

Д-р МАКС БОРН

582

ОПТИКА

УЧЕБНИК ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ТЕОРИИ СВЕТА

(ПЕРЕВОД С НЕМЕЦКОГО
В. М. КОНОВАЛОВА

Под редакцией
И. В. ОБРЕИМОВА

1937-1938



ОПТИКА ГОСУДАРСТВЕННОЕ НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО УКРАИНЫ НКТП
Харьков 1937 Киев

ДАР

Ответственный редактор проф. И. В. Обреимов
Литредактор М. А. Дейнеко
Техредактор В. В. Бачинская
Корректор С. Г. Власова

Типография Государственного научно-технического издательства Украины.
Киев, ул. Воровского, 42.

ОТ РЕДАКТОРА

Необходимость в фундаментальной современной книге по оптике совершенно назрела. Прекрасный учебник Друде, на котором воспитывалось в течение почти тридцати лет несколько поколений физиков, сейчас устарел, а после него не появлялось эквивалентных ему курсов. Книга Борна должна восполнить этот пробел. Чтение предполагает звание векторной алгебры, начал векторного анализа и уравнений Максвелла. По объему охваченного материала она значительно превышает книгу Друде, обильно снабжена таблицами и в этом смысле представляет собою своего рода энциклопедию. Она несомненно будет очень полезной для студентов старших курсов, широкого круга научных работников-физиков и педагогов. Книга переведена без всяких изменений с немецкого издания 1932 г. Поскольку содержание касается классической оптики — она не могла устареть за 4 года. Однако, в ней имеется ряд мелких ошибок и нет ссылок на русскую литературу. Редактор счел нужным, не меняя текста книги, внести необходимые исправления в виде примечаний в конце книги.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Эта книга отличается от более старых изложений оптики тем, как она размежевывается с соседними областями физики. Традиционная классификация (механика, электричество и магнетизм, оптика, термодинамика, дополненная кинетической теорией материи и атомной физикой) пока, пожалуй, еще необходима для преподавания, но мало удовлетворительна для подразделений научных систем. Как электромагнитная теория, оптика уже давно является особой главой общего учения об электромагнитном поле. Можно при этом, конечно, не ограничиваться видимым светом, — напротив, следует расширить вверх и вниз область частот. Однако обычно волн Герца не включают в оптику; области коротких волн — рентгеновские и γ -лучи — обычно исключаются из рассмотрения или упоминаются слегка. Настоящая книга также следует этому обычаю. Раньше не считалось возможным выпускать из учебников по теории света оптику движущихся тел. Я счел это уже несвоевременным: этот предмет принадлежит к теории относительности, которая развилась в особую главу физики. Наиболее трудным является вопрос о спектрах. Ведь для большинства физиков-экспериментаторов методы оптики являются в настоящее время вспомогательным средством для исследования спектров и их носителей. Но, по моему мнению, закономерности в спектрах относятся все-таки не к учебнику по оптике, а к учебнику по атомной физике, которая и по объему, и по значению образует самостоятельную часть физики. Для оптики в узком смысле остается еще достаточно материала, как показывает объем этой книги, содержащей все то, что в оптике является понятным без привлечения квантовой теории. Ее цель — подвести читателя к проблемам, представляющим основное содержание квантовой атомной физики.

Изложение предполагает знание элементарной оптики и с самого начала базируется на точке зрения электромагнитной теории света. Оно неисторично, но это неизбежно, если не удлинять бесконечно изложение до современного этапа предмета. Об историческом развитии вкратце говорится в особом введении. Я использовал существующие учебники и руководства, но по возможности справлялся по оригинальным работам. Во многих деталях в первой главе я следовал классическому учебнику

Друде, потому что всякое отклонение означало бы ухудшение. Книга Друде принадлежит к небольшому числу тех научных книг, которые, как истинные произведения искусства, никогда не могут устареть. По ее образцу я попытался изложить сильно возросший экспериментальный материал.

Литературные указания не являются полными — они имеют целью облегчить читателю навести справку в важнейшей литературе и помочь ему ориентироваться в журнальном хаосе. Если какое-либо сочинение не цитируется, то это не обязательно должно означать, что я его отношу к плохим.

Среди своих сотрудников, учеников и друзей я нашел много помощников. Наброски для некоторых отделов сделали: Dr. L. Nordheim — относительно абсорбирующих кристаллов (глава VI, § 69); Dr. W. Heitler — об объединении геометрических и волновых искажений изображений (глава IV, § 56); Dr. V. Weisskopf — о строгом обосновании закона Лорентц-Лоренца (глава VII, § 74); Dr. E. Teller — относительно Раман-эффекта (глава VII, § 82 и глава VIII, § 100). Prof. Dr. F. Reiche и Dr. Weisskopf взяли на себя труд полностью просмотреть главу по теории дисперсии (VIII). Точно также Dr. H. A. Stuart обогатил отделы об эффекте Керра и о рассеянии света весьма ценными дополнениями. Благодаря любезному содействию Prof. M. v. Rohr я получил прекрасный снимок дифракционных явлений у прямоугольной щели (§ 48, фиг. 88), изготовленный prof. dr. A. Köhler. Dr. G. Cario для этой книги заново заснял аномальную дисперсию в парах натрия по методу Вуда (§ 93, фиг. 216). Всем этим помогшим мне лицам я приношу глубокую благодарность.

Две первые главы я записал, основываясь на своих лекциях, уже много лет тому назад. В этом состоянии рукопись, пожалуй, и осталась бы, если бы мне не пришли на помощь два студента — H. Lieb и W. Weppner. Им я диктовал остальные шесть глав. Они не только с большим прилежанием следили за перепиской набело и за изготовлением фигур, не только занимались проверкой вычислений, но сыграли также роль объекта педагогического опыта. По их реакции я мог судить о том, достигает ли изложение желаемой степени понятности. Они оба также неустанно помогали при корректуре.

Весьма ценную помощь оказали мне также G. Rathenau и G. Pöschl при последнем просмотре рукописи и при корректуре; W. Lotma при последней корректуре; A. Weygandt, R. Bungers, F. Vorr изготовлением числовых таблиц и графиков кривых. Всем им приношу глубокую благодарность.

Издательство я должен поблагодарить за тщательное печатание и прекрасное оформление.

Макс Борн.

Геттинген, август 1932 г.

ВВЕДЕНИЕ. ИСТОРИЧЕСКИЙ ОЧЕРК

Цель настоящей книги — дать систематический обзор обширной области теоретической оптики. При необычайном обилии материала не представляется возможным проделать это в историческом аспекте, с его бесчисленными окольными путями и уклонениями в сторону; мы будем, напротив, исходить из нынешнего состояния нашего знания и отсюда стараться выводить путем дедукции группы явлений. Это означает отказ от поучительного пути индукции, который, начиная с основных представлений, строит шаг за шагом систему понятий нашей науки. В качестве наилучшего дополнения к предлагаемой книге можно рекомендовать читателю изучение оригинальных работ; важнейшие из них мы будем называть в ходе нашего изложения. Краткий исторический обзор, предпосылаемый систематическому изложению, может служить для сопоставления отдельных открытий и имен выдающихся исследователей в их исторической связи.

Греческие натур-философы выдвигали гипотезы относительно сущности света, греческие математики уже занимались геометрической оптикой.

Основателем новой философии был, главным образом, Рене Декарт (René Descartes, 1596—1650), создавший представления о сущности света на основе своих метафизических идей¹. Однако твердую почву оптика получила впервые после того, как Галилео Галилеи (Galileo-Galilei, 1564—1642) показал могущество экспериментального метода, развивая механику. В то время, как закон отражения был известен еще грекам, закон преломления был найден в 1621 г. Снеллиусом (Snellius, 1591—1626) экспериментально². Декарт объяснил это явление, допустив, что свет состоит из выброшенных частиц (эмиссионная, или корпускулярная теория), имеющих в различных телах различную скорость. Другую, более глубокую формулировку дал Ферма (Pierre de Fermat, 1601—1665), выставив общий принцип, что „природа всегда придерживается кратчайшего пути“³; в силу этого свет распространяется всегда по пути, приводящему к цели в крат-

¹ R. Descartes, *Dioptriques, Météores*, Leyden, 1638; *Principia Philosophiae*, Amsterdam, 1644.

² Снеллиус письменно сообщил о своем открытии другим исследователям, в том числе Декарту, который опубликовал его в своей „*Dioptriques*“.

³ *Oeuvres de Fermat*, т. 2, Paris (1894), стр. 354.

чайшее время; отсюда вытекает закон преломления, если предположить различные „сопротивления“ в различных телах. Этот принцип кратчайшего светового пути имеет большое философское значение благодаря своему телеологическому характеру, воспринятому в естественной науке как чужеродное тело и давшему повод для бесчисленных дискуссий.

Первое интерференционное явление — окрашивание тонких слоев — называемое в настоящее время также „ньютоновыми кольцами“, открыли, независимо друг от друга, Роберт Бойль (Robert Boyle, 1626—1691)¹ и Роберт Гук (Robert Hooke, 1635—1703)². Гук открыл также проникание света в область геометрической тени, дифракцию света; однако подобное наблюдение было сделано уже ранее Франческо Гримальди (Francesco Maria Grimaldi, 1618—1663)³. Гук первым высказал мнение, что свет состоит из быстрых колебаний, причем принял, что последние распространяются мгновенно на любое расстояние; на основе этих представлений он пытался разъяснить преломление и объяснить цвета. Основные свойства окрашенного света выяснились, однако, лишь тогда, когда в 1666 г. Ньютон (Isaac Newton, 1642—1727) открыл разложимость белого света призмой⁴ и установил, что каждый чистый цвет характеризуется определенной преломляемостью. Трудности, встречаемые волновой теорией при объяснении прямолинейного распространения света и (открытой Гюйгенсом)⁵ поляризации, казались Ньютону столь решающими, что он обратился к корпускулярной теории, которую и развил. В это время была впервые определена скорость света, выведенная 1675 г. Олафом Ремером (Olaf Römer, 1644—1710) из затмений спутников Юпитера. Истинным основателем волновой теории является Христиан Гюйгенс, (Christian Huygens, 1629—1695). Он считал носителем волн так называемый „световой эфир“, проникающий сквозь все тела, и высказал названный позднее его именем принцип, по которому каждую точку эфира, подвергшуюся световому возбуждению, можно рассматривать как центр новой сферической волны. Вторичные волны взаимодействуют тогда таким образом, что их огибающая поверхность определяет результирующий волновой фронт. Отсюда ему удалось вывести законы отражения и преломления, а затем объяснить открытое Бартолином (Erasmus Bartolinus, 1625—1698) двойное лучепреломление в известковом шпате при помощи предположения, что в кристалле, кроме сферической элементарной волны, распространяется также волна эллипсоидальная. Мы уже упоминали о сделанном при этом Гюйгенсом открытии явления

¹ Boyle's Works, т. I (1774) стр. 742.

² R. Hooke, Micrographia (1667) стр. 47.

³ F. M. Grimaldi, Physico-Mathesis de lumine, coloribus, et iride. Bologna, 1665.

⁴ I. Newton, Philos. Trans. Roy. Soc., London, № 80 (1671/72), февр. 19; Optics, Newton Opera, стр. 385.

⁵ Chr. Huygens, Traité de la lumière (написано в 1678 г., опубликовано в 1690 г. в Лейдене).

поляризации, т. е. того факта, что каждый из двух лучей, возникших вследствие преломления в известковом шпате, при прохождении через второй кристалл может быть погашен простым поворотом последнего вокруг направления луча. Но объяснить это явление как „поперечность“ (трансверсальность) световых колебаний удалось не ему, а Ньютону — в 1717 г. Последний увидел в этом опять непреодолимое препятствие для принятия волновой теории, так как в то время волны могли представлять себе лишь как продольные.

Отказ от волновой теории такого авторитета, как Ньютон, преградил ей путь почти на сто лет. Однако она находила все же отдельных приверженцев, как например крупного математика Эйлера (Leonard Euler, 1707—1783)¹ (см. примечание в конце книги).

Только в начале XIX столетия последовали решающие открытия, повлекшие за собой победу волновой теории. Первым шагом было установление в 1801 г. Юнгом (Thomas Young, 1773—1829) принципа интерференции и основанное на нем объяснение цветов тонких пластинок². Однако эти, скорее качественные, представления Юнга не смогли завоевать общего признания.

В это время Малусом (Etienne Louis Malus, 1775—1812) была открыта поляризация света при отражении³; в 1808 г. он наблюдал однажды вечером через пластинку известкового шпата отраженное в окне изображение солнца и нашел, что яркость обоих изображений, возникающих при двойном лучепреломлении, заметно изменяется при вращении кристалла вокруг линии зрения. Однако Малюс отказался объяснить это явление, считая, что существующая теория не в состоянии сделать этого.

Корпускулярная теория была, между тем, разработана до последнего возможного предела Лапласом (Pierre Simon de Laplace 1749—1827) и Био (Jean Baptiste Biot, 1774—1862). Сторонники ее предложили в качестве темы на большой конкурс Парижской академии 1818 г. проблему дифракции, ожидая, что обработка последней будет окончательным триумфом корпускулярной теории. Однако в этой надежде им пришлось разочароваться, потому что премированное, несмотря на все препятствия, конкурсное сочинение Френеля (Augustin Jean Fresnel, 1788—1827) основывалось на волновой теории⁴. Оно было началом серии работ, благодаря которым корпускулярная теория в несколько лет была совершенно изгнана. Идея конкурсной работы базировалась на объединении принципа Гюйгенса элементарных волн с принципом интерференции Юнга; исходя отсюда, Френелю не только удалось объяснить „прямолинейность рас-

¹ L. Euler, Opuscula varii argumenti, стр. 169, Berlin, 1746.

² Th. Young, Philos. Trans. Roy. Soc., London, 1802, стр. 12, 387; Works т. 1, стр. 202.

³ E. L. Malus, Nouveau Bull. d. Sci. par la Soc. Philomatique, т. 1 (1809), стр. 266; Mémoires de la Soc. d'Arcueil, т. 2 (1809).

⁴ A. Fresnel, Ann. Chim. et Phys. (2), т. 1 (1816), стр. 239; Oeuvres, т. I, стр. 89, 129.

пространения", но также и малые отклонения от него, известные под именем явлений дифракции. Френель вычислил дифракцию у прямых краев, в случае малого отверстия и в случае малого экрана; особенное впечатление произвело экспериментальное подтверждение теоретического предсказания, что в центре тени малого круглого диска должно появляться светлое пятно. В том же 1818 г. Френель исследовал важную проблему влияния движения земли на распространение света; вопрос заключался в том, иначе ли ведет себя свет, исходящий от далеких звезд, нежели свет земных источников. Араго (Dominique François Arago, 1786—1853) установил экспериментально, что (исключая абберацию) нельзя найти между ними какой-либо разницы; основываясь на этом, Френель развил свою теорию частичного увлечения светового эфира материей, которую Физо (Armand Hippolyte Louis Fizeau, 1819—1896) впервые удалось подтвердить непосредственным экспериментом. Вместе с Араго Френель исследовал интерференцию поляризованных лучей и нашел в 1816 г., что два перпендикулярно друг к другу поляризованные луча не интерферируют между собой ни при каких условиях. Этот факт был несовместим с предположением продольности волн, которая до того считалась само собой разумеющейся; Юнг, услышавший от Араго об этом открытии, нашел ключ к его разгадке в предположении поперечности колебаний.

Френель тотчас понял значение этой гипотезы, из которой он вывел многочисленные следствия, и старался ее глубже обосновать при помощи динамической теории¹. А именно, так как в жидкостях возможны лишь продольные колебания, то эфир должен быть аналогичным твердому телу; однако в то время еще не было теории упругих волн в твердом веществе. Вместо того чтобы развивать ее логически и затем выводить из нее оптические явления, Френель пошел индуктивным путем, стараясь вывести свойства эфира из наблюдений световых явлений. Необходимые законы распространения света в кристаллах были для Френеля исходным пунктом. Их объяснение и сведение их к нескольким простым предположениям относительно формы элементарных волн являются величайшим шедевром естественно-научного исследования. В 1832 г. Гамильтон (William Rowan Hamilton, 1805—1865)², имеющий серьезные заслуги в развитии оптики, указал на важное следствие построений Френеля — на так называемую коническую рефракцию, существование которой вскоре после этого было подтверждено экспериментально Ллойдом (Humphrey Lloyd, 1800—1881)³.

Френель дал также первые указания, как объяснить дисперсию путем привлечения молекулярной структуры тел⁴ — мысль, которую позже развил Коши (Cauchy).

¹ A. Fresnel, Oeuvres, т. 2, стр. 261, 479.

² W. R. Hamilton, Trans. Roy. Irish Acad., т. 17 (1833), стр. 1.

³ H. Lloyd, Trans. Roy. Irish Acad., т. 17 (1833), стр. 145.

⁴ A. Fresnel, Oeuvres, т. 2, стр. 438.

Динамические представления о механизме колебаний эфира привели Френеля к выводу названных (его именем) законов относительно интенсивности и поляризации, возникающих при отражении и преломлении лучей¹.

Работы Френеля дали волновой теории такую прочную базу, что казалось почти излишним предпринимать *experimentum crucis*. Последний, предложенный еще Араго, был выполнен в 1850 г. Леоном Фуко (Léon Foucault, 1819—1868). Именно, корпускулярная теория объясняет преломление как притяжение световых частиц, находящихся на границе двух сред, к среде, оптически более плотной, откуда следует большая скорость в такой среде; волновая теория, напротив, требует согласно принципу Гюйгенса в средах, оптически более плотных, соответственно меньших скоростей. Непосредственное измерение скорости света в воздухе и воде однозначно решило вопрос в пользу волновой теории.

Следующее десятилетие было посвящено созиданию учения об упругих колебаниях (см. примеч. 2 в конце текста) эфира. Первый шаг состоял в установлении теории упругости твердых тел. Навье (Claude Louis Marie Henry Navier, 1785—1836)² создал такую теорию на основе представления, что тела состоят из бесчисленного множества частиц (материальных точек, атомов), взаимодействующих между собой посредством центральных сил. Обычный в настоящее время вывод уравнений упругости на основе гипотезы непрерывности был дан Коши³ (Augustine Louis Cauchy, 1789—1857). В создании оптической теории участвовали затем Пуассон (Siméon Denis Poisson, 1781—1840)⁴, Грин (George Green, 1793—1841)⁵, Мак Келла (James MacCullagh, 1809—1847)⁶, Нейман (Franz Neumann, 1798—1895)⁷ и другие. В настоящее время рассматривать в отдельности все эти теории и связанные с ними трудности уже не стоит. Все эти трудности возникали из требования объяснить оптические явления из механических; от этой цели уже давным-давно отказались. Мы ограничимся следующим указанием: рассмотрим граничащие между собой два упругих твердых тела и примем, что в одном из них к плоскости раздела приходит поперечная волна; во второй среде она должна по законам механики обязательно разделяться на поперечную и продольную волны. Так как, однако, опытами Френеля и Араго продольные волны в оптике исключаются, то упругие продольные волны должны поглощаться, а между тем этого нельзя допустить, не нарушив законов механики, именно — граничных

¹ A. Fresnel, Oeuvres т. 1, стр. 767.

² C. L. M. H. Navier, Mém. de l'Acad., т. 7, стр. 375 (представлено в 1821, опубликовано в 1827 г.).

³ A. L. Cauchy, Exercices de Mathématique, т. 3 (1828), стр. 160.

⁴ S. D. Poisson, Mém. de l'Acad., т. 8 (1828), стр. 623.

⁵ G. Green, Trans. Camb. Phil. Soc. 1838; Math. Papers, стр. 245.

⁶ J. MacCullagh, Philos. Mag. (3), т. 10 (1837), стр. 42, 382; Proc. Roy. Irish Acad., т. 18 (1837).

⁷ F. Neumann, Abh. Berl. Akad. Math. Kl. (1835), стр. 1.

условий для деформаций и напряжений. Различные теории названных выше авторов отличаются предположениями относительно граничных условий, которые всегда в чем-либо противоречат механике.

Простейшим возражением против изображения эфира как твердого тела является вопрос: как нужно себе представлять, что в такой среде могут двигаться без заметного сопротивления планеты с их большими скоростями? Стокс (George Gabriel Stokes, 1819—1903) думал, что эту трудность можно устранить ссылкой на чрезвычайную малость скоростей планет по сравнению со скоростями частиц эфира, имеющими место при световых колебаниях. Известно, что такие тела, как смола или сургуч, хотя они и способны быстро колебаться, однако оказываются весьма податливыми при медленной нагрузке. Теперь подобные дискуссии нам представляются излишними, так как мы не признаем уже более необходимости давать для всех процессов природы механическую картину.

Первый шаг по пути отказа от представления упругого эфира был сделан Мак-Келлохом¹. Он предложил среду со свойствами, не соответствующими свойствам обычных тел; именно, в то время как в последних при деформации элементов объема энергия накапливается, а при вращении — не накапливается, в эфире Мак-Келлога должно иметь место как раз обратное. Законы распространения волн в подобной среде оказываются в высокой степени сходными с уравнениями электромагнитных волн Максвелла, являющимися ныне основанием оптики.

Несмотря на все трудности, учение об упругом эфире сохранялось долгое время, и все выдающиеся физики XIX века способствовали его развитию. Кроме названных выше ученых, следует упомянуть еще Вильяма Томсона (лорда Кельвина) [William Thomson (Lord Kelvin), 1824—1908]², Карла Неймана (Carl Neumann 1832—1925)³, Струта (лорда Релей) [John William Strutt (Lord Rayleigh) 1842—1919]⁴, Кирхгофа (Gustav Kirchhoff 1824—1887)⁵. Оптика развивалась в это время во многих своих деталях, — однако основы ее оставались неудовлетворительными.

Между тем, в значительной степени независимо от оптики, развивалось учение об электричестве и магнетизме, достигшее кульминационной точки в открытиях Фарадея⁶ (Michael Faraday,

1791—1867). Максвеллу (James Clerk Maxwell, 1831—1879) удалось объединить все опытные данные в систему математических уравнений¹, откуда в качестве важнейшего следствия вытекает возможность существования электромагнитных волн, скорость которых на основании чисто электрических измерений Кольрауша и Вебера² (Rudolph Kohlrausch, 1809—1858; Wilhelm Weber, 1804—1890) была найдена равной скорости света. Это привело Максвелла к утверждению, что световые волны являются волнами электромагнитными. Непосредственное экспериментальное доказательство существования электромагнитных волн было осуществлено в 1888 г. Герцем³ (Heinrich Hertz, 1857—1894). Однако максвелловская электромагнитная теория света выдержала долгую борьбу, прежде чем она достигла неограниченного господства. Такова уж особенность человеческого ума — крайне неохотно отказываться от привычных представлений, в особенности если при этом приходится приносить в жертву наглядность. Даже сам Максвелл пытался сделать понятным свое электромагнитное поле при помощи механизма — стремление, сохранявшее силу еще долгое время. Только привычность максвелловских понятий заставила постепенно отказаться от этого желания „механического объяснения“. Теперь уже не составляет более никакой трудности представить себе максвелловское поле как сущность, не сводимую к простейшему. Электромагнитная теория должна объединять в одно целое совокупность результатов физических исследований (см. примечание 2 в конце книги).

Однако и электромагнитная теория света имеет границы своей применимости. Она в состоянии объяснить в основном все явления, относящиеся к распространению света, но она отказывается служить в случае процессов испускания и поглощения света. Речь идет о процессах, при которых следует рассматривать более тонкое взаимодействие материи со световым полем.

Законы этих процессов — основной предмет новейшей оптики да и всей современной физики. Их исходная точка лежит в открытии закономерных явлений в спектрах; первым шагом было отыскание Фраунгофером (Josef Fraunhofer, 1787—1826) темных линий в солнечном спектре⁴ (1814—1817), названных его именем, и (1861) истолкование их на основании наблюдений Бунзена (Robert Wilhelm Bunsen, 1811—1899) и Кирхгофа⁵, как линий поглощения (охлажденными газами, которые находятся перед внут-

¹ MacCullagh, Trans. Roy. Irish. Acad., т. 21; Coll. Works, Dublin (1880) стр. 145.

² W. Thomson, Phil. Mag. (5) т. 26 (1888), стр. 414. Baltimore Lectures, London, 1904.

³ C. Neumann, Math. Ann., т. 1 (1869), стр. 325, т. 2 (1870), стр. 182.

⁴ J. W. Strutt (Lord Rayleigh), Philos. Mag. (4), т. 41 (1871), стр. 519, т. 42 (1871), стр. 81.

⁵ G. Kirchhoff, Berl. Abh. Abteil. 2 (1876), стр. 57; Ges. Abh., стр. 352; Berl. Ber. 1882, стр. 641; Pogg. Ann. Phys. u. Chem. (2), т. 18 (1883), стр. 663; Ges. Abh., Nachtrag, стр. 22.

⁶ M. Faraday, Experimental Researches in Electricity. London, 1839.

¹ J. C. Maxwell, Electricity and Magnetism, Oxford, 1873.

² R. Kohlrausch, u. W. Weber Pogg. Ann. Phys. u. Chem. (2), т. 99 (1856), стр. 10.

³ H. Hertz, Pogg. Ann. Phys. u. Chem. (2) т. 34 (1888), стр. 551; Berl. Ber. 1888, стр. 197; Werke, т. 2, стр. 115.

⁴ J. Fraunhofer, Gilberts Ann., т. 56 (1817), стр. 264. Вспомним, что до Фраунгофера еще в 1802 г. Воластон (W. H. Wollaston) наблюдал черные линии в солнечном спектре, но неверно их истолковал (Philos. Trans. Roy. Soc., Lond., 1802), стр. 365.

⁵ R. Bunsen und G. Kirchhoff, Untersuchungen über das Sonnenspektrum und die Spektren der chemischen Elemente. Abh. Kgl. Akad. Wiss., Berlin, 1861, 1863.

ренной частью солнца, называемой солнечным телом, с ее непрерывным спектром). Это открытие было вместе с тем моментом рождения спектрального анализа, который основан на том факте, что каждому газообразному химическому элементу принадлежит характерный для него линейчатый спектр.

Изучение этих спектров представляет с тех пор вплоть до настоящего времени один из главных предметов физического исследования и, так как оно имеет своим объектом свет и в нем применяются оптические методы, то его обычно рассматривают, как часть учения о свете. Однако вопрос о том, как возникает и уничтожается свет в атомах, уже не является в сущности чисто оптическим, — он в равной мере относится и к механике самих атомов, а законы спектральных линий выявляют не столько характерные свойства света, сколько структуру излучающих частиц. Вся спектроскопия поэтому развилась в отдельную область, представляющую экспериментальное основание для атомной и молекулярной физики. Объем этой области и своеобразие применяющихся к ней методов делают невозможным ее изложение в настоящей книге.

Что касается методов, то было показано, что для описания атомных процессов обычная классическая механика оказывается недостаточной; ее место заняла квантовая теория, открытая в 1900 г. Планком (Max Planck, род. в 1858 г.). Применение ее к атомной структуре привело Бора (Niels Bohr, род. в 1885 г.) к выяснению простых законов линейчатых спектров газов (1913). Отсюда, а также из накопившихся наблюдений возникла современная квантовая механика [Гейзенберг (Heisenberg), Де-Бройль (de Broglie), Шредингер (Schrödinger), 1925]. Благодаря ей мы глубоко проникли в строение атомов и молекул¹.

Однако и на представление о самом свете квантовая механика также оказала воздействие. Уже в первоначальной формулировке Планка было утверждение, грубо противоречащее классическим представлениям, а именно утверждение о том, что колеблющаяся электрическая система отдает свою энергию электричес-

¹ Для более подробного изучения укажем на такие учебники как А. Sommerfeld, *Atombau und Spektrallinien*, 5 изд. Braunschweig, 1931 (Имеется русский перевод первой части. *Прим. перев.*); *Wellenmechanischer Ergänzungsband*, Braunschweig 1929. (Есть русский перевод. *Прим. перев.*); E. Bloch, *L'ancienne et la nouvelle théorie des quanta*. Paris, 1930; M. Born, *Vorlesungen über Atommechanik*, Berlin, 1925; M. Born und P. Jordan, *Elementare Quantenmechanik*, Berlin, 1930; E. Schrödinger, *Abhandlungen zur Wellenmechanik*, 2 изд. Leipzig, 1928; N. Heisenberg, *Die physikalischen Prinzipien der Quantentheorie*, Leipzig, 1930. (Есть русский перевод. *Прим. перев.*); L. de Broglie, *Einführung in die Wellenmechanik*, Leipzig, 1929. (Есть русский перевод. *Прим. перев.*); J. Frenkel, *Einführung in die Wellenmechanik*, Berlin, 1929. (Есть русское издание 1 часть. *Прим. перев.*); A. March, *Die Grundlagen der Quantenmechanik*, Leipzig, 1931. (Есть русский перевод. *Прим. перев.*); P. A. M. Dirac, *Die Prinzipien der Quantenmechanik* (deutsch von W. Bloch), Leipzig, 1930. (Есть русский перевод. *Прим. перев.*); H. Weyl, *Gruppentheorie und Quantenmechanik*, 2 изд. Leipzig, 1931; E. Wigner, *Gruppentheorie und Atomspektren*, Braunschweig, 1931; B. L. van der Waerden, *Die gruppentheoretische Methode in der Quantenmechanik*, Berlin, 1932.

кому полю в виде волн или получает ее от него не непрерывно, но прерывно, конечными порциями или „квантами“, величина которых должна быть пропорциональна частоте ν света, т. е. $\epsilon = h\nu$. Введенная здесь так называемая постоянная Планка $h = 6,55 \cdot 10^{-27}$ эрг. сек. является признаком, отличающим всю новую физику от старой.

Парадоксальность, более того, иррациональная природа этого положения Планка $\epsilon = h\nu$ дошла до сознания физиков лишь постепенно, главным образом благодаря трудам Эйнштейна и Бора. Теория Планка побудила Эйнштейна переработать теорию излучения света, приняв существование планковских квантов энергии как истинных световых частиц, называемых также „световыми квантами“, или „фотонами“; ему удалось при помощи этого предположения объяснить некоторые, открытые в недавнее время и необъяснимые с точки зрения волновой теории, явления обмена энергией между светом и частицами — прежде всего так называемый фотоэлектрический эффект и основные явления фотохимии. В этой группе явлений энергия, отдаваемая светом выбрасываемой частице, не является пропорциональной его интенсивности, как это должно было бы быть согласно волновой теории, — напротив, в этом случае свет действует как поток снарядов, причем энергия, получаемая вторичными частицами, зависит не от интенсивности, а только от частоты света (по закону $\epsilon = h\nu$). Число экспериментов, устанавливающих это свойство, из года в год увеличивалось, и создалось такое положение вещей, что приходилось признать одновременную справедливость волновой и корпускулярной теорий света, причем первую подтверждали экспериментально интерференционные явления, а вторую — фотоэлектрическое испускание частиц. Это парадоксальное положение дела до известной степени разъяснилось лишь в последние годы благодаря развитию квантовой механики (глава VIII, § 90), конечно, только при отказе от основного принципа старой физики, именно от принципа причинности в форме детерминизма.

Полное объяснение этого соотношения является задачей будущей оптики, которая еще отнюдь не создана, хотя в настоящее время и установлены некоторые основные ее черты. Настоящая книга приводит в своем заключительном параграфе к постановке вопроса об этой будущей оптике.

В этой книге отсутствует обширная отрасль оптики, которая, подобно квантовой теории, развилась в самостоятельную область большого охвата, именно, учение об оптике движущихся тел. Первым из наблюдавших явления такого рода является aberrация света неподвижных звезд, из которой Брайлей (James Bradley, 1692 — 1762) смог определить скорость света. Выше мы упомянули о несколько ином из относящихся сюда явлений. Френель первый задумался над вопросом об увлечении света движущимися телами; он указал, что дело происходит так, как если бы световой эфир участвовал в движении

со скоростью, представляющей только часть скорости тела; Физо затем проверил экспериментально это увлечение света на текущей воде. Влияние движения источника и наблюдателя было сформулировано Допплером (Christian Doppler 1803—1853) в известном принципе, названном его именем. Пока упругостная теория света была в силе, а точность измерений была очень ограниченной, френелевская идея частичного увлечения была достаточна для объяснения всех явлений. Но электромагнитная теория света натолкнулась на принципиальные трудности. Герц сделал первую попытку обобщить законы Максвелла на движущиеся тела. Его формула находилась, однако, в противоречии с некоторыми электромагнитными и оптическими экспериментами. Большое значение приобрела теория Лорентца (Hendrik Antoon Lorentz 1853—1928); он принимал за носителя электромагнитного поля „абсолютно покоящийся“ эфир и сводил свойства материальных тел к взаимодействию элементарных электрических частиц — электронов. Он смог показать, что отсюда получается в точности френелевский коэффициент увлечения и что вообще все известные в то время явления разъясняются этой гипотезой. Однако чудовищное повышение точности измерения при определении светового пути благодаря интерферометру Майкельсона (Albert Abraham Michelson 1852—1931) привело к новому противоречию: не удалось доказать эфирного ветра, требующегося по теории „неподвижного эфира“. Разъяснение дал Эйнштейн (Albert Einstein, род. в 1879 г.) своей теорией относительности. Она основывалась на критике понятий времени и пространства и приводила к отказу от геометрии Евклида и от понятия одновременности. Ее дальнейшее развитие в так называемую общую теорию относительности привело к новому пониманию гравитационных явлений через „геометризацию“ пространственно-временного многообразия. Все это требует применения особых математических и физических методов, которые, хотя и заходят в область оптики, однако могут быть безболезненно из нее выделены. Число оптических явлений, в которых движение тела (т. е. источника света) играет действительно существенную роль, довольно незначительно. В настоящей книге мы столкнемся с этим только в одном месте (при применении принципа Допплера к расширению спектральных линий, глава VIII, § 86, 92). Вообще же для изучения этих особых процессов мы указываем на литературу по теории относительности¹.

¹ Вводная литература: М. Born, Die Relativitätstheorie Einsteins. 3 изд., 1922. (Есть русский перевод. *Прим. перев.*); А. S. Eddington, Raum, Zeit, Schwere, Braunschweig, 1923. (Есть русский перевод. *Прим. перев.*); H. Weyl, Raum, Zeit, Materie, Vorlesungen über Relativitätstheorie, 5. Aufl. Berlin, 1923; M. v. Laue, Das Relativitätsprinzip, т. I, 2 изд. 1913, т. II, 2 изд. 1923, Braunschweig; W. Pauli, Relativitätstheorie, Enzyklopädie der Mathematischen Wissenschaften, т. 5, 2; также отдельной брошюрой: А. S. Eddington, Relativitätstheorie in mathematischer Behandlung, Berlin, 1925. (Есть русский перевод. *Прим. перев.*). Август Конф, Основы теории относительности Эйнштейна, пер. с нем. Гостехиздат 1933 (*Прим. ред.*).

В заключение введения укажем на то, что воздействие света на наш орган чувства — глаз в этой книге не будет обсуждаться вовсе. Сам глаз является, правда, оптическим прибором и о его простейших свойствах будет при случае (в геометрической оптике и в теории дифракции главы II и IV) вкратце сказано. Но ощущения цветов принадлежат к физиологии. Физика в основном имеет дело только с такими оптическими явлениями, которые могут быть проверены независимо от глаза, физическими способами, как то: фотографической пластинкой, фотоэлектрическим элементом или иными тому подобными средствами; что касается связи с физиологической оптикой, то мы укажем на соответствующие учебники и руководства.¹

¹ Изложение физиком зрительных ощущений можно найти в сочинениях Müller-Pouillet том 2, I, II изд. Braunschweig 1926. Статьи Schrödinger'a, III. Die Gesichtsempfindung, § 21—64, стр. 456—560.

Глава первая

ЭЛЕКТРОМАГНИТНАЯ ТЕОРИЯ СВЕТА ДЛЯ
ПРОЗРАЧНЫХ ИЗОТРОПНЫХ ТЕЛ БЕЗ ЦВЕТО-
РАССЕЯНИЯ§ 1. УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА¹

Состояние эфира определяется двумя векторами:
напряженностью электрического поля \mathcal{E} ,
напряженностью магнитного поля \mathcal{H} .

Для описания состояния материи требуются, кроме того, еще три вектора:

плотность тока проводимости i ,
диэлектрическое смещение \mathcal{D} ,
магнитная индукция \mathcal{B} .

При этом \mathcal{E} , \mathcal{D} , i — полярные, а \mathcal{H} и \mathcal{B} — аксиальные векторы. Пространственно временные изменения этих векторов связаны уравнениями Максвелла²

$$\left. \begin{aligned} \text{rot } \mathcal{H} - \frac{1}{c} \frac{d\mathcal{D}}{dt} &= \frac{4\pi}{c} i, & (a) \\ \text{rot } \mathcal{E} + \frac{1}{c} \frac{d\mathcal{B}}{dt} &= 0, & (b) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

сюда прибавляются еще два скалярные соотношения:

$$\left. \begin{aligned} \text{div } \mathcal{D} &= 4\pi \rho, & (a) \\ \text{div } \mathcal{B} &= 0, & (b) \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

первое из которых определяет плотность электрических зарядов, тогда как второе выражает тот факт, что истинный магнетизм не существует.

Что касается употребляемых единиц, то ρ , i , \mathcal{E} , \mathcal{D} будут измеряться в электростатической системе, а \mathcal{H} и \mathcal{B} — в магнитостатической системе единиц; c тогда является константой в законе Био-Савара, имеющей размерность скорости, которую можно определить, как отношение единицы заряда в электромагнитной и электростатической системах (согласно Кольраушу

¹ В качестве введения в теорию Максвелла порекомендуем следующие книги: М. Abraham, Theorie der Elektrizität, заново переработанная Becker'ом, Leipzig, 1930; М. Planck, Einführung in die Theorie der Elektrizität und des Magnetismus, Leipzig, 1922. (Есть русское издание. Прим. перев.); J. Frenkel, Lehrbuch der Elektrodynamik, Berlin т. 1, 1926, т. 2, 1928. (Есть русский перевод. Прим. перев.); И. Е. Тамм, Основы теории электричества ШЗ. 1929; 2-е изд. Гостехиздат 1932; на укр. языке Держтехвидав 1933; В. К. Фредерикс, Электродинамика и введение в теорию света КУБУЧ 1934 (Прим. ред.).

² Здесь, как и в дальнейшем, точка над буквой обозначает производную от соответствующей величины по времени.

и Веберу, см. историческое введение, стр. 11) и численное значение которой равно как раз $3 \cdot 10^{10}$ см сек⁻¹ (более точное численное значение см. в § 4).

Из (1a) и (2a) следует:

$$\text{div } i = -\frac{1}{4\pi} \text{div } \frac{d\mathcal{D}}{dt} = -\frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{4\pi} \text{div } \mathcal{D} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

или

$$\text{div } i + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0. \quad (3)$$

Это — уравнение непрерывности для электрического заряда. Интегрирование по произвольному пространству дает согласно теореме Гаусса:

$$\int i, d\sigma + \frac{d}{dt} \int \rho dS = 0,$$

где dS обозначает элемент объема, $d\sigma$ — элемент поверхности, а ν — внешнюю нормаль. Это уравнение говорит, что весь заряд, находящийся в данной части пространства

$$e = \int \rho dS \quad (4)$$

может увеличиться лишь в том случае, если ток с силой

$$J = \int i, d\sigma \quad (5)$$

пройдет через окружающую его поверхность:

$$\frac{de}{dt} = -J. \quad (6)$$

Два векторных уравнения (1a, b) недостаточны для определения пяти векторов \mathcal{E} , \mathcal{H} , i , \mathcal{D} , \mathcal{B} ; они должны быть дополнены соотношениями, отображающими поведение материи под действием поля; эти соотношения мы будем называть *материальными уравнениями*. В них входит все, что зависит от строения материи; речь идет, таким образом, в общем случае о в высшей степени запутанных соотношениях. Построение нашего изложения будет определяться тем, что, начиная от веществ с простейшими материальными уравнениями, мы будем восходить к веществам с уравнениями все более сложными (см. примечание 4).

Мы начнем с рассмотрения *однородного изотропного тела*; при этом можно описать большую группу явлений, положив:

$$\left. \begin{aligned} i &= c\mathcal{E}; & (a) \\ \mathcal{D} &= \epsilon\mathcal{E}; & (b) \\ \mathcal{B} &= \mu\mathcal{H}; & (c) \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

здесь мы пользуемся тремя материальными константами:

- σ — удельная проводимость,
- ϵ — диэлектрическая постоянная,
- μ — магнитная проницаемость.

Уравнение (7a) представляет закон Ома в дифференциальной форме; (7b) резюмирует опытные исследования емкости конденсаторов с различными изотропными изоляторами; (7c) описывает поведение изотропных пара- и диамагнитных тел.

Законы распространения света сперва изучались на таких телах, в которых свет может проходить слои большой толщины без заметного ослабления; эти *прозрачные вещества* должны быть непроводниками электричества, потому что проводимость всегда связана с развитием джоулева тепла и вследствие этого с потерей энергии (см. § 2). Поэтому мы начнем со случая *изотропных непроводников* и положим $\sigma = 0$ (главы I—IV). Прежде чем затем перейти к рассмотрению проводников, мы отбросим предположение об изотропии; этим самым мы придем к *кристаллической оптике*, в которой вместо пропорциональности (7) имеют место общие линейные векторные уравнения (глава V).

Предварительное изучение кристаллической оптики открывает возможность сознательного изучения многочисленных измерительных аппаратов, которые понадобятся нам позже, прежде всего в оптике металлов. *Оптика металлов* занимается рассмотрением световых волн в проводящих телах (глава VI).

Во всех этих главах вещество трактуется как непрерывная среда. Но для большого числа явлений — во всех случаях, когда имеет влияние температура или когда внешние силы вызывают отклонения от изотропии, — необходимо принимать в расчет молекулярное строение тела. Это происходит прежде всего потому, что отдельную молекулу следует рассматривать некоторым образом как анизотропное тело, а затем уже производить усреднение, соответствующее температуре и внешним силам. Таково содержание главы по *молекулярной оптике* (глава VII).

Последняя глава — об *испускании, поглощении, дисперсии* — трактует явления, частично уже выходящие за рамки этой книги, так как при этом необходимо в большей степени принимать в рассмотрение внутреннее строение атомов и молекул. Можно, однако, и без перехода к квантовой теории сделать понятными еще многие явления; основная идея заключается в том, что принимается во внимание „инерция“ материальных частиц при резонансных колебаниях в световом поле, и это приводит к характерному видоизменению материальных уравнений (зависимость всех констант от частоты).

Изложив эту программу, обратимся опять к нашему предмету.

§ 2. ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ ЭНЕРГИИ

Интенсивность света с точки зрения электромагнитной оптики является ни чем иным как энергией поля. Поэтому необходимо

вспомнить формулировку закона сохранения энергии в теории Максвелла.

Полная энергия E электромагнитного поля, заключенная в некоторой части пространства, состоит из *электрической и магнитной энергии*:

$$E = \int U dS + \int T dS; \quad (1)$$

при этом плотности энергий определяются выражениями:

$$U = \frac{1}{8\pi} \mathcal{E}^2, \quad (2)$$

$$T = \frac{1}{8\pi} \mathfrak{H}^2; \quad (3)$$

их сумму мы обозначим через:

$$W = U + T = \frac{1}{8\pi} (\mathcal{E}^2 + \mathfrak{H}^2) = \frac{1}{8\pi} (\epsilon \mathcal{E}^2 + \mu \mathfrak{H}^2) \quad (4)$$

и тогда будем иметь:

$$E = \int W dS. \quad (5)$$

Развивающееся в единицу времени в рассматриваемой части пространства *джоулево тепло* Q равно:

$$Q = \int i \mathcal{E} dS = \int \sigma \mathcal{E}^2 dS. \quad (6)$$

Кроме потери из-за образования тепла, уменьшение энергии происходит также еще вследствие излучения через поверхность; последнее определяется *вектором излучения Пойнтинга*:

$$\mathcal{S} = \frac{c}{4\pi} \mathcal{E} \times \mathfrak{H}. \quad (7)$$

Мы покажем теперь, что на основании уравнений Максвелла изменение энергии в самом деле компенсируется возникающим теплом и излучением.

Согласно (4) и (5) имеем:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} \int W dS = \frac{1}{8\pi} \frac{\partial}{\partial t} \int (\epsilon \mathcal{E}^2 + \mu \mathfrak{H}^2) dS = \frac{1}{4\pi} \int (\epsilon \mathcal{E} \dot{\mathcal{E}} + \mu \mathfrak{H} \dot{\mathfrak{H}}) dS.$$

Из уравнений Максвелла § 1 (1a и b) в результате скалярного умножения на \mathcal{E} и \mathfrak{H} получается:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{c} \mathcal{E} \dot{\mathfrak{H}} &= \frac{e}{c} \mathcal{E} \mathcal{E} = \mathcal{E} \operatorname{rot} \mathfrak{H} - \frac{4\pi}{c} i \mathcal{E}, \\ \frac{1}{c} \mathfrak{H} \dot{\mathcal{E}} &= \frac{\mu}{c} \mathfrak{H} \dot{\mathcal{E}} = -\mathfrak{H} \operatorname{rot} \mathcal{E}. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Применение векторного тождества

$$\mathcal{E} \operatorname{rot} \mathfrak{F} - \mathfrak{F} \operatorname{rot} \mathcal{E} = -\operatorname{div} (\mathcal{E} \times \mathfrak{F}) \quad (9)$$

дает таким образом:

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= \frac{c}{4\pi} \int (\mathcal{E} \operatorname{rot} \mathfrak{F} - \mathfrak{F} \operatorname{rot} \mathcal{E}) dS - \int i\mathcal{E} dS = \\ &= -\frac{c}{4\pi} \int \operatorname{div} (\mathcal{E} \times \mathfrak{F}) dS - \int i\mathcal{E} dS. \end{aligned}$$

Применяя к первому интегралу в правой части теорему Гаусса, получаем, приняв во внимание определения (6) и (7):

$$\frac{dE}{dt} = - \int \mathcal{E} \cdot d\mathbf{s} - Q; \quad (10)$$

это уравнение и представляет закон сохранения энергии.

При этом выводе мы принимали материальные уравнения в частной форме § 1 (7). Поэтому при каждом обобщении этих материальных уравнений мы будем заново исследовать, какую форму принимает закон энергии, если только это не будет явно излишним.

§ 3. РАСПРОСТРАНЕНИЕ ПЛОСКИХ ВОЛН

Пусть определенное направление в пространстве будет задано единичным вектором \mathfrak{s} . Если r есть радиус-вектор, составляющими которого в прямоугольной координатной системе суть сами координаты x, y, z , то

$$r\mathfrak{s} = \text{const} \quad (1)$$

есть уравнение плоскости, перпендикулярной к \mathfrak{s} (фиг. 1).

Если поле в каждый определенный момент времени меняется только в направлении \mathfrak{s} , оставаясь постоянным в каждой из плоскостей (1), причем такое состояние перемещается с постоянной скоростью c_1 в направлении \mathfrak{s} , то мы имеем дело с *плоской волной*. Плоскость (1) называется *плоскостью постоянных фаз*, или *фазовой плоскостью*; так как она движется со скоростью c_1 , то всем точкам, удовлетворяющим уравнению

$$r\mathfrak{s} - c_1 t = \text{const}, \quad (2)$$

соответствуют одни и те же значения векторов поля; поэтому последние являются функциями только одного аргумента $r\mathfrak{s} - c_1 t$. Следовательно, плоская волна изображается формулами:

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{E} &= \mathcal{E}(r\mathfrak{s} - c_1 t), \\ \mathfrak{F} &= \mathfrak{F}(r\mathfrak{s} - c_1 t). \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Зададим теперь вопрос: могут ли в изотропном непроводнике ($\sigma = 0$) с материальными уравнениями § 1 (7b, c) распространяться подобные волны? Из $\sigma = 0$ следует, что $i = 0$, а также из § 1 (3), что $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$; если мы не будем принимать во внимание

постоянное во времени (статическое) распределение зарядов, то мы сможем также принять, что $\rho = 0$.

Вопрос сводится, следовательно, к тому, совместимо ли выражение (3) с уравнениями Максвелла:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{rot} \mathfrak{F} - \frac{\varepsilon}{c} \mathcal{E} &= 0, \\ \operatorname{rot} \mathcal{E} + \frac{\mu}{c} \mathfrak{F} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Согласно (3) \mathcal{E} и \mathfrak{F} — функции одного аргумента $u = r\mathfrak{s} - c_1 t = x\mathfrak{s}_x + y\mathfrak{s}_y + z\mathfrak{s}_z - tc_1$; обозначим производные по u через \mathcal{E}' , \mathfrak{F}' . Тогда

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= -c_1 \mathcal{E}', \\ \operatorname{rot}_x \mathcal{E} &= \frac{\partial \mathcal{E}_y}{\partial y} - \frac{\partial \mathcal{E}_z}{\partial z} = \mathcal{E}'_y \mathfrak{s}_y - \mathcal{E}'_z \mathfrak{s}_z = -(\mathcal{E}' \times \mathfrak{s})_x. \end{aligned}$$

Таким образом в случае формул (3) уравнения (4) переходят в:

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}' \times \mathfrak{s} - \varepsilon \frac{c_1}{c} \mathcal{E}' &= 0, \\ \mathcal{E}' \times \mathfrak{s} + \mu \frac{c_1}{c} \mathfrak{F}' &= 0. \end{aligned}$$

Отсюда в результате скалярного умножения на \mathfrak{s} следует:

$$\mathcal{E}' \mathfrak{s} = 0, \quad \mathfrak{F}' \mathfrak{s} = 0.$$

Эти формулы можно также получить из уравнений непрерывности (2a, b) § 1 для $\rho = 0$.

Интегрирование по u можно немедленно выполнить, причем входящие в правую часть постоянные интегрирования можно принять равными нулю. Это означает, что мы не рассматриваем поля, постоянного в пространстве, налагающегося при волновых процессах. Таким образом мы будем иметь уравнения:

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{F} \times \mathfrak{s} - \varepsilon \frac{c_1}{c} \mathcal{E} &= 0, \\ \mathcal{E} \times \mathfrak{s} + \mu \frac{c_1}{c} \mathfrak{F} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

и

$$\mathcal{E} \mathfrak{s} = 0, \quad \mathfrak{F} \mathfrak{s} = 0. \quad (6)$$

Последние из этих формул физически означают „трансверсальность“ электрических и магнитных колебаний. Кроме того, из (5) в результате скалярного умножения первого уравнения на \mathfrak{E} или второго на \mathfrak{H} следует:

$$\mathfrak{E}\mathfrak{H} = 0. \quad (7)$$

Таким образом электрический и магнитный векторы перпендикулярны друг к другу. Согласно (5а) три вектора — \mathfrak{E} , \mathfrak{H} , \mathfrak{s} — составляют в данной последовательности правую систему.

Разлагая формулы (5) по составляющим, получаем шесть линейных однородных уравнений относительно шести составляющих \mathfrak{E} и \mathfrak{H} . Вообще они не являются совместными; таковыми они будут лишь в случае равенства нулю определителя. Это дает условие для скорости распространения c_1 . Проще всего его получить следующим образом: сперва исключается один из обоих векторов, например \mathfrak{H} ; из (5b) следует:

$$\mathfrak{H} = \frac{c}{c_1} \frac{1}{\mu} \mathfrak{s} \times \mathfrak{E}, \quad (8)$$

и тогда согласно (5а)

$$\mathfrak{E} = \frac{c}{c_1} \frac{1}{\varepsilon} \mathfrak{H} \times \mathfrak{s} = \frac{c^2}{c_1^2} \frac{1}{\varepsilon\mu} (\mathfrak{s} \times \mathfrak{E}) \times \mathfrak{s}.$$

Теперь согласно известному векторному тождеству

$$(\mathfrak{s} \times \mathfrak{E}) \times \mathfrak{s} = \mathfrak{E}(\mathfrak{s}\mathfrak{s}) - \mathfrak{s}(\mathfrak{E}\mathfrak{s}) = \mathfrak{E}$$

вследствие (6) и того, что $\mathfrak{s}\mathfrak{s} = 1$. Поэтому получаем вместо нашего определения уравнение:

$$\frac{c^2}{c_1^2} \frac{1}{\varepsilon\mu} = 1. \quad (9)$$

Теперь зависимость (8) между \mathfrak{E} и \mathfrak{H} принимает следующую форму:

$$\mathfrak{H} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \mathfrak{s} \times \mathfrak{E}; \quad (10)$$

отсюда вытекает симметричное соотношение:

$$\sqrt{\mu} |\mathfrak{H}| = \sqrt{\varepsilon} |\mathfrak{E}|, \quad (11)$$

которое вместе с соотношениями, определяющими направления, исчерпывает содержание уравнений Максвелла в применении к векторам поля в плоской волне.

Определим количество энергии, переносимое волной в единицу времени через элемент поверхности, перпендикулярный к направлению распространения \mathfrak{s} . Для этого рассмотрим цилиндр, ось которого параллельна \mathfrak{s} , а поперечное сечение равно элементу поверхности, — тогда вся энергия, заключенная в части

этого цилиндра длины c_1 пройдет в единицу времени через основание. Поток энергии будет, таким образом, иметь величину, равную $c_1 W$, где W — плотность энергии, определяемая из (4) § 2. Вследствие (11):

$$W = \frac{\varepsilon}{4\pi} \mathfrak{E}^2. \quad (12)$$

С другой стороны, для вектора излучения Пойнтинга (7) § 2 следует согласно (6) и (7):

$$\mathfrak{S} = \frac{c}{4\pi} \mathfrak{E} \times \mathfrak{H} = \frac{c}{4\pi} |\mathfrak{E}| \cdot |\mathfrak{H}| \cdot \mathfrak{s}$$

или согласно (11):

$$\mathfrak{S} = \frac{c}{4\pi} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \mathfrak{E}^2 \mathfrak{s}. \quad (13)$$

Согласно (12) и (9) получаем также:

$$\mathfrak{S} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}} W \cdot \mathfrak{s} = c_1 W \cdot \mathfrak{s}. \quad (14)$$

Таким образом вектор Пойнтинга совпадает по величине и по направлению с только что наглядно вычисленным потоком энергии; он может, следовательно, служить для представления светового излучения по интенсивности и по направлению.

Чтобы дать понятие о порядке величины электрических полей, входящих в световую волну, рассмотрим падающее на землю солнечное излучение. Количество теплоты, попадающей за 1 минуту от солнца (при его среднем удалении от земли) на 1 см^2 земной поверхности, перпендикулярной к излучению, при отсутствии поглощения в атмосфере, называется *солнечной постоянной*; ее величина составляет около $2,0 \text{ кал см}^{-2} \text{ мин}^{-1}$. Будучи пересчитано на секунды и эрги, это дает поток энергии:

$$|\mathfrak{S}| = \frac{2,0 \cdot 4,19 \cdot 10^7}{60} = 1,39 \cdot 10^6 \text{ эрг см}^{-2} \text{ сек}^{-1}.$$

Из (13) следует тогда при $\varepsilon = \mu = 1$:

$$\mathfrak{E}^2 = \frac{4\pi}{c} |\mathfrak{S}| = 5,83 \cdot 10^{-4},$$

$$|\mathfrak{E}| = 0,0242 \text{ эл. ст. ед.}$$

По закону Кулона $|\mathfrak{E}| = \frac{e}{r^2}$; это соответствует полю заряда в 1 эл. ст. ед. на расстоянии

$$r = \frac{1}{\sqrt{0,0242}} = 6,4 \text{ см.}$$

Заметим, что шар с радиусом в 1 см имеет по отношению к удаленным проводящим стенкам емкость, равную 1, — следовательно, при заряде в 1 эл. ст. ед. принимает потенциал, равный 1 эл. ст. ед. = 300 вольт; отсюда мы получаем некоторое представление о величине поля.

§ 4. ЗАКОН ПРЕЛОМЛЕНИЯ СНЕЛЛИУСА

Перейдем к обсуждению формулы (9) § 3, представляющей условие для скорости распространения волн c_1 .

Прежде всего видно, что в пустоте, где $\epsilon = \mu = 1$, $c_1 = c$. Измерения электродинамической постоянной c (о первом из таких измерений, произведенном Вебером и Кольраушем, мы упоминали во введении) дают в самом деле очень хорошее совпадение с прямыми измерениями скорости света. Мы не будем входить в обсуждение этих методов, так как они (по крайней мере, поскольку в рассмотрение входит распространение света в пустоте) не требуют никаких новых теоретических рассуждений, и сошлемся на учебники по экспериментальной физике. Упомянем только, что первое измерение скорости света с земным источником было выполнено в 1849 г. Физо по методу вращающегося зубчатого колеса. Лучший, употребляющийся и поныне, способ — способ вращающегося зеркала — был указан Фуко. Результаты новейших измерений следующие:

Электромагнитное измерение Грюнейзена и Гибе (Grüneisen, Giebe):

$$c = 299\,790 \text{ км сек}^{-1} \pm 30.$$

Измерение скорости света между горами Вильсон и Антонио (Калифорния) Майкельсона (1927):

$$c = 299\,796 \text{ км сек}^{-1} \pm 14.$$

Совпадение, таким образом, превосходное.

Для скорости света в иных средах справедливо согласно (9) § 3 соотношение:

$$\frac{c}{c_1} = \sqrt{\epsilon\mu}. \quad (1)$$

Так как ϵ всегда больше единицы, а μ незначительно отличается от единицы в случае прозрачных тел, то, следовательно, $c_1 < c$. Фуко, как упоминалось во введении, непосредственно измерял скорость света в воде, и она, действительно, оказалась меньшей, чем в пустоте (практически в воздухе), как этого и требует волновая теория.

Точное определение c_1 производится, однако, не непосредственно, а из сравнения с c при помощи соотношения, получаемого из закона преломления. Чтобы это вывести, заметим, что какая-либо из составляющих поля будет определена, если известны ее значения в какой-нибудь единственной точке для

всех моментов времени. Именно, если $f(t)$ есть функция, представляющая процесс изменения этих значений, то функция $f\left(t - \frac{r\hat{s}}{c_1}\right)$ изображает волну в любой точке в любое время.

Если плоская волна падает на поверхность раздела двух веществ с различными скоростями света, то согласно эксперименту она распадается на отраженную и преломленную волны. Для этих вторичных волн и для падающей в каждой точке плоскости раздела, ход во времени колебательного процесса является идентичным; следовательно, аргумент $t - \frac{r\hat{s}}{c_1}$ волновой

функции для этих трех волн должен совпадать. Если мы примем границу за плоскость $z = 0$, то $(x\hat{s}_x + y\hat{s}_y) \cdot 1/c_1$ будет инвариантом и притом для всех точек x, y плоскости раздела; поэтому касательные составляющие $\hat{s}_x/c_1, \hat{s}_y/c_1$ вектора \hat{s}/c_1 являются, каждая в отдельности, инвариантами.

Рассмотрим теперь прежде всего отраженный луч; для него c_1 имеет то же значение, что и для падающего. Отсюда вытекает неизменность касательных составляющих самого вектора \hat{s} . В этом заключается, во-первых, закон, согласно которому нормаль к волне в отраженном луче лежит в плоскости падения, определяемой нормалью к поверхности раздела (осью z) и падающим лучом; во-вторых, из того обстоятельства, что \hat{s} есть единственный вектор, следует равенство значений \hat{s}_z для падающего и отраженного лучей и тем самым равенство углов падения и отражения.

Для преломленной волны следует, во-первых, что ее нормаль также лежит в плоскости падения. Если, далее, положим $\hat{s}_z = \cos \varphi$, то получим инвариантность $\frac{1}{c_1} \sqrt{\hat{s}_x^2 + \hat{s}_y^2} = \frac{1}{c_1} \sin \varphi$.

Если индекс 1 относится к падающему, а индекс 2 — к преломленному лучам, то имеет место закон преломления Снеллиуса:

$$\frac{\sin \varphi_1}{c_1} = \frac{\sin \varphi_2}{c_2}. \quad (2)$$

Отношение

$$n_{12} = \frac{\sin \varphi_1}{\sin \varphi_2} = \frac{c_1}{c_2} \quad (3)$$

называют *показателем преломления, или коэффициентом преломления*, для перехода из первой среды во вторую.

Если идет речь о переходе из пустоты в среду первую, то величину

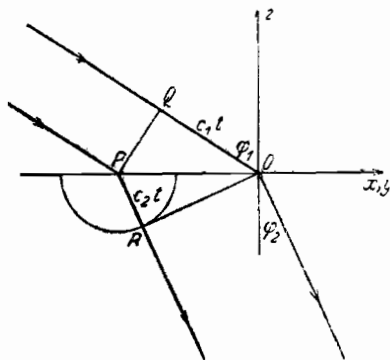
$$n = \frac{\sin \varphi}{\sin \varphi_1} = \frac{c}{c_1} \quad (4)$$

называют просто показателем преломления этой среды.

Тогда, если n_1 и n_2 являются показателями преломления двух сред, то имеет место соотношение:

$$n_{12} = \frac{n_2}{n_1}. \quad (5)$$

Фигура 2 показывает построение преломленной волны из элементарных сферических волн согласно *принципу Гюйгенса*. Пусть P — точка плоскости раздела, PQ — след проходящей через P волновой плоскости падающего света в плоскости падения, выбранной за плоскость чертежа.



Фиг. 2. Построение преломления по принципу Гюйгенса.

Для этой волновой плоскости требуется время t , чтобы при ее передвижении точка Q переместилась в точку O на поверхности раздела; тогда $QO = c_1 t$. В это время из точки P распространилась сферическая волна радиуса $c_2 t$. По Гюйгенсу огибающая поверхность всех таких элементарных волн, т. е. проведенная из O касательная к сфере плоскость, есть фронт преломленной волны; ее следом

на плоскости падения является касательная OR . Закон преломления (3) следует непосредственно из чертежа.

§ 5. ФОРМУЛА МАКСВЕЛЛА ДЛЯ ПОКАЗАТЕЛЯ ПРЕЛОМЛЕНИЯ

Мы можем теперь исследовать физическое содержание формулы (1) § 4; она выражает показатель преломления через электромагнитные постоянные среды. Так как все прозрачные тела почти не намагничиваются, то практически можно принять, $\mu = 1$, и тогда, сопоставляя (1) § 4 с (4) § 4, будем иметь

$$n = \sqrt{\epsilon}. \quad (1)$$

Это соотношение, установленное Максвеллом и названное его именем, побуждает к проверке электромагнитной теории света, так как диэлектрическая постоянная может быть определена из чисто электрических измерений. При этом мы тотчас же наталкиваемся на такое противоречие: в то время как ϵ есть материальная константа, показатель преломления n зависит от цвета, следовательно, от числа колебаний света. Значит, соотношение Максвелла никоим образом не может быть точным и лишь весьма приближенно может оправдываться для тех веществ, в которых согласно опыту n только весьма незначительно зависит от частоты света.

Это условие выполняется прежде всего для ряда газов простого химического строения. Больцман¹ (Boltzmann) вскоре после открытия Максвелла с возможной точностью измерил преломление такими газами. Таблица 1 дает извлечение из его результатов.

Таблица 1

	n	$\sqrt{\epsilon}$
Воздух	1,000 294	1,000 295
Водород H_2	138	132
Углекислота CO_2	449	473
Окись углерода CO	340	345

Можно видеть, что имеет место весьма хорошее совпадение.

Для некоторых жидких углеводородов это соотношение также в известной мере согласуется с опытом; так например, для бензола C_6H_6 получается:

$$n = 1,482, \quad \sqrt{\epsilon} = 1,489.$$

Однако оно оказывается неверным для многих жидких и твердых тел, как показывает таблица 2.

Таблица 2

	n	$\sqrt{\epsilon}$
Метиловый спирт CH_3OH . .	1,34	5,7
Этиловый спирт C_2H_5OH . .	1,36	5,0
Вода H_2O	1,33	9,0

Чем объясняются эти отклонения?

Они происходят, очевидно, вследствие допущения, что ϵ является константой; в этом скрыто предположение, что смещение \mathcal{D} в каждый момент времени в точности пропорционально электрическому полю \mathcal{E} . Предвосхищая соображения, которые позднее будут строго обоснованы (главы VII, VIII), положим, что \mathcal{D} разлагается на часть, соответствующую пустоте и непосредственно равную \mathcal{E} , и на часть $4\pi \mathcal{P}$, пропорциональную электрическому моменту единицы объема вещества \mathcal{P} :

$$\mathcal{D} = \mathcal{E} + 4\pi \mathcal{P}.$$

¹ L. Boltzmann, Wien. Ber., т. 69 (1874), стр. 795; Pogg. Ann., т. 155 (1875), стр. 403; Wiss. Abh. phys.-techn. Reichsanst., т. 1, № 26, стр. 537.

Эта измеряемая при помощи \mathfrak{P} пространственная электризация возникает благодаря воздействию поля на вещество. Остановимся вкратце на механизме этого процесса. Атомы и молекулы состоят из положительных ядер и отрицательных электронов; они не только подвижны как целое, но также до известной степени деформируемы. Электрическое поле всегда будет вызывать подобную деформацию и таким образом возбуждать пропорциональный полю электрический момент (сумма произведений зарядов на перемещения). При этом, однако, различают два случая сообразно тому, перемещаются ли только электроны или также и ядра. Физический эффект благодаря большой разнице в массе электронов и ядер получается весьма различным, так как электрическое поле не является статическим, а колеблется.

Легкие электроны следуют почти мгновенно переменному электромагнитному полю до очень высоких частот; мы будем позднее, в теории дисперсии (глава VIII), подробнее изучать резонансное колебание электронов и увидим, что в большинстве случаев вверх до частот видимого спектра ощущаются лишь незначительные отклонения от мгновенного резонанса. Мы можем поэтому написать для части электрического момента, соответствующей исключительно электронным колебаниям:

$$\mathfrak{P}_1 = \frac{a}{4\pi} \mathfrak{E},$$

где a от совсем медленных колебаний вплоть до видимой области является почти постоянным.

Как только, однако, в движение вступают ядра, колебания электрического момента начинают отставать от колебаний возбуждающего поля уже при значительно меньшей частоте. Колебания видимого света оказываются уже столь быстрыми, что массы ядер вообще не могут уже более следовать за ними и остаются в покое. Если написать для этой части электрического момента

$$\mathfrak{P}_2 = \frac{b}{4\pi} \mathfrak{E},$$

то b будет функцией частоты, которая от своих значений при очень медленных колебаниях (статические поля) убывает до нуля в некотором определенном месте спектра еще перед видимой областью.

Движение ядра в электрическом поле может происходить в двух существенно различных формах—в форме колебаний и в форме вращений. В многоатомных молекулах и кристаллах возникают колебания ядер, если распределение заряда несимметрично; особенно важен здесь предельный случай, при кото-

ром молекулы или кристаллы можно мыслить состоящими из заряженных атомов (ионов)¹.

Но существует еще другой случай вращения, на который обратил внимание Дебай (Debye)². Именно, если молекулы жидкости или газа имеют природу „диполя“, т. е. если электрический центр тяжести электронов не совпадает с электрическим центром ядер, то молекулы стремятся повернуться в направлении поля. Правда, вполне параллельное направление вследствие теплового движения не достигается; введенная выше величина b будет здесь, очевидно, зависеть от температуры. Спектральная область, где вследствие инерции молекулы уже более не следуют за полем, лежит в окрестности длины волны в 1 см.

Теперь мы можем понять различное поведение тел в смысле справедливости максвелловского соотношения. Мы имеем:

$$\mathfrak{D} = \mathfrak{E} + 4\pi(\mathfrak{P}_1 + \mathfrak{P}_2) = (1 + a + b) \mathfrak{E};$$

значит,

$$\epsilon = 1 + a + b.$$

a является практически постоянным в области, начиная от совсем медленного колебания до видимой области, тогда как b либо вообще отсутствует, либо, если оно имеется налицо в статических полях, исчезает в видимой области. Для оптически измеряемого показателя преломления, таким образом, справедливо во всяком случае:

$$n^2 = 1 + a.$$

Следовательно, именно величина b , обуславливаемая движением ядра, вызывает отклонения от закона Максвелла; путем вычитания двух последних уравнений получаем:

$$\epsilon = n^2 + b.$$

Вследствие этого мы можем ожидать, что закон Максвелла будет действителен при полной невозможности движения. Таков, во-первых, случай одноатомных газов (благородные газы, которые ко времени установления закона еще не были известны, и пары металлов). Во-вторых, это имеет место при симметричных газовых молекулах, как то: N_2 , O_2 , H_2 . Сюда принадлежат исследованные Больцманом вещества—воздух и H_2 нашей табл. 1; углекислота также по новейшим исследованиям (Раман-эффект, см. главу VIII, § 100) симметрична, соответственно формуле $O-C-O$ (CO , напротив, имеет небольшой диполь). В-третьих, это свободные от диполей симметричные углеводороды, в качестве примера которых мы выше приводили бензол.

¹ Относительно этого смотреть более подробное изложение в главе VIII. Мы напомним здесь только о работах Рубенса (Rubens) об инфракрасных кристаллических колебаниях (остаточные лучи), а также Шефера (Schäfer) и его учеников относительно внутримолекулярных колебаний.

² Обзорное изложение: P. Debye, *Polarizability of Molecules*, Leipzig, 1929. (Есть русское издание. *Прим. перев.*)

Спирты имеют значительные диполи; наибольший из известных диполей имеет вода; благодаря этому становится понятной таблица 2.

Нижеследующая табл. 3 показывает влияние инфракрасных ядерных колебаний (остаточных лучей), открытых Рубенсом, для твердых тел (кристаллов солей).

Таблица 3

	ϵ	n	$\epsilon - n^2$
Каменная соль NaCl . .	5,82	1,52	3,51
Сильвин KCl	4,75	1,47	2,59
Плавиковый шпат CaF ₂ .	6,82	1,43	4,78

Эти рассуждения приводят к экспериментальной задаче путем применения все более длинноволнового света перекрыть критический район и достичь области, где формула $n^2 = 1 + a$ переходит в $n^2 = 1 + a + b = \epsilon$. Эта проблема полностью разрешена Рубенсом¹ для кристаллов путем использования тепловых лучей с длиной волны, превышающей 100 μ . Для дипольных жидкостей необходимо идти выше 1 см, т. е. в область волн Герца.

Мы видим, таким образом, что с некоторыми ограничениями утверждение Максвелла является действительным, — именно, для достаточно медленно переменного, «квазистатического» поля. Следовательно, фундамент электромагнитной теории света мы обеспечили.

§ 6. СКАЛЯРНАЯ ПРОСТАЯ ГАРМОНИЧЕСКАЯ ВОЛНА

Изменение во времени плоской волны в некоторой определенной точке пространства представляет для каждой векторной составляющей произвольную функцию времени $f(t)$. Существование интерференционных явлений, которые мы позднее (глава III) будем изучать подробнее, учит, что световые волны имеют ярко выраженный периодический характер. Мы заменим поэтому действительные колебания идеализированными, чисто периодическими; именно, достаточно рассмотреть *простые периодические* (гармонические) колебания формы:

$$f(t) = a \cos \left(2\pi \frac{t}{T} + \delta \right), \quad (1)$$

так как из них можно согласно теореме Фурье при помощи суммирования и интегрирования построить произвольную функцию. Кроме того, физические спектральные аппараты (призма, решетка) дают разложение света на пространственно разделенные лучи, являющиеся почти гармоническими.

¹ H. Rubens, Berl. Ber., 1915, стр. 5, 1916, стр. 1280; Ph. Liebisch und H. Rubens, Berl. Ber., 1919, стр. 198, 876.

Если в (1) заменить t через $t - r\bar{s}/c_1$, то согласно § 4 получим выражение *простой гармонической плоской волны*:

$$f\left(t - \frac{r\bar{s}}{c_1}\right) = a \cos \left[\frac{2\pi}{T} \left(t - \frac{r\bar{s}}{c_1} \right) + \delta \right]; \quad (2)$$

a называют *амплитудой*, T — (временным) *периодом*; пространственным периодом или *длиной волны* является величина:

$$\lambda = c_1 T. \quad (3)$$

Под *приведенной длиной волны* λ_0 понимают длину волны колебания того же периода T в пустоте:

$$\lambda_0 = cT = n\lambda. \quad (4)$$

Частотой или *числом колебаний* ν называется число колебаний в единицу времени (секунду); таким образом:

$$\nu T = 1. \quad (5)$$

Вместо этого числа колебаний, употребляют также *циклическую частоту*, или, короче, *частоту* ω , которая указывает число колебаний за 2π секунд:

$$\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}. \quad (6)$$

В спектроскопии большей частью употребляют вместо числа колебаний ν *волновое число* $\bar{\nu}$, т. е. число пространственных периодов на единицу длины (см) в пустоте; оно составляет:

$$\bar{\nu} = \frac{1}{\lambda_0} = \frac{\nu}{c}. \quad (7)$$

Весь аргумент под косинусом называется *фазой колебания*, δ — *фазовой постоянной*. Переменную часть фазы мы нередко будем обозначать через τ :

$$\tau = 2\pi\nu \left(t - \frac{r\bar{s}}{c_1} \right) = \omega \left(t - \frac{r\bar{s}}{c_1} \right) = 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{r\bar{s}}{\lambda} \right). \quad (8)$$

Вместо δ употребляется также *ход волны* Δ , т. е. путь, проходимый фазовой плоскостью при возрастании фазы на δ :

$$\Delta = \frac{c_1}{\omega} \delta = \frac{\lambda}{2\pi} \delta = \frac{\lambda_0}{2\pi n} \delta. \quad (9)$$

Физический смысл имеет только *разность хода* двух волн.

Часто бывает удобно вместо действительных косинуса или синуса употреблять комплексные гармонические функции. Мы полагаем:

$$a \cos(\tau + \delta) = \Re a e^{i(\tau + \delta)} = \Re A e^{i\tau}, \quad (10)$$

где

$$A = a e^{i\delta}. \quad (11)$$

При этом \Re обозначает действительную часть позади стоящей комплексной величины. A обозначает комплексную амплитуду.

Вычисления с комплексными величинами полезны и допустимы, пока приходится иметь дело с линейными зависимостями между ними; можно даже отбросить знак \Re и связывать физические интерпретации непосредственно с комплексными выражениями. Однако, коль скоро в волновые величины входят квадратичные (или выше) выражения, как например при законе энергии, необходимо переходить к действительной форме.

До сих пор мы говорили только о скалярной волне или о составляющих векторной волны. Теперь мы перейдем к рассмотрению векторных волн.

§ 7. ПРОСТЫЕ ГАРМОНИЧЕСКИЕ ВЕКТОРНЫЕ ВОЛНЫ. ЭЛЛИПТИЧЕСКАЯ ПОЛЯРИЗАЦИЯ

Векторную волну мы будем представлять в комплексной форме через:

$$\mathcal{E} = \mathcal{A} e^{i\tau}, \quad (1)$$

причем \mathcal{A} является комплексной амплитудой с составляющими

$$\mathcal{A}_x = a_1 e^{i\delta_1}, \quad \mathcal{A}_y = a_2 e^{i\delta_2}, \quad \mathcal{A}_z = a_3 e^{i\delta_3}. \quad (2)$$

Поэтому, например, x -составляющая \mathcal{E} в действительной форме равна:

$$\mathcal{E}_x = \Re a_1 e^{i(\tau + \delta_1)} = a_1 \cos(\tau + \delta_1).$$

Электромагнитные волны согласно § 3 трансверсальны; если мы выберем ось z в направлении распространения волны δ , то отличными от нуля будут лишь x и y — составляющие \mathcal{E} и \mathcal{H} . Нас интересует теперь кривая, описываемая концом вектора электрического поля, т. е. точкой с координатами:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_x &= a_1 \cos(\tau + \delta_1), \\ \mathcal{E}_y &= a_2 \cos(\tau + \delta_2), \\ \mathcal{E}_z &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

С этой целью исключим из (3) τ . Умножим уравнения

$$\left. \begin{aligned} \frac{\mathcal{E}_x}{a_1} &= \cos \tau \cos \delta_1 - \sin \tau \sin \delta_1 & \left| \begin{array}{cc} \sin \delta_2 & \cos \delta_2 \\ \sin \delta_1 & \cos \delta_1 \end{array} \right| \\ \frac{\mathcal{E}_y}{a_2} &= \cos \tau \cos \delta_2 - \sin \tau \sin \delta_2 & \left| \begin{array}{cc} \sin \delta_1 & \cos \delta_1 \\ \sin \delta_2 & \cos \delta_2 \end{array} \right| \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

на указанные справа множители и сложим; тогда, полагая

$$\delta = \delta_2 - \delta_1, \quad (5)$$

будем иметь:

$$\frac{\mathcal{E}_x}{a_1} \sin \delta_2 - \frac{\mathcal{E}_y}{a_2} \sin \delta_1 = \cos \tau \sin \delta,$$

$$\frac{\mathcal{E}_x}{a_1} \cos \delta_2 - \frac{\mathcal{E}_y}{a_2} \cos \delta_1 = \sin \tau \sin \delta.$$

Возводя в квадрат и складывая, получим:

$$\left(\frac{\mathcal{E}_x}{a_1} \right)^2 + \left(\frac{\mathcal{E}_y}{a_2} \right)^2 - 2 \frac{\mathcal{E}_x \mathcal{E}_y}{a_1 a_2} \cos \delta = \sin^2 \delta, \quad (6)$$

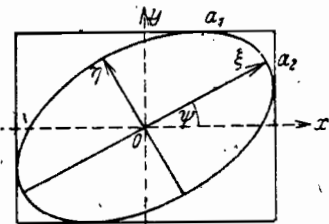
Это есть уравнение конического сечения, именно эллипса, так как детерминант не отрицательный:

$$\left| \begin{array}{cc} \frac{1}{a_1^2} - \frac{\cos \delta}{a_1 a_2} & -\frac{\cos \delta}{a_1 a_2} \\ -\frac{\cos \delta}{a_1 a_2} & \frac{1}{a_2^2} \end{array} \right| = \frac{1}{a_1^2 a_2^2} (1 - \cos^2 \delta) = \frac{\sin^2 \delta}{a_1^2 a_2^2} \geq 0.$$

Таким образом колебания электрического вектора имеют форму эллипса, вписанного в прямоугольник, со сторонами $2a_1$ и $2a_2$, параллельными координатным осям (фиг. 3). Точками касания являются $(\pm a_1, \pm a_2 \cos \delta)$ и $(\pm a_1 \cos \delta, \pm a_2)$. Это обстоятельство выражают, говоря, что простая гармоническая векторная волна эллиптически поляризована.

Аналогично можно вывести, что магнитный вектор также совершает эллиптическое колебание; так как согласно (10) § 3

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{H}_x &= -\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \mathcal{E}_y, \\ \mathcal{H}_y &= \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \mathcal{E}_x, \end{aligned} \right\} \quad (7)$$



Фиг. 3. Эллиптически поляризованный свет. Эллипс колебаний для \mathcal{E} .

то этот эллипс лежит в прямоугольнике со сторонами $2\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} a_2$, $2\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} a_1$, параллельными осям.

Вообще главные оси эллипса колебаний не параллельны координатным осям. Если мы введем координатную систему ξ, η , совпадающую с главными осями, то будут иметь место равенства:

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{E}_\xi &= \mathcal{E}_x \cos \psi + \mathcal{E}_y \sin \psi, \\ \mathcal{E}_\eta &= -\mathcal{E}_x \sin \psi + \mathcal{E}_y \cos \psi, \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

где ϕ обозначает угол между большой осью эллипса ξ и старой осью x (фиг. 3). В новой системе мы представляем эллипс уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} \xi &= a \cos(\tau + \delta_0), \\ \eta &= \pm b \sin(\tau + \delta_0), \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

причем положительными числами a и b измеряются длины главных осей, а двойной знак введен для того, чтобы отличить два возможных направления обращения.

Из сопоставления (4), (8) и (9) следует:

$$\begin{aligned} a(\cos \tau \cos \delta_0 + \sin \tau \sin \delta_0) &= a_1(\cos \tau \cos \delta_1 - \sin \tau \sin \delta_1) \cos \psi + \\ &+ a_2(\cos \tau \cos \delta_2 - \sin \tau \sin \delta_2) \sin \psi, \\ \pm b(\sin \tau \cos \delta_0 + \cos \tau \sin \delta_0) &= -a_1(\cos \tau \cos \delta_1 - \sin \tau \sin \delta_1) \sin \psi + \\ &+ a_2(\cos \tau \cos \delta_2 - \sin \tau \sin \delta_2) \cos \psi. \end{aligned}$$

Сравнение коэффициентов при $\sin \tau$ и $\cos \tau$ дает;

$$\left. \begin{aligned} a \cos \delta_0 &= a_1 \cos \delta_1 \cos \psi + a_2 \cos \delta_2 \sin \psi, & (a) \\ a \sin \delta_0 &= a_1 \sin \delta_1 \cos \psi + a_2 \sin \delta_2 \sin \psi, & (b) \\ \pm b \cos \delta_0 &= a_1 \sin \delta_1 \sin \psi - a_2 \sin \delta_2 \cos \psi, & (a) \\ \pm b \sin \delta_0 &= -a_1 \cos \delta_1 \sin \psi + a_2 \cos \delta_2 \cos \psi. & (b) \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Возводя в квадрат и складывая (10) и (11), получаем, положив $\delta = \delta_2 - \delta_1$:

$$\begin{aligned} a^2 &= a_1^2 \cos^2 \psi + a_2^2 \sin^2 \psi + 2a_1 a_2 \cos \delta \cos \psi \sin \psi, \\ b^2 &= a_1^2 \sin^2 \psi + a_2^2 \cos^2 \psi - 2a_1 a_2 \cos \delta \cos \psi \sin \psi, \end{aligned}$$

и отсюда

$$a^2 + b^2 = a_1^2 + a_2^2. \quad (12)$$

Если перемножить (10a) с (11a), (10b) с (11b) и сложить, то получится:

$$\pm ab = a_1 a_2 \sin \delta. \quad (13)$$

Далее, деление (11a) на (10a), (11b) на (10b) дает:

$$\pm \frac{b}{a} = \frac{a_1 \sin \delta_1 \sin \psi - a_2 \sin \delta_2 \cos \psi}{a_1 \cos \delta_1 \cos \psi + a_2 \cos \delta_2 \sin \psi} = \frac{-a_1 \cos \delta_1 \sin \psi + a_2 \cos \delta_2 \cos \psi}{a_1 \sin \delta_1 \cos \psi + a_2 \sin \delta_2 \sin \psi}.$$

Отсюда получается уравнение, определяющее ψ :

$$(a_1^2 - a_2^2) \sin 2\psi = 2a_1 a_2 \cos 2\psi \cos \delta.$$

Положим:

$$\frac{a_2}{a_1} = \operatorname{tg} \alpha; \quad (14)$$

тогда будем иметь:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} 2\psi &= \frac{2a_1 a_2}{a_1^2 - a_2^2} \cos \delta = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} \cos \delta, \\ \operatorname{tg} 2\psi &= \operatorname{tg} 2\alpha \cdot \cos \delta. \end{aligned} \quad (15)$$

Пусть отношение осей эллипса будет:

$$\frac{b}{a} = \operatorname{tg} \vartheta. \quad (16)$$

Тогда из (12) и (13) следует:

$$\begin{aligned} \sin 2\vartheta &= \frac{2ab}{a^2 + b^2} = \pm \frac{2a_1 a_2}{a_1^2 + a_2^2} \sin \delta, \\ \sin 2\vartheta &= \pm \sin 2\alpha \cdot \sin \delta. \end{aligned} \quad (17)$$

Резюмируем *результат*: если даны амплитуды a_1, a_2 и разность фаз δ относительно любых осей, а, следовательно, также угол α через соотношение (14)

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a_2}{a_1}, \quad (14)$$

то главные оси a, b и угол ψ большей оси a с осью x получаются с помощью формул:

$$a^2 + b^2 = a_1^2 + a_2^2, \quad (12)$$

$$\operatorname{tg} 2\psi = \operatorname{tg} 2\alpha \cdot \cos \delta, \quad (15)$$

$$\sin 2\vartheta = \pm \sin 2\alpha \cdot \sin \delta, \quad (17)$$

причем вспомогательный угол ϑ устанавливает отношение осей:

$$\operatorname{tg} \vartheta = \frac{b}{a}. \quad (16)$$

Если, наоборот, заданы оси и положение эллипса колебаний, т. е. a, b, ψ , то из этих данных можно вычислить амплитуды и фазовую разность a_1, a_2, δ . Мы познакомимся позже (глава V, § 63) с аппаратами, дающими возможность таких определений.

§ 8. ЛИНЕЙНАЯ И КРУГОВАЯ ПОЛЯРИЗАЦИЯ

Особенно важны два частных случая эллиптических колебаний, именно, случаи, когда эллипс вырождается в прямую или в окружность.

Согласно (3) § 7 эллиптическое колебание сводится к прямолинейному, если

$$\delta = \delta_2 - \delta_1 = k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

потому что тогда имеет место соотношение:

$$\frac{\xi_y}{\xi_x} = (-1)^k \frac{a_2}{a_1}. \quad (1)$$

В этом случае свет называется *линейно поляризованным*. Вращением координатной системы одну из составляющих, скажем \mathcal{E}_y , можно обратить в нуль.

Так как \mathcal{E} перпендикулярно к \mathcal{E}_y , то вместе с \mathcal{E}_y исчезает также \mathcal{E}_x . Вопрос о „направлении поляризации“, сыгравший в историческом развитии оптики большую роль, сводится к тому, что мы захотим трактовать в качестве „светового вектора“ — \mathcal{E} или \mathcal{H} . С точки зрения физического действия, несомненно, нужно считать за световой вектор \mathcal{E} , ибо всякое действие можно свести к тому, что электромагнитное поле приводит в движение элементарные заряды (электроны, ядра); механическая сила в поле задается согласно Лорентцу выражением:

$$\mathcal{R} = e \left(\mathcal{E} + \frac{v}{c} \times \mathcal{H} \right),$$

где e — заряд, v — скорость частицы. Таким образом вектор \mathcal{E} воздействует уже на покоящуюся частицу, тогда как \mathcal{H} определяет дополнительную силу, действующую на движущийся заряд; сила эта из-за входящего в знаменатель множителя $c = 3 \cdot 10^{10}$ см сек⁻¹ обычно чрезвычайно мала. Мы увидим, что действие вектора \mathcal{E} может быть установлено непосредственным опытом.

Несмотря на это, обыкновенно за *направление поляризации* в линейно поляризованной волне обозначают направление \mathcal{H} . С историческим основанием для этого мы сейчас познакомимся, рассматривая поляризацию при отражении. Приходится, конечно, придерживаться этих традиционных обозначений; однако мы будем по возможности избегать выражений: направление поляризации, плоскость поляризации (плоскость, проходящая через \mathcal{E} и \mathcal{H}), говоря вместо них о *направлении колебаний и плоскости колебаний* света, т. е. вектора \mathcal{E} .

Второй, важный частный случай — *круговая поляризация*. Для того чтобы эллиптическое колебание превратилось в круговое, необходимо прежде всего, чтобы описанный прямоугольник был квадратом:

$$a_1 = a_2 = a,$$

затем, необходимо, чтобы одна составляющая всегда равнялась нулю, когда другая достигает максимума; следовательно, должно быть:

$$\delta = k \cdot \frac{\pi}{2}, \quad k = \pm 1, \pm 3, \dots$$

Тогда (6) § 7 переходит в уравнение круга:

$$\mathcal{E}_x^2 + \mathcal{E}_y^2 = a^2.$$

Тут следует еще различать два случая согласно направлению, в котором обращается конечная точка вектора \mathcal{E} . Согласно традиции, которой нам приходится придерживаться, направления

вращения — „правое“ и „левое“ — относятся не к направлению распространения, а к противоположному „направлению зрения“ (фиг. 4).

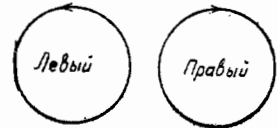
В правокруговом свете y -составляющая опережает x -составляющую на четверть периода (отрицательное вращение относительно направления распространения):

$$\delta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

следовательно,

$$\mathcal{E}_x = a \cos(\tau + \delta_1),$$

$$\mathcal{E}_y = a \cos\left(\tau + \delta_1 + \frac{\pi}{2}\right) = -a \sin(\tau + \delta_1).$$



Фиг. 4. Свет, поляризованный по кругу вправо и влево. Свет распространяется перпендикулярно к плоскости чертежа по направлению к зрителю.

В левокруговом свете x -составляющая опережает y -составляющую (положительное вращение относительно направления распространения):

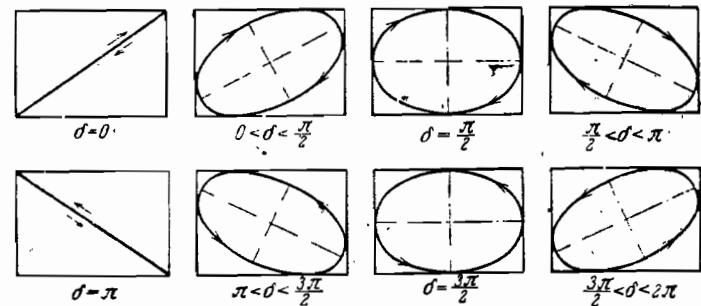
$$\delta = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

следовательно,

$$\mathcal{E}_x = a \cos(\tau + \delta_1),$$

$$\mathcal{E}_y = a \cos\left(\tau + \delta_1 - \frac{\pi}{2}\right) = a \sin(\tau + \delta_1).$$

Фиг. 5 показывает, как при непрерывном изменении δ деформируется эллипс колебания. При $\delta = 0$ он вырождается в прямую. Если $0 < \delta < \pi$, то мы имеем „бегущие вправо“ эллипсы,



Фиг. 5. Свет, поляризованный по эллипсу с различной разностью фаз прямоугольных составляющих.

из которых один, при $\delta = \frac{\pi}{2}$, расположенный симметрично относительно осей, при $a_1 = a_2$ переходит в правобегущий круг.

При $\delta = \pi$ мы опять имеем линейное колебание и при $\pi < \delta < 2\pi$ бегущие влево эллипсы, — один из них, соответствующий $\delta = \frac{3\pi}{2}$, расположен симметрично; при $a_1 = a_2$ он переходит в левовращающийся круг.

Вводя комплексную амплитуду:

$$\mathcal{E} = \mathcal{U}e^{it},$$

можно из отношения амплитуд x - и y -составляющих (ось z представляет направление распространения) решить, что именно имеет место для света. Согласно (2) § 7

$$\frac{\mathcal{E}_y}{\mathcal{E}_x} = \frac{a_2}{a_1} e^{i(\delta_2 - \delta_1)} = \frac{a_2}{a_1} e^{i\delta}.$$

Для линейно поляризованного света ($\delta = k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) отношение составляющих получается действительным:

$$\frac{\mathcal{E}_y}{\mathcal{E}_x} = \pm \frac{a_2}{a_1}. \quad (2)$$

Для правокругового (левовращательного) света ($a_1 = a_2$, $\delta = \frac{\pi}{2}$) будет:

$$\frac{\mathcal{E}_y}{\mathcal{E}_x} = e^{i\frac{\pi}{2}} = i; \quad (3)$$

для левокругового (правовращательного) света ($a_1 = a_2$, $\delta = -\frac{\pi}{2}$):

$$\frac{\mathcal{E}_y}{\mathcal{E}_x} = e^{-i\frac{\pi}{2}} = -i. \quad (4)$$

Вообще, для эллиптического колебания справедливо, что правобегущему обращению соответствует отношение составляющих с положительной мнимой частью, а левобегущему — с отрицательной мнимой частью.

§ 9. ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ НА ПОВЕРХНОСТИ СОПРИКОСНОВЕНИЯ ДВУХ СРЕД

Следующей нашей задачей является более подробное изучение прохождения плоской волны через поверхность соприкосновения двух веществ. Для этого мы, во-первых, исследуем ближе, какие граничные условия для четырех векторов состояния \mathcal{E} , \mathcal{D} , \mathcal{H} и \mathcal{B} следуют из теории Максвелла.

Выделим, как показано на фиг. 6, на поверхности раздела G двух сред, 1 и 2, некоторое пространство в форме плоского

ящика, ограниченного двумя параллельными G поверхностями и кольцеобразной боковой поверхностью. Проинтегрируем по этому пространству оба уравнения для дивергенции § 1 (2a, b) и применим теорему Гаусса. При $\rho = 0$ (см. стр. 16) из $\text{div } \mathcal{D} = 0$ следует:

$$\int \text{div } \mathcal{D} dS = \int \mathcal{D}_n d\sigma = 0,$$

где поверхностный интеграл распространен по ограничивающей поверхности ящика. Относящаяся к боковой поверхности часть сводится к нулю, если высота ящика стремится к нулю. Следовательно, мы имеем:

$$\int_1 \mathcal{D}_n d\sigma + \int_2 \mathcal{D}_n d\sigma = 0,$$

где ν в обоих членах представляет *внешние нормали*, которые таким образом направлены прочь от поверхности раздела. Если вместо этого будем каждый раз брать нормаль из 1 среды во 2, то можно написать:

$$\int [(\mathcal{D}_\nu)_1 - (\mathcal{D}_\nu)_2] d\sigma = 0,$$

и это имеет место для каждого элемента поверхности. Отсюда мы заключаем, что

$$(\mathcal{D}_\nu)_1 = (\mathcal{D}_\nu)_2; \quad (1a)$$

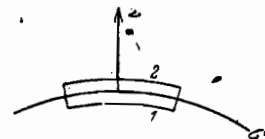
равным образом из $\text{div } \mathcal{B} = 0$ следует, что

$$(\mathcal{B}_\nu)_1 = (\mathcal{B}_\nu)_2. \quad (1b)$$

Нормальные составляющие \mathcal{D} и \mathcal{B} непрерывны на границе.

Подобным же образом мы можем из уравнений Максвелла § 1 (1a, b) с помощью теоремы Стокса сделать заключение о поведении тангенциальных составляющих \mathcal{E} и \mathcal{H} на границе. Для этого мы опишем замкнутую кривую K , которая в одной части проходит вплотную над поверхностью раздела, а в другой части вплотную под поверхностью раздела, как показано на фиг. 7. Через эту кривую K проведем непрерывную и непрерывно искривленную поверхность F , которая выделяет из границы G кривую L . Зададим определенное направление этой линии и такое направление обхода замкнутой кривой K , чтобы в среде 1 оно совпадало с положительным направлением L . Тогда из уравнения Максвелла [§ 1 (1b)]

$$\text{rot } \mathcal{E} + \frac{1}{c} \dot{\mathcal{B}} = 0$$



Фиг. 6. К выводу граничных условий для нормальных составляющих электромагнитного поля



Фиг. 7. К выводу граничных условий для тангенциальных составляющих электромагнитного поля

путем применения теоремы Стокса к элементу поверхности, ограниченному кривою K на поверхности F , следует:

$$\int_F (\text{rot } \mathfrak{E}), d\sigma = \int_K \mathfrak{E} d\mathbf{s} = -\frac{1}{c} \int_F \mathfrak{B}, d\sigma,$$

где γ есть направление нормали к F , соответствующее направлению обхода K .

Если мы теперь примем, что вектор \mathfrak{B} всегда и всюду конечен, то путем сведения кривой K к сложной вдвойне линии L получим:

$$\int_K \mathfrak{E} d\mathbf{s} = \int \mathfrak{E} d\mathbf{s}_1 + \int \mathfrak{E} d\mathbf{s}_2 = 0,$$

где $d\mathbf{s}_1$ — элемент пути отрезка K , проходящего в среде 1, а $d\mathbf{s}_2$ — в среде 2. Если отдадим предпочтение первому направлению, совпадающему с направлением L , то, так как $\mathfrak{E} d\mathbf{s} = \mathfrak{E}_s ds$, будем иметь:

$$\int_L [(\mathfrak{E}_s)_1 - (\mathfrak{E}_s)_2] ds = 0.$$

Так как это справедливо для любого участка кривой L на поверхности раздела G , то, следовательно,

$$(\mathfrak{E}_s)_1 = (\mathfrak{E}_s)_2, \quad (2a)$$

и точно также из $\text{rot } \mathfrak{H} - \frac{1}{c} \dot{\mathfrak{D}} = 0$ (см. стр. 16) следует:

$$(\mathfrak{H}_s)_1 = (\mathfrak{H}_s)_2. \quad (2b)$$

При этом предполагается, что \mathfrak{D} все время и везде конечно; это значит, что истинные поверхностные токи исключены.

Уравнения (2a) и (2b) говорят, что *тангенциальные составляющие* \mathfrak{E} и \mathfrak{H} *проходят границу раздела непрерывно*. При этом каждое из уравнений содержит два независимых утверждения, так как составляющие вектора в заданной плоскости всегда можно разложить на две взаимно перпендикулярные составляющие.

Существенными являются только граничные условия (2a, b), т. е. четыре скалярных уравнения, — два другие не дают ничего нового, как и условия для дивергенции [§ 1(2a, b)], из которых они следуют.

§ 10. ФОРМУЛЫ ФРЕНЕЛЯ ДЛЯ ОТРАЖЕНИЯ И ПРЕЛОМЛЕНИЯ ПЛОСКОЙ ВОЛНЫ

С помощью граничных условий вычислим теперь прохождения плоской волны через поверхность раздела двух сред.

Пусть ось z имеет направление нормали к поверхности раздела, проведенной из среды 1 в среду 2; это направление назы-

вают *нормалью падения*. Плоскость xz будет плоскостью падения (см. § 4, стр. 25); на фиг. 8 она выбрана за плоскость чертежа.

Направление приходящего (падающего) луча будем задавать единичным вектором \mathfrak{s}^a ; он образует с осью z угол φ ; следовательно, его составляющими являются:

$$\mathfrak{s}_x^a = \sin \varphi, \quad \mathfrak{s}_y^a = 0, \quad \mathfrak{s}_z^a = \cos \varphi. \quad (1)$$

Если сделать предположение, что волна, приходящая из среды 1, исключительно лишь проходит в среду 2, и при этом предположении попытаться удовлетворить граничным условиям § 9, то это окажется невозможным (как мы увидим ниже из общих вычислений). Этому соответствует опытный факт, согласно которому всегда появляется отраженная волна. В соответствии с этим мы предполагаем наряду с преломленной волной, которая проходит через поверхность раздела, отраженную волну, идущую от нее назад в среду 1. Нормали к отраженной и прошедшей (преломленной) волнам лежат, как мы видели в § 4, в плоскости падения; единичный вектор \mathfrak{s}^r для отраженной волны образует с нормалью падения угол φ' ; единичный вектор \mathfrak{s}^d для прошедшей волны — угол ψ . Поэтому составляющие равны:

$$\mathfrak{s}_x^r = \sin \varphi', \quad \mathfrak{s}_y^r = 0, \quad \mathfrak{s}_z^r = \cos \varphi', \quad (2)$$

$$\mathfrak{s}_x^d = \sin \psi, \quad \mathfrak{s}_y^d = 0, \quad \mathfrak{s}_z^d = \cos \psi. \quad (3)$$

Очевидно, мы имеем для волн, направленных вперед:

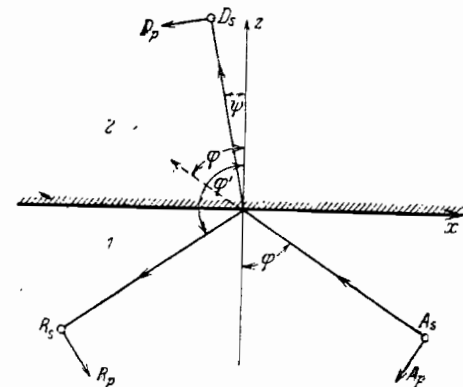
$$\mathfrak{s}_z^a = \cos \varphi \geq 0, \quad \mathfrak{s}_z^d = \cos \psi \geq 0, \quad (4)$$

а для волны, направленной назад:

$$\mathfrak{s}_z^r = \cos \varphi' \leq 0. \quad (4a)$$

Электрический вектор приходящей волны \mathfrak{E}^a разложим на составляющую, параллельную плоскости падения, с амплитудой A_p и составляющую, перпендикулярную к плоскости падения, с A_s . Аналогично разложим электрический вектор преломленной волны \mathfrak{E}^d на составляющие D_p и D_s , а электрический вектор отраженной волны \mathfrak{E}^r на составляющие R_p и R_s .

Отсюда получаем соответствующее разложение магнитных векторов $\mathfrak{H}^a, \mathfrak{H}^d, \mathfrak{H}^r$, принимая во внимание во-первых то, что



Фиг. 8. Преломление и отражение (плоскость падения).

три вектора \mathcal{E} , \mathcal{H} и \mathcal{Z} расположены по отношению друг к другу, как оси правой винтовой системы координат (§ 3), а во-вторых то, что имеет место уравнение (11) § 3, которое при $\mu = 1$ имеет такой вид:

$$|\mathcal{H}| = \sqrt{\epsilon} |\mathcal{E}|.$$

На фиг. 8 p -составляющие обозначены через \rightarrow , а s -составляющие через \circ . Составляющие магнитных векторов не изображены.

Полные амплитуды A , D , R полагаем комплексными в целях исключения фазовых констант. Переменные части фаз равны:

$$\left. \begin{aligned} \tau_a &= \omega \left(t - \frac{r\delta^a}{c_1} \right) = \omega \left(t - \frac{x \sin \varphi + z \cos \varphi}{c_1} \right), & (a) \\ \tau_d &= \omega \left(t - \frac{r\delta^d}{c_2} \right) = \omega \left(t - \frac{x \sin \psi + z \cos \psi}{c_2} \right), & (b) \\ \tau_r &= \omega \left(t - \frac{r\delta^r}{c_1} \right) = \omega \left(t - \frac{x \sin \varphi' + z \cos \varphi'}{c_1} \right). & (c) \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

После этого x -, y -, и z -составляющие векторов \mathcal{E} , \mathcal{H} в трех волнах мы можем представить следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{E}_x^a &= A_p \cos \varphi e^{i\tau_a}, & \mathcal{H}_x^a &= -A_s \cos \varphi \sqrt{\epsilon_1} e^{i\tau_a}, \\ \mathcal{E}_y^a &= A_s e^{i\tau_a}, & \mathcal{H}_y^a &= A_p \sqrt{\epsilon_1} e^{i\tau_a}, \\ \mathcal{E}_z^a &= -A_p \sin \varphi e^{i\tau_a}, & \mathcal{H}_z^a &= A_s \sin \varphi \sqrt{\epsilon_1} e^{i\tau_a}, \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{E}_x^d &= D_p \cos \psi e^{i\tau_d}, & \mathcal{H}_x^d &= -D_s \cos \psi \sqrt{\epsilon_2} e^{i\tau_d}, \\ \mathcal{E}_y^d &= D_s e^{i\tau_d}, & \mathcal{H}_y^d &= D_p \sqrt{\epsilon_2} e^{i\tau_d}, \\ \mathcal{E}_z^d &= -D_p \sin \psi e^{i\tau_d}, & \mathcal{H}_z^d &= D_s \sin \psi \sqrt{\epsilon_2} e^{i\tau_d}, \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{E}_x^r &= R_p \cos \varphi' e^{i\tau_r}, & \mathcal{H}_x^r &= -R_s \cos \varphi' \sqrt{\epsilon_1} e^{i\tau_r}, \\ \mathcal{E}_y^r &= R_s e^{i\tau_r}, & \mathcal{H}_y^r &= R_p \sqrt{\epsilon_1} e^{i\tau_r}, \\ \mathcal{E}_z^r &= -R_p \sin \varphi' e^{i\tau_r}, & \mathcal{H}_z^r &= R_s \sin \varphi' \sqrt{\epsilon_1} e^{i\tau_r}. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

При этом предполагается, что составляющие A_p , D_p , R_p при $\tau = 0$ направлены так, как показывает фиг. 8; все составляющие A_s , D_s , R_s предполагаются в направлении положительной оси y (назад).

Для выполнения граничных условий приравняем прежде всего друг к другу при $z = 0$ величины τ_a , τ_d , τ_r ; это даст, как в § 4, законы отражения и преломления:

$$\frac{\sin \varphi}{c_1} = \frac{\sin \psi}{c_2} = \frac{\sin \varphi'}{c_1}, \quad (9)$$

так, что вследствие (4) и (4a)

$$\left. \begin{aligned} \varphi' &= \pi - \varphi, & \cos \varphi' &= -\cos \varphi \\ & & \sin \varphi' &= \sin \varphi \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

и

$$\frac{\sin \varphi}{\sin \psi} = \frac{c_1}{c_2} = \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}} = n_{12}. \quad (11)$$

Граничные условия для векторов поля § 9 (2a, b), требуют теперь:

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{E}_x^a + \mathcal{E}_x^r &= \mathcal{E}_x^d, & \mathcal{H}_x^a + \mathcal{H}_x^r &= \mathcal{H}_x^d, \\ \mathcal{E}_y^a + \mathcal{E}_y^r &= \mathcal{E}_y^d, & \mathcal{H}_y^a + \mathcal{H}_y^r &= \mathcal{H}_y^d, \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

тогда условия (1a, b) § 9, как мы уже говорили и как легко проверить расчетом, удовлетворяются сами собой.

Если подставить в (12) выражения (6), (7) и (8) и принять во внимание, что согласно (10) $\cos \varphi' = -\cos \varphi$, то получится:

$$\left. \begin{aligned} \cos \varphi (A_p - R_p) &= \cos \psi D_p, \\ A_s + R_s &= D_s, \\ \cos \varphi \sqrt{\epsilon_1} (A_s - R_s) &= \cos \psi \sqrt{\epsilon_2} D_s, \\ \sqrt{\epsilon_1} (A_p + R_p) &= \sqrt{\epsilon_2} D_p. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

С помощью этих четырех уравнений можно выразить амплитуды отраженной и преломленной волн через амплитуду волны падающей; воспользовавшись еще (11), получаем:

$$\left. \begin{aligned} D_p &= \frac{2 \sin \psi \cos \varphi}{\sin (\varphi + \psi) \cos (\varphi - \psi)} \cdot A_p, \\ D_s &= \frac{2 \sin \psi \cos \varphi}{\sin (\varphi + \psi)} \cdot A_s. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

$$\left. \begin{aligned} R_p &= \frac{\operatorname{tg} (\varphi - \psi)}{\operatorname{tg} (\varphi + \psi)} \cdot A_p, \\ R_s &= -\frac{\sin (\varphi - \psi)}{\sin (\varphi + \psi)} \cdot A_s. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Это формулы Френеля; они были впервые выведены Френелем на основе его упругой теории света.

Если среда 2 является „оптически более плотной“, нежели среда 1, т. е. если $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$ так что $n_{12} > 1$, то согласно закону преломления (11)

$$\sin \psi = \frac{\sin \varphi}{n_{12}};$$

для всякого угла падения φ существует действительный угол преломления ψ . Если, однако, среда 2 „оптически менее плотна“, т. е. если $n_{12} < 1$, то действительные решения для ψ получаются лишь тогда, если $\sin \varphi \leq n_{12}$. Позже (§ 13) мы займемся особо случаем $\sin \varphi > n_{12}$ (полное внутреннее отражение). Пока мы его исключим из рассмотрения. Вещественные углы φ и ψ мы можем принять между 0 и $\pi/2$. Тогда уравнения (14) и (15) показывают, что действительным значениям A_p и A_s всегда принадлежат также действительные значения D_p , D_s , R_p , R_s . Это означает, что фазы преломленной и отраженной волн или совсем не отличаются от фазы падающей волны, или отличаются на π .

Согласно фиг. 8, составляющие преломленной волны находятся в одинаковой фазе с составляющими падающей волны, если D_p , D_s имеют те же знаки, что и A_p , A_s ; то же самое относится и к составляющей R_s отраженной волны. Напротив, согласно выбранному нами расположению положительного направления колебаний относительно волновой нормали составляющие R_p и A_p при одинаковых знаках находятся в противоположных фазах; следовательно, при нормальном падении p -составляющая переходит в прямо противоположное направление.

Но из (14) следует, что D_p , D_s всегда имеют те же знаки, что и A_p и A_s ; таким образом приходящая волна переходит в преломленную без изменения фазы.

В отраженной волне мы получаем различные соотношения в зависимости от того, которое из условий $n_{12} \geq 1$ имеет место. Если вторая среда оптически плотнее, $n_{12} > 1$, так что $\psi < \varphi$, то R_s и A_s имеют противоположные фазы. Таким образом s -составляющая испытывает при отражении скачок фазы на π . Если, кроме того, $\varphi + \psi < \pi/2$; $\operatorname{tg}(\varphi + \psi) > 0$, то R_p и A_p имеют одинаковые знаки; это означает согласно сделанному выше утверждению, что и p -составляющая также испытывает скачок фазы на π . При большем, однако, угле падения p -составляющие падающей и отраженной волн совпадают по фазе.

Если вторая среда оптически менее плотна, чем первая, $n_{12} < 1$, так что $\psi > \varphi$, то знаки составляющих отраженной волны изменяются в (15) на обратные. s -составляющая не испытывает, следовательно, никакого скачка фазы; также точно и фаза p -составляющая не меняется для углов падения внутри границы $\varphi + \psi = \pi/2$ и изменяется на π за пределами этой границы. Мы вернемся к этому в § 13 при рассмотрении поляризации через полное внутреннее отражение.

Для случая нормального падения формулы (14) и (15) неприменимы, так как дроби в правой части принимают форму $\frac{0}{0}$.

Проще всего получить применимые формулы, обращаясь опять к уравнениям (13) и полагая в них $\cos \varphi = \cos \psi = 1$. Если мы вместо $n_{12} = \sqrt{\varepsilon_2/\varepsilon_1}$ будем писать для краткости n , то получим:

$$\left. \begin{aligned} D_p &= \frac{2}{n+1} A_p, \\ D_s &= \frac{2}{n+1} A_s; \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

$$\left. \begin{aligned} R_p &= \frac{n-1}{n+1} A_p, \\ R_s &= -\frac{n-1}{n+1} A_s. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Различие между p - и s -составляющими исчезает; понятие плоскости падения становится лишенным смысла.

§ 11. ПОЛЯРИЗАЦИЯ ПРИ ОТРАЖЕНИИ И ПРЕЛОМЛЕНИИ

Интенсивность света определяется согласно (13) § 3 соотношением:

$$|\mathcal{E}| = \frac{c}{4\pi} \sqrt{\varepsilon} \mathcal{E}^2 = \frac{cn}{4\pi} \mathcal{E}^2, \quad (1)$$

причем ε положено равным единице. Чтобы отсюда определить с помощью формул Френеля интенсивности отраженного и преломленного света, нужно принять во внимание, что поперечное сечение светового пучка изменяется при преломлении. Если мы примем, что освещается как раз единица поверхности раздела, то поперечное сечение падающих и отраженных лучей равно $\cos \varphi$, а поперечное сечение преломленных лучей — $\cos \psi$. Если A_p , R_p , D_p представляют полные количества лучей p -составляющих в падающем, отраженном и преломленном свете, то для этого пучка будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} A_p &= |\mathcal{E}^a| \cos \varphi = \frac{cn_1}{4\pi} A_p^2 \cos \varphi, \\ R_p &= |\mathcal{E}^r| \cos \varphi = \frac{cn_1}{4\pi} R_p^2 \cos \varphi, \\ D_p &= |\mathcal{E}^d| \cos \psi = \frac{cn_2}{4\pi} D_p^2 \cos \psi, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

где A_p , R_p , D_p — есть введенные в § 10 величины; то же справедливо и для s -составляющих. Исключая A_p^2 , A_s^2 , получаем,

таким образом, коэффициент отражения и коэффициент прохождения для обеих составляющих:

$$\left. \begin{aligned} r_p &= \frac{R_p}{A_p} = \frac{\operatorname{tg}^2(\varphi - \psi)}{\operatorname{tg}^2(\varphi + \psi)}, \\ r_s &= \frac{R_s}{A_s} = \frac{\sin^2(\varphi - \psi)}{\sin^2(\varphi + \psi)}, \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

$$\left. \begin{aligned} d_p &= \frac{D_p}{A_p} = \frac{\sin 2\varphi \sin 2\psi}{\sin^2(\varphi + \psi) \cos^2(\varphi - \psi)}, \\ d_s &= \frac{D_s}{A_s} = \frac{\sin 2\varphi \sin 2\psi}{\sin^2(\varphi + \psi)}. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Легко проверить, что

$$r_p + d_p = 1, \quad r_s + d_s = 1, \quad (5)$$

как это требуется законом сохранения энергии.

При нормальном падении, для которого различие между p - и s -составляющими исчезает, имеем согласно (16) и (17) § 10:

$$\left. \begin{aligned} \bar{r} &= \left(\frac{n-1}{n+1} \right)^2, \\ d &= \frac{4n}{(n+1)^2} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

при этом

$$r + d = 1. \quad (7)$$

Величины r и d называются просто *отражательной способностью и прозрачностью*. Из (6), очевидно, следует, что,

$$\lim_{n \rightarrow 1} r = 0, \quad \lim_{n \rightarrow 1} d = 1; \quad (8)$$

эти же результаты справедливы и для величин r_p , r_s и d_p , d_s согласно формулам (3) и (4), так как при $n \rightarrow 1$, $\psi \rightarrow \varphi$. Чем меньше, таким образом, оптическое различие между двумя средами, тем меньше теряет энергии вследствие отражения луч света, проходящий через их границу.

Из (3) и (4) видно, что при скользящем падении, т. е. при $\varphi = \pi/2$, $r_p = r_s = 1$, тогда как d_p и d_s исчезают.

Знаменатели выражений (3) и (4) остаются конечными всегда, за исключением одного случая: при $\varphi + \psi = \pi/2$, $\operatorname{tg}(\varphi + \psi) = \infty$ и, следовательно, $r_p = 0$. В этом случае лучи отраженный и преломленный перпендикулярны друг к другу (фиг. 9), и, так как

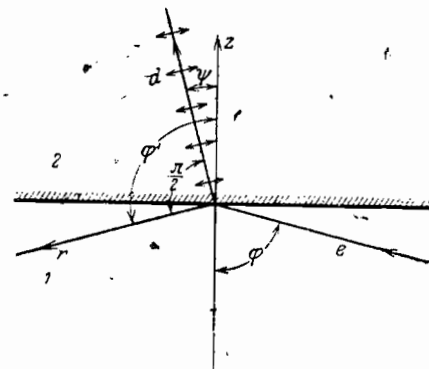
$$\sin \psi = \sin \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right) = \cos \varphi, \quad \text{то из закона преломления следует:} \quad (9)$$

$$\operatorname{tg} \varphi = n.$$

Угол, удовлетворяющий этому условию, называется *углом полной поляризации*, или *углом Брюстера*; он был выведен в 1815 г. Брюстером (David Brewster, 1781—1868).

Если волна отражается под этим углом, то составляющая электрического вектора, параллельная плоскости падения, погашается. Таким образом отраженный свет линейно поляризован, как говорят, „в плоскости падения“, т. е. за *плоскость поляризации* принимают плоскость падения зеркала, при помощи которого линейная поляризация может быть достигнута.

Согласно этому определению определяющим вектором для „поляризации“ является, таким образом, не электрический, а магнитный вектор; так как, однако, как мы уже говорили в § 8, электрический вектор, несомненно, является физически действительным „световым вектором“, то лучше всего избегать понятия направления поляризации, заменяя его понятием направления колебаний (электрического вектора).

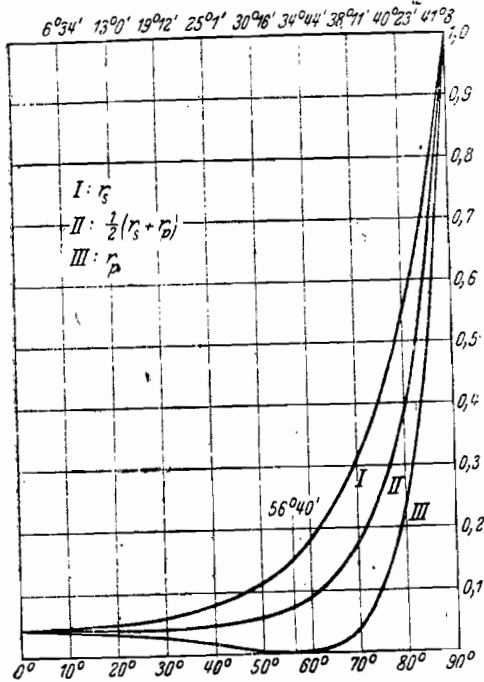


Фиг. 9. Угол полной поляризации.

Этот, ныне уже не вызывающий сомнений, выбор в истории оптики долгое время являлся предметом расхождения мнений. Во времена упругой теории света вопрос в самом деле не мог быть решен по существу, как теперь, когда мы можем основываться на известных действиях электрического и магнитного полей. Так, Френель пришел к результату, что упругие колебания эфира совершаются перпендикулярно к плоскости поляризации, тогда как Франц Нейманн принял их параллельными ей. Именно, они приняли различные гипотезы относительно механизма движения эфира; по Френелю плотность эфира должна быть в различных средах различной, упругость же — постоянной, а по Нейманну — наоборот. В действительности ни одна из этих теорий не является удовлетворительной, потому что, как разъяснялось во введении, во всех них нарушаются требуемые механикой граничные условия в целях устранения продольных волн.

Вернувшись теперь к закону Брюстера, мы можем наглядно выяснить внутренние основания для его справедливости, представив себе, что электрический вектор падающей волны вызывает во второй среде колебания электронов в атомах, направление которых дается электрическим вектором преломленной волны. Эти колебания электронов возбуждают на поверхности раздела новую волну, возвращающуюся в первую среду: отраженную волну. Но линейно колеблющийся электрон излучает „трансверсально“ (как всякая антенна); в частности, не проис-

ходит никакой отдачи энергии в направлении колебания электрона. Так как отраженный луч оказывается перпендикулярным к проходящему, для колебания, параллельного плоскости электрона, наступает как раз этот случай, и отраженная волна не получает никакой энергии для колебаний в плоскости падения (фиг. 9).



Фиг. 10. Интенсивность отраженного света как функция угла падения. (По Хвольсону, Курс физики, 2-е немецкое издание, 1922).

плитудой A , для которого направление колебаний \mathcal{E}^a образует угол α с p -направлением, то

$$A_p = A \cos \alpha, \quad A_s = A \sin \alpha. \quad (10)$$

Если A есть сила света падающего пучка, то будем иметь:

$$A_p = A \cos^2 \alpha, \quad A_s = A \sin^2 \alpha. \quad (11)$$

Полную отраженную интенсивность запишем, следовательно, так:

$$R_t = R_p + R_s = \left(\frac{R_p}{A_p} \cos^2 \alpha + \frac{R_s}{A_s} \sin^2 \alpha \right) A,$$

отсюда следует:

$$r_a = \frac{R_t}{A} = r_p \cos^2 \alpha + r_s \sin^2 \alpha. \quad (12)$$

¹ Из О. Д. Хвольсона, Курс физики, 2-е издание, т. 2, стр. 716, Брауншвейг, 1922.

Аналогичное соотношение справедливо для преломленного света. Для $\alpha = \pi/4$ благодаря тому, что $\cos^2 \frac{\pi}{4} = \sin^2 \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}$, как раз имеем функцию, представленную кривою II:

$$r_{\pi/4} = \frac{1}{2} (r_p + r_s). \quad (13)$$

Эти же кривые показывают также поведение *естественного света* при отражении. Именно, естественный свет можно принимать за поляризованный с нерегулярно колеблющимся состоянием поляризации. Интенсивность получится в результате усреднения по углу α . Так как средние значения $\cos^2 \alpha$ и $\sin^2 \alpha$ равны $\frac{1}{2}$, то для естественного света будет:

$$\bar{A}_p = \bar{A}_s = \frac{1}{2} A, \quad (14)$$

но

$$\left. \begin{aligned} \bar{R}_p &= \frac{1}{2} \frac{\bar{R}_p}{A_p} A = \frac{1}{2} r_p A, \\ \bar{R}_s &= \frac{1}{2} \frac{\bar{R}_s}{A_s} A = \frac{1}{2} r_s A. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

В отраженном свете обе составляющие уже, следовательно, не равны; тогда говорят, что отраженный свет *частично* поляризован, и называют

$$\frac{\bar{R}_p - \bar{R}_s}{A} = \frac{1}{2} (r_p - r_s) \quad (16)$$

поляризованной частью. Коэффициент отражения всего света, полученного из естественного путем отражения, дает выражение:

$$\bar{r} = \frac{\bar{R}}{A} = \frac{\bar{R}_p + \bar{R}_s}{A} = \frac{1}{2} (r_p + r_s), \quad (17)$$

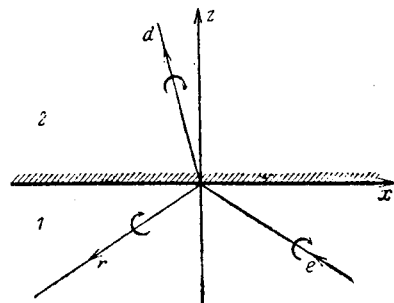
т. е. снова кривая II.

Соответствующие рассуждения справедливы и для преломленного луча. В частности, имеем для естественного света:

$$\bar{r} + \bar{d} = 1. \quad (18)$$

Вернемся теперь опять к линейно поляризованному свету. Если падающий свет линейно поляризован, то это же имеет место и для света отраженного и преломленного, так как фазы меняются лишь на 0 или π . Однако направление колебаний (или „плоскость поляризации“) в отраженном и преломленном лучах оказывается повернутым относительно этого направления в луче

падающем. Угол между плоскостью колебания и плоскостью падения называют *азимут* колебания и считают его положительным при правом вращении относительно направления распространения (фиг. 11).



Фиг. 11. Определение знака азимута поляризации.

Пусть α будет азимут падающей, ρ — отраженной, δ — преломленной волны; эти углы можно ограничить областью от $-\frac{\pi}{2}$ до

$+\frac{\pi}{2}$. Будем иметь:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{A_s}{A_p}, \operatorname{tg} \rho = \frac{R_s}{R_p}, \operatorname{tg} \delta = \frac{D_s}{D_p}. \quad (19)$$

Из формул Френеля (14), (15) § 10 получаем:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} \rho &= -\frac{\cos(\psi - \phi)}{\cos(\psi + \phi)} \cdot \operatorname{tg} \alpha, \\ \operatorname{tg} \delta &= \cos(\psi - \phi) \cdot \operatorname{tg} \alpha. \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

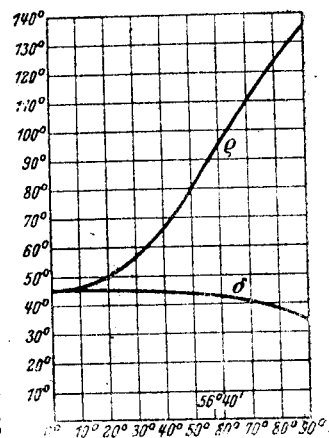
Благодаря соотношениям $0 \leq \psi \leq \pi/2$, $0 \leq \phi \leq \pi/2$ следует:

$$\left| \operatorname{tg} \rho \right| \leq \left| \operatorname{tg} \alpha \right|, \\ \left| \operatorname{tg} \delta \right| \leq \left| \operatorname{tg} \alpha \right|,$$

причем знак равенства в верхнем равенстве имеет место только для нормального и скользящего падений ($\psi = \phi = 0$ или $\psi = \pi/2$), а в нижнем неравенстве — только для нормального падения. Таким образом плоскость световых колебаний при отражении поворачивается от плоскости падения, а при преломлении — к ней. Ход ρ и δ для $n = 1,52$ и $\alpha = 45^\circ$ показывает фиг. 12¹.

Очевидно, что для угла полной поляризации $\psi = 56^\circ 40'$ ρ как раз равно 90° ; действительно, для $\psi + \phi = \pi/2$ согласно (20) $\operatorname{tg} \rho = \infty$ и, следовательно, $\rho = \pi/2$ независимо от значений α .

Экспериментальная проверка выведенных здесь законов для отношений интенсивности и поляризации подтвердила их с большой степенью точности. При этом употребляются приборы для получения поляризованного света; они могут быть сконструированы



Фиг. 12. Азимуты отраженной и преломленной волн как функции углов падения. (По Хвольсону. Курс физики, 2-ое немецкое издание, 1922).

рованы на основе процесса отражения. Известен прибор Норренберга (Nörgenberga, 1787—1862), состоящий в основном из двух стеклянных пластинок, помещенных под углом полной поляризации к световому лучу (фиг. 13). Первая пластинка служит в качестве „поляризатора“, так как отражаемый ею луч линейно поляризован; вторая пластинка, которая может вращаться вокруг направления этого луча, представляет собой „анализатор“.

Этот прибор обладает тем недостатком, что ход лучей в нем относительно запутан. Предпочитают установки, которые линейно поляризуют свет, не изменяя направления лучей. Простейшим поляризатором такого рода является *стеклянная стопа*, или *пластинчатый поляризатор*. Он состоит из большого числа тонких плоско параллельных стеклянных пластинок, на которые падающий луч попадает под углом полной поляризации. При каждом преломлении происходит частичная поляризация проходящего света, и, если она даже незначительна, то после многократного преломления все же достигается значительная степень поляризации. Для естественного падающего света отношение интенсивностей p - и s -составляющих после прохождения через обе граничные поверхности пластинки будет равно [через двукратное применение (4)]:

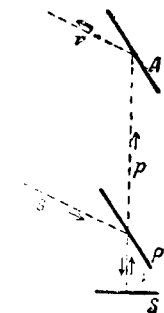
$$\left(\frac{d_s}{d_p} \right)^2 = \cos^4(\psi - \phi) < 1,$$

т. е. после выхода p -колебание оказывается сильнее s -колебания. Поляризация будет тем полнее, чем больше угол ϕ . Если ϕ равняется как раз углу полной поляризации, $\psi + \phi = \pi/2$, $\operatorname{tg} \phi = n$, то

$$\left(\frac{d_s}{d_p} \right)^2 = \sin^4 2\psi = \left(\frac{2n}{1+n^2} \right)^4.$$

Для $n = 1,5$ это составит 0,725. При прохождении через пять пластинок получается $(0,725)^5 = 0,200$, — следовательно, при этом еще довольно далеко до полной поляризации¹. Кроме того, этот прибор имеет еще тот недостаток, что свет весьма ослабляется вследствие многих потерь на отражение; поэтому он уже почти не употребляется.

Употребительнейшие поляризаторы основаны на двойном лучепреломлении в кристаллах, как призма Николя; мы займемся этим в § 63, в главе V.



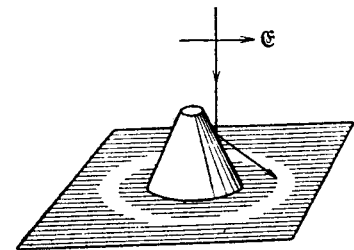
Фиг. 13. Поляризационный прибор Норренберга.

P — поляризующая стеклянная пластинка, A — анализатор, S — отражающее зеркало, s — падающий неполяризованный пучок лучей, p — поляризованный пучок лучей, r — отраженный от A пучок лучей.

¹ Таблица интенсивностей отраженного и прошедшего света и степени поляризации при различных числах пластинок имеется в книге R. W. Wood Physical Optics, 2-ое издание, New-York, 1923, стр. 366.

¹ По Хвольсону, Курс физики, т. 2, стр. 716.

Для демонстрации поляризации при отражении пригоден *конический анализатор Маха* (фиг. 14). Он состоит из стеклянного конуса с таким углом раствора, чтобы пучок лучей, падающий параллельно оси конуса, встречал боковую поверхность под углом полной поляризации. Отраженный от конуса свет образует на помещенном позади экрана светлое кольцо; если свет линейно поляризован, то в двух диаметрально противоположных местах кольца окажется темнота; через эти темные места проходит плоскость колебания электрического вектора.



Фиг. 14. Конический анализатор Маха.

§ 12. ВЛИЯНИЕ ПЕРЕХОДНОГО СЛОЯ НА ПОЛЯРИЗАЦИЮ ОТРАЖЕННОГО СВЕТА*

Хотя формулы Френеля вообще очень хорошо передают результаты наблюдений, были, однако, найдены небольшие отклонения, которые становятся особенно отчетливыми в близости угла полной поляризации; составляющая отраженного света в плоскости падения никогда не может быть полностью погашена. Теория оказывается, таким образом, не вполне безукоризненной. По мнению Друде¹, в предположении о скачкообразном переходе от одного тела к другому, содержится в действительности далеко идущая идеализация. Одно вещество всегда отделяется от другого некоторым переходным слоем, в котором диэлектрическая постоянная изменяется непрерывно, от ϵ_1 до ϵ_2 . Кроме того, *естественный переходной слой* нередко становится благодаря полировке более толстым искусственным *поверхностным слоем*, в котором ϵ может принимать значения также вне интервала ϵ_1, ϵ_2 . Мы покажем, каким способом Друде ввел в расчет переходной слой, и в заключение приведем краткую критику с точки зрения новейших исследований.

Достаточно будет трактовать толщину слоя l как бесконечно малую величину первого порядка и пренебречь членами с высшими степенями l . Тогда можно учесть граничные условия, установив вместо выведенных в § 9 идеальных граничных условий иные, в которые входят члены, пропорциональные l .

Эти новые граничные условия проще всего получают интегрированием через весь переходной слой, параллельный поверхностному слою, x - и y -составляющих уравнений поля (1a, b) § 1. Если принять во внимание, что ни одна из состав-

ляющих не зависит от перпендикулярной к плоскости падения координаты y , то эти уравнения дадут (при $\mu=1$):

$$\left. \begin{aligned} -\frac{\partial \xi_y}{\partial z} - \frac{\epsilon}{c} \frac{\partial \xi_x}{\partial t} &= 0, & -\frac{\partial \xi_y}{\partial z} + \frac{1}{c} \frac{\partial \xi_x}{\partial t} &= 0, \\ \frac{\partial \xi_x}{\partial z} - \frac{\partial \xi_z}{\partial x} - \frac{\epsilon}{c} \frac{\partial \xi_y}{\partial t} &= 0, & \frac{\partial \xi_x}{\partial z} - \frac{\partial \xi_z}{\partial x} + \frac{1}{c} \frac{\partial \xi_y}{\partial t} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Если проинтегрировать эти уравнения по z между двумя точками, в которых ϵ принимает уже постоянные значения ϵ_1 и ϵ_2 , то получится:

$$\left. \begin{aligned} (\xi_y)_1 - (\xi_y)_2 &= \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int_1^2 \epsilon \xi_x dz, \\ (\xi_x)_1 - (\xi_x)_2 &= -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int_1^2 \epsilon \xi_y dz - \int_1^2 \frac{\partial \xi_z}{\partial x} dz, \\ (\xi_y)_1 - (\xi_y)_2 &= -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int_1^2 \xi_x dz, \\ (\xi_x)_1 - (\xi_x)_2 &= \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int_1^2 \xi_y dz - \int_1^2 \frac{\partial \xi_z}{\partial x} dz. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

В подинтегральных функциях правой части мы можем для векторов поля допустить идеальные граничные условия § 9, после чего нормальные составляющие $\mathfrak{D} = \epsilon \mathfrak{E}$ и $\mathfrak{B} = \mathfrak{H}$, равно как и тангенциальные составляющие \mathfrak{E} и \mathfrak{H} , будут непрерывны. Тогда мы будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} \int_1^2 \epsilon \xi_x dz &= \overline{\xi_x} l, & \int_1^2 \xi_x dz &= \overline{\xi_x} l, \\ \int_1^2 \epsilon \xi_y dz &= \overline{\xi_y} l, & \int_1^2 \xi_y dz &= \overline{\xi_y} l, \\ \int_1^2 \frac{\partial \xi_z}{\partial x} dz &= \overline{\frac{\partial \xi_z}{\partial x}} \frac{l}{\epsilon}, & \int_1^2 \frac{\partial \xi_z}{\partial x} dz &= \overline{\frac{\partial \xi_z}{\partial x}} l, \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

где векторные составляющие с чертой наверху означают средние величины, для которых можно по желанию подставить граничные значения в 1 или 2 среде и где положено:

$$\int_1^2 dz = l, \quad \int_1^2 \epsilon dz = l \epsilon, \quad \int_1^2 \frac{dz}{\epsilon} = \frac{l}{\epsilon}. \quad (4)$$

¹ P. Drude, Wied. Ann., т. 36 (1889), стр. 532, 865; т. 43 (1891), стр. 126. См. также Курс оптики, гл. 2, стр. 266, Лейпциг, 1900.

Теперь мы можем новые граничные условия написать так:

$$\left. \begin{aligned} (\mathcal{E}_x)_1 &= \left(\mathcal{E}_x + \frac{l}{c} \frac{\partial \mathcal{H}_y}{\partial t} + \frac{l\epsilon}{\epsilon} \frac{\partial \mathcal{E}_x}{\partial x} \right)_2, \\ (\mathcal{E}_y)_1 &= \left(\mathcal{E}_y - \frac{l}{c} \frac{\partial \mathcal{H}_x}{\partial t} \right)_2, \\ (\mathcal{H}_x)_1 &= \left(\mathcal{H}_x - \frac{l}{c} \frac{\partial \mathcal{E}_y}{\partial t} - l \frac{\partial \mathcal{H}_x}{\partial x} \right)_2, \\ (\mathcal{H}_y)_1 &= \left(\mathcal{H}_y + \frac{l}{c} \frac{\partial \mathcal{E}_x}{\partial t} \right)_2. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

$$\left. \begin{aligned} (\mathcal{E}_x)_1 &= \left(\mathcal{E}_x - \frac{l}{c} \frac{\partial \mathcal{E}_y}{\partial t} - l \frac{\partial \mathcal{H}_x}{\partial x} \right)_2, \\ (\mathcal{H}_x)_1 &= \left(\mathcal{H}_x + \frac{l}{c} \frac{\partial \mathcal{E}_x}{\partial t} \right)_2. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Подставим это в выражения (6), (7), (8) § 10; мы получим тогда:

$$\left. \begin{aligned} (A_p - R_p) \cos \varphi &= D_p \cos \psi (1 + C_1), \\ A_s + R_s &= D_s (1 + C_2), \\ (A_s - R_s) \sqrt{\epsilon_1} \cos \varphi &= D_s \sqrt{\epsilon_2} \cos \psi (1 + C_3), \\ (A_p + R_p) \sqrt{\epsilon_1} &= D_p \sqrt{\epsilon_2} (1 + C_4), \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

где

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= \frac{i\omega l}{c} \frac{1}{\cos \psi} \left(\sqrt{\epsilon_2} - \sin^2 \psi \frac{c}{c_2} \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \right), \\ C_2 &= \frac{i\omega l}{c} \cos \psi \sqrt{\epsilon_2}, \\ C_3 &= \frac{i\omega l}{c} \frac{1}{\sqrt{\epsilon_2} \cos \psi} \left(\epsilon_1 - \sqrt{\epsilon_2} \sin^2 \psi \frac{c}{c_2} \right), \\ C_4 &= \frac{i\omega l}{c} \frac{1}{\sqrt{\epsilon_2}} \epsilon \cos \psi. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

являются малыми величинами первого порядка; так как они, кроме того, чисто мнимые, то при действительных A_p и A_s , R_p , R_s , D_p , D_s уже будут не вещественными, а комплексными, следовательно, при отражении и преломлении появляется скачок фазы.

В последующем мы ограничимся рассмотрением отраженной волны. Исключением D_p , D_s получим, используя закон преломления (11) § 10:

$$\begin{aligned} A_p \left[\frac{\sin \varphi}{\sin \psi} (1 + C_4) - \frac{\cos \psi}{\cos \varphi} (1 + C_1) \right] - \\ - R_p \left[\frac{\sin \varphi}{\sin \psi} (1 + C_1) + \frac{\cos \psi}{\cos \varphi} (1 + C_1) \right] = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_s \left[(1 + C_2) - \frac{\sin \varphi \cos \psi}{\sin \psi \cos \varphi} (1 + C_3) \right] - \\ - R_s \left[(1 + C_2) + \frac{\sin \varphi \cos \psi}{\sin \psi \cos \varphi} (1 + C_3) \right] = 0. \end{aligned}$$

Отсюда при отбрасывании всех членов порядка выше первого относительно C и при использовании введенных в (3) § 11 функций угла падения r_p , r_s получается:

$$\left. \begin{aligned} \frac{R_p}{A_p} &= \sqrt{r_p} (1 + i\sigma_p), \\ \frac{R_s}{A_s} &= \sqrt{r_s} (1 + i\sigma_s), \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

где употреблены следующие сокращения:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_p &= \frac{1}{2i} (C_4 - C_1) \frac{\sin 2\varphi \sin 2\psi}{\sin^2 \varphi \cos^2 \psi - \cos^2 \psi \sin^2 \varphi}, \\ \sigma_s &= \frac{1}{2i} (C_3 - C_2) \frac{\sin 2\varphi \sin 2\psi}{\sin^2 \varphi \cos^2 \psi - \sin^2 \psi \cos^2 \varphi}. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

На основании закона преломления

$$\frac{\sin \varphi}{\sin \psi} = \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}}$$

будет:

$$\begin{aligned} \sin^2 \varphi \cos^2 \psi - \cos^2 \varphi \sin^2 \psi &= \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{\epsilon_1} \sin^2 \psi, \\ \sin^2 \varphi \cos^2 \psi - \sin^2 \psi \cos^2 \varphi &= \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{\epsilon_1 \epsilon_2} \sin^2 \psi (\epsilon_2 \cos^2 \varphi - \epsilon_1 \sin^2 \varphi). \end{aligned}$$

Поэтому, принимая во внимание (8) и § 4 (1), имеем:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_p &= \frac{4\pi l}{\lambda_0} \left(\frac{\epsilon}{\epsilon_2} \cos^2 \psi + \frac{\epsilon_2}{\epsilon} \sin^2 \psi - 1 \right) \frac{\sqrt{\epsilon_1 \epsilon_2}}{\sqrt{\epsilon_2 - \epsilon_1}} \frac{\cos \varphi}{\epsilon_2 \cos^2 \varphi - \epsilon_1 \sin^2 \varphi}, \\ \sigma_s &= \frac{4\pi l}{\lambda_0} \left(\frac{\epsilon}{\epsilon_2} - 1 \right) \frac{\sqrt{\epsilon_1 \epsilon_2}}{\epsilon_2 - \epsilon_1} \cos \varphi, \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

вместо ω приведенная длина волны $\lambda_0 = 2\pi c/\omega$.

Если принять теперь для простоты, что падающий свет линейно поляризован под азимутом в 45° относительно p -направления, $A_p/A_s = 1$, то отраженный свет будет эллиптически поляризованным; его природа определяется из соотношения:

$$\frac{R_p}{R_s} = \sqrt{\frac{r_p}{r_s}} \frac{1 + i\sigma_p}{1 + i\sigma_s} = \sqrt{\frac{r_p}{r_s}} (1 + i\sigma), \quad (12a)$$

где величины второго порядка относительно σ_p, σ_s отброшены, и принято, что

$$\sigma = \sigma_p - \sigma_s. \quad (13a)$$

Если теперь написать:

$$\frac{R_p}{R_s} = \rho e^{i\delta}, \quad (12b)$$

то

$$\left. \begin{aligned} \rho &= \sqrt{\frac{r_p}{r_s} \sqrt{1 + \sigma^2}}; \\ \operatorname{tg} \delta &= \sigma. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

При этом согласно (11)

$$\sigma = \sigma_p - \sigma_s = \frac{4\pi l}{\lambda_0} \frac{\sqrt{\epsilon_1} \epsilon_2 \eta}{\epsilon_2 - \epsilon_1} \frac{\cos \varphi \sin^3 \varphi}{\epsilon_2 \cos^2 \varphi - \epsilon_1 \sin^2 \varphi}, \quad (13b)$$

где принято:

$$\eta = \bar{\epsilon} + \frac{\epsilon_1 \epsilon_2}{\bar{\epsilon}} - \epsilon_1 - \epsilon_2. \quad (15)$$

С $n = \sqrt{\epsilon_2/\epsilon_1}$ можно написать:

$$\sigma = \frac{4\pi l}{\lambda_0} \frac{\eta}{\sqrt{\epsilon_1}} \cdot \frac{n^2}{n^2 - 1} \cdot \frac{\sin \varphi \operatorname{tg} \varphi}{n^2 - \operatorname{tg}^2 \varphi}. \quad (16)$$

Из этой формулы видно, что для угла полной поляризации $\operatorname{tg} \varphi = n$, σ становится бесконечной; следовательно, наш способ приближения, предполагающий, что $\sigma_p \ll 1$, $\sigma_s \ll 1$, становится там недействительным. Мы можем, несмотря на это, вычислять по формулам (16) и в соседстве с углом полной поляризации, потому что нас интересует не σ (т. е. фаза δ), но ρ ; эта величина остается конечной также и при $\operatorname{tg} \varphi = n$. Это явствует из того, что произведение $\frac{r_p}{r_s} \sigma^2$ имеет конечное граничное значение; поэтому согласно (3) § 11 будет:

$$\begin{aligned} \frac{R_p}{R_s} &= -\frac{\cos(\varphi + \psi)}{\cos(\varphi - \psi)} = -\frac{\operatorname{ctg} \psi - \operatorname{tg} \varphi}{\operatorname{ctg} \psi + \operatorname{tg} \varphi} = \\ &= -\frac{\sqrt{\frac{n^2}{\operatorname{tg}^2 \varphi} + n^2 - 1} - \operatorname{tg} \varphi}{\sqrt{\frac{n^2}{\operatorname{tg}^2 \varphi} + n^2 - 1} + \operatorname{tg} \varphi}. \end{aligned}$$

Разлагая по степеням $n - \operatorname{tg} \varphi$, получаем:

$$\sqrt{\frac{r_p}{r_s}} \frac{1}{n - \operatorname{tg} \varphi} = -\frac{1 + n^2}{2n^3} + \dots,$$

где точки обозначают члены, исчезающие при $n - \operatorname{tg} \varphi = 0$; следовательно,

$$\sqrt{\frac{r_p}{r_s}} \sigma = \frac{\pi l}{\lambda_0} \frac{\eta}{\sqrt{\epsilon_1}} \frac{\sqrt{1 + n^2}}{1 - n^2} + \dots$$

Отсюда и из (14) получаем для угла полной поляризации:

$$\left. \begin{aligned} \bar{\rho} &= \frac{\pi l}{\lambda_0} \frac{\eta}{\sqrt{\epsilon_1}} \frac{\sqrt{1 + n^2}}{1 - n^2}, \\ \delta &= \frac{\pi}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

$\bar{\rho}$ называют коэффициентом эллиптичности; он представляет отношение осей эллипса в отраженном свете, если азимут падающего линейно поляризованного света составляет 45° ($\operatorname{tg} \alpha = 1$).

Разность фаз $\frac{\pi}{2}$ означает, что главные оси эллипса расположены параллельно и перпендикулярно к плоскости падения. Величина σ может быть выражена с помощью $\bar{\rho}$ следующим образом:

$$\sigma = 4\bar{\rho} \frac{n^2}{\sqrt{1 + n^2}} \frac{\sin \varphi \operatorname{tg} \varphi}{\operatorname{tg}^2 \varphi - n^2}. \quad (18)$$

Относительно знака $\bar{\rho}$ можно сказать, подставив в (15) интегралы (4) и написав:

$$\bar{\rho} = \frac{\pi}{\lambda_0} \frac{\sqrt{\epsilon_1 + \epsilon_2}}{\epsilon_1 - \epsilon_2} \int_1^2 \frac{(\epsilon - \epsilon_1)(\epsilon - \epsilon_2)}{\epsilon} dz. \quad (19)$$

Если во всем переходном слое ϵ лежит между ϵ_1 и ϵ_2 , то интеграл отрицателен и, следовательно, $\bar{\rho}$ имеет тот же знак, что и $\epsilon_2 - \epsilon_1$. Если, однако, в значительной части переходного слоя ϵ больше, чем ϵ_1 и ϵ_2 , то может случиться что $\bar{\rho}$ имеет знак, обратный знаку $\epsilon_2 - \epsilon_1$ (влияние полировки). Смысл положительного $\bar{\rho}$ виден из следующих соображений: согласно фиг. 8. положительные направления R_s, R_p, \hat{s}^r расположены как оси x, y, z правой системы; следовательно, R_p/R_s соответствует обсуждавшемуся в § 8 отношению $\mathcal{E}_y/\mathcal{E}_x$. Теперь благодаря тому, что $\delta = \frac{\pi}{2}$, мы имеем:

$$\frac{R_p}{R_s} = i\bar{\rho},$$

и это соответствует правому вращению светового вектора (в направлении часовой стрелки) при $\bar{\rho} > 0$.

