

**Р. А. Силин**

# **ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ВОЛНОВОДЫ**



Р. А. Силин

# ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ВОЛНОВОДЫ



ФАЗИС  
Москва 2002





**С и л и н Р. А.**  
**Периодические волноводы.**  
— М.: ФАЗИС, 2002. Х+438 с.  
ISBN 5-7036-0073-1

Издательство ФАЗИС  
123557 Москва, Пресненский вал, 42-44  
E-mail: phasis@aha.ru URL: <http://www.aha.ru/~phasis>

---

ППП Типография «Наука» Академиздатцентра РАН  
121099 Москва Г-99, Шубинский пер., 6  
Заказ № 5191

# Оглавление

<b>Предисловие .....</b>	<b>VII</b>
<b>Глава 1. Основные понятия и определения .....</b>	<b>1</b>
1.1. Замедляющая система .....	1
1.2. Плоские волны .....	2
1.3. Сопротивление связи .....	8
<b>Глава 2. Симметрия замедляющих систем .....</b>	<b>11</b>
2.1. Значение свойств симметрии .....	11
2.2. Понятие симметрии. Основные элементы симметрии .....	12
2.3. Преобразование компонент электромагнитного поля при операциях точечной симметрии .....	18
2.4. Связь компонент поля в симметричных точках замедляющей системы .....	19
2.5. Свойства систем, обладающих одним элементом точечной симметрии .....	21
2.6. Периодические структуры .....	25
2.7. Скользящая плоскость симметрии .....	30
2.8. Винтовая ось $CN_s$ .....	32
2.9. Винтовая ось $C\infty_s$ ( $s$ -заходная спираль) .....	37
2.10. Системы, в которых элементы симметрии не коммутируют с трансляцией .....	39
2.11. Примеры практических рекомендаций на основе теории симметрии .....	45
<b>Глава 3. Лемма Лоренца и ее следствия .....</b>	<b>49</b>
3.1. Двухчастотная лемма Лоренца .....	49
3.2. Равенство электрической и магнитной энергии в ячейке без потерь .....	50
3.3. Ортогональность нормальных волн по объему ячейки .....	51
3.4. Ортогональность нормальных волн по сечению ячейки .....	51
3.5. Равенство скорости переноса энергии и групповой скорости .....	52
3.6. Уравнения возбуждения замедляющих систем электронным потоком .....	53
<b>Глава 4. Пространственные гармоники .....</b>	<b>57</b>
4.1. Определение пространственных гармоник и их дисперсионные характеристики .....	57
4.2. Пространственные гармоники и волновые уравнения .....	59
4.3. Поле замедляющих систем, однородных в одном из поперечных направлений .....	61
4.4. Поле пространственных гармоник в системах, однородных по координате $y$ .....	64
<b>Глава 5. Волны в одномерно-периодических системах .....</b>	<b>67</b>
5.1. Волны в электрических цепочках. Дисперсия цепочек четырехполюсников .....	67
5.2. Сопротивление связи цепочек четырехполюсников .....	69
5.3. Комплексные волны .....	71
5.4. Теорема о периодическом волноводе из $N$ проводников .....	73
5.5. Законы подобия .....	73
5.6. Замедляющие системы, дифракционные решетки, антенны с бегущей волной .....	74

<b>Глава 6. Спиральные замедляющие системы</b> .....	79
6.1. Типы спиральных замедляющих систем .....	79
6.2. Свойства симметрии спиральных замедляющих систем .....	80
6.3. Типы волн спирали в экране .....	83
6.4. Выражения для поля в спирально проводящем цилиндре .....	85
6.5. Дисперсионная характеристика симметричного типа волны .....	86
6.6. Структура поля в спирально проводящем цилиндре .....	87
6.7. Сопротивление связи спирально проводящего цилиндра .....	88
6.8. Усредненные граничные условия .....	90
<b>Глава 7. Радиальные матрицы передачи для расчета спиральных замедляющих систем</b> .....	95
7.1. Радиальные матрицы передачи .....	95
7.2. Спираль в экране и спираль со стержнем .....	100
7.3. Спираль в диэлектрической трубке .....	101
7.4. Спирали с различной формой диэлектрических опор .....	103
7.5. Спираль, контактирующая с тонким проводящим слоем .....	104
7.6. Спиральные замедляющие системы с анизотропно проводящим экраном ..	107
<b>Глава 8. Расчет спиральных замедляющих систем методом Фурье</b> .....	111
8.1. Роль пространственных гармоник и способы их учета .....	111
8.2. Ленточная и нитевидная спирали .....	111
8.3. Сопротивление связи однозаходной ленточной спирали .....	117
8.4. Многозаходная спираль .....	120
<b>Глава 9. Замедляющие системы типа «гребенка»</b> .....	125
9.1. Резонаторные замедляющие системы .....	125
9.2. Качественная оценка дисперсионной характеристики бесконечно широкой гребенки .....	125
9.3. Дисперсия гребенки на высших типах волн .....	128
9.4. Гребенка конечной ширины .....	130
9.5. Метод частичных областей .....	132
9.6. Расчет дисперсионной характеристики гребенки в приближении одной волны .....	134
9.7. Расчет сопротивления связи .....	136
9.8. Метод эквивалентных схем .....	137
9.9. Расчет сопротивления связи методом эквивалентных схем .....	140
<b>Глава 10. Цепочки связанных резонаторов</b> .....	151
10.1. Оценка характеристик цепочки связанных резонаторов с помощью эквивалентных схем .....	151
10.2. Структура поля в гладком волноводе .....	155
10.3. Матрицы проводимости и рассеяния отрезка волновода .....	157
10.4. Матрица рассеяния сочленения волноводов .....	160
10.5. Сопротивление связи ЦСР .....	161
10.6. Результаты исследования характеристик ЦСР .....	162
<b>Глава 11. Многоступенчатые замедляющие системы</b> .....	175
11.1. Основные понятия и определения .....	175
11.2. Пространственные гармоники многоступенчатых систем .....	176
11.3. Расчет дисперсии многоступенчатых систем .....	179
11.4. Сопротивление связи многоступенчатых систем .....	183

Глава 12. <b>Анодные блоки магнетронов со связками</b> .....	187
12.1. Типы анодных блоков магнетронов и их свойства симметрии .....	187
12.2. Дисперсия резонаторной системы со связками .....	189
12.3. Сопротивление связи .....	192
12.4. Влияние неоднородностей на характеристики анодных блоков .....	193
Глава 13. <b>Метод многопроводных линий</b> .....	199
13.1. Примеры штыревых замедляющих систем .....	199
13.2. Телеграфные уравнения .....	200
13.2. Метод многопроводных линий .....	204
13.3. Пределы применимости метода многопроводных линий .....	206
Глава 14. <b>Одноступенчатые штыревые замедляющие системы</b> .....	211
14.1. Расчет дисперсии .....	211
14.2. Расчет сопротивления связи одноступенчатых систем методом многопроводных линий .....	214
14.3. О законах подобия штыревых систем .....	216
Глава 15. <b>Многоступенчатые штыревые замедляющие системы</b> .....	219
15.1. Метод расчета многоступенчатых штыревых ЗС .....	219
15.2. Дисперсия двухступенчатых систем .....	220
15.3. Сопротивление связи двухступенчатых систем .....	224
15.4. Приближенные оценки .....	226
Глава 16. <b>Свойства симметрии двумерно-периодических систем</b> .....	231
16.1. Закономерности сочетания элементов симметрии .....	231
16.2. Косоугольная система координат .....	234
16.3. Группы симметрии двумерно-периодических ЗС .....	236
16.4. Пространственные гармоники .....	241
16.5. Примеры дисперсионных характеристик .....	243
16.6. Свойства поверхностей дисперсии, обусловленные периодичностью структуры .....	247
16.7. Ортогональные преобразования волнового уравнения .....	249
16.8. Свойства, обусловленные зеркальными плоскостями симметрии .....	253
16.10. Свойства, обусловленные поворотными осями симметрии .....	257
16.11. Пример дисперсионной характеристики системы с осью $C_4$ .....	259
16.12. Свойства, обусловленные зеркально-поворотными осями .....	262
16.13. Свойства, обусловленные скользящими плоскостями, параллельными решетке .....	264
16.14. Свойства, обусловленные скользящими плоскостями, перпендикулярными плоскости решетки .....	267
16.15. Свойства, обусловленные осями $C_2$ .....	270
16.16. Ортогональность нормальных волн .....	270
Глава 17. <b>Многорядные штыревые замедляющие системы</b> .....	275
17.1. Метод многопроводных линий .....	275
17.2. Об особенностях изочастот многорядных лестниц .....	280
17.3. Сопротивление связи .....	285
17.4. Многоступенчатые многорядные системы .....	288
17.5. Пределы применимости метода многопроводных линий .....	291
17.6. Влияние преобразования координат на форму записи уравнения дисперсии двумерно-периодической штыревой ЗС .....	294



Глава 18. <b>Многоэтажные системы</b> .....	299
18.1. Одноступенчатые системы .....	299
18.2. Двухступенчатые системы .....	305
Глава 19. <b>Замедляющие системы как искусственные диэлектрики</b> .....	315
19.1. Сравнение оптических свойств кристаллов и искусственных диэлектриков .....	315
19.2. Примеры искусственных диэлектриков .....	319
19.3. Примеры «оптических явлений», изученных с помощью изочастот .....	324
19.4. Законы преломления и пространственные гармоника .....	328
19.5. Отражение волн от плоских границ периодических систем .....	329
Глава 20. <b>Двумерно-периодические замедляющие системы, свернутые в цилиндр</b> .....	339
20.1. Условие синхронизма волн с электронными потоками .....	339
20.2. Условие замыкания в цилиндр .....	341
20.3. Условия синхронизма для системы с прямоугольной решеткой .....	342
20.4. Условие синхронизма в системах с косоугольной решеткой .....	346
20.5. Механизм обратной связи .....	347
20.6. Широкополосность .....	348
20.7. Крутизна перестройки частоты .....	352
20.8. Вентильность .....	353
Глава 21. <b>Замедляющие системы, ограниченные двумя плоскостями</b> .....	357
21.1. Условия, накладываемые на волновой вектор .....	357
21.2. Многопроводная линия, ограниченная плоскостями .....	358
21.3. Элементарное рассмотрение косой системы типа «встречные штыри» .....	358
21.4. Косая гребенка .....	359
21.5. Механизм обратной связи .....	361
21.6. Особенности распределения поля в косых замедляющих системах .....	363
Глава 22. <b>Двумерно-периодические структуры как фазированные антенные решетки</b> .....	365
22.1. Ячейка Флоке .....	365
22.2. Природа слепых пятен .....	367
22.3. Проекционный метод расчета антенных решеток .....	368
<b>Заключение</b> .....	370
Приложение 1. <b>Группы симметрии замедляющих систем</b> .....	373
Приложение 2. <b>Элементы теории многополюсников</b> .....	390
Приложение 3. <b>Коэффициенты <math>li(h)</math> в усредненных граничных условиях</b> ...	397
Приложение 4. <b>Волновая проводимость многопроводной линии с проводниками прямоугольного сечения</b> .....	399
<b>Ответы и решения</b> .....	403
<b>Предметный указатель</b> .....	433

## Предисловие

В технике сверхвысоких частот (СВЧ) периодические волноводы служат, в основном, для уменьшения скорости распространения электромагнитных волн по сравнению со скоростью в пустом пространстве. Они используются в качестве замедляющих систем (ЗС) в приборах с длительным (в масштабе периода колебаний) взаимодействием: лампах бегущей (ЛБВ) и обратной (ЛОВ) волны, магнетронах, платинотронах, мазерах на циклотронном резонансе (МЦР), линейных ускорителях и сепараторах заряженных частиц, электронно-лучевых трубках для СВЧ-осциллографов, черенковских счетчиках. Кроме того, периодические волноводы используются в качестве линий задержки, фильтров, элементов антенн с бегущей и обратной волной. Они применяются также в бытовых и промышленных СВЧ-печах.

В предлагаемой книге периодические волноводы рассматриваются, в основном, с точки зрения их использования в качестве ЗС электронных приборов с длительным взаимодействием, хотя ряд сведений полезен и для других применений. В основу книги положена монография Р. А. Силина и В. П. Сазонова «Замедляющие системы» (М.: Сов. радио, 1966). Эта монография много лет остается настольной книгой разработчиков электронных приборов СВЧ и линейных ускорителей заряженных частиц. Она широко используется в курсах лекций вузов по технике СВЧ, электронным приборам, электродинамике. Книга переведена на английский язык и издана за рубежом.

Предлагаемая книга задумана как второе издание упомянутой выше монографии. В процессе переработки, однако, пришлось внести так много изменений и дополнений, что получилась новая книга. В частности, существенно переработаны и дополнены главы по теории симметрии ЗС, теории спиральных, штыревых и резонаторных ЗС, добавлены разделы, посвященные лемме Лоренца и ее следствиям, комплексным волнам и теории подобия. Существенно расширен раздел, посвященный двумерно-периодическим системам. Библиография существенно сокращена и обновлена. Она не претендует на полноту и установление приоритета в тех или иных вопросах.

Книга рассчитана как на специалистов, занятых разработкой и эксплуатацией соответствующих приборов, так и на студентов и аспирантов, изучающих технику СВЧ и электронные приборы.

Теории ЗС посвящен ряд монографий. Если не считать книг, посвященных частным вопросам (диафрагмированные волноводы, аксиально симметричные ЗС), то, кроме упомянутой выше, нам известны ещё лишь три монографии, посвященные данному вопросу: R. M. Bevense, *Electromagnetic slow wave system* (N. Y., London, Sydney: John Wiley and Sons. 1964), З. И. Тараненко, Я. К. Трохименко, «Замедляющие системы» (Киев: Техника,

1965), В. С. Михалевский, «Элементы теории сверхвысокочастотных замедляющих систем» (Ростов на Дону: Ростовский гос. университет, 1964). Все эти издания являются в настоящее время библиографической редкостью.

Предлагаемая книга отличается большей полнотой изложения свойств ЗС и включением современных сведений. Наибольшее внимание уделено качественному описанию свойств тех или иных характеристик ЗС и универсальным методам расчета различных классов ЗС. Так, метод радиальных матриц передачи позволяет рассчитывать большинство спиральных ЗС; проекционный метод в сочетании с методом конечных элементов — широкий класс резонаторных и штыревых ЗС, метод многопроводных линий — штыревые ЗС. Эти методы реализованы в виде программ для ЭВМ. Особо следует отметить двумерно-периодические структуры, которые широко используются в технике СВЧ. Они применяются в качестве излучателей в фазированных антенных решетках [1], в качестве искусственных диэлектриков при создании линз, призм и других квазиоптических элементов для электромагнитных волн СВЧ [2], в электронных приборах повышенной мощности [3] в качестве замедляющих систем, обеспечивающих взаимодействие электромагнитных волн с электронным потоком. Волны в периодических структурах исследуются также в строительной технике, авиа- и кораблестроении [4], ибо соответствующие каркасы можно рассматривать как двумерно-периодические решетки.

Основное внимание уделено изучению распространения электромагнитных волн в замедляющих системах с точки зрения возможности их использования в электронных приборах СВЧ. Вместе с тем в книге освещен ряд вопросов, относящихся к антенным решеткам и искусственным диэлектрикам. Появились новые разделы, посвященные теории симметрии двумерно-периодических систем, искусственным диэлектрикам, условиям взаимодействия электронных потоков с полем в двумерно-периодических системах и т.д. Общие закономерности распространения волн в двумерно-периодических структурах и в кристаллах в значительной мере сходны. В физике твердого тела хорошо развита зонная теория [7, 8, 9], которая применима к описанным в настоящей книге структурам. Различие состоит лишь в числе измерений периодичности. Поэтому описание волноведущих свойств двумерно-периодических структур оказывается несколько проще и нагляднее, чем в физике твердого тела. Именно поэтому настоящая книга может оказаться полезной не только лицам изучающим и занимающимся электронными приборами, фазированными и дифракционными решетками, но и тем, кто начинает изучать физику твердого тела. С другой стороны в физике твердого тела, как правило, не интересуются пространственными гармониками поля и сводят задачу к рассмотрению дисперсионных характеристик в первой зоне Бриллюэна, не интересуются и структурой поля. В теории замедляющих систем и антенных решеток эти вопросы изучаются, так как амплитудами этих гармоник определяется эффективность взаимодействия поля с электронами и интенсивность дифракционных максимумов. В этом смысле изучение волн в двумерно-периодических системах в электродинамике оказывается более полным, чем в физике твердого тела.

Существенную помощь в работе над книгой автору оказал ряд сотрудников и коллег. Так, для написания главы по методу радиальных матриц свои материалы предоставил В. П. Кирюшин, а для приложения 3, относящегося к усредненным граничным условиям, — В. Н. Иванов. Раздел по двумерно-периодическим системам смог быть существенно переработан лишь благодаря многочисленным беседам с М. И. Хворовым и семинарам под его руководством. В получении численных результатов существенную помощь оказали З. Д. Ковтунова, В. П. Яковлева, Т. Б. Столярова, О. Ю. Михалева. Для получения ряда результатов использованы программы, созданные В. П. Кирюшиным, Г. С. Самохиным, И. П. Чепурных. В создании части из них участвовал и автор. Использован ряд экспериментальных результатов, представленных Т. С. Семиной и др. Полезные замечания по прочтении отдельных частей рукописи сделали В. Г. Бороденко, А. В. Галдецкий, Ф. Ф. Дубровка, Л. Г. Некрасов. Всем коллегам, способствовавшим созданию настоящей книги, автор выражает глубокую признательность. Особую признательность автор выражает фонду «КНИГА—НАУКА—КУЛЬТУРА», а также А. Н. Королеву, благодаря которым книга вышла в свет.

### Список литературы

- [1]. Амитей Н., Галиндо В., Ву Ч. Теория и анализ фазированных антенных решеток. Под ред. А. Ф. Чаплина. М.: Мир, 1974. 455 с.  
Перевод кн.: Amitay N., Galindo V., Wu C. P. Theory and analysis of phased array antennas. New York—London—Sydney—Toronto, 1972.
- [2]. Collin R. E. Field Theory of Guided Waves. New York—Toronto—London: McGraw Hill, 1960. 606 p.
- [3]. Doehler O., Mourier G. Theory of two-dimensional travelling-wave tube Microwellenrohren. Munchen, 1960. S. 97.
- [4]. Бобровицкий Ю. И., Генкин М. Д., Маслов В. П., Римский-Корсаков А. В. Распространение волн в конструкциях из тонких стержней и пластин. М.: Наука, 1974. 102 с.
- [7]. Силин Р. А., Сазонов В. П. Замедляющие системы. М.: Сов. радио, 1966. 632 с.
- [8]. Бриллюэн Л., Пароди М. Распространение волн в периодических структурах. Под ред. П. А. Разина. М.: ИЛ, 1959. 457 с.  
Перевод кн.: Brillouin L., Parodi M. Propagation des ondes dans les milieux periodiques. Paris: Masson, Dunod, 1956.
- [9]. Зейтц Ф. Современная теория твердого тела. Под ред. Г. С. Жданова. М.—Л.: ГИТТЛ, 1949. 736 с.  
Перевод кн.: Seitz F. The modern theory of solids. New York—London: McGraw Hill, 1940. 698 p.



# Основные понятия и определения

## 1.1. Замедляющая система

В технике сверхвысоких частот (СВЧ) для генерирования, усиления и преобразования сигналов часто используют приборы, в которых электронный поток взаимодействует с полем электромагнитной волны. Для эффективного взаимодействия необходимо, чтобы электроны, собранные в сгустки, двигались в тормозящей фазе волны. Это возможно лишь в случае, когда скорости электронов  $v_e$  и волны  $v$  близки друг к другу. Более того, как показывают расчеты процессов взаимодействия, необходимо, чтобы скорость электронов несколько превышала фазовую скорость волны.

В пустом пространстве электроны не могут двигаться быстрее волны. Поэтому для обеспечения взаимодействия волну необходимо замедлить. Устройства, в которых волна может распространяться с фазовой скоростью  $v$ , меньшей скорости  $c$  в свободном пространстве, называются *замедляющими системами* (ЗС). Величина отношения  $n = c/v$  называется *коэффициентом замедления* волны. Иногда ее называют также *величиной замедления* или просто *замедлением* волны. Символ  $n$  для коэффициента замедления заимствован из оптики, в которой аналогичная величина называется коэффициентом преломления.

Простейшей ЗС служит магнито-диэлектрик с относительными проницаемостями  $\epsilon$  и  $\mu$ . При этом, как известно из оптики, коэффициент преломления равен

$$n = c/v = (\epsilon\mu)^{1/2}.$$

Если электронный поток движется в диэлектрике со скоростью  $v_e > v$ , то он тормозится наведенным полем. При этом энергия электронов передается электромагнитному полю (электрон излучает). Соответствующее явление носит название эффекта Вавилова — Черенкова, и суть его хорошо известна из курса общей физики.

Основной недостаток диэлектрических ЗС состоит в том, что часть электронного потока оседает на диэлектрик. Если же диэлектрик метал-

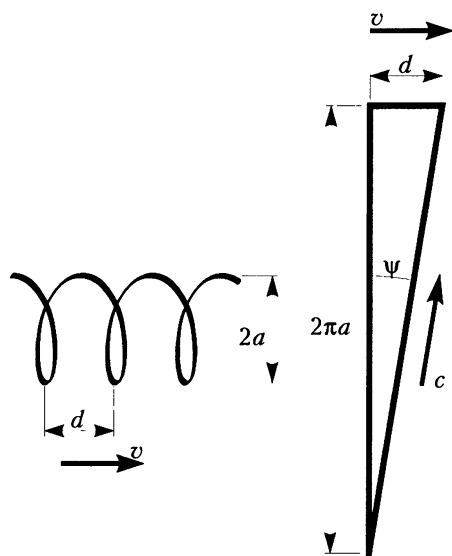


Рис. 1.1. Спиральная ЗС и диаграмма, поясняющая механизм замедления

лизировать, то экранируется электрическое поле и эффективность взаимодействия электронов с полем падает. Магнетики же с большой проникаемостью  $\mu$  приводят к большим потерям энергии на СВЧ.

В электронных приборах широко применяются ЗС, представляющие периодические структуры (спирали, цепочки резонаторов, структуры из штырей и т. п.). Чтобы выяснить механизм замедления, рассмотрим спиральную ЗС (рис. 1.1). В нулевом приближении можно считать, что волна бежит вдоль проводника со скоростью  $c$ . При этом составляющая  $v$  скорости вдоль оси спирали равна  $v = c \sin \psi$ .

Отсюда находим коэффициент замедления волны:

$$n = c/v = 1/\sin \psi. \quad (1.1)$$

Он не зависит от частоты. Более строгий расчет показывает, что в действительности коэффициент замедления зависит от частоты и лишь в пределе достаточно высоких частот, описывается формулой (1.1).

## 1.2. Плоские волны

В общем случае поле волны в периодической структуре представляет достаточно сложную картину. Вместе с тем, для его описания используется ряд понятий, введенных для плоских волн. Более того, поле сложной волны часто представляют в виде суммы плоских волн. Поэтому сначала рассмотрим основные понятия, относящиеся к плоским волнам.

*Плоской неоднородной монохроматической волной* называют физический процесс, описываемый величиной  $U(\mathbf{r}, t)$ , зависимость которой от координат и времени задается равенством\*

$$U(\mathbf{r}, t) = U(\rho) \exp[j(\omega t - \beta \mathbf{r})]. \quad (1.2, a)$$

В этом равенстве  $\beta$  и  $\rho$  — взаимно перпендикулярные векторы\*\*. В случае, если волна бежит вдоль оси  $z$ , последнее равенство принимает вид

$$U(x, y, z, t) = U(x, y) \exp[j(\omega t - \beta z)]. \quad (1.2, б)$$

Величина  $U$  может быть как скалярной, так и векторной. Она может представлять какую-либо компоненту электромагнитного поля, сразу все компоненты, скалярный или векторный потенциал. Амплитуда поля может зависеть от координат, перпендикулярных направлению распространения. В частности, такая зависимость существует для *ТЕМ*-волны в двухпроводной линии, для *Е*- и *Н*-волн в волноводах.

Величина  $\omega t - \beta \mathbf{r}$  называется *фазой волны*, а  $\beta \mathbf{r}$  — *разностью фаз* между точкой  $\mathbf{r}$  и началом координат. Волна называется плоской потому, что геометрическое место точек постоянной фазы  $\omega t - \beta \mathbf{r} = \text{const}$  представляет плоскость, называемую *фронтом волны*. Волна называется неоднородной

\*) Как принято в электротехнике, мнимая единица здесь и далее обозначается символом  $j$ .

\*\*) Полагаем, что вектор  $\beta$  действительный, т. е. затухания нет. В противном случае может оказаться, что действительная и мнимая части  $\beta$  имеют разное направление.

потому, что амплитуда  $U(\mathbf{p})$  зависит от координат  $\mathbf{p}$  точки, лежащей на фронте волны. В дальнейшем название «неоднородная» опускаем.

Величина  $\beta$  в (1.2, а) называется *волновым вектором*, а  $\beta$  в (1.2, б) — *волновым числом*. Численное значение  $\beta$  связано с длиной волны  $\Lambda$  в системе, в которой бежит волна, соотношением

$$\beta = 2\pi / \Lambda, \quad (1.3)$$

поскольку на расстоянии  $\Lambda$  вдоль  $z$  фаза волны в (1.2, б) изменяется на  $2\pi$ .

Плоскости постоянной фазы перемещаются в направлении  $\beta$  со скоростью  $v$ , которая называется *фазовой скоростью* волны. Ее величина связана с модулем волнового вектора соотношением

$$v = \omega / \beta. \quad (1.4)$$

Коэффициент замедления  $n$  можно выразить через волновое число  $\beta$  или волновой вектор  $\beta$  для среды и волновое число  $k = \omega / c = 2\pi / \lambda$  свободного пространства следующим равенством:

$$n = \beta / k \quad \text{или} \quad n = \beta / k. \quad (1.5, а)$$

Через длины волн  $\lambda$  и  $\Lambda$  он выражается соотношением

$$n = \Lambda / \lambda. \quad (1.5, б)$$

Его можно выразить также через разность фаз  $\phi = \beta d$  в точках, отстоящих друг от друга на расстояние  $d$  (обычно в качестве  $d$  выбирают период ЗС):

$$n = \lambda \phi / 2\pi d. \quad (1.5, в)$$

Заметим, что компоненты вектора  $\mathbf{v}$  вовсе не равны составляющим скорости перемещения фронта волны вдоль соответствующих осей координат. В самом деле, пусть волна бежит перпендикулярно оси  $z$  под углом  $\theta$  к оси  $x$ . Пусть за время  $\Delta t$  фронт волны, представляющий плоскость, переместится на  $\Delta r$  вдоль  $\mathbf{v}$ , т. е. расстояние между соответствующими плоскостями  $\Delta r = v \Delta t$ . Тогда отрезки, отсекаемые этими плоскостями на осях  $x$  и  $y$ , равны соответственно  $\Delta x = \Delta r / \cos \theta$  и  $\Delta y = \Delta r / \sin \theta$ . Поэтому скорости перемещения точек постоянной фазы<sup>\*)</sup>

$$v_x = v / \cos \theta \quad \text{и} \quad v_y = v / \sin \theta$$

не равны проекциям  $\mathbf{v}$  на соответствующие оси. Величины, обратно пропорциональные этим скоростям,

$$\beta_x = \omega / v_x = \beta \cos \theta \quad \text{и} \quad \beta_y = \omega / v_y = \beta \sin \theta,$$

равны проекциям волнового вектора на оси координат. Поэтому понятие волнового вектора удобнее понятия фазовой скорости.

\*) Поскольку составляющая фазовой скорости плоской однородной волны больше самой величины  $v$ , может показаться, что проведённые выше рассуждения о коэффициенте замедления волны в спирали ошибочны. Вроде бы составляющая скорости вдоль оси спирали больше  $c$ , но это не так, ибо вдоль неё бежит *неоднородная* волна.

Скорость волны в системе, как правило, зависит от частоты. Однако вместо зависимости  $v(\omega)$  часто рассматривают зависимости  $n(\lambda)$  или  $\omega(\beta)$ . Все эти зависимости называют *дисперсионными характеристиками* ЗС, а соответствующие графики — *дисперсионными кривыми*. Величину дисперсии характеризуют значением  $(\lambda/n)(dn/d\lambda)$ . При  $(\lambda/n)(dn/d\lambda) < 0$  дисперсию называют *нормальной*, а при  $(\lambda/n)(dn/d\lambda) > 0$  — *аномальной*. В случае  $dn/d\lambda = 0$  говорят, что дисперсия равна нулю или отсутствует. При наличии дисперсии каждой частоте соответствует своя скорость монохроматической волны.

При изучении волн в средах используют понятие *групповой скорости* волны. Оно введено для описания перемещения в однородной среде сигнала, представляющего суперпозицию монохроматических волн. Максимальное значение сигнала наблюдается в той точке пространства, в которой волны складываются в фазе. Условие того, что в достаточно малой области значений волнового вектора фаза не зависит от  $\beta$ , можно записать равенством

$$\text{grad}_{\beta}(\omega t - \beta r) = 0, \quad (1.6)$$

откуда находим скорость перемещения точек, в которых сохраняется постоянная разность фаз для волн с различными, но близкими волновыми векторами:

$$\mathbf{v}_r = \text{grad}_{\beta} \omega. \quad (1.7, a)$$

В одномерном случае формула (1.7 а) принимает вид

$$v_r = d\omega/d\beta. \quad (1.7, б)$$

Величина  $v_r$  называется *групповой скоростью волны*.

Можно показать [3, 7, 11], что в средах без потерь (без диссипации энергии) величина  $v_r$  совпадает со скоростью переноса энергии  $v_s$ , определенной как отношение потока энергии  $P$  через поперечное сечение волноводящей системы и энергии  $W$ , запасенной в единице длины этой системы:

$$v_r = v_s = P/W. \quad (1.8)$$

Поэтому групповая скорость в отличие от фазовой не может превышать скорость  $c$  волны в свободном пространстве.

Равенство (1.8), по существу, связывает понятие групповой скорости, введенной для совокупности монохроматических волн, с понятием скорости переноса энергии, справедливым для монохроматической волны. В гл. 3 показано, что это равенство справедливо не только для однородных сред, но и для периодических структур. Следует заметить, что определение  $v_r$  по формуле (1.8) остается справедливым при любой дисперсии, тогда как определение  $v_r$  как скорости перемещения волнового пакета, теряет смысл при достаточно большой величине дисперсии  $(\lambda/n)(dn/d\lambda)$ , ибо пакет быстро расплывается по мере перемещения. С учетом (1.8) имеет смысл говорить о групповой скорости монохроматической волны.

Групповая скорость волны может отличаться от фазовой не только величиной, но и знаком. Если их направления одинаковы, то волну называют *прямой*, а дисперсию *положительной*. Если же эти скорости направлены



навстречу друг другу, то волну называют *обратной*, а дисперсию\*) отрицательной.

Связь замедлений  $n = c/v$  и  $n_r = c/v_r$  устанавливается с помощью формулы Релея. Для ее вывода заметим, что из (1.7 б) следует, что

$$n_r = d\beta/dk, \quad (1.9)$$

и воспользуемся (1.5, а). Продифференцировав  $\beta$  по  $k$  и заменив  $k$  на  $\lambda = 2\pi/k$ , получим формулу Релея в следующем виде:

$$n_r = n - \lambda(dn/d\lambda). \quad (1.10)$$

Соотношения (1.7) и (1.10) позволяют определить групповую скорость по дисперсионным кривым  $\omega(\beta)$  либо  $n(\lambda)$ . Согласно (1.7) величина  $v_r$  равна тангенсу угла наклона касательной к  $\omega(\beta)$ . В соответствии с (1.10) величина  $n_r$  определяется точкой пересечения касательной к  $n(\lambda)$  с осью ординат (рис. 1.2).

Одно из следствий формулы Релея заключается в том, что нормальная дисперсия ( $dn/d\lambda < 0$  при  $n > 0$ ) может быть только положительной, а аномальная ( $dn/d\lambda > 0$  при  $n > 0$ ) как положительной ( $n > 0$ ), так и отрицательной ( $n < 0$ ). На рис. 1.3 приведены дисперсионные кривые для всех трех случаев.

Рассмотренная выше (рис. 1.1) спиральная система обладает нормальной положительной дисперсией. Примером ЗС с отрицательной дисперсией может служить ЗС типа «встречные штыри», изображенная на рис. 1.4. Оценим приближенно ее дисперсионную характеристику, полагая, что волна бежит со скоростью  $s$  по зигзагообразному пути между штырями. Набег фазы волны на пути от точки  $A$  к  $B$  составляет  $\phi' = k(h + L)$ . Кроме того, направление поля меняется на противоположное, что дает добавочное изменение фазы на  $\pi$ . Знак добавки  $\pi$  можно выбирать произвольным, ибо фаза определяется с точностью до слагаемого, кратного  $2\pi$ . Выбираем

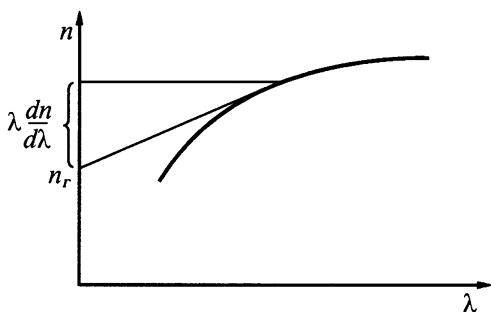


Рис. 1.2. Определение замедления групповой скорости  $n_r$  по кривой дисперсии  $n(\lambda)$

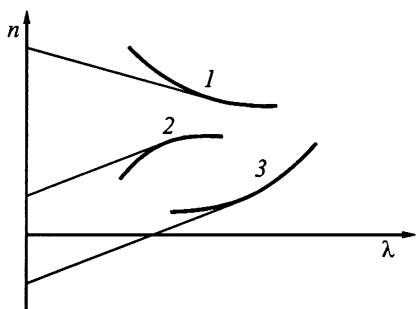


Рис. 1.3. Дисперсионные кривые, соответствующие нормальной положительной (1), аномальной положительной (2), аномальной отрицательной (3) дисперсии

\*) Следует заметить, что в отличие от данных выше определений «нормальная» и «положительная» дисперсия, а также «аномальная» и «отрицательная» дисперсия часто понимают как синонимы (см. [18], статья «Дисперсия волн»).

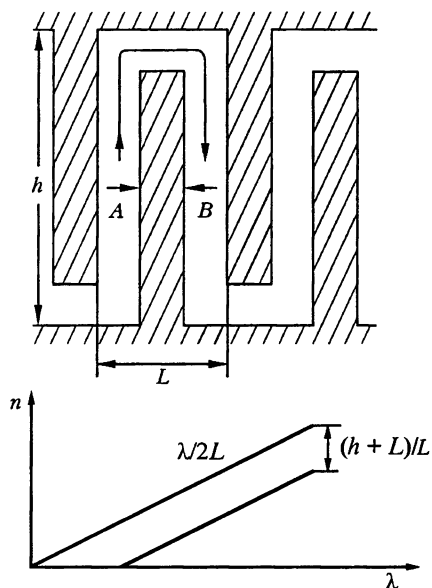


Рис. 1.4. ЗС типа «встречные штыри» и ее дисперсионная характеристика

его так, чтобы по абсолютной величине полный сдвиг фаз не превышал  $\pi$ :  $\varphi = \pi - k(h + L)$ . Учитывая (1.5), находим

$$n = (\lambda/2L) - (h + L)/L. \quad (1.11)$$

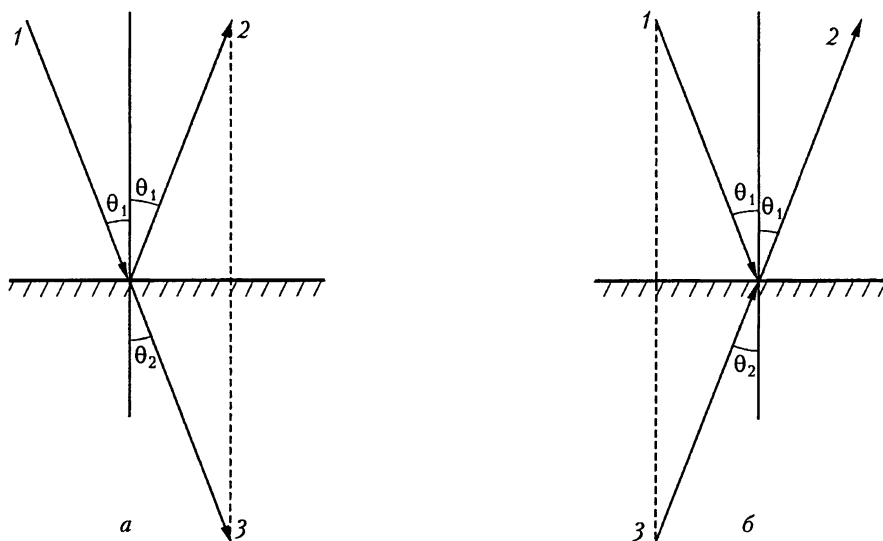
Соответствующая кривая изображена на рис. 1.4.

В приборах с длительным взаимодействием электронов с волной, как отмечено выше, наибольшая эффективность взаимодействия имеет место в случае, когда скорости электронов ( $v_e$ ) и волны ( $v$ ) близки. При этом положительная дисперсия используется, как правило, в усилительных приборах, ибо направления потока энергии и скорости электронов совпадают, и внутри прибора отсутствует обратная связь. Соответствующие приборы называются *лампами бегущей волны* (ЛБВ). Отрицательная дисперсия обычно используется в генераторах, называемых *лампами обратной волны* (ЛОВ).

Можно, конечно, создать генератор на ЗС с прямой волной, если организовать обратную связь за счет отражений или внешних цепей. Можно создать усилитель на ЗС с обратной волной, если сделать обратную связь недостаточной для самовозбуждения прибора. Такой принцип хорошо известен в низкочастотной радиотехнике и реализуется, в частности, в регенеративных усилителях. В технике СВЧ этот принцип реализуется, например, в приборах, называемых *платиноотронами*.

Отрицательная дисперсия используется не только в электронных приборах СВЧ. В частности, на ее основе созданы периодические антенные решетки обратной волны. Необычны также законы преломления в средах с нестандартными законами дисперсии [12–16], см. также гл. 19.

На рис. 1.5 изображены волновые векторы падающей из свободного пространства, отраженной и преломленной волн для случаев, когда среда обладает положительной и отрицательной дисперсией. Законы преломления и отражения формулируются для волновых векторов на основе единственного условия, что проекции волновых векторов падающей, отраженной и преломленной волн на границу раздела должны быть одинаковыми. Обычно волновой вектор преломленной волны направляют от границы раздела, молчаливо предполагая, что этот вектор направлен так же, как поток энергии (рис. 1.5, а). Однако это справедливо только для сред с положительной дисперсией. В случае сред с отрицательной дисперсией поток энергии по-прежнему направлен от границы раздела, а волновой вектор — к границе (рис. 1.5, б).



**Рис. 1.5.** Волновые векторы падающей (1), отраженной (2) и преломленной (3) волн для случаев, когда волна падает из свободного пространства в среду с положительной (а) и отрицательной (б) дисперсией

В классической оптике обычно наблюдают положительную дисперсию (нормальную или аномальную). Дисперсия прозрачных тел в широкой полосе частот нормальная. Лишь в узких полосах вблизи резонансных частот молекул наблюдается аномальная дисперсия, тесно связанная с поглощением света. Однако при этом направления потока энергии и фазовой скорости, как правило, совпадают, т. е. дисперсия положительна.

Среды с отрицательной дисперсией для акустических волн известны в физике твердого тела. Они представляют кристаллические решетки типа NaCl, состоящие из чередующихся в решетке атомов двух видов. Дисперсионная характеристика такого кристалла определяется, в основном, двумя ветвями. Более длинноволновая из них называется *акустической* ветвью, а коротковолновая — *оптической*. Оказывается, в поле, соответствующем оптической ветви, преобладает составляющая с отрицательной дисперсией. Аналогичное явление для электромагнитных волн наблюдается в так называемых многоступенчатых ЗС (см. гл. 11). Вполне понятно, что с ростом технологических возможностей такие структуры можно будет создать не только в СВЧ-технике, но и в оптике.

Отрицательная дисперсия для упругих волн существует и во многих полимерных кристаллах. Можно попытаться обнаружить ее и для электромагнитных волн. Такая дисперсия обнаружена В.М. Дашенковым для решетки из спиральных проводников. В виде таких решеток существуют, в частности, так называемые проводящие полимеры и киральные среды, которые активно исследуются в последнее время.

Отрицательная дисперсия наблюдается также у так называемых магнитостатических волн и в некоторых типах жидких кристаллов.

### 1.3. Сопротивление связи

В приборах СВЧ, использующих ЗС, электроны движутся в тормозящем поле волны. Для их эффективного взаимодействия с полем необходима не только близость скоростей электронов  $v_e$  и волны  $v$ , но и максимальное значение величины [4, 5, 8, 9, 12, 17, 19]

$$K_{cs} = \overline{|e_m|^2} / 2\beta_m^2 P \quad (1.12)$$

называемой *сопротивлением связи*.

Здесь  $P$  — средний по времени поток энергии через любое поперечное сечение ЗС, а  $\overline{|e_m|^2}$  — средний по объему электронного потока квадрат амплитуды составляющей электрического поля, взаимодействующей с электронами. Усреднение по длине потока обычно ведут в предположении, что система бесконечна. Оно сводится к вычислению так называемых *амплитуд пространственных гармоник* (см. гл. 4). Символ « $m$ » указывает номер пространственной гармоники.

Величина  $K_{cs}$  имеет размерность сопротивления. Вместе с  $K_{cs}$  растет коэффициент усиления ЛБВ, увеличивается разность скоростей  $v_e - v$ , при которой электроны еще достаточно эффективно взаимодействуют с волной, убывают пусковые токи ЛОВ, растет КПД приборов.

Существуют иные способы описания эффективности взаимодействия. В частности, в работе [6] вводится понятие коэффициента связи  $K = \omega \epsilon_0 \beta S_0 K_{cs}$ , который безразмерен. Здесь  $S_0$  — поперечное сечение электронного потока, а  $\epsilon_0$  — электрическая постоянная. В большинстве работ, однако, используют понятие сопротивления связи.

В теории ускорителей вместо сопротивления связи употребляют понятие *шунтового сопротивления*  $R_{ш} = 8,68 K_{cs} \beta^2 \alpha$ , где  $\alpha$  — коэффициент затухания волны в ЗС в неперах на метр.

В настоящей книге рассматриваются, в основном, только два параметра ЗС: дисперсионная характеристика и сопротивление связи. Из-за ограниченного объема книги практически не рассматриваются такие вопросы как диссипация энергии в ЗС, влияние разброса размеров на распространение волн, согласование ЗС с линиями передачи, способность рассеивать тепло, механическая прочность и ряд других не менее важных характеристик.

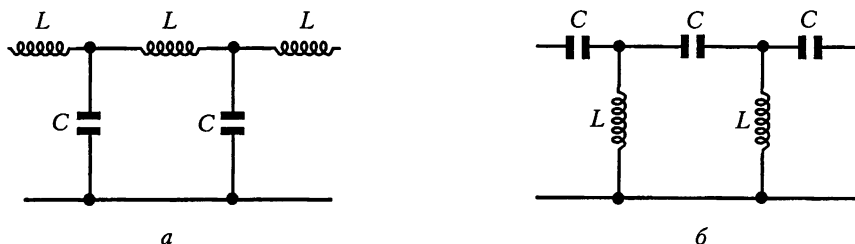
### Упражнения

1.1. Можно ли создать устройство, состоящее из одного или нескольких отрезков линий передачи, такое, чтобы сдвиг фаз поля на концах этого устройства:

- а) не зависел от частоты;
- б) был бы пропорционален частоте?

1.2. Нарисовать ход лучей в плоскопараллельной пластине из вещества с отрицательной дисперсией. Выяснить, какое при этом получится изображение





**Рис. 1.6.** Электрические цепочки, представляющие ячейки фильтров: *а* — низкой и *б* — высокой частоты

ние: действительное или мнимое; прямое или перевернутое; увеличенное или уменьшенное.

**1.3.** Получить уравнения дисперсии и построить дисперсионные характеристики электрических цепочек, изображенных на рис. 1.6. Определить тип дисперсии, построить кривые дисперсии.

**1.4.** Найти физическую ошибку в кривой дисперсии *б* из предыдущего примера. Объяснить причину ее возникновения.

## Список литературы

- [1]. Агранович В. М., Гинзбург В. Л. Кристаллооптика с учетом пространственной дисперсии и теория экситонов. Изд. 2-е, перераб. и доп. М.: Наука, 1979. 432 с.
- [2]. Вайнорис З., Кривайтис Р., Штарас С. Электродинамические задерживающие и отклоняющие системы. Под ред. З. Вайнориса. Вильнюс: Мокслас, 1986. 266 с.
- [3]. Вайнштейн Л. А. Электромагнитные волны. Изд. 2-е, перераб. и доп. М.: Радио и связь, 1988. 440 с.
- [4]. Григорьев А. Д. Электродинамика и техника СВЧ: Учебн. для ВУЗов по спец. «Электронные приборы и устройства». М.: Высшая школа, 1990. 335 с.
- [5]. Григорьев А. Д., Янкевич В. Б. Резонаторы и резонаторные замедляющие системы СВЧ: Численные методы расчета и проектирования. М.: Радио и связь, 1984. 248 с.
- [6]. Лошаков Л. Н., Пчельников Ю. Н. Теория и расчет усиления лампы с бегущей волной. М.: Сов. радио, 1964. 239 с.
- [7]. Мандельштам Л. И. Полное собрание трудов. Т. 5. М.: АН СССР, 1950. 468 с.
- [8]. Михалевский В. С. Элементы теории сверхвысокочастотных замедляющих систем. Ростов на Дону: Ростовский университет, 1964. 190 с.

- [9]. Найдено В. И., Дубровка Ф. Ф. Аксиально симметричные периодические структуры и резонаторы. Киев: Вища школа, 1985. 224 с.
- [10]. Никольский В. В., Никольская Т. И. Электродинамика и распространение радиоволн. Уч. пособие для радиотехн. спец. вузов. Изд. 3-е, перераб. и доп. М.: Наука, 1989. 544 с.
- [11]. Рытов С. М. Некоторые теоремы о групповой скорости электромагнитных волн. *Журн. эксперим. и теор. физики*, 1947, **17**(10), 930.
- [12]. Силин Р. А., Сазонов В. П. Замедляющие системы. М.: Сов. радио, 1966. 632 с.
- [13]. Силин Р. А. О возможности создания плоскопараллельных линз. *Оптика и спектроскопия*, 1978, **44**(1), 189–191.
- [14]. Силин Р. А. О дисперсионных свойствах двумерно- и трехмерно-периодических систем (искусственные диэлектрики). *Радиотехника и электроника*, 1960, **5**(4), 688–691.
- [15]. Силин Р. А. Волноводные свойства двумерно-периодических систем. *Вопросы радиоэлектроники. Сер.1. Электроника*, 1959. Вып. 4, 3–33.
- [16]. Силин Р. А. Оптические свойства искусственных диэлектриков. *Изв. вузов. Радиофизика*, 1972, **15**(6), 811–820.
- [17]. Тараненко З. И., Трохименко Я. К. Замедляющие системы. Киев: Техніка, 1965. 307 с.
- [18]. Физический энциклопедический словарь. М.: Сов. Энциклопедия, 1983. 928 с.
- [19]. Березин В. М., Буряк В. С., Гутцайт Э. М., Марин В. П. Электронные приборы СВЧ. Уч. пособие для вузов по спец. «Электронные приборы». М.: Высш. шк., 1995. 296 с.
- [20]. Силин Р. А. Необычные законы преломления и отражения. М.: ФАЗИС, 1999. 80 с.

## Симметрия замедляющих систем

### 2.1. Значение свойств симметрии

Свойствам различных объектов, обусловленным их симметрией, придается большое значение в науке. Изучению этих свойств посвящено много работ [3, 5, 6, 7]. На основе теории симметрии обнаружен и исследован ряд свойств элементарных частиц. Основные законы сохранения в физике (энергии, импульса, момента импульса и т. д.) вытекают из свойств симметрии пространства и времени. В оптике, в рентгено-структурном анализе, в физике твердого тела большое значение имеют свойства симметрии кристаллов и молекул [5, 6,].

С симметрией молекул связано наличие так называемых вырожденных колебаний, поглощение и комбинационное рассеяние электромагнитных волн. В кристаллах с различной симметрией волны распространяются по-разному. Так, например, в зависимости от симметрии может возникнуть двойное лучепреломление или вращение плоскости поляризации волны, по-разному происходит рассеяние рентгеновских лучей. Определенной симметрией, а именно, отсутствием центров инверсии, обусловлены ферромагнитные и сегнетоэлектрические свойства кристаллов. Знание свойств симметрии кристаллов и молекул позволяет в той или иной мере упростить теоретическое исследование этих объектов, а целый ряд характеристик предсказать без расчета. Так, например, теория симметрии позволяет без детальных исследований построить качественно структуру зон в кристаллах, найти энергетические уровни атомов и т. п.

ЗС представляют как бы искусственные кристаллы, ячейки которых имеют большие размеры. Отличие от обычных кристаллов состоит в том, что они периодичны только в одном или в двух измерениях. Естественно, что исследование свойств симметрии для ЗС столь же важно, как и для кристаллов. Эти свойства позволяют выяснить ряд явлений, которые ускользают при конкретных расчетах из-за различных упрощений. Например, как показано ниже, наличие так называемых скользящих плоскостей и винтовых осей обуславливает смыкание полос пропускания ЗС и определенную симметрию ее пространственных гармоник. Знание симметрии полей позволяет выбирать оптимальное положение потока электронов в приборе.

Из-за ограниченной точности расчетов или из-за трудностей постановки достаточно точных экспериментов до развития теории симметрии многие существенные свойства ЗС ускользали от внимания исследователей. К ним относятся, в частности, свойства спиралей на диэлектрических опорах и колебательных систем магнетронов со связками. Использование свойств симметрии позволяет сократить объем вычислений при количественном

анализе, а в ряде случаев — установить границы применимости приближенных расчетов.

В настоящей главе рассмотрены свойства симметрии ЗС, периодических в одном измерении. Результаты настоящей главы используются дальше для упрощения расчетов и для качественной оценки некоторых характеристик ЗС.

## 2.2. Понятие симметрии. Основные элементы симметрии

Пусть имеются две различные системы координат  $x, y, z$  и  $x', y', z'$ . Связь координат  $\mathbf{r}(x, y, z)$  и  $\mathbf{r}'(x', y', z')$  одной и той же точки в этих системах можно записать в виде<sup>\*)</sup>

$$\begin{aligned}x' &= \alpha_{xx}x + \alpha_{xy}y + \alpha_{xz}z + d_x, \\y' &= \alpha_{yx}x + \alpha_{yy}y + \alpha_{yz}z + d_y, \\z' &= \alpha_{zx}x + \alpha_{zy}y + \alpha_{zz}z + d_z,\end{aligned}\tag{2.1, а}$$

где  $\alpha_{ik}$  и  $d_i$  — действительные числа. Система равенств (2.1, а) называется *преобразованием координат  $x, y, z$  в координаты  $x', y', z'$* .

Коэффициенты  $\alpha_{ik}$  соответствуют преобразованиям, которые оставляют неподвижным начало координат. Такие преобразования называют *точечными*. Коэффициенты  $d_i$  определяют величины переноса (*трансляции*) начала координат вдоль соответствующих осей. Введя обозначение  $\{\alpha|\mathbf{d}\}\mathbf{r}$ , преобразование координат (2.1, а) можно записать более компактно,

$$\mathbf{r}' = [\alpha]\mathbf{r} + \mathbf{d} \equiv \{\alpha|\mathbf{d}\}\mathbf{r},\tag{2.1, б}$$

где  $\mathbf{d} = \{d_x, d_y, d_z\}$  — трехмерный вектор, а  $[\alpha]$  — матрица

$$[\alpha] = \begin{bmatrix} \alpha_{xx} & \alpha_{xy} & \alpha_{xz} \\ \alpha_{yx} & \alpha_{yy} & \alpha_{yz} \\ \alpha_{zx} & \alpha_{zy} & \alpha_{zz} \end{bmatrix}.$$

Векторы  $\mathbf{r}' - \mathbf{r}'_1$  и  $\mathbf{r} - \mathbf{r}_1$  в двух системах отсчета связаны соотношением

$$\mathbf{r}' - \mathbf{r}'_1 = [\alpha](\mathbf{r} - \mathbf{r}_1).$$

Ограничимся рассмотрением только таких точечных преобразований координат, которые оставляют длину любого вектора неизменной. Такие преобразования и соответствующие им матрицы  $[\alpha]$  называют *ортогональными*. Ортогональная матрица  $[\alpha]$  удовлетворяет равенству

\*) Существуют два представления о векторе. В одном из них вектор рассматривается как геометрический объект, который не зависит от выбора системы координат. В другом (по существу это радиус-вектор) — это совокупность трех координат точки. В разных системах координат эта совокупность различна. При переносе начала координат длина вектора меняется. Именно радиус-векторы и рассматриваются ниже.

$$[\alpha]^T [\alpha] = [1], \quad (2.2)$$

или, что то же, матрица  $[\alpha]^{-1}$ , обратная к  $[\alpha]$ , равна транспонированной матрице  $[\alpha]^T$ . Отсюда следуют, в частности, равенства

$$\begin{aligned} x &= \alpha_{xx}(x' - d_x) + \alpha_{yx}(y' - d_y) + \alpha_{zx}(z' - d_z), \\ y &= \alpha_{xy}(x' - d_x) + \alpha_{yy}(y' - d_y) + \alpha_{zy}(z' - d_z), \\ z &= \alpha_{xz}(x' - d_x) + \alpha_{yz}(y' - d_y) + \alpha_{zz}(z' - d_z). \end{aligned} \quad (2.3)$$

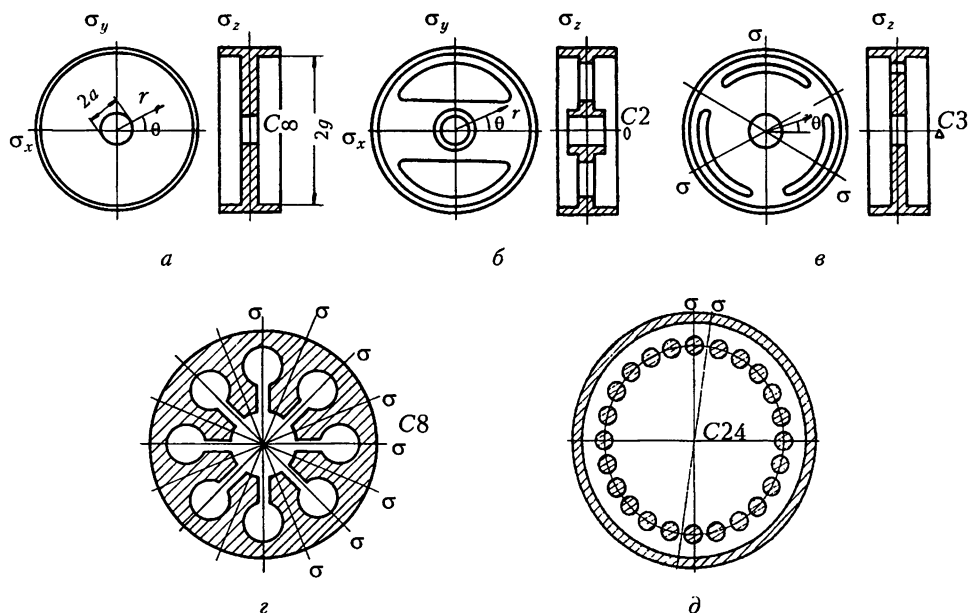
Рассмотрим теперь два разных вектора  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{r}_1$ . Пусть координаты вектора  $\mathbf{r}$  в базисе  $x, y, z$  такие же, как координаты  $\mathbf{r}_1$  в базисе  $x', y', z'$ . В этом случае говорят, что векторы  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{r}_1$  *симметричны относительно преобразования координат*  $\{\alpha|\mathbf{d}\}$ , которое в этом случае называется *преобразованием симметрии* или *операцией симметрии* для точек  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{r}_1$ . Два тела или две фигуры называются *симметричными относительно преобразования*  $\{\alpha|\mathbf{d}\}$ , если каждой точке  $A$  одного тела в базисе  $x, y, z$  можно поставить в соответствие одну и только одну точку  $B$  другого тела или другой фигуры в базисе  $x', y', z'$  и если при этом одинаковы координаты точек  $A$  и  $B$  в этих двух базисах. Примерами преобразований симметрии могут служить *отражение в плоскости, трансляция (параллельный перенос), повороты, инверсия* и т.д. Примером тела, симметричного самому себе, служит периодическая структура, которая симметрична относительно трансляции  $\{1|\mathbf{d}\}$  на расстояние  $d$ , равное периоду структуры.

Преобразования симметрии, в которых хотя бы одна точка остается неподвижной, называются *точечными*. Геометрическое место точек, остающееся неподвижным во время преобразования симметрии, называется *элементом симметрии*. При этом говорят, что *преобразование симметрии производит относительно данного элемента* (точки, прямой, плоскости). Ниже перечисляются основные типы преобразований симметрии и соответствующие им элементы.

*Инверсией* называют преобразование симметрии относительно точки, которую называют *центром инверсии*. Этот центр и соответствующая ему матрица  $[\alpha]$  обозначаются символом  $[\epsilon]$ . Если начало координат поместить в центре инверсии, то преобразованию  $\epsilon$  соответствует замена знаков всех координат на обратные, т. е.

$$[\epsilon] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}. \quad (2.4, a)$$

Поворот вокруг прямой на угол  $\alpha_N = 2\pi/N$ , где  $N$  — целое число, обозначается символом  $CN$ . Соответствующая прямая называется *осью симметрии* или *поворотной осью порядка  $N$* . На рис. 2.1 изображены три ячейки диафрагмированных волноводов ( $a, b, в$ ) с осями  $C\infty, C2$  и  $C3$ , соответственно, анодный блок магнетрона с осью  $C8(z)$ , а также поперечное сечение многопроводной линии с осью  $C24(d)$ . Каждое тело имеет ось  $C1$ , поскольку



**Рис. 2.1.** Системы с осями симметрии: *a* — ячейка диафрагмированного волновода с осью  $C\infty$ ; *b* и *в* — цепочки связанных резонаторов (ЦСР) с осями  $C2$  и  $C3$ , соответственно; *г* — анодный блок магнетрона с осью  $C8$ ; *д* — сечение многопроводной линии с осью  $C24$ . Кроме осей каждая система содержит плоскости симметрии

при повороте на угол  $2\pi$  вокруг любой оси система координат возвращается в исходное положение. Такая ось ниже не рассматривается. Если поворотную ось направить по координате  $z$ , то соответствующая ей матрица примет вид

$$[CN]_z = \begin{bmatrix} \cos(2\pi/N) & \sin(2\pi/N) & 0 \\ -\sin(2\pi/N) & \cos(2\pi/N) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.4, б)$$

Графическим символом оси  $CN$  служит  $N$ -угольник. Оси  $C2$  соответствует символ 0.

Отражение в плоскости, называемой *плоскостью симметрии* или *зеркальной плоскостью*, обозначается символом  $\sigma$ . Графическим символом плоскости симметрии служит сплошная черта. Примеры систем, содержащих зеркальные плоскости, изображены на рис. 2.1 и рис. 2.2. Если начало координат выбрать в плоскости симметрии  $x=0$ , то матрица  $\alpha$  преобразования симметрии примет вид

$$[\sigma]_x = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.4, в)$$

Она соответствует изменению знака координаты  $x$ .

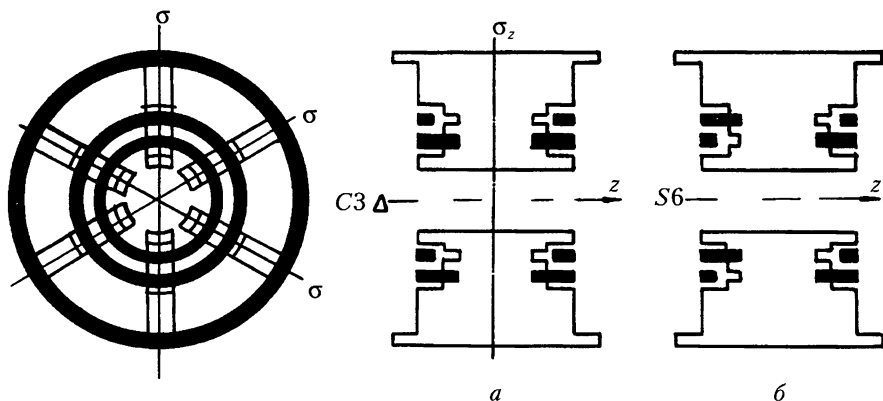


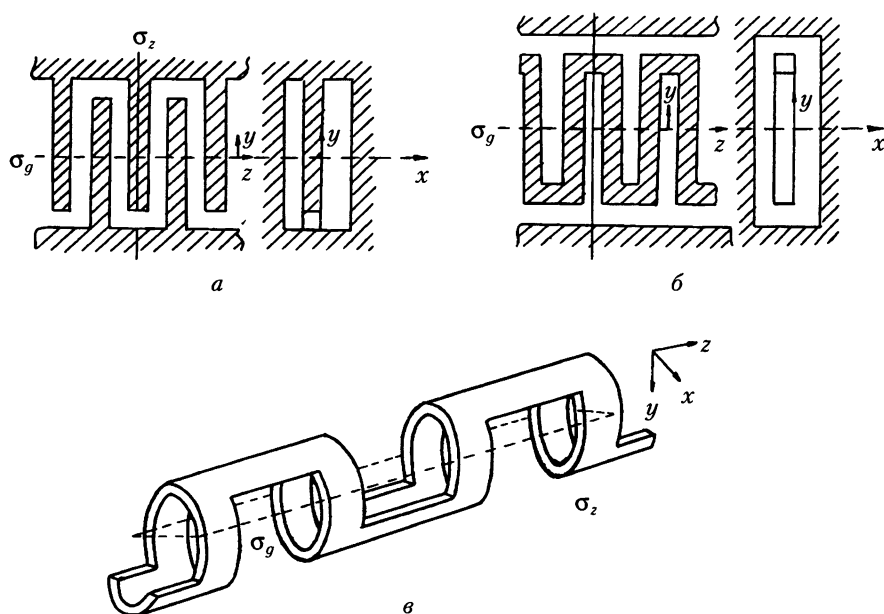
Рис. 2.2. Анодные блоки магнетронов со связками с осями: а — C3 и б — S6

Сочетание поворота вокруг оси на угол  $\alpha_N$  и отражения в плоскости, перпендикулярной этой оси, называется *зеркальным поворотом*. Соответствующий элемент называется *зеркально-поворотной осью* и обозначается символом  $SN$ . Зеркально-поворотная ось  $SN$  является также осью  $CN/2$ . Число  $N$  всегда четное. Примером системы с осью  $SN$  может служить один из анодных блоков магнетрона со связками, изображенных на рис. 2.2. Как частный случай зеркального поворота при  $N = 2$  можно рассматривать инверсию. Направив ось  $SN$  по оси  $z$ , запишем матрицу

$$[SN]_z = \begin{bmatrix} \cos(2\pi/N) & \sin(2\pi/N) & 0 \\ -\sin(2\pi/N) & \cos(2\pi/N) & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}. \quad (2.4, z)$$

Детерминанты матриц  $[\sigma]$ ,  $[\epsilon]$  и  $[SN]$  равны минус единице, а матриц  $[CN]$  — единице. Отрицательный знак имеют детерминанты тех матриц, которым соответствует преобразование левой системы координат в правую.

Преобразования симметрии, при которых перемещаются все точки, называются *пространственными*. Они образуются сочетанием трансляции (которая уже сама является пространственным преобразованием) с элементами точечных преобразований. Примерами могут служить *скользящие плоскости симметрии* и *винтовые оси*. Скользящая плоскость представляет сочетание трансляции на половину периода  $L = d/2$  и отражения в плоскости, в которой лежит вектор трансляции, а винтовая ось — сочетание поворота вокруг оси на угол  $2\pi/N$  с трансляцией вдоль этой оси на  $sd/N$ , где  $s$  — целое число ( $-N/2 < s \leq N/2$ ). Назовем  $s$  *числом заходов спирали (винта)*. Скользящая плоскость обозначается символом  $\sigma_g$ , а винтовая ось —  $CN_s$ . Графическим символом скользящей плоскости служит штриховая линия, а символ винтовой оси отличается от символа поворотной оси знаками, указывающими направление вращения. Например, оси  $C2_1$  соответствует символ  $\phi$ .



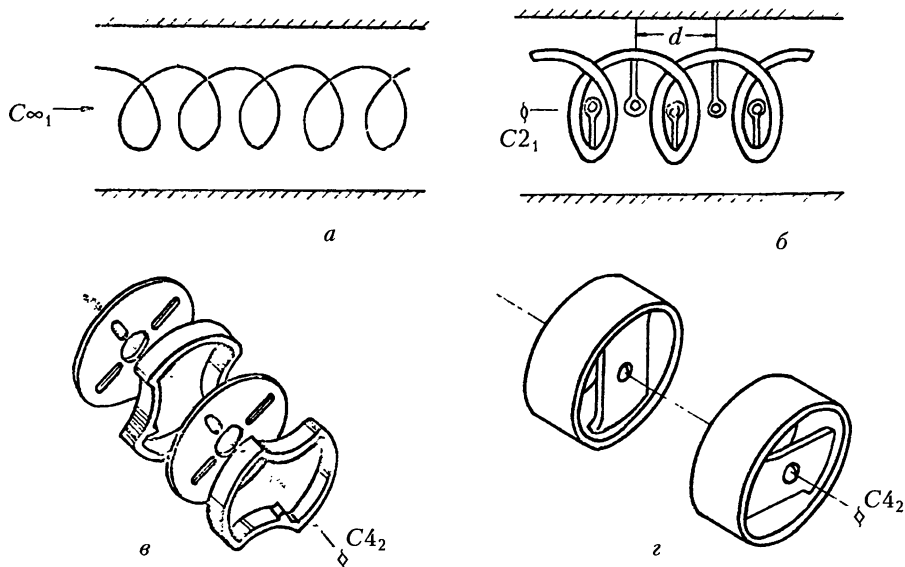
**Рис. 2.3.** ЗС со скользящими плоскостями симметрии: *а* — «встречные штыри»; *б* — «меандр»; *в* — «кольцо-стержень»

Примерами систем с плоскостью  $\sigma_g$  служат ЗС типа «встречные штыри», «меандр», «кольцо-стержень» (рис. 2.3). Винтовую ось содержит ЗС типа «спираль» (см. рис. 1.1), «спираль, нагруженная» различными элементами (рис. 2.4, б), а также ЗС типа «лепесток клевера» (рис. 2.4, в), и ЗС типа «цепочки связанных резонаторов» (ЦСР) с чередующимися диафрагмами (рис. 2.4, г), повернутыми друг относительно друга на  $90^\circ$ . Порядок винтовой оси обычной спирали равен бесконечности. Для ЗС, изображенных на рис. 2.4, в и г, этот порядок равен  $4_2$ , поскольку каждая из них совмещается сама с собой при повороте на угол  $2\pi/4$  и трансляции на  $2d/4$ .

Операция симметрии, состоящая в последовательном применении нескольких преобразований, называется *произведением этих преобразований*. В частности, отражение в скользящей плоскости представляет произведение трансляции и зеркального отражения, а винтовой поворот — произведение трансляции и поворота. В обоих случаях порядок сомножителей безразличен, т.е. операции коммутативны. В общем случае операции симметрии могут не коммутировать.

Следует различать случаи, когда сомножители в произведении преобразований сами являются или не являются преобразованиями симметрии данной системы. Например, в спирали (рис. 2.4, б) винтовая ось  $C_2$  представляет произведение трансляции на  $d/2$  и поворота на  $\pi$ , однако каждое из них в отдельности не служит преобразованием симметрии ЗС. Магнетрон со связками (см. рис. 2.2, а) содержит ось  $C_2$  и зеркальную плоскость  $\sigma_z$ .





**Рис. 2.4.** ЗС с винтовыми осями симметрии: *а* — «спираль в экране»; *б* — «спираль, нагруженная стержнями»; *в* — «лист клевера»; *г* — «цепочка связанных резонаторов»

Преобразование относительно каждого элемента, а также их произведение, служат операциями симметрии. Это произведение коммутативно. ЗС типа «встречные штыри» (рис. 2.3) содержит зеркальные плоскости, перпендикулярные направлению периодичности. Трансляция на период  $d$ , отражение в плоскости симметрии и их произведение служат преобразованиями симметрии, однако они не коммутируют, так как положение ЗС зависит от порядка, в котором производятся трансляция и отражение.

В настоящей главе рассмотрены некоторые свойства одномерно-периодических ЗС, обусловленные наличием отдельных элементов симметрии и их некоммутирующих произведений. Рассматривать коммутирующие произведения нет необходимости, так как соответствующие системы одновременно обладают свойствами, присущими обоим элементам симметрии. Последнее утверждение основано на известном свойстве линейных операторов. Если операторы коммутируют, то они и их произведения обладают одной и той же системой собственных функций. Произведению некоммутирующих операторов может соответствовать иная система собственных функций, чем каждому сомножителю, причем эта система может зависеть от порядка сомножителей.

В квантовой механике с коммутативностью связана невозможность одновременного измерения физических величин. В частности, с ней связан принцип неопределенности, согласно которому невозможно одновременно измерить координату и импульс частицы из-за некоммутируемости соответствующих операторов.

Произведение операций симметрии можно представить с помощью операторов. Так, например, запись

$$\mathbf{r}'' = \{[\alpha]_1[d_1]\}\{[\alpha][d]\mathbf{r}$$

означает, что система координат сначала подвергается преобразованию  $\mathbf{r}' = \{[\alpha][\mathbf{d}]\}\mathbf{r}$ , а затем  $\mathbf{r}'' = \{[\alpha]_1[\mathbf{d}_1]\}\mathbf{r}'$ . Представив операции симметрии в виде

$$\mathbf{r}' = [\alpha]\mathbf{r} + \mathbf{d}; \quad \mathbf{r}'' = [\alpha]_1\mathbf{r}' + \mathbf{d}_1,$$

можно получить следующее равенство:

$$\{[\alpha]_1[\mathbf{d}_1]\}\{[\alpha][\mathbf{d}]\}\mathbf{r} = \{[\alpha]_1[\alpha][[\alpha]_1\mathbf{d} + \mathbf{d}_1]\}\mathbf{r}. \quad (2.5, a)$$

Аналогичным образом получается выражение для обратного преобразования:

$$\{[\alpha][\mathbf{d}]\}^{-1}\mathbf{r} = \{[\alpha]^\top - [\alpha]^\top\mathbf{d}\}\mathbf{r}. \quad (2.5, б)$$

Свойства коммутативности операций симметрии совпадают с аналогичными свойствами операторов. Так, например,

$$[\sigma]_z[CN]_z = [CN]_z[\sigma]_z, \text{ но } [\sigma]_z[CN]_x \neq [CN]_x[\sigma]_z,$$

где

$$[\sigma]_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

В одномерно-периодических структурах возможна трансляция лишь в одном направлении (например, вдоль оси  $z$ ). Они могут содержать следующие элементы точечной симметрии:  $\varepsilon$ ,  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\sigma_z$ ,  $C2_x$ ,  $C2_y$ ,  $CN_z$ ,  $SN_z$ .

### 2.3. Преобразование компонент электромагнитного поля при операциях точечной симметрии

Изучение свойств симметрии ЗС связано в конечном счете со сравнением полей в различных точках, связанных преобразованием координат  $\mathbf{r}' = [\alpha]\mathbf{r}$ . Изменению системы отсчета сопутствует преобразование компонент поля. Скалярные величины не зависят от выбора системы отсчета. В частности, при повороте системы координат на некоторый угол скалярный потенциал  $U$  остается неизменным, тогда как векторные величины (векторный потенциал  $\mathbf{A}$ , напряженность электрического поля  $\mathbf{E}$ , электрическая индукция  $\mathbf{D}$  и плотность тока  $\mathbf{J}$ ) окажутся повернутыми в противоположную сторону относительно системы координат на тот же угол (так же, как вектор  $\mathbf{r}$ ). При этом говорят, что векторы  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{D}$  и  $\mathbf{J}$  преобразуются так же, как  $\mathbf{r}$ :

$$\mathbf{A}' = [\alpha]\mathbf{A}, \quad \mathbf{E}' = [\alpha]\mathbf{E}, \quad \mathbf{D}' = [\alpha]\mathbf{D}, \quad \mathbf{J}' = [\alpha]\mathbf{J}. \quad (2.6, a)$$

Они называются *полярными* векторами.

На первый взгляд может показаться, что компоненты напряженности  $\mathbf{H}$  и индукции  $\mathbf{B}$  магнитного поля преобразуются так же. Строгое рассмотрение, однако, показывает (см. упражнение 2.2), что они преобразуются по закону

$$\mathbf{H}' = \Delta[\alpha]\mathbf{H}, \quad \mathbf{B}' = \Delta[\alpha]\mathbf{B}, \quad (2.6, б)$$

где  $\Delta = 1$ , если  $\alpha$  преобразует левую систему отсчета в левую (поворот  $CN$ ), и  $\Delta = -1$ , если левая система становится правой (инверсия  $\epsilon$ , отражение  $\sigma$ , зеркальный поворот  $SN$ ). Они называются *аксиальными* векторами. Такой закон следует из требования, что все перечисленные выше величины должны удовлетворять уравнениям электромагнитного поля

$$\mathbf{E} = -\text{grad } U - (\partial \mathbf{A} / \partial t), \quad (2.7, a)$$

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}, \quad (2.7, б)$$

$$\text{rot } \mathbf{H} = (\partial \mathbf{D} / \partial t) + \mathbf{J}, \quad \text{rot } \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t, \quad (2.7, в)$$

$$\text{div } \mathbf{D} = \rho, \quad \mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}, \quad (2.7, г)$$

$$\text{div } \mathbf{B} = 0, \quad \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}, \quad (2.7, д)$$

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}. \quad (2.7, е)$$

Электрическую  $\epsilon_0$  и магнитную  $\mu_0$  проницаемости, а также проводимость  $\sigma$  для простоты полагаем скалярными. Индекс «0» при  $\epsilon$  и  $\mu$  ставим лишь для того, чтобы отличить диэлектрическую проницаемость от оператора инверсии.

## 2.4. Связь компонент поля в симметричных точках замедляющей системы

В дальнейшем, если не оговорено особо, рассматриваются ЗС, изготовленные из металла и не содержащие ни диэлектриков ( $\epsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12}$  Ф/м), ни магнетиков ( $\mu_0 = 12,56 \times 10^{-7}$  Гн/м), ни зарядов ( $\rho = 0$ ), ни токов ( $\mathbf{J} = 0$ ). Предполагаем, что металл является идеальным проводником ( $\sigma \rightarrow \infty$ ) и что изменение поля во времени происходит по закону  $\exp(j\omega t)$ . С учетом этих предположений запишем уравнения Максвелла (2.7, в) в виде

$$\text{rot } \mathbf{H} = j\omega \epsilon_0 \mathbf{E}, \quad (2.8, a)$$

$$\text{rot } \mathbf{E} = -j\omega \mu_0 \mathbf{H}. \quad (2.8, б)$$

Поле должно удовлетворять граничным условиям

$$[\mathbf{E}, \mathbf{v}] = 0, \text{ т. е. } \mathbf{E}_{\text{tg}} = 0, \text{ либо, что то же, } [\text{rot } \mathbf{H}, \mathbf{v}] = 0, \quad (2.8, в)$$

$$\mathbf{H}\mathbf{v} = \mathbf{H}_v = 0, \text{ либо, что то же, } \mathbf{v} \text{ rot } \mathbf{E} = 0. \quad (2.8, г)$$

Здесь  $\mathbf{v}$  — единичный вектор, перпендикулярный поверхности.

Соотношения (2.6) показывают, как преобразование координат изменяет компоненты векторов  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$ . При этом сам вектор и точка его приложения в пространстве остаются неизменными. Нас интересует связь полей в симметричных точках одной и той же системы. В общем случае поля в этих точках различны. Чтобы сравнить эти поля, соответствующие точки необходимо совместить преобразованием симметрии.

Пусть точки  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{r}_1$  имеют одинаковые координаты (на рис. 2.5 значения координат  $x'$ ,  $y'$  и  $x$ ,  $y$  векторов  $\mathbf{r}'_1$  и  $\mathbf{r}$  в соответствующих системах отсчета

численно равны) в двух системах отсчета, связанных преобразованием симметрии:

$$\mathbf{r}'_1 = \{[\alpha]|\mathbf{d}\}\mathbf{r}_1. \quad (2.9)$$

На рис. 2.5 в качестве примера изображены точки, для которых оператор  $\{[\alpha]|\mathbf{d}\} = \{[\alpha]|\mathbf{0}\}$  представляет операцию поворота.

Прежде, чем сравнивать поля в точках  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{r}_1$ , подвергнем их такому же точечному преобразованию  $\alpha$ , как и координаты, с учетом (2.6). Если векторы  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{r}_1$  связаны только трансляцией, то поля в соответствующих точках сравниваются без дополнительных преобразований. Ищем связь между векторами поля в симметричных точках в следующем виде\*):

$$\begin{aligned} \mathbf{E}'(\mathbf{r}_1) &= [\alpha]\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mu\mathbf{E}(\mathbf{r}), \\ \mathbf{H}'(\mathbf{r}_1) &= \Delta[\alpha]\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \mu\mathbf{H}(\mathbf{r}). \end{aligned} \quad (2.10, a)$$

Следует иметь в виду, что соотношение (2.10, a) устанавливает связь компонент поля в симметричных точках для одного и того же вида колебаний.

Величина  $\mu$ , удовлетворяющая (2.10, a), называется *собственным числом оператора симметрии*  $\alpha$ . Она определяет закон распределения электромагнитного поля в симметричных точках ЗС, поскольку указывает связь компонент поля  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  в симметричных точках  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{r}_1$ . Это поле должно удовлетворять уравнениям Максвелла и граничным условиям задачи, не изменяющимся при преобразовании симметрии. Оно называется *собственным решением оператора симметрии*. Каждому распределению поля, т. е. каждому  $\mu$ , при заданных граничных условиях соответствует свое решение уравнений Максвелла и в общем случае — своя частота. В некоторых случаях, однако, двум или несколькими различными распределениями поля (различными собственными решениями) соответствует одна и та же частота, т. е. *решения* уравнений Максвелла являются *вырожденными*. Соответствующие случаи рассматриваются ниже, ибо ряд случаев вырождения предсказывается теорией симметрии. Любая линейная комбинация вырожденных решений также удовлетворяет уравнениям Максвелла при тех же граничных условиях и той же частоте.

Числа  $\mu$  проще всего определить в случае точечной симметрии, так как, повторив операцию симметрии несколько раз, можно вернуться в исходную точку. Так, например, повторив операцию отражения или инверсии дважды, получаем  $\mu^2 = 1$ , т. е.  $\mu = \pm 1$ . Для систем с осями  $CN$  и  $SN$  можно вернуться в исходную точку, повторив операцию  $N$  раз, т. е.  $\mu^N = 1$ . Отсюда следует, что для систем с поворотной или зеркально-поворотной осью  $N$ -го порядка  $\mu = \exp(j2\pi q/N)$ , где  $q$  — целое число, которое можно считать лежащим в пределах  $-N/2 < q \leq N/2$ .

\*) Можно доказать, что всегда найдется хотя бы одно решение уравнения Максвелла вида (2.10, a).

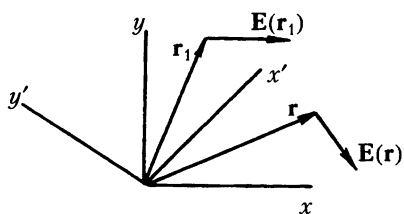


Рис. 2.5. Два вектора  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  и  $\mathbf{E}(\mathbf{r}_1)$ , имеющие одинаковые компоненты в двух различных системах отсчета  $(x, y)$  и  $(x', y')$

В ряде случаев полезно знать связь токов или потенциалов в симметричных точках ЗС. Согласно (2.6) плотность тока преобразуется так же, как координаты, а потенциал не зависит от выбора системы координат:

$$\propto \mathbf{J}_1(\mathbf{r}'_1) = \mu \mathbf{J}(\mathbf{r}), \quad U_1(\mathbf{r}'_1) = \mu U(\mathbf{r}). \quad (2.10, б)$$

## 2.5. Свойства систем, обладающих одним элементом точечной симметрии

**Плоскость симметрии  $x = 0$ .** Отражение в плоскости  $x = 0$  задается оператором  $\sigma_x$ , переводящим координату  $x$  в  $-x$ . Собственные числа этого оператора  $\mu = \pm 1$ , а  $\Delta = -1$ . Отсюда вытекает следующий закон преобразования векторов  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$ :

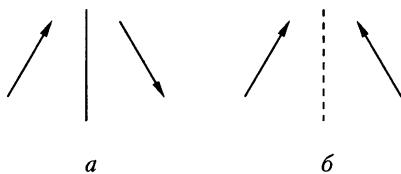
$$\begin{aligned} \pm \mathbf{E}(x, y, z) &= [\sigma]_x \mathbf{E}(-x, y, z), \\ \pm \mathbf{H}(x, y, z) &= -[\sigma]_x \mathbf{H}(-x, y, z) \end{aligned} \quad (2.11, а)$$

или в координатах с учетом (2.4, в)

$$\begin{aligned} \pm E_x(x, y, z) &= -E_x(-x, y, z), & \pm E_{yz}(x, y, z) &= E_{yz}(-x, y, z), \\ \mp H_x(x, y, z) &= -H_x(-x, y, z), & \mp H_{yz}(x, y, z) &= H_{yz}(-x, y, z). \end{aligned} \quad (2.11, б)$$

Знак «+» в левой части равенств (2.11, а) соответствует случаю, когда в плоскости симметрии  $x = 0$  равны нулю компоненты  $E_x$ ,  $H_y$  и  $H_z$ , т. е. электрическое поле параллельно плоскости симметрии, а магнитное — перпендикулярно (рис. 2.6). При знаке «-» в плоскости симметрии  $E_y = E_z = H_x = 0$ . При этом говорят, что в плоскости симметрии имеет место *магнитная стенка* в первом случае и *электрическая стенка* — во втором. Закон распределения поля (2.11) относительно плоскости симметрии не зависит от ориентации этой плоскости. В частности, электрическая или магнитная стенка имеет место в плоскости симметрии  $\sigma_y$  диафрагмированного волновода, изображенного на рис. 2.1, б.

Равенства (2.11) позволяют сравнивать компоненты поля, если они принадлежат одному и тому же виду колебаний (виду волны). Они несправедливы, например, для периодической структуры, содержащей плоскости симметрии, перпендикулярные трансляции, так как в этой структуре возможны волны противоположного направления. При этом отражению в плоскости симметрии может соответствовать другая волна. В общем случае, когда кроме плоскостей симметрии система содержит иные элементы (оси, трансляции и т. п.), причем соответствующие операции симметрии не коммутируют между собой, в плоскости симметрии могут отсутствовать как электрические, так и магнитные стенки. Подробнее про некоммутирующие элементы см. п. 2.10. Аналогичное утверждение относится и к другим элементам симметрии.



**Рис. 2.6.** Отражение вектора напряженности электрического поля в электрической (а) и магнитной (б) стенке

На рис. 2.1, 2.2, 2.3 и 2.4 изображены примеры систем, содержащих плоскости симметрии, отражение в которых не коммутирует с другими операциями симметрии. Так, например, в диафрагмированных волноводах (рис. 2.1, *а, б, в*) отражение в плоскости  $\sigma_z$  не коммутирует с трансляцией, в диафрагмированном волноводе (рис. 2.1, *а*), в многопроводной линии (рис. 2.1, *д*) и в магнетроне со связками (рис. 2.2) отражения в плоскостях симметрии, содержащих оси  $S_\infty$ ,  $S_{24}$ ,  $S_3$ , соответственно, не коммутируют с поворотами вокруг этих осей. В этих системах существуют типы колебаний и волн, не содержащие в указанных плоскостях ни электрических, ни магнитных стенок.

Отражение в плоскостях  $\sigma_x$  и  $\sigma_y$  для системы, изображенной на рис. 2.1, *б*, а также в плоскости  $\sigma_z$  для магнетрона со связками коммутирует с любыми другими операциями симметрии этих систем. Поэтому в указанных плоскостях должны существовать либо электрические, либо магнитные стенки.

В квантовой механике доказывают, что в системах с плоскостью симметрии (пусть  $x = 0$ ) волновая функция  $\psi(x, y, z)$  либо четная, либо нечетная функция  $x$ . Понятия электрической и магнитной стенок представляют обобщения понятий четности и нечетности функций на электромагнитное поле. Оно содержит много компонент, часть из которых четна по  $x$ , а часть — нечетна.

**Ось симметрии  $z$  порядка  $N$ .** Поворот вокруг оси  $z$  на угол  $\alpha_N = 2\pi/N$  задается оператором  $C_N$ , собственные числа которого определяются выражением  $\mu = \exp(-j2\pi q/N)$ , где  $-N/2 < q \leq N/2$ . Детерминант  $\Delta$  соответствующей матрицы равен единице, из чего следует, в частности, что векторы электрического и магнитного полей преобразуются одинаково.

Связь компонент полей при наличии оси симметрии удобнее всего рассматривать в цилиндрических координатах  $(\rho, \theta, z)$ . При этом соотношения (2.11, *а*) можно записать в виде

$$\begin{bmatrix} \mathbf{E}(\rho, \theta + 2\pi/N, z) \\ \mathbf{H}(\rho, \theta + 2\pi/N, z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{E}(\rho, \theta, z) \\ \mathbf{H}(\rho, \theta, z) \end{bmatrix} \exp(-j2\pi q/N). \quad (2.12)$$

Такие же равенства справедливы для потенциалов и токов.

Хотя векторы  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  в разных симметричных точках ориентированы по-разному, они не умножаются на матрицу поворота  $C_N$  потому, что в цилиндрических координатах их компоненты одинаковы с точностью до множителя  $\varphi = 2\pi q/N$ . В этом смысле запись  $\mathbf{E}(\rho, \theta, z)$  означает не вектор  $\mathbf{E}$ , а совокупность трех его компонент  $E_\rho$ ,  $E_\theta$ ,  $E_z$ . Выражение (2.12), характеризующее распределение поля, указывает, что поля в соседних симметричных точках отличаются по фазе на  $\varphi = 2\pi q/N$ , где  $q$  — количество «длин волн», укладывающихся на окружности.

Из (2.12) следует, что поле в системе можно представить в виде

$$\begin{bmatrix} \mathbf{E}(\rho, \theta, z) \\ \mathbf{H}(\rho, \theta, z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{E}_0(\rho, \theta, z) \\ \mathbf{H}_0(\rho, \theta, z) \end{bmatrix} \exp(-jq\theta), \quad (2.13, a)$$

где функции  $\mathbf{E}_0$  и  $\mathbf{H}_0$  имеют период  $2\pi/N$  по координате  $\theta$ .

Чтобы убедиться в этом, достаточно умножить левую и правую части (2.12) на  $\exp[jq(\theta + 2\pi/N)]$ . Равенства (2.12) и (2.13, *а*) для систем с

осевой симметрией представляют аналог теоремы Флоке, справедливой для периодических структур.

Согласно (2.13, а) поле представляется в виде волны, бегущей по азимуту с угловой скоростью  $\theta/t = \omega/q$  и промодулированной с периодом  $2\pi/N$ . В этом можно убедиться, умножив (2.13, а) на  $\exp(j\omega t)$  и зная, что функция  $\exp[j(\omega t - q\theta)]$  описывает бегущую волну. Числам  $q$  и  $-q$  соответствуют волны, бегущие в противоположные стороны с одинаковой угловой скоростью. Если числу  $q$  соответствует решение  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$ , то числу  $-q$  соответствует комплексно сопряженное решение  $\mathbf{E}^*$ ,  $-\mathbf{H}^*$ . Оба решения удовлетворяют уравнениям Максвелла (2.8) и граничным условиям при одной и той же частоте, т. е. они являются двукратно вырожденными. Отсутствует вырождение только при  $q = 0$  и  $q = N/2$ . При  $q = 0$  сдвиг фаз колебаний  $2\pi q/N$  в соседних ячейках равен нулю, а при  $q = N/2$  он равен  $\pi$ . В этих двух случаях волна не является бегущей, поскольку сдвиг фаз  $\varphi = 0$  не имеет знака, а сдвигам фаз  $\pi$  и  $-\pi$  соответствует один и тот же вид колебаний. При этом  $\mathbf{E} = \mathbf{E}^*$ , а  $\mathbf{H} = -\mathbf{H}^*$ , т. е. все компоненты электрического поля синфазны или противофазны между собой и сдвинуты по фазе на  $\pm\pi/2$  относительно компонент магнитного поля.

Каждую пару вырожденных решений можно представить не только в виде бегущих волн (2.13, а), но и в виде стоячих. Для этого каждую компоненту поля (2.13, а) достаточно записать в виде

$$E_i(\rho, \theta, z) = \exp[-j(q\theta - \varphi_i)] |E_{0i}(\rho, \theta, z)|, \quad -N/2 < q \leq N/2$$

и учесть, что значениям  $q$ , отличающимся только знаком, соответствуют значения  $\varphi_i$ , тоже отличающиеся только знаком. Здесь  $i$  — индекс, обозначающий компоненту  $\rho$ ,  $\theta$  или  $z$ , а величина  $\varphi_i$  может зависеть от  $\rho$  и  $z$ . Зная, что сумма и разность решений уравнений Максвелла (2.8) также удовлетворяет этим уравнениям при тех же граничных условиях и частоте, находим из (2.13, а) два других линейно независимых решения,

$$\begin{aligned} E_i'(\rho, \theta, z) &= 2 \cos(q\theta - \varphi_i) |E_{0i}(\rho, \theta, z)|, \\ E_i'(\rho, \theta, z) &= 2 \sin(q\theta - \varphi_i) |E_{0i}(\rho, \theta, z)|, \quad 0 \leq q \leq N/2, \end{aligned} \quad (2.13, б)$$

описывающих стоячие волны. В общем случае величина  $\varphi_i$  зависит от выбора начала отсчета угла  $\theta$ . Поэтому пару вырожденных решений можно описывать одной формулой из (2.13, б).

Определим теперь поле на оси симметрии для различных типов колебаний, отличающихся значениями  $q$ . Для этого рассмотрим сначала точки, не лежащие на оси. Пронумеруем по порядку  $N$  симметричных точек и обозначим их координаты  $x_k, y_k, z_k$ , где  $k = 0, 1, \dots, N-1$ . Запишем в декартовых координатах выражение (2.12), определяющее связь поля  $\mathbf{E}$  в точках  $k = 0$  и  $k = 1$ :

$$[CN]\mathbf{E}_{(1)}(x_1, y_1, z_1) = \exp(-j2\pi q/N)\mathbf{E}_{(0)}(x_0, y_0, z_0).$$

Поле в  $k$ -й точке определяется равенством

$$\mathbf{E}_{(k)}(x_k, y_k, z_k) = \exp(-j2\pi qk/N)[CN]^{-k}\mathbf{E}_{(0)}(x_0, y_0, z_0),$$

где  $-k$  в символе  $[CN]^{-k}$  означает показатель степени соответствующей матрицы. Иными словами, если в точках, совмещающихся при повороте системы на угол  $2\pi/N$ , разность фаз колебаний равна  $2\pi q/N$ , то в точках, совмещающихся при повороте на угол  $2\pi k/N$ , эта разность фаз в  $k$  раз больше, т. е. равна  $2\pi qk/N$ .

Рассмотрим случай, когда оси координат можно выбрать так, чтобы в точке  $(x_0, y_0, z_0)$  компонента поля  $E_{0y} = 0$ , т. е. можно представить вектор поля в виде матрицы-столбца\*)

$$\mathbf{E}_{(0)} = \begin{bmatrix} E_{0x} \\ 0 \\ E_{0z} \end{bmatrix}.$$

При этом

$$[CN]^{-k} \mathbf{E}_{(0)} = \begin{bmatrix} \cos(2\pi k/N) E_{0x} \\ \sin(2\pi k/N) E_{0x} \\ E_{0z} \end{bmatrix}.$$

На оси все  $N$  симметричных точек сливаются, и поле можно представить в виде суммы

$$\mathbf{E}(0,0,z) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \mathbf{E}_k(0,0,z) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \exp(-j2\pi qk/N) [CN]^{-k} \mathbf{E}_0(0,0,z),$$

откуда получаем

$$\begin{bmatrix} E_{0x}(0,0,z) \\ E_{0y}(0,0,z) \\ E_{0z}(0,0,z) \end{bmatrix} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \begin{bmatrix} \cos(2\pi k/N) E_{0x} \\ \sin(2\pi k/N) E_{0x} \\ E_{0z} \end{bmatrix} \exp(-j2\pi qk/N).$$

Суммирование дает:

$$\begin{bmatrix} E_{0x}(0,0,z) \\ E_{0y}(0,0,z) \\ E_{0z}(0,0,z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ E_{0z} \end{bmatrix} \text{ при } q = 0; \quad \begin{bmatrix} E_{0x}/2 \\ \mp j E_{0x}/2 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ при } q = \pm 1; \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ при } |q| > 1. \quad (2.14)$$

Строго говоря, на оси сливается бесконечное множество точек, поэтому следовало бы суммировать бесконечное множество полей. Однако для каждой  $N$  симметричных точек эти суммы одинаковы, так что выражения (2.14) справедливы.

Таким образом, на оси  $z$  компонента  $E_z$  может быть отличной от нуля только при синфазных колебаниях в симметричных точках ( $q = 0$ ), а компонента  $E_\rho$ , перпендикулярная оси  $z$ , только когда на окружности  $\rho = \text{const}$

\*) Конечный результат не зависит от того, можно или нельзя положить  $E_{0y} = 0$ , однако выкладки в общем случае получаются несколько более громоздкими. Нельзя полагать  $E_{0y} = 0$  в случае эллиптически поляризованного поля.



укладывается одна волна ( $q = \pm 1$ ). При этом поле поляризовано по кругу, поскольку компоненты  $E_x$  и  $E_y$  одинаковы по модулю и сдвинуты по фазе на  $\pi/2$ . Разным знакам  $q = \pm 1$  соответствует вращение плоскости поляризации в противоположные стороны. Сумма двух полей, поляризованных по кругу, может дать линейную поляризацию.

Магнитное поле на оси  $z$  обладает теми же свойствами, что электрическое, поскольку оно преобразуется по тому же закону.

Примеры систем, содержащих оси симметрии, изображены на рис. 2.1. В диафрагмированном волноводе с осью  $C\infty$ , как и в гладком круглом волноводе, не вырождены только те типы волн, поле которых не зависит от координаты  $\theta$ . В ЗС с осью  $C2$  (рис. 2.1, б) вырожденных типов волн нет, поскольку число  $q$ , лежащее в области  $-N/2 < q \leq N/2$ , может принимать только два значения: 0 и 1. В ЗС с осью  $C3$  возможны вырожденные волны, для которых  $q = \pm 1$ , но невозможна волна, для которой  $q = N/2$ , ибо  $N$  — нечетно. Для взаимодействия с электронным потоком, бегущим вдоль оси  $z$ , используется тип волны с  $q = 0$ , ибо только для него поле на оси  $E_z \neq 0$ .

Многорезонаторный магнетрон (рис. 2.1, г) ограничен по оси  $z$ , поэтому целесообразно говорить о типах колебаний в нем, а не о типах волн вдоль оси  $z$ . Все виды колебаний в магнетроне двукратно вырождены, за исключением тех, которые соответствуют  $q = 0$  и  $q = N/2$ . Первый из них называют *нулевым* типом колебаний, а второй —  *$\pi$ -типом* ( *$\pi$ -видом*). Именно колебания  $\pi$ -типа используются, как правило, для работы магнетронов.

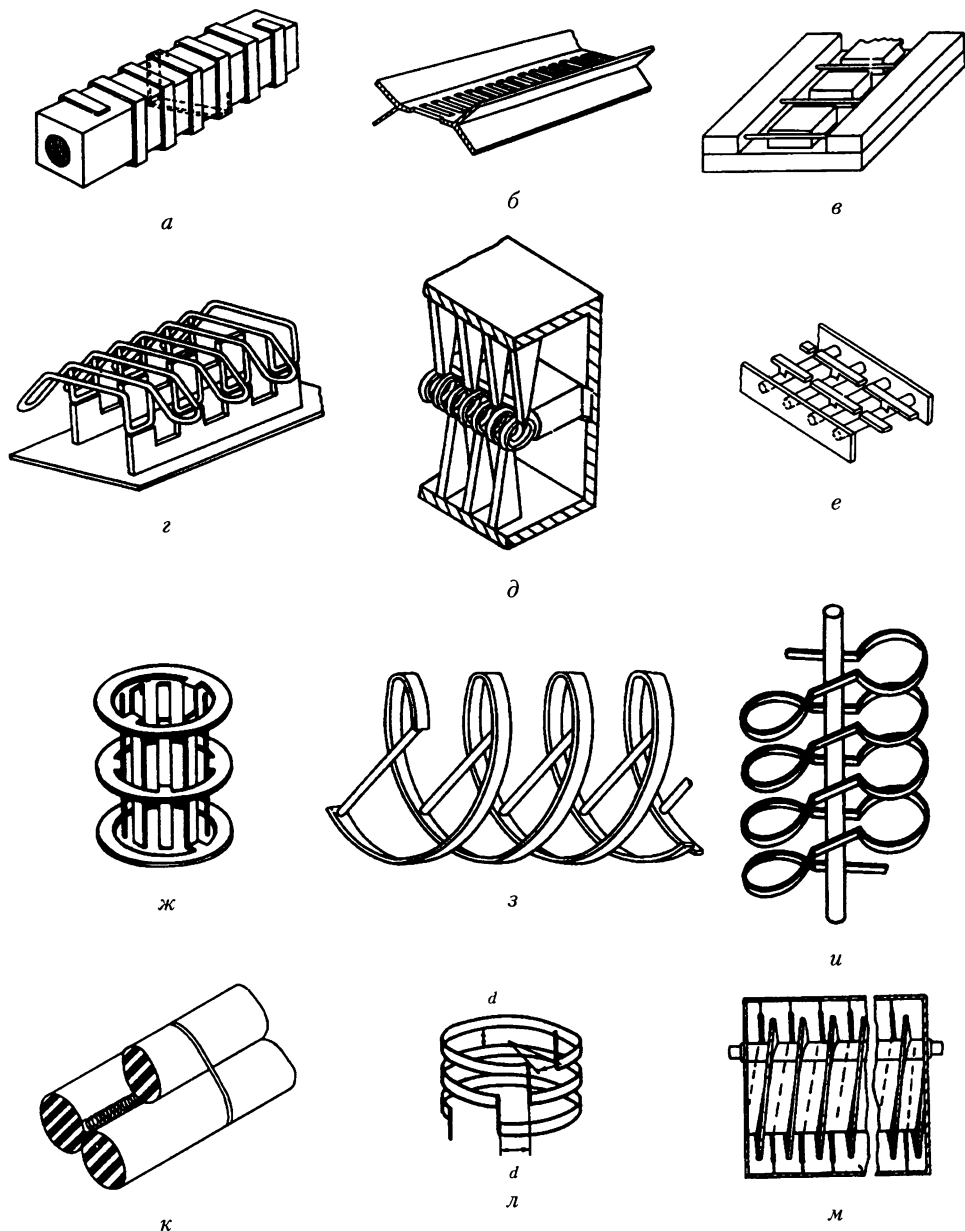
В анодном блоке возможны неоднородности, обусловленные либо погрешностями изготовления, либо выводом энергии, либо чем-либо другим. Такой блок уже не содержит оси  $CN$  и виды колебаний перестают быть вырожденными. При этом говорят, что *неоднородности снимают вырождение колебаний*. Снимают его не только неоднородности, но и электронный поток, вращающийся в одну сторону.

При  $q = 0$  компоненты поля  $E_z$  и  $H_z$  не обязательно отличны от нуля. Так, например, в многопроводной линии (рис. 2.1, д)  $E_z = H_z = 0$  даже при  $q = 0$ . С другой стороны, существуют системы, в которых при  $q = 0$  обе компоненты ( $E_z$  и  $H_z$ ) отличны от нуля. Примером служит спирально проводящий цилиндр (см. гл. 6). Можно показать, что если ось  $CN$  лежит в плоскости симметрии, то обе компоненты ( $E_z$  и  $H_z$ ) на оси не могут быть отличными от нуля одновременно. Доказательство основывается на том, что в плоскости симметрии располагается либо электрическая, либо магнитная стенка. В частности, на оси не могут быть одновременно отличными от нуля компоненты  $E_z$  и  $H_z$  в системах, изображенных на рис. 2.1, и в круглом волноводе.

Примеры ЗС с различными элементами симметрии приведены на рис. 2.7. Читателю предлагается самому определить элементы симметрии этих систем (см. упражнение 2.7).

## 2.6. Периодические структуры

Пусть структура симметрична относительно трансляции  $\{1|\mathbf{d}\}$ , т. е. выглядит одинаково в системах отсчета  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \mathbf{d}$ . Поле в точках, отстоящих друг от



**Рис. 2.7.** Примеры систем с различными элементами симметрии: *a* — спираль на квадратном стержне, *б* — лестница, *в* — лестница с выступами, *г* — меандр на опорах, *д* — кольцо-стержень на опорах, *е* — лестница со связками, *ж* — двухэтажная ЗС встречные штыри, *з* — спираль с перемычками, *и* — спираль с гантелевидной формой витков, *к* — спираль в диэлектрических опорах, *л* — система колец, соединенных перемычками, *м* — спиральная канавка на стержне

друга на вектор трансляции  $\mathbf{d}$ , в соответствии с (2.10) ищем в виде

$$\mathbf{E}(\mathbf{r} + \mathbf{d}) = \mu \mathbf{E}; \quad \mathbf{H}(\mathbf{r} + \mathbf{d}) = \mu \mathbf{H}, \quad (2.15)$$

где  $\mu$  — некоторое число, в общем случае — комплексное.

Можно доказать [2, 4, 5], что при любой фиксированной частоте найдется решение уравнений Максвелла (2.8) в виде (2.15), удовлетворяющее граничным условиям, имеющим период  $\mathbf{d}$ . Доказательство сводится к известному из линейной алгебры факту, что для любой квадратной матрицы  $[A]$  всегда найдется хотя бы одно решение  $\mathbf{U}$ , удовлетворяющее условию  $[A]\mathbf{U} = \mu \mathbf{U}$ .

В нашем случае порядки  $[A]$  и  $\mathbf{U}$  бесконечны<sup>\*)</sup>. Если в качестве  $\mathbf{U}$  взять вектор, состоящий из элементов  $\mathbf{E}_k(\mathbf{r})$ ,  $\mathbf{H}_k(\mathbf{r})$ , образующих полную систему решений, а в качестве  $[A]$  — матрицу, связывающую решения,  $\mathbf{U}(\mathbf{r} + \mathbf{d}) = [A]\mathbf{U}(\mathbf{r})$ , то утверждение (2.15) можно считать доказанным.

Соотношение (2.15) называется *условием Флоке (теоремой Флоке)* для случая, когда система имеет период лишь в одном направлении (структура одномерно-периодическая), и *условием Блоха (теоремой Блоха)*, когда система двумерно- или трехмерно-периодическая.

Величину  $\mu$  обычно представляют в виде экспоненты ( $\mu = \exp(-\Gamma)$ , где  $\Gamma = \chi + j\phi$ ). Число  $\Gamma$  называют *постоянной распространения*,  $\chi$  — *постоянной затухания*,  $\phi$  — *сдвигом фаз на периоде  $\mathbf{d}$*  ( $-\pi < \phi \leq \pi$ ). В общем случае каждому значению  $\mu$  соответствует своя частота и свое решение уравнений Максвелла (2.8). Ту область частот, в которой  $|\mu| = 1$  ( $\Gamma = j\phi$ ), называют *полосой пропускания* ЗС. Область частот, в которой  $\chi \neq 0$ , называют *полосой непропускания* ЗС. Понятия полос пропускания и непропускания вводятся строго лишь для ЗС без потерь энергии. Об этих полосах правомочно говорить для конкретных типов волн. Полосы пропускания и непропускания могут перекрываться для различных типов волн.

Условия (2.15) можно записать в несколько иной форме, вводя обозначения  $\Gamma = h\mathbf{d}$ ,  $\chi = \alpha\mathbf{d}$ ,  $\phi = \beta\mathbf{d}$ , где величина  $h$  называется *комплексным волновым числом* или *комплексным волновым вектором*,  $\alpha$  — *коэффициентом* или *вектором затухания*,  $\beta$  — *волновым числом* или *волновым вектором*.

Величины  $h$ ,  $\alpha$  и  $\beta$  являются скалярами для волн в одномерно-периодических системах и векторами для волн в двумерно- и трехмерно-периодических системах. Ограничимся пока рассмотрением систем, имеющих период  $\mathbf{d}$  только в одном направлении (пусть вдоль оси  $z$ ). Записав условие (2.15) в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(x, y, z + d) \exp(hd) &= \mathbf{E}(x, y, z), \\ \mathbf{H}(x, y, z + d) \exp(hd) &= \mathbf{H}(x, y, z), \end{aligned}$$

<sup>\*)</sup> Теорема Флоке доказана строго [2] лишь для случая, когда матрица  $[A]$  имеет конечный порядок, что справедливо для обыкновенных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами. Для уравнений в частных производных матрица  $[A]$  имеет бесконечный порядок. При этом необходимо доказать сходимость коэффициентов матрицы  $[A]$ , чего в известной нам литературе не сделано.

умножив результат на  $\exp(hz)$  и заметив, что функции

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_0(x, y, z) &= \mathbf{E}(x, y, z + d) \exp[h(z + d)] = \mathbf{E}(x, y, z) \exp(hz), \\ \mathbf{H}_0(x, y, z) &= \mathbf{H}(x, y, z + d) \exp[h(z + d)] = \mathbf{H}(x, y, z) \exp(hz)\end{aligned}$$

имеют период  $d$ , запишем условие Флоке (2.15) для одномерно-периодических структур в следующем виде:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(x, y, z) &= \mathbf{E}_0(x, y, z) \exp(-hz), \\ \mathbf{H}(x, y, z) &= \mathbf{H}_0(x, y, z) \exp(-hz).\end{aligned}\tag{2.16, а}$$

Соотношения (2.16, а) означают, что среди всех возможных полей периодической структуры существуют такие, которые представляют волны ( $h = \alpha + j\beta$ ), бегущие ( $\alpha = 0$ ) или затухающие ( $\alpha \neq 0$ ) вдоль оси  $z$  и промодулированные с периодом  $d$ .

В полосах пропускания это условие принимает вид

$$\begin{bmatrix} \mathbf{E}(x, y, z) \\ \mathbf{H}(x, y, z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{E}_0(x, y, z) \\ \mathbf{H}_0(x, y, z) \end{bmatrix} \exp(-j\beta z).\tag{2.16, б}$$

Иногда теорему Флоке доказывают путем предельного перехода от систем с осью  $C_N$  ( $N \rightarrow \infty$ ), полагая, что расстояние  $d$  между соседними симметричными точками остается конечным. При этом в (2.12) множитель  $\mu = \exp(-j2\pi q/N)$  заменяется на  $\mu = \exp(-j\phi)$ ,  $-\pi < \phi \leq \pi$ . Результат такого доказательства справедлив только для систем без потерь и для полос пропускания, так как  $\Gamma = j\phi$ . Этот способ доказательства предложен Блохом для кристаллических решеток. Он связан с введением так называемых *циклических граничных условий*.

Согласно (2.16) поле в периодической структуре представляется в виде волн, бегущих вдоль оси  $z$  с фазовой скоростью  $v = \omega d/\phi = \omega/\beta$ . При  $\phi > 0$  они бегут в сторону возрастания  $z$ , а при  $\phi < 0$  — в сторону убывания. Волны, поле которых описывается равенствами (2.16), называются *нормальными волнами*\*). Как и в случае систем с осевой симметрией, двум волнам, бегущим в противоположные стороны с одинаковой скоростью, соответствует одна и та же частота, т.е. решения уравнений Максвелла двукратно вырождены. Отсюда следует, что дисперсионная характеристика ЗС представляет четную функцию  $\phi$ :

$$\omega(\phi) = \omega(-\phi).\tag{2.17, а}$$

Сдвиг фаз  $\phi$  в (2.17, а) определяется с точностью до слагаемого  $2\pi$ . Отсюда следует, что значениям  $\phi$  и  $\phi + 2\pi$  соответствует одна и та же частота. Иными словами, функция  $\omega(\phi)$  имеет период  $2\pi$ :

$$\omega(\phi) = \omega(\phi + 2\pi m),\tag{2.17, б}$$

где  $m$  — целое число.

Из (2.17, а) и (2.17, б) следует, что функция  $\omega(\phi)$  симметрична относительно точек  $\phi = m\pi$ , т.е.

\*) Термин «нормальная волна» ввел П. Е. Краснушкин.

$$\omega(m\pi + \varphi) = \omega(m\pi - \varphi). \quad (2.17, \text{в})$$

В самом деле, согласно (2.17, а) справедливо равенство  $\omega(m\pi + \varphi) = \omega(-m\pi - \varphi)$ . Прибавляя  $2m\pi$  к аргументу правой части этого равенства и учитывая (2.17, б), убеждаемся в справедливости (2.17, в).

Если функция  $\omega(\varphi)$  однозначная, то в силу симметрии она имеет экстремум при  $\varphi = m\pi$  (рис. 2.8). При неоднозначных  $\omega(\varphi)$  возможно слияние полос пропускания при  $\varphi = m\pi$ . В частности, как показано ниже, они сливаются в системах со скользящей плоскостью симметрии и с винтовой осью. Если экстремум достигается при  $\omega \neq 0$ , то производная  $d\omega/d\varphi = 0$ , так как экстремум соответствует границе полосы пропускания, на которой равна нулю групповая скорость волны  $v_g = (d\omega/d\varphi)d$ , ибо энергия через систему не переносится. Кривую дисперсии, у которой  $\omega \rightarrow \infty$ , реализовать невозможно, поскольку в этом случае была бы равна бесконечности и групповая скорость, пропорциональная  $d\omega/d\varphi$ .

Если граница полосы соответствует  $\omega = 0$ , то в экстремуме возможен разрыв производной (рис. 2.8, б). При этом энергия переносится постоянным током. Примером ЗС, имеющей границу полосы  $\omega = 0$ , может служить бесконечно широкая гребенка.

Из теоремы Флоке следует, что экстремумы существуют при  $\varphi = m\pi$ . Это не значит, что при других сдвигах фаз экстремумы невозможны. В частности, как показано ниже, дисперсионные кривые ЗС типа магнетрона со связками имеют вид, приведенный на рис. 2.8, г. Они имеют экстремумы при  $\varphi \neq m\pi$ .

Как и в системах с осью  $CN$ , линейная комбинация каждой пары вырожденных решений, отличающихся знаком  $\varphi$ , тоже служит решением

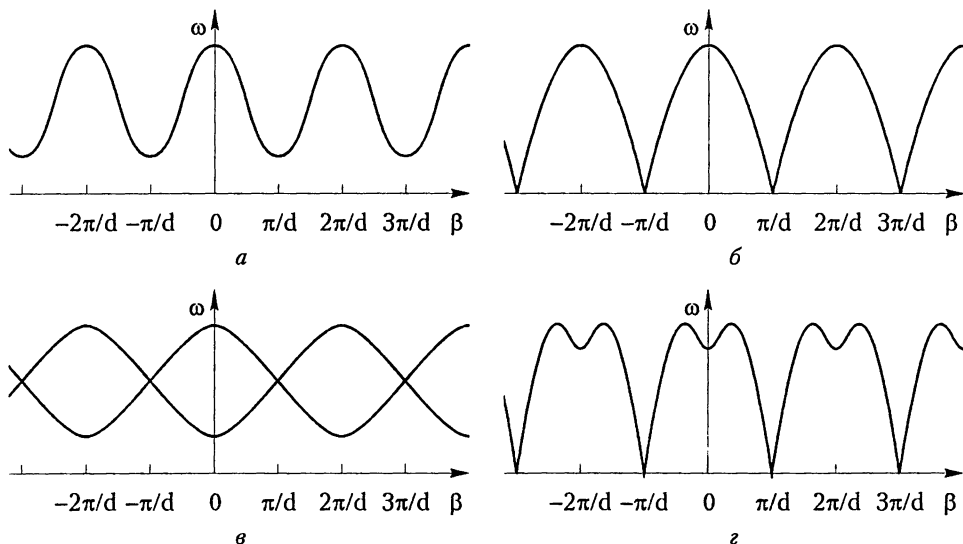


Рис. 2.8. Возможные типы дисперсионных характеристик ЗС, у которых: а —  $\omega \neq 0$  при  $\varphi = 0$ ; б —  $\omega = 0$  при  $\varphi = 0$ ; в — полосы пропускания сливаются при  $\varphi = \pi$ ; г — существуют экстремумы при  $\varphi$ , не кратных  $\pi$

уравнений Максвелла, удовлетворяющим граничным условиям. При этом, в частности, каждую компоненту поля можно представить в виде

$$E'_i(x, y, z) = 2 \cos[(\varphi/d)z - \varphi_i(x, y)] E_{0i}(x, y, z), \quad (2.18)$$

где  $i$  означает компоненту  $x$ ,  $y$  или  $z$ ;  $\varphi_i$  — аргумент комплексной величины

$$E_{0i} = |E_{0i}| \exp(j\varphi_i).$$

ЗС с осью  $CN$  при  $N \rightarrow \infty$  становится периодической структурой, т. е. системой с трансляционной симметрией. В связи с этим, в ряде случаев говорят о дисперсионной характеристике  $\omega(\varphi)$  систем с осью  $CN$ , в частности — о дисперсионной характеристике магнетронных анодных блоков. Чтобы определить спектр собственных частот таких систем, на сдвиг фаз накладывают условие замыкания в кольцо:

$$\varphi = 2\pi q/N, \quad -N/2 < q \leq N/2. \quad (2.19)$$

Выше рассмотрена теорема Флоке для периодических структур и ее следствия. Отмечено, что на любой фиксированной частоте найдется решение уравнений Максвелла, имеющее вид (2.15) и удовлетворяющее заданным периодическим граничным условиям. В общем случае таких решений бесконечно много. Для одних из них постоянная распространения  $\Gamma$  действительна, для других — мнимая, для третьих — комплексна. Если каждому решению соответствует свое  $\mu$ , то все решения можно представить в виде (2.15). Если же разным решениям соответствует одно и то же  $\mu$ , то возможны решения иных типов. Подробнее об этом см. [2, 5].

## 2.7. Скользящая плоскость симметрии

Пусть отражение в скользящей плоскости задано трансляцией, переводящей координату  $z$  в  $z + L$ , где  $L = d/2$ , и отражением  $\sigma_y$ , переводящим  $y$  в  $-y$ . В соответствии с (2.11) имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(x, -y, z + L) &= \mu [\sigma]_y \mathbf{E}(x, y, z), \\ \mathbf{H}(x, -y, z + L) &= -\mu [\sigma]_y \mathbf{H}(x, y, z), \end{aligned} \quad (2.20, a)$$

где  $\mu = \exp(-\Gamma)$ . Для полосы пропускания  $\Gamma = j\varphi$ ,  $-\pi < \varphi \leq \pi$ , выражения (2.20), записанные через компоненты, имеют вид

$$\begin{bmatrix} E_x(x, -y, z + L) \\ -E_y(x, -y, z + L) \\ E_z(x, -y, z + L) \\ -H_x(x, -y, z + L) \\ H_y(x, -y, z + L) \\ -H_z(x, -y, z + L) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_x(x, y, z) \\ E_y(x, y, z) \\ E_z(x, y, z) \\ H_x(x, y, z) \\ H_y(x, y, z) \\ H_z(x, y, z) \end{bmatrix} \exp(-j\varphi). \quad (2.20, б)$$

Вводя обозначение  $\beta = \varphi/L$  и повторяя рассуждения, сделанные при выводе (2.16), получим иную форму записи соотношений (2.20),

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{E}_{xz}(x, y, z) \\ \mathbf{H}_y(x, y, z) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{E}_{0xz}(x, y, z) \\ \mathbf{E}_{0y}(x, y, z) \end{bmatrix} \exp(-j\beta z), \\ \begin{bmatrix} \mathbf{E}_y(x, y, z) \\ \mathbf{H}_{xz}(x, y, z) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{E}_{0y}(x, y, z) \\ \mathbf{H}_{0xz}(x, y, z) \end{bmatrix} \exp[j(\pi/L - \beta)z], \end{aligned} \quad (2.21)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_0(x, y, z) &= [\sigma_g] \mathbf{E}_0(x, -y, z + L), \\ \mathbf{H}_0(x, y, z) &= -[\sigma_g] \mathbf{H}_0(x, -y, z + L). \end{aligned}$$

В частности, функции  $\mathbf{E}_0$  и  $\mathbf{H}_0$  имеют период  $d = 2L$  по координате  $z$ .

Сдвиг фаз на периоде  $d = 2L$  равен  $2\varphi$ . При  $\varphi \neq 0$  и  $\varphi \neq \pi$  сдвигам фаз  $\varphi$  и  $-\varphi$  соответствуют два комплексно сопряженных решения (2.20) уравнений Максвелла (2.8), т. е. решения двукратно вырождены. Они описывают две волны, бегущие с одинаковой скоростью навстречу друг другу по зигзагообразному пути. Существует бегущая волна, в частности, и при  $2\varphi = \pi$ , что возможно лишь при слиянии полос пропускания при  $2\varphi = \pi$ . Соответствующая дисперсионная характеристика изображена на рис. 2.8, *а*.

При  $\varphi = 0$  и  $\varphi = \pi$  формула (2.20) описывает поле стоячей волны, поскольку  $\varphi = 0$  не имеет знака, а замена  $\varphi = \pi$  на  $\varphi = -\pi$  не изменяет (2.20).

Поле в системе со скользящей плоскостью, аналогично (Р.2.5)\*, удобно представлять в виде суммы двух волн, называемых *симметричными составляющими*:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{E}(x, y, z) \\ \mathbf{H}(x, y, z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_0(x, y, z) \mathbf{e}_{-1}(x, y, z) \\ \mathbf{h}_0(x, y, z) \mathbf{h}_{-1}(x, y, z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \exp(-j\varphi x/L) \\ \exp(j(\pi - \varphi)x/L) \end{bmatrix}. \quad (2.22)$$

Составляющие  $\mathbf{e}_i$  и  $\mathbf{h}_i$  ( $i = 0, -1$ ) имеют период  $L$  по координате  $z$ ,

$$\mathbf{e}_i(x, y, z + L) = \mathbf{e}_i(x, y, z), \quad \mathbf{h}_i(x, y, z + L) = \mathbf{h}_i(x, y, z).$$

Индекс  $i = 0$  соответствует составляющей, бегущей с фазовой скоростью  $\omega L/\varphi = \omega/\beta$ , индекс  $i = -1$  — составляющей со скоростью  $-\omega L/(\pi - \varphi) = -\omega/(\pi/L - \beta)$ . Их амплитуды выражаются через значения полей,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{e}_i \\ \mathbf{h}_i \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \exp[j(\varphi - i\pi)z/L] \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{E}_{(0)} \\ \mathbf{H}_{(0)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{E}_{(1)} \\ \mathbf{H}_{(1)} \end{bmatrix} \exp[j(\varphi + i\pi)z/L] \right\}, \quad (2.23)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{(1)} &= \mathbf{E}(x, y, z), & \mathbf{E}_{(0)} &= \mathbf{E}(x, y, z + L), \\ \mathbf{H}_{(0)} &= \mathbf{H}(x, y, z), & \mathbf{H}_{(1)} &= \mathbf{H}(x, y, z + L). \end{aligned}$$

\*) Символ «Р» перед номером формулы или рисунка означает ссылку на материал в ответах и решениях к упражнениям соответствующей главы.

Аналогичным образом, в виде суммы двух составляющих можно представить плотности токов и потенциалы,

$$\begin{bmatrix} U(x, y, z) \\ J(x, y, z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0(x, y, z) & a_{-1}(x, y, z) \\ b_0(x, y, z) & b_{-1}(x, y, z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \exp(-j\phi x/L) \\ \exp(j(\pi - \phi)x/L) \end{bmatrix}, \quad (2.24)$$

где  $a_i$  и  $b_i$  — функции, имеющие период  $L$  по  $z$ .

Повторяя рассуждения, проведенные для систем с зеркально-поворотной осью, можно показать, что компоненты этих амплитуд  $e_{0x}$ ,  $e_{0z}$ ,  $h_{0y}$ ,  $e_{-1y}$ ,  $h_{-1x}$ ,  $h_{-1z}$ ,  $b_{0x}$ ,  $b_{0z}$ ,  $b_{-1z}$  и  $a_0$  — четные функции  $y$ , а остальные — нечетные или наоборот. В плоскости  $y = 0$  отличны от нуля только четные компоненты составляющих. Иными словами, в системах со скользящими плоскостями поле можно представить в виде суммы двух составляющих, одной из которых соответствует магнитная стенка в плоскости скольжения, а другой — электрическая. На вопрос, какой из двух составляющих соответствует магнитная стенка, а какой электрическая, теория симметрии ответа не дает.

Примеры ЗС со скользящими плоскостями симметрии изображены на рис. 2.3, а соответствующие им кривые дисперсии — на рис. 2.8, в. Они представляют пересекающиеся кривые, каждой из которых соответствует своя симметричная составляющая.

Все системы с зеркально-поворотными осями  $SN$  (рис. Р.2.1, с. 407) при  $N \rightarrow \infty$  становятся системами со скользящими плоскостями. Поэтому при расчетах системы с осью  $SN$  часто рассматривают как системы со скользящими плоскостями симметрии, а затем накладывают условие (2.19) на сдвиг фаз  $\phi$ .

## 2.8. Винтовая ось $CN_s$

Операция винтового поворота  $CN_s$  представляет сочетание поворота на угол  $2\pi/N$  по часовой стрелке и трансляции вдоль оси  $z$  на расстояние  $sd/N$ . Число  $s$  называется *количеством заходов винта (спирали)*.  $N$ -кратное повторение винтового поворота равносильно трансляции системы на  $s$  периодов  $d$ . Отношение  $s/N$  в общем случае может быть сократимой дробью.

Обозначим через  $r$  наибольший общий делитель чисел  $s$  и  $N$ . При этом можно записать  $s = rs'$ ,  $N = rN'$ , где  $s'$  и  $N'$  — целые не содержащие общих множителей числа. Покажем, что система с осью  $CN_s$  имеет поворотную ось  $Cr$ . В самом деле, если

$$[CN_s] = \{[CN] | sd/N\},$$

то

$$[CN_s]^{N'} = \{[CN]^{N'} | sN'd/N\} = \{[Cr] | s'd\}.$$

Здесь  $\mathbf{d} = (0, 0, d)^T$  — вектор, у которого отлична от нуля лишь одна компонента<sup>\*)</sup>.

Трансляция  $s'\mathbf{d}$  представляет операцию симметрии системы, поскольку она соответствует трансляции системы на  $s'$  периодов. Поэтому поворот  $Cr$  также представляет операцию симметрии. Таким образом, кроме утверж-

<sup>\*)</sup> Символ «Т» означает операцию транспонирования, т. е. вектор  $\mathbf{d}$  представляется матрицей-столбцом.



дения, что система имеет поворотную ось  $Cr$ , доказано, что  $N'$ -кратное повторение винтового поворота равносильно трансляции  $s'd$ .

Собственное число оператора винтового поворота обозначим через  $\mu = \exp(-j\varphi)$ ,  $-\pi < \varphi < \pi$ . Тогда в полярных координатах

$$\begin{bmatrix} \mathbf{E}(\rho, \theta + 2\pi/N, z + sd/N) \\ \mathbf{H}(\rho, \theta + 2\pi/N, z + sd/N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{E}(\rho, \theta, z) \\ \mathbf{H}(\rho, \theta, z) \end{bmatrix} \exp(-j\varphi). \quad (2.25)$$

Величина  $\varphi$  представляет разность фаз поля между точками, совмещающимися друг с другом преобразованием  $CN_s$ .

Вводя обозначение

$$\varphi = -2\pi l/N + \beta_l sd/N, \quad (2.26)$$

где  $l$  — целое ( $-N/2 < l \leq N/2$ ), и умножая левую и правую части (2.25) на  $\exp[j(\varphi - l\theta + \beta_l z)]$ , можно представить величины  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  в виде произведений

$$\begin{bmatrix} \mathbf{E}(\rho, \theta, z) \\ \mathbf{H}(\rho, \theta, z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{E}_0(\rho, \theta, z) \\ \mathbf{H}_0(\rho, \theta, z) \end{bmatrix} \exp[-j(\beta_l z - l\theta)], \quad (2.27)$$

где  $\mathbf{E}_0$  и  $\mathbf{H}_0$  — функции, удовлетворяющие равенствам

$$\mathbf{E}_0(\rho, \theta, z) = \mathbf{E}_0(\rho, \theta + 2\pi/N, z + sd/N),$$

$$\mathbf{H}_0(\rho, \theta, z) = \mathbf{H}_0(\rho, \theta + 2\pi/N, z + sd/N),$$

Поясним смысл равенства (2.26). Пусть в результате преобразования  $CN_s$  точка  $A$  совмещается с  $B$ . Пусть сдвиг фаз поля между этими точками равен  $\varphi$ . Величину  $\varphi$  можно представить в виде суммы сдвига фаз  $-2\pi l/N$  в точках, совмещающихся при повороте на угол  $\theta = 2\pi/N$  (при одинаковых  $z$ ), и сдвига фаз  $\beta_l sd/N$  в точках, совмещающихся при трансляции  $sd$  (при одинаковых  $\theta$ ). Сдвиг фаз поля в точках, отстоящих по  $\theta$  на  $2\pi/N$ , определяем из условия, что при повороте на  $360^\circ$  он должен быть кратен  $2\pi$  (равен  $2\pi l$ ,  $l$  — целое). Чтобы величина  $2\pi l/N$  лежала в пределах  $(-\pi, \pi)$ , достаточно  $l$  выбирать в пределах  $(-N/2, N/2)$ . Неоднозначность выбора  $l$  приводит к неоднозначности определения  $\beta_l$ . Равенство (2.26) указывает на то, что в отличие от систем без винтовой симметрии сдвиг фаз поля по азимуту связан с волновым числом по оси  $z$ . Пока рассматриваем поле в целом, оно характеризует неоднозначность в выборе волнового числа  $\beta$ .

Ниже поле будет представлено в виде суммы симметричных составляющих, аналогично тому, как это сделано в п. 2.7 для систем со скользящей плоскостью симметрии. Для каждой симметричной составляющей равенство (2.26) остается в силе, с той лишь разницей, что вместо произвольного числа  $l$  должен стоять номер  $m$  симметричной составляющей. В системах, которые наряду с винтовой осью  $CN_s$  содержат поворотную ось  $Cr$  ( $s = rs'$ ,  $N = rN'$ ) возможны различные типы волн, отличающиеся числом вариаций поля  $q$  ( $-r < q \leq r$ ) по азимуту. Для каждого типа с номером  $q$  равенство (2.26) также остается в силе, если заменить произвольное число  $l$  номером типа волны  $q$ . Для  $m$ -й симметричной составляющей  $q$ -й нормальной волны число  $l$  следует заменить на  $q + sm$ . Все эти соотношения подробнее рассмотрены ниже.

Выражения (2.25) и (2.27) представляют обобщение теоремы Флоке на системы с винтовой симметрией. Согласно (2.25) и (2.27) волна бежит по винтовой линии, а ее амплитуда периодически промодулирована вдоль этой линии. Из (2.25) следует также, что при  $\varphi \neq 0$  и  $\varphi \neq \pi$  двукратно вырождены решения уравнений Максвелла для систем с винтовой осью, т. е. при фиксированной частоте в системе могут существовать две волны, бегущие навстречу друг другу с одинаковой скоростью ( $\omega(\varphi) = \omega(-\varphi)$ ).

Из того факта, что при  $\varphi \neq 0$  и  $\varphi \neq \pi$  волна бежит, следует, что в системах с винтовой осью отсутствуют границы полос пропускания при сдвигах фаз  $\beta_z d = (N\varphi/s) + (2\pi l/s)$  на периоде  $d$ , кратных  $\pi$ , если только  $\varphi \neq m\pi$  ( $m$  — целое). Это значит, что в соответствующих точках сливаются соседние полосы пропускания. Можно показать, что сливаются  $N'$  полос, так как при  $l = 0$  величина  $\beta_0 s' d$  кратна  $\pi$ , если  $\varphi = m\pi$ .

Следует заметить, что наличия винтовых осей или скользящих плоскостей достаточно, но не необходимо для слияния полос. Существуют системы без таких осей и плоскостей, у которых сливаются соседние полосы. Такое слияние называют *случайным*.

Как показано выше, система с винтовой осью  $CN_s$  имеет поворотную ось  $Cr$  при  $s = rs'$ ,  $N = rN'$ , причем операции поворота и винтового поворота коммутируют. Поэтому в системе должны существовать типы волн со структурой, присущей  $Cr$ . При этом соотношения (2.12) примут вид

$$\begin{bmatrix} \mathbf{E}_q(\rho, \theta + 2\pi/N, z) \\ \mathbf{H}_q(\rho, \theta + 2\pi/N, z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{E}_q(\rho, \theta, z) \\ \mathbf{H}_q(\rho, \theta, z) \end{bmatrix} \exp(-j2\pi q/r), \quad (2.28, a)$$

где  $q$  — номер вида волны,  $-r/2 < q \leq r/2$ , а соотношения (2.13а) — вид

$$\begin{bmatrix} \mathbf{E}_q(\rho, \theta, z) \\ \mathbf{H}_q(\rho, \theta, z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{E}_{0q}(\rho, \theta, z) \\ \mathbf{H}_{0q}(\rho, \theta, z) \end{bmatrix} \exp(jq\theta), \quad (2.28, б)$$

где функции  $\mathbf{E}_{0q}$  и  $\mathbf{H}_{0q}$  имеют период  $2\pi/r$  по координате  $\theta$ . В показателях экспонент формул (2.28) для удобства изменен знак перед  $jq\theta$  по сравнению с (2.12) и (2.13).

В системе с винтовой осью  $CN_s$  поле удобно представлять в виде суммы  $N'$  симметричных составляющих,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{E}_q \\ \mathbf{H}_q \end{bmatrix} = \sum_m \begin{bmatrix} \mathbf{e}_{qm} \\ \mathbf{h}_{qm} \end{bmatrix} \exp(-j\beta_{qm}z), \quad -N'/2 < m \leq N'/2, \quad (2.29)$$

каждая из которых промодулирована по координате  $z$  с периодом  $s'd/N' = sd/N < d$ .

Волновые числа  $\beta_{qm}$  выбираются таким образом, чтобы сдвиг фаз  $\beta_{qm}s'd$  на расстоянии  $s'd$  для всех составляющих совпадал с точностью до слагаемого  $2\pi m$  и определялся выражением (2.26):

$$\beta_{qm}s'd = N'\varphi + 2\pi q/r + 2\pi m. \quad (2.30)$$

Амплитуды волн  $\mathbf{e}_{qm}$  и  $\mathbf{h}_{qm}$  можно определить, зная напряженности полей  $\mathbf{E}_{(k)}$  и  $\mathbf{H}_{(k)}$  в  $N'$  равноотстоящих сечениях

$$z_k = z + ks'd/N' = z + ksd/N :$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{e}_{qm}(\rho, \theta + 2\pi/N, z) \\ \mathbf{h}_{qm}(\rho, \theta + 2\pi/N, z) \end{bmatrix} = \frac{1}{N'} \sum_{k=0}^{N'-1} \begin{bmatrix} \mathbf{E}_{q(k)} \\ \mathbf{H}_{q(k)} \end{bmatrix} \exp(j\beta_{qm} z_k), \quad (2.31)$$

где

$$\mathbf{E}_{q(k)} = \mathbf{E}_q(\rho, \theta, z + ksd/N), \quad \mathbf{H}_{q(k)} = \mathbf{H}_q(\rho, \theta, z + ksd/N).$$

Заменяя в (2.31)  $\theta$  на  $\theta + 2\pi/N$ , учитывая (2.25), (2.30) и замечая, что

$$\mathbf{E}_{q(k+N')} = \mathbf{E}_{q(k)} \exp(-j\beta_{qm}s'd), \quad \exp(j\beta_{qm}z_{(k+N')}) = \exp(j\beta_{qm}s'd) \exp(j\beta_{qm}z_k),$$

находим зависимость  $\mathbf{e}_{qm}$  и  $\mathbf{h}_{qm}$  от координаты  $\theta$ :

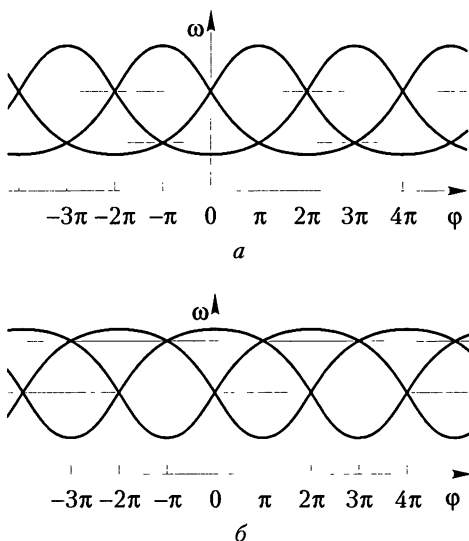
$$\begin{bmatrix} \mathbf{e}_{qm}(\rho, \theta + 2\pi/N, z) \\ \mathbf{h}_{qm}(\rho, \theta + 2\pi/N, z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_{qm}(\rho, \theta, z) \\ \mathbf{h}_{qm}(\rho, \theta, z) \end{bmatrix} \exp[j2\pi(q + rm)/N], \quad -r/2 < q \leq r/2. \quad (2.32)$$

Равенство (2.32) означает, что симметричные составляющие представляют бегущие по азимуту волны, причем количество длин волн (количество вариаций поля), укладываемых вдоль окружности, равно  $q + rm$ , где  $q$  — номер типа волны, а  $m$  — номер симметричной составляющей в данной волне. В разложении поля  $q$ -й волны присутствуют не любые симметричные составляющие, а только те, для которых количество длин волн по азимуту равно  $rm$ .

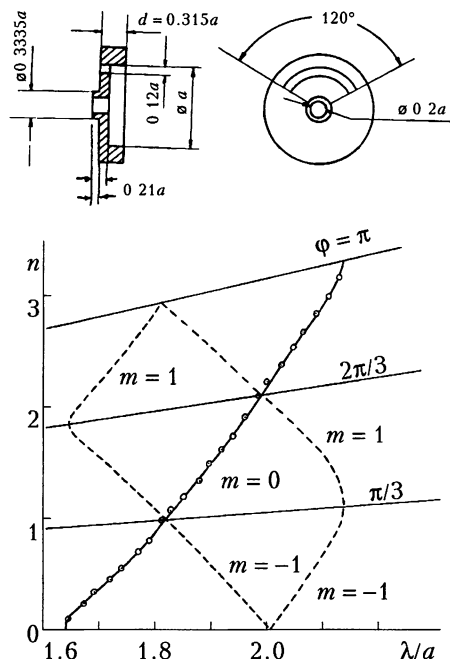
Значения компонент векторов  $\mathbf{e}_{qm}$  и  $\mathbf{h}_{qm}$  на оси симметрии такие же, как в п. 2.6 (сравните (2.32) и (2.12): компоненты  $e_{qzm}$  и  $h_{qzm}$  могут отличаться от нуля только при  $q + rm = 0$ , а перпендикулярные оси — при  $q + rm = \pm 1$ .

В частности, для системы с винтовой осью  $CN_1$  ( $q=0$ ,  $r=1$ ) поле удобно представлять в виде суммы  $N$  симметричных составляющих, номера которых обозначаются через  $m$ . Этим составляющим соответствуют сдвиги фаз  $\phi + 2\pi m/N$  между точками, отстоящими на  $d/N$  вдоль оси  $z$ , и сдвиги фаз  $-2\pi m/N$  между точками, координата  $\theta$  которых отличается на  $2\pi/N$ . Это значит, что каждой из составляющих соответствует своя дисперсионная характеристика и свое распределение поля в поперечном сечении  $z = \text{const}$ . Кривые дисперсии пересекаются при сдвигах фаз на периоде  $N\phi = 2\pi q$ , если только  $\phi \neq 0$  и  $\phi \neq \pi$ . Возможные кривые дисперсии для случаев  $N=2$  и  $N=3$  изображены на рис. 2.8, в и рис. 2.9 соответственно. При  $N=2$  пересекаются две кривые дисперсии (сливаются две полосы пропускания), а при  $N=3$  пересекаются три кривые (сливаются три полосы пропускания). В общем случае сливаются  $N$  полос пропускания. При четном  $N$  сдвигу фаз  $\phi$  составляющей  $m=0$  соответствует сдвиг фаз  $\pi - \phi$  составляющей  $m=N/2$ . Если одна из них обладает положительной дисперсией, то другая — отрицательной, так что общий вид кривых дисперсии определяется однозначно. При нечетном  $N$  возможно два вида кривых дисперсии, показанные на рис. 2.9.

Примером ЗС с винтовой осью  $C2_1$  может служить спираль, нагруженная стержнями (см. рис. 2.4, б). Ее полосы пропускания смыкаются (рис. 2.8, в). Обычно спираль крепится в коже с помощью диэлектрических



**Рис. 2.9.** Кривые дисперсии ЗС с винтовыми осями  $C3_1$

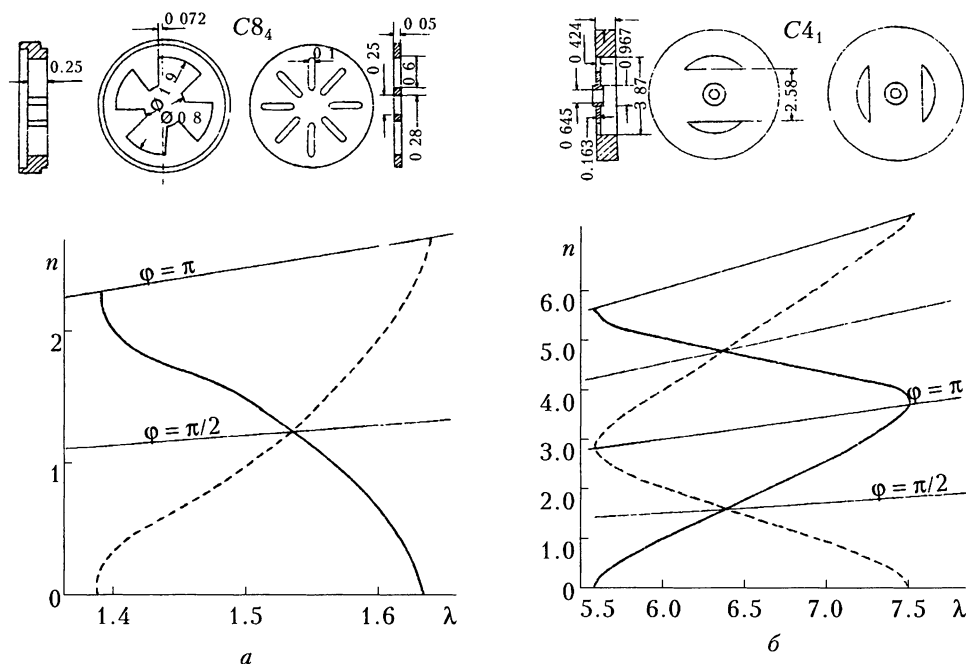


**Рис. 2.10.** Ячейка ЦСР с винтовой осью  $C3_1$  и ее кривая дисперсии, полученная в результате измерений. Сплошной линией нанесена кривая, для которой на оси  $E_z \neq 0$

стержней. Предоставляем читателю возможность показать, как надо расположить крепящие стержни, чтобы полосы пропускания не расщепились.

На рис. 2.10 приведены результаты измерения дисперсионной характеристики системы с осью  $C3_1$ . Она представляет волновод, в каждом периоде которого содержится три одинаковых диафрагмы, повернутые друг относительно друга на  $120^\circ$ . В этой системе смыкаются три полосы пропускания.

Примеры систем с винтовой осью  $C4_2$  ( $N=4$ ,  $s=2$ ,  $r=2$ ) приведены на рис. 2.4, в и рис. 2.4, г. Обе системы используются в ЛБВ. Кроме винтовой эти ЗС имеют поворотную ось  $C2$ , так как  $r=2$ . Их кривые дисперсии имеют вид, приведенный на рис. 2.8, в. В точках  $\varphi = \pm\pi$  сливаются две полосы пропускания. В каждой из этих ЗС существуют волны двух типов ( $q=0$  и  $q=1$ ). Поле каждого типа волны представляется суммой двух симметричных составляющих. При  $q=0$  поле одной из них не меняет знака в зависимости от  $\theta$ . Оно имеет отличную от нуля  $z$ -компоненту на оси. Эта составляющая используется в ЛБВ для взаимодействия с электронным потоком. Поле другой составляющей ( $m=1$ ) таково, что на окружности  $0 < \theta < 2\pi$  укладывается две волны  $q+rm=2$ . Все компоненты этой составляющей на оси равны нулю. В работах по ЛБВ обычно соответствующую ветвь дисперсионной характеристики не изображают, хотя при определенных условиях эта ветвь может оказать существенное влияние на стабильность работы ЛБВ. При  $q=1$  существует составляющая, у которой отлична от нуля  $p$ -компонента поля.



**Рис. 2.11.** ЗС типа «лист клевера» (а) и ЦСР (б) и их кривые дисперсии. Обе ЗС имеют ось  $C_{41}$

На рис. 2.11 приведены измеренные дисперсионные характеристики для ЗС типа «лепесток клевера» и для цепочки связанных резонаторов с чередующимися диафрагмами, повернутыми друг относительно друга на  $90^\circ$ . Первая из них имеет ось  $C_{84}$ . Она состоит из диафрагм, разделенных кольцами. Соседние кольца повернуты друг относительно друга на  $2\pi/8$ . Вторая — имеет ось  $C_{42}$ . Сплошной линией нанесены ветви, для которых  $E_z \neq 0$  на оси  $z$ ; штриховой линией — ветви, для которой  $E_z = 0$  на оси  $z^*$ ).

## 2.9. Винтовая ось $C_\infty$ ( $s$ -заходная спираль)

В пределе, при  $N \rightarrow \infty$ , винтовая ось  $C_{N_s}$  становится осью  $C_\infty$ . Операция  $C_\infty$  соответствует повороту вокруг оси на произвольный угол  $\theta$  по часовой стрелке при одновременной трансляции вдоль оси на расстояние  $s\theta d/2\pi$ . Через  $\phi$  в этом случае удобно обозначить сдвиг фаз на шаге спирали  $d$ , содержащем  $s$  витков. В однозаходной спирали ( $s = 1$ ) шаг спирали равен ее периоду. Для системы с осью  $C_\infty$  остаются справедливыми все формулы, записанные для систем с осью  $C_{N_s}$ , если в них соответствующим образом изменить обозначения.

\* ) В ЗС, содержащих ось  $C_{N_s}$ , лежащую в плоскости симметрии, наряду с типом волн, для которых смыкаются соседние полосы, как на рис. 2.11, существуют волны, для которых полосы не смыкаются. При этом решения двукратно вырождены.

Формулы (2.27) сохраняют прежний вид при замене  $l$  на  $q$ , но теперь

$$\mathbf{E}_0(\rho, \theta, z + \theta d/2\pi) = \mathbf{E}_0(\rho, 0, z); \quad \mathbf{H}_0(\rho, \theta, z + \theta d/2\pi) = \mathbf{H}_0(\rho, 0, z).$$

Формула (2.26) запишется следующим образом:

$$\beta_q d = \varphi + 2\pi q, \quad (2.33)$$

где  $q$  — целое число, характеризующее номер типа волны (число вариаций по аимуту).

В  $s$ -заходной спирали число  $q$  в соответствии с (2.26) может принимать значения  $-s/2 < q \leq s/2$ . Формулы (2.29) и (2.31) разложения поля по симметричным составляющим в новых обозначениях принимают вид

$$\begin{bmatrix} \mathbf{E}_q \\ \mathbf{H}_q \end{bmatrix} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \begin{bmatrix} \mathbf{e}_{qm} \\ \mathbf{h}_{qm} \end{bmatrix} \exp(-j\beta_{qm}z), \quad (2.34, a)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{e}_{qm} \\ \mathbf{h}_{qm} \end{bmatrix} = \frac{1}{d} \int_{z_0}^{z_0+d} \begin{bmatrix} \mathbf{E}_q \\ \mathbf{H}_q \end{bmatrix} \exp(j\beta_{qm}z) dz. \quad (2.34, б)$$

Здесь волновое число  $\beta_{qm}$  определяется равенством, аналогичным (2.30):

$$\beta_{qm} d = \varphi + 2\pi q + 2\pi sm. \quad (2.35)$$

В отличие от (2.31) теперь амплитуды симметричных составляющих  $\mathbf{e}_{qm}$  и  $\mathbf{h}_{qm}$  зависят только от  $\rho$  и  $\theta$ . Выражения (2.34) представляют разложение поля в обобщенный ряд Фурье. Каждое слагаемое такого разложения называется *пространственной гармоникой* поля. Оно представляет плоскую неоднородную волну. С другой стороны, каждое слагаемое в (2.31) называлось симметричной составляющей. Коэффициенты  $\mathbf{e}_m$  и  $\mathbf{h}_m$ , однако, зависели от  $z$ . Для систем с осью  $S_{\infty}$  каждая симметричная составляющая представляет пространственную гармонику и, следовательно, коэффициенты  $\mathbf{e}_m$  и  $\mathbf{h}_m$  не зависят от  $z$ . В волне с номером  $q$  отличны от нуля амплитуды не всех пространственных гармоник, а лишь часть из них, для которых волновые числа удовлетворяют (2.35).

Формула (2.32), характеризующая зависимость симметричной составляющей от  $\theta$ , принимает для систем с осью  $S_{\infty}$  следующий вид:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{e}_{qm}(\rho, \theta) \\ \mathbf{h}_{qm}(\rho, \theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_{qm}(\rho) \\ \mathbf{h}_{qm}(\rho) \end{bmatrix} \exp[j\theta(q + sm)],$$

где  $\mathbf{e}_{qm}(\rho) = \mathbf{e}_{qm}(\rho, 0)$ ,  $\mathbf{h}_{qm}(\rho) = \mathbf{h}_{qm}(\rho, 0)$ .

При этом выражение (2.34, а) можно записать в виде

$$\begin{bmatrix} \mathbf{E}_q(\rho, \theta, z) \\ \mathbf{H}_q(\rho, \theta, z) \end{bmatrix} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \begin{bmatrix} \mathbf{e}_{qm}(\rho) \\ \mathbf{h}_{qm}(\rho) \end{bmatrix} \exp\{-j[z\varphi/d + (2\pi z/d - \theta)(q + sm)]\}, \quad (2.36)$$

$$-s/2 < q \leq s/2.$$

На оси ЗС ( $\rho = 0$ ) отличны от нуля  $z$ -компоненты поля лишь для нулевой гармоники ( $m = 0$ ) нулевого типа волны ( $q = 0$ ). Компоненты поля, перпендикулярные оси ( $\rho$ -компоненты), отличны от нуля лишь в случае  $q + sm = \pm 1$ . Для всех остальных гармоник и типов волн на оси ЗС все компоненты поля равны нулю.

Примером ЗС с осью  $S_{\infty 1}$  может служить спираль в экране, изображенная на рис. 2.4, а. Ее дисперсионная характеристика в области  $0 < \lambda < \infty$  в общем случае не имеет разрывов при сдвигах фаз, кратных  $\pi$ . Крепится спираль обычно с помощью диэлектрических трубок или штабиков, аналогично ЗС «кольцо-стержень» (рис. 2.12). При этом порядок винтовой оси снижается, а в полосах пропускания появляются разрывы. В расчетах, описывающих влияние диэлектрика, это снижение порядка обычно не учитывается. При этом, естественно, не рассматриваются и разрывы дисперсионных кривых.

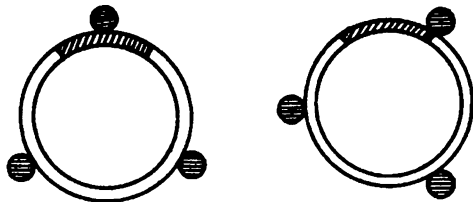


Рис. 2.12. Способы крепления ЗС типа «кольцо-стержень» с помощью диэлектрических стержней

## 2.10. Системы, в которых элементы симметрии не коммутируют с трансляцией

ЗС могут содержать несколько элементов симметрии одновременно. Так, например, магнетрон с осью  $S_3$  (рис. 2.2) имеет также одну плоскость симметрии, перпендикулярную оси, и три плоскости, пересекающиеся на оси. Цепочки связанных резонаторов (рис. 2.1, а, б, в) кроме трансляции имеют оси, параллельные трансляции, и плоскости симметрии, перпендикулярные к ней.

Как отмечено выше, система обладает свойствами, присущими каждому элементу симметрии, если соответствующие преобразования коммутируют. Например, для любого вида колебаний в магнетроне со связками в плоскости симметрии, перпендикулярной оси, располагается либо электрическая, либо магнитная стенка. Распределение поля в диафрагмированном волноводе таково, что вдоль окружности вокруг оси укладывается целое число волн  $q$ .

Случаи, в которых операции симметрии не коммутируют, требуют дополнительного исследования. В частности, с трансляцией не коммутируют отражение в плоскости и поворот вокруг оси, перпендикулярные ей, а также преобразование относительно центра инверсии. Соответствующие этим трем случаям законы распределения поля установлены ниже.

**Зеркальная плоскость  $\sigma_z$ , перпендикулярная трансляции.** Рассмотрим закономерности сочетания взаимно перпендикулярных трансляции  $d_z$  и плоскости симметрии  $\sigma_z$ . Пусть какие-то свойства системы описываются некоторой функцией  $F(x, y, z)$ , имеющей период  $d$  по координате  $z$ . Эта функция

может представлять зависимость  $\mu$  и  $\epsilon$  от координат, описывать границы системы и т. п. В силу ее периодичности справедливо равенство

$$F(x, y, z + qd) = F(x, y, z) \quad (2.37, a)$$

при любом целом  $q$ .

Пусть плоскость  $z = 0$ , перпендикулярная направлению трансляции, представляет плоскость симметрии системы, т. е.  $F(x, y, z) = F(x, y, -z)$ . Тогда, в силу периодичности все плоскости  $z = qd$ , отстоящие друг от друга на период структуры, являются плоскостями симметрии, т. е.

$$F(x, y, qd + z) = F(x, y, qd - z). \quad (2.37, б)$$

Такие плоскости называются *трансляционно идентичными*.

Учитывая периодичность структуры, можно записать (2.37б) в следующем виде:

$$F(x, y, (q + 1)d + z) = F(x, y, qd - z).$$

Вводя замену переменной  $z = -d/2 + z'$ , учитывая (2.37а) и опуская штрих, получим равенство

$$F(x, y, (q + 1/2)d + z) = F(x, y, (q - 1/2)d - z), \quad (2.38)$$

означающее, что посредине между каждой парой трансляционно идентичных плоскостей симметрии имеется еще одна плоскость симметрии. Иллюстрацией последнего утверждения могут служить плоскости симметрии ЗС, изображенных на рис. 2.3.

Электромагнитное поле волны, бегущей в положительном направлении оси  $z$ , можно представить в виде (2.16)

$$\begin{bmatrix} \mathbf{E}(x, y, z) \\ \mathbf{H}(x, y, z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{E}_0(x, y, z) \\ \mathbf{H}_0(x, y, z) \end{bmatrix} \exp(-j\beta z), \quad (2.39, a)$$

а поле волны, бегущей навстречу — в виде

$$\begin{bmatrix} \mathbf{E}^*(x, y, z) \\ -\mathbf{H}^*(x, y, z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{E}_0^*(x, y, z) \\ -\mathbf{H}_0^*(x, y, z) \end{bmatrix} \exp(j\beta z). \quad (2.39, б)$$

Пусть начало координат  $z = 0$  лежит в плоскости симметрии. Изменение направления распространения равносильно изменению знака  $z$ , т. е. равносильно отражению в плоскости  $\sigma_z$ . Отсюда следует (см. вывод формулы (2.11)), что компоненты поля в симметричных точках для одной и той же волны связаны равенствами

$$\begin{aligned} \pm \mathbf{E}^*(x, y, z) &= [\sigma]_z \mathbf{E}(x, y, z), \\ \pm \mathbf{H}^*(x, y, z) &= \Delta [\sigma]_z \mathbf{H}(x, y, z), \end{aligned}$$

или, что то же,



$$\begin{aligned}
\pm E_{xy}^*(x, y, z) &= E_{xy}(x, y, -z), \\
\mp E_z^*(x, y, z) &= E_z(x, y, -z), \\
\pm H_{xy}^*(x, y, z) &= H_{xy}(x, y, -z), \\
\mp H_z^*(x, y, z) &= H_z(x, y, -z).
\end{aligned}$$

Из (2.40) следует, что в плоскости симметрии  $z = 0$  компоненты поля действительны либо мнимы.

При исследовании и конструировании устройств, согласующих ЗС с нагрузкой, часто используют понятие волнового сопротивления. Его величину определяют через отношение компонент **Е** и **Н**, перпендикулярных оси  $z$ , или через отношение интегралов по сечению ЗС этих компонент или их произведений. Из (2.40) следует, что волновое сопротивление, определенное в плоскости симметрии ЗС для распространяющейся волны ( $h = j\beta$ ), должно быть действительной величиной, тогда как вне плоскости симметрии оно комплексно.

В общем случае выражения (2.39, а) и (2.39, б) соответствуют двум разным волнам, бегущим навстречу друг другу. В частных случаях, при  $\beta d = 0$  и  $\beta d = \pi$ , бегущей волны нет, и решения (2.39, а) и (2.39, б) должны совпадать:

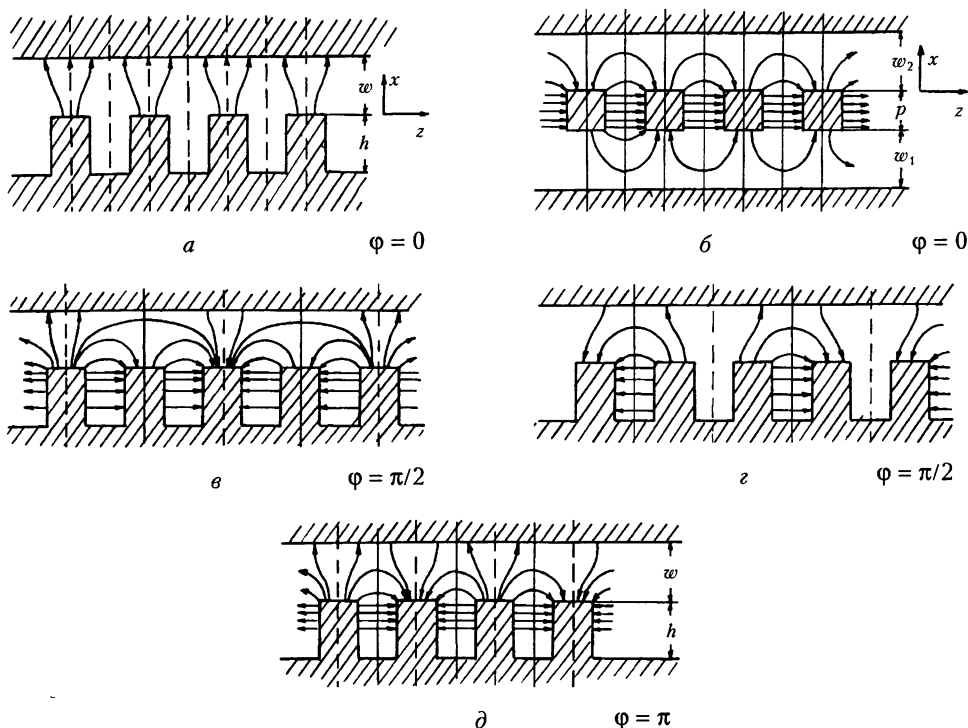
$$\mathbf{E}(x, y, z) = \mathbf{E}^*(x, y, z), \quad \mathbf{H}(x, y, z) = -\mathbf{H}^*(x, y, z). \quad (2.41)$$

Отсюда следует, что при  $\varphi = \beta d = 0$  и  $\varphi = \beta d = \pi$  компоненты электрического и магнитного полей должны быть действительными либо мнимыми не только в плоскости симметрии, но и во всем объеме ЗС.

Подставляя (2.41) в (2.40), получим равенства

$$\begin{aligned}
\pm E_{xy}(x, y, z) &= E_{xy}(x, y, -z), \\
\mp E_z(x, y, z) &= E_z(x, y, -z), \\
\pm H_{xy}(x, y, z) &= H_{xy}(x, y, -z), \\
\mp H_z(x, y, z) &= H_z(x, y, -z).
\end{aligned}$$

совпадающие с (2.11) с точностью до обозначения осей координат. Из этих равенств следует, что при  $\beta d = 0$  и  $\beta d = \pi$  в перпендикулярных направлении трансляции плоскостях симметрии периодических структур имеют место либо магнитные (соответствуют верхним знакам), либо электрические (соответствуют нижним знакам) стенки (см. рис. 2.6). При  $\varphi = \beta d = 0$  периоды поля и структуры совпадают. При этом силовые линии поля и структуры одни и те же. Так как в точках, отстоящих друг от друга на период, поле совпадает не только по величине, но и по знаку, то во всех плоскостях располагаются одинаковые стенки: либо все магнитные (рис. 2.13, а), либо все электрические (рис. 2.13, б). При  $\varphi = \beta d = \pi$  поле в точках, отстоящих на период, по-прежнему совпадает по величине, но теперь имеет противоположные знаки. Это значит, что в одной из плоскостей симметрии в периоде имеет место магнитная стенка, а в другой — электрическая (рис. 2.13, в, д).

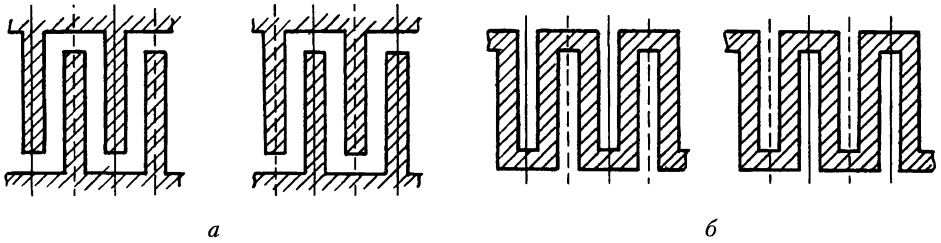


**Рис. 2.13.** Расположение электрических и магнитных стенок в плоскостях симметрии ЗС для различных сдвигов фаз  $\varphi$  на периоде

Зная расположение стенок при  $\varphi = 0$  и  $\varphi = \pi$ , можно определить соответствующие длины волн  $\lambda_0$  и  $\lambda_\pi$  и тем самым найти характер дисперсии нулевой пространственной гармоники (положительная или отрицательная). Величины  $\lambda_0$  и  $\lambda_\pi$  вычисляются как собственные длины волн резонаторов, образованных границами ЗС и стенками в плоскостях симметрии. В случае  $\lambda_\pi < \lambda_0$  дисперсия положительная, а при  $\lambda_\pi > \lambda_0$  — отрицательная. Исключения могут составить системы с дисперсионными характеристиками, имеющими вид, приведенный на рис. 2.8, г.

Найденное выше расположение стенок позволяет также по-иному объяснить смыкание полос пропускания в системах со скользящей плоскостью симметрии.

Рассмотрим, например, систему типа «встречные штыри» (рис. 2.14, а) или «меандр» (рис. 2.14, б). Кроме скользящих они имеют зеркальные плоскости симметрии, перпендикулярные трансляции. В этих плоскостях при  $\varphi = \pi$  должны чередоваться электрические и магнитные стенки. По два возможных расположения стенок показано на рис. 2.14. В общем случае, двум различным положениям стенок должны соответствовать разные частоты, которые соответствуют границам двух соседних полос пропускания при



**Рис. 2.14.** Возможные расположения электрических и магнитных стенок в ЗС типа: *а* — «встречные штыри» и *б* — «меандр» при колебаниях, соответствующих сдвигу фаз  $\varphi = \pi/2$

$\varphi = \pi$ . В рассматриваемых частных случаях форма резонаторов не зависит от расположения стенок, так что соответствующие частоты одинаковы, и соседние полосы пропускания сливаются.

При  $\varphi \neq 0$  и  $\varphi \neq \pi$  решение (2.39) описывает бегущую волну, так что ни в каком сечении нельзя поставить ни электрическую, ни магнитную стенку. Можно показать, однако, что сумма двух бегущих волн (2.39, *а*) и (2.39, *б*) может образовать стоячую волну (2.18), поле которой удовлетворяет граничным условиям, если в плоскостях симметрии  $z = 0$  и  $z = Nd$  расположить либо электрические, либо магнитные стенки. При этом между стенками укладывается целое число  $q$  полуволн, а на сдвиг фаз  $\varphi$  накладывается условие

$$\varphi = \beta d = q\pi/N, \quad 0 \leq q \leq N. \quad (2.43)$$

Условие (2.43) используется для расчета спектра собственных частот резонаторов, состоящих из  $N$  одинаковых ячеек ЗС, а также для измерения дисперсионных характеристик ЗС. Чтобы рассчитать спектр собственных частот, надо найти сначала зависимость  $\omega(\varphi)$ , а затем задать  $\varphi$  в соответствии с (2.43). Чтобы измерить дисперсионную характеристику, надо изготовить резонатор из  $N$  ячеек, ограниченный в плоскостях симметрии  $z = 0$  и  $z = Nd$  проводящими стенками, а затем измерить собственные частоты и по структуре поля определить значения  $\varphi = q\pi/N$ . Именно таким образом получены результаты измерений, приведенные на рис. 2.11 и рис. Р.2.3. Условие (2.43) используют также для упрощения расчетов фазированных антенных решеток ([1], стр. 74).

Докажем, что сумма волн (2.39, *а*) и (2.39, *б*) может удовлетворить граничным условиям в плоскости симметрии, если в ней расположена либо электрическая, либо магнитная стенка. Поле стоячей волны для каждой компоненты можно представить в виде суммы (2.39, *а*) и (2.39, *б*) с учетом (2.40):

$$E'_{xy}(x, y, z) = E_{0xy}(x, y, z)\exp(-j\beta z) \pm E_{0xy}^*(x, y, z)\exp(j\beta z),$$

$$E'_z(x, y, z) = E_{0z}(x, y, z)\exp(-j\beta z) \mp E_{0z}^*(x, y, z)\exp(j\beta z),$$

$$H'_{xy}(x, y, z) = H_{0xy}(x, y, z)\exp(-j\beta z) \mp H_{0xy}^*(x, y, z)\exp(j\beta z),$$

$$H'_z(x, y, z) = H_{0z}(x, y, z)\exp(-j\beta z) \pm H_{0z}^*(x, y, z)\exp(j\beta z).$$

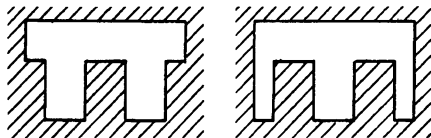
Верхним знакам в (2.44) соответствует магнитная стенка ( $E'_z = H'_x = H'_y = 0$ ) в плоскости симметрии  $z=0$ , а нижним — электрическая ( $E'_x = E'_y = H'_z = 0$ ). Таким образом, для  $z=0$  соответствующее утверждение доказано. Чтобы доказать его для  $z=Nd$  предположим, что в плоскостях  $z=0$  и  $z=Nd$  имеют место электрические (или магнитные) стенки. Поле (2.44) удовлетворяет граничным условиям при  $z=0$ . В силу периодичности  $E_{0i}$  и  $H_{0i}$  поле на другой стенке удовлетворяет равенствам

$$\begin{aligned} E'_{xy}(x, y, Nd) &= E_{0xy}(x, y, 0)[\exp(-j\beta Nd) \pm \exp(j\beta Nd)], \\ E'_z(x, y, Nd) &= E_{0z}(x, y, 0)[\exp(-j\beta Nd) \mp \exp(j\beta Nd)], \\ H'_{xy}(x, y, Nd) &= H_{0xy}(x, y, 0)[\exp(-j\beta Nd) \mp \exp(j\beta Nd)], \\ H'_z(x, y, Nd) &= H_{0z}(x, y, 0)[\exp(-j\beta Nd) \pm \exp(j\beta Nd)]. \end{aligned}$$

Требуя, чтобы при  $z=Nd$  выполнялись равенства  $E'_z = H'_x = H'_y = 0$  либо  $E'_x = E'_y = H'_z = 0$ , получаем (2.44) и одновременно убеждаемся в том, что сумма двух бегущих волн может удовлетворить соответствующим граничным условиям.

На рис. 2.13, *в* и *г* изображены силовые линии поля при  $\varphi = \pi/2$ , плоскости симметрии которых совпадают с частью плоскостей симметрии ЗС. Как и при  $\varphi = \pi$ , электрические и магнитные стенки чередуются, но с периодом, вдвое большим, чем при  $\varphi = \pi$ .

Из (2.43) и (2.44) следует, что результаты расчета или измерений дисперсионной характеристики  $\omega(\varphi)$  ЗС можно использовать для оценки собственных частот резонаторов и критических частот волноводов. Так, например, критическая частота П-образного волновода равна частоте колебаний при  $\varphi = \pi$  в бесконечно широкой гребенке (рис. 2.13, *д*). Из того факта, что одному и тому же  $\varphi = \pi/2$  может соответствовать два расположения стенок (рис. 2.13, *в* и *г*) следует, что два волновода различного поперечного сечения (рис. 2.15) имеют типы волн с одинаковыми критическими частотами.



**Рис. 2.15.** Сечения двух волноводов, имеющих типы волн с одинаковыми критическими частотами

**Ось симметрии  $C2_x$ , перпендикулярная трансляции.** Поворот вокруг оси  $C2_x$  равносильен одновременному изменению знаков  $x$  и  $y$ , откуда следуют равенства, аналогичные (2.40):

$$\begin{aligned} \mp E_x^*(x, y, z) &= E_x(x, -y, -z), \\ \pm E_{yz}^*(x, y, z) &= E_{yz}(x, -y, -z), \\ \pm H_x^*(x, y, z) &= H_x(x, -y, -z), \\ \mp H_{yz}^*(x, y, z) &= H_{yz}(x, -y, -z). \end{aligned} \tag{2.45}$$

На оси симметрии  $y=0$ ,  $z=0$  компоненты поля либо действительны, либо мнимы. При  $\beta d=0$  и  $\beta d=\pi$  они действительны или мнимы во всей системе, а на оси либо равны нулю, либо имеют экстремум.

**Центр инверсии в периодической структуре.** Операция отражения относительно центра инверсии равносильна изменению знака всех координат. Отсюда следуют равенства, аналогичные (2.40) и (2.45):

$$\begin{aligned}\pm \mathbf{E}^*(x, y, z) &= \mathbf{E}(-x, -y, -z), \\ \pm \mathbf{H}^*(x, y, z) &= \mathbf{H}(-x, -y, -z).\end{aligned}\quad (2.46)$$

В центре инверсии  $x=0$ ,  $y=0$ ,  $z=0$  компоненты поля либо действительны, либо мнимы. При  $\beta d = 0$  и  $\beta d = \pi$  они действительны или мнимы во всей системе, а в центре инверсии они равны нулю или достигают экстремума. Более того, из (Р.2.1) и (2.46) следует, что если какая-то компонента  $\mathbf{E}$  действительна, то соответствующая компонента  $\mathbf{H}$  мнима, и наоборот.

Рассматривать следствия, вытекающие из (2.45) и (2.46), более подробно мы не будем.

## 2.11. Примеры практических рекомендаций на основе теории симметрии

1. Измерение дисперсионной характеристики и сопротивления связи ЗС для бегущей волны можно делать на макетах со стоячей волной. Длина стоячей волны в макете ЗС, содержащем целое число ячеек  $N$ , равна  $\Lambda = 2Nd/q$ , где  $q$  — число полуволн вдоль ЗС, которое определяется с помощью зонда, возмущающего тела или иным способом.

2. При измерении характеристик сложных ЗС с помощью зондов или возмущающих тел полезно протягивать зонд или тело вдоль скользящей плоскости или винтовой оси, если таковые имеются. В самом деле, в скользящей плоскости или винтовой оси отлична от нуля продольная (или поперечная) компонента лишь для одной из симметричных составляющих, тогда как в остальных точках отличны от нуля все составляющие. Расшифровать результаты измерений проще, когда этих составляющих меньше. Восстановить дисперсионные кривые для остальных составляющих можно, если воспользоваться формулами (2.22), (2.28), (2.31).

3. При создании для ЛБВ ЗС, содержащих в периоде несколько элементов (штырей, резонаторов, диафрагм и т.д.), целесообразно использовать конструкции с винтовыми осями или скользящими плоскостями, так как в них смыкаются соседние полосы пропускания, что приводит к расширению полосы рабочих частот. Более того, поле, соответствующее рабочей ветви дисперсионной характеристики, отлично от нуля на оси или в плоскости, тогда как для паразитных ветвей оно равно нулю.

## Упражнения

2.1. Проверить, какие из операций симметрии  $\epsilon$ ,  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\sigma_z$ ,  $C2_x$ ,  $C2_y$ ,  $CN_z$ ,  $SN_z$ ,  $d_z$  коммутируют между собой.

**2.2.** Доказать соотношения (2.6), согласно которым векторы **A**, **E**, **D**, **J** преобразуются так же, как **r**, а **H** и **B** дополнительно изменяют знак, если преобразование  $\alpha$  меняет левую систему координат на правую.

**2.3.** В плоскости симметрии резонатора или ЗС поле одних типов волн имеет электрическую стенку, а других — магнитную. Какие из этих типов и почему следует использовать в электронных приборах, если электронный поток летит:

- а) вдоль плоскости симметрии;
- б) перпендикулярно этой плоскости?

**2.4.** Найти структуру поля видов колебаний для резонаторов с центрами инверсии.

**2.5.** Найти структуру поля видов колебаний для резонаторов с зеркально-поворотными осями.

**2.6.** Имеется резонатор или ЗС с осью  $CN$ . Какой вид колебаний (т. е. с каким номером  $q$ ) следует использовать в электронном приборе, если поток электронов летит:

- а) вдоль оси;
- б) перпендикулярно оси;
- в) по азимуту вокруг оси?

**2.7.** Определить элементы симметрии устройств, изображенных на рис. 2.7.

**2.8.** На рис. 2.12 изображено два способа крепления ЗС типа «кольцо-стержень» в экране с тремя диэлектрическими опорами (см. также рис. 2.3, в). Какой способ крепления правильный, если требуется, чтобы кривая дисперсии не разрывалась при  $\varphi = \pi/2$ ?

**2.9.** Доказать, что одной из симметричных составляющих  $e_i(x, y, z)$ ,  $h_i(x, y, z)$  ( $i = 0; -1$ ) в системе со скользящей плоскостью соответствует магнитная стенка в этой плоскости, а другой — электрическая.

**2.10.** В приборах магнетронного типа, таких как платинотрон и магнетрон, используются бугельные ЗС (термин пошел от названия плотничьего бугеля). Нарисовать качественно вид кривой дисперсии этой ЗС (рис. 2.13), пользуясь теорией симметрии.

**2.11.** В п. 1.1 в нулевом приближении найдена дисперсионная характеристика спиральной ЗС. По существу — это характеристика нулевой составляющей. Построить кривые дисперсии в координатах  $(\lambda, n)$  для составляющих  $m = 0; \pm 1; \pm 2$ .

