз., 1961, № 6, 926.
33. Большой советский атлас мира, т. 1, карта 30. М., 1937.
34. *В. В. Шулейкин.* Выделение муссонной составляющей из общих потоков в атмосфере.— Докл. АН СССР, 1950, 71, № 6, 1057.
35. Normal Weather Maps Northern Hemisphere Upper Level 10 000 feet and 20 000 feet, 10, 13, 16 and 19 km. Washington, D. C., Oct. 1944.
36. Atlas de la France, 1945.
37. *С. Д. Грибоедов.* Замкнутые периодические циклы в деятельности Сибирского антициклона.— Геофиз. сб., 1917, 3, вып. 3.
38. *Б. П. Мультановский.* Основные положения синоптического метода прогноза погоды. М., 1933.
39. *Л. Г. Данилов.* Хвилі погоди. Київ, 1935.
40. *В. В. Шулейкин.* Термобарические волны в муссонном поле.— Докл. АН СССР, 1939, 22, № 7, 948.

41. *В. В. Шулейкин.* Термобарические сейши в атмосфере как фактор смены погоды.— Изв. АН СССР, серия геофиз., 1942, № 1—2, 3.
42. *J. Sandström.* Über Einfluss des Golfstroms auf Wintertemperatur in Europa.— Meteorol. Z., 1926, **43**, 401.
43. *Е. В. Осмоловская.* Изменение тепловых потоков с океана на материк.— Изв. АН СССР, серия геофиз., 1939, № 6, 842.
44. *В. Г. Семенов.* Применение теории термобарических сейш к прогнозам погоды на естественный синоптический период.— Метеорология и гидрология, 1949, № 3, 54.
45. *В. Г. Семенов.* Влияние Атлантического океана на режим температуры и осадков на Европейской территории СССР. М., 1960.
46. *С. К. Олевинская.* Термобарические сейши над Европой зимой 1965/66 гг.— Изв. АН СССР, серия Физика атм. и океана, 1967, **3**, № 2, 212.
47. *N. Koncek.* Synoptische Betrachtung der Störungen im Jahresgang der meteorologischen Elemente im Laufe des Sommerhalbjahres in Mitteleuropa. — Meteorol. Z., 1941, 58, H. 3, 79.
48. *З. И. Гаврилова.* Весенние похолодания.—Изв. АН СССР, серия геофиз., 1948, № 3, 421.
49. *В. В. Шулейкин.* Некоторые особенности колебаний с большим периодом во вращающейся системе.— Докл. АН СССР, 1940, 29, № 3, 194.
50. *Н. Л. Бызова.* Самовозбуждающиеся колебания в потоках тепловой конвекции.— Докл. АН СССР, 1950, **72**, № 4, 675.
51. *В. В. Шулейкин.* Самовозбуждающиеся колебания скоростей зональных потоков в атмосфере.— Докл. АН СССР, 1950, **72**, № 6, 902.
52. *А. А. Дмитриев, Т. В. Бончковская.* Особенности волнового движения в канале с подводными перегородками.— Труды Морск. гидрофиз. ин-та АН СССР, 1956, **7**, 72.
53. *С. К. Олевинская.* К вопросу о причинах возникновения термобарических сейш в атмосфере.— Изв. АН СССР, серия Физика атм. и океана, 1967, **3**, № 10, 1001.
54. *Е. Н. Блинова.* Гидродинамическая теория волн давления, температурных волн и центров действия атмосферы.— Докл. АН СССР, 1943, **39**, № 7, 1056.
55. *В. В. Шулейкин.* Гидродинамический резонанс в потоках летнего муссона.— Изв. АН СССР, серия геофиз., 1960, № 6, 828.
56. *Е. И. Потапова.* Летние северо-восточные штормы на Черном и Азовском морях.— Труды Морск. гидрофиз. ин-та АН СССР, 1958, **12**, 97.
57. *V. W. Ekman.* On the influence of the earth's rotation on ocean currents.— Arkiv mat. astron. och fys., 1905, 2, N 11, 1.
58. Гидрометеорологические карты северной части Атлантического океана. Л., 1956.
59. *В. В. Шулейкин.* Перенос тепла течениями в замкнутом цикле Северной Атлантики.— Изв. АН СССР, серия геофиз., 1964, № 2, 264.
60. *П. П. Лазарев.* Работы по моделированию океанских течений. Сочинения, т. 3. Геофизика. М., 1950.
61. *А. С. Саркисян.* Расчет стационарных ветровых течений в океане.— Изв. АН СССР, серия геофиз., 1954, № 6, 835.
62. *Г. Стоммел.* Гольфстрим. М., 1963.
63. Морской атлас, т. 2, карты 16 и 17. Л., 1953.
64. *В. В. Шулейкин.* Анализ сложных тепловых условий в области замкнутых циклических течений Атлантического океана.— Изв. АН СССР, серия Физика атм. и океана, 1965, **1**, № 4, 413.
65. *Н. И. Егоров.* Тепловой баланс северной части Индийского океана и прилегающей морей в зимнее время. Л., 1954.
66. *Е. Г. Архипова.* Предварительные результаты расчета теплового баланса в северной части Атлантического океана за отдельные годы.— Материалы конференции по проблеме «Взаимодействие океана и атмосферы», вып. 5. Л., 1959.
67. *В. В. Шулейкин, Н. Д. Ершова.* Колебания теплового режима системы Атлантика — Полярный бассейн.— Докл. АН СССР, 1935, **1 (X)**, № 5, 217.
68. *J. Simpson.* The Ice Ages.— Nature, 1938, **141**, N 3570, 591.
69. *J. Bjerknes.* A possible response of atmospheric Hadley circulation to equatorial anomalies of ocean temperature.— Tellus, 1966, **18**, № 4.
70. *В. В. Шулейкин.* Связь между климатом Европы и переносом тепла в Атлантике. — Изв. АН СССР, серия Физика атм. и океана, 1968, **4**, № 3, 243.
71. *В. В. Шулейкин.* Проект плана большой Атлантической экспедиции.—Изв. АН СССР, серия геофиз. геогр., 1937, № 1.

В главе шестой

1. *Н. Н. Калитин.* Освещенность облачным небом.— Труды Научно-мелиорат. ин-та. Л., 1928.
2. *O. v. Aufsess.* Die Farbe der Seen. 1903.
3. *W. Pietenpol.* Selective absorption in the visible spectra of Wisconsin lake water.— Trans. Wisconsin Acad. Sci., 1924, 19, 562.

4. *В. В. Шулейкин.* О цветности моря.— Изв. Ин-та физики и биофизики, 1922, 119.
5. *J. Rayleigh.* Scattering of light by small particles.— Philos. Mag., 1871, **1**, 104.
6. *M. Smoluchowski.* Moleculare Zerstreuung des Lichtes.— Ann. Phys., 1908, **25**, 205.
7. *G. Mie.* Beitrage zur Optik trüber Medien, speziell kolloidaler Metallösungen.— Ann. Phys., 1908, **25**, 377.
8. *W. Shoulejkin.* Scattering of light by very big colloidal particles.— Philos. Mag., 1924, **48**, 307.
9. *К. С. Шифрин.* Рассеяние света в мутной среде. Л., 1951.
10. *C. V. Raman.* On the molecular scattering of light in water and the colour of the sea.— Proc. Roy Soc. (A), 1922, **101**, 64.
11. *А. А. Гершун.* Успехи гидрооптики.— Морск. сб., 1939, **22**, № 13, 118.
12. *В. В. Шулейкин.* Признаки некоторых явлений в спектрах света на глубинах моря.— Изв. АН СССР, серия геофиз., 1962, № 10, 1404.
13. *В. В. Шулейкин.* Материал по оптике сильно рассеивающей среды в применении к морской воде, туманам и облакам.— Ж. геофиз., 1933, 3, вып. 2, 145.
14. *В. А. Амбарцумян.* Новый способ расчета рассеяния света в мутной среде.— Изв. АН СССР, серия геофиз., 1942, № 3, 430.
15. *В. А. Тимофеева.* Распределение яркости в сильно рассеивающих средах.— Докл. АН СССР, 1951, **76**, № 5, 677.
16. *В. А. Тимофеева.* К вопросу о распределении яркости в море.— Докл. АН СССР, 1951, **76**, № 6, 831.
17. *А. Н. Башкирцева.* Проникание света в глубины моря.— Труды Морск. научн. ин-та, 1930, **4**, вып. 2, 121.
18. *K. R. Ramanathan.* On the colour of the sea.— Philos. Mag., 1923, **46**, 551.
19. *Р. Н. Иванов.* К теории диска Секки.— Ж. геофиз., 1936, вып. 2—3, 183.
20. *В. А. Тимофеева.* Экспериментальное изучение светового поля в мутных средах.— Труды Морск. гидрофиз. ин-та АН УССР, 1966, **37**, 20.
21. *В. А. Тимофеева.* Зависимость формы стандартной диаграммы рассеяния от отношения коэффициентов поглощения и рассеяния.— Докл. АН СССР, 1957, **113**, № 3, 556.
22. *N. Jerlov.* Reports of the Swed. Deep-sea Expedit., 1947, 3, N 1.
23. *N. Jerlov.* A transparency-meter for ocean water.— Tellus, 1957, 9, № 2.
24. *В. А. Тимофеева.* Прибор для определения коэффициента ослабления света в море.— Труды Морск. гидрофиз. ин-та АН СССР, 1960, **20**, 100.
25. *М. Н. Кайгородов, Г. Г. Неуймин.* Морской поляриметр-яркомер.— Труды Морск. гидрофиз. ин-та АН УССР, 1966, **36**, 66.
26. *Г. Г. Неуймин, М. Н. Кайгородов.* Автоматический морской поляриметр для исследования пространственного распределения поляризации дневного света и опыт его применения.— Труды ААНИИ, 1967, **57**.

В главе седьмой

1. *И. В. Крендалл.* Акустика. Л., 1934.
2. *Л. Беранек.* Акустические измерения. М., 1952.
3. *У. Мэзон.* Пьезоэлектрические кристаллы и их применения в ультраакустике. М., 1952.
4. Физические основы подводной акустики. Сборник перев. статей. М., 1955.
5. *Л. М. Бреховских.* Волны в слоистых средах. М., 1957.
6. *Е. Скучик.* Основы акустики, т. 1 и 2. М., 1958.
7. Подводная акустика. Сборник перев. статей. М., 1965.
8. *M. Smith, R. Barrett, R. Beyer.* Ultrasonic absoption measurements of magnesium sulphate.— Proc. Amer. Acad. Sci., 1951, **23**, N 1, 71.
9. *В. С. Анастасевич.* Явление реверберации в море.— Ж. тех. физ., 1943, 13, № 6, 318.
10. *Ю. М. Сухаревский.* Теория реверберации моря, обусловленной рассеянием звука.— Докл. АН СССР, 1947, **55**, № 9, 825.
11. *Ю. М. Сухаревский.* Некоторые особенности наблюдаемой реверберации моря.— Докл. АН СССР, 1948, **60**, № 7, 1161.
12. *Л. М. Бреховских.* Распространение звуковых и инфразвуковых волн в природных волноводах на большие расстояния.— Усп. физ. наук, 1960, **70**, вып. 2, 352.
13. *Л. М. Бреховских.* Распространение звука в неоднородной воде.— Докл. АН СССР, 1948, **62**, № 4, 469.
14. *Л. М. Бреховских.* Распространение звука в неоднородной воде.— Докл. АН СССР, 1949, **69**, № 2, 157.
15. *Л. Д. Розенберг.* Об одном новом явлении в гидроакустике.— Докл. АН СССР, 1949, **69**, № 2, 175.
16. Распространение звука в океане. М., 1951.
17. *В. В. Шулейкин.* О голосе моря.— Докл. АН СССР, 1935, **3**(8), № 6, 259.
18. *Н. Н. Андреев.* О голосе моря.— Докл. АН СССР, 1939, **23**, № 7, 625.
19. *С. В. Доброклонский.* К вопросу о собственных колебаниях шара-зонда.— Ж. геофиз., 1936, 6, вып. 5, 429.

20. *M. Dobrin.* Measurements of underwater noise, produced by marine life.— Science, 1947, 105, 19.
21. *В. Р. Протасов.* Биоакустика рыб. М., 1965.

В главе восьмой

1. *А. Зоммерфельд.* Строение атомов и молекул. М., 1926.
2. *R. Mecke, J. Childs.* Das Atomgewicht des Sauerstoff.— Z. Phys., 1931, 68, 362.
3. *C. M. Steward.* Comparation of X-ray diffraction curves.— J. Chem. Phys., 1934, 2, 558.
4. *J. Bernal, R. Fowler.* A theory of water and ionic solutions.—J. Chem. Phys., 1933, 1, 518.
5. *P. Debye, R. Mecke.* Bestimmung der Innerstruktur von Flüssigkeiten.— Phys. Z., 1930, 31, 799.
6. *В. Я. Альтберг, В. Ф. Трошин.* Кунгурская ледяная пещера.— Изв. Гидрол. ин-та, 1931, № 32, 94.
7. *П. В. Бриджмен.* Физика высоких давлений. М., 1935.
8. *А. С. Предводителев.* Теория теплопроводности жидких и твердых диэлектриков.— Ж. эксп. и теорет. физ., 1934, 4, вып. 8, 813.
9. *С. А. Арцыбашев, А. И. Парфианович.* Теплопроводность льда.— Ж. Русск. физ.-хим. об-ва, 1929, 20, 192.
10. *В. В. Шулейкин.* Кинетическая теория испарения воды.— Ж. Русск. физ.-хим. об-ва, 1926, 58, 527.
11. *А. Эйкен.* Курс химической физики, т. 1. М., 1935.
12. *Л. И. Беляев.* Определение количества морских солей, взвешенных в воздухе.— Докл. АН СССР, 1951, 81, № 6, 1039.
13. *Л. И. Беляев.* Образование пены на море и ее разрушение с формированием морского аэрозоля.— Труды Морск. гидрофиз. ин-та СССР, 1955, вып. 7, 65.
14. *Т. К. Жаворонкина, А. А. Дмитриев.* Распределение хлора в атмосферных осадках над материками.— Изв. АН СССР, серия геофиз., 1958, № 3, 330.
15. *D. Blanchard.* The electrification of the atmosphere by particles from bubbles in the sea.— Progr. in Oceanogr., 1963, 1.
16. *H. U. Sverdrup.* Das maritime Verdunstungsproblem.— Ann. Hydr., 1936, 64, H. 2.
17. *В. В. Шулейкин.* Физика моря. М., 1933.
18. *М. И. Будыко.* Испарение в естественных условиях. Л., 1948.
19. *Ю. М. Шокальский.* Океанография. Изд. 2-е. Л., 1959.
20. *Ф. Мальмгрен.* Свойства морского льда. М., 1932.
21. *В. В. Шулейкин.* Поверхностно-активные пленки на море.— Докл. АН СССР, 1935, 1 (6), № 7—8, 494.
22. *J. Sorbet.* Le danger de masout pour la faune aquatique.— Illustration, 1935, N 4833, 229.
23. *А. Марселен.* Поверхностные растворы. М., 1936.
24. *N. Adam.* Physics and chemistry of surfaces. 1930.
25. *E. Rideal.* An introduction to surface chemistry. 1930.
26. *Р. Н. Иванов.* Гашение волн поверхностными пленками (Причина гашения волн маслом).— Изв. АН СССР, серия геофиз., 1937, № 3, 325.
27. *Р. Н. Иванов.* Гашение энергии в пленках поверхностных веществ.— Изв. АН СССР, серия геофиз., 1938, № 1, 27.
28. *С. В. Доброклонский, В. А. Тюменева.* О гашении капиллярно-гравитационных волн на поверхности воды, покрытых пленками некоторых поверхностноактивных веществ, в зависимости от частоты.— Изв. АН СССР, серия геофиз., 1950, № 5, 425.
29. *H. Blasius.* Grenzschichten in Flüssigkeiten mit kleiner Reibung.—Z. Math. und Phys., 1908, 56, 1.