Количественные исследования подтверждают в известном объеме выводы теории. Коэффициент эллиптичности $\bar{\rho}$ оказывается тем меньшим, чем чище граничная поверхность; так например, он очень мал на свежей поверхности раскола кристалла и на поверхности жидкости, постоянно обновляемой путем переливания.

При полированных зеркалах $\bar{\rho}$ значительнее и получается вообще положительным, как и следовало ожидать, если показатель преломления слоя политуры не превышает показателя материала зеркала. Только для некоторых сравнительно слабо преломляющих тел ($n < 1,46$) наблюдается отрицательная эллиптическая поляризация. Равным образом подтверждается изменение знака при повороте направления луча (взаимная замена ε_1 и ε_2).

Для случая хорошо очищенной отполированной поверхности стекла, граничащей с воздухом, $\bar{\rho}$ лежит между значениями $\bar{\rho} = 0,03$ (флинтглас, $n = 1,75$) и $\bar{\rho} = 0,007$. Для жидкостей $\bar{\rho}$ не превышает 0,01. Вода имеет отрицательный коэффициент эллиптичности, который при хорошей очистке поверхности может быть снижен до 0,00035. Существуют также жидкости, как глицерин, для которых не обнаруживается никакой заметной эллиптичности. Отсюда нельзя заключить, что вообще отсутствует поверхностный слой, но можно предположить, что значения ε внутри него местами становятся столь велики, что интеграл (19) исчезает.

При положительном $\bar{\rho}$ можно вывести нижнюю границу для толщины поверхностного слоя. При определенном положительном значении $\bar{\rho}$ получится наименьшее значение толщины, которой слой должен обладать, если принять его диэлектрическую константу постоянной и притом имеющей такое значение, что входящее в (19) подинтегральное выражение

$$\frac{(\varepsilon - \varepsilon_1)(\varepsilon - \varepsilon_2)}{\varepsilon}$$

становится максимальным. Это произойдет, если

$$\varepsilon = \sqrt{\varepsilon_1 \varepsilon_2}.$$

Тогда для нижней границы толщины \bar{l} получается соотношение:

$$\frac{\bar{l}}{\lambda_0} = \frac{\bar{\rho}}{\pi \sqrt{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}} \frac{\sqrt{\varepsilon_2} + \sqrt{\varepsilon_1}}{\sqrt{\varepsilon_2} - \sqrt{\varepsilon_1}} = \frac{\bar{\rho}}{\pi \sqrt{1 + n^2}} \frac{n + 1}{n - 1}. \quad (20)$$

Для случая флинтгласа и воздуха $n = 1,75$, $\bar{\rho} = 0,03$ (см. выше); таким образом получается, что $\bar{l}/\lambda_0 = 0,0175$. Следовательно, достаточно предположения об очень незначительной толщине поверхностного слоя, чтобы объяснить даже весьма сильную эллиптичность света, отраженного под углом полной поляризации.

Более поздние исследования¹, в особенности работа Люммера и Зорге² привели к серьезным сомнениям в том, что теория Друде соответствует физическим фактам. Так, при помощи различных влияний удается изменять величину эллиптичности, даже менять ее знак на обратный. При этом, пока поверхностный слой подвергается непосредственному влиянию, теория Друде еще может являться достаточной; однако упомянутые авторы показали, что эллиптичность *одной* поверхности стеклянной призмы изменяется и даже может изменить знак при полировке *другой* поверхности призмы. Они предположили вследствие этого, что причину эллиптичности следует искать, главным образом, в напряжениях, возникающих при полировке; можно также доказать, что путем давления на поверхность основания призмы удастся изменить эллиптичность света, отраженного от боковых поверхностей, не подвергающихся давлению. Вуд³ показал, что нанесение тонкого слоя, показатель преломления которого очень мало отличается от показателя стеклянного основания, сильно изменяет отражательную способность. Все это указывает на то, что теория Друде не вполне соответствует фактам (примечание §).

§ 13. ПОЛНОЕ ВНУТРЕННЕЕ ОТРАЖЕНИЕ

До сих пор мы исключали тот случай, когда закон преломления

$$\sin \psi = \frac{\sin \varphi}{n_{12}}$$

не дает действительного угла ψ ; это случается при переходе света из оптически более плотной среды в среду менее плотную, т. е. для

$$n_{12} = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}} < 1 \quad (1)$$

всякий раз, когда φ бывает больше, нежели определенный *граничный угол* φ_0 , удовлетворяющий уравнению:

$$\sin \varphi_0 = n_{12}. \quad (2)$$

При $\varphi = \varphi_0$, $\sin \psi = 1$, $\psi = 90^\circ$, так что свет выходит по касательной, это так называемый „скользящий“ луч; при больших углах падения свет вообще не выходит, возвращаясь, напротив, неослабленным в первую среду — это *полное внутреннее отражение*.

¹ Lord Rayleigh, Philos. Mag. (5), т. 33 (1903), стр. 444; (6), т. 16 (1892), стр. 1; К. E. F. Schmidt, Ann. Physik. т. 52 (1894), стр. 75; M. Volke, Inaug.-Diss., Breslau, 1909.

² O. Lummer и K. Sorge, Ann. d. Physik (4), т. 31, 1910, стр. 325.

³ R. W. Wood, Physical Optics, 2 изд., New-York, стр. 371.

Несмотря на это, поле во второй среде в таком случае не исчезает; в нее только не перетекает никакой энергии. Именно, если принять:

$$\sin \phi = \frac{\sin \varphi}{n}, \quad \cos \phi = \pm i \sqrt{\frac{\sin^2 \varphi}{n^2} - 1}, \quad (n = n_{12}) \quad (3)$$

в фазовом множителе

$$e^{i\tau_d} = e^{i\omega \left(t - \frac{x \sin \phi + z \cos \phi}{c_1} \right)}$$

преломленной волны, то последний принимает форму:

$$e^{i\omega \left(t - \frac{x \sin \varphi}{nc_1} \right)} e^{\frac{\omega}{c_1} \sqrt{\frac{\sin^2 \varphi}{n^2} - 1} \cdot z};$$

он соответствует, таким образом, некоторому возмущению, распространяющемуся параллельно плоскости падения (x -направление) вдоль поверхности раздела, но экспоненциально возрастающему или затухающему вглубь (z -направление). Естественно, речь может идти лишь о *затухании* [отрицательный знак у квадратного корня в (3)]; порядок величины проникания дается соотношением $c_2/\omega = \lambda_2/2\pi$ и, следовательно, весьма незначителен. Такие волны с изменяющейся в пространстве амплитудой называют „неоднородными волнами“; они не являются поперечными, ибо, как мы сейчас увидим, x -составляющая электрического поля не исчезает.

Для экспериментального доказательства этого тонкого волнового слоя были предложены различные установки. Фогт¹ предложил призму, в которой плоскость полного внутреннего отражения имела плоскую трещину; она была видна слабо освещенной, и Фогт полагал увидеть в ней искомое явление. Однако Кеттелер² правильно указал на невозможность избежать освещения краев, возникающего вследствие дифракции. Вуд³ пользовался маленькими частичками (копотью от пламени) на поверхности стекла, от которой происходит полное внутреннее отражение, и наблюдал в микроскоп, что частицы испускали во все стороны рассеянный свет.

Для того чтобы применить формулы Френеля (15) § 10 к случаю полного внутреннего отражения, мы напомним их в виде:

$$R_p = \frac{\sin \varphi \cos \phi - \sin \phi \cos \varphi}{\sin \varphi \cos \phi + \sin \phi \cos \varphi} A_p,$$

$$R_s = -\frac{\sin \varphi \cos \phi - \sin \phi \cos \varphi}{\sin \varphi \cos \phi + \sin \phi \cos \varphi} A_s.$$

и подставим в них выражения (3), причем квадратный корень берется, как мы видели, с отрицательным знаком. Тогда мы получим:

$$\left. \begin{aligned} R_p &= \frac{n^2 \cos \varphi + i \sqrt{\sin^2 \varphi - n^2}}{n^2 \cos \varphi - i \sqrt{\sin^2 \varphi - n^2}} A_p, \\ R_s &= \frac{\cos \varphi + i \sqrt{\sin^2 \varphi - n^2}}{\cos \varphi - i \sqrt{\sin^2 \varphi - n^2}} A_s. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Отсюда видим, что

$$|R_p| = |A_p|, \quad |R_s| = |A_s|. \quad (5)$$

Для каждой из двух составляющих интенсивность света, претерпевшего полное внутреннее отражение, равна интенсивности падающего света.

Хотя, как мы видели, во второй среде и существует поле, однако энергия не проникает через границу. Это легко проверить, заметив, что среднее по времени от нормальной составляющей вектора излучения Пойнтинга равно нулю, т. е. что имеет место лишь колебание энергии туда и обратно через поверхность раздела без какого-либо постоянного перетекания.

Для квадратичных величин энергии мы напомним составляющие поля действительными¹; согласно (7) § 10 и (3) § 13 для $z=0$ будет:

$$\begin{aligned} \mathfrak{E}_x^d &= \frac{1}{2} \left(D_p \cos \phi e^{i\tau_d^0} + D_p^* \cos^* \phi e^{-i\tau_d^0} \right) = \\ &= -\frac{i}{2} \sqrt{\frac{\sin^2 \varphi}{n^2} - 1} (D_p e^{i\tau_d^0} - D_p^* e^{-i\tau_d^0}), \\ \mathfrak{E}_y^d &= \frac{1}{2} (D_s e^{i\tau_d^0} + D_s^* e^{-i\tau_d^0}), \\ \mathfrak{E}_z^d &= -\frac{1}{2} (D_s \cos \phi \sqrt{\epsilon_2} e^{i\tau_d^0} + D_s^* \cos^* \phi \sqrt{\epsilon_2} e^{-i\tau_d^0}) = \\ &= \frac{i}{2} \sqrt{\epsilon_2} \sqrt{\frac{\sin^2 \varphi}{n^2} - 1} (D_s e^{i\tau_d^0} - D_s^* e^{-i\tau_d^0}), \\ \mathfrak{E}_y^d &= \frac{1}{2} \sqrt{\epsilon_2} (D_p e^{i\tau_d^0} + D_p^* e^{-i\tau_d^0}), \end{aligned}$$

где

$$\tau_d^0 = \omega \left(t - \frac{x \sin \varphi}{nc_2} \right).$$

¹ Здесь и в последующем мы будем обозначать комплексное число, сопряженное комплексному числу z , через z^* .

¹ W. Voigt, Wiedem. Ann., т. 67 (1899), стр. 185.

² E. Ketteler, Wiedem. Ann., т. 67 (1899), стр. 879.

³ R. W. Wood, Physical Optics, 2 изд., стр. 374.

Если теперь образовать среднее по времени от

$$\mathcal{E}_z^d = \frac{c}{4\pi} (\mathcal{E}_x^d \mathcal{H}_y^d - \mathcal{E}_y^d \mathcal{H}_x^d),$$

то при $z=0$ оба члена исчезнут сами по себе, так как один имеет множителем

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T (D_p^2 e^{2ik_d^0} - D_p^{*2} e^{-2ik_d^0}) dt = 0,$$

а другой имеет соответствующий множитель с D_s .

Если вычислить две другие составляющие \mathcal{E} при $z=0$, то для среднего по времени от \mathcal{E}_x получится конечное значение, тогда как среднее от \mathcal{E}_y естественно исчезает. Энергия, таким образом, не протекает во вторую среду, хотя и течет в ней вдоль поверхности раздела, параллельно плоскости падения.

Эти рассуждения справедливы для стационарного состояния; при возникновении процесса небольшое количество энергии, естественно, должно перетечь во вторую среду, чтобы установить там поле. Предполагается, что толщина тела, производящего полное внутреннее отражение, значительно превосходит длину световой волны в нем; таким образом, если проникающее возмущение достигает противоположной поверхности, полного внутреннего отражения не произойдет. Это можно продемонстрировать экспериментально с помощью света большой длины волны (инфракрасные лучи) (примечание 6).

Вычислим теперь скачок фазы между соответствующими составляющими отраженной и падающей волн. Для этого положим, принимая во внимание (5):

$$\frac{R_p}{A_p} = e^{i\delta_p}, \quad \frac{R_s}{A_s} = e^{i\delta_s}. \quad (6)$$

Если теперь комплексное число с абсолютной величиной 1 равно, как это здесь имеет место согласно (4), отношению комплексного числа $z = a e^{i\alpha}$ к его сопряженному, то

$$e^{i\alpha} = z \cdot z^{*-1} = e^{2i\alpha}, \text{ так что } \operatorname{tg} \frac{\delta}{2} = \operatorname{tg} \alpha.$$

Следовательно, имеют место равенства:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{\delta_p}{2} &= \frac{\sqrt{\sin^2 \varphi - n^2}}{n^2 \cos \varphi}, \\ \operatorname{tg} \frac{\delta_s}{2} &= \frac{\sqrt{\sin^2 \varphi - n^2}}{\cos \varphi} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Обе составляющие испытывают, таким образом, различные скачки фаз. Поэтому линейно поляризованный свет будет превращаться при полном внутреннем отражении в эллиптически поляризованный.

Для относительной разности фаз после отражения $\delta = \delta_p - \delta_s$ получается:

$$\operatorname{tg} \frac{\delta}{2} = \frac{\operatorname{tg} \frac{\delta_p}{2} - \operatorname{tg} \frac{\delta_s}{2}}{1 + \operatorname{tg} \frac{\delta_p}{2} \operatorname{tg} \frac{\delta_s}{2}} = \frac{\left(\frac{1}{n^2} - 1 \right) \frac{\sqrt{\sin^2 \varphi - n^2}}{\cos \varphi}}{1 + \frac{\sin^2 \varphi - n^2}{n^2 \cos^2 \varphi}};$$

следовательно,

$$\operatorname{tg} \frac{\delta}{2} = \frac{\cos \varphi \sqrt{\sin^2 \varphi - n^2}}{\sin^2 \varphi}. \quad (8)$$

Это выражение обращается в нуль при скользющем падении ($\varphi = \frac{\pi}{2}$) и для предельного угла полного внутреннего отражения φ_0 ($\sin \varphi_0 = n$). Между этими значениями лежит максимум относительной разности фаз. С помощью уравнения

$$\frac{d}{d\varphi} \left(\operatorname{tg} \frac{\delta}{2} \right) = \frac{2n^2 - \sin^2 \varphi (1 + n^2)}{\sin^3 \varphi \sqrt{\sin^2 \varphi - n^2}} = 0$$

находим:

$$\sin^2 \varphi = \frac{2n^2}{1 + n^2}. \quad (9)$$

Соответствующее этому максимальное значение разности фаз определяется соотношением:

$$\operatorname{tg} \frac{\delta_m}{2} = \frac{1 - n^2}{n^2}. \quad (10)$$

Таким образом можно достичь тем большей разности фаз, чем меньше будет n .

При заданном n каждому δ соответствует согласно (8) два значения угла падения φ .

Можно, как показал Френель, воспользоваться возникающей при полном внутреннем отражении разностью фаз для превращения линейно поляризованного света в свет, поляризованный по кругу. Прежде всего достигают равенства амплитуд, сделав азимут падающего линейно поляризованного света равным 45° ; тогда из $|A_p| = |A_s|$ согласно (5) следует:

$$|R_p| = |R_s|.$$

Затем выбирают n и φ так, что разность фаз δ становится равной 90° . Чтобы достигнуть этого, единственным отражением должно быть согласно (10):

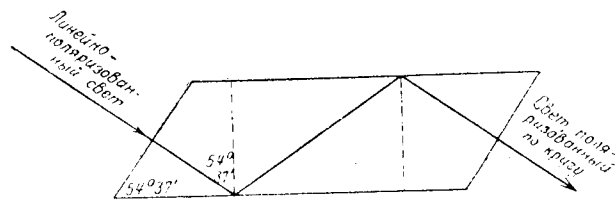
$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} &= 1 < \frac{1 - n^2}{2n}; \\ n &= n_{12} < \sqrt{2} - 1 = 0,414; \end{aligned}$$

задающийся обычно показатель преломления оптически более плотной среды относительно менее плотной n_{21} должен, таким образом, составлять по меньшей мере 2,41 — значение, достигаемое только алмазом.

Поэтому Френель применял двукратное полное внутреннее отражение в стекле; для $n_{21}=1,51$ углом падения, соответствующим максимальной разности фаз, будет согласно (9) $\varphi=51^\circ 20'$, причем последняя равна согласно (10) $\delta_m=45^\circ 56'$. Можно, таким образом, еще достигнуть $\delta_m=45^\circ$ и притом для углов:

$$\varphi=48^\circ 37' \text{ и } \varphi=54^\circ 37'.$$

Путем двукратного полного внутреннего отражения под одним из этих углов получается разность фаз в 90° . Для этого служит „параллелепипед Френеля“, представленный на фиг. 15.



Фиг. 15. Параллелепипед Френеля.

Разумеется, при помощи этого прибора можно получить и эллиптически поляризованный свет, придавая азимуту падающего линейно поляризованного света значения, отличные от 45° . Можно также обратить процесс, превращая при помощи параллелепипеда Френеля эллиптически поляризованный свет в линейно поляризованный и анализируя его таким путем. Таким образом этот аппарат выполняет то же назначение, как и пластинка в четверть волны и аналогичные приспособления, которые мы будем изучать в кристаллооптике (глава V, § 63).

Измерение предельного угла полного внутреннего отражения φ_0 является удобным и точным способом для получения показателя преломления $n=\sin \varphi_0$. Аппараты, служащие для этих измерений, называются *рефрактометрами*. Они основаны на том, что поверхность исследуемого вещества приводится в соприкосновение со средой с известным и возможно высоким показателем преломления; форма этих вспомогательных тел выбирается такою, чтобы можно было удобно измерять направление падающего луча. Более старые конструкции этого рода принадлежат Волластону, Кольраушу и Аббе; ныне большей частью употребляется конструкция Пульфриха. Детальное описание этих аппаратов можно найти в учебниках экспериментальной физики.

Глава вторая

ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ОПТИКА

§ 14. ПРЕДЕЛЬНЫЙ ПЕРЕХОД К БЕСКОНЕЧНО МАЛОЙ ДЛИНЕ ВОЛНЫ

Законы распространения плоских волн в однородных прозрачных телах, с которыми мы познакомились выше, достаточны для приближенного истолкования тех световых явлений, в которых фронт волны является уже плоским не строго, а приблизительно. „Приблизительно“ означает в данном случае то, что кривизной волновой поверхности можно пренебречь в тех областях, линейные размеры которых велики по сравнению с длиной волны.

Вследствие малости длин волн видимого света (порядок величины $5 \cdot 10^{-5}$ см) эти случаи имеют наибольшее практическое значение. Явления же, отклоняющиеся от этой приближенной теории, приходится специально искать, — их можно наблюдать лишь с помощью особых приборов (явления дифракции, глава IV).

Та часть оптики, отличительным признаком которой является пренебрежение длиной волны, т. е. переход к пределу $\lambda \rightarrow 0$, называется *геометрической оптикой*. В этом предельном случае мы можем говорить о *световых лучах*, рассматривая их как геометрические линии. Такой световой луч мы можем получить, заставив свет от возможно малого („точечного“) источника проходить через отверстие, величину которого будем все более уменьшать. Сначала заполняется светом цилиндрическое (точнее, слабо коническое) пространство, причем граница тени представляется резко очерченной. Однако при более тщательном рассмотрении оказывается, что сила света на границе меняется постепенно и притом не монотонно, а с колебаниями (дифракционные полосы). Область перехода имеет порядок величины световой волны [примечание 7]; следовательно, поскольку мы пренебрегаем длиной волны, как ничтожно малой по сравнению с величиной отверстия, мы можем говорить о резко ограниченном „луче“, в котором световое возмущение распространяется плоскими волнами (имеющими конечное сечение). Когда величина отверстия, уменьшаясь, достигает порядка длины волны, возникают явления, требующие особого изучения. Однако мы можем мысленно рассматривать предельный случай $\lambda = 0$, когда уменьшению отверстия не поставлено никаких границ. Тогда через очень малое отверстие проходит бесконечно тонкий световой луч, который можно рассматривать, как математическую прямую. Его направление определяется нормалью к электро-

магнитной волне, которую мы считаем плоской. Таким образом в однородной среде луч будет прямым, а при переходе в другую среду он расщепится на луч отраженный и луч проходящий, направления которых определяются законами отражения и преломления плоской волны. Распределение интенсивности в этих двух лучах также может быть вычислено из формул отражательной способности и проницаемости для плоских волн. Наконец, можно чисто описательно приписать лучу некоторое поляризационное состояние и находить изменение последнего при отражении и преломлении из результатов, полученных для плоских волн.

Мы найдем полное световое возмущение, исследуя все исходящие из источника света лучи чисто геометрически, а затем вычисляя их интенсивности (в данном случае отдельно для каждого из направлений поляризации).

Теперь дадим более точную математическую формулировку указанному переходу к пределу. Мы исходим опять из уравнений Максвелла [§ 1. (1a, b)], которые мы перепишем здесь для случая изотропного непроводящего ($\sigma = 0$) немагнитного ($\mu = 1$) тела:

$$\left. \begin{aligned} \text{rot } \mathfrak{H} - \frac{\varepsilon}{c} \mathfrak{E} &= 0, & (a) \\ \text{rot } \mathfrak{E} + \frac{1}{c} \dot{\mathfrak{H}} &= 0. & (b) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

При этом имеются условия:

$$\text{div } \mathfrak{E} = 0, \quad \text{div } \mathfrak{H} = 0. \quad (2)$$

Исключим \mathfrak{H} , чтобы получить уравнение, содержащее одно \mathfrak{E} . Для этого дифференцируем уравнение (1a) по времени и берем rot (1b):

$$\begin{aligned} \text{rot } \dot{\mathfrak{H}} - \frac{\varepsilon}{c} \dot{\mathfrak{E}} &= 0, \\ \text{rot rot } \mathfrak{E} + \frac{1}{c} \text{rot } \dot{\mathfrak{H}} &= 0. \end{aligned}$$

Исключив $\text{rot } \dot{\mathfrak{H}}$, получим:

$$\text{rot rot } \mathfrak{E} + \frac{\varepsilon}{c^2} \ddot{\mathfrak{E}} = 0.$$

Известно векторное тождество:

$$\text{rot rot } \mathfrak{E} = -\Delta \mathfrak{E} + \text{grad div } \mathfrak{E},$$

где $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2$ — оператор Лапласа. Воспользовавшись также уравнением (2), мы получаем:

$$\Delta \mathfrak{E} - \frac{\varepsilon}{c^2} \ddot{\mathfrak{E}} = 0. \quad (3)$$

Это известное уравнение волны, которое в данном случае справедливо для каждой составляющей \mathfrak{E} . Аналогичным путем легко показать, что оно справедливо и для каждой составляющей \mathfrak{H} .

Теперь рассмотрим простые гармонические колебания, в которых любая составляющая \mathfrak{E} (или \mathfrak{H}) имеет форму:

$$f(x, y, z) e^{i\omega t};$$

тогда из (3) следует, что

$$\Delta f + \frac{\varepsilon \omega^2}{c^2} f = 0.$$

Положим здесь согласно § 5 $n = \sqrt{\varepsilon}$ и, далее, согласно уравнениям (6) и (7) § 6:

$$k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi\nu}{c} = \frac{2\pi}{\lambda_0} = 2\pi\bar{\nu}. \quad (4)$$

Таким образом k есть волновое число, умноженное на 2π ; оно имеет размерность см^{-1} и в случае коротких волн принимает очень большое числовое значение. Теперь уравнение волны примет вид:

$$\Delta f + k^2 n^2 f = 0. \quad (5)$$

Наша задача — найти решения в предельном случае больших k .

В действительности различные составляющие векторов \mathfrak{E} и \mathfrak{H} не являются независимыми; граничные условия § 9 относятся к линейным зависимостям между прямоугольными векторными составляющими (тангенциальными составляющими). Но здесь мы не будем этого учитывать и будем рассматривать световой процесс, как скалярное волновое поле, определяемое уравнением (5).

Плоским волнам соответствует решение (см. главу I, § 6):

$$f = a e^{i \frac{2\pi}{\lambda} (\mathfrak{H} \mathbf{r})} = a e^{i \frac{2\pi n}{\lambda_0} (\mathfrak{H} \mathbf{r})} = a e^{i k L},$$

где $L = n(\mathfrak{H} \mathbf{r})$ — „оптический“ или „световой путь“ — есть линейная функция координат.

В соответствии с нашей задачей мы будем искать теперь более общих решений, которые только в незначительной степени отличались бы от плоской волны. Для этого введем следующую функцию¹:

$$f = u(x, y, z) e^{i k L(x, y, z)}. \quad (6)$$

Здесь $u(x, y, z)$ есть медленно изменяющаяся амплитуда, а $L(x, y, z)$ — функция координат, мало отличающаяся от линейной. Мы стремимся возможно лучше удовлетворить при помощи этой функции волновому уравнению, когда k очень велико.

¹ См. A. Sommerfeld и J. Runge, Ann. Physik (4), т. 35 (1911), стр. 277. В дальнейшем мы будем часто применять изложенный в этой книге метод.

Имеем:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + iku \frac{\partial L}{\partial x} \right) e^{ikL};$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2ik \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial L}{\partial x} + iku \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} - k^2 u \left(\frac{\partial L}{\partial x} \right)^2 \right] e^{ikL}.$$

Тогда уравнение (5) переходит в следующее:

$$k^2 u (n^2 - |\text{grad } L|^2) + ik(u \Delta L + 2 \text{grad } u \cdot \text{grad } L) + \Delta u = 0.$$

Так как k очень большое число, то до тех пор, пока величины

$$u \Delta L + 2 \text{grad } u \cdot \text{grad } L \text{ и } \Delta u \quad (7)$$

не станут также слишком большими, мы можем ограничиться первым членом и получаем:

$$|\text{grad } L|^2 = n^2. \quad (8)$$

Если $L(x, y, z)$ удовлетворяет этому уравнению, то функция (6) является приближенным решением уравнения волны (5) для больших k (малых λ). Таким образом дифференциальное уравнение второго порядка первой степени (5) для f превратилось в дифференциальное уравнение первого порядка второй степени относительно L . Действительно, уравнение (8) в развернутой форме:

$$\left(\frac{\partial L}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial L}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial L}{\partial z} \right)^2 = n^2. \quad (9)$$

Если $L(x, y, z)$ есть решение, то $L(x, y, z) = \text{const}$ представляет собой приближенное уравнение поверхностей равных фаз, а нормали к поверхностям совпадают с направлением световых лучей¹; величина L , отложенная на нормали от некоторой фиксированной поверхности этого семейства, есть „оптический путь“, или „световой путь“.

Единичный вектор \hat{s} по направлению нормали к поверхности $L = \text{const}$ пропорционален $\text{grad } L$, и из (8) следует:

$$n\hat{s} = \text{grad } L, \quad |\hat{s}| = 1. \quad (10)$$

¹ На языке математики (9) представляет уравнение характеристик, принадлежащих дифференциальному уравнению в частных производных (5), и описывает распространение разрывов непрерывности решений (9). Однако в случае геометрической оптики встречаются не разрывы непрерывности, а решения периодические по фазе; эту зависимость показывает наш вывод, который, конечно, не удовлетворяет требованию математической строгости (оценка погрешности).

Ища приближенного решения, мы не предполагали, что n постоянно. Поэтому мы можем рассматривать n как функцию положения; таким образом наши рассуждения применимы также и к неоднородным средам. Световой путь от P_0 до P всегда выражается линейным интегралом:

$$\int_{P_0}^P n ds = L(P) - L(P_0). \quad (11)$$

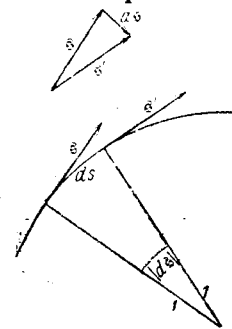
Границы геометрической оптики определяются уравнением (7). На границе тени происходит внезапное изменение амплитуды u , следовательно, $\text{grad } u$ велик; здесь имеют место отклонения от геометрического хода луча, так называемые дифракционные явления. В источнике света и в фокусе, где лучи расходятся или собираются, $\text{div } n\hat{s} = \text{div grad } L = \Delta L$ также велика; здесь также имеют место явления, выходящие за пределы геометрической оптики. Этих исключительных случаев мы пока не будем рассматривать.

Уравнению (10) и получающимся из него путем возведения в квадрат уравнениям (8) или (9) можно дать следующее наглядное истолкование. Если построить две бесконечно близкие поверхности $L = \text{const}$ и $L + dL = \text{const}$ и обозначить $d\hat{s}$ нормальное расстояние между ними в произвольной точке, то

$$\frac{dL}{ds} = n.$$

Если мы имеем две соседние плоскости L с постоянной разностью светового пути dL , то уравнение $n ds = dL$ означает, что расстояния между двумя лежащими на одной нормали точками обратно пропорциональны коэффициентам преломления или прямо пропорциональны скоростям света.

В частности, отсюда следует, что в однородной среде ($n = \text{const}$) смежные поверхности L находятся на равных расстояниях друг от друга. Далее, отсюда следует, что ортогональные траектории семейства поверхностей являются прямыми линиями. Чтобы доказать это, будем рассматривать световые лучи как токовые линии векторного поля \hat{s} . Назовем ds линейный элемент кривой луча. При перемещении по ds касательный единичный вектор \hat{s} переходит в единичный вектор \hat{s}' , имеющий другое направление (фиг. 16); \hat{s} и \hat{s}' образуют равнобедренный треугольник с основанием $d\hat{s}$, которое можно считать перпендикулярным к \hat{s} . Только когда $d\hat{s}$ исчезает, кривизна кривой



Фиг. 16. Кривизна луча.

в данной точке равна нулю¹. Условие прямолинейности, следовательно, можно написать так:

$$\frac{d\vec{s}}{ds} = 0. \quad (12)$$

Имеем:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{s}_x}{ds} &= \frac{\partial \vec{s}_x}{\partial x} \cdot \frac{dx}{ds} + \frac{\partial \vec{s}_x}{\partial y} \frac{dy}{ds} + \frac{\partial \vec{s}_x}{\partial z} \frac{dz}{ds} = \\ &= \frac{\partial \vec{s}_x}{\partial x} \vec{s}_x + \frac{\partial \vec{s}_x}{\partial y} \vec{s}_y + \frac{\partial \vec{s}_x}{\partial z} \vec{s}_z. \end{aligned}$$

С другой стороны, из равенства $|\vec{s}| = 1$ следует:

$$0 = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} |\vec{s}|^2 = \vec{s}_x \frac{\partial \vec{s}_x}{\partial x} + \vec{s}_y \frac{\partial \vec{s}_y}{\partial x} + \vec{s}_z \frac{\partial \vec{s}_z}{\partial x}.$$

Путем вычитания получаем:

$$\frac{d\vec{s}_x}{ds} = \vec{s}_y \left(\frac{\partial \vec{s}_x}{\partial y} - \frac{\partial \vec{s}_y}{\partial x} \right) + \vec{s}_z \left(\frac{\partial \vec{s}_x}{\partial z} - \frac{\partial \vec{s}_z}{\partial x} \right)$$

или в векторной форме:

$$\frac{d\vec{s}}{ds} = \text{rot } \vec{s} \times \vec{s}. \quad (13)$$

Из уравнения (10) следует для $n = \text{const}$:

$$\text{rot } \vec{s} = \frac{1}{n} \text{rot grad } L = 0. \quad (14)$$

Таким образом условие (12) прямолинейности удовлетворяется.

Исчезновение $\text{rot } \vec{s}$ или, на языке учения о векторном поле, „отсутствие вихрей“ в векторном поле является признаком оптических лучей в отличие от более общих, так называемых лучей Куммера.

Говорят также, что световые лучи в однородной среде образуют „ортотомную систему“, т. е. пучок прямых, определяемый двумя параметрами, который пересекается надлежащим образом выбранным семейством поверхностей под прямым углом. Мы сейчас будем говорить о весьма существенной связи этого свойства с законами отражения и преломления.

§ 15. ТЕОРЕМА МАЛУСА И ПРИНЦИП ФЕРМА

Малус доказал следующую теорему: *ортотомная система лучей остается ортотомной после любого числа отражений и преломлений.*

¹ Кривизна кривой равна $\left| \frac{d\vec{s}}{ds} \right|$ (фиг. 16).

Мы заимствуем закон отражения и преломления из волновой теории (глава I, § 4)¹.

Из формулировки его вытекает, что вектор

$$\mathfrak{N} = n_1 \vec{s}_1 - n_2 \vec{s}_2 \quad (1)$$

нормален к поверхности раздела; здесь \vec{s}_1 и \vec{s}_2 — единичные векторы светового луча до и после преломления (отражения); n_1 и n_2 — показатели преломления обеих сред (при отражении $n_1 = n_2$).

Если разность векторов $n_1 \vec{s}_1$ и $n_2 \vec{s}_2$ имеет направление нормали, то оба вектора лежат в одной и той же плоскости, проходящей через нормаль — плоскости падения (фиг. 17); тангенциальная составляющая \mathfrak{N} исчезает, а так как тангенциальные составляющие \vec{s}_1 и \vec{s}_2 равны $\sin \varphi_1$ и $\sin \varphi_2$, где φ_1 и φ_2 означают углы падения и преломления, то

$$n_1 \sin \varphi_1 - n_2 \sin \varphi_2 = 0.$$

В случае отражения $n_1 = n_2 = n$; заметим, что тогда \vec{s}_1 направлен к плоскости раздела, а \vec{s}_2 — от нее; из нормальности вектора $\mathfrak{N} = n(\vec{s}_1 - \vec{s}_2)$ мы немедленно получаем закон отражения.

Очевидно, что достаточно доказать закон Малуса для одного преломления (отражения), тогда он будет справедлив и для любого числа их.

Из § 14 (10) следует (также и в случае неоднородной среды с постоянно изменяющимся n):

$$\text{rot } n\vec{s} = \text{rot grad } L = 0; \quad (2)$$

по теореме Стокса интеграл, взятый по произвольной замкнутой кривой с векторным линейным элементом dt ,

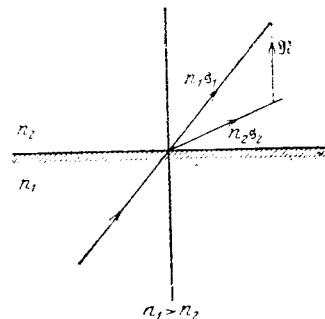
$$\oint n\vec{s} dt = \int (\text{rot } n\vec{s}), d\sigma, \quad (3)$$

причем интегрирование производится по произвольной поверхности, ограниченной кривой, а нормаль γ связана с направлением обычным образом. Таким образом из (2) получаем:

$$\oint n\vec{s} dt = 0. \quad (4)$$

Мы заключаем из закона преломления (отражения), что формула (4) применима и в том случае, когда замкнутая кривая

¹ Этот закон можно также получить путем перехода от непрерывного распределения n к скачкообразному изменению. При этом, однако, надо сделать неочевидное допущение, что $\text{grad } L$ постоянно на границе.



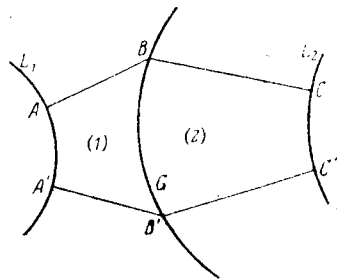
пересекает поверхность раздела между двумя средами, где n изменяется скачком. В этом случае мы разобьем кривую C на две петли, добавив к ней соединительные отрезки K вдоль поверхности раздела (фиг. 18). Применив к каждой петле отдельно формулу (4) и сложив полученные уравнения, найдем:

$$\int_C n \bar{s} dt + \int_K (n_1 \bar{s}_1 - n_2 \bar{s}_2) dt = 0.$$

Но здесь второй интеграл равен нулю, так как вектор $\bar{N} = n_1 \bar{s}_1 - n_2 \bar{s}_2$ перпендикулярен к поверхности раздела, следовательно, и ко всем элементам dt кривой K .

Фиг. 18. Граничное условие для вектора нормали \bar{s} .

Так как уравнение (4) применимо и к преломлению и к отражению, то воспользуемся им для следующего случая. Пусть даны две однородные среды ($n_1 = \text{const}$, $n_2 = \text{const}$), границей которых служит поверхность G (фиг. 19); выделим в первой среде поверхность $L(x, y, z) = L_1$ и построим луч, выходящий нормально из точки A на ней. Он встречается поверхность раздела G в точке B и проходит через точку C во второй среде. Переместим точку A по произвольной кривой поверхности L_1 в положение A' и заставим при этом перемещаться луч ABC , сохраняя его оптическую длину. Пусть его конечное положение будет $A'B'C'$. Дадим теперь A' произвольные вариации на L_1 ; при этом C' будет двигаться по некоторой поверхности $L(x, y, z) = L_2$. Требуется доказать, что луч $A'B'C'$ нормален к поверхности L_2 .



Фиг. 19. К доказательству теоремы Малуса.

Применим формулу (4) к замкнутому контуру $ABCC'B'A'A$. Мы получим:

$$\int_{ABC} n ds + \int_{CC'} n \bar{s} dt + \int_{C'B'A'} n ds + \int_{A'A} n \bar{s} dt = 0.$$

По условию оптические пути AEC и $A'B'C'$ равны, — поэтому:

$$\int_{ABC} n ds + \int_{C'B'A'} n ds = 0.$$

Далее, \bar{s} всюду нормален к L_1 ; следовательно,

$$\int_{A'A} n \bar{s} dt = 0.$$

Отсюда следует, что

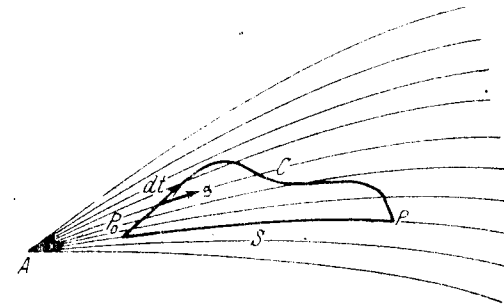
$$\int_{CC'} n \bar{s} dt = 0$$

для всякой кривой поверхности L_2 . Таким образом $\bar{s} dt$ должен быть равен 0 для каждого линейного элемента dt на L_2 , а значит луч \bar{s} всюду нормален к поверхности L_2 , как и утверждает теорема Малуса.

В тесной связи с ней находится упомянутый в введении принцип кратчайшего пути Ферма (Fermat)¹, согласно которому интеграл

$$\int_{P_0}^P n ds,$$

взятый по лучу, имеет наименьшее значение из всех тех, какие он может получить по любой кривой между теми же



Фиг. 20. К доказательству принципа Ферма.

точками P_0 и P . При этом необходимо условие, чтобы пространство вблизи отрезка P_0P луча S было заполнено непрерывным „полем лучей“ \bar{s} . Такое поле может быть образовано, например, пучком лучей, выходящих из точки A , если только эти лучи не пересекаются взаимно вследствие отражения или преломления (фиг. 20).

Если отрезок луча S находится целиком в таком поле \bar{s} так же, как и виртуальные кривые C , проходящие между P_0 и P , то мы рассуждаем следующим образом.

Согласно (4)

$$\int_C n \bar{s} dt + \int_S n ds = 0,$$

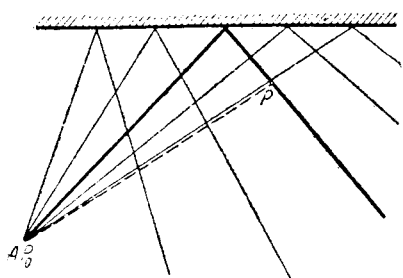
¹ Аналогичные теоремы о минимуме применяются во многих областях физики для сжатой формулировки законов, например, в механике принцип наименьшего действия в его различных формах. Для систематического решения этих минимальных задач служат методы вариационного исчисления. Приводимые ниже доказательства иногда могут быть перенесены на гораздо более общие случаи.

где dt есть векторный линейный элемент C , а ds — скалярный линейный элемент S ; но так как проекция вектора не может быть больше самого вектора, то

$$\left| \int_C n \vec{s} dt \right| \leq \int_C n dt,$$

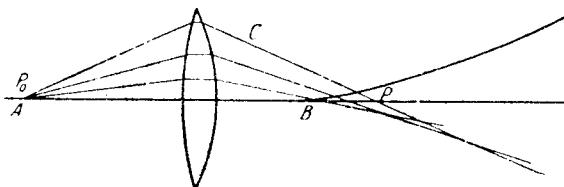
где dt — скалярный линейный элемент C . Отсюда

$$\int_S n ds \leq \int_C n dt,$$



Фиг. 21. Поле лучей светящейся точки при отражении.

чем и доказывается принцип Ферма. Условие, что отрезок луча S целиком находится в поле лучей, действительно необходимо, как показывают простейшие примеры. Так, уже в однородной среде при отражении от плоскости (фиг. 21) возникает двойное заполнение пространства лучами; прямой луч дает абсолютный минимум светового пути, а отраженный луч дает минимум относительно соседних кривых окружающего пространства. В неоднородных средах или в случае однородных сред с преломляющимися поверхностями простое заполнение пространства лучами, выходящими из точки



Фиг. 22. Каустика, получаемая от точки на оси линзы.

А, прекращается там, где лучи образуют огибающие поверхности (фиг. 22). Последние называются в оптике „фокальными поверхностями“, или каустиками, — о них будем говорить дальше (§ 17). Точка B касания луча с фокальной поверхностью называется точкой, „сопряженной“ с A на данном луче. Заставив совпасть A с P_0 , мы можем так определить ту часть луча P_0P , которая дает минимум светового пути: конечная точка P должна лежать между P_0 и точкой, сопряженной с P_0 . Так например (фиг. 22), линза (не корригированная) имеет для центрального луча только один минимум светового пути до фокуса, т. е. до вершин фокальной плоскости, находящейся на оси. Напротив, когда P лежит на оси позади B , ломаный световой путь P_0CP короче прямого ABP .

Из требования, что $\int n ds$ должно быть минимумом, мы можем вывести по правилам вариационного исчисления законы поля лучей (например закон преломления). Но мы не будем в этом останавливаться.

§ 16. ФОКАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА БЕСКОНЕЧНО УЗКОГО ПУЧКА

Рассмотрим теперь *бесконечно узкий*, или *элементарный*, пучок лучей, т. е. такой пучок, в котором лучи бесконечно мало отличаются друг от друга. Вообще не существует такой точки P , в которой пересекались бы все лучи бесконечно узкого пучка. Если же такая точка есть, мы говорим, что пучок „гомоцентричен“; только для такого пучка поверхности $L = \text{const}$ являются сферами.

Рассмотрим геометрию негомоцентричных бесконечно узких пучков. В точке P поверхности $L = \text{const}$, которая, как мы уже сказали, не является сферой, восстановим нормаль к поверхности и проведем через нее произвольную плоскость; последняя вырежет на поверхности некоторую плоскую кривую. Центр соприкасающегося круга этой кривой в точке P должен лежать на нормали.

Если мы будем вращать плоскость вокруг нормали, кривая пересечения будет постоянно изменяться, а вместе с ней будет изменяться и радиус кривизны. За поворотом радиус пройдет через максимум и минимум. В теории кривых поверхностей¹ доказывается, что плоскости, которым соответствуют максимум и минимум радиуса кривизны, взаимно перпендикулярны. В этих „главных плоскостях“ лежат главные круги кривизны. Проводя на поверхности кривые, касающиеся в каждой точке соответствующих главных плоскостей, мы получим оба ортогональных семейства линий кривизны.

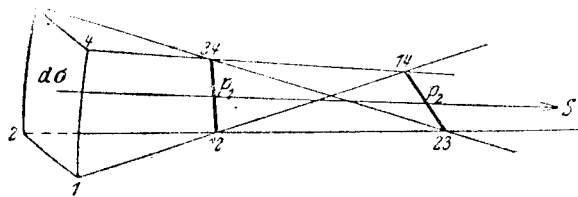
Вообразим себе теперь на поверхности $L = \text{const}$ элемент поверхности $d\sigma$, ограниченный двумя парами линий кривизны, или, что то же самое для бесконечно малого элемента, двумя парами кругов кривизны. Обозначим вершины площадки $d\sigma$ цифрами 1, 2, 3, 4. Для определенности положим, что дуги 1—2 и 3—4 горизонтальны, а дуги 2—3 и 1—4 вертикальны (фиг. 23).

Нормали к поверхности, проходящие через дугу главного круга кривизны 1—2, пересекаются в точке 12; нормали, проходящие через дугу 3—4, пересекаются в точке 34. Линия, соединяющая эти точки, называется каустической или фокальной линией p_1 . Она, очевидно, параллельна двум другим сторонам 2—3 и 1—4 элемента $d\sigma$ и, согласно нашему условию, вертикальна. Нормали, восстановленные на любой горизонтальной линии кривизны, пересекаются в некоторой точке линии p_1 .

¹ Blaschke, Vorlesungen über Differentialgeometrie, т. 1, 3 изд., § 41—44, Berlin, 1930.

Таким же образом, но исходя из дуг 2—3 и 1—4, мы построим горизонтальную каустическую линию p_2 .

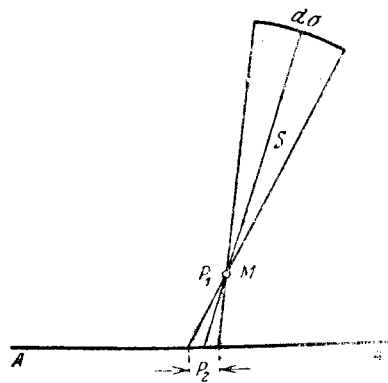
Нормаль, восстановленная в центре $d\sigma$, называется *главным лучом* S пучка лучей.



Фиг. 23. Фокусы нормалей к элементу поверхности.

Очевидно, что плоскость, определяемая p_1 и S , перпендикулярна к плоскости, определяемой p_2 и S .

При этом необязательно, чтобы обе каустические линии были перпендикулярны к главному лучу. Это лучше всего показать на примере (фиг. 24).



Фиг. 24. Фокусы (каустические линии) волновой поверхности, обладающей осевой симметрией.

Положим, что поверхность L симметрична относительно оси AA' и что элемент $d\sigma$ не содержит ни одной точки оси. Тогда, очевидно, одна каустическая линия p_1 перпендикулярно пересекает меридиональную плоскость в центре кривизны M меридионального сечения площадки $d\sigma$; вторая каустическая линия p_2 совпадает с отрезком оси, отсекаемым крайними нормалью меридионального сечения. Эта каустическая линия не перпендикулярна к радиусу.

В геометрической оптике свет, испускаемый светящейся точкой, представляют себе в виде пучка

лучей. После отражения или преломления этот пучок в общем случае уже не будет гомоцентричным. Поэтому каждая точка пространства „отображается“ проходящим через нее элементарным пучком не в виде точки, а в виде двух фокальных линий, лежащих в двух взаимно перпендикулярных плоскостях, называемых каустическими или „фокальными“ плоскостями. Это отображение, разумеется, несовершенно, так как на каждой каустической линии сходится только часть лучей, и то не в одной точке. Расстояние между фокальными линиями в направлении главного луча называется *астигматической разностью* элементарного пучка. Задача оптического отображения заключается в том, что-

бы уничтожить или насколько возможно уменьшить эту разность, так как желательно получить точечное изображение как можно большего числа точек предметного пространства (Object-raum). Но, прежде чем перейти к вопросу об искусственных оптических изображениях, займемся общим исследованием распределения фокальных элементов, чтобы понять, как влияют на распределение света данные или случайно возникшие преломляющие (или отражающие) поверхности.

§ 17. КАУСТИЧЕСКИЕ ПОВЕРХНОСТИ И КРИВЫЕ

Как мы уже видели, центры кругов кривизны всех нормальных сечений лежат на нормалях к элементу поверхности. Они заполняют собой отрезок, крайние точки которого соответствуют двум главным радиусам кривизны. Если сделать такое построение для каждой нормали, то обе крайние точки заполнят две поверхности. Первую поверхность образует совокупность центров меньших кругов кривизны, вторую — центры больших. Эти поверхности носят название *фокальных*, или *каустических* поверхностей (каустик). Каждая нормаль к данной волновой поверхности является касательной обеих фокальных поверхностей.

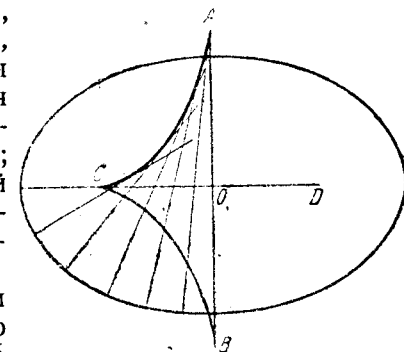
В частном случае, когда волновая поверхность представляет собой поверхность вращения, один из главных кругов кривизны лежит в меридиональной плоскости, а второй перпендикулярен к нему, и центр его находится на оси вращения. Одна из каустик сводится к отрезку оси, другая представляет собой поверхность вращения; меридиональное сечение последней является эволютой меридионального сечения волновой поверхности.

В качестве примера рассмотрим волновую поверхность, имеющую вид эллипсоида вращения. Фиг. 25 изображает меридиональное сечение. Одна из каустик образована вращением эволюты ACB меридионального эллипса, а вторая вырождается в отрезок COD оси.

Чтобы выразить аналитически эволюту любой меридиональной кривой, надо просто выписать координаты ξ и η центра кривизны в точке x, y кривой (фиг. 26):

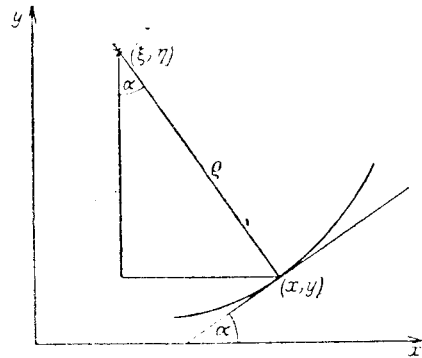
$$\xi = x - \rho \sin \alpha, \quad \eta = y + \rho \cos \alpha.$$

Здесь ρ есть радиус кривизны, а α — угол между касательной и осью x . Если x, y заданы как функции параметра φ , мы



Фиг. 25. Каустика эллипсоида вращения.

можем (обозначая штрихом дифференцирование по φ) написать известную формулу:



Фиг. 26. Радиус кривизны и центр кривизны.

В частности для эллипса

$$x = a \cos \varphi, \quad y = b \sin \varphi,$$

мы имеем:

$$\xi = a \cos \varphi - b \cos \varphi \frac{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi}{ab},$$

$$\eta = b \sin \varphi - a \sin \varphi \frac{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi}{ab}$$

или

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \frac{a^2 - b^2}{a} \cos^3 \varphi, \\ \eta &= -\frac{a^2 - b^2}{b} \sin^3 \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

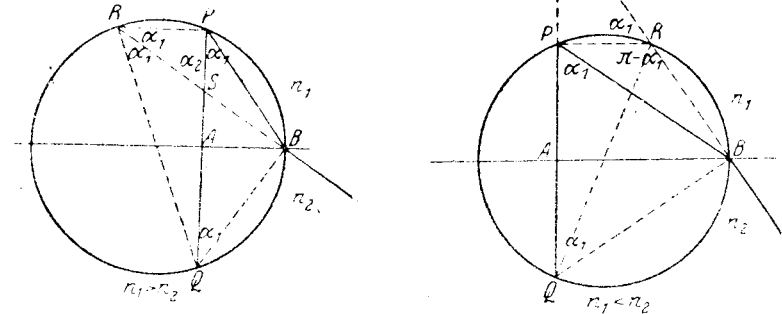
Кривая, выражаемая этими уравнениями, называется *астероидой*. Мы воспользуемся в дальнейшем этими вычислениями.

Теперь возвратимся к оптике и рассмотрим каустические поверхности пучка лучей, образовавшегося в результате преломления гомоцентрического пучка на плоскости. Это так называемая *диаканстика* (соответственно при отражении мы имеем *катаканстику*).

Пусть светящаяся точка P лежит в среде первой, показатель преломления которой n_1 . Эта среда отделена плоской поверхностью раздела от среды второй с показателем преломления n_2 . Так как перпендикуляр, опущенный из P на поверхность раздела, служит в данном случае осью симметрии, то достаточно рассмотреть соотношения, которые имеют место в одной из плоскостей, проходящих через этот перпендикуляр.

Пусть этой плоскостью будет плоскость чертежа на фиг. 27. Две половины этой фигуры соответствуют случаям $n_1 > n_2$ и $n_1 < n_2$.

Опустим из P перпендикуляр PA на плоскость раздела и продолжим его на такую же длину до точки Q . Один из лучей, выходящих из P , встречает поверхность раздела в точке B . Построим теперь окружность, проходящую через PBQ . Преломленный луч, продолженный в обратном направлении, пересечет окружность



Фиг. 27. Каустика в случае преломления плоскостью.

в точке R , а перпендикуляр PQ — в точке S ; если $n_1 > n_2$, S лежит внутри окружности, а если $n_1 < n_2$, то — вне ее.

$\alpha_1 = \angle BPQ$ есть угол падения;

$\alpha_2 = \angle BSQ$ есть угол преломления.

Очевидно,

$$\angle BRQ = \angle BPQ = \alpha_1,$$

как вписанные углы, опирающиеся на дугу BQ .

Так как из соображений симметрии $\angle BQP = \alpha_1$, то для случая $n_1 > n_2$ мы получаем:

$$\angle BRP = \angle BQP = \alpha_1,$$

(общая дуга BP) и для случая $n_1 < n_2$

$$\angle BRP = \pi - \angle BQP = \pi - \alpha_1$$

(дуга BP); таким образом во всех случаях:

$$\angle SRP = \alpha_1.$$

Отсюда в треугольнике PRS :

$$PS : PR = \sin \alpha_1 : \sin \alpha_2 = n_2 : n_1,$$

или

$$n_1 \cdot PS = n_2 \cdot PR. \quad (3)$$

Так как в случае $n_1 > n_2$ линия RS делит пополам угол R в треугольнике PRQ , а в случае $n_1 < n_2$ она перпендикулярна к биссектрисе, то

$$PS:QS = PR:QR.$$

Отсюда вытекает также, что

$$n_1 \cdot QS = n_2 \cdot QR. \quad (4)$$

Сложив и вычтя уравнения (3) и (4), получаем:

$$\text{для } n_1 > n_2: \quad n_1 \cdot PQ = n_2(QR + PR), \quad (5)$$

$$\text{для } n_1 < n_2: \quad n_1 \cdot PQ = n_2(QR - PR). \quad (6)$$

Но это значит, что при изменении угла падения точка R описывает коническое сечение с фокусами P и Q , причем в случае $n_1 > n_2$ это эллипс, а при $n_1 < n_2$ — гипербола. Это коническое сечение является меридиональным сечением волновой поверхности, которую оно описывает при вращении вокруг нормали PQ . Так как преломленный луч RB служит биссектрисой угла PRQ (или смежного с ним), то, следовательно, он перпендикулярен к коническому сечению.

Разумеется, эта волновая поверхность не принадлежит к тем, которые, действительно, возникают из сферических волн первой среды при проникновении во вторую; она лежит на продолжении в обратную сторону преломленного луча. Вместе с тем она однозначно определяет преломленный пучок и позволяет построить каустические поверхности наиболее простым способом.

Рассмотрим сначала случай, когда $n_1 > n_2$, т. е. когда преломленный пучок нормален к эллипсоиду вращения. Выше мы уже построили каустику для этого случая; она состоит из отрезка оси и поверхности вращения, меридиональное сечение которой выражается уравнениями (2). Остается только выразить входящие в них полуоси через заданные показатели преломления. Введем относительный показатель преломления:

$$n = n_{21} = \frac{n_1}{n_2} > 1 \quad (7)$$

и обозначим фокусное расстояние эллипса $AP = \frac{1}{2} PQ$ через c .

Тогда из уравнений (5) следует:

$$a = nc, \quad b = c\sqrt{n^2 - 1}. \quad (8)$$

Тогда формулы (2) примут такой вид:

$$\xi = \frac{c \cos^3 \varphi}{n}, \quad \eta = -\frac{c \sin^3 \varphi}{\sqrt{n^2 - 1}}. \quad (9)$$

Эта астероида имеет острия в точках:

$$P_1, P'_1: \quad \varphi = 0, \pi; \quad \xi_1 = \pm \frac{c}{n}; \quad \eta_1 = 0,$$

$$P_2, P'_2: \quad \varphi = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}; \quad \xi_2 = 0; \quad \eta_2 = \mp \frac{c}{\sqrt{n^2 - 1}}.$$

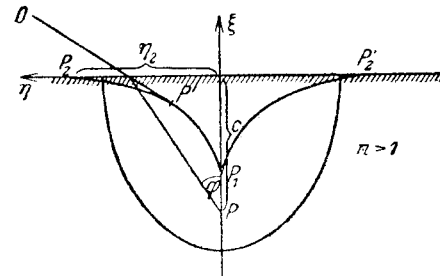
Здесь ось ξ совпадает с перпендикуляром, опущенным из светящейся точки P на пограничную плоскость, и является осью вращения. Точка P_1 соответствует перпендикулярно падающему лучу; в точках P_2 и P'_2 луч идет по касательной к плоскости раздела (фиг. 28). Чертеж дает нам следующее выражение для предельного случая полного отражения:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\eta_2}{c} = \frac{1}{\sqrt{n^2 - 1}}.$$

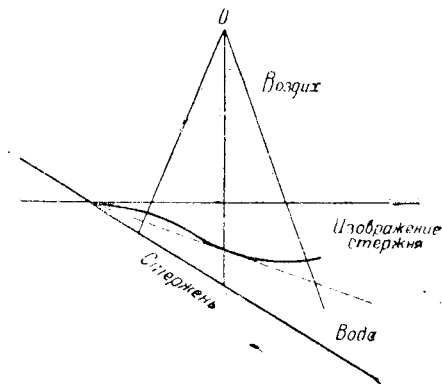
Следовательно

$$\sin \varphi = \frac{1}{n}, \quad (10)$$

как это и должно быть при выбранных нами обозначениях.



Фиг. 28. Диакаустика от плоской поверхности раздела для точки, лежащей в оптически более плотной среде.



Фиг. 29. К построению изображения погруженного в воду стержня.

Наблюдателю O будет казаться, что светящаяся точка P находится в P' , где прямая, проведенная из O , касается астероиды. Легко увидеть, что мнимая точка P' тем ближе к поверхности раздела, чем более наклонен к этой плоскости луч зрения. Этим объясняется кажущееся искажение формы тел, находящихся в прозрачной жидкости. Так, прямая палочка, погруженная в воду, кажется не только сломанной у поверхности, но и немного согнутой внутри жидкости (фиг. 29). Для воды $n = \frac{4}{3}$; следовательно,

$$\xi_1 = \frac{3}{4}c, \quad \eta_2 = \frac{3}{\sqrt{7}}c = 1,13c.$$

Точка в воде кажется, если смотреть отвесно, на $\frac{1}{4}$ расстояния ближе к поверхности.

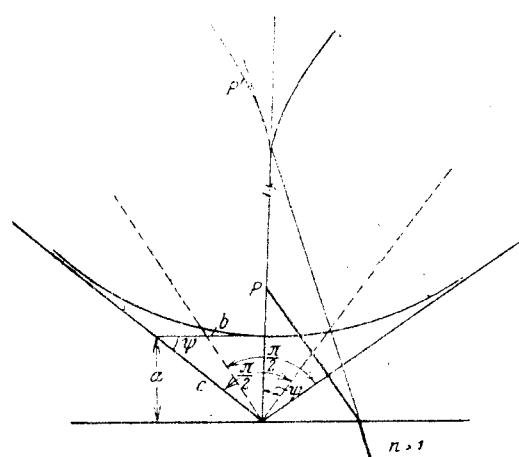
Рассмотрим еще вкратце случай $n_1 < n_2$, когда каустика образуется путем вращения эволюты гиперболы (фиг. 30). Положив

$$n = n_{12} = \frac{n_2}{n_1} > 1, \quad (11)$$

найдем параметры гиперболы согласно (6):

$$a = \frac{c}{n}, \quad b = c \sqrt{1 - \frac{1}{n^2}}. \quad (12)$$

Касательные к эволюте сходятся на бесконечности в двух направлениях, перпендикулярных к асимптотам гиперболы.



Фиг. 30. Диакаустика от плоской поверхности раздела точки, лежащей в оптически менее плотной среде.

можно построить или вычислить каустики других преломляющих или отражающих шаровых и иных поверхностей.

§ 18. ПРЕЛОМЛЕНИЕ НА ШАРОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ

В оптических инструментах пользуются почти исключительно сферами в качестве преломляющих поверхностей. Поэтому мы должны подробнее изучить преломление на сферической поверхности, причем мы не будем строить каустик для произвольных пучков, а прежде всего обратим внимание на то, существует ли такое положение источника света, при котором преломленные лучи сходятся строго в одной точке.

Пусть дана среда с показателем преломления n , в которой находится шар с центром O и радиусом r , наполненный средой, показатель преломления которой n' . По Вейерштрассу¹ можно найти преломленный луч PB , соответствующий падающему лучу AP , и помощи геометрического построения, изображенного на фиг. 31 для случаев $n < n'$ и $n > n'$.

Построим вокруг O две концентрические сферы с радиусами:

$$r_1 = \frac{n'}{n} r, \quad r_2 = \frac{n}{n'} r.$$

¹ K. Weierstrass, Math. Werke, т. 3, стр. 175.

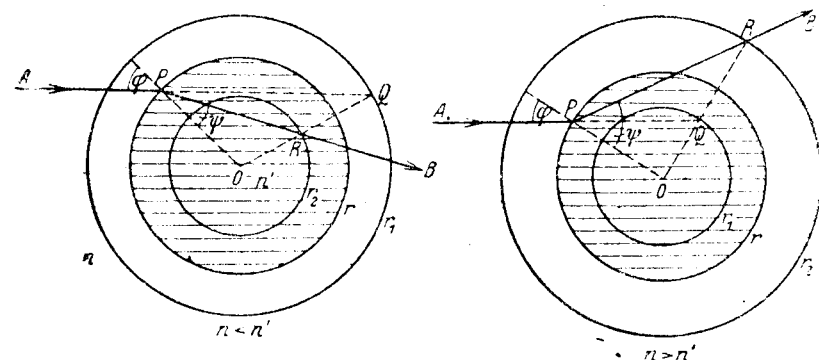
Луч AP пересекается со сферой (r_1) в точке Q , а радиус OQ со сферой (r_2) в точке R . Тогда PR есть преломленный луч.

По построению треугольники OPR и OQP подобны; следовательно, $\angle OPR = \angle OQP$ равны углу преломления ψ , а так как $\angle OPQ$ есть угол падения φ , то

$$\sin \varphi : \sin \psi = OQ : OP = n' : n.$$

Таким образом закон преломления соблюдается.

Это построение непригодно в тех случаях, когда $n > n'$ и продолжение AP не пересекает окружности (r_1). Это есть случай полного внутреннего отражения.



Фиг. 31. Построение лучей, преломленных от шаровой поверхности по Вейерштрассу.

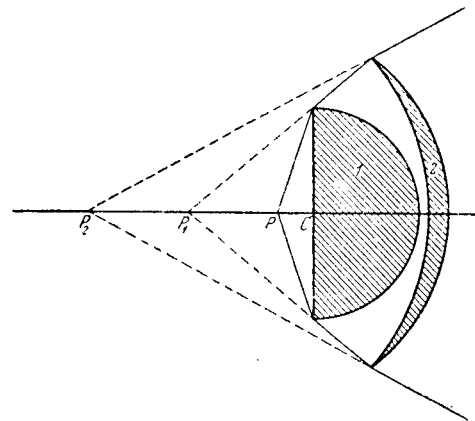
Построив указанным образом пучок лучей, выходящий из точки A , мы обнаружим, что он не сходится в одной точке, но что существует фокусная поверхность, *диакаустика*. Таким образом пучок произвольной ширины не дает точечного изображения. Однако существуют особые пары точек, обладающие тем свойством, что лучи, исходящие из одной точки, пересекаются в другой. На нашем чертеже такой парой точек являются Q и R . В самом деле, если вращать падающий луч AQ вокруг Q , то преломленный луч PRB будет вращаться вокруг R . При этом R — реальная (действительная) точка пересечения преломленных лучей, а Q — только виртуальная (мнимая, кажущаяся) точка соединения падающих лучей. Одну из этих точек можно выбрать на соответствующей сфере произвольно; этим самым определяется вторая точка на своей сфере. Такие две точки, лежащие на радиусе на расстоянии $r_1 = \frac{n'}{n} r$ и $r_2 = \frac{n}{n'} r$, называются *апланатической парой точек* преломляющей сферы.

Точечное или *стигматическое* изображение при широком пучке имеет место также для двух поверхностей, именно — *апланатических шаровых поверхностей* (r_1) и (r_2).

Одной из важнейших задач практической оптики является нахождение *стигматического* изображения предметной поверх-

ности на некоторой поверхности изображения (обычно это бывает плоскость). Надо подумать, каким образом применить для этой цели результаты, полученные для апланатических поверхностей. Вместо стеклянных шаров, можно взять куски стекла, ограниченные коаксиальными сферами или плоскостями. Так естественным образом мы приходим к *линзам*.

При преломлении на сфере мы сталкиваемся с тем затруднением, что предмет и изображение находятся в различных средах, и изображение всегда „виртуально“ (мнимо), т. е. пересекаются не сами лучи, а их продолжения в обратную сторону; поэтому самое большее, чего можно достичь, это уменьшить расхождение пучка.



Фиг. 32. Уменьшение расхождения лучей в микроскопе при помощи иммерсии и дополнительной линзы.

полусария, основание которого граничит с иммерсионной жидкостью (фиг. 32). Если n — показатель преломления стекла и жидкости (относительно воздуха), то предметная точка P должна лежать на расстоянии $\frac{r}{n}$ от центра C сферы; тогда изображение (мнимое) P_1 будет находиться на расстоянии nr от C . Если P перемещается по шаровой поверхности, описанной вокруг C радиусом $\frac{r}{n}$, то P_1 движется по шару радиуса nr вокруг центра C . Если предмет достаточно мал, то участки сферы можно считать плоскими; при этом изображение плоского элемента получается с помощью конечных пучков.

По Амичи¹ можно еще больше уменьшить расхождение, поставив за первой линзой вторую, ограниченную двумя сферическими поверхностями таким образом, чтобы центр кривизны передней поверхности был в точке P_1 , кривизна же задней поверхности должна быть такова, чтобы точка P_1 находилась

В микроскопе маленький предмет легко можно погрузить в жидкость, имеющую одинаковый показатель преломления со стеклом первого объектива; это так называемый „иммерсионный объектив“. Мы покажем дальше (глава IV, § 53), что таким путем достигается также преимущество относительно „разрешающей способности“ (ослабляются дифракционные явления). Этим устройством можно воспользоваться для того, чтобы уменьшить расхождения пучка, выходящего из предметной точки, придав объективу форму

в апланатической точке этого шара (с радиусом r_1 и показателем преломления n_1), следовательно, на расстоянии $\frac{r_1}{n_1}$ от его центра. Тогда лучи, выходящие из точки P_1 , входят, не преломляясь, через concentрическую относительно P_1 переднюю поверхность и по выходе кажутся исходящими из точки P_2 , которая лежит на расстоянии $n_1 r_1$ за центром поверхности выхода. Повторяя этот прием и ставя новые и новые линзы, можно все дальше отодвигать точку схождения лучей. Однако этому мешает целый ряд обстоятельств. Уже при одной дополнительной линзе мнимая (виртуальная) исходная точка P_1 пучка не лежит в среде, имеющей такой же, как у линзы, показатель преломления. Таким образом лучи, выходящие из соседних (сбоку) точек, уже не входят в линзу, не преломляясь, т. е. апланатичностью обладает точка P_1 , но не все окружающие ее элементы поверхности. (Если же отказаться от изображений малых плоскостей, то можно пользоваться только одной линзой, без иммерсии, заменив плоскую переднюю поверхность сферической, имеющей центр в P). Затем, вследствие зависимости показателя преломления от цвета (длины волны) наступают явления, называемые „хроматической аберрацией“ (см. § 26), которые тем труднее устранить, чем больше число дополнительных линз. На практике при конструировании объективов микроскопа по этому принципу выбирают самое большее две первые линзы.

Если требуется изображение более крупного предмета в воздухе (например в случае подзорной трубы или фотографического объектива), этот простой прием непригоден. На практике почти всегда пользуются комбинациями линз со сферическими или приблизительно сферическими поверхностями, главным образом ввиду простоты их изготовления. Какое *достижимое* изображение является наилучшим в отличие от лучшего из *мыслимых* изображений? Последним будет, очевидно, стигматическое отображение одной части пространства в другой. Но прежде чем перейти к практическому осуществлению изображения, посмотрим, *достижим ли принципиально* упомянутый идеал.

§ 19. АБСОЛЮТНЫЕ ОПТИЧЕСКИЕ ИНСТРУМЕНТЫ *

Под „абсолютным“ оптическим инструментом подразумевают такой оптический инструмент, в котором предметное пространство получает строго точечное отображение. Покажем, что абсолютный прибор по существу невозможен, так как всякое оптически возможное точечное изображение тривиально, т. е. сводится к зеркальному отображению.

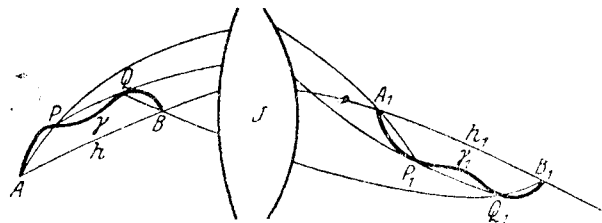
Допустим, что предметное пространство и пространство изображения оба однородны и изотропны; тогда, как заметил Аббе (Abbe), стигматическое изображение должно быть коллинеарно, так как прямолинейные лучи переходят опять в прямолинейные.

Покажем, далее, что предмет и изображение имеют одинаковую величину, — и отсюда непосредственно вытекает наше

¹ G. B. Amici, Ann. de Chimie et Phys. (3), т. 12 (1844), стр. 117.

утверждение. Первое, еще нестрогое, доказательство этого было дано в 1885 г. Максвеллом¹, а затем упрощено и усовершенствовано Брунсом, Клейном и Либманом². Мы здесь приводим доказательство Каратеодори (Carathéodory)³ для случая, когда показатель преломления есть произвольная функция положения (и даже направления), следовательно, когда лучи криволинейны.

Рассмотрим световой луч, отрезок которого AB находится в предметном пространстве, а отрезок A_1B_1 — в пространстве отображения (фиг. 33).



Фиг. 33. К вопросу о существовании абсолютных оптических инструментов.

Мы говорим, что луч лежит в поле инструмента J , если он действительно попадает через диафрагму из предметного пространства в пространство изображения. Если это верно относительно луча ABA_1B_1 , то это верно относительно всякого другого луча, определяемого линейным элементом, который по положению и направлению достаточно мало отличается от элемента луча ABA_1B_1 .

Мы говорим, что отрезок кривой γ (с непрерывно изменяющейся касательной) лежит *тангенциально в поле* инструмента, если через все линейные элементы γ проходят лучи, лежащие в поле J . Если вписать в γ многоугольник с достаточно малыми сторонами, то последние будут состоять из лучей, лежащих в поле J .

Если изображение получается стигматическое, то все лучи, идущие от точки A предметного пространства к изображению A_1 , равны между собой по оптической длине. Обозначим эту оптическую длину $\varphi(A)$ и покажем, что значение этой функции не зависит от выбора точки A .

¹ J. C. Maxwell, Quart. J. pure & appl. Math., т. 2 (1858), стр. 233; Sc. Pap. Bur. Stand., т. 1, стр. 271.

² H. Bruns, Das Eikonol. Abh. kgl. sächs. Ges. Wiss., math.-phys. Kl. т. 21. (1895), стр. 370. F. Klein, Z. Math. u. Phys., т. 46 (1901), стр. 376. Ges. Abh. Bd. 2 S. 607; H. Liebmann, Sitzgsber. bayer. Akad. Wiss., Math.-naturw. Abt. 1916 S. 183. Eine zusammenfassende Darstellung bei H. Boegehold in dem Werke: S. Czapski u. O. Eppenstein, Grundzüge der optischen Instrumente nach Abbe, 3. Aufl. S. 213. Leipzig 1924.

³ C. Carathéodory, Sitzgsber. bayer. Akad. Wiss., Math.-Naturw. Abt. 1926, стр. 1.

Пусть h есть оптическое расстояние между A и B , а h_1 — между A_1 и B_1 . Тогда согласно фиг. 33

$$h + \varphi(B) = h_1 + \varphi(A),$$

следовательно

$$h_1 = h + \varphi(B) - \varphi(A). \quad (1)$$

Рассмотрим кривую γ , соединяющую A и B и лежащую тангенциально в поле, и обозначим ее изображение через γ_1 .

Впишем в кривую γ произвольный световой многоугольник $APQB$ и назовем $A_1P_1Q_1B_1$ его изображение, вписанное в γ_1 . Пусть u, v, w и u_1, v_1, w_1 означают соответственно оптические длины сторон обоих многоугольников.

Существует луч, идущий от A к A_1 через P , и его оптическая длина та же, что и у луча ABA_1 , именно $\varphi(A)$; соответствующее справедливо и для Q . Поэтому, последовательно применяя формулу (1) к сторонам многоугольника, мы получаем:

$$u_1 = u + \varphi(P) - \varphi(A),$$

$$v_1 = v + \varphi(Q) - \varphi(P),$$

$$w_1 = w + \varphi(B) - \varphi(Q)$$

и отсюда, складывая, имеем:

$$u_1 + v_1 + w_1 = u + v + w + \varphi(B) - \varphi(A).$$

Соответствующее, разумеется, справедливо для многоугольников с произвольным числом вершин, и поэтому в пределе также для кривых γ и γ_1 . Если L и L_1 — их оптические длины, то мы будем, таким образом, иметь:

$$L_1 = L + \varphi(B) - \varphi(A). \quad (2)$$

Следовательно, наше предложение, что предмет и изображение в оптическом отношении равновелики, будет доказано, если мы еще сможем показать, что $\varphi(A) = \varphi(B)$.

Представим оптические длины в виде интегралов:

$$L = \int_{\gamma} n ds, \quad L_1 = \int_{\gamma_1} n_1 ds_1, \quad (3)$$

где n и n_1 являются какими угодно функциями положения. Мы можем рассматривать длину дуги s_1 кривой γ_1 как функцию длины дуги s кривой γ (т. к. между точками кривых имеется однозначное соответствие) и написать:

$$ds_1 = \sqrt{\left(\frac{dx_1}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy_1}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz_1}{ds}\right)^2} ds; \quad (4)$$

отсюда

$$L_1 = \int_{\gamma_1} F_1\left(x_1, y_1, z_1, \frac{dx_1}{ds}, \frac{dy_1}{ds}, \frac{dz_1}{ds}\right) ds, \quad (5)$$

где F_1 — однородная функция первой степени относительно производных $\frac{dx_1}{ds}, \dots$. Заметим далее, что F_1 не изменяется при перемене знака отношений $\frac{dx_1}{ds}$, как это видно из уравнения (4). Если стигматическое изображение дано уравнениями:

$$x_1 = f_1(x, y, z), \quad y_1 = f_2(x, y, z), \quad z_1 = f_3(x, y, z), \quad (6)$$

то мы имеем:

$$\frac{dx_1}{ds} = \frac{\partial f_1}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial f_1}{\partial y} \frac{dy}{ds} + \frac{\partial f_1}{\partial z} \frac{dz}{ds} \quad (7)$$

и аналогичные уравнения для $\frac{dy_1}{ds}, \frac{dz_1}{ds}$. Подставим выражение (6) и (7) в F_1 :

$$F_1\left(x_1, y_1, z_1, \frac{dx_1}{ds}, \frac{dy_1}{ds}, \frac{dz_1}{ds}\right) = \Phi\left(x, y, z, \frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}\right), \quad (8)$$

где Φ — однородная функция первой степени относительно $\frac{dx}{ds}, \dots$, не изменяющаяся с переменной знака при этих величинах. Теперь уравнение (2) примет следующий вид:

$$\int_{\gamma} (n - \Phi) ds = \varphi(A) - \varphi(B).$$

Это значит, что криволинейный интеграл от $n - \Phi$ зависит только от конечных точек A и B , но не от выбора кривой γ . Следовательно, должна существовать такая функция $\psi(x, y, z)$, что

$$n - \Phi = \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{dy}{ds} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{dz}{ds}.$$

Если мы изменим знак отношений $\frac{dx}{ds}, \dots$, то знак правой части уравнения изменится, функция же Φ при этом не изменится. Следовательно, ψ должна быть постоянной, и

$$n = \Phi. \quad (9)$$

Но это значит, что не только для кривой γ , касательной к полю, но для всякой кривой C , которая вообще имеет оптическое изображение, оптические длины равны:

$$\int_C n ds = \int_{C_1} n_1 ds_1. \quad (10)$$

Это и есть доказательство теоремы Максвелла в обобщенной форме, данной Каратеодори.

Если, кроме того, n и n_1 постоянны, а, следовательно, изображение коллинеарно, то изображение всегда конгруэнтно (в смысле оптического пути) или симметрично предмету. Плоское зеркало является единственным инструментом, дающим такое изображение.

Аналогичные результаты получаются для стигматического отображения поверхностей друг на друга. Однако мы не будем вдаваться в рассмотрение этих вопросов.

Таким образом при физическом осуществлении нетривиального изображения надо отказаться от строгой стигматичности. Надо мириться с тем, что лучи, выходящие из одной предметной точки, не пересекаются в одной точке, но лишь проходят вблизи некоторой точки. Но пренебрегая этими ошибками изображения, мы имеем дело с коллинеарным соответствием. Общие математические законы коллинеарного соответствия, таким образом, имеют место в каждом оптическом изображении. Поэтому надо по примеру Аббе изучить свойства коллинеарных отображений как таковых, а затем уже переходить к их приближенному осуществлению. Мы так и сделаем при разборе практически важного случая осевой симметрии (симметрии вращения), отображающей системы.

§ 20. КОЛЛИНЕАЦИЯ С ОСЕВОЙ СИММЕТРИЕЙ

Коллинеарное соответствие задается уравнениями:

$$x' = \frac{F_1}{F_0}, \quad y' = \frac{F_2}{F_0}, \quad z' = \frac{F_3}{F_0}, \quad (1)$$

где

$$F_i = a_i x + b_i y + c_i z + d_i, \quad i = 0, 1, 2, 3. \quad (2)$$

Здесь x, y, z — координаты предметной точки P , x', y', z' — координаты ее отображения P' в той же координатной системе, a_i, b_i, c_i, d_i — постоянные.

Часто бывает удобно говорить о *предметном пространстве* и *пространстве изображения*, как о многообразии всех предметных точек или всех их отображений.

Решим уравнения (1) относительно x, y, z . Мы получим выражения того же вида:

$$x = \frac{F'_1}{F'_0}, \quad y = \frac{F'_2}{F'_0}, \quad z = \frac{F'_3}{F'_0}, \quad (3)$$

$$F'_i = a'_i x' + b'_i y' + c'_i z' + d'_i. \quad (4)$$

Мы видим, что зависимость между точкой и ее изображением может быть обращена. Поэтому их называют также *сопряженными точками*.

Точки плоскости $F_0 = 0$ согласно уравнению (1) отображаются в бесконечно удаленных точках; точно так же точки плоскости изображения $F'_0 = 0$ соответствуют бесконечно удаленным предметным точкам. Плоскости $F_0 = 0$ и $F'_0 = 0$ называют *фокальными плоскостями* предметного пространства и пространства изображения. Параллельные лучи предметного пространства пересекаются в некоторой точке в фокальной плоскости пространства изображения и наоборот.

В некоторых случаях обе эти плоскости могут находиться в бесконечности; такое отображение носит название *аффинного* или *телескопического*. В этом случае конечным значениям x, y, z соответствуют также конечные значения x', y', z' . Это значит, что всегда $F_0 \neq 0$ и $F'_0 \neq 0$. Это возможно только тогда, когда F_0 и F'_0 постоянны, т. е. когда

$$a_0 = b_0 = c_0 = 0 \text{ и } a'_0 = b'_0 = c'_0 = 0.$$

В оптических системах исключительную роль играет тот случай, когда проектирующая система симметрична относительно оси вращения; это называется *центрированным отображением*. Примем ось симметрии за ось x -ов. Нам достаточно рассмотреть меридиональную плоскость, например плоскость xu . Изображение мы построим при помощи уравнений:

$$\left. \begin{aligned} x' &= \frac{a_1 x + b_1 y + d_1}{a_0 x + b_0 y + d_0}, \\ y' &= \frac{a_2 x + b_2 y + d_2}{a_0 x + b_0 y + d_0}. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Осевая симметрия позволяет еще больше сократить число коэффициентов. При перебросе (повороте на 180°) через ось x , координаты x и y переходят в x и $-y$; при этом координаты изображения x', y' должны таким же образом перейти в x' и $-y'$. Из уравнения (5) следует, что это возможно только тогда, когда

$$b_1 = b_0 = a_2 = d_2 = 0.$$

Таким образом мы имеем:

$$x' = \frac{a_1 x + d_1}{a_0 x + d_0}, \quad y' = \frac{b_2 y}{a_0 x + d_0}. \quad (6)$$

Так как в уравнения входят лишь отношения пяти констант, то очевидно, что центрированное отображение зависит от четырех параметров. Мы сейчас представим их в наглядной форме.

Прежде всего, решая уравнение (6) относительно x и y , мы получим:

$$x = \frac{-d_0 x' + d_1}{a_0 x' - a_1}, \quad y = \frac{a_0 d_1 - a_1 d_0}{b_2} \cdot \frac{y'}{a_0 x' - a_1}. \quad (7)$$

Отсюда фокальные плоскости определяются уравнениями:

$$F_0 = a_0 x + d_0 = 0, \quad F'_0 = a_0 x' - a_1 = 0;$$

следовательно, эти плоскости перпендикулярны к оси и пересекают ее в точках:

$$x = -\frac{d_0}{a_0}, \quad x' = \frac{a_1}{a_0}, \quad (8)$$

которые называются главными *фокусами* F, F' отображения¹.

Введем теперь различные координатные системы для предметных точек и их отображений таким образом, чтобы абсциссы отсчитывались от фокусов F и F' :

$$\left. \begin{aligned} a_0 x + d_0 &= a_0 X, & y &= Y, \\ a_0 x' - a_1 &= a_0 X', & y' &= Y'. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Тогда уравнения (7) примут простой вид:

$$X = \frac{a_0 d_1 - a_1 d_0}{a_0^2 X'}, \quad Y = \frac{a_0 d_1 - a_1 d_0}{a_0 b_2 X'} Y'.$$

Положим теперь

$$f = \frac{b_2}{a_0}, \quad f' = \frac{a_0 d_1 - a_1 d_0}{a_0 b_2}. \quad (10)$$

Уравнения отображения при этом упрощаются:

$$\frac{Y'}{Y} = \frac{f}{X} = \frac{X'}{f'}. \quad (11)$$

Величины f, f' называются *фокусными расстояниями* оптической системы. Итак, оптическая система имеет три существенных параметра: фокусные расстояния f, f' и расстояние d между фокальными плоскостями.

Отношение $Y':Y$ называется *боковым увеличением*; оно равно единице для $X=f$ и $X'=f'$. Этим определяются две точки H и H' на оси и две перпендикулярные к ней плоскости сопряженных точек, находящиеся на расстояниях f и f' от фокальных плоскостей и носящие название *главных точек* и *главных плоскостей* отображения. Точки главных плоскостей отображаются друг в друге без бокового увеличения (фиг. 34).

Вообще боковое увеличение зависит от X (соответственно от X'), но не от Y (соответственно от Y'). Это значит, что фигуре, перпендикулярной к оси, соответствует геометрически подобное отображение. Пусть луч, выходящий из точки X оси, пересекает одну из главных плоскостей на расстоянии s от оси;

¹ Термины „фокус“, „фокусная поверхность“, таким образом, имеют здесь, в геометрии отображений, иное значение, нежели ранее, при рассмотрении оптических пучков лучей, где они относились к пересечению соседних лучей (каустика).

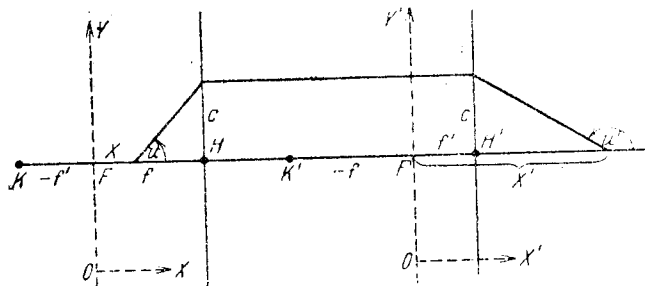
тогда сопряженный луч также пересечет ось (в точке X') и вторую главную плоскость на том же расстоянии c от оси. Обозначим u, u' углы этих лучей с осью; тогда (фиг. 34)

$$\operatorname{tg} u = \frac{c}{f - X}, \quad \operatorname{tg} u' = \frac{c}{f' - X'};$$

следовательно, воспользовавшись уравнением (11), мы получим:

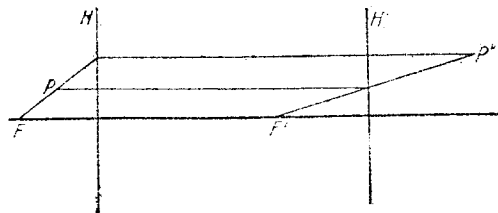
$$\frac{\operatorname{tg} u'}{\operatorname{tg} u} = \frac{f - X}{f' - X'} = -\frac{X}{f'} = -\frac{f}{X'}. \quad (12)$$

Эта величина называется *угловым увеличением*. Оно равно единице для $X = -f'$ и $X' = -f$; обе определяемые этими уравнениями



Фиг. 34. Главные точки и главные плоскости оптической системы.

сопряженные точки называются *узловыми точками* системы. Они обладают тем свойством, что всякому лучу, проходящему через K , сопряжен параллельный луч, проходящий через K' . Расстояние между узловыми точками равно расстоянию между главными точками. Когда $f = -f'$, узловые точки совпадают с главными.



Фиг. 35. Построение хода лучей.

вытекает способ построения изображения заданной точки P' , не лежащей на оси (фиг. 35). Проведем из P луч, проходящий через фокус F , и луч, параллельный оси; их точки пересечения с главной плоскостью H сопряжены с расположенными конгруэнтно точками главной плоскости H' . Эти точки вместе с фокусом F' и определяют P' (фиг. 35).

Прямая $Y = aX$, проходящая через фокус F , отображается прямой:

$$Y' = \frac{Yf}{X} = af,$$

которая параллельна оси; то же самое имеет место для второго фокуса. Отсюда

Введем вместо X и X' расстояния ξ и ξ' от главных плоскостей:

$$X = f + \xi, \quad X' = f' + \xi'; \quad (13)$$

подставив в $XX' = ff'$, получим:

$$f\xi' + f'\xi + \xi\xi' = 0$$

или

$$\frac{f}{\xi} + \frac{f'}{\xi'} = -1. \quad (14)$$

Эта формула имеет большое применение, так как главные плоскости часто почти совпадают и ξ и ξ' отсчитываются почти от одной нулевой точки.

Различные виды центрированных отображений разделяются на *прямо* бегущие и *обратно* бегущие в зависимости от знака ff' . Отображение называется *прямо* бегущим, если $ff' < 0$, так как в этом случае X возрастает с возрастанием X' . Предмет и изображение перемещаются также в одном направлении.

Прямо бегущие изображения называются также *диоптрическими*, так как они могут быть получены в результате преломления (плюс четное число отражений). *Обратно* бегущее изображение ($ff' > 0$) называется *катоптрическим*, так как оно может быть получено, как результат отражения (вообще как результат нечетного числа отражений в соединении с преломлениями).

Различают *собираательные* и *рассеивающие* изображения. Собираательными называют такие изображения, при которых правая часть предметного пространства ($X > 0$) отображается прямо ($Y' : Y > 0$) и, следовательно, $f > 0$.

Итак, мы имеем следующие четыре случая:

	Собирательное изображение	Рассеивающее изображение
прямо бегущее	$f > 0, f' < 0;$	$f < 0, f' > 0,$
обратно бегущее	$f > 0, f' > 0;$	$f < 0, f' < 0.$

При *бесфокусном* или *телескопическом* отображении в уравнении (6) пропадает коэффициент a_0 . При соответствующем выборе обозначений они примут вид:

$$x' = ax + a_0, \quad y' = by.$$

За нулевую точку (начало координат) можно, разумеется, выбрать любую точку оси симметрии. Если сопряженную с ней точку $x' = a_0, y' = 0$ принять за начало координат пространства изображения, то мы получим просто:

$$X' = aX, \quad Y' = \beta Y. \quad (15)$$

Боковое увеличение $Y' : Y = \beta$ постоянно, так же как и угловое увеличение. Так как началами координат служат точки пересечения с осью двух сопряженных лучей, то мы имеем:

$$\operatorname{tg} u = \frac{Y}{X}, \quad \operatorname{tg} u' = \frac{Y'}{X'}$$

и, следовательно,

$$\frac{\operatorname{tg} u'}{\operatorname{tg} u} = \frac{\beta}{\alpha}. \quad (16)$$

В заключение этого геометрического раздела рассмотрим сложение двух центрированных коллинеарных отображений.

Пусть начальные отображения заданы уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} \frac{Y'_1}{Y_1} &= \frac{f_1}{X_1} = \frac{X'_1}{f'_1}, \\ \frac{Y'_2}{Y_2} &= \frac{f_2}{X_2} = \frac{X'_2}{f'_2}, \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

их относительное расположение определяется условием, что расстояние между фокальными плоскостями F'_1 и F_2 равно c .

Так как пространство изображений первого отображения тождественно с предметным пространством второго, то мы имеем:

$$X_2 = X'_1 - c, \quad Y_2 = Y'_1. \quad (18)$$

Исключим эти промежуточные координаты:

$$\left. \begin{aligned} X'_2 &= \frac{f_2 f'_2}{X_2} = \frac{f_2 f'_2}{X'_1 - c} = \frac{f_2 f'_2}{\frac{f_1 f'_1}{X_1} - c} = \frac{f_2 f'_2 X_1}{f_1 f'_1 - c X_1}, \\ Y'_2 &= \frac{X'_2 Y_2}{f'_2} = \frac{X'_2 Y'_1}{f'_2} = \frac{X'_2 f_1 Y_1}{f'_2 X_1} = \frac{f_1 f_2 Y_1}{f_1 f'_1 - c X_1}. \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

Теперь перенесем начала координат в предметном пространстве и в результирующем пространстве отображений:

$$\left. \begin{aligned} X &= X_1 - \frac{f_1 f'_1}{c}, \quad Y = Y_1, \\ X' &= X'_2 + \frac{f_2 f'_2}{c}, \quad Y' = Y'_2. \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

В новых переменных можно уравнения результирующего отображения написать так:

$$\frac{Y'}{Y} = \frac{f}{X} = \frac{X'}{f'}, \quad (21)$$

где

$$f = -\frac{f_1 f_2}{c}, \quad f' = \frac{f'_1 f'_2}{c}. \quad (22)$$

Уравнение (20) дает нам величину перемещения начал координат и, следовательно, расстояния $\delta = F_1 F$ и $\delta' = F'_2 F'$ результирующих фокусов от заданных фокусов:

$$\delta = \frac{f_1 f'_1}{c}, \quad \delta' = -\frac{f_2 f'_2}{c}. \quad (23)$$

Этим также определяется положение главных точек.

Если среди заданных отображений имеются телескопические, этот способ надо несколько изменить. Если $c=0$, то согласно (22) результирующее отображение будет телескопическим ($f = f' = \infty$). В этом случае вместо (19) мы получим следующее:

$$\begin{aligned} X'_2 &= \frac{f_2 f'_2}{f_1 f'_1} X_1, \\ Y'_2 &= \frac{f_1 f_2}{f_1 f'_1} Y_1. \end{aligned}$$

Для констант α, β (15) результирующего телескопического отображения имеем:

$$\alpha = \frac{f_2 f'_2}{f_1 f'_1}, \quad \beta = \frac{f_1 f_2}{f_1 f'_1}, \quad (24)$$

а для углового увеличения

$$\frac{\operatorname{tg} u'}{\operatorname{tg} u} = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{f_1}{f_2}. \quad (25)$$

§ 21. ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ И ЭЙКОНАЛ

Мы переходим теперь к отысканию методов приближенного построения коллинеарного отображения при помощи оптического пучка лучей. В рамках нашего изложения, охватывающего всю оптику, мы не можем дать подробного обзора обширной области устройства оптических инструментов. Этому вопросу посвящены многочисленные обстоятельные работы¹. Мы будем, главным образом, стремиться установить, что принципиально достижимо. Нам нужно найти такой способ систематических приближений, который позволил бы вычислять со все возрастающей точностью ход луча в оптической системе и вывести те условия, которые должны удовлетворять константы системы, для того чтобы можно было улучшить изображение. Элементарные методы, издаваемые во многих учебниках, мало пригодны для этой цели.

¹ Для основательного изучения укажем книгу S. Czapski и O. Eppenstein Grundzüge der Theorie der optischen Instrumente (nach Abbe) 3. изд., Leipzig, 1924.

Правда, они дают представление о ходе луча и о так называемых оптических ошибках, но они совершенно не разъясняют теоретической взаимозависимости этих ошибок и не дают никакого представления о том совершенстве, с каким могут быть вычислены все ошибки определенного порядка величины. Но именно с теоретической точки зрения нам будет удобно это сделать. Мы воспользуемся методом, принадлежащим Гамильтону (см. историческое введение), но забытым и много позже вновь открытым другими. Этот метод Гамильтона имеет значение сам по себе благодаря своей математической связи с другими отделами теоретической физики, в особенности с механикой¹.

Гамильтон² рассматривает лучи, выходящие из некоторой точки $P_0(x_0, y_0, z_0)$ предметного пространства, и строит к ним поверхности постоянного оптического пути:

$$H(x_0, y_0, z_0; x, y, z) = \text{const.} \quad (1)$$

Левую часть как функцию исходной точки P_0 и конечной точки $P_1(x_1, y_1, z_1)$ он называет *характеристической функцией*. Как функция координат конечной точки P_1 она удовлетворяет уравнению (9) § 14. Но мы можем, сделав P_1 постоянным, рассматривать ее как функцию P_0 . Этому соответствует уравнение, в котором дифференцирование производится по x_0, y_0, z_0 , а n и \bar{s} заменены через n_0 и $-\bar{s}_0$; тогда согласно § 14 (10) имеем:

$$-n_0\bar{s}_0 = \text{grad}_0 H, \quad n_1\bar{s}_1 = \text{grad}_1 H. \quad (2)$$

Следовательно, каждое оптическое отображение определяется заданием одной функции $H(x_0, y_0, z_0; x_1, y_1, z_1)$; это делает возможным единообразно и наглядным образом исследовать все случаи. Этим путем сам Гамильтон получил много важных результатов, но они не обратили на себя того внимания, которого они заслуживали.

Впоследствии Брунс³ независимо от Гамильтона развил подобную мысль. По Клейну⁴ принцип Брунса получается из принципа Гамильтона путем следующих преобразований.

Выберем на луче две точки в предметном пространстве, $a_1(\xi_0, \eta_0, \zeta_0)$ и $r_0(x_0, y_0, z_0)$, отстоящие друг от друга на $\rho_0 = (r_0 - a_0)$, и две точки в пространстве отображения, $a_1(\xi_1, \eta_1, \zeta_1)$ и $r_1(x_1, y_1, z_1)$, на расстоянии $\rho_1 = (r_1 - a_1)$ друг от друга; таким образом:

$$\left. \begin{aligned} r_0 &= a + \rho_0 \bar{s}_0, \\ r_1 &= a_1 + \rho_1 \bar{s}_1. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

¹ Мысли Гамильтона оказались для новейшего развития механики, квантовой и волновой механики прямо решающими.

² W. R. Hamilton, Trans. Irish. Acad., т. 15 (1828), стр. 69 и дальше.

³ H. Bruns, Das Eikonal. Leipziger Sitzgsber., т. 21 (1895), стр. 321. Отдельной книгой вышло в издательстве S. Hirzel, Leipzig, 1895.

⁴ F. Klein, Über das Brunnssche Eikonal. Z. Math. u. Physik, т. 46 (1901); Ges. Abh., т. 2, стр. 603.

Теперь мы можем уравнение (2) заменить эквивалентным:

$$dH = -n_0 \bar{s}_0 dr_0 + n_1 \bar{s}_1 dr_1. \quad (4)$$

Подставив в него выражения, вытекающие из (3):

$$\begin{aligned} dr_0 &= da_0 + \rho_0 d\bar{s}_0 + \bar{s}_0 d\rho_0, \\ dr_1 &= da_1 + \rho_1 d\bar{s}_1 + \bar{s}_1 d\rho_1, \end{aligned}$$

и заметив, что

$$\bar{s}_0^2 = \bar{s}_1^2 = 1, \quad \bar{s}_0 d\bar{s}_0 = \bar{s}_1 d\bar{s}_1 = 0,$$

мы получим, что

$$dH = -n_0(\bar{s}_0 da_0 + d\rho_0) + n_1(\bar{s}_1 da_1 + d\rho_1). \quad (5)$$

В частности мы можем выбрать точки a_0 и a_1 так, чтобы их абсциссы ξ_0 и ξ_1 равнялись 0; вместо x_0, y_0, z_0 можно ввести η_0, ζ_0, ρ_0 , а вместо x_1, y_1, z_1 — η_1, ζ_1, ρ_1 в качестве параметров луча. Обозначив, кроме того, составляющие \bar{s}_0 через m_0, p_0, q_0 и составляющие \bar{s}_1 через m_1, p_1, q_1 , мы получим из уравнения (5):

$$dH = dE - n_0 d\rho_0 + n_1 d\rho_1, \quad (6)$$

где

$$dE = -n_0(p_0 d\eta_0 + q_0 d\zeta_0) + n_1(p_1 d\eta_1 + q_1 d\zeta_1). \quad (7)$$

Если рассматривать H как функцию $\rho_0, \eta_0, \zeta_0; \rho_1, \eta_1, \zeta_1$, то для нее будут иметь место уравнения:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial \rho_0} &= -n_0, & \frac{\partial H}{\partial \rho_1} &= n_1, & (a) \\ \frac{\partial H}{\partial \eta_0} &= \frac{\partial E}{\partial \eta_0} = -n_0 p_0, & \frac{\partial H}{\partial \eta_1} &= \frac{\partial E}{\partial \eta_1} = n_1 p_1, & (b) \\ \frac{\partial H}{\partial \zeta_0} &= \frac{\partial E}{\partial \zeta_0} = -n_0 q_0, & \frac{\partial H}{\partial \zeta_1} &= \frac{\partial E}{\partial \zeta_1} = n_1 q_1, & (c) \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

где E согласно (7) есть функция только от $\eta_0, \zeta_0, \eta_1, \zeta_1$. Эту функцию $E(\eta_0, \zeta_0, \eta_1, \zeta_1)$ Брунс назвал *эйконалом*. Она уже не связана ни с каким дифференциальным уравнением, ибо уравнение § 14 (9), примененное к начальной и конечной точкам, эквивалентно следующим:

$$\frac{\partial H}{\partial \rho_0} = -n_0, \quad \frac{\partial H}{\partial \rho_1} = n_1, \quad (9)$$

что согласно (8) не является условием для E .

Как функция Гамильтона, так и функция Брунса имеют тот недостаток, что как раз в наиболее интересующем нас случае точного схождения лучей в их поведении проявляется особенность. Если все лучи, выходящие из точки $a_0(0, \eta_0, \zeta_0)$, пересекаются в $a_1(0, \eta_1, \zeta_1)$, то η_1, ζ_1 должны определяться из уравнений (8b, c) как функции η_0, ζ_0 . Но в общем случае это невозможно. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим случай центрированного отображения. В этом случае E есть функция инвариантов относительно вращений вокруг оси (оси x), т. е. величин $\eta_0^2 + \zeta_0^2$,

$\eta_1^2 + \zeta_1^2$, $\eta_1\eta_0 + \zeta_1\zeta_0$. При малых отклонениях отражающего луча от направления оси мы имеем следующее приближенное выражение:

$$E = \frac{\alpha}{2}(\eta_0^2 + \zeta_0^2) + \frac{\beta}{2}(\eta_1^2 + \zeta_1^2) + \gamma(\eta_1\eta_0 + \zeta_1\zeta_0). \quad (10)$$

Тогда из уравнений (8b) следует:

$$\alpha\eta_0 + \gamma\eta_1 = -n_0p_0, \quad \gamma\eta_0 + \beta\eta_1 = n_1p_1, \quad (11)$$

а из (8c) получаются два уравнения с теми же коэффициентами относительно ζ_0 , ζ_1 , q_0 , q_1 .

Решив (11) относительно η_1 , получим:

$$\eta_1 = -\frac{n_0}{\gamma}p_0 - \frac{\alpha}{\gamma}\eta_0 = \frac{n_1}{\beta}p_1 - \frac{\gamma}{\beta}\eta_0.$$

Для точечного отображения необходимо, чтобы η_1 было функцией только η_0 . Но тогда все коэффициенты α , β , γ должны быть равны ∞ и притом так, чтобы частные

$$\frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\gamma}{\beta} = -A$$

оставались конечными. Тогда

$$\eta_1 = A\eta_0, \quad \zeta_1 = A\zeta_0.$$

Согласно § 20 (15) это значит, что отображение телескопическое. Для таких отображений эйконал Брунса пригоден. Но для гораздо более обычного случая отображения с точечными фокусами выгодно пользоваться другим методом, принадлежащим Шварцшильду¹.

§ 22. УГЛОВОЙ ЭЙКОНАЛ

Следуя Шварцшильду, мы введем вместо координат двух точек составляющие по осям двух лучей в качестве независимых переменных. Коротко говоря, это достигается введением вместо H другой функции V с помощью преобразования Лежандра.

Пусть a_0 и a_1 — две произвольные неподвижные точки (первая находится в предметном пространстве, а вторая — в пространстве изображения). Введем обозначение:

$$V = H + n_0(r_0 - a_0)\xi_0 - n_1(r_1 - a_1)\xi_1 \quad (1)$$

и покажем, что эта величина может быть функцией только ξ_0 и ξ_1 . Согласно § 21 (4) мы имеем:

$$dH = -n_0\xi_0 dr_0 + n_1\xi_1 dr_1, \quad (2)$$

¹ K. Schwarzschild, Untersuchungen zur geometrischen Optik. Astron. Mittell. Kgl. Sternwarte zu Göttingen, ч. I, II, III (1905). Продолжено дальше А. Kohlschütter'ом „Ошибки изображений 5-го порядка“, Геттингенская диссертация 1908 г.

следовательно,

$$dV = n_0(r_0 - a_0)d\xi_0 - n_1(r_1 - a_1)d\xi_1, \quad (3)$$

что и доказывает наше утверждение.

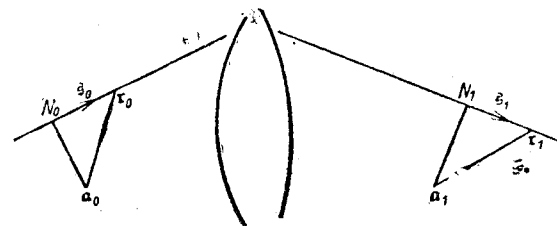
V не связано ни с каким дифференциальным уравнением, так как уравнение § 14 (9), которому удовлетворяет H относительно начальной и конечной точек, выражает только то, что $\xi_0^2 = 1$, $\xi_1^2 = 1$. Но это условия, относящиеся к независимым переменным.

Обозначим составляющие ξ_0 через m_0 , p_0 , q_0 , а составляющие ξ_1 через m_1 , p_1 , q_1 и исключим m_0 и m_1 . Затем введем новую функцию:

$$W(p_0, q_0; p_1, q_1) = V(\sqrt{1-p_0^2-q_0^2}, p_0, q_0; \sqrt{1-p_1^2-q_1^2}, p_1, q_1). \quad (4)$$

Эта функция есть *угловой эйконал* Шварцшильда.

V и W имеют простой геометрический смысл. $(r_0 - a_0)\xi_0$ есть проекция на направление луча ξ_0 вектора, идущего из точки



Фиг. 36. К угловому эйконалу.

a_0 к r_0 ; аналогичное значение имеет $(r_1 - a_1)\xi_1$. Если N_0 и N_1 — основания перпендикуляров, опущенных из точек a_0 и a_1 на луч, который имеет в точках r_0 и r_1 направления ξ_0 и ξ_1 , то V представляет собой световой путь от N_0 до N_1 (фиг. 36).

Можно также определить W как оптическую длину пути между основаниями N_0 и N_1 нормалей, опущенных на луч из двух точек a_0 и a_1 . При такой интерпретации условия минимума для W будут такими же, как для H . Именно, H как оптический путь между двумя точками P_0 и P_1 имеет минимальное значение для истинного луча по сравнению с любой другой кривой, проходящей через эти точки¹. Точно так же W есть минимум для истинного луча по сравнению со всеми другими путями, имеющими такое же начальное и конечное направления.

Если варьировать кривую, для которой H представляет собой световой путь между точками P_0 и P_1 , то условия минимума для H меняются лишь постольку, поскольку перемещаются P_0 и P_1 .

¹ При этом предполагается, что отрезок луча P_0P_1 находится в поле лучей (см. § 15, стр. 73 и 74).

Таким образом уравнение (2) сохраняет силу при произвольных (малых) изменениях всего пути. Согласно (1) это справедливо и относительно уравнения (3). Но из (3) следует, что $dV=0$ при $dz_0=0$ и $dz_1=0$, т. е. V , а также W стационарны, когда начальное и конечное направления неизменны. Так как в частности при вариациях — когда, сверх того, неизменны начальные и конечные точки — изменения V и H совпадают, то должен иметь место минимум.

Для центрированных систем поместим точки a_0 и a_1 на оси вращения (оси x) и пусть их абсциссы будут a_0 и a_1 . Из равенства $\varepsilon_0^2 = m_0^2 + p_0^2 + q_0^2 = 1$ следует, что

$$dm_0 = -\frac{p_0 dp_0 + q_0 dq_0}{m_0};$$

соответствующее выражение имеет место для dm_1 . Подставив их в (3), мы получим:

$$dW = n_0 \left[dp_0 \left(y_0 - \frac{x_0 - a_0}{m_0} p_0 \right) + dq_0 \left(z_0 - \frac{x_0 - a_0}{m_0} q_0 \right) \right] - \left\{ \begin{aligned} & - n_1 \left[dp_1 \left(y_1 - \frac{x_1 - a_1}{m_1} p_1 \right) + dq_1 \left(z_1 - \frac{x_1 - a_1}{m_1} q_1 \right) \right] \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Выражения в скобках имеют простой геометрический смысл. Точкам луча ε_0 соответствует $r = r_0 + \lambda \varepsilon_0$. Пусть луч пересекает перпендикулярную к оси плоскость $x = a_0$ в точке $Q_0(a_0, Y_0, Z_0)$. Тогда

$$a_0 = x_0 + \lambda m_0, \quad Y_0 = y_0 + \lambda p_0, \quad Z_0 = z_0 + \lambda q_0,$$

а после исключения λ :

$$Y_0 = y_0 - \frac{x_0 - a_0}{m_0} p_0, \quad Z_0 = z_0 - \frac{x_0 - a_0}{m_0} q_0. \quad (6)$$

Это множители при dp_0 и dq_0 в уравнении (5). Точно так же величины

$$Y_1 = y_1 - \frac{x_1 - a_1}{m_1} p_1, \quad Z_1 = z_1 - \frac{x_1 - a_1}{m_1} q_1 \quad (7)$$

определяют точку пересечения Q_1 луча с плоскостью $x = a_1$ (фиг. 37). Поэтому мы имеем:

$$dW = n_0 (Y_0 dp_0 + Z_0 dq_0) - n_1 (Y_1 dp_1 + Z_1 dq_1) \quad (8)$$

или же

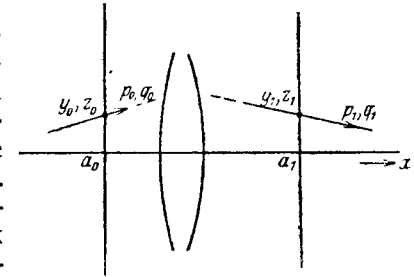
$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial p_0} &= n_0 Y_0, & \frac{\partial W}{\partial p_1} &= -n_1 Y_1, \\ \frac{\partial W}{\partial q_0} &= n_0 Z_0, & \frac{\partial W}{\partial q_1} &= -n_1 Z_1. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Таким образом, дифференцируя угловой эйконал по направляющим косинусам p_0, q_0, p_1, q_1 , мы находим координаты точек пересечения луча с двумя перпендикулярными к оси плоскостями, точно так же, как, дифференцируя функцию Гамильтона по координатам некоторой точки, мы находим направляющие косинусы луча.

Одна особенность углового эйконала, аналогичная упоминавшейся выше особенности эйконала Брунса, обнаруживается при телескопическом отображении; мы не будем на ней останавливаться. Напротив, приближенное выражение для отображений, обладающих точечными фокусами, вполне возможно. Приближенность заключается в том, что мы ограничиваемся лучами, составляющими малые углы с осью; таким образом p_0, q_0, p_1, q_1 можно считать малыми относительно 1 и применить к ним разложение по степеням.

Низшие члены этого разложения — второго порядка; они соответствуют классической диоптрике Гаусса, которую мы несколько дальше изложим вкратце с нашей точки зрения. В этом, самом грубом, приближении мы, действительно, получаем коллинеарное отображение. Затем мы учтем и члены более высокого порядка, так называемые „ошибки изображения“.

Как первый шаг к диоптрике Гаусса вычислим ход луча при преломлении у одной единственной поверхности вращения.



Фиг. 37. К угловому эйконалу.

§ 23. УГЛОВОЙ ЭЙКОНАЛ ДЛЯ ПРЕЛОМЛЕНИЯ НА ПОВЕРХНОСТИ ВРАЩЕНИЯ

Возьмем поверхность, образованную вращением вокруг оси x кривой:

$$x = c_1 y^2 + c_2 y^4 + \dots, \quad (1)$$

симметричной относительно этой оси. В первом приближении, которое мы сейчас рассмотрим, поверхность можно заменить соприкасающейся сферой. Пусть эта сфера проходит через неподвижную окружность:

$$(x - r)^2 + y^2 = r^2.$$

r обладает знаком, и мы будем считать r положительным, когда поверхность обращена выпуклостью к свету, падающему со стороны отрицательных x (фиг. 38). Для обращенной к падающему свету половины сферы мы имеем:

$$x = r - \sqrt{r^2 - y^2} = \frac{1}{2} \frac{y^2}{r} + \frac{1}{8} \frac{y^4}{r^3} + \dots \quad (2)$$

Если сфера соприкасается с поверхностью, мы имеем:

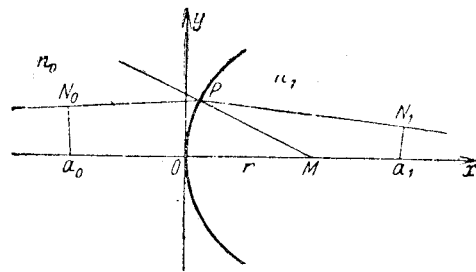
$$c_1 = \frac{1}{2r}. \quad (3)$$

Положим, далее:

$$c_2 = \frac{1}{8r^2} (1+b), \quad (4)$$

где b может быть названо „деформацией“ поверхности. Уравнение поверхности принимает теперь такой вид:

$$x = \frac{y^2 + z^2}{2r} + \frac{(y^2 + z^2)^2}{8r^3} (1+b) + \dots \quad (5)$$



Фиг. 38. Угловой эйконал шаровой поверхности.

Теперь вычислим угловой эйконал для того случая, когда эта поверхность разделяет две однородные среды с показателями преломления n_0 и n_1 . По определению

$$W = n_0 \cdot N_0 P + n_1 \cdot P N_1 = n_0 \cdot N_0 P - n_1 \cdot N_1 P,$$

где N_0 и N_1 — основания нормалей, опущенных из точек оси a_0 и a_1 (с передней и задней стороны поверхности) на рассматриваемый луч, а P — точка пересечения этого луча с поверхностью. $N_0 P$ есть проекция линии, соединяющей a_0 и P , на луч $\mathbf{s}_0(m_0, p_0, q_0)$. Если \mathbf{r} есть вектор, проведенный из начала координат в точку P , то

$$N_0 P = (x - a_0) \mathbf{s}_0 = (x - a_0) m_0 + y p_0 + z q_0.$$

Аналогичное выражение имеем относительно $N_1 P$. Следовательно,

$$W = n_0 [(x - a_0) m_0 + y p_0 + z q_0] - n_1 [(x - a_1) m_1 + y p_1 + z q_1]. \quad (6)$$

Теперь заменим m_0 и m_1 их выражениями через p_0, q_0, p_1, q_1 и подставим вместо x его выражение (5). Разложив W до членов четвертого порядка, напомним:

$$\begin{aligned} W = & -n_0 a_0 + n_1 a_1 + \\ & + n_0 \left[y p_0 + z q_0 + \frac{y^2 + z^2}{2r} + \frac{a_0}{2} (p_0^2 + q_0^2) \right] - \\ & - n_1 \left[y p_1 + z q_1 + \frac{y^2 + z^2}{2r} + \frac{a_1}{2} (p_1^2 + q_1^2) \right] + \\ & + n_0 \left[\frac{1+b}{8r^3} (y^2 + z^2)^2 - \frac{1}{4r} (y^2 + z^2) (p_0^2 + q_0^2) + \right. \\ & \left. + \frac{a_0}{8} (p_0^2 + q_0^2)^2 \right] - \\ & - n_1 \left[\frac{1+b}{8r^3} (y^2 + z^2)^2 - \frac{1}{4r} (y^2 + z^2) (p_1^2 + q_1^2) + \right. \\ & \left. + \frac{a_1}{8} (p_1^2 + q_1^2)^2 \right] + \dots \end{aligned} \quad (7)$$

Исключим теперь y и z с помощью закона преломления Снеллиуса, для того чтобы представить W как функцию только p_0, q_0, p_1, q_1 . По закону Снеллиуса [§ 15 (1)] вектор $\mathbf{N} = n_0 \mathbf{s}_0 - n_1 \mathbf{s}_1$ имеет направление нормали к плоскости. Написав уравнение поверхности (5) в форме:

$$F(x, y, z) = x - \frac{y^2 + z^2}{2r} - \dots = 0,$$

мы получаем:

$$\left. \begin{aligned} \lambda \frac{\partial F}{\partial x} &= \lambda & = n_0 m_0 - n_1 m_1, \\ \lambda \frac{\partial F}{\partial y} &= -\lambda \frac{y}{r} + \dots = n_0 p_0 - n_1 p_1, \\ \lambda \frac{\partial F}{\partial z} &= -\lambda \frac{z}{r} + \dots = n_0 q_0 - n_1 q_1. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Как мы сейчас покажем, здесь достаточно ограничиться рассмотрением членов первого порядка, если нужно найти W до членов четвертого порядка включительно. Мы выпишем только

члены первого порядка, подставив вместо m_0 и m_1 единицу и обозначив члены высших порядков через Δy и Δz :

$$\left. \begin{aligned} y &= -r \frac{n_0 p_0 - n_1 p_1}{n_0 - n_1} + \Delta y, \\ z &= -r \frac{n_0 q_0 - n_1 q_1}{n_0 - n_1} + \Delta z. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Δy и Δz , очевидно, третьего порядка и могли бы дать члены W самое большее четвертого порядка и то только при подстановке во вторую и третью строку выражения (7). Это дало бы добавочные члены:

$$\begin{aligned} n_0 \left[p_0 \Delta y + q_0 \Delta z + \frac{1}{r} (y \Delta y + z \Delta z) \right] - n_1 \left[p_1 \Delta y + q_1 \Delta z + \right. \\ \left. + \frac{1}{r} (y \Delta y + z \Delta z) \right] = \Delta y \left[n_0 p_0 - n_1 p_1 + \frac{y}{r} (n_0 - n_1) \right] + \\ + \Delta z \left[n_0 q_0 - n_1 q_1 + \frac{z}{r} (n_0 - n_1) \right]. \end{aligned}$$

В силу уравнений (9) это выражение равно:

$$\frac{n_0 - n_1}{r} \left[(\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 \right],$$

т. е. оно шестого порядка, и им можно пренебречь.

Подставляя в (7) выражения (9) и отбрасывая добавочные члены Δy и Δz , мы получаем:

$$W = W_0 + W_2 + W_4, \quad (10)$$

где

$$W_0 = -n_0 a_0 + n_1 a_1, \quad (11)$$

$$\left. \begin{aligned} W_2 &= \frac{n_0}{2} \left(a_0 - r \frac{n_0}{n_0 - n_1} \right) (p_0^2 + q_0^2) - \\ &- \frac{n_1}{2} \left(a_1 + r \frac{n_1}{n_0 - n_1} \right) (p_1^2 + q_1^2) + \frac{n_0 n_1}{n_0 - n_1} r (p_0 p_1 + q_0 q_1). \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

О членах четвертого порядка W_4 мы [будем говорить дальше. Функция W_2 имеет следующий вид:

$$W_2 = \frac{\alpha}{2} (p_0^2 + q_0^2) + \frac{\beta}{2} (p_1^2 + q_1^2) + \gamma (p_0 p_1 + q_0 q_1), \quad (13)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= n_0 \left(a_0 - r \frac{n_0}{n_0 - n_1} \right), \\ \beta &= -n_1 \left(a_1 + r \frac{n_1}{n_0 - n_1} \right), \\ \gamma &= \frac{n_0 n_1}{n_0 - n_1} r. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Эти формулы являются основой элементарной теории линз и комбинаций линз — так называемой диоптрики Гаусса¹, к изложению основных черт которой мы сейчас перейдем.

§ 24. ДИОПТРИКА ГАУССА

Точки пересечения луча, определяемого параметрами p_0, q_0, p_1, q_1 , с плоскостями $x = a_0$ и $x = a_1$ имеют согласно § 22 (9) в первом приближении [см. § 23 (10) по (13)] следующие координаты:

$$\left. \begin{aligned} n_0 Y_0 &= \frac{\partial W_2}{\partial p_0} = \alpha p_0 + \gamma p_1, \\ -n_1 Y_1 &= \frac{\partial W_2}{\partial p_1} = \gamma p_0 + \beta p_1; \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

нет надобности выписывать соответствующие уравнения для Z_0, Z_1, q_0, q_1 , так как они совпадают с (1).

Если точка Y_1, Z_1 есть стигматическое изображение точки Y_0, Z_0 , то должно быть возможным представить Y_1 как функцию одного только Y_0 , т. е. при исключении p_1 из (1) одновременно должно исчезнуть p_0 .

Решив уравнение (1), найдем:

$$p_1 = \frac{n_0}{\gamma} Y_0 - \frac{\alpha}{\gamma} p_0;$$

следовательно,

$$-n_1 Y_1 = \frac{\beta n_0}{\gamma} Y_0 + \left(\gamma - \frac{\alpha \beta}{\gamma} \right) p_0. \quad (2)$$

Условие стигматического изображения, таким образом:

$$\alpha \beta - \gamma^2 = 0. \quad (3)$$

Но согласно § 23 (14) это уравнение выражает зависимость между абсциссами a_0 и a_1 , а именно:

$$-n_0 n_1 \left(a_0 - r \frac{n_0}{n_0 - n_1} \right) \left(a_1 + r \frac{n_1}{n_0 - n_1} \right) = \left(\frac{n_0 n_1}{n_0 - n_1} \right)^2 r^2,$$

¹ C. F. Gauss, Dioptrische Untersuchungen. Abh. Kgl. Ges. Wiss. zu Göttingen, т. 1 (1843); Werke, т. 5, стр. 245.

или

$$a_0 a_1 (n_0 - n_1) = r (n_0 a_1 - n_1 a_0). \quad (4)$$

Отсюда следует¹:

$$\left. \begin{aligned} f_0 &= -\lim_{a_1 \rightarrow \infty} a_0 = -r \frac{n_0}{n_0 - n_1}, \\ f_1 &= -\lim_{a_0 \rightarrow \infty} a_1 = r \frac{n_1}{n_0 - n_1}. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Таким образом уравнение (4) будет:

$$-a_0 a_1 = a_1 f_0 + a_0 f_1, \quad (6)$$

а выражения § 23 (14) можно написать так:

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= n_0 (a_0 + f_0) = n_0 X_0, \\ \beta &= -n_1 (a_1 + f_1) = -n_1 X_1, \\ \gamma &= n_0 f_1 = -n_1 f_0. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Здесь X_0 и X_1 — координаты рассматриваемых сопряженных точек, отсчитанные от двух различных начал (нулевых точек) в пространстве предметном и в пространстве изображения; этими началами координат служат точки с абсциссами $x_0 = -f_0$ и $x_1 = -f_1$, причем x_0 и x_1 отнесены к вершине преломляющей поверхности как к началу.

Из (6) следует:

$$-(X_0 - f_0)(X_1 - f_1) = (X_1 - f_1)f_0 + (X_0 - f_0)f_1$$

или

$$X_0 X_1 = f_0 f_1, \quad (8)$$

а из (2), принимая во внимание (3) и (7), следует:

$$\frac{Y_1}{Y_0} = \frac{f_0}{X_0} = \frac{X_1}{f_1}. \quad (9)$$

Согласно § 20 (11) изображение в первом приближении представляет собою коллинеацию с осевой симметрией; именно, главные плоскости совпадают с касательной плоскостью к вершине. Фокусные расстояния даются уравнениями (5) как функции радиуса кривизны и коэффициентов преломления. Они всегда противоположны по знаку, и абсолютные их величины относятся

¹ Отрицательный знак в (5) имеет следующее основание: граничные значения a_0 , a_1 означают расстояния фокусов от вершины (точки пересечения оси со сферой), которая совпадает с главными точками; эти расстояния считаются положительными в направлении распространения света. Согласно данному раньше определению (см. § 20), наоборот, фокусное расстояние есть расстояние от главной точки до фокуса.

как показатели преломления, поскольку речь идет о действительном преломлении (n_0 и n_1 положительны). Этим оправдывается название „диоптрическое“, которое мы ввели в § 20 для прямо бегущих изображений ($f_0 f_1 < 0$). [Случай отражения формально содержится в наших формулах, если $n_1 = -n_0$; тогда получается обратное или катоптрическое изображение ($f_0 f_1 > 0$). В дальнейшем мы будем говорить только о случае диоптрического изображения]. Если поверхность раздела обращена выпуклостью к падающему свету ($r > 0$), то при $n_0 < n_1$ фокус F_0 лежит перед преломляющей поверхностью, а F_1 — за нею ($f_0 > 0$, $f_1 < 0$); при $n_0 > n_1$ будет наоборот (фиг. 39).

Мы рассмотрим теперь прохождение света через линзу, ограниченную двумя преломляющими поверхностями вращения, имеющими общую ось. Так как нас интересует только случай схождения лучей, нам нет надобности преобразовывать для этого случая общее выражение — удобнее найти результирующее стигматическое изображение как сумму обоих составляющих изображений. Для этого мы воспользуемся выведенными в § 20 формулами сложения двух коллинеаций.

Обозначим n_1 , n_2 и n_3 — показатели преломления трех сред в той последовательности, в которой через них проходит свет; тогда согласно (5) фокусные расстояния первого изображения будут:

$$f_1 = -r_1 \frac{n_1}{n_1 - n_2}, \quad f_1' = r_1 \frac{n_2}{n_1 - n_2}, \quad (10)$$

а второго

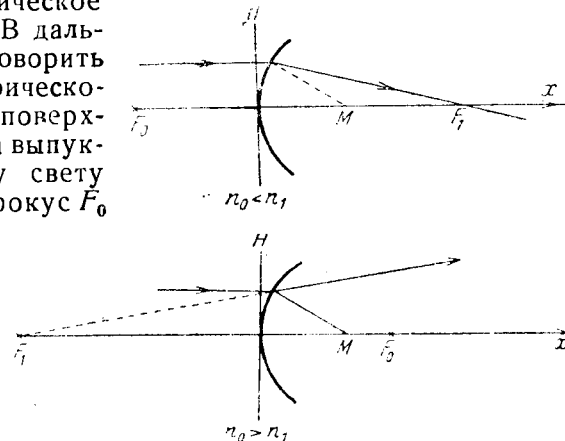
$$f_2 = -r_2 \frac{n_2}{n_2 - n_3}, \quad f_2' = r_2 \frac{n_3}{n_2 - n_3}. \quad (11)$$

Из § 20 (22) мы получаем следующие значения фокусных расстояний результирующего изображения:

$$f = -\frac{f_1 f_2}{c}, \quad f' = \frac{f_1' f_2'}{c}, \quad (12)$$

где c есть расстояние между фокусами F_1' и F_2 . Пусть толщина линзы, т. е. расстояние между вершинами, равна d ; тогда (фиг. 40):

$$c = d + f_1' - f_2,$$



Фиг. 39. Схождение и расхождение лучей при преломлении сферической поверхности.

а из уравнений (10) и (11):

$$c = \frac{D}{(n_1 - n_2)(n_2 - n_3)}, \quad (13)$$

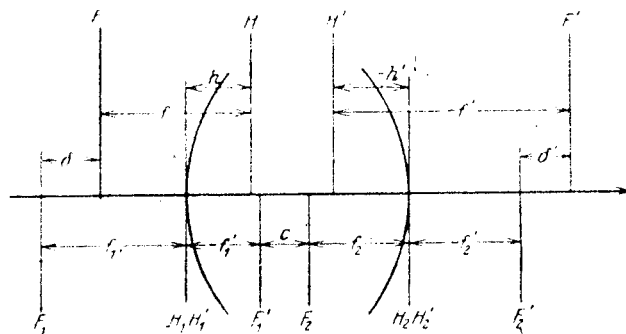
где

$$D = d(n_1 - n_2)(n_2 - n_3) + n_2[r_1(n_2 - n_3) + r_2(n_1 - n_2)]. \quad (14)$$

Из уравнений (10), (11), (12) и (13) мы получаем:

$$f = -n_1 n_2 \frac{r_1 r_2}{D}, \quad f' = n_2 n_3 \frac{r_1 r_2}{D}. \quad (15)$$

Поэтому всегда $ff' < 0$ и, таким образом, линзы всегда дают в соответствии с разделением, введенным в § 20, *прямо* бегущие (диоптрические) изображения.



Фиг. 40. Главные точки составной системы.

Расстояния результирующих фокусов F и F' от фокусов F_1 , F_2' , принадлежащих отдельной сферической поверхности, согласно § 20 (23) равны:

$$\delta = -n_1 n_2 \frac{n_2 - n_3}{n_1 - n_2} \cdot \frac{r_1^2}{D}, \quad \delta' = n_2 n_3 \frac{n_1 - n_2}{n_2 - n_3} \cdot \frac{r_2^2}{D}. \quad (16)$$

Отсюда для расстояний результирующих главных плоскостей H , H' от вершин

$$h = f + \delta - f_1, \quad h' = f' + \delta' - f_2'$$

получаются выражения:

$$h = n_1(n_2 - n_3) \frac{r_1 d}{D}, \quad h' = -n_3(n_1 - n_2) \frac{r_2 d}{D}. \quad (17)$$

Обычно линзами пользуются таким образом, что стеклянное тело окружено с обеих сторон одной и той же средой (воздухом). Тогда $n_1 = n_3$, и при $n_2/n_1 = n > 1$ мы имеем:

$$\left. \begin{aligned} f = -f' &= -\frac{nr_1 r_2}{\Delta}, \\ \delta &= n \frac{r_1^2}{\Delta}, \quad \delta' = -n \frac{r_2^2}{\Delta}, \\ h &= (n-1) \frac{r_1 d}{\Delta}, \quad h' = (n-1) \frac{r_2 d}{\Delta}, \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

где

$$\Delta = (n-1)[n(r_1 - r_2) - d(n-1)]. \quad (19)$$

Таким образом в этом случае фокусные расстояния равны с противоположным знаком. Вследствие этого уравнение § 20 (14), выражающее изображение через расстояния ξ , ξ' от главных плоскостей, упрощается и переходит в известную формулу¹:

$$\frac{1}{\xi} - \frac{1}{\xi'} = -\frac{1}{f}. \quad (20)$$

Сопряженные лучи, проходящие через главные точки, параллельны друг другу. Так как предметный луч определяется уравнением:

$$Y = a\tilde{x} = a(X - f),$$

то вследствие равенства $f' = -f$ мы имеем:

$$Y' = -Y \frac{X'}{f} = -a(X - f) \frac{X'}{f} = a(X' - f) = a\tilde{x}'.$$

Введенное в § 20 деление изображений на собирающие и рассеивающие основано на знаке f ; изображение, даваемое линзой, собирает, если

$$f = -\frac{nr_1 r_2}{\Delta} > 0; \quad (21)$$

это условие можно [см. (19)] написать так:

$$\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} < \frac{n-1}{n} \cdot \frac{d}{r_1 r_2}. \quad (22)$$

Предельный случай собирающего и рассеивающего изображений $f = \infty$ соответствует телескопическому изображению; он наступает при $\Delta = 0$; поэтому

$$r_1 - r_2 = \frac{n-1}{n} d. \quad (23)$$

¹ Обычно в ней пишут все члены со знаком плюс, так как обращают внимание только на абсолютную величину.

Как пример линзы, с помощью которой можно получить все три вида изображения, назовем *двояко-выпуклую* линзу ($r_1 > 0$, $r_2 < 0$). Если радиусы кривизны равны по абсолютной величине $r_1 = -r_2 = r$, то согласно (22) изображение будет

$$\left. \begin{aligned} \text{при } d < \frac{2n}{n-1} r & \text{— собирательным,} \\ \text{„ } d = \frac{2n}{n-1} r & \text{— телескопическим,} \\ \text{„ } d > \frac{2n}{n-1} r & \text{— рассеивающим.} \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

Для стекла с показателем преломления $n = \frac{3}{2}$ критическая числовая величина $\frac{2n}{(n-1)} = 6$.

Если $r_1 = \infty$, изображение согласно (22) собирательно при $r_2 < 0$; если $r_2 = \infty$, оно собирательно при $r_1 > 0$. И то и другое соответствует плоско-выпуклой линзе, обращенной к свету плоской или выпуклой стороной. *Плоско-выпуклые линзы также всегда собирательны.*

Двояко-вогнутые линзы ($r_1 < 0$, $r_2 > 0$) действуют всегда рассеивающе, так как условие (22) не выполнено.

Выпукло-вогнутые линзы ($r_1 > 0$, $r_2 > 0$ или $r_1 < 0$, $r_2 < 0$) действуют собирательно, если $r_1 < r_2$, т. е. если линза утоньшается от середины к краям; в других же случаях возможны все три рода изображений, причем условия предельного случая телескопического изображения даны (23).

Особенно простые формулы получаются для очень *тонких линз*, для которых можно с достаточным приближением положить $d = 0$. Обе главные плоскости в этом случае вдвигаются в линзу и, следовательно, $h = 0$, $h' = 0$. Из уравнений (17) и (18)

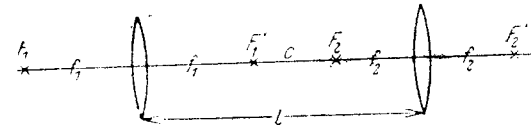
$$\frac{1}{n-1} \cdot \frac{1}{f} = \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}. \quad (25)$$

Итак, f положительно, если кривизна передней поверхности $\frac{1}{r_1}$ больше кривизны задней $\frac{1}{r_2}$ (здесь кривизна рассматривается со знаком). Но это значит, что тонкие линзы собирательны, если они суживаются от середины к краям, — в других же случаях они рассеивают.

Так как обе главные точки совпадают в центре линзы, каждый луч проходит через эту точку, не преломляясь. Поэтому изображение, даваемое тонкой линзой, представляет собой центральную проекцию из центра линзы.

Методы измерения фокусных расстояний и определения положения главных и узловых точек читатель найдет в учебниках экспериментальной физики¹.

На практике все оптические системы состоят из линз (и зеркал). Правила, указанные в § 20, дают возможность вычислить изображение, даваемое системой линз, из свойств составляющих линз, предполагая, что мы не выходим за пределы области, к которой приложима диоптрика Гаусса. Мы приведем только простую формулу для фокусного расстояния системы из двух бесконечно тонких линз. Если c есть расстояние между задним



Фиг. 41. Соединение двух линз.

фокусом первой линзы и передним фокусом второй, то $f = -f_1 f_2 / c$; введя вместо c расстояние l между двумя линзами (между их главными плоскостями, которые мы считаем совпадающими), мы получим (фиг. 41):

$$l = f_1 + c + f_2.$$

Отсюда следует:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{l}{f_1 f_2}. \quad (26)$$

Мы воспользуемся этой формулой позже при рассмотрении хроматической аберрации.

В заключение этого параграфа об элементарных законах линз выведем инвариант для любых двух пар сопряженных точек произвольной центрированной системы.

Для пары точек (X_0, Y_0) и (X_1, Y_1) мы имеем:

$$\frac{Y_1}{Y_0} = \frac{f_0}{f_1} = \frac{X_1}{X_0}.$$

Для другой пары $(X_0 + M_0, Y_0^*)$ и $(X_1 + M_1, Y_1^*)$ имеем:

$$\frac{Y_1^*}{Y_0^*} = \frac{f_0}{X_0 + M_0} = \frac{X_1 + M_1}{f_1}.$$

Отсюда следует:

$$\frac{M_0}{f_0} = \frac{Y_0^*}{Y_1^*} - \frac{Y_0}{Y_1} = \frac{Y_0^* Y_1 - Y_0 Y_1^*}{Y_1^* Y_1},$$

$$\frac{M_1}{f_1} = \frac{Y_1^*}{Y_0^*} - \frac{Y_1}{Y_0} = \frac{Y_0 Y_1^* - Y_0^* Y_1}{Y_0^* Y_0}.$$

¹ См. Müller-Pouillet, Lehrbuch der Physik. 10 изд., т. 2; Otto Lummer, Die Lehre von der strahlenden Energie, гл. 3, Braunschweig, 1907. О. Д. Хвольсон, Курс физики т. II (прим. ред.).

Разделив, получим:

$$\frac{f_0 Y_0 Y_0^*}{M_0} = - \frac{f_1 Y_1 Y_1^*}{M_1}. \quad (27)$$

Согласно уравнению (15) фокусные расстояния каждой линзы относятся как показатели преломления сред, находящихся перед линзой и за нею; это имеет место и для каждой комбинации линз, так как для первой линзы:

$$f_1 = -n_1 F_1, \quad f_1' = n_1' F_1,$$

а для второй:

$$f_2 = -n_2 F_2, \quad f_2' = n_2' F_2,$$

причем $n_1' = n_2$, то для системы линз мы получаем согласно (12)

$$f = - \frac{n_1 n_2 F_1 F_2}{c}, \quad f' = \frac{n_1' n_2' F_1 F_2}{c},$$

откуда

$$\frac{f}{f_1} = - \frac{n_1 n_2}{n_1' n_2'} = - \frac{n_1}{n_2}. \quad (28)$$

Следовательно, мы можем вместо (27) написать:

$$\frac{n_0 Y_0 Y_0^*}{M_0} = \frac{n_1 Y_1 Y_1^*}{M_1}. \quad (29)$$

Таким образом выражение $n Y Y^* / M$ инвариантно относительно преломления в любой системе линз. Мы воспользуемся этим в теории геометрических ошибок изображения.

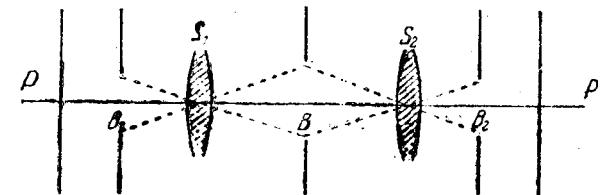
§ 25. ОГРАНИЧЕНИЕ ЛУЧЕЙ ПРИ ПОМОЩИ БЛЕНД

Диоптрика Гаусса применима только тогда, когда величины p_0, q_0, p_1, q_1 и, следовательно, углы, образуемые лучами с осью, достаточно малы. Таким образом область приложения ее ограничена „трубообразным“ пространством, окружающим оси. Ограничение отображающего пучка достигается либо благодаря конечным размерам самой линзы, либо при помощи специальных диафрагм (бленд). Бленды играют, таким образом, важную роль, так как, во-первых, от выбора их зависит ширина пучка лучей, а значит и отчетливость изображения, а во-вторых, бленда определяет светосилу системы. Последняя очевидно увеличивается с увеличением отверстия бленды. Поэтому всегда нужно уметь найти компромисс между требованиями резкости и яркости изображения. Остановимся теперь коротко на действии бленд и принятой для них терминологии¹.

¹ Учение об ограничении пучка лучей было создано Аббе (Jena Z. Naturwiss., т. 6 (1871), стр. 263) и усовершенствовано Рором (M. v. Rohr, Zentr.-Ztg. Opt. Mech., т. 41 (1920), стр. 145, 159, 171).

Примем прежде всего общее положение, что каждая бленда может быть заменена такой, которая тождественна с изображением бленды, даваемым оптической системой или ее частью. Мы обозначаем словом „бленда“ как действительную бленду, так и ее изображение.

Пусть P есть предметная точка на оси системы. Среди диафрагм системы есть такая, которая наиболее ограничивает выходящий из P пучок. Чтобы найти ее, достаточно построить оптическое изображение B_1 от каждой бленды B , имеющейся в системе S_1 , с помощью той части системы, которая находится перед ней, т. е. которая лежит между B и точкой P . То изображение B_1 , которое видно из P под наименьшим углом зрения, называется *зрачком входа* (фиг. 42).



Фиг. 42. Зрачок входа, зрачок выхода (апертурная бленда).

Соответствующая диафрагма B и есть искомая; она называется *главной блендой*. Если она находится перед первой линзой системы, то она совпадает со зрачком входа. Угол, под которым виден из P диаметр зрачка входа, называется *апертурой* или *углом входа* системы.

Изображение B_2 зрачка входа, полученное с помощью всей системы S , или, что то же самое, изображение главной бленды в той части S_2 системы, которая находится за этой диафрагмой, называется *зрачком выхода*. Последний ограничивает сходящийся в P' (изображении точки P) конус лучей. Угол, под которым виден из P' диаметр зрачка выхода, называется *проектирующим углом* системы.

Луч, проходящий из произвольной (не лежащей на оси) точки предмета через центр зрачка входа, а значит и через центр зрачка выхода, называется *главным лучом* соответствующего пучка.

В частности, можно так поместить главную бленду, чтобы зрачок входа или выхода (при телескопическом изображении оба одновременно) лежал на бесконечности. Тогда диафрагма должна находиться на задней фокальной поверхности передней системы S_1 или, во втором случае, на передней фокальной поверхности системы S_2 . В этом случае говорят о *телецентрическом ходе лучей*, именно — в первом случае ход лучей телецентричен в сторону предмета (все главные лучи предметного пространства параллельны оси), во втором — он телецентричен

в сторону изображения (все главные лучи пространства изображения параллельны оси).

Этим ходом лучей пользуются преимущественно, если надо предмет сравнить с масштабом; если сделать лучи параллельными оси в том месте, где помещен масштаб, то нерезкая установка не изменит положения изображения. Поэтому в подзорных трубах пользуются ходом телецентричным в сторону изображения, а в микроскопах — в сторону предмета.

Кроме вышерассмотренных диафрагм, определяющих ширину пучка лучей, бывают диафрагмы, которые ограничивают величину предмета. Мы найдем эти так называемые *бленды поля зрения*, рассмотрев опять изображения всех диафрагм в передней части S_1 оптического прибора. Одно из таких изображений G_1 видно из центра зрачка входа под наименьшим углом. Этот угол называется *углом поля зрения*; он определяет величину поля зрения в предметном пространстве.

Пусть G_2 есть изображение G_1 во всем приборе. G_2 ограничивает поле зрения в изображении; соответствующий угол называется *углом изображения*. Поле зрения резко ограничено только тогда, когда G_1 лежит в плоскости предмета. Поэтому в подзорных трубах бленду поля зрения всегда помещают в задней фокальной плоскости системы объектива. Тогда ее изображение находится на бесконечности и кажется резким при установке на бесконечно далекие предметы.

§ 26. ХРОМАТИЧЕСКАЯ АБЕРРАЦИЯ

Один из наиболее крупных недостатков линз, вычисляемых по выведенным выше законам, заключается в цветной кайме, которой кажутся окруженными очертания предметов. Это явление объясняется дисперсией преломляющего вещества. Как мы уже показали в § 5, показатель преломления — не константа материала, а функция цвета, т. е. длины волны. Поэтому фокусные расстояния различны для различных цветов, и одноцветные (монохроматические) изображения предмета не покрывают друг друга. Проблема *ахроматизма* — получения практически свободных от этого недостатка систем — так же стара, как сама оптика. Исследования этих явлений привели Ньютона к открытию цветорассеяния, причем он заменил геометрически сложные процессы преломления в линзах более простым ходом лучей в призмах. На основании своих опытов он пришел к закону дисперсии, из которого он вывел невозможность осуществления ахроматического объектива. Однако уже в 1729 г. адвокату Честеру Муру Холлу (Chester Moor Hall) удалось построить такой объектив из флинтгласа и кронгласа, но он не опубликовал своего открытия.

Кронглас (от crown — оконное стекло), представляющий собой силикат с высоким содержанием калия, производится уже с XIV века; флинтглас — сплав силикатов калия и свинца — про-

изводится с середины XVII века, а флинтглас, близкий к современному, — с 1730 г. Однако оптически пригодные стекла получились только в редких случаях.

Доллонду (J. Dollond) удалось изготовить хорошие стекла, и в 1758 г. он начал шлифовать ахроматические объективы. Улучшение этих приборов всегда шло рука об руку с развитием стекольного производства. В начале XIX века прославился завод, основанный Уцшнейдером, которым руководил сначала часовщик Гинар, а затем (1787—1826) Иосиф Фраунгофер. Фраунгофер изготовил спектрометр и, установив названные его именем линии солнечного спектра, произвел точные измерения показателя преломления для отдельных цветов спектра. Производство оптического стекла получило большое развитие вследствие объединения в 1879 г. ученого Эрнста Аббе (1840—1905) с техником стекольной промышленности Отто Шоттом (род. в 1851 г.). Иенский стекольный завод Шотта и основанный Аббе завод Цейсса и теперь являются ведущими, хотя оптическая индустрия и в других странах достигла большого расцвета (см. примечание 8).

В следующей таблице приведены показатели преломления двух сортов стекла для трех цветов, соответствующих важнейшим фраунгоферовым линиям; длина волн выражена в ангстремах ($1 \text{ Å} = 10^{-8} \text{ см}$).

Таблица 4

Фраунгоферова линия	C	D	F	$\Delta = \frac{n_F - n_C}{n_D - 1}$
Длина волн в Å	6563	5893	4861	
Легкий крон	1,5127	1,5153	1,5214	0,0169
Тяжелый флинт	1,7434	1,7515	1,7723	0,0384

Последний столбец содержит так называемую *дисперсию* стекла, определяемую формулой:

$$\Delta = \frac{n_F - n_C}{n_D - 1}, \quad (1)$$

которая дает грубую, но для многих случаев вполне достаточную меру изменения показателя преломления с цветом. В первом приближении эта величина Δ определяет, как мы сейчас увидим, изменение фокусного расстояния линзы, следовательно, изменение положения изображения в зависимости от цвета.