**2.12.** Какие принципиальные изменения претерпят кривые дисперсии из предыдущего примера, если спираль закрепить в диэлектрических штабиках, как на рис. 2.12?

### Список литературы

- [1]. Амитей Н., Галиндо В., Ву Ч. Теория и анализ фазированных антенных решеток. Под ред. А. Ф. Чаплина. М.: Мир, 1974. 455 с.  
Перевод кн.: Amitay N., Galindo V., Wu C. P. Theory and analysis of phased array antennas. New York–London–Sydney–Toronto, 1972.
- [2]. Булгаков Б. В. Колебания. Ч. 1–3. М.: Гостехиздат, 1954. 892 с.
- [3]. Дашенков В. М., Силин Р. А. О свойствах симметрии замедляющих систем. *Вопросы радиоэлектроники. Сер. 1. Электроника*, 1963. Вып. 1, 3–27.
- [4]. Запольнов В. П. Некоторые вопросы расчета электромагнитного поля в замедляющих системах. М.: Сов. радио, 1973. 72 с.
- [5]. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Статистическая физика. М.: Наука, 1976. 567 с.
- [6]. Любарский Г. П. Теория групп и физика. М.: Наука, 1966. 222 с.
- [7]. Силин Р. А. К теории симметрии двумерно-периодических замедляющих систем. *Электронная техника. Сер. 1. Электроника СВЧ*, 1967, 127–148.

## Лемма Лоренца и ее следствия

### 3.1. Двухчастотная лемма Лоренца

Лемма Лоренца, рассмотренная в настоящей главе, позволяет установить соотношения ортогональности нормальных волн в ЗС, построить теорию возбуждения ЗС электронным потоком, доказать равенство скорости переноса энергии и групповой скорости волны. Эта лемма полезна и при решении ряда других задач электродинамики.

Рассмотрим электромагнитное поле  $\mathbf{E}_s, \mathbf{H}_s$ , удовлетворяющее граничным условиям с периодом  $d$  и уравнениям Максвелла

$$\operatorname{rot} \mathbf{H}_s = j\omega_s \epsilon \mathbf{E}_s + \mathbf{J}_s, \quad (3.1, a)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E}_s = -j\omega_s \mu \mathbf{H}_s, \quad (3.1, б)$$

при некоторой частоте  $\omega_s$ . Пусть существует другое поле  $\mathbf{H}_{s'}, \mathbf{E}_{s'}$ , удовлетворяющее тем же граничным условиям и уравнениям, но, вообще говоря, при другой частоте  $\omega_{s'}$ ,

$$\operatorname{rot} \mathbf{H}_{s'} = j\omega_{s'} \epsilon \mathbf{E}_{s'} + \mathbf{J}_{s'}, \quad (3.1, в)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E}_{s'} = -j\omega_{s'} \mu \mathbf{H}_{s'}. \quad (3.1, г)$$

Вспомнив известное из векторного анализа выражение

$$\operatorname{div}[\mathbf{U}, \mathbf{V}] = \mathbf{V} \operatorname{rot} \mathbf{U} - \mathbf{U} \operatorname{rot} \mathbf{V}, \quad (3.2)$$

умножим скалярно уравнения (3.1, а) и (3.1, б) соответственно на  $\mathbf{E}_{s'}$  и  $\mathbf{H}_{s'}$ , а уравнения (3.1, в) и (3.1, г) на  $\mathbf{E}_s$  и  $\mathbf{H}_s$  и вычтем из результата для (3.1, а) результат для (3.1, г), то же самое сделаем с уравнениями (3.1, б) и (3.1, в). Получим

$$\operatorname{div}[\mathbf{H}_s, \mathbf{E}_{s'}] = j\omega_s \epsilon \mathbf{E}_s \mathbf{E}_{s'} + j\omega_{s'} \mu \mathbf{H}_s \mathbf{H}_{s'} + \mathbf{J}_s \mathbf{E}_{s'},$$

$$\operatorname{div}[\mathbf{H}_{s'}, \mathbf{E}_s] = j\omega_{s'} \epsilon \mathbf{E}_{s'} \mathbf{E}_s + j\omega_s \mu \mathbf{H}_{s'} \mathbf{H}_s + \mathbf{J}_{s'} \mathbf{E}_s.$$

Складывая или вычитая последние результаты, интегрируя их по объему  $V$  и учитывая теорему Гаусса-Остроградского

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{A} dV = \oint_{\Sigma} \mathbf{A} d\mathbf{s},$$

получим окончательное выражение для *двухчастотной леммы Лоренца*:

$$\begin{aligned} & - \oint_{\Sigma} ([\mathbf{E}_{s'}, \mathbf{H}_s] \pm [\mathbf{E}_s, \mathbf{H}_{s'}]) d\mathbf{s} = \\ & = j(\omega_s \pm \omega_{s'}) \int_V \epsilon \mathbf{E}_s \mathbf{E}_{s'} dV + j(\omega_{s'} \pm \omega_s) \int_V \mu \mathbf{H}_s \mathbf{H}_{s'} dV + \int_V (\mathbf{J}_s \mathbf{E}_{s'} \pm \mathbf{J}_{s'} \mathbf{E}_s) dV. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Здесь  $\Sigma$  — поверхность, охватывающая объем  $V$ .



Выберем в качестве  $V$  объем ячейки, содержащий период структуры. Его поверхность  $\Sigma$  можно разбить на три части:  $\Sigma = \Sigma' + \Sigma'' + \Sigma'''$ . Две из них ( $\Sigma'$  и  $\Sigma''$ ) выберем перпендикулярными оси  $z$  и отстоящими друг от друга на период  $d$ , а третью ( $\Sigma'''$ ) — совпадающей с боковой поверхностью системы, если она идеально проводящая. В случае конечной проводимости металла поверхность  $\Sigma'''$  можно выбрать достаточно глубоко, чтобы полем на  $\Sigma'''$  можно было пренебречь. Если ЗС открытая, то ограничимся рассмотрением лишь таких полей, которые затухают по мере удаления от ЗС. При этом поверхность  $\Sigma'''$  по-прежнему выбираем так далеко, чтобы полем на ней можно было пренебречь. Отличными от нуля в (3.3) остаются только интегралы по поверхностям  $\Sigma'$  и  $\Sigma''$ . Ограничимся рассмотрением полей, удовлетворяющих теореме Флоке:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{E}_s(z+d) \\ \mathbf{H}_s(z+d) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{E}_s(z) \\ \mathbf{H}_s(z) \end{bmatrix} \exp(-\Gamma_s).$$

При этом интегралы по  $\Sigma'$  и  $\Sigma''$  отличаются лишь множителем  $\exp(-\Gamma_s - \Gamma_{s'})$ . Внешняя нормаль к  $\Sigma'$  направлена навстречу оси  $z$ . Изменяя направление нормали, получим формулу, называемую *двухчастотной леммой Лоренца для периодических волноводов*:

$$\begin{aligned} & -[\exp(-\Gamma_s - \Gamma_{s'}) - 1] \int_{\Sigma} ([\mathbf{E}_{s'}, \mathbf{H}_s] \pm [\mathbf{E}_s, \mathbf{H}_{s'}]) ds = \\ & = j(\omega_s \pm \omega_{s'}) \int_V \epsilon \mathbf{E}_s \mathbf{E}_{s'} dV + j(\omega_{s'} \pm \omega_s) \int_V \mu \mathbf{H}_s \mathbf{H}_{s'} dV + \int_V (\mathbf{J}_s \mathbf{E}_{s'} \pm \mathbf{J}_{s'} \mathbf{E}_s) dV. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Здесь штрих над  $\Sigma$  опущен.

Ниже рассматриваются некоторые следствия из этой леммы.

### 3.2. Равенство электрической и магнитной энергии в ячейке без потерь

Пусть сторонние токи  $\mathbf{J}_s$  и  $\mathbf{J}_{s'}$  равны нулю. Рассмотрим случай, когда  $\Gamma_s + \Gamma_{s'} = 0$  и когда в (3.4) имеют место верхние знаки. При этом из (3.4) следует

$$\int_V \epsilon \mathbf{E}_s \mathbf{E}_{s'} dV = - \int_V \mu \mathbf{H}_s \mathbf{H}_{s'} dV. \quad (3.5)$$

Равенство (3.5) справедливо и при наличии потерь, ибо величины  $\epsilon$  и  $\mu$  могут быть комплексными. Интегрирование ведется по объему ячейки.

Введем обозначение  $s = -s'$ , если выполнены условия  $\Gamma_s + \Gamma_{s'} = 0$  и  $\omega_s = \omega_{s'}$ . В системах без потерь для распространяющейся волны  $\Gamma_s = j\varphi_s$ , а  $\Gamma_{s'} = -j\varphi_s$ . Если сдвигу фаз  $\varphi_s$  соответствует поле  $\mathbf{E}_s$ ,  $\mathbf{H}_s$ , то сдвигу фаз  $-\varphi_s$  — поле  $\mathbf{E}_{-s} = \mathbf{E}_s^*$ ,  $\mathbf{H}_{-s} = -\mathbf{H}_s^*$ . Знак « $\rightarrow$ » перед  $\mathbf{H}^*$  появляется потому, что только при изменении знака перед  $\mathbf{H}^*$  (или перед  $\mathbf{E}^*$ ) при комплексном сопряжении остаются справедливыми уравнения Максвелла (2.8) (см. стр. 19, гл. 2).

Подставим  $\mathbf{E}_{s'} = \mathbf{E}_{-s} = \mathbf{E}_s^*$  и  $\mathbf{H}_{s'} = \mathbf{H}_{-s} = -\mathbf{H}_s^*$  в (3.5):

$$\int_V \epsilon \mathbf{E}_s \mathbf{E}_s^* dV = \int_V \mu \mathbf{H}_s \mathbf{H}_s^* dV. \quad (3.6)$$

Соотношение (3.6) означает, что для волн, распространяющихся в системах без потерь, одинаковы электрическая и магнитная энергии, запасенные в одном периоде замедляющей системы,

$$W_E = W_H, \quad (3.7)$$

где

$$W_E = \frac{1}{4} \int_V \epsilon \mathbf{E}_s \mathbf{E}_s^* dV, W_H = \frac{1}{4} \int_V \mu \mathbf{H}_s \mathbf{H}_s^* dV. \quad (3.8)$$

Полная энергия есть

$$W = 2W_E = 2W_H = \frac{1}{2} \int_V \epsilon \mathbf{E}_s \mathbf{E}_s^* dV = \frac{1}{2} \int_V \mu \mathbf{H}_s \mathbf{H}_s^* dV. \quad (3.9)$$

### 3.3. Ортогональность нормальных волн по объему ячейки

Пусть по-прежнему сторонние токи равны нулю и  $\Gamma_s + \Gamma_{s'} = 0$ . Рассмотрим лемму Лоренца (3.4) при нижних знаках и учтем (3.5). Получаем

$$(\omega_s - \omega_{s'}) \int_V \left[ \begin{matrix} \epsilon \mathbf{E}_s \mathbf{E}_{s'}^* \\ \mu \mathbf{H}_s \mathbf{H}_{s'}^* \end{matrix} \right] dV = 0.$$

Последнее равенство означает ортогональность полей нормальных волн по объему ячейки  $V$  при условии  $\omega_s \neq \omega_{s'}$ :

$$\int_V \epsilon \mathbf{E}_s \mathbf{E}_{s'}^* dV = 0, \quad \int_V \mu \mathbf{H}_s \mathbf{H}_{s'}^* dV = 0. \quad (3.10)$$

В случае  $\omega_s = \omega_{s'}$  интегралы (3.10) не обязаны равняться нулю. При этом вводят обозначение

$$N_{sV} = \frac{1}{2} \int_V \epsilon \mathbf{E}_s \mathbf{E}_{-s}^* dV = -\frac{1}{2} \int_V \mu \mathbf{H}_s \mathbf{H}_{-s}^* dV. \quad (3.11)$$

Величину  $N_{sV}$  называют *нормой  $s$ -й нормальной волны по объему ячейки*. В полосе пропускания ЗС без потерь (т.е. при  $\Gamma_s = j\varphi_s$ ) норма (3.11) равна энергии поля, запасенной в ячейке ЗС:

$$N_{sV} = \frac{1}{2} \int_V \epsilon \mathbf{E}_s \mathbf{E}_s^* dV = \frac{1}{2} \int_V \mu \mathbf{H}_s \mathbf{H}_s^* dV. \quad (3.12)$$

### 3.4. Ортогональность нормальных волн по сечению ячейки

Пусть в (3.4) сторонние токи отсутствуют ( $\mathbf{J}_s = \mathbf{J}_{s'} = 0$ ) и частоты одинаковы ( $\omega_s = \omega_{s'}$ ). Тогда при нижних знаках в (3.4) получим равенство

$$[\exp(-\Gamma_s - \Gamma_{s'}) - 1] \int_{\Sigma} ([\mathbf{E}_{s'}, \mathbf{E}_s] - [\mathbf{E}_s, \mathbf{H}_{s'}]) ds = 0,$$

которое означает, что при  $\Gamma_s + \Gamma_{s'} \neq 0$  (точнее — при  $\Gamma_s + \Gamma_{s'} \neq j2\pi m$ ,  $m$  — целое) поля нормальных волн ортогональны по сечению  $\Sigma$  ЗС в смысле

$$\int_{\Sigma} ([\mathbf{E}_s, \mathbf{H}_s] - [\mathbf{E}_s, \mathbf{H}_s']) ds = 0. \quad (3.13)$$

В случае  $\Gamma_s + \Gamma_{s'} = 0$  интеграл (3.13) не обязан быть равным нулю. При этом величину

$$N_{s\Sigma} = \frac{1}{4} \int_{\Sigma} ([\mathbf{E}_s, \mathbf{H}_s] - [\mathbf{E}_s, \mathbf{H}_s']) ds \quad (3.14)$$

называют *нормой s-й нормальной волны по сечению ЗС*.

В полосе пропускания системы без потерь норма  $N_{s\Sigma}$  приобретает вид

$$N_{s\Sigma} = \frac{1}{4} \int_{\Sigma} ([\mathbf{E}_s^*, \mathbf{H}_s] + [\mathbf{E}_s, \mathbf{H}_s^*]) ds \quad (3.15)$$

и имеет смысл среднего по времени потока энергии через поперечное сечение  $\Sigma$  ЗС.

Покажем, что поток энергии через поперечное сечение ЗС без потерь равен нулю, если  $\Gamma_s$  действительно или комплексно. Норма (3.14) имеет физический смысл потока энергии лишь в случае  $\Gamma_s = \Gamma_s^*$ , но в затухающих ( $\Gamma_s = \chi_s$ ) и комплексных ( $\Gamma_s = \chi_s + j\phi_s$ ) волнах комплексное сопряжение не приводит к изменению знака  $\Gamma_s$ , так что  $N_{s\Sigma} = 0$  в (3.15), т. е. поток энергии в затухающих и комплексных волнах равен нулю. (Подробнее о комплексных волнах см. п. 5.3.) Это вовсе не означает, что затухающие и комплексные волны вообще не могут переносить энергию через ЗС. Возможен так называемый туннельный эффект. В самом деле, рассмотрим пару затухающих волн с постоянными распространения  $\Gamma_s = \chi_s$  и  $\Gamma_{-s} = -\chi_s$ :  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_s + \mathbf{E}_{-s}$ ;  $\mathbf{H} = \mathbf{H}_s + \mathbf{H}_{-s}$ . Поток энергии этой совокупности волн

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{4} \int_{\Sigma} ([(\mathbf{E}_s^* + \mathbf{E}_{-s}^*)(\mathbf{H}_s + \mathbf{H}_{-s})] + [(\mathbf{E}_s + \mathbf{E}_{-s})(\mathbf{H}_s^* + \mathbf{H}_{-s}^*)]) ds = \\ &= \frac{1}{4} \int_{\Sigma} ([\mathbf{E}_s^*, \mathbf{H}_s] + [\mathbf{E}_{-s}^*, \mathbf{H}_s] + [\mathbf{E}_s^*, \mathbf{H}_{-s}] + [\mathbf{E}_{-s}^*, \mathbf{H}_{-s}] + \\ &\quad + [\mathbf{E}_s, \mathbf{H}_s^*] + [\mathbf{E}_{-s}, \mathbf{H}_s^*] + [\mathbf{E}_s, \mathbf{H}_{-s}^*] + [\mathbf{E}_{-s}, \mathbf{H}_{-s}^*]) ds. \end{aligned}$$

В соответствии со сказанным выше в последнем выражении равны нулю первое, четвертое, пятое и восьмое слагаемые. Остальные имеют право быть отличными от нуля. Аналогично доказывается возможность переноса энергии комплексными волнами. Такой перенос энергии затухающими и комплексными волнами аналогичен туннельному эффекту в квантовой механике и обусловлен взаимодействием падающей и отраженной волн.

### 3.5. Равенство скорости переноса энергии и групповой скорости

Равенство скорости переноса энергии  $v_s = Pd/W$  ( $P$  — средний по времени поток энергии,  $d$  — период ячейки,  $W$  — энергия, запасенная в ячейке) и групповой скорости  $v_g = d\omega/d\beta$  для однородных сред почти очевидно, ибо групповая скорость представляет скорость передачи сигнала. Для перио-

дических структур это утверждение перестает быть очевидным, ибо в этом случае трудно говорить о форме сигнала. Кроме того, при достаточно большой величине дисперсии  $(\lambda n)(dn/d\lambda)$  понятие скорости перемещения сигнала теряет смысл, ибо волновой пакет быстро расплывается. О скорости переноса энергии говорить можно при любой дисперсии. Это понятие остается справедливым и для монохроматических волн.

Предполагаем по-прежнему, что сторонний ток равен нулю. Полагаем:  $\omega_s' = \omega_s + d\omega_s$ ,  $\Gamma_s' = -\Gamma_s - d\Gamma_s$ . При этом  $\mathbf{E}_s' = \mathbf{E}_s + d\mathbf{E}_s$ ,  $\mathbf{H}_s' = \mathbf{H}_s + d\mathbf{H}_s$ . Пренебрегая добавками  $d\mathbf{E}_s$  и  $d\mathbf{H}_s$ , получаем

$$-d\Gamma_s \int_{\Sigma} ([\mathbf{E}_s \mathbf{H}_s] - [\mathbf{E}_s \mathbf{H}_s]) ds = -jd\omega_s \int_V (\epsilon \mathbf{E}_s \mathbf{E}_s - \mu \mathbf{H}_s \mathbf{H}_s) dV,$$

откуда находим\*)

$$j \frac{d\omega_s}{d\Gamma_s} = \frac{\int_{\Sigma} ([\mathbf{E}_s \mathbf{H}_s] - [\mathbf{E}_s \mathbf{H}_s]) ds}{\int_V (\epsilon \mathbf{E}_s \mathbf{E}_s - \mu \mathbf{H}_s \mathbf{H}_s) dV}. \quad (3.16, a)$$

В полосе пропускания системы без потерь ( $\Gamma_s = j\phi_s = j\beta_s$ ) последнее равенство принимает вид

$$d\omega_s/d\beta_s = P_s d/W_s, \quad (3.16, б)$$

где  $P_s$  — поток энергии  $s$ -й нормальной волны, равный  $N_{s\Sigma}$  (см. 3.15), а  $W_s$  — средняя по времени энергия, запасенная в ячейке, равная норме  $N_{sV}$ .

Соотношение (3.16, б) означает равенство скорости переноса энергии и групповой скорости. Оно соблюдается при любой дисперсии, лишь бы не было диссипации энергии.

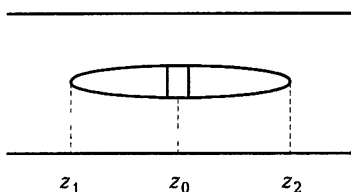
При больших потерях  $v_r$  может отличаться от  $v_s$  не только по величине, но и по знаку. Это утверждение можно проиллюстрировать на примере характеристики  $n(\lambda)$  однородной диспергирующей среды, рассматриваемой обычно в курсе общей физики [2], если воспользоваться формулой Релея (1.10). Вдали от полос поглощения  $(\lambda n)(dn/d\lambda) < 0$ . Вблизи полос поглощения величина  $(\lambda n)(dn/d\lambda) > 0$  и настолько велика, что групповая скорость становится отрицательной ( $n_r = n - \lambda(dn/d\lambda) < 0$ ). Направление потока энергии ( $v_s$ ) не зависит от частоты, так что величины  $v_s$  и  $v_r$  имеют разные знаки.

### 3.6. Уравнения возбуждения замедляющих систем электронным потоком

Пусть  $\mathbf{E}_s$  и  $\mathbf{H}_s$  (или  $\mathbf{E}_r$  и  $\mathbf{H}_r$ ) — поля нормальных волн в ЗС, а  $\mathbf{E}_s'$  и  $\mathbf{H}_s'$  — поле, возбуждаемое током  $\mathbf{J}_s'$  электронного потока. При этом ток  $\mathbf{J}_s = 0$ . Пусть положительным  $s$  или  $r$  соответствуют волны, несущие энергию вдоль оси  $z$ , а отрицательным — навстречу. Полагаем, что частота фиксирована ( $\omega_s = \omega_s'$ ).

Электронный поток в области  $z > z_2$  (рис. 3.1) возбуждает поле, состоящее из нормальных волн, несущих энергию вправо,

\*) Соотношение (3.16, а) получено В. А. Солнцевым.



**Рис. 3.1.** К выводу уравнений возбуждения

$$\mathbf{E}_{s'} = \sum_{r>0} C_r \mathbf{E}_r, \quad z > z_2, \quad (3.17, a)$$

а при  $z < z_1$  — влево,

$$\mathbf{E}_{s'} = \sum_{r>0} C_{-r} \mathbf{E}_{-r}, \quad z < z_1. \quad (3.17, б)$$

Подставляя (3.17, а) в (3.3), учитывая, что  $\omega_s = \omega_{s'}$ ,  $\mathbf{J}_s = 0$ , и выбирая в качестве объема  $V$  часть ЗС, ограниченную плоскостями  $z = z_1$  и  $z = z_2$ , получим

$$- \oint \left( \left[ \sum_{r>0} C_r \mathbf{E}_r, \mathbf{H}_{-s} \right] - \left[ \mathbf{E}_{-s}, \sum_{r>0} C_r \mathbf{H}_r \right] \right) ds = \int_V \mathbf{J}_s \mathbf{E}_{-s} dV.$$

Интеграл в правой части может быть отличным от нуля лишь в плоскости  $z = z_2$ , ибо сумма (3.17, а) характеризует поле волн, бегущих вправо. В соответствии с (3.13) и (3.14) в этом интеграле может отличаться от нуля лишь одно слагаемое, соответствующее  $r = s$ . Получим

$$C_s = \frac{1}{N_s} \int_V \mathbf{J}_s \mathbf{E}_{-s} dV. \quad (3.18, a)$$

Аналогично получается другое выражение, если в (3.3) подставить (3.17, б):

$$C_{-s} = \frac{1}{N_s} \int_V \mathbf{J}_s \mathbf{E}_s dV. \quad (3.18, б)$$

Если представляет интерес зависимость  $C_s(z)$ , то интеграл (3.18, а) следует брать по объему  $V(z_0)$ , ограниченному координатами  $z_1$  и  $z_0$ , а (3.18, б) — координатами  $z_0$  и  $z_2$ :

$$C_s(z_0) = \frac{1}{N_s} \int_{z_1}^{z_0} dz \int_S \mathbf{J}_s \mathbf{E}_{-s} ds, \quad (3.19, a)$$

$$C_{-s}(z_0) = \frac{1}{N_s} \int_{z_0}^{z_2} dz \int_S \mathbf{J}_s \mathbf{E}_s ds. \quad (3.19, б)$$

Это и есть уравнения возбуждения [3]. Их можно записать в несколько иной форме, продифференцировав по  $z$ :

$$\frac{dC_s}{dz} = \frac{1}{N_s} \int_S \mathbf{J}_s \mathbf{E}_{-s} ds, \quad \frac{dC_{-s}}{dz} = -\frac{1}{N_s} \int_S \mathbf{J}_s \mathbf{E}_s ds. \quad (3.20)$$

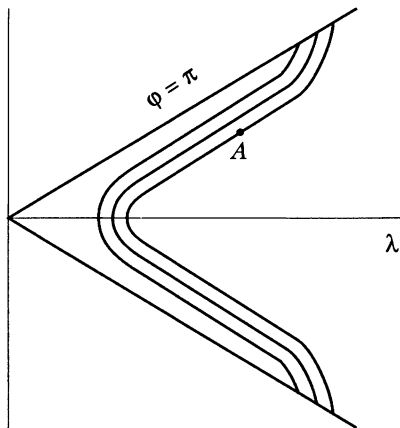
## Упражнения

**3.1.** На рис. 3.2 приведены дисперсионные кривые некоторой ЗС для трех нормальных волн. Показать на этом рисунке, для каких значений  $(\lambda, n)$

выполняется условие ортогональности по объему, а для каких — по сечению.

**3.2.** В ЗС без потерь возможно существование волн с комплексными  $\Gamma = \chi + j\phi$ . Равен нулю или отличен от нуля для таких волн поток вектора Умова—Пойнтинга?

**3.3.** В квантовой механике хорошо известен туннельный эффект, заключающийся в том, что частица просачивается через потенциальный барьер. Аналогом потенциального барьера может служить отрезок ЗС в полосе непропускания. Учитывая результат предыдущего упражнения, объяснить, за счет чего осуществляется перенос энергии.



**Рис. 3.2.** Кривые дисперсии для трех нормальных волн

### Список литературы

- [1]. Бриллюэн Л. Квантовая статистика. Харьков—Киев: Гос. научн.-техн. изд. Укр., 1934. 510 с.
- [2]. Ландсберг Г. С. Оптика. М.: Наука, 1976. 926 с.
- [3]. Вайнштейн Л. А., Солнцев В. А. Лекции по сверхвысокочастотной электронике. М.: Сов. радио, 1973. 399 с.
- [4]. Силин Р. А., Сазонов В. П. Замедляющие системы. М.: Сов. радио, 1966. 632 с.
- [5]. Раппопорт Г. Н. О соответствии энергетических и фазовых характеристик электрических фильтров. *Журн. теор. физики*, 1964, **14**(8), 1946.

## Пространственные гармоники

### 4.1. Определение пространственных гармоник и их дисперсионные характеристики

Согласно теореме Флоке существует частное решение уравнений Максвелла (2.8) в виде нормальной волны

$$\mathbf{E}(x, y, z) = \mathbf{E}_0(x, y, z) \exp(-j\beta z), \quad (4.1)$$

где для распространяющихся нормальных волн  $\beta = \varphi/d$  ( $\varphi$  — сдвиг фаз поля на периоде  $d$  ЗС).

Функция  $\mathbf{E}_0(x, y, z)$  имеет период  $d$  по координате  $z$ , и ее можно разложить в ряд Фурье

$$\mathbf{E}_0(x, y, z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathbf{e}_m(x, y) \exp(-j2\pi m z/d), \quad (4.2)$$

где

$$\mathbf{e}_m(x, y) = \frac{1}{d} \int_{z_0}^{z_0+d} \mathbf{E}(x, y, z) \exp(j\beta_m z) dz, \quad (4.3)$$

$$\beta_m = \beta + 2\pi m/d.$$

С учетом временного множителя и выражений (4.1) и (4.2) напряженность поля в системе можно представить в виде суммы плоских волн

$$\mathbf{E}(x, y, z, t) = \operatorname{Re} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathbf{e}_m(x, y) \exp\{-j[\omega t - (\beta + 2\pi m/d)z]\} \quad (4.4)$$

с амплитудами  $\mathbf{e}_m(x, y)$ , зависящими от координат поперечного сечения ЗС. Эти волны называются *пространственными гармониками*. Они образуют в совокупности полное поле нормальной волны. *Отдельная пространственная гармоника существовать не может*, так как она не удовлетворяет периодическим граничным условиям. Каждой пространственной гармонике соответствует свое волновое число

$$\beta_m = \beta + 2\pi m/d = (\varphi + 2\pi m)/d = 2\pi/\Lambda_m = \varphi_m/d, \quad (4.5)$$

где  $\Lambda_m$  — длина волны  $m$ -й пространственной гармоники в системе,  $\varphi = \beta d$  и  $\varphi_m = \beta_m d$  — сдвиги фаз поля на периоде структуры для нулевой и  $m$ -й пространственных гармоник, соответственно.

Область изменения  $-\pi/d < \beta \leq \pi/d$  волнового числа нулевой пространственной гармоники называем *нулевой зоной*<sup>\*</sup>).

Заметим, что присваивать нулевой гармонике область изменения  $-\pi/d < \beta \leq \pi/d$  (или, что то же,  $-\pi < \varphi \leq \pi$ ) удобно для систем без винтовых осей. В частности, для спирали с осью  $C_{\infty}$  нулевой гармоникой называют ту, у которой поле не зависит от азимутальной координаты (см. п. 2.9 и п. 6.2).

Согласно (1.4) и (4.5) каждой пространственной гармонике соответствует своя фазовая скорость,

$$v_m = \omega/\beta_m, \quad (4.6)$$

а согласно (1.76) и (4.5) всем пространственным гармоникам соответствует одна и та же групповая скорость

$$v_g = d\omega/d\beta_m = d\omega/d\beta.$$

Дисперсионную характеристику ЗС в ряде случаев удобно представлять в виде зависимости замедления  $n(\lambda)$  от длины волны. При этом замедление  $m$ -й пространственной гармоники согласно (1.5) и (4.5) можно записать в виде

$$n_m = \beta_m/k = \varphi_m \lambda / 2\pi d = n + m\lambda/d. \quad (4.7)$$

На графике  $n(\lambda)$  линии  $\varphi = \text{const}$  изображаются лучами, выходящими из начала координат. В частности, линии  $\varphi = m\pi$ , соответствующие границам полос пропускания, изображаются лучами  $n = m\lambda/2d$ . При фиксированном  $\lambda$  эти лучи проходят через точки, отстоящие вдоль оси  $n$  друг от друга на равном расстоянии  $\lambda/2d$ .

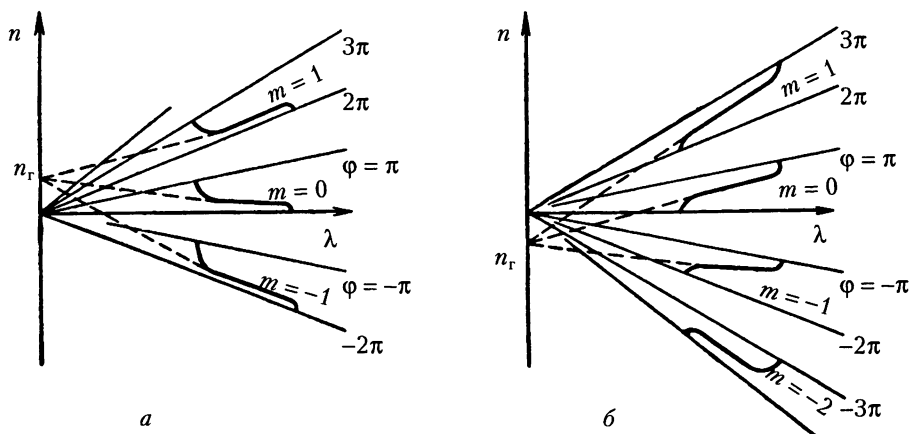
Как следует из (4.5) и (4.7), дисперсионная характеристика  $\beta_m(\omega)$  (или  $n_m(\lambda)$ )  $m$ -й пространственной гармоники получается прибавлением  $2\pi m/d$  (или  $m\lambda/d$ ) к дисперсионной характеристике  $\beta(\omega)$  (или  $n(\lambda)$ ) нулевой гармоники. Иными словами, зная характеристику нулевой гармоники, можно построить ее для других гармоник без дополнительных измерений или расчетов.

На рис. 4.1 изображены кривые дисперсии для случаев, когда направления групповой и фазовой скоростей нулевой пространственной гармоники одинаковы (*прямая волна*) и противоположны (*обратная волна*). В обоих случаях направление фазовой скорости нулевой гармоники считаем положительным. Так как при фиксированной  $\lambda$  групповая скорость всех пространственных гармоник одинакова, касательные к кривым дисперсии для всех гармоник пересекаются в одной точке на оси ординат. Эта точка согласно (1.10) определяет замедление групповой скорости и лежит в области  $|n| > 1$ , так как всегда  $v_g \leq c$ . На границах полос пропускания касательные к кривым  $n(\lambda)$  вертикальны, поскольку групповая скорость равна нулю.

В зависимости от знака дисперсии нулевой гармоники групповая скорость может быть как положительной, так и отрицательной. Для всех обратных волн дисперсия аномальная, так как  $(\lambda/n)(dn/d\lambda) > 0$ , тогда как для прямых волн дисперсия может быть как нормальной, так и аномальной. В частности, на рис. 4.1, а для нулевой гармоники дисперсия нормальная, а

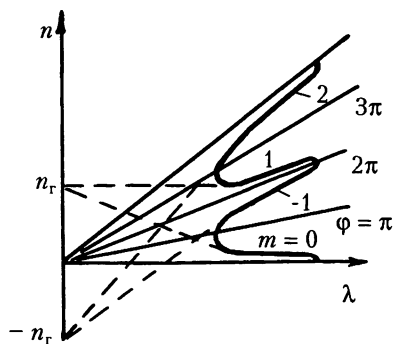
<sup>\*</sup>) В физике твердого тела ее называют первой зоной Бриллюэна.





**Рис. 4.1.** Дисперсионные характеристики различных пространственных гармоник, соответствующие случаям, когда дисперсия нулевой гармоники: *a* — положительна или *b* — отрицательна. Замедление нулевой гармоники считается положительным

для плюс первой она остается нормальной лишь в части диапазона, прилегающей к границам полос пропускания. В остальной части дисперсия аномальная. То, что вблизи границ полос пропускания она нормальная, характерно для всех пространственных гармоник с положительной дисперсией. При построении дисперсионных характеристик удобно полагать положительными замедления всех гармоник, а не только нулевой, так как кривые дисперсии при этом изображаются только в одном квадранте, что более компактно (рис. 4.2). Замедление групповой скорости прямых гармоник в этом случае положительно, а обратных — отрицательно.



**Рис. 4.2.** Кривые дисперсии пространственных гармоник для случая, когда фазовая скорость всех гармоник считается положительной

## 4.2. Пространственные гармоники и волновые уравнения

Исключая из уравнений Максвелла (2.8, *a*) и (2.8, *б*) либо **E**, либо **H**, можно показать, что для электромагнитного поля справедливы волновые уравнения

$$\Delta \mathbf{E} + k^2 \mathbf{E} = 0, \quad \Delta \mathbf{H} + k^2 \mathbf{H} = 0. \quad (4.8)$$

Вместе с тем, как показано ниже, поле пространственных гармоник

$$\mathbf{e}_m(x, y) \exp(-j\beta_m z), \quad \mathbf{h}_m(x, y) \exp(-j\beta_m z)$$

удовлетворяет уравнениям (4.8) лишь в областях, однородных по координате  $z$  (при  $0 \leq x \leq w$  для гребенки на рис. 2.13, *а*; при  $0 \leq x \leq w_2$  и  $-p - w_1 \leq x \leq -p$  для многопроводной линии на рис. 2.13, *б* и при  $0 \leq r \leq a$  для диафрагмированного волновода на рис. 2.1, *а*). Такие однородные по  $z$  области называют *пространствами взаимодействия*, так как в приборах СВЧ именно в этих областях вдоль оси  $z$  обычно движутся электроны, взаимодействующие с полем волны.

Ограничимся рассмотрением пространственных гармоник только электрического поля. Подставляя (4.4) в (4.8), получаем уравнение

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \left[ (\partial^2 \mathbf{e}_m / \partial x^2) + (\partial^2 \mathbf{e}_m / \partial y^2) + (k^2 - \beta_m^2) \mathbf{e}_m \right] \exp(-j\beta_m z) = 0, \quad (4.9)$$

которое определено внутри ЗС, т.е. для любого  $z$  в пространстве взаимодействия, но не для всех  $z$  вне этого пространства. В частности, для гребенки (рис. 2.13, *а*) вне пространства взаимодействия ( $0 \geq x \geq -h$ ) оно определено только между пластинами. Поле внутри металлических пластин равно нулю и не описывается уравнением (4.8). Умножая (4.9) на  $\exp(j\beta_q z)$  и интегрируя по  $z$  в пределах периода структуры, получим, что интеграл не равен тождественно нулю только при  $m = q$ . В результате получаем волновое уравнение для пространственной гармоники

$$(\partial^2 \mathbf{e}_m / \partial x^2) + (\partial^2 \mathbf{e}_m / \partial y^2) + (k^2 - \beta_m^2) \mathbf{e}_m = 0, \quad (4.10)$$

справедливое только для пространства взаимодействия, так как интегрирование можно вести только в этом пространстве.

При вычислении амплитуд пространственных гармоник  $\mathbf{e}_m$  и  $\mathbf{h}_m$  вне пространства взаимодействия полагаем, что поле отлично от нуля лишь внутри ЗС, ограниченной идеально проводящим металлом. При этом величины  $\mathbf{e}_m$  и  $\mathbf{h}_m$  определяются однозначно. В общем случае, для расчета ЗС достаточно потребовать, чтобы электромагнитное поле внутри ЗС удовлетворяло уравнениям Максвелла и граничным условиям. Вне ЗС поле можно считать произвольным. При этом амплитуды пространственных гармоник определяются неоднозначно.

В ЗС, содержащих плоскости симметрии, перпендикулярные оси  $z$ , амплитуды компонент поля всех пространственных гармоник можно считать действительными или мнимыми. В самом деле, выберем начало координат  $z = 0$  в одной из плоскостей симметрии и вычислим амплитуды  $\mathbf{e}_{mv}$  по формуле (4.3):

$$\mathbf{e}_{mv} = \frac{1}{d} \int_{-d/2}^{d/2} E_v(z) \exp(j\beta_m z) dz = \frac{1}{d} \int_0^{d/2} [E_v(z) \exp(j\beta_m z) + E_v(-z) \exp(-j\beta_m z)] dz.$$

Координаты  $x$  и  $y$  опускаем, индекс  $v$  нумерует  $x$ -,  $y$ - или  $z$ -компоненту. В соответствии с (2.40) для любой компоненты поля выполняется равенство

$E_{\sqrt{}}(-z) = \pm E_{\sqrt{}}^*(z)$ . Отсюда следует, что компоненты  $e_{mv}$  ( $-\infty < m < \infty$ ) либо действительны, либо мнимы.

### 4.3. Поле замедляющих систем, однородных в одном из поперечных направлений

Изучение свойств многих ЗС сводится к исследованию систем, однородных в одном из направлений (рис. 2.13). В частности, расчет гребенки конечной ширины с высокой степенью точности сводится, как правило, к расчету бесконечно широкой гребенки; расчет многих штыревых ЗС включает в себя расчет многопроводной линии. В связи с этим представляет интерес изучение структуры поля в системах, однородных в одном из направлений.

Рассмотрим системы, однородные вдоль оси  $y$  и имеющие период  $d$  вдоль оси  $z$ . На рис. 2.14 ось  $y$  перпендикулярна плоскости чертежа. Волна в этих системах может распространяться в любом направлении в плоскости  $(y, z)$ . Зависимость поля от координаты  $y$  можно представить в виде волны

$$\begin{bmatrix} \mathbf{E}(x, y, z) \\ \mathbf{H}(x, y, z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{E}(x, z) \\ \mathbf{H}(x, z) \end{bmatrix} \exp(-j\beta_y y), \quad (4.12)$$

бегущей вдоль оси  $y$ , а зависимость от координаты  $z$  должна удовлетворять условию Флоке (4.1).

Учитывая (4.12), можно записать уравнения Максвелла (2.8) в виде

$$\begin{aligned} j\beta_y E_z + (\partial E_y / \partial z) &= j\omega\eta_0 H_x, & j\beta_y H_z + (\partial H_y / \partial z) &= -j\omega\epsilon_0 E_x, \\ (\partial E_x / \partial z) - (\partial E_z / \partial x) &= -j\omega\mu_0 H_y, & (\partial H_x / \partial z) - (\partial H_z / \partial x) &= j\omega\epsilon_0 E_y, \\ (\partial E_y / \partial x) + j\beta_y E_x &= -j\omega\mu_0 H_z, & (\partial H_y / \partial x) + j\beta_y H_x &= j\omega\epsilon_0 E_z, \end{aligned} \quad (4.13)$$

а волновые уравнения (4.8) — в виде

$$\Delta_{xz} \mathbf{E}(x, y) + (k^2 - \beta_y^2) \mathbf{E}(x, y) = 0, \quad (4.14, a)$$

$$\Delta_{xz} \mathbf{H}(x, y) + (k^2 - \beta_y^2) \mathbf{H}(x, y) = 0, \quad (4.14, б)$$

где

$$\Delta_{xz} = \left( \partial^2 / \partial x^2 \right) + \left( \partial^2 / \partial z^2 \right).$$

В равенствах (4.13) и (4.14) векторы  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  и их компоненты зависят только от координат  $x$  и  $z$ . Зависимость от  $y$  учитывается множителем  $\exp(-j\beta_y y)$ . Величина  $\beta_y$  представляет  $y$ -компоненту волнового вектора. Величина

$$\beta_k = (k^2 - \beta_y^2)^{1/2} \quad (4.15)$$

называется *критическим волновым числом*, а соответствующая частота  $\omega_k = c\beta_k$  — *критической частотой*. Волна распространяется вдоль оси  $y$  лишь при  $\omega = kc > \omega_k$  (число  $\beta_y$  действительное) и затухает при  $\omega < \omega_k$  ( $\beta_y$  — мнимое).

Структура поля в однородной по координате  $y$  ЗС во многом сходна со структурой поля в однородном по  $y$  волноводе. В частности, поля как в ЗС, так и в волноводе удовлетворяют уравнениям (4.12) – (4.15). В отличие от ЗС, однако, поперечное сечение ( $y = \text{const}$ ) волновода ограничено замкнутым контуром. В связи с этим величина  $\beta_k$  для волновода имеет дискретный спектр значений. Каждому  $\beta_k$  соответствует свой тип волны и своя критическая частота. Величина  $\beta_k$  для ЗС может изменяться в зависимости от сдвига фаз  $\phi$  на периоде. Зависимость  $\beta_k(\phi)$  представляет дисперсионную характеристику бесконечно широкой ЗС для случая, когда поле не зависит от  $y$ . При этом  $\beta_y = 0$  и  $\beta_k = k = \omega/c$ . При известной зависимости  $\beta_k(\omega)$  дисперсионная характеристика при  $\beta_y \neq 0$  вычисляется по формуле (4.15).

Как и в волноводе, в ЗС могут существовать типы волн, у которых равна нулю либо компонента  $E_y$ , либо  $H_y$ , либо обе эти компоненты. При переходе к критическим частотам количество компонент поля, равных нулю, растет. В волноводах обычно классифицируют поля относительно той оси ( $y$ ), вдоль которой бежит волна. Ее называют  $H$ - или  $TE$ -волной, если  $E_y = 0$  и  $H_y \neq 0$ ;  $E$ - или  $TM$ -волной, если  $H_y = 0$  и  $E_y \neq 0$ ;  $T$ - или  $TEM$ -волной, если  $E_y = H_y = 0$ . В однородных по  $y$  ЗС волна может распространяться в любом направлении в плоскости ( $y, z$ ). Реальные ЗС, как правило, ограничены плоскостями, перпендикулярными оси  $y$ . В этом случае волна и электронный поток в соот-

ответствующем приборе движутся вдоль оси  $z$ , так что по отношению к этой оси целесообразно вести классификацию полей. При этом поле называют  $LE$ -волной, если  $E_y = 0$  и  $H_y \neq 0$ ;  $LM$ -волной, если  $E_y \neq 0$ ;  $LEM$ -волной, если  $E_y = H_y = 0$  (см. табл. 4.1).

Символ «Т» в обозначении типа волны указывает, что либо электрическое ( $TE$ ), либо магнитное ( $TM$ ) поле перпендикулярно направлению распространения. Он представляет начальную букву английского слова transversal (поперечный). В соот-

ветствии с этим волны называют *поперечными электрическими* ( $TE$ ), *поперечными магнитными* ( $TM$ ) или *поперечными электромагнитными* ( $TEM$ ). Символ  $L$  указывает на то, что электрическое ( $LE$ ) либо магнитное ( $LM$ ) поле лежит в плоскости, перпендикулярной оси  $y$  и содержит  $z$ -компоненту. Он представляет начальную букву английского слова longitudinal (продольный). Соответствующие типы волн называются *продольными электрическими* ( $LE$ ), *продольными магнитными* ( $LM$ ) или *продольными электромагнитными* ( $LEM$ ).

**Волна типа  $LEM$ .** Поскольку для  $LEM$ -волны  $E_y = H_y = 0$ , из (4.13) следует, что

$$\beta_y E_z = \omega \mu_0 H_x \quad \text{и} \quad \beta_y H_x = \omega \epsilon_0 E_z.$$

Сравнивая последние два равенства, находим  $\beta_y = \omega(\epsilon_0 \mu_0)^{1/2} = k$ , так что критическое волновое число (4.15) для  $LEM$ -волны равно нулю следовательно, равна нулю критическая частота. При этом волновые уравнения

(4.14), описывающие поле в сечении  $y = \text{const}$ , сводятся к уравнениям Лапласа

$$\Delta_{xz} \mathbf{E} = 0, \quad \Delta_{xz} \mathbf{H} = 0. \quad (4.16)$$

Известно [2], что потенциал  $U$  статического поля в отсутствие пространственного заряда удовлетворяет уравнению Лапласа,  $\Delta U = 0$ . При этом напряженность электрического поля  $\mathbf{E} = -\text{grad} U$  удовлетворяет тому же уравнению. Справедливо и обратное утверждение: если поле  $\mathbf{E}$  удовлетворяет уравнению Лапласа, то в отсутствие пространственного заряда потенциал  $U = -\int \mathbf{E} d\mathbf{r}$  удовлетворяет тому же уравнению. Отсюда следует, что поле  $LEM$  в сечении  $y = \text{const}$  полностью совпадает со статическим, если для обеих задач одинаковы граничные условия. Поэтому волны  $LEM$  возможны только в ЗС с многосвязным сечением, например, в многопроводной линии. В бесконечно широкой гребенке  $LEM$ -волна возможна только при  $\varphi = 0$ .

Поскольку поле в сечении  $y = \text{const}$  совпадает со статическим, интеграл  $\int \mathbf{E} d\mathbf{r}$ , взятый в этом сечении между двумя проводниками, может рассматриваться как разность потенциалов между ними. Кроме того, векторы  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  в любой точке взаимно перпендикулярны, поскольку справедливы равенства

$$E_z = (\omega \mu_0 / k) H_x = \rho H_x, \quad E_x = -\rho H_z, \quad \partial E_x / \partial z = \partial E_z / \partial x, \quad \partial H_x / \partial z = \partial H_z / \partial x,$$

которые получаются из (4.13) с учетом того, что  $E_y = H_y = 0$ ,  $\beta_y = k$ . Здесь  $\rho = \sqrt{\mu_0 / \varepsilon_0}$  — волновое сопротивление свободного пространства.

**Волны типов  $LE$  и  $LM$ .** Компоненты поля  $E_x$ ,  $E_z$ ,  $H_x$  и  $H_z$  можно выразить через  $E_y$  и  $H_y$  с помощью уравнений Максвелла (4.13). При этом волновые уравнения (4.14) достаточно решить относительно  $y$ -компонент полей. Так, для  $LE$ -поля

$$E_x = j\rho(k/\beta_k^2)(\partial H_y / \partial z), \quad E_z = -j\rho(k/\beta_k^2)(\partial H_y / \partial x), \quad (4.17, a)$$

$$H_x = -j(\beta_y/\beta_k^2)(\partial H_y / \partial x), \quad H_z = -j(\beta_y/\beta_k^2)(\partial H_y / \partial z),$$

$$\Delta_{xz} H_y + \beta_k^2 H_y = 0, \quad (4.17, б)$$

для  $LM$ -поля

$$E_x = -j(\beta_y/\beta_k^2)(\partial E_y / \partial x), \quad E_z = -j(\beta_y/\beta_k^2)(\partial E_y / \partial z), \quad (4.18, a)$$

$$H_x = -(j/\rho)(k/\beta_k^2)(\partial E_y / \partial z), \quad H_z = (j/\rho)(k/\beta_k^2)(\partial E_y / \partial x),$$

$$\Delta_{xz} E_y + \beta_k^2 E_y = 0, \quad (4.18, б)$$

где  $\beta_k$  — критическое волновое число, определяемое равенством (4.15).

Из (4.17, а) и (4.18, а) следует, во-первых, что в критическом режиме (т. е. при  $\beta_y = 0$ ) в  $LE$ -волне отлична от нуля только одна компонента  $H_y$ , а в  $LM$ -волне — только  $E_y$ , и, во-вторых, при любых  $\beta_y$  векторы  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  и их компоненты в плоскости  $y = \text{const}$  взаимно ортогональны, поскольку

выполняются равенства

$$E_x H_x + E_y H_y + E_z H_z = 0, \quad E_x H_x + E_z H_z = 0.$$

Компоненты поля (4.17) и (4.18) удовлетворяют уравнениям Максвелла при заданных граничных условиях на контуре  $\Sigma$  сечения  $y = \text{const}$ , если им удовлетворяют лишь  $y$ -компоненты ([2], с. 207)

$$\partial H_y / \partial \nu|_{\Sigma} = 0 \quad \text{для } LE\text{-волн}, \quad (4.19, a)$$

$$E_y|_{\Sigma} = 0 \quad \text{для } LM\text{-волн}, \quad (4.19, б)$$

где  $\partial/\partial \nu$  — производная по нормали к контуру.

Можно показать [1], что  $LEM$ -,  $LE$ - и  $LM$ -волнами исчерпываются возможные типы волн в однородных по  $y$  ЗС<sup>\*</sup>). В ЗС могут существовать поля, представляющие линейную комбинацию рассмотренных типов волн. Они, однако, не являются нормальными, поскольку не удовлетворяют равенствам (4.12).

Волновые уравнения (4.14) совпадают с уравнением колебаний мембраны ([3], с. 327), в котором величина  $E_y$  или  $H_y$  играет роль смещения. Согласно (4.19) для  $LE$ -волны мембрана свободна вдоль контура  $\Sigma$ , а для  $LM$ -волны — закреплена. В системах, изображенных на рис. 2.14, мембраны соответствуют незаштрихованным областям. Аналогия колебаний  $y$ -компонент поля и мембраны позволяет найти ряд качественных закономерностей волн в ЗС. Эта аналогия используется ниже при рассмотрении волн в ЗС типа «гребенка».

#### 4.4. Поле пространственных гармоник в системах, однородных по координате $y$

В пространстве взаимодействия поле пространственных гармоник  $\mathbf{e}_m(x, y)$  удовлетворяет волновому уравнению (4.10), в котором волновое число  $\beta_m$   $m$ -й пространственной гармоники представляет  $z$ -компоненту волнового вектора этой гармоники. В системе, однородной по координате  $y$ , согласно (4.12) зависимость поля от  $y$  определяется множителем  $\exp(\pm j\beta_y y)$ , где  $\beta_y$  представляет  $y$ -компоненту волнового вектора. Она для всех гармоник одинакова. При этом зависимость  $\mathbf{e}_m$  от  $x$  представляется множителем  $\exp(\pm j\beta_{mx} x)$ , так что

$$k^2 = \beta_{mx}^2 + \beta_y^2 + \beta_m^2. \quad (4.20, a)$$

Здесь  $\beta_{mx}$  —  $x$ -компонента волнового вектора в пространстве взаимодействия.

Если поле удовлетворяет уравнению Лапласа (например,  $LEM$ -поле в многопроводной линии), то  $\beta_y = k$ . При этом

$$\beta_{mx}^2 + \beta_m^2 = 0. \quad (4.20, б)$$

<sup>\*</sup>) В [1] это утверждение доказывается для  $TE$ - и  $TM$ -волн. В нашем случае следует иметь в виду, что  $LE$ - и  $LM$ -волны относительно оси  $z$  совпадают с  $TE$ - и  $TM$ -волнами относительно оси  $y$ .

Волновое число  $\beta_y$  должно быть действительным, поскольку поле не может ни расти, ни затухать вдоль  $y$  из-за отсутствия неоднородностей вдоль этой оси (нет источников). Величина  $\beta_{mx}$  может быть как действительной так и мнимой.

Замедление  $m$ -й пространственной гармоники согласно (4.20) определяется равенством

$$n_m = \beta_m / k = [1 - (\beta_y / k)^2 - (\beta_{mx} / k)^2]^{1/2} \quad (4.21)$$

Отсюда следует, что число  $\beta_{mx}$  мнимо для замедленной гармоники ( $n_m > 1$ ). Оно может оставаться мнимым и для быстрой гармоники ( $n_m < 1$ ), если только  $\beta_y \neq 0$ . При мнимом  $\beta_{mx} = j\gamma_m$  зависимость поля от  $x$  описывается либо экспоненциальными функциями  $\exp(\pm\gamma_m x)$ , либо их линейными комбинациями  $\text{sh}\gamma_m(w-x)$  и  $\text{ch}\gamma_m(w-x)$ .

Решение  $\exp(-\gamma_m x)$  возможно только в системах с удаленными стенками ( $w \rightarrow \infty$ ). Решение  $\exp(\gamma_m x)$  лишено физического смысла, так как оно означает бесконечное возрастание поля при  $x \rightarrow \infty$ . Решения  $\text{sh}\gamma_m(w-x)$  и  $\text{ch}\gamma_m(w-x)$  возможны при наличии проводящей плоскости  $x=w$ . Во всех случаях мнимым  $\beta_{mx}$  соответствует максимум поля на границе  $x=0$  периодической системы.

Действительным значениям  $\beta_{mx}$  соответствуют решения  $\exp(\pm j\beta_{mx} x)$  при  $w \rightarrow \infty$  либо  $\sin\beta_{mx}(w-x)$  и  $\cos\beta_{mx}(w-x)$  при  $w \neq 0$ . В этом случае поле не обязательно достигает максимума при  $x=0$ , а при  $w \rightarrow \infty$  амплитуда поля во всем полупространстве  $x > 0$  одинакова.

## Упражнения

- 4.1. Найти структуру поля пространственных гармоник в аксиально-симметричных ЗС (в системах с осью  $SO$ ).
- 4.2. Можно ли в ЗС возбудить или подавить одну пространственную гармонику?
- 4.3. Сравнить зависимости амплитуд пространственных гармоник от координаты  $x$  для ЗС, однородных по  $y$ , и от  $r$  для аксиально-симметричных систем.
- 4.4. В периодической литературе встречаются работы, в которых расчет +ЗС, однородных по  $y$ , при  $\beta_y \neq 0$  ведется в предположении  $E_x \neq 0$ ,  $E_y \neq 0$ ,  $E_z \neq 0$ ,  $H_x \neq 0$ ,  $H_y \neq 0$ ,  $H_z = 0$ . Правильно ли это предположение?

## Список литературы

- [1]. Коваленко Е. С. Шиманский В. И. Синфазные волны в диафрагмированном волноводе прямоугольного сечения. *Изв. вузов. Радиотехника*, 1960, **3**(2), 153–167.
- [2]. Никольский В. В., Никольская Т. И. Электродинамика и распространение радиоволн. Уч. пособие для радиотехн. спец. вузов. Изд. 3-е, перераб. и доп. М.: Наука, 1989. 544 с.
- [3]. Мандельштам Л. И. Полное собрание трудов. Т. 2. М.: АН СССР, 1947. 396 с.

# Волны в одномерно-периодических системах

## 5.1. Волны в электрических цепочках. Дисперсия цепочек четырехполюсников

Ряд свойств периодических структур проще всего рассмотреть на примерах электрических цепочек, представляющих периодические последовательности из сосредоточенных индуктивностей и емкостей. На примерах этих цепочек легко проиллюстрировать, в частности, существование нормальной, аномальной, положительной и отрицательной дисперсии, существование полос пропускания и непропускания, ход кривых дисперсии вблизи границ полос пропускания и т.п. В ряде случаев цепочки могут представлять эквивалентные схемы ЗС. При этом расчет ЗС сводится к анализу соответствующей эквивалентной схемы.

На рис. 5.1 изображена цепочка из сопротивлений  $Z$  и проводимостей  $Y$ , которая используется в качестве эквивалентной схемы многих ЗС. Предположим в соответствии с теоремой Флоке, что токи в соседних ячейках отличаются в  $\exp(-\Gamma)$  раз, где  $\Gamma = \chi + j\phi$ . Величина  $\Gamma$  называется *постоянной распространения*,  $\chi$  — *постоянной затухания*,  $\phi$  — *сдвигом фаз на периоде*.

Установим связь величин  $Z$  и  $Y$  с  $\Gamma$ , для чего запишем уравнение Кирхгофа для одного из замкнутых контуров,

$$I(Z + 2/Y) - I \exp(\Gamma)/Y - I \exp(-\Gamma)/Y = 0, \quad (5.1, a)$$

откуда следует, что

$$\operatorname{ch} \Gamma = 1 + YZ/2, \quad (5.1, б)$$

или, что то же,

$$\operatorname{sh}(\Gamma/2) = (ZY)^{1/2}/2. \quad (5.1, в)$$

Величины  $Z$  и  $Y$  мнимые, так что произведение  $ZY$  действительное. Из этого следует, что

$$\operatorname{sh}(\Gamma/2) = \operatorname{sh}(\chi/2)\cos(\phi/2) + j \operatorname{ch}(\chi/2)\sin(\phi/2)$$

представляет либо действительную величину ( $ZY > 0$ ,  $\phi = 0$  или  $\phi = \pi$ ), либо мнимую ( $ZY < 0$  при  $\chi = 0$ ). Правая часть уравнений (5.1, б) и (5.1, в) зависит явно от частоты, а левая — от  $\Gamma$ , так что уравнения (5.1, б) и (5.1, в)

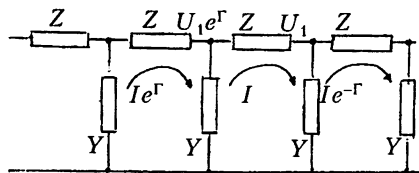


Рис. 5.1. Цепочка четырехполюсников



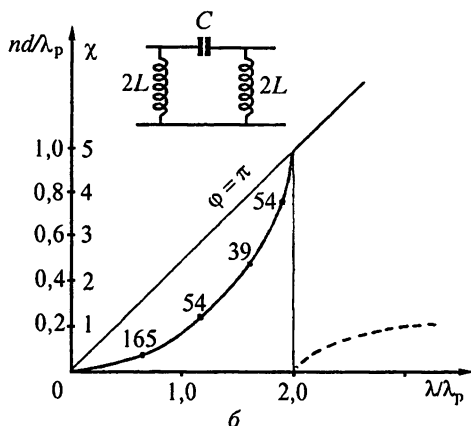
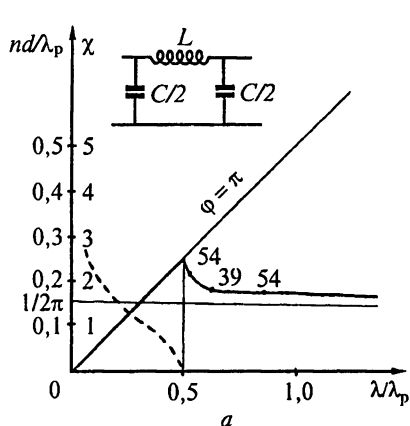
устанавливают зависимость  $\Gamma(\omega)$ . Они называются *уравнениями дисперсии*. Область частот, в которой  $\chi = 0$  (т. е.  $-4 < ZY < 0$ ), называется *полосой пропускания* цепочки. При этом волна распространяется без затухания. Область частот, в которой  $\chi \neq 0$ , называется *полосой непропускания*.

Цепочка может иметь полосы пропускания только при отрицательных  $ZY$ , т. е. когда величины  $Z$  и  $Y$  соответствуют сопротивлениям разного типа (одна — индуктивному, другая — емкостному).

В частности, при  $Z = j\omega L$ ,  $Y = j\omega C$  (см. рис. 1.6, а) цепочка представляет фильтр низкой частоты\*, а уравнение дисперсии имеет вид (см. упражнение 1.3)

$$\operatorname{sh}(\Gamma/2) = j\omega/2\omega_p = j\lambda_p/2\lambda, \quad (5.2, a)$$

где  $\omega_p^2 = 1/LC$ . Полоса пропускания цепочки лежит в области  $\lambda > \lambda_p/2$ . Дисперсия цепочки положительная (рис. 5.2, а).



**Рис. 5.2.** Кривые дисперсии различных четырехполюсников. Цифрами около кривых указаны значения  $K_{\text{св}} C/\lambda_p \varepsilon_0 F(\varphi)$ . Штриховыми линиями нанесена зависимость постоянной затухания  $\chi$  от  $\lambda/\lambda_p$

При  $Z = 1/j\omega C$ ,  $Y = 1/j\omega L$  (см. рис. 1.6, б) цепочка представляет фильтр высокой частоты. Ее уравнение дисперсии имеет вид

$$\operatorname{sh}(\Gamma/2) = j\omega_p/2\omega = j\lambda/2\lambda_p. \quad (5.2, б)$$

Граница полосы пропускания соответствует  $\lambda = 2\lambda_p$ . Дисперсия цепочки отрицательная (рис. 5.2, б).

Постоянные затухания обеих цепочек вне полосы пропускания растут от нуля по мере удаления  $\lambda$  от границы.

В качестве примера структуры, которая может обладать аномальной положительной дисперсией, рассмотрим цепочку индуктивно связанных кон-

\* ) Фильтр низкой частоты служит аналогом цепочки из масс, связанных пружинками. Эта цепочка часто используется в качестве одномерной модели кристаллической решетки [6] и называется цепочкой Лагранжа.

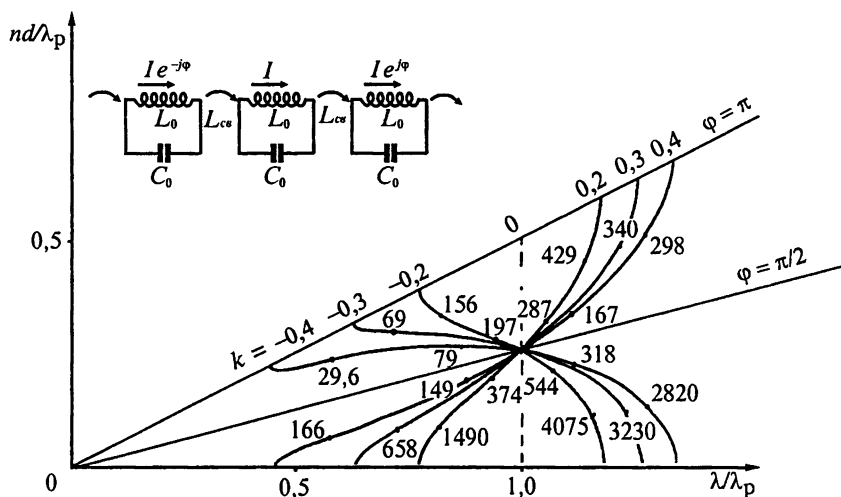


Рис. 5.3. Кривые дисперсии цепочки резонаторов, связанных взаимной индукцией. Числами около кривых указаны значения  $K_{cv}C/\lambda_p \epsilon_0 F(\varphi)$

туров (рис. 5.3). Она служит эквивалентной схемой цепочки индуктивно связанных резонаторов. Уравнение Кирхгофа для одного из контуров имеет вид

$$I/(j\omega C_0) + j\omega I\{L_0 + L_{cv}[\exp(j\varphi) + \exp(-j\varphi)]\} = 0,$$

откуда следует уравнение дисперсии

$$\lambda/\lambda_p = (1 - 2k\cos \varphi)^{1/2}, \quad (5.3)$$

где  $\lambda_p = 2\pi c(L_0 C_0)^{1/2}$ ,  $k = L_{cv}/L_0$ .

Полоса пропускания цепочки зависит от величины коэффициента связи  $k$  и лежит в пределах

$$\lambda_p(1 - 2k)^{1/2} \leq \lambda \leq \lambda_p(1 + 2k)^{1/2}.$$

Значение  $\lambda$ , соответствующее  $\lambda = \pi/2$ , не зависит от  $k$  и равно  $\lambda_p$ . Дисперсия цепочки отрицательная при  $k > 0$  и положительная при  $k < 0$ . Если коэффициент связи  $k$  отрицателен и достаточно велик по абсолютной величине, то в цепочке возможна аномальная положительная дисперсия при  $\varphi > \pi/2$ .

## 5.2. Сопротивление связи цепочек четырехполюсников

Рассмотренные выше цепочки четырехполюсников (рис. 5.1 – 5.3) используются в качестве эквивалентных схем ЗС. В зависимости от системы и ее схемы поле пространственной гармоник, взаимодействующей с электронным потоком, пропорционально напряжению либо на продольном ( $Z$ ), либо на поперечном ( $1/Y$ ) сопротивлении (рис. 5.1). В случае цепочки, изображенной

на рис. 5.3, поле пропорционально напряжению на каждом из контуров. Обозначив амплитуду этого напряжения через  $U$ , можно написать выражение для амплитуды соответствующей пространственной гармоник

$$e = -MU/d, \quad (5.4)$$

где  $d$  — период структуры, а  $M$  — некоторый коэффициент, зависящий от сдвига фаз  $\varphi$  на периоде  $d$  и от формы пространства взаимодействия. Он называется *коэффициентом формы пространства взаимодействия*<sup>\*)</sup>.

С учетом (5.4) сопротивление связи (1.12) можно определить равенством:

$$K_{ce} = (M^2/2\varphi^2)(UU^*/P), \quad (5.5)$$

где  $\varphi = \beta d = -j\Gamma$ .

Поток энергии  $P$  можно вычислить по формуле

$$P = \frac{1}{4}(IU_1^* + I^*U_1),$$

где  $I$  — амплитуда тока в продольном сопротивлении  $Z$ , а  $U_1$  — амплитуда напряжения в поперечном сопротивлении  $1/Y$ .

Учитывая, что  $Y^* = -Y$ , находим согласно рис. 5.1

$$U_1 = 2j(I/Y) \sin(\varphi/2) \exp(-j\varphi/2).$$

Исключая  $I$  из формулы для потока энергии  $P$  и подставляя результат в (5.5), находим сопротивление связи для случая, когда поток электронов взаимодействует с полем, пропорциональным  $U_1$  на поперечном сопротивлении  $1/Y$ ,

$$K_{ce\perp} = F(\varphi)/|Y \sin \varphi|, \quad (5.6, a)$$

или с учетом уравнения дисперсии (5.1, а) имеем

$$K_{ce\perp} = F(\varphi)|Z/4 \sin^2(\varphi/2) \sin \varphi|, \quad (5.6, б)$$

где

$$F(\varphi) = M^2 \sin^2(\varphi/2)/(\varphi/2)^2. \quad (5.6, в)$$

Если поток взаимодействует с полем, пропорциональным напряжению  $U_{\parallel} = U_{\perp}[1 - \exp(-j\varphi)]$  на продольном сопротивлении  $Z$ , выражение для сопротивления связи имеет вид

$$K_{ce\parallel} = 4 \sin^2(\varphi/2) K_{ce\perp} = F(\varphi)|(2/Y) \operatorname{tg}(\varphi/2)|, \quad (5.7, a)$$

или, что то же,

$$K_{ce\parallel} = F(\varphi)|Z/\sin \varphi|. \quad (5.7, б)$$

Аналогичным способом получается выражение для сопротивления связи цепочки резонаторов. Значения сопротивления связи указаны числами около кривых дисперсии на рис. 5.2 и 5.3. Коэффициент  $4 \sin^2(\varphi/2)$

\*) Подробнее о коэффициенте формы см. п. 9.5.

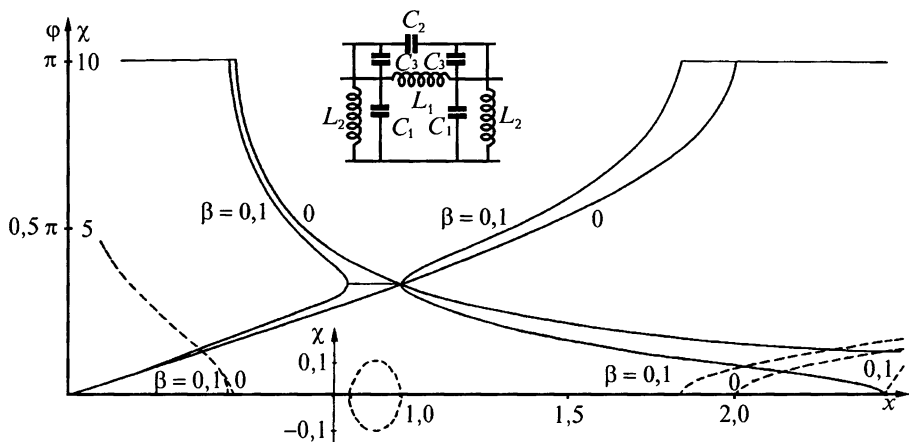
превышает единицу при  $\pi/3 < \varphi < \pi$ . При этих значениях  $\varphi$   $K_{\text{св||}} > K_{\text{св\perp}}$ . Величина  $K_{\text{св||}}$  не может превышать  $K_{\text{св\perp}}$  более, чем в четыре раза, поскольку  $4 \sin^2(\varphi/2) \leq 4$ .

### 5.3. Комплексные волны

Для цепочки, изображенной на рис. 5.4, дисперсионная характеристика рассчитана как в полосе пропускания, так и в полосе непропускания. Интересно отметить область непропускания  $0,84 \leq x = \omega^2 L_2 C_2 \leq 1$ , в которой постоянная затухания мала ( $\chi \leq 0,1$ ), а сдвиг фаз  $\varphi$  отличен от нуля и от  $\pi$  [1–4, 7]. В этой области, в принципе, возможно взаимодействие электронов с волной, обеспечивающее усиление или генерацию колебаний, несмотря на то, что она представляет полосу непропускания. Затухающие волны в системах без потерь, для которых сдвиг фаз  $\varphi$  на периоде отличен от нуля и от  $\pi$ , называются *комплексными волнами*. Они возникают в результате взаимодействия прямой и обратной волн.

Для иллюстрации этого утверждения на рис. 5.4 построены дисперсионные характеристики при  $C_3 = 0$ , когда шестиполосник разбивается на два независимых четырехполосника. Одному из них соответствует положительная дисперсия, а другому — отрицательная. Значения индуктивностей и емкостей подобраны так, чтобы эти кривые пересекались. Емкость  $C_3$  связывает четырехполосники и приводит к разрыву кривых в точке пересечения. Соответствующие примеры появления разрывов, обусловленных взаимодействием волн, для реальных ЗС приведены в гл. 8.

На рис. 5.5 сплошными линиями нанесены три возможных типа пересечения кривых: 1) с разным знаком дисперсии; 2) с одинаковым положительным знаком; 3) с одинаковым отрицательным знаком. При пересечении кривых с



**Рис. 5.4.** Кривые дисперсии  $\Gamma = \chi + j\varphi = f(x)$  шестиполосника, оставленного из двух четырехполосников с разными знаками дисперсии, рассчитанные при  $\delta = \gamma = 0,5$ ,  $\beta = 0$  и  $\beta = 0,1$ ;  $x^2 = \omega^2 L_2 C_2$ ;  $\beta = C_3 / C_2$ ;  $\delta = C_1 / C_2$ ;  $\gamma = L_1 / L_2$ ;  $\alpha = L_1 (C_1 + C_2) / L_2 C_2$ ;  $\text{ch}^2 \Gamma + A \text{ch} \Gamma + B$ ;  $A = \alpha x^2 + (1/x^2) - 2 - \beta$ ;  $B = (1 + \alpha + \beta) + x^2(\beta^2 - \alpha - \alpha\beta) - (1/x^2)$



**Рис. 5.5.** Типы пересечений кривых дисперсии парциальных волн (сплошные линии) и возможные кривые дисперсии нормальных волн (штриховые линии) в связанных линиях передачи

разным знаком образуется полоса непропускания, а с одинаковым — полосы непропускания не получается. Дело в том, что групповая скорость не может превышать  $c$ , так что разрывы кривых недопустимы, если касательная к кривой, получившейся в результате разрыва, пересекает ось  $n$  в интервале  $(-1, 1)$ . На рис. 5.5 штриховой линией нанесены допустимые и недопустимые кривые, получающиеся в результате взаимодействия волн.

Рассмотрим динамику образования комплексных волн. В цепочках четырехполюсников на фиксированной частоте могут существовать две волны, бегущие в противоположные стороны с постоянными распространения  $\Gamma_1 = \Gamma$  и  $\Gamma_2 = -\Gamma$ , отличающимися лишь знаком. В цепочке шестиполюсников возможны четыре нормальные волны с постоянными  $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3 = -\Gamma_1$  и  $\Gamma_4 = -\Gamma_2$ . Если корни уравнения дисперсии шестиполюсника (значения  $\text{ch}\Gamma$ ) комплексны, то постоянным  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  должны соответствовать комплексно сопряженные ( $\Gamma_3 = \Gamma_1^*$  и  $\Gamma_4 = \Gamma_2^*$ ), так как уравнение дисперсии имеет действительные коэффициенты. Четверка чисел  $\Gamma_1, \Gamma_2, -\Gamma_1, -\Gamma_2$  может отличаться от четверки  $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_1^*, \Gamma_2^*$  лишь слагаемыми вида  $j2\pi$ , так как в системе могут распространяться только четыре нормальные волны.

В полосе пропускания ( $\Gamma = j\varphi$ ) комплексному сопряжению соответствует изменение знака  $\Gamma$ , так что обе четверки чисел совпадают. В полосе непропускания при  $\varphi = 0$  или  $\varphi = \pi$  корни  $\text{ch}\Gamma$  действительные, так что указанные четверки чисел тоже совпадают:  $\Gamma_1 = \Gamma_1^* = \chi_1, \Gamma_2 = \Gamma_2^* = \chi_2, -\Gamma_1 = -\chi_1, -\Gamma_2 = -\chi_2$ . В полосе непропускания при  $\varphi \neq 0$  и  $\varphi \neq \pi$  требование совпадения этих четверок ( $\Gamma_1, \Gamma_2, -\Gamma_1, -\Gamma_2$  и  $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_1^*, \Gamma_2^*$ ) приводит к тому, что  $\Gamma_1 = \chi + j\varphi, \Gamma_2 = \chi - j\varphi, \Gamma_3 = -\Gamma_1 = -\chi - j\varphi, \Gamma_4 = -\Gamma_2 = -\chi + j\varphi$ .

Таким соотношением связаны между собой, в частности, постоянные распространения волн в соответствующей рис. 5.4 полосе  $0,84 < x < 1$  цепочки.

#### 5.4. Теорема о периодическом волноводе из $N$ проводников

Периодические волноводы, состоящие из  $N$  проводников, изолированных друг от друга, используются в ряде электронных приборов. Так, например, система типа «меандр в волноводе» состоит из двух изолированных проводников. Ряд ЗС для приборов магнетронного типа содержит не менее двух проводников, ибо на один из них (отрицательный электрод, или катод) подается иной потенциал, чем на другой. ЗС для ЛБВ и ЛОВ с периодической электростатической фокусировкой также содержат не менее двух изолированных друг от друга проводников.

В работе [8] доказано, что независимо от конструкции все волноводы, составленные из нескольких проводников, обладают общим свойством, составляющим содержание следующей теоремы:

*Для периодического волновода из  $N$  идеальных проводников существует интервал частот  $0 < \omega < \omega_0$ , в котором могут распространяться по крайней мере  $N - 1$  нормальных волн.*

Доказательство не приводим для экономии места.

Теорема не запрещает существования  $N$  волн. Так, например, в спиральной ЗС без экрана, состоящей из одного проводника, при достаточно низких частотах может распространяться одна нормальная волна, а в двухзаходной спирали — две. В общем случае существует не более  $N - 1$  волн лишь в случае, когда любое сечение периодического волновода представляет замкнутый контур (спираль в экране, гребенка над плоскостью и т. п.).

Простейшим примером системы из  $N$  проводников служит  $N$ -проводная линия передачи. В ней могут распространяться  $T$ -волны с произвольным распределением потенциалов между проводниками. Всего волну определяет  $N - 1$  потенциал, отсчитываемый от одного из проводников. Поэтому совокупность потенциалов можно представить в виде  $(N - 1)$ -мерного вектора. Значит, существуют лишь  $N - 1$  линейно независимых распределений потенциалов, т. е.  $N - 1$  нормальных волн. Эти волны могут распространяться в линии при любых частотах. Сформулированную теорему можно рассматривать как обобщение на периодические волноводы утверждения, известного для многопроводных линий.

#### 5.5. Законы подобия

В ряде случаев конструкцию ЗС, используемую в одном диапазоне длин волн, целесообразно применить в другом диапазоне. С этой точки зрения важно знать, как зависят дисперсионная характеристика и сопротивление связи от размеров ЗС.

Покажем, что при пропорциональном изменении всех размеров ЗС величины замедления и сопротивления связи остаются неизменными. Рабочий диапазон длин волн изменяется пропорционально размерам.

В самом деле, пусть уравнения Максвелла и граничные условия (2.8) описывают поле в определенной ЗС. Если все размеры изменить в  $\alpha$  раз, то уравнения (2.8) останутся прежними, если заменить  $x$  на  $\alpha x$ ,  $y$  на  $\alpha y$ ,  $z$  на  $\alpha z$ ,  $\omega$  на  $\omega/\alpha$ . Отсюда следует, что все безразмерные параметры остаются неизменными. В частности, прежними остаются коэффициенты замедления фазовой  $n = \lambda\phi/2\pi d$  и групповой  $n_r = n - \lambda(dn/d\lambda)$  скоростей.

Сопrotивление связи определяется формулой (1.18), в которой амплитуда пространственной гармоники  $e_m$  пропорциональна  $\mathbf{E}$ , а поток энергии

$$P = \operatorname{Re} \int_{\Sigma} [\mathbf{E}^*, \mathbf{H}] ds.$$

Согласно (2.8, б) при изменении размеров в  $\alpha$  раз величина  $\mathbf{H}$  остается пропорциональной  $\mathbf{E}$ , так что отношение  $e_m^2/P$  обратно пропорционально  $\alpha^2$ . Множитель  $1/\beta_m^2$  пропорционален  $\alpha^2$ . Следовательно, сопротивление связи не зависит от  $\alpha$ . Таким образом, сформулированный выше закон подобия доказан.

## 5.6. Замедляющие системы, дифракционные решетки, антенны с бегущей волной

Периодические структуры используются не только в качестве ЗС электронных приборов ( $\beta_m > k$ ), но и в качестве дифракционных решеток и антенн с бегущей волной ( $\beta_m < k$ ). Каждой пространственной гармонике соответствует свой дифракционный максимум решетки или антенны. В самом деле, положим ради простоты, что поле не зависит от одной из координат (для плоских систем — от координаты  $y$ , а для цилиндрических — от  $\theta$ ). Обозначим через  $\theta_m$  угол между осью  $z$  и волновым вектором  $m$ -й пространственной гармоники. Проекция этого вектора на плоскость решетки равна  $\beta_m$ , так что

$$k \cos \theta_m = \beta_m = \beta + (2\pi m/d),$$

где  $\beta = k \cos \theta_0$  — составляющая волнового вектора нулевой пространственной гармоники. Отсюда следует формула

$$d \cos \theta_m = d \cos \theta_0 + m\lambda,$$

известная из теории дифракционных и антенных решеток. Она определяет положение  $m$ -го дифракционного максимума. Число  $m$  определяет одновременно номера гармоники и дифракционного максимума.

Направление максимума зависит от  $\lambda$ , если коэффициент замедления  $n_m = \beta_m/k = \cos \theta_m$  зависит от  $\lambda$ . При нормальной положительной и при отрицательной дисперсии  $dn/d\lambda < 0$ , если только направление потока энергии считать положительным. Поэтому угол  $\theta_m$  растет с  $\lambda$ . При аномальной положительной дисперсии  $dn/d\lambda > 0$ , так что угол  $\theta_m$  убывает с  $\lambda$ . Отличие антенных решеток с положительной и отрицательной дисперсией состоит в том, что проекция на плоскость решетки волнового вектора в первом случае совпадает по направлению с потоком энергии в решетке, а во втором они противоположны.

Анализ ЗС и дифракционных решеток подсказывает пути поиска ЗС, у которых преобладает одна из высших пространственных гармоник.

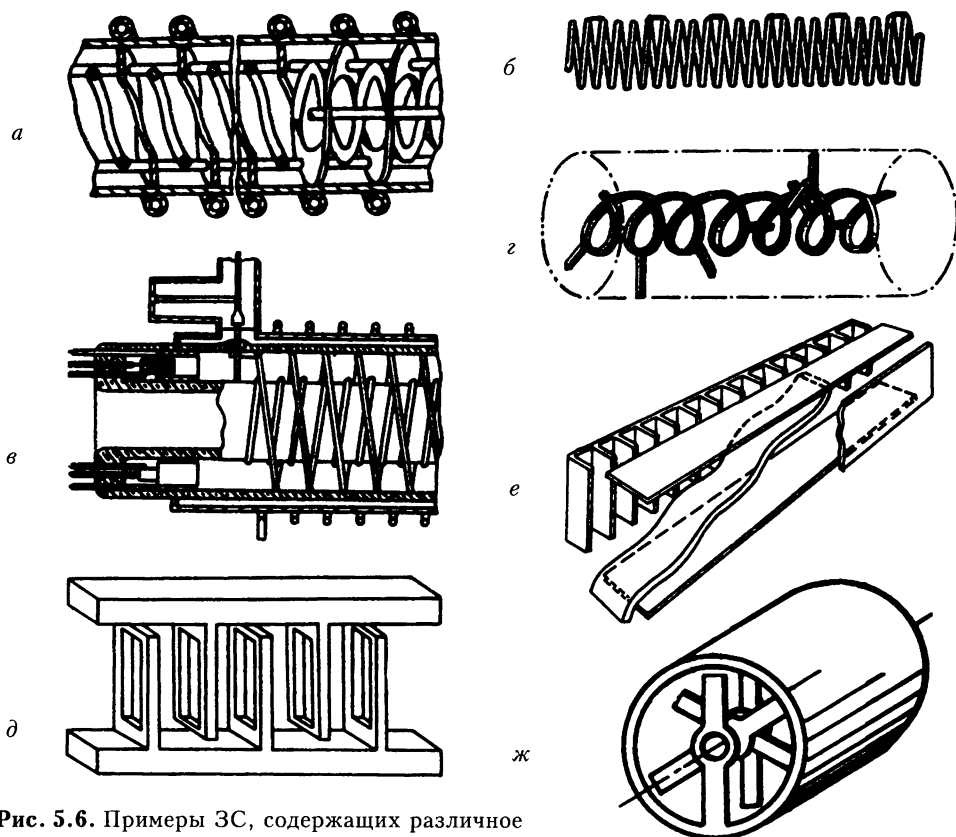
В самом деле, дифракционные решетки делают в виде эшелета (пилообразной формы) для того, чтобы подавить нулевой дифракционный максимум ([5], с. 206–216) и подчеркнуть один из высших. Аналогичным образом можно поступать и при создании ЗС.

### Упражнения

**5.1.** Сколько типов нормальных волн может распространяться одновременно при достаточно больших длинах волн в ЗС, изображенных на рис. 5.6?

**5.2.** Имеется периодическая антенная решетка, возбуждаемая источником с одного из концов. Каково направление излучения по отношению к оси антенны и источнику возбуждения, если решетка обладает:

- положительной дисперсией;
- отрицательной дисперсией?



**Рис. 5.6.** Примеры ЗС, содержащих различное количество изолированных друг от друга проводников: *а* — спираль в спиральной канавке в волноводе, *б* — спираль с перемычками, *в* — связанные спирали, *г* — спираль на опорах, *д* — встречные пластины, *е* — гребенка с экранами, *ж* — система с осью  $CZ_1$  в виде стержней в круглом волноводе



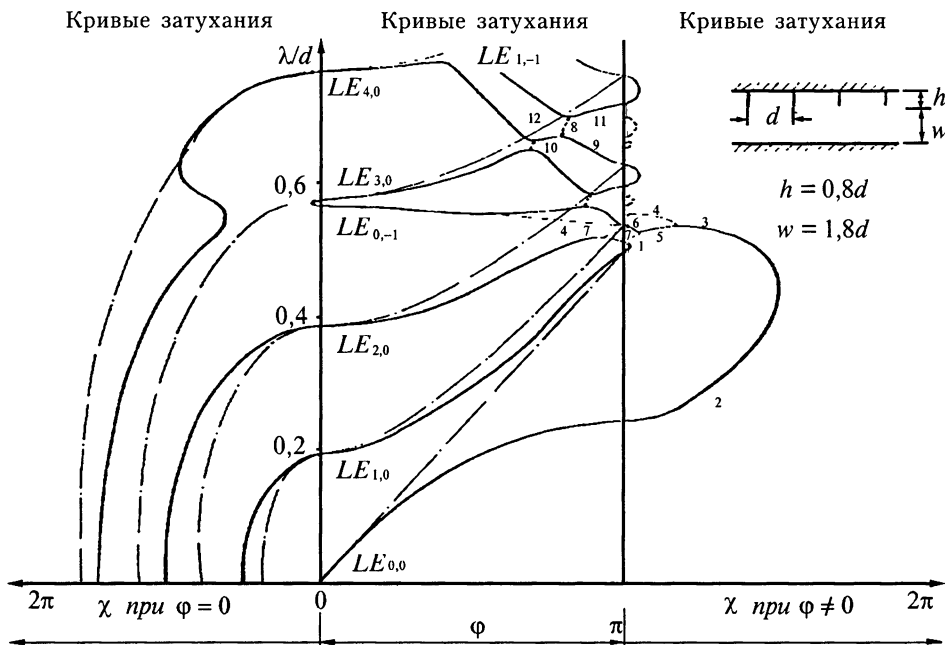
**5.3.** Пусть имеется периодическая решетка с положительной дисперсией, излучающая электромагнитное поле. Соответствующая волна называется *вытекающей* (*leaky wave*). При этом волновое число вдоль оси решетки становится комплексным ( $h = \alpha + j\beta$ ). Как при этом поле зависит от координаты  $z$ , идущей вдоль решетки и в перпендикулярном направлении (пусть вдоль оси  $x$ )? Считать, что поле не зависит от  $y$ .

**5.4.** Корни уравнения дисперсии иногда представляют в виде так называемых *волновых множителей*  $\mu = \exp(-\Gamma)$ . При этом на плоскости волновых множителей точки  $\mu$ , соответствующие полосе пропускания,  $\mu = \exp(-j\varphi)$ , лежат на единичной окружности. Множители, соответствующие полосе непропускания при  $\varphi = 0$  ( $\mu = \exp(-\chi)$ ), лежат на положительной полуоси абсцисс, а при  $\varphi = \pi$  ( $\mu = \exp(-\chi + j\pi)$ ) — на отрицательной полуоси.

Пусть  $\Gamma = \chi + j\varphi$  при  $\varphi \neq 0$ ,  $\varphi \neq \pi$ ,  $\chi \neq 0$ . Построить на диаграмме волновых множителей точки  $\mu_1 = \exp(-\Gamma)$ ,  $\mu_2 = \exp(\Gamma)$ ,  $\mu_3 = \exp(-\Gamma^*)$ ,  $\mu_4 = \exp(\Gamma^*)$ , задав какую-либо точку  $\mu_1$ .

**5.5.** Показать, как движутся точки  $\mu$  на плоскости волновых множителей с ростом частоты в окрестности полосы непропускания, если они соответствуют дисперсионным характеристикам, изображенным на рис. 5.4.

**5.6.** На рис. 5.7 изображены кривые дисперсии бесконечно широкой гребенки с зубьями нулевой толщины, рассчитанные в работе [6] для полос как пропускания, так и непропускания. Величина сдвига фаз  $\varphi/\pi$  отложена в



**Рис. 5.7.** Кривые дисперсии для действительной ( $d/\lambda = f(\chi)$ ) и мнимой ( $d/\lambda = f(\varphi)$ ) частей постоянной распространения  $\Gamma = \chi + j\varphi$  в бесконечной гребенке с зубьями нулевой толщины

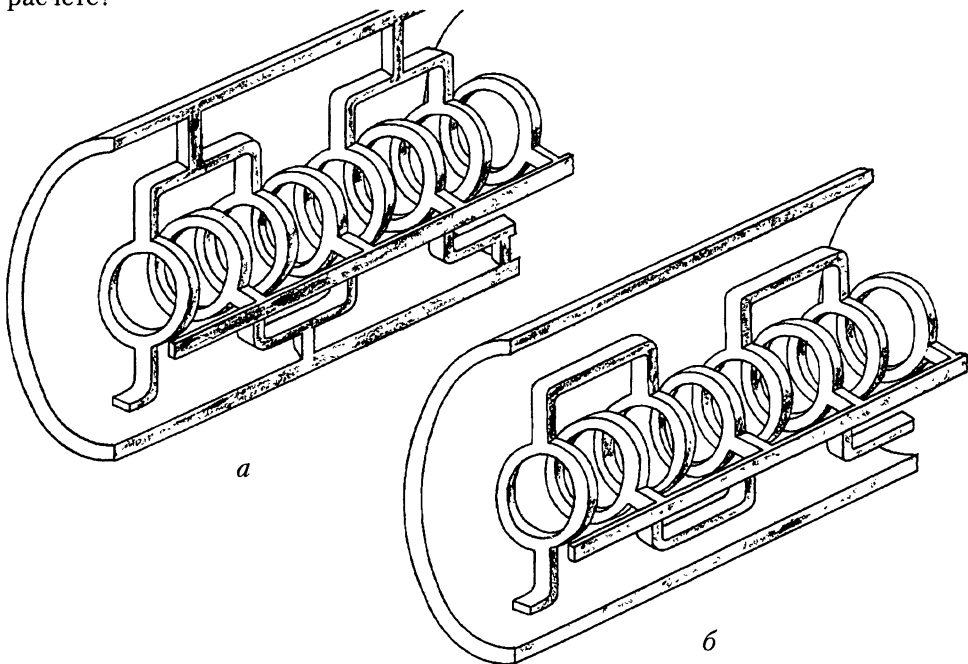
средней полосе рисунка, коэффициенты затухания  $\chi/2\pi$  слева и справа от средней полосы (справа при  $\varphi \neq 0$ , а слева при  $\varphi = 0$ ). Сплошными линиями нанесены кривые  $d/\lambda = f(\varphi/2\pi)$  при  $\chi = 0$  либо кривые  $d/\lambda = f(\chi/2\pi)$  при  $\varphi = 0$  и при  $\varphi = \pi$ . Штриховыми линиями нанесены соответствующие кривые для случаев, когда одновременно  $\chi \neq 0$ ,  $\varphi \neq 0$ ,  $\varphi \neq \pi$ . Эти кривые соответствуют комплексным волнам. Штрихпунктирной линией нанесены кривые, соответствующие гладкой системе ( $h = 0$ ,  $w = 2,6 d$ ).

Требуется изобразить на плоскости волновых множителей линии, соответствующие участкам дисперсионной характеристики, снабженным номерами:

- а) 1;
- б) 2–7;
- в) 8–12.

**5.7.** С целью создания ЛБВ с периодической электростатической фокусировкой можно использовать ЗС типа «кольцо-стержень», между кольцами которой помещаются дополнительные кольца, соединенные проводником, как показано на рис. 5.8. Какую из двух ЗС, представленных на этом рисунке, более целесообразно использовать в ЛБВ?

**5.8.** Коэффициент замедления ячейки фильтра высокой частоты (рис. 5.2, б)  $n \rightarrow 0$  при  $\lambda \rightarrow 0$  ( $\omega \rightarrow \infty$ ). При этом замедление групповой скорости  $n_g \rightarrow 0$ , что противоречит закону о том, что  $n_g \geq 1$ . Чем обусловлена ошибка в расчете?



**Рис. 5.8.** ЗС типа «кольцо-стержень» с дополнительными кольцами для обеспечения периодической электростатической фокусировки: а — ЗС соединена с экраном; б — ЗС изолирована от экрана

### Список литературы

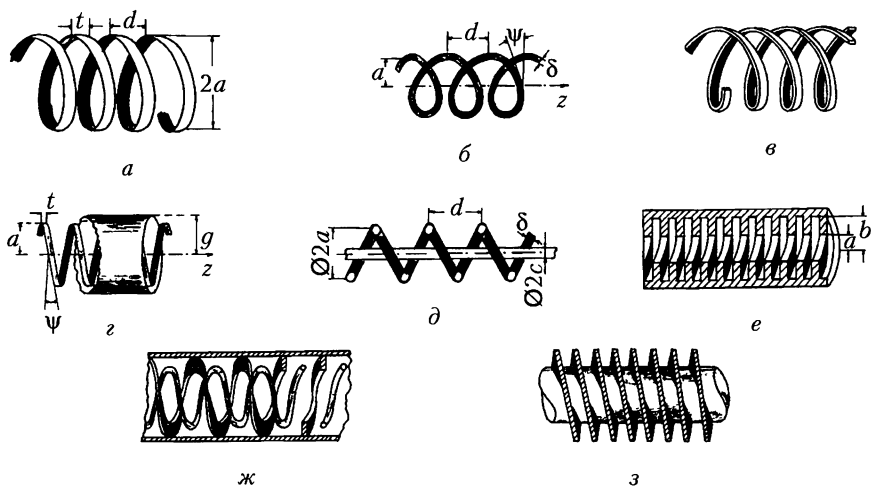
- [1]. Белянцев А. М., Гапонов А. В. О волнах с комплексными постоянными распространения в связанных линиях передачи без диссипации энергии. *Радиотехника и электроника*, 1964, **9**(7), 1188–1197.
- [2]. Краснушкин П. Е., Федоров Е. Н. О кратности волновых чисел нормальных волн в слоистых средах. *Радиотехника и электроника*, 1972, **17**(6), 1129–1140.
- [3]. Краснушкин П. Е. О свойствах нормальных волн в периодических волноводах вблизи кратности волновых чисел. *Докл. АН СССР*, 1973, **209**(5), 1053–1056.
- [4]. Краснушкин П. Е. Преобразование нормальных волн в периодических и гладких волноводах без диссипации энергии. *Радиотехника и электроника*, 1974, **9**(7), 1345–1358.
- [5]. Ландсберг Г. С. Оптика. М.: Наука, 1976. 926 с.
- [6]. Мандельштам Л. И. Полное собрание трудов. Т. 4. М.: АН СССР, 1955. 511 с.
- [7]. Накрап И. А., Самохин Г. С., Стриженко В. С., Силин Р. А. Характеристики замедляющей системы типа “гребенка” в полосах не пропускания. *Электронная техника. Сер. 1. Электроника СВЧ*, 1973, Вып. 12, 36–44.
- [8]. Силин Р. А. О низкочастотных волнах в периодическом волноводе из  $N$  проводников. *Электронная техника. Сер. 1. Электроника СВЧ*, 1973. Вып. 4, 3–10.

## Спиральные замедляющие системы

### 6.1. Типы спиральных замедляющих систем

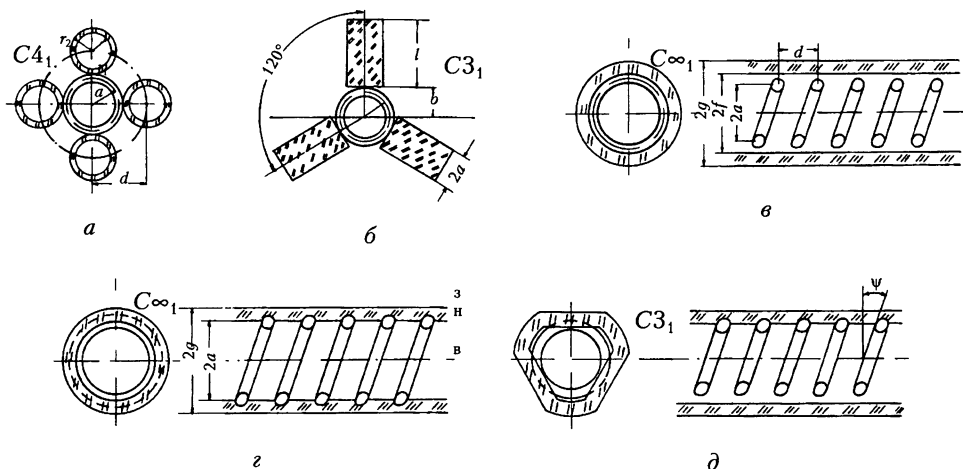
Спиральная линия, полученная сворачиванием провода по винтовой линии, относится к числу наиболее распространенных типов ЗС (рис. 6.1, *а, б*). Сворачивая провод, удлиняем путь волны и тем самым уменьшаем скорость ее распространения в осевом направлении. Эта простая идея использована еще Герцем в его классических опытах по исследованию распространения электромагнитных волн. В настоящее время спиральные структуры широко применяются как линии задержки сигналов, как ЗС, как волноводы, как антенны. В данной главе рассматриваем свойства спирали в качестве ЗС\*).

В зависимости от назначения, способа изготовления, выбора материала и т. п. в электронных приборах используют различные конструкции спиральных ЗС. Некоторые из них изображены на рис. 6.1 и рис. 6.2. Спирали делают из проводников ленточного (рис. 6.1, *а*), круглого (рис. 6.1, *б*) или иного сечения. Двухзаходные спирали (рис. 6.1, *в*) используют в ЛОВ, а также в ЛБВ повышенной мощности и в ЛБВ с периодической электростатической фокусировкой электронного потока. Спираль в экране (рис. 6.1, *г*)



**Рис. 6.1.** ЗС с винтовой осью симметрии бесконечного порядка: *а* — ленточная спираль; *б* — спираль из круглого проводника; *в* — двухзаходная спираль; *г* — ленточная спираль в экране; *д* — спираль с внутренним стержнем; *е* — волновод со спиральной канавкой; *ж* — спираль в волноводе со спиральной канавкой; *з* — стержень со спиральной канавкой

\* ) В главах 6–8, посвященных спиральным ЗС, частично использованы материалы из книги [12], написанные В. П. Сазоновым.



**Рис. 6.2.** Способы крепления спирали в диэлектрических опорах: *a* — между четырьмя трубками; *б* — между тремя штабиками; *в* — в диэлектрической колбе (игольчатая конструкция); *г* — в диэлектрической колбе с частичным внедрением диэлектрика между витками; *д* — в трехгранной колбе

также используется в ЛБВ. Такая конструкция особенно удобна для согласования спирали с коаксиальной линией передачи. Спираль с внутренним стержнем (рис. 6.1, *д*) используется в ЛБВ с центробежной фокусировкой (*спиротроне*). В ЛБВ повышенной мощности могут применяться ЗС типа спиральной канавки в волноводе (рис. 6.1, *е*) или на стержне (рис. 6.1, *з*). Для расширения полосы пропускания такой ЗС и для увеличения сопротивления связи на обратной волне в канавку помещают проволочную спираль (рис. 6.1, *ж*). С целью согласования спиральной ЗС с трактом ее помещают внутри другой спирали (*связанные спирали*). Для подавления сигнала, отраженного от нагрузки, участок спирали окружают слоем проводящего материала (поглотителем). В ряде случаев спираль помещают в диэлектрическую трубку, например, крепят в стеклянной колбе. Чаще всего, однако, ее крепят внутри колбы с помощью разнообразных диэлектрических опор, называемых штабиками (рис. 6.2).

Вполне понятно, что в книге невозможно изложить все методы расчета, развитые для столь разнообразных систем. Качественное описание их характеристик проведено в следующем параграфе с использованием свойств симметрии.

## 6.2. Свойства симметрии спиральных замедляющих систем

Характерная особенность всех спиральных систем, изображенных на рис. 6.1, состоит в том, что все они содержат винтовые оси  $C_\infty$ , где  $s$  — число заходов спирали. До описания методов расчета рассмотрим

свойства симметрии. Мы не будем останавливаться на явлениях, связанных с излучением, поэтому ограничимся описанием свойств только экранированных спиралей.

Однозаходная спиральная ЗС ( $s = 1$ ) имеет винтовую ось  $C\infty_1$ . Поэтому ее дисперсионная характеристика в области  $0 < \lambda < \infty$  не обязана иметь разрывов при сдвигах фаз на периоде, кратных  $\pi$ . Согласно (2.36) поле в такой системе можно представить в виде суммы пространственных гармоник,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{E}(r, \theta, z) \\ \mathbf{H}(r, \theta, z) \end{bmatrix} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \begin{bmatrix} \mathbf{e}_m(r) \\ \mathbf{h}_m(r) \end{bmatrix} \exp\{-j[z(\varphi + 2\pi m)/d - m\theta]\}, \quad (6.1)$$

каждая из которых в то же время представляет симметричную составляющую со своим распределением поля в поперечном сечении. Формула (6.1) получается из (2.36), если положить  $s = 1$ ,  $q = 0$ . Число  $m$  указывает одновременно и номер пространственной гармоники, и количество «длин волн» поля, укладывающихся вдоль любой окружности в плоскости сечения спирали с центром на оси. Для спиральных ЗС принят иной порядок нумерации пространственных гармоник, чем для остальных систем. А именно, нулевой гармоникой ( $m = 0$ ) считается та, поле которой не зависит от координаты  $\theta$ . Эта нумерация совпадает с принятой для других ЗС лишь в области достаточно длинных волн ( $\lambda > 4\pi a$  на рис. 6.3).

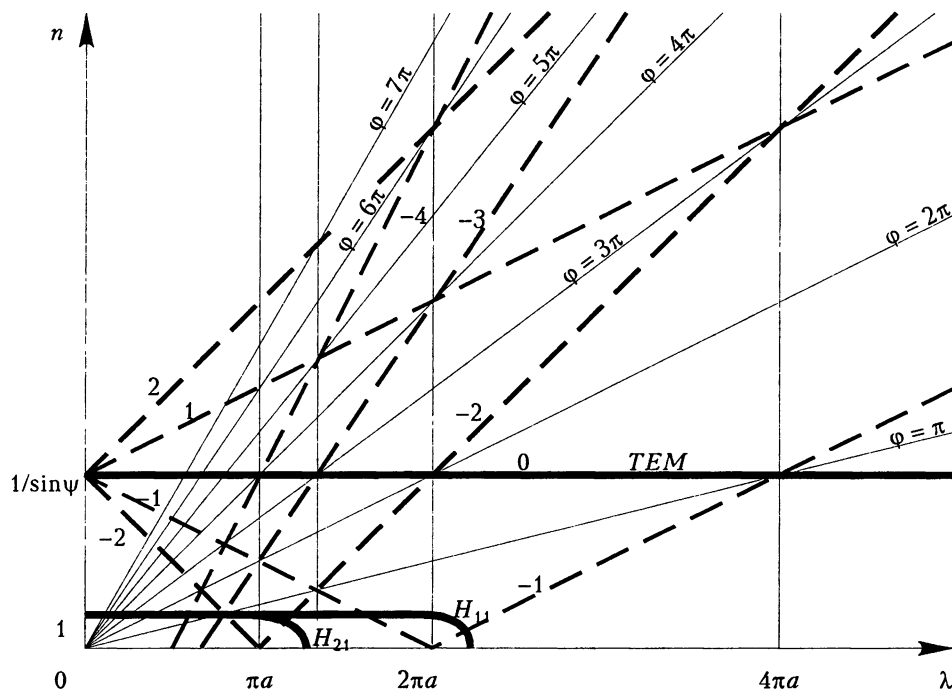


Рис. 6.3. Качественная картина дисперсионных кривых спиральной ЗС в экране для нулевой (сплошные линии) и высших (штриховые линии) пространственных гармоник

Сплошной горизонтальной линией ( $n = 1/\sin\psi$ ) нанесена дисперсионная характеристика нулевой гармоники. Она построена в предположении, что вдоль витков спирали (рис. 6.1) бежит  $T$ -волна. Ее коэффициент замедления равен отношению длины витка к периоду спирали (см. п. 1.1). Штриховыми линиями на рис. 6.3 нанесены характеристики пространственных гармоник. При сдвигах фаз  $\phi$  на периоде  $d$ , кратных  $\pi$ , кривые дисперсии пересекаются.

Номера пространственных гармоник  $m$  указаны цифрами около соответствующих ветвей дисперсионной характеристики. При длинах волн  $\lambda > 4\pi a$  нулевой гармонике соответствует  $|\phi| \leq \pi$ . Характеристики всех пространственных гармоник представляются лучами, выходящими из точки  $\lambda = 0$ ,  $n = 1/\sin\psi$ . Знаки гармоник и наклона луча совпадают. Для отрицательных гармоник они пересекают ось абсцисс в точках  $\lambda = 2\pi a/|m|$ . Поскольку на рис. 6.3 изображен модуль коэффициента замедления, дисперсионные характеристики при  $m < 0$  для  $\lambda > 2\pi a/|m|$  получаются отражением соответствующих лучей от оси абсцисс.

Сплошные линии, обозначенные символами  $H_{11}$  и  $H_{21}$ , соответствуют высшим типам волн. Они обсуждаются подробно в следующем параграфе.

Формула (6.1) справедлива для любой системы с осью  $S_{\infty}$ , будь то спираль, навитая из проволоки, спиральная канавка в волноводе или в стержне, спираль в диэлектрике или в свободном пространстве и т. п. Отличие состоит лишь в том, что каждой системе соответствует свой спектр амплитуд гармоник  $e_m$ .

На оси системы отлична от нуля  $z$ -компонента поля только для нулевой гармоники ( $m = 0$ ), а  $r$ -компонента — только при  $m = \pm 1$ .

В  $s$ -заходной спирали (т. е. с осью  $S_{\infty}$ ), как и в однозаходной, сливается бесконечно много полос пропускания, т. е. в области  $0 < \lambda < \infty$  система не обязана иметь разрывы дисперсионной характеристики при сдвигах фаз  $\phi$ , кратных  $\pi$ . В отличие от однозаходной спирали, в  $s$ -заходной могут существовать независимые волны, отличающиеся распределением потенциалов и токов по проводникам.

Каждому типу волны в гл. 2 присвоен свой номер  $-s/2 < q \leq s/2$ , который характеризует распределение поля по азимуту в соответствии с (2.28):

$$\begin{bmatrix} E_q(r, \theta + 2\pi/s, z) \\ H_q(r, \theta + 2\pi/s, z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_q(r, \theta, z) \\ H_q(r, \theta, z) \end{bmatrix} \exp(j2\pi q/s). \quad (6.2)$$

В разложении поля

$$\begin{bmatrix} E_q(r, \theta, z) \\ H_q(r, \theta, z) \end{bmatrix} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \begin{bmatrix} e_{mq}(r) \\ h_{mq}(r) \end{bmatrix} \exp\{-j[z(\phi + 2\pi(q + sm))/d - (q + sm)\theta]\} \quad (6.3)$$

теперь присутствуют не все номера гармоник (они же симметричные составляющие), а лишь гармоники с номерами  $q + ms$  ( $-\infty < m < \infty$ ).

$S$ -заходная спираль в экране содержит  $s + 1$  проводник. В соответствии с теоремой о периодическом волноводе из  $N$  проводников (см. п. 5.4) при достаточно длинных волнах ( $\lambda_0 < \lambda < \infty$ ) в ней могут распространяться  $s$  нормальных волн, т. е. все типы волн ( $-s/2 < q \leq s/2$ ) не имеют длинноволновой границы полосы пропускания.

Качественный вид дисперсионных кривых многозаходной спирали такой же, как для однозаходной (рис.6.3), с той лишь разницей, что теперь не все штриховые линии принадлежат одной и той же волне на правах пространственных гармоник, а номера  $m$  следует заменить на  $q + sm$ . В частности, для двухзаходной спирали линии на рис. 6.3 с четными номерами (0,  $\pm 2$ ,  $\pm 4$ , ...) принадлежат симметричной волне ( $q = 0$ ), а с нечетными номерами ( $\pm 1$ ,  $\pm 3$ ,  $\pm 5$ , ...) — антисимметричной волне ( $q = 1$ ). В трехзаходной спирали существуют три независимые волны. Одной из них ( $q = 0$ ) принадлежат на рис. 6.3 линии с номерами, кратными трем (0,  $\pm 3$ ,  $\pm 6$ , ...), другой — с номерами  $1 + 3m$  (1,  $-2$ , 4,  $-5$ , ...), а третьей — с номерами  $-1 + 3m$  ( $-1$ , 2,  $-4$ , 5, ...).

Спираль, для которой число заходов  $s$  бесконечно велико, называется *спирально проводящим цилиндром*. Такой цилиндр используется в качестве идеализированной модели для приближенного расчета дисперсии и сопротивления связи спиральной ЗС. Этот цилиндр представляют в виде бесконечного числа спирально навитых бесконечно тонких проводников, изолированных друг от друга. При этом ток может течь только вдоль проводников.

В спирально проводящем цилиндре каждая пространственная гармоника в отдельности (каждая симметричная составляющая) удовлетворяет граничным условиям, т.е. может существовать независимо от других гармоник. Поэтому в отличие от реальной спирали, поле можно представить лишь одной пространственной гармоникой, что существенно упрощает расчеты.

Приближение спирально проводящего цилиндра широко применяется [1–3] для анализа свойств различных типов спиральных ЗС. Его можно назвать приближением «одной волны», так как в пространстве взаимодействия учитывается лишь одна гармоника. В задачу более строгих методов расчета входит выяснение границ применимости этого метода и введение соответствующих поправок.

### 6.3. Типы волн спирали в экране

Кроме волн, близких к *ТЕМ*, вдоль спирали в экране могут распространяться и высшие типы волн, аналогично тому, как в коаксиальной линии кроме *ТЕМ*-возможны *Е*- и *Н*-волны. На рис. 6.3 нанесены кривые дисперсии для некоторых типов волн в предположении, что спираль не возмущает поля этих волн. Они представляют кривые дисперсии гладкого волновода и лежат в области  $|n| < 1$ . Влияние спирали на эти типы волн сводится к тому, что их критические частоты могут несколько сместиться, коэффициент замедления может несколько увеличиться, появляются пространственные гармоники, а в ряде точек пересечения кривых дисперсии разных типов волн могут появиться разрывы. Вопрос о разрывах рассмотрим подробнее.

Разрывы дисперсионных характеристик, обусловленные взаимодействием волн спирали и гладкого волновода, появляются лишь при одинаковом числе вариаций поля по азимуту, а именно, с минус первой гармоникой спирали взаимодействуют лишь волны  $H_{1p}$  и  $E_{1p}$ , с минус второй —  $H_{2p}$  и  $E_{2p}$  и т. д. Поэтому на рис. 6.3 нанесены характеристики  $H_{11}$ - и  $H_{21}$ -волн, имеющие наибольшие значения критических длин волн  $\lambda_k$ . Волны с различным числом вариаций поля по азимуту не взаимодействуют в силу ортогональности полей. Пересечения кривых, показанные на рис. 6.3, возможны лишь при



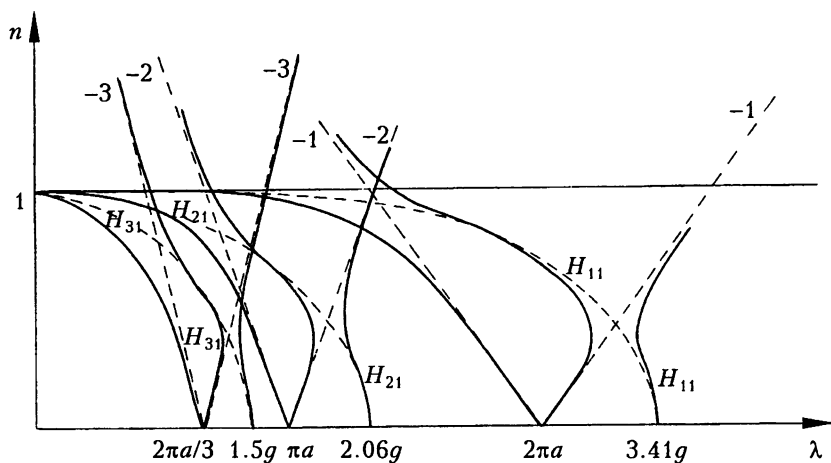


Рис. 6.4. К объяснению динамики образования разрывов дисперсионной кривой спирали в экране

достаточно больших радиусах волноводов ( $g \geq 2a$ ). Если радиусы спирали  $a$  и волновода  $g$  близки, то высшие типы волн практически не влияют на ход кривых дисперсии спирали (по крайней мере в той области частот, для которой они построены при  $|n| < 1$  на рис. 6.3 и рис. 6.4).

Разрывы в области  $|n| < 1$  приводят к разрывам кривых дисперсии соответствующих пространственных гармоник (рис. 6.5). Положение точки  $A$  зависит от радиуса волновода  $g$ . С ростом  $g$  она смещается в сторону длинных волн и уходит в бесконечность при  $g \rightarrow \infty$ . Кроме того, с ростом  $g$  кривые дисперсии минус первой гармоники могут пересечь характеристики  $H_{1p}$ -волн ( $p > 1$ ) и  $E_{1p}$ -волн. При этом вид кривых дисперсии в окрестности точек пересечения существенно усложняется. При сдвигах фаз, кратных  $2\pi$ ,

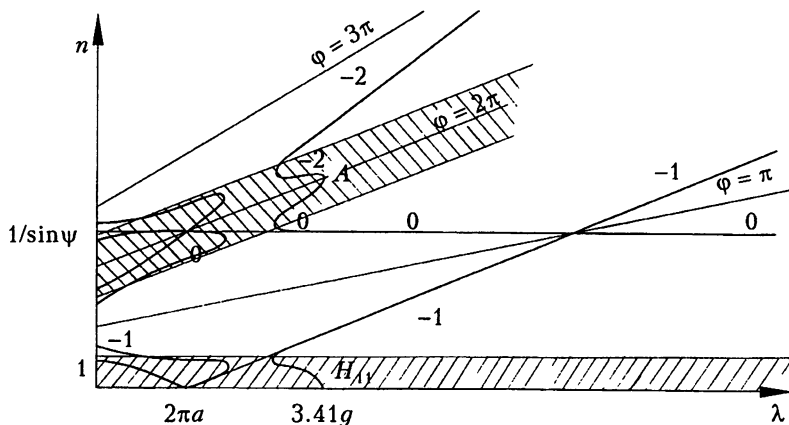
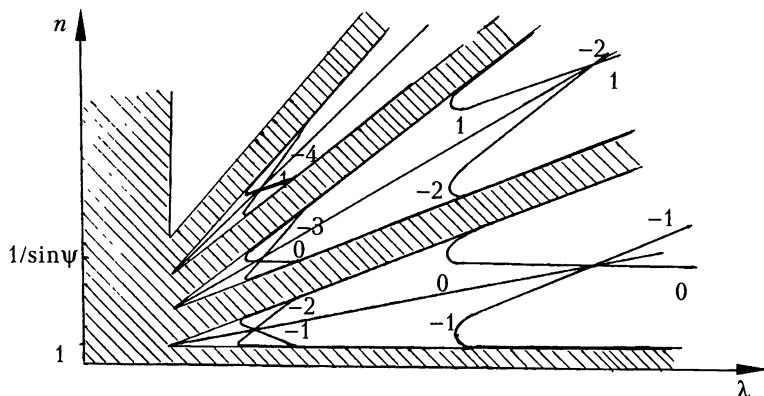


Рис. 6.5. Качественная картина дисперсионных кривых спирали в экране с учетом взаимодействия волн, порожденных самой спиралью и волноводом. Заштрихована область, которой соответствует замедление одной из гармоник  $|n| < 1$



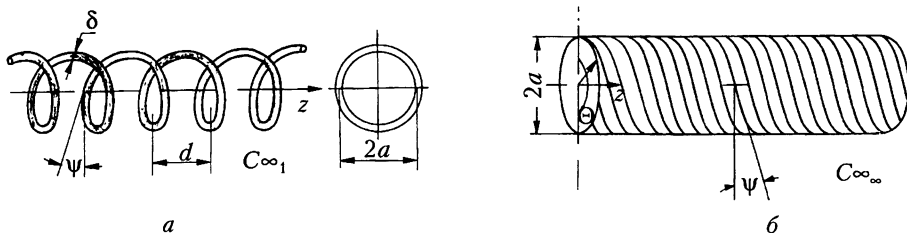
**Рис. 6.6.** Дисперсионная характеристика спирали без экрана

никаких разрывов нет, что соответствует выводам, сделанным выше на основе теории симметрии.

На рис. 6.5 заштрихованы области, соответствующие  $|n| < 1$  и их пространственным гармоникам. Кривые дисперсии волноводов лежат внутри этих областей. По мере роста радиуса  $g$  длина волны отсечки увеличивается, а замедление стремится к единице. Из-за возмущения поля спиралью оно фактически несколько превышает единицу. При  $g \rightarrow \infty$  заштрихованные области соответствуют значениям  $n$ , при которых волна излучает. Эти области используются не в электронных приборах, а в антенных решетках. Вид кривых дисперсии при  $g \rightarrow \infty$  изображен на рис. 6.6.

#### 6.4. Выражения для поля в спирально проводящем цилиндре

Рассмотрим сначала наиболее простой случай — бесконечно длинную спираль в свободном пространстве. Обозначим средний радиус спирали  $a$ , диаметр проволоки  $\delta$ , шаг спирали  $d$ , угол подъема витков спирали  $\psi$  (рис. 6.7, а). В соответствии со сказанным в предыдущем пункте заменим спираль бесконечно длинным спирально проводящим цилиндром. Радиус цилиндра обычно принимают равным среднему радиусу цилиндра  $a$ . Когда радиус проволоки сравним с радиусом спирали, приближение спирально проводящего цилиндра оказывается несправедливым. Толщина цилиндра принимается бесконечно малой. Используется цилиндрическая система координат  $(r, \theta, z)$ .



**Рис. 6.7.** Спираль из круглого проводника (а) и спирально проводящий цилиндр (б)

Как отмечено в п. 6.2, в спирально проводящем цилиндре поле каждой пространственной гармоники должно удовлетворять граничным условиям, так что в уравнениях (6.22) и (6.23) амплитуды пространственных гармоник  $e_m$  и  $h_m$  целесообразно заменить полями  $E$  и  $H$ .

До тех пор, пока не удовлетворяются условия на границе спирали, величины  $\beta_m$  и  $q$  можно считать независимыми, так как количество вариаций поля по азимуту не зависит от номера пространственной гармоники. Если поле удовлетворяет граничным условиям на витках спирали, то в соответствии с (6.1) следует полагать  $\beta = \beta_m = \beta_0 + 2\pi m/d$ ,  $q = m$ .

В отличие от гладкого волновода поле спирально проводящего волновода содержит обе компоненты ( $E_z$  и  $H_z$ ), т. е. граничным условиям удовлетворяет только сумма полей  $E$ - и  $H$ -волн.

Рассмотрим случай, когда в спирально проводящем цилиндре распространяется азимутально-симметричная волна ( $q = 0$ ). Ее поле не зависит от  $\theta$ . Ищем решение для замедленной волны ( $\gamma^2 > 0$ ). При этом в (Р.4.2)

$$Z_1(r) = I_0(\gamma r), \quad Z_2(r) = K_0(\gamma r). \quad (6.4)$$

Внутри спирали  $z$ -компонента поля описывается функцией  $I_0(\gamma r)$ , а снаружи —  $K_0(\gamma r)$ . В соответствии с (6.4), (Р.4.1) и (Р.4.2) компоненты поля внутри и снаружи спирали запишем в виде

$$\begin{bmatrix} E_z^{(s)} \\ H_z^{(s)} \end{bmatrix} = -\gamma^2 \begin{bmatrix} A_e \\ A_h \end{bmatrix} I_0(\gamma r), \quad \begin{bmatrix} E_z^{(n)} \\ H_z^{(n)} \end{bmatrix} = -\gamma^2 \begin{bmatrix} B_e \\ B_h \end{bmatrix} K_0(\gamma r), \quad (6.5, a)$$

$$\begin{bmatrix} E_r^{(s)} \\ E_\theta^{(s)} \\ H_r^{(s)} \\ H_\theta^{(s)} \end{bmatrix} = -j\gamma \begin{bmatrix} \beta A_e \\ -k\rho A_h \\ \beta A_h \\ (k/\rho)A_e \end{bmatrix} I_1(\gamma r), \quad \begin{bmatrix} E_r^{(n)} \\ E_\theta^{(n)} \\ H_r^{(n)} \\ H_\theta^{(n)} \end{bmatrix} = j\gamma \begin{bmatrix} \beta B_e \\ -k\rho B_h \\ \beta B_h \\ (k/\rho)B_e \end{bmatrix} K_1(\gamma r). \quad (6.5, б)$$

Здесь множитель  $\exp(-j\beta z)$  опущен; постоянные  $A_e$ ,  $A_h$ ,  $B_e$ ,  $B_h$  не зависят от координат, но представляют функции размеров ЗС и частоты; символы (в) и (н) относятся к внутренней и наружной областям соответственно; индексы  $e$  и  $h$  означают, что составляющие поля относятся к  $E$ - или  $H$ -волнам.

Величины  $A_e$ ,  $A_h$ ,  $B_e$ ,  $B_h$  и  $\beta$  определяются так, чтобы удовлетворить граничные условия на поверхности спирально проводящего цилиндра.

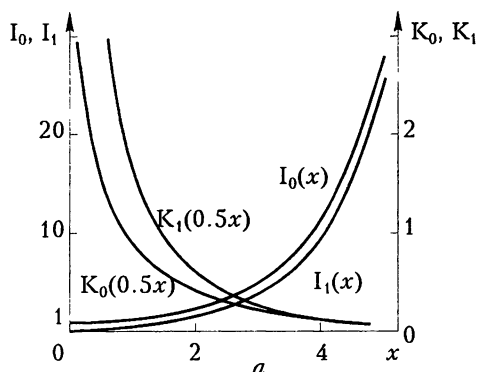
## 6.5. Дисперсионная характеристика симметричного типа волны

Уравнение дисперсии спирали получается в результате сшивания полей на поверхности спирально проводящего цилиндра (см. упражнение 6.3). Оно записывается в одной из двух форм,

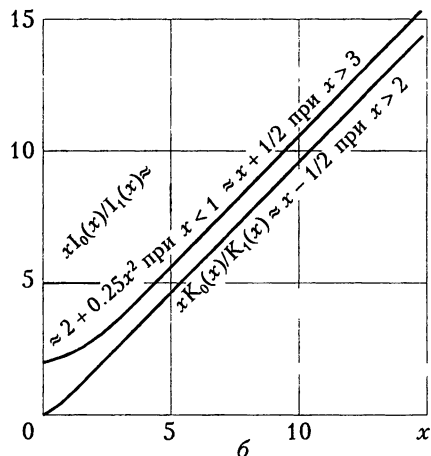
$$(ka \operatorname{ctg} \psi)^2 = (\gamma a)^2 N(\gamma a), \quad (6.6, a)$$

или

$$n = c/v = \beta a/ka = \left[1 + \operatorname{ctg}^2 \psi / N(\gamma a)\right]^{1/2}, \quad (6.6, б)$$



**Рис. 6.8.** Графики функций:  
 а —  $I_0(x)$ ,  $I_1(x)$ ,  $K_0(x)$ ,  $K_1(x)$ ;  
 б —  $xI_0(x)/I_1(x)$ ,  $xK_0(x)/K_1(x)$



где  $a$  — радиус спирально проводящего цилиндра,  $\psi$  — угол наклона витков спирали,  $N(\gamma a) = I_0(\gamma a)K_0(\gamma a)/[I_1(\gamma a)K_1(\gamma a)]$  — комбинация функций Бесселя,

$$\beta^2 = \gamma^2 + k^2. \quad (6.7)$$

Функция  $N(\gamma a)$  с ростом  $\gamma a$  монотонно убывает от бесконечности до единицы. Графики функций  $I_0(\gamma a)$ ,  $I_1(\gamma a)$ ,  $K_0(\gamma a)$ ,  $K_1(\gamma a)$ ,  $\gamma a I_0(\gamma a)/I_1(\gamma a)$ ,  $\gamma a K_0(\gamma a)/K_1(\gamma a)$  приведены на рис. 6.8. При  $\gamma a \rightarrow \infty$  величина  $ka \rightarrow \infty$ ,  $N(\gamma a) \rightarrow 1$ , а коэффициент замедления  $n \rightarrow 1/\sin \psi$ . Это значит, что при достаточно высоких частотах волна бежит со скоростью  $c$  вдоль витков спирали. Именно в этом предположении выведено уравнение дисперсии спирали (1.1) в гл. 1.

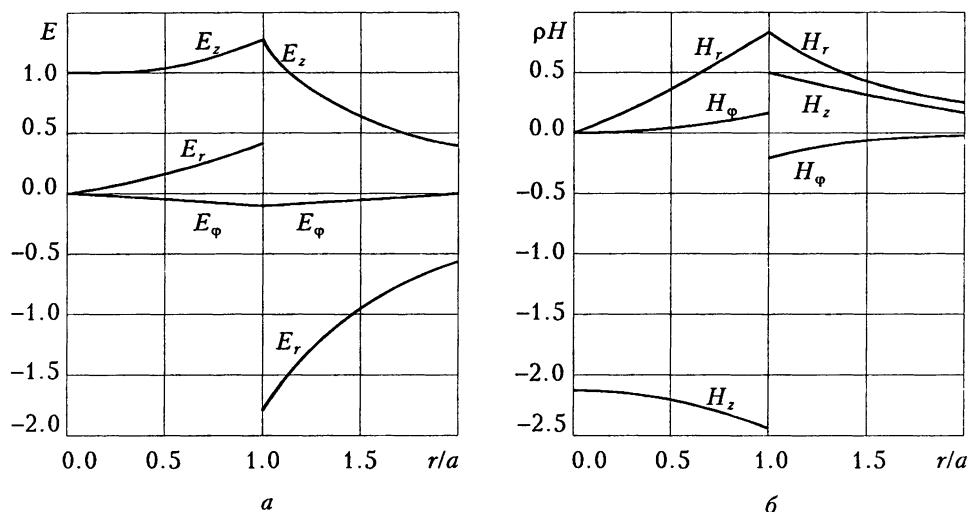
В случае  $\gamma a \rightarrow 0$  величина  $ka \rightarrow 0$ , а  $N(\gamma a) \rightarrow \infty$ . При этом коэффициент замедления  $n \rightarrow 1$ . Волна бежит вдоль оси спирали без замедления.

## 6.6. Структура поля в спирально проводящем цилиндре

Равенства (6.1)–(6.3) позволяют выразить все константы в соотношениях для поля (6.5) через одну. Полагая  $-\gamma^2 A_e = E_0$ , получим

$$\begin{aligned} -\gamma^2 A_h &= -(j\gamma a/\rho k a \operatorname{ctg} \psi) [I_0(\gamma a)/I_1(\gamma a)] E_0, \\ -\gamma^2 B_e &= [I_0(\gamma a)/K_0(\gamma a)] E_0, \\ -\gamma^2 B_h &= (j\gamma a/\rho k a \operatorname{ctg} \psi) [I_0(\gamma a)/K_1(\gamma a)] E_0. \end{aligned} \quad (6.8)$$

Поле (6.5) азимутально симметричной волны ( $q = 0$ ) не зависит от  $\theta$  и совпадает по структуре с полем нулевой пространственной гармоники реальной спирали (см. п. 6.2). Полное поле реальной спирали зависит от  $\theta$  при фиксированном  $z$ , поскольку оно следует ходу спирали. Его можно представить лишь суммой пространственных гармоник, являющихся одновременно симметричными составляющими.



**Рис. 6.9.** Распределение:  $a$  — электрического и  $b$  — магнитного поля в спиральной ЗС вдоль радиуса. Величина поля  $E_z$  на оси принята за единицу. Расчет проведен при  $\gamma a \approx ka$ ,  $\gamma a \operatorname{ctg} \psi = 1$ ,  $\operatorname{ctg} \psi = 15$

На рис. 6.9 показаны зависимости от координаты  $r$  составляющих электромагнитного поля. В соответствии с выводами теории симметрии (п. 6.5) на оси спирали отличны от нуля только  $z$ -компоненты поля. По мере приближения к виткам спирали возрастают все компоненты поля, причем наибольшую величину имеют осевые компоненты. Составляющие  $E_r$ ,  $H_z$  и  $H_\theta$  терпят разрыв на поверхности  $r = a$ . Величина разрыва  $E_r$  определяется плотностью поверхностного заряда, а разрыва  $H_z$  и  $H_\theta$  — плотностью тока в цилиндре  $r = a$ .

Скорость затухания поля по мере удаления от спирали определяется радиальным волновым числом  $\gamma$ . Поскольку  $\gamma \approx k \operatorname{ctg} \psi = 2\pi ka/d$ , скорость затухания увеличивается вместе с  $ka$  и убывает с  $d$ .

Между составляющими полей существует сдвиг фаз, что видно из выражения для поля (6.5) с учетом (6.8). Например, компоненты  $E_z$  и  $E_\theta$ , а также  $H_z$  и  $H_\theta$  противоположны по фазе и сдвинуты на  $\pm \pi/2$  к  $E_r$  и  $H_r$ . Из-за сдвига фаз поле в общем случае эллиптически поляризовано. На оси спирали поле линейно поляризовано. Угол наклона оси эллипса поляризации к плоскости  $rOz$  растет по мере приближения к поверхности спирально проводящего цилиндра.

## 6.7. Сопротивление связи спирально проводящего цилиндра

Средний по времени поток энергии вдоль оси спирально проводящего цилиндра определяется вектором Умова–Пойнтинга

$$\mathbf{P} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_S [\mathbf{E} \mathbf{H}^*] ds. \quad (6.9)$$

Раскрывая векторное произведение и разбивая интеграл на две области (внутреннюю и наружную), получим

$$P = P_{\text{в}} + P_{\text{н}} = \\ = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_0^{2\pi a} \int_0^{\infty} (E_r^{(\text{в})} H_{\theta}^{*(\text{в})} - E_{\theta}^{(\text{в})} H_r^{*(\text{в})}) r dr d\theta + \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_0^{2\pi a} \int_a^{\infty} (E_r^{(\text{н})} H_{\theta}^{*(\text{н})} - E_{\theta}^{(\text{н})} H_r^{*(\text{н})}) r dr d\theta.$$

Подставляя в эти формулы выражения для поля, имеем после интегрирования

$$P_{\text{в}} = \frac{\pi a^2 (\beta a) (ka)}{2(\gamma a)^3} \frac{E_0^2}{\rho} \frac{I_0(\gamma a)}{K_0(\gamma a)} \left[ \frac{I_1(\gamma a)}{I_0(\gamma a)} - \frac{I_0(\gamma a)}{I_1(\gamma a)} + \frac{2}{\gamma a} \right], \\ P_{\text{н}} = \frac{\pi a^2 (\beta a) (ka)}{2(\gamma a)^3} \frac{E_0^2}{\rho} \frac{I_0(\gamma a)}{K_0(\gamma a)} \left[ \frac{K_0(\gamma a)}{K_1(\gamma a)} - \frac{K_1(\gamma a)}{K_0(\gamma a)} + \frac{2}{\gamma a} \right], \quad \rho = (\mu_0/\epsilon_0)^{1/2}.$$

Поток энергии вне спирали больше, чем внутри ( $P_{\text{н}} > P_{\text{в}}$ ). При больших  $\gamma a$  отношение  $P_{\text{н}}/P_{\text{в}}$  близко к единице, так как с ростом  $ka \operatorname{ctg} \psi$  поле стягивается к виткам, и оба потока ( $P_{\text{н}}$  и  $P_{\text{в}}$ ) становятся приблизительно одинаковыми. При  $\gamma a \ll 1$  (т. е. при малых  $ka \operatorname{ctg} \psi$ ), или, что то же, — при больших длинах волн поток энергии внутри спирали мал по сравнению с потоком вне спирали.

Суммируя  $P_{\text{н}}$  и  $P_{\text{в}}$ , находим полный поток энергии

$$P = \pi a^2 [\beta a (ka)/(\gamma a)^3] F_0(\gamma a) E_0^2 / (2\rho), \quad (6.10, a)$$

где

$$F_0(x) = \frac{I_0(x)}{K_0(x)} \left[ \frac{I_1(x)}{I_0(x)} - \frac{I_0(x)}{I_1(x)} + \frac{K_0(x)}{K_1(x)} - \frac{K_1(x)}{K_0(x)} + \frac{4}{x} \right]. \quad (6.10, б)$$

Учитывая дисперсионное уравнение (6.6) и полагая  $\operatorname{ctg} \psi \gg 5$ , перепишем уравнение (6.10, а) в виде

$$P \operatorname{ctg} \psi / [\pi a^2 (E_0^2/2\rho)] \cong F_0(\gamma a) \sqrt{N(\gamma a)} / (\gamma a) \cong F_0(\gamma a) / (\gamma a). \quad (6.11)$$

Левая часть (6.11) представляет поток энергии, нормированный к величине  $P_{\text{осев}} = \pi a^2 E_0^2 / (2\rho)$ , равной произведению площади внутренней части спирали  $\pi a^2$  на плотность потока энергии на оси  $E_0^2 / (2\rho)$ .

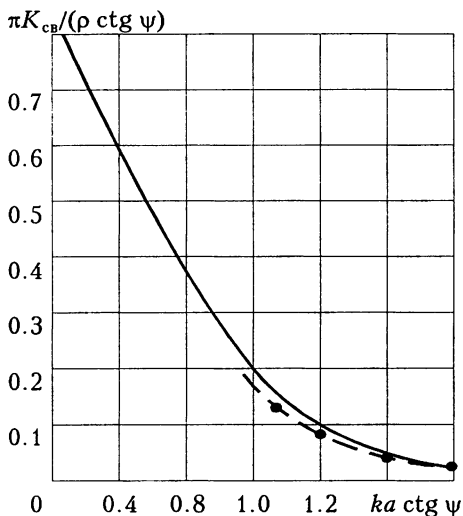
Используя (6.11), запишем формулу для расчета сопротивления связи на оси спирали

$$K_{\text{св}} = E_0^2 / (2\beta^2 P) = (\rho/\pi ka) (n^2 - 1)^{3/2} / [n^3 F(\gamma a)] \quad (6.12)$$

где  $n$  — коэффициент замедления (6.6, б). При  $\operatorname{ctg} \psi \gg 5$  формулу (6.12) можно записать в виде

$$\pi K_{\text{св}} / (\rho \operatorname{ctg} \psi) \cong [ka \operatorname{ctg} \psi F_0(\gamma a)]^{-1}, \quad (6.13)$$

где левая часть представляет безразмерное сопротивление связи.



На рис. 6.10 сплошной линией построена кривая по формуле (6.13). С ростом  $ka \operatorname{ctg} \psi$  сопротивление связи падает. Штриховой линией нанесены результаты измерений зондом с высокоомной подводкой. Для определения сопротивления связи при  $r \neq 0$  нужно значение, найденное по формуле (6.13) при  $r = 0$ , умножить на  $I_0^2(\gamma r)$ , если  $0 < r < a$ , и на  $[I_0(\gamma a)/K_0(\gamma a)]^2 K_0(\gamma r)$ , если  $r > a$ .

**Рис. 6.10.** Зависимость от  $ka \operatorname{ctg} \psi$  относительного значения сопротивления связи. Результаты расчета по формуле (6.13) (сплошная линия) и измерений (точки, штриховая линия)

## 6.8. Усредненные граничные условия

Расчет характеристик спирали можно несколько уточнить, воспользовавшись так называемыми усредненными граничными условиями. Оставаясь в рамках приближения спирально проводящего цилиндра, можно учесть размеры и форму сечения проводника на дисперсионную характеристику и сопротивление связи. Усредненные граничные условия выводятся путем рассмотрения рассеяния плоских волн от решеток из проводников. Сущность этих условий заключается в том, что реальные заряды и токи, индуцируемые на проводниках решетки, заменяются некоторыми эквивалентными, создающими вдали от решетки то же поле, что реальные заряды и токи. Такую замену можно вводить, когда длина волны существенно превышает шаг решетки. По отношению к падающей волне решетка рассматривается, как однородная гладкая поверхность. Реально искажение поля пространственными гармониками возникает лишь вблизи проводников на расстоянии, сравнимом с шагом решетки. Это «ближнее» поле рассчитывается в квазистатическом приближении, что дает возможность учесть структуру решетки. В результате реальные условия на периодической решетке удастся заменить эквивалентными усредненными граничными условиями на гладкой поверхности. Строение решетки учитывается с помощью соответствующих коэффициентов.

По-видимому, впервые усредненные граничные условия применены при анализе свойств сеток приемно-усилительных ламп [4].

Подробный анализ усредненных граничных условий для плоских решеток описан в работах [1, 2]. Запишем эти условия в предположении, что током, перпендикулярным проводникам, можно пренебречь (включая токи смещения). Такое предположение обеспечивает достаточно точность расчета, если  $\delta < 0,4d$ , или  $t < 0,4d$  (обозначение размеров см. на

рис. 6.11). В наших обозначениях усредненные граничные условия из [1, 2] можно записать в виде\*)

$$\begin{aligned} E_s^{(a)} + E_s^{(h)} &= l_0 \left[ jk\rho \left( H_\tau^{(h)} - H_\tau^{(a)} \right) + \frac{\partial}{\partial s} \left( E_r^{(h)} - E_r^{(a)} \right) \right], \\ E_s^{(a)} &= E_s^{(h)}, \quad E_\tau^{(a)} = E_\tau^{(h)}, \quad H_s^{(a)} = H_s^{(h)}, \end{aligned} \quad (6.14)$$

где  $\rho = (\mu_0/\epsilon_0)^{1/2}$  — волновое сопротивление свободного пространства, а  $l_0$  — коэффициент, зависящий от размеров и формы сечения проводников решетчатой.

Выясним физический смысл первого из уравнений (6.14). Заметив, что величина  $H_\tau^{(h)} - H_\tau^{(a)}$  равна поверхностной плотности тока, текущего вдоль проводников (вдоль  $s$ ), а  $E_r^{(h)} - E_r^{(a)}$  — плотности поверхностного заряда при  $r = a$ , соответствующие полю, экстраполированному к плоскости решетки. Отсюда следует, что величина  $jk\rho l_0/2$  равна индуктивному сопротивлению участка решетки с длиной и шириной, равными единице. Чтобы получить индуктивное сопротивление отдельного проводника, необходимо величину  $jk\rho l_0/2 = j\omega L_0 = j\omega\mu_0 l_0/2$  поделить на период решетки  $d_\tau$ , связанный с периодом спирали  $d$  соотношением  $d_\tau = d \cos\psi$ .

Как отмечено выше, граничные условия (6.14) получены строго лишь для плоских решеток. Их можно применять для спирали лишь при достаточно большом радиусе  $a \gg d_\tau$ . Величина коэффициента  $l_0$  вычислена в работе [2] для малых сдвигов фаз  $\varphi_\tau$  на периоде, а в работе [3] для произвольных сдвигов фаз. В случае круглых и ленточных проводников, соответственно, эти коэффициенты при малых  $\varphi_\tau$  имеют вид [2]

$$l_0 = (d_\tau/\pi) \ln(d_\tau/\pi\delta) \quad \text{и} \quad l_0 = (d_\tau/\pi) \ln[\sin(\pi t/2d_\tau)]^{-1}. \quad (6.15)$$

Учитывая, что для спирали  $d_\tau(2\pi a) = \sin\psi$  и что в соответствии с (2.10, а) и с упражнением (2.2)\*\*)

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} E_\tau \\ E_s \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \sin\psi & -\cos\psi \\ \cos\psi & \sin\psi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_\theta \\ E_z \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} H_\tau \\ H_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\psi & -\cos\psi \\ \cos\psi & \sin\psi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_\theta \\ H_z \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} \partial/\partial\tau \\ \partial/\partial s \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -j\beta_\tau \\ -j\beta_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\psi & -\cos\psi \\ \cos\psi & \sin\psi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (1/r)\partial/\partial\theta \\ \partial/\partial z \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

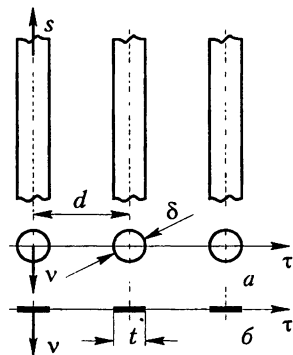


Рис. 6.11. Плоские решетки из проводников, имеющих: а — круглое и б — ленточное сечение

\*) Более полное рассмотрение усредненных граничных условий, сделанное на основании [3], см. в гл. 7 и в приложении 3.

\*\*) Из (2.10, а) следует, что при повороте системы координат поля  $E$  и  $H$  преобразуются как вектор  $r$ , а из упражнения (2.2) следует, что так же преобразуется вектор производных по координатам.



$$\begin{aligned}\partial/\partial\theta &= jm, & \partial/\partial z &= -j\beta, \\ \beta\tau &= -(m/r)\sin\psi - \beta\cos\psi, \\ \beta s &= -(m/r)\cos\psi + \beta\sin\psi,\end{aligned}$$

где  $m$  — число вариаций поля по азимуту, запишем усредненные граничные условия при  $r=a$  в следующем виде:

$$\begin{aligned}E_z^{(e)} &= E_z^{(u)}, & E_\theta^{(e)} &= E_\theta^{(u)}, & H_z^{(e)} - H_z^{(u)} + (H_\theta^{(e)} - H_\theta^{(u)})\operatorname{ctg}\psi &= 0, \\ E_z^{(u)} + E_\theta^{(u)}\operatorname{ctg}\psi &= jka\sin\psi\ln(d_\tau/\pi\delta)\times \\ &\times \left\{ \rho \left[ (H_z^{(e)} - H_z^{(u)})\operatorname{ctg}\psi - (H_\theta^{(e)} - H_\theta^{(u)}) \right] - [(m/ka)\operatorname{ctg}\psi - (\beta/k)](E_r^{(e)} - E_r^{(u)}) \right\}.\end{aligned}\quad (6.16)$$

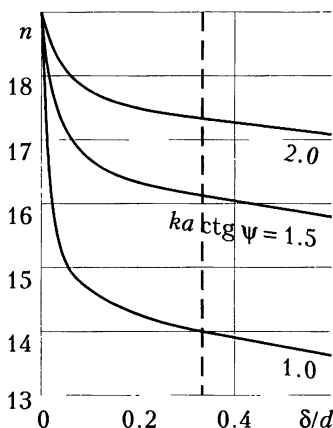
Ограничиваясь случаем азимутально-симметричных волн ( $m=0$ ) и подставляя выражения для поля (6.5) в граничные условия (6.16), получаем дисперсионное уравнение

$$(ka\operatorname{ctg}\psi)^2 = (\gamma a)^2 \frac{I_0(\gamma a)K_0(\gamma a) + \ln(d_\tau/2\delta)\sin\psi}{I_1(\gamma a)K_1(\gamma a) + \ln(d_\tau/2\delta)\sin\psi}. \quad (6.17)$$

На рис. 6.12 приведен график зависимости замедления спирали от  $\delta/d_\tau$ . При  $0,2 \leq \delta/d_\tau \leq 0,5$  замедление слабо зависит от диаметра провода  $\delta$ . При уменьшении диаметра влияние  $\delta$  возрастает и в пределе при  $\delta \rightarrow 0$  уравнение (6.17) принимает вид

$$ka\operatorname{ctg}\psi = \gamma a,$$

т. е. замедление равно геометрическому и не зависит от частоты. Физически это означает, что при  $\delta \rightarrow 0$  поле «прижимается» к виткам и бежит вдоль проводников со скоростью света.



**Рис. 6.12.** Зависимости коэффициента замедления спирали от отношения диаметра проволоки к шагу при угле намотки  $\psi = 3^\circ$  ( $\operatorname{ctg}\psi = 19$ ), рассчитанные при различных  $ka\operatorname{ctg}\psi$ . Точки пересечения штриховой вертикальной линии с кривыми дисперсии соответствуют значениям замедлений, рассчитанным без учета размеров сечения проволоки

## Упражнения

**6.1.** Чем отличаются кривые дисперсии спирали (рис. 6.1, *a*) без учета излучения (рис. 6.3) и спиральной канавки в волноводе (рис. 6.1, *e*)?

**6.2.** Как изменится дисперсионная характеристика спирали (рис. 6.1, *a*), если ее закрепить в четырех штабиках (рис. 6.2, *a*) и в трех штабиках (рис. 6.2, *б*)?

**6.3.** Получить уравнение дисперсии спирально проводящего цилиндра для азимутально симметричной волны ( $q = 0$ ).

**6.4.** Как зависит от коэффициента замедления скорость затухания поля вдоль радиуса по мере удаления от границы витков спирали?

**6.5.** Исследовать влияние потерь в спирали на постоянную распространения волны и коэффициент затухания. Учесть, что при наличии потерь граничные условия (6.1), (6.2) и (6.5) остаются прежними, а условие (6.3) принимает вид

$$E_z^{(n)} + E_\theta^{(n)} \operatorname{ctg} \psi = R_{\text{эф}} (1 + j) \left[ \left( H_z^{(в)} - H_z^{(н)} \right) \operatorname{ctg} \psi + H_\theta^{(н)} - H_\theta^{(в)} \right],$$

где  $R_{\text{эф}} = \sqrt{2R_s} = (\omega\mu/\sigma)^{1/2}$  — эффективное поверхностное сопротивление. Множитель  $\sqrt{2}$  учитывает шероховатость поверхности проводников.

### Список литературы

- [1]. Вайнштейн Л. А. Электромагнитные волны. Изд. 2-е, перераб. и доп. М.: Радио и связь, 1988. 440 с.
- [2]. Вайнштейн Л. А. К электродинамической теории решеток. В кн.: Электроника больших мощностей. Вып. 2. Под ред. П. Л. Капицы, Л. А. Вайнштейна. М.: АН СССР, 1963, 26–56.
- [3]. Михалевский В. С. Элементы теории сверхвысокочастотных замедляющих систем. Ростов на Дону: Ростовский университет, 1964. 190 с.
- [4]. Лукошков В. С. Электронный пространственный заряд и теория триода. *Журн. теор. физики*, 1935, **6**(4), 624.

# Радиальные матрицы передачи для расчета спиральных замедляющих систем

## 7.1. Радиальные матрицы передачи

Расчет электродинамических характеристик ЗС обычно состоит из нескольких этапов:

- 1) вывод формул для расчета дисперсии и сопротивления связи;
- 2) создание программ для ЭВМ;
- 3) проведение расчетов.

Естественно выделить классы задач, для которых можно создать универсальные программы. Для ЗС существуют три таких класса. Цепочки связанных резонаторов (ЦСР) рассчитываются проекционным методом (гл. 10), штыревые ЗС рассчитываются методом многопроводных линий (гл. 13–15), для спиральных ЗС развит метод радиальных матриц передачи.

Радиальные матрицы передачи [3] связывают тангенциальные компоненты поля на двух границах цилиндрического слоя, соответствующих двум значениям радиуса. Удобно рассматривать связь компонент  $E_z, H_z, E_\theta, H_\theta^*$ , либо компонент  $E_z, H_z, \partial E_z/\partial r, \partial H_z/\partial r$ . Ниже рассмотрен последний случай. Зная величины  $E_z, H_z$  и их производные по радиусу, можно определить остальные компоненты с помощью (Р.4.1). Полагая в (2.36)  $q=0, s=1, \beta_m = (\varphi + 2\pi m)/d$ , ищем поле в спирали в виде

$$\begin{bmatrix} \mathbf{E}(r, \theta, z) \\ \mathbf{H}(r, \theta, z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{E}(r) \\ \mathbf{H}(r) \end{bmatrix} \exp[-j(\beta_m z - q\theta)]. \quad (7.1)$$

Индекс « $m$ » при  $\beta$  в дальнейшем опускаем.

В выражение (Р.4.1) входят относительные проницаемости среды ( $\epsilon$  и  $\mu$ ), волновые числа свободного пространства  $k$ , среды  $\beta$  и поперечное волновое число  $\gamma$ , связанные между собой соотношением

$$\gamma^2 = \beta^2 - \epsilon\mu k^2. \quad (7.2)$$

Вводя обозначение

$$\mathbf{U}(r) = \begin{bmatrix} E_z(r) \\ jH_z(r) \\ \left(\epsilon r/\gamma^2\right)[\partial E_z(r)/\partial r] \\ j\left(\mu r/\gamma^2\right)[\partial H_z(r)/\partial r] \end{bmatrix}, \quad (7.3, a)$$

---

\*) Этот случай реализован в виде программы В. П. Кирюшиным [3,4].

ищем связь величин  $U(r)$  при двух значениях  $r$  в виде

$$U(r_1) = [A(r_1, r)]U(r), \quad (7.3, 6)$$

где  $[A(r_1, r)]$  — квадратная матрица четвертого порядка, называемая *радиальной матрицей передачи*. Выведем вид таких матриц для ряда частных случаев.

Для слоя магнитоэлектрика с радиусами  $r_1 < r$  в соответствии с (Р.4.2) можно записать

$$\begin{aligned} E_z(r) &= A Z_1(\gamma r) + B Z_2(\gamma r), \\ H_z(r) &= C Z_1(\gamma r) + D Z_2(\gamma r), \\ E'_z(r) &= \gamma [A Z'_1(\gamma r) + B Z'_2(\gamma r)], \\ H'_z(r) &= \gamma [C Z'_1(\gamma r) + D Z'_2(\gamma r)]. \end{aligned} \quad (7.4)$$

Здесь штрих над  $Z_k(\gamma r)$ ,  $E_z(r)$  и  $H_z(r)$  означает производную по аргументу.

Выражая  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  через  $E_z(r_1)$  и  $H_z(r_1)$  и вводя обозначения

$$\begin{aligned} W(r) &= Z_1(\gamma r) Z'_2(\gamma r) - Z_2(\gamma r) Z'_1(\gamma r), \\ f_1 &= [Z_1(\gamma r_1) Z_2(\gamma r) - Z_2(\gamma r_1) Z_1(\gamma r)] / [\gamma r W(r)], \\ f_2 &= [Z_1(\gamma r_1) Z'_2(\gamma r) - Z_2(\gamma r_1) Z'_1(\gamma r)] / W(r), \\ f_3 &= [Z_1(\gamma r) Z'_2(\gamma r_1) - Z_2(\gamma r) Z'_1(\gamma r_1)] / W(r_1), \\ f_4 &= \gamma r_1 [Z'_1(\gamma r_1) Z'_2(\gamma r) - Z'_2(\gamma r_1) Z'_1(\gamma r)] / W(r), \end{aligned} \quad (7.5)$$

запишем матрицу передачи магнитоэлектрического слоя:

$$[A(r_1, r)] = \begin{bmatrix} f_2 & 0 & -\gamma^2 f_1 / \epsilon & 0 \\ 0 & f_2 & 0 & -\gamma^2 f_1 / \mu \\ \epsilon f_4 / \gamma^2 & 0 & f_3 & 0 \\ 0 & \mu f_4 / \gamma^2 & 0 & f_3 \end{bmatrix}. \quad (7.6)$$

Здесь  $W(r)$  — определитель Вронского, а функции  $f_1$ ,  $f_2$ ,  $f_3$  и  $f_4$  удовлетворяют соотношению

$$f_1 f_4 + f_2 f_3 = 1,$$

которое удобно использовать для проверки вычислений. Значения этих функций в различных областях изменения  $\gamma$  приведены в табл. 7.1. В области  $\gamma^2 < 0$ , когда  $Z_1(\gamma r) = J_m(|\gamma| r)$  и  $Z_2(\gamma r) = N_m(|\gamma| r)$ , величина  $W = 2/\pi \gamma r$ , а в области  $\gamma^2 > 0$ , когда  $Z_1(\gamma r) = I_m(\gamma r)$  и  $Z_2(\gamma r) = K_m(\gamma r)$ , величина  $W = -1/\gamma r$ .

В качестве примера использования матрицы передачи  $[A(r_1, r)]$  получим уравнение дисперсии коаксиального волновода, заполненного средой с относительными проницаемостями  $\epsilon$  и  $\mu$ . Полагаем проводники идеальными, так что  $E_z(r_1) = E_z(r) = 0$  и  $\partial H_z(r_1) / \partial r = \partial H_z(r) / \partial r = 0$ . Подставляя (7.6) в (7.3), получаем

$$f_1 r (\partial E_z / \partial r) = 0, \quad (\mu f_4 / \gamma^2) H_z = 0.$$

Таблица 7.1

$\gamma^2 \leq 0$	
$f_1$	$(\pi/2) \left[ J_m( \gamma r_1 ) N_m( \gamma r ) - N_m( \gamma r_1 ) J_m( \gamma r ) \right]$
$f_2$	$(\pi/2)  \gamma r  \left[ J_m( \gamma r_1 ) N'_m( \gamma r ) - N_m( \gamma r_1 ) J'_m( \gamma r ) \right]$
$f_3$	$(\pi/2)  \gamma r_1  \left[ J_m( \gamma r ) N'_m( \gamma r_1 ) - N_m( \gamma r ) J'_m( \gamma r_1 ) \right]$
$f_4$	$(\pi/2) \gamma^2 r_1 r \left[ J_m( \gamma r_1 ) N'_m( \gamma r ) - N'_m( \gamma r_1 ) J'_m( \gamma r ) \right]$
$\gamma^2 \geq 0$	
$f_1$	$I_m(\gamma r) K_m(\gamma r_1) - K_m(\gamma r) I_m(\gamma r_1)$
$f_2$	$\gamma r \left[ I'_m(\gamma r) K_m(\gamma r_1) - K'_m(\gamma r) I_m(\gamma r_1) \right]$
$f_3$	$\gamma r_1 \left[ I'_m(\gamma r_1) K_m(\gamma r) - K'_m(\gamma r_1) I_m(\gamma r) \right]$
$f_4$	$\gamma^2 r_1 r \left[ I'_m(\gamma r) K'_m(\gamma r_1) - K'_m(\gamma r) I'_m(\gamma r_1) \right]$

Значения функций  $f_1, f_2, f_3$  и  $f_4$  в различных областях изменения поперечного волнового числа  $\gamma$  ( $\gamma^2 = \beta^2 - \epsilon \mu k^2$ ,  $r_1 < r$ )

	$\gamma \ll -1$	$\gamma \gg 1$	$ \gamma  \ll 1, m = 0$	$ \gamma  \ll 1, m \neq 0$
$f_1$	$\frac{\sin[ \gamma (r-r_1)]}{ \gamma (rr_1)^{1/2}}$	$\frac{\text{sh}[\gamma(r-r_1)]}{\gamma(rr_1)^{1/2}}$	$\ln \frac{r}{r_1}$	$\frac{1}{2m} \left[ \left( \frac{r}{r_1} \right)^m - \left( \frac{r_1}{r} \right)^m \right]$
$f_2$	$\frac{\cos[ \gamma (r-r_1)]}{(r_1/r)^{1/2}}$	$\left( \frac{r}{r_1} \right)^{1/2} \text{ch}[\gamma(r-r_1)]$	1	$\frac{1}{2} \left[ \left( \frac{r}{r_1} \right)^m + \left( \frac{r_1}{r} \right)^m \right]$
$f_3$	$\frac{\cos[ \gamma (r-r_1)]}{(r/r_1)^{1/2}}$	$\left( \frac{r_1}{r} \right)^{1/2} \text{ch}[\gamma(r-r_1)]$	1	$\frac{1}{2} \left[ \left( \frac{r}{r_1} \right)^m + \left( \frac{r_1}{r} \right)^m \right]$
$f_4$	$\frac{\sin[ \gamma (r-r_1)]}{ \gamma ^{-1}(rr_1)^{-1/2}}$	$-\gamma(rr_1)^{1/2} \text{sh}[\gamma(r-r_1)]$	0	$\frac{m}{2} \left[ \left( \frac{r_1}{r} \right)^m - \left( \frac{r}{r_1} \right)^m \right]$

Отсюда следует, что

$$f_1 = 0 \text{ при } E_z \neq 0, H_z \equiv 0, \quad (7.7, a)$$

$$f_4 = 0 \text{ при } H_z \neq 0, E_z \equiv 0. \quad (7.7, б)$$

Первое из уравнений (7.7) соответствует  $E$ -волне в коаксиальном волноводе, а второе —  $H$ -волне.

Для расчета характеристик слоистого коаксиального волновода необходимо учесть условия на стыке слоев, имеющем радиус  $r$ . Для получения соответствующей матрицы передачи запишем граничные условия, снабдив индексом «1» параметры среды с меньшим радиусом, а индексом «2» — с большим:

$$E_1 = E(r-0), E_2 = E(r+0), H_1 = H(r-0), H_2 = H(r+0).$$

В этих обозначениях граничные условия имеют вид

$$E_{z1} = E_{z2}, \quad H_{z1} = H_{z2}, \quad E_{\theta 1} = E_{\theta 2}, \quad H_{\theta 1} = H_{\theta 2}$$

(на границе раздела нет поверхностных токов). Выражая с помощью (Р.4.1) азимутальные компоненты поля через осевые и подставляя их в граничные условия, находим

$$\begin{aligned} E_{z1} &= E_{z2}, \quad H_{z1} = H_{z2}, \\ (r\epsilon_1/\gamma_1^2)(\partial E_{z1}/\partial r) &= j\omega\rho(1/\gamma_2^2 - 1/\gamma_1^2)H_{z2} + (r\epsilon_2/\gamma_2^2)(\partial E_{z2}/\partial r), \\ (r\mu_1/\gamma_1^2)(\partial H_{z1}/\partial r) &= j(\omega/\rho)(1/\gamma_1^2 - 1/\gamma_2^2)E_{z2} + (r\mu_2/\gamma_2^2)(\partial H_{z2}/\partial r), \end{aligned}$$

где  $\omega = m\beta/k$ ,  $\rho = (\mu_0/\epsilon_0)$ . Отсюда находим матрицу передачи для границы раздела двух слоев:

$$[A_r] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \omega\rho(1/\gamma_2^2 - 1/\gamma_1^2) & 1 & 0 \\ (\omega/\rho)(1/\gamma_2^2 - 1/\gamma_1^2) & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (7.8)$$

Многие ЗС спирального типа не содержат внутреннего проводника или наружного экрана. Запишем векторы  $\mathbf{U}_0(r)$  и  $\mathbf{U}_\infty(r)$ , отображающие области, содержащие  $r = 0$  и  $r = \infty$ . Для области, содержащей  $r = 0$ ,  $B = D = 0$  в (7.4), а содержащей  $r = \infty$ ,  $A = C = 0$ . Исключая из (7.4) постоянные  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ , получим

$$\mathbf{U}_0(r) = \begin{bmatrix} E_z(r) \\ jH_z(r) \\ (\epsilon r/\gamma)[Z'_1(\gamma r)/Z_1(\gamma r)]E_z(r) \\ j(\mu r/\gamma)[Z'_1(\gamma r)/Z_1(\gamma r)]H_z(r) \end{bmatrix}, \quad (7.9, a)$$

$$\mathbf{U}_\infty(r) = \begin{bmatrix} E_z(r) \\ jH_z(r) \\ (\epsilon r/\gamma)[Z'_2(\gamma r)/Z_2(\gamma r)]E_z(r) \\ j(\mu r/\gamma)[Z'_2(\gamma r)/Z_2(\gamma r)]H_z(r) \end{bmatrix}. \quad (7.9, б)$$

Здесь штрих означает производную по аргументу, а  $\gamma$  для каждой области принимает свои значения.

В качестве примера, иллюстрирующего использование граничных условий (7.9), получим уравнение дисперсии магнито-диэлектрического стержня с радиусом  $a$  и относительными проницаемостями  $\epsilon_1 = \epsilon$  и  $\mu_1 = \mu$ , расположенного в свободном пространстве ( $\epsilon_2 = \mu_2 = 1$ ). Подставляя (7.9) в (7.3, б), получим

$$\begin{bmatrix} E_z(a) \\ jH_z(a) \\ -\frac{\varepsilon a}{\beta_r} \frac{J'_m(\beta_r a)}{J_m(\beta_r a)} E_z(a) \\ -j \frac{\mu a}{\beta_r} \frac{J'_m(\beta_r a)}{J_m(\beta_r a)} H_z(a) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \omega \rho \left( \frac{1}{\beta_r^2} + \frac{1}{\gamma^2} \right) & 1 & 0 \\ \frac{\omega}{\rho} \left( \frac{1}{\beta_r^2} + \frac{1}{\gamma^2} \right) & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_z(a) \\ jH_z(a) \\ \frac{a}{\gamma} \frac{K'_m(\gamma a)}{K_m(\gamma a)} E_z(a) \\ j \frac{a}{\gamma} \frac{K'_m(\gamma a)}{K_m(\gamma a)} H_z(a) \end{bmatrix}. \quad (7.10)$$

Здесь  $\beta_r = j\gamma_1 = (\varepsilon\mu k^2 - \beta^2)^{1/2}$ ,  $\gamma = (\beta^2 - k^2)^{1/2}$ , а штрих означает производную по аргументу.

Форма записи (7.10) удобна в случае, когда вдоль магнито-диэлектрического стержня бежит замедленная волна, так что поле описывается бесселевыми функциями: вне стержня — мнимого аргумента, а внутри — действительного. Исключая из (7.10)  $E_z(a)$  и  $H_z(a)$ , получим уравнение дисперсии для волн вдоль магнито-диэлектрического стержня

$$\left[ \frac{\varepsilon}{\beta_r a} \frac{J'_m(\beta_r a)}{J_m(\beta_r a)} + \frac{1}{\gamma a} \frac{K'_m(\gamma a)}{K_m(\gamma a)} \right] \left[ \frac{\mu}{\beta_r a} \frac{J'_m(\beta_r a)}{J_m(\beta_r a)} + \frac{1}{\gamma a} \frac{K'_m(\gamma a)}{K_m(\gamma a)} \right] = m^2 \left( \frac{\beta}{k} \right)^2 \left[ \frac{1}{(\beta_r a)^2} + \frac{1}{(\gamma a)^2} \right]. \quad (7.11)$$

Оно подробно проанализировано в [1].

Радиальную матрицу передачи, соответствующую граничным условиям (6.16) на спирально проводящем цилиндре, можно получить, если выразить в (6.16) величины  $E_r$ ,  $E_\theta$  и  $H_\theta$  через  $E_z$ ,  $H_z$  и производные  $E'_z$  и  $H'_z$  этих величин по  $r$  с помощью (Р.4.1)\*\*.

В результате получаем

$$[A_{\text{en}}(a)] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \eta/\Delta & \rho & 1 & 0 \\ \alpha/\Delta & 0 & 1 & -\rho\eta/\Delta \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (7.12)$$

где  $a$  — средний радиус спирали,

$$\Delta = \frac{A}{a^2} \left( \frac{\gamma}{k} \right) \left[ \left( 1 - \frac{\omega^2}{(ka)^2 + (\gamma a)^2} \right) \gamma a B^2 + 2\omega B - \gamma a \right],$$

$$\eta = \left( 1 - \frac{\omega}{\gamma a} \right) \frac{\gamma}{a} B, \quad \alpha = \left( 1 - \frac{\omega B}{\gamma a} \right)^2, \quad \Phi = \frac{(\gamma a)^2}{a^4} B^2, \quad (7.13)$$

$$A = ka |\sin \psi| \ln(d_\tau / \pi \delta), \quad B = (k/\gamma) \operatorname{ctg} \psi,$$

$$\eta^2 = \alpha \Phi, \quad \gamma^2 = \beta^2 - k^2, \quad \omega = m\beta/k, \quad d_\tau = d \cos \psi.$$

\*) В (Р.4.1) количество вариаций поля по азимуту обозначено через  $q$ , тогда как в настоящей главе — через  $m$ , ибо в системах с осью  $C\infty$ , число вариаций поля по азимуту  $q$  совпадает с номером  $m$  пространственной гармоники.

Целое число  $m$ , входящее в выражения для коэффициентов (7.13), указывает количество вариаций поля по азимуту.

В качестве примера получим уравнение дисперсии спирали в свободном пространстве для случая  $m = 0$ . При этом

$$\Delta = (A/a^2) [(\gamma a)^2 / ka] (B^2 - 1), \quad \eta = \gamma a B / a^2, \quad \alpha = 1, \quad \Phi = (\gamma a)^2 B^2 / a^4,$$

$$\begin{bmatrix} E_z^{(e)} \\ jH_z^{(e)} \\ \frac{a}{\gamma} \frac{I_1(\gamma a)}{I_0(\gamma a)} E_z^{(e)} \\ \frac{a}{\gamma} \frac{I_1(\gamma a)}{I_0(\gamma a)} jH_z^{(e)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \eta/\Delta(\rho) & 1 & 0 & -\Phi/\Delta \\ \alpha/\Delta & 0 & 1 & -\rho\eta/\Delta \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_z^{(n)} \\ jH_z^{(n)} \\ -\frac{a}{\gamma} \frac{K_1(\gamma a)}{K_0(\gamma a)} E_z^{(n)} \\ -\frac{a}{\gamma} \frac{K_1(\gamma a)}{K_0(\gamma a)} jH_z^{(n)} \end{bmatrix}, \quad (7.14)$$

где индексами «в» и «н» снабжены  $z$ -компоненты поля внутри и снаружи спирали соответственно при значениях  $z$ , равных радиусу спирали  $a$ . Исключая  $E_z^{(n)}$  и  $H_z^{(n)}$  из (7.14), получаем систему двух линейных уравнений

$$\frac{\eta}{\Delta} E_z^{(n)} + \left[ 1 + \frac{a\Phi K_1(\gamma a)}{\Delta\gamma K_0(\gamma a)} + \frac{I_0(\gamma a)K_1(\gamma a)}{I_1(\gamma a)K_0(\gamma a)} \right] jH_z^{(n)} = 0,$$

$$\left[ \frac{\alpha}{\Delta} - \frac{a I_1(\gamma a)}{\gamma I_0(\gamma a)} - \frac{a K_1(\gamma a)}{\gamma K_0(\gamma a)} \right] E_z^{(n)} + \frac{a\eta K_1(\gamma a)}{\Delta\gamma K_0(\gamma a)} jH_z^{(n)} = 0. \quad (7.15)$$

Приравнивая нулю детерминант из коэффициентов этой системы, после алгебраических преобразований получаем уравнение дисперсии (6.17).

## 7.2. Спираль в экране и спираль со стержнем

Примеры спиралей в экране и со стержнем изображены на рис. 6.1,  $z$  и  $\partial$ . Ограничиваемся случаем, когда спираль навита из проводника круглого сечения. Для спирали в экране справедливо уравнение

$$U_0(a) = [A_{\text{сн}}(a)][A(a, g)]U(g), \quad (7.16, a)$$

а для спирали на стержне — уравнение

$$U_0(c) = [A(c, a)][A_{\text{сн}}(a)]U_{\infty}(a). \quad (7.16, б)$$

Ограничимся азимутально симметричным полем ( $q = 0$ ). При этом

$$U_0(a) = \begin{bmatrix} E_z^{(e)}(a) \\ jH_z^{(e)}(a) \\ \frac{a}{\gamma} \frac{I_1(\gamma a)}{I_0(\gamma a)} E_z^{(e)}(a) \\ \frac{a}{\gamma} \frac{I_1(\gamma a)}{I_0(\gamma a)} jH_z^{(e)}(a) \end{bmatrix}, \quad U_{\infty}(a) = \begin{bmatrix} E_z^{(n)}(a) \\ jH_z^{(n)}(a) \\ -\frac{a}{\gamma} \frac{K_1(\gamma a)}{K_0(\gamma a)} E_z^{(n)}(a) \\ -\frac{a}{\gamma} \frac{K_1(\gamma a)}{K_0(\gamma a)} jH_z^{(n)}(a) \end{bmatrix}, \quad (7.17, a)$$



$$U(c) = \begin{bmatrix} 0 \\ jH_z^{(a)}(c) \\ (c/\gamma^2) [\partial E_z^{(a)}(c)/\partial r] \\ 0 \end{bmatrix}, \quad U(g) = \begin{bmatrix} 0 \\ jH_z^{(u)}(g) \\ (g/\gamma^2) [\partial E_z^{(u)}(g)/\partial r] \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (7.17, 6)$$

Матрица  $[A_{\text{сн}}(a)]$  определена равенством (7.12), а  $[A(a, g)]$  и  $[A(c, a)]$  — равенством (7.6). Перемножая матрицы, получаем однородную систему четырех линейных алгебраических уравнений. Приравнявая нулю детерминант из коэффициентов этой системы, находим уравнение дисперсии спирали в экране

$$\left(\frac{ka}{\gamma a}\right)^2 \text{ctg}^2 \psi = N(\gamma a) \frac{[1 - M_0(g)/M_0(a)] + |\sin \psi| \ln(d_\tau/\pi\delta)}{[1 - M_1(g)/M_1(a)] + |\sin \psi| \ln(d_\tau/\pi\delta)}, \quad (7.18, a)$$

а для спирали на стержне

$$\left(\frac{ka}{\gamma a}\right)^2 \text{ctg}^2 \psi = N(\gamma a) \frac{[1 - M_0(a)/M_0(c)] + |\sin \psi| \ln(d_\tau/\pi\delta)}{[1 - M_1(a)/M_1(c)] + |\sin \psi| \ln(d_\tau/\pi\delta)}. \quad (7.18, б)$$

Здесь

$$M_0(r) = K_0(\gamma r)/I_0(\gamma r), \quad M_1(r) = K_1(\gamma r)/I_1(\gamma r), \\ N(\gamma a) = I_0(\gamma a)K_0(\gamma a)/I_1(\gamma a)K_1(\gamma a).$$

При достаточно больших  $\gamma r$  с погрешностью, не превышающей  $(\pi/4\gamma r) \exp(-2\gamma r)$ , можно положить  $M_0(r) = \pi \exp(-2\gamma r)$ .

На рис. 7.1 приведено сравнение дисперсионных характеристик спирали на стержне, полученных в результате измерений и расчета по формуле (7.18, б) без учета толщины витков, т. е. при  $|\sin \psi| \ln(d_\tau/\pi\delta) = 0$ .

Уравнения (7.18) записаны для медленных волн, ибо только такие волны используются в электронных приборах. Быстрые волны применяются, в частности, в антеннах.

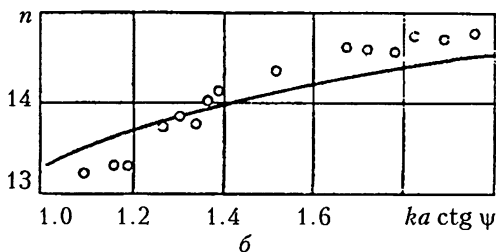
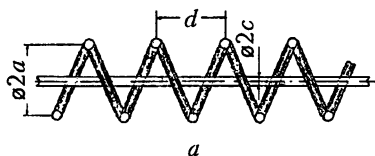


Рис. 7.1. Дисперсионная характеристика спирали с внутренним проводником ( $d/a = 2,5$ ;  $c/a = 0,1$ ): сплошная линия — расчет; кружки — эксперимент

### 7.3. Спираль в диэлектрической трубке

Рассмотренные выше спирали расположены в свободном пространстве, т. е. никак не закреплены по длине. Реальные спирали крепят в оболочке с помощью диэлектрических опор (рис. 6.2). В качестве примера рассчитаем

спираль в диэлектрической трубке, изображенную на рис. 6.2, *в*. Решаем задачу в предположении, что средний радиус спирали  $a$  отличается от внутреннего радиуса трубки  $f$  на величину  $\delta/2$ , равную радиусу проводника, из которого навита спираль. При этих условиях связь компонент поля на радиусах  $a$  и  $g$  запишется в виде

$$U_0(a) = [A_{\text{сн}}(a)][A_1(a, f)][A_2(f, g)]U_{\infty}(g), \quad (7.19)$$

где  $[A_1(a, f)]$  и  $[A_2(f, g)]$  — матрицы передачи вида (7.6) для участка свободного пространства ( $\epsilon = \mu = 1$ ) и магнитодиэлектрика ( $\epsilon \neq 1, \mu \neq 1$ ). Матрица  $[A_{\text{сн}}(a)]$  и векторы  $U_0(a)$  и  $U_{\infty}(g)$  определяются равенствами (7.12) и (7.17а).