В главе девятой

1. *Sunder Lal Hora.* Ancient Hindu conception of correlation between form and locomotion of fishes.— J. Asiat. Soc. Calc., 1935.
2. *J. Gray.* Studies of animal locomotion.— J. Exper. Biol., 1933, 10, 88.
3. *В. В. Шулейкин.* Внешняя и внутренняя динамика рыбы.— Изв. АН СССР, ОМЕН, 1934, № 8, 1151.
4. *В. В. Шулейкин.* Аэродинамика летучей рыбы.— Изв. АН СССР, ОМЕН, 1928, № 6, 573.
5. *П. Ю. Шмидт.* Жизнь русских морей.— В кн.: К е л л е р. Жизнь моря, ч. 5.
6. *A. Magnan et A. Saint Lague.* Resistance à l'avancement et puissance des poissons.— Bull. Serv. techn. aeronaut., 1930, 71.
7. *В. В. Шулейкин, В. С. Лукьянова, И. И. Стась.* Гидродинамические качества рыб и дельфина.— Изв. АН СССР, ОМЕН, 1937, № 3, 581.
8. *В. В. Шулейкин.* Кинематика дельфина.— Изв. АН СССР, ОМЕН, 1935, № 3, 651.
9. *D. Houssay.* Forme, puissance et stabilité de poissons. 1912.

10. *И. И. Стась.* Регистрация движений дельфина в море.— Докл. АН СССР, 1939, **24**, № 6, 534.
11. *И. И. Стась.* Еще о регистрации движений дельфина в море.— Докл. АН СССР, 1939, **25**, № 8, 669.
12. *В. В. Шулейкин.* К динамике стаи.— Изв. АН СССР, ОМЕН, 1938, № 6.
13. *П. Н. Лебедев.* Собрание сочинений. М., 1913.
14. *И. И. Стась.* К динамике стаи.— Изв. АН СССР, ОМЕН, 1938, № 5-6, 493.
15. *Н. Н. Патарая.* Гидродинамическое взаимодействие совместно движущихся в жидкости шаров.— Труды Тбилис. гос. ун-та, 1950, **15**, 37; Сообщ. АН ГрузССР, 1950, **11**, 3.
16. *В. В. Шулейкин, В. С. Лукьянова, И. И. Стась.* Сравнительная динамика морских животных.— Докл. АН СССР, 1939, **22**, № 7, 424.
17. *H. Geiger, K. Schcel.* Handbuch der Physik, Bd. 7, 1935.
18. *В. В. Шулейкин.* Энергетика морских животных.— Докл. АН СССР, 1965, **163**, № 3, 754.
19. *В. В. Шулейкин.* Энергетика и скорости миграции рыб, дельфинов, китов.— Труды ВНИРО [Сборник, посвященный И. И. Месяцеву], 1966, **60**, 27.
20. *В. П. Парибок, С. Д. Заугольников.* К вопросу о динамике мелких водных животных.— Докл. АН СССР, 1949, **64**, 561.
21. *Д. В. Радаков, В. Р. Протасов.* Скорости движения и некоторые особенности зрения рыб. Справочник. М., 1964.
22. *С. Б. Гюльбадамов.* Промыслово-биологические основы проектирования пелагических тралов.— Труды ВНИРО, 1958, **36**.
23. *А. И. Трещев.* Теоретические основы лова рыбы разноглубинным тралом.— Труды ВНИРО, 1959, **41**.
24. *Л. А. Ковалевская.* Энергетика движущейся рыбы.— Труды Морск. гидрофиз. ин-та АН СССР, 1956, **7**, 161.
25. *В. С. Ивлев.* Опыт оценки эволюционного значения уровней энергетического обмена.— Ж. общ. биол., 1959, **20**, № 2.
26. *Г. Г. Винберг.* Интенсивность обмена и пищевые потребности рыб.— Научн. труды Белорус. гос. ун-та, 1956.
27. *В. В. Шулейкин.* Как рыба-лоцман движется со скоростью акулы.— Докл. АН СССР, 1958, **119**, № 5, 929.
28. *К. К. Федяевский.* Слой трения.— Труды ЦАГИ, 1934, вып. 179.
29. Большая Советская энциклопедия, т. 25. Лоцман-рыба. М., 1954.

В главе десятой

1. *Б. М. Яновский.* Земной магнетизм. М., 1953.
2. *И. М. Симонов.* Опыт математической теории земного магнетизма.— Уч. зап. Казан. ун-та, 1835.
3. *К. Гаусс.* Избранные труды по земному магнетизму. Л., 1952.
4. *Н. А. Умов.* Избранные сочинения. М., 1950.
5. *Н. А. Умов.* Построение геометрического образа потенциала Гаусса как прием изыскания законов земного магнитного поля.— Избранные сочинения. М., 1950.
6. *П. Н. Лебедев.* Магнитометрические исследования вращающихся тел.— Избранные сочинения. М., 1949.
7. *Е. В. Ступоченко.* О происхождении магнетизма Земли.— Докл. АН СССР, 1948, **62**, № 4, 477.
8. *Я. И. Френкель.* Земной магнетизм.— Изв. АН СССР, серия физ., 1947, № 6, 607.
9. *M. Elsasser.* A statistical analysis of the Earth's internal magnetic field.— Phys. Rev., 1941, **60**, 876.
10. *E. Bullard.* The origin of the magnetism of the Earth.— J. Astron. Soc. Geophys. suppl., 1948, **5**, N 7, 248; Proc. Roy. Soc. (A), 1949, **197**, 433; 1949, **199**, 413; Philos. Trans. (A), 1950, **243**, 67.
11. *M. Rochester.* Geomagnetic westward drift and irregularities in the Earth's rotation.— Philos. Trans. (A), 1960, **252**, 531.
12. *J. S. Chatterjee.* Influence of Hall-effect on the induced currents in the Earth owing to the magnetic disturbances.— Science and Culture, 1960, **26**, N 2, 234.
13. *B. Hall.* On the action of magnetism on a permanent electric current.— Philos. Mag., 1880, **10**, 301.
14. *T. De Coudres.* Umwandlung von Wechelstrom im Gleichstrom mittels des Hallschen Phänomens.— Phys. Z., 1901, **2**, 40. 586.
15. *Л. А. Корнева.* О восточной составляющей магнитного поля Земли.— Докл. АН СССР, 1951, **53**, № 6, 879.
16. *Л. А. Корнева.* Построение и анализ карт аномального геомагнитного поля.— Труды Морск. гидрофиз. ин-та АН СССР, 1956, **7**, 32.
17. *Л. А. Корнева.* Моделирование геомагнитного поля.— Труды Морск. гидрофиз. ин-та АН СССР, 1956, **7**, 41.

18. *Л. А. Корнева.* О несимметричной относительно земной оси составляющей геомагнитного поля в районе Арктики и Мирового океана.— Докл. АН СССР, 1956, **107**, 679.
19. Аркт. научн. исслед. институт. О новых советских исследованиях и открытиях в Центральной Арктике.— Изв. АН СССР, серия геогр., 1954, № 5.
20. *П. Т. Пасальский.* Магнитная съемка Крыма, произведенная в 1900 году. 1914.
21. *В. В. Шулейкин.* Магнитное поле Земли и Мировой океан.— Докл. АН СССР, 1951, **76**, № 1, 57.
22. *А. Т. Миронов.* Об изучении электрических токов моря.— Ж. геофиз., 1936, 6, вып. 5, 474.
23. *А. Т. Миронов.* Электрический ток в море.— Труды Морск. гидрофиз. ин-та АН СССР, 1948, **1**, 56.
24. *Л. А. Корнева.* Электродвижущая сила индукции в проводах при измерениях морских токов.— Труды Морск. гидрофиз. ин-та АН СССР, 1956, **7**, 27.
25. *В. И. Лопатников.* Некоторые результаты исследования естественного электрического поля в море.— Труды Морск. гидрофиз. ин-та АН УССР, 1966, **37**, 154.
26. *С. Я. Турлыгин, Н. А. Карелина.* Влияние суши и моря на распределение природных электрических токов по поверхности Земли.— Изв. АН СССР, серия геофиз., 1952, № 4, 55.
27. *В. В. Шулейкин.* Еще о вихревых токах в море.— Докл. АН СССР, 1960, **134**, № 6, 1343.
28. *В. Б. Федосеев.* Вихревые токи в тонких дисках и задача моделирования природных токов в море. Дипл. работа. МГУ, 1967.
29. *В. В. Шулейкин.* Расчет вихревых токов в море со сложным рельефом дна.— Докл. АН СССР, 1967, 175, № 3, 578.
30. *A. A. Ashour.* The induction of electric currents in a uniform circular disk.— Quart. J. Mech. and Appl. Math., 1950, **3**, pt. 1, **119**.
31. *Б. А. Смиренин.* Радиотехнический справочник. М., 1950, стр. 56.
32. *В. А. Снежинский.* Практическая океанография. Изд. 2-е. Л., 1954.
33. *H. Stommel.* The theory of electric field in deep ocean currents.— J. Marine Res., 1948, **7**, N 3, 386.
34. *W. Arx.* An electromagnetic method for measuring the velocities of ocean currents from a ship under way.— Papers Phys. Oceanogr. and Meteorol., 1950, **11**, N 3, 5.
35. *Ю. Г. Рыжков.* Измерение теллурических токов в Индийском океане.— Докл. АН СССР, 1957, **113**, № 4, 787.
36. *В. В. Шулейкин.* Теллурические токи в океане и магнитное склонение.— Докл. АН СССР, 1958, **119**, № 2, 257.
37. *П. А. Виноградов.* О регистрации градиента потенциала электротеллурического поля на некоторых глубинах озера Байкал.— Докл. АН СССР, 1957, **113**, № 6, 1255.
38. *М. А. Богданов, Ю. А. Иванов.* Токи в море и измерения течений прибором ЭМИТ.— Труды Ин-та океанологии АН СССР, 1960, **39**, 80.
39. *В. В. Шулейкин.* Экспериментальная проверка гипотезы о природе магнитного склонения.— Докл. АН СССР, 1960, **130**, № 5, 1015.
40. *В. В. Шулейкин, Н. И. Сигачев.* Новая проверка гипотезы о природе магнитного склонения.— Докл. АН СССР, 1961, **140**, № 1, 107.
41. *Н. И. Сигачев.* Гироскопические навигационные приборы. Л., 1954.
42. Карты элементов геомагнитного поля на эпоху 1955 г.— Труды Ин-та земн. магнетизма, 1955, **11**.
43. *J. Fleming.* Terrestrial magnetism and electricity. 1949.
44. *В. В. Шулейкин.* Некоторые особенности вековых изменений магнитного склонения над океаном.— Докл. АН СССР, 1961, **137**, № 4, 848.
45. *Л. А. Корнева.* К вопросу об атмосферной тепловой машине третьего рода.— Труды Морск. гидрофиз. ин-та АН СССР, 1956, **7**, 120.
46. *H. S. Muench, T. R. Borden.* Atlas of monthly mean stratosph. charts, 1955—59. Aire-Force Surv. in Geoph. Привед. рис. взяты из книги: R. A. Craig. The upper atmosphere (Met. a. Phys.), 1965.
47. *В. В. Шулейкин, Л. А. Корнева.* Влияние переменного потока солнечных положительных частиц на ветер в ионосфере.— Докл. АН СССР, 1956, **107**, № 1, 59.
48. *В. П. Докучаев.* О влиянии магнитного поля Земли на ветер в ионосфере.— Изв. АН СССР, серия геофиз., 1959, № 5, 781.
49. *Э. С. Казимировский.* К вопросу об общей циркуляции в ионосфере.— Геомагнетизм и аэрономия, 1962, **2**, № 6, 1084.
50. *Н. Н. Карнаушенко.* Предварительные результаты исследования ветров в верхней атмосфере, в районе береговой черты.— Труды Морск. гидрофиз. ин-та АН УССР, 1966, **37**, 179.
51. *Д. Самарджиев, Г. Несторов.* Новый метод исследования движений в ночном ионосферном слое *E*.— Геомагнетизм и аэрономия, 1964, **4**, № 6, 1052.
52. *А. А. Кашин.* Дрейф неоднородностей в слое *E* над берегом Антарктиды. Сборник докладов по электромагнитным явлениям в море. Киев, 1967.