Комбинируя несколько линз различных сортов стекла, можно получить ахроматическую систему для двух цветов, например для одной красной и одной синей линии спектра, по крайней мере поскольку это касается положения главных и фокальных плоскостей. Но этим еще не достигается строгая ахроматичность относительно всех цветов. Остающиеся еще цветные отклонения называются „вторичным спектром“. В системе, ахро-

матической относительно трех цветов, образуется „третичный спектр“ и т. д. Для многих целей достаточно бывает устранить первичный спектр.

Два цвета, для которых система должна быть ахроматизована, выбирают в зависимости от обстоятельств. Для фотографического объектива обращается внимание на химически действующую часть спектра (фиолетовую, ультрафиолетовую), тогда как для визуальных инструментов необходимо принимать во внимание также красную область спектра.

Согласно § 24 (25) величина $f \cdot (n-1)$ зависит от геометрических соотношений (радиусов); дифференцируя ее логарифм, мы найдем зависимость между малым изменением показателя преломления dn и изменением фокусного расстояния df :

$$\frac{df}{f} + \frac{dn}{n-1} = 0.$$

Мы можем с некоторым приближением заменить здесь $dn/(n-1)$ величиной Δ и написать:

$$d\left(\frac{1}{f}\right) = \frac{\Delta}{f}. \quad (2)$$

Для системы, состоящей из двух тонких линз, мы имеем формулу § 24 (26). Представим себе сначала, что эти линзы непосредственно соприкасаются, так что приближенно $l=0$. Мы можем, далее, представить себе главные плоскости системы совпадающими с ее средней плоскостью. Таким образом в этом приближении изображение может быть однозначно задано фокусным расстоянием, а ахроматизация фокусного расстояния означает согласно § 24 (20) одновременно ахроматизацию изображения по положению и величине. По § 24 (26) мы имеем при $l=0$:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} \quad (3)$$

и как условие ахроматизма

$$d\left(\frac{1}{f}\right) = d\left(\frac{1}{f_1}\right) + d\left(\frac{1}{f_2}\right) = \frac{\Delta_1}{f_1} + \frac{\Delta_2}{f_2} = 0. \quad (4)$$

Из уравнений (3) и (4) можно рассчитать при заданных сортах стекол (т. е. при заданных Δ_1 и Δ_2) такие две линзы, которые, будучи сложены вплотную одна к другой, образуют ахроматическую систему, определяемую фокусным расстоянием f :

$$\frac{1}{f_1} = \frac{1}{f} \cdot \frac{\Delta_2}{\Delta_2 - \Delta_1}, \quad \frac{1}{f_2} = -\frac{1}{f} \cdot \frac{\Delta_1}{\Delta_2 - \Delta_1}. \quad (5)$$

Если f положительно, то линза с меньшей дисперсной способностью должна иметь положительное фокусное расстояние, а вторая линза — отрицательное.

Если сделать радиусы обращенных друг к другу поверхностей обеих линз равными так, чтобы можно было склеить между собой линзы, то условия (5) дают нам два уравнения относительно трех подлежащих определению радиусов; таким образом один из радиусов мы можем выбрать произвольно, чем можно воспользоваться для уменьшения геометрических ошибок изображения.

Относительно ахроматизации фокусного расстояния можно добиться лучших результатов, если не ставить линзы вплотную, т. е. если принять, что расстояние l не равно 0. Тогда мы имеем согласно § 24 (26):

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{l}{f_1 f_2}.$$

Следовательно,

$$d\left(\frac{1}{f}\right) = d\left(\frac{1}{f_1}\right) + d\left(\frac{1}{f_2}\right) - l \left[\frac{1}{f_1} d\left(\frac{1}{f_2}\right) + \frac{1}{f_2} d\left(\frac{1}{f_1}\right) \right].$$

Таким образом условие ахроматичности для фокусного расстояния следующее:

$$\frac{\Delta_1}{f_1} + \frac{\Delta_2}{f_2} - l \cdot \frac{\Delta_1 + \Delta_2}{f_1 f_2} = 0$$

или

$$l = \frac{\Delta_1 f_2 + \Delta_2 f_1}{\Delta_1 + \Delta_2}. \quad (6)$$

Если обе линзы из одного материала ($\Delta_1 = \Delta_2$), то при

$$l = \frac{f_1 + f_2}{2} \quad (7)$$

фокусное расстояние системы не зависит от цвета. Но от этого мало пользы, так как положение и величина изображения зависят не только от фокусного расстояния, но и от положения главных плоскостей. Легко видеть, что при двух неахроматических тонких линзах нельзя получить ахроматического по величине и положению изображения. При одной тонкой линзе, как мы видели в § 24, предметная плоскость проектируется из середины линзы, как из центра, на плоскость изображения. Поэтому для первой линзы (фиг. 43) мы имеем:

$$\frac{Y_1'}{Y_1} = -\frac{\xi_1'}{\xi_1},$$

где ξ_1 и ξ_1' — расстояния обеих плоскостей от центра линзы. Точно так же для второй линзы

$$\frac{Y_2'}{Y_2} = -\frac{\xi_2'}{\xi_2}.$$

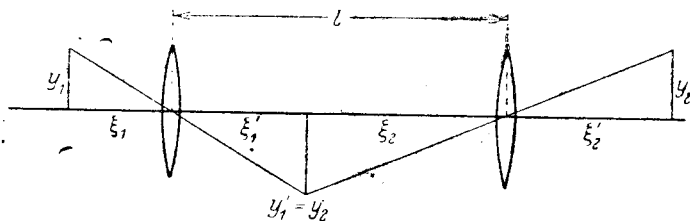
При этом $Y_2 = Y_1'$, а $\xi_1' + \xi_2 = l$. Увеличение результирующего изображения равно:

$$\frac{Y_2'}{Y_1} = \frac{\xi_1' \xi_2'}{\xi_1 \xi_2}.$$

При изменении показателя преломления ξ_1 остается постоянным, как расстояние предмета, а ξ_2' — вследствие требования ахроматичности плоскости изображения. Ахроматизация величины изображения, т. е. отношение увеличения $d \frac{Y_2'}{Y_1} = 0$ приводит, таким образом, к условию:

$$d \left(\frac{\xi_1'}{\xi_2} \right) = \frac{1}{\xi_2^2} (\xi_2 d\xi_1' - \xi_1' d\xi_2) = 0;$$

так как $d\xi_1' = -d\xi_2$, то $d\xi_2 = 0$, а также $d\xi_1' = 0$. Но это значит, что обе составляющие линзы должны быть ахроматичны сами по себе. Итак, мы приходим к выводу:



Фиг. 43. К построению ахроматической системы линз.

Оптическая система, состоящая из нескольких отдельных систем, может быть вполне ахроматизована только тогда, когда составляющие системы ахроматичны сами по себе.

Данные здесь правила относятся исключительно к цветным ошибкам гауссовых изображений. При переходе к более высоким приближениям надо иметь в виду, что и при них имеет место хроматическая aberrация. Поэтому когда хотят устранить геометрические ошибки изображения при помощи методов, с сущностью которых мы познакомимся дальше, то вообще недостаточно сделать это для одного какого-нибудь цвета, и здесь необходимо поставить особые условия ахроматичности. Но мы не будем входить в рассмотрение этих частных случаев.

§ 27. ЭЙКОНАЛ ЗЕЙДЕЛЯ

Мы перейдем теперь к геометрическим ошибкам изображения, т. е. к тем отклонениям от диоптрики Гаусса, которые определяются членами высших порядков в разложении углового эйконала. Сделаем сначала краткий исторический обзор.

Поводом к усовершенствованию учения Гаусса об изображении послужило открытие фотографии, сделанное Дагерром

(1789—1851) в 1839 г. Перед практической оптикой, главной задачей которой до тех пор было конструирование объективов для подзорных труб, возникла новая задача — дать пригодный для дагерротипии светосильный объектив с большим полем зрения. Венский математик Петцваль (J. Petzval, 1807—1891) успешно работал над задачей дополнения формулы Гаусса высшими членами разложения по углам наклона лучей к осям. К сожалению, воры уничтожили его объемистую, подробную рукопись; его выводы известны только из нескольких популярных статей. Петцваль доказал практическую ценность своих вычислений, построив свой портретный объектив (1841 г.), значительно превосходящий все, применявшиеся до тех пор. Первая, полностью разработанная теория ошибок изображения принадлежит Зейделю (1856), который вычислил ошибки третьего порядка, введя соответствующим образом выбранные переменные. Впоследствии эти вычисления были усовершенствованы многими авторами и распространены на ошибки высших порядков¹. Мы будем пользоваться, как уже сказано выше (§ 21, 22), методом углового эйконала Шварцшильда.

Метод Шварцшильда для определения хода луча заимствован из астрономической теории возмущений. Там вводятся сначала переменные, которые постоянны при невозмущенном движении (канонические элементы траектории); затем, при помощи пертурбационной функции определяются их малые изменения. Аналогично этому мы в оптике введем переменные, которые постоянны при преломлении луча в оптической системе, с той точностью, которая дается диоптрикой Гаусса; изменения этих переменных при рассмотрении высших членов эйконала вычисляются при помощи функции, аналогичной пертурбационной функции. Эти выделенные элементы луча называются *переменными Зейделя*, так как они тесно связаны с переменными, которыми пользовался Зейдель.

В предметной плоскости $X_0 = 0$ мы введем новую единицу длины l_0 ; точно так же в плоскости изображения введем новую единицу длины l_1 таким образом, чтобы [см. § 24 (9)]:

$$\frac{l_1}{l_0} = \frac{f_0}{X_0} = \frac{X_1}{f_1}. \quad (1)$$

Примем за координаты в обеих плоскостях

$$\begin{aligned} y_0 &= C \frac{Y_0}{l_0}, & y_1 &= C \frac{Y_1}{l_1}, \\ z_0 &= C \frac{Z_0}{l_0}, & z_1 &= C \frac{Z_1}{l_1}, \end{aligned} \quad (2)$$

¹ Дальнейшую литературу см. в уже цитированном A. Kohlschütter, Die Bildfehler 5. Ordnung usw. Diss. Göttingen, 1908.

где коэффициенты пропорциональности C будут надлежащим образом подобраны позже. Для гауссова изображения эти координаты „инвариантны“, т. е. $y_0 = y_1$, $z_0 = z_1$.

Теперь мы ищем соответствующей замены для угловых переменных p_0 , q_0 , p_1 , q_1 .

Для этого введем в плоскости зрачка входа координаты Y_0^* , Z_0^* , а в плоскости зрачка выхода — Y_1^* , Z_1^* . Если M_0 и M_1 означают соответственно расстояния этих плоскостей от предметной плоскости и от плоскости изображения, то, очевидно,

$$\frac{Y_0^* - Y_0}{M_0} = \frac{p_0}{\sqrt{1 - p_0^2 - q_0^2}}, \dots$$

В рамках диоптрики Гаусса мы можем заменить квадратный корень единицей. При этом получается то преимущество, что новые координаты, определяемые уравнениями:

$$\begin{aligned} \frac{Y_0^* - Y_0}{M_0} &= p_0, & \frac{Y_1^* - Y_1}{M_1} &= p_1, \\ \frac{Z_0^* - Z_0}{M_0} &= q_0, & \frac{Z_1^* - Z_1}{M_0} &= q_1, \end{aligned}$$

связаны линейно со старыми переменными и при этом сохраняют свою величину в пределах желаемой точности. В сопряженных плоскостях зрачка введем также новые единицы длины (λ_0) , (λ_1) , отношение которых определяет увеличение:

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_0} = \frac{f_0}{X_0 + M_0} = \frac{X_1 + M_1}{f_1}. \quad (3)$$

Таким образом мы заменяем p_0 , q_0 , p_1 , q_1 координатами:

$$\left. \begin{aligned} \eta_0 &= \frac{Y_0^*}{\lambda_0} = \frac{Y_0}{\lambda_0} + \frac{M_0 p_0}{\lambda_0}, & \eta_1 &= \frac{Y_1^*}{\lambda_1} = \frac{Y_1}{\lambda_1} + \frac{M_1 p_1}{\lambda_1}, \\ \zeta_0 &= \frac{Z_0^*}{\lambda_0} = \frac{Z_0}{\lambda_0} + \frac{M_0 q_0}{\lambda_0}, & \zeta_1 &= \frac{Z_1^*}{\lambda_1} = \frac{Z_1}{\lambda_1} + \frac{M_1 q_1}{\lambda_1}. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

В диоптрике Гаусса, очевидно, $\eta_0 = \eta_1$, $\zeta_0 = \zeta_1$.

Для того чтобы удобно выразить уравнения (4) в старых координатах, надо соответствующим образом выбрать введенный в (2) коэффициент C . Для этого вспомним формулу § 24 (29), согласно которой для любых двух предметных плоскостей, расстояние между которыми равно M , величина nYY^*/M — инвариантна. Итак, мы можем положить:

$$C = \frac{n_0 l_0 \lambda_0}{M_0} = \frac{n_1 l_1 \lambda_1}{M_1}. \quad (5)$$

Тогда, решая уравнения (2) и (4), мы получим:

$$\left. \begin{aligned} Y_0 &= y_0 \frac{M_0}{n_0 \lambda_0}, & Y_1 &= y_1 \frac{M_1}{n_1 \lambda_1}, \\ Z_0 &= z_0 \frac{M_0}{n_0 \lambda_0}, & Z_1 &= z_1 \frac{M_1}{n_1 \lambda_1}; \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

$$\left. \begin{aligned} p_0 &= \eta_0 \frac{\lambda_0}{M_0} - y_0 \frac{1}{n_0 \lambda_0}, & p_1 &= \eta_1 \frac{\lambda_1}{M_1} - y_1 \frac{1}{n_1 \lambda_1}, \\ q_0 &= \zeta_0 \frac{\lambda_0}{M_0} - z_0 \frac{1}{n_0 \lambda_0}, & q_1 &= \zeta_1 \frac{\lambda_1}{M_1} - z_1 \frac{1}{n_1 \lambda_1}. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Теперь найдем соответствующий эйконал, который назовем эйконалом Зейделя S . Мы имели для углового эйконала согласно § 22 (5), (7):

$$dW = n_0(Y_0 dp_0 + Z_0 dq_0) - n_1(Y_1 dp_1 + Z_1 dq_1).$$

Введя сюда новые переменные из (6) и (7), получим:

$$\left. \begin{aligned} dW &= y_0 \left(d\eta_0 - \frac{M_0}{n_0 \lambda_0^2} dy_0 \right) + z_0 \left(d\zeta_0 - \frac{M_0}{n_0 \lambda_0^2} dz_0 \right) - \\ &- y_1 \left(d\eta_1 - \frac{M_1}{n_1 \lambda_1^2} dy_1 \right) - z_1 \left(d\zeta_1 - \frac{M_1}{n_1 \lambda_1^2} dz_1 \right). \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Некоторые члены в правой части представляют собой полные дифференциалы, например:

$$- \frac{M_0}{n_0 \lambda_0^2} (y_0 dy_0 + z_0 dz_0) = - \frac{M_0}{2n_0 \lambda_0^2} d(y_0^2 + z_0^2).$$

Поэтому вместо W мы рассмотрим функцию:

$$\begin{aligned} S = W + \frac{M_0}{2n_0 \lambda_0^2} (y_0^2 + z_0^2) - \frac{M_1}{2n_1 \lambda_1^2} (y_1^2 + z_1^2) + y_0(\eta_1 - \eta_0) + \\ + z_0(\zeta_1 - \zeta_0). \end{aligned} \quad (9)$$

Из уравнения (8) следует:

$$dS = (\eta_1 - \eta_0) dy_0 + (\zeta_1 - \zeta_0) dz_0 + (y_0 - y_1) d\eta_1 + (z_0 - z_1) d\zeta_1 \quad (10)$$

или в другой форме:

$$\left. \begin{aligned} \eta_1 - \eta_0 &= \frac{\partial S}{\partial y_0}, & y_1 - y_0 &= - \frac{\partial S}{\partial \eta_1}, \\ \zeta_1 - \zeta_0 &= \frac{\partial S}{\partial z_0}, & z_1 - z_0 &= - \frac{\partial S}{\partial \zeta_1}. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Таким образом, когда задана функция $S(y_0, z_0; \eta_1, \zeta_1)$ (т. е. задан путь луча, проходящего через заданную точку предметного пространства и заданную точку в плоскости зрачка выхода), то из нее можно путем дифференцирования определить те изменения, которые претерпевают координаты точек пересечения луча с плоскостью изображения и плоскостью зрачка входа по сравнению с их значениями в диоптрике Гаусса ($y_1 = y_0; z_1 = z_0; \eta_1 = \eta_0; \zeta_1 = \zeta_0$). Симметричность формул основана именно на этом своеобразном скрещивании плоскостей предмета и изображения, с одной стороны, и плоскостей зрачков — с другой стороны.

§ 28. УСЛОВИЕ СИНУСОВ

Из уравнений § 27 (11) можно вывести некоторые теоремы о взаимности, которые эквивалентны одному условию стигматичности изображения для пучка лучей конечной ширины; это уравнение было найдено Аббе иным путем.

Из уравнения § 27 (11) мы составим четыре производные второго порядка от S по каждой из переменных $y_0, z_0, \eta_1, \zeta_1$; дифференцируя по η_1 и y_0 , получим:

$$1 - \frac{\partial \eta_0}{\partial \eta_1} = \frac{\partial^2 S}{\partial y_0 \partial \eta_1}, \quad \frac{\partial y_1}{\partial y_0} - 1 = - \frac{\partial^2 S}{\partial \eta_1 \partial y_0},$$

$$- \frac{\partial \zeta_0}{\partial \eta_1} = \frac{\partial^2 S}{\partial z_0 \partial \eta_1}, \quad \frac{\partial z_1}{\partial y_0} = - \frac{\partial^2 S}{\partial \zeta_1 \partial y_0};$$

дифференцирование по ζ_1 и z_0 дает:

$$- \frac{\partial \eta_0}{\partial \zeta_1} = \frac{\partial^2 S}{\partial y_0 \partial \zeta_1}, \quad \frac{\partial y_1}{\partial z_0} = - \frac{\partial^2 S}{\partial \eta_1 \partial z_0},$$

$$1 - \frac{\partial \zeta_0}{\partial \zeta_1} = \frac{\partial^2 S}{\partial z_0 \partial \zeta_1}, \quad \frac{\partial z_1}{\partial z_0} - 1 = - \frac{\partial^2 S}{\partial \zeta_1 \partial z_0}.$$

Отсюда следует:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial y_1}{\partial y_0} &= \frac{\partial \eta_0}{\partial \eta_1}, & \frac{\partial y_1}{\partial z_0} &= \frac{\partial \zeta_0}{\partial \eta_1}, \\ \frac{\partial z_1}{\partial y_0} &= \frac{\partial \eta_0}{\partial \zeta_1}, & \frac{\partial z_1}{\partial z_0} &= \frac{\partial \zeta_0}{\partial \zeta_1}. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Определим теперь условие, которому должен удовлетворять эйконал Зейделя, чтобы точки на оси в плоскости предмета и изображения образовали стигматическую пару. Согласно этому условию, если $y_0 = z_0 = 0$, то отсюда должно следовать, что $y_1 = z_1 = 0$, причем по этому пути луч должен проходить из одной точки в другую, т. е. независимо от значений η_1 и ζ_1 . Тогда из § 27 (11) следует, что уравнения:

$$\left(\frac{\partial S}{\partial \eta_1} \right)_{y_0=0, z_0=0} = 0, \quad \left(\frac{\partial S}{\partial \zeta_1} \right)_{y_0=0, z_0=0} = 0 \quad (2)$$

должны удовлетворяться при любых значениях η_1, ζ_1 . Затем потребуем, чтобы не только точки на оси в плоскостях предмета и изображения, но и окружающие их два элемента поверхности отображались астигматически. Это значит, что формула диоптрики Гаусса $y_1 = y_0, z_1 = z_0$ должна выполняться не только в точках $y_0 = y_1 = 0, z_0 = z_1 = 0$, но и для малых значений y_0, z_0 с точностью до членов высших порядков, или, точнее, что уравнения:

$$\frac{\partial y_1}{\partial y_0} = \frac{\partial z_1}{\partial z_0} = 1, \quad \frac{\partial y_1}{\partial z_0} = \frac{\partial z_1}{\partial y_0} = 0$$

должны удовлетворяться значениями $y_0 = z_0 = 0$ при произвольных значениях η_1 и ζ_1 .

Из уравнений (1) следует:

$$\frac{\partial \eta_0}{\partial \eta_1} = \frac{\partial \zeta_0}{\partial \zeta_1} = 1, \quad \frac{\partial \eta_0}{\partial \zeta_1} = \frac{\partial \zeta_0}{\partial \eta_1} = 0$$

также для $y_0 = z_0 = 0$ и всех значений η_1 и ζ_1 . Эти уравнения можно проинтегрировать. Постоянные интегрирования определяются тем, что луч, совпадающий с осью, не подвергается преломлению, т. е. при $\eta_0 = \zeta_0 = 0$ должно быть $\eta_1 = \zeta_1 = 0$.

Таким образом мы получаем:

$$\eta_0 = \eta_1, \quad \zeta_0 = \zeta_1. \quad (3)$$

Это значит: если два перпендикулярных к оси элемента поверхности, окружающие стигматические точки $y_0 = z_0 = 0$ и $y_1 = z_1 = 0$, взаимно отображают друг друга, то координаты Зейделя η, ζ должны быть равны для каждой пары сопряженных лучей, проходящих через обе стигматические точки, т. е. эти лучи должны встречать зрачки входа и выхода на одинаковом „приведенном“ расстоянии от оси.

Сделаем теперь пересчет на обычные координаты. Из § 27 (7) следует, что уравнения (3), которые удовлетворяются при $y_0 = z_0 = 0$ и $y_1 = z_1 = 0$ эквивалентны с уравнением:

$$\frac{M_0 p_0}{\lambda_0} = \frac{M_1 p_1}{\lambda_1}, \quad \frac{M_0 q_0}{\lambda_0} = \frac{M_1 q_1}{\lambda_1}$$

или в силу § 27 (5) со следующими уравнениями:

$$n_0 l_0 p_0 = n_1 l_1 p_1, \quad n_0 l_0 q_0 = n_1 l_1 q_1. \quad (4)$$

Если u_0 и u_1 — углы, образуемые сопряженными лучами с осью, то

$$\cos u_0 = m_0, \quad \sin u_0 = \sqrt{p_0^2 + q_0^2},$$

$$\cos u_1 = m_1, \quad \sin u_1 = \sqrt{p_1^2 + q_1^2}.$$

Таким образом вместо (4) можно написать:

$$n_0 l_0 \sin u_0 = n_1 l_1 \sin u_1. \quad (5)$$

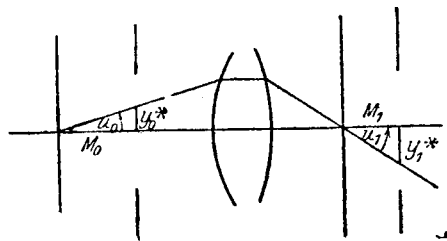
Это и есть данное Аббе *условие синусов*. Существует много элементарных выводов его, но вывод Шварцшильда, который мы здесь изложили, является лучшим из них, так как приводит к простой и наглядной формулировке.

Поясним теперь смысл формулы (5). Прежде всего ясно, что в предельном случае диоптрики Гаусса она не дает ничего нового. В самом деле, мы имеем (фиг. 44):

$$\operatorname{tg} u_0 = \frac{Y_0^*}{M_0}, \quad \operatorname{tg} u_1 = \frac{Y_1^*}{M_1},$$

а когда u_0, u_1 малы, мы можем заменить эти уравнения следующими:

$$\sin u_0 = \frac{Y_0^*}{M_0}, \quad \sin u_1 = \frac{Y_1^*}{M_1}.$$



Фиг. 44. Условие синусов.

Но тогда уравнение (5) переходит в

$$\frac{n_0 l_0 Y_0^*}{M_0} = \frac{n_1 l_1 Y_1^*}{M_1},$$

что совпадает с формулой § 24(29).

Таким образом при построении оптической системы условие синусов приходится принимать во внимание только в том случае, когда мы имеем дело с более расходящимся пучком отображающих лучей (с большим зрачком входа).

Примером такого случая, когда это требование точно выполняется, является преломление на сферической поверхности, рассмотренное нами в § 18 для пары апланатических точек. Согласно фиг. 31, стр. 83, угол $PQO = u_0$, $PRO = u_1$; с другой стороны, мы показали в § 18, что $\angle PQO$ равен углу преломления ψ , а $\angle PRO$ равен углу падения φ . Тогда из закона преломления следует:

$$\frac{\sin u_0}{\sin u_1} = \frac{\sin \psi}{\sin \varphi} = \frac{n_0}{n_1},$$

где n_0 соответствует внешней, а n_1 — внутренней стороне сферы. Наконец, линейные размеры двух перпендикулярных к оси ORQ в R и Q элементов поверхности относятся, как радиусы вейерштрассовых сфер r_2 и r_1 ; следовательно, мы имеем:

$$\frac{l_0}{l_1} = \frac{r_1}{r_2} = \frac{n_1^2}{n_0^2}.$$

Отсюда следует:

$$\frac{n_0 l_0 \sin u_0}{n_1 l_1 \sin u_1} = 1,$$

что согласно с формулой (5).

Но и в общем случае стигматическую пару точек, для которой выполняется условие синусов, называют согласно Аббе *апланатической парой точек*. Отыскание таких точек, т. е. поправку (коррекцию) к оптической системе для выполнения условий синусов в данных сопряженных точках нужно рассматривать как частный случай общей теории ошибок изображения, основанной на разложении эйконала по размерам предмета и углам наклона лучей. Мы вскоре вернемся к этому вопросу.

Но главная ценность условия синусов заключается в его приложимости к практическому расчету систем, для которого обычно не пользуются методом систематического разложения. Обычно исследуют математически путь достаточного числа лучей, проходящих через приборы, и по этому судят о качестве изображения. Условие синусов дает возможность по поведению наиболее удобных для исследования лучей, пересекающих ось, сделать заключение об изображении, даваемом теми лучами, которые проходят вблизи оси наклонно к ней.

Условие синусов имеет также большое значение в вопросе яркости изображения. Здесь мы должны в нескольких словах остановиться на основных понятиях фотометрии.

В § 3 главы I мы определили силу света при помощи вектора Пойнтинга. В геометрической оптике энергию представляют себе скользящей вдоль луча. Для точечного изображения *силу света* можно определить формулой:

$$K = \frac{dL}{d\omega}, \quad (6)$$

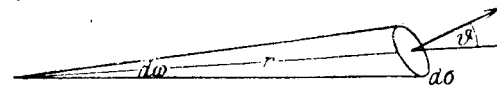
где $d\omega$ есть элемент телесного угла, а dL — распространяющаяся в нем энергия.

С другой стороны, если энергия dL падает на элемент поверхности $d\sigma$, то величина

$$B = \frac{dL}{d\sigma} \quad (7)$$

носит название *освещенности* этого элемента.

Вычислим освещенность элемента $d\sigma$ для точечного источника, имеющего силу света K . Для этого построим конус, имеющий



Фиг. 45. К определению интенсивности света.

вершину в источнике света и основание на элементе поверхности $d\sigma$. Пусть r есть расстояние элемента $d\sigma$ от источника света, ϑ — угол между нормалью к поверхности и осью конуса; тогда мы имеем (фиг. 45):

$$d\sigma \cos \vartheta = r^2 d\omega.$$

Отсюда

$$B = \frac{dL}{d\omega} \cdot \frac{d\omega}{d\sigma} = K \frac{\cos \vartheta}{r^2}. \quad (8)$$

Таким образом освещенность равно наклоненных элементов поверхности обратно пропорциональна квадратам их расстояния от источника света. На этом *основном законе фотометрии* построено большинство применяемых на практике фотометров. Мы не будем останавливаться на них.

Теперь мы примем во внимание, что источник света сам имеет некоторую протяженность, т.е. является элементом поверхности $\delta\sigma$. Характер излучения, разумеется, будет зависеть от физической природы поверхности и прежде всего от того, гладка ли она или шероховата, светится ли она сама, пропускает или отражает свет. *Излучение* (или *отражение*) называется рассеянным в тех случаях, к которым применим *закон косинусов* Ламберта: „Исходящая элементом $\delta\sigma$ в определенном направлении сила света δK пропорциональна косинусу угла ϑ между направлением луча и нормалью к поверхности“:

$$\delta K = i \delta\sigma \cos \vartheta. \quad (9)$$

Коэффициент i называется *удельной яркостью света* или *освещенностью на единицу поверхности*.

Если применить этот закон к равномерно светящемуся шару, то шар должен казаться равномерно ярким, так как убывающая по закону Ламберта яркость наклонных элементов поверхности компенсируется увеличением площади элементов для равных телесных углов, видимых наблюдателем. Это дает критерий применимости закона Ламберта.

Количество света δL , распространяющееся от элемента поверхности $\delta\sigma$ внутри конуса с углом раствора u , равно согласно (6) и (9):

$$\delta L = \int \delta K d\omega = 2\pi i \delta\sigma \int_0^u \cos \vartheta \sin \vartheta d\vartheta,$$

следовательно,

$$\delta L = \pi i \delta\sigma \sin^2 u. \quad (10)$$

Применим теперь формулу (10) к оптическому изображению.

Когда элемент поверхности $d\sigma_0$ отображается перпендикулярно к оси стигматически в некоторый элемент $d\sigma_1$, то, если пренебречь потерями при отражении, вся энергия, исходящая от $d\sigma_0$, должна пройти через $d\sigma_1$; максимальное значение достижимой в плоскости изображения силы света равно согласно (10):

$$\pi i_1 d\sigma_1 \sin^2 u_1 = \pi i_0 d\sigma_0 \sin^2 u_0.$$

Если мы теперь обозначим l_0 и l_1 сопряженные отрезки в плоскостях предмета и изображения, то мы можем написать:

$$\frac{d\sigma_0}{d\sigma_1} = \frac{l_0^2}{l_1^2}.$$

Отсюда следует:

$$i_1 l_1^2 \sin^2 u_1 = i_0 l_0^2 \sin^2 u_0. \quad (11)$$

Сравнив это уравнение с условием синусов (5), мы видим, что

$$\frac{i_1}{i_0} = \frac{n_1^2}{n_0^2}. \quad (12)$$

Если, наоборот, исходить из этого уравнения (в случае равенства показателей преломления в пространствах предмета и изображения оно тривиально), мы видим, что условие синусов можно интерпретировать как одну из формулировок закона сохранения энергии.

Определяемое из уравнения (12) значение i_1 при заданном значении i_0 является избыточным в двух отношениях: во-первых, мы пренебрегаем потерями при отражении, во-вторых, i_1 достигает этого значения лишь при точном выполнении закона синусов. Таким образом в случае $n_1 = n_0$ удельная яркость оптического изображения может быть самое большее равна яркости предмета; если же $n_1 > n_0$, она может и превышать последнюю. В этом заключается одно из преимуществ масляной иммерсии, применяемой в микроскопах.

Если подставить в выражении $n \sin u$, входящем в условие синусов как коэффициент при величине предмета, максимальное значение величины u , т.е. величину апертуры U прибора, то величина

$$n \sin U$$

носит данное ей Аббе название *численной* (или *нумерической*) *апертуры*. Согласно уравнениям (10) и (12) ее квадрат пропорционален общей освещенности изображения. Действительно, приняв согласно (12) $i = n^2 J$, мы получим:

$$\delta L = \pi J d\sigma \cdot n^2 \sin^2 U.$$

Дальше мы увидим, что численная апертура характеризует качество изображения в смысле ошибок, возникающих вследствие дифракции.

§ 29. ОШИБКИ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА *

В § 23 (10) мы дали разложение в ряд эйконала для преломляющей поверхности

$$W = W_0 + W_2 + W_4 + \dots$$

При этом W_0 было константой, а $W_2, W_4 \dots$ функциями трех инвариантных относительно вращения величин:

$$p_0^2 + q_0^2, \quad p_1^2 + q_1^2, \quad p_0 p_1 + q_0 q_1,$$

степень которых относительно p_0, q_0, p_1, q_1 указывается индексом. Такого же вида разложение будет иметь место в случае ряда расположенных одна за другой преломляющих поверхностей. В § 24 мы уже разобрали случай стигматического изображения любой последовательности, причем ограничивались разложением до W_2 .

Совершенно аналогично эйконал Зейделя разлагается в степенной ряд по величинам:

$$R = y_0^2 + z_0^2, \quad \rho = \eta_1^2 + \zeta_1^2, \quad x = y_0 \eta_1 + z_0 \zeta_1, \quad (1)$$

но этот ряд имеет то преимущество, что в нем отсутствуют члены второго порядка. Мы уже видели, что случай гауссовой диоптрики (который представлен членами второго порядка) характеризуется уравнениями:

$$\eta_1 = \eta_0, \quad y_1 = y_0, \\ \zeta_1 = \zeta_0, \quad z_1 = z_0,$$

следовательно, согласно § 27 (11) члены второго порядка должны отсутствовать в S . Пренебрегая не имеющей значения аддитивной константой, мы можем написать:

$$S = S_4 + S_6 + \dots \quad (2)$$

Так как отклонения координат возникают согласно § 27 (11) в результате дифференцирования S , то S_4 дает ошибки третьего порядка, S_6 — ошибки пятого порядка и т. д. Мы ограничимся кратким рассмотрением ошибок третьего порядка. Можно говорить о геометрическом смысле этих ошибок, не производя на самом деле вычисления эйконала как функции констант оптической системы.

Общее выражение S_4 должно иметь вид:

$$S_4 = -\frac{A}{4} R^2 - \frac{B}{4} \rho^2 - C x^2 - \frac{D}{2} R \rho + E R x + F \rho x. \quad (3)$$

Коэффициенты будут вычислены позже. Знак и числовые множители должны быть выбраны с учетом следующих соображений.

Проведем плоскость xy через точку предмета, т. е. положим $z_0 = 0$. Произведя затем указанные в § 27 (11) дифференцирования над отклонениями $\Delta y = y_1 - y_0$ и $\Delta z = z_1 - z_0 = z_1$, получим следующие значения:

$$\left. \begin{aligned} \Delta y &= -\frac{\partial S_4}{\partial \eta_1} = y_0 [2C y_0 \eta_1 - E y_0^2 - F(\eta_1^2 + \zeta_1^2)] + \\ &\quad + \eta_1 [B(\eta_1^2 + \zeta_1^2) + D y_0^2 - 2F y_0 \eta_1], \\ \Delta z &= -\frac{\partial S_4}{\partial \zeta_1} = \zeta_1 [B(\eta_1^2 + \zeta_1^2) + D y_0^2 - 2F y_0 \eta_1]. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Член с A исчез; осталось пять ошибок третьего порядка, соответственно пяти коэффициентам B, C, D, E, F . Мы выделим отдельные ошибки и все время будем приравнивать нулю все коэффициенты, кроме одного.

Для большей наглядности рассмотрим так называемую „абerrационную кривую“; это кривая в плоскости изображения, получающаяся при проведении из точки предмета всех лучей, пересекающих окружность радиуса σ в плоскости зрачка выхода. Если σ есть радиус самого зрачка, то часть плоскости, охваченная aberrационной кривой, представляет собой размытое изображение предмета.

Пусть окружность в зрачке выхода выражается уравнением:

$$\eta_1 = \sigma \cos \varphi, \quad \zeta_1 = \sigma \sin \varphi. \quad (5)$$

Мы можем представить ошибки как функции расстояния y_0 предмета от оси и радиуса зрачка σ . Согласно уравнению (4) мы имеем:

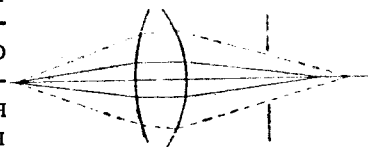
$$\left. \begin{aligned} \Delta y &= B \sigma^3 \cos \varphi - F \sigma^2 y_0 (1 + 2 \cos^2 \varphi) + (2C + D) \sigma y_0^2 \cos \varphi - E y_0^3, \\ \Delta z &= B \sigma^3 \sin \varphi - F \sigma^2 y_0 2 \sin \varphi \cos \varphi + D \sigma y_0^2 \sin \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Отсюда находим следующие ошибки:

I. $B \neq 0$. Имеем:

$$\Delta y = B \sigma^3 \cos \varphi, \quad \Delta z = B \sigma^3 \sin \varphi. \quad (7)$$

Абerrационные кривые образуют вокруг фокуса Гаусса концентрические окружности, радиусы которых возрастают пропорционально кубу апертуры прибора, но не зависят от положения предмета в поле зрения. Эта ошибка называется *сферической aberrацией*. Ее возникновение можно представить себе наглядно следующим образом: так как сферическая aberrация не зависит от положения предмета, то она должна иметь место также для точек оси, именно когда апертура (σ) велика. Легко видеть, что точка пересечения лучей, выходящих из точки на оси под большим углом к оси, лежит перед точкою пересечения лучей, почти параллельных оси, или позади нее (фиг. 46).



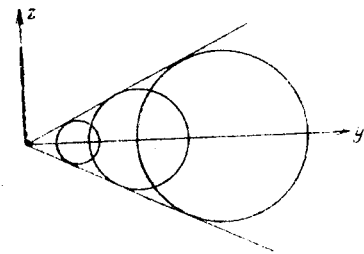
Фиг. 46. Сферическая aberrация.

II. $F \neq 0$. Имеем:

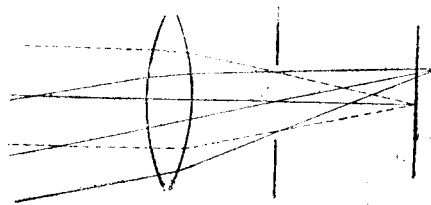
$$\left. \begin{aligned} \Delta y &= -F \sigma^2 y_0 (1 + 2 \cos^2 \varphi) = -F \sigma^2 y_0 (2 + \cos 2\varphi), \\ \Delta z &= -F \sigma^2 y_0 2 \sin \varphi \cos \varphi = -F \sigma^2 y_0 \sin 2\varphi. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Если предметная точка y_0 неподвижна, то aberrационная кривая представляет собой окружность радиуса $F \sigma^2 y_0$, центр которой смещен относительно фокуса на $-2F \sigma^2 y_0$. Окружность

касается прямых, образующих угол 30° с линией, соединяющей гауссов фокус с осевой точкой плоскости изображения (фиг. 47). Если σ возрастает от нуля до величины зрачка выхода, то весь конус, образуемый этими прямыми, наполнится рассеянным светом. Эта ошибка называется *комой* вследствие несимметричности, которую она придает изображению (фиг. 47).



Фиг. 47. Кома.



Фиг. 48. Возникновение комы.

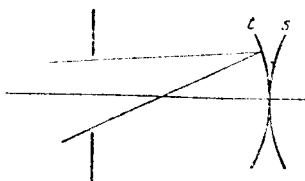
Чтобы наглядно уяснить себе возникновение комы, сравним (фиг. 48) изображение двух бесконечно удаленных элементов, из которых один лежит на оси, а другой вне ее. Рассмотрим такие два пучка: параллельный оси и наклонный к ней. Мы увидим, что зрачок выхода диафрагмирует первый пучок симметрично; при этом в худшем случае возникает симметричная относительно оси ошибка, рассмотренная нами в пункте I сферическая аберрация. Но часть, вырезанная зрачком из наклонного пучка, идет в линзу совершенно асимметрично; поэтому и ошибка должна быть асимметричной, какой и является кома.

III. $C \neq 0$, $D \neq 0$. Ошибки C и D удобнее рассматривать вместе. Имеем:

$$\begin{aligned} \Delta y &= (2C + D) \sigma y_0^2 \cos \varphi, \\ \Delta z &= D \sigma y_0^2 \sin \varphi. \end{aligned} \quad (9)$$

Эти ошибки происходят от астигматизма и искривления изображения. Входящий пучок лучей, который мы на мгновение будем считать бесконечно тонким, имеет, как мы уже показали

в § 16, две фокальные линии, из которых одна направлена радиально, или, как говорят, „сагиттально“ к оси прибора, а другая — касательно к кругу, имеющему центр на оптической оси и перпендикулярную к ней. Обе поверхности, описываемые этими фокальными линиями, когда предмет перемещается в предметной плоскости (фиг. 49), называются *сагиттальной* и *тангенциальной* фокальными поверхностями.



Фиг. 49. Сагиттальная и тангенциальная фокальные поверхности.

В первом приближении обе эти поверхности можно заменить сферами кривизны, соприкасающимися на оси и имеющими

радиусы ρ_s и ρ_t . Эти радиусы считаются положительными, если центр кривизны лежит в направлении движения света перед плоскостью изображения.

Вычислим теперь при помощи обычных координат искажение изображения, возникающее в предметной плоскости. Фиг. 50 дает нам:

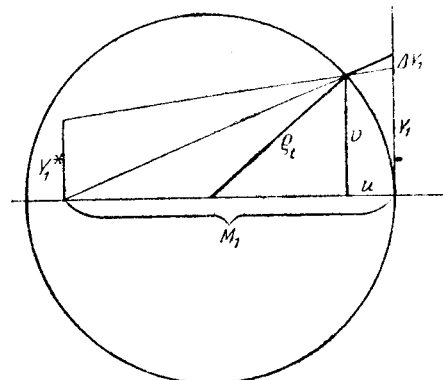
$$\frac{\Delta Y_1}{Y_1} = \frac{u}{M_1 - u},$$

где u — маленькое расстояние сагиттальной линии от плоскости изображения. Обозначив v расстояние той же линии от оси, имеем:

$$\rho_t^2 = v^2 + (\rho_t - u)^2,$$

следовательно,

$$v^2 = 2\rho_t u - u^2.$$



Фиг. 50. Астигматизм и искривление поля.

Рассматривая u , как малую величину первого порядка, мы можем v считать тождественным с Y_1 ; тогда

$$u = \frac{Y_1^2}{2\rho_t},$$

следовательно,

$$\Delta Y_1 = \frac{Y_1^2}{2\rho_t} \cdot \frac{Y_1^*}{M_1}.$$

Совершенно аналогично

$$\Delta Z_1 = \frac{Z_1^2}{2\rho_s} \cdot \frac{Z_1^*}{M_1}.$$

Введя теперь переменные Зейделя согласно § 27 (6) и (4), найдем:

$$\Delta y_1 = \frac{n_1 \lambda_1}{M_1} \Delta Y_1 = \frac{n_1 \lambda_1}{M_1} \frac{1}{2\rho_t M_1} Y_1^2 Y_1^* = \frac{n_1 \lambda_1}{M_1^2 2\rho_t} y_1^2 \frac{M_1^2}{n_1^2 \lambda_1^2} \lambda_1 \eta_1,$$

следовательно,

$$\Delta y_1 = \frac{y_1^2 \eta_1}{2\rho_t n_1}, \quad \Delta z_1 = \frac{y_1^2 \zeta_1}{2\rho_s n_1}.$$

Мы можем поставить здесь y_0 вместо y_1 и, сравнивая с уравнением (9), получим в силу уравнения (5):

$$\frac{1}{\rho_t} = 2n_1(2C + D), \quad \frac{1}{\rho_s} = 2n_1 D. \quad (10)$$

Мы назовем поэтому $2C + D$ *тангенциальным* и D — *сагиттальным* изгибом фокальной поверхности. Полуразность обеих кривизн

$$\frac{1}{z} \left(\frac{1}{\rho_t} - \frac{1}{\rho_s} \right) = 2n_1 C \quad (11)$$

называется *астигматизмом*; полусумма их

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{z} \left(\frac{1}{\rho_t} + \frac{1}{\rho_s} \right) = 2n_1 (C + D) \quad (12)$$

называется просто *искривлением поля*.

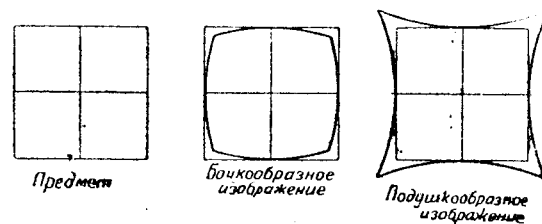
Действительно, при отсутствии всех прочих ошибок сферическая поверхность радиуса ρ , касающаяся фокальной поверхности на оси, является местом точного изображения предметной плоскости.

Знак величины $2C + D$ и D определяет положение этой сферы относительно предметной плоскости. Если одна из этих величин положительна, то точное изображение лежит за гауссовой фокальной плоскостью.

IV. $E \neq 0$. Имеем:

$$\Delta y = -E y^3, \quad \Delta z = 0.$$

Так как σ и φ не входят сюда, то при наличии одной этой aberrации изображение получается точечным независимо от бленды. Но расстояния точек от оси непропорциональны соответствующим расстояниям предмета, поэтому происходит *искажение (дисторсия)* изображения. Прямые, проходящие через



Фиг. 51.

ось, изображаются также в виде прямых, а все остальные искривляются. При положительном E получается бочкообразная дисторсия (фиг. 51), где более удаленные точки гауссова изображения смещены внутрь. При E отрицательном происходит *подушкообразная дисторсия*, более удаленные точки лежат слишком далеко.

Перечислив все aberrации третьего порядка, рассмотрим, каким образом найти наиболее вредную в данных условиях ошибку, подлежащую устранению. Совершенно избавиться от всех недостатков невозможно, — речь может идти только о некотором оптимуме для определенной практической задачи.

Прежде всего, если речь идет об отображении малого предмета, то условие резкости изображения определяется условием синусов [§ 28 (5)]. Надо уничтожить подбором линз только члены нулевого и первого порядков в уравнении (6), так как остальные малы сами по себе. Это члены, содержащие B и F . Таким образом мы приходим к выводу:

Условие синусов Аббе относительно ошибок третьего порядка выполняется, если устранены сферическая aberrация и кома ($B = F = 0$).

Наоборот, уменьшая бленду, можно сделать тривиальным выполнение условия синусов. В этом случае остается устранить подбором линз, во-первых, дисторсию, во-вторых, астигматизм и изгиб фокальной поверхности. Но уменьшение диафрагмы идет всегда за счет светосилы; кроме того, при этом возникают ошибки другого рода, о которых речь будет дальше, именно — явления дифракции, основанные на волновой природе света.

Кома и aberrация — наиболее вредные из несовершенств изображения; в большинстве случаев их нужно как можно больше ослаблять. Дисторсия вредна в фотографическом объективе, в астрономических же приборах ее можно допускать, так как она не влияет на резкость изображения, а только искажает его, что можно исправить вычислением.

Каждая из геометрических ошибок опять таки зависит от цвета. Но эти хроматические ошибки малы, и ими можно пренебречь, поскольку мы ограничиваемся членами третьего порядка.

§ 30. ЭЙКОНАЛ ЗЕЙДЕЛЯ ДЛЯ СЛОЖНОЙ ОПТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ*

После сделанного нами обзора всех видов возможных ошибок остается гораздо более трудная задача — вычислить на самом деле эйконал Зейделя для данной оптической системы. Выше (§ 23) мы дали уже разложение в ряд углового эйконала для одной преломляющей поверхности вращения до членов четвертого порядка, — отсюда легко вывести соответствующий эйконал Зейделя. Но нам надо будет еще образовать из него эйконал Зейделя для центрированной системы произвольного числа поверхностей.

Чтобы не прерывать в дальнейшем специальных расчетов, займемся сначала этой сложной системой.

Из определения эйконала — светового пути между основными перпендикулярами, опущенных на луч из двух точек оси a_0 и a_1 — следует свойство его аддитивности. Пусть фокальная плоскость изображения первой системы $x = a_1$ изображается во второй системе плоскостью $x = a_2$; эта последняя является, очевидно, фокальной плоскостью всей системы. Для первого промежуточного изображения имеем:

$$W^{(1)} = W^{(1)}(p_0, q_0; p_1, q_1),$$

для второго:

$$W^{(2)} = W^{(2)}(p_1, q_1; p_2, q_2),$$

а для всей системы:

$$W = W^{(1)} + W^{(2)}, \quad (1)$$

причем промежуточные переменные p_1, q_1 должны быть выражены через начальные и конечные переменные p_0, q_0 и p_2, q_2 при помощи формул для отдельных отображений. Задача заключается именно в исключении этих переменных. Мы будем исключать их не из W , а из S , так как это гораздо легче вследствие более низкого порядка разложения S .

Согласно § 27 (29) имеем:

$$S^{(1)} = W^{(1)} + \frac{M_0}{2n_0 \lambda_0^2} (y_0^2 + z_0^2) - \frac{M_1}{2n_1 \lambda_1^2} (y_1^2 + z_1^2) + y_0(\eta_1 - \eta_0) + z_0(\zeta_1 - \zeta_0)$$

и

$$S^{(2)} = W^{(2)} + \frac{M_1}{2n_1 \lambda_1^2} (y_1^2 + z_1^2) - \frac{M_2}{2n_2 \lambda_2^2} (y_2^2 + z_2^2) + y_1(\eta_2 - \eta_1) + z_1(\zeta_2 - \zeta_1).$$

Точно так же для всей системы

$$S = W + \frac{M_0}{2n_0 \lambda_0^2} (y_0^2 + z_0^2) - \frac{M_2}{2n_2 \lambda_2^2} (y_2^2 + z_2^2) + y_0(\eta_2 - \eta_0) + z_0(\zeta_2 - \zeta_0).$$

Из (1) следует:

$$S = S^{(1)} + S^{(2)} + (y_0 - y_1)(\eta_2 - \eta_1) + (z_0 - z_1)(\zeta_2 - \zeta_1)$$

и согласно § 27 (11)

$$S = S^{(1)} + S^{(2)} + \frac{\partial S^{(1)}}{\partial \eta_1} \cdot \frac{\partial S^{(2)}}{\partial y_1} + \frac{\partial S^{(1)}}{\partial \zeta_1} \cdot \frac{\partial S^{(2)}}{\partial z_1}.$$

Подставив в это выражение ряды $S^{(1)}$ и $S^{(2)}$, которые согласно § 29(2) оба начинаются с членов четвертого порядка, и ограничившись в разложении S также членами четвертого порядка, напомним:

$$S = S_4^{(1)} + S_4^{(2)} + \dots = S_4 + \dots; \quad (2)$$

остальные члены, очевидно, шестого или еще более высокого порядка. К членам четвертого порядка следует применить при частичных изображениях приближение Гаусса. Отсюда вытекает простое правило исключения промежуточных переменных для членов четвертого порядка. В $S_4^{(1)}(y_0, z_0; \eta_1, \zeta_1)$ вместо переменных η_1, ζ_1 подставляют η_2, ζ_2 ; в $S_4^{(2)}(y_1, z_1; \eta_2, \zeta_2)$ вместо y_1, z_1 подставляют y_0, z_0 ; затем пишут сумму (2), тогда S_4 оказывается выраженным в функции $y_0, z_0; \eta_2, \zeta_2$, что и требовалось.

Выполним теперь в действительности это вычисление, приняв что $S_4^{(1)}$ и $S_4^{(2)}$ оба заданы в виде § 29(3):

$$S_4^{(1)} = -\frac{A_1}{4} R_0^2 - \frac{B_1}{4} \rho_1^2 - C_1 x_{01}^2 - \frac{D_1}{2} R_0 \rho_1 + E_1 R_0 x_{01} + F_1 \rho_1 x_{01},$$

$$R_0 = y_0^2 + z_0^2, \quad \rho_1 = \eta_1^2 + \zeta_1^2, \quad x_{01} = y_0 \eta_1 + z_0 \zeta_1;$$

$$S_4^{(2)} = -\frac{A_2}{4} R_1^2 - \frac{B_2}{4} \rho_2^2 - C_2 x_{12}^2 - \frac{D_2}{2} R_1 \rho_2 + E_2 R_1 x_{12} + F_2 \rho_2 x_{12},$$

$$R_1 = y_1^2 + z_1^2, \quad \rho_2 = \eta_2^2 + \zeta_2^2, \quad x_{12} = y_1 \eta_2 + z_1 \zeta_2.$$

Подставив η_2, ζ_2 вместо η_1, ζ_1 и y_0, z_0 вместо y_1, z_1 , а также ρ_2 вместо ρ_1, R_0 вместо R_1 , и вместо x_{01} и x_{12} величину:

$$x_{02} = y_0 \eta_2 + z_0 \zeta_2, \quad (3)$$

мы получим:

$$S_4 = -\frac{A_1 + A_2}{4} R_0^2 - \frac{B_1 + B_2}{4} \rho_2^2 - (C_1 + C_2) x_{02}^2 - \frac{D_1 + D_2}{2} R_0 \rho_2 + \left. \begin{aligned} &+ (E_1 + E_2) R_0 x_{02} + (F_1 + F_2) \rho_2 x_{02}. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Это уравнение означает, что ошибки третьего порядка сложной системы являются суммой соответствующих ошибок составляющих систем.

Этот простой вывод основан на применении переменных Зейделя; его нельзя было бы получить с помощью других переменных. Здесь особенно ярко выступает преимущество этих переменных.

При исследовании ошибок более высоких порядков переменные Зейделя также имеют преимущество перед другими, хотя здесь соотношения не так просты. Но мы не будем останавливаться на этом.

§ 31. ОШИБКИ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА ЦЕНТРИРОВАННОЙ СИСТЕМЫ ЛИНЗ*

Мы можем теперь свести ошибки системы преломляющих поверхностей к ошибкам одной из поверхностей. В § 23 мы уже написали разложение в ряд углового эйконала для одной поверхности до членов четвертого порядка включительно. Это разложение имеет следующий вид [см. § 23 (7)]:

$$W_1 = n_0 \left\{ \frac{1+b}{8r^3} (y^2 + z^2)^2 - \frac{1}{4r} (y^2 + z^2) (p_0^2 + q_0^2) + \frac{a_0}{8} (p_0^2 + q_0^2)^2 \right\} - \left. \begin{aligned} &- n_1 \left[\frac{1+b}{8r^3} (y^2 + z^2)^2 - \frac{1}{4r} (y^2 + z^2) (p_1^2 + q_1^2) + \frac{a_1}{8} (p_1^2 + q_1^2)^2 \right], \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

и мы уже доказали, что и при исключении координат y, z точки пересечения луча с преломляющей поверхностью не возникает никаких новых членов четвертого порядка.

Зависимость между обычными координатами и параметрами направления, с одной стороны, и переменными Зейделя, с другой стороны, линейна, — поэтому при переходе к этим переменным члены разложения сохраняют свой порядок. Так как мы знаем, что разложение начинается с членов четвертого порядка, то выражение (1) должно быть тождественно с S_4 .

Преобразуем выражение (1). Сначала несколько изменим обозначения. a_0 и a_1 означали в диоптрике Гаусса абсциссы предметной и фокальной плоскостей, отсчитываемые от вершины в направлении движения света. В дальнейшем, имея дело с системами, составленными из нескольких преломляющих поверхностей, мы будем обозначать эти поверхности индексами 1, 2, 3...; поэтому надо установить иное различие между предметом и изображением для одной плоскости. Удобно выбрать следующие обозначения:

$$a_0 = -s, \quad a_1 = -s', \quad (2)$$

при этом $s > 0$, когда предмет находится перед преломляющей поверхностью. Уравнение изображения § 24 (4) принимает такой вид:

$$ss'(n_0 - n_1) = r(sn_1 - s'n_0)$$

или же

$$n_0 \left(\frac{1}{s} + \frac{1}{r} \right) = n_1 \left(\frac{1}{s'} + \frac{1}{r} \right) = K. \quad (3)$$

Это выражение K называется *инвариантом Аббе для преломления на одной поверхности*.

Напишем этот инвариант для зрачков входа и выхода. Абсциссы их равны:

$$a_0 + M_0 = -t, \quad a_1 + M_1 = -t'; \quad (4)$$

так как они также соответствуют сопряженным точкам, то мы имеем:

$$n_0 \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{r} \right) = n_1 \left(\frac{1}{t'} + \frac{1}{r} \right) = L. \quad (5)$$

Вернемся опять к выражению (1) для $W_4 = S_4$ и напишем на основании уравнения (3) член:

$$\frac{n_0 - n_1}{8r^3} (y^2 + z^2)^2 = \frac{(y^2 + z^2)^2}{8r^2} \left(\frac{n_1}{s'} - \frac{n_0}{s} \right).$$

Тогда S_4 приводится к виду:

$$S_4 = \frac{1}{8n_1 s'} \left[n_1 \frac{y^2 + z^2}{r} + n_1 s' (p_1^2 + q_1^2) \right]^2 - \frac{1}{8n_0 s} \left[n_0 \frac{y^2 + z^2}{r} + n_0 s (p_0^2 + q_0^2) \right]^2 + \frac{b(n_0 - n_1)}{8r^3} (y^2 + z^2)^2. \quad (6)$$

В это же выражение можно в пределах выбранной точности просто подставить во все величины значение из диоптрики Гаусса, и в частности как угодно менять местами переменные Зейделя до и после преломления. В соответствии с этим, для того чтобы представить S_4 как функцию $y_0, z_0, \eta_1, \zeta_1$, мы воспользуемся вместо уравнений § 27 (7) следующими:

$$\left. \begin{aligned} p_0 &= \eta_1 \frac{\lambda_0}{M_0} - \frac{y_0}{n_0 \lambda_0}, & p_1 &= \eta_1 \frac{\lambda_1}{M_1} - \frac{y_0}{n_1 \lambda_1}, \\ q_0 &= \zeta_1 \frac{\lambda_0}{M_0} - \frac{z_0}{n_0 \lambda_0}, & q_1 &= \zeta_1 \frac{\lambda_1}{M_1} - \frac{z_0}{n_1 \lambda_1}. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Полезно сделать еще одно небольшое преобразование. Уравнения изображений § 27 (1) на основании § 24 (7) имеют в новых обозначениях такой вид:

$$\frac{l_1}{l_0} = \frac{f_0}{f_0 - s} = \frac{f_1 - s'}{f_1}.$$

Отсюда следует:

$$\frac{s}{f_0} = \frac{l_1 - l_0}{l_1}, \quad \frac{s'}{f_1} = \frac{l_0 - l_1}{l_0};$$

таким образом, согласно § 24 (5):

$$\frac{l_1}{l_0} = -\frac{s' f_0}{s f_1} = \frac{n_0 s'}{n_1 s}.$$

Точно так же для плоскостей зрачков:

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_0} = \frac{n_0 t'}{n_1 t}.$$

Положим теперь для краткости, имея в виду уравнение § 27 (5)

$$\left. \begin{aligned} H &= \frac{t}{\lambda_0 n_0} = \frac{t'}{\lambda_1 n_1}, \\ h &= \frac{\lambda_0 s}{M_0} = \frac{\lambda_1 s'}{M_1}. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Затем, из (7) следует:

$$\left. \begin{aligned} p_0 &= \frac{\eta_1 h}{s} - \frac{y_0 H}{t}, & p_1 &= \frac{\eta_1 h}{s'} - \frac{y_0 H}{t'}, \\ q_0 &= \frac{\zeta_1 h}{s} - \frac{z_0 H}{t}, & q_1 &= \frac{\zeta_1 h}{s'} - \frac{z_0 H}{t'}. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Исключим сначала координаты y и z точки пересечения луча с преломляющей поверхностью, подставив выражение (9) в § 23 (9). Принимая во внимание (3) и (5), получим:

$$y = h\eta_1 - Hy_0, \quad z = h\zeta_1 - Hz_0. \quad (10)$$

Введя инварианты вращения § 29 (1):

$$R = y_0^2 + z_0^2, \quad \rho = \eta_1^2 + \zeta_1^2, \quad x = y_0 \eta_1 + z_0 \zeta_1,$$

получим:

$$y^2 + z^2 = H^2 R - 2Hhx + h^2 \rho$$

и, воспользовавшись (3) и (5),

$$n_0 \left[\frac{y^2 + z^2}{r} + s(p_0^2 + q_0^2) \right] = H^2 R \left[L - (K - L) \frac{s}{t} \right] + h^2 \rho K - 2HhxL,$$

$$n_1 \left[\frac{y^2 + z^2}{r} + s'(p_1^2 + q_1^2) \right] = H^2 R \left[L - (K - L) \frac{s'}{t'} \right] + h^2 \rho K - 2HhxL.$$

Подставив это выражение в (6), мы получим искомое выражение:

$$\left. \begin{aligned} S_4 = \frac{1}{8} R^2 H^4 \left[\frac{b}{r^3} (n_0 - n_1) + L^2 \left(\frac{1}{n_1 s'} - \frac{1}{n_0 s} \right) - \right. \\ \left. - 2L(K - L) \left(\frac{1}{n_1 t'} - \frac{1}{n_0 t} \right) + (K - L)^2 \left(\frac{s'}{n_1 t'^2} - \frac{s}{n_0 t^2} \right) \right] + \\ + \frac{1}{8} \rho^2 h^4 \left[\frac{b}{r^3} (n_0 - n_1) + K^2 \left(\frac{1}{n_1 s'} - \frac{1}{n_0 s} \right) \right] + \\ + \frac{1}{2} x^2 H^2 h^2 \left[\frac{b}{r^3} (n_0 - n_1) + L^2 \left(\frac{1}{n_1 s'} - \frac{1}{n_0 s} \right) \right] + \\ + \frac{1}{4} K \rho H^2 h^2 \left[\frac{b}{r^3} (n_0 - n_1) + KL \left(\frac{1}{n_1 s'} - \frac{1}{n_0 s} \right) - \right. \\ \left. - K(K - L) \left(\frac{1}{n_1 t'} - \frac{1}{n_0 t} \right) \right] - \frac{1}{2} Rx H^3 h \left[\frac{b}{r^3} (n_0 - n_1) + \right. \\ \left. + L^2 \left(\frac{1}{n_1 s'} - \frac{1}{n_0 s} \right) - L(K - L) \left(\frac{1}{n_1 t'} - \frac{1}{n_0 t} \right) \right] - \\ \left. - \frac{1}{2} \rho x Hh^3 \left[\frac{b}{r^3} (n_0 - n_1) + KL \left(\frac{1}{n_1 s'} - \frac{1}{n_0 s} \right) \right] \right]. \quad (11) \end{aligned}$$

этим самым мы определили коэффициенты $A, B \dots F$ выражения § 29 (3) эйконала четвертого порядка для одной преломляющей поверхности. Мы можем теперь написать выражение с ошибкой третьего порядка для любой системы преломляющих поверхностей. Будем обозначать все величины, относящиеся к i -той поверхности индексом i , где i принимает значения, начиная с 1. Показатель преломления в предметном пространстве пусть будет n_0 , а за i -той преломляющей поверхностью равен n_i . Расстояния между вершинами пусть будут d_1, d_2, \dots , так что d_i означает расстояние вершины $i+1$ -ой поверхности до вершины i -той. Так как изображение в i -той поверхности является предметом для $i+1$ -ой, то, очевидно:

$$d_i = s_{i+1} - s'_i = t_{i+1} - t'_i. \quad (12)$$

Если задано расстояние предмета и зрачка входа от первой вершины s_1, t_1 , то по разложению в ряд можно вычислить все s_i, t_i . Для этого надо, очевидно, исследовать по правилам диоптрики Гаусса ход луча, выходящего из середины предмета, и луча, выходящего из середины зрачка входа. Кроме уравнений (12), надо еще воспользоваться соотношениями (3), (5):

$$\left. \begin{aligned} n_{i-1} \left(\frac{1}{s_i} + \frac{1}{r_i} \right) &= n_i \left(\frac{1}{s'_i} + \frac{1}{r_i} \right) = K_i, \\ n_{i-1} \left(\frac{1}{t_i} + \frac{1}{r_i} \right) &= n_i \left(\frac{1}{t'_i} + \frac{1}{r_i} \right) = L_i. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Из них мы находим из s_1, t_1 сначала s'_1, t'_1 , затем из (12) получаем s_2 и t_2 и т. д. В то же время уравнения (13) дают нам инварианты K_i, L_i , входящие в уравнения ошибок. Величины H_i, h_i можно затем определить из (8). Положим, что произвольная до сих пор длина в плоскости зрачка входа $\lambda_0 = 1$; тогда из уравнения (8) мы получим, подставив $M_i = s'_i - t'_i = s_{i+1} - t_{i+1}$:

$$\left. \begin{aligned} H_1 &= \frac{t_1}{n_0}, & h_1 &= \frac{s_1}{s_1 - t_1}, \\ \frac{H_{i+1}}{H_i} &= \frac{t_{i+1}}{t'_i}, & \frac{h_{i+1}}{h_i} &= \frac{s_{i+1}}{s'_i}, \\ H_i h_i &= \frac{s_i t_i}{n_{i+1}(s_i - t_i)}. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Теперь по правилу аддитивности, выведенному в предыдущем параграфе, мы получаем из (11):

$$\left. \begin{aligned}
 B &= \frac{1}{2} \sum_i h_i^4 \left[\frac{b_i}{r_i^3} (n_i - n_{i-1}) + K_i^2 \left(\frac{1}{n_{i-1} s_i} - \frac{1}{n_i s_i'} \right) \right], \\
 C &= \frac{1}{2} \sum_i H_i^2 h_i^2 \left[\frac{b_i}{r_i^3} (n_i - n_{i-1}) + L_i^2 \left(\frac{1}{n_{i-1} s_i} - \frac{1}{n_i s_i'} \right) \right], \\
 D &= \frac{1}{2} \sum_i H_i^2 h_i^2 \left[\frac{b_i}{r_i^3} (n_i - n_{i-1}) + K_i L_i \left(\frac{1}{n_{i-1} s_i} - \frac{1}{n_i s_i'} \right) - \right. \\
 &\quad \left. - K_i (K_i - L_i) \left(\frac{1}{n_{i-1} t_i} - \frac{1}{n_i t_i'} \right) \right], \\
 E &= \frac{1}{2} \sum_i H_i^3 h_i \left[\frac{b_i}{r_i^3} (n_i - n_{i-1}) + L_i^2 \left(\frac{1}{n_{i-1} s_i} - \frac{1}{n_i s_i'} \right) - \right. \\
 &\quad \left. - L_i (K_i - L_i) \left(\frac{1}{n_{i-1} t_i} - \frac{1}{n_i t_i'} \right) \right], \\
 F &= \frac{1}{2} \sum_i H_i h_i^3 \left[\frac{b_i}{r_i^3} (n_i - n_{i-1}) + K_i L_i \left(\frac{1}{n_{i-1} s_i} - \frac{1}{n_i s_i'} \right) \right].
 \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Это формулы Зейделя для ошибок третьего порядка произвольной центрированной системы линз¹.

Мы выведем сейчас из них замечательное следствие — теорему Петцваля относительно астигматизма и искривления фокальной поверхности. Из (15) мы получаем:

$$C - D = \frac{1}{2} \sum_i H_i^2 h_i^2 (L_i - K_i) \left[L_i \left(\frac{1}{n_{i-1} s_i} - \frac{1}{n_i s_i'} \right) - K_i \left(\frac{1}{n_{i-1} t_i} - \frac{1}{n_i t_i'} \right) \right].$$

Из (13) следует:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{n_{i-1} s_i} - \frac{1}{n_i s_i'} &= K_i \left(\frac{1}{n_{i-1}^2} - \frac{1}{n_i^2} \right) - \frac{1}{r_i} \left(\frac{1}{n_{i-1}} - \frac{1}{n_i} \right), \\
 \frac{1}{n_{i-1} t_i} - \frac{1}{n_i t_i'} &= L_i \left(\frac{1}{n_{i-1}^2} - \frac{1}{n_i^2} \right) - \frac{1}{r_i} \left(\frac{1}{n_{i-1}} - \frac{1}{n_i} \right)
 \end{aligned}$$

и при этом:

$$L_i \left(\frac{1}{n_{i-1} s_i} - \frac{1}{n_i s_i'} \right) - K_i \left(\frac{1}{n_{i-1} t_i} - \frac{1}{n_i t_i'} \right) = \frac{K_i - L_i}{r_i} \left(\frac{1}{n_{i-1}} - \frac{1}{n_i} \right).$$

¹ Зейдель не учитывает влияния деформаций b ; оно было добавлено позднейшими авторами (ср. v. Rohr: Die Bilderzeugung in optischen Instrumenten, стр. 338. Berlin, 1904 г.).

Следовательно:

$$C - D = \frac{1}{2} \sum_i H_i^2 h_i^2 (L_i - K_i)^2 \left(\frac{1}{n_i} - \frac{1}{n_{i-1}} \right) \frac{1}{r_i}.$$

С другой стороны, из (13) следует также:

$$K_i - L_i = n_{i-1} \frac{t_i - s_i}{t_i s_i};$$

следовательно, принимая во внимание последнее уравнение (14):

$$(L_i - K_i) H_i h_i = 1. \quad (16)$$

При этом получается:

$$C - D = \frac{1}{2} \sum_i \frac{1}{r_i} \left(\frac{1}{n_i} - \frac{1}{n_{i-1}} \right). \quad (17)$$

Вспомним теперь, что C и D определяют сагиттальный и тангенциальный изгиб фокальной поверхности. Из § 29 (10) мы получим, приняв показатель преломления последней среды (n_i в этой формуле) равным единице:

$$4C = \frac{1}{\rho_t} - \frac{1}{\rho_s}, \quad 4D = \frac{2}{\rho_s}.$$

Тогда из (16) следует:

$$\frac{1}{\rho_t} - \frac{3}{\rho_s} = 2 \sum_i \frac{1}{r_i} \left(\frac{1}{n_i} - \frac{1}{n_{i-1}} \right). \quad (18)$$

Таким образом мы получаем зависимость между радиусами кривизны обеих фокальных поверхностей, куда входят только радиусы, но не расстояния преломляющих плоскостей. Если система свободна от абберации, комы и астигматизма, так что на поверхности, имеющей радиус кривизны $\rho_s = \rho_t = \rho$ получается четкое изображение, то значение ρ дает непосредственно выражение:

$$\frac{1}{\rho} = - \sum_i \frac{1}{r_i} \left(\frac{1}{n_{i-1}} - \frac{1}{n_i} \right). \quad (19)$$

Это предложение называется *теоремой Петцваля*.

Условием Петцваля называется требование:

$$\sum_i \frac{1}{r_i} \left(\frac{1}{n_{i-1}} - \frac{1}{n_i} \right) = 0, \quad (20)$$

которое должно всегда выполняться для оптической системы, не имеющей никаких ошибок третьего порядка.

Устранение всех или некоторых ошибок третьего порядка или по крайней мере уменьшение их сводится с помощью формул (15) к чисто алгебраической задаче. Мы поясним это на простом примере и затем вкратце изложим полученные этим путем результаты.

§ 32. ПРИМЕР. ТОНКАЯ ЛИНЗА*

Рассмотрим тонкую линзу с показателем преломления n , находящуюся в воздухе (или в вакууме); имеем:

$$n_0 = n_2 = 1, \quad n_1 = n. \quad (1)$$

Так как мы пренебрегаем толщиной линзы d , то из § 31 (12) вытекает:

$$s_2 = s_1', \quad t_2 = t_1', \quad (2)$$

и дальше из § 31 (13):

$$\left. \begin{aligned} K_1 &= \frac{1}{s_1} + \frac{1}{r_1} = n \left(\frac{1}{s_1'} + \frac{1}{r_1} \right), \\ K_2 &= n \left(\frac{1}{s_2} + \frac{1}{r_2} \right) = \frac{1}{s_2'} + \frac{1}{r_2} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

и

$$\left. \begin{aligned} L_1 &= \frac{1}{t_1} + \frac{1}{r_1} = n \left(\frac{1}{t_1'} + \frac{1}{r_1} \right), \\ L_2 &= n \left(\frac{1}{t_2} + \frac{1}{r_2} \right) = \frac{1}{t_2'} + \frac{1}{r_2}; \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

затем, из § 31 (14) в силу (1) и (2):

$$\left. \begin{aligned} h_1 &= h_2 = \frac{s_1}{s_1 - t_1} = h, \\ H_1 &= H_2 = t_1 = kh. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Введем обратное фокусное расстояние [§ 24 (25)]:

$$\varphi = \frac{1}{f} = (n-1) \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \quad (6)$$

и оптический прогиб линзы

$$\sigma = (n-1) \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right). \quad (7)$$

Из (3) следует:

$$\frac{1}{r_1} (1-n) = \frac{n}{s_1'} - \frac{1}{s_1}, \quad \frac{1}{r_2} (1-n) = \frac{n}{s_2} - \frac{1}{s_2'};$$

в силу уравнения (2)

$$\frac{1}{s_1} - \frac{1}{s_2'} = \varphi,$$

что мы напомним в следующей форме:

$$\frac{1}{s_1} - \frac{\varphi}{2} = \frac{1}{s_2'} + \frac{\varphi}{2} = R. \quad (8)$$

Эта величина играет для всей линзы ту же роль, что K_1 , K_2 для отдельных поверхностей и поэтому называется *инвариантом Аббе для линзы*.

Как мы сейчас увидели, деформации b_1 , b_2 , если они имеют место, всегда связаны соотношением:

$$\beta = (n-1) \left(\frac{b_1}{r_1^3} - \frac{b_2}{r_2^3} \right); \quad (9)$$

эта величина называется *деформацией линзы*.

Примем за параметры линзы φ , σ , β и определим положение предметной плоскости, задав R . Выражая все величины через эти параметры, мы получим прежде всего из (3):

$$K_1 = R + \frac{\sigma + n\varphi}{2(n-1)}, \quad K_2 = R + \frac{\sigma - n\varphi}{2(n-1)}. \quad (10)$$

Из § 31 (16) и 32 (5) получим:

$$L_1 = K_1 + \frac{1}{kh^2}, \quad L_2 = K_2 + \frac{1}{kh^2}. \quad (11)$$

Наконец, напомним выражения, входящие в формулы Зейделя:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{s_1} - \frac{1}{ns_1'} &= R \frac{n^2-1}{n^2} + \frac{\sigma}{2n^2} + \frac{\varphi}{2}, \\ \frac{1}{ns_2} - \frac{1}{s_2'} &= -R \frac{n^2-1}{n^2} - \frac{\sigma}{2n^2} + \frac{\varphi}{2} \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

и

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{t_1} - \frac{1}{nt_1'} &= \frac{1}{s_1} - \frac{1}{ns_1'} + \frac{1}{h^2k} \left(1 - \frac{1}{n^2} \right) = \\ &= \left(R + \frac{1}{h^2k} \right) \frac{n^2-1}{n^2} + \frac{\sigma}{2n^2} + \frac{\varphi}{2}, \\ \frac{1}{nt_2} - \frac{1}{t_2'} &= \frac{1}{ns_2} - \frac{1}{s_2'} + \frac{1}{h^2k} \left(\frac{1}{n^2} - 1 \right) = \\ &= - \left(R + \frac{1}{h^2k} \right) \frac{n^2-1}{n^2} - \frac{\sigma}{2n^2} + \frac{\varphi}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Подставим это в формулы Зейделя § 31 (15):

$$\left. \begin{aligned} B &= h^4 P, \\ F &= h^4 kP + h^2 Q, \\ C &= h^4 k^2 P + 2h^2 kQ + \frac{\varphi}{2}, \\ D &= h^4 k^2 P + 2h^2 kQ + \frac{n+1}{n} \cdot \frac{\varphi}{2}, \\ E &= h^4 k^3 P + 3h^2 k^2 Q + k \frac{3n+1}{n} \cdot \frac{\varphi}{2}, \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

причем введем обозначения:

$$\left. \begin{aligned} P &= \beta + \frac{n^2}{8(n-1)^2} \varphi^3 - \frac{n}{2(n+2)} R^2 \varphi + \\ &+ \frac{\varphi}{2n(n+2)} \left[\frac{\sigma}{2} \cdot \frac{n+2}{n-1} + 2R(n+1) \right]^2, \\ Q &= \frac{\varphi}{2n} \left[\frac{\sigma}{2} \cdot \frac{n+1}{n-1} + R(2n+1) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Мы разберем детально эти формулы только для случая линзы без диафрагмы. Положим $t_1=0$; следовательно, согласно (5):

$$h=1, \quad k=0;$$

тогда

$$\left. \begin{aligned} B &= P, \\ F &= Q, \\ \frac{1}{2}(C+D) &= \frac{\varphi}{4} \cdot \frac{2n+1}{n}, \\ \frac{1}{2}(C-D) &= -\frac{\varphi}{4} \cdot \frac{1}{n}, \\ E &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Таким образом введенные нами величины P и Q выражают сферическую aberrацию и кому линзы без диафрагмы.

Мы видим прежде всего, что у тонких линз без диафрагмы дисторсия третьего порядка всегда равна нулю. Зато астигматизм и изгиб фокальной поверхности нельзя уменьшить.

Теперь зададимся вопросом: когда тонкая линза имеет апланатическую пару точек, определяемую условием синусов ($B=0$,

$F=0$)? Для того чтобы кома исчезла, Q должно быть равно 0 согласно (16); следовательно, согласно уравнению (15)

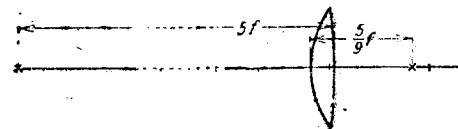
$$\frac{\sigma}{2} \cdot \frac{n+1}{n-1} + R(2n+1) = 0; \quad (17)$$

отсюда согласно уравнению (8) следует:

$$\frac{1}{s_1} = \frac{\varphi}{2} + R = \frac{\varphi}{2} - \frac{\sigma}{2} \cdot \frac{n+1}{(n-1)(2n+1)}. \quad (18)$$

Сферическая aberrация B или P согласно этой формуле целиком определяется величиной R ; таким образом не всякая линза имеет апланатическую пару точек. Но все же при заданных φ и σ можно подбором деформаций β обратить в нуль P .

Если, наоборот, заданы расстояние предмета s_1 и фокусное расстояние $\frac{1}{\varphi}$, то можно



Фиг. 52. Свободная от комы тонкая линза.

прежде всего уничтожить кому, подобрав радиусы кривизны r_1, r_2 ; действительно, из (18) и (6) следует:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{r_1} &= \varphi \cdot \frac{n^2}{n^2-1} - \frac{1}{s_1} \cdot \frac{2n+1}{n+1}, \\ \frac{1}{r_2} &= \varphi \cdot \frac{n^2-n-1}{n^2-1} - \frac{1}{s_1} \cdot \frac{2n+1}{n+1}. \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

Для бесконечно удаленного предмета ($s_1 = \infty$) и $n=1,5$ мы имеем при $\varphi = \frac{1}{f}$:

$$r_1 = -\frac{5}{9}f, \quad r_2 = -5f. \quad (20)$$

Вид тонкой линзы, свободной от комы, показан на фиг. 52.

Выбором деформации β можно уничтожить сферическую aberrацию B (или P). Для бесконечно удаленного предмета, когда согласно (8) $R = -\frac{\varphi}{2}$ и, следовательно, в силу (17) $\sigma =$

$= \frac{(2n+1)(n-1)}{n+1} \cdot \varphi$, мы получаем согласно (15):

$$\begin{aligned} \beta &= -\varphi^3 \left\{ \frac{n^2}{8(n-1)^2} - \frac{n}{8(n+2)} + \right. \\ &+ \left. \frac{1}{2n(n+2)} \left[\frac{1}{2} \frac{(2n+1)(n+2)}{n+1} - (n+1) \right]^2 \right\}, \\ \beta &= -\varphi^3 \cdot \frac{4n^2+n-2}{8(n-1)^2(n+2)}; \end{aligned} \quad (21)$$

следовательно, для $n=1,5$

$$\beta = -\frac{17}{14} \varphi^3, \quad (22)$$

откуда согласно (9) и (20):

$$729 b_1 + b_2 = 304. \quad (23)$$

Это уравнение удовлетворяется, если приблизительно $b_1 = b_2 = 0,417$.

Вместо того чтобы сначала уничтожить кому, можно исследовать, насколько можно уменьшить сферическую aberrацию. Оказывается, что при положительном фокусном расстоянии ее можно уничтожить только в узком интервале расстояния предмета (при $n=1,5$ между $0,36f$ перед линзой и $0,44f$ за линзой); при всяком другом положении предметов имеется остаточная aberrация.

Чтобы уменьшить искривление изображения, нужно подобрать подходящую диафрагму, наиболее благоприятное положение которой определяется формулой (14). Оказывается, что для линзы с положительным фокусным расстоянием и показателем преломления $n=1,5$ искривление поля может быть устранено только тогда, когда предмет находится между полным фокусным расстоянием перед линзой и половиной фокусного расстояния за линзой; во всех других случаях имеется остаточное искривление.

Для систем линз расчеты соответственно усложняются. Разумеется, здесь важнее всего устранить хроматическую aberrацию. Это сравнительно легко сделать для ахроматического объектива подзорной трубы, склеенного из двух линз. Оказывается, что для него можно устранить все ошибки, кроме искривления поля и астигматизма; поэтому он употребляется только для малого поля зрения (при отношении отверстия бленды к фокусному расстоянию 1:10 и поле зрения не свыше 3°). Шварцшильд исследовал систему, составленную из двух тонких систем, состоящих каждая из двух линз, и доказал, что в основном получаются типы, найденные прикладной оптикой и оправдавшие себя на практике. Из трех разделенных единичных линз можно также построить систему, пригодную для астрофотографических целей; Шварцшильд теоретически нашел новый тип объектива с более высокими качествами, чем у ранее известных типов. Он также успешно применил свой метод к системам зеркал.

Мы не будем останавливаться на этих частностях, так как приведенный простой пример достаточно выясняет метод.

Дальнейшее развитие теории шло различными путями. Она была применена к вычислению ошибок высших порядков для центрированных систем; так, Кольшюттер¹ вычислил ошибки

¹ A. Kohlschütter, Inaug.—Diss. Göttingen, 1908.

пятого порядка по методу Шварцшильда. После этого требование осевой симметрии было отброшено. В этом направлении идут обширные исследования шведского окулиста и математика Альвара Гульстранда (1862—1930)¹, который нашел, что в человеческом глазу не всегда имеет место осевая симметрия.

Гульстранд отказался от метода эйконала и вместо этого чисто геометрически исследовал путь светового пучка. Эти вычисления чрезвычайно сложны и обширны, и удивительно, что Гульстранд пришел к таким простым и важным результатам. Повидимому, он сознательно отказался от вариационной теории (эйконала), так как считал ее применимой только к центрированным системам. Однако в новейшее время плодотворность вариационного метода была снова оценена, особенно в работах М. Герцбергера, объединенных им в одно руководство².

В практике конструирования оптических приборов теорией ошибок пользуются лишь в ограниченном масштабе. Большей частью предпочитают вычислить несколько лучей, чтобы получить картину aberrаций, а затем стараются уменьшить их путем небольших изменений преломляющихся поверхностей. Но изложение этих методов не входит в задачу этой книги, которая посвящена исключительно теоретическим проблемам оптики (примечание 9).

§ 33. ОПТИЧЕСКИЕ ПРИБОРЫ

Из более или менее хорошо корригированных линз и систем линз составляются оптические приборы для самых разнообразных целей³. Прежде чем дать краткий обзор важнейших характеристик этих приборов, мы должны рассмотреть *глаз*, который также принадлежит к оптическим приборам (*camera obscura*).

I. Глаз. Оптический аппарат глаза представляет собой сложный ряд преломляющих тел (роговая оболочка, хрусталик, стекловидное тело и т. д.) и бленд (зрачок, радужная оболочка); изображение получается на сетчатке, находящейся на задней стенке глаза и содержащей чувствительные концы нервов. На физиологических деталях мы не будем останавливаться, а ограничимся чисто геометрически оптическими соотношениями⁴.

¹ Из многочисленных работ А. Гульстранда мы берем только две:

1) Законы оптических систем второго и третьего порядка (Kgl. Svenska Vetenskaps akad. Handt, т. 63, № 13, Stockholm, 1924 и

2) Популярный обзор „Einiges über optische Bilder [Naturwiss. 14 Jg] (1926), стр. 653. Исчерпывающую библиографию можно найти в цитированной работе Czapski и Eppenstein.

² M. Herzberger, Strahlenoptik. Berlin, 1931. В этой книге Шварцшильд не упоминается, так как в качестве астронома он не принадлежал к числу цеховых оптиков.

³ См., например, M. v. Rohr, Die Bilderzeugung in optischen Instrumenten. Berlin, 1904; A. König, Geometrische Optik, Leipzig, 1929.

⁴ Современная теория глаза была разработана, главным образом, Гульстрандом. См. ее изложение в 3-м издании учебника физиологической оптики Гельмгольца.

Показатели преломления различных линз глаза сравнительно мало отличаются друг от друга. Большая разница имеется лишь на поверхности между воздухом ($n=1$) и роговой оболочкой ($n=1,376$). Это важно для световых потерь, происходящих, главным образом, от отражения при входе света в роговую оболочку. Из формулы § 11 (6) находим отражательную способность для данного значения n :

$$r = \left(\frac{n-1}{n+1} \right)^2 = 0,025.$$

Использование (потери 2,5%) здесь лучше, чем даже в самом простом ландшафтном объективе, у которого, как мы дальше увидим, теряется около 8%.

Для упрощения исследований со времен Томаса Юнга пользуются моделями глаза, упрощенно воспроизводящими размеры и преломляющие свойства глаза.

Глаз обладает способностью *аккомодации*, т. е. способностью фокусироваться на различные удаления наблюдаемого предмета. Это происходит путем деформации преломляющей системы с помощью мускулов. Наименьшее расстояние, на котором предмет отчетливо изображается в нормальном глазу — так называемое расстояние *наилучшего зрения* — равно приблизительно 25 см. Точное оптическое исследование хода лучей (оптические ошибки) произведено Гульстрандом, который учел также влияние движения глаз.

Ощущение расстояния основано отчасти на (бессознательном) ощущении движения глаз и тела, отчасти на *зрении двумя глазами*; схождение обоих глаз при фиксации предметов дает ощущение отдаленности. При помощи *стереоскопической трубы* (мы опишем ее дальше) расстояние между глазами искусственно увеличивается, отчего усиливается способность определять расстояние. Нанесение в поле зрения значков с цифрами, которые видны на различных расстояниях, превращает этот прибор в *дальномер*.

На *бинокулярном* зрении основан *стереоскоп*. Берут два фотографических снимка одного и того же предмета, сделанных из различных точек (расстояние между ними приблизительно равно расстоянию между глазами), и рассматривают одновременно с помощью подходящих линз. При этом получается впечатление объема. *Стереоскопический аппарат* Пульфриха представляет собою стереоскоп, снабженный движущимися отметками, служащими для измерения расстояний.

Близорукость и дальнозоркость глаза — это такие глаза, аккомодация которых не в состоянии дать четкое изображение на сетчатке. Для улучшения аккомодации служат:

II. *Очки*, т. е. простые линзы, работающие с хрусталиками глаз, как одна оптическая система. Для вычисления служат формулы § 24 (26):

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{l}{f_1 f_2}$$

для комбинации двух линз на расстоянии l . Так как в этой формуле обратные фокусные расстояния складываются, то на практике пользуются вместо фокусных расстояний их обратными величинами и принимают за единицу мощности линзы *диоптрию*, соответствующую фокусному расстоянию 1 м (так, 2 диоптрии означают $f=1/2$ м).

Случается, что хрусталик асимметричен относительно оси. Тогда глаз *астигматичен*. Для корригирования служат очки с цилиндрическими линзами.

Для нормального глаза при рассматривании предметов, находящихся далеко от глазной оси, изображение также всегда астигматично. Ошибки, возникающие по этой причине при движении глаз, устраняются при помощи новой конструкции очков (основанной на исследованиях Гульстранда).

Из технических инструментов больше всего похожа на глаз камера-обскура.

III. *Камера-обскура* применяется в настоящее время, главным образом, в качестве *фотографического аппарата*.

Фотографический объектив представляет собой систему линз, служащую для изображения более или менее обширных поверхностей и соответственно корригированную. Для снимания пейзажа достаточно одной простой линзы (или даже просто *камеры с отверстием*). Вычислим потери света в этом объективе. Входящий свет дважды прошел границу воздух — стекло, следовательно, согласно § 11 (6) он ослаблен в $[4n/(n+1)^2]^2$ раз. При $n = \frac{3}{2}$ (стекло) коэффициент ослабления равен 0,92; таким образом

потери составляют 8%, как уже упоминалось выше. В сложных системах с большим числом линз потери соответственно возрастают.

IV. *Прожекторы* обычно конструируются с параболическими вогнутыми зеркалами. Для маяков применяются также системы кольцеобразных линз, превращающих расходящиеся широкие пучки света в почти параллельные. [Френель 1820].

V. *Проекторные аппараты и эпидиаскопы* мы упоминаем только для полноты.

VI. *Простая лупа* служит для увеличения угла зрения при прямом зрении. Она состоит из простой линзы или из ахроматической комбинации линз, корригирующей одновременно и сферическую aberrацию. Лупа сама по себе дает мнимое изображение предмета, находящегося меньше чем на фокусном расстоянии от нее. Если придвинуть глаз вплотную к лупе, на сетчатке получится действительное увеличенное изображение. Увеличение определяется следующими соображениями. Как мы видим, расстояние наилучшего зрения равно приблизительно 25 см. Если расстояние ξ предмета меньше этой величины, глаз не может уже аккомодироваться. Если перед глазом поставить лупу, то наиболее выгодное увеличение получится в том случае, когда предмет будет казаться находящимся на расстоянии наи-

лучшего зрения $\xi' = 25$ см. Длина предмета l соответствует длине L изображения. Фиг. 53 дает нам:

$$\frac{L}{l} = \frac{\xi'}{\xi}.$$

С другой стороны, согласно § 24 (20)

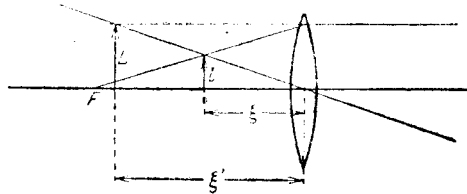
$$\frac{1}{\xi} - \frac{1}{\xi'} = \frac{1}{|f|},$$

откуда

$$\frac{L}{l} = 1 + \frac{\xi'}{|f|} = 1 + \frac{25}{|f|},$$

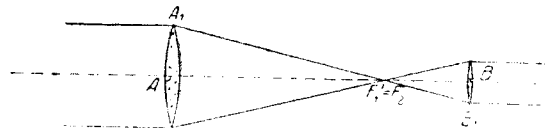
где фокусное расстояние f должно быть выражено в сантиметрах.

VII. Сложная зрительная труба состоит из двух линз или систем линз — объектива и окуляра. Объектив дает действительное изображение удаленного предмета вблизи фокальной плоскости. Это изображение рассматривается через окуляр, действующий как лупа. Изображение получается при помощи узкого пучка близких к оси лучей и охватывает относительно небольшое поле. Зрачком входа служит обычно сама оправа объектива, которая делается по возможности



Фиг. 53. Увеличение в лупе.

большой для получения большей силы света (отчего усиливается и разрешающая способность, о которой мы скажем дальше). Зрачок выхода определяется зрачком глаза. Объектив ахроматически и сферически корригирован. Вместо линзы в астрономическом телескопе часто применяется вогнутое зеркало с параболической поверхностью, которая служит для устранения сферической аберрации. Укажем наиболее важные виды труб.



Фиг. 54. Телескопическая система из двух тонких собирающих линз.

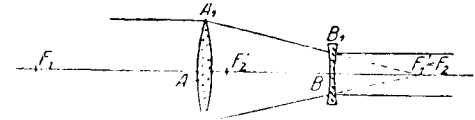
$$AF'_1 = f_1; BF'_1 = f_2.$$

A. Астрономическая или кеплерова зрительная труба. Обычно она применяется для наблюдения отдаленных предметов (фиг. 54). Объективом и окуляром служат собирающие линзы. Задний фокус объектива совпадает с передним фокусом окуляра. Изображение телескопическое [§ 20 (22)] при $c=0$. Согласно формуле (25) того же параграфа угловое увеличение

$$\frac{\tan u'}{\tan u} = \frac{f_1}{f_2}.$$

Астрономическая труба дает обратное изображение. Его можно выпрямить при помощи дополнительных линз.

B. Голландская или галилеева труба. В ней объективом служит также собирающая линза, а окуляром — рассеивающая линза, которая помещается на расстоянии меньше фокусного от объектива. Тогда глаз, смотрящий в окуляр, видит прямое увеличенное изображение (фиг. 55). При этом не получается промежуточного прямого изображения. Для практического применения — для наблюдения земных предметов эта труба неудобна, так как она очень длинна. Этот недостаток может быть устранен при помощи призматической зрительной трубы.



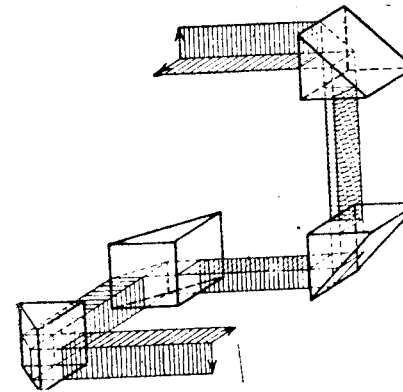
Фиг. 55. Телескопическая система из тонкой собирающей линзы A и тонкой рассеивающей линзы B.

$$AF'_1 = f'_1; AF_1 = f$$

$$BF_2 = f_2; BF'_2 = f'_2$$

C. Призматическая зрительная труба. В ней изображение оборачивается при помощи отражающих призм.

Вращение вокруг оси аналитически выражается ортогональным преобразованием прямоугольных координат с детерминантом $+1$, а отражение от плоскости выражается тем же преобразованием, но с детерминантом -1 . Таким образом два последовательных отражения эквивалентны одному вращению, причем прямая пересечения отражающих поверхностей, очевидно,



Фиг. 56. Система обращающих призм Порро.

инвариантна (ось вращения). Рассмотрев точку на одной из отражающих поверхностей, мы увидим, что результирующий поворот равен 2ψ , где ψ — угол между отражающими поверхностями. Если отражающие поверхности взаимно перпендикулярны

$$\left(\psi = \frac{\pi}{2}\right), \text{ то в результате двух}$$

отражений точка оказывается повернутой на $\psi = \pi$. Зеркалами служат посеребренные поверхности прямоугольных трехгранных стеклянных призм (см. примечание 10). Если ход луча прямой, то требуется больше двух призм

(фиг. 56). Техническое выполнение бывает, в зависимости от цели, очень разнообразно.

Стереоскопические трубы этой конструкции дают возможность раздвигать объективы и получать благодаря этому стереоскопические изображения, о которых уже говорилось выше. В *раздвижных трубах* обе части могут вращаться друг относительно друга. Для упоминавшихся выше *стереоскопических дальномеров* обычно применяются обычные призматические зрительные трубы.

VIII. Микроскоп состоит также из объектива и окуляра. Так как он употребляется для наблюдения малых предметов, то объективом обычно служит очень маленькая короткофокусная линза, пропускающая широкие пучки. Действительное увеличенное изображение, даваемое объективом, рассматривается в лупу, служащую окуляром. Объектив должен быть прежде всего скорректирован относительно сферической аберрации, затем, должно быть возможно лучше выполнено условие синусов (уничтожение комы) и устранена хроматическая аберрация. В апохромате Аббе даже вторичные спектры ослаблены до незаметности благодаря тому, что в нем фокусные расстояния для трех цветов равны между собой. Все эти требования показывают, что объективы должны быть очень сложными системами линз. Апертура (угол входящего пучка) определяет не только яркость, но и разрешающую способность, о которой мы будем говорить ниже (глава IV, § 53). См. примечание 19 в конце книги.

Глава третья

ИНТЕРФЕРЕНЦИЯ

§ 34. ИНТЕРФЕРЕНЦИЯ ДВУХ ЛУЧЕЙ

Геометрическая оптика, как мы уже говорили, является лишь грубым приближением к строгим законам распространения света, которое происходит в форме волн (электромагнитных). Мы должны теперь перейти к рассмотрению явлений, в которых наблюдаются отклонения от геометрически построенного распределения света. При этом следует различать два случая.

1. При геометрическом рассмотрении распространения света часто встречается случай пересечения двух пучков конечной протяженности; это легко достигается с помощью комбинации зеркал, пластинок, призм и т. п. интерференционных приборов. В части пространства, заполненного обоими пучками, в действительности налагается два волновых движения, и надо ожидать, что при достаточно точном наблюдении можно будет обнаружить ослабление и усиление силы света, т. е. так называемую *интерференцию*. Для этого необходимо условие, чтобы места таких максимумов и минимумов были постоянны или по крайней мере менялись с такой скоростью, чтобы глаз был в состоянии их уловить. Если мы возьмем для получения пересекающихся пучков *различные* источники света, то для выполнения этого условия излучающие атомы или молекулы обоих источников должны иметь строго синхронные колебания. Понятно, в действительности этого не бывает. В каждой элементарной волне имеют место случайные, более или менее внезапные изменения амплитуды и фазы, причем настолько быстрые, что глаз не может следить за ними. Такие два световые пучка называются *некогерентными*. *Свет, способный интерферировать, или когерентный свет*, можно получить, только разделив каким-нибудь искусственным способом (путем применения диафрагмы, отражения, преломления) *один* луч на две части и заставив обе части налагаться друг на друга после того, как они пройдут различные пути. Длина этих путей должна быть такая, чтобы их разность была меньше длины элементарного ряда волн, излучаемого молекулой, так как иначе очевидно нарушается условие, что каждая элементарная волна интерферирует „сама с собой“. Лучи способные интерферировать, называются *когерентными*, а разность хода двух частей луча, еще способных интерферировать, является критерием когерентности источника.

Интерференционные приборы первоначально служили для доказательства волновой природы света, теперь же они приме-

няются для измерения длин волн, для спектроскопии и т. д. Мы опишем в первых параграфах этой главы наиболее употребительные методы.

2. Как мы видели в главе II, § 14, законы геометрического распространения оказываются неточными и для одного нерасщепленного луча. В определенных случаях — во-первых, на границе тени, во-вторых, в окрестности точки схождения лучей (фокуса и т. д.) — эти законы непригодны. В этих случаях мы говорим о *дифракционных явлениях*. Их практическое значение заключается в том, что они устанавливают абсолютную, зависящую от длины волны, границу применимости геометрической оптики и тем самым определяют разрешающую способность оптических приборов (см. § 53). В ближайшей главе мы подробно рассмотрим эти вопросы.

Мы измеряем *силу света* посредством потока энергии, перпендикулярного к рассматриваемой поверхности, т. е. для плоской волны согласно гл. I, § 3 (12), (13), (14):

$$J = |\vec{S}| = c_1 \overline{W} = \frac{c_1 \epsilon}{4\pi} \overline{\mathcal{E}^2}. \quad (1)$$

Обычно сравнивают силу света только в одной и той же среде. В этом случае в качестве силы света можно употреблять просто величину $\overline{\mathcal{E}^2}$. Здесь \mathcal{E} должно, конечно, считаться действительным числом, так как речь идет о вычислении квадрата. Если же одновременно пользуются формально удобными комплексными числами, то надо каждый раз перед умножением или возведением в степень отделять действительную часть. Следовательно, простую гармоническую волну мы представим согласно гл. I, § 7 (1) следующим образом:

$$\mathcal{E} = \Re(\mathcal{A}e^{i\tau}) = \frac{1}{2}(\mathcal{A}e^{i\tau} + \mathcal{A}^*e^{-i\tau}), \quad (2)$$

где \mathcal{A}^* — означает вектор, составляющие которого комплексно сопряжены с составляющими \mathcal{A} и где

$$\tau = 2\pi\nu t. \quad (3)$$

Для составляющей \mathcal{A} мы напомним:

$$\mathcal{A}_x = a_1 e^{i\alpha_1}, \quad \mathcal{A}_y = a_2 e^{i\alpha_2}, \quad \mathcal{A}_z = a_3 e^{i\alpha_3}; \quad (4)$$

при этом фазы заданы уравнениями:

$$\alpha_1 = -\frac{2\pi}{\lambda}r + \delta_1, \quad \alpha_2 = -\frac{2\pi}{\lambda}r + \delta_2, \quad \alpha_3 = -\frac{2\pi}{\lambda}r + \delta_3, \quad (5)$$

где λ — длина волны, а r — путь, пройденный волной. Мы должны, таким образом (иначе, чем прежде, в главе I, § 6 и § 7), выделить в фазах часть, одинаковую во всех трех составляющих и зависящую только от пути r ; остаточные члены $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ — фазовые постоянные, выражающие поляризационное состояние

волны. Положим для простоты, что при расщеплении волны фазовые постоянные не изменяются (или меняются на одну и ту же константу). Тогда

$$\mathcal{E}^2 = \frac{1}{4}(\mathcal{A}^2 e^{2i\tau} + \mathcal{A}^{*2} e^{-2i\tau} + 2\mathcal{A}\mathcal{A}^*),$$

и так как при усреднении на достаточно большом промежутке времени периодические функции исчезают, то мы имеем:

$$\overline{\mathcal{E}^2} = \frac{1}{2}\mathcal{A}\mathcal{A}^* = \frac{1}{2}|\mathcal{A}|^2 = \frac{1}{2}(|\mathcal{A}_x|^2 + |\mathcal{A}_y|^2 + |\mathcal{A}_z|^2) = \frac{1}{2}(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2). \quad (6)$$

Если две волны \mathcal{E}_1 и \mathcal{E}_2 , образовавшиеся при расщеплении одной волны, налагаются друг на друга в некоторой части пространства, то результирующее электрическое поле

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 \quad (7)$$

и

$$\mathcal{E}^2 = \mathcal{E}_1^2 + \mathcal{E}_2^2 + 2\mathcal{E}_1\mathcal{E}_2.$$

Для силы света мы получаем, таким образом, выражение:

$$J = J_1 + J_2 + I, \quad (8)$$

где

$$I = 2\mathcal{E}_1\mathcal{E}_2 \quad (9)$$

есть так называемый *интерференционный член*. Обозначив комплексные амплитуды волн \mathcal{E}_1 и \mathcal{E}_2 соответственно через \mathcal{A} и \mathcal{B} и положив опять:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_x &= a_1 e^{i\alpha_1}, \dots, \\ \mathcal{B}_x &= b_1 e^{i\beta_1}, \dots, \end{aligned} \quad (10)$$

мы имеем для α данные выше формулы (5), а для β — соответствующие формулы с теми же значениями $\delta_1, \delta_2, \delta_3$, но с другим r , если обе части луча прошли различные длины пути. Таким образом

$$\alpha_1 - \beta_1 = \alpha_2 - \beta_2 = \alpha_3 - \beta_3 = \frac{2\pi}{\lambda}(r_2 - r_1) = \delta, \quad (11)$$

так как здесь $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ выпадают. $\Delta = r_2 - r_1$ называется *разностью хода*, а δ *разностью фаз* обеих волн. Тогда

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_1\mathcal{E}_2 &= \frac{1}{4}(\mathcal{A}e^{i\tau} + \mathcal{A}^*e^{-i\tau})(\mathcal{B}e^{i\tau} + \mathcal{B}^*e^{-i\tau}) = \\ &= \frac{1}{4}(\mathcal{A}\mathcal{B}e^{2i\tau} + \mathcal{A}^*\mathcal{B}^*e^{-2i\tau} + \mathcal{A}\mathcal{B}^* + \mathcal{A}^*\mathcal{B}), \end{aligned}$$

откуда

$$I = 2\overline{\mathcal{E}_1 \mathcal{E}_2} = \frac{1}{2} (\mathcal{A}\mathcal{B}^* + \mathcal{A}^*\mathcal{B}) =$$

$$= a_1 b_1 \cos(\alpha_1 - \beta_1) + a_2 b_2 \cos(\alpha_2 - \beta_2) + a_3 b_3 \cos(\alpha_3 - \beta_3) =$$

$$= (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3) \cos \delta. \quad (12)$$

Эта формула дает зависимость интерференционного члена от разности фаз и от амплитуд составляющих единичных волн. При этом еще совсем не использовано ни то, что здесь идет речь об электромагнитных волнах, ни, в частности, то обстоятельство, что колебания *поперечны*. Мы уже упоминали во введении, что Френель и Араго, наблюдая интерференцию двух лучей, поляризованных во взаимно перпендикулярных плоскостях, сделали вывод, что световые колебания должны быть поперечны. Мы приведем здесь этот вывод. Для этого мы должны только принять, что обе части луча распространяются в одном направлении, например в направлении оси z , но первый колеблется в плоскости, содержащей ось x , а второй — в плоскости, содержащей ось y ; иначе говоря, дано:

$$a_2 = 0, \quad b_1 = 0.$$

Формула интерференции (12) дает, таким образом:

$$I = a_3 b_3 \cos \delta.$$

Но наблюдения Френеля и Араго показали, что для такого света интерференция никогда не имеет места, откуда следует, что $a_3 = b_3 = 0$, т. е. колебания поперечны. В нашей электромагнитной теории этот вывод вытекает из основных уравнений.

Рассмотрим теперь два частичных луча, которые распространяются оба параллельно оси z и колеблются параллельно оси x , так что только a_1 и b_1 отличны от 0. Тогда мы имеем:

$$J_1 = \frac{1}{2} \cdot a_1^2, \quad J_2 = \frac{1}{2} \cdot b_1^2$$

и

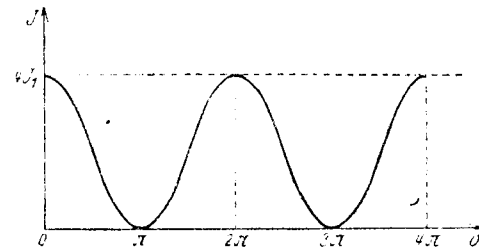
$$I = a_1 b_1 \cos \delta = 2\sqrt{J_1 J_2} \cos \delta. \quad (13)$$

В частности для $J_1 = J_2$ суммарная сила света

$$J = 2J_1 \cdot (1 + \cos \delta) = 4J_1 \cdot \cos^2 \frac{\delta}{2}. \quad (14)$$

Таким образом минимумы света $J = 0$ появляются там, где $\delta = \pm \pi, \pm 3\pi, \dots, \pm (2k+1)\pi, \dots$, а максимум $J = 4J_1$ там, где $\delta = 0, \pm 2\pi, \dots, \pm 2k\pi, \dots$. Распределение света показано на фиг. 57

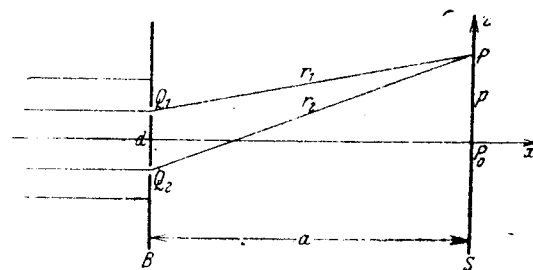
Те же самые формулы, которые мы здесь вывели для линейно поляризованного света, применимы и к неполяризованному свету, так как взаимно перпендикулярные составляющие, как мы уже доказали, не интерферируют между собой; поэтому можно вычислить отдельно интерференции для составляющих по осям x и y , а затем сложить их, а так как δ одинакова для обеих, то мы получим опять тот же результат.



Фиг. 57. Интерференция двух пучков лучей.

§ 35. ОПЫТ ЮНГА

Один из простейших способов получения интерференции был дан Юнгом; он изображен на фиг. 58. Параллельный пучок лучей падает на диафрагму B , перпендикулярную к направлению лучей. В диафрагме имеются две параллельные узкие щели Q_1 и Q_2 на расстоянии d . Q_1 и Q_2 являются сами источниками волнового движения (это основано на явлениях дифракции, о которых будет речь в главе IV). Q_1 и Q_2 называются *виртуальными источниками света*. Излучаемый ими свет когерентен. Свет, выходящий из Q_1 (соответственно из Q_2), попадает на экран S , поставленный параллельно диафрагме B на расстоянии a от нее. Пусть обе щели Q_1 и Q_2 расположены симметрично относительно оси x , перпендикулярной к экранам B и S . Пусть P_0 — точка пересечения оси x с экраном S .



Фиг. 58. Интерференционный опыт Юнга.

Проведем в S ось z перпендикулярно к обоим щелям. Тогда, если P есть точка экрана S , лежащая на оси z на расстоянии p от P_0 , то разность хода двух лучей, попадающих в P из Q_1 (или Q_2), равна $r_2 - r_1$, где r_1 и r_2 — пути, проходимые светом соответственно от точек Q_1 и Q_2 до точки P :

$$\Delta = r_2 - r_1. \quad (1)$$

Тогда

$$r_1^2 = a^2 + \left(p - \frac{d}{2}\right)^2,$$

$$r_2^2 = a^2 + \left(p + \frac{d}{2}\right)^2,$$

$$r_2^2 - r_1^2 = 2pd = (r_2 - r_1)(r_2 + r_1).$$

Пусть a велико относительно d и p ; тогда приближенно мы можем написать:

$$r_2 + r_1 = 2a$$

и получаем:

$$\Delta = r_2 - r_1 = \frac{pd}{a}, \quad \delta = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta = \frac{2\pi pd}{\lambda a} \quad (2)$$

вплоть до величин высшего порядка. Согласно § 34 (14) мы имеем максимум силы света для значений:

$$\delta = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \dots,$$

$$p = 0, \pm \frac{\lambda a}{d}, \pm 2 \frac{\lambda a}{d}, \dots$$

и минимум при

$$\delta = \pm \pi, \pm 3\pi, \dots,$$

$$p = \pm \frac{1}{2} \frac{\lambda a}{d}, \pm \frac{3}{2} \frac{\lambda a}{d}, \dots$$

На экране S получается интерференционное изображение в виде ряда светлых и темных полос, перпендикулярных к оси z , следовательно, параллельных щелям Q_1 и Q_2 . Расстояние между соседними полосами равно $p_0 = \frac{\lambda a}{d}$. Центральная часть ($p=0$)

наблюдаемого интерференционного явления соответствует здесь максимуму силы света. В подобных случаях говорят о явлениях со *светлым* центром, в противоположном случае мы имеем явление с *темным* центром.

С помощью этого устройства, зная его геометрические размеры, можно определить длину световой волны, наблюдая расстояние p_0 между полосами. Пусть, например:

$$a = 5 \text{ м} = 500 \text{ см},$$

$$d = 1 \text{ см},$$

$$p_0 = 0,025 \text{ см};$$

тогда

$$\lambda = \frac{p_0 d}{a} = \frac{25 \cdot 10^{-3}}{5 \cdot 10^2} = 5 \cdot 10^{-5} \text{ см};$$

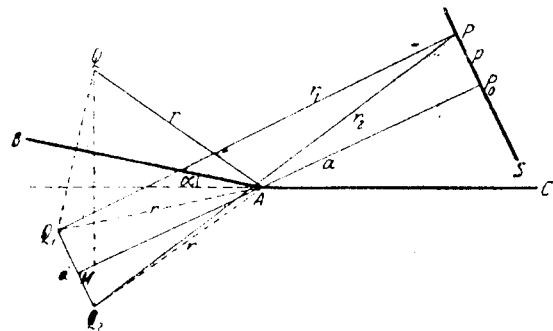
это есть длина волны зеленого света.

Таким образом ширина полос есть функция длины волны. Если взять белый свет, то интерференционные изображения различных цветов спектра налагаются друг на друга и образуют цветные полосы, которые уже через несколько полос становятся размытыми и постепенно переходят в белый цвет. Если хотя бы наблюдать большее число полос, надо применять *однородный*, или *монокроматический*, свет, т. е. свет, содержащий только одну длину волны.

Преимущество этого способа Юнга заключается в относительной простоте установки; экраны B и S не должны быть строго параллельны, точно так же B не должен быть строго перпендикулярен к падающим лучам. Недостаток этого способа заключается в больших размерах приборов, а также в том, что виртуальные источники света получаются при помощи явлений дифракции, которые сами по себе являются сложными интерференционными явлениями и которых здесь мы еще не можем объяснить. Поэтому изобретены другие методы для получения виртуальных источников света другим путем. На некоторых из них мы остановимся в дальнейшем.

§ 36. ДВОЙНОЕ ЗЕРКАЛО ФРЕНЕЛЯ, БИПРИЗМА ФРЕНЕЛЯ, БИЛИНЗА БИЛЬЕ

В опыте с зеркалами Френеля интерферируют между собой лучи, отраженные двумя зеркалами, которые образуют угол, близкий к 180° (фиг. 59). Обозначим зеркала через AB и AC и пусть α будет острый угол, образованный их плоскостями. Пусть Q будет источник света, например узкая ярко освещенная щель, параллельная линии пересечения зеркал (точка A чертежа). Мы можем считать, что лучи, отраженные зеркалами, исходят из виртуальных источников света Q_1 и Q_2 — изображений щели Q . Если r есть расстояние источника света Q от прямой пересечения A , то, очевидно, $AQ_1 = AQ_2 = AQ = r$. Поэтому прямая MP_0 — срединный перпендикуляр к $Q_1Q_2 = d$ — должна проходить через точку A .



Фиг. 59. Двойное зеркало Френеля.

Дальнейшее рассуждение аналогично тому, которое мы привели в предыдущем параграфе. Обозначения те же: $d = 2r \sin \alpha$ есть расстояние между виртуальными источниками света Q_1Q_2 , a — расстояние экрана S от центра M соединяющей их прямой, P_0 — точка, в которой срединный перпендикуляр к отрезку Q_1Q_2 пересекает плоскость, p — расстояние точки P от P_0 ; пусть a и в этом случае велико относительно d и p .

Тогда мы имеем максимум силы света для значений:

$$\delta = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \dots,$$

$$p = 0, \pm \frac{\lambda a}{d} = \pm \frac{\lambda a}{2r \sin \alpha}, \pm \frac{2\lambda a}{d} \dots$$

и минимум при

$$\delta = \pm \pi, \pm 3\pi, \dots,$$

$$p = \pm \frac{1}{2} \frac{\lambda a}{d} = \pm \frac{1}{2} \frac{\lambda a}{2r \sin \alpha}, \pm \frac{3}{2} \frac{\lambda a}{d} \dots$$

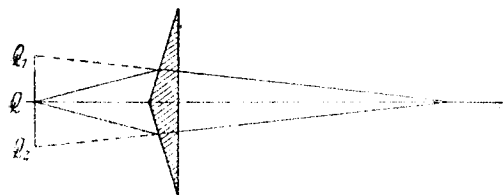
Мы получаем интерференционное изображение в виде светлых и темных полос, параллельных прямой пересечения обоих зеркал. Расстояние между полосами равно:

$$p_0 = \frac{\lambda a}{d} = \frac{\lambda a}{2r \sin \alpha}.$$

Таким образом, чтобы получить возможно большие расстояния, нужно при заданной длине волны выбирать a возможно большим, а r и α возможно меньшими.

В опыте Френеля также происходят дифракционные явления, в частности явления, обусловленные общим краем зеркала.

Существуют различные модификации приборов Френеля, в которых разделение луча достигается другим способом. Назовем из них два:



Фиг. 60. Бипризма Френеля.

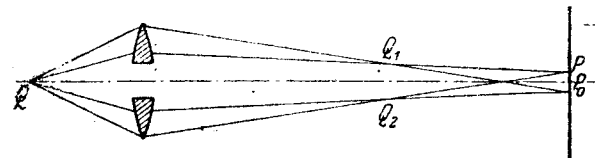
бражение щели Q. Внутри пространства, где налагаются друг на друга лучи, исходящие из мнимых изображений Q_1 и Q_2 , имеют место интерференционные явления.

2. *Билинза Билье* (Billet). Линза разрезана на две половины (фиг. 61). Источник света дает два виртуальных источника света Q_1 и Q_2 , откуда выходят лучи, дающие интерференционные полосы на экране между точками P и P'.

§ 37. СТОЯЧИЕ ВОЛНЫ

В 1890 г. О. Винер¹ доказал существование так называемых *стоячих световых волн*, возникающих вследствие отражения от металлических зеркал света, падающего перпендикулярно;

отражательная способность металлических зеркал почти равна 1 (в случае серебра — 99%). Если мы примем ее равной 1, мы можем совершенно не вдаваться в теорию отражения от металлических поверхностей, которую мы будем разбирать в главе VI. Достаточно простого соображения, что в этом случае должно наступить полное отражение и, следовательно, при перпендикулярном падении фазы отраженной и падающей волн должны быть точно равны с противоположным знаком (это можно формально вывести и из формул главы I, § 10 (17), приняв $n = \infty$).



Фиг. 61. Билинза Билье.

Пусть перпендикуляр к плоскости отражения совпадает с отрицательной осью. Тогда x -составляющая падающей волны равна:

$$\mathcal{E}_x^{(a)} = A \cos \omega \left(t - \frac{z}{c_1} \right), \quad (1)$$

а x -составляющая отраженной волны равна:

$$\mathcal{E}_x^{(r)} = -A \cos \omega \left(t + \frac{z}{c_1} \right). \quad (2)$$

Падающая и отраженная волны налагаются, и результирующая возмущения есть:

$$\mathcal{E}_x = \mathcal{E}_x^{(a)} + \mathcal{E}_x^{(r)} = 2A \sin \omega t \cdot \sin \frac{\omega z}{c_1}. \quad (3)$$

Мы видим, что \mathcal{E}_x выражается произведением двух синусов, из которых один есть функция только времени, а другой — только координаты. Амплитуда колебания $2A \sin \frac{\omega}{c_1} z = 2A \sin \frac{2\pi}{\lambda} z$ есть периодическая функция координат. Она исчезает при

$$z = 0, -\frac{\lambda}{2}, -\lambda, -\frac{3}{2}\lambda, -2\lambda, \dots, \text{ (узлы)} \quad (4)$$

и имеет экстремум при

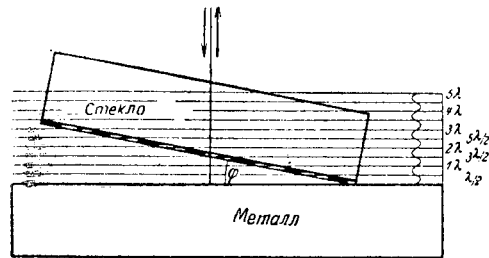
$$z = -\frac{\lambda}{4}, -\frac{3}{4}\lambda, -\frac{5}{4}\lambda, \dots, \text{ (пучности)} \quad (5)$$

независимо от времени всегда в одних и тех же местах.

При такого рода интерференции мы говорим о *стоячих волнах*.

¹ О. Wiener, Wiedem Ann., т. 40 (1890), стр. 203.

Совершенно аналогично можно рассматривать магнитный вектор. Пучности электрических стоячих волн совпадают с узлами магнитных и наоборот; на поверхности зеркала электрическая волна имеет узел, магнитная — пучность; это происходит потому, что фаза магнитного вектора смещена на $\frac{\pi}{2}$ относительно электрического.



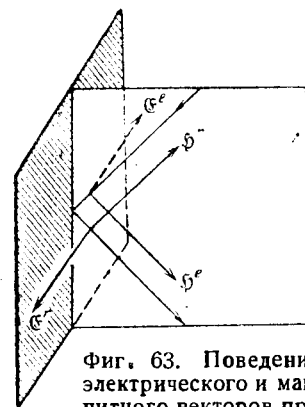
Фиг. 62. Отражение стоячих волн по Винеру.

стоящих на $\frac{\lambda}{2}$ друг от друга, а также положение слоя коллодия. Светочувствительный слой пересекается с плоскостью пучностей и узлов по системе равно отстоящих друг от друга прямых; расстояние между ними тем больше, чем меньше угол φ . Фотографическое изображение, действительно, показало ожидаемое расположение прямых. На самом зеркале не произошло потемнения; стоячая волна имела там узел. Первое потемнение было на расстоянии $\frac{\lambda}{4}$.

Из результата опытов вытекает важное заключение: по отношению к фотографическому действию за световой вектор надо принимать электрический вектор. Действительно, согласно уравнению (5) первая пучность именно этого вектора находится на расстоянии $\frac{\lambda}{4}$ от пластинки (тогда как для магнитного вектора она находится на расстоянии $\frac{\lambda}{2}$). Этого следует ждать

также с точки зрения электронной теории. Фотографическое действие представляет собою ионизационный процесс (вырывание электрона из атомной связи серебряной соли, взвешенной в слое); сила, действующая на покоящиеся частицы, как известно, пропорциональна электрическому вектору. Существует еще много чисто оптических доказательств того, что световой вектор тождествен с электрическим. С одним из них мы познакомимся в оптике кристаллов (глава V, § 61); кроме того, укажем на фотоэлектрические явления, которые позволяют непосредственно установить зависимость между направлением электрического вектора и направлением вылетающих электронов.

Мы можем привести здесь еще одно экспериментальное доказательство тождественности электрического вектора со световым. Заставив линейно поляризованный свет падать под углом 45° на металлическое зеркало, можно обнаружить интерференцию падающей и отраженной волны, покрыв зеркало очень тонким слоем хлористого серебра (толщина слоя должна быть мала относительно длины волны). Если колебания электрического вектора падающего света перпендикулярны к плоскости падения, светочувствительный слой не темнеет; если же колебания параллельны плоскости падения — то слой чернеет. Это совершенно понятно, если \mathcal{E} (а не \mathcal{H}) является фотографически действенной составляющей поля, так как интерферировать могут только такие световые поля, колебания которых параллельны. Именно так обстоит дело с падающей и отраженной волнами, если они колеблются перпендикулярно к плоскости падения, а затем взаимно погашают друг друга вблизи поверхности в силу пограничного условия у совершенного зеркала ($\mathcal{E} = 0$) и поэтому оставляют слой незачерненным. Но составляющие падающего и отраженного лучей, которые колеблются параллельно плоскости падения, взаимно перпендикулярны, не интерферируют друг с другом (фиг. 63) и вызывают почернение слоя. Если бы действительным вектором был \mathcal{H} , было бы как раз наоборот.



Фиг. 63. Поведение электрического и магнитного векторов при отражении.

§ 38. ЦВЕТА ТОНКИХ ПЛАСТИНОК И НЬЮТОНОВЫ КОЛЬЦА

Яркие краски, которыми отливают достаточно тонкие слои прозрачных тел (мыльные пузыри, масляные пленки) как в проходящем, так и в отраженном свете, объясняются интерференцией света, отраженного от передней и задней поверхности слоя. Выведем сначала выражение для разности хода обоих первых лучей, возникающих при отражении от плоскопараллельного слоя.

На фиг. 64 изображена пластинка толщины h , ограниченная с обеих сторон одной и той же средой. Пусть λ — длина волны во внешней среде, n — показатель преломления пластинки относительно нее; тогда длина волны в пластинке равна $\lambda' = \lambda/n$. На пластинку падает параллельный когерентный однородный пучок лучей под углом φ ; угол преломления пусть будет ψ ; тогда

$$\frac{\sin \varphi}{\sin \psi} = n = \frac{\lambda}{\lambda'}.$$

Пусть луч, выходящий из точки A , пересекает поверхность слоя в B и, преломившись, встречает нижнюю поверхность в D ;

оттуда он отражается в точку B' верхней поверхности и затем преломляется по направлению к точке C . Через точку B' проходит также вторая волновая нормаль $A'B'$ падающей волны, которая также отбрасывается отражением по направлению $B'C$.

Таким образом мы имеем в C две интерферирующие волны, разность хода которых мы должны вычислить. Опустим из B перпендикуляр на $A'B'$ и обозначим его основание E . Из чертежа видно, что разность фаз

$$\delta = 2\pi \left[\frac{DB' + DB}{\lambda'} - \frac{EB'}{\lambda} \right].$$

Далее имеем:

$$BD = DB' = \frac{h}{\cos \psi},$$

$$EB' = BB' \cdot \sin \varphi = 2h \cdot \operatorname{tg} \psi \cdot \sin \varphi.$$

Фиг. 64. Интерференция в плоскопараллельной пластинке.

Используя соотношения $n = \lambda/\lambda' = \sin \varphi / \sin \psi$, мы получим:

$$\delta = 2h \frac{2\pi}{\lambda'} \left(\frac{1}{\cos \psi} - \frac{1}{\cos \psi} \cdot \sin^2 \psi \right) = \frac{4h\pi \cos \psi}{\lambda'}.$$

Можно этот вывод заменить другим (которым пользуются в теории интерференции рентгеновских лучей). Для этого опустим из B' на BD перпендикуляр с основанием F . Тогда, очевидно, волна имеет в F и B' одинаковую фазу, и

$$\delta = 2\pi \frac{FD + B'D}{\lambda'} = 2\pi \frac{DB'}{\lambda'} (\cos 2\psi + 1) = \frac{4h\pi}{\lambda'} \cos \psi.$$

Но тут надо еще учесть изменение фазы вследствие отражения. Происходящие при этом изменения подробно изложены при рассмотрении формул Френеля в главе I, § 10, стр. 44. Из них следует, что в нашем случае фаза при отражении от верхней или от нижней поверхности претерпевает скачок на π . Учтя это, мы получим:

$$\delta = \frac{4\pi h}{\lambda'} \cos \psi \pm \pi. \quad (1)$$

Зависимость между δ и φ дает:

$$\delta = \frac{4h\pi}{\lambda} \sqrt{n^2 - \sin^2 \varphi} \pm \pi. \quad (2)$$

Если бы интерферировали только эти два луча, то сила света была бы максимальной, когда δ кратно 2π , и минимальной, когда δ — нечетное кратное π . Полного затухания не может быть, так как луч, один раз отраженный, и луч, дважды преломленный, не равны по интенсивности.

Точно так же можно рассмотреть оба проходящих луча $ABDB'GH$ и $A'B'GH$; разность фаз между ними равна:

$$\delta' = \frac{4\pi h}{\lambda'} \cos \psi = \frac{4\pi h}{\lambda} \sqrt{n^2 - \sin^2 \varphi}. \quad (3)$$

Так как в этом случае число отражений четное, то сдвига фазы не происходит.

Явления в отраженном и проходящем свете, как мы видим, дополняют друг друга. Именно, разности фаз отличаются на π . Следовательно, разности хода отличаются на полволны. Таким образом если свет определенной длины волны при прохождении усиливается, то при отражении он ослабляется, и наоборот.

Явления интерференции, наблюдаемые в тонких пластинках, можно классифицировать различным образом. Во-первых, имеет значение, имеем ли мы точечный источник света или имеющий протяжение, находится ли он на конечном или на бесконечном расстоянии, и, наконец, на бесконечном или конечном расстоянии происходит интерференция.

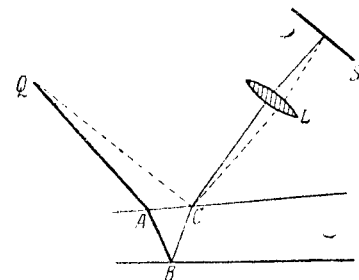
Особенно важно то, что интерференционное явление можно наблюдать в тонких пластинках в двух существенно различных случаях. Эти случаи следующие:

1. Цвета тонких, совершенно плоскопараллельных пластинок и *кривые равной толщины* при не вполне равномерной толщине пластинки h .

2. *Кривые равного наклона* в совершенно плоскопараллельных пластинках (Гайдингер, Маскар, Люммер).

Первый случай можно рассчитать непосредственно из формул (1), (2), (3). Медленно изменяя от точки к точке толщину пластинки h , мы изменим и разность фаз δ . Аккомодировавшись на поверхность пластинки, можно на ней увидеть в однородном свете светлые и темные кривые линии (в белом свете — цветные полосы). Если пластинка имеет клиновидную форму, то кривые равной толщины становятся прямыми, параллельными ребру клина (фиг. 65).

Кривые равной толщины заметны только в достаточно тонких пластинках. Это объясняется следующим. Зрачок глаза имеет конечную величину, поэтому в C сходится пара лучей, выходящих из различных точек A . Разности хода Δ этих пар мало отличаются друг от друга, если пластинка тонка. Если же пластинка толста, то даже для очень близких точек A разности хода значительно отличаются друг от друга. Как только эти различия достигают полуволны, то некоторые пары лучей могут иметь в C максимум, другие же минимум силы света, — поэтому



Фиг. 65. Интерференция в не вполне плоскопараллельной пластинке.

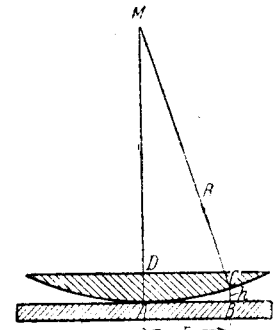
при значительной толщине пластинки можно не заметить никакой интерференции.

Точно так же объясняется и то, что в очень тонкой клиновидной пластинке при почти отвесном падении интерференционные полосы равной толщины особенно резки. Дело в том, что при этих условиях $\cos \phi$ почти равен 1, а разность фаз всех интерферирующих пар лучей

$$\delta = \frac{4\pi h}{\lambda'} \pm \pi,$$

т. е. не зависит от угла падения. Таким образом интерференции всех подобных пар лучей будут усиливать друг друга.

Частным случаем кривых равной толщины являются *ньютоньы кольца*. Если положить плосковыпуклую линзу небольшой кривизны на плоскую стеклянную пластинку (фиг. 66), то при падающем почти отвесно однородном свете можно видеть ряд светлых и темных concentрических колец с темным центром, а в проходящем свете — такие же кольца, но со светлым центром. При освещении белым светом разноцветные системы колец налагаются друг на друга, и получается небольшое число колец с совершенно определенной последовательностью цветов. Ньютоновыми кольцами можно воспользоваться для того, чтобы вычислить



Фиг. 66. Ньютоновы кольца.

по данной кривизне линзы длину волны в среде между линзой и стеклянной пластинкой и, наоборот, по длине волны — кривизну.

Пусть M есть центр сферической поверхности линзы, A — точка касания стеклянной пластинки, B — произвольная точка на ней. Пусть перпендикуляр, восстановленный к пластинке B , пересекает сферу в C и пусть $BC = h$; тогда, очевидно, $2h$ есть разность хода для отвесно падающего света. С другой стороны, мы имеем (фиг. 66):

$$h = R - \sqrt{R^2 - r^2}$$

или приближенно

$$h = \frac{r^2}{2R}.$$

Таким образом разность фаз в отраженном свете есть:

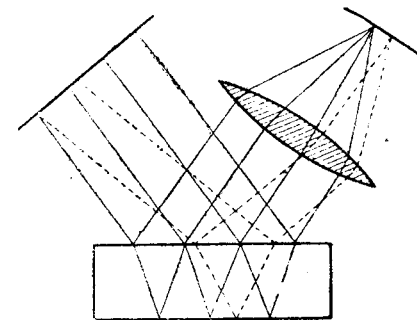
$$\delta = \frac{2\pi r^2}{R\lambda} \pm \pi,$$

где λ — длина волны в воздухе. Отсюда радиусы светлых интерференционных колец равны:

$$r = \sqrt{\frac{R\lambda}{2} (2k + 1)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

На очень строго плоскопараллельных пластинках можно наблюдать другое интерференционное явление (открытое Гайдингером¹, обработанное Маскаром² и Люммером³) — так называемые *кривые равного наклона*. Они видны при аккомодации глаза на бесконечность (а при проектировании с помощью линзы — в ее главной фокальной плоскости) и имеют форму окружностей или конических сечений в зависимости от того, параллельна или наклонна ось линзы относительно нормали пластинки (фиг. 67).

Для их получения нужно пользоваться источником рассеянного света. Луч, выходящий из определенной точки этого источника, расщепляется на систему параллельных световых пучков, пересекающих пластинку один, два, три и т. д. раза (как в проходящем, так и в отраженном свете); если собрать их при помощи линзы, они интерферируют в фокусе. Луч, параллельный первому, но выходящий из другой точки источника, даст ту же интерференцию в том же фокусе.



Фиг. 67. Интерференционные кривые равного наклона.

Сила света в фокальной плоскости зависит только от *наклона* лучей в пластинке, откуда и происходит название явления. Если ось линзы параллельна нормали к пластинке, то кривые равной яркости будут, очевидно, окружностями с центром в точке пересечения оси с пластинкой. Интерференции в отраженном и проходящем свете опять взаимно дополняются. Когда пластинка перемещается параллельно самой себе, кривые равного наклона не смещаются (в фокальной плоскости линзы или на сетчатке), благодаря чему их легко отличить от кривых равной толщины, которые, очевидно, связаны с определенными местами пластинки. Кривые равного наклона исчезают, если пластинки недостаточно хорошо отшлифованы; именно, это происходит уже при отклонении порядка величины $\frac{\lambda'}{4}$, где λ' — длина волны внутри пластинки.

Этим можно воспользоваться для испытаний плоскопараллельности пластинок.

Для количественной теории этой интерференции выведенные выше формулы недостаточны, так как при выводе мы принимали во внимание только два интерферирующих луча, тогда как в действительности в этом принимают участие очень многие лучи. В следующем параграфе мы исследуем явления, возникающие при наложении большого количества лучей.

¹ W. Haidinger, Pogg. Ann., т. 77 (1849), стр. 219.

² M. E. Mascart, Ann. Chim. et Phys., т. 23, (1871), стр.

³ O. Lummer, Wiedem. Ann., т. 23 (1884), стр. 49.

§ 39. РЕЗКОСТЬ ИНТЕРФЕРЕНЦИОННЫХ ПОЛОС

Пусть, луч, выходящий из точечного источника света Q , пересекает плоскопараллельную пластинку в точке A и частью отражается оттуда в точку L , частью преломляется в пластинку, которую он пересекает в точке B_1 задней поверхности. Здесь луч опять разделяется. Проходящий луч преломляется по направлению к L'_1 ; отраженный луч встречает переднюю поверхность в точке A_1 , откуда частью идет в L_1 , частью отражается в B_2 и т. д. Таким образом мы имеем систему параллельных лучей $AL, A_1L_1, A_2L_2, \dots$ выходящих через переднюю поверхность, и точно так же систему лучей $B_1L'_1, B_2L'_2, \dots$ выходящих через заднюю поверхность (фиг. 68). При каждом отражении происходит ослабление амплитуды, равное согласно нашим прежним обозначениям \sqrt{r} [глава I, § 11 (3)]; точно так же при каждом прохождении амплитуда ослабляется в \sqrt{d} раз. В главе I, § 11 (3) и (4) мы привели значения r и d в функции угла падения отдельно для обоих направлений поляризации — параллельного и перпендикулярного плоскости падения. Сейчас мы воспользуемся только общим соотношением [глава I, § 11 (5)]:

$$r + d = 1. \quad (1)$$

Следует еще заметить, что величины r и d сохраняют свое значение, если граничащие друг с другом среды меняются местами (n заменяется $\frac{1}{n}$).

При каждом прохождении луча через пластинку фаза изменяется на

$$\delta = \frac{2\pi h}{\lambda'} \cos \phi,$$

где h — толщина пластинки, λ' — длина волны, ϕ — угол луча

в пластинке относительно нормали. Рассмотрим сначала отраженные лучи AL, A_1L_1 и т. д. Положим, что амплитуда падающего луча равна 1; тогда амплитуда луча AL равна \sqrt{r} ; сумма амплитуд лучей $A_1L_1, A_2L_2, \dots, A_pL_p$ равна:

$$\begin{aligned} \sqrt{r} \cdot d \cdot e^{2i\delta} [1 + r e^{2i\delta} + r^2 e^{4i\delta} + \dots + r^{p-1} e^{2(p-1)i\delta}] = \\ = \sqrt{r} \cdot d \cdot e^{2i\delta} \frac{1 - r^p e^{2pi\delta}}{1 - r e^{2i\delta}}. \end{aligned}$$

Далее, надо учесть, что либо луч AL , либо лучи A_1L_1, A_2L_2 и т. д. претерпевают сдвиг фазы на π (в зависимости от того,

имеем ли мы дело с колебаниями s или с колебаниями p , глава I, § 10). Так как $e^{i\pi} = -1$, то мы имеем для амплитуды суммы $p+1$ выходящих лучей:

$$\mathcal{G}^{(r)} = \sqrt{r} (1 - d e^{2i\delta}) \cdot \frac{1 - r^p e^{2pi\delta}}{1 - r e^{2i\delta}}. \quad (2)$$

Если число интерферирующих лучей бесконечно велико, т. е. если пластинка достаточно велика, то это выражение переходит в

$$\mathcal{G}^{(r)} = \sqrt{r} \left(1 - \frac{d e^{2i\delta}}{1 - r e^{2i\delta}} \right) = \sqrt{r} \cdot \frac{1 - e^{2i\delta}}{1 - r e^{2i\delta}}. \quad (3)$$

Ему соответствует сила света (см. § 34, стр. 154)

$$J_r = r \frac{2 - 2 \cos 2\delta}{1 + r^2 - 2r \cos 2\delta} = \frac{4r \sin^2 \delta}{d^2 + 4r \sin^2 \delta}. \quad (4)$$

Точно таким же образом вычисляется проходящий свет, состоящий из лучей $B_1L'_1, \dots, B_pL'_p$. Амплитуда равна:

$$\mathcal{G}^{(d)} = d e^{i\delta} (1 + r e^{2i\delta} + r^2 e^{4i\delta} + \dots + r^{p-1} e^{2(p-1)i\delta}) = d e^{i\delta} \frac{1 - r^p e^{2pi\delta}}{1 - r e^{2i\delta}}. \quad (5)$$

При $p \rightarrow \infty$ имеем, следовательно:

$$\mathcal{G}^{(d)} = d e^{i\delta} \cdot \frac{1}{1 - r e^{2i\delta}}$$

и

$$J_d = \frac{d^2}{1 + r^2 - 2r \cos 2\delta} = \frac{d^2}{d^2 + 4r \sin^2 \delta}. \quad (6)$$

Мы видим, что интерференционное изображение в отраженном свете дополнительно к изображению в проходящем свете:

$$J_d + J_r = 1. \quad (7)$$

Уничтожив первый отраженный луч AL (что легко сделать с помощью диафрагмы), получим из формулы (2) при $p \rightarrow \infty$

$$\mathcal{G}^{(r)} = -\sqrt{r} \cdot \frac{d e^{2i\delta}}{1 - r e^{2i\delta}}. \quad (8)$$

Следовательно,

$$J'_r = r \cdot \frac{d^2}{d^2 + 4r \sin^2 \delta} = r J_d. \quad (9)$$

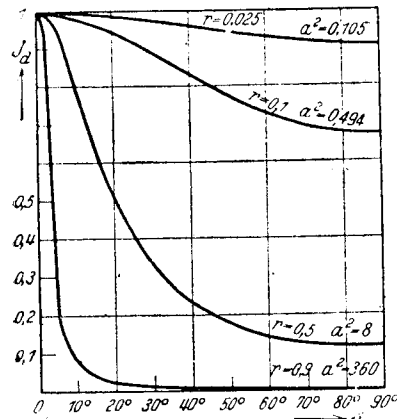
Тогда интерференционные кривые по обе стороны пластинки совершенно тождественны, вплоть до коэффициента ослабления r . Эти формулы впервые были выведены Эри¹.

¹ G. B. Airy, Philos. Mag. (3), т. 2 (1833), стр. 20; Pogg. Ann., т. 41 (1837), стр. 512.

Введем для удобства обозначения:

$$a^2 = \frac{4r}{d^2} = \frac{4r}{(1-r)^2}. \quad (10)$$

В частном случае отвесного падения лучей можно воспользоваться данными в главе I, § 11(6) значениями r и d ; тогда $a = \frac{1}{2} \left(n - \frac{1}{n} \right)$. Это значение можно принять с приближением также для случая почти перпендикулярного падения и воспользоваться им для вычисления a :



Фиг. 69. Функция $J_d = \frac{1}{1+a^2 \sin^2 \delta}$;

$$a^2 = \frac{4r}{(1-r)^2}.$$

$$J_d = \frac{1}{1+a^2 \sin^2 \delta}. \quad (11)$$

На фиг. 69 изображена графически эта функция от δ при различных значениях r . Если r мало относительно 1 ($a \ll 1$), то мы можем разложить функцию в ряд:

$$J_d = 1 - a^2 \sin^2 \delta + \dots, \quad (12)$$

т. е. распределение силы света синусоидально, что на графике приблизительно соответствует кривой для $r=0,025$. Если, напротив, r близко к 1 (a очень велико, что соответствует кривой при $r=0,9$), то функция J_d всюду очень мала, кроме области значений δ , близких к 0; поэтому мы получаем очень резкие светлые интерференционные кольца на почти темном фоне. Это

облегчает устройство *интерференционных спектроскопов* с помощью плоскопараллельных пластинок; падающий монохроматический свет кажется *системой тонких резких интерференционных полос*, а свет различных длин волн дает периодически повторяющиеся системы цветных полос. Мы еще вернемся к этому. На практике, конечно, невозможно получить бесконечное число интерферирующих пучков, так как пластинка имеет конечные размеры. Поэтому важно исследовать зависимость интерференционных явлений от числа p пучков. Для этого возьмем опять формулу (5) и найдем из нее силу света (интенсивность) p проходящих лучей:

$$J_d(p) = d^2 \frac{1 + r^{2p} - 2r^p \cos 2p\delta}{1 + r^2 - 2r \cos 2\delta}, \quad (13)$$

или

$$J_d(p) = d^2 \frac{(1 - r^p)^2 + 4r^p \sin^2 p\delta}{(1 - r)^2 + 4r \sin^2 \delta}. \quad (14)$$

Рассмотрим теперь часто встречающийся на практике случай, когда r почти равно 1. Отбросив соответственно этому первые члены числителя и знаменателя, мы получим приближенное выражение:

$$J_d(p) = d^2 r^{p-1} \frac{\sin^2 p\delta}{\sin^2 \delta}. \quad (15)$$

Функции такого вида нам будут часто встречаться дальше в дифракционных явлениях. При малых значениях δ , т. е. вблизи резкого максимума, функция имеет почти такой же вид, как на фиг. 69 (при бесконечном числе интерферирующих лучей). Но дальше имеются второстепенные максимумы (и минимумы); так, максимум при $\delta = \frac{3}{2} \frac{\pi}{p}, \frac{5}{2} \frac{\pi}{p} \dots$ (см. фиг. 93b, стр. 222).

Эти максимумы могут повести к ошибочному предположению о существовании слабых спутников спектральных линий; в этом случае говорят о „духах“.

Из формулы (15) видно, что первый минимум $\delta = \frac{\pi}{p}$ тем ближе

к середине $\delta=0$, чем больше число p интерферирующих лучей. Увеличение этого числа, таким образом, увеличивает резкость спектральных линий. Мы выведем теперь иначе формулы для силы света при отражении и при прохождении через плоскопараллельные пластинки, а именно путем непосредственного интегрирования уравнений Максвелла, точно так же, как мы это сделали в главе I, § 10, рассматривая прохождение света через плоскую поверхность раздела двух сред. Так как мы хотим только объяснить метод, мы разберем лишь простой случай перпендикулярного падения света на пластинку. При этом становятся излишними все соображения относительно различных поляризационных состояний интерферирующих лучей.

Примем нижнюю поверхность пластинки (толщины h) за плоскость xu , и пусть диэлектрическая постоянная внутри пластинки равна ϵ , а снаружи равна 1. Положим, что плоскость электрических колебаний падающей волны параллельна плоскости yz ; пусть эта волна выражается уравнением:

$$\mathcal{E}_y^{(a)} = Ee^{i\omega \left(t - \frac{z}{c}\right)}, \quad \mathcal{H}_x^{(a)} = -Ee^{i\omega \left(t - \frac{z}{c}\right)}. \quad (16)$$

Уравнение отраженной волны будет:

$$\mathcal{E}_y^{(r)} = Re^{i\omega \left(t + \frac{z}{c}\right)}, \quad \mathcal{H}_x^{(r)} = Re^{i\omega \left(t + \frac{z}{c}\right)}, \quad (17)$$

а уравнения всех волн, выходящих из пластинки:

$$\mathcal{E}_y^{(d)} = De^{i\omega \left(t - \frac{z}{c}\right)}, \quad \mathcal{H}_x^{(d)} = -De^{i\omega \left(t - \frac{z}{c}\right)}. \quad (18)$$

Внутри пластинки одна электрическая волна идет в направлении оси z , а другая — в противоположном; обе волны выражаются уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{E}_y^{(i)} &= Ae^{i\omega\left(t-\frac{z}{c_1}\right)} + Be^{i\omega\left(t+\frac{z}{c_1}\right)}, \\ \mathcal{H}_x^{(i)} &= -A\sqrt{\epsilon}e^{i\omega\left(t-\frac{z}{c_1}\right)} + B\sqrt{\epsilon}e^{i\omega\left(t+\frac{z}{c_1}\right)}. \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

Из постоянства тангенциальных составляющих \mathcal{E} и \mathcal{H} на граничной поверхности $z=0$ следует:

$$\left. \begin{aligned} E+R &= A+B & (a) \\ -E+R &= n(B-A), & (b) \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

причем полагаем $n=\sqrt{\epsilon}$ согласно главе I, § 5 (1). Точно так же из постоянства тангенциальных составляющих на граничной поверхности $z=h$ следует:

$$\left. \begin{aligned} Ae^{-i\omega\frac{h}{c_1}} + Be^{i\omega\frac{h}{c_1}} &= De^{-i\omega\frac{h}{c}}, & (a) \\ n\left(-Ae^{-i\omega\frac{h}{c_1}} + Be^{i\omega\frac{h}{c_1}}\right) &= -De^{-i\omega\frac{h}{c}}. & (b) \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

Эти четыре уравнения (20) и (21) достаточны для определения четырех неизвестных R, B, A, D . Нас интересуют только два из них, R и D . Поэтому мы сначала исключим A и B .