В формулу (7.19) не входит матрица  $[A_r]$  (7.8), учитывающая границу между диэлектриком и свободным пространством, поскольку для азимутально-симметричной волны ( $m = 0, w = \beta m/k = 0$ ) эта матрица единичная.

Продельвая выкладки, аналогичные описанным в предыдущем параграфе, получим уравнение дисперсии спирали в диэлектрической трубке

$$\left(\frac{ka}{\gamma a}\right)^2 \text{ctg}^2 \psi = N(\gamma a) \frac{[1 + Z^{(n)}/M_0(a)][M_0(a) + M_1(a)]}{M_0(a) + \epsilon M_1(a) - Z^{(n)}(\epsilon - 1)}, \quad (7.20)$$

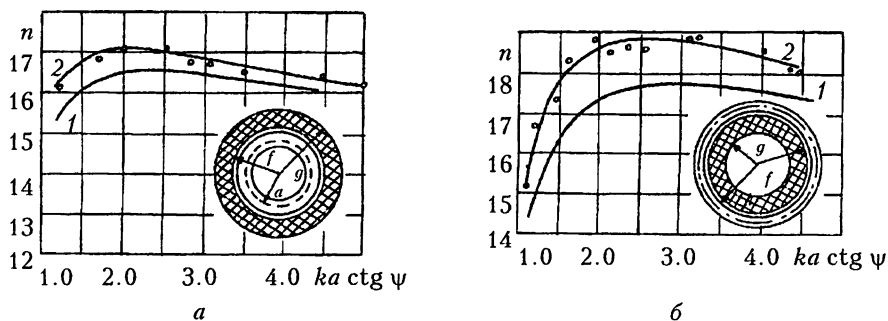
где

$$Z^{(n)} = M_0(g)M_1(g)(\epsilon - 1)/[M_1(g) + \epsilon M_0(g)].$$

При выводе (7.20) в граничных условиях спирали принято, что  $A = 0$  (см. (7.13)). Следует заметить, что при  $A = 0$  коэффициенты матрицы в (7.12) становятся бесконечно большими и вычисления по формуле (7.19) лишаются смысла. Поэтому при выводе формулы (7.20) сначала получаем уравнение дисперсии при  $A \neq 0$ , которое не выписываем из-за громоздкости, а лишь затем устремляем  $A$  к нулю.

Для более сложных ЗС (спираль в многослойном диэлектрике с экраном и без него) уравнение дисперсии можно получить аналогичным способом. Эти уравнения громоздки и требуют решения с помощью ЭВМ. Поэтому их целесообразно не записывать в явном виде, получая и решая их с помощью ЭВМ.

В заключение параграфа укажем общие закономерности влияния диэлектрика на дисперсионную характеристику. Сначала рассмотрим спираль в диэлектрической трубке. Пусть диаметр проволоки мал по сравнению с толщиной трубки. При этом влиянием зазора между трубкой и спиралью можно пренебречь. Наличие трубки приводит к увеличению замедления по сравнению со спиралью в свободном пространстве. Это замедление растет с частотой (падает с длиной волны), так как поле приближается к спирали и «втягивается в диэлектрик». При наличии зазора между трубкой и спиралью порядка одного или нескольких периодов  $d$  замедление сначала растет по мере укорочения волны, а затем падает (рис. 7.2, *а*). Такое падение обусловлено прижатием поля к спирали, так что влияние диэлектрика становится менее существенным. Если диаметр проволоки сравним с толщиной диэлектрика, то необходимо учитывать зазор, обусловленный заменой спирали цилиндром. Влияние зазора растет с укорочением волны (рис. 7.2, *а*).



**Рис. 7.2.** Дисперсионные характеристики спирали с наружной (а) и внутренней (б) диэлектрической трубкой: 1 — расчет; 2 — эксперимент

Аналогичными свойствами обладает спираль на диэлектрической трубке (рис. 7.2, б). Появление экрана приводит к росту замедления при  $\phi > \pi$  и выравниванию его величины по диапазону. Влияние диэлектрика и экрана на дисперсионную характеристику становится несущественным, если расстояние до них от спирали превышает радиус  $a$ . Меняя форму и положение диэлектрика и экрана, можно несколько изменять характеристики спирали.

#### 7.4. Спирали с различной формой диэлектрических опор

Характеристики спиралей в диэлектрических опорах (рис. 6.2), обычно рассчитывают приближенными методами, заменяя реальный диэлектрик эквивалентной трубкой<sup>\*</sup>). Относительная проницаемость  $\epsilon_{\text{эКВ}}$  материала этой трубки определяется из уравнения

$$(\epsilon_{\text{эКВ}} - 1) \int_{S_0} |\mathbf{E}|^2 ds = (\epsilon - 1) \int_S |\mathbf{E}|^2 ds, \quad (7.21)$$

где  $S_0$  и  $S$  — площади поперечного сечения эквивалентной трубки и реального диэлектрика, соответственно;  $\epsilon_{\text{эКВ}}$  и  $\epsilon$  — их диэлектрические проницаемости;  $E$  — напряженность поля в спирали без диэлектрика. Толщина трубки выбирается равной толщине опор. Иногда для увеличения точности расчета рассматривают слоистую трубку, определяя по формуле (7.21) для каждого слоя свое  $\epsilon_{\text{эКВ}}$ :

$$\epsilon_{\text{эКВ}} = 1 + (\epsilon - 1) \frac{\int_S |\mathbf{E}|^2 ds}{\int_{S_0} |\mathbf{E}|^2 ds}. \quad (7.22)$$

С физической точки зрения соотношение (7.21) означает приравнивание электрических энергий, запасенных в реальном и эквивалентном диэлект-

<sup>\*</sup>) Условие эквивалентной замены предложено А. С. Тагером и В. А. Солнцевым в 1952 г.

риках. В общем случае величина  $\epsilon_{\text{экв}}$  зависит от частоты. Количество опор  $N$  обычно невелико ( $N = 2, 3$  или  $4$ ). Замена реальных опор трубкой обеспечивает достаточно высокую точность расчета при малых сдвигах фаз ( $\phi < \pi$ ), которые чаще всего используются в ЛБВ. Вместе с тем, при больших сдвигах фаз, как следует из теории симметрии, такая замена приводит к ошибкам. Дело в том, что реальная спираль имеет ось симметрии  $CN_1$ , тогда как модель —  $C\infty_1$ . В реальной спирали должны быть разрывы (границы полос пропускания) при сдвигах фаз  $\phi$ , кратных  $N\pi$ , тогда как в модели эти сдвиги фаз не имеют никакого отношения к разрывам. Поэтому модель нельзя применять в окрестностях  $\phi$ , кратных  $\pi$ .

### 7.5. Спираль, контактирующая с тонким проводящим слоем

Тонкие проводящие слои на спирали широко используются в ЛБВ и ЛОВ в качестве поглотителей энергии (аттенюаторов). Их расчет описан в [5–8]. Ниже этот расчет проведен на основе уравнения (7.20) дисперсии спирали в диэлектрической трубке после замены  $\epsilon$  на  $\epsilon^{(k)} = \epsilon - j(\sigma\rho/k)$ , где  $\rho = (\mu_0/\epsilon_0)^{1/2}$  — волновое сопротивление свободного пространства, а  $\sigma$  — удельная проводимость материала слоя.

Пусть область «н» на рис. 6.2,  $z$  представляет слой малой толщины ( $\Delta = g - a \ll a$ ). Разлагая (7.20) в ряд по степеням  $\gamma\Delta$  и оставляя член первого порядка малости, получаем

$$\left(\frac{ka}{\gamma a}\right)^2 \text{ctg}^2 \psi = N(\gamma a) \left\{ 1 - \frac{\epsilon^{(k)} - 1}{\epsilon^{(k)}} (\gamma a)(\gamma \Delta) \frac{I_0(\gamma a)}{K_0(\gamma a)} \left[ \epsilon^{(k)} K_0^2(\gamma a) + K_1^2(\gamma a) \right] \right\}. \quad (7.23)$$

Здесь принято, что магнитная проницаемость  $\mu = 1$ , величина  $\epsilon$  заменена на  $\epsilon^{(k)} = \epsilon - j(\sigma\rho/k)$ . При этом становится комплексной величина  $\gamma^2 = h^2 - k^2\epsilon^{(k)}$ , где  $h = \alpha + j\beta$ .

Обычно удельная проводимость материала достаточно велика ( $\sigma \gg \omega\epsilon_0$ , т. е.  $\sigma\rho/k \gg \epsilon > 1$ ). Вводя обозначение  $\sigma_n = \sigma\Delta$ , получим уравнение дисперсии спиральной ЗС с тонким поглощающим слоем

$$\left(\frac{ka}{\gamma a}\right)^2 \text{ctg}^2 \psi = N(\gamma a) \left[ 1 + j\sigma_n \rho k a (\text{ctg}^2 \psi - 1) I_1(\gamma a) K_1(\gamma a) \right]. \quad (7.24)$$

Рассмотрим случай  $\text{ctg} \psi \gg 1$ , обычно реализующийся в ЛБВ. Запишем (7.24) в форме

$$\left(\frac{ka}{\gamma a}\right)^2 \frac{\text{ctg}^2 \psi}{N(\gamma a)} = 1 + j\sigma_n \rho k a \text{ctg}^2 \psi I_1(\gamma a) K_1(\gamma a), \quad (7.25, a)$$

или, что то же, — в форме

$$(ka)^2 \text{ctg}^2 \psi (A + jB) = 1 + jC(A_1 + jB_1), \quad (7.25, б)$$

где

$$A + jB = 1/[(\gamma a)^2 N(\gamma a)], \quad C = \sigma_n \rho k a \text{ctg}^2 \psi, \quad A_1 + jB_1 = I_1(\gamma a) K_1(\gamma a).$$

Комплексное уравнение (7.25) распадается на два действительных,

$$A(ka)^2 \operatorname{ctg}^2 \psi = 1 - CB_1, \quad (7.26, a)$$

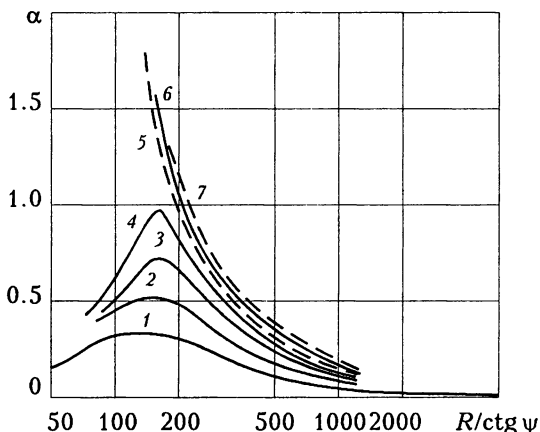
$$B(ka)^2 \operatorname{ctg}^2 \psi = CA_1, \quad (7.26, б)$$

представляющих систему двух линейных алгебраических уравнений относительно  $(ka)^2 \operatorname{ctg}^2 \psi$  и  $C$ . Уравнения (7.26) решены с помощью ЭВМ. Для этого задавалась комплексная величина

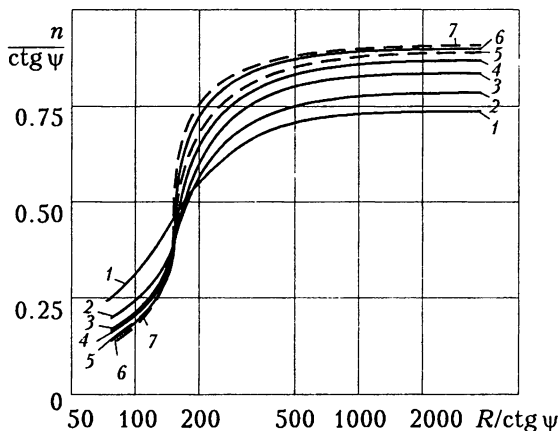
$$\gamma a = (\delta + j\eta)a = r \exp(jx), \quad 1 < r < 2; \quad 0 < x < \pi/4.$$

Результаты расчета коэффициентов затухания ( $\alpha = \eta a$ ) и замедления ( $n = [\operatorname{Im} \gamma^2 - j(\sigma_n \rho / k)]^{1/2} k^{-1}$ ) представлены на рис. 7.3 и рис. 7.4 в зависимости от  $R/\operatorname{ctg} \psi = 1/\sigma_n \operatorname{ctg} \psi$  при различных  $ka \operatorname{ctg} \psi$ . Зависимость коэффициента затухания от поверхностного сопротивления  $R$  имеет максимум. Величину  $R$ , соответствующую этому максимуму, называем *оптимальным поверхностным сопротивлением* и обозначаем  $R_{\text{опт}}$ . С ростом частоты, т. е. с ростом  $ka \operatorname{ctg} \psi$ , величина  $R_{\text{опт}}$  увеличивается, а при фиксированном  $R$  повышается коэффициент затухания.

**Рис. 7.3.** Зависимость коэффициента затухания от величины поверхностного сопротивления, рассчитанная при различных значениях  $(ka \operatorname{ctg} \psi)^2$ : кривая 1 —  $(ka \operatorname{ctg} \psi)^2 = 1.0$ ; 2 — 1.5; 3 — 2.0; 4 — 2.5; 5 — 3.0; 6 — 3.5; 7 — 4.0



**Рис. 7.4.** Зависимость коэффициента замедления, нормированного к геометрическому, от величины поверхностного сопротивления, рассчитанная при различных значениях  $(ka \operatorname{ctg} \psi)^2$ : кривая 1 —  $(ka \operatorname{ctg} \psi)^2 = 1.0$ ; 2 — 1.5; 3 — 2.0; 4 — 2.5; 5 — 3.0; 6 — 3.5; 7 — 4.0



Коэффициент замедления (рис. 7.4) растет вместе с  $R$  и почти не зависит от  $R$  при  $R \operatorname{tg} \psi \geq 1000$  Ом. Он стремится к геометрическому ( $1/\sin \psi \cong \cong 2\pi a/d$ ) с ростом частоты. При поверхностных сопротивлениях, близких к оптимальным, коэффициент замедления уменьшается с падением  $R$  в несколько раз. Он уменьшается тем сильнее, чем выше частота (т. е.  $ka \operatorname{ctg} \psi$ ).

Падение замедления объясняется тем, что поверхностное сопротивление как бы шунтирует витки. В случае, когда потери не шунтируют витки, например, когда спираль намотана из неидеального проводника, рост затухания сопровождается увеличением замедления. Таким образом, в зависимости от способа введения потерь в спиральную ЗС, коэффициент замедления может как расти, так и убывать.

Сравнение результатов расчета и измерений коэффициента затухания дано на рис. 7.5. Измерение затухания проведено в диапазоне длин волн 12—30 см методом замещения [2]. Результаты хорошо совпадают при  $R > R_{\text{опт}}$ , в особенности — при  $ka \operatorname{ctg} \psi > 1,5$ . В случае  $ka \operatorname{ctg} \psi < 1,5$  величина рассчитанного максимального погонного затухания оказывается заниженной на 20–30 %. При  $R < R_{\text{опт}}$  рассчитанный коэффициент затухания меньше измеренного. Обычно используют относительно тонкие покрытия, для которых  $R > R_{\text{опт}}$ . Применение толстых покрытий ( $R < R_{\text{опт}}$ ) ведет к искажению структуры поля в области поглотителя.

Приближенное значение  $R_{\text{опт}}$  определяется формулой

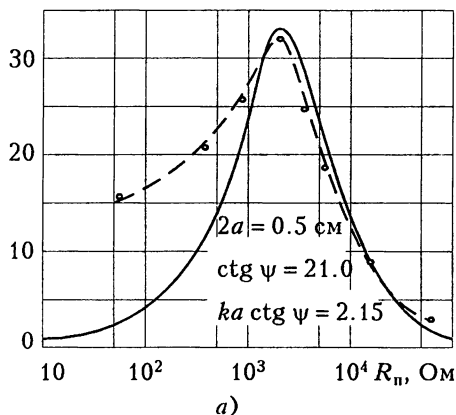
$$R_{\text{опт}} = \rho \operatorname{ctg} \psi / D, \quad (7.27)$$

где

$$\rho = (\mu_0 / \varepsilon_0)^{1/2}, \quad D = T'_1(\gamma_0 a) / T'_3(\gamma_0 a),$$

$$T'_1(\gamma_0 a) = -(\gamma_0 a)^2 N(\gamma_0 a) \left\{ \frac{4}{\gamma_0 a} - [1 + N(\gamma_0 a)] \left( \frac{K_1(\gamma_0 a)}{K_0(\gamma_0 a)} - \frac{I_1(\gamma_0 a)}{I_0(\gamma_0 a)} \right) \right\},$$

$\alpha$ , дБ/см



$\alpha$ , дБ/см

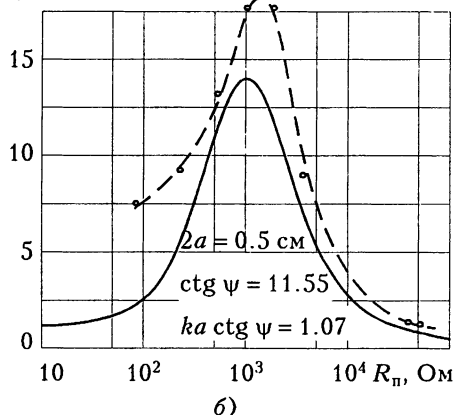


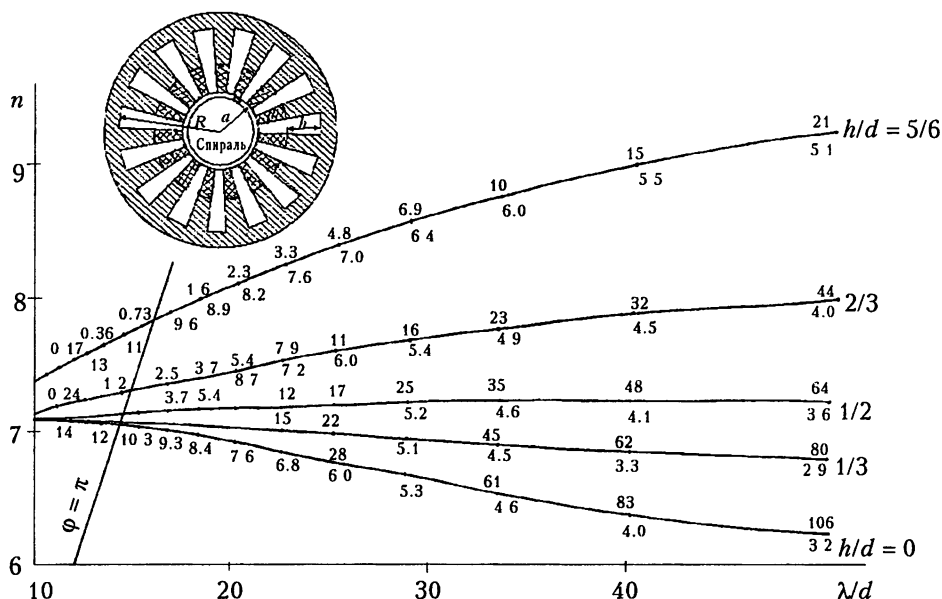
Рис. 7.5. Зависимость коэффициента затухания от поверхностного сопротивления слоя: расчет (сплошные линии), эксперимент (точки, штриховые линии)

$$T'_3(\gamma_0 a) = ka(\gamma_0 a)^2 \operatorname{ctg} \psi I_0(\gamma_0 a) K_0(\gamma_0 a) \left\{ \frac{2}{\gamma_0 a} - \left( \frac{K_1(\gamma_0 a)}{K_0(\gamma_0 a)} - \frac{I_1(\gamma_0 a)}{I_0(\gamma_0 a)} \right) \right\}.$$

Величина оптимального поверхностного сопротивления, вычисленная по формуле (7.27), согласуется с данными измерений.

## 7.6 Спиральные замедляющие системы с анизотропно проводящим экраном

Обычные спиральные ЗС, описанные выше, имеют нормальную положительную дисперсию. Из-за падения замедления с ростом длины волны рабочие полосы ЛБВ на спиральных ЗС обычно не превышают одной октавы. Для получения полосы усиления до двух октав необходимо скорректировать дисперсионную характеристику с тем, чтобы замедление в длинноволновой области несколько росло, т. е. чтобы дисперсионная характеристика имела участок с аномальной положительной дисперсией. Коррекция дисперсионной характеристики осуществляется введением продольных ребер в экране (рис. 7.6).



**Рис. 7.6.** Дисперсионные характеристики спиральной ЗС в экране с продольными ребрами, рассчитанные при разной высоте ребер  $h$ , радиусе спирали  $r/d = 1$  ( $d$  — шаг), шириной ленты спирали  $w/d = 1/3$ . Верхние числа около каждой кривой указывают сопротивление связи  $K_{св}$ , Ом, на оси, а нижние — коэффициент затухания  $\alpha$ , дБ/м, рассчитанный при тангенсе угла потерь в диэлектрике  $\operatorname{tg} \delta = 10^{-4}$ , проводимости материала спирали  $\sigma = 1,87 \cdot 10^7$  См/м, проводимости материала экрана  $\sigma = 5,8 \cdot 10^7$  См/м (медь), диэлектрической проницаемости опор  $\epsilon = 5,8$  и  $\epsilon_{эф} = 1,5$ . Число ребер  $N = 15$

На том же рисунке представлены результаты расчета по программе [5] дисперсионных характеристик, сопротивления связи и коэффициента затухания спиральной ЗС в металлическом экране с пятнадцатью продольными ребрами (см. упражнение 7.4). Видно, что во всех случаях при сдвиге фаз на периоде  $\varphi = \pi$  не наблюдается граница полосы пропускания. Это соответствует выводам из теории симметрии. В отсутствие ребер ( $h = 0$ ) дисперсия спирали нормальная. По мере приближения ребер к спирали (роста  $h$ ) замедление в длинноволновой части диапазона растет, а в коротковолновой остается почти постоянным. При достаточном приближении экрана к спирали ( $h/d > 0,5$ ) дисперсия становится аномальной. Именно ЗС с аномальной положительной дисперсией используются в двухоктавных ЛБВ. Сопротивление связи растет с  $\lambda$ , а коэффициент затухания падает.

### Упражнения

**7.1.** Усредненные граничные условия (6.17) справедливы при малых сдвигах фаз поля на периоде решетки  $d_z$ . Они позволяют для редких решеток найти аналитические выражения для расчета характеристик спиральных ЗС. Более строгие граничные условия [3], справедливые при любых сдвигах фаз, несколько громоздки. Их целесообразно применять при расчетах спиральных ЗС с помощью ЭВМ, используя радиальные матрицы передачи. Эти условия имеют вид

$$E_s^{(H)} + E_s^{(B)} = l_0(\eta) \left[ jk\rho(H_\tau^{(H)} - H_\tau^{(B)}) + \frac{\partial}{\partial s}(E_r^{(H)} - E_r^{(B)}) \right], \quad (7.28)$$

$$E_s^{(H)} - E_s^{(B)} = -l_2(\eta) \left[ jk\rho(H_\tau^{(H)} + H_\tau^{(B)}) + \frac{\partial}{\partial s}(E_r^{(H)} + E_r^{(B)}) \right], \quad (7.29, a)$$

$$E_\tau^{(H)} - E_\tau^{(B)} = l_3(\eta)jk\rho(H_s^{(H)} + H_s^{(B)}) - l_2(\eta)\frac{\partial}{\partial s}(E_r^{(H)} + E_r^{(B)}), \quad (7.29, б)$$

$$\begin{aligned} l_6(\eta)[1 + l_1(\eta)] \left( k^2 + \frac{\partial^2}{\partial s^2} \right) (H_s^{(H)} - H_s^{(B)}) = \\ = l_1(\eta) \left[ -jk\rho^{-1}(E_\tau^{(H)} + E_\tau^{(B)}) + \frac{\partial}{\partial s}(H_r^{(H)} + H_r^{(B)}) \right], \end{aligned} \quad (7.30)$$

где  $\eta = \varphi/(2\pi)$  — нормированный сдвиг фаз между проводниками, связанный с компонентами  $\beta$  и  $m/r$  волнового вектора вдоль оси  $z$  спирали и вдоль окружности радиуса  $r$  ее сечения соотношением

$$\eta = -[(md/r)\operatorname{tg} \psi + \beta d]/2\pi, \quad (7.31)$$

где  $d$  — период спирали.

Коэффициенты  $l_0(\eta)$ ,  $l_1(\eta)$ ,  $l_2(\eta)$ ,  $l_3(\eta)$ ,  $l_6(\eta)$  зависят от формы поперечного сечения проводников спирали (см. приложение 3). Требуется найти матрицу передачи усредненных граничных условий.



7.2. Найти вектор  $U_n(r)$  для импедансной границы, на которой

$$\begin{bmatrix} E_z(r) \\ E_\theta(r) \end{bmatrix} = j \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -H_\theta(r) \\ H_z(r) \end{bmatrix}. \quad (7.32)$$

7.3. Найти вектор  $U_n(r)$  для случая, когда импедансные граничные условия создаются ребрами, изображенными на рис. 7.6. Рассмотреть два случая: 1) боковые границы ребер идут вдоль радиуса; 2) боковые границы соседних ребер параллельны.

7.4. Получить уравнения для расчета на ЭВМ дисперсионной характеристики спиральной ЗС в экране с продольными ребрами (рис. 7.6) для симметричной волны. Средний радиус спирали равен  $a$ .

### Список литературы

- [1]. Вайнштейн Л. А. Электромагнитные волны. Изд. 2-е, перераб. и доп. М.: Радио и связь, 1988. 440 с.
- [2]. Гинзтон Э. Л. Измерения на сантиметровых волнах. М.: ИЛ, 1960. 620 с. Перевод кн.: Ginzton E. L. Microwave measurements. New York-Toronto-London: McGraw Hill, 1957.
- [3]. Кирюшин В.П. Расчет постоянных распространения электромагнитных волн в слоистых коаксиальных структурах. В кн.: Тезисы докладов и рекомендации научно-технических конференций, семинаров и совещаний по электронной технике. Сер. 1. Электроника СВЧ. Вып. 2(27). Материалы семинара по методам решения внутренних краевых задач электродинамики. М.: ЦНИИ "Электроника", 1974, 30-32.
- [4]. Кирюшин В.П. Программа расчета характеристик замедляющей системы типа спираль в экране с продольными ребрами. *Электронная техника. Сер. 1. Электроника СВЧ*, 1991. Вып. 7(441), 60.
- [5]. Сазонов В. П. Шуваев Ю. Т. Исследование свойств спирали, контактирующей с высокоомным поглощающим слоем. *Вопросы радиоэлектроники. Сер. 1. Электроника*, 1964. Вып. 4, 27-54.
- [6]. Lapostolle P. Hélices pour tubes a onde progressive. Influence des supports. Attenuation modes parasites. *Ann. des Telecomm.*, 1957, 12(2), 34-59.
- [7]. Müller M. Anwendung eines Kettenliten-Ersatzschaltbildes zur Bestimmung der Dämpfung von Wendelleitungen die mit Widerstandsschichten beschaltet sind. *FTZ*, 1965, H. 1. S. 29-34.
- [8]. Webber S. E. Calculations of wave propagation on helix in attenuation region. *Trans. Electr. Devic. Inst. Radio Engrs*, 1954, ED 1(3), 35-39.

## Расчет спиральных замедляющих систем методом Фурье

### 8.1. Роль пространственных гармоник и способы их учета

Основные характеристики спиральной ЗС (дисперсионную характеристику, сопротивление связи, затухание волны) при сдвигах фаз поля на периоде  $\varphi < \pi/2$  можно оценить на основе модели спирально-проводящего цилиндра с учетом усредненных граничных условий (см. гл. 6 и 7). Вместе с тем эта модель не позволяет оценить амплитуды пространственных гармоник, рассчитать сопротивление связи и затухание при больших сдвигах фаз, когда амплитуды пространственных гармоник оказываются сравнимыми.

В литературе описан ряд методов расчета характеристик спиральных ЗС с учетом формы проводников и амплитуд пространственных гармоник. К ним относится, в частности, метод многопроводных линий, в котором предполагается, что вдоль проводников спирали бежит  $T$ -волна. При этом замедление получается постоянным и равным отношению длины витка к шагу, т.е. дает лишь грубую оценку дисперсионной характеристики. Вместе с тем он позволяет оценить амплитуды пространственных гармоник и более точно вычислить сопротивление связи, волновое сопротивление и коэффициент затухания. Для расчета спирали из тонкого круглого проводника с учетом пространственных гармоник с успехом используют метод интегральных уравнений. В случае, когда спираль навита из тонкой ленты или нити, можно воспользоваться методом Фурье [2]. Этот метод описан ниже. Он заключается в том, что поле спирали, плотность заряда и распределение тока в проводнике ищут в виде ряда (6.1). При этом получается уравнение дисперсии с учетом всех пространственных гармоник. Амплитуды гармоник зависят от формы поперечного сечения проводников.

### 8.2. Ленточная и нитевидная спирали

Рассмотрим бесконечную открытую однозаходную ленточную спираль (рис. 6.1,  $a$ ), которая становится нитевидной при малой ширине ( $t/d \ll 1$ ) ленты. Как и в гл. 6, различаем внутреннюю ( $0 \leq r \leq a$ ) и наружную ( $r > a$ ) области. Обозначаем величины, относящиеся к этим областям, через «в» и «н» соответственно. Выражаем все компоненты поля через  $E_z$  и  $H_z$  (см. У.4.1).

Решение уравнений Максвелла для замедленных волн согласно (6.1) можно представить в виде суммы пространственных гармоник с амплитудами  $e_m$  и  $h_m$ :

$$\begin{bmatrix} E_z^{(в)} \\ H_z^{(в)} \end{bmatrix} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{I_m(\gamma_m r)}{I_m(\gamma_m a)} \begin{bmatrix} e_m^{(в)} \\ h_m^{(в)} \end{bmatrix} \exp[-j(\beta_m z - m\theta)], \quad (8.1, а)$$

$$\begin{bmatrix} E_z^{(н)} \\ H_z^{(н)} \end{bmatrix} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{K_m(\gamma_m r)}{K_m(\gamma_m a)} \begin{bmatrix} e_m^{(н)} \\ h_m^{(н)} \end{bmatrix} \exp[-j(\beta_m z - m\theta)]. \quad (8.1, б)$$

Номер гармоники  $m$  совпадает с числом вариаций поля по азимутальной координате  $\theta$ . Зависимость поля  $m$ -й пространственной гармоники от радиуса  $r$  описывается модифицированной функцией Бесселя  $m$ -го порядка, а волновое число  $\beta_m = \beta + 2\pi m/d$  этой гармоники связано с радиальным волновым числом  $\gamma_m^2 = \beta^2 - k^2$ .

Подставляя (8.1) в (Р.4.1), находим выражения для всех компонент поля:

$$\begin{bmatrix} E_\theta^{(в)} \\ E_r^{(в)} \\ H_\theta^{(в)} \\ H_r^{(в)} \end{bmatrix} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{m I_m(\gamma_m r)}{\gamma_m^2 r I_m(\gamma_m a)} \begin{bmatrix} -\beta_m e_m^{(в)} \\ -k\rho h_m^{(в)} \\ -\beta_m h_m^{(в)} \\ (k/\rho) e_m^{(в)} \end{bmatrix} + \right. \\ \left. + j \frac{I'_m(\gamma_m r)}{\gamma_m I_m(\gamma_m a)} \begin{bmatrix} -k\rho h_m^{(в)} \\ \beta_m e_m^{(в)} \\ (k/\rho) e_m^{(в)} \\ \beta_m h_m^{(в)} \end{bmatrix} \right\} \exp[-j(\beta_m z - m\theta)]. \quad (8.2)$$

Здесь  $\rho = (\mu_0/\epsilon_0)^{1/2}$  и, как обычно, опущены множители  $\exp(j\omega t)$ , штрих означает производную по аргументу  $\gamma_m r$ . Выражения для компонент поля снаружи спирали получаются из (8.2) заменой  $I_m(\gamma_m r)$  на  $K_m(\gamma_m r)$  и символов «в» на «н». В выражениях (8.1) и (8.2) амплитуды  $e_m^{(в)}$ ,  $h_m^{(в)}$ ,  $e_m^{(н)}$ ,  $h_m^{(н)}$  и волновое число  $\beta$  пока произвольны. Они определяются из условий на границе раздела  $r = a$ :

1. Тангенциальная компонента электрического поля непрерывна:

$$E_\tau^{(в)} = E_\tau^{(н)} \text{ при } r = a. \quad (8.3, а)$$

2. Тангенциальная компонента электрического поля равна нулю на поверхности ленты:

$$[v, \mathbf{E}] = 0 \text{ на металле при } r = a. \quad (8.3, б)$$

3. Тангенциальная компонента магнитного поля терпит разрыв на поверхности ленты:

$$H_\tau^{(в)} - H_\tau^{(н)} = i \text{ на металле при } r = a, \quad (8.3, в)$$

где  $i$  — плотность тока на ленте.

Подставляя (8.2) в (8.3 а), находим, что

$$e_m^{(b)} = e_m^{(n)}, \quad h_m^{(n)} = h_m^{(b)} [I'_m(\gamma_m a) K_m(\gamma_m a) / I_m(\gamma_m a) K'_m(\gamma_m a)]. \quad (8.4)$$

Распределение плотности тока на ленте можно найти в результате решения самосогласованной задачи. Для приближенного решения предположим, что ток течет вдоль витков\*). Это предположение оправдывается тем точнее, чем уже лента по сравнению с шагом спирали и с длиной волны. Условие (8.3 в) принимает вид

$$\begin{aligned} H_{\perp}^{(b)} - H_{\perp}^{(n)} &= (H_z^{(b)} - H_z^{(n)}) \cos \psi - (H_{\theta}^{(b)} - H_{\theta}^{(n)}) \sin \psi = i_{\parallel}, \\ H_{\parallel}^{(b)} - H_{\parallel}^{(n)} &= -(H_z^{(b)} - H_z^{(n)}) \sin \psi - (H_{\theta}^{(b)} - H_{\theta}^{(n)}) \cos \psi = 0, \end{aligned} \quad (8.5)$$

где символами  $\perp$  и  $\parallel$  указаны направления поперек и вдоль ленты соответственно. Условия (8.5) означают, что составляющая магнитного поля, параллельная направлению витков, непрерывна на всей границе  $r = a$ , а перпендикулярная ( $H_{\perp}$ ) непрерывна только в зазорах между витками. На ленте она терпит разрыв, т. е.

$$H_{\perp}^{(b)} - H_{\perp}^{(n)} = i_{\parallel} = \begin{cases} i_0 F(z) & \text{на ленте } |z| \leq t/2, \\ 0 & \text{в зазорах } t/2 < |z| \leq d/2. \end{cases}$$

Подставляя (8.2) в (8.5), умножая результат на  $\exp(j\beta_m z)$  и интегрируя результат по  $z$  в пределах  $-d/2 < z < d/2$ , находим связь амплитуд гармоник поля и тока:

$$\begin{aligned} h_m^{(b)} \left( \operatorname{ctg} \psi + \frac{m\beta_m a}{\gamma_m^2 a^2} \right) \frac{\cos \psi}{\gamma_m a I_m K'_m} + j \frac{e_m^{(b)} k a}{\rho \gamma_m^2 a^2} \frac{\sin \psi}{I_m K_m} &= i_0 f_m, \\ h_m^{(n)} \left( \frac{m\beta_m a}{\gamma_m^2 a^2} \operatorname{ctg} \psi - 1 \right) \frac{\sin \psi}{\gamma_m a I_m K'_m} + j \frac{e_m^{(b)} k a}{\rho \gamma_m^2 a^2} \frac{\cos \psi}{I_m K_m} &= 0, \\ I_m &= I_m(\gamma_m a), \quad K_m = K_m(\gamma_m a). \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} e_m^{(b)} &= i_0 f_m \frac{\rho \gamma_m^2 a^2}{j k a} \left( 1 - \frac{m\beta_m a}{\gamma_m^2 a^2} \operatorname{ctg} \psi \right) \sin \psi I_m K_m, \\ h_m^{(b)} &= i_0 f_m \gamma_m a \cos \psi I_m K'_m. \end{aligned} \quad (8.6)$$

Величина  $f_m$  определяется равенством

$$f_m = \int_{-t/2}^{t/2} F(z) \exp(j\beta_m z) dz. \quad (8.7)$$

\*) Пренебрежение поперечными токами в витках может привести к появлению ложных корней уравнения дисперсии для высших типов волн. Ложные корни наблюдаются, в частности, при расчете характеристик полосковых линий [5, 6].

Если принять, что ток распределен равномерно по ленте, а фаза постоянна на контуре, перпендикулярном краям ленты, то

$$F(z) = \exp(-j\beta z \sin^2 \psi)$$

и

$$f_m = \frac{t}{d} \frac{\sin\left\{\left[(\varphi/2\pi)\cos^2 \psi + m\right](\pi t/d)\right\}}{\left[(\varphi/2\pi)\cos^2 \psi + m\right](\pi t/d)}. \quad (8.8, a)$$

Если учитывать особенности плотности тока на кромках лент, то распределение  $F(z)$  можно задать в виде

$$F(z) = \exp[j(\pi - \varphi)/d](d/t)^{-1} [\sin^2(\pi t/2d) - \sin^2(\pi t/d)]^{-1/2},$$

полученном в [4] для развернутых ленточных спиралей при распространении в них  $T$ -волн. В этом случае

$$f_m = P_m [\cos(\pi t/d)], \quad (8.8, б)$$

где  $P_m(x)$  — полином Лежандра  $m$ -го порядка.

Подставляя найденные значения амплитуд пространственных гармоник в выражение для составляющих  $E_z$  и  $E_\theta$  при  $r = a$ , получаем

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} E_z^{(B)} \\ E_\theta^{(B)} \end{bmatrix} &= \frac{i_0 \rho}{ka} \sin \psi \sum_{m=-\infty}^{\infty} f_m (\gamma_m a)^{-1} \exp[-j(\beta_m z - m\theta)] \times \\ &\times \begin{bmatrix} j(\gamma_m^2 a^2 - m\beta_m a \operatorname{ctg} \psi) I_m K_m \\ (m\beta_m a / \gamma_m^2 a^2)(\gamma_m^2 a^2 - m\beta_m a \operatorname{ctg} \psi) I_m K_m - k^2 a^2 \operatorname{ctg} \psi I'_m K'_m \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (8.9)$$

Уравнение дисперсии получается из граничного условия (8.3, б), означающего равенство нулю тангенциальной компоненты электрического поля на поверхности ленты. Для приближенных расчетов достаточно ограничиться требованием равенства нулю продольной составляющей поля вдоль середины ленты ( $r = a$ ,  $\theta = 2\pi z/d$ )

$$E_{\parallel} = E_z \sin \psi + E_\theta \cos \psi = 0, \quad (8.10, a)$$

либо интеграла от этой компоненты на ленте при  $\theta = \text{const}$

$$\int_{-t/2}^{t/2} E_{\parallel} dz = 0. \quad (8.10, б)$$

Подставляя в граничное условие (8.10 б) выражения для  $E_z$  и  $E_\theta$ , после интегрирования и группировки членов получаем уравнение дисперсии спирали

$$\begin{aligned} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \{ & [\gamma_m a - (m\beta_m a / \gamma_m a) \operatorname{ctg} \psi]^2 I_m(\gamma_m a) K_m(\gamma_m a) + \\ & + k^2 a^2 \operatorname{ctg}^2 \psi I'_m(\gamma_m a) K'_m(\gamma_m a) f_m [\sin(\beta_m t/2)/(\beta_m t/2)] \} = 0. \end{aligned} \quad (8.11)$$

В соответствии с обозначениями в (8.1)

$$\beta_m a = \beta a + (2\pi m a / d) = \beta a + m |\operatorname{ctg} \psi|, \quad (8.12, a)$$

$$(\gamma_m a)^2 = (\beta_m a)^2 - (ka)^2. \quad (8.12, б)$$

Учитывая (8.12), представим уравнение дисперсии (8.11) в виде, более удобном для анализа:

$$\left[ (\beta a / ka)^2 - 1 \right] \operatorname{tg}^2 \psi = \frac{\sum_{m=-\infty}^{\infty} [I_{m-1} K_{m-1} + I_{m+1} K_{m+1}] f_m \sin(\beta_m t / 2) / (\beta_m t / 2)}{2 \sum_{m=-\infty}^{\infty} I_m K_m f_m \sin(\beta_m t / 2) / (\beta_m t / 2)}. \quad (8.13)$$

Для нитевидной спирали ( $t \rightarrow \infty$ ), когда  $\sin(\beta_m t / 2) / (\beta_m t / 2) \cong 1$  и  $f_m \equiv 1$ , это уравнение принимает вид

$$[(\beta a / ka)^2 - 1] \operatorname{tg}^2 \psi = F_1(\gamma_m a), \quad (8.14)$$

где

$$F_1(\gamma_m a) = \frac{\sum_{m=-\infty}^{\infty} [I_{m-1} K_{m-1} + I_{m+1} K_{m+1}]}{2 \sum_{m=-\infty}^{\infty} I_m K_m}. \quad (8.15)$$

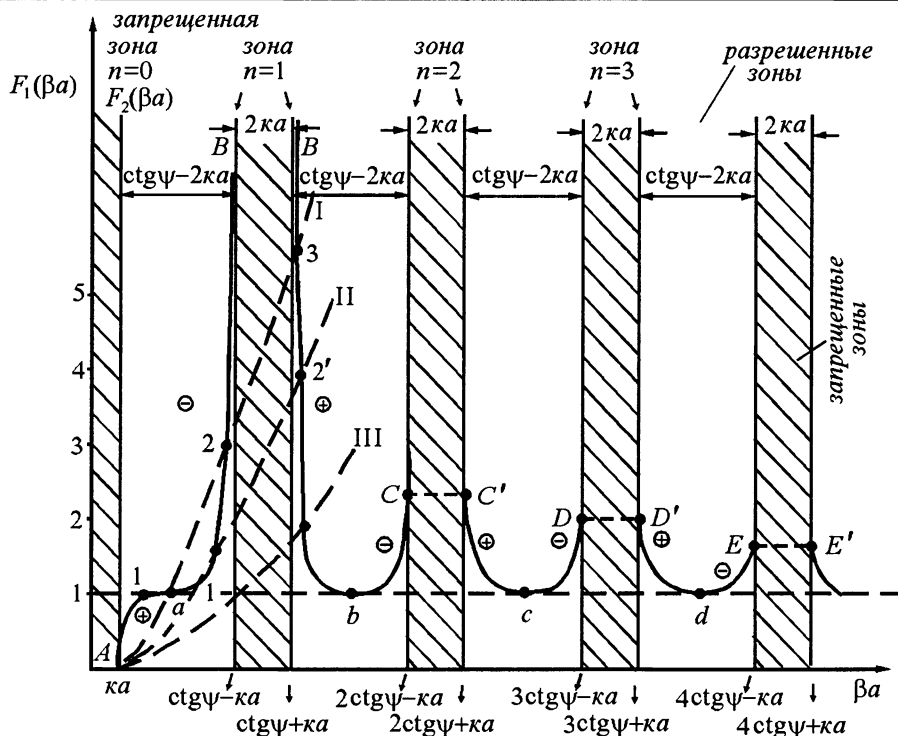
Вид функции  $F_1(\beta a)$  приведен на рис. 8.1, где  $\beta$  — волновое число нулевой пространственной гармоники, связанное с  $\gamma_m$  соотношениями

$$\gamma_m = (\beta_m^2 - k^2)^{1/2}, \quad \beta_m = \beta + 2\pi m / d = \beta + (m \operatorname{ctg} \psi / a).$$

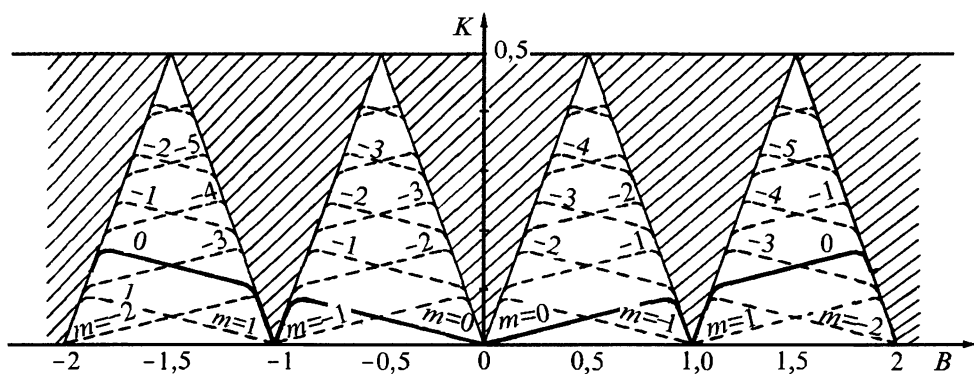
Результаты решения (8.14) представлены на рис. 8.2 в координатах  $B = \beta a \operatorname{tg} \psi = d / \Lambda$ ,  $K = ka \operatorname{tg} \psi = d / \lambda$  ( $\Lambda$  и  $\lambda$  — длины волн в спирали и в свободном пространстве), а на рис. 8.3 — в координатах  $\lambda / d$ ,  $n$  (сравните его с рис. 6.3). На всех трех рисунках заштрихованы области, в которых хотя бы одно из значений  $\gamma_m$  ( $-\infty < m < \infty$ ) принимает мнимое значение, т.е. соответствует гармонике, излучаемой спиралью. Заштрихованные области на всех трех рисунках называются *запрещенными зонами*.

Штриховой линией на рис. 8.1 нанесена величина  $F_2(\beta a) = [(\beta a / ka)^2 - 1] \operatorname{tg}^2 \psi$ . Сплошными линиями на рис. 8.2 и рис. 8.3 нанесены кривые дисперсии нулевых гармоник, т.е. тех, для которых распределение поля по радиусу описывается функциями Бесселя нулевого порядка. Посреди каждой разрешенной зоны величина  $F_1(\beta a)$  принимает значение, равное единице (точки  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$  на рис. 8.1). Согласно (8.14) ему соответствует замедление  $n = \beta / k = 1 / \sin \psi$ , равное геометрическому (отношению длины витка к шагу).

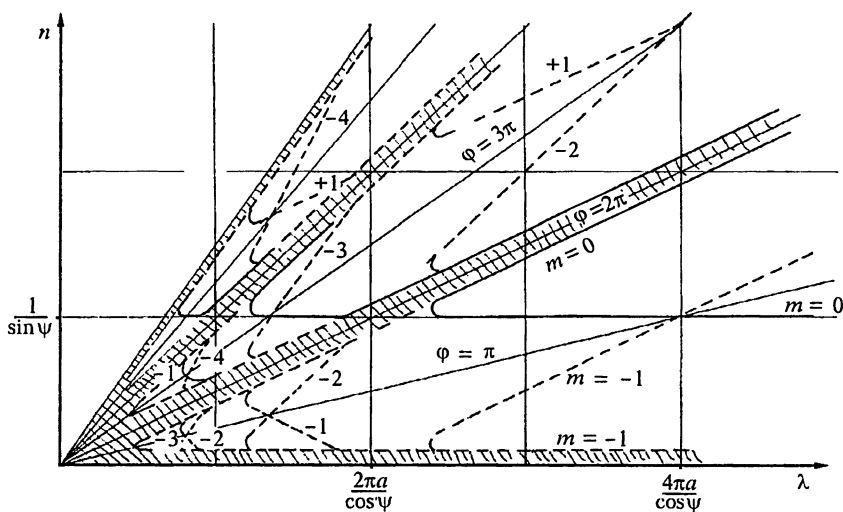
Вблизи границ зон функция  $F_1$  резко возрастает, достигая на границах значений, обозначенных на рис. 8.1 через  $CC'$ ,  $DD'$  и  $EE'$ . В нулевой зоне величина  $F_1$  изменяется от нуля до бесконечности. Можно показать [1], что вблизи границ зон в суммах (8.15) преобладают слагаемые, для которых аргумент  $\gamma_m a$  близок к нулю. При этом уравнение дисперсии (8.14) можно записать в виде



**Рис. 8.1.** Зависимость от  $\beta a$  величин  $F_1$  (сплошные линии) и  $F_2$  (штриховые линии) для нитевидной спирали



**Рис. 8.2.** Дисперсионная характеристика спирали в координатах  $B = d/\Lambda$ ,  $K = d/\lambda$  для нулевой (сплошные линии) и высших (штриховые линии) пространственных гармоник



**Рис. 8.3.** Зависимость замедления  $n$  от длины волны  $\lambda$  для нулевой (сплошные линии) и высших (штриховые линии) пространственных гармоник в спирали с геометрическим замедлением  $1/\sin \psi = 10$

$$\left[ (\beta a / ka)^2 - 1 \right] \operatorname{tg}^2 \psi = \frac{I_{m-1} K_{m-1} + I_{m+1} K_{m+1}}{2 I_m K_m}. \quad (8.16)$$

В частном случае при  $m=0$  из (8.16) следует уравнение дисперсии (6.6), полученное в приближении спирально проводящего цилиндра. Совпадение этих результатов при определенных значениях  $\beta a$  связано с тем, что в суммарном поле преобладает одна гармоника, а поля этой гармоники и спирально проводящего цилиндра практически совпадают.

Число корней уравнения дисперсии при фиксированной частоте (фиксированном  $ka$ ) может быть равно одному, двум или трем, что видно на рис. 8.1, ибо число пересечений кривых  $I$ ,  $II$  и  $III$  с линиями  $F_1$  зависит от  $\operatorname{tg} \psi$ . На рис. 8.3 тоже видно до трех сплошных кривых. Ветвь со слабо изменяющимся замедлением соответствует квази  $T$ -волне, бегущей вдоль витков спирали, а ветви почти параллельные прямой  $\varphi = 2\pi$ , соответствуют  $H_{11}$ -волне круглого волновода (ср. рис. 8.3 и 6.6). Характерно, что при сдвигах фаз  $\varphi$ , кратных  $\pi$ , нет границ полос пропускания, что соответствует выводам из теории симметрии для систем с осью  $C_\infty$ .

### 8.3. Сопротивление связи однозаходной ленточной спирали

Сопротивление связи  $m$ -й пространственной гармоники спирали для нитевидного электронного потока, проходящего вдоль оси  $z$  на расстоянии  $r$  от нее, определяется выражением

$$K_{св m} = e_{zm}(r, \theta) e_{zm}^*(r, \theta) / 2 \beta_m^2 P. \quad (8.17)$$



Поток энергии  $P$  представим как сумму потоков энергии пространственных гармоник:

$$P = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_S [e_{rm}(r, \theta) h_{\theta m}^*(r, \theta) - e_{\theta m}(r, \theta) h_{rm}^*(r, \theta)] ds = \sum_{m=-\infty}^{\infty} P_m.$$

Площадь  $S$  поперечного сечения спирали представим в виде суммы двух площадей: внутренней ( $0 < r < a$ ) и наружной ( $a < r < \infty$ ), так что

$$P_m = P_m^{(в)} + P_m^{(н)},$$

где

$$P_m^{(в)} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_0^{2\pi} \int_0^a [e_{rm}(r, \theta) h_{\theta m}^*(r, \theta) - e_{\theta m}(r, \theta) h_{rm}^*(r, \theta)] r dr d\theta. \quad (8.18)$$

Для вычисления  $P_m^{(н)}$  область интегрирования  $0 < r < a$  следует заметить на  $a < r < \infty$ .

Подставляя в (8.18) выражения для поля (8.2) и проинтегрировав результат по  $\theta$ , получаем

$$P_m^{(в)} = \pi \operatorname{Re} \left\{ \omega \beta_m \left( \varepsilon_0 e_m^{(в)} e_m^{(в)*} + \mu_0 h_m^{(в)} h_m^{(в)*} \right) \int_0^a \left[ \left( \frac{m^2}{r^2} \right) I_m^2 + \gamma_m^2 I_m'^2 \right] r dr + \right. \\ \left. + j 2 m \gamma_m \left( k^2 e_m^{(в)*} h_m^{(в)} - \beta_m^2 e_m^{(в)} h_m^{(в)*} \right) \int_0^a \left( \frac{1}{r} \right) I_m I_m' r dr \right\}.$$

Выражение для потока энергии  $P_m^{(н)}$  снаружи спирали получается из  $P_m^{(в)}$  заменой  $e_m^{(в)}$  на  $e_m^{(н)}$ ,  $h_m^{(в)}$  на  $h_m^{(н)}$ ,  $I_m = I_m(\gamma_m r)$  на  $K_m = K_m(\gamma_m r)$  и пределов интегрирования  $(0, a)$  на  $(a, \infty)$ . Выполняя интегрирование и учитывая, что

$$\operatorname{Re} [j m (k^2 e_m^{(в)*} h_m^{(в)} - \beta_m^2 e_m^{(в)} h_m^{(в)*})] = m (k^2 + \beta_m^2) \operatorname{Re} (j e_m^{(в)} h_m^{(в)*}),$$

$$I_m^2(0) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 K_m^2(x) = 0 \quad \text{при } m \neq 0.$$

После некоторых преобразований получим

$$P_m^{(в)} = \pi \left[ \omega \beta_m \left( \varepsilon_0 |e_m^{(в)}|^2 + \mu_0 |h_m^{(в)}|^2 \right) \Phi_{mI}(\gamma_m a) - m (k^2 + \beta_m^2) \operatorname{Re} (j e_m^{(в)} h_m^{(в)*}) \right] I_m^2(\gamma_m a), \\ P_m^{(н)} = -\pi \left[ \omega \beta_m \left( \varepsilon_0 |e_m^{(н)}|^2 + \mu_0 |h_m^{(н)}|^2 \right) \Phi_{mK}(\gamma_m a) - m (k^2 + \beta_m^2) \operatorname{Re} (j e_m^{(н)} h_m^{(н)*}) \right] K_m^2(\gamma_m a). \quad (8.19)$$

Здесь

$$\Phi_{mI}(\gamma_m x) = (1/2) \{ [x I_m' / I_m]^2 + 2x I_m' / I_m - x^2 - m^2 \}, \\ \Phi_{mK}(\gamma_m x) = (1/2) \{ [x K_m' / K_m]^2 + 2x K_m' / K_m - x^2 - m^2 \}. \quad (8.20)$$

Функции (8.20) обладают следующими свойствами:

1.  $\Phi_{mI}(x) = \Phi_{-mI}(x), \quad \Phi_{mK}(x) = \Phi_{-mK}(x);$
2.  $\lim_{x \rightarrow 0} \Phi_{mI}(x) = m, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \Phi_{mK}(x) = -m;$
3.  $\Phi_{mI}(x) \cong x/2, \quad \Phi_{mK}(x) \cong -x/2 \quad \text{при } x \gg m$

Суммируя потоки внутри и снаружи спирали с учетом (8.19) и (8.20), получаем выражение для полного потока энергии  $m$ -й гармоники:

$$P_m = \frac{1}{\gamma_m^4 a^4} \left\{ \left[ \left( \gamma_m^2 a^2 / ka \right) X_m \right]^2 |M_m|^2 [\Phi_{mI}(\gamma_m a) - \Phi_{mK}(\gamma_m a)] + \right. \\ \left. + (\gamma_m a I_m K'_m)^2 |N_m|^2 [\Phi_{mI}(\gamma_m a) - (I'_m K_m / I_m K'_m)^2 \Phi_{mK}(\gamma_m a)] \right\} ka \beta_m a + \\ + (m/ka) (k^2 a^2 + \beta_m^2 a^2) \gamma_m^2 a^2 X_m \operatorname{Re}(M_m N_m^*) \quad (8.21)$$

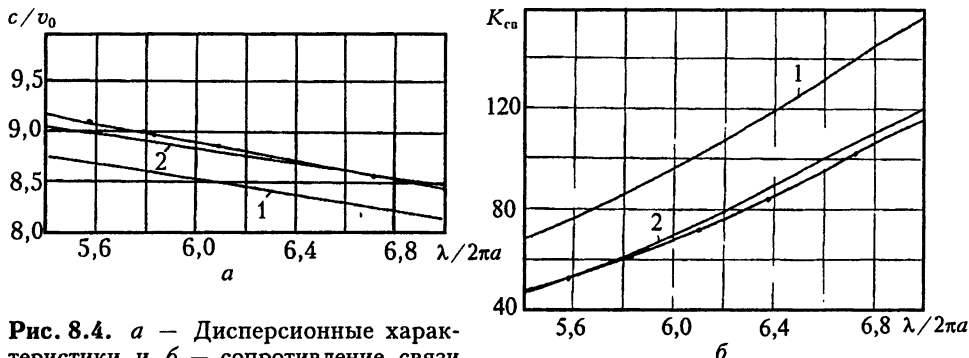
Здесь обозначено  $I_m = I_m(\gamma_m a)$ ,  $K_m = K_m(\gamma_m a)$ ,  $X_m = I_m K_m$ ,  $N_m = f_m \operatorname{ctg} \psi$ ,  $M_m = f_m [1 - m(\beta_m a / \gamma_m^2 a^2) \operatorname{ctg} \psi]$ .

Подставляя в (8.17) выражения для полного потока (8.21) и для поля  $E_z$  (8.1 а), получим формулу для расчета сопротивления связи:

$$K_{св} = 60 (\gamma_m^2 a^2 / ka)^2 X_m^2 M_m^2 [I_m^2(\gamma_m r) / I_m^2(\gamma_m a)] / \beta_m^2 a^2 P. \quad (8.22)$$

Сопротивление связи на оси ( $r < 0$ ) для высших пространственных гармоник ( $m > 0$ ) равно нулю ( $I_m(0) = 0$ ), что соответствует выводам из теории симметрии (см. гл. 2). Отлично от нуля оно только для нулевой гармоники ( $m = 0$ ). Для всех гармоник оно достигает максимума на поверхности спирали ( $r = a$ ).

На рис. 8.4 приведено сравнение дисперсионных характеристик и сопротивления связи, полученных в результате измерения и расчета как в



**Рис. 8.4.** а — Дисперсионные характеристики и б — сопротивление связи однозаходной ленточной спирали ( $\operatorname{ctg} \psi = 9,755$ ,  $\sigma = t/L = 0,35$ ), полученные в результате измерений (точки) и расчетов в приближении спирально проводящего цилиндра (1) и с учетом пространственных гармоник (2)

приближении спирально проводящего цилиндра (формулы (6.6) и (6.12)), так и с учетом пространственных гармоник (формулы (8.13) и (8.22)). Расхождение с результатами измерений по замедлению в первом случае достигает 10 %, а во втором 1,5–2 %, а по сопротивлению связи 20 % и 3–4 %, соответственно.

### 8.4. Многозаходная спираль

Свойства симметрии многозаходных спиралей (рис. 8.5) описаны в главах 2 и 6. В настоящем разделе приводятся лишь результаты расчета конкретных ЗС.

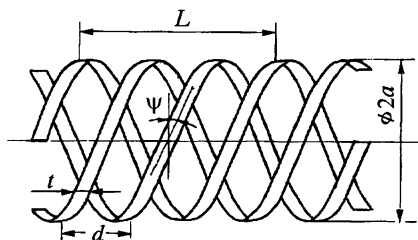


Рис. 8.5. Трехзаходная ленточная спираль

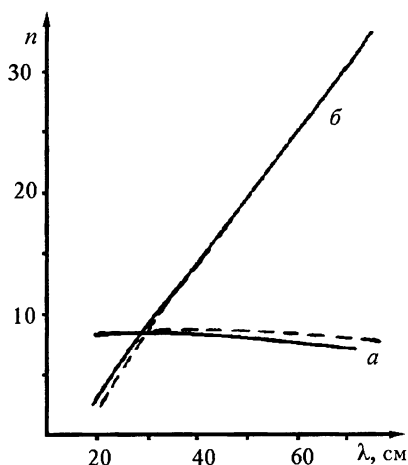


Рис. 8.6. Дисперсионные кривые двухзаходной спирали для  $a$  — синфазного и  $b$  — противофазного типов волн, полученные в результате расчета (сплошные линии) и измерений (штриховые линии)

Уравнения дисперсии многозаходной и однозаходной спиралей одинаковы и имеют вид (8.11) или (8.13). Отличие состоит в том, что суммирование теперь ведется не по всем гармоникам, а лишь по тем, амплитуды которых отличны от нуля в соответствии с (6.3). То же самое относится к формулам (8.21) и (8.22) для расчета сопротивления связи.

Наиболее широко используется двухзаходная спираль ( $s=2$ ). В ней существуют синфазные ( $q=0$ ) и противофазные ( $q=-1$ ) волны. При  $q=0$  напряжения и токи в обоих проводниках при  $z=\text{const}$  синфазны, а при  $q=-1$  — противофазны. В синфазной волне присутствуют только четные пространственные гармоники ( $m=0, \pm 2, \pm 4, \dots$ ), а в противофазной — только нечетные ( $m=\pm 1, \pm 3, \pm 5, \dots$ ).

На рис. 8.6 приведены дисперсионные характеристики двухзаходной спирали для низших гармоник синфазного ( $q=0$ ) и противофазного ( $q=-1$ ) типов волн. Экспериментальные результаты получены В. С. Ерофеевым на резонансном макете с помощью зонда с высокоомной подводкой. Расчет проведен в приближении спирально проводящего цилиндра по формуле (8.16). Для расчета дисперсионной характеристики синфазной волны взято  $m=0$ , а противофазной —  $m=-1$ . При вычислении использовалось свойство функций Бесселя:

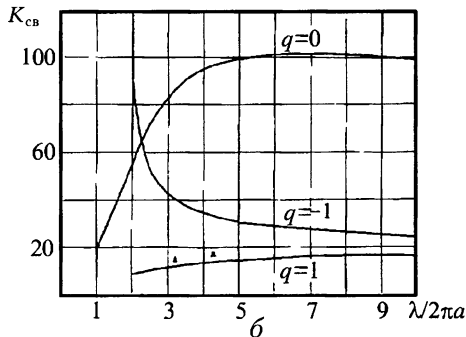
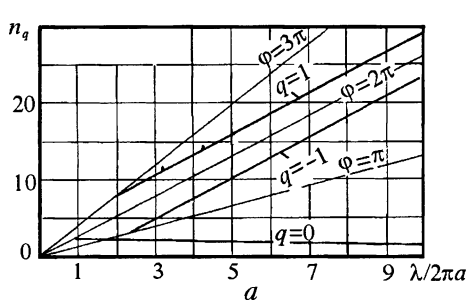
$$I_m(x) = I_{-m}(x), \quad K_m(x) = K_{-m}(x).$$

Результаты расчета и измерений несколько расходятся, так как экспериментальный макет был закреплен в диэлектрических штабиках, которые не учтены в расчете. Для многозаходных спиралей дисперсионная характе-

ристика и сопротивление связи (рис. 8.7–8.9) рассчитаны с учетом большого количества пространственных гармоник. Для некоторых образцов дано сравнение с результатами измерений\*).

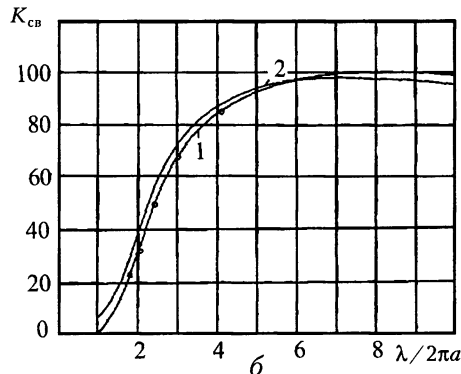
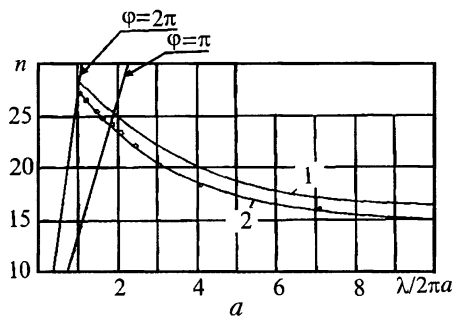
На рис. 8.7 приведены характеристики низших гармоник трех типов волн ( $q=0, \pm 1$ ) в трехзаходной спирали. Сопротивление связи преобладает при  $\varphi > 5\pi$  у симметричной волны ( $q=0$ ), а при  $\varphi \leq 5\pi$  — у несимметричной ( $q=-1$ ).

На рис. 8.8 дано сравнение результатов измерений при  $q=0$  и расчетов как в приближении спирально проводящего цилиндра, так и с учетом пространственных гармоник для трехзаходной ленточной спирали. Погрешность



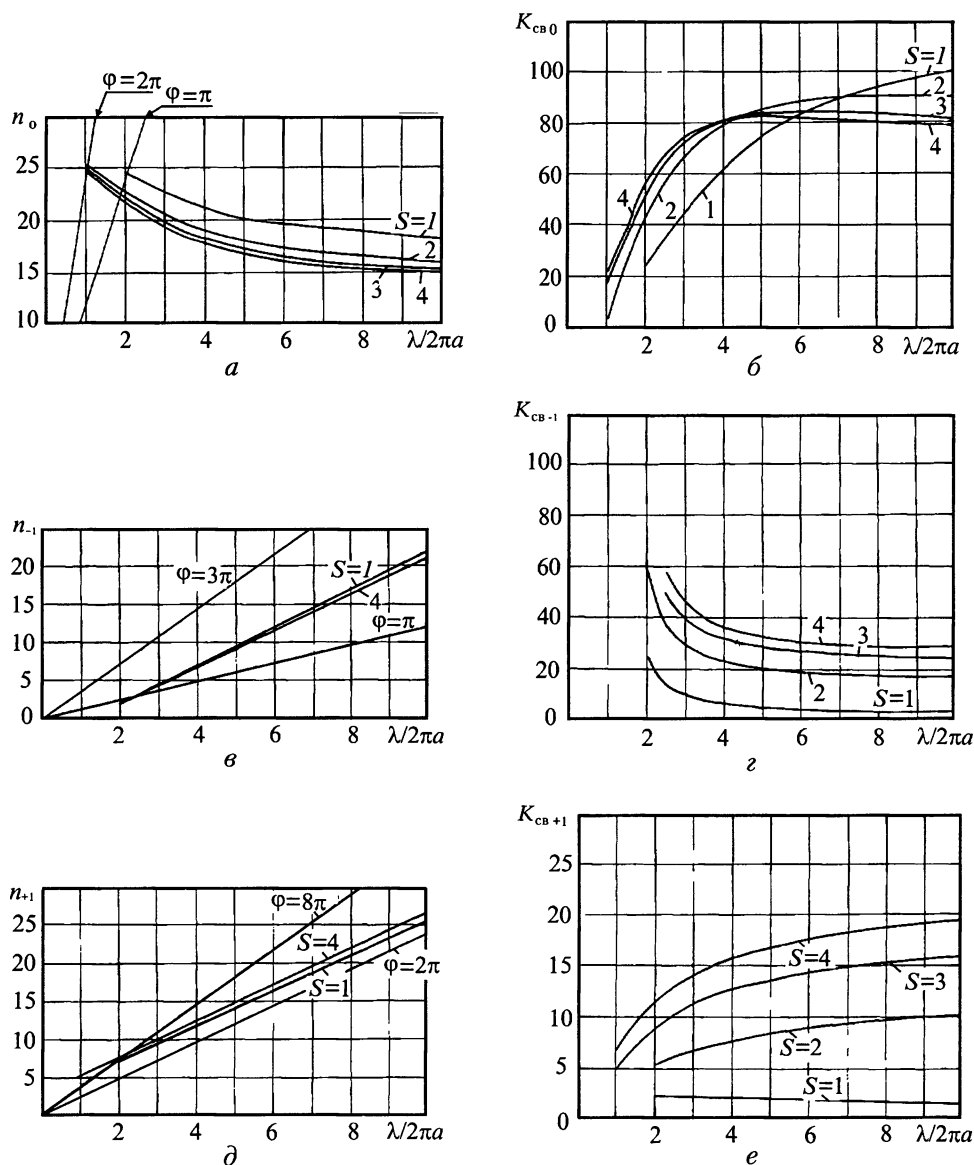
**Рис. 8.7.** Зависимость от длины волны  $\lambda$ :

$a$  — замедления и  $b$  — сопротивления связи трехзаходной ( $s=3$ ) ленточной спирали ( $\text{ctg } \psi = 2,618$ ,  $\sigma = t/L = 0,176$ ) для низших пространственных гармоник различных типов волн ( $q=0, \pm 1$ ), полученные в результате расчета (сплошные линии) и измерений (точки)



**Рис. 8.8.** Сравнение:  $a$  — дисперсионных характеристик и  $b$  — сопротивления связи трехзаходной ( $s=3$ ) ленточной спирали ( $\text{ctg } \psi = 2,618$ ,  $\sigma = t/L = 0,176$ ) на симметричном типе волны ( $q=0$ ), полученных в результате измерений (кружки) и расчетов (сплошные линии) в приближении спирально проводящего цилиндра (1) и с учетом пространственных гармоник (2)

\* ) Рис. 8.7–8.9 представлены для книги Ф. Ф. Дубровкой.



**Рис. 8.9.** Дисперсионные характеристики ( $a, в, д$ ) и сопротивление связи ( $б, в, е$ ) многозаходных ( $s = 1, 2, 3, 4$ ) ленточных спиралей ( $\text{ctg}\psi = 2,38$ ,  $\sigma = tL = 0,125$ ), рассчитанные для гармоник с  $\gamma = q + ms = 0$  ( $a, б$ ),  $\gamma = -1$  ( $в, г$ ),  $\gamma = 1$  ( $д, е$ ).

расчета замедления в первом случае достигает 10–15 %, тогда как во втором случае результаты расчета и измерений отличаются не более, чем на 1%.

На рис. 8.9 приведены результаты расчета по формулам (8.14) и (8.22) дисперсионных характеристик и сопротивления связи  $s$ -заходных ( $s = 1, 2, 3, 4$ ) ленточных спиралей при одинаковых  $\psi$  и  $\sigma = t/L$  для различных  $\gamma = q + ms$ . Сопротивления связи гармоник с  $\gamma = \pm 1$  растут по мере увеличения числа заходов спиралей. Дисперсионные характеристики существенно зависят от числа заходов  $s$  лишь для симметричной ( $q = 0$ ) составляющей.

### Список литературы

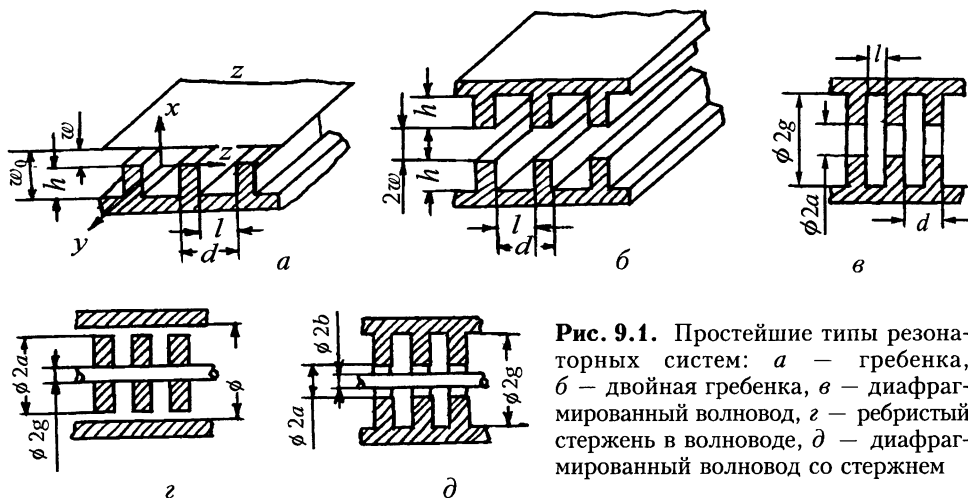
- [1]. Вайнштейн Л. А. Электромагнитные волны. Изд. 2-е, перераб. и доп. М.: Радио и связь, 1988. 440 с.
- [2]. Дубровка Ф. Ф. Учет поперечного тока в ленточных спиралях. *Радиотехника и электроника*, 1977, **12**(5), 905–913.
- [3]. Кирюшин В. П. Многозаходные симметричные спирали. *Вопросы радиоэлектроники. Сер. 1. Электроника*, 1963. Вып. 3, 15–26.
- [4]. Chu Chiao-Min. Propagation of waves in helical wave guides. *J. Appl. Phys.* v. 20, № 1, 1958, p. 88–99.
- [5]. Самохин Г. С., Гипсман А. И., Силин Р. А. Высшие типы волн полосковой линии. *Электронная техника. Сер. 1. Электроника СВЧ*, 1977 Вып. 2, 3–13.
- [5]. Гипсман А. И., Самохин Г. С., Силин Р. А. Распределение токов нормальных волн в несимметричной линии. Машинное проектирование устройств и систем СВЧ. Межвуз. сб. научн. трудов, МВССО РСФСР, МИРЭА, М., 1977, с. 66–77.

## Замедляющие системы типа «гребенка»

### 9.1. Резонаторные замедляющие системы

Цепочки связанных резонаторов (ЦСР) широко используются в различных электронных приборах СВЧ в качестве ЗС. Так, например, широкая гребенка (рис. 9.1, *а*) используется в ЛБВ миллиметрового и субмиллиметрового диапазонов, а также в оротронах — генераторах колебаний с открытыми резонаторами; аксиально симметричный диафрагмированный волновод (рис. 9.1, *б*) — в линейных ускорителях. Цепочки резонаторов со щелями связи или с петлями связи (рис. 2.1, *а, б, в*; рис. 2.4, *в, г*) используются в ЛБВ повышенной мощности.

Наиболее простой из них является гребенка. Она наиболее полно исследована. На ее примере проиллюстрируем как ряд свойств ЗС, так и некоторые методы их расчета.



**Рис. 9.1.** Простейшие типы резонаторных систем: *а* — гребенка, *б* — двойная гребенка, *в* — диафрагмированный волновод, *г* — ребристый стержень в волноводе, *д* — диафрагмированный волновод со стержнем

### 9.2. Качественная оценка дисперсионной характеристики бесконечно широкой гребенки

Несмотря на то, что гребенка представляет одну из простейших ЗС, она широко используется в электронных приборах. На примере гребенки ниже иллюстрируются: динамика образования типов волн периодического волновода из волн гладкого волновода, метод расчета в приближении одной волны

(т.е. при учете лишь одной гармоники в пространстве взаимодействия), метод эквивалентных схем.

Рассмотрим динамику изменения дисперсионных характеристик гребенки при увеличении высоты зубьев  $h$  (рис. 9.1,  $a$ ) от нуля до некоторой конечной величины. Предполагаем систему бесконечной по осям  $y$  и  $z$  и однородной по оси  $x$ . Расстояние между идеально проводящими плоскостями, на которые крепятся зубья, полагаем равным  $w_0$ .

Поскольку в гребенке могут распространяться только волны  $LE$  и  $LM$ , такие же волны целесообразно рассматривать между плоскостями. Независимо от типа волны поле между плоскостями при ( $h = 0$ ) можно представить в виде \*)

$$\begin{bmatrix} \mathbf{E}(x, y, z) \\ \mathbf{H}(x, y, z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{E}(x) \\ \mathbf{H}(x) \end{bmatrix} \exp[-j(\beta_y y + \beta_z z)] \quad (9.1)$$

Для волн  $LE_q$

$$H_y(x) = A \cos(q\pi x/w_0), \quad E_y(x) = 0, \quad q = 0, 1, 2, \dots, \quad (9.2, a)$$

а для волны  $LM_q$

$$H_y(x) = 0, \quad E_y(x) = A \sin(q\pi x/w_0), \quad q = 1, 2, 3, \dots, \quad (9.2, б)$$

где  $q$  — число полуволн, укладываемых между плоскостями.

Остальные компоненты поля определяются равенствами (4.17 а) и (4.18 а) соответственно. В этих формулах критическое волновое число выражается равенством

$$\beta_k = [\beta_z^2 + (q\pi/w_0)^2]^{1/2} = (k^2 - \beta_y^2)^{1/2} \quad (9.3, a)$$

Подставив (9.3, а) в (4.7), находим замедление волны вдоль оси  $z$ :

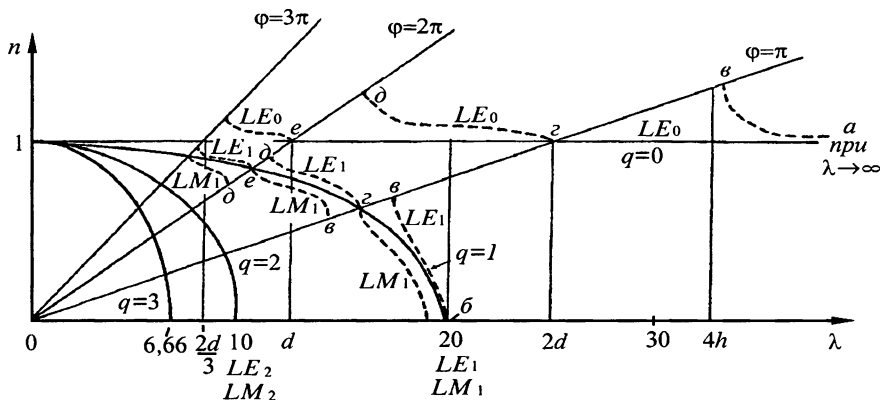
$$n = \beta_z/k = [1 - (\beta_y/k)^2 - (q\pi/w_0 k)^2]^{1/2} \quad (9.3, б)$$

Даже для случая  $\beta_y = 0$  оно не превышает единицы и тождественно равно единице лишь для  $LE_0$ -волны в критическом режиме, т. е. при  $q = 0$  и  $\beta_y = 0$ . При  $k \rightarrow \infty$  замедление волн всех типов стремится к единице.

На рис. 9.2 построены кривые дисперсии волн между плоскостями (сплошные линии) и в бесконечно широкой гребенке (штриховые линии) для критического режима ( $\beta_y = 0$ ). Волны  $LE_q$  и  $LM_q$  между плоскостями при одинаковых  $q \neq 0$  имеют одинаковые дисперсионные характеристики (т.е. двукратно вырождены). При  $q = 0$  вырождения нет, так как существует только  $LE_0$ -волна. Для нее  $\beta_z = k$ , причем значению  $\beta_z = 0$  соответствует статическое поле между плоскостями, так как  $\beta_z = k = \omega/c = 0$ . Кривые дисперсии гребенки на рис. 9.2 построены качественно и только для пространственных гармоник с максимальной амплитудой компоненты  $H_y$  или  $E_y$ .

\*) Индексом « $z$ » снабжаем  $z$ -компоненту волнового вектора в гладкой системе. Для периодической структуры индекс « $z$ » опускаем.





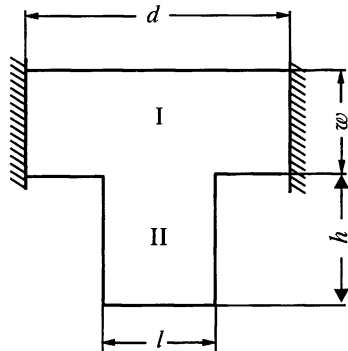
**Рис. 9.2.** Кривые дисперсии различных типов волн между двумя плоскостями, отстоящими друг от друга на расстоянии  $\omega_0 = 10$  (сплошные линии), и в гребенке при  $\omega_0 = \omega + h$  (штриховые линии).

Предполагается, что толщина пластин  $d - l = 0$ . Буквы  $a-d$  около точек кривых дисперсии соответствуют различным расположениям электрических и магнитных стенок в гребенке, изображенным на рис. 2.13.

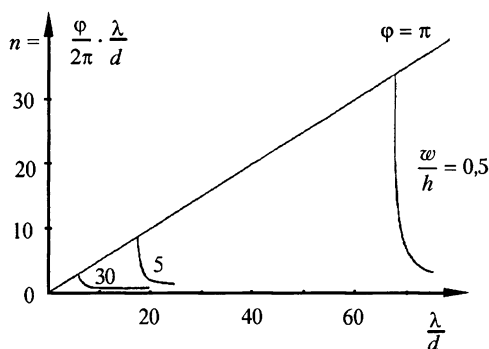
Пусть теперь нижняя плоскость постепенно деформируется с периодом  $d$  по оси  $z$ , так что образуется гребенка, изображенная на рис. 9.1,  $a$ . Рассмотрим изменение замедления  $n = \beta_z/k$   $LE_0$ -волны в критическом режиме ( $\beta_y = 0$ ) в зависимости от высоты зубьев гребней. Независимо от  $h$  при  $b_z = 0$  поле остается статическим, так что сдвигу фаз  $\beta = \beta d = 0$  при любом  $h$  соответствует нулевая частота ( $\omega = 0$ ).

Для определения частоты, соответствующей  $\phi = \pi$ , рассмотрим расположение стенок на рис. 2.13,  $e$ . Воспользуемся тем (см. п. 4.3), что волновое уравнение и граничные условия совпадают для компоненты  $H_y$   $LE_0$ -поля и для мембраны, закрепленной вдоль магнитных стенок и свободной вдоль электрических стенок. На рис. 9.3 изображена мембрана, отображающая один период гребенки. Область 1 отображает пространство взаимодействия, а 2 — резонатор. Линии закрепления мембраны соответствуют магнитным стенкам на рис. 13,  $e$ . При высоте зубьев  $h = 0$  волновое число  $k = \beta_z = \pi/d$ , поскольку на периоде системы укладывается половина волны ( $\Lambda = \lambda_\pi = 2d$ ). Величина растет  $\lambda_\pi$  вместе с  $h$ , так что  $\lambda_\pi > 2d$ .

Если считать часть 1 мембраны полностью закрепленной, то колеблется лишь лепесток 2 длиной  $h$ , вдоль которого укладывается четверть волны ( $\lambda_\pi \approx 4h$ ). Практически  $\lambda_\pi$  несколько превышает  $4h$ , поскольку часть мембраны 1 закреплена не жестко. Таким образом, при любом  $h$  справедливы неравенства  $\lambda_\pi > 2d$  и  $\lambda_\pi > 4h$ . Вид дисперсионных кривых нулевой простран-



**Рис. 9.3.** Мембрана, соответствующая поперечному сечению ячейки гребенки при  $\phi = \pi$



**Рис. 9.4.** Кривые дисперсии гребенки при различных  $w/h$  ( $h + w = 10$ ,  $d = 0,4$ ,  $l = 0,4$ ), рассчитанные эквивалентным статическим методом [2]

альной гребенки в ряд Фурье должна преобладать нулевая пространственная гармоника, поскольку при  $h = 0$  только она одна и существует. В диапазонах длин волн, которым при  $h = 0$  соответствует  $\varphi = \beta_z d > 0$ , существуют другие полосы пропускания с полем  $LE_0$  (рис. 9.2). В разложении поля  $H_y$  в этих полосах преобладают пространственные гармоники более высоких номеров ( $m = \pm 1, \pm 2, \dots$ ). Наибольшую амплитуду должны иметь гармоники с замедлением, близким к тому, что имеет волна в гладкой системе (т.е. при  $h = 0$ ).

Тип волны, соответствующий  $LE_0$ -полю в самой длинноволновой полосе пропускания, называется *основным*. Все остальные типы волн называются *высшими*. Существует ряд приборов, в которых для взаимодействия с электронным потоком используется поле высших типов волн. К ним относятся оротроны, волноводно-усилительные линзы и др. В следующем разделе проведено качественное исследование дисперсионных характеристик гребенки на высших типах волн. Результаты этого исследования приведены на рис. 9.2.

### 9.3. Дисперсия гребенки на высших типах волн

Качественный анализ дисперсии высших типов волн проведем, как и в предыдущем разделе, в предположении, что поле не зависит от координаты  $y$  (критический режим). Рассмотрим, как изменятся характеристики волн (9.3) между плоскостями по мере увеличения высоты зубьев от  $h = 0$ . Для простоты по-прежнему полагаем, что толщина зубьев  $d - l = 0$  и что сумма расстояний  $w + h = w_0$  остается постоянной. Для качественного анализа воспользуемся аналогией волноводных и мембранных задач (см. п. 4.3), которая справедлива как для бегущих, так и для стоячих волн. Согласно аналогии, частоты колебаний совпадают для  $LM$ -волн при  $\beta_y = 0$  и для мембраны, закрепленной вдоль электрических стенок, а также для  $LM$ -волн при  $\beta_y = 0$  и для мембраны, свободной вдоль этих стенок.

Рост  $h$  при фиксированном сдвиге фаз  $\varphi$  поля на периоде приводит к увеличению длин  $LE$ -волн и укорочению длин  $LM$ -волн (см. рис. 9.2), поскольку рост высоты зубьев  $h$  приводит к разрезанию мембраны для

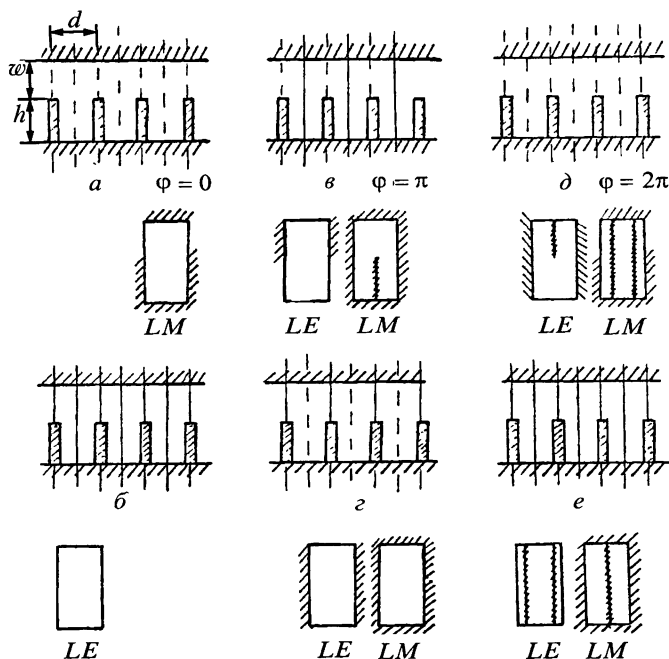
ственной гармоники в основной полосе при различных  $h$  приведен на рис. 9.4. Длина волны растет с  $h$  не только для  $\varphi = \pi$ . При  $\varphi \rightarrow 0$  величина  $\lambda \rightarrow \infty$ . Замедление нулевой гармоники падает с ростом  $\lambda$ , т.е. дисперсия нормальная.

Таким образом, прослежена динамика изменения дисперсионной характеристики гребенки с ростом  $h$  в самой длинноволновой полосе пропускания на волне  $LE_0$  в критическом режиме. Выше рассмотрены длины волн  $\lambda > 2d$ , при которых сдвиг фазы в исходной ( $h = 0$ ) системе на длине  $d$  не превышает  $\pi$ . В разложении соответствующего поля  $H_y$  ре-

$LE$ -волн и закреплению — для  $LM$ -волн. Не должны смещаться лишь те точки дисперсионных кривых, которым соответствуют электрические стенки в плоскостях бесконечно тонких зубьев.

Следует заметить, что кривые дисперсии на рис. 9.2 построены в предположении, что волны различных типов не взаимодействуют друг с другом. Если построить кривые дисперсии для пространственных гармоник, то они пересекутся в некоторых точках. В окрестности точек пересечения возможно взаимодействие типов волн, приводящее к «разрывам» дисперсионных кривых. Волны  $LE$  и  $LM$  не связаны, и пересечение соответствующих им кривых не приводит к разрывам, так как их поля описываются двумя независимыми уравнениями.

На рис. 9.5 изображены электрические и магнитные стенки в поперечном сечении гребенки при различных сдвигах фаз на периоде, кратных  $\pi$ . Эти сдвиги фаз соответствуют границам полос пропускания, т.е. стоячим волнам. На этом же рисунке изображены мембраны, отображающие одну ячейку для  $LE$ - и  $LM$ -полей. Для  $LE$ -поля они закреплены вдоль магнитных стенок, а для  $LM$ -полей — вдоль электрических. Линии закрепления мембран обозначены штриховкой. Все мембраны на рис. 9.5, кроме одной, закреплены вдоль прямых линий. Положение линии закрепления на рис. 9.5,  $d$  для  $LM$ -поля показано условно, поскольку электрические стенки не совпадают ни с границами ЗС, ни с плоскостями симметрии.



**Рис. 9.5.** Расположение электрических (сплошные линии) и магнитных (штриховые линии) стенок в поперечном сечении гребенки и соответствующие им мембраны, отображающие один период при сдвигах фаз на периоде, кратных  $\pi$ . Закрепление мембраны обозначено штриховкой

Зубья гребенки на рис. 9.5, б, г, е лежат в плоскостях электрических стенок. Поэтому собственные частоты соответствующих мембран не зависят от высоты зубьев. Частоты остаются такими же, как при  $h = 0$ . На рис. 9.5, а, в, д зубья расположены в плоскостях магнитных стенок. С ростом  $h$  длина участка закрепления мембраны и, соответственно, частота растет для  $LM$ -поля и убывает для  $LE$ -поля (см. кривые дисперсии на рис. 9.2).

Отметим особо  $LM_0$ -волну, для которой при  $\beta_y = 0$  и  $\varphi = 0$  частота  $\omega$  и критическое волновое число  $\beta_k$  равны нулю, т.е. колебания отсутствуют. При этом в ЗС поле либо электростатическое, либо отсутствует. Плоскости симметрии в электростатическом поле представляют магнитные стенки (рис. 9.5, а), однако говорить о каких-либо мембранах бессмысленно. Магнитные стенки сохраняются и при  $\beta_y \neq 0$ , в частности, если гребенка ограничена плоскостями  $y = \pm p/2$ . При этом поле уже не статическое.

На рис. 9.6 даны результаты расчета вариационным методом [22, 23] дисперсионной характеристики  $LE$ -волн в гребенке с бесконечно тонкими зубьями ( $w_0 = w + h = 0,8$ ,  $l = d = 1$ ). При расчете учитывалось до 50 пространственных гармоник и до 25 типов волн в резонаторах между зубьями. Сплошной линией нанесены кривые дисперсии для гармоник с наибольшими амплитудами поля  $H_y$ . Штриховой линией — для остальных гармоник, а также для гладкого волновода ( $h = 0$ ). Три рисунка (рис. 9.6, а, б, в) соответствуют гребенкам с разной высотой зубьев ( $h = 0,15$ ;  $0,35$  и  $0,75$ ). По мере увеличения высоты зубьев исходные кривые дисперсии регулярного волновода «деформируются», смещаясь в сторону длинных волн и больших замедлений. При этом возникают разрывы дисперсионных кривых (рис. 9.6, а) регулярного волновода. Следует различать три типа разрывов. Первый тип возникает в точках дисперсионных кривых гладкого волновода, в которых сдвиг фаз  $\varphi$  на периоде  $d$  кратен  $\pi$ . Второй тип возможен при  $\varphi$ , не кратных  $\pi$  (например, при  $\varphi \equiv \pi/2$  на рис. 9.6, а, и обусловлен взаимодействием различных видов волн регулярного волновода (например,  $LE_0$ - и  $LE_1$ -волн). Не зависят от  $h$  лишь отдельные точки кривых дисперсии на границах полос пропускания. Дисперсионная кривая для основного типа волны на рис. 9.6 не нанесена.

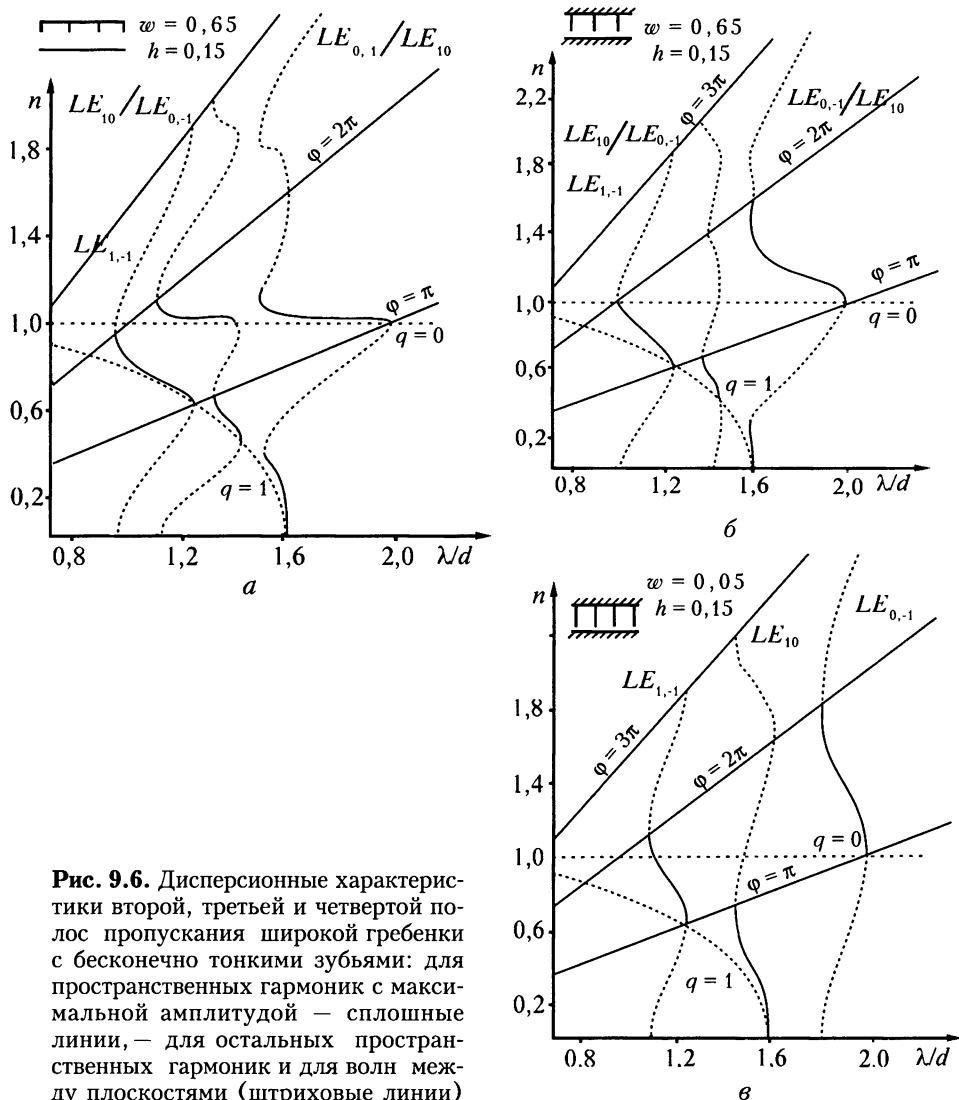
Высшие типы волн гребенки используются в таких приборах как оротрон [21], умножитель частоты [14] и др. В этих приборах электроны взаимодействуют с полем пространственных гармоник ( $\varphi = 2\pi$ ) нулевых видов колебаний ( $\varphi = 0$ ) высших полос пропускания. Для приборов, использующих основную полосу пропускания, высшие полосы могут быть связаны с нестабильностью работы прибора и с паразитными излучениями.

#### 9.4. Гребенка конечной ширины

Пусть при  $y = \pm p/2$  гребенка ограничена идеально проводящими плоскостями. Размер  $p$  называют *шириной гребенки*. Согласно (1.5) и (4.5) замедление волны в гребенке шириной  $p$  определяется равенством

$$n = \beta/k = \beta/(\beta_k^2 + \beta_y^2)^{1/2}. \quad (9.4)$$

Здесь  $\beta_k$  — критическое волновое число, которое равно  $k$  при  $\beta_y = 0$ , а  $\beta_y = q_1\pi/p$ , где  $q_1$  — число полуволн, укладываемых между плоскостями  $y = \pm p/2$ . Связь

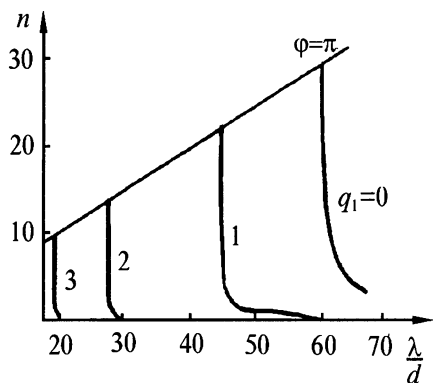


**Рис. 9.6.** Дисперсионные характеристики второй, третьей и четвертой полос пропускания широкой гребенки с бесконечно тонкими зубьями: для пространственных гармоник с максимальной амплитудой — сплошные линии, — для остальных пространственных гармоник и для волн между плоскостями (штриховые линии)

$\beta$  и  $\beta_k$  определяется с помощью уравнения дисперсии, полученного каким-либо из приведенных способов.

Рассмотрим в качестве примера дисперсионные характеристики гребенки шириной  $p$ , соответствующие основному типу волны при  $\beta_y = 0$ . При  $\beta_y \neq 0$  и малых  $\beta$  волна становится ускоренной (рис. 9.7). Границы полос при  $\phi = 0$  и  $\phi = \pi$  в соответствии с (4.15) определяются равенствами

$$\lambda_0 = 2p/q_1, \quad \lambda_\pi \equiv 2/\left[(q_1/p)^2 + (1/2h)^2\right]^{1/2}$$



**Рис. 9.7.** Кривые дисперсии гребенки конечной ширины  $p$ , соответствующие основному типу волны бесконечно широкой гребенки. Число  $q_1$  указывает количество полуволн поля, укладываемых на ширине

### 9.5. Метод частичных областей

В п. 9.2 и 9.3 дана качественная оценка дисперсионных характеристик гребенки. Ниже приведены некоторые методы расчета этих характеристик и сопротивления связи. Они проиллюстрированы на примере расчета характеристик гребенки в основной полосе пропускания, которая соответствует волне  $LE_0$ .

Полагаем, что поле  $LE$  не зависит от координаты  $y$  ( $\beta_y = 0$ ,  $\beta_k = k$ ). В соответствии с (4.17) оно удовлетворяет уравнениям

$$\begin{aligned} \Delta_{xz} H_y + k^2 H_y &= 0, \\ E_x &= (j\rho/k) (\partial H_y / \partial z), \quad E_z = -(j\rho/k) (\partial H_y / \partial x) \end{aligned} \quad (9.5)$$

и граничным условиям

$$\partial H_y / \partial n = 0. \quad (9.6)$$

Расчет характеристик гребенки ведем методом частичных областей, который заключается в том, что гребенку разделяют на две области: пространства резонаторов ( $x < 0$ ) и взаимодействия ( $x > 0$ ). Поле  $\mathbf{E}_n$ ,  $\mathbf{H}_n$  в пространстве взаимодействия аппроксимируем суммой пространственных гармоник  $\mathbf{e}_m$ ,  $\mathbf{h}_m$ , а в резонаторах  $\mathbf{E}_p$ ,  $\mathbf{H}_p$  — суммой парциальных полей  $\mathbf{e}_q$ ,  $\mathbf{h}_q$ :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{E}_n \\ \mathbf{H}_n \end{bmatrix} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \begin{bmatrix} \mathbf{e}_m(x) \\ \mathbf{h}_m(x) \end{bmatrix} \exp(-j\beta_m z), \quad \begin{bmatrix} \mathbf{E}_p \\ \mathbf{H}_p \end{bmatrix} = \sum_{q=0}^{\infty} \begin{bmatrix} \mathbf{e}_q(x, z) \\ \mathbf{h}_q(x, z) \end{bmatrix}. \quad (9.7)$$

Каждое слагаемое удовлетворяет уравнениям (9.5) и граничным условиям (9.6) для пространственных гармоник при  $x = w$ , а для парциальных волн — при  $z = \pm l/2$ ,  $0 > x > -h$  и при  $x = -h$ ,  $|z| < l/2$ :

$$\begin{aligned} h_m(x) &= h_{my} \operatorname{ch}[\gamma_m(w-x)] \operatorname{ch}(\gamma_m w), \\ e_{mx}(x) &= h_{my} (\rho \beta_m / k) \operatorname{ch}[\gamma_m(w-x)] \operatorname{ch}(\gamma_m w), \\ e_{mz}(x) &= j h_{my} (\rho \beta_m / k) \operatorname{sh}[\gamma_m(w-x)] \operatorname{ch}(\gamma_m w), \\ \beta_m &= \beta + 2\pi m / d, \quad \gamma_m^2 = \beta_m^2 - k^2, \quad -\infty < m < \infty, \end{aligned} \quad (9.8, a)$$

$$\begin{aligned}
h_{pq}(x, z) &= h_{pqy} \cos[\beta_{xq}(x + h)] \cos[(\pi q/l)(z + l/2)], \\
e_{pqx}(x, z) &= h_{pqy} (-j\rho\pi/kl) \cos[\beta_{xq}(x + h)] \sin[(\pi q/l)(z + l/2)], \\
e_{pqz}(x, z) &= h_{pqy} (j\rho\pi/kl) \sin[\beta_{xq}(x + h)] \cos[(\pi q/l)(z + l/2)], \\
k^2 &= \beta_x^2 + (\pi q/l)^2, \quad q = 0, 1, 2, \dots
\end{aligned} \tag{9.8, 6}$$

Получить уравнение дисперсии — означает установить связь величин  $\beta$  и  $k$ . В выражениях (9.7) и (9.8) они независимы. Чтобы найти эту связь и структуру поля, необходимо удовлетворить условиям сшивания полей

$$\begin{bmatrix} H_{ny}(0, z) \\ E_{ny}(0, z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{py}(0, z) \\ E_{py}(0, z) \end{bmatrix}, \quad |z| < l/2, \tag{9.9, a}$$

$$E_{nz}(0, z) = 0 \quad \text{при } l/2 < |z| < d/2. \tag{9.9, б}$$

Строго удовлетворить условиям сшивания полей обычно не удастся, поскольку бесконечные суммы (9.7) заменяют конечными. Для приближенного сшивания полей приравнивают нулю соответствующие составляющие вектора Умова — Пойнтинга [5, 6]

$$J_h = \int_{-d/2}^{d/2} [\mathbf{E}_n(\mathbf{h}_r), \mathbf{h}_r^*] \mathbf{v} dz + \int_{-l/2}^{l/2} [\mathbf{E}_p(\mathbf{h}_r), \mathbf{h}_r^*] \mathbf{v} dz = 0 \tag{9.10, a}$$

либо

$$J_e = \int_{-d/2}^{d/2} [\mathbf{e}_r^*, \mathbf{H}_n(\mathbf{e}_r)] \mathbf{v} dz + \int_{-l/2}^{l/2} [\mathbf{e}_r^*, \mathbf{H}_p(\mathbf{e}_r)] \mathbf{v} dz = 0. \tag{9.10, б}$$

Здесь  $\mathbf{v}$  — нормаль к границе раздела областей ( $x=0$ );  $\mathbf{h}_r$  и  $\mathbf{e}_r$  — величины магнитного и электрического полей, задаваемые приближенно на границе раздела;  $\mathbf{E}_n(\mathbf{h}_r)$  и  $\mathbf{E}_p(\mathbf{h}_r)$  — значения напряженности электрического поля при заданном магнитном;  $\mathbf{H}_n(\mathbf{e}_r)$  и  $\mathbf{H}_p(\mathbf{e}_r)$  — значения напряженности магнитного поля при заданном электрическом.

Левые части выражений (9.10) представляют функционалы [5, 26], достигающие стационарного значения, когда величины  $\mathbf{h}_r$ ,  $\mathbf{E}_n$  и  $\mathbf{E}_p$ , либо  $\mathbf{e}_r$ ,  $\mathbf{H}_n$  и  $\mathbf{H}_p$  совпадают с истинными значениями поля. В силу стационарности функционалов (9.10) погрешность в определении частоты при заданном  $\beta$  имеет второй порядок малости по сравнению с погрешностью задания поля на границе раздела.

Иногда функционалы (9.10) записывают несколько иначе с целью использования понятия проводимости, более привычных специалистам, владеющим теорией электрических цепей. С этой целью нормируем, например, (9.10, б). Получим

$$\frac{\int_{-d/2}^{d/2} [\mathbf{e}_r^*, \mathbf{H}_n(\mathbf{e}_r)] \mathbf{v} dz}{\left| \int_{-d/2}^{d/2} \mathbf{e}_{rz} dz \right|^2} + \frac{\int_{-l/2}^{l/2} [\mathbf{e}_r^*, \mathbf{H}_p(\mathbf{e}_r)] \mathbf{v} dz}{\left| \int_{-d/2}^{d/2} \mathbf{e}_{rz} dz \right|^2} = 0. \tag{9.11, a}$$

Первое слагаемое можно трактовать как входную проводимость пространства взаимодействия  $Y(\varphi)$ , а второе — резонатора  $Y_p$ ,

$$Y(\varphi) + Y_p = 0. \quad (9.11, б)$$

Обе проводимости зависят от частоты, а  $Y(\varphi)$  зависит также от сдвига фаз  $\varphi = \beta d$  на периоде. Поэтому равенство (9.11 б) представляет уравнение дисперсии гребенки.

Если считать, что поле  $\mathbf{e}_r$  при  $|z| < l/2$  не зависит от координаты  $z$ , то в резонаторе следует учитывать только одну волну, соответствующую  $q = 0$ . Величину  $h_{p0}(0, z) = h_{p0y} \cos(kh)$  обозначим через  $H_0$ . При этом входная проводимость резонатора определяется равенством

$$Y_p = \frac{\int_{-l/2}^{l/2} [\mathbf{e}_r^*, \mathbf{H}_0(\mathbf{e}_r)] v dz}{\left| \int_{-d/2}^{d/2} \mathbf{e}_{rz} dz \right|^2} \quad (9.12, а)$$

и вычисляется, как показано ниже, сравнительно просто.

В общем случае поле  $\mathbf{H}_p$  представляется суммой (9.7). При этом выражение для входной проводимости весьма громоздко и его целесообразно использовать только для расчетов с помощью ЭВМ. Чтобы воспользоваться соотношением (9.12 а), проводимость  $Y(\varphi)$  определяют формулой

$$Y(\varphi) = \frac{\int_{-d/2}^{d/2} [\mathbf{e}_r^*, \mathbf{H}_n(\mathbf{e}_r)] v dz}{\left| \int_{-d/2}^{d/2} \mathbf{e}_{rz} dz \right|^2} + \frac{\int_{-l/2}^{l/2} [\mathbf{e}_r^*, \mathbf{H}'_p(\mathbf{e}_r)] v dz}{\left| \int_{-d/2}^{d/2} \mathbf{e}_{rz} dz \right|^2}, \quad (9.12, б)$$

учитывающей как поле в пространстве взаимодействия (первое слагаемое), так и поле высших типов волн,  $\mathbf{H}'_p = \mathbf{H}_p - \mathbf{H}_0$ , в резонаторе. Именно таким способом проведен расчет характеристик гребенки в работах [2, 7, 8].

## 9.6. Расчет дисперсионной характеристики гребенки в приближении одной волны

Иллюстрировать метод частичных областей с учетом многих пространственных гармоник и волн в резонаторах для книги весьма громоздко и не наглядно. Поэтому ограничимся рассмотрением простейших приближений. Одно из широко используемых приближений состоит в том, что учитывается только одна пространственная гармоника (*приближение одной волны*) и



один тип волны в резонаторе. Такое приближение справедливо при больших длинах волн в ЗС по сравнению с периодом ( $2\pi d / \Lambda = \beta d = \varphi < 0,6\pi$ ), так как нулевая гармоника при  $\varphi < 0,6\pi$  по амплитуде существенно выше остальных. ЗС, в которых можно пренебречь всеми пространственными гармониками, кроме одной, называют *гладкими*. Систему можно считать гладкой лишь в определенном диапазоне длин волн. Так, гребенку, как и кристалл, можно считать гладкой при длинах волн, существенно превышающих период.

В соответствии с (9.8, а) поле нулевой пространственной гармоники можно записать в виде

$$\begin{aligned} h_{n0} &= H_{ny} = H_0 \exp(-j\beta z) \operatorname{ch}[\gamma_m(w-x)] / \operatorname{ch}(\gamma_m w), \\ E_{nx} &= (\rho\beta_m/k) H_0 \exp(-j\beta z) \operatorname{ch}[\gamma_m(w-x)] / \operatorname{ch}(\gamma_m w), \\ E_{nz} &= j(\rho\beta_m/k) H_0 \exp(-j\beta z) \operatorname{sh}[\gamma_m(w-x)] / \operatorname{ch}(\gamma_m w). \end{aligned} \quad (9.13, a)$$

Здесь  $H_0$  — амплитуда нулевой пространственной гармоники при  $x = 0$ . Остается пока произвольной независимо от  $\beta$  величина  $k$ , а следовательно, и  $\gamma$ . Электрическое поле в пространстве взаимодействия эллиптически поляризовано, поскольку разность фаз  $x$ - и  $z$ -компонент равна  $\pi/2$ . Этот факт используется при создании мазеров.

Задавая в соответствии с (9.13, а) на границе раздела магнитное поле в виде  $h_r = H_0 \exp(-j\beta z)$ , находим в соответствии с (9.7) и (9.8)

$$H_0 \exp(-j\beta z) = \sum_{q=0}^{\infty} h_{pq}(0, z) = \sum_{q=0}^{\infty} h_{pq}(0) \cos[(\pi q/l)(z + l/2)],$$

где

$$h_{pq}(0) = (\alpha_q H_0 / l) \int_{-l/2}^{l/2} \exp(-j\beta z) \cos[(\pi q/l)(z + l/2)] dz,$$

$\alpha_q = 2$  при  $q \neq 0$ ,  $\alpha_q = 1$  при  $q = 0$ .

Ограничимся учетом только одной парциальной волны ( $q = 0$ ). Тогда имеем

$$h_{p0}(0) = H_{py}(0) = H_0 \sin(\beta l/2) / (\beta l/2).$$

Используя (9.5), находим компоненты поля в резонаторах

$$\begin{aligned} H_{py} &= H_0 [\sin(\beta l/2) / (\beta l/2)] \{\cos[k(x+h)] / \cos(kh)\}, \\ E_{py} &= H_0 j\rho [\sin(\beta l/2) / (\beta l/2)] \{\sin[k(x+h)] / \cos(kh)\}. \end{aligned} \quad (9.13, б)$$

Таким образом, задав магнитное поле на границе раздела в виде  $h_r = H_0 \exp(-j\beta z)$ , мы нашли компоненты поля (9.13) в пространстве взаимодействия и в резонаторах. Волновые числа  $k$  и  $\beta$  остались пока независимыми. Поэтому компоненты поля полностью еще не определены. Удовлетворив условиям сшивания (9.10, а), найдем зависимость  $k(\beta)$  в виде

$$(d/l) \gamma h \operatorname{th}[(w/h) \gamma h] = [\sin(\beta l/2) / (\beta l/2)]^2 k h \operatorname{tg}(kh), \quad (9.14, a)$$

а следовательно, и компоненты поля. Соотношение (9.14, а) представляет уравнение дисперсии гребенки.

Множитель  $[\sin(\beta l/2)/(\beta l/2)]^2$  обычно опускают, так как он близок к единице. При этом уравнение дисперсии записывается в виде

$$(d/l)\gamma h \operatorname{th}[(w/h)\gamma h] = kh \operatorname{tg}(kh). \quad (9.14, б)$$

Уравнения (9.14) определяют зависимость  $k(\gamma)$ . Учитывая, что  $k^2 = \beta^2 - \gamma^2$ , находим замедление

$$(d/l)\gamma h \operatorname{th}[(w/h)\gamma h] = kh \operatorname{tg}(kh). \quad (9.15)$$

При малых  $kh$  из (9.14, б) следует  $\gamma^2 = (lh/wd)k^2$ . В результате получаем асимптотическую оценку замедления при низких частотах

$$n = \beta/k = (1 + lh/wd)^{1/2}. \quad (9.16)$$

Выражение (9.16) означает, что при низких частотах коэффициент замедления гребенки превышает единицу. В реальных гребенках  $l/d < 1$ ,  $h/d < 20$ . Отсюда следует, что  $0 < n < 5$ .

## 9.7. Расчет сопротивления связи

Как отмечено выше, сопротивление связи бесконечно широкой гребенки равно нулю, поскольку бесконечно велик поток энергии через ее сечение. Реально она используется лишь в качестве модели гребенки конечной ширины  $p$ . Вычисляем поток энергии вдоль оси  $z$  для гребенки шириной  $p$ ,

$$P = \frac{1}{2} \int_0^w \int_0^p E_{px} H_y^* dx dy,$$

откуда с учетом (9.13 а) следует

$$P = (\rho/2)(\beta/k) \left[ p H_0^2 / \operatorname{ch}^2(\gamma w) \right] \int_0^w \operatorname{ch}^2[\gamma(w-x)] dx.$$

Вычислив интеграл и заменив  $H_0/\operatorname{ch}(\gamma w)$  на  $-j(k/\rho\gamma)[E_z(0)/\operatorname{sh}(\gamma w)]$  в соответствии с (9.13, а), получаем выражение для сопротивления связи гребенки

$$K_{cs} = (2\rho/kp)(\gamma/\beta)^3 \operatorname{sh}(\gamma w) / [\gamma w + \operatorname{sh}(\gamma w) \operatorname{ch}(\gamma w)]. \quad (9.17)$$

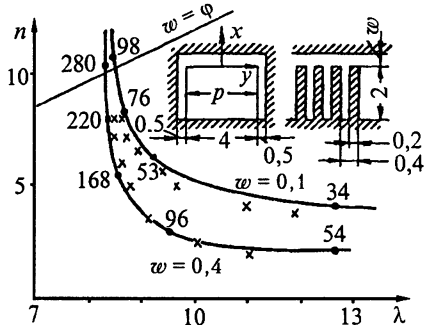
Сопротивление связи (9.17) вычислено для ленточного потока электронов, касающегося пластин гребенки. Чтобы определить сопротивление связи для потока, заполняющего все пространство взаимодействия, необходимо умножить результат на усредняющий множитель

$$\frac{1}{w|E_{nz}(0)|^2} \int_0^w |E_{nz}(x)|^2 dx = |\gamma w - \operatorname{sh}(\gamma w) \operatorname{ch}(\gamma w)| / 2\gamma w \operatorname{sh}^2(\gamma w). \quad (9.18)$$

На рис. 9.8 дано сравнение результатов расчета и измерений дисперсионной характеристики гребенки<sup>\*)</sup>. Расчет проведен по формуле (9.14, б).

\*) Всюду, где не оговорено, экспериментальные результаты получены с помощью измерения зондом или возмущающим телом на моделях, содержащих целое число периодов и короткозамкнутых в плоскостях симметрии. Ошибка измерения

**Рис. 9.8.** Сравнение результатов измерений (крестики) и расчетов (сплошные линии) дисперсионной характеристики гребенки в приближении одной волны. Числа — значения сопротивления связи в Ом, рассчитанные для ленточного потока электронов, касающегося зубьев



В результате рассмотрения графиков (рис. 9.8) может сложиться впечатление, что приближение одной волны обеспечивает достаточную точность при высоких замедлениях. В действительности это приближение может привести к большим ошибкам, если размеры  $d$  и  $h$  сравнимы.

Выше дана качественная оценка дисперсионных характеристик широкой гребенки и проведен расчет коэффициента замедления и сопротивления связи в приближении одной волны. Более точный анализ описан в работах [2, 7, 8–10, 12, 15, 16, 26]. Эти характеристики можно рассчитать и проекционным методом, описанным в гл.10.

## 9.8. Метод эквивалентных схем

Входную проводимость резонаторов вычисляем по формуле (9.12, а) с учетом (9.13, б),

$$Y_p = -(j/\rho)(p/l)\operatorname{ctg}(kh), \quad (9.19)$$

где  $\rho = (\mu_0/\epsilon_0)^{1/2} = 120\pi \approx 377$  Ом,  $p$  — ширина резонатора, а  $l$  и  $h$  — размеры, указанные на рис. 9.8 и 9.9. Зависимость  $Y_p$  от  $h/\lambda = kh/2\pi$  изображена на рис. 9.9 (см. ниже) сплошной линией. Там же приведены две эквивалентные схемы резонатора и зависимости входных проводимостей от  $h/\lambda$ . Чем сложнее эквивалентная схема, тем в большем диапазоне удастся аппроксимировать входную проводимость резонатора.

Параметры эквивалентных схем обычно выбирают из следующих соображений. В интервале частот, для которого строится схема, требуют, чтобы проводимости резонатора ( $Y_p$ ) и контура ( $Y_k$ ) обращались в нуль (параллельный резонанс) и в бесконечность (последовательный резонанс) при одних и тех же частотах. Кроме того, требуют, чтобы на одной из этих частот  $\omega = \omega_p$  были одинаковы производные по частоте:

$$dY_p/d\omega \Big|_{\omega=\omega_p} = dY_k/d\omega \Big|_{\omega=\omega_p}.$$

Входную проводимость эквивалентной схемы, представленной параллельным контуром  $L_0C_0$ , можно выразить следующим образом:

ния сдвига фаз  $\varphi$  и частоты  $\omega$  при этом не превышает десятых долей процента и обусловлена погрешностями частотомера и изготовления модели.

$$Y_k = j\omega C_0 [1 - (\omega_p/\omega)^2] = j(2\pi c/\lambda) C_0 [1 - (\lambda/\lambda_p)^2].$$

Как и  $Y_p$ , проводимость  $Y_k$  при  $\omega \rightarrow 0$  стремится к  $-\infty$ . Требуя, чтобы  $Y_p = 0$  при  $\lambda = \lambda_p$ , находим значение резонансной длины волны:

$$\lambda_p = 4h. \quad (9.20)$$

Дифференцируя входную проводимость контура по частоте, находим

$$dY_k/d\omega \Big|_{\omega=\omega_p} = j2C_0,$$

откуда следует, что эквивалентную емкость резонатора можно вычислить по формуле

$$C_0 = (I/2j) dY_p/d\omega \Big|_{\omega=\omega_p}. \quad (9.21)$$

Подставляя (9.19) в (9.21), находим, что эквивалентная емкость прямоугольного резонатора определяется равенством

$$C_0 = \epsilon_0 h \rho / 2l \quad (9.22)$$

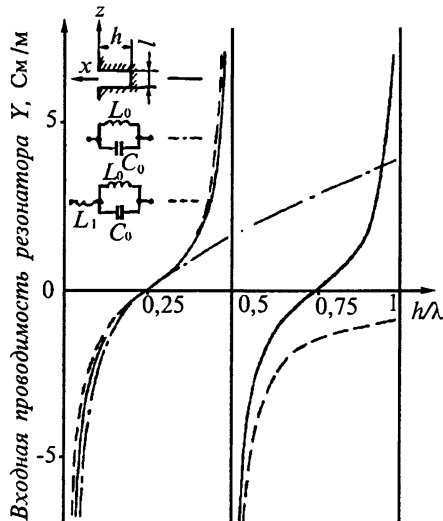
и равна половине емкости плоского конденсатора, образованного пластинами резонатора, разомкнутого в плоскости  $x = -h$ .

Свойства параллельного контура без потерь определяются двумя параметрами. Ими могут быть емкость  $C_0$  и индуктивность  $L_0$ , величины  $C_0$  и  $\lambda_p$ , либо  $L_0$  и  $\lambda_p$ . Приведенные три параметра связаны соотношением  $\lambda_p = 2\pi c(L_0 C_0)^{1/2}$ .

Параметры более сложной эквивалентной схемы на рис. 9.9 можно определить из условия равенства частот параллельного ( $Y = 0$ ) и последовательного ( $Y = \infty$ ) резонансов контура и резонатора, а также из условия равенства производных  $dY/d\omega \Big|_{\omega=\omega_p}$

при  $Y = 0$ . Первые два условия дают резонансные длины волн  $\lambda_p = 4h$  и  $\lambda_1 = 2h$ , где  $\lambda_p = 2\pi c(L_0 C_0)^{1/2}$ ,  $\lambda_1 = 2\pi c[L_0 L_1 C_0 / (L_0 + L_1)]^{1/2}$ , а последнее определяет эквивалентную емкость (9.22).

Сравнение входных проводимостей резонатора и его эквивалентных схем приведено на рис. 9.9. Параллельный контур  $L_0 C_0$  представляет достаточно точную эквивалентную схему при  $h/\lambda \leq 0,3$  (штрих-пунктирная линия), а контур  $L_0 L_1 C_0$  — при  $h/\lambda \leq 0,5$  (штриховая линия). Поскольку основная полоса пропускания гребенки лежит в области  $h/\lambda < 0,25$ , достаточную



**Рис. 9.9.** Сравнение входных проводимостей П-образного резонатора, рассчитанных методами электродинамики (сплошные линии) и эквивалентных схем (штриховые и штрих-пунктирная линия)

точность расчета дисперсионной характеристики обеспечивает эквивалентная схема в виде  $L_0C_0$ -контура. Его входная проводимость на рис. 9.9 обозначена  $Y_{к1}$ . Для  $L_0L_1C_0$ -контура она обозначена  $Y_{к1}$ . По существу, эквивалентная схема резонатора представляет дробно-линейную аппроксимацию его входной проводимости в определенном диапазоне частот.

**Эквивалентная схема пространства взаимодействия.** При составлении эквивалентной схемы резонатора используется лишь равенство входных проводимостей контура и резонатора в определенном диапазоне частот. Точно так же можно определить схему пространства взаимодействия. Оно представляет полость со многими входами. Проводимость со стороны каждого входа зависит не только от частоты, но и от поля в остальных входах. В связи с этим задача определения параметров эквивалентной схемы пространства взаимодействия значительно усложняется.

Расчет входной проводимости  $Y(\varphi)$  пространства взаимодействия ведем в предположении, что поля в соседних входах (соседних щелях) отличаются лишь по фазе  $\varphi$ . Ограничимся случаем больших замедлений, так что волновые уравнения можно заменить уравнениями Лапласа  $\Delta_{xz}\mathbf{E} = 0$  и  $\Delta_{xz}\mathbf{H} = 0$ . Поле, удовлетворяющее уравнениям Лапласа, называют *квазистатическим*.

В самом деле, пусть поле не зависит от координаты  $y$ . Для каждой гармоники оно удовлетворяет волновому уравнению:

$$\Delta_{xz}\mathbf{e}_m + k^2\mathbf{e}_m = \partial^2\mathbf{e}_m/\partial x^2 + (k^2 - \beta_m^2)\mathbf{e}_m = 0,$$

$$\Delta_{xz}\mathbf{h}_m + k^2\mathbf{h}_m = \partial^2\mathbf{h}_m/\partial x^2 + (k^2 - \beta_m^2)\mathbf{h}_m = 0.$$

При больших замедлениях ( $n_m = \beta_m/k \gg 1$ ) слагаемым  $k^2$  можно пренебречь по сравнению с  $\beta_m^2$ . При этом волновое уравнение становится уравнением Лапласа. Полное поле удовлетворяет уравнению Лапласа, если ему удовлетворяет поле каждой гармоники. Более того, можно показать, что при больших замедлениях в пространстве взаимодействия запасается в основном электрическая энергия:

$$\epsilon_0|E_x|^2 \gg \mu_0|H_y|^2, \quad \epsilon_0|E_z|^2 \gg \mu_0|H_y|^2.$$

В самом деле, выражения для компонент поля (9.5) через  $H_y$  верны не только для поля в целом, но и для каждой пространственной гармоники:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{e}_m(x) \\ \mathbf{h}_m(x) \end{bmatrix} \exp(-j\beta_m z) = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_m \\ \mathbf{h}_m \end{bmatrix} \exp(-\gamma x - j\beta_m z).$$

Подставляя последнее в (9.5) и учитывая, что  $\beta_m \equiv \gamma$  при больших замедлениях, находим

$$e_{mx} = -\rho(\beta_m/k)h_m, \quad e_{mz} = -j\rho(\beta_m/k)h_m.$$

Отсюда следует, что

$$\epsilon_0|e_{mx}|^2 \gg \mu_0|h_m|^2, \quad \epsilon_0|e_{mz}|^2 \gg \mu_0|h_m|^2,$$

так как  $\beta_m \gg k$ . Эти неравенства справедливы для каждой пространственной гармоники и, следовательно, для поля в целом.

Зная, что в пространстве взаимодействия преобладает энергия электрического поля, можно утверждать, что при больших замедлениях проводимость  $Y(\varphi)$  — емкостная:

$$Y(\varphi) = j\omega C_k(\varphi), \quad \varphi \neq 0. \quad (9.23)$$

Величина  $C_k(\varphi)$  [Ф/м] называется *краевой емкостью* и зависит от сдвига фаз  $\varphi$ . Ее расчет произведен в работах [2–4]. В общем случае, при малых замедлениях, проводимость может быть и не емкостной. В частности, достаточно строгий расчет  $Y(\varphi)$  эквивалентным статическим методом [2] показывает, что при малых замедлениях величина  $C_k(\varphi)$  может принимать отрицательные значения. При этом входная проводимость — индуктивная. В работах [3, 4] расчет  $C_k(\varphi)$  сделан в квазистатическом приближении. При  $\lambda \rightarrow \infty$  результаты расчетов обоими методами совпадают.

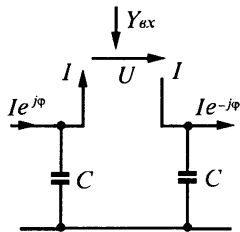
Емкость  $C = C(\varphi)$  пространства взаимодействия, соответствующая эквивалентной схеме, изображенной на рис. 9.10, связана с  $C_k(\varphi)$  равенством

$$C(\varphi) = 4 \sin^2(\varphi/2) C_k(\varphi), \quad (9.24)$$

которое можно получить, вычислив входную проводимость пространства взаимодействия

$$Y(\varphi) = j\omega C(\varphi)/4 \sin^2(\varphi/2). \quad (9.25)$$

При оценке дисперсионной характеристики с помощью эквивалентной схемы для простоты часто полагают, что емкость пространства взаимодействия не зависит от  $\varphi$ . В этих случаях ее считают равной  $C(\pi) = 4C_k(\pi)$  либо  $C(0)$ .



**Рис. 9.10.** Эквивалентная схема пространства взаимодействия

## 9.9. Расчет сопротивления связи методом эквивалентных схем

Уравнение (9.11 б) позволяет рассчитывать дисперсионную характеристику ЗС, если известны входные проводимости резонаторов и пространства взаимодействия. Для расчета сопротивления связи воспользуемся теоремой Фостера [1], согласно которой

$$\partial Y / \partial \omega = j4W / |U|^2. \quad (9.26)$$

Здесь  $Y = Y_p + Y(\varphi)$ ,  $W$  — энергия, запасенная в периоде ЗС, а  $U$  — напряжение (см. рис. 9.10).

Полагаем, что величины  $\omega$  и  $\varphi$  связаны уравнением дисперсии,  $Y = 0$ . Рассматривая (9.11, б) как неявную функцию  $\omega(\varphi)$ , найдем групповую скорость волны

$$v_g = d \cdot \frac{d\omega}{d\varphi} = d \cdot \frac{\partial Y(\varphi) / \partial \varphi}{\partial Y / \partial \omega} = \frac{d|U|^2}{4jW} \frac{\partial Y(\varphi)}{\partial \varphi}.$$

Отсюда следует, что

$$|U|^2 / (4jP) = [\partial Y(\varphi) / \partial \varphi]^{-1},$$

где  $P = Wv_g/d$  — поток энергии через систему.

Подставляя последнее выражение в (5.5), получим

$$K_{св} = \frac{2M^2/\varphi^2}{|\partial Y(\varphi)/\partial \varphi|}. \quad (9.27)$$

При расчете входной проводимости  $Y(\varphi)$  методом эквивалентных схем из (9.27) следует (5.76).

Подставляя (9.25) в (9.27), получим следующее выражение для сопротивления связи гребенки:

$$K_{св} = 120F(\varphi)\lambda \operatorname{tg}(\varphi/2)/\hat{C}. \quad (9.28)$$

Здесь  $\hat{C} = C/\epsilon_0$ , использовано обозначение (5.6 в),

$$F(\varphi) = M^2 \sin^2(\varphi/2)/(\varphi/2)^2,$$

и предполагается, что  $C(\varphi) = C$  не зависит ни от частоты, ни от  $\varphi$ .

Коэффициент формы  $M$  пространства взаимодействия равен, по существу, амплитуде той пространственной гармоникой,

$$M = \frac{1}{d} \int_{-l/2}^{l/2} E_z(z) \exp(-j\beta z) dz, \quad (9.29)$$

с полем которой взаимодействуют электроны, при условии, что величина  $U/d = 1$ .

Для грубой оценки сопротивления связи удобно пользоваться выражением

$$M = \sin(\beta l/2)/(\beta l/2), \quad (9.30)$$

которое получается, если положить в (9.29), что поле  $E_z$  между пластинами не зависит от координаты  $z$ , т.е.  $E_z(z) = U/l$  при  $|z| \leq l/2$  и  $x = 0$ ;  $E_z(z) = 0$  при  $l/2 \leq |z| \leq d/2$  и  $x = 0$ .

Следует заметить, что реальное поле зависит от координаты  $z$ . Оно существенно возрастает вблизи углов пластин (при  $z \rightarrow \pm l/2$  и  $x = 0$ ). Кроме того, формула (9.30) не учитывает зависимость  $M$  от размера  $w$  пространства взаимодействия. Она дает ошибку, не превышающую 30 %, если  $l/d \leq 0,5$ ,  $w/d \geq 0,5$ ,  $\varphi \leq 1,5\pi$ .

Выражения для  $M$ , учитывающие особенность поля вблизи углов пластин, приведены в работах [2, 8]. Значения  $F(\varphi)$  приведены в табл. 9.1. Они получены в статическом приближении ( $\lambda \rightarrow \infty$ ) с учетом особенностей поля для случая  $w \rightarrow \infty$  и дают погрешность не более 15 % при  $w/d \geq 2$ .

Сопротивление связи, вычисленное по формуле (9.28), не зависит от параметров резонаторов ( $\lambda_p$  и  $C_0$ ), если только заданы сдвиг фаз  $\varphi$  и длина волны  $\lambda$ . Иными словами, при любой форме резонатора (П-образный, лоаточный, щель-отверстие) сопротивление связи остается одним и тем же при неизменной форме пространства взаимодействия (емкость  $C$  и коэффициент формы  $M$ ). Это утверждение, казалось бы, противоречит теории и практике построения резонаторов для магнетронов, так как от формы резонаторов зависит эффективность взаимодействия электронов с полем. Следует, однако,

Значения  $F(\varphi)$ 

Таблица 9.1

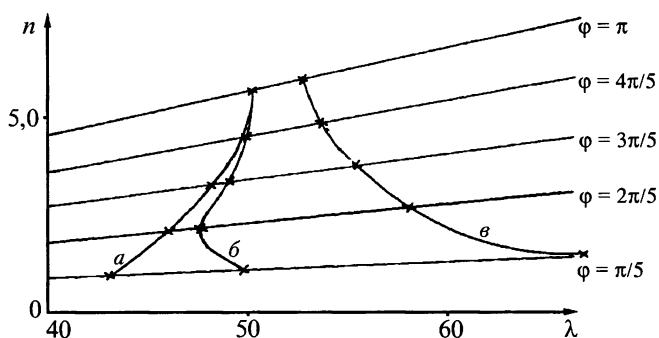
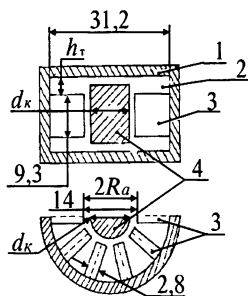
$\varphi/\pi$	$w/d$	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.62	0.72	0.81	0.87	0.90	0.96	0.98	1.0
0.10	0.99	0.99	0.99	0.98	0.98	0.97	0.95	0.94	0.92	0.91	0.90	0.88	0.87	0.87	
0.20	.97	.97	.96	.95	.94	.92	.89	.86	.83	.81	.79	.76	.75	.73	
0.30	.93	.93	.92	.90	.88	.86	.82	.78	.74	.71	.69	.65	.64	.61	
0.40	.88	.87	.86	.84	.82	.79	.74	.70	.65	.61	.59	.54	.53	.50	
0.50	.81	.81	.79	.77	.75	.71	.66	.61	.55	.52	.49	.45	.43	.41	
0.60	.74	.73	.72	.70	.67	.63	.57	.52	.47	.43	.41	.36	.34	.32	
0.70	.66	.65	.64	.62	.59	.55	.49	.44	.39	.35	.33	.29	.27	.25	
0.75	.62	.61	.60	.57	.54	.51	.45	.40	.35	.31	.30	.25	.24	.22	
0.80	.57	.57	.55	.53	.50	.46	.41	.36	.31	.28	.26	.22	.21	.19	
0.90	.49	.48	.47	.45	.42	.39	.34	.29	.25	.22	.20	.17	.16	.14	
1.00	.41	.40	.39	.37	.34	.31	.27	.23	.19	.16	.15	.12	.11	.10	
1.10	.33	.32	.31	.30	.27	.25	.21	.17	.14	.12	.11	.088	.080	.071	
1.20	.25	.25	.24	.23	.21	.19	.15	.13	.10	.086	.078	.061	.055	.048	
1.25	.22	.22	.21	.20	.18	.16	.13	.11	.086	.071	.064	.050	.045	.039	
1.30	.19	.19	.18	.17	.15	.14	.11	.090	.071	.059	.053	.041	.037	.031	
1.40	.14	.13	.13	.12	.11	.094	.076	.060	.047	.038	.034	.026	.023	.020	
1.50	.090	.089	.085	.079	.070	.061	.048	.038	.029	.023	.020	.015	.013	.011	
1.60	.055	.054	.051	.047	.042	.036	.028	.022	.016	.013	.011	.008	.007	.006	
1.70	.029	.028	.027	.025	.022	.019	.014	.011	.008	.006	.005	.004	.003	.003	
1.75	.019	.019	.018	.017	.015	.012	.009	.007	.005	.004	.003	.002	.002	.002	
1.80	.012	.012	.011	.010	.009	.008	.006	.004	.003	.002	.002	.001	.001	.001	
1.90	.003	.003	.003	.002	.002	.002	.001	.001	.001	.001	.000	.000	.000	.000	
2.00	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	

помнить, что сопротивление связи (9.28) вычисляется для бегущей волны в пренебрежении потерями, тогда как в магнетроне имеет место стоячая волна и эффективность существенно зависит от потерь. Если менять параметры резонатора ( $\lambda_p$  и  $C_0$ ) так, чтобы сохранить неизменными величины в (9.28), то окажется, что волновое сопротивление резонаторов  $\rho = (L_0/C_0)^{1/2}$  и групповая скорость волны меняются одинаково. В выражение эффективности взаимодействия для магнетрона входит волновое сопротивление  $\rho$ , но не входит групповая скорость. В этом состоит существенная разница свойств гребенки для приборов с бегущей волной и для магнетронов.

Результаты исследования ЗС типа гребенка и диафрагмированный волновод см. также в работах [17–19, 24].

Дисперсионная характеристика гребенки конечной ширины может существенно измениться, если ее свернуть в кольцо (рис. 9.11), как это обычно делают в магнетронах. Если эту гребенку ограничить крышками, не касающимися зубьев, то знак дисперсии может измениться, что объясняется изменением взаимной индуктивности соседних резонаторов. В несвернутых системах оно компенсируется изменением взаимной емкости зубьев, а в



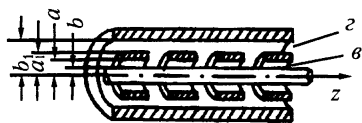
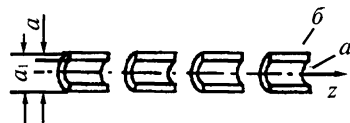


**Рис. 9.11.** Кривые дисперсии гребенки конечной ширины, свернутой в кольцо (1 — крышка торцевой полости, 2 — торцевая полость, 3 — зубья, 4 — катод), полученные в результате измерений при: *a* —  $d_k = 2$ ,  $h_T = 2$ ; *б* —  $d_k = 10$ ,  $h_T = 1,5$ ; *в* —  $d_k = 10$ ,  $h_T = 4,6$

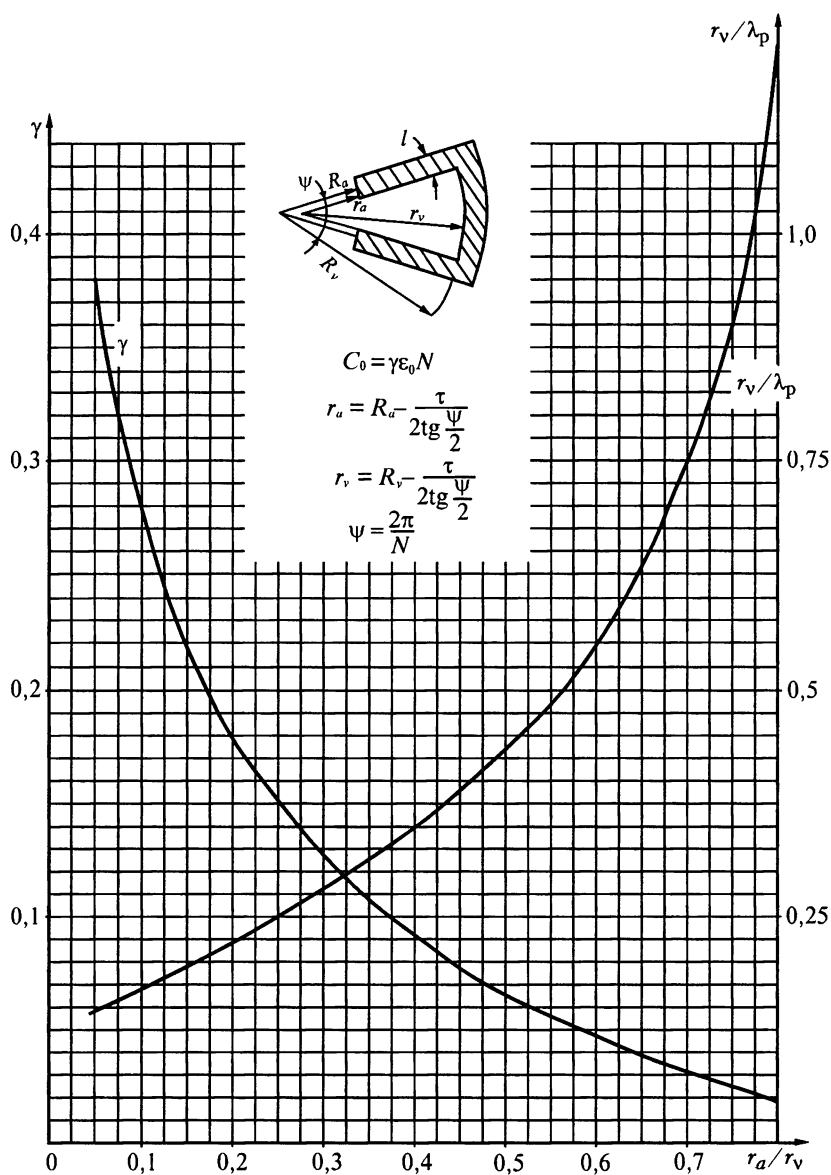
свернутых — не компенсируется. В системах, свернутых в кольцо, волна бежит по окружности с некоторой угловой скоростью. Поэтому замедление зависит от радиуса. Величина замедления, указанная на рис. 9.11, соответствует  $r = r_a$ .

## Упражнения

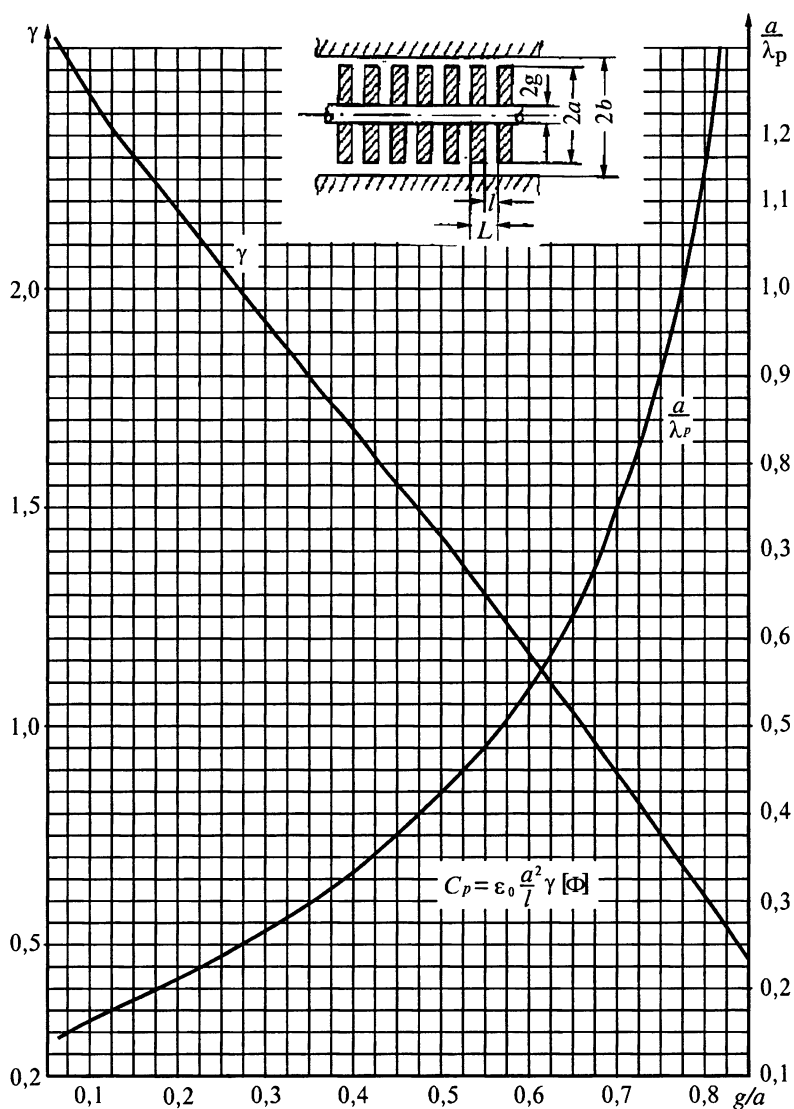
- 9.1.** Проследить качественно динамику изменения дисперсионных кривых диафрагмированного волновода (рис. 9.1, *в*) при достаточно тонких диафрагмах ( $d = l$ ) по мере уменьшения радиуса отверстий  $g$ , начиная от *a*.
- 9.2.** Найти входные проводимости пространств взаимодействия, изображенных на рис. 9.12, в приближении одной волны.
- 9.3.** Найти входные проводимости резонаторов, изображенных на рис. 9.13, 9.14 и 9.15.
- 9.4.** Найти эквивалентные емкости резонаторов, изображенных на рис. 9.5, 9.6 и 9.7.
- 9.5.** С помощью графиков (рис. 9.13–9.15) найти собственные частоты и эквивалентные емкости резонаторов: лопаточного, двух типов тороидальных и щель-отверстие.



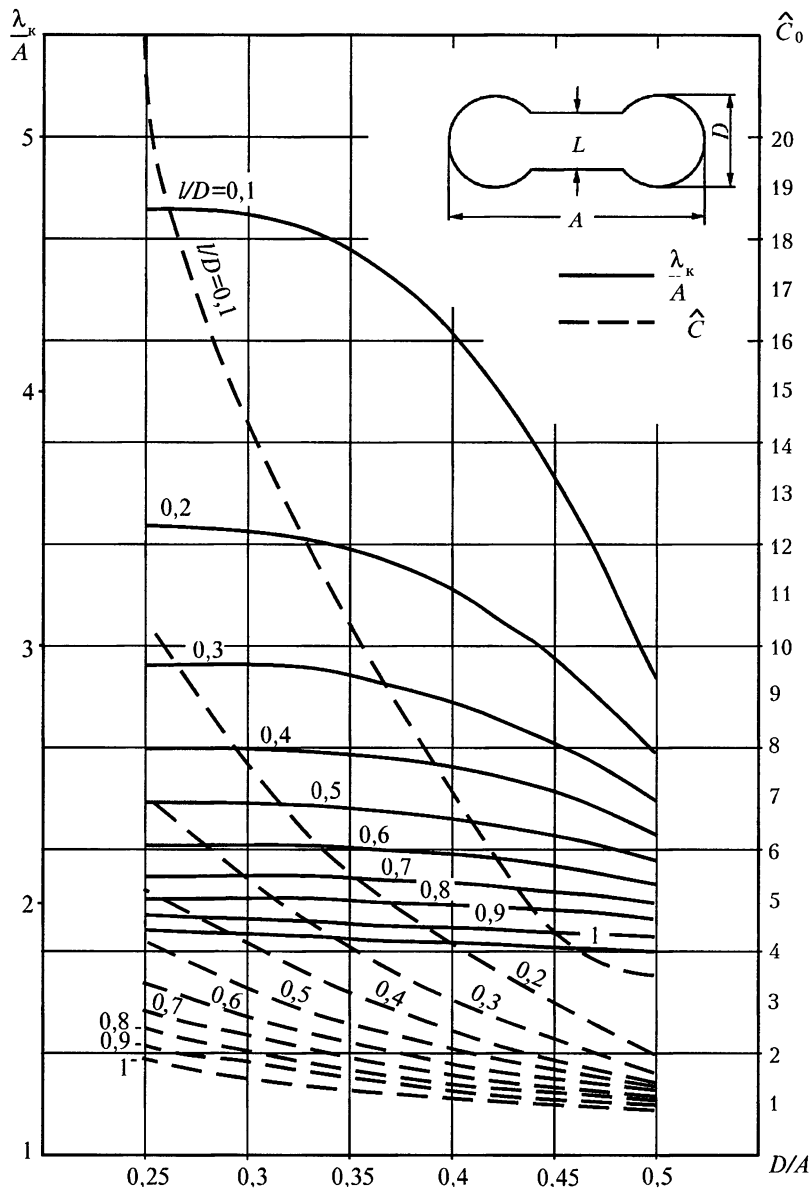
**Рис. 9.12.** Разновидности пространств взаимодействия систем с осью  $C_\infty$



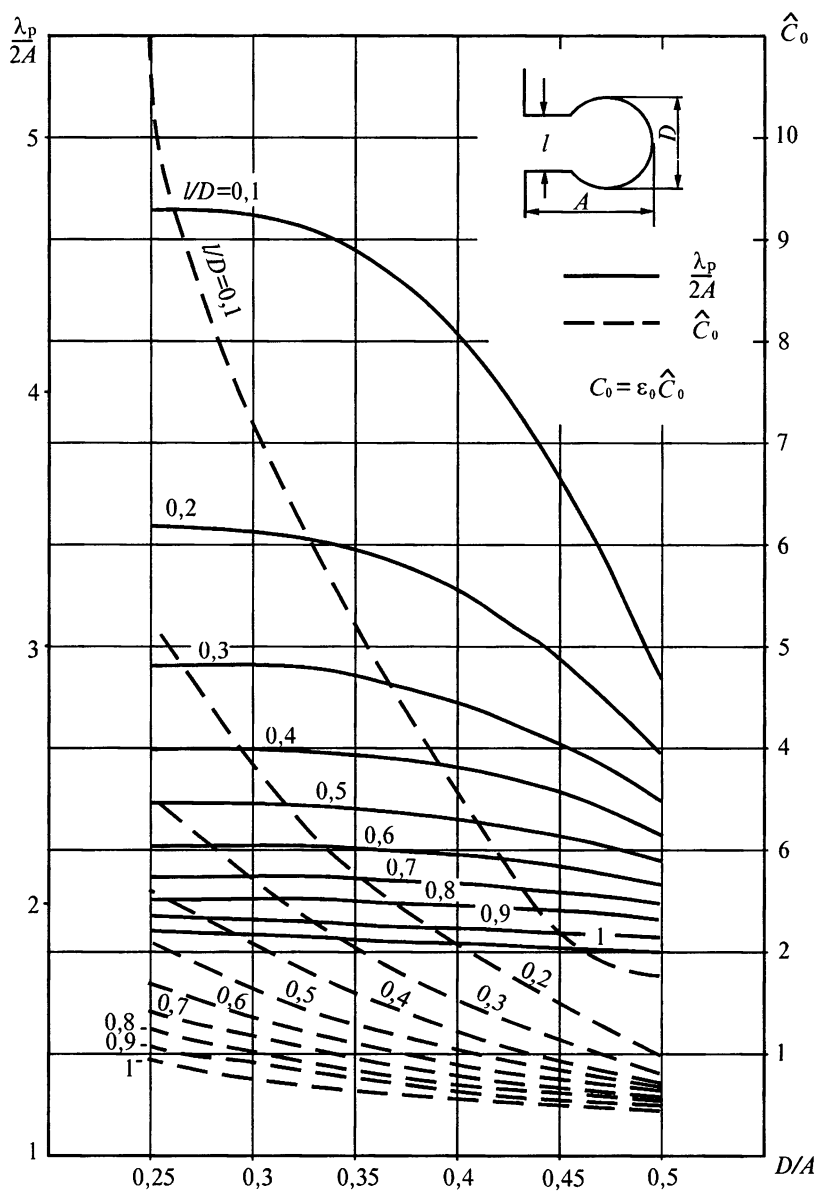
**Рис. 9.13.** Графики для расчета параметров эквивалентной схемы лопаточного резонатора



**Рис. 9.14.** Графики для расчета параметров эквивалентной схемы тороидального резонатора на стержне



**Рис. 9.15.** Графики для расчета параметров эквивалентной схемы тороидального резонатора в волноводе



**Рис. 9.16.** Графики для расчета параметров эквивалентной схемы резонатора типа «щель-отверстие»

### Список литературы

- [1]. Альтман Дж. Устройства сверхвысоких частот. Под ред. И. В. Лебедева. М.: Мир, 1968. 487 с.  
Перевод кн.: Altman J. L. Microwave circuits. Princeton: D. Van Nostr. and Co., 1964.
- [2]. Белуга И. Ш. Расчет резонаторных замедляющих систем эквивалентным статическим методом. *Изв. вузов. Радиофизика*, 8, 1961, 4(4), 689–702.
- [3]. Белуга И. Ш. Расчет многопроводной линии с проводниками прямоугольного поперечного сечения. В кн.: Труды конференций по электронике СВЧ. Вып. 9(16). *Электроника*. М.: Ин-т "Электросила", 1969, 171–186.
- [4]. Белуга И. Ш. К расчету полей поперечных электромагнитных волн в штыревых замедляющих системах. *Изв. вузов. Радиофизика*, 1959, 11(1), 84–93.
- [5]. Белуга И. Ш. О методах частичных областей, основанных на стационарности некоторых функционалов. *Радиотехника и электроника*, 1961, 6(3), 459–468.
- [6]. Белуга И. Ш. К расчету волноводов и резонаторов методами частичных областей (скалярная задача). *Радиотехника и электроника*, 1968, 13(8), 1357–1364.
- [7]. Белуга И. Ш., Морозов В. С., Фролов А. Г. Расчет характеристик двумерной гребенки. *Вопросы радиоэлектроники. Сер. 1. Электроника*, 1964. Вып. 11, 137–160.
- [8]. Белуга И. Ш. Расчет характеристик некоторых штыревых и резонаторных замедляющих систем. *Вопросы радиоэлектроники. Сер. 1. Электроника*, 1963. Вып. 1, 71–120.
- [9]. Бузик Л. И. Дисперсия и затухание гребенчатых замедляющих систем вне полос пропускания. *Изв. вузов, Радиофизика*, 1971, 14(12), 1878–1890.
- [10]. Бузик Л. М., Гаплевский В. В. Расчет амплитуд пространственных гармоник плоской гребенчатой замедляющей системы. *Электронная техника. Сер. 1. Электроника*, 1968. Вып. 12, 36–42.
- [11]. Вайнштейн Л. А. Электромагнитные волны. Изд. 2-е, перераб. и доп. М.: Радио и связь, 1988. 440 с.
- [12]. Диденко А. Н. Использование метода нормальных волн для расчета диафрагмированных волноводов прямоугольного сечения. *Журн. теор. физики*, 1965, 25(5), 967–969.
- [13]. Найдено В. И., Дубровка Ф. Ф. Аксиально симметричные периодические структуры и резонаторы. Киев: Вища школа, 1985. 224 с.
- [14]. Еремка В. Д., Кириченко А. Я. Об использовании высших типов колебаний гребенки при умножении частоты в миллиметровом диапазоне. В кн.: Научно-техническое общество радиотехники, электроники и связи им. А. С. Попова. Научная сессия, посвященная Дню радио и Дню связиста. Вып. 3. Аннотации и тезисы докладов. М.: 1971, 30–31.
- [15]. Коваленко Е. С., Шиманский В. И. Синфазные волны в диафрагмированном волноводе прямоугольного сечения. *Изв. вузов. Радиотехника*, 1960, 3(2), 153–157.
- [16]. Коваленко Е. С., Коваленко В. С. К теории диафрагмированного волновода прямоугольного сечения. *Изв. вузов. Радиотехника*, 1961, 4(1), 11–25.

- [17]. Короза В. И., Майоров Ю. К. Об одном способе классификации полос пропускания периодических волноводов. В кн.: Ускорители. Вып. 9. М.: Атомиздат, 1969, с. 73.
- [18]. Короза В. И., Масунов Э. С. Качественная теория распространения электромагнитных волн в одномерно-периодических волноводных замедляющих системах. *Радиотехника и электроника*, 1970, **15**(3), 1594–1603.
- [19]. Краснушкин П. Е., Ломнев С. П. Методы точного расчета однородных ячеистых волноводов. *Радиотехника и электроника*, 1966, **11**(6), 1051–1065.
- [20]. Накрап И. А., Самохин Г. С., Стриженко В. С., Силин Р. А. Характеристики замедляющей системы типа “гребенка” в полосах непропускания. *Электронная техника. Сер. 1. Электроника СВЧ*, 1973, Вып. 12, 36–44.
- [21]. Русин Ф. С., Богомолов Г. Д. Колебательная система оротрона. В кн.: Электроника больших мощностей. Вып. 5. М.: Наука, 1968, 38–44.
- [22]. Самохин Г. С., Силин Р. А., Малькова Н. Я. Дисперсии и сопротивление связи замедляющих систем на высших типах волн. *Электронная техника. Сер. 1. Электроника СВЧ*, 1968. Вып. 7, 78–94.
- [23]. Самохин Г. С., Силин Р. А. Высшие типы волн в гребенчатых замедляющих системах. *Электронная техника. Сер. 1. Электроника СВЧ*, 1978. Вып. 5, 3–11; Вып. 6, 11–19.
- [24]. Силин Р. А. Высшие типы распространяющихся и затухающих волн в идеальной гребенке. Лекции по электронике СВЧ. Кн. 1. Саратов: Саратовский университет, 1974. 66–111.
- [25]. Справочник по волноводам. Под ред. Я. Н. Фельда. М.: Сов. радио, 1952, 431 с. П е р е в о д к н.: Marcuvitz N. Waveguide handbook. Ed. by N. Marcuvitz. New York: McGraw Hill, 1951. 426 p.
- [26]. Цимринг Ш. Е. Вариационный метод расчета волноводов с периодическими неоднородностями. *Радиотехника и электроника*, 1957, **11**(1), 3–4; **11**(6), 969–988.

## Цепочки связанных резонаторов

### 10.1. Оценка характеристик цепочки связанных резонаторов с помощью эквивалентных схем

В лампах с бегущей волной повышенной мощности широко используются ЗС типа цепочки связанных резонаторов (ЦСР). К ним относятся диафрагмированные волноводы (рис. 2.1, а, б; рис. 2.2, з), лепесток клевера (рис. 2.2, в) и ряд других. Грубую оценку характеристик ЦСР можно сделать с помощью эквивалентной схемы, приведенной на рис. 10.1.

Расчет характеристик ЦСР чаще всего ведут различными приближенными методами [1, 3, 5, 6, 14]. В настоящей главе на примере эквивалентной схемы сначала оцениваются основные свойства ЦСР, а затем описан электродинамический метод расчета, обеспечивающий погрешность определения длин волн не выше 2 % и сопротивления связи не выше 10 %.

Рассмотрим сначала ЦСР с плоскими диафрагмами (рис. 2.1, в), т.е. без трубок дрейфа, которые вводятся для повышения сопротивления связи на пространственной гармонике, используемой в ЛБВ. ЗС с плоскими диафрагмами иногда применяют в ЛБВ миллиметрового диапазона, так как трудно делать трубки дрейфа в миниатюрных диафрагмах. В схеме на рис. 10.1 контур  $L, L_0, C_0$  отображает резонатор, а  $L_{\text{ш}}, C_{\text{ш}}$  — отверстие в диафрагме (щель связи). Эта схема одинакова для ЦСР и для гребенки конечной ширины (ведь гребенка представляет частный случай ЦСР). Вид характеристик ЗС зависит от параметров эквивалентной схемы.

Величина  $\lambda_{\text{ш}} = 2\pi c(L_{\text{ш}}C_{\text{ш}})^{1/2}$  равна резонансной длине волны щели связи, которую приближенно можно оценить как критическую длину волны волновода соответствующего сечения [11]. Емкость  $C_{\text{ш}}$  щели в диафрагме толщиной  $d - l$  определяется соотношением  $C_{\text{ш}} = \epsilon_0(d - l)\hat{C}$ , где  $\hat{C}$  — нормированная к  $\epsilon_0$  погонная емкость волновода, связанная с его волновым сопротивлением  $Z_{UP} = U^2/2P$  ( $U$  — напряжение,  $P$  — мощность) соотношением

$$Z_{UP} = (120\pi/\hat{C})[1 - (\lambda/\lambda_{\text{ш}})^2]^{1/2}.$$

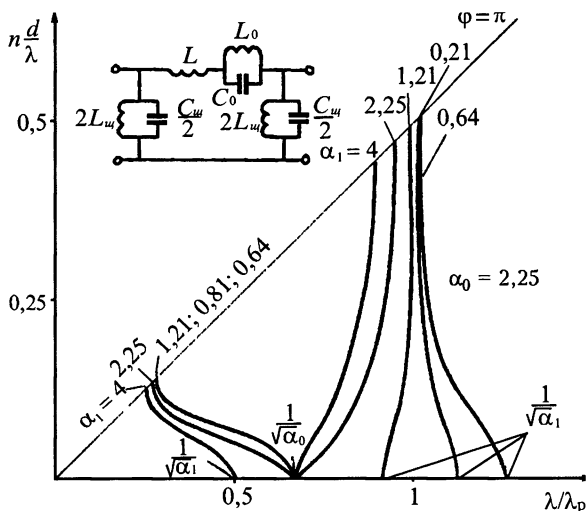
В частности, для узкой щели длиной  $l_1$  и шириной  $w$

$$\lambda_{\text{ш}} \approx 2l_1, \quad C_{\text{ш}} \approx \epsilon_0(d - l)l_1/2w. \quad (10.1)$$

В случае  $N$  одинаковых щелей в диафрагме величину  $C_{\text{ш}}$  следует умножить на  $N$ .

Величина  $\lambda_1 = 2\pi c[LL_0C_0/(L_0 + L)]^{1/2}$  соответствует одной из границ пропускания  $\phi = 0$  (рис. 10.1). При этом каждая плоскость симметрии представляет электрическую стенку. Величина  $\lambda_1$  равна собственной длине волны соответствующего четырехполюсника при условии, что его полюсы короткозамкнуты.





**Рис. 10.1.** Эквивалентная схема ЦСР и ее кривые дисперсии, рассчитанные при различных отношениях  $\alpha_1$  квадратов собственных длин волн резонатора  $\lambda_p$  и щели связи  $\lambda_{ш}$ . При  $\alpha = 1,21; 0,81; 0,64$  во второй полосе кривые графически совпадают.

$$\sin^2(\varphi/2) = (\alpha_2/x^2)(1-\alpha_1x^2)(1-\alpha_0x^2)/(1-x^2); \quad \alpha_0 = \lambda_p^2/\lambda_1^2 = 1 + L_0/L; \quad \alpha_1 = \lambda_p^2/\lambda_{ш}^2 = L_0C_0/L_{ш}C_{ш};$$

$$\alpha_2 = LC/4L_0C_0; \quad \lambda_p = 2\pi c(L_0C_0)^{1/2}; \quad \lambda = 2\pi c(L_{ш}C_{ш})^{1/2}; \quad \lambda_1 = 2\pi c[L_0L_0C_0/(L_0+L)]^{1/2}; \quad x = \lambda/\lambda_p$$

Такое расположение стенок в ЗС соответствует волне  $E_{01}$  в критическом режиме (см. рис. 10.2). Поэтому

$$\lambda_1 = 2,61g. \quad (10.2)$$

Гораздо труднее определить  $\lambda_p$  и  $C_0$ . Длина волны  $\lambda_p = 2\pi c(L_0C_0)^{1/2}$  соответствует собственным колебаниям четырехполюсника при условии, что контур  $L_{ш}C_{ш}$  отключен. Этому соответствует на рис. 10.2 условие, при котором образующие отверстия в диафрагмах представляют магнитные стенки.

Эквивалентная схема описывает две полосы пропускания ЗС. В коротковолновой полосе дисперсия всегда положительная, а в длинноволновой она либо положительная (при  $\lambda_{ш} > \lambda_p$ , т.е.  $\alpha_1 < 1$ ), либо отрицательная (при  $\lambda_{ш} < \lambda_p$ ). Соотношение  $\lambda_{ш} > \lambda_p$  соответствует большим размерам щели связи. Оно справедливо, например, для гребенки конечной ширины (рис. 9.8). Неравенство  $\lambda_{ш} < \lambda_p$  справедливо для ЦСР, изображенной на рис. 10.2.

Из многочисленных работ по приближенному расчету характеристик ЦСР наибольшее применение и развитие в [1, 3] нашла работа [14]. В ней получено следующее уравнение дисперсии:

$$\sin^2 \frac{\varphi}{2} = \frac{1}{\alpha_{ш} \operatorname{tg} \left( \pi / \left( 2x\sqrt{\alpha_3} \right) \right) - (\pi / 2x\sqrt{\alpha_3})} \equiv \frac{(8/3\pi)\alpha_3^{1/2}(1-\alpha_3x^2)(1-x^2)}{\alpha_{ш} x^2}. \quad (10.3)$$

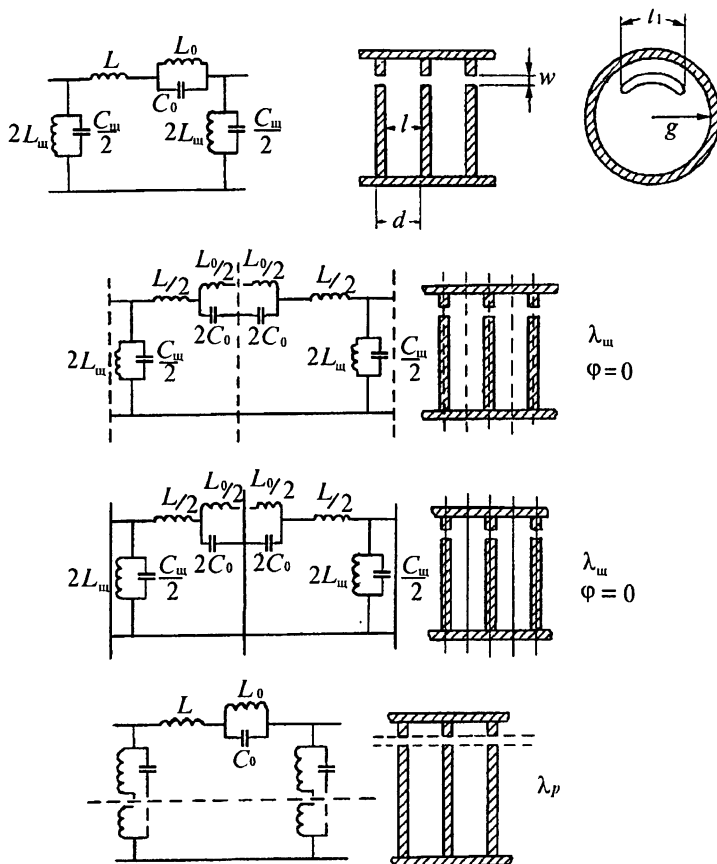


Рис. 10.2. К определению параметров эквивалентной схемы ЦСР

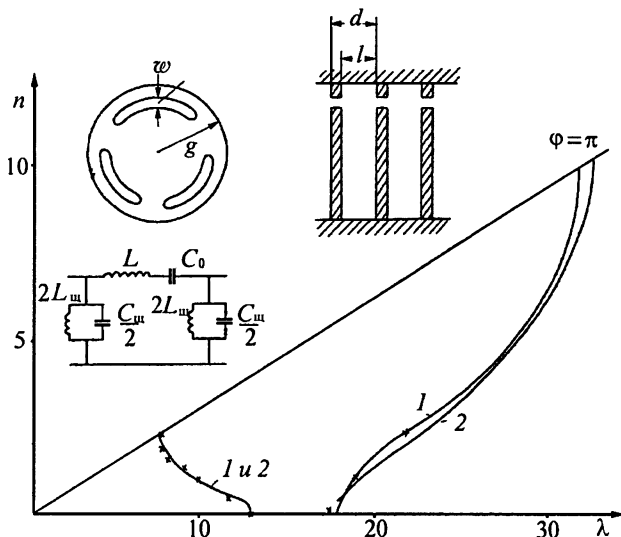
Здесь  $x = \lambda/\lambda_1$ ,  $\alpha_3 = \lambda_1^2/\lambda_{ш}^2 \cong (1,305 g/l_1)^2$ ,  $\lambda_1 = 2,61g$ ,  $\alpha_{ш} = 0,18(g/l)(Z_0/N)$ , где  $Z_0 = w/(d-l)$  — нормированное к  $(\mu_0/\epsilon_0)^{1/2}$  волновое сопротивление линии, образованной щелью длиной  $l_1$ ,  $\lambda_{ш} = 2l_1$ ,  $N$  — число щелей в диафрагме.

Это уравнение по существу совпадает с уравнением дисперсии, приведенным на рис. 10.1, если положить  $L_0 = \infty$  (см. рис. 10.3). Сравнивая коэффициенты уравнений дисперсии (10.3) и на рис. 10.1, получим следующие выражения для емкости и коэффициента:

$$C_0 \cong 0,0068 l_1^2 \epsilon_0 / l,$$

$$(8/3\pi) \alpha_3^{1/2} \alpha_k^{-1} \cong 6,151 l(d-l_1)N/w l_1.$$

На рис. 10.3 дано сравнение кривых дисперсии ЦСР, полученных в результате измерений [14] и расчета по формуле (10.3). Погрешность расчета для данного частного случая не превышает 10 %.



$$\lambda_{\text{ш}} = 17,5; \quad \lambda_1 = 12,5; \quad N = 3; \quad w = 0,48; \quad l = 1,52; \quad d - l = 0,076;$$

$$\sin^2(\varphi/2) = \alpha_4(1 - \alpha_3 x^2)(1 - x^2)/x^2; \quad x = \lambda/\lambda_1; \quad \lambda_1 = 2\pi c(LC_0)^{1/2};$$

$$\lambda_{\text{ш}} = 2\pi c(L_{\text{ш}}C_{\text{ш}})^{1/2}; \quad \alpha_3 = \lambda_1^2/\lambda_{\text{ш}}^2; \quad \alpha_4 = C_{\text{ш}}/4C_0.$$

**Рис. 10.3.** Сравнение результатов измерений (крестики) и расчета (сплошные линии) дисперсионных характеристик ЦСР, рассчитанных по формуле (10.3) — кривая 1 из [14] и по эквивалентной схеме — кривая 2

До сих пор рассматривались только плоские диафрагмы. Реально для повышения сопротивления связи на минус первой гармонике диафрагмы делают со втулками (рис. 2.1, б). Введение втулок приводит к смещению кривых дисперсии в сторону длинных волн. Втулки существенно увеличивают емкость  $C_0$  и меньше —  $C_{\text{ш}}$ . Поэтому они больше влияют на границу полосы пропускания при  $\varphi = \pi$ , нежели при  $\varphi = 0$ .

Ниже описан электродинамический метод расчета, требующий применения ЭВМ [10], но отличающийся универсальностью. Он применим к широкому классу ЗС.

Суть описанного ниже (в п.10.2 – 10.5) метода состоит в том, что сначала ячейку ЦСР разбивают на отрезки гладких однородных волноводов (производится декомпозиция). Поля нормальных волн в каждом из волноводов рассчитываются методом конечных элементов [9, 15]. Затем поля соседних волноводов «сшиваются» проекционным методом [2, 8, 10, 16] (производится рекомпозиция). В результате определяется матрица рассеяния ячейки ЗС или ее половины, ограниченной плоскостями симметрии. Зная эти матрицы, можно рассчитать характеристики ЦСР.

Опишем подробнее этот метод, рассмотрев сначала расчет характеристик гладкого волновода, а затем метод сшивания полей соседних волноводов.

## 10.2. Структура поля в гладком волноводе

Как и ранее, полагаем, что диссипация энергии отсутствует, так что из (2.8) следует, что данным граничным условиям при фиксированной частоте и уравнениям Максвелла (2.8) удовлетворяет поле  $(\mathbf{E}^*, -\mathbf{H}^*)$ , если им удовлетворяет поле  $(\mathbf{E}, \mathbf{H})$ . Это утверждение запишем в виде

$$\mathbf{E}, \mathbf{H} \Rightarrow \mathbf{E}^*, -\mathbf{H}^*. \quad (10.4)$$

Для  $s$ -й нормальной волны, распространяющейся в волноводе,  $\mathbf{E}_s(x, y, z) = \mathbf{E}_s(x, y)\exp(-j\beta_s z)$ , комплексному сопряжению соответствует изменение знака при  $\beta_s$ , т.е. изменение направления распространения волны. Для затухающих волн,  $\mathbf{E}_s(x, y, z) = \mathbf{E}_s(x, y)\exp(-\alpha_s z)$ , комплексное сопряжение характеризует условия, накладываемые на структуру поля, так как исходное и сопряженное поля — это одно и то же,

$$\mathbf{E}_s = \mathbf{E}_s^*, \quad \mathbf{H}_s = -\mathbf{H}_s^*, \quad (10.5)$$

означающее, что все компоненты электрического поля в любой точке волновода либо синфазны, либо противофазны и сдвинуты на  $\pm\pi/2$  относительно компонент магнитного поля.

Гладкий волновод можно рассматривать как частный случай волновода с периодом  $d \rightarrow 0$ , так что для распространяющейся волны в нем согласно (2.40) справедливы равенства

$$\begin{aligned} \pm \mathbf{E}_{\tau s}(x, y, 0) &= \mathbf{E}_{\tau s}^*(x, y, 0), \\ \pm \mathbf{H}_{\tau s}(x, y, 0) &= \mathbf{H}_{\tau s}^*(x, y, 0), \\ \mp E_{zs}(x, y, 0) &= E_{zs}^*(x, y, 0), \\ \mp H_{zs}(x, y, 0) &= H_{zs}^*(x, y, 0), \end{aligned} \quad (10.6)$$

где символ « $\tau$ » означает компоненты поля, перпендикулярные направлению распространения волны. Равенства (10.6) показывают, что в распространяющейся волне все компоненты поля, перпендикулярные направлению распространения, синфазны или противофазны между собой и сдвинуты по фазе на  $\pm\pi/2$  относительно продольных компонент.

При изучении волноводов вводят понятие волнового сопротивления как некоторой величины, пропорциональной отношению взаимно перпендикулярных компонент  $\mathbf{E}_\tau$  и  $\mathbf{H}_\tau$ . Само их отношение называют *характеристическим сопротивлением*. Коэффициент пропорциональности зависит от способа определения волнового сопротивления и от формы поперечного сечения волновода. Из (10.3) – (10.6) следует, что волновое сопротивление действительно для распространяющихся волн и мнимо для затухающих.

Теперь установим связь полей  $\mathbf{E}_s$ ,  $\mathbf{H}_s$  и  $\mathbf{E}_{-s}$ ,  $\mathbf{H}_{-s}$  одного и того же типа волны, возбуждаемого в противоположных направлениях,

$$h_s = -h_{-s}, \quad (10.7)$$

где  $h_s = j\beta_s$  для распространяющихся волн и  $h_s = \alpha_s$  — для затухающих. Для этого запишем уравнения Максвелла (2.8) в виде

$$\begin{aligned}
\partial H_z / \partial y + h_s H_y &= j(k/\rho) E_x, & \partial E_z / \partial y + h_s E_y &= -jk\rho H_x, \\
-h_s H_x - \partial H_z / \partial x &= j(k/\rho) E_y, & -h_s E_x - \partial E_z / \partial x &= -jk\rho H_y, \\
\partial H_y / \partial x - \partial H_x / \partial y &= j(k/\rho) E_z, & \partial E_y / \partial x - \partial E_x / \partial y &= -jk\rho H_z,
\end{aligned} \tag{10.8}$$

где  $k = \omega/c$  — волновое число и  $\rho = (\mu_0/\epsilon_0)^{1/2}$  — волновое сопротивление свободного пространства.