53. *F. Kerr.* Radio superrefraction in coastal regions.— Austral. J. Scient. Res., Ser. A, 1948, 1, 443.
54. *Ю. А. Надубович.* Береговой эффект в полярных сияниях. М., 1967.
55. *Ф. П. Врангель.* Путешествие по северным берегам Сибири и Ледовитому морю, 1820—1824 гг. Л., Изд. ГУСМП, 1948.
56. *Е. Е. Федоров.* Влияние солнечных пятен на температуру и давление воздуха.— Изв. Главн. физ. обс., 1920, 1, № 3, 37.
57. *В. Ю. Визе.* Льды в полярных морях и общая циркуляция в атмосфере.— Ж. геофиз. мет., 1924, 1, 78.
58. *П. П. Предтеченский. М. С. Жуков, К. В. Бродовицкий.* Труды Ташкент. геофиз. обс., 1940, 1, 1.
59. *Б. М. Рубашев.* Проблемы солнечной активности. М.— Л., 1964.
60. *Л. А. Вительс.* Характеристика барического режима Европейского естественно-синоптического периода.— Труды НИУ ГУГМС, серия 11, 1946, вып. 15
61. *Л. А. Вительс.* Солнечная природа атмосферных ритмов.— Труды Центр. ин-та прогнозов, 1957, вып. 51, 22.
62. *Л. А. Вительс.* Календарные особенности в колебаниях интенсивности североевропейских циклонов.— Изв. АН СССР, серия геофиз., 1952, № 4, 98.
63. *B. Duell, G. Duell.* The behaviour of barometric pressure during and after solar particle invasions and solar ultraviolet invasions.— Smithsonian Misc. Collect., 1948, 110, N 8, 1.
64. *Л. А. Вительс.* Магнитные бури, как солнечный репер атмосферной циркуляции.— Бюлл. Комиссии по исслед. Солнца, 1949, № 1, 38.
65. *В. В. Шулейкин.* Очерки по физике моря. М., 1962, стр. 130.
66. *А. П. Никольский.* О планетарном распределении магнитно-ионосферных возмущений и полярных сияний.— Докл. АН СССР, 1957, 115, № 1, 84.
67. *C. Störmer.* The polar aurora. Oxford, 1955.
68. *Р. В. Смирнов.* О тенденции к двадцатисемидневной повторяемости в температурном поле тропосферы.— Труды Морск. гидрофиз. ин-та АН УССР, 1966, 37, 163.
69. *Р. В. Смирнов.* О связи колебаний в температурном поле тропосферы береговых районов Черного моря с геомагнитными возмущениями.— Труды Морск. гидрофиз. ин-та АН УССР, 1966, 37, 169.
70 *А. А. Дмитриев.* О связи муссонных колебаний давления и температуры с солнечной активностью.— Метеорология и гидрология, 1949, № 5.
71. *А. А. Дмитриев.* О связи солнечной активности с атмосферной циркуляцией.— Солнечные данные, 1957, № 1, 153.
72. *Л. Р. Ракипова.* О механизме связи между тропосферой и верхними слоями атмосферы.— Труды Главн. геофиз. обс., 1951, 28, 5.
73. *C. Salzberg, R. Greenstone.* J. Geophys. Res., 1951, 56, N 4, 521.
74. *T. Cowling.* Magnetohydrodynamics. N. Y., 1957.
75. *Ф. Джонсон.* Околоземное космическое пространство. Справочные данные, т. 71. М., 1966.
76. *Brian J. O'Brien.* Interrelations of charged particles energetics in the magnetosphere.— Pap. pres. at the Internat. Sympos. on solarterrestr. phys. Belgrade, Jougosl., 29. VIII—2.IX 1966.
77. *Е. Паркер.* Динамические процессы в межпланетной среде, т. 190. М., 1965.
78. *N. Ness, J. Wilcox.* Solar origin of the interplanetary magnetic field.— Phys. Rev., 1964, 13, 461.
79. *J. Wilcox, N. Ness.* Quasi-stationary corotating structure in the interplanetary medium.— J. Geophys. Res., 1965, 70, 5793.
80. *Р. В. Смирнов.* Солнечный ветер и температурное поле тропосферы.— Докл. АН СССР, 1967, 175, № 1, 76.
81. *Л. А. Вительс.* О возможной причине изменений солнечно-атмосферных связей.— Метеорология и гидрология, 1960, № 7, 9.
82. *P. Coleman, L. Davis, E. Smith, D. Jones.* Variations in polarity distribution of interplanetary magnetic field.— J. Geophys. Res., 1966, 71, N 11, 2831.
83. *M. Neugebauer, C. W. Snyder.* J. Geophys. Res., 1966, 71, N 19, 4469.
84. *R. Lüst.* The propagation of the interplanetary medium.
85. *A. J. Lasarus, H. S. Bridge, J. Davis.* J. Geophys. Res., 1966, 71, N 15, 3787.
86. *Р. В. Смирнов.* О связи некоторых параметров тропосферы и ионосферы с изменениями скоростей солнечного ветра.— Докл. АН СССР, 1968, 180, № 1.
87. *В. М. Шашунькина.* Ионосферный эффект внезапного начала магнитной бури 15 июля 1959 г.— Геомагн. аэрон., 1966, 6, № 1, 146.

ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ

(римские цифры — номера глав книги; арабские цифры — номера параграфов)

Алексеев Ю. К. I, 11, 23
Алемасов Б. Е. IV, 2
Альтберг В. Я. VIII, **3**
Амбарцумян В. А. VI, 6
Анастасевич В. С. VII, **6**
Андреев Н. Н. VII, 12
Арцыбашев А. А. VIII, **5**
Ауфзесс О. VI, 1, 7, 8

Бахадур Ч. IX, 1
Башкирцева А. Н. VI, 7, 10
Белинский Н. А. X, 15
Беляев Л. И. VIII, 8
Березкин Вс. А. Предисл.; III, 3
Березкин Вл. А. VII, 12
Бернал Дж. VIII, 3
Блазуис Г. VIII, 15
Блинов Л. К. VIII, 8
Блинова Е. Н. V, 21
Богданов М. А. X, 11
Богуславский С. Г. III, 19; IV, 7, 12
Больцман Л. VIII, 6
Бончковская Т. В. III, 17; V, 6, 7, 21
Боуден К. III, 19
Бреховских Л. М. VII, 8
Бровиков И. С. III, 32
Бродовицкий К. В. X, 15
Брунс Э. III, 20, 37
Будыко М. И. IV, 4; VIII, 8
Буллард Э. X, 4, 13
Бызова Н. Л. V, 7, 20
Бьеркнес В. I, 7, 22; IX, 14
Бьеркнес И. V, 27

Вавилов П. Б. VIII, 8
Вавилов С. И. VI, 9
Ван Сяо-нань III,28
Васильев Ю. Ф. V, 12
Ветчинкин В. П. IX, 4
Вйзе В. Ю. X, 15
Винберг Г. Г. IX, 17
Виноградов П. А. X, 11
Вительс Л. А. X, 15, 17
Волков Б. И. III, 12; X,9
Волобуев М. Г. III, 36

Гаврилова З. И. V, 17
Гагарин Ю. А. X, 17
Гамбурцев Г. А. VI, 8
Гао Вэнь-сю III, 28
Гаусс К. III, 32—34; VI, 4; X, 3
Геворкян Р. Г. I, 24
Гелланд-Гансен Б. I, 15; IV, 7
Гельмгольц Г. I, 6; III, 13
Гершун А. А. VI, 4, 10
Горчинский Л. V, 2
Грибоедов С. Д. V, 15
Григораш З. К. II, 15, 16
Грин Дж. II, 4
Гришкевич Л. В. X, 14
Грэй Дж. IX, 1, 4
Губин Ф. А. X, 11
Гусев А. М. V, 10, 12

Данилов Л. Г. V, 15
Дегтярев Г. М. IV, 2, **3**
Дерягин Б. В. III, 24
Десслер А. X, 17
Дефант А. Предисл.;I, 22, 25; II, 9, 10, 13; IV, 7; V, 1
Джеффрис Г. I, 10; II, 6; III, 11, 12, 14, 17, 19
Дзердзеевский Б. Л. V, 10
Дмитриев А. А. I, 13; V, 3, 4, 21; X, 16
Доброклонский С. В. Предисл.; I, 25; III, 19, 20; VII, 12; VIII, 14
Докучаев В. П. X, 14, 16
Дудсон А. II, 13
Дыбченко В. Г. III, 15
Дюлл Б. и Г. X, 15

Егоров Н. И. IV, 1, 12
Ерлов Н. VI, 10 (Йерлов Н.)
Ершова Н. Д. V, 2, 10, 25

Жаворонкина Т. К. VIII, 8
Жуков М. С. X, 15
Жуковский Н. Е. I, 6

Заклинский А. Б. II, 16
Захаров Я. Д. VII, 10
Захарова Н. И. V, 17
Заугольников С. Д. IX, 16
Зволинский Н. В. V, 7
Зубов Н. Н. I, 7, 24; II, 11; IV, 11

Иванов А. А. III, 15, 20
Иванов Р. Н. III, 17, 35, 36; VI, 10; VIII, 10—14, 16
Иванов Ю. А. X, 11
Ивлев В. С. IX, 17

Казимировский Э. С. X, 14
Кайгородов М. Н. VI, 10
Калитин Н. Н. IV, 1; VI, 1
Каминский С. Т. III, 35
Капица П. Л. III, 14, 17
Карелина Н. А. X, 8
Карман Т. I, 25; III, 19; IV, 6
Карнаушенко Н. Н. X, 14
Кашин А. А. X. 14
Кашкарова Н. П. V, 4
Кельвин В. I, 6; III, 13
Ковалевская Л. А. IX, 17
Кокс Ч. III, 36
Колесников А. Г. IV, 9—11, 13
Колмогоров А. Н. IV, 8; V, 25

Контобойцева Н. В. III, 19; IV, 10
Кончек Н. V, 17
Корнева Л. А. III, 3, 32—34; X, 5, 6, 8, 10—14, 16
Кренкель Э. Т. I, 24
Кристел Дж. II, 9
Крутков Ю. А. III, 33
Крылов А. Н. III, 15, 30, 33, 37
Крылов Ю. М. III, 30, 32—34, 36
Кюри-Склодовская М. VII, 11

Лабзовский Н. А. III, 35
Лагранж Ж. I, 5; II, 2
Лазарев П. П. V, 24
Ланжевен П. VII, 11
Лаплас П. I, 6; II, 1; V, 8
Лебедев П. Н. X, 4, 5
Лебедкина Л. Г. Предисл.; II, 11
Ленц Э. Х. I, 4
Ливерди В. П. III, 32—34
Линейкин П. С. I, 22; V, 3
Лоидис А. П. III, 36
Ломоносов М. В. Предисл.; I, 23; V, 27
Лопатников В. И. I, 12; V, 12; X, 8, 9, 11
Лукьянов В. А. III, 35
Лукьянова В. С. IX, 7, 9, 12, 16
Лэмб Г. III, 7; VIII, 14

Макаров С. О. I, 17; IV, 11
Маккавеев В. М. III, 14
Максвелл Дж. VIII, 4, 6; X, 9, 10
Максимова Н. И. V, 2
Мальмгрен Ф. IV, 11; VIII, 9
Мамаев О. И. I, 22
Марселен А. VIII, 11
Машков С. Т. III, 33, 36
Меннер В. В. IX, 13
Меньшов Ю. А. IV, 2, 3
Месяцев И. И. IX, 17
Ми Г. VI, 4
Миронов А. Т. X, 8, 9, 11, 12
Михельсон В. А. IV, 1
Мультановский Б. П. V, 15, 20, 22
Мунк В. III, 20, 36

Надубович Ю. А. X, 14, 15
Назаров В. С. III, 37
Нансен Ф. II, 17; VI, 11
Некрасов А. И. III, 5, 18
Несс Н. X, 17
Несторов Г. X, 14
Никитина Е. А. III, 33
Никифоров Е. Г. III, 35
Никольский А. П. X, 15, 17

О'Брайен Д. X, 17
Обухов А. М. IV, 8
Озмидов Р. В. IV, 10
Олевинская С. К. V, 17, 21
Олевинский К. Р. IV, 4
Онгстрём А. IV, 3; V, 1
Орлов А. Я. V, 7
Осмоловская Е. В. V, 2

Пальмен Е. I, 11
Папанин И. Д. I, 24
Парибок В. П. IX, 16
Паркер Е. X, 17
Парфианович А. С. VIII, 5
Патарая Н. Н. IX, 14, 15
Пасальский П. Т. X, 6
Пивоваров А. А. VI, 7
Писаревская В. Д. III, 35
Планк М. VIII, 1
Пономаренко Г. П. III, 36
Попов С. М. IV, 2; V, 10, 12
Постнова И. Д. I, 13
Потапов Н. С. V, 12
Потапова Е. И. V, 12, 23
Прандтль Л. I, 25; III, 6; IV, 6
Праудмен Дж. II, 13
Предводителев А. С. VIII, 5
Предтеченский П. П. X, 15
Протасов В. Р. IX, 16

Радаков Д. В. IX, 16
Райдил Е. VIII, 15
Ракипова Л. Р. X, 16
Раман Ч. VI, 8
Раманатан К. VI, 8
Ричардсон Л. III, 10
Розенберг Л. Д. VII, 8
Россби К. I, 20
Рубашев Б. М. X, 15
Рубинштейн Е. С. V, 2
Русанов Н. И. IV, 11
Рыбников А. А. III, 37
Рыжков Ю. Г. I, 10, 12, 13; X, 11
Релей Дж. III, 32—34; VI, 3, 7
Рябчиков В. А. IV, 11

Савинов С. И. IV, 1
Самарджиев Д. X, 14
Самарский А. А. III, 23
Самойленко В. С. IV, 4, 5
Сандстрем И. I, 7; V, 15; X, 15
Саркисян А. С. I, 22; V, 24
Сачков Н. А. VIII, 16
Свердруп Г. Предисл.; I, 11, 24; II, 12; III, 20; IV, 4, 10; VIII, 8
Секерж-Зенькович Я. И. V, 11
Семенов В. Г. V, 17, 21
Сигачев Н. И. X, 12
Симонов И. М. X, 3
Симпсон Дж. V, 26
Скибко Н. Е. III, 31
Смирнов Р. В. X, 15, 17
Смолуховский М. VI, 3, 7
Снежинский В. А. I, 11; III, 36; X, 10
Солнцева Н. О. III, 35
Соколова И. Н. III, 32
Сорокин А. А. IV, 3
Сперанская А. А. Предисл.; IV, 9, 10
Сретенский Л. Н. III, 15, 16
Ставровский А. С. III, 15, 16
Стась И. И. IX, 7, 9, 13—16
Стефан VIII, 7
Стокс Дж. III, 7, 8, 35
Стоммел Г. I, 21, 22; V, 24; X, 10
Стрекалов С. С. III, 32
Струйский Н. Н. I, 11
Ступоченко Е. В. X, 4
Сузрута IX, 1
Сундер Лал IX, 1
Сухаревский Ю. М. VII, 6