Умножая (21a) и (21b) на $e^{i\omega\frac{h}{c_1}}$, получим:

$$\left. \begin{aligned} D' &= A + qB, & (a) \\ \frac{1}{n}D' &= A - qB, & (b) \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

где $D' = De^{i\omega h\left(\frac{1}{c_1} - \frac{1}{c}\right)}$, а $q = e^{2i\omega\frac{h}{c_1}}$. Из (22) и (20) мы получаем:

$$2A = E\left(1 + \frac{1}{n}\right) + R\left(1 - \frac{1}{n}\right) = D'\left(1 + \frac{1}{n}\right),$$

$$2B = E\left(1 - \frac{1}{n}\right) + R\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{q}D'\left(1 - \frac{1}{n}\right),$$

откуда

$$\left. \begin{aligned} D' &= E + R\frac{n-1}{n+1}, & (a) \\ \frac{1}{q}D' &= E + R\frac{n+1}{n-1}. & (b) \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

Исключая R (соответственно D'), получаем:

$$\left. \begin{aligned} E\left(\frac{n+1}{n-1} - \frac{n-1}{n+1}\right) &= D'\left(\frac{n+1}{n-1} - \frac{1}{q}\frac{n-1}{n+1}\right), & (a) \\ E\left(\frac{1}{q} - 1\right) + R\left(\frac{1}{q}\frac{n-1}{n+1} - \frac{n+1}{n-1}\right) &= 0. & (b) \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

Согласно главе I, § 11 (6) при перпендикулярном падении луча $r=(n-1)^2/(n+1)^2$; следовательно,

$$\left. \begin{aligned} E(1-r) &= D'\left(1 - \frac{r}{q}\right), & (a) \\ E\left(1 - \frac{1}{q}\right) &= \frac{-1}{\sqrt{r}}R\left(1 - \frac{r}{q}\right). & (b) \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

Из этих уравнений мы найдем отношения силы света (интенсивностей):

$$J_r = \frac{R}{E} \cdot \frac{R^*}{E^*} = r \frac{\left(1 - \frac{1}{q}\right)\left(1 - \frac{1}{q^*}\right)}{\left(1 - \frac{r}{q}\right)\left(1 - \frac{r}{q^*}\right)} = r \frac{2\left[1 - \cos\left(\frac{2\omega}{c_1}h\right)\right]}{1 + r^2 - 2r \cos\left(\frac{2\omega}{c_1}h\right)}.$$

Следовательно,

$$\left. \begin{aligned} J_r &= r \frac{4 \sin^2\left(\frac{\omega}{c_1}h\right)}{d^2 + 4r \sin^2\left(\frac{\omega}{c_1}h\right)}, & (a) \\ J_d &= \frac{(1-r)^2}{(1-r)^2 + 4r \sin^2\left(\frac{\omega}{c_1}h\right)} = \frac{1}{1 + \frac{4r}{d^2} \sin^2\left(\frac{\omega}{c_1}h\right)}. & (b) \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

Оба эти уравнения тождественны с уравнениями (4) и (11). Действительно (при $\cos\phi=1$):

$$\frac{\omega}{c_1}h = \frac{2\pi h}{\lambda} = \delta.$$

Как мы уже говорили, этот вывод можно сделать и для наклонно падающего света, причем разность фаз δ будет зависеть от угла падения.

§ 40. ИНТЕРФЕРЕНЦИОННЫЙ РЕФРАКТОМЕТР

Многообразные применения интерференции мы разделим на 3 вида: 1) приборы для измерения относительных изменений скорости света и определения таким путем показателей прелом-

ления; 2) интерференционные методы измерения длин в волновых единицах; 3) применения интерференционных приборов в спектроскопии.

Для первой цели служат *интерференционные рефрактометры*. Опишем вкратце рефрактометр конструкции Жамена¹ и Маха².

Рефрактометр Жамена изображен на фиг. 70.

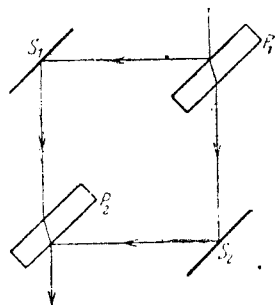
Две плоскопараллельные стеклянные пластинки P_1 и P_2 , имеющие одинаковую толщину, устанавливаются параллельно на большом расстоянии друг от друга. Выходящий из Q параллельный световой пучок разлагается вследствие отражения от передней поверхности и от посеребренной задней поверхности P_1 (фиг. 70). Оба выходящие луча AB' и CD параллельны. Пройдя пластинку P_2 , лучи опять соединяются, вследствие чего интерферируют между собой. Интерференцию можно наблюдать

Фиг. 70. Интерференционный рефрактометр Жамена.

глазом, аккомодированным на бесконечность, или через зрительную трубу.

Главное преимущество этого прибора заключается в том, что при достаточно толстых пластинках лучи AB' и CD проходят далеко друг от друга. Благодаря этому, заставляя лучи AB' и CD проходить через различные среды, и наблюдая смещение интерференционных линий, мы можем измерить даже ничтожные изменения показателя преломления. Чтобы не нарушать симметричности хода лучей, на отрезках светового пути AB' и CD помещают две одинаковые трубки, наполненные испытуемым веществом (газом), и изменяют показатель преломления в одной трубке (например, меняют давление).

Лучи AB' и CD легко могут быть раздвинуты на расстояние примерно до 2 см. Гораздо большее расстояние может быть достигнуто в *интерференционном рефрактометре Маха*. Этот прибор состоит, кроме двух плоскопараллельных пластинок P_1 и P_2 , также из двух металлических зеркал S_1 и S_2 как показано на фиг. 71.



Фиг. 71. Интерференционный рефрактометр Маха.

В этих интерференционных рефрактометрах так же, как в интерферометре Майкельсона (§ 41), можно наблюдать как кривые равной толщины, так и кривые равного наклона. Обычно ограничиваются наблюдением кривых равной толщины и отказываются от абсолютной параллельности поверхностей.

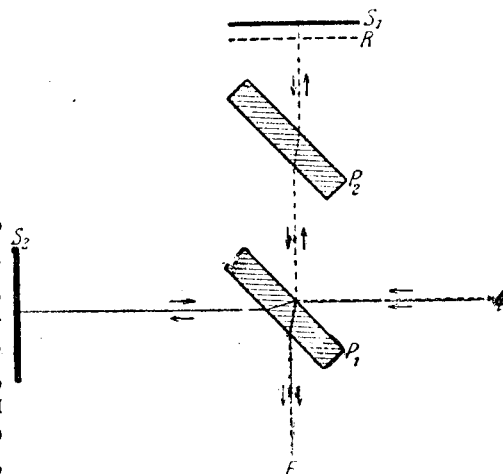
С помощью приборов Жамена и Маха можно наблюдать интерференционные явления при разности хода, достигающей многих тысяч длин волн. Однако эти приборы позволяют определить лишь *относительную* разность хода.

Для определения абсолютной величины разности хода и для непрерывного изменения ее служат другие приборы, к которым мы сейчас перейдем.

§ 41. ИНТЕРФЕРОМЕТРЫ

*Интерферометр Майкельсона*¹ схематически изображен на фиг. 72. P_1 и P_2 — две стеклянные плоскопараллельные пластинки, S_1 и S_2 — два зеркала. Свет от источника Q частью отражается от посеребренной спереди пластинки P_1 , затем проходит через пластинку P_2 , отражается от S_1 и, пройдя еще раз P_2 и P_1 , попадает в зрительную трубу F ; другая часть луча проходит сначала через P_1 , отражается от S_2 , затем от передней поверхности P_1 и также попадает в F .

Можно представить себе, что вторая часть луча отразилась не от S_2 , а от некоторой плоскости R , которая есть зеркальное изображение S_2 в отражающей поверхности P_1 . Эту плоскость R Майкельсон назвал *плоскостью референции*. Очевидно, наблюдатель видит интерференционное явление, вызванное слоем воздуха, ограниченным плоскостями R и S_1 . Перемещая зеркало S_1 (или соответственно S_2), можно непрерывно изменять расстояние между S_1 и R , между прочим, заставить плоскости R и S_1 пересечься. Если R и S_1 совершенно параллельны, то в F наблюдаются интерференционные кольца равного наклона. Если же R и S_1 не вполне параллельны, то наблюдаются прямые полосы равной толщины. Если плоскости пересекаются, то



Фиг. 72. Интерферометр Майкельсона.

¹ J. Jamin, Pogg. Ann., т. 98 (1856), стр. 345.

² E. Mach, Z. Instrumentenkde., т. 12 (1892), стр. 89.

¹ A. A. Michelson, Philos. Mag. (5), т. 13 (1882), стр. 236; т. 31 (1891), стр. 338; т. 34 (1892), стр. 280.

средняя полоса будет черной при белом падающем свете, так как один луч отражается от P_1 снаружи, а другой изнутри, что дает разность хода $\frac{\lambda}{2}$.

Пластинка P_2 может вращаться вокруг оси, перпендикулярной к плоскости чертежа. Она имеет двойное назначение. Во-первых, она служит для того, чтобы сделать световые пути симметричными; каждый путь проходит три раза через одну и ту же толщину стекла. Во-вторых, она служит „компенсатором“. Слегка поворачивая P_2 , можно получить и измерить небольшие разности хода и небольшие смещения интерференционных полос.

Главную трудность при изготовлении интерферометров (и не только Майкельсона) составляет получение абсолютно плоскопараллельных пластинок. Пластины, изготовленные сложными методами шлифовки, испытываются на плоскопараллельность с помощью интерференции (кривых равного наклона).

В интерферометре Майкельсона так же, как в интерференционных рефрактометрах Жамена и Маха, мы имеем дело только с двумя лучами. Поэтому мы получаем синусоидальное распределение силы света, и не можем воспользоваться этими приборами для непосредственного разрешения сложных линий.

Одним из важнейших применений интерферометров есть измерение нормального метра в длинах волн спектральных линий, сделанное впервые Майкельсоном¹ (отчасти совместно с Бенуа). Майкельсон оперировал тремя линиями кадмия, из которых одна была красная; с помощью известных в то время вспомогательных средств было получено следующее значение длины волны красной линии:

$$\lambda = 6438,8 \text{ \AA}.$$

Измерение состоит из двух существенно различных этапов.

1. Измерение небольшого нормального масштаба непосредственным отсчетом длин волн спектральных линий, укладывающихся в нем.

2. Сравнение этого масштаба с другим масштабом вдвое (или в несколько раз) большей длины путем перемещения первого на расстояние, равное его длине (соответственно кратное его длине), и вычисления разницы относительно второго масштаба в длинах волн.

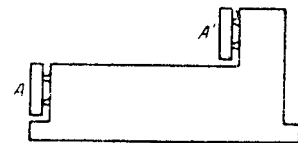
Выбрав надлежащим образом меньший масштаб и повторив несколько раз вторую операцию, мы приходим к нормальному метру.

При обеих операциях необходимо иметь критерий строгой параллельности двух стоящих рядом подвижных зеркал, которыми можно заменить одно зеркало интерферометра S_1 . Для этого служит освещение белым светом. Как мы уже указывали, в белом

¹ A. A. Michelson, Trav. mém. Bur. intern. des Poids et Més., т. 11 (1895).

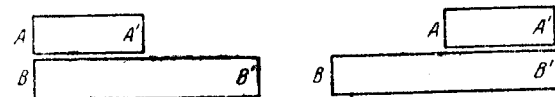
свете интерференция при отсутствии разницы хода дает темное поле зрения, следовательно, при не вполне параллельном положении зеркал получается темная средняя полоса. Поэтому надо просто передвигать S_2 и одновременно выравнивать зеркало до тех пор, пока в обеих половинах поля зрения не появится черная нулевая линия.

Для проведения первой части измерения пользуются небольшим масштабом длиной в несколько миллиметров, изображенным на фиг. 73. Он определяется двумя зеркальными поверхностями A и A' , установленными друг над другом. Они вдвое заменяют одну из половин зеркала S_1 , второй половиной которого служит какое-нибудь другое подвижное зеркало. Подвижное зеркало устанавливается с помощью вышеуказанного критерия (в белом свете) в плоскости A ; затем прибор освещают монохроматическим светом (в данном случае светом кадмиевой линии), передвигают подвижное зеркало от плоскости A к A' и при этом считают интерференционные линии, проходящие через поле зрения. Дробные части ширины полос определялись очень точно компенсатором P_2 . Правильность установки зеркал, конечно, также контролируется белым светом. Найденное число прошедших полос равно числу полуволн, уместающихся на масштабе (смещение плоскостей референции на $\frac{\lambda}{2}$ означает разность хода λ).



Фиг. 73. Масштаб к интерферометру Майкельсона.

Во второй части измерения маленький масштаб, измеренный в длинах волн, сравнивают с масштабом такого же устройства вдвое (или в несколько раз) большей длины. Две пары зеркал



Фиг. 74. Сравнение масштабов при измерении нормального метра в длинах волн.

AA' и BB' обоих масштабов разбивают поле зрения на четыре части (фиг. 74). Сначала заставляют A и B совпасть с плоскостью референции. Затем, двигая зеркало S_2 , перемещают плоскость референции, пока она не совпадет с A' , после чего передвигают меньший эталон до тех пор, пока A не окажется в плоскости референции, т. е. не займет первое положение A' . Тогда при двойной длине второго эталона новое положение A' должно почти точно совпадать с положением B' . Если это не так, что опять таки устанавливается наблюдением при белом свете, то производят перемещения в монохроматическом (кадмиевом) свете и считают прошедшие при этом полосы. В опыте

Майкельсона наименьший эталон имел длину 0,39 мм, что равно приблизительно $\frac{10 \cdot 10}{2^8} = \frac{10}{256}$ см. Майкельсон пользовался восьмью другими эталонами, из которых каждый был вдвое больше предыдущего и таким образом дошел до эталона длиной около 10 см. Этот эталон сравнивался непосредственно с нормальным метром, причем во второй операции он перемещался на девятикратную свою длину. Точная длина первого эталона (выраженная в длинах волны красной кадмиевой линии) оказалась равной $1212,35 \frac{\lambda}{2}$, а для нормального метра было найдено:

$$1 \text{ м} = 1553163,5 \lambda \pm 0,1 \lambda.$$

Этот результат дает следующее исправленное значение длины волны красной кадмиевой линии:

$$\lambda = 6438,4722 \pm 0,0001 \text{ Å}$$

при давлении 760 мм и 15°C.

В 1907 г. Бенуа, Фабри и Перо повторили сравнение длины метра с красной кадмиевой линией. Они нашли:

$$1 \text{ м} = 1553164,13 \lambda,$$

$$\lambda = 6438,4966 \text{ Å}.$$

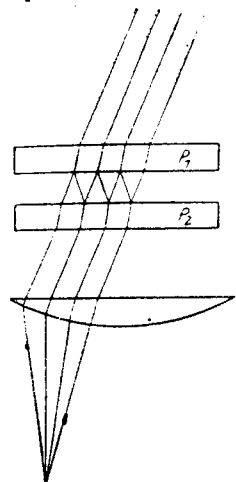
(Судя по этим данным, Майкельсон сильно переоценил точность своих измерений). Это значение λ принято теперь как окончательное; решено не менять его больше и выражать в этих единицах результаты всех других измерений длин волн. Аналогичным же образом был измерен кварцевый кубик, и таким образом была установлена единица объема и длина волн.

Интерферометр Майкельсона имеет перед прибором Жамена и Маха то преимущество, что он позволяет непрерывно изменять разность хода. Но в нем, как и в других двух приборах, интерферируют только два луча; таким образом согласно § 34 распределение силы света синусоидально.

Фабри и Перо¹ сконструировали интерферометр, дающий интерференционное изображение в виде резких черных полос. В этом приборе две стеклянные пластинки P_1 и P_2 обращены друг к другу поверхностями, покрытыми тонким полупроницаемым слоем серебра. Одна пластинка закреплена неподвижно, другая может передвигаться так, что между ними образуется строго плоскопараллельный слой воздуха (фиг. 75). Так как отражательная способность тонкого серебряного слоя очень высока, интерференционные кривые получаются очень резкие; это следует и из соображений § 39.

¹ A. Perot et Ch. Fabry, Ann. Chim. et Phys. (7), т. 12 (1897), стр. 459; т. 16 (1899), стр. 115; т. 22 (1901), стр. 564.

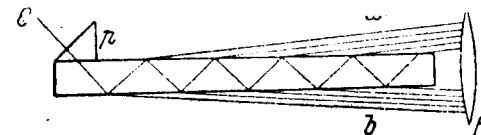
Недостаток этого интерферометра по сравнению с прибором Майкельсона в том, что нельзя сделать разность хода равной нулю, так как для этого пришлось бы сдвинуть пластинки вплотную. Очень трудно, как и в приборе Майкельсона, перемещать подвижную пластинку строго параллельно.



Фиг. 75. Интерферометр Перо и Фабри.

Интерферометр Фабри и Перо также может служить для измерения длины в волновых единицах. К применению его для целей спектроскопии мы вернемся в § 42.

Люммер и Герке¹ предложили другой способ получения возможно более высокой отражательной способности. Они воспользовались тем, что для луча, угол падения которого близок к углу полного внутреннего отражения, отражательная способность почти равна 1. Главная часть их прибора —



Фиг. 76. Пластика Люммера-Герке.

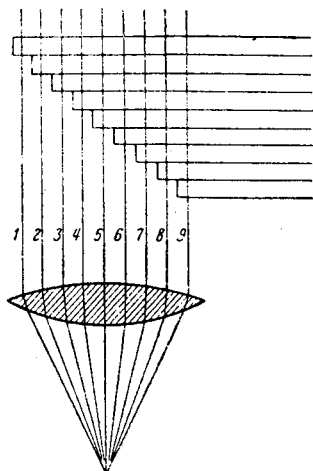
абсолютно плоскопараллельная пластинка. Простая конструкция *пластинки Люммер-Герке* показана на фиг. 76. При каждом отражении, которое претерпевает внутри пластинки падающий на C пучок, часть света выходит в воздух. Так образуются два пучка параллельных лучей a и b , каждый из которых можно собрать в некоторой точке фокальной поверхности зрительной трубы F . Изображения в проходящем и отраженном свете одинаковы, если устранить первый отраженный луч; это достигается при помощи маленькой призмы P , помещенной в начале пластинки. Получаются полосы равного наклона, узкие светлые линии на темном фоне. Пластика Люммер-Герке сыграла большую роль в спектроскопии. Мы вернемся к этому в следующем параграфе.

Той же цели служит сконструированная Майкельсоном² *ступенчатая решетка* или *эшелон*. В ней интерферируют между собой лучи, из которых каждый отличается от последующего одинаково большой разностью хода (порядка $10^4 \lambda$). Схема прибора показана на фиг. 77. Ряд плоскопараллельных стеклянных пластинок одинаковой толщины наложены одна на другую так, что каждая несколько выступает над предыдущей.

¹ O. Lummer u. E. Gehrcke, Berl. Ber., 1902, стр. 11.

² A. A. Michelson, Astrophys. J., т. 8 (1898), стр. 36; J. Physique, т. 8 (1899), стр. 305.

В аккомодированную на бесконечность зрительную трубу F видны кривые равного наклона, причем для различных длин волн получаются различные системы окружностей. Вследствие большого числа пластинок (до 35) светлые линии (согласно § 39) резки и узки.



Фиг. 77. Ступенчатая решетка или эшелон Майкельсона.

Ступенчатая решетка имеет то преимущество перед пластинкой Льюмер-Герке, что отдельные интерферирующие лучи имеют почти одинаковую и сравнительно высокую интенсивность. Разрешающая способность эшелона, о которой мы будем говорить в следующем параграфе, также выше. Работа с эшелоном легче, чем с пластинкой Льюмер-Герке, так как установка его проще.

42. ИНТЕРФЕРЕНЦИОННЫЕ СПЕКТРОСКОПЫ И ИХ РАЗРЕШАЮЩАЯ СПОСОБНОСТЬ

Перейдем к применению интерференционных приборов в спектроскопии.

Спектроскопия есть разложение волн, испускаемых источником света, на простые гармонические составляющие.

Одним из наиболее употребительных для этой цели приборов является *спектрограф с призмой*, основанный на различной преломляемости волн с различной частотой (вакуумной длиной волны). Другой прибор, часто дающий лучшие результаты, есть *дифракционная решетка*, но так как в ней главную роль играют не простые интерференционные, а дифракционные явления, то мы рассмотрим принцип ее действия в следующей главе. Сейчас же мы будем заниматься только такими приборами, в которых свет разлагается при помощи интерференции двух или небольшого числа лучей. Мы уже видели, что положение интерференционного максимума зависит от длины волны; таким образом распределение яркости дает более или менее чистый спектр („чистый“ значит в данном случае то, что лучи разной частоты достаточно пространственно разделены). Так как отдельное гармоническое колебание дает не один интерференционный максимум, а целую систему их, то падающий свет дает также не один спектр, а целый ряд спектров, которые в общем случае налагаются друг на друга. В данном приборе это наложение чрезвычайно сильно, — именно, при относительно небольшом изменении частоты некоторый определенный максимум смещается значительно дальше положения соседнего максимума при первоначальной частоте. Ввиду этого при применении данного метода необходимо производить „предварительное разложение“, т. е. сначала пропустить свет через спектральный прибор небольшой силы (призму, решетку), затем при помощи

диафрагмы выделить относительно узкую часть спектра (окрестность спектральной линии), которую и исследовать прибором большей разлагающей способности.

Рассмотрим по порядку описанные в предыдущем параграфе приборы с точки зрения их применимости к спектроскопии. Их можно разделить на две категории, смотря по тому — два или несколько пучков участвуют в интерференции. К первой категории принадлежит прибор Майкельсона, ко второй — прибор Перо-Фабри, пластинка Льюмера и эшелон.

В первой категории распределение силы света для данной частоты синусоидально (§ 39); для монохроматического света единственный максимум интерференции является не резкой линией, а широкой расплывчатой каймой.

ОПЕЧАТКА

Стр.	Строка	Напечатано	Должно быть
180	5 сверху	резки и узки.	резки и узки. (Прим. 14).

№ 459.

для λ_1 и λ_2 появляются две системы интерференционных кривых, которые постепенно удаляются друг от друга, и интерференционное изображение становится периодически то резким, то размытым: оно резко (максимум видимости), когда разность хода есть целое кратное обеих длин волн; оно размыто (минимум видимости), когда разность хода есть четное кратное одной полуволны и нечетное — другой полуволны, так как в этом случае максимум одной волны совпадает с минимумом другой. Если, кроме того, силы света обеих линий равны, то при минимуме видимости поле зрения представляется равномерно освещенным. Наблюдая разности хода, при которых получают резкие изображения, можно вычислить разность длин волн обеих линий, если известна средняя длина волны.

Физо удалось установить этим методом, что желтая D -линия натрия состоит из двух очень близких линий. Он наблюдал в желтом натриевом свете линии равной толщины (ньютоновы линии) между двумя плоскопараллельными пластинками, из которых верхняя могла параллельно перемещаться; при этом перемещались интерференционные полосы. С увеличением числа N полос, прошедших в поле зрения, полосы становились все менее отчетливыми. При $N=490$ видимость достигала минимума, затем опять увеличивалась; при $N=980$ полосы приобретали прежнюю отчетливость. Ближайший минимум наступал при 1470, следующий максимум — при 1960. Физо сумел заметить 52 таких максимума. Это значит следующее: если представить себе, что оба ряда волн λ_1 и λ_2 перемещаются в одном и том же направлении,

диафрагмы выделить относительно узкую часть спектра (окрестность спектральной линии), которую и исследовать прибором большей разлагающей способности.

Рассмотрим по порядку описанные в предыдущем параграфе приборы с точки зрения их применимости к спектроскопии. Их можно разделить на две категории, смотря по тому — два или несколько пучков участвуют в интерференции. К первой категории принадлежит прибор Майкельсона, ко второй — прибор Перо-Фабри, пластинка Льюмера и эшелон.

В первой категории распределение силы света для данной частоты синусоидально (§ 39); для монохроматического света единственный максимум интерференции является не резкой линией, а широкой расплывчатой полосой.

Таким образом эти приборы, повидимому, совершенно непригодны для спектроскопии, и, действительно, в настоящее время ими уже не пользуются. Но в историческом развитии они сыграли важную роль, ибо, как уже признал Физо, из наблюдений „над видимостью“ интерференционных полос при увеличивающейся разности хода, можно косвенным путем вывести заключение относительно структуры падающего света.

Если падающий свет состоит из двух очень близких линий с длинами волн λ_1 и λ_2 , то при изменении разности хода наблюдается следующее. Когда разность хода возрастает от нуля, для λ_1 и λ_2 появляются две системы интерференционных кривых, которые постепенно удаляются друг от друга, и интерференционное изображение становится периодически то резким, то размытым: оно резко (максимум видимости), когда разность хода есть целое кратное обеих длин волн; оно размыто (минимум видимости), когда разность хода есть четное кратное одной полуволны и нечетное — другой полуволны, так как в этом случае максимум одной волны совпадает с минимумом другой. Если, кроме того, силы света обеих линий равны, то при минимуме видимости поле зрения представляется равномерно освещенным. Наблюдая разности хода, при которых получаются резкие изображения, можно вычислить разность длин волн обеих линий, если известна средняя длина волн.

Физо удалось установить этим методом, что желтая D-линия натрия состоит из двух очень близких линий. Он наблюдал в желтом натриевом свете линии равной толщины (ньютонovy линии) между двумя плоскопараллельными пластинками, из которых верхняя могла параллельно перемещаться; при этом перемещались интерференционные полосы. С увеличением числа N полос, прошедших в поле зрения, полосы становились все менее отчетливыми. При $N=490$ видимость достигала минимума, затем опять увеличивалась; при $N=980$ полосы приобретали прежнюю отчетливость. Ближайший минимум наступал при 1470, следующий максимум — при 1960. Физо сумел заметить 52 таких максимума. Это значит следующее: если представить себе, что оба ряда волн λ_1 и λ_2 перемещаются в одном и том же направлении,

то один ряд обгоняет другой как раз на длину волны через каждые 980 более длинных волн (или 981 более коротких). Поэтому

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{981}{980} \quad \text{или} \quad \frac{d\lambda}{\lambda} = \frac{1}{980}.$$

$$\lambda = 5893 \text{ Å, следовательно } d\lambda = 6,02 \text{ Å} = 6,02 \cdot 10^{-8} \text{ см.}$$

Таким образом косвенно обнаруживается, что натриевая линия двойная.

Майкельсон разработал дальше этот метод с помощью своего более совершенного прибора и применил его к сложным линиям. Ему удалось определить этим способом тонкую структуру большого числа линий.

Этот метод позволяет также судить о *распределении интенсивности внутри отдельных спектральных линий*.

Мы должны сделать здесь одно замечание относительно происхождения и природы *линейчатых спектров*, хотя мы еще будем дальше подробно рассматривать этот вопрос (в главе VIII). Светящиеся газы испускают линейчатые спектры, тогда как раскаленные твердые тела дают непрерывные спектры. Отдельные линии бывают часто чрезвычайно узки и кажутся тем уже, чем сильнее употребляемый спектральный прибор. Но это сужение имеет предел; даже в самых сильных приборах линии имеют некоторую конечную *ширину*. Таким образом в действительности так называемая спектральная линия не монохроматична, а представляет собою некоторый непрерывный спектр, сжатый в чрезвычайно узкой области частот. Строго монохроматическим было бы в принципе такое колебание, которое изображается рядом волн, бесконечным в обе стороны. Ясно, что ничего подобного не может существовать в природе. Каждый колебательный процесс должен когда-то начаться и когда-то кончиться.

Таким образом волновой ряд, обрывающийся в некоторой неподвижной точке пространства, можно выразить следующей функцией:

$$\left. \begin{aligned} f(t) &= A \sin \omega t \text{ в интервале } 0 \leq t \leq T, \\ f(t) &= 0 \text{ вне этого интервала.} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Эту функцию можно разложить в интеграл Фурье, т. е. представить как результат наложения строго монохроматических колебаний; мы получим определенное распределение интенсивности, причем наибольшая часть интенсивности сосредоточена в тем более узкой области частот, чем больше время T . В главе VIII мы подробно рассмотрим эти соотношения, теперь же только укажем, что между шириной линии $\Delta\omega = \gamma$ и периодом T свободного колебания или длиной L ряда волн существует зависимость:

$$T = \frac{L}{c} \sim \frac{1}{\gamma}. \quad (2)$$

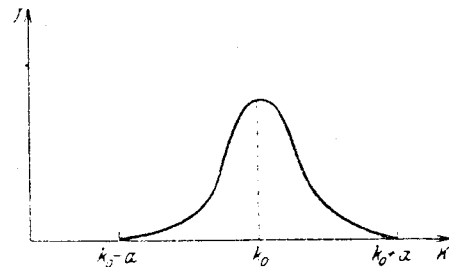
Впрочем, функция (1) является лишь грубым описанием действительного процесса. Представим себе излучающий атом в состоянии колебания. Вследствие излучения он будет терять энергию, амплитуда будет с течением времени убывать, и каждый элементарный акт светового излучения будет соответствовать затухающему колебанию. Кроме того, излучающие атомы не находятся в покое, а участвуют в тепловом движении, что вызывает по принципу Доплера размытость частоты испускаемого света. Наконец, каждый атом не излучает независимо от других, а все атомы влияют друг на друга и мешают один другому, что также ухудшает монохроматичность.

Все это мы систематически исследуем в главе VIII. Но уже и из сказанного ясно, что нелегко дать точное определение того, что собственно надо понимать под свободным периодом колебания T или свободной длиной L ; точно так же приближенное соотношение (2), дающее лишь порядок величин, можно заменить точным уравнением только на основе углубленной теории процесса излучения.

С другой стороны, желательно иметь чисто эмпирический критерий невозмущенности колебания, измеряемый как *время когерентности* или *длина когерентности*, а это возможно только с помощью приборов, в которых световой луч расщепляется на две части, интерферирующие затем при некоторой разности хода (как в интерферометре Майкельсона). Наибольшую разность хода, при которой еще наблюдаются интерференционные линии, называют *длиной когерентности* начального света, а $T = \frac{L}{c}$ называется *временем когерентности*. Теоретически

можно вычислить эти величины, задавшись некоторыми гипотезами относительно формы спектральных линий.

Пусть h — толщина пластинки, на которой наблюдают интерференцию; тогда $l = 2h$ есть разность хода. Если интенсивность падающего света J_0 , то согласно § 34 (14) распределение интенсивности в поле зрения интерферометра:



Фиг. 78. К интерферометрическому определению ширины спектральных линий.

$$J_k = J_0 \left[1 + \cos \left(2\pi \frac{l}{\lambda} \right) \right]. \quad (3)$$

Введя вместо длины волны умноженное на 2π волновое число $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, мы получим из уравнения (3):

$$J_k = J_0 [1 + \cos(lk)]. \quad (4)$$

Положим, что распределение силы падающего света в узкой области, соответствующей волновым числам спектральной линии, выражается функцией $\psi(k)$ (фиг. 78), причем лучи, относящиеся к различным k , могут быть некогерентны. Тогда полная (суммарная) сила света равна:

$$J = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(k) [1 + \cos(lk)] dk; \quad (5)$$

вместо этих пределов можно также подставить $k_0 - a$ и $k_0 + a$, где k_0 — точка максимума интенсивности (середина линии), а a выбрано так, что функция $\psi(k)$ исчезает в интервале $(k_0 - a, k_0 + a)$. Введем вместо k расстояние от середины линии:

$$x = k - k_0;$$

тогда

$$J = \int_{-a}^{+a} \psi(x) \{1 + \cos[l(k_0 + x)]\} dx, \quad (6)$$

причем полагаем:

$$\varphi(x) = \psi(k_0 + x).$$

Введем также обозначения:

$$P = \int_{-a}^{+a} \varphi(x) dx, \quad (7)$$

$$C = \int_{-a}^{+a} \varphi(x) \cos(lx) dx, \quad (8)$$

$$S = \int_{-a}^{+a} \varphi(x) \sin(lx) dx, \quad (9)$$

$$\vartheta = lk_0. \quad (10)$$

Тогда

$$J = P + C \cos \vartheta - S \sin \vartheta. \quad (11)$$

Так как k_0 очень большое число, то при малом изменении l величина ϑ изменяется значительно. Наоборот, x ограничено небольшим интервалом $(-a, +a)$, так что при малых изменениях l величина lx изменяется также мало. Поэтому интегралы C и S мало зависят от l .

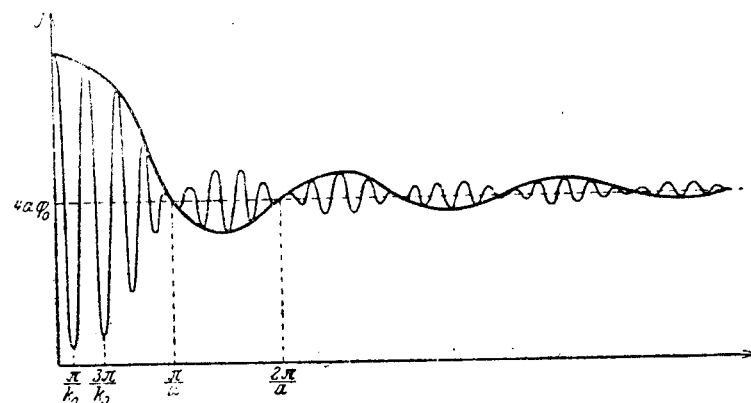
Относительно формы спектральной линии проще всего предположить, что она имеет вид прямоугольника, т. е.

$$\begin{cases} \varphi(x) = \text{const} = \varphi_0 & \text{при } |x| \leq a, \\ \varphi(x) = \text{const} = 0 & \text{при } |x| > a; \end{cases} \quad (12)$$

тогда мы будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} P &= \varphi_0 \cdot 2a = 2a\varphi_0, \\ C &= \varphi_0 \int_{-a}^{+a} \cos(lx) dx = 2a\varphi_0 \frac{\sin(la)}{la}, \\ S &= \varphi_0 \int_{-a}^{+a} \sin(lx) dx = 0. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Мы видим, что C есть осциллирующая функция медленно изменяющейся величины la . Поэтому мы можем рассматривать интенсивность J так же, как быстро осциллирующую функцию l , амплитуда которой в свою очередь медленно осциллирует.



Фиг. 78. Кривая видимости спектральной линии с „прямоугольным“ распределением интенсивности.

На фиг. 79 графически изображены выражения (11) и (13):

$$J = 2a\varphi_0 \left[1 + \frac{\sin(la)}{la} \cos(lk_0) \right].$$

Расстояние между узлами быстрой осцилляции равно $\frac{\pi}{k_0}$; следовательно, расстояние $\frac{\pi}{a}$ между двумя биениями относительно очень велико.

Если требуется вычислить величины отдельных максимумов и минимумов, то мы можем рассматривать C и S как независимые от l величины. Имеем:

$$\frac{dJ}{d\vartheta} = \frac{1}{k_0} \frac{dJ}{dl} = 0 = -C \sin \vartheta - S \cos \vartheta;$$

следовательно,

$$\operatorname{tg} \vartheta = -\frac{S}{C}. \quad (14)$$

Мы имеем постепенно ослабевающую кривую видимости без колебаний отчетливости. Для (21) можно также написать:

$$I\delta = 4c \sqrt{-\frac{1}{2} \log v}.$$

Примем здесь ту же границу видимости, какую мы выбрали выше для прямоугольной формы линии, именно — относительную высоту первого второстепенного максимума, $v = 0,045$; тогда мы получим следующее значение времени когерентности:

$$T = \frac{L}{c} = \frac{4}{\delta} \sqrt{-\frac{1}{2} \log v} = \frac{4}{\delta} \sqrt{-\frac{1}{2} \log 0,045} = \frac{4,98}{\delta}. \quad (22)$$

Здесь мы получаем несколько иной числовой множитель¹ для пропорции (2).

В качестве следующего примера рассмотрим форму линии, соответствующей излучению, исходящему от затухающего резонатора. Оно проявляется почти в чистом виде при высоких давлениях и низких температурах:

$$\varphi(x) = \frac{1}{x^2 + \left(\frac{\gamma}{2c}\right)^2}; \quad (23)$$

здесь γ играет роль ширины линии; $\omega - \omega_0 = cx = \frac{\gamma}{2}$ есть место, в котором интенсивность убывает наполовину; γ есть так называемая половинная ширина.

Так как здесь мы также должны принять a равным бесконечности, мы получим в этом случае из формул (7), (8), (9) с помощью подстановки² $x = \frac{\gamma}{2} \operatorname{tg} \varphi$:

$$\left. \begin{aligned} P &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + \left(\frac{\gamma}{2c}\right)^2} = \frac{2c}{\gamma} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} d\varphi = \frac{2\pi c}{\gamma}, & (a) \\ C &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(lx) dx}{x^2 + \left(\frac{\gamma}{2c}\right)^2} = \frac{2\pi c}{\gamma} e^{-\frac{l\gamma}{2c}}, & (b) \\ S &= 0; & (c) \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

¹ Если вместо δ пользоваться половинной шириной, надо подставить вместо δ величину $\delta \sqrt{\log 2}$. Тогда числовой множитель в выражении (22) будет 5,98.

² См. например Курант-Гильберт т. I, стр. 76 или P. Frank u. R. v. Mises: Die Differentialgleichungen und Integralgleichungen der Mechanik und Physik 2-е издание (сравни 8-е издание Riemann-Webers, Partiiellen Differentialgleichungen der mathematischen Physik), т. I, гл. 4, § 34, стр. 209. Braunschweig, 1930.

отсюда получается:

$$v = \left(\frac{C}{P}\right)^2 = e^{-\frac{l\gamma}{c}}, \quad (25)$$

и, предполагая, что граница видимости лежит при $v = 0,045$, получаем:

$$T = \frac{L}{c} = -\frac{1}{\gamma} \log v = \frac{3,30}{\gamma}. \quad (26)$$

Мы опять получаем несколько отличный числовой множитель, который, однако, во всех рассмотренных примерах имеет один и тот же порядок величины.

Имеются условия, при которых ни один из данных выше законов (19) и (23) для форм спектральной линии не является справедливым; в этих случаях мы имеем дело как бы с наложением обоих законов (глава VIII, § 93), которое можно выразить следующим образом:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi} \cdot \eta} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\left(\frac{z-y}{\eta}\right)^2}}{1+y^2} dy; \quad (27)$$

при этом

$$z = \frac{2c}{\gamma} x = \frac{2}{\gamma} (\omega - \omega_0), \quad \eta = \frac{\delta}{\gamma}. \quad (28)$$

Здесь также легко вычислить интегралы P и C (опять $S = 0$); мы получаем¹:

$$v = e^{-\frac{2}{\gamma} \left(\frac{l\delta}{4c}\right)^2} = e^{-\frac{l\gamma}{c}}; \quad (29)$$

таким образом функция видимости является произведением соответствующих функций (21) и (25).

Время когерентности (для $v = 0,045$):

$$T = \frac{L}{c} = \frac{4}{\delta \eta} \left(\sqrt{1 - \frac{\eta^2}{2} \log v} - 1 \right) = \frac{4}{\delta \eta} (\sqrt{1 + 1,60 \cdot \eta^2} - 1); \quad (30)$$

в этом выражении содержатся выражения (22) и (26) как предельные случаи при $\eta = \infty$ и $\eta = 0$. Возьмем в качестве промежуточного случая $\eta = 1$, т. е. $\delta = \gamma$; получим:

$$T = \frac{L}{c} = 2,45 \cdot \frac{1}{\delta}. \quad (31)$$

¹ Этот вывод дан Ф. Рейхе (F. Reiche) в его (неопубликованной) бреславльской диссертации. Небольшую выдержку из этой работы см. в Verh. dtsh. Physik. Ges., т. 15 (1913), стр. 3.

Ввиду того, что нас интересует не только граница видимости, но и количественная зависимость видимости от l , можно было бы попытаться с помощью более тонкого измерения чисто эмпирическим путем более точно определить формы спектральных линий, чем это возможно, например, с помощью одной постоянной „ширины линии“; можно также определить ассиметричность, которую выражает S . Однако подобные попытки не дали результатов.

В настоящее время предпочитают определять ширину линии с помощью просто разрешающих спектральных аппаратов. Полученное таким путем значение хорошо согласуется со значениями, найденными измерением видимости интерференционных линий. Особенно упорно исследовалась зеленая линия Hg. Майкельсон дошел до разности хода 540 000 длин волн, Перо и Фабри — до 790 000 и, наконец, Люммер и Герке поставили рекорд: 2 600 000 λ . Но так как большинство линий имеют тонкую структуру и даже так называемую сверхтонкую структуру, то подобное косвенное определение ширины линий не имеет в настоящее время большого значения.

Прежде чем обратиться к имеющей гораздо большее значение прямой интерференционной спектроскопии, заметим, что метод видимости применяется не только для разделения лучей различных частот, но и для разделения лучей различных направлений, в особенности для определения углового расстояния двойных звезд или диаметров звезд. Но так как здесь играют большую роль явления дифракции, то мы будем рассматривать эти методы в следующей главе (глава VI, § 54).

Переходим теперь к приборам второй категории, которые лужат для прямой интерференционной спектроскопии. Они основаны на интерференции уже не двух, а возможно большего числа лучей, благодаря чему получаются резкие максимумы для каждой частоты. Мы уже дали в § 39 формулы для распределения интенсивности в интерференционном изображении для случая, когда пучки лучей получаются путем многократного отражения от стеклянного или воздушного слоя. Для случая сильного отражения ($r \approx 1$) имеем:

$$J_d = d^2 r^{p-1} \frac{\sin^2 p\delta}{\sin^2 \delta}, \quad (32)$$

где

$$\delta = \frac{2\pi h}{\lambda} \cos \psi \quad (33)$$

есть разность фаз для угла ψ .

Интерференционное изображение состоит из ряда главных максимумов при $\delta = 0, \pi, 2\pi$ и т. д. и находящихся между ними слабых второстепенных максимумов при $\delta = \frac{3}{2} \cdot \frac{\pi}{p}, \frac{5}{2} \cdot \frac{\pi}{p} \dots$

Разрешающей способностью аппарата называется дробь $\frac{\lambda}{d\lambda}$, где $d\lambda$ означает разность двух длин волн, которые могут быть разделены наблюдением; мы подробно остановимся на этом понятии в следующей IV главе в § 53. За границу $d\lambda$ принимают расстояние главного максимума от первого минимума ($\delta = \frac{\pi}{p}$). При постоянном h и ψ изменению длины волны на $d\lambda$ соответствует изменение фазы $d\delta$, которое можно найти из уравнения (33) путем логарифмического дифференцирования:

$$\frac{d\delta}{\delta} = \frac{d\lambda}{\lambda}. \quad (34)$$

Если же нас интересует m -тый главный максимум $\delta = m\pi$, то мы получим, подставив это значение в расстояние $d\delta = \frac{\pi}{p}$ от первого минимума:

$$\frac{\lambda}{d\lambda} = mp. \quad (35)$$

Таким образом разрешающая способность равна целому числу, именно произведению числа p интерферирующих пучков на номер m рассматриваемого главного максимума, который является изображением монохроматической волны в спектре. m называется также порядком спектра (см. также стр. 238).

Для получения высокой разрешающей способности можно увеличить либо p либо m . В рассмотренных выше интерференционных приборах величина p ограничена; так, в пластинках Люммер-Герке она ограничена расстоянием между ними, в эшелоне Майкельсона — числом ступеней, а в интерферометре Перо-Фабри отражающей способностью [в уравнении (32) множитель r^{p-1} мал для больших p , интерференция несовершенна]. В настоящее время в лучших интерференционных приборах p достигает самое большее 45. Для увеличения разрешающей способности надо увеличить m , т. е. работать с большим расстоянием между пластинками. Это имеет, однако, то неудобство, что спектры соседних порядков все более сближаются; так, m -тый главный максимум длины волны λ_1 совпадает с $m+1$ -ым максимумом длины волны λ_2 , когда:

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{m+1}{m}; \quad \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \cdot \frac{\lambda_2}{\lambda_2} = \frac{1}{m}.$$

Таким образом при увеличивающемся m расстояние между спектрами соседних порядков очень мало (для разделения желтых D -линий натрия, о которых мы говорили выше на стр. 181, m должно

быть больше или равно 980). На это обстоятельство мы уже указывали в введении в этот параграф и подчеркивали необходимость вследствие этого работать с интерференционными приборами с предварительным разложением. Наиболее высокая достижимая разрешающая способность в видимом свете порядка 1 000 000. Для штриховой решетки, разрешающая способность которой дается той же формулой (глава IV, § 53), число интерферирующих пучков равно числу штрихов и может быть очень велико (до 100 000), поэтому можно работать без предварительного разложения при малых порядках (m здесь 3 или 4) (см. примечание 10).

Глава четвертая

ДИФРАКЦИЯ

§ 43. СУЩНОСТЬ ДИФРАКЦИОННЫХ ЯВЛЕНИЙ. СФЕРИЧЕСКИЕ ВОЛНЫ

Мы перейдем теперь к тем световым явлениям, которых нельзя объяснить, исходя из представления о свете, как о плоских волнах (или перпендикулярных к ним лучах). В действительности не существует резкой границы тени — свет как бы „заворачивает за угол“. Этому факту соответствует в нашей математической теории то обстоятельство, что плоская волна является лишь совершенно особым, частным решением уравнений Максвелла главы I, § 1 (1). На деле имеют место более общие решения. Только потому, что длина волны мала относительно линейных размеров диафрагмы, получается впечатление прямолинейного распространения света, и дифракционные явления не бросаются в глаза.

Первое упоминание о них мы находим у Леонардо да-Винчи (1452—1519). Первое более точное описание их дал Гримальди. Современная ему и господствовавшая еще во времена Ньютона теория истечения не могла дать простого объяснения дифракционных явлений. Первому пионеру волновой теории — Гюйгенсу открытие Гримальди было, повидимому, неизвестно, иначе бы он, конечно, воспользовался им для подтверждения своих идей. В самом деле, как показал столетием позже (1818) Френель, из принципа Гюйгенса, о котором мы будем говорить в следующем параграфе, целиком вытекают все главные черты дифракции.

В дальнейшем мы будем придерживаться исторического порядка, однако, при этом мы все время будем исходить из электромагнитной теории света и вводить возможные упрощения общих законов для того, чтобы теория соответствовала наблюдаемому явлению.

Мы уже показали в главе II, § 14, что каждая составляющая векторов электромагнитного поля \mathcal{E} и \mathcal{H} удовлетворяет волновому уравнению, имеющему вид:

$$\Delta u - \frac{1}{c_1^2} \ddot{u} = 0, \quad (1)$$

где $c_1 = \frac{c}{\sqrt{\epsilon}}$ есть скорость света в среде с диэлектрической постоянной ϵ ($\mu = 1$). В качестве решений этого уравнения можно выбрать составляющие \mathcal{E} , а затем подобрать составля-

ющие § так, чтобы удовлетворялись уравнения Максвелла. Таким образом уравнение (1) практически заменяет собой систему уравнений Максвелла.

Если пренебречь поляризацией и влиянием на нее диафрагмы (граничные условия у твердого тела), то достаточно рассматривать только одну составляющую \mathcal{E} , которую мы обозначаем в уравнении (1) буквой u . В дальнейшем мы ограничимся чисто периодическими явлениями с временным множителем $e^{i\omega t}$ и положим (несколько отступая от употребления букв в главе II, § 14):

$$k = \sqrt{\varepsilon} \frac{\omega}{c} = \frac{\omega}{c_1} = \frac{2\pi\nu}{c_1} = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi n}{\lambda_0}.$$

Тогда волновое уравнение будет:

$$\Delta u + k^2 u = 0. \quad (2)$$

До сих пор мы рассматривали всегда плоские волны, т. е. решения вида (глава II, § 14):

$$u = e^{ik(r\hat{s})}, \quad |\hat{s}| = 1.$$

Следующим по простоте и важности решением являются сферические волны, т. е. такое решение, в котором u зависит только от $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. В этом случае, если $u' = \frac{du}{dr}$, имеем:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = u' \frac{x}{r}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = u'' \frac{x^2}{r^2} + u' \left(\frac{1}{r} - \frac{x^2}{r^3} \right).$$

Следовательно:

$$\Delta u = u'' + \frac{2}{r} u' = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 u') = \frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} (ru). \quad (3)$$

Подставим полученное выражение в волновое уравнение:

$$\frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} (ru) + k^2 u = 0. \quad (4)$$

После подстановки $v = ru$ уравнение (4), очевидно, переходит в обычное одномерное уравнение колебания:

$$v'' + k^2 v = 0,$$

решением которого является:

$$v = e^{\pm ikr}.$$

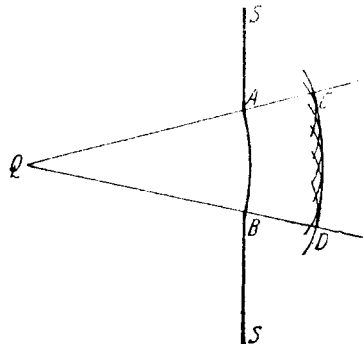
Отсюда получаем следующее решение волнового уравнения (4):

$$u = \frac{e^{\pm ikr}}{r}. \quad (5)$$

Присоединив сюда опять временный множитель $e^{i\omega t}$, мы увидим, что положительный знак показателя степени в (5) соответствует приходящей сферической волне, а отрицательный знак — уходящей. Написав этот множитель в форме $e^{-i\omega t}$, мы заменим это соответствие обратным. Подобными сферическими волнами можно воспользоваться, чтобы изложить в простой форме рассуждения Гюйгенса.

§ 44. ПРИНЦИП ГЮЙГЕНСА

Большой трудностью, которую волновой теории пришлось преодолеть, было объяснение кажущегося прямолинейного распространения света. Ньютон считал это возражение настолько веским, что отверг волновую теорию. Однако Гюйгенсу удалось найти ключ к загадке. Этим ключом явился принцип Гюйгенса, согласно которому каждая точка, в которой имеется световое возбуждение, может быть рассматриваема как источник вторичной сферической волны. При этом отдельная вторичная волна крайне слаба. Сила света, доступная наблюдению, возникает лишь в результате наложения волн. Геометрическим местом волн, возникших в результате наложения, является по Гюйгенсу огибающая вторичных сферических волн.



Фиг. 80. Принцип Гюйгенса:

Пусть дан, например (фиг. 80), источник света Q , окруженный экраном S , в котором имеется отверстие. Представим себе начальную волну, свободно распространяющуюся до отверстия AB ; затем построим в каждой точке сферической поверхности, вырезанной отверстием, вторичные сферы одинакового радиуса. Огибающей этих вторичных волн будет кусок сферической поверхности CD , описанной вокруг Q . Этот кусок сферы представляет световое возбуждение в некоторый следующий момент. По ту сторону границы тени QAC или QBD никакой огибающей нет, — так как отдельные вторичные волны недоступны наблюдению, то там должна господствовать полная темнота. Таким образом объясняется резкость границы тени. Вместе с тем становится понятным и слабое „загибание“ света. Гюйгенс, не знавший наблюдений Гримальди, не обратил внимания на этот пункт. Мы уже показали в главе I, § 4, каким образом из этого принципа выводятся законы отражения и преломления.

Против принципа Гюйгенса можно выставить возражение, что исходящие из сферического отрезка AB вторичные волны должны иметь огибающую не только впереди, но и позади, — следовательно, нужно ожидать, что свет из AB распространяется и назад. Таким образом принцип обладает пробелом

на огибающей поверхности; очевидно, не всегда происходит усиление, а во многих случаях и затухание вторичных волн.

Этот пробел был заполнен Френелем. Он дополнил принцип Гюйгенса, связав его с принципом суперпозиции, который мы уже постоянно применяли в теории интерференции. Приведем основные идеи рассуждений Френеля.

Рассмотрим распространяющуюся из Q световую волну и исследуем силу светового возбуждения в некоторой точке P (фиг. 81) сначала при свободном распространении, а затем для случая, когда на пути помещена диафрагма. Представим себе по Гюйгенсу, что свет дошел до сферической поверхности AB радиуса r_0 ; из каждого элемента $d\sigma$ этой промежуточной волновой поверхности должна исходить вторичная сферическая волна, интенсивность которой мы вместе с Френелем будем считать функцией направления волновой нормали; она должна иметь максимум в направлении нормали $d\sigma$ и резко убывать с другой стороны.

Пусть K есть такая функция направления; тогда

$$\left. \begin{array}{l} K = \text{Max. нормально} \\ K = 0 \text{ касательно} \end{array} \right\} \text{ к элементу } d\sigma \text{ поверхности } AB.$$

Амплитуду волны, распространяющейся из $d\sigma$, будем впредь обозначать:

$$K \frac{e^{ikr}}{r} d\sigma.$$

Амплитуда начального (первичного) возбуждения в $d\sigma$ есть:

$$\frac{e^{ikr_0}}{r_0}.$$

Следовательно, часть световой амплитуды в P , даваемая элементом поверхности $d\sigma$, равна:

$$\frac{e^{ikr_0}}{r_0} \cdot \frac{e^{ikr}}{r} d\sigma.$$

Суммарное возбуждение в P равно:

$$u_P = \frac{e^{ikr_0}}{r_0} \iint \frac{e^{ikr}}{r} K d\sigma. \quad (1)$$

В соответствии с установленными условиями относительно функции K интегрирование производится по обращенной к точке P части сферической поверхности AB , поскольку она не заслонена диафрагмами. Прежде всего допустим, что диафрагм нет. Тогда мы разбиваем по Френелю поверхность интегрирования описанными из точки P сферами на зоны Z_1, Z_2, \dots Эти зоны строятся

таким образом: пусть b есть расстояние точки P от сферы AB ; тогда мы описываем вокруг P сферы с радиусами

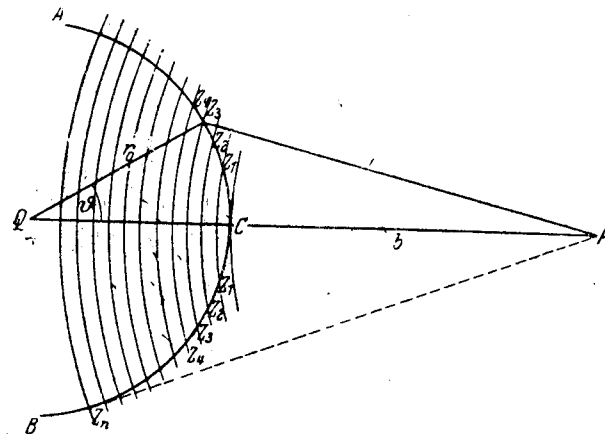
$$b, b + \frac{\lambda}{2}, b + \lambda, b + \frac{3\lambda}{2}, \dots, b + \frac{h\lambda}{2}, \dots$$

Каждые две соседние сферы вырезают из AB одну из зон (фиг. 81). Положим, что длина волны λ мала по сравнению как с r_0 , так и с r . Тогда можно считать, что внутри каждой зоны угол между выходящим из P и идущим дальше из Q лучами, а также функция K — постоянны ($=K_h$). Имеем теперь (фиг. 81):

$$r^2 = r_0^2 + (r_0 + b)^2 - 2r_0(r_0 + b) \cos \vartheta.$$

Следовательно:

$$r dr = r_0(r_0 + b) \sin \vartheta d\vartheta.$$



Фиг. 81. Построение зон Френеля.

Для элемента поверхности на AB мы получим поэтому:

$$d\sigma = r_0^2 \sin \vartheta d\vartheta d\varphi = \frac{r_0}{r_0 + b} r dr d\varphi. \quad (2)$$

Часть общего возбуждения, даваемая h -той зоной, равна, следовательно:

$$\begin{aligned} u_h &= 2\pi \frac{e^{ikr_0}}{r_0 + b} K_h \int_{b + \frac{h-1}{2}\lambda}^{b + \frac{h}{2}\lambda} e^{ikr} dr = \\ &= -\frac{2\pi i}{k} K_h \frac{e^{ik(r_0 + b)}}{r_0 + b} e^{ik \frac{h}{2}\lambda} \left(1 - e^{-ik \frac{\lambda}{2}} \right). \end{aligned}$$

Так как $k\lambda = 2\pi$, то последние два множителя примут вид:

$$e^{ik\frac{h}{2}\lambda} \left(1 - e^{-ik\frac{\lambda}{2}}\right) = e^{i\pi h} (1 - e^{-i\pi}) = (-1)^h \cdot 2,$$

и поэтому

$$u_h = -2i\lambda (-1)^h K_h \frac{e^{ik(r_0+b)}}{r_0+b}. \quad (3)$$

Таким образом зоны посылают в точку P то положительную, то отрицательную амплитуду. Суммарное (полное) возбуждение в P равно:

$$u_P = 2\lambda \frac{e^{ik(r_0+b) + \frac{i\pi}{2}}}{r_0+b} \sum_h (-1)^{h+1} K_h, \quad (4)$$

где i заменено через $e^{i\pi/2}$. Из этой формулы видно, что зависимость функции K от направления была необходимым предположением; если бы K не зависело от направления, сумма приняла бы вид:

$$K \sum_h (-1)^{h+1}$$

и равнялась бы попеременно K и 0 , в зависимости от числа зон. При нашем же предположении K_h убывает постепенно с возрастанием h , так как чем выше зона, тем более касательным к элементу $d\sigma$ становится направление от $d\sigma$ к P .

Теперь мы можем следующим образом приближенно суммировать ряд:

$$\sum_{h=1}^n (-1)^{h+1} K_h = K_1 - K_2 + K_3 - \dots + (-1)^{n+1} K_n. \quad (5)$$

Положим, что n нечетно; тогда ряд можно написать в следующих двух различных видах:

$$\sum = \frac{K_1}{2} + \left(\frac{K_1}{2} - K_2 + \frac{K_3}{2}\right) + \dots + \left(\frac{K_{n-2}}{2} - K_{n-1} + \frac{K_n}{2}\right) + \frac{K_n}{2} \quad (6)$$

или же

$$\sum = \left(K_1 - \frac{K_2}{2}\right) - \left(\frac{K_2}{2} - K_3 + \frac{K_4}{2}\right) - \dots - \left(\frac{K_{n-1}}{2} - K_n\right). \quad (7)$$

Предположим сначала, что каждое значение K_h больше среднего арифметического из двух соседних значений K_{h-1} и K_{h+1} ; тогда выражения в скобках в обоих рядах отрицательны, так что из первого уравнения следует:

$$\sum < \frac{K_1}{2} + \frac{K_n}{2},$$

а из второго:

$$\sum > K_1 - \frac{K_2}{2} - \frac{K_{n-1}}{2} + K_n.$$

Таким образом мы можем написать:

$$K_1 - \frac{K_2}{2} - \frac{K_{n-1}}{2} + K_n < \sum < \frac{K_1}{2} + \frac{K_n}{2}. \quad (8)$$

Каждое K_h очень мало отличается от обоих соседних значений, так что разность

$$\frac{K_1 - K_2}{2} - \frac{K_{n-1} - K_n}{2}$$

почти равна нулю. Поэтому приближенно:

$$\sum = \frac{K_1}{2} + \frac{K_n}{2}. \quad (9)$$

Сделаем теперь противоположное предположение, что каждый член последовательности K_h меньше среднего арифметического из обоих соседних; тогда мы получим противоположное (8) неравенство:

$$\frac{K_1}{2} + \frac{K_n}{2} < \sum < \frac{K_1}{2} + \frac{K_1 - K_2}{2} - \frac{K_{n-1} - K_n}{2} + \frac{K_n}{2}.$$

Отсюда также вытекает приближенное равенство (9).

Предположение, что n нечетно, также несущественно. Легко видеть, что и для четных n приближенное уравнение (9) остается в силе.

Пусть n есть индекс последней зоны, для которой линия, соединяющая $d\sigma$ и P , строго касательна к $d\sigma$. Из принятого нами предположения следует, что там $K_n = 0$, и мы получаем:

$$\sum = \frac{K_1}{2} \quad (10)$$

и согласно (4)

$$u_P = \lambda K_1 \frac{e^{ik(r_0+b) + \frac{i\pi}{2}}}{r_0+b}. \quad (11)$$

Мы видим, что это выражение совпадает с выражением для сферической волны при свободном распространении на расстояние $r_0 + b$, если принять, что

$$\lambda K_1 e^{\frac{i\pi}{2}} = 1; \quad K_1 = \frac{e^{-\frac{i\pi}{2}}}{\lambda} = \frac{1}{i\lambda}. \quad (12)$$

Итак, при соответствующем выборе силы света и фазы вторичной волны, распространяющейся из средней зоны, сферическую волну можно рассматривать как интерференцию вторичных волн.

Мы приходим к новым выводам, рассмотрев согласно Френелю, что получается при дифрагмировании отдельных зон. Когда отверстие диафрагмы велико по сравнению с шириной зон (с длиной волны), оно не оказывает существенного влияния на возбуждение в точке P . Напротив, возбуждение в P сильно изменяется, если величина отверстия одного порядка с одной или несколькими зонами. Например, если заслонить все зоны, кроме половины первой зоны, то мы получим возбуждение в P , положив $h = 1$ в уравнении (3) и умножив на $\frac{1}{2}$.

Отбросив множитель волны $\frac{e^{ik(r_0 + b)}}{r_0 + b}$, получим:

$$u_P = \lambda K_1 e^{\frac{i\pi}{2}} = 1.$$

Таким образом возбуждение так же велико, как и при свободном распространении. Если же оставить открытой всю первую зону, то

$$u_P = 2\lambda K_1 e^{\frac{i\pi}{2}} = 2,$$

и, следовательно, интенсивность, которая выражается через $|u_P|^2$, равна 4. С дальнейшим увеличением отверстия диафрагмы интенсивность снова начинает убывать, так как тогда два первых члена ряда K_1 и K_2 имеют противоположные знаки; когда отверстие диафрагмы охватывает приблизительно первые две зоны, K_1 и K_2 почти равны и в P полная темнота. Таким образом при постепенном увеличении отверстия в P происходят периодические колебания яркости, с мало-по-малу убывающей резкостью. То же самое происходит, если точка P приближается к источнику света при неизменном отверстии диафрагмы, так как при этом величина зоны уменьшается и поэтому все большее число зон попадает в диафрагму.

Эти теоретические результаты Френеля подтверждаются наблюдениями. Но особенное впечатление произвел один вывод (см. также исторический обзор), который в известной степени решил спор между эмиссионной и волновой теорией в пользу последней; он касается явления, которое наступает при экранировании одной первой зоны. Согласно (5) амплитуда возмущения в P определяется рядом

$$-K_2 + K_3 - K_4 + \dots,$$

приближенная сумма которого равна по Френелю $-\frac{K_2}{2}$. Но так как K_2 мало отличается от K_1 , то этот результат означает, что, когда первая зона полностью экранирована, в P попадает почти столько же света, как если бы первая зона была одна открыта

(именно $|u_P|^2 = 4$). Вообще отсюда видно, что диафрагма с отверстием вызывает с достаточным приближением то же самое световое явление в P , как экран в форме этого отверстия. Этот предсказанный Френелем результат, который мы дальше осветим с точки зрения принципа Бабиня, был в то время чрезвычайно поразительным и был принят как решающий успех волновой теории (см. примечание 16).

§ 45. ПРИНЦИП ГЮЙГЕНСА В ФОРМУЛИРОВКЕ КИРХГОФА

Основная мысль рассуждений Гюйгенса и Френеля та, что световое возмущение в точке P может быть сведено к вторичным световым волнам, исходящим от некоторой поверхности, расположенной между P и источником света.

Кирхгоф¹ попытался дать более точную формулировку этим мыслям и связать их с волновым уравнением распространения света. Подобные вопросы известны математикам из теории потенциала. Ньютоновский потенциал u в некоторой точке выражается посредством суммирования (интегрирования) через значения функции и ее нормальной производной на замкнутой поверхности, окружающей точку. Кирхгоф перенес эту теорему с уравнения потенциала $\Delta u = 0$ на волновое уравнение $\Delta u + k^2 u = 0$ и воспользовался ею для приближенного вычисления дифракционных явлений.

Исходной точкой служит известная теорема Грина, которую мы сформулируем так:

Если $u(x, y, z)$ и $v(x, y, z)$ — две функции, которые, так же, как их первые и вторые производные, однозначны и непрерывны внутри некоторой пространственной области G , включая границу, — то справедливо тождество:

$$\iiint (u \Delta v - v \Delta u) dS = \iint \left(u \frac{\partial v}{\partial \nu} - v \frac{\partial u}{\partial \nu} \right) d\sigma, \quad (1)$$

где первый интеграл взят по области G , второй — по ее поверхности, а ν означает внешнюю нормаль к поверхности.

Для доказательства возьмем известную теорему Гаусса (см. примечание 3):

$$\iiint \operatorname{div} \mathfrak{A} dS = \iint \mathfrak{A}_\nu d\sigma.$$

Положим, что

$$\mathfrak{A} = u \operatorname{grad} v,$$

тогда

$$\operatorname{div} \mathfrak{A} = \operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v + u \Delta v.$$

Следовательно, мы получим:

$$\iiint u \Delta v dS + \iiint \operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v dS = \iint u \frac{\partial v}{\partial \nu} d\sigma.$$

Переставив u и v и вычтя полученное уравнение, мы приходим к формуле Грина (1).

¹ G. Kirchhoff, Berl. Ber. 1882, стр. 641; Ann. Physik u. Chemie (2), т. 18 (1883), стр. 663; Ges. Abh. Nachtr., стр. 22.

В частности, если u и v удовлетворяют уравнению потенциала $\Delta f=0$, мы имеем:

$$\iint \left(u \frac{\partial v}{\partial \nu} - v \frac{\partial u}{\partial \nu} \right) d\sigma = 0. \quad (2)$$

Вышеупомянутая задача из теории потенциала решается следующим образом: надо выразить значение u в точке P внутри области G через граничные значения u и $du/d\nu$. За v принимают потенциальную функцию $v=1/r$, где r есть расстояние от P , но ввиду того, что функция терпит разрыв непрерывности при $r=0$, окрестность точки P отделяется от области G сферической поверхностью; далее, радиус этой сферы заставляют стремиться к нулю. В остальной области G' имеем согласно (2) (фиг. 82):

$$\iint \left[u \frac{\partial}{\partial \nu} \left(\frac{1}{r} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \nu} \right] d\sigma = 0; \quad (3)$$

здесь интегрирование производится как по внешней поверхности области G' , так и по маленькой сфере. Так как ν есть внешняя нормаль к поверхности G' , то на маленькой сфере мы имеем: $\partial/\partial \nu = -\partial/\partial r$ и, значит, $\partial(1/r)/\partial \nu = 1/r^2$; далее $d\sigma = r^2 d\Omega$, где $d\Omega$ означает элемент единичной сферы. Если наш шар сделать достаточно малым, то u и $du/d\nu = -du/dr$ и само r будут постоянны на его поверхности, и мы получаем для:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \left(u + r \frac{\partial u}{\partial r} \right) \int d\Omega = 4\pi u_P.$$

Поэтому из (3) следует:

$$u_P = -\frac{1}{4\pi} \iint \left[u \frac{\partial}{\partial \nu} \left(\frac{1}{r} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \nu} \right] d\sigma, \quad (4)$$

причем здесь интеграл берется по поверхности области G . Итак, мы выразим значение u в точке P через значения u и $du/d\nu$ на окружающей P замкнутой поверхности. Два члена в (4) имеют следующее значение: второй, очевидно, представляет собой потенциал поверхностного слоя с толщиной $\frac{1}{4\pi} \cdot \frac{\partial u}{\partial \nu}$, а первый — потенциал двойного слоя с моментом $-u/4\pi$.

Совершенно аналогично рассуждаем в нашем случае волнового уравнения $\Delta u + k^2 u = 0$. Если u и v суть два решения этого уравнения (с одним и тем же k), то в уравнении (1) оба члена пространственного интеграла пропадают, и мы снова получаем уравнение (2). В качестве элементарного решения с особенной точкой мы должны теперь взять вместо $v=1/r$ волновую функцию:

$$v = \frac{e^{ikr}}{r}.$$

Так как

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{e^{ikr}}{r} \right) = -\frac{e^{ikr}}{r^2} + ik \frac{e^{ikr}}{r},$$

то и для этой функции v выражение $\partial(e^{ikr}/r)/\partial \nu$ при малых r приближается к значению $1/r^2$. Поэтому все рассуждения остаются без изменений, и мы получаем:

$$u_P = -\frac{1}{4\pi} \iint \left[u \frac{\partial}{\partial \nu} \left(\frac{e^{ikr}}{r} \right) - \frac{e^{ikr}}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial \nu} \right] d\sigma. \quad (5)$$

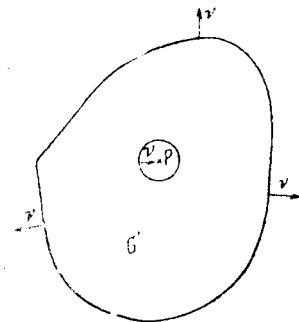
Здесь также предполагается, что u со своей первой и второй производной однозначны и непрерывны внутри области, ограничиваемой поверхностью интегрирования.

Так как, очевидно, источники света являются особенными точками для амплитуды, то формула (5) справедлива лишь для таких областей, внутри которых нет источников света. Как и в теории потенциала, оба члена интегральной формулы можно рассматривать как влияние вторичных световых волн на поверхность интегрирования, — именно, первый член выражает влияние простого слоя источников света, а второй — влияние двойного слоя. Более глубокого физического смысла это представление не имеет.

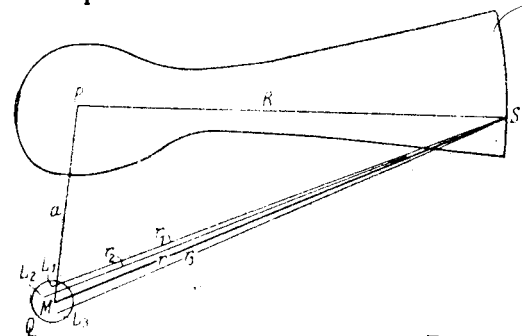
При применении этой формулы к проблемам дифракции может представиться случай, когда часть поверхности интегрирования уходит в бесконечность. Легко видеть, что если все действительные источники света находятся на конечном расстоянии (разумеется, вне поверхности интегрирования), то влияние бесконечно удаленной части поверхности ничтожно мало.

Для доказательства представим себе, что источник света Q состоит из конечного числа элементарных источников, каждый из которых является центром распространения сферической волны вида e^{ikr}/r . Расстояние „центра“ источника Q (т. е. центра сферы, охватывающей все источники) до точки P (фиг. 83) обозначим буквой a . Расстояния остальных источников L_1, L_2, \dots от точки S уходящей в бесконечность части поверхности пусть будут r_1, r_2, \dots . Расстояние PS обозначим через R . Если R при постоянном a возрастает до бесконечности, то мы, очевидно, имеем ряд вида:

$$u_P = \frac{e^{ikr_P}}{r_P} = \frac{e^{ikR}}{R} \left(A_n + \frac{B_n}{R} + \frac{C_n}{R^2} + \dots \right), \quad (6)$$



Фиг. 82. К теореме Грина.



Фиг. 83. К интегральной формуле Грина.

где A_n, B_n, C_n, \dots — функции направления соединительной линии PS относительно $L_n P$. Суммируя по всем светящимся точкам, получим для светового возбуждения в S следующее выражение:

$$u_S = \sum_n u_n = \frac{e^{ikR}}{R} \left(A + \frac{B}{R} + \frac{C}{R^2} + \dots \right). \quad (7)$$

Мы можем теперь определить ту часть выражения (5), которую дает интеграл по бесконечности удаленной поверхности (которую мы, естественно, представим себе как сферу, описанную вокруг P). Итак, мы должны вычислить:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4\pi} \int \int \left[u_S \frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{e^{ikR}}{R} \right) - \frac{e^{ikR}}{R} \frac{\partial u_S}{\partial R} \right] R^2 d\Omega = \\ & = \frac{1}{4\pi} \int \int \left\{ \frac{e^{ikR}}{R} \left(A + \frac{B}{R} + \dots \right) \left(-\frac{e^{ikR}}{R^2} + ik \frac{e^{ikR}}{R} \right) - \frac{e^{ikR}}{R} \times \right. \\ & \times \left. \left[\left(-\frac{e^{ikR}}{R^2} + ik \frac{e^{ikR}}{R} \right) \left(A + \frac{B}{R} + \dots \right) + \frac{e^{ikR}}{R} \left(-\frac{B}{R^2} - \dots \right) \right] \right\} R^2 d\Omega. \end{aligned}$$

Мы видим, что в прямых скобках члены с R^{-2} и R^{-3} пропадают, остаются только члены, содержащие $R^{-1}, R^{-5} \dots$. Поэтому при $R \rightarrow \infty$ интеграл исчезнет. Этим мы доказали, что бесконечно удаленные элементы поверхности интегрирования не влияют на возмущение в P .

Применимость уравнения (5) к теории дифракции ограничивается тем, что граничные значения u и $du/d\nu$ на окружающей точку P поверхности вообще так же мало известны, как характер функции u в любом другом месте. Мы потом увидим, как Кирхгоф справился с этим затруднением. Но сначала воспользуемся формулой (5) для улучшения принципа Френеля при выводе свободного распространения света. Мы помним, что построение Френеля (зоны Френеля) приводит к правильному результату, если надлежащим образом выбраны фаза и амплитуда вторичной волны. В этом же случае можно непосредственно применить формулу Кирхгофа. В качестве поверхности интегрирования (бесконечно удаленную сферу мы отбрасываем) берем любую замкнутую поверхность, окружающую источник света, и выбираем точку P вне ее. Если поверхность — сфера, мы имеем случай Френеля. Формула Кирхгофа содержит тождественно верное утверждение, что значение функции e^{ikr}/r в точке P выражается с помощью интеграла (5) через ее значения на замкнутой поверхности, окружающей Q . Тогда элемент поверхности $d\sigma$ находится от Q на расстоянии r_0 ; r есть входящее в (5) расстояние элемента поверхности от P . Теперь мы должны задать граничные значения под интегралом:

$$u = \frac{e^{ikr_0}}{r_0}; \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} = -\frac{e^{ikr_0}}{r_0} \left(ik - \frac{1}{r_0} \right) \cos(\nu, r_0).$$

Если мы, сверх того, напишем вместо $d(e^{ikr}/r)/d\nu$:

$$\frac{e^{ikr}}{r} \left(ik - \frac{1}{r} \right) \cos(\nu, r),$$

то мы получим:

$$u_P = -\frac{1}{4\pi} \int \int \frac{e^{ikr}}{r} \cdot \frac{e^{ikr_0}}{r_0} \left[\left(ik - \frac{1}{r} \right) \cos(\nu, r) - \left(ik - \frac{1}{r_0} \right) \cos(\nu, r_0) \right] d\sigma. \quad (8)$$

Теперь легко перейти к частному случаю сферы. Тогда

$$\cos(\nu, r_0) = -1$$

и согласно формуле § 44 (2)

$$d\sigma = \frac{rr_0}{b+r_0} dr \cdot d\varphi.$$

Величинами $\frac{1}{r}$ и $\frac{1}{r_0}$ по отношению к $k = 2\pi/\lambda$ можно пренебречь.

Получим окончательно:

$$u = -\frac{ik}{2} \frac{e^{ikr_0}}{r_0 + b} \int e^{ikr} [\cos(\nu, r) + 1] dr. \quad (9)$$

Здесь в отличие от Френеля интегрирование производится по всей сфере, т. е. от $r=b$ до $r=b+2r_0$. Разобьем теперь интеграл на части, соответствующие зонам Френеля; мы получим для h -той зоны:

$$u_h = -\frac{ik}{2} \frac{e^{ikr_0}}{r_0 + b} \int_{b+\frac{h-1}{2}\lambda}^{b+\frac{h}{2}\lambda} e^{ikr} [\cos(\nu, r) + 1] dr. \quad (10)$$

Если считать здесь $\cos(\nu, r)$ постоянным для одной зоны, мы можем вынести его из-под знака интеграла и получим:

$$u_h = -\frac{e^{ik(r_0+b)}}{r_0 + b} (-1)^h [\cos(\nu, r)_h + 1]. \quad (11)$$

Сравнивая эту формулу с формулой Френеля [§ 44 (3)], мы видим, что функция направления K_h здесь определяется однозначно, именно:

$$2i\lambda K_h = \cos(\nu, r)_h + 1. \quad (12)$$

Так как $\cos(\nu, r)_1 = 1$, то для первой зоны будет:

$$2i\lambda K_1 = 2.$$

Следовательно, в соответствии с § 44 (12)

$$K_1 = \frac{1}{i\lambda} = \frac{e^{-i\pi/2}}{\lambda}.$$

Таким образом понятно, почему построение Френеля дает правильный результат для случая диафрагмирования первой зоны. Зато его объяснение возникновения свободного распространения света влиянием передней поверхности зонной сферы ошибочно. Действительно, для последней зоны $\cos(\nu, r)_n = 0$; следовательно, K_n не равно 0, как предполагал Френель, а согласно (12) $K_n = \frac{1}{2i\lambda}$. По мере удаления к задней поверхности сферы, K_n убывают и наконец исчезают в точке, противолежащей P . Только учтя эти члены интегрального выражения, мы получим из интеграла Кирхгофа строгую формулу свободного распространения. Правильный же результат, полученный Френелем из неправильного предположения, объясняется неточностью его метода суммирования.

§ 46. ТЕОРИЯ ДИФРАКЦИИ КИРХГОФА

Кирхгоф остроумно воспользовался данным им в виде интеграла выражением светового возмущения для вывода формул дифракционных явлений. Здесь речь идет о первом этапе приближения, которое никоим образом не может быть последовательно продолжено дальше и исследовано на сходямость. В действительности проблема заключается в следующем.

Требуется исследовать влияние экранов и диафрагм на распространение света. Все пространство вне материала экрана мы представляем себе заполненным световым возмущением, которое удовлетворяет волновому уравнению и имеет особенную точку в источнике света. Характер этой особенности точно неизвестен, и также мало известно, какое именно влияние оказывает экран, т. е. неизвестны граничные условия, которым должна удовлетворять функция u на поверхности экрана. Если бы мы знали и то и другое, мы имели бы перед собою строго математическую задачу, именно — задачу с пограничными значениями для уравнения в частных производных, с заданными особенными точками. Дальше (в § 57) мы увидим, что Зоммерфельд осуществил это для некоторых частных случаев и таким образом получил решения, которые в известном смысле можно считать „строгими“. Но так как идеализированные допущения относительно поверхности экрана и граничных условий на ней никогда не имеют места в природе (шероховатость поверхности, атомное строение вещества экрана, поверхностный слой и т. д.), то этими решениями нельзя пользоваться без физической критики. Поэтому имеет смысл рассмотреть сначала более ранние и более простые рассуждения Кирхгофа и его последователей.

Кирхгоф исходит из того факта, что при грубом наблюдении свет свободно распространяется от источника до экрана, и только позади узких отверстий обнаруживается влияние стенок экрана, именно световое возмущение переходит границу геометрической тени. Для того чтобы измерить силу света в точке P отделенной от источника диафрагмой, Кирхгоф мысленно окружает эту точку поверхностью, проходящей через противоположную источнику сторону экрана и закрывающей отверстие диафрагмы. Физически разумно предположение, что в первом приближении возмущение на задней поверхности экрана всегда равно нулю.

На поверхности экрана

$$u = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0. \quad (1)$$

Более смелым является предположение, что при вычислении возмущения в точке P с помощью формул Кирхгофа § 45 (5) можно в части поверхности, обтягивающей отверстие диафрагмы, принять за граничные значения u и $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ величины, соответствующие свободному распространению света; итак, для светящейся точки имеем у отверстия диафрагмы:

$$u = \frac{e^{ikr_0}}{r_0}, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} = ik \frac{e^{ikr_0}}{r_0} \cos(\nu, r_0) \quad (2)$$

(причем опять величиной $1/r_0$ по сравнению с k пренебрегаем).

Если в источнике света мы имеем несколько светящихся точек Q , то возникает вопрос — когерентны они или нет. В первом случае суммируются амплитуды, во втором — их квадраты (интенсивности).

Из формул Кирхгофа § 45 (5) мы получим чисто вычислительным путем определенную амплитуду u_P в точке наблюдения P . Но само собою понятно, что этот интеграл волнового уравнения, определяемый произвольно выбранными граничными значениями, совсем не является решением задачи с граничными значениями; действительно, если мы вычислим из него обратным путем значения u и $\partial u / \partial \nu$ на поверхности интегрирования, то мы получим значения, отличные от принятых нами в формулах (1) и (2), — например u не будет равно нулю на задней стенке экрана. Весь этот способ решения можно было оправдать следующим образом. Мы рассматриваем найденное вышеописанным методом возмущение u_P как первое приближение, вычисляем из него граничные значения u и $\partial u / \partial \nu$ и повторяем эту операцию произвольное число раз. Можно предполагать, что этот метод последовательных приближений сходится, и можно было бы показать, что уже второй этап дает в сравнение с первым исчезающе малый эффект. Но такие исследования никогда еще не были вполне доведены до конца. Скорее можно

просто положиться на известный факт, что дифракционные явления относительно слабы, так что, например, освещенность вследствие загибания света задней поверхности экрана очень незначительна. Затем, можно основываться и на том, что полученные совершенно иным путем, строгие в математическом смысле, решения Зоммерфельда хорошо совпадают с решениями Кирхгофа. Наконец, опыт также подтверждает выводы теории Кирхгофа.

Согласно § 45 (8) мы получим для действия точечного источника света:

$$u_P = -\frac{ik}{4\pi} \iint \frac{e^{ik(r+r_0)}}{rr_0} [\cos(\nu, r) - \cos(\nu, r_0)] dz. \quad (3)$$

Здесь интегрирование распространяется на поверхность, закрывающую отверстие диафрагмы. Эта формула симметрична при перестановке r и r_0 и одновременном изменении знака направления нормали ν . Это значит: если источник Q дает известную освещенность в точке P , расположенной по ту сторону диафрагмы, то такой же источник света, помещенный в P , даст ту же самую освещенность в точке Q . Это есть общий закон взаимности дифракционной теории.

Для того чтобы сделать возможным вычисление, мы произведем еще несколько упрощений. Прежде всего допустим, что отверстие диафрагмы таково, что заключенную в нем часть поверхности интегрирования можно считать плоской. Во-вторых, примем во внимание опытный факт, что уже вблизи (на расстоянии нескольких длин волн) от геометрической границы тени распределение света следует законам геометрической оптики (без заметного „загибания“). Поэтому мы можем ограничиться такими положениями точки P , при которых соединительная линия PQ проходит вблизи от границы плоской поверхности отверстия. Вследствие того, что $k = 2\pi/\lambda$ велико, множитель $e^{ik(r+r_0)}$ есть очень быстро осциллирующая функция положения P , второй же множитель $\cos(\nu, r) - \cos(\nu, r_0)$ изменяется сравнительно медленно. Поэтому мы можем считать его постоянным и заменить выражением $2\cos\delta$, где δ есть угол между соединительной прямой QP и нормалью к поверхности диафрагмы. Точно так же для области, в которой может находиться точка P , мы можем считать постоянными величины r и r_0 и вынести их за знак интеграла. Тогда мы получим окончательно:

$$u_P = -\frac{ik \cos\delta}{2\pi rr_0} \iint e^{ik(r+r_0)} dz. \quad (4)$$

Теперь примем плоскость отверстия за плоскость xy , и дадим оси z направление в сторону, противоположную источнику света. Пусть начало координат O находится в плоскости отверстия вблизи края. Переменные интегрирования в этой плоскости

пусть будут ξ и η , так что $dz = d\xi \cdot d\eta$ (фиг. 84). Если (x_0, y_0, z_0) — координаты точки Q , а (x, y, z) — координаты P , то мы имеем:

$$\left. \begin{aligned} r_0^2 &= (x_0 - \xi)^2 + (y_0 - \eta)^2 + z_0^2, \\ r^2 &= (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + z^2. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Введем теперь расстояния R и R_0 точек P и Q от начала координат O . Имеем:

$$\left. \begin{aligned} R_0^2 &= x_0^2 + y_0^2 + z_0^2, \\ R^2 &= x^2 + y^2 + z^2. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Согласно нашим предположениям отношения ξ/R_0 , η/R_0 и ξ/R , η/R малы. Поэтому мы можем разложить r и r_0 в ряд по этим величинам и получим, например:

$$\begin{aligned} r_0 &= R_0 - \frac{x_0 \xi + y_0 \eta}{R_0} + \\ &+ \frac{\xi^2 + \eta^2}{2R_0} - \frac{(x_0 \xi + y_0 \eta)^2}{2R_0^3} + \dots \end{aligned} \quad (7) \quad \text{Фиг. 84. Дифракция отверстия.}$$

Подставив эти значения в уравнение (4), получим:

$$u_P = -\frac{ik}{2\pi} \cos\delta \frac{e^{ik(R+R_0)}}{RR_0} \iint e^{ik\Phi(\xi, \eta)} d\xi d\eta, \quad (8)$$

где

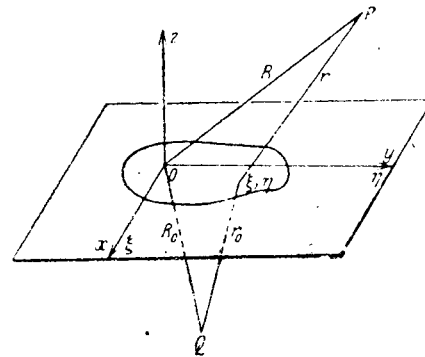
$$\begin{aligned} \Phi(\xi, \eta) &= -\frac{x_0 \xi + y_0 \eta}{R_0} + \frac{\xi^2 + \eta^2}{2R_0} - \frac{(x_0 \xi + y_0 \eta)^2}{2R_0^3} + \dots - \\ &- \frac{x \xi + y \eta}{R} + \frac{\xi^2 + \eta^2}{2R} - \frac{(x \xi + y \eta)^2}{2R^3} + \dots \end{aligned} \quad (9)$$

Введя направляющие косинусы прямых R_0 и R относительно плоскости xy , т. е. положив:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_0 &= -\frac{x_0}{R_0}, & \alpha &= -\frac{x}{R}, \\ \beta_0 &= -\frac{y_0}{R_0}, & \beta &= -\frac{y}{R}, \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

мы получим:

$$\begin{aligned} \Phi &= \xi(\alpha_0 - \alpha) + \eta(\beta_0 - \beta) + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{R_0} + \frac{1}{R} \right) (\xi^2 + \eta^2) - \frac{(\alpha_0 \xi + \beta_0 \eta)^2}{R_0} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{(\alpha \xi + \beta \eta)^2}{R} \right] + \dots \end{aligned} \quad (11)$$



§ 47. КЛАССИФИКАЦИЯ ДИФРАКЦИОННЫХ ЯВЛЕНИЙ. ПРИНЦИП БАБИНЕ

Будем считать, что формулы Кирхгофа § 46(8) и (11) справедливы. В этом случае распределение света при дифракции можно найти с помощью простого вычисления. Очевидно, это вычисление тем труднее, чем большее число членов ряда § 46(11) мы возьмем. Поэтому надо выяснить физический смысл отдельных членов, а затем в каждом случае определять нужную степень точности вычисления.

Оставим в Φ только члены линейные относительно (ξ, η) ; тогда:

$$\frac{ik\Phi(\xi, \eta)}{e} = \frac{ik[(\alpha_0 - \alpha)\xi + (\beta_0 - \beta)\eta]}{e} = \frac{ik(\alpha_0\xi + \beta_0\eta)}{e} - \frac{ik(\alpha\xi + \beta\eta)}{e},$$

очевидно, есть выражение плоской волны или, точнее, произведение двух плоских волн, из которых одна связана с направлением α_0, β_0 (источник света → дифракционное отверстие), а другая — с направлением α, β (дифракционное отверстие — точка наблюдения). Световое возмущение оказывается результатом наложения плоских волн. Это значит, что как источник света, так и точка наблюдения бесконечно удалены от дифрагирующего отверстия [в § 46(11) $R_0 \rightarrow \infty$, $R \rightarrow \infty$].

Это есть случай *дифракционного явления Фраунгофера*. Оно отличается особенной простотой как математической обработки, так и дифракционных фигур. Разумеется, чтобы не ослаблять силу света, точки P и Q помещают в действительности не на очень большом расстоянии, а пучки, проходящие через отверстие, делают параллельными при помощи линз. Таким образом мы приходим к изображенному на фиг. 85

Фиг. 85. Осуществление дифракционного явления Фраунгофера при помощи линз.

устройству. Источник света Q находится в фокальной плоскости E_0 линзы L_0 , дифрагированный же свет собирается линзой L в фокальную плоскость E (L и E могут быть также хрусталиком и сетчаткой глаза).

Если взять за единицу длины в плоскостях E и E_0 фокусные расстояния соответствующих линз, то (при условии, что изображение следует законам Гаусса) α_0, β_0 будут координатами Q в E_0 , а α и β — координатами P в E . Теперь мы можем построить в E геометрический фокус O точки Q . Если принять его за начало некоторой системы координат в E , то $a = \alpha - \alpha_0$, $b = \beta - \beta_0$ будут координатами P в этой системе. Формула § 46(11) показывает, что в нашем приближении дифракционное явление зависит только от этих величин a и b и, следовательно, не зависит от геометрического фокуса O точки Q . Оно не зависит также от смещений отверстия диафрагмы в ее собственной

плоскости (конечно, в известных границах, зависящих от выбранного приближения). В следующих параграфах мы вычислим возникающие таким образом дифракционные фигуры для нескольких простых форм отверстий и применим результаты для решения различных физических задач.

Если мы не удовлетворяемся этим первым приближением функции Φ [§ 46(11)] и берем также члены второй степени относительно ξ и η , то это значит, что мы учитываем в первом приближении кривизну волновой поверхности входящих и выходящих волн в дифрагирующем отверстии. Этому соответствует физически точечный источник света, находящийся на конечном (большом) расстоянии. В этом случае мы говорим о *дифракционных явлениях Френеля*. Мы рассмотрим их в случае прямолинейно ограниченного плоского экрана (в § 55).

Теперь же мы выведем еще из теории Кирхгофа упоминавшийся выше (§ 44, стр. 195) *принцип Бабине*. Он относится к случаю, когда луч проходит через „дополнительные“ экраны. „Дополнительными“ называются два экрана, из которых один B_1 имеет отверстие в том месте, где второй, B_2 , непрозрачен, и наоборот. При отсутствии экранов в предположении, что линзы дают идеальное изображение, световое возбуждение u равно нулю в каждой точке P плоскости, на которой получается изображение, за исключением фокуса O источника света Q . При наличии экранов B_1 обозначим возбуждение в P через u_1 ; при дополнительном экране пусть оно будет u_2 . Так как u_1 и u_2 выражаются интегралами, взятыми по отверстиям, а отверстия обоих экранов дополняют друг друга до целой плоскости, то $u_1 + u_2 = u$. При этом $u_1 + u_2 = 0$ в каждой отличной от O точке P ; следовательно,

$$u_1^2 = u_2^2.$$

Эта формула и выражает принцип (см. примечание 17).

§ 48. ДИФРАКЦИОННЫЕ ЯВЛЕНИЯ ФРАУНГОФЕРА В ПРЯМОУГОЛЬНИКЕ И В ЩЕЛИ

Множители формулы § 46(8), относящиеся к положению источника света и точки наблюдения, теряют свое первоначальное значение, если в установку включается линза. Поэтому мы заменим их сначала коэффициентом C и напишем амплитуду для фраунгоферова явления согласно § 46(11):

$$u_P = C \iint e^{-ik(a\xi + b\eta)} d\xi d\eta. \quad (1)$$

Здесь a, b — координаты произвольной точки P относительно геометрического фокуса O источника Q в плоскости экрана, на котором получается изображение. Эти величины не имеют размерности и означают отношение расстояния PO к смещению точки O , когда источник света Q перемещается на единицу длины ξ и η координаты некоторой точки отверстия.

Чтобы установить физический смысл константы C , вычислим общее количество света, выходящее из отверстия; очевидно, оно должно быть равно количеству света, падающего на поверхность отверстия. Если мы примем его равным площади отверстия F , то это значит, что мы принимаем за единицу количество света, падающее на единицу поверхности. Мы получаем таким образом условие для нормировки:

$$\iint |u_P|^2 dadb = F. \quad (2)$$

Чтобы определить величину интеграла (2), заметим, что интеграл (1) можно представить в виде разложения в ряд Фурье. Пусть функция $f(\xi, \eta)$ определяется условиями:

$$f(\xi, \eta) = \begin{cases} 1 & \text{внутри отверстия,} \\ 0 & \text{вне отверстия.} \end{cases} \quad (3)$$

Тогда

$$u_P = C\varphi(a, b),$$

где

$$\varphi(a, b) = \iint f(\xi, \eta) e^{-\frac{2\pi i}{\lambda}(a\xi + b\eta)} d\xi d\eta. \quad (4)$$

Здесь интегрирование распространяется на всю плоскость $\xi\eta$. Согласно теореме Фурье

$$f(\xi, \eta) = \frac{1}{\lambda^2} \iint \varphi(a, b) e^{\frac{2\pi i}{\lambda}(a\xi + b\eta)} dadb. \quad (5)$$

Умножив это выражение на сопряженную комплексную $f^*(\xi, \eta)$ и проинтегрировав по ξ, η , получим:

$$\begin{aligned} \iint |f(\xi, \eta)|^2 d\xi d\eta &= \frac{1}{\lambda^2} \iint f^*(\xi, \eta) d\xi d\eta \iint \varphi(a, b) e^{\frac{2\pi i}{\lambda}(a\xi + b\eta)} dadb = \\ &= \frac{1}{\lambda^2} \iint \varphi(a, b) dadb \iint f^*(\xi, \eta) e^{\frac{2\pi i}{\lambda}(a\xi + b\eta)} d\xi d\eta = \\ &= \frac{1}{\lambda^2} \iint |\varphi(a, b)|^2 dadb, \iint |f(\xi, \eta)|^2 d\xi d\eta = \frac{1}{\lambda^2 C^2} \iint |u_P|^2 dadb. \end{aligned} \quad (6)$$

Согласно (3) интеграл в левой части равен F . При этом условии (2) дает:

$$F = \frac{1}{\lambda^2 C^2} F;$$

таким образом условие нормировки выполняется при

$$C = \frac{1}{\lambda}. \quad (7)$$

Возьмем теперь дифракционное отверстие в форме прямоугольника. Пусть начало координат находится в его центре, а оси координат параллельны его сторонам, длины сторон пусть равны $2A$ и $2B$ (фиг. 86) следовательно, площадь $F = 4AB$.

В u_P входит произведение двух интегралов вида:

$$\int_{-A}^A e^{-ka\xi} d\xi = \frac{2 \sin(kaA)}{ka}.$$

Из (1) мы получим, воспользовавшись выражением (7):

$$J_P = |u_P|^2 = \left(\frac{4AB}{\lambda} \right)^2 \times \left(\frac{\sin(kaA)}{kaA} \right)^2 \left(\frac{\sin(kbB)}{kbB} \right)^2. \quad (8)$$

Входящая сюда функция $\left(\frac{\sin x}{x} \right)^2$ графически изображена на фиг. 87. Она имеет главный максимум в точке $x = 0$, где функция равна 1, затем минимумы (функция равна 0) при $x = \pm \pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \dots, \pm m\pi, \dots$, и между ними второстепенные максимумы при значениях функции $\operatorname{tg} x - x$, равных нулю, т. е. при

$$\begin{aligned} x &= 1,430\pi = 4,493; \quad 2,459\pi = 7,7253; \quad 3,470\pi = 10,90; \\ &4,479\pi = 14,07; \dots \end{aligned}$$

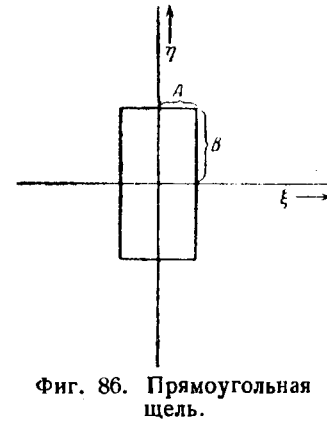
они асимптотически приближаются к нечетным кратным $\pi/2$. Второстепенные максимумы имеют следующие значения при

$$x_1' = 4,493; \quad 7,7253; \quad 10,90; \quad 14,07; \dots$$

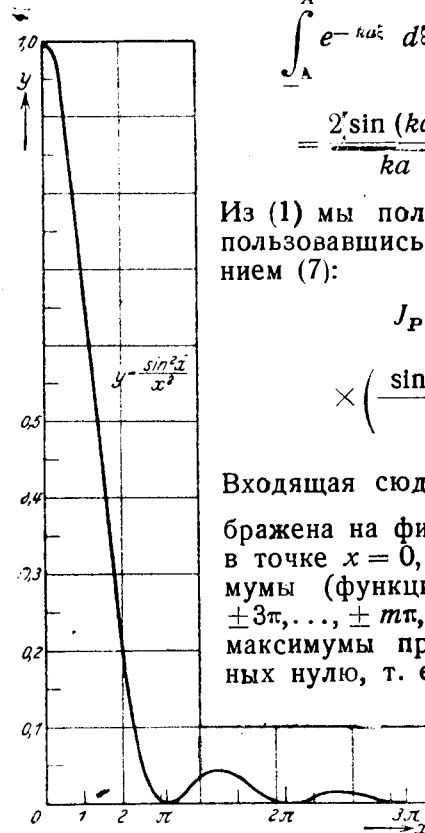
$$\left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 = 0,04718; \quad 0,01694; \quad 0,00834; \quad 0,00503; \dots$$

Итак, интенсивность J_P исчезает для системы прямых линий, пересекающихся под прямым углом и заданных уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} kaA &= m\pi \\ kbB &= n\pi \end{aligned} \right\} (m, n = 1, 2, 3, \dots). \quad (9)$$



Фиг. 86. Прямоугольная щель.



Фиг. 87. Дифракция от щели. Функция

причем:

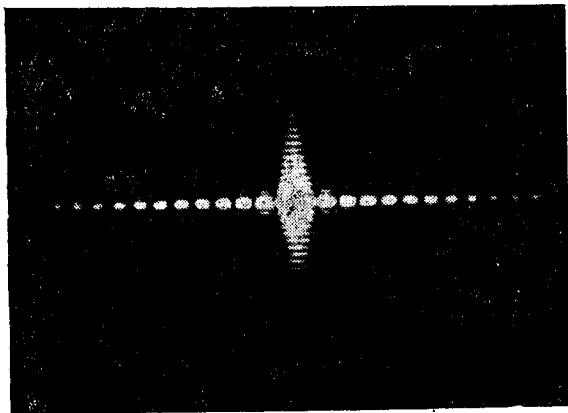
$$\left. \begin{aligned} a &= \frac{m\pi}{kA} = \frac{\lambda m}{2A}, \\ b &= \frac{n\pi}{kB} = \frac{\lambda n}{2B}. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Расстояния между каждыми двумя соседними прямыми равны

$$a = \frac{\lambda}{2A}, \quad \bar{b} = \frac{\lambda}{2B}. \quad (11)$$

Это дифракционное явление изображено на фиг. 88.

Чем большее отверстие, тем больше дифракционное изображение стягивается к геометрическому фокусу. Одновременно происходит сужение и повышение главного максимума, так что общая площадь (общее количество света), пропорциональная отверстию диафрагмы, растет.



Фиг. 88. Дифракция от прямоугольной щели шириной $\frac{1}{4}$ мм.

Источник света — освещенная сзади круглая диафрагма. Изображение источника получено с помощью стекла от очков силой 1 диоптрия, находящегося на расстоянии 2 м; изображение на том же расстоянии. Экспозиция — 131 ч. Сильные максимумы переосвещены для того, чтобы сделать более резкими слабые второстепенные максимумы.

а затем складываются. Как особенно важный, рассмотрим частный случай, когда источником света является светящаяся прямая проволока, отдельные точки которой испускают некогерентный свет, а дифракционное отверстие имеет вид узкой длинной щели. Для упрощения вычислений мы будем считать как проволоку, так и щель бесконечно длинными; направление их длины пусть совпадает с осью y . Вспомнив, что $b = \beta - \beta_0$, где β_0 определяет положение светящейся точки, мы увидим, что данная в (8) функция J_P должна интегрироваться по b .

Мы получим:

$$J_S = \int_{-\infty}^{\infty} J_P db = \left(\frac{4AB}{\lambda} \right)^2 \left(\frac{\sin(kaA)}{kaA} \right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin(kbB)}{kbB} \right)^2 db. \quad (12)$$

Известно, что¹

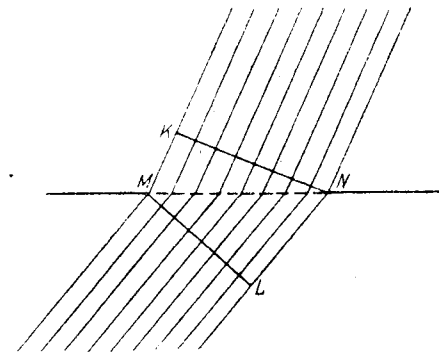
$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 dx = \pi. \quad (13)$$

Поэтому при $k = 2\pi/\lambda$ из (12) следует, что

$$J_S = \frac{8A^2B}{\lambda} \left(\frac{\sin(kaA)}{kaA} \right)^2. \quad (14)$$

Таким образом дифракционная картина будет иметь вид чередующихся темных и светлых полос, параллельных источнику света и щели.

Полезно уяснить себе полученный результат также при помощи построения, аналогичного френелевым зонам. Разделим поперечное сечение MN щели точками M_1, M_2, \dots на полосы так, чтобы дифрагированный свет для смежных точек раздела имел разность хода $\lambda/2$. Кроме того, представим себе (фиг. 89) нормаль NK , опущенную из N на падающий луч и нормаль ML , проведенную из M к дифрагированному лучу. Действие каж-



Фиг. 89. Построение дифракции от щели по принципу Гюйгенса.

дых двух соседних зон взаимно уничтожается, когда разность пути между лучом, проходящим через некоторую точку раздела, и соседним лучом (на фиг. 89 лучи изображены ломаными прямыми) составляет $\lambda/2$. Поэтому если MN разделено на четное число зон, то совместное их действие произведет темноту. Так будет, если $MK - NL = m\lambda$ ($m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$). Так как α_0 и α — направляющие косинусы падающего и выходящего лучей относительно оси x , т. е. направления MN , то мы имеем:

$$MK = 2A\alpha_0,$$

$$LN = 2A\alpha.$$

Таким образом для темноты должно быть условие:

$$LN - MK = 2A(\alpha - \alpha_0) = 2Aa = m\lambda. \quad (15)$$

Мы опять получаем то же положение минимумов, которое вытекает из нашей общей формулы (8).

¹ Курант-Гильберт, Методы математической физики. том 1, гл. 2, § 5.

§ 49. ДИФРАКЦИОННЫЕ ЯВЛЕНИЯ В КРУГЛОМ ОТВЕРСТИИ

Для круглого отверстия радиуса A наши рассуждения не изменятся, но здесь, конечно, удобнее всего ввести полярные координаты. Пусть координаты некоторой точки P дифракционной картины относительно геометрического изображения O источника света Q определяются уравнениями:

$$\rho \cos \vartheta = a, \quad \rho \sin \vartheta = b, \quad (1)$$

а координаты некоторой точки отверстия — уравнениями:

$$P \cos \theta = \xi, \quad P \sin \theta = \eta. \quad (2)$$

Световое возмущение в P согласно § 48 (1) и § 48 (7) будет:

$$u_P = \frac{1}{\lambda} \int_0^A \int_0^{2\pi} e^{-ik\rho P \cos(\theta-\vartheta)} P dP d\vartheta. \quad (3)$$

Здесь появляются известные трансцендентные бесселевы функции. n -ная функция определяется так¹:

$$I_n(z) = \frac{i^{-n}}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{iz \cos \theta} e^{in\theta} d\theta. \quad (4)$$

Две смежные функции и производная одной из них связаны рекуррентной формулой²:

$$z \frac{dI_n}{dz} + nI_n = zI_{n-1}; \quad (5)$$

для $n=1$ отсюда в частности следует:

$$z \frac{dI_1}{dz} + I_1 = \frac{d(zI_1)}{dz} = zI_0. \quad (6)$$

Проинтегрировав, получаем:

$$I_1(z) = \frac{1}{z} \int_0^z I_0(\zeta) \zeta d\zeta. \quad (7)$$

Заметим значения обеих рассматриваемых функций для $z=0$:

$$\lim_{z \rightarrow 0} I_0(z) = 1 \quad (8)$$

и

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{2I_1(z)}{z} = 1. \quad (9)$$

¹ См. E. Jahnke u. F. Emde, Funktionentafeln, стр. 169. (Есть русский перевод).

² См. Jahnke u. Emde, стр. 165.

Вернемся теперь к нашей дифракционной формуле (3). Так как $I_0(z)$ — четная функция, мы можем написать:

$$u_P = k \int_0^A I_0(k\rho P) P dP. \quad (10)$$

С помощью подстановки

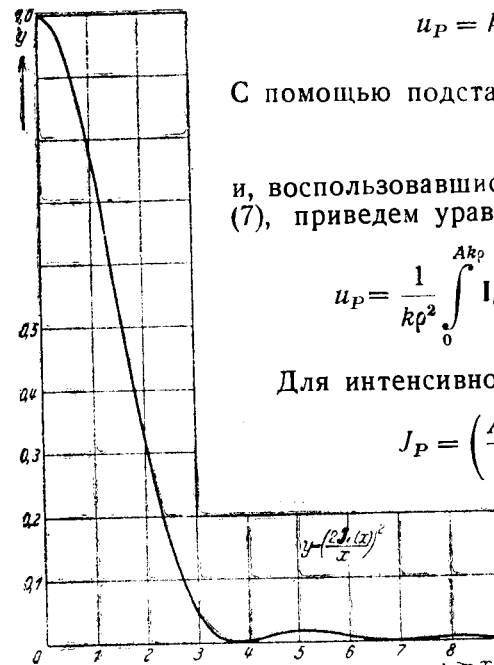
$$k\rho P = \zeta \quad (11)$$

и, воспользовавшись вспомогательной формулой (7), приведем уравнение (10) к виду:

$$u_P = \frac{1}{k\rho^2} \int_0^{Akp} I_0(\zeta) \zeta d\zeta = \frac{A}{\rho} I_1(Akp). \quad (12)$$

Для интенсивности получается выражение:

$$J_P = \left(\frac{A^2\pi}{\lambda}\right)^2 \left(\frac{2I_1(Akp)}{Akp}\right)^2. \quad (13)$$



Фиг. 90. Дифракция от круглого отверстия.

Функция $2 \left(\frac{I_1(x)}{x}\right)^2$.

Распределение интенсивности вблизи геометрического фокуса также определяется функцией $[2I_1(x)/x]^2$, которая равна 1 при $x=0$, а затем, осциллируя, идет к нулю, как рассмотренная выше (§ 48, стр. 213) функция $(\sin x/x)^2$, только теперь нулевые точки лежат не на равных расстояниях друг

от друга, а при следующих значениях:

$$x = 1,220\pi; 2,233\pi; 3,238\pi; 4,250\pi; \dots$$

Мы видим, что с увеличением порядкового числа расстояние между ними все более и более приближается к величине π . Отсюда мы получаем для радиусов темных интерференционных колец:

$$\rho = 0,610 \frac{\lambda}{A}; 1,116 \frac{\lambda}{A}; 1,619 \frac{\lambda}{A}; \dots \quad (14)$$

Расстояние между отдельными кольцами приближается, таким образом, все более к величине $\frac{1}{2} \lambda/A$. „Диаметры“ дифракционной картины, аналогично дифракции у прямоугольного отверстия, обратно пропорциональны радиусу A круглой диафрагмы. Распределение света (световой бугор) состоит из центрального конусообразного возвышения, окруженного кольцеобразными гребнями, как показывает сечение на фиг. 90.

Высота среднего возвышения опять пропорциональна квадрату площади отверстия $A^2\pi$. Если удвоить эту площадь, то площадь дифракционной картины сократится вдвое, сила же света учетверится; таким образом общая интенсивность удваивается так же, как и площадь отверстия.

§ 50. ДИФРАКЦИОННЫЕ ОТВЕРСТИЯ ДРУГИХ ФОРМ

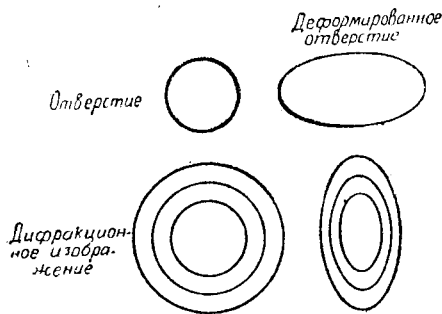
Подобным же образом можно разобрать бесчисленное множество других форм дифракционных отверстий. Например, можно прибегнуть к криволинейной системе координат, для которой контур отверстия служит координатной линией. Мы не будем останавливаться на этом¹, коснемся лишь одного пункта, который не требует никаких новых вычислений, именно — *равномерной деформации отверстия в одном направлении*. Полагая в нашей формуле § 48 (1):

$$u_P = \frac{1}{\lambda} \iint e^{-ik(\xi a + \eta b)} d\xi d\eta, \quad (1)$$

$\xi = \mu\xi'$, $\eta = \eta'$ и интегрируя по тому же участку плоскости $\xi'\eta'$, как прежде в плоскости $\xi\eta$, мы получим функцию $u(a, b)$, выражающую дифракционное изображение отверстия, вытянутого в отношении μ . Если ввести вместо a и b новые переменные $a' = \mu a$, $b' = b$, то интеграл (1) примет вид:

$$u_P = \frac{1}{\lambda} \iint e^{-ik(\xi' a' + \eta' b')} d\xi' d\eta' = u(a', b') = u(\mu a, b). \quad (2)$$

Отсюда следует, что дифракционная фигура деформируется так же линейно, как и отверстие, но в прямо противоположном направлении: *когда дифракционное отверстие вытягивается в каком-либо направлении в отношении μ , то световая картина в этом направлении сжимается в том же отношении*.



Фиг. 91. Дифракция от эллиптического отверстия.

Теперь займемся важным случаем, когда в экране имеется *большое число одинаковых и одинаково ориентированных отверстий*

¹ Фотографии дифракционных фигур у различных отверстий см. J. Scheiner и S. Hirayama, Abhandl. d. königl. Akad. d. Wiss. Berlin, 1894, Anhang, стр. 1.

(согласно принципу Бабине, мы могли бы заменить систему этих отверстий системой экранов, соответствующих отверстиям). Фиксируем в каждом отверстии относительно одинаково расположенную нулевую точку M_p , где p — номер отверстия. Координаты этих точек M_1, M_2 в неподвижной относительно плоскости диафрагмы системе обозначим $\xi_1, \eta_1; \xi_2, \eta_2; \dots$. Полное возмущение в некоторой точке P будет согласно (1):

$$u_P = \frac{1}{\lambda} \sum_p \iint e^{-ik[(\xi_p + \xi)a + (\eta_p + \eta)b]} d\xi d\eta, \\ u_P = \sum_p e^{-ik(\xi_p a + \eta_p b)} \cdot \frac{1}{\lambda} \iint e^{-ik(\xi a + \eta b)} d\xi d\eta. \quad (3)$$

Интеграл в формуле (3) выражает дифракционное действие *одного* отверстия, суммирование соответствует наложению отдельных когерентных дифракционных явлений.

Обозначим интенсивность возбуждения, даваемого одним отверстием, через J_0 ; тогда полная интенсивность будет:

$$J = J_0 \left| \sum_p e^{-ik(\xi_p a + \eta_p b)} \right|^2 = J_0 \sum_p \sum_q e^{-ik[(\xi_p - \xi_q)a + (\eta_p - \eta_q)b]}. \quad (4)$$

Наиболее прост случай двух отверстий, с которым мы уже познакомились раньше (глава III, § 35) под названием *опыта Юнга*. Мы отбрасывали там первый множитель (дифракцию у одного отверстия) и исследовали только второй.

Легко видеть, что наша новая формула (4) точно совпадает с прежним результатом [глава III, § 34 (14)]. Действительно, если p и q принимают только значения 1, 2, — двойная сумма будет равна:

$$\left. \begin{aligned} & 2 + e^{ik[(\xi_1 - \xi_2)a + (\eta_1 - \eta_2)b]} + e^{ik[(\xi_2 - \xi_1)a + (\eta_2 - \eta_1)b]} \\ & = 2 + 2 \cos \{k[(\xi_1 - \xi_2)a + (\eta_1 - \eta_2)b]\} = \\ & = 4 \cos^2 \left\{ \frac{k}{2} [(\xi_1 - \xi_2)a + (\eta_1 - \eta_2)b] \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Рассмотрим теперь случай *весьма многочисленных отверстий*. Они ведут себя совершенно различно в зависимости от того, расположены ли они *неупорядоченно* или *согласно некоторому правильному закону*. В первом случае — полной неупорядоченности — члены в двойной сумме при $p \neq q$ нерегулярно колеблются между +1 и -1 и в среднем дают нуль. Прочие члены ($p = q$) все равны единице. Если мы обозначим через m число отверстий, то будем, следовательно, иметь:

$$J = J_0 m. \quad (6)$$

Неупорядоченные одинаковые отверстия, оказывается, дают вместе такое же самое дифракционное явление, как каждое

из них в отдельности; только интенсивность его увеличивается в число раз, равное числу отверстий. Это явление или, вернее, явление, дополнительное к нему по принципу Бабинне, можно легко наблюдать, держа против отдаленного источника света стеклянную пластинку, покрытую порошком лилоподия (плауна) или другими частицами одинаковой формы. Эти дифракционные кольца можно видеть также на запотевших оконных стеклах; нужно только заметить, что в этом случае экраны не вполне одинаковы по величине. Сюда же относятся „гало“-круги, видимые вокруг солнца и луны при тумане или тонких облачных слоях.

Члены с $p \neq q$ двойной суммы (4), разумеется, не полностью уничтожают друг друга; вследствие этого происходят колебания равномерного фона. Другого рода колебания возникают, если отверстия неодинаковой формы и если распределение их подчинено какому-либо строгому или статистическому закону. Обусловленные ими световые явления можно вычислить, но мы не будем на этом останавливаться¹.

Существенное значение приобретают члены с $p \neq q$, когда дифракционные отверстия расположены *правильно*. Основанные на этом оптические приборы — *дифракционные решетки* — настолько важны, что мы посвятим им особый параграф.

§ 51. ДИФРАКЦИОННЫЕ РЕШЕТКИ

Оптическая решетка представляет собой стеклянную или металлическую поверхность, на которой делительной машиной вырезаны прямые равноотстоящие штрихи. На стеклянных решетках можно делать наблюдения как в отраженном, так и в проходящем свете, на металлических же, разумеется, только в отраженном. Идеализируя решетку, мы мыслим себе ее состоящей из ряда равноотстоящих конгруэнтных щелей в прозрачном экране. Пусть ширина каждой щели — s , длина — l , расстояние между щелями от середины до середины (*постоянная решетки*) — d , а число щелей — m (фиг. 92). Угол, образованный падающим лучом с нормалью к плоскости решетки, пусть будет ϑ ; тогда $\alpha_0 = \sin \vartheta_0$, $\alpha = \sin \vartheta$, $a = \sin \vartheta - \sin \vartheta_0$. Мы можем принять:

$$\xi_p = pd; \quad \eta_p = 0 \quad (p = 0, 1, 2, \dots, m-1).$$

Согласно уравнению § 50 (3)

$$u_p = u_p^0 \sum_{p=0}^{m-1} e^{-ikpda} = u_p^0 \frac{1 - e^{-imkda}}{1 - e^{-ikda}}. \quad (1)$$

¹ См. М. v. Laue, Berl. Ber. 1914, стр. 1144. Аналогичные явления имеют место при дифракции рентгеновских лучей в жидкостях: см. J. A. Prins. Naturwiss., т. 19 (1931), стр. 435.

Отсюда следует:

$$J = |u_p|^2 = |u_p^0|^2 \frac{1 - e^{imkda}}{1 - e^{ikda}} \cdot \frac{1 - e^{-imkda}}{1 - e^{-ikda}} = J_0 \frac{1 - \cos(mkda)}{1 - \cos(kda)}.$$

Подставив сюда из § 48 (14) выражение интенсивности J_0 при дифракции линейного источника света у щели, мы получим (в новых обозначениях $2A = s$, $2B = l$):

$$J = \frac{s^2 l}{\lambda} \left(\frac{\sin \frac{kas}{2}}{\frac{kas}{2}} \right)^2 \left(\frac{\sin \frac{mdka}{2}}{\sin \frac{dka}{2}} \right)^2. \quad (2)$$

Мы получаем, таким образом, наложение дифракционного изображения одной щели на интерференционное изображение m щелей. Дифракционная фигура отдельной щели, рассмотренная нами раньше, имеет главный максимум, половина ширины которого дана выражением:

$$\frac{kas}{2} = \frac{\pi as}{\lambda} = \pi.$$

Следовательно:

$$a = \frac{\lambda}{s}. \quad (3)$$

С функцией, изображающей интерференционную фигуру при совместном действии щелей, мы уже познакомились в теории интерференционных спектроскопов [глава III, § 39 (15)]; она отличается от функции для одной щели тем, что в знаменателе стоит синус. Отсюда следует, что она имеет главный максимум не только посередине при $a = 0$, но бесконечное число главных максимумов всюду, где исчезает знаменатель, т. е. при

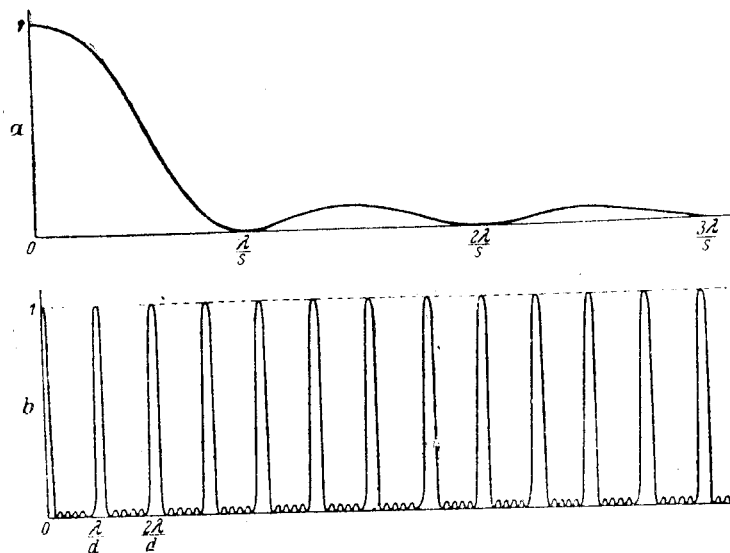
$$a = \sin \vartheta - \sin \vartheta_0 = \frac{\lambda}{d} n \cdot (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots). \quad (4)$$

Между ними лежат слабые второстепенные максимумы, иногда разделенные друг от друга нулевыми точками числителя. Эти минимумы имеют место при

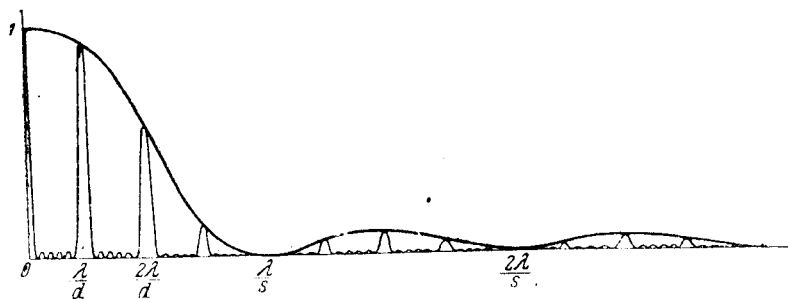
$$a = \frac{\lambda}{d} \cdot \frac{n}{m}. \quad (5)$$

Оба сомножителя функции (2) изображены графически отдельно на фиг. 93, а произведение их на фиг. 94. Число n указывает для направления наибольшей интенсивности (интерференционные полосы) разность хода в длинах волн между двумя интерферирующими лучами, прошедшими через соседние щели. Его называют в соответствии с нашим прежним определением (глава III, § 42) *порядком интерференции*.

Положение интерференционных максимумов можно также найти элементарным построением по принципу Гюйгенса (аналогично построению Юнга). Для этого представим себе, что из каждого отдельного отверстия выходит вторичная волна,



Фиг. 93а и б. К теории дифракции в решетках.



Фиг. 94. К теории дифракции в решетках (побочные максимумы увеличены).

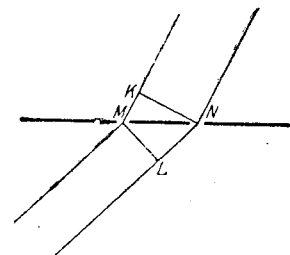
и найдем разность фаз между ними (фиг. 95), а также соответствующее построение при дифракции у одной щели § 48, фиг. 89, стр. 215). Пусть M, N — две соседние щели; опустим из N перпендикуляр NK на входящий в M луч, а из M опустим перпендикуляр ML на дифрагированный луч, выходящий из точки N . Тогда разность фаз обоих выходящих лучей есть $LN - MK = d(a - \alpha_0) = d \cdot a$, а интерференционные максимумы находятся там, где $d \cdot a = n\lambda$; отсюда далее следует, что $a = \frac{\lambda}{d} n$ согласно (4).

Действительное распределение интенсивности дается произведением изображенных на фиг. 93а и б функций. Вообразив себе взаимное наложение этих функций, мы увидим, что благодаря действию распределения света от одной щели интерференционные полосы нулевого порядка выделяются среди других. Когда дифракция еще сильна в местах, где находятся интерференционные полосы первого, второго... порядка, т. е. согласно (3) и (4) когда $\lambda/s \gg \lambda/d$ или $s \ll d$, то дифракционные фигуры первого, второго и т. д. порядка могут быть яркими, но вообще их интенсивность убывает.

Однако может случиться, что интерференция высшего порядка совпадает со второстепенным максимумом дифракции и благодаря этому усилится (фиг. 94). Вообще изложенная здесь теория, рассматривающая дифракционную решетку попеременно то как совершенно прозрачную, то как совершенно непрозрачную, является лишь грубым приближением к действительности, в особенности для отражательной решетки. Характер поверхности и, следовательно, отражательная способность последней периодически изменяется благодаря выцарапанным на ней штрихам, и, строго говоря, мы должны были бы исследовать, как плоская волна отражается от поверхности с периодически изменяющейся отражательной способностью, учтя при этом и форму борозд-штрихов. Такие исследования уже были произведены¹. В принципе рассуждение основано на том, что действие дифрагирующей поверхности выражается не функцией $f(\xi, \eta)$, введенной в § 48 (3), которая принимает только значения 0 и 1, а некоторой более общей функцией, периодической для решеток. В этом случае ее можно разложить в ряд Фурье, где расстояние между щелями будет играть роль периода, а затем почленно вывести интеграл дифракции. Тогда резкость дифракционных полос определенного порядка будет связана простой зависимостью с величиной коэффициентов Фурье в разложении f .

На основании этой теории можно так наносить штрихи, что наибольшую интенсивность мы получим не в спектрах низших порядков, а в каком-либо спектре высшего порядка. Преимущество этого заключается, как мы увидим в § 53, в большей разрешающей способности, чем та, которой часто пользуются на практике.

Так как положение максимумов зависит от длины волны, то белый падающий свет разлагается решеткой на спектр во всех



Фиг. 95. Построение разности фаз в случае двух щелей по принципу Гюйгенса.

¹ См. напр. Lord Rayleigh, Wave theory of light. Enc. Brit., т. 24 (особенно § 15, 1888). Перепечатано в Sci. Paper., т. 3, § 15, стр. 117. Cambridge, 1902.

порядках, кроме нулевого. На этом основано *применение решет-ки в спектроскопии*.

Главной частью спектрографа, кроме нескольких линз и вогну-тых зеркал (сама решетка может быть устроена в виде вогнутого зеркала), является узкая щель. Решетка дает ее изобра-жения различных порядков. Спектр состоит из ряда разноцвет-ных изображений щели. О частностях речь будет ниже.

Фиолетовая часть спектра отклоняется мало, красная — сильно; отклонение пропорционально длине волны. Благодаря этому свойству дифракционный спектр называется *нормальным спек-тром*. Поэтому можно производить непосредственно грубое определение длины волны, измеряя отклонение, если известна постоянная решетки или длина волны одной спектральной ли-нии, тогда как в спектрографе с призмой надо проверить дис-персию на протяжении всего спектра.

В отношении силы света дифракционный спектрограф при небольшой дисперсии и разрешающей способности уступает спектрографу с призмой, так как в призме весь падающий свет по-падает в наблюдаемый спектр, а в решетке используется спектр только одного какого-нибудь порядка. Однако сравнение менее благоприятно для спектрографа с призмой при высокой диспер-сии и разрешении, так как в этом случае нужно несколько больших призм, и световые потери вследствие поглощения и многократных отражений увеличиваются. Поэтому дифракци-онные решетки применяются, главным образом, при исследова-ниях в ультрафиолетовых и инфракрасных лучах, т. е. в обла-сти наибольшего поглощения большинства веществ. В крайней ультрафиолетовой части спектра, в области так называемых лучей Шумана, для устранения поглощения воздухом поль-зуются *вакуумными спектрографами* с решеткой.

Если ограничиться видимым светом, который, как известно, заключается в промежутке от $\lambda_1 = 0,4$ до $\lambda_2 = 0,75\mu$ — следова-тельно, не охватывает полной „октавы“ — мы увидим, что спектр первого порядка не вполне доходит до спектра второго по-рядка (он простирается

$$\text{от } a = \frac{\lambda_1}{d} \text{ до } a = \frac{\lambda_2}{d} = \frac{0,75}{0,4} \cdot \frac{\lambda_1}{d} = 1,8 \frac{\lambda_1}{d},$$

тогда как спектр второго порядка начинается от $2 \frac{\lambda_1}{d}$); напро-тив, спектр второго порядка отчасти налагается на спектр третьего порядка (он заключен между

$$a = 2 \frac{\lambda_1}{d} \text{ и } a = 2 \frac{\lambda_2}{d} = 2 \cdot 1,8 \frac{\lambda_1}{d} = 3,6 \frac{\lambda_1}{d},$$

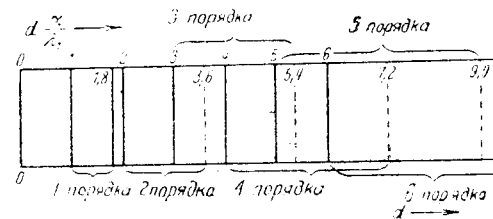
тогда как спектр третьего порядка начинается уже при $3,0 \cdot \frac{\lambda_1}{d}$).

И чем выше порядок спектра, тем больше он захватывает об-ласть следующего порядка (фиг. 96). Для визуального наблюде-ния, при котором глаз замечает разницу цвета, это не является помехой, но при фотографировании следует обращать особое внимание на порядок спектра.

Однако из взаимного наложения порядков можно извлечь и выгоду, использовав его для сравнения длин волн. Если мы имеем две различные длины волны λ_1 и λ_2 , изображения кото-рых налагаются (совмещаются) в двух соседних порядках, то

$$n\lambda_1 = (n+1)\lambda_2. \quad (6)$$

Если λ_1 известно, отсюда можно определить λ_2 .



Фиг. 96. Наложение спектров решетки различных порядков.

Методы точного измерения длин волн основаны в грубых чертах на следующем:

Нормальными первого порядка служат такие длины волн, ко-торые были сравнены с нормальным метром прямыми и интерфе-рометрическим методом (см. об этом в главе III, § 41). *Вто-ричными нормальными* являются выверенные по ним резкие спек-тральные линии, которые выбираются так, чтобы они были более или менее равномерно распределены по спектру. Для этого сравнения пользуются преимущественно большими дифракцион-ными решетками, частью в сочетании с интерференционными при-борами. Только что описанный метод совпадения различных по-рядков можно довести до большой тонкости, соединив решетку с интерферометром Фабри-Перо следующим образом.

Пластика интерферометра устанавливается перед щелью так, чтобы тонкая спектральная линия λ_1 казалась пересеченной горизонтальными полосами, которые дает интерферометр. Кроме того, необходимо так установить всю систему, чтобы щель ото-бражалась „стигматически“, т. е. чтобы в каждом месте щели, независимо от остальных, получался узкий спектр. Соседняя спектральная линия λ_2 будет также казаться пересеченной таки-ми же линиями, но последние будут смещены относительно полос линии λ_1 (расстояние между ними будет также несколько иным). Поэтому непрерывный спектр кажется пересеченным ко-сыми (прямолинейными) интерференционными полосами (фиг. 97). Расстояние между двумя интерференционными полосами соот-ветствует изменению длины волны на такую величину, что раз-

ница между падающими на пластинку интерферометра рядами волн обеих линий λ_1 и λ_2 составляет ровно длину волны. Таким образом мы снова получаем формулу:

$$n\lambda_1 = (n+1)\lambda_2,$$

но зато уже n означает колоссально высокий порядковый номер (порядка 10^4) спектра интерферометра. Отсюда получаем:

$$\lambda_1 - \lambda_2 = \frac{\lambda_2}{n}.$$

Мы видим, что разность длин волн можно определить чрезвычайно точно, даже если известно лишь грубое значение отдельной длины волны (λ_2); надо только знать приблизительный порядковый номер n . Этот метод особенно пригоден для относительного промера линий поглощения, например фраунгоферовых линий солнечного спектра.



Фиг. 97. Спектр с косыми интерференционными линиями.

волн (см. примечание 13). Позднее Фраунгофер стал пользоваться стеклянными пластинками, покрытыми слоем сажи или серебра, на котором он выцарапывал с помощью делительной машины прозрачные линии.

Отражательные решетки получаются нанесением с помощью алмаза борозд на зеркальную металлическую поверхность. Нахождение подходящего металла, выбор пригодных алмазных осколков являются особой отраслью техники, которой занимаются лишь в немногих местах. Особенно знамениты решетки, изготовляемые Раулендом (большой частью вогнутые, см. ниже). Превосходные плоские решетки изготовляются при помощи делительной машины Майкельсона.

Качество решетки зависит в большой степени от постоянства расстояний между штрихами.

Винт, ведущий алмаз, должен передвигать его при одном обороте на одно и то же расстояние. Построенная Раулендом делительная машина наносит до 1800 штрихов на миллиметр. Большие решетки длиной около 10 см, содержащие несколько десятков тысяч штрихов, изготовляются на автоматических машинах в помещениях со строго постоянной температурой. Процесс изготовления продолжается несколько суток. Изнашивание алмаза играет в этом большую роль, несмотря на его большую твердость.

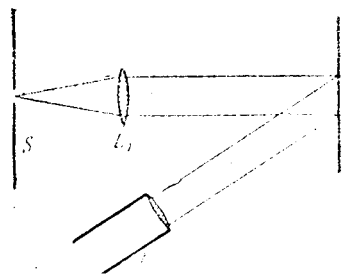
Помимо того, что острие алмаза легко может сломаться, надо считаться с непрерывным стиранием, значение которого станет ясным из следующих соображений.

Известно, что на один миллиметр твердого тела приходится приблизительно 10^7 атомов. Если бы при нанесении одного штриха срывался только один атомный слой, то при 10^5 штрихов смещение или искажение поверхности алмаза составило бы

$$\frac{1}{100} \text{ мм, а расстояние между штрихами стало бы в 20 раз}$$

меньшим. Майкельсон часто говорил, что изготовление решеток — задача не механической мастерской, а физической лаборатории. С подобными же трудностями приходится сталкиваться при устранении упругих и термических влияний на аппаратуру.

Каждая решетка имеет известные *недостатки*, заключающиеся в не совсем постоянном расстоянии между штрихами. Совершенно неправильные отклонения дают лишь несколько затуманенный фон. Все *периодические* изменения расстояния чрезвычайно опасны; благодаря им возникают так называемые „духи“, т. е. ложные линии, которые часто очень трудно отличить от настоящих. Допустим, что период изменения расстояния между штрихами в p раз больше самого расстояния; это значит, что основной период деления решетки в действительности в p раз больше, чем мы предполагали при расчете делений. Поэтому, кроме системы спектров, обусловленной периодом штриха, получается еще другая система различных порядков (которая, строго говоря, одна заслуживает этого названия) на расстоянии в p раз меньшем. Эти второстепенные линии обыкновенно слабы, если период погрешности сам слабо выражен. Каждая спектральная линия кажется окруженной равноотстоящими слабыми линиями, „духами“. Периодические погрешности решеток обычно имеют причиной дефект винта делительной машины, и основной период их есть ход винта. Поэтому винт должен быть изготовлен самым тщательным образом, а затем равномерность его должна проверяться интерферометром. Обнаруженные таким образом недостатки можно отчасти исправить с помощью механических приспособлений (например, между винтом и алмазным резцом вставляется рычажное приспособление с направляющим шаблоном и т. п.).

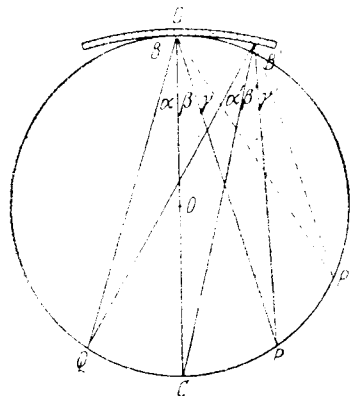


Фиг. 98. Схема спектрографа с решеткой.

Рассмотрим теперь *важнейшие способы установки* решеток. Плоские отражательные решетки устанавливаются точно так же, как призмы, с помощью коллиматора и зрительной трубы (фиг. 98). Источник света Q освещает щель S , которая находится в фокальной плоскости линзы L_1 коллиматора. Свет от этой линзы падает параллельно на решетку G . Отраженные дифрагированные лучи падают либо в зрительную трубу F , либо в фотографическую камеру.

IV. Дифракция

Для того чтобы устранить линзы и связанные с ними световые потери, Роулэнд ввел упоминавшиеся уже *вогнутые решетки*. В них штрихи нанесены на вогнутой стороне слабо цилиндрической хорошо отражающей металлической поверхности (см. примечание 19). Решетка является одновременно и вогнутым зеркалом. При установке решетки находят ее фокусы с помощью следующей простой геометрической теоремы:



Фиг. 99. Фокусирующее действие вогнутой решетки.

Пусть B есть середина решетки, C — ее центр кривизны. Разделим соединительную линию BC пополам точкой O и опишем из O окружность K , проходящую через B и C . Можно доказать, что с большим приближением справедливо следующее утверждение: лучи, выходящие из любой точки Q окружности K , сходятся в точках P, P', \dots окружности как для геометрического отражения, так и для всех дифракционных спектров (фиг. 99).

CB есть нормаль в точке падения для луча QB . Обозначим углы QBC и CBP соответственно через α и β ; тогда $\alpha = \beta$, а $QC = CP$. Рассмотрим теперь второй луч QB' , перпендикуляр падения которого есть CB' ; точку B' при небольшой кривизне зеркальной поверхности можно считать с большим приближением лежащей на окружности K . Если мы теперь проведем отраженный луч с углом отражения $\beta' = \alpha' = Q'B'C$, то он также должен пройти через P согласно теореме о вписанных углах.

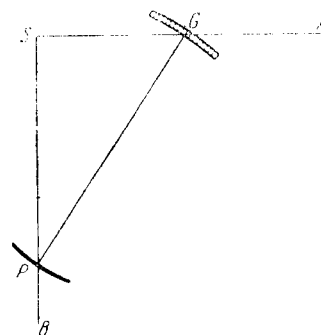
То же рассуждение можно применить к дифрагированному лучу. Дифрагированный в точке B луч отклоняется от отраженного луча на некоторый угол γ равный углу γ' между дифрагированным и отраженным лучами в точке B' . Мы имеем опять два луча, выходящие из точек B и B' и образующие с соединительными линиями BC и соответственно $B'C$ равные углы $\beta + \gamma$, соответственно, $\beta' + \gamma'$. Следовательно, они должны пересекать окружность K в одной и той же точке P' .

Итак, мы имеем правило: *чтобы получить резкие линии, надо установить щель, решетку и экран (фотографическую пластинку) на одной окружности, диаметр которой равен радиусу кривизны вогнутой решетки.*

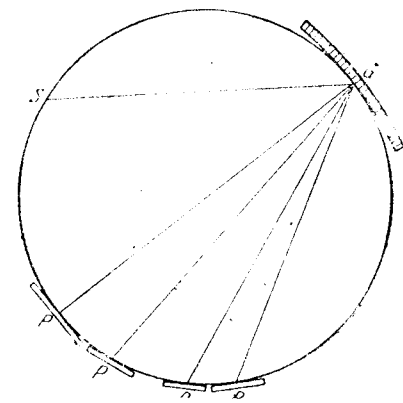
Мы опишем две установки вогнутой решетки, имеющие большое значение. Одна из них, принадлежащая Роулэнду, изображена на фиг. 100. Щель устанавливается на двух взаимно перпендикулярных стальных рельсах как раз в вершине S прямого угла и ориентирована так, что выходящий из нее нормально свет идет вдоль одной из рельс по направлению SA . На первые две рельсы положена третья, (мост), концы которой

могут по ним скользить. На одном конце моста, скользящем по SA , находится решетка G , нормаль к которой совпадает с направлением моста. На другом конце, скользящем по SB , находится пластинка P , перпендикулярная к мосту. Тогда точка S , очевидно, всегда лежит на окружности диаметра GP , который выбирают равным радиусу кривизны вогнутой решетки. Передвигая мост, можно проектировать спектры всех порядков на пластинку P .

В настоящее время чаще прибегают к другой установке,



Фиг. 100. Расположение решеток по Роулэнду.



Фиг. 101. Неподвижная установка вогнутой решетки.

позволяющей сразу фотографировать все спектры. Она отличается от вышеописанной большей стабильностью. Окружность здесь представляет собой просто стальную планку (фиг. 101), на которой неподвижно укреплены щель S и решетка G . На планке всюду имеются приспособления для укрепления фотографических пластинок. Недостатками этой установки являются ее громоздкость и высокая стоимость (см. примечание 20).

§ 52. ПЛОСКАЯ ДВУХМЕРНАЯ РЕШЕТКА. ПРОСТРАНСТВЕННАЯ РЕШЕТКА. РЕНТГЕНОВСКИЕ СПЕКТРЫ

В § 51 мы рассматривали штриховую решетку как частный случай системы большого числа дифракционных отверстий, в которой щели периодически повторяются в одном направлении. Можно, конечно, устроить систему отверстий с двойной периодичностью; мы получим так называемые двухмерные решетки. В оптических аппаратах они почти не применяются, но во многих случаях можно наблюдать дифракционные явления, вызываемые подобными решетками. Их можно наблюдать, например, глядя на отдаленный яркий источник света через тонкую ткань (зонтик, занавес) или при отражении от автотипной сетки. Теория двухмерной решетки чрезвычайно проста. Надо только в формулах § 50 расположить центры отверстий в плоской сетке, которая в общем случае будет косоугольной.

Мы разберем сейчас случай *пространственной решетки*, так как она играет решающую роль в оптике рентгеновских лучей. Но перед этим надо сказать несколько слов о развитии *учения о рентгеновских лучах*. Вскоре после открытия их (1896) были сделаны попытки наблюдать их интерференцию и дифракцию. Но никаких определенных результатов не было получено. Из наблюдений над дифракционными явлениями явствовало только, что если рентгеновские лучи вообще имеют волновую природу, длина их волны должна быть необычайно мала (порядка нескольких Å). Интерференционных явлений с помощью отражения тогда не удалось получить, так как рентгеновские лучи не имеют обычного правильного отражения (с современными интенсивными лучами при касательном падении можно получить истинное отражение). Технические решетки оказались непригодными, так как расстояние между штрихами было слишком велико относительно длины волны.

Тогда Лауэ (M. v. Laue) в 1912 г. пришел к мысли использовать в качестве дифракционной решетки для рентгеновских лучей естественную атомную решетку кристаллов. Проведенный им совместно с Фридрихом и Книппингом эксперимент увенчался полным успехом и явился исходной точкой спектроскопии рентгеновских лучей, которая обязана своим дальнейшим развитием, главным образом, исследованиям Брэггов, отца и сына (1912), Дебая и Шеррера (1916), Хёлля (1917), а также Зигбана и его учеников. Здесь мы можем лишь поверхностно коснуться оптики коротких волн, ставшей совершенно самостоятельной наукой, имеющей совершенно иные теоретические и экспериментальные методы, чем оптика обычного света¹. Мы только укажем, каким образом дифракционные явления в кристаллических решетках укладываются в общую теорию решеток.

Рассмотрим любой кристалл (в общем случае триклинный). Он получается путем периодического повторения в пространстве определенной группы атомов или молекул.

Мы представляем себе всю решетку составленной из одной такой группы (основной группы, базиса, узла) при помощи следующей операции:

Пусть a_1, a_2, a_3 — три произвольных пространственных вектора, выходящих из некоторого узла — нулевой точки O —, и образующих параллелепипед, — „ячейку“, а l_1, l_2, l_3 — три целых числа (положительных или отрицательных, включая нуль). Вектор:

$$\mathfrak{R}_i = l_1 a_1 + l_2 a_2 + l_3 a_3 \quad (1)$$

с составляющими:

$$\left. \begin{aligned} X_i &= l_1 a_{1x} + l_2 a_{2x} + l_3 a_{3x}, \\ Y_i &= l_1 a_{1y} + l_2 a_{2y} + l_3 a_{3y}, \\ Z_i &= l_1 a_{1z} + l_2 a_{2z} + l_3 a_{3z} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

¹ Для более глубокого изучения укажем на книгу Р. Р. Ewald, *Kristalle u. Röntgenstrahlen*, Berlin, 1923. (Р. Глокер, Рентгеновские лучи и испытание материалов, Гостехиздат 1932; М. Корсунский, Физика рентгеновских лучей, ОНТИ 1936, прим. ред.).

определяют некоторое перемещение. Нулевая точка при этом переходит в однозначно определенную новую точку R , координаты которой в косоугольной системе, образованной векторами a_1, a_2, a_3 , выражаются целыми числами. Совокупность всех точек, получающихся таким образом из нулевой точки, образует „простую“ (в общем случае косоугольную триклинную) решетку.

Полную решетку мы получим, произведя указанные перемещения для всех атомов базиса. Каждому атому базиса соответствует *простая атомная решетка*, конгруэнтная с решеткой R . Процесс рассеяния света в кристалле в геометрическом отношении совершенно аналогичен дифракции, в физическом же отношении его скорее следует понимать как явление дисперсии, как мы это покажем в последней главе этой книги. Атомные группы, когда на них падает рентгеновская волна, становятся действительно центрами распространения вторичных волн, причем это не только математическое представление, как в принципе Гюйгенса, но и реальный физический процесс. Центрами вторичных волн являются не места в пустом пространстве, как в собственно дифракционных явлениях, а атомы, в которых находятся реальные носители колебаний (электроны). Последние приводятся в колебательное движение падающей на них волной и со своей стороны начинают излучать действительные сферические волны. Возбужденные колебания не вполне совпадают по фазе с падающей волной, так как резонатор обладает известной инерцией, но смещение фазы чрезвычайно незначительно. Благодаря ему показатель преломления для рентгеновских лучей очень мало отличается от единицы; это есть собственно дисперсионное действие. Полная теория этого явления ведет свое начало от Эвальда; к ее главным чертам мы вернемся в главе VII, § 75. Сейчас мы не будем учитывать этого смещения и будем считать, что колебания точно совпадают с фазой падающего света. Тогда мы имеем следующее простое рассуждение.