Видно, что уравнения Максвелла остаются теми же при изменении знака  $h$ , если компоненты  $\{\mathbf{E}_\tau, E_z, \mathbf{H}_\tau, H_z\}$  заменить на  $\{\mathbf{E}_\tau, -E_z, -\mathbf{H}_\tau, H_z\}$ , т.е. изменению направления распространения при условии  $\mathbf{E}_{\tau s} = \mathbf{E}_{\tau -s}$  соответствует изменение знаков при  $E_z$  и  $\mathbf{H}_\tau$ . Здесь, как и выше, индекс « $\tau$ » соответствует совокупности компонент  $x$  и  $y$ . Таким образом, если

$$\mathbf{E}_s, \mathbf{H}_s = \{\mathbf{E}_{\tau s}, E_{zs}, \mathbf{H}_{\tau s}, H_{zs}\},$$

то

$$\mathbf{E}_{-s}, \mathbf{H}_{-s} = \{\mathbf{E}_{\tau s}, -E_{zs}, -\mathbf{H}_{\tau s}, H_{zs}\}. \tag{10.9}$$

Эти соотношения остаются справедливыми как для распространяющихся, так и для затухающих волн.

Соотношение ортогональности (3.13) и нормировки (3.14) для гладкого волновода можно записать в виде

$$\frac{1}{2} \int_{\Sigma} ([\mathbf{E}_{s'}, \mathbf{H}_s] - [\mathbf{E}_s, \mathbf{H}_{s'}]) d\mathbf{s} = N_{s\Sigma} \delta_{s,s'},$$

где  $\delta_{s,s'}$  — символ Кронекера,  $\Sigma$  — область сечения волновода, а  $N_{s\Sigma}$  — норма  $s$ -й нормальной волны. Это соотношение можно записать иначе:

$$\frac{1}{2} \int_{\Sigma} ([\mathbf{E}_{-s'}, \mathbf{H}_s] - [\mathbf{E}_s, \mathbf{H}_{-s'}]) d\mathbf{s} = N_{s\Sigma} \delta_{s,-s'}.$$

По существу в эти выражения входят лишь поперечные компоненты поля  $\mathbf{E}_\tau$  и  $\mathbf{H}_\tau$ . С учетом (10.9) их можно записать в виде

$$\frac{1}{2} \int_{\Sigma} ([\mathbf{E}_{\tau s'}, \mathbf{H}_{\tau s}] - [\mathbf{E}_{\tau s}, \mathbf{H}_{\tau s'}]) d\mathbf{s} = N_{s\Sigma} \delta_{s,s'},$$

$$\frac{1}{2} \int_{\Sigma} ([\mathbf{E}_{\tau s'}, \mathbf{H}_{\tau s}] + [\mathbf{E}_{\tau s}, \mathbf{H}_{\tau s'}]) d\mathbf{s} = N_{s\Sigma} \delta_{s,-s'},$$

откуда следует более простое соотношение ортогональности для волн в гладком волноводе:

$$\frac{1}{4} \int_{\Sigma} [\mathbf{E}_{\tau s'}, \mathbf{H}_{\tau s}] d\mathbf{s} = N_{s\Sigma} \delta_{|s|, |s'|}. \tag{10.10, a}$$

Аналогично доказывается, что

$$\frac{1}{4} \int_{\Sigma} [\mathbf{E}_{\tau s'}, \mathbf{H}_{\tau s}^*] d\mathbf{s} = 0 \quad \text{при} \quad |s'| \neq |s|. \tag{10.10, б}$$

Для распространяющихся волн в соответствии с (10.6) норма  $N_{s\Sigma}$  действительна и численно равна потоку энергии, переносимому нормальной волной в гладком волноводе. Для затухающих волн в соответствии с (10.5) норма мнимая. В дальнейшем полагаем индексы  $s$  и  $s'$  положительными и знак модуля опускаем.

Поле в каждом волноводе рассчитывается методом конечных элементов. При этом все компоненты поля в каждом гладком волноводе можно выразить через некоторый скаляр. Для  $T$ -волн это потенциал электрического поля, для  $H$ - и  $E$ -волн — это продольные компоненты магнитного (для  $H$ -волн) или электрического (для  $E$ -волн) поля. Этим потенциалам ставятся в соответствие функционалы, стационарные значения которых определяют критические частоты волновода. Решение функционалов сводится к задаче на собственные значения матриц высокого порядка. Собственные решения этих матриц представляют значения продольных компонент поля в узлах сетки. Порядок матрицы равен количеству узлов сетки. Так, например, при сетке  $128 \times 128$  узлов матрица имеет порядок 16384. Каждый раз определяются только наименьшая критическая частота и соответствующее ей поле нормальной волны в волноводе. Для определения следующей критической частоты и соответствующего поля решение ищут в подпространстве, ортогональном к найденным собственным решениям. После вычисления продольных компонент  $H$ -поля находятся линии их уровня, которые совпадают с силовыми линиями поперечных  $E$ -компонент. Аналогично, линии уровня продольных  $E$ -компонент совпадают с силовыми линиями поперечных  $H$ -компонент. Для  $T$ -волн строятся эквипотенциали.

Полученные решения позволяют вычислить поперечные компоненты поля  $\mathbf{e}_{tm}$  и  $\mathbf{h}_{tm}$ , волновые сопротивления и коэффициенты затухания каждой из нормальных волн. Здесь  $m$  — номер волны. После расчета характеристик отдельных волноводов проекционным методом определяются характеристики сочленений каждой пары волноводов.

### 10.3. Матрицы проводимости и рассеяния отрезка волновода

Электромагнитное поле в ЗС удовлетворяет уравнениям Максвелла (2.8), следствием которых служат волновые уравнения (4.8). Поле нормальных волн в волноводе зависит от координаты  $z$  как  $\exp(-hz)$  и разбивается на две группы ( $H$ -волны и  $E$ -волны). Поперечные компоненты  $\mathbf{E}_\tau$  и  $\mathbf{H}_\tau$  для  $H$ -волн выражаются через  $E_z$ -компоненту, а для  $E$ -волн — через  $H_z$ -компоненту. Поперечные компоненты электрического и магнитного полей связаны между собой соотношением ([7], с. 207)

$$\mathbf{E}_\tau = Z_x [\mathbf{H}_\tau, \mathbf{z}_0],$$

где  $\mathbf{z}_0$  — единичный вектор, направленный вдоль оси волновода. Величина  $Z_x$  называется *характеристическим сопротивлением* волновода. Для  $H$ -волн  $Z_x = jk\rho/h$ , а для  $E$ -волн  $Z_x = j\rho h/k$ . Распространяющимся волнам ( $h = j\beta$ ) соответствуют действительные значения характеристического сопротивления, а затухающим ( $h = -\alpha$ ) — мнимые. Совокупность двух волн, отличающихся лишь знаком  $h$ , с учетом (10.9) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_\tau(x, y, z) &= U(z) \mathbf{E}_\tau(x, y) = [A \exp(-hz) + B \exp(hz)] \mathbf{E}_\tau(x, y), \\ \mathbf{H}_\tau(x, y, z) &= I(z) \mathbf{H}_\tau(x, y) = Z_x^{-1} [A \exp(-hz) - B \exp(hz)] \mathbf{H}_\tau(x, y), \end{aligned} \quad (10.11)$$

где  $A$  и  $B$  — константы интегрирования, называемые амплитудами падающей и отраженной волн, соответственно. Полагаем, что величины  $U(z)$  и  $I(z)$  имеют размерность напряжения и тока. Функции распределения поля  $\mathbf{E}_\tau(x, y)$  и  $\mathbf{H}_\tau(x, y)$  по сечению волновода имеют размерность  $[1/\text{м}]$ . Полагаем, что их норма

$$\int_{\Sigma} [\mathbf{E}_\tau(x, y), \mathbf{H}_\tau(x, y)] ds = 1.$$

Требуем, чтобы левая и правая части (10.11) описывали один и тот же поток энергии

$$2P = \int_{\Sigma} [\mathbf{E}_\tau^*(x, y, z), \mathbf{H}_\tau^*(x, y, z)] ds =$$

$$= U^*(z)I(z) = U^*(z)I(z) \int_{\Sigma} [\mathbf{E}_\tau(x, y), \mathbf{H}_\tau(x, y)] ds.$$

При этом получаем

$$\begin{aligned} U(z) &= A \exp(-hz) + B \exp(hz), \\ I(z) &= Z_x^{-1} [A \exp(-hz) - B \exp(hz)]. \end{aligned} \quad (10.12)$$

В определении величин  $U(z)$  и  $I(z)$  имеется неоднозначность. Часто их определяют так, что отношение  $U(z)/I(z)$  равно не характеристическому сопротивлению, которое не зависит от размеров поперечного сечения волновода, а несколько иначе. При этом оно отличается от  $Z_x$  некоторым коэффициентом, зависящим от формы поперечного сечения волновода, и называется волновым сопротивлением. Для приведенных ниже результатов это различие несущественно.

Удобно ввести вместо  $U(z)$ ,  $I(z)$ ,  $A$  и  $B$  нормированные величины

$$\hat{U}(z) = Z_g^{-1/2} U(z), \quad \hat{I}(z) = Z_g^{1/2} I(z), \quad a = Z_g^{-1/2} A, \quad b = Z_g^{-1/2} B,$$

где  $Z_g = Z_x$  — для распространяющихся волн и  $Z_g = Z_x/j$  — для затухающих. При этом для распространяющихся волн ( $h = j\beta$ )

$$\begin{aligned} \hat{U}(z) &= a \exp(-j\beta z) + b \exp(j\beta z), \\ \hat{I}(z) &= a \exp(-j\beta z) - b \exp(j\beta z). \end{aligned} \quad (10.13)$$

В частности, при  $z = 0$

$$\hat{U}(0) = a + b, \quad \hat{I}(0) = a - b. \quad (10.14)$$

Для расчетов ниже используются либо нормированная матрица проводимости  $[\hat{Y}]$  отрезка линии длиной  $\Delta$ , либо матрица рассеяния  $[S]$ , которые определяются равенствами

$$\begin{bmatrix} \hat{I}(0) \\ -\hat{I}(\Delta) \end{bmatrix} = [\hat{Y}] \begin{bmatrix} \hat{U}(0) \\ \hat{U}(\Delta) \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = S \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix},$$

где  $a_1$  и  $a_2$  — нормированные амплитуды волн, бегущих к отрезку линии со стороны входа ( $a_1$  при  $z = 0$ ) и выхода ( $a_2$  при  $z = \Delta$ ), а  $b_1$  и  $b_2$  — бегущих от отрезка линии (см. приложение 2).

Чтобы получить матрицу  $[\hat{Y}]$ , выразим в (10.13)  $a$  и  $b$  через  $\hat{U}(0)$  и  $\hat{I}(0)$  в соответствии с (10.14). В результате, находим

$$\begin{bmatrix} \hat{I}(0) \\ -\hat{I}(\Delta) \end{bmatrix} = j\hat{Y}_x \begin{bmatrix} -\operatorname{ctg}(\beta\Delta) & \operatorname{cosec}(\beta\Delta) \\ \operatorname{cosec}(\beta\Delta) & -\operatorname{ctg}(\beta\Delta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{U}(0) \\ \hat{U}(\Delta) \end{bmatrix}, \quad (10.15)$$

где  $\hat{Y}_x$  — характеристическая проводимость отрезка волновода, нормированная к проводимости подводящих линий. Если нормировать ее к самой себе, то  $\hat{Y}_x = 1$ .

Для распространяющихся  $H$ -волн ненормированная характеристическая проводимость

$$Y_x = 1/Z_x = (\epsilon_0/\mu_0)^{1/2} \left[ 1 - (\lambda/\lambda_k)^2 \right]^{1/2},$$

где  $\lambda_k$  — критическая длина волны, а для распространяющихся  $E$ -волн

$$Y_x = 1/Z_x = (\epsilon_0/\mu_0)^{1/2} \left[ 1 - (\lambda/\lambda_k)^2 \right]^{1/2}.$$

Рассмотрим теперь затухающие волны. При этом

$$h = k \left[ (\lambda/\lambda_k)^2 - 1 \right]^{1/2}, \quad Z_x = -j(\epsilon_0/\mu_0)^{1/2} \left[ (\lambda/\lambda_k)^2 - 1 \right]^{1/2}$$

для  $H$ -волн и

$$Z_x = j(\mu_0/\epsilon_0)^{1/2} \left[ (\lambda/\lambda_k)^2 - 1 \right]^{1/2}$$

для  $E$ -волн.

Повторяя рассуждения, сделанные при выводе (10.15), получим

$$\begin{bmatrix} \hat{I}(0) \\ -\hat{I}(\Delta) \end{bmatrix} = j\hat{Y}_x \begin{bmatrix} -\operatorname{cth}(h\Delta) & \operatorname{cosech}(h\Delta) \\ \operatorname{cosech}(h\Delta) & -\operatorname{cth}(h\Delta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{U}(0) \\ \hat{U}(\Delta) \end{bmatrix}, \quad (10.16)$$

где  $\hat{Y}_x = Zh/k\rho$  для  $H$ -волн и  $\hat{Y}_x = Zk/h\rho$  для  $E$ -волн,  $\rho = (\mu_0/\epsilon_0)^{1/2}$ . Действительная величина  $Z$ , представляющая нормировочный множитель, равна волновому сопротивлению линии, подключенной к отрезку запредельного волновода. В случаях, когда нормировка не влияет на конечный результат, полагаем в (10.15) и (10.16)  $\hat{Y}_x = 1$ .

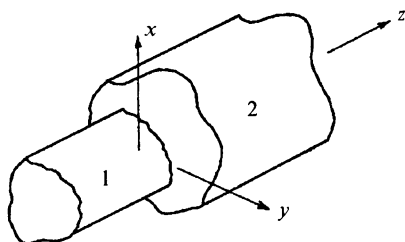
Рассмотренные примеры иллюстрируют то, как целесообразно нормировать различные величины при расчете матриц проводимости и рассеяния сочленения волноводов, когда учитываются как распространяющиеся, так и затухающие волны. Матрицы рассеяния, соответствующие (10.15) и (10.16) при  $Y_x = 1$  и вычисленные с помощью (П.2.8), имеют, соответственно, вид

$$[S] = \begin{bmatrix} 0 & \exp(j\beta\Delta) \\ \exp(j\beta\Delta) & 0 \end{bmatrix}, \quad (10.17)$$

$$[S] = \begin{bmatrix} j \operatorname{th}(h\Delta) & \operatorname{sech}(h\Delta) \\ \operatorname{sech}(h\Delta) & j \operatorname{th}(h\Delta) \end{bmatrix}. \quad (10.18)$$



## 10.4. Матрица рассеяния сочленения волноводов



**Рис. 10.4.** Сочленение двух волноводов

Рассмотрим сочленение двух волноводов (рис. 10.4). В каждом из них существуют свои нормальные волны:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_s^{(1)}(x, y, z), \quad \mathbf{H}_s^{(1)}(x, y, z), \quad s = 1, 2, 3, \dots; \\ \mathbf{E}_m^{(2)}(x, y, z), \quad \mathbf{H}_m^{(2)}(x, y, z), \quad m = 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

Количество этих волн в каждом волноводе бесконечно велико. Однако при сшивании полей учитываем в первом волноводе  $M_1$  волн ( $s = 1, 2, \dots, M_1$ ), а во втором —  $M_2$  волн ( $m = 1, 2, \dots, M_2$ ). Представляют интерес только поперечные компоненты поля ( $\mathbf{E}_{\tau m}^{(1)}, \mathbf{H}_{\tau m}^{(1)}, \mathbf{E}_{\tau m}^{(2)}, \mathbf{H}_{\tau m}^{(2)}$ ), так как только они используются при сшивании полей. Их можно представить в виде суперпозиции падающих и отраженных волн:

для первого волновода

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\tau}^{(1)}(x, y, 0) &= \sum_{s=1}^{M_1} (A_s^{(1)} + B_s^{(1)}) \mathbf{E}_{\tau s}^{(1)}(x, y), \\ \mathbf{H}_{\tau}^{(1)}(x, y, 0) &= \sum_{s=1}^{M_1} Y_{xs}^{(1)} (A_s^{(1)} - B_s^{(1)}) \mathbf{H}_{\tau s}^{(1)}(x, y) \end{aligned} \quad (10.19, a)$$

для второго волновода

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\tau}^{(2)}(x, y, 0) &= \sum_{m=1}^{M_2} (A_m^{(2)} + B_m^{(2)}) \mathbf{E}_{\tau m}^{(2)}(x, y), \\ \mathbf{H}_{\tau}^{(2)}(x, y, 0) &= \sum_{m=1}^{M_2} Y_{xm}^{(2)} (A_m^{(2)} - B_m^{(2)}) \mathbf{H}_{\tau m}^{(2)}(x, y). \end{aligned} \quad (10.19, б)$$

Здесь предполагается, что сочленение расположено при  $z = 0$ . Через  $A_s^{(1)}$  и  $A_m^{(2)}$  обозначены амплитуды волн, падающих на сочленение, а через  $B_s^{(1)}$  и  $B_m^{(2)}$  — отраженных.  $Y_{xs}^{(1)}$  и  $Y_{xm}^{(2)}$  — характеристические проводимости нормальных волн двух волноводов.

Собственные функции  $\mathbf{E}_{\tau s}^{(1)}, \mathbf{H}_{\tau s}^{(1)}, \mathbf{E}_{\tau m}^{(2)}$  и  $\mathbf{H}_{\tau m}^{(2)}$  полагаем нормированными (см. (10.10)) так, что для обоих волноводов

$$\int_{\Sigma} [\mathbf{E}_{\tau s}, \mathbf{H}_{\tau s}] ds = \delta_{ss'}, \quad (10.20)$$

где  $\Sigma$  — площадь поперечного сечения соответствующего волновода.

Условие непрерывности тангенциальных компонент на границе областей ( $z = 0$ ) удовлетворяется приближенно с помощью проекционных соотношений [8]

$$\int_{\Sigma_1} [\mathbf{E}_{\tau s}^{*(1)}, \mathbf{H}_{\tau}^{(1)} - \mathbf{H}_{\tau}^{(2)}] ds = 0, \quad s' = 1, 2, \dots, M_1,$$

$$\int_{\Sigma_2} [\mathbf{E}_{\tau}^{(1)} - \mathbf{E}_{\tau}^{(2)}, \mathbf{H}_{\tau m}^{*(2)}] ds = 0, \quad m = 1, 2, \dots, M_2. \quad (10.21)$$

Вводя нормированные амплитуды полей

$$a_s^{(1)} = |Y_{xs}^{(1)}|^{1/2} A_s^{(1)}, \quad b_s^{(1)} = |Y_{xs}^{(1)}|^{1/2} B_s^{(1)},$$

$$a_m^{(2)} = |Y_{xm}^{(2)}|^{1/2} A_m^{(2)}, \quad b_m^{(2)} = |Y_{xm}^{(2)}|^{1/2} B_m^{(2)}$$

и воспользовавшись (10.20) и (10.21), можно записать связь амплитуд волн для сочленения волноводов с помощью матрицы рассеяния  $[S_c]$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \end{bmatrix} = [S_c] \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \end{bmatrix}, \quad (10.22)$$

где  $\mathbf{a}_i$  и  $\mathbf{b}_i$ ,  $i = 1, 2$  — векторы, составленные из амплитуд  $a_s^{(1)}$ ,  $a_m^{(2)}$ ,  $b_s^{(1)}$  и  $b_m^{(2)}$ .

Таким образом, матрица рассеяния сочленения волноводов найдена. Зная матрицы рассеяния всех сочленений в ячейке ЗС и соответствующих отрезков волноводов, можно найти матрицу рассеяния ячейки ЗС (см. приложение 2) и ее уравнение дисперсии (П.2.16) или (П.2.20).

### 10.5. Сопротивление связи ЦСР

Значение волнового числа  $\beta_m$  для  $m$ -й пространственной гармоники, входящее в формулу (1.12)

$$K_{св} = |e_m|^2 / 2\beta_m^2 P \quad (10.23)$$

для расчета сопротивления связи, определяется с помощью уравнения дисперсии (П.2.16) или (П.2.20), в котором  $\Gamma = j\beta_m$ ,  $\beta_m = \beta_0 + 2\pi m/d$ .

Чтобы вычислить поток энергии  $P$  через ЗС, запишем (10.19) для одного (любого) из волноводов, на которые разбита ячейка, в виде

$$\begin{bmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{H} \end{bmatrix} = \sum_s \left( a_s \begin{bmatrix} \mathbf{E}_s \\ \mathbf{H}_s \end{bmatrix} + b_s \begin{bmatrix} \mathbf{E}_{-s} \\ \mathbf{H}_{-s} \end{bmatrix} \right),$$

где  $a_s$  и  $b_s$  — нормированные амплитуды волн. Поток энергии

$$P = \frac{1}{4} \int_{\Sigma} ([\mathbf{E}, \mathbf{H}^*] + [\mathbf{E}^*, \mathbf{H}]) ds =$$

$$= \frac{1}{4} \sum_s \int_{\Sigma} \{ |a_s|^2 ([\mathbf{E}_s, \mathbf{H}_s^*] + [\mathbf{E}_s^*, \mathbf{H}_s]) + |b_s|^2 ([\mathbf{E}_{-s}, \mathbf{H}_{-s}^*] + [\mathbf{E}_{-s}^*, \mathbf{H}_{-s}]) +$$

$$+ a_s b_s^* ([\mathbf{E}_s, \mathbf{H}_{-s}^*] + [\mathbf{E}_{-s}^*, \mathbf{H}_s]) + a_s^* b_s ([\mathbf{E}_{-s}, \mathbf{H}_s^*] + [\mathbf{E}_s^*, \mathbf{H}_{-s}]) \} ds. \quad (10.24)$$

Зная, что для распространяющихся волн

$$\int_{\Sigma} ([\mathbf{E}_s, \mathbf{H}_{-s}^*] + [\mathbf{E}_{-s}^*, \mathbf{H}_s]) ds = 0,$$

а для нераспространяющихся

$$\int_{\Sigma} ([\mathbf{E}_s, \mathbf{H}_s^*] + [\mathbf{E}_s^*, \mathbf{H}_s]) ds = 0,$$

подставляя (10.5), (10.6), (10.9) в (10.24) и учитывая (10.20), получим для распространяющихся волн

$$P_p = \frac{1}{2} \sum_s (|a_s|^2 + |b_s|^2), \quad (10.25)$$

а для нераспространяющихся (туннельный эффект)

$$P_n = \frac{1}{2} \sum_s |a_s b_s^* - a_s^* b_s|. \quad (10.26)$$

Полный поток энергии

$$P = P_p + P_n. \quad (10.27)$$

Для расчета сопротивления связи остается вычислить амплитуду пространственной гармоники  $e_m$ .

В поле амплитуд пространственных гармоник вклад дают только  $E$ -волны. Суммируя их поля в отрезках волноводов, соответствующих пространству взаимодействия, и разлагая поле в обобщенный ряд Фурье (4.3), находим  $e_m$ . Таким образом, сопротивление связи ЗС типа ЦСР найдено.

## 10.6. Результаты исследования характеристик ЦСР \*)

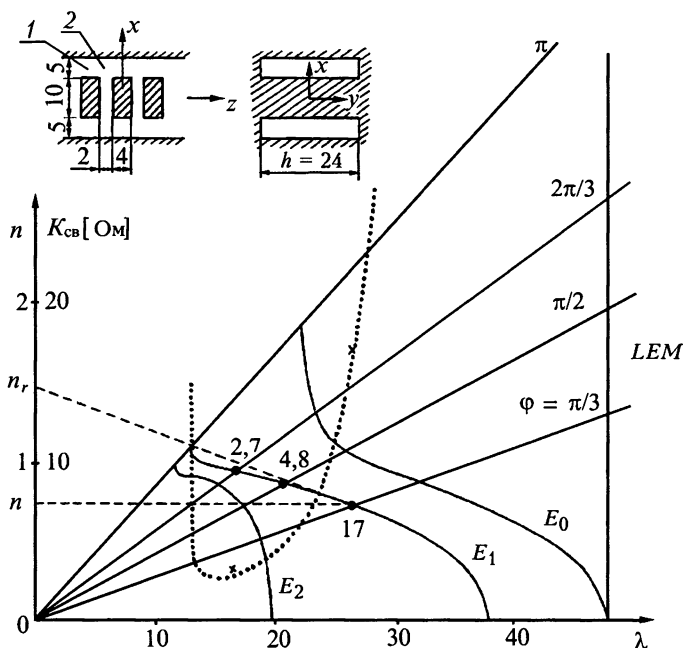
На рис. 10.5 представлены результаты расчета дисперсии и сопротивления связи ЗС типа «лестница». Она имеет две плоскости симметрии в поперечном сечении ( $x = 0$  и  $y = 0$ ). На рис. 10.5 представлены характеристики волн, которым соответствует магнитная стенка в плоскости  $y = 0$ . Вертикальная линия при длине волны  $\lambda = 2h$  соответствует  $LEM$ -волне в многопроводной линии. Остальные характеристики соответствуют волнам  $LE$  (см. табл. 4.1). Более длинноволновой ветви ( $LE_0$ ) соответствует электрическая стенка в плоскости  $x = 0$ , а коротковолновой — магнитная стенка\*\*). При электрической стенке в плоскости  $x = 0$  ЗС представляет как бы гребенку шириной  $h$ . При этом длинноволновая граница полосы пропускания соответствует  $\lambda = 2h$  и магнитным стенкам в плоскостях симметрии  $z = \text{const}$ .

Для типа волны ( $LE_1$ ) с магнитной стенкой в плоскости  $x = 0$  рассчитано сопротивление связи в омах на оси ЗС ( $x = 0$ ,  $y = 0$ ). Оно указано числами около кривых. Для сравнения с результатами измерений (крестики) зависимость сопротивления связи от длины волны нанесена пунктирной линией. Отрезки таких лестниц используются в качестве колебательных систем клистронов миллиметрового диапазона.

Дисперсионные характеристики ЦСР с прямоугольными резонаторами и щелями связи приведены на рис. 10.6. Собственная длина волны щели связи  $\lambda_{щ} \equiv E < \lambda_p$ . Величина  $\lambda_p$  несколько превышает  $\sqrt{2}E$ , так как

\*) Результаты измерений, отмеченные на рисунках крестиком, получены Б. А. Белявским, Б. С. Гришиным, Н. В. Ефимовой, Т. А. Милкиным, С. В. Мухиным, И. А. Накрап и др.

\*\*) Структуру типа  $LE_0$  и  $LE_0$  см. на рис. 13.5.



**Рис. 10.5.** Дисперсионные характеристики (сплошные линии) и сопротивление связи (пунктирная линия) нескольких типов волн ЗС типа «лестница». Числами около кривых указано сопротивление связи в Ом на оси ЗС ( $x=0$ ,  $y=0$ ) для волн  $LE_2$ . При расчете учтено по 6 типов  $H$ - и  $E$ -волн в области 1 и по 10 типов в области 2

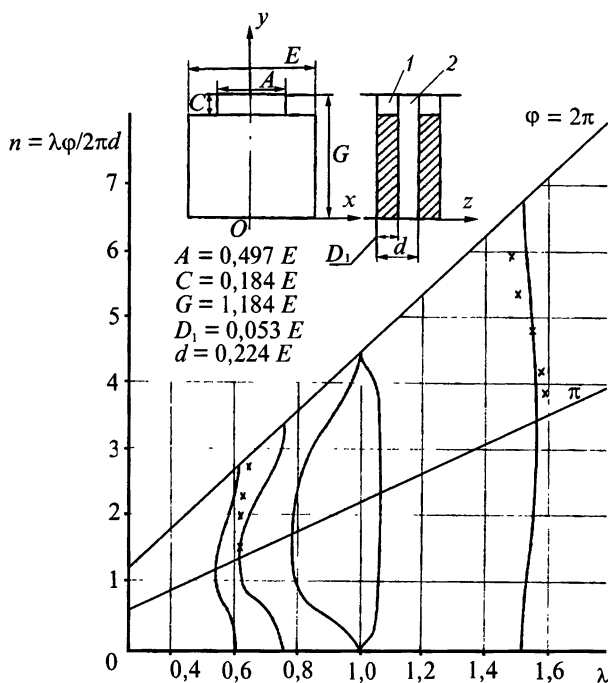
резонатор имеет квадратное сечение со стороной  $E$  и с дополнительной полостью для щели связи.

Иллюстрацией того, что форма отрезков стыкуемых волноводов может быть произвольной, служит ЦСР с крестообразными щелями связи (рис. 10.7) и ЗС типа «лист клевера» (рис. 10.8). Период пространства взаимодействия последней  $L = 0,2$ , а толщина диафрагмы  $0,1$ .

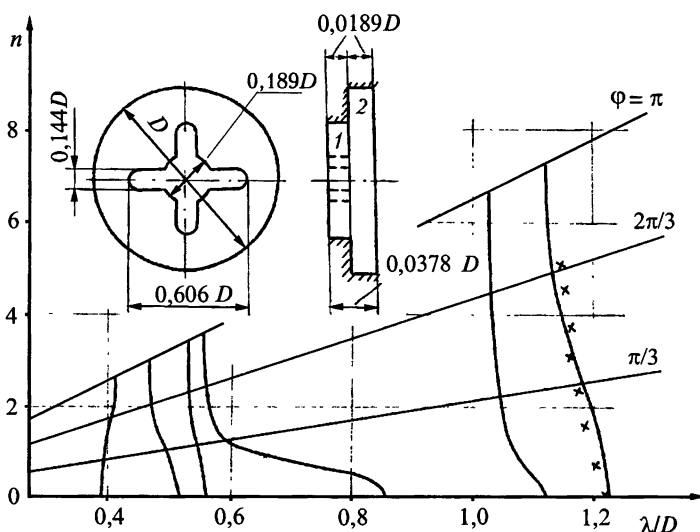
При наличии трубок дрейфа (рис. 10.9) величина  $\lambda_p > \lambda_{щ}$ , даже если щель имеется по всей ширине ЗС. Значение  $\lambda_{щ} \approx 32$ , так как ширина щели равна 16. Этой длине волны соответствует одна из границ полос пропускания.

В волнообразно изогнутом волноводе (рис. 10.10) одна из границ полос пропускания соответствует  $\lambda_{щ} = 2E$ , а другая —  $\lambda_p = \sqrt{2}E$ . Отверстия в диафрагмах для пролета электронов (рис. 10.11) несколько смещают дисперсионные характеристики в сторону коротких волн. Это явление объясняется теорией возмущений, согласно которой вытеснение электрического поля металлом приводит к увеличению собственных длин волн в резонаторе.

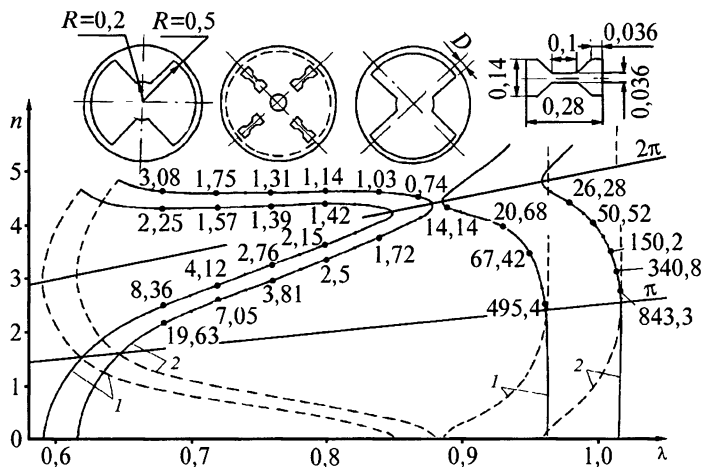
Волнообразно изогнутый волновод имеет скользящую плоскость симметрии, так что для него полосы пропускания попарно смыкаются, а ветви дисперсионной характеристики разбиваются на две группы. Для одной из них составляющая поля имеет магнитную стенку в плоскости скольжения и, следовательно, отличную от нуля продольную компоненту электрического



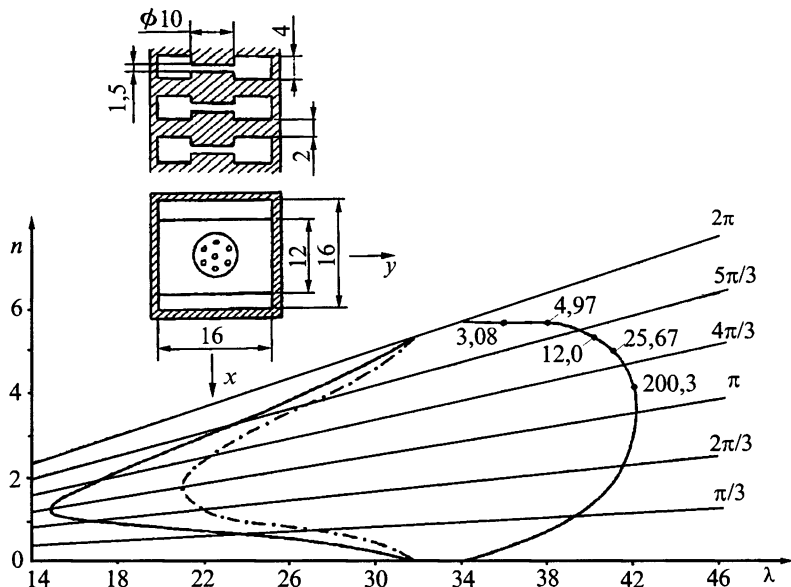
**Рис. 10.6.** Дисперсионные характеристики нескольких типов волн ЦСР с прямоугольными резонаторами щелями связи. При расчете в области 1 учтено три  $H$ -две  $E$ -волны и 100 узлов сетки, а в области 2 — семь  $H$ -и  $E$ -волн и .



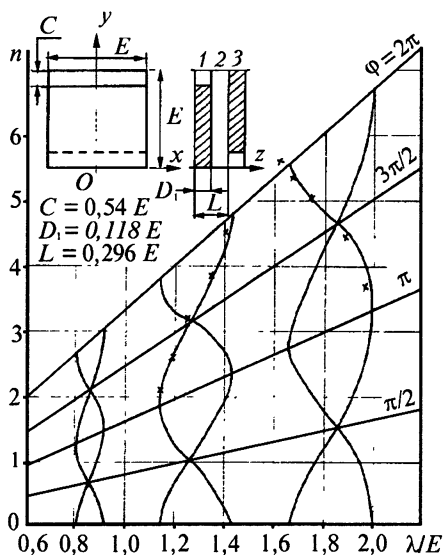
**Рис. 10.7.** Сравнение результатов расчета и измерений дисперсионных характеристик ЦСР с крестообразными щелями связи. В области 1 учтено по четыре типа  $H$ -и  $E$ -волн при 150 узлах в сетке, а в области 2 — по 10 типов при 500 узлах.



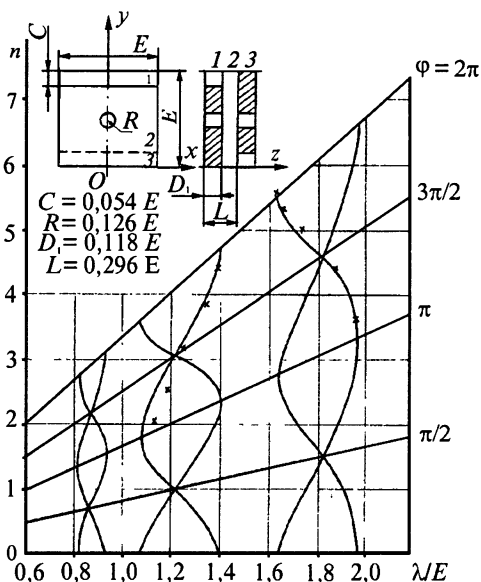
**Рис. 10.8.** Характеристики ЦСР типа «лист клевера», рассчитанные при  $D = 0,09$  (1) и  $D = 0,13$  (2). В щелях связи учтено по шесть типов  $H$ - и  $E$ -волн, а в резонаторах — по четыре. Штриховой линией нанесены характеристики составляющих, для которых на оси поле  $E_z = 0$ . Числа около кривых указывают сопротивление связи в Ом на оси ЗС



**Рис. 10.9.** Дисперсионные характеристики ЦСР с резонаторами и щелями связи прямоугольной формы и с трубками дрейфа, рассчитанные при магнитных стенках (сплошная линия) в плоскостях симметрии  $x = 0$  и  $y = 0$ , а также при электрической стенке (штрих-пунктирная линия) в плоскости  $x = 0$  и магнитной в плоскости  $y = 0$ . Числами около кривых указано сопротивление связи в Ом на оси  $x = y = 0$



**Рис. 10.10.** Дисперсионные характеристики волн в трех полосох пропускания для ЦСР типа «волнообразно изогнутый волновод», измеренные и рассчитанные при магнитной стенке в плоскости симметрии  $x=0$ . В областях 1 и 3 учтено по три  $H$ - и две  $E$ -волны при 100 узлах в сетке, а в области 2 — по семь  $H$ - и  $E$ -волн при 500 узлах

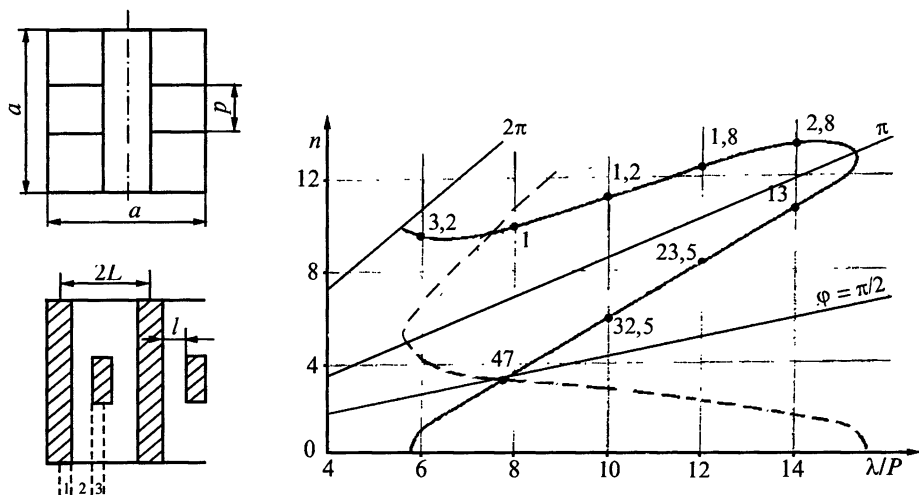


**Рис. 10.11.** Дисперсионные характеристики волн в трех полосох пропускания для ЦСР типа «волнообразно изогнутый волновод» с отверстиями для пролета электронов. Условия расчета те же, что на рис. 10.10

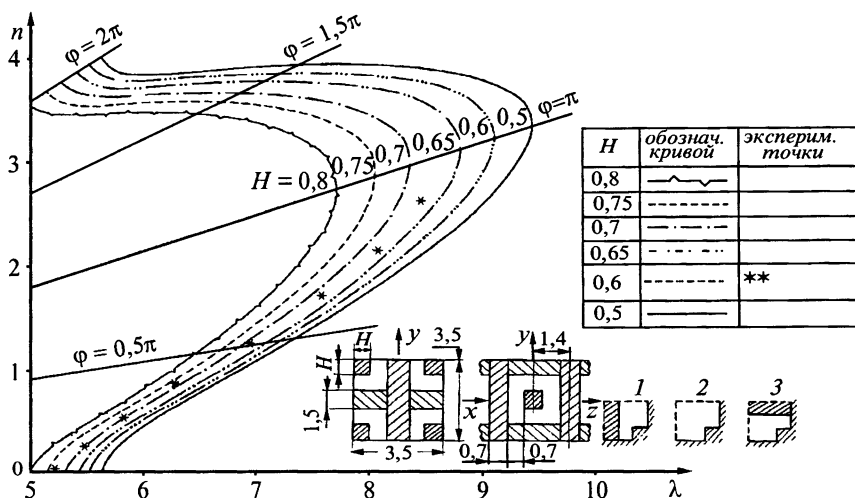
поля. Для другой — электрическую стенку. Соответствующая компонента электрического поля равна нулю. Результаты измерений приведены для составляющей с магнитной стенкой.

ЗС типа «гребенка-квадрат» (рис. 10.12) имеет ось симметрии  $C_{4_2}$ , так что полосы пропускания попарно смыкаются, и лишь для одной из двух составляющих поля отлична от нуля продольная компонента электрического поля на оси. Именно для нее числами около кривых указано сопротивление связи в омах на оси ЗС.

На рис. 10.13 представлены результаты расчета ЗС типа «гребенка-квадрат» в крестообразном волноводе. Эта система, как и предыдущая, имеет ось  $C_{4_2}$ , так что при  $\varphi = 0,5\pi$  смыкаются соседние полосы пропускания. Чтобы не загромождать рисунок, на него не нанесены характеристики составляющих, продольная компонента электрического поля которых на оси равна нулю. Некоторое расхождение результатов расчета и измерений вероятнее всего связано с тем, что квадратные выступы сечением  $-H \times H$  были заменены при измерениях круглыми проводниками диаметром  $H$ . Фигуры на рис. 10.13, отображающие области 1, 2, 3, построены для одной четверти сечения ЗС. В плоскостях симметрии  $x=0$  и  $y=0$  сечения ЗС

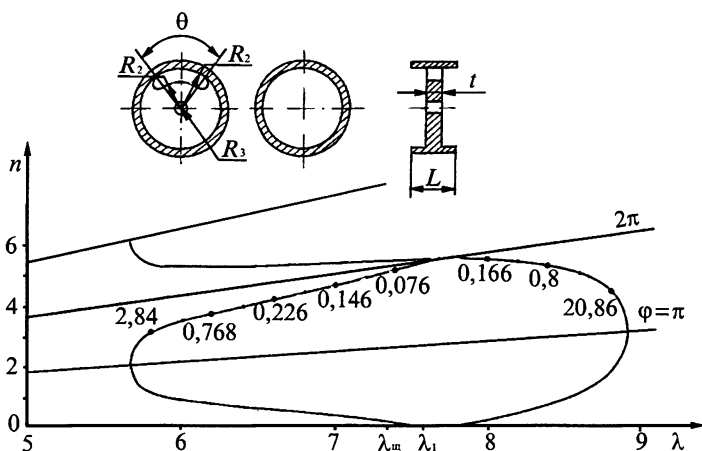


**Рис. 10.12.** Дисперсионные характеристики ЗС типа «гребенка—квадрат» для основного типа волны. Числами около кривых указано сопротивление связи в Ом на оси ЗС. Расчет проведен при размерах:  $a = 3,5P$ ,  $L = 0,6P$ ,  $l = 0,3P$ . В областях 1 и 3 учтено по шесть типов  $H$ - и  $E$ -волн при 800 узлах в сетке, а в области 2 — по десять типов при 1000 узлах. Штриховой линией нанесена характеристика составляющей с нулевым сопротивлением связи на оси.



**Рис. 10.13.** Дисперсионные характеристики ЗС типа «гребенка—квадрат» в крестообразном волноводе. В областях 1 и 3 учтено по три  $H$ - и две  $E$ -волны при 700 узлах в сетке, а в области 2 по пять  $H$ - и  $E$ -волн при 1000 узлах

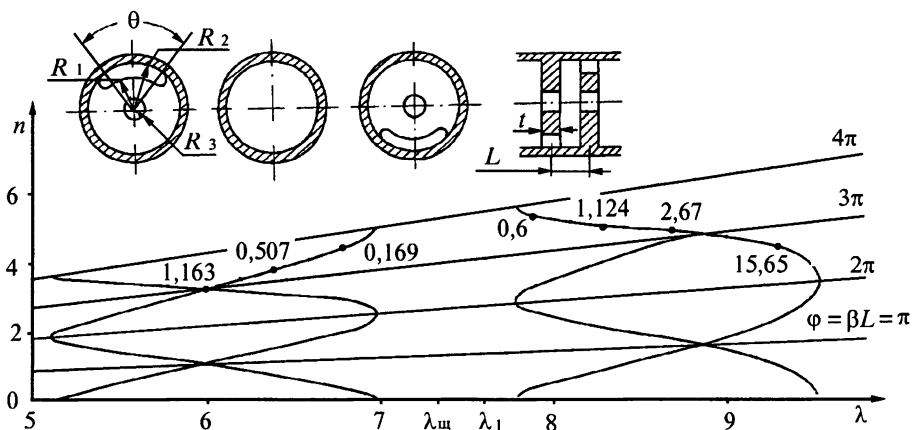




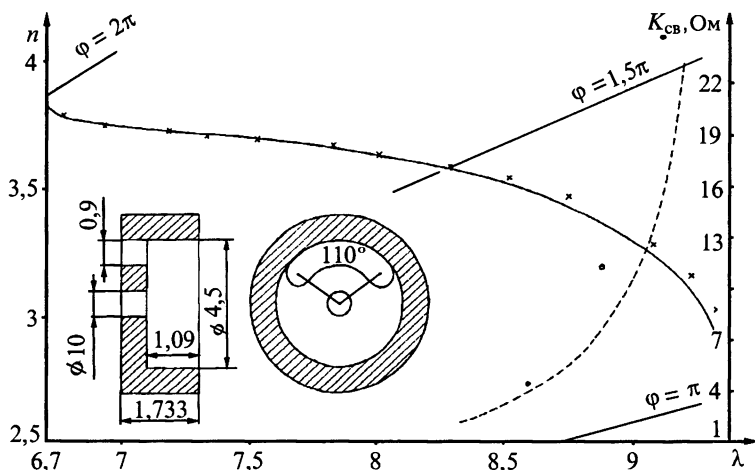
**Рис. 10.14.** Характеристики одноступенчатой ЦСР без втулок дрейфа, имеющей размеры:  $L = 1,38$ ,  $t = 0,65$ ,  $R_1 = 2,15$ ,  $R_2 = 2,9$ ,  $R_3 = 0,5$ . Числа около кривых указывают сопротивление связи в Ом на оси ЗС

рассматривались лишь магнитные стенки, что соответствует, в частности, основному типу волны.

На рис. 10.14 и рис. 10.15 приведены рассчитанные дисперсионные характеристики и значения сопротивления связи в омах на оси ЦСР. Системы отличаются тем, что в первой из них все диафрагмы расположены одинаково (ЗС — одноступенчатая), а во второй соседние диафрагмы повернуты друг относительно друга на  $180^\circ$ , т.е. в периоде содержится две диафрагмы (ЗС — двухступенчатая). Обе ЗС имеют границы полос пропускания при  $\varphi = 0$ , соответствующие критическим частотам фасолевидного волновода ( $\lambda_{\text{ш}} = 7,33$ ) на нижнем типе  $H$ -волны и круглого волновода ( $\lambda_p = 7,58$ )



**Рис. 10.15.** Характеристики двухступенчатой ЦСР без втулок дрейфа со скользящей плоскостью симметрии. Размеры те же, что на рис. 10.14



**Рис. 10.16.** Сравнение результатов расчета и измерений дисперсионной характеристики (сплошная линия) и сопротивления связи (пунктирная линия) ЦСР без втулок дрейфа со скользящей плоскостью симметрии

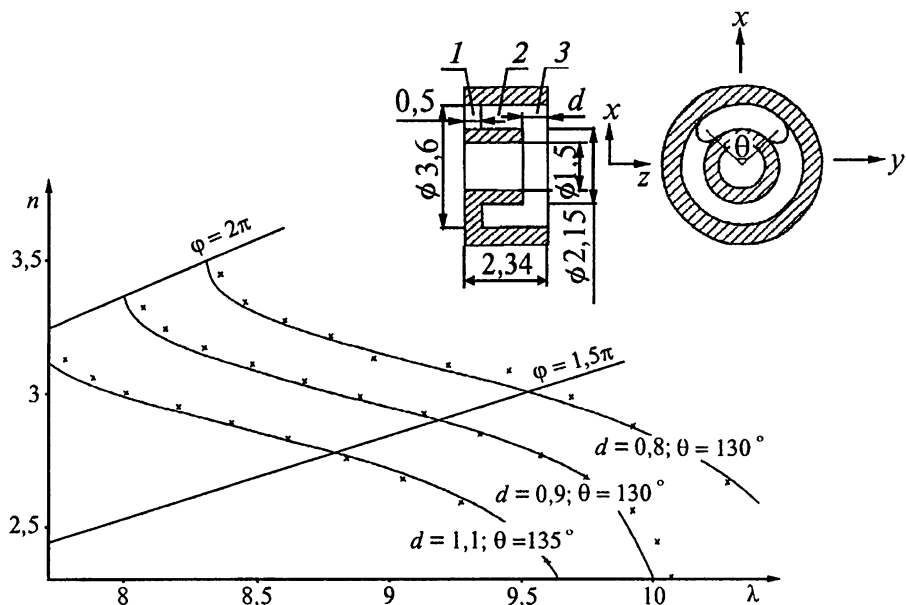
на волне  $E_{01}$ . Эти длины волн близки к собственным длинам волн щелей связи и цилиндрического резонатора, соответственно.

ЦСР на рис. 10.15 обладает скользящей плоскостью симметрии. Значения сопротивления связи на этом рисунке приведены для составляющей, имеющей магнитную стенку в плоскости скольжения.

Сравнение результатов расчета и измерений большим возмущающим телом на резонансном макете, ограниченном поводящими стенками в плоскостях симметрии  $z = \text{const}$ , дано на рис. 10.16. Исследована ЦСР со скользящей плоскостью симметрии. Сравнение дано только для «рабочей» гармоники в основной полосе пропускания. Расхождение по замедлению не превышает одного процента при  $\varphi > 1,2\pi$ , а по сопротивлению связи оно достигает 20 %. Столь большое расхождение может быть обусловлено погрешностями не только расчета, но и измерений.

Все ЗС, рассмотренные выше в настоящем разделе, содержат плоскости симметрии, перпендикулярные оси  $z$ , так что при расчете достаточно рассматривать половину ячейки. На рис. 10.17 представлено сравнение результатов расчета и измерений дисперсионных характеристик ЦСР с трубками дрейфа, причем ЗС не содержит плоскостей симметрии, перпендикулярных оси  $z$ . Волновод, отображающий область 2 с трубкой дрейфа, имеет двусвязное сечение. При этом кроме  $H$ - и  $E$ -волн приходится учитывать и  $T$ -волну. Как и ЗС на рис. 10.15 и рис. 10.16, рассматриваемая ЦСР имеет скользящую плоскость симметрии  $x = 0$ . Расхождение по коэффициенту замедления не превышает одного процента.

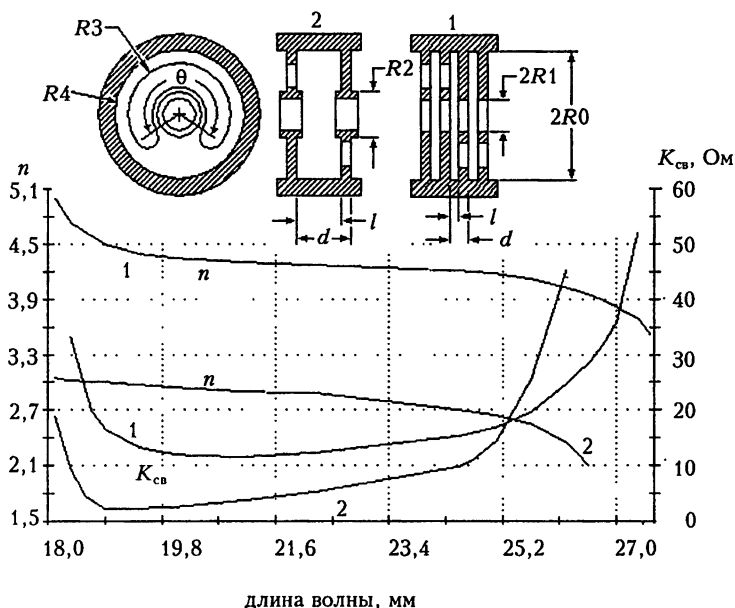
В классе штыревых замедляющих систем известна (см. рис. 15.4) четырехступенчатая система типа «встречные штыри». Она содержит четыре штыря в периоде и в полосе частот до 40% обеспечивает сопротивление связи выше 40 Ом при почти постоянном коэффициенте замедления волны.



**Рис. 10.17.** Сравнение результатов расчета и измерений дисперсионных характеристик ЦСР с втулками дрейфа и со скользящей плоскостью симметрии. В области 1 учтено по шесть типов  $H$ - и  $E$ -волн; в области 2 — одна  $T$ -волна, десять  $H$ -волн и девять  $E$ -волн; в области 3 — по десять  $H$ - и  $E$ -волн при 1600 узлах в сетке. Для остальных областей число узлов уменьшено пропорционально площади сечения соответствующего волновода

Столь высокое сопротивление связано с тем, что почти постоянное замедление имеет пространственная гармоника, обусловленная не структурой пространства взаимодействия, а особенностью конструкции самой ЗС, связанной с числом штырей в периоде. Для пространства взаимодействия это нулевая пространственная гармоника. Ниже рассмотрена четырехступенчатая ЦСР. Для нее нет необходимости в трубках дрейфа.

На рис.10.18 и 10.19 дано сравнение результатов расчета коэффициента замедления  $n(\lambda)$  и сопротивления связи  $K_{св}$  для двухступенчатых и четырехступенчатых [16] цепочек связанных резонаторов для однолучевой (рис.10.18) и 18-лучевой (рис.10.19) ЛБВ. Пролетные каналы на рисунке не указаны. Видно, что сопротивление связи четырехступенчатых систем более чем вдвое выше в полосе частот до 40 %. А это значит, что можно создать столь широкополосные ЛБВ на цепочках связанных резонаторов. Сопротивление связи однолучевой ЗС рассчитано на ее оси с учетом влияния пролетных отверстий, а многолучевой — без их учета, т. е. рассматривалось поле между сплошными дисками, в которых должны существовать пролетные каналы. Естественно, что из-за неучета пролетных отверстий погрешность расчета систем для многолучевых ЛБВ несколько выше, чем для однолучевых (до 4% по частоте на границах полос пропускания). Оценка погрешности сделана сравнением результатов расчета и измерений для двухступенчатых систем [17]. По конструкции четырехступенчатые системы проще двухступенчатых,



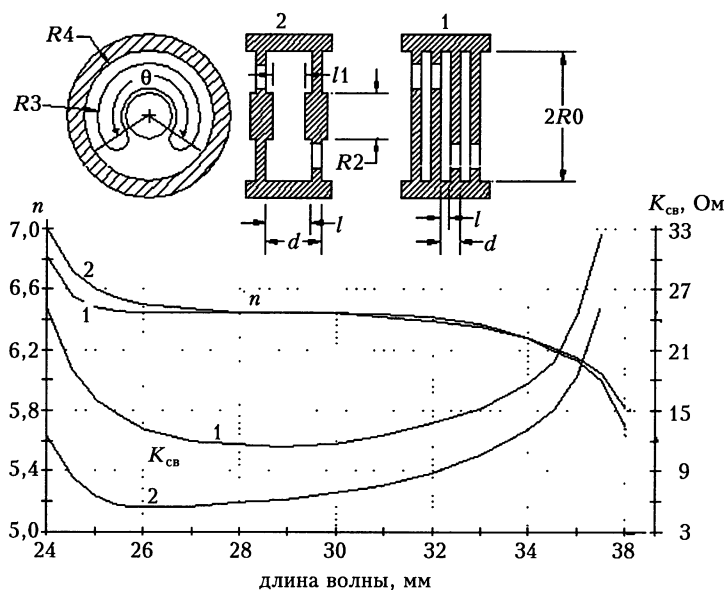
**Рис. 10.18.** Схематическое изображение ячеек двух- и четырехступенчатых ЦСР с одним пролетным каналом и сравнение результатов расчета дисперсионной характеристики  $n(1)$  и сопротивления связи  $K_{св}$  двухступенчатой (линия 2) и четырехступенчатой (линия 1) ЗС. Сопротивление рассчитано на оси ЗС. Размеры двухступенчатой ЗС:  $R_0 = R_4 = 6,2$  мм,  $R_1 = 1,5$  мм,  $R_2 = 2,5$  мм,  $R_3 = 3,5$  мм,  $l = 3$  мм,  $l_1 = 2$  мм,  $d = 4$  мм,  $\theta = 100$  град. Размеры четырехступенчатой ЗС:  $R_0 = R_4 = d = 2$  мм,  $R_1 = 0,5$  мм,  $R_3 = 1,2$  мм,  $l = 1$  мм,  $\theta = 270$  град.

так как не требуют трубок дрейфа, что особенно важно при создании ЛБВ миллиметрового диапазона. На рис.10.19 сопротивление связи указано лишь на оси ЗС. В разных пролетных каналах оно оказывается различным. Это утверждение иллюстрируется рисунком 10.20.

Таким образом, рассмотренные в настоящем разделе примеры иллюстрируют возможности описанного выше проекционного метода расчета ЦСР.

### Список литературы

- [1]. Григорьев А. Д., Янкевич В. Б. Резонаторы и резонаторные замедляющие системы СВЧ: Численные методы расчета и проектирования. М.: Радио и связь, 1984. 248 с.
- [2]. Никольский В. В., Орлов В. П., Феоктистов В. Г. и др. Автоматизированное проектирование устройств СВЧ. М.: Радио и связь, 1982. 272 с.
- [3]. Колобаева Т. Ю., Сухов В. А. Программа расчета дисперсии и сопротивления связи диафрагмированного волновода в основной полосе пропускания. *Электронная техника. Сер. 1. Электроника СВЧ*, 1977. Вып. 10, с. 119.



**Рис. 10.19.** Схематическое изображение ячеек двух- и четырехступенчатых ЦСР для многолучевых ЛБВ и сравнение результатов расчета дисперсионной характеристики  $n(\lambda)$  и сопротивления связи  $K_{св}$  двухступенчатой (линия 2) и четырехступенчатой (линия 1) ЗС с 18 пролетными каналами. Сопротивление рассчитано на оси ЗС. Размеры двухступенчатой системы:  $R_0 = 6,15$  мм,  $R_2 = 4,4$  мм,  $R_3 = 4,5$  мм,  $R_4 = 6$  мм,  $d = 3,5$  мм,  $\lambda = 2,5$  мм,  $\lambda_1 = 0,8$  мм,  $\theta = 118$  град. Размеры четырехступенчатой системы:  $R_0 = R_4 = 3,9$  мм,  $R_3 = 2,9$  мм,  $d = 1,75$  мм,  $l = 0,45$  мм,  $q = 200$  град.

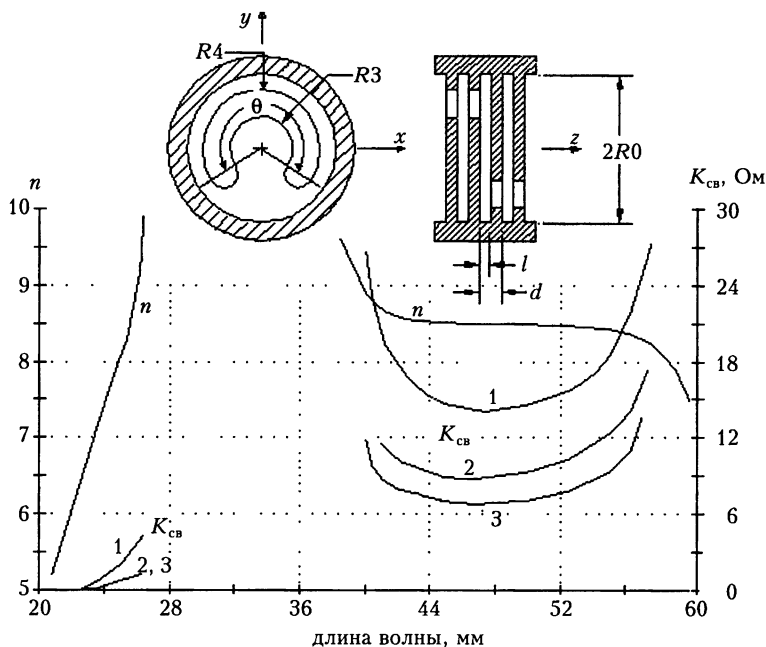
[4]. Левченко Е. Г., Немак А. К., Чайка В. Е. Исследование симметричных замедляющих систем типа цепочки связанных резонаторов. *Радиотехника и электроника*, 4(8), 1458

[5]. Ломакин О. Е., Мухин С. В., Солнцев В. А. Волноводно-резонаторная модель замедляющей системы типа цепочки связанных резонаторов. *Радиотехника и электроника*, 1988, 30(8), 1637–1642.

[6]. Малыхин А. В., Земсков Ю. Б., Соловьев А. С., Сухолет В. Э. Синтез шестиполосника с сосредоточенными элементами по характеристикам замедляющей системы типа цепочки связанных резонаторов. *Электронная техника. Сер. 1. Электроника СВЧ*, 1989. Вып. 7(421), 14–21.

[7]. Никольский В. В., Никольская Т. И. Электродинамика и распространение радиоволн. Уч. пособие для радиотехн. спец. вузов. Изд. 3-е, перераб. и доп. М.: Наука, 1989. 544 с.

[8]. Оганян Э.В., Чепурных И.П. Расчет электродинамических характеристик стыков волноводов произвольного сечения. *Электронная техника. Сер. 1. Электроника СВЧ*, 1985. Вып. 1(373), 36–42.



**Рис. 10.20.** Дисперсионная характеристика  $n(\lambda)$  и сопротивление связи  $K_{св}$  четырехступенчатой ЗС типа ЦСР для многолучевой ЛБВ, рассчитанные при размерах:  $R_0 = R_4 = 6,00$  мм,  $R_3 = 4,50$  мм,  $\theta = 200$  град.,  $d = 2$  мм,  $l = 1$  мм. Сопротивление связи рассчитано при 1)  $x = 0, y = 0$ , 2)  $x = 4, y = 0$ , 3)  $x = 0, y = 4$

[9]. Самохин Г. С., Чепурных И. П. Программа расчета основных электродинамических характеристик волноводов произвольного поперечного сечения. *Электронная техника. Сер. 1. Электроника СВЧ*, 1976. Вып. 2, 119–121.

[10]. Силин Р. А., Чепурных И. П. Расчет замедляющих систем, ячейки которых можно представить в виде сочленения волноводов. *Радиотехника и электроника*, 1990, **35**(5), 939–946.

[11]. Силин Р. А. Расчет характеристик линий передачи. Гл. 2. *Электронная техника. Сер. 1. СВЧ техника*, 1992. Вып. 3(447), 47–56; Вып. 4(448), 41–60; Вып. 5(449), 41–50; Вып. 6(450), 51–64; Вып. 7(451), 42–70.

[12]. Фельд Я. Н., Бененсон Л. С. Расчет фазовой скорости волны в цепочках связанных резонаторов. *Радиотехника и электроника*, 1966, **11**(10), 1759–1770.

[13]. Характеристики излучения периодической структуры из периодических волноводов произвольного поперечного сечения. А. Ю. Гринев и др. *Радиотехника и электроника*, 1979, **19**(7), 1291–1300.

[14]. Allen M. A., Kino G. S. On the theory of strongly coupled cavity chains. *Ire Trans. on Microwave Theory and Techniques*, 1960, **8**(3), 362–372.

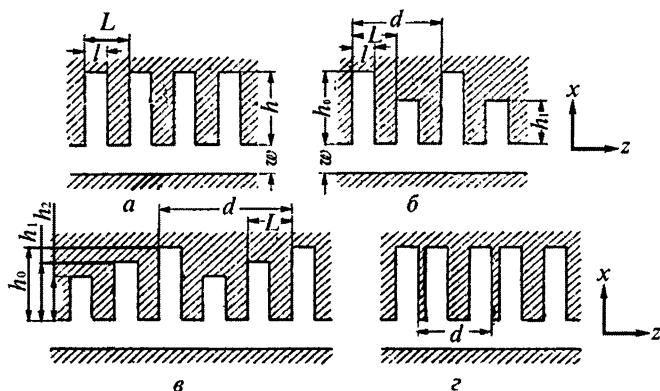
- [15]. Pontoppidan K. Finite-element techniques applied in waveguides of arbitrary cross-section. Part 1, 2. Lab. Electromagnetic Theory, Technical Univ. Denmark, Lyngby. LD 19, Sept. 1971. 373 p.
- [16]. Silin R. A., Chepurnykh I. P. Design of the Slow-Wave Structures for the Type of the Coupled Cavity Chain by Projection Method. Pros. URSI Int. Symp. on EM Theory. St.-Petersburg, Russia, 1995. P.367.
- [17]. Силин Р. А., Чепурных И. П. Патент на изобретение № 2158040 от 20.10.2000 по заявке № 97110436/09 от 17.06.1997. *Бюллетень изобретений*, 27.09.1999

# Многоступенчатые замедляющие системы

## 11.1. Основные понятия и определения

Цепочка связанных резонаторов называется  $Q$ -ступенчатой, если в ее периоде содержится  $Q$  резонаторов. Двухступенчатые системы используются в качестве анодных блоков магнетронов. Они, как и системы со связками, обеспечивают большее, чем одноступенчатая ЗС, разделение видов колебаний по частоте при сдвигах фаз  $\phi$ , близких к  $\pi$ . Кроме того, как показано ниже, в многоступенчатых системах в отличие от одноступенчатых амплитуды высших пространственных гармоник могут быть больше, чем у нулевой. За счет этого расширяются возможности создания ЗС с заданными дисперсионными характеристиками при достаточно высоком сопротивлении связи. Не случайно, в частности, во многих приборах [2, 4] используются двухступенчатые системы («биспираль» и «встречные штыри» в ЛОВ, «лепесток клевера», «меандр» и «кольцо-стержень» в ЛБВ, двухступенчатая резонаторная система в магнетронах и т.д.). В гл. 15 показано, что высокими качествами (высоким сопротивлением связи при почти постоянном замедлении) для ЛБВ повышенной мощности в полосе частот до 40 % обладают четырехступенчатые ЗС типа «встречные штыри».

Такое же явление наблюдается и в дифракционных решетках [3], в которых направление дифракционных максимумов зависит только от расстояния между штрихами, а распределение интенсивностей по различным порядкам определяется формой бороздок. При некоторых условиях интенсивность второго или более высокого порядка может быть выше первого. Это означает преобладание соответствующей гармоники над нулевой. Примеры одно-, двух- и трехступенчатых ЗС изображены на рис. 11.1. В системах



**Рис. 11.1.** Поперечные сечения резонаторных ЗС:  $a$  — одноступенчатой,  $b, z$  — двухступенчатой и  $в$  — трехступенчатой. Пространства взаимодействия систем:  $a, б, в$  — одноступенчатые,  $г$  — двухступенчатое



$a$ ,  $b$  и  $c$  на этом рисунке пространство взаимодействия (область  $-w < x < 0$ ) представляет одноступенчатую структуру с периодом  $L$ , а в системе  $z$  — двухступенчатую структуру. Ниже ограничимся рассмотрением многоступенчатых ЗС с одноступенчатым пространством взаимодействия. Периоды системы  $d$  и пространства взаимодействия  $L$  связаны равенством  $d = QL$ , где  $Q$  — число ступеней. Для таких ЗС наиболее просто выяснить, какой вклад вносит спектр пространственных гармоник пространства взаимодействия, а какой — форма резонатора.

## 11.2. Пространственные гармоники многоступенчатых систем

Представим поле в ЗС в виде суммы пространственных гармоник

$$E(x, y, z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} e_m(x, y) \exp[-j(\beta + 2\pi m/d)z]. \quad (11.1)$$

Чтобы выяснить особенности спектра пространственных гармоник, обусловленные пространством взаимодействия и различием резонаторов в периоде, запишем сумму (11.1) в несколько иной форме. Рассмотрим, например, двухступенчатую ЗС. Вводя обозначение  $2\phi = \beta d = 2\beta L$ , разобьем ряд Фурье (11.1) на два (с четными и нечетными  $m$ ):

$$E = \sum_{m_1=-\infty}^{\infty} e_{m_1} \exp[-j(\phi + 2\pi m_1/d)z/L] + \sum_{m_2=-\infty}^{\infty} e_{m_2} \exp[j(\pi - \phi + 2\pi m_2)z/L]. \quad (11.2)$$

Здесь для краткости опущены аргументы при  $E$ ,  $e_{m_1}$  и  $e_{m_2}$ ;  $m_1 = m/2$  и  $m_2 = (m+1)/2$  — целые числа.

Для точек с координатами  $z_q = qL$ , отстоящих на период  $L$  пространства взаимодействия, из (11.2) следует

$$E_q = a_0 \exp(-jq\phi) + a_{-1} \exp[jq(\pi - \phi)], \quad 0 \leq |\phi| \leq \pi/2, \quad (11.3)$$

где  $E_q = E(x, y, z_q)$ ,  $a_0 = \sum_{m_1=-\infty}^{\infty} e_{m_1} \exp(-j2\pi m_1) = \sum_{m_1=-\infty}^{\infty} e_{m_1}$ ,  $a_{-1} = \sum_{m_2=-\infty}^{\infty} e_{m_2}$ .

В равенствах (11.2) и (11.3) поле представляется в виде двух совокупностей пространственных гармоник, которые назовем *симметричными составляющими*. Следует помнить, что эти составляющие в отличие от нормальных волн не могут существовать независимо друг от друга. Они связаны граничными условиями. Введенное понятие симметричных составляющих служит обобщением этого понятия, данного в гл. 2 для систем со скользящими плоскостями и винтовыми осями. В частности, система со скользящей плоскостью — двухступенчатая, а с осью  $CN_1$  —  $N$ -ступенчатая. Номер симметричной составляющей соответствует номеру низшей пространственной гармоники полного поля (11.1), входящей в данную составляющую. Так, например, низшая гармоника ( $m_1 = 0$ ) нулевой составляющей ( $a_0$ ) представляет одновременно нулевую гармонику ( $m = 0$ ) полного поля, а

низшая гармоника ( $m_2 = 0$ ) минус первой составляющей ( $a_{-1}$ ) представляет минус первую гармонику ( $m = -1$ ) полного поля.

Согласно (11.3) поле каждой симметричной составляющей в точках, отстоящих на период  $L$  пространства взаимодействия, одинаково по амплитуде и отличается по фазе. Если для одной из составляющих сдвиг фаз на периоде  $L$  равен  $\varphi$ , то для другой он равен  $\varphi - \pi$ . При одноступенчатой структуре пространства взаимодействия наличие двух составляющих обусловлено различием формы двух резонаторов в периоде, так что при сближении форм обоих резонаторов амплитуда одной из составляющих должна стремиться к нулю.

Амплитуды пространственных гармоник в одноступенчатых системах обычно почти не зависят от формы резонаторов. При расчетах полагают, что они определяются только структурой пространства взаимодействия. В двухступенчатой ЗС при этом же предположении разложение каждой симметричной составляющей по гармоникам такое же, как для одноступенчатой системы. Таким образом, амплитуды симметричных составляющих зависят только от соотношения форм резонаторов в периоде, а амплитуды гармоник каждой составляющей — только от структуры пространства взаимодействия. Амплитуды составляющих можно рассчитать как методами теории поля, так и методом эквивалентных схем или как-то иначе. Амплитуды гармоник каждой составляющей вычисляются только на основе теории поля.

В пространстве взаимодействия  $Q$ -ступенчатых ЗС поле целесообразно представлять суммой  $Q$  симметричных составляющих,

$$E = \sum_r \sum_{m_r=-\infty}^{\infty} e_{m_r} \exp[-j(\varphi + 2\pi r/Q + 2\pi m_r)z/L], \quad (11.4)$$

где  $-Q/2 \leq r < Q/2$ , а  $r$  — номер симметричной составляющей.

В точках с координатами  $z = qL$  ( $q = 0, 1, \dots, Q-1$ ) аналогично (11.3) поле можно представить в виде конечной суммы

$$E_q = \sum_r \alpha_r \exp[-jq(\varphi + 2\pi r/Q)], \quad (11.5, a)$$

где  $\alpha_r = \sum_{m_r=-\infty}^{\infty} e_{m_r}$  — амплитуда  $r$ -й симметричной составляющей, которая опре-

деляется соотношением размеров резонаторов в периоде. Каждая составляющая может быть представлена суммой гармоник, отношение амплитуд которых зависит только от структуры пространства взаимодействия.

Выражение (11.5 а) запишем в матричной форме:

$$E = [T]\alpha \quad (11.5, б)$$

где  $E$  и  $\alpha$  — векторы с компонентами  $E_q$  и  $\alpha_r$ , соответственно, а  $[T]$  — квадратная матрица с компонентами  $T_{qr} = \exp(-jq\varphi_r)$ ,  $\varphi_r = \varphi + 2\pi r/Q$ .

Если известны значения поля  $E_q$  в точках  $z_q$ , то амплитуды составляющих  $\alpha_r$  можно вычислить по формуле:

$$\alpha = (1/Q)[T]^*E \quad (11.6, a)$$

или, что то же, по формуле

$$\alpha_r = (1/Q) \sum_{q=0}^{Q-1} E_q \exp(jq\varphi_r), \quad (11.6, б)$$

которая получается из (11.5), если учесть, что  $[T][T]^* = [T]^*[T] = [1]/Q$ . Звездочкой обозначена операция Эрмитового сопряжения.

Равенства, аналогичные (11.1)–(11.6), можно записать и для магнитного поля. Соотношения (11.3), (11.5) и (11.6) справедливы также для напряжений и токов в соответствующих точках  $Q$ -ступенчатой цепочки многополюсников \*):

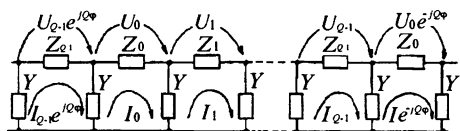
$$\mathbf{U} = [T]\alpha, \quad \mathbf{I} = [T]\eta, \quad (11.7, а)$$

где  $\mathbf{U}$ ,  $\mathbf{I}$ ,  $\alpha$ ,  $\eta$  —  $Q$ -мерные векторы с компонентами  $U_q$ ,  $I_q$  ( $q = 0, 1, \dots, Q-1$ ),  $\alpha_r$ ,  $\eta_r$  ( $-Q/2 \leq r < Q/2$ ). В частности, для двухступенчатых цепочек четырехполюсников эти равенства имеют вид

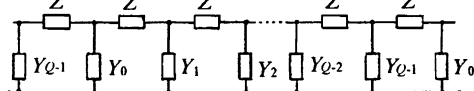
$$\begin{bmatrix} U_0 \\ U_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -\exp(-j\varphi) & \exp(-j\varphi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_{-1} \\ \alpha_0 \end{bmatrix}, \quad (11.7, б)$$

$$\begin{bmatrix} I_0 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -\exp(-j\varphi) & \exp(-j\varphi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_{-1} \\ \eta_0 \end{bmatrix}.$$

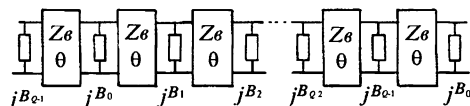
Цепочка, изображенная на рис. 11.2, а, при  $Q = 2$  может служить эквивалентной схемой двухступенчатой ЗС, приведенной на рис. 11.1, б. Проводимости  $Y$  отображают пространство взаимодействия, а сопротивления  $Z_q$  ( $q = 0, 1$ ) — резонаторы.



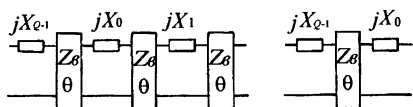
$$а: \cos \varphi_q = \frac{Z_q Y}{2}$$



$$б: \cos \varphi_q = \frac{Z Y_q}{2}$$



$$в: \cos \varphi_q = \cos \theta - \frac{Z B_q}{2} \sin \theta$$



$$г: \cos \varphi_q = \cos \theta - \frac{X_q}{2Z_\theta} \sin \theta$$

Рис. 11.2.  $Q$ -ступенчатые цепочки четырехполюсников

\*) Цепочка многополюсников называется  $Q$ -ступенчатой, если ее период можно представить в виде  $Q$  одинаковых по структуре ячеек, соединенных каскадно. Эти ячейки могут отличаться только величиной сопротивлений. Так, например, в цепочках четырехполюсников, изображенных на рис. 11.2, они отличаются величинами сопротивлений  $Z_q$  или проводимостей  $Y_q$ .

### 11.3. Расчет дисперсии многоступенчатых систем

Рассмотрим цепочку четырехполюсников на рис. 11.2, а. Обозначим через  $[Y_p]$  диагональную матрицу входных проводимостей резонаторов ( $Y_{pq} = 0$  при  $p \neq q$  и  $Y_{qq} = 1/Z_q$ ), так что  $I_q = -Y_{qq}U_q$ , а через  $[Y(\varphi)]$  — диагональную матрицу входных проводимостей пространства взаимодействия, так что  $\eta_r = Y(\varphi_r)\alpha_r$ . Здесь  $\varphi_r = \varphi + (2\pi r/Q)$ . Тогда справедливы равенства

$$\mathbf{I} = -[\mathbf{Y}_p]\mathbf{U}, \quad \boldsymbol{\eta} = [\mathbf{Y}(\varphi)]\boldsymbol{\alpha}.$$

Знак минус выбран из тех соображений, что ток считаем положительным, если он направлен к пространству взаимодействия. В матрицу  $[Y(\varphi)]$  входят проводимости  $Y(\varphi_r)$ , справедливые для одноступенчатых ЗС. Эквивалентная схема выбрана ради простоты, тогда как результаты справедливы и для полевого расчета (см. п. 11.1).

Используя (11.7) можно исключить из последних равенств либо векторы  $\boldsymbol{\alpha}$ ,  $\boldsymbol{\eta}$  амплитуд симметричных составляющих,

$$\{[\mathbf{Y}_p] + [\mathbf{T}][\mathbf{Y}(\varphi)][\mathbf{T}]^{-1}\}\mathbf{U} = 0, \quad (11.8, а)$$

либо векторы  $\mathbf{U}$ ,  $\mathbf{I}$  напряжений и токов,

$$\{[\mathbf{T}]^{-1}[\mathbf{Y}_p][\mathbf{T}] + [\mathbf{Y}(\varphi)]\}\boldsymbol{\alpha} = 0, \quad (11.8, б)$$

где  $[\mathbf{T}]^{-1} = [\mathbf{T}]^*/Q$ . Для двухступенчатых систем \*) последние равенства можно записать в виде

$$\begin{aligned} R(Y_0 + Y(\pi - \varphi)) + Y_0 + Y(\varphi) &= 0, \\ R(Y_1 + Y(\pi - \varphi)) - Y_1 - Y(\varphi) &= 0, \end{aligned} \quad (11.9)$$

где  $R = \alpha_{-1}/\alpha_0$  — отношение амплитуд симметричных составляющих.

Уравнение дисперсии получается в результате приравнивания нулю детерминанта матрицы при  $\mathbf{U}$  в выражении (11.8 а):

$$\text{Det}\{[\mathbf{Y}_p] + [\mathbf{T}][\mathbf{Y}(\varphi)][\mathbf{T}]^{-1}\} = 0, \quad (11.10, а)$$

или при  $\boldsymbol{\alpha}$  в выражении (11.8 б):

$$\text{Det}\{[\mathbf{T}]^{-1}[\mathbf{Y}_p][\mathbf{T}] + [\mathbf{Y}(\varphi)]\} = 0. \quad (11.10, б)$$

\*) Двухступенчатая ( $Q = 2$ ) цепочка, приведенная на рис. 11.2, а, используется также в физике твердого тела при изучении колебаний кристаллических решеток, содержащих два атома в ячейке. В частности, при  $Y = j\omega C$ ,  $Z_0 = j\omega L$ ,  $Z_1 = j\omega L_1$  она служит аналогом цепочки из масс  $m$  и  $m_1$ , связанных пружинами [5]. Она называется цепочкой Борна и служит одномерной моделью кристаллической решетки типа NaCl.

В частности, для двухступенчатой ЗС оно имеет вид

$$[Y_0 + Y(\varphi)][Y_1 + Y(\pi - \varphi)] + [Y_0 + Y(\pi - \varphi)][Y_1 + Y(\varphi)] = 0. \quad (11.11)$$

В соответствии с (11.21) проводимость  $Y(\varphi)$  связана с  $Y$  (см. рис. 11.2, а) соотношением  $Y = 4Y(\varphi) \sin^2(\varphi/2)$ . Если  $Y = j\omega C$  не зависит от  $\varphi$ , уравнение дисперсии (11.11) приводится к компактному виду

$$\cos 2\varphi = 2 \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - 1, \quad (11.12)$$

где введено обозначение

$$\cos \varphi_q = 1 + YZ_q/2, \quad q = 0, 1. \quad (11.13)$$

Выражение (11.13) совпадает с уравнением дисперсии (5.1) одноступенчатой системы. Его правая часть в общем случае может принимать значения, как большие единицы по модулю, так и меньшие.

Можно показать, что уравнение (11.12) справедливо для всех цепочек, изображенных на рис. 11.2. При этом для каждой цепочки вместо (11.13) следует использовать свои выражения для  $\cos \varphi_q$ , приведенные на этом рисунке. Символом  $Z_\theta$  на рисунке обозначено волновое сопротивление соответствующего четырехполюсника, а  $\theta$  — его электрическая длина.

В обозначениях  $\cos \varphi_0$  и  $\cos \varphi_1$  можно записать отношение амплитуд  $R$  в следующем виде:

$$R = -\operatorname{ctg}^2(\varphi/2) \frac{\cos \varphi_0 - \cos \varphi}{\cos \varphi_0 + \cos \varphi} = \operatorname{ctg}^2(\varphi/2) \frac{\cos \varphi_1 - \cos \varphi}{\cos \varphi_1 + \cos \varphi}. \quad (11.14)$$

Исследуем дисперсионную характеристику двухступенчатой системы, полагая проводимость  $Y$  емкостной и представив эквивалентные схемы резонаторов параллельными контурами,

$$Y = j\omega C, \quad Y_q = j(\omega C_q - 1/\omega L_q), \quad q = 0, 1, \quad (11.15)$$

и вводя обозначения

$$\lambda_q = 2\pi c(L_q C_q)^{1/2}, \quad \kappa = \lambda_0^2 C/2C_0(\lambda_1^2 - \lambda_0^2). \quad (11.16)$$

Величину  $\kappa$  называют связанностью контуров [5], а  $\lambda_q$  представляет длину волны собственных колебаний  $q$ -го контура. Для определенности полагаем  $\lambda_0 < \lambda_1$ .

Кривые дисперсии двухступенчатой гребенки в координатах  $(\lambda/\lambda_1, \varphi)$ , построенные в результате решения (11.12) с учетом (11.15) и (11.16), приведены на рис. 11.3. Они построены для нулевой и минус первой гармоник ЗС при различных отношениях  $(\lambda_1/\lambda_0)^2$ . В соответствии с (11.2) номера гармоник совпадают с номерами составляющих. Отношение амплитуд этих гармоник  $e_{-1}(x, y)/e_0(x, y)$  пропорционально отношению  $R$  амплитуд составляющих. Если, в частности,  $R = \alpha_{-1} = 0$ , то и  $e_{-1}(x, y) = 0$ .

Если все резонаторы одинаковы ( $Z_0 = Z_1$  или, что то же,  $C_0 = C_1$ ,  $\lambda_0 = \lambda_1$ ), то ЗС одноступенчатая. При этом  $\cos \varphi_0 = \cos \varphi_1$ , и уравнение дисперсии

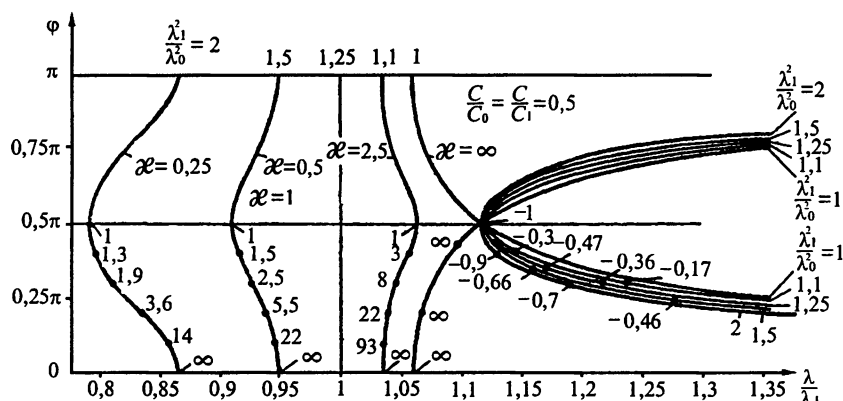


Рис. 11.3. Кривые дисперсии двухступенчатой резонаторной системы при различных  $\lambda_1^2/\lambda_0^2$ . Числами около кривых указаны значения  $R = \alpha_{-1}/\alpha_0$

(11.12) расщепляется на два:

$$\cos \varphi = \cos \varphi_0 = 1 + YZ_0/2, \quad (11.17, a)$$

$$\cos(\pi - \varphi) = \cos \varphi_0. \quad (11.17, б)$$

Уравнение (11.17, а) описывает положительную дисперсию на рис. 11.3. Оно соответствует одноступенчатой цепочке четырехполосников. Уравнению же (11.17, б) соответствует отрицательная дисперсия. На одной и той же частоте разности фаз, определяемые обоими уравнениями, отличаются на  $\pi$ , так что если одно уравнение определяет характеристику нулевой составляющей, то другое — характеристику минус первой составляющей. При расчете одноступенчатых систем второго уравнения не получается, так что, казалось бы, (11.17, б) представляет лишнее решение. В действительности оба решения определяют одну и ту же кривую, поскольку согласно (11.14) амплитуда одной из составляющих равна нулю. В самом деле, если  $\varphi$  удовлетворяет (11.17, а), то  $R = 0$ , если же  $\varphi$  удовлетворяет (11.17, б), то  $R = \infty$ .

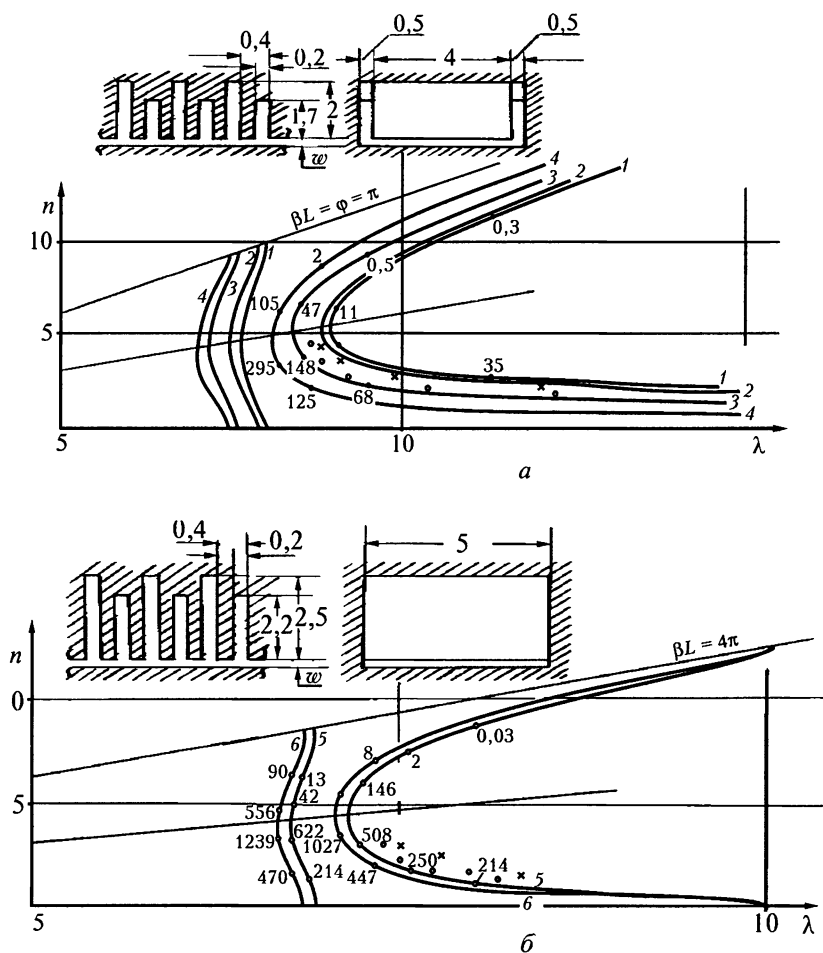
Если резонаторы отличаются по форме, то полоса пропускания расщепляется на две, а амплитуды обоих составляющих отличны от нуля ( $R \neq 0$  и  $R \neq \infty$ ). В первой полосе \*) преобладает амплитуда нулевой составляющей ( $|R| < 1$ ), а во второй — амплитуда минус первой составляющей ( $|R| > 1$ ).

На рис. 11.3 цифрами около кривых указаны значения  $R$ , вычисленные по формуле (11.14). Во второй полосе они существенно превышают единицу, даже если соседние резонаторы значительно отличаются друг от друга. Дисперсия минус первой составляющей в этой полосе отрицательна \*\*). Сравнение результатов расчета и измерений дисперсионных характеристик двухступенчатых ЗС дано на рис. 11.4.

Таким образом, на примере резонаторной системы показано, что превращив одноступенчатую систему в многоступенчатую, можно изменить характер

\*) Номера полос пропускания отсчитываются от самой длинноволновой в сторону уменьшения длин волн

\*\*) В физике твердого тела первую ветвь называют акустической, а вторую — оптической.



	1	2	3	4	5	6
$w$	0,2	0,4	0,2	0,4	0,2	0,4
$\frac{\hat{A}}{\hat{C}}$	1	0,5	2,23	2,11	0,5	0,25

**Рис. 11.4.** Кривые дисперсии двухступенчатой гребенки, полученные в результате расчета (сплошные линии) по формуле  $\cos \varphi_q = 1 + (\hat{C}/(2\hat{C}_q))\{A/[1 - (\lambda/\lambda_q)^2]\}$  и измерений при  $w = 0,2$  (крестики) и  $w = 0,4$  (кружки) для случаев, когда гребенка: *a* — открыта с торцов ( $A = 1$ ,  $\lambda_q = 4h_q$ ); *б* — закрыта с торцов ( $A = 1 - (\lambda/2p)^2$ ,  $\lambda_q = 4h_q p[(2h_q)^2 + p^2]$ ). Здесь  $q = 0, 1$ ;  $\hat{C}_q = h_q/2l$ . Для кривых 1, 2, 5, 6 емкость  $\hat{C}$  вычислена по формуле плоского конденсатора  $\hat{C} = (d - l)/w$ , а для кривых 3 и 4 принято  $\hat{C} = \hat{C}(\pi)$  [1]. Числами около точек на кривых указаны значения сопротивления связи в Ом, вычисленные по формуле

$$K_{св} = (30\lambda F(\varphi)/pA\hat{C})|\operatorname{tg}(\varphi/2)(\cos\varphi_0 + \cos\varphi_1 + 2\cos\varphi)/\cos\varphi|$$

ее дисперсии. При этом амплитуда у высших пространственных гармоник может быть выше, чем у нулевой. В частности, в отличие от одноступенчатой, двухступенчатая резонаторная система имеет составляющую с отрицательной дисперсией и с достаточно большой амплитудой, так что ее можно использовать в ЛОВ. Кроме того, при сдвигах фаз  $\varphi$ , близких к  $\pi$ , кривые дисперсии для двухступенчатой ЗС идут не так круто, как для обычной гребенки. Поэтому двухступенчатая система в анодных блоках магнетронов обеспечивает большее разделение видов колебаний по частоте, чем гребенка. В частности, на рис. 11.3 разделение длин волн, соответствующих  $\varphi = \pi$  и  $\varphi = 0,9\pi$ , для одноступенчатой системы ( $\kappa = \infty$ ) составляет примерно 0,25 %, а для двухступенчатой ( $\kappa = 25$ ) — примерно 1,2 %.

Двухступенчатую резонаторную ЗС, используемую в магнетронах, обычно называют *разнорезонаторной*. Основным преимуществом такой ЗС перед системой со связками служит простота изготовления, что особенно важно для коротковолновых магнетронов. Ее основной недостаток состоит в том, что рабочая полоса является второй. Наличие еще и первой полосы может привести к нестабильности работы ЛОВ или к возбуждению паразитных колебаний в магнетроне из-за наличия видов колебаний, близких по замедлению к  $\pi$ -виду.

Следует обратить внимание на ошибку, которую дает метод эквивалентных схем. При  $\varphi = 0$  он дает  $R = \infty$  (см. рис. 11.3), что означает отсутствие поля у нулевой составляющей. Более строгий расчет по формуле (11.9) дает конечное значение  $R$ , т.е. существует поле у нулевой составляющей. Это поле служит причиной падения КПД магнетронов, если внешнее магнитное поле соответствует частоте циклотронного резонанса. Описанным выше методом эквивалентных схем нельзя пользоваться для оценки отношения амплитуд симметричных составляющих при малых сдвигах фаз.

#### 11.4. Сопротивление связи многоступенчатых систем

Вычислим сопротивление связи  $Q$ -ступенчатой системы по формуле (5.5), в которой величину  $U$  следует заменить на амплитуду симметричной составляющей

$$K_{св} = (M^2/2\varphi^2)(\alpha_r, \alpha_r^*/P). \quad (11.18)$$

Из предыдущего материала известно, как найти коэффициент формы пространства взаимодействия  $M$  (9.29) и (9.30), сдвиг фаз  $\varphi$  на периоде (11.12) и амплитуду  $r$ -й симметричной составляющей (11.8, 6). Чтобы вычислить поток энергии  $P$ , можно воспользоваться равенством  $P = Wv_r/d$ , где  $W$  — средняя по времени энергия, запасенная в полном периоде. Групповую скорость  $v_r = d\omega/d\beta$ ,  $\beta = \varphi/d$  можно вычислить с помощью уравнения дисперсии (11.10), а энергию  $W$  с помощью теоремы Фостера (см. вывод формулы (9.23).

При рассмотрении частного случая поступим несколько иначе. Заметим, что в соответствии с (11.7, 6)

$$\alpha_r = [U_0 + U_1 \exp(j\varphi)]/2,$$

$r = 0$  при  $|\varphi| \leq \pi/2$ ,  $r = 1$  при  $\pi/2 < |\varphi| \leq \pi$ .



Вычислим поток энергии  $P$  в цепочке через ток  $I_1$  и напряжение  $U$  на левом конце сопротивления  $Z_1$  (рис. 11.2, а):

$$P = (UI_1^* + U^*I_1)/4.$$

Исключая  $U = (I_0 - I_1)/Y$ , находим поток энергии

$$P = (I_0I_1^* + I_0^*I_1)/4Y.$$

Здесь учтено, что  $Y = -Y^*$ .

Записав уравнение Кирхгофа для одного из контуров, исключим  $I_1 = (\cos\varphi/\cos\varphi_1)I_0 \exp(-j\varphi)$ . Здесь использовано обозначение (11.13). Заметив, что в соответствии с (11.12)  $\cos^2\varphi = \cos\varphi_0 \cos\varphi_1$ , получим следующее выражение для потока энергии:

$$P = |2/Y| \sin\varphi (\cos\varphi_0/\cos\varphi_1)^{1/2} I_0I_0^*. \quad (11.19)$$

Вычислив произведение  $\alpha_r \alpha_r^*$ , исключив из него потенциалы  $U_0 = Z_0I_0$ ,  $U_1 = Z_1I_1$  и подставляя результат в (11.18), находим

$$K_{св} = \frac{F(\varphi)}{2|Y|} \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \left| \frac{\cos\varphi_0 + \cos\varphi_1 + 2\cos\varphi}{\cos\varphi} \right|, \quad (11.20, a)$$

где  $F(\varphi) = M^2 \sin^2(\varphi/2)/(\varphi/2)^2$ .

Полагая, как в гл. 9,  $Y = j\omega C$ , и вводя обозначение  $\hat{C} = C/(p\varepsilon)_0$ , где  $p$  — размер системы вдоль оси  $y$  (рис. 11.1), т.е. в направлении, перпендикулярном рисунку, получаем окончательное выражение для сопротивления связи двухступенчатой системы:

$$K_{св} = 30 \frac{\lambda F(\varphi)}{p\hat{C}} \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \left| \frac{\cos\varphi_0 + \cos\varphi_1 + 2\cos\varphi}{\cos\varphi} \right|. \quad (11.20, б)$$

При  $\cos\varphi_0 = \cos\varphi_1 = \cos\varphi$  оно совпадает с выражением (5.30, а), полученным ранее для одноступенчатых систем. При  $\cos\varphi_0 = \cos\varphi_1 = \cos(\pi - \varphi)$  сопротивление связи равно нулю, так как равна нулю амплитуда соответствующей составляющей.

Результаты расчета сопротивления связи указаны числами около кривых дисперсии на рис. 11.4. В первой полосе сопротивления связи обеих составляющих сравнимы и имеют порядок десятка или сотни ом. Нулевая гармоника минус первой составляющей имеет отрицательную дисперсию и может использоваться в ЛОВ. Таким образом, превратив одноступенчатую гребенку, имеющую положительную дисперсию, в двухступенчатую, можно получить составляющую с отрицательной дисперсией и с достаточно высоким сопротивлением связи.

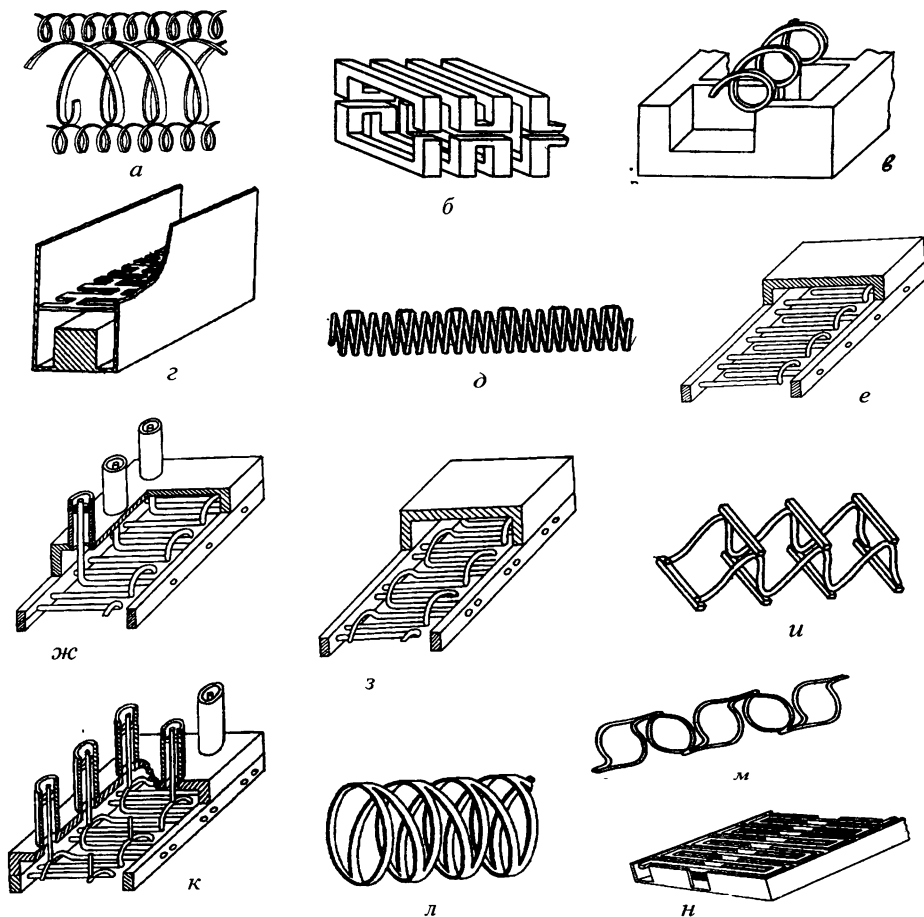
Возвращаясь к аналогии ЗС и кристаллов, заметим, что вторая полоса пропускания соответствует оптической ветви колебаний решетки типа NaCl и в ней преобладает составляющая с отрицательной дисперсией. Этот факт Л.И. Мандельштам предложил использовать для проверки несколько необычных законов преломления (см. п. 1.2 и гл. 19) с помощью опытов на упругих волнах.

Расчет многоступенчатых ЗС проиллюстрирован выше на примере гребенки и проведен методом эквивалентных схем. Расчет методами теории поля описан в работе [2], в которой на примере пятиступенчатой гребенки иллюстрируется возможность совмещения двух функций гребенки: замедляющей системы для электронного прибора и периодической антенной решетки.

## Упражнения

**11.1.** Определить число ступеней для ЗС, изображенных на рис. 11.5.

**11.2.** Получить в форме, аналогичной (11.12), уравнения дисперсии трех-, четырех-, ...,  $Q$ -ступенчатых цепочек четырехполюсников, изображенных на рис. 11.2.



**Рис. 11.5.** Примеры замедляющих систем с различным числом ступеней

### Список литературы

- [1]. Белуга И. Ш. Расчет характеристик некоторых штыревых и резонаторных замедляющих систем. *Вопросы радиоэлектроники. Сер. 1. Электроника*, 1963. Вып. 1, 71–120.
- [2]. Замедляющие системы гребенчатого типа с периодическими неоднородностями. Бородкин А. И. и др. *Электронная техника. Сер. 1. Электроника СВЧ*, 1979. Вып. 9, 3–12.
- [3]. Ландсберг Г. С. Оптика. М.: Наука, 1976. 926 с.
- [4]. Магнетроны сантиметрового диапазона. Под ред. С. А. Зусмановского. Т. 1, 2. М.: Сов. радио, 1950–1951.  
Перевод к н.: Microwave magnetrons. Ed. by G. Collins. New York, 1948.
- [5]. Мандельштам Л. И. Полное собрание трудов. Т. 4. М.: АН СССР, 1955. 511 с.
- [6]. Пасечник З. И. Теоретическое и экспериментальное исследование двухступенчатых резонаторных замедляющих систем. *Электронная техника. Сер. 1. Электроника СВЧ*, 1968. Вып. 11, 13–22.

## Анодные блоки магнетронов со связками

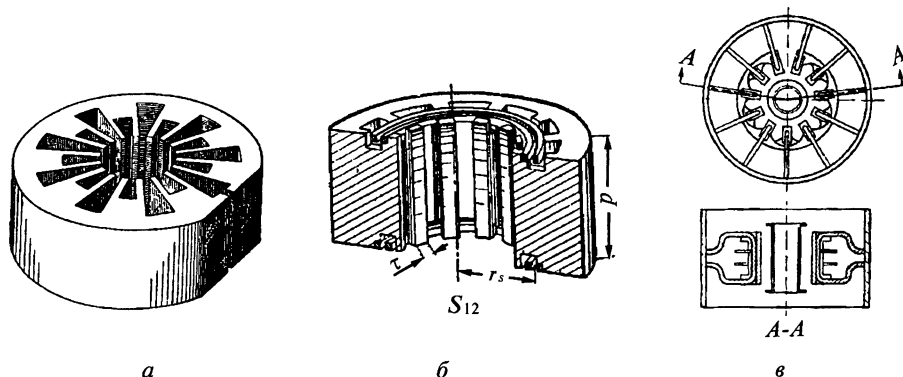
### 12.1. Типы анодных блоков магнетронов и их свойства симметрии

В технике широко используются магнетроны, представляющие генераторы колебаний большой мощности сантиметрового и миллиметрового диапазонов длин волн. Одной из основных частей магнетрона служит анодный блок, представляющий резонатор с осью симметрии  $CN$  или  $SN$  (рис. 2.2 и рис. 12.1). Наиболее широко применяются двухступенчатые резонаторные системы (разнорезонаторные магнетроны, рис. 12.1, *а*), рассматриваемые в гл. 11, и системы со связками (рис. 12.1, *б*), рассматриваемые в настоящей главе. В магнетронах применяются также бугельные системы со связками (рис. 12.1, *в*) [2, 4, 8], системы типа «встречные штыри» (рис. 2.7, *а*), волнообразно изогнутые волноводы [10, 11], коаксиальные резонаторы и другие системы. Все они могут применяться и в платинотронах.

Как показано в п. 2.5, в любом резонаторе с осью  $CN$  или  $SN$  существуют виды колебаний, у которых сдвиг фаз в соседних ячейках резонатора удовлетворяет равенству

$$\varphi = 2\pi q/N, \quad (-N/2 < q \leq N/2), \quad (12.1)$$

где  $N$  — число ячеек в анодном блоке, а целое число  $q$  равно количеству «длин волн», укладываемых вдоль окружности вокруг оси симметрии.



**Рис. 12.1.** Анодные блоки магнетронов и платинотронов: *а* — разнорезонаторный; *б* — резонаторный с двойными двусторонними кольцевыми связками; *в* — бугельный со связками

Это число называется *номером вида колебаний*. Пределы изменения  $q$  обусловлены областью изменения  $\varphi$  в пределах  $-\pi < \varphi \leq \pi$ . Колебания, соответствующие  $q = N/2$ , как отмечено в гл. 2, называются  *$\pi$ -видом колебаний* или  *$\pi$ -колебаниями*.

Расчет спектра частот видов колебаний анодных блоков со связками проведен ниже методом эквивалентных схем. Каждая ячейка блока заменяется четырехполосником или шестиполосником с сосредоточенными постоянными. Затем рассчитывается дисперсионная характеристика  $\omega(\varphi)$  такой цепочки. Зная, что сдвиг фаз удовлетворяет условию (12.1), можно определить спектр частот и замедлений  $n(\lambda_q) = \lambda_q \varphi_q / 2\pi d = q \lambda_q / Nd$ .

Значениям  $\varphi > 0$  соответствуют волны, бегущие в положительном направлении вдоль окружности вокруг оси. Значения  $\varphi = 0$  и  $\varphi = \pi$  соответствуют границам полос пропускания бесконечной цепочки. При этом в магнетроне волна может быть только стоячей. Значениям  $q$ , отличающимся только знаком, соответствует одна и та же частота, т.е. в магнетронных резонаторах вырождены все виды колебаний, кроме нулевого и  $\pi$ -вида.

В координатах  $n(\lambda)$  линии постоянных значений  $\varphi$  представляют лучи, выходящие из начала координат (рис. 12.2). Точки пересечения кривых дисперсии с лучами, для которых  $\varphi$  удовлетворяет условию (12.1), определяют значения  $\lambda_q$  и  $n_q$  для различных видов колебаний.

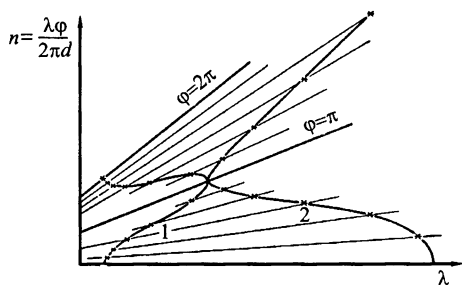
Колебания  $\pi$ -вида обычно используют для работы магнетрона. При

этом остальные виды колебаний называются *паразитными*. Для обеспечения стабильной работы магнетрона необходимо, чтобы длина волны  $\lambda$  и замедление  $n$  паразитных и  $\pi$ -колебаний отличались более, чем на 2–3 %.

Кривой 1 на рис. 12.2 соответствует отрицательная дисперсия нулевой гармоники, а кривой 2 — положительная. При фиксированном разделении длин волн  $\pi$ -вида и ближайшего к нему кривой 1 соответствует большее, чем кривой 2, разделение по замедлению с нулевой гармоникой этого вида и меньшее — с минус первой гармоникой.

Как видно на рис. 12.2, при отрицательной дисперсии нулевой гармоники в отличие от положительной увеличению разделения длин волн соответствует рост разделения замедлений на нулевой гармонике ( $\varphi < \pi$ ) и уменьшение — на минус первой ( $\varphi > \pi$ ). В предельном случае, когда кривая дисперсии вертикальна, разделения по замедлению для обеих гармоник одинаковы и составляют  $\lambda Nd$ . Следует заметить, что все системы, изображенные на рис. 12.1, вблизи  $\pi$ -колебаний имеют отрицательную дисперсию при  $\varphi < \pi$ .

При малом разделении по замедлению скорости электронов, возбуждающие различные виды колебаний, близки. Поэтому достаточно небольшого изменения напряжения, чтобы возбудить паразитный вид. При малом разделении длин волн перекрываются резонансные кривые соседних видов



**Рис. 12.2.** К определению спектра видов колебаний по заданной кривой дисперсии

колебаний и происходит «перекачка» энергии от  $\pi$ -колебаний к паразитным. Мешающее действие паразитных колебаний усугубляется тем, что их поле искажает форму электронного потока.

Одноступенчатые резонаторные ЗС (гребенка и ее видоизменения) почти не используются в магнетронах, поскольку они не обеспечивают достаточного разделения частот. Например, при числе резонаторов  $N=8$  разделение частот  $\pi$ -вида и соседнего к нему не превышает 1–2 %. Как исключение, одноступенчатые ЗС используются в магнетронах миллиметрового диапазона, в которых электроны взаимодействуют с минус первой гармоникой поля при  $q \neq N/2$ .

С целью увеличения разделения видов колебаний по частоте предложено множество конструкций. Некоторые из них изображены на рис. 12.1. Одна из них, а именно, система со связками (рис. 12.1, б) рассмотрена в настоящей главе. Она широко используется в магнетронах и платиновых.

## 12.2. Дисперсия резонаторной системы со связками

Строгий расчет дисперсионной характеристики и сопротивления связи резонаторной системы со связками возможен только методами теории поля (например, описанным в гл. 10 проекционным методом). В настоящей главе описан расчет методом эквивалентных схем<sup>\*</sup>), который позволяет без громоздких вычислений рассчитать спектр видов колебаний, соответствующий основной полосе пропускания ЗС, исследовать влияние на спектр различных размеров системы.

Предложено много эквивалентных схем анодного блока со связками. Одна из них приведена на рис. 12.3. Контур  $L_0C_0$  отображает резонатор,  $C$  — емкость пространства взаимодействия,  $L_{cb}$  и  $C_{cb}$  — индуктивность и емкость связок.

Вводя обозначение  $C_k(\varphi) = C/4 \sin^2(\varphi/2)$  в соответствии (9.24) и записав уравнения Кирхгофа для схемы, можно получить уравнение дисперсии анодного блока

$$\cos \varphi = [(\omega^2 L_{cb} C_{cb} / 2) - 1] \{1 + L_{cb} / L_0 - \omega^2 L_{cb} [C_0 + C_k(\varphi)]\} + \omega^2 L_{cb} C_{cb} / 2.$$

Умножая левую и правую части этого равенства на  $1 + \omega^2 L_{cb} C_{cb} / 2$ , вводя обозначения  $\lambda_p = 2\pi c(L_0 C_0)^{1/2}$ ,  $\gamma = L_0 / L_{cb}$ ,  $k_c = C_{cb} / C_0$ ,  $k_0(\varphi) = C_k(\varphi) / C_0$  и полагая  $\omega^4 L_{cb}^2 C_{cb}^2 \ll 1$ , получим формулу для определения  $\lambda$ :

$$\lambda = \lambda_p \{ [1 + k_0(\varphi) + k_c(1 - \cos \varphi)] / [1 + \gamma(1 + \cos \varphi)] \}^{1/2}. \quad (12.2)$$

Выражая  $L_0$  через  $C_0$  и  $\lambda_p$ , а

$$L_{cb} \equiv s^2 / c^2 C_{cb} \quad (12.3, a)$$

<sup>\*</sup>) Расчет дисперсионной характеристики систем со связками описан на основе неопубликованных работ В.С. Лукошкова и В.Н. Готгельфа (1948 г.) и З.Д. Ковтуновой, А.С. Победоносцева, Р.А. Силина (1954–1956 гг.).

через  $C_{св}$  и длину секции связок

$$s = 2\pi r_s / N \quad (12.3, б)$$

( $r_s$  — средний радиус связок на рис. 12.1, б,  $N$  — число резонаторов), получим выражение для  $\gamma$ :

$$\gamma = (k_c / s^2) (\lambda_p^2 / 2\pi^2). \quad (12.3, в)$$

Выражение (12.3 а) записано в предположении, что участок связок представляет отрезок двухпроводной линии, для которой справедливо равенство  $c^2 LC = 1$ , где  $L$  и  $C$  — погонные индуктивность и емкость связок ( $L_{св} = sL$ ,  $C_{св} = sC$ ). Условие  $\omega^4 L_{св}^2 C_{св}^2 \ll 1$ , выраженное через  $s$ , принимает вид  $(2\pi s / \lambda)^2 \ll 1$ , т.е. длина волны в свободном пространстве значительно больше длины секции связок. Это условие обычно выполняется.

При отсутствии связок ( $k_c = 0$ ,  $\gamma = 0$ ) уравнение дисперсии принимает вид (9.7):

$$\lambda = \lambda_p [1 + k_0(\varphi)]^{1/2}, \quad (12.4)$$

полученный для гребенки.

На рис. 12.3 сравниваются результаты измерения и расчета дисперсионных характеристик анодного блока магнетрона со связками. Кривая 0 соответствует измерениям, 1 — расчету в отсутствие связок ( $k_c = 0$ ,  $\gamma = 0$ ), 2 — расчету в отсутствие связи через пространство взаимодействия ( $k_0(\varphi) = 0$ ), 3 — расчету, в котором краевая емкость определяется в квазистатическом приближении.

Расчет дисперсионной характеристики получается наиболее точным, если рассчитывать входную проводимость пространства взаимодействия эквивалентным статическим методом [1]. При этом вычисления значительно

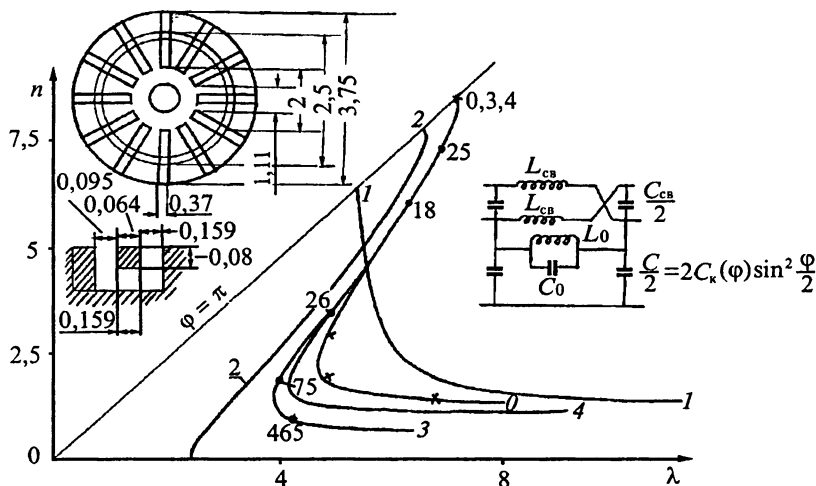


Рис. 12.3. Сравнение результатов расчета и измерений дисперсионной характеристики магнетрона со связками ( $p = 2,4$ ,  $\gamma = 1,26$ ,  $k_0 = 0,5$ ,  $C_0 = C_{св} = 5,53\epsilon_0$ )

усложняются. При малых замедлениях величина  $C_k(\varphi)$  существенно отличается от статической и зависит не только от  $\varphi$ , но и от  $\lambda$ . Она увеличивается до бесконечности при замедлении  $n$ , стремящемся к некоторой величине  $n_0$ , близкой к единице. При  $n < n_0$  входная проводимость пространства взаимодействия индуктивная, а при  $n > n_0$  — емкостная. С достаточной степенью точности величину  $C_k(\varphi)$  можно аппроксимировать формулой

$$C_k(\varphi) = C_{\text{кст}}(\varphi) / [1 - (1/n^2)], \quad (12.5)$$

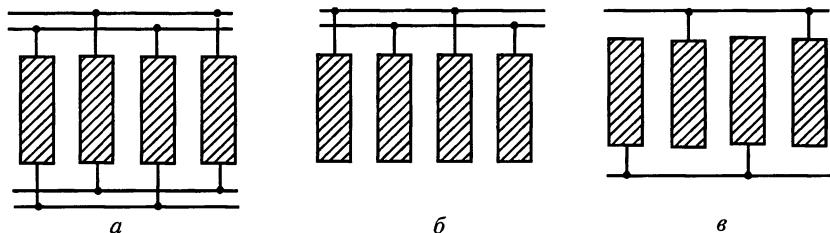
где  $C_{\text{кст}}(\varphi)$  — краевая емкость, вычисленная в квазистатическом приближении.

Кривая 4 на рис. 12.3 получена в результате расчета, в котором краевая емкость  $C_k(\varphi)$  вычислена по формуле (12.5). При отсутствии связей дисперсия системы положительная. Если пренебречь связями резонаторов через пространство взаимодействия, то дисперсия отрицательная. При учете влияния связей и пространства взаимодействия дисперсия отрицательна при больших замедлениях ( $n > 2, \dots, 2,5$ ) и положительна при малых. Можно сказать, что при больших замедлениях преобладает связь через связки, а при малых — через пространство взаимодействия. Точность расчета при  $n > 2,5$  достаточно высокая даже в квазистатическом приближении. При низких замедлениях учет отличия поля в пространстве взаимодействия от квазистатического увеличивает точность расчета.

Формула (12.2) справедлива для расчета систем как с двойными двусторонними и односторонними связками, так и для систем с одинарными двусторонними связками. Отличие состоит лишь в определении емкости связей  $C_{\text{св}}$ . Величина  $C_{\text{св}}$  для системы *а* на рис. 12.4 вдвое больше, чем для *б*, а для *в* она меньше, чем для *б*, поскольку отсутствует емкость между связками.

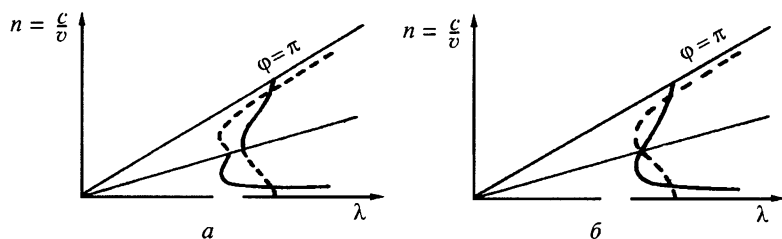
Погрешность расчета длины волны по формуле (12.2) при  $p > 0,2\lambda$  и замедлениях  $n > 3$ , как правило, не превышает 5 % и достигает 10–30 % при малых замедлениях. Это связано, в основном, с неточным определением параметров связей и с учетом связи через торцевые полости анодного блока. В частности, если размер  $p \ll \lambda$ , то формула (12.2) неприменима.

Выше описан расчет дисперсионной характеристики системы со связками в предположении, что соседние ячейки одинаковы, т.е. система одноступенчатая. Фактически она двухступенчатая, хотя бы потому, что связки в ней не одинако-



**Рис. 12.4.** Различные типы связей: *а* — двойные двусторонние, *б* — двойные односторонние, *в* — одинарные двусторонние





**Рис. 12.5.** Вид кривых дисперсии анодных блоков магнетронов со связками с учетом их двухступенчатости: *а* — не содержащих и *б* — содержащих зеркально-поворотную ось

вы (имеют разные радиусы). Поэтому гармонике со сдвигом фаз  $\varphi$  должна сопутствовать гармоника со сдвигом фаз  $\pi - \varphi$  (рис. 12.5). Если система содержит зеркально-поворотную ось  $SN$ , как на рис. 12.1, б, то при  $\varphi = \pi/2$  кривые дисперсии пересекаются. В противном случае (см. рис. 2.2, а) возможно расщепление кривой на две. При этом должны наблюдаться два вида колебаний, соответствующих  $\varphi = \pi/2$  и имеющих разные собственные частоты.

Сплошными линиями на рис. 12.5 нанесены кривые, получающиеся в результате расчета методом эквивалентных схем. Поле соответствующих гармоник преобладает в магнетроне. Именно с ними, в основном, взаимодействуют электроны в магнетроне. Поле гармоник, нанесенных штриховой линией, сравнительно мало. Оно является паразитным и в зондовых измерениях обнаруживается по модуляциям зондограмм.

Наличие паразитной ветви дисперсионной характеристики может привести к дополнительным неустойчивостям в работе магнетрона и к излучению электромагнитных волн на рабочей частоте через катодную ножку (нулевая составляющая р-вида), образующую коаксиальную линию.

На основании теории симметрии (см. гл. 2) и характеристик, приведенных на рис. 12.5, можно сформулировать некоторые рекомендации по конструированию анодных блоков. Связки целесообразно делать двусторонними так, чтобы блок имел зеркально-поворотную ось. При этом поле паразитных ветвей распределено антисимметрично по высоте блока и, следовательно, равно нулю хотя бы в среднем сечении блока. Наличие поля антисимметричной составляющей обусловлено различием емкостей и точек подключения внутренней и внешней связок. Амплитуду антисимметричной составляющей можно уменьшить подбором емкостей и точек подключения связок. С точки зрения уменьшения амплитуды антисимметричной составляющей двойные связки лучше одинарных.

### 12.3. Сопротивление связи

Система со связками используется не только в магнетронах, но и в платиотронах. При этом она представляет замкнутую в кольцо систему из нечетного числа резонаторов, в которой связки не замкнуты. Один конец связок может служить входом платиотрона (на него подается усиливаемый сигнал), а другой — выходом. При больших сдвигах фаз ( $|\varphi| > \pi/2$ ), на которых

и происходит взаимодействие электронов с волной, преобладает связь через связки, а так как они разорваны, то систему можно считать приближенно разомкнутой. По связкам платинотрон согласуют с нагрузкой, и отдельные виды колебаний наблюдать невозможно.

При малых сдвигах фаз ( $|\varphi| < \pi/2$ ), когда преобладает связь через пространство взаимодействия, систему нельзя считать разомкнутой. В ней можно наблюдать отдельные виды колебаний. В частности, в платинотронных системах наблюдают первый вид колебаний, которому соответствует одна волна, укладывающаяся вдоль окружности. Если частота колебаний этого вида попадает в рабочий диапазон, то платинотрон, как правило, работает нестабильно и с малым к.п.д.

Сопротивление связи необходимо знать при больших сдвигах фаз ( $|\varphi| > \pi/2$ ), так как в платинотроне используются именно эти сдвиги фаз. Если определить волновое сопротивление системы со связками как отношение напряжения между связками к току в сечении, соответствующем входным клеммам шестиполюсника на рис. 12.3, то его можно получить в следующем виде (см. упражнение 12.1):

$$Z_{\text{в}} = \frac{\rho}{k\hat{C}_{\text{св}}} \frac{2k^2 s^2}{|2 - k^2 s^2|} \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} [\text{Ом}], \quad (12.6).$$

где  $\hat{C}_{\text{св}} = C_{\text{св}}/\epsilon_0$ ,  $k = 2\pi/\lambda$ ,  $\rho = (\mu_0/\epsilon_0)^{1/2} = 120 \pi [\text{Ом}]$ ,  $s = 2\pi r_s/N$ . Для сопротивления связи получается следующее выражение:

$$K_{\text{св}} = \frac{\rho F(\varphi)}{4\hat{C}_{\text{св}}} \frac{ks^2 2 - k^2 s^2}{\sin^3(\varphi/2)\cos(\varphi/2)} [\text{Ом}]. \quad (12.7)$$

Коэффициент  $F(\varphi)$  определяется формулой (5.6, в). Его значения приведены в табл. 9.1. Результаты расчета сопротивления связи по формуле (12.7) указаны числами около кривых на рис. 12.3.

## 12.4. Влияние неоднородностей на характеристики анодных блоков

Как отмечено выше, анодные блоки магнетронов представляют собой замкнутые в кольцо ЗС. Если в анодном блоке нет неоднородностей, т. е. все резонаторы одинаковы, нет вывода энергии, связки представляют замкнутые кольца (нет разрывов) и т.п., то все виды колебаний кроме нулевого и  $\pi$ -вида двукратно вырождены. Однако любая неоднородность снимает вырождение, т. е. приводит к расщеплению всех частот вырожденных колебаний. Каждую пару таких колебаний называют *дуплетом*, а сами колебания — *составляющими дуплета*.

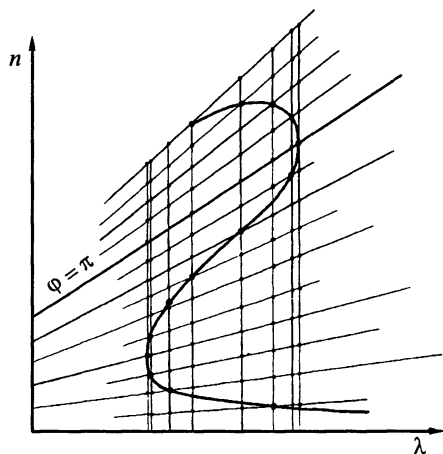
Если в анодном блоке с неоднородностями существует одна и только одна плоскость симметрии, в которой лежит ось блока, то эта плоскость должна быть либо электрической, либо магнитной стенкой. Каждая компонента

поля либо максимальна, либо равна нулю в этой плоскости. Более того, если для одной составляющей дуплета какая-то компонента поля равна нулю, то для другой она максимальна. Поле собственных колебаний теперь уже нельзя представить в виде волны, бегущей по окружности. Величина сдвига фаз теперь уже может не удовлетворять условию (12.7).

Отвод энергии из анодного блока осуществляют обычно либо с помощью петли связи, помещенной в один из резонаторов, либо с помощью щели, прорезанной в стенке одного из резонаторов. В обоих случаях через элемент связи проходит плоскость симметрии анодного блока, а связь максимальна только для одной составляющей дуплета. Другая составляющая остается ненагруженной. Она может эффективно взаимодействовать с электронным потоком. При этом наряду с колебаниями  $\pi$ -вида могут возбуждаться ненагруженные составляющие других видов. Магнетрон должен работать нестабильно. Форма поля нагруженного дуплета искажается.

Чтобы связать все виды колебаний с нагрузкой и чтобы исказить их форму, в анодном блоке создают дополнительные неоднородности, ликвидирующие плоскости симметрии. В качестве неоднородностей используют обычно разрывы связей. При этом все составляющие оказываются связанными с нагрузкой и искаженными. Той же цели служат так называемые *одновидовые* анодные блоки (*unimode*), в которых почти все резонаторы делаются различными. Их форма подбирается таким образом, чтобы неискаженным остался только  $\pi$ -вид колебаний.

Наряду с положительными (нагрузка паразитных видов и искажение их формы с целью уменьшения эффективности взаимодействия с электронами) внесение неоднородности может привести и к отрицательным результатам. Чтобы понять эти отрицательные явления, представим искаженное поле в анодном блоке в виде суммы полей неискаженных типов колебаний (в виде суммы *симметричных составляющих*). Каждой составляющей соответствует свой сдвиг фаз (12.1) между соседними ячейками и, следовательно, свое замедление  $n$ . На рис. 12.6 значения этих замедлений указаны точками на линиях постоянной фазы. Чем сильнее искажение поля, тем больше амплитуды полей, соответствующие точкам, лежащим не на кривой дисперсии, и тем меньше амплитуды полей, соответствующие точкам на кривой дисперсии. В результате уменьшается эффективность взаимодействия электронов с полем на «рабочем» виде колебаний и появ-

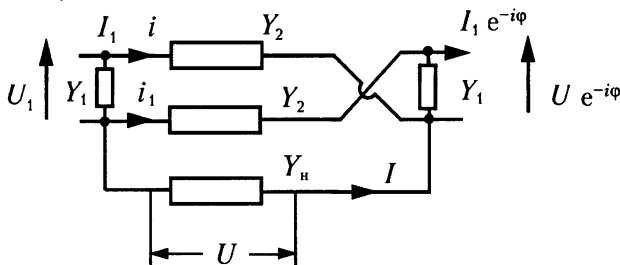


**Рис. 12.6.** Кривая дисперсии анодного блока магнетрона со связками без учета двухступенчатости. Точки пересечения лучей с кривой дисперсии соответствуют видам колебаний блока, а с вертикальными прямыми — симметричным составляющим, обусловленным искажением поля

ляется возможность взаимодействия с полем паразитных видов колебаний даже тогда, когда условие синхронизма для них не выполняется (скорости волны и электронов могут сильно отличаться, но в этой волне имеются составляющие, близкие по скорости к электронному потоку). Таким образом, искажение поля, с одной стороны, уменьшает эффективность взаимодействия с паразитными типами колебаний, а с другой — увеличивает.

### Упражнения

**12.1.** На рис. 12.7 приведена эквивалентная схема ячейки анодного блока со связками, соответствующая схеме на рис. 12.3, если положить  $Y_1 = j\omega C_{св}/2$ ,  $Y_2 = -j/\omega L_{св}$ ,  $Y_n = Y_p + Y(\varphi)$ ,  $Y(\varphi) = j\omega C/4\sin^2(\varphi/2)$ ,  $Y_p = j\omega C[1 - (\lambda/\lambda_p)^2]$ . В соответствии с этой схемой найти уравнение дисперсии и волновое сопротивление соответствующей ЗС.



**Рис. 12.7.** Четырехполюсник, отображающий ячейку анодного блока магнетрона со связками

**12.2.** Дана кольцевая цепочка из  $N$  одинаковых четырехполюсников с матрицами передачи

$$[A] = \begin{bmatrix} \cos \varphi & jZ_B \sin \varphi \\ (j/Z_B) \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix}, \quad (12.8)$$

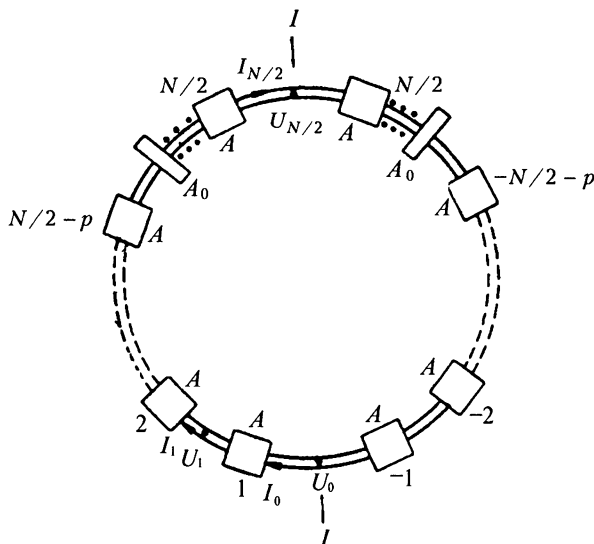
в которую включены две неоднородности с матрицами передачи

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & jX \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ или } [A] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ jB & 1 \end{bmatrix},$$

так что цепочка имеет плоскость симметрии  $1-1$  (рис. 12.8). Эта цепочка может служить моделью анодного блока магнетрона со связками. При этом неоднородности моделируют либо разрывы связей (при  $p \neq 0$ ), либо вывод энергии (при  $p = 0$ ).

Считая величины  $Z_0$ ,  $\varphi$ ,  $X$  и  $B$  известными, найти спектр частот видов колебаний анодного блока. Кроме того, представив напряжения  $U_r$  и токи  $I_r$  ( $1 - N/2 \leq r \leq N/2$ ) в виде суммы симметричных составляющих с амплитудами  $a_q$  и  $b_q^*$ ),

\*) Соотношение (12.9) представляет конечный ряд Фурье.



**Рис. 12.8.** Кольцевая цепочка из  $N$  одинаковых симметричных четырехполюсников без потерь с неоднородностями, расположенными симметрично относительно оси  $I-I$

$$\begin{bmatrix} U_r \\ I_r \end{bmatrix} = \sum_{q=1-N/2}^{N/2} \begin{bmatrix} a_q \\ b_q \end{bmatrix} \exp(-jr\varphi_q) \quad (12.9)$$

найти эти амплитуды:

$$N \begin{bmatrix} a_q \\ b_q \end{bmatrix} = \sum_{r=1-N/2}^{N/2} \begin{bmatrix} U_r \\ I_r \end{bmatrix} \exp(jr\varphi_q) \quad (12.10)$$

Здесь  $\varphi_q = 2\pi q/N$  в соответствии с (12.1).

### Список литературы

- [1]. Белуга И. Ш. Расчет резонаторных замедляющих систем эквивалентным статическим методом. *Изв. вузов, Радиофизика*, 1961, 4(4), 689–702.
- [2]. Воскобойник М. Ф. К расчету бугельной замедляющей системы. *Электронная техника. Сер. 1. Электроника СВЧ*, 1962. Вып. 2, 156–158.
- [3]. Гаплевский В. В., Конторович В. М. Применение теории симметрии к изучению расщепления вырожденных видов колебаний в резонаторных системах магнетрона. *Изв. вузов, Радиофизика*, 1971, 14(12), 1906–1917.
- [4]. Иванов В. Н. Проектирование замедляющих систем типа “беличье колесо” для платинотронов. *Электронная техника. Сер. 1. Электроника СВЧ*, 1967. Вып. 3, 31–36.

- [5]. Кирюшин В. П. и др. Программа расчета дисперсии и сопротивления связи замедляющих систем типа анодных блоков магнетронов и платинотронов со связками. *Электронная техника. Сер. 1. Электроника СВЧ*, 1975. Вып. 7, 120–121.
- [6]. Ковтунова З. Д., Силин Р. А., Фролов А. Г. Расчет дисперсии и сопротивления связи замедляющих систем типа анодных блоков магнетронов и платинотронов со связками. Деп. рук. ЦНИИ “Электроника”, №0150/69. Реф.: *Электронная техника. Сер. 1. Электроника СВЧ*, 1969. Вып. 9, с. 75.
- [7]. Магнетроны сантиметрового диапазона. Под ред. С. А. Зусмановского. Т. 1, 2. М.: Сов. радио, 1950–1951.  
Перевод к н.: *Microwave magnetrons*. Ed. by G. Collins. New York, 1948.
- [8]. Петроченков В. И., Капитонов В. А. Характеристики и расчет бугельной замедляющей системы со связками. *Электронная техника. Сер. 1. Электроника СВЧ*, 1967. Вып. 3, 12–30.
- [9]. Самсонов Д. Е. Основы расчета и конструирования многорезонаторных магнетронов. М.: Сов. радио, 1976. 327 с.
- [10]. Соболев Г. Л., Хоркина Л. А. К анализу замедляющей системы демотрона. *Радиотехника и электроника*, 1968, **13**(1), 75–81.
- [11]. Фурсаев М. А. Основы расчета магнетронов. Пособие по курсовому проектированию. Саратов: Саратовский политехнический институт, 1969. 81 с.

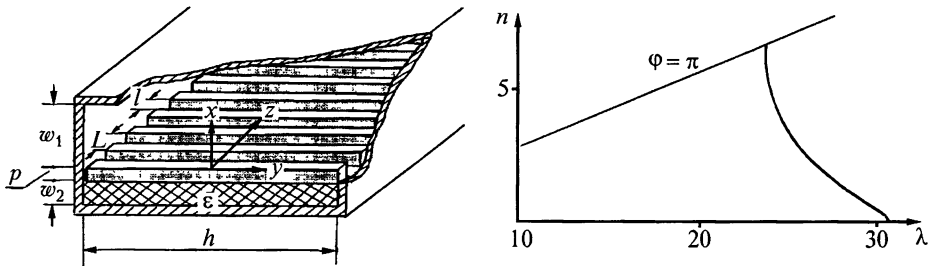
## Метод многопроводных линий

### 13.1. Примеры штыревых замедляющих систем

В главах 13–15 рассмотрены штыревые ЗС и описан метод многопроводных линий для их расчета. Штыревой ЗС называют такую ЗС, которая содержит хотя бы один отрезок периодической многопроводной линии.

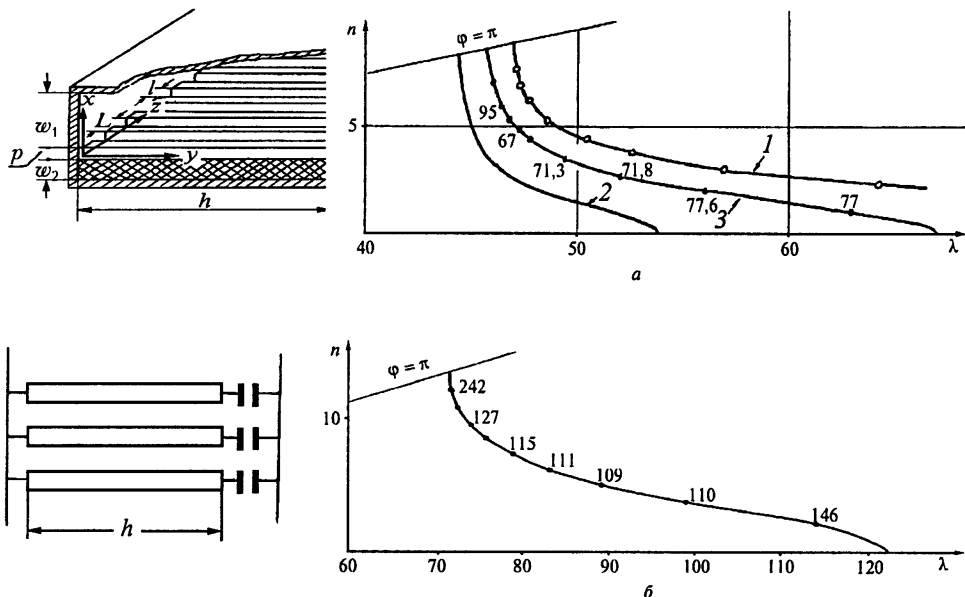
Примеры штыревых ЗС изображены на рис. 13.1–13.3. Лестница (рис. 13.1) целиком представляет отрезок многопроводной линии. В гребенке (рис. 13.2) многопроводная линия занимает область  $0 \leq y \leq h$ . Лестницы с выступом и с выемкой содержат по три отрезка многопроводной линии. Каждая из этих ЗС содержит по одному проводнику (штырю) в периоде, т.е. является одноступенчатой \*).

Штыревые ЗС широко используются в электронных приборах СВЧ. В частности, гребенка и лестницы используются в сравнительно узкополосных ЛБВ и ЛОВ. В более широкополосных используют ЗС типа «встречные штыри». Количественная оценка дисперсионной характеристики и сопротивления связи штыревых ЗС проведена ниже методом многопроводных линий. Более строгий их расчет можно провести проекционным методом, описанным в гл. 10.



**Рис. 13.1.** «Лестница» в волноводе и ее дисперсионная характеристика, рассчитанная при  $L = 2l = 1,6$ ,  $w_1 \rightarrow \infty$ ,  $w_2 = 0,5$ ,  $p = 0$ ,  $h = 5$ ,  $\epsilon = 9,8$  по формуле  $\lambda = (2h/q) [C_\epsilon(\varphi)/C_1(\varphi)]^{1/2}$  ( $q$  — целое число полувольт, укладываемое вдоль  $h$ )

\*) Ниже используются два термина: *проводник* и *штырь*. Штырем называется отрезок проводника многопроводной линии.



**Рис. 13.2.** Штыревая гребенка, ее эквивалентная схема и кривые дисперсии, полученные в результате измерений (1) и расчета (2, 3) при  $L = 2,7$ ,  $l = 1,8$ ,  $h = 10,7$ ,  $w_1 = 7,2$ ,  $w_2 = 3,6$ ,  $p = 2,4$ ,  $\delta = 0,7$ ,  $\varepsilon = 1$  (а) и  $\varepsilon_2 = 9,8$  (б) по формуле  $\beta_y(\varphi)h \operatorname{tg}[\beta_y(\varphi)h] = M(\varphi)/\hat{C}_0$ . Емкость  $\hat{C}_0$  рассчитана по формуле (14.3, а) плоского конденсатора ( $\hat{C}_0 = 0,3$ ) (2) и по формуле (14.3 б) (3). Числами около кривых указаны значения сопротивления связи в Ом для ленточного потока электронов, касающегося штырей, вычисленные по формуле

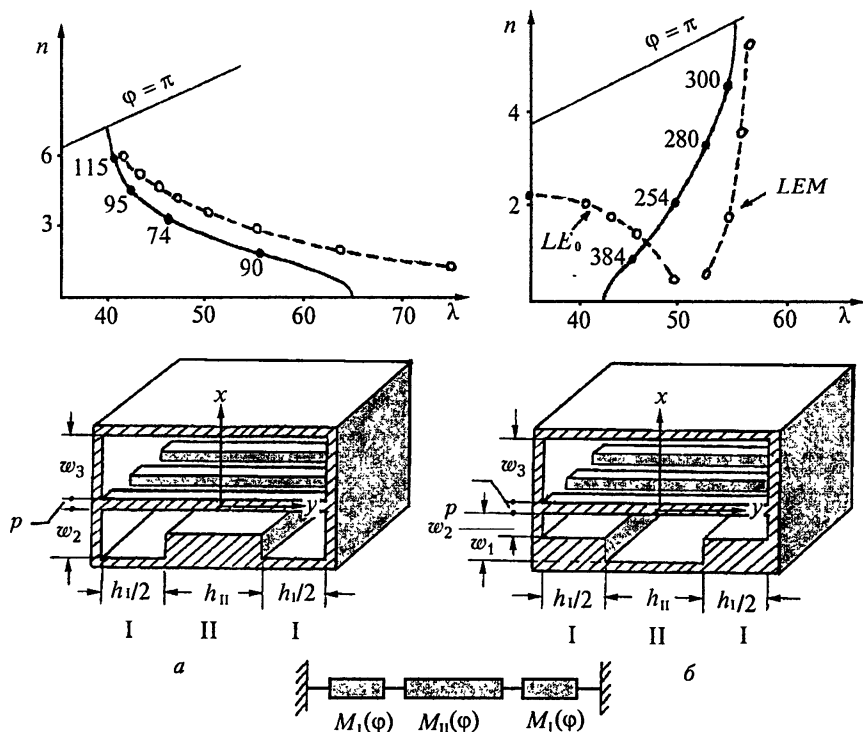
$$K_{\text{св}} = \frac{\Phi(\varphi)}{\hat{C}_\varepsilon(\varphi)} \frac{2\beta_y(\varphi)h - \sin[2\beta_y(\varphi)h]}{2\beta_y(\varphi)h + \sin[2\beta_y(\varphi)h]}$$

При расчете систем методом многопроводных линий полагают, что в однородной области, т. е. в линии, существует только волна *LEM*. Высшие типы полей (т. е. *LE* и *LM*), возникающие в линии из-за неоднородностей, и поля в неоднородных областях учитываются сосредоточенными эквивалентными сопротивлениями.

### 13.2. Телеграфные уравнения

В многопроводной линии, расположенной в однородной среде, и, в частности, в свободном пространстве, каждый из типов полей (*LEM*, *LE* и *LM*) может существовать независимо (см. п. 4.3). При этом метод многопроводных линий оказывается заведомо применимым, если без затухания распространяется только *LEM*-волна и когда неоднородные области достаточно малы, чтобы их можно было отобразить эквивалентными схемами с сосредоточенными параметрами. В случае, когда среда, в которой расположена многопро-





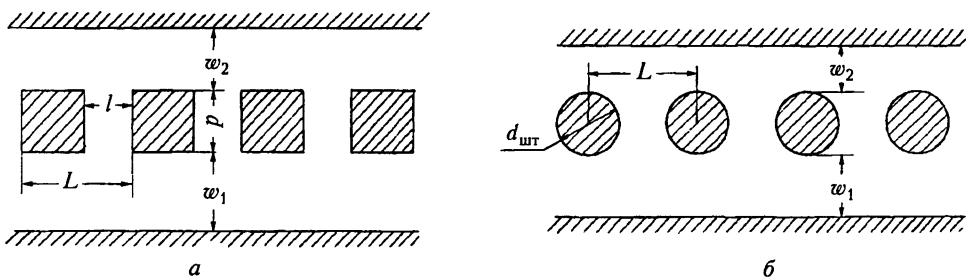
**Рис. 13.3.** Кривые дисперсии: *а* — «лестницы с выступом» ( $L = 2l = 2,8$ ,  $h_I = h_{II} = 8,96$ ,  $p = 1,4$ ,  $w_1 = 0,35$ ,  $w_2 = 2,8$ ,  $w_3 = 5,6$ ) и «лестницы с выемкой» (*б*) ( $L = 2l = 4,8$ ,  $p = 2,4$ ,  $h_I = h_{II} = 15,4$ ,  $w_1 = 4,8$ ,  $w_2 = 0,6$ ,  $w_3 = 9,6$ ), полученные в результате измерений (светлые кружки) и расчета (черные кружки) по формуле  $\operatorname{tg}[\beta_{yI}(\varphi)h_I/2] \operatorname{tg}[\beta_{yII}(\varphi)h_{II}/2] = \hat{M}_I(\varphi)/\hat{M}_{II}(\varphi)$ . Числа около кривых указывают сопротивление связи в Ом для ленточного потока электронов, вычисленное по формуле

$$K_{св} = \Phi(\varphi) \frac{h_I d_I \cos^2[\beta_{yII}(\varphi)h_{II}/2] + h_{II} f_{II} \sin^2[\beta_{yI}(\varphi)h_I/2]}{h_I \hat{M}_I \cos^2[\beta_{yII}(\varphi)h_{II}/2] + h_{II} \hat{M}_{II} \sin^2[\beta_{yI}(\varphi)h_I/2]},$$

$$d_I = 1 - \sin[\beta_{yI}(\varphi)h_I] / \beta_{yI}(\varphi)h_I, \quad f_{II} = 1 + \sin[\beta_{yII}(\varphi)h_{II}] / \beta_{yII}(\varphi)h_{II}$$

водная линия, неоднородна (например, в линии на подложке), предположение о существовании в линии только поля *LEM* отображает действительность лишь с некоторым приближением.

В поле *LEM*, т. е. при  $E_y = H_y = 0$  (см. п. 4.3), можно ввести понятия потенциала  $U = \int E dl$  и тока  $I = \oint H dl$ , причем в любом сечении потенциал каждого проводника постоянен. Потенциал стенок  $x = \text{const}$  (рис. 13.4) полагаем равным нулю. В выражении для тока интегрирование ведется по контуру, замкнутому вокруг проводника при  $y = \text{const}$ . В выражении для потенциала интегрирование ведется от стенки  $x = \text{const}$  до поверхности



**Рис. 13.4.** Поперечное сечение одноступенчатых многопроводных линий с проводниками: *а* — прямоугольного и *б* — круглого сечения

данного проводника при  $y = \text{const}$ . Для многопроводной линии в однородной среде волновое число  $\beta_y$  совпадает с волновым числом  $k(\epsilon\mu)^{1/2}$  плоской волны в среде с относительными проницаемостями  $\epsilon$  и  $\mu$ . Оно не зависит от распределения потенциалов между штырями. В неоднородной среде, например, для линии на диэлектрической подложке, как показано ниже, волновое число  $\beta_y$ , как правило, зависит от распределения потенциалов по штырям.

Присвоим проводникам номера: ..., -2, -1, 0, 1, 2, ... Покажем, что распределение потенциала и тока вдоль  $q$ -го штыря удовлетворяет телеграфным уравнениям. Рассмотрим отрезок линии длиной  $dy$ . Обозначим  $I_q(y)$  ток, втекающий в  $q$ -й проводник,  $I_q(y + dy) = I_q(y) + dI_q$  — вытекающий,  $U_q(y)$  — потенциал на входе  $q$ -го проводника, а  $dU_q$  — падение потенциала на участке  $dy$ . «Утечка» тока с проводника через емкости выражается через потенциалы равенством

$$dI_q = -j\omega \sum_s \mu_q^s U_s(y) dy,$$

где  $\mu_q^s$  — коэффициенты, зависящие от размеров поперечного сечения проводников и имеющие размерность емкости.

Падение потенциала  $dU_q$  на участке  $dy$   $q$ -го проводника обусловлено собственной и взаимными индуктивностями проводников:

$$dU_q = -j\omega \sum_s \chi_q^s I_s(y) dy.$$

Отсюда получаются телеграфные уравнения,

$$\frac{dU_q}{dy} = -j\omega \sum_s \chi_q^s I_s(y), \quad \frac{dI_q}{dy} = -j\omega \sum_s \mu_q^s U_s(y), \quad (13.1, a)$$

аналогичные телеграфным уравнениям двухпроводной линии,

$$\frac{dU}{dy} = -j\omega LI(y), \quad \frac{dI}{dy} = -j\omega CU(y), \quad (13.1, б)$$

с той лишь разницей, что теперь изменение потенциала зависит от многих токов, а изменение тока — от многих потенциалов. Величина  $L$  представляет погонную индуктивность двухпроводной линии, а  $C$  — погонную емкость.

Чтобы выяснить физический смысл коэффициентов  $\mu_q^s$ , заметим, что разность токов  $dI_q$  равна скорости уменьшения  $-(dQ_q/dt)dy = -j\omega Q_q dy$  заряда  $Q_q(y)dy$ , на отрезке  $dy$  \*:  $dI_q/dy = -j\omega Q_q(y)$ . Сравнивая полученное выражение с (13.1, а), находим

$$Q_q(y) = \sum_s \mu_q^s U_s(y)$$

Из последнего равенства следует, что коэффициент  $\mu_q^q$  равен отношению заряда  $Q_q$ , приходящегося на единицу длины  $q$ -го проводника, к потенциалу на нем, если потенциалы всех остальных проводников равны нулю. Он называется *собственным емкостным коэффициентом*  $q$ -го проводника.

Коэффициент  $\mu_q^s$  при  $q \neq s$  равен отношению заряда  $Q_q$  на единице длины  $q$ -го проводника к потенциалу  $U_s$  на  $s$ -м, когда потенциалы остальных проводников равны нулю. Если  $U_s > 0$ , то  $Q_q < 0$ , так что  $\mu_q^s < 0$  при  $q \neq s$ . Положительную величину  $\gamma_q^s = -\mu_q^s$  при  $q \neq s$  называют *частичной емкостью* между  $q$ -м и  $s$ -м проводниками. Ее часто называют также *коэффициентом электростатической индукции*.

Справедливы равенства \*\*)

$$\mu_q^s = \mu_s^q \quad \text{и} \quad \gamma_q^s = \gamma_s^q, \quad (13.2, a)$$

так как частичные емкости между проводниками  $s$  и  $q$  и проводниками  $q$  и  $s$  — по сути одна и та же величина. Кроме того, для одноступенчатой многопроводной линии справедливы равенства

$$\mu_{q+s}^q = \mu_{q-s}^q \quad \text{и} \quad \gamma_{q+s}^q = \gamma_{q-s}^q. \quad (13.2, б)$$

Частичную емкость  $\gamma_q^q$  между  $q$ -м проводником и экраном определяют равенством

$$\gamma_q^q = \sum_s \mu_q^s = \mu_q^q - \sum_{s \neq q} \gamma_q^s.$$

Она равна заряду на  $q$ -м проводнике, когда потенциалы всех проводников относительно экрана равны единице. Таким образом, коэффициент

$$\mu_q^q = \sum_s \gamma_q^s \quad (13.3, a)$$

равен сумме емкостей между  $q$ -м проводником и всеми остальными, включая экран, а коэффициент

$$\mu_q^s = -\gamma_q^s \quad \text{при} \quad q \neq s \quad (13.3, б)$$

равен взятой с обратным знаком емкости между  $q$ -м и  $s$ -м проводниками. Аналогичным образом можно установить смысл коэффициентов  $\kappa_q^s$ .

\*) Производная по времени  $t$  заменена на  $j\omega$ , а экспонента  $\exp(j\omega t)$  опущена.

\*\*) Эти равенства представляют условие обратимости или, что то же, условие взаимности многопроводной линии.

До сих пор не использовались никакие предположения ни о форме проводников, ни о распределении потенциалов между ними. Ограничимся рассмотрением ЗС, содержащих отрезки только одноступенчатых многопроводных линий (рис. 13.4) с периодом  $L$ . Если в периоде  $d$  ЗС содержится только один штырь (один проводник линии), т.е. если ЗС одноступенчатая, то  $d = L$  (рис. 13.1–13.3), если она двухступенчатая, то  $d = 2L$ . В настоящей главе рассматриваются только одноступенчатые ЗС.

В соответствии с теоремой Флоке потенциал  $U_s(y)$  и ток  $I_s(y)$  на  $s$ -м проводнике связаны с соответствующими величинами  $U_0(y)$  и  $I_0(y)$  на нулевом проводнике следующими равенствами:

$$U_s(y) = U_0(y) \exp(-js\varphi), \quad I_s(y) = I_0(y) \exp(-js\varphi). \quad (13.4)$$

Подставляя (13.4) в (13.1 а), запишем телеграфные уравнения многопроводной линии в следующей форме:

$$dU/dy = -j\omega L(\varphi)I(y), \quad dI/dy = -j\omega C(\varphi)U(y), \quad (13.5)$$

отличающиеся от (13.1, б) лишь тем, что теперь погонные индуктивности  $L(\varphi)$  и емкости  $C(\varphi)$  зависят от сдвига фаз  $\varphi$ .

В (13.5) опущен индекс « $q$ », поскольку эти уравнения одинаковы для любого проводника, и введены обозначения

$$C(\varphi) = \sum_{s=-\infty}^{\infty} \mu_0^s \exp(-j\varphi), \quad L(\varphi) = \sum_{s=-\infty}^{\infty} \chi_0^s \exp(-j\varphi) \quad (13.6)$$

## 13.2. Метод многопроводных линий

Решение телеграфных уравнений (13.5) ищем в виде

$$U(y) = A \cos \beta_y y + B \sin \beta_y y, \quad I(y) = D \sin \beta_y y + E \cos \beta_y y.$$

Подставляя их в (13.5) и выражая коэффициенты  $A$  и  $B$  через  $U(0)$  и  $I(0)$ , находим связь напряжений и токов в сечениях  $y = 0$  и  $y \neq 0$ :

$$U(y) = U(0) \cos \beta_y y - [j/M(\varphi)] I(0) \sin \beta_y y, \quad (13.7, а)$$

$$I(y) = -jM(\varphi) U(0) \sin \beta_y y + I(0) \cos \beta_y y,$$

где  $\beta_y = \omega [L(\varphi)C(\varphi)]^{1/2}$  — волновое число для волны, бегущей вдоль линии, а  $M(\varphi)$  — волновая проводимость многопроводной линии. Обычно соотношения (13.7, а) записывают в следующем виде:

$$\begin{aligned} U(0) &= U(y) \cos \beta_y y + [j/M(\varphi)] I(y) \sin \beta_y y, \\ I(0) &= jM(\varphi) U(y) \sin \beta_y y + I(y) \cos \beta_y y. \end{aligned} \quad (13.7, б)$$

Для линии в однородном диэлектрике волновое число  $\beta_y = k[\epsilon\mu]^{1/2}$  не зависит от распределения потенциалов между штырями. При этом

$$\beta_y = k(\epsilon\mu)^{1/2} = [k/(\epsilon_0\mu_0)^{1/2}] [L(\phi)C(\phi)]^{1/2}.$$

Здесь учтено, что  $\omega = kc$ , а  $c = (\epsilon_0\mu_0)^{-1/2}$ .

Из последнего равенства следует, что

$$L(\phi)/\mu\mu_0 = \epsilon\epsilon_0/C(\phi). \quad (13.8)$$

Используя (13.8), волновую проводимость можно выразить через емкость  $C(\phi)$ :

$$M(\phi) = C(\phi)(\mu\mu_0\epsilon\epsilon_0)^{-1/2} = cC(\phi)(\epsilon\mu)^{-1/2}. \quad (13.9, a)$$

Ее можно выразить также через емкостные коэффициенты,

$$M(\phi) = c(\epsilon\mu)^{-1/2} \sum_{s=-\infty}^{\infty} \mu_0^s \exp(-j\phi), \quad (13.9, б)$$

либо через частичные емкости,

$$M(\phi) = c(\epsilon\mu)^{-1/2} \left[ \gamma_0 + 4 \sum_{s=1}^{\infty} \gamma_s \sin^2(s\phi/2) \right], \quad (13.9, в)$$

где через  $\gamma_0$  и  $\gamma_s$  обозначены  $\gamma_0^0$  и  $\gamma_0^s$ , соответственно.

При выводе (13.9, в) из (13.9, б) учтено, что для одноступенчатых многопроводных линий справедливо равенство (13.2, б), означающее, что емкость между нулевым и  $s$ -м проводниками такая же, как между нулевым и  $-s$ -м.

В многопроводной линии, расположенной в слоистой среде, волновое число  $\beta_y$  в общем случае зависит от сдвига фаз  $\phi$  между соседними проводниками. Рассмотрим линию на диэлектрической подложке ( $\epsilon > 1$ ,  $\mu = 1$ ). Поскольку индуктивность  $L(\phi)$  не зависит от  $\epsilon$ , ее величина такая же, как для линии в свободном пространстве. Обозначим погонную емкость через  $C_\epsilon(\phi)$  для случая  $\epsilon \neq 1$  и через  $C_1(\phi)$  — для случая  $\epsilon = 1$ . В соответствии с (13.8)  $L(\phi) = 1/c^2 C_1(\phi)$ . При этом

$$\beta_y = k[C_\epsilon(\phi)/C_1(\phi)]^{1/2}, \quad M(\phi) = c[C_\epsilon(\phi)C_1(\phi)]^{1/2}. \quad (13.10, a)$$

Из (13.2), (13.9) и (13.10, a) следует, что

$$M(\phi) = M(2\pi t + \phi), \quad M(m\pi + \phi) = M(m\pi - \phi), \quad (13.10, б)$$

где  $t$  — целое число. Соотношение (13.10, б) означает, что волновая проводимость представляет четную функцию от  $\phi$  и имеет период  $2\pi$ . Именно эти свойства волновой проводимости обеспечивают при расчетах выполнение условий (2.26), полученных для дисперсионных характеристик  $\omega(\phi)$  в п. 2.6 на основе теории симметрии.

Равенство (13.7), записанное для многопроводной линии, внешне совпадает с аналогичным равенством для двухпроводной линии. Разница в том, что в первом случае волновая проводимость  $M(\varphi)$  зависит от сдвига фаз  $\varphi$ , а для двухпроводной — нет.

Волновую проводимость  $M(\varphi)$  можно вычислить, измерив взаимные емкости  $\gamma_s$ , например с помощью электролитической ванны. Для оценочных расчетов достаточно учесть емкости  $\gamma_0$  и  $\gamma_1$ , вычислив их по формуле плоского конденсатора

$$\gamma_0 = \epsilon\epsilon_0(L-l)(1/w_1 + 1/w_2), \quad \gamma_1 = \epsilon\epsilon_0 p/l, \quad (13.11, a)$$

если проводники имеют прямоугольное сечение (рис. 13.4, а), и по формуле для емкости между двумя круглыми проводниками,

$$\gamma_0 = \epsilon\epsilon_0 2\pi/\text{arch}(2w/\delta), \quad \gamma_1 = \epsilon\epsilon_0 \pi/\text{arch}(L/\delta), \quad (13.11, б)$$

если они имеют круглое сечение (рис. 13.4, б).

Более точный расчет описан в работах [3–6, 10]. В большинстве расчетов волновых проводимостей нами использовалась формула (13.9, а), где  $C(\varphi)$  определено соотношением [6],

$$C_\epsilon(\varphi) = \epsilon C_1(\varphi) = \epsilon\epsilon_0 4 \sin^2(\varphi/2) [(p/l) + C_{k1}(\varphi) + C_{k2}(\varphi)], \quad (13.12, a)$$

если линия расположена в однородной среде с относительной проницаемостью  $\epsilon$ , и соотношением

$$C_\epsilon(\varphi) = \epsilon_0 4 \sin^2(\varphi/2) [(p/l) + C_{k1}(\varphi) + \epsilon C_{k2}(\varphi)], \quad (13.12, б)$$

если линия на диэлектрической подложке. В этих формулах  $p/l$  — доля частичной емкости, отнесенной к  $\epsilon\epsilon_0$ , между соседними штырями, учитывающая однородную часть поля;  $\hat{C}_{k1}(\varphi)$  и  $\hat{C}_{k2}(\varphi)$  — безразмерные величины, учитывающие емкости, обусловленные неоднородной частью поля между соседними штырями и полем между штырями и стенками (экранами). Они называются краевыми емкостями и зависят от распределения потенциалов по штырям (от сдвига фаз  $\varphi$ ).

В (13.12) входят две краевые емкости, поскольку линия имеет две стороны (две боковые стенки). Формулы для расчета краевых емкостей, полученные в [3, 4], приведены в приложении 3. Эти емкости протабулированы в [6].

Основываясь на (13.10) и (13.12), можно заметить, что волновое число  $\beta_y$  не зависит от  $\varphi$  не только для линии в однородной среде, но и для полосковой линии ( $p=0$ ) на диэлектрической подложке, симметрично расположенной между экранами ( $\hat{C}_{k1}(\varphi) = \hat{C}_{k2}(\varphi)$ ). При этом  $C_\epsilon(\varphi) = (1 + \epsilon)C_1(\varphi)/2$ , и отношение  $C_\epsilon(\varphi)/C_1(\varphi)$  не зависит от  $\varphi$ .

### 13.3. Пределы применимости метода многопроводных линий

Ограничимся случаем, когда линия расположена в свободном пространстве. Метод многопроводных линий применим, если в однородной области существует только поле *LEM*. Этот метод тем точнее, чем быстрее затухают вдоль

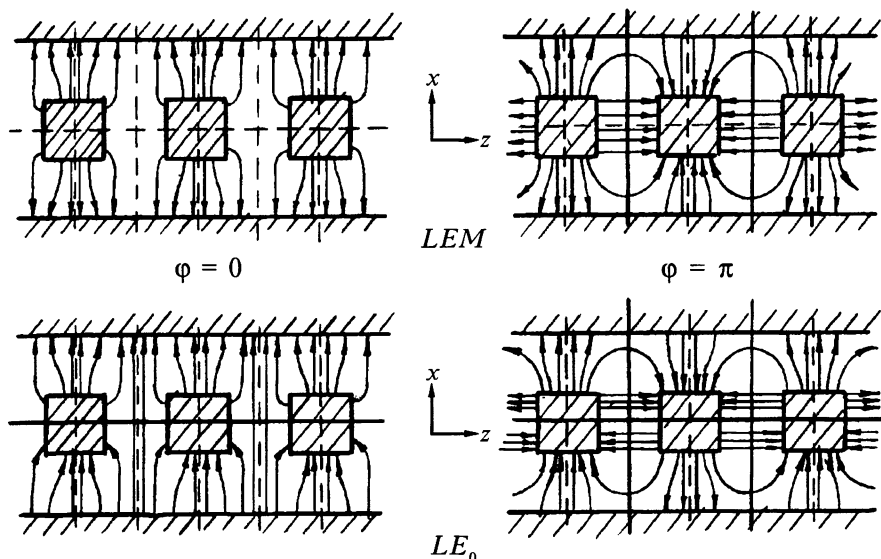
штырей высшие типы волн, возбуждаемые неоднородностями. Скорость их затухания определяется множителем  $\exp[-(\beta_k^2 - k^2)^{1/2}y]$ . Если волновое число  $k$  больше критического ( $k > \beta_k$ ), то поле соответствующего высшего типа не затухает вдоль оси  $y$ , и метод неприменим. Здесь, правда, возможно одно исключение, когда высший тип не возбуждается неоднородностями даже при условии  $k > \beta_k$ . Соответствующий пример рассмотрен ниже.

Ради определенности оценим  $\beta_k$  для  $LE$ - и  $LM$ -волн в многопроводной линии (рис. 13.5) с проводниками прямоугольного сечения, расположенную симметрично между экранами  $x = \pm(w + p/2)$ . Для этого сравним волновые числа в линии  $\beta_k$  и между экранами в отсутствие штырей:

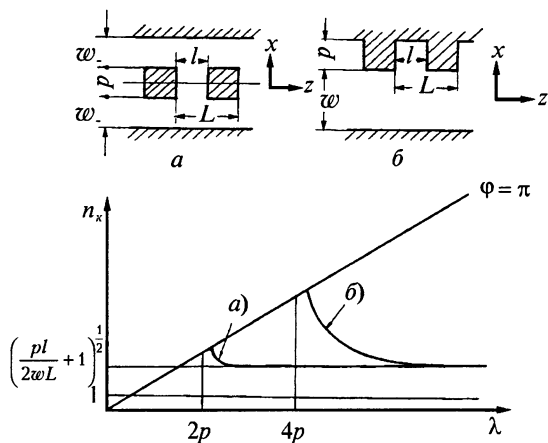
$$\beta_{kq}^2 = \left\{ (\varphi/L)^2 + [q\pi/(p+2w)]^2 \right\}^{1/2}. \quad (13.13)$$

В качестве  $\varphi = \beta_z L$  выбираем сдвиг фаз между точками, отстоящими вдоль  $z$  на период  $L$  многопроводной линии. Целое число  $q$ , равное количеству полуволн между экранами, может принимать значения 0, 1, 2, ... для  $LE_q$ -полей и 1, 2, 3, ... для  $LM_q$ -полей.

Введение штырей равносильно закреплению соответствующей мембраны по контуру сечения этих штырей, что приводит к росту  $\beta_{kq}$  для  $LM_q$ -полей. Для  $LE_q$ -полей введение штырей приводит к убыванию  $\beta_{kq}$ . При оценке границ применимости метода многопроводных линий достаточно рассмотреть только  $LE_q$ -поля, которым соответствует  $\beta_{kq} < \beta_{kq}^*$ . В частности, для волны  $LE_0$  величина  $\beta_{k0} < \varphi/L$ . Величина  $\beta_{k0} = 0$  при  $\varphi = 0$ , т.е.  $LE_0$ -волна не затухает ни при каких частотах. Поэтому, казалось бы, что метод многопроводных линий никогда не применим.



**Рис. 13.5.** Эпюры полей и расположение электрических (сплошные линии) и магнитных (штриховые линии) стенок для  $LEM$ - и  $LE_0$ -полей в многопроводной линии при разности фаз на периоде  $\varphi = 0$  и  $\varphi = \pi$



**Рис. 13.6.** Кривые дисперсии волн  $LE_0$  в многопроводной линии, симметричной относительно плоскости  $x=0$  (а) и гребенки (б); значение  $n_k$  определяется формулой (13.14).

для случая (а) это утверждение следует из структуры  $LE_0$ -поля, так как оно имеет электрическую стенку в плоскости симметрии  $x=0$  (см. рис. 13.5). Дисперсионные кривые  $c/v = n(\lambda)$  этих гребенок представляют зависимость замедления от критической длины волны ( $c/v_k = n_k(\lambda_k)$ ). Поле  $LE_0$  затухает вдоль оси  $y$  при  $\lambda > \lambda_k$  и фиксированном замедлении либо при  $n > n_k$  и фиксированном  $\lambda$ . Символ «к» в обозначении коэффициента замедления указывает на то, что кривые построены в предположении независимости поля от координаты  $y$  (критический режим).

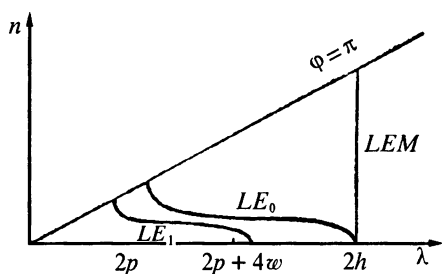
Как отмечено выше, для штыревых ЗС обычно  $\lambda \gg w, p, L$ . При таких длинах волн замедление  $n_k$  почти не зависит от  $\lambda$  и определяется формулой (9.15), которая в новых обозначениях имеет вид

$$n_k = [1 + (pl/2wL)]^{1/2}. \quad (13.14)$$

В обычно используемых штыревых ЗС  $l/L = 0,5$ ,  $p/w < 10$ , так что  $n_k < 2$ . Даже для размеров, которые реально не встречаются ( $l/L = 1$ ,  $p/w = 30$ ), величина  $n_k \approx 4$ . Отсюда следует, что при замедлениях  $n > 2 \dots 4$  поле  $LE_0$  в линии затухает вдоль  $y$  и штыревые ЗС можно рассчитывать методом многопроводных линий. Отсюда, однако, не следует неприменимость метода при малых замедлениях, так как неоднородные области могут быть такими, что поле  $LE_0$  в линии не возбуждается. Примером такой ЗС может служить «лестница» (рис. 13.1) при  $\epsilon = 1$ . Она образована отрезком многопроводной линии, закороченной с обоих концов, т.е. содержит только однородную область. Каждая из волн  $LEM$ ,  $LE_q$ ,  $LM_q$  в отдельности удовлетворяет граничным условиям на концах штырей (при  $y = \pm h/2$ ), так что каждому из этих типов волн соответствует своя дисперсионная характеристика.

Покажем, что при  $\lambda \gg w, p, l$  и достаточно больших замедлениях (практически при  $n > 2$ )  $LE_0$ -волны не распространяются вдоль оси  $y$  и метод многопроводных линий справедлив. Для этого рассмотрим два предельных случая (рис. 13.6): линию с плоскостью симметрии  $x=0$  (а) и линию, в которой штыри касаются боковой стенки (б). В обоих случаях линия эквивалентна бесконечно широкой гребенке, имеющей «зубья» высотой  $p/2$  и  $p$ , соответственно, и расстояния от «зубьев» до экранов  $w$  и  $w' = 2w$ . Для случая (б) утверждение об эквивалентности линии и гребенки не нуждается в доказательстве, а





**Рис. 13.7.** Вид кривых дисперсии для волн  $LEM$ ,  $LE_0$  и  $LE_1$  в «лестнице»

$\lambda_0 = 2h$ , а границе  $\varphi = \pi$  длина волны  $\lambda_\pi \equiv 2p$ , если лестница имеет плоскость симметрии  $x = 0$ , и  $\lambda_\pi \equiv 4h$ , если штыри касаются одного из экранов (одной из боковых стенок).

В ЗС, содержащих плоскость симметрии  $x = 0$ , полям  $LEM$  и  $LE_0$  соответствуют разные типы волн, поскольку  $LEM$ -поле имеет магнитную стенку в плоскости симметрии, а  $LE_0$ -поле — электрическую, так что, например, для гребенки метод многопроводных линий применим при любых замедлениях. Если нет плоскости симметрии  $x = 0$ , то заранее трудно сказать, могут ли в однородной области ЗС одновременно существовать волны  $LEM$  и  $LE_0$ . Одновременным существованием этих волн, в частности, объясняется существенное различие измеренных и рассчитанных методом многопроводных линий дисперсионных характеристик «лестницы с выемкой» (рис. 13.3). Для «лестницы с выступом» погрешность расчета значительно меньше.

Качественный анализ типов волн в многопроводной линии, проведенный выше, позволяет не только определить пределы применимости метода многопроводных линий, но и предсказать некоторые свойства ЗС. В частности, он позволяет отметить одно существенное отличие штыревых ЗС для приборов О- и М-типа. Боковые стенки штыревых ЗС в приборах О-типа обычно гальванически связаны между собой, а в приборах М-типа они разделены, так как одна из стенок образует так называемый холодный электрод или катод, находящийся под иным потенциалом, чем ЗС. Дисперсионная характеристика, соответствующая  $LEM$ -полю, не зависит от того, связаны между собой стенки или нет, тогда как для  $LE_0$ -поля эта зависимость существенна. При объединенных экранах характеристика, связанная с  $LE_0$ -полем, лежит в области  $\lambda < 2h$ , а при разъединенных длинноволновая граница стремится к  $\lambda \rightarrow \infty$ . Соответствующее замедление оказывается низким ( $n < 2$ ), так что волну называют быстрой.

Рассуждения о характеристиках, соответствующих волнам  $LEM$  и  $LE_0$ , несколько условны, так как реально эти поля существуют совместно. Строго следует говорить о преобладании  $LEM$ - или  $LE_0$ -составляющей в общем поле.

В заключение отметим, что штыревые ЗС без диэлектрика более строго можно рассчитать проекционным методом, описанным в гл. 10.

\* ) Сравните с рис. 10.5.