Танхилл И. III, 27
Тейлор Дж. IV, 8
Тимофеева В. А. VI, 6, 10
Титов Л. Ф. III, 20, 35
Тихонов А. Н. III, 23

Толмин В. I, 20
Томсон В. I, 6; III, 13
Трофимова Н. Б. IV, 13
Трошин В. Ф. VIII, 3
Турлыгин С. Я. X, 8
Тюменева В. А. VIII, 14

Уилкокс Дж. X, 17
Умов Н. А. VI, 3; X, 3—5
Успенский П. Н. Предисл.; III, 13

Фарадэй М. X, 10
Федоров Е. Е. X, 15
Федоров Е. К. I, 24
Федоров К. Н. III, 35
Федяевский К. К. III, 14; IX, 19
Флеминг Дж. X, 13
Френкель Я. И. X, 4
Фьелдстад И. IV, 7

Хван А. П. III, 24, 25, 28
Хидака К. I, 22

Чаплыгин Е. И. I, 24
Чаттерджи И. X, 4

Швец М. Б. I, 24
Ширшов П. П. I, 24
Шифрин К. С. VI, 4
Шляхов В. И. IV, 2
Шмидт В. III, 19; IV, 6
Шокальский Ю. М. Предисл.; I, 18, II, 15; V, 7, 24
Шпиндлер И. Б. Предисл.
Штёрмер К. X, 15, 17
Штокман В. Б. 1,7—9, 15, 19; IV, 7
Шулейкин В. В. I, 12, 16, 17, 23, 25; II, 6, 7, 14; III, 3, 5, 8 — 12, 15 — 18, 20—24, 26—30, 34, 36, 37; IV, 1, 3—5, 7, 11, 12; V, 2—6, 8—10, 13,—27; VI, 4—10; VII, 12; VIII, 6—8, 10, 13—15; IX, 2—10, 12—19; X, 7,9, 11—13, 14
Шутова Е. Н. IV, 12

Экман В. I,8—10, 14—18, 21, 24, 25; III, 35
Эри Дж. II, 1, 2—7; III, 12

Юнг VIII, 5

Якобсен И. IV, 7
Янишевский Ю. Д. IV, 1, 3

Airy G. sir — см. Эри Дж.
Angström A.— см. Онгстрём А.
Aufsess O. v.— см. Ауфзесс О.

Bahadur Ch.— см. Бахадур Ч.
Bjerknes J.— см. Бьеркнес И.
Bjerknes V.— см. Бьеркнес В.
Blasius H.— см. Блазиус Г.
Boltzmann L.— см. Больцман Л.
Bowden K.— см. Боуден К.
Bullard E. sir — см. Буллард Э.
Burnal J.— см. Бернал Дж.

Chatterdjee J. — см. Чаттерджи И.
Chrystal G. — см. Кристэл Дж.
Cox C.— см. Кокс Ч.

Defant A.— см. Дефант А.
Doodson A.— см. Дудсон А.
Duell B. and G.— см. Дюлл Б. и Г.

Ekman V.— см. Экман В.

Faraday M.— см. Фарадэй М.
Fjeldstad J.— см. Фьелдстад
Fleming J. — см. Флеминг Дж.

Gorczinski L.— см. Горчинский Л.
Gray J.— см. Грэй Дж.
Green G.— см. Грин Дж.

Helmholtz H. v.— см. Гельмгольц Г.
Hidaka K.— см. Хидака К.

Jacobsen J.— см. Якобсен И.
Jeffreys H. sir — см. Джеффрис Г.
Jerlov N.— см. Ерлов (Йерлов Н.)

Kármán T. — см. Карман Т.
Kelvin W. lord — см. Кельвин В.
Koncek N. — см. Кончек Н.

Langevin P.— см. Ланжевен П.
Lagrange J. — см. Лагранж Ж.
Lamb H. sir — см. Лэмб Г.
Laplace P. S. — см. Лаплас П.

Malmgren F. — см. Мальмгрен Ф.
Marcelin A. — см. Марселен А.
Maxwell J. — см. Максвелл Дж.
Mie G. — см. Ми Г.
Munk W. — см. Мунк В:

Nansen F. — см. Нансен Ф.
Ness N. — см. Несс Н.

Palmen E. — см. Пальмен Е.
Planck M.— см. Планк М.
Prandtl L.— см. Прандтль Л.
Proudman J. — см. Праудмен Дж.

Raman C. sir — см. Раман Ч.
Ramanathan K — см. Раманатан К.
Rayleigh W. lord — см. Рэлей Дж.
Richardson L. — см. Ричардсон Л.
Rideal E. — см. Райдил Е.
Rossby C. — см. Россби К.

Sandström J.— см. Сандстрём И.
Simpson J.— см. Симпсон Дж.
Smoluchowski M. de — см. Смолуховский М.
Sverdrup H. — см. Свердруп Г.
Stefan — см. Стефан
Stokes G. sir — см. Стокс Дж.
Stommel H. — см. Стоммел Г.
Störmer C.— см. Штёрмер К.
Sunder Lal — см. Сундер Лал
Susruta — см. Сузрута

Tannehill I. — см. Танхилл И.
Taylor G. — см. Тэйлор Дж.
Thomson W. — см. Томсон В. (Кельвин В.)
Tollmien W. — см. Толмин В.

Wilcox N. — см. Уилкокс Н.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

(римские цифры — номера глав книги; арабские цифры — номера параграфов)

Абсолютно черное тело VI, 2
Авогадро число VIII, 1
Автоколебательные системы V, 15—17, 20, 22, 25
Адвекция I, 9, 17; V, 2, 3, 24
Адиабатическая сжимаемость VII, 7
Актинограф Савинова IV, 1
Актинометр Михельсона IV, 1
Акула IX, 7, 19
Акустические волны VII, 1, 12
Акустическое излучение плоской стенки VII, 4
— — пульсирующего шара VII, 3
— измерение глубин VII, 10, 11
— сопротивление среды VII, 2, 12
Алмаз VIII, 3
Амплитуда приливной волны II, 4
— ветровых волн в океане III, 21
— — — на мелководном озере III, 24, 25
— — — на море произвольной глубины III, 28
Амфидромия II, 11, 14
Анемоинтегратор Шулейкина I, 12
Аномалии воды VIII, 1
— давления атмосферы V, 4, 15, 17; X, 15
— динамических глубин I, 7
— температур V, 2—19
Антициклоны V, 22
Асимметрия вод и суши на Земле V, 7, 24
— рассеяния света VI, 4
— головы дельфина IX, 12
Атаки угол IX, 4, 8
Атмосфера эквивалентная VI, 7
Атомный вес VIII, 2
Бабье лето V, 17
Баланс тепловой внешней IV, 1—5, 11
— — полный IV, 12
— энергии волн III, 16, 20, 21
Бар I, 2, 15
Барашки (беляки) на волнах III, 10
Бароклинный слой в неоднородном море I, 22
Баронивелир Шулейкина III, 37
Бассейн штормовой в Кацивели III, 11, 15—20
Батиметрическая карта I, 15
Береговой эффект в поле электрических токов X, 9, 14
— — полярных сияний X, 14
— — в движениях ионосферы X, 14
Бета-эффект I, 21
Биения III, 15, 16; V, 23—25
Блики на волнах под солнцем III, 36; VIII, 14
Больцмана константа VIII, 1
Броуновское движение VI, 4
Бьеркнеса метод вычисления скоростей течений I, 7, 22
Вековые изменения магнитного склонения X, 13
Вектор Умова (поток энергии) III, 6, 22; VI, 3
Вертикальная составляющая напряженности магнитного поля X, 2
Вертикальное распределение скоростей ветра V, 5, 14
— — — течений I, 8—10
— — температур воздуха V, 14
Вертушка морская I, 7, 11, 14
Весеннее похолодание V, 17
Веслоногие рачки IX, 16
Ветры сгонные и нагонные I, 10; III, 35
Винтовое движение IX, 10
Виртуальная (турбулентная) вязкость I, 1, 8, 19, 25; III, 19; VII, 5
Вихревая нить I, 6
Вихревые токи в море X, 9
Вихри с горизонтальными осями I, 13
Вихрь: анемогенный, планетогенный, топогенный I, 14
— трехмерный VI, 4
Влажный дефицит IV, 4, 5; VIII, 7, 8
Влияние волн на окраску моря VI, 9
— формы береговой линии на скорости ветра V, 10—12
— — — — на полярные сияния X, 14
Внешняя динамика рыбы IX, 1
Внутренний диффузный свет VI, 7—10
Внутренняя динамика рыбы IX, 6
Волновое течение Стокса III, 35
Водород тяжелый VIII, 2
Воздействие материков на океан V, 24
Волномерный треугольник Лоидиса III, 36
Волномеры оптические III, 36
Волны акустические VII, 1
— ветровые III, 1—37
— внутренние II, 17
— вынужденные II, 2
— двумерные III, 1—30
— заостренные у вершин III, 9—12, 18
— квазистатические II, 17
— отраженные II, 4, 11
— падающие II, 4
— плоские VII, 1
— продольные VII, 1—12
— проходящие II, 4
— развивающиеся III, 22—26
— разрушающиеся III, 11
— распространяющиеся II, 3, 10—12
— свободные II, 2
— стоячие II, 8, 9, 11; V, 16—21
— температурные IV, 7, 11
— термобарические V, 15—22
— трехмерные III, 31
— трохоидальные III, 1—6

— уединенные II, 15, 16
— установившиеся III, 20—26
Второе гармоническое колебание II, 5,6; III, 11, 12
Вынужденные колебания воздушных масс V, 23
— — земной оси V, 7
— — корабля III, 37
— — температуры V, 20—22
Высота волн III, 13—18, 20—28, 32—34
Высоты динамические I, 7
Высшие гармонические колебания II, 6, 10; III, 11, 12, ; V, 14, 20
Выхолаживание воздушных масс, V, 17, 22

Гашение волн пленками VIII, 10—16
Гелиостат VI, 10
Гидродинамический резонанс II, 6; III, 37; V, 23
Гидродинамические качества морских животных IX, 7, 8, 16
Гидрол VIII, 4
Гидрооптические измерения VI, 10
Гидрофон VII, 14, 19
Глубина динамическая I, 7
— трения I, 9, 10, 14, 18
Годовой ход давления V, 7
— — солнечной радиации IV, 1
— — температуры воды IV, 7, 12; V, 24
Голос моря VII, 12
Горизонтали динамические I, 7
Горизонтальная составляющая напряженности магнитного поля X, 2
Горные хребты, как преграды для тепловых потоков V, 13
Градиент аномалий температуры V, 2—4, 8—17, 22
— влажности IV, 5
— давления I, 1, 9, 10; V, 3—5, 8—17, 22
— концентрация VIII, 9
— скорости I, 1, 8; IV, 4, 5
Графит VIII, 3
Групповая скорость волн III, 4, 6, 16, 23, 25

Движитель рыбы IX, 1—4, 6, 17
Двумерные волны II, 2—30
Де-Кудра эффект X, 4
Децибар I, 2
Дивергенция потоков I, 4, 13
Диск гидрооптический (Коцебу — Секки) VI, 10
Диффузия паров воды VIII, 7, 8
— плотности 1, 22
Дельфин IX, 9—12, 16, 18
Дигидрол VIII, 4
Динамика ветровых волн III, 13—34
— мышечных сокращений IX, 6
Диполи магнитные IX, 14
— молекулярные VIII, 4
Диполь равномерно намагниченный X, 3, 4—6
Дифракция волн VI, 3, 4
Диэлектрическая постоянная воды VIII, 4
Длина волн ветровых III, 2, 3, 8, 15, 18, 26, 28, 33, 37
— — звуковых VII, 3, 4
— — критическая III, 13
— — световых VI, 2—9
Дрейф ледяных полей I, 24
— поверхностных пленок VIII, 16

Естественный синоптический период V, 22
— — район V, 22

Жгутиковые IX, 16
Журавлиный клин в полете IX, 14

Законы подобия I, 25
Замерзание морской воды VIII, 9
Зарождение ветровых волн III, 13
Заря инфракрасная IV, 1
Заряд электрона VIII, 4
Затухание волн III, 15, 16, 27
— колебаний воздушных масс V, 23
— — корабля III, 37
— реверберации VII, 6
Звуки рыб VII, 13
Звуковой канал в море VII, 9
Звуковые лучи 1-го и 2-го рода VII, 8
Землетрясения подводные II, 15, 16
Земной оси колебания V, 7
Зеркальное изображение в кинематике волн III, 3
Зимний тепловой режим Антарктиды V, 27
Змеевидное движение IX, 2
Зона молчания VII, 8
Зыбь мертвая III, 21, 32, 34
— штормовая III, 21, 32, 34

Изобары V, 6, 7, 17; X, 15
Изаномалы температуры V, 2—17, 19—22, 24
Избыточные массы воздуха V, 6, 7
Избирательное отражение света VI, 2, 8, 9
— поглощение — VI, 2, 7, 8, 9, 10
Извержения подводные II, 15
Излучение инфракрасное IV, 2, 5; V, 2, 8, 15
Изменения знака связей X, 17
— параметра Кориолиса I, 21
— фазовой скорости волн II, 6; III, 11, 12
Измерение крутизны волн по бликам III, 36
Изобары I, 7; V, 1, 4, 6, 7, 17, 23
Изобаты динамические I, 2, 15
Изогоны волновые III, 36
— магнитные X, 2—5
Изоклины волновые III, 36
— магнитные X, 2—5, 6, 12, 13
Изопикны I, 2
Изоплеты IV, 1; V, 2—16
Изостеры I, 7
Изотермы IV, 7; V, 1, 2, 13, 24
Изотопы VIII, 2
Изоунды Брунса III, 37
Импеданц акустический VII, 3, 4
Индикатрисы излучения VII, 11
— рассеяния VI, 4—6, 10
Инкремент логарифмический IX, 3
Ионосферных неоднородностей движение X, 14
Интерференция волн II, 9; III, 4, 15, 16
Инфразвуковые волны VII, 12
Испарение воды и льда IV, 4, 11, 12; VIII, 6—8
Испарители IV, 4, 5