Пусть в некоторую точку кристалла попадает свет от точечного источника, находящегося на расстоянии r_0 ; тогда падающая амплитуда есть e^{ikr_0}/r_0 ; пусть в рассматриваемой точке возбуждается вторичная сферическая волна с амплитудой e^{ikr}/r . Амплитуда, рассеиваемая из этой точки кристалла и попадающая в точку наблюдения, есть, следовательно, произведение $e^{ik(r+r_0)}/rr_0$. Положим, что линейные размеры кристалла малы относительно расстояний R и R_0 его „центра“ от точки наблюдения P и источника света Q . Обозначим через q вектор, проведенный из центра O внутри кристалла к произвольной точке решетки (атому); длина q должна быть мала относительно R и R_0 . В таком случае мы можем заменить r и r_0 в знаменателе амплитуды через R и R_0 для всех рассеивающих центров кристалла; затем мы можем написать приближенно:

$$r_0 = R_0 + \xi_0 q, \quad (3)$$

и

$$r = R - \xi q, \quad (4)$$

где \hat{s}_0 — единичный вектор направления QO , а \hat{s} — единичный вектор направления OP . Амплитуда, рассеиваемая из точки решетки, будет:

$$u_P = C e^{ik(\hat{s}_0 - \hat{s}) \cdot \mathbf{r}}, \quad (5)$$

где множитель C охватывает все микроскопические величины.

Если \mathbf{r}^0 с компонентами ξ, η, ζ есть вектор, соединяющий нулевую точку с точкой базиса, эквивалентной рассматриваемой точке решетки, то согласно (1)

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_l + \mathbf{r}^0. \quad (6)$$

Мы получим полное *рассеяние* кристалла, суммируя сначала по всем векторам \mathbf{r}^0 кристаллической ячейки, а затем по всем ячейкам. Первую сумму, представляющую собой рассеяние одной ячейки, обозначим через u_P^0 (в дифракционной теории оптической решетки Фраунгофера ей соответствует амплитуда, даваемая одной щелью). Полная амплитуда в P будет согласно (5) и (6):

$$u_P = u_P^0 \sum_l e^{ik \cdot \mathbf{r}_l \cdot (\hat{s}_0 - \hat{s})}, \quad (7)$$

где суммирование распространено на все ячейки, т. е. на все целые значения l_1, l_2, l_3 . С помощью формулы (1) скалярное произведение в показателе степени преобразуется в

$$\mathbf{r}_l \cdot (\hat{s}_0 - \hat{s}) = l_1 \cdot a_1 (\hat{s}_0 - \hat{s}) + l_2 \cdot a_2 (\hat{s}_0 - \hat{s}) + l_3 \cdot a_3 (\hat{s}_0 - \hat{s}). \quad (8)$$

Отсюда видно, что наша формула является обобщением основной формулы § 48 (1) фраунгоферовых дифракционных явлений, — она переходит в нее, если отбросить член с индексом 3, положить, что a_1 и a_2 взаимно перпендикулярны, и обозначить составляющие векторов \hat{s}_0 и \hat{s} в координатной системе a_1, a_2 через α_0, β_0 и α, β .

Чтобы упростить вычисления, положим, что кристалл имеет форму параллелепипеда, ребра которого параллельны трем векторам a_1, a_2, a_3 .

Подставив выражение (8) в формулу (7), мы разобьем сумму на три геометрические прогрессии такого вида:

$$\sum_l e^{ilA}, \quad (9)$$

где lA означает одно из выражений: $l_1 A_1, l_2 A_2, l_3 A_3$, причем

$$A_1 = k \cdot a_1 (\hat{s}_0 - \hat{s}), \quad A_2 = k \cdot a_2 (\hat{s}_0 - \hat{s}), \quad A_3 = k \cdot a_3 (\hat{s}_0 - \hat{s}). \quad (10)$$

Если L_1, L_2, L_3 — числа узлов, помещающихся вдоль каждого из ребер кристалла, то суммирование ряда (9) дает:

$$\sum_{l=0}^{L-1} e^{ilA} = \frac{1 - e^{iLA}}{1 - e^{iA}}.$$

Квадрат модуля правой части равен:

$$\frac{1 - \cos LA}{1 - \cos A} = \frac{\sin^2 \frac{LA}{2}}{\sin^2 \frac{A}{2}}. \quad (11)$$

Следовательно, *интенсивность рассеяния*

$$J_P = J_P^0 \frac{\sin^2 \frac{L_1 A_1}{2} \sin^2 \frac{L_2 A_2}{2} \sin^2 \frac{L_3 A_3}{2}}{\sin^2 \frac{A_1}{2} \sin^2 \frac{A_2}{2} \sin^2 \frac{A_3}{2}}. \quad (12)$$

J_P^0 есть выражение рассеяния одной ячейки и в спектроскопии рентгеновских лучей носит название *структурного множителя*. Если представить себе рассеивающие частицы ячейки в виде точечных диполей, то J_P^0 в свою очередь окажется результатом суммирования по ним. Однако в последнее время, в согласии с современной атомной теорией, стали проводить расчеты, считая распределение плотности непрерывным. Но мы не будем останавливаться на этом вопросе.

Обратимся теперь к *положению интерференционных максимумов*, которые определяются исчезновением трех множителей в знаменателе (12). Условия максимума:

$$\frac{A_1}{2} = h_1 \pi, \quad \frac{A_2}{2} = h_2 \pi, \quad \frac{A_3}{2} = h_3 \pi,$$

где h_1, h_2, h_3 — целые числа. Другое выражение этих условий получим, воспользовавшись (10) и полагая, что $k = 2\pi/\lambda$:

$$a_1 (\hat{s}_0 - \hat{s}) = h_1 \lambda, \quad a_2 (\hat{s}_0 - \hat{s}) = h_2 \lambda, \quad a_3 (\hat{s}_0 - \hat{s}) = h_3 \lambda. \quad (13)$$

Это знаменитые *формулы Лауэ* для положения максимумов интерференции рентгеновского рассеяния.

Характерное отличие их от случая дифракции в штриховой решетке (а также в плоской двухмерной решетке) состоит в следующем:

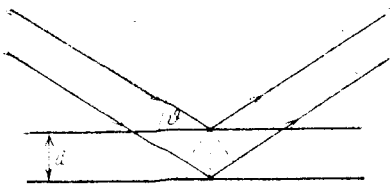
Для штриховой или двухмерной решетки при заданной длине волны и заданном направлении \hat{s}_0 падения всегда имеется решение \hat{s} ; в этом же случае при заданной длине волны λ мы имеем уравнений на единицу больше, чем неизвестных, а именно — три уравнения для двух независимых составляющих единичного вектора \hat{s} . Поэтому кристалл, освещаемый строго монохроматическими рентгеновскими лучами, вообще не дает заметной интерференции. Для получения интерференции можно брать один из двух существенно различных путей.

1. Опыт Лауэ

В опыте Лауэ на решетку падает „белый“ рентгеновский свет, т. е. непрерывный спектр. Решетка отбирает сама длины волн, удовлетворяющие условию Лауэ (13). На фотографической пластинке получается система правильно расположенных точек, совершенно, однако, различных по интенсивности и по значению. Каждую группу симметрически упорядоченных точек (соответственно симметрии кристалла) производит определенная отфильтрованная длина волны. Расшифровка такой *диаграммы Лауэ* очень сложна и требует одновременного определения порядковых чисел h_1, h_2, h_3 и длины волны λ . На методах этого анализа мы не можем останавливаться.

2. Опыт Брэггов и Дебай-Шеррер-Хёлла

В этих опытах варьируется положение кристалла в пространстве — у Брэггов путем вращения кристалла, у Дебай-Шеррера и у Хёлла путем применения мелкого кристаллического порошка, содержащего так много отдельных, различно ориентированных кристаллов, что можно считать представленными все возможные положения. Для первого опыта нужны хорошие куски кристалла. Кроме того, Брэгги пользовались не формулой Лауэ, а другой, эквивалентной, но более наглядной, связанной с теорией интерференции на плоскопараллельных пластинках. Ход рассуждений был следующий:



Фиг. 102. Дифракция рентгеновских лучей в кристаллических решетках.

с заметной интенсивностью, когда выполняется условие интерференции в плоскопараллельных слоях (глава III, § 38, 39), т. е. если разность хода двух соседних интерферирующих лучей есть целое кратное длины волны. Обозначим через ϑ угол скольжения, т. е. угол между граничной плоскостью и падающим лучом (в отличие от дополнительного к нему *угла падения*, которым пользуются в обычной оптике); тогда фиг. 102 дает нам условие усиления:

$$2d \sin \vartheta = n \lambda, \quad (14)$$

где d — расстояние между сетками, а n — целое число. Если это условие выполняется, то и остальные, глубже расположенные, слои дадут усиление.

Мы видим теперь, что условие Брэггов (14) эквивалентно формулам Лауэ (13), если применить их не только к поверхности, но и ко всем возможным внутренним сеткам. Для этого служит следующее геометрическое рассуждение:

Пусть

$$V = a_1 \cdot (a_2 \times a_3) = \begin{vmatrix} a_{1x} & a_{1y} & a_{1z} \\ a_{2x} & a_{2y} & a_{2z} \\ a_{3x} & a_{3y} & a_{3z} \end{vmatrix} \quad (15)$$

есть объем ячейки. Выберем три таких вектора:

$$b_1 = \frac{1}{V} (a_2 \times a_3); \quad b_2 = \frac{1}{V} (a_3 \times a_1); \quad b_3 = \frac{1}{V} (a_1 \times a_2), \quad (16)$$

которые перпендикулярны каждый к двум основным векторам решетки. Решетку, образованную векторами b , называют обратной к первоначальной. Очевидно,

$$a_i b_k = \delta_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{при } i=k, \\ 0 & \text{при } i \neq k \end{cases} \quad (i, k = 1, 2, 3). \quad (17)$$

Всякий произвольный вектор r может быть линейно выражен как через векторы a , так и через векторы b , например:

$$r = c_1 b_1 + c_2 b_2 + c_3 b_3. \quad (18)$$

Умножая скалярно это уравнение поочередно на a_1, a_2, a_3 , получим в силу (17):

$$c_1 = a_1 r; \quad c_2 = a_2 r; \quad c_3 = a_3 r. \quad (19)$$

Этими формулами можно воспользоваться, чтобы решить уравнения Лауэ (13) относительно

$$\tilde{s}_0 - \tilde{s} = \lambda (h_1 b_1 + h_2 b_2 + h_3 b_3). \quad (20)$$

Пусть n — общий наибольший делитель h_1, h_2, h_3 :

$$h_1 = n h'_1; \quad h_2 = n h'_2; \quad h_3 = n h'_3, \quad (21)$$

где, следовательно, h'_1, h'_2, h'_3 взаимно простые числа. Введем для выражения в скобках (20), имеющего размерность обратную длине, особое обозначение $n \cdot \frac{1}{d}$; тогда

$$|h'_1 b_1 + h'_2 b_2 + h'_3 b_3| = \frac{1}{d}. \quad (22)$$

Теперь нашу формулу (20) можно написать в виде:

$$|\tilde{s}_0 - \tilde{s}| = \frac{\lambda}{d} n.$$

Если 2ϑ есть угол между \vec{s}_0 и \vec{s} , то $(\vec{s}_0 - \vec{s}) = 2 \sin \vartheta$, откуда

$$2d \sin \vartheta = \lambda n. \quad (23)$$

Это и есть *формула Брэгга* (14), если мы еще сможем доказать, что d означает расстояние между двумя соседними сетками.

Рассмотрим вектор:

$$\vec{h} = h_1 \vec{b}_1 + h_2 \vec{b}_2 + h_3 \vec{b}_3, \quad (24)$$

изображающий произвольную точку обратной решетки, и докажем, что он перпендикулярен к одной из сеток первоначальной решетки. Эту сетку \mathcal{M} мы построим следующим образом:

Пусть h — общее наименьшее кратное чисел h_1, h_2, h_3 ; проведем три параллельных осям вектора:

$$\frac{h}{h_1} \vec{a}_1, \quad \frac{h}{h_2} \vec{a}_2, \quad \frac{h}{h_3} \vec{a}_3$$

и проведем через них плоскость \mathcal{M} .

Легко видеть, что две лежащие в этой плоскости прямые, например соединительные линии каких-нибудь двух из трех векторов

$$\frac{h}{h_1} \vec{a}_1 - \frac{h}{h_2} \vec{a}_2$$

и

$$\frac{h}{h_2} \vec{a}_2 - \frac{h}{h_3} \vec{a}_3$$

перпендикулярны к вектору \vec{h} , ибо их скалярные произведения на \vec{h} равны нулю, что легко вычислить. Отсюда следует, что плоскость \mathcal{M} также перпендикулярна к \vec{h} , что и требовалось доказать.

Умножим скалярно единичный вектор $\frac{\vec{h}}{|\vec{h}|}$ направления \vec{h} на радиус-вектор точки \mathcal{M}_i решетки; тогда $\frac{\vec{h}}{|\vec{h}|} \cdot \mathcal{M}_i$ есть расстояние точки \mathcal{M}_i от плоскости \mathcal{M} . Если сократить в дроби $\frac{\vec{h}}{|\vec{h}|}$ общие множители, то для расстояния \mathcal{M} получится выражение:

$$\frac{(h'_1 \vec{b}_1 + h'_2 \vec{b}_2 + h'_3 \vec{b}_3) \cdot (l_1 \vec{a}_1 + l_2 \vec{a}_2 + l_3 \vec{a}_3)}{|h'_1 \vec{b}_1 + h'_2 \vec{b}_2 + h'_3 \vec{b}_3|} = \frac{l_1 h'_1 + l_2 h'_2 + l_3 h'_3}{|h'_1 \vec{b}_1 + h'_2 \vec{b}_2 + h'_3 \vec{b}_3|}. \quad (25)$$

Так как h'_1, h'_2, h'_3 не имеют общих делителей, то выражение в числителе (25) принимает все целые значения. Поэтому наименьшее, отличное от 0, значение числителя есть 1, а наименьшее расстояние точки \mathcal{M}_i от плоскости \mathcal{M} есть:

$$\frac{1}{|h'_1 \vec{b}_1 + h'_2 \vec{b}_2 + h'_3 \vec{b}_3|}. \quad (26)$$

Следовательно, проходящая через точку \mathcal{M}_i параллельная сетка есть ближайшая к \mathcal{M} и отстоит от нее на d , что и требовалось доказать.

Вышеприведенные рассуждения имеют двойное применение.

Прежде всего с их помощью были исследованы структуры решеток. Затем, можно было с помощью известных решеток анализировать рентгеновские спектры. При исследовании решеток можно было воспользоваться данными кристаллографии. Исходной точкой были простые ионные решетки кубической системы, например каменная соль, сильвин, структура которых была уже предположительно известна. После того как были сделаны простые предположения относительно расположения ионов в ячейке и был вычислен соответствующий структурный множитель, стало возможным решить, какие из этих предположений правильны, и таким образом были найдены простейшие правильные структуры решеток. Последние в свою очередь служили в качестве дифракционных решеток для исследования структуры самих рентгеновских лучей, испускаемых заданным родом атома (антикатада). Структуры рентгеновского спектра мы не можем касаться здесь, так же, как и структуры оптических спектров¹.

§ 53. РАЗРЕШАЮЩАЯ СИЛА ОПТИЧЕСКИХ ПРИБОРОВ

Наиболее важным применением фраунгоферовой дифракционной формулы § 48 (1) является вычисление *разрешающей способности оптических приборов*. Мы уже познакомились с этим понятием в разделе об интерференционной спектроскопии (глава III, § 42). Здесь мы дадим ему более точное определение.

Разрешающая способность спектрального прибора (решетки, призмы) есть мера его способности разделить две *соседние в спектре линии* с длинами волн λ и $\lambda + \delta\lambda$. Разрешающая сила отображающего прибора (зрительной трубы, микроскопа и т. д.) есть мера его способности дать отдельные изображения *двух соседних предметных точек*.

При этом предполагается, что ход луча, вычисленный по законам геометрической оптики, дает идеально резкий образ (спектральную линию или изображение светящейся точки) и что причиной всякой нерезкости являются дифракционные явления, неизбежно возникающие при ограничении пучка (блендой). Мы знаем, что светящаяся точка или линия вследствие дифракции у диафрагмы, через которую должен пройти свет, никогда не отображается в виде точки или линии, а всегда в виде дифракционной картины, форму которой для различных диафрагм мы уже определили в предыдущих параграфах.

¹ См. об этом М. Siegbahn, *Spektroskopie der Röntgenstrahlen* 2, изд. Berlin, 1931; М. Корсунский, *Физика рентгеновых лучей*, 1936 (ред.).

Если две соседние дифракционные картины взаимно налагаются в поле зрения, то их тем труднее разделить, чем ближе (при данной ширине) между собою их центры. При каких условиях это разделение возможно для глаза — это в известной степени вопрос практики и тренировки. При фотографировании можно соответствующими методами проявления усилить контрасты и облегчить разделение (см. примечание 21).

Для того чтобы иметь однозначный критерий, условились согласно лорду Релею считать *дифракционные картины разделенными, если главный максимум одной совпадает с первым минимумом второй*. Это взаимное расположение двух картин назовем предельным положением. В спектральных аппаратах предельному положению соответствует некоторая разность длин волн $\delta\lambda$; если λ есть средняя длина волны рассматриваемой (очень малой) области, то $\lambda/\delta\lambda$ называется *разрешающей способностью*. В отображающих приборах предельному положению соответствует определенная разность длин или углов отображаемых предметов (светящихся точек), называемая *пределом разрешения*; обратная величина называется также *разрешающей способностью*.

а) Разрешающая способность решетки. Согласно § 51 (4) главные максимумы дифракционной фигуры, являющиеся спектральными линиями различных порядков для монохроматической светящейся линии, находятся в следующих местах:

$$a = \frac{\lambda}{d} n \cdot (n = \pm 1, 2, 3 \dots). \quad (1)$$

Первый нуль (минимум) лежит на расстоянии:

$$\delta a = \frac{\lambda}{d \cdot m}, \quad (2)$$

где m означает число штрихов решетки. При изменении длины волны середина главного максимума смещается согласно (1) на

$$\delta' a = \frac{\delta\lambda}{d} n. \quad (3)$$

Если максимум для измененной волны попадает как раз в предельное положение первоначальной волны, то мы имеем:

$$\delta' a = \delta a,$$

откуда

$$\frac{\lambda}{\delta\lambda} = n \cdot m. \quad (4)$$

Разрешающая способность решетки равна произведению порядкового числа на число штрихов.

Вспомнив, что число штрихов равно числу интерферирующих световых пучков, мы увидим, что формула (4) для решетки совершенно совпадает с формулой главы III, § 42 (35) для интерференционных спектрометров.

Чтобы пояснить этот результат, зададимся вопросом, сколько штрихов должна иметь решетка, чтобы разделить две D -линии натрия. Для них

$$\lambda = 5893 \text{ Å}, \quad \delta\lambda = 6 \text{ Å}$$

(глава III, § 42, стр. 180); следовательно

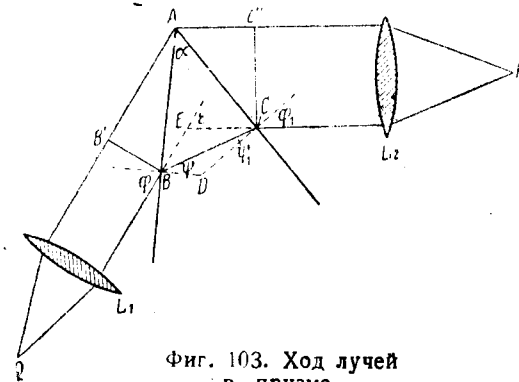
$$\frac{\lambda}{\delta\lambda} \approx 1000.$$

Если наблюдаемый спектр второго порядка ($n=2$), то должно быть по крайней мере:

$$m = \frac{1000}{2} = 500.$$

Решетка с 500 штрихами уже в состоянии разделить D -линии во втором порядке.

Наибольшее применяемое число штрихов — около 200 000. При наблюдении спектров третьего порядка, которые часто бывают еще довольно интенсивны, доходят до разрешающей способности около 600 000. Часто интерференционные приборы, как например пластинка Люммера и эшелон, также достигают, а иногда и превышают эту разрешающую способность. Но это объясняется тем, что порядок наблюдаемого спектра очень велик.



Фиг. 103. Ход лучей в призме.

как мы уже показали в главе III, § 42. Решетка имеет то преимущество перед интерференционными приборами, что она дает неналоженными большие участки спектра. Но там, где требуется более высокая разрешающая способность, она уступает им.

б) Разрешающая способность призмы. Мы выведем здесь также для сравнения разрешающую способность призмы. Заодно мы разберем элементарные геометрические свойства преломления в призме.

Величина преломления задается углом α преломляющего ребра A (фиг. 103). Это ребро перпендикулярно к плоскости, содержащей луч (которая является одновременно плоско-

стью падения, преломления и выхода). Основание призмы пока не имеет значения. Пусть луч падает на призму в точке B под углом φ и входит в призму под углом преломления ψ ; при выходе из призмы пусть внутренний угол будет ψ_1 , а внешний φ_1 . Продолжим перпендикуляры в B и C до пересечения в D ; точку пересечения продолжений падающего и выходящего лучей внутри призмы обозначим E ; образуемый ими острый угол есть *угол отклонения* ϵ . Из фиг. 103 мы видим, что

$$\varphi + \varphi_1 = \epsilon + \alpha, \quad (5)$$

$$\psi + \psi_1 = \alpha. \quad (6)$$

По закону преломления Снеллиуса

$$\left. \begin{aligned} \sin \varphi &= n \sin \psi, \\ \sin \varphi_1 &= n \sin \psi_1, \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

если $n > 1$ есть показатель преломления стекла относительно окружающего воздуха. Максимум отклонения будет там, где

$$\frac{d\epsilon}{d\varphi} = 0. \quad (8)$$

Это дает согласно (5):

$$\frac{d\varphi_1}{d\varphi} = -1. \quad (9)$$

С другой стороны, из (6) и (7) следует:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\psi}{d\varphi} &= -\frac{d\psi_1}{d\varphi}, \\ \cos \varphi &= n \cos \psi \frac{d\psi}{d\varphi}, \\ \cos \varphi_1 \cdot \frac{d\varphi_1}{d\varphi} &= n \cos \psi_1 \cdot \frac{d\psi_1}{d\varphi}, \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

откуда после исключения получаем:

$$\frac{d\varphi_1}{d\varphi} = -\frac{\cos \varphi \cos \psi_1}{\cos \psi \cos \varphi_1} = -1. \quad (11)$$

Возведя в квадрат и заменив косинусы синусами, получим уравнение

$$\frac{1 - \sin^2 \varphi}{n^2 - \sin^2 \varphi} = \frac{1 - \sin^2 \varphi_1}{n^2 - \sin^2 \varphi_1}, \quad (12)$$

Решение этого уравнения:

$$\varphi = \varphi_1$$

и, следовательно

$$\psi = \psi_1. \quad (13)$$

Далее, согласно (11):

$$\begin{aligned} \frac{d^2\epsilon}{d\varphi^2} &= \frac{d^2\varphi_1}{d\varphi^2} = \frac{d\varphi_1}{d\varphi} \cdot \frac{d \log \left(-\frac{d\varphi_1}{d\varphi} \right)}{d\varphi} = \\ &= \frac{d\varphi_1}{d\varphi} \left(-\operatorname{tg} \varphi - \operatorname{tg} \psi_1 \frac{d\psi_1}{d\varphi} + \operatorname{tg} \psi \frac{d\psi}{d\varphi} + \operatorname{tg} \varphi_1 \frac{d\varphi_1}{d\varphi} \right), \end{aligned}$$

а при $\varphi = \varphi_1, \psi = \psi_1$ будет согласно (10) и (11):

$$\frac{d^2\epsilon}{d\varphi^2} = 2 \operatorname{tg} \varphi - 2 \operatorname{tg} \psi \frac{\cos \varphi}{n \cos \psi} = 2 \operatorname{tg} \varphi \left(1 - \frac{\operatorname{tg}^2 \psi}{\operatorname{tg}^2 \varphi} \right) \dots$$

если $n > 1$, то $\varphi > \psi$ и $\operatorname{tg} \varphi > 0$ ($0 < \varphi < \pi/2$), следовательно, $d^2\epsilon/d\varphi^2 > 0$.

Это значит, что мы имеем дело с *минимумом отклонения*; согласно (13) это имеет место при *симметричном ходе* луча. Величина угла отклонения в этом случае равна:

$$\epsilon_{\min} = 2\varphi - \alpha. \quad (14)$$

Углы падения и выхода на первой грани равны:

$$\varphi = \frac{1}{2}(\epsilon_{\min} + \alpha), \quad \psi = \frac{\alpha}{2}. \quad (15)$$

Показатель преломления мы найдем по формуле:

$$n = \frac{\sin \varphi}{\sin \psi} = \frac{\sin \frac{\epsilon_{\min} + \alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}}, \quad (16)$$

измерив угол отклонения ϵ_{\min} .

Рассмотрим теперь *параллельный монохроматический пучок* с длиной волны λ_1 (например, полученный от источника света Q и линзы L_1 , расстояние между которыми равно фокусному, см. фиг. 103). Проведем луч, проходящий в плоскости падения через ребро A , и опустим на него из B перпендикуляр BB' , а из C перпендикуляр CC' . Оба перпендикуляра — следы двух плоскостей равных фаз в плоскости падения. Ширину пучков обозначим через:

$$BB' = \sigma, \quad CC' = \sigma',$$

а путь луча в призме через:

$$BC = l.$$

Прямые BB' и CC' пересекаются в точке F (не показанной на фигуре) внутри призмы под углом отклонения ϵ .

Предположим теперь, что источник света испускает *разноцветный свет*. Вообще показатель преломления есть функция длины волны (подробнее см. в главе VIII):

$$n = n(\lambda).$$

Если линза L_1 хроматически скорректирована, то плоскость, определяемая BB' , есть плоскость равных фаз для всех длин волн падающего света; напротив, прямая CC' в фазовой плоскости выходящего луча зависит от длины волны. Будем теперь рассматривать угол отклонения как функцию λ :

$$\varepsilon = \varepsilon(\lambda);$$

ε зависит непосредственно от показателя преломления $n(\lambda)$. Производная ее при постоянном φ

$$\frac{d\varepsilon}{d\lambda} = \frac{d\varepsilon}{dn} \cdot \frac{dn}{d\lambda} \quad (17)$$

называется *дисперсионной способностью призмы*. Первый множитель этого выражения есть чисто геометрическое свойство призмы, второй — свойство ее вещества, мера ее „дисперсии“. Ввиду того, что $\varphi = \text{const}$, уравнения (5) и (6) дают:

$$\frac{d\varepsilon}{dn} = \frac{d\varphi_1}{dn}, \quad \frac{d\psi}{dn} = -\frac{d\psi_1}{dn}, \quad (18)$$

а уравнение (7):

$$\left. \begin{aligned} \sin \psi + n \cos \psi \frac{d\psi}{dn} &= 0, \\ \cos \varphi_1 \frac{d\varphi_1}{dn} &= \sin \psi_1 + n \cos \psi_1 \frac{d\psi_1}{dn}; \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

отсюда путем исключения получаем:

$$\frac{d\varepsilon}{dn} = \frac{\sin(\psi + \psi_1)}{\cos \varphi_1 \cos \psi} = \frac{\sin \alpha}{\cos \varphi_1 \cos \psi}. \quad (20)$$

Из треугольника ABC (фиг. 103) следует по теореме синусов:

$$AC = \frac{l \cos \psi}{\sin \alpha},$$

а из треугольника ACC' :

$$AC = \frac{\sigma'}{\cos \varphi_1},$$

и из (20) получается:

$$\frac{d\varepsilon}{d\lambda} = \frac{l}{\sigma'} \cdot \frac{dn}{d\lambda} \quad (21)$$

при минимуме отклонения из соображений симметрии $\sigma = \sigma'$.

Если, кроме того, линзы настолько велики, что пучок лучей заполняет всю поверхность призмы, то l равно основанию b призмы. Тогда формула (21) дает для угла $\delta\varepsilon$, на который поворачивается фазовая плоскость, когда длина волны изменяется на $\delta\lambda$:

$$\delta\varepsilon = \frac{b}{\sigma} \cdot \frac{dn}{d\lambda} \cdot \delta\lambda. \quad (22)$$

Мы можем теперь вычислить разрешающую способность призмы. Если источник света (щель спектрометра) линейен и параллелен ребру призмы, то через призму, очевидно, проходит параллельный световой пучок, претерпевающий дифракцию в прямоугольнике шириною σ . Согласно § 48 (11), имеем для положения первого минимума:

$$a = \frac{\lambda}{\sigma}, \quad (23)$$

где a — расстояние геометрического изображения в угловой мере; поэтому a тождественно с $\delta\varepsilon$, и мы имеем согласно (23):

$$\delta\varepsilon = \frac{\lambda}{\sigma} = \frac{dn}{d\lambda} \cdot \frac{b}{\sigma} \delta\lambda. \quad (24)$$

Отсюда следует:

$$\frac{\lambda}{\delta\lambda} = \frac{dn}{d\lambda} \cdot b. \quad (25)$$

Таким образом при заданной дисперсии разрешающая способность зависит только от толщины основания призмы и не зависит от угла призмы.

Рассчитаем, какой величины должно быть основание призмы из тяжелого флинта, для того чтобы были разрешены линии D натриевого спектра. В табл. 5 приведены разности длин волн, показатели преломления и их разности для трех волн, именно для фраунгоферовых линий C , D и E .

Таблица 5

Обозначение	λ	$d\lambda$	n	dn
C	$6,56 \cdot 10^{-5} \text{ см}$	$0,67 \cdot 10^{-5} \text{ см}$	1,6297	0,0053
D	$5,89 \cdot 10^{-5} \text{ см}$		1,6350	
E	$5,27 \cdot 10^{-5} \text{ см}$		1,6420	

Отсюда получаем среднюю: $\frac{dn}{d\lambda} = 956$.

Так как расстояние между линиями 6\AA , то

$$\begin{aligned} \frac{\lambda}{\delta\lambda} &\approx 1000; \\ \text{из (25)} \quad b &\approx 1 \text{ см}. \end{aligned}$$

Призма с основанием 10 см легко дает разрешение десятой части расстояния между линиями. При более высоких требованиях нужны более сложные установки с призмами.

с) Разрешающая сила зрительной трубы. При изображении далеко отстоящих точек в зрительной трубе зрачок входа, совпадающий с круглой оправой объектива, действует как дифракционное отверстие. Таким образом мы имеем случай круглой диафрагмы, при котором первый минимум лежит на расстоянии:

$$\rho = 0,61 \cdot \frac{\lambda}{A} \quad (26)$$

[см. § 49 (14)], где A — радиус отверстия. При этом ρ надо измерять в фокальной плоскости, которую положим отстоящей на 1. При малых отклонениях это ρ есть угловое расстояние между двумя еще разделяющимися предметными точками, называемое *разрешающей силой зрительной трубы*. Чтобы ее полностью использовать, нужно, конечно, соответствующее увеличение.

Мощность зрительной трубы ограничена диаметром объектива. Наиболее мощная из ныне существующих труб, большой зеркальный телескоп обсерватории Маунт Вильсон, имеет диаметр около 2 м. Его теоретическая разрешающая сила для середины видимого спектра, т. е. для $\lambda = 5 \cdot 10^{-5}$ см, равна:

$$\rho = 0,61 \cdot \frac{5 \cdot 10^{-5}}{100} = 3,05 \cdot 10^{-7} \text{ см}$$

или в дуговых секундах:

$$\rho = 2,06 \cdot 10^5 \cdot 3,05 \cdot 10^{-7} = 0'',0628.$$

Определим еще разрешающую силу человеческого глаза. Полагая диаметр зрачка $2A = 4$ мм и, беря опять $\lambda = 5 \cdot 10^{-5}$ см, мы найдем, что наименьший угол зрения, под которым невооруженный глаз еще способен различать две точки

$$\rho = 0',52.$$

На самом деле разрешающая сила нормального глаза хуже и приблизительно $\rho = 1'$. Это отклонение от теоретической величины связано с анатомическим строением сетчатой оболочки.

д) Разрешающая сила микроскопа. В микроскопе обычно рассматриваются препараты очень малой толщины, освещаемые снизу. Часть света, посылаемого на предмет конденсором, поглощается и реэмиттируется, причем искажается фаза. Другая часть проходит через прозрачные места предмета и при этом дифрагирует, как от всякой другой диафрагмы.

В действительности всегда происходит и то и другое явление. Мы же разделим их для удобства теоретического рассмотрения и прежде всего будем считать, что освещаемые конденсором частицы испускают свет независимо друг от друга. Затем мы разберем противоположный предельный случай.

а) Изображение самостоятельно светящегося предмета

В микроскопе предмет лежит очень близко от объектива, так что в объектив входит широкий пучок лучей. Поэтому дифракцию в этом случае нельзя рассматривать как дифракцию параллельного пучка из круглого отверстия, как мы это делали для зрительной трубы. Но простое рассуждение приводит и этот случай к формулам Фраунгофера.

Пусть в предметной плоскости E (фиг. 104) Q есть светящаяся точка оси, а P — близлежащая точка. Пусть обе точки преобразуются оптической системой Σ в точки Q' и P' в фокальной плоскости E' , сопряженной с предметной плоскостью. Радиус зрачка выхода, Фиг. 104. Разрешающая способность микроскопа. т. е. изображения зрачка

входа в системе Σ , обозначим A , а расстояние от фокальной плоскости — B . Так как расстояние фокальной плоскости E' от объектива (обычно 16 см) очень велико относительно диаметра последнего, мы можем приближенно считать лучи в пространстве изображений параллельными и рассматривать настоящий случай, как если бы у зрачка выхода R происходила дифракция параллельного пучка. Обозначим δ и δ' углы, образуемые с осью крайними лучами пучков Q и Q' соответственно в предметном и фокальном пространствах. Так как δ' мало, мы можем положить:

$$\delta' = \frac{A}{B}. \quad (27)$$

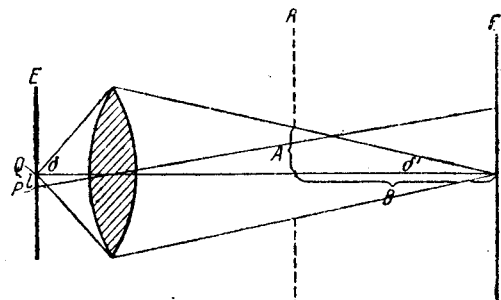
Пусть n и λ , соответственно n' и λ' , обозначают показатель преломления и длину волны в предметном и фокальном пространствах; обе пары значений при применении иммерсии (см. ниже) могут не быть равными. Обозначим, далее, расстояния $PQ = l$ и $P'Q' = l'$. Если ρ — расстояние точки наблюдения в приведенной фокальной плоскости (т. е. отстоящей на расстояние, равное единице, от дифрагирующего отверстия, в данном случае от зрачка выхода), то ввиду малости ρ

$$l' = \rho B. \quad (28)$$

Отсюда расстояние первого минимума равно согласно (26):

$$l' = \rho B = 0,61 \cdot \frac{\lambda' B}{A} = 0,61 \cdot \frac{\lambda'}{\delta'} = 0,61 \cdot \frac{\lambda_0}{n' \delta'} \quad (29)$$

где λ_0 — длина волны в вакууме.



интегрирование здесь распространяется на поверхность Ω зрачка выхода. Подставив в эту формулу вместо φ его выражение (32), мы получим распределение света $|F(x, y)|^2$ непосредственно через функцию прозрачности $f_1(\xi, \eta)$. Мы видим, что оно зависит от величины и формы отверстия Ω в плоскости R . Если Ω практически бесконечно велико, т. е. настолько велико, что амплитуда φ дифрагированного предметом света равна 0 вне Ω , то формулы (32) и (33) дают нам согласно теореме Фурье:

$$F(x, y) = f_1(-x, -y) = f\left(-\frac{l'}{l}x, -\frac{l'}{l}y\right), \quad (34)$$

т. е. получается подобное (обратное) изображение. Но с уменьшением Ω изображение становится все менее похожим на предмет и, наконец, при малых отверстиях теряет всякое сходство с ним.

Рассмотрим как пример случай, когда предметом является прозрачная штриховая решетка ширины s с m штрихами и с периодом d , а апертура искусственно создается прямоугольной диафрагмой, один край которой параллелен штрихам. Рассмотрим распределение света в направлении, перпендикулярном к краю. Обозначив

$$s' = \frac{l'}{l}s, \quad d' = \frac{l'}{l}d,$$

мы получим согласно § 51 (1), (где эта функция обозначена u_p):

$$\varphi(a) = \frac{1}{\lambda} \frac{2 \sin \frac{kas'}{2}}{\frac{kas'}{2}} \frac{1 - e^{-ikd'a}}{1 - e^{-ikd'a}}. \quad (35)$$

[При этом мы пользуемся выводом формул § 48 (8) для u_p^* . Пусть величина Ω прямоугольного зрачка выхода определяется неравенством:

$$-\delta' < a < \delta';$$

тогда δ' означает, как и в (27), угол слабосходящегося пучка лучей, выходящего из объектива. Из (33) получаем распределение света в фокальной плоскости:

$$F(x) = \frac{1}{\lambda^2} \int_{-\delta'}^{+\delta'} \frac{2 \sin \frac{kas'}{2}}{\frac{kas'}{2}} \cdot \frac{1 - e^{-ikd'a}}{1 - e^{-ikd'a}} e^{-ikxa} da. \quad (36)$$

Главные максимумы интенсивности лежат там, где множитель $1 - e^{-ikd'a}$ становится равным нулю, т. е. в точках $a = \frac{\lambda}{d'}n$, где

n — порядок дифракции; между ними лежат слабые второстепенные максимумы. Если число m штрихов велико, то главные максимумы резки и круты, а второстепенные максимумы в сравнении с ними ничтожно слабы. Мы можем поэтому приближенно разложить интеграл на сумму интегралов, из которых каждый взят в пределах от средней точки M_n интервала между двумя соседними главными максимумами до следующей такой точки M_{n+1} . В каждом таком интервале мы можем заменить аргумент a в остальных множителях его значением в главном максимуме $\frac{\lambda}{d'}n = \frac{2\pi}{kd'}n$. Тогда мы получим приближенно (так как $\frac{s'}{d'} = \frac{s}{d}$):

$$F(x) = F_0 \sum_n \frac{\sin \frac{\pi ns}{d'}}{\frac{\pi ns}{d'}} e^{-\frac{2i\pi nx}{d'}}, \quad (37)$$

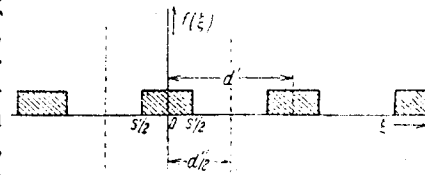
где F_0 означает интеграл:

$$F_0 = \frac{2}{\lambda^2} \int_{M_n}^{M_{n+1}} \frac{1 - e^{-ikd'a}}{1 - e^{-ikd'a}} da, \quad (38)$$

не зависящий от n , не считая малых отклонений высших порядков. Мы можем написать ряд (37) в вещественной форме:

$$\frac{F(x)}{F_0} = 1 + 2 \sum_{0 < n < \frac{d'}{\lambda}} \frac{\sin \frac{\pi ns}{d'}}{\frac{\pi ns}{d'}} \cos \frac{2\pi nx}{d'}. \quad (39)$$

Предположим теперь, что отверстие δ' диафрагмы очень велико. Тогда мы можем продолжить ряд (39) от нуля до ∞ ; мы увидим, что он дает подобное изображение предмета, которым является в данном случае система щелей. Чтобы убедиться в этом, разложим функцию прозрачности этой решетки для $m = \infty$ (фиг. 106):



$$f(\xi) = \begin{cases} f_0 & \text{при } 0 < |\xi| < \frac{s'}{2}, \\ 0 & \text{при } \frac{s'}{2} < |\xi| < \frac{d'}{2} \end{cases} \quad (40)$$

в ряд Фурье:

$$f(\xi) = c_0 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos \frac{2\pi n \xi}{d'} \quad (41)$$

Мы сейчас же получим (так как $s'/d' = s/d$):

$$c_0 = \frac{sf_0}{d}, \quad c_n = f_0 \frac{\sin \frac{\pi ns}{d}}{\pi n} \cdot (n=1, 2, \dots) \quad (42)$$

Эта функция отличается от ряда (39) только одним множителем.

Мы можем теперь исследовать, как изменяется изображение, когда уменьшается ширина щели δ' или когда экранируются произвольные части первичного дифракционного изображения в плоскости диафрагмы. Если сделать диафрагму настолько малой, чтобы она пропускала только нулевой порядок первичного спектра, т. е. если $d'\delta'/\lambda$ немного меньше единицы, то согласно нашей формуле $F(x) = \text{const}$, т. е. поле зрения равномерно освещено. (Это, конечно, не строгий вывод, так как мы здесь делаем грубые допущения; в действительности получается слабое падение интенсивности у краев).

Если, кроме спектра нулевого порядка, пропустить также оба спектра первого порядка слева и справа, т. е. если сделать $d'\delta'/\lambda$ несколько больше 2, то мы получим:

$$\frac{F(x)}{F_0} = 1 + \frac{2 \sin \frac{\pi s}{d}}{\frac{\pi s}{d}} \cos \frac{2\pi x}{d'} \quad (43)$$

Изображение имеет теперь тот же период $x = d'$, что и предмет, но совершенно сглаженное распределение интенсивности. Чем больше спектров высших порядков мы пропустим, тем более похоже изображение на предмет.

Совершенно искаженные изображения получаются тогда, когда мы экранируем низшие порядки и пропускаем только высшие. Так, экранируя все порядки вплоть до второго, получим:

$$\frac{F(x)}{F_0} = \frac{2 \sin \frac{2\pi s}{d}}{\frac{2\pi s}{d}} \cos \frac{4\pi x}{d} \quad (44)$$

Таким образом мы видим распределение света с периодом $x = \frac{d'}{2}$, т. е. вдвое больше штрихов, чем в действительности.

Все эти явления полностью подтверждаются опытом.

Пределом разрешения в данном случае называют то расстояние d между штрихами, которое еще можно наблюдать в изображении, как периодически меняющееся освещение, т. е. приблизительно:

$$\frac{d'\delta'}{\lambda} = 2, \quad d = \frac{l}{l'} d' = 2 \frac{l}{\delta'} \cdot \frac{l'}{l};$$

его можно пересчитать также по теореме синусов на апертуру δ входящего в объектив пучка. Из

$$l n \sin \delta = l' n' \sin \delta' = l' n' \delta'$$

и $\lambda = \lambda_0/n'$ мы получим для предела разрешения выражение:

$$d = \frac{2\lambda_0}{n \sin \delta}, \quad (45)$$

т. е. ту же самую формулу, как и (31), только с другим числовым множителем (который, конечно, вообще довольно произволен и зависит от формы предмета и диафрагмы).

Мы видим, что разрешающая сила микроскопа для случаев несветящихся предметов также выражается численной апертурой.

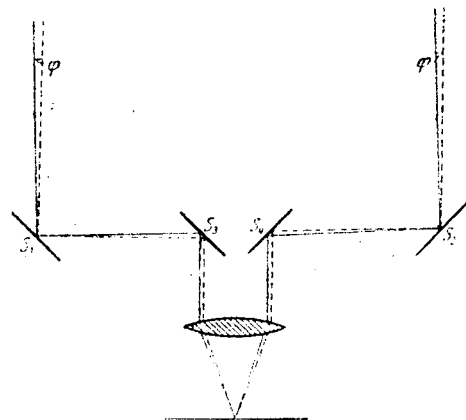
§ 54. ИЗМЕРЕНИЕ МАЛЫХ УГЛОВ

Как мы видели, предел разрешения зрительной трубы зависит исключительно от диаметра ее объектива. Однако последний по техническим причинам не может беспрестанно увеличиваться. Обсерватория в Маунт Вильсон проектирует в настоящее время зеркало, диаметром 5 м (из аморфного кварца во избежание температурной чувствительности). Однако это надолго останется рекордным достижением. Вследствие этого измерение углов, меньше нескольких сотых угловой секунды, было бы невозможным, если бы не было другого способа. Этот способ изобретен Физо, но впервые был применен практически в последнем десятилетии Майкельсоном. При этом способе мы не получаем действительного изображения предметов и можем только по возникающим интерференционным и дифракционным явлениям сделать заключение о его форме. Суть дела можно объяснить следующим образом:

Вообразим себе зеркальный объектив колоссальных размеров (практически неосуществимых), из которого вырезаны на большом расстоянии два куска. Разумеется, эти два куска не дадут подобного изображения, но при этом возникнет характерное световое явление, по которому можно судить о структуре светового источника.

Инструмент состоит из двух зеркал S_1 и S_2 , смонтированных на неподвижном штативе на значительном отдалении d друг от друга и наклоненных приблизительно на 45° к соединяющей их

линии (фиг. 107). В середине штатива находятся другие два зеркала: S_3 (параллельное S_1) и S_4 (параллельное S_2), отбрасывающие свет от звезд в объектив зрительной трубы. Тогда мы увидим в поле зрения два изображения предмета, каждое из которых имеет вид дифракционных колец; вращая зеркала, можно заставить совпасть оба световых пятна.



Фиг. 107. Интерферометрическое измерение малых углов.

Тогда мы получаем в силу § 49 (13) и § 51 (1), (2):

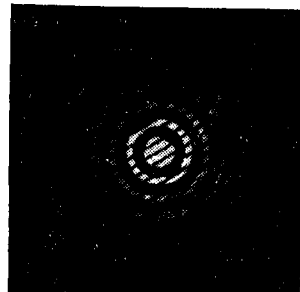
$$J_P = C \left(\frac{I_1 (kpA)}{kpA} \right)^2 \left(\frac{\sin kda}{\sin \frac{kda}{2}} \right)^2, \quad (1)$$

где $\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$ и a, b — координаты в поле зрения. Интерференционные полосы, естественно, не очень резки, так как m всего 2. Расстояние между ними определяется нулевыми точками второго множителя в (1) и равно:

$$a = \frac{\lambda}{d}. \quad (2)$$

Так как оно мало, мы можем рассматривать a как угол наклона лучей. Абсолютная разность хода обоих интерферирующих пучков, разумеется, чисто случайна и вообще довольно велика, скажем, n -го порядка. Положение любой полосы в поле зрения дается формулой:

$$a_n = n \frac{\lambda}{d}. \quad (3)$$



Фиг. 108. Интерференционное изображение простой звезды.

Если же в зрительную трубу попадает свет от двух весьма близких звезд (телескопически неразрешимой двойной звезды), то каждая из них дает систему полос на (общем) фоне дифракционных колец, причем эти полосы несколько смещены одна относительно другой соответственно разности углов падения. Пусть φ есть разность углов падения лучей обеих звезд. Тогда система полос одной звезды смещена относительно другой на φ в направлении оси a . Полосы n -го порядка второй звезды находятся при:

$$a_n' = \varphi + n \frac{\lambda}{d}. \quad (4)$$

Пусть теперь оба зеркала S_1 и S_2 помещены как можно ближе друг к другу. Тогда разность хода лучей от обеих звезд будет очень мала, ибо лучи почти параллельны друг другу, и в поле зрения возникнут полосы одинакового порядка; величины a_n и a_n' можно считать равными, так как φ очень мало. Будем теперь отодвигать зеркала друг от друга. При этом ход лучей от обеих звезд будет становиться все более различным. Возникает разность хода, и как только она достигает полуволны, светлые полосы одной звезды совмещаются с темными полосами другой. Мы имеем тогда согласно (3) и (4) $a_{n+\frac{1}{2}} = a_n'$ или

$$\left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{\lambda}{d} = \varphi + n \frac{\lambda}{d}. \quad (5)$$

Отсюда следует:

$$\varphi = \frac{1}{2} \frac{\lambda}{d}. \quad (6)$$

Таким образом на известном расстоянии d наступает максимальная неясность интерференционной фигуры. Измерив величину d и подставив ее в (6), мы найдем угловую разность φ . Продолжая раздвигать зеркала S_1 и S_2 , мы получим на двойном расстоянии опять полную ясность, а затем опять чередование ясности и неясности¹. Практически, однако, возможность наблюдать это чередование ограничивается тем, что свет звезд не монохроматичен.

Если мы ограничимся первой неясностью, то, как показывает формула (6), разрешающая способность этого аппарата приблизительно вдвое больше, чем разрешающая способность зрительной трубы, диаметр объектива которой равен расстоянию d между зеркалами. Но, понятно, расстояние между зеркалами можно увеличивать гораздо больше, чем диаметр объектива, хотя и здесь представляются значительные технические трудности. Этот метод требует громадной стабильности установки, чтобы при передвижении зеркал прогиб был порядка длины волны. В первых опытах

¹ Этот метод очень близок к методу „видимости“ интерференции, применяемому в „непрямой спектроскопии“ (глава III, § 42).

в Маунт Вильсон к большому рефлектору, о котором упоминалось в § 53, прикреплялась поперечная балка. В настоящее время специально сконструированы интерферометры, находящиеся в стадии изготовления и частично уже испытанные. Трудность при конструировании заключается в том, что необходимо иметь возможность направлять прибор на каждую звезду.

Дадим численное выражение предела разрешения в дуговых секундах:

$$\psi = \frac{\lambda}{d} \frac{1}{2} 2,06 \cdot 10^5 = 103\,000 \frac{\lambda}{d}.$$

Приняв $\lambda = 5 \cdot 10^{-5}$ см, получим:

$$\psi = \frac{5''}{d}.$$

Отсюда для $d = 10$ м

$$\psi = 0'',55.$$

Этим методом измерения углов пользуются также тогда, когда ограничиваются разделением предметов, которые еще разрешаются зрительной трубой, так как часто бывает удобнее наблюдать видимость, чем непосредственно измерять угол. В этом случае линзу объектива экранируют вплоть до двух ближайших к краям щелей.

Вычисляя для двойной звезды изменения φ от времени при двух взаимно перпендикулярных положениях плоскости падения, можно найти проекцию кривизны на плоскость, перпендикулярную лучу зрения. Скорость же по лучу зрения можно найти из эффекта Доплера для спектральных линий (см. главу VIII, § 86, стр. 577, сноска 3). Из обоих наблюдений можно найти с помощью, теорем механики элементы траектории двойной звезды. Зная, таким образом, истинную и кажущуюся величину траектории, можно найти истинное расстояние двойной звезды, истинный параллакс. Этим методом в Маунт-Вильсонской обсерватории были вычислены траектории и параллаксы различных двойных звезд.

Описанный метод можно применить также для измерения кажущегося диаметра неподвижной звезды. Для этого вообразим себе звезду разложенной на узкие полосы, перпендикулярные к оси интерферометра. Тогда каждой полосе соответствует интерференционная фигура. Полную интенсивность легко определить путем интегрирования. Здесь также при медленном раздвигании зеркал возникает побледнение интерференционных полос. Вычисление, совершенно аналогичное тому, которое мы проделали в главе III, § 42 для формы спектральной линии, дает нам, что первый максимум бледности находится на расстоянии d , которое связано с угловым диаметром α звезды соотношением:

$$\alpha = 1,22 \frac{\lambda}{d}. \quad (7)$$

Таким образом был найден целый ряд кажущихся диаметров звезд. Приводим таблицу диаметров для нескольких звезд, для которых известны также параллаксы, так что можно вычислить их истинные диаметры в километрах:

		D
Бетельгейзе	$0'',047$	$3,87 \cdot 10^8$ км,
Арктур	$0'',022$	$0,38 \cdot 10^8$ км,
Антарес	$0'',040$	$7,20 \cdot 10^8$ км.

Для сравнения укажем, что диаметр солнца равен $1,4 \cdot 10^6$ км, диаметр земной орбиты — $3 \cdot 10^8$ км. Размеры названных звезд, таким образом, колоссальны по сравнению с солнцем и одного порядка с шаром, радиус которого равен радиусу земной орбиты. Их средняя плотность соответственно мала и равна приблизительно плотности остаточного газа в вакууме газовой рентгеновской трубки.

Эти соображения показывают, какие услуги оказывают интерференционная и дифракционная оптика смежным наукам. Подобными же методами можно пользоваться для определения расстояний между малыми частицами в микроскопе, что чрезвычайно важно для коллоидной химии. Но мы не будем останавливаться на этих областях применения метода.

§ 55. ДИФРАКЦИОННОЕ ЯВЛЕНИЕ ФРЕНЕЛЯ

Вычислим теперь дифракционные явления для того случая, когда источник света Q и точка наблюдения P находятся на конечном расстоянии от дифрагирующего отверстия. В этом случае надо брать введенную в § 46 (11) функцию $\Phi(\xi, \eta)$ по крайней мере до квадратичных членов включительно.

Мы исходим из формул § 46 (8) и (11). Положим для сокращения:

$$A = -\frac{ik}{2\pi} \cos \delta \frac{e^{ik(R+R_0)}}{RR_0}, \quad (1)$$

$$C = \iint \cos [k \cdot \Phi(\xi, \eta)] d\xi d\eta, \quad (2)$$

$$S = \iint \sin [k \cdot \Phi(\xi, \eta)] d\xi d\eta. \quad (3)$$

Тогда уравнение § 46 (8) переходит в

$$u_P = A (C + iS), \quad (4)$$

вследствие чего интенсивность в точке наблюдения

$$|u_P|^2 = |A|^2 (C^2 + S^2). \quad (5)$$

Мы должны теперь вычислить интегралы C и S . Возьмем за начало координат O точку пересечения соединительной линии QP с плоскостью экрана. Эту плоскость примем за плоскость xy , а за ось x возьмем проекцию на нее прямой QP . Таким образом при неподвижном источнике света Q мы имеем для каждой точки наблюдения P особую координатную систему.

Благодаря этим предположениям мы получаем, что $\alpha = \alpha_0$ и $\beta = \beta_0$ (сравнить § 46); в выражении $\Phi(\xi, \eta)$ пропадают члены, линейные относительно ξ и η . Обозначим по прежнему через δ угол, образуемый прямой QOP с осью z (фиг. 109). Тогда мы получим для направляющих косинусов лучей QO и OP :

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \alpha_0 = \sin \delta, \\ \beta &= \beta_0 = 0, \\ \gamma &= \gamma_0 = \cos \delta. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Отсюда

$$\Phi = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R_0} + \frac{1}{R} \right) (\xi^2 \cos^2 \delta + \eta^2). \quad (7)$$

Оба наши интеграла выразятся теперь так:

$$\left. \begin{aligned} C &= \iint \cos \left[\frac{\pi}{\lambda} \left(\frac{1}{R_0} + \frac{1}{R} \right) (\xi^2 \cos^2 \delta + \eta^2) \right] d\xi d\eta, \\ S &= \iint \sin \left[\frac{\pi}{\lambda} \left(\frac{1}{R_0} + \frac{1}{R} \right) (\xi^2 \cos^2 \delta + \eta^2) \right] d\xi d\eta. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Введем теперь новые переменные интегрирования u, v посредством преобразования:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\pi}{\lambda} \left(\frac{1}{R_0} + \frac{1}{R} \right) \xi^2 \cos^2 \delta &= \frac{\pi}{2} u^2, \\ \frac{\pi}{\lambda} \left(\frac{1}{R_0} + \frac{1}{R} \right) \eta^2 &= \frac{\pi}{2} v^2. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Тогда

$$d\xi d\eta = \frac{\lambda}{2} \frac{dudv}{\cos \delta \left(\frac{1}{R_0} + \frac{1}{R} \right)}$$

и наши интегралы примут вид:

$$\left. \begin{aligned} C &= a \iint \cos \left[\frac{\pi}{2} (u^2 + v^2) \right] dudv, \\ S &= a \iint \sin \left[\frac{\pi}{2} (u^2 + v^2) \right] dudv, \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

где

$$a = \frac{\lambda}{2 \left(\frac{1}{R_0} + \frac{1}{R} \right) \cos \delta}. \quad (11)$$

При этом интегрирование распространено на ту часть плоскости uv , в которую переходит отверстие диафрагмы после преобразования (9). Во многих случаях можно еще больше упростить интеграл (10), положив:

$$\left. \begin{aligned} \cos \left[\frac{\pi}{2} (u^2 + v^2) \right] &= \cos \frac{\pi}{2} u^2 \cdot \cos \frac{\pi}{2} v^2 - \sin \frac{\pi}{2} u^2 \cdot \sin \frac{\pi}{2} v^2, \\ \sin \left[\frac{\pi}{2} (u^2 + v^2) \right] &= \sin \frac{\pi}{2} u^2 \cdot \cos \frac{\pi}{2} v^2 + \cos \frac{\pi}{2} u^2 \cdot \sin \frac{\pi}{2} v^2, \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

именно в тех случаях, когда область интегриации в плоскости uv представляет собой прямоугольник, параллельный оси. Тогда мы получаем так называемые интегралы Френеля:

$$\left. \begin{aligned} U(w) &= \int_0^w \cos \left(\frac{\pi}{2} u^2 \right) du, \\ V(w) &= \int_0^w \sin \left(\frac{\pi}{2} u^2 \right) du. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Эти функции были всесторонне исследованы; в дальнейшем мы познакомимся с их главными свойствами. Френель и его последователи решили этим методом много задач, например проблему дифракции у прямоугольного и круглого отверстий.

Наиболее простым является случай дифракции у *острого прямолинейного края* полуплоскости, когда соединительная линия POQ , и, следовательно, также ее проекция на плоскость экрана (наша ось x) перпендикулярна к дифрагирующему краю. Если x есть расстояние края экрана от начала координат, то пределы интегрирования:

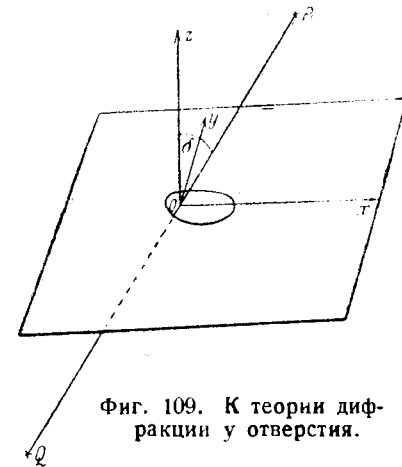
$$-\infty < \xi < x, \quad -\infty < \eta < \infty,$$

т. е.

$$-\infty < u < w, \quad -\infty < v < \infty, \quad (14)$$

причем

$$w = x \cdot \cos \delta \sqrt{\frac{2}{\lambda \left(\frac{1}{R_0} + \frac{1}{R} \right)}}. \quad (15)$$



Фиг. 109. К теории дифракции у отверстия.

Так как x означает расстояние края экрана от начала O , лежащего на неподвижной соединительной линии QP , то (фиг. 110) P лежит

$$\left. \begin{array}{l} \text{при } x > 0: P \text{ на светлой стороне,} \\ \text{при } x < 0: P \text{ внутри геометрической тени.} \end{array} \right\} \quad (16)$$

Этот случай может служить иллюстрацией поведения света на границе тени; рассмотрим его подробнее. Прежде всего рассмотрим некоторые простые свойства функций U и V . Непосредственно очевидно, что

$$\left. \begin{array}{l} U(w) = -U(-w), \\ V(w) = -V(-w). \end{array} \right\} \quad (17)$$

Затем определим значения интегралов:

$$\left. \begin{array}{l} U(\infty) = \int_0^{\infty} \cos\left(\frac{\pi}{2} u^2\right) du, \\ V(\infty) = \int_0^{\infty} \sin\left(\frac{\pi}{2} u^2\right) du. \end{array} \right\} \quad (18)$$

Фиг. 110. Дифракция Френеля у края экрана.

Напишем:

$$U(\infty) + iV(\infty) = \int_0^{\infty} e^{i\frac{\pi}{2} u^2} du \quad (19)$$

и введем новую переменную интегрирования ζ , определив ее:

$$\zeta = u \sqrt{-\frac{i\pi}{2}} = u \frac{i-1}{2} \sqrt{\pi}, \quad u = -\zeta \frac{i+1}{\sqrt{\pi}}.$$

Действительный путь интегрирования в плоскости u от нуля до бесконечности переходит при этом в наклонную прямую, проходящую через начало координат в комплексной плоскости ζ . Но легко видеть, что интеграл (19), взятый по любой параллели к мнимой оси, стремится к нулю с увеличением расстояния этой прямой от начала координат. Из теоремы Коши следует, что интеграл по всей наклонной прямой тождествен с интегралом, взятым по вещественной оси. Поэтому получаем:

$$U(\infty) + iV(\infty) = \frac{i+1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-\zeta^2} d\zeta = \frac{i+1}{2}. \quad (20)$$

Отсюда следует:

$$U(\infty) = \frac{1}{2}, \quad V(\infty) = \frac{1}{2}. \quad (21)$$

Подставив пределы (14) в C и S и воспользовавшись формулами (12), мы получим:

$$\left. \begin{array}{l} C = a \int_{-\infty}^w du \int_{-\infty}^{\infty} dv \left[\cos\left(\frac{\pi}{2} u^2\right) \cos\left(\frac{\pi}{2} v^2\right) - \right. \\ \left. - \sin\left(\frac{\pi}{2} u^2\right) \sin\left(\frac{\pi}{2} v^2\right) \right], \\ S = a \int_{-\infty}^w du \int_{-\infty}^{\infty} dv \left[\sin\left(\frac{\pi}{2} u^2\right) \cos\left(\frac{\pi}{2} v^2\right) + \right. \\ \left. + \cos\left(\frac{\pi}{2} u^2\right) \sin\left(\frac{\pi}{2} v^2\right) \right]. \end{array} \right\} \quad (22)$$

Согласно определениям (13) U и V и согласно формулам (21), (17) имеем:

$$\left. \begin{array}{l} \int_{-\infty}^w \cos\left(\frac{\pi}{2} u^2\right) du = \int_{-\infty}^0 + \int_0^w = U(\infty) + U(w) = \frac{1}{2} + U(w), \\ \int_{-\infty}^{\infty} \cos\left(\frac{\pi}{2} u^2\right) du = 1 \end{array} \right\} \quad (23)$$

и соответственно:

$$\left. \begin{array}{l} \int_{-\infty}^w \sin\left(\frac{\pi}{2} u^2\right) du = V(\infty) + V(w) = \frac{1}{2} + V(w), \\ \int_{-\infty}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi}{2} u^2\right) du = 1. \end{array} \right\} \quad (24)$$

Таким образом из (22) мы получаем:

$$\left. \begin{array}{l} C = a \left\{ \left[U(w) + \frac{1}{2} \right] - \left[V(w) + \frac{1}{2} \right] \right\}, \\ S = a \left\{ \left[U(w) + \frac{1}{2} \right] + \left[V(w) + \frac{1}{2} \right] \right\}. \end{array} \right\} \quad (25)$$

Следовательно, согласно (5) интенсивность

$$J = |u_P|^2 = \frac{J_0}{2} \left\{ \left[U(w) + \frac{1}{2} \right]^2 + \left[V(w) + \frac{1}{2} \right]^2 \right\}, \quad (26)$$

где в силу (1) и (11)

$$J_0 = 4 |A|^2 a^2 = \frac{1}{(R_0 + R)^2} \quad (27)$$

Если рассматривать U и V как координаты в некоторой плоскости U, V , то $\sqrt{2 \frac{J}{J_0}}$ есть расстояние точки (U, V) от точки $F_- \left(U = -\frac{1}{2}, V = -\frac{1}{2} \right)$.

Изменяя w , мы заставим точку (U, V) описать некоторую кривую и, исследуя изменение расстояния произвольной точки $U(w), V(w)$ кривой от точки F_- , мы получим полную картину дифракционного явления. Поэтому прежде всего надо разобрать эту кривую. Из уравнений (17) мы видим, что она симметрична относительно начала координат, через которое она проходит при $w=0$. При $w=\infty$ она проходит через точку $F_+ \left(U = \frac{1}{2}, V = \frac{1}{2} \right)$, а при $w=-\infty$ через уже известную точку F_- . Таким образом F_+ и F_- являются асимптотическими точками. Наконец, определим длину дуги:

$$\begin{aligned} ds^2 &= dU^2 + dV^2 = \left[\left(\frac{dU}{dw} \right)^2 + \left(\frac{dV}{dw} \right)^2 \right] dw^2 = \\ &= \left[\cos^2 \left(\frac{\pi}{2} w^2 \right) + \sin^2 \left(\frac{\pi}{2} w^2 \right) \right] dw^2; \end{aligned}$$

следовательно:

$$ds^2 = dw^2. \quad (28)$$

Если s отсчитывается в направлении возрастающих w , то w тождественно с длиной дуги, отсчитываемой от начала координат.

Теперь определим угол τ , образуемый касательной в произвольной точке кривой с осью U . Имеем:

$$\operatorname{tg} \tau = \frac{dV}{dU} = \frac{\frac{dV}{dw}}{\frac{dU}{dw}} = \frac{\sin \left(\frac{\pi}{2} w^2 \right)}{\cos \left(\frac{\pi}{2} w^2 \right)} = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} w^2 \right);$$

следовательно:

$$\tau = \frac{\pi}{2} w^2. \quad (29)$$

Угол τ увеличивается монотонно с возрастанием $|w|$, причем касательная вращается в положительном направлении при положительных w и в отрицательном при отрицательно возрастающих w . Так как, кроме того, τ исчезает при $w=0$, то кривая

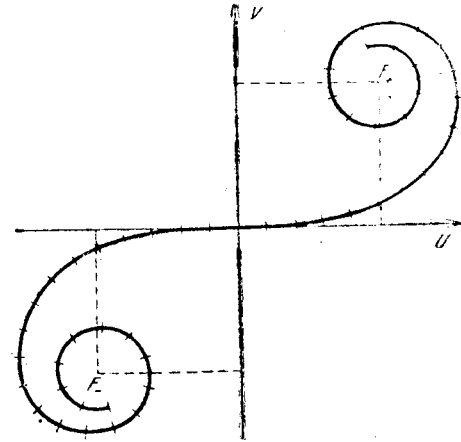
касается оси U в начале координат, и ось U согласно предыдущему предположению является касательной в точке перегиба.

При $w^2=1$ $\tau = \frac{\pi}{2}$, следовательно, касательная перпендикулярна

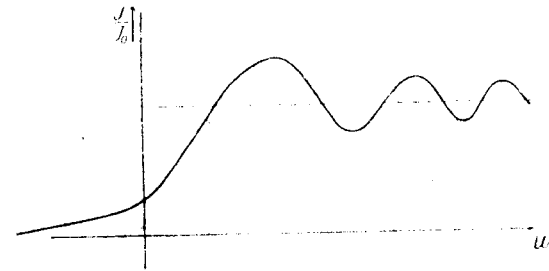
к оси U ; при $w^2=2$ $\tau = \pi$ — касательная снова параллельна оси U и вследствие монотонности вращения направлена в противоположную сторону, и т. д.

Таким образом кривая бесконечно часто обвивается в виде спирали вокруг точки F_+ в положительном направлении и вокруг точки F_- в отрицательном направлении. Эту кривую называют *спиралью Корню* (фиг. 111). С помощью этой кривой легко исследовать распределение интенсивности, причем нужно заметить, что условия $w=0$ или $x=0$ соответствуют положению точки наблюдения на границе геометрической тени, тогда как в силу (16) отрицательные w или x соответствуют положению геометрической тени, а положительные w и x — положению в освещенном пространстве.

Представив $2 \frac{J}{J_0}$ как квадрат расстояния некоторой точки спирали Корню от точки F_- (фиг. 112, на которой эта точка не



Фиг. 111. Спираль Корню.



Фиг. 112. Распределение интенсивности при дифракции Френеля у края.

показана), увидим, что эта величина ведет себя на теневой стороне совершенно иначе, чем на освещенной. При положительных w (светлая сторона) $\frac{J}{J_0}$ имеет ряд максимумов, ослабевающих с возрастанием w , причем кривая интенсивности, осциллируя постепенно приближается к значению 1. В силу (27) это значит,

что на достаточно большом расстоянии от дифрагирующего края интенсивность света убывает пропорционально квадрату расстояния. Максимумы и минимумы в освещенном пространстве осциллируют вокруг значения, даваемого геометрической оптикой. Наибольший максимум интенсивности лежит не на самой границе тени, а слегка смещен в освещенное пространство.

На самой границе тени ($w = 0$) $\frac{J}{J_0} = \frac{1}{4}$. На отрицательной стороне (теневого стороне) $\frac{J}{J_0}$ монотонно падает до нуля.

Эксперимент вполне подтверждает как самый факт нахождения дифракционных полос по светлую сторону геометрической границы тени, так и количественный характер этих колебаний интенсивности.

§ 56. ПОВЕДЕНИЕ СВЕТОВЫХ ВОЛН ВБЛИЗИ ТОЧЕК ГЕОМЕТРИЧЕСКОГО СХОЖДЕНИЯ ЛУЧЕЙ; ДИФРАКЦИОННАЯ ТЕОРИЯ ОШИБОК ИЗОБРАЖЕНИЯ*

В главе II, § 14 мы нашли два различных условия применимости геометрической оптики; законы геометрической оптики имеют место всюду, за исключением окрестностей:

- 1) геометрической границы тени,
- 2) точек геометрического схождения лучей („фокусов“ в самом широком смысле).

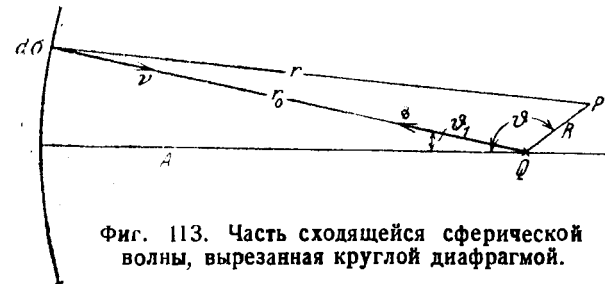
Вследствие волновой природы света в этих особых областях имеют место отклонения от геометрического распределения освещенности, т. е. дифракционные явления. Рассмотренные выше случаи относились к первой особой области, к окрестностям границы тени; мы рассматривали в них влияние диафрагм на распространение света. Правда, мы имели там дело также с соединением лучей при помощи линз (в частности в явлении Фраунгофера); но это было лишь удобным вспомогательным средством заменить рассмотрение распределения света в очень отдаленных точках пространства рассмотрением светового распределения на плоском экране. При этом мы поступали так, как если бы все плоские волны, из которых состоит световое возбуждение и которые возникают в удаленных точках пространства вследствие дифракции у отверстия, пройдя через линзу, сходились в фокусе по законам геометрической оптики. Вопрос об истинном характере поля световой волны в пространстве, окружающем точку соединения лучей, оставался открытым.

Однако для более глубокого понимания действия оптических приборов этот вопрос имеет значение; например, важно установить, какой вид имеет распределение интенсивности при плохом фокусе, т. е. если экран находится перед геометрической фокальной плоскостью или за нею. Еще более общей является проблема определения одновременного действия оптических „ошибок“ (см. главу II, § 29) и дифракции.

Рассмотрим здесь вкратце основные черты этой теории по Дебаю¹. При этом мы исходим из формулы § 46 (3), выражающей световое возмущение от точечного источника света Q в точке наблюдения P :

$$u_P = -\frac{ik}{4\pi} \iint \frac{e^{ik(r+r_0)}}{rr_0} [\cos(\nu, r) - \cos(\nu, r_0)] d\sigma. \quad (1)$$

Здесь r_0 и r означает расстояния точек Q и P от элемента $d\sigma$ поверхности, проходящей через дифрагирующее отверстие; ν есть нормаль в $d\sigma$ к этой поверхности в направлении распространения света. При этом мы предполагали, что Q и P находятся по



Фиг. 113. Часть сходящейся сферической волны, вырезанная круглой диафрагмой.

разные стороны диафрагмы. Рассмотрим теперь сходящийся пучок лучей, который при отсутствии диафрагмы сходится в точке Q , называемой для краткости „фокусом“, и исследуем освещенность в точке P , смежной с Q , при наличии диафрагмы. Теперь мы можем опять воспользоваться формулой (1), заменив только $r + r_0$ в показателе через $r - r_0$, так как световые пути от Q к диафрагме и от последней до P в этом случае не складываются, а вычитаются. Далее мы можем считать, что $r = r_0$ как в числителе, так и в $\cos(\nu, r)$. Пусть дифрагирующее отверстие будет круглым, а Q есть точка на перпендикуляре, восстановленном из центра диафрагмы. Тогда мы можем взять в качестве поверхности интегрирования сферу, имеющую центр в Q и проходящую через край диафрагмы, так что (фиг. 113)

$$-\cos(\nu, r) = \cos(\nu, r_0) = 1, \quad d\sigma = r_0^2 d\Omega,$$

где $d\Omega$ означает элемент сферы единичного радиуса. Пусть \mathfrak{R} есть вектор из Q в P , а \mathfrak{s} — единичный вектор из Q к элементу $d\sigma$ сферы; тогда мы имеем для $R = |\mathfrak{R}| \ll r_0$:

$$r - r_0 = \mathfrak{R}\mathfrak{s}.$$

Подставим это в (1), мы получим для светового возмущения вблизи фокуса Q :

$$u_P = \frac{ki}{2\pi} \iint e^{ik\mathfrak{R}\mathfrak{s}} d\Omega, \quad (2)$$

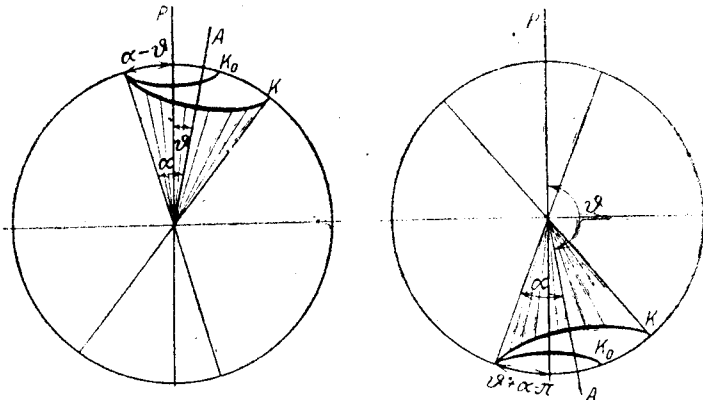
¹ P. Debye, Ann. Physik (4), т. 30 (1909), стр. 755. Обзорная статья J. Licht, Optische Abbildung. Braunschweig, 1931.

причем интегрирование производится по конусу K , описанному вокруг оси A дифрагирующей диафрагмы и имеющему угол при вершине α . Функция (2) является строгим решением волнового уравнения. Спрашивается, какому граничному условию она удовлетворяет. Мы утверждаем, что на бесконечно удаленной конической поверхности ($R \rightarrow \infty$) она всюду равна нулю, за исключением линии пересечения с конусом K ; следовательно, решение соответствует бесконечно удаленной круглой диафрагме.

Но так как условия $R \ll r_0$ и $R \gg \frac{1}{k} = \frac{\lambda}{2\pi}$ практически осуществимы одновременно, то это уравнение удовлетворяет также тому случаю, когда диафрагма лежит на конечном расстоянии, поскольку мы исключаем непосредственно примыкающую часть поверхности диафрагмы.

Чтобы доказать наше утверждение, введем в качестве переменных интегрирования полярные координаты ϑ_1, φ_1 , приняв QP за полярную ось, причем φ_1 отсчитывается от плоскости, определяемой QP и осью диафрагмы QA . Тогда $d\Omega = \sin \vartheta_1 d\vartheta_1 d\varphi_1$. Разобьем u_P на две части:

$$u_P = \frac{ki}{2\pi} (J_1 + J_2), \quad (3)$$



Фиг. 114. К теории поведения волны в фокусе.

где первый интеграл J_1 отличен от нуля только тогда, когда точка наблюдения P находится внутри геометрического конуса лучей K или же за Q , т. е. когда малый угол ϑ между QP и QA удовлетворяет неравенству $0 < \vartheta < \alpha$ или $\pi - \alpha < \vartheta < \pi$. В этих случаях должно быть:

$$J_1 = \iint_{K_0} e^{ikR \cos \vartheta_1} d\Omega, \quad (4)$$

где интегрирование распространено на поверхность конуса K_0 с осью QP , касающегося конуса K внутри; таким образом угол при вершине K_0 равен $\alpha - \vartheta$ в случае $0 < \vartheta < \alpha$, а в случае $\pi - \alpha < \vartheta < \pi$ этот угол равен $\vartheta + \alpha = \pi$ (фиг. 114).

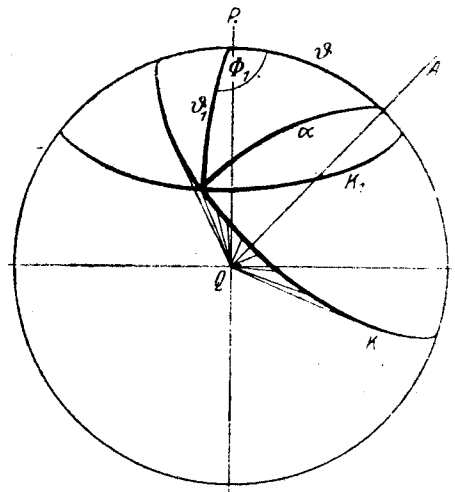
Пусть J_2 есть интеграл той же функции, взятый по остатку $K - K_0$. Интеграл J_1 уже найден. Имеем:

$$J_1 = 2\pi \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} e^{ikR \cos \vartheta_1} \sin \vartheta_1 d\vartheta_1 = -2\pi \int_{\cos \vartheta_1}^{\cos \vartheta_2} e^{ikRx} dx = \\ = -\frac{2\pi}{ikR} (e^{ikR \cos \vartheta_1} - e^{ikR \cos \vartheta_2}),$$

откуда

$$\left. \begin{aligned} 0 < \vartheta < \alpha: \\ J_1 &= \frac{2\pi}{ikR} (e^{ikR} - e^{ikR \cos(\alpha - \vartheta)}), \\ \alpha < \vartheta < \pi - \alpha: \\ J_1 &= 0, \\ \pi - \alpha < \vartheta < \pi: \\ J_1 &= \frac{2\pi}{ikR} (-e^{-ikR} + e^{ikR \cos(\alpha + \vartheta)}). \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Чтобы вычислить J_2 , построим вокруг QP , как оси, конус K_1 с углом раствора $2\vartheta_1$; он пересечет конус K (с осью QA и углом α) в двух точках, азимуты которых вокруг QP равны $\pm \varphi_1$, где φ_1 есть некоторая функция от ϑ_1 ; обозначим ее $\varphi_1 = \Phi_1(\cos \vartheta_1)$ (фиг. 115). Следует различать три случая, в зависимости от того, лежит ли P на конусе лучей K перед Q или за Q , или вне этого конуса (фиг. 116а, б, с); в каждом из этих случаев пределы интегрирования по ϑ_1 , которые мы назовем ϑ_1, ϑ_2 , будут различными, именно:



Фиг. 115. К теории поведения волны в фокусе.

$$\left. \begin{aligned} 0 < \vartheta < \alpha; & \quad \vartheta_1 = \alpha - \vartheta, & \quad \vartheta_2 = \alpha + \vartheta, \\ \alpha < \vartheta < \pi - \alpha; & \quad \vartheta_1 = \vartheta - \alpha, & \quad \vartheta_2 = \vartheta + \alpha, \\ \pi - \alpha < \vartheta < \pi; & \quad \vartheta_1 = \vartheta - \alpha, & \quad \vartheta_2 = 2\pi - (\vartheta + \alpha). \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

В каждом случае имеет место соотношение при $\varphi_1 = \Phi_1(\cos \vartheta_1)$ (фиг. 115):

$$\cos \alpha = \cos \vartheta \cos \vartheta_1 + \sin \vartheta \sin \vartheta_1 \cos \Phi_1.$$

Следовательно:

$$\cos \Phi_1 = \frac{\cos \alpha - \cos \vartheta \cos \vartheta_1}{\sin \vartheta \sin \vartheta_1}. \quad (7)$$

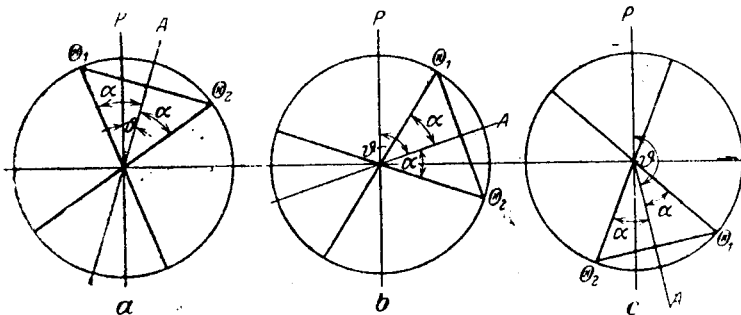
Теперь наш интеграл имеет вид:

$$J_2 = \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \sin \vartheta_1 d\vartheta_1 e^{ikR \cos \vartheta_1} \int_{-\Phi_1}^{\Phi_1} d\varphi_1 = -2 \int_{\cos \vartheta_2}^{\cos \vartheta_1} \Phi_1(x) e^{ikRx} dx,$$

где Φ_1 есть функция $x = \cos \vartheta_1$, определяемая уравнением (7).

Интегрируя по частям, мы получаем ряд по степеням $(kR)^{-1}$, первые члены которого даны в формуле (8):

$$J_2 = \frac{-2}{ikR} \left[\Phi_1(x) e^{ikRx} \right]_{\cos \vartheta_1}^{\cos \vartheta_2} - \frac{2}{k^2 R^2} \left[\frac{d\Phi_1}{dx} e^{ikRx} \right]_{\cos \vartheta_1}^{\cos \vartheta_2} + \dots \quad (8)$$



Фиг. 116. Поведение световой волны в фокусе.

Из формулы (7) или из фиг. 116 для каждого из трех случаев (6) следует:

$$\left. \begin{aligned} 0 < \vartheta < \alpha; & \quad \Phi_1(\cos \vartheta_1) = \pi, \quad \Phi_1(\cos \vartheta_2) = 0, \\ \alpha < \vartheta < \pi - \alpha; & \quad \Phi_1(\cos \vartheta_1) = 0, \quad \Phi_1(\cos \vartheta_2) = 0, \\ \pi - \alpha < \vartheta < \pi; & \quad \Phi_1(\cos \vartheta_1) = 0, \quad \Phi_1(\cos \vartheta_2) = \pi. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Как первое приближение мы получим из (8):

$$\left. \begin{aligned} 0 < \vartheta < \alpha; & \quad J_2 = \frac{2\pi}{ikR} e^{ikR \cos(\alpha - \vartheta)}, \\ \alpha < \vartheta < \pi - \alpha; & \quad J_2 = 0, \\ \pi - \alpha < \vartheta < \pi; & \quad J_2 = -\frac{2\pi}{ikR} e^{ikR \cos(\alpha + \vartheta)}, \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

откуда, суммируя неравенства (5), получим:

$$\left. \begin{aligned} 0 < \vartheta < \alpha; & \quad u_P \rightarrow \frac{e^{ikR}}{R}, \\ \alpha < \vartheta < \pi - \alpha; & \quad u_P \rightarrow 0, \\ \pi - \alpha < \vartheta < \pi; & \quad u_P \rightarrow -\frac{e^{-ikR}}{R}. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Это значит, что функция u_P ведет себя как входящая сферическая волна на бесконечно удаленном конусе внутри отверстия диафрагмы и как выходящая сферическая волна в сегменте, противолежащем отверстию, а в промежутке между ними исчезает. Но из формул (11) можно вывести еще одно замечательное следствие, вытекающее из знака минус при выходящей волне. Последнее означает изменение фазы на π ; следовательно, при переходе через фокус сферическая волна изменяет фазу. Конечно, это изменение происходит не внезапно, а постепенно, и не трудно вычислить этот переход, по крайней мере для точек, находящихся на оси конуса диафрагмы. Именно:

$$\vartheta = 0; \quad \Re s = R \cos \vartheta_1,$$

$$\vartheta = \pi; \quad \Re s = -R \cos \vartheta_1,$$

откуда, согласно (2)

$$\begin{aligned} u_P &= ki \int_0^\alpha e^{\pm ikR \cos \vartheta_1} \sin \vartheta_1 d\vartheta_1 = -ki \int_1^{\cos \alpha} e^{\pm ikRx} dx = \\ &= \mp \frac{1}{R} (e^{\pm ikR \cos \alpha} - e^{\pm ikR}), \end{aligned}$$

следовательно:

$$\left. \begin{aligned} \vartheta = 0; & \quad u_P = \frac{e^{ikR}}{R} - \frac{e^{ikR \cos \alpha}}{R}, \\ \vartheta = \pi; & \quad u_P = -\frac{e^{-ikR}}{R} + \frac{e^{-ikR \cos \alpha}}{R}. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Этот результат кажется противоречащим предельным формулам (11), так как выражения (12) не переходят в (11) при $R \rightarrow \infty$; однако это затруднение легко устранить, если припомнить вывод (11). Этот вывод основан на том, что в (8) мы пренебрегаем членами, начиная со второго порядка $(kR)^{-1}$; но эти члены содержат множитель $d\Phi_1/dx = -d\Phi_1/d\vartheta_1 \cdot 1/\sin \vartheta_1$, который равен бесконечности при $\vartheta = 0$ и $\vartheta = \pi$.

Отсюда следует, что формулы (11) только тогда дают истинное приближенное значение R для конечного значения u_P , когда мы исключаем известное пространство вокруг оси QA.

Из формул (12) мы видим, что в двух точках оси, симметричных относительно Q , также имеется изменение фазы на π ; но (при $R \rightarrow \infty$ возмущение на оси не равно предельным значениям 11), отличающимся перед Q и за Q только на π ; амплитуда и фаза испытывает постоянные колебания. Далее выражения (12) легко преобразуются в

$$\left. \begin{aligned} \vartheta = 0; \quad u_P &= \frac{e^{ikR}}{R} \cdot ae^{i\delta}, \\ \vartheta = \pi; \quad u_P &= \frac{e^{-ikR}}{R} \cdot ae^{i(\delta-\pi)} \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

с помощью подстановки:

$$\left. \begin{aligned} a &= 2 \sin \left(kR \sin^2 \frac{\alpha}{2} \right); \\ \delta &= kR \sin^2 \frac{\alpha}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Таким образом интенсивность перед точкой Q и за точкой Q равна:

$$J_P = 4 \left[\frac{\sin \left(kR \sin^2 \frac{\alpha}{2} \right)}{R} \right]^2, \quad (15)$$

и изменение интенсивности дает нам то же явление, возникающее вследствие дифракции у щели. Но фаза δ идеальной сферической волны $R^{-1} e^{\pm i kR}$ возрастает с R ; скачкообразное изменение на π при $R=0$ означает, что возмущение на оси изменяется непрерывно при переходе через точку Q , так как R возрастает по обе стороны Q .

Для того чтобы исследовать изменение фазы, на которое указывают уравнения (11), на прямых, проходящих через Q и наклонных к оси, или вообще для того чтобы исследовать возбуждение в произвольных точках вблизи Q , надо взять за исходный пункт уравнение (2). Эту формулу можно представить как интеграл от функции Бесселя. Для этого воспользуемся полярными координатами с осью QA , именно — ϑ_0, φ_0 для ϑ и $\vartheta, 0$ для ϑ (равенство $\varphi=0$, разумеется, не вносит ограничения общности). Имеем:

$$R\vartheta = R(\cos \vartheta \cos \vartheta_0 + \sin \vartheta \sin \vartheta_0 \cos \varphi_0), \quad d\Omega = \sin \vartheta_0 d\vartheta_0 d\varphi_0,$$

и

$$u_P = \frac{ki}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi_0 \int_0^{\alpha} \sin \vartheta_0 d\vartheta_0 e^{ikR(\cos \vartheta \cos \vartheta_0 + \sin \vartheta \sin \vartheta_0 \cos \varphi_0)} \quad (16)$$

Мы можем выполнить это интегрирование по φ_0 с помощью функции Бесселя нулевого порядка, которую мы определили в § 49 (4)

$$I_0(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{iz \cos \varphi_0} d\varphi_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} e^{iz \cos \varphi_0} d\varphi_0. \quad (17)$$

Отсюда следует:

$$u_P = ik \int_0^{\alpha} e^{ikR \cos \vartheta \cos \vartheta_0} I_0(kR \sin \vartheta \sin \vartheta_0) d\vartheta_0. \quad (18)$$

Мы получим приближенное выражение этой величины, заменив показательную функцию или функцию Бесселя степенным рядом. В первом случае мы получим удобное разложение, когда $kR \cos \vartheta$ является достаточно малым (окрестность фокальной плоскости $\vartheta=\pi$), во втором, когда $kR \sin \vartheta$ мало (окрестность оси $\vartheta=0$); оба эти приема дополняют друг друга.

Получаем (по Дебаю) для окрестности фокальной плоскости ($kR \cos \vartheta$ мало):

$$u_P = ik \frac{e^{ikR \cos \vartheta}}{k^2 R^2 \sin^2 \vartheta} \left[\Psi_1(\vartheta) - i \frac{kR \cos \vartheta}{2} \Psi_2(\vartheta) + \dots \right], \quad (19)$$

где

$$\Psi_1(\vartheta) = kR \alpha \sin \vartheta \cdot J_1(kR \alpha \sin \vartheta) \dots$$

При этом предполагается также, что угол при вершине α мал. Другие коэффициенты Ψ_2, \dots также могут быть выражены с помощью функций Бесселя. Далее, для окрестности оси ($kR \sin \vartheta$ мало) имеем:

$$u_P = \frac{1}{R \cos \vartheta} \left[\Phi_1(\vartheta) - \frac{k^2 R^2 \sin^2 \vartheta}{4} \Phi_2(\vartheta) + \dots \right], \quad (20)$$

$$\Phi_1(\vartheta) = e^{i k R \cos \vartheta} - e^{-i k R \cos \alpha \cos \vartheta} \dots$$

С помощью этих формул можно точнее исследовать возникновение „фазового скачка“. Полагаем $u_P = \frac{a}{R} e^{ikR + i\delta}$, тогда

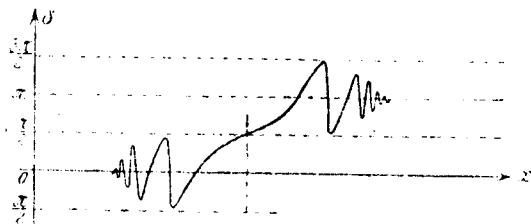
при ϑ постоянном a и δ являются функциями одного R . Согласно (11) значения $\delta(R)$ на большом расстоянии перед фокусом Q и за фокусом Q отличаются на π . Но между этими точками $\delta(R)$ изменяется постепенно с колебаниями, которые возрастают с приближением к Q ; в самом фокусе $\delta(0) = \pi/2$. Это показано на фиг. 117¹. Распределение интенсивности в фокальной плоскости, естественно, очень мало отличается от того распределения, которое дает простая теория Френеля (§ 49).

¹ F. Reiche, Ann. Physik, (4), т. 29 (1909), стр. 65, 401.

Этой теории легко придать такой вид, при котором обнаруживается векториальный характер световых колебаний; для этого надо величине u придать смысл одной из составляющих „вектора Герца“ [глава VII, § 74 (2), (4)], из которого путем интегрирования можно получить напряжение поля.

Большее значение имеет другое обобщение, основная мысль которого также содержится в работе Дебая, цитированной на стр. 263¹.

Совершенно аналогичные соображения применимы к случаю сходящегося пучка лучей, не имеющего фокуса в геометрическом смысле, зато связанного с отклонениями, которые называются геометрически оптическими ошибками отображающей системы.



Фиг. 117. Поведение световой волны в фокусе.

Таким образом мы приходим к одновременному рассмотрению геометрических и волновых ошибок изображения. Мы закончим здесь изложенную в главе II теорию ошибок третьего порядка для центрированных систем и покажем, что распределение света можно выразить с помощью функции Бесселя до второго порядка включительно. Из геометрической оптики мы знаем, что для центрированной системы линз в непосредственной близости оси слабо расходящиеся пучки сходятся в одной точке, определяемой законами диоптрики Гаусса. Предположим, что это имеет место во всем фокальном пространстве; тогда каждой предметной точке соответствует гауссова фокальная точка, положение которой в фокальном пространстве определяется радиус-вектором r_0 . Световые пути от предметной точки до ее изображения равны для всех лучей; таким образом в случае строго геометрического (свободного от ошибок) отображения плоскости $(r - r_0) \cdot \vec{s}_0 = 0$, перпендикулярные гауссовым лучам \vec{s}_0 и r_0 , были бы плоскостями равных фаз. Если бы начало координат фокальной плоскости находилось в точке пересечения оси с плоскостью $X_0 = 0$, проходящей через r_0 и перпендикулярной к оси, то световой путь для некоторой точки наблюдения $X = 0$, лежащей в этой плоскости, в случае гауссова отображения выражался бы в обозначениях главы II, § 22:

$$L_0 = n_1 (r - r_0) \cdot \vec{s}_0 = n_1 [(Y - Y_0)p_0 + (Z - Z_0)q_0]. \quad (21)$$

¹ Эта идея разрабатывалась многими авторами. Обзор можно найти на стр. 263 в цитированной книге J. Picht'a. Данная в тексте общая теория для центрированной системы, повидимому, не встречается в литературе.

На самом деле изображение дает ошибки; для той же нормальной плоскости точка пересечения и направление нормалей переходят в

$$\left. \begin{aligned} Y_1 &= Y_0 + \delta Y, & Z_1 &= Z_0 + \delta Z, \\ p_1 &= p_0 + \delta p, & q_1 &= q_0 + \delta q, \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

а световой путь для той же точки наблюдения переходит в

$$L_1 = n_1 (r - r_1) \cdot \vec{s}_1 = n_1 [(Y - Y_1)p_1 + (Z - Z_1)q_1]. \quad (23)$$

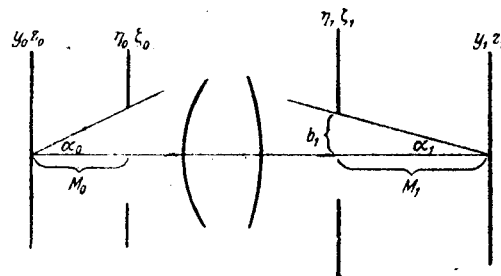
Введем теперь переменные Зейделя [глава II, § 27 (6)]. При этом надо иметь в виду, что там Y_0, Z_0 обозначали предметную точку, а здесь — ее гауссово изображение; поэтому мы должны умножить на увеличение l_1/l_0 и в силу тождества (5) главы II, § 27 получим:

$$Y_0 = \frac{l_1}{l_0} \frac{M_0}{n_0 \lambda_0} y_0 = \frac{M_1}{n_1 \lambda_1} y_0; \quad Z_0 = \frac{M_1}{n_1 \lambda_1} z_0. \quad (24)$$

Здесь M_0 означает расстояние предметной плоскости от плоскости зрачка входа, а M_1 есть соответствующее расстояние со стороны изображения. λ_0 есть произвольная единица длины в плоскости зрачка входа, λ_1 ее гауссово изображение в зрачке выхода. Выберем λ_1 равной радиусу b_1 зрачка выхода (это изменение обозначений введено во избежание смещения с длиной волны).

Координаты точки наблюдения, измеренные в той же единице, пусть будут $Y = \frac{M_1}{n_1 b_1} y$, $Z = \frac{M_1}{n_1 b_1} z$. Далее, согласно главе II, § 27 (7):

$$p_1 = \frac{b_1}{M_1} \eta_1 - \frac{1}{n_1 b_1} y_1, \quad q_1 = \frac{b_1}{M_1} \zeta_1 - \frac{1}{n_1 b_1} z_1. \quad (25)$$



Фиг. 118. К теории дифракции оптических ошибок.

Пусть луч, идущий из центра $y_1 = 0, z_1 = 0$ фокальной плоскости к краю зрачка выхода, образует с осью угол α_1 ; имеем (фиг. 118):

$$\sqrt{p_1^2 + q_1^2} = \sin \alpha_1 = \frac{b_1}{M_1} \sqrt{\eta_1^2 + \zeta_1^2} = \operatorname{tg} \alpha_1 \sqrt{\eta_1^2 + \zeta_1^2}.$$

Таким образом радиус круга, внутри которого изменяются η_1, ζ_1 (и также η_0, ζ_0 , так как при гауссовом отображении $\eta_0 = \eta_1, \zeta_0 = \zeta_1$), равен:

$$\sigma = \cos \alpha_1. \quad (26)$$

Для сокращения введем величину:

$$g = \frac{M_1}{n_1 b_1^2} = \frac{1}{n_1 b_1 \operatorname{tg} \alpha_1}. \quad (27)$$

Получаем:

$$L_1 = (y - y_1)(\eta_1 - g y_1) + (z - z_1)(\zeta_1 - g z_1). \quad (28)$$

В соответствии с (22) полагаем:

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= y_0 + \delta y, & z_1 &= z_0 + \delta z, \\ \eta_1 &= \eta_0 + \delta \eta, & \zeta_1 &= \zeta_0 + \delta \zeta. \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

Тогда (28) принимает вид:

$$L_1 = (y - y_0)\eta_0 + (z - z_0)\zeta_0 + [g y_0 - \eta_0 - g(y - y_0)]\delta y + [g z_0 - \zeta_0 - g(z - z_0)]\delta z + (y - y_0)\delta \eta + (z - z_0)\delta \zeta; \quad (30)$$

при этом мы пренебрегаем членом $g y_0(y - y_0) + g z_0(z - z_0)$, так как он одинаков для всех лучей (независим от η_0, ζ_0).

Величины $\delta y, \dots$ определяются согласно главе II, § 27 (11) с помощью эйконала Зейделя. В главе II, § 29 (1) и (3) эйконал четвертого порядка представлен как функция $y_0, z_0, \eta_1, \zeta_1$. Отсюда мы имеем:

$$\delta y = -\left(\frac{\partial S}{\partial \eta_1}\right)_{\eta_1=\eta_0}, \dots, \delta \eta = \left(\frac{\partial S}{\partial y_0}\right)_{y_1=y_0}, \dots$$

Мы будем теперь всюду писать η, ζ вместо η_0, ζ_0 и положим $z_0 = 0$, что не ограничивает общности. Тогда мы получаем:

$$\left. \begin{aligned} \delta y &= B(\eta^2 + \zeta^2) + 2C y_0^2 \eta + D y_0^2 \eta - E y_0^3 - F y_0(3\eta^2 + \zeta^2), \\ \delta z &= B(\eta^2 \zeta + \zeta^3) + D y_0^2 \zeta - 2F y_0 \eta \zeta, \\ \delta \eta &= -A y_0^3 - 2C y_0 \eta^2 - D y_0(\eta^2 + \zeta^2) + 3E y_0^2 \eta + F(\eta^3 + \eta \zeta^2), \\ \delta \zeta &= -2C y_0 \eta \zeta + F(\eta^2 \zeta + \zeta^3). \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

Подставим это в уравнение (30). Разобьем L_1 на две части:

$$L_1 = L_0 + \delta L, \quad (32)$$

где L_0 есть сумма всех линейных членов относительно η, ζ (т. е. η_0, ζ_0), а δL сумма всех остальных членов. Тогда

$$L_0 = \beta(y - y_0)\eta + \gamma z \zeta, \quad (33)$$

где

$$\left. \begin{aligned} y_0 &= y_0 - [g(2C + D) + E] y_0^3, \\ \beta &= 1 - [g(2C + D) + 3E] y_0^2, \\ \gamma &= 1 - g D y_0^2 \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

и

$$\delta L = [(g y_0 - \eta) - g(y - y_0)]\delta y + (-\zeta - g z)\delta z - (y - y_0)\delta \eta + z\delta \zeta. \quad (35)$$

Здесь мы всюду пишем y^0 вместо y_0 , что означает, что мы пренебрегаем членами второго порядка относительно ошибок B, C ; имеем¹:

$$\left. \begin{aligned} \delta' y &= B(\eta^2 + \zeta^2) - F y^0(3\eta^2 + \zeta^2), \\ \delta' z &= B(\eta^2 \zeta + \zeta^3) - 2F y^0 \eta \zeta, \\ \delta' \eta &= -A y^0^3 - 2C y^0 \eta^2 - D y^0(\eta^2 + \zeta^2) + F(\eta^3 + \eta \zeta^2), \\ \delta' \zeta &= -2C y^0 \eta \zeta + F(\eta^2 \zeta + \zeta^3). \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

Волновой процесс в фокальном пространстве выражается по теории Дебая функцией:

$$u = \frac{ik}{2\pi} \iint e^{ikL_1} d\Omega_0, \quad (37)$$

где $d\Omega_0$ обозначает элемент телесного угла в предметном пространстве, в котором волны имеют сферическую форму.

Согласно главе II, § 27 (7) $p_0 = \eta_0 \frac{b_0}{M_0} - y_0 \frac{1}{\eta_0 b_0}$, $q_0 = \dots$, и, сле-

довательно², для постоянных y_0, z_0 :

$$d\Omega_0 = \frac{dp_0 dq_0}{\sqrt{1 - p_0^2 - q_0^2}} \approx \frac{b_0^2}{M_0^2} d\eta_0 d\zeta_0 = \operatorname{tg}^2 \alpha_0 d\eta_0 d\zeta_0; \quad (38)$$

при этом полагаем квадратный корень в знаменателе равным единице. Это значит, что мы вычисляем дифракционные ошибки, которые имеют место также в случае идеальной оптической системы вследствие наличия бленд, методом приближения Фраунгофера (вместо более точного метода Френеля).

Из (32), (37) и (38) следует:

$$u = \frac{ik}{2\pi} \operatorname{tg}^2 \alpha_0 \iint e^{ikL_0} (1 + ik\delta L) d\eta d\zeta. \quad (39)$$

¹ Несколькими членами, четными относительно η, ζ , пренебрегаем; как увидим, они не оказывают никакого влияния на результат.

² Положив $m = \cos \vartheta$, $p = \sin \vartheta \cos \varphi$, $q = \sin \vartheta \sin \varphi$, имеем:

$$dp dq = \begin{vmatrix} \frac{\partial p}{\partial \vartheta} & \frac{\partial p}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial q}{\partial \vartheta} & \frac{\partial q}{\partial \varphi} \end{vmatrix} d\vartheta d\varphi = \sin \vartheta \cos \vartheta d\vartheta d\varphi = m \sin \vartheta d\vartheta d\varphi,$$

следовательно:

$$d\Omega = \sin \vartheta d\vartheta d\varphi = \frac{dp dq}{m} = \frac{dp dq}{\sqrt{1 - p^2 - q^2}}.$$

Подставив в это выражение вместо L_0 выражение (33), а вместо δL (35), мы увидим, что интеграл (39) сводится к следующему простому интегралу:

$$U_{lm} = \iint \eta^l \zeta^m e^{ik[\beta(y-y^0)\eta + \gamma z\zeta]} d\eta d\zeta. \quad (40)$$

Эти интегралы можно получить из известного интеграла:

$$U = U_{00} = \iint e^{ik[\beta(y-y^0)\eta + \gamma z\zeta]} d\eta d\zeta \quad (41)$$

путем дифференцирования:

$$U_{lm} = \frac{1}{(ik\beta)^l (ik\gamma)^m} \frac{\partial^{l+m} U}{\partial y^l \partial z^m}; \quad (42)$$

U в случае круглой бленды выражается через бесселеву функцию I_1 . Полагая, как в § 49 (1) и (2)

$$\left. \begin{aligned} \beta(y-y^0) &= r \cos \vartheta; & \eta &= P \cos \theta, \\ \gamma z &= r \sin \vartheta; & \zeta &= P \sin \theta \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

будем иметь:

$$U = \int_0^\sigma \int_0^{2\pi} e^{ikrP \cos(\vartheta-\theta)} P dP d\theta,$$

где σ дается уравнением (26) и согласно § 49 (3), (10), (12):

$$U = \frac{2\pi\sigma}{kr} I_1(\sigma kr); \quad r = \sqrt{\beta^2(y-y^0)^2 + \gamma^2 z^2}. \quad (44)$$

Воспользуемся рекуррентной формулой:

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{I_p(s)}{s^p} \right) = - \frac{I_{p+1}(s)}{s^p}. \quad (45)$$

Полагаем:

$$\left. \begin{aligned} s &= \sigma kr; & \bar{y} &= \sigma k \beta (y-y^0) = s \cos \vartheta, \\ &= \sqrt{y^2 + z^2}; & \bar{z} &= \sigma k \gamma z = s \sin \vartheta, \\ U &= 2\pi\sigma^2 \bar{U}; & \bar{U} &= \frac{I_1(s)}{s} \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

тогда согласно (42)

$$U_{lm} = 2\pi(-i)^{l+m} \sigma^{l+m+2} \bar{U}_{lm}, \quad (47)$$

где

$$\bar{U}_{lm} = \frac{\partial^{l+m} \bar{U}}{\partial y^l \partial z^m}. \quad (48)$$

Последовательно применяя формулу (45), найдем:

$$\bar{U}_{10} = -\bar{y} \frac{I_2(s)}{s^2}; \quad \bar{U}_{01} = -\bar{z} \frac{I_2(s)}{s^2}; \quad (49)$$

$$\left. \begin{aligned} \bar{U}_{20} &= -\frac{I_4(s)}{s^2} + \bar{y}^2 \frac{I_2(s)}{s^3}, \\ \bar{U}_{11} &= \bar{y} \bar{z} \frac{I_3(s)}{s^3}, \\ \bar{U}_{02} &= -\frac{I_2(s)}{s^2} + \bar{z}^2 \frac{I_2(s)}{s^3}, \end{aligned} \right\} \quad (50)$$

$$\left. \begin{aligned} \bar{U}_{30} &= 3\bar{y} \frac{I_3(s)}{s^3} - \bar{y}^3 \frac{I_4(s)}{s^4}, \\ \bar{U}_{21} &= \bar{z} \frac{I_3(s)}{s^3} - \bar{y}^2 \bar{z} \frac{I_4(s)}{s^4}, \\ \bar{U}_{12} &= \bar{y} \frac{I_3(s)}{s^3} - \bar{y} \bar{z}^2 \frac{I_4(s)}{s^4}, \\ \bar{U}_{03} &= 3\bar{z} \frac{I_3(s)}{s^3} - \bar{z}^3 \frac{I_4(s)}{s^4}. \end{aligned} \right\} \quad (51)$$

Уравнение (47) показывает, что U_{lm} вещественно при четном $l+m$ и мнимо при нечетном $l+m$.

Образум из (39) выражение интенсивности $J = |u|^2$. При этом напомним согласно (39) и (41):

$$u = \frac{ik}{2\pi} \operatorname{tg}^2 \alpha_0 [U + ik(\Phi + i\Psi)]; \quad (52)$$

пренебрегая квадратами Φ и Ψ , получим:

$$J = \left(\frac{k}{2\pi} \right)^2 \operatorname{tg}^4 \alpha_0 (U^2 - 2kU\Psi). \quad (53)$$

Здесь Ψ есть мнимая часть интеграла:

$$\Psi = \Im \iint e^{ikL} \delta L d\eta d\zeta. \quad (54)$$

Мы можем поэтому вычеркнуть в уравнении (35) все члены, четные относительно η, ζ . Простое вычисление дает:

$$\delta L = y^0(3F + gB)(\eta^2 + \zeta^2) + (F - gB)[(y - y^0)(\eta^2 + \zeta^2) + z(\eta^2 \zeta + \zeta^3)]. \quad (55)$$

При этом согласно (54)

$$i\Psi = y^0(3F + gB)(U_{30} + U_{12}) + (F - gB)[(y - y^0)(U_{30} - U_{12}) + z(U_{21} + U_{03})]. \quad (56)$$

В силу (47) и (51)

$$\begin{aligned} U_{30} + U_{12} &= 2\pi i \sigma^5 y \left(4 \frac{I_3}{s^3} - \frac{I_4}{s^4} \right), \\ U_{21} + U_{03} &= 2\pi i \sigma^5 z \left(4 \frac{I_3}{s^3} - \frac{I_4}{s^4} \right). \end{aligned} \quad (57)$$

Известная рекуррентная формула имеет такой вид¹:

$$\frac{4I_3}{s} - I_4 = I_2. \quad (58)$$

Введя согласно (46) угол ϑ , мы получим уравнения (57) в виде:

$$U_{30} + U_{12} = 2\pi i \sigma^5 \cos \vartheta \frac{I_2(s)}{s},$$

$$U_{21} + U_{03} = 2\pi i \sigma^5 \sin \vartheta \frac{I_2(s)}{s}$$

и

$$\begin{aligned} (y - y^0)(U_{30} + U_{12}) + z(U_{21} + U_{03}) &= \\ &= 2\pi i \sigma^5 \frac{I_2(s)}{s} \cdot \frac{s}{k\sigma} \left(\frac{\cos^2 \vartheta}{\beta} + \frac{\sin^2 \vartheta}{\gamma} \right); \end{aligned}$$

β и γ можно заменить в нашем приближении единицей, так что последнее уравнение примет вид:

$$\frac{2\pi i \sigma^4}{k} I_2(s).$$

Следовательно, мы получим из (56):

$$\Psi = \frac{2\pi \sigma^2}{k} I_2(s) \left[(F - gB) + \frac{\sigma k y^0}{s} (3F + gB) \cos \vartheta \right]. \quad (59)$$

Введем теперь определение трех функций:

$$K_0(s) = \left(\frac{I_1(s)}{s} \right)^2; \quad K_1(s) = 2 \frac{I_1(s)}{s} I_2(s); \quad K_2(s) = \frac{2I_1(s) I_2(s)}{s^2}, \quad (60)$$

из которых первая представляет собой обычную дифракционную функцию круглого отверстия. Тогда согласно (53) и (59) *распределение света в фокальной плоскости* выражается так:

$$J = k^2 (\sigma \operatorname{tg} \alpha_0)^4 [K_0(s) - (F - gB) K_1(s) - \sigma k y^0 (3F + gB) K_2(s) \cos \vartheta]. \quad (61)$$

Погрешности изображения, таким образом, распадаются на две группы: во-первых, C , D , E , во-вторых, B , F .

Рассмотрим сначала случай $B=0$, $F=0$; в этом случае интенсивность выражается обычной дифракционной функцией $K_0(s)$, но аргумент s сохраняет постоянное значение не на окружностях, описанных вокруг гауссова фокуса, а на эллипсах вокруг некоторого смещенного центра. Смещение центра и оси эллипса даны уравнением (34) и хотя, очевидно, смещение пропорционально y_0^3 , но определяется не только *дисторсией* E , а также и *тангенциальным искривлением фокальной плоскости* $2C + D$. При сильном диафрагмировании¹ ($b_1 \rightarrow 0$; $g \rightarrow \infty$) преобладает влияние искривления фокальной плоскости, при слабом диафрагмировании — сильнее влияния дисторсии. Эллипсы равной яркости определяются уравнением $s = \text{const}$; следовательно, согласно (46)

$$\left(\frac{k\beta\sigma}{s} \right)^2 (y - y^0)^2 + \left(\frac{k\gamma\sigma}{s} \right)^2 z^2 = 1, \quad (62)$$

их главные оси „сагиттальные“ и „тангенциальные“ (глава II, § 29), а длины полуосей равны:

$$\left. \begin{aligned} a &= \frac{s}{k\beta\sigma} = \frac{s}{k\sigma} \cdot \frac{1}{1 - [g(2C + D) + \sigma E] y_0^2}, \\ b &= \frac{s}{k\gamma\sigma} = \frac{s}{k\sigma} \cdot \frac{1}{1 - gD y_0^2}. \end{aligned} \right\} \quad (63)$$

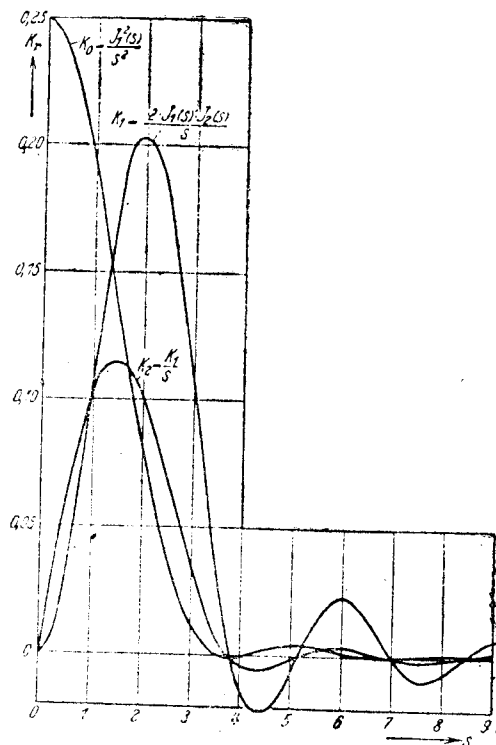
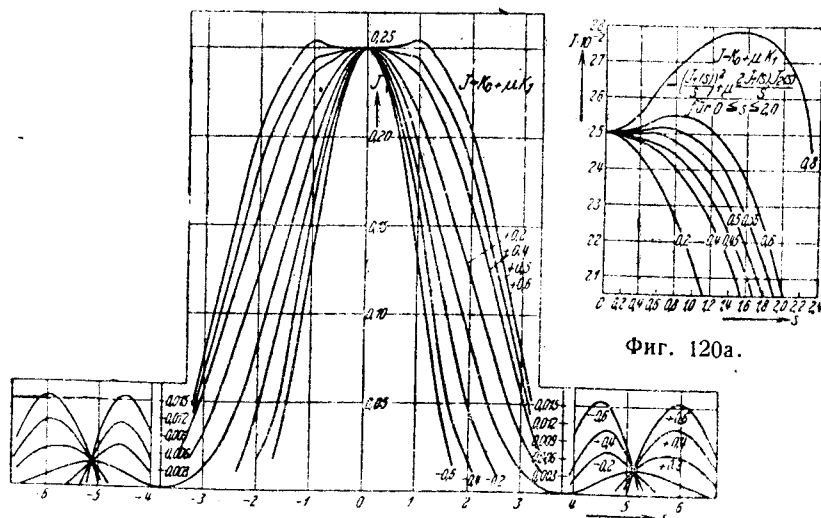
Таким образом отклонение от формы окружности увеличивается с возрастанием y_0^3 и зависит столько же от констант C , D , *астигматизма* и *искривления фокальной плоскости*, сколько и от дисторсии E . Первое влияние преобладает при сильном диафрагмировании, последнее — при слабом.

Теперь перейдем ко второй группе ошибок изображения, т. е. к *сферической аберрации* B и к *коме* F . Они проявляются в выражениях $F - gB$ и $3F + gB$. Первый член дает небольшое, независимое от положения предметной точки, изменение дифракционной функции; второй член — возрастающую с y_0 асимметрию распределения света в сагиттальном направлении (множитель $\cos \vartheta$). Так как B всегда умножено на g , то при сильном диафрагмировании преобладает сферическая аберрация B , а при слабом — кома F .

Для того чтобы дать более ясное представление об этом явлении, в табл. 6 приведены числовые значения трех функций K_0 , K_1 , K_2 , а на фиг. 119 эти функции представлены в виде кривых²; на фиг. 120 показана комбинация $K_0 + \mu K_1$, которая

¹ То обстоятельство, что при бесконечно малом отверстии диафрагмы ($b \rightarrow 0$) g стремится к ∞ , не означает, что соответствующие члены обращаются в бесконечность, так как эти члены содержат в качестве множителя некоторую степень y_0 . При обратном пересчете от зейделевых координат y_0 к обычным Y_0 появляется множитель, пропорциональный величине отверстия.

² Вычисления выполнены студентом А. Weygandt.

Фиг. 119. Функция K_0, K_1, K_2 .

Фиг. 120. Распределение интенсивности с учетом сферической аберрации и комы для точек оси (второстепенные максимумы).

выражает распределение света в точках оси $y^0 = 0$. При этом замечательно то, что при больших значениях μ в центре дифракционного изображения находится не максимум освещенности, а небольшой относительный минимум; эта часть кривой отдельно показана в увеличенном масштабе (фиг. 120а). Далее, замечается распределение вторичных максимумов по два.

Таблица 6

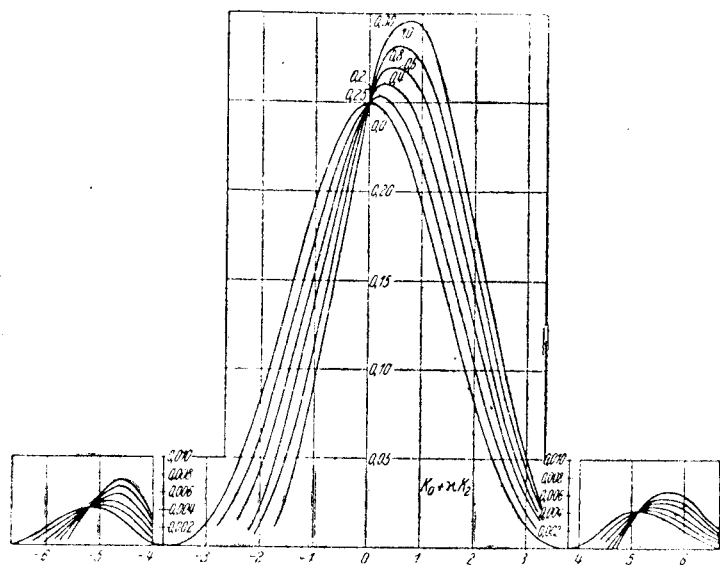
Функции K_0, K_1, K_2

s	$K_0 = \left(\frac{J_0(s)}{s}\right)$	$K_1 = \frac{2J_1(s)}{s}$	$K_2 = \frac{2J_2(s)}{s}$	s	$K_0 = \left(\frac{J_0(s)}{s}\right)$	$K_1 = \frac{2J_1(s)}{s}$	$K_2 = \frac{2J_2(s)}{s}$
0,0	0,2500	0,0000	0,0000	5,2	0,043	0,0031	0,0006
0,2	0,2475	0,0049	0,0248	5,4	0,0040	0,0103	0,0019
0,4	0,2401	0,0193	0,0483	5,6	0,0035	0,0163	0,0029
0,6	0,2281	0,0439	0,0733	5,8	0,0028	0,0214	0,0037
0,8	0,2125	0,0700	0,0875	6,0	0,0021	0,0234	0,0039
1,0	0,1936	0,1011	0,1011	6,2	0,0014	0,0217	0,0035
1,2	0,1723	0,1323	0,1103	6,4	0,0008	0,0179	0,0028
1,4	0,1497	0,1597	0,1141	6,6	0,0003	0,0126	0,0019
1,6	0,1268	0,1876	0,1172	6,8	0,0001	0,0061	0,0009
1,8	0,1044	0,1983	0,1102	7,0	0,0000	0,0000	0,0000
2,0	0,0831	0,2034	0,1017	7,2	0,0001	— 0,0043	— 0,0006
2,2	0,0638	0,1980	0,0900	7,4	0,0002	— 0,0081	— 0,0011
2,4	0,0469	0,1870	0,0780	7,6	0,0004	— 0,0091	— 0,0012
2,6	0,0327	0,1639	0,0630	7,8	0,0006	— 0,0078	— 0,0010
2,8	0,0214	0,1380	0,0493	8,0	0,0008	— 0,0064	— 0,0008
3,0	0,0127	0,1098	0,0356	8,2	0,0009	— 0,0033	— 0,0004
3,2	0,0066	0,0730	0,0228	8,4	0,0010	0,0000	0,0000
3,4	0,0027	0,0465	0,0137	8,6	0,0010	0,0026	0,0003
3,6	0,0007	0,0219	0,0061	8,8	0,0009	0,0044	0,0005
3,8	0,0000	0,0023	0,0005	9,0	0,0008	0,0072	0,0008
4,0	0,0002	— 0,0120	— 0,0030	9,2	0,0005	0,0092	0,0010
4,2	0,0010	— 0,0193	— 0,0046	9,4	0,0003	0,0085	0,0009
4,4	0,0021	— 0,0205	— 0,0047	9,6	0,0002	0,0057	0,0007
4,6	0,0031	— 0,0207	— 0,0045	9,8	0,0001	0,0039	0,0004
4,8	0,0038	— 0,0145	— 0,0031	10,0	0,0000	0,0020	0,0002
5,0	0,0042	— 0,0050	— 0,0012				

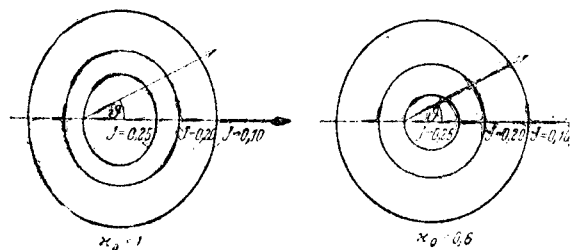
Если B и F очень малы, то мало и $\mu = gB + F$, следовательно влияние члена K_1 также мало. Но при достаточно большом μ , влияние члена, содержащего K_2 , может стать заметным. На фиг. 121 изображены функции $K_0 + xK_2$, показывающие зависимость от ϑ . Положим $x = x_0 \cos \vartheta$ и представим себе соответствующие каждому значению ϑ функции начерченными в плоскости, вертикальной к фокальной плоскости и образующей азимут ϑ ; мы получим тогда ясное представление о форме светового бугра.

Наконец, на фиг. 122 построены кривые равной интенсивности для двух значений x (0,6 и 1), на которых видно, что максимумы сдвинуты от оси наружу.

При нашем сравнительно грубом приближении кривые равной освещенности имеют овальную форму, но если бы мы не



Фиг. 121. Дифракционная картина с учетом сферической абберации для точек вне оси. Сагитальное поперечное сечение (второстепенные максимумы увеличены).



Фиг. 122. К дифракционной теории оптических ошибок. Кривые равной интенсивности.

пренебрегли членами высших порядков, кривые имели бы вдавненность, т. е. в простейшем случае почковидную форму.

§ 57. ЗОММЕРФЕЛЬДОВА СТРОГАЯ ТЕОРИЯ ДИФРАКЦИОННЫХ ЯВЛЕНИЙ*

Все предыдущие рассуждения были основаны на принципе Кирхгофа (§ 45). Мы уже подчеркивали, что он не удовлетворяет более строгим физическим и математическим требованиям. С точки зрения электромагнитной теории найдены более строгие решения дифракционных задач, но пока что лишь для небольшого числа частных случаев.

Наиболее важными являются два метода: метод *многозначных решений* (Зоммерфельд) и метод *разделения переменных при помощи криволинейных координат*. Последний применим и для проводящих веществ (металлов), в этом случае он дает объяснение световых явлений, имеющих место в коллоидных растворах. Поэтому изложение этого метода мы дадим в главе VI (металлооптика).

Здесь же мы рассмотрим метод Зоммерфельда для случая плоского *идеально отражающего экрана с острым прямолинейным краем*. Кроме того, мы положим, что источник света линейен и параллелен дифрагирующему краю; таким образом мы имеем дело с плоской задачей.

Принцип метода Зоммерфельда тот же, которым пользуются в электростатике в подобных же случаях под названием „метода изображений Томсона“ для решения вопросов электростатической индукции. Для того чтобы вычислить действие точечного заряда на проводник, необходимо удовлетворить граничному условию, что тангенциальная составляющая электрического поля равна нулю на поверхности проводника. При простой геометрической форме поверхности проводника это достигается тем, что по другую сторону поверхности предполагается наличие симметрично расположенной заряженной точки с соответствующе выбранным зарядом. Прежде чем приложить этот принцип к оптике, мы геометрически упростим задачу.

Пусть край экрана параллелен оси z координатной системы, а ось x находится в плоскости экрана, так что направление от края в область экрана — положительно (фиг. 123). Тогда граничные условия исчезновения тангенциальной составляющей \mathcal{E} дают нам: $\mathcal{E}_x = \mathcal{E}_z = 0$ при $y = 0, x > 0$.

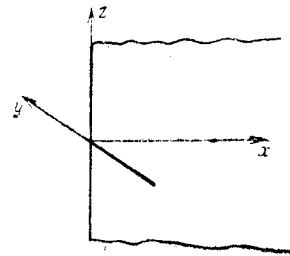
Мы можем теперь, очевидно, разбить общий случай на два частных:

1. **Случай п.** Пусть электрический вектор колеблется *параллельно* оси z ($\mathcal{E}_x = \mathcal{E}_y = 0$); чтобы удовлетворить уравнения Максвелла, положим, что магнитный вектор колеблется перпендикулярно к оси z ($\mathcal{H}_z = 0$). Если рассматриваемый процесс не зависит от z , то уравнения главы I, § 1 (1) для гармонической волны с частотой ω сведутся к следующим:

$$\frac{\partial \mathcal{H}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathcal{H}_x}{\partial y} = \frac{i\omega}{c} \mathcal{E}_z, \quad (1)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{E}_z}{\partial y} &= -\frac{i\omega}{c} \mathcal{H}_x, \\ \frac{\partial \mathcal{E}_z}{\partial x} &= \frac{i\omega}{c} \mathcal{H}_y. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

* A. Sommerfeld, Math. Ann., т. 47 (1896), стр. 317. Z. f. Math. u. Phys., т. 46 (1901).



Фиг. 123. К теории дифракции у края.

Исключив \mathfrak{E}_x и \mathfrak{E}_y , получим:

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{E}_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathfrak{E}_z}{\partial y^2} + k^2 \mathfrak{E}_z = 0, \quad \left(\frac{\omega}{c} = k \right). \quad (3)$$

Определив из этого уравнения и граничного условия $\mathfrak{E}_z = 0$ на поверхности проводника величину \mathfrak{E}_z , можно вычислить \mathfrak{E}_x и \mathfrak{E}_y из уравнений (2).

2. Случай α . Пусть электрический вектор колеблется перпендикулярно к оси z , а магнитный — параллельно ей ($\mathfrak{E}_z = \mathfrak{H}_x = \mathfrak{H}_y = 0$). Тем же путем, как и в предыдущем случае, мы получим:

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{H}_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathfrak{H}_z}{\partial y^2} + k^2 \mathfrak{H}_z = 0, \quad (4)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial y} &= \frac{i\omega}{c} \mathfrak{E}_x, \\ \frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial x} &= -\frac{i\omega}{c} \mathfrak{E}_y. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Граничное условие $\mathfrak{E}_x = 0$ дает для \mathfrak{H} :

$$\frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial y} = 0 \quad \text{при } y=0, \quad x > 0. \quad (6)$$

Проинтегрировав уравнение (4) с этим граничным условием, мы можем вычислить \mathfrak{E}_x и \mathfrak{E}_y из уравнений (5).

Введем в плоскости xu полярные координаты:

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi. \quad (7)$$

Тогда в каждом из обоих случаев мы должны решить дифференциальное уравнение:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + k^2 u = 0, \quad (8)$$

при пограничных условиях

$$\left. \begin{aligned} \text{случай } \pi: u &= 0 \\ \text{случай } \alpha: \frac{\partial u}{\partial \varphi} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \text{при } \varphi = 0 \text{ и } \varphi = 2\pi. \quad (9)$$

Допустим сначала, что светящаяся линия проходит в конечном отдалении. Пусть ее след в плоскости xu есть точка Q , а соответствующая функция возбуждения в точке наблюдения P есть $u(Q, P)$. Введем вторую световую линию, параллельную первой, имеющую след в симметричной относительно оси x точке Q' ; колебания этой световой линии прямо противоположны по фазе колебаниям первой, т. е. возмущение выражается функцией $-u(Q', P)$.

Тогда результат наложения обеих линий $u(Q, P) - u(Q', P)$, очевидно, даст решение дифференциального уравнения (8). Это решение обращается, однако, в нуль во всей плоскости экрана, даже в тех точках ее, которые экраном не закрыты. Таким образом простой метод зеркального отражения не дает решения нашей первой задачи (9, π). Это решение можно получить с помощью искусственного приема Зоммерфельда: физическое пространство мы дополняем математическим пространством и рассматриваем оба как „пространство о двух листках — пространство Римана“, причем дифрагирующий край играет роль „линии разветвления“.

Действительный источник света Q после отражения переходит в мнимый (виртуальный) источник Q' „математического“ пространства. Ветвь функции в математическом пространстве, включая и виртуальный источник света Q' , не имеет никакого физического смысла и служит лишь для того, чтобы функция u (или ее производная $\frac{\partial u}{\partial \varphi}$) обращалась в нуль на поверхности экрана. Мы можем в дальнейшем ограничиться одной плоскостью xu и построим на ней обычную поверхность Римана о двух листках, где начало координат и бесконечно удаленная точка являются точками разветвления, а положительная ось x есть купюра.

Мы ограничимся тем случаем, когда источник света бесконечно удален. Тогда падающая волна плоская и выражается решением уравнения (8):

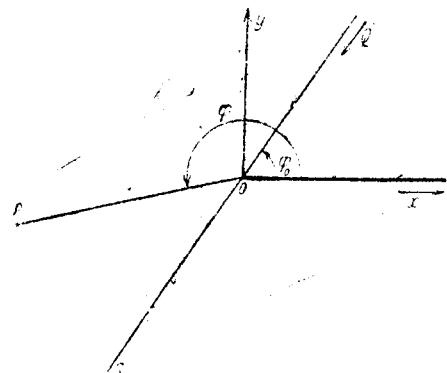
$$u_1(r, \varphi, \varphi_0) = e^{ikr \cos(\varphi - \varphi_0)}, \quad (10)$$

где r и φ — полярные координаты точки наблюдения, а φ_0 — полярный угол волновой нормали, заключенный в интервале $0 < \varphi_0 < \pi$, если падающая волна идет от верхней полуплоскости (фиг. 124). Наша задача — найти более общее решение, однозначное на двухлистной поверхности и в бесконечно удаленных точках одного (физического) листка, переходящее в функцию u_1 .

Систематический метод Зоммерфельда завел бы нас слишком далеко. Мы удовольствуемся тем, что приведем здесь окончательный результат и проверим его.

Мы утверждаем, что функция

$$u_2 = u_1 v = e^{ikr \cos(\varphi - \varphi_0)} \frac{e^{i\pi/4}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{s_1} e^{-i\tau^2} d\tau, \quad (11)$$



Фиг. 124. К теории дифракции у края.

где

$$s_1 = \sqrt{2kr} \cos \frac{\varphi - \varphi_0}{2}, \quad (12)$$

есть решение дифференциального уравнения (8). Выражение

$$v = \frac{e^{\frac{i\pi}{4}}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{s_1} e^{-i\tau} d\tau = \frac{e^{\frac{i\pi}{4}}}{\sqrt{2}} \left\{ \frac{1}{2} + U\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} s_1\right) - i \left[\frac{1}{2} + V\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} s_1\right) \right] \right\}. \quad (13)$$

очевидно, можно представить в комплексной плоскости UV как вектор, проведенный из точки F_- (с координатами $-\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}$) к некоторой точке спирали Корню (§ 55), соответствующей значению параметра $\sqrt{\frac{2}{\pi}} s_1$.

Двузначность u_2 происходит от того, что период s_1 относительно φ равен 4π . Чтобы доказать, что u_2 есть решение уравнения (8), подставим $u_2 = u_1 v$ в дифференциальное уравнение (8). Так как u_1 уже удовлетворяет этому уравнению, то мы получим:

$$u_1 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} \right) + 2 \frac{\partial u_1}{\partial r} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_1}{\partial \varphi} \frac{\partial v}{\partial \varphi} = 0. \quad (14)$$

Легко убедиться, что это равенство (14) удовлетворяется.

Посмотрим теперь, как ведет себя наше решение на бесконечности. Когда $|\varphi - \varphi_0| < \pi$, то при $r \rightarrow \infty$ величина s_1 также стремится к бесконечности, откуда

$$v \rightarrow \frac{e^{\frac{i\pi}{4}}}{\sqrt{2}} (1 - i) = 1. \quad (15)$$

Напротив, при $|\varphi - \varphi_0| > \pi$ величина $s_1 \rightarrow -\infty$, т. е. в этом случае $v \rightarrow 0$. (16)

В бесконечно удаленной части одного листа поверхности Римана также $u_2 \rightarrow u_1$, тогда как на другом листе $u_2 \rightarrow 0$, причем линией раздела (купюрой) служит как раз прямая, проходящая через начало координат в направлении $\varphi = \varphi_0 \pm \pi$.

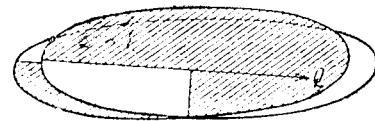
Поведение u_2 в конечной части плоскости определяется, главным образом, знаком перед s_1 . Достаточно взглянуть на спираль Корню, чтобы определить поведение множителя v (вектора из точки F_-): монотонное возрастание $|v|$ при s_1 отрицательном и осциллирование этой величины при положительном s_1 .

На поверхности Римана это разделение приводит к следующему:

$$\begin{aligned} s_1 > 0 & \text{ при } |\varphi - \varphi_0| < \pi, \\ s_1 < 0 & \text{ при } |\varphi - \varphi_0| > \pi. \end{aligned} \quad (17)$$

Таким образом мы получаем здесь разделение, совпадающее с тем, которое вытекало из поведения на бесконечности. Купюрой опять является прямая $\varphi = \varphi_0 \pm \pi$.

Сосредоточим теперь внимание на физическом листе и заштрихуем на фиг. 125 часть поверхности, где s_1 положительно, оставив белой ту часть, где $s_1 < 0$. Формулы для



Фиг. 125. К дифракционной теории Зоммерфельда.

$$\begin{aligned} s_1 > 0 & \text{ при } 0 < \varphi < \varphi_0 + \pi, \\ s_1 < 0 & \text{ при } \varphi_0 + \pi < \varphi < 2\pi. \end{aligned} \quad (18)$$

Значение интеграла v зависит исключительно от s_1 — следовательно, оно постоянно для кривых с постоянным s_1 . Эти кривые — параболы¹ с фокусом в начале координат, с осью на продолжении OS направления падающего света и с параметром $\frac{s_1^2}{k}$.

Посмотрим, каков порядок величины интеграла v на заданной параболе s_1 . Для этого найдем значение интеграла, входящего в уравнение (11) и (13), при больших значениях s_1 . Интегрируя по частям, получаем:

$$\int_{-\infty}^s e^{-i\tau} d\tau = -\frac{e^{-is}}{2is} + R_1. \quad (19)$$

¹ Напишем согласно (12):

$$s_1^2 = 2kr \frac{1}{2} [\cos(\varphi - \varphi_0) + 1] = kr [1 - \cos(\varphi - \varphi_0 - \pi)]$$

или

$$r^2 = \left[\frac{s_1^2}{k} + r \cos(\varphi - \varphi_0 - \pi) \right]^2.$$

Введем прямоугольные координаты, приняв направление OS за ось x , т. е. положим:

$$x = r \cos(\varphi - \varphi_0 - \pi), \quad y = r \sin(\varphi - \varphi_0 - \pi);$$

тогда наше уравнение даст:

$$x^2 + y^2 = \left(\frac{s_1^2}{k} + x \right)^2 = \frac{s_1^4}{k^2} + \frac{2s_1^2 x}{k} + x^2$$

или

$$y^2 = \frac{2s_1^2}{k} \left(\frac{s_1^2}{2k} + x \right) = 2p(x - x_0), \text{ где } p = \frac{s_1^2}{k}, x_0 = -\frac{s_1^2}{2k},$$

что является доказательством нашего утверждения.

где

$$R_1 = - \int_{-\infty}^s \frac{e^{-i\tau}}{2i\tau^2} d\tau = \frac{1}{4} \frac{e^{-is^2}}{s^2} - \frac{3}{4} \int_{-\infty}^s \frac{e^{-i\tau^2}}{\tau^4} d\tau. \quad (20)$$

При $s < 0$, следовательно, должно быть:

$$|R_1| \leq \frac{1}{4|s|^3} + \frac{1}{4|s|^3} = \frac{1}{2|s|^3}. \quad (21)$$

При $s > 0$ напомним:

$$\int_{-\infty}^s e^{-i\tau^2} d\tau = \int_{-\infty}^0 - \int_0^s = e^{-\frac{i\pi}{4}} \sqrt{\pi} - \frac{e^{-is^2}}{2is} + R_2, \quad (22)$$

где

$$|R_2| \leq \frac{1}{2s^3} = \frac{1}{2|s|^3}. \quad (23)$$

Из (12) следует, что при $s < 0$:

$$|u_2| = |v| \leq \frac{1}{2|s_1|\sqrt{\pi}} + \frac{1}{2|s_1|\sqrt{\pi}} \quad (24)$$

и, полагая $|s_1| > 1$,

$$|u_2| < \frac{1}{|s_1|\sqrt{\pi}}. \quad (25)$$

Но оптическое измерение интенсивности выполняется всегда с ограниченной точностью. Пусть эта точность определяется неравенством:

$$|u_2| < \varepsilon.$$

Положим:

$$|s_1| > \frac{1}{\varepsilon\sqrt{\pi}};$$

тогда согласно (25) $|u_2| < \varepsilon$. Мы можем построить параболу P с параметром $1/k\varepsilon^2\pi$; вне параболы со стороны $s_1 < 0$ абсолютная величина функции u_2 меньше ε . Совершенно аналогично заключаем, что по другую сторону параболы, в области $s_1 > 0$ функция u_2 отличается от своего постоянного граничного значения 1 меньше, чем на ε .

После этих предварительных соображений применим принцип зеркального отражения. Мы, следовательно, представляем себе вторую падающую волну, источник которой Q' находится в бесконечно удаленной точке *математического листка* зеркально симметрично относительно Q . Соответствующее этой волне решение уравнения (8) изображается функцией $u_2(r, \varphi, -\varphi_0)$. Последнюю

можно написать в виде:

$$u_2(r, \varphi, -\varphi_0) = e^{ikr \cos(\varphi + \varphi_0)} \frac{e^{\frac{i\pi}{4}}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{s_2} e^{-i\tau^2} d\tau, \quad (26)$$

где

$$s_2 = \sqrt{2kr} \cos \frac{\varphi + \varphi_0}{2}. \quad (27)$$

Аналогично тому, как мы поступили выше, разделим на фиг. 126 физический лист на области соответственно знаку s_2 . Это деление определяется неравенствами:

$$\begin{aligned} s_2 > 0 & \text{ при } 0 < \varphi < \pi - \varphi_0, \\ s_2 < 0 & \text{ при } \pi - \varphi_0 < \varphi < 2\pi. \end{aligned} \quad (28)$$

Кривые $s_2 = \text{const}$ представляют собою, очевидно, параболы с осью в OS' , с фокусом в начале координат и параметром $\frac{s_2^2}{k}$.

Если мы здесь также ограничим точность величиной ε , то отсюда следует, как и выше, что существует некоторая определенная параболы P' с осью OS' и параметром $1/k\varepsilon^2\pi$, вне которой функция $u_2(r, \varphi, -\varphi_0)$ по одну сторону ($s_2 < 0$) бесконечно мало отличается от нуля, а по другую ($s_2 > 0$) — от единицы.

Теперь построим по принципу отражения решение дифференциального уравнения (8):

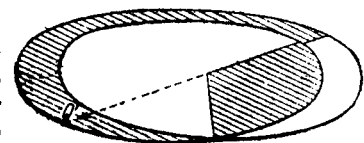
$$\begin{aligned} u(r, \varphi, \varphi_0) &= u_2(r, \varphi, \varphi_0) \mp u_2(r, \varphi, -\varphi_0) = \\ &= e^{ikr \cos(\varphi - \varphi_0)} \frac{e^{\frac{i\pi}{4}}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{s_1} e^{-i\tau^2} d\tau \mp e^{ikr \cos(\varphi + \varphi_0)} \frac{e^{\frac{i\pi}{4}}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{s_2} e^{-i\tau^2} d\tau. \end{aligned} \quad (29)$$

Граничные условия у экрана (9) удовлетворяются, именно — верхний знак соответствует случаю π , а нижний — случаю σ . Это видно из того, что функция $u_2(r, 0, \varphi_0)$ четна относительно φ_0 , а функция $\left(\frac{\partial u_2}{\partial \varphi}\right)_{r, 0, \varphi_0}$ нечетна.

Обе части решения, очевидно, соответствуют наложению волн падающей и отраженной от экрана.

Когда s_1 абсолютно велико, $u_2(r, \varphi, \varphi_0)$ очень мало; точно также $u_2(r, \varphi, -\varphi_0)$ очень мало, когда s_2 принимает абсолютно большие значения.

Рассмотрим прежде всего дифракционное явление, возникающее за экраном (т. е. в нижней половине нашей фиг. 124) при падении волны. Если мы опять зададим определенную точность



Фиг. 126. К дифракционной теории Зоммерфельда.

измерения ϵ , то согласно полученным выше результатам второй член решения, соответствующий отраженной волне, вне параболы P' чрезвычайно мало отличается от 0 или от 1 и, значит, чрезвычайно мал в рассматриваемой нижней половине чертежа. Здесь решение выражается одной первой частью функции $u = u_2(r, \varphi, \varphi_0)$.

Отсюда следует, что интенсивность света как в случае π , так и в случае σ (следовательно, при отсутствии поляризации) выражается в силу (29) и (12) так:

$$|u_2|^2 = \frac{1}{2} \left\{ \left[\frac{1}{2} + U \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} s_1 \right) \right]^2 + \left[\frac{1}{2} + V \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} s_1 \right) \right]^2 \right\}. \quad (30)$$

Но это то же самое решение, которое мы вывели в § 55 (26) по методу Кирхгофа-Френеля; оно отличается от решения § 55 (26) лишь аргументом функций U и V . В нашем случае аргументом является величина:

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{2}{\pi}} s_1 &= 2 \sqrt{\frac{kr}{\pi}} \cos \frac{\varphi - \varphi_0}{2} = \\ &= 2 \sqrt{\frac{2r}{\lambda}} \cos \frac{\varphi - \varphi_0}{2}, \end{aligned} \quad (31)$$

тогда как там аргументом было согласно § 55 (15) (для $R_0 \rightarrow \infty$):

$$w = x \cos \delta \sqrt{\frac{2}{\lambda R}}; \quad (32)$$

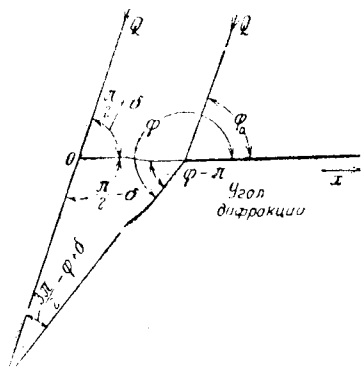
в этом аргументе δ означает то же, что здесь $\varphi_0 - \frac{\pi}{2}$, а x есть расстояние

дифрагирующего края от начала координат, который мы определили как точку пересечения плоскости экрана с нормалью, проходящей через точку наблюдения.

Чтобы сравнить выражения (31) и (32), воспользуемся фиг. 127 на которой нанесены соответствующие величины теорий Френеля и Зоммерфельда. Очевидно,

$$x = r \frac{\sin(\varphi - \varphi_0)}{\sin \varphi_0}$$

$$\frac{1}{R} = \frac{\sin \varphi_0}{r \sin(\varphi - \pi)};$$



Фиг. 127. К дифракционной теории Зоммерфельда.

следовательно

$$w = \sin(\varphi - \varphi_0) \sqrt{\frac{2r \sin \varphi_0}{\lambda \sin(\varphi - \pi)}}$$

или

$$w = 2 \sqrt{\frac{2r}{\lambda}} \cos \frac{\varphi - \varphi_0}{2} F,$$

где

$$F = \sin \frac{\varphi - \varphi_0}{2} \sqrt{\frac{\sin \varphi_0}{\sin(\varphi - \pi)}}.$$

Это множитель, на который отличаются выражения (31) и (32). Чтобы показать поведение F как функции углов φ_0 и φ , начертим его для трех углов $\varphi_0 = 90^\circ$, $\varphi_0 = 60^\circ$ и $\varphi_0 = 30^\circ$ (фиг. 128).