Кривая дисперсии «лестницы», соответствующая  $LEM$ -полю, представляется на графике  $n(\lambda)$  (рис. 13.7)\*) вертикальной прямой, так что  $LEM$ -поле может существовать при любом распределении потенциалов между штырями. При этом нет переноса энергии вдоль оси  $z$  (групповая скорость и полоса пропускания равны нулю). ЗС как бы имеет резонансную длину волны  $\lambda = 2h$ . Полям  $LE_q$  ( $q = 0, 1, 2, \dots$ ) в «лестнице» соответствует нормальная дисперсия (рис. 13.7). На  $LE_0$ -волне границе полосы пропускания  $\varphi = 0$  соответствует

### Список литературы

- [1]. Бабичев Р. К., Иванов В. Н. Квазистатическая теория решеток и ее применение к расчету лестничной замедляющей системы. *Электронная техника. Сер. 1. Электроника СВЧ*, 1971. Вып. 1, 35–45.
- [2]. Белуга И. Ш., Фролов А. Г. Расчет характеристик многорядной штыревой гребенки. *Вопросы радиоэлектроники. Сер. 1. Электроника*, 1964. Вып. 12, 195–204.
- [3]. Белуга И. Ш. К расчету полей поперечных электромагнитных волн в штыревых замедляющих системах. *Изв. вузов, Радиофизика*, 1959, **11**(1), 84–93.
- [4]. Белуга И. Ш. Расчет многопроводной линии с проводниками прямоугольного поперечного сечения. В кн.: Труды конференций по электронике СВЧ. Вып. 9(16). Электроника. М.: Ин-т “Электросила”, 1969, 171–186.
- [5]. Белуга И. Ш., Грюнберг М. Г. Однорядная многопроводная линия, составленная из круглых проводников. *Вопросы радиоэлектроники. Сер. 1. Электроника*, 1964. Вып. 6, 80–101.
- [6]. Белуга И. Ш., Морозов В. С., Фролов А. Г. Расчет характеристик двумерной гребенки. *Вопросы радиоэлектроники. Сер. 1. Электроника*, 1964. Вып. 11, 137–160.
- [7]. Беляченко В. П. и др. Приближенный расчет характеристик пленочных замедляющих систем на диэлектрической подложке. *Электронная техника. Сер. 1. Электроника СВЧ*, 1971. Вып. 1, 134–137.
- [8]. Дашенков В. М. К анализу дисперсии одноступенчатых штыревых замедляющих систем. *Радиотехника и электроника*, 1959, **4**(4), 648–649.
- [9]. Дашенков В. М. Волновое сопротивление многопроводных линий с круглыми проводниками. *Радиотехника и электроника*, 1961, **6**(4), 584–592.
- [10]. Силин Р. А. Расчет штыревых замедляющих систем методом многопроводных линий. *Вопросы радиоэлектроники. Сер. 1. Электроника*, 1960. Вып. 4, 57–64.
- [11]. Leblond A., Mourier G. Etude des lignes à barreaux à structure périodique pour tubes électroniques UHF. *Ann. Radioél.*, 1954, **9**(36), 180–199; **9**(38), 311–328.

## Одноступенчатые штыревые замедляющие системы

### 14.1. Расчет дисперсии

Рассмотрим расчет дисперсионных характеристик методом многопроводных линий на примерах конкретных ЗС.

**«Лестница».** На концах штыря в лестничной ЗС потенциалы равны нулю ( $U(0) = U(h) = 0$ ). Подставляя эти значения в (13.7), находим, что  $\sin[\beta_y(\varphi)h] = 0$ , или

$$\beta_y(\varphi)h = q\pi. \quad (14.1, a)$$

В «лестнице», расположенной в свободном пространстве ( $\beta_y = k$ ) или в любой однородной среде ( $\beta_y = k(\epsilon\mu)^{1/2}$ ), величина  $\beta_y$  не зависит от  $\varphi$ . При этом уравнение (14.1, а) описывает спектр частот колебаний, возможных в лестничной системе. В такой ЗС нет полос пропускания.

Если «лестница» расположена на диэлектрической подложке, то уравнение (14.1, а) можно записать в виде

$$kh[C_\epsilon(\varphi)/C_1(\varphi)]^{1/2} = q\pi. \quad (14.1, б)$$

Оно описывает зависимость длины волны  $\lambda = 2\pi/k$  от сдвига фаз и представляет уравнение дисперсии ЗС. Результаты расчета дисперсионной характеристики лестницы на диэлектрической подложке в первой полосе пропускания ( $q = 1$ ) приведены на рис. 13.1. Система обладает положительной дисперсией.

**«Гребенка».** Вывод уравнения дисперсии сводится к определению при фиксированном  $\varphi$  собственной частоты колебаний отрезка линии (штыря), нагруженной емкостью  $C$ . Эта емкость отображает неоднородную область (см. рис. 13.2). Условия на концах штыря следующие:  $U_0(0) = 0$ ,  $I_0(h) = j\omega C U_0(h)$ . Подставляя их в (13.7), получим уравнение дисперсии гребенки

$$kh \operatorname{tg}\{kh[C_\epsilon(\varphi)/C_1(\varphi)]^{1/2}\} = \hat{M}(\varphi)/\hat{C}, \quad (14.2, a)$$

где

$$\hat{M}(\varphi) = \rho M(\varphi), \quad \hat{C} = C/\epsilon_0 h \quad (14.2, б)$$

— безразмерные волновая проводимость и емкость, а  $\rho = (\mu_0/\epsilon_0)^{1/2}$  — волновое сопротивление свободного пространства.

Исследуем качественно дисперсионную характеристику гребенки, расположенной в свободном пространстве ( $\epsilon = 1$ ,  $C_\epsilon(\varphi) = C(\varphi)$ ). Левая часть

(14.2, *a*) увеличивается с ростом частоты  $\omega = kc$ , а правая — с ростом  $\phi$  согласно (13.9), так что  $d\omega/d\phi > 0$ , т.е. дисперсия положительная. С ростом  $C$ , т.е. по мере приближения концов штырей к экрану, полоса пропускания растет, так как наклон кривой  $kh \operatorname{tg}(kh)$  убывает вместе с правой частью (14.2, *a*). На ширину полосы также влияет отношение  $\gamma_0/\gamma_1$ , так как согласно (13.9) при заданном среднем значении  $M(\phi)$  диапазон ее изменения убывает с ростом отношения  $\gamma_0/\gamma_1$ . Отсюда следует, в частности, что полоса пропускания гребенки сужается по мере приближения боковой стенки к штырям. Дисперсия гребенки, однако, при любом положении стенок остается положительной.

Чтобы определить дисперсионную характеристику гребенки по формуле (14.2, *a*), необходимо знать не только волновую проводимость  $M(\phi)$ , но и емкость  $C$  между торцом штыря и экраном. При качественных оценках ее можно рассчитать по формуле плоского конденсатора

$$\hat{C} = (L - l)p/h\delta, \quad (14.3, a)$$

где  $\delta$  — расстояние между концом штыря и экраном. Формула (14.3, *a*) дает заниженное значение емкости, так как не учитывает поле вне зазора между концом штыря и экраном. Более точный расчет емкости  $\hat{C}$  можно произвести по формуле

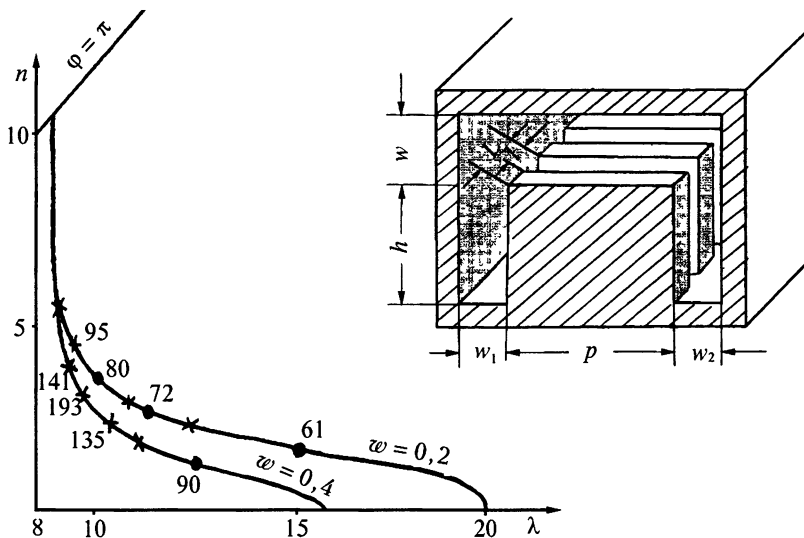
$$\hat{C} = 4(p/h)\sin^2(\phi/2)\hat{C}_k^*(\phi), \quad (14.3, б)$$

аналогичной (9.24), где  $\hat{C}_k^*(\phi)$  — нормированная к  $\epsilon_0$  краевая емкость, которая вычисляется по формулам из приложения 4, если размер  $w$  в них заменить на  $\delta$ .

В выражении (14.3, *б*) учтено поле между концом штыря и противоположной стенкой экрана, а также поле между соседними штырями. В нем, однако, не учтено поле между концами штырей и боковыми стенками экрана ( $|x| > p/2$ ,  $y > h$ ). Значение емкости (14.3, *б*) хотя и выше, чем (14.3, *a*), но все же остается заниженным. Более строгий расчет штыревой гребенки описан в [2, 8].

Результаты расчета дисперсионной характеристики штыревой гребенки с помощью уравнения (14.2, *a*) приведены на рис. 13.2 и 14.1. Там же нанесены результаты измерений. Емкость  $\hat{C}$  вычислялась как по формуле плоского конденсатора (14.3, *a*), так и с учетом зависимости  $\hat{C}$  от  $\phi$ . Результаты расчета в последнем случае (кривая 3 на рис. 13.2, *a*) совпадают с результатами измерений лучше, чем в первом (кривая 2). Ошибка в вычислении  $\hat{C}$  падает с ростом ширины гребенки (см. рис. 14.1). Диэлектрическая подложка приводит к расширению полосы пропускания гребенки (рис. 13.2, *б*), смещению полосы пропускания в сторону длинных волн и увеличению замедления.

**Системы лестничного типа.** Примеры лестничных ЗС изображены на рис. 13.3. Каждая из них содержит плоскость симметрии  $y = 0$ , представляющую либо электрическую ( $U(0) = 0$ ), либо магнитную ( $I(0) = 0$ ) стенку в зависимости от типа волны. Ограничимся рассмотрением типов волн с магнитной стенкой. При этом достаточно рассматривать лишь половину ( $y > 0$ )



**Рис. 14.1.** Сравнение дисперсионных характеристик широкой гребенки, полученных в результате измерений (крестики) и расчетов (кружки, сплошные линии) методом многопроводных линий по формуле

$$kh \operatorname{tg}(kh) = \hat{M}(\varphi) / \hat{C}, \quad \hat{C} = 4p\hat{C}_K(\varphi) \sin^2(\varphi/2)$$

при  $w_1 = w_2 = 0,5$ ,  $p = 4$ ,  $h = 2$ ,  $L = 2l = 0,4$ . Числами около кривых указаны сопротивления связи в Ом для ленточного потока электронов, касающегося троец штырей, рассчитанные по формуле

$$K_{св} = 4kh[\Phi(\varphi)/\hat{M}(\varphi)] \sin^2(kh)/[2kh + \sin(2kh)] \text{ [Ом]}$$

каждой из лестниц. Предполагаем, что штыри расположены в свободном пространстве ( $\beta_y = k$ ).

Каждую из лестниц можно представить как каскадное соединение двух отрезков линий с волновыми проводимостями  $M_I(\varphi)$ ,  $M_{II}(\varphi)$  и длинами  $h_I/2$ ,  $h_{II}/2$ , соответственно. На входных полюсах каскадного соединения  $I_1 = I(0) = 0$ , а на выходных  $U_2 = 0$ . Матрица передачи каскадного соединения линий получается перемножением матриц передачи отдельных отрезков линий.

Учитывая условия на входных и выходных полюсах, получаем следующее уравнение:

$$\operatorname{tg}(kh_I/2)\operatorname{tg}(kh_{II}/2) = \hat{M}_I(\varphi)/\hat{M}_{II}(\varphi). \quad (14.4)$$

При выводе уравнения дисперсии лестницы не учтены высшие типы волн, возникающие вблизи неоднородностей  $y = \pm h_{II}/2$ . Их учет в виде эквивалентной емкости сравнительно мало влияет на результаты расчета.

Качественный анализ дисперсионной характеристики лестниц проведем для случая  $h_I = h_{II} = h/2$ . При этом уравнение (14.4) с учетом (13.9, в) приближенно можно записать в виде

$$\operatorname{tg}^2(kh/4) = [\gamma_{0I} + 4\gamma_{1I} \sin^2(\varphi/2)] / [\gamma_{0II} + 4\gamma_{1II} \sin^2(\varphi/2)] .$$

При условии  $\gamma_{0I}/\gamma_{1I} < \gamma_{0II}/\gamma_{1II}$  (т.е.  $\omega_I > \omega_{II}$ ) правая часть последнего уравнения растет вместе с  $\varphi$ . Отсюда следует, что при  $\omega_I > \omega_{II}$  (рис. 13.3, а) лестница обладает положительной дисперсией ( $dk/d\varphi > 0$ ), а при  $\omega_I < \omega_{II}$  (рис. 13.3, б) отрицательной.

Результаты расчета и измерений дисперсионных характеристик для двух различных лестниц сравниваются на рис. 13.3. Причина значительного расхождения этих результатов для лестницы с выемкой при малых замедлениях рассмотрена в п. 13.4.

## 14.2. Расчет сопротивления связи одноступенчатых систем методом многопроводных линий

Полагаем, что амплитуда потенциала волны, взаимодействующей с электронным потоком, распределена вдоль штырей по закону

$$U(y) = \sin(\beta_y y + \chi) \quad (14.5)$$

где  $\chi$  — фазовый угол, от которого зависит положение максимума амплитуды,  $U(y)$  — потенциал штыря относительно боковой стенки экрана.

Сопротивление связи рассчитываем по формуле (1.12). Выражая поток энергии  $P$  через среднюю по времени энергию  $W$ , запасенную в ячейке, и групповую скорость  $v_r$  ( $P = Wv_r/L$ ), волновое число  $\beta$  через сдвиг фазы на периоде ( $\beta = \varphi/L$ ), а средний по сечению электронного потока квадрат напряженности  $e_m^2$  электрического поля через величину  $U^2$ , запишем формулу (1.12) в виде

$$K_{\text{св}} = \frac{2M^2 \sin^2(\varphi/2) U^2}{\varphi^2 W v_r} L \sigma = \frac{2M^2 \sin^2(\varphi/2) U^2}{\varphi^2 W v_r c} L \sigma n [1 - (\lambda/n)(dn/d\lambda)],$$

где  $M = e_m L / |\Delta U|$  — коэффициент, зависящий от формы пространства взаимодействия и от  $\varphi$ ,  $|\Delta U| = 2U \sin(\varphi/2)$  — амплитуда разности потенциалов между соседними штырями,  $\sigma$  — множитель, зависящий от распределения потенциала по высоте штырей. Он получается в результате усреднения квадрата потенциала (14.5) по координате  $y$  и для электронного потока шириною  $h$  определяется равенством

$$\sigma = \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} \sin^2(\beta_y y + \chi) dy = [\beta_y h - \sin(\beta_y h) \cos(2\chi)] / 2\beta_y h, \quad (14.6, a)$$

если начало координат выбрать в центре штыря, и равенством

$$\sigma = [\beta_y h - \sin(\beta_y h) \cos(\beta_y h + 2\chi)] / 2\beta_y h, \quad (14.6, б)$$

если начала координат и штыря совпадают. При выводе соотношения для  $K_{св}$  учтена формула Релея (1.10).

Введя обозначение  $F(\varphi)$  по (5.6, в), запишем окончательное выражение для сопротивления связи

$$K_{св} = \Phi(\varphi) U^2 \sigma / W, \quad (14.7)$$

где

$$\Phi(\varphi) = 120\pi F(\varphi) (c/v_r) (L/h), \quad W = 240\pi c W/h.$$

Величина  $\sigma$  определяется по формуле (14.6), а значения  $F(\varphi)$  приведены в табл. 9.1 для случая, когда ленточный поток электронов касается штырей. Для ленточного потока на расстоянии  $\Delta x$  от штырей величину  $F(\varphi)$  следует умножить на  $\text{sh}^2[(\omega - \Delta x)\varphi/L] / \text{sh}^2(\omega\varphi/L)$ .

Таким образом, для вычисления сопротивления связи по формуле (14.7) остается вычислить отношение квадрата амплитуды потенциала  $U^2$  на штыре к энергии  $W$ , запасенной в одном периоде. В общем случае эта энергия  $W$  вычисляется как сумма энергий поля  $LEM$  в многопроводной линии ( $W_o$ ) и поля в неоднородной области ( $W_{но}$ ). При вычислении  $W_{но}$  учитывают также высшие типы полей в однородной области, которые сосредоточены вблизи неоднородностей и затухают вдоль оси  $y$ .

Если в неоднородной области запасается только электрическая или только магнитная энергия, то расчет  $W$  значительно упрощается, так как  $W = W_E + W_H = 2W_E = 2W_H$ , и можно ограничиться вычислением одной из энергий ( $W_E$  или  $W_H$ ) только в однородной области.

При вычислении энергии поля в однородной области ограничимся рассмотрением систем, в которых многопроводная линия нанесена на диэлектрическую подложку. При этом справедливо равенство (13.1). В качестве частного случая получается линия в свободном пространстве ( $\epsilon = 1$ ).

Электрическая и магнитная энергии поля в однородной области определяются равенствами

$$W_E = \frac{C_\epsilon(\varphi)}{4} \int_h |U(y)|^2 dy = \frac{hC_\epsilon(\varphi)U^2\sigma}{4},$$

$$W_H = \frac{L(\varphi)}{4} \int_h |I(y)|^2 dy = \frac{hL(\varphi)M^2(\varphi)U^2\sigma_H}{4} = \frac{hC_\epsilon(\varphi)U^2\sigma_H}{4},$$

где  $\sigma_H$  — множитель, зависящий от распределения тока по штырю, определяется равенством

$$\sigma_H = \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} \cos^2(\beta_y y + \chi) dy = [\beta_y h + \sin(\beta_y h) \cos(2\chi)] / 2\beta_y h, \quad (14.8, а)$$

если начало координат ( $y = 0$ ) выбрать в центре штыря, и равенством

$$\sigma_H = [\beta_y h + \sin(\beta_y h) \cos(\beta_y h + 2\chi)] / 2\beta_y h, \quad (14.8, 6)$$

если начала штыря и координат совпадают.

Вводя обозначение  $\hat{C}_\epsilon(\varphi) = C_\epsilon(\varphi)/\epsilon_0$ , запишем формулы для расчета нормированных к  $\epsilon_0 h/2$  энергий в однородной области:

$$\hat{W}_E = \hat{C}_\epsilon(\varphi) U^2 \sigma / 2, \quad \hat{W}_H = \hat{C}_\epsilon(\varphi) U^2 \sigma_H / 2. \quad (14.9)$$

Таким образом, все величины, входящие в (14.7), определены.

Вычислим, например, сопротивление связи штыревой гребенки, выбрав одинаковыми начала координат и штыря ( $U(0) = 0$ ). При этом в (14.5)  $\chi = 0$ . В неоднородной области, эквивалентная схема которой представляет емкость, запасается только электрическая энергия. Поэтому удобно вычислять полную энергию как удвоенную магнитную ( $W = 2W_H$ ). Подставляя (14.8, 6) и (14.9) в (14.7), получаем формулу для расчета сопротивления связи гребенки:

$$K_{св} = \frac{\Phi(\varphi) \ 2\beta_y h - \sin(2\beta_y h)}{\hat{M}(\varphi) \ 2\beta_y h + \sin(2\beta_y h)}. \quad (14.10)$$

Около кривых дисперсии (рис. 13.2 и рис. 14.1) цифрами указано сопротивление связи, рассчитанное по формуле (14.10). Значения  $K_{св}$  вычислены для ленточного потока электронов, касающегося штырей сбоку. Чтобы получить значения для ленточного потока ( $y = h$  на рис. 14.1), касающегося концов штырей, необходимо умножить полученные значения на

$$\frac{4\beta_y h \sin^2(\beta_y h)}{2\beta_y h - \sin(2\beta_y h)}.$$

В настоящей главе описан расчет только одноступенчатых штыревых ЗС. Двух- и четырехступенчатые ЗС рассмотрены в следующей главе. Результаты расчета многих конкретных штыревых ЗС различными методами описаны в литературе [3–7].

### 14.3. О законах подобия штыревых систем

В п. 5.5 рассмотрены законы подобия произвольных ЗС. Эти законы строгие и применимы, в частности, к штыревым ЗС. Для ряда штыревых ЗС дополнительно можно получить приближенные законы подобия. Они справедливы только для тех ЗС, в расчетные формулы которых высота входит лишь сомножителем частоты ( $kh = 2\pi h/\lambda = \omega h/c$ ), а размеры поперечного сечения многопроводной линии входят в виде отношений. Такими свойствами обладают, например, формулы для расчета систем типа «лестница», «меандр», «встречные штыри» и т.п.

В той мере, в которой справедливы указанные формулы, высота штырей  $h$  пропорциональна длине волны  $\lambda$  и замедлению  $n = \lambda\varphi/2\pi d$ . При этом сопротивление связи не зависит от  $h$ . Изменение размеров поперечного сечения линии в одинаковое число раз обратно пропорционально замедлению. Рабочий диапазон частот и сопротивление связи не зависят от этих размеров.

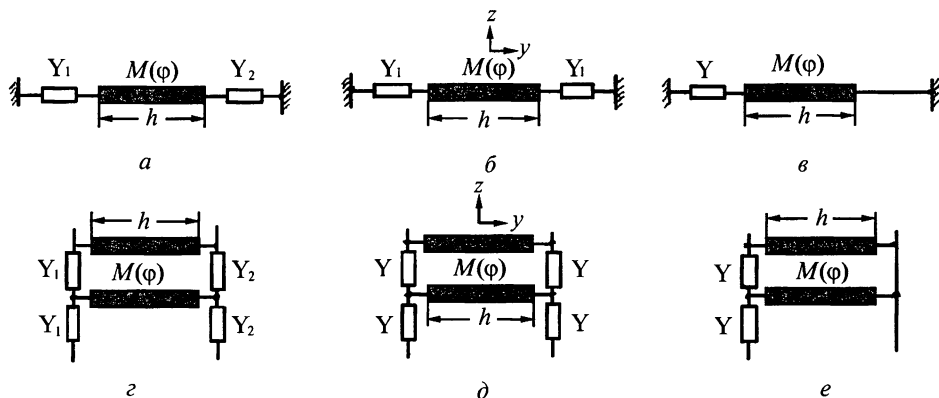


## Упражнения

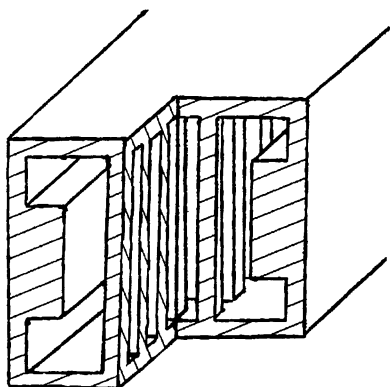
**14.1.** Получить уравнения дисперсии для ЗС с эквивалентными схемами ячеек, приведенными на рис. 14.2. Считать, что многопроводная линия расположена в свободном пространстве.

**14.2.** Рассчитать дисперсионную характеристику и сопротивление связи двухрядной ЗС типа «лестница с выступом» (рис. 14.3).

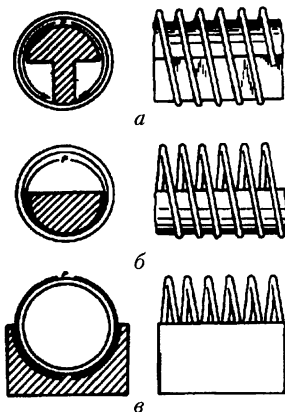
**14.3.** На рис. 14.4 изображены три ЗС, представляющие спирали, навитые на керны специальной формы. К каким из штыревых ЗС, рассмотренным в главах 13 и 14, близки свойства этих систем?



**Рис. 14.2.** Эквивалентные схемы одноступенчатых штыревых ЗС



**Рис. 14.3.** Двухрядная ЗС типа «лестница с выступом»



**Рис. 14.4.** ЗС в форме спиралей навитых на керн

### Список литературы

- [1]. Альтман Дж. Устройства сверхвысоких частот. Под ред. И.В. Лебедева. М.: Мир, 1968. 487 с.  
Перевод кн.: Altman J.L. Microwave circuits. Princeton: D. Van Nostr. and Co., 1964.
- [2]. Белуга И.Ш., Фролов А.Г. Расчет характеристик многорядной штыревой гребенки. *Вопросы радиоэлектроники. Сер. 1. Электроника*, 1964. Вып. 12, 195–204.
- [3]. Водонос Я.И., Головенков В.Ф. Расчет бугельной замедляющей системы со связками. *Электронная техника. Сер. 1. Электроника СВЧ*, 1971. Вып. 2, 60–63.
- [4]. Дашенков В.М. Дисперсионные свойства некоторых штыревых замедляющих систем. *Изв. вузов, Радиофизика*, 1958, 1(3), с. 164.
- [5]. Кутенин Б.П., Силин Р.А. К расчету дисперсии штыревых замедляющих систем. *Электронная техника. Сер. 1. Электроника СВЧ*, 1967. Вып. 9, 76–88.
- [6]. Кутенин Б.П. Сопротивление связи однорядных штыревых замедляющих систем. *Электронная техника. Сер. 1. Электроника СВЧ*, 1969. Вып. 3, 18–22.

## Многоступенчатые штыревые замедляющие системы

### 15.1. Метод расчета многоступенчатых штыревых ЗС

Ограничимся рассмотрением многоступенчатых штыревых ЗС, содержащих отрезки одноступенчатых многопроводных линий. К ним относятся, например, «встречные штыри» и «меандр» (см. рис. 2.14). Первая используется как в приборах с обратной волной (ЛОВ, платинотронах), так и в приборах с прямой волной (ЛБВ). В разных типах приборов, конечно, взаимодействие происходит с различными пространственными гармониками. «Меандр» используется, в основном, на прямой волне. Различные способы расчета двухступенчатых ЗС описаны в работах [1–8]. Ниже описан метод многопроводных линий.

В многоступенчатых ЗС потенциалы и токи соседних штырей отличаются не только по фазе, но и по величине. Если, однако, многопроводная линия одноступенчатая, то потенциалы и токи удобно представить в виде суммы симметричных составляющих (см. (11.5) и (11.6)), каждой из которых соответствует сдвиг фаз на периоде, равный

$$\varphi_r = \varphi + 2\pi r/Q, \quad -Q/2 \leq r < Q/2, \quad (15.1)$$

где  $Q$  — число ступеней, т.е. количество штырей в периоде,  $r$  — номер симметричной составляющей, а  $\varphi$  — сдвиг фаз поля между соседними штырями для нулевой составляющей ( $|\varphi| \leq \pi/Q$ ).

Для каждой симметричной составляющей ( $\alpha_r$ ,  $\eta_r$ ) справедливы равенства (13.7), связывающие  $\alpha_r(0)$ ,  $\alpha_r(y)$ ,  $\eta_r(0)$  и  $\eta_r(y)$ ,

$$\begin{bmatrix} \alpha_r(0) \\ \eta_r(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \beta_r y & (j/M_r) \sin \beta_r y \\ jM_r \sin \beta_r y & \cos \beta_r y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_r(y) \\ \eta_r(y) \end{bmatrix}, \quad (15.2, a)$$

где

$$\beta_r = k[C_\varepsilon(\varphi_r)/C_1(\varphi_r)]^{1/2}, \quad M_r = M(\varphi_r) = c[C_\varepsilon(\varphi_r)C_1(\varphi_r)]^{1/2}. \quad (15.2, б)$$

Вводя векторы  $\alpha(0)$ ,  $\alpha(y)$ ,  $\eta(0)$  и  $\eta(y)$  с коэффициентами  $\alpha_r(0)$ ,  $\alpha_r(y)$ ,  $\eta_r(0)$  и  $\eta_r(y)$  и квадратные диагональные матрицы  $[\cos \beta y]$ ,  $[K \sin \beta y]$  и  $[M \sin \beta y]$  с коэффициентами  $\cos \beta_r y$ ,  $(1/M_r) \sin \beta_r y$  и  $M_r \sin \beta_r y$ , соответственно ( $-Q/2 \leq r < Q/2$ ), запишем соотношения (15.2 а) в следующей форме:

$$\begin{bmatrix} \alpha(0) \\ \eta(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [\cos \beta y] & j[K \sin \beta y] \\ j[M \sin \beta y] & [\cos \beta y] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha(y) \\ \eta(y) \end{bmatrix}. \quad (15.2, в)$$

Для вывода уравнения дисперсии надо задать условия на концах штырей, которые обычно выражаются через напряжения и токи  $U_q$  и  $I_q$  ( $q = 0, 1, 2, \dots, Q - 1$ ). Связь этих напряжений и токов с амплитудами симметричных составляющих описывается соотношениями (11.5) и (11.6),

$$\mathbf{U} = [T]\boldsymbol{\alpha}, \quad \mathbf{I} = [T]\boldsymbol{\eta}, \quad \boldsymbol{\alpha} = (1/Q)[T]^* \mathbf{U}, \quad \boldsymbol{\eta} = (1/Q)[T]^* \mathbf{I}, \quad (15.3)$$

где  $\mathbf{U}$  и  $\mathbf{I}$  — векторы с компонентами  $U_r$  и  $I_r$ , а  $[T]$  — квадратная матрица с элементами  $T_{rq} = \exp(-jq\varphi_r)$ . Подставляя (15.3) в (15.2) и вводя обозначение  $x_r = \beta_r h$ , где  $h$  — высота штыря, получаем связь потенциалов и токов на концах штырей:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{U}^I \\ \mathbf{I}^I \end{bmatrix} = \frac{1}{Q} \begin{bmatrix} [T][\cos x][T]^* & j[T][K \sin x][T]^* \\ j[T][M \sin x][T]^* & [T][\cos x][T]^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U}^{II} \\ \mathbf{I}^{II} \end{bmatrix}. \quad (15.4)$$

где  $\mathbf{U}^I = \mathbf{U}(0)$ ,  $\mathbf{U}^{II} = \mathbf{U}(h)$ ,  $\mathbf{I}^I = \mathbf{I}(0)$ ,  $\mathbf{I}^{II} = \mathbf{I}(h)$ .

С помощью соотношений (15.2)–(15.4) можно получить уравнение дисперсии и формулу для расчета сопротивления связи для любой ЗС штыревого типа. Вывод соответствующих формул проиллюстрируем на конкретных примерах.

## 15.2. Дисперсия двухступенчатых систем

Из двухступенчатых ЗС рассмотрим две системы, наиболее широко применяющиеся в электронных приборах, — это «встречные штыри» и «меандр» (рис. 15.1 и 15.2). Соотношение (15.2 в) для двухступенчатых систем можно записать в виде

$$\begin{bmatrix} \alpha_{-1}^I \\ \alpha_0^I \\ \eta_{-1}^I \\ \eta_0^I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos x_{-1} & 0 & jK_{-1} \sin x_{-1} & 0 \\ 0 & \cos x_0 & 0 & jK_0 \sin x_0 \\ jM_{-1} \sin x_{-1} & 0 & \cos x_{-1} & 0 \\ 0 & jM_0 \sin x_0 & 0 & \cos x_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_{-1}^{II} \\ \alpha_0^{II} \\ \eta_{-1}^{II} \\ \eta_0^{II} \end{bmatrix}, \quad (15.5)$$

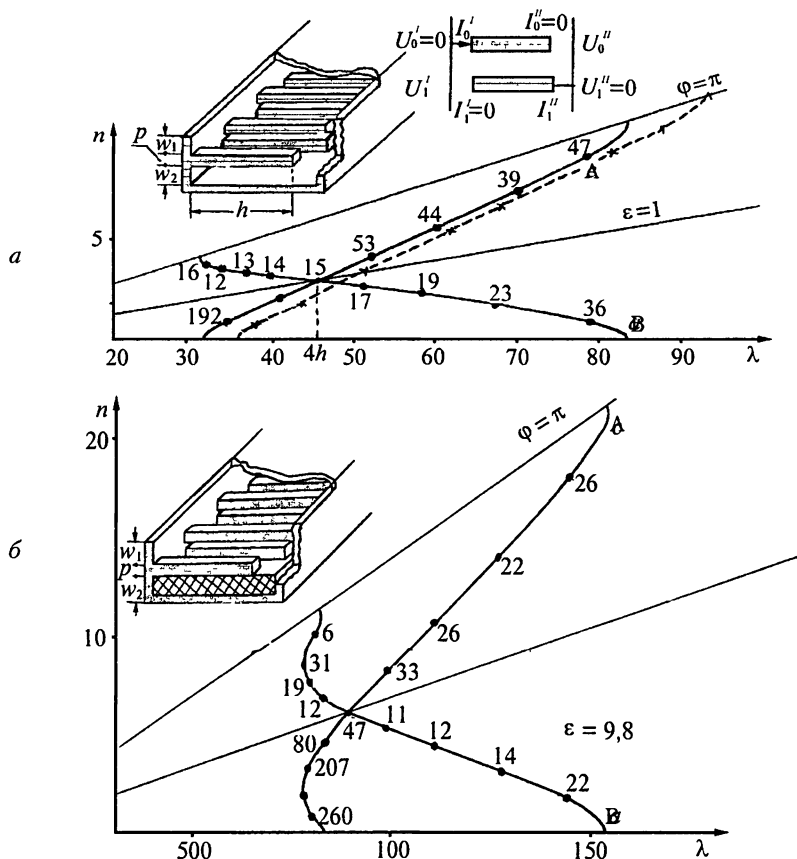
где

$$\begin{aligned} x_0 &= kh[C_\epsilon(\varphi)/C_1(\varphi)]^{1/2}, & x_{-1} &= kh[C_\epsilon(\pi - \varphi)/C_1(\pi - \varphi)]^{1/2}, \\ M_0 &= c[C_\epsilon(\varphi)C_1(\varphi)]^{1/2}, & M_{-1} &= c[C_\epsilon(\pi - \varphi)C_1(\pi - \varphi)]^{1/2}. \end{aligned} \quad (15.6)$$

Согласно (15.3) амплитуды симметричных составляющих связаны с напряжениями и токами:

$$\begin{bmatrix} \alpha_{-1} \\ \alpha_0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -\exp(j\varphi) \\ 1 & \exp(j\varphi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_0 \\ U_1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \eta_{-1} \\ \eta_0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -\exp(j\varphi) \\ 1 & \exp(j\varphi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_0 \\ I_1 \end{bmatrix}. \quad (15.7)$$

Потенциал одной составляющей распределен симметрично по высоте штыря ( $\alpha_0^I = \alpha_0^{II}$ ), а другой — антисимметрично ( $\alpha_{-1}^I = -\alpha_{-1}^{II}$ ). При этом ток одной составляющей распределен антисимметрично ( $\eta_0^I = -\eta_0^{II}$ ), а другой — симметрично ( $\eta_{-1}^I = \eta_{-1}^{II}$ ).



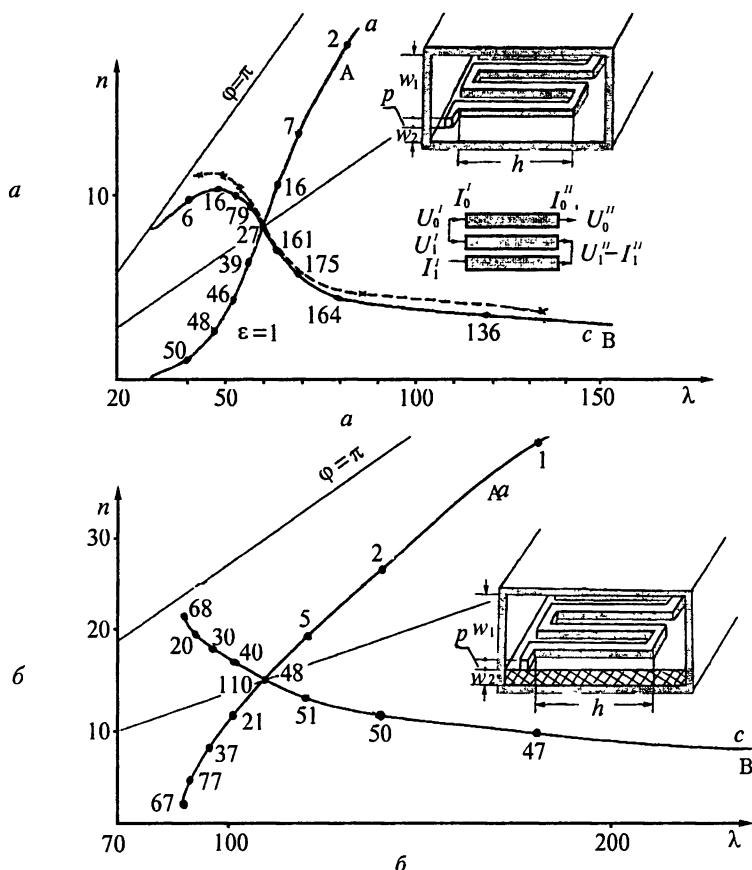
**Рис. 15.1.** Рассчитанные (черные кружки, сплошные линии) и измеренные (крестики, штриховая линия) дисперсионные характеристики ЗС типа «встречные штыри». Числами около кривых указаны значения  $K_{св}$  в Ом для ленточного потока электронов, касающегося штырей, соответствующие двум системам с одинаковыми размерами, одна из которых расположена в свободном пространстве (а), а другая на диэлектрической подложке толщиной  $w_2 = 2,4$  при  $\epsilon_2 = 9,8$  (б). Размеры систем следующие:  $L = 3,6$ ;  $l = 2,2$ ;  $w_1 = 1,2$ ;  $h = 11,4$ ;  $p = 2,4$ . Расчет проведен по формулам:

для ЗС в свободном пространстве:

$$a: \begin{cases} (A) \operatorname{tg}^2(kh/2) = \hat{M}_{-1}/\hat{M}_0, & K_{св} = \Phi(\varphi)(kh + \sin kh)/2kh\hat{M}_0, \\ (B) \operatorname{tg}^2(kh/2) = \hat{M}_0/\hat{M}_{-1}, & K_{св} = \Phi(\varphi)(kh - \sin kh)/2kh\hat{M}_0, \end{cases}$$

для ЗС на подложке:

$$б: \begin{cases} (A) \operatorname{tg}(x_0/2)\operatorname{tg}(x_{-1}/2) = \hat{M}_{-1}/\hat{M}_0, & K_{св} = \Phi(\varphi)(1 + x_0^{-1} \sin x_0) \times \\ & \times \sin^2(x_{-1}/2) [\hat{C}_\epsilon(\varphi) \sin^2(x_{-1}/2) + \hat{C}_\epsilon(\pi - \varphi) \cos^2(x_0/2)]^{-1}, \\ (B) \operatorname{tg}(x_0/2)\operatorname{tg}(x_{-1}/2) = \hat{M}_0/\hat{M}_{-1}, & K_{св} = \Phi(\varphi)(1 - x_0^{-1} \sin x_0)^2 \times \\ & \times \cos^2(x_{-1}/2) [\hat{C}_\epsilon(\varphi) \cos^2(x_{-1}/2) + \hat{C}_\epsilon(\pi - \varphi) \sin^2(x_0/2)]^{-1} \end{cases}$$



**Рис. 15.2.** Рассчитанные (черные кружки, сплошные линии) и измеренные (крестики, штриховая линия) дисперсионные характеристики меандра в свободном пространстве (а) и на диэлектрической подложке с  $\epsilon_2 = 9,8$  (б). Размеры обеих систем одинаковы:  $L = w_2 = 1,8$ ;  $p = 1,35$ ;  $h = 15$ ;  $w_1 = \infty$ . Цифры около кривых указывают сопротивление связи в Ом для ленточного потока электронов, касающегося штырей. Расчет проведен по формулам:

для ЗС в свободном пространстве:

$$a: \begin{cases} (A) \operatorname{tg}^2(kh/2) = (\hat{M}_{-1}/\hat{M}_0) \operatorname{tg}^2(\varphi/2), & K_{св} = \Phi(\varphi)(kh + \sin kh)/2kh\hat{M}_0, \\ (B) \operatorname{tg}^2(kh/2) = (\hat{M}_0/\hat{M}_{-1}) \operatorname{ctg}^2(\varphi/2), & K_{св} = \Phi(\varphi)(kh - \sin kh)/2kh\hat{M}_0, \end{cases}$$

для ЗС на подложке:

$$б: \begin{cases} (A) \operatorname{tg}(x_0/2) \operatorname{tg}(x_{-1}/2) = (\hat{M}_{-1}/\hat{M}_0) \operatorname{tg}^2(\varphi/2), & K_{св} = \Phi(\varphi)(1 + x_0^{-1} \sin x_0) \times \\ & \times \sin^2(x_{-1}/2) [\hat{C}_\epsilon(\varphi) \sin^2(x_{-1}/2) + \operatorname{tg}^2(\varphi/2) \hat{C}_\epsilon(\pi - \varphi) \cos^2(x_0/2)]^{-1}, \\ (B) \operatorname{tg}(x_0/2) \operatorname{tg}(x_{-1}/2) = (\hat{M}_0/\hat{M}_{-1}) \operatorname{ctg}^2(\varphi/2), & K_{св} = \Phi(\varphi)(1 - x_0^{-1} \sin x_0) \times \\ & \times \cos^2(x_{-1}/2) [\hat{C}_\epsilon(\varphi) \cos^2(x_{-1}/2) + \operatorname{tg}^2(\varphi/2) \hat{C}_\epsilon(\pi - \varphi) \sin^2(x_0/2)]^{-1} \end{cases}$$

Обе рассматриваемые ЗС имеют скользящую плоскость симметрии. В соответствии с (2.20) при учете (15.6) ищем распределение потенциалов и токов по высоте штырей в следующем виде:

$$\begin{bmatrix} U_1(y) \\ I_1(y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_0(h-y) \\ -I_0(h-y) \end{bmatrix} \exp(-j\varphi) \quad (15.8)$$

Условия на концах штырей в соответствии с эквивалентными схемами на рис. 15.1 и 15.2 и с учетом (15.8) имеют вид:

для «встречных штырей»

$$U_0^I = U_1^{II} = 0, \quad I_1^I = I_0^{II} = 0, \quad U_0^{II} = U_1^I \exp(j\varphi), \quad I_1^{II} = -I_0^I \exp(j\varphi), \quad (15.9, a)$$

для «меандра»

$$\begin{aligned} U_1^I &= U_0^I, & U_1^{II} &= U_0^{II} \exp(-j2\varphi), & U_1^{II} &= U_0^I \exp(-j\varphi), \\ I_1^I &= -I_0^I, & I_1^{II} &= -I_0^{II} \exp(-j2\varphi), & I_1^{II} &= -I_0^I \exp(-j\varphi). \end{aligned} \quad (15.9, б)$$

Подставляя граничные условия (15.9) в (15.7), получим амплитуды симметричных составляющих на концах штырей для встречно-штыревой системы:

$$\begin{aligned} \alpha_0^I &= \alpha_0^{II} = -\alpha_{-1}^I = \alpha_{-1}^{II} = U_1^I \exp(j\varphi/2), \\ \eta_0^I &= -\eta_0^{II} = \eta_{-1}^I = \eta_{-1}^{II} = I_0^I/2, \end{aligned} \quad (15.10, a)$$

и для «меандра»:

$$\begin{aligned} \alpha_0^I &= \alpha_0^{II}, & \alpha_{-1}^I &= -\alpha_{-1}^{II} = -j \operatorname{tg}(\varphi/2) \alpha_0^I, \\ \eta_0^I &= -\eta_0^{II}, & \eta_{-1}^I &= \eta_{-1}^{II} = j \operatorname{ctg}(\varphi/2) \eta_0^I. \end{aligned} \quad (15.10, б)$$

Подставляя (15.10) в (15.5), получим систему уравнений для «встречных штырей»:

$$\begin{bmatrix} M_{-1} \cos(x_{-1}/2) & -\sin(x_{-1}/2) \\ M_0 \sin(x_0/2) & -\cos(x_0/2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j\alpha_0^I \\ \eta_0^I \end{bmatrix} = 0, \quad (15.11, a)$$

и для «меандра»:

$$\begin{bmatrix} jM_{-1} \cos(x_{-1}/2) \operatorname{tg}(\varphi/2) & -\sin(x_{-1}/2) \operatorname{ctg}(\varphi/2) \\ M_0 \sin(x_0/2) & -j \cos(x_0/2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0^I \\ \eta_0^I \end{bmatrix} = 0. \quad (15.12, б)$$

Условие существования ненулевого решения каждой из систем уравнений (15.11) состоит в равенстве нулю детерминанта матрицы ее коэффициентов. Это и есть уравнение дисперсии. Для встречных штырей оно имеет вид

$$\operatorname{tg}(x_{-1}/2) \operatorname{tg}(x_0/2) = M_{-1}/M_0, \quad (15.12, a)$$

а для меандра

$$\operatorname{tg}(x_{-1}/2) \operatorname{tg}(x_0/2) = \operatorname{tg}^2(\varphi/2) M_{-1}/M_0. \quad (15.12, б)$$

Следует заметить, что уравнения (15.11) записаны для составляющих с симметричным распределением потенциала по высоте штырей. Для этой же составляющей справедливы уравнения дисперсии (15.12). Чтобы получить уравнения для составляющей с антисимметричным распределением потенциала, достаточно в уравнениях (15.12) взаимно заменить  $\varphi$  и  $\pi - \varphi$ . В результате для антисимметричного распределения потенциала уравнение дисперсии встречных штырей имеет вид

$$\operatorname{tg}(x_{-1}/2)\operatorname{tg}(x_0/2) = M_0/M_{-1}, \quad (15.12, \text{в})$$

а для меандра

$$\operatorname{tg}(x_{-1}/2)\operatorname{tg}(x_0/2) = \operatorname{ctg}^2(\varphi/2)M_0/M_{-1}. \quad (15.12, \text{з})$$

Ветви дисперсионных характеристик, соответствующие симметричному распределению потенциала, обозначаем на рисунках символом «с», а антисимметричному — символом «а». Если штыри расположены в свободном пространстве, то  $x_0 = x_{-1} = kh$ , так как  $C_\varepsilon(\varphi) = C(\varphi)$ , и уравнения дисперсии несколько упрощаются.

### 15.3. Сопротивление связи двухступенчатых систем

Для расчета сопротивления связи воспользуемся формулой (14.7), которую запишем в несколько ином виде:

$$K_{\text{св}} = \frac{2\Phi(\varphi)|\alpha_q|^2\sigma}{\hat{C}_\varepsilon(\varphi)|\alpha_0|^2 + \hat{C}_\varepsilon(\pi - \varphi)|\alpha_{-1}|^2}. \quad (15.13)$$

Здесь учтено, что для двухступенчатых систем нормированная энергия, запасенная в одной ячейке (отнесенная к одному штырю), выражается равенством

$$\dot{W} = \frac{1}{2} \left[ \hat{C}_\varepsilon(\varphi)|\alpha_0|^2 + \hat{C}_\varepsilon(\pi - \varphi)|\alpha_{-1}|^2 \right]$$

(учитываем энергию только в однородной области) и что роль квадрата модуля потенциала играет квадрат амплитуды  $|\alpha_q|^2$  симметричной составляющей:

$$\alpha_q(y) = \alpha_q \cos[\beta_y(\varphi_q)y + \chi_q]. \quad (15.14)$$

Величины  $\hat{C}_\varepsilon(\varphi)$  и  $\Phi(\varphi)$  вычисляются так же, как в гл. 14. Чтобы определить  $\alpha_q$  и  $\sigma_q$  (см. формулу (14.6)), необходимо найти распределение потенциала (15.14)  $q$ -й составляющей по высоте штыря. Дальнейшие рассуждения ведем только на примере «встречных штырей». Для «меандра» запишем лишь окончательные результаты (см. рис. 15.2).

Зависимости  $\alpha_{-1}(y)$  и  $\alpha_0(y)$  определяем с помощью равенства (15.5), в котором произведена замена  $\alpha'_{-1}$  на  $\alpha_{-1}(y)$ ,  $\alpha'_0$  на  $\alpha_0(y)$ ,  $x_{-1}$  на  $\beta(\pi - \varphi)y$ ,  $x_0$  на  $\beta(\varphi)y$ :



$$\alpha_{-1}(y) = \cos[\beta(\pi - \varphi)y] \alpha_{-1}^{II} + j(1/M_{-1}) \sin[\beta(\pi - \varphi)y] \eta_{-1}^{II},$$

$$\alpha_0(y) = \cos[\beta(\varphi)y] \alpha_0^{II} + j(1/M_0) \sin[\beta(\varphi)y] \eta_0^{II}.$$

Учитывая (15.10 а) и выражая  $\eta'_0$  через  $\alpha'_0$  с помощью (15.11, а), получаем

$$\alpha_{-1}(y) = \alpha'_0 \sin[\beta(\pi - \varphi)(h/2 - y)] / \sin(x_{-1}/2),$$

$$\alpha_0(y) = \alpha'_0 \cos[\beta(\varphi)(h/2 - y)] / \cos(x_0/2).$$

Составляющая  $\alpha_0(y)$  с симметричным распределением потенциала относительно скользящей плоскости изменяется по закону косинуса относительно центра штыря, а составляющая  $\alpha_{-1}(y)$  — по закону синуса. Их амплитуды в (15.14) выражаются равенствами

$$\alpha_{-1} = \alpha'_0 / \sin(x_{-1}/2), \quad \alpha_0 = \alpha'_0 / \cos(x_0/2),$$

а усредняющие множители (14.6) — равенствами

$$\sigma_{-1} = (x_{-1} - \sin x_{-1}) / 2x_{-1}, \quad \sigma_0 = (x_0 + \sin x_0) / 2x_0.$$

Подставляя амплитуды симметричных составляющих и усредняющие множители в (15.13), получаем окончательное выражение для сопротивления связи встречных штырей на диэлектрической подложке. Исключая из формулы для  $K_{св}$  величину  $\hat{C}_\epsilon(\pi - \varphi)$  с помощью уравнения дисперсии (15.12), получаем выражение для расчета  $K_{св}$ , приведенное на рис. 15.1. Расчетные формулы упрощаются, если многопроводная линия расположена в однородной среде и, в частности, в свободном пространстве. При этом  $x_0 = x_{-1} = kh$ ,  $\hat{C}_\epsilon(\varphi) = \hat{M}(\varphi)$ ,  $\hat{C}_\epsilon(\pi - \varphi) = \hat{M}(\pi - \varphi)$ .

Результаты расчета дисперсионной характеристики и сопротивления связи «встречных штырей» и «меандра» приведены на рис. 15.1 и рис. 15.2. Там же для ряда случаев штриховой линией нанесены дисперсионные характеристики, полученные в результате измерений. Результаты расчета приведены для нулевых гармоник нулевой и минус первой симметричных составляющих, тогда как результаты расчета — только для нулевых гармоник составляющих с симметричным распределением потенциала.

Две системы на рис. 15.1 имеют одинаковые размеры и отличаются тем, что одна из них на диэлектрической подложке, а другая — в свободном пространстве. То же относится к рис. 15.2. Диэлектрик приводит к смещению кривых дисперсии в сторону длинных волн и росту замедления примерно в  $[(\epsilon + 1)/2]^{1/2}$  раз. С ростом замедления падает сопротивление связи. Кроме этого диэлектрик приводит к изменению формы кривой дисперсии, что видно на примере «меандра» (сравните рис. 15.2, а и б). Внесение диэлектрика может привести к неоднозначности дисперсионной характеристики, когда на одной частоте могут распространяться две нормальные волны с разной скоростью. Коротковолновая граница ( $\varphi = 0$ ) близка к половине длины волны поля в диэлектрике, укладываемойся вдоль штырей ( $\lambda_0 \cong 2h\epsilon^{1/2}$ ).

Для обеих систем характерно пересечение кривых дисперсии симметричных составляющих при  $\varphi = \pi/2$ , обусловленное наличием скользящих плоскостей. Для ЗС в свободном пространстве пересечение происходит при  $\lambda = 4h$ , а на диэлектрической подложке при  $\lambda_0 \cong 4h[C_\epsilon(\pi/2)/C_1(\pi/2)]^{1/2}$ .

Формулы для расчета меандра получены в предположении, что равны нулю индуктивности перемычек, соединяющих соседние штыри, и емкости между перемычками и экранами. В результате, если построить кривые для «меандра» в свободном пространстве ( $\epsilon = 1$ ) не только в основной полосе ( $\lambda > 2h$ ), но и в высших ( $\lambda < 2h$ ), то кривые дисперсии сольются (нет полос непропускания). При этом групповая скорость при  $\varphi = \pi$  оказывается отличной от нуля. Иными словами, вблизи границ полос пропускания погрешность полученных формул велика. Более точный результат получается при учете индуктивности и емкости перемычек. Еще более точен полевой расчет, например, описанный в гл. 10.

Система «встречные штыри» и ее видоизменения используются в широкополосных ЛОВ. Они обеспечивают высокое сопротивление связи в широкой полосе частот и сравнительно хороший теплоотвод (штыри касаются металлического корпуса прибора). «Меандр» и его видоизменения обеспечивают почти постоянное замедление в широкой полосе при  $\varphi < 0,3\pi$ . Для «меандра» в свободном пространстве величина замедления практически составляет  $n = 3-6$ , что соответствует в приборах типа «О» напряжениям, ускоряющим электроны, равным 30 000–7 000 В. Диэлектрик позволяет увеличить замедление в несколько раз.

От меандровых ЗС существенно отличаются некоторые из четырехступенчатых систем, рассмотренные в примерах. Они имеют ветви дисперсионных характеристик с почти постоянным замедлением  $n = 10...20$  даже в отсутствие диэлектрика в полосе частот 20–40 % и обладают высоким сопротивлением связи (20–50 Ом).

## 15.4. Приближенные оценки

В ряде случаев важно лишь приближенно оценить характеристики ЗС с минимальными затратами труда. Для этого можно упростить полученные выше формулы. Положим  $M(\varphi) = \hat{\gamma}_0 + 4\hat{\gamma}_1 \sin^2(\varphi/2)$ , где  $\hat{\gamma}_0 \equiv (L - l)(\omega_1^{-1} + \omega_2^{-1})$ ,  $\hat{\gamma}_1 = pl$  — безразмерные величины, пропорциональные емкости между штырями и стенками и между соседними штырями. Емкостями  $\gamma_q$  при  $q > 1$  пренебрегаем. При этом уравнение дисперсии (см. рис. 15.1) для косинусной составляющей встречных штырей принимает вид

$$\operatorname{tg}^2(kh/2) = [\hat{\gamma}_0 + 4\hat{\gamma}_1 \cos^2(\varphi/2)] / [\hat{\gamma}_0 + 4\hat{\gamma}_1 \sin^2(\varphi/2)]. \quad (15.15, a)$$

Оно еще более упрощается при  $\hat{\gamma}_0 \ll \hat{\gamma}_1$ :  $\operatorname{tg}^2(kh/2) = \operatorname{ctg}^2(\varphi/2)$ . Отсюда  $\varphi = \pi - kh + 2\pi m$ . Деля последнее равенство на  $kh$  и учитывая, что  $k = 2\pi/\lambda$  и что замедление  $n = \varphi/kL$ , получим

$$n = (\lambda + 2m\lambda - 2h)/2L, \quad (15.15, б)$$

где  $m$  — номер пространственной гармоники. Выражение (15.15, б) допускает простую физическую интерпретацию. При  $m = 0$  оно получается, если предположить, что волна бежит между штырями по зигзагообразному пути

со скоростью  $c$ , и если учесть сдвиг фаз на  $\pi$  в соседних зазорах между штырями, обусловленный поворотом направления распространения волны (см. гл. 1). Формула (15.15, б) получена без учета сопротивления перемычки. При этом учитывается путь  $h$  волны только вдоль штырей. В общем случае к  $h$  следует добавить  $L$ , так что окончательно

$$n = [\lambda(1 + 2m) - 2(h + L)]/2L. \quad (15.15, в)$$

Нулевая гармоника встречных штырей обладает аномальной отрицательной дисперсией.

В тех же предположениях сопротивление связи «встречных штырей» и «меандра» можно рассчитать по формуле

$$K_{св} = 120\pi \frac{h + L}{L} \frac{\sin^2(\phi l/2L)}{(\phi l/2L)^2} \frac{\sin^2(\phi/2)}{(\phi/2)^2} \frac{1}{\hat{\gamma}_0 + 4\hat{\gamma}_1 \sin^2(\phi/2)}. \quad (15.16, а)$$

При  $\hat{\gamma}_0 \ll \hat{\gamma}_1$  оно упрощается:

$$K_{св} = 120\pi \frac{h + L}{L} \frac{l}{p} \frac{1}{\phi^2} \frac{\sin^2(\phi l/2L)}{(\phi l/2L)^2}. \quad (15.16, б)$$

Оценку дисперсионной характеристики меандра можно сделать по формуле

$$\text{tg}^2(kh/2) = \text{tg}^2(\phi/2) [\hat{\gamma}_0 + 4\hat{\gamma}_1 \cos^2(\phi/2)] / [\hat{\gamma}_0 + 4\hat{\gamma}_1 \sin^2(\phi/2)], \quad (15.17, а)$$

которая при  $\hat{\gamma}_0 \gg \hat{\gamma}_1$  приводит к выражению

$$n = (L + h + m\lambda)/L. \quad (15.17, б)$$

Нулевая гармоника меандра обладает положительной дисперсией. Сравнивая формулы (15.15, а) и (15.17, а), можно заметить, что полоса пропускания растет для «встречных штырей» по мере удаления боковой стенки (уменьшения  $\hat{\gamma}_0/\hat{\gamma}_1$ ), а «меандра» — по мере ее приближения (роста  $\hat{\gamma}_0/\hat{\gamma}_1$ ). Грубые оценки дисперсии и сопротивления связи, аналогичные проведенным выше, можно сделать и для остальных ЗС штыревого типа.

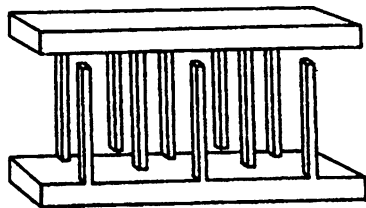
## Упражнения

**15.1.** Рассчитать дисперсионную характеристику и сопротивление связи двухрядной системы, изображенной на рис. 15.3.

**15.2.** Рассчитать дисперсионную характеристику и сопротивление связи системы типа «меандр на опорах» в соответствии с эквивалентной схемой, приведенной на рис. 15.4.

**15.3.** Рассчитать дисперсионную характеристику и сопротивление связи четырехступенчатой системы типа «встречные штыри» в соответствии с эквивалентной схемой, приведенной на рис. 15.5.

**15.4.** Каким штыревым ЗС подобны системы, изображенные на рис. 15.6?



**Рис. 15.3.** Двухрядная ЗС «встречные штыри»

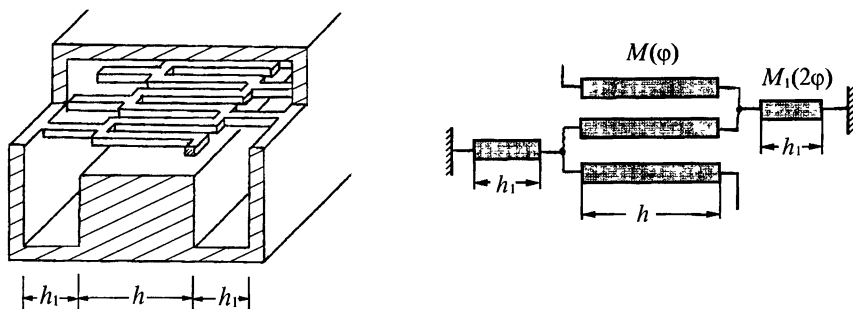


Рис. 15.4. «Меандр на опорах»

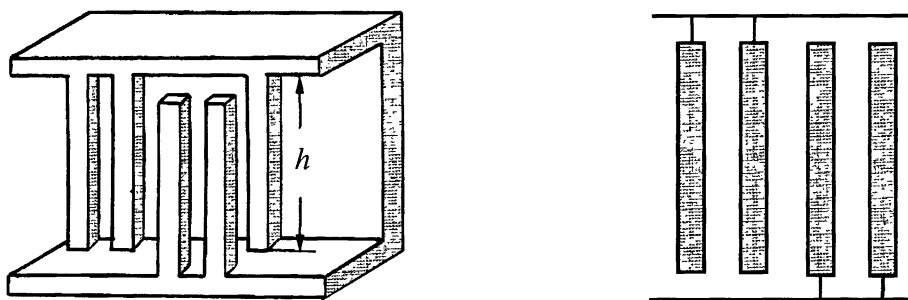
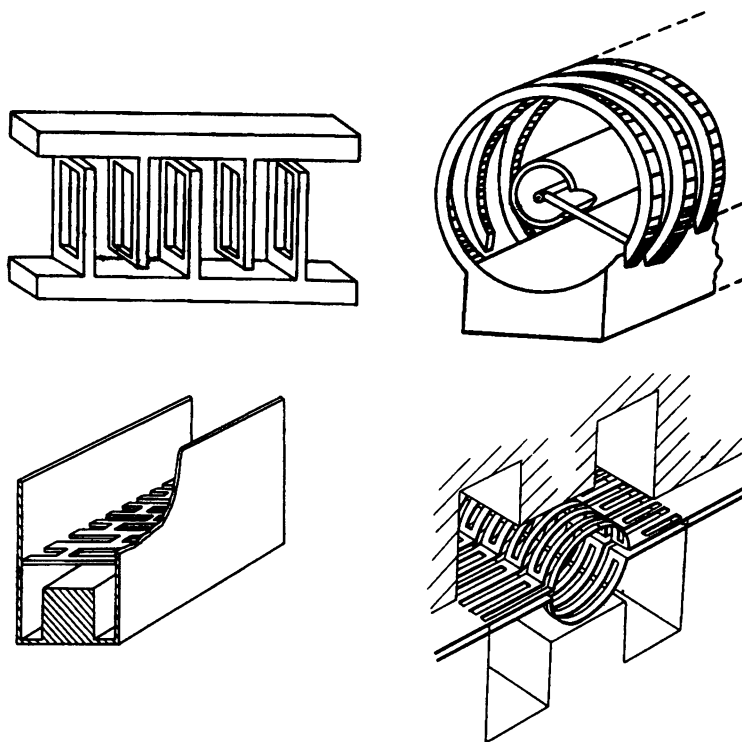


Рис. 15.5. Четырехступенчатая ЗС типа «встречные штыри»  
и ее эквивалентная схема

15.4. Каким штыревым ЗС подобны системы, изображенные на рис. 15.6?

### Список литературы

- [1]. Белуга И. Ш. Расчет затухания замедляющей системы типа «встречные штыри». *Вопросы радиоэлектроники. Сер. 1. Электроника*, 1961. Вып. 8, 3–11.
- [2]. Беляченко В. П. и др. Приближенный расчет характеристик пленочных замедляющих систем на диэлектрической подложке. *Электронная техника. Сер. 1. Электроника СВЧ*, 1971. Вып. 1, 134–137.
- [3]. Дашенков В. М. Дисперсионное уравнение N-ступенчатой штыревой замедляющей системы. *Радиотехника и электроника*, 1958, **3**(7), 933–944.
- [4]. Дашенков В. М. О расчете многорядно-многоступенчатых штыревых замедляющих систем. *Радиотехника и электроника*, 1966, **11**(7), 1317–1321.
- [5]. Иванов В. Н. Поправка на открытый конец для замедляющей системы «встречные штыри». *Радиотехника и электроника*, 1969, **14**(9), с. 1979.



**Рис. 15.6.** Примеры модификаций штыревых ЗС

[6]. Ковтунова З. Д., Силин Р. А. Четырехступенчатые штыревые системы. *Электронная техника. Сер. 1. Электроника СВЧ*, 1963. Вып. 7, 35–54.

[7]. Кутенин Б. П. Сопротивление связи однорядных штыревых замедляющих систем. *Электронная техника. Сер. 1. Электроника СВЧ*, 1969. Вып. 3, 18–22.

[8]. Соболев Г. Л., Хоркина А. А. К анализу замедляющей системы типа “меандр”. В кн.: *Вопросы электроники сверхвысоких частот*. Вып. 6. Саратов: Изд. Сарат. унив., 1969, 152–164.

[9]. Самохин Г. С., Силин Р. А., Ковтунова З. Д. Программа расчета замедляющих систем полоскового типа методом многопроводных линий. *Электронная техника. Сер. 1. Электроника СВЧ*, 1975. Вып. 6, 120–123.

## Свойства симметрии двумерно-периодических систем

В приборах СВЧ не применяются ни одномерно-, ни двумерно-, ни трехмерно-периодические системы, так как все они бесконечны. Используются лишь участки этих систем с конечным числом периодов. Вместе с тем исследование удобнее начать с изучения свойств бесконечных систем, а затем учесть условия на границах, как это обычно делают в теории волноводов.

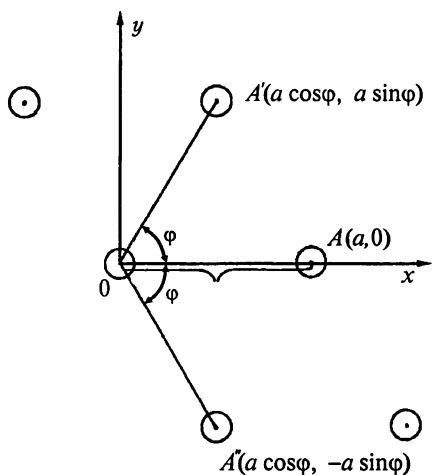
Ограниченную замедляющую систему (ЗС) можно рассматривать как бесконечную в данном направлении, если волны, бегущие в этом направлении, не отражаются от ее границ (ЗС идеально согласована в данном направлении).

Одномерно-периодические системы проще, чем двумерно-периодические. Поэтому они шире используются в усилительных и генераторных приборах СВЧ. Они позволяют создать лампы, мощность которых достигает десятков кВт в 3 см-диапазоне длин волн при непрерывном режиме работы. Эти лампы требуют анодных напряжений, превышающих 100 кВ [20]. Для повышения мощности и снижения рабочих напряжений осуществляют системы сложения мощностей. Одним из возможных путей сложения мощностей служит использование двумерно-периодических ЗС [21], в частности, так называемых многорядных и многоэтажных штыревых ЗС (см. гл. 17 и 18).

Закономерности распространения волн в двумерно- и трехмерно-периодических структурах изучаются в физике твердого тела [2, 5, 6, 19]. В настоящей главе дан обзор этих свойств для двумерно-периодических систем. Описаны закономерности сочетания элементов симметрии, дан вывод групп симметрии способом, изложенным в [3], рассмотрены свойства симметрии, обусловленные как отдельными элементами симметрии, так и их некоммутирующими сочетаниями. В отличие от рассматриваемого в физике твердого тела, описываются закономерности распределения электромагнитного поля, обусловленные различными видами симметрии, и используется понятие пространственных гармоник.

### 16.1. Закономерности сочетания элементов симметрии

Покажем, что в двумерно-периодических структурах возможны только оси первого  $C_1$ , второго  $C_2$ , третьего  $C_3$ , четвертого  $C_4$ , и шестого  $C_6$  порядков. С этой целью рассмотрим двумерно-периодическую решетку, выбрав начало координат в одном из ее узлов 0 (рис. 16.1). Пусть  $A$  — один из ближайших узлов решетки с координатами  $(a, 0)$ . Направим ось  $x$  вдоль  $OA$ , а ось  $y$  — перпендикулярно  $OA$ . При повороте вокруг оси  $z$  на угол  $\varphi$  точка  $A$  переходит в точку  $A'$  с координатами  $(a \cos \varphi, a \sin \varphi)$ , а при повороте на угол  $-\varphi$  —



**Рис. 16.1.** К определению порядка осей симметрии, возможных в двумерно-периодических решетках

коммутируют с трансляциями. Поэтому следует совместно изучать свойства симметрии, обусловленные поворотами вокруг этих осей и трансляциями. Операции поворота относительно осей, параллельных решетке, также не коммутируют с трансляциями, если эти трансляции не параллельны осям. В противном случае эти операции коммутируют, и свойства симметрии, обусловленные трансляцией и поворотом вокруг оси симметрии, параллельной трансляции, оказываются независимыми.

Рассмотрим теперь закономерности сочетания плоскостей симметрии, перпендикулярных решетке. Здесь возможны три случая ([13], с. 92). Они показаны на рис. 16.2. В первых двух случаях (*а* и *б*) наименьшая трансляция, пересекающая плоскости симметрии, перпендикулярна этим плоскостям (прямая трансляция), а в третьем (*в*) — они расположены под некоторым углом (косая трансляция). Во всех случаях между каждыми двумя трансляционно идентичными плоскостями существует еще плоскость симметрии. В первых двух случаях все плоскости одинаковы: они либо зеркальные ( $\sigma$ ), либо скользящие ( $\sigma_g$ ). В третьем случае зеркальные и скользящие плоскости чередуются.

Доказательство этого утверждения для случая *а* проводится так же, как для одномерно-периодических структур в гл. 2. Докажем его для случая *б*. Пусть граница ЗС описывается уравнением  $F(x, y, z) = 0$ , причем периоды по осям  $x$  и  $y$  равны  $d_1$  и  $d_2$ , соответственно. Тогда

$$F(x + q_1 d_1, y + q_2 d_2, z) = F(x, y, z), \quad (16.1)$$

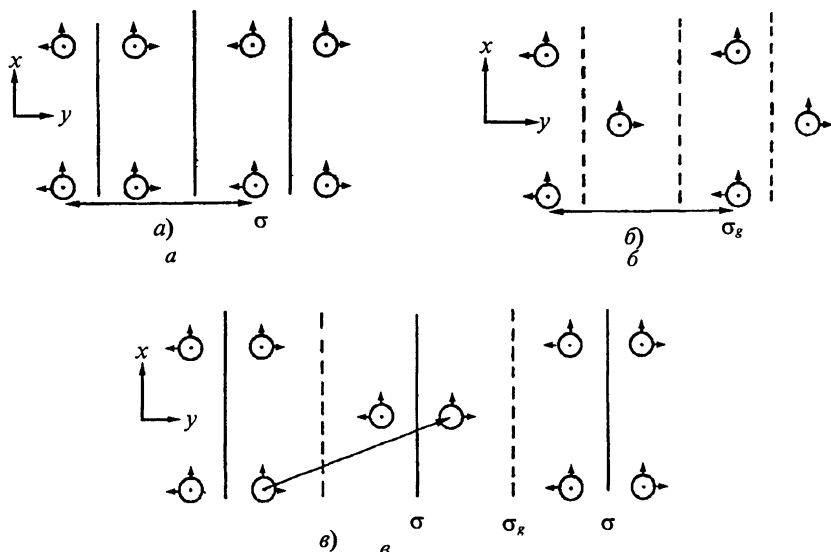
где  $q_1$  и  $q_2$  — произвольные целые числа.

Пусть плоскость  $y = 0$  скользящая, так что

$$F(x + d_1/2, -y, z) = F(x, y, z). \quad (16.2)$$

в точку  $A''$  с координатами  $(a \cos \varphi, -a \sin \varphi)$ . Если поворот на угол  $\varphi$  представляет преобразование симметрии, то точки  $A'$  и  $A''$  принадлежат узлам решетки. При этом сумма их координат  $(2a \cos \varphi, 0)$  тоже указывает положение узла. Поскольку узел лежит на оси  $x$ , наименьший период вдоль которой равен  $a$ , должно выполняться одно из равенств:  $2a \cos \varphi = 0, \pm a, \pm 2a$ . Отсюда следует, что  $\varphi = 0, \pm \pi/3, \pm \pi/2, \pm 2\pi/3, \pi$ , чем и доказано сделанное выше утверждение. Из осей, лежащих в плоскости решетки  $(x, y)$ , возможны только оси первого и второго порядков, включая винтовую ось  $C_{21}$ , так как система может совместиться сама с собой либо когда она остается на месте, либо при повороте на угол  $\pi$ .

Операции поворота вокруг осей, перпендикулярных решетке, не ком-



**Рис. 16.2.** Возможные сочетания зеркальных (сплошные линии) и скользящих (штриховые линии) плоскостей симметрии в двумерно-периодических структурах. Зеркальные и скользящие плоскости чередуются, если наименьшая трансляция не перпендикулярна этим плоскостям. Величины и направления трансляций указаны стрелками

Из условия периодичности (16.1) следует, что все плоскости, отстоящие одна от другой вдоль оси  $y$  на расстояние  $q_2 d_2$ , являются скользящими, т.е.

$$F(x + d_1/2, q_2 d_2 - y, z) = F(x, q_2 d_2 + y, z) = F[x, (q_2 + 1)d_2 + y, z].$$

Вводя замену  $y = -(d_2/2) - y'$  и опуская штрих, получаем равенство

$$F[x + d_1/2, (q_2 + 1/2)d_2 - y, z] = F[x, (q_2 + 1/2)d_2 + y, z], \quad (16.3)$$

которое показывает, что между каждыми двумя трансляционно идентичными скользящими плоскостями симметрии существует еще одна скользящая плоскость симметрии. Таким образом, доказана закономерность сочетания плоскостей симметрии для случая б. Доказательство для случая в проводится аналогично.

Тремя рассматриваемыми сочетаниями плоскостей симметрии, перпендикулярных плоскости решетки, исчерпываются все возможные случаи. Отражения в этих плоскостях коммутируют с параллельными им трансляциями и не коммутируют с перпендикулярными.

В двумерно-периодических системах могут существовать зеркальные и скользящие плоскости, параллельные решетке. Отражения в них коммутируют с трансляциями, так что свойства симметрии, обусловленные этими плоскостями и трансляциями, независимы. При этом остаются справедливыми результаты п. 2.7.



Закономерности сочетания осей второго порядка ( $C2$  и  $C2_1$ ), лежащих в плоскости решетки, те же самые, что для плоскостей на рис. 16.2. Закономерности сочетания осей симметрии, перпендикулярных плоскости решетки, рассматриваются ниже.

## 16.2. Косоугольная система координат

ЗС называется двумерно-периодической, если она совмещается сама с собой при трансляции как на вектор  $\mathbf{d}_1$ , так и на вектор  $\mathbf{d}_2$ , причем  $\mathbf{d}_1$  и  $\mathbf{d}_2$  не параллельны. Если угол между  $\mathbf{d}_1$  и  $\mathbf{d}_2$  отличен от  $\pi/2$ , то целесообразно использовать косоугольную систему координат, на осях которой лежат эти векторы. Они называются базисными векторами, а их модули служат масштабами измерения расстояний вдоль соответствующих осей координат.

В выражение для фазы волны входит скалярное произведение  $\beta \mathbf{r} = \beta r \cos(\beta \hat{\mathbf{r}})$ , где  $\beta \hat{\mathbf{r}}$  — угол между векторами  $\beta$  и  $\mathbf{r}$ . В прямоугольной системе координат оно равно сумме произведений соответствующих компонент векторов  $\beta \mathbf{r} = \beta_x x + \beta_y y$ , если только модули базисных векторов равны единице. В общем случае каждый из двух векторов  $\mathbf{b}$  и  $\mathbf{r}$  может рассматриваться в своей системе координат, поскольку они имеют разный физический смысл. Пусть вектору  $\mathbf{r}$  соответствует система координат с базисными векторами  $\mathbf{d}_1$  и  $\mathbf{d}_2$ , а вектору  $\beta$  — система с базисными векторами  $\mathbf{b}_1$  и  $\mathbf{b}_2$ . Тогда

$$\mathbf{r} = \zeta_1 \mathbf{d}_1 + \zeta_2 \mathbf{d}_2, \quad \beta = \eta_1 \mathbf{b}_1 + \eta_2 \mathbf{b}_2. \quad (16.4)$$

Скалярное произведение векторов  $\beta$  и  $\mathbf{r}$  в общем случае записывается следующим образом:

$$\beta \mathbf{r} = \eta_1 \zeta_1 \mathbf{b}_1 \mathbf{d}_1 + \eta_1 \zeta_2 \mathbf{b}_1 \mathbf{d}_2 + \eta_2 \zeta_1 \mathbf{b}_2 \mathbf{d}_1 + \eta_2 \zeta_2 \mathbf{b}_2 \mathbf{d}_2.$$

Такая форма записи слишком громоздка. Для упрощения базисные векторы  $\mathbf{b}_1$  и  $\mathbf{b}_2$  выбирают так, чтобы они удовлетворяли равенствам

$$\mathbf{d}_i \mathbf{b}_k = 2\pi \delta_{ik}, \quad i = 1, 2, \quad k = 1, 2, \quad (16.5)$$

где  $\delta_{ik} = 1$  при  $i = k$  и  $\delta_{ik} = 0$  при  $i \neq k$ .

Иными словами, векторы  $\mathbf{b}_i$  и  $\mathbf{d}_k$  выбраны взаимно ортогональными при  $i \neq k$ , а модули векторов  $\mathbf{b}_i$  обратно пропорциональными  $\mathbf{d}_i$ .

При условии (16.5) скалярное произведение

$$\beta \mathbf{r} = 2\pi(\eta_1 \zeta_1 + \eta_2 \zeta_2) \quad (16.6)$$

в косоугольной системе координат выглядит почти также просто, как в прямоугольной. Система координат, в которой строятся векторы  $\mathbf{r}$ , называется *прямой* или *ковариантной*. При этом система координат с базисными векторами  $\mathbf{b}_1$  и  $\mathbf{b}_2$  называется *обратной* или *контравариантной* (рис. 16.3). Согласно (16.5) при  $\beta = \mathbf{b}_k$  ( $k = 1, 2$ ) сдвиг фаз  $\beta \mathbf{d}_k$  между точками, отстоящими на период  $d_k$ , равен  $2\pi$ .

Компоненты вектора  $\mathbf{r}$  в прямой системе координат согласно (16.4) и (16.5) определяются скалярными произведениями

$$\zeta_1 = \mathbf{r} \mathbf{b}_1 / 2\pi, \quad \zeta_2 = \mathbf{r} \mathbf{b}_2 / 2\pi. \quad (16.7)$$

Аналогично определяются компоненты вектора  $\beta$ ,

$$\begin{aligned}\eta_1 &= \beta \mathbf{d}_1 / 2\pi = \varphi_1 / 2\pi, \\ \eta_2 &= \beta \mathbf{d}_2 / 2\pi = \varphi_2 / 2\pi,\end{aligned}\quad (16.8)$$

где  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  — сдвиги фаз в точках, отстоящих друг от друга на  $\mathbf{d}_1$  и  $\mathbf{d}_2$ , соответственно.

Базисные векторы  $\mathbf{d}_1$  и  $\mathbf{d}_2$  выбираются так, чтобы в данных направлениях они определяли наименьшие трансляции, совмещающие структуру самое с собой. Модули этих векторов  $d_1$  и  $d_2$  называют *периодами структуры* в данном направлении.

Векторы  $\mathbf{d}_1$  и  $\mathbf{d}_2$  обычно выбирают либо взаимно ортогональными, либо наименьшими по модулю, т. е. такими, чтобы не существовало трансляции векторов  $\mathbf{r} = \zeta_1 \mathbf{d}_1 + \zeta_2 \mathbf{d}_2$ , совмещающих структуру саму с собой при  $|\zeta_1| < 1$  и  $|\zeta_2| < 1$ .

Параллелограмм, построенный на векторах  $\mathbf{d}_1$  и  $\mathbf{d}_2$ , выбранных наименьшими по модулю, называется *ячейкой прямой решетки* или *ячейкой структуры*. Параллелограмм, построенный на векторах  $\mathbf{b}_1$  и  $\mathbf{b}_2$ , называется *ячейкой обратной решетки*. Совокупность точек реального пространства, радиусы-векторы которых определяются равенством  $\mathbf{r} = q_1 \mathbf{d}_1 + q_2 \mathbf{d}_2$ , где  $q_1$  и  $q_2$  — целые числа, образует *прямую решетку*. Сами точки называются *узлами прямой решетки*. Совокупность точек пространства волновых векторов, определяемых равенством  $\beta = m_1 \mathbf{b}_1 + m_2 \mathbf{b}_2$ , где  $m_1$  и  $m_2$  — целые числа, образует *обратную решетку*. Соответствующие точки называются *узлами обратной решетки*.

Точки или совокупности точек (плоскости, линии и т.п.), совмещающиеся при трансляции  $\mathbf{r} = q_1 \mathbf{d}_1 + q_2 \mathbf{d}_2$ , называются *трансляционно идентичными*. Координаты трансляционно идентичных точек  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{r}_0$  или  $\beta$  и  $\beta_0$  связаны соотношениями

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + q_1 \mathbf{d}_1 + q_2 \mathbf{d}_2 \quad (16.9, a)$$

или

$$\beta = \beta_0 + m_1 \mathbf{b}_1 + m_2 \mathbf{b}_2. \quad (16.9, б)$$

На рис. 16.4 сплошными линиями изображена прямая решетка, а штриховыми — обратная. Прямые линии, соединяющие узлы, называются *рядами*. Для каждого ряда прямой решетки можно найти ортогональный к нему ряд обратной решетки.

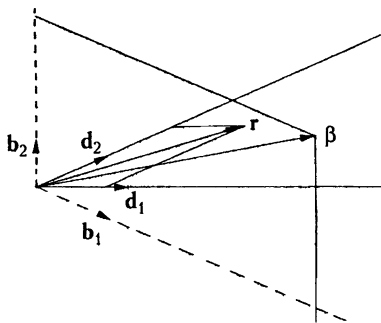


Рис. 16.3. Прямая (сплошные оси) и обратная (штриховые оси) системы координат

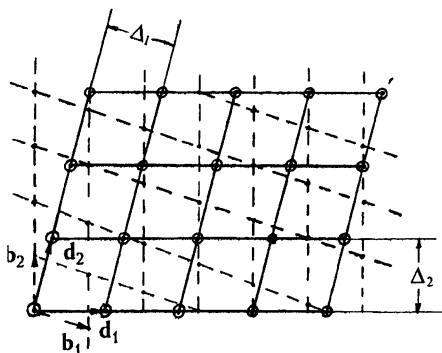


Рис. 16.4. Прямая (сплошные линии) и обратная (штриховые линии) решетки

Выясним связь векторов  $\mathbf{b}_1$  и  $\mathbf{b}_2$  с геометрическими размерами решетки (рис. 16.4). Пусть  $\Delta_1$  и  $\Delta_2$  — расстояния между соседними рядами прямой решетки. Векторы  $\mathbf{b}_1$  и  $\mathbf{b}_2$  ортогональны к соответствующим рядам, так что  $\text{Pr}_{\mathbf{b}_i} \mathbf{d}_i = \Delta_i$ , где левая часть равенства означает проекцию вектора  $\mathbf{d}_i$  на направление вектора  $\mathbf{b}_i$ . С другой стороны, согласно (16.5)  $\mathbf{b}_i \mathbf{d}_i = b_i \text{Pr}_{\mathbf{b}_i} \mathbf{d}_i = 2\pi$ , откуда следует

$$b_i = 2\pi/\Delta_i. \quad (16.10)$$

Таким образом, базисные векторы обратной решетки перпендикулярны соответствующим рядам прямой решетки и по модулю обратно пропорциональны расстоянию между этими рядами. Аналогичным свойством обладает каждый вектор, проведенный в любой узел обратной решетки.

В одномерно-периодической структуре прямая решетка представляет совокупность точек (узлов), лежащих на прямой и отстоящих друг от друга на расстоянии  $d$ , равном периоду. Обратная решетка также представляет совокупность точек на прямой, но отстоящих на расстоянии  $2\pi/d$ . Прямая решетка служит как бы масштабной сеткой для измерения расстояний в периодической структуре, а обратная решетка — масштабной сеткой для измерения волновых чисел. В узлах обратной решетки волновое число  $\beta = 2\pi/\lambda$  кратно  $2\pi/d$ .

Рассмотрим теперь закономерности распространения волн в двумерно-периодических ЗС. Периодическими предполагаются либо границы областей, в которых распространяются волны, либо проницаемости  $\epsilon$  и  $\mu$  среды. Соответствующие закономерности для одномерно-периодических ЗС рассмотрены в п. 2.6.

### 16.3. Группы симметрии двумерно-периодических ЗС

Рассмотрим группы симметрии только плоских двумерно-периодических структур. При этом оси симметрии  $C_2$  и  $C_{21}$ , лежащие в плоскости решетки, не отличаются, соответственно, от плоскостей  $\sigma$  и  $\sigma_g$ , перпендикулярных к плоскости решетки. Такие оси не рассматриваются при классификации групп симметрии. По той же причине не рассматриваются центры инверсии, которые совпадают с осями  $C_2$ , перпендикулярными решетке.

Примерами реальных систем, которые описываются плоскими структурами, могут служить сечения многопроводных линий. В табл. 16.1 представлены все 17 групп симметрии плоских двумерно-периодических структур. В обозначениях групп на первом месте стоит символ  $P_d$ , если трансляции, совмещающие фигуры сами с собой, перпендикулярны к плоскостям симметрии (прямые трансляции), или символы  $C_d$  и  $H_d$ , если трансляции косые. Индекс «д» указывает на двумерную периодичность. Группа симметрии, не содержащая ни одного элемента симметрии, обозначается  $P_d1$ .

Зеркальные плоскости симметрии обозначаем символами « $m$ », скользящие плоскости символами « $a$ » или « $b$ » в зависимости от направления скольжения (соответственно, вдоль оси  $x$  или вдоль оси  $y$ ).

На некоторых рисунках в табл. 16.1 стрелками указаны базисные векторы. Так, например, в системах, принадлежащих группам  $C_{d3m}$  и  $H_{d3m}$

Таблица 16.1

Группы симметрии двумерно-периодических структур

Группы симметрии	Примеры
$P_d 1$	
$P_d m$	
$P_d a$	
$C_d m$	
$P_d mm$	

Табл. 16.1 (продолжение)

Группы симметрии двумерно-периодических структур

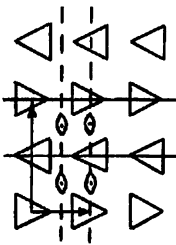
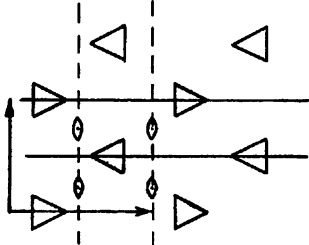
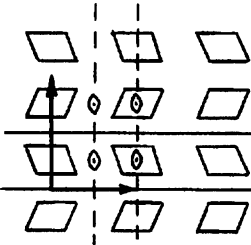
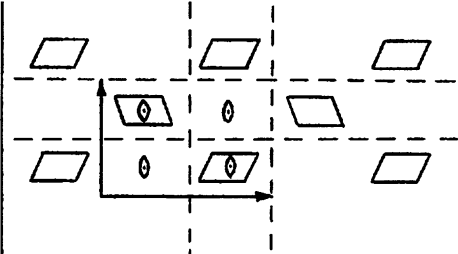
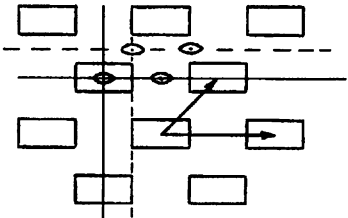
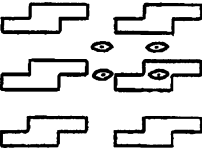
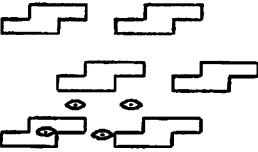
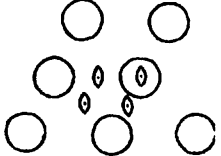
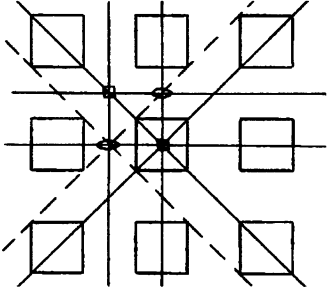
Группы симметрии	Примеры		
$P_d ma$			
$P_d ba$			
$C_d mm$			
$P_d 2$			
$P_d 4m$			

Табл. 16.1 (продолжение)

Группы симметрии двумерно-периодических структур

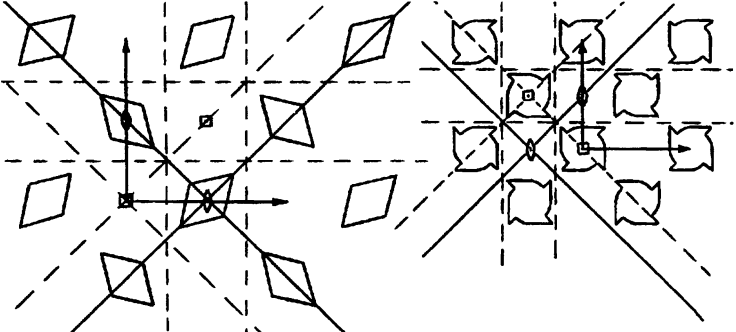
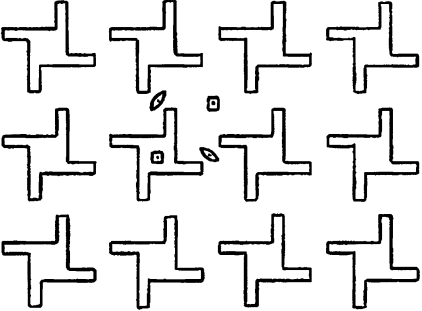
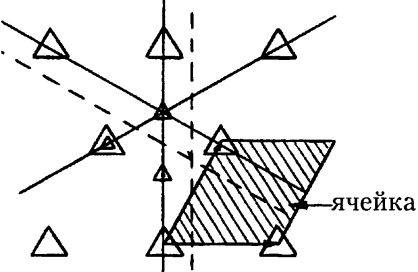
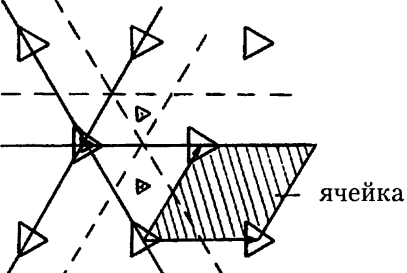
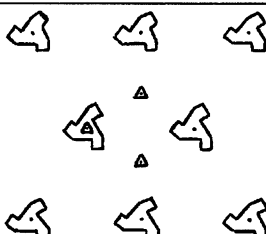
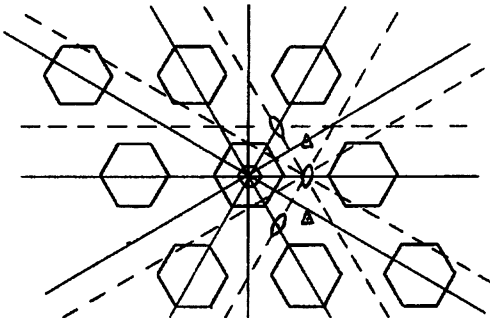
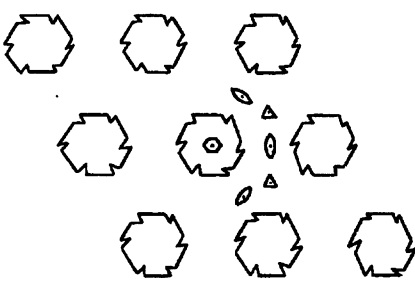
Группы симметрии	Примеры
$P_d 4a$	
$P_d 4$	
$C_d 3a$	
$H_d 3a$	

Табл. 16.1 (окончание)

Группы симметрии двумерно-периодических структур

Группы симметрии	Примеры
$C_d 3$	
$C_d 6m$	
$C_d 6$	

(объяснение символа « $H$ » дано ниже) и т.д., базисные векторы можно направить как под углом  $\pi/3$ , так и под углом  $2\pi/3$  друг к другу.

Сначала рассмотрим системы, в которых плоскости симметрии не пересекаются. В соответствии с тремя возможными сочетаниями этих плоскостей (рис. 16.2) существуют три группы симметрии:  $P_d m$ ,  $P_d a$  и  $C_d m$ . Группу  $C_d m$  с равным правом можно обозначить и  $C_d a$ , так как имеются и зеркальные и скользящие плоскости, параллельные между собой.

Системы, у которых плоскости симметрии пересекаются под прямым углом, делятся на четыре группы:  $P_d m$ ,  $P_d a$ ,  $P_d ba$  и  $C_d m$ . В группе  $P_d m$  плоскости симметрии, перпендикулярные к осям  $x$  и  $y$ , являются зеркальными, в группе  $P_d ba$  — скользящими, а в группе  $P_d a$  плоскости, перпен-

дикулярные к одной из осей (безразлично к какой, т.е.  $P_dma = P_dbm$ ), являются зеркальными, а перпендикулярные другой оси — скользящими. В группе  $C_dmm$  параллельные между собой зеркальные и скользящие плоскости чередуются, так что равноправными служат обозначения  $C_dmm = C_dbm = C_dma = C_dba$ .

При пересечении плоскостей симметрии под прямым углом образуется ось симметрии  $C_2$ , параллельная их линии пересечения. Так как в каждой ячейке содержится по четыре пересечения плоскостей (см. табл. 16.1), они порождают четыре оси  $C_2$ . Положение осей относительно линий пересечения определяется по следующему правилу. Зеркальная плоскость не смещает ось относительно линии пересечения, а скользящая — смещает на четверть периода в направлении скольжения. В частности, если пересекаются зеркальные плоскости, то ось симметрии совпадает с линией пересечения (группы  $P_dmm$  и  $C_dmm$ ); если пересекаются зеркальная плоскость со скользящей, то ось симметрии смещена относительно линии пересечения на четверть периода в направлении скольжения (группы  $P_dma$  и  $C_dmm$ ). Взаимное пересечение двух скользящих плоскостей порождает оси, отстоящие от линий пересечения на четверть периода вдоль обоих направлений скольжения (группы  $P_dba$  и  $C_dmm$ ).

Если удалить плоскости симметрии, а оставить лишь оси, то получится группа симметрии  $P_d2$ .

Существуют две группы симметрии ( $P_d4m$  и  $P_d4a$ ), у которых плоскости симметрии пересекаются под углом  $\pi/4$ . Это пересечение порождает ось четвертого порядка, что отмечено цифрой 4 в обозначении группы. Символы « $m$ » и « $a$ » после цифры 4 указывают тип плоскостей симметрии, перпендикулярных направлениям базисных векторов. Зеркальные плоскости, расположенные под углом  $\pi/4$  к этим векторам, всегда чередуются со скользящими. Символ, обозначающий эти плоскости, не ставится. Если удалить плоскости симметрии, оставив лишь оси, то получится группа  $P_d4$ .

Две плоскости, пересекающиеся под углом  $60^\circ$ , порождают ось третьего порядка ( $C_3$ ). По отношению к каждой плоскости симметрии имеется косая трансляция, так что зеркальные и скользящие плоскости чередуются. Сечение каждой элементарной ячейки представляет ромб. По отношению к ромбу плоскости симметрии могут быть ориентированы двояко: перпендикулярно к малой диагонали (группа  $C_d3m$ ) либо к большой. Чтобы отличить вторую группу от первой, для нее введен символ  $H$  ( $H_d3m$ ). Если убрать плоскости симметрии, оставив оси, то получится группа  $C_d3$ .

Плоскости симметрии, пересекающиеся под углом  $30^\circ$ , порождают ось симметрии шестого порядка ( $C_d6$ ). По отношению к каждой из порождающих плоскостей существует косая трансляция. Поэтому зеркальные и скользящие плоскости чередуются. Соответствующая группа симметрии обозначается  $C_d6m$ . Если удалить плоскости симметрии, оставив оси, то получится группа  $C_d6$ .

Таким образом, рассмотрены все возможные группы симметрии двумерно-периодических структур.

## 16.4. Пространственные гармоника

Пусть имеется двумерно-периодическая ЗС с базисными векторами  $\mathbf{d}_1$  и  $\mathbf{d}_2$ . Ось  $z$  направлена перпендикулярно базисным векторам. Поле в такой систе-



ме согласно теореме Блоха можно представить в виде [19]

$$\begin{bmatrix} \mathbf{E}(\mathbf{r}, z) \\ \mathbf{H}(\mathbf{r}, z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{E}_0(\mathbf{r}, z) \\ \mathbf{H}_0(\mathbf{r}, z) \end{bmatrix} \exp(-j\beta_{00}\mathbf{r}). \quad (16.11)$$

Здесь  $\beta_{00}$  — волновой вектор, а функции  $\mathbf{E}_0$  и  $\mathbf{H}_0$  являются двояко-периодическими:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_0(\mathbf{r} + q_1\mathbf{d}_1 + q_2\mathbf{d}_2, z) &= \mathbf{E}_0(\mathbf{r}, z), \\ \mathbf{H}_0(\mathbf{r} + q_1\mathbf{d}_1 + q_2\mathbf{d}_2, z) &= \mathbf{H}_0(\mathbf{r}, z) \end{aligned} \quad (16.12)$$

( $q_1$  и  $q_2$  — произвольные целые числа).

Периоды  $\mathbf{d}_1$  и  $\mathbf{d}_2$  функций  $\mathbf{E}_0$  и  $\mathbf{H}_0$  совпадают с периодами решетки.

Теорема Блоха представляет обобщение теоремы Флоке на двумерно- и трехмерно-периодические системы. Ради экономии места ограничимся ниже записью соотношений только для электрического поля.

Если бы функция  $\mathbf{E}_0$  не зависела от  $\mathbf{r}$ , то решение (16.11) представляло бы плоскую волну, бегущую в направлении  $\mathbf{b}_{00}$  с фазовой скоростью  $v = \omega/\beta_{00}$ . Однако функция  $\mathbf{E}_0(\mathbf{r}, z)$  — двояко-периодическая, так что решение (16.11) не соответствует плоской волне. Вместе с тем оно может быть описано двойным рядом Фурье,

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, z) = \sum_{m_1, m_2 = -\infty}^{\infty} \mathbf{e}_{m_1 m_2}(z) \exp(-j\beta_{m_1 m_2}\mathbf{r}),$$

каждое слагаемое которого представляет плоскую волну, называемую *пространственной гармоникой*.

Здесь  $\mathbf{r} = \zeta_1\mathbf{d}_1 + \zeta_2\mathbf{d}_2$  — радиус-вектор произвольной точки прямой решетки,

$$\beta_{m_1 m_2} = \beta_{00} + m_1\mathbf{b}_1 + m_2\mathbf{b}_2 \quad (16.13)$$

( $m_1$  и  $m_2$  — целые числа) — волновой вектор  $m_1 m_2$ -й пространственной гармоники,  $\beta_{00} = \eta_1\mathbf{b}_1 + \eta_2\mathbf{b}_2$  — волновой вектор нулевой пространственной гармоники.

Ряд Фурье, записанный через компоненты  $\zeta_i$  и  $\eta_i$  векторов  $\mathbf{r}$  и  $\beta_{00}$ , имеет вид

$$\mathbf{E}(\zeta_1, \zeta_2, z) = \sum_{m_1, m_2 = -\infty}^{\infty} \mathbf{e}_{m_1 m_2}(z) \exp\{-j2\pi[(m_1 + \eta_1)\zeta_1 + (m_2 + \eta_2)\zeta_2]\}. \quad (16.14, a)$$

Коэффициенты Фурье, т.е. амплитуды пространственных гармоник определяются равенством

$$\mathbf{e}_{m_1 m_2}(z) = \int_0^1 \int_0^1 \mathbf{E}(\zeta_1, \zeta_2, z) \exp\{j2\pi[(m_1 + \eta_1)\zeta_1 + (m_2 + \eta_2)\zeta_2]\} d\zeta_1 d\zeta_2.$$

В векторной форме последнее равенство записывается в виде

$$\mathbf{e}_{m_1 m_2}(z) = \int_{\Sigma} \mathbf{E}(\mathbf{r}, z) \exp(j\beta_{m_1 m_2}\mathbf{r}) d\mathbf{s}, \quad (16.14, б)$$

где областью интегрирования  $\Sigma$  служит ячейка прямой решетки.

Фазовые скорости пространственных гармоник,

$$v_{m,m_2} = \omega \beta_{m,m_2} / \beta_{m,m_2}^2 = \omega \beta_{m,m_2} / |\beta_{00} + m_1 \mathbf{b}_1 + m_2 \mathbf{b}_2|^2, \quad (16.15)$$

могут отличаться не только по величине, но и по направлению, а групповые скорости

$$\mathbf{v}_g = \text{grad}_{\mathbf{p}} \omega \quad (\text{при } \beta = \beta_{m,m_2} \text{ и при } \beta = \beta_{00}) \quad (16.16)$$

всех пространственных гармоник одинаковы, поскольку

$$d\beta_{m,m_2} = d\beta_{00}.$$

Волновой вектор нулевой пространственной гармоники выбираем наименьшим по модулю, т.е.

$$|\beta_{00}| \leq |\beta_{m,m_2}| = |\beta_{00} + m_1 \mathbf{b}_1 + m_2 \mathbf{b}_2| \quad (16.17)$$

при любых целых  $m_1$  и  $m_2$ . Для одномерно-периодических систем это соответствует выбору  $\beta_0$  нулевой пространственной гармоники в пределах  $|\beta_0 d| \leq \pi$ .

Область изменения  $\beta_{00}$ , соответствующую условию (16.17), называем *нулевой зоной* \*) (рис. 16.5). Она представляет наименьший из всех многоугольников, которые образуются прямыми, перпендикулярными к отрезкам, соединяющим начало координат с соседними узлами обратной решетки и делящими эти отрезки пополам [5, 6]. Нулевая зона имеет одинаковую площадь с ячейкой обратной решетки, что можно видеть, сравнивая на рис. 16.5 элементы площадей, обозначенных одинаковыми римскими цифрами. Уравнения границ нулевой зоны можно записать аналитически в следующем виде:

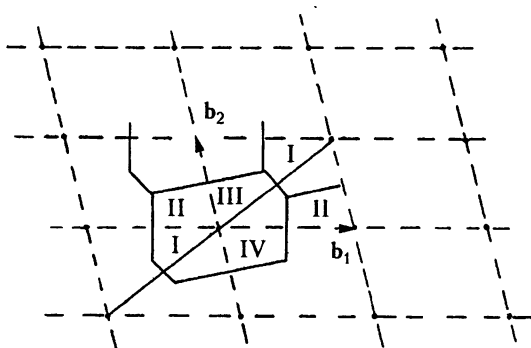


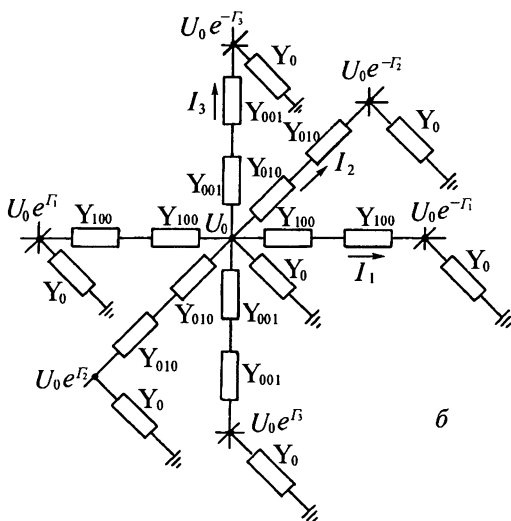
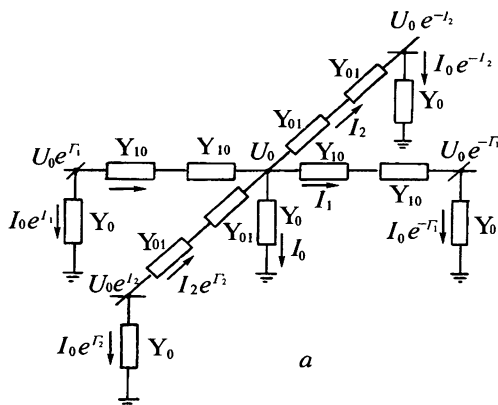
Рис. 16.5. Нулевая зона обратной решетки

$$\beta \mathbf{b}_i = |\mathbf{b}_i|^2 / 2; \quad i = 1, 2; \quad \beta(\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2) = |\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2|^2 / 2. \quad (16.18)$$

## 16.5. Примеры дисперсионных характеристик

На примерах двумерно- и трехмерно-периодических электрических систем, изображенных на рис. 16.6, покажем на основе работы [18] насколько разнообразными могут быть их характеристики. На этом рисунке через  $Y_{100}$ ,  $Y_{010}$ ,

\*) В физике твердого тела эту область называют *первой зоной Бриллюэна*. Термин «нулевая зона» нам представляется более удобным, поскольку он соответствует области изменения волнового вектора нулевой пространственной гармоники.



**Рис. 16.6.** Эквивалентные схемы:  
а — двумерно-; б — трехмерно-  
периодических структур

где  $\varphi_1 = \Gamma_1/j$ ,  $\varphi_2 = \Gamma_2/j$ ,  $\tau_{10} = Y_0/Y_{10}$ ,  $\tau_{01} = Y_0/Y_{01}$ ,  $j$  — мнимая единица. Величины  $\tau_{ik}$  являются функциями частоты. В случае  $\tau_{10} > 0$  и  $\tau_{01} > 0$  сдвиги фаз  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  не могут быть действительными одновременно. Иными словами, если проводимости либо все индуктивные, либо все емкостные, то в цепочке не могут распространяться «плоские волны». В остальных случаях «плоские волны» возможны.

Аналогично получается уравнение дисперсии для трехмерно-периодической цепочки:

$$[\sin^2(\varphi_1/2)/\tau_{100}] + [\sin^2(\varphi_2/2)/\tau_{010}] + [\sin^2(\varphi_3/2)/\tau_{001}] = -1. \quad (16.19, б)$$

$Y_{001}$ ,  $Y_0$  обозначены комплексные проводимости двухполюсников, через  $I_0, I_1, I_2, I_3$  — комплексные амплитуды токов, через  $U_0$  — комплексная амплитуда напряжения, а через  $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$  — постоянные распространения волн вдоль соответствующих направлений.

Рассмотрим двумерно-периодическую цепочку (рис. 16.6, а). Ток, втекающий в нулевой узел, можно записать равенством

$$I_0 = I_1(\exp \Gamma_1 - 1) + I_2(\exp \Gamma_2 - 1),$$

где

$$I_0 = Y_0 U_0,$$

$$2I_1 = Y_{10}[1 - \exp(-\Gamma_1)]U_0,$$

$$2I_2 = Y_{01}[1 - \exp(-\Gamma_2)]U_0.$$

Отсюда находим

$$[Y_0 - 2Y_{10} \operatorname{sh}^2(\Gamma_1/2) - 2Y_{01} \operatorname{sh}^2(\Gamma_2/2)]U_0 = 0.$$

Приравнявая нулю коэффициент при  $U_0$ , находим уравнение дисперсии двумерно-периодической цепочки,

$$[\sin^2(\varphi_1/2)/\tau_{10}] + [\sin^2(\varphi_2/2)/\tau_{01}] = -1, \quad (16.19, а)$$

На рис. 16.7 изображены линии постоянной частоты (изочастоты)  $\alpha = \omega^2 LC/2 = \text{const}$  в плоскости волновых векторов  $\beta$  с компонентами  $\beta_1 = \varphi_1/d_1$  и  $\beta_2 = \varphi_2/d_2$ , где  $d_1$  и  $d_2$  — размеры ячейки. Построение изочастот сделано в предположении, что ячейка прямоугольная и  $d_1 = d_2$ . Волновой вектор параллелен фазовой скорости и связан с ней соотношением (16.15). С помощью изочастот можно определить и направление групповой скорости. В соответствии с (16.16) она перпендикулярна изочастоте и направлена в сторону возрастания частоты.

При  $\tau_{10} < 0$  и  $\tau_{01} < 0$  величины  $Y_{10}/j$  и  $Y_{01}/j$  имеют одинаковый знак, отличный от  $Y_0/j$ . Иными словами, если проводимость  $Y_0$  емкостная, то  $Y_{10}$  и  $Y_{01}$  — индуктивные и наоборот. В соответствии с этим величины  $\tau_{10}$  и  $\tau_{01}$  одновременно либо растут с частотой, либо убывают.

Для малых значений  $\beta$  изочастоты представляют окружности либо эллипсы (рис. 16.7, а, б), причем полуоси эллипсов растут или убывают с частотой вместе с  $\tau_{10}$  и  $\tau_{01}$ . Если полуоси растут с частотой, т.е. если проводимость  $Y_0$  емкостная, то угол между фазовой и групповой скоростью меньше  $\pi/2$ , что соответствует обычным представлениям в оптике. Если же полуоси убывают ( $Y_0$  — индуктивная), то этот угол больше  $\pi/2$ . В частности, если изочастоты представляют окружности, то фазовая и групповая скорости направлены навстречу друг другу. Такого типа явления, насколько нам известно, в обычной кристаллооптике не наблюдались.

На рис. 16.7, в, г, д изображены изочастоты, которые еще более необычны с точки зрения кристаллооптики. А именно, для  $\tau_{10} > 0$  и  $\tau_{01} < 0$  изочастоты при малых  $\beta$  представляют гиперболы, а при  $Y_0 = 0$ ,  $Y_{10} > 0$ ,  $Y_{01} < 0$  все изочастоты выходят из начала координат, а групповые скорости почти перпендикулярны к фазовым.

На примере двух электрических схем показано, что искусственные диэлектрики могут обладать такими дисперсионными характеристиками и, следовательно, такими «оптическими» свойствами, которые неизвестны для обычных диэлектриков. Здесь имеются в виду оптические свойства в диапазоне СВЧ. Подробнее см. в гл. 19.

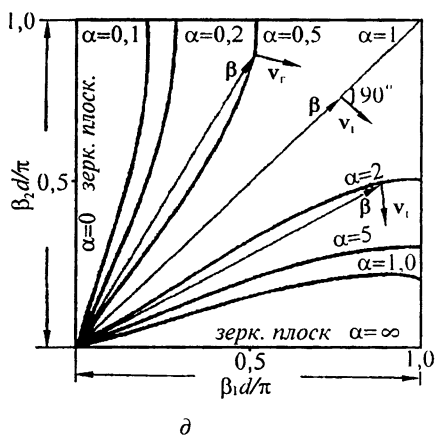
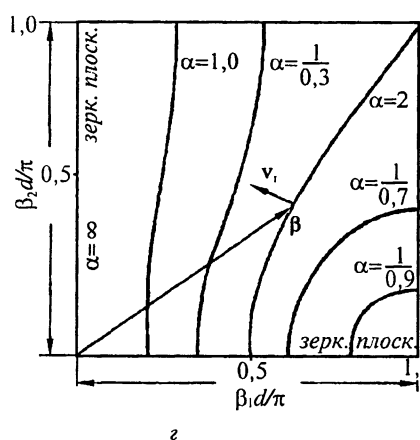
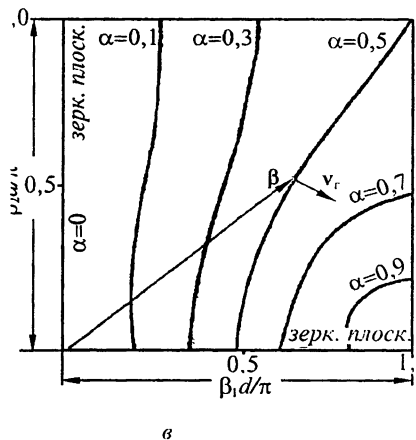
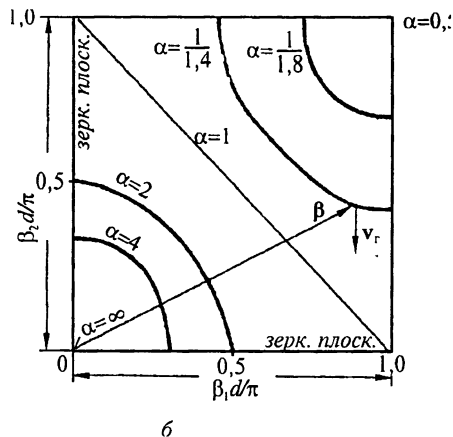
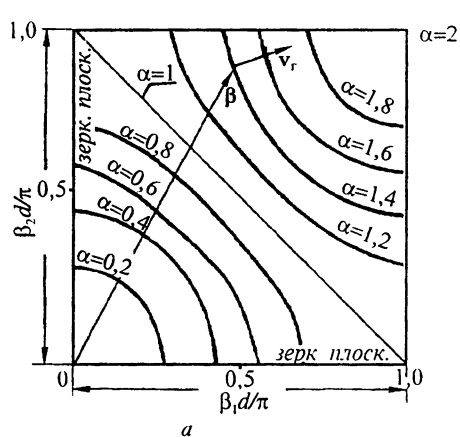
Повторяя рассуждения, сделанные при выводе уравнений (16.19), их можно обобщить на случай, когда проводимости  $Y_{l,m}$  или  $Y_{l,m,p}$  соединяют узлы не только соседних ячеек. Вводя обозначения  $\tau_{l,m} = Y_0/2Y_{l,m}$ ,  $\tau_{l,m,p} = Y_0/Y_{l,m,p}$ , уравнение дисперсии двумерно-периодической цепочки можно переписать в виде

$$\sum_{l,m} \tau_{l,m}^{-1} \sin^2[(l\varphi_1 + m\varphi_2)/2] = -1, \quad l, m \geq 0, \quad (16.20, a)$$

а для трехмерно-периодической — в виде

$$\sum_{l,m,p} \tau_{l,m,p}^{-1} \sin^2[(l\varphi_1 + m\varphi_2 + p\varphi_3)/2] = -1, \quad l, m, p \geq 0. \quad (16.20, б)$$

Электрическую цепочку можно считать частным случаем системы с распределенными параметрами. Поэтому среди реальных электродинамических систем можно найти такие, которые обладают дисперсионными характеристиками, подобными изображенным на рис. 16.7. Некоторые из систем

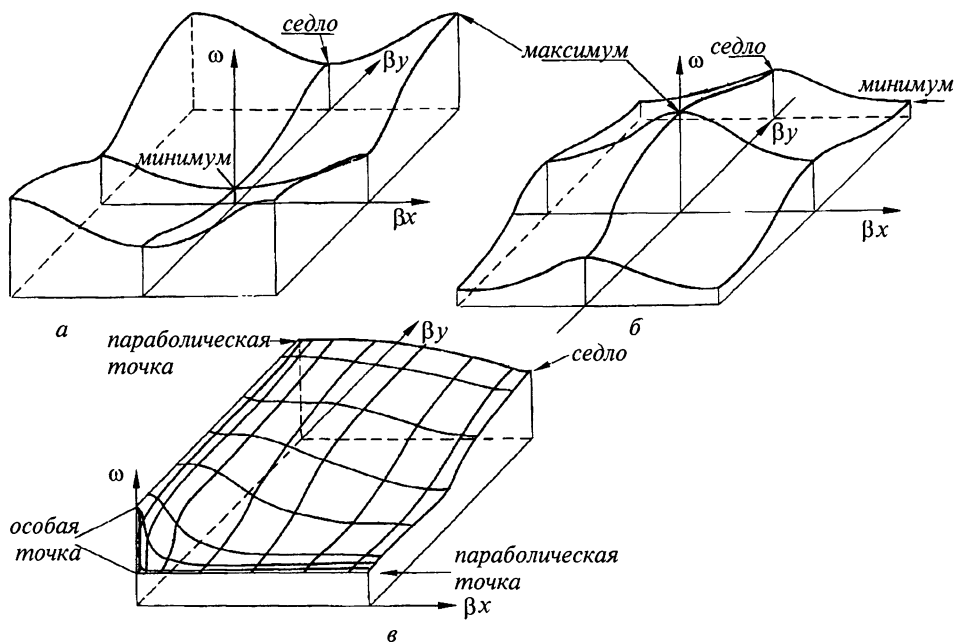


**Рис. 16.7.** Изочастоты ( $\alpha = \omega^2 LC/2 = \text{const}$ ) двумерно-периодических цепочек, построенные в четверти нулевой зоны, для значений импедансов, указанных в таблице

	<i>a</i>	<i>б</i>	<i>в</i>	<i>г</i>	<i>д</i>
$Y_0$	$j\omega C$	$1/j\omega L$	$j\omega C$	$1/j\omega L$	0
$Y_{10}$	$1/j\omega L$	$j\omega C$	$1/j\omega L$	$j\omega C$	$1/j\omega L$
$Y_{01}$	$1/j\omega L$	$j\omega C$	$j\omega C$	$1/j\omega L$	$j\omega C$

такого типа описаны в работах [8, 9, 10, 12, 21], а также в последующих главах настоящей книги.

На рис. 16.8 изображены поверхности дисперсии, соответствующие изочастотам, приведенным на рис. 16.7, *а*, *б*, *д*.



**Рис. 16.8.** Поверхности дисперсии: *а* и *б* — в нулевой зоне и *в* — в четверти нулевой зоны, соответствующие изочастотам, изображенным на рис. 16.7, *а*, 16.7, *б*, 16.7, *д*

## 16.6. Свойства поверхностей дисперсии, обусловленные периодичностью структуры

Частота в двумерно-периодической ЗС представляет двояко-периодическую функцию волнового вектора,

$$\omega(\beta + m_1 \mathbf{b}_1 + m_2 \mathbf{b}_2) = \omega(\beta), \quad (16.21)$$

так что ее достаточно задать лишь в нулевой зоне. Построив поверхность дисперсии только в нулевой зоне обратной решетки, мы знаем ее во всем обратном пространстве. Здесь  $m_1$  и  $m_2$  — произвольные целые числа.

Поскольку уравнениям Максвелла при данных граничных условиях и частоте наряду с полем  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$  удовлетворяет поле  $\mathbf{E}^*$ ,  $-\mathbf{H}^*$ , поверхность

дисперсии симметрична относительно начала координат:

$$\omega(\beta) = \omega(-\beta) \quad (16.22)$$

Из (16.21) и (16.22) следует, что поверхность дисперсии симметрична относительно любого узла обратной решетки,

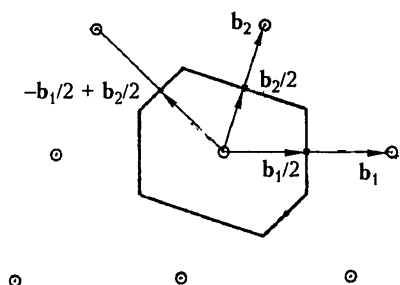
$$\omega(m_1 \mathbf{b}_1 + m_2 \mathbf{b}_2 + \beta) = \omega(m_1 \mathbf{b}_1 + m_2 \mathbf{b}_2 - \beta), \quad (16.23)$$

так что для определения поверхности дисперсии во всем обратном пространстве достаточно построить ее лишь в половине нулевой зоны.

Докажем, что поверхности дисперсии симметричны не только относительно узлов обратной решетки, но и относительно точек, лежащих в центрах прямых, соединяющих узлы:

$$\omega[(m_1 \mathbf{b}_1/2) + (m_2 \mathbf{b}_2/2) + \beta] = \omega[(m_1 \mathbf{b}_1/2) + (m_2 \mathbf{b}_2/2) - \beta] \quad (16.24)$$

В частности, поверхность дисперсии симметрична относительно точек  $\beta = \pm \mathbf{b}_1/2$ ,  $\beta = \pm \mathbf{b}_2/2$ ,  $\beta = \pm (\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2)/2$ ,  $\beta = \pm (\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2)/2$ , лежащих на границе нулевой зоны (рис. 16.9). Докажем (16.24)



**Рис. 16.9.** Построение точек границы нулевой зоны, содержащих оси симметрии поверхностей дисперсии

для случая  $m_1 = 1$ ,  $m_2 = 0$ . Согласно (16.21) справедливо равенство  $\omega(\beta) = \omega(\mathbf{b}_1 + \beta)$ , а согласно (16.23) — равенство  $\omega(\mathbf{b}_1 + \beta) = \omega(\mathbf{b}_1 - \beta)$ , откуда следует, что  $\omega(\beta) = \omega(\mathbf{b}_1 - \beta)$ . Вводя замену  $\beta_1 = (\mathbf{b}_1/2) - \beta$  и опуская индекс «1» при  $\beta_1$ , находим, что  $\omega[(\mathbf{b}_1/2) - \beta] = \omega[(\mathbf{b}_1/2) + \beta]$ . Аналогично доказывается справедливость равенства (16.24) для любых  $m_1$  и  $m_2$ . Оно включает в себя и (16.23).

Из факта симметрии поверхностей дисперсии относительно точек

$$\beta = (m_1 \mathbf{b}_1 + m_2 \mathbf{b}_2)/2$$

следует, что в узлах обратной решетки и в центрах отрезков, соединяющих узлы, равна нулю производная  $\partial\omega/\partial\beta$  вдоль любого направления, если только в этих точках нет особенностей, т. е.  $\text{grad}_\beta \omega = 0$ . Соответствующие точки поверхности дисперсии являются либо эллиптическими (экстремум), либо гиперболическими (седло), либо параболическими\*). Все эти типы точек имеют поверхности, изображенные на рис. 16.8. Кроме того, поверхности дисперсии могут иметь особые точки, удовлетворяющие (16.24). В частности, при  $\omega = 0$  не обязательно равенство  $\partial\omega/\partial\beta = 0$ , так как при  $\omega = 0$  через систему возможен перенос энергии на постоянном токе. Возможны особые точки, связанные со слиянием поверхностей дисперсии. Такие случаи рассмотрены в последующих главах (см. рис. 17.10). Наконец, возможны особые точки, в которых существует произ-

\*) Экстремумы поверхности дисперсии в физике твердого тела часто называют разрывами [2, 6]. Такая терминология связана с рассмотрением динамики перехода от однородных сред к периодическим.

водная  $\partial\omega/\partial\beta$  вдоль любого направления, но в которой не существует градиента частоты. Такую точку при  $\beta = 0$  содержит поверхность на рис. 16.8, в. В этой точке пересекаются изочастоты (см. рис. 16.7, д), а функция  $\omega(\beta)$  определяется неоднозначно. В кристаллооптике такие изочастоты соответствуют так называемым продольным экситонам [1].

Неоднозначность функции  $\omega(\beta)$  связана с тем, что частота колебаний различна при разных направлениях поля. Поскольку при  $\beta = 0$  нет никакого распространения волны, то нет и переноса энергии, так что можно считать, что групповая скорость равна нулю, несмотря на то, что не существует  $\text{grad}_\beta \omega$ .

Таким образом, если листы поверхности дисперсии не пересекаются, то при  $\omega \neq 0$  не только в центре нулевой зоны, но и на ее границе существуют точки, которым соответствует  $v_r = 0$ . Эти точки лежат посередине отрезков, соединяющих центр нулевой зоны с соседними узлами. Покажем теперь, что каждой из этих точек соответствует длина волны  $\Lambda = 2\Delta$ , где  $\Delta$  — расстояние между соседними узлами прямой решетки, перпендикулярными вектору  $\beta$ , проведенному в данный узел. При этом сдвиг фаз между соседними рядами равен  $\pi$  ( $\phi = \beta\Delta = \pi$ ).

В п. 16.2 отмечено, что любому вектору  $\mathbf{b}$ , проведенному из начала координат в какой-либо узел обратной решетки, можно поставить в соответствие ряд прямой решетки. Модуль вектора  $\mathbf{b}$  связан с расстоянием  $\Delta$  между соседними рядами равенством  $b = 2\pi/\Delta$ . При  $\beta = \mathbf{b}/2$  величина  $\beta = 2\pi/\Lambda = \pi/\Delta$ . Отсюда следует, что  $\Lambda = 2\Delta$  и  $\phi = \beta\Delta = \pi$ .

## 16.7. Ортогональные преобразования волнового уравнения

Электрическое (и магнитное) поле в ЗС удовлетворяет волновому уравнению

$$\nabla^2 \mathbf{E} + k^2 \mathbf{E} = 0$$

и теореме Блоха (16.11). Подставляя (16.11) в волновое уравнение, получим

$$(\nabla - j\beta)^2 \mathbf{E}_0 + k^2 \mathbf{E}_0 = 0, \quad (16.25)$$

где  $(\nabla - j\beta)^2 = \nabla^2 - j2\beta\nabla - \beta^2$ , а  $\mathbf{E}_0$  — двояко-периодическая функция. Форма записи этого уравнения инвариантна относительно любого преобразования координат  $\mathbf{r}_1 = [\alpha]\mathbf{r}$  и, в частности, относительно любого преобразования симметрии. Переход от старой системы координат (без индексов) к новой (с индексом «1») задается ортогональной матрицей  $[\alpha]$ , причем  $\nabla_1 = [\alpha]\nabla$ ,  $\mathbf{E}_{01} = [\alpha]\mathbf{E}_0$ ,  $\beta_1 = [\alpha]\beta$ . Первые два из этих равенств доказаны в п. 2.3, а последнее следует из того, что скалярное произведение не зависит от выбора системы координат. Произведение  $\beta\mathbf{r}$  представляет скалярную величину, так что  $\beta\mathbf{r} = \beta[\alpha]^T[\alpha]\mathbf{r} = \beta_1\mathbf{r}_1$  (символ « $T$ » означает операцию транспонирования). Здесь учтено, что ортогональная матрица удовлетворяет равенству  $[\alpha]^T[\alpha] = 1$ .

Из инвариантности формы записи (16.25) следует уравнение

$$(\nabla_1 - j\beta_1)^2 \mathbf{E}_{01} + k^2 \mathbf{E}_{01} = 0. \quad (16.26)$$



Рассмотрим случаи, в которых матрица  $[\alpha]$  представляет преобразование симметрии. Оно не изменяет граничных условий для поля. Уравнение (16.26) описывает поле той же самой волны, что (16.25), но в другой системе координат, связанной с исходной преобразованием симметрии  $[\alpha]$ . В силу симметрии граничные условия в старой и новой системах координат совпадают. Поэтому преобразование координат  $[\alpha]$  равносильно преобразованию  $[\alpha]^{-1}$  самой системы вместе с электромагнитным полем в ней. Поскольку преобразование  $[\alpha]$  совмещает систему самое с собой, оно сводится только к преобразованию электромагнитного поля. При этом уравнение (16.26) может соответствовать уже другой волне.

Если, например,  $\alpha = CN$  означает преобразование поворота относительно оси, перпендикулярной решетке, то оно равносильно изменению направления волны на угол  $2\pi/N$ . При этом инвариантность записи (16.26) относительно преобразования поворота означает, что одной и той же частоте  $\omega$  должны соответствовать одинаковые по величине векторы  $\beta$ , угол между которыми равен  $2\pi/N$ . Иными словами, поверхность дисперсии должна обладать элементами точечной симметрии, которые имеет структура.

В двумерно-периодической системе вектор  $\beta$  лежит в плоскости решетки. Поэтому в уравнении (16.26) векторы  $\beta_1$  и  $\beta$  связаны как проекции симметричных точек структуры на плоскость решетки. Отсюда следует, в частности, что в *двумерно-периодической структуре одной и той же частоте  $\omega$  соответствуют волновые векторы  $\beta$  и  $\beta_1$ , концы которых связаны между собой, как проекции симметричных точек структуры на плоскость решетки*. В частности, поверхность дисперсии содержит ось  $CN$  для любых систем, имеющих оси не только  $CN$ , но и  $SN$ . Этот вывод очевиден, поскольку в таких системах для волны неразличимы  $N$  направлений, повернутых друг относительно друга на угол  $2\pi/N$ .

То же самое справедливо и для плоскости симметрии  $\sigma$ . Если она лежит в плоскости решетки, то не влияет на симметрию дисперсионной характеристики. Если же она перпендикулярна плоскости решетки, то приводит к появлению плоскости симметрии у поверхности дисперсии. Из осей симметрии в плоскости решетки может лежать только  $C2$ . Она приводит к появлению плоскости симметрии поверхности дисперсии, поскольку проекции на решетку точек, связанных зеркальным отражением и поворотом относительно оси  $C2$  ничем не отличаются.

Наряду с плоскостями  $\sigma$  и осями  $C2$  и  $S2$  в двумерно-периодической системе возможны скользящие плоскости  $\sigma_g$  и винтовые оси  $C2_1$ . Эти плоскости и оси, как показано ниже, могут приводить к смыканию поверхностей дисперсии в определенных точках. Кроме того, как и обычные плоскости и оси, они приводят к определенной симметрии поверхности дисперсии. В частности, плоскость  $\sigma_g$ , перпендикулярная плоскости решетки, и ось  $C2_1$  (она может лежать только в плоскости решетки) приводят к появлению зеркальной плоскости у поверхности дисперсии. В самом деле, на оператор  $\nabla$  трансляция не влияет. Поэтому уравнение (16.25) не меняется при замене  $\mathbf{r}$  как на  $[\sigma_g]\mathbf{r}$ , так и на  $[C2_1]\mathbf{r}$ , если одновременно отразить вектор  $\beta$  в зеркальной плоскости, параллельной либо  $\sigma_g$ , либо  $C2_1$ , соответственно.

Следует помнить, что согласно формуле (16.22) через центр нулевой зоны всегда проходит ось  $C2$  поверхности дисперсии, так что порядок оси

симметрии поверхности дисперсии  $N'$  совпадает с порядком  $N$  оси симметрии структуры, если  $N$  четно, и вдвое превышает его ( $N' = 2N$ ), если  $N$  нечетно. Отсюда следует, что поверхность дисперсии должна содержать по крайней мере пару взаимно перпендикулярных плоскостей симметрии, пересекающих центр нулевой зоны, если она содержит хотя бы одну такую плоскость. В результате получается, что 17 группам симметрии структур соответствует только семь групп симметрии поверхностей дисперсии (рис. 16.10). Например, поверхности дисперсии структур, принадлежащих группам  $C_{4v}3m$ ,  $H_d3m$  и  $C_{6v}6m$ , имеют одинаковые элементы симметрии. Эти элементы такие же, как у самой структуры из группы  $C_{6v}6m$ . Не при любом преобразовании симметрии волновой вектор  $\beta_1$  в (16.26) соответствует иной волне, чем  $\beta$  в (16.25). Если  $\beta_1 = \beta + m_1 b_1 + m_2 b_2$ , где  $m_1$  и  $m_2$  — целые числа, то векторы  $\beta$  и  $\beta_1$  соответствуют одной и той же волне. В частности,  $\beta = \beta_1$ , если  $[\alpha]$  соответствует отражению в плоскости решетки, а вектор  $\beta$  параллелен плоскости симметрии.

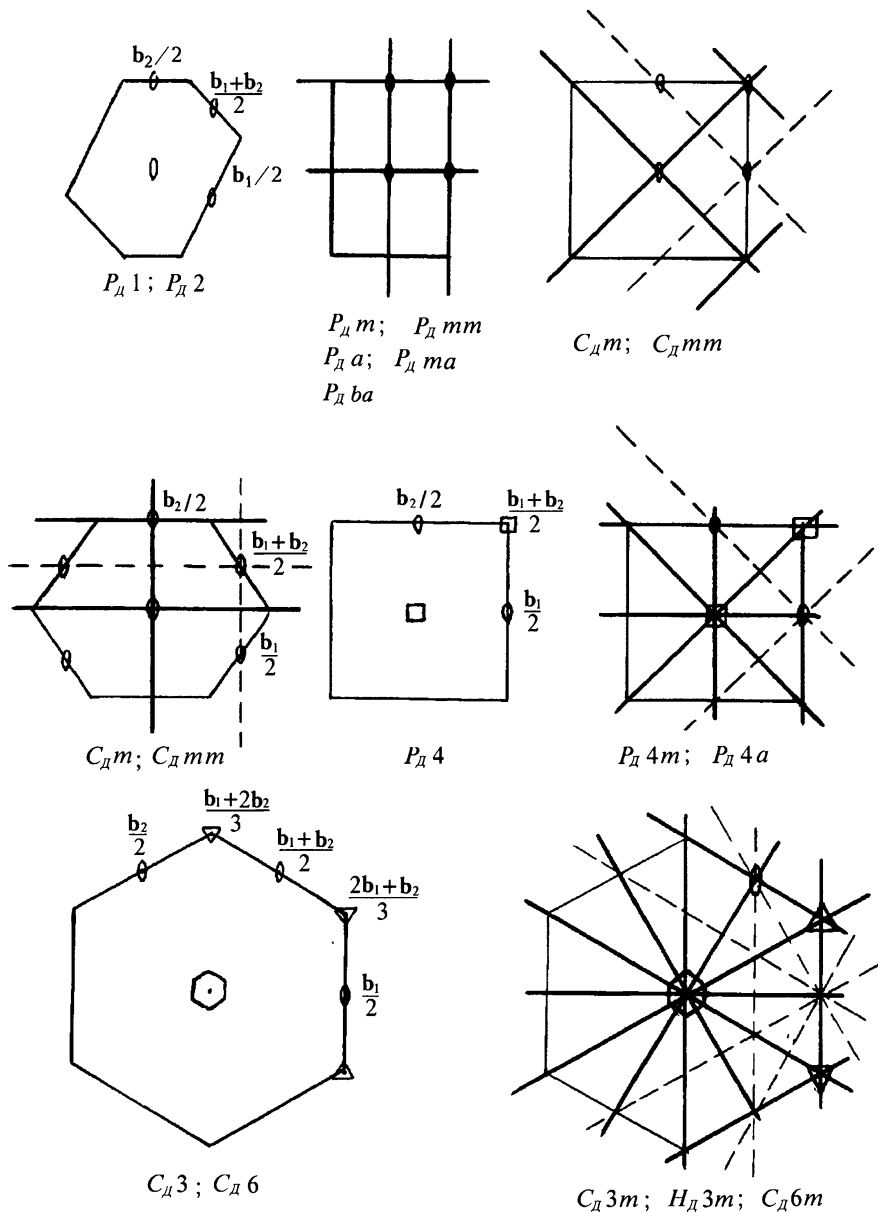
Пусть координата  $\mathbf{r}$  заменена на  $[\alpha]\mathbf{r}$ . При этом вектор  $\beta$  заменяется на  $[\alpha]\beta$ . Если векторы  $\beta$  и  $[\alpha]\beta$  соответствуют одной и той же волне, то сравнение решений уравнений (16.25) и (16.26) дает некоторые сведения о структуре поля. Если же векторы  $\beta$  и  $[\alpha]\beta$  соответствуют разным типам волн, то сравнивать поле в точках  $\mathbf{r}$  и  $[\alpha]\mathbf{r}$  не удастся. Исследование структуры поля, обусловленной симметрией ЗС, проведено ниже.

Уже отмечалось, что векторы  $\beta$  и  $[\alpha]\beta$  связаны как проекции соответствующих симметричных точек на плоскость решетки. Отсюда следуют такие свойства поверхности дисперсии, как ее симметрия, наличие стационарных точек ( $\text{grad}_{\beta}\omega = 0$ ) при  $\beta = b_1/2$ ,  $\beta = b_2/2$  и т.д., которые определяются не столько симметрией самой структуры, сколько симметрией проекции структуры на плоскость решетки.

Рассмотрим двумерно-периодическую структуру, содержащую в плоскости решетки либо скользящую плоскость  $\sigma_g$ , либо винтовую ось  $C_{21}$ . Площадь ячейки такой структуры вдвое больше площади ячейки ее проекции на плоскость решетки. Поэтому площадь нулевой зоны для структуры вдвое меньше, чем для ее проекции, ибо линейные размеры обратной решетки обратно пропорциональны размерам прямой решетки. Нулевая зона структуры целиком содержится в нулевой зоне ее проекции. Выше отмечалось (см. п. 16.4), что на границе нулевой зоны ЗС имеются точки ( $\beta = \pm b_1/2$ ,  $\beta = \pm b_2/2$  и т.д.), через которые проходят оси симметрии четного порядка, перпендикулярные решетке. Следовательно, при  $\omega \neq 0$  в этих точках либо  $\partial\omega/\partial\beta = 0$  вдоль любого направления, либо сливаются поверхности дисперсии, принадлежащие соседним полосам пропускания.

Увеличение вдвое площади нулевой зоны для проекции системы означает, что в точках нулевой зоны системы, лежащих внутри нулевой зоны проекции, не обязательно выполняется условие  $\partial\omega/\partial\beta = 0$ , что в точках  $\beta = \pm b_1/2$ ,  $\beta = \pm b_2/2$  и т.д., лежащих внутри нулевой зоны проекции системы на плоскость решетки, должны сливаться поверхности дисперсии двух соседних полос пропускания.

При исследовании волн в ЗС часто используют понятие вырождения типов волн. В это понятие вкладываем различный смысл для одномерно- и



**Рис. 16.10.** Расположение осей и плоскостей симметрии в нулевой зоне для двумерно-периодических структур, принадлежащих различным группам симметрии

двумерно-периодических систем. В одномерно-периодических структурах называем волны вырожденными, если при заданном значении частоты существует два или более линейно независимых решения волнового уравнения. В частности, решения, соответствующие волновым числам  $\beta$  и  $-\beta$ , отличающимся только знаком, называются двукратно вырожденными, поскольку они соответствуют одной и той же частоте. В двумерно-периодических системах одной частоте соответствует бесконечное множество линейно независимых решений, ибо волновой вектор может оканчиваться в бесконечном числе точек изочастоты. Поэтому вырожденными в двумерно-периодических структурах принято называть такие типы волн, которым соответствуют два или более линейно независимых решений волнового уравнения (16.25) при фиксированных значениях не только частоты, но и волнового вектора.

### 16.8. Свойства, обусловленные зеркальными плоскостями симметрии

**Плоскость симметрии, лежащая в плоскости решетки.** Отражение в такой плоскости коммутирует с трансляцией. Поэтому независимы свойства, обусловленные периодичностью структуры и плоскостью симметрии. В этой плоскости располагается либо электрическая, либо магнитная стенка.

**Плоскость симметрии, перпендикулярная плоскости решетки.** Такую плоскость содержат системы, принадлежащие группам  $P_d m$ ,  $C_d m$ ,  $P_d m m$ ,  $P_d m a$ ,  $C_d m m$ ,  $P_d 4 m$ ,  $C_d 3 m$ ,  $H_d 3 m$  и  $C_d 6 m$ . Выберем ось  $y$  в прямоугольной системе координат, перпендикулярной плоскости симметрии. При этом

$$\omega(\beta_x, \beta_y) = \omega(\beta_x, -\beta_y), \quad (16.27, a)$$

а с учетом (16.22) и (16.27 а)

$$\omega(\beta_x, \beta_y) = \omega(-\beta_x, \beta_y). \quad (16.27, б)$$

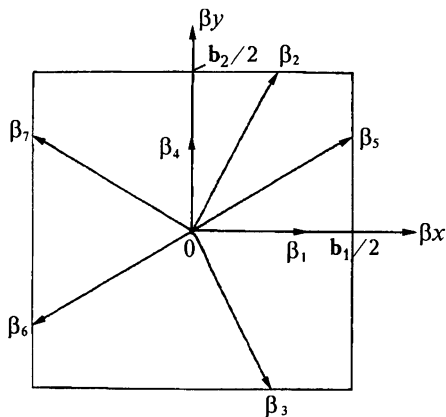
Иными словами, если система имеет хотя бы одну зеркальную плоскость, перпендикулярную решетке, то поверхность дисперсии имеет не менее двух взаимно перпендикулярных плоскостей симметрии, пересекающих центр нулевой зоны. В соответствии с (16.10) границы зон этих систем лежат в плоскостях симметрии. Исключение могут составить системы, принадлежащие группам  $C_d m$  и  $C_d m m$  (рис. 16.10).

В плоскости симметрии поверхность дисперсии должна иметь экстремум в направлении, перпендикулярном этой плоскости. Иными словами, если волновой вектор оканчивается в плоскости симметрии, то равна нулю составляющая групповой скорости  $\mathbf{v}_g = \text{grad}_k \omega$ , перпендикулярная этой плоскости. Исключение могут составить случаи, в которых в плоскости симметрии пересекаются поверхности дисперсии, т. е. смыкаются соседние полосы пропускания ЗС.

В системах, принадлежащих группам  $P_d m$ ,  $P_d m m$ ,  $P_d m a$ ,  $P_d 4 m$ ,  $C_d 3 m$ ,  $H_d 3 m$ ,  $C_d 6 m$  все границы зон расположены в плоскостях симметрии. Поэтому составляющая групповой скорости, перпендикулярная той границе, на которой оканчивается волновой вектор, равна нулю.

Для систем из групп  $C_d m$  и  $C_d m m$  в плоскости симметрии лежит лишь одна граница нулевой зоны, да и то в случае, когда элементарная ячейка неквадратная. В соответствующих системах возможно распространение волн даже если вектор  $\beta$  оканчивается на границе нулевой зоны.

О структуре поля, обусловленной плоскостями симметрии, в общем случае ничего сказать не удастся. В частном случае, когда вектор  $\beta$  оканчивается на одной из плоскостей симметрии  $\beta_x = 0$ ,  $\beta_y = 0$ ,  $\beta_x = b_1/2$  или  $\beta_y = b_2/2$ , ниже устанавливаются некоторые закономерности, относящиеся к структуре поля.



**Рис. 16.11.** Преобразование волновых векторов относительно различных элементов симметрии

Уравнение (16.25) инвариантно относительно отражения в плоскости  $y = 0$ , если волновой вектор оканчивается либо в плоскости  $\beta_y = 0$  ( $\beta = \beta_1$  на рис. 16.11), либо в плоскости  $\beta_y = b_2/2$  ( $\beta = \beta_2$ ). Это означает, что для указанных значений  $\beta_y$  плоскость симметрии должна представлять либо электрическую, либо магнитную стенку (см. п. 2.10). При  $\beta_y = 0$  период поля в направлении оси  $y$  совпадает с периодом структуры. Поэтому плоскости симметрии, перпендикулярные оси  $y$ , должны быть одновременно либо все электрическими, либо все магнитными стенками. При  $\beta_y = b_2/2$  сдвиг фаз между соседними рядами равен  $\pi$  и период поля вдоль оси  $y$  вдвое больше

периода структуры, так что электрические и магнитные стенки, перпендикулярные оси  $y$ , должны чередоваться (см. рис. 2.13).

Если вектор  $\beta$  лежит в плоскости  $\beta_x = 0$  ( $\beta = \beta_4$ ) либо в плоскости  $\beta_x = b_1/2$  ( $\beta = \beta_5$ ), то уравнение (16.25) инвариантно относительно одновременной замены знака  $y$  и комплексного сопряжения решения  $E_0 \exp(-j\beta r)$ . В самом деле, при  $\beta_x = 0$  комплексному сопряжению решения соответствует изменение знака  $\beta_y$ . Еще одно изменение знака  $\beta_y$  обусловлено отражением в плоскости  $\beta_y = 0$ , так что вектор  $\beta$  остается неизменным при замене знака  $y$ . Если  $\beta_x = b_1/2$ , то комплексное сопряжение соответствует замене  $\beta_5$  на  $\beta_6$ , а отражение в плоскости  $\beta_y = 0$  — замене  $\beta_6$  на  $\beta_7$ . Векторы  $\beta_5$  и  $\beta_7$  отличаются на величину  $b_1$ , так что они соответствуют одному и тому же решению.

Воспроизводя рассуждения из п. 2.10 находим, что при  $\beta_x = 0$  и  $\beta_x = b_1/2$  компоненты поля в симметричных точках ЗС удовлетворяют равенствам\*)

$$\mp \begin{bmatrix} E_{xz}^* \\ H_{xz}^* \end{bmatrix} (x, y, z) = \begin{bmatrix} E_{xz} \\ H_{xz} \end{bmatrix} (x, -y, z), \quad \pm \begin{bmatrix} E_y^* \\ H_y^* \end{bmatrix} (x, y, z) = \begin{bmatrix} E_y \\ H_y \end{bmatrix} (x, -y, z) \quad (16.28)$$

\*) Запись векторов в форме (16.28) означает, что компоненты полей одинаково зависят от координат  $x, y, z$ . Здесь и далее такая форма записи принята, чтобы не загромождать текст однотипными аргументами.

Из (16.28) следует, что в плоскости симметрии компоненты поля можно считать либо действительными либо мнимыми.

### 16.9. Границы нулевой зоны и формулы Вульфа–Брэггов

Как ЗС, так и кристаллы представляют периодические структуры, поэтому их волноводные свойства в значительной мере сходны. И в тех, и в других любую волну можно представить в виде суммы плоских волн (пространственных гармоник), а дисперсионные характеристики полностью определяют их вид в нулевой зоне. Для тех и других в определенных точках нулевой зоны существуют экстремумы дисперсионных характеристик, а в плоскостях симметрии — экстремумы, в направлениях, перпендикулярных этим плоскостям.

Рассматривая распространение волн, имеющих малые модули волновых векторов, часто пренебрегают всеми пространственными гармониками, кроме нулевой, так как амплитуды этих гармоник относительно малы. Расчет ЗС, в котором пренебрегают высшими пространственными гармониками используется в ряде работ [4, 7] и называется расчетом в приближении одной волны. При этом ЗС рассматривается как однородная анизотропная среда, например, для спирали — цилиндры с анизотропной проводимостью.

В кристаллооптике, как правило, величина  $\beta$  в тысячи раз меньше размеров нулевой зоны, так как размеры ячейки кристалла в тысячи раз меньше длины волны видимого света. Поэтому все расчеты в оптике ведут в приближении одной волны. В теории ЗС, как и в рентгеноструктурном анализе, длины волн чаще всего сравнимы с размерами ячейки, так что приходится учитывать пространственные гармоники.

Пусть на кристаллическую решетку в направлении  $\mathbf{v}_0$  падает волна длиной  $\lambda$  (рис. 16.12). Рассмотрим отражение этой волны от системы плоскостей решетки, образующих угол  $\theta$  с волновым вектором, как это делают обычно в рентгеноструктурном анализе при выводе формулы Вульфа–Брэггов. Разность хода волн, отраженных от соседних плоскостей, равна  $2\Delta \sin\theta$ , где  $\Delta$  — расстояние между соседними плоскостями. Максимум интерференции отраженных в направлении  $\mathbf{v}_0$  волн появится в случае, если разность хода волн кратна длине волны  $\lambda$ :

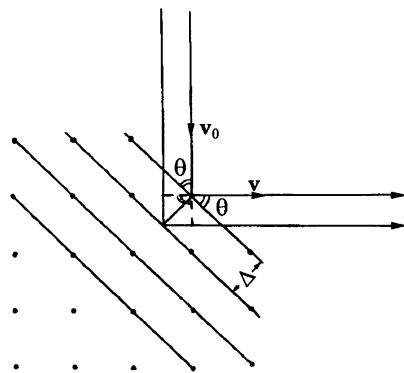


Рис. 16.12. Отражение рентгеновских лучей по Вульфу и Брэггам

$$m\lambda = 2\Delta \sin \theta \quad (m = 1, 2, \dots) \quad (16.29, a)$$

Выражение (16.29, а) представляет формулу Вульфа — Брэггов и определяет направления интерференционных максимумов. Вывод этой формулы основан на предположении, что длина волны в кристаллической решетке и в свободном пространстве одинакова. Это предположение обеспечивает достаточную точность в определении угла  $\theta$ , поскольку для рентгеновских волн коэффициент преломления  $n$  обычно близок к единице. В ЗС коэффициент  $n$  существенно отличается от единицы. Поэтому длину волны  $\lambda$  в свободном пространстве следует заменить длиной волны  $\Lambda$  в ЗС. При этом формулу (16.29, а) можно переписать в виде

$$2\beta \sin \theta = mb, \quad (16.29, б)$$

где  $b$  — модуль базисного вектора, связанный с  $\Delta$  равенством (16.10), а  $\beta = 2\pi/\Lambda$  — модуль волнового вектора. В формуле (16.29, б) учитывается зависимость длины волны от свойств среды. Она справедлива, однако, в предположении, что одинаковы длины (т.е. модули волнового вектора) падающей и отраженной волн \*).

По сравнению с поправкой в определении  $\theta$ , обусловленной учетом коэффициента преломления, учет зависимости модуля  $\beta$  от направления приводит к поправкам более высокого порядка малости. В кристаллах эта поправка обычно не учитывается, поскольку значение  $n$  близко к единице. Однако в ЗС эта поправка может оказаться существенной.

Формула (16.29, б) представляет записанное в полярных координатах уравнение прямой в плоскости обратной решетки. Эта прямая перпендикулярна базисному вектору  $\mathbf{b}$  и при  $m = 1$  проходит через его середину. Отсюда следует, что уравнение (16.29, б) при  $m = 1$  определяет границу нулевой зоны. Иными словами, если волновой вектор оканчивается на границе нулевой зоны, то согласно формуле Вульфа — Брэггов (16.29, б) волна отражается от структуры. При  $m > 1$  уравнение (16.29, б) определяет тоже прямые линии, но лежащие вне нулевой зоны. Нас они не будут интересовать.

Отражение волн означает, что энергия не распространяется перпендикулярно плоскостям (рядам) решетки, т.е. равна нулю составляющая производной  $\partial\omega/\partial\beta$  в направлении, перпендикулярном границе нулевой зоны.

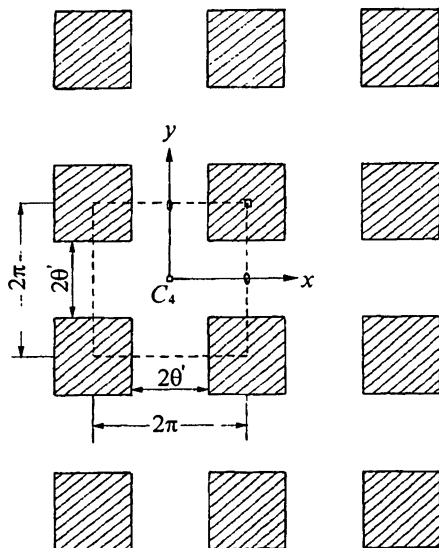


Рис. 16.13. Поперечное сечение многопроводной линии, имеющей ось  $C_4$ . Штриховой линией обведена ячейка

\*) Именно в этом предположении в рентгеноструктурном анализе выведены уравнения Лауэ и построены сферы Эвальда, если даже учитывается коэффициент преломления среды.

Это утверждение получено как следствие (16.29, б). В гл. 17 на конкретном примере (рис. 17.13) показано, что формула Вульфа—Брэггов верна не всегда. Она заведомо справедлива только для систем, содержащих плоскости симметрии либо параллельные, либо перпендикулярные границам нулевой зоны (см. группы симметрии  $P_{дт}$ ,  $P_{дтт}$ ,  $P_{дта}$ ,  $P_{дт}$ ,  $C_{д3т}$ ,  $H_{д3т}$ ,  $C_{д6т}$ ).

На границе зоны одинаковы амплитуды, по крайней мере, двух пространственных гармоник. Поэтому при расчете отражения и распространения рентгеновских волн в кристаллах следует учитывать не менее двух пространственных гармоник. В кристаллах, как правило, наблюдается отражение волн только при выполнении условия Вульфа—Брэггов, в то время, как в ЗС существуют границы полос пропускания и, следовательно, отражения, не предсказываемые уравнением Вульфа—Брэггов (рис. 17.5).

## 16.10. Свойства, обусловленные поворотными осями симметрии

**Оси в плоскости решетки.** Из поворотных осей в плоскости решетки могут лежать только оси  $C_2$ . Они влияют на симметрию поверхности дисперсии так же, как плоскости  $\sigma$ , перпендикулярные к плоскости решетки. Такое совпадение свойств симметрии обусловлено тем, что проекции симметричных точек систем как с осью  $C_2$ , так и с плоскостью  $\sigma$  на плоскость решетки обладают одинаковой симметрией.

В двумерно-периодической ЗС ось  $C_2$  порождает бесконечное множество параллельных ей осей (рис. 16.2). Пусть они направлены вдоль координаты  $x$ . Тогда они отстоят друг от друга по  $y$  на расстоянии  $d_y/2$ .

Как и в п. 16.8, о влиянии осей на структуру поля удается что-либо сказать лишь в случаях, когда волновой вектор оканчивается в плоскостях  $\beta_x = 0$ ,  $\beta_y = 0$ ,  $\beta_x = b_1/2$  и  $\beta_y = b_2/2$ . При  $\beta_y = 0$  или  $\beta_y = b_2/2$  волновое уравнение (16.25) инвариантно относительно одновременной замены знаков при  $x$  и  $z$ . При этом, как показано в п. 2.12, на поле накладываются некоторые ограничения. В частности, на всех осях равны нулю либо продольные ( $E_x = 0$ ,  $H_x = 0$ ) компоненты поля, либо поперечные ( $E_y = E_z = 0$ ,  $H_y = H_z = 0$ ). При  $\beta_y = 0$  характер поля на всех осях одинаков, при  $\beta_y = b_2/2$  он чередуется.

В случаях  $\beta_x = 0$  или  $\beta_x = b_1/2$  уравнение (16.25) инвариантно относительно двух операций, проводимых одновременно: замены знака  $y$  и  $z$  и комплексного сопряжения решения  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \exp(-j\beta\mathbf{r})$ . При этом остаются справедливыми соотношения (2.43)

$$\mp \begin{bmatrix} E_x^* \\ H_{y,z}^* \end{bmatrix} (x, y, z) = \begin{bmatrix} E_x \\ H_{y,z} \end{bmatrix} (x, -y, -z), \quad \pm \begin{bmatrix} E_{y,z}^* \\ H_x^* \end{bmatrix} (x, y, z) = \begin{bmatrix} E_{y,z} \\ H_x \end{bmatrix} (x, -y, -z) \quad (16.30)$$

На оси симметрии  $y = 0$ ,  $z = 0$  каждую из компонент поля можно считать либо действительной, либо мнимой.

**Оси, перпендикулярные плоскости решетки.** Перпендикулярными к плоскости решетки могут быть оси  $C_2$ ,  $C_3$ ,  $C_4$  и  $C_6$ . Как отмечено в п. 16.7, поверхность дисперсии системы с осью  $C_N$  должна иметь ось  $C_N'$  четного порядка ( $N' \geq N$ ), пересекающую центр нулевой зоны. Кроме того, имеются оси второго порядка, проходящие через точки  $\beta = \mathbf{b}_1/2$ ,  $\mathbf{b}_2/2$ ,  $(\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2)/2$ .



В системах с осью  $C4$  точку  $(b_1 + b_2)/2$  пересекает ось четвертого порядка. Для систем с осями  $C3$  и  $C6$  точки  $(2b_1 + b_2)/3$  и  $(b_1 + 2b_2)/3$  пересекают оси третьего порядка. Ради определенности полагаем, что угол между векторами  $b_1$  и  $b_2$  в системах с осями  $C3$  и  $C6$  равен  $120^\circ$  (см. рис. 16.10).

Наличие осей симметрии может привести к слиянию поверхностей дисперсии хотя бы в некоторых точках. В самом деле, при указанных выше значениях  $\beta$  свойства ЗС не отличаются от свойств резонаторов. В системах нет бегущих волн, но существуют различные виды колебаний. В частности, возможны вырожденные виды колебаний, которые соответствуют смыканию поверхностей дисперсии. Количество смыкающихся поверхностей дисперсии равно кратности вырождения.

Структура поля в ЗС при указанных  $\beta$  зависит от того, какая замена координат  $g$  на  $[CN']g$  ( $N' \leq N$ ) оставляет неизменным уравнение (16.25). При  $\beta = 0$  уравнение (16.25) такое же, как для резонатора с осью  $CN$  ( $N' = N$ ). Оно инвариантно относительно замены  $g$  на  $[CN]g$ . Если  $\beta \neq 0$ , то волновое уравнение в общем случае перестает быть инвариантным относительно указанной замены, поскольку эта операция требует также замены  $\beta$  на  $[CN]\beta$ . При некоторых значениях  $\beta$  и  $N' \leq N$  вектор  $[CN']\beta$  отличается от  $\beta$  на величину  $m_1 b_1 + m_2 b_2$ , где  $m_1, m_2 = 0, 1, \dots$ . В этом случае можно считать, что уравнение (16.25) инвариантно относительно поворота  $CN'$ .

В системах с осями  $C2$  и  $C6$  уравнение (16.25) инвариантно относительно замены  $g$  на  $[C2]g$  ( $N' = 2$ ), если  $\beta = b_1/2, b_2/2, (b_1 + b_2)/2$ . В системах с осью  $C4$  оно инвариантно относительно той же замены, но только при  $\beta = b_1/2$  и  $b_2/2$ . Если же  $\beta = (b_1 + b_2)/2$ , то оно инвариантно при замене  $g$  на  $[C4]g$ . В системах с осями  $C3$  и  $C6$  точкам  $\beta = (2b_1 + b_2)/3$  и  $(b_1 + 2b_2)/3$  соответствует  $N' = 3$  (см. табл. 16.2).

Таблица 16.2

Порядки  $N'$  осей, которым соответствует замена  $g$  на  $[CN']g$  либо на  $[SN']g$ , оставляющая инвариантным уравнение (16.25)

Точки нулевой зоны	Обозначения осей симметрии			
	$C2$ и $S2$	$C3$	$C4$ и $S4$	$C6$ и $S6$
$\beta = 0$	2	3	4	6
$\beta = b_1/2$ и $b_2/2$	2	2	2	2
$\beta = (b_1 + b_2)/2$	2	2	4	2
$\beta = (2b_1 + b_2)/3$ и $\beta = (b_1 + 2b_2)/3$		3		3

Все результаты из п. 2.5 для структуры поля в системах с осями симметрии  $CN$  остаются справедливыми и для двумерно-периодических ЗС, если в них  $N$  заменить на  $N'$ . А именно, компоненты поля в симметричных точках ячейки ЗС связаны равенствами (2.12)

$$\begin{bmatrix} E(\rho, \theta + 2\pi/N', z) \\ H(\rho, \theta + 2\pi/N', z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E(\rho, \theta, z) \\ H(\rho, \theta, z) \end{bmatrix} \exp(-j2\pi q/N'). \quad (16.31)$$

Здесь  $\rho, \theta, z$  — цилиндрические координаты. Поля  $E(\rho, \theta, z)$  и  $E(\rho, \theta + 2\pi/N', z)$  считаются одинаковыми, если они равны по величине, а их направления повернуты друг относительно друга на  $2\pi/N'$ .

Целые числа  $q$  ( $-N'/2 < q \leq N'/2$ ) характеризуют количество «волн», укладываемых вдоль любой окружности в плоскости  $(x, y)$ , имеющей центр в начале координат. Значениям  $q$ , отличающимся лишь знаком, соответствуют «волны», бегущие по окружности в противоположные стороны. Числам  $q \neq 0$  и  $q \neq N'/2$ , отличающимся лишь знаком, соответствуют двукратно вырожденные колебания, а числам  $q = 0$  и  $q = N'/2$  — невырожденные. Это значит, что значениям  $q \neq 0$  и  $q \neq N'/2$  соответствует смыкание полос пропускания. Если  $q = 0$  или  $N'/2$ , то смыкания полос нет. При  $N' = 2$  вырождения колебаний нет, поскольку величина  $q$  может принимать только два значения ( $q = 0$  и  $q = 1$ ). В соответствии с табл. 16.2 к смыканию некоторых полос могут привести оси  $C3$ ,  $C4$  и  $C6$ .

На оси  $x = y = 0$  в соответствии с (2.14)  $E_z(0, 0, z) = 0$ ,  $H_z(0, 0, z) = 0$  при  $q = 0$  и  $E_{x,y}(0, 0, z) = 0$ ,  $H_{x,y}(0, 0, z) = 0$  при  $q = \pm 1$ . При  $|q| > 1$  все компоненты поля на оси равны нулю.

Кроме равенств (16.31), характеризующих распределение поля в симметричных точках, для систем с четным порядком оси  $N'$  остаются справедливыми равенства (16.30), в которых взаимно заменены местами координаты  $x$  и  $z$ :

$$\mp \begin{bmatrix} E_z^* \\ H_{x,y}^* \end{bmatrix} (x, y, z) = \begin{bmatrix} E_z \\ H_{x,y} \end{bmatrix} (-x, -y, z),$$

$$\pm \begin{bmatrix} E_{x,y}^* \\ H_z^* \end{bmatrix} (x, y, z) = \begin{bmatrix} E_{x,y} \\ H_z \end{bmatrix} (-x, -y, z) \quad (16.32)$$

### 16.11. Пример дисперсионной характеристики системы с осью $C4$

С целью иллюстрации свойств, обусловленных осями симметрии, рассмотрим структуру из проводников квадратного сечения (рис. 16.13), для которой периоды  $d_1 = d_2 = 2\pi$  [17]. Ограничимся рассмотрением поля типа  $E$ . Предполагаем, что оно не зависит от координаты  $z$ , направленной вдоль проводника. Расчет дисперсии волн типа  $E$  целесообразен не только с точки зрения иллюстрации выводов из теории симметрии. Он полезен для выяснения возможности использования этих типов волн в электронных приборах, а также для установления законов преломления волн, падающих на решетку из этих проводников [22].

Электромагнитное поле волны типа  $E$  полностью определяется единственной отличной от нуля компонентой вектора Герца  $\Pi_z(x, y)$ , которая удовлетворяет двумерному волновому уравнению

$$\Delta_{x,y} \Pi_z(x, y) + k^2 \Pi_z(x, y) = 0, \quad (16.33, a)$$

причем на границе  $\Sigma$  системы функция  $\Pi_z(x, y)$  равна нулю:

$$\Pi_z(x, y)|_{\Sigma} = 0. \quad (16.33, б)$$

Функция  $\Pi_z$  должна удовлетворять теореме Блоха,

$$\Pi_z(x, y) = \Pi_{0z}(x, y) \exp[-j(\beta_x x + \beta_y y)], \quad (16.34)$$

где функция  $\Pi_{0z}$  двояко-периодическая:

$$\Pi_{0z}(x + 2\pi q_1, y + 2\pi q_2) = \Pi_{0z}(x, y)$$

( $q_1$  и  $q_2$  — произвольные целые числа).

Области изменения волновых чисел  $0 \leq \beta_{x,y} \leq 1/2$  выбираем так, чтобы выполнялись условия  $0 \leq \beta_{x,y} d \leq \pi$ .

Можно показать [11], что если функция  $\Pi_z(x, y)$ , удовлетворяющая условиям (16.33 б) и (16.34), реализует стационарное значение функционала

$$F(\Pi_z) = \iint_{\Omega} |\text{grad } \Pi_z|^2 d\Omega - k^2 \iint_{\Omega} |\Pi_z|^2 d\Omega, \quad (16.35)$$

где  $\Omega$  — область сечения одной ячейки структуры, то она удовлетворяет волновому уравнению (16.33 а).

Функцию  $\Pi_z$  ищем в виде ряда

$$\Pi_z(x, y) = \sum_{m_1, m_2 = -\infty}^{\infty} \alpha_{m_1 m_2} \exp[-j(\beta_{m_1} x + \beta_{m_2} y)] w(x, y), \quad (16.36)$$

где  $\beta_{m_1} = \beta_x + m_1$ ,  $\beta_{m_2} = \beta_y + m_2$ , а  $w(x, y)$  — некоторая двояко-периодическая функция,

$$w(x + 2\pi q_1, y + 2\pi q_2) = w(x, y), \quad (16.37)$$

удовлетворяющая условиям

$$w(x, y)|_{\Sigma} = 0, \quad w(x, y) > 0 \quad \text{при } (x, y) \in \Omega \quad (16.38)$$

При этом функция  $\Pi_z$  удовлетворяет (16.33 а) и (16.34). Подставляя (16.36) в (16.35), сводим нахождение стационарного значения функционала (16.35) к решению задачи на собственные числа,

$$[A]\alpha - k^2[B]\alpha = 0, \quad (16.39)$$

где  $\alpha$  — матрица-столбец, имеющая следующий вид (ради компактности записываем транспонированную матрицу)

$$\alpha^T = [\alpha_{00}, \alpha_{10}, \alpha_{-10}, \alpha_{01}, \alpha_{0-1}, \alpha_{11}, \alpha_{-11}, \alpha_{1-1}, \dots],$$

а  $[A]$  и  $[B]$  — квадратные матрицы, элементы которых определяются равенствами

$$A_{m_1 m_2 m'_1 m'_2} = \iint_{\Omega} [(\partial U_{m_1 m_2} / \partial x)(\partial U_{m'_1 m'_2}^* / \partial x) + (\partial U_{m_1 m_2} / \partial y)(\partial U_{m'_1 m'_2}^* / \partial y)] d\Omega,$$

$$B_{m_1 m_2 m'_1 m'_2} = \iint_{\Omega} U_{m_1 m_2} U_{m'_1 m'_2}^* d\Omega,$$

где «\*» означает операцию комплексного сопряжения,

$$U_{m_1 m_2} = w(x, y) \exp[-j(\beta_{m_1} x + \beta_{m_2} y)].$$

Функцию  $w$  вычисляем по методу, предложенному в [14]. Для этого строим две функции  $f_1(x)$  и  $f_2(y)$ , имеющие период  $2\pi$  и удовлетворяющие условиям

$$f_1(x) = \begin{cases} > 0 & \text{при } |x| < \theta' \\ = 0 & \text{при } |x| = \theta' \end{cases}, \quad f_2(y) = \begin{cases} > 0 & \text{при } |y| < \theta' \\ = 0 & \text{при } |y| = \theta' \end{cases} \quad (16.40)$$

и определяем функцию  $w$  соотношением

$$w(x, y) = f_1(x) + f_2(y) + [f_1^2(x) + f_2^2(y) - f_1(x)f_2(y)]^{1/2}.$$

Она удовлетворяет условиям (16.37) и (16.38) и называется  $R$ -функцией.

В качестве функций  $f_1$  и  $f_2$ , удовлетворяющих условиям (16.40), выбираем

$$f_1(x) = \cos x - \cos \theta', \quad f_2(y) = \cos y - \cos \theta'.$$

Учитывая, что функция  $w$  четная как по  $x$ , так и по  $y$  и что область  $\Omega$  симметрична относительно  $x$  и  $y$ , интегрирование ведем не по всей области, а лишь по ее четверти  $\Omega_1$  (см. рис. 16.13). Получаем выражения для  $A$  и  $B$  в виде

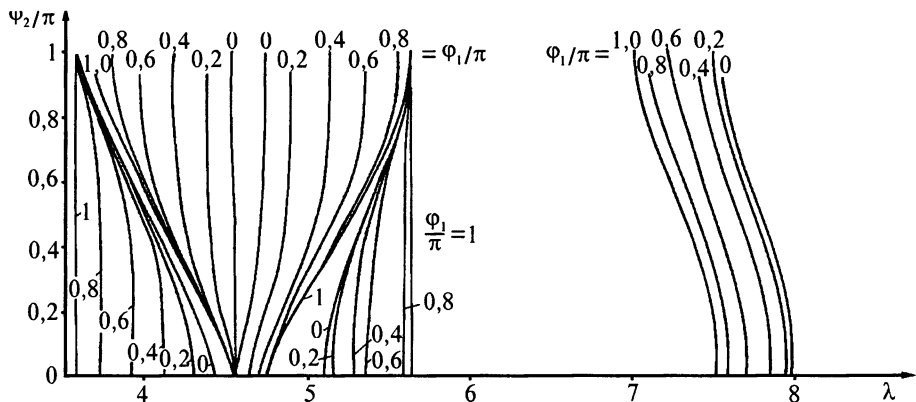
$$\begin{aligned} A_{m_1 m_2 m'_1 m'_2} = & \iint_{\Omega_1} \{ [(w'_x)^2 + (w'_y)^2 + r w^2] \cos[(m_1 - m'_1)x] \cos[(m_2 - m'_2)y] - \\ & - w w'_x (m_1 - m'_1) \sin[(m_1 - m'_1)x] \cos[(m_2 - m'_2)y] - \\ & - w w'_y (m_2 - m'_2) \cos[(m_1 - m'_1)x] \sin[(m_2 - m'_2)y] \} dx dy, \end{aligned}$$

$$B_{m_1 m_2 m'_1 m'_2} = \iint_{\Omega_1} w^2 \cos[(m_1 - m'_1)x] \cos[(m_2 - m'_2)y] dx dy,$$

$$w'_x = \partial w / \partial x, \quad w'_y = \partial w / \partial y, \quad r = \beta_{m_1} \beta_{m'_1} + \beta_{m_2} \beta_{m'_2}.$$

Дисперсионная характеристика рассчитана в пяти полосах пропускания для линии, у которой  $\theta' = \pi/2$ . При заданных волновых числах определены пять наименьших собственных чисел уравнения (16.39) и соответствующие им пять собственных векторов  $\alpha$ . Для исследования сходимости проведено два расчета. В первом вектор  $\alpha$  содержал 9 компонент, а во втором 13. При этом значения  $k$  отличались не более, чем на 2 %.

Кривые дисперсии рассматриваемой структуры в пяти полосах пропускания приведены на рис. 16.14 в координатах  $(\phi_2/\pi, \lambda)$  при различных  $\phi_1$ . Здесь  $\phi_1 = 2\pi\beta_1$ ,  $\phi_2 = 2\pi\beta_2$ . Поверхности дисперсии изображены на рис. 16.15.



**Рис. 16.14.** Кривые дисперсии пяти низших волн типа  $E$  в многопроводной линии с осью  $S4$ , рассчитанные вариационным методом с помощью  $R$ -функций. Числами около кривых указаны значения  $\Phi_1/\pi$

Некоторые из них сливаются при  $(\Phi_1, \Phi_2) = (0, 0)$  и  $(\pi, \pi)$ . Это подтверждает соответствующий вывод из теории симметрии.

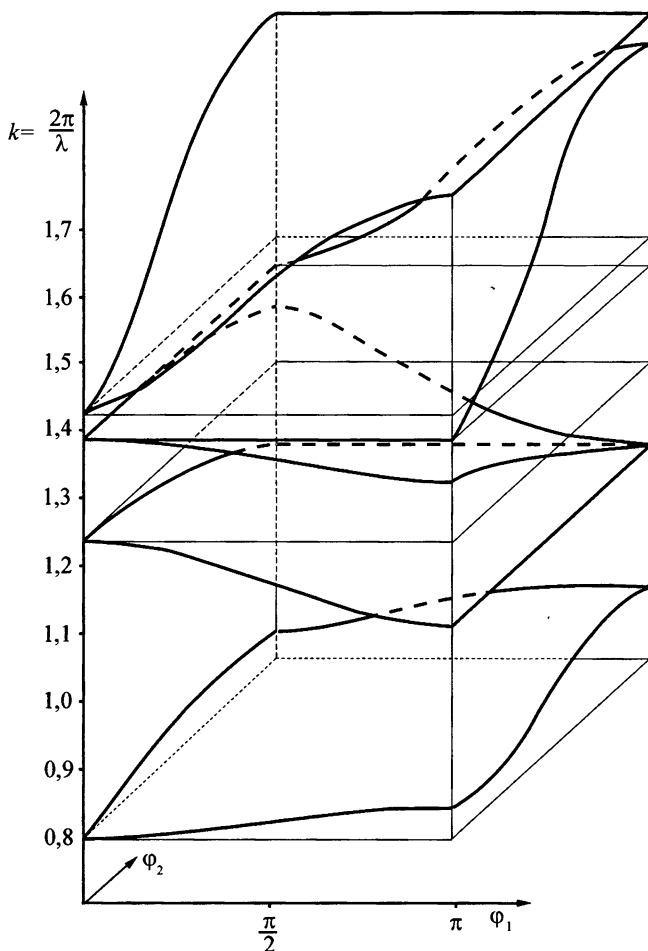
### 16.12. Свойства, обусловленные зеркально-поворотными осями

Зеркально-поворотные оси могут иметь только четный порядок ( $S2, S4, S6$ ). Ось  $S2$  представляет центр инверсии, так что ее направление несущественно. Оси  $S4$  и  $S6$  могут быть только перпендикулярными решетке (пусть они направлены вдоль оси  $z$ ). Действие  $[SN]\mathbf{r}$  сводится к повороту вектора  $\mathbf{r}$  вокруг оси на угол  $2\pi/N$  в сочетании с заменой координаты  $z$  на  $-z$ .

Повторяя рассуждения предыдущего раздела можно показать, что существует двукратное вырождение типов волн при  $\beta = 0$  в системах с осями  $S4$ , если  $q = \pm 1$ , и в системах с осями  $S6$ , если  $q = \pm 1, \pm 2$ . В случае  $\beta = (\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2)/2$  такое вырождение происходит в системах с осью  $C4$ , а при  $\beta = (2\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2)/3$  и при  $\beta = (\mathbf{b}_1 + 2\mathbf{b}_2)/3$  — в системах с осью  $C6$ , если  $q = \pm 1$ . Здесь, как и в предыдущем разделе, величина  $q$  означает количество «волн» вдоль окружности вокруг оси системы. Оно лежит в пределах  $-N'/2 < q \leq N'/2$ . Значения  $N'$  для разных  $\beta$  и  $N$  приведены в табл. 16.2. Они определяются так же, как в предыдущем разделе.