Камбала IX, 7
Каналовая теория приливов II, 2, 4, 5, 7
Карта динамическая I, 7, 15
— изоплет V, 2—16
— котидальная II, 11
Каустика в неоднородном море VII, 8
Качество аэродинамическое IX, 8
Качка корабля III, 31, 32, 37
Квазилинейное уравнение поля ветровых волн III, 22
Кварц VII, 10, 11; VIII, 3
Кинематика волн III, 2, 3, 7—12
— дельфина IX, 9—13
— мышечных сокращений рыб IX, 5
— течений I, 4
Кинематическая вязкость I, 10, 25; III, 19—22
Кинетическая теория вещества VIII, 6
— — испарения VIII, 6
Киты IX, 9, 16
Климат геологических эпох V, 26
Климата морского особенности IV, 7; V, 1—14
— изменения в наше время V, 25; X, 15
Колебания инфразвуковые VII, 12
— корабля на волне III, 31, 32, 37
— поперечные VIII, 5
— продольные VII, 1—19; VIII, 5
— свободные II, 11
— скоростей ветра V, 23
— — течений I, 8, 17; II, 12; V, 24
Количества движения перенос I, 25
Колмогорова — Обухова закон «2/3, 4/3, 5/3» IV, 8, 10
Конвекция I, 9, 17; IV, 5; V, 2, 3, 20
Конвергенция I, 13
Константа Кармана I, 25; III, 19
— Кюри VII, 11
— Планка VIII, 1, 2
— Стефана — Больцмана IV, 2
Кориолисова сила I, 1, 2, 7—18; II, 12—14; V, 2—19; X, 4, 16
Коэффициент адиабатической сжимаемости VII, 8
— виртуальной вязкости см. турбулентной вязкости
— воздействия III, 14—17, 20, 21, 26—28
— избирательного поглощения VI, 2, 7—9
— изотермической сжимаемости VII, 8
— отражения VI, 9
— перемешивания VI, 6—10; V, 1—3, 8—11
— поверхностного трения I, 1, 8, 10—17, 24
— полезного действия движителя рыбы IX, 6, 17
— полезного действия рыбы, полный IX, 17
— полноты поперечного сечения IX, 7, 16
— рассеяния света VI, 3—5, 8, 9
— растекания VIII, 11
— теплопроводности IV, 5—10, 11, 13; V, 2—5, 8, 13,
— температуропроводности IV, 6—10, 11, 13
— турбулентной вязкости I, 1, 2, 8—17; III, 19—22; V, 3, 4; VII, 8
— Шези III, 16
Кремнезем VIII, 3
Критерий для вихрей с горизонтальными осями I, 13
Критерий мелководности (динамический) III, 28
Крупные взвеси в воде VI, 4—6
Крутизна волн III, 8—11, 17, 20, 21, 26, 28, 32—34, 36
Кубик фотометрический VI, 10

Лагранжа уравнения I, 5
Лапласа уравнение III, 1; V, 14
— формула VIII, 10
Лед I, 18; IV, 11— 13; V, 25; VIII, 3—6, 9
Ледниковые эпохи V, 26
Летучие рыбы IX, 8
Логарифмический декремент VIII, 13
— инкремент IX, 3
Локально-изотропная турбулентность IV, 8
Ломоносова течение I, 23
Лучеиспускание IV, 2, 5; V, 2, 8, 13

Магнетострикция VII, 11
Магнитное наклонение X, 2, 5
— склонение X, 2, 5, 6, 12, 13
— поле VI, 3
— — Земли X, 1—6, 12, 13, 17
Магнитные бури X, 8, 15, 17
— меридианы X, 5, 6
Магнитный момент Земли X, 3, 4—6
Макрель IX, 6, 7
Макроволны VIII, 5
Максвелла уравнения VI, 4; X, 10
Максимальные скорости рыб, дельфинов, китов IX, 16
Малая вода II, 2, 7, 11, 12
Маниха II, 6
Мареограф II, 14
Масса присоединенная VII, 3, 4; IX, 7
Маятник Фуко I, 8; V, 17, 18
Маятниковая единица времени I, 8; V, 23
Межледниковые эпохи V, 26
Мелководные моря и озера III, 24, 25
Микробарограф Шулейкина III, 37
Микроволны VIII, 5
Моделирование волн цунами II, 16
— поля V, 10—12; X, 9
Молекула воды VIII, 1
Молекулярные поля VIII, 4
Момент количества движения волн III, 18
Моретрясения II, 15, 16
Морозы небывалые V, 17, 22
Морского воздуха вторжения V, 22
Морской лед I, 18; IV, 11—13; V, 25; VIII, 9
Мультитермограф I, 12
Муссон зимний V, 1, 3—8, 13
— летний V, 1, 9, 23
Муссона линии тока (модель) V, 5, 8
— тепловой дебит V, 2, 8, 9, 17

Наводнения и их причины III, 35
Навье — Стокса уравнения I, 8; V, 5, 23
Нагоны вод I, 10, 12, 14, 24; III, 35
Наибольшая высота волн 5% обеспеченности III, 21
Наклон поверхности моря I, 9, 14
Напряженность муссонного поля V, 10—12, 22
— электрического поля X, 8—11
Нарастание волн ветровых III, 13—26, 28, 33, 34

Нарастание обертонов и понижение основных волн III, 11
— волн прилива II, 1
— — цунами II, 15, 16
Недогрев воздушных масс, V, 15—19, 22
Нелинейное уравнение волн II, 6; III, 11, 12
Неодевон V, 26
Неравномерное поле ветра I, 16, 17—19
Нулевая поверхность I, 22

Обострение контрастов между океанической и материковой областью атмосферы X, 15
Обработка динамическая I, 7
Обратный метр VI, 2, 3, 7
Одномерное распределение молекул VIII, 5
«Око» тропического урагана III, 27
Оптический резонанс VI, 4
Орбиты частиц воды на волне III, 2, 3, 7, 9, 10
— — воздуха в поле термобарических сейш V, 18, 19
Освещенность поверхности моря VI, 4
— на глубинах VI, 5—7, 10
Остроконечный берег V, 10—12
Относительный влажный дефицит VIII, 7
Отражение акустических волн VII, 8
— света VI, 1, 4, 8

Пеламида IX, 7
Перегрев воздушных масс V, 15—19, 22
Перенос тепла вдоль меридиана V, 1—17
— — с моря на материк V, 1—13
Перестройка полей V, 15—17
— поля плотностей I, 22
Переход двумерных волн в трехмерные и снова в двумерные III, 34
Перспектометр Иванова III, 36
Пикообразный гребень цунами II, 16
Пикнометр ледовый Шулейкина IV. 11
Пиргелиометр Онгстрема IV, 1
Плотномер-солемер Шулейкина I, 12
Поверхностно-активные пленки VIII, 10—16
Поверхностное натяжение VIII, 10—16
Поверхность изобарическая I, 2, 7, 9
— изостерическая I, 2, 17
— уровня I, 2; III, 2, 9
— эквипотенциальная 1, 2; III, 2, 9; V, 10
Поворотное ускорение I, 1
Поглощение акустических волн VII, 5
— света VI, 2, 4, 6—9
— энергии внутренним трением в волнах III, 16, 19
— — поверхностными пленками VIII, 13, 14
Подход волн к берегу II, 4; III, 30
Полет рыбы IX, 8
— стаи журавлей IX, 14
Полная вода II, 2, 3, 8, 10, 14, 15
Полусуточная составляющая ветра V, 19
Полюс холода V, 2, 13, 27
Полюсов Земли движение V, 7
Поляризатор VI, 1
Поляризация света VI, 3, 4, 10
Поляриметр Неуймина—Кайгородова VI, 10
Полярность молекул воды VIII, 4
Поляры аэродинамические IX, 4, 8
Пондеромоторные силы в стае рыб IX, 14, 15, 19
Поплавки гидрологические I, 11; II, 8
Потенциал внутренних сил II, 1
Потенциометр электронный IV, 1
Поток энергии волн III, 6, 20—26
— — света VI, 4—6
Потоки результирующие I, 19; VI, 5
— тепла V, 2—9
Предельная крутизна волн III, 10, 33
Прилив полусуточный и суточный II, 2, 10
— индуцированный и собственный II, 10
Принцип Гельмгольца I, 6
— д'Аламбера I, 2, 5, 9, 17
Присоединенная масса VII, 3, 4; IX, 7
Приход тепла IV, 1; V, 8, 9
Проекции линий тока (модель) V, 8
Прозрачность атмосферы IV, 1
— морской воды VI, 2, 6, 9, 10
Промежуточный холодный слой IV, 8
Проникание света на глубины VI, 6—10
Противотечения экваториальные I, 18, 23
Профиль волн II, 4, 5, 6; III, 8—12
— динамический I, 7
— дна II, 4, 9; X, 9
Психрометр — зонд IV, 5
Пульсация скоростей I, 25; III, 7—10; IV, 6—10
Путь перемешивания I, 25
Пьезоэлектрический эффект VII, 11
Пятые гармонические колебания скоростей зональных потоков V, 20

Радиационный баланс Земли IV, 5
Радиация диффузная IV, 1, 2
— отраженная IV, 3; VI, 1, 9
— полная IV, 4
— эффективная IV, 2; V,1, 8, 9, 13
Разрез по меридиану 30° зап. долготы I, 23; V, 27
Распределение молекул VIII, 3
— скоростей молекул VIII, 6
— давления над волнами III, 14, 17
— рассола в толще льда VIII, 9
— взвешенных частиц VI, 4
Распределение Гаусса III, 32; VI, 4
— Максвелла VIII, 6
— Рэлея III, 32
Рассеяние звука VII, 6
— света VI, 3—10
Растекание жидкостей по поверхности воды VIII, 10, 15, 16
Расходимость потоков см. Дивергенция
Реверберация VII, 6
Режим Земли, лишенной океанов V, 2, 27
Рейнольдса уравнения IV, 6
Рейнольдсовы числа для морских животных IX, 16, 19
Рентгенограммы воды VIII, 3
Рефракция звука VII, 8
— волн на отмели III, 30
Ритмы погоды V, 20, 22
Роль тангенциальной силы при развитии волн III, 29
Рыскание IV, 1; IX, 6, 10

Самовозбуждающиеся колебания V, 15—17, 22, 25
Световой режим глубин VI, 4—7; 10

Свободные колебания земной оси V, 7
— — корабля III, 37
— — температур V, 20, 22
Сгоны вод I, 10, 12, 14
Сезонные перераспределения воздуха V, 5—7
Сейшевые функции II, 9, 10
Сейши II, 8—11
— внутренние II, 17
— термобарические V, 15—22
Серое излучение IV, 2
Символический метод I, 25, VII, 3
Скин-эффект в море X, 9, 14
Склонение магнитное X, 2, 5, 6, 12, 13
Слои *E*, *E*сп, *F* в ионосфере X, 14
Скорости миграции рыб, дельфинов IX, 18
Скорость ветра в муссонном поле V, 5, 8, 11—14, 19, 20, 23
— звука VII, 3
— молекул воды VIII, 6
— растекания пленок VIII, 15
— сноса пленок ветром VIII, 16
Сложное рассеяние света VI, 5, 6, 10
Слой поверхностный I, 2, 10, 17
— придонный I, 1, 2, 10
— трения (пограничный) IX, 19
Соленоиды I, 2, 7
Соленомер Лопатникова I, 12
Солености измерения I, 12
Соленость морской воды I, 1, 2, 12; VIII, 9; X, 7
Солнечные циклы X, 15, 16, 17
Солнечный ветер X, 15—17
Соляриграф морской Шулейкина IV, 1
Спектрофотометр VI, 2, 9
Спектры волнения III, 33
— света, исходящего из моря VI, 8
— — на глубинах VI, 7
Спутники и ракеты на службе геофизике X, 17
Ставрида IX, 7
Статика моря I, 3
Статистика неправильных волн III, 32—34
Статистическая теория турбулентности IV, 8
Статоскоп III, 37
Стационарное распределение энергии света VI, 5, 6
Строй журавлиный (строй уступа) IX, 14, 15
Струя вторгающаяся I, 20; IV, 7
Суммы тепла IV, 1, 12; V, 8, 17
Суточный ход температур воды IV, 13,
— — скорости ветра V, 19, 23
Сферический вибратор VII, 3
Сходимость потоков — см. Конвергенция
Счетчик периодов волн III, 36

Тайфуны, тропические ураганы III, 27; V, 10
Твердая волна IX, 1—4, 9
Теллурические токи в море X, 8, 10, 11
Тень Земли IV, 1
Тепловой баланс моря IV, 12; V, 8, 9
Тепловые колебательные системы V, 15—25
— машины в атмосфере V, 1, 14, 15, 20, 22
Теплообмен между морем и атмосферой IV, 2—7, 11, 12; V, 2, 8, 9
Теплопроводность — см. коэффициент теплопроводности
Теплосодержание истинное IV, 12
Тетраэдрическое строение VIII, 3
Течение градиентное 1, 9
— дрейфовое I, 8, 17
— конвекционное I, 9, 17
— Куро-Сио I, 21
— Гольфстрим I, 15, 20; V, 24, 25, 26
— Ломоносова I, 23
— Северо-Атлантическое I, 15, 20; V, 24, 25
Траектория полюса Земли V, 7
Трение боковое I, 8, 19, 20
Трехмерное распределение молекул VIII, 5
Трехмерные волны III, 31
Тригидрол VIII, 3
Тридимит VIII, 3
Тсунами — см. Цунами
Турбулентная вязкость I, 1, 8, 19, 25; III, 19; VII, 5
— теплопроводность IV, 6 — 10; V, 1—4, 14
Турбулентное перемешивание IV, 6—10; V, 1—3,8—12
— трение I, 25; III, 19
Турбулизация вод I, 25; III, 19; IV, 6—10
Турбулиметры МГУ IV, 9
Тэйлора теорема о потоке в поле Кориолисовой силы I, 20
Тяжелый водород VIII, 2
— кислород VIII, 2