Мы видим, что при $\varphi_0 = 90^\circ$ теории Френеля и Зоммерфельда отличаются очень мало, если наблюдение ограничивается достаточно малой окрестностью (между 80° и 90°) геометрической границы тени, и что при наклонном падении эти отклонения увеличиваются при том же расстоянии от геометрической границы (даже при $\varphi_0 = 30^\circ$ и $\varphi - \varphi_0 - \pi = 10^\circ$ эти отклонения не превышают 1,2).

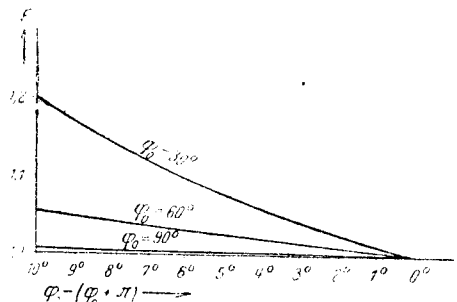
Область, для которой справедливо решение (30), распространяется, разумеется, как на переднее, так и на заднее полупространство. Ее границы определяются параболой P' , охватывающей направление отраженной границы тени.

В указанном пространстве, таким образом, будет то же распределение света, которое мы уже выясняли на спирали Корню. На передней же части экрана оказывается нечто такое, чего старая теория, конечно, не могла предусмотреть (так как она не имела дела с отражающими экранами). Здесь возникает интерференция падающей и отраженной от экрана волны. Это явление несущественно для дифракционной теории. Мы имеем вне параболы P' в области $s_2 > 0$:

$$u = e^{ikr \cos(\varphi - \varphi_0)} \mp e^{ikr \cos(\varphi + \varphi_0)}. \quad (33)$$

Напротив, в параболообразной области, окружающей границу тени отраженной волны OS' , мы должны пользоваться строгими формулами (29).

Можно, однако, построить более обширную область, в которой решение можно представить в более простом виде, чем строгие формулы (29), причем обнаруживается новый физический смысл явления.



Фиг. 128. Разница в дифракционных теориях Френеля и Зоммерфельда.

С помощью вышеуказанных вычислений мы можем построить две новые параболы p, p' с осями OS и соответственно OS' (фиг. 129); эти параболы охватывают оси гораздо теснее, чем параболы P, P' , и обладают тем свойством, что вне определяемой ими области интеграл v приближенно выражается первым членом разложения по s^{-1} :

$$\int_{-\infty}^s e^{-i\tau^2} d\tau = \begin{cases} -\frac{e^{-is^2}}{2is} & \text{при } s < 0, \\ -\frac{e^{-is^2}}{2is} + e^{-\frac{i\pi}{4}} \sqrt{\pi} & \text{при } s > 0. \end{cases} \quad (34)$$

Погрешность вычисляется по формулам (21), (23):

$$|R| \leq \frac{1}{2|s|^3}. \quad (35)$$

Следовательно, если погрешность приближения, равная согласно (19) $\frac{1}{\sqrt{\pi}} R$, меньше ε , то должно быть $|R| < \varepsilon \sqrt{\pi}$, причем

$$|s| \leq \sqrt[3]{\frac{1}{2\varepsilon \sqrt{\pi}}}. \quad (36)$$

Предельные параболы p, p' приближения (34) могут быть, следовательно, выбраны так, чтобы их параметры имели значение $\frac{1}{k} (2\varepsilon)^{\frac{2}{3}} \pi^{\frac{1}{3}}$, которое при малом ε гораздо меньше приведенного на стр. 287 значения параметра P, P' .

Вне этой узкой области мы можем воспользоваться формулами (34). Подставив их в общие формулы (11), мы получим для $s_{1,2} < 0$:

$$u_2(r, \varphi, \pm \varphi_0) = -\frac{1}{4\pi} \sqrt{\frac{\lambda}{r}} \cos\left(kr + \frac{\pi}{4}\right) \frac{1}{\cos \frac{\varphi \mp \varphi_0}{2}} \quad (37)$$

и для $s_{1,2} > 0$:

$$\begin{aligned} u_2(r, \varphi, \pm \varphi_0) &= \\ &= \cos[kr \cos(\varphi \mp \varphi_0)] - \frac{1}{4\pi} \sqrt{\frac{\lambda}{r}} \cos\left(kr + \frac{\pi}{4}\right) \frac{1}{\cos \frac{\varphi \mp \varphi_0}{2}} \end{aligned} \quad (38)$$

Введем еще функцию:

$$Z = \frac{1}{4\pi} \sqrt{\frac{\lambda}{r}} \cos\left(kr + \frac{\pi}{4}\right) \left(\pm \frac{1}{\cos \frac{\varphi + \varphi_0}{2}} - \frac{1}{\cos \frac{\varphi - \varphi_0}{2}} \right). \quad (39)$$

Теперь плоскость разделена в зависимости от знака s_1 и s_2 на такие части (фиг. 129):

I. $s_1 < 0, s_2 < 0$, область геометрической тени. Здесь

$$u_{\pi, \sigma} = Z. \quad (40)$$

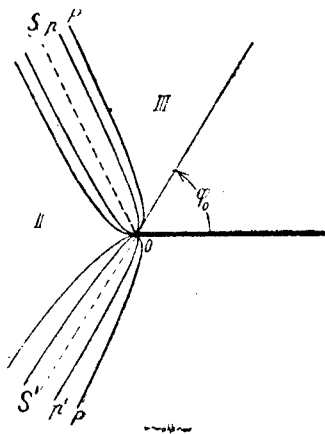
II. $s_1 > 0, s_2 < 0$, незатененная область:

$$u_{\pi, \sigma} = \cos[kr \cos(\varphi - \varphi_0)] + Z. \quad (41)$$

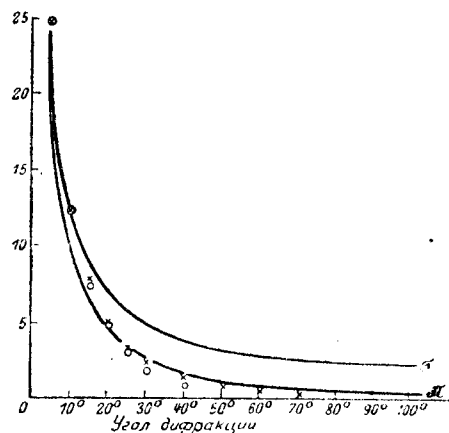
III. $s_1 > 0, s_2 > 0$, область отражения:

$$u_{\pi, \sigma} = \cos[kr \cos(\varphi - \varphi_0)] \mp \cos[kr \cos(\varphi + \varphi_0)] + Z. \quad (42)$$

Это разделение можно пояснить следующим образом: световое возмущение состоит из волны падающей, отраженной и дифрагированной волны Z , амплитуда которой пропорциональна $r^{-\frac{1}{2}}$, а интенсивность, следовательно, пропорциональна r^{-1} и которая, таким образом, является типичной цилиндрической волной. Хотя край экрана не является действительным источником света, но аккомодированному на него глазу должно показаться, что он светится. Уже Юнг выдвинул утверждение, что



Фиг. 129. К дифракционной теории Зоммерфельда.



Фиг. 130. Падение интенсивности дифрагированного света в геометрической тени полуплоскости.

дифракционные явления у края представляют собой наложение падающей и отраженной волны с цилиндрической дифракционной волной. Теории Кирхгофа-Френеля также можно придать форму, которая выражает этот взгляд. Наблюдения также подтверждают это. Впервые это явление наблюдали Гуи¹ и Вин² в области геометрической тени, куда не проникает падающая волна.

¹ A. Guoy, C. R. Acad. Sc., Paris, т. 96 (1883), стр. 697, т. 98 (1884), стр. 1573, т. 100 (1885), стр. 977. Ann. Chim. Physique, т. 8 (1886), стр. 145.

² W. Wien, Berl. Ber. 1885, стр. 817; Wied. Ann., т. 28 (1886), стр. 117.

Свет, проникающий в область тени, поляризован, так как составляющие π и σ ведут себя неодинаково [см. (39)]. Для отношения амплитуд найдем:

$$\frac{Z_{\pi}}{Z_{\sigma}} = -\operatorname{tg} \frac{\psi}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\varphi_0}{2}. \quad (43)$$

Сравнение этих формул с наблюдением (выполненное для отвесного падения $\operatorname{tg} \varphi_0/2 = 1$) в общем дало хорошее совпадение, хотя наблюдаемые значения с увеличением угла дифракции уменьшаются несколько быстрее, чем вычисленные (фиг. 130). Это объясняется, несомненно, слишком большой идеализацией, допущенной нами. Так например, действительные экраны обладают конечной толщиной и конечной проводимостью.

Глава пятая

КРИСТАЛЛООПТИКА

§ 58. ЭЛЕКТРОМАГНИТНАЯ ТЕОРИЯ СВЕТА ДЛЯ СЛУЧАЯ АНИЗОТРОПНЫХ ТЕЛ

Основания нашей оптической теории заключались в двух совершенно различных положениях: во-первых, в уравнениях Максвелла в главе I, § 1, (1a, b) и затем в материальных уравнениях, которые для изотропных тел давались формулами главы I, § 1 (7a, b, c). Мы подчеркивали уже тогда, что для анизотропных тел (кристаллов) эти материальные уравнения должны быть заменены более общими. В этой главе мы сохраняем предположение, что вещества являются непроводящими ($\sigma = 0$) и немагнитными ($\mu = 1$). Напротив, мы примем, что рассматриваемые тела являются *диэлектрически анизотропными*, т. е. что в смысле диэлектрической возбудимости они ведут себя различно при различных направлениях напряжения поля. Поэтому в общем случае вектор \mathfrak{D} образует отличный от нуля угол с вектором \mathfrak{E} . Математически мы обобщаем уравнения главы I, § 1 (7b), полагая

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{D}_x &= \epsilon_{xx} \mathfrak{E}_x + \epsilon_{xy} \mathfrak{E}_y + \epsilon_{xz} \mathfrak{E}_z, \\ \mathfrak{D}_y &= \epsilon_{yx} \mathfrak{E}_x + \epsilon_{yy} \mathfrak{E}_y + \epsilon_{yz} \mathfrak{E}_z, \\ \mathfrak{D}_z &= \epsilon_{zx} \mathfrak{E}_x + \epsilon_{zy} \mathfrak{E}_y + \epsilon_{zz} \mathfrak{E}_z. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Иначе говоря, мы рассматриваем \mathfrak{D} как „произведение“ тензора второго ранга ϵ на вектор \mathfrak{E} , причем составляющими ϵ являются материальные константы. Очевидно, что это наиболее простое и отвечающее анизотропии обобщение. ϵ называют *тензором оптической диэлектрической постоянной* или, короче, *диэлектрическим тензором*.

Вместо уравнения (1) мы будем употреблять (избегая специфической символики тензорного исчисления) следующий способ написания:

$$\mathfrak{D}_x = \sum_y \epsilon_{xy} \mathfrak{E}_y. \quad (2)$$

Здесь координатные значки x, y, z используются не только для обозначения *определенных* направлений осей, — но также пробегают все три направления осей. Применение этого исчисления, весьма сходного с исчислением, употребляющимся в теории относительности, само собою предполагается известным.

Предположим, далее, что данные ранее выражения для электрической и магнитной плотностей энергии [глава I, § 2 (2) и (3)] остаются справедливыми также и здесь. Мы будем иметь, таким образом:

$$\left. \begin{aligned} T &= \frac{1}{8\pi} \mathfrak{H}^2, \\ U &= \frac{1}{8\pi} \mathfrak{E} \mathfrak{D} = \frac{1}{8\pi} \sum_{x,y} \mathfrak{E}_x \epsilon_{xy} \mathfrak{E}_y. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Мы сохраним определение I, § 2 (7) вектора излучения:

$$\mathfrak{S} = \frac{c}{4\pi} \mathfrak{E} \times \mathfrak{H} \quad (4)$$

и исследуем, выводится ли закон сохранения энергии тем же способом, что и ранее, или нет. Из уравнений Максвелла получаем скалярным умножением первого на \mathfrak{E} , а второго на \mathfrak{H} , как в главе I, § 2 (8) с помощью формулы глава I, § 2 (9):

$$-c \operatorname{div} (\mathfrak{E} \times \mathfrak{H}) = \mathfrak{E} \dot{\mathfrak{D}} + \mathfrak{H} \dot{\mathfrak{H}} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \mathfrak{H}^2 + \sum_{x,y} \mathfrak{E}_x \epsilon_{xy} \mathfrak{E}_{xy}. \quad (5)$$

Здесь первый член правой части представляет изменение со временем величины $4\pi T$, второй, напротив, не является просто производной от $4\pi U$. Мы можем теперь легко установить достаточные и необходимые условия для того, чтобы закон сохранения энергии оставался справедливым в своей старой форме. Для этого просто должно быть:

$$\sum_{x,y} \mathfrak{E}_x \epsilon_{xy} \dot{\mathfrak{E}}_y = 4\pi \frac{dU}{dt} = \frac{1}{2} \sum_{x,y} (\dot{\mathfrak{E}}_x \mathfrak{E}_y + \mathfrak{E}_x \dot{\mathfrak{E}}_y) \epsilon_{xy}. \quad (6)$$

Отсюда следует

$$\sum_{x,y} \epsilon_{xy} (\mathfrak{E}_x \dot{\mathfrak{E}}_y - \mathfrak{E}_y \dot{\mathfrak{E}}_x) = 0.$$

Переставляя во втором члене индексы суммирования x и y , видим, что наше уравнение (6) эквивалентно следующему:

$$\sum_{x,y} (\epsilon_{xy} - \epsilon_{yx}) \mathfrak{E}_x \dot{\mathfrak{E}}_y = 0,$$

и если это справедливо при любых полях, то должно быть:

$$\epsilon_{xy} = \epsilon_{yx}. \quad (7)$$

Диэлектрический тензор, следовательно, симметричен, и девять его составляющих сводятся к шести. Обратно, уравнение (7)

очевидно, является также достаточным для того, чтобы имело место (6), и мы имеем закон сохранения энергии в дифференциальной форме:

$$-\operatorname{div} \mathfrak{S} = \frac{dW}{dt}, \quad W = T + U. \quad (8)$$

Благодаря симметрии тензора ϵ , электростатическую энергию U можно привести к нормальной форме, в которую входят только квадраты, но не произведения полей. Рассмотрим в x, y, z пространстве поверхность второго порядка:

$$\sum_{x,y} \epsilon_{xy} xy = \text{const}. \quad (9)$$

Это должен быть эллипсоид; если теперь подставить вместо x, y, z составляющие напряжения поля $\mathfrak{E}_x, \mathfrak{E}_y, \mathfrak{E}_z$, то левая часть примет значение $\mathfrak{E} \mathfrak{D} = 8\pi U$, и так как энергия по самому своему смыслу положительна для всякой системы полей, то в (9) идет речь о положительно определенной форме. Эллипсоид (9) всегда может быть преобразован к главным осям; таким образом всегда существует определенная система координат с фиксированным относительно вещества кристалла положением; в этой системе координат уравнение эллипсоида имеет вид:

$$\sum_x \epsilon_x x^2 = \epsilon_x x^2 + \epsilon_y y^2 + \epsilon_z z^2 = \text{const}. \quad (10)$$

В этой диэлектрической системе главных осей мы имеем для энергии и материальных уравнений формулы:

$$\left. \begin{aligned} U &= \frac{1}{8\pi} \sum_x \epsilon_x \mathfrak{E}_x^2 = \frac{1}{8\pi} (\epsilon_x \mathfrak{E}_x^2 + \epsilon_y \mathfrak{E}_y^2 + \epsilon_z \mathfrak{E}_z^2) = \\ &= \frac{1}{8\pi} \left(\frac{\mathfrak{D}_x^2}{\epsilon_x} + \frac{\mathfrak{D}_y^2}{\epsilon_y} + \frac{\mathfrak{D}_z^2}{\epsilon_z} \right), \\ \mathfrak{D}_x &= \epsilon_x \mathfrak{E}_x, \quad \mathfrak{D}_y = \epsilon_y \mathfrak{E}_y, \quad \mathfrak{D}_z = \epsilon_z \mathfrak{E}_z. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Величины $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$ называются главными диэлектрическими постоянными.

Из формул (11) непосредственно видно, что векторы \mathfrak{D} и \mathfrak{E} имеют различные направления, за исключением случая, когда эллипсоид вырождается в шар ($\epsilon_x = \epsilon_y = \epsilon_z = \epsilon$).

Мы хотим здесь сейчас же сделать замечание о границах применимости введенных допущений. Уже в случае изотропных тел мы обращали внимание на то (см. главу I, § 5), что диэлектрическая постоянная ϵ в действительности вовсе не является материальной постоянной, но зависит от частоты (дисперсия). Точно так же в случае анизотропных тел шесть величин ϵ_{xy} представляют собой функции частоты света; следствием этого является то обстоятельство, что не только главные диэлектрические постоянные $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$, но также и направления главных

диэлектрических осей изменяются с частотой. В этом случае говорят о *дисперсии осей*. Это явление, правда, ограничивается такими кристаллическими системами, при которых ни один ортогональный крест осей вследствие симметрии не выделяется с самого начала, т. е. моноклинной и триклинной системами. Дисперсия осей особенно заметна в инфракрасной части спектра¹.

Мы можем, однако, сначала не принимать во внимание этого явления, если будем рассматривать монохроматические волны. Для фиксированной частоты диэлектрические постоянные зависят только от вещества.

Исследуем поэтому прежде всего на основании уравнений Максвелла с видоизмененными материальными уравнениями, как плоская волна распространяется в анизотропном теле (аналогично тому, как мы это делали в главе I, § 3 для изотропных тел). В случае монохроматической плоской волны все три вектора \mathcal{E} , \mathcal{D} , \mathcal{H} пропорциональны $e^{i\omega(t - \frac{n}{c}\mathbf{s}\cdot\mathbf{r})}$, где $\omega = 2\pi\nu$ есть циклическая частота, \mathbf{s} — единичный вектор в направлении нормали к волне и n — показатель преломления; при этом заметим сразу, что наряду с *фазовой скоростью* или *скоростью по нормали*

волны $\frac{c}{n}$ будет позже рассмотрена другая скорость, *скорость по лучу*, или *скорость энергии*, потому что в анизотропном теле направление распространения энергии уже больше не является параллельным волновой нормали \mathbf{s} .

Оператор $\frac{d}{dt}$ соответствует теперь умножению на $i\omega$, оператор $\frac{\partial}{\partial x}$ — умножению на $-i\omega \frac{n}{c} \mathbf{s}_x$. Поэтому, например, будет:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathcal{D}} &= i\omega \mathcal{D}, \\ \text{rot } \mathcal{E} &= i\omega \frac{n}{c} \mathcal{E} \times \mathbf{s}. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Из уравнений Максвелла тогда следует:

$$\left. \begin{aligned} n \cdot \mathcal{H} \times \mathbf{s} &= \mathcal{D}, \\ n \cdot \mathcal{E} \times \mathbf{s} &= -\mathcal{H}. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Исключая \mathcal{H} , получаем отсюда:

$$\mathcal{D} = -n^2 (\mathcal{E} \times \mathbf{s}) \times \mathbf{s} = n^2 [\mathcal{E} - \mathbf{s}(\mathcal{E}\mathbf{s})]. \quad (14)$$

Из формул (13) и (14) видно, что \mathcal{H} перпендикулярно к векторам \mathcal{D} , \mathcal{E} , \mathbf{s} , которые, следовательно, компланарны. Кроме того,

¹ См. Th. Liebisch u. H. Rubens, Sitzungsber. preuss. Akad. Wiss., Physik.-Math. Kl., 1919, стр. 198, 876; H. Rubens, то же, стр. 976 и далее.

\mathcal{D} перпендикулярно к \mathbf{s} ; из двух электрических векторов теперь, таким образом, „трансверсален“ \mathcal{D} , а не \mathcal{E} , как ранее. Фиг. 131 показывает расположение всех векторов. Кроме того, еще введен вектор \mathcal{S} , расположенный перпендикулярно к \mathcal{E} . Угол между \mathcal{E} и \mathcal{D} или между \mathcal{S} и \mathbf{s} обозначен через α . Можно также сказать: *три вектора \mathcal{D} , \mathcal{H} , \mathbf{s} и три вектора \mathcal{E} , \mathcal{H} , \mathcal{S} образуют две правых системы с общим вектором \mathcal{H} и притом повернутых вокруг последнего одна относительно другой на угол α* . Уравнение (14) является обобщением уравнения $\mathcal{D} = n^2 \mathcal{E}$, имевшего место ранее для изотропных тел, в которое оно переходит при $\mathcal{E}\mathbf{s} = 0$.

Чертеж поясняет таким образом следующие важные вещи: \mathcal{E} и \mathcal{D} образуют угол α , причем \mathcal{D} трансверсально; направление переноса энергии \mathcal{S} отличается от направления волновой нормали \mathbf{s} и притом на тот же угол α .

Однако и для кристаллов остается в силе то положение, что электрические и магнитные колебания обладают одинаковой энергией. Именно, согласно (3) и (14) или (13) имеем:

$$U = \frac{1}{8\pi} \mathcal{E}\mathcal{D} = \frac{n^2}{8\pi} [\mathcal{E}^2 - (\mathcal{E}\mathbf{s})^2] \quad (15)$$

и

$$T = \frac{1}{8\pi} \mathcal{H}^2 = \frac{n^2}{8\pi} (\mathcal{E} \times \mathbf{s})^2 = \frac{n^2}{8\pi} [\mathcal{E}^2 - (\mathcal{E}\mathbf{s})^2]. \quad (16)$$

Общая плотность энергии, следовательно, равна:

$$W = U + T = 2U = 2T = \frac{n^2}{4\pi} [\mathcal{E}^2 - (\mathcal{E}\mathbf{s})^2]. \quad (17)$$

Покажем теперь, что заданием векторов \mathcal{D} и \mathcal{E} (а при использовании материальных уравнений (1) одного из них) определяется как показатель преломления n , так и направление нормали \mathbf{s} . В самом деле, из (14) вытекает соотношение:

$$\mathcal{D}^2 = n^4 [\mathcal{E}^2 - (\mathcal{E}\mathbf{s})^2] = 4\pi n^2 W. \quad (18)$$

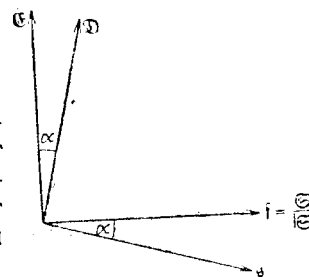
Таким образом

$$n^2 = \frac{\mathcal{D}^2}{4\pi W} = \frac{\mathcal{D}^2}{\mathcal{E}\mathcal{D}}. \quad (19)$$

Из (14), (18) и (19) следует:

$$\mathbf{s} = \frac{\mathcal{E} - \frac{\mathcal{D}}{n^2}}{\mathcal{E}\mathbf{s}} = \frac{\mathcal{E} - \frac{\mathcal{D}}{n^2}}{\sqrt{\mathcal{E}^2 - \frac{\mathcal{D}^2}{n^4}}} = \frac{\mathcal{E}\mathcal{D} - \mathcal{D}(\mathcal{E}\mathcal{D})}{\sqrt{\mathcal{D}^2[\mathcal{E}^2\mathcal{D}^2 - (\mathcal{E}\mathcal{D})^2]}}; \quad (20)$$

формулы (19) и (20) и доказывают наше утверждение.



Фиг. 131. Расположение волновой нормали и луча электрического смещения и напряжения поля.

Вычислим теперь вектор излучения как функцию \mathfrak{E} и \mathfrak{s} ; будем иметь:

$$\mathfrak{S} = \frac{c}{4\pi} \mathfrak{E} \times \mathfrak{s} = -\frac{cn}{4\pi} \mathfrak{E} \times (\mathfrak{E} \times \mathfrak{s}) = \frac{cn}{4\pi} [\mathfrak{s} \mathfrak{E}^2 - \mathfrak{E}(\mathfrak{E}\mathfrak{s})]. \quad (21)$$

Отсюда следует:

$$\mathfrak{E}^2 = \frac{c^2 n^2}{(4\pi)^2} \mathfrak{E}^2 [\mathfrak{E}^2 - (\mathfrak{E}\mathfrak{s})^2] = \frac{c^2}{4\pi} \mathfrak{E}^2 W \quad (22)$$

и

$$\mathfrak{E}\mathfrak{s} = |\mathfrak{S}| \cos \alpha = \frac{cn}{4\pi} [\mathfrak{E}^2 - (\mathfrak{E}\mathfrak{s})^2] = \frac{c}{n} W. \quad (23)$$

Окончательно

$$\mathfrak{E}\mathfrak{D} = -nc\mathfrak{E}\mathfrak{s} W. \quad (24)$$

Мы уже упоминали, что в кристалле существует резкое различие между скоростью волнового фронта и скоростью переноса энергии. Первая, скорость по нормали, дается выражением:

$$c_n = \frac{c}{n}, \quad (25)$$

вторая, названная нами *скорость по лучу* c_s , так как она имеет направление \mathfrak{S} , определяется следующим образом: на основании закона сохранения энергии (8) $|\mathfrak{S}|$ представляет количество энергии, проходящее в единицу времени через элемент поверхности, перпендикулярный к \mathfrak{S} и равный единице. Вообразим цилиндр высоты c_s , построенный на этом элементе поверхности и заполненный энергией с плотностью W ; вся находящаяся в цилиндре энергия $c_s W$ как раз пройдет за единицу времени через поверхность основания. Поэтому мы будем иметь:

$$|\mathfrak{S}| = c_s W.$$

Наши формулы (23) и (25) дадут тогда:

$$c_s = \frac{|\mathfrak{S}|}{W} = \frac{c}{n \cos \alpha} = \frac{c_n}{\cos \alpha}. \quad (26)$$

Скорость по нормали равна проекции скорости по лучу на волновую нормаль:

$$c_n = c_s \cos \alpha. \quad (27)$$

В заключение отметим еще вытекающее из (22) и (26) следующее уравнение:

$$c_s^2 = \frac{\mathfrak{E}^2}{W^2} = \frac{c^2}{4\pi} \frac{\mathfrak{E}^2}{W}. \quad (28)$$

Если мы теперь определим аналогично показателю преломления n *показатель луча* s из следующего соотношения:

$$c_s = \frac{c}{s}, \quad (29)$$

то будем иметь:

$$s = n \cos \alpha \quad (30)$$

и получаем, кроме того:

$$s^2 = \left(\frac{c}{c_s} \right)^2 = \frac{4\pi W}{\mathfrak{E}^2} = \frac{\mathfrak{E}\mathfrak{D}}{\mathfrak{E}^2}. \quad (31)$$

Формула (31) аналогична (19) и показывает, что показатель луча также известен, если задано \mathfrak{D} (или \mathfrak{E}). То же справедливо и при задании вектора излучения \mathfrak{S} . Подставляя выражения для \mathfrak{s} и n из (20) и (19) в (21), получаем:

$$\mathfrak{S} = \frac{c}{4\pi} \sqrt{\mathfrak{E}\mathfrak{D}} \frac{\mathfrak{E}(\mathfrak{E}\mathfrak{D}) - \mathfrak{D}\mathfrak{E}^2}{\sqrt{\mathfrak{E}^2 \mathfrak{D}^2 - (\mathfrak{E}\mathfrak{D})^2}}. \quad (32)$$

Симметрия формул для направления нормали и направления луча выявляется лучше, если ввести единичный вектор в направлении луча:

$$\mathfrak{f} = \frac{\mathfrak{S}}{|\mathfrak{S}|}. \quad (33)$$

Согласно (22) имеем:

$$|\mathfrak{S}| = \frac{c}{4\pi} \sqrt{(\mathfrak{E}\mathfrak{D}) \mathfrak{E}^2} \quad (34)$$

и отсюда по (32)

$$-\mathfrak{f} = \frac{\mathfrak{D}\mathfrak{E}^2 - \mathfrak{E}(\mathfrak{E}\mathfrak{D})}{\sqrt{\mathfrak{E}^2 \mathfrak{D}^2 - (\mathfrak{E}\mathfrak{D})^2}}. \quad (35)$$

Формула (35) вытекает, с точностью до знака, из формулы (20) для \mathfrak{s} при помощи перестановки \mathfrak{E} и \mathfrak{D} . Из (32) и (23) следует еще, как показывает также фиг. 131, формула:

$$\mathfrak{f}\mathfrak{s} = \cos \alpha = \frac{c_n}{c_s}. \quad (36)$$

§ 59. ФОРМУЛЫ ФРЕНЕЛЯ ДЛЯ РАСПРОСТРАНЕНИЯ СВЕТА В КРИСТАЛЛАХ

Соотношения, выведенные в предыдущем параграфе из (14), следуют только из уравнений Максвелла, без использования материальных уравнений. Наша ближайшая задача состоит теперь в том, чтобы объединить последние, т. е. уравнения (1) или (11) § 58, с формулой (14). Если положить оба значения \mathfrak{D} равными друг другу, то получится три линейных однородных уравнения для трех составляющих \mathfrak{E} (или \mathfrak{D}); они, вообще говоря, неразрешимы, за исключением того случая, когда их детерминант обращается в нуль. Это условие дает алгебраическое уравнение

для квадрата показателя преломления, и при этом не третьей, а второй степени, потому что его постоянный член равен нулю. (Это обуславливается тем, что вектор \mathfrak{D} трансверсален, следовательно, $\mathfrak{z}\mathfrak{D}=0$). Можно теперь прямо вывести это квадратное уравнение следующим образом.

Воспользуемся системой главных осей и подставим в § 58

$$(14) \quad \mathfrak{E}_x = \frac{\mathfrak{D}_x}{\varepsilon_x}, \quad \mathfrak{E}_y = \frac{\mathfrak{D}_y}{\varepsilon_y}, \quad \mathfrak{E}_z = \frac{\mathfrak{D}_z}{\varepsilon_z}.$$

Тогда будет:

$$\mathfrak{D}_x = n^2 \left[\frac{\mathfrak{D}_x}{\varepsilon_x} - \mathfrak{z}_x (\mathfrak{E}\mathfrak{s}) \right] \quad (1)$$

или

$$\mathfrak{D}_x \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{\varepsilon_x} \right) = -\mathfrak{z}_x (\mathfrak{E}\mathfrak{s}). \quad (2)$$

Разделим это уравнение на $\frac{1}{n^2} - \frac{1}{\varepsilon_x}$ и затем умножим на \mathfrak{z}_x ; к результату прибавим соответствующие соотношения для других координатных направлений; тогда левая часть даст $\mathfrak{D}\mathfrak{s}=0$; мы, следовательно, получим:

$$\frac{\mathfrak{z}_x^2}{\frac{1}{n^2} - \frac{1}{\varepsilon_x}} + \frac{\mathfrak{z}_y^2}{\frac{1}{n^2} - \frac{1}{\varepsilon_y}} + \frac{\mathfrak{z}_z^2}{\frac{1}{n^2} - \frac{1}{\varepsilon_z}} = 0. \quad (3)$$

Принято определять так называемые *главные скорости*¹ соотношениями:

$$c_x = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_x}}, \quad c_y = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_y}}, \quad c_z = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_z}}. \quad (4)$$

После этого мы можем, используя определения § 58 (25) для нормальной скорости, записать наше уравнение (3) так:

$$\frac{\mathfrak{z}_x^2}{c_n^2 - c_x^2} + \frac{\mathfrak{z}_y^2}{c_n^2 - c_y^2} + \frac{\mathfrak{z}_z^2}{c_n^2 - c_z^2} = 0. \quad (5)$$

(3) и (5) являются двумя различными формами так называемого *уравнения нормалей Френеля*. Оно является уравнением, квадратичным относительно c_n^2 ; это значит, что для каждого заданного направления $\mathfrak{s}(\mathfrak{z}_x, \mathfrak{z}_y, \mathfrak{z}_z)$ существует две скорости по нормали c_n (отрицательные решения, разумеется, не имеют никакого физического смысла). Содержащиеся в этой формуле результаты геометрического характера мы детально исследуем позже (§ 60). Прежде же укажем, что совершенно аналогичную формулу можно вывести для скорости по лучу.

¹ Нужно обратить особенное внимание на то, что эти главные скорости c_x, c_y, c_z не являются составляющими вектора.

Из § 58 (14) следует в результате скалярного умножения на вследствие того, что $\mathfrak{E}\mathfrak{i}=0$ и $\mathfrak{f}\mathfrak{s}=\cos\alpha$:

$$\mathfrak{D}\mathfrak{i} = -n^2 (\mathfrak{E}\mathfrak{s}) \cos\alpha. \quad (6)$$

Между компланарными векторами \mathfrak{E} , \mathfrak{D} и \mathfrak{i} должно иметь место линейное соотношение. Соответственно этому мы положим:

$$\mathfrak{i} = a\mathfrak{D} + b\mathfrak{E} \quad (7)$$

и отсюда получаем путем скалярного умножения на \mathfrak{i} и \mathfrak{s} :

$$a\mathfrak{D}\mathfrak{i} = 1, \quad b\mathfrak{E}\mathfrak{s} = \mathfrak{f}\mathfrak{s} = \cos\alpha. \quad (8)$$

Если разрешим (7) относительно \mathfrak{E} , то, используя (8), получим:

$$\mathfrak{E} = \frac{1}{b} (\mathfrak{i} - a\mathfrak{D}) = \frac{\mathfrak{E}\mathfrak{s}}{\cos\alpha} \left(\mathfrak{i} - \frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{D}\mathfrak{i}} \right). \quad (9)$$

Исключая $\mathfrak{E}\mathfrak{s}$ при помощи (6) и вводя показатель луча $s = n \cos\alpha$ [см. § 58 (30)], получаем:

$$\mathfrak{E} = \frac{1}{s^2} [\mathfrak{D} - \mathfrak{i}(\mathfrak{D}\mathfrak{i})]. \quad (10)$$

Уравнение (10) является совершенным аналогом уравнения (14) § 58 и получается из него перестановкой \mathfrak{E} с \mathfrak{D} и заменой n на $\frac{1}{s}$ и \mathfrak{s} на $-\mathfrak{i}$ (естественно, также $-\mathfrak{z}$ на \mathfrak{i}). Вообще справедливо следующее правило:

Если оба ряда величин написать один под другим:

$$\left. \begin{array}{cccccccccccccccc} \mathfrak{E}, & \mathfrak{D}, & \mathfrak{s}, & \mathfrak{i}, & c_n, & n, & \varepsilon_x, & \varepsilon_y, & \varepsilon_z, & c_x, & c_y, & c_z, & c; \\ \mathfrak{D}, & \mathfrak{E}, & -\mathfrak{i}, & -\mathfrak{s}, & \frac{1}{c_s}, & \frac{1}{s}, & \frac{1}{\varepsilon_x}, & \frac{1}{\varepsilon_y}, & \frac{1}{\varepsilon_z}, & \frac{1}{c_x}, & \frac{1}{c_y}, & \frac{1}{c_z}, & \frac{1}{c} \end{array} \right\} \quad (11)$$

то из уравнения, правильного для величин одного ряда, получится правильное уравнение перестановкой каждой величины с соответствующей из другого ряда.

Мы применим это правило, чтобы получить уравнение лучей, аналогичное уравнению нормалей Френеля. Мы хотим всюду вести расчет со скоростями и поэтому напомним (2) в следующей форме:

$$\mathfrak{D}_x = -\frac{c^2 \mathfrak{z}_x (\mathfrak{E}\mathfrak{s})}{c_n^2 - c_x^2}. \quad (12)$$

При помощи перестановки (11) это уравнение переходит в

$$\mathfrak{E}_x = -\frac{1}{c^2} \frac{\mathfrak{i}_x (\mathfrak{D}\mathfrak{i})}{\frac{1}{c_s^2} - \frac{1}{c_x^2}}. \quad (13)$$

Отсюда в силу равенства $\mathfrak{E} = 0$, точно так же, как выше, получается уравнение лучей:

$$\frac{\frac{f_x^2}{1} \frac{1}{c_s^2 - c_x^2} + \frac{f_y^2}{1} \frac{1}{c_s^2 - c_y^2} + \frac{f_z^2}{1} \frac{1}{c_s^2 - c_z^2}}{c_s^2 - c_x^2} = 0, \quad (14)$$

или также

$$\frac{f_x^2}{s^2 - \varepsilon_x} + \frac{f_y^2}{s^2 - \varepsilon_y} + \frac{f_z^2}{s^2 - \varepsilon_z} = 0. \quad (15)$$

Как и уравнение нормалей (3) или (5), оно является квадратичным относительно c_s^2 (или s^2). Если для данного направления излучения f найден один из его корней, то из (13) получается вектор колебаний \mathfrak{E} .

Обычно при данном эксперименте всегда оказывается известным только один из двух векторов \mathfrak{s} или f . Поэтому бывает необходимо уметь вычислять один из другого; после этого \mathfrak{D} и \mathfrak{E} находят из (12) и (13).

Чтобы получить зависимость между f и \mathfrak{s} , умножим (13) на $\varepsilon_x = \frac{c^2}{c_x^2}$; получим:

$$\mathfrak{D}_x = -\frac{f_x (\mathfrak{D}) c_s^2}{c_x^2 - c_s^2}. \quad (16)$$

Если мы сравним это выражение для \mathfrak{D} с тем, которое дается (12), и примем во внимание формулы (6) § 59 и (27) § 58, согласно которым можно положить

$$\mathfrak{D} f = -\frac{c^2}{c_n^2} (\mathfrak{E} \mathfrak{s}) \cos \alpha = -\frac{c^2}{c_n c_s} \mathfrak{E} \mathfrak{s}, \quad (17)$$

то будет:

$$\frac{\mathfrak{s}_x c_n}{c_n^2 - c_x^2} = \frac{f_x c_s}{c_s^2 - c_x^2}. \quad (18)$$

Отсюда [умножая скалярно на \mathfrak{s} и принимая во внимание (5)] мы получаем формулу, которой нам придется пользоваться позже:

$$\frac{f_x \mathfrak{s}_x}{c_s^2 - c_x^2} + \frac{f_y \mathfrak{s}_y}{c_s^2 - c_y^2} + \frac{f_z \mathfrak{s}_z}{c_s^2 - c_z^2} = 0. \quad (19)$$

Разрешая уравнение (18) относительно f , мы получим:

$$f_x = \frac{c_n}{c_s} \mathfrak{s}_x \frac{c_s^2 - c_x^2}{c_n^2 - c_x^2} = \frac{c_n}{c_s} \mathfrak{s}_x \left(1 + \frac{c_s^2 - c_n^2}{c_n^2 - c_x^2} \right) \quad (20)$$

или

$$c_s f_x - c_n \mathfrak{s}_x = c_n \mathfrak{s}_x \frac{c_s^2 - c_n^2}{c_n^2 - c_x^2}. \quad (21)$$

Возводя три уравнения (21) в квадрат, складывая и принимая во внимание (36) § 58, получаем:

$$c_s^2 - c_n^2 = c_n^2 (c_s^2 - c_n^2)^2 \left[\left(\frac{\mathfrak{s}_x}{c_n^2 - c_x^2} \right)^2 + \left(\frac{\mathfrak{s}_y}{c_n^2 - c_y^2} \right)^2 + \left(\frac{\mathfrak{s}_z}{c_n^2 - c_z^2} \right)^2 \right].$$

Таким образом

$$g^2 = c_n^2 (c_s^2 - c_n^2) = \frac{1}{\left(\frac{\mathfrak{s}_x}{c_n^2 - c_x^2} \right)^2 + \left(\frac{\mathfrak{s}_y}{c_n^2 - c_y^2} \right)^2 + \left(\frac{\mathfrak{s}_z}{c_n^2 - c_z^2} \right)^2}. \quad (22)$$

Отсюда g (или также c_s) можно выразить через \mathfrak{s} , так как c_n в силу уравнения нормалей (5) уже известно как функция \mathfrak{s} . Этим самым мы получаем также f как функцию \mathfrak{s} ; притом, используя обозначение g , мы можем выражение (20) записать еще так:

$$f_x = \frac{\mathfrak{s}_x}{c_n c_s} \left(c_n^2 + \frac{g^2}{c_n^2 - c_x^2} \right). \quad (23)$$

Так как каждому \mathfrak{s} вообще принадлежат два значения c_n , то для каждого направления нормали \mathfrak{s} получается два луча f , за исключением отдельных случаев, к которым мы обратимся позже (см. § 62).

§ 60. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПОСТРОЕНИЯ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ СКОРОСТИ И НАПРАВЛЕНИЯ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВОЛН

Представим себе оба значения скорости по нормали c_n , удовлетворяющие уравнению нормалей (5) § 59, нанесенными на каждое направление нормали \mathfrak{s} из некоторой фиксированной точки внутри кристалла. Мы получим тогда некоторую двухполую поверхность, так называемую *поверхность нормалей*. Соответствующее построение для направлений лучей f и скорости по лучу c_s дает поверхность лучей. Это сложная поверхность; переход от выбранных здесь полярных координат (c_n , \mathfrak{s}) к прямоугольным показывает, что она принадлежит к поверхностям четвертого порядка. Облегчением является то, что мы можем для нахождения ее свойств заменить ее более простой поверхностью, именно эллипсоидом.

Согласно (11) § 58 составляющие вектора \mathfrak{D} удовлетворяют при заданной плотности энергии W уравнению:

$$\frac{\mathfrak{D}_x^2}{\varepsilon_x} + \frac{\mathfrak{D}_y^2}{\varepsilon_y} + \frac{\mathfrak{D}_z^2}{\varepsilon_z} = \text{const.} \quad (1)$$

Если мы будем теперь писать вместо \mathfrak{D}_x , \mathfrak{D}_y , \mathfrak{D}_z просто x , y , z и рассматривать их как декартовы координаты в пространстве то при надлежащей нормировке постоянных будем иметь вместо (1):

$$\frac{x^2}{\varepsilon_x} + \frac{y^2}{\varepsilon_y} + \frac{z^2}{\varepsilon_z} = 1. \quad (2)$$

Это эллипсоид, главные оси которого совпадают с диэлектрическими осями кристалла и равны корням квадратным из главных диэлектрических постоянных. Мы его назовем *эллипсоидом нормалей*¹.

С помощью этого эллипсоида нормалей можно следующим образом непосредственно получить обе скорости по нормали и направления колебаний, принадлежащие каждому направлению нормали \hat{s} . Пересечем эллипсоид в его центре плоскостью, перпендикулярной к \hat{s} (фиг. 132). Фигурой сечения будет эллипс; величины его главных осей определяют обе скорости по нормали, а их направления — соответствующие направления колебаний (вектора \mathfrak{D}). В этом можно убедиться следующим образом.

Каждая точка фигуры сечения удовлетворяет двум уравнениям:

$$x\hat{s}_x + y\hat{s}_y + z\hat{s}_z = 0, \quad (3)$$

$$\frac{x^2}{\epsilon_x} + \frac{y^2}{\epsilon_y} + \frac{z^2}{\epsilon_z} = 1. \quad (4)$$

Фиг. 132. Эллипсоид нормалей. Построение направлений колебаний.

По определению главные оси являются наибольшими и наименьшими диаметрами эллипса сечения. Чтобы их найти, мы должны искать экстремальные значения величины:

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 \quad (5)$$

при обоих добавочных условиях (3) и (4). Для этого мы умножаем последние по известному способу на два лагранжевы множителя, которые обозначим через 2μ и λ . Тогда наша задача нахождения экстремума при дополнительных условиях будет эквивалентна задаче нахождения экстремума выражения:

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2\mu(x\hat{s}_x + y\hat{s}_y + z\hat{s}_z) + \lambda\left(\frac{x^2}{\epsilon_x} + \frac{y^2}{\epsilon_y} + \frac{z^2}{\epsilon_z}\right) \quad (6)$$

без всяких добавочных условий. Необходимые для этого условия получаются приравнованием нулю производных по x , y , z :

$$x + \mu\hat{s}_x + \frac{\lambda x}{\epsilon_x} = 0; \quad y + \mu\hat{s}_y + \frac{\lambda y}{\epsilon_y} = 0; \quad z + \mu\hat{s}_z + \frac{\lambda z}{\epsilon_z} = 0. \quad (7)$$

Умножая эти уравнения сначала на x , y , z , затем на \hat{s}_x , \hat{s}_y , \hat{s}_z и складывая, получаем, принимая во внимание дополнительные условия (3) и (4):

$$r^2 + \lambda = 0, \quad \mu + \lambda\left(\frac{x\hat{s}_x}{\epsilon_x} + \frac{y\hat{s}_y}{\epsilon_y} + \frac{z\hat{s}_z}{\epsilon_z}\right) = 0. \quad (8)$$

¹ Часто вместо этого употребляют неясный термин *эллипсоид индексов*.

Подставляя получающиеся отсюда значения для λ и μ в (7), имеем:

$$x\left(1 - \frac{r^2}{\epsilon_x}\right) + \hat{s}_x r^2 \left(\frac{x\hat{s}_x}{\epsilon_x} + \frac{y\hat{s}_y}{\epsilon_y} + \frac{z\hat{s}_z}{\epsilon_z}\right) = 0. \quad (9)$$

При заданном \hat{s} это три линейных однородных уравнения относительно x , y , z , которые имеют решения лишь в том случае, если детерминант их равен нулю. Это дает алгебраическое уравнение для r^2 . Теперь, однако, ясно, что уравнения (9) отличаются лишь обозначениями от прежних наших основных уравнений (1) § 59.

Поэтому заменим снова x , y , z составляющими \mathfrak{D} и $\frac{x}{\epsilon_x}$, $\frac{y}{\epsilon_y}$, $\frac{z}{\epsilon_z}$ составляющими \mathfrak{E} и, кроме того, напомним n вместо r ; тогда получим из (9):

$$\mathfrak{D}_x = n^2 \left[\frac{\mathfrak{D}_x}{\epsilon_x} - \hat{s}_x (\mathfrak{E} \hat{s}) \right]. \quad (10)$$

Геометрическое рассмотрение показывает, что оба корня определительного уравнения для n (которое согласно § 59 второй степени) равны значениям r для экстремальных диаметров эллипса сечения и что составляющие \mathfrak{D} совпадают с векторами в направлении главных осей. Без вычисления, из известного свойства главных осей, расположенных перпендикулярно друг к другу, мы выводим важную теорему:

Направления колебаний \mathfrak{D}' и \mathfrak{D}'' обеих, принадлежащих данной нормали, волн взаимно перпендикулярны.

Эту теорему мы можем, конечно, также вывести путем простого вычисления из (10)¹.

Можно, кроме того, полностью определить простым построением положение плоскости колебаний. Как известно, самый общий трехосный эллипсоид имеет два плоских, проходящих через центр, круговых сечения K_1 , K_2 ; нормали к этим сечениям, N_1 , N_2 , лежат в плоскостях симметрии эллипсоида, содержащих наибольшую и наименьшую главные оси (ось x и ось z); мы будем в последующем более подробно говорить об этих направлениях, которые называются *оптическими осями*.

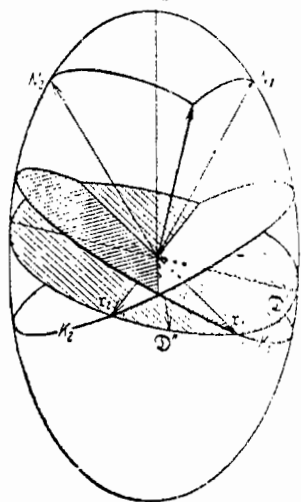
Пусть теперь дана произвольная нормаль \hat{s} , которой принадлежит эллиптическое сечение E . Плоскость этого сечения пересекает оба круга K_1 , K_2 вдоль векторов τ_1 и τ_2 , длины которых равны и которые, следовательно, симметричны относительно обеих главных осей эллипса E (фиг. 133). Теперь τ_1 перпендикулярно к N_1 и \hat{s} и, таким образом, к проходящей через них плоскости; точно так же τ_2 перпендикулярно к плоскости N_2 , \hat{s} . Если τ_1' , τ_2' — следы этих плоскостей на плоскости эллипса E ,

¹ Это вычисление будет произведено в теории поглощающих кристаллов (VI, § 69, стр. 359).

так что $r_1' \perp r_1$, $r_2' \perp r_2$, то r_1' и r_2' также расположены симметрично относительно осей эллипса (фиг. 134). Переходя к плоскостям, определяемым нормалью \hat{s} и векторами в плоскости эллипса, заключаем: *плоскости направлений колебаний* (т. е. плоскости, проходящие через \hat{s} и главные оси эллипса E) *делят пополам угол между плоскостями* N_1 , \hat{s} и N_2 , \hat{s} .

Фиг. 135b представляет эти соотношения в полярной диаграмме.

Если, в частности, эллипсоид нормалей обладает симметрией вращения (вокруг оси z), то круговые сечения сливаются в экваториальную плоскость; одно направление колебаний проходит через

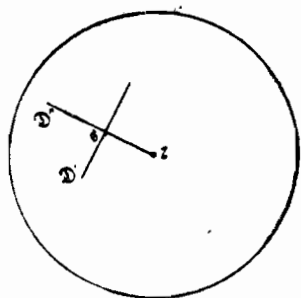


Фиг. 133. К доказательству теоремы, что плоскости направлений колебаний делят пополам углы между плоскостями $N_1\hat{s}$ и $N_2\hat{s}$.

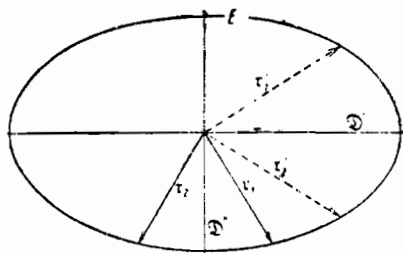
ось z , „оптическую ось“, другое перпендикулярно к ней (см. к этому фиг. 135a и подробности в § 61).

Совершенно аналогичное свойство поверхности лучей получается из *лучевого эллипсоида*.

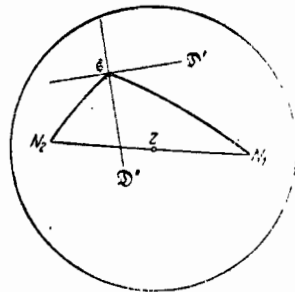
$$\epsilon_x x^2 + \epsilon_y y^2 + \epsilon_z z^2 = 1. \quad (11)$$



Фиг. 135a. Расположение направлений колебаний в случае одноосных кристаллов.



Фиг. 134. Плоскость E фиг. 133.



Фиг. 135b. Расположение направлений колебаний в случае двuosных кристаллов.

Все заключения те же самые и приводят к тому, что как \hat{s} , \hat{D}' , \hat{D}'' , так и \hat{i} , \hat{E}' , \hat{E}'' образуют ортогональную систему.

Для детализации соотношений можно также построить многочисленные другие вспомогательные поверхности. Мы в качестве примера приведем одно такое построение.

Представим себе, что в некоторой точке (x, y, z) эллипсоида лучей (11) построена касательная плоскость, уравнение которой имеет такой вид:

$$\epsilon_x x \xi + \epsilon_y y \eta + \epsilon_z z \zeta = 1, \quad (12)$$

причем ξ, η, ζ являются текущими координатами плоскости касания. Опустим теперь на последнюю перпендикуляр из начала координат и определим положение его основания, что проще всего сделать путем нахождения минимума расстояния:

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = \min. \quad (13)$$

Обозначая множитель Лагранжа через -2λ , получаем дифференцированием выражения

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 - 2\lambda (\epsilon_x x \xi + \epsilon_y y \eta + \epsilon_z z \zeta),$$

определяющие уравнения:

$$\xi = \lambda \epsilon_x x; \quad \eta = \lambda \epsilon_y y; \quad \zeta = \lambda \epsilon_z z. \quad (14)$$

Умножение на ξ, η, ζ и сложение дает, если принять во внимание (12):

$$\lambda = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2. \quad (15)$$

Следовательно, мы получаем:

$$\frac{\xi^2}{\epsilon_x} + \frac{\eta^2}{\epsilon_y} + \frac{\zeta^2}{\epsilon_z} = \lambda^2 (\epsilon_x x^2 + \epsilon_y y^2 + \epsilon_z z^2) = \lambda^2$$

и, таким образом,

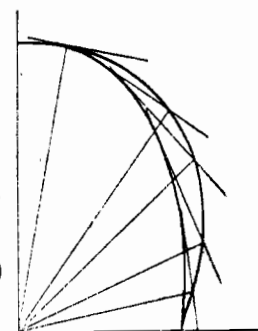
$$\frac{\xi^2}{\epsilon_x} + \frac{\eta^2}{\epsilon_y} + \frac{\zeta^2}{\epsilon_z} = (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)^2. \quad (16)$$

Это уравнение *покры эллипсоида лучей*; оно представляет поверхность четвертой степени, именуемую *овалоидом* и имеет вид несколько сжатого нормального эллипсоида. Можно, наоборот, рассматривать эллипсоид лучей как *оглающую поверхность* (обертку) касательных плоскостей овалоида (фиг. 136 разъясняет это для случая плоского осевого сечения).

Аналогичным способом можно построить овалоиды высших порядков, при этом в правой части стоят вместо второй высшие степени.

Более важным, чем эти построения, является взаимоотношение между поверхностью нормалей и поверхностью лучей, которое мы теперь и хотим вывести.

Мы уже видели, что заданием \hat{E} и \hat{D} определяются как направления \hat{s} и \hat{i} , так и принадлежащие им значения c_n и c_s . Поэтому если взять вариации \hat{E} или \hat{D} , то тем самым будет уста-



Фиг. 136. Овалоид как подера эллипсоида лучей.

новлено также, как изменяется, например, \mathbf{j} и c_s . Образует вектор:

$$\mathbf{r} = c_s \mathbf{j}, \quad (17)$$

который направлен из начала координат в некоторую точку поверхности лучей; мы утверждаем, что его приращение перпендикулярно к вектору \mathbf{s} .

Для доказательства будем исходить из уравнения (10) § 59 и положим в нем согласно (29) § 58 $s = \frac{c}{c_s}$ и $\frac{\dot{\mathbf{j}}}{s} = \frac{\dot{\mathbf{r}}}{c}$. Тогда она примет такой вид:

$$c^2 \mathfrak{E} = r^2 \mathfrak{D} - \mathbf{r}(\mathbf{r} \mathfrak{D}). \quad (18)$$

Представим теперь все входящие величины зависящими от одного параметра τ и будем обозначать производные по τ точкой наверху. Тогда получим, дифференцируя уравнения (18) по τ :

$$c^2 \dot{\mathfrak{E}} = 2(\mathbf{r} \dot{\mathbf{r}}) \mathfrak{D} + r^2 \dot{\mathfrak{D}} - \dot{\mathbf{r}}(\mathbf{r} \mathfrak{D}) - \mathbf{r}(\dot{\mathbf{r}} \mathfrak{D}) - \mathbf{r}(\mathbf{r} \dot{\mathfrak{D}}). \quad (19)$$

Это уравнение умножаем на \mathfrak{D} и замечаем, что в силу равенства $\mathfrak{D}_x = \epsilon_x \mathfrak{E}_x$, имеет место соотношение:

$$\mathfrak{D}_x \mathfrak{E}_x = \mathfrak{E}_x \mathfrak{D}_x,$$

следовательно, также

$$\mathfrak{D} \mathfrak{E} = \mathfrak{E} \mathfrak{D}. \quad (20)$$

Поэтому

$$c^2 \mathfrak{E} \dot{\mathfrak{D}} = \mathfrak{D} [r^2 \dot{\mathfrak{D}} - \mathbf{r}(\mathfrak{D} \dot{\mathbf{r}})] + 2\mathbf{r} [\mathbf{r} \mathfrak{D}^2 - \mathfrak{D}(\mathbf{r} \dot{\mathfrak{D}})]. \quad (21)$$

Здесь члены с \mathfrak{D} исчезают согласно (18); множитель при $\dot{\mathbf{r}}$ можно написать в форме $(\mathfrak{D} \times \mathbf{r}) \times \mathfrak{D}$. Следовательно, он пропорционален $(\mathfrak{D} \times \mathbf{j}) \times \mathfrak{D}$. Этот вектор расположен перпендикулярно к нормали к плоскости \mathfrak{D} , \mathbf{j} и, следовательно, лежит в ней. Кроме того, он перпендикулярен к \mathfrak{D} . Поэтому он должен быть согласно фиг. 131 параллельным \mathbf{s} . Следовательно, для перемещения τ , $\mathbf{r} \delta \tau = \delta \mathbf{r}$ получаем:

$$\mathbf{s} \delta \tau = 0, \quad (22)$$

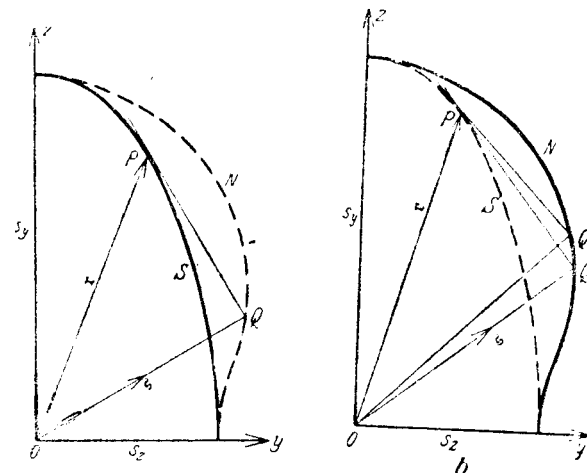
чем и доказывается наше утверждение. Этот результат можно высказать еще и так:

Плоскость, касательная к поверхности лучей, всегда перпендикулярна к волновой нормали (см. фиг. 137, которая схематически дает построение в плоскости чертежа).

Соответствующие точки волновой поверхности и поверхности лучей, однако, совпадают в направлении главных осей, как это непосредственно явствует из уравнений (14) § 58 и (10) § 59 (мы к этому еще скоро вернемся). Следовательно, *поверхность нормалей есть поверхность оснований перпендикуляров поверхности лучей и, наоборот, поверхность лучей есть огибающая поверхность поверхности нормалей.*

Мы приходим поэтому к следующему *построению*.

Если задана поверхность лучей, то мы найдем направление волновой нормали в некоторой ее точке P (фиг. 137a), построив в точке P касательную плоскость и опустив на нее перпендикуляр OQ из начала координат O . OQ тогда представляет волновую нормаль, а Q — одну из точек поверхности нормалей.



Фиг. 137. a — поверхность нормалей как подерка к поверхности лучей, b — поверхность лучей как огибающая поверхность поверхности нормалей.

Если, наоборот, задана поверхность нормалей и мы хотим построить луч в некоторой ее точке Q (фиг. 137b), то в Q и в двух бесконечно близких точках Q_1 и Q_2 мы строим плоскости, перпендикулярные или к OQ , или OQ_1 или OQ_2 . Они пересекаются в некоторой точке P поверхности лучей, и OP есть луч \mathbf{r} .

§ 61. ОПТИЧЕСКИЕ КЛАССЫ КРИСТАЛЛОВ. ОПТИЧЕСКИ ИЗОТРОПНЫЕ И ОДНООСНЫЕ КРИСТАЛЛЫ

Прозрачные кристаллы распадаются в оптическом отношении всего на три класса:

1. *Кристаллы с тремя равнозначными взаимно перпендикулярными осями симметрии*. Сюда принадлежат кристаллы правильной (кубической) системы. Ясно, что при наличии трех фиксированных в веществе, физически взаимно заменимых ортогональных осей система диэлектрических главных осей совпадает с ними. Но тогда $\epsilon_x = \epsilon_y = \epsilon_z = \epsilon$, т. е. снова $\mathfrak{D} = \epsilon \mathfrak{E}$, и кристалл оптически изотропен, точно так же, как аморфное тело.

2. *Кристаллы с одним выделяющимся кристаллографическим направлением*. Сюда относятся кристаллы тригональной, тетрагональной и гексагональной систем, при которых выделяющееся направление или трех-, четырех- или шестикратное. Здесь одна

диэлектрическая главная ось должна совпадать с кристаллографически выделяющейся осью; одна из двух других главных осей может быть произвольно выбрана в нормальной плоскости („свободно вращающиеся оси“). Если положим ось z взятой в выделяющемся направлении, то $\epsilon_x = \epsilon_y \neq \epsilon_z$. Такие кристаллы называют *оптически одноосными*.

3. Кристаллы, не имеющие выделяющегося направления. Сюда относятся кристаллы ромбической, моноклинной и триклинной систем. Во всех них положение системы диэлектрических осей определяется симметрией не полностью, оно может изменяться также с частотой света, и мы имеем наиболее общий случай, где $\epsilon_x \neq \epsilon_y \neq \epsilon_z$.

Из рассмотрения эллипсоида Френеля, например эллипсоида нормалей, можно увидеть особенно ясно, что существует только три оптически различных рода кристаллов. Существуют только две степени вырождения эллипсоида: либо эллипсоид является трехосным — самый общий случай, либо он представляет эллипсоид вращения с одним выделяющимся направлением, либо, наконец, шар, когда все направления равнозначны (изотропия). Наименование *оптически одно- или двухосный* связано с числом круговых сечений, проходящих через центр, которое мы уже вкратце рассматривали в предыдущем параграфе.

Именно, если сечение, перпендикулярное к направлению нормали \mathfrak{z} и проходящее через центр нормального эллипсоида, является кругом, то обе нормальные скорости, принадлежащие этому направлению нормали, равны одна другой. Такое направление равных нормальных скоростей называется *оптической осью* (или, точнее, *осью оптических нормалей*). Соответствующее построение для эллипсоида лучей ведет к *оси лучей*.






В общем случае трехосный эллипсоид имеет, как известно, два круговых сечения, проходящих через центр; в этом случае, следовательно, существует две оптических оси. В случае эллипсоида вращения имеется одно, перпендикулярное к оси симметрии, круговое сечение; ось симметрии является, таким образом, оптической осью. Наконец, в случае шара каждое сечение является круговым, и, следовательно, каждое направление — известным образом оптической осью (изотропия).

Нижеследующая табл. 7 дает обзор всех встречающихся случаев. При этом оси, изменяющиеся с цветом, обозначены тонкими стрелками, тогда как фиксированные в кристаллическом веществе оси (выделяющиеся оси) нанесены жирно; свободно вращающиеся оси изображены кругами или шарами.

Мы произведем аналитическое рассмотрение с помощью уравнения нормалей (5) § 59, в котором мы избавимся от знаменателей, могущих обратиться в нуль. Оно представится в удобном виде:

$$\mathfrak{z}_x^2 (c_n^2 - c_y^2) (c_n^2 - c_z^2) + \mathfrak{z}_y^2 (c_n^2 - c_z^2) (c_n^2 - c_x^2) + \mathfrak{z}_z^2 (c_n^2 - c_x^2) (c_n^2 - c_y^2) = 0. \quad (1)$$

Таблица 7

Кристаллографическая симметрия	Триклинная	Моноклинная	Ромбическая	Тригексагональная	Кубическая
Диэлектрические оси					
Нормальный эллипсоид	Трехосный эллипсоид			Эллипсоид вращения	Шар
Оптические оси	Две оси			Одна ось	Изотропная

В этом параграфе мы рассмотрим

Оптически одноосные кристаллы

Для них $c_x = c_y = c_o$, $c_z = c_e$ ¹. Если обозначим через ϑ угол между \mathfrak{z} и осью z , т. е. положим:

$$\sqrt{\mathfrak{z}_x^2 + \mathfrak{z}_y^2} = \sin \vartheta, \quad \mathfrak{z}_z = \cos \vartheta, \quad (2)$$

то уравнение нормалей (1) примет вид:

$$(c_n^2 - c_o^2) [(c_n^2 - c_e^2) \sin^2 \vartheta + (c_n^2 - c_o^2) \cos^2 \vartheta] = 0. \quad (3)$$

Оно, следовательно, распадается на два уравнения, корни которых равны:

$$\left. \begin{aligned} c_n'^2 &= c_o^2, \\ c_n''^2 &= c_o^2 \cos^2 \vartheta + c_e^2 \sin^2 \vartheta. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Полостями поверхности нормалей являются, таким образом, шар радиуса $c_n' = c_o$ и поверхность вращения, оваллоид (поверхность четвертого порядка). Поэтому каждому направлению нормали принадлежат две волны: *обыкновенная*, со скоростью, не зависящей от направления, и *необыкновенная*, скорость которой зависит от угла наклона по отношению к оптической оси z . Только для направления $\vartheta = 0$ обе скорости распространения равны друг другу:

$$c_n' = c_n'' = c_o. \quad (\vartheta = 0). \quad (5)$$

¹ Индексы o и e обозначают „обыкновенный“ и „необыкновенный“ (ordinaire и extraordinaire)—термины, которые станут понятными из последующего.

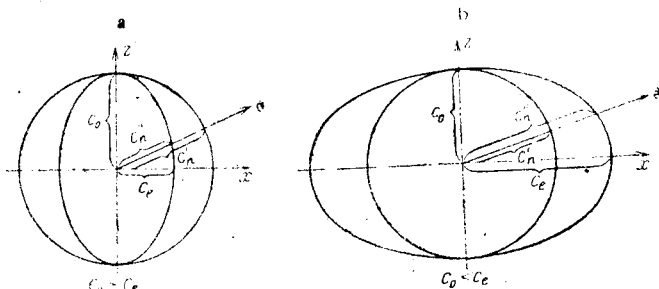
Для $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ скорость необыкновенной волны будет $c_n'' = c_e$; по-

этому все одноосные кристаллы можно классифицировать по знаку разности скоростей, перпендикулярных к оси, $c_e - c_o$:

а) Обыкновенный луч распространяется быстрее необыкновенного, $c_o > c_e$ положительный одноосный кристалл (например кварц) (фиг. 138а).

б) Обыкновенный луч распространяется медленнее необыкновенного, $c_o < c_e$ отрицательный одноосный кристалл (например известковый шпат) (фиг. 138б).

Направления поляризации удобнее всего рассматривать на эллипсоиде нормалей. Назовем плоскость, проходящую через \hat{z} и ось z , главным сечением. Тогда одна из главных осей принадлежащего \hat{z} эллипса сечения всегда лежит в главном сечении,



Фиг. 138. Поверхность нормалей в случае одноосного кристалла.

а другая перпендикулярна к нему. Длина последней равна радиусу экваториального круга эллипсоида вращения, т. е. равна радиусу c_o шара, принадлежащего обыкновенному лучу, независимо от направления \hat{z} . Следовательно, вектор \mathcal{D} в обыкновенной волне колеблется параллельно главному сечению. Так как в старой литературе по оптике в качестве направления поляризации обозначали направление вектора \mathcal{E} , перпендикулярного к \mathcal{D} , то принято говорить: обыкновенный луч поляризован в главном сечении, необыкновенный — перпендикулярно к нему.

В историческом развитии оптики эти положения сыграли известную роль при разрешении вопроса, параллелен или перпендикулярен световой вектор к направлению поляризации (определенному через направление погашения при отражении под углом Брюстера), т. е. на языке электромагнитной теории: какой вектор является световым вектором — вектор \mathcal{D} или вектор \mathcal{E} . Френель высказывал мнение, что световые колебания совершаются перпендикулярно к плоскости поляризации, оправдывая свой взгляд следующим соображением. Он предполагал само собой разумеющимся, что скорость света зависит только от направления колебаний „светового вектора“. Затем он рассматривал прохождение различных волн через одноосный кри-

сталл, причем волновая нормаль \hat{z} всегда должна была лежать в своем главном сечении. Обыкновенный луч каждой такой волны имеет всегда одну и ту же скорость; следовательно, „световой вектор“ для всех этих волн должен быть равным и одинаково направленным. Отсюда вытекает, что он должен быть перпендикулярен к главному сечению; если бы он лежал в главном сечении, то, так как он остается перпендикулярным к \hat{z} , при вращении \hat{z} он точно так же изменял бы свое направление. В электромагнитной теории вектором колебаний, перпендикулярным к главному сечению, является \mathcal{D} (а не \mathcal{E}). И действительно, мы видели [§ 58 (19)], что скорость света (показатель преломления n) определяется вектором \mathcal{D} .

Точно такое же рассмотрение мы могли бы применить и к поверхности лучей.

§ 62. ОПТИЧЕСКИ ДВУОСНЫЕ КРИСТАЛЛЫ

Рассмотрим теперь общий случай уравнения (1) § 61. Для получения наглядного представления об изображаемой им поверхности исследуем фигуры сечения их координатными плоскостями, проведенными через диэлектрические главные оси. Чтобы кривые пересечения получились определенными, мы должны фиксировать относительные величины характеристических постоянных; мы примем:

$$\epsilon_x < \epsilon_y < \epsilon_z; \quad c_x > c_y > c_z. \quad (1)$$

Подставим теперь в (1) § 61, например, $\hat{z}_x = 0$; тогда это уравнение распадется на два, именно на

$$\left. \begin{aligned} c_n'^2 &= c_x^2, \\ c_n''^2 &= c_z^2 \hat{z}_y^2 + c_y^2 \hat{z}_z^2. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Сечение поверхности с плоскостью yz составляется, таким образом, из круга и овала¹; то же имеет место и для двух других координатных плоскостей. Различие для этих трех плоскостей будет заключаться только в положении овала относительно круга (фиг. 139). При выбранном нами определении на плоскости yz круг полностью охватывает овал, на плоскости xz овал охватывает круг и на плоскости xy обе кривые пересекаются в двух парах точек. Линии, соединяющие начало координат с этими точками, называются оптическими осями нормалей N_1 , N_2 . Из геометрической теории кругового сечения эллипсоида следует, что, кроме них, не существует никаких иных оптических осей. Мы здесь хотим, однако, это подтвердить недлинным

¹ Если ввести прямоугольные координаты при помощи соотношений $c_n \hat{z}_y = y$, $c_n \hat{z}_z = z$, так что $c_n^2 = y^2 + z^2$, то уравнение овала будет иметь вид: $(y^2 + z^2)^2 = c_z^2 y^2 + c_y^2 z^2$.

расчетом, который идентичен доказательству упомянутой теоремы. Уравнение (1) § 61, будучи расположено по степеням c_n^2 , имеет следующий вид:

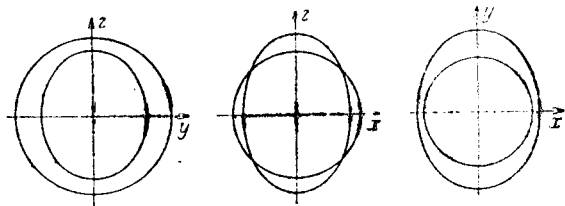
$$c_n^4 - c_n^2 [\xi_x^2 (c_y^2 + c_z^2) + \xi_y^2 (c_z^2 + c_x^2) + \xi_z^2 (c_x^2 + c_y^2)] + (\xi_x^2 c_y^2 c_z^2 + \xi_y^2 c_z^2 c_x^2 + \xi_z^2 c_x^2 c_y^2) = 0 \quad (3)$$

и имеет решения:

$$c_n^2 = \frac{1}{2} [\xi_x^2 (c_y^2 + c_z^2) + \xi_y^2 (c_z^2 + c_x^2) + \xi_z^2 (c_x^2 + c_y^2)] \pm \frac{1}{2} \sqrt{D}, \quad (4)$$

где дискриминант D равен:

$$D = [\xi_x^2 (c_y^2 + c_z^2) + \xi_y^2 (c_z^2 + c_x^2) + \xi_z^2 (c_x^2 + c_y^2)]^2 - 4 (\xi_x^2 c_y^2 c_z^2 + \xi_y^2 c_z^2 c_x^2 + \xi_z^2 c_x^2 c_y^2). \quad (5)$$



Фиг. 139. Поверхность нормалей в случае двуосных кристаллов.

Мы добавим в последнем члене множитель $1 = \xi_x^2 + \xi_y^2 + \xi_z^2$ и положим для краткости:

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \xi_x^2 (c_y^2 - c_z^2) \geq 0, \\ \eta &= \xi_y^2 (c_z^2 - c_x^2) \geq 0, \\ \zeta &= \xi_z^2 (c_x^2 - c_y^2) \geq 0. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Тогда простое вычисление дает:

$$D = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 - 2\eta\xi - 2\zeta\xi - 2\zeta\eta = (\xi + \eta - \zeta)^2 - 4\zeta\eta. \quad (7)$$

Условие для оптической оси, т. е. для двукратного корня квадратного уравнения (3), гласит: $D=0$. Но

$$(\xi + \eta - \zeta)^2 \geq 0, \quad -4\zeta\eta \geq 0. \quad (8)$$

Таким образом из $D=0$ следует, что оба слагаемых в (7) должны обращаться в нуль:

$$\xi + \eta - \zeta = 0, \quad \xi\eta = 0. \quad (9)$$

Второе из этих уравнений показывает, что либо ξ либо η должно равняться нулю; но ξ равняться нулю не может, потому что тогда из первого из уравнений (9) следовало бы, что $\eta = \zeta$, а это согласно (6) возможно лишь в том случае, если η и ζ исчезают; однако все три составляющие единичного вектора \hat{s} не могут одновременно равняться нулю. Следовательно, остается только одна возможность:

$$\eta = 0, \quad \xi = \zeta. \quad (10)$$

Это уравнение означает:

$$\xi_y = 0, \quad \xi_x^2 (c_y^2 - c_z^2) = \xi_z^2 (c_x^2 - c_y^2). \quad (11)$$

Таким образом оптические оси лежат, как это утверждалось, в плоскости xz . Обозначим через β угол одной из оптических осей относительно оси z , т. е. примем, что $\hat{s}_x = \sin \beta$, $\hat{s}_z = \cos \beta$; тогда из второго из уравнений (11) следует:

$$\operatorname{tg} \beta \quad \frac{\hat{s}_x}{\hat{s}_z} = \pm \sqrt{\frac{c_x^2 - c_y^2}{c_y^2 - c_z^2}}, \quad (12)$$

т. е. оптические оси расположены симметрично относительно оси z .

Подобным же образом можно рассматривать и лучевую поверхность. Фигура пересечения с координатной плоскостью $\{x=0\}$ составляет согласно принципу перехода (11) § 59 и по (2) из кривых:

$$c_s'^2 = c_x^2, \quad \frac{1}{c_s'^2} = \frac{\hat{s}_y^2}{c_z^2} + \frac{\hat{s}_z^2}{c_y^2}, \quad (13)$$

т. е. из круга, который входил также и для случая нормальной поверхности и эллипса¹ с полуосями c_x и c_y . Точно то же имеет место и для двух других координатных плоскостей. Вследствие неравенств (1) и здесь в плоскости yz круг охватывает эллипс, в плоскости xu эллипс охватывает круг и в плоскости xz обе фигуры пересекаются. Направления к этим двойным точкам определяют оси лучей S_1, S_2 . Для угла γ , который образует такая ось с осью z , получается:

$$\operatorname{tg} \gamma = \pm \sqrt{\frac{\epsilon_y - \epsilon_x}{\epsilon_x - \epsilon_y}} = \pm \frac{c_z}{c_x} \sqrt{\frac{c_x^2 - c_y^2}{c_y^2 - c_z^2}} = \frac{c_z}{c_x} \operatorname{tg} \beta. \quad (14)$$

Так как $c_z < c_x$, то ось лучей, следовательно, составляет с осью z меньший угол, чем ось нормалей.

Исследуем теперь, как расположено в двуосном кристалле направление лучей $\{$, принадлежащее некоторой нормали \hat{s} ; для

¹ В прямоугольных координатах уравнение этого эллипса имеет такой вид: $y^2/c_z^2 + z^2/c_y^2 = 1$.

этого используем формулы (23) и (22) § 59, которые выпишем еще раз:

$$\hat{i}_x = \frac{\hat{s}_x}{c_n c_s} \left(c_n^2 + \frac{g^2}{c_n^2 - c_x^2} \right), \quad (15)$$

$$g^2 = c_n^2 (c_s^2 - c_n^2) = \frac{1}{\left(\frac{\hat{s}_x}{c_n^2 - c_x^2} \right)^2 + \left(\frac{\hat{s}_y}{c_n^2 - c_y^2} \right)^2 + \left(\frac{\hat{s}_z}{c_n^2 - c_z^2} \right)^2}. \quad (16)$$

Мы видим, что вообще каждому \hat{s} принадлежит два \hat{i} , соответствующие двум значениям c_n ; исключения могут иметь место лишь в том случае, если один из знаменателей, например $c_n^2 - c_x^2$, обращается в нуль. Однако согласно уравнению нормалей (5) § 59 это случается лишь тогда, когда \hat{s} лежит в одной из координатных плоскостей (например, в плоскости yz) системы главных осей.

Укажем теперь, что и в этом случае сечение не обладает особыми точками, если выбранная координатная плоскость не содержит оптической оси (плоскости xu и yz): Особые точки имеются лишь в плоскости оптической оси (плоскости xz).

Рассмотрим, например, плоскость yz , для которой $\hat{s}_x = 0$. Согласно (2) для одной из двух волн $c_n^2 = c_n'^2 = c_x^2$. Согласно (5) § 59 отношение

$$\frac{\hat{s}_x^2}{c_n^2 - c_x^2} = \frac{\hat{s}_y^2}{c_y^2 - c_n^2} + \frac{\hat{s}_z^2}{c_z^2 - c_n^2} \quad (17)$$

остается однако для $c_n \rightarrow c_x$ конечным, так как мы приняли, что $c_x > c_y > c_z$. Уравнение (16) показывает, что

$$\frac{g^2}{\hat{s}_x^2} = \frac{1}{\left\{ \left(\frac{\hat{s}_x^2}{c_n^2 - c_x^2} \right)^2 + \hat{s}_x^2 \left[\left(\frac{\hat{s}_y}{c_n^2 - c_y^2} \right)^2 + \left(\frac{\hat{s}_z}{c_n^2 - c_z^2} \right)^2 \right] \right\}} \quad (18)$$

в пределе $\hat{s}_x \rightarrow 0$ (и, следовательно, $c_n \rightarrow c_x$) сходится около предельного значения:

$$\left(\frac{c_n^2 - c_x^2}{\hat{s}_x^2} \right)^2;$$

следовательно, согласно (15)

$$\hat{i}_x \rightarrow \frac{1}{c_n c_s} \hat{s}_x \frac{c_n^2 - c_x^2}{\hat{s}_x^2} \rightarrow 0. \quad (19)$$

То же самое имеет место для плоскости xu . Если \hat{s} лежит в одной из двух плоскостей xu или yz , то и принадлежащие ему лучи \hat{i} также расположены в этих плоскостях, и никаких особенностей не получается.

Иное в плоскости xz . Здесь мы имеем:

$$\frac{\hat{s}_y^2}{c_n^2 - c_y^2} = \frac{\hat{s}_x^2}{c_x^2 - c_n^2} + \frac{\hat{s}_z^2}{c_z^2 - c_n^2}; \quad (20)$$

правая часть остается вообще конечной при $\hat{s}_y \rightarrow 0$, $c_n \rightarrow c_y$; существует, однако, исключение, именно — если \hat{s} удовлетворяет условию:

$$\hat{s}_x^2 (c_z^2 - c_y^2) - \hat{s}_z^2 (c_x^2 - c_y^2) = 0, \quad (21)$$

т. е. совпадает с одной из осей нормалей [см. (11)]. Тогда отношение (20) стремится к нулю. С другой стороны имеем снова:

$$g \rightarrow \hat{s}_y \frac{c_n^2 - c_y^2}{\hat{s}_y^2} \quad (22)$$

и

$$\hat{i}_y \rightarrow \frac{\hat{s}_y}{c_n c_s} \cdot \frac{g^2}{c_n^2 - c_y^2}. \quad (23)$$

Следовательно:

$$\hat{i}_y \rightarrow \frac{1}{c_n c_s} \cdot \frac{\hat{s}_y}{\frac{\hat{s}_y^2}{c_n^2 - c_y^2}}. \quad (24)$$

Эта дробь представляет неопределенность, так как и числитель и знаменатель обращаются в нуль.

Фактически это значит, что оси нормалей соответствует бесконечно много лучей, заполняющих круговой конус.

Чтобы доказать это утверждение, будем исходить из уравнения (19) § 59 и положим в нем $\hat{s}_y = 0$:

$$\frac{\hat{i}_x \hat{s}_x}{c_s^2 - c_x^2} + \frac{\hat{i}_z \hat{s}_z}{c_s^2 - c_z^2} = 0. \quad (25)$$

Это уравнение сопоставим с выражением (36) § 58, которое для оси нормалей ($\hat{s}_y = 0$, $c_n = c_y$) имеет такой вид:

$$c_s (\hat{s}_x \hat{i}_x + \hat{s}_z \hat{i}_z) = c_y. \quad (26)$$

Из (25) и (26) исключим c_s :

$$(\hat{i}_x \hat{s}_x c_z^2 + \hat{i}_z \hat{s}_z c_x^2) (\hat{i}_x \hat{s}_x + \hat{i}_z \hat{s}_z) = c_y^2. \quad (27)$$

Рассмотрим теперь некоторую точку на луче \hat{i} на расстоянии r , имеющую координаты $x = r \hat{i}_x$, $y = r \hat{i}_y$, $z = r \hat{i}_z$; она удовлетворяет уравнению:

$$(x \hat{s}_x c_z^2 + z \hat{s}_z c_x^2) (x \hat{s}_x + z \hat{s}_z) = c_y^2 (x^2 + y^2 + z^2). \quad (28)$$

Оно представляет конус второй степени с вершиной в начале координат (так как умножение всех координат на один и тот же множитель не изменяет уравнения). Направление \hat{s} лежит на

его боковой поверхности; поэтому, если положить $x = \mu \bar{s}_x$, $y = \mu \bar{s}_y$, $z = \mu \bar{s}_z$, то левая часть (28) согласно (21) будет равняться $\mu^2 c_y^2$, т. е. будет равна правой части.

Пересечем теперь конус волновой плоскостью, принадлежащей оси нормалей. Ее уравнение имеет такой вид:

$$x \bar{s}_x + z \bar{s}_z = c_y. \quad (29)$$

Подстановка в (28) дает:

$$x \bar{s}_x c_z^2 + z \bar{s}_z c_x^2 = c_y (x^2 + y^2 + z^2). \quad (30)$$

Это уравнение шара; следовательно, принадлежащая оси нормалей волновая плоскость пересекает наш конус по кругу.

Чтобы ясно себе представить положение оси нормалей, оси лучей и конуса, достаточно изобразить фигуру, получающуюся в плоскости xz ; мы, следовательно, положим $y = 0$. Тогда шару (30) будет соответствовать круг:

$$(x - a)^2 + (z - b)^2 = R^2, \quad (31)$$

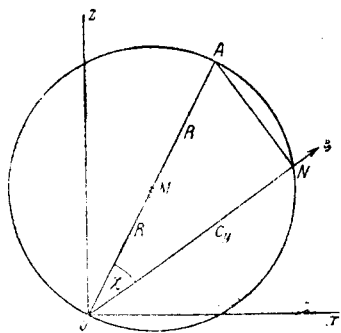
где

$$a = \frac{1}{2} \frac{c_z^2}{c_y} \bar{s}_x = \frac{1}{2} \frac{c_z^2}{c_y} \sqrt{\frac{c_x^2 - c_y^2}{c_x^2 - c_z^2}}; \quad b = \frac{1}{2} \frac{c_x^2}{c_y} \bar{s}_z = \frac{1}{2} \frac{c_x^2}{c_y} \sqrt{\frac{c_y^2 - c_z^2}{c_x^2 - c_z^2}} \quad (32)$$

и

$$R^2 = a^2 + b^2 = \frac{c_y^2 c_z^2 - c_z^2 c_x^2 + c_x^2 c_y^2}{4c_y^2}. \quad (33)$$

Круг проходит, таким образом, через начало координат (фиг. 140). Если провести из него ось нормалей, которая пересечет круг в N , и восстановить в N перпендикуляр (соответствующий волновой плоскости), то последний встретит круг в точке A , лежащей на одном диаметре с началом координат O . Тогда $ON = c_y$, $OA = 2R$. Треугольник OAN представляет сечение нашего конуса плоскостью xz , AN есть след круга сечения волновой плоскостью. Для угла растворения конуса мы получаем из фиг. 140:



Фиг. 140. Конус лучей при совпадении волновой нормали с оптической осью.

$$\operatorname{tg} \chi = \frac{1}{c_y} \sqrt{(2R)^2 - c_y^2}. \quad (34)$$

Если подставим теперь значение R из (33), то найдем:

$$\operatorname{tg} \chi = \frac{1}{c_y} \sqrt{(c_x^2 - c_y^2)(c_y^2 - c_z^2)}. \quad (35)$$

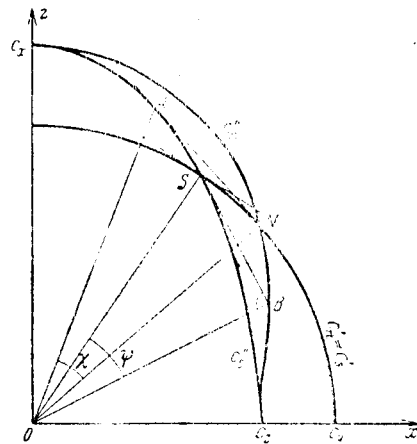
Совершенно такие же соображения мы можем перенести на тот случай, когда задано направление луча и ищется направление принадлежащей ему волновой нормали. Вообще, каждому i принадлежат два направления \bar{s} , то же имеет место в координатных плоскостях, за исключением плоскости xz , если направление i совпадает с направлением оси лучей. Оси лучей принадлежит целый конус нормалей, на котором лежит направление OS (фиг. 141). Конус пересекает плоскость xz не только по лучу OS , но еще и по другой прямой, OB , причем B может лежать на поверхности нормалей. Тогда BS представляет след кругового сечения конуса, все боковые линии которого являются волновыми нормальными, соответствующими лучу $i = OS$. Угол растворения ψ конуса задается соотношением:

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{1}{c_x c_z} \sqrt{(c_x^2 - c_y^2)(c_y^2 - c_z^2)} = \frac{c_y^2}{c_x c_z} \operatorname{tg} \chi.$$

Вспомним теперь, что поверхность лучей есть огибающая поверхность по отношению к поверхности нормалей и, наоборот, поверхность нормалей есть подерга поверхности лучей; мы придем к представленной на фиг. 141 конфигурации, которую мы еще раз вкратце опишем.

Поверхность нормалей пересекает плоскость чертежа (плоскость xz) по кругу с радиусом $c'_n = c_y$ и по овалу с радиус-вектором c''_n . Поверхность лучей имеет в качестве следа на плоскости xz тот же круг $c'_s = c_y$ и эллипс c''_s . Общий круг пересекает овал в точке N (двойная точка волновой поверхности), лежащей на оси нормалей ON , и эллипс в двойной точке S , лежащей на оси лучей OS . В точке N ось нормалей имеет перпендикулярную плоскость, которая соприкасается с поверхностью лучей c_s по кругу с радиусом NA и в частности касается эллипса в точке A ; образующие конуса, проведенного из начала через этот круг, являются лучами, принадлежащими к оси нормалей.

В точке S имеется конус из касательных плоскостей к поверхности лучей, причем на нашем разрезе входят в рассмотрение только две из них — именно, проходящие через прямые, касающиеся в c'_s с кругом и в S с эллипсом. Последняя встречается с овалом в точке B , причем $OB \perp BS$; OS и OB , следовательно, представляют собой две волновые нормали, принадле-



Фиг. 141. Построение конуса конической рефракции.

жащие к направлению лучей OS . Но, кроме того, к Γ принадлежат в качестве нормалей все образующие конуса, проходящего через точки круга с диаметром BS . Углы растворения χ и ϕ обоих конусов нанесены на чертеже.

Для этих двух конусов существуют специальные названия. Конус, принадлежащий к N , называется *конусом внутренней конической рефракции*, а конус, принадлежащий к S — *конусом внешней конической рефракции*. Именно, существует явление, которое непосредственно демонстрирует своеобразные законы распространения света в окрестности оптической оси. Оно было предсказано Гамильтоном в 1832 г. теоретически. По предложению Гамильтона его искал и действительно нашел Ллойд в 1833 г. на кристалле арагонита¹. Это открытие является перлом старой теоретической физики, и хотя оно не дает никаких новых глубоких закономерностей, мы все же его изложим ввиду его значения для теории Френеля.

Мы прежде всего рассмотрим, как выглядит *закон преломления в кристаллах*. Мы, правда, откажемся от вывода формул для интенсивности, соответствующих формулам Френеля для изотропных тел, и ограничимся определением направления волны. Рассуждения совершенно такие же, как в § 4 главы I. Составляющие падающей волны в воздухе являются функциями аргумента $t - \frac{rs}{c}$. Внутри кристалла распространяются две волны,

составляющие которых зависят лишь от $t - \frac{rs}{c_n}$ или $t - \frac{rs}{c_n}$. Если мы теперь поместим плоскость xy на поверхности раздела, то эти выражения внутри и снаружи должны совпадать при $z=0$. Отсюда мы получаем два условия:

$$x\tilde{s}_x + y\tilde{s}_y = n'(\tilde{s}'_x x + \tilde{s}'_y y) = n''(\tilde{s}''_x x + \tilde{s}''_y y), \quad (36)$$

которые должны быть идентичными для x и y . Таким образом

$$\left. \begin{aligned} \tilde{s}_x &= n' \tilde{s}'_x = n'' \tilde{s}''_x \\ \tilde{s}_y &= n' \tilde{s}'_y = n'' \tilde{s}''_y \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

или, если мы введем угол падения ϕ и оба угла преломления ϕ' и ϕ'' :

$$\frac{\sin \phi}{\sin \phi'} = n', \quad \frac{\sin \phi}{\sin \phi''} = n''. \quad (38)$$

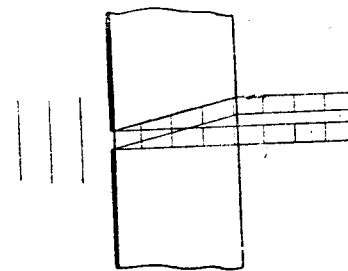
Из одной падающей волны возникает две проходящих; следовательно, имеет место *двойное преломление*.

Однако энергия распространяется не в направлении нормали, а в направлении луча. Значит, если мы дадим падающему параллельному пучку, он разделится на два проходящих пучка,

¹ См. введение, стр. 6, примеч. 1, 2.

направления которых будут определяться не углами ϕ' и ϕ'' , а принадлежащими направлениями лучей. Их легко построить по принципу Гюйгенса. Пусть плоскость чертежа представляет плоскость падения, $z=0$ — поверхность раздела, $A_1 B$ — след поперечного сечения падающей волны, $A_1 A_2$ — след освещенной части поверхности раздела (фиг. 142). Построим теперь в круг A_1 как центра поверхность лучей с ее обеими полостями Σ' и Σ'' и притом таким образом, что время прохождения соответствующих лучей от A_1 до поверхности равно времени прохождения от B до A_2 . Затем построим в A_2 перпендикулярную к оси x прямую поверхность раздела и проведем через нее касательные плоскости к Σ' и Σ'' . Это будут согласно принципу Гюйгенса фазовые плоскости преломленной волны. Точки касания C_1, C_2 вообще не лежат в плоскости чертежа (однако для простоты чертежа мы изобразим их лежащими в этой плоскости); $A_1 C_1$ и $A_1 C_2$ суть лучи \tilde{s}', \tilde{s}'' . Получим нормали \tilde{s}', \tilde{s}'' , опустив перпендикуляры $A_1 D_1$ и $A_1 D_2$ на плоскости касания. В случае одноосных кристаллов, где одна из боковых поверхностей является шаром, соответствующий обыкновенный луч всегда лежит в плоскости падения.

Фиг. 142. Закон преломления для кристаллов. Построение Гюйгенса.



Фиг. 143. Внутренняя коническая рефракция.

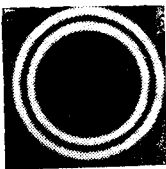
Перейдем теперь к упомянутому выше явлению *конической рефракции*. Пусть пластинка кристалла (именно арагонита) разрезана так, что одна ось нормалей расположена перпендикулярно к граничной плоскости. На наружной поверхности помещена диафрагма с узким отверстием, в которое может попасть перпендикулярно к пластинке параллельный пучок света. Примем сперва (что физически неосуществимо), что пучок состоит из одного только ряда плоских волн, нормали к которым при вхождении в кристалл, таким образом, точно совпадают с осью нормалей. Поэтому энергия падающего света распространяется в кристалле по *полуму конусу*, который дается построенным выше конусом внутренней конической рефракции (фиг. 143). Тогда свет, выхо-

дящий у другой граничной поверхности, заполняет *полый цилиндр* с круглым сечением. Если поместить параллельно пластинке экран, то на нем должна наблюдаться *кольцеобразная круговая линия*. Однако обычно интенсивность этой линии бывает тем слабее, чем точнее выполнено предположенное нами условие, что падающий свет состоит из одного бесконечно тонкого пучка.

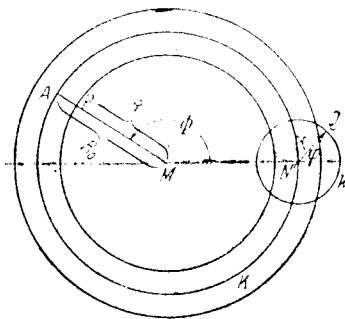
При действительных наблюдениях для получения конечной интенсивности используется пучок с малым, но конечным углом растворения. По Поггендорфу¹ и Гайдингеру² на экране тогда наблюдается *светлое кольцо*, разделенное тонкой темной линией на два кольца (фиг. 144). В первых опытах Ллойда это темное кольцо не наблюдалось, вследствие грубости диафрагмы; после его открытия оно также оставалось непонятным, пока Фогт³ не объяснил его следующим образом.

Речь идет о поведении лучей в *окрестности оси нормалей*. Возьмем за плоскость чертежа плоскость круга, по которому плоскость, со-

ответствующая оси нормали, касается лучевой поверхности (фиг. 141), и отметим на ней следы всех нормалей и лучей. Обозначим радиус круга касания через R_0 и введем на его плоскости полярные координаты R, Φ с началом в центре круга M (фиг. 145); кроме того, введем другую систему полярных координат r, ψ с началом в точке N , т. е. на следе оси нормалей. За начало отсчета для Φ и ψ выберем линию соединения MN . Задача заключается в том, чтобы лучи в области круга K отобразить в виде нормалей в окрестности точки N и притом, очевидно, согласно Гауссу, по способу параллельных нормалей (фиг. 145). Восстановим в точке M перпендикуляр к плоскости чертежа. Проходящая через него под полярным углом Φ полуплоскость пересечет поверхность лучей по кривой, которая (фиг. 140) вблизи точки A пересечения ее с кругом K совпадет с линией главной кривизны поверхности. Таким образом лежащие в ней нормали к этой поверхности вблизи K параллельны волновым нормальям. Пусть теперь P есть точка следа MA этой плоскости; тогда отрезку AP соответствует параллельный отрезок NQ в отображенной фигуре. Получающееся отображение двузачно, потому что если P лежит внутри



Фиг. 144. Световые явления при конической рефракции.



Фиг. 145. Проекция плоскости касательной к поверхности лучей, на область соседнюю с осью нормалей.

круга K и обходит его один раз, то точка отображения Q равным образом описывает малый круг вокруг N ; если же P лежит внутри круга K , то отображенная точка расположена симметрично относительно N и так же точно обходит вокруг N одновременно с P . Формулами это отображение выражается так:

$$\left. \begin{aligned} \text{при } R > R_0: \quad r &= c(R - R_0), \\ \psi &= \Phi; \\ \text{при } R < R_0: \quad r &= c(R_0 - R), \\ \psi &= \Phi + \pi \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

(которое оказывается зависящим не только от c , но еще и от Φ)

Пусть теперь $u(r)$ есть плотность распределения энергии падающего света, которая вне некоторого круга k вокруг N может обращаться в нуль, и $U(R, \Phi)$ — соответствующая плотность распределения в окрестности круга K . Тогда, очевидно, будет иметь место соотношение:

$$u(r) r dr d\psi = \frac{1}{2} U(R, \Phi) R dR d\Phi, \quad (40)$$

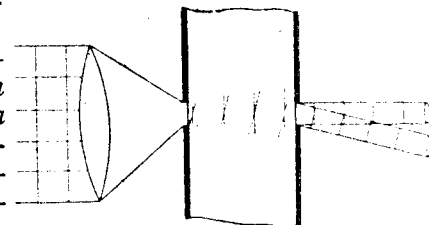
причем множитель $\frac{1}{2}$ проистекает из двойного перекрытия.

Отсюда получаем, пользуясь (39):

$$U = 2uc^2 \frac{|R - R_0|}{R}. \quad (41)$$

Из этой формулы видим, что U для $R = R_0$ обращается в нуль; таким образом становится понятным появление темной разделяющей линии. Положение вещей, следовательно, таково:

Бегущая точно в направлении оси нормалей волна дает бесконечно слабое освещение на круге K ; волны, немного отклоняющиеся от осевого направления, дают два заметно освещенные кольца по обе стороны круга K .



Фиг. 146. Внешняя коническая рефракция.

Совершенно аналогичным способом можно экспериментально показать также *внешнюю коническую рефракцию*. Для этой цели пластинку кристалла нужно отшлифовать перпендикулярно к одной из осей лучей и для выделения одного луча поместить по обеим сторонам кристалла диафрагмы с малыми отверстиями, расположенными точно одно против другого (фиг. 146). Если мы теперь заставим падать в отверстие одной из диафрагм сходящийся с помощью линзы свет, то через другое отверстие

¹ J. C. Poggendorff, Pogg. Ann., т. 48 (1839), стр. 461.

² W. v. Haidinger, Pogg. Ann., т. 86 (1853), стр. 486.

³ W. Voigt, Physik. Z., т. 6 (1905), стр. 673 и 818.

смогут пройти только такие волны, направления нормалей к которым расположены в непосредственном соседстве с осями нормалей, принадлежащими к осям лучей. Эти нормали, таким образом, тесно окружают конус внешней конической рефракции. Затем наблюдают выходящий из второго отверстия световой конус (который вследствие преломления при выходе не точно совпадает с конусом внешней конической рефракции). На экране мы снова видим освещенное кольцеобразное пятно с темной разделяющей линией. Величина освещенного кольца растёт с увеличением расстояния экрана от диафрагмы, тогда как при внутренней конической рефракции она остается постоянной.

§ 63. ИЗМЕРЕНИЕ ОПТИЧЕСКИХ СВОЙСТВ КРИСТАЛЛОВ. ПОЛЯРИЗАТОР И КОМПЕНСАТОР

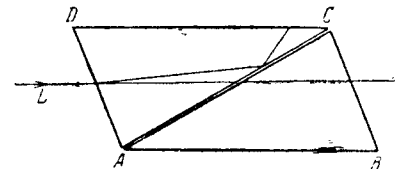
Сделаем теперь несколько замечаний относительно нахождения *оптических осей* и *измерения главных показателей преломления* в кристаллах. Первое удобнее всего производить при помощи интерференционных фигур на пластинках кристаллов, при которых ясно обозначаются точки встречи осей с поверхностью пластинок. Теорию этого явления мы рассмотрим в следующих параграфах.

Величина главных показателей преломления может быть измерена различными способами, например, проще всего с помощью *кристаллических призм*, преломляющее ребро которых расположено параллельно одной из *оптических осей нормалей*. При *одноосных кристаллах* для этого достаточно одной призмы; если дать пучку лучей падать сквозь узкую щель на эту призму, то при прохождении он распадется на два луча; показатели преломления этих лучей можно определить по обычному методу минимума отклонения. Какой из них является обыкновенным лучом и какой необыкновенным, узнают по поляризации (первый поляризован в плоскости главного сечения, а второй — перпендикулярно к ней, см. § 61). При *двуосных кристаллах* употребляется несколько призм, вследствие чего этот метод является менее целесообразным. Здесь более удобен *метод полного внутреннего отражения*. Лучу света дают входить в надлежащим образом отшлифованный кристалл и наблюдают, при каком угле наступает полное внутреннее отражение у противоположной граничной поверхности. Это происходит при различных граничных углах для обоих идущих в кристалле лучей. В *рефрактометре* (глава I, § 13) мы видим в диффузном свете две границы полного внутреннего отражения. Поле зрения между ними освещается только одной из двух волн, тогда как по одну сторону от них оно совершенно темное, а по другую — освещается обеими волнами. Из измеренных граничных углов можно найти по известным формулам (глава I, § 13) оба показателя преломления для соответствующего направления лучей.

Кристаллические пластинки и призмы используются в различных комбинациях как вспомогательное средство при оптических исследованиях прежде всего для *получения и анализа поляризованного света*. Из колоссального многообразия сконструированных для этой цели приборов рассмотрим вкратце самые важные.

1. Призма Николя

Сконструированная Николем (William Nicol¹, 1768 — 1851) в 1828 г. призма служит для получения линейно поляризованного света. Материалом для нее является *ромбоэдр известкового шпата* (фиг. 147). *ABCD* представляет его главное сечение, естественный угол которого в 72° у *B* или *D* шлифовкой конечных плоскостей уменьшен до 68° . Вдоль проходящей через *AC* диагональной плоскости ромбоэдр разрезается, и оба получающиеся при этом куски известкового шпата опять склеиваются друг с другом *канадским бальзамом* вдоль поверхности разреза в их старом положении. Падающий в продольном направлении *L* параллельный пучок света распадается на обыкновенный и необыкновенный лучи. Слой канадского бальзама является для первого оптически менее плотной средой, а для второго — более плотной (кристалл: $n_o = 1,66$, $n_e = 1,49$; канадский бальзам: $n = 1,54$). Для обыкновенного луча благодаря размерам призмы выполнено условие полного внутреннего отражения; он отражается от зачерненной боковой поверхности и поглощается там. Необыкновенный луч снова выходит из кристалла почти неотклоненный. Он линейно поляризован и *колеблется в плоскости главного сечения* (см. § 61). Пользуясь старым способом выражения, говорят: свет *поляризован перпендикулярно к главному сечению*. При призме Николя нельзя применять падающий свет произвольного угла растворения, а только свет, заключающийся в конусе с углом растворения в 29° .



Фиг. 147. Призма Николя.

2. Компенсаторы

Для исследования эллиптически поляризованного света (определения положения и формы эллипса колебаний) пользуются особым приспособлением из кристаллических пластинок. С их помощью образуют такую разность фаз обеих взаимно перпендикулярных слагающих колебаний, что эллиптически поляризованный свет преобразуется в линейно поляризованный, а затем последний анализируют николем. Вследствие имеющей здесь место «компенсации фаз» такие приборы называются *компенсаторами*.

¹ W. Nicol, Edinburgh, New Physic. J., т. 11 (1828), стр. 83.

Пусть ось z выбрана перпендикулярно к пластинке. Ось x и ось y отложим вдоль направлений колебаний (вектора \mathfrak{D}) принадлежащих этому направлению нормали. Затем вообразим себе пластинку так повернутой вокруг ее нормали, что оси x и y параллельны главным осям эллипса приходящих колебаний, так что последние представляются уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{D}_x^{(a)} &= a \cos \omega t, \\ \mathfrak{D}_y^{(a)} &= b \sin \omega t. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

После прохождения через пластинку возникает некоторое фазовое смещение вследствие различных скоростей обоих лучей. Вообще мы будем иметь эллипс колебаний:

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{D}_x^{(d)} &= a \cos (\omega t + \delta'), \\ \mathfrak{D}_y^{(d)} &= b \sin (\omega t + \delta''). \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

(причем потерей при отражении пренебрегаем). Если выходящий свет должен быть линейно поляризованным, то

$$\delta = \delta'' - \delta' = \pm \frac{\pi}{2}; \quad (3)$$

поэтому имеем:

$$\frac{\mathfrak{D}_y^{(a)}}{\mathfrak{D}_x^{(a)}} = \mp \frac{b}{a}. \quad (4)$$

Из (3) определяется толщина компенсирующей пластинки кристалла; так как согласно (9) § 6 главы I

$$\delta' = \frac{2\pi}{\lambda} n' d, \quad \delta'' = \frac{2\pi}{\lambda} n'' d, \quad (5)$$

где λ — длина волны в пустоте, так что

$$\delta = \delta'' - \delta' = \frac{2\pi d}{\lambda} (n'' - n'), \quad (6)$$

то условие линейной поляризации, $\delta = \pm \frac{\pi}{2}$, таким образом, дает:

$$d = \frac{\lambda}{4} \frac{1}{|n'' - n'|}. \quad (7)$$

а) Пластинка в четверть волны. Простейшим компенсатором является слюдяная пластинка выбранной согласно (7) толщины. Так как слюда одноосна (см. примечание 22 в конце книги), то n' и n'' обозначают здесь показатели преломления обыкновенного и необыкновенного лучей. Такой прибор называется *пластинкой в четверть волны*¹.

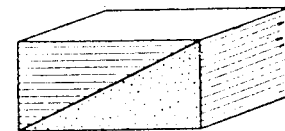
¹ G. B. Airy, Trans. Cambr. Phil. Soc., т. 4 (1838), стр. 313.

Она употребляется так: падающий эллиптически поляризованный свет вначале проходит через пластинку, затем через николю. Их поворачивают вокруг направления луча до тех пор, пока в поле зрения не наступит темнота. Это будет иметь место в том случае, если выполнены два условия: 1) направления колебаний в пластинке параллельны главным осям эллипса лучей; 2) направление колебаний николя перпендикулярно выходящему из пластинки линейно поляризованному лучу. Второе условие приводит к соотношению осей (4).

При употреблении этого прибора компенсация будет строгой только для одного цвета. Чтобы достичь этого для произвольной длины волны, необходимо сконструировать такой аппарат, который позволял бы плавно изменять толщину пластинки кристалла.

б) Компенсатор Бабинне. *Компенсатор Бабинне*¹ представляет собой прибор, дающий нулевую разность фаз в параллельном свете, заключающем все возможные разности фаз. Он состоит из двух клиньев (одноосного) кварца с равными острыми углами, которые устроены перемещающимися вдоль поверхности по гипотенузе, так что они образуют плоскопараллельную пластинку переменной толщины (фиг. 148).

При этом ребро одной половины параллельно, а другой — перпендикулярно к оптической оси. Разность хода лучей, прошедших через обе пластинки, равна:



$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda} (d_1 - d_2) (n_e - n_o), \quad (8) \quad \text{Фиг. 148. Компенсатор Бабинне.}$$

потому что когда луч, колеблющийся перпендикулярно к главной оси, является более быстрым, составляющая, колеблющаяся параллельно ребру клина, обгоняет другую составляющую в одном клине и замедляется по отношению к ней в другом. Для параллельного пучка света разность толщин $d_1 - d_2$ изменяется непрерывно и принимает в середине пластинки значение, равное нулю. Если позади компенсатора поместить николю, анализатор, то поле зрения будет прорезано темной полосой, проходящей параллельно ребрам клиньев.

Если падающие эллиптические колебания, отнесенные к ребру клина, как к оси x , заданы соотношениями:

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{D}_x^{(a)} &= a_1 \cos (\omega t + \delta_0'), \\ \mathfrak{D}_y^{(a)} &= a_2 \cos (\omega t + \delta_0'') \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

¹ J. Babinet, C. R., т. 29 (1849), стр. 514; см. также J. Jamin, Ann. d. Phys. et Chim. (3), т. 29 (1850), стр. 274; A. Bravais, Ann. Chim. Phys. (3), т. 43 (1855), стр. 142.

[см. (3) § 7 главы I; мы здесь, разумеется, ведем расчеты с вектором \mathfrak{D} вместо \mathfrak{E}], то выходящие колебания будут заданы уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{D}_x^{(d)} &= a_1 \cos(\omega t + \delta'), \\ \mathfrak{D}_y^{(d)} &= a_2 \cos(\omega t + \delta''), \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

где

$$\delta' = \delta'_0 + n_o \frac{2\pi}{\lambda} (d_1 - d_2),$$

$$\delta'' = \delta''_0 + n_e \frac{2\pi}{\lambda} (d_1 - d_2).$$

Условие, что выходящий свет линейно поляризован, $\delta'' = \delta' + \pi k$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$), дает, таким образом, для входящего света:

$$\delta_0 = \delta''_0 - \delta'_0 = \frac{2\pi}{\lambda} (n_e - n_o) (d_2 - d_1) + \pi k, \quad (11)$$

и направление выходящих линейных колебаний задается соотношением:

$$\frac{\mathfrak{D}_y^{(d)}}{\mathfrak{D}_x^{(d)}} = \pm \frac{a_2}{a_1}. \quad (12)$$

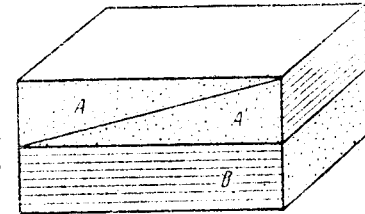
Представим себе теперь поляризующий николь (поляризатор) помещенным перед пластинкой, так что последняя будет облучаться линейно поляризованным светом. Тогда $\delta'_0 = \delta''_0$ и получающаяся благодаря анализатору (который скрещен с поляризатором) полоса расположена там, где правая часть (11) обращается в нуль. Это положение полосы обозначается как *нулевое положение*. Если мы теперь станем исследовать эллиптически поляризованный свет, то перемещение полосы относительно нулевого положения даст разность фаз $\delta''_0 - \delta'_0$ падающего света, а положение анализатора по (12) — отношение амплитуд параллельной и перпендикулярной к ребру клина составляющих.

Поэтому этот прибор позволяет определить разность фаз и отношение амплитуд падающего эллиптически поляризованного света. Отсюда можно согласно приведенным в главе I, § 7 формулам вычислить положение осей эллипса в падающем свете относительно ребра клина и отношение $\frac{b}{a}$ его главных осей.

с) Компенсатор Солейля. Часто бывает необходимо получить во всем поле зрения некоторую, наперед заданную разность фаз (например разность фаз, равную нулю). Этого достиг Солейль¹, сконструировавший следующий прибор. Два

¹ N. Soleil, C. R., т. 24 (1846), стр. 973; то же, т. 26 (1847), стр. 163; то же, т. 31 (1850), стр. 248; см. также A. Bravais C. R., т. 32 (1851), стр. 112; Ann. chim. phys. (3), т. 43 (1855), стр. 141.

кварцевых клина A, A' (фиг. 149), как и в компенсаторе Бабинне, накладываются друг на друга таким образом, что они образуют плоскопараллельную пластинку, однако, с той разницей, что теперь оптические оси *обоих* клиньев параллельны их ребрам. Нижний клин наклеен на плоскопараллельную пластинку B так, что ось кварца в B расположена перпендикулярно к ребру клина. Тогда действующая длина пути, очевидно, равна $d_B - (d_A - d_{A'})$. В нулевом положении, при котором эта разность обращается в нуль, поле зрения оказывается при соответствующем расположении анализатора совершенно темным. Перемещением верхнего клина можно изменять действующую разность фаз, так что всегда во всем поле зрения достигается одна и та же разность хода (см. примеч. 23).



Фиг. 149. Компенсатор Солейля.

§ 64. ИНТЕРФЕРЕНЦИЯ В КРИСТАЛЛИЧЕСКИХ ПЛАСТИНКАХ

Как мы уже говорили выше, положение оптических осей можно определить при помощи интерференции в плоскопараллельных пластинках. Возникающие при этом красивые интерференционные явления заслуживают также более тщательного изучения, так как они дают полное подтверждение френелевской кристаллооптики.

Мы рассмотрим сперва перпендикулярное прохождение через пластинку параллельного линейно поляризованного света. Свет, исходящий из точечного источника Q , превращается линзой L_1 в параллельный, проходит затем через поляризатор P , пластинку кристалла K , анализатор A и собирается линзой L_2 в точке изображения B фокальной плоскости. При вхождении в пластинку свет распадется на две составляющие, бегущие с разной скоростью; они параллельны направлениям колебаний, принадлежащих нормали к пластинке; эти составляющие выйдут из пластинки с некоторой разностью фаз. Анализатор приведет обе когерентные волны, различные по фазе, к одному направлению колебаний, и мы будем тогда наблюдать в B зависящую от разности фаз интенсивность света.

Чтобы рассмотреть имеющие место соотношения, воспользуемся пластинкой, параллельной плоскости чертежа. \mathfrak{D}' , \mathfrak{D}'' являются взаимно перпендикулярными направлениями колебаний в кристалле (фиг. 150). Пусть следы пропускаемых поляризатором и анализатором колебаний изображаются стрелками OP и OA . Угол между PO и \mathfrak{D}' назовем φ , а угол POA назовем χ .

Амплитуда падающего в пластинку кристалла света представлена вектором OE (параллельным OP) длины E . Его составляющие по осям \mathfrak{D}' , \mathfrak{D}'' равны:

$$OC = E \cos \varphi, \quad OD = E \sin \varphi. \quad (1)$$

Анализатор пропускает от каждого из этих колебаний только составляющую в своем направлении, т. е. от OC — проекцию OF , от OD — проекцию OG . Из фигуры видно, что:

$$OF = E \cos \varphi \cos(\varphi - \chi), \quad OG = E \sin \varphi \sin(\varphi - \chi). \quad (2)$$

Обе эти волны имеют при выходе из пластинки кристалла толщины d разность фаз:

$$\delta = \frac{2\pi d}{\lambda} (n'' - n'). \quad (3)$$

Согласно (8) и (13) § 34 главы III интенсивность двух интерферирующих волн равна:

$$J = J_1 + J_2 + 2\sqrt{J_1 J_2} \cos \delta, \quad (4)$$

где J_1, J_2 — интенсивности (квадраты амплитуд) отдельных волн.

Возьмем для них квадраты выражений (2); мы получим:

$$J = E^2 [\cos^2 \varphi \cos^2(\varphi - \chi) + \sin^2 \varphi \sin^2(\varphi - \chi) + 2 \sin \varphi \cos \varphi \cos(\varphi - \chi) \sin(\varphi - \chi) \cos \delta]. \quad (5)$$

С помощью формулы $\cos \delta = 1 - 2 \sin^2 \frac{\delta}{2}$ это выражение можно преобразовать так:

$$J = E^2 \left[\cos^2 \chi - \sin 2\varphi \sin 2(\varphi - \chi) \sin^2 \frac{\delta}{2} \right]. \quad (6)$$

Если бы пластинка кристалла отсутствовала ($\delta = 0$), то входящая из анализатора интенсивность была бы равна $J = E^2 \cos^2 \chi$. Второй член представляет влияние пластинки.

Мы рассмотрим теперь два важных частных случая:

1. $A \parallel P$, анализатор и поляризатор параллельны, $\chi = 0$. Тогда из (6) будет:

$$J_{\parallel} = E^2 \left[1 - \sin^2 2\varphi \sin^2 \frac{\delta}{2} \right]. \quad (7)$$

Максимальная интенсивность, следовательно, наступает для

$$\varphi = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \dots, \quad (8)$$

т. е. когда направление колебаний николя совпадает с направлением колебаний пластинки. Между тем места относительной темноты находятся там, где $\sin 2\varphi = \pm 1$, т. е. при

$$\varphi = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \dots \quad (9)$$

Интенсивность в минимуме равна:

$$J_{\parallel \min} = E^2 \left(1 - \sin^2 \frac{\delta}{2} \right) = E^2 \cos^2 \frac{\delta}{2}. \quad (10)$$

Таким образом минимумы являются совершенно темными при

$$\delta = \pi, 3\pi, 5\pi, \dots, \quad (11)$$

т. е. при наперед заданном одноцветном свете для определенной толщины пластинки.

2. $A \perp P$, анализатор и поляризатор скрещены, $\chi = \frac{\pi}{2}$.

Тогда согласно (6)

$$J_{\perp} = E^2 \sin^2 2\varphi \sin^2 \frac{\delta}{2}. \quad (12)$$

Сравнение с (7) показывает, что явление в случае $A \perp P$ оказывается в точности дополнительным к случаю $A \parallel P$.

Направления полной темноты параллельны направлениям колебаний в кристалле, т. е. при

$$\varphi = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \dots \quad (13)$$

Относительных максимумов получается при

$$\varphi = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \dots, \quad (14)$$

интенсивность их равна:

$$J_{\perp \max} = E^2 \sin^2 \frac{\delta}{2}. \quad (15)$$

Полную интенсивность мы имеем при

$$\delta = \pi, 3\pi, 5\pi, \dots \quad (16)$$

На практике эти явления используются для установления строго дополнительных цветов. Так как при этом поле зрения должно быть освещено в смысле цвета равномерно, то световой пучок должен быть достаточно строго параллельным, потому что иначе появится разность хода вследствие взаимного наклона лучей.

Если это условие не выполнено, то явление усложняется. Если, например, мы имеем в качестве источника света матово освещенный диск, то каждая его точка независимо вызывает в соответствующей точке плоскости изображения некоторую интенсивность. Поэтому мы видим в поле зрения некоторое распределение интенсивности, которое может быть описано кривыми равной освещенности; эти кривые, очевидно, распадаются

при этом на два типа: на кривые, которые обуславливаются *расположением главных колебаний кристалла* независимо от толщины пластинки — они называются *изогирами*, и кривые, зависящие от толщины пластинки, которые возникают вследствие того, что *лучи являются сходящимися*, — они называются *изохроматами*. Название вытекает из того, что фаза δ зависит согласно (3) от длины волны; таким образом в белом свете все лучи, для которых $\delta = \text{const}$, показывают один и тот же интерференционный цвет.

Достаточно рассмотреть случаи, когда анализатор и поляризатор либо параллельны, либо скрещены (прочие случаи дают менее ясно выраженные интерференционные фигуры, которые также легко могут быть выведены). Если мы ограничимся случаем $A \perp P$ (чего достаточно, так как случай $A \parallel P$ дает дополнительные явления), то при значительных размерах источника света в (12) как φ , так и δ являются функциями местоположения в поле зрения.

Полную темноту будем иметь вдоль двух систем кривых:

1. Главные *изогиры*, $\sin 2\varphi = 0$,

т. е. $\varphi = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$. Они разделяют поле зрения на такие поля,

в центре каждого из которых имеет место освещенность, тогда как на их границах царит полная темнота.

2. Главные *изохроматы*,

$\sin \frac{\delta}{2} = 0$, $\delta = 2\pi n$ ($n = 0, 1, \dots$).

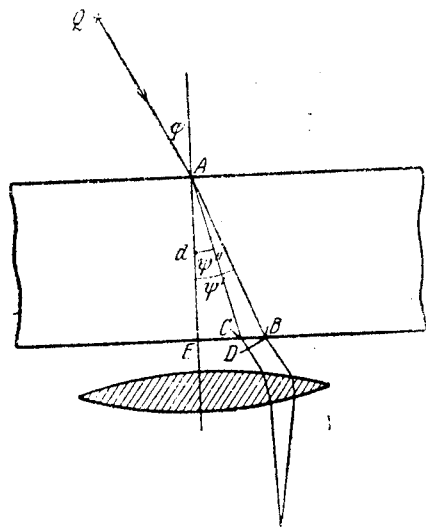
Они образуют более сложную систему кривых.

Обе системы кривых накладываются одна на другую, но ясно, что их можно рассматривать независимо.

Предварительно разберем случай, когда параллельный свет

падает косо на пластинку кристалла, и вычислим разность фаз δ как функцию угла падения φ . Падающий луч QA (фиг. 151) вследствие двойного лучепреломления распадается на два луча AB и AC с углами преломления ψ' и ψ'' и длинами волн λ' и λ'' . По выходе они оба будут параллельны друг другу и падающему лучу, а будучи спроектированы с помощью линзы в одну и ту же точку, вступят в интерференцию. Фиг. 151 показывает, что их разность фаз равна:

$$\delta = 2\pi \left(\frac{AC}{\lambda''} + \frac{CD}{\lambda} - \frac{AB}{\lambda'} \right). \quad (17)$$



Фиг. 151. Построение разности фаз между двумя колебаниями в пластинке кристалла.

Из фигуры следует, что

$$AB = \frac{d}{\cos \psi'}, \quad AC = \frac{d}{\cos \psi''}. \quad (18)$$

Если E — точка выхода проходящей через A нормали к пластинке, то

$$CD = BC \sin \varphi = (EB - EC) \sin \varphi = d \sin \varphi (\operatorname{tg} \psi' - \operatorname{tg} \psi''). \quad (19)$$

Подставляя (18) и (19) в (17), получим:

$$\delta = 2\pi d \left[\frac{1}{\cos \psi''} \left(\frac{1}{\lambda''} - \frac{\sin \varphi \sin \psi''}{\lambda} \right) - \frac{1}{\cos \psi'} \left(\frac{1}{\lambda'} - \frac{\sin \varphi \sin \psi'}{\lambda} \right) \right]. \quad (20)$$

Заменяя теперь согласно закону преломления $\frac{\sin \varphi}{\lambda}$ через $\frac{\sin \psi''}{\lambda''}$ в первых скобках и через $\frac{\sin \psi'}{\lambda'}$ во вторых, получим:

$$\delta = 2\pi d \left(\frac{\cos \psi''}{\lambda''} - \frac{\cos \psi'}{\lambda'} \right) = \frac{2\pi d}{\lambda} (n'' \cos \psi'' - n' \cos \psi'). \quad (21)$$

В дальнейшем нет необходимости иметь дело с этим точным выражением для разности фаз, потому что при двойном преломлении $n'' - n'$, а следовательно, также и угловое отклонение $\psi'' - \psi'$ чрезвычайно малы. Обозначая через n, ψ средние значения n', n'' и ψ', ψ'' , мы можем положить приближенно:

$$\begin{aligned} n'' \cos \psi'' - n' \cos \psi' &= \frac{d(n \cos \psi)}{dn} (n'' - n') = \\ &= \left(\cos \psi - n \sin \psi \frac{d\psi}{dn} \right) (n'' - n'). \end{aligned} \quad (22)$$

Продифференцировав закон преломления $\sin \varphi = n \sin \psi$ по n при постоянном φ , мы получим:

$$0 = \sin \psi + n \cos \psi \frac{d\psi}{dn};$$

таким образом

$$\frac{d\psi}{dn} = -\frac{1}{n} \operatorname{tg} \psi,$$

следовательно, из (22) приближенно имеем:

$$n'' \cos \psi'' - n' \cos \psi' = \frac{1}{\cos \psi} (n'' - n'). \quad (23)$$

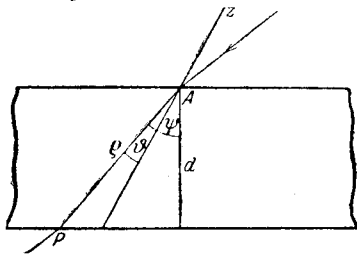
Поэтому мы имеем окончательно для разности фаз с достаточным приближением:

$$\delta = \frac{2\pi d}{\lambda \cos \psi} (n'' - n'). \quad (24)$$

§ 65. ИНТЕРФЕРЕНЦИОННЫЕ ФИГУРЫ В ПЛАСТИНКАХ ОДНООСНОГО КРИСТАЛЛА В СХОДЯЩЕМСЯ СВЕТЕ

Если кристалл освещается широким источником света, то на него падают плоские волны под всевозможными направлениями, наклоненными к нормали пластинки. Соответствующая установка показана на фиг. 151.

Для вычисления интерференции мы проводим из точки A на передней поверхности пластинки лучи, принадлежащие падающему пучку, и отмечаем их точки пересечения с задней поверхностью пластинки буквами B, B' . Тогда отрезками AB, AB', \dots полностью определяется разность фаз выходящего параллельного пучка и, следовательно, также интерференционные фигуры



Фиг. 152. К теории интерференционных фигур в пластинке кристалла.

в главной фокальной плоскости, поставленной сзади линзы. Интерференционные фигуры можно мыслить известным образом спроектированными на плоскость выхода. Если теперь мы желали бы узнать, что получается при различных толщинах пластинки, то плоскость выхода нужно параллельно переместить. Тогда след P выходящего луча задается координатами d, ψ , и разность фаз δ будет представлена согласно формуле (24) § 64

как функция d и ψ . При этом нужно заметить, что при произвольном положении оптической оси относительно пластинки кристалла $n'' - n'$ зависит также еще от ψ .

Таким образом, построив вокруг точки A поверхности $\delta(d, \psi) = \text{const}$ и пересекая их плоскостями $d = \text{const}$, мы получаем обзор всех возможных кривых равных разностей хода. Теперь имеет смысл ввести в качестве координат вместо d и ψ расстояние $\rho = d/\cos \psi$ от A и угол наклона ϑ по отношению к (проходящей через A) оптической оси; ρ и ϑ таким образом являются обычными полярными координатами относительно оптической оси (фиг. 152). Пересчет производится так. Для одноосного кристалла обе световые скорости в направлении ϑ относительно оптической оси задаются согласно (4) § 61 соотношениями:

$$c_n'^2 = c_0^2, \quad c_n''^2 = c_0^2 \cos^2 \vartheta + c_e^2 \sin^2 \vartheta. \quad (1)$$

Мы положим приближенно:

$$c_n'^2 - c_n''^2 = \frac{d(c_n'^2)}{dn} (n' - n''). \quad (2)$$

Теперь, однако, согласно определению (25) § 58 $c_n = \frac{c}{n}$;

таким образом:

$$\frac{d(c_n'^2)}{dn} = -\frac{2c^2}{n^3},$$

т. е.

$$c_n'^2 - c_n''^2 = -\frac{2c^2(n' - n'')}{n^3}. \quad (3)$$

Если мы в (3) подставим соответствующие значения из (1), то получим:

$$n' - n'' = \frac{n^3}{2c^2} (c_n'^2 - c_n''^2) = \frac{n^3}{2c^2} (c_e^2 - c_0^2) \sin^2 \vartheta. \quad (4)$$

Если мы введем вместо c_0 и c_e главные показатели преломления $n_0 = \frac{c}{c_0}$, $n_e = \frac{c}{c_e}$ и приближенно заменим $n_0^2 n_e^2$ через n^4 , а $n_0 + n_e$ через $2n$, то будем иметь:

$$c_e^2 - c_0^2 = c^2 \left(\frac{1}{n_e^2} - \frac{1}{n_0^2} \right) = c^2 \frac{n_0^2 - n_e^2}{n_0^2 n_e^2} = \frac{2c^2}{n^3} (n_0 - n_e). \quad (5)$$

Для разности фаз из (24) § 64 и (4), (5) § 65, мы получаем окончательно:

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda} (n_e - n_0) \cdot \rho \sin^2 \vartheta. \quad (6)$$

Поверхности равной разности хода, задаваемые уравнением

$$\rho \sin^2 \vartheta = C, \quad (7)$$

являются поверхностями вращения вокруг оптической оси кристалла. Их меридианная кривая, представляемая (7), будет четвертой степени; положим

$$x = \rho \sin \vartheta, \quad z = \rho \cos \vartheta;$$

тогда ее уравнение гласит:

$$x^4 = C^2 (x^2 + z^2). \quad (8)$$

Обсудим вкратце форму меридианной кривой. Константа C представляет значение ρ для $\vartheta = \frac{\pi}{2}$, т. е. в направлении оси

x ; очевидно C есть наименьшее значение, которое может принимать ρ . Для $\vartheta \rightarrow 0$ $\rho \rightarrow \infty$. Для очень больших значений z ($x^2 \ll z^2$) меридианная кривая ведет себя почти как парабола с уравнением $z = \frac{x^2}{C}$; вблизи оси x можно написать:

$$\frac{x^4}{x^2 + z^2} = \frac{x^2}{1 + \frac{z^2}{x^2}} = x^2 \left(1 - \frac{z^2}{x^2} + \dots \right) = C^2. \quad (9)$$

Таким образом там поверхность ведет себя как гипербола $x^2 - z^2 = C^2$. На фиг. 153 изображена меридианная кривая с соответствующими параболой и гиперболой.

Пересекая описанное выше семейство поверхностей какой-либо плоскостью на расстоянии d от начала координат (от задней плоскости кристаллической пластинки), получим теперь все возможные интерференционные кривые, возникающие при различном наклоне падающих лучей, *изохроматы*. Фиг. 153 непосредственно показывает, что в зависимости от наклона этой плоскости относительно плоскости, нормальной к оптической оси, возникают в сечении различные фигуры.

Если нормаль к пластинке лишь немного наклонена относительно оптической оси, то это будут замкнутые эллипсоподобные кривые; если наклон очень велик, это будут незамкнутые кривые гиперболического типа. В то же время существует предельный случай параболического типа.

Выразим это приближение при помощи формул. С этой целью мы введем наряду с относящейся к оптической оси координатной системой x, y, z систему X, Y, Z , неподвижно связанную с пластинкой кристалла, причем ось Z совпадает с нормалью к пластинке в точке A , а плоскость XZ содержит нормаль

к пластинке и оптическую ось; мы кратко назовем эту плоскость „главным сечением“ (для луча, идущего нормально к пластинке, см. § 61). Пусть между оптической осью и осью Z будет угол α . Полярные координаты произвольной точки Q , лежащей на поверхности единичного шара вокруг A , отнесенные к оси Z и к главному сечению (плоскости XZ) суть ψ и γ , где ψ — введенный уже „угол преломления“, а γ — соответствующий азимут.

На фиг. 154 представлена проекция единичного шара с тремя точками пересечения с прямыми Z, N, Q , и в сферическом треугольнике ZNQ отмечены углы. Очевидно, что

$$\cos \theta = \cos \alpha \cdot \cos \psi + \sin \alpha \cdot \sin \psi \cdot \cos \gamma$$

отсюда следует:

$$\left. \begin{aligned} \sin^2 \theta &= 1 - \cos^2 \alpha \cdot \cos^2 \psi - \sin^2 \alpha \sin^2 \psi \cos^2 \gamma - \\ &- \sin 2\alpha \sin \psi \cos \psi \cos \gamma = \sin^2 \alpha + \sin^2 \psi (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \cos^2 \gamma) - \\ &- \sin 2\alpha \sin \psi \cos \psi \cos \gamma. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Таким образом из (6) будем иметь:

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda} (n_e - n_o) \left[\rho \sin^2 \alpha + \rho \sin^2 \psi (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \cos^2 \gamma) - \right. \quad (11) \\ \left. - \rho \sin 2\alpha \sin \psi \cos \psi \cos \gamma \right].$$

Введем теперь прямоугольные координаты:

$$\left. \begin{aligned} X &= \rho \sin \psi \cos \gamma, \\ Y &= \rho \sin \psi \sin \gamma, \\ Z &= \rho \cos \psi = d \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

и ограничимся рассмотрением случая малого поля зрения, т. е. малыми значениями ψ . Тогда мы можем во втором члене формулы (11), который благодаря множителю $\sin^2 \psi$ является малым, заменить ρ через d . Однако в первый член мы должны подставить:

$$\rho = \sqrt{X^2 + Y^2 + d^2} = d \left(1 + \frac{X^2 + Y^2}{2d^2} + \dots \right) \quad (13)$$

Тогда мы получим:

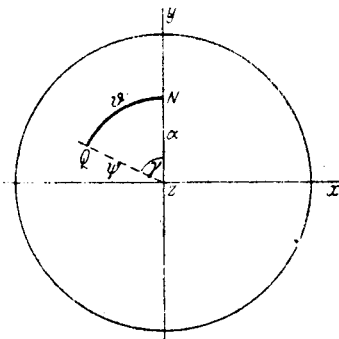
$$\left. \begin{aligned} \delta &= \frac{2\pi}{d \cdot \lambda} (n_e - n_o) \left[\left(d^2 + \frac{1}{2} X^2 + \frac{1}{2} Y^2 \right) \sin^2 \alpha + \right. \\ &+ (X^2 + Y^2) \cos^2 \alpha - X^2 \sin^2 \alpha - Xd \sin 2\alpha \left. \right] = \\ &= \frac{2\pi}{d \cdot \lambda} (n_e - n_o) \left[X^2 \left(\cos^2 \alpha - \frac{1}{2} \sin^2 \alpha \right) + \right. \\ &+ Y^2 \left(\cos^2 \alpha + \frac{1}{2} \sin^2 \alpha \right) - Xd \sin 2\alpha + d^2 \sin^2 \alpha \left. \right]. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Кривые постоянной разности фаз, *изохроматы*, задаются, таким образом, соотношением:

$$X^2 \left(\cos^2 \alpha - \frac{1}{2} \sin^2 \alpha \right) + Y^2 \left(\cos^2 \alpha + \frac{1}{2} \sin^2 \alpha \right) - Xd \sin 2\alpha = \text{const.} \quad (15)$$

Это уравнение конического сечения. Так как коэффициент при Y^2 всегда положителен, тогда как при X^2 может иметь произвольный знак, мы получаем три случая:

$$\left. \begin{aligned} \text{эллипс:} & \quad \text{tg } \alpha < \sqrt{2}, & \alpha < 54^\circ 44'. \\ \text{парабола:} & \quad \text{tg } \alpha = \sqrt{2}, & \alpha = 54^\circ 44'. \\ \text{гипербола:} & \quad \text{tg } \alpha > \sqrt{2}, & \alpha > 54^\circ 44'. \end{aligned} \right\}$$



Фиг. 154. К теории интерференционных фигур в кристаллических пластинках.

Если, в частности, $\alpha=0$ (оптическая ось перпендикулярна к пластинке), то, естественно, будут иметь место изохроматические круги вокруг оси.

В случае эллипса большая ось всегда расположена параллельно главному сечению, и отношение осей задается выражением $\sqrt{\frac{2-\operatorname{tg}^2 \alpha}{2+\operatorname{tg}^2 \alpha}}$. Вследствие наличия линейного члена центр сдвинут в положительном направлении оси X на $d \frac{\operatorname{tg} \alpha}{2-\operatorname{tg}^2 \alpha}$.

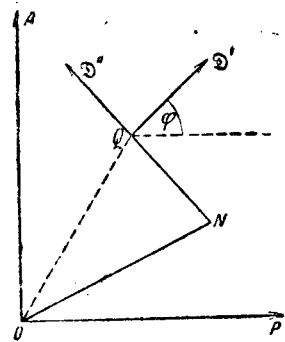
Для гиперболы угол асимптоты относительно главного сечения задается выражением $\arctg \sqrt{\frac{\operatorname{tg}^2 \alpha - 2}{\operatorname{tg}^2 \alpha + 2}}$. Ее центр лежит на оси X на расстоянии $d \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg}^2 \alpha - 2}$ от центра поля зрения.

В случае, если пластинка кристалла рассматривается при скрещенных николях, мы имеем для интенсивности согласно (12)

$$J = E^2 \sin^2 2\varphi \cdot \sin^2 \frac{\delta}{2}. \quad (16)$$

Мы получим *главные изохроматы* согласно (16), полагая в (14) $\delta = 2\pi k$ ($k=0, \pm 1, \dots$); таким образом согласно (6) и (7)

$$C = \frac{k\lambda}{n_e - n_o}. \quad (17)$$



Фиг. 155. Расположение направлений колебаний после прохождения света через пластинку кристалла.

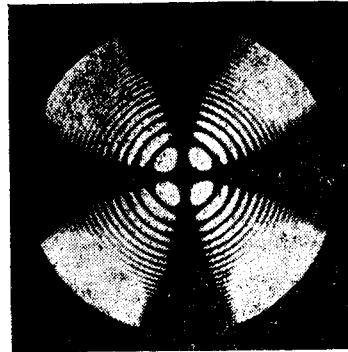
Главные изогирь, $\sin 2\varphi = 0$, имеют в случае одноосного кристалла форму темного размытого креста, стороны которого параллельны направлениям поляризатора и анализатора и центром которого является след N оптической оси; так как мы рассматриваем какую-нибудь точку Q поля зрения, то след главного сечения лежит на линии соединения QN . В нем лежит одно из двух принадлежащих Q направлений световых колебаний, тогда как другое расположено перпендикулярно к нему; угол φ между одним из направлений колебаний и поляризатором, таким образом, всегда отличается от $0, \frac{\pi}{2}, \pi$,

$\frac{3\pi}{2}$, за исключением случая, когда линия соединения NQ параллельна OA или OP (фиг. 155). Последние являются, таким образом, направлениями гашения, и между ними лежат максимумы множителя $\sin^2 2\varphi$.

Эти явления, выведенные здесь теоретически, полностью подтверждаются на опыте (фиг. 156).

Интерференционные фигуры в плоскопараллельных пластинках имеют важное практическое применение при устройстве так называемых *полярископов*, т. е. инструментов, позволяющих показывать с большой чувствительностью наличие поляризованного света. В качестве примера рассмотрим так называемую *пластинку Савара*¹.

Две пластинки равной толщины и одинакового кристалла вырезаны так, что угол α оптической оси с нормалью один и тот же в них обеих; затем они так наложены одна на другую, что главные сечения (плоскости, проходящие через нормали и оси) расположены взаимно перпендикулярно. Тогда направления колебаний в обеих пластинках совпадают „крест на крест“, т. е. направление колебания обыкновенной волны в одной пластинке совпадает с необыкновенной волной в другой пластинке. Разности ходов поэтому вычитаются. Мы получим результирующую разность хода, переставляя в формуле (14) X с $-Y$ и вычитая полученное выражение из первоначального. Тогда мы будем иметь:



Фиг. 156. Пластинка известкового шпата, перпендикулярная к оптической оси в натровом свете между скрещенными николями (по Hauswaldt'у: interferenzerscheinungen an doppelbrechenden Kristallplatten, im konvergluten polarisierten Licht. Magdeburg 1902).

$$\Delta = \frac{2\pi}{d \cdot \lambda} (n_e - n_o) [(Y^2 - X^2) \sin^2 \alpha + (Y - X) d \sin 2\alpha]. \quad (18)$$

Кривые $\Delta = \text{const}$ представляют семейство равнобоких гипербол, асимптоты которых параллельны линиям, делящим пополам оба главных сечения. След O нормали к пластинке находится на одной из асимптот на расстоянии $-d \operatorname{ctg} \alpha$ от центра M гиперболы. Если α сделать достаточно сильно отличающимся от 90° , то эксцентриситет центральной точки M становится так велик, что кривые постоянной разности фаз в поле зрения (вокруг O) оказываются равноотстоящими прямыми, которые параллельны прямым, равноделящим углы главных сечений. Они лежат тем теснее, чем α ближе к $\frac{\pi}{4}$.

Это приспособление применяется для определения поляризованной части в некотором световом луче. Анализатор устанавливают неподвижно под углом в 45° к главным сечениям

¹ F. Savart, Pogg. Ann., т. 49 (1840), стр. 292.

(оптическая ось — нормаль к пластинке), которые теперь практически совпадают с направлениями колебаний в кристалле; таким образом в формулу (6) § 64 подставляют $\varphi - \chi = \frac{\pi}{4}$.

Тогда будет:

$$J = E^2 \left(\cos^2 \chi - \cos 2\chi \sin^2 \frac{\delta}{2} \right), \quad (19)$$

χ здесь обозначает направление колебаний линейно поляризованной части в падающем пучке света (фиг. 150, стр. 330). Минимум J при переменном δ имеет значение $E^2(\cos^2 \chi - \cos 2\chi) = E^2 \sin^2 \chi$; таким образом видны размытые интерференционные полосы. Лишь вращая пластинку кристалла и неподвижно связанный с нею николь вокруг нормали к пластинке, находят положение, для которого $\sin \chi = 0$, т. е. $J = E^2 \cos^2 \frac{\delta}{2}$. Это, очевидно,

положение наиболее резкой интерференционной кривой.

Если к поляризованному свету примешивается неполяризованный, то получается непрерывный фон; однако самые интерференционные полосы еще можно распознать при очень слабой степени поляризации. Пластинка Савара является одним из чувствительнейших реагентов на наличие поляризации.

§ 66. ИНТЕРФЕРЕНЦИОННЫЕ ФИГУРЫ В ПЛАСТИНКАХ ИЗ ОПТИЧЕСКИ ДВУОСНЫХ КРИСТАЛЛОВ

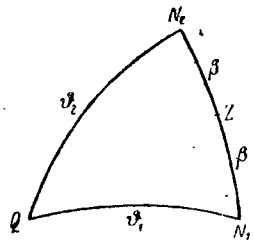
Здесь мы снова обращаемся к формуле (24) § 64:

$$\delta = \frac{2\pi\rho}{\lambda} (n'' - n') \quad (1)$$

и должны связать двойное преломление $n'' - n'$ с координатами следа луча в плоскости выхода. Согласно (4) § 62 мы имеем:

$$c_n'^2 - c_n'^2 = \sqrt{D}, \quad (2)$$

где D — дискриминант уравнения Френеля, данный формулами (5) или (7) § 62. Уравнение (2) можно выразить через геометрически наглядные величины, подлежащие определению, именно через углы ϑ_1, ϑ_2 , образуемые волновой нормалью \mathbf{s} в кристалле с обеими осями нормалей N_1, N_2 . Построим на единичном шаре вокруг точки входа сферический треугольник $N_1 N_2 Q$ (фиг. 157), где Q — точка встречи с волновой нормалью \mathbf{s} , и введем, как в § 62, прямоугольную систему координат. При этом ось z окажется в плоскости оптических осей и будет делить углы между ними пополам. Ее называют также *первой оптической биссектрисой* и, соответственно,



Фиг. 157. К геометрическому толкованию дискриминанта уравнения Френеля.

и введем, как в § 62, прямоугольную систему координат. При этом ось z окажется в плоскости оптических осей и будет делить углы между ними пополам. Ее называют также *первой оптической биссектрисой* и, соответственно,

ось x — *второй оптической биссектрисой*. Тогда след Z оси z делит пополам дугу $N_1 N_2$, и угол $N_1 Z$ или угол $N_2 Z$ обозначается, как и ранее в § 62, через β .

Согласно (12) § 62 будет:

$$\operatorname{tg} \beta = \sqrt{\frac{c_x^2 - c_y^2}{c_y^2 - c_z^2}}, \quad (c_x > c_y > c_z). \quad (3)$$

Далее будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} \cos \vartheta_1 &= \mathbf{s}_x \sin \beta + \mathbf{s}_z \cos \beta, \\ \cos \vartheta_2 &= -\mathbf{s}_x \sin \beta + \mathbf{s}_z \cos \beta. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Но

$$\left. \begin{aligned} \sin \beta &= \frac{\operatorname{tg} \beta}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \beta}} = \sqrt{\frac{c_x^2 - c_y^2}{c_x^2 - c_z^2}}, \\ \cos \beta &= \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \beta}} = \sqrt{\frac{c_y^2 - c_z^2}{c_x^2 - c_z^2}}. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Отсюда следует:

$$\begin{aligned} \sin^2 \vartheta_{1,2} &= 1 - \cos^2 \vartheta_{1,2} = \\ &= \frac{1}{c_x^2 - c_z^2} \left[(c_x^2 - c_z^2)(\mathbf{s}_x^2 + \mathbf{s}_y^2 + \mathbf{s}_z^2) - \mathbf{s}_x^2(c_x^2 - c_y^2) - \mathbf{s}_z^2(c_y^2 - c_z^2) \pm \right. \\ &\quad \left. \pm \mathbf{s}_x \mathbf{s}_z \sqrt{(c_x^2 - c_y^2)(c_y^2 - c_z^2)} \right]. \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь можно ввести определенные в (6) § 62 величины ξ, η, ζ ; мы получим:

$$\sin^2 \vartheta_{1,2} = \frac{1}{c_x^2 - c_z^2} (\xi - \eta + \zeta \pm 2\sqrt{\xi\zeta}). \quad (7)$$

Перемножив оба уравнения, заключающиеся в (7), получаем:

$$\sin^2 \vartheta_1 \sin^2 \vartheta_2 = \frac{1}{(c_x^2 - c_z^2)^2} (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 - 2\eta\zeta - 2\xi\zeta - 2\xi\eta) = \frac{D}{(c_x^2 - c_z^2)^2}. \quad (8)$$

Сравнивая это уравнение с (2), получим:

$$c_n'^2 - c_n'^2 = \sin \vartheta_1 \sin \vartheta_2 (c_x^2 - c_z^2). \quad (9)$$

Однако, как было показано выше [(3) § 65]:

$$c_n'^2 - c_n'^2 = \frac{2c^2}{n^3} (n'' - n') \quad (10)$$

и точно так же для $n_x = \frac{c}{c_x}, \dots$

$$c_x^2 - c_z^2 = \frac{2c^2}{n^3} (n_x - n_z). \quad (11)$$

Таким образом

$$n'' - n' = \sin \vartheta_1 \sin \vartheta_2 (n_x - n_z), \quad (12)$$

и разность фаз согласно (1) равна:

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda} (n_z - n_x) \rho \sin \vartheta_1 \sin \vartheta_2 \quad (13)$$

это формула, аналогичная (6) § 65 и переходящая в нее, если оси совпадают.