Рассмотренным выше значениям  $\beta = \mathbf{b}_1/2, \mathbf{b}_2/2, (\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2)/2, (2\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2)/3, (\mathbf{b}_1 + 2\mathbf{b}_2)/3$  соответствуют стоячие волны в системе. При этом в ЗС возможны колебания, подобные собственным колебаниям резонаторов. Для систем, содержащих оси  $S2$  (центр инверсии) при этих значениях  $\beta$  остаются справедливыми формулы (У.2.1):

$$\pm \mathbf{E}(x, y, z) = \mathbf{E}(-x, -y, -z), \quad \mp \mathbf{H}(x, y, z) = \mathbf{H}(-x, -y, -z).$$



**Рис. 16.15.** Поверхности дисперсии пяти низших волн типа  $E$  в многопроводной линии с осью  $C4$ . При  $(\varphi_1, \varphi_2) = (0, 0)$  и  $(\pi, \pi)$  некоторые поверхности смыкаются

При любых значениях  $\beta$  остаются справедливыми равенства (2.46):

$$\pm \mathbf{E}^*(x, y, z) = \mathbf{E}(-x, -y, -z), \quad \pm \mathbf{H}^*(x, y, z) = \mathbf{H}(-x, -y, -z).$$

Преобразование  $S6$  можно представить как произведение коммутирующих операций  $C3$  и  $S2$ . Поэтому поле в системе с осью  $S6$  обладает свойствами, присущими осям  $C3$  и  $S2$ .

Рассмотрим систему с осью  $C4$ . Уравнение (16.25) инвариантно относительно поворота  $C4$  при  $\beta = 0$  и  $\beta = (\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2)/2$  и относительно  $C2$  при  $\beta = \mathbf{b}_1/2$  и  $\beta = \mathbf{b}_2/2$ . Отсюда следует, что в ЗС структура поля такая же, как в резонаторе с осью  $C4$  при  $\beta = 0$  и  $(\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2)/2$  и с осью  $C2$  при  $\beta = \mathbf{b}_1/2$  и  $\mathbf{b}_2/2$  (см. п. 2.5).

### 16.13. Свойства, обусловленные скользящими плоскостями, параллельными решетке

Рассмотрим косоугольную систему координат  $(\zeta_1, \zeta_2)$  с базисными векторами  $\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2$ , равными по модулю периодам решетки. Скользящую плоскость  $\sigma_g$  расположим так, чтобы отражение в ней соответствовало замене координат  $\zeta_1$  на  $\zeta_1 + d_1/2$  и  $z$  на  $-z$ . Как отмечено в п. 16.6, через точки  $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{b}_1/2$  и  $\boldsymbol{\beta} = (\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2)/2$ , лежащие на границе нулевой зоны, проходят оси  $C2$  поверхности дисперсии. При этих  $\boldsymbol{\beta}$  волны могут распространяться только в случае смыкания поверхностей дисперсии.

Наличие скользящей плоскости приводит к смыканию поверхностей дисперсии по крайней мере в точках  $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{b}_1/2$  и  $\boldsymbol{\beta} = (\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2)/2$ . В самом деле, проекция ЗС на плоскость решетки имеет вдвое меньший период  $(d_1/2)$  по оси  $z$ , чем сама ЗС. Ей соответствует вдвое больший период  $(2b_1)$  обратной решетки. Стационарные точки  $(\mathbf{v}_r = 0)$  соответствуют  $\boldsymbol{\beta} = 0, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2/2, \mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2/2$ , лежащим на границе нулевой зоны, соответствующей проекции. Поскольку точки  $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{b}_1/2$  и  $(\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2)/2$  лежат внутри этой зоны, они не должны быть стационарными. Следовательно, в этих точках поверхности дисперсии смыкаются.

Пример ЗС со скользящей плоскостью, параллельной решетке, приведен на рис. 17.3. Там же изображены изохастоты, рассчитанные методом многопроводных линий. Изохастота  $kh = 0,5\pi$  соответствует линии смыкания поверхностей дисперсии. Она проходит, в частности, через точки  $\mathbf{b} = \mathbf{b}_1/2$  и  $(\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2)/2$ .

Поверхности дисперсии смыкаются не только в указанных точках, но и вдоль всей границы зоны, содержащей эти точки, если только в системе имеются зеркальные плоскости, перпендикулярные решетке, которые либо параллельны, либо перпендикулярны направлению скольжения. Это утверждение проще всего доказать для ЗС с зеркальной плоскостью, перпендикулярной направлению скольжения.

Выберем ортогональную систему координат  $\zeta_1 = x, \zeta_2 = y$ . Если волновой вектор оканчивается на границе нулевой зоны ( $\beta_x = b_1/2$ ), перпендикулярной направлению скольжения, то в плоскости симметрии расположены электрические и магнитные стенки, чередующиеся между собой. Между каждыми из двух таких стенок образуется одномерно-периодическая вдоль оси  $y$  структура, которой соответствует дисперсионная характеристика  $\omega(\beta_y)$ , представляющая сечение поверхности дисперсии плоскостью  $\beta_x = b_1/2$ . При  $\beta_x = b_1/2$  возможно два варианта расположения электрических и магнитных стенок, каждому из которых соответствует в общем случае своя дисперсионная характеристика  $\omega(\beta_y)$ . Эти характеристики соответствуют пересечению плоскостью  $\beta_x = b_1/2$  двух поверхностей дисперсии. В частном случае, когда ЗС имеет скользящую плоскость симметрии, обе дисперсионные характеристики совпадают, ибо становятся физически неразличимыми одномерно-периодическими структурами, соответствующие двум различным расположениям электрических и магнитных стенок. Отсюда следует, что на линии  $\beta_x = b_1/2$  смыкаются две поверхности дисперсии. Можно показать,

что такое же смыкание порождают оси  $C_2$ , перпендикулярные направлению скольжения.

Примеры ЗС, содержащих плоскости симметрии, перпендикулярные направлению скольжения, рассмотрены в гл. 17 (см. рис. 17.10). Там же изображены изочастоты и поверхности дисперсии, иллюстрирующие смыкание этих поверхностей при соответствующих значениях  $\beta$ .

Рассмотрим теперь случай, когда зеркальная плоскость перпендикулярна оси  $y$ . При этом она параллельна направлению скольжения. Ограничим ЗС электрическими стенками, расположенными в зеркальных плоскостях так, чтобы между ними укладывалось целое число периодов  $N$ . При этом получается одномерно-периодическая структура, в которой различные типы волн, соответствующие одной и той же поверхности дисперсии, отличаются количеством полуволн  $m$ , укладывающихся между стенками. Кривые дисперсии этих типов волн можно получить как линии пересечения поверхностей дисперсии с плоскостями

$$\beta d_2 = m\pi/N. \quad (16.41)$$

Полученная таким образом одномерно-периодическая структура имеет скользящие плоскости симметрии. Каждому значению  $m$  соответствуют кривые дисперсии, смыкающиеся при  $\beta d_1 = \pi$  (см. п. 2.7). Поскольку  $N$  произвольно, на границе нулевой зоны, удовлетворяющей соотношению  $\beta d_1 = \pi$ , должно существовать бесконечное множество точек смыкания соседних поверхностей дисперсии, удовлетворяющих соотношению (16.41). Физически это означает, что при любом  $\beta d_2$  происходит смыкание полос на границе нулевой зоны, удовлетворяющей соотношению  $\beta d_1 = \pi$ .

Структура поля в системе со скользящей плоскостью удовлетворяет соотношению

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} E_r \\ -E_z \\ -H_r \\ H_z \end{bmatrix} \left[ \mathbf{r} + \frac{q_1 \mathbf{d}_1}{2} + q_2 \mathbf{d}_2, (-1)^{q_1} z \right] = \\ & = \exp \left[ -j\beta \left( \frac{q_1 \mathbf{d}_1}{2} + q_2 \mathbf{d}_2 \right) \right] \begin{bmatrix} E_r \\ E_z \\ H_r \\ H_z \end{bmatrix} (\mathbf{r}, z), \end{aligned} \quad (16.42)$$

где  $\mathbf{r}$  — радиус-вектор, лежащий в плоскости  $(\zeta_1, \zeta_2)$ ,  $q_1, q_2$  — произвольные целые числа. В скобках справа от матриц-столбцов указаны аргументы функций  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$ .

Равенство (16.42) представляет обобщение выражения (2.20) на двумерно-периодические структуры со скользящей плоскостью. Умножив (16.42) на  $\exp\{j\beta[\mathbf{r} + q_1 \mathbf{d}_1/2 + q_2 \mathbf{d}_2]\}$  можно убедиться в справедливости равенства



$$\begin{bmatrix} E_r \\ E_z \\ H_r \\ H_z \end{bmatrix}(\mathbf{r}, z) = \exp(-j\beta \mathbf{r}) \begin{bmatrix} E_{0r} \\ \exp(j\mathbf{b}_1 \mathbf{r}) E_{0z} \\ \exp(j\mathbf{b}_1 \mathbf{r}) H_{0r} \\ H_{0z} \end{bmatrix}(\mathbf{r}, z), \quad (16.43)$$

представляющего обобщение теоремы Блоха на системы со скользящей плоскостью, лежащей в плоскости решетки. Здесь  $\mathbf{E}_0$  и  $\mathbf{H}_0$  — функции координат, удовлетворяющие равенству

$$\begin{bmatrix} \mathbf{E}_0 \\ \mathbf{H}_0 \end{bmatrix}[\mathbf{r} + q_1 \mathbf{d}_1/2 + q_2 \mathbf{d}_2, (-1)^{q_1} z] = \begin{bmatrix} \mathbf{E}_0 \\ \mathbf{H}_0 \end{bmatrix}(\mathbf{r}, z).$$

Поле в системе со скользящей плоскостью можно представить суммой двух составляющих

$$\begin{bmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{H} \end{bmatrix}(\mathbf{r}, z) = \exp(-j\beta \mathbf{r}) \begin{bmatrix} \mathbf{e}_0 \\ \mathbf{h}_0 \end{bmatrix}(\mathbf{r}, z) + \exp[j(\mathbf{b}_1 - \beta) \mathbf{r}] \begin{bmatrix} \mathbf{e}_{-1} \\ \mathbf{h}_{-1} \end{bmatrix}(\mathbf{r}, z). \quad (16.44)$$

Одной составляющей соответствует волновое число нулевой пространственной гармоники, равное  $\beta$ , а другой  $\mathbf{b}_1 - \beta$ .

Амплитуда каждой составляющей представляет двояко-периодическую функцию координат,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{e}_m \\ \mathbf{h}_m \end{bmatrix}(\mathbf{r} + q_1 \mathbf{d}_1/2 + q_2 \mathbf{d}_2, z) = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_m \\ \mathbf{h}_m \end{bmatrix}(\mathbf{r}, z), \quad m = 0, -1,$$

причем вдоль координаты  $z$  период функции  $\mathbf{d}_1/2$  вдвое меньше периода структуры. Эти амплитуды выражаются через значения поля следующим образом:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{e}_m \\ \mathbf{h}_m \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{E}_{(0)} \\ \mathbf{H}_{(0)} \end{bmatrix} + \exp[j(\beta + m\mathbf{b}_1) \mathbf{d}_1/2] \begin{bmatrix} \mathbf{E}_{(1)} \\ \mathbf{H}_{(1)} \end{bmatrix} \right\} \exp[j(\beta + m\mathbf{b}_1) \mathbf{r}], \quad (16.45)$$

где  $\mathbf{E}_{(0)} = \mathbf{E}(\mathbf{r}, z)$ ,  $\mathbf{H}_{(0)} = \mathbf{H}(\mathbf{r}, z)$ ,  $\mathbf{E}_{(1)} = \mathbf{E}(\mathbf{r} + \mathbf{d}_1/2, z)$ ,  $\mathbf{H}_{(1)} = \mathbf{H}(\mathbf{r} + \mathbf{d}_1/2, z)$ .

Равенство (16.45) получается в результате решения (16.44) относительно  $\mathbf{e}_m$  и  $\mathbf{h}_m$ . Одна из составляющих (пусть  $\mathbf{e}_0$ ,  $\mathbf{h}_0$ ) имеет магнитную стенку в плоскости симметрии, а другая ( $\mathbf{e}_{-1}$ ,  $\mathbf{h}_{-1}$ ) — электрическую. В этом можно убедиться, записав (16.45) через компоненты  $e_{rm}$ ,  $e_{zm}$ ,  $h_{rm}$ ,  $h_{zm}$  и подставив в него (16.43):

$$\begin{bmatrix} e_{rm} \\ e_{zm} \\ h_{rm} \\ h_{zm} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \left\{ \begin{bmatrix} E_r \\ E_z \\ H_r \\ H_z \end{bmatrix} (\mathbf{r}, z) + (-1)^m \begin{bmatrix} E_r \\ -E_z \\ -H_r \\ H_z \end{bmatrix} (\mathbf{r}, -z) \right\} \exp[j(\boldsymbol{\beta} + m\mathbf{b}_1)\mathbf{r}].$$

Здесь учтено равенство  $\exp(jm\mathbf{b}_1\mathbf{d}_1/2) = (-1)^m$ . При  $m=0$  функции  $e_{r0}$  и  $h_{z0}$  — четные по  $z$ , а  $e_{z0}$  и  $h_{r0}$  — нечетные. Иными словами, номеру  $m=0$  соответствует магнитная стенка в плоскости скольжения, а номеру  $m=-1$  — электрическая.

Следует заметить, что область изменения  $\boldsymbol{\beta}$  в общем случае выбирается неоднозначно. В частности, можно выбрать область изменения  $\boldsymbol{\beta}$  удовлетворяющей либо неравенству  $|\boldsymbol{\beta}| \leq |\boldsymbol{\beta} + m_1\mathbf{b}_1 + m_2\mathbf{b}_2|$ , либо неравенству  $|\mathbf{b}_1 - \boldsymbol{\beta}| \leq |\boldsymbol{\beta} + m_1\mathbf{b}_1 + m_2\mathbf{b}_2|$ . Если потребовать, как обычно, чтобы выполнялось первое из двух неравенств, то перед выражением в правой части (16.42) следует поставить знаки «+». При этом номерам  $m=0$  и  $m=-1$  могут соответствовать как электрические, так и магнитные стенки. Тип стенок для различных значений  $m$ , однако, остается различным.

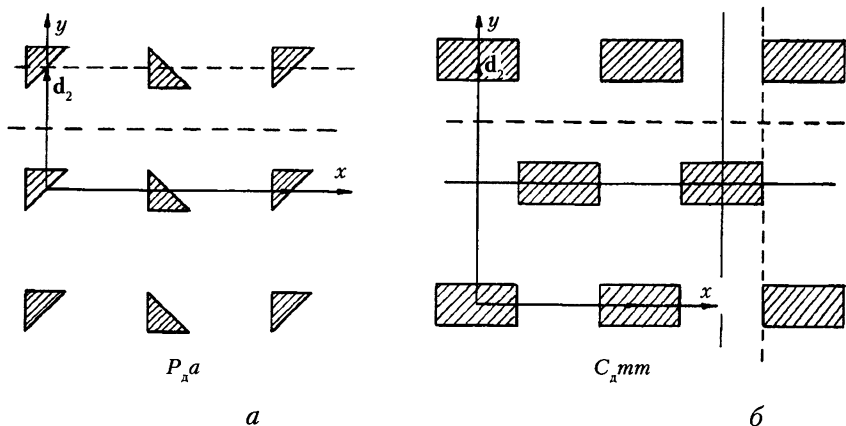
#### 16.14. Свойства, обусловленные скользящими плоскостями, перпендикулярными плоскости решетки

Такую плоскость содержат системы, принадлежащие группам  $P_da$ ,  $P_dta$ ,  $P_dba$ ,  $P_dtm$ ,  $P_d4a$ ,  $C_dtm$ ,  $C_dmm$ ,  $C_d3m$ ,  $H_d3m$ ,  $C_d6m$ . В этих системах можно выбрать прямоугольные системы координат с базисными векторами, опирающимися на узлы прямой решетки. Пусть ось  $x$  совпадает с направлением скольжения, а начало координат лежит в этой плоскости при  $y=0$  (рис. 16.16).

Скользящая плоскость  $y=0$  в ЗС, как показано в п. 16.7, порождает зеркальную плоскость  $\beta_y=0$  поверхности дисперсии. Согласно (16.22) центр нулевой зоны пересекает ось  $C2$  поверхности дисперсии. Сочетание плоскости симметрии  $\beta_y=0$  с осью  $C2$  порождает еще одну зеркальную плоскость  $\beta_x=0$ . Эти две плоскости порождают зеркальные плоскости симметрии, пересекающие границы нулевой зоны. Элементы симметрии соответствующих ЗС см. на рис. 16.10.

Следует различать два типа систем со скользящей плоскостью. В ЗС, принадлежащих группам  $P_da$ ,  $P_dta$ ,  $P_dba$  и  $P_d4a$ , скользящие плоскости не чередуются с зеркальными. В этих системах прямоугольник, опирающийся на базисные векторы  $\mathbf{d}_1$ ,  $\mathbf{d}_2$ , совпадает с ячейкой решетки (рис. 16.16). В системах, принадлежащих группам  $P_dtm$ ,  $C_dtm$ ,  $C_dmm$ ,  $C_d3m$ ,  $H_d3m$ ,  $C_d6m$ , скользящие плоскости чередуются с зеркальными. В этих ЗС прямоугольник, опирающийся на базисные векторы  $\mathbf{d}_1$  и  $\mathbf{d}_2$ , содержит две ячейки прямой решетки.

Обозначим через  $\mathbf{d}_1$  и  $\mathbf{d}_2$  базисные векторы вдоль осей  $x$  и  $y$ , соответственно. Покажем, что скользящие плоскости приводят к смыканию соседних поверхностей дисперсии. Отражению в скользящей плоскости  $\sigma_y$  соответствует замена  $x$  на  $x + \mathbf{d}_1/2$  и  $y$  на  $-y$ . Уравнение (16.25) инвариантно



**Рис. 16.16.** Выбор осей координат и базисных векторов в ЗС, принадлежащих группам  $P_{da}$  (а) и  $C_{dmm}$  (б)

относительно замены  $\mathbf{r}$  на  $\sigma_g \mathbf{r}$  лишь если вектор  $\beta$  оканчивается в плоскостях  $\beta_y = 0$  и  $\beta_y = b_2/2$ , где  $b_2 = 2\pi/d$ . При указанных значениях  $\beta_y$  уравнение (16.25) такое же, как для одномерно-периодической структуры со скользящей плоскостью симметрии. Отсюда следует, что при сдвиге фаз на периоде  $d_1$ , равном  $\pi$  ( $\beta_x = \pi/d_1 = b_1/2$ ), т. е. при  $\beta = \mathbf{b}_1/2$  и  $\beta = (\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2)/2$ , волна в системе распространяется. Для ЗС первого типа это означает смыкание поверхностей дисперсии, поскольку выбранный прямоугольник совпадает с ячейкой прямой решетки, так что точки  $\beta = \mathbf{b}_1/2$  и  $\beta = (\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2)/2$  лежат на границе нулевой зоны.

В ЗС второго типа существуют зеркальные плоскости между скользящими. В таких плоскостях можно ограничить ЗС электрическими или магнитными стенками. При этом получаются одномерно-периодические вдоль оси  $x$  ЗС со скользящими плоскостями симметрии. Это значит, что смыкаются соседние поверхности дисперсии по крайней мере при  $\beta = \mathbf{b}_1/2$  и  $\beta = (\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2)/2$ .

Примеры ЗС второго типа рассмотрены в гл. 17 и 18. На рис. 18.5 и 18.6 изображены многоэтажные ЗС типов «меандр» и «встречные штыри», принадлежащие группе симметрии  $C_{dmm}$ . На рис. 17.2, 17.3, 17.7 изображены многоярусные ЗС типа «гребенка» и «лестница», принадлежащие группе  $P_{da}$ . На этих рисунках приведены изочастоты. Видно, что соответствующие поверхности смыкаются.

Смыкание поверхностей дисперсии в рассмотренных выше ЗС происходит не только в точках  $\beta = \mathbf{b}_1/2$  и  $\beta = (\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2)/2$ , но и вдоль всей границы зоны, соединяющей эти точки. Доказательство этого утверждения (его опускаем) подобно проведенному в п. 16.13. Оно опирается на то, что граница зоны, содержащая эти точки, лежит в плоскости симметрии поверхности дисперсии.

Информацию о структуре поля можно получить только в случаях  $\beta_y = 0$  и  $\beta_y = b_1/2$ . Аналогично (16.42) имеем

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} E_{xz} \\ E_y \\ H_{xz} \\ H_y \end{bmatrix} \left[ x + \frac{q_1 d_1}{2}, (-1)^{q_1} y, z \right] = \\
 & = \exp[-j(\beta_x q_1 d_1/2)x] \begin{bmatrix} E_{xz} \\ \exp(jq_1 \mathbf{b}_1 d_1/2) E_y \\ \exp(jq_1 \mathbf{b}_1 d_1/2) H_{xz} \\ H_y \end{bmatrix} (x, y, z). \quad (16.46)
 \end{aligned}$$

Аналогично (16.44) поле в системе можно представить в виде суммы двух составляющих,

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{H} \end{bmatrix} (x, y, z) = \exp(-j\beta_x x) \begin{bmatrix} \mathbf{e}_0 \\ \mathbf{h}_0 \end{bmatrix} (x, y, z) + \\
 & + \exp[j(b_1 - \beta_x)x] \begin{bmatrix} \mathbf{e}_{-1} \\ \mathbf{h}_{-1} \end{bmatrix} (x, y, z), \quad (16.47)
 \end{aligned}$$

амплитуды которых  $\mathbf{e}_m$  и  $\mathbf{h}_m$  ( $m = 0, -1$ ) имеют период  $d_1/2$  по координате  $x$  и период  $d_2$  по координате  $y$ . Эти амплитуды выражаются через значения поля

$$\begin{bmatrix} \mathbf{E}_{(0)} \\ \mathbf{H}_{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{H} \end{bmatrix} (x, y, z), \quad \begin{bmatrix} \mathbf{E}_{(1)} \\ \mathbf{H}_{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{H} \end{bmatrix} [x + d_1/2, y, z]$$

следующим равенством:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{e}_m \\ \mathbf{h}_m \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \exp[j(mb_1 + \beta_x)x] \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{E}_{(0)} \\ \mathbf{H}_{(0)} \end{bmatrix} + \exp[j(mb_1 + \beta_x)d_1/2] \begin{bmatrix} \mathbf{E}_{(1)} \\ \mathbf{H}_{(1)} \end{bmatrix} \right\}. \quad (16.48)$$

Подставляя (16.46) в (16.48), находим

$$\begin{bmatrix} e_{mxz} \\ e_{my} \\ h_{mxz} \\ h_{my} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \exp[j(mb_1 + \beta_x)x] \left\{ \begin{bmatrix} E_{xz} \\ E_y \\ H_{xz} \\ H_y \end{bmatrix} (x, y, z) + (-1)^m \begin{bmatrix} E_{xz} \\ -E_y \\ -H_{xz} \\ H_y \end{bmatrix} (x, -y, z) \right\}, \quad m = 0, -1.$$

Последнее равенство означает, что величины  $e_{0xz}$ ,  $e_{-1y}$ ,  $h_{-1xz}$ ,  $h_{0y}$  являются четными функциями  $y$ , а  $e_{-1xz}$ ,  $e_{0y}$ ,  $h_{0xz}$  и  $h_{-1y}$  — нечетными. Иными словами,

для нулевой составляющей  $(\mathbf{e}_0, \mathbf{h}_0)$  скользящая плоскость  $y = 0$  представляет магнитную стенку, а для минус первой  $(\mathbf{e}_{-1}, \mathbf{h}_{-1})$  — электрическую.

Наряду со скользящей плоскостью  $y = 0$  в ЗС существуют скользящие плоскости  $y = q_2 d_2 / 2$ , где  $q_2$  — целые числа. Начало координат  $y = 0$  выбрано в произвольной скользящей плоскости. Отсюда следует, что любая скользящая плоскость должна представлять магнитную либо электрическую стенку по отношению к одной из двух составляющих  $[(\mathbf{e}_0, \mathbf{h}_0)$  либо  $(\mathbf{e}_{-1}, \mathbf{h}_{-1})]$ .

При  $\beta_y = 0$  все скользящие плоскости для нулевой составляющей представляют магнитную стенку, а для минус первой — электрическую. При  $\beta_y = b_2/2$  электрические и магнитные стенки по отношению к каждой из составляющих чередуются. В справедливости этих утверждений можно убедиться и непосредственными вычислениями, если учесть, что согласно теореме Блоха (16.11)

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(x, y + d_2, z) &= \exp(-j\beta_y d_2) \mathbf{E}(x, y, z), \\ \mathbf{H}(x, y + d_2, z) &= \exp(-j\beta_y d_2) \mathbf{H}(x, y, z),\end{aligned}$$

и подставить последнее равенство в (16.48). Получаем для  $\beta_y = 0$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{e}_m \\ \mathbf{h}_m \end{bmatrix} (x, y + d_2, z) = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_m \\ \mathbf{h}_m \end{bmatrix} (x, y, z)$$

и для  $\beta_y = b_2/2$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{e}_m \\ \mathbf{h}_m \end{bmatrix} (x, y + d_2, z) = - \begin{bmatrix} \mathbf{e}_m \\ \mathbf{h}_m \end{bmatrix} (x, y, z)$$

Вводя замену переменных  $y' = y + d_2/2$  и учитывая четность или нечетность компонент векторов  $\mathbf{e}_m$  и  $\mathbf{h}_m$ , убеждаемся в справедливости сделанного выше утверждения.

### 16.15. Свойства, обусловленные осями $C2_1$

Винтовые оси  $C2_1$  могут располагаться только в плоскости решетки. Отображение двумерных фигур относительно этих осей и относительно скользящих плоскостей, перпендикулярных решетке, дает один и тот же результат. Поэтому все закономерности, касающиеся поверхности дисперсии, обусловленные скользящими плоскостями (см. п. 16.14), остаются справедливыми для ЗС с осями  $C2_1$ .

### 16.16. Ортогональность нормальных волн

Поле в двумерно-периодической системе удовлетворяет теореме Блоха (16.11), которую запишем в несколько более общем виде:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{E}(\mathbf{r}, z) \\ \mathbf{H}(\mathbf{r}, z) \end{bmatrix} = \exp(-\mathbf{h}\mathbf{r}) \begin{bmatrix} \mathbf{E}_0(\mathbf{r}, z) \\ \mathbf{H}_0(\mathbf{r}, z) \end{bmatrix}. \quad (16.49)$$

Отличие от (16.11) состоит в том, что в экспоненте стоит комплексный волновой вектор  $\mathbf{h} = \boldsymbol{\alpha} + j\boldsymbol{\beta}$ . При фиксированной частоте  $\omega = \omega_s$  волновой вектор имеет непрерывный спектр значений, ибо он может оканчиваться в любой точке изочастоты. Если фиксировать направление распространения волны, ограничив ЗС, например, маталлическими плоскостями, параллельными направлению распространения, то волновой вектор сможет принимать лишь дискретный спектр значений, соответствующих различным типам волн и ЗС.

Соотношения ортогональности доказываем, исходя из леммы Лоренца (3.3),

$$\begin{aligned} - \oint_{\Sigma} ([\mathbf{E}_{s'}, \mathbf{H}_s] \pm [\mathbf{E}_s, \mathbf{H}_{s'}]) d\mathbf{s} &= j(\omega_s \pm \omega_{s'}) \int_V \varepsilon \mathbf{E}_s \mathbf{E}_{s'} dv + \\ &+ j(\omega_{s'} \pm \omega_s) \int_V \mu \mathbf{H}_s \mathbf{H}_{s'} dv + \int_V (\mathbf{J}_s \mathbf{E}_{s'} + \mathbf{J}_{s'} \mathbf{E}_s) dv, \end{aligned}$$

в которой в качестве  $V$  выбран объем ячейки периодической структуры. Индексы  $s$  и  $s'$  относятся к полям двух различных типов волн. Все рассуждения справедливы ниже как для систем без потерь, так и с потерями, которые учитываются комплексными  $\varepsilon$  и  $\mu$ . При учете потерь в металле соответствующие участки поверхности  $\Sigma$  выбираем внутри металла на такой глубине, чтобы можно было считать там поле равным нулю.

Полагаем, что поверхность  $\Sigma$ , по которой ведется интегрирование, состоит из шести плоскостей ( $\Sigma_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, 6$ ). Плоскости  $\Sigma_3$  и  $\Sigma_6$  выбираем параллельными решетке. Для систем без потерь их можно выбрать совпадающими с границами проводника. На этих границах поверхностный интеграл равен нулю. Таким образом, область интегрирования состоит из четырех плоскостей. Полагая, что сторонние токи отсутствуют ( $\mathbf{J}_s = \mathbf{J}_{s'} = 0$ ), что  $\Sigma_3(\mathbf{r}) = \Sigma_1(\mathbf{r} + \mathbf{d}_1)$ ,  $\Sigma_4(\mathbf{r}) = \Sigma_2(\mathbf{r} + \mathbf{d}_2)$ , и учитывая теорему Блоха, можно представить лемму Лоренца в следующем виде:

$$\begin{aligned} &\{\exp[-(\mathbf{h}_s + \mathbf{h}_{s'})\mathbf{d}_1] - 1\} \int_{\Sigma_1} ([\mathbf{E}_{s'}, \mathbf{H}_s] \pm [\mathbf{E}_s, \mathbf{H}_{s'}]) \mathbf{v}_1 d\mathbf{s} + \\ &+ \{\exp[-(\mathbf{h}_s + \mathbf{h}_{s'})\mathbf{d}_2] - 1\} \int_{\Sigma_2} ([\mathbf{E}_{s'}, \mathbf{H}_s] \pm [\mathbf{E}_s, \mathbf{H}_{s'}]) \mathbf{v}_2 d\mathbf{s} = \\ &= -j(\omega_s \pm \omega_{s'}) \int_V \varepsilon \mathbf{E}_s \mathbf{E}_{s'} dv - j(\omega_{s'} \pm \omega_s) \int_V \mu \mathbf{H}_s \mathbf{H}_{s'} dv. \end{aligned} \quad (16.50)$$

Здесь  $\mathbf{v}_1$  и  $\mathbf{v}_2$  — нормали к поверхностям  $\Sigma_1$  и  $\Sigma_2$ , соответственно.

В случае

$$(\mathbf{h}_s + \mathbf{h}_{s'})\mathbf{d}_1 = 2j\pi m_1 \quad \text{и} \quad (\mathbf{h}_s + \mathbf{h}_{s'})\mathbf{d}_2 = 2j\pi m_2 \quad (16.51)$$

справедливы равенства

$$\int_V \epsilon \mathbf{E}_s \mathbf{E}_{s'} dv = - \int_V \mu \mathbf{H}_s \mathbf{H}_{s'} dv, \quad (\omega_s - \omega_{s'}) \int_V (\epsilon \mathbf{E}_s \mathbf{E}_{s'} - \epsilon \mathbf{H}_s \mathbf{H}_{s'}) dv = 0,$$

из которых следует, что для двумерно-периодических систем остаются справедливыми соотношения ортогональности и нормировки (3.10)–(3.14) по объему ячейки

$$\int_V \epsilon \mathbf{E}_s \mathbf{E}_{s'} dv = 0, \quad \int_V \mu \mathbf{H}_s \mathbf{H}_{s'} dv = 0 \quad (16.52)$$

при  $\omega_s \neq \omega_{s'}$ . В случае  $\omega_s = \omega_{s'}$  вводится понятие нормы поля по объему:

$$N_{sV} = \frac{1}{2} \int_V \epsilon \mathbf{E}_s \mathbf{E}_{-s} dv = -\frac{1}{2} \int_V \mu \mathbf{H}_s \mathbf{H}_{-s} dv. \quad (16.53)$$

Здесь введены символы  $-s = s'$  для обозначения типов волн, удовлетворяющих условию (16.51) при  $\omega_s = \omega_{s'}$ . В случае распространяющихся волн ( $\mathbf{h}_s = j\beta_s$ ) норма равна средней по времени энергии, запасенной в ячейке ЗС:

$$N_{sV} = \frac{1}{2} \int_V \epsilon \mathbf{E}_s \mathbf{E}_{-s}^* dv = \frac{1}{2} \int_V \mu \mathbf{H}_s \mathbf{H}_{-s}^* dv. \quad (16.54)$$

Пусть теперь фиксирована частота ( $\omega_s = \omega_{s'}$ ). Тогда лемму Лоренца можно записать в виде

$$\begin{aligned} & \{ \exp[-(\mathbf{h}_s + \mathbf{h}_{s'}) \mathbf{d}_1] - 1 \} \int_{\Sigma_1} ([\mathbf{E}_{s'}, \mathbf{H}_s] \pm [\mathbf{E}_s, \mathbf{H}_{s'}]) \mathbf{n}_1 ds + \\ & + \{ \exp[-(\mathbf{h}_s + \mathbf{h}_{s'}) \mathbf{d}_2] - 1 \} \int_{\Sigma_2} ([\mathbf{E}_{s'}, \mathbf{H}_s] \pm [\mathbf{E}_s, \mathbf{H}_{s'}]) \mathbf{n}_2 ds = 0. \end{aligned} \quad (16.55)$$

Она представляет соотношение ортогональности по сечению ячейки. В частности, при  $(\mathbf{h}_s + \mathbf{h}_{s'}) \mathbf{d}_1 = 2j\pi m_1$ ,  $(\mathbf{h}_s + \mathbf{h}_{s'}) \mathbf{d}_2 \neq 2j\pi m_2$  ( $m_1$  и  $m_2$  — целые) справедливо соотношение ортогональности

$$\int_{\Sigma_2} ([\mathbf{E}_{s'}, \mathbf{H}_s] - [\mathbf{E}_s, \mathbf{H}_{s'}]) \mathbf{n}_2 ds = 0, \quad (16.56)$$

а при  $(\mathbf{h}_s + \mathbf{h}_{s'}) \mathbf{d}_1 \neq 2j\pi m_1$ ,  $(\mathbf{h}_s + \mathbf{h}_{s'}) \mathbf{d}_2 = 2j\pi m_2$  —

$$\int_{\Sigma_1} ([\mathbf{E}_{s'}, \mathbf{H}_s] \pm [\mathbf{E}_s, \mathbf{H}_{s'}]) \mathbf{n}_1 ds = 0. \quad (16.57)$$

Норму волны по сечению ячейки определяем соотношением

$$N_{s\Sigma} = \int_{\Sigma_1} ([\mathbf{E}_{-s}, \mathbf{H}_s] - [\mathbf{E}_s, \mathbf{H}_{-s}]) \mathbf{n}_1 ds + \int_{\Sigma_2} ([\mathbf{E}_{-s}, \mathbf{H}_s] - [\mathbf{E}_s, \mathbf{H}_{-s}]) \mathbf{n}_2 ds = 0 \quad (16.58)$$

при условии  $(\mathbf{h}_s + \mathbf{h}_{s'}) \mathbf{d}_1 = 2j\pi m_1$ ,  $(\mathbf{h}_s + \mathbf{h}_{s'}) \mathbf{d}_2 = 2j\pi m_2$ ;  $\omega_s = \omega_{s'}$  ( $s' = -s$ ).

Таким образом, рассмотрено одно из следствий периодичности структуры — ортогональность нормальных волн как по объему ячейки, так и по ее сечению. Можно записать соотношения ортогональности с учетом других свойств симметрии, что предлагается сделать самим читателям в качестве упражнений.

## Упражнения

**16.1.** Плоская волна бежит в плоскости  $(x, y)$  под углом  $\phi$  к оси  $x$  с фазовой скоростью  $v$ . Найти составляющие  $v_x$  и  $v_y$ .

**16.2.** На основе анализа уравнения дисперсии (16.19, б) трехмерно-периодической электрической цепочки исследовать возможные типы ее дисперсионных характеристик.

## Список литературы

- [1]. Агранович В. М., Гинзбург В. Л. Кристаллооптика с учетом пространственной дисперсии и теория экситонов. Изд. 2-е, перераб. и доп. М.: Наука, 1979. 432 с.
- [2]. Багавантам С., Венкатарайуду Т. Теория групп и ее применение к физическим проблемам. Под ред. Н.Н. Боголюбова. М.: ИЛ, 1959. 301 с.  
Перевод кн.: Bhagavantam S., Venkatarayudu T. Theory of groups and its application to physical problems. 2nd ed. Waltair: Andhra Univ., 1951.
- [3]. Белов Н. В. Классный метод вывода пространственных групп симметрии. Тр. ин-та кристаллографии АН СССР, 1951, вып. 6, 25–62.
- [4]. Бененсон Л. С. Фазовая скорость волн в анизотропном искусственном магнитодиэлектрике при произвольном направлении распространения. *Радиотехника и электроника*, 1959, 4(11), 1806–1815.
- [5]. Бриллюэн Л., Пароди М. Распространение волн в периодических структурах. Под ред. П.А. Разина. М.: ИЛ, 1959. 457 с.  
Перевод кн.: Brillouin L., Parodi M. Propagation des ondes dans les milieux periodiques. Paris: Masson, Dunod, 1956.
- [6]. Зейтц Ф. Современная теория твердого тела. Под ред. Г.С. Жданова. М.–Л.: ГИТТЛ, 1949. 736 с.  
Перевод кн.: Seitz F. The modern theory of solids. New York–London: McGraw Hill, 1940. 698 p.
- [7]. Иванов В. Н. К теории штыревой гребенки. *Радиотехника и электроника*, 1959, 4(4), 724–725.
- [8]. Иванов В. Н. Волноводные свойства многорядной штыревой гребенки. *Изв. вузов. Радиофизика*, 1959, 11(3), 420–422.
- [9]. Колосов Ю. А. Расчет дисперсионной характеристики двумерно-периодической системы связанных резонаторов. *Электронная техника. Сер. 1. Электроника СВЧ*, 1969. Вып. 5, 150–153.

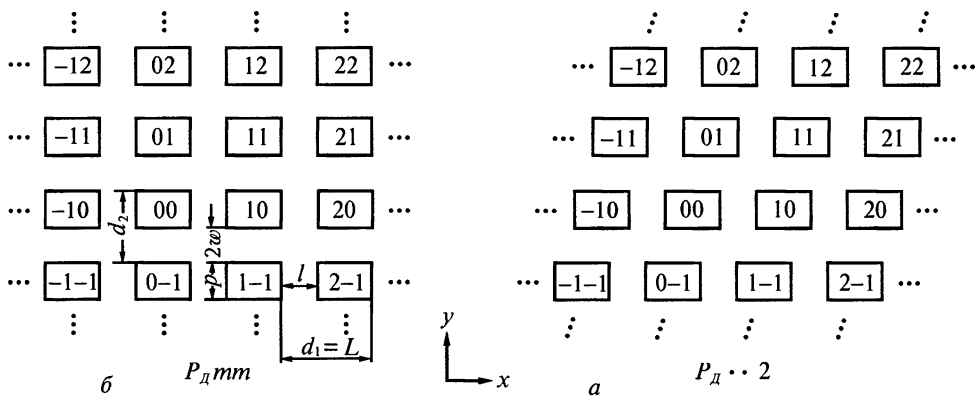


- [10]. Левченко Е. Г., Чайка В. Е. Исследование пространственно развитых замедляющих систем типа цепочки связанных резонаторов. *Изв. вузов. Радиоэлектроника*, 1971, **14**(9), 1105–1111.
- [11]. Михлин С. Г. Прямые методы в математической физике. М. : Гостехиздат, 1957. 428 с.
- [12]. Мясников В. Е. Изочастоты замедляющей системы многоэтажного типа. *Электронная техника. Сер. 1. Электроника СВЧ*, 1970. Вып. 5, 140–142.
- [13]. Пинес Б. Я. Лекции по структурному анализу. Изд. 2-е, перераб. Харьков: Изд. Харьк. унив., 1957. 455 с.
- [14]. Рвачев В. Л. Теория R-функций и некоторые ее приложения. Киев: Наук. думка, 1982. 551 с.
- [15]. Силин Р. А. К теории симметрии двумерно-периодических замедляющих систем. *Электронная техника. Сер. 1. Электроника СВЧ*, 1967, 127–148.
- [16]. Силин Р. А. Волноводные свойства двумерно-периодических систем. *Вопросы радиоэлектроники. Сер. 1. Электроника*, 1959. Вып. 4, 3–33.
- [17]. Силин Р. А. Расчет дисперсии поля типа Е в многорядной линии. *Электронная техника. Сер. 1. Электроника СВЧ*, 1969. Вып. 2, 16–22.
- [18]. Силин Р. А. О дисперсионных свойствах двумерно- и трехмерно-периодических систем (искусственные диэлектрики). *Радиотехника и электроника*, 1960, **5**(4), 688–691.
- [19]. Bloch F. Über die Quantenmechanick der Elektronen in Kristallgittern. *Z. f. Phys.*, 1920, **52**, 550–600.
- [20]. Varian Coupled Travelling Wave Tubes. Coupled Cavity Tube Products. California: Palo Alto, 1992.
- [21]. Doehler O., Mourier G. Theory of two-dimensional travelling-wave tube Microwellenrohren. Munchen, 1960. S. 97.
- [22]. Резонансное рассеяние волн. Дифракционные решетки. Т. 1, 2. В. П. Шестопалов, А. А. Кириленко, С. А. Масалов, Ю. К. Сиренко. Киев: Наук. думка, 1986. 232 с.

# Многорядные штыревые замедляющие системы

## 17.1. Метод многопроводных линий

Среди двумерно-периодических штыревых ЗС различают многорядные и многоэтажные ЗС. Пусть имеется двумерно-периодическая штыревая ЗС. Называем ее многорядной, если она содержит хотя бы один отрезок двумерно-периодической многопроводной линии, например, изображенной на рис. 17.1, и многоэтажной, если она содержит отрезки только одномерно-периодических линий. Многоэтажные ЗС рассмотрены в гл. 18.



**Рис. 17.1.** Поперечное сечение одноступенчатых двумерно-периодических многопроводных линий, не имеющих (а) и имеющих (б) плоскости симметрии, перпендикулярные осям  $x$  и  $y$

Ограниченные с двух сторон области этих ЗС (заканчивающиеся стенками либо замкнутые в цилиндр) условимся называть также многорядными и многоэтажными ЗС, соответственно. Одномерно-периодические ЗС можно рассматривать как частные случаи многорядных или многоэтажных ЗС.

С точки зрения применения в электронных приборах многорядные ЗС отличаются от многоэтажных тем, что первые «разрезают» электронный поток на отдельные пучки, а вторые могут не разрезать. Поэтому первые более удобны для электронных приборов типа «О», а вторые — для приборов типа «М».

Расчет как многорядных, так и многоэтажных ЗС ведем методом многопроводных линий, т.е. в предположении, что в однородной области распространяется  $LEM$ -волна. Этот метод, описанный в гл. 13 для однорядных систем, обобщается ниже на многорядные ЗС [8, 10]. Полагаем, что длина волны

существенно превышает размеры поперечного сечения ячейки многопроводной линии. Ограничиваемся случаями, в которых линия расположена в свободном пространстве. При этом волновое число для волн, бегущих вдоль линии, не зависит от распределения потенциалов по проводникам и равно волновому числу  $k$  свободного пространства.

Следует заметить, что характеристики как многорядных, так и многоэтажных ЗС могут рассчитываться проекционным методом, описанным в гл. 10. Этот метод более точен, чем описанный ниже, но существенно более трудоемок.

Рассматриваем одноступенчатую многопроводную линию, т.е. линию, содержащую в каждой ячейке по одному проводнику (штырю). Пусть потенциал  $U_{s_1 s_2}$  и ток  $I_{s_1 s_2}$  штыря с номером  $s_1, s_2$  связаны с потенциалом  $U_{00}$  и током  $I_{00}$  на нулевом штыре следующим соотношением:

$$\begin{bmatrix} U_{s_1 s_2} \\ I_{s_1 s_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_{00} \\ I_{00} \end{bmatrix} \exp[-j(s_1 \varphi_1 + s_2 \varphi_2)]. \quad (17.1)$$

При таком распределении равенство (13.7 б) можно переписать в следующем виде:

$$\begin{bmatrix} U(0) \\ I(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos kz & [j/M(\varphi_1, \varphi_2) \sin kz] \\ jM(\varphi_1, \varphi_2) \sin kz & \cos kz \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U(z) \\ I(z) \end{bmatrix}. \quad (17.2)$$

В отличие от (13.7) здесь ось  $z$  направлена вдоль штырей, а волновое число  $\beta_y$  заменено на волновое число  $k$  свободного пространства. По аналогии с (13.9) волновую проводимость  $M(\varphi_1, \varphi_2)$  многопроводной линии можно выразить либо через емкостные коэффициенты

$$M(\varphi_1, \varphi_2) = c \sum_{s_1=-\infty}^{\infty} \sum_{s_2=-\infty}^{\infty} \mu_{s_1 s_2} \exp[-j(s_1 \varphi_1 + s_2 \varphi_2)], \quad (17.3, a)$$

либо через частичные емкости

$$\begin{aligned} M(\varphi_1, \varphi_2) &= 4c \left\{ \sum_{s_1=1}^{\infty} \gamma_{s_1 0} \sin^2(s_1 \varphi_1 / 2) + \sum_{s_1=-\infty}^{\infty} \sum_{s_2=1}^{\infty} \gamma_{s_1 s_2} \sin^2[(s_1 \varphi_1 + s_2 \varphi_2) / 2] \right\} = \\ &= 4c \left\{ \sum_{s_2=1}^{\infty} \gamma_{0 s_2} \sin^2(s_2 \varphi_2 / 2) + \sum_{s_1=1}^{\infty} \sum_{s_2=-\infty}^{\infty} \gamma_{s_1 s_2} \sin^2[(s_1 \varphi_1 + s_2 \varphi_2) / 2] \right\}. \end{aligned} \quad (17.3, б)$$

При этом аналогично (13.3)

$$\mu_{s_1 s_2} = -\gamma_{s_1 s_2} \quad \text{при} \quad s_1 \neq 0, \quad \text{либо} \quad s_2 \neq 0, \quad (17.4, a)$$

$$\mu_{00} = \sum_{s_1=-\infty}^{\infty} \sum_{s_2=-\infty}^{\infty} \gamma_{s_1 s_2}. \quad (17.4, б)$$

Частичная емкость  $\gamma_{00} = 0$ , так как у многорядной линии в отличие от однорядной нет боковой стенки. Емкостные коэффициенты и частичные емкости удовлетворяют соотношениям, аналогичным (13.2 б):

$$\mu_{s_1 s_2} = \mu_{-s_1 -s_2}, \quad \gamma_{s_1 s_2} = \gamma_{-s_1 -s_2}. \quad (17.5)$$

Из (17.3) следует, что волновая проводимость одноступенчатой многопроводной линии удовлетворяет равенствам

$$\begin{aligned} M(\varphi_1, \varphi_2) &= M(2\pi m_1 + \varphi_1, 2\pi m_2 + \varphi_2), \\ M(m_1\pi + \varphi_1, m_2\pi + \varphi_2) &= M(m_1\pi - \varphi_1, m_2\pi - \varphi_2), \end{aligned} \quad (17.6)$$

где  $m_1$  и  $m_2$  — произвольные целые числа.

Если каждый штырь пересекается плоскостью симметрии так, что либо  $\gamma_{s_1 s_2} = \gamma_{s_1 -s_2}$ , либо  $\gamma_{s_1 s_2} = \gamma_{-s_1 s_2}$ , то волновую проводимость можно записать в виде

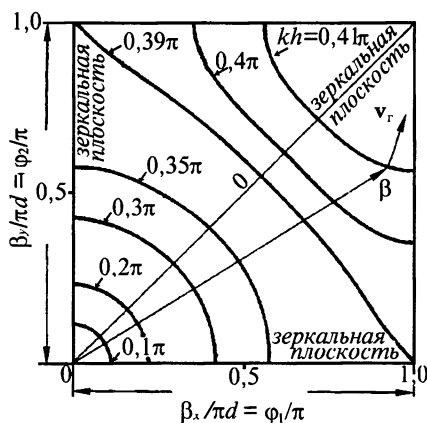
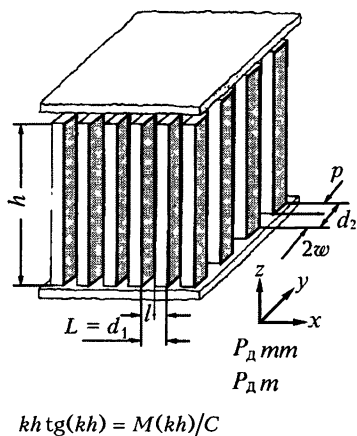
$$\begin{aligned} M(\varphi_1, \varphi_2) &= 4c \left\{ \sum_{s_1=1}^{\infty} \gamma_{s_1 0} \sin^2(s_1 \varphi_1 / 2) + \sum_{s_2=1}^{\infty} \gamma_{0 s_2} \sin^2(s_2 \varphi_2 / 2) + \right. \\ &\left. + 2 \sum_{s_1=1}^{\infty} \sum_{s_2=1}^{\infty} \gamma_{s_1 s_2} \left[ \sin^2(s_1 \varphi_1 / 2) \cos^2(s_2 \varphi_2 / 2) + \cos^2(s_1 \varphi_1 / 2) \sin^2(s_2 \varphi_2 / 2) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (17.7)$$

Она удовлетворяет равенствам

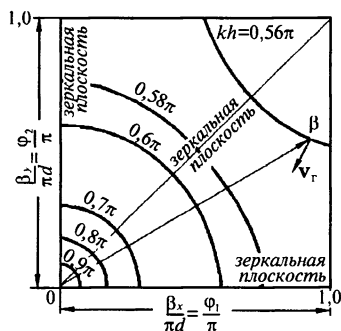
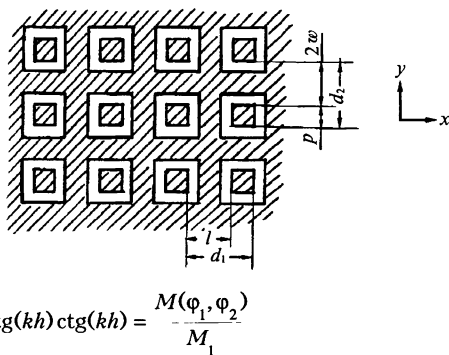
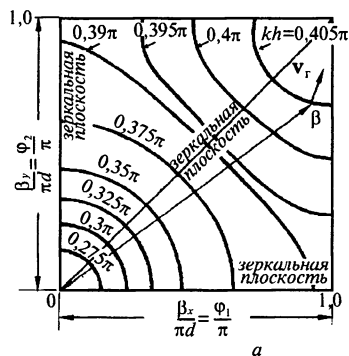
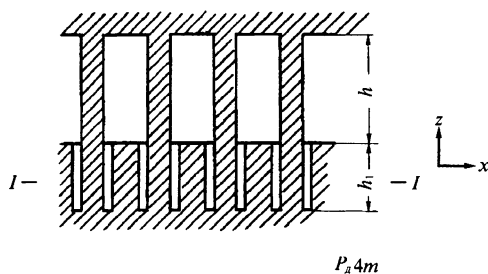
$$M(\varphi_1, \varphi_2) = M(\varphi_1, -\varphi_2) = M(-\varphi_1, \varphi_2) \quad (17.8)$$

Результаты расчета волновых проводимостей для некоторых типов многопроводных линий приведены в работах [4, 5].

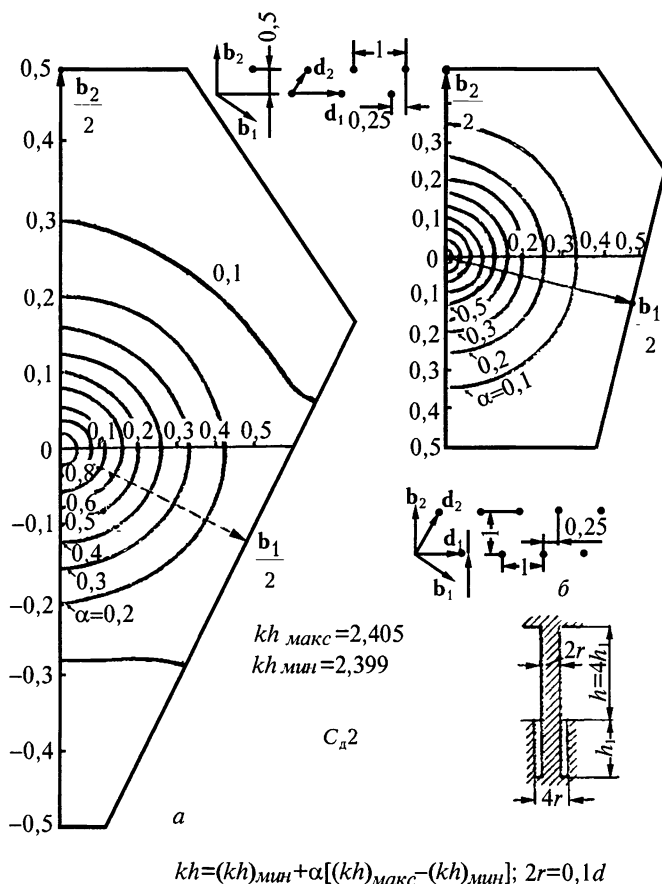
Выражения (17.2) отличаются от (13.7) только тем, что волновая проводимость  $M(\varphi_1, \varphi_2)$  зависит от двух сдвигов фаз  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  между соседними штырями в двух направлениях. Расчет дисперсии как однорядных, так и многорядных одноступенчатых ЗС производится одинаково. Уравнения дисперсии однорядных ЗС остаются справедливыми для многорядных, если заменить волновые проводимости  $M(\varphi)$  на  $M(\varphi_1, \varphi_2)$ . В частности, для многорядной гребенки (рис. 17.2) справедливо уравнение под рис. 13.2, а для многорядной лестницы (рис. 17.3 и 15.4) — уравнение под рис. 13.3. Для ЗС, изображенных на рис. 17.5 и 17.6, уравнения дисперсии получаются аналогичным образом. На этих же рисунках приведены эквивалентные схемы, изохастоты и уравнения дисперсии соответствующих ЗС.



**Рис. 17.2.** Многорядная гребенка, ее уравнение дисперсии и изочастоты, рассчитанные при  $d_1 = d_2 = 1$ ,  $l = p = 2w = 0,5$  и построенные в четверти нулевой зоны ( $\beta_x > 0$ ,  $\beta_y > 0$ )



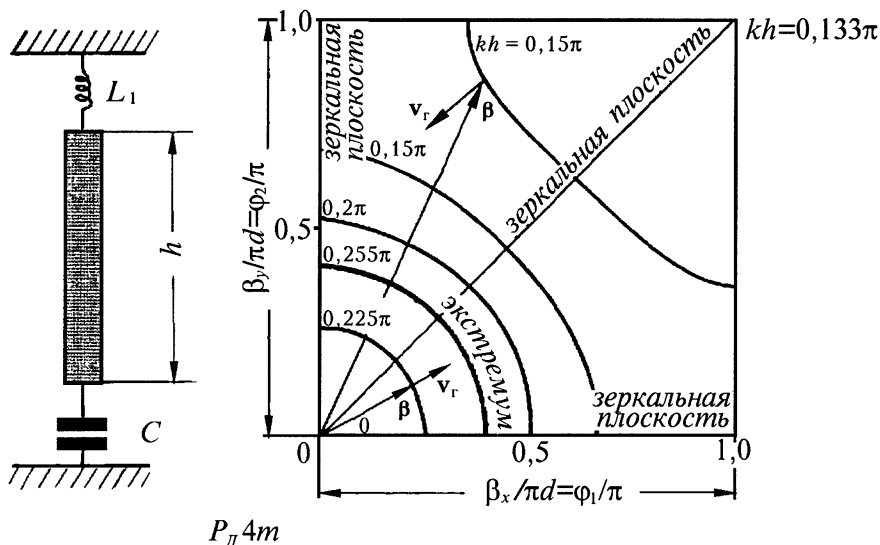
**Рис. 17.3.** Многорядная лестница с резонаторами, ее уравнение дисперсии и изочастоты, рассчитанные для размеров  $d_1 = d_2 = 1$ ,  $p = l = 2w = 0,5$ ,  $h_1 = 2h_2$  (а) и  $h_1 = 0,5h_2$  (б) и построенные в четверти нулевой зоны



**Рис. 17.4.** Изочастоты двух многорядных лестниц (а) и (б) с косой решеткой, построенные в половине нулевой зоны

Характерной особенностью изочастот гребенки служит то, что при  $(\beta_x, \beta_y) = (0, 0)$  частота равна нулю. Рассчитанная гребенка имеет ось  $S_4$ . Такой же симметрией обладают изочастоты. При малых  $\beta$  изочастоты представляются окружностями.

На рис. 17.3 и 17.4 изображены лестницы с резонаторами и их изочастоты, рассчитанные при различных соотношениях размеров штырей (с прямоугольной и круглой формой сечения штырей, с прямоугольной и косой решетками). Изочастоты лестницы с резонаторами, как и гребенки, при малых значениях  $\beta$  могут быть либо эллипсами, либо окружностями в зависимости от соотношения размеров. В отличие от гребенки в лестнице с резонаторами угол между направлениями фазовой и групповой скоростей может быть как меньше  $\pi/2$  (при  $h_1 > h$ ), так и больше  $\pi/2$  (при  $h_1 < h$ ). Системы с косой решеткой (рис. 17.4) не содержат плоскостей симметрии,



**Рис. 17.5.** Изочастоты многорядной ЗС, у которой эквивалентной схемой одной неоднородной области служит индуктивность  $\hat{L}_1 = L/h\mu_0 = 0,5$ , а другой — емкость  $\hat{C} = C/h\epsilon_0 = 0,5$ , рассчитанные по уравнению

$$\operatorname{tg}(kh) = \left[ (kh\hat{L})^{-1} - kh\hat{C} \right] / \hat{M}(\varphi_1, \varphi_2) [1 + (\hat{C}/\hat{L})]$$

при  $d_1 = d_2 = 1$ ;  $l = p = 2w = 0,5$  и построенные в четверти нулевой зоны

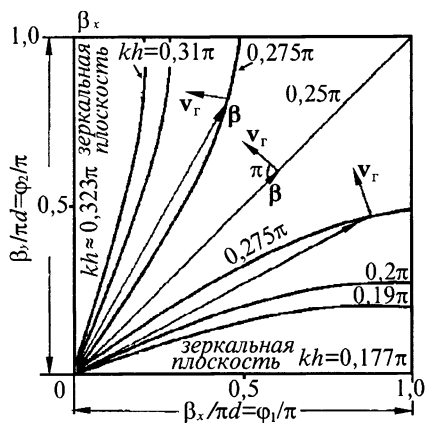
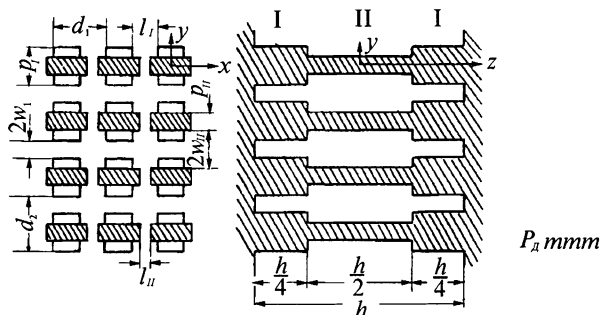
перпендикулярных решетке. Тем не менее в пределах точности расчета нет оснований утверждать, что изочастоты пересекают границы зон не под прямым углом. Иными словами, для этих систем остается справедливой формула Вульфа — Брэггов.

ЗС, изображенная на рис. 17.5, отличается тем, что для нее частота достигает максимума не только в отдельных точках на границе нулевой зоны, но и на окружности  $\beta = \beta_0$  внутри зоны. При  $\beta > \beta_0$  угол между фазовой и групповой скоростями больше  $\pi/2$ , а при  $\beta < \beta_0$  он меньше  $\pi/2$ . Аналогичное явление имеет место в одномерно-периодических ЗС (рис. 5.4, 5.7, 9.11, 12.3), когда между ячейками существует как емкостная, так и индуктивная связь.

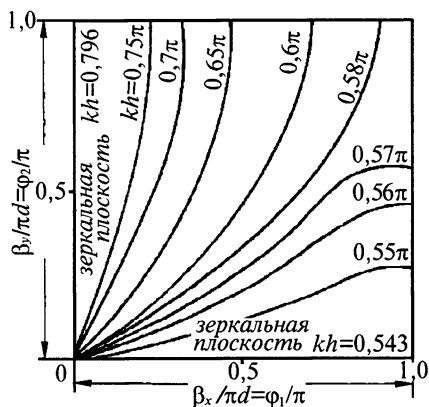
Изочастоты лестниц, изображенные на рис. 17.6 и 17.7, в зависимости от соотношения размеров могут выходить из начала координат (рис. 17.6, а, б), представлять окружности или эллипсы с центром в начале координат (рис. 17.7), или быть похожими на гиперболы (рис. 17.6, в, г).

## 17.2. Об особенностях изочастот многорядных лестниц

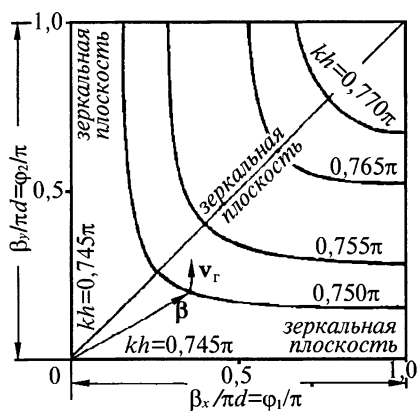
Форма изочастот лестниц (рис. 17.6 и 17.7) чувствительна к соотношению ее размеров, причем полосы пропускания лежат в узкой полосе частот. Возникает вопрос, не получены ли эти результаты из-за неточностей вычислений?



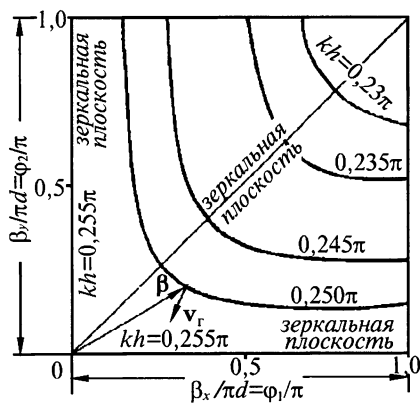
a



б



в



г

**Рис. 17.6.** Многорядная ЗС типа «лестница» с проводниками прямоугольного сечения и ее изочастоты в четверти нулевой зоны, рассчитанные по уравнению  $\text{tg}^2(kh/4) = M_I(\varphi_1, \varphi_1)/M_{II}(\varphi_1, \varphi_1)$  при размерах, указанных в таблице.

	$d_1 - d_2$	$l_I$	$l_{II}$	$2 w_I$	$2 w_{II}$
a	1	0,1	0,5	0,5	0,1
б	1	0,5	0,1	0,5	0,3
в	1	0,1	0,5	0,1	0,5
г	1	0,5	0,1	0,5	0,1



Поэтому ниже проведен качественный анализ изочастот лестницы. Ее уравнение дисперсии имеет вид

$$\Omega(\omega) = M_I(\varphi_1, \varphi_2) / M_{II}(\varphi_1, \varphi_2), \quad (17.9, a)$$

где  $\Omega(\omega)$  — некоторая функция частоты (см., например, уравнение в подписи к рис. 17.6). Волновые проводимости, входящие в уравнение дисперсии, определяются формулой (17.7).

Рассмотрим различные случаи. Пусть ЗС принадлежит группе  $P_{dmm}$ . Она содержит плоскости симметрии и оси  $C_2$ , как на рис. 17.6. Пренебрегая в (17.7) всеми частичными емкостями кроме  $\gamma_{10}$  и  $\gamma_{01}$ , получим уравнение дисперсии в виде

$$\Omega(\omega) = \frac{\gamma'_{10} \sin^2(\varphi_1/2) + \gamma'_{01} \sin^2(\varphi_2/2)}{\gamma''_{10} \sin^2(\varphi_1/2) + \gamma''_{01} \sin^2(\varphi_2/2)}, \quad (17.9, б)$$

которое справедливо при  $\gamma'_{10}/\gamma'_{01} \neq \gamma''_{10}/\gamma''_{01}$ .

Чтобы исследовать структуру изочастот при малых  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  заменим синусы их аргументами. Получим уравнение изочастот

$$[\gamma'_{10} - \Omega(\omega)\gamma''_{10}]\varphi_1^2 + [\gamma'_{01} - \Omega(\omega)\gamma''_{01}]\varphi_2^2 = 0.$$

Оно описывает точку  $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$ , если коэффициенты при  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  имеют одинаковый знак, и пару прямых, проходящих через начало координат, если эти коэффициенты имеют противоположные знаки. Решение  $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$  является лишним и получилось в результате умножения обеих частей равенства (17.9, б) на ноль. Таким образом, вблизи начала координат изочастоты представляют семейство прямых (рис. 17.6, а, б), пересекающих начало координат. Угловые коэффициенты прямых зависят от частоты  $\omega$ .

Изочастоты, подобные изображенным на рис. 17.6, а, б, известны в кристаллооптике и соответствуют так называемым кулоновским экситонам ([1], с. 25), т. е. таким колебаниям, при которых электрическое поле при  $\beta \rightarrow 0$  параллельно вектору  $\beta$ . Разным направлениям  $\beta$  соответствуют различные частоты.

В случае  $\gamma'_{10}/\gamma'_{01} = \gamma''_{10}/\gamma''_{01}$  правая часть (17.9 б) представляет константу, так что недостаточно учитывать только частичные емкости  $\gamma_{10}$  и  $\gamma_{01}$ . Ради простоты ограничимся рассмотрением систем с осью  $C_4$ , для которых  $\gamma'_{10}/\gamma'_{01} = \gamma''_{10}/\gamma''_{01} = 1$ .

Покажем, что вблизи начала координат изочастоты лестниц с осью  $C_4$  не могут представлять кривые второго порядка. Для этого удержим в разложении  $M(\varphi_1, \varphi_2)$  члены, имеющие степени  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  не ниже второй. Получим

$$M(\varphi_1, \varphi_2) = (\varphi_1^2 + \varphi_2^2)4c \left\{ \sum_{s=1}^{\infty} (\gamma_{s0} + 2\gamma_{ss})(s/2)^2 + \right. \\ \left. + 2 \sum_{s_2=s_1+1}^{\infty} \sum_{s_1=1}^{\infty} \gamma_{s_1 s_2} [(s_1/2)^2 + (s_2/2)^2] \right\}. \quad (17.10)$$

Поскольку сдвиги фаз входят лишь в общий множитель  $(\varphi_1^2 + \varphi_2^2)$ , они сокращаются в уравнении дисперсии (17.9, а). Поэтому для учета зависимости частоты от  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  в разложении  $M(\varphi_1, \varphi_2)$  следует учитывать степени  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  выше второй. Учитывая только емкости  $\gamma_{10} = \gamma_{01}$  и  $\gamma_{11}$  (остальные емкости существенно меньше) и ограничиваясь в разложении степенями сдвигов фаз не выше четвертой получим

$$M(\varphi_1, \varphi_2) = 4c \left\{ \left[ \varphi_1^2 + \varphi_2^2 - (\varphi_1^4/12) - (\varphi_2^4/12) \right] \gamma_{10}/4 + \right. \\ \left. + \left[ \varphi_1^2 + \varphi_2^2 - (\varphi_1^4/12) - (\varphi_2^4/12) - (\varphi_1^2 \varphi_2^2/4) \right] \gamma_{11}/2 \right\} \quad (17.11)$$

Подставляя (17.11) в (17.9 а), получим

$$(A + 2B) \left[ \varphi_1^2 + \varphi_2^2 - (\varphi_1^2 + \varphi_2^2)/12 \right] + (A - B) \varphi_1^2 \varphi_2^2/6 = 0, \quad (17.12)$$

где

$$A = \gamma_{10}^I - \gamma_{10}^{II} \Omega(\omega) \quad B = \gamma_{11}^I - \gamma_{11}^{II} \Omega(\omega)$$

Вводя замену  $\varphi_1 = r \cos \theta$ ,  $\varphi_2 = r \sin \theta$ , находим уравнение изочастот в полярных координатах:

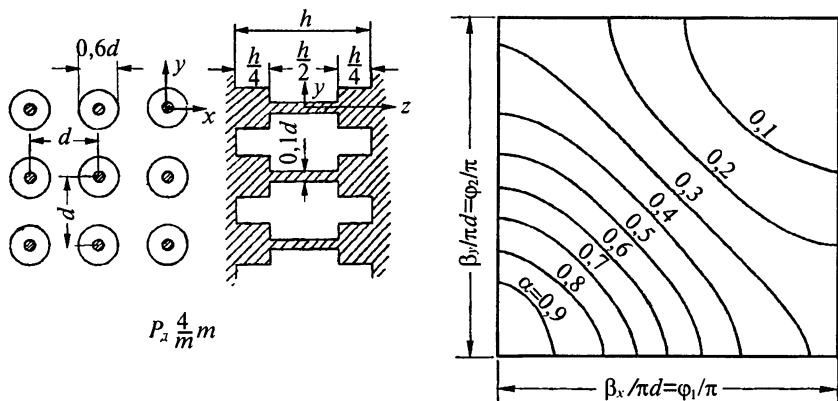
$$r^2 = 12 / \left\{ 1 - [(A - B) \sin^2 2\theta / (2A + 4B)] \right\}. \quad (17.13)$$

Коэффициент  $a = (A - B)/(2A + 4B)$  зависит только от частоты, так что для каждой частоты  $\omega$  уравнение (17.13) описывает свою кривую. Как и должно быть в системах с осью С4, уравнение (17.13) определяет изочастоты, симметричные относительно плоскостей  $\theta = 0, \pm\pi/2$  и  $\pm\pi/4$ , поскольку

$$\sin^2 2\theta = \sin^2(-2\theta) = \sin^2[2(\pi - \theta)] = \sin^2\{2[(\pi/2) - \theta]\}.$$

При  $\theta = 0, \pm\pi/2, \pm\pi$  всегда  $r = 2\sqrt{3}$  при любой частоте. В зависимости от величины и знака коэффициента  $a$  вид изочастот вблизи начала координат может быть различным (рис. 17.8). В случае  $a > 0$  изочастоты лежат в области  $r > 2\sqrt{3}$ , которая соответствует значениям  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ , превышающим  $\pi$ . Следовательно, для  $a > 0$  все рассуждения неверны, и необходимо учитывать более высокие степени  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ . В случае  $a \leq 0$  изочастоты лежат в области  $r \leq 2\sqrt{3}$ , так что при достаточно малых  $r$  формула (17.13) справедлива. Ей соответствуют изочастоты реальных ЗС, приведенные на рис. 17.6.

Изочастоты на рис. 17.7 при малых  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  похожи на кривые второго порядка, вместе с тем выше показано, что они не могут быть кривыми второго порядка. Проведенный выше анализ также не привел к изочастотам, изображенным на рис. 17.7, так как кривая 1 при  $a < 0$  на рис. 17.8 лежит в области больших  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ . Дело в том, что при анализе учитывались емкости  $\gamma_{10}$  и  $\gamma_{11}$  только между близлежащими штырями, что



**Рис. 17.7.** Многорядная ЗС типа «лестница» с проводниками круглого сечения и ее изочастоты в четверти нулевой зоны, рассчитанные для значений

$$kh = (kh)_{\min} + \alpha[(kh)_{\max} - (kh)_{\min}], \quad (kh)_{\min} = 0.587\pi, \quad (kh)_{\max} = 0.873\pi$$

противоречит исходным предположениям. Такой анализ справедлив, когда дальние штыри экранированы друг от друга, т.е. когда сечения штырей достаточно велики. На рис. 17.7 диаметр штырей в средней части равен 0,1 периода. При этом уже нельзя пренебрегать частичными емкостями между дальними штырями. Ниже проводится анализ с учетом всех частичных емкостей.

Разложив волновую проводимость по  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  в двойной ряд Маклорена и удерживая слагаемые не выше четвертой степени, получим

$$M(\varphi_1, \varphi_2) = C(\varphi_1^2 + \varphi_2^2) - (A + 2B)(\varphi_1^4 + \varphi_2^4)/3 + 2(A - B)\varphi_1^2\varphi_2^2/3, \quad (17.14)$$

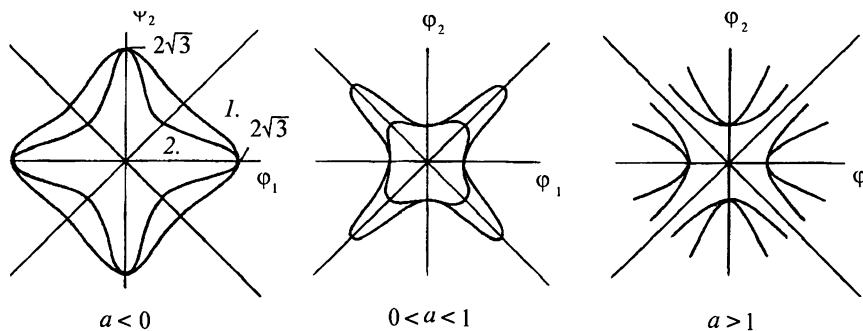
где

$$\begin{aligned} A &= 4c \sum_{s=1}^{\infty} \gamma_{s0} (s/2)^4, \\ B &= 4c \sum_{s=1}^{\infty} \gamma_{ss} (s/2)^4 + 4c \sum_{s_2=s_1+1}^{\infty} \sum_{s_1=1}^{\infty} \gamma_{s_1s_2} [(s_1/2)^4 + (s_2/2)^4], \\ C &= 4c \sum_{s=1}^{\infty} (\gamma_{s0} + 2\gamma_{ss}) (s/2)^2 + 4c \sum_{s_2=s_1+1}^{\infty} \sum_{s_1=1}^{\infty} \gamma_{s_1s_2} [(s_1/2)^2 + (s_2/2)^2]. \end{aligned}$$

Вводя обозначения

$$\begin{aligned} a &= 2[A_I - B_I - (A_{II} - B_{II})\Omega(\omega)]/[C_I - C_{II}\Omega(\omega)], \\ b &= 4[A_I + 2B_I - (A_{II} + 2B_{II})\Omega(\omega)]/[C_I - C_{II}\Omega(\omega)], \end{aligned}$$

$$\varphi_1 = r \cos \theta, \quad \varphi_2 = r \sin \theta,$$



**Рис. 17.8.** Вид изочастот систем с осью  $C4$  вблизи начала координат ( $\varphi_1, \varphi_2 \ll \pi$ ) при различных значениях коэффициента  $a$

можем записать уравнение дисперсии (17.8 а) в виде, аналогичном (17.13):

$$r^2 = 12/(b - a \sin^2 2\theta). \quad (17.15)$$

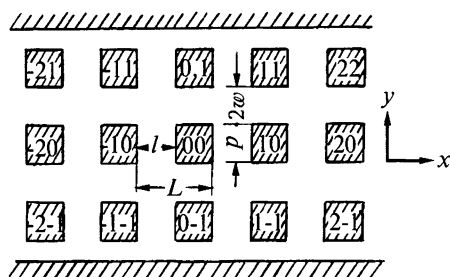
Оно отличается от (17.13) тем, что единица в знаменателе заменена величиной  $b$ , которая может быть сколь угодно большой и, следовательно, величина  $r$  может быть сколь угодно малой. При  $a < 0$  уравнение дисперсии описывает кривые, аналогичные изображенным на рис. 17.8. Эти кривые имеют право не сливаться при  $\theta = 0, \pm\pi/2, \pm\pi$ , поскольку в общем случае величина  $b$  зависит от частоты.

Таким образом, при малых сдвигах фаз изочастоты на рис. 17.8 представляются кривыми четвертого порядка и получаются лишь при учете емкостей между достаточно удаленными штырями.

### 17.3. Сопротивление связи

При расчете сопротивления связи многорядных ЗС для простоты ограничимся рассмотрением систем с прямоугольными ячейками, содержащих плоскости симметрии  $y = \text{const}$ . При этом половина плоскостей симметрии пересекает штыри, а другая половина не пересекает.

Рассмотрим ЗС, ограниченную идеально проводящими стенками (рис. 17.9), расположенными в плоскостях симметрии и содержащую целое число периодов  $N$  вдоль координаты  $y$ . Поле в такой системе можно представить в виде суперпозиции двух волн с потенциалами на штырях, распределенными по закону



**Рис. 17.9.** Поперечное сечение трехрядной штыревой ЗС

$$\exp[-j(q_1\varphi_1 + q_2\varphi_2)] \quad \text{и} \quad \exp[-j(q_1\varphi_1 - q_2\varphi_2)] \quad (17.16, a)$$

При этом амплитуда потенциала  $U_{q_2}$  зависит от номера ряда. Используя (17.16, а), учитывая тождество  $M(\varphi_1, \varphi_2) \equiv M(\varphi_1, -\varphi_2)$ , обусловленное симметрией системы, и что электрическая  $W_{E_0}$  и магнитная  $W_{H_0}$  энергии, запасенные в одном периоде (вдоль  $x$ ) однородной области, определяются равенствами

$$W_{E_0} = hM(\varphi_1, \varphi_2)(\sigma/4c) \sum_{q_2} |U_{q_2}|^2, \quad W_{H_0} = hM(\varphi_1, \varphi_2)(\sigma_H/4c) \sum_{q_2} |U_{q_2}|^2,$$

аналогичными приведенным в п. 14.2. Коэффициенты  $\sigma$  и  $\sigma_H$  в этих равенствах определяются распределениями потенциала и тока по высоте штырей  $h$ , соответственно. Выражения для них имеют вид (14.6) и (14.8).

Амплитуды потенциалов штырей зависят от номера  $q_2$ ,

$$U_{q_2} = U_0 \sin[(\pi m_2 q_2/N) + \chi_0], \quad (17.16, б)$$

где  $q_2$  — номер ряда штырей, начинающегося от ближайшего ( $q_2 = 0$ ) к одной из стенок,  $m_2$  — число полуволн поля между стенками,  $\chi_0 = 0$  и  $0 < q_2 \leq N$ , если проводящие стенки, ограничивающие ЗС, пересекают ряд штырей, и  $\chi_0 = \pi m_2/2N$ ,  $0 \leq q_2 < N$ , если они не пересекают штыри. При этом сумма, входящая в выражения для  $W_{E_0}$  и  $W_{H_0}$ , имеет вид

$$\sum_{q_2} |U_{q_2}|^2 = N|U_0|^2/\delta, \quad (17.16, в)$$

где  $\delta = 2$  при  $\varphi_2 \neq 0$  и  $\varphi_2 \neq \pi$ ,  $\delta = 1$  при  $\varphi_2 = 0$  или  $\varphi_2 = \pi$ .

Выражения для энергии, запасенной в ячейке однородной области, т. е. многопроводной линии, можно записать в виде

$$W_{E_0} = hM(\varphi_1, \varphi_2)(\sigma/4c\delta)N|U_0|^2, \quad W_{H_0} = hM(\varphi_1, \varphi_2)(\sigma_H/4c\delta)N|U_0|^2.$$

Предполагая, что вдоль каждого ряда движется касающийся штырей электронный поток шириной  $h$ , можно вычислить сопротивление связи по формуле

$$K_{св} = \Phi(\varphi_1)|U_0|^2\sigma/\hat{W}, \quad (17.17)$$

где

$$\Phi(\varphi_1) = 120\pi F(\varphi_1)(c/v_T)(d/h), \quad \hat{W} = 240\pi c\delta W/h,$$

аналогичной (14.7). При выводе (17.17) предполагается, что коэффициент  $F(\varphi_1)$  не зависит ни от номера ряда, ни от распределения потенциалов по рядам. Кроме того, учтено равенство (17.16, в). Величина  $W$  представляет полную энергию, запасенную в ячейке ЗС.

Величина  $W$  складывается из энергий в однородной области (в многопроводной линии) и в неоднородной области. Для расчета энергии в неоднородной области необходимо решать электродинамическую задачу, что достаточно сложно. Поэтому ею часто пренебрегают. Расчет сопротивления связи

упрощается, если в неоднородной области запасается только электрическая или только магнитная энергия. Примером ЗС, в неоднородной области которой запасается только электрическая энергия, может служить ЗС типа «гребенка». Повторяя рассуждения, сделанные при выводе выражения (14.10) для сопротивления связи однорядной ЗС, получим выражение для  $N$ -рядной системы:

$$K_{\text{св}} = \frac{\Phi(\varphi_1)}{N\tilde{M}(\varphi_1, \varphi_2)} \frac{2kh - \sin(2kh)}{2kh + \sin(2kh)}. \quad (17.18)$$

Оно отличается от (14.10) тем, что в знаменателе появился множитель  $N$ , а волновая проводимость  $\tilde{M}(\varphi)$  заменена на  $\tilde{M}(\varphi_1, \varphi_2) = (\mu_0/\epsilon_0)^{1/2} M(\varphi_1, \varphi_2)$ . Полученный результат при сделанных выше допущениях справедлив для произвольных многорядных ЗС. Их сопротивление связи рассчитывается по формулам, полученным для однорядных ЗС, если его поделить на число рядов  $N$  и заменить  $\tilde{M}(\varphi)$  на  $\tilde{M}(\varphi_1, \varphi_2)$ .

Если электронный поток, движущийся вдоль оси  $x$ , имеет конечную толщину в направлении  $y$ , заполняя все пространство взаимодействия, то выражения (17.17) и (17.18) следует умножить на коэффициент

$$\sigma_y = \frac{1}{2} \left[ \frac{\text{ch}(\varphi_1 2w/L) - \cos \varphi_2}{(\varphi_1 2w/L) \text{sh}^2(\varphi_1 2w/L)} + \frac{\cos \varphi_2 \text{ch}(\varphi_1 2w/L) - 1}{\text{sh}^2(\varphi_1 2w/L)} \right], \quad (17.19)$$

получающейся в результате усреднения по  $y$  квадрата напряженности  $E_x^2$  в пространстве взаимодействия. Например, в областях  $p/2 < |y| < p/2 + w$  и  $3p/2 + 2w < |y| < 3p/2 + 3w$  на рис. 17.9.

В самом деле, выбрав в каждом пространстве взаимодействия свое начало координат  $y = 0$ , можно представить поле каждой пространственной гармоники в  $q_2$ -мерном пространстве взаимодействия в виде

$$E_{xq_2}(y) = A_{q_2} \text{sh}(\gamma y) + B_{q_2} \text{ch}(\gamma y),$$

причем в соответствии с (5.20 б)  $\gamma^2 - \beta_1^2 = 0$ , т.е.  $\gamma = -j\beta_y = \beta_1 = \varphi_1/L$ . Заметим, что значениям  $\beta_y$  и  $\beta_{mx}$  в формуле (5.20 б) соответствуют  $\beta_{mx}$  и  $\beta_m$ , а индекс « $m$ », указывающий номер пространственной гармоники, опущен.

Усредняя по  $y$  квадрат поля,

$$\bar{E}_x^2 = \frac{1}{2wN} \sum_{q_2=1}^N \int_{-w}^w |E_{xq_2}|^2 dy,$$

находим, что

$$\bar{E}_x^2 = \frac{1}{2N} \left( \frac{\text{sh}(2\beta_1 w) - 2\beta_1 w}{2\beta_1 w} \sum_{q_2=1}^N A_{q_2}^2 + \frac{\text{sh}(2\beta_1 w) + 2\beta_1 w}{2\beta_1 w} \sum_{q_2=1}^N B_{q_2}^2 \right).$$

Чтобы вычислить суммы квадратов амплитуд, положим в соответствии с (17.16, б)

$$E_{xq_2}(-w) = -A_{q_2} \operatorname{sh} \beta_1 w + B_{q_2} \operatorname{ch} \beta_1 w = E_0 \sin[(\pi m_2/N)q_2 + \chi_0],$$

$$E_{xq_2}(w) = A_{q_2} \operatorname{sh} \beta_1 w + B_{q_2} \operatorname{ch} \beta_1 w = E_0 \sin[(\pi m_2/N)(q_2 + 1) + \chi_0].$$

Отсюда находим:

$$A_{q_2} = E_0 \{ \sin[(\pi m_2/N)(q_2 + 1) + \chi_0] - \sin[(\pi m_2/N)q_2 + \chi_0] \} / 2 \operatorname{sh} \beta_1 w,$$

$$B_{q_2} = E_0 \{ \sin[(\pi m_2/N)(q_2 + 1) + \chi_0] + \sin[(\pi m_2/N)q_2 + \chi_0] \} / 2 \operatorname{ch} \beta_1 w.$$

Вычисляя суммы квадратов  $A_{q_2}$  и  $B_{q_2}$  и учитывая, что в случае ленточных электронных потоков, касающихся штырей, справедливо равенство  $\bar{E}_x^2 = \bar{E}_0^2 / \delta$ , находим выражение (17.19) для  $\sigma_y = \delta \bar{E}_x^2 / \bar{E}_0^2$ .

#### 17.4. Многоступенчатые многорядные системы

Формулы расчета дисперсии и сопротивления связи многорядных ЗС как для одноступенчатых, так и для многоступенчатых получаются из соответствующих формул для однорядных ЗС заменой волновой проводимости  $M(\varphi)$  на  $M(\varphi_1, \varphi_2)$  и делением сопротивления связи на число рядов  $N$ , если только многопроводная линия остается одноступенчатой. Особенно просто осуществить эту замену, когда ЗС многоступенчата вдоль одного из базисных направлений и одноступенчата вдоль другого (рис. 17.10, а). В этом случае  $M(\pi - \varphi)$  заменяется на  $M(\pi - \varphi_1, \varphi_2)$ ,  $M[(2\pi/3) \pm \varphi]$  на  $M[(2\pi/3) \pm \varphi_1, \varphi_2]$  и т. д. При этом  $\varphi_1 = \beta_1 d_1 / Q$ ,  $\varphi_2 = \beta_2 d_2$ , где  $Q$  — число ступеней, т. е. число проводников линии в ячейке ЗС. Если система не одноступенчата ни вдоль  $d_1$ , ни вдоль  $d_2$ , как на рис. 17.10, б, то усложняется порядок замены  $M(\varphi)$  на  $M(\varphi_1, \varphi_2)$ .

В п. 17.6 показано, что для двухступенчатой вдоль  $d_1$  и  $d_2$  ЗС величину  $M(\varphi)$  следует заменить на  $M(\varphi_1, \varphi_2)$ , а  $M(\pi - \varphi)$  — на  $M(\pi - \varphi_1, \pi - \varphi_2)$ . В результате получим уравнения дисперсии для ЗС на рис. 17.10, а,

$$\operatorname{tg}^2(kh/2) = M(\varphi_1, \varphi_2) / M(\pi - \varphi_1, \varphi_2),$$

$$\operatorname{tg}^2(kh/2) = M(\pi - \varphi_1, \varphi_2) / M(\varphi_1, \varphi_2), \quad (17.20)$$

и на рис. 17.10, б (см. упражнение 17.1),

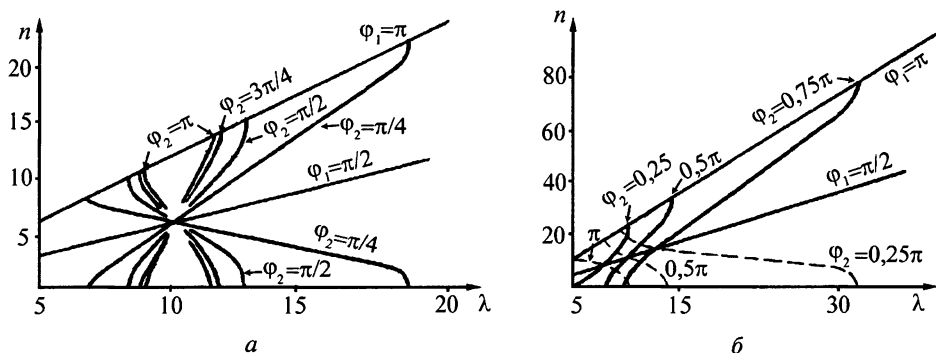
$$\operatorname{tg}^2(kh/2) = M(\varphi_1, \varphi_2) / M(\pi - \varphi_1, \pi - \varphi_2),$$

$$\operatorname{tg}^2(kh/2) = M(\pi - \varphi_1, \pi - \varphi_2) / M(\varphi_1, \varphi_2). \quad (17.21)$$

На рис. 17.10 одинаково заштрихованы штыри, соединенные с одной и той же проводящей плоскостью. Это многорядные ЗС типа «встречные штыри». Изочастоты и поверхности дисперсии этих двух ЗС приведены на



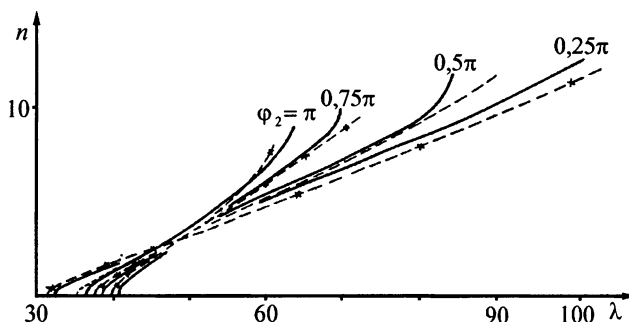




**Рис. 17.11.** Кривые дисперсии четырехрядных ЗС типа «встречные штыри», соответствующие изочастотам на рис. 17.10

На рис. 17.11 изображены кривые дисперсии четырехрядных ( $N=4$ ) ЗС типа «встречные штыри», ограниченных проводящими стенками в плоскостях симметрии  $y = \text{const}$ . При этом сдиг фаз  $\varphi_2$  не зависит от частоты и принимает одно из значений  $\varphi_2 = \pi m_2 / N$ , где  $m_2$  — целое число, указывающее количество полувольт поля между стенками. Для первой из двух систем оно изменяется в пределах  $1 \leq m_2 \leq N$ , а для второй  $-1 \leq m_2 < N$ . Для каждой из двух ЗС существует ветвь кривой дисперсии, которая на некотором участке не перекрывается ни по замедлению, ни по частоте с остальными ветвями. Эти участки используются в лампах с обратной волной \*).

На рис. 17.12 дано сравнение рассчитанных и измеренных дисперсионных характеристик для четырехрядной ЗС типа «встречные штыри», соответствующей рис. 17.11, а. Эти кривые хорошо совпадают.



**Рис. 17.12.** Сравнение вычисленных (сплошные линии) и измеренных (крестики, штриховые линии) кривых дисперсии четырехрядной ЗС типа «встречные штыри», соответствующие рис. 17.10, а ( $L = 3,6$ ,  $l = 1,4$ ,  $p = 2w = 2,4$ ,  $h = 11,4$ )

\*) Генераторы ЛОВ в непрерывном режиме могут работать и в случае, если двум ветвям дисперсионной характеристики соответствует одно и то же замедление. При этом колебания одной частоты, как правило, подавляют колебания другой частоты.

Уравнения дисперсии (17.20) и (17.21) справедливы не только для ЗС с прямой решеткой, изображенных на рис. 17.10, но и для ЗС с косой решеткой. На рис. 17.13 в нулевой зоне многопроводной линии построены изочастоты одной из таких ЗС, рассчитанные с помощью уравнения (17.20). Значения волновой проводимости вычислены по формулам из работы [2]. Внутри этой зоны нанесены границы нулевой зоны ЗС. В системе с косой решеткой, как и с прямой, каждому волновому вектору соответствуют два значения  $kh$ , если только  $kh = 0,5\pi$ . Соответствующие поверхности дисперсии должны пересекаться вдоль изочастоты  $kh = 0,5\pi$ , которая лишь частично лежит на границе нулевой зоны ЗС. В точках  $\beta = \pm(\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2)/2$  она пересекает границу под углом, отличным от  $\pi/2$ . В силу непрерывности изочастоты, соответствующие значениям  $kh$ , близким к  $0,5\pi$ , также должны пересекать границу нулевой зоны под углом, отличным от  $\pi/2$ . Отсюда следует, что для косой системы типа «встречные штыри» несправедлива формула Вульфа – Брэггов.

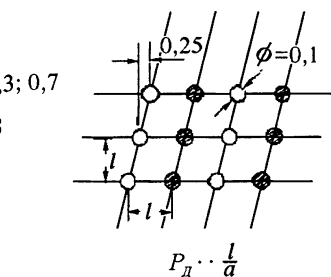
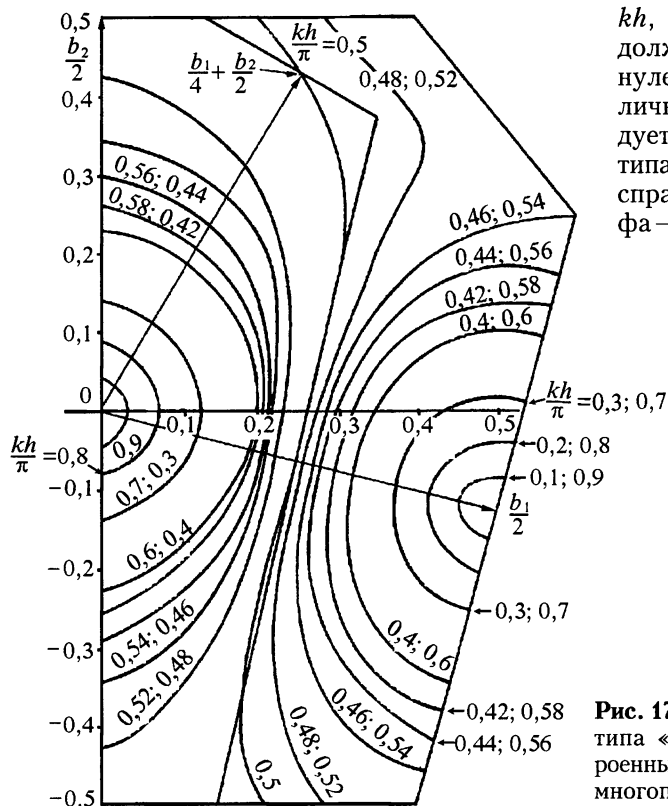


Рис. 17.13. Изочастоты косой ЗС типа «встречные штыри», построенные в половине нулевой зоны многопроводной линии

## 17.5. Пределы применимости метода многопроводных линий

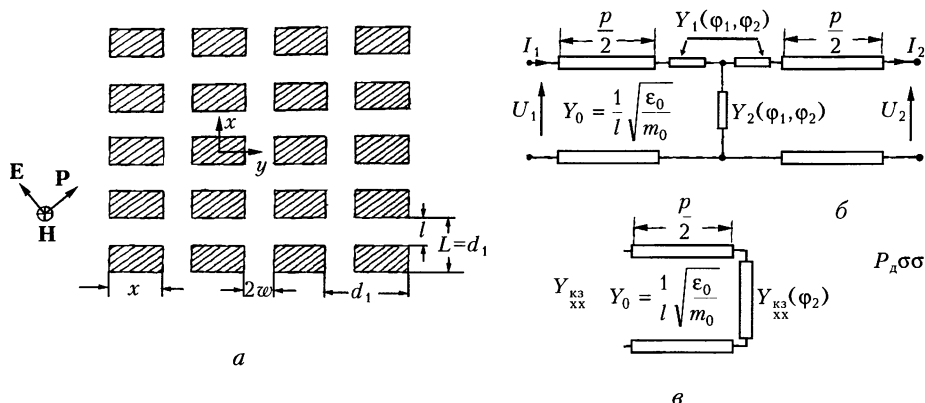
Как отмечено выше, расчет ЗС методом многопроводных линий основан на предположении, что в однородной области, представляющей отрезок многопроводной линии, существует только  $LEM$ -волна. Высшие типы волн ( $LE$  и  $LM$ ), возникающие вблизи неоднородных областей, затухают в линии по закону

$$E(z) = E(0) \exp \left\{ - \left[ \beta_k^2(\beta) - k^2(\beta) \right]^{1/2} z \right\} \quad (17.22)$$

где  $\beta$  — волновой вектор, лежащий в плоскости  $xy$ ,  $k$  — волновое число свободного пространства, а  $\beta_k$  — критическое волновое число для волн типа  $LE$  или  $LM$ . В случае, когда поле в многопроводной линии не зависит от координаты  $z$ , величина  $\beta_k(\beta)$  совпадает с  $k(\beta)$  и представляет дисперсионную характеристику той или иной волны  $LE$  или  $LM$  в плоскости  $xy$  (см., например, рис. 16.15). Поэтому метод многопроводных линий заведомо применим, если критические волновые числа  $\beta_k = 2\pi/\lambda_k$   $LE$ - и  $LM$ -волн превышают волновое число  $k = 2\pi/\lambda$  свободного пространства, где  $\lambda$  — длина волны, соответствующая полосе пропускания ЗС. Отсюда следует, что для установления границ применимости метода многопроводных линий необходимо знать дисперсионную характеристику  $\beta_k(\beta)$  волны в многопроводной линии, имеющей наименьшее значение критического волнового числа  $\beta_k$ .

Как показано в п. 13.3, значения  $\beta_k$  для полей  $LM$ -типа выше, чем для  $LE$ -типа. Поэтому интересуемся зависимостью  $\beta_k(\beta)$  лишь для низшего типа  $LE$ -волны. Такой тип поля возбуждает  $TEM$ -волна в свободном пространстве, падающая на линию перпендикулярно проводникам (рис. 17.14). Дисперсионная характеристика этого типа рассмотрена в работе [9], посвященной исследованию многопроводной линии как искусственного диэлектрика. Стрелками на рисунке около многопроводной линии указаны направления полей  $E$  и  $H$  и потока энергии  $P$  плоской волны, возбуждающей поле  $LE$ .

Ниже дан расчет  $\beta_k(\beta)$  эквивалентным статическим методом, развитым в работе [6] для расчета дисперсии и сопротивления связи ЗС типа «диафраг-



**Рис. 17.14.** Двумерно-периодическая многопроводная линия с проводниками прямоугольного сечения (а), эквивалентная схема одной ее ячейки для поля  $LE$  ( $H = H_z$ ,  $E = E_y$ ) (б) и половины ячейки (в) при условии, что в плоскости симметрии  $x = \text{const}$  линии имеет место либо электрическая ( $Y_{kz}$  и  $Y_{kz}(\varphi_2)$ ), либо магнитная ( $Y_{xx}$  и  $Y_{xx}(\varphi_2)$ ) стенка

мированный волновод», «гребенка» и др. Расчет ведется в соответствии с эквивалентной схемой, изображенной на рис. 17.14, б. Эта схема отображает ячейку многопроводной линии и представляет симметричный четырехполюсник. Расчет справедлив при  $p \geq 2l$ ,  $\lambda \geq d_2$ . Отрезок двухпроводной линии на схеме отображает области  $0 \leq x \leq p/2$  и  $d_1 - (p/2) \leq x \leq d_1$  между соседними штырями, в которых существует ЛЕМ-поле ( $H = H_z$ ,  $E = E_y$ ). Волновая проводимость этой линии не зависит от сдвигов фаз  $\varphi_1 = \beta d_1$  и  $\varphi_2 = \beta d_2$ . Эта проводимость, отнесенная к единице длины вдоль оси  $z$ , определяется равенством

$$Y_0 = 1/\rho l = \epsilon_0 c/l \text{ [См/М]}, \quad (17.23)$$

где  $\rho = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0}$  — волновое сопротивление свободного пространства.

Область  $p/2 \leq x \leq d_1/2$ , называемая ниже пространством взаимодействия, отображается на рис. 17.14, б проводимостями  $Y_1(\varphi_1, \varphi_2)$  и  $Y_2(\varphi_1, \varphi_2)$ . Расчет этих проводимостей весьма громоздок, но его можно избежать, если выразить уравнение дисперсии четырехполюсника через входные проводимости короткого замыкания ( $Y_{кз}$ ) и холостого хода ( $Y_{xx}$ ) в соответствии с рис. 17.14, в. Величины  $Y_{кз}$ ,  $Y_{кз}(\varphi_2)$ ,  $Y_{xx}$ ,  $Y_{xx}(\varphi_2)$  вычисляются для случаев, когда в плоскости симметрии  $x = d_1/2$  располагается либо электрическая, либо магнитная стенка, соответственно. Величины  $Y_{кз}(\varphi_2)$  и  $Y_{xx}(\varphi_2)$  представляют входные проводимости пространства взаимодействия при соответствующих условиях в плоскости симметрии. Их расчет описан в работе [4].

В соответствии с (П.2.18) уравнение дисперсии четырехполюсника можно записать в виде

$$\text{th}(\Gamma/2) = (Y_{xx}/Y_{кз})^{1/2} = (Z_{кз}/Z_{xx})^{1/2}. \quad (17.24)$$

Таким образом, чтобы получить уравнение дисперсии многопроводной линии, достаточно вычислить входную проводимость двухполюсника, изображенного на рис. 17.14, в:

$$Y_{xx} = Y_0 [jY_0 \text{tg}(\beta_k p/2) + Y_{xx}(\varphi_2)] / [-jY_0 + Y_{xx}(\varphi_2) \text{tg}(\beta_k p/2)],$$

$$Y_{кз} = Y_0 [jY_0 \text{tg}(\beta_k p/2) + Y_{кз}(\varphi_2)] / [-jY_0 + Y_{кз}(\varphi_2) \text{tg}(\beta_k p/2)].$$

Введя обозначения  $z = \beta_k p/2$ ,  $\alpha = p/2l$ ,  $\Gamma = j\varphi_1$ ,  $\hat{C}_k = Y(\varphi_2)/jk\epsilon_0 c$ ,  $\mu = l/d_2$ , получим окончательно уравнение дисперсии низшего типа ЛЕ-волны в многопроводной линии,

$$\text{tg} \frac{\varphi_1}{2} = - \frac{\alpha \text{tg} z + jz \hat{C}_{xx}}{\alpha \text{tg} z + jz \hat{C}_{кз}} \cdot \frac{z \hat{C}_{кз} \text{tg} z - \alpha}{z \hat{C}_{xx} \text{tg} z - \alpha}, \quad (17.25)$$

где [4]

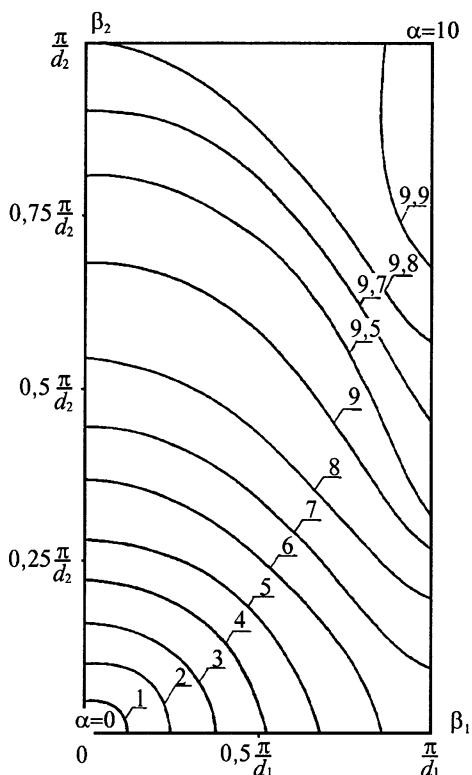
$$\hat{C}_{xx} = A_3(\varphi_2, \mu) + A_1(\varphi_2, \mu) [r_{xx}^{-1} + A_2(\varphi_2, \mu)]^{-1},$$

$$\hat{C}_{кз} = A_3(\varphi_2, \mu) + A_1(\varphi_2, \mu) [r_{кз}^{-1} + A_2(\varphi_2, \mu)]^{-1}, \quad (17.26)$$

где, в свою очередь,

$$\begin{aligned}
 A_1(\varphi, \mu) &= (\operatorname{ch} x_0)^{-2}, \quad A_2(\varphi, \mu) = \varphi \operatorname{th} x_0, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi, \\
 A_3(\varphi, \mu) &= (2\pi)^{-1} \left\{ (\mu + \mu^{-1}) \ln[(1 + \mu)/(1 - \mu)] + 2 \ln[(1 - \mu^2)/4\mu] \right\} + \\
 &+ \pi^{-1} (\varphi/2\pi)^2 \left\{ [1 - (\varphi/2\pi)^2]^{-1} + 0,202 \right\} - S_0(\mu) (1 - x_0^{-1} \operatorname{th} x_0) \\
 x_0 &= \varphi S_0(\mu), \quad S_0(\mu) = (2\pi)^{-1} [(1 + \mu) \ln(1 + \mu) + (1 - \mu) \ln(1 - \mu)], \\
 r_{0\kappa z}^{-1} &= \gamma_0 d_2 \operatorname{th}(\gamma_0 w), \quad r_{0xx}^{-1} = \gamma_0 d_2 \operatorname{cth}(\gamma_0 w) \\
 \gamma_0 &= 2p^{-1} (\varphi_2^2 \Delta^2 - z^2)^{1/2}, \quad \Delta = p/2d_2, \quad \mu = l/d_2.
 \end{aligned} \tag{17.27}$$

Результаты расчета дисперсии низшего типа  $LE$ -волны в многопроводной линии приведены на рис. 17.15 в виде изочастот  $\beta_\kappa = 2\pi/\lambda_\kappa = \text{const}$ . По этим изочастотам можно судить о пределах применимости метода многопроводных



**Рис. 17.15.** Изочастоты низшей  $LM$ -волны в многопроводной линии, рассчитанные при  $p = 2$ ,  $d_2 = 1$ ,  $l = w = 0,5$ ,  $\alpha = 10\beta_\kappa/\beta_{\max}$ ,  $\beta_{\max} = 1,286$ ,  $\beta_\kappa = 2\pi/\lambda_\kappa$

линий, так как он справедлив при  $\beta_\kappa(\beta) > k(\beta)$ , т.е. при замедлении  $n = \beta/k > n_\kappa = \beta_\kappa/k$ . Максимальное замедление волны  $LE$  в линии соответствует точке  $\beta = (\pi/d_1, \pi/d_2)$  и равно  $n_{\max} = \beta/\beta_\kappa \approx 2,5$ . Поэтому при замедлении  $n > 2,5$  заведомо справедлив метод многопроводных линий. Более того, можно показать, что при  $n < 2,5$  метод тоже может быть применим, поскольку достаточное условие его применимости состоит в  $n(\beta) > n_\kappa(\beta)$ , а не  $n(\beta) > n_{\max}$ .

Результаты расчета дисперсионной характеристики  $LE$ -волны в линии можно использовать не только для оценки пределов применимости метода многопроводных линий. Они представляют самостоятельный интерес, так как эти линии используются в качестве искусственных диэлектриков в антенной технике.

## 17.6. Влияние преобразования координат на форму записи уравнения дисперсии двумерно-периодической штыревой ЗС

При анализе многорядных ЗС с одноступенчатой многопроводной линией удобно пользоваться системой координат, свя-

занной с многопроводной линией [5, 6]. Базисные векторы этой системы координат  $\mathbf{L}_1$  и  $\mathbf{L}_2$  (их модули равны периодам линии) должны удовлетворять равенствам  $\mathbf{d}_1 = N\mathbf{L}_1$ ,  $\mathbf{d}_2 = Q\mathbf{L}_2$ , где  $N$  и  $Q$  — числа, указывающие количество ступеней вдоль направлений  $\mathbf{L}_1$  и  $\mathbf{L}_2$  (см. рис. 17.16).

Поскольку векторы  $\mathbf{d}_1$  и  $\mathbf{d}_2$  выбираются неоднозначно, то имеются степени свободы в выборе  $\mathbf{L}_1$  и  $\mathbf{L}_2$ . В ряде случаев удобно сначала записать уравнение дисперсии в одной системе координат  $\hat{\mathbf{L}}_1, \hat{\mathbf{L}}_2$ , а затем перейти к другой  $\mathbf{L}_1, \mathbf{L}_2$ . В частности, такой подход удобен, если векторы  $\mathbf{L}_1$  и  $\mathbf{L}_2$  ортогональны, а прямоугольник, построенный на них, не равен по площади элементарной ячейке. Например, если ЗС типа «встречные штыри» (рис. 17.16) рассматривать в системе координат  $\mathbf{L}_1, \mathbf{L}_2$ , то соответствующий прямоугольник содержит четыре штыря, тогда как ячейка, построенная на векторах  $\hat{\mathbf{L}}_1, \hat{\mathbf{L}}_2$ , содержит лишь два штыря. Поэтому выводить уравнение дисперсии удобнее в системе  $\hat{\mathbf{L}}_1, \hat{\mathbf{L}}_2$ .

В уравнение дисперсии входит волновая проводимость  $M(\varphi_{p_1}, \varphi_{p_2})$ , в которой

$$\varphi_{p_1} = (2\pi p_1/N) + \varphi_1, \quad \varphi_{p_2} = (2\pi p_2/Q) + \varphi_2,$$

$$p_1 = 0, 1, \dots, N-1, \quad p_2 = 0, 1, \dots, Q-1,$$

зависящие от сдвигов фаз  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  на периодах многопроводной линии. Вид этой зависимости связан с выбором системы координат. Этим выбором определяется также ряд других величин в уравнении дисперсии, например, проводимостей, подключенных к концам штырей. Поэтому важно знать связь тех или иных величин, записанных в двух системах координат. Для преобразования уравнения дисперсии достаточно установить связь между  $\hat{\varphi}_1, \hat{\varphi}_2$  и  $\varphi_1, \varphi_2$  в новой и старой системах координат при фиксированном волновом векторе  $\beta$ .

Пусть базисные векторы  $\mathbf{L}_1, \mathbf{L}_2$ , и  $\hat{\mathbf{L}}_1, \hat{\mathbf{L}}_2$  связаны соотношением

$$\mathbf{L} = [\mathbf{F}]\hat{\mathbf{L}}, \quad (17.28)$$

в котором

$$[\mathbf{F}] = \begin{bmatrix} a & b \\ f & g \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{L}} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{L}}_1 \\ \hat{\mathbf{L}}_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{L} = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_1 \\ \mathbf{L}_2 \end{bmatrix}.$$

Так как базисные векторы  $\mathbf{b}_i$  и  $\mathbf{b}_j$  обратных решеток многопроводной линии должны удовлетворять условию

$$\mathbf{b}_i \mathbf{L}_j = \hat{\mathbf{b}}_i \hat{\mathbf{L}}_j = 2\pi \delta_{ij} \quad (i, j = 1, 2),$$

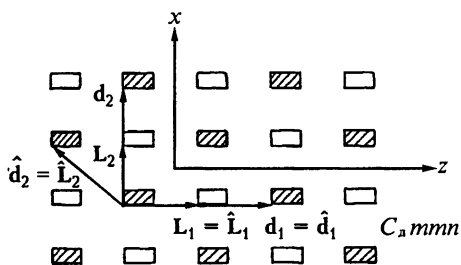


Рис. 17.16. Поперечное сечение ЗС типа «встречные штыри» с одноступенчатой многопроводной линией

то

$$\hat{\mathbf{B}}^T \hat{\mathbf{L}} = \mathbf{B}^T \mathbf{L} = \mathbf{B}^T [\mathbf{F}]^{-1} [\mathbf{F}] \mathbf{L} = \mathbf{B}^T [\mathbf{F}]^{-1} \hat{\mathbf{L}}, \quad (17.29)$$

где

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{b}}_1 \\ \hat{\mathbf{b}}_2 \end{bmatrix},$$

а символ «Т» означает операцию транспонирования.

Из (17.29) следует

$$\hat{\mathbf{B}} = ([\mathbf{F}]^{-1})^T \mathbf{B}. \quad (17.30)$$

Один и тот же вектор  $\boldsymbol{\beta}$  может быть разложен на компоненты в двух системах отсчета,

$$\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{B} / 2\pi = \hat{\boldsymbol{\Phi}}^T \hat{\mathbf{B}} / 2\pi,$$

где

$$\boldsymbol{\Phi} = \begin{bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{bmatrix}, \quad \hat{\boldsymbol{\Phi}} = \begin{bmatrix} \hat{\Phi}_1 \\ \hat{\Phi}_2 \end{bmatrix}.$$

Отсюда и из (17.30) следует

$$\hat{\boldsymbol{\Phi}} = [\mathbf{F}] \boldsymbol{\Phi}. \quad (17.31)$$

Радиус-вектор  $\mathbf{r}$  не зависит от выбора системы координат. Поэтому

$$\mathbf{r} = \mathbf{q}^T \mathbf{L} = \hat{\mathbf{q}}^T \hat{\mathbf{L}},$$

где

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \hat{q}_1 \\ \hat{q}_2 \end{bmatrix}$$

и, следовательно,

$$\mathbf{q} = ([\mathbf{F}]^{-1})^T \hat{\mathbf{q}}. \quad (17.32)$$

Волновая проводимость связана с емкостными коэффициентами  $\mu_{q_1 q_2}$  между штырями с номерами  $q_1 q_2$  и 00 следующим равенством:

$$M(\Phi_1, \Phi_2) = \sum_{q_1 q_2 = -\infty}^{\infty} \mu_{q_1 q_2} \exp[-j(q_1 \Phi_{p_1} + q_2 \Phi_{p_2})]. \quad (17.33)$$

Поскольку  $q_1 q_2$  и  $\hat{q}_1 \hat{q}_2$  номера одних и тех же штырей в разных системах координат, должно выполняться равенство

$$\hat{\mu}_{\hat{q}_1, \hat{q}_2} = \mu_{q_1, q_2}. \quad (17.34)$$

Из (17.28), (17.31)–(17.34) получаем

$$\begin{aligned} & M[(2\pi p_1/N) + \varphi_1, (2\pi p_2/Q) + \varphi_2] = \\ & = \hat{M}\{2\pi[(p_1 a/N) + (p_2 b/Q)] + \hat{\varphi}_1, 2\pi[(p_1 f/N) + (p_2 g/Q)] + \hat{\varphi}_2\}, \end{aligned} \quad (17.35, a)$$

$$\begin{aligned} & \hat{M}[(2\pi \hat{p}_1/\hat{N}) + \hat{\varphi}_1, (2\pi \hat{p}_2/\hat{Q}) + \hat{\varphi}_2] = \\ & = M\{(2\pi/\Delta)[(\hat{p}_1 g/\hat{N}) - (\hat{p}_2 b/\hat{Q})] + \varphi_1, (2\pi/\Delta)[(\hat{p}_2 a/\hat{Q}) - (\hat{p}_1 f/\hat{N})] + \varphi_2\}, \end{aligned} \quad (17.35, б)$$

где  $\Delta = \text{Det}[F]$ . Так как площадь ячейки многопроводной линии должна оставаться постоянной, то  $\Delta = \pm 1$ . Площадь ячейки ЗС при этом может меняться.

При изменении системы координат уравнение дисперсии многорядной ЗС с одноступенчатой многопроводной линией можно преобразовать с помощью уравнений (17.28), (17.31), (17.34), (17.35). Особого рассмотрения потребуют те проводимости на концах штырей, которые зависят от сдвигов фаз, если эта зависимость не может быть учтена приведенными выше формулами.

## Упражнение

**17.1.** Вывести уравнение дисперсии ЗС типа «встречные штыри», поперечное сечение которой приведено на рис. 17.16.

## Список литературы

- [1]. Амитей Н., Галиндо В., Ву Ч. Теория и анализ фазированных антенных решеток. Под ред. А.Ф. Чаплина. М.: Мир, 1974. 455 с.  
Перевод к н.: Amitay N., Galindo V., Wu C.P. Theory and analysis of phased array antennas. New York–London–Sydney–Toronto, 1972.
- [2]. Белуга И. Ш. Многопроводные линии, составленные из круглых проводников. *Изв. вузов. Радиофизика*, 1961, 4(5), 942–954.
- [3]. Белуга И. Ш. Расчет резонаторных замедляющих систем эквивалентным статическим методом. *Изв. вузов. Радиофизика*, 8, 1961, 4(4), 689–702.
- [4]. Белуга И. Ш. Расчет характеристик некоторых штыревых и резонаторных замедляющих систем. *Вопросы радиоэлектроники. Сер.1. Электроника*, 1963. Вып. 1, 71–120.
- [5]. Белуга И. Ш. Двумерно-периодическая многопроводная линия, содержащая  $N$  круглых проводников в ячейке. *Изв. вузов. Радиофизика*, 1963, 6(4), 738–751.



- [6]. Кутенин Б. П., Силин Р. А. Влияние преобразования координат на уравнение дисперсии двумерно-периодической штыревой замедляющей системы. *Электронная техника. Сер. 1. Электроника СВЧ*, 1968. Вып. 1, 21–25.
- [7]. Кутенин Б. П., Силин Р. А. К расчету дисперсии штыревых замедляющих систем. *Электронная техника. Сер. 1. Электроника СВЧ*, 1967. Вып. 9, 76–88.
- [8]. Силин Р. А. Расчет многорядных штыревых замедляющих систем. *Электроника*, 1958, 2, 3–16.
- [9]. Хижняк Н. А. Искусственные анизотропные диэлектрики, образованные двумерными решетками бесконечных полос и стержней. *Журн. теор. физики*, 1959, **29**(5), 604–614.
- [10]. Doehler O., Epsztein B., Arnaud J. Nouveaux types des lignes pour tubes hyperfréquences. *L'Onde Electrique*, 1956, **36**(356), 937–946.

## Многоэтажные системы

### 18.1. Одноступенчатые системы

Многоэтажные ЗС [1–7], как и многорядные, представляют интерес для мощных электронных приборов СВЧ. Исследование свойств многоэтажных ЗС наиболее удобно производить с помощью теории многополюсников.

Ниже рассмотрены многоэтажные штыревые ЗС как неограниченные, так и ограниченные в направлении оси  $y$ . Количество этажей определяется числом соответствующих одноэтажных ЗС, на которые можно разбить многоэтажную систему. В частности, количество этажей  $N_2$  одноступенчатых систем (рис. 18.1, 18.2, 18.3) полагаем равным числу периодов ЗС вдоль оси  $y$ . Разбиение на этажи двухступенчатой и трехступенчатой ЗС типа «встречные штыри» приведено на рис. 18.4. Штыри могут быть расположены в свободном пространстве или на диэлектрической подложке.

На рис. 18.1–18.3 кроме поперечных сечений ЗС приведены их эквивалентные схемы, уравнения дисперсии, изочастоты и кривые дисперсии. Матрица передачи соответствующего отрезка многопроводной линии согласно (13.7 б) записывается равенством

$$[\tilde{A}_I] = \begin{bmatrix} \cos \beta_y h & [j/M(\varphi_1)] \sin \beta_y h \\ jM(\varphi_1) \sin \beta_y h & \cos \beta_y h \end{bmatrix},$$

где  $h$  — длина отрезка линии,  $\varphi_1$  — сдвиг фаз между соседними штырями. В случае, если штыри расположены в свободном пространстве, волновое число  $\beta_y = k$  такое же, как для свободного пространства. Именно для этого случая приведены результаты расчета на рис. 18.1–18.3.

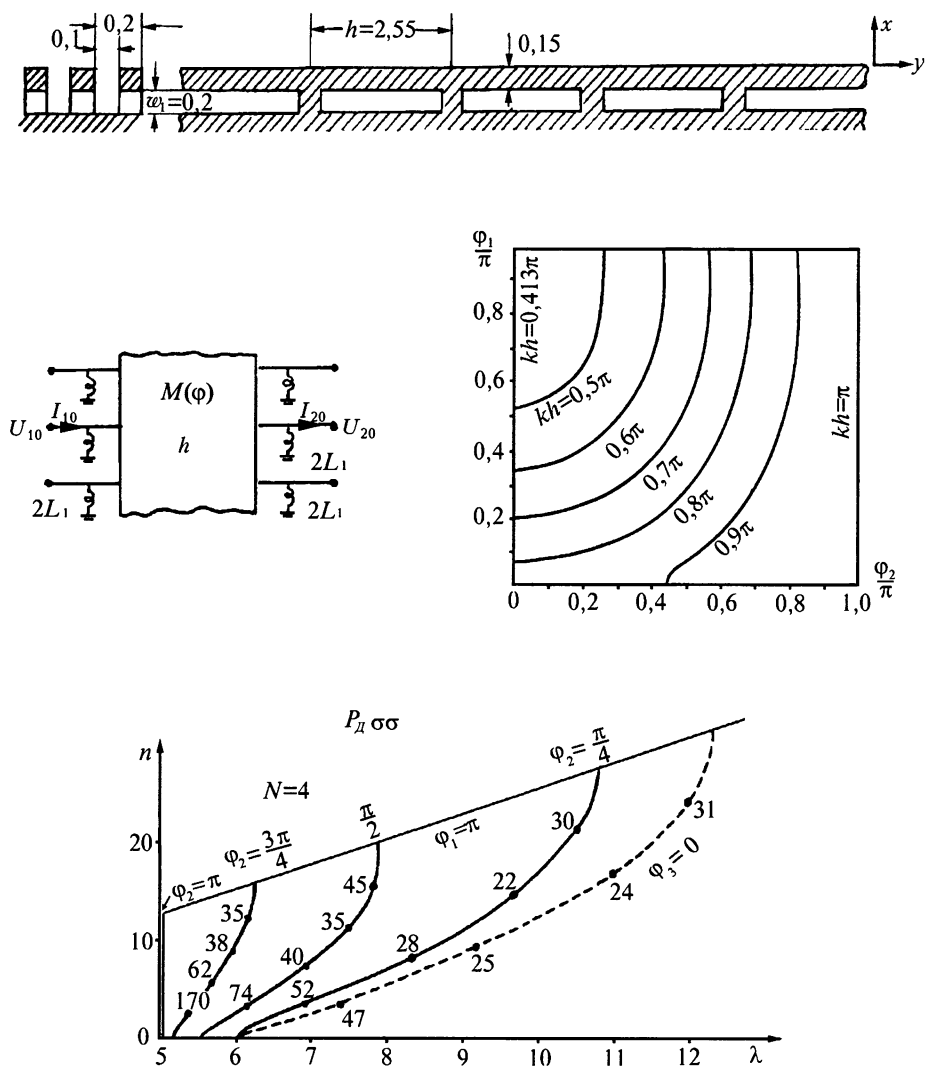
Матрица передачи неоднородных областей для первых двух ЗС имеет вид

$$[\tilde{A}_{II}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ jB & 1 \end{bmatrix},$$

где  $B = -1/2\omega L_1$  для ЗС на рис. 18.1 и  $B = \omega C/2$  для ЗС на рис. 18.2.

Матрица передачи четырехполюсника, отображающего один этаж ЗС, определяется произведением  $[\tilde{A}] = [\tilde{A}_{II}][\tilde{A}_I][\tilde{A}_{II}]$ . Она связывает напряжения и токи в эквивалентной схеме, отображающей ячейку ЗС,

$$\begin{bmatrix} U^{10} \\ I^{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U^{20} \\ I^{20} \end{bmatrix}.$$

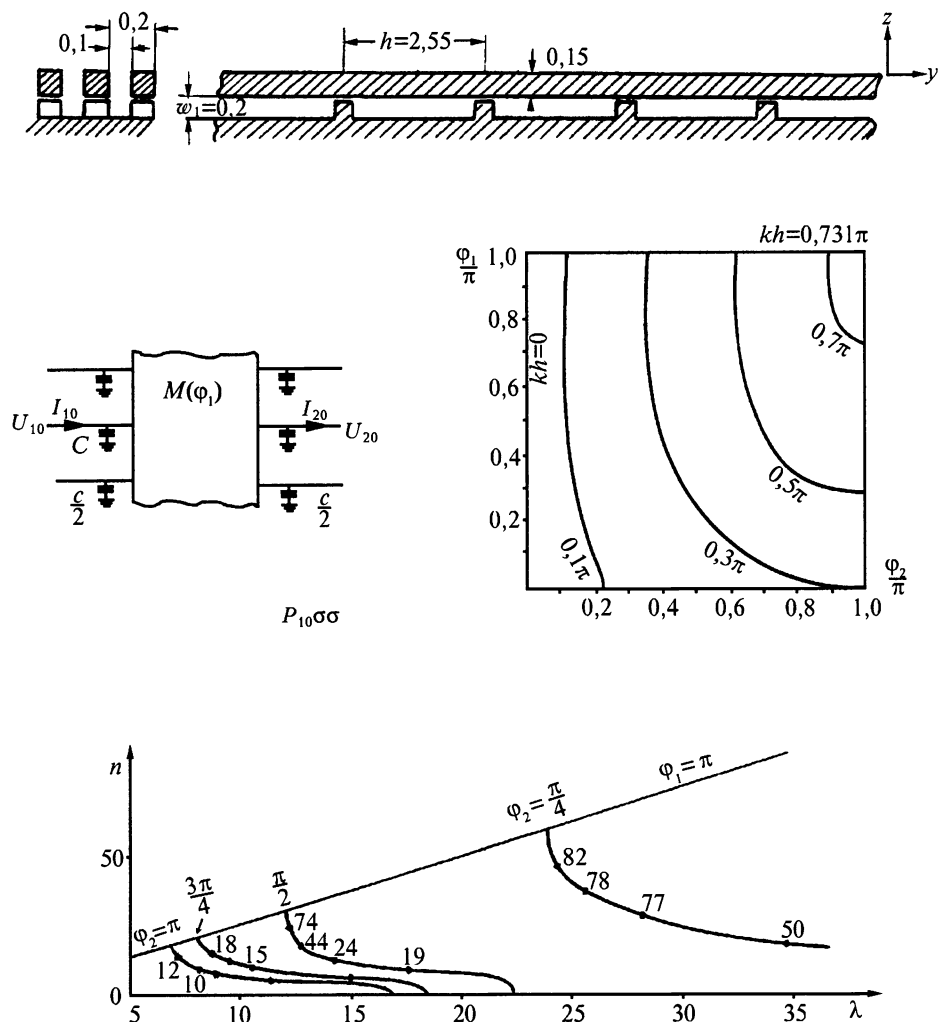


**Рис. 18.1.** Многоэтажная ЗС бугельного типа, ее эквивалентная схема, изочастоты и кривые дисперсии, рассчитанные при  $\omega_2 = \infty$ ,  $\hat{L}_1 = 0,5$ ,  $N = 4$ . Числами около кривых указаны значения  $K_{св}$  Ом, вычисленные по формулам

$$\cos \varphi_2 = \cos(kh) + \sin(kh) [kh 2 \hat{L}_1 \hat{M}(\varphi_1)]^{-1}, \quad \hat{L}_1 = L_1 / \mu_0 h,$$

$$K_{св} = \Phi(\varphi_1) / N \hat{M}(\varphi_1)$$

для ленточного потока электронов, касающегося штырей

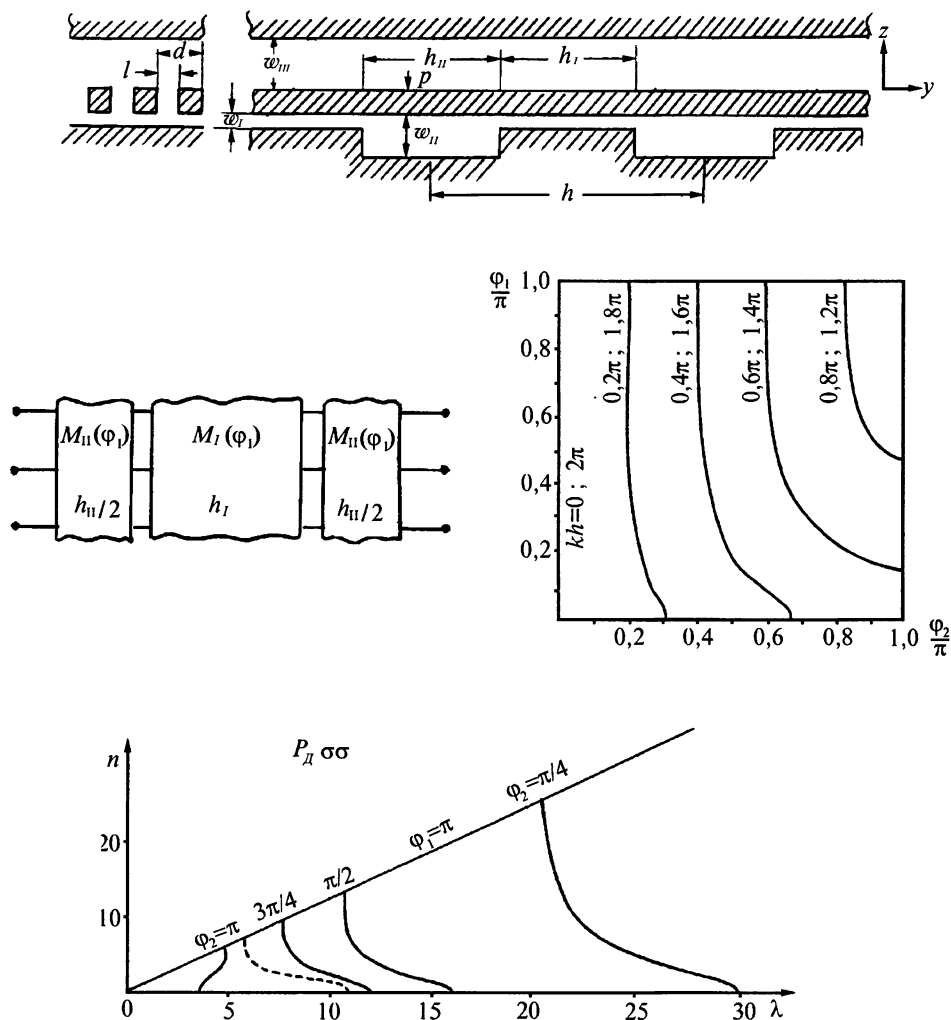


**Рис. 18.2.** Многоэтажная ЗС лестничного типа с узкими выступами, эквивалентная схема одного ее этажа, изочастоты и кривые дисперсии, рассчитанные при  $w_2 = \infty$ ,  $\hat{C} = 4$ ,  $N = 4$ . Числами около кривых указаны значения  $K_{св}$  Ом, вычисленные по формулам

$$\cos \varphi_2 = \cos(kh) - kh\hat{C} \sin(kh)/2\hat{M}(\varphi_1), \quad \hat{C} = C/\epsilon_0 h,$$

$$K_{св} = \frac{\Phi(\varphi_1) kh[1 - \cos(kh)\cos \varphi_2] + \sin(kh)[\cos \varphi_2 - \cos(kh)]}{N\hat{M}(\varphi_1) kh[1 - \cos(kh)\cos \varphi_2] - \sin(kh)[\cos \varphi_2 - \cos(kh)]}$$

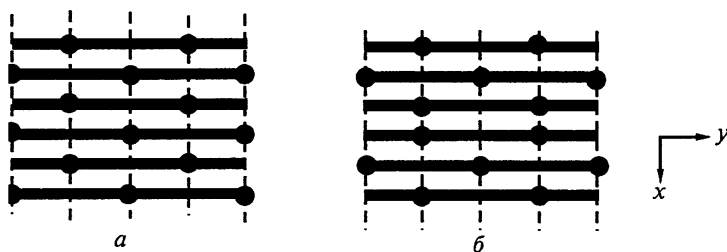
для ленточного потока электронов, касающегося штырей



**Рис. 18.3.** Многоэтажная ЗС лестничного типа с широкими выступами, эквивалентная схема одного ее этажа, изочастоты и кривые дисперсии, рассчитанные при  $d = w_{II} = 0,4$ ,  $l = p = 0,2$ ,  $w_I = 0,05$ ,  $w_{II} = 0,8$ ,  $h_I = h_{II} = h/2$ ,  $N = 4$ . Числами около кривых указаны значения  $K_{св}$  Ом, вычисленные по формуле

$$\cos \varphi_2 = \cos(kh_I) \cos(kh_{II}) - \frac{1}{2} \left[ \frac{M_I(\varphi_I)}{M_{II}(\varphi_I)} + \frac{M_{II}(\varphi_I)}{M_I(\varphi_I)} \right] \sin(kh_I) \sin(kh_{II})$$

для ленточного потока электронов, касающегося штырей



**Рис. 18.4.** Разбиение на этажи двухступенчатой (а) и трехступенчатой (б) ЗС типа «встречные штыри»

В соответствии с теоремой Флоке потребуем, чтобы

$$U^{20} = U^{10} \exp(-j\varphi_2), \quad I^{20} = I^{10} \exp(-j\varphi_2),$$

где  $\varphi_2$  — сдвиг фазы поля на периоде в направлении  $y$ . Подставляя эти условия в последнее выражение и зная, что детерминант матрицы равен нулю, найдем уравнение дисперсии четырехполюсника:

$$\cos \varphi_2 = A_{11}.$$

Определив элемент  $A_{11}$  в результате умножения матриц, запишем уравнение дисперсии в виде

$$\cos \varphi_2 = \cos(\beta_y h) - [B/2M(\varphi_1)] \sin(\beta_y h).$$

Дисперсия обеих ЗС вдоль оси  $y$  нормальная, поскольку частота увеличивается с ростом  $\varphi_2$ . Вдоль оси  $x$  дисперсия бугельной ЗС (рис. 18.1) аномальная, а лестничной (рис. 18.2) нормальная.

Лестничные ЗС, изображенные на рис. 18.2 и 18.3, отличаются лишь шириной выступов. В первой из них эквивалентную схему выступа удобнее представить емкостью, что и сделано выше, а во второй — отрезком многопроводной линии. Матрицу передачи ее периода вдоль  $y$  можно представить в виде

$$[\tilde{A}] = [\tilde{A}_{II}] [\tilde{A}_I] [\tilde{A}_{II}]$$

где

$$[\tilde{A}_I] = \begin{bmatrix} \cos(kh_I) & [j/M_I(\varphi_1)] \sin(kh_I) \\ jM_I(\varphi_1) \sin(kh_I) & \cos(kh_I) \end{bmatrix},$$

$$[\tilde{A}_{II}] = \begin{bmatrix} \cos(kh_{II}/2) & [j/M_{II}(\varphi_1)] \sin(kh_{II}/2) \\ jM_{II}(\varphi_1) \sin(kh_{II}/2) & \cos(kh_{II}/2) \end{bmatrix},$$

откуда получается уравнение дисперсии, приведенное в подписи к рис. 18.3. Изочастоты обеих систем лестничного типа почти одинаковы.

В случае, когда ЗС имеет  $N$  этажей, сдвиг фаз  $\varphi_2$  не может принимать любые значения. В частности, если ЗС ограничена в плоскостях симметрии проводящими стенками  $y = \text{const}$ , то

$$\varphi_2 = m\pi/N, \quad 0 \leq m \leq N, \quad (18.1)$$

где  $m$  — число полувольт, укладываемых между стенками.

Кривые дисперсии на рис. 18.1–18.3 построены для  $N = 4$ . Случаи  $m = 0$  и  $m = N$  требуют дополнительного исследования, так как в зависимости от расположения ограничивающих стенок и от типа ЗС могут не существовать волны, соответствующие сдвигам фаз  $\varphi_2 = 0$  и  $\varphi_2 = \pi$ . В самом деле, как показано в п. 2.10, при сдвигах фаз на периоде структуры, равных  $0$  и  $\pi$ , плоскости симметрии ЗС представляют либо электрические, либо магнитные стенки. Если проводящий экран совместить с электрической стенкой, то он не возмущит поля в ЗС и соответствующий тип волны возможен. Если же его совместить с магнитной стенкой, то соответствующий тип невозможен.

Можно показать, что в ЗС на рис. 18.1–18.3 при  $\varphi_2 = 0$  все плоскости симметрии представляют магнитные стенки. Поэтому в четырехэтажных ЗС невозможен тип волны, соответствующий  $\varphi_2 = 0$ . Значению  $\varphi_2 = \pi$  соответствует два возможных расположения электрических и магнитных стенок, чередующихся между собой. Каждому расположению соответствует своя полоса пропускания. На рис. 18.1 и 18.2 приведены кривые для наиболее длинноволновой полосы пропускания. На рис. 18.3 изображены обе ветви. Сплошные кривые соответствуют пересечению выступов электрическими стенками, а штриховые — пересечению впадин.

В ЗС лестничного типа с ростом числа этажей самая длинноволновая полоса смещается в сторону больших значений длин волн, причем  $\lambda > 2Nh$ . Такие многоэтажные ЗС не имеют никаких преимуществ перед одноэтажными с точки зрения их использования в электронных приборах большой мощности.

В ЗС бугельного типа значения  $\lambda$  не превышают длин волн, соответствующих одноэтажной ЗС ( $\varphi_2 = 0$ ). При заданном диапазоне длин волн в первой полосе пропускания размер многоэтажной ЗС по оси  $y$  примерно в  $N$  раз больше, чем одноэтажной. Поэтому ЗС бугельного типа целесообразно использовать в ЛОВ повышенной мощности. Увеличение числа этажей  $N$  приводит к сближению кривых дисперсии различных типов волн, что может привести к неустойчивой работе ЛОВ.

Соппротивление связи одноступенчатых ЗС рассчитываем по формуле

$$K_{св} = \Phi(\varphi_1) U^2 \sigma / N \hat{W}, \quad (18.2)$$

отличающейся от (14.7) лишь множителем  $N$  в знаменателе. При этом  $\hat{W}$  — средняя по времени нормированная энергия поля, запасенная в одной ячейке одного этажа. В неоднородной области бугельной ЗС запасается только магнитная энергия. Поэтому полную энергию в соответствии с (3.9) можно

вычислить как удвоенную электрическую энергию в многопроводной линии (т. е. в однородной области),  $W = 2W_E$ . С учетом (14.9) получаем

$$\hat{W} = \hat{C}_\varepsilon(\varphi_1)U^2\sigma = \hat{M}(\varphi_1)U^2\sigma,$$

так как при  $\varepsilon = 1$  справедливо равенство  $\hat{C}_\varepsilon(\varphi_1) = \hat{M}(\varphi_1)$ . Подставляя  $\hat{W}$  в (17.2), получаем формулу для расчета сопротивления связи бугельной ЗС, приведенную в подписи к рис. 18.1.

В неоднородной области лестничной ЗС запасается электрическая энергия, так что ее удобно вычислять по формуле  $W = 2W_H$ . При этом получаем:

$$K_{св} = [\Phi(\varphi_1)/N\hat{M}(\varphi_1)](\sigma/\sigma_H)$$

Чтобы вычислить множители  $\sigma$  и  $\sigma_H$ , найдем распределение потенциала  $U(y)$  и тока  $I(y)$  по высоте штыря. Для этого запишем равенства (13.7) в виде

$$U(y) = \cos[k(h-y)]U \exp(-j\varphi_2) + jM^{-1}(\varphi_1)\sin[k(h-y)]I_2,$$

$$I(y) = jM(\varphi_1)\sin[k(h-y)]U \exp(-j\varphi_2) + \cos[k(h-y)]I_2,$$

где  $U = U(0)$  — потенциал на входе отрезка линии, отличающийся от потенциала на выходе множителем  $\exp(-j\varphi_2)$ . Положив  $y = 0$ , исключим  $I_2$ . В результате получим:

$$U(y) = U \{ \sin[k(h-y)] + \exp(-j\varphi_2)\sin(ky) \} / \sin(kh),$$

$$I(y) = jM(\varphi_1)U \{ \cos[k(h-y)] + \exp(-j\varphi_2)\cos(ky) \} / \sin(kh).$$

Вычислив

$$\sigma = U_0^{-2}h^{-1} \int_0^h U(y)U^*(y)dy, \quad \sigma_H = I_0^{-2}h^{-1} \int_0^h I(y)I^*(y)dy,$$

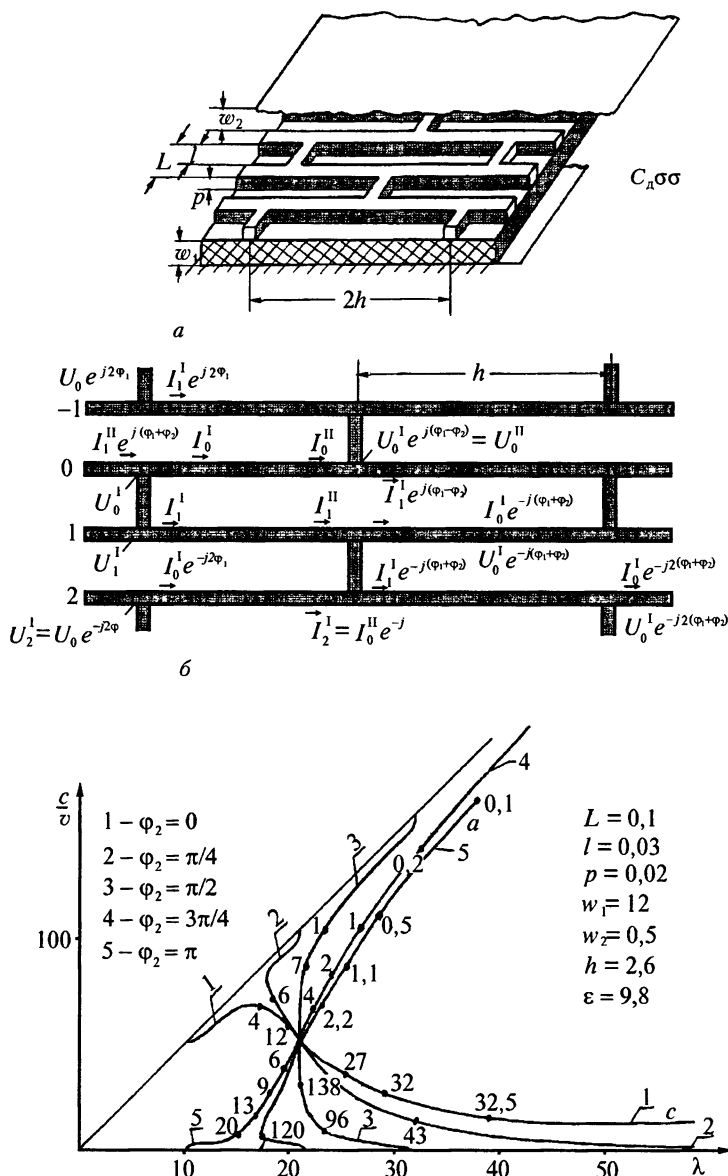
получим формулу для расчета сопротивления связи многоэтажной лестницы, приведенную в подписи к рис. 18.2. Она справедлива для ленточного потока электронов, касающегося штырей. Результаты расчета указаны числами около кривой дисперсии.

Формулы в подписях к рис. 18.1–18.3 справедливы и для ЗС на диэлектрической подложке, если в них заменить волновые числа  $k$  на  $\beta_y = k[\hat{C}_\varepsilon(\varphi_1)/\hat{\alpha}(\varphi_1)]^{1/2}$  и волновую проводимость  $\hat{M}(\varphi_1)$  на  $[\hat{\alpha}(\varphi_1)\hat{C}_\varepsilon(\varphi_1)]^{1/2}$ .

## 18.2. Двухступенчатые системы

Метод расчета остается тем же, что в гл. 15. Проиллюстрируем расчет на конкретных примерах. Рассмотрим многоэтажную ЗС типа «меандр» (рис. 18.5). В соответствии с эквивалентной схемой условия на концах этажа можно





**Рис. 18.5.** Четырехэтажная ЗС типа «меандр» на диэлектрической подложке, схема, поясняющая граничные условия и рассчитанные по формуле (18.5) кривые дисперсии. Числами около кривых указаны значения  $K_{св}$  Ом, вычисленные по формуле (18.7) для ленточного потока электронов, касающегося штырей

записать в виде

$$U_1^I = U_0^I, \quad U_0^{II} = U_0^I \exp[j(\varphi_1 - \varphi_2)], \quad U_1^{II} = U_0^I \exp[-j(\varphi_1 + \varphi_2)], \\ I_1^{II} + I_0^{II} \exp(-j2\varphi_1) = (I_0^I + I_1^I) \exp[-j(\varphi_1 + \varphi_2)].$$

Подставляя эти условия в (15.4), находим

$$\alpha_{-1}^I = -j \operatorname{tg}(\varphi_1/2) \alpha_0^I, \quad \alpha_0^{II} = \alpha_0^I \exp(-j\varphi_2), \quad \alpha_1^{II} = j \alpha_0^I \operatorname{tg}(\varphi_1/2) \exp(-j\varphi_2), \\ \eta_0^{II} = j \eta_{-1}^{II} \operatorname{tg}(\varphi_1/2) + \exp(-j\varphi_2) [\eta_0^I + j \eta_{-1}^I \operatorname{tg}(\varphi_1/2)]. \quad (18.3)$$

Вводя новую переменную  $\eta = \eta_0^I + j \eta_{-1}^I \operatorname{tg}(\varphi_1/2)$  и подставляя значения амплитуд симметричных составляющих в (15.3), получим следующую систему уравнений:

$$\begin{bmatrix} T_{11} & \sin x_{-1} & 0 \\ T_{21} & -\sin x_0 \operatorname{tg}(\varphi_1/2) & \sin x_0 \exp(-j\varphi_2) \\ T_{31} & (\cos x_{-1} + \cos x_0) \operatorname{tg}(\varphi_1/2) & (1 - \cos x_0) \exp(-j\varphi_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0^I \\ \eta_{-1}^{II} \\ j\eta \end{bmatrix} = 0, \quad (18.4)$$

где

$$T_{11} = M_{-1} \operatorname{tg}(\varphi_1/2) [\cos x_{-1} \exp(-j\varphi_2) + 1], \quad T_{21} = M_0 [\cos x_0 \exp(-j\varphi_2) - 1], \\ T_{31} = [M_0 \sin x_0 - M_{-1} \sin x_{-1} \operatorname{tg}^2(\varphi_1/2)] \exp(-j\varphi_2), \\ M_0 = M(\varphi_1), \quad M_{-1} = M(\pi - \varphi_1)$$

Приравнивая нулю детерминант матрицы из (18.4), получим уравнение дисперсии многоэтажной ЗС типа «меандр»:

$$\operatorname{tg}^2 \frac{\varphi_2}{2} = \frac{M_0 \operatorname{tg}(x_0/2) - M_{-1} \operatorname{ctg}(x_{-1}/2) \operatorname{tg}^2(\varphi_1/2)}{M_0 \operatorname{ctg}(x_0/2) - M_{-1} \operatorname{tg}(x_{-1}/2) \operatorname{tg}^2(\varphi_1/2)}. \quad (18.5)$$

При  $\varphi_2 = 0$  оно совпадает с уравнением дисперсии одноэтажного меандра для ветви с симметричным распределением поля по высоте штыря, а при  $\varphi_2 = \pi$  — для ветви с антисимметричным распределением.

Воспользуемся выражением (18.2). Поскольку вычисляем сопротивление связи для составляющей с амплитудой  $\alpha_0$ , роль  $U^2$  играет  $\alpha_0^2$ . При этом  $\hat{W} = [\hat{C}_\varepsilon(\varphi_1) \alpha_0^2 + \hat{C}_\varepsilon(\pi - \varphi_1) \alpha_{-1}^2] / 2$ , так что

$$K_{\text{св}} = \frac{\Phi(\varphi_1)}{N} \frac{2 \alpha_0^2 \sigma}{\hat{C}_\varepsilon(\varphi_1) \alpha_0^2 + \hat{C}_\varepsilon(\pi - \varphi_1) \alpha_{-1}^2}. \quad (18.6)$$

Формула (18.6) справедлива для любых двухступенчатых ЗС, в которых вся энергия запасается в однородной области. В нее входят амплитуды

симметричных составляющих  $\alpha_0$  и  $\alpha_{-1}$ , которые следует исключить. Для этого заметим, что потенциалы симметричных составляющих зависят от координаты  $y$ :

$$\begin{aligned}\alpha_0(y) &= \alpha_0 \cos[\beta_y(\varphi_1)y + \chi_0], \\ \alpha_{-1}(y) &= \alpha_{-1} \cos[\beta_y(\pi - \varphi_1)y + \chi_{-1}].\end{aligned}$$

Выразив с помощью (18.3) и (18.4)  $\eta_{-1}^{II}$  и  $\eta_0^{II}$  через  $\alpha_0^I$ ,

$$\begin{aligned}\eta_{-1}^{II} &= -\frac{M_{-1} \operatorname{tg}(\varphi_1/2) [\cos x_{-1} \exp(-j\varphi_2) + 1]}{\sin x_{-1}} \alpha_0^I, \\ \eta_0^{II} &= j \frac{M_0 [\cos x_0 \exp(-j\varphi_2) - 1]}{\sin x_0} \alpha_0^I,\end{aligned}$$

подставляя в (15.3) выражения для  $\alpha_{-1}^{II}, \alpha_0^{II}, \eta_{-1}^{II}$  и  $\eta_0^{II}$  с учетом (18.3) и полагая  $x_0 = \beta_y(\varphi_1)h$ ,  $x_{-1} = \beta_y(\pi - \varphi_1)h$ , находим:

$$\begin{aligned}\alpha_0(y) &= \left\{ \left[ \cos[\beta_y(\varphi_1)(h-y)] - \sin[\beta_y(\varphi_1)(h-y)] \operatorname{ctg} x_0 \right] \exp(-j\varphi_2) + \right. \\ &\quad \left. + \sin[\beta_y(\varphi_1)(h-y)] \sin^{-1} x_0 \right\} \alpha_0^I, \\ \alpha_{-1}(y) &= \left\{ \left[ \cos[\beta_y(\pi - \varphi_1)(h-y)] - \sin[\beta_y(\pi - \varphi_1)(h-y)] \operatorname{ctg} x_{-1} \right] \exp(-j\varphi_2) - \right. \\ &\quad \left. - \sin[\beta_y(\pi - \varphi_1)(h-y)] \sin^{-1} x_{-1} \right\} \alpha_0^I.\end{aligned}$$

Вычислив  $\alpha_0(y)\alpha_0^*(y)$  и  $\alpha_{-1}(y)\alpha_{-1}^*(y)$ , определяем

$$\begin{aligned}\alpha_0^2 &= 2 |\alpha_0^I|^2 (1 - \cos x_0 \cos \varphi_2) / \sin^2 x_0, \\ \alpha_{-1}^2 &= 2 \operatorname{tg}^2(\varphi_1/2) |\alpha_0^I|^2 (1 + \cos x_{-1} \cos \varphi_2) / \sin^2 x_{-1}, \\ \alpha_0^2 \sigma &= |\alpha_0^I|^2 \left[ (1 - \cos x_0 \cos \varphi_2) / \sin^2 x_0 + (\cos \varphi_2 - \cos x_0) / x_0 \sin x_0 \right].\end{aligned}$$

Подставляя результат в (18.6), получаем окончательное выражение для сопротивления связи многоэтажной ЗС типа «меандр»:

$$K_{\text{св}} =$$

$$= \frac{[\Phi(\varphi_1)/N] \sin^2 x_{-1} [1 - \cos x_0 \cos \varphi_2 + x_0^{-1} \sin x_0 (\cos \varphi_2 - \cos x_0)]}{\hat{C}_\epsilon(\varphi_1) \sin^2 x_{-1} (1 - \cos x_0 \cos \varphi_2) + \operatorname{tg}^2(\varphi_1/2) \hat{C}_\epsilon(\pi - \varphi_1) \sin^2 x_0 (1 + \cos x_{-1} \cos \varphi_2)} \quad (18.7)$$

В частном случае, при  $\varphi_2 = 0$  и  $N = 1$ , эта формула справедлива для одноэтажной ЗС при симметричном распределении потенциала по высоте штырей, а при  $\varphi_2 = \pi$  — для ветви с антисимметричным распределением. Соответствующие формулы приведены на рис. 15.2. То, какому  $\varphi_2$  соответствует симметричное распределение потенциала по высоте штыря, а какому антисимметричное, можно определить по множителю в скобках в числителях формул для  $K_{св}$  на рис. 15.2. Он возник в результате усреднения поля по высоте штырей. Симметричному распределению соответствует знак «+» перед  $\sinh x_0/x_0$ , а антисимметричному — знак «-».

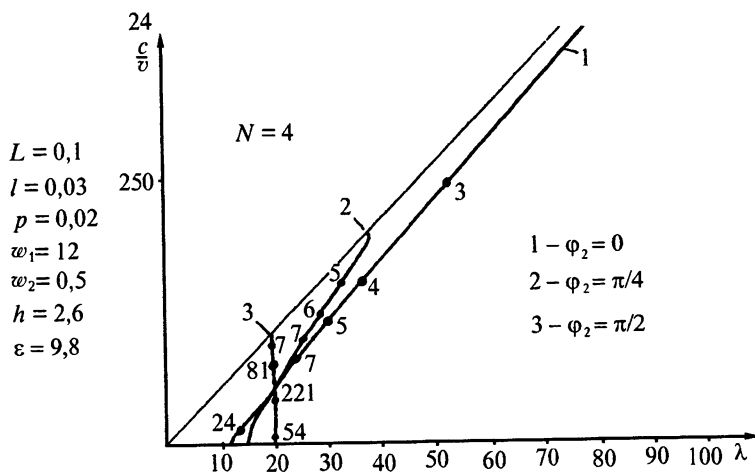
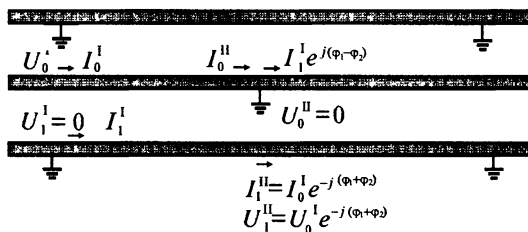
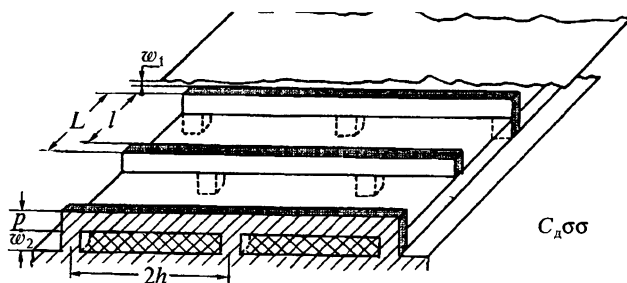
Вывод уравнения дисперсии и формулы для расчета сопротивления связи многоэтажной ЗС типа «встречные штыри» дан в упражнениях.

Наряду с ветвями ( $\varphi_2 = 0$  и  $\varphi_2 = \pi$ ), соответствующими одноэтажным ЗС, в многоэтажных ЗС (рис. 18.5 и 18.6) существуют дополнительные ветви дисперсионных характеристик. На рис. 18.7 приведены изочастоты ЗС типа «меандр» и «встречные штыри», расположенных в свободном пространстве.

Сравнение кривых дисперсии ЗС типа «встречные штыри», полученных в результате расчета и измерений, приведено на рис. 18.8. При расчете за высоту этажа принята длина штыря с учетом закорачивающей ножки  $h = 13,5 + 2,4 + 1,2 = 17,1$ , где 2,4 — высота ножки, 1,2 — половина толщины штыря. Расхождение рассчитанной и измеренной длин волн при фиксированных  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  не превышает 20 %, причем для основной волны ( $\varphi_2 = 0$ ) вдали от границ полос пропускания это расхождение не превышает 5 %. Сравнительно большое расхождение объясняется, во-первых, тем, что не учтена индуктивность ножек, и, во-вторых, тем, что не учтены условия на концах штырей (при расчете предполагалось, что ЗС ограничена в плоскостях симметрии магнитными стенками).

Все рассчитанные кривые дисперсии (они соответствуют различным значениям  $\varphi_2$ ) пересекаются в одной точке  $\varphi_1 = 0,5\pi$ ,  $\lambda = 4h$ . В противоположность рассчитанным измеренные кривые для трехэтажной ЗС пересекаются лишь при значениях  $\varphi_2$ , отличающихся на  $\pi$ , а для четырехэтажной и вовсе не пересекаются. Учет индуктивности ножек приводит к качественному совпадению для трехэтажной ЗС. При любом числе этажей кривые пересекаются на линии  $\varphi_1 = \pi/2$ , если только для них величина  $\varphi_2$  отличается на  $\pi/2$ . Расщепление кривых дисперсии четырехэтажной ЗС при  $\varphi_1 = \pi/2$  обусловлено влиянием границ, перпендикулярных оси  $y$ . Это утверждение иллюстрируется (рис. 18.9) результатами расчета характеристик двухэтажной ЗС. В трехэтажной ЗС кривые дисперсии не расщепляются из-за наличия скользящей плоскости симметрии. При четном числе этажей ЗС не содержит такой плоскости и кривые в общем случае расщепляются. В многоэтажных ЗС кривая дисперсии, соответствующая  $\varphi_2 = 0$ , такая же, как в одноэтажных. Она имеет участок, на котором длина волны и замедление больше, чем при  $\varphi_2 \neq 0$ , так что при определенных напряжениях в ЛОВ, построенных на многоэтажных ЗС типа «встречные штыри», могут возбуждаться колебания только одной частоты.

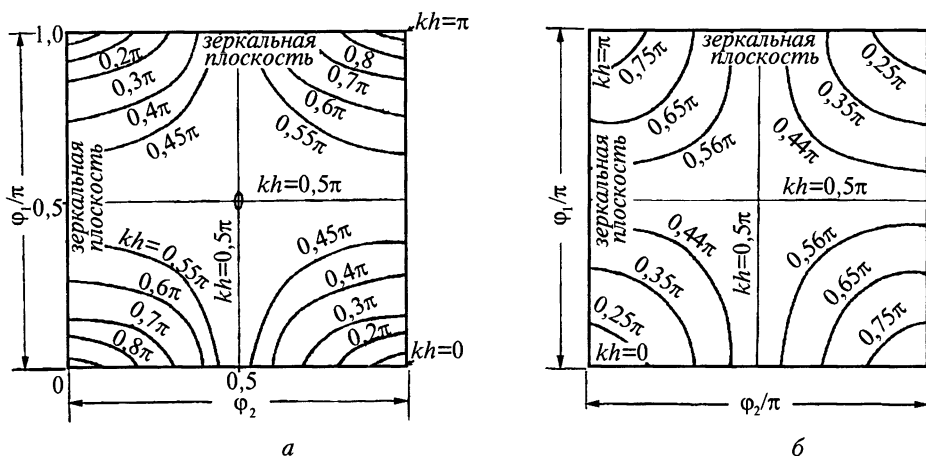
Сравнение измеренных и рассчитанных кривых дисперсии для четырехэтажной ЗС типа «меандр» дано на рис. 18.10. Расхождение замедлений при заданной длине волны не превышает 10 %.



**Рис. 18.6.** Четырехэтажная ЗС типа «встречные штыри» на диэлектрической подложке, схема, поясняющая граничные условия и рассчитанные кривые дисперсии. Числами около кривых указаны значения  $K_{CB}$  Ом, вычисленные для ленточного потока электронов, касающегося штырей

$$\cos \varphi_2 = \frac{M_0 \sin x_{-1} \cos x_0 + M_{-1} \sin x_0 \cos x_{-1}}{M_0 \sin x_{-1} - M_{-1} \sin x_0},$$

$$K_{CB} = \frac{[\Phi(\varphi_1)/N][1 - \cos x_0 \cos \varphi_2 + x_0^{-1}(\cos \varphi_2 - \cos x_0) \sin x_0]}{\hat{C}_e(\varphi_1)(1 - \cos x_0 \cos \varphi_2) + \hat{C}_e(\pi - \varphi_1)(1 + \cos x_{-1} \cos \varphi_2) \sin^2 x_0 / \sin^2 x_{-1}}$$



**Рис. 18.7.** Изочастоты многоэтажных ЗС типа «меандр» (а) и «встречные штыри» (б) без диэлектрической подложки:

а:  $w_1 = 0,4$ ,  $L = 0,4$ ,  $w_2 = 0,8$ ,  $p = l = 0,2$ ,

$$\cos(kh) = \frac{M(\varphi_1)\cos^2(\varphi_1/2) - M(\pi - \varphi_1)\sin^2(\varphi_1/2)}{M(\varphi_1)\cos^2(\varphi_1/2) + M(\pi - \varphi_1)\sin^2(\varphi_1/2)} \cos \varphi_2,$$

б:  $w_1 = 0,4$ ,  $L = 0,2$ ,  $w_2 = \infty$ ,  $p = 0,15$ ,  $l = 0,1$ ,

$$\cos(kh) = \frac{M(\varphi_1) - M(\pi - \varphi_1)}{M(\varphi_1) + M(\pi - \varphi_1)} \cos \varphi_2$$

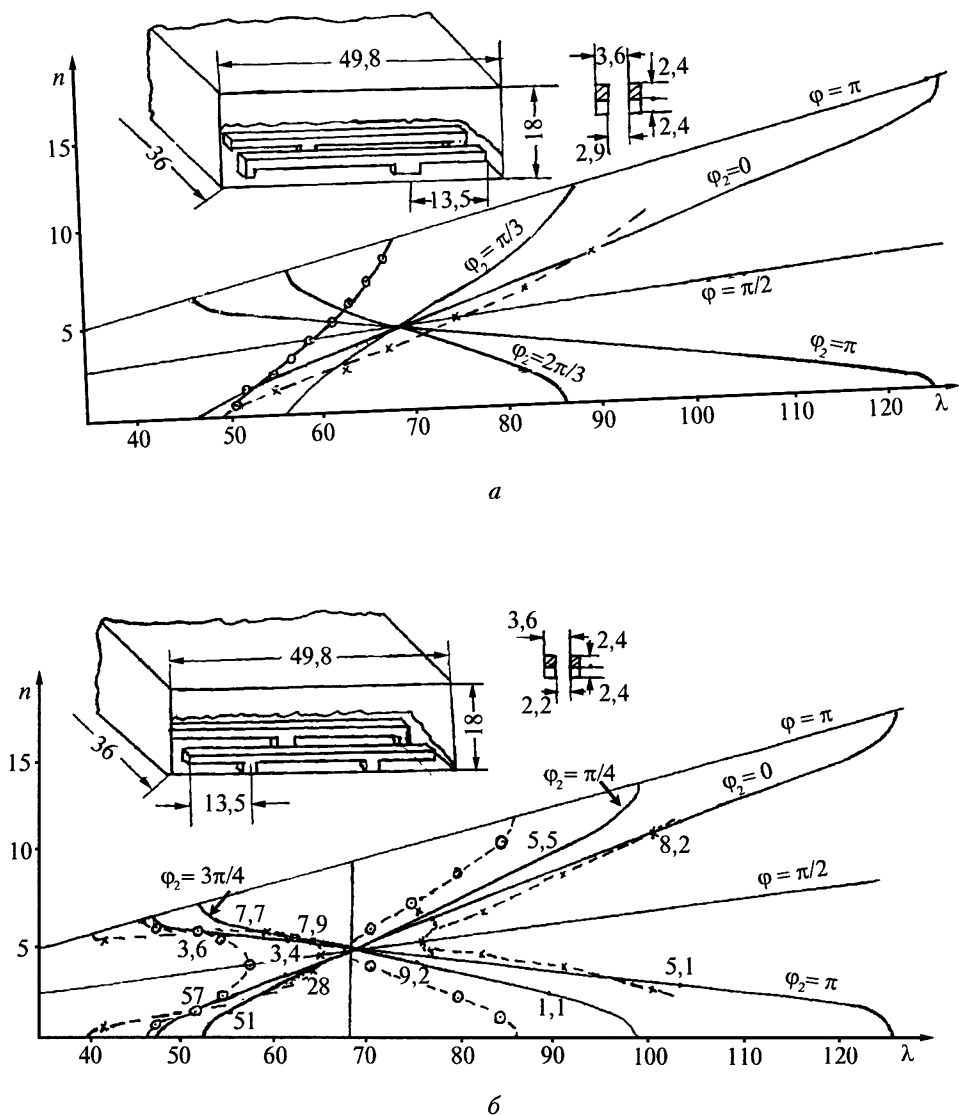
Выше рассмотрены только однорядные многоэтажные ЗС. Все уравнения дисперсии остаются справедливыми и для многорядных ЗС, если заменить в них  $M(\varphi_1)$  на  $M(\varphi_1, \varphi_3)$  [7].

Расчет многоэтажных ЗС проведен выше методом многопроводных линий, хотя все эти ЗС можно более точно рассчитать проекционным методом, описанным в гл. 10. Вместе с тем, второй из них более трудоемок, требует сложных вычислительных программ, большого времени вычислений на ЭВМ. Этот метод практически не удастся реализовать для более сложных конструкций ЗС, чем рассмотренные выше. Метод многопроводных линий более прост и нагляден.

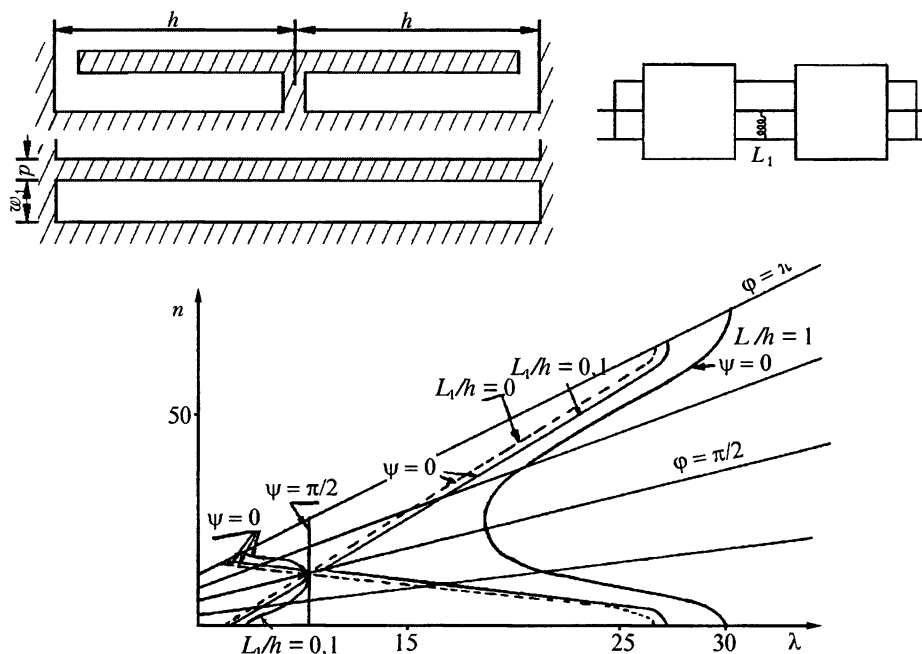
## Упражнения

**18.1.** Получить уравнение дисперсии многоэтажной ЗС типа «встречные штыри» (рис. 18.6).

**18.2.** Получить формулу для расчета сопротивления связи многоэтажной ЗС типа «встречные штыри» (рис. 18.6).



**Рис. 18.8.** Сравнение результатов расчета (сплошные линии) при  $L_1 = 0$  и измерений (штриховые линии) дисперсионных характеристик трехэтажной (а) и четырехэтажной (б) ЗС типа «встречные штыри». Числами около кривых указаны значения  $K_{sv}$  в Ом, вычисленные для ленточного потока электронов, касающегося штырей



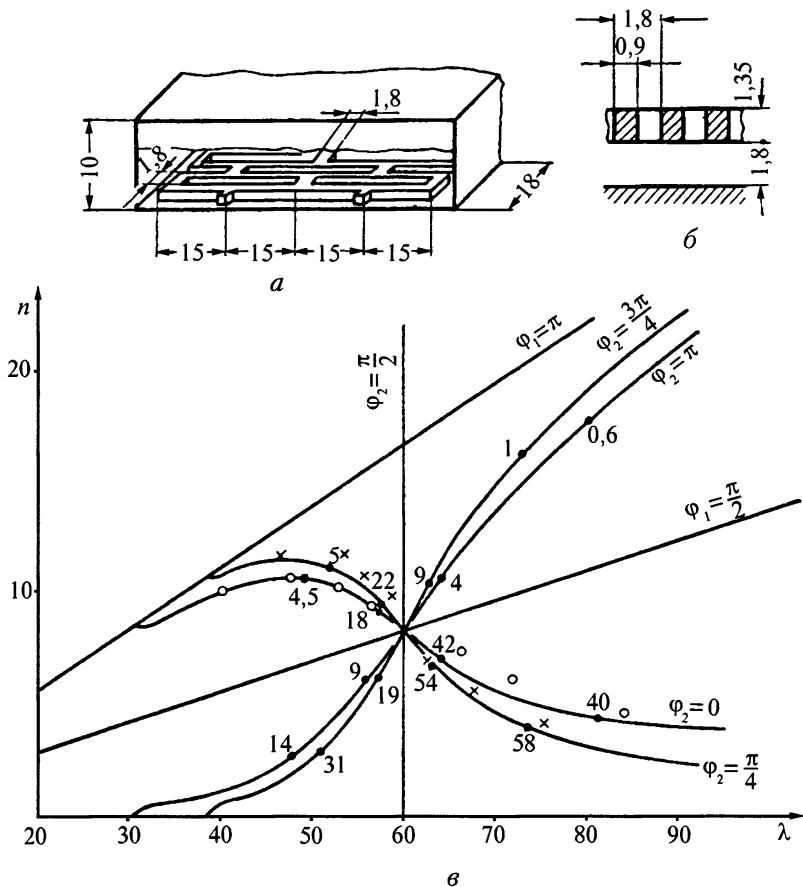
**Рис. 18.9.** Двухэтажная ЗС типа «встречные штыри», ее эквивалентная схема и кривые дисперсии, рассчитанные при  $L = w_1 = 0,2$ ,  $l = 0,1$ ,  $p = 0,15$ ,  $w_2 = \infty$ ,  $\hat{L}_1 = 0$  (штриховые линии),  $\hat{L}_1 = 1/4\pi$  (сплошные линии),  $\hat{L}_1 = L_1/\mu_0 h$ ,

$$\cos^2(kh) - \left[ \frac{\hat{M}(\varphi_1) - \hat{M}(\pi - \varphi_1)}{\hat{M}(\varphi_1) + \hat{M}(\pi - \varphi_1)} \right]^2 = \frac{4\hat{L}_1 kh \hat{M}(\varphi_1) \hat{M}(\pi - \varphi_1) \cos(kh) \sin(kh)}{\hat{M}(\varphi_1) + \hat{M}(\pi - \varphi_1)}$$

### Список литературы

- [1]. Многоэтажная штыревая система со связками. В. А. Бахарев и др. *Электронная техника. Сер. 1. Электроника СВЧ*, 1962. Вып. 3, 3–17.
- [2]. Звонарев Ю. Е. Двухсвязная двумерно-периодическая система с отрицательной продольной дисперсией. *Электронная техника. Сер. 1. Электроника СВЧ*, 1969. Вып. 3, 63–88.
- [3]. Ковтунова З. Д., Силин Р. А. Дисперсия и сопротивление связи двухэтажных трехступенчатых систем типа «встречные штыри». *Электронная техника. Сер. 1. Электроника СВЧ*, 1966. Вып. 9, 74–79.
- [4]. Конторович М. И., Астрахан М. И., Спирина М. Н. О замедлении электромагнитных волн проволоочными сетками. *Радиотехника и электроника*, 1964, **9**(8), 1509–1513.





**Рис. 18.10.** Сравнение кривых дисперсии четырехэтажной ЗС типа «меандр», полученных в результате расчета (сплошные линии) и измерений (крестики, кружки). Числами около черных точек кривых указаны значения  $K_{св}$  в Ом, вычисленные для ленточного потока электронов, касающегося штырей

[5]. Мясников В. Е. Дисперсионные свойства многослойной замедляющей системы. *Электронная техника. Сер. 1. Электроника СВЧ*, 1969. Вып. 3, 51–62.

[6]. Силин Р. А. Анализ многослойных штыревых замедляющих систем. *Электроника*, 1958, 4, 3–42.

[7]. Силин Р. А. Анализ многослойных и многорядных штыревых замедляющих систем. Труды конференции по электронике СВЧ. М.–Л.: Госэнергоиздат, 1959.