Угол атаки IX, 4, 8
Угорь IX, 2, 6
Удельная мощность IX, 16, 18
Удельный объем I, 2, 6, 7
Узловых линий вращение при сейшах, V, 16, 17
Уединенная волна II, 15, 16
Уклон дна критический I, 14, 15
Ультразвуковой лот Ланжевена VII, 10, 11
Уменьшение орбит частиц на глубинах III, 2, 9
Упаковка молекул VIII, 3
Ураганы III, 27; V, 10, 12
Условный коэффициент теплопроводности V, 2, 8, 9, 13
Установившееся волнение III, 21, 23, 25, 26
— распределение энергии VI, 5, 6, 10
Устойчивость водных масс I, 4

Федорова — Ви́зе закон акцентации X, 15
Флуктуации плотности VI, 3
Флуоресценция морской воды VI, 8
Фотометр морской Тимофеевой VI, 10

Хвостовой плавник IX, 4, 8, 9
Химический состав морской воды VIII, 9; X, 7
Холла эффект X, 4

Цветность моря VI, 8—10
Циклическое потоки в Атлантическом океане V, 24
Циклоны V, 22
— тропические III, 27
Циркуляционная теория течений I, 6, 7

Циркуляция I, 6, 7
— зональная и межзональная V, 1, 14, 20
— муссонная V, 2—22, 23
Цунами II, 15, 16

Чисто-материковые условия V, 2, 13
— океанические — V, 24
Час котидальный II, 7, 12
Частота динамических изобат I, 2
— колебаний голоса моря VII, 12
— собственных колебаний системы V, 15, 18—22, 25

Штормы муссонного происхождения зимние V, 10—12
— — — летние V, 23
Шулейкина теорема о длине и крутизне волн III, 18

Эвапорометры — см. Испарители
Эйлера уравнения I, 5; V,7
Экваториальные противотечения I, 18, 23
Эквивалентные токи X, 6
Электрическая активность X, 8
Электрические токи в море потенциальные X, 9
— — — вихревые X, 8, 9
Электрический метод измерения скоростей течений /ЭМИТ/ X, 10
Электрическое поле VI, 2
— — в море X, 8—11
Электромагнитные явления у берегов X, 14, 15
Электропроводность морской воды X, 7, 8—11
Элементы земного магнитного поля X, 2—5
Энергетика морских животных IX, 16—18
Энергия акустических волн VII, 2, 3
— волн прилива II, 3
— ветровых волн и зыби III, 5, 6, 14, 17, 18
— отраженного света VI, 1
— преломленного света VI, 1
— тепловая, отнимаемая у моря воздухом IV, 5, 11, 12; V, 2, 8
Эокембрий V, 21
Эпохи ледниковые и межледниковые V, 26
Эффективное значение избыточного давления VII, 2
— излучение IV, 2; V, 2, 3, 8, 13
Эхолотирование VII, 10, 11

Юнга модуль для льда VIII, 5
Юра верхняя и нижняя (изменения черепов ихтиозавров) IX, 13

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие 3

Глава первая

Теория морских течений, связанных с ветром и конвекционных

§ 1. Основные силы, вызывающие течения и сопутствующие им 7
§ 2. Силовые поля и распределение водных масс 10
§ 3. Некоторые вопросы статики моря 13
§ 4. Некоторые вопросы кинематики течений 15
§ 5. Основные уравнения гидродинамики 17
§ 6. Понятие о циркуляции 18
§ 7. Применение теории циркуляции к исследованию установившихся морских течений 22
§ 8. Возникновение и распространение морских течений при участии сил трения. Теория В. Экмана 27
§ 9. Теория градиентных и конвекционных течений 38
§ 10. Теория прибрежной циркуляции В. Экмана. Сгоны и нагоны вод 46
§ 11. Изучение дрейфовых течений в природных условиях 55
§ 12. Методика исследования сгонно-нагонного режима в природных условиях . 58
§ 13. Возникновение вихрей с горизонтальными осями над изломом профиля дна 70
§ 14. Горизонтальная циркуляция в морских течениях. Влияние рельефа дна . . 75
§ 15. Применение обобщенной теории В. Экмана к вычислению элементов течений в некоторых конкретных случаях 84
§ 16. Морские течения при неравномерном поле ветра 92
§ 17. Дрейфовые и конвекционные течения в муссонном поле 97
§ 18. Теория экваториальных противотечений 102
§ 19. Полные потоки в океане при преобладающем влиянии бокового трения . . 108
§ 20. Теория вторгающейся струи в применении к Гольфстриму 114
§ 21. Влияние изменений параметра Кориолиса с широтой на распределение скоростей течений в океане 118
§ 22. Бароклинный слой в неоднородном море и течения, возбуждаемые в нем ветром 122
§ 23. Течение Ломоносова 129
§ 24. Дрейф ледяных полей 132
§ 25. О турбулентной вязкости воды и законах подобия 147

Глава вторая

Теория приливных и других длинных волн

§ 1. Возникновение приливной волны 154
§ 2. «Каналовая» теория приливов 158
§ 3. Длина приливной волны и ее энергия 165
§ 4. Движение приливной волны в канале переменного сечения 167
§ 5. Искажение профиля приливной волны при ее движении на мелководье (по теории Дж. Эри) 174
§ 6. Отличие действительной картины распространения приливной волны на мелководье от той, какую описывает теория Эри 177
§ 7. Вычисление элементов приливных течений по «каналовой» теории 179
§ 8. Более строгий анализ двумерного распространения приливной волны. Возникновение сейш 182
§ 9. Сейши в морях со сложным рельефом дна 187
§ 10. Приливные явления в окраинных морях 191
§ 11. Влияние вращения Земли на приливные явления 194
§ 12. Влияние трения на приливы 200
§ 13. Определение элементов прилива по скоростям приливных течений 202
§ 14. Непосредственное определение элементов приливной волны в открытом море 205

§ 15. Морские волны, вызванные землетрясениями 208
§ 16. Некоторые теоретические и экспериментальные исследования по проблеме цунами. 212
§ 17. Внутренние волны 221

Глава третья

Кинематика, динамика и расчет ветровых волн

§ 1. Общие соображения 226
§ 2. Вывод классических соотношений для глубокого моря 226
§ 3. Вывод классических соотношений для мелководного моря 231
§ 4. Групповая скорость волн 236
§ 5. Энергия волн 239
§ 6. Перенос энергии волнами 241
§ 7. Уточнение кинематики морских волн 243
§ 8. Профиль и основные параметры морских волн 244
§ 9. Физические причины заострения вершин волн конечной крутизны 249
§ 10. Кинематика предельно крутых волн 257
§ 11. Разрушение волн под действием мелководья 262
§ 12. Аналитическая проверка гипотезы о переменной фазовой скорости волн на мелководье 272
§ 13. Зарождение ветровых волн на гладкой поверхности воды 277
§ 14. Некоторые гипотезы о нарастании энергии волн 279
§ 15. Постановка опытов в штормовом бассейне 281
§ 16. Баланс энергии волн и нарастание их высоты 286
§ 17. Теория питания волн энергией ветра 292
§ 18. Теория нарастания длины волн под действием ветра 299
§ 19. Вычисление потерь энергии волн на турбулентную вязкость 304
§ 20. Постановка задачи о расчете элементов ветровых волн 307
§ 21. Анализ измерений наибольших ветровых волн в океане 309
§ 22. Дифференциальное уравнение поля ветровых волн в океане 311
§ 23. Точный интеграл уравнения поля ветровых волн в океане и его физическое значение 312
§ 24. Развитие ветровых волн на мелководном море на большом расстоянии от наветренного берега 316
§ 25. Поле ветровых волн на мелководном море 318
§ 26. Построение рабочих диаграмм для расчета океанских волн 321
§ 27. Расчет затухания океанских волн при уменьшении скорости ветра и при изменении его направления. Волны в системе тропических ураганов. . . 328
§ 28. Расчет ветровых волн на море произвольной глубины 334
§ 29. Роль тангенциальной силы воздействия ветра в приращении энергии волн 340
§ 30. Рефракция волн на материковой отмели 342
§ 31. О трехмерных волнах в море 353
§ 32. Основные статистические характеристики неправильного волнения 355
§ 33. Сравнение теории с результатами инструментальных измерений в океане и на Черном море 358
§ 34. Законность применения основных принципов механики к неправильному волнению 366
§ 35. Роль «волнового» течения при сгонно-нагонных явлениях 371
§ 36. Некоторые методы измерения элементов волн, применяемые на береговых станциях 379
§ 37. Регистрация профиля волн на корабле. Некоторые особенности движения корабля на волне, важные в океанографическом отношении 392

Глава четвертая

Термика моря

§ 1. Приход тепла. Прямая солнечная радиация и диффузная радиация небесного свода 406
§ 2. Потери тепла на эффективное излучение 418
§ 3. Радиация, отраженная от поверхности океана 423
§ 4. Потери тепла на испарение морской воды 424
§ 5. Теплообмен между морем и атмосферой 430
§ 6. Турбулентный обмен внутри водных масс 435
§ 7. Некоторые косвенные методы определения коэффициента турбулентного обмена тепла 440
§ 8. Понятие о статистической теории турбулентных процессов 452
§ 9. Инструментальное изучение турбулентности в море 456
§ 10. Некоторые результаты исследований турбулентности в море 459

§ 11. Термика ледяного покрова 462
§ 12. Полный тепловой баланс моря 481
§ 13. Вычисление суточного хода температуры поверхности моря 495

Глава пятая

О физических корнях климата и погоды

§ 1. Некоторые общие соображения 500
§ 2. Опыт приближенного расчета тепловых потоков с океана на материк . . . 507
§ 3. Тепловые противоречия между океаном и материком как основа для формирования муссонного поля 542
§ 4. Основное соотношение между элементами температурного и барического наземного поля, приближенно соблюдающееся в муссонах 545
§ 5. Первоначальная схема распределения скоростей ветра по вертикали в муссонном поле 551
§ 6. Сезонное перераспределение избыточных масс воздуха над океаном и над материками 554
§ 7. Колебания земной оси вращения, вызванные сезонным перераспределением избыточных масс воздуха 559
§ 8. Связь между элементами зимнего муссонного поля и тепловым балансом моря 566
§ 9. Особенности летнего муссона 572
§ 10. Влияние формы береговой линии на напряженность муссонного поля 574
§ 11. Уточненное решение задачи для эллиптического острова и параболического мыса 580
§ 12. Уточненное решение задачи для произвольной формы береговой линии . . . 586
§ 13. Зимнее температурное поле над морем и над материком при переменном коэффициенте условной теплопроводности 590
§ 14. Действительное распределение скоростей по вертикали в муссонном поле. 598
§ 15. Термобарические сейши в атмосфере 605
§ 16. Картина температурного поля во втором приближении 615
§ 17. Иные формы термобарических сейш в атмосфере 621
§ 18. Некоторые особенности колебаний с большим периодом во вращающейся системе 633
§ 19. О скоростях ветра в системе термобарических сейш 636
§ 20. Самовозбуждающиеся термобарические колебания в лабораторных условиях и сопоставление их с наблюдениями в природе. 640
§ 21. Возникновение термобарических сейш в нижней тропосфере при распространении длинных температурных и барических волн на высоте 500-миллибарной поверхности 646
§ 22. О физических корнях погоды 647
§ 23. Гидродинамический резонанс в потоках летнего муссона как причина возникновения штормов особого рода 649
§ 24. Колебания температур поверхностной воды в циклических потоках Атлантики как результат воздействия материков на океан 658
§ 25. Еще одна возможная причина изменения климата в наше время 669
§ 26. Возможные причины изменений климата в геологические эпохи 674
§ 27. Перспективы новых исследований 678

Глава шестая

Оптика моря

§ 1. Освещенность поверхности моря. Оптические явления, происходящие на поверхности моря 679
§ 2. Основные оптические явления в морской воде. Избирательное поглощение света водой 682
§ 3. Молекулярное рассеяние света 686
§ 4. Рассеяние света крупными включениями 692
§ 5. Суммарное действие множества крупных частиц. Оптика сильно рассеивающей среды 713
§ 6. Исследование сложного рассеяния света 725
§ 7. Суммарное действие поглощения и рассеяния при проникании света в глубины моря. Световой режим глубин 732
§ 8. Происхождение цветности моря 739
§ 9. Изменение окраски моря под действием взмученных крупных частиц, под действием флуоресценции воды и под непосредственным влиянием волнения . . 743
§ 10. Некоторые методы и результаты гидрооптических измерений 747

Глава седьмая

Акустика моря

§ 1. Распространение акустических волн в однородной среде 758
§ 2. Энергия акустических волн. Акустическое сопротивление среды 762
§ 3. Акустическое излучение пульсирующего шара 765
§ 4. Акустическое излучение колеблющейся плоской стенки 769
§ 5. Распространение акустических волн в поглощающей среде 773
§ 6. Рассеяние акустических волн воздушными пузырьками и планктоном. Явление реверберации в море 776
§ 7. О скорости звука 782
§ 8. Распространение звука в неоднородной морской воде 787
§ 9. Поведение акустических волн у поверхности раздела двух сред 796
§ 10. Основы эхолотирования и гидролокации. 799
§ 11. Пьезоэлектрические и магнетострикционные явления, используемые в гидроакустике. 800
§ 12. О голосе моря 804
§ 13. О звуках, издаваемых рыбами 809

Глава восьмая

Молекулярная физика моря

§ 1. Молекула воды 811
§ 2. Роль изотопов кислорода и водорода 816
§ 3. Стереометрия воды и льда 820
§ 4. Молекулярные электрические поля и их влияние на физические характеристики воды 830
§ 5. Теория теплопроводности льда 837
§ 6. Кинетическая теория испарения воды и льда 844
§ 7. Кинетика испарения, управляемого диффузией, в некоторых конкретных случаях 850
§ 8. Испарение с поверхности моря под действием ветра 857
§ 9. Замерзание морской воды 860
§ 10. Поверхностноактивные пленки на море 864
§ 11. Некоторые свойства поверхностных пленок 870
§ 12. Критика гипотез, предлагавшихся для объяснения гашения волн маслом 876
§ 13. Поглощение энергии в поверхностной пленке 879
§ 14. Гашение мелких волн 884
§ 15. Скорость растекания пленок на поверхности воды 887
§ 16. Снос пленок под действием ветра 891