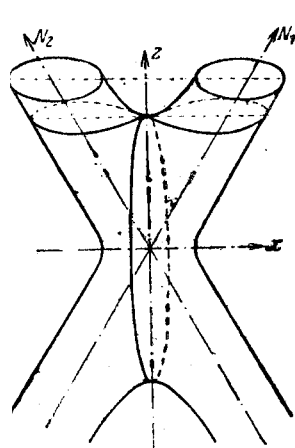
Теперь уже легко наглядно себе представить поверхности равной разности хода.

Чтобы рассмотреть их, напомним уравнение (13) для постоянной δ в форме:

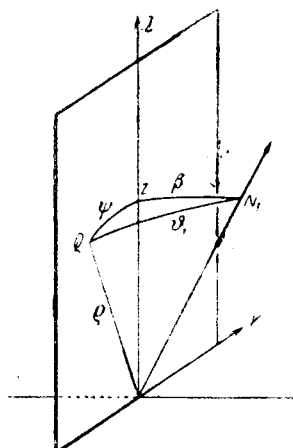
$$\rho \sin \vartheta_1 \sin \vartheta_2 = \text{const} = \rho_0. \quad (14)$$

В направлении оптической оси ($\vartheta_1 = 0$ или $\vartheta_2 = 0$), $\rho \rightarrow \infty$, т. е. оптические оси являются асимптотами наших поверхностей (фиг. 158). Для $\vartheta_1 \rightarrow 0$ мы можем ϑ_2 заменить через 2β , т. е. через угол между осями нормалей, и получим:

$$\rho \sin \vartheta_1 \rightarrow \frac{\rho_0}{\sin 2\beta}. \quad (15)$$



Фиг. 158. Поверхность постоянной разности фаз оптически двуосного кристалла.



Фиг. 159. К теории оптически двуосных кристаллов.

Но $\rho \sin \vartheta_1$ есть расстояние точки поверхности от нормалей N_1 ; следовательно, уравнение (15) представляет круговой цилиндр. На большом расстоянии поверхность в окрестности оптической оси ведет себя как круговой цилиндр, коаксиальный с нею.

Координатные плоскости являются, очевидно, плоскостями симметрии поверхности. Определим фигуры сечения поверхности этими плоскостями симметрии.

1. $x = 0$. $\vartheta_1 = \vartheta_2$ для точки поверхности в плоскости yz . Из сферического треугольника QN_1Z (фиг. 159), который имеет прямой угол при Z , следует:

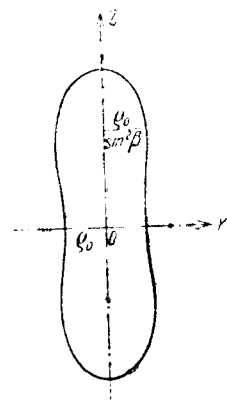
$$\cos \vartheta_1 = \cos \vartheta_2 = \cos \psi \cos \beta,$$

так что согласно (14) уравнение кривой сечения имеет такой вид:

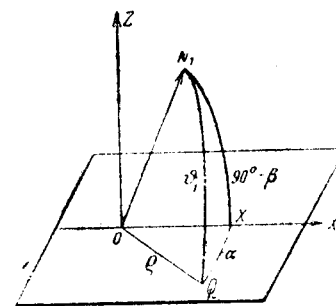
$$\rho = \frac{\rho_0}{1 - \cos^2 \beta \cos^2 \psi}. \quad (16)$$

Минимум или максимум ρ достигается при $\cos \psi = 0$ или $\cos \psi = 1$. Таким образом наша кривая является замкнутой овалоподобной кривой с полуосями ρ_0 и $\rho_0 / \sin^2 \beta$ (фиг. 160).

2. $z = 0$. В этом случае $\vartheta_2 = \pi - \vartheta_1$. Из сферического треугольника N_1QX (фиг. 161) следует:



Фиг. 160. Кривая сечения поверхности фиг. 158 плоскостью yz .

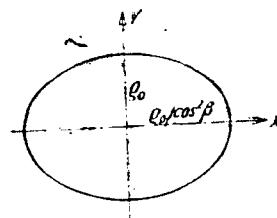


Фиг. 161. К теории оптически двуосных кристаллов.

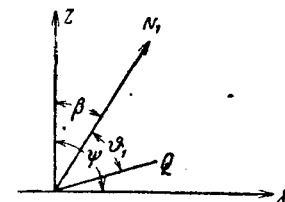
$$\cos^2 \vartheta_1 = \cos^2 \alpha \sin^2 \beta,$$

причем α есть угол между ρ и X . Мы, следовательно, получаем из (14):

$$\rho = \frac{\rho_0}{\sin^2 \vartheta_1} = \frac{\rho_0}{1 - \cos^2 \alpha \sin^2 \beta}. \quad (17)$$



Фиг. 162. Кривая сечения поверхности фиг. 158 плоскостью xy .



Фиг. 163. К теории оптически двуосных кристаллов.

Кривой сечения опять является овал (фиг. 162) с осями ρ и $\rho_0 / \cos^2 \beta$.

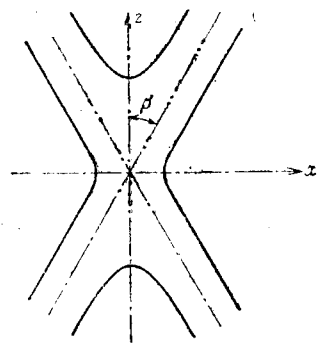
3. $y = 0$. Здесь (фиг. 163)

$$\vartheta_1 = \psi - \beta, \quad \vartheta_2 = \psi + \beta,$$

так что из (14) следует:

$$\rho = \frac{\rho_0}{\sin(\psi + \beta) \sin(\psi - \beta)} = \frac{\rho_0}{\sin^2 \psi \cos^2 \beta - \cos^2 \psi \sin^2 \beta} = \frac{\rho_0}{\sin^2 \psi - \sin^2 \beta} \quad (18)$$

Кривая сечения составляется из четырех гиперболоподобных ветвей, асимптотами которых являются прямые $\psi = \beta$, $\psi = \pi - \beta$ (фиг. 164).



Фиг. 164. Кривая сечения поверхности фиг. 158 плоскостью xz .

4. Рассмотрим еще фигуры сечения плоскостями, перпендикулярными к оси z . Соответственно расстоянию a плоскости от начала координат мы должны рассмотреть три случая (фиг. 158).

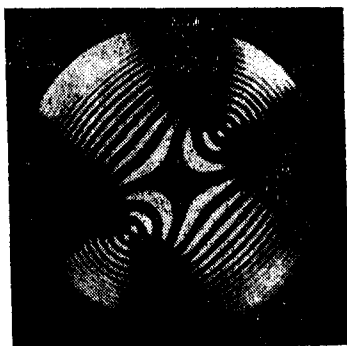
а) $a < \rho_0 / \sin^2 \beta$. Этот случай эквивалентен случаю 2; фигура сечения замкнута и овалоподобна.

б) $a = \rho_0 / \sin^2 \beta$. Кривой сечения является кривая типа лемнискаты.

с) $a > \rho_0 / \sin^2 \beta$. Кривая сечения состоит из двух овалов, расположенных симметрично относительно оси z , которые при возрастающем a переходят в эллипсы.

Рассмотренные в последнем случае фигуры, очевидно, являются *изохроматами*, если, пластинку кристалла вырезать перпендикулярно к первой биссектрисе (оси z) и рассматривать между скрещенными николями. Наблюдение полностью подтверждает теоретические результаты (фиг. 165). На произведенных Гаусвальдом (Hauswaldt) фотографиях, помимо изохромат, видны еще *изогир*ы положение которых рассмотрим теперь еще теоретически. Мы здесь рассмотрим только два важных частных случая, а именно:

Первое главное положение плоскости оптических осей совпадает с плоскостью колебаний, пропускаемых поляризатором (фиг. 166). Здесь изогир имеют форму темного креста, стороны которого параллельны направлениям поляризатора и анализатора. Чтобы показать это, напомним доказанную в § 60 теорему, согласно которой направления главных колебаний H_1 — H_2 в некоторой точке Q лежат в плоскости

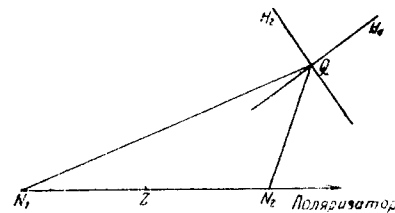


Фиг. 165. Пластинка арагонита, перпендикулярная к первой биссектрисе в натровом свете между скрещенными николями. (По Hauswaldt'y: Interferenzerscheinungen an doppelbrechenden Kristallplatten im konvergenten Licht. Magdeburg, 1902).

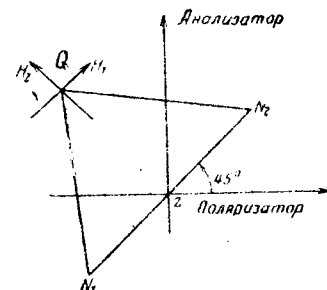
делящей пополам угол между плоскостями QN_1 , QN_2 . На фиг. 166 мы видим непосредственно, что направления колебаний только тогда совпадают с направлением расположения поляризатора и анализатора, когда точка Q расположена на линии соединения точек N_1 , N_2 или на проходящем через центральную точку Z перпендикуляре.

Если при закрепленном николе повернуть пластинку кристалла в ее плоскости, то следы осей и охватывающая их система изохромат повернутся вместе с нею, тогда как положение изогир зависит от расположения пластинки относительно николя.

Второе главное положение (диагональное расположение). Плоскость осей повернута на 45° относительно направления поляризатора. Направления колебаний в некоторой точке Q при достаточно малом поле зрения (где фигура из дуг круга 157 совпадает с нашей плоскостью фиг. 167) опять оказываются равноделящими угол N_1QN_2 (фиг. 167). Изогир суть геометрические места таких точек Q , для которых главные колебания параллельны „ P — A —кресту“. Мы утверждаем, что это равнобочные гиперболы, вершины которых лежат в точках N_1 , N_2 и асимптотами которых служат направления A и P .



Фиг. 166. Построение изогир в первом главном положении.



Фиг. 167. Построение изогир во втором главном положении.

Для этого докажем, что для всякой равнобочной гиперболы прямая, проходящая через точку кривой Q параллельно асимптоте, делит пополам угол N_1PN_2 , если N_1 , N_2 являются вершинами (фиг. 168). Выберем асимптоты за оси координат x , y и проведем через Q прямую QR , параллельную оси y . Обозначим, далее, угол N_1QR через α_1 , а угол N_2QR через α_2 ; наше утверждение гласит: $\alpha_1 = \alpha_2$.

Координаты вершин будут для N_1 — $x = y = p$, для N_2 — $x = -y = -p$. В таком случае уравнение гиперболы гласит: $xy = p^2$. Из фигуры следует:

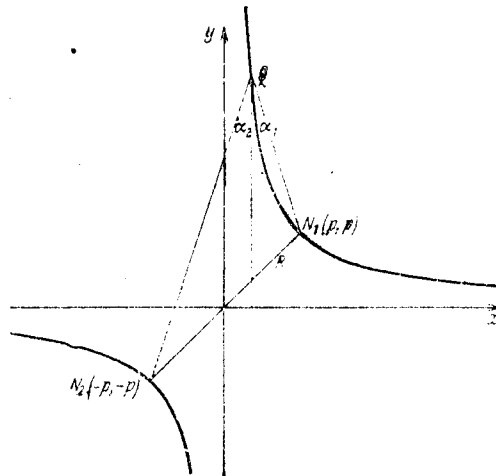
$$\cos \alpha_1 = \frac{y - p}{\sqrt{(x - p)^2 + (y - p)^2}},$$

$$\cos \alpha_2 = \frac{y + p}{\sqrt{(x + p)^2 + (y + p)^2}}.$$

Образует выражение:

$$\frac{1}{\cos^2 \alpha_1} - \frac{1}{\cos^2 \alpha_2} = \frac{(x-p)^2 (y+p)^2 - (x+p)^2 (y-p)^2}{(y-p)^2 (y+p)^2}.$$

Числитель здесь обращается в нуль на основании уравнения гиперболы. Следовательно, $\cos \alpha_1 = \cos \alpha_2$, откуда и вытекает наше утверждение. В приведенной на фиг. 165 фотографии явления этот результат подтверждается изограми, которые при этом кажутся расширяющимися темными полосами с гиперболообразной средней линией.



Фиг. 168. К доказательству теоремы, что изогри являются гиперболами.

В случае более общего положения кристалла мы вдаваться не будем. Задача сводится к чисто геометрической задаче.

Косые положения средней линии относительно нормали к пластинке приводят к тому, что осевые точки N_1, N_2 располагаются эксцентрично, и окружающие фигуры изохромат оказываются соответственно искаженными. Расположение обоих скрещенных николей в других направлениях относительно линии соединения осей N_1, N_2 обуславливает постепенный переход изогир от формы креста к форме гипербол. Наконец, если изменить расположение николей одного относительно другого, то возникнут дальнейшие усложнения, не имеющие, однако, принципиального интереса.

Выведенные и описанные здесь очень красивые интерференционные фигуры часто используются в минералогии для определения положения оптических осей и образованных ими углов. Для этого достаточно самых крохотных обломков кристалла, как например, кристалликов минерала, входящего в состав горной породы, из которой сделан шлиф, если их рассматривать в микроскоп, снабженный двумя николями — *поляризационный микроскоп*.

Глава шестая

МЕТАЛЛООПТИКА

§ 67. РАСПРОСТРАНЕНИЕ ПЛОСКИХ ВОЛН В ПРОВОДЯЩЕМ ВЕЩЕСТВЕ

Откажемся теперь от предположения, что проводимость σ рассматриваемого тела является исчезающе малой. Так как наличие *проводимости* связано с появлением *джоулева тепла*, то в проводящих телах должно уничтожаться некоторое переменное электромагнитное поле, и его энергия должна переходить в тепло. Это лежит в основе того, что *металлы* (характеризуемые значительной электрической проводимостью) в сколь угодно заметных слоях являются непроницаемыми, *непрозрачными* для световых волн.

Несмотря на это металлы играют в оптике большую роль, именно благодаря своей способности интенсивно отражать свет, свойству, которое, естественно, тесно связано с высокой поглощательной способностью металлов. Поэтому, хотя мы и не можем видеть сквозь металл, мы можем все же, наблюдая отражаемый им свет, в него до известной степени заглядывать и таким образом получать сведения о механизме поглощения в нем света.

Мы будем исходить из уравнений Максвелла, содержащих член с током. Если мы в них положим согласно (7) главы I, § 1, $i = \sigma \mathcal{E}$, $\mathcal{D} = \epsilon \mathcal{E}$, $\mathcal{B} = \mathcal{H}$ (немагнитное вещество) при постоянных ϵ и σ , то они будут иметь такой вид:

$$\left. \begin{aligned} \text{rot } \mathcal{H} - \frac{\epsilon}{c} \dot{\mathcal{E}} &= \frac{4\pi\sigma}{c} \mathcal{E}, & (a) & \left| \text{div } \mathcal{E} = \frac{4\pi}{\epsilon} \rho, & (c) \right. \\ \text{rot } \mathcal{E} + \frac{1}{c} \dot{\mathcal{H}} &= 0, & (b) & \left| \text{div } \mathcal{H} = 0. & (d) \right. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Легко видеть, что для таких электромагнитных возмущений, которые падают на проводник извне, можно положить $\text{div } \mathcal{E} = 0$. Из (1a) путем образования дивергенций получается:

$$\frac{\epsilon}{c} \frac{d}{dt} \text{div } \mathcal{E} + \frac{4\pi\sigma}{c} \text{div } \mathcal{E} = 0 \quad (2)$$

или согласно (1c):

$$\dot{\rho} + \frac{4\pi\sigma}{\epsilon} \rho = 0. \quad (3)$$

Отсюда, интегрируя по времени, имеем:

$$\rho = \rho_0 e^{-\frac{t}{\vartheta}}, \quad \vartheta = \frac{\varepsilon}{4\pi\sigma}. \quad (4)$$

Таким образом плотность заряда убывает по экспоненциальному закону со „временем релаксации“ ϑ . Если в какое-либо время поле внутри проводника, а значит и плотность заряда равны нулю, то она будет оставаться равной нулю все время. Следовательно, мы можем согласно (1с) принять, что

$$\operatorname{div} \mathfrak{E} = 0. \quad (1f)$$

Из (1a, b) исключением \mathfrak{H} с помощью (1f) получаем уравнение:

$$\Delta \mathfrak{E} = \frac{\varepsilon}{c^2} \mathfrak{E} + \frac{4\pi\sigma}{c^2} \mathfrak{E}. \quad (5)$$

Присутствие члена с \mathfrak{E} означает наличие затухания.

Теперь уравнения (1) и (5) для волны с циклической частотой ω можно написать так:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{rot} \mathfrak{H} - \left(\frac{\varepsilon\omega i}{c} + \frac{4\pi\sigma}{c} \right) \mathfrak{E} &= 0, & (a) \\ \operatorname{rot} \mathfrak{E} + \frac{i\omega}{c} \mathfrak{H} &= 0, & (b) \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

$$(c) \Delta \mathfrak{E} + k^2 \mathfrak{E} = 0.$$

Эти уравнения отличаются от соответствующих уравнений для непроводников только тем, что ε заменено выражением:

$$\varepsilon = \varepsilon - \frac{4\pi\sigma}{\omega} i, \quad (7)$$

и введенная ранее в главе IV, § 43 величина $k^2 = \frac{\varepsilon\omega^2}{c^2}$ величиной

$$k^2 = \frac{\varepsilon\omega^2}{c^2} - \frac{4\pi\sigma\omega}{c^2} i. \quad (8)$$

Таким образом ε и k являются теперь комплексными числами¹.

В дальнейшем, чтобы иметь по возможности аналогию с прежними уравнениями, введем комплексный показатель преломления n , действительная часть которого должна совпадать с обычным показателем преломления, положив:

$$n = n(1 - ix) = \frac{kc}{\omega}. \quad (9)$$

x называется показателем поглощения.

¹ Мы будем в дальнейшем обозначать комплексные материальные постоянные (которые зависят еще от частоты) буквами жирного шрифта; комплексные же составляющие поля и геометрические величины (комплексные углы) будут обозначаться, как и прежде.

Подставляя в (9) для k значение, даваемое (8), мы можем выразить n и x через материальные постоянные ε и σ . Мы получаем:

$$n^2 = n^2(1 - 2ix - x^2) = \varepsilon - \frac{4\pi\sigma}{\omega} i. \quad (10)$$

Таким образом

$$\left. \begin{aligned} n^2(1 - x^2) &= \varepsilon, & (a) \\ n^2x &= \frac{2\pi\sigma}{\omega} = \frac{\sigma}{\nu}. & (b) \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Для $\sigma = 0$ следует $x = 0$ и $n^2 = \varepsilon$, т. е. известное максвелловское соотношение (1) § 5 главы I.

Для металлов $\sigma \neq 0$ и притом настолько велика, что $n^2x \gg \varepsilon$. Например, мы имеем для меди $\sigma = 5,14 \cdot 10^{17}$ с.г.с., и поэтому для коротковолновых инфракрасных лучей длины волны 3μ , т. е. имеющих $\nu = \frac{c}{\lambda} = \frac{3 \cdot 10^{10}}{3 \cdot 10^{-4}} = 10^{14}$:

$$n^2x = \frac{\sigma}{\nu} = \frac{5,14 \cdot 10^{17}}{10^{14}} = 5,14 \cdot 10^3 \text{ с.г.с.}$$

Но для металлов ε , конечно, невозможно определить непосредственно, наоборот, ε измеряется, как мы увидим, с помощью оптических методов. Однако, так как механизм диэлектрического смещения для металлов не может быть существенно отличным от соответствующего механизма для непроводников, то мы можем предположить, что ε не будет иным по порядку величины и что, действительно:

$$\frac{\sigma}{\nu} \gg \varepsilon. \quad (12)$$

Благодаря этому существенно упрощаются последующие вычисления. Решение уравнений (11) относительно n и x дает:

$$\left. \begin{aligned} n^2 &= \frac{1}{2} \left(\sqrt{\varepsilon^2 + 4 \frac{\sigma^2}{\nu^2}} + \varepsilon \right), \\ n^2 x^2 &= \frac{1}{2} \left(\sqrt{\varepsilon^2 + 4 \frac{\sigma^2}{\nu^2}} - \varepsilon \right), \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

где при выборе знаков у радикалов приняты во внимание соотношения, имеющие место в действительности. Вследствие предположения (12) мы получаем приближенно:

$$n = nx = \sqrt{\frac{\sigma}{\nu}}. \quad (14)$$

Волновое уравнение (6с) формально идентично с рассматривавшимся ранее (глава II, § 14; глава IV, § 43) и в предположении плоской волны допускает интеграцию. Вводя временной множитель, мы напомним эти уравнения в форме:

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}^0 e^{i\omega t} e^{-ikr\mathcal{E}}. \quad (15)$$

Подставим в это уравнение вместо k его значение из (9); мы будем иметь:

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}^0 e^{-\frac{\omega}{c} nx (r\mathcal{E})} e^{i\omega \left(t - \frac{n}{c} r\mathcal{E}\right)}. \quad (16)$$

Действительная часть этого выражения

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}^0 e^{-\frac{\omega}{c} nx (r\mathcal{E})} \cos \omega \left(t - \frac{n}{c} r\mathcal{E}\right) \quad (17)$$

представляет затухающую в пространстве плоскую волну с длиной волны $\lambda = 2\pi c/\omega n$ и постоянной затухания, пропорциональной x . Так как энергия пропорциональна среднему по времени \mathcal{E}^2 , то ее убывание совершается по закону:

$$W = W_0 e^{-x\mathcal{E}}, \quad (18)$$

где положено:

$$\chi = 2 \frac{\omega}{c} nx = \frac{4\pi\nu}{c} nx = \frac{4\pi}{\lambda_0} nx = \frac{4\pi}{\lambda} x. \quad (19)$$

Здесь λ_0 обозначает длину волны в пустоте, а λ — в самом теле. Величину

$$d = \frac{1}{\chi} = \frac{\lambda}{4\pi x} = \frac{\lambda_0}{4\pi nx} = \frac{\lambda_0}{4\pi \sqrt{\frac{\sigma}{\nu}}} = \frac{1}{4\pi} \sqrt{\frac{\lambda_0 c}{\sigma}} \quad (20)$$

можно обозначить как *глубину проникновения* волны, именно — как глубину, на которой при перпендикулярном падении энергии убывает в e раз. Пользуясь данным выше значением проводимости меди, получим следующую таблицу, представляющую глубину проникновения как функцию длины волны λ_0 в пустоте

Таблица 8

λ_0	$1 \text{ Å} = 10^{-8} \text{ см}$	$1 \text{ μ} = 10^{-4} \text{ см}$	1 см	$100 \text{ м} = 10^4 \text{ см}$
d	$0,1795 \cdot 10^{-4} \text{ см}$	$0,1795 \cdot 10^{-2} \text{ см}$	$0,1795 \text{ см}$	$17,95 \text{ см}$

В то время как для прозрачных тел показатель преломления определить легко (именно, по отклонению призмой), подобные методы для определения n и χ для металлов вследствие большой

непрозрачности последних исключительно трудны. Тем не менее Кундту¹ удалось изготовить металлическую призму со столь малым углом, что из отклонения и ослабления проходящего через нее света он мог измерить n и χ .

Существует, однако, другой метод, при котором оптические свойства металла выявляются гораздо проще и отчетливее, именно наблюдение над свойствами света, отражаемого металлическим зеркалом.

§ 68. ОТРАЖЕНИЕ СВЕТА НА ПОВЕРХНОСТИ МЕТАЛЛА

Так как основные уравнения для периодических процессов в проводниках отличаются от соответствующих уравнений для непроводников лишь тем, что вместо действительных величин ϵ и k теперь входят комплексные величины ϵ и k , то все ранее выведенные заключения остаются в силе, поскольку речь идет о линейных соотношениях между составляющими силы поля. В частности, справедливы также те же самые пограничные условия при переходе из одной среды в другую и те же формулы для отражения и преломления света, которые были выведены в главе I, § 9, 10. Иным будет только физический смысл этих формул.

Прежде всего, закон преломления гласит, как раньше:

$$\sin \phi = \frac{\sin \varphi}{n}. \quad (1)$$

Угол преломления ϕ является, таким образом, теперь комплексным так же, как и n .

Если нормаль к граничной поверхности параллельна оси z и плоскость падения заключается, кроме нее, еще ось x , то фаза преломленной волны равна $\mathcal{E}^d r$, где $\mathcal{E}_x^d = \sin \phi$, $\mathcal{E}_y^d = 0$, $\mathcal{E}_z^d = \cos \phi$ [см. (3), § 10, глава I]. Так как ϕ комплексно, то таковы же и составляющие \mathcal{E}^d ; если мы напомним:

$$\mathcal{E}^d = \mathcal{E}_1^d + i\mathcal{E}_2^d, \quad (2)$$

то „комплексная“ фаза будет, следовательно, равна:

$$\mathcal{E}^d r = \mathcal{E}_1^d r + i\mathcal{E}_2^d r. \quad (3)$$

Но это уравнение означает, что плоскость постоянных действительных фаз $\mathcal{E}_1^d r = \text{const}$ и плоскости постоянных амплитуд $\mathcal{E}_2^d r = \text{const}$ не совпадают между собою. Так как мы сейчас, однако, не интересуемся прошедшей волной, то мы оставим в стороне рассмотрение этой „неоднородной волны“, — нас удовлетворит исследование поведения отраженной волны, и если мы примем, что металл ограничен некоторым прозрачным веществом, то мы будем в нем иметь обычные, исследованные уже ранее, законы распространения с действительной фазой.

В отраженной волне мы можем наблюдать интенсивности составляющей колебания, параллельной и перпендикулярной плоскости падения. Также и здесь, ввиду того, что речь идет

¹ A. Kundt, Wiedem. Ann., т. 34 (1888), стр. 469.

о линейных соотношениях, должны быть справедливы выведенные в § 10, главе I формулы, и в частности уравнения (15):

$$\left. \begin{aligned} R_p &= \frac{\operatorname{tg}(\varphi - \psi)}{\operatorname{tg}(\varphi + \psi)} A_p, \\ R_s &= -\frac{\sin(\varphi - \psi)}{\sin(\varphi + \psi)} A_s. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Так как в функции углов входит комплексная величина ψ , то при действительных амплитудах падающего света A_p, A_s амплитуды отраженного света R_p, R_s будут комплексными, т. е. появятся характеристические изменения фаз. Мы их теперь рассмотрим, однако, не для самого общего случая, а ограничимся практически важным случаем, когда падает линейно поляризованный свет, плоскость поляризации которого наклонена под углом в 45° к плоскости падения. Тогда $A_p = A_s$. Поведение отраженного света определяется отношением:

$$\frac{R_p}{R_s} = -\frac{\cos(\varphi + \psi)}{\cos(\varphi - \psi)} P e^{i\Delta}. \quad (5)$$

При этом P есть отношение действительных амплитуд и Δ — относительная разность фаз составляющих.

Исследуем прежде всего тот случай, когда выражение (5) действительно, т. е. когда $\Delta = 0$. Этот случай, очевидно, наступает только тогда, если φ равно 0 или $\frac{\pi}{2}$.

Для $\varphi = 0$, т. е. для перпендикулярного падения, $P = -1$.

Для $\varphi = \frac{\pi}{2}$, т. е. для скользящего падения, $P = +1$.

Между этими двумя предельными углами существует направление φ , для которого разность фаз $\Delta = \frac{\pi}{2}$. Если бы $P = +1$,

то мы имели бы в этом случае круговую поляризацию; так как, однако, $P \neq 1$, то на самом деле мы имеем эллиптически поляризованный свет, но такой, который ближе всего подходит к круговому, т. е. для которого прямоугольник, описанный вокруг эллипса колебаний, является более квадратообразным, чем для всякого другого направления падения. Соответствующее направление падения называется *главным углом падения*. Мы обозначим его через φ_0 , а соответствующее отношение амплитуд через P_0 .

Диагональ прямоугольника, описанного вокруг эллипса колебаний, образует с плоскостью падения некоторый угол ρ_0 , который мы назовем *главным азимутом*. Этот угол измеряют, как мы выведем впоследствии, с помощью компенсатора. Разность фаз компенсируется, а азимут определяется как направление, перпендикулярное направлению анализатора, установленного на темноту.

Вычислим прежде всего φ_0 в функции от n и x . Из уравнения (5), принимая во внимание закон преломления, получаем:

$$\frac{1 + P e^{i\Delta}}{1 - P e^{i\Delta}} = \frac{\sin \varphi \sin \psi}{\cos \varphi \cos \psi} = \frac{\sin^2 \varphi}{n \cos \varphi \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \varphi}{n^2}}}. \quad (6)$$

Следовательно

$$\frac{1 + P e^{i\Delta}}{1 - P e^{i\Delta}} = \frac{\sin \varphi \operatorname{tg} \varphi}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \varphi}}. \quad (7)$$

Положим теперь $\Delta = \frac{\pi}{2}$ и соответственно заменим P и φ через P_0 и φ_0 ; мы получим:

$$\frac{1 + iP_0}{1 - iP_0} = \frac{\sin \varphi_0 \operatorname{tg} \varphi_0}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \varphi_0}}. \quad (8)$$

Умножим это выражение на комплексно сопряженное ему:

$$1 = \frac{\sin^2 \varphi_0 \operatorname{tg}^2 \varphi_0}{\sqrt{(n^2 - \sin^2 \varphi_0)(n^{*2} - \sin^2 \varphi_0)}}. \quad (9)$$

Из (9) получаем, возводя его в квадрат и применяя (9) § 67:

$$\left. \begin{aligned} \sin^4 \varphi_0 \operatorname{tg}^4 \varphi_0 &= n^2 n^{*2} - (n^2 + n^{*2}) \sin^2 \varphi_0 + \sin^4 \varphi_0 = \\ &= n^4 (1 + x^2)^2 + 2n^2 (1 - x^2) \sin^2 \varphi_0 + \sin^4 \varphi_0. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Так как для металлов $n^2 (1 + x^2)$ значительно превосходит 1 (см. табл. 9), то в (10) можно с достаточно хорошим приближением пренебречь двумя последними членами в правой части и написать:

$$\sin \varphi_0 \operatorname{tg} \varphi_0 = n \sqrt{1 + x^2}. \quad (11)$$

Точно так же можно легко выразить через n и x соответствующие значения P_0 и ρ_0 ; однако мы обратимся сейчас к общему случаю произвольного угла падения.

При всех углах падения, отличающихся от φ_0 , получается эллиптически поляризованный свет, для которого описанный прямоугольник оказывается более вытянутым, чем для φ_0 . Наблюдение отраженного света производится с помощью николя и компенсаторов. Согласно нашему предположению поляризатор устанавливается таким образом, чтобы колебания падающего света были направлены под углом в 45° относительно плоскости падения. После этого путем перестановки компенсатора и одновременного поворота николя стараются достичь исчезновения отраженного света. Направления, перпендикулярные положениям анализатора на темноту, соответствуют направлениям диагоналей прямоугольника, описанного вокруг эллипса коле-

баний, и называются *направлениями восстановленной линейной поляризации*. Для них справедливо соотношение (рис. 169):

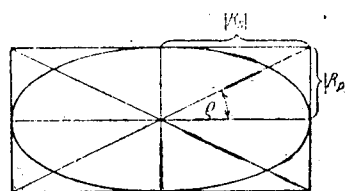
$$\operatorname{tg} \rho = P = \frac{|R_p|}{|R_s|}. \quad (12)$$

Чтобы по измеренным значениям ρ и Δ вычислить величины n и x , умножим числитель и знаменатель величины, обратной левой части уравнения (7), на $1 + Pe^{-i\Delta}$; мы получим:

$$\frac{1 - Pe^{i\Delta}}{1 + Pe^{i\Delta}} \frac{1 + Pe^{-i\Delta}}{1 + Pe^{-i\Delta}} = \frac{1 - 2iP \sin \Delta - P^2}{1 + 2P \cos \Delta + P^2} = \frac{\cos 2\rho - i \sin 2\rho \sin \Delta}{1 + \sin 2\rho \cos \Delta}. \quad (13)$$

В правой части (7) можно пренебречь $\sin^2 \varphi$ по сравнению с n^2 (ср. табл. 9). Следовательно, из (7) получается:

$$\frac{\cos 2\rho - i \sin 2\rho \sin \Delta}{1 + \sin 2\rho \cos \Delta} = \frac{n(1 - ix)}{\sin \varphi \operatorname{tg} \varphi}. \quad (14)$$



Фиг. 169. Эллипс колебаний при отражении от металла.

Сравнивая в обеих сторонах действительные и мнимые части, мы получим:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\cos 2\rho}{1 + \sin 2\rho \cos \Delta} &= \frac{n}{\sin \varphi \operatorname{tg} \varphi}, \\ \frac{\sin 2\rho \sin \Delta}{1 + \sin 2\rho \cos \Delta} &= \frac{nx}{\sin \varphi \operatorname{tg} \varphi}. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Отсюда при постоянных n и x можно определить для каждого угла падения φ параметры поляризации ρ и Δ . Обратно, путем измерения этих параметров мы получим оптические константы n и x :

$$\left. \begin{aligned} n &= \frac{\sin \varphi \operatorname{tg} \varphi \cos 2\rho}{1 + \sin 2\rho \cos \Delta}, \\ x &= \sin \Delta \operatorname{tg} 2\rho. \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

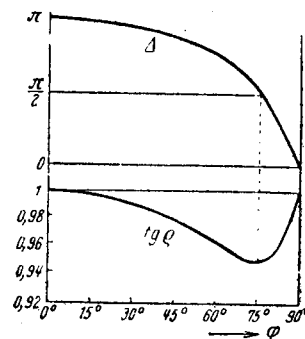
При главном угле падения φ_0 , для которого $\Delta = \frac{\pi}{2}$, главный азимут определяется из уравнения:

$$\operatorname{tg} 2\rho_0 = x. \quad (17)$$

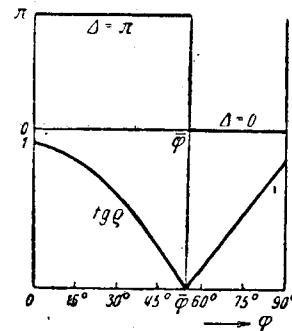
На фиг. 170 представлено по формулам (15) изменение азимута ρ и разности фаз Δ для серебра в функции угла падения. Мы сравним эти кривые с соответствующими кривыми для прозрачных тел (фиг. 171). В главе I, § 10 мы видели, что от угла падения, равного нулю, до угла поляризации разность фаз все время равна π , а у самого угла поляризации падает от π к нулю. Так как величина P представляет абсолютное значение отноше-

ния амплитуд, то $\operatorname{tg} \rho = P$ мы всегда должны принимать положительным. Поэтому кривая $\operatorname{tg} \rho$ должна у угла поляризации иметь излом. Сравнивая обе фигуры — 170 и 171 — мы видим, что влияние проводимости заключается в том, что прерывная кривая разности фаз становится непрерывной и плавной, имевшая излом кривая азимута закругляется и поднимается от нуля до некоторой положительной величины.

Таким образом мы приходим к заключению, что для определения оптических постоянных металла достаточно определить нулевые положения (установка на темноту), без измерений интенсивности. Можно, однако, использовать также измерение отношения интенсивностей отраженного и падающего



Фиг. 170. Амплитуды и фазы при отражении от металла в функции угла падения. Падающий свет колеблется под азимутом в 45° ; отраженный свет эллиптически поляризован, с отношением амплитуд $\operatorname{tg} \rho$ и относительной фазой Δ .



Фиг. 171. Отражение прозрачной средой для сравнения с соответствующими соотношениями при отражении от металла.

света. Мы рассмотрим эту задачу не для произвольного угла падения, но лишь для перпендикулярного падения, $\varphi = 0$. В этом случае s - и p -составляющие не отличаются друг от друга, и *отражательную способность металла* мы определяем коротко так:

$$r = \left(\frac{|R_p|}{A_p} \right)^2 = \left(\frac{|R_s|}{A_s} \right)^2. \quad (18)$$

Здесь также должны иметь силу выведенные в главе I, § 10 (17) формулы, если только заменить n через \tilde{n} . Мы получаем:

$$r = \left| \frac{\tilde{n} - 1}{\tilde{n} + 1} \right|^2 = \frac{\tilde{n}^2 (1 + x^2) + 1 - 2\tilde{n}}{\tilde{n}^2 (1 + x^2) + 1 + 2\tilde{n}}. \quad (19)$$

Посредством изложенного здесь метода можно исследовать оптические постоянные многих металлов. В табл. 9 приведены некоторые результаты, расположенные по убывающей отражательной способности.

Таблица 9

Оптические постоянные некоторых металлов для желтой D-линии^{*} натрия (по Ландольт-Бёрнштейну, Физико-химические таблицы, 5 изд., Берлин, 1923).

Вещество	n_x	n	r в %	Исследователь	
Натрий	2,61	0,004	99,8	Друде	1898
Серебро, цельное	3,64	0,18	95,0	Минор	1903
Магний, цельный	4,42	0,37	92,9	Друде	1890
Золото, цельное	2,82	0,37	85,1	Друде	1890
Алюминий, цельный	5,23	1,44	82,7	Друде	1890
Олово, цельное	5,25	1,48	82,5	Друде	1890
Кадмий, цельный	5,01	1,13	84,7	Друде	1890
Золото, электролитическое	2,83	0,47	81,5	Мейер	1910
Ртуть	4,41	1,62	75,3	Мейер	1910
Цинк, цельный	4,66	1,93	74,5	Мейер	1910
Медь, цельная	2,63	0,62	74,1	Минор	1903
Олово, литое	4,50	2,10	71,9	Друде	1890
Платина, цельная	4,26	2,06	70,1	Друде	1890
Сурьма, цельная	4,94	3,04	70,1	Друде	1890
Свинец, цельный	3,42	1,58	65,5	Мейер	1910
Никель, электролитический	3,48	2,01	62,1	Друде	1890
Никель, цельный	3,32	1,79	62,0	Друде	1890
Кобальт, цельный	3,37	1,95	61,2	Квинке	1874
Платина, электролитическая	3,54	2,63	59,0	Мейер	1910
Сталь, цельная	3,37	2,27	58,9	Жамен	1874
Висмут, цельный	2,80	1,78	54,3	Мейер	1910
Никель, гальванически распыленный	1,97	1,30	43,3	Мейер	1910
Железо, гальванически распыленное	1,63	1,51	32,6	Мейер	1910

Наиболее бросающимся в глаза на этой таблице является то, что для целого ряда металлов, как например, для натрия, серебра, золота, меди, показатель преломления значительно меньше единицы. Этот факт означает согласно уравнению $c_n = \frac{c}{n}$, что фазовая скорость в металле больше, чем в пустоте. Сперва это кажется грубым противоречием с теорией относительности, согласно которой c должна быть граничным значением для вся-

кой скорости вообще. Решение этой трудности заключается в том, что теория относительности постулирует верхнюю границу лишь для скоростей, с которыми могут быть переданы сигналы. Однако фазовая скорость определяется лишь для волнового ряда бесконечной длины, в котором энергия течет равномерно и без перерыва. Такой ряд неприменим для сигнализации.

Передача сигнала возможна лишь при помощи волновой группы, которая переносит определенное количество энергии внутри конечного объема. Тут, однако, можно указать, что распространение волновой группы и в тех случаях, когда отдельные фазы обладают скоростью большей, чем световая, всегда происходит со скоростью меньшей c . Это положение вещей было объяснено лордом Релеем¹ и в связи с теорией относительности недавно исследовано Зоммерфельдом² и Бриллюэном³.

Но если и отказаться от этой трудности общего характера, то появляется другая, именно из соотношения (11a) § 67:

$$\epsilon = n^2 - n^2 x^2. \quad (20)$$

Для всех металлов табл. 9 $n_x > n$, следовательно $\epsilon < 0$. Однако отрицательная диэлектрическая постоянная является понятием, не имеющим смысла.

Наконец, мы замечаем противоречие между числами нашей таблицы и формулой (11b) § 67. Так например, для меди $\sigma = 5,14 \cdot 10^{17}$ сек.⁻¹. Для натрового света $\lambda = 589$ мμ, т. е. $\nu = 5,09 \cdot 10^{14}$ сек.⁻¹, получаем $\sigma/\nu = 1,01 \cdot 10^3$, тогда как согласно нашей таблице $n^2 x = 2,66$.

Эти числовые данные показывают, что развитая здесь теория отказывается служить для видимого света. Если мы, однако, вспомним (см. главу I, § 5), что и для прозрачных тел соотношение Максвелла $\epsilon = n^2$ противоречило опыту в оптической области, то указанное несогласие для металлов не будет нас удивлять, и мы станем искать его причину в том же направлении, что и там. Точно так же, как для прозрачных тел показатель преломления не являлся истинной материальной постоянной, но зависел еще от частоты света, в случае поглощающих тел показатель преломления и коэффициент абсорбции зависят от частоты. Имеет место дисперсия как преломления, так и поглощения. Различие с прежним заключается лишь в том, что в случае прозрачных тел речь шла о возбужденных колебаниях связанных электронов, в случае же металлов — о возбужденных колебаниях свободных электронов. Совпадение с нашей теорией, оперирующей с постоянным показателем пре-

¹ Lord Rayleigh, Nature, Lond., т. 25 (1881), стр. 52.

² A. Sommerfeld, Physik. Z., т. 8 (1907), стр. 841; Ann. Physik, т. 44 (1914), стр. 177.

³ L. Brillouin, Ann. Physik, т. 44 (1914), стр. 203.

ломления и с постоянной проводимостью, можно ожидать лишь для медленных колебаний, и с этой точки зрения теория была проверена в 1903 г. Гагеном и Рубенсом¹. Они показали, что для инфракрасных волн с $\lambda > 12\mu$ отражательная способность может быть вычислена из постоянной проводимости в хорошем согласии с опытом.

Если мы воспользуемся приближением (14) § 67, то выражение (19) для отражательной способности примет вид:

$$r = \frac{2 \frac{\sigma}{\nu} - 2 \sqrt{\frac{\sigma}{\nu} + 1}}{2 \frac{\sigma}{\nu} + 2 \sqrt{\frac{\sigma}{\nu} + 1}}. \quad (21)$$

При этом единицу по сравнению с другими членами можно отбросить и произвести разложение по степеням малой величины $\sqrt{\frac{\nu}{\sigma}}$. Тогда получим:

$$r = 1 - 2 \sqrt{\frac{\nu}{\sigma}} + \dots \quad (22)$$

Для меди Рубенс и Гаген нашли в инфракрасном свете длины волны $\lambda = 12\mu$ значение $1 - r = 1,6 \cdot 10^{-2}$, тогда как из проводимости получается $1 - r = 1,4 \cdot 10^{-2}$.

При более длинных волнах r все больше приближается к единице; поэтому определение $1 - r$ становится все более неточным. В этом случае Рубенс и Гаген прибегли к косвенному исследованию.

Согласно известному закону Кирхгофа из теории теплового излучения соотношение между лучеиспускательной способностью E и поглощательной способностью A некоторого тела не зависит от природы вещества и является функцией только температуры T и частоты ν . Эта универсальная функция $F(\nu, T)$, очевидно, вместе с тем дает излучение так называемого абсолютно черного тела, т. е. тела с поглощательной способностью, равной единице. Следовательно, мы имеем:

$$E = A \cdot F(\nu, T). \quad (23)$$

Если мы возьмем слой металла такой толщины, что вся падающая энергия, которая не отражается, целиком поглощается внутри него, то для отражательной способности будет иметь место формула:

$$A = 1 - r. \quad (24)$$

Согласно (22) для поглощательной способности, таким образом, получается непосредственно:

$$A = 2 \sqrt{\frac{\nu}{\sigma}} = \frac{E}{F(\nu, T)} \quad (25)$$

¹ E. Hagen u. H. Rubens, Ann. Physik (4), т. 11 (1903), стр. 873.

или

$$2 \sqrt{\nu} F(\nu, T) = E \sqrt{\sigma}. \quad (26)$$

Левая часть представляет известную функцию от ν и T , совершенно не зависящую от природы металла; поэтому излучение черного тела является в точности известным теоретически и экспериментально и выражается знаменитой формулой Планка (см. главу VIII, § 90).

Для того чтобы испытать действительность уравнений Максвелла, нужно, таким образом, лишь измерить проводимость металла σ и лучеиспускательную способность E в функции от частоты и температуры и установить, выполняется ли уравнение (26) для произведения $E \sqrt{\sigma}$. Гаген и Рубенс выполнили такое исследование и нашли, что в области выше 12μ проводимость, измеренная при помощи стационарных токов, оказывается действительной и для оптических соотношений.

Для более коротких волн элементарная теория перестает быть справедливой. Тогда вводят в рассмотрение инерцию и плотность распределения имеющих в металле свободных или почти свободных электронов и получают дисперсионную формулу, как это будет выведено в главе VIII; однако результаты наблюдений не могут быть таким образом безупречно истолкованы. Это происходит потому, что электронная теория металлов требует применения квантовой теории. При этом является существенным то обстоятельство, что свободные электроны в металле отнюдь нельзя рассматривать как индивидуальные объекты; мы имеем дело не с движением частиц, но с распространением волн (волновая механика, глава VIII, § 90). Определяющаяся этим статистика сказывается также и в оптических явлениях. Обсуждение этого предмета выходит за рамки настоящей книги.

§ 69. ПОГЛОЩАЮЩИЕ КРИСТАЛЛЫ

Теория поглощающих кристаллов чрезвычайно сложна, если принимать во внимание все возможности. Она заключается в том, что кроме тензора диэлектрической постоянной ϵ_{xy} , вводится тензор электрической проводимости σ_{xy} . В общем случае главные оси этих тензоров не совпадают; в таком случае все соотношения становятся крайне ненаглядными. Лишь для кристаллов высокой симметрии (по меньшей мере для ромбических систем) обе системы главных осей совпадают друг с другом.

Так как, однако, при этом явление уже включает в себе основные черты теории, то мы ограничимся указанным случаем. Заменим просто диэлектрические постоянные $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$ комплексными числами $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$. Тогда все формулы кристаллооптики формально останутся прежними, но все величины, зависящие от $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$ будут теперь комплексными.

Пусть главные оси тензоров $\varepsilon(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z)$ и $\sigma(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ совпадают. Следовательно,

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{D}_x &= \varepsilon_x \mathcal{E}_x, \dots \\ i_x &= \sigma_x \mathcal{E}_x, \dots \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Уравнения Максвелла для проводника приобретут такой вид:

$$\text{rot } \mathcal{H} = \frac{1}{c} \dot{\mathcal{D}} + \frac{4\pi i}{c}, \quad \text{rot } \mathcal{E} = -\frac{1}{c} \dot{\mathcal{H}}.$$

Введем подстановку для затухающих плоских волн, для которых согласно § 67

$$\mathcal{E}, \mathcal{D}, \mathcal{H}, i \sim e^{i\omega \left(t - \frac{n}{c} r\right)}.$$

Тогда получим, как в § 58 (13):

$$n \cdot \mathcal{H} \times \mathcal{E} = \mathcal{D} + \frac{4\pi}{i\omega} i = \mathcal{D}^{\sigma},$$

$$n \cdot \mathcal{E} \times \mathcal{E} = -\mathcal{H}.$$

Введением сокращенного обозначения \mathcal{D}^{σ} мы делаем их формально идентичными с уравнениями (13) § 58 главы V и, исключая \mathcal{H} , получаем, как и там:

$$\mathcal{D}^{\sigma} = \mathcal{D} - \frac{4\pi i}{\omega} i = -n^2 \cdot (\mathcal{E} \times \mathcal{E}) \times \mathcal{E} = n^2 [\mathcal{E} - \mathcal{E}(\mathcal{E}\mathcal{E})]. \quad (2)$$

В дальнейшем мы будем отбрасывать индекс σ у \mathcal{D} . Тогда согласно (1) получим:

$$\mathcal{D}_x = \varepsilon_x \mathcal{E}_x,$$

где

$$\varepsilon_x = \varepsilon_x - \frac{4\pi i}{\omega} \sigma_x. \quad (3)$$

Таким образом формально алгебраически задача сводится к той, которую мы рассмотрели в главе V, оптике прозрачных тел, с тем единственным различием, что теперь главные диэлектрические постоянные (3) комплексны. Сопоставляя уравнения (2) и (3), получаем, как в главе V, § 59 (2):

$$\mathcal{D}_x = -\frac{\mathcal{E}_x(\mathcal{E}\mathcal{E})}{\frac{1}{n^2} - \frac{1}{\varepsilon_x}}, \quad (4)$$

и френелево уравнение нормалей

$$\frac{\frac{\mathcal{E}_x^2}{n^2} - \frac{1}{\varepsilon_x}}{\frac{1}{n^2} - \frac{1}{\varepsilon_x}} + \frac{\frac{\mathcal{E}_y^2}{n^2} - \frac{1}{\varepsilon_y}}{\frac{1}{n^2} - \frac{1}{\varepsilon_y}} + \frac{\frac{\mathcal{E}_z^2}{n^2} - \frac{1}{\varepsilon_z}}{\frac{1}{n^2} - \frac{1}{\varepsilon_z}} = 0, \quad (5)$$

которое после введения теперь комплексной скорости:

$$c_n = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}} = \frac{c}{n}, \quad c_x = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_x}} = \frac{c}{n_x}, \dots \quad (6)$$

может быть записано в прежней форме § 59 (5):

$$\frac{\mathcal{E}_x^2}{c_n^2 - c_x^2} + \frac{\mathcal{E}_y^2}{c_n^2 - c_y^2} + \frac{\mathcal{E}_z^2}{c_n^2 - c_z^2} = 0. \quad (7)$$

Все эти соотношения формально идентичны с прежними, однако, их физический смысл является несколько иным. Тем не менее из (5) или (7) следует квадратичная форма для $n^2(\mathcal{E})$, т. е. два различных показателя преломления для одного и того же направления распространения \mathcal{E} ; таким образом и здесь существуют два *главных колебания* \mathcal{D}' , \mathcal{D}'' . Однако отношения

$$\mathcal{D}_x : \mathcal{D}_y : \mathcal{D}_z$$

опять являются комплексными, т. е. главные колебания поляризованы в общем случае не линейно, а эллиптически.

Тем не менее можно высказать простое предложение относительно формы \mathcal{D}' , \mathcal{D}'' . Именно, остается в силе соотношение:

$$\mathcal{D}' \mathcal{D}'' = 0; \quad (8)$$

оно доказывается следующим образом. Согласно (4)

$$\begin{aligned} \mathcal{D}' \mathcal{D}'' &\sim \frac{\mathcal{E}_x^2}{(c_n'^2 - c_x'^2)(c_n'^2 - c_x'^2)} + \frac{\mathcal{E}_y^2}{(c_n'^2 - c_y'^2)(c_n'^2 - c_y'^2)} + \\ &+ \frac{\mathcal{E}_z^2}{(c_n'^2 - c_z'^2)(c_n'^2 - c_z'^2)} = \frac{1}{c_n'^2 - c_n'^2} \left(\frac{\mathcal{E}_x^2}{c_n'^2 - c_x'^2} + \frac{\mathcal{E}_y^2}{c_n'^2 - c_y'^2} + \right. \\ &\left. + \frac{\mathcal{E}_z^2}{c_n'^2 - c_z'^2} - \frac{\mathcal{E}_x^2}{c_n'^2 - c_x'^2} - \frac{\mathcal{E}_y^2}{c_n'^2 - c_y'^2} - \frac{\mathcal{E}_z^2}{c_n'^2 - c_z'^2} \right), \end{aligned}$$

а это выражение согласно (7) обращается в 0. Однако, тогда как ранее (8) оно означало, что главные колебания располагаются перпендикулярно друг к другу, последнее соотношение показывает, как это легко видеть, что эллипсы колебаний являются подобными, и соответствующие оси расположены перпендикулярно друг к другу.

Дальнейшее обсуждение значительно упрощается в случае *слабой абсорбции*, т. е. не для металлов, а для тел до некоторой степени прозрачных.

Более того, мы в данном случае ограничимся только такими веществами, которые вообще дают возможность наблюдения в проходящем свете.

Формально условие слабой абсорбции означает, что квадратом коэффициента абсорбции κ можно пренебречь. Мы можем тогда написать согласно (6):

$$\left. \begin{aligned} n &= n(1 - i\kappa), & n^2 &= n^2(1 - 2i\kappa), \\ c_n &= \frac{c}{n(1 - i\kappa)} = c_n(1 + i\kappa), & c_n^2 &= c_n^2(1 + 2i\kappa). \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Аналогичные уравнения справедливы для $n_x = n_x(1 - i\kappa_x)$, ..., $c_x = \frac{c}{n_x} = c_x(1 + i\kappa_x)$, ...

Уравнение Френеля (7) может быть поэтому разделено на действительную и мнимую части:

$$\left. \begin{aligned} &\frac{\frac{\beta_x^2}{c_n^2 - c_x^2 + 2i(\kappa c_n^2 - \kappa_x c_x^2)}}{c_n^2 - c_x^2 + 2i(\kappa c_n^2 - \kappa_x c_x^2)} + \frac{\frac{\beta_y^2}{c_n^2 - c_y^2 + 2i(\kappa c_n^2 - \kappa_y c_y^2)}}{c_n^2 - c_y^2 + 2i(\kappa c_n^2 - \kappa_y c_y^2)} + \\ &+ \frac{\frac{\beta_z^2}{c_n^2 - c_z^2 + 2i(\kappa c_n^2 - \kappa_z c_z^2)}}{c_n^2 - c_z^2 + 2i(\kappa c_n^2 - \kappa_z c_z^2)} = \frac{\frac{\beta_x^2}{c_n^2 - c_x^2}}{c_n^2 - c_x^2} \left(1 - 2i \frac{\kappa c_n^2 - \kappa_x c_x^2}{c_n^2 - c_x^2} \right) + \\ &+ \frac{\frac{\beta_y^2}{c_n^2 - c_y^2}}{c_n^2 - c_y^2} \left(1 - 2i \frac{\kappa c_n^2 - \kappa_y c_y^2}{c_n^2 - c_y^2} \right) - \\ &- \frac{\frac{\beta_z^2}{c_n^2 - c_z^2}}{c_n^2 - c_z^2} \left(1 - 2i \frac{\kappa c_n^2 - \kappa_z c_z^2}{c_n^2 - c_z^2} \right) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Вторая строка получается из первой разложением знаменателя.

Действительная часть (10) дает не что иное, как прежнее уравнение Френеля. Выведенные из него следствия остаются, таким образом, в этом приближении в полной силе. Единственное отличие от прежнего заключается в том, что световые лучи при прохождении через кристалл будут ослабляться. При этом закон ослабления дается мнимой частью (10). Он гласит:

$$\begin{aligned} \kappa c_n^2 \left[\frac{\frac{\beta_x^2}{c_n^2 - c_x^2}}{(c_n^2 - c_x^2)^2} + \frac{\frac{\beta_y^2}{c_n^2 - c_y^2}}{(c_n^2 - c_y^2)^2} + \frac{\frac{\beta_z^2}{c_n^2 - c_z^2}}{(c_n^2 - c_z^2)^2} \right] = \\ = \frac{\kappa_x c_x^2 \frac{\beta_x^2}{c_n^2 - c_x^2}}{(c_n^2 - c_x^2)^2} + \frac{\kappa_y c_y^2 \frac{\beta_y^2}{c_n^2 - c_y^2}}{(c_n^2 - c_y^2)^2} + \frac{\kappa_z c_z^2 \frac{\beta_z^2}{c_n^2 - c_z^2}}{(c_n^2 - c_z^2)^2}. \end{aligned}$$

Согласно (4), (6), (9)

$$\mathfrak{D}_x = -c^2(\mathfrak{E}\mathfrak{E}) \cdot \frac{\beta_x}{c_n^2 - c_x^2} \left(1 - 2i \frac{\kappa c_n^2 - \kappa_x c_x^2}{c_n^2 - c_x^2} \right).$$

В принятом нами приближении (κ^2 мало по сравнению с κ) мы можем отбросить здесь мнимую часть, если исходить из

этой формулы, чтобы упростить закон ослабления. Это, очевидно, означает, что мы пренебрегаем эллиптической поляризацией. Поэтому:

$$\kappa c_n^2 = \frac{\kappa_x c_x^2 \mathfrak{D}_x^2 + \kappa_y c_y^2 \mathfrak{D}_y^2 + \kappa_z c_z^2 \mathfrak{D}_z^2}{\mathfrak{D}^2}. \quad (11)$$

Для заданного направления колебаний (расположение вектора \mathfrak{D}) скорость распространения давалась однозначно. Это справедливо также согласно (11) и для коэффициентов поглощения κ .

Однако обе главные скорости, принадлежащие некоторому направлению распространения, поглощаются, вообще говоря, различным образом. Если соответствующие коэффициенты κ' , κ'' еще обладают дисперсией (т. е. меняются с частотой падающего света), то кристаллы в белом свете кажутся окрашенными, причем окраска зависит также от направления поляризации падающего света; это явление называется *плеохроизмом*.

Для одноосных кристаллов (для которых $\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_0$, $\varepsilon_z = \varepsilon_e$, следовательно, также $\kappa_x = \kappa_y = \kappa_0$, $\kappa_z = \kappa_e$) все соотношения очень легко видеть. В случае обыкновенного луча световой вектор \mathfrak{D} всегда лежит в плоскости xy ; поэтому согласно (11) будет:

$$\kappa' c_0^2 = \kappa_0 c_0^2 = \frac{\mathfrak{D}_x^2 + \mathfrak{D}_y^2}{\mathfrak{D}^2} = \kappa_0 c_0^2, \quad (12a)$$

т. е. обыкновенный луч будет одинаково поглощаться во всех направлениях. Если мы опять обозначим через ϑ угол между \mathfrak{z} и оптической осью, то для необыкновенного луча согласно (7) будем иметь:

$$\kappa'' c_e^2 = \kappa_0 c_0^2 \cos^2 \vartheta + \kappa_e c_e^2 \sin^2 \vartheta, \quad (12b)$$

причем c_n^2 задано (4) § 61.

Для двуосных кристаллов соотношения более сложны. Мы их рассмотрим только для лучей, приблизительно параллельных оптической оси. В этом случае мы можем обе скорости по нормальям рассматривать, как равные, т. е.:

$$c'_n = c''_n = c_y, \quad (c_x > c_y > c_z).$$

Тогда, согласно (11), для определения κ нам нужно еще знать только расположение направлений колебаний. Последние определяются согласно § 60 тем, что они делят пополам углы между плоскостями, проходящими через \mathfrak{z} , и обе главные оси N_1 и N_2 .

Пусть мы находимся вблизи N_1 . Назовем угол между плоскостями $\mathfrak{z}N_1$ и N_1N_2 через ψ , так как плоскости N_1N_2 (плоскость xz) и $\mathfrak{z}N_2$ можно рассматривать как параллельные, то плоскость \mathfrak{D}' и \mathfrak{z} согласно предыдущей теореме составляет с плоскостью xz угол $\psi/2$ (фиг. 172). Поэтому составляющая \mathfrak{D}' в плоскости xz есть $D' \cos \psi/2$, причем $D' = |\mathfrak{D}'|$. Чтобы полу-

чить составляющую по оси x , мы должны еще спроектировать этот вектор на ось x . Так как \vec{z} приблизительно совпадает с N_1 , то проектирующий угол равен β , т. е. углу между осью z и N_1 . Таким образом (фиг. 173)

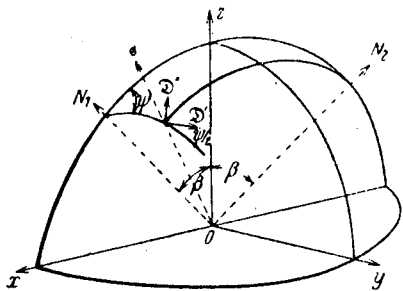
$$\mathcal{D}'_x = D' \cos \frac{\psi}{2} \cos \beta.$$

Аналогично находятся и другие составляющие:

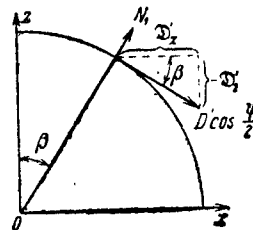
$$\mathcal{D}'_x = D' \cos \frac{\psi}{2} \cos \beta, \mathcal{D}'_y = D' \sin \frac{\psi}{2}, \mathcal{D}'_z = -D' \cos \frac{\psi}{2} \sin \beta. \quad (13a)$$

\mathcal{D}'' перпендикулярно к \vec{z} и \mathcal{D}' ; поэтому мы имеем:

$$\mathcal{D}''_x = -D'' \sin \frac{\psi}{2} \cos \beta, \mathcal{D}''_y = D'' \cos \frac{\psi}{2}, \mathcal{D}''_z = D'' \sin \frac{\psi}{2} \sin \beta. \quad (13b)$$



Фиг. 172. К теории поглощающих кристаллов.



Фиг. 173. К теории поглощающих кристаллов.

Подставляя выражения (13a) и (13b) в (11), находим значения обоих коэффициентов поглощения χ' , χ'' , соответствующих \mathcal{D}' и \mathcal{D}'' :

$$\left. \begin{aligned} \chi' c_n^2 &= (\chi_x c_x^2 \cos^2 \beta + \chi_z c_z^2 \sin^2 \beta) \cos^2 \frac{\psi}{2} + \chi_y c_y^2 \sin^2 \frac{\psi}{2}, \\ \chi'' c_n^2 &= (\chi_x c_x^2 \cos^2 \beta + \chi_z c_z^2 \sin^2 \beta) \sin^2 \frac{\psi}{2} + \chi_y c_y^2 \cos^2 \frac{\psi}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Эти формулы неприменимы для направления самой оптической оси, т. к. в этом случае направления \mathcal{D}' \mathcal{D}'' (угол ψ) становятся неопределенными. Тогда всю волну разлагают на две составляющих, одну — поляризованную перпендикулярно к плоскости оптических осей, и другую — поляризованную параллельно ей. Для первой $\mathcal{D}_x = \mathcal{D}_z = 0$, $\mathcal{D}_y = D$; следовательно, согласно (11)

$$\chi_x c_y^2 = \chi_y c_y^2, \text{ т. е. } \chi_x = \chi_y; \quad (15a)$$

Для второй, напротив, $\mathcal{D}_x = D \cos \beta$, $\mathcal{D}_y = 0$, $\mathcal{D}_z = D \sin \beta$ (фиг. 172). Таким образом:

$$\chi_p c_y^2 = \chi_x c_x^2 \cos^2 \beta + \chi_z c_z^2 \sin^2 \beta. \quad (15b)$$

Поглощение волны, распространяющейся в направлении оптической оси, зависит, следовательно, от направления поляризации.

С помощью (15) мы можем также привести к более простой форме выражение (14) для χ' и χ'' :

$$\left. \begin{aligned} \chi' &= \chi_p \cos^2 \frac{\psi}{2} + \chi_s \sin^2 \frac{\psi}{2}, \\ \chi'' &= \chi_p \sin^2 \frac{\psi}{2} + \chi_s \cos^2 \frac{\psi}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Эти величины представляют собою главные показатели поглощения в окрестности оси как функции полярного угла.

В качестве важнейшего применения разберем подробнее теорию интерференционных явлений для пластинок кристалла, вырезанных перпендикулярно к оптической оси. Отличие от изложенного в главе V, § 64—66 заключается в том, что оба интерферирующих световых луча ослабляются различным образом. Все остальное, а следовательно также и вычисление разности хода, сохраняется в нашем приближении, так как при этом геометрические законы распространения остаются такими же, как и для непоглощающих кристаллов.

Таким образом согласно (16) § 67 мы имеем для амплитуд главных колебаний при выходе в тех же обозначениях, что и в § 64, вместо (1) § 64:

$$OC = E \cos \varphi e^{-\frac{2\pi \chi' l}{c}}, \quad OD = E \sin \varphi e^{-\frac{2\pi \chi'' l}{c}}, \quad (17a)$$

где l обозначает путь, пройденный в кристалле, т. е. $l = d / \cos \gamma$, если d есть толщина кристалла, а γ — угол, составляемый лучом с нормалью к пластинке. При этом путь в кристалле принимается равным для обоих лучей, что приблизительно выполняется, когда речь идет о малых углах возле оптической оси. В этом приближении можно положить в показателе (17a) $c' = c''$ и ввести сокращенное обозначение $s = 2\pi \nu l / c' = 2\pi \nu l / c''$; таким образом:

$$OC = E \cos \varphi e^{-\chi' s}, \quad OD = E \sin \varphi e^{-\chi'' s}. \quad (17b)$$

Отсюда для амплитуд лучей, вступающих в интерференцию после прохождения поляризатора и анализатора, получается аналогично (2) § 64:

$$OF = E \cos \varphi \cos (\varphi - \chi) e^{-\chi' s}, \quad OG = E \sin \varphi \sin (\varphi - \chi) e^{-\chi'' s}. \quad (18)$$

Выражение для общей интенсивности света после интерференции, естественно, остается в силе:

$$J = J_1 + J_2 + 2\sqrt{J_1 J_2} \cos \delta, \quad (19)$$

причем δ вычисляется, как и ранее.

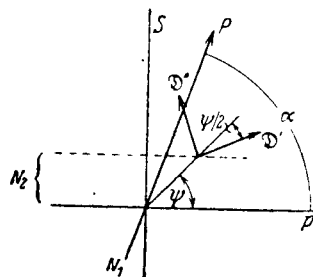
Исследуем теперь явления, возникающие в пластинке, вырезанной перпендикулярно к оптической оси, при расположении, описанном в § 64 и 65. Таким образом центр в плоскости выхода является следом оптической оси, а различные точки этой плоскости соответствуют лучам, падающим под различными углами. Расположение главных колебаний в этой плоскости следов меняется от точки к точке. Разберем следующие частные случаи.

I. ОДНООСНЫЕ КРИСТАЛЛЫ

Соответственно обозначениям $c_x = c_y = c_o$, $c_z = c_e$ полагаем:

$$x_x = x_y = x_o, \quad x_z = x_e. \quad (20)$$

Направление колебаний необыкновенного луча здесь всегда лежит в плоскости \hat{N} , т. е. световой вектор в плоскости проекции всегда направлен радиально (фиг. 174).



Фиг. 174. К теории поглощающих кристаллов.

Поэтому мы можем отождествить угол между вектором колебаний необыкновенного луча и поляризатором с углом φ в (17а). Чтобы остаться в согласии с (12а) и (12б), мы должны поменять в (18) x' и x'' друг на друга. Тогда согласно (18) мы получим для скрещенного николя, т. е. для $\lambda = \pi/2$:

$$OF = E \cos \varphi \sin \varphi e^{-x's},$$

$$OG = -E \sin \varphi \cos \varphi e^{-x's}.$$

Поэтому интенсивность согласно (19) будет:

$$J = \frac{E^2}{4} \sin^2 2\varphi (e^{-2x's} + e^{-2x''s} - 2 \cos \delta e^{-(x'+x'')s}). \quad (21a)$$

На самой оптической оси $x' = x''$ и $\delta = 0$, т. е.

$$J_0 = 0. \quad (21b)$$

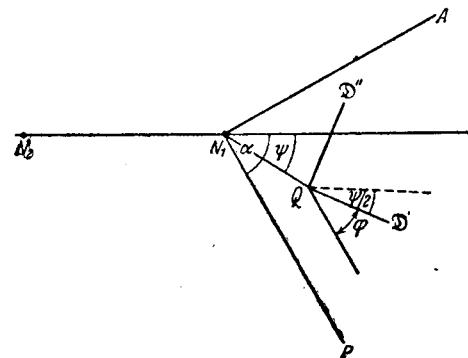
Таким образом вследствие изменения δ в поле зрения возникают интерференционные кольца, которые, однако, делаются неясными, если поглощение становится сильным. Поле зрения пересечено темным крестом изогир $\varphi = 0, \pi/2$, который, таким образом, расположен параллельно поляризатору и анализатору (ср. § 65). Кристаллы ведут себя различно в зависимости от того, больше или меньше x_o , чем x_e . Если $x_o \ll x_e$, то близкие к

осям лучи будут ослабляться сравнительно мало. Таким образом вне темного креста поле зрения будет светлым (I тип: платиносиноеродистый магний). Если, однако, $x_o \gg x_e$ (II тип, турмалин), т. е. поглощение у оси наибольшее, то все поле зрения оказывается темным и постепенно просветляется лишь к краям.

II. ДВУОСНЫЕ КРИСТАЛЛЫ

Мы ограничимся случаем скрещенных николей, т. е. случаем $\lambda = \pi/2$, и примем, что плоскость пластинки расположена перпендикулярно к оптической оси N_1 .

Пусть N_1, N_2 суть точки пересечения оптических осей с плоскостью чертежа, ϕ — угол между линией $N_1 Q$, соединяющей точку N_1 с некоторой соседней точкой Q и плоскостью оптических осей, а α — угол между плоскостью оптических осей и плоскостью колебаний поляризатора P .



Фиг. 175. К теории поглощающих кристаллов.

Если $N_1 Q \ll N_1 N_2$, то направление колебаний составляет с $N_1 N_2$ угол, приблизительно равный $\phi/2$ (ср. § 66, стр. 340). Угол φ между \mathfrak{D}' и направлением колебаний поляризатора будет, следовательно, равняться $\varphi = \alpha - \phi/2$ (фиг. 175). Поэтому вступающие в интерференцию лучи имеют согласно (18) амплитуды:

$$OF = E \cos \left(\alpha - \frac{\phi}{2} \right) \sin \left(\alpha - \frac{\phi}{2} \right) e^{-x's},$$

$$OG = -E \sin \left(\alpha - \frac{\phi}{2} \right) \cos \left(\alpha - \frac{\phi}{2} \right) e^{-x's}.$$

Таким образом интенсивность света будет равна:

$$J = \frac{E^2}{4} \sin^2 (2\alpha - \phi) (e^{-2x's} + e^{-2x''s} - 2e^{-(x'+x'')s} \cdot \cos \delta). \quad (22a)$$

На самой оптической оси, где ϕ становится неопределенным, свет разлагается на две составляющие — параллельную и перпендикулярную плоскости, проходящей через оси N_1, N_2 , т. е. полагают в (22а) $\phi = 0$ и заменяют x', x'' на x_p, x_s . Кроме того, разность фаз δ обращается здесь в 0. Поэтому из (22а) получается

$$J_0 = \frac{E^2}{4} \sin^2 2\alpha (e^{-x_p s} - e^{-x_s s})^2. \quad (22b)$$

В (22a) первый множитель дает прежде всего темную главную изогирю $\sin(2\alpha - \psi) = 0$. Однако, в то время как в случае непоглощающих кристаллов последняя проходила через центр (след оптической оси), теперь она прерывается в окрестности оси светлой точкой, так как согласно (22b) J_0 вообще не равно нулю. Это имеет место только для частных значений $\alpha = 0$ или $\alpha = \pi/2$, т. е. когда плоскость колебаний поляризатора расположена либо в плоскости оптических осей, либо перпендикулярно к ней.

Второй множитель в (22a) вследствие изменения δ дает темные кольца вокруг оптической оси; с увеличением поглощения или с ростом толщины пластинки они становятся все менее ясными. Кроме того, второй множитель показывает еще зависимость от угла (от ψ), которая, однако, становится заметной только тогда, когда интерференционная картина сходится на нет. Она выражается членом:

$$F = e^{-2x's} + e^{-2x''s}, \quad (23)$$

так как согласно (16) $x' + x'' = x_s + x_p = \text{const.}$

Легко видеть, что F имеет максимум при $\psi = 0, \pi$ и минимум при $\psi = \pm \pi/2$. В самом деле, согласно (16)

$$\frac{\partial F}{\partial \psi} = s(x_p - x_s) \sin \psi (e^{-2x's} - e^{-2x''s}),$$

а это выражение обращается в нуль при $\psi = 0, \pi$ и при $x' = x''$, т. е. согласно (16) при $\psi = \pm \pi/2$. Два первых нулевых значения дают максимумы, два последних — минимумы, потому что

$$F(0, \pi) = e^{-2x_p s} + e^{-2x_s s} > F\left(\pm \frac{\pi}{2}\right) = 2e^{-(x_p + x_s)s}. \quad (24)$$

Таким образом поле зрения, кроме главной изогирей $\psi = 2\alpha$, пересекается при $\psi = \pm \pi/2$ еще темным пучком перпендикулярно к плоскости оптических осей.

Этот темный пучок остается еще видимым, даже если убрать поляризатор и анализатор; он будет, следовательно, наблюдаться просто в естественном свете. Последний можно считать состоящим из двух составляющих одинаковой амплитуды, поляризованных в каких-либо взаимно перпендикулярных направлениях и, следовательно, не интерферирующих друг с другом. Их амплитуды можно записать так:

$$Ee^{-x's}, Ee^{-x''s},$$

и полная интенсивность будет равна:

$$J = E^2 (e^{-2x's} + e^{-2x''s}); \quad (25a)$$

следовательно, на самой оси

$$J_0 = E^2 (e^{-2x_p s} + e^{-2x_s s}). \quad (25b)$$

Таким образом распределение интенсивности вне оптической оси опять дается множителем (23) и поэтому темный пучок при $\psi = \pm \pi/2$ виден также и в естественном свете. Однако на самой оси согласно (24) поглощение наименьшее, так что ось кажется более светлой. Это явление наблюдалось Брюстером еще в 1819 г.

Укажем еще раз, что все наши расчеты базировались на пренебрежении эллиптичностью главных колебаний. Это далеко не всегда допустимо, ибо, как это легко показать, во всяком поглощающем кристалле существует четыре направления, в которых поляризация оказывается даже круговой (поворотные оси); два из этих направлений расположены вблизи оптической оси. Однако область заметной эллиптичности по мере ослабления поглощения все более стягивается к поворотным осям, которые сами тогда приближаются к оптическим осям. Но и при учете этого обстоятельства общий характер рассмотренного явления остается прежним, вследствие чего мы не будем его детальнее исследовать. Отметим, что мы не рассматриваем некоторых тонкостей (идиоформные кольца, выявление винтовых осей с помощью кругополяризованного света). Относительно них мы сошлемся на оригинальные работы ¹.

§ 70. ДИФРАКЦИЯ ОТ ПРОВОДЯЩЕГО ШАРА*

Металлические вещества обуславливают своеобразные оптические явления не только в том случае, если они представляют собой сплошное тело, но также и в том состоянии тонкого распыления, которое именуется коллоидальным. Известна, например, великолепная рубиново-красная краска, которую дает коллоидально распыленное (в жидкости или стекле) золото. Обсуждение этих явлений представляет большой интерес, потому что в этом случае процессы преломления, поглощения и дифракции своеобразно объединяются. Если мы будем рассматривать металлические частички как бесконечно хорошие проводники в вполне прозрачной среде, то придем к явлению чистой дифракции; мы его, однако, не рассматривали с этой точки зрения в главе IV, потому что физический интерес имеют как раз явления, вызываемые проникновением света внутрь частиц. Однако при таком проникновении в случае металлических частиц в значительной степени играет роль поглощение. Ввиду этого уместно обсудить эти явления здесь.

С другой стороны необходимо отметить, что с точки зрения метода речь идет о строгом решении дифракционной проблемы в ее наиболее общем смысле, именно — об интегрировании уравнений Максвелла для приходящей из бесконечности плоской волны, которая падает на некоторую поверхность разрыва

¹ W. Voigt, Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, т. 48 (1902); Ann. Physik (4), т. 9 (1902), стр. 367; т. 27 (1908), стр. 1005.

оптических параметров. Точный метод решения существует лишь в том случае, когда эти граничные поверхности имеют достаточно простую геометрическую форму. Он состоит в том, что вводятся такие криволинейные координаты, при которых поверхность разрыва является координатной поверхностью, и уравнения Максвелла вместе с граничными условиями могут быть разбиты на обыкновенные дифференциальные уравнения. Тогда вся задача сводится к простой задаче с граничными условиями для обыкновенных дифференциальных уравнений.

В последующем мы ограничимся частным случаем, когда *дифрагирующее тело есть шар, а падающая волна рассматривается как плоская и линейно поляризованная*¹. Пусть радиус этого шара есть R , его центр взят за начало осей x, y, z прямоугольной системы. Ось z направлена противоположно распространению падающей волны, а ось x совпадает с направлением колебаний электрического вектора. Мы предполагаем далее, что среда, окружающая шар, прозрачна, однородна и изотропна. Мы будем исходить из уравнений Максвелла для немагнитных тел:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{rot} \mathfrak{H} &= \frac{\varepsilon}{c} \mathfrak{E} + \frac{4\pi\sigma}{c} \mathfrak{E}, & (a) \\ \operatorname{rot} \mathfrak{E} &= -\frac{1}{c} \dot{\mathfrak{H}}. & (b) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Скалярные уравнения мы можем написать так [смотри формулу (1f) § 67]:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{div} \mathfrak{E} &= 0, & (a) \\ \operatorname{div} \mathfrak{H} &= 0. & (b) \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Рассмотрим теперь некоторый периодический во времени процесс с циклической частотой ω , для которого уравнения (1) можно написать в следующей форме:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{rot} \mathfrak{H} &= \frac{i\omega\varepsilon + 4\pi\sigma}{c} \mathfrak{E} = k_1 \mathfrak{E}, & (a) \\ \operatorname{rot} \mathfrak{E} &= -\frac{i\omega}{c} \mathfrak{H} = -k_2 \mathfrak{H}. & (b) \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Здесь введены сокращенные обозначения:

$$\left. \begin{aligned} k_1 &= \frac{i\varepsilon\omega + 4\pi\sigma}{c}, \\ k_2 &= \frac{i\omega}{c}. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Тогда определенное в § 67, формуле (8) комплексное волновое число равно¹:

$$k = \sqrt{-k_1 k_2}. \quad (5)$$

В дальнейшем мы будем обозначать рассматриваемые величины индексами (a) и (i) в зависимости от того, относятся ли они к внешней среде, окружающей шар, или к самой внутренней среде шара. Во внешнем пространстве $\sigma = 0$, так что $k_1^{(a)}, k_2^{(a)}$ являются чисто мнимыми.

После этого *падающую волну* запишем в такой форме:

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{E}_x^{(e)} &= E^{(e)} e^{i\omega t} = e^{ik^{(a)}z} e^{i\omega t}, \\ \mathfrak{H}_y^{(e)} &= H^{(e)} e^{i\omega t} = -\frac{ik^{(a)}}{k_2^{(a)}} e^{ik^{(a)}z} e^{i\omega t}, \\ \mathfrak{E}_y^{(e)} &= \mathfrak{E}_z^{(e)} = \mathfrak{H}_x^{(e)} = \mathfrak{H}_z^{(e)} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Таким образом нормировка амплитуды подобрана так, что амплитуда электрического вектора имеет абсолютное значение, равное единице:

$$|E^{(e)}| = |e^{ik^{(a)}z}| = 1.$$

В качестве *граничных условий* нам достаточно потребовать равенства касательных составляющих \mathfrak{E} и \mathfrak{H} , так как из них в совокупности с уравнениями Максвелла следует и непрерывность радиальных составляющих \mathfrak{E} и \mathfrak{H} . Итак мы требуем, чтобы

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{E}_{\text{tang}}^{(a)} &= \mathfrak{E}_{\text{tang}}^{(i)} \\ \mathfrak{H}_{\text{tang}}^{(a)} &= \mathfrak{H}_{\text{tang}}^{(i)} \end{aligned} \right\} \text{ для } r = R. \quad (7)$$

Чтобы выполнить эти граничные условия, мы, кроме поля $\mathfrak{E}^{(e)}, \mathfrak{H}^{(e)}$ падающей волны и произведенного им поля $\mathfrak{E}^{(i)}, \mathfrak{H}^{(i)}$ внутри шара, введем еще во внешнем пространстве дополнительное поле $\mathfrak{E}^{(b)}, \mathfrak{H}^{(b)}$ (дифрагированную волну b). Далее, так как граничные условия должны иметь место в любой момент времени, то зависимость от времени во всех этих шести векторах должна быть одной и той же. Таким образом мы имеем дело с *тремя волнами*, обладающими одинаковой зависимостью от времени: 1 — падающей *первичной волной*, 2 — *волной внутри шара*, 3 — *дополнительной волной* во внешнем пространстве — *вторичной или дифрагированной волной*.

¹ Мы здесь не будем употреблять жирного шрифта, так как нам не придется иметь дело с вещественными волновыми числами.

¹ G. Mie, Ann. Physik (4), т. 25 (1908), стр. 377. P. Debye, Ann. Physik (4), т. 30 (1909), стр. 57.

Криволинейными координатами, соответствующими шаровой поверхности, являются сферические координаты r, ϑ, φ , определяемые уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} x &= r \sin \vartheta \cos \varphi, \\ y &= r \sin \vartheta \sin \varphi, \\ z &= r \cos \vartheta. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Если \mathcal{A} есть вектор, обладающий в декартовой системе координат составляющими $\mathcal{A}_x, \mathcal{A}_y, \mathcal{A}_z$, то его составляющие $\mathcal{A}_r, \mathcal{A}_\vartheta, \mathcal{A}_\varphi$ в наших сферических координатах определяются из соотношений:

$$\mathcal{A}_r = \sum_x \frac{\partial r}{\partial x} \mathcal{A}_x, \quad \mathcal{A}_\vartheta = \sum_x \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \mathcal{A}_x, \quad \mathcal{A}_\varphi = \sum_x \frac{\partial \varphi}{\partial x} \mathcal{A}_x. \quad (9)$$

Вычисление вектора $\text{rot } \mathcal{A}$ согласно этим формулам дает:

$$\left. \begin{aligned} \text{rot}_r \mathcal{A} &= \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \left[\frac{\partial (r \sin \vartheta \mathcal{A}_\varphi)}{\partial \vartheta} - \frac{\partial (r \mathcal{A}_\vartheta)}{\partial \varphi} \right], \\ \text{rot}_\vartheta \mathcal{A} &= \frac{1}{r \sin \vartheta} \left[\frac{\partial \mathcal{A}_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial (r \sin \vartheta \mathcal{A}_\varphi)}{\partial r} \right], \\ \text{rot}_\varphi \mathcal{A} &= \frac{1}{r} \left[\frac{\partial (r \mathcal{A}_\vartheta)}{\partial r} - \frac{\partial \mathcal{A}_r}{\partial \vartheta} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Таким образом уравнения поля (3) в сферических координатах гласят:

$$\left. \begin{aligned} k_1 \mathcal{E}_r &= \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \left[\frac{\partial (r \sin \vartheta \mathcal{H}_\varphi)}{\partial \vartheta} - \frac{\partial (r \mathcal{H}_\vartheta)}{\partial \varphi} \right], & (\alpha) \\ k_1 \mathcal{E}_\vartheta &= \frac{1}{r \sin \vartheta} \left[\frac{\partial \mathcal{H}_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial (r \sin \vartheta \mathcal{H}_\varphi)}{\partial r} \right], & (\beta) \\ k_1 \mathcal{E}_\varphi &= \frac{1}{r} \left[\frac{\partial (r \mathcal{H}_\vartheta)}{\partial r} - \frac{\partial \mathcal{H}_r}{\partial \vartheta} \right], & (\gamma) \end{aligned} \right\} (a) \quad (11)$$

$$\left. \begin{aligned} -k_2 \mathcal{H}_r &= \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \left[\frac{\partial (r \sin \vartheta \mathcal{E}_\varphi)}{\partial \vartheta} - \frac{\partial (r \mathcal{E}_\vartheta)}{\partial \varphi} \right], & (\alpha) \\ -k_2 \mathcal{H}_\vartheta &= \frac{1}{r \sin \vartheta} \left[\frac{\partial \mathcal{E}_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial (r \sin \vartheta \mathcal{E}_\varphi)}{\partial r} \right], & (\beta) \\ -k_2 \mathcal{H}_\varphi &= \frac{1}{r} \left[\frac{\partial (r \mathcal{E}_\vartheta)}{\partial r} - \frac{\partial \mathcal{E}_r}{\partial \vartheta} \right]. & (\gamma) \end{aligned} \right\} (b)$$

Граничные условия (7) теперь примут вид:

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{E}_\vartheta^{(i)} &= \mathcal{E}_\vartheta^{(a)}; & \mathcal{E}_\varphi^{(i)} &= \mathcal{E}_\varphi^{(a)} \\ \mathcal{H}_\vartheta^{(i)} &= \mathcal{H}_\vartheta^{(a)}; & \mathcal{H}_\varphi^{(i)} &= \mathcal{H}_\varphi^{(a)} \end{aligned} \right\} \text{ для } r=R \quad (12)$$

Уравнения (11) вместе с граничными условиями (12) представляют основные уравнения, которые нам нужно проинтегрировать.

Произвольную систему решений \mathcal{E}, \mathcal{H} с составляющими:

$$\mathcal{E}_r, \mathcal{E}_\vartheta, \mathcal{E}_\varphi, \mathcal{H}_r, \mathcal{H}_\vartheta, \mathcal{H}_\varphi$$

можно разложить на две линейно независимые друг от друга системы $\mathcal{E}', \mathcal{H}'$ и $\mathcal{E}'', \mathcal{H}''$, так что для одной из них

$$\mathcal{E}'_r = \mathcal{E}_r, \quad \mathcal{H}'_r = 0, \quad (13)$$

а для другой:

$$\mathcal{E}''_r = 0, \quad \mathcal{H}''_r = \mathcal{H}_r. \quad (14)$$

Например, если положить $\mathcal{H}_r = \mathcal{H}'_r = 0$, то два уравнения (11 а, б; а, γ) дадут:

$$\left. \begin{aligned} k_1 \mathcal{E}'_\vartheta &= - \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial (r \sin \vartheta \mathcal{H}'_\varphi)}{\partial r}, \\ k_1 \mathcal{E}'_\varphi &= \frac{1}{r} \frac{\partial (r \mathcal{H}'_\vartheta)}{\partial r}. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Если подставить эти выражения в (b, β), то (a, α), (b, β), (b, γ) образуют систему дифференциальных уравнений для определения трех функций $\mathcal{E}_r, \mathcal{H}_\vartheta, \mathcal{H}_\varphi$, а (b, α) удовлетворится тождественно. Если согласно (12) разрешить эту систему уравнений при граничных условиях, гласящих, что \mathcal{H}_ϑ и \mathcal{H}_φ непрерывны на поверхности, то, согласно (15), \mathcal{E}_ϑ и \mathcal{E}_φ сами собой окажутся также непрерывными на поверхности, и, следовательно, все граничные условия (12) будут выполнены.

Совершенно аналогичное будет справедливо, если положить $\mathcal{E}''_r = 0$.

Волну с равной нулю радиальной магнитной составляющей мы будем называть *электрической волной*, а с радиальной электрической составляющей, равной нулю, — *магнитной волной*. Покажем теперь, что как электрическая, так и магнитная волны выводятся из скалярных потенциалов Π', Π'' , удовлетворяющих одному и тому же волновому уравнению.

Прежде всего для электрической волны, благодаря тому, что $\mathcal{H}'_r = 0$ из (b, α) следует, что \mathcal{E}'_ϑ и \mathcal{E}'_φ получаются путем образования градиента из некоторого скаляра U :

$$\mathcal{E}'_\vartheta = \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial U}{\partial \varphi}, \quad \mathcal{E}'_\varphi = \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \vartheta}. \quad (16)$$

Если положить

$$U = \frac{\partial(r\Pi')}{\partial r}, \quad (17)$$

то (16) даст:

$$\mathcal{E}'_\varphi = \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial^2(r\Pi')}{\partial r \partial \varphi}, \quad \mathcal{E}'_\vartheta = \frac{1}{r} \frac{\partial^2(r\Pi')}{\partial r \partial \vartheta}. \quad (18)$$

Мы видим теперь, что (15) можно удовлетворить величинами:

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{H}'_\varphi &= -k_1 \frac{\partial \Pi'}{\partial \vartheta} = -\frac{k_1}{r} \frac{\partial(r\Pi')}{\partial \vartheta}, \\ \mathcal{H}'_\vartheta &= k_1 \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial \Pi'}{\partial \varphi} = \frac{k_1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial(r\Pi')}{\partial \varphi}. \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

Уравнения (19), будучи подставлены в (11a, α), дают:

$$\mathcal{E}'_r = -\frac{1}{r \sin \vartheta} \left[\frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial \Pi'}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial^2 \Pi'}{\partial \varphi^2} \right]. \quad (20)$$

Если подставить (18), (19) и (20) в (11b, β, γ), то получатся два уравнения, левые части которых являются производными по φ и θ соответственно от одного и того же выражения. Их, следовательно, можно удовлетворить, полагая последнее равным нулю; таким образом получается:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial^2(r\Pi')}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial \Pi'}{\partial \vartheta} \right) + \\ + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 \Pi'}{\partial \varphi^2} + k^2 \Pi' = 0. \end{aligned} \quad (21)$$

При помощи этого уравнения, выражение (20) преобразуется в

$$\mathcal{E}'_r = \frac{\partial^2(r\Pi')}{\partial r^2} + k^2 r \Pi'. \quad (22)$$

Подставляя (18), (19), (20), (21), (22) в уравнения (11), убеждаемся в том, что мы, действительно, имеем систему решений этих уравнений.

Совершенно таким же образом рассматривается и магнитная волна; оказывается, что она может быть выведена из потенциала Π'', удовлетворяющего тому же дифференциальному уравнению (21), что и Π'. Таким образом в качестве решений основных уравнений (11) мы получаем совокупность следующих равенств:

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{E}'_r &= \mathcal{E}'_r + \mathcal{E}''_r = \frac{\partial^2(r\Pi')}{\partial r^2} + k^2 r \Pi', & (a) \\ \mathcal{E}_\vartheta &= \mathcal{E}'_\vartheta + \mathcal{E}''_\vartheta = \frac{1}{r} \frac{\partial^2(r\Pi')}{\partial r \partial \vartheta} - k_2 \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial(r\Pi'')}{\partial \varphi}, & (b) \\ \mathcal{E}_\varphi &= \mathcal{E}'_\varphi + \mathcal{E}''_\varphi = \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial^2(r\Pi')}{\partial r \partial \varphi} + k_2 \frac{1}{r} \frac{\partial(r\Pi'')}{\partial \vartheta}, & (c) \end{aligned} \right\} \quad (a) \quad (23)$$

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{H}_r &= \mathcal{H}'_r + \mathcal{H}''_r = k^2 r \Pi' + \frac{\partial^2(r\Pi'')}{\partial r^2}, & (a) \\ \mathcal{H}_\vartheta &= \mathcal{H}'_\vartheta + \mathcal{H}''_\vartheta = k_1 \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial(r\Pi')}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2(r\Pi'')}{\partial r \partial \vartheta}, & (b) \\ \mathcal{H}_\varphi &= \mathcal{H}'_\varphi + \mathcal{H}''_\varphi = -k_1 \frac{1}{r} \frac{\partial(r\Pi')}{\partial \vartheta} + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial^2(r\Pi'')}{\partial r \partial \varphi}. & (c) \end{aligned} \right\} \quad (b) \quad (23)$$

При этом оба потенциала Π' и Π'' являются решениями дифференциального уравнения (21). Последнее представляет собой, однако, не что иное, как волновое уравнение:

$$\Delta \Pi + k^2 \Pi = 0,$$

выраженное в полярных координатах. Для того чтобы составляющие \mathcal{E}_ϑ , \mathcal{E}_φ , \mathcal{H}_ϑ , \mathcal{H}_φ были непрерывны, очевидно, достаточно непрерывности на поверхности шара $r=R$ четырех величин:

$$k_1 r \Pi', \quad k_2 r \Pi'', \quad \frac{\partial}{\partial r}(r \Pi'), \quad \frac{\partial}{\partial r}(r \Pi''). \quad (24)$$

Таким образом пограничные условия также распадаются на независимые условия для Π' и Π''. Наша дифракционная задача поэтому, действительно, сводится к решению двух независимых волновых уравнений с пограничными условиями.

Мы решаем это уравнение подстановкой ряда с неопределенными коэффициентами, каждый член которого является частным интегралом. После этого мы определяем из граничных условий коэффициенты. Таким образом мы получаем бесконечную последовательность частных интегралов. Во-первых, мы ищем все частные интегралы вида:

$$\Pi = R(r) \Theta(\vartheta) \Phi(\varphi). \quad (25)$$

R, Θ, Φ удовлетворяют, как легко убедиться, обыкновенным дифференциальным уравнениям:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2(RR)}{dr^2} + \left(k^2 - \frac{\alpha}{r^2}\right) r R &= 0, & (a) \\ \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{d}{d\vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{d\Theta}{d\vartheta} \right) + \left(\alpha - \frac{\beta}{\sin^2 \vartheta}\right) \Theta &= 0, & (b) \\ \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} + \beta \Phi &= 0. & (c) \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

При этом α и β являются постоянными интегрирования.

Так как поле \mathcal{E} , \mathcal{H} является однозначной функцией точки, то и Π также должно быть однозначной функцией точки, и отсюда вытекают известные граничные условия для Θ и Φ.

Теперь для каждого из трех уравнений (26) можно получить общий интеграл для (с); он будет равняться:

$$a \cos(\sqrt{\beta} \varphi) + b \sin(\sqrt{\beta} \varphi).$$

Из требования однозначности получается:

$$\beta = m^2 \quad (m - \text{целое}). \quad (27)$$

Итак, однозначное решение (26с) имеет вид:

$$\Phi = a_m \cos(m \varphi) + b_m \sin(m \varphi). \quad (28)$$

Уравнение (26b) представляет собой известное уравнение шаровых функций. Для того чтобы оно имело однозначное решение, необходимо и достаточно, чтобы

$$a = l(l+1), \quad (l > |m|, \text{ целое}). \quad (29)$$

Введем в это уравнение значение (27) для β и новую переменную $\xi = \cos \vartheta$.

Тогда оно переходит в уравнение¹:

$$\frac{d}{d\xi} \left[(1 - \xi^2) \frac{d\Theta}{d\xi} \right] + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{1 - \xi^2} \right] \Theta = 0. \quad (31)$$

решениями которого являются так называемые сопряженные полиномы Лежандра:

$$\Theta = P_l^{(m)}(\xi) = P_l^{(m)}(\cos \vartheta). \quad (32)$$

Последние тождественно равны нулю, если $|m| > l$; таким образом их существует всего $2l+1$, именно для

$$m = -l, -l+1, \dots, l-1, l.$$

Для того чтобы проинтегрировать уравнение (26a), введем подстановки:

$$kr = \rho, \quad R(r) = \frac{1}{\sqrt{\rho}} P(\rho). \quad (33)$$

Мы получим тогда для P дифференциальное уравнение Бесселя²:

$$\frac{d^2 P}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dP}{d\rho} + \left[1 - \frac{\left(l + \frac{1}{2}\right)^2}{\rho^2} \right] P = 0. \quad (34)$$

Решением этого уравнения является $(l + 1/2)$ -ая обобщенная цилиндрическая функция:

$$P(\rho) = Z_{l + \frac{1}{2}}(\rho).$$

¹ Courant-Hilbert, Metn. d. math. Phys, стр. 282. (стр. 37 русск. издания. Прим. перев.).

² Courant-Hilbert, стр. 260 и глава VII, стр. 405 (стр. 307—308 и глава VII, стр. 445 русского издания).

Таким образом решением (26a) является:

$$R = \frac{1}{\sqrt{kr}} Z_{l + \frac{1}{2}}(kr). \quad (35)$$

Каждая цилиндрическая функция $Z_{l + \frac{1}{2}}$ может быть представлена как линейная комбинация с постоянными коэффициентами из двух нормальных функций. В качестве таких нормальных функций можно выбрать так называемую бесселеву функцию $I_{l + \frac{1}{2}}$ и функцию Неймана $N_{l + \frac{1}{2}}$; для наших целей удобнее ввести вместо них функции:

$$\left. \begin{aligned} \psi_l(\rho) &= \sqrt{\frac{\pi\rho}{2}} I_{l + \frac{1}{2}}(\rho), \quad (a) \\ \chi_l(\rho) &= -\sqrt{\frac{\pi\rho}{2}} N_{l + \frac{1}{2}}(\rho). \quad (b) \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

Функции $\psi_l(\rho)$ не имеют особенных точек во всей конечной области плоскости ρ , включая начало координат; наоборот, функции $\chi_l(\rho)$ имеют в точке $\rho = 0$ особенность (обращаются в бесконечность). Поэтому для выражения волны внутри шара следует воспользоваться функцией ψ_l , а не χ_l .

Общий интеграл уравнения (26a) равен:

$$rR = c_l \psi_l(kr) + d_l \chi_l(kr). \quad (37)$$

Если мы положим, в частности, $c_l = 1$, $d_l = i$, то мы получим:

$$rR = \zeta_l(kr), \quad (38)$$

где $\zeta_l(\rho)$ обозначает:

$$\zeta_l(\rho) = \psi_l(\rho) + i\chi_l(\rho) = \sqrt{\frac{\pi\rho}{2}} H_{l + \frac{1}{2}}^{(2)}(\rho). \quad (39)$$

Входящая сюда функция $H^{(2)}$ есть одна из двух так называемых ганкелевых функций. Они выделяются из всех цилиндрических функций тем, что обращаются в нуль на бесконечности в комплексной плоскости ρ , притом применяющаяся здесь функция, отмеченная индексом (2), обращается в нуль в отрицательной полуплоскости мнимой части ρ . Эта функция, следовательно, является подходящей для изображения дифрагированной волны.

Перемножая функции (28), (32), (37), получаем согласно (26) частный интеграл $P_l^{(m)}$. Поэтому для решения уравнения коле-

баний мы имеем выражение:

$$\left. \begin{aligned} r\Pi &= r \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \Pi_l^{(m)} = \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l [c_l \psi_l(kr) + d_l \chi_l(kr)] [P_l^{(m)}(\cos \vartheta)] [a_m \cos(m\varphi) + \\ &\quad + b_m \sin(m\varphi)], \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

причем a_m, b_m, c_l, d_l являются произвольными постоянными.

Теперь нам нужно вычислить неопределенные коэффициенты из граничных условий. Для того чтобы наш метод был вообще применим, нужно, чтобы возможно было оба потенциала Π' Π'' падающей волны одновременно разложить в ряд вида (40). Чтобы доказать это, преобразуем падающую волну (6) при помощи формул преобразования (9) к полярным координатам; мы получим:

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{E}_r^{(e)} &= e^{ik^{(a)}r \cos \vartheta} \sin \vartheta \cos \varphi, & \mathfrak{H}_r^{(e)} &= -\frac{ik^{(a)}}{k_2^{(a)}} e^{ik^{(a)}r \cos \vartheta} \sin \vartheta \sin \varphi, \\ \mathfrak{E}_\vartheta^{(e)} &= e^{ik^{(a)}r \cos \vartheta} \cos \vartheta \cos \varphi, & \mathfrak{H}_\vartheta^{(e)} &= -\frac{ik^{(a)}}{k_2^{(a)}} e^{ik^{(a)}r \cos \vartheta} \cos \vartheta \sin \varphi, \\ \mathfrak{E}_\varphi^{(e)} &= -e^{ik^{(a)}r \cos \vartheta} \frac{\sin \varphi}{\sin \vartheta}, & \mathfrak{H}_\varphi^{(e)} &= -\frac{ik^{(a)}}{k_2^{(a)}} e^{ik^{(a)}r \cos \vartheta} \frac{\cos \varphi}{\sin \vartheta}. \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

Для определения соответствующего потенциала $\Pi'^{(e)}$ достаточно воспользоваться одним из уравнений (23), скажем первым из них; из (23а, а) получается для $\Pi'^{(e)}$ дифференциальное уравнение:

$$e^{ik^{(a)}r \cos \vartheta} \sin \vartheta \cos \varphi = \frac{\partial^2 r \Pi'^{(e)}}{\partial r^2} = k^{(a)^2} r \Pi'^{(e)}. \quad (42)$$

Для первого множителя левой части имеет место следующее дифференцируемое разложение по полиномам Лежандра¹:

$$e^{ik^{(a)}r \cos \vartheta} = \sum_{l=0}^{\infty} i^l (2l+1) \cdot \frac{\psi_l(k^{(a)}r)}{k^{(a)}r} P_l(\cos \vartheta). \quad (43)$$

¹ Heine, Handb. d. Kugelfunktionen, т. I, стр. 82, формулы (14) (14а).

Вследствие того, что

$$e^{ik^{(a)}r \cos \vartheta} \sin \vartheta = -\frac{1}{ik^{(a)}r} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(e^{ik^{(a)}r \cos \vartheta} \right),$$

$$\frac{\partial}{\partial \vartheta} P_l(\cos \vartheta) = -P_l^{(1)}(\cos \vartheta), \quad P_l^{(1)}(\cos \vartheta) = 0;$$

отсюда вытекает для левой части (42) следующее разложение по сопряженным полиномам Лежандра порядка 1:

$$\begin{aligned} e^{ik^{(a)}r \cos \vartheta} \sin \vartheta \cos \varphi &= \\ &= -\frac{1}{(k^{(a)}r)^2} \sum_{l=1}^{\infty} i^{l-1} (2l+1) \psi_l(k^{(a)}r) P_l^{(1)}(\cos \vartheta) \cos \varphi. \end{aligned} \quad (44)$$

В силу этого мы зададимся в качестве решения (42) выражением:

$$r\Pi'^{(e)} = \frac{1}{k^{(a)^2}} \sum_{l=1}^{\infty} a_l \psi_l(k^{(a)}r) P_l^{(1)}(\cos \vartheta) \cos \varphi. \quad (45)$$

Подставляя (44) и (45) в (42) и сравнивая коэффициенты, мы получаем соотношение:

$$\begin{aligned} a_l \left[k^{(a)^2} \psi_l(k^{(a)}r) + \frac{\partial^2 \psi_l(k^{(a)}r)}{\partial r^2} \right] &= \\ &= i^{l-1} (2l+1) \frac{\psi_l(k^{(a)}r)}{r^2}. \end{aligned} \quad (46)$$

Но согласно (37) (для $c_l=1, d_l=0$) величина $\psi_l(k^{(a)}r) = rR$ есть решение уравнения (26а)

$$\frac{d^2 \psi_l}{dr^2} + \left(k^{(a)^2} - \frac{a}{r^2} \right) \psi_l = 0, \quad (47)$$

если [ср. (29)] $a = l(l+1)$. Если мы сравним это с (46), то убедимся, что

$$a_l = i^{l-1} \frac{2l+1}{l(l+1)}. \quad (48)$$

Аналогичное вычисление справедливо и для магнитного потенциала $\Pi''^{(e)}$, так что оба потенциала падающей волны могут быть представлены в форме:

$$\left. \begin{aligned} r\Pi'^{(e)} &= \frac{1}{k^{(a)^2}} \sum_{l=1}^{\infty} i^{l-1} \frac{2l+1}{l(l+1)} \psi_l(k^{(a)}r) P_l^{(1)}(\cos \vartheta) \cos \varphi, & (a) \\ r\Pi''^{(e)} &= -\frac{1}{k^{(a)^2}} \sum_{l=1}^{\infty} i^l \frac{k^{(a)}}{k_2^{(a)}} \frac{2l+1}{l(l+1)} \psi_l(k^{(a)}r) P_l^{(1)}(\cos \vartheta) \sin \varphi. & (b) \end{aligned} \right\} \quad (49)$$

Тем самым мы представили оба рассматриваемые потенциала одновременно в виде рядов формы (40). Входящие в (40) постоянные можно легко определить. Именно граничные условия (25) гласят в развернутом виде:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} [r(\Pi^{(e)} + \Pi^{(b)})]_{r=R} &= \frac{\partial}{\partial r} [r\Pi^{(i)}]_{r=R}, & (a) \\ \frac{\partial}{\partial r} [r(\Pi'^{(e)} + \Pi'^{(b)})]_{r=R} &= \frac{\partial}{\partial r} [r\Pi'^{(i)}]_{r=R}, & (b) \\ k_1^{(a)} [r(\Pi^{(e)} + \Pi^{(b)})]_{r=R} &= k_1^{(i)} [r\Pi^{(i)}]_{r=R}, & (c) \\ k_2^{(a)} [r(\Pi'^{(e)} + \Pi'^{(b)})]_{r=R} &= k_2^{(i)} [r\Pi'^{(i)}]_{r=R}. & (d) \end{aligned} \right\} \quad (50)$$

Согласно (49) они могут выполняться лишь в том случае, когда в сумму (40) для неизвестных потенциалов $\Pi^{(i)}$ и $\Pi^{(b)}$ входят лишь члены с $m=1$ и, кроме того, имеет место соотношение

$$a_1 = 0$$

для магнитного потенциала и

$$b_1 = 0$$

для электрического.

Мы уже отметили выше, что для представления $\Pi^{(i)}$ применимы лишь ψ_l , остающиеся голоморфными в начале координат (тогда как χ_l обращаются там в бесконечность). Поэтому мы представим $\Pi^{(i)}$ в виде:

$$\left. \begin{aligned} r\Pi^{(i)} &= \frac{1}{k^{(i)}} \sum_{l=1}^{\infty} A_l' \psi_l(k^{(i)} r) P_l^{(1)}(\cos \vartheta) \cos \varphi, & (a) \\ r\Pi'^{(i)} &= -\frac{i}{k^{(i)} k_2^{(i)}} \sum_{l=1}^{\infty} A_l'' \psi_l(k^{(i)} r) P_l^{(1)}(\cos \vartheta) \sin \varphi. & (b) \end{aligned} \right\} \quad (51)$$

Мы также уже знаем, что для дифрагированной волны $\Pi^{(b)}$ должна быть взята функция $\zeta_l = \psi_l + i\chi_l$, образованная из ганкелевой функции $H^{(2)}$ умножением последней на $\sqrt{\frac{\pi}{2\rho}}$; при этом для больших ρ функция $H^2(\rho)$ ведет себя, как $\frac{1}{\sqrt{\rho}} e^{-i\rho}$ а, следовательно и $\zeta_l(\rho)$, как $e^{-i\rho}$ и $R = \frac{1}{r} \zeta$, как $\frac{1}{r} e^{-ik^{(a)} r}$. Это действительно

соответствует некоторой шаровой волне. Мы положим поэтому:

$$\left. \begin{aligned} r\Pi^{(b)} &= \frac{1}{k^{(a)}} \sum_{l=1}^{\infty} B_l' \zeta_l(k^{(a)} r) P_l^{(1)}(\cos \vartheta) \cos \varphi, & (c) \\ r\Pi'^{(b)} &= -\frac{1}{k^{(a)} k_2^{(a)}} \sum_{l=1}^{\infty} B_l'' \zeta_l(k^{(a)} r) P_l^{(1)}(\cos \vartheta) \sin \varphi. & (d) \end{aligned} \right\} \quad (51)$$

Если подставить выражения (49) и (51) в пограничные условия (50), то получаются следующие линейные условия между коэффициентами A_l', A_l'', B_l', B_l'' .

$$\left. \begin{aligned} B_l' \frac{1}{k^{(a)}} \zeta_l(k^{(a)} R) + \frac{1}{k^{(a)}} i^{l-1} \frac{2l+1}{l(l+1)} \psi_l'(k^{(a)} R) &= \\ &= \frac{1}{k^{(i)}} A_l' \psi_l'(k^{(i)} R), \\ B_l'' \frac{1}{k_2^{(a)}} \zeta_l(k^{(a)} R) + \frac{1}{k_2^{(a)}} i^{l-1} \frac{2l+1}{l(l+1)} \psi_l'(k^{(a)} R) &= \\ &= \frac{1}{k_2^{(i)}} A_l'' \psi_l'(k^{(i)} R), \\ B_l' \frac{1}{k^{(a)}} \zeta_l(k^{(a)} R) + \frac{1}{k^{(a)}} i^{l-1} \frac{2l+1}{l(l+1)} \psi_l(k^{(a)} R) &= \\ &= \frac{1}{k_2^{(i)}} A_l' \psi_l(k^{(i)} R), \\ B_l'' \frac{1}{k^{(a)}} \zeta_l(k^{(a)} R) + \frac{1}{k^{(a)}} i^{l-1} \frac{2l+1}{l(l+1)} \psi_l(k^{(a)} R) &= \\ &= \frac{1}{k^{(i)}} A_l'' \psi_l(k^{(i)} R). \end{aligned} \right\} \quad (52)$$

Нас интересуют лишь коэффициенты B_l', B_l'' дифрагированной волны, которые получаются исключением A_l', A_l'' :

$$\left. \begin{aligned} B_l' &= i^{l+1} \frac{2l+1}{l(l+1)} \times \\ &\times \frac{k_2^{(a)} k^{(i)} \psi_l'(k^{(a)} R) \psi_l(k^{(i)} R) - k_2^{(i)} k^{(a)} \psi_l'(k^{(i)} R) \psi_l(k^{(a)} R)}{k_2^{(a)} k^{(i)} \zeta_l'(k^{(a)} R) \psi_l(k^{(i)} R) - k_2^{(i)} k^{(a)} \zeta_l'(k^{(i)} R) \psi_l(k^{(a)} R)}, & (a) \\ B_l'' &= -i^{l+1} \frac{2l+1}{l(l+1)} \times \\ &\times \frac{k_2^{(a)} k^{(i)} \psi_l(k^{(a)} R) \psi_l'(k^{(i)} R) - k_2^{(i)} k^{(a)} \psi_l(k^{(i)} R) \psi_l'(k^{(a)} R)}{k_2^{(a)} k^{(i)} \zeta_l(k^{(a)} R) \psi_l'(k^{(i)} R) - k_2^{(i)} k^{(a)} \zeta_l(k^{(i)} R) \psi_l'(k^{(a)} R)}. & (b) \end{aligned} \right\} \quad (53)$$

Тем самым задача с пограничными значениями для уравнения (24) формально разрешена. В доказательство существования и сходимости мы входить не будем.

Подставляя (51с, d) в (23), получаем напряженности полей дифрагированной волны:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_r^{(b)} &= \frac{1}{k^{(a)2}} \frac{\cos \varphi}{r^2} \sum_{l=1}^{\infty} l(l+1) B_l' \zeta_l(k^{(a)} r) P_l^{(1)}(\cos \vartheta), \\ \mathcal{E}_\vartheta^{(b)} &= -\frac{1}{k^{(a)}} \frac{\cos \varphi}{r} \sum_{l=1}^{\infty} \left[B_l' \zeta_l(k^{(a)} r) P_l^{(1)'}(\cos \vartheta) \sin \vartheta + \right. \\ &\quad \left. + i B_l' \zeta_l(k^{(a)} r) P_l^{(1)}(\cos \vartheta) \frac{1}{\sin \vartheta} \right], \\ \mathcal{E}_\varphi^{(b)} &= -\frac{1}{k^{(a)} r \sin \vartheta} \sum_{l=1}^{\infty} \left[B_l' \zeta_l(k^{(a)} r) P_l^{(1)}(\cos \vartheta) \frac{1}{\sin \vartheta} + \right. \\ &\quad \left. + i B_l' \zeta_l(k^{(a)} r) P_l^{(1)'}(\cos \vartheta) \sin \vartheta \right], \\ \mathcal{H}_r^{(b)} &= \frac{i}{(k^{(a)} k_2^{(a)})^2} \frac{\sin \varphi}{r^2} \sum_{l=1}^{\infty} l(l+1) B_l' \zeta_l(k^{(a)} r) P_l^{(1)}(\cos \vartheta), \\ \mathcal{H}_\vartheta^{(b)} &= \frac{1}{k_2^{(a)}} \frac{\sin \varphi}{r} \sum_{l=1}^{\infty} \left[B_l' \zeta_l(k^{(a)} r) P_l^{(1)}(\cos \vartheta) \frac{1}{\sin \vartheta} - \right. \\ &\quad \left. - i B_l' \zeta_l(k^{(a)} r) P_l^{(1)'}(\cos \vartheta) \sin \vartheta \right], \\ \mathcal{H}_\varphi^{(b)} &= \frac{1}{k_2^{(a)}} \frac{\cos \varphi}{r \sin \vartheta} \sum_{l=1}^{\infty} \left[B_l' \zeta_l(k^{(a)} r) P_l^{(1)'}(\cos \vartheta) \sin \vartheta - i B_l' \zeta_l(k^{(a)} r) \times \right. \\ &\quad \left. \times P_l^{(1)}(\cos \vartheta) \frac{1}{\sin \vartheta} \right]. \end{aligned} \quad (54)$$

В заключение сопоставим еще раз значения входящих величин. Ввиду того, что мы приняли $\sigma^{(a)} = 0$, $\sigma^{(i)} = \sigma$, $\mu^{(a)} = \mu^{(i)} = 1$, мы будем иметь согласно (4):

$$\left. \begin{aligned} k_1^{(i)} &= \frac{i \varepsilon^{(i)} \omega + 4\pi \sigma}{c}, \quad k_2^{(i)} = \frac{i \omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda_0} i, \quad (a) \\ k^{(i)} &= \sqrt{-k_1^{(i)} k_2^{(i)}}, \quad (b) \end{aligned} \right\} \quad (55)$$

$$\left. \begin{aligned} k_1^{(a)} &= \frac{i \varepsilon^{(a)} \omega}{c}, \quad k_2^{(a)} = \frac{i \omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda_0} i, \quad (c) \\ k^{(a)} &= \sqrt{-k_1^{(a)} k_2^{(a)}} = \sqrt{\varepsilon^{(a)}} \frac{2\pi}{\lambda_0}, \quad (d) \\ n &= \frac{k_1^{(i)}}{k_1^{(a)}} = \frac{\varepsilon^{(i)}}{\varepsilon^{(a)}} - \frac{4\pi i \sigma}{\varepsilon^{(a)} \omega}. \quad (e) \end{aligned} \right\} \quad (55)$$

При этом мы записали в последней строке еще комплексный показатель преломления, который понадобится нам в дальнейшем.

Особенно простые соотношения получаются в случае, когда проводимость рассматриваемого шара или его диэлектрическая постоянная очень велика. В этом случае согласно (55) $|k_1^{(i)}|$ и $k^{(i)}$ весьма велики в сравнении с $|k_2^{(i)}|$, $|k_1^{(a)}|$ и $k^{(a)}$, и формулы (53) для амплитуд упрощаются следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} B_l' &= i^{l+1} \frac{2l+1}{l(l+1)} \frac{\psi_l(k^{(a)} R)}{\zeta_l(k^{(a)} R)}, \quad (a) \\ B_l' &= -i^{l+1} \frac{2l+1}{l(l+1)} \frac{\phi_l(k^{(a)} R)}{\zeta_l(k^{(a)} R)}. \quad (b) \end{aligned} \right\} \quad (56)$$

При оптических волнах этот случай, правда, по большей части не осуществляется; поэтому этот предельный случай имеет скорее исторический интерес, так как первые теории относились к нему¹.

Далее мы дадим разложение в ряды рассмотренных шаровых и цилиндрических функций.

А. Шаровые функции

Шаровые функции Лежандра:

$$P_l(\cos \vartheta) = \sum_{m=0}^{[l/2]} (-1)^m \frac{(2l-2m)!}{2^l m! (l-m)! (l-2m)!} (\cos \vartheta)^{l-2m} \quad (57)$$

и сопряженные шаровые функции:

$$P_l^{(m)}(\cos \vartheta) = (\sin \vartheta)^m \frac{d^m P_l(\cos \vartheta)}{d \cos \vartheta^m}; \quad (58)$$

¹ См., например, K. Schwarzschild, Münch. Akad. Math.-Phys. Kl., т. 31 (1901) стр. 293.

В частности, мы применяли:

$$\left. \begin{aligned} P_l^{(1)}(\cos \vartheta) &= \frac{l}{\sin \vartheta} [P_{l-1}(\cos \vartheta) - \cos \vartheta P_l(\cos \vartheta)], \\ P_l^{(1)}(\cos \vartheta) &= \frac{\cos \vartheta}{\sin^2 \vartheta} P_l^{(1)}(\cos \vartheta) - l(l+1) \frac{P_l(\cos \vartheta)}{\sin \vartheta}. \end{aligned} \right\} \quad (59)$$

Для больших порядков l справедливо асимптотическое выражение:

$$P_l(\cos \vartheta) \rightarrow \sqrt{\frac{2}{l\pi \sin \vartheta}} \sin \left[\left(l + \frac{1}{2} \right) \vartheta + \frac{\pi}{2} \right]. \quad (60)$$

В. Цилиндрические функции

1. Степенные ряды для малого аргумента x :

$$\psi_l(x) = \frac{x^{l+1}}{1 \cdot 3 \dots (2l+1)} f_l(x), \quad (61)$$

где

$$f_l(x) = 1 - \frac{3}{2l+3} \frac{x^2}{3} + \dots, \quad (62)$$

затем

$$\zeta_l(x) = i \frac{1 \cdot 3 \dots (2l-1)}{x^l} e^{-ix} [h_l(x) + ixg_l(x)], \quad (63)$$

где $h_l(x)$ и $g_l(x)$ суть степенные ряды; они начинаются с 1 и второй член их квадратичен относительно x .

В аналогичной форме приведем также $\psi'_l(x)$ и $\zeta'_l(x)$:

$$\psi'_l(x) = \frac{(l+1)x^l}{1 \cdot 3 \dots (2l+1)} f'_l(x), \quad (64)$$

и

$$\zeta'_l(x) = il \frac{1 \cdot 3 \dots (2l-1)}{x^{l+1}} e^{-ix} [h'_l(x) + ixg'_l(x)], \quad (65)$$

где $f'_l(x)$, $h'_l(x)$ и $g'_l(x)$ — также степенные ряды указанного вида.

II. Асимптотические значения для большого аргумента x в случае, если порядок l мал в сравнении с $|x|$:

$$\psi_l(x) \rightarrow \frac{1}{2} [i^{l+1} e^{-ix} + (-i)^{l+1} e^{ix}], \quad (66)$$

$$\zeta_l(x) \rightarrow i^{l+1} e^{-ix} \quad (67)$$

$$\psi'_l(x) \rightarrow \frac{1}{2} [i^l e^{-ix} + (-i)^l e^{ix}], \quad (68)$$

$$\zeta'_l(x) \rightarrow i^l e^{-ix}. \quad (69)$$

Для действительного аргумента x функции $\psi_l(x)$ и $\psi'_l(x)$ сами действительны, именно:

$$\psi_l(x) \rightarrow \sin \left(x - \frac{l\pi}{2} \right), \quad (70)$$

$$\psi'_l(x) \rightarrow \cos \left(x - \frac{l\pi}{2} \right). \quad (71)$$

§ 71. ФИЗИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА РАССЕЯННОГО СВЕТА *

Дифрагированные волны, представленные формулами (54) § 70, наблюдают обычно не на отдельных частицах, а на растворах, в которых в поле зрения находится очень много частиц. Применение этих формул предполагает поэтому, что частицы настолько удалены друг от друга, т. е. концентрация их настолько мала, что взаимодействия частиц можно не принимать во внимание. Из формулы (54) мы видим, что радиальные составляющие $\mathcal{E}_r^{(b)}$ и $\mathcal{H}_r^{(b)}$ дифрагированной волны убывают с возрастанием r быстрее (именно — как r^{-2}), чем составляющие, перпендикулярные к радиус-вектору (убывающие, как r^{-1}). Поэтому на достаточном расстоянии от дифрагирующей частицы волна оказывается трансверсальной. Эту область называют *волновой зоной*.

Далее, из формул (54) § 70, используя свойства шаровых функций, получаем, что

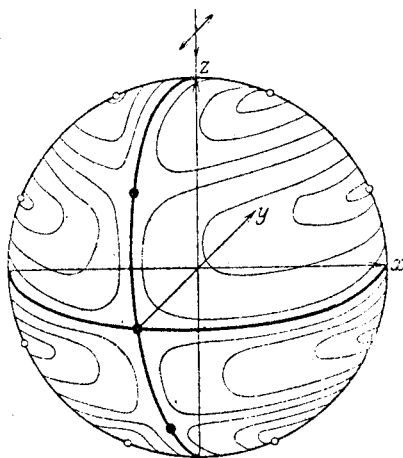
$$\mathcal{E}_\varphi \mathcal{H}_\varphi + \mathcal{E}_\vartheta \mathcal{H}_\vartheta = 0, \quad (1)$$

т. е. *электрический и магнитный векторы в дифрагированной волне перпендикулярны друг к другу*. Мы видим далее из этих формул, что полная дифрагированная волна состоит из частей, соответствующих шаровым функциям различных порядков, называемых *парциальными волнами*, причем интенсивность этих частей определяется из коэффициентов B'_l , B_l . Эти коэффициенты зависят не только от свойств вещества, но еще и от отношения радиуса шара к длине падающей волны λ_0 .

Каждая парциальная волна состоит в свою очередь из электрической части с амплитудой B'_l и магнитной части с амплитудой B_l . В первой магнитные силовые линии расположены на сферах ($\mathcal{H}_r = 0$), во второй на сферах расположены электрические силовые линии ($\mathcal{E}_r = 0$).

Рассмотрим теперь такую парциальную волну, именно l -тую электрическую волну; мы видим, что составляющие \mathcal{E}_ϑ и \mathcal{H}_φ обращаются в нуль в местах, где либо $\cos \vartheta$, либо $P_l^{(1)'}(\cos \vartheta) \sin \vartheta$ имеют нулевые точки, а составляющие \mathcal{E}_φ и \mathcal{H}_ϑ там, где либо $\sin \vartheta$, либо $P_l^{(1)}(\cos \vartheta) / \sin \vartheta$ равны нулю. Из свойств шаровых функций следует, что в интервале $0 \leq \vartheta \leq \pi$ функция $P_l^{(1)'}(\cos \vartheta)$ обращается в нуль точно l раз, а функция $P_l^{(1)}(\cos \vartheta) / \sin \vartheta$ точно

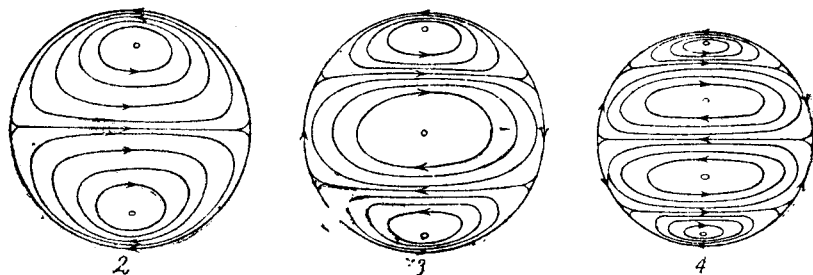
$(l-1)$ раз (причем, однако, 0 и π не входят как нулевые точки). Таким образом для $\varphi = \pm \pi/2$ все составляющие напряженностей поля имеют $2(l-1)$ нулевых точек, тогда как при 0 или π они



Фиг. 176. Четвертая электрическая парциальная волна, магнитные силовые линии.

ных колебаний, которые происходят на полусфере, находящейся спереди или сзади от этой плоскости, то получатся приводимые на фиг. 177 изображения, заимствованные у Ми¹.

Электрические силовые линии этих же электрических колебаний являются тогда (в волновой зоне) ортогональными им траекториями (фиг. 178).

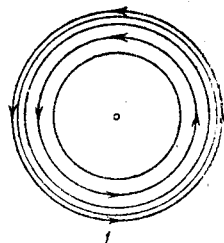


Фиг. 177. Магнитные силовые линии первых четырех электрических парциальных волн (по G. Mie, Ann. Physik, т. 25, 1908): 1—первая электрическая парциальная волна, 2—вторая электрическая парциальная волна, 3—третья электрическая парциальная волна, 4—четвертая электрическая парциальная волна.

¹ G. Mie, Ann. Physik (4), т. 25 (1908), стр. 377.

обращаются в нуль в $2l$ точках,—таким образом, в общей сложности в $4l-2$ точках. Магнитные силовые линии на шаровой поверхности могут быть разбиты на $2l$ групп. Так как они являются замкнутыми, то все кривые, принадлежащие к одной группе, охватывают кольцо одну из нулевых точек, лежащих на круге с уравнением $\varphi = 0$ или $\varphi = \pi$. Эти же кривые по отношению к $2l-1$ нулевым точкам, лежащим на круге $\varphi = \pi/2$, располагаются по четыре, напоминая систему гипербол, имеющих общие асимптоты (фиг. 176).

Если спроектировать на плоскость yz магнитные силовые линии электрических парциаль-

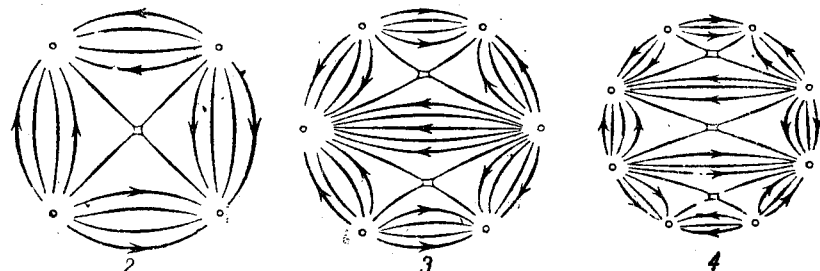


То же самое справедливо и для магнитных парциальных колебаний, только в этом случае $\cos \varphi$ и $\sin \varphi$ меняются местами; чтобы получить электрические силовые линии магнитных парциальных колебаний, лежащие на сфере, достаточно повернуть в соответствующей проекции все фигуры на угол $\pi/2$ вокруг оси z .

Исследуем теперь, в каком соотношении входят различные парциальные колебания, т. е. отношения коэффициентов B_l' и B_l'' , зависящие от отношения радиуса шара к длине волны в пустоте λ_0 и от материальных констант [см. § 70 (53), (56)]. При этом мы отличаем два относительно простых предельных случая, когда в зависимости от величины

$$a = k^{(a)}R = \frac{2\pi R}{\lambda^{(a)}} \quad (2)$$

это отношение или очень велико, или очень мало в сравнении с 1.



Фиг. 178. Электрические силовые линии первых четырех электрических парциальных колебаний (по G. Mie, Ann. Physik (4), т. 25, 1908): 1—первое электрическое парциальное колебание, 2—второе электрическое парциальное колебание, 3—третье электрическое парциальное колебание, 4—четвертое электрическое парциальное колебание.

I. $a \gg 1$.

Здесь идет речь о предельном случае теории дифракции Кирхгофа, или даже об области применимости геометрической оптики.

Если вначале ограничиться порядками величины $l \ll a$, то можно подставить в (56) асимптотические выражения § 70 (66)—(69); тогда получится:

$$\left. \begin{aligned} B_l' &= \frac{2l+1}{l(l+1)} e^{ia} \frac{\sin\left(a - \frac{l\pi}{2}\right) + in \cos\left(a - \frac{l\pi}{2}\right)}{1+n}, & (a) \\ B_l'' &= i \frac{2l+1}{l(l+1)} e^{ia} \frac{in \sin\left(a - \frac{l\pi}{2}\right) - \cos\left(a - \frac{l\pi}{2}\right)}{1+n}, & (b) \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

и в предельном случае $\epsilon^{(i)} = \infty$ или $\sigma = \infty$.

$$\left. \begin{aligned} B_l' &= i \frac{2l+1}{l(l+1)} e^{i\alpha} \cos \left(\alpha - \frac{l\pi}{2} \right), \quad (a) \\ B_l'' &= -\frac{2l+1}{l(l+1)} e^{i\alpha} \sin \left(\alpha - \frac{l\pi}{2} \right). \quad (b) \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Как в общем случае, так и в предельном коэффициенты ведут себя одинаково, именно — они осциллируют при относительно малых изменениях α , а также от одного значения l к соседнему, весьма запутанным образом. При этом их абсолютное значение в общем случае заключено между

$$\frac{2l+1}{l(l+1)} \left| \frac{n}{n+1} \right| \quad \text{и} \quad \frac{2l+1}{l(l+1)} \left| \frac{1}{n+1} \right|,$$

где зависящие от вещества множители $\left| \frac{n}{n+1} \right|$ и $\left| \frac{1}{n+1} \right|$ всегда лежат между 0 и 1; в предельном же случае $\sigma = \infty$ между

$$\frac{2l+1}{l(l+1)} \quad \text{и} \quad 0.$$

Если в B_l'' заменить величину l через $l+1$, то тригонометрический множитель, входящий в B_l'' , переходит в тригонометрический множитель, входящий в B_l' , т. е. l -тое электрическое колебание имеет тот же порядок величины, что и $(l+1)$ -ое магнитное.

Естественно, из этих формул, справедливых лишь для $l \ll \alpha$, нельзя заключить, сколько парциальных колебаний нужно принять во внимание. Дебай показал¹, воспользовавшись полусходящимися выражениями цилиндрических функций, справедливыми для всех l , что число входящих в рассмотрение членов ряда как раз равно числу α .

В этом предельном случае $\alpha \gg 1$ в основном должна содержаться вся теория радуги со всеми деталями (побочные радуги); однако оказывается, что из этой общей точки зрения она еще не может быть выведена. Вместо этого применяют методы, аналогичные методам теории дифракции Кирхгофа (построение геометрического хода луча и вычисление интенсивности при учете соответствующей лучам разности фаз)².

¹ Debye, Ann. Physik (4), т. 30 (1909), стр. 57.

² E. Mascart, Traité d'Optique, т. 1 (1889), стр. 398, т. 3 (1893), стр. 434; W. Möbius, Ann. Physik (4), т. 33 (1909), стр. 79; J. Rosenberg, Ann. Physik (4), т. 68 (1922), стр. 414; G. B. Airy, Trans. Cambr. Phil. Soc., т. 6 (1838), стр. 379; Pogg Ann. Erg.-Bd. (1842), стр. 232.

II. $\alpha \ll 1$.

Этот предельный случай особенно важен, вследствие его применимости к микроскопическим и субмикроскопическим частицам в коллоидальных растворах. Мы воспользуемся здесь приведенными в § 70 (61)–(65) степенными рядами для функций ψ и ζ , причем можем в них ограничиться первыми членами, т. е. членами, обозначенными там через $f_l(x)$, $h_l(x)$, $g_l(x)$, $f_l'(x)$, $h_l'(x)$, $g_l'(x)$, степенные ряды заменим единицей; мы получим, таким образом:

$$\left. \begin{aligned} B_l' &= i^{l+2} \frac{\alpha^{2l+1}}{l^2 [1 \cdot 3 \dots (2l-1)]^2} \frac{n^2-1}{n^2 + \frac{l+1}{l}}, \quad (a) \\ B_l'' &= i^l \frac{\alpha^{2l+3}}{(l+1)(2l+1)(2l+3)l[1 \cdot 3 \dots (2l-1)]^2} (n^2-1) \quad (b) \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

и в предельном случае $\sigma = \infty$ из формул¹ § 70 (57):

$$\left. \begin{aligned} B_l' &= i^{l+2} \frac{\alpha^{2l+1}}{l^2 [1 \cdot 3 \dots (2l-1)]^2}, \quad (a) \\ B_l'' &= i^{l+2} \frac{\alpha^{2l+1}}{l(l+1)[1 \cdot 3 \dots (2l-1)]^2}. \quad (b) \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Рассмотрим прежде всего случай конечного σ и $\epsilon^{(i)}$; мы видим [формула (5)], что B_{l+1}' и B_l'' пропорциональны одной и той же степени α („одного и того же порядка величины“). Таким образом первое электрическое парциальное колебание превышает все остальные, причем вообще $(l+1)$ -ое электрическое парциальное колебание того же порядка величины, что и l -ое магнитное. Если ограничиться первым электрическим парциальным колебанием, которое ниже (глава VII, § 81, стр. 497) будет рассматриваться как дипольное излучение, то его интенсивность (и фаза) определяется комплексной амплитудой:

$$B_1' = -i\alpha^3 \frac{n^2-1}{n^2+2} = -i \left(\frac{2\pi R}{\lambda^{(a)}} \right)^3 \frac{n^2-1}{n^2+2}. \quad (7)$$

В предельном случае $\sigma = \infty$ или $\epsilon^{(i)} = \infty$, напротив, l -тое электрическое и l -тое магнитное парциальные колебания одного порядка величины, и при $l=1$ мы получаем:

$$\left. \begin{aligned} B_1' &= -i\alpha^3 = -i \left(\frac{2\pi R}{\lambda^{(a)}} \right)^3, \quad (a) \\ B_1'' &= -\frac{i}{2} \alpha^3 = -\frac{i}{2} \left(\frac{2\pi R}{\lambda^{(a)}} \right)^3. \quad (b) \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

¹ Прямой предельный переход от формул (5) к (6) достаточно сложен; нужно принять во внимание, что в этом случае $n \rightarrow \infty$, $\alpha \rightarrow 0$ и притом таким образом, что произведение $\alpha^2 n^2$ стремится к некоторому конечному предельному значению.

Однако в обоих случаях общим является то положение, что амплитуды обратно пропорциональны кубам длин волн во внешнем пространстве.

Первое электрическое парциальное колебание мы получаем из формул § 70 (54), принимая во внимание соотношения:

$$P_1(\cos \vartheta) = \cos \vartheta, \quad \frac{P_1^{(1)}(\cos \vartheta)}{\sin \vartheta} = 1, \quad P_1^{(1)'}(\cos \vartheta) \sin \vartheta = -\cos \vartheta \quad (9)$$

и асимптотическое выражение:

$$\zeta_1(x) = -e^{-ix}, \quad \zeta_1'(x) = ie^{-ix}. \quad (10)$$

Мы имеем:

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{E}_\vartheta^{(b)} &= \frac{i}{k^{(a)}} \cos \varphi \cos \vartheta B_1' \frac{e^{-ik^{(a)}r}}{r} = \frac{4\pi^2}{\lambda^{(a)2}} R^3 \cos \varphi \cos \vartheta \frac{e^{-ik^{(a)}r}}{r}, \\ \mathcal{E}_\varphi^{(b)} &= -\frac{i}{k^{(a)}} \frac{\sin \varphi}{\sin \vartheta} B_1' \frac{e^{-ik^{(a)}r}}{r} = -\frac{4\pi^2}{\lambda^{(a)2}} R^3 \frac{\sin \varphi}{\sin \vartheta} \frac{e^{-ik^{(a)}r}}{r}, \\ \mathcal{H}_\vartheta^{(b)} &= -\frac{1}{k_2^{(a)}} \sin \varphi B_1 \frac{e^{-ik^{(a)}r}}{r} = \frac{4\pi^2}{\lambda^{(a)2}} R^3 \sqrt{\varepsilon^{(a)}} \sin \varphi \frac{e^{-ik^{(a)}r}}{r}, \\ \mathcal{H}_\varphi^{(b)} &= -\frac{1}{k_2^{(a)}} \frac{\cos \varphi \cos \vartheta}{\sin \vartheta} B_1' \frac{e^{-ik^{(a)}r}}{r} = \\ &= \frac{4\pi^2}{\lambda^{(a)2}} R^3 \sqrt{\varepsilon^{(a)}} \frac{\cos \varphi \cos \vartheta}{\sin \vartheta} \frac{e^{-ik^{(a)}r}}{r}. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Эти формулы тождественны с формулами излучения электрического диполя¹, колеблющегося параллельно оси x , которое мы более подробно рассмотрим в главе VII. Мы там покажем, что для момента диполя, вызывающего излучение (11), получается выражение:

$$p_0 = R^3 \varepsilon^{(a)} \left| \frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} \right|. \quad (12)$$

Характерным для этого излучения, которое обычно называют *релевским излучением* (глава VII, § 81), является пропорциональность амплитуды величине $1/\lambda^2$ и, следовательно, пропорциональность интенсивности величине $1/\lambda^4$.

Первое магнитное парциальное колебание получается таким же путем из магнитного диполя.

Высшие парциальные колебания можно получить как поля колеблющихся квадруполь и вообще мультиполей, но мы не будем входить в рассмотрение этого вопроса.

¹ R. Gans u. H. Happel, Ann. Physik, т. 29 (1909), стр. 277.

Вернемся теперь к общему случаю и рассмотрим детальнее соотношения для *интенсивности* и *поляризации рассеянного излучения*. В тех случаях, когда речь идет только о соотношениях интенсивностей, примем за меру интенсивности квадрат вещественной амплитуды электрического вектора, из которого мы также получим сведения о поляризационном состоянии. Итак, найдем величины $|\mathcal{E}_\vartheta|^2$ и $|\mathcal{E}_\varphi|^2$; вводя сокращенные обозначения:

$$\left. \begin{aligned} J_\perp &= \frac{\lambda^{(a)2}}{4\pi^2 r^2} \left| \sum_{l=1}^{\infty} l \left(B_l' \frac{P_l^{(1)}(\cos \vartheta)}{\sin \vartheta} - B_l'' P_l^{(1)}(\cos \vartheta) \sin \vartheta \right) \right|^2, \\ J_\parallel &= \frac{\lambda^{(a)2}}{4\pi^2 r^2} \left| \sum_{l=1}^{\infty} l \left(B_l' P_l^{(1)'}(\cos \vartheta) \sin \vartheta - B_l'' \frac{P_l^{(1)}(\cos \vartheta)}{\sin \vartheta} \right) \right|^2, \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

мы можем написать:

$$|\mathcal{E}_\vartheta|^2 = \cos^2 \varphi J_\parallel, \quad |\mathcal{E}_\varphi|^2 = \sin^2 \varphi J_\perp. \quad (14)$$

Мы видим, что каждый раз при $\varphi = 0$ или $\varphi = \pi/2$ одна из составляющих обращается в нуль.

Согласно § 70 (6), (8) φ есть угол между плоскостью колебаний падающего света и плоскостью видения, т. е. плоскостью, проходящей через направление распространения и направление наблюдения. Таким образом рассеянный свет поляризован линейно, если плоскость видения параллельна или перпендикулярна к первоначальной плоскости колебаний. Во всяком ином направлении ϑ, φ рассеянный свет поляризован эллиптически, так как в общем случае между \mathcal{E}_ϑ и \mathcal{E}_φ имеется разность фаз (т. е. отношение $\mathcal{E}_\vartheta/\mathcal{E}_\varphi$ комплексно). Если, однако, ограничиться релевским рассеянием, т. е. данными в (11) низшими членами, то последние дадут вещественное отношение $\mathcal{E}_\vartheta/\mathcal{E}_\varphi$, т. е. в этом случае мы имеем линейно поляризованный свет в любом направлении зрения.

Однако в применениях речь идет обычно о рассеянии *естественного света*. Формулы, справедливые в этом, более общем, случае, можно получить из предыдущих, если принять, что падают две взаимно перпендикулярные некогерентные линейные волны; тогда нужно лишь вычислить рассеяние для каждой из этих волн в отдельности и интенсивности (а не амплитуды) сложить.

Но вторая волна получается из первой перестановкой в (14) $\cos \varphi$ и $\sin \varphi$. Следовательно, при сложении угол φ , как того и следовало ожидать, совершенно выпадает, и мы видим, что J_\parallel и J_\perp представляют сами параллельную и перпендикулярную плоскости видения интенсивности рассеянного света, получаю-

щегося при естественном падающем свете. Так как в общем случае они обе отличны от нуля, то мы имеем *частично поляризованный свет*. Под степенью поляризации понимают величину:

$$P = \left| \frac{J_{\perp} - J_{\parallel}}{J_{\perp} + J_{\parallel}} \right|. \quad (15)$$

Неполяризованную часть можно написать в виде:

$$(J_{\perp} + J_{\parallel}) (1 - P) = \begin{cases} 2J_{\parallel} & \text{для } J_{\parallel} < J_{\perp}, \\ 2J_{\perp} & \text{для } J_{\parallel} > J_{\perp}. \end{cases} \quad (16)$$

Путем численных подсчетов можно получить вид этой функции ϑ в зависимости от радиуса и вещества шара ¹.

На фиг. 179а—с приведены общая интенсивность $J_{\perp} + J_{\parallel}$ и интенсивность неполяризованной части ($2J_{\perp}$ или $2J_{\parallel}$) как функция угла наблюдения ϑ при различных веществах и радиусах для монохроматического света. Длины радиус-векторов внешних кривых дают общую интенсивность, а внутренних — интенсивность неполяризованной части, причем, если не будет оговорено противное, J_{\perp} имеется в избытке. Единицы на всех фигурах выбраны произвольно.

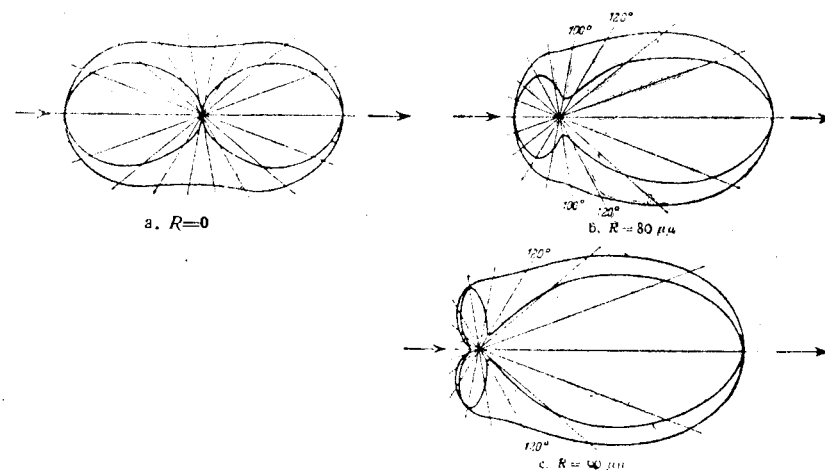
Из этих диаграмм, а также из вычислений в приведенной литературе, можно вообще вывести следующие результаты.

При бесконечно малых шарах, исключая случай бесконечно большой проводимости, или диэлектрической постоянной, когда общая интенсивность большей частью излучается навстречу падающей волне, т. е. „отражается“, дифрагированное излучение вполне симметрично относительно плоскости, проходящей через центр шара, и перпендикулярно направлению распространения падающей волны. В направлении первичного луча и в противоположном ему направлении интенсивность имеет максимум, тогда как в перпендикулярном направлении — минимум. С возрастанием радиуса шара эта симметрия нарушается вследствие того, что в направлении падающей волны ($\vartheta = 180^\circ$) излучается света больше, чем в направлении противоположном ($\vartheta = 0^\circ$). Это явление называют *эффектом Ми*. Наконец, рассеянный свет будет излучаться почти целиком под углом $\vartheta = 180^\circ$ и близкими углами. Для вполне проводящих шаров с возрастанием радиуса также наступает перераспределение излучения в пользу направления падающей волны. Однако для λ малой в сравнении с радиусами шаров первичная волна должна полностью отражаться, как это следует из применимых в этом случае законов геометрической оптики.

Чтобы дать еще краткий образ изменения величины полной интенсивности с возрастанием величины частиц, можно привести таблицу (табл. 10), представляющую вычисления Блумера. В ней даны величины $(J_{\perp} + J_{\parallel}) \frac{4\pi^2 r^2}{\lambda^{(a)2}}$ для $n = 1,25$ при различных $\alpha = 2\pi R/\lambda^{(a)}$ и ϑ .