## Замедляющие системы как искусственные диэлектрики

### 19.1. Сравнение оптических свойств кристаллов и искусственных диэлектриков

Свойства ЗС в настоящей книге описываются в основном с точки зрения возможности их использования в электронных приборах СВЧ. В настоящей главе они описаны с несколько иной точки зрения, а именно, рассмотрены «оптические» свойства ЗС. Имеются в виду законы преломления и отражения волн в СВЧ диапазоне. Эти свойства полезно знать при конструировании искусственных диэлектриков для различного рода линий передачи, антенных устройств и, в частности, фазированных антенных решеток (ФАР) [2]. Их полезно также знать при изучении ограниченных участков двумерно- и трехмерно-периодических ЗС для электронных приборов. В последние годы в связи с развитием технологии изготовления мелких решеток бурно развивается исследование и применение таких решеток для нужд радиотехники и электроники миллиметрового, субмиллиметрового и оптического диапазонов длин волн. Их называют фотонными кристаллами [21, 30]. Для их исследования и применения также полезно знать соответствующие законы преломления и отражения волн.

«Оптические» свойства ЗС и обычных кристаллов во многом подобны, ибо те и другие представляют периодические структуры. В тех и других любую собственную волну можно представить в виде суммы пространственных гармоник, а для полного описания волноводных свойств достаточно задать дисперсионную характеристику в нулевой зоне. Для тех и других в определенных точках нулевой зоны существуют экстремумы поверхности дисперсии, а в плоскостях симметрии — экстремумы в направлениях, перпендикулярных этим плоскостям и т.д. Эти экстремумы приводят к отражению волн от ЗС, которое описывается формулой Вульфа — Брэггов. Вместе с тем, искусственные диэлектрики, как показано ниже, обладают рядом свойств, не известных для обычных кристаллов.

Рассматривая распространение волн, имеющих малые волновые векторы по сравнению с периодами  $b_i$  обратной решетки ( $\beta < b_i$ ,  $i = 1, 2$ ), часто пренебрегают всеми пространственными гармониками, кроме нулевой, когда эти гармоники относительно малы. Такое приближение использовано, в частности, при расчете ЗС типа «гребенка» и «диафрагмированный волновод» в п. 9.6, а также при расчете спиральных ЗС в гл. 6 и 7. Для кристаллов в оптическом диапазоне величина  $\beta$  в тысячи раз меньше размеров нулевой зоны, так как обычно линейные размеры ячейки нулевой зоны кристалла в тысячи раз меньше длины волны видимого света. При этом в оптике все расчеты ведутся в

приближении одной волны. Пространственные гармоники приходится учитывать лишь в рентгено-структурном анализе, когда длина волны оказывается сравнимой с размерами ячейки. Только при учете пространственных гармоник строго получается формула Вульфа — Брэггов (см. п. 16.9).

Распространение волн в ЗС обычно изучают в предположении, что размеры ЗС не меняются во времени. Такое предположение с высокой степенью точности соответствует действительности. При изучении волн в кристаллах пренебрегать колебаниями атомов далеко не всегда допустимо. С этими колебаниями связано поглощение волн, комбинационное рассеяние и т.п. Комбинационное рассеяние аналогично явлениям, наблюдаемым в параметрических усилителях СВЧ.

Закономерности распространения электромагнитных волн в ЗС имеют много общего не только с оптическими и рентгеновскими волнами в кристаллах, но и с упругими, которые обусловлены тепловыми колебаниями в решетке, а также с блоховскими волнами, которые связаны с движением электронов. Вероятность нахождения электронов в той или иной точке кристалла описывается уравнением Шредингера с периодическими коэффициентами. В результате решения этого уравнения находится зависимость энергии электрона  $E = \hbar\omega$  от волнового вектора  $\beta$  (квазимпульса). Полосе пропускания ЗС соответствует энергетическая зона разрешенных состояний электронов, полосе непропускания — запрещенная зона. Групповой скорости волны соответствует скорость движения электронов в кристаллической решетке.

В основной массе работ по искусственным диэлектрикам либо усредняют поле, вводя проницаемости  $\epsilon$  и  $\mu$  [16, 19], либо более или менее строго решают задачу о дифракции [5, 17, 18]. Ввести понятия  $\epsilon$  и  $\mu$  или решить задачу дифракции удалось лишь для очень небольшого набора искусственных диэлектриков. Использование понятий  $\epsilon$  и  $\mu$  даже при учете пространственной дисперсии [1] требует усреднения поля в среде и неприменимо при длинах волн, сравнимых с размерами ячейки. Решение дифракционных задач из-за громоздкости не позволяет видеть ряд физических явлений, которые реализуются с помощью искусственных диэлектриков.

Использование изочастот для построения законов отражения и преломления можно рассматривать как существенное дополнение к двум отмеченным методам, не заменяющее их. Оно не требует усреднения поля и справедливо при любых длинах волн, для которых тем или иным способом найдены дисперсионные характеристики  $n(\lambda)$ . Изочастоты по существу представляют поверхности волновых векторов [7], широко используемых в оптике для построения законов преломления. Они подобны также поверхностям нормальных скоростей [33], используемых при изучении оптики анизотропных сред, и отличаются тем, что строятся для волновых векторов, обратных нормальным скоростям. Оптические свойства обычных диэлектриков известны, если определены коэффициенты преломления в трех главных направлениях для двух различных поляризаций волны. При этом изочастоты описываются уравнением Френеля ([7], с. 460). Для описания свойств искусственных диэлектриков, как и естественных с учетом пространственной дисперсии ([1], с.17), этих шести коэффициентов недостаточно. Необходимо строить изочастоты полностью.

Вывод законов преломления и отражения с помощью изочастот основан на трех положениях. Во-первых, *поток энергии отраженной и преломленной*

волн (т. е. вектор групповой скорости  $v_g = \text{grad}_\beta \omega$ ) должен быть направлен от границы раздела сред. Во-вторых, частота колебаний в падающей, преломленной и отраженной волнах одна и та же, так что волновые векторы этих волн должны оканчиваться на одной и той же изочастоте. Во-третьих, проекции волновых векторов этих волн на границу раздела двух сред должны быть одинаковыми [15],

$$\beta_n \sin \theta_n = \beta_{np} \sin \theta_{np} = \beta_o \sin \theta_o, \quad (19.1)$$

где  $\beta_n$ ,  $\beta_{np}$  и  $\beta_o$  — модули волновых векторов падающей, преломленной и отраженной волн, а  $\theta_n$ ,  $\theta_{np}$  и  $\theta_o$  — соответственно, углы падения, преломления и отражения. В случае, когда первую среду представляет свободное пространство ( $\beta_n = k$ ), получаем известный закон преломления

$$n = \beta_{np}/k = \sin \theta_n / \sin \theta_{np}.$$

Если проекции волновых векторов на границу раздела не могут быть одинаковыми, то наблюдается полное отражение.

Докажем соотношение (19.1). Пусть граница раздела двух сред такова, что ЗС имеет период  $d_\eta$  вдоль оси  $\eta$ , параллельной этой границе. В соответствии с теоремой Флоке каждую компоненту поля в любой точке ЗС можно представить в виде  $A(\eta) \exp(-j\beta_\eta \eta)$ , где  $A(\eta) = A(\eta + d_\eta)$ . Ради простоты остальные координаты не записываем. Поскольку падающая, преломленная и отраженная волны могут распространяться независимо, поле каждой из них должно удовлетворять той же теореме Флоке. Ищем поле на границе раздела в виде суммы падающей ( $A_1$ ), преломленной ( $A_2$ ) и отраженной ( $A_3$ ) волн:

$$A(\eta) \exp(-j\beta_\eta \eta) = A_n(\eta) \exp(-j\beta_{np} \eta) + A_{np}(\eta) \exp(-j\beta_{np} \eta) + A_o(\eta) \exp(-j\beta_{no} \eta).$$

Разлагая каждое слагаемое в ряд Фурье по пространственным гармоникам, получим

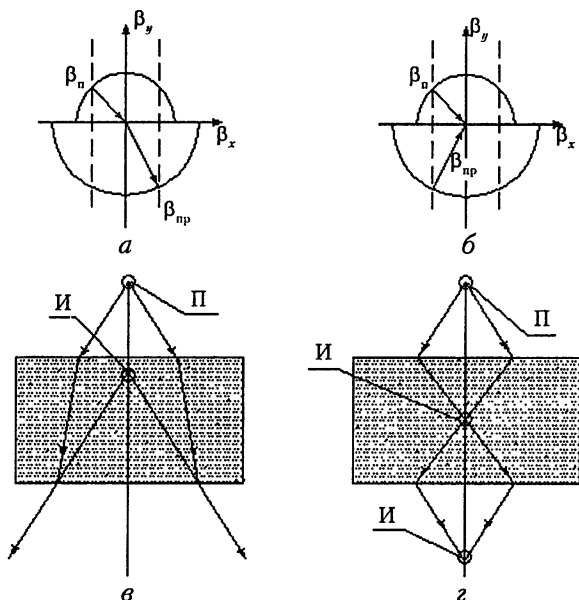
$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m \exp(-j\beta_{m\eta} \eta) - a_{m\pi} \exp(-j\beta_{m\eta\pi} \eta) - a_{mnp} \exp(-j\beta_{m\eta np} \eta) - a_{mo} \exp(-j\beta_{m\eta o} \eta) = 0.$$

Экспоненты с разными коэффициентами при  $\eta$  линейно независимы. Поэтому для волн, которым соответствуют амплитуды, отличные от нуля, должно выполняться равенство

$$\beta_{m\eta} = \beta_{m\eta\pi} = \beta_{m\eta np} = \beta_{m\eta o}$$

для каждой пространственной гармоники. Таким образом, равенство (19.1) доказано.

В общем случае, когда фазовая  $v$  (или  $\beta$ ) и групповая  $v_g$  скорости могут быть неколлинеарны, говорим, что дисперсия положительная, если угол между  $\beta$  и  $v_g$  меньше  $\pi/2$ , и — отрицательная, — если он больше  $\pi/2$ . У изотропных сред этот угол равен либо нулю, либо  $\pi$ , а изочастота имеет сферическую форму. Для таких сред на рис. 19.1 построены волновые векторы (а) и (б)



**Рис. 19.1.** Построение волновых векторов (а) и (б), предметов (п) и изображений (и) в пластинах с положительной (в) и отрицательной (г) дисперсией для случаев, когда центры сферических изочастот лежат в начале координат.

падающей из свободного пространства ( $\beta_n$ ) и преломленной ( $\beta_{пр}$ ) волн, лучи (в) и (г) а также предметы и изображения в плоско параллельных пластинах из материала с положительной (а и в) и отрицательной (б и г) дисперсией. Лучи и  $\mathbf{v}_r$  направлены одинаково. Они идут от границы раздела сред, тогда как волновые векторы могут иметь обратное направление. В средах с разными знаками дисперсии волновые векторы и лучи отклоняются от нормали в противоположные стороны. В обоих случаях проекции  $\beta_n$  и  $\beta_{пр}$  на границу раздела одинаковы. При построении выбирается тот волновой вектор  $\beta_{пр}$ , которому соответствует энергия (групповая скорость), бегущая от границы раздела. Для сред с положительной дисперсией считаем коэффициент замедления  $n = \beta/k > 0$ , а для сред с отрицательной дисперсией  $-n = \beta/k < 0$ . Закон преломления для сред с отрицательной дисперсией установлен Л. И. Мандельштамом [8, 9].

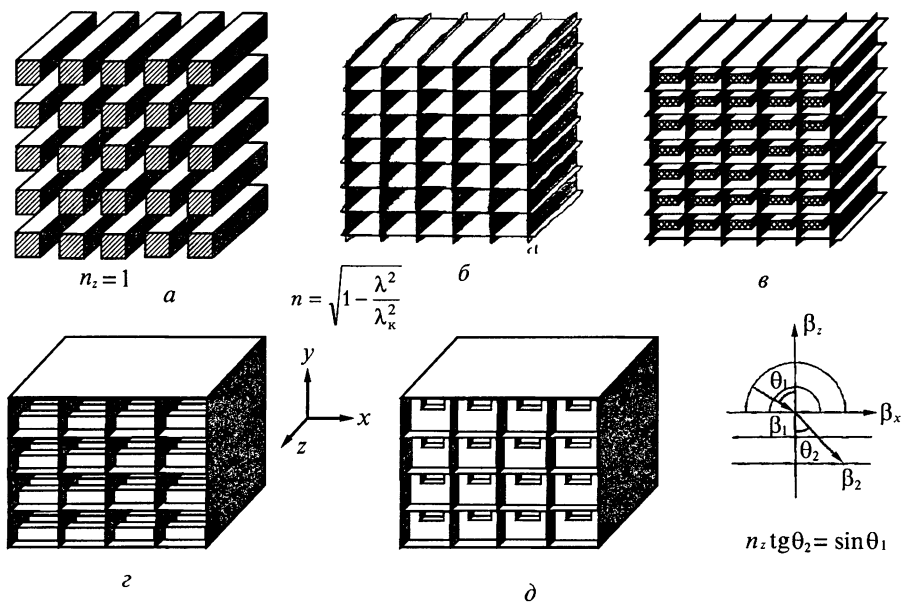
Изображения предметов в пластинах с разными законами дисперсии (см. рис. 19.1, а также п. 1.2 и упражнение 1.2) по разному удалены от этих предметов. У пластины с положительной дисперсией оно всегда ближе к предмету, чем противоположная ее граница. При отрицательной дисперсии может появиться два изображения, причем второе оказывается по другую сторону этой границы. В общем случае для обеих пластин изображение получается размытым (имеет место абберация). Это явление хорошо известно каждому, кто наблюдал предмет через толстую пластину стекла. Подбирая форму изочастот среды, можно избавиться от этой абберации [12].

## 19.2. Примеры искусственных диэлектриков

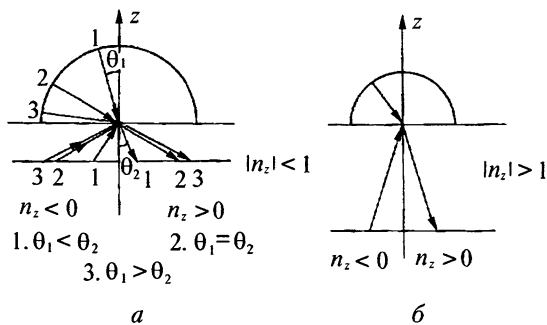
Характерной особенностью искусственных диэлектриков, изображенных на рис. 19.2, служит то, что они переносят энергию лишь вдоль оси  $z$ . Это утверждение относится и к многопроводной линии (рис. 19.2, *а*), если в ней распространяется лишь  $TEM$ -волна. Соответствующие этим диэлектрикам изочастоты представляют плоскости, перпендикулярные оси  $z$ , а закон преломления можно записать формулой для коэффициента замедления волны  $n_z$  вдоль оси  $z$ , приведенной на рис. 19.2. Он может быть записан в явном виде (см. под рис. 19.2, *а* и *б*), либо найден в результате более сложных расчетов или измерений.

Направления волн, проходящих через границу раздела такого диэлектрика со свободным пространством указаны стрелками на рис. 19.3. Как и в случае изотропного искусственного диэлектрика, волновые векторы имеют одинаковые или разные знаки проекций на нормаль к границе раздела в зависимости от знака дисперсии ( $n_z > 0$  или  $n_z < 0$ ). В случае  $|n_z| > 1$  угол падения всегда больше угла преломления (рис. 19.3, *б*), а в случае  $|n_z| < 1$  угол преломления может быть больше, равен или меньше угла падения в зависимости от величины последнего. Соответствующие векторы снабжены индексами «1», «2», «3» на рис. 19.3, *а*.

Закон преломления волн в искусственных диэлектриках на рис. 19.2 приведен для случая, когда граница раздела перпендикулярна осям волноводов. Соответствующий закон усложняется (см. рис. 19.4), если оси волноводов



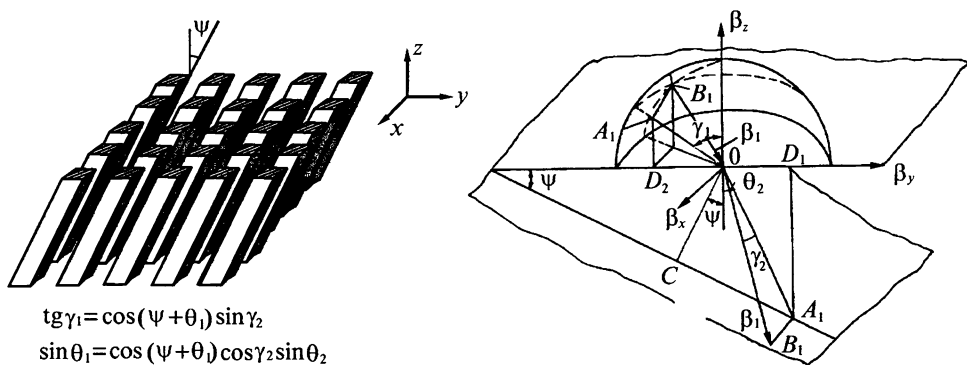
**Рис. 19.2.** Примеры искусственных диэлектриков с изочастотами в виде плоскостей, перпендикулярных оси  $z$ , и соответствующий закон преломления



**Рис. 19.3.** Волновые векторы для случаев, когда искусственный диэлектрик состоит из системы волноводов и волна падает на границу раздела свободного пространства с диэлектриком при замедлении  $|n_z| < 1$  (а) и при замедлении  $|n_z| > 1$  (б)

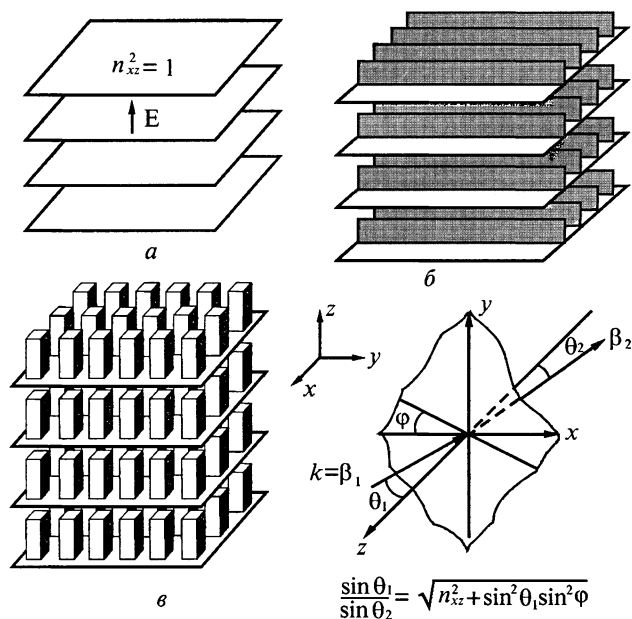
стями. Эти сечения представляют изочастоты, примеры которых приведены в гл. 17 и 18, а также на рис. 19.6.

Несколько необычны формы изочастот для лестниц на рис. 17.6. В зависимости от сечения проводников, образующих лестницу, изочастоты могут иметь различную форму и даже выходить из начала координат \*). Следует заметить, что в отличие от данных выше определений «нормальная» и «положительная» дисперсия, а также «аномальная» и «отрицательная» дисперсия часто понимают как синонимы (см. [18], статья «Дисперсия волн»). (поверхность дисперсии имеет особую точку при  $\beta = 0$ ). Дисперсионные характеристики этих систем весьма чувствительны к форме

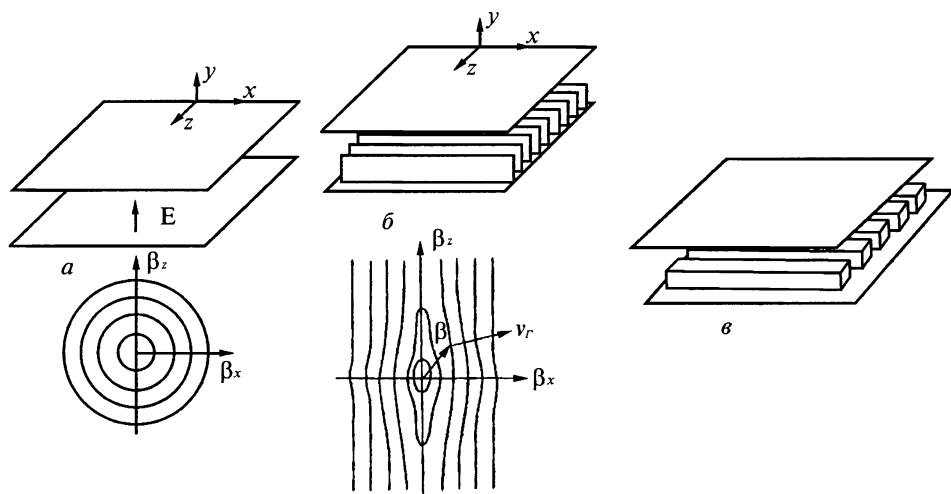


**Рис. 19.4.** Построение закона преломления волны на границе раздела свободного пространства с искусственным диэлектриком, когда эта граница не параллельна плоскостям симметрии

\*) В книге [1] соответствующие волны названы продольными экситонами.



**Рис. 19.5.** Примеры искусственных диэлектриков, состоящих из слоев, разделенных проводящими плоскостями (системы плоскостей (а), широких гребенок (б), штыревых гребенок (в))

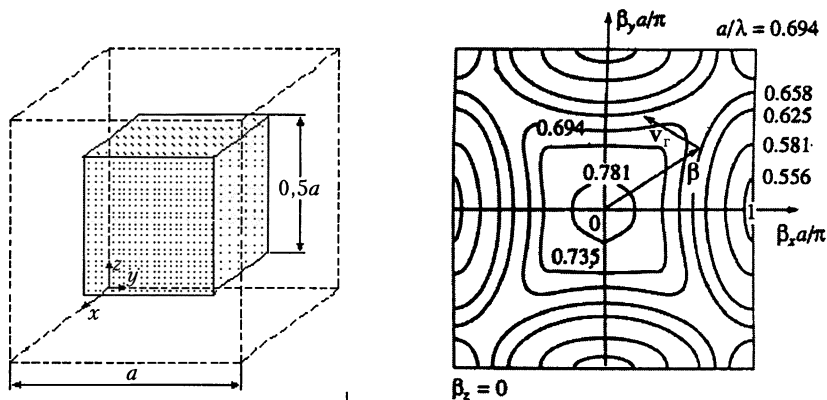


**Рис. 19.6.** Изочастоты а и б для низших типов волн между плоскостями (б), в гребенке (з) и в следующем за  $TEM$  типе волны в многопроводной линии (д)



поперечного сечения проводников. Так, например, замена круглых проводников квадратными приводит к тому, что изочастоты даже качественно меняют свою форму (меняется знак кривизны по отношению к началу координат). Такие диэлектрики требуют высокой точности изготовления.

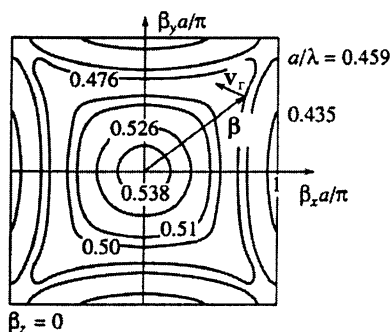
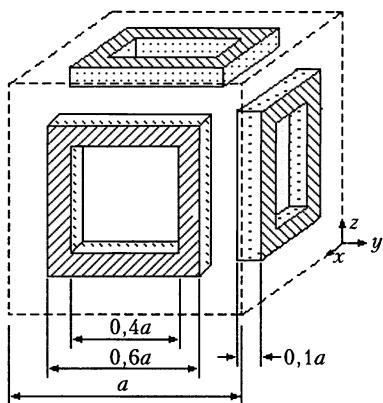
Особый интерес представляют трехмерно периодические системы, так как на их основе можно создавать квазиоптические и оптические устройства. Ограничимся рассмотрением трех структур из идеально проводящего металла (рис. 19.7, рис. 19.8, рис. 19.9). Все они в основной (самой длинноволновой) полосе пропускания имеют положительную дисперсию нулевой пространственной гармоники и не представляют интереса с точки зрения необычных законов преломления и отражения. В следующей полосе можно наблюдать отрицательную дисперсию нулевой гармоники в тех или иных направлениях. Именно для второй полосы приведены изочастоты на всех трех рисунках.



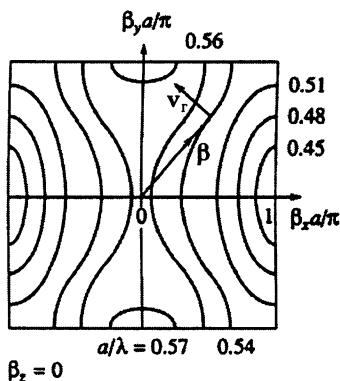
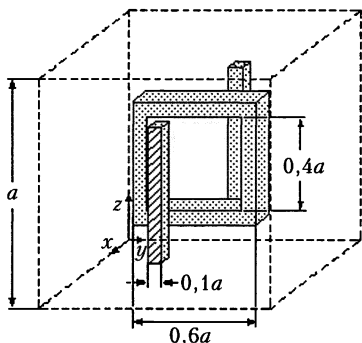
**Рис. 19.7.** Ячейка искусственного диэлектрика с металлическими включениями в виде кубиков и соответствующие изочастоты при  $\beta_z = 0$  для волн, возбуждаемых полем  $E_z$  во второй полосе пропускания.

Образование ветвей дисперсионной характеристики с отрицательной дисперсией поясним на примере коаксальной линии передачи, ведущей волну в одном направлении. В пренебрежении потерями, если область между проводниками однородна, для низшего типа волны дисперсионная характеристика  $\omega(\beta)$  представляется парой прямых (рис. 19.10, а). Дисперсия положительная. При введении неоднородностей с периодом  $d$  характеристика искажается. Появляются полосы непропускания и пространственные гармоники поля. Им соответствуют ветви дисперсионной характеристики, нанесенные штриховыми линиями на рис. 19.10, б. Среди них есть ветви с отрицательной дисперсией. В частности, отрицательная дисперсия гармоник наблюдается во второй полосе пропускания.

Изочастоты на рис. 19.7–19.9 рассчитаны методом, описанным в гл. 10 (см. также [31, 32]), для случая, когда волны возбуждаются полем с



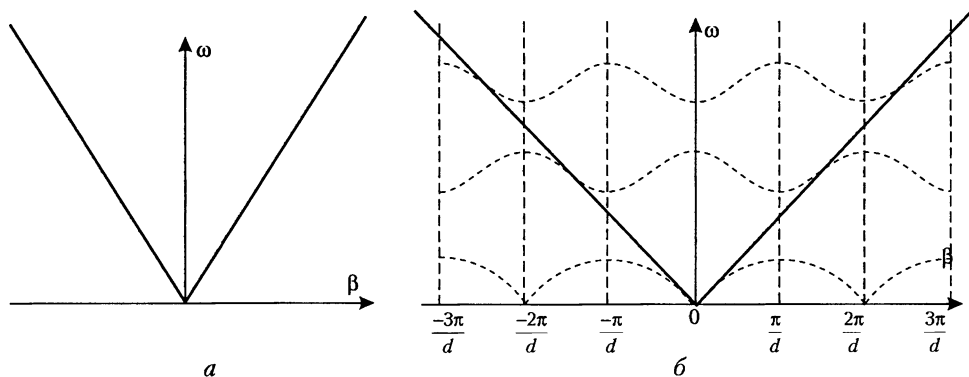
**Рис. 19.8.** Ячейка искусственного диэлектрика с металлическими включениями в виде квадратных рамок на краях ячейки и соответствующие изочастоты при  $\beta_z = 0$  для волн, возбуждаемых полем  $E_z$ .



**Рис. 19.9.** Ячейка искусственного диэлектрика с металлическими включениями в виде рамок и штырей, расположенных в центре и на гранях ячейки, соответственно, и соответствующие изочастоты при  $\beta_z = 0$  для волн, возбуждаемых полем  $E_z$ .

компонентой  $E = E_z$ . При этом  $\beta_z = 0$ . Приводим изочастоты только для второй полосы, в которой наблюдается отрицательная дисперсия нулевой гармоники. Ячейки структур на рис.19.7 и рис.19.8 имеют такую же симметрию, как куб. При  $\beta a \ll 1$  изочастоты имеют форму сферы (среда изотропная) и отрицательная дисперсия имеет место во всех трех направлениях. На рис.19.9 среда не изотропная. Ее дисперсия отрицательна лишь в одном направлении, как и в работе [26].

Следует ожидать, что необычные законы преломления и отражения имеют место в кристаллах из крупных молекул [10] и, в частности, в холестерических [22–25] и белковых кристаллах. Структуры с необычными оптическими свойствами можно синтезировать методами голографии,



**Рис. 19.10.** Кривые дисперсии низшего типа волны в коаксиальной линии передачи: *a* — при однородном заполнении пространства между проводниками и *б* — при возмущении с периодом  $d$ .

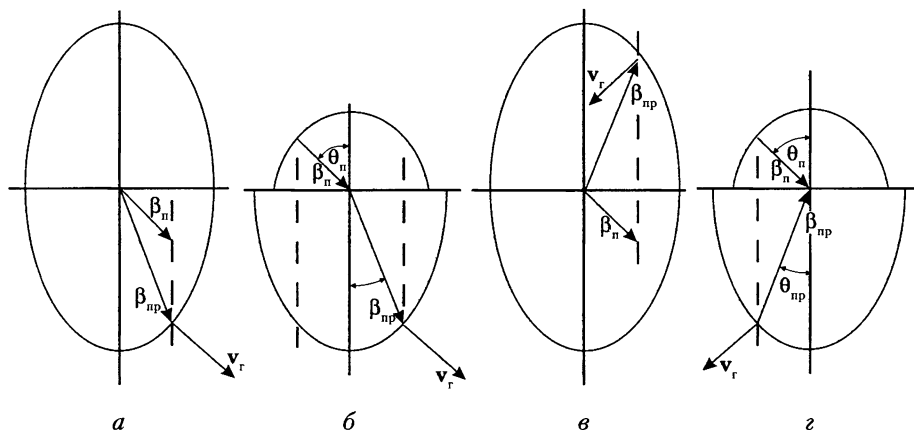
фотолитографии [26] и т. п. Это так называемые сверхрешетки, фотонные кристаллы [21], киральные среды. Как показано в [27], столь необычными свойствами должны обладать вещества, у которых проницаемости  $\epsilon$  и  $\mu$  одновременно отрицательны.

### 19.3. Примеры «оптических явлений», изученных с помощью изочастот

Один из примеров, в котором волна проходит через изотропную пластину с отрицательной дисперсией, рассмотрен выше (рис.19.1, *з*). В этом случае возможны два изображения. Одно внутри пластины, а второе — по другую сторону пластины, чем предмет. Ниже приведены другие примеры.

Пусть волна падает из свободного пространства на плоскую границу среды с изочастотами в виде эллипсов (рис.19.11). Обозначим волновые векторы падающей  $\beta_{\text{п}}$  и преломленной  $\beta_{\text{пр}}$  волн. Они имеют одинаковые проекции на границу раздела. Линии прекций обозначены штриховыми линиями. Рассматриваем два случая, в первом из которых преломляющая среда имеет положительную дисперсию (рис.19.11, *а, б*), а во втором — отрицательную (рис.19.11, *в, г*). Во всех случаях вектор групповой скорости строится из точки окончания волнового вектора в сторону возрастания частоты. Для каждого случая сделано два построения. Одно из них строгое (рис. 19.11, *а, в*), а другое — наглядное (рис. 19.11, *б, г*).

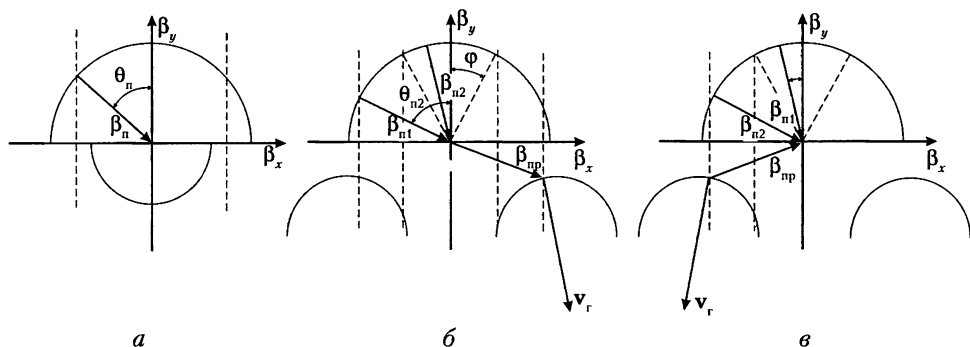
При строгом построении волновые векторы выходят из начала координат. Линия проекции (штриховая) волновых векторов пересекает изочастоту дважды, т.е. в преломляющей среде существует два вектора с одинаковыми проекциями на границу раздела. Выбираем тот из них, которому соответствует групповая скорость, направленная от границы раздела. При этом, однако, наглядно не видно, какие векторы принадлежат падающей волне, а какие — отраженной. Чаше используют другое построение



**Рис. 19.11.** Построение волновых векторов  $\mathbf{b}$  и направлений лучей  $\mathbf{v}_r$  с помощью изочаастот для падающей и преломленной волн в среде с положительной (а) и (б) и отрицательной (в) и (г) дисперсией (а и в — строгое, но не наглядное, б и г — наглядное, но не строгое).

(рис. 19.11, б, г), когда волновые векторы падающей волны строят в верхней полуплоскости, а преломленной — в нижней. Такое построение наглядно, но не всегда позволяет понять, куда направлен луч.

С помощью изочаастот хорошо иллюстрируются явления полного отражения, когда волна падает из оптически более плотной среды в менее плотную (рис. 19.12, а). Радиус изочаастот первой среды больше, чем второй. При этом существует такой угол падения, при котором проекция  $\beta_{pi}$  равна меньшему радиусу. Это и есть угол полного отражения. При увеличении угла падения преломленной волны не существует, поскольку в пре-



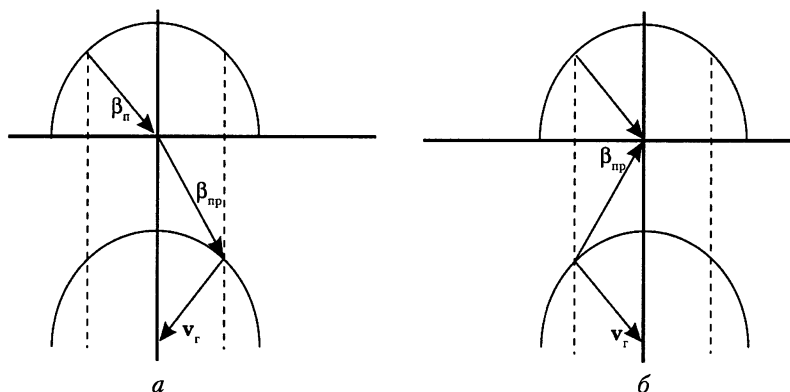
**Рис. 19.12.** Иллюстрации к явлению полного отражения, наступающего при больших углах падения волны (а) и при малых (б) и (в) для случаев, когда преломляющая среда обладает положительной (б) и отрицательной (в) дисперсией.

ломляющей среде нет соответствующей изочастоты. В искусственных средах возможно полное отражение при малых углах падения волны из свободного пространства на искусственный диэлектрик и прохождение при больших углах падения. Такое построение сделано на рис. 19.12, б для среды с положительной дисперсией и — на рис. 19.12, в — для среды с отрицательной дисперсией. При углах падения  $\theta_{\text{п}} < \varphi$  имеет место полное отражение, так как в преломляющей среде нет соответствующих изочастот, а при  $\theta_{\text{п}} > \varphi$  волна проходит. Более того, как обычно для волновых векторов росту угла падения соответствует рост угла преломления волны, однако при этом вопреки обычному угол преломления луча убывает.

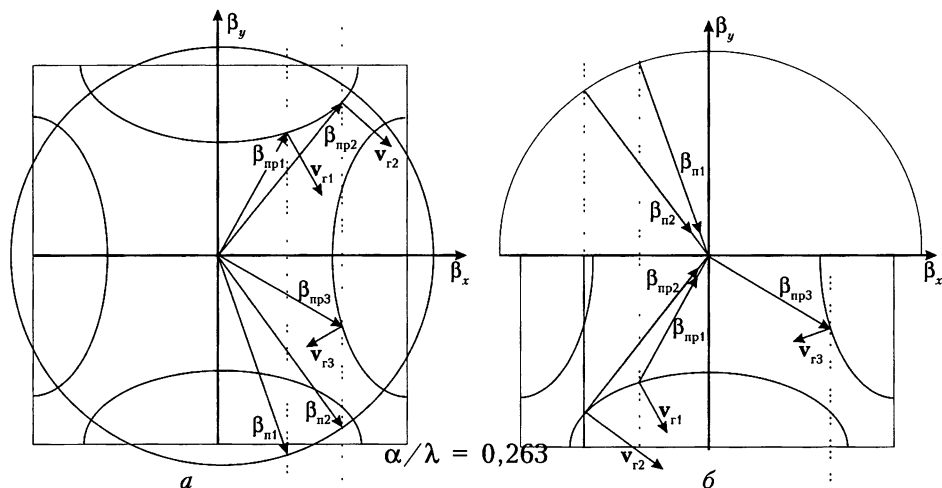
Изочастоты, приведенные на рис. 19.12, б, могут существовать даже у обычных кристаллов. Такую форму имеют изочастоты и на рис. 17.5 ( $kh = 0,15\pi$ ), рис. 17.2 ( $kh = 0,41\pi$ ), рис. 17.3, а ( $kh = 0,406\pi$ ), рис. 17.3, б ( $kh = 0,56\pi$ ), рис. 17.7 ( $\alpha = 0,1$ ), расположенные в углах зоны Бриллюэна.

Выше рассмотрен случай (рис. 19.1), когда изочастоты среды представляют сферу или эллипсоид, охватывающий начало координат. Если же эллипсоид или сфера не охватывают начала координат (рис. 19.13), то лучи отклоняются от нормали в ту же сторону как обычно, если дисперсия отрицательная, и — в противоположную сторону, если она положительная. При отрицательной дисперсии изображение всегда получается с той же стороны, что предмет относительно нижнего края пластины (рис. 19.1, в). При положительной дисперсии изображение может получиться внутри пластины и по другую ее сторону, чем предмет (рис. 19.1, г). Предмет может совпасть с изображением, если радиусы изочастот свободного пространства и среды при отрицательной дисперсии одинаковы. На рис. 19.7 вид, соответствующий рис. 19.13, б, имеют изочастоты  $\alpha/\lambda = 0,556, 0,581, 0,625, 0,658$ .

Искусственные диэлектрики могут иметь неоднозначные дисперсионные характеристики (см. рис. 5.4, 5.7, 9.6, 12.3, 15.16, 17.5). При этом одной падающей волне при одних частотах соответствуют две преломлен-



**Рис. 19.13.** Построение волновых векторов и направлений лучей для сред с положительной (а) и отрицательной (б) дисперсией с изочастотами в виде сфер, не охватывающих начало координат



**Рис. 19.14.** Построение волновых векторов и направлений лучей для случая, когда в некотором диапазоне углов падения имеет место двойное лучепреломление (*а* — строгое, *б* — наглядное).

ные волны, а при других — одна. Этот тип двойного лучепреломления, насколько нам известно, не наблюдается в обычных диэлектриках. Он связан не с поляризацией падающей волны, а со способом ее возбуждения, ибо разным ветвям двузначной дисперсионной характеристики соответствует различное распределение поля в ячейке ЗС. Оно может зависеть от направления падающей волны. В частности такое лучепреломление может возникнуть при изочастотах, приведенных на рис. 19.7, если  $\alpha/\lambda = 0.658$ , а граница раздела сред перпендикулярна оси  $u$ . Соответствующее построение (*а* — строгое и *б* — наглядное) сделано на рис. 19.14. При малых углах падения линия проекции (штриховая линия) пересекает изочастоту два раза, так что одной падающей волне ( $\beta_{n1}$ ) соответствует лишь одна преломленная ( $\beta_{n1}$ ). При больших углах падения ( $\beta_{n2}$ ), когда штриховая линия пересекает изочастоту четыре раза, возникают две преломленные ( $\beta_{n2}$  и  $\beta_{n3}$ ), причем один луч отклоняется от нормали в одну сторону ( $v_{r2}$ ), а другой — в противоположную ( $v_{r3}$ ). При дальнейшем увеличении угла падения снова существует только одна преломленная волна.

Рассмотренные примеры иллюстрируют существенное отличие «оптических свойств» искусственных диэлектриков от обычных. Необычные законы дисперсии, и следовательно, необычные «оптические свойства» имеют плазма в магнитном поле [28] и так называемые магнитостатические волны [14], которые могут существовать в ферритовых пленках, помещенных в магнитное поле. Соответствующие изочастоты приведены, например, в [13].

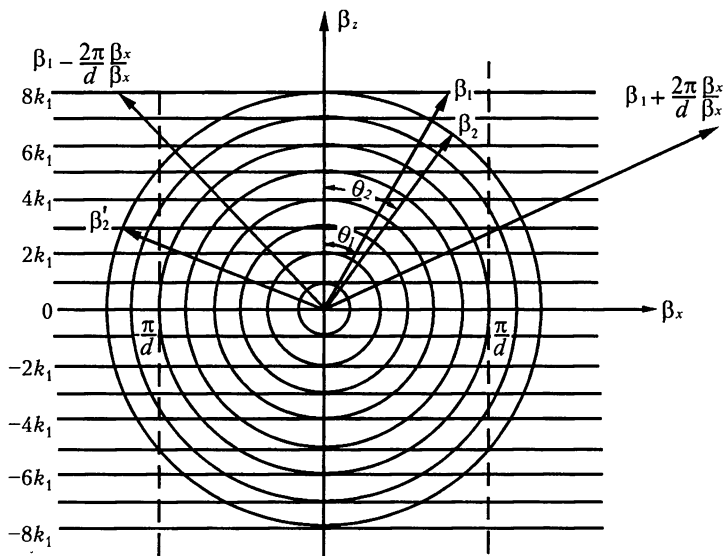
В обычных диэлектриках аномальная дисперсия, как правило, бывает обусловлена потерями и наблюдается вблизи резонансных частот атомов или молекул. В ЗС аномальная дисперсия наблюдается даже в отсутствие

потерь. В ЗС с положительной нормальной и аномальной дисперсией знаки производной  $dn/d\lambda$  противоположны. Этот факт широко используется в оптике для компенсации фазовых искажений путем комбинации, в частности, слоев линзы из материалов с разным характером дисперсии. Участок с аномальной положительной дисперсией имеется, в частности, у ЗС типа «меандр» (рис.15.2, а). Необходимо иметь в виду, что диэлектрики с отрицательной дисперсией для компенсации фазовых искажений использовать нельзя, так как при заданном направлении потока энергии знак производной  $dn/d\lambda$  одинаков для диэлектриков с нормальной положительной и аномальной отрицательной дисперсией.

#### 19.4. Законы преломления и пространственные гармоники

Сформулированные выше законы преломления справедливы для любой пространственной гармоники, так что волна в периодической структуре может породить несколько типов волн в свободном пространстве. В теории дифракционных и антенных решеток их называют главными дифракционными максимумами.

В качестве примера рассмотрим преломление волны, бегущей из двумерно-периодической многопроводной линии в свободное пространство (рис. 19.2, а). Пусть граница раздела перпендикулярна оси  $z$ , а волновой вектор  $\beta_n$  падающей волны лежит в плоскости  $xz$ . Изочастоты линии для  $TEM$ -волн представляют систему плоскостей, перпендикулярных оси  $\beta_z$ , а изочастоты свободного пространства — систему концентрических сфер. Сечение этих изочастот плоскостью  $\beta_y = 0$  изображено на рис. 19.15. На этом рисунке



**Рис. 19.15.** Сечение плоскостью  $\beta_y = 0$  изочастот многопроводной линии (прямые) и свободного пространства (окружности)

волновые векторы падающей ( $\beta_n$ ) и преломленной ( $\beta_{np}$ ) волн имеют одинаковые проекции на ось  $\beta_x$  и оканчиваются на одной и той же изочастоте  $8k_1$ .

Согласно (19.1) справедливо равенство  $\beta_n \sin \theta_n = \beta_{np} \sin \theta_{np}$ , а так как волновые векторы оканчиваются на одной и той же изочастоте, справедливо другое равенство  $\beta_n \cos \theta_n = \beta_{np}$ . Исключая  $\beta_n$  и  $\beta_{np}$ , находим закон преломления на границе раздела  $z = \text{const}$  многопроводной линии и свободного пространства:

$$\text{tg } \theta_n = \sin \theta_{np}, \quad (19.2)$$

причем  $|\theta_n| \leq \pi/2$ ,  $|\theta_{np}| \leq \pi/2$ .

Если  $-\pi/4 \leq \theta_n \leq \pi/4$ , то  $\sin \theta_{np} \leq 1$  и преломленная волна существует. Если же  $|\theta_n| > \pi/4$ , то  $\sin \theta_{np} > 1$  и преломленная волна отсутствует (полное отражение), т.е. поле в свободном пространстве затухает по экспоненте по мере удаления от границы раздела. Закон преломления справедлив для любой пространственной гармоники в многопроводной линии. Каждая пространственная гармоника с волновым вектором  $\beta_{nm} = \beta_n + (2\pi m/d)(\beta_x/\beta_x)$  возбуждает свою плоскую волну в свободном пространстве, имеющую волновой вектор  $\beta_{nrm} = \beta_{np} + (2\pi m/d)(\beta_x/\beta_x)$ , если только выполняется неравенство  $|\sin \theta_{np}| \leq 1$ .

На рис. 19.15 построены волновые векторы для случая, когда нулевая ( $\beta_{n0}$ ) и минус первая ( $\beta_{n-1} = \beta_{n0} - (2\pi/d)(\beta_x/\beta_x)$ ) гармоники возбуждают в свободном пространстве бегущие волны ( $\beta_{np0}$  и  $\beta_{np-1}$ ), а остальные гармоники — затухающие волны. Поле в свободном пространстве вдали от границы раздела представляется суперпозицией двух плоских волн.

При изучении ЗС, однородных вдоль одной из координат, в п. 4.4 показано, что поле пространственных гармоник затухает по мере удаления от ЗС лишь в случае, когда замедление  $n > 1$ . При этом энергия системой не излучается. Это утверждение остается справедливым для любых ЗС и, в частности, для многопроводной линии, ограниченной плоскостью  $z = \text{const}$ , перпендикулярной проводникам. В самом деле, модуль вектора  $\beta_{np}$  равен волновому числу свободного пространства  $k$

$$k^2 = \beta_x^2 + \beta_y^2 + \beta_z^2, \quad (19.3)$$

где  $\beta_x$ ,  $\beta_y$ ,  $\beta_z$  — компоненты вектора  $\mathbf{k}$ . Из них  $\beta_x$  и  $\beta_y$  параллельны границе раздела и совпадают с соответствующими компонентами вектора  $\beta_1$ , причем коэффициент замедления  $n$  связан с углом преломления  $\theta_2$  соотношением

$$n = \frac{1}{k} (\beta_x^2 + \beta_y^2)^{1/2} = \sin \theta_2.$$

При  $n > 1$  в соответствии с (19.3) величина  $\beta_z$  мнима, т.е. волна затухает по экспоненте по координате  $z$ . При  $n < 1$  величина  $\beta_z$  действительна, и волна излучается. Подробнее об излучении волн решетками см. в гл. 22.

## 19.5. Отражение волн от плоских границ периодических систем

Рассмотрим отражение волны от плоской границы, оставляющей ЗС периодической в направлении, параллельном этой границе (рис. 19.16). Изучение



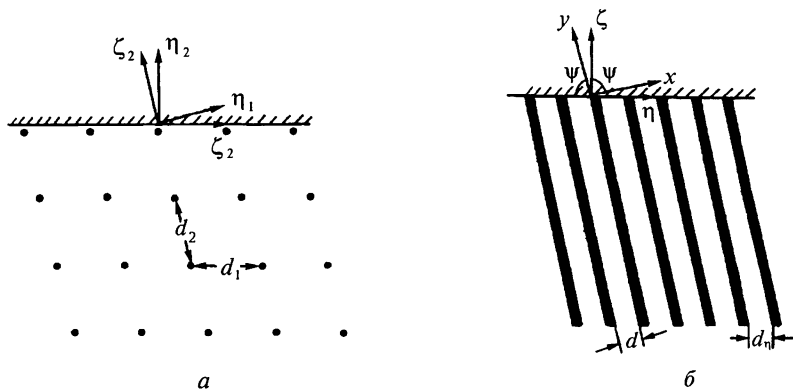


Рис. 19.16. Периодические структуры, ограниченные стенками

законов отражения проще всего начать с примеров. В качестве простейших примеров рассмотрим ограниченные плоскостями многопроводную линию и гребенку. Законы отражения устанавливаются с помощью изочастот неограниченных систем.

Изочастоты для *ТЕМ*-волн в многопроводной линии (рис. 19.17) представляют прямые, перпендикулярные проводникам (оси  $\beta_y$ ), так как независимо от распределения потенциалов волны бегут вдоль линии со скоростью  $c$ . При этом  $\beta_y = \omega/v_y = k$ , если  $v_y > 0$ , и  $\beta_y = -k$ , если  $v_y < 0$ .

Изочастоты гребенки для наиболее длинноволновой полосы пропускания (рис. 19.18) рассчитаны с помощью уравнения (9.14) и формулы (4.15). Входная проводимость пространства взаимодействия  $Y(\varphi)$  из (9.7) вычислена эквивалентным статическим методом [3]. При малых модулях волновых векторов изочастоты имеют форму эллипсов, а при больших они близки к изочастотам многопроводной линии ( $\beta_y \cong k$ ).

Рассмотрим отражение волн от плоскости, ограничивающей гребенку. На рис. 19.18 приведены две прямоугольные системы координат ( $\beta_x, \beta_y$  и  $\beta_\eta, \beta_\zeta$ ), повернутые на угол  $\psi$  друг относительно друга. Оси первой из них

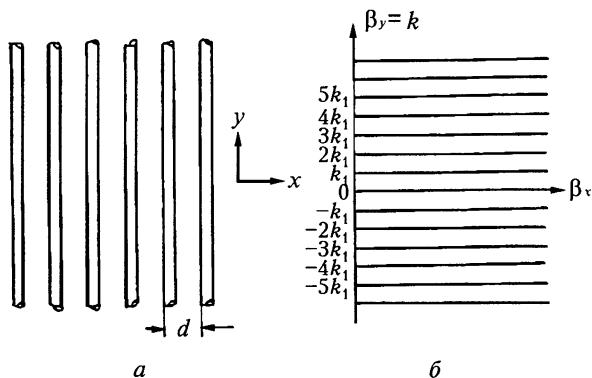
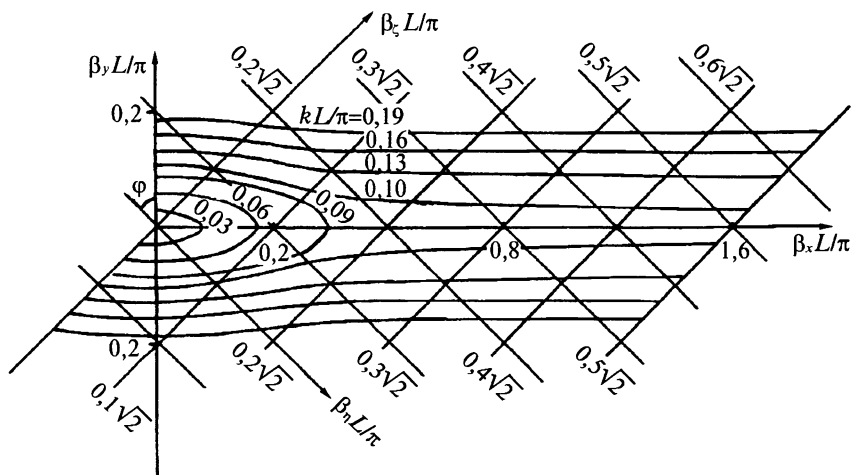


Рис. 19.17. Многопроводная линия (а) и соответствующие ей изочастоты (б)



**Рис. 19.18.** Изочастоты бесконечно широкой гребенки, рассчитанные эквивалентным статическим методом [3] с учетом (4.15) для случая  $h/d = 5$ ,  $l/d = 0,5$ ,  $w/d = 0,5$ . Обозначение размеров см. на рис. 9.1

параллельны плоскостям симметрии системы, а второй — связаны с отражающей стенкой  $\zeta = \text{const}$ . Компоненты соответствующих векторов связаны преобразованием поворота

$$\begin{aligned}\beta_\zeta &= \beta_x \cos \psi + \beta_y \sin \psi, \\ \beta_\eta &= \beta_x \sin \psi - \beta_y \cos \psi.\end{aligned}\quad (19.4)$$

В дальнейшем полезны и другие равенства, которые следуют из (19.4):

$$\begin{aligned}\beta_x &= \beta_y \operatorname{ctg} \psi + \beta_\eta \operatorname{csc} \psi, \\ \beta_\zeta &= \beta_x \operatorname{csc} \psi + \beta_\eta \operatorname{ctg} \psi.\end{aligned}\quad (19.5)$$

Гребенка, как и всякая ЗС, имеет много полос пропускания. Каждой из них соответствует свое распределение поля, отличающееся количеством полуволн по осям  $x$  и  $z$  внутри каждого резонатора, образованного соседними пластинами  $x = \text{const}$  при  $z < 0$  (на рис. 9.3, а оси  $x$  и  $z$  взаимно заменены местами) и проводящей стенкой  $z = -h$ . В наиболее длинноволновой полосе поле почти не зависит от  $x$ , а вдоль оси  $z$  укладывается менее четверти длины волны.

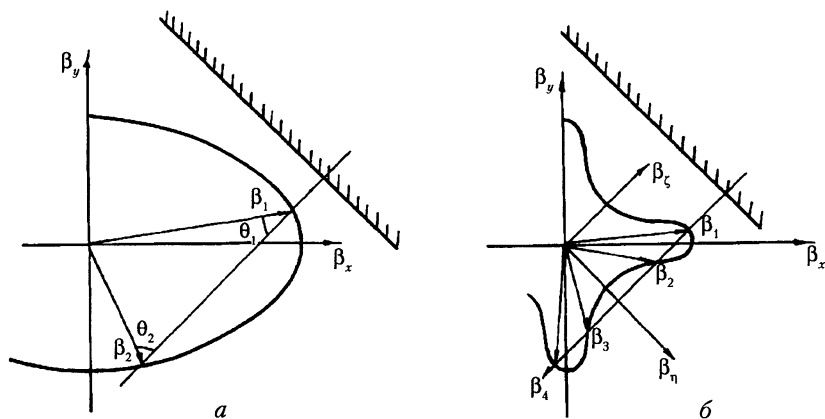
При отражении волны от стенки  $\zeta = \text{const}$  должны возникнуть поля, распределенные по  $x$  не так, как в падающей. Эти поля можно представить суперпозицией волн, для которых в каждом резонаторе укладывается  $q$  полуволн ( $q = 0, 1, 2, \dots$ ). Они затухают вдоль координаты  $\zeta$  быстрее, чем  $\exp\{-\sin \psi [(2\pi q/d)^2 - k^2] \zeta\}$ . Поэтому вдали от стенок поле в ЗС соответствует основной полосе пропускания.

Если представить поле в виде суммы пространственных гармоник, то каждой из них в падающей волне соответствует пространственная гармоника

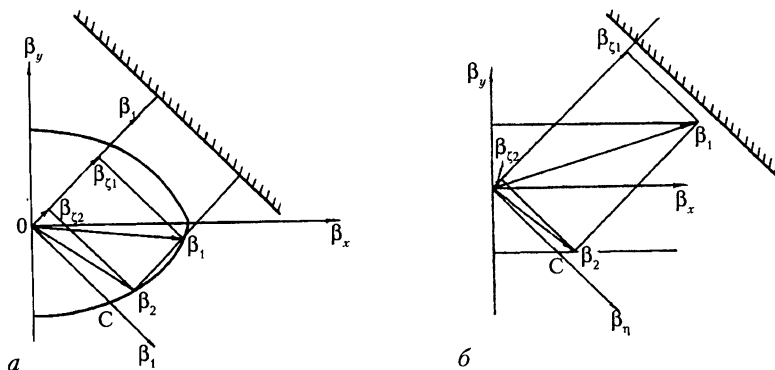
в отраженной волне. Обозначим через  $\beta_1$  и  $\beta_2$  волновые векторы нулевых гармоник падающей и отраженной волн соответственно. Эти векторы должны оканчиваться на одной и той же изочастоте (рис. 19.19 б). Кроме того, согласно (19.1) должны быть одинаковыми их проекции на отражающую плоскость:  $\beta_{\eta} = \beta_{\eta\text{п}} \sin \theta_{\text{п}} = \beta_{\eta\text{пр}} \sin \theta_{\text{пр}}$ , где  $\theta_{\text{п}}$  и  $\theta_{\text{пр}}$  — углы падения и отражения волны. В общем случае в зависимости от формы изочастот одной падающей волне может соответствовать одна, две или более отраженных волн, аналогично тому, как это возможно преломленных волн (см. рис. 19.14).

В изотропных средах (у них изочастоты круглые или сферические) компоненты  $\beta_{\zeta\text{п}}$  и  $\beta_{\zeta\text{пр}}$  для падающей и отраженной волн равны по величине и направлены в противоположные стороны. Отсюда и из (19.1) следует, что угол падения равен углу отражения,  $\theta_{\text{п}} = \theta_{\text{пр}}$ . То же самое справедливо и для анизотропных сред с плоскостями симметрии, если отражающие стенки параллельны или перпендикулярны этим плоскостям. В общем случае углы падения и отражения могут быть разными. Соответствующие построения волновых векторов сделаны на рис. 19.19, а и 19.20. Более того, в таких системах компоненты  $\beta_{\zeta\text{п}}$  и  $\beta_{\zeta\text{пр}}$  могут иметь одинаковое направление, как показано на рис. 19.20. Иными словами, падающая и отраженная волны могут быть обе направлены к отражающей стенке или от нее. При этом, конечно, групповые скорости направлены в противоположные стороны по отношению к стенке. Падающей называют ту волну, чья групповая скорость направлена к стенке.

Компоненты  $\beta_{\zeta\text{п}}$  и  $\beta_{\zeta\text{пр}}$  на рис. 19.20 направлены одинаково, если компоненты  $\beta_{\eta\text{п}} = \beta_{\eta\text{пр}} = \beta$  этих векторов больше отрезка  $OC$ , где через  $C$  обозначена точка пересечения оси  $\beta_{\eta}$  соответствующей изочастотой. При этом поток электронов, направленный вдоль оси  $\zeta$ , при взаимодействии как с падающей, так и с отраженной волной, может возбуждать волны, несущие энергию лишь в одном направлении относительно оси  $\eta$ : либо вдоль оси  $\eta$ , либо в противоположном направлении.



**Рис. 19.19.** Построение волновых векторов падающей ( $\beta_{\text{п}}$ ) и отраженных ( $\beta_{\text{пр}}$  и  $\beta_{\text{пр1}}$ ) волн для случаев, когда падающей волне соответствует одна (а) и две (б) отраженные. Вектор  $\beta_3$  не представляет отраженную волну, поскольку групповая скорость направлена к границе раздела

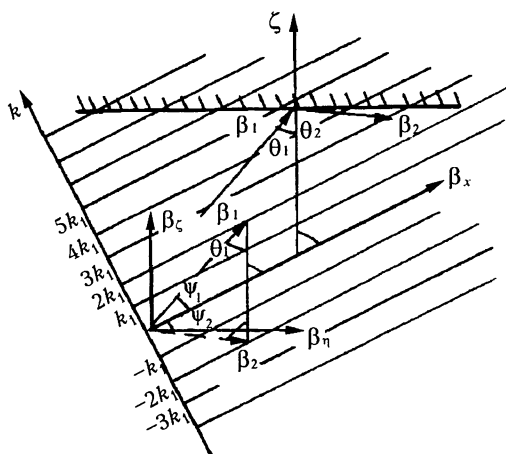


**Рис. 19.20.** Построение волновых векторов падающей ( $\beta_1$ ) и отраженной ( $\beta_2$ ) волн для случая, когда оба вектора направлены к отражающей стенке, при изочастотах в форме эллипсов (*a*) и прямых (*б*)

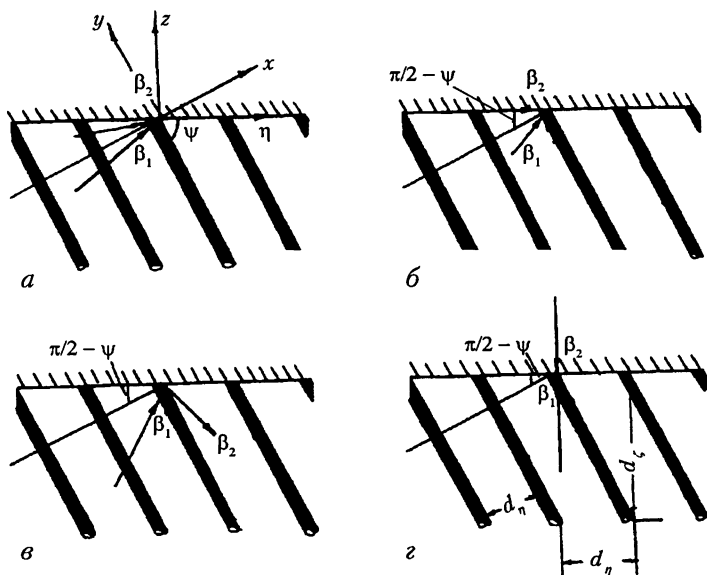
В случае, когда изочастоты представляют прямые  $\beta_y = \text{const}$ , закон отражения легко записать аналитически. Для многопроводной линии (рис. 19.21) справедливо равенство  $k = \beta_n \sin \varphi_n = \beta_{np} \sin \varphi_{np}$ , или, что то же,  $k = \beta_n \sin(\psi - \theta_n) = \beta_{np} \sin(\psi - \theta_{np})$ . Подставляя последнее выражение в (19.1), находим закон отражения волн от плоскости в многопроводной линии:

$$2 \operatorname{ctg} \psi = \operatorname{ctg} \theta_n - \operatorname{ctg} \theta_{np}. \quad (19.6)$$

Этот закон справедлив для любых ЗС с изочастотами в виде прямых  $\beta_y = \text{const}$ , поскольку зависимость  $\beta_y$  от частоты в него не вошла.



**Рис. 19.21.** Волновые векторы падающей ( $\beta_n$ ) и отраженной ( $\beta_{np}$ ) волн от плоскости, расположенной под углом  $\psi$  к многопроводной линии



**Рис. 19.22.** Возможные направления падающей ( $\beta_1$ ) и отраженной ( $\beta_2$ ) волн от стенки, расположенной под углом  $\psi$  к многопроводной линии

При  $\psi = 0$  волны бегут вдоль линии и никакого отражения нет (углы  $\theta_n$  и  $\theta_{пр}$  произвольны), а при  $\psi = \pi/2$  угол падения равен углу отражения. Возможные направления волновых векторов при  $\psi \neq 0$  и  $\psi \neq \pi/2$  показаны на рис. 19.21. В частности, на рис. 19.21, а проекции волновых векторов падающей и отраженной волн на ось  $\beta_\zeta$  имеют одинаковый знак. Обе бегут к границе раздела.

Разделив на  $k$  все слагаемые второго из равенств (19.5), получим выражение для коэффициента замедления волны вдоль оси  $\zeta$ :

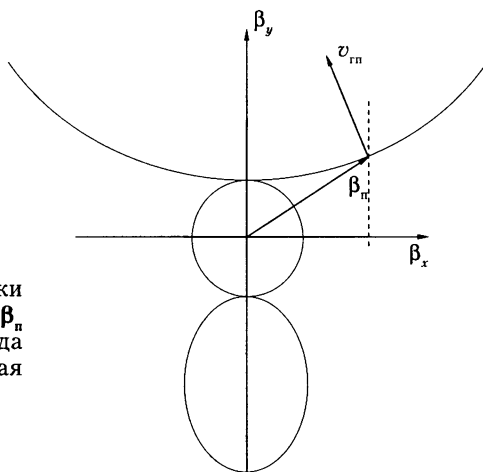
$$n_\zeta = \beta_\zeta / k = n_\eta \operatorname{ctg} \psi \pm \operatorname{cosec} \psi. \quad (19.7)$$

Из (19.7) следует, что обе волны направлены к граничной плоскости, если  $n_\eta > \sec \psi$ .

Для сред, удовлетворяющих теореме взаимности, каждой падающей волне соответствует хотя бы одна отраженная, поскольку для них справедливо условие:

$$\omega(\beta) = \omega(-\beta), \quad (19.8)$$

из которого, как можно показать, следует, что любая прямая пересекает изочастоту четное число раз. Сложнее обстоит дело с невзаимными средами, например в ферритовых пленках, помещенных в магнитное поле. Для них условие (19.8) может не выполняться. При этом существуют изочастоты (см. рис. 19.23), которые прямая (штриховая линия проекции), пер-



**Рис. 19.23.** Изочастоты ферритовой пленки на диэлектрической подложке и векторы  $\beta_n$  и  $v_{гн}$  падающей волны для случая, когда отсутствуют отраженная и преломленная волны

пендикулярная границе раздела сред, пересекает только один раз. Отсюда следует кажущийся невероятным факт: при наличии падающей волны может не существовать ни преломленная, ни отраженная волна. Этот эффект предсказан теоретически в [19] и обнаружен экспериментально в [21, 22]. Энергия, поступающая на границу раздела уносится краевой волной.

На рис.19.23 ферритовая пленка ограничена по координате  $y$  идеально проводящей стенкой. Такое построение сделано, чтобы не возникало сомнений в том, что нет преломленной волны. В эксперименте этой стенки не было. Пленка граничила со свободным пространством между двух проводящих плоскостей. Преломленная волна отсутствовала, поскольку радиус изочастот свободного пространства был меньше модуля волнового вектора в пленке, аналогично тому, как это имеет место при падении волны из оптически более плотной среды в менее плотную.

Необходимо иметь в виду, что вблизи граничной плоскости  $\zeta = \text{const}$  кроме падающей и отраженной  $ТЕМ$ -волн возникают ближние поля из высших типов волн, затухающие по мере удаления от этой плоскости. Законы отражения характеризуют структуру поля вдали от граничной плоскости.

## Упражнение

**19.1.** Сравнить прохождение лучей в тонких линзах из материала с положительной и отрицательной дисперсией.

## Список литературы

[1]. Агранович В. М., Гинзбург В. Л. Кристаллооптика с учетом пространственной дисперсии и теория экситонов. Изд. 2-е, перераб. и доп. М.: Наука, 1979. 432 с.

- [2]. Амитей Н., Галиндо В., Ву Ч. Теория и анализ фазированных антенных решеток. Под ред. А. Ф. Чаплина. М.: Мир, 1974, 422 с.  
Перевод кн.: Amitay N., Galindo V., Wu C. P. Theory and analysis of phased array antennas. New York–London–Sydney–Toronto, 1972.
- [3]. Белуга И. Ш. Расчет резонаторных замедляющих систем эквивалентным статическим методом. *Изв. вузов. Радиофизика*, 1961, **4**(4), 689–702.
- [4]. Ваганов Р. Б. Траектория энергетического центра волноводного пучка. *Радиотехника и электроника*, 1970, **15**(10), 2016–2023.
- [5]. К задаче дифракции электромагнитной волны на решетке плоских волноводов. Ю. П. Винченко и др. *Радиотехника и электроника*, 1970, **15**(1), 58–66.
- [6]. Каценеленбаум Б. З. К теории квазиоптических элементов в широких волноводах. *Радиотехника и электроника*, 1971, **16**(10), 1797–1804.
- [7]. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. В 10 тт. Изд. 3-е, испр. Т. 8. Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982. 623 с.
- [8]. Мандельштам Л. И. Полное собрание трудов. Т. 5. М.: АН СССР, 1950. 468 с.
- [9]. Мандельштам Л. И. Полное собрание трудов. Т. 2. М.: АН СССР, 1947. 396 с.
- [10]. Ройтбурд А. Л. Теория формирования гетерофазной структуры при фазовых превращениях в твердом состоянии. *Успехи физ. наук*, 1974, **113**(1), 69–103.
- [11]. Силин Р. А. Оптические свойства искусственных диэлектриков. *Изв. вузов. Радиофизика*, 1972, **15**(6), 809–820.
- [12]. Силин Р. А. О возможности создания плоскопараллельных линз. *Оптика и спектроскопия*, 1978, **44**(1), 189–191.
- [13]. Иванов В. Н., Демченко Н. П., Нефедов И. С., Силин Р. А., Щучинский А. Г. Волны в касательно намагниченном ферритовом слое (электродинамический расчет и равномерные асимптотики). *Изв. вуз. Радиофизика*, 1972, **11**(6), 764–776.
- [14]. Вашковский А. В., Стальмахов В. С., Шараевский Ю. П. Магнитостатические волны в электронике сверхвысоких частот. Саратов: Изд. Саратовского университета, 1993.
- [15]. Федоров Ф. И., Филиппов В. В. Отражение и преломление света прозрачными кристаллами. Минск: Наука и техника, 1976. 222 с.
- [16]. Хижняк Н. А. Искусственные анизотропные диэлектрики, образованные двумерными решетками бесконечных полос и стержней. *Журн. теор. физики*, 1959, **29**(5), 604–614.

- [17]. Шестопалов В. П. Метод задачи Римана-Гильберта в теории дифракции и распространения электромагнитных волн. Харьков: ХГУ, 1971. 400 с.
- [18]. Резонансное рассеяние волн. Дифракционные решетки. Т. 1, 2. В. П. Шестопалов, А. А. Кириленко, С. А. Масалов, Ю. К. Сиренко. Киев: Наук. думка, 1986. 232 с.
- [19]. Collin R. E. Field Theory of Guided Waves. New York–Toronto–London: McGraw Hill, 1960. 606 p.
- [20]. Силин Р. А. Необычные законы преломления и отражения. М.: ФАЗИС, 1998. 80 с.
- [21]. Joannopoulos J. D., Villeneuve P. R., Fan S. Photonic crystals putting a new twist on light. *Nature*, 1997, March, **36** (6621), 143–149.
- [22]. Блинов Л. М. Электро- и магнитооптика жидких кристаллов. М.: Наука, 1978.
- [23]. Де Жен П. Физика жидких кристаллов. М.: Мир, 1977.  
Перевод кн.: De Gennes P. G. The Physics of Liquid Crystals. Oxford: Clarendon Press, 1974.
- [24]. Ерицян О. С. Оптика жидких сред и холестерических жидких кристаллов. Ереван: Айастан, 1988. С. 333.
- [25]. Бырдин В. М. К теории холестерических жидких кристаллов. *Оптика и спектроскопия*, 1983, **54**(8), 456–458.
- [26]. Smith D. R., Padillia W. J., Vier D. C., Nemat-Nasser S. C., Schultz S. A. Composite medium with simultaneously negative permeability and permittivity. *Phys. Rev. Lett.*, 2000, **84**, 4184.
- [27]. Веселаго В. Г. Электродинамика веществ с одновременно отрицательными  $\epsilon$  и  $\mu$ . *Успехи физ. наук*, **92**(3) 1967, 517–526.
- [28]. Фелсен Л., Маркувиц Н. Излучение и рассеяние волн. Пер. с англ. Т. 1, 2. М.: Мир, 1978.  
Перевод кн.: Felsen L., Marcuvitz N. Radiation und scattering of waves. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall, Inc., 1978.
- [29]. MacGillivray L. R., Atwood J. L. A chiral spherical molecular assembly held together by 60 hydrogen bonds. *Nature*, 1997, 2 October, **389** (6650), 469–472.
- [30]. Nefedov I. S., Silin R. A. Photonic Crystals as Complex Media. Proc. 7 Int. Conf. on Complex Media. 3–6 June, 1998. Bianisotropic 98, Technique Univ., Braunschweig.
- [31]. Силин Р. А., Чепурных И. П. Расчет замедляющих систем, ячейки которых можно представить в виде сочленения волноводов. *Радиотехника и электроника*, 1990, **35**(5), 939–946.



[32]. Silin R. A., Chepurnykh I. P. Design of the Slow-Wave Structures for the Type of the Coupled Cavity Chain by Projection Method. Proc. URSI Int. Symp. on EM Theory, St. Petersburg, Russia, 1995, p. 367–369.

[33]. Демченко Н. П., Нефедов И. С., Силин Р. А. Особенности распространения поверхностных электромагнитных волн в слоистых гиротропных структурах. В кн.: Взаимодействие электромагнитных волн с полупроводниками и полупроводниково-диэлектрическими структурами и проблемы создания интегральных КВЧ схем. Ч. 2. Саратов: Изд. Саратовского университета, 1985, 94–95.

[34]. Вашковский А. В., Стальмахов А. В., Шахназарян Д. Г. Формирование, отражение и преломление волновых пучков магнитостатических волн. *Изв. вузов. Физика*, 1988, **31**(1), 67–75.

## Двумерно-периодические замедляющие системы, свернутые в цилиндр

### 20.1. Условие синхронизма волн с электронными потоками

Приборы, использующие двумерно-периодические ЗС, обладают рядом возможностей и особенностей, существенно отличающих их от обычных приборов, созданных на основе одномерно-периодических ЗС. Обусловлены они особенностями условия синхронизма электромагнитной волны с электронным потоком [7, 8], которое при заданной скорости электронов  $\mathbf{v}_e$  может быть записано в виде

$$\beta \mathbf{v}_e = \omega, \quad (20.1)$$

где  $\omega$  — круговая частота, а  $\beta$  — волновой вектор.

В плоскости волновых векторов выражение (20.1) представляет уравнение прямой, перпендикулярной вектору  $\mathbf{v}_e$  и отстоящей от начала координат на расстояние  $\beta_e = \omega/v_e$ . Пользуясь изочастотами (рис. 20.1), можно определить волновые векторы  $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$  тех волн, которые при фиксированной частоте находятся в синхронизме с электронным потоком. В двумерно-периодических ЗС зависимость частоты от волнового вектора  $\omega(\beta)$  представляется

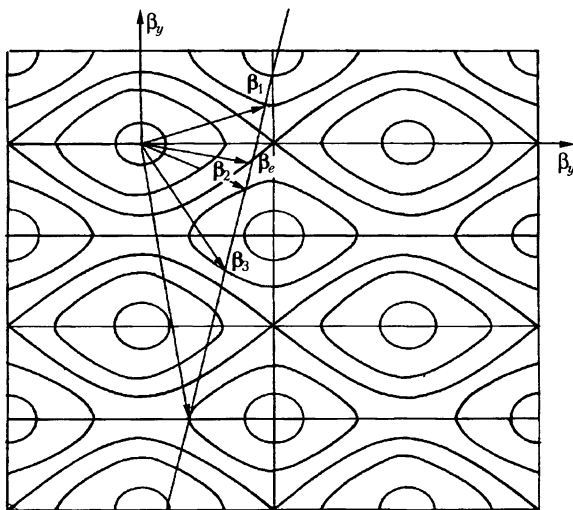


Рис. 20.1. К определению условий синхронизма в двумерно-периодической ЗС

двойко-периодической функцией. При этом выражением (20.1) удобно пользоваться, когда необходимо получить информацию об условиях синхронизма для разных пространственных гармоник поля при фиксированной частоте.

В приборах с одномерно-периодическими ЗС электронный поток наиболее эффективно взаимодействует с волной, когда его скорость близка к фазовой скорости волны. Оценку того, насколько близкими должны быть эти скорости при оптимальном взаимодействии, можно сделать на основе исследования самого взаимодействия. Изучая ЗС без электронных потоков приближенно судим об оптимальном взаимодействии, полагая эти скорости равными, чему и соответствует соотношение (20.1). В приборах с двумерно-периодическими ЗС, в отличие от приборов с одномерно-периодическими ЗС, условия синхронизма не накладывают жестких ограничений на кинетическую энергию электронов. Изменяя направление движения электронов можно управлять крутизной электронной перестройки генераторов и усилителей. Можно также выбирать такое направление движения электронов, при котором при неизменной скорости электронов (следовательно, и питающих напряжений) удовлетворяется соотношение (20.1) в некотором диапазоне частот. В приборах с одномерно-периодическими ЗС такое возможно либо при отсутствии дисперсии, либо при достаточно малой дисперсии.

Пользуясь условием синхронизма (20.1), определим угол  $\theta$  между направлениями волны ( $\beta$ ) и электронов ( $\mathbf{v}_e$ ):

$$\beta v_e \cos \theta = \omega. \quad (20.2)$$

Зная, что  $\beta = \omega/v$ , где  $v$  — фазовая скорость волны, можно выражение (20.2) переписать в виде:  $\cos \theta = v/v_e$ , известном [4] как формула для определения направления черенковского излучения.

Условие синхронизма (20.1) справедливо как для однородных, так и для периодических сред. При этом векторы  $\beta_{00}$  нулевой и

$$\beta_{m_1 m_2} = \beta_{00} + m_1 \mathbf{b}_1 + m_2 \mathbf{b}_2 \quad (20.3)$$

$m_1 m_2$ -й пространственных гармоник должны соответствовать частоте  $\omega$ , т. е. оканчиваться на соответствующей изочастоте. Здесь  $\mathbf{b}_1$  и  $\mathbf{b}_2$  — базисные векторы обратной решетки.

Замыкание ЗС в цилиндр накладывает дополнительные условия на  $\beta$ . Изучению условий синхронизма электронов с волной для ЗС, замкнутых в цилиндр, посвящена, в основном, настоящая глава.

Уравнение прямой (20.1) в координатах  $\beta$  позволяет судить об условиях синхронизма при фиксированной частоте одновременно для всех пространственных гармоник. Недостаток (20.1) состоит в том, что для каждой частоты следует строить свою прямую. Поэтому в ряде случаев условие синхронизма (20.1) удобно переписать в координатах замедлений:

$$(n_x/n_{ex}) + (n_y/n_{ey}) = 1, \quad (20.4)$$

где  $n_x = \beta_x/k$ ,  $n_y = \beta_y/k$ ,  $k = \omega/c$ ,  $\beta = \{\beta_x, \beta_y\}$ ,  $1/n_{ex} = v_{ex}/c$ ,  $1/n_{ey} = v_{ey}/c$ ,  $\mathbf{v}_e = \{v_{ex}, v_{ey}\}$ .

При заданной скорости электронов, т.е. при заданных  $n_{ex}$  и  $n_{ey}$  выражение (20.4) представляет уравнение прямой в отрезках. Ее положение теперь не зависит от частоты, так что выражение (20.4) удобно для изучения условий синхронизма в полосе частот. Поскольку, однако, ни частота, ни длина волны не являются двоякопериодическими функциями замедления  $n$ , выражением (20.4) неудобно пользоваться для исследования условий синхронизма электронов с пространственными гармониками.

Ниже подробно описаны следствия условий (20.1) и (20.4) для двумерно-периодических ЗС. В частности, дана оценка широкополосности, крутизны перестройки, вентильности (меры однонаправленности), условий существования обратной связи. Описаны условия синхронизма электронных потоков с различными пространственными гармониками.

## 20.2. Условие замыкания в цилиндр

В результате замыкания двумерно-периодической ЗС в цилиндр в общем случае получается одномерно-периодическая ЗС с винтовой осью  $CN_s$ . Предположим, что двумерно-периодическая решетка, показанная на рис. 20.2, замыкается вокруг оси  $x$  так, что узлы  $A$  и  $B$  совмещаются друг с другом. Полученная ЗС имеет период  $d$  вдоль оси  $x$  и винтовую ось  $C11_3$ , так как при трансляции вдоль  $x$  на  $d_1 = 3d/11$  и повороте на  $2\pi/11$  она совмещается сама с собой. Поворот ЗС на  $360^\circ$  соответствует трансляции решетки на вектор  $\mathbf{AB} = N_2\mathbf{d}_2 - N_1\mathbf{d}_1$ , где  $N_1$  и  $N_2$  — целые числа (для рассматриваемой решетки  $N_1 = 2$ ;  $N_2 = 3$ ).

Компоненты поля в точках  $A$  и  $B$  в соответствии с теоремой Флоке связаны равенством

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}_A) = \mathbf{E}(\mathbf{r}_B) \exp[-j\beta(N_2\mathbf{d}_2 - N_1\mathbf{d}_1)]. \quad (20.5)$$

Так как при замыкании в цилиндр точки  $A$  и  $B$  совпадают, экспоненциальный множитель должен быть равен единице, т. е.

$$\beta(N_2\mathbf{d}_2 - N_1\mathbf{d}_1) = 2\pi q, \quad (20.6)$$

где  $q$  — целое число. Равенство (20.6) можно рассматривать как уравнение семейства прямых в обратном пространстве, перпендикулярных вектору  $N_2\mathbf{d}_2 - N_1\mathbf{d}_1$  и отстоящих друг от друга на расстоянии  $2\pi/(N_2\mathbf{d}_2 - N_1\mathbf{d}_1)$ .

На рис. 20.3 приведены изочастоты многоярдной гребенки с решеткой, изображенной на рис. 20.2. Там же изображены прямые  $q = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ , на которых должны оканчиваться волновые векторы, если ЗС замкнута в цилиндр. Символом «00» обозначена нулевая зона обратной решетки. Зоны, в которых оканчиваются волновые векторы  $\beta_{m_1 m_2}$  различных пространственных

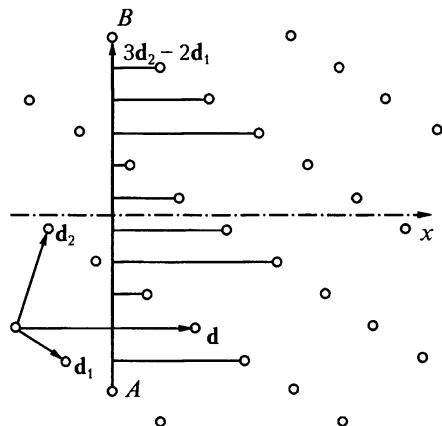
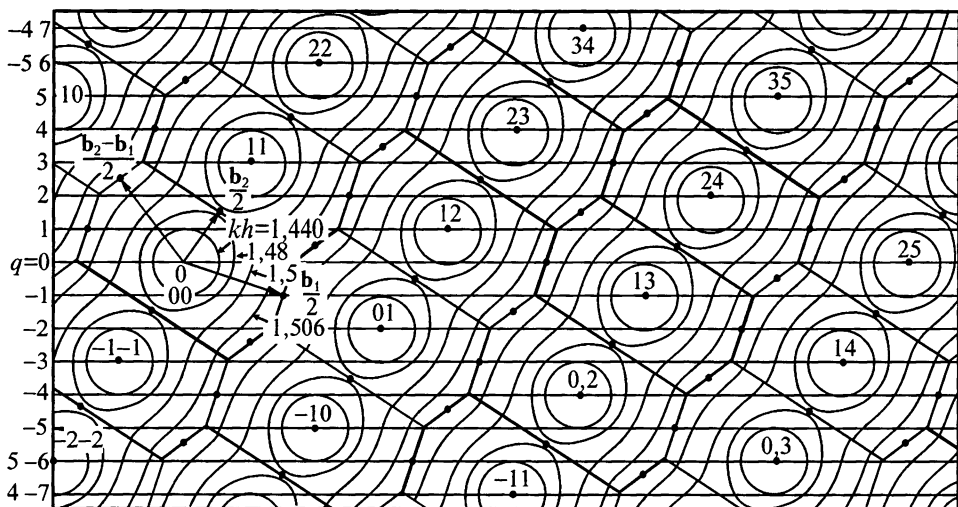


Рис. 20.2. Пример двумерно-периодической решетки, допускающей замыкание в цилиндр



**Рис. 20.3.** Изочастоты многорядной гребенки с косоугольной решеткой и линии дозволённых значений  $\beta$  для ЗС, замкнутой в цилиндр

гармоник, обозначаются номерами этих гармоник (01, 10, 21 и т.д.). Величины  $kh$  на рис. 20.3 пропорциональны частоте, где  $k = \omega/c$ , а  $h$  — высота штырей гребенки.

Рассмотрим теперь условия синхронизма электронов с волной для различных типов решеток при различных направлениях электронного потока.

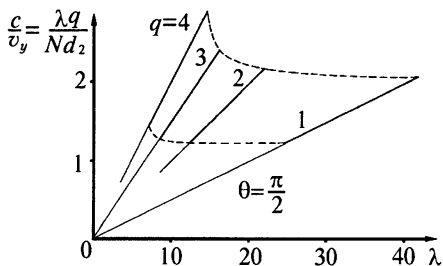
### 20.3. Условия синхронизма для системы с прямоугольной решеткой

Пусть один из базисных векторов параллелен, а другой — перпендикулярен оси цилиндра  $x$ , так что  $N_1 = 0$ . Поэтому далее при  $N_2$  опускаем индекс «2». Рассмотрим условия синхронизма для такой решетки при различных направлениях электронного потока. Несколько зон для ЗС с прямоугольной решеткой изображено на рис. 20.4. Прямые линии дозволённых значений волновых векторов  $q = 0, \pm 1, \dots$  построены для  $N = 6$ .

Для электронного потока, направленного вдоль оси  $x$ , условие синхронизма (20.1) принимает вид  $v_e \beta_x = \omega$ . Все пространственные гармоники, имеющие одинаковую компоненту  $\beta_x$ , взаимодействуют с электронным потоком одновременно. Поэтому для оценки взаимодействия электронов с полем необходимо вычислить суммарное поле гармоник, отличающихся только номером  $m_2$ .

В системе существует  $N$  типов волн, соответствующих одной поверхности дисперсии и отличающихся значениями  $q$ . Величина  $q$  равна числу вариаций поля вдоль окружности сечения ЗС, а знак  $q$  характеризует направление волны вдоль окружности. Различным значениям  $|q|$  соответствуют





**Рис. 20.6.** Кривые дисперсии многоэтажной ЗС типа «лестница с выступами», замкнутой в цилиндр вокруг оси  $x$ , для случая, когда волна синхронна с электронным потоком, движущимся вдоль оси  $y$

Точно такое же слияние кривых дисперсии пространственных гармоник происходит и в случае, когда электроны летят по окружности, перпендикулярной оси ЗС. При этом кривые дисперсии (рис. 20.6) представляют отрезки прямых, проходящих через начало координат:

$$n_y = \beta_y / k = q\lambda / Nd_2. \quad (20.7)$$

Электронный поток взаимодействует одновременно со всеми пространственными гармониками, отличающимися номером  $m_1$ . Поэтому при определении эффективности взаимодействия следует суммировать их поля. Кроме того, электронный поток одинаково эффективно

взаимодействует с полями волн, бегущих вдоль оси цилиндра в двух противоположных направлениях. Эти две волны могут существовать и усиливаться независимо друг от друга. Вместе с тем, отражение одной волны может привести к появлению положительной обратной связи и самовозбуждению прибора.

В общем случае, при движении электронов под некоторым углом к координатным осям, взаимодействие осуществляется уже не с суммой пространственных гармоник, а лишь с одной из них. Это утверждение иллюстрирует рис. 20.4, на котором через  $\beta_e$  обозначен вектор  $\omega \mathbf{v}_e / v_e^2$ . Этот вектор оканчивается на прямой  $AB$  ( $A_1B_1$  или  $A_2B_2$ ), перпендикулярной  $\mathbf{v}_e$ . На линии  $AB$  должны оканчиваться все векторы, удовлетворяющие условию  $\mathbf{v}_e \beta = \omega$ . Эта линия в общем случае проходит через точки, не связанные условием (20.3). Точки пересечения прямых  $AB$  и  $q = \text{const}$  в различных зонах соответствуют различным частотам, так что при фиксированных частоте и скорости электронов возможно взаимодействие электронного потока лишь с ограниченным количеством пространственных гармоник.

Рассмотрим дисперсионную характеристику многоэтажной ЗС лестничного типа при произвольном направлении движения электронов. Пусть ось  $x$  этой ЗС лежит в плоскости решетки и перпендикулярна штырям, а ось  $y$  направлена вдоль штырей. Уравнение дисперсии такой ЗС приведено на рис. 18.2. В этом уравнении  $\phi_1 = \beta_x L$  — сдвиг фазы на периоде  $L$  многопроводной линии,  $\phi_2 = \beta_y h$  — сдвиг фазы на одном этаже,  $k = 2\pi/\lambda$  — волновое число свободного пространства,  $C$  — емкость между проводником и выступом на экране,  $M(\phi_1)$  — волновая проводимость многопроводной линии. Формулы для ее расчета приведены в приложении 4.

Пусть ЗС содержит  $N$  этажей и свернута в цилиндр вокруг оси  $x$ , так что в соответствии с (20.7) на сдвиг фазы  $\phi_2$  наложено условие  $\phi_2 = (2\pi q/N) + 2\pi m_2$  или, что то же,  $\beta_y = (2\pi/h)[(q/N) + m_2]$ . Здесь  $q$  — номер вида волны. Если угол между осью  $x$  и направлением движения электронов равен  $\theta$ , то для любого вектора  $\beta = \{\beta_x, \beta_y\}$ , оканчивающегося на прямой  $AB$  (рис. 20.4), справедливо равенство

$$\beta_e = \beta_x \cos \theta + \beta_y \sin \theta, \quad (20.8)$$

или, что то же,

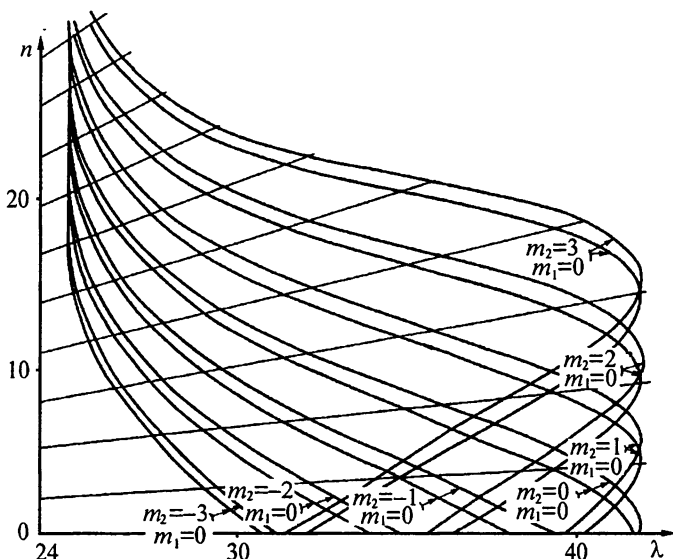
$$\beta_e = [\beta_x^0 + (2\pi m_1/L)] \cos \theta + (2\pi/L)[(q/N) + m_2] \sin \theta, \quad (20.9)$$

где  $\beta_x^0$  —  $x$ -компонента волнового вектора, оканчивающегося в нулевой зоне,  $\beta_z^0 = \varphi_1/L$ .

Равенство (20.9) представляет одну из форм записи условия синхронизма (20.1). Оно означает, что проекция на направление движения электронов волнового вектора  $m_1 m_2$ -й пространственной гармоники, удовлетворяющего условию замыкания (20.7), равна величине  $\beta_e = \omega/v_e$ .

На рис. 20.7 приведены кривые дисперсии волны вида  $q = \pm 1$  при  $\theta = 0, 1\pi$  ( $18^\circ$ ). Построены кривые для гармоник с малыми номерами ( $m_1 = 0, |m_2| < 6$ ). Каждая кривая, соответствующая  $\theta = 0$  или  $\theta = \pi/2$  расщепляется на бесконечное множество кривых при  $\theta \neq 0$  и  $\theta \neq \pi/2$ . При этом ухудшается эффективность взаимодействия электронов с каждой гармоникой. Взаимодействие с электромагнитным полем возможно одновременно на многих частотах, но с различной эффективностью на каждой частоте, зависящей от скорости электронов.

Направлять электроны под углом к осям  $x$  и  $y$  бывает целесообразно для обеспечения вентильности прибора (см. п. 20.8) либо его широкополосности (см. п. 20.6). При этом описанное выше расщепление кривой дисперсии не всегда приводит к существенному ухудшению работы прибора. В частности, в большинстве многоярусных штыревых ЗС амплитуды высших пространственных гармоник, отличающихся номерами  $m_2$ , пренебрежимо малы по сравнению с нулевой гармоникой, так что ими можно пренебречь [3, 6]. В многоярусных ЗС учитывать влияние гармоник с различными  $m_2$  необходимо.



**Рис. 20.7.** Кривые дисперсии многоярусной ЗС типа «лестница с выступами», замкнутой в цилиндр вокруг оси  $x$ , для случая, когда волна синхронна с электронным потоком, движущимся под углом  $\theta = 0, 1\pi$  к оси цилиндра



## 20.4. Условие синхронизма в системах с косоугольной решеткой

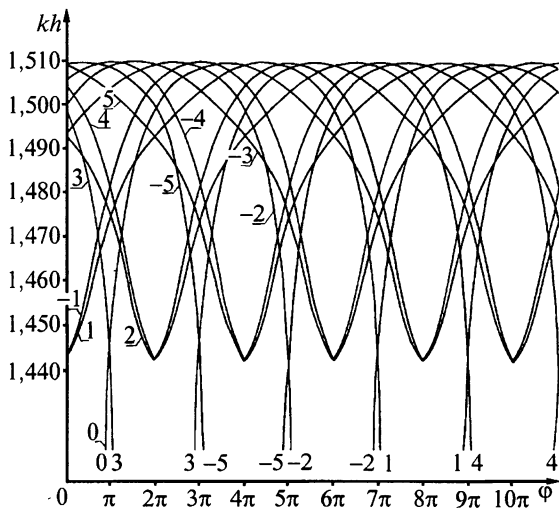
Рассмотрим условия синхронизма электронного потока с волной в ЗС, замкнутой в цилиндр и имеющей косоугольную решетку (рис. 20.2), для двух случаев движения электронов: по окружности, т.е. по оси  $y$ , перпендикулярной оси цилиндра  $x$ , и по прямой, т.е. вдоль оси  $x$ . Структура зон, изочастоты и линии дозволённых значений  $\beta$ , удовлетворяющих (20.6), для многорядной ЗС с такой решеткой, изображены на рис. 20.3. В соответствии с (20.6) величина  $\beta_y$  принимает дискретный спектр значений, каждому из которых соответствует свое количество  $q$  длин волн, укладывающихся вдоль окружности. На графике изочастот (рис. 20.3) нанесены прямые  $q = \text{const}$ , соответствующие допустимым значениям  $\beta$ .

Дисперсионные характеристики  $n_y(\lambda)$ , как и в ЗС с прямоугольной решеткой, представляются отрезками прямых  $n_y = \beta_y \lambda / 2\pi$ , проходящих через начало координат  $n_y = \lambda = 0$ . В отличие от ЗС с прямоугольной решеткой все отрезки ограничены одними и теми же  $\lambda$  (по крайней мере — для изочастот, изображенных на рис. 20.3). Каждая из прямых  $q = \text{const}$  одинаково пересекает одни и те же изочастоты, но в различных зонах (например, прямая  $q = 0$  в зоне 00 и прямая  $q = 1$  в зоне 12).

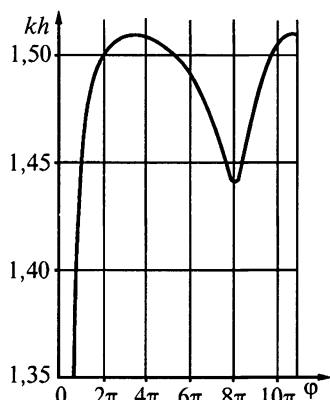
При оценке эффективности взаимодействия электронного потока с волной следует учесть, что одной и той же паре значений  $\omega$  и  $\beta_y$  могут соответствовать не только различные пространственные гармоники (например, 00 и 25, 11 и 36,  $-1-1$  и 14), но и различные типы волн. Электронный поток может одновременно взаимодействовать с несколькими типами волн, поскольку линии  $q = \text{const}$  пересекают одни и те же изочастоты в точках, не связанных соотношением (20.3), например, в зонах 00, 12, 13 и т.д. Волны различных типов могут переносить энергию в разные стороны вдоль оси цилиндра. Поэтому в приборах с косоугольной решеткой, как и в ЗС с прямой решеткой, возможна обратная связь за счет отражения от концов прибора.

Рассмотрим случай, когда электронный поток летит вдоль оси ЗС, замкнутой в цилиндр. В результате замыкания получается ЗС с винтовой осью  $CN_s$ . В рассматриваемом примере ЗС имеет ось  $C11_3$ . Поэтому должны смыкаться 11 полос пропускания, а поле может быть представлено в виде суммы 11 симметричных составляющих, отличающихся числом вариаций  $q$  поля по азимуту. Дисперсионную характеристику такой ЗС можно представить в виде 11 пересекающихся между собой кривых (рис. 20.8). В координатах  $\omega(\beta)$  (или, что то же,  $kh(\varphi)$ ) эти кривые идентичны друг другу (рис. 20.9) и смещены друг относительно друга вдоль оси  $\beta$  на одинаковое расстояние. Каждая из этих кривых соответствует своему значению  $q = 0, \pm 1, \dots, \pm 5$ . Значениям  $|q| > 5$  соответствуют дисперсионные характеристики, для которых  $|q| < 5$ . Так, например, кривые, соответствующие  $q = 5$  и  $q = -6$ , совпадают. Они относятся к двум пространственным гармоникам, одновременно взаимодействующим с электронным потоком.

Таким образом, в ЗС с косоугольной решеткой дисперсионная характеристика распадается на много ветвей, если электронный поток летит не вдоль рядов решетки. В этом смысле ЗС с косоугольной решеткой ничем не лучше ЗС с прямой решеткой, если электроны летят не вдоль рядов.



**Рис. 20.8.** Кривые дисперсии многоядной гребенки (рис. 20.2 и 20.3), свернутой в цилиндр ( $\varphi$  — сдвиг фазы на расстоянии  $d/11$ ,  $d$  — период ЗС вдоль оси цилиндра)



**Рис. 20.9.** Ветвь дисперсионной характеристики (см. рис. 20.8) многоядной гребенки, свернутой в цилиндр, для составляющей  $q=0$

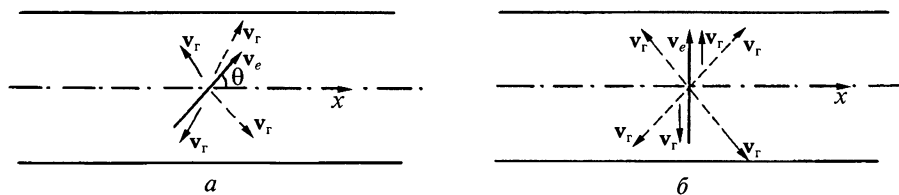
Как и в ЗС с прямоугольной решеткой, взаимодействие электронов с волной наиболее эффективно в случае, когда совпадают направления потока электронов и рядов решетки. В этом случае электроны взаимодействуют одновременно с максимальным числом пространственных гармоник, дисперсионные характеристики которых сливаются. Число ветвей дисперсионных характеристик оказывается минимальным. В самом деле, условие синхронизма электронов с гармоникой  $m_1 m_2$  имеет вид

$$\beta_{m_1 m_2} \mathbf{v}_e = \beta_{00} \mathbf{v}_e + m_1 \mathbf{b}_1 \mathbf{v}_e + m_2 \mathbf{b}_2 \mathbf{v}_e.$$

Оно не зависит от одного из номеров (пусть  $m_2$ ), если скалярное произведение  $\mathbf{b}_2 \mathbf{v}_e$  равно нулю. При этом скорость  $\mathbf{v}_e$  перпендикулярна вектору  $\mathbf{b}_2$  обратной решетки, или, что то же, параллельна вектору  $\mathbf{d}_1$  прямой решетки.

## 20.5. Механизм обратной связи

Для выяснения механизма обратной связи в двумерно-периодических ЗС необходимо строить теорию соответствующих приборов. Поэтому ограничимся лишь качественными соображениями о механизме обратной связи, основанными на рассмотрении направлений электронного потока и групповой скорости волны (рис. 20.10). Электронный поток условимся представлять в виде трубок тока, не связанных между собой. Поток энергии электромагнитного поля также представляем в виде трубок тока (лучей), совпадающих по направлению с групповой скоростью. Считаем, что обратная связь существует, если можно построить замкнутый контур, состоящий из трубок тока, в



**Рис. 20.10.** Направление потока электронов  $\mathbf{v}_e$  и групповой скорости  $\mathbf{v}_g$  для случаев, когда обратная связь имеется (сплошные стрелки  $\mathbf{v}_g$ ) и отсутствует (штриховые стрелки  $\mathbf{v}_e$ ) при  $a: \theta \neq \pi/2$  и  $b: \theta = \pi/2$

котором совпадают между собой направления электронов, луча и обхода контура. Такое определение условия обратной связи можно рассматривать лишь как приближенное, так как трубки тока взаимодействуют между собой, а поток энергии не всегда можно представить в виде лучей.

На рис. 20.10 изображены направления электронного потока  $\mathbf{v}_e$  и групповых скоростей  $\mathbf{v}_g$  электромагнитных волн для систем, замкнутых в цилиндр. Сплошные стрелки  $\mathbf{v}_g$  соответствуют волнам, обеспечивающим обратную связь, а штриховые — не обеспечивающим. Следует различать два случая. В первом из них (рис. 20.10, *a*) направление  $\mathbf{v}_g$  составляет произвольный угол  $\theta$  с осью цилиндра, отличный от  $\pi/2$ . Трубки тока и лучи представляют спирали, которые почти всегда пересекаются между собой, образуя замкнутые контуры. Однако не всегда направления  $\mathbf{v}_e$ ,  $\mathbf{v}_g$  и обхода контура совпадают. Обратная связь существует лишь при условии, что противоположны проекции  $\mathbf{v}_e$  и  $\mathbf{v}_g$  на ось цилиндра  $x$ . Для обычных ЛОВ это условие совпадает с широко известным: обратная связь существует, поскольку скорости  $\mathbf{v}_e$  и  $\mathbf{v}_g$  противоположны по знаку. Вместе с тем, это условие не сводится к известному для обычных ЛОВ, если электроны летят под углом к оси. Обратная связь оказывается возможной при положительной дисперсии вдоль оси и может отсутствовать при отрицательной дисперсии.

Во втором из приведенных на рис. 20.10 случаев угол  $\theta = \pi/2$ , так что трубки тока электронов представляют окружности. При этом обратная связь существует всегда независимо от направления групповой скорости. Поток энергии электромагнитной волны лишь увеличивает величину обратной связи, если скорости  $\mathbf{v}_g$  и  $\mathbf{v}_e$  коллинеарны. Типичным примером прибора с такого типа обратной связью может служить платинотрон.

## 20.6. Широкополосность\*

Рассмотрим условия широкополосности на примере двумерно-периодической ЗС, замкнутой в цилиндр вокруг оси  $x$ . Пусть решетка этой ЗС прямоугольная с периодами  $d_1$  и  $d_2$  по осям  $x$  и  $y$ . Пример изочастот для ЗС с решеткой такого типа приведен на рис. 20.4. Номера гармоник  $m_1$ , отсчитываемые вдоль оси  $\beta_x$ , называем продольными, а  $m_2$  — поперечными или азимутальными.

\*) Понятие «широкополосности», «крутизны перестройки частоты», «вентильности» для двумерно-периодических структур ввел М. И. Хворов.

Вектор  $\beta_e$  на рис. 20.4 численно равен  $\omega/v_e$  и направлен в сторону  $v_e$ . Прямая, перпендикулярная  $\beta_e$ , на которой оканчивается вектор  $\beta_e$ , описывается уравнением (20.1). Любой вектор  $\beta$ , оканчивающийся одновременно на этой прямой и на изочастоте  $\omega$ , соответствует волне, синхронной с электронным потоком. Кроме того, волновой вектор должен оканчиваться на прямой  $q = \text{const}$ , поскольку ЗС свернута в цилиндр.

Пусть электронный поток направлен вдоль оси  $x$ , как в обычной ЛБВ или ЛОВ. Условие синхронизма (20.1) при этом означает равенство скорости электронов и  $x$ -составляющей фазовой скорости волны:  $v_e = v_{ex} = v_x$ . Условие широкополосности обеспечивается дополнительным равенством  $v_{gx} = v_x$ , так как при этом фазовая скорость остается постоянной в некотором диапазоне частот.

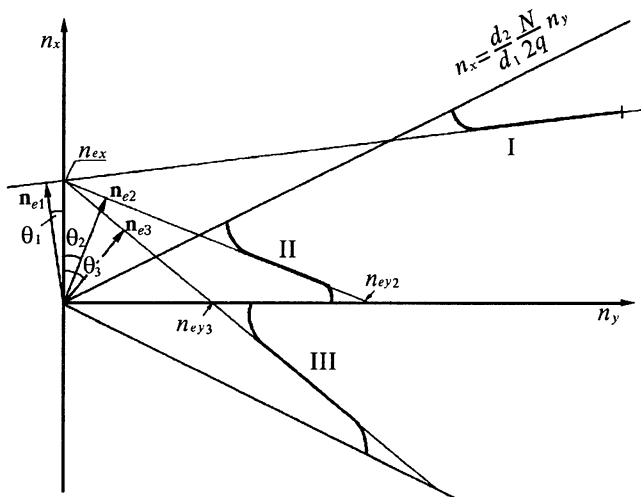
В координатах  $\beta_x(\omega)$  фазовая скорость определяется как тангенс угла наклона прямой, проходящей через начало координат в данную точку дисперсионной характеристики, так как  $v_x = \omega/\beta_x$ , а групповая — как тангенс угла наклона касательной,  $v_{gx} = d\omega/d\beta_x$  при  $\beta = \beta_x$ . Условие широкополосности  $v_x = v_{gx}$  означает, что касательная в данной точке дисперсионной характеристики проходит через начало координат. Это же условие в координатах  $\lambda$ ,  $n_x$  означает, что касательная в данной точке кривой дисперсии горизонтальна.

Для обеспечения широкополосности не только в окрестности фиксированной частоты необходимо, чтобы касательная к дисперсионной характеристике совпадала с линией  $v_x = \text{const}$  во всей требуемой полосе частот, что возможно лишь в отсутствие дисперсии ( $dn/d\lambda = 0$ ) в этой полосе.

В одномерно-периодических ЗС  $dn/d\lambda = 0$  лишь в отдельных точках. Сравнительно малой дисперсией ( $|dn/d\lambda| \ll 1$ ) обладают спиральная ЗС, меандр и ряд других. Они обеспечивают работу ЛБВ в широкой полосе частот (до двух с лишним октав). Если электронный поток перпендикулярен оси цилиндра (движется по азимуту) условие широкополосности не реализуется ни при каких дисперсионных характеристиках. Такой тип взаимодействия применим лишь в генераторах или узкополосных усилителях, которые можно перестраивать напряжением.

Наглядную интерпретацию условий широкополосности для электронного потока произвольного направления удобно дать с помощью дисперсионных характеристик, построенных в координатах замедления  $n_x$ ,  $n_y$  (рис. 20.11). В ЗС, замкнутой в цилиндр вокруг оси  $x$ , величина  $n_y = \beta_y/k = q\lambda/Nd_2$  пропорциональна  $\lambda$ . Кривая дисперсии в координатах  $n_x$ ,  $n_y$  представляет зависимость замедления вдоль оси  $x$  от  $\lambda$ , построенную в определенном масштабе. Это обычная дисперсионная характеристика, широко используемая при изучении одномерно-периодических ЗС. В этих координатах условие синхронизма имеет вид (20.4), представляющий уравнение прямой в отрезках.

Условие синхронизма выполняется, если вектор замедлений  $\mathbf{n}$  оканчивается на прямой, перпендикулярной вектору «замедлений» электронов  $n_e$ , которая отсекает на осях отрезки  $n_{ex}$  и  $n_{ey}$ . С другой стороны, вектор  $\mathbf{n}$  может оканчиваться только на дисперсионной кривой  $n_x(n_y)$ . Наибольшая широкополосность прибора обеспечивается при касании прямой и дисперсионной характеристики на достаточно большом участке. Сформулированное условие широкополосности равносильно требованию равенства  $x$ -составляющих груп-



**Рис. 20.11.** Типы дисперсионных характеристик, которые можно использовать при создании широкополосных СВЧ усилителей

повой скорости и скорости электронов:  $n_{tx} = n_{ex}$ ,  $n_{tx}$  определяется точкой пересечения касательной к кривой дисперсии с осью ординат (рис. 20.11).

На рис. 20.11 изображены различные типы дисперсионных характеристик  $n_x(n_y)$ , при которых возможен синхронизм электронного потока и волны в широкой полосе частот. Во всех случаях  $x$ -составляющие групповой скорости волны и скорости электронов совпадают, так что в приборах нет обратной связи, тогда как  $x$ -составляющая фазовой скорости волны может быть противоположна  $v_{ex}$ . Используя электронные потоки, летящие под углом к оси ЗС, можно создавать широкополосные усилители на основе ЗС с различными дисперсионными характеристиками: положительной аномальной (кривая I), положительной нормальной (кривая II) и отрицательной (кривая III), которая всегда аномальна.

Рассмотрим теперь предельно возможную ширину полосы усиления на нулевой пространственной гармонике. В случае положительной аномальной дисперсии полоса усиления прибора в принципе может простирается от какой-то длины волны до бесконечности. Для этого, конечно, необходимо существование соответствующей дисперсионной характеристики с  $dn/d\lambda = \text{const}$ .

При нормальной положительной дисперсии предельная полоса усиления определяется точками пересечения прямой (20.4) с осью абсцисс и с прямой  $n_x = n_y N d_2 / 2 q d_1$ , соответствующей сдвигу фаз  $\phi_1 = \pi$  на периоде  $d_1$  вдоль оси  $x$  (см. рис. 20.11). Обозначив через  $\lambda_{\min}$  и  $\lambda_{\max}$  длины волн, соответствующие этим точкам, а через  $\theta$  угол между осью  $x$  и направлением электронного потока, найдем относительную полосу усиления:

$$\Delta\lambda/\lambda = 2(\lambda_{\max} - \lambda_{\min})/(\lambda_{\max} + \lambda_{\min}) = 2/[1 + (4q d_1 / N d_2) \text{tg } \theta]^{-1}. \quad (20.10)$$

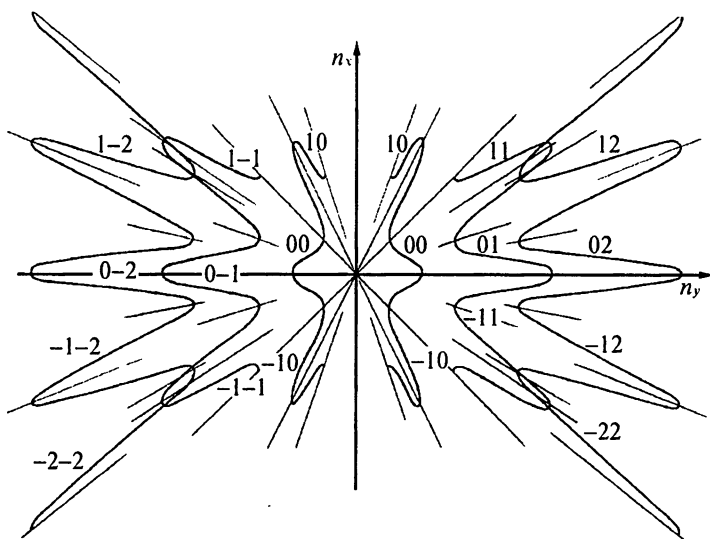
Значению  $\Delta\lambda/\lambda = 2$  соответствует бесконечно широкая полоса усиления ( $0 < \lambda < \lambda_{\max}$  или  $\lambda_{\min} < \lambda < \infty$ ). Она в принципе возможна, либо когда электроны летят вдоль оси прибора ( $\theta = 0$ ), либо для нулевого типа волны ( $q = 0$ ), либо в гладких системах ( $d_1 = 0$ ). В случае  $\theta = 0$  рабочая полоса лежит в пределах от некоторого  $\lambda = \lambda_{\min}$  до бесконечности. При этом, конечно, требуется, чтобы  $dn/d\lambda = 0$ . Значениям  $q = 0$  и  $d_1 = 0$  соответствует полоса  $0 < \lambda < \lambda_{\max}$ .

При взаимодействии электронов с пространственными гармониками ширину полосы можно определить аналогичным образом. При этом в соотношения (20.4) должны входить компоненты замедления  $n_{xm_1m_2}$  и  $n_{ym_1m_2}$  выбранной пространственной гармоники. Для ЗС с прямоугольной решеткой (рис. 20.1) их можно записать в виде

$$\begin{aligned} n_{xm_1m_2} &= n_{xm_1} = n_{x00} + (m_1/d_1)\lambda = n_{x00} + (Nm_1/q)n_{y00}, \\ n_{ym_1m_2} &= n_{ym_2} = [1 + (Nm_2/q)]n_{y00} = [(q/N) + m_2](\lambda/d_2), \end{aligned} \quad (20.11)$$

где  $n_{x00}$  и  $n_{y00}$  — составляющие вектора замедлений для нулевой пространственной гармоники.

В первое из равенств (20.11) входит лишь номер  $m_1$ , а во второе —  $m_2$ . Это значит, что все гармоники, отличающиеся лишь номером  $m_2$  имеют одинаковое замедление вдоль  $y$ , а отличающиеся номером  $m_1$  — одинаковое замедление вдоль  $x$ . На рис. 20.12 качественно изображены кривые дисперсии различных гармоник в ЗС, замкнутой в цилиндр при условии  $d_1 = d_2$ ,  $q = N/2$ . Кривые построены в координатах  $n_x(n_y)$  для случая, когда нулевая гармоника имеет положительную дисперсию. Символы 00, 01, ... около кривых дисперсии указывают номера  $m_1m_2$  пространственных гармоник. Линии



**Рис. 20.12.** Кривые дисперсии в координатах  $(n_x, n_y)$  для различных пространственных гармоник двумерно-периодической ЗС

постоянного сдвига фаз на периоде  $d_1$  изображены прямыми

$$n_x = (n_{ym_2} d_2 \Phi_1 / 2\pi d_1) / [m_2 + (q/N)], \quad (20.12)$$

угловой коэффициент которых пропорционален  $\Phi_1$  и зависит как от типа волны, так и от номера  $m_2$  пространственной гармоники.

В соответствии с (20.12) каждой пространственной гармонике соответствует свой коэффициент пропорциональности между  $n_{ym_2}$  и  $\lambda$ . Несмотря на это все пространственные гармоники имеют одинаковое замедление групповой скорости  $n_{gx}$  вдоль оси  $x$ , которое определяется точкой пересечения касательной к кривой дисперсии с осью ординат. Это утверждение следует также из формулы Релея

$$n_{gx} = n_x - \lambda(dn_x/d\lambda) = n_x - \mu\lambda(dn_x/d\mu\lambda), \quad (20.13)$$

которая остается справедливой при замене  $\lambda$  на  $\mu\lambda$ , где  $\mu$  — произвольная постоянная. В нашем случае в соответствии с (20.11)  $\mu = [(q/N) + m_2]/d_2$ . Изменяя угол наклона электронного потока к оси цилиндра, можно заставить работать прибор в режиме либо усиления, либо генерации. Аналогичная картина имеет место для одномерно-периодических ЗС, когда, меняя скорость электронов, можно осуществить взаимодействие электронов с полем различных пространственных гармоник. Двумерно-периодические ЗС расширяют возможности изменения режима работы прибора.

## 20.7. Крутизна перестройки частоты

Если прямая (20.4) не касается дисперсионной характеристики, а пересекает ее, то синхронизм имеет место лишь на фиксированной частоте. В этом случае для изменения рабочей частоты генератора или усилителя необходимо изменять напряжение, определяющее скорость электронов. Связь частоты и рабочего напряжения можно характеризовать *крутизной электронной перестройки*

$$K_\omega = (U/\omega)(d\omega/dU) = -(U/\lambda)(d\lambda/dU), \quad (20.14)$$

где  $U$  — напряжение, ускоряющее электроны.

Крутизна электронной перестройки связана с зависимостью синхронной скорости ( $v_e$ ) от ускоряющего напряжения. Так, в приборах О-типа с одномерно-периодическими ЗС  $v_e \sim U^{1/2}$ , а в приборах М-типа —  $v_e \sim U$ . При одинаковой полосе частот крутизна электронной перестройки приборов О-типа вдвое меньше, чем приборов М-типа. В общем случае связь величин  $v_e$  и  $U$  зависит от направлений внешнего постоянного магнитного поля и скорости переноса электронов. Поэтому в приборах на основе двумерно-периодических ЗС связь  $v_e$  и  $U$  может быть достаточно сложной. Ради простоты ограничимся случаем, в котором скорость  $v_e$  пропорциональна  $U$ . При этом

$$dU/U = -dn_{ey}/n_{ey}. \quad (20.15)$$

Воспользовавшись (20.11) и (20.15), можно переписать соотношение (20.14) в виде

$$K_\omega = [1 - (n_x/n_{ex})] / [1 - (n_{gx}/n_{ex})]. \quad (20.16)$$

С точки зрения электронной перестройки предпочтительны режимы  $n_{tx} \neq n_{ex}$ . При  $n_{ex} > n_{tx}$  характеристика перестройки имеет положительную дисперсию (чем выше частота, тем больше напряжение), а при  $n_{ex} < n_{tx}$  — отрицательную.

Крутизна электронной перестройки зависит от направления электронного потока, а точнее — от  $x$ -составляющей его скорости. Если продольная составляющая скорости электронов близка к нулю ( $n_{ex} \rightarrow \infty$ ), то крутизна перестройки мало отличается от единицы. При уменьшении  $n_{ex}$  для ЗС с положительной дисперсией величина  $K_\omega$  растет, стремясь к бесконечности при  $n_{tx} \rightarrow n_{ex}$ . Это означает, что при фиксированном анодном напряжении условие синхронизма выполняется в широкой полосе частот. Возможность использования этого свойства обсуждалась в п. 20.6.

Случай  $n_{tx} = n_{ex}$  соответствует совпадению направления движения электронов с осью ЗС. Аналогичный механизм взаимодействия электронов с волной имеет место в приборах типа «О». Крутизна перестройки равна нулю. При использовании двумерно-периодической ЗС с отрицательной дисперсией волны вдоль оси  $x$  величины  $n_{tx}$  и  $n_{ex}$  имеют противоположные знаки. В этом случае крутизна перестройки меньше, чем при положительной дисперсии и с уменьшением  $n_{ex}$  монотонно падает. Характеристика перестройки при этом имеет положительную дисперсию.

## 20.8. Вентильность

Рассмотрим ЗС с прямоугольной решеткой, замкнутую в цилиндр вокруг оси  $x$ . При фиксированном значении компоненты  $\beta_y = 2\pi q / Nd_2$  в такой ЗС на одной и той же частоте могут распространяться по крайней мере две волны, отличающиеся знаком  $\beta_x$ . На рис. 20.4 волновые векторы, соответствующие этим двум волнам, обозначены через  $\beta_1$  и  $\beta_2$  ( $\beta_{1x} = -\beta_{2x}$ ,  $\beta_{1y} = \beta_{2y}$ ). Геометрические места точек, удовлетворяющие условию синхронизма, изображены на рис. 20.4 в виде прямых, перпендикулярных вектору  $\beta_e = \omega \mathbf{v}_e / v_e^2$ , отстоящих от начала координат на  $\beta_e = \omega / v_e$ .

Пусть, например, электронный поток летит вдоль оси  $y$ , т.е. по азимуту. При выбранном направлении волны линия  $A_1B_1$ , на которую попадают концы волновых векторов, удовлетворяющих условию синхронизма, совпадает с линией  $q = \text{const}$ . Это означает, что при  $\beta_{1y} = \beta_{2y} = \beta_e$  волны, бегущие в противоположные стороны по оси  $x$ , одинаково эффективно взаимодействуют с электронным потоком. Малейшие отражения волны от выхода прибора приводят к появлению положительной обратной связи и самовозбуждению усилителя. Мерой *вентильности* (однонаправленности) в этом случае может служить коэффициент отражения, при котором возможно самовозбуждение прибора. Оба направления оси  $x$  прибора с прямоугольной решеткой с точки зрения условий синхронизма можно сделать неравноправными используя винтовые электронные потоки [7]. Если угол между осью  $x$  и направлением  $\mathbf{v}_e$  равен  $\theta \neq \pi/2$ , то прямые, соответствующие условию синхронизма, не совпадают с линиями  $q = \text{const}$  (линия  $A_2B_2$  на рис. 20.4). Взаимодействие электронного потока на частоте  $\omega$  возможно с полем всех волн, у которых имеется хотя бы одна пространственная гармоника, проекция волнового вектора



которой на направление  $\mathbf{v}_e$  равна  $\beta_{e2}$  (гармоника, синхронная с электронным потоком). Если высшие гармоники малы по сравнению с нулевой, то должна усиливаться лишь одна волна, у которой синхронна с электронным потоком нулевая гармоника. На рис. 20.4 ей соответствует волновой вектор  $\beta_3$ . Для возбуждения волны в обратном направлении (вектор  $\beta_3$ ) необходимо уменьшить модуль вектора  $\beta_e$  до  $\beta_{e3}$ , что при заданной частоте возможно лишь за счет изменения напряжения  $U$ .

Вычислим относительную разность напряжений синхронизма электронов с волнами, бегущими в противоположных направлениях по оси  $x$ . Ограничимся случаем, когда скорость электронов пропорциональна напряжению  $U$ . Получаем:

$$2 \frac{U_1 - U_2}{U_1 + U_2} = 2 \frac{v_{e2} - v_{e1}}{v_{e2} + v_{e1}} = 2 \frac{n_{e1} - n_{e2}}{n_{e1} + n_{e2}}. \quad (20.17)$$

Здесь  $v_{e1}$  и  $v_{e2}$  — скорости электронного потока, синхронные с волнами, имеющими положительную (вектор  $\beta_3$  на рис. 20.4) и отрицательную ( $\beta_4$ ) компоненты фазовой скорости вдоль оси прибора. Для любого вектора  $\beta = \{\beta_x, \beta_y\}$ , оканчивающегося на прямой, удовлетворяющей условию синхронизма, справедливо соотношение (20.18):

$$n_e = (\beta_x/k) \cos \theta + (\beta_y/k) \sin \theta, \quad (20.18)$$

где  $k$  — волновое число свободного пространства.

Учитывая, что величинам  $n_{e1}$  и  $n_{e2}$  соответствуют волновые векторы, отличающиеся лишь знаком  $\beta_x$ , находим из (20.17):

$$2(U_2 - U_1)/(U_2 + U_1) = 2 \operatorname{ctg} \psi \operatorname{ctg} \theta, \quad (20.19)$$

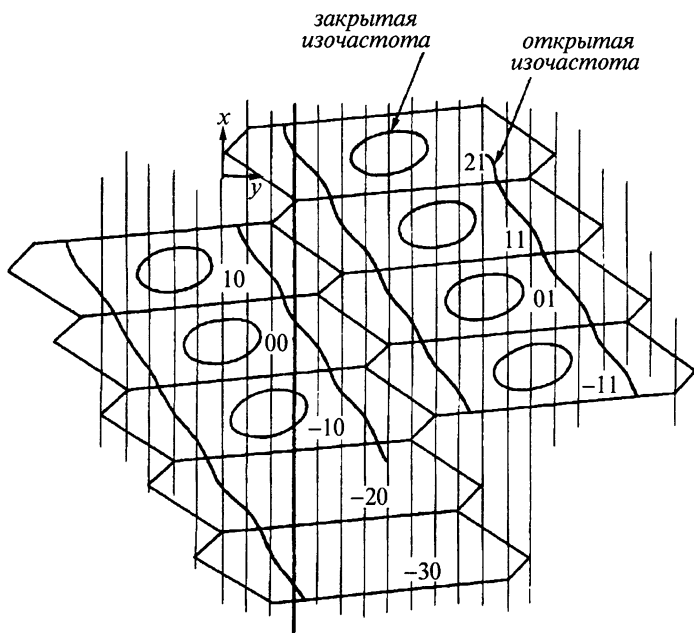
где  $\psi = \operatorname{arctg}(\beta_y/\beta_x)$  — угол между вектором  $\beta$  и осью  $x$  для синхронной гармоники (см. рис. 20.4).

Если электроны летят вдоль оси  $x$ , то  $U_2 = -U_1$  и левая часть (20.19) становится бесконечно большой. В случае  $\theta = \pi/2$  (азимутальный электронный поток) обе волны удовлетворяют условию синхронизма ( $U_2 = U_1$ ). При  $\phi = (\pi/2) - \theta$  независимо от величины  $U_1$  напряжение  $U_2$  бесконечно велико. Этот случай соответствует углу  $\pi/4$  между направлением синхронной гармоники и осью  $x$ .

Соотношение (20.19) не зависит от характеристик конкретных ЗС. При его выводе использовано лишь равенство  $\omega(\beta_x, \beta_y) = \omega(-\beta_x, \beta_y)$ , справедливое для широкого класса ЗС с прямоугольной решеткой. В ЗС с косоугольной решеткой это условие, как правило, не выполняется, и в каждом случае приходится искать свое выражение для разности напряжений, аналогичное (20.19).

Таким образом, в ЗС с прямоугольной решеткой, замкнутых в цилиндр вокруг одной из осей решетки, вентиляемость усилительных приборов можно обеспечить в смысле (20.19), если электронный поток направить под углом  $\theta \neq \pi/2$  к оси цилиндра. Такой способ не всегда удобен из-за трудностей создания достаточно однородных винтовых электронных потоков.

Рассмотрим теперь ЗС с косоугольной решеткой, замкнутую в цилиндр вокруг оси  $x$ . Соответствующие изочастоты приведены на рис. 20.13. Там же нанесены прямые, параллельные оси  $x$ , определенные условиями замыкания ЗС в цилиндр ( $\beta_y = 2\pi q/Nd_2$ ). Числами в каждой зоне указаны номера



**Рис. 20.13.** Замкнутые и открытые изочастоты в ЗС с косоугольной решеткой, свернутых в цилиндр относительно оси  $x$

соответствующих пространственных гармоник. Полагаем, что электронный поток направлен перпендикулярно оси цилиндра (по азимуту).

С точки зрения вентильности в такой ЗС следует различать замкнутые и открытые изочастоты <sup>\*</sup>). Замкнутые изочастоты пересекаются линиями  $\beta_y = \text{const}$  внутри одной и той же зоны, либо в соседних зонах, по крайней мере дважды. При этом эффективность взаимодействия электронов с волной в общем случае оказывается сравнимой в двух точках пересечения. Такие изочастоты с точки зрения вентильности мало отличаются от изочастот ЗС с прямоугольной решеткой. Открытые изочастоты могут пересекаться с линией  $\beta_y = \text{const}$  внутри данной зоны или в соседних зонах лишь один раз. В частности, линия  $\beta_y = \text{const}$ , обозначенная на рис. 20.13 жирной прямой, пересекает одну и ту же изочастоту в зонах с номерами 00, -30, 21. Если амплитуды гармоник с номерами -30 и 21 значительно меньше нулевой, то вентильность прибора обеспечивается.

### Список литературы

- [1]. Белуга И. Ш. Расчет характеристик некоторых штыревых и резонаторных замедляющих систем. *Вопросы радиоэлектроники. Сер. 1. Электроника*, 1963. Вып. 1, 71–120.

<sup>\*</sup>) В физике твердого тела им в какой-то мере аналогичны открытые и замкнутые поверхности Ферми, обеспечивающие различные свойства твердых тел [5].

- [2]. Бурцев В. В., Силин Р. А. Особенности условий синхронизма электронов с волной в двумерно-периодических замедляющих системах, замкнутых в цилиндр. *Электронная техника. Сер. 1. Электроника СВЧ*, 1971. Вып. 7, 3–15.
- [3]. Звонарев Ю. Е. Двусвязная двумерно-периодическая замедляющая система с отрицательной продольной дисперсией. *Электронная техника. Сер. 1. Электроника СВЧ*, 1971. Вып. 7, 3–15.
- [4]. Ландсберг Г. С. Оптика. М.: Наука, 1976. 926 с.
- [5]. Лифшиц И. М., Азбель М. Я., Каганов М. И. Электронная теория металлов. М.: Наука, 1971. 415 с.
- [6]. Мясников В. Е. Дисперсионные свойства многоэтажной замедляющей системы. *Электронная техника. Сер. 1. Электроника СВЧ*, 1969. Вып. 3, 51–62.
- [7]. М. И. Хворов и др. Экспериментальное исследование взаимодействия винтового электронного потока с электромагнитными волнами в двумерно-периодической замедляющей системе. *Электронная техника. Сер. 1. Электроника СВЧ*, 1971. Вып. 5, 3–9.
- [8]. Mourier G. Circuits a structure periodique a deux et trois dimensions. *L'Onde Electrique*, 1958, **28**(371), 95–100.

## Замедляющие системы, ограниченные двумя плоскостями

### 21.1. Условия, накладываемые на волновой вектор

Двумерно-периодические ЗС, ограниченные с двух сторон проводящими плоскостями, используются в ряде электронных приборов. Как правило, в таких приборах электронный поток либо параллелен, либо перпендикулярен ограничивающим стенкам. Если ограничивающие стенки расположены в плоскостях симметрии ЗС, перпендикулярных оси  $y$ , то на сдвиг фаз  $\varphi_2$  накладывается условие  $\varphi_2 = q\pi/N$ , где  $N$  — число периодов ЗС между стенками. Оно отличается от условия замыкания в цилиндр ( $\varphi_2 = 2\pi q/N$ ) лишь множителем «2». Для этого случая остаются справедливыми результаты, описанные в гл. 20. Поэтому ниже рассмотрены только такие ЗС, у которых ограничивающие плоскости расположены под некоторым углом к рядам решетки, отличным от нуля и  $\pi/2$  [1–3]. Такие ЗС называют косыми. Они предложены [4, 5] для ламп с поперечным током.

Исходные соображения к использованию косых ЗС в лампах с поперечным током сводятся к следующему. Если использовать ЗС с прямоугольной решеткой, ограниченной стенками, перпендикулярными рядам, то оказываются равноправными волны, несущие энергию вдоль оси  $x$  в противоположных направлениях (нет вентильности). Они имеют одинаковое замедление вдоль оси  $y$  и одинаково эффективно взаимодействуют с электронным потоком. Если усиливается сигнал, несущий энергию вдоль оси  $x$ , то малейшие отражения от выхода прибора приведут к появлению положительной обратной связи. Это чревато самовозбуждением усилителя. Чтобы сделать встречные направления неравноправными, предложено использовать косые ЗС.

Рассмотрим подробнее косые ЗС. Запишем условие, накладываемое на волновой вектор стенками в косой ЗС. Для этого обозначим через  $\beta_\zeta$  и  $\beta_\eta$  компоненты вектора  $\beta$ , перпендикулярные и параллельные стенкам, соответственно. При возвращении волны в исходную точку после двукратного отражения от стенок изменение фазы должно быть кратным  $2\pi$ . Обозначив через  $D$  расстояние между стенками, можно записать условие, накладываемое на вектор  $\beta$ , следующим образом:

$$(\beta_{\zeta 1} - \beta_{\zeta 2})D + 2\gamma(\beta_\eta, k) = 2\pi q, \quad (21.1)$$

где  $q$  — целое число, а  $\gamma(\beta_\eta, k)$  — изменение фазы при отражении. Величина  $\gamma$  зависит от частоты  $\omega = kc$ , от волнового числа  $\beta_\eta$  и от структуры ограничивающих плоскостей, из-за которых, в частности, могут возникать волны высших типов. Условие (21.1) для ЗС, ограниченной плоскостями, сложнее условия (20.7) замыкания ЗС в цилиндр, так как содержит обе компоненты вектора  $\beta$ . Поэтому закономерности распространения волн и, в частности,

условия синхронизма в ЗС, ограниченных плоскостями, сложнее, чем в ЗС, замкнутых в цилиндр. С этой точки зрения использование ЗС, ограниченных плоскостями, можно оправдать лишь соображениями технологии изготовления ЗС в том или ином диапазоне частот.

В настоящей главе даны примеры построения дисперсионных характеристик и определения условий существования обратной связи на примерах многопроводной линии и широкой гребенки.

## 21.2. Многопроводная линия, ограниченная плоскостями

Значения  $\beta_{\zeta 1}$  и  $\beta_{\zeta 2}$  для падающей и отраженной волн в многопроводной линии согласно (19.5) можно записать в виде

$$\beta_{\zeta 1} = k \csc \psi + \beta_{\eta} \operatorname{ctg} \psi,$$

$$\beta_{\zeta 2} = -k \csc \psi + \beta_{\eta} \operatorname{ctg} \psi.$$

Подставляя эти выражения в (21.1), получим

$$(kD/\sin \psi) + \gamma(\beta_{\eta}, k) = \pi q. \quad (21.2)$$

Формула (21.2) представляет уравнение дисперсии косой штыревой ЗС, содержащей только отрезки многопроводной линии. Она получена в предположении, что поля высших типов волн, возникающие у одной из отражающих стенок, затухают настолько быстро, что у противоположной стенки ими можно пренебречь по сравнению с полем *LEM*.

Следует заметить, что при  $\gamma=0$  формула (21.2) принимает вид  $kD = q\pi \sin \psi$ , или  $\lambda = 2D/q \sin \psi$ , т. е. ЗС не имеет полос пропускания. В ней возможны только колебания, при которых вдоль штырей укладывается целое число ( $q$ ) полуволн. Наличие полос пропускания в штыревой ЗС связано с зависимостью  $\gamma$  от  $\beta_{\eta}$  и  $k$ .

## 21.3. Элементарное рассмотрение косой системы типа «встречные штыри»

Предполагаем, что между штырями ЗС по зигзагообразному пути распространяется волна со скоростью  $c$ , как это показано стрелками в верхней левой части рис. 21.1. В таком предположении часто рассчитывают дисперсионную характеристику обычной (не косой) ЗС типа «встречные штыри». Это предположение обеспечивает достаточно хорошее совпадение результатов расчета и измерений, если расстояния до экранов  $w_1$  и  $w_2$  (рис. 15.1) существенно превышают период  $L$  многопроводной линии.

Рассмотрим сначала изменение фазы  $2\varphi_{\eta}$  на периоде структуры вдоль оси  $\eta$ . Оно определяется как произведение волнового числа свободного пространства  $k$  на путь, пройденный волной. В соответствии с рис. 21.1 получим

$$2\varphi_{\eta} = (2h + 2L_{\eta})k, \quad (21.3)$$

где  $L_{\eta} = L/\sin \psi$  — период ЗС вдоль оси  $\eta$ . Выражение (21.3) представляет уравнение дисперсии ЗС, связывающее  $\varphi_{\eta}$  с  $k$ .

Рассмотрим теперь изменение фазы вдоль оси  $\zeta$  между точками 1, 2, 3, 4, расположенными в центрах соответствующих зазоров. Между соседними точками 1 и 2, 2 и 3, 3 и 4 разность фаз не одинакова. В соседних участках она чередуется. Судить о правильности этого утверждения по рис. 21.1 трудно, так как вдоль оси  $\zeta$  имеется недостаточное количество точек. В зазорах, центрам которых соответствуют четные точки, волна бежит вверх (падающая волна), а в остальных зазорах — вниз (отраженная волна).

Обозначим разность фаз между соседними четными точками через  $2\varphi_{\eta 1}$ , а между нечетными — через  $\varphi_{\eta 2}$ . При этом в соответствии с рис. 21.1

$$2\varphi_{\zeta 1} = (2h + 2L_{\eta} + \delta)k, \quad 2\varphi_{\zeta 2} = (2h + 2L_{\eta} - \delta)k, \quad (21.4)$$

где  $\delta = 2L/\sin \varphi \cos \varphi$ .

Подставляя (21.3) в (21.4), получим уравнение дисперсии, связывающее  $\varphi_{\zeta}$  с  $k$  для падающей  $\varphi_{\zeta 1}$  и отраженной  $\varphi_{\zeta 2}$  волн,

$$2\varphi_{\zeta 1,2} = 2(\varphi_{\eta} \pm Lk/\sin \psi \cos \psi) \quad (21.5)$$

где верхний знак соответствует падающей волне, а нижний — отраженной.

Зная, что  $2\varphi_{\zeta} = 2\beta_{\zeta}L_{\zeta}$ ,  $2\varphi_{\eta} = 2\beta_{\eta}L_{\eta}$ ,  $L_{\zeta} = L/\cos \psi$ ,  $L_{\eta} = L/\sin \psi$ , получаем второе из равенств (19.4). То, что из (21.4) следует (19.4), подтверждает соответствие падающей волны четным зазорам, а отраженной — нечетным.

## 21.4. Косая гребенка

Дисперсионную характеристику косой гребенки оценим графическим способом, полагая в (21.1)  $\gamma = 0$ . Для этого на графике изочастот (рис. 19.18) наносится координатная сетка  $\beta_{\eta}$ ,  $\beta_{\zeta}$  и используется тот факт, что векторы  $\beta_1$  и  $\beta_2$  оканчиваются на одной и той же изочастоте, имея одинаковые компоненты  $\beta_{\eta} = \beta_{\eta 1} = \beta_{\eta 2}$ , и что согласно (20.1)  $\beta_{\zeta 1} - \beta_{\zeta 2} = 2\pi q/D$ .

Откладывая вдоль  $\beta_{\zeta}$  отрезок  $2\pi q/D$  при фиксированном  $\beta_{\eta}$  так, чтобы оба конца отрезка лежали на одной изочастоте, определяем частоту и компоненты  $\beta_{\zeta 1}$ ,  $\beta_{\zeta 2}$ ,  $\beta_{y1}$  и  $\beta_{y2}$ . Производя такие операции при разных  $\beta_{\eta}$  находим зависимости от частоты компонент волновых векторов  $\beta_{\zeta 1}$ ,  $\beta_{\zeta 2}$ ,  $\beta_{y1}$ ,  $\beta_{y2}$  и коэффициентов замедлений  $n_{\zeta 1} = \beta_{\zeta 1}/k$ ,  $n_{\zeta 2} = \beta_{\zeta 2}/k$ . Видим, что компоненты  $\beta_{y1}$  и  $\beta_{y2}$  мало отличаются по абсолютной величине и противоположны по знаку. При  $\beta_{\eta} = 0$  и  $\beta_{\eta} = \pi/d_{\eta}$  имеет место строгое равенство  $\beta_{y1} = -\beta_{y2}$ , причем  $\beta_{y1} > 0$ . Здесь  $d_{\eta} = d/\sin \psi$ , а  $d$  — период гребенки.

На рис. 21.2 и рис. 21.3 приведены зависимости замедлений  $n_{\eta} = \beta_{\eta}/k$  и  $n_{\zeta}$  от длины волны, рассчитанные при  $\varphi = \pi/4$ ,  $D = 10$ ,  $d = 0,4$  с помощью

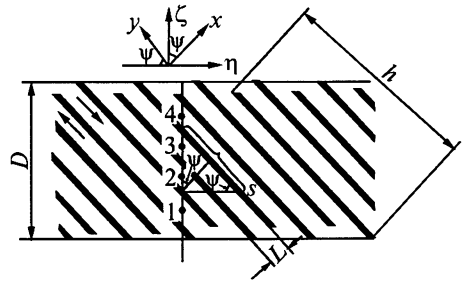
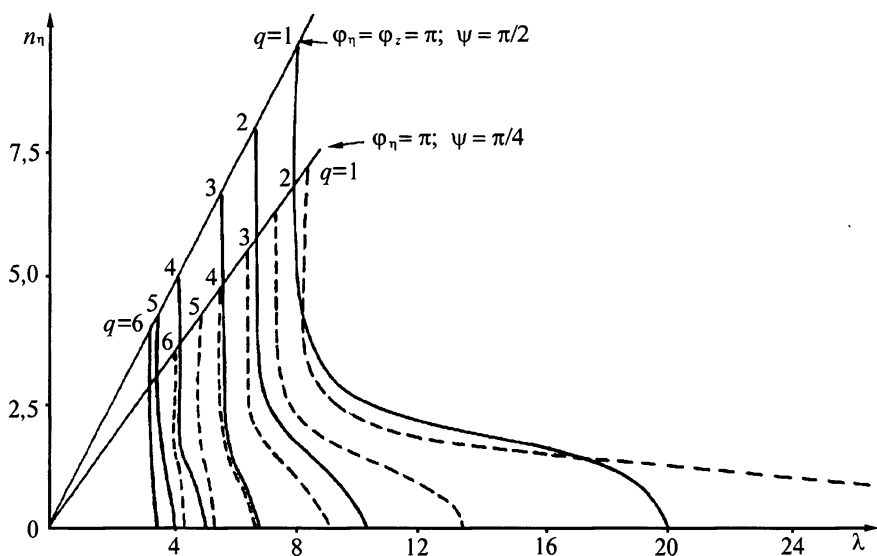


Рис. 21.1. Косая ЗС типа «встречные штыри»



**Рис. 21.2.** Кривые дисперсии различных типов волн прямой (сплошные линии) и косой (штриховые линии) гребенки, построенные для замедлений фазовой скорости в направлении  $\eta$

изочастот, изображенных на рис. 19.11. Для сравнения на рис. 21.2 приведены кривые дисперсии  $n_\zeta(\lambda)$  прямой гребенки ( $\psi = \pi/2$ ). Для нее совпадают оси  $\zeta$  и  $y$ ,  $\eta$  и  $x$ . При одинаковых  $q$  и  $D$  косая ЗС более широкополосна, чем прямая.

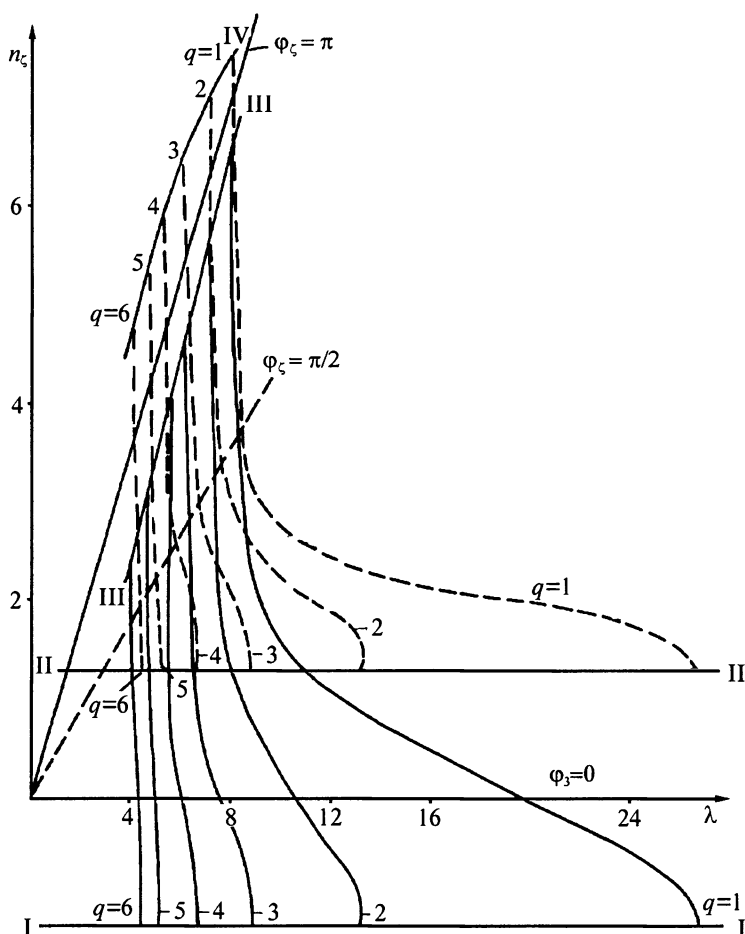
Границы полос пропускания в направлении  $\eta$  соответствуют значениям  $\varphi_\eta = \beta_\eta d_\eta = m\pi$ , а в направлении  $\zeta$  — значениям  $\varphi_\zeta = \beta_\zeta d_\zeta \neq m d_\eta$ , где  $m$  — целые числа. Последнее утверждение следует из равенства  $\beta_{\zeta 1,2} = \beta_\eta \operatorname{ctg} \psi + \beta_{y 1,2}$ . Подставляя в него значение  $\beta_\eta$ , соответствующее границе полосы пропускания, получаем значения

$$\beta_{\zeta 1,2} = (q\pi/d_\zeta) + \beta_{y 1,2} \operatorname{cosec} \psi = (q\pi/d_\zeta) \pm \beta_{y 1} \operatorname{cosec} \psi,$$

не равные  $q\pi/d_\zeta$ , а именно  $\beta_{\zeta 1} > q\pi/d_\zeta$  и  $\beta_{\zeta 2} < q\pi/d_\zeta$ , причем  $\beta_{\zeta 1} + \beta_{\zeta 2} = 2q\pi/d_\zeta$ .

Величины замедлений, соответствующие границам полос пропускания, определяются равенствами  $n_{\zeta 1,2} = \beta_{\zeta 1,2} = (q\lambda/2d_\zeta) \pm (\beta_{y 1}/k) \operatorname{cosec} \psi$ . Для падающей волны  $n_{\zeta 1} > q\lambda/2d_\zeta$ , а для отраженной —  $n_{\zeta 2} < q\lambda/2d_\zeta$ .

На рис. 21.3 величины замедлений, соответствующие границам полос пропускания, изображены линиями I—I, II—II, III—III, IV—IV. Кривые дисперсии на этом рисунке приведены для нулевой гармоники. Сплошными линиями нанесены кривые, соответствующие отраженной волне, а штриховыми — падающей. Аналогичным способом можно рассчитать дисперсионную характеристику любой косой ЗС.



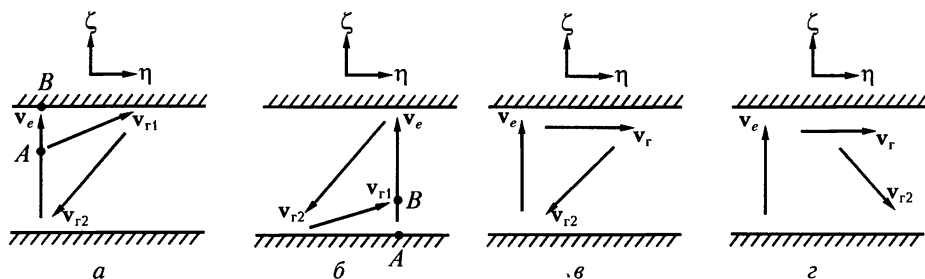
**Рис.21.3.** Кривые дисперсии различных типов волн косой гребенки, построенные для замедлений вдоль оси  $\zeta$ : отраженная волна (сплошные линии), падающая волна (штриховые линии)

## 21.5. Механизм обратной связи

Как отмечено в гл. 20, обратная связь существует, если можно построить такой замкнутый контур из трубок тока электронов и лучей электромагнитной энергии, в котором направления движения электронов и лучей совпадают с направлением обхода контура. Считаем, что луч направлен так же, как групповая скорость волны.

Если не считать отражения волны от концов электронного прибора, то возможны два случая, в которых осуществляется обратная связь. В первом из



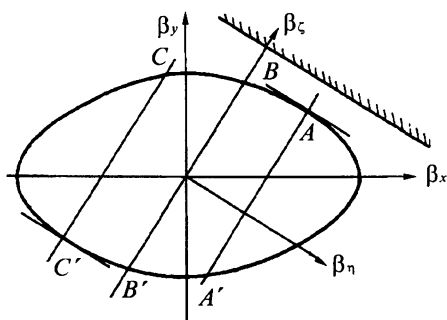


**Рис. 21.4.** Направления потока электронов ( $v_e$ ) и групповых скоростей падающей ( $v_{r1}$ ), отраженной ( $v_{r2}$ ) и в системе в целом ( $v_r$ ) для волн в случаях, когда существует ( $a$ ,  $б$ ,  $в$ ) и отсутствует ( $г$ ) обратная связь. Электронный поток взаимодействует с падающей волной ( $a$ ) и с отраженной ( $б$ )

них (рис. 21.4,  $a$ ) электронный поток взаимодействует с падающей волной. При этом назад к потоку электронов поступает лишь часть энергии, отданная электронным потоком на пути  $AB$ . Возвратившаяся энергия поступает во все точки пучка. При взаимодействии электронов с отраженной волной (рис. 21.4,  $б$ ) энергия возвращается к началу пучка, т. е. на отрезок  $AB$ . Поэтому при взаимодействии электронов с отраженной волной обратная связь сильнее, чем при взаимодействии с падающей. Различие в эффективности обратной связи для взаимодействия с падающей и отраженной волнами становится малым, когда направления групповых скоростей этих волн отличаются на угол, близкий к  $\pi$ . При этом энергия, уходящая из какой-либо точки электронного потока, возвращается в ту же самую точку, т. е. обратная связь отсутствует.

Следует отметить, что при рассмотрении механизма обратной связи выше не учтен поток энергии, связанный с высшими типами волн вблизи стенок. Этот поток можно учесть, если описать механизм несколько иначе. Пусть энергия в системе переносится вдоль оси  $\eta$  (рис. 21.4,  $в$ ,  $г$ ). Поток энергии может быть обусловлен как полями волн в периодической структуре, так и полями в неоднородной области, т. е. высшими типами волн вблизи стенок. Существованию обратной связи соответствует соотношение направлений  $v_e$ ,  $v_{r1}$  и  $v_{r2}$ , приведенное на рис. 21.4,  $в$ , так как энергия, излученная электронным потоком, поступает к его началу.

Исследуем теперь области существования обратной связи конкретных ЗС и, в частности, гребенки (рис. 21.5). Направление внешних нормалей в точках окончания волновых векторов  $\beta_1$  и  $\beta_2$  падающей и отраженной волн указывают направления соответствующих групповых скоростей  $v_{r1}$  и  $v_{r2}$ .



**Рис. 21.5.** К определению области существования обратной связи в гребенке

Дисперсия косой гребенки вдоль оси  $\eta$  положительная (рис. 21.2), так что при  $\beta_\eta > 0$  энергия течет в положительном направлении ( $\mathbf{v}_r > 0$ ), а при  $\beta_\eta < 0$  — в отрицательном ( $\mathbf{v}_r < 0$ ). Обратная связь существует, если направления  $\mathbf{v}_r$  и проекции  $\mathbf{v}_{r2}$  на ось  $\eta$  противоположны.

Пусть ради определенности электроны летят вдоль оси  $\zeta$ . При  $\beta_\eta > 0$  направления  $\mathbf{v}_r$  и проекции  $\mathbf{v}_{r2}$  на ось  $\eta$  одинаковы (они положительны), так что обратная связь отсутствует. При  $\beta_\eta < 0$  обратная связь существует, если вектор  $\beta_1$  оканчивается на участке  $BC$  изочастоты. При этом вектор  $\beta_2$  оканчивается на участке  $B'C'$ . На рис. 21.3 кривых дисперсии область существования обратной связи лежит между линией  $I-I$  и осью  $\lambda$ .

Рассмотрим теперь подробнее условия существования обратной связи в штыревых ЗС. Перенос энергии вдоль оси  $\eta$  осуществляется в них только за счет краевых полей. При этом вектор  $\mathbf{v}_{r2}$  на рис. 21.4, *в, г* всегда направлен вдоль штырей. В ЗС типа «встречные штыри» энергия бежит по зигзагообразному пути. Поэтому, как видно на рис. 21.1, обратная связь существует, если электронный поток, движущийся вдоль оси  $\zeta$ , взаимодействует с волной, бегущей навстречу оси  $\eta$ . Этот случай соответствует рис. 21.4, *а*.

## 21.6. Особенности распределения поля в косых замедляющих системах

Составляющие  $\beta_{\zeta 1}$  и  $\beta_{\zeta 2}$  волновых векторов падающей и отраженной волн в общем случае различны по величине. Зависимость поля от координаты  $\zeta$  для этих волн задается множителями  $\exp(-j|\beta_{\zeta 1}|\zeta)$  и  $\exp(j|\beta_{\zeta 2}|\zeta)$ . Полагаем, что  $\beta_{\zeta 1}$  и  $\beta_{\zeta 2}$  имеют разные знаки. Пусть ради простоты амплитуды этих волн действительны и имеют одинаковый знак. Тогда полное поле пропорционально сумме

$$\begin{aligned} & \exp(-j|\beta_{\zeta 1}|\zeta) + \exp(j|\beta_{\zeta 2}|\zeta) = \\ & = \exp[-j(|\beta_{\zeta 1}| - |\beta_{\zeta 2}|)\zeta/2] \cos[(|\beta_{\zeta 1}| + |\beta_{\zeta 2}|)\zeta/2]. \end{aligned} \quad (21.6)$$

При  $|\beta_{\zeta 1}| = |\beta_{\zeta 2}|$  экспоненциальный множитель равен единице, так что поле вдоль координаты  $\zeta$  представляется стоячей волной. При  $|\beta_{\zeta 1}| \neq |\beta_{\zeta 2}|$  стоячая волна модулирует бегущую, ибо экспоненциальный множитель отличен от единицы. В случае, если  $\beta_{\zeta 1}$  и  $\beta_{\zeta 2}$  имеют одинаковые знаки, выражение (21.6) остается в силе с той лишь разницей, что изменяется знак при  $|\beta_{\zeta 2}|$ .

Структура поля падающих и отраженных волн рассмотрена выше для случая, когда волновые векторы оканчиваются в нулевой зоне. Одинаковыми могут быть компоненты  $\beta_\eta$  волновых векторов, оканчивающихся в разных зонах на одной и той же изочастоте, но не связанных, как векторы пространственных гармоник. При этом, как и в ЗС, замкнутых в цилиндр, каждой зоне может соответствовать своя кривая дисперсии  $n_\eta(\lambda)$ , так что в совокупности эти кривые образуют полосу.

### Список литературы

1. Бурцев В. В., Силин Р. А. Дисперсионные свойства косых многорядных штыревых систем. *Электронная техника. Сер. 1. Электроника СВЧ*, 1969. Вып. 7, 12–18.
2. Иванов В. Н., Силин Р. А., Солнцев В. А. Свойства косых штыревых замедляющих систем. *Вопросы радиоэлектроники. Сер. 1. Электроника*, 1961. Вып. 11, 3–16.
3. Иванов В. Н. Поверхностные волны в полубесконечной решетке. *Радиотехника и электроника*, 1969, **14**(3), 405–410.
4. Dunn D. A., Dunn W. A., Harman W. A. Experimental transverse-current traveling-wave tube. *Proc. Inst. Radio Engrs*, 1956, **44**(7), 888–896.
5. Dunn D. A., Harman W. A. Some slow-wave structures for traveling-wave tubes. *Proc. Inst. Radio Engrs*, 1956, **44**(7), 888–896.

## Двумерно-периодические структуры как фазированные антенные решетки

### 22.1. Ячейка Флоке

В настоящей главе некоторые закономерности распространения волн в двумерно-периодических структурах, рассмотренные выше, применяются к анализу свойств антенных фазированных решеток. При этом не ставится задача описания всех характеристик антенных решеток. Этому вопросу посвящены специальные издания [1–4].

Рассмотрим двумерно-периодическую решетку с базисными векторами  $\mathbf{d}_1$  и  $\mathbf{d}_2$ . Пусть она возбуждается внешним источником по закону

$$U_{q_1 q_2} = U_{00} \exp[-j(q_1 \varphi_1 + q_2 \varphi_2)], \quad (22.1)$$

где  $q_1, q_2$  — номер ячейки, а величина  $U_{q_1 q_2}$  представляет либо потенциал в той или иной точке ячейки с номером  $q_1, q_2$ , либо поле. Она может быть как скалярной (потенциал), так и векторной (поле). Числа  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  представляют сдвиги фаз поля в соседних ячейках

$$\varphi_1 = \boldsymbol{\beta} \mathbf{d}_1, \quad \varphi_2 = \boldsymbol{\beta} \mathbf{d}_2,$$

где  $\boldsymbol{\beta}$  — волновой вектор, лежащий в плоскости решетки. Полагаем  $-\pi < \varphi_1, \varphi_2 \leq \pi$ . При этом волновой вектор лежит в нулевой зоне обратной решетки ( $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta}_{00}$ ).

По аналогии с (16.14) поле в нулевой ячейке решетки можно представить двойным рядом Фурье по пространственным гармоникам,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{H} \end{bmatrix}(\mathbf{r}) = \sum_{m_1, m_2 = -\infty}^{\infty} \begin{bmatrix} \mathbf{e}_{m_1 m_2} \\ \mathbf{h}_{m_1 m_2} \end{bmatrix}(z) \exp\{-j2\pi[(m_1 + \eta_1)\zeta_1 + (m_2 + \eta_2)\zeta_2]\}, \quad (22.2)$$

где  $\mathbf{r} = \zeta_1 \mathbf{d}_1 + \zeta_2 \mathbf{d}_2 + z$  — вектор с компонентами  $\zeta_1, \zeta_2, z$ , а  $\eta_1$  и  $\eta_2$  — компоненты волнового вектора в нулевой зоне:

$$\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta}_{00} = \eta_1 \mathbf{b}_1 + \eta_2 \mathbf{b}_2.$$

Каждой пространственной гармонике поля с номером  $m_1 m_2$  соответствует свой волновой вектор  $\boldsymbol{\beta}_{m_1 m_2} = \boldsymbol{\beta}_{00} + m_1 \mathbf{b}_1 + m_2 \mathbf{b}_2$ . Амплитуды пространственных гармоник определяются соотношением

$$\begin{bmatrix} \mathbf{e}_{m_1 m_2} \\ \mathbf{h}_{m_1 m_2} \end{bmatrix} = \int_0^1 \int_0^1 \begin{bmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{H} \end{bmatrix} (\zeta_1, \zeta_2, z) \exp\{j2\pi[(m_1 + \eta_1)\zeta_1 + (m_2 + \eta_2)\zeta_2]\} d\zeta_1 d\zeta_2. \quad (22.3)$$

Соотношение (22.1) внешне похоже на теорему Блоха, хотя и не имеет с ней ничего общего. Дело в том, что теорема Блоха, как и теорема Флоке, характеризуют свойства собственных решений линейных однородных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами или граничными условиями. Для периодических структур эти решения характеризуют собственные волны, часто называемые нормальными волнами. Соотношение же (22.1) определяет не собственные волны, а структуру внешнего воздействия. Вместе с тем, ячейку структуры вместе с пространством над ней в литературе по антенным решеткам [1, 2] часто называют *ячейкой Флоке*, если возбуждающие поля удовлетворяют (22.1), а свободное пространство над ячейкой — *каналом Флоке*. Некоторая общность с теоремой Флоке (или теоремой Блоха), конечно, имеется, поскольку и для собственных волн и для вынужденных волн в виде (22.1) поле можно разложить в ряд Фурье (22.2) по пространственным гармоникам. Поэтому ниже используются принятые в литературе термины «ячейка Флоке» и «канал Флоке».

Волновой вектор  $\mathbf{k}$  в свободном пространстве можно разложить на две компоненты  $\beta$  и  $\beta_z$ , одна из которых параллельна решетке ( $\beta$ ), а другая — перпендикулярна ( $\beta_z$ ), причем

$$k^2 = \beta^2 + \beta_z^2. \quad (22.4)$$

Если коэффициент замедления  $n = \beta/k < 1$ , то число  $\beta_z$  действительное, и в свободном пространстве возможно распространение волны. При  $n > 1$  число  $\beta_z$  мнимо, что говорит о невозможности распространения (поле затухает по экспоненте).

Угол  $\theta$  между осью  $z$  и направлением распространения волны удовлетворяет соотношению

$$\sin \theta = n, \quad (22.5)$$

поскольку и  $n$ , и  $\sin \theta$  равны  $\beta/k$ .

В случае излучения поля собственными волнами возникает парадокс, заключающийся в том, что поле растет по мере удаления от бесконечной решетки. В самом деле, пусть поле бежит вдоль координаты  $x$  с затуханием за счет излучения. При этом  $\beta'_x = \beta_x - j\alpha_x$  (полагаем  $\beta_x > 0$ ). Величина  $\beta_z$ , как и  $\beta_x$ , должна быть комплексной,  $\beta'_z = \beta_z - j\alpha_z$ . Для волны, бегущей от решетки,  $\beta_z > 0$ . Подставляя  $\beta'_x$  и  $\beta'_z$  в (22.4), получаем

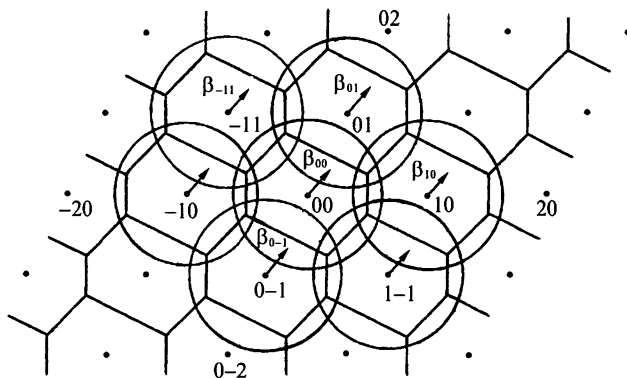
$$\beta_x^2 - \alpha_x^2 - j2\beta_x\alpha_x + \beta_z^2 - \alpha_z^2 - j2\beta_z\alpha_z = k^2.$$

Правая часть последнего равенства действительна. Поэтому  $\beta_x\alpha_x + \beta_z\alpha_z = 0$ . Следовательно, величины  $\alpha_x$  и  $\alpha_z$  должны иметь противоположные знаки. Для затухающей волны  $\alpha_x > 0$ , так что  $\alpha_z < 0$ , т.е. поле растет вдоль оси  $z$  как  $\exp(\alpha_z z)$ .

Парадокс обусловлен тем, что рассматриваются волны бесконечной решетки. Реальная же решетка всегда имеет конечные размеры.

## 22.2. Природа слепых пятен

Рассмотрим поле решетки изотропных излучателей, не взаимодействующих друг с другом. Обратная решетка примера такой структуры изображена на рис. 22.1. Окружностью вокруг узла с номером 00 обозначена область значений волнового вектора  $\beta = \beta_{00}$ , для которой  $|\beta_{00}| = k$ . При  $|\beta_{00}| = k$  поле излучается в свободное пространство, а при  $|\beta_{00}| < k$  — не излучается. Окружности вокруг узлов с иными номерами соответствуют волновым векторам  $\beta_{m_1 m_2}$  пространственных гармоник, при которых  $|\beta_{00}| = k$ . Если окружности пересекаются (как на рисунке), то векторы  $\beta_{m_1 m_2}$  при  $m_1 \neq 0$  или  $m_2 \neq 0$  могут попасть в область  $|\beta_{00}| < k$ , т. е. возможно излучение на пространственных гармониках. Луч, соответствующий основной гармонике, называется *основным лепестком*, а лучи, соответствующие другим гармоникам — *дополнительными главными (дифракционными) лепестками*. Для бесконечной решетки эти лепестки имеют форму дельта-функций. Расширение этих лепестков и появление дополнительных лепестков обусловлено тем, что решетка имеет конечные размеры. Ограничимся рассмотрением только бесконечных решеток.



**Рис. 22.1.** Обратная решетка, разбитая на зоны, соответствующие пространственным гармоникам. Окружностями обозначены области существования волновых векторов, которым соответствует  $\beta_{00} < k$

В случае, когда окружности соответствующие  $|\beta_{00}| = k$ , не пересекаются друг с другом, замедление пространственных гармоник по величине всегда больше единицы, и дополнительных главных лепестков не возникает. Это условие выполняется, если базисные векторы обратной решетки удовлетворяют неравенствам

$$b_1 > 2k, \quad b_2 > 2k, \quad |b_1 \pm b_2| > 2k,$$

т. е. при условии, когда максимальные расстояния  $\Delta_1$  и  $\Delta_2$  между соседними рядами решетки удовлетворяют неравенствам

$$2\Delta_1 < \lambda, \quad 2\Delta_2 < \lambda,$$

где  $\lambda$  — длина волны в свободном пространстве.

Каждой частоте  $f = c/\lambda$  на рис. 22.1 должна соответствовать своя окружность. Чем выше  $f$ , тем больше волновое число  $k = 2\pi f/c$  и тем больше радиус соответствующей окружности, каждая из которых представляет, по существу, изочастоту.

Рассмотрим теперь структуру с сильно связанными ячейками. К таким структурам относятся двумерно-периодические ЗС, рассмотренные в главах 17 и 18. Соответствующие изочастоты далеко не всегда можно представить окружностями. Пусть значениям  $|\beta_{00}| = k$  для многорядной гребенки (рис. 17.2) соответствует некоторая окружность (на рисунке она не изображена). При этом в одних направлениях некоторые изочастоты могут лежать внутри окружности, а в других — вне этой окружности. Значениям  $|\beta_{00}|$  внутри окружности соответствует излучение энергии решеткой, а вне окружности — отсутствие излучения, ибо вдоль решетки бежит поверхностная волна. Таким образом получают области ослепления антенны.

В реальных антенных решетках имеет место некоторое промежуточное состояние. Излучатели стараются делать слабо связанными, но в целом связи избежать не удается. При этом сохраняются области «ослепления» антенны.

### 22.3. Проекционный метод расчета антенных решеток

Проекционный метод расчета ЗС типа ЦСР, описанный в гл. 10, применим к расчету антенных решеток [4] из волноводов произвольного сечения. При расчете этим методом каждая ячейка решетки представляется в виде сочленения ряда волноводов. Этими волноводами могут быть, в частности, согласующие звенья, диэлектрические покрытия, а также свободное пространство над ячейкой решетки. Ради простоты полагаем, что каждая ячейка содержит по одному волноведущему каналу. Как отмечалось выше, пространство над решеткой, которое может включать и диэлектрические слои, называется каналом Флоке. Поле в этом канале ищется в виде двойного ряда Фурье (16.14 а) по пространственным гармоникам. Естественно, что при численных расчетах двойной ряд приходится усекавать. Удобно перейти от двойного ряда к одинарному, располагая слагаемые в порядке возрастания модулей волновых векторов [5].

Метод позволяет рассчитывать коэффициенты матрицы рассеяния ячейки антенной решетки. Она несет информацию о наличии слепых пятен, о степени согласования волноводного тракта, о направлениях главных лепестков излучения, о распределении потоков энергии между главными максимумами и т. д.

### Список литературы

- [1]. Амитей Н., Галиндо В., Ву Ч. Теория и анализ фазированных антенных решеток. Под ред. А. Ф. Чаплина. М.: Мир, 1974. 455 с.  
Перевод к н.: Amitay N., Galindo V., Wu C. P. Theory and analysis of phased array antennas. New York–London–Sydney–Toronto, 1972.

- [2]. Воскресенский Д. И., Кременецкий С. Д., Гринев А. Ю., Котов А. Ю. Автоматизированное проектирование антенн и устройств СВЧ. М.: Радио и связь, 1988. 239 с.
- [3]. Терешин О. Н., Седов В. М., Чаплин А. Ф. Синтез антенн на замедляющих структурах. М.: Связь, 1980. 136 с.
- [4]. Характеристики излучения периодической структуры из волноводов произвольного сечения. А. Ю. Гринев и др. *Радиотехника и электроника*, 1979, **26**(7), 1291–1300.
- [5]. Бриллюэн Л., Пароди М. Распространение волн в периодических структурах. Под ред. П. А. Разина. М.: ИЛ, 1959. 457 с.  
Перевод кн.: Brillouin L., Parodi M. Propagation des ondes dans les milieux periodiques. Paris: Masson, Dunod, 1956.



## **Заключение**

В книге рассмотрены основные закономерности распространения волн в периодических волноводах. Описаны простейшие методы расчета их дисперсионных характеристик и сопротивления связи, позволяющие получить сравнительно простые формулы расчета. Для замедляющих систем типа цепочки связанных резонаторов описан проекционный метод, позволяющий с высокой степенью точности рассчитывать характеристики не только резонаторных систем, но и штыревых замедляющих систем. Этот метод требует создания достаточно сложных программ для ЭВМ.

Основное внимание в книге уделено изучению свойств периодических волноводов с точки зрения их применения в электронных СВЧ приборах, предназначенных для усиления и генерирования электромагнитных колебаний. Наиболее широко в электронных приборах используются одномерно-периодические замедляющие системы. Поэтому им посвящена основная часть книги. Вместе с тем рассматриваются и двумерно-периодические системы. По сравнению с одномерно-периодическими они открывают новые возможности в создании электронных приборов, такие, например, как увеличение их мощности и широкополосности.

Интересны свойства периодических волноводов в смежных областях. Так, их используют в качестве фазированных антенных решеток и искусственных диэлектриков, из которых можно делать линзы, призмы и другие квазиоптические устройства для СВЧ электромагнитных волн, а также в качестве так называемых фотонных кристаллов.

Ряд искусственных диэлектриков обладает «оптическими» свойствами, не характерными для обычных диэлектриков.

## Группы симметрии замедляющих систем

Совокупность элементов симметрии какого-либо тела образует группу симметрии. Два тела с одной и той же совокупностью элементов симметрии принадлежат одной и той же группе симметрии. В табл. П.1.1 приведены обозначения элементов симметрии, используемые в книге.

В табл. П.1.2 приведены все возможные сочетания элементов симметрии (все группы симметрии) для одномерно-периодических систем. В качестве примеров, иллюстрирующих группы симметрии, взяты фигуры, состоящие из отрезков линий. Символами «+» и «-» обозначены отрезки линий в плоскости, перпендикулярной оси, лежащей в плоскости рисунка, имеющие противоположное направление. Для иллюстрации осей  $N$ -го порядка взяты фигуры, в которых  $N$  фиксировано. Так, например,  $N = 5$  для групп с номерами 8, 10, 11, 12, 13,  $N = 2$  для групп 22 и 23 и  $N = 4$  для групп 24, 25, 27. Группы 26 и 28 не проиллюстрированы рисунками.

В табл. П.1.3 и табл. П.1.4 приведены группы симметрии двумерно-периодических ЗС. Все эти группы разбиты на четыре части (сингонии): моноклинную, орторомбическую, тетрагональную и гексагональную. К моноклинной сингонии относятся структуры, в которых ряды решетки периодической структуры не обязательно ортогональны. К орторомбической — системы с ортогональными рядами решетки, но не обязательно с равными периодами во взаимно перпендикулярных направлениях. К тетрагональной сингонии относятся системы с прямоугольной решеткой, у которых ячейки можно выбрать в форме квадрата. К гексагональной сингонии относятся системы с решеткой, ряды которой образуют угол  $120^\circ$  или  $60^\circ$ .

Группы, относящиеся к двумерно-периодическим структурам, обозначаем символом  $P_d$ . Исключение составляют группы, содержащие зеркально-поворотные оси, которые обозначаем символом  $S_d$ . Кроме того, используются символы  $C_d$  и  $H_d$  для систем с так называемой косой трансляцией, т.е. таких ЗС, для которых можно выбрать прямоугольную систему координат, проходящую через узлы решетки, но при этом ячейка получается не наименьшей, а трансляции не кратчайшими. Одна из кратчайших трансляций составляет некоторый угол с прямоугольной системой координат. Для обозначения этих групп используется, в основном, символ  $C_d$ . Однако одного такого символа недостаточно, так как существуют группы с одинаковым набором элементов симметрии, но с различным их расположением. В этих случаях наряду с  $C_d$  используется символ  $H_d$ .

В обозначениях плоскостей или осей встречаются символы  $m_{a/2}$ ,  $m_{b/2}$ ,  $m_{a/2, b/2}$ . Они характеризуют смещение элемента симметрии относительно начала координат по оси  $x$  на  $a/2$  и по оси  $y$  на  $b/2$ . Свойства ЗС, обусловленные наличием тех или иных элементов симметрии, для одномерно-периодических систем описаны в гл. 2, а для двумерно-периодических — в гл. 16.