Глава девятая

Биологическая физика моря

§ 1. Внешняя кинематика рыбы. Общие соображения 893
§ 2. Движение змеевидного типа: твердая волна с постоянной амплитудой . . 894
§ 3. Движение, характерное для большинства рыб: твердая волна с нарастающей амплитудой. Упрощенный анализ 898
§ 4. Более строгий анализ возрастающей волны. Силы и моменты, действующие на рыбу 903
§ 5. Кинематика мышечных сокращений 910
§ 6. Динамика мышечных сокращений. Вычисление работы и коэффициента полезного действия движителя рыбы 912
§ 7. Экспериментальное исследование гидродинамических качеств рыб и дельфина 916
§ 8. Аэродинамика летучей рыбы 922
§ 9. Основы кинематики дельфина 926
§ 10. Некоторые особенности винтового движения 933
§ 11. Некоторые количественные характеристики 936
§ 12. Внешняя форма головы дельфина и ее динамическое действие 939
§ 13. Подтверждение гипотезы о движении дельфина 940
§ 14. Динамика стаи 944
§ 15. Опыты по динамике стаи 949
§ 16. Сравнительная динамика водных животных 957
§ 17. Полный коэффициент полезного действия рыбы 963
§ 18. Скорости миграции рыб, дельфинов, китов 968
§ 19. Особый случай движения рыбы-лоцмана 971

Глава десятая

Магнитные и электрические явления в море

§ 1. Некоторые особенности исследований в области магнитных и электрических явлений на Земле . . . 975
§ 2. Элементы земного магнитного поля . . . 976
§ 3. Формальное описание земного магнитного поля и его критика . . . 977
§ 4. Некоторые соображения о магнитном моменте Земли . . . 979
§ 5. Отличие геомагнитного поля от поля однородного намагничения с осью, направленной вдоль оси вращения Земли . . . 985
§ 6. Приближенное нахождение системы токов, эквивалентных добавочному магнитному полю Земли . . . 988
§ 7. Электропроводность морской воды . . . 992
§ 8. Теллурические токи в море . . . 993
§ 9. Строение поля теллурических токов в замкнутом море . . . 998
§ 10. Индуцированные токи в движущихся водах . . . 1006
§ 11. Теллурические токи в океане . . . 1013
§ 12. Магнитное склонение на глубинах океана . . . 1017
§ 13. Особенности вековых изменений магнитного склонения над океанами . . 1023
§ 14. Особенности электромагнитных явлений, вызванные контрастом в термике океана и материков. Роль береговой линии . . . 1027
§ 15. Обострение контрастов между океаническими и материковыми областями атмосферы при повышении солнечной активности . . . 1036
§ 16. Некоторые гипотезы о механизме передачи импульсов от ионосферы в нижнюю тропосферу . . . 1044
§ 17. Новые черты солнечно-тропосферных связей, обнаруженные посредством ракет и спутников . . . 1049

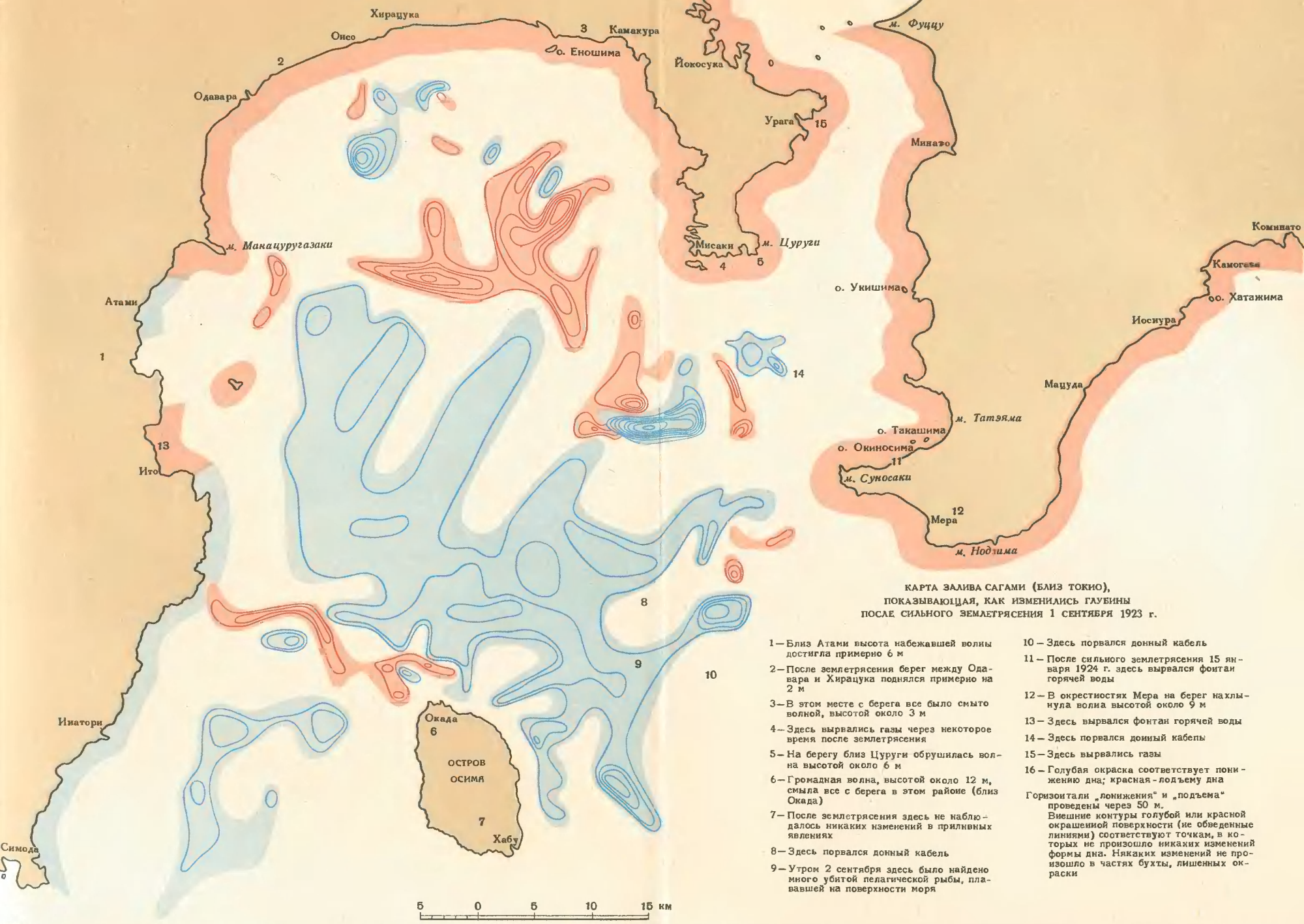
Цитированная литература . . . 1056

Именной указатель . . . 1069

Предметный указатель . . . 1072

Приложение (цветная карта):

Термобарические сейши Шулейкина и сандстремовские кадры потеплений и похолоданий (вкладка в конце книги)



КАРТА ЗАЛИВА САГАМИ (БЛИЗ ТОКИО), ПОКАЗЫВАЮЩАЯ, КАК ИЗМЕНИЛИСЬ ГЛУБИНЫ ПОСЛЕ СИЛЬНОГО ЗЕМЛЕТРЯСЕНИЯ 1 СЕНТЯБРЯ 1923 г.

1 — Близ Атами высота набежавшей волны достигла примерно 6 м

2 — После землетрясения берег между Одавара и Хирацука поднялся примерно на 2 м

3 — В этом месте с берега все было смыто волной, высотой около 3 м

4 — Здесь вырвались газы через некоторое время после землетрясения

5 — На берегу близ Цуруги обрушилась волна высотой около 6 м

6 — Громадная волна, высотой около 12 м, смыла все с берега в этом районе (близ Окада)

7 — После землетрясения здесь не наблюдалось никаких изменений в прилнвных явлениях

8 — Здесь порвался донный кабель

9 — Утром 2 сентября здесь было найдено много убитой пелагической рыбы, плававшей на поверхности моря

10 — Здесь порвался донный кабель

11 — После сильного землетрясения 15 января 1924 г. здесь вырвался фонтан горячей воды

12 — В окрестностях Мера на берег нахлынула волна высотой около 9 м

13 — Здесь вырвался фонтан горячей воды

14 — Здесь порвался донный кабель

15 — Здесь вырвались газы

16 — Голубая окраска соответствует понижению дна; красная - подъему дна

Горизонтали „понижения" и „подъема" проведены через 50 м.
Внешние контуры голубой или красной окрашенной поверхности (не обведенные линиями) соответствуют точкам, в которых не произошло никаких изменений формы дна. Никаких изменений не произошло в частях бухты, лишенных окраски

Рис. 111

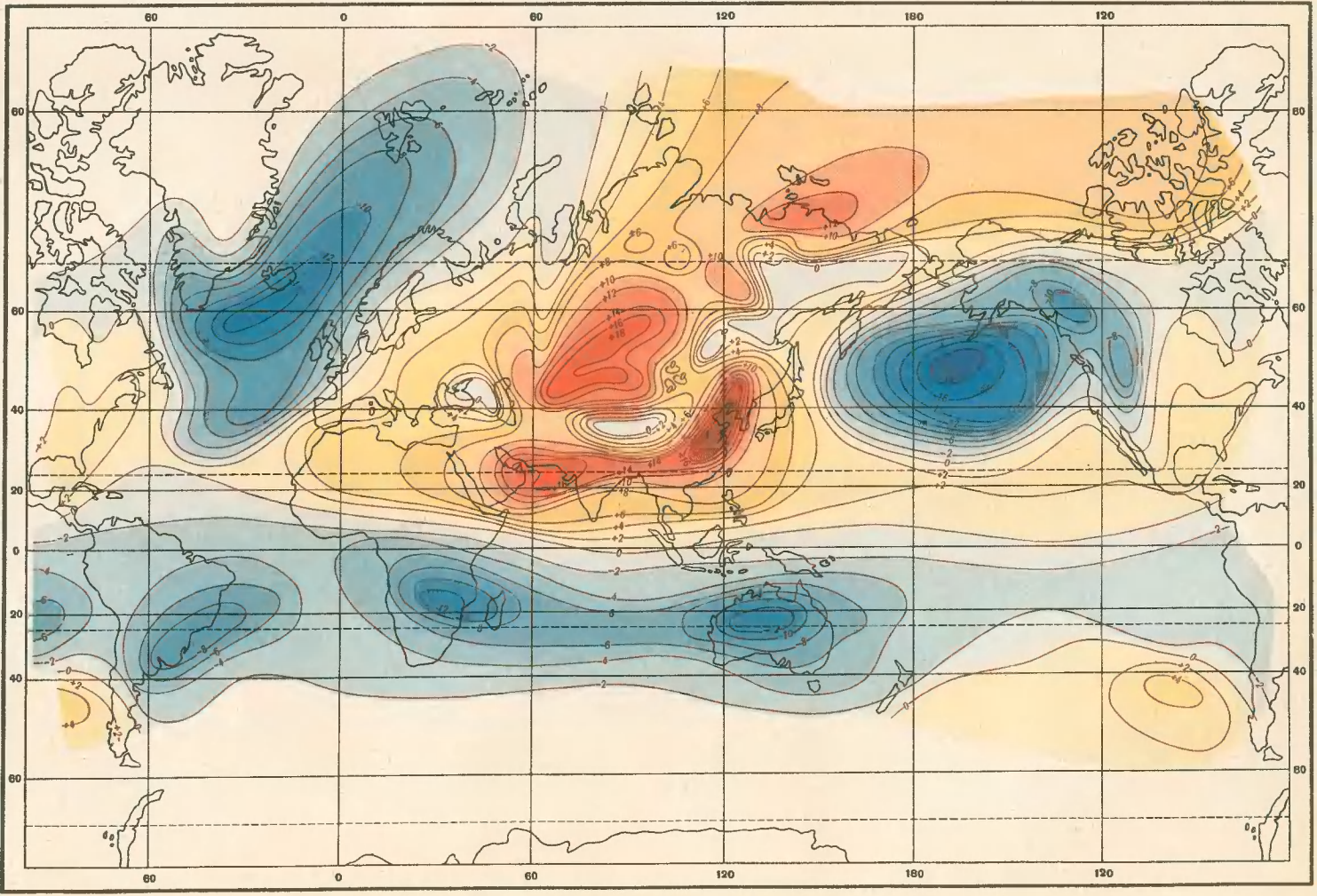


Рис. 333

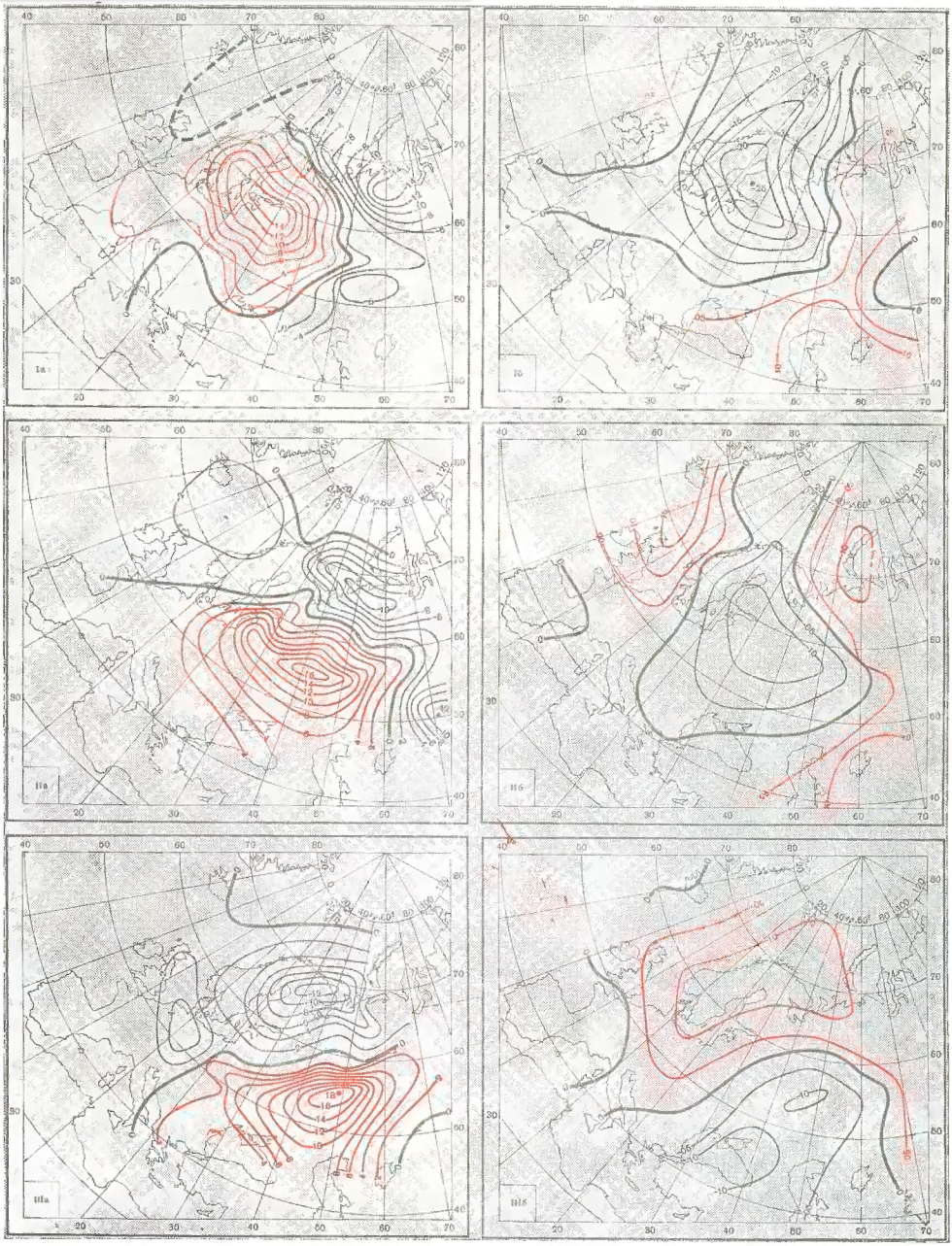


Рис. 387. Термобарические сейши с 31 января по 8 февраля 1966 г.

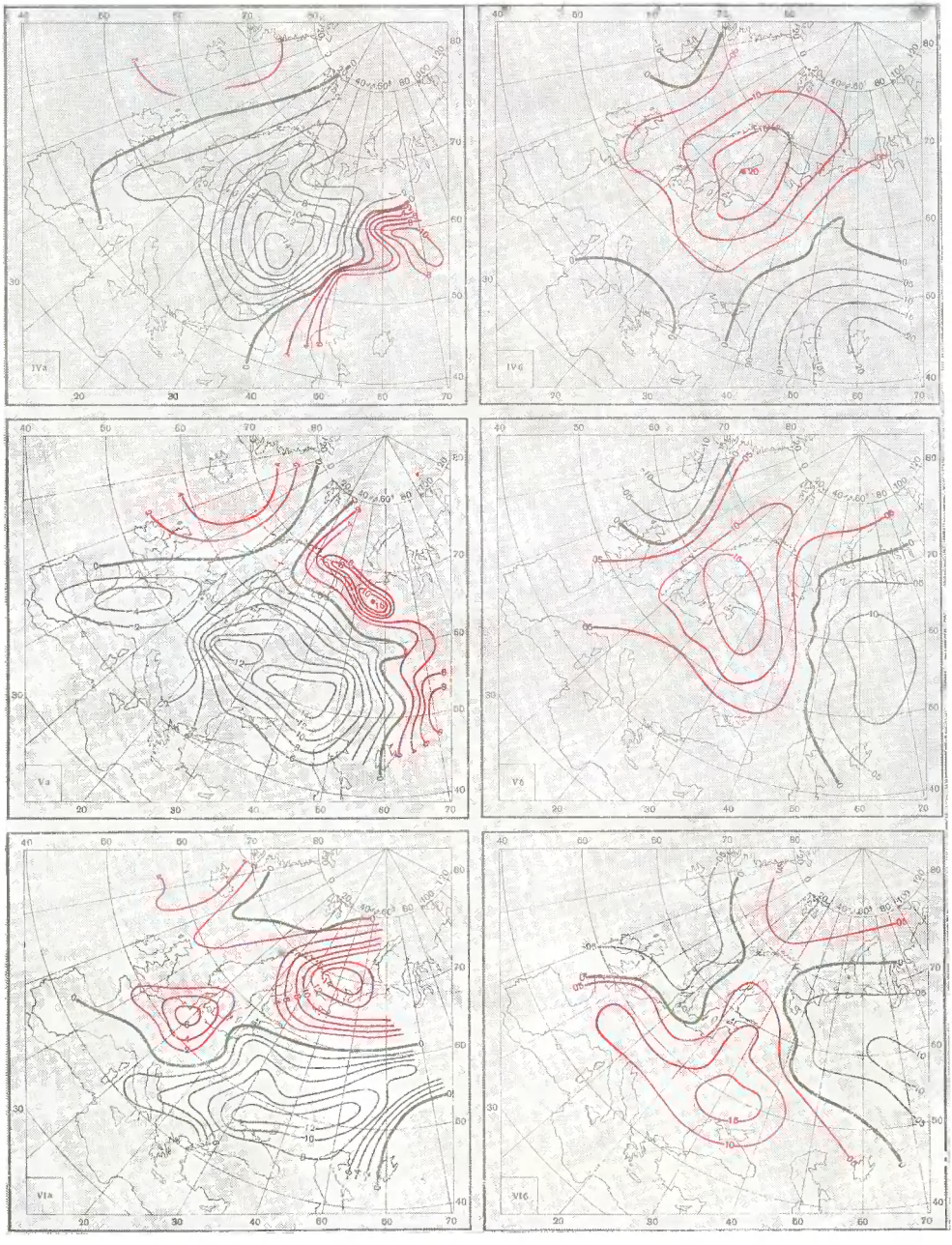


Рис. 387 (продолжение)

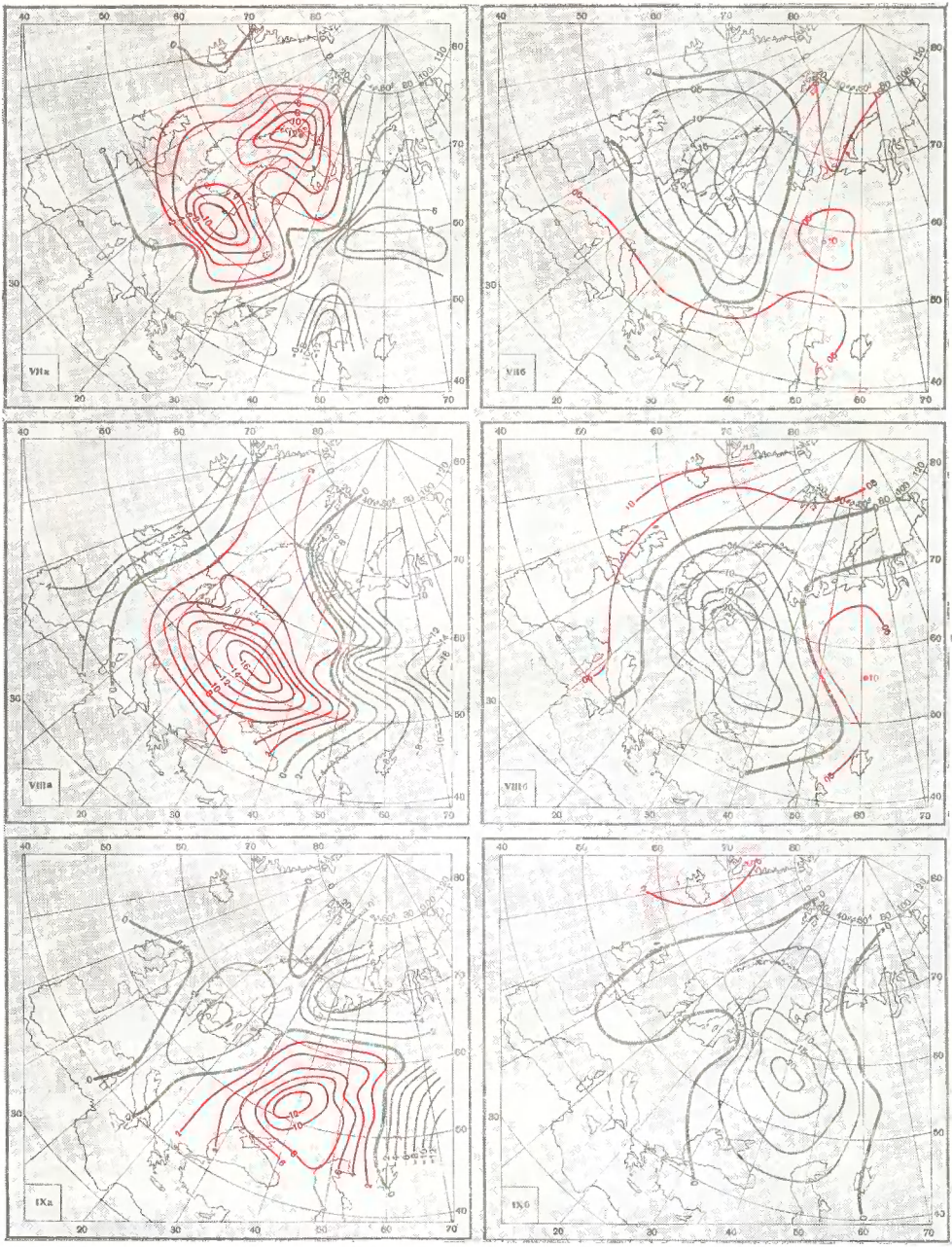
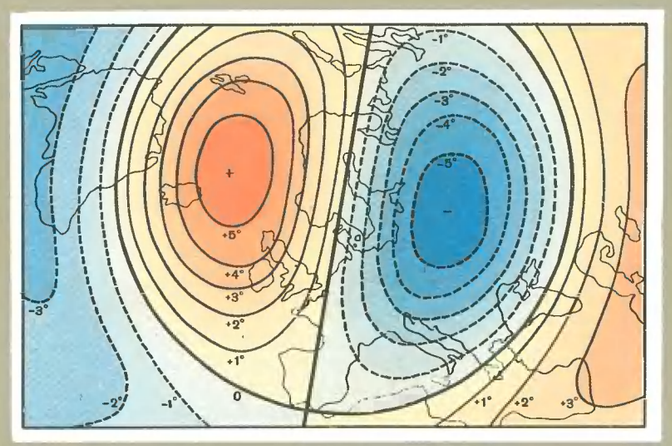


Рис. 387 (окончание)

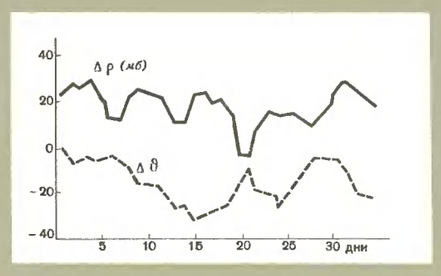
ТЕРМОБАРИЧЕСКИЕ СЕЙШИ ШУЛЕЙКИНА

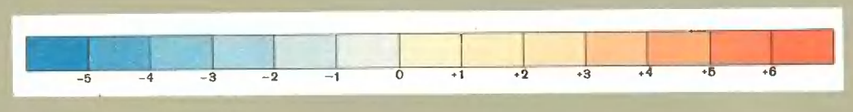
И САНДСТРЕМОВСКИЕ КАДРЫ ПОТЕПЛЕНИЯ И ПОХОЛОДАНИЯ





ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ОРБИТА
ЧАСТИЦЫ ВОЗДУХА





З
С 80° З
С 70° З
С 60° З
С 50° З
С 40° З
С 30° З
С 20° З
С 10° З
С
С 10° В
С 20° В
С 30° В
С 40° В
С 50° В
С 60° В
С 70° В
С 80° В
В
Ю 80° З
Ю 70° З
Ю 60° З
Ю 50° З
Ю 40° З
Ю 30° З
Ю 20° З
Ю 10° З
Ю
Ю 10° В
Ю 20° В
Ю 30° В
Ю 40° В
Ю 50° В
Ю 60° В
Ю 70° В
Ю 80° В

Василий Владимирович Шулейкин

ФИЗИКА МОРЯ

Утверждено к печати
Отделением наук о Земле
Академии наук СССР

Редактор издательства *П. Н. Успенский*
Художник *Н. Б. Старцев*
Технический редактор *Ю. В. Рылина*

Сдано в набор 16/I 1968 г. Подписано к печати 3/VII 1968
Формат 70×108¹/₁₆. Бумага № 1. Усл. печ. л. 94,85
Уч.-изд. л. 85,3. Тираж 3000 экз. Т-10607. Тип. зак. 16

Цена 5 р. 60 к.

Издательство «Наука».
Москва, К-62, Подсосенский пер., 21

2-я типография издательства «Наука».
Москва, Г-99, Шубинский пер., 10

ОПЕЧАТКИ И ИСПРАВЛЕНИЯ

Страница	Строка	Напечатано	Должно быть
18	Ф-ла (22)	$\frac{d^2x}{dt}$	$\frac{d^2x}{dt^2}$
195	1 св.	проливные	приливные
195	19 св.	(125)	(123)
241	Ф-ла (59)	E_v	E
342	Рис. 179	μ	n
806	24 сн.	кинетическая	кинематическая
806	19 сн.	6 *гц*	1,5 *гц*
890	7 св.	R_0	$2R_0$
993	Рис. 643	$ом^{-1}см^{-3}$	$ом^{-1}см^{-1}$
993	28 св.	$ом^{-1}см^{-3}$	$ом^{-1}см^{-1}$
1033	23 св.	Юго-Восток	Юго-Запад
1037	21 св.	В. Ю. Взеи	В. Ю. Визе