Таблица П.1.1

Обозначения элементов симметрии





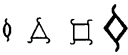
Название элемента симметрии	Буквенный символ		Графический символ	
Плоскость симметрии	$\sigma$	$m$		
Скользкая плоскость	Скользкая плоскость			
Центр инверсии			*	
Ось симметрии порядка $N$	$\epsilon$	$i$		
	$CN$	$N$	$\Delta$ 0	для $N = 4$ для $N = 3$ для $N = 2$
Винтовая ось порядка $N_s$	$CN_s$	$N_s$		
Зеркально-поворотная ось порядка $N$			$\overline{N_s}$	

Таблица П.1.2 (начало)

Группы симметрии одномерно-периодических структур

№ п/н	Буквенные обозначения		Пример, характеризующий группу симметрии	Дополнительные элементы симметрии
	1-я система	2-я система		
1	2	3	4	5
1	$P_0$	$P_0$		—
2	$P_0\varepsilon$	$P_0i$		—
3	$P_0\sigma$	$P_0m$		—
4	$P_0 \cdot \sigma$	$P_0 \cdot m$		$\cdot C_2 \cdot$
5	$P_0\sigma\sigma$	$P_0mm$		$C_2 \cdot \cdot$
6	$P_0 \cdot \sigma\sigma$	$P_0 \cdot mm$		—
7	$P_0\sigma\sigma\sigma$	$P_0mmm$		$\frac{C_2}{\varepsilon} C_2 C_2$
8	$P_0C_N$	$P_0N$		—
9	$P_0 \cdot C_2$	$P_0 \cdot 2$		—
10	$P_0 \frac{C_N}{\sigma}$	$P_0Nm$		—
11	$P_0C_N\sigma \cdot$	$P_0 \frac{N}{m}$		—

Таблица П.1.2 (продолжение)

1	2	3	4	5
12	$P_0 \frac{C_N}{\sigma} \overline{\sigma}$	$P_0 \frac{N}{m} m$		$\cdot C_2 \cdot$
13	$P_0 N 2$	$P_0 C_N C_2$		$\cdot C_2$
14	$P_0 \cdot \frac{C_2}{\sigma}$	$P_0 \cdot \frac{2}{m}$		—
15	$P_0 \cdot \sigma_g$	$P_0 \cdot g$		—
16	$P_0 \cdot \sigma \sigma_g$	$P_0 \cdot mg$		$C_{2_1} \cdot \cdot$
17	$P_0 \sigma \sigma_g$	$P_0 mg$		$\cdot C_{2_1} \cdot$
18	$P_0 \sigma \sigma \sigma_g$	$P_0 mmg$		$C_{2_1} C_2 C_2$
19	$P_0 \cdot \sigma_g \sigma_g$	$P_0 \cdot gg$		$C_2 \cdot \cdot$
20	$P_0 \sigma \sigma_g \sigma_g$	$P_0 mgg$		$C_{2_1} C_2 C_2$ $\varepsilon$

Таблица П.1.2 (окончание)

1	2	3	4	5
21	$P_0 \cdot C_2 \sigma_g$	$P \cdot 2g$		$\epsilon$
22	$P_0 C_{N_s}$	$P_0 N_s$		—
23*)	$P_0 \frac{C_{N_s}}{\sigma}$	$P_0 \frac{N_s}{m}$		—
24*)	$P_0 C_{N_s} \sigma_g$	$P_0 N_s g$		—
25*)	$P_0 C_{N_s} \sigma$	$P_0 N_s m$		—
26*)	$P_0 \frac{C_{N_s}}{\sigma} \cdot \sigma$	$P_0 \frac{N_s}{m} m$		
27*)	$P_0 \frac{C_{N_s}}{\sigma} \sigma_g$	$P_0 \frac{N_s}{m} g$		$\cdot C_2 C_2$
28*)	$P_0 C_{N_s} C_2$	$P_0 N_s 2$		

Примечание:  $P_0 \frac{2}{m} g = P_0 m g g$

\*) Группы 23–28 существуют не при любых сочетаниях  $N$  и  $m$ .

Таблица П.1.3 (начало)

Группы симметрии двумерно-периодических замедляющих систем.  
Моноклинная и орторомбическая сингонии

№ п/п	Символ группы	Дополнительные элементы симметрии	Графическое изображение элементов симметрии
1	2	3	4
<i>Моноклинная сингония</i>			
1	$P_d 1$	—	
2	$P_d \cdot 2$	—	
3	$P_d \epsilon$	—	
4	$P_d 1 \cdot m$	—	
5	$P_d \cdot \frac{2}{m}$	$\epsilon$	
6	$P_d 1 \cdot a$	—	
7	$P_d \cdot \frac{2}{a}$	$\epsilon \frac{a}{2}$	
<i>Орторомбическая сингония</i>			
8	$P_d m$	—	
9	$P_d 1 \cdot n$	—	
10	$P_d m \cdot m$	$\cdot 2 \cdot$	

Таблица П.1.3 (продолжение)

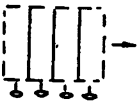


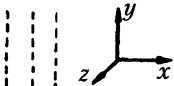


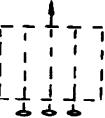

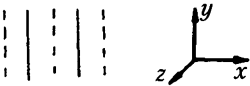

1	2	3	4
11	$P_d m \cdot a$	$\cdot 2_{\frac{a}{2}}$	
12	$P_d m \cdot b$	$\cdot 2_1$	
13	$P_d 2$	—	
14	$P_d b$	—	
15	$P_d b \cdot m$	$\cdot 2_1$	
16	$P_d b \cdot a$	$\cdot 2_{\frac{a}{2}}$	
17	$P_d b \cdot b$	$2 \cdot$	
18	$P_d 2_1$	—	
19	$C_d m$	—	
20	$C_d m \cdot m$	$\cdot 2 \cdot 2_1$	



Таблица П.1.3 (продолжение)

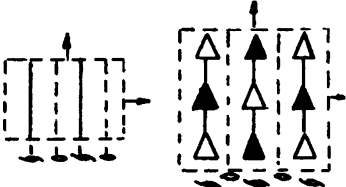
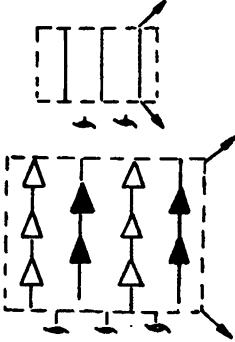

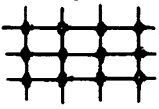
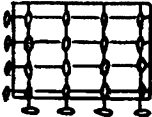
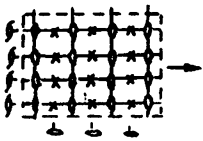

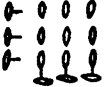
1	2	3	4
21	$C_d m \cdot n$	$\cdot 2 \frac{a}{2} \cdot 2_1$	
22	$H_d m \cdot n$	$2 \frac{b}{2} \cdot \cdot ]$	
23	$C_d 2$		
24	$P_d mm$	$\cdot \cdot \underline{2}$	
25	$P_d mmm$	$222 \varepsilon$	
26	$P_d mma$	$2_1 2 \frac{a}{2} 2 \frac{\varepsilon}{2}$	
27	$P_d \frac{2}{m}$	$\varepsilon$	
28	$P_d 22$	$\cdot \cdot \underline{2} \underline{\varepsilon}$	

Таблица П.1.3 (продолжение)

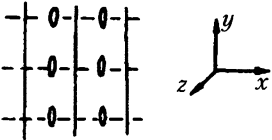
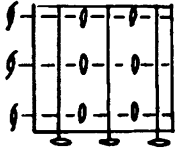
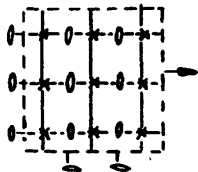
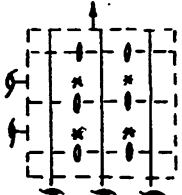
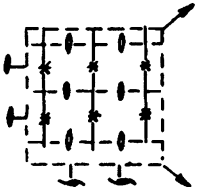
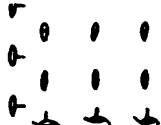
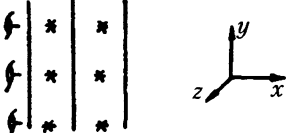
1	2	3	4
29	$P_{\bar{d}ma}$	$\cdot \cdot \mathcal{D}_a$ $2$	
30	$P_{\bar{d}mam}$	$2_1 22 \frac{a}{2}$ $\overline{\mathcal{E}}_{\text{ITER}}^{\text{TER}}$ $2$	
31	$P_{\bar{d}maa}$	$22 \frac{a}{2} 2 \frac{a}{2}$ $\overline{\mathcal{E}}_{\text{ITER}}^{\text{TER}}$	
32	$P_{\bar{d}mab}$	$2_1 \frac{b}{a} 2_1 2 \frac{a}{2}$ $\overline{\mathcal{E}}_{\text{ITER}}^{\text{TER}}$ $22$	
33	$P_{\bar{d}man}$	$2 \frac{b}{2} 2_1 \frac{a}{2} 2 \frac{a}{2}$ $\overline{\mathcal{E}}_{\text{ITER}}^{\text{TER}}$ $2$	
34	$P_{\bar{d}22_1}$	$\cdot \cdot \mathcal{D}_b$ $2$	
35	$P_{\bar{d}} \frac{2_1}{m}$	$\overline{\mathcal{E}}_{\text{ITER}}^{\text{TER}}$ $2$	

Таблица П.1.3 (продолжение)

1	2	3	4
36	$P_a \frac{2}{b}$	$\epsilon_{\frac{b}{2}}$	
37	$P_a b a$	$\dots 2_{\frac{a}{2} \frac{b}{2}}$	
38	$P_a b a m$	$2_1 2_1 2_{\frac{a}{2} \frac{b}{2}}$ $\epsilon_{\frac{a}{2} \frac{b}{2}}$	
39	$P_a b a a$	$2_1 2_{\frac{a}{2}} 2_{\frac{a}{2} \frac{b}{2}}$ $\epsilon_{\frac{b}{2}}$	
40	$H_a b a n$	$2_{\frac{b}{2}} 2_{\frac{a}{2}} 2_{\frac{a}{2} \frac{b}{2}}$ $\epsilon$	
41	$P_a \frac{2_1}{b}$	$\epsilon_{\frac{a}{2} \frac{b}{2}}$	
42	$P_a 2_1 2_1$	$\dots 2_{\frac{a}{2} \frac{b}{2}}$	

Таблица П.1.3 (окончание)

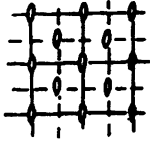
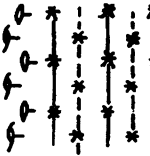
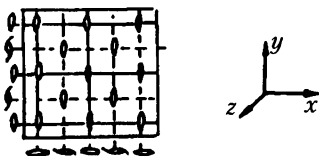
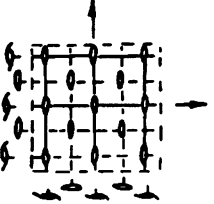
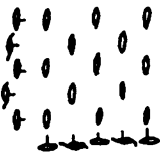
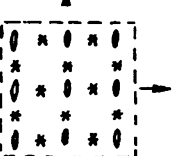
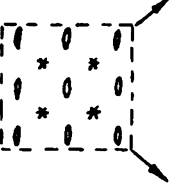
1	2	3	4
43	$C_{\text{д}}mm$	$b_a a_b 2_{ab}$ $\frac{2}{2} \frac{2}{2} 2\frac{2}{2}$ 2	
44	$C_{\text{д}} \frac{2}{m}$	$2_{\frac{1}{2}b}$ $b_a \frac{2}{2} \dots$ $\epsilon \epsilon_a \epsilon_a$ $\frac{2}{2} \frac{2}{2}$	
45	$C_{\text{д}}mmm$	$b_a a_b 2_{ab}$ $\frac{2}{2} \frac{2}{2} 2\frac{2}{2}$ 222 $2_{\frac{1}{2}b} 2_{\frac{1}{2}a}$ $\epsilon_a \epsilon_a \epsilon_b$ $\frac{2}{2} \frac{2}{2}$	
46	$C_{\text{д}}mmn$	$b_a a_b 2_{ab}$ $\frac{2}{2} \frac{2}{2} 2\frac{2}{2}$ 2,2,2 $2_b 2_a$ $\frac{2}{2} \frac{2}{2}$ $\epsilon_a \epsilon_b$ $\frac{2}{2} \frac{2}{2}$	
47	$C_{\text{д}}22$	$2_{\frac{1}{2}b} 2_{\frac{1}{2}a} 2$ $2_{ab}$ $\frac{2}{2} \frac{2}{2}$	
48	$P_{\text{д}} \dots \frac{2}{n}$	$\epsilon_a \epsilon_b$ $\frac{2}{2} \frac{2}{2}$	
49	$H_{\text{д}} \dots \frac{2}{n}$	$\epsilon_{ab}$ $\frac{2}{2} \frac{2}{2}$	

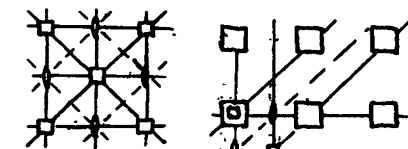
Таблица П.1.4 (начало)

Группы симметрии двумерно-периодических замедляющих систем.  
Тетрагональная и гексагональная сингонии

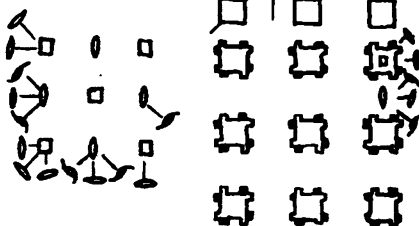
№ п/п	Символ группы	Графическое изображение элементов симметрии и примеры систем
1	2	3

*Тетрагональная сингония*

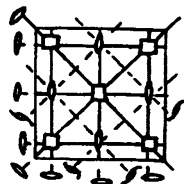
50

 $P_4 4m$ 

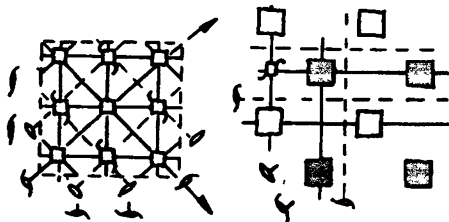
51

 $P_4 42$ 

52

 $P_4 \frac{4}{m}$ 

53

 $P_4 \frac{4}{n}$ 

54

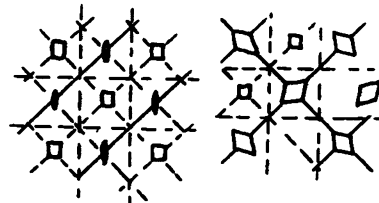
 $P_4 4n$ 

Таблица П.1.4 (продолжение)


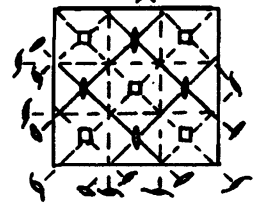
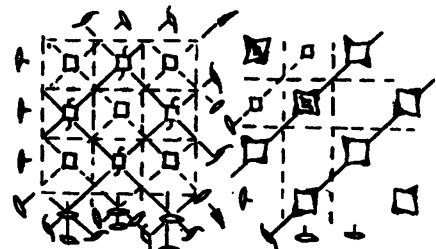

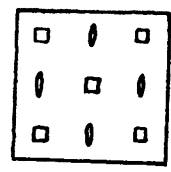
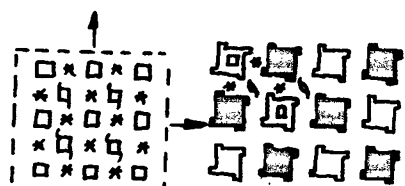
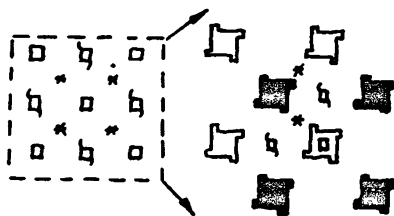
1	2	3
55	$P_d 42_1$	
56	$P_d \frac{4}{m} n$	
57	$P_d \frac{4}{n} n$	
58	$P_d 4$	
59	$P_d \frac{4}{m}$	
60	$P_d \frac{4}{n}$	

Таблица П.1.4 (продолжение)

1	2	3
---	---	---

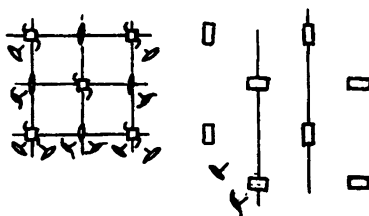
61

$$H_n \frac{4}{n}$$



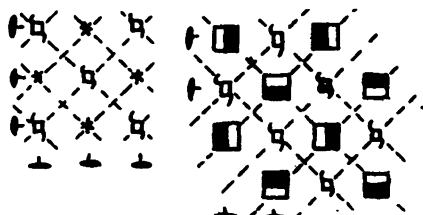
62

$$S_n 4m$$



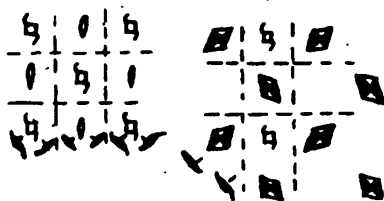
63

$$S_n 42$$



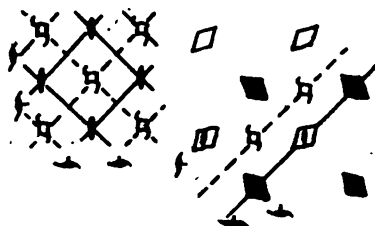
64

$$S_n 4n$$



65

$$S_n 42_1$$



66

$$S_n 4$$

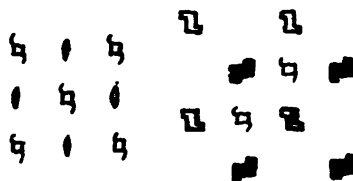
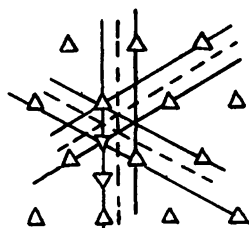


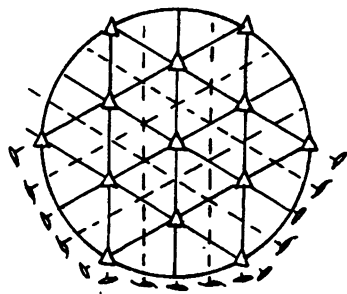
Таблица П.1.4 (продолжение)

## Гексагональная сингония

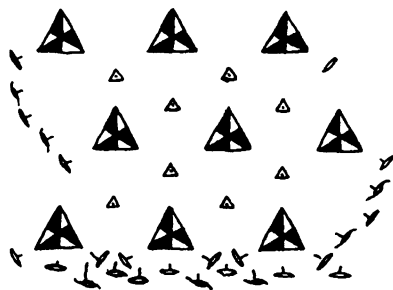
67

 $C_d 3m$ 

68

 $C_d \begin{smallmatrix} 3 \\ m \end{smallmatrix}$ 

69

 $C_d 32$ 

70

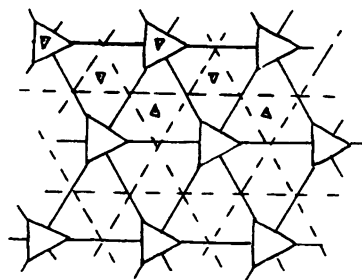
 $H_d 3m$ 



Таблица П.1.4 (продолжение)

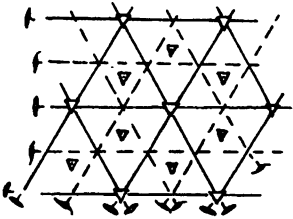
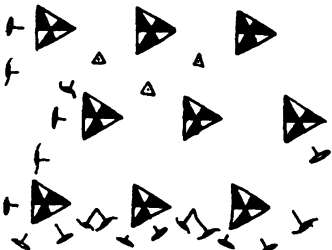
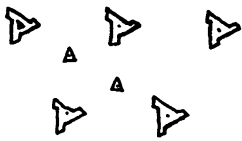

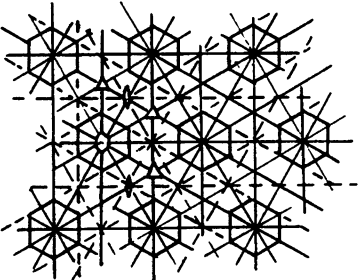
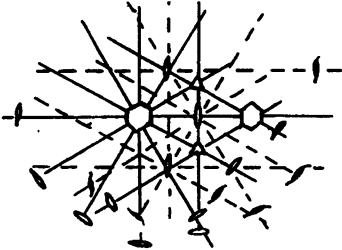
1	2	3
71	$H_d \frac{3}{m}$	
72	$H_d 32$	
73	$C_d 3$	
74	$C_d \frac{3}{m}$	
75	$C_d 6m$	
76	$C_d \frac{6}{m}$	 см. $C_d 6m$

Таблица П.1.4 (окончание)

1	2	3
77	$C_d 62$	Сохранены только оси группы $C_d 6m$ . Пример системы аналогичен $C_d 32mm$ $H_d 32$
78	$S_d 6m$	
79	$S'_d 6m$	
80	$C_d 6$	
81	$C_d \frac{6}{m}$	
82	$S_d 6$	

## Приложение 2

### Элементы теории многополюсников

При расчете ЗС как методом эквивалентных схем, так и полевыми методами часто используется теория многополюсников. В настоящей книге она используется при расчете анодных блоков магнетронов, штыревых ЗС, резонаторных ЗС, включая ЦСР.

Многополюсником называют устройство с  $N$  входами, на которых имеются некоторые напряжения и токи. Этими входами могут служить как реальные клеммы, так и чисто формальные величины, такие, например, как амплитуды нормальных волн в волноводе. Каждый вход описывается двумя параметрами, например напряжением  $U_k$  и током  $I_k$  ( $k = 1, \dots, N$ ) или амплитудой падающей  $a_k$  и отраженной  $b_k$  волн. Рассматриваем только линейные устройства, так что параметры (пусть  $U_k$  и  $I_k$ ) связаны линейными уравнениями

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ \dots \\ I_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11} & \dots & Y_{1N} \\ \dots & \dots & \dots \\ Y_{N1} & \dots & Y_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ \dots \\ U_N \end{bmatrix},$$

или более компактно

$$\mathbf{I} = [\mathbf{Y}]\mathbf{U}, \quad (\text{П.2.1})$$

где  $\mathbf{I}$  и  $\mathbf{U}$  называются векторами токов и напряжений, соответственно, а  $[\mathbf{Y}]$  — матрицей проводимости. Токи считаем положительными, если они втекают в многополюсник.

Полагаем, что рассматриваемые устройства удовлетворяют теореме взаимности, т.е. не содержат гиротропных сред, полупроводников, электронных ламп и т.п. Можно показать, что для таких устройств матрица проводимости симметрична,

$$[\mathbf{Y}] = [\mathbf{Y}]^t, \quad (\text{П.2.2})$$

где символ « $t$ » означает операцию транспонирования.

В случае отсутствия потерь матрица проводимости мнимая для многополюсника, удовлетворяющего теореме взаимности. В самом деле, мощность потерь в многополюснике определяется соотношением

$$P = \text{Re}(\mathbf{I}^* \mathbf{U} / 2) = (\mathbf{I}^* \mathbf{U} + \mathbf{U}^* \mathbf{I}) / 4,$$

т.е. в отсутствие потерь

$$P = (\mathbf{U}^* [\mathbf{Y}]^* \mathbf{U} + \mathbf{U}^* [\mathbf{Y}] \mathbf{U}) / 4 = 0.$$

Для многополюсника без потерь эти соотношения должны выполняться при любых  $\mathbf{U}$ . Отсюда следует, что

$$[\mathbf{Y}]^* = -[\mathbf{Y}] \quad (\text{П.2.3})$$

где звездочка означает операцию сопряжения по Эрмиту. Поскольку матрица проводимости симметрична, отсюда следует, что она мнимая.

Часто вместо напряжений и токов вводят понятия амплитуд падающей и отраженной волн. Рассмотрим многополюсник (рис. П.2.1), к каждому входу которого подключена линия передачи с волновым сопротивлением  $Z_{bk}$ . Напряжения  $U_k$  и токи  $I_k$  ( $k = 1, \dots, N$ ) в каждой линии связаны с амплитудами  $A_k$  и  $B_k$  волн, бегущих в сторону многополюсника и от него соотношениями

$$U_k(z) = A_k \exp(-j\beta_k z) + B_k \exp(j\beta_k z),$$

$$I_k(z) = Z_{bk}^{-1} [A_k \exp(-j\beta_k z) - B_k \exp(j\beta_k z)]$$

где  $\beta_k$  — волновое число для волны в  $k$ -й линии.

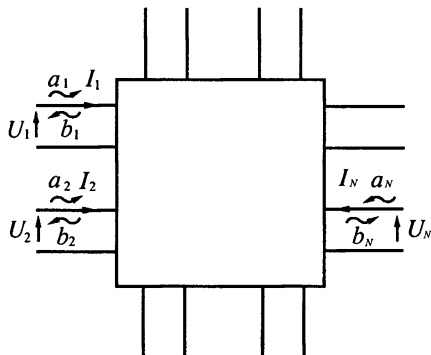


Рис. П.2.1. Многополюсник

Величину  $A_k$  называют амплитудой падающей волны, а  $B_k$  — амплитудой отраженной волны. Рассматриваем напряжения и токи при  $z = 0$ , полагая, что  $z = 0$  соответствует входу в многополюсник:

$$U_k(0) = A_k + B_k,$$

$$I_k(0) = Z_{bk}^{-1} (A_k - B_k) \quad (\text{П.2.4})$$

Амплитуды  $A_k$  и  $B_k$  имеют размерность напряжения. Вместо них вводят нормированные величины

$$a_k = Z_{bk}^{-1/2} A_k, \quad b_k = Z_{bk}^{-1/2} B_k, \quad \hat{U}_k = Z_{bk}^{-1/2} U_k, \quad \hat{I}_k = Z_{bk}^{1/2} I_k.$$

Тогда

$$\hat{U}_k = a_k + b_k,$$

$$\hat{I}_k = a_k - b_k.$$

(П.2.5)

Средняя мощность, бегущая в  $k$ -й линии

$$P_k = \text{Re}(I_k^* U_k / 2) = \text{Re}(\hat{I}_k^* \hat{U}_k / 2) = (a_k^* a_k - b_k^* b_k) / 2.$$

Полагаем, что к многополюснику подключаются линии без потерь, так что волновые сопротивления  $Z_{bk}$  и потоки энергии  $P_k$  действительны. Нормированные амплитуды  $a_k$  и  $b_k$  характеризуют потоки энергии падающей и

отраженной волн. Связь амплитуд  $a_k$  и  $b_k$  ( $k = 1, \dots, N$ ) записывают с помощью матриц рассеяния

$$\mathbf{b} = [S]\mathbf{a}, \quad (\text{П.2.6})$$

где  $\mathbf{a} = \{a_1, \dots, a_N\}^T$ ,  $\mathbf{b} = \{b_1, \dots, b_N\}^T$ .

Чтобы установить связь матриц рассеяния и проводимости, последнюю сначала нормируют. Для этого вектор  $\mathbf{U}$  в (П.2.1) умножают на диагональную матрицу  $[Z_b^{-1/2}]$ , состоящую из корней в квадратных соответствующих волновых сопротивлений, а  $\mathbf{I}$  — на матрицу  $[Z_b^{1/2}]$ . Таким образом,

$$[Z_b^{1/2}]\mathbf{I} = [Z_b^{1/2}][Y][Z_b^{1/2}][Z_b^{-1/2}]\mathbf{U}.$$

Вводя нормированные матрицу  $[\hat{Y}]$  и векторы  $\hat{\mathbf{I}}$  и  $\hat{\mathbf{U}}$ ,

$$[\hat{Y}] = [Z_b^{1/2}][Y][Z_b^{1/2}], \quad \hat{\mathbf{I}} = [Z_b^{1/2}]\mathbf{I}, \quad \hat{\mathbf{U}} = [Z_b^{-1/2}]\mathbf{U},$$

можно записать выражение, аналогичное (П.2.1):

$$\hat{\mathbf{I}} = [\hat{Y}]\hat{\mathbf{U}}. \quad (\text{П.2.7})$$

Записав (П.2.5) в векторной форме

$$\hat{\mathbf{U}} = \mathbf{a} + \mathbf{b}, \quad \hat{\mathbf{I}} = \mathbf{a} - \mathbf{b}$$

и учитывая (П.2.6) и (П.2.7),

$$\hat{\mathbf{U}} = ([1] + [S])\mathbf{a}, \quad [\hat{Y}]\hat{\mathbf{U}} = ([1] - [S])\mathbf{a},$$

получим

$$[Y]([1] + [S])\mathbf{a} = ([1] - [S])\mathbf{a}.$$

Полагая, что последнее равенство должно выполняться при любых  $\mathbf{a}$ , находим, что  $[\hat{Y}]([1] + [S]) = ([1] - [S])$ , или

$$[S] = ([1] + [\hat{Y}])^{-1}([1] - [\hat{Y}]) = ([1] - [\hat{Y}])([1] + [\hat{Y}])^{-1}. \quad (\text{П.2.8})$$

Таким образом, установлена связь матриц  $[Y]$  и  $[S]$ . Из (П.2.8) следует, что

$$[\hat{Y}] = ([1] + [S])^{-1}([1] - [S]) = ([1] - [S])([1] + [S])^{-1}, \quad (\text{П.2.9})$$

причем, сомножители коммутативны.

Из факта симметрии матрицы  $[\hat{Y}]$  следует симметрия  $[S]$ ,

$$[S] = [S], \quad (\text{П.2.10})$$

для рассматриваемых нами многополюсников, удовлетворяющих теореме взаимности. Отсутствие потерь обуславливает унитарность матрицы рассеяния:

$$[S][S]^* = [1]. \quad (\text{П.2.11})$$

В самом деле

$$[S]^*[S] = ([1] - [\hat{Y}]^*)([1] + [\hat{Y}])^{-1}([1] + [\hat{Y}])^{-1}([1] - [\hat{Y}]).$$

В силу коммутативности сомножителей и равенства (П.2.3) оказывается справедливым (П.2.11).

Следует заметить, что амплитуды **a** и **b** имеют физический смысл, если нормирование напряжений и токов ведется к волновым сопротивлениям линий, подключенных к многополюснику. Для линий без потерь эти сопротивления действительны. Иногда при рассмотрении волн в запредельных волноводах пытаются нормировать указанные величины к мнимым числам. При этом матрица проводимости перестает быть мнимой, а матрица рассеяния — унитарной. Амплитуды **a** и **b** теряют физический смысл. Тем не менее такая нормировка иногда используется и не приводит к ошибкам, если для конечных результатов нормировка несущественна (при расчетах собственных частот резонаторов, дисперсионных характеристик ЗС, при нормировании напряжений и токов в объединяемых полюсах и т.п.). И все-таки целесообразно проводить нормировку так, чтобы и в промежуточных выкладках физический смысл не терялся.

Рассмотрим теперь действия над матрицами  $[\hat{Y}]$  и  $[S]$ , соответствующие объединению части полюсов двух многополюсников с матрицами проводимости  $[\hat{Y}_1]$  и  $[\hat{Y}_2]$  или рассеяния  $[S_1]$  и  $[S_2]$  (см. рис. П.2.2). Разобьем входы каждого многополюсника на две группы. К одной из них отнесем полюса, остающиеся свободными, а к другой — полюса, подлежащие объединению. Соответствующие матрицы также разобьем на блоки:

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{I}}_1 \\ \hat{\mathbf{I}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [Y_{11}] & [Y_{12}] \\ [Y_{21}] & [Y_{22}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{U}}_1 \\ \hat{\mathbf{U}}_2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{I}}_3 \\ \hat{\mathbf{I}}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [Y_{33}] & [Y_{34}] \\ [Y_{43}] & [Y_{44}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{U}}_3 \\ \hat{\mathbf{U}}_4 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [S_{11}] & [S_{12}] \\ [S_{21}] & [S_{22}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \mathbf{b}_3 \\ \mathbf{b}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [S_{33}] & [S_{34}] \\ [S_{43}] & [S_{44}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a}_3 \\ \mathbf{a}_4 \end{bmatrix}.$$

Символы « $\hat{\phantom{x}}$ » над элементом  $[Y_{sn}]$  матрицы  $[\hat{Y}]$  опускаем. Матрицы  $[Y_{sn}]$  и  $[S_{sn}]$  — квадратные при  $s = n$  и прямоугольные в общем случае при  $s \neq n$ . В силу симметрии матриц  $[\hat{Y}]$  и  $[S]$  диагональные блоки ( $s = n$ ) симметричны, а недиагональные удовлетворяют соотношениям

$$[Y_{12}] = [Y_{21}]^T, \quad [S_{12}] = [S_{21}]^T.$$

Пусть объединяются группы полюсов 2 и 3. При этом число полюсов в обеих группах должно быть одинаковым, так что порядок матриц  $[Y_{22}]$ ,  $[Y_{33}]$ ,  $[S_{22}]$  и  $[S_{33}]$  должен быть одним и тем же. Условия сшивания групп

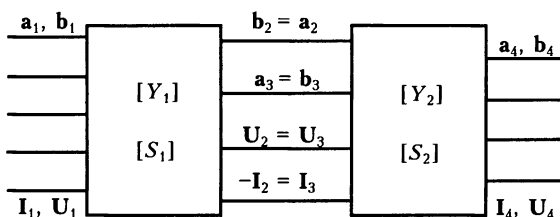


Рис. П.2.2. Два многополюсника, часть полюсов которых соединены между собой

поллюсов следующие:

$$\hat{\mathbf{I}}_2 = -\hat{\mathbf{I}}_3, \quad \hat{\mathbf{U}}_2 = \hat{\mathbf{U}}_3, \quad \mathbf{a}_2 = \mathbf{b}_3, \quad \mathbf{a}_3 = \mathbf{b}_2.$$

Задача состоит в том, чтобы исключить из исходных выражений  $\hat{\mathbf{I}}_2$ ,  $\hat{\mathbf{I}}_3$ ,  $\hat{\mathbf{U}}_2$ ,  $\hat{\mathbf{U}}_3$ ,  $\mathbf{a}_2$ ,  $\mathbf{a}_3$ ,  $\mathbf{b}_2$ ,  $\mathbf{b}_3$  и выразить  $\hat{\mathbf{I}}_1$  и  $\hat{\mathbf{I}}_4$  через  $\hat{\mathbf{U}}_1$  и  $\hat{\mathbf{U}}_4$ , а  $\mathbf{b}_1$  и  $\mathbf{b}_4$  через  $\mathbf{a}_1$  и  $\mathbf{a}_4$ . Имеем:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{I}}_1 &= [\mathbf{Y}_{11}]\hat{\mathbf{U}}_1 + [\mathbf{Y}_{12}]\hat{\mathbf{U}}_2, & -\hat{\mathbf{I}}_2 &= [\mathbf{Y}_{33}]\hat{\mathbf{U}}_2 + [\mathbf{Y}_{34}]\hat{\mathbf{U}}_4, \\ \hat{\mathbf{I}}_2 &= [\mathbf{Y}_{21}]\hat{\mathbf{U}}_1 + [\mathbf{Y}_{22}]\hat{\mathbf{U}}_2, & \hat{\mathbf{I}}_4 &= [\mathbf{Y}_{43}]\hat{\mathbf{U}}_2 + [\mathbf{Y}_{44}]\hat{\mathbf{U}}_4. \end{aligned}$$

Исключая  $\hat{\mathbf{I}}_2$  и  $\hat{\mathbf{U}}_2$ , получим

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{I}}_1 \\ \hat{\mathbf{I}}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [\mathbf{Y}'_{11}] & [\mathbf{Y}'_{12}] \\ [\mathbf{Y}'_{21}] & [\mathbf{Y}'_{22}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U}_1 \\ \mathbf{U}_4 \end{bmatrix}, \quad (\text{П.2.12})$$

где

$$\begin{aligned} [\mathbf{Y}'_{11}] &= [\mathbf{Y}_{11}] - [\mathbf{Y}_{12}]([\mathbf{Y}_{22}] + [\mathbf{Y}_{33}])^{-1}[\mathbf{Y}_{21}], \\ [\mathbf{Y}'_{12}] &= -[\mathbf{Y}_{12}]([\mathbf{Y}_{22}] + [\mathbf{Y}_{33}])^{-1}[\mathbf{Y}_{34}], \\ [\mathbf{Y}'_{21}] &= -[\mathbf{Y}_{43}]([\mathbf{Y}_{22}] + [\mathbf{Y}_{33}])^{-1}[\mathbf{Y}_{21}], \\ [\mathbf{Y}'_{22}] &= [\mathbf{Y}_{44}] - [\mathbf{Y}_{43}]([\mathbf{Y}_{22}] + [\mathbf{Y}_{33}])^{-1}[\mathbf{Y}_{34}]. \end{aligned}$$

Аналогично получается матрица рассеяния

$$\begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [\mathbf{S}'_{11}] & [\mathbf{S}'_{12}] \\ [\mathbf{S}'_{21}] & [\mathbf{S}'_{22}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_4 \end{bmatrix}, \quad (\text{П.2.13})$$

где

$$\begin{aligned} [\mathbf{S}'_{11}] &= [\mathbf{S}_{11}] + [\mathbf{S}_{12}]([\mathbf{S}_{33}]^{-1} - [\mathbf{S}_{22}])^{-1}[\mathbf{S}_{21}], \\ [\mathbf{S}'_{12}] &= [\mathbf{S}_{12}]([\mathbf{I}] - [\mathbf{S}_{33}][\mathbf{S}_{22}])^{-1}[\mathbf{S}_{34}], \\ [\mathbf{S}'_{21}] &= [\mathbf{S}_{43}]([\mathbf{I}] - [\mathbf{S}_{22}][\mathbf{S}_{33}])^{-1}[\mathbf{S}_{21}], \\ [\mathbf{S}'_{22}] &= [\mathbf{S}_{44}] + [\mathbf{S}_{43}]([\mathbf{S}_{22}]^{-1} - [\mathbf{S}_{33}])^{-1}[\mathbf{S}_{34}]. \end{aligned}$$

При расчете характеристик ЗС определяют матрицу проводимости ячейки в следующем виде:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [\mathbf{Y}_{11}] & [\mathbf{Y}_{12}] \\ [\mathbf{Y}_{21}] & [\mathbf{Y}_{22}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U}_1 \\ \mathbf{U}_2 \end{bmatrix}, \quad (\text{П.2.14})$$

где в силу периодичности векторы  $\hat{\mathbf{I}}_s$ ,  $\hat{\mathbf{U}}_s$ , ( $s = 1, 2$ ) имеют одинаковый порядок, а блоки  $[\mathbf{Y}_{sn}]$  представляют квадратные матрицы.

Чтобы получить уравнение дисперсии следует положить  $\hat{\mathbf{U}}_2 = \hat{\mathbf{U}}_1 \exp(-\Gamma)$ ,  $\hat{\mathbf{I}}_2 = \hat{\mathbf{I}}_1 \exp(-\Gamma)$ . Подставляя последние выражения в (П.2.14),

находим

$$\{[Y_{11}] + [Y_{22}] + [Y_{21}]\exp(\Gamma) + [Y_{12}]\exp(-\Gamma)\}\hat{U}_1 = 0. \quad (\text{П.2.15})$$

Таким образом, уравнение дисперсии можно записать в виде

$$\text{Det}\{[Y_{11}] + [Y_{22}] + [Y_{21}]\exp(\Gamma) + [Y_{12}]\exp(-\Gamma)\} = 0. \quad (\text{П.2.16, а})$$

Аналогичным способом можно получить уравнение дисперсии, выраженное через элементы матрицы рассеяния:

$$\begin{aligned} &\text{Det}\{[S_{11}] - [S_{22}]^{-1} - [S_{12}][S_{22}]^{-1}[S_{21}] + \\ &+ [S_{12}][S_{22}]^{-1}\exp(-\Gamma) + [S_{22}]^{-1}[S_{21}]\exp(\Gamma)\} = 0. \end{aligned} \quad (\text{П.2.16, б})$$

В полосах пропускания ЗС  $\Gamma = j\phi$ , где  $\phi$  — сдвиг фазы поля на периоде. При этом выражение (П.2.16) представляет уравнение относительно  $\phi$  при заданной частоте либо уравнение относительно частоты при заданном  $\phi$ . Можно показать, что корню  $\phi$  уравнения (П.2.16) всегда соответствует корень  $-\phi$ , так как соответствующий многополюсник обратим ( $[Y_{11}] = [Y_{11}]^T$ ,  $[Y_{22}] = [Y_{22}]^T$ ,  $[Y_{12}] = [Y_{21}]^T$ ). В самом деле, транспонируем матрицу, стоящую под знаком детерминанта в (П.2.16 а). Получим

$$\text{Det}\{[Y_{11}] + [Y_{22}] + [Y_{21}]\exp(-\Gamma) + [Y_{12}]\exp(\Gamma)\} = 0.$$

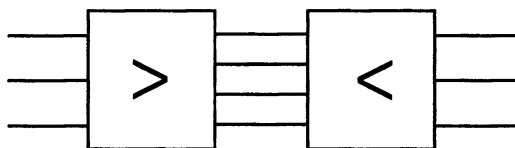
Сравнивая последнее с (П.2.16, а), убеждаемся в справедливости сделанного утверждения. Таким образом, (П.2.16) представляет собой уравнение относительно  $\text{ch } \Gamma$ , а детерминант не содержит мнимой части даже при  $\Gamma = j\phi$ . Сравните этот результат с (2.17, а).

Часто ячейки ЗС имеют плоскости симметрии, перпендикулярные оси. Такую ячейку можно отобразить многополюсником, состоящим из двух половинок, симметричных друг другу (рис. П.2.3). Все расчеты существенно упрощаются, если вычислять матрицу проводимости или рассеяния не всего многополюсника, а лишь его половины. При этом уравнение дисперсии (П.2.16) примет несколько иной вид.

Для симметричного многополюсника в (П.2.14)  $[Y_{11}] = [Y_{22}]$ ,  $[Y_{12}] = [Y_{21}]$ . При этом уравнение (П.2.16) упрощается:

$$\text{Det}\{[Y_{12}]\text{ch } \Gamma + [Y_{11}]\} = 0. \quad (\text{П.2.17})$$

Однако для вычисления  $[Y_{11}]$  и  $[Y_{12}]$  необходимо искать матрицу проводимости всего многополюсника. Сведем расчет к его половине. Для этого рассмотрим два режима в многополюснике. При первом режиме в плоскости



**Рис. П.2.3.** Представление симметричного многополюсника в виде соединения двух симметричных половинок



симметрии расположена магнитная стенка ( $\hat{U}_1 = \hat{U}_2$ ,  $\hat{I}_1 = \hat{I}_2$ ), так что

$$\hat{I}_1 = ([Y_{11}] + [Y_{12}])\hat{U}_1.$$

При втором — электрическая стенка ( $\hat{U}_1 = -\hat{U}_2$ ,  $\hat{I}_1 = -\hat{I}_2$ ), так что

$$\hat{I}_1 = ([Y_{11}] - [Y_{12}])\hat{U}_1.$$

Величина  $[Y_{xx}] = [Y_{11}] + [Y_{22}]$  представляет матрицу входных проводимостей половины многополюсника, когда все полюса в плоскости симметрии разомкнуты (холостой ход), а величина  $[Y_{kx}] = [Y_{11}] + [Y_{22}]$  соответствует короткому замыканию. Для вычисления  $[Y_{xx}]$  и  $[Y_{kx}]$  достаточно найти матрицу проводимости только для половины многополюсника. Остается упростить уравнение дисперсии (П.2.17):

$$\text{Det} \{ ([Y_{xx}] - [Y_{kx}]) \text{ch } \Gamma + [Y_{xx}] + [Y_{kx}] \} = 0.$$

Используя равенства

$$\text{ch } \Gamma + 1 = 2 \text{ch}^2(\Gamma/2), \quad \text{sh } \Gamma - 1 = 2 \text{sh}^2(\Gamma/2),$$

записываем уравнение дисперсии в виде

$$\text{Det} \{ [Y_{kx}] \text{th}^2(\Gamma/2) - [Y_{xx}] \} = 0. \quad (\text{П.2.18})$$

При этом вектор напряжений  $\hat{U}_1$  удовлетворяет уравнению

$$\{ [Y_{kx}] \text{th}^2(\Gamma/2) - [Y_{xx}] \} \hat{U}_1 = 0, \quad (\text{П.2.19})$$

которое следует из (П.2.15)

В случае, когда известна матрица рассеяния, а не проводимости, следует воспользоваться (П.2.7):

$$\begin{aligned} & \text{Det} \{ ([1] + [S_{xx}])^{-1} ([1] - [S_{xx}]) \text{th}^2(\Gamma/2) - \\ & - ([1] + [S_{kx}])^{-1} ([1] - [S_{kx}]) \} = 0. \end{aligned} \quad (\text{П.2.20})$$

Таким образом, для расчета дисперсионной характеристики ЗС необходимо уметь рассчитывать элементы матрицы проводимости или рассеяния. Этот расчет может быть проведен методом эквивалентных схем либо методами теории поля.

## Приложение 3

### Коэффициенты $l_i(h)$ в усредненных граничных условиях

#### Решетка из ленточных проводников [3, 4]

Обозначения размеров и системы координат см. на рис. 6.11.

Для решетки из ленточных проводников отличны от нуля только коэффициенты  $l_0(\eta)$  и  $l_1(\eta)$ :

$$\frac{l_0(\eta)}{d_\tau} = \frac{1}{2\pi\eta} \frac{P_{-\eta}(\cos \Delta') - P_\eta(\cos \Delta')}{P_{-\eta}(\cos \Delta') + P_\eta(\cos \Delta')} = \frac{1}{2\pi\eta} \frac{P_{-\eta}(-\cos \Delta) - P_\eta(-\cos \Delta)}{P_{-\eta}(-\cos \Delta) + P_\eta(-\cos \Delta)},$$
$$\frac{l_1(\eta)}{d_\tau} = \frac{1}{2\pi\eta} \frac{P_{-\eta}(\cos \Delta) - P_\eta(\cos \Delta)}{P_{-\eta}(\cos \Delta) + P_\eta(\cos \Delta)},$$

где  $\Delta = \pi(d_\tau - t)/d_\tau$ ,  $\Delta' = \pi t/d_\tau$ ,  $\eta = \varphi/2\pi$ ,  $\varphi$  — сдвиг фаз поля между соседними проводниками,  $P_\eta(x)$  — функция Лежандра.

С погрешностью не более 0,5 %

$$l_0(\eta) = l_0(0) + [l_0(1/2) - l_0(0)]f(\eta)/f(1/2),$$

где

$$l_0(0) = (d_\tau/\pi) \ln[1/\sin(\Delta/2)],$$

$$f(\eta) = (d_\tau/\pi) [\psi(1 + \eta) + 2^{-1}(\pi \operatorname{ctg} \pi\eta - \eta) + C],$$

$\psi(1 + \eta)$  — пси-функция,  $C = 0,5772$  — постоянная Эйлера,

$$l_0(1/2) = (d_\tau/\pi) \{ [K(\sin(\Delta'/2))/E(\sin(\Delta'/2))] - 1 \},$$

$K[x]$  и  $E[x]$  — эллиптические интегралы первого и второго рода, соответственно,

$$l_1(0) = (d_\tau/\pi) \ln[1/\cos(\Delta/2)].$$

#### Решетка из круглых проводников [3, 4]

$$l_0(\eta) = d_\tau [\tau(\Delta, \eta) - \varphi^{-1} \operatorname{th}(\beta_\tau l_2)] [1 - \varphi \tau(\Delta, \eta) \operatorname{th}(\beta_\tau l_2)],$$
$$l_1(\eta) = d_\tau [\tau(\Delta', \eta) - \varphi^{-1} \operatorname{th}(\beta_\tau l_2)] [1 - \varphi \tau(\Delta', \eta) \operatorname{th}(\beta_\tau l_2)],$$

$$\begin{aligned}
l_2(\eta) &= d_\tau \varphi^{-1} \operatorname{th}(\beta_\tau l_2), \\
l_3(\eta) &= d_\tau^{-1} \operatorname{ch}^{-2}(\beta_\tau l_2) \int_{s/2} \operatorname{ch}^2[\beta_\tau (x - l_2)] ds, \\
l_6(\eta) &= d_\tau^{-1} [\operatorname{sh}(\beta_\tau l_2) - \varphi \tau(\Delta', \eta) \operatorname{ch}(\beta_\tau l_2)]^2 \times \\
&\times \int_{s/2} \{\operatorname{sh}[\beta_\tau (x - l_2)] + \varphi \tau(\Delta', \eta) \operatorname{ch}[\beta_\tau (x - l_2)]\}^2 ds.
\end{aligned}$$

В формулах для  $l_3(\eta)$  и  $l_6(\eta)$  интегрирование ведется по нижней половине сечения проводника решетки.

Здесь  $x$  — координата вдоль вектора  $\mathbf{v}$  на рис. 6.11,  $\varphi = \beta_\tau d_\tau$  — сдвиг фаз на периоде решетки,  $\eta = \varphi/2\pi$ ,  $\cos \Delta = -\cos \Delta'$ ,

$$\Delta = \arccos\{\exp[-\pi(l_1 + l_2)/d_\tau]\},$$

$$\tau(\Delta, \eta) = (2\pi\eta)^{-1} [P_{-\eta}(-\cos \Delta) - P_\eta(-\cos \Delta)] [P_{-\eta}(-\cos \Delta) + P_\eta(-\cos \Delta)]^{-1},$$

$$l_1 = (\pi\delta^2/4d_\tau)F(s), \quad l_2 = (\pi\delta^2/4d_\tau)F(-s),$$

$$F(s) = (1-s)^{-1/2} \times$$

$$\times (1 + 0,32248s + 0,14026s^2 + 0,05282s^3 + 0,0593s^4 + 0,0392s^5 + 0,0244s^6).$$

При  $s \ll 1$ :  $l_1 = l_2 = \pi\delta^2/4d_\tau$  и  $d_\tau = d \cos \psi$ .

## Волновая проводимость многопроводной линии с проводниками прямоугольного сечения

Значения волновой проводимости многопроводной линии с проводниками прямоугольного сечения (рис. 13.4, *a*) вычисляются по формулам (13.9), (13.12):

$$M(\varphi) = \left[ \sin^2(\varphi/2)/30\pi \right] \left[ (p/l) + \varepsilon_1 \hat{C}_{k_1}^{m_1}(\varphi) + \varepsilon_2 \hat{C}_{k_2}^{m_2}(\varphi) \right], \quad \varphi \neq 0, \quad (\text{П.4.1})$$

$$M(0) = (m_1 \varepsilon_1 \hat{C}_{01} + m_2 \varepsilon_2 \hat{C}_{02})/120\pi$$

Здесь  $\varphi$  — разность фаз поля в точках, отстоящих друг от друга на период;  $\varepsilon_i \hat{C}_{k_i}^{m_i}(\varphi)$  и  $\varepsilon_i \hat{C}_{0i}$  ( $i = 1, 2$ ) — отнесенные к  $\varepsilon_0 = 8,854 \times 10^{-12}$  Ф/м погонные краевые емкости линии;  $\varepsilon_i$  — относительные диэлектрические проницаемости областей шириной  $w_i$ ;  $p$  и  $l$  — размеры проводников, указанные на рис. 13.4, *a*; числа  $m_i$  ( $i = 1, 2$ ) принимают значения 0 или 1 в зависимости от типа экранов в линии, отстоящих на расстояниях  $w_1$  или  $w_2$  от проводников прямоугольного сечения;  $m_i = 0$ , если экран представляет магнитную стенку (на нем тангенциальное магнитное поле  $H_\tau = 0$ );  $m_i = 1$ , если экран представляет электрическую стенку ( $E_\tau = 0$ ).

Краевые емкости зависят от отношений размеров  $\eta = l/L$ ,  $\eta_1 = 2w_1/L$ ,  $\eta_2 = 2w_2/L$ . Они рассчитаны методом конформных отображений [1]. Формулы для их расчета приведены в табл. П.4.1. Помимо приведенных выше, в этой таблице использованы следующие обозначения:

$$\alpha = (L - l)/2w, \quad \xi = 2w/l,$$

$$f_1(x) = f_1(1/x) = (x/2) + \left\{ (x^{-1} - x) \arctg x + \ln[(1 + x^2)/4x] \right\} / \pi,$$

$$f_2(x) = 2[\ln(1 + x^2) + 2x \arctg(1/x)] / \pi, \quad f_3(x) = f_2(1/x),$$

$$A(\mu) = (1 + \mu)^{1+\mu} (1 - \mu)^{1-\mu}, \quad S_0(\mu) = (1/2\pi) \ln A(\mu),$$

$$S_1(\mu) = 2\mu^4 / \pi A^2(\mu), \quad \Phi_1(\mu) = 1/A(\mu), \quad \Phi_2(\mu) = 2/\pi A(\mu),$$

$$C_\infty(\mu) = \left\{ \ln(\mu^{-2} - 1) + \mu^{-1} \ln[(1 + \mu)/(1 - \mu)] \right\} / 2\pi,$$

$$\hat{F}_0(\xi) = (4/\pi) \left\{ \ln[1 + \text{ch}^{1/2}(\pi\xi/2)] / \text{sh}(\pi\xi/4) \right\},$$

$$F_1(\xi) = \pi^{-1} \ln[1 + \text{cth}(\pi\xi/2)], \quad F_2(\xi) = \pi^{-1} \ln[1 + \text{th}(\pi\xi/2)],$$

$$\hat{C}_\infty(\varphi) = \varphi^{-1} + (2\pi - \varphi)^{-1} - g(\varphi),$$

$$g(\varphi) = \pi^{-1} [2 \ln 2 + 0,5(1 + 2a)(1 + a)^{-1} - 0,20206a^2 - 0,03693a^4 - 0,00835a^6 - 0,00201a^8],$$

где  $a = \varphi/2\pi$ .

Величина  $(p/l) + \varepsilon_1 C_{k_1}^{m_1}(\varphi) + \varepsilon_2 C_{k_2}^{m_2}(\varphi)$  определяется как отнесенная к  $\varepsilon_0$  величина погонной емкости проводника, равная отношению заряда на единице длины проводника к разности потенциалов на соседних проводниках. Множитель  $4 \sin^2(\varphi/2)$  обусловлен тем, что в определение волновой проводимости входит потенциал проводника относительно экрана. Номера областей в таблице соответствуют номерам на рис. П.4.1.

Краевые емкости  $\hat{C}_{k_1}^{m_1}(\varphi)$  и  $\hat{C}_{k_2}^{m_2}(\varphi)$  определены для случая  $p/l \rightarrow \infty$ . Поэтому при конечных  $p/l$  волновая проводимость вычисляется приближенно. Так, при значениях  $p/l$ , равных 0,5, 1, 1,5, ошибка в определении волновой проводимости не превышает 0,8, 3,8, 16,8 %, соответственно.

Приведенные в таблице П.4.1 формулы применимы при  $p/l > 0,5$  и  $\xi_1 = 2w_1/L > 1,25 - p/l$ ;  $\xi_2 = 2w_2/L > 1,25 - p/l$ . Для расчета  $M(\varphi)$  при  $0,25 < p/l < 0,5$  в той же области  $\xi_1$  и  $\xi_2$  следует заменить при  $m = 1$  емкость  $\hat{C}_{0i}$  на  $\hat{C}_{0i} + \Delta C_{0i}$ , где  $\Delta C_{0i} = -16\kappa/\pi$ ,  $\kappa = \exp\{-\pi[(p/l) + 0,5f_2(\xi)]\}$ .

Расчет квадратов амплитуд пространственных гармоник  $m = 0, \pm 1, -2$  можно производить по формулам [1]

$$M_{0\text{эл}}^2 = \{\text{sh}(\varphi\eta/2)/\text{sh}[(\varphi\eta/2) + x_0]\}^2,$$

$$M_{\text{маг}}^2 = \{\text{ch}(\varphi\eta/2)/\text{ch}[(\varphi\eta/2) + x_0]\}^2,$$

$$M_{-1}^2 = \{1 + N_{\text{эл маг}} \mu^2 [1 - (\varphi/2\pi)^2]\} \exp[-2(2\pi - \varphi)S_0(\mu)],$$

$$M_1^2 = [T_2 - M_{0\text{эл маг}} N_2(r_0 - 1)]^2,$$

$$M_{-2\text{эл}}^2 = [T_3 - M_0 N_3(r_0 - 1)]^2,$$

$$\eta = 2w/L, \quad \mu = l/L.$$

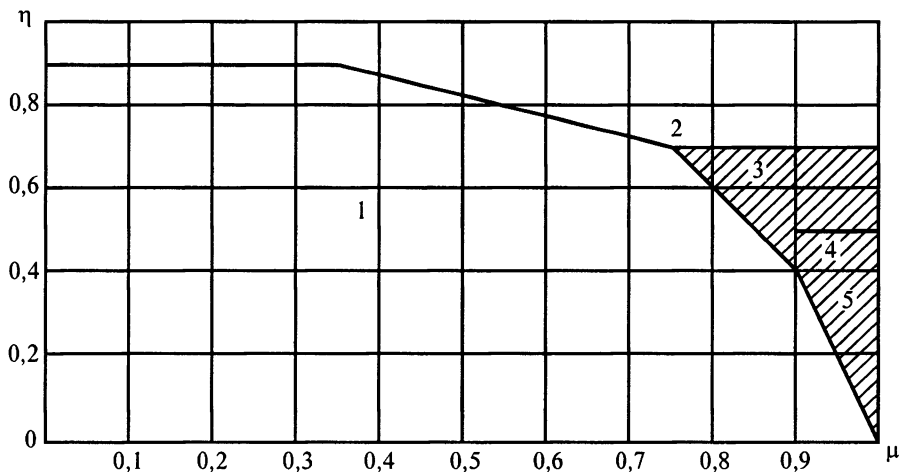


Рис. П.4.1. Области применения формул из табл. П.4.1.

Таблица П.4.1

Формулы для расчета краевых емкостей  $C_k^0(\varphi)$ ,  $C_k^1(\varphi)$ ,  $C_0$

№ области	Формулы
1	$\hat{C}_0 = 2\alpha + f_3(\xi)$
2	$\hat{C}_0 = [0,5\eta + S_0(\mu)]^{-1}$
3, 4	$\hat{C}_0 = [0,5\eta + S_0(\mu) - S_1(\mu)\exp(-2\pi\eta)]^{-1}$
5	$\hat{C}_0 = 2\alpha + (4\alpha)^{1/2} f_3(\xi) + [1 - (4\alpha)^{1/2}] F_0(\xi)$
2	$\begin{cases} \hat{C}_k^1(\varphi) = \hat{C}_\infty(\mu) + \hat{C}_\infty(\varphi) + \varphi^{-1} [\operatorname{cth}(\varphi/\hat{C}_0) - 1] + \\ \quad + (2\pi - \varphi)^{-1} \{\operatorname{cth}[(2\pi - \varphi)/\hat{C}_0] - 1\} \\ \hat{C}_k^0(\varphi) = \hat{C}_\infty(\mu) + \hat{C}_\infty(\varphi) - \varphi^{-1} [1 - \operatorname{th}(\varphi/\hat{C}_0)] - \\ \quad - (2\pi - \varphi)^{-1} \{1 - \operatorname{ch}[(2\pi - \varphi)/\hat{C}_0]\} \end{cases}$
1, 3	$\hat{C}_k^1(\varphi) = \hat{C}_k^1(\pi) + (\hat{C}_0/4) \operatorname{ctg}^2(\varphi/2)$
4, 5	$\begin{aligned} \hat{C}_k^0(\varphi) &= \hat{C}_k^0(\pi) + (8/\pi)u(1-u)^2(1 + 2u \cos \varphi + 4u^2 \cos^2 \varphi) \cos^2(\varphi/2) \\ u &= \exp(-\pi \hat{C}_0/2) \end{aligned}$
1	$\begin{cases} \hat{C}_k^1(\pi) = (\alpha/2) + f_1(\xi) \\ \hat{C}_k^0(\pi) = f_2(\xi)/4 - 4u/\pi \end{cases}$
3	$\begin{cases} \hat{C}_k^1(\pi) = \hat{C}_\infty(\mu) + \Phi_2(\mu) \{ [\exp(\pi\eta) - 1]^{-1} + [\exp(\pi\eta) - \Phi_1(\mu)]^{-1} \} \\ \hat{C}_k^0(\pi) = \hat{C}_\infty(\mu) - \Phi_2(\mu) \{ [\exp(\pi\eta) + 1]^{-1} + [\exp(\pi\eta) + \Phi_1(\mu)]^{-1} \} \end{cases}$
4, 5	$\begin{cases} \hat{C}_k^1(\pi) = (\alpha/2) + (4\alpha)^{1/2} f_1(\xi) + [1 - (4\alpha)^{1/2}] F_1(\xi) \\ \hat{C}_k^0(\pi) = (4\alpha)^{2/3} \{ 0,25 f_2(\xi) - (4/\pi) \exp[-\pi(0,25 + 0,5 f_3(\xi))] \} + \\ \quad + [1 - (4\alpha)^{2/3}] F_2(\xi) \end{cases}$

Примечание: Если  $(\varphi/\hat{C}_0) > 4,2$  (в частности, при  $w = \infty$ ), то  $\hat{C}_k^1 = \hat{C}_k^0$ .

Здесь  $r_0 = \text{cth}(\varphi w/L)$  в случае, если экран  $x = 0$  на рис. П.4.1 представляет электрическую стенку и  $r_0 = \text{th}(\varphi w/L)$ , если он представляет магнитную стенку. Индекс «эл» относится к случаю, когда экран  $x = 0$  представляет электрическую стенку, а «маг» — магнитную. Используются следующие обозначения:

$$x_0 = \varphi S_0(\mu), \quad S_0(\mu) = (1/2\pi)[(1+\mu)\ln(1+\mu) + (1-\mu)\ln(1-\mu)],$$

$$0 < \varphi \leq \pi, \quad N_{\text{эл}} = \text{cth}(x_0 + \gamma) - 1, \quad N_{\text{маг}} = \text{th}(x_0 + \gamma) - 1,$$

$$N_2 = [1 + (\varphi/2\pi)]\mu^2 \exp[-2(\pi - \varphi)S_0(\mu)],$$

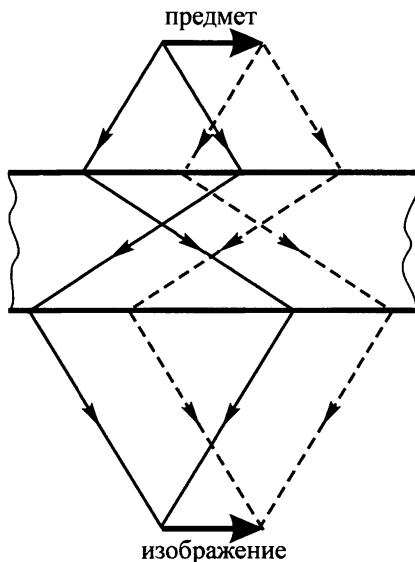
$$N_3 = [1 - (\varphi/2\pi)]\mu^2 [5\mu^2 - (\varphi/\pi)\mu^2 - 2] \exp[-4\pi S_0(\mu)],$$

$$T_2 = [1 - 2\mu^2 - (\varphi/\pi)\mu^2] \exp[-(2\pi + \varphi)S_0(\mu)],$$

$$T_3 = [1 - 4\mu^2 + (\varphi/\pi)\mu^2] \exp[-(4\pi - \varphi)S_0(\mu)].$$

## Ответы и решения

- 1.1. а) нельзя, так как групповая скорость  $d\omega/d\beta$  — величина ограниченная;  
 б) можно, пример — свободное пространство.
- 1.2. Действительное, прямое, размеры предмета и изображения одинаковы (рис. Р.1.1).



**Рис. Р.1.1.** Ход лучей, проходящих через плоскопараллельную пластину с отрицательной дисперсией

- 1.3. а)  $\lambda/\lambda_p = 1/2 \sin(\varphi/2)$ , дисперсия нормальная, положительная (здесь  $\omega_p^2 = 1/LC$ ,  $\lambda_p = 2\pi c/\omega_p$ );  
 б)  $\lambda/\lambda_p = 2 \sin(\varphi/2)$ , дисперсия аномальная, отрицательная.
- 1.4. Кривая дисперсии на графике  $n(\lambda)$  выходит из начала координат (см. рис. 5.2, б) и, следовательно, замедление групповой скорости  $n_g$  равно нулю, чего не может быть. Ошибка обусловлена тем, что цепочка из сосредоточенных индуктивностей и емкостей описывает явления только при достаточно низких частотах, когда их размеры существенно меньше длины волны, в противном случае необходимо учитывать эффекты запаздывания.



**2.1.** Отражение в двух взаимно перпендикулярных плоскостях коммутативно,  $[\sigma]_x[\sigma]_y = [\sigma]_y[\sigma]_x$ . Поворот на  $180^\circ$  вокруг взаимно перпендикулярных осей также коммутативен,  $[C2]_x[C2]_y = [C2]_y[C2]_x$ . Отражение в плоскости коммутирует с поворотом  $C_2$  как для оси, лежащей в плоскости, так и перпендикулярной к ней. Повороты  $CN_z$  и  $SN_z$  ( $N > 2$ ) коммутируют как между собой, так с отражением  $\sigma_x$  и поворотом  $C2_z$ , но не коммутируют с отражениями  $\sigma_x$  и  $\sigma_y$  и поворотами  $C2_x$  и  $C2_y$ . Инверсия  $\epsilon$  коммутирует со всеми точечными операциями симметрии. Трансляция  $d_z$  коммутирует с  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $CN_z$ , но не с  $\epsilon$ ,  $\sigma_z$ ,  $C2_x$ ,  $C2_y$ ,  $SN_z$ .

**2.2.** Докажем сначала (2.6 а). Для этого запишем равенство

$$\text{grad}' = \begin{bmatrix} (\partial/\partial x') \\ (\partial/\partial y') \\ (\partial/\partial z') \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\partial x/\partial x') & (\partial y/\partial x') & (\partial z/\partial x') \\ (\partial x/\partial y') & (\partial y/\partial y') & (\partial z/\partial y') \\ (\partial x/\partial z') & (\partial y/\partial z') & (\partial z/\partial z') \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{bmatrix}. \quad (\text{P.2.1})$$

Второй сомножитель в (P.2.1) представляет оператор градиента, а первый согласно (2.1) — оператор  $\alpha$ . Тем самым доказано, что градиент преобразуется по тому же закону, что радиус-вектор:  $\text{grad}' = [\alpha] \text{grad}$ . Отсюда и из (2.7, а) следует (2.6, а) для поля **Е**. Аналогично доказательство для **А**, **Д**, **Ж**.

Чтобы доказать (2.6, б), проверим справедливость выражения

$$\text{rot}' = \Delta[\alpha] \text{rot}[\alpha]^T, \quad (\text{P.2.2})$$

где символ «т» означает операцию транспонирования, а штрих соответствует новой системе отсчета.

Для доказательства (P.2.2) удобно воспользоваться записью оператора  $\text{rot}$  в матричной форме. При этом равенство (P.2.2) примет вид

$$\begin{bmatrix} 0 & -\partial/\partial z' & \partial/\partial y' \\ \partial/\partial z' & 0 & -\partial/\partial x' \\ -\partial/\partial y' & \partial/\partial x' & 0 \end{bmatrix} = \Delta \begin{bmatrix} \alpha_{xx} & \alpha_{xy} & \alpha_{xz} \\ \alpha_{yx} & \alpha_{yy} & \alpha_{yz} \\ \alpha_{zx} & \alpha_{zy} & \alpha_{zz} \end{bmatrix} \times \\ \times \begin{bmatrix} 0 & -\partial/\partial z & \partial/\partial y \\ \partial/\partial z & 0 & -\partial/\partial x \\ -\partial/\partial y & \partial/\partial x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_{xx} & \alpha_{yx} & \alpha_{zx} \\ \alpha_{xy} & \alpha_{yy} & \alpha_{zy} \\ \alpha_{xz} & \alpha_{yz} & \alpha_{zz} \end{bmatrix}.$$

Раскрывая это выражение и учитывая (P.2.1), убеждаемся в справедливости (P.2.2). Требуя, чтобы уравнения теории поля (2.7) в исходной и штрихованной системах координат имели один и тот же вид, получаем (2.6, б). В частности, (2.6, б) следует из требования  $\mathbf{B}' = \text{rot}' \mathbf{A}'$ .

- 2.3.** а) с магнитной стенкой;  
б) с электрической.

**2.4.** Собственные числа оператора инверсии равны  $\mu = \pm 1$ , а детерминант соответствующей матрицы  $\Delta = -1$ . Поэтому из (2.10) следует, что

$$\pm \mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\mathbf{E}(-\mathbf{r}), \quad (\text{P.2.3, } a)$$

$$\pm \mathbf{H}(\mathbf{r}) = \mathbf{H}(-\mathbf{r}). \quad (\text{P.2.3, } б)$$

В самом центре инверсии при  $\mu = 1$  поле  $\mathbf{E} = 0$ , а при  $\mu = -1$  поле  $\mathbf{H} = 0$ .

**2.5.** Зеркальный поворот задается оператором  $[SN]_z = [\sigma]_z[CN]_z$  ( $N$  — четно). Собственные числа определяются выражением

$$\mu = \exp(-j2\pi q/N), \quad -N/2 < q \leq N/2,$$

где  $q$  — целое число, а детерминант  $\Delta = -1$ .

Как и при наличии оси  $CN$ , связь компонент полей в симметричных точках удобно рассматривать в полярных координатах. Аналогично (2.12) имеем

$$\begin{bmatrix} E_{\rho\theta}(\rho, \theta + 2\pi/N, -z) \\ -E_z(\rho, \theta + 2\pi/N, -z) \\ -H_{\rho\theta}(\rho, \theta + 2\pi/N, -z) \\ H_z(\rho, \theta + 2\pi/N, -z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{\rho\theta}(\rho, \theta, z) \\ E_z(\rho, \theta, z) \\ H_{\rho\theta}(\rho, \theta, z) \\ H_z(\rho, \theta, z) \end{bmatrix} \exp(-j2\pi q/N). \quad (\text{P.2.4, } a)$$

Плотность тока преобразуется так же, как  $\mathbf{E}$ , а потенциал, как компоненты  $E_\rho$  и  $E_\theta$ .

В отличие от (2.12) в формуле (P.2.4, *a*) перед компонентами  $E_z$ ,  $H_\rho$ ,  $H_\theta$  стоят знаки «-». Эти знаки обусловлены отражением  $\sigma_z$  (сравните (P.2.4, *a*) с (2.11, *б*)).

Умножая обе части (P.2.4, *a*) на  $\exp[jq(\theta + 2\pi/N)]$  и учитывая, что  $\exp(j\pi) = -1$ , можно убедиться в справедливости следующих выражений:

$$\begin{bmatrix} E_{\rho\theta} \\ H_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{0\rho\theta} \\ H_{0z} \end{bmatrix} \exp(-jq\theta), \quad \begin{bmatrix} E_z \\ H_{\rho\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{0z} \\ H_{0\rho\theta} \end{bmatrix} \exp[j(N/2 - q)\theta], \quad (\text{P.2.4, } б)$$

аналогичных (2.13, *a*). Здесь все величины  $E_i$  и  $H_i$  являются функциями  $\rho$ ,  $\theta$ ,  $z$ , а функции, снабженные индексом «0», обладают следующим свойством:

$$E_{0i}(\rho, \theta + 2\pi/N, -z) = E_{0i}(\rho, \theta, z),$$

$$H_{0i}(\rho, \theta + 2\pi/N, -z) = H_{0i}(\rho, \theta, z).$$

В частности, эти функции имеют период по  $\theta$ , равный  $4\pi/N$ . Выражение (P.2.4, *б*) характеризует волну, бегущую по зигзагу. Амплитуда этой волны промодулирована с периодом, равным расстоянию между двумя соседними симметричными точками.

Заменяя выражения (P.2.4) комплексно сопряженными, как это сделано для систем с осью  $C_N$ , можно убедиться, что типам волн, отличающимся знаком  $q$ , соответствует одна и та же частота. Это означает, что все решения уравнений Максвелла двукратно вырождены, кроме тех, для которых  $q = 0$  и  $q = N/2$ . При  $q = 0$  фазы колебаний во всех симметричных точках одинаковы, а при  $q = N/2$  они отличаются на  $\pi$ . При этом совпадают фазы симметричных точек с одинаковой координатой  $z$ .

Бегущая волна существует и при  $q = N/4$ , если только величина  $N$  кратна четырем. Это значит, что при сдвиге фаз  $\pi$  между точками, совмещающимися поворотом на  $4\pi/N$ , в системе может бежать волна. В пределе, при  $N \rightarrow \infty$  зеркально-поворотная ось переходит в скользящую плоскость симметрии. Существование бегущей волны при  $q = N/4$  означает в этом случае наличие бегущей волны при сдвиге фаз на периоде, равном  $\pi$ .

Представление поля в виде волны, бегущей по зигзагу, не всегда удобно. В частности, если ЗС используется в электронном приборе с потоком, движущимся в плоскости  $z = \text{const}$ , целесообразно сравнивать поля в точках  $z = \text{const}$ , повернутых друг относительно друга на  $2\pi/N$ , и представлять поле в виде суммы двух бегущих волн,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\rho, \theta, z) &= \mathbf{e}_0(\rho, \theta, z) \exp(-jq\theta) + \mathbf{e}_{-1}(\rho, \theta, z) \exp[j(N/2 - q)\theta], \\ \mathbf{H}(\rho, \theta, z) &= \mathbf{h}_0(\rho, \theta, z) \exp(-jq\theta) + \mathbf{h}_{-1}(\rho, \theta, z) \exp[j(N/2 - q)\theta], \end{aligned} \quad (\text{P.2.5})$$

которые назовем *симметричными составляющими*. Одна из этих составляющих имеет угловую скорость  $\omega/q$ , а другая — скорость  $\omega/(N/2 - q)$ . «Амплитуды» симметричных составляющих  $\mathbf{e}_m$  и  $\mathbf{h}_m$  имеют период  $4\pi/N$  по координате  $\theta$ . В точках  $\mathbf{r}(\rho, \theta, z)$  и  $\mathbf{r}_1(\rho, \theta + 2\pi/N)$  разность фаз одной из симметричных составляющих равна  $\varphi = 2\pi q/N$ , а другой — равна  $\pi - \varphi$ . Их амплитуды выражаются через  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  следующим образом:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{e}_m \\ \mathbf{h}_m \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \exp[j(q + mN/2)\theta] \left( \begin{bmatrix} \mathbf{E}_{(0)} \\ \mathbf{H}_{(0)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{E}_{(1)} \\ \mathbf{H}_{(1)} \end{bmatrix} \exp[j\pi(2q/N + m)] \right), \quad m = 0; -1, \quad (\text{P.2.6})$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{(0)} &= \mathbf{E}(\rho, \theta, z), & \mathbf{E}_{(1)} &= \mathbf{E}(\rho, \theta + 2\pi/N, z), \\ \mathbf{H}_{(0)} &= \mathbf{H}(\rho, \theta, z), & \mathbf{H}_{(1)} &= \mathbf{H}(\rho, \theta + 2\pi/N, z). \end{aligned}$$

В том, что функции  $\mathbf{e}_m$  и  $\mathbf{h}_m$  имеют период  $2\pi/N$  по  $\theta$ , можно убедиться, заменив  $\theta$  в (P.2.6) на  $\theta + 2\pi/N$  и имея в виду, что зеркально-поворотная ось  $SN$  является также и осью  $CN/2$ . Так что согласно (2.12)

$$\begin{bmatrix} -E_z(\rho, \theta + 4\pi/N, z) \\ -H_{\rho\theta}(\rho, \theta + 4\pi/N, z) \end{bmatrix} \exp(j4\pi q/N) = \begin{bmatrix} E_z(\rho, \theta, z) \\ H_{\rho\theta}(\rho, \theta, z) \end{bmatrix}.$$

Амплитуды  $\mathbf{e}_m$  и  $\mathbf{h}_m$  представляют векторные величины. Покажем, что в плоскости симметрии  $z = 0$  им соответствует либо магнитная, либо электрическая стенка. Рассмотрим сначала компоненту  $e_{0\rho}(\rho, \theta, z)$ . Подставляя в (P.2.6) значение (P.2.4) для  $E_\rho(\rho, \theta + 2\pi/N, z)$ , получаем

$$e_{0\rho} = \frac{1}{2} \exp(jq\theta) [E_\rho(\rho, \theta, z) + E_\rho(\rho, \theta, -z)],$$

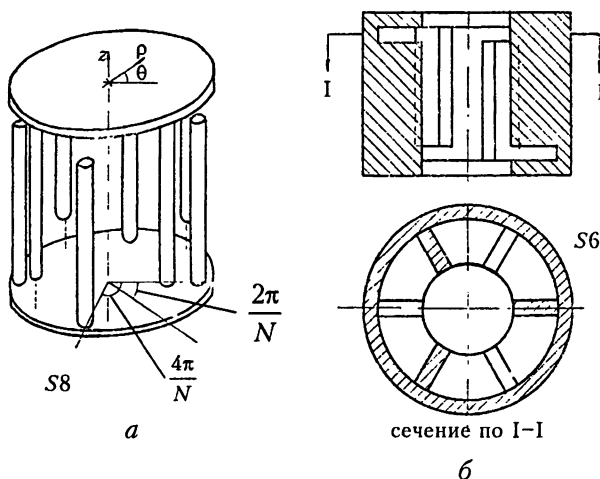
откуда следует, что  $e_{0\rho}$  — четная функция  $z$ . Аналогичным образом устанавливается четность компонент  $e_{0\theta}$ ,  $e_{-1z}$ ,  $h_{-1\rho}$ ,  $h_{-1\theta}$ ,  $h_{0z}$  и нечетность остальных компонент. Этим доказано, что нулевая составляющая ( $m = 0$ ) имеет электрическую стенку в плоскости симметрии, а минус первая ( $m = -1$ ) — магнитную.

Распределение потенциалов и плотности тока в системах с осью  $SN$  также можно представить в виде двух симметричных составляющих:

$$\begin{aligned} U(\rho, \theta, z) &= a_0(\rho, \theta, z) \exp(-jq\theta) + a_{-1}(\rho, \theta, z) \exp[j(N/2 - q)\theta], \\ \mathbf{J}(\rho, \theta, z) &= \mathbf{b}_0(\rho, \theta, z) \exp(-jq\theta) + \mathbf{b}_{-1}(\rho, \theta, z) \exp[j(N/2 - q)\theta]. \end{aligned} \quad (\text{Р.2.7})$$

Компоненты  $a_0$ ,  $b_{0\rho}$ ,  $b_{0\theta}$  и  $b_{-1z}$  — четные функции  $z$ , а остальные компоненты — нечетные, ибо  $U$  преобразуется так же, как  $E_\rho$ , а вектор  $\mathbf{J}$ , как  $\mathbf{E}$ .

Примеры ЗС, содержащих оси  $SN$ , изображены на рис. 2.2 и рис. Р.2.1. Они используются в качестве анодных блоков для магнетронов. Распределение поля и токов в этих резонаторах удовлетворяет соотношениям (Р.2.4) и (Р.2.7). Оно представляется в виде суммы двух симметричных составляющих, одной из которых соответствует сдвиг фаз  $\varphi = 2\pi/N$  между соседними штырями или пластинами и электрическая стенка в плоскости  $z = 0$ , а другой соответствует сдвиг фаз  $(\pi - \varphi)$  и магнитная стенка.



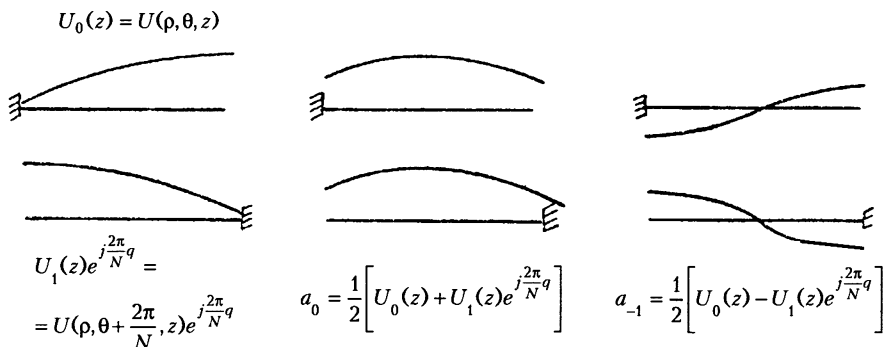
**Рис. Р.2.1.** Анодные блоки магнетронов с зеркально-поворотными осями: (а) — встречные штыри; (б) — волнообразно изогнутый волновод

Существование симметричных составляющих проще всего пояснить на примере ЗС типа «встречные штыри», изображенной на рис. 2.7, а. На рис. Р.2.2 показано распределение потенциалов по координате  $z$  на двух соседних штырях с номерами 0 и 1,

$$U_{(0)}(z) = U(\rho, \theta, z) \quad \text{и} \quad U_{(1)}(z) \exp(j2\pi/N) = U(\rho, \theta + 2\pi/N, z) \exp(j2\pi/N),$$

а также распределение потенциала двух симметричных составляющих. Потенциал одной из них ( $a_0(z)$ ) распределен по закону косинуса относительно центра штыря, а потенциал другой ( $a_{-1}(z)$ ) — по закону синуса. Если угловая скорость электронов в приборе равна  $\omega/q$ , то они взаимодействуют с составляющей, распределенной по закону косинуса; если же эта скорость

равна  $\omega/(N/2 - q)$ , то взаимодействие осуществляется с составляющей, распределенной по закону синуса.



**Рис. Р.2.2.** Представление потенциалов в системе встречных штырей в виде суммы двух симметричных составляющих

**2.6.** а) виды  $q = 0$ ; б) виды  $q = \pm 1$ ; в) любые виды, но из-за отсутствия вырождения лучше использовать виды  $q = 0$  и  $q = N/2$ .

**2.7.** а)  $C1$ ; б)  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ ; в)  $\sigma_x, \sigma_z$ ; г, д, е)  $\sigma_g$  и  $\sigma_z$ ; ж)  $C4, \sigma_x, \sigma_z$ ; з)  $C2$ ; и)  $C2_1$ ; к)  $C3_1$ ; л)  $CN_1$ ; м)  $C\infty_1$ .

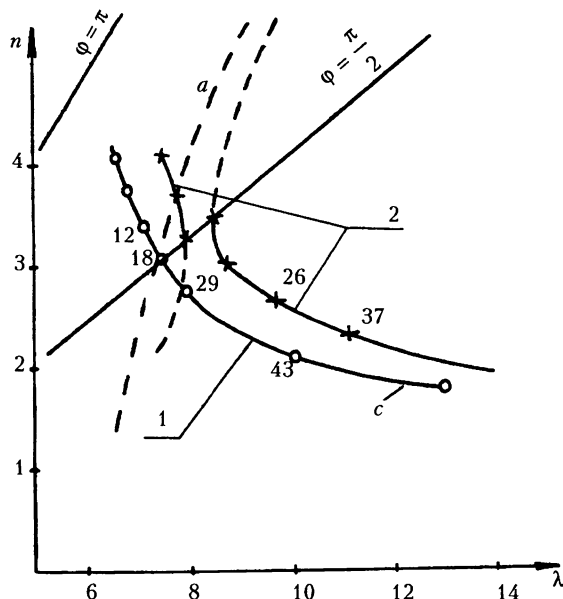
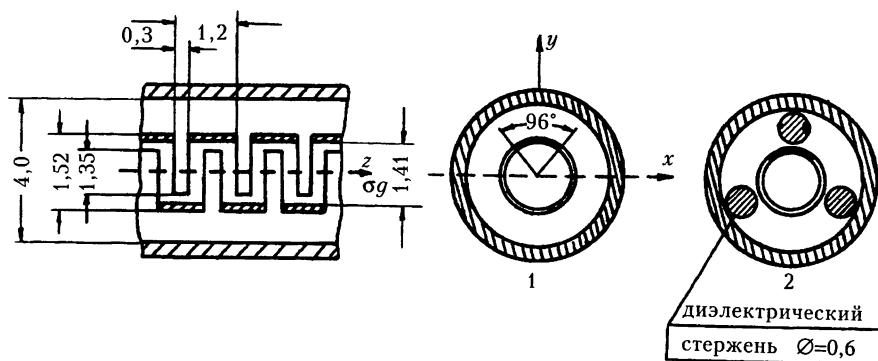
Указаны только основные элементы симметрии. Остальные порождаются перечисленными. Так, например, на пересечении взаимно перпендикулярных плоскостей симметрии всегда существует ось  $C2$ , а пересечение оси  $CN$  при четном  $N$  с перпендикулярной к ней плоскостью симметрии порождает центр инверсии.

**2.8.** Правильное положение опор соответствует рис. 2.12 (справа), поскольку ЗС содержит скользящую плоскость симметрии. На рис. Р.2.3 приведены кривые дисперсии и указаны значения сопротивления связи, измеренные с помощью малого возмущающего тела на макете, ограниченном проводящими стенками в плоскостях симметрии. Цифрой 1 обозначена кривая дисперсии ЗС без опор, а цифрой 2 — ЗС с опорами. Сплошная линия и символ  $s$  (симметрично) соответствует составляющей с магнитной стенкой в плоскости скольжения, а штриховая линия и символ  $a$  (антисимметрично) — составляющей с электрической стенкой. Две точки при  $\varphi = \pi/2$  получены для двух макетов, отличающихся положением ограничивающих плоскостей. Внесение диэлектрических стержней при неправильном их расположении ликвидирует плоскость скольжения и кривая дисперсии разрывается.

**2.9.** См. рис. 2.8, в.

**2.10.** См. гл. 7.

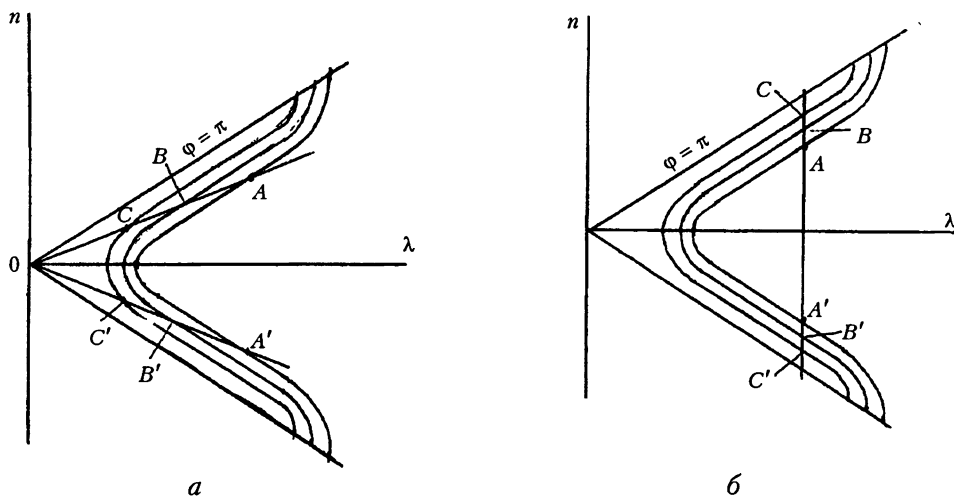
**2.11.** См. гл. 7.



**Рис. Р.2.3.** ЗС типа «кольцо-стержень» и ее дисперсионные кривые, измеренные в отсутствие и при наличии опор

**3.1.** Поле, соответствующее точке  $A$  (рис. Р.3.1), ортогонально по объему ( $a$ ) и по сечению ( $b$ ) полям, соответствующим точкам  $B$ ,  $B'$ ,  $C$ ,  $C'$ . В выражение для нормы входят поля, соответствующие точкам  $A$  ( $\mathbf{E}_s$ ,  $\mathbf{H}_s$ ) и  $B$  ( $\mathbf{E}_{-s}$ ,  $\mathbf{H}_{-s}$ ).

**3.2.** Поток равен нулю, так как значению  $\Gamma_s = \chi_s + j\varphi_s$  соответствует обратная волна  $\Gamma_{-s} = -\Gamma_s$ , для которой  $\Gamma_{-s} = \Gamma_s^*$ .



**Рис. Р.3.1.** Пояснение к условиям ортогональности нормальных волн: (а) — по объему; (б) — по сечению

**3.3.** Пусть, например,  $\Gamma_s = \chi_s$ . Поле в отрезке ЗС представляется суммой падающей и отраженной волн:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_s + \mathbf{E}_{-s}, \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}_s + \mathbf{H}_{-s}.$$

При этом выражение для потока вектора Умова–Пойнтинга

$$P = \frac{1}{2} \int_{\Sigma} ([\mathbf{E}^*, \mathbf{H}] + [\mathbf{E}, \mathbf{H}^*]) ds$$

содержит слагаемые, для которых он отличен от нуля.

**4.1.** Пусть в общем случае относительные проницаемости среды  $\epsilon$  и  $\mu$  отличны от единицы. Используем цилиндрическую систему координат  $r, \theta, z$ , в которой векторное равенство  $\mathbf{U} = \text{rot } \mathbf{V}$  имеет вид

$$U_r = \frac{1}{r} \frac{\partial V_z}{\partial \theta} - \frac{\partial V_\theta}{\partial z}, \quad U_\theta = \frac{\partial V_r}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial r},$$

$$U_z = \frac{\partial V_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r} V_\theta - \frac{\partial V_r}{\partial \theta}.$$

Учитываем, что поля пространственных гармоник удовлетворяют уравнениям Максвелла

$$\text{rot } \mathbf{h}_m = j(\epsilon k / \rho) \mathbf{e}_m, \quad \text{rot } \mathbf{e}_m = -j\mu k \rho \mathbf{h}_m,$$

$$\rho = (\mu_0 / \epsilon_0)^{1/2}, \quad k = \omega(\mu_0 \epsilon_0)^{1/2}.$$

Зависимость от координат  $\theta$  и  $z$  ищем в виде  $\exp[j(q\theta - \beta_m z)]$ . Вводим обозначение  $\gamma_m^2 = \beta_m^2 - k^2 \epsilon \mu$ . Находим, что  $\theta$ - и  $r$ -компоненты поля выражаются через  $z$ -компоненты равенствами

$$\begin{bmatrix} e_{mr} \\ h_{mr} \end{bmatrix} = \frac{1}{\gamma_m^2 r} \begin{bmatrix} j\beta_m r(\partial/\partial r) & -\mu\rho kq \\ \epsilon kq/\rho & j\beta_m r(\partial/\partial r) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{mz} \\ h_{mz} \end{bmatrix}, \quad (\text{Р.4.1})$$

$$\begin{bmatrix} e_{m\theta} \\ h_{m\theta} \end{bmatrix} = \frac{1}{\gamma_m^2 r} \begin{bmatrix} -\beta_m q & -j\mu\rho kr(\partial/\partial r) \\ j(\epsilon kr/\rho)(\partial/\partial r) & -\beta_m q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{mz} \\ h_{mz} \end{bmatrix}.$$

Компоненты поля  $e_{mz}$  и  $h_{mz}$  удовлетворяют уравнению Бесселя и выражаются равенствами

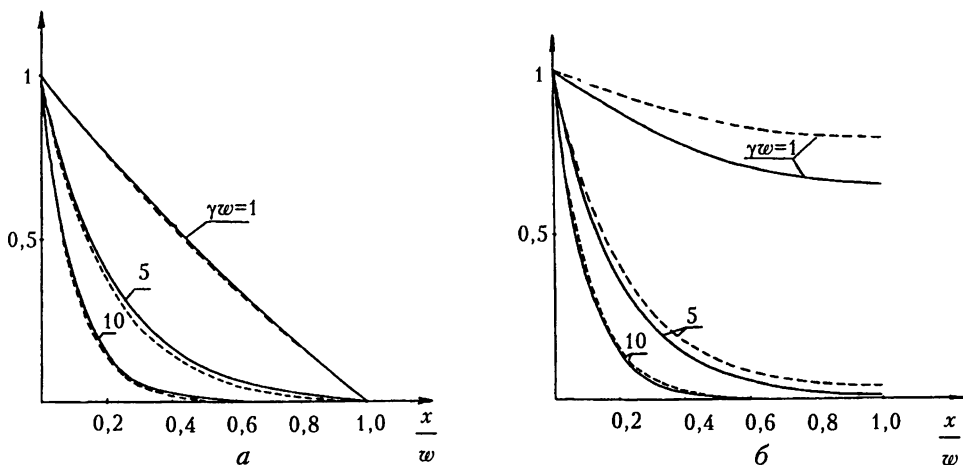
$$\begin{aligned} e_{mz} &= A_e Z_1(r) + B_e Z_2(r), \\ h_{mz} &= A_h Z_1(r) + B_h Z_2(r), \end{aligned} \quad (\text{Р.4.2})$$

где  $Z_1$  и  $Z_2$  — любая пара совместно используемых функций Бесселя ( $J_q(|\gamma_m| r)$  и  $N_q(|\gamma_m| r)$ , либо  $I_q(\gamma_m r)$  и  $K_q(\gamma_m r)$ ). Пара  $J_q$  и  $N_q$  описывает решение для быстрых волн ( $\gamma_m^2 < 0$ ), а  $I_q$  и  $K_q$  — для медленных ( $\gamma_m^2 > 0$ ).

**4.2.** Нельзя, так как лишь совокупность пространственных гармоник с вполне определенным соотношением амплитуд удовлетворяет периодическим граничным условиям.

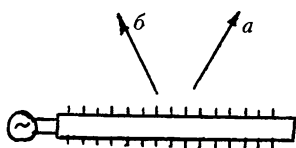
**4.3.** Зависимости приведены на рис.Р.4.1.

**4.4.** Неверно, так как в системах, однородных по  $y$ , для нормальных волн либо  $E_y = 0$ , либо  $H_y = 0$ . При этом для  $\beta_y \neq 0$  величина  $H_z \neq 0$ .



**Рис. Р.4.1.** Сравнение распределения поля по гиперболическим функциям (сплошные линии: (а) синус, (б) косинус) и по Бесселевой функции (штриховые линии)





**Рис. Р.5.1.** Направления излучения волн из решеток с положительной (*a*) и с отрицательной (*б*) дисперсией

**5.1.** а) 1; б) 1; в) 2; г) 0; д) 1; е) 3; ж) 0.

**5.2.** Направления излучений см. на рис. Р.5.1.

**5.3.** Поле зависит от координат  $x$  и  $z$  как  $e^{(-h_x x - h_z z)}$ , причем  $h_x^2 + h_z^2 = -k^2$ , где  $k$  — волновое число свободного пространства. Вдоль оси  $z$  поле распространяется со скоростью  $v = \omega/\beta$ , затухая как  $e^{(-\alpha x)}$ . При этом величины  $h_x = \alpha_x + j\beta_x$  и  $h_z = \alpha + j\beta$  должны быть комплексными, причем

$$(\alpha_x + j\beta_x)^2 + (\alpha + j\beta)^2 = -k^2,$$

или

$$\alpha_x^2 + \alpha^2 - \beta_x^2 - \beta^2 = -k^2, \quad \alpha_x \beta_x + \alpha \beta = 0.$$

Величина  $\beta_x > 0$ , поскольку полагаем, что волна бежит от решетки;  $\beta > 0$ , так как дисперсия положительная;  $\alpha > 0$ , так как волна затухает в направлении распространения. Отсюда следует, что  $\alpha_x < 0$ , т.е. поле нарастает по экспоненте по мере удаления от решетки.

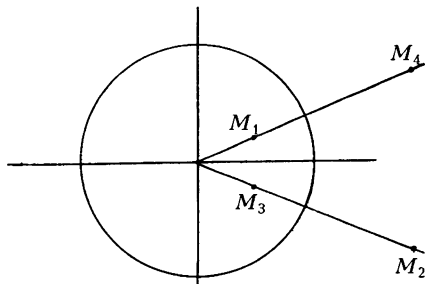
Последнее соотношение означает еще, что векторы  $\{\alpha_x, \alpha\}$  и  $\{\beta_x, \beta\}$  взаимно ортогональны, т.е. в пространстве направления распространения и затухания взаимно перпендикулярны.

**5.4.** См. рис. Р.5.2, а.

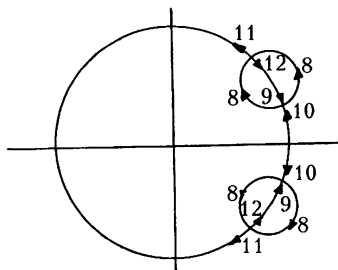
**5.5.** См. рис. Р.5.2, б.

**5.6.** а) — см. рис. Р.5.3, а; б) — см. рис. Р.5.3, б; в) — см. рис. Р.5.2, б.

**5.7.** Систему, изображенную рис. 5.8, а, так как она содержит меньшее количество проводников, изолированных друг от друга, и в ней возможно существование меньшего количества нормальных волн при достаточно низких частотах.

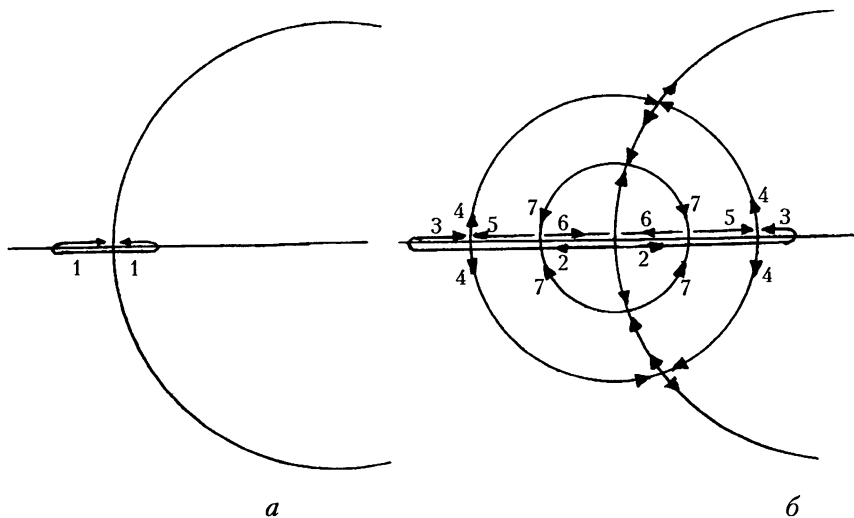


а



б

**Рис. Р.5.2.** Траектории точек на плоскости волновых множителей, соответствующие: (а) — упражнению 5.4; (б) — упражнениям 5.5 и 5.6, в



**Рис. Р.5.3.** Траектории волновых множителей, соответствующие: (а) — упражнению 5.6, а; (б) — упражнению 5.6, б

**6.1.** Система на рис. 6.1, е представляет замкнутый волновод. Поэтому волны могут распространяться лишь при  $\lambda$ , не превышающих длину волны отсечки.

**6.2.** В случае четырех опор ЗС имеет ось  $C4_1$ , так что должен быть разрыв дисперсионной характеристики при  $\varphi = 4\pi$ . В случае трех опор ( $C3_1$ ) должен быть разрыв при  $\varphi = 3\pi$ .

**6.3.** Уравнение дисперсии спирально проводящего цилиндра получается в результате удовлетворения граничным условиям на поверхности  $r = a$ . Эти условия следующие.

1. Тангенциальные компоненты электрического поля в обеих областях (внутренней «в» и наружной «н») одинаковы:  $E_z^{(в)} = E_z^{(н)}$ ,  $E_\theta^{(в)} = E_\theta^{(н)}$ , или

$$A_e/B_e = K_0(\gamma a)/I_0(\gamma a) = M_0(\gamma a), \quad (\text{Р.6.1})$$

$$A_h/B_h = -K_1(\gamma a)/I_1(\gamma a) = -M_1(\gamma a), \quad (\text{Р.6.2})$$

2. Составляющая электрического поля, параллельная направлению проводимости, равна 0, так как проводимость металла полагаем идеальной,

$$E_z^{(н)} \sin \psi + E_\theta^{(н)} \cos \psi \Big|_{r=a} = 0,$$

или, что то же,

$$jk\rho K_1(\gamma a) \operatorname{ctg} \psi B_h - \gamma K_0(\gamma a) B_e = 0. \quad (\text{Р.6.3})$$

Это условие достаточно записать лишь для одной из областей («в» или «н»), так как для другой оно следует из (Р.6.1), (Р.6.2) и (Р.6.3).

3. По спирально проводящему цилиндру ток протекает только в направлении витков. Это значит, что составляющая магнитного поля, параллельная виткам, должна быть непрерывна при  $r = a$ :

$$\left(H_z^{(n)} - H_z^{(s)}\right) \sin \psi + \left(H_\theta^{(n)} - H_\theta^{(s)}\right) \cos \psi \Big|_{r=a} = 0. \quad (\text{P.6.4})$$

Последнее равенство в сочетании с (P.6.1) и (P.6.2) приводит к уравнению

$$-\gamma \rho I_0(\gamma a) B_h + j k I_1(\gamma a) \operatorname{ctg} \psi B_e = 0. \quad (\text{P.6.5})$$

Уравнения (P.6.3) и (P.6.5) представляют однородную систему двух линейных алгебраических уравнений с двумя неизвестными. Она имеет отличное от нуля решение, если ее определитель равен нулю. В результате получаем уравнение дисперсии

$$(ka \operatorname{ctg} \psi)^2 = (\gamma a)^2 N(\gamma a), \quad (\text{P.6.6})$$

связывающее величины  $ka$  и  $\gamma a$ . Значения  $B_e$  и  $B_h$  находятся с точностью до постоянного множителя. Если спираль находится в среде с относительными проницаемостями  $\epsilon$  и  $\mu$ , то уравнение (P.6.6) сохраняет вид, если в нем величину  $k$  заменить на  $k(\epsilon\mu)^{1/2}$ .

Учитывая соотношения (P.6.5), (P.6.6) и

$$(\beta a)^2 = (\gamma a)^2 + (ka)^2, \quad (\text{P.6.7})$$

можно записать уравнение дисперсии в виде

$$ka = \gamma a \operatorname{tg} \psi [N(\gamma a)]^{1/2},$$

или

$$n = c/v = \beta a/ka = \{1 + [\operatorname{ctg}^2 \psi / N(\gamma a)]\}^{1/2}. \quad (\text{P.6.8})$$

Можно показать, что  $N(\gamma a) \rightarrow 1$  при  $\gamma a \rightarrow \infty$  и  $N(\gamma a) \rightarrow \infty$  при  $\gamma a \rightarrow 0$ . Практически при  $\gamma a > 3$  величина  $N(\gamma a)$  мало отличается от единицы. Отсюда следует, что при высоких частотах (больших  $ka$ ) коэффициент замедления близок к геометрическому ( $n = 1/\sin \psi$ ), а при низких он близок к единице.

**6.4.** Скорость затухания растет с  $g$ , ибо поле описывается функциями  $I_0(\gamma a)$ ,  $I_1(\gamma a)$ ,  $K_0(\gamma a)$ ,  $K_1(\gamma a)$ . Коэффициент замедления связан с  $\gamma$  соотношением

$$\gamma = k(n^2 - 1)^{1/2}.$$

Отсюда следует, что скорость затухания растет с замедлением.

**6.5.** Повторяя рассуждения из упражнения 6.3, получим уравнение дисперсии в следующей форме:

$$\begin{aligned} (ka \operatorname{ctg} \psi)^2 = \\ = (\gamma a)^2 N(\gamma a) + (j - 1) \left( R_{\phi} / \rho \right) (\operatorname{tg} \psi + \operatorname{ctg} \psi) [ka \operatorname{ctg} \psi / I_1(\gamma a) K_1(\gamma a)]. \end{aligned} \quad (\text{P.6.9})$$

Вследствие потерь радиальное волновое число  $\gamma$  стало комплексным. Полагая потери малыми, записываем

$$\gamma = \gamma_0 + \Delta\gamma \equiv \beta_0 + \Delta\beta - j\alpha. \quad (\text{Р.6.10})$$

Здесь использован факт, что поперечное волновое число  $\gamma_0$  примерно равно продольному  $\beta_0$ , справедливый при замедлениях  $n > 3$ . Величина  $\Delta\beta$  представляет вещественную поправку к волновому числу, а  $\alpha$  — коэффициент затухания.

Для решения (Р.6.9) введем обозначения

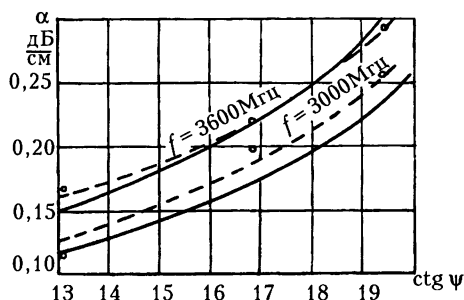
$$T_1 = (ka \operatorname{ctg} \psi)^2 - (\gamma a)^2 N(\gamma a),$$

$$T_2 = ka \operatorname{ctg} \psi / I_1(\gamma a) K_1(\gamma a),$$

$$Y = (R_{\text{эф}}/\rho)(\operatorname{tg} \psi + \operatorname{ctg} \psi).$$

В новых обозначениях уравнение дисперсии принимает вид

$$T_1 = Y(j-1)T_2. \quad (\text{Р.6.11})$$



**Рис. Р.6.1.** Сравнение результатов расчета и измерений коэффициента затухания спирали при  $a=1,31$  мм,  $\delta=0,18$  мм

Разложим  $T_1$  и  $T_2$  в ряд по степеням  $\Delta\gamma a$  в окрестности  $\gamma_0 a$ , ограничиваясь первыми членами разложения. Получим уравнение дисперсии в виде

$$T_1 + \Delta\gamma a T_1' \equiv Y(j-1)(T_2 + \Delta\gamma a T_2').$$

Штрих означает производную по  $\gamma a$ , а аргументы функций  $T_1$ ,  $T_2$ ,  $T_1'$  и  $T_2'$  берутся равными  $\gamma_0 a$ , так что  $T_1(\gamma_0 a) = 0$ . Получим

$$\Delta\gamma a = -(1-j)YT_2[T_1' + (1-j)YT_2']^{-1}. \quad (\text{Р.6.12, а})$$

Разделяя действительную и мнимую части  $\gamma a$ , находим поправку к волновому числу

$$\Delta\beta a = [YT_2(T_1' + 2YT_2')][T_1' + 2YT_2')^2 + (YT_2')^2]^{-1} \quad (\text{У.6.12, б})$$

и величину коэффициента затухания

$$\alpha a = YT_2 T_1' [T_1' + YT_2')^2 + (YT_2')^2]^{-1}. \quad (\text{Р.6.12, в})$$

На рис. Р.6.1 дано сравнение результатов измерения затухания, заимствованных из [9], и расчета по формуле (Р.6.12, в). Расхождение не превышает 25%.

## 7.1. Введем обозначения

$$L_i = kl_i(\eta), \quad i = 0, 1, 2, 3, 6;$$

$$A = (m/kr)\cos\psi - (\beta_m/k)\sin\psi; \quad B = (\beta_m/k)\cos\psi + (m/kr)\sin\psi; \quad (\text{P.7.1})$$

$$\partial/\partial s = jkB; \quad \partial/\partial\tau = jkA \quad (\text{см. п. 6.8});$$

$$R = 1 + L_1 L_6 (1 - A^2); \quad \Phi = L_3 - L_2 B^2; \quad \hat{E} = j\rho^{-1}E.$$

При этом граничные условия (7.28)–(7.30) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \hat{E}_s^{(h)} + \hat{E}_s^{(b)} &= L_0 \left[ -\left(H_\tau^{(h)} - H_\tau^{(b)}\right) + jA\left(\hat{E}_r^{(h)} - \hat{E}_r^{(b)}\right) \right], \\ \hat{E}_s^{(h)} - \hat{E}_s^{(b)} &= L_2 \left[ \left(H_\tau^{(h)} - H_\tau^{(b)}\right) - jA\left(\hat{E}_r^{(h)} + \hat{E}_r^{(b)}\right) \right], \\ \hat{E}_\tau^{(h)} - \hat{E}_\tau^{(b)} &= -L_3 \left( H_s^{(h)} + H_s^{(b)} \right) - jL_2 B \left( \hat{E}_r^{(h)} + \hat{E}_r^{(b)} \right), \\ R\left(H_s^{(h)} - H_s^{(b)}\right) &= L_1 \left[ -\left(\hat{E}_\tau^{(h)} + \hat{E}_\tau^{(b)}\right) + jA\left(H_r^{(h)} + H_r^{(b)}\right) \right]. \end{aligned}$$

Исключим радиальные составляющие поля с помощью уравнений Максвелла

$$\partial H_s / \partial\tau - \partial H_\tau / \partial s = jk\rho^{-1}E_r,$$

$$\partial E_s / \partial\tau - \partial E_\tau / \partial s = -jk\rho H_r,$$

которые в принятых выше обозначениях имеют вид

$$jBH_s - jAH_\tau = \hat{E}_r;$$

$$jBE_s - jAE_\tau = H_r,$$

так что граничные условия можно записать в виде

$$\begin{aligned} \hat{E}_s^{(h)} + \hat{E}_s^{(b)} &= -L_0 \left[ AB\left(H_s^{(h)} - H_s^{(b)}\right) + \left(1 - A^2\right)\left(H_\tau^{(h)} - H_\tau^{(b)}\right) \right], \\ \hat{E}_s^{(h)} - \hat{E}_s^{(b)} &= L_2 \left[ AB\left(H_s^{(h)} + H_s^{(b)}\right) + \left(1 - A^2\right)\left(H_\tau^{(h)} + H_\tau^{(b)}\right) \right], \\ \hat{E}_\tau^{(h)} - \hat{E}_\tau^{(b)} &= -\Phi\left(H_s^{(h)} + H_s^{(b)}\right) - L_2 AB\left(H_\tau^{(h)} + H_\tau^{(b)}\right), \\ R\left(H_s^{(h)} - H_s^{(b)}\right) &= -L_1 AB\left(\hat{E}_s^{(h)} + \hat{E}_s^{(b)}\right) - L_1 \left(1 - A^2\right)\left(\hat{E}_\tau^{(h)} + \hat{E}_\tau^{(b)}\right). \end{aligned}$$

Эти условия удобно записать в матричной форме:

$$[T] \begin{bmatrix} \hat{E}_s^{(H)} \\ \hat{E}_\tau^{(H)} \\ -H_\tau^{(H)} \\ H_s^{(H)} \end{bmatrix} = [F] \begin{bmatrix} \hat{E}_s^{(B)} \\ \hat{E}_\tau^{(B)} \\ -H_\tau^{(B)} \\ H_s^{(B)} \end{bmatrix}, \quad \text{или} \quad \begin{bmatrix} \hat{E}_s^{(H)} \\ \hat{E}_\tau^{(H)} \\ -H_\tau^{(H)} \\ H_s^{(H)} \end{bmatrix} = [F]^{-1} [T] \begin{bmatrix} \hat{E}_s^{(B)} \\ \hat{E}_\tau^{(B)} \\ -H_\tau^{(B)} \\ H_s^{(B)} \end{bmatrix}, \quad (\text{P.7.2})$$

где

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -e & c \\ 1 & 0 & f & -d \\ -a & -b & 0 & -R \\ 0 & 1 & -d & \Phi \end{bmatrix}, \quad [F] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -e & c \\ 1 & 0 & -f & d \\ a & b & 0 & -R \\ 0 & 1 & d & -\Phi \end{bmatrix}, \quad (\text{P.7.3})$$

$$[F]^{-1} [T] =$$

$$\frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} (f-e)(D+R) & 0 & -2ef(D+R) & 2de(D+R) \\ 2(cD-dR) & (e+f)(D-R) & 2de(D+R) & 2d(dR-cD)-2(e+f)\Phi R \\ 2(R-ac-b\Phi) & -2a(e+f) & (f-e)(D+R) & 2(cD-dR) \\ -2a(e+f) & -2b(e+f) & 0 & (e+f)(D-R) \end{bmatrix},$$

где  $D = ad - b\Phi$ ,  $\Delta = -(e+f)(D+R)$ ,  $a = L_1 AB$ ,  $b = L_1(1-A^2)$ ,  $c = L_0 AB$ ,  $d = L_2 AB$ ,  $e = L_0(1-A^2)$ ,  $f = L_2(1-A^2)$ .

Перейдем к системе координат  $(z, \theta)$ , связанной со спиралью, с помощью преобразования из п. 6.8:

$$\begin{bmatrix} E_s \\ E_\tau \\ -H_\tau \\ H_s \end{bmatrix} = [S] \begin{bmatrix} E_z \\ E_\tau \\ -H_\tau \\ H_z \end{bmatrix}, \quad \text{где} \quad [S] = \begin{bmatrix} \sin \psi & \cos \psi & 0 & 0 \\ -\cos \psi & \sin \psi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sin \psi & \cos \psi \\ 0 & 0 & -\cos \psi & \sin \psi \end{bmatrix}. \quad (\text{P.7.4})$$

Получаем

$$\begin{bmatrix} \hat{E}_s^{(H)} \\ \hat{E}_\tau^{(H)} \\ -H_\tau^{(H)} \\ H_s^{(H)} \end{bmatrix} = [S] [F]^{-1} [T] [S] \begin{bmatrix} \hat{E}_z^{(B)} \\ \hat{E}_\theta^{(B)} \\ -H_\theta^{(B)} \\ H_z^{(B)} \end{bmatrix},$$

где символ «Т» над матрицей  $[S]$  означает операцию транспонирования. Выражение  $[S]^T [F]^{-1} [T] [S]$  представляет матрицу передачи, связывающую

$z$ - и  $\theta$ -компоненты электрического и магнитного поля внутри («в») и снаружи («н») спирали. Соотношением (7.3) матрица передачи определена для случая, когда связаны между собой  $z$ -компоненты поля и их производные по радиусу. Для перехода к этим переменным воспользуемся соотношениями (Р.4.1).

Полагая, что  $\varepsilon = \mu = 1$ , получаем

$$\begin{bmatrix} \hat{E}_z \\ \hat{E}_\theta \\ -H_\theta \\ H_z \end{bmatrix} = [Q] \begin{bmatrix} \hat{E}_z \\ jH_z \\ (r/\gamma_m^2)(\partial \hat{E}_z / \partial r) \\ j(r/\gamma_m^2)(\partial H_z / \partial r) \end{bmatrix}, \quad (\text{Р.7.5})$$

где

$$[Q] = \frac{j}{\rho \gamma_m^2 r} \begin{bmatrix} \gamma_m^2 r & 0 & 0 & 0 \\ -m\beta_m & 0 & 0 & -\rho \gamma_m^2 k \\ 0 & -\rho m\beta_m & -\gamma_m^2 k & 0 \\ 0 & -\rho \gamma_m^2 r & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Таким образом, радиальная матрица передачи спирали имеет вид

$$[A_{\text{сп}}] = [Q]^{-1}[S]^T[F]^{-1}[T][S][Q], \quad (\text{Р.7.6})$$

матрицы  $[Q]$ ,  $[S]$ ,  $[T]$ ,  $[F]$  определяются равенствами (Р.7.3)–(Р.7.5). Расчеты на основе матрицы  $[A_{\text{сп}}]$  возможны только с помощью ЭВМ.

Если спираль навита из ленточного проводника, то из всех коэффициентов  $l_i(\eta)$  отличны от нуля лишь  $l_0(\eta)$  и  $l_1(\eta)$ . При этом  $f = d = \Phi = 0$ ,  $R = 1$  и матрица  $[F]^{-1}[T]$  принимает вид

$$[F]^{-1}[T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2(1-ac)/e & 2a & 1 & 0 \\ 2a & 2b & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (\text{Р.7.7})$$

7.2. Воспользовавшись (Р.4.1),

$$\begin{bmatrix} E_\theta(r) \\ H_\theta(r) \end{bmatrix} = \frac{1}{\gamma^2 r} \begin{bmatrix} -m\beta & -j\mu\rho kr(\partial/\partial r) \\ j(\varepsilon kr/\rho)(\partial/\partial r) & -m\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_z(r) \\ H_z(r) \end{bmatrix}, \quad (\text{Р.7.8})$$

исключим  $E_\theta(r)$  и  $H_\theta(r)$  из (7.32). Получим

$$\begin{bmatrix} \frac{\varepsilon r}{\gamma^2} \frac{\partial E_z}{\partial r} \\ j \frac{\mu r}{\gamma^2} \frac{\partial H_z}{\partial r} \end{bmatrix} = \frac{r}{k} \frac{1}{X_{11}} \begin{bmatrix} \gamma & -\rho \left( X_{12} + X_{11} \frac{m\beta}{r\gamma^2} \right) \\ -\frac{1}{\rho} \left( X_{12} + X_{11} \frac{m\beta}{r\gamma^2} \right) & -\frac{1}{\rho} (X_{11}X_{22} - X_{12}^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_z \\ jH_z \end{bmatrix},$$

так что для импедансной границы вектор  $\mathbf{U}_n(r)$  имеет вид

$$\mathbf{U}(r) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{r\rho}{kX_{11}} & \frac{r\rho}{kX_{11}} \left( X_{12} + X_{11} \frac{m\beta}{r\gamma^2} \right) \\ \frac{r}{k\rho X_{11}} \left( X_{12} + X_{11} \frac{m\beta}{r\gamma^2} \right) & \frac{r}{k\rho X_{12}} (X_{11}X_{12} - X_{12}^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_z(r) \\ jH_z(r) \end{bmatrix}. \quad (\text{P.7.9})$$

**7.3.** Поскольку ребра расположены достаточно близко друг от друга, можно приближенно полагать, что между ними  $E_z = 0$ , а компоненты поля  $E_\theta$  и  $H_z$  не зависят от азимутальной координаты  $\theta$ . В матрице (7.32) коэффициент  $X_{12} = 0$ , поскольку типы волн с  $E_z = H_\theta = 0$  и  $E_\theta = H_z = 0$  не связаны между собой ( $E$ - и  $H$ -волны в ребристом волноводе). Коэффициент  $X_{11} = 0$ , поскольку  $E_z = 0$ , тогда как  $H_\theta \neq 0$ . Так что в матрице из соотношения (7.32) отличен от нуля только коэффициент  $X_{22}$ :

$$E_\theta(r) = jX_{22}H_z(r).$$

В случае, когда границы ребер идут вдоль радиуса, поле между ребрами такое же, как в волне  $H_{0m}$  в круглом волноводе. Для него

$$E_\theta(r) = j\rho(k/\chi) [J_1(\chi_m r)/J_0(\chi_m r)] H_z(r),$$

где  $\chi_m$  —  $m$ -й корень уравнения  $J_0(\chi R) = 0$ , а  $R$  — радиус волновода. Импеданс определяем для  $r = R - h$ , так что

$$X_{22} = \rho(k/\chi_m) J_1[\chi_m(R-h)]/J_0[\chi_m(R-h)]. \quad (\text{P.7.10})$$

В случае, когда границы соседних ребер параллельны, величина  $X_{22}$  определяется соотношением

$$X_{22} = \rho \operatorname{tg}[(k^2 - \beta^2)^{1/2} h]. \quad (\text{P.7.11})$$

Воспользоваться соотношением (P.7.9) не удастся, так как соответствующая матрица содержит неопределенность типа  $0/0$ . Поэтому воспользуемся (7.32) и (P.7.9). Выразив  $(j\mu r/\gamma^2)(\partial H_z/\partial r)$  через  $jH_z$ , находим вектор  $\mathbf{U}_n$ :

$$\mathbf{U}_n = \begin{bmatrix} 0 \\ jH_z \\ (\epsilon r/\gamma^2)(\partial E_z/\partial r) \\ j(rX_{22}/k\rho)H_z \end{bmatrix}. \quad (\text{P.7.12})$$

**7.4.** По радиусу спираль разбивается на шесть областей:

1. Область внутри спирали отображается вектором  $\mathbf{U}_0(a)$ , имеющим вид (7.9), в котором  $\epsilon = \mu = 1$  и согласно (7.2)  $\gamma = (\beta^2 - k^2)^{1/2}$ .



2. *Витки спирали* отображаются матрицей передачи  $[A_{\text{сп}}(a)]$ , учитывающей усредненные граничные условия. Ее можно записать либо в упрощенном виде (7.12), либо более строго (Р.7.6). Коэффициенты  $l_i(\eta)$ , входящие в матрицу  $[A_{\text{сп}}(a)]$ , см. в приложении 3.

3. *Граница свободного пространства и диэлектрика* в соответствии с (7.6) отображается матрицей  $[A_r]$ , поскольку диэлектрические штабики заменяются диэлектрической трубкой с эффективной диэлектрической проницаемостью  $\epsilon_{\text{эф}}$ , вычисляемой по формуле (7.22). Поскольку рассматриваем симметричную волну ( $m=0$ ), матрица  $[A_r]$  — единичная.

4. *Слой диэлектрика* с проницаемостью  $\epsilon_{\text{эф}}$  согласно (7.6) отображается матрицей  $[A(a, R-h)]$ , в которой  $\epsilon = \epsilon_{\text{эф}}$ ,  $\mu = 1$ ,  $\gamma = (\beta^2 - \epsilon_{\text{эф}} k^2)^{1/2}$ . Если штабики неоднородны по радиусу, то их можно заменить несколькими диэлектрическими трубками с различными  $\epsilon_{\text{эф}}$ . В данном примере рассматриваем лишь одну трубку.

5. *Граница диэлектрика и свободного пространства* в рассматриваемом примере отображается единичной матрицей.

6. *Торцы ребер* отображаются матрицей  $[A_r]$ , соответствующей усредненным граничным условиям решетки из ленточных проводников, т.е. матрицей (Р.7.6), в которой  $\psi = \pi/2$ ,  $\eta = 0$ , а коэффициенты  $l_1(0)$  и  $l_2(0)$  приведены в приложении 3.

Матрица  $[A_{\text{сп}}(a, R-h)]$ , учитывающая усредненные граничные условия, обладает свойством, которое состоит в следующем. При возведении ее в квадрат недиагональные элементы матрицы  $[F]^{-1}[T]$  удваиваются. Поскольку торцы ребер представляют как бы одну сторону (т.е. половину) ленточной спирали, в матрице (7.8) следует разделить пополам недиагональные элементы, так что соответствующая матрица для торцов ребер имеет вид

$$[F]^{-1}[T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -(1-ac/e) & a & 1 & 0 \\ a & b & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

При  $\phi = \pi/2$  матрица  $[S]$  — единичная, так что в результате получаем

$$[A_r] = [Q]^{-1}[F]^{-1}[T][Q],$$

или с учетом того, что в (У.7.5)  $m=0$ ,

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2a/\rho & 1 & 0 & -2bk/r \\ 2(r/k)(1-ac)/e & 0 & 1 & -2ap \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (\text{Р.7.13})$$

где  $r = R - h$ .

7. *Анизотропно проводящий экран* отображается вектором  $\mathbf{U}_n(R-h)$ , полученным для импедансных граничных условий (Р.7.12), в котором величина  $X_{22}$  определяется одним из двух равенств (Р.7.10) или (Р.7.11) в за-

висимости от формы ребер экрана. Таким образом, можно записать равенство

$$U_0(a) = [A_{\text{сп}}(a)][A(a, R-h)][A_{\text{т}}]U_{\text{и}}(R-h).$$

По существу это система из четырех линейных алгебраических уравнений с четырьмя неизвестными. Приравнявая нулю детерминант матрицы из ее коэффициентов, получим дисперсионное уравнение спиральной ЗС с продольными ребрами в экране.

**9.1.** Диафрагмированный волновод (рис. 9.1, *в*), как и системы, изображенные на рис. 9.1, *г*, *д*, имеет ось симметрии  $C_{\infty}$ . Поле в нем согласно (2.13, *а*) можно представить в виде

$$\begin{bmatrix} \mathbf{E}(\rho, \theta, z) \\ \mathbf{H}(\rho, \theta, z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{E}(\rho, z) \\ \mathbf{H}(\rho, z) \end{bmatrix} \exp(-jq\theta), \quad (\text{Р.9.1})$$

где  $q$  — целое число, указывающее количество вариаций поля по азимуту. Каждому  $q$  соответствует свой набор нормальных волн в системе. При  $q=0$  (симметричные волны) на оси  $z$  может отличаться от нуля только одна компонента поля:  $E_z$  либо  $H_z$  (см. п. 2.5). При  $q=\pm 1$  отличны от нуля  $E_{\rho}$  и  $H_{\rho}$ . При  $|q|>1$  все компоненты поля на оси  $z$  равны нулю. При  $q \neq 0$  все типы волн в диафрагмированном волноводе двукратно вырождены.

Поля, соответствующие различным  $q$ , взаимно ортогональны, так как

$$\int_0^{2\pi} \exp[-j\theta(q-q')] d\theta = 0, \quad q \neq q'.$$

Поэтому соответствующие типы волн не влияют друг на друга. Пересечение соответствующих кривых дисперсии не приводит к их разрыву. Для волн с одинаковыми  $q$  такого утверждения сделать нельзя.

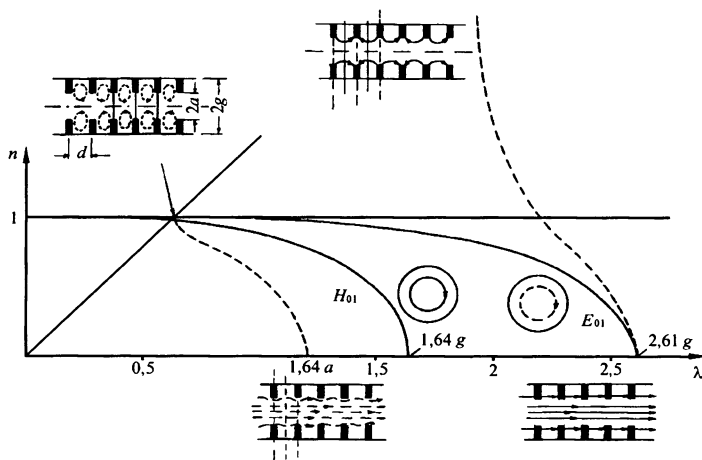
Можно показать [11], что симметричные волны ( $q=0$ ) могут быть либо электрическими ( $H=H_{\theta}$ ,  $E_{\theta}=0$ ), либо магнитными ( $H_{\theta}=0$ ,  $E=E_{\theta}$ ), и что их дисперсия положительная. Несимметричные волны содержат все компоненты поля.

Рассмотрим сначала динамику изменения дисперсионных характеристик симметричных типов волн по мере уменьшения радиуса  $a$  отверстий в диафрагмах от  $a=g$ . Толщину диафрагм ( $d-l$ ) полагаем бесконечно малой.

В гладком волноводе возможны  $E$ - и  $H$ -волны \*). В критическом режиме (т. е. при  $\beta_z=0$ ) в  $E$ -волнах поле  $\mathbf{E}$  и в  $H$ -волнах поле  $\mathbf{H}$  направлено вдоль оси  $z$ . Поэтому при сдвиге фаз  $\phi=0$  на периоде  $d$  диафрагмы не возмущают поле  $E$ -волн и возмущают поле  $H$ -волн. Отсюда следует, что от радиуса  $a$  диафрагм не зависит границы  $\phi=0$ , соответствующие полю  $E$ -волн в гладком волноводе. Границы полос  $\phi=0$ , соответствующие  $H$ -волнам, смещаются в сторону коротких волн. Диафрагмы вытесняют магнитное поле, так что оно становится примерно соответствующим полю в гладком вол-

\*) В круглом волноводе поля классифицируются по отношению к оси  $z$ , вдоль которой распространяются волны.

новоде с радиусом  $a$  (рис. Р.9.1). Это утверждение тем точнее, чем гуще диафрагмы по сравнению с длиной волны. При  $d/\lambda \leq 1$  частота на границе полосы при  $\varphi = 0$  должна быть близка к критической частоте соответствующего типа волны в гладком волноводе. Это утверждение с высокой степенью точности подтверждается расчетами [13] и справедливо при любой форме волновода, перегородженного диафрагмами, и при любой форме отверстий в диафрагмах.

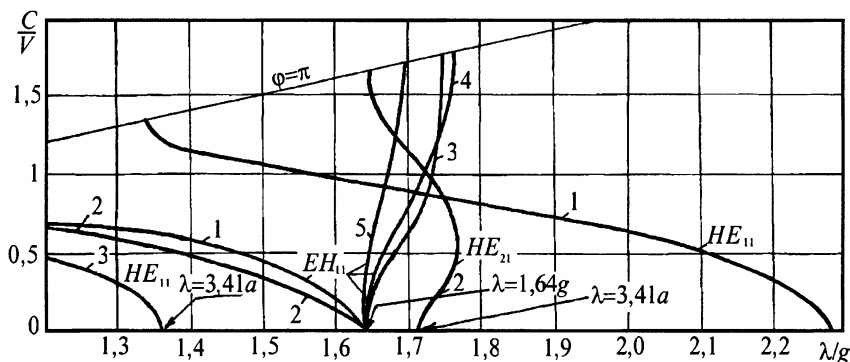


**Рис. Р.9.1.** Кривые дисперсии волн типа  $E_{01}$  и  $H_{01}$  в гладком (сплошные линии) и диафрагмированном (штриховые линии) волноводах. Для сдвигов фаз на периоде  $\varphi = 0$  и  $\varphi = \pi$  около кривых приведены эпюры электрического (сплошные линии) и магнитного (штриховые линии) полей

При сдвиге фаз  $\varphi = \pi$  должны чередоваться (см. п. 2.10) электрические и магнитные стенки в плоскостях симметрии ЗС. Границы полос пропускания  $\varphi = \pi$ , которым соответствуют электрические стенки, содержащие диафрагмы, не должны зависеть от радиуса  $a$ .

Рассмотрим теперь дисперсионные характеристики несимметричных волн ( $q \neq 0$ ) на примере волн с одной вариацией поля по азимуту ( $q = 1$ ). Соответствующие кривые дисперсии, полученные в результате расчета [13], приведены на рис. Р.9.2. Символом  $HE_{11}$  обозначены ветви дисперсионной характеристики, соответствующие  $H_{11}$ -волне гладкого волновода, а символом  $EH_{11}$  — соответствующие  $E_{11}$ -волне. Две буквы ( $E$  и  $H$ ) в обозначении типа волны указывают на то, что поле содержит обе компоненты поля:  $E_z$  и  $H_z$ .

Как и следовало ожидать, границы полос при  $\varphi = 0$  соответствуют критическим частотам гладких волноводов радиуса  $g$  для волн  $EH_{11}$  и радиуса  $a$  для волн  $HE_{11}$ . Дисперсия  $EH_{11}$ -волн отрицательна при достаточно малых радиусах  $a$  отверстий. Такой вид дисперсионной характеристики проще всего проследить, рассматривая диафрагмированный волновод как цепочку резонаторов с  $E_{11}$ -колебаниями, возмущенную отверстиями связи. В центре диафрагм напряженность электрического поля равна нулю, а магнитного — максимальна. При этом связь соседних резонаторов через отверстия ста-



**Рис. Р.9.2.** Кривые дисперсии волн типа  $EH_{11}$  и  $HE_{11}$  в диафрагмированном волноводе, рассчитанные по формулам из работы [13] для  $l = d$ ,  $d/g = 0,5$  ( $1 - g/a = 1,5$ ;  $2 - g/a = 2,0$ ;  $3 - g/a = 2,5$ ;  $4 - g/a = 3,0$ ;  $5 - g/a = 6,0$ )

новится магнитной, а длина волны  $\lambda$  увеличивается с ростом отверстия ( $\lambda > \lambda_p$ , где  $\lambda_p$  — собственная длина волны резонатора), как это можно видеть в формуле (5.3). Росту отверстия связи соответствует в формуле (5.3) увеличение коэффициента связи  $k$ .

- 9.2.** а)  $-(j/\rho)(2\pi a/\gamma d)I_1(\gamma a)/I_0(\gamma a)$ ;  
 б)  $-(j/\rho)(2\pi a_1/\gamma d)K_1(\gamma a_1)/K_0(\gamma a_1)$ ;  
 в)  $-(j/\rho)(2\pi a/\gamma d)\text{cthr}(\gamma a, \gamma b)$ ;  
 г)  $(j/\rho)(2\pi a_1/\gamma d)\text{cthr}(\gamma a_1, \gamma b_1)$ .

Здесь  $\text{cthr}(x, y) = [I_1(x)K_0(y) + K_1(x)I_0(y)]/[I_0(x)K_0(y) - K_0(x)I_0(y)]$  — *малый радиальный котангенс от мнимого аргумента*;  $I_k(x)$  и  $K_k(x)$  — функции Бесселя мнимого аргумента (модифицированные функции Бесселя). Графики функций  $I_0(x)$ ,  $I_1(x)$ ,  $K_0(x)$ ,  $K_1(x)$ ,  $xI_0(x)/I_1(x)$  и  $xK_0(x)/K_1(x)$  приведены на рис. 6.8.

- 9.3.** а)  $j(\rho/\rho\psi r_a)\text{Ctr}(kr_a, kr_v)$ ;  
 б)  $j(2\pi a/\rho l)\text{ctr}(ka, kg)$ ;  
 в)  $-j(2\pi a/\rho l)\text{ctr}(ka, kg)$ .

Здесь  $\rho = (\mu_0/\epsilon_0)^{1/2} = 120\pi$  — волновое сопротивление свободного пространства;  $\text{Ctr}(x, y) = [J_1(y)N_0(x) - N_1(y)J_0(x)]/[J_1(x)N_1(y) - N_1(x)J_1(y)]$ ;  $\text{ctr}(x, y) = [J_1(x)N_0(y) - N_1(x)J_0(y)]/[J_0(x)N_0(y) - N_0(x)J_0(y)]$ .

Функции  $\text{Ctr}(x, y)$  и  $\text{ctr}(x, y)$  носят название «*большой радиальный котангенс*» и «*малый радиальный котангенс*», соответственно. Их таблицы и графики имеются в [25].  $J_k(x)$  и  $N_k(x)$  — функции Бесселя.

- 9.4.** а)  $(\epsilon_0\rho/2\psi)[(r_v/r_a)\zeta(k_p r_a, k_p r_v) - 1]$ , где  $k_p$  — корень уравнения  $\text{Ctr}(kr_a, kr_v) = 0$ ;  
 б, в)  $(\epsilon_0\pi a^2/\rho)\{1 - (g/a)[1/\zeta(k_p a, k_p g)]\}$ , где  $k_p$  — корень уравнения  $\text{ctr}(ka, kg) = 0$ .

## Функция

$$\zeta(x, y) = [J_0(x)N_0(y) - N_0(x)J_0(y)]/[J_1(x)N_1(y) - N_1(x)J_1(y)]$$

протабулирована в [25].

На рис. 9.13–9.15 приведены графики величин  $\gamma$ , пропорциональных емкостям лопаточного и тороидальных резонаторов. Там же даны графики для определения собственных длин волн  $\lambda_p$  этих резонаторов. На рис. 9.16 приведены аналогичные графики для резонатора типа «щель-отверстие», который широко используется при создании различных типов ЗС.

11.1. л) 1; а, б, в, з, и, м, н) 2; е, ж) 3; д, з, к) 4.

11.2.  $Q = 3$ :

$$\cos 3\varphi = 4 \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \cos \varphi_3 - \cos \varphi_1 - \cos \varphi_2 - \cos \varphi_3;$$

$$Q = 4:$$

$$\cos 4\varphi = 8 \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \cos \varphi_3 \cos \varphi_4 - 2 \cos \varphi_3 \cos \varphi_4 -$$

$$- 2 \cos \varphi_4 \cos \varphi_1 - 2 \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - 2 \cos \varphi_2 \cos \varphi_3 + 1;$$

$$Q = 5:$$

$$\cos 5\varphi = 16 \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \cos \varphi_3 \cos \varphi_4 \cos \varphi_5 - 4 \cos \varphi_3 \cos \varphi_4 \cos \varphi_5 -$$

$$- 4 \cos \varphi_4 \cos \varphi_5 \cos \varphi_1 - 4 \cos \varphi_5 \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - 4 \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \cos \varphi_3 -$$

$$- 4 \cos \varphi_2 \cos \varphi_3 \cos \varphi_4 + \cos \varphi_1 + \cos \varphi_2 + \cos \varphi_3 + \cos \varphi_4 + \cos \varphi_5;$$

$Q$  — произвольное:

$$\begin{aligned} \cos Q\varphi = & 2^{Q-1} \prod_{q=0}^{Q-1} \cos \varphi_q - 2^{Q-3} \sum_{k=0}^{Q-1} \prod_{q=0}^{Q-1} \frac{\cos \varphi_q}{\cos \varphi_k \cos \varphi_{k+1}} + \\ & + 2^{Q-5} \sum_{l=0}^{k-2} \sum_{k=2}^{Q-1} \prod_{q=0}^{Q-1} \frac{\cos \varphi_q}{\cos \varphi_l \cos \varphi_{l+1} \cos \varphi_k \cos \varphi_{k+1}} - \\ & - 2^{Q-7} \sum_{m=0}^{l-2} \sum_{k=4}^{Q-1} \sum_{q=0}^{Q-1} \prod_{q=0}^{Q-1} \frac{\cos \varphi_q}{\cos \varphi_m \cos \varphi_{m+1} \cos \varphi_l \cos \varphi_{l+1} \cos \varphi_k \cos \varphi_{k+1}} + \dots \end{aligned}$$

При  $k = Q - 1$  индекс  $k$  полагаем равным нулю. Последнее слагаемое всегда равно  $(-1)^{Q/2}$ , если  $Q$  — четное, и равно  $(-1)^{(Q-1)/2} \sum_{l=0}^{Q-1} \cos \varphi_l$ , если  $Q$  — нечетное.

12.1. См. соотношения (12.2) и (12.6).

12.2. Поскольку цепочка содержит плоскость симметрии, достаточно рассмотреть лишь ее половину, поскольку в этой плоскости имеет место либо электрическая стенка ( $U_0 = U_{N/2} = 0$ ), либо магнитная ( $I_0 = I_{N/2} = 0$ ). Напряжения и токи на концах половины цепочки связаны равенством

$$\begin{bmatrix} U_0 \\ I_0 \end{bmatrix} = [A]^{(N/2)-p} [A_0] [A]^p \begin{bmatrix} U_{N/2} \\ I_{N/2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{N/2} \\ I_{N/2} \end{bmatrix}.$$

Из последнего равенства следует, что в случае электрической стенки в плоскости симметрии  $A_{12} = 0$ , а магнитной —  $A_{21} = 0$ . Зная, что

$$[A]^{(N/2)-p} = \begin{bmatrix} \cos[(N/2)-p]\varphi & jZ_b \sin[(N/2)-p]\varphi \\ (j/Z_b) \sin[(N/2)-p]\varphi & \cos[(N/2)-p]\varphi \end{bmatrix},$$

$$[A]^p = \begin{bmatrix} \cos p\varphi & jZ_b \sin p\varphi \\ (j/Z_b) \sin p\varphi & \cos p\varphi \end{bmatrix},$$

перемножая матрицы и приравнявая нулю  $A_{12}$  и  $A_{21}$  получаем уравнения, которые совместно с уравнением дисперсии определяют спектр собственных частот анодного блока магнетрона. Так, если неоднородности создаются разрывами связок ( $B = 0$ ,  $p \neq 0$ ), эти уравнения имеют вид

$$Z_b \sin(N\varphi/2) + X \cos\{[(N/2)-p]\varphi\} \cos p\varphi = 0, \quad U_0 = U_{N/2} = 0, \quad (\text{P.12.1})$$

$$Z_b^{-1} \sin(N\varphi/2) + (X/Z_b^2) \sin\{[(N/2)-p]\varphi\} \sin p\varphi = 0, \quad I_0 = I_{N/2} = 0,$$

если же неоднородность создается выводом энергии ( $X = 0$ ,  $p = 0$ ), то вид

$$Z_b \sin(N\varphi/2) = 0 \quad U_0 = U_{N/2}, \quad (\text{P.12.2})$$

$$Z_b^{-1} \sin(N\varphi/2) + B \cos(N\varphi/2) = 0 \quad I_0 = I_{N/2}.$$

При  $B = 0$  оба последних уравнения дают одинаковые значения  $\varphi = 2\pi q/N$ , т. е. виды колебаний двукратно вырождены. Как отмечено выше, при  $\varphi = 0$  и  $\varphi = \pi$  вырождения нет. Это утверждение не противоречит (P.12.2). В самом деле, известно, что при  $\varphi = 0$  и  $\varphi = \pi$  в плоскостях симметрии ЗС имеет место либо электрическая, либо магнитная стенка, т.е. справедливо только одно из уравнений (P.12.2).

Для расчета амплитуд симметричных составляющих в анодном блоке с выводом энергии умножим (12.10) на  $\exp(j\varphi_q)[A]$  и учтем, что

$$\begin{bmatrix} U_k \\ I_k \end{bmatrix} = [A] \begin{bmatrix} U_{k+1} \\ I_{k+1} \end{bmatrix}.$$

Получим

$$N \exp(j\varphi_q)[A] \begin{bmatrix} a_q \\ b_q \end{bmatrix} = \sum_{r=-N/2}^{(N/2)-1} \begin{bmatrix} U_r \\ I_r \end{bmatrix} \exp(jr\varphi_q). \quad (\text{P.12.3})$$

Вычитая (Р.12.3) из (12.10), учитывая, что

$$\begin{bmatrix} U_{N/2} \\ I_{N/2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2jB & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{N/2} \\ I_{N/2} \end{bmatrix}$$

(на оси симметрии включено два четырехполюсника с проводимостями  $jB$ ), и используя (12.8), получаем следующие равенства:

$$\begin{aligned} & a_q [1 - \exp(-j\varphi_q) \cos \varphi] - j b_q \exp(-j\varphi_q) Z_b \sin \varphi, \\ & - j a_q \exp(-j\varphi_q) (1/Z_b) \sin \varphi + b_q [1 - \exp(-j\varphi_q) \cos \varphi] = j 2B (-1)^q U_{N/2} / N. \end{aligned}$$

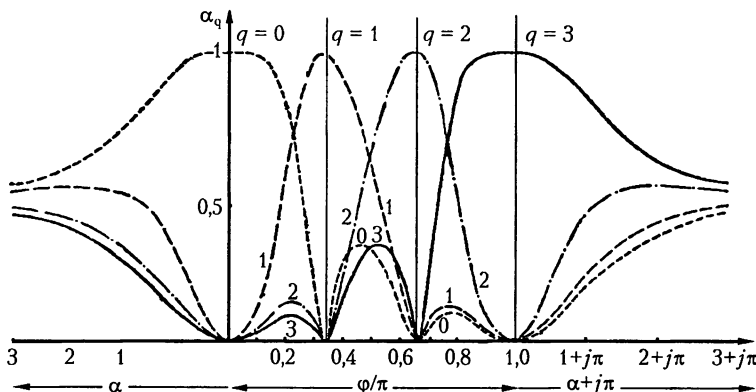
Решая эту систему уравнений относительно  $a_q$  и исключая  $B$  с помощью (Р.12.2), получаем выражение для амплитуды:

$$a_q = \frac{(-1)^q \sin \varphi \operatorname{tg}(N\varphi/2) U_{N/2}}{N(\cos \varphi_q - \cos \varphi)}. \quad (\text{Р.12.4})$$

Выражение (Р.12.4) не может служить мерой искажения формы поля, поскольку в него входит  $U_{N/2}$ . В качестве меры искажения формы  $q$ -го вида колебаний удобно использовать нормированную амплитуду

$$a_q = |a_q| \left( \sum_{k=0}^{N/2} |a_k|^2 \right)^{-1/2} = |\cos(2\pi q/N) - \cos \varphi|^{-1} \left( \sum_{k=0}^{N/2} |\cos(2\pi k/N) - \cos \varphi|^{-2} \right)^{-1/2}.$$

В неискаженном поле  $\varphi = \varphi_q$  отлична от нуля амплитуда только одной симметричной составляющей ( $a_q = 1$ ). Чем сильнее искажено поле  $q$ -го вида, тем меньше величина  $a_q$ . На рис. Р.12.1 изображена зависимость  $\hat{a}_q$  ( $q = 0, 1, 2, 3$ ) от сдвига фаз  $\varphi$  для случая  $N = 6$ . Если  $\varphi$  удовлетворяет условию (12.1), то отлична от нуля амплитуда только одной составляющей ( $\hat{a}_q = 1$ )



**Рис. Р.12.1.** Зависимость амплитуд симметричных составляющих от сдвига фаз  $\varphi$  и от коэффициента затухания  $\alpha$  для магнетронного блока, содержащего шесть резонаторов

и, следовательно, ее поле не искажено. Если же  $\varphi$ , определяемое уравнениями (12.2) и (Р.12.2), не удовлетворяет условию (12.1), то имеются все симметричные составляющие и поле искажено. График  $\hat{a}_q$  построен не только в полосе пропускания, но и вне ее. При этом величина  $\cos \varphi$  заменена на  $\operatorname{ch} \Gamma$ , где  $\Gamma = \alpha + j\varphi$ ,  $\alpha$  — коэффициент затухания четырехполосника.

Искажение формы поля  $q$ -го вида колебаний приводит к ухудшению взаимодействия электронного потока с полем этого вида и к появлению составляющих с номерами  $k \neq q$ , с которыми возможно взаимодействие электронного потока.

- 14.1. а)  $j \operatorname{tg}(kh) = -(Y_1 + Y_2)M(\varphi)/[M^2(\varphi) + Y_1 Y_2]$ ;  
 б)  $j \operatorname{ctg}(kh/2) = Y/M(\varphi)$ , если в плоскости симметрии  $y = 0$  электрическая стенка, и  $j \operatorname{tg}(kh/2) = -Y/M(\varphi)$ , если магнитная;  
 в)  $j \operatorname{ctg}(kh) = Y/M(\varphi)$ ;  
 г)  $j \operatorname{tg}(kh) = 4(Y_1 + Y_2)M(\varphi) \sin^2(\varphi/2)/[M^2(\varphi) + 16Y_1 Y_2 \sin^4(\varphi/2)]$ ;  
 д)  $j \operatorname{ctg}(kh/2) = 4Y \sin^2(\varphi/2)/M(\varphi)$ , если в плоскости симметрии  $y = 0$  электрическая стенка, и  $j \operatorname{tg}(kh/2) = -4Y \sin^2(\varphi/2)/M(\varphi)$ , если магнитная;  
 е)  $j \operatorname{ctg}(kh) = 4Y \sin^2(\varphi/2)/M(\varphi)$ .

14.2. Расчет ведется по тем же формулам, что для однорядной системы (см. рис. 13.3). Отличие состоит в расчете волновых проводимостей и  $\Phi(\varphi)$ . Лестница содержит плоскость симметрии между рядами штырей. В этой плоскости имеет место либо электрическая, либо магнитная стенка. Обозначим через  $w_3$  расстояние от штырей до плоскости симметрии. В случае электрической стенки расчет такой же, как для однорядной системы. В случае магнитной стенки при расчете волновой проводимости вместо  $\hat{C}_k(\varphi, \pi)$  из приложения 4 следует брать  $\hat{C}_k(\varphi, 0)$ . При вычислении  $\Phi(\varphi)$  по формуле (14.7) с учетом (5.6, в) амплитуды пространственных гармоник следует определять для случая, когда соответствующий экран представляет магнитную стенку. В нулевом приближении, когда влиянием стенки на амплитуду пространственной гармоники можно пренебречь, целесообразно использовать значения  $F(\varphi)$  из табл. 9.1.

14.3. а) лестница с выступом; б, в) лестница с выемкой.

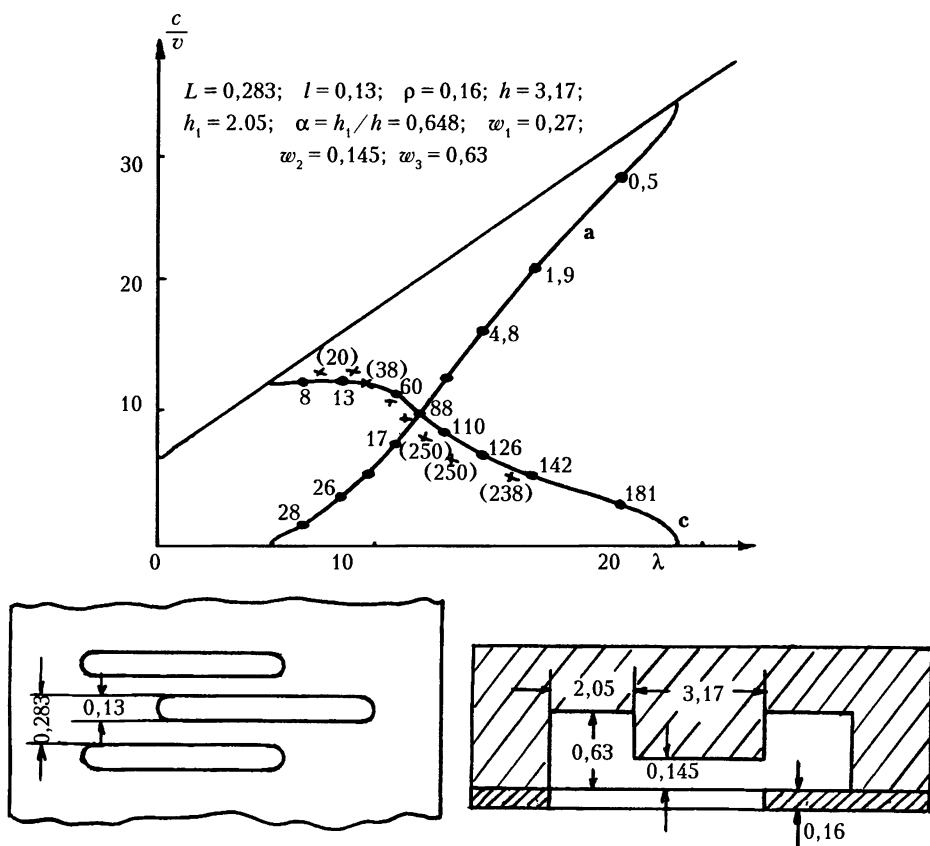
15.1. На рис. 15.3 изображена двухрядная ЗС «встречные штыри». Она содержит плоскость симметрии между рядами штырей. Поэтому для нее справедливы указания из упражнения 14.2.

15.2. Уравнение дисперсии и формула для расчета сопротивления связи приведены в подписи под рис. Р.15.1. В формулах под рисунком использованы обозначения

$$\alpha = h_1/h, \quad \hat{M}_0 = (\mu_0/\varepsilon_0)^{1/2} M(\varphi), \\ \hat{M}_{-1} = (\mu_0/\varepsilon_0)^{1/2} M(\pi - \varphi), \quad \hat{M}(2\varphi) = (\mu_0/\varepsilon_0)^{1/2} M_1(2\varphi)$$

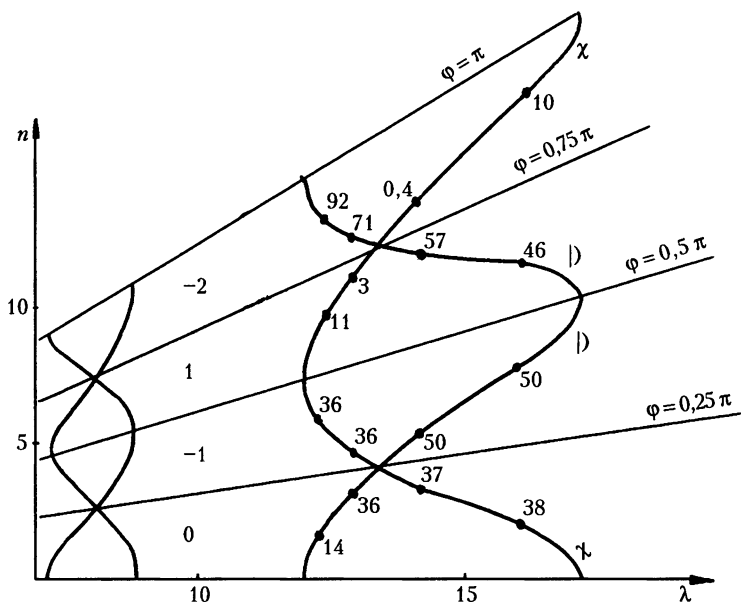
где индекс «1» означает, что проводимость относится к отрезку линии высотой  $h_1$ .





**Рис. Р.15.1.** Характеристики ЗС типа «меандр на опорах», рассчитанные при  $L = 0,283; l = 0,13; \rho = 0,16; h = 3,17; w_1 = 0,27; w_2 = 0,145; w_3 = 0,63; a = h_1/h = 0,648$  по формулам

$$\begin{aligned}
 0 &= [\hat{M}_0 \cos^2(\varphi/2) + \hat{M}_{-1} \sin^2(\varphi/2)] \cos kh \mp \\
 &\mp [\hat{M}_0 \cos^2(\varphi/2) - \hat{M}_{-1} \sin^2(\varphi/2)] + 2^{-1} \hat{M}(2\varphi) \sin(kh) \operatorname{ctg}(\alpha kh/2), \\
 K_{CB} &= 2\Phi(\varphi) \cos^2(\varphi/2) (kh \pm \sin kh) (1 \mp \cos kh) (kh)^{-1} \times \\
 &\times \left\{ 2[\hat{M}_0 \cos^2(\varphi/2) + \hat{M}_{-1} \sin^2(\varphi/2)] \mp \right. \\
 &\mp [\hat{M}_0 \cos^2(\varphi/2) - \hat{M}_{-1} \sin^2(\varphi/2)] \cos(kh) \Big\} + \\
 &+ \alpha \hat{M}(2\varphi) \sin^{-2}(akh) \sin^2(kh) \Big\}^{-1}
 \end{aligned}$$



**Рис. Р.15.2.** Характеристики четырехступенчатой ЗС типа «встречные штыри», рассчитанные для размеров  $L = w_1 = 0,4$ ;  $l = p = 0,2$ ;  $w_2 = 1,2$ ;  $h = 2,25$  по формулам

$$\begin{aligned} \sin^2 kh &= 16K^0 \left[ 8K^0 + abB \pm A(a^2b^2 - 16K^0)^{1/2} \right]^{-1}, \\ K_{\text{CB}} &= \Phi(\varphi)\Delta^{-1} \left[ a^2b^2 - 16K^0 \pm b\gamma(a^2b^2 - 16K^0)^{1/2} - 2\gamma\delta^2\hat{M}_{-2} \right] \times \\ &\quad \times (kh)^{-1} (kh \pm \sin kh)(1 \mp \cos kh), \end{aligned}$$

где

$$\Delta = \left[ (a+b)(a^2b^2 - 16K^0) \pm (\gamma^2b - \delta^2a)(a^2b^2 - 16K^0)^{1/2} \right] \mp$$

$$\mp \cos kh \left[ (a-b)(a^2b^2 - 16K^0) \pm (\gamma^2b + \delta^2a)(a^2b^2 - 16K^0)^{1/2} \right]$$

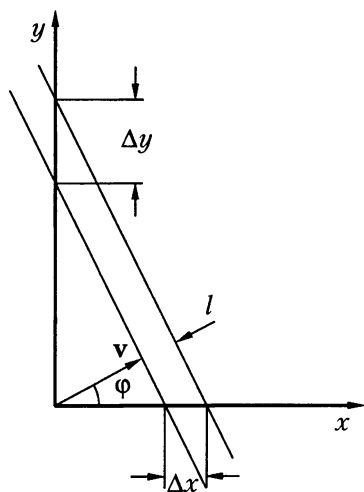
**15.3.** Уравнение дисперсии и формула для расчета сопротивления связи приведены в подписи под рис. Р.15.2. На самом рисунке даны результаты расчета. Обращает на себя внимание высокое сопротивление связи (около 50 Ом) при достаточно больших постоянных задержках ( $n \cong 10$ ). Систему целесообразно использовать в ЛБВ. В формулах под рис. Р.15.2. использованы следующие обозначения:

$$\hat{M}_k = (\mu_0/\varepsilon_0)^{1/2} M_k, \quad M_0 = M(\varphi), \quad (k = -2, -1, 0, 1)$$

$$M_{-1} = M[(\pi/2) - \varphi], \quad M_1 = M[(\pi/2) + \varphi], \quad M_{-2} = M(\pi - \varphi),$$

$$K^0 = \hat{M}_0 \hat{M}_{-1} \hat{M}_1 \hat{M}_{-2}, \quad A = \hat{M}_0 \hat{M}_{-2} - \hat{M}_{-1} \hat{M}_1, \quad B = \hat{M}_0 \hat{M}_{-2} + \hat{M}_{-1} \hat{M}_1,$$

$$a = \hat{M}_0 + \hat{M}_{-2}, \quad b = \hat{M}_{-1} + \hat{M}_1, \quad \gamma = \hat{M}_0 - \hat{M}_{-2}, \quad \delta = \hat{M}_{-1} - \hat{M}_1.$$



**Рис. Р.16.1.** К определению составляющих  $v_x$  и  $v_y$  фазовой скорости  $\mathbf{v}$

этом  $\hat{\mathbf{d}}_1 = 2\hat{\mathbf{L}}_1$ ,  $\hat{\mathbf{d}}_2 = \hat{\mathbf{L}}_2$ , т.е. ЗС двухступенчата в направлении  $\hat{\mathbf{d}}_1$  и одноступенчата в направлении  $\hat{\mathbf{d}}_2$ . Уравнения дисперсии такой ЗС в косоугольной системе координат имеет вид (17.20). Однако волновые проводимости в большинстве случаев известны как функции сдвигов фаз вдоль векторов  $\mathbf{L}_1$  и  $\mathbf{L}_2$  в прямоугольной системе координат. Выбранные системы координат связаны соотношением (17.32), где

$$[F] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Используя выражение (17.35, а), в которое входят элементы матрицы  $[F]$ , преобразуем уравнение дисперсии к виду (17.21).

**18.1.** В соответствии с эквивалентной схемой (рис. 18.6) условия на границах одного этажа имеют вид

$$U_1^I = U_0^I = 0, \quad U_1^{II} = U_0^I \exp[-j(\varphi_1 - \varphi_2)], \quad I_1^{II} = I_0^I \exp[-j(\varphi_1 + \varphi_2)]$$

Подставляя эти условия в (15.4), находим амплитуды симметричных составляющих:

$$\begin{aligned} \alpha_{-1}^I &= \alpha_0^I = 0, & \alpha_0^{II} &= \alpha_0^I \exp(-j\varphi_2), & \alpha_{-1}^{II} &= -\alpha_0^I \exp(-j\varphi_2), \\ \eta_{-1}^I &= [I_0^I - I_1^I \exp(j\varphi_1)]/2, & \eta_0^I &= [I_0^I + I_1^I \exp(j\varphi_1)]/2, \\ \eta_{-1}^{II} &= [I_0^{II} - I_0^{II} \exp(-j\varphi_2)]/2, & \eta_0^{II} &= [I_0^{II} + I_0^I \exp(-j\varphi_2)]/2. \end{aligned} \quad (\text{Р.18.1})$$

**15.4.** а, б) — «встречные штыри»;  
в, г) — «меандр на опорах».

**16.1.** Если в направлении фазовой скорости волна прошла путь  $\Delta l$ , то в соответствии с рис. Р.16.1 по оси  $x$  она пройдет путь  $\Delta x = \Delta l / \cos \varphi$ , а по оси  $y$  — путь  $\Delta y = \Delta l / \sin \varphi$ . Таким образом,  $v_x = v / \cos \varphi$ ,  $v_y = v / \sin \varphi$ .

**16.2.** В соответствии с уравнением (16.19, б) в зависимости от знаков  $\tau_{100}$ ,  $\tau_{010}$  и  $\tau_{001}$  изочастоты трехмерно-периодических цепочек могут представлять при малых  $\varphi$  эллипсоиды, однополостные и двухполостные гиперboloиды, конусы. В зависимости от того, растут или убывают коэффициенты  $\tau$  с частотой, угол между фазовой и групповой скоростью может быть как больше, так и меньше  $\pi/2$ .

**17.1.** Выберем в качестве базисных векторов многопроводной линии  $\mathbf{L}_1$ ,  $\mathbf{L}_2$ . При

Подставив эти амплитуды в (15.3) и исключив из уравнений  $I_1^I$ , получаем следующее уравнение в матричной форме:

$$\begin{bmatrix} T_{11} & \sin x_{-1} \exp(-j\varphi_2) & -\sin x_{-1} \\ T_{21} & \sin x_0 \exp(-j\varphi_2) & \sin x_0 \\ T_{31} & (\cos x_0 - \cos x_{-1}) \exp(-j\varphi_2) - 2 & \cos x_0 + \cos x_{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0^{II} \\ jI_0^I/2 \\ jI_0^{II}/2 \end{bmatrix} = 0, \quad (\text{P.18.2})$$

где

$$\begin{aligned} T_{11} &= M_{-1} [\cos x_{-1} \exp(-j\varphi_2) + 1], & T_{21} &= M_0 [\cos x_0 \exp(-j\varphi_2) - 1], \\ T_{31} &= (M_{-1} \sin x_{-1} - M_0 \sin x_0) \exp(-j\varphi_2). \end{aligned}$$

Приравнявая нулю детерминант матрицы из коэффициентов (P.18.2), находим уравнение дисперсии:

$$\cos \varphi_2 = \frac{M_0 \sin x_{-1} \cos x_0 + M_{-1} \sin x_0 \cos x_{-1}}{M_0 \sin x_{-1} - M_{-1} \sin x_0}. \quad (\text{P.18.3})$$

В частном случае  $\varphi_2 = 0$  получаем уравнение дисперсии ветви с симметричным распределением поля по высоте штырей в ЗС типа «встречные штыри», а  $\varphi_2 = \pi$  — ветви с антисимметричным распределением.

**18.2.** Чтобы рассчитать сопротивление связи многоэтажной ЗС типа «встречные штыри» по формуле (18.6), определим амплитуды  $\alpha_{-1}$  и  $\alpha_0$  и множитель  $\sigma$ , пользуясь (18.2). Прodelывая выкладки, аналогичные приведенным для меандра, получим:

$$\begin{aligned} \sigma_0 &= \frac{1 - \cos \varphi_2 \cos x_0}{\sin^2 x_0} + \frac{1}{x_0} \frac{\cos \varphi_2 - \cos x_0}{\sin x_0}, \\ \sigma_{-1} &= \frac{1 + \cos \varphi_2 \cos x_{-1}}{\sin^2 x_{-1}} - \frac{1}{x_{-1}} \frac{\cos \varphi_2 + \cos x_{-1}}{\sin x_{-1}}, \end{aligned}$$

$$\alpha_0^* \alpha_0 = 2(1 - \cos x_0 \cos \varphi_2) / \sin^2 x_0, \quad \alpha_{-1}^* \alpha_{-1} = 2(1 + \cos x_{-1} \cos \varphi_2) / \sin^2 x_{-1}.$$

Подставляя полученные величины в (18.6), получим выражение для сопротивления связи ЗС типа «встречные штыри», приведенное в подписи к рис. 18.6.

**19.1.** Из курса общей физики известна формула линзы

$$\frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_1} = (n - 1) \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) = \frac{1}{f},$$

где  $n$  — коэффициент преломления материала линзы,  $R_1$  и  $R_2$  — радиусы кривизны поверхностей линзы,  $a_1$  и  $a_2$  — расстояния от линзы до предмета и изображения, соответственно. Величины  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $R_1$  и  $R_2$  считают положи-

тельными, если они отсчитываются вправо от линзы, и отрицательными, если влево. Величина  $f$  называется фокусным расстоянием линзы. При бесконечном удалении предмета ( $a_1 \rightarrow -\infty$ ) его изображение находится в фокусе ( $a_2 = f$ ). Если же предмет находится в фокусе ( $a_1 = -f$ ), то изображение — на бесконечности ( $a_2 = \infty$ ). Для двояковыпуклой линзы  $R_1 > 0$ ,  $R_2 < 0$ , так что для среды с положительной дисперсией ( $n > 0$  и  $n - 1 > 0$ )  $f > 0$  (собирающая линза). Для двояковогнутой линзы  $R_1 < 0$ ,  $R_2 > 0$ , так что  $f < 0$  (рассеивающая линза). В случае сред с отрицательной дисперсией ( $n < 0$ ) величина  $n - 1 < 0$ , так что двояковыпуклая линза становится рассеивающей, а двояковогнутой — собирающей.

# Предметный указатель

Аксиальные векторы 19  
акустическая ветвь 7, 181  
анодный блок магнетрона 15, 187  
антенна с бегущей волной 74  
антенная решетка 75, 365

Блоха теорема 27, 242  
Борна цепочка 179  
Бриллюэна зона 243  
бугельная система 46, 187, 300

Вавилова — Черенкова эффект 1  
вектор волновой 3, 27  
векторы аксиальные 19  
— полярные 18  
вентильность 353  
ветвь акустическая 7, 181  
— оптическая 7, 181  
волна высшая 128  
— вытекающая 76  
— комплексная 71  
— нормальная 28  
— обратная 5  
— плоская 2  
— прямая 4  
— E-, H-, TM-, TE-, TEM-, LE-, LM-, LEM- 2

волновая проводимость 204  
волновод волнообразно изогнутый 166  
— диафрагмированный 14, 127  
волновое сопротивление 158  
— число 3, 27  
— — комплексное 27  
— — критическое 63  
волновой вектор 3, 27  
— множитель 76  
волнообразно изогнутый волновод 166  
волн типы 62, 128  
волны нормальные 28  
встречные штыри 6, 16, 43, 222  
— — косые 358  
— — многорядные 289  
— — многоэтажные 310  
Вульфа-Брэггов формула 256, 291  
вырожденные колебания 23  
— решения 20

Гармоника пространственная 53, 241  
границные условия импедансные 107

— — усредненные 90, 99, 108, 397  
— — циклические 28  
гребенка 127  
— квадрат 167  
— многорядная 278  
— широкая 127  
— штыревая 200

Диафрагмированный волновод 14, 127  
дисперсии величина 4  
— поверхность 247  
— — многопроводной линии 262  
— — электрических цепочек 247  
— кривая 4  
дисперсия 4  
— аномальная 4  
— нормальная 4  
— отрицательная 5  
— положительная 4  
дифракционная решетка 74, 175  
дуэт 193

Емкость краевая 140, 206  
— пространства взаимодействия 140  
— резонатора 138  
— связок 139  
— частичная 203  
— щели связи 151  
емкостной коэффициент 203

Закон отражения 316  
— подобия 73, 216  
— преломления 316  
замедление скорости групповой 5  
— — фазовой 2  
замедления коэффициент 1  
замедляющая система «встречные штыри» 6, 16, 43, 222  
— — — — многорядная 289  
— — — — многоэтажная 310  
— — двумерно-периодическая 231  
— — двухступенчатая 175  
— — одноступенчатая 175  
— — косая 358  
— — «меандр» 16, 43, 223  
— — — — многоэтажная 306  
— — — — многорядная 275  
— — — — многоэтажная 299  
— — — — многоступенчатая 175

- — четырехступенчатая 175, 228
- замыкания в цилиндр условие 341
- заходов число 15
- зона 243
  - Бриллюэна 58, 243

### Изочастоты 246

- гребенки бесконечно широкой 331
- — многорядной 278
- лестницы многорядной 278
- — многоэтажной 301
- многопроводной линии 319
- системы волноводов 319
- — плоскостей 321
- — типа «встречные штыри»
- — многорядной 289
- — — — — многоэтажной 310
- — — «меандр» многоэтажной 306
- электрических цепочек 246
- инверсии центр 13
- инверсия 13

### Канал Флоке 365

- канавка спиральная 79
- клевера лист 17, 37, 165
- колебаний типы (виды) 21
- колебания вырожденные 23
- кольцо — стержень 16, 39, 77
- коэффициент емкостной 203
  - замедления 2
  - затухания 27
  - связи 8
  - формы 70
- крутизна перестройки 352

### Лагранжа цепочка 68

- лампа с бегущей волной (ЛБВ) 6
  - с обратной волной (ЛОВ) 6
- Лауэ уравнение 256
- лемма Лоренца 49, 271
- лестница 163, 199, 212
  - многорядная 278
  - многоэтажная 301
- линия многопроводная 199
- лист клевера 17, 37, 165
- Лоренца лемма 49, 271
- лучепреломление двойное 327

### Магнетрон 14, 187

- одновидовый 194
- разнорезонаторный 187
- со связками 14, 187
- матрица передачи радиальная 95

- проводимости 157
- рассеяния 153
- меандр 16, 43, 223
  - многоэтажный 306
  - на опорах 228
- метод многопроводных линий 199
  - частичных областей 132
  - эквивалентных схем 137
- многопроводных линий метод 199
- многорядная замедляющая система 275
- многоступенчатые замедляющие системы 175
- многоэтажная замедляющая система 299
- множитель волновой 76

### Обратная связь 347, 361

- оператора симметрии собственное решение 20
  - — — число 20
- операции симметрии 13
- оптическая ветвь 7, 181
- оротрон 128
- ортогональность нормальных волн 51, 156, 270
- ось винтовая 15
  - зеркально-поворотная 15
  - симметрии 13
- отражения закон 316

### Платинотрон 6, 187

- плоскость симметрии 14
  - — скользящая 15
  - — трансляционно идентичная 40, 232
- поворот зеркальный 15
- подобия закон 73, 216
- полоса не пропускания 27
  - пропускания 27
- полос пропускания слияние 31
- полярные вектора 18
- постоянная затухания 27
  - распространения 27
- преломления закон 316
- преобразование ортогональное 13
  - симметрии 13
- преобразований симметрии
  - произведение 16
- приближение одной волны 83, 134
- проводимость волновая 204
- произведение преобразований
  - симметрии 16
- пространственная гармоника 53, 241

пространство взаимодействия 60, 132

— резонаторов 132

пятна слепые 367

**Резонаторные замедляющие системы** 125

Релея формула 5

решение вырожденное 20

— собственное оператора симметрии 20

решетка антенная 75, 365

— дифракционная 74, 175

— косая (косоугольная) 270

— обратная 235

— прямая 235

— прямоугольная 279

решетки ряд 235

— узел 235

**Связи коэффициент** 8

— сопротивление 8

связь обратная 347, 361

симметрии группы 236, 373

— операции 13

— — коммутативные 17

— — некоммутативные 17

— ось 13

— — винтовая 15

— — зеркально-поворотная 15

— плоскость 14

— — скользящая 17

— преобразование 13

— — пространственное 15

— — точечное 13

— элемент 13

симметричные составляющие 31

сингония 373

синхронизма условие 342

система бугельная 46, 187, 300

— замедляющая «встречные штыри»  
6, 16, 43, 222

— — — — многорядная 289

— — — — многоэтажная 310

— — двумерно-периодическая 231

— — двухступенчатая 175

— — косая 358

— — «меандр» 16, 43, 223

— — — — многоэтажная 306

— — многорядная 275

— — многоэтажная 299

— — многоступенчатая 175

— — одноступенчатая 175

— — резонаторные 125

— — четырехступенчатая 175, 228

— координат ковариантная 234

— — контрвариантная 234

— — косоугольная 234

— — обратная 235

— — прямая 235

скорость групповая 4

— переноса энергии 52

— фазовая 7

сопротивление волновое 158

— связи 8

— шунтовое 8

составляющие симметричные 31

спирали связанные 80

спираль 2, 37, 79

— в диэлектрической трубке 80, 101

— в экране 79, 83, 100

— — — анизотропно проводящем 107

— — — с продольными ребрами 107

— двухзаходная 79, 120

— контактирующая с проводящим

слоем 104

— нагруженная стержнями 17

— на диэлектрических опорах 103

— многозаходная 38, 120

— ленточная 79, 111

— нитевидная 111

— со стержнем 100

спиральная канавка 79

спирально проводящий цилиндр 83

спиротрон 80

стенка магнитная 21

— электрическая 21

сфера Эвальда 256

схема эквивалентная 137, 152

**Телеграфные уравнения** 200

теорема Блоха 27, 242

типы волн 14, 129

— — — — высшие 128

трансляция 12

— косая 232

— прямая 232

**Узел решетки** 235

уравнение дисперсии 68

— Лауэ 256

уравнения телеграфные 200

условия граничные импедансные 107

— — усредненные 90, 99, 108, 397

— — циклические 28

— замыкания в цилиндр 341

усредненные граничные условия 90, 99,  
108, 397



**Фаза волны** 2

**Флоке канал** 365

— теорема 27

— ячейка 365

**формула Вульфа–Брэггов** 256, 291

— формула 5

**фронт волны** 2

**Характеристика дисперсионная** 4

**Центр инверсии** 13

**цепочка Борна** 179

— Лагранжа 68

— связанных резонаторов 17, 151

— четырёхполюсников 67

**цилиндр спирально проводящий** 83

**Частичных областей метод** 132

**частота критическая** 62, 83

**четырёхступенчатая замедляющая**  
система 171, 228

**число волновое** 3, 27

— комплексное 27

— критическое 63

— собственное оператора симметрии 20

**Широкополосность** 348

**Эвальда сфера** 256

**эквивалентных схем метод** 137

**экран анизотропно проводящий** 107

**энергия** 50

**Эффект Вавилова—Черенкова** 1

**Ячейка структуры** 235

— решетки обратной 235

— — прямой 235

— Флоке 365