Таблица 10

ϑ	$\alpha = 0,01$	$\alpha = 0,1$	$\alpha = 0,5$	$\alpha = 1$	$\alpha = 2$	$\alpha = 5$	$\alpha = 8$
0°	$5,0 \cdot 10^{-14}$	$4,9 \cdot 10^{-8}$	$7,8 \cdot 10^{-4}$	$1,9 \cdot 10^{-3}$	$2,0 \cdot 10^{-2}$	1,3	0,9
90°	$2,5 \cdot 10^{-14}$	$2,5 \cdot 10^{-8}$	$5,0 \cdot 10^{-4}$	$3,6 \cdot 10^{-2}$	$2,5 \cdot 10^{-1}$	2,7	7,1
180°	$5,0 \cdot 10^{-14}$	$5,0 \cdot 10^{-8}$	$1,2 \cdot 10^{-3}$	$2,3 \cdot 10^{-1}$	4,3	$9,8 \cdot 10^2$	$7,5 \cdot 10^3$

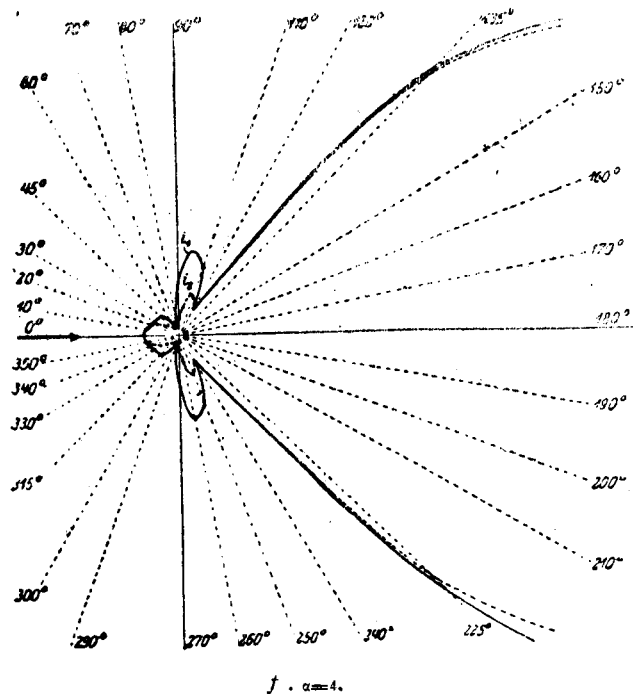
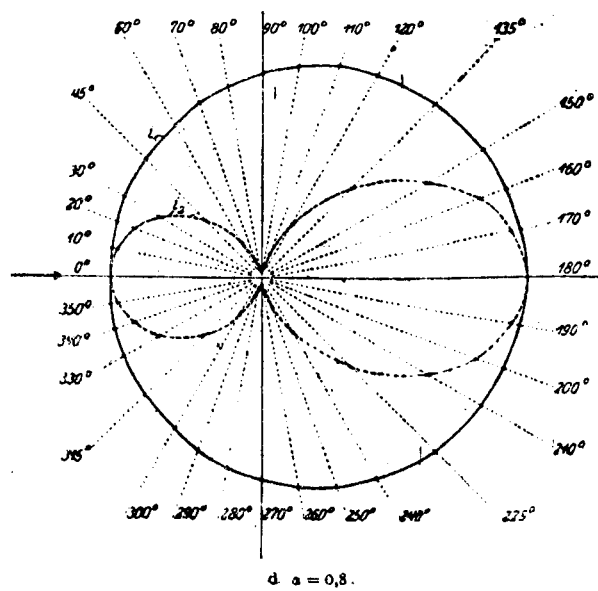


Фиг. 179а—с. Диаграмма излучения золотого шарика.

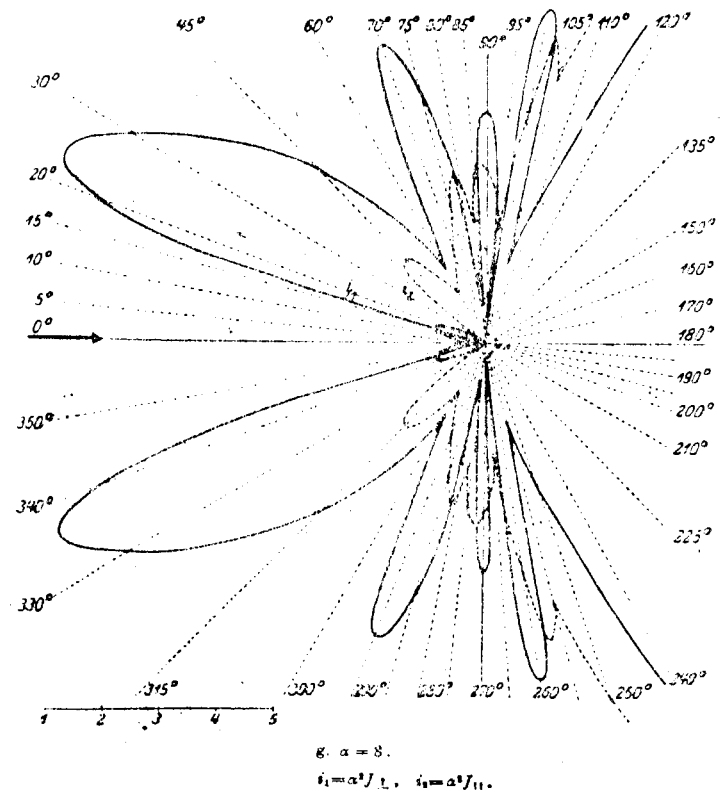
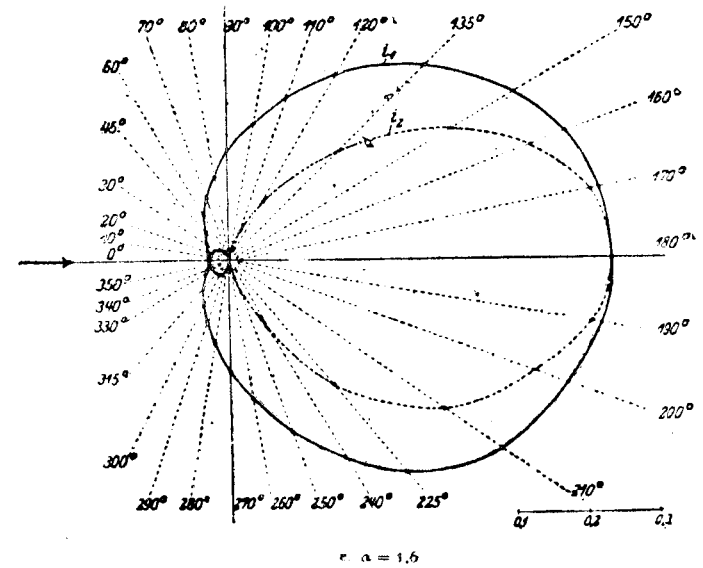
Эффект Ми выявляется сравнением первого и третьего чисел в каждом столбце. Строки показывают чрезвычайно резкое возрастание интенсивности с возрастанием величины частиц. При этом все же необходимо учесть, что все числа в таблице умножаются на коэффициент $\lambda^{(a)2}/4\pi^2 r^2$, и последний должен быть весьма мал в сравнении с 1, если формулы (13) имеют силу.

Если α больше 1, так что $2R$ больше, чем $\lambda^{(a)}/\pi$, то постепенно возникает ряд максимумов и минимумов интенсивности (фиг. 180), которые сперва появляются в неправильной последовательности, но при возрастающем α ($\alpha \gg 1$) должны давать дифракционную картину, которая получается по теории Кирхгофа у круглого

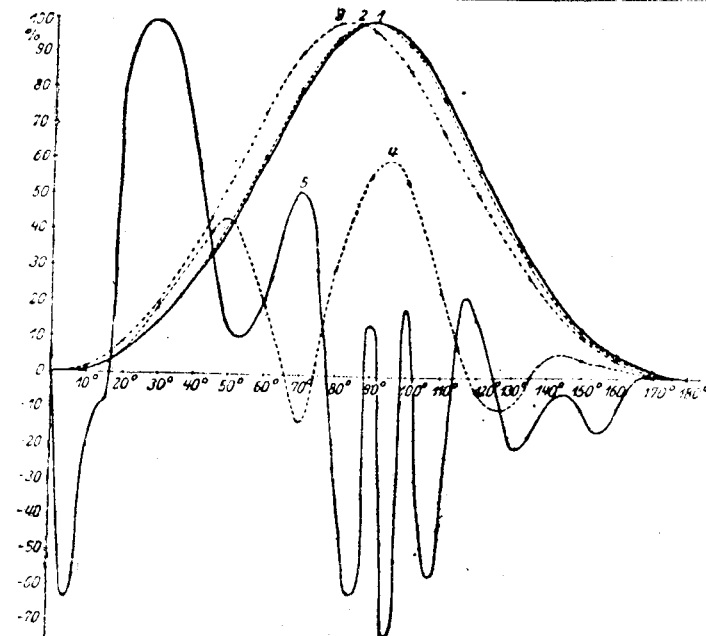
¹ G. Mie, Ann. Phys., т. 25 (1908), стр. 377; R. Gans, Ann. Phys., т. 76 (1925), стр. 29; H. Senftleben u. E. Benedict, Ann. Phys. (4), т. 60 (1919), стр. 297; H. Blumer, Z. Phys., т. 32 (1925), стр. 119, т. 38 (1926), стр. 304.



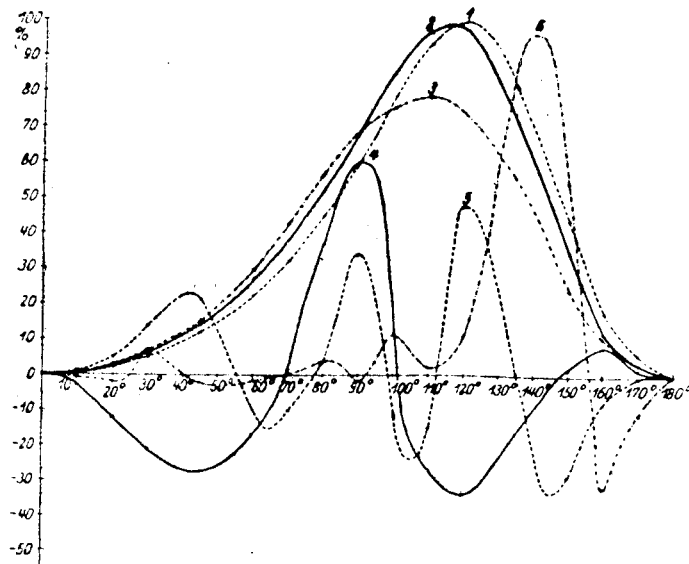
Фиг. 179d—g. Дипграмма излучения диэлектрического шарика с показателем преломления 1,25



шарика с показателем преломления 1,25



1 — $\alpha = 0,4$, 2 — $\alpha = 0,8$, 3 — $\alpha = 1,6$,
4 — $\alpha = 4$, 5 — $\alpha = 8$.



1 — $\alpha = 0,1$, 2 — $\alpha = 0,5$, 3 — $\alpha = 1$,
4 — $\alpha = 3$, 5 — $\alpha = 5$, 6 — $\alpha = 10$.

Фиг. 180. Поляризация в процентах при различных α ; частицы из льда при низких температурах (по Blumer'у, в Z. Physik, 1932).

экрана (см. главу IV, § 49). Между тем развитая здесь теория вряд ли применима в этом смысле, так как кроме того, что эта теория ограничивается уже малыми α ($\alpha \ll 15$), максимумы и минимумы невозможно определить аналитически. Для малых α , когда число экстремальных значений еще невелико, и они лежат далеко друг от друга, их можно найти численно графически.

В отношении поляризации результат получается опять различным при вполне отражающих или изолирующих шарах, с одной стороны, и при диэлектрических и поглощающих шарах, с другой стороны. Поэтому яркость можно непосредственно получить из диаграммы излучения или также из специального графика поляризации (фиг. 180), определяемого при помощи (15)¹.

При вполне проводящих или изолирующих шарах поляризационный максимум для очень малых шаров расположен при $\vartheta = 120^\circ$ (томсоновский угол), который с возрастанием радиуса шара перемещается в направлении убывания угла наблюдения ϑ .

В случае диэлектрических и поглощающих шаров для малых α поляризация вполне симметрична относительно плоскости x и y при $\vartheta = 90^\circ$; когда она является полной, она имеет максимум. Поляризацию при этом легко представить в виде аналитического выражения. Именно принимая во внимание в (13) только первое электрическое колебание и подставляя затем (13) и (9) в уравнение (15), являющееся определением для P , получим:

$$P(\vartheta) = \frac{\sin^2 \vartheta}{1 + \cos^2 \vartheta} \quad (17)$$

формулу, которая другим путем была уже выведена Релеем.

С возрастанием величины частиц (примерно до $R = \lambda(a)/\pi$) максимум перемещается и притом в случае диэлектрических шаров в сторону меньших, а в случае поглощающих — в сторону больших углов, — однако это справедливо не вообще, но лишь для большинства исследованных случаев.

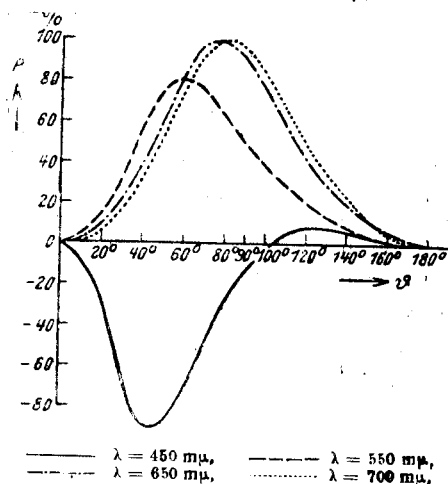
Для еще больших радиусов шаров R новые максимумы и минимумы поляризации возникают без всякой закономерности.

Если в частности мы будем наблюдать поляризацию при $\vartheta = 90^\circ$, то мы найдем, что до $\alpha = 1$ наблюдается почти только поляризованный свет, колеблющийся перпендикулярно к плоскости видения; для больших α это преобладание все больше и больше исчезает, пока, наконец, поведение не становится совершенно незакономерным.

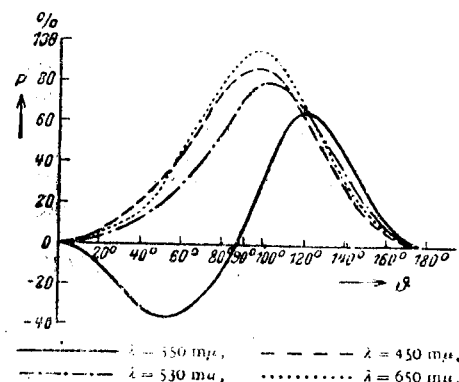
¹ Вместо поляризации часто употребляют для описания природы рассеянного света так называемую деполаризацию (степень деполаризации), определяемую выражением (см. главу VII, § 81):

$$\vartheta = \frac{\frac{1}{2} \text{ естествен. свет}}{\text{линейно поляризов. свет}} = \frac{J_{\parallel}}{J_{\perp} - J_{\parallel}}.$$

В то время как до сих пор длина волны принималась постоянной, т. е. свет предполагался монохроматическим, если падающая волна состоит из волн многих частот, то для описания дифракционных явлений необходимо исследовать получающиеся цветовые явления в зависимости от длины волн. Однако длина волны входит в коэффициенты B_1 , B_2 только в состав α и в комплексный показатель преломления n . Но n в ограниченной области частот от ω почти не зависит, если вторым членом в § 70 (55e) с содержанием σ можно пренебречь по сравнению с первым, т. е. в случае плохо проводящих шаров. С другой стороны, в предельном случае бесконечно большой проводимости n даже не входит. В этих случаях интенсивности, исключая общий множитель $\lambda^{(a)2}/4\pi^2 r^2$, зависят, следовательно, только от



Фиг. 181. Дисперсия поляризации. Сильно диэлектрические частицы.



Фиг. 182. Дисперсия поляризации. Сильно поглощающие частицы.

отношения $r/\lambda^{(a)}$. Таким образом наши положения применимы также для различных частот при постоянном радиусе, в частности в этом смысле можно толковать фиг. 180.

Зависимость поляризации от длины волны была исследована главным образом Ширманом¹. В случае бесконечно малых частиц как для диэлектрических, так и для поглощающих шаров получается один поляризационный максимум (полная поляризация), независимый от длины волны при $\alpha = 90^\circ$. При больших диэлектрических частицах, примерно до $\alpha = 1$, угол максимальной поляризации возрастает с увеличением длины волны (фиг. 181), тогда как для поглощающих убывает (фиг. 182). Эту зависимость называют *дисперсией поляризации*. Если α заметно больше 1, зависимости становятся снова неясными и беспорядочными.

¹ М. А. Schirmann, Ann. Physik т. 59 (1919), стр. 493.

Дисперсия поляризации может являться причиной двух интересных явлений: во-первых, может случиться, что при падающем белом свете поляризационный максимум наиболее интенсивно излучаемого цвета перемещается с возрастанием радиуса частиц в направлении, противоположном тому, которое имело место при монохроматическом свете. При этом с возрастанием размеров частиц происходит наложение двух факторов, обуславливающих этот поляризационный максимум, но действующих в противоположных направлениях: во-первых, само возрастание размеров частиц, во-вторых, изменение преобладающей длины волны, которая в свою очередь с увеличением размеров частиц возрастает в направлении больших длин волн. Если преобладает последний фактор, то получается названный выше эффект.

Другим следствием дисперсии поляризации является *полихроизм*: при неизменном направлении зрения в анализаторе, через который наблюдаются частицы, появляются различные цвета, если этот поляризатор вращать вокруг направления зрения. Выражение „поляризация зависит от длины волн“ означает, что в белом первичном свете цвета наиболее интенсивно излучаемого света в некотором заданном направлении различны для J_\perp и J_\parallel . Тогда при промежуточных положениях анализатора имеют место все переходные цвета между данными двумя цветами.

Естественно, надо ожидать полихроизма также и в том случае, если вместо того, чтобы вращать анализатор, помещают его в различных направлениях зрения.

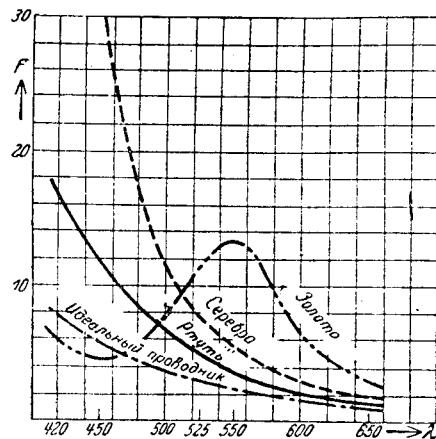
В том, что эти эффекты, возможность которых мы доказали, могут также приобретать измеримые значения, мы убеждаемся на основании произведенных Ширманом специальных расчетов. Знание этих поляризационных соотношений важно потому, что именно они могут быть проверены наиболее точными измерениями.

Для вычисления полного излучения необходимо определить вектор Пойнтинга и выполнить интеграцию по всем направлениям. Этот интеграл может быть выражен исключительно через коэффициенты B_1 , B_2 ; однако мы не будем производить этих сложных вычислений. Для предельного случая релеевского рассеяния получается сразу пропорциональность полного излучения величине $1/\lambda^{(a)4}$, потому что амплитуды пропорциональны $1/\lambda^{(a)2}$. Однако при учете высших членов, зависящих от радиуса шара и материальных постоянных, изменение полного излучения в функции длины волны оказывается сложнее и обнаруживает селективные явления. Так, на фиг. 183 мы видим максимум для золота¹.

Подобные максимумы можно толковать как некоторого рода *резонансные явления*. Именно, если представить себе, что шар без длительного воздействия внешнего светового поля возбуж-

¹ По R. Feick'y, Ann. Physik (4), т. 77 (1925), стр. 582.

дает собственные электрические колебания, то для них получаются вполне определенные частоты и затухания. Чтобы вычислить их, достаточно вычеркнуть в уравнениях (52) § 70 члены, не зависящие от коэффициентов B_i' и B_i'' , и составить условия разрешимости получившихся однородных уравнений. При этом получаются затухающие собственные колебания, частоты которых лежат приблизительно в том месте, где парциальные волны рассеянного излучения являются особенно интенсивными.



Фиг. 183. Полное излучение бесконечно малых частиц.

Проверка теории наблюдениями может быть выполнена двояким путем: либо наблюдают суммарный свет, рассеянный некоторым количеством частиц (в мутных средах, коллоидальных растворах), либо наблюдают рассеянный свет отдельной частицы в ультра-микроскопе (глава IV, § 53). Вообще получается совпадение между вычислением и наблюдением. Так как, однако, для мельчайших частиц мы не имеем независимых методов измерения размеров, то возможность точной проверки является весьма ограниченной. Наоборот, доказанную на больших частицах справедливость теории можно перенести на меньшие частицы и использовать наблюдение рассеянного света для определения их размеров.

Кроме того, наблюдения показывают, что сделанное нами предположение о шаровой форме частиц во многих случаях не оправдывается. Поэтому теория была расширена многими исследователями¹ на случаи иных форм частиц, в частности на эллипсоидальную.

¹ Напр., R. Gans, Ann. Physik (4), т. 62 (1920) стр. 351.

Наконец, Дебай в упомянутой уже работе определил *световое давление*, т. е. механическую силу, оказываемую светом на частицы. Однако наблюдение этого эффекта в чистом виде невозможно, так как частицы являются взвешенными в среде, например в некотором газе, так что они испытывают непосредственные тепловые газокINETические воздействия. Эренгафт¹ наблюдал, что странствование частиц в интенсивном конусе света (так называемая фотофореза) отнюдь не всегда совершается в направлении первичного света, но для известных веществ противоположно ему. Это явление, конечно, не может быть сведено к световому давлению, но является сложным газокINETическим эффектом.

¹ F. Ehrenhaft, Ann. Physik (4), т. 56 (1918), стр. 81.

Глава седьмая

МОЛЕКУЛЯРНАЯ ОПТИКА

§ 72. ПОЛЯРИЗАЦИЯ И НАМАГНИЧЕНИЕ

До этой главы физическими основами оптики для нас служили только уравнения Максвелла (с учетом анизотропии диэлектриков). Мы рассматривали их как результат законов макроскопических электромагнитных полей в проводниках и непроводниках. Однако эти основные законы никоим образом не могут объяснить всех оптических явлений, если не присоединить к ним основных понятий атомистики. Здесь идет речь о двух различных точках зрения. Первая заключается в следующем.

Свет есть настолько тонкий зонд для исследования тел, что при этом начинает сказываться неоднородность строения, «молекулярная зернистость» материи. Это проявляется прежде всего в том, что плоская волна, проходящая из вакуума в прозрачное тело, не распространяется в нем без потерь, а подвергается рассеиванию. Кроме того, изотропные тела, помещенные в электрическое или магнитное поле, обладают двойным преломлением, что, повидимому, связано с переориентировкой молекул в поле.

Вторая точка зрения касается зависимости оптических явлений от длины волны и числа колебаний. При более тщательном изучении оказывается, что утверждение Максвелла относительно свойств материи справедливо только тогда, когда длина световой волны велика по сравнению с диаметром молекулы, а частота света мала по сравнению с собственной частотой молекулы. Когда отношение длины волны к диаметру молекулы конечно, то при обычном свете возникает явление оптической активности, а под действием рентгеновских лучей — так называемое интерференционное рассеяние. При конечном отношении частоты света к собственной частоте возникают явления дисперсии. Последние тесно связаны с процессами излучения и поглощения света, и для их объяснения необходимо глубокое знание механики внутри — атомных процессов и их взаимодействия со световым полем. В настоящее время известно, что для атома законы классической механики не имеют места и должны быть

заменены новой квантовой механикой. Таким образом мы здесь подходим к границе рассматриваемой нами области, так как квантовые процессы не входят в рамки этой книги. В дальнейшем мы дадим очерк этих явлений (глава VIII), ограничиваясь только теми чертами их, в которые законы квантовой механики не вносят никаких изменений. В настоящей главе мы займемся *решением уравнений Максвелла в атомной формулировке*.

Прежде всего выделим в максвелловых уравнениях поля глава I, § 1 (1a, b), (2a, b) те члены, которые выражают влияние материи. В вакууме всегда должно быть:

$$\mathfrak{D} = \mathfrak{E}, \quad \mathfrak{B} = \mathfrak{H}. \quad (1)$$

Ток проводимости в нем $i = 0$; однако нельзя вообще полагать ток равным нулю, так как существует еще конвекционный ток. Как известно, опыты Рауленда¹ показали, что движущиеся проводники, имеющие заряд с объемной плотностью ρ и скорость v создают магнитное поле, сила которого соответствует плотности тока ρv . Точно так же движение электронов в источнике катодных или β -лучей вызывает магнитное поле, соответствующее плотности тока ρv . Напишем теперь уравнение Максвелла для вакуума, причем обозначим электромагнитное состояние вакуума векторами \mathfrak{E} и \mathfrak{B} (вместо \mathfrak{H}):

$$\operatorname{rot} \mathfrak{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \rho v = \frac{4\pi}{c} i, \quad (a) \quad (2)$$

$$\operatorname{rot} \mathfrak{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t} = 0, \quad (b)$$

$$\operatorname{div} \mathfrak{E} = 4\pi\rho, \quad (a) \quad (3)$$

$$\operatorname{div} \mathfrak{B} = 0. \quad (b)$$

Изменения, вызываемые материей, объясняются известным распределением зарядов и токов внутри мельчайших материальных частиц атомов и молекул.

Ток проводимости происходит от свободного движения электронов в проводнике (металле) и представляет собой просто среднее значение их конвекционного тока. В оптике он не играет никакой роли, и поэтому мы не будем его рассматривать; скажем только, что существует исчерпывающая электронная теория металлов, которая на основе квантовой механики дает полное объяснение всех связанных с проводимостью явлений².

¹ H. A. Rowland, Monatsber. d. Akad. Berlin (1876), стр. 211. Ann. Phys., т. 158 (1876), стр. 487; Ann. Phys. et Chim., т. 12 (1877), стр. 119.

² Исчерпывающее изложение см. у L. Brillouin, (Л. Бриллюэн, Квантовая статистика, Харьков, ДНТУ, 1934 г.). L. Nordheim, Theorie des metallischen Zustands. Müller-Pouillet, т. IV, 4.

Напишем уравнения Максвелла для непроводников главы I, § 1 (1) и (2), где $\rho=0$, $i=0$, преобразуем их таким образом, чтобы члены, соответствующие вакууму в уравнениях (2) и (3), были в левой части, а все остальные в правой.

$$\text{rot } \mathfrak{B} - \frac{1}{c} \mathfrak{E} = \frac{4\pi}{c} (\mathfrak{J} + c \text{rot } \mathfrak{M}), \quad (a) \quad (4)$$

$$\text{rot } \mathfrak{E} + \frac{1}{c} \mathfrak{B} = 0, \quad (b)$$

$$\text{div } \mathfrak{E} = -4\pi \text{div } \mathfrak{P}, \quad (a) \quad (5)$$

$$\text{div } \mathfrak{B} = 0. \quad (b)$$

Для краткости введем два вектора:

$$4\pi \mathfrak{P} = \mathfrak{D} - \mathfrak{E}, \quad (a) \quad (6)$$

$$4\pi \mathfrak{M} = \mathfrak{B} - \mathfrak{H}. \quad (b)$$

Уравнения (4) и (5) совпадают с уравнениями для вакуума (2) и (3), если рассматривать правые части, как ток и плотность. Так как мы не рассматриваем макроскопических токов и макроскопической плотности, то эти уравнения выражают накопление и движение электричества внутри атомов или молекул. Мы должны, следовательно, доказать, что выражения

$$\left. \begin{aligned} \rho &= -\text{div } \mathfrak{P}, \\ i &= c \text{rot } \mathfrak{M} + \mathfrak{J} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

допускают такое толкование. Для этого выведем решения уравнений (2) и (3) и подставим в них выражения (7) для ρ и i ; преобразование полученного результата даст нам нужное значение.

Уравнение (3b) удовлетворяется, если положить:

$$\mathfrak{B} = \text{rot } \mathfrak{A}. \quad (8)$$

\mathfrak{A} называется вектор-потенциалом. Подставив эту величину в (4b), получим:

$$\text{rot} \left(\mathfrak{E} + \frac{1}{c} \dot{\mathfrak{A}} \right) = 0. \quad (9)$$

Отсюда следует, что существует скалярный потенциал Φ , так что

$$\mathfrak{E} + \frac{1}{c} \dot{\mathfrak{A}} = -\text{grad } \Phi. \quad (10)$$

Теперь мы должны так определить \mathfrak{A} и Φ , чтобы они удовлетворяли первой теореме Максвелла (2a) и (3a). Подстановка в эти урав-

нения дает:

$$\left. \begin{aligned} \text{rot rot } \mathfrak{A} + \frac{1}{c^2} \ddot{\mathfrak{A}} + \frac{1}{c} \text{grad } \dot{\Phi} &= \frac{4\pi}{c} i, \quad (a) \\ -\text{div grad } \Phi - \frac{1}{c} \text{div } \dot{\mathfrak{A}} &= 4\pi \rho. \quad (b) \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

В силу известных векторных формул эти уравнения можно написать в виде:

$$\left. \begin{aligned} \Delta \mathfrak{A} - \frac{1}{c^2} \ddot{\mathfrak{A}} - \text{grad} \left(\frac{1}{c} \dot{\Phi} + \text{div } \mathfrak{A} \right) &= -\frac{4\pi}{c} i, \quad (a) \\ \Delta \Phi - \frac{1}{c^2} \ddot{\Phi} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{c} \dot{\Phi} + \text{div } \mathfrak{A} \right) &= -4\pi \rho. \quad (b) \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Если мы, кроме того, потребуем, чтобы скалярный потенциал и вектор-потенциал удовлетворяли соотношению:

$$\text{div } \mathfrak{A} + \frac{1}{c} \dot{\Phi} = 0, \quad (13)$$

то мы получим для \mathfrak{A} и Φ волновые уравнения:

$$\left. \begin{aligned} \Delta \mathfrak{A} - \frac{1}{c^2} \ddot{\mathfrak{A}} &= -\frac{4\pi}{c} i, \quad (a) \\ \Delta \Phi - \frac{1}{c^2} \ddot{\Phi} &= -4\pi \rho. \quad (b) \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Очевидно, что дополнительное условие (13) совместимо с этими уравнениями, если ток и плотность удовлетворяют уравнению непрерывности [см. главу I, § 1 (3)]:

$$\text{div } i + \dot{\rho} = 0. \quad (15)$$

Подставив сюда выражения i и ρ через векторы \mathfrak{M} и \mathfrak{P} из (7), мы увидим, что уравнение (15) выполняется тождественно.

Для того чтобы проинтегрировать уравнение (14), рассмотрим сначала однородные волновые уравнения, из которых напомним только одно:

$$\Delta \Phi - \frac{1}{c^2} \ddot{\Phi} = 0. \quad (16)$$

Мы ищем симметрические решения, т. е. полагаем, что Φ зависит только от расстояния $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Известно, что

$$\Delta \Phi(r) = \frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} (r\Phi), \quad (17)$$

так что наше уравнение (16) может быть написано в виде:

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2}(\Phi r) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}(\Phi r) = 0. \quad (18)$$

Это уравнение „колеблющейся струны“ для Φr ; его наиболее общим решением является:

$$\Phi r = e\left(t \pm \frac{r}{c}\right), \quad (19)$$

где $e(t)$ — произвольная функция. Поэтому мы получаем два типа решения в зависимости от выбора знака. Физический смысл имеет только решение с минусом. Оно выражает запаздывающий потенциал:

$$\Phi = \frac{e\left(t - \frac{r}{c}\right)}{r}, \quad (20)$$

т. е. электростатический потенциал точечного заряда $e(t)$, изменяющегося во времени.

Напротив, решение со знаком плюс соответствует опережающему потенциалу, когда действие в некоторой точке наблюдения определяется распределением зарядов в следующий момент.

Из выражения запаздывающего потенциала для точки можно образовать более общие решения неоднородных уравнений (14), запаздывающие потенциалы для объемной плотности. Обозначим через x', y', z' координаты некоторой точки, пусть $dS' = dx' dy' dz'$ есть соответствующий элемент объема, а $r = \sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2}$ — расстояние между этой точкой и точкой наблюдения x, y, z ; естественно предположение, что изменяющаяся в пространстве и времени плотность заряда $\rho(x, y, z; t)$ создает потенциал:

$$\Phi = \int \frac{\rho\left(x', y', z'; t - \frac{r}{c}\right)}{r} dS'. \quad (21)$$

В действительности это есть решение неоднородного волнового уравнения (12). Для того чтобы это доказать, представим себе, что вокруг точки наблюдения описана сфера K радиуса a и разобьем интеграл Φ на две части:

$$\Phi = \Phi_J + \Phi_A, \quad (22)$$

где первый интеграл правой части взят по внутренней поверхности сферы K , а второй по ее внешней поверхности. Вследствие того, что в Φ_A знаменатель r всегда отличен от нуля, мы можем произвести дифференцирование под знаком интеграла; мы найдем, что Φ_A удовлетворяет однородному волновому уравне-

нию (14), но в Φ_J дифференцировать по параметрам x, y, z, t под знаком интеграла нельзя, так как в этой области есть особая точка. Но мы можем сделать радиус сферы настолько малым, чтобы $\rho(x', y', z'; t - r/c)$ для всех точек внутри K как угодно мало отличалось от $\rho(x, y, z; t)$. Поэтому выражение $\Delta\Phi_J$ должно иметь то же значение, как и для электростатического потенциала однородно заряженной сферы, т. е.

$$\Delta\Phi_J = -4\pi\rho(x, y, z; t). \quad (23)$$

Наконец, легко видеть, что $\partial^2\Phi_J/\partial t^2$ исчезает в пределе, так как оно сколь угодно мало отличается от выражения:

$$\ddot{\rho}(x, y, z; t) : \int_K \frac{dS'}{r} = \ddot{\rho} \cdot 4\pi \int_0^a r dr = 2\pi a^2 \ddot{\rho}, \quad (24)$$

которое равно нулю при $a=0$.

Для каждой составляющей вектор-потенциала \mathfrak{A} мы найдем совершенно аналогичное выражение, как в (21) для скалярного потенциала. Здесь пространственную плотность ρ надо заменить соответствующей составляющей плотности тока i/c . Подставив выражения (7) для плотности тока и объемной плотности заряда, получим:

$$\begin{aligned} \Phi &= - \int \frac{1}{r} [\operatorname{div}' \mathfrak{P}] dS', & (a) \\ \mathfrak{A} &= \int \frac{1}{r} \left[\operatorname{rot}' \mathfrak{M} + \frac{1}{c} \mathfrak{P} \right] dS'. & (b) \end{aligned} \quad (25)$$

Здесь прямоугольные скобки указывают, что в аргументе функций, стоящих в скобках, t должно быть заменено $t - r/c$; дифференцирование div' и rot' производится по координатам точки интегрирования, тогда как координаты точки наблюдений являются постоянными параметрами.

Известны векторные тождества:

$$\begin{aligned} \operatorname{div}' [\mathfrak{Q}] &= [\operatorname{div}' \mathfrak{Q}] - \frac{1}{rc} r [\dot{\mathfrak{Q}}], & (a) \\ \operatorname{rot}' [\mathfrak{Q}] &= [\operatorname{rot}' \mathfrak{Q}] + \frac{1}{rc} r \times [\dot{\mathfrak{Q}}]. & (b) \end{aligned} \quad (26)$$

С помощью их преобразуем выражения (25) в

$$\left. \begin{aligned} \Phi &= - \int \left(\frac{1}{r} \operatorname{div}' [\mathfrak{P}] - \frac{1}{r^2 c} \mathfrak{r} [\mathfrak{P}] \right) dS', & (a) \\ \mathfrak{A} &= \int \left(\frac{1}{r} \operatorname{rot}' [\mathfrak{M}] - \frac{1}{r^2 c} \mathfrak{r} \times [\mathfrak{M}] + \frac{1}{rc} [\mathfrak{P}] \right) dS'. & (b) \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

Из первых членов обеих формул можно выделить интегралы по поверхности. Действительно, для произвольных скаляра φ и вектора \mathfrak{Q} имеют место формулы:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{div}(\varphi \mathfrak{Q}) &= \varphi \operatorname{div} \mathfrak{Q} + \operatorname{grad} \varphi \cdot \mathfrak{Q}, \\ \operatorname{rot}(\varphi \mathfrak{Q}) &= \varphi \operatorname{rot} \mathfrak{Q} + \operatorname{grad} \varphi \times \mathfrak{Q}. \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

Мы интегрируем эти уравнения по пространственной области и, применив теорему Гаусса, получаем оба уравнения:

$$\left. \begin{aligned} \int \varphi (\mathfrak{n} \cdot \mathfrak{Q}) d\sigma &= \int (\varphi \operatorname{div} \mathfrak{Q} + \operatorname{grad} \varphi \cdot \mathfrak{Q}) dS, \\ \int \varphi (\mathfrak{n} \times \mathfrak{Q}) d\sigma &= \int (\varphi \operatorname{rot} \mathfrak{Q} + \operatorname{grad} \varphi \times \mathfrak{Q}) dS. \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

Здесь \mathfrak{n} единичный вектор в направлении внешней нормали к элементу поверхности $d\sigma$.

Сделаем теперь допущение, что в течение всего рассматриваемого времени вещество (т. е. части пространства, где \mathfrak{P} и \mathfrak{M} не равны нулю) всегда заключено внутри некоторой конечной поверхности. Возьмем интеграл (27) по внутренней стороне этой поверхности; при этом поверхностные интегралы исчезают, и мы получаем:

$$\left. \begin{aligned} \Phi &= \int \left(\operatorname{grad}' \frac{1}{r} \cdot [\mathfrak{P}] + \frac{1}{r^2 c} \mathfrak{r} [\mathfrak{P}] \right) dS', & (a) \\ \mathfrak{A} &= \int \left(-\operatorname{grad}' \frac{1}{r} \times [\mathfrak{M}] - \frac{1}{r^2 c} \mathfrak{r} \times [\mathfrak{M}] + \frac{1}{rc} [\mathfrak{P}] \right) dS'. & (b) \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

Из этих формул мы можем уяснить себе реальный смысл величин \mathfrak{P} и \mathfrak{M} .

Рассмотрим сначала простой случай чисто электростатического поля, когда все явления не зависят от времени. Вследствие того, что плотность и ток не зависят от времени, символ запаздывания $[\]$ отпадает, и формула (30a) должна означать электростатический потенциал. Но здесь он имеет следующий вид:

$$\Phi = \int \operatorname{grad}' \frac{1}{r} \cdot \mathfrak{P} dS'. \quad (31)$$

Чтобы понять это, рассмотрим два источника с зарядами $+e$ и $-e$, векторное расстояние между которыми равно \mathfrak{a}

(от $-e$ до $+e$); их кулоновский потенциал равен:

$$\varphi = \frac{e}{r'} - \frac{e}{r}, \quad (32)$$

где \mathfrak{r} — вектор из точки $-e$, а $\mathfrak{r}' = \mathfrak{r} - \mathfrak{a}$ — вектор из точки $+e$ к точке наблюдения (фиг. 184).

Если (a) очень мало, мы можем разложить $\frac{1}{r'}$ в ряд по степеням составляющей \mathfrak{a} ; получим:

$$\frac{1}{r'} = \frac{1}{r} + \frac{\mathfrak{a} \mathfrak{r}}{r^3} + \dots \quad (33)$$

Тогда в первом приближении

$$\varphi = e \frac{\mathfrak{a} \mathfrak{r}}{r^3} + \dots$$

Пусть расстояние \mathfrak{a} стремится к нулю, а заряд e стремится к бесконечности, так что их произведение $e\mathfrak{a}$ стремится к конечному вектору \mathfrak{p} ; тогда

$$\varphi = \frac{\mathfrak{p} \mathfrak{r}}{r^3} = \mathfrak{p} \operatorname{grad}' \frac{1}{r}. \quad (34)$$

(Заметим еще раз, что операция grad' производится над координатами начальной точки вектора \mathfrak{r} , а не конечной (точки наблюдения). В этом случае говорят об *электростатическом диполе* \mathfrak{p} и называют его *электрическим моментом*.

Это понятие можно перенести также на изменяющиеся во времени заряды; для этого надо учесть запаздывание.

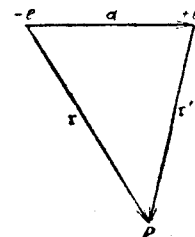
Пусть оба соседних заряда изменяются во времени одинаково и в каждый момент равны и противоположны по величине, т. е. равны $e(t)$ и $-e(t)$. Согласно (20) запаздывающий потенциал обоих зарядов

$$\Phi = \frac{e \left(t - \frac{r'}{c} \right)}{r'} - \frac{e \left(t - \frac{r}{c} \right)}{r}. \quad (35)$$

Тогда, очевидно, тот же переход к пределу даст:

$$\Phi = \frac{1}{r^3} \mathfrak{r} [\mathfrak{p}] + \frac{\mathfrak{r} [\mathfrak{p}]}{r^2 c} = [\mathfrak{p}] \operatorname{grad}' \frac{1}{r} + \frac{1}{r^2 c} \mathfrak{r} [\mathfrak{p}]. \quad (36)$$

Сравнив это выражение с формулой (30a), мы увидим, что оно представляет собой потенциал пространственной плотности диполей или поляризацию электрического момента \mathfrak{P} на единицу объема.



Фиг. 184. К определению диполя.

Отсюда уже легко предположить, что эта, вначале формальная, интерпретация соответствует реальному атомистическому содержанию: каждый атом или молекула вещества представляет собой электрический диполь с моментом \mathfrak{p} , и все эти диполи дают в среднем в единице объема некоторый определенный момент \mathfrak{P} . Атомные или молекулярные моменты могут быть приписаны атому или молекуле вследствие их несимметричной структуры или же могут возникать под действием электрического поля.

При таком понимании диэлектрическое смещение

$$\mathfrak{D} = \mathfrak{E} + 4\pi \mathfrak{P}$$

распадается на две части, причем вторая суммарно выражает поведение материи в электрическом поле. Это разделение позволяет нам гораздо точнее и глубже описывать взаимодействие между полем и материей, чем это возможно с помощью понятий теории Максвелла в ее первоначальном виде. Механика атомов дает значения моментов \mathfrak{p} отдельных атомов (или молекул). Среднее же значение \mathfrak{P} на единицу объема зависит только от взаимодействия молекул и от температуры. Кроме того, как известно, всякая статистическая величина колеблется вокруг своей средней; мы должны, следовательно, учитывать эти колебания момента \mathfrak{P} , из которых вытекают неправильности распространения света, именно явления *рассеяния света*. Всеми этими вопросами мы займемся в следующих параграфах. Но прежде чем перейти к ним, мы должны аналогичным образом раскрыть значение формулы (30b) и величины \mathfrak{M} .

Для этого вспомним, что в теории Максвелла собственно магнетизм не фигурирует вовсе, а все магнитные поля сводятся к действию движущихся зарядов. Если мы имеем дело с электрическим диполем, изменяющимся во времени, мы можем представить его как молекулярный переменный ток, сила которого равна $\dot{\mathfrak{p}}$. Он возбуждает согласно (14a) магнитное поле, соответствующее вектор-потенциалу [см. формулу (20) для Φ]

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{c} \frac{[\dot{\mathfrak{p}}]}{r} \quad (37)$$

Таким образом последний член формулы (30b) означает ту составляющую часть магнитного поля, которая возникает вследствие того, что электрический момент изменяется во времени.

Оба первых члена (30b) соответствуют тому факту, что магнитные поля возникают и тогда, когда электрические токи текут стационарно по замкнутому контуру, и, следовательно, электрический момент не испытывает никаких колебаний. Известно, что замкнутый контур тока по своему магнитному действию эквивалентен двойному магнитному слою на произвольной поверхности, ограниченной этим контуром. Выразим поле такого тока через вектор-потенциал \mathfrak{A} . Представим себе тонкую зам-

кнутую токовую линию, по которой протекает ток плотности i . Полная сила тока

$$J = |i| dq,$$

где dq есть сечение (бесконечно малое), а его направление есть направление касательной к токовой линии. Последняя определяется условием, что вектор a от нулевой точки до некоторой точки линии есть периодическая функция параметра, например длины дуги. Тогда вектор касательной к линии тока пропорционален вектору da . Теперь имеем:

$$i dS = J da,$$

а вектор-потенциал для стационарного тока выразится:

$$\mathfrak{A} = \frac{J}{c} \int \frac{da}{r'}, \quad (38)$$

где r' есть вектор из некоторой точки линии тока к точке наблюдения, а r' — его величина (модуль). Отсюда получается закон Био-Савара; в самом деле

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{B} = \text{rot } \mathfrak{A} = \frac{J}{c} \int \frac{r' \times da}{r'^3}, \quad (39)$$

т. е. каждый элемент тока дает $J/cr'^2 \cdot r' \times da$.

Рассмотрим теперь *бесконечно малый замкнутый ток, молекулярный ток Ампера*. Пусть r есть вектор из произвольной точки, расположенной внутри контура тока, к точке наблюдения. Так как $|a|$ мало, можно применить формулу (38); получим согласно (38):

$$\mathfrak{A} = \frac{J}{c} \int \frac{ar}{r^3} da, \quad (40)$$

так как $\oint da$ по замкнутому контуру равен нулю. Далее, можно сделать такое преобразование: существуют тождества:

$$r \times (a \times da) = a(r da) - da(ra), \quad (41)$$

$$d[a(ra)] = a(r da) + da(ra). \quad (42)$$

Вычтя первое из второго, получим:

$$2da(ra) = d[a(ra)] - r \times (a \times da). \quad (43)$$

Так как интеграл полного дифференциала по замкнутой кривой равен нулю, то мы получаем:

$$\mathfrak{A} = -\frac{J}{2c} \cdot \frac{r}{r^3} \times \int a \times da. \quad (44)$$

Очевидно, что в случае плоского контура тока

$$\frac{1}{2} \int a \times da = f \quad (45)$$

есть вектор, перпендикулярный к ее плоскости; длина его равна площади, заключенной внутри контура. Величина¹

$$\bar{m} = \frac{1}{c} J \cdot \oint \mathbf{a} \times d\mathbf{a} \quad (46)$$

называется магнитным моментом контура тока; ее векторный потенциал

$$\mathcal{A} = -\text{grad}' \frac{1}{r} \times \bar{m}. \quad (47)$$

Операция grad' здесь также производится в центре контура ($\text{grad}' 1/r = \mathbf{r}/r^3$). Сравнив (47) с (30b), мы увидим, что вектор-потенциал в случае стационарного тока ($\mathfrak{P} = \mathfrak{M} = 0$) можно представлять себе как результат действия бесконечно малых токов Ампера, непрерывно заполняющих пространство.

Здесь мы также можем перейти к атомистическому пониманию, рассматривая *магнитный момент* \mathfrak{M} или *намагничивание* на единицу объема как среднее из магнитных моментов m отдельных молекул или атомов.

Добавочный член с \mathfrak{M} , появляющийся в случае нестационарного тока, объясняется непосредственно из отставания.

Согласно электронной теории молекулярные токи не прерывны, а образуются движущимися по орбите электронами. Правда, в новой квантовой механике эта прерывность более или менее переходит опять в непрерывность; отдельный электрон уже не может быть локализован на своей орбите, а излучение определяется непрерывным распределением зарядов и токов, которое вычисляется по законам волновой механики. Но и тут нужно иметь сначала атомистическую формулу для магнитного момента, которую мы сейчас выведем.

Пусть по нашему контуру движется один единственный электрон, так что вектор \mathbf{a} является периодической функцией времени $a(t)$. Сила тока J равна произведению заряда e на число электронов, проходящих через сечение в единицу времени, т. е. при одном вращающемся электроном на число n оборотов в единицу времени.

Если T — период вращения электрона, то $n = \frac{1}{T}$, следовательно, $J = ne = e/T$. Отсюда следует, что

$$\bar{m} = \frac{1}{T} \int_0^T m dt, \quad (48)$$

¹ Черточка над буквой \bar{m} указывает здесь, что это средняя по времени величина электронной теории: молекулярные токи, как мы сейчас покажем, состоят из электронов, движущихся по замкнутым орбитам; буквой m без черты будем обозначать магнитный момент движущегося электрона в течение элемента времени dt .

где m есть мгновенный момент:

$$m = \frac{1}{2c} e (\mathbf{a} \times \dot{\mathbf{a}}). \quad (49)$$

Если в молекуле несколько вращающихся электронов, то *полный магнитный момент*

$$m = \frac{1}{2c} \sum e (\mathbf{a} \times \dot{\mathbf{a}}); \quad (50)$$

но в этом случае временную среднюю формулы (48) нужно уже брать по такому времени T , которое велико сравнительно со всеми имеющимися периодами обращения. В новой квантовой механике усреднение по времени заменяется другим процессом (образованием диагональных членов соответствующей матрицы). Нам незачем останавливаться на точных методах нахождения средней, и мы будем исходить из нескольких общих положений о зависимости электрического и магнитного момента от свойств молекулы и действия внешних полей. Впрочем, в оптике магнитный момент вообще не играет большой роли, так как прозрачные тела практически немагнитны; но мы должны считаться с колебаниями оптического момента при оптической активности.

§ 73. ТЕНЗОР ПОЛЯРИЗУЕМОСТИ И ДЕЙСТВУЮЩАЯ СИЛА ПОЛЯ

Из соображений предыдущего параграфа вытекает следующий метод исследования более тонких оптических явлений: для распространения света берутся измененные уравнения Максвелла [глава I, § 1, 1a, b или же § 72 (2a, b)]. Векторы \mathfrak{D} и \mathfrak{B} в них разбиваются на две части:

$$\mathfrak{D} = \mathfrak{E} + 4\pi\mathfrak{P}, \quad \mathfrak{B} = \mathfrak{H} + 4\pi\mathfrak{M}. \quad (1)$$

Векторы \mathfrak{P} и \mathfrak{M} электрического и магнитного моментов образуются путем суммирования и усреднения по моментам отдельных молекул в единице объема.

$$\mathfrak{P} = \sum p, \quad \mathfrak{M} = \sum m. \quad (2)$$

Моменты p и m отдельной молекулы, строго говоря, должны вычисляться из законов атомной механики. Но в оптике нас интересуют не их абсолютные величины, а только их зависимость от периодически изменяющегося светового поля \mathfrak{E} , \mathfrak{H} . Так как оно очень слабо по сравнению с полями, имеющимися в молекуле, то по многим соображениям оказывается ненужным подробно рассматривать механизм атома; можно суммарно описать поведение молекулы, считая составляющие p , m линейными функциями составляющих действующих полей. Мы оставим сначала в стороне магнитные действия, а относительно электрических примем, что длина волны света велика относительно диаметров отдельных

молекул. Тогда электрическое поле молекул можно рассматривать как однородное. Конечно, это поле не будет идентично с „полем \mathcal{E} световой волны“; мы назовем его *действующим полем* и обозначим \mathcal{E}' . Ниже мы рассмотрим это различие.

Итак для электрического момента молекулы, обусловленного действующим полем \mathcal{E}' , мы требуем, чтобы

$$p_x = \sum_y \alpha_{xy} \mathcal{E}_y'. \quad (3)$$

Здесь величины α_{xy} — составляющие тензора второго ранга, называемого *тензором поляризации* или *тензором деформации*. Так как p имеет размерность $l \cdot e$, а \mathcal{E} — размерность e/l^2 , то величины α_{xy} имеют размерность l^3 , т. е. представляют собой нечто вроде объема.

Величины α_{xy} зависят от строения молекулы, но, помимо этого, они являются также функциями частоты света. Нижеследующие соображения относятся только к монохроматической волне, случай сложного света будет изложен в конце.

Для того чтобы учесть изменения фазы, мы считаем составляющие электрического вектора комплексными величинами, в соответствии с чем мы должны положить, что и α_{xy} не действительные, а комплексные числа, зависящие от частоты. Физически это значит, что фаза момента p не должна непременно совпадать с фазой возмущающего поля. Мы вернемся к этому вопросу в главе о дисперсии (VIII) и вычислим соотношение между моментом и напряжением поля, исходя из модели молекулы, построенной согласно с представлениями классической физики. Но в действительности молекулы представляют собой квантово-механические системы, и поэтому можно предвидеть, что они будут вести себя несколько иначе, чем следует из классических воззрений.

Поэтому наиболее надежный путь — не делать относительно α_{xy} никаких предположений, кроме того, что они являются при данной частоте некоторыми комплексными числами. Это соответствует, как мы увидим, наиболее общей модели молекулы, где действуют не только консервативные силы, но и силы сопротивления электронным колебаниям, имеющие характер трения. Такие силы трения или торможения в принципе неустраняемы, так как собственное излучение молекулы отнимает у нее энергию. Но, как мы увидим позже (в главе VIII), бывают и другие тормозящие причины (например, столкновения молекул). Однако все эти силы трения у большинства тел и прежде всего у газов имеют то общее свойство, что они заметны лишь в известной спектральной области, именно в непосредственной близости собственных колебаний молекулы (линии излучения и поглощения). Так как в этих областях поглощение велико, и, следовательно, тела непрозрачны, то во многих оптических исследованиях они вовсе не рассматриваются. Поэтому в областях про-

зрачности этими силами можно с большим приближением пренебречь; в этом случае можно из чисто энергетических соображений высказать следующее ограничительное положение относительно α_{xy} : тензор α есть эрмитовский тензор, т. е. сопряженные с α_{xy} комплексные числа α_{xy}^* удовлетворяют соотношениям:

$$\alpha_{xy}^* = \alpha_{yx}. \quad (4)$$

Это вытекает из того, что в консервативной системе работа деформации в единицу времени должна быть равна производной от некоторой функции энергии.

Мы утверждаем, что эта функция энергии дана в эрмитовской форме:

$$u = \frac{1}{2} p \mathcal{E}'^* = \frac{1}{2} \sum_x p_x \mathcal{E}_x'^* = \frac{1}{2} \sum_{xy} \alpha_{xy} \mathcal{E}_x'^* \mathcal{E}_y'. \quad (5)$$

В самом деле, такое выражение принимает только действительные значения и может, следовательно, означать энергию.

Мы должны показать, что изменение во времени величины u равно работе поля в единицу времени, предполагая, что в каждое мгновение имеют место соотношения (3) между моментом и полем. Для процессов, произвольно зависящих от времени, это предположение выполняется только приближенно, именно когда колебания настолько медленны, что кинетической энергией можно пренебречь. В чисто периодических процессах, которые мы только и рассматриваем, в таком ограничении нет надобности, так как, полагая, что α_{xy} — комплексные числа, мы тем самым учитываем разность фаз между полем и моментом вследствие инерции. Надо помнить, что перед умножением энергетических величин следует переходить к действительным значениям. Поэтому мы должны сначала оперировать вещественным напряжением поля (отбрасывая при этом штрих при векторе \mathcal{E}), представив его в виде суммы двух комплексных выражений [глава III, § 34 (2)]:

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} (\mathcal{A} e^{i\tau} + \mathcal{A}^* e^{-i\tau}), \quad (6)$$

где $\tau = \omega t$. Тогда индуцированный момент p есть комплексное число:

$$p = p_1 + i p_2 = a e^{i\tau} + b e^{-i\tau}, \quad (7)$$

где a и b — комплексные векторы. Тогда p_1 , вещественная часть p , есть действительный момент молекулы, создаваемый напряжением поля:

$$p_1 = \frac{1}{2} (p + p^*) = \frac{1}{2} (a + b^*) e^{i\tau} + \frac{1}{2} (a^* + b) e^{-i\tau}. \quad (8)$$

Отсюда работа действительного поля \mathcal{E} в единицу времени

$$\dot{p}_1 \mathcal{E} = \frac{i\omega}{4} [(a + b^*)\mathcal{U}^* - (a^* + b)\mathcal{U} + (a + b^*)\mathcal{U}e^{2i\tau} - (a^* + b)\mathcal{U}^*e^{-2i\tau}]. \quad (9)$$

С другой стороны, возьмем производную по времени от $u = \frac{1}{2} \dot{p} \mathcal{E}^*$:

$$\dot{u} = \frac{1}{2} (\dot{p} \mathcal{E}^* + \dot{p}^* \mathcal{E}). \quad (10)$$

Вторую сумму в этом выражении преобразуем на основе формулы (4) для α :

$$\dot{p} \mathcal{E}^* = \sum_x \dot{p}_x \mathcal{E}_x^* = \sum_{xy} \alpha_{xy} \mathcal{E}_y \mathcal{E}_x^* = \sum_{xy} \alpha_{xy}^* \mathcal{E}_x \mathcal{E}_y^* = \sum_x \dot{p}_x^* \mathcal{E}_x = \dot{p}^* \mathcal{E}. \quad (11)$$

Отсюда следует:

$$\dot{u} = \frac{1}{2} (\dot{p} \mathcal{E}^* + \dot{p}^* \mathcal{E}).$$

Подставив сюда выражения (7) и (6) и сравнивая с (9), мы найдем тождество:

$$\dot{u} = \dot{p}_1 \mathcal{E}. \quad (12)$$

В правой части стоит работа (действительная) деформации, и уравнение показывает, что u имеет заданное значение энергии деформации. Очевидно также, что это основано на предположении (4), без которого мы не имели бы уравнения (11). Поэтому из требования, что должна существовать функция энергии (консервативных сил), вытекает эрмитовский характер тензора α .

По действительной части α_{xy} мы можем построить действительный эллипсоид поляризации

$$\sum_{xy} (\alpha_{xy} + \alpha_{xy}^*) xy = \text{const} \quad (13)$$

и преобразовать его к главным осям, так что его уравнение примет вид:

$$\sum_x \alpha_x x^2 = \text{const}. \quad (14)$$

Тогда недиагональные элементы α_{xy} будут мнимыми; в силу ограничения (4) таких величин будет три. Можно положить:

$$\alpha_{yz} = -\alpha_{zy} = -i d_z, \quad \alpha_{zx} = -\alpha_{xz} = -i d_y, \quad \alpha_{xy} = -\alpha_{yx} = -i d_x, \quad (15)$$

где d_x, d_y, d_z — составляющие вещественного аксиального вектора \mathbf{d} . Тогда величина u , отнесенная к главным осям, будет иметь вид:

$$u = \sum_x [\alpha_x \mathcal{E}_x \mathcal{E}_x^* - i d_x (\mathcal{E}^* \times \mathcal{E})_x], \quad (16)$$

и зависимость между электрическим моментом и возмущающим полем можно записать так:

$$\mathbf{p}_x = \alpha_x \mathcal{E}'_x + i(\mathbf{d} \times \mathcal{E}')_x. \quad (17)$$

Уравнение (17) отчетливо показывает физический смысл нашего предположения о комплексности α — именно, в смысле связи с электрическим полем — молекула проявляет свойства ротатора (вспомним о волчке!).

Мы увидим, что это происходит преимущественно в двух случаях: 1) под действием магнитного поля (магнитная вращательная способность, § 78) и 2) при отсутствии зеркальной симметрии в расположении молекул с учетом конечного размера молекулы сравнительно с длиной волны (естественная вращательная способность, § 83).

Заметим еще, что образованная из вещественных диагональных членов величина

$$\alpha_{xx} + \alpha_{yy} + \alpha_{zz} = \alpha_x + \alpha_y + \alpha_z = 3\alpha \quad (18)$$

инвариантна относительно вращений молекулы; это единственный инвариант, линейный относительно α . Его называют также *шпуром тензора поляризуемости*. Существуют инварианты высших степеней, например, квадрат длины вектора \mathbf{d} .

На основании выражения (16) можно молекулы классифицировать (аналогично классификации кристаллов) следующим образом:

1. Общие молекулы, $\alpha_x \neq \alpha_y \neq \alpha_z$,
2. Одноосные молекулы, $\alpha_x = \alpha_y \neq \alpha_z$,
3. Изотропные молекулы, $\alpha_x = \alpha_y = \alpha_z = \alpha$.

Вследствие того, что α зависит от частоты, направления осей вообще меняются с частотой. В особенности это имеет место в случае 1; напротив, в случае 2 ось z имеет постоянное направление в молекуле; наконец, в случае 3 можно выбрать произвольную пару осей независимо от частоты.

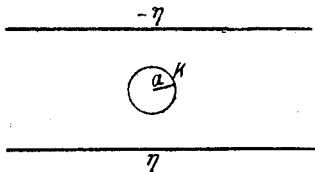
От этой классификации следует отличать классификацию по *средней поляризуемости единицы объема*, ибо в результате действия постоянных внешних электрических или магнитных полей, а также других влияний макроскопическая симметрия может отличаться от микроскопической. Укажем только на тривиальный случай, когда нет таких внешних воздействий, вследствие которых одно направление в пространстве отличалось бы от других. В таком случае должна быть в среднем изотропия, т. е. \mathfrak{P} должно быть пропорционально \mathcal{E}' (следовательно, пропорционально \mathcal{E}):

$$\mathfrak{P} = N p, \quad \bar{p} = \alpha \mathcal{E}'; \quad (19)$$

N есть число молекул в единице объема — число Лошмидта.

Мы должны теперь ближе рассмотреть разницу между полем \mathcal{E} световой волны и действующим полем \mathcal{E}' . Эти понятия совпадают только при большом расстоянии между молекулами, например, в разреженном газе; в других случаях, особенно в жидкостях и твердых телах, надо учитывать электрическое взаимодействие диполей в различных атомах и молекулах.

Естественно, что вопрос о взаимодействии диполей в действительности крайне сложен. Если мы имеем дело с молекулярно неупорядоченными, квазиизотропными телами, нам приходится удовольствоваться приближенными и средними величинами. Для случая же высоко упорядоченных молекул, т. е. для случая кристаллической решетки, можно вывести строгие законы воздействия. Мы применим сначала простой метод приближения, не касаясь действия отдельных диполей, а затем изложим по крайней мере основные идеи строгой теории взаимодействия диполей в некристаллических средах (§ 74) и в кристаллах (§ 75).



Фиг. 185. К теории „Действующей силы поля“.

Рассмотрим в квазиизотропном веществе отдельную молекулу M , на которую действуют все остальные. Последние можно разбить на две группы, разграниченные сферой, которая описана вокруг M . При надлежащем выборе радиуса сферы атомное строение вне ее уже не будет сказываться в точке M . Действие ее будет равносильно континууму с поляризацией \mathfrak{P} . Группа же внутри шара будет оказывать совершенно неправильное и неподдающееся учету воздействие на M . Для изотропной среды можно считать достаточно достоверным, что все эти неправильные действия взаимно уничтожаются. Поэтому силу поля \mathcal{E}' , действующую на молекулу M в однородном поляризованном теле, мы будем приближенно вычислять следующим образом.

Пусть в веществе описан вокруг M шар радиуса a , внутри которого нет молекул. Предполагаем, что a мало относительно длины световой волны λ и что запаздыванием можно пренебречь. Тогда вне шара до некоторого расстояния от M (большого относительно a) имеется постоянная средняя поляризация, определяемая уравнением (19). Таким образом наш вопрос сводится к электростатической задаче о влиянии, оказываемом пустым шаром в однородной наэлектризованной среде на распределение поля.

Рассмотрим диэлектрик в форме пластинки между двумя металлическими обкладками (фиг. 185), к которым приложено напряжение. Пусть плотность истинного заряда на пластинках равна соответственно $-\eta$ и $+\eta$. Эта плотность, как известно, связана с диэлектрическим смещением в среде соотношением

$$\mathcal{D}_z = 4\pi\eta. \quad (20)$$

Напряжение поля в некоторой точке внутри пластинки

$$\mathcal{E} = \mathcal{D} - 4\pi\mathfrak{P}. \quad (21)$$

Вообразим, что внутри пластинки из нее вырезан шар K радиуса a . Тогда мы можем разложить поле внутри пластинки на три составляющие:

1. Поле $4\pi\eta$ истинного заряда на металлических пластинках;
2. Поле свободных зарядов на плоской поверхности диэлектрика, равное $-4\pi\mathfrak{P}_z$;
3. Поле свободных зарядов на поверхности полого шара; они, очевидно, равны с обратным знаком свободным зарядам на внутренней поверхности шара.

Для вычисления этих величин будем исходить из формулы § 72 (31), придав ей вид, соответствующий частному случаю однородной поляризации, для чего переменим в ней знак. Мы получим следующее выражение для поля поверхностных зарядов полого шара:

$$\varphi = -\mathfrak{P} \int \text{grad}' \frac{1}{r} dS', \quad (22)$$

где дифференцирование grad' производится по координатам элемента интегрирования dS' . Мы можем заменить это дифференцирование операцией grad по координатам точки наблюдения, но при этом нужно взять другой знак. Получим:

$$\varphi = \mathfrak{P} \text{grad} \int \frac{dS'}{r} = -\mathfrak{P} \text{grad} \varphi_0, \quad (23)$$

где

$$\varphi_0 = - \int \frac{dS'}{r} \quad (24)$$

есть потенциал части пространства, заполненной однородной плотностью заряда -1 с постоянной поляризацией \mathfrak{P} .

Для действующей силы поля слоя на полом шаре следует:

$$-\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \sum_y \mathfrak{P}_y \frac{\partial \varphi_0}{\partial y} = \sum_y \mathfrak{P}_y \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x \partial y}. \quad (25)$$

Из соображений симметрии смешанные производные, очевидно, равны нулю в средней точке, а остальные равны:

$$\frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x \partial y} = 0, \dots, \quad \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial z^2}. \quad (26)$$

Так как потенциал однородной плотности -1 удовлетворяет уравнению:

$$\Delta \varphi_0 = 4\pi, \quad (27)$$

то каждая из вторых производных (2) равна $\frac{4\pi}{3}$, а для составляющей действующего поля, происходящей от поверхностного заряда полого шара получим:

$$-\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{4\pi}{3} \mathfrak{P}_x. \quad (28)$$

Теперь образуем суммарное поле внутри шара из его трех частей:

$$\mathfrak{E}' = \mathfrak{D} - 4\pi \mathfrak{P} + \frac{4\pi}{3} \mathfrak{P} \quad (29)$$

или, введя выражение поля, которое имелось бы в том случае, если бы шар не был вырезан,

$$\mathfrak{E}' = \mathfrak{E} + \frac{4\pi}{3} \mathfrak{P}. \quad (30)$$

Эти формулы позволяют подойти к решению всех вопросов оптики материальных сред. В частности, выведенная с помощью их зависимость показателя преломления от плотности хорошо совпадает с опытом. Мы остановимся на этом в § 76. Мы дадим до него два других параграфа по следующим причинам. Данная выше производная действующего поля (30) выведена на основании допущений, которые могут показаться спорными: молекулы внутри шара, окружающего рассматриваемую молекулу, считаются недействующими, а среде вне шара приписывается постоянная поляризуемость. Хотя такое допущение приемлемо, все же столь важную формулу необходимо обосновать более строго, не делая при этом никаких допущений, кроме общих статистических операций образования средних значений координат и направлений молекулы. Этому посвящен § 74. Кроме этого, формула (30) требует дальнейшего дополнения, так как из ее производной ясно следует, что она тесно связана с предположением об изотропности.

Если среда анизотропна, можно выразить различие направлений, вырезав в ней вместо шара эллипсоид. Затем поляризацию можно вычислить опять с помощью уравнения (23), где φ_0 есть то решение уравнения (27), которое соответствует эллипсоидальной границе. Тогда вторые производные φ_0 в средней точке оказались бы в общем случае не равными нулю, а действующее поле было бы согласно (25) линейной векторной функцией \mathfrak{P} . Конечно, мы заранее не можем знать форму (отношение ссес) эллипсоида и были бы вынуждены делать произвольные допущения. Следовательно, таким путем нельзя получить точной теории анизотропных сред. Поэтому в § 75 мы сделаем более строгое исследование этих соотношений на основе теории кристаллических решеток и вычислим действующее поле без всяких произвольных допущений.

§ 74. МОЛЕКУЛЯРНАЯ ТЕОРИЯ РАСПРОСТРАНЕНИЯ СВЕТА, ПРЕЛОМЛЕНИЕ И ОТРАЖЕНИЕ В ИЗОТРОПНЫХ СРЕДАХ*

Мы дадим сейчас строгую статистическую теорию распространения света в микроскопических изотропных средах, т. е. газах, жидкостях и твердых аморфных телах (стекло). Их отличительный признак, во-первых, в том, что молекулы равномерно ориентированы по всем направлениям, так что имеет место уравнение:

$$p = \alpha \mathfrak{E}', \quad (1)$$

где α есть средняя поляризуемость молекулы (в общем случае комплексная); во-вторых, в том, что центры тяжести молекул распределены в пространстве статистически, а не в правильном порядке. Поэтому, строго говоря, мы должны произвести вычисления для всех возможных пространственных распределений и затем взять среднюю. Но оптические явления можно разбить на две группы: 1) зависящие от среднего равномерного распределения молекул в пространстве и 2) зависящие от флуктуаций вокруг этого среднего распределения.

Мы рассмотрим сначала первую группу и поэтому будем считать молекулярную плотность N постоянной; далее мы займемся флуктуациями (рассеяние света § 81)¹.

Проследим подробно процесс распространения света в таком изотропном теле.

Внешняя волна, достигая диполя молекулы, возбуждает в нем колебания, и от каждого диполя начинает распространяться вторичная волна (см. в главе IV, § 52 теорию дифракции рентгеновских лучей). Все эти сферические волны интерferируют, вследствие чего должны возникнуть явления, которые в макроскопической теории Максвелла описываются геометрическими законами отражения и преломления и френелевыми формулами для амплитуд 1, § 10(14) и (15). Мы должны доказать следующее: сферические волны гасят внутри вещества падающую волну и, складываясь, распространяются назад в виде плоской отраженной волны и вперед в виде плоской волны с другой фазовой скоростью — преломленной; если пренебречь незначительными неправильностями, обусловленными молекулярным строением вещества, то зависимость между коэффициентом распространения и амплитудами волн окажется в строгом соответствии с теорией.

Удобнее всего представить поле диполя не с помощью потенциалов Φ и \mathfrak{A} , а с помощью так называемого *вектора Герца*,

¹ Излагаемая здесь оптика аморфных тел разрабатывалась следующими авторами: W. Esmarch, Ann. Physik, т. 42 (1913), стр. 1257; C. W. Oseen, там же, т. 48 (1915), стр. 1; W. Bothe, Dissert. Berlin, 1914, и. Ann. Physik, т. 64 (1921), стр. 693. Превосходную обобщающую работу дал R. Lundblad, Univ. Arskrift, Upsala, 1920. См. также G. Darwin, Trans. Camb. Soc. т. 23 (1924) Nr. VI, стр. 137.

полагая

$$\left. \begin{aligned} \Phi &= -\operatorname{div} \mathfrak{Z}, \\ \mathfrak{A} &= \frac{1}{c} \dot{\mathfrak{Z}}. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Тогда условие § 72 (13)

$$\operatorname{div} \mathfrak{A} + \frac{1}{c} \dot{\Phi} = 0$$

выполняется тождественно. Положим, что \mathfrak{Z} удовлетворяет волновому уравнению:

$$\Delta \mathfrak{Z} - \frac{1}{c^2} \ddot{\mathfrak{Z}} = 0; \quad (3)$$

тогда \mathfrak{A} и Φ также удовлетворяют этому уравнению. Напряжения поля \mathfrak{E} и $\mathfrak{H} = \mathfrak{B}$ можно вычислить в силу § 72 (10) и соответственно (8) и § 74 (2) непосредственно из \mathfrak{Z} . Получим согласно (3):

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{E} &= \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathfrak{Z} - \Delta \mathfrak{Z} = \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathfrak{Z}, \\ \mathfrak{H} &= \frac{1}{c} \operatorname{rot} \dot{\mathfrak{Z}}. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Мы утверждаем, что волновое поле одного диполя \mathfrak{p} можно представить в виде:

$$\mathfrak{Z} = \frac{[\mathfrak{p}]}{r}, \quad (5)$$

где квадратные скобки означают запаздывание (замену t на $t - \frac{r}{c}$), так как согласно (2) отсюда следует:

$$\Phi = \frac{[\mathfrak{p}]_r}{r^3} + \frac{[\dot{\mathfrak{p}}]_r}{cr^2}, \quad \mathfrak{A} = \frac{1}{c} \frac{[\dot{\mathfrak{p}}]}{r}; \quad (6)$$

эти выражения совпадают с § 72 (36), (37). К этому электрическому полю диполей, вообще говоря [см., например, § 72 (36)], присоединяется также поле, возбуждаемое магнитным моментом m атома; это поле дает только одну составляющую вектора \mathfrak{A} , т. е. магнитного поля. Мы отбрасываем эту часть поля из следующих соображений.

Мы принимаем, что атомы среды в естественном состоянии немагнитны. Отсюда следует, что рассматриваемое здесь возникающее вследствие намагничивания поле при отсутствии действия света исчезает. Однако, строго говоря, колебания намагничивания, вызываемые светом, следовало бы принимать во

внимание (см. § 84). Как легко видеть, эти колебания имеют порядок величины отношения $\frac{a}{\lambda}$ размера атома a к длине волны

λ — следовательно для видимого света они очень малы. Поэтому мы в дальнейшем будем пренебрегать ими; однако в дальнейших параграфах (§ 83, 84) при рассмотрении оптической активности мы будем принимать их в расчет.

Полное электрическое поле \mathfrak{E}'_j , возникающее в j -том диполе внутри среды, складывается из падающей световой волны \mathfrak{E}^e и из составляющих \mathfrak{E}_l остальных диполей:

$$\mathfrak{E}'_j = \mathfrak{E}^e + \sum_l \mathfrak{E}_{jl}, \quad (7)$$

где суммирование производится по всем диполям за исключением j -того. Поле l -того диполя в точке, где находится j -тый, вычисляется согласно (4) и (5).

$$\mathfrak{E}_{jl} = \operatorname{rot} \operatorname{rot} \frac{\mathfrak{p}_0 \left(t - \frac{R_{jl}}{c} \right)}{R_{jl}}; \quad (8)$$

R_{jl} есть расстояние l -того диполя от точки наблюдения j . Операция $\operatorname{rot} \operatorname{rot}$ производится над координатами точки наблюдения.

Заменим теперь переменное (неизвестное, но в среднем однородное) распределение центров диполей постоянным, т. е. будем рассматривать момент диполя как функцию радиус-вектора \mathfrak{r} (и времени t), $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}(\mathfrak{r}, t)$. Будем также считать плотность функцией положения $N(\mathfrak{r})$. Обозначим элемент объема в месте нахождения диполя

$$dS' = dx' dy' dz' \quad (9)$$

и положим:

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{r} - \mathfrak{r}', \quad R = |\mathfrak{R}| = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}; \quad (10)$$

тогда поле в месте x, y, z для j -того диполя равно согласно (7) и (8):

$$\mathfrak{E}'(\mathfrak{r}, t) = \mathfrak{E}^e(\mathfrak{r}, t) + \operatorname{rot} \operatorname{rot} \int N \frac{\mathfrak{p} \left(\mathfrak{r}', t - \frac{R}{c} \right)}{R} dS', \quad (11)$$

где интегрирование производится по всему пространству, заполненному средой, вплоть до малого пространства, занимаемого атомом, к которому мы относим действующую силу. Мы будем называть малый объем, занимаемый атомом, его „сферой действия“ и будем считать его сферой радиуса a . Однако, выбор формы не имеет значения, так как мы в конце концов перейдем к пределу $a \rightarrow 0$.

Положим, что для \mathfrak{p} имеет место условие (1); мы получим уравнение, из которого можно определить \mathfrak{E}' ; оно представляет

собой линейное интегрально-дифференциальное уравнение. Можно было бы попытаться найти систематический метод решения этого уравнения. Для бесконечно протяженной среды с постоянной плотностью N такой метод дан Лундбладом, но мы не будем на нем останавливаться.

Мы рассмотрим метод Озеена для случая, когда рассматриваемая среда заполняет полупространства $z < 0$, т. е. мы выведем не только закон распространения света внутри среды, но также закон отражения и преломления на границе двух сред. Метод Озеена заключается в том, что к интегральному уравнению применяется то же условие, которое необходимо для представления действительного процесса: внутри среды распространяется плоская волна, отличающаяся от падающей волны \mathcal{E} направлением и длиной волны. Пусть распределение диполей ($N = \text{const}$) внутри среды имеет следующий вид:

$$\mathfrak{P} = Np = Na\mathcal{E}' = \mathfrak{P}^0 e^{\frac{2\pi i}{\lambda} \mathfrak{R}r} e^{-i\omega t}. \quad (12)$$

Подставим это выражение в интеграл уравнения (11); само уравнение напомним сокращенно:

$$\mathcal{E}' = \mathcal{E} + \text{rot rot } \mathfrak{Z}, \quad (13)$$

причем

$$\mathfrak{Z} = \int \frac{\mathfrak{P}\left(r', t - \frac{R}{c}\right)}{R} dS', \quad (14)$$

где интегрирование распространяется на полупространстве $z < 0$, а сфера действия $R < a$ описана вокруг точки наблюдения.

Для того чтобы уравнение (13) удовлетворялось, очевидно, должно иметь место следующее.

Интегральный член $\text{rot rot } \mathfrak{Z}$ по всему заданному распределению диполей должен сводиться внутри среды $z < 0$ к сумме двух плоских волн, уничтожающих два других члена уравнения, $\mathcal{E}' - \mathcal{E}$. Путем выбора длины волны мы можем так определить первую частичную волну (независимо от направления волновых нормалей), чтобы она была точно равна левой части \mathcal{E}' уравнения (13). Затем мы можем так выбрать волновые нормали, чтобы вторая частичная волна внутри среды уничтожала падающую волну \mathcal{E} (т. е. была равна ей по амплитуде и противоположна по фазе). Этот результат носит название *теоремы погашения Озеена*.

Во внешнем пространстве $z > 0$ уравнение (13), разумеется, не имеет места, но и в этой части пространства можно вычислить поле диполей $\text{rot rot } \mathfrak{Z}$. Мы получим плоскую волну, распространяющуюся от границы и соответствующую отраженной волне. Тогда наше уравнение должно дать нам геометрические законы отражений и преломления и формулы Френеля для амплитуд.

К выполнению этой задачи мы и приступим.

Выделим в дипольной волне (12) временной множитель и напомним:

$$\mathfrak{P} = \mathfrak{P}^0 e^{-i\omega t}, \quad (15)$$

где

$$\mathfrak{P}^0(r) = \mathfrak{P}^0 \cdot e^{\frac{2\pi i}{\lambda} \mathfrak{R}r}. \quad (16)$$

Эта функция \mathfrak{P} удовлетворяет уравнению:

$$\Delta \mathfrak{P} = -\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 \mathfrak{P} = -n^2 \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \mathfrak{P}. \quad (17)$$

Так как \mathcal{E}' не содержит источника, мы имеем, кроме того, согласно (12)

$$\text{div } \mathfrak{P} = 0. \quad (18)$$

Подставив это выражение в интегральный член уравнения (13), мы получаем из (14):

$$\mathfrak{Z} = \int \mathfrak{P}(r') \frac{e^{-i\omega\left(t - \frac{R}{c}\right)}}{R} dS' = e^{-i\omega t} \int \mathfrak{P}(r') \varphi(R) dS', \quad (19)$$

где

$$\varphi(R) = \frac{e^{i\omega\frac{R}{c}}}{R}. \quad (20)$$

Эта функция φ представляет собой сферическую волну в пустоте, следовательно, она удовлетворяет уравнению [см. § 43 (5) и (2)]

$$\Delta \varphi = \text{div grad } \varphi = -\frac{\omega^2}{c^2} \varphi, \quad (21)$$

которое означает, что излучение диполей в пустоте происходит с нормальной световой скоростью c (напротив, уравнение (17) представляет собой тождество для функции (16), которую мы ввели как выражение плоской волны; мы подчеркиваем это, чтобы показать, что в настоящей теории мы пользуемся действительно только уравнениями Максвелла для пустоты).

Умножив уравнение (19) на $-n^2 \frac{\omega^2}{c^2}$ и воспользовавшись формулой (17), мы можем написать:

$$-n^2 \frac{\omega^2}{c^2} \mathfrak{Z} = e^{-i\omega t} \int \Delta' \mathfrak{P}(r') \cdot \varphi(R) dS'. \quad (22)$$

С другой стороны, мы можем также написать уравнение (19), предварительно умножив его на $-\frac{\omega^2}{c^2}$, следующим образом:

$$-\frac{\omega^2}{c^2} \mathfrak{Z} = e^{-i\omega t} \int \mathfrak{P}(r') \Delta' \varphi dS'. \quad (23)$$

Вытя уравнение (22) из (23), получим:

$$\frac{\omega^2}{c^2} (n^2 - 1) \mathfrak{F} = e^{-i\omega t} \int (\mathfrak{F} \Delta' \varphi - \varphi \Delta' \mathfrak{F}) dS'. \quad (24)$$

Воспользуемся теперь формулой Грина, глава IV, § 45 (1)

$$\int (f \Delta g - g \Delta f) dS = \int \left(f \frac{\partial g}{\partial \nu} - g \frac{\partial f}{\partial \nu} \right) d\sigma \quad (25)$$

и получим:

$$\mathfrak{F} = \frac{c^2}{\omega^2} \frac{e^{-i\omega t}}{n^2 - 1} \int \left(\mathfrak{F} \frac{\partial \varphi}{\partial \nu'} - \varphi \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \nu'} \right) d\sigma'. \quad (26)$$

Интегрирование производится по внешней поверхности Σ среды, а для случая, когда точка наблюдения лежит внутри среды, также по поверхности σ сферы действия, описанной вокруг точки наблюдения. Поле колеблющегося диполя, $\text{rot rot } \mathfrak{F}$, выражается теперь фиктивным распределением диполей на этих граничных поверхностях.

Разобьем теперь интеграл на две части \mathfrak{F}_2 и \mathfrak{F}_1 , причем \mathfrak{F}_1 исчезает, если точка наблюдения находится вне среды. Вычислим обе эти части, начиная с \mathfrak{F}_2 .

Согласно (26) имеем:

$$\text{rot rot } \mathfrak{F}_2 = \frac{c^2 e^{-i\omega t}}{\omega^2 (n^2 - 1)} \text{rot rot} \int_{R=a} \left(\mathfrak{F} \frac{\partial \varphi}{\partial \nu'} - \varphi \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \nu'} \right) d\sigma'. \quad (27)$$

Для того чтобы выполнить дифференцирование rot rot , мы должны вычислить значение интеграла для некоторой постоянной сферы действия в переменной точке x, y, z вблизи центра сферы, а затем дифференцировать по x, y, z . (Недостаточно вычислить интеграл в центре, так как хотя он сам является функцией положения x, y, z центра, но при дифференцировании сфера действия связана с точкой наблюдения, а не фиксирована в пространстве, как это требуется при дифференцировании). Мы можем обойти это затруднительное вычисление, произведя операцию rot rot под знаком интеграла. Затем достаточно вычислить значение интеграла только в центре; такой способ значительно проще. Напишем:

$$\text{rot rot } \mathfrak{F}_2 = \frac{c^2 e^{-i\omega t}}{\omega^2 (n^2 - 1)} (\mathfrak{F}_2 - \mathfrak{F}_1), \quad (28)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{F}_1 &= \int_{R=a} \text{rot rot} \left(\varphi \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \nu'} \right) d\sigma', & (a) \\ \mathfrak{F}_2 &= \int_{R=a} \text{rot rot} \left(\mathfrak{F} \frac{\partial \varphi}{\partial \nu'} \right) d\sigma'. & (b) \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

Здесь \mathfrak{F} и $\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \nu'}$ функции r' , а операция rot rot относится к точке наблюдения r . Теперь нам следует вычислить величину $\text{rot rot } \phi \mathfrak{B}$, где ϕ — скалярная функция положения, а \mathfrak{B} — *постоянный* вектор. С помощью двух легко поддающихся проверке формул:

$$\left. \begin{aligned} \text{rot } \phi \mathfrak{B} &= \text{grad } \phi \times \mathfrak{B}, & (a) \\ \text{rot} (\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}) &= (\mathfrak{B} \text{ grad}) \mathfrak{A} - \mathfrak{B} \text{ div } \mathfrak{A} & (b) \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

получим:

$$\text{rot rot } \phi \mathfrak{B} = \text{rot} (\text{grad } \phi \times \mathfrak{B}) = (\mathfrak{B} \text{ grad}) \text{grad } \phi - \mathfrak{B} \text{ div grad } \phi. \quad (31)$$

При этом интеграл (29a) принимает вид:

$$\left. \begin{aligned} \text{rot rot} \left(\varphi \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \nu'} \right) &= \left(\frac{\partial \mathfrak{F}(r')}{\partial \nu'} \text{ grad} \right) \text{grad } \varphi - \frac{\partial \mathfrak{F}(r')}{\partial \nu'} \text{ div grad } \varphi = \\ &= \frac{\partial \mathfrak{F}(r')}{\partial \nu'} \frac{\varphi'(R)}{R} + \frac{1}{R} \frac{d}{dR} \left(\frac{\varphi'}{R} \right) \cdot \mathfrak{R} \left(\frac{\partial \mathfrak{F}(r')}{\partial \nu'} \mathfrak{R} \right) + \frac{\partial \mathfrak{F}(r')}{\partial \nu'} \frac{\omega^2}{c^2} \varphi; \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

воспользуемся уравнением (21) и положим:

$$\varphi' = \frac{d\varphi}{dR}. \quad (33)$$

Введем единичный вектор из точки наблюдения к точке интегрирования

$$e = \frac{\mathfrak{R}}{R}. \quad (34)$$

Далее, на поверхности сферы имеем:

$$\frac{\partial}{\partial \nu'} = - \frac{\partial}{\partial R}. \quad (35)$$

Отсюда имеем:

$$\begin{aligned} \text{rot rot} \left(\varphi \frac{\partial \mathfrak{F}(r')}{\partial \nu'} \right) &= \\ &= - \left(\frac{\varphi'}{R} + \frac{\omega^2}{c^2} \varphi \right) \frac{\partial \mathfrak{F}(r')}{\partial R} - R \frac{d}{dR} \left(\frac{\varphi'}{R} \right) \cdot e \left(\frac{\partial \mathfrak{F}(r')}{\partial R} e \right). \end{aligned} \quad (36)$$

Чтобы вычислить интеграл \mathfrak{F}_1 , мы должны положить $R = a$, а затем интегрировать по всем направлениям, или, что то же самое, умножить на $4\pi a^2$ и взять среднюю по всем направлениям. Введя константы

$$A = -4\pi a^2 \Phi(a), \quad B = -4\pi a^2 \Psi(a), \quad (37)$$

где

$$\Phi(R) = \frac{\varphi'(R)}{R} + \frac{\omega^2}{c^2} \varphi(R), \quad \Psi(R) = R \frac{d}{dR} \left(\frac{\varphi'(R)}{R} \right), \quad (38)$$

получим:

$$\mathfrak{F}_1 = A \left(\frac{\partial \mathfrak{F}(\mathbf{r}')}{\partial R} \right)_{R=a} + B e \left(\frac{\partial \mathfrak{F}(\mathbf{r}')}{\partial R} e \right)_{R=a}, \quad (39)$$

где черта означает среднюю по всем направлениям вектора e . Точно так же определим подинтегральное выражение (29b):

$$\text{rot rot} \left(\mathfrak{F} \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{r}'} \right) = [\mathfrak{F}(\mathbf{r}') \text{grad}] \text{grad} \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{r}'} - \mathfrak{F}(\mathbf{r}') \text{div grad} \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{r}'} \quad (40)$$

Операцию $\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}'}$ и дифференцирование по \mathbf{r} можно поменять местами; таким образом получаем:

$$\text{rot rot} \left(\mathfrak{F} \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{r}'} \right) = \left[\mathfrak{F}(\mathbf{r}') \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}'} \text{grad} \right] \text{grad} \varphi - \mathfrak{F}(\mathbf{r}') \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}'} \text{div grad} \varphi. \quad (41)$$

Сравнивая это выражение с (32), мы получаем уравнение, аналогичное (39):

$$\mathfrak{F}_2 = A' [\overline{\mathfrak{F}(\mathbf{r}')}]_{R=a} + B' e [\overline{\mathfrak{F}(\mathbf{r}') e}]_{R=a}, \quad (42)$$

в которое мы должны вместо констант (37) подставить величины:

$$A' = -4\pi a^2 \left[\frac{d}{dR} \Phi(R) \right]_{R=a}, \quad B' = -4\pi a^2 \left[\frac{d}{dR} \Psi(R) \right]_{R=a}. \quad (43)$$

Воспользуемся теперь условием, что сфера действия, описанная вокруг точки наблюдения, мала, и разложим $\mathfrak{F}(\mathbf{r}')$ и $\frac{\partial \mathfrak{F}(\mathbf{r}')}{\partial R}$ по степеням R :

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{F}(\mathbf{r}') &= \mathfrak{F}(\mathbf{r}) - R(e \text{ grad}) \mathfrak{F} + \frac{R^2}{2} (e \text{ grad})^2 \mathfrak{F} + \dots, & (a) \\ \frac{\partial \mathfrak{F}(\mathbf{r}')}{\partial R} &= -(e \text{ grad}) \mathfrak{F} + R(e \text{ grad})^2 \mathfrak{F} + \dots & (b) \end{aligned} \right\} \quad (44)$$

Подставим эти выражения в оба уравнения (39) и (42); тогда нам, очевидно, придется вычислить следующие средние значения:

$$\left. \begin{aligned} \overline{[\mathfrak{F}(\mathbf{r}')]_{R=a}} &= \mathfrak{F} + \frac{a^2}{2} \overline{(e \text{ grad})^2 \mathfrak{F}}, \\ \overline{e [\mathfrak{F}(\mathbf{r}') e]_{R=a}} &= \overline{e(\mathfrak{F} e)} + \frac{a^2}{2} \overline{e[e \cdot (e \text{ grad})^2 \mathfrak{F}]}, \\ \overline{\left(\frac{\partial \mathfrak{F}(\mathbf{r}')}{\partial R} \right)_{R=a}} &= a \overline{(e \text{ grad})^2 \mathfrak{F}}, \\ \overline{e \left(\frac{\partial \mathfrak{F}(\mathbf{r}')}{\partial R} \right)_{R=a}} &= a \overline{e[e \cdot (e \text{ grad})^2 \mathfrak{F}]}, \end{aligned} \right\} \quad (45)$$

где всюду в выражение \mathfrak{F} в правой части надо подставить координаты точки наблюдения (вектор \mathbf{r}).

Проще всего вычислить эти средние с помощью разложения по составляющим. Например:

$$\left. \begin{aligned} (e \text{ grad})^2 \mathfrak{F}_x &= \left(e_x \frac{\partial}{\partial x} + e_y \frac{\partial}{\partial y} + e_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \times \\ &\times \left(e_x \frac{\partial \mathfrak{F}_x}{\partial x} + e_y \frac{\partial \mathfrak{F}_x}{\partial y} + e_z \frac{\partial \mathfrak{F}_x}{\partial z} \right) = \\ &= e_x \frac{\partial e_x}{\partial x} \frac{\partial \mathfrak{F}_x}{\partial x} + e_x \frac{\partial e_y}{\partial x} \frac{\partial \mathfrak{F}_x}{\partial y} + e_x \frac{\partial e_z}{\partial x} \frac{\partial \mathfrak{F}_x}{\partial z} + \\ &+ e_x^2 \frac{\partial^2 \mathfrak{F}_x}{\partial x^2} + e_y^2 \frac{\partial^2 \mathfrak{F}_x}{\partial y^2} + e_z^2 \frac{\partial^2 \mathfrak{F}_x}{\partial z^2} + \\ &+ 2 \left(e_x e_y \frac{\partial^2 \mathfrak{F}_x}{\partial x \partial y} + e_x e_z \frac{\partial^2 \mathfrak{F}_x}{\partial x \partial z} + e_y e_z \frac{\partial^2 \mathfrak{F}_x}{\partial y \partial z} \right). \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

Здесь следует также принять во внимание, что

$$\frac{\partial e_x}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{x - x'}{R} = \frac{1}{R} - \frac{e_x}{R^3}, \dots \quad (47)$$

Усреднение приводит поэтому к определению средних значений квадратов и произведений единичного вектора e . В остальных усреднениях (39) и (42) появляется также произведение составляющих по 3 и по 4. Последние легко вычислить; вычисление полностью приведено в § 77, здесь же мы даем только результаты. От нуля отличны только

$$\left. \begin{aligned} \overline{e_x^2} &= \overline{e_y^2} = \overline{e_z^2} = \frac{1}{3}, \\ \overline{e_x e_y e_z} &= -\overline{e_x e_z e_y} = \dots = \frac{1}{6}, \\ \overline{e_x^4} &= \overline{e_y^4} = \overline{e_z^4} = \frac{1}{5}, \\ \overline{e_x^2 e_y^2} &= \dots = \frac{1}{15}; \end{aligned} \right\} \quad (48)$$

остальные равны нулю.

Отсюда прежде всего следует, что

$$\overline{e_x \frac{\partial e_x}{\partial x}} = \dots = 0; \quad (49)$$

таким образом остается:

$$(\text{e grad})^2 \mathfrak{F}_x = \frac{1}{3} \Delta \mathfrak{F}_x. \quad (50)$$

Такие же элементарные, хотя и длинные, вычисления дают нам соответственно

$$\left. \begin{aligned} \overline{e(\mathfrak{F}e)} &= \frac{1}{3} \mathfrak{F}, \\ \overline{e[e(\text{e grad})^2 \mathfrak{F}]} &= \frac{1}{15} \Delta \mathfrak{F} + \frac{2}{15} \text{grad div } \mathfrak{F}. \end{aligned} \right\} \quad (51)$$

Здесь следует иметь в виду (18), $\text{div } \mathfrak{F} = 0$, откуда получаем:

$$\left. \begin{aligned} \overline{[\mathfrak{F}(\mathbf{r}')]_{R=a}} &= \mathfrak{F} + \frac{a^2}{2} \cdot \frac{1}{3} \Delta \mathfrak{F}, \\ \overline{e[\mathfrak{F}(\mathbf{r}')e]_{R=a}} &= \frac{1}{3} \mathfrak{F} + \frac{a^2}{2} \cdot \frac{1}{15} \Delta \mathfrak{F}, \\ \left[\frac{\partial \mathfrak{F}(\mathbf{r}')}{\partial R} \right]_{R=a} &= \frac{a}{3} \Delta \mathfrak{F}, \\ \overline{e \left(e \frac{\partial \mathfrak{F}(\mathbf{r}')}{\partial R} \right)_{R=a}} &= \frac{a}{15} \Delta \mathfrak{F}. \end{aligned} \right\} \quad (52)$$

Окончательно получаем:

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{F}_1 &= A \cdot \frac{a}{3} \Delta \mathfrak{F} + B \cdot \frac{a}{15} \Delta \mathfrak{F}, \\ \mathfrak{F}_2 &= A' \left(\mathfrak{F} + \frac{a^2}{6} \Delta \mathfrak{F} \right) + B' \left(\frac{1}{3} \mathfrak{F} + \frac{a^2}{30} \Delta \mathfrak{F} \right). \end{aligned} \right\} \quad (53)$$

Еще раз подчеркиваем, что в выражения \mathfrak{F} и $\Delta \mathfrak{F}$ правой части надо подставить координаты точки наблюдения (вектор \mathbf{r}).

Согласно (28) и (53) получаем результат:

$$\begin{aligned} \text{rot rot } \mathfrak{F}_2 &= \frac{c^2 e^{-i\omega t}}{\omega^2(n^2-1)} \left\{ \left(A' + \frac{1}{3} B' \right) \mathfrak{F} + \right. \\ &+ \left[-\frac{a}{3} \left(A + \frac{B}{5} \right) + \frac{a^2}{6} \left(A' + \frac{B'}{5} \right) \right] \Delta \mathfrak{F} \right\}. \end{aligned} \quad (54)$$

С помощью его можно вычислить поле, возбуждаемое диполем. Нам нужно только еще определить коэффициенты. Для этого

напишем разложение функции φ по возрастающим степеням R :

$$\varphi = \frac{e^{i\frac{\omega}{c}R}}{R} = \frac{1}{R} + \frac{i\omega}{c} - \frac{1}{2} \frac{\omega^2}{c^2} R - \frac{i}{6} \frac{\omega^3}{c^3} R^2 + \dots \quad (55)$$

Отсюда в силу (38) следует:

$$\left. \begin{aligned} \Phi &= \frac{\varphi'}{R} + \frac{\omega^2}{c^2} \varphi = -\frac{1}{R^3} + \frac{1}{2} \frac{\omega^2}{c^2} \frac{1}{R} + \frac{2}{3} i \frac{\omega^3}{c^3} + \dots \\ \Psi &= R \frac{d}{dR} \left(\frac{\varphi'}{R} \right) = \frac{3}{R^3} + \frac{1}{2} \frac{\omega^2}{c^2} \frac{1}{R} + \dots \end{aligned} \right\} \quad (56)$$

следовательно, силы (37) и (43)

$$\left. \begin{aligned} A &= -4\pi \left(-\frac{1}{a} + \frac{1}{2} \frac{\omega^2}{c^2} + \dots \right), \\ B &= -4\pi \left(\frac{3}{a} + \frac{1}{2} \frac{\omega^2}{c^2} a + \dots \right); \end{aligned} \right\} \quad (57)$$

$$\left. \begin{aligned} A' &= -4\pi \left(\frac{3}{a^3} - \frac{1}{2} \frac{\omega^2}{c^2} + \dots \right), \\ B' &= -4\pi \left(-\frac{9}{a^2} - \frac{1}{2} \frac{\omega^2}{c^2} + \dots \right). \end{aligned} \right\} \quad (58)$$

Вычисляя эти величины, мы переходим сразу к пределу и получаем:

$$\left. \begin{aligned} A' + \frac{1}{3} B' &= \frac{4\pi}{3} \cdot 2 \frac{\omega^2}{c^2}, \\ -\frac{a}{3} \left(A + \frac{1}{5} B \right) &= -\frac{4\pi}{3} \cdot \frac{2}{5}, \\ \frac{a^2}{6} \left(A' + \frac{1}{5} B' \right) &= -\frac{4\pi}{3} \cdot \frac{3}{5}; \end{aligned} \right\} \quad (59)$$

следовательно

$$-\frac{a}{3} \left(A + \frac{1}{5} B \right) + \frac{a^2}{6} \left(A' + \frac{1}{5} B' \right) = -\frac{4\pi}{3}. \quad (60)$$

При этом из (54) следует:

$$\text{rot rot } \mathfrak{F}_2 = \frac{c^2 e^{-i\omega t}}{\omega^2(n^2-1)} \frac{4\pi}{3} \left(\frac{2\omega^2}{c^2} \mathfrak{F} - \Delta \mathfrak{F} \right). \quad (61)$$

Заменив также в (17) $\Delta \mathfrak{F}$ через \mathfrak{F} , получим окончательно:

$$\text{rot rot } \mathfrak{F} = \frac{4\pi}{3} \frac{n^2 + 2}{n^2 - 1} \mathfrak{F} e^{-i\omega t} = \frac{4\pi}{3} \frac{n^2 + 2}{n^2 - 1} \mathfrak{F}. \quad (62)$$

Итак, мы получаем следующий результат: та часть возбуждаемого диполями поля, которая не относится к поверхности, при волнообразном распространении дипольного возмущения пропорциональна этой дипольной волне. Отсюда мы можем заключить следующее.

Вообразим себе сначала, что тело имеет бесконечное протяжение, а граничная плоскость настолько удалена, что световое возмущение не достигает ее совсем. Спрашивается, при каких условиях может сохраняться дипольная волна под действием встречного излучения других диполей. Тогда мы должны в нашем основном уравнении (11) отбросить падающую волну и положить следующее условие для этой дипольной волны:

$$\mathfrak{E}'(r, t) = \text{rot rot } \mathfrak{F} = \frac{4\pi}{3} \frac{n^2 + 2}{n^2 - 1} \mathfrak{F} = \frac{4\pi}{3} N \alpha \frac{n^2 + 2}{n^2 - 1} \mathfrak{E}'. \quad (63)$$

Отсюда следует:

$$\frac{4\pi}{3} \alpha N = \frac{n^2 - 1}{n^2 + 2}. \quad (64)$$

При заданном α отсюда можно определить n , и тогда возможна дипольная волна с длиной $\lambda = \frac{1}{n} \frac{2\pi c}{\omega}$ в неограниченной среде.

Уравнение (64) называется *законом Лоренца-Лоренца*; мы вернемся к нему в следующем параграфе. Оно вполне совпадает с условием, которое дают уравнения Максвелла для изотропной среды с диэлектрической постоянной $\epsilon = n^2$, если мы примем для действующего напряжения поля условие, обоснованное в § 73 (30):

$$\mathfrak{E}' = \mathfrak{E} + \frac{4\pi}{3} \mathfrak{P}, \quad \mathfrak{P} = \alpha \mathfrak{E}'; \quad (65)$$

в самом деле, уравнения Максвелла дают для плоской волны в изотропной среде просто

$$\mathfrak{D} = \mathfrak{E} + 4\pi \mathfrak{P} = n^2 \mathfrak{E}, \quad (66)$$

откуда легко вывести соотношение (64) (ср. § 76).

Этот вывод, однако, еще не вполне удовлетворителен. Не хватает еще доказательства, что выходящая из пустоты плоская волна вызывает и сохраняет в неограниченной среде именно такое дипольное состояние. Покажем теперь, что это утверждение уже содержится в нашем исходном основном уравнении (11). Для этого рассмотрим вторую часть интеграла, которую мы

обозначили \mathfrak{F}_Σ . При этом будем считать, что тело ограничено плоскостью Σ , через которую проходит падающий свет \mathfrak{E}^e . Расположим систему координат так, чтобы Σ совпадало с плоскостью $z=0$ и чтобы тело находилось в части пространства $z < 0$. Таким образом мы имеем интеграл:

$$\mathfrak{F}_\Sigma = \frac{c^2 e^{-i\omega t}}{\omega^2 (n^2 - 1)} \int_{\Sigma} \left(\mathfrak{F} \frac{\partial \varphi}{\partial \nu'} - \varphi \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \nu'} \right) d\sigma', \quad (67)$$

распространенный до граничной плоскости $z=0$. Положим при этом, что расстояние точки наблюдения от граничной плоскости велико по сравнению с длиной волны, так что

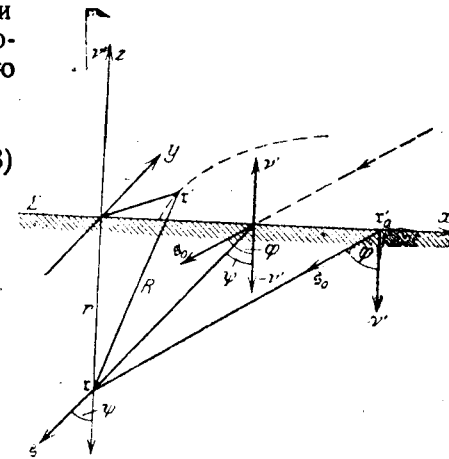
$$\frac{2\pi r}{\lambda_0} = r \frac{\omega}{c} \gg 1. \quad (68)$$

Согласно (16) и (20)

$$\frac{\partial}{\partial \nu'} \mathfrak{F}(\mathbf{r}') = \frac{\partial}{\partial \nu'} \mathfrak{F}^0 e^{\frac{i\omega}{c} n(\mathbf{r}' \cdot \mathbf{s})} =$$

$$= \frac{i\omega}{c} n \left(\mathbf{s} \frac{\partial \mathbf{r}'}{\partial \nu'} \right) \cdot \mathfrak{F}(\mathbf{r}'),$$

$$\frac{\partial}{\partial \nu'} \varphi(R) = \frac{i\omega}{c} \frac{\partial R}{\partial \nu'} \varphi + \dots,$$



Фиг. 186. Проникновение волны в тело, рассматриваемое как система диполей.

где точками обозначены члены высших порядков относительно малой величины $\frac{c}{\omega r}$. Подставив в (67), получаем:

$$\mathfrak{F}_\Sigma = \frac{c \mathfrak{F}^0 e^{-i\omega t}}{i\omega (n^2 - 1)} \int_{\Sigma} \left[\frac{\partial R}{\partial \nu'} - n \left(\mathbf{s} \frac{\partial \mathbf{r}'}{\partial \nu'} \right) \right] \frac{e^{\frac{i\omega}{c} [R + n(\mathbf{r}' \cdot \mathbf{s})]}}{R} d\sigma'. \quad (69)$$

Расположим (фиг. 186) ось x в граничной плоскости $z=0$ таким образом, что единичный вектор \mathbf{s} волновой нормали дипольной волны лежит в плоскости xz , а ось z проходит через точку наблюдения, которую мы будем считать лежащей внутри среды ($z < 0$) на расстоянии $-r$ от поверхности. Отсюда получаем значения составляющих величин:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{r}: & \quad 0, \quad 0, \quad -r; \\ \mathbf{r}': & \quad x', \quad y', \quad 0; \\ \mathbf{R}: & \quad x', \quad y', \quad -r; \\ \mathbf{s}: & \quad \sin \phi, \quad 0, \quad -\cos \phi, \end{aligned} \right\} \quad (70)$$

где ψ есть угол между внутренней нормалью — ν' и вектором нормали \hat{s} , т. е. обычный „угол преломления“ (угол между преломленным лучом и перпендикуляром к плоскости падения). Имеем:

$$\frac{\partial R}{\partial \nu'} = -\frac{z-z'}{R} = \frac{r}{R},$$

$$\left(\hat{s} \frac{\partial \tau'}{\partial \nu'}\right) = \hat{s}_z = -\cos \psi$$

$$r'\hat{s} = r\hat{s} - \Re\hat{s} = r\hat{s} - x' \sin \psi - r \cos \psi.$$

При этом

$$\mathfrak{F}_\Sigma = \frac{c\mathfrak{P}^0 e^{-i\omega[t - \frac{n}{c}(r\hat{s})]}}{i\omega(n^2 - 1)} \int_\Sigma \int \frac{1}{R} \left(\frac{r}{R} + n \cos \psi \right) e^{\frac{i\omega}{c}K} dx' dy', \quad (71)$$

где

$$K = R - n(r \cos \psi + x' \sin \psi). \quad (72)$$

Введем теперь такие криволинейные координаты в плоскости Σ , чтобы семейство координатных линий определялось уравнением $K = \text{const}$. Очевидно, что эти линии — конические сечения; действительно, возводя в квадрат (72), получим:

$$R^2 = x'^2 + y'^2 + r^2 = (K + nr \cos \psi)^2 + + 2x'n \sin \psi (K + nr \cos \psi) + x'^2 n^2 \sin^2 \psi,$$

т. е. квадратное уравнение относительно x', y' . Напишем его в нормальной форме:

$$\frac{(x' - \xi)^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1; \quad (73)$$

получим:

$$\xi = \frac{n \sin \psi (K + nr \cos \psi)}{1 - n^2 \sin^2 \psi}, \quad (74)$$

$$b^2 = (1 - n^2 \sin^2 \psi) a^2 = \frac{K^2 + 2Krn \cos \psi + r^2(n^2 - 1)}{1 - n^2 \sin^2 \psi}. \quad (75)$$

Предположим теперь, что

$$\sin \psi < \frac{1}{n}; \quad (76)$$

это, очевидно, значит (так как $n > 1$), что случай полного отражения исключается; этот случай имеет место тогда, когда световая волна идет из пустоты в тело.

Для того чтобы a и b были вещественны, числитель в правой части (75) должен быть положителен. Напишем его в форме:

$$(K - K_1)(K - K_2);$$

очевидно, K должно быть больше, чем наибольшая из величин K_1 и K_2 . Последние определяются из уравнения:

$$K^2 + 2Krn \cos \psi + r^2(n^2 - 1) = 0,$$

которое дает следующие значения для K :

$$\left. \begin{matrix} K_1 \\ K_2 \end{matrix} \right\} = r(-n \cos \psi \pm \sqrt{n^2 \cos^2 \psi - (n^2 - 1)}).$$

Мы видим, что оба они отрицательны; обозначим наибольшее из них (т. е. наименьшее по абсолютной величине) таким образом:

$$K_0 = r(-n \cos \psi + \sqrt{1 - n^2 \sin^2 \psi}).$$

Определим угол φ (ниже мы увидим, что это „угол падения“) уравнением:

$$\sin \varphi = n \sin \psi. \quad (77)$$

В силу (76) φ действительно и $\varphi > \psi$. Тогда

$$K_0 = r(-n \cos \psi + \cos \varphi).$$

Соответствующее значение ξ есть:

$$\xi_0 = r \operatorname{tg} \varphi.$$

Мы выделили, таким образом, в плоскости $z=0$ определенное семейство эллипсов, сгущающихся вокруг точки r_0' с координатами

$$x_0' = \xi_0 = r \operatorname{tg} \varphi, \quad y_0' = 0, \quad z_0' = 0; \quad (78)$$

действительно, для этой точки K равно:

$$K_0 = r(\cos \varphi - n \cos \psi), \quad (79)$$

и, следовательно, $a = b = 0$, и при $K > K_0$ обе полуоси вещественны.

Мы можем теперь определить каждую точку плоскости Σ через значение K и полярный угол w (вершина в точке r_0' , полярная ось на оси x). Полагая

$$d\sigma = dx' dy' = f(K, w) dK dw \quad (80)$$

и

$$g(K, w) = \frac{1}{R} \left(\frac{r}{R} + n \cos \psi \right), \quad (81)$$

мы получим наш интеграл (71) в виде

$$\mathfrak{F}_\Sigma = \frac{c}{i\omega(n^2 - 1)} \mathfrak{P}^0 e^{-i\omega t} e^{\frac{i\omega}{c}n(r\hat{s})} \int_{K_0}^{\infty} e^{\frac{i\omega}{c}K} dK \int_0^{2\pi} g(K, w) f(K, w) dw. \quad (82)$$

При дальнейшем вычислении мы должны иметь в виду предположение, что $\frac{2\pi r}{\lambda} \gg 1$. По теореме о среднем значении имеем:

$$\int_0^{2\pi} g(K, w) f(K, w) dw = g(K, \bar{w}) \int_0^{2\pi} f(K, w) dw, \quad 0 \leq \bar{w} \leq 2\pi.$$

Интеграл в правой части, умноженный на dK , представляет собой площадь кольца, заключенного между обоими эллипсами K и $K+dK$:

$$F(K) = \int_0^{2\pi} f(K, w) dw = \frac{d}{dK} (\pi ab) = \pi \frac{d}{dK} \frac{K^2 + 2Krn \cos \phi + r^2(n^2 - 1)}{(1 - n^2 \sin^2 \phi)^{1/2}}.$$

Таким образом согласно (77)

$$F(K) = 2\pi \frac{K + rn \cos \phi}{\cos^3 \phi}. \quad (83)$$

Подставим это выражение в

$$\mathfrak{F}_z = \frac{c}{i\omega(n^2 - 1)} \mathfrak{P}^0 e^{-i\omega t} e^{\frac{i\omega}{c} n(\mathbf{r}\hat{s})} \int_{K_0}^{\infty} g(K, \bar{w}) F(K) e^{\frac{i\omega}{c} K} dK. \quad (84)$$

Интеграл вычисляется путем последовательных интегрирований по частям. Так как K_0 согласно (79) пропорционально r , мы получаем ряд по степеням малой величины $\frac{c}{\omega r} = \frac{\lambda}{2\pi r}$:

$$\int_{K_0}^{\infty} g F e^{\frac{i\omega}{c} K} dK = \frac{c}{i\omega} \left[g F e^{\frac{i\omega}{c} K} \right]_{K_0}^{\infty} + \frac{c^2}{\omega^2} \left[\frac{\partial g F}{\partial K} e^{\frac{i\omega}{c} K} \right]_{K_0}^{\infty} + \dots \quad (85)$$

Мы обрываем этот ряд после первого члена. Теперь нам остается только вычислить значения функции gF при $K=K_0$ и $K=\infty$.

Что касается верхнего предела $K=\infty$, то соответствующий ему член интеграла не выражает никакого физического процесса, так как рассматриваемое тело в действительности конечно, и плоскость Σ также конечна. Ввиду того, что мы пренебрегаем влиянием остальных граничных поверхностей нашего тела, то целесообразно будет пренебречь также бесконечно удаленными частями плоскости Σ . Физически это выражается допущением, что, при достаточно больших размерах тела, волна, проходящая через Σ , не успевает еще дойти до других граничных поверх-

ностей, в то время как в Σ уже устанавливается практически стационарное волновое состояние. Итак, полагаем

$$(gF)_{K=\infty} = 0.$$

Рассмотрим теперь нижний предел K_0 . Прежде всего ясно, что здесь среднее значение w не играет роли, так как эллипсы при $K \rightarrow K_0$ стягиваются вокруг точки \mathbf{r}_0 , координаты которой заданы уравнениями (78). Вектор $\mathfrak{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$ имеет при $\mathbf{r}' = \mathbf{r}_0$ составляющие $-r \operatorname{tg} \phi$, 0 , $-r$; откуда следует (как видно также из фигуры):

$$R = \sqrt{r^2 \operatorname{tg}^2 \phi + r^2} = \frac{r}{\cos \phi},$$

и поэтому мы получаем из (79), (81) и (83):

$$\left. \begin{aligned} g &= \frac{\cos \phi}{r} (\cos \phi + n \cos \psi), & F &= \frac{2\pi r}{\cos^2 \phi}, \\ gF &= 2\pi \frac{\cos \phi + n \cos \psi}{\cos \phi} = 2\pi \frac{\sin(\psi + \phi)}{\sin \psi \cos \phi}. \end{aligned} \right\} \quad (86)$$

В показатель при \mathfrak{F}_z входит величина:

$$n(\mathbf{r}\hat{s}) + K_0 = nr \cos \phi + r(\cos \phi - n \cos \psi) = r \cos \phi = r\hat{s}^0, \quad (87)$$

здесь \hat{s}^0 означает единичный вектор с составляющими:

$$\hat{s}_x^0 = \sin \phi, \quad \hat{s}_y^0 = 0, \quad \hat{s}_z^0 = -\cos \phi. \quad (88)$$

Таким образом окончательно получаем:

$$\mathfrak{F}_z = \frac{2\pi c^2}{\omega^2(n^2 - 1)} \mathfrak{P}^0 \frac{\sin(\psi + \phi)}{\sin \psi \cos \phi} e^{-i\omega(t - \frac{1}{c} r\hat{s}^0)}. \quad (89)$$

Это выражение волны, распространяющейся в направлении \hat{s}^0 со скоростью света в пустоте. Это относится, очевидно, и к $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathfrak{F}_z$, чем и доказывается теорема погашения Озеена. Этой волной можно воспользоваться, чтобы уничтожить внутри среды тот член основного уравнения (13), который возникает вследствие действия падающей волны \mathfrak{E}^0 . Надо только подходящим образом подобрать амплитуды и определить волновые векторы \hat{s} и \hat{s}^0 в соответствии с законами преломления. Для этого нужно произвести операцию $\operatorname{rot} \operatorname{rot}$ над \mathfrak{F}_z . Но мы имеем:

$$\operatorname{rot} \mathfrak{P}^0 e^{-i\omega(t - \frac{1}{c} r\hat{s}^0)} = \frac{i\omega}{c} (\hat{s}^0 \times \mathfrak{P}^0) e^{-i\omega(t - \frac{1}{c} r\hat{s}^0)};$$

откуда

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathfrak{F}_z = -\frac{2\pi}{n^2 - 1} \frac{\sin(\psi + \phi)}{\sin \psi \cos \phi} [\hat{s}^0 \times (\hat{s}^0 \times \mathfrak{P}^0)] e^{-i\omega(t - \frac{1}{c} r\hat{s}^0)}. \quad (90)$$

Известно, что

$$\mathfrak{s}^0 \times (\mathfrak{s}^0 \times \mathfrak{P}^0) = \mathfrak{P}^0 - \mathfrak{s}^0(\mathfrak{s}^0 \mathfrak{P}^0). \quad (91)$$

Разложим теперь падающую волну \mathfrak{E}^0 и дипольную волну \mathfrak{P}^0 на две составляющие — параллельную и перпендикулярную к плоскости падения, снабдив их соответственно индексами p и s . Так как эта плоскость содержит оба вектора \mathfrak{s}^0 и \mathfrak{s} , образующие угол $\varphi - \psi$, то составляющие вектора (91) тождественны с s -составляющей. Напротив, p -составляющая этого вектора, перпендикулярного к \mathfrak{s}^0 , отлична от p -составляющей вектора \mathfrak{P}^0 , перпендикулярного к \mathfrak{s} , и получается из нее путем умножения на $\cos(\varphi - \psi)$. Таким образом теорема Озеена дает:

$$\mathfrak{E}^0 + \text{rot rot } \mathfrak{J}_z = 0 \quad (92)$$

для колебаний s и p :

$$\left. \begin{aligned} A_s &= \frac{2\pi}{n^2 - 1} P_s \frac{\sin(\varphi + \psi)}{\cos \varphi \sin \psi}, \\ A_p &= \frac{2\pi}{n^2 - 1} P_p \frac{\sin(\varphi + \psi) \cos(\varphi - \psi)}{\cos \varphi \sin \psi}, \end{aligned} \right\} \quad (93)$$

где A_s и A_p — составляющие амплитуды \mathfrak{E}^0 , а P_s и P_p — составляющие \mathfrak{P}^0 . Если мы определим с помощью формулы

$$4\pi\mathfrak{P} = \mathfrak{D} - \mathfrak{E} = (n^2 - 1)\mathfrak{E} \quad (94)$$

(которую можно вывести на основании (64) из максвелловской теории диэлектриков) „макроскопическое напряжение поля“ \mathfrak{E}^d внутри среды и назовем ее составляющие $D_s = \frac{4\pi}{n^2 - 1} P_s$, $D_p = \frac{4\pi}{n^2 - 1} P_p$ („проходящий“ луч), то мы получим формулы Френеля [глава I, § 10 (14)] для проходящей волны.

Нам остается еще вычислить \mathfrak{J}_z для внешней части среды, т. е. для $z > 0$. Вычисление производится точно так же и только r всюду заменяется через $-r$, вследствие чего необходимо также в силу (87) заменить \mathfrak{s}_z через $-\mathfrak{s}_z$ и φ через $\pi - \varphi$. Введем теперь единичный вектор \mathfrak{s}' , представляющий собой зеркальное отображение вектора \mathfrak{s}^0 , с составляющими:

$$\mathfrak{s}_x' = \sin \varphi, \quad \mathfrak{s}_y' = 0, \quad \mathfrak{s}_z' = \cos \varphi, \quad (95)$$

и вспомним, что угол между \mathfrak{s}' и \mathfrak{s} равен $\varphi + \psi$; мы получим для отраженной волны:

$$\left. \begin{aligned} R_s &= \frac{2\pi}{n^2 - 1} P_s \frac{\sin(\varphi - \psi)}{\sin \psi \cos \varphi}, \\ R_p &= \frac{2\pi}{n^2 - 1} P_p \frac{\sin(\varphi - \psi) \cos(\varphi + \psi)}{\sin \psi \cos \varphi}. \end{aligned} \right\} \quad (96)$$

Исключив из (93) и (96) величины P_s и P_p , мы получим формулы Френеля [глава I, § 10 (15)] для отраженной волны.

Таким образом мы строго доказали для изотропных тел, что влияние среды на распространение света может быть сведено к совместному излучению диполей в пустоте. Молекулярная теория дает больше обычной максвелловской теории непрерывности, так как, кроме нормального распространения света, она дает также световое рассеяние. Чтобы убедиться в этом, вспомним, что в выражение (11) под знак интеграла входит число N молекул в единице объема. Мы считали его в нашем выводе постоянным и выносили его за знак интеграла. Но в действительности число молекул подвержено пространственной флуктуации. Поэтому наша теория, как мы уже говорили, дает только распространение света в среде; кроме него, должно иметь место также неправильное распространение света, вызванное этими колебаниями. Так как колебания числа молекул в различных частях пространства совершенно независимы друг от друга, то излучение, даваемое ими, некогерентно. Мы получаем, таким образом, объяснение так называемого явления Тиндаля, т. е. рассеяние света даже в самой чистой среде. Мы рассмотрим это явление в § 81¹.

Но сначала мы рассмотрим в следующем параграфе нормальное распространение света в кристаллах, т. е. в диполях, расположенных в виде правильных решеток. Геометрические соотношения здесь сложны вследствие анизотропии, поэтому мы ограничимся изучением законов распространения света внутри среды (в соответствии с вычислением \mathfrak{J}_z в этом параграфе), рассмотрение же процессов на граничной плоскости опустим, так как мы это уже делали в формальной кристаллооптике (глава V).

§ 75. ОПТИКА КРИСТАЛЛИЧЕСКИХ РЕШЕТОК*

В этом параграфе мы исследуем взаимодействие колеблющихся диполей для случая, когда их носители, молекулы, образуют пространственную решетку, как это имеет место в действительных кристаллах. Механизм отражения и преломления в этом случае такой же, как и для некристаллических тел. Полное излучение диполей здесь также дает преломленную, отраженную и гасящую волны. Но здесь мы не будем переходить к предельному случаю непрерывного (вообще анизотропного) распределения плотности диполей, а ограничимся прерывной структурой пространственной решетки. Вместо легко вычисляемых интегралов нам придется иметь дело со сложным суммированием по всем точкам решетки. Полученные таким образом результаты, разумеется, точнее, чем при прежнем методе средних. Ввиду затруднительности вычислений мы ограничимся здесь допущением, что внутри кристалла падающая волна пол-

¹ Подробнее об этом см. в цитированных на стр. 477 работах Лундблада и Дарвина.

ностью уничтожается. Отбросив, таким образом, граничную поверхность, мы должны показать, что в бесконечно протяженном кристалле возможно электромагнитное поле, образуемое наложением сферических волн от диполей решетки и при этом распространения (показатель преломления) при этом будет отличаться от скорости в пустоте. Мы докажем, что это изменение скорости света с большим приближением можно вывести из обычной теории Максвелла, присоединив к ней надлежаще выбранное условие для поляризуемости отдельных диполей.

Эта строгая теория оптической решетки создана Эвальдом¹. Мы изложим здесь только ее основные черты и главным образом случай обыкновенного света, который отличается тем, что *длина волны велика относительно расстояния между атомами*.

Для математического выражения решетки мы воспользуемся вектором Герца \mathbf{z} , который мы ввели в § 74 посредством уравнений (2), (3), (4). Решетку мы определим с помощью трех основных векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$, образующих параллелепипед (ячейку решетки), объем которого выражается формулой главы IV, § 52 (15):

$$V = \mathbf{a}_1(\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3) = \begin{vmatrix} a_{1x} & a_{1y} & a_{1z} \\ a_{2x} & a_{2y} & a_{2z} \\ a_{3x} & a_{3y} & a_{3z} \end{vmatrix} \quad (1)$$

Произвольная точка решетки выражается вектором:

$$\mathbf{r}_l = l_1 \mathbf{a}_1 + l_2 \mathbf{a}_2 + l_3 \mathbf{a}_3 \quad (2)$$

[см. главу IV, § 52 (1)]. Введем, как в главе IV § 52 (16), *обратную решетку* с основными векторами²

$$\mathbf{b}_1 = \frac{1}{V} \mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3, \dots \quad (3)$$

и образуем из них *волновой вектор*

$$\mathbf{k}_l = 2\pi(l_1 \mathbf{b}_1 + l_2 \mathbf{b}_2 + l_3 \mathbf{b}_3). \quad (4)$$

Этот вектор служит для следующей цели.

Пусть $f(x, y, z)$, или сокращенно $f(\mathbf{r})$, есть некоторая периодическая в решетке функция, т. е.

$$f(\mathbf{r} + \mathbf{r}_l) = f(\mathbf{r}). \quad (5)$$

Такую функцию можно разложить в ряд Фурье:

$$f(\mathbf{r}) = \sum_l c_l e^{i \mathbf{k}_l \cdot \mathbf{r}}. \quad (6)$$

¹ P. P. Ewald, Dissert. München, 1912; Ann. Physik (4), т. 49 (1916). Исчерпывающее изложение см. M. Born, Atomtheorie des festen Zustandes. 2 изд. 1923, Leipzig u. Berlin. См. также Enzyklop. d. math. Wiss. т. 5, ч. III, 4, особенно § 41 и далее.

Действительно, если вектор \mathbf{r} увеличивается на один период, т. е. если он заменяется вектором $\mathbf{r} + \mathbf{a}_i$, то к показателям l -го члена разложения прибавляется, как следует из уравнений, вытекающих из формул (3)

$$\mathbf{a}_i \times \mathbf{b}_k = \delta_{ik} \quad (7)$$

[см. также главу IV, § 52 (17)] — величина:

$$i \mathbf{k}_l \mathbf{a}_i = 2\pi i (l_1 \mathbf{b}_1 + l_2 \mathbf{b}_2 + l_3 \mathbf{b}_3) \mathbf{a}_i = 2\pi i l_i.$$

Таким образом каждый член ряда остается без изменения.

Для определения коэффициентов $c_l = c_{l_1, l_2, l_3}$ умножим уравнение (6) на $e^{-i \mathbf{k}_l \cdot \mathbf{r}}$ и проинтегрируем по ячейке. Тогда в правой части появятся интегралы:

$$\int_V e^{i(\mathbf{k}_l - \mathbf{k}_{l'}) \cdot \mathbf{r}} dS. \quad (8)$$

Введем в них новые переменные интегрирования:

$$\xi = b_1 r, \quad \eta = b_2 r, \quad \zeta = b_3 r. \quad (9)$$

Тогда

$$d\xi d\eta d\zeta = \frac{1}{V} dx dy dz = \frac{1}{V} dS. \quad (10)$$

Ячейка отображается в пространстве $\xi\eta\zeta$ в виде единичного кубика; так, например, точка решетки $\mathbf{r} = \mathbf{a}_1$ переходит в точку $\xi = b_1 a_1 = 1, \eta = b_2 a_1 = 0, \zeta = b_3 a_1 = 0$. Интеграл (8) переходит в

$$\frac{1}{V} \int \int \int e^{\frac{2\pi i}{\lambda} [\xi(l_1 - l'_1) + \eta(l_2 - l'_2) + \zeta(l_3 - l'_3)]} d\xi d\eta d\zeta, \quad (11)$$

распространенный по единичному кубу в пространстве $\xi\eta\zeta$. Очевидно, этот интеграл всегда равен нулю, за исключением случая, когда $l_1 = l'_1, \dots$. Поэтому получается:

$$c_l = \frac{1}{V} \int f(\mathbf{r}) e^{-i \mathbf{k}_l \cdot \mathbf{r}} dS. \quad (12)$$

Чтобы подготовить вычисление действия диполей, вычислим электростатический потенциал, возбуждаемый зарядами, распределенными в решетке с периодической плотностью, которая выражается периодической функцией (6). Для этого мы должны найти интеграл *дифференциального уравнения Пуассона*

$$\Delta \varphi = -4\pi f \quad (13)$$

также в виде периодической функции. Решение имеет следующий вид:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \sum_l \frac{4\pi c_l}{|\mathbf{k}_l|^2} e^{i \mathbf{k}_l \cdot \mathbf{r}}, \quad (14)$$

что можно проверить, подставив эту функцию в дифференциальное уравнение. Коэффициент постоянного члена ($l_1=l_2=l_3=0$, следовательно $\mathfrak{f}_l=0$) здесь был бы равен бесконечности, если бы c_0 не равнялось нулю. Поэтому мы должны положить $c_0=0$. Согласно (6) это значит, что постоянный член в ряде Фурье для плотности равен нулю, т. е. что в каждой ячейке весь имеющийся заряд равен нулю.

Рассмотрим теперь частный случай, когда в точках решетки находятся статические диполи. Для этого представим себе сначала, что заряды в ячейке сконцентрированы в двух равных и противоположных по знаку точечных зарядах. Если мы поместим точечный заряд $-e$ в вершине ячейки, а заряд e в точку, расстояние которой от вершины выражается вектором α , то коэффициент Фурье согласно (12) равен:

$$c_l = \frac{e}{V} (e^{-i\mathfrak{f}_l \alpha} - 1); \tag{15}$$

потенциал можно теперь написать в виде:

$$\varphi = \frac{e}{V} [\varphi_0(\mathbf{r} - \alpha) - \varphi_0(\mathbf{r})], \tag{16}$$

где

$$\varphi_0 = \sum_l' \frac{4\pi}{|\mathfrak{f}_l|^2} e^{i\mathfrak{f}_l \mathbf{r}}, \tag{17}$$

а штрих при знаке [суммы означает, что мы отбрасываем член с $l=0$.

Функция φ_0 имеет следующее физическое значение: она представляет собой потенциал простой точечной решетки, в точках которой помещается заряд $+V$, а отрицательный заряд равномерно распределен с постоянной плотностью -1 . (Этим выполняется условие нейтральности всей решетки). Это утверждение нельзя проверить простой подстановкой функции (17) в дифференциальное уравнение

$$\Delta\varphi_0 = 4\pi,$$

так как вследствие наличия особенных точек ряд (17) нельзя дважды дифференцировать почленно, а существование особенных точек нельзя усмотреть непосредственно из ряда.

Но это доказательство можно вывести следующим образом. Применим формулу Грина § 74(25):

$$\int (f\Delta g - g\Delta f) dS = \int \left(f \frac{\partial g}{\partial \nu} - g \frac{\partial f}{\partial \nu} \right) d\sigma. \tag{18}$$

Здесь тройной интеграл распространен по всей ячейке, за исключением маленькой сферы вокруг заряженной точки решетки,

принадлежащей к этой ячейке; поверхностный интеграл взят по поверхности, ограничивающей ячейку, и по поверхности этой маленькой сферы¹.

Выберем теперь

$$f = e^{-i\mathfrak{f}_l \mathbf{r}}, \quad g = \varphi_0, \tag{19}$$

так чтобы

$$\Delta f = -|\mathfrak{f}_l|^2 f, \quad \Delta g = \Delta\varphi_0 = 4\pi. \tag{20}$$

Кроме того φ_0 должна вести себя во всех точках решетки, как V/r . Тогда поверхностные интегралы по любым двум противоположащим ограничивающим поверхностям ячейки взаимно уничтожаются вследствие периодичности функций f и g ; интеграл же по поверхности сферы, окружающей диполь, легко вычисляется. В приближении $g = 1/r$, следовательно, $\partial g / \partial \nu = -\partial g / \partial r = 1/r^2$, тогда как $d\sigma = r^2 d\Omega$, где $d\Omega$ означает элемент телесного угла. Далее, так как f равно единице при $r = 0$, а $\partial f / \partial \nu$ остается конечным, то вторая часть поверхностного интеграла равна нулю; первая часть равна $4\pi V$.

Таким образом формула (18) дает:

$$\int f \cdot (4\pi + \varphi_0 |\mathfrak{f}_l|^2) dS = 4\pi V. \tag{21}$$

Имеем далее:

$$\int f dS = \int e^{-i\mathfrak{f}_l \mathbf{r}} dS = \begin{cases} 0 & \text{при } l \neq 0, \\ V & \text{при } l = 0. \end{cases} \tag{22}$$

Следовательно, мы получим следующие значения коэффициентов Фурье для φ_0 :

$$\varphi_{0l} = \frac{1}{V} \int \varphi_0 e^{-i\mathfrak{f}_l \mathbf{r}} dS = \frac{1}{V} \int \varphi_0 f dS = \begin{cases} 0 & \text{при } l = 0, \\ \frac{4\pi}{|\mathfrak{f}_l|^2} & \text{при } l \neq 0. \end{cases} \tag{23}$$

Таким образом мы находим, что φ_0 выражается как раз рядом (17), чем и доказывается наше утверждение.

Вследствие нейтральности ячейки потенциал (16) удовлетворяет уравнению $\Delta\varphi_0 = 0$ и имеет разрывы e/r и $-e/r$ в точках обеих смещенных решеток. Заставим теперь оба заряда ячейки, а следовательно, и обе решетки перемещаться по направлению друг к другу таким образом, чтобы произведение $e\alpha = \mathfrak{P}$ оставалось конечным. Момент на единицу объема равен $\mathfrak{P} = p/V$. Из (16) следует:

$$\varphi = -\mathfrak{P} \text{grad } \varphi_0(\mathbf{r}). \tag{24}$$

Это и есть потенциал дипольной решетки.

Это решение точно соответствует данному в § 73 (23) выражению потенциала однородно поляризованного вещества внутри

¹ При этом мы располагаем ячейку так, чтобы точки, несущие заряд, оказались не в углах ячейки, а в середине ее.

вырезанной сферы. Можно вычислить действующую силу поля в частном случае, когда решетка кубическая, а точка наблюдения является точкой симметрии решетки. Она может совпадать с точкой решетки, но при этом надо считать, что в этой точке нет заряда, и вычесть соответствующий потенциал из φ_0 . Из соображений симметрии следует, что смешанные производные φ_0 равны нулю, а остальные равны между собой и имеют величину $4\pi/3$. Мы получаем, таким образом, напряжение поля, возникающего вследствие поляризации всей решетки,

$$\mathcal{E}' = \mathcal{E} + \frac{4\pi}{3} \mathfrak{P}, \quad (25)$$

где \mathcal{E} есть внешнее поле. Формула § 73 (30) выводится для кристалла также сперва для случая статического поля.

Перейдем теперь к строгому вычислению волнового поля диполей. Оно производится точно таким же образом.

Волновое поле одного диполя выражается согласно § 74 (5) вектором Герца:

$$\mathfrak{z} = \frac{[\mathfrak{p}]}{r}. \quad (26)$$

Здесь квадратные скобки опять означают запаздывание, т. е. t заменяется через $t - r/c$.

Распространение световой волны в дипольной решетке, согласно изложенному выше представлению, является ни чем иным, как наложением сферических волн, исходящих из точек решетки, причем фазы этих сферических волн таковы, что результирующее возбуждение распространяется, как плоская волна. Вместо того, чтобы выразить этот процесс посредством действительного суммирования сферических волн с соответственно выбранными фазами, мы сделаем следующее, математически эквивалентное, но более удобное предположение: мы мыслим себе этот процесс, как плоскую волну, амплитуда которой под действием точек решетки изменяется так, что образует периодическую функцию с особыми точками в точках решетки. Полагаем

$$\mathfrak{z} = p_0 Z e^{-i\omega t} e^{\frac{2\pi}{\lambda} (\mathfrak{s} \mathbf{r})}. \quad (27)$$

Тогда функция Z должна иметь следующие свойства:

- 1) она периодична в решетке;
- 2) она непрерывна всюду, за исключением точек решетки, в которых она обращается в бесконечность порядка $1/r$;
- 3) она удовлетворяет уравнению, вытекающему из волнового уравнения § 74 (3):

$$\Delta Z + 2 \frac{2\pi i}{\lambda} (\mathfrak{s} \text{ grad } Z) + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{4\pi^2}{\lambda^2} \right) Z = 0. \quad (28)$$

Постараемся удовлетворить этим условиям с помощью ряда Фурье:

$$Z = \sum_{\mathbf{l}} z_{\mathbf{l}} e^{i\mathbf{l} \cdot \mathbf{r}}. \quad (29)$$

Первое условие уже удовлетворяется нашим допущением. С помощью второго мы легко получаем коэффициенты:

$$z_{\mathbf{l}} = \frac{1}{V} \int Z e^{-i\mathbf{l} \cdot \mathbf{r}} dS. \quad (30)$$

Применим сюда еще раз формулу Грина (18), именно — выберем

$$f = e^{-i\mathbf{l} \cdot \mathbf{r}}, \quad g = Z \quad (31)$$

и получим точно так же, как выше,

$$\int f \left[-2 \frac{2\pi i}{\lambda} (\mathfrak{s} \text{ grad } Z) - \left(\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{4\pi^2}{\lambda^2} \right) Z + |\mathbf{l}|^2 Z \right] dS = 4\pi. \quad (32)$$

Интеграл в первом члене можно преобразовать, интегрируя по частям, при этом интегралы по поверхности малой сферы, а также по поверхности, ограничивающей ячейку, равны нулю. Мы получаем:

$$\int f (\mathfrak{s} \text{ grad } Z) dS = - \int Z (\mathfrak{s} \text{ grad } f) dS = i (\mathfrak{s} \mathbf{l}) Z f dS. \quad (33)$$

Подставив это значение в (32) и воспользовавшись определением (30), мы получаем:

$$z_{\mathbf{l}} = \frac{4\pi/V}{|\mathbf{l}|^2 + 2 \frac{2\pi}{\lambda} (\mathfrak{s} \mathbf{l}) + \frac{4\pi^2}{\lambda^2} - \frac{\omega^2}{c^2}} = \frac{4\pi/V}{\left(\mathbf{l} + \frac{2\pi}{\lambda} \mathfrak{s} \right)^2 - \left(\frac{2\pi}{\lambda_0} \right)^2}, \quad (34)$$

где $\lambda_0 = 2\pi c/\omega$ есть длина волны в пустоте, которая может отличаться от длины волны в веществе.

Теперь решение (29) уравнения волны гласит:

$$Z = \frac{4\pi}{V} \sum_{\mathbf{l}} \frac{e^{i\mathbf{l} \cdot \mathbf{r}}}{\left(\mathbf{l} + \frac{2\pi}{\lambda} \mathfrak{s} \right)^2 - \left(\frac{2\pi}{\lambda_0} \right)^2}. \quad (35)$$

Эта формула содержит законы распространения света любой длины волны в решетке. Подставив выражение (35) в (27), мы получим:

$$\mathfrak{z} = p_0 e^{i\omega t - \frac{4\pi}{V}} \sum_{\mathbf{l}} \frac{e^{i \left(\mathbf{l} + \frac{2\pi}{\lambda} \mathfrak{s} \right) \cdot \mathbf{r}}}{\left(\mathbf{l} + \frac{2\pi}{\lambda} \mathfrak{s} \right)^2 - \left(\frac{2\pi}{\lambda_0} \right)^2}. \quad (36)$$

Это уравнение означает, что процесс в кристалле можно представлять себе как наложение ряда плоских волн с различными

амплитудами. Длина волны λ (или показатель преломления $n = \lambda_0/\lambda$) определяется дополнительно из условия, что сила, действующая на единичный осциллятор вследствие излучения всех остальных осцилляторов, должна удовлетворять динамическим условиям колебания (или соответственно их аналогам в квантовой механике).

Мы рассмотрим сначала случай очень коротких волн, как переход к дифракции рентгеновских лучей, которую мы рассматривали в главе IV, § 52. В этом случае быстрых колебаний мы можем предвидеть, что длина волны существенно не изменится в кристалле, т. е. λ и λ_0 приблизительно равны. Если, кроме того, λ того же порядка величины, что и постоянная решетки, то может случиться, что некоторые знаменатели в нашей сумме почти исчезнут. Пусть \hat{s}_0 есть единичный вектор, означающий направление падающего рентгеновского луча. В главе IV, § 52 мы видели, что условие Лауэ для направлений интерферирующих рентгеновских лучей дается формулой § 52 (20), которую в силу § 75 (4) можно написать в виде:

$$\hat{s}_0 - \hat{s} = \frac{\lambda}{2\pi} \hat{l}. \quad (37)$$

Итак, имеем для этих направлений \hat{s} :

$$\left(\hat{l} + \frac{2\pi}{\lambda} \hat{s} \right)^2 = \left(\frac{2\pi}{\lambda_0} \right)^2. \quad (38)$$

Так как разность $\lambda - \lambda_0$ очень мала, то и соответствующие знаменатели в нашей формуле малы. Таким образом направления, которые согласно Лауэ дают в результате интерференции наибольшее рассеяние, оказываются теми же направлениями, которые согласно нашей общей формуле для волн в решетке связаны с большими интенсивностями. Мы видим здесь, что теория Лауэ—Брэгга оказывается частным случаем общей электродинамики решетки. Мы можем сделать эту теорию более строгой, если учтем небольшую разницу между λ и λ_0 , т. е. отклонения показателя преломления рентгеновских лучей от значения 1, и тем самым примем более точные отношения интенсивности отдельных дифрагированных лучей. Но мы не можем здесь вдаваться в рассмотрение этих специальных исследований, изложение которых можно найти в специальной литературе по рентгеновским лучам¹.

Вернемся теперь опять к рассмотрению собственно световых волн, длина волны которых (как λ так и λ_0) велика относительно линейных размеров a ячеек. Мы можем разложить функцию \mathfrak{F} по степеням отношения a/λ , но при этом мы должны иметь в виду одно обстоятельство. В знаменателях коэффициентов Фурье это разложение допустимо только тогда, когда член, не

зависящий от a/λ , не равен нулю; но этот член есть $|\hat{l}|^2$ и он равен нулю при $l = 0$. Поэтому необходимо выделить постоянный член ряда Фурье, т. е. член, где $l = 0$. Согласно формуле (35)

$$\bar{Z} = \frac{4\pi V}{\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 - \left(\frac{2\pi}{\lambda_0}\right)^2}. \quad (39)$$

Момент на единицу объема имеет амплитуду:

$$\mathfrak{P}_0 = \frac{p}{V}. \quad (40)$$

Нулевой член в (36) (при $n = \lambda_0/\lambda$, $\omega/2\pi = c/\lambda_0 = c/n\lambda$) равен:

$$\bar{\mathfrak{Z}} = 4\pi \mathfrak{P}_0 \cdot e^{-i\omega t} \frac{e^{\frac{2\pi i}{\lambda} \hat{s} x}}{n^2 - 1} \frac{n^2 \frac{\lambda^2}{4\pi^2}}{n^2 - 1}. \quad (41)$$

Он соответствует *среднему электрическому полю*. Введя мгновенное значение момента

$$\mathfrak{P} = \mathfrak{P}_0 e^{-i\omega t} e^{\frac{2\pi i}{\lambda} \hat{s} x} \quad (42)$$

и, воспользовавшись § 74 (4), мы получим после короткого вычисления:

$$\begin{aligned} \bar{\mathfrak{E}} &= 4\pi \frac{1}{n^2 - 1} [\mathfrak{P} - n^2 \hat{s} (\hat{s} \mathfrak{P})], \quad (a) \\ \bar{\mathfrak{P}} &= 4\pi \frac{n}{n^2 - 1} (\hat{s} \times \mathfrak{P}). \quad (b) \end{aligned} \quad (43)$$

Покажем теперь, что это среднее поле есть ни что иное, как решение уравнений Максвелла, соответствующее плоской волне, если вектор $\bar{\mathfrak{D}}$ разложен на $\bar{\mathfrak{E}}$ и $4\pi \bar{\mathfrak{P}}$.

Из (43a) прежде всего заключаем, что

$$\bar{\mathfrak{E}} \hat{s} = -4\pi \mathfrak{P} \hat{s}. \quad (44)$$

Подставив в (43a), найдем:

$$4\pi \mathfrak{P} = (n^2 - 1) \bar{\mathfrak{E}} - n^2 \hat{s} (\bar{\mathfrak{E}} \hat{s}) \quad (45)$$

и

$$4\pi \hat{s} \times \mathfrak{P} = (n^2 - 1) (\hat{s} \times \bar{\mathfrak{E}}), \quad (46)$$

следовательно:

$$\bar{\mathfrak{D}} = \bar{\mathfrak{E}} + 4\pi \mathfrak{P} = n^2 [\bar{\mathfrak{E}} - \hat{s} (\bar{\mathfrak{E}} \hat{s})], \quad (47)$$

$$\bar{\mathfrak{P}} = n (\hat{s} \times \bar{\mathfrak{E}}). \quad (48)$$

¹ См., например, P. P. Ewald, Kristalle u. Röntgenstrahlen. Berlin, 1923, а также цитированную на стр. 440 книгу Борна.

Мы получили уравнения (14) (13) из главы V § 58, которые там были получены путем подстановки плоской волны с показателем преломления n в обычные уравнения Максвелла. Тем самым мы получили атомистическое подтверждение теории света Максвелла для кристалла.

Из нашей теории можно вывести не только среднее поле, но и определить тонкие периодические изменения поля в решетке, которые выражаются остальными членами Фурье в формулах (35) и соответственно (36). Периодическая составляющая поля равна:

$$\tilde{Z} = Z - \bar{Z} = \frac{4\pi}{V} \sum_l' \frac{e^{i\mathbf{k}_l \mathbf{r}}}{\left(\mathbf{k}_l + \frac{2\pi}{\lambda} \mathbf{s}\right)^2 - \left(\frac{2\pi}{\lambda_0}\right)^2} \quad (49)$$

Мы видим из (39), что \tilde{Z} удовлетворяет дифференциальному уравнению:

$$\Delta \tilde{Z} + 2 \frac{2\pi i}{\lambda} (\mathbf{s} \text{ grad } \tilde{Z}) + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{4\pi^2}{\lambda^2} \right) \tilde{Z} = 4\pi, \quad (50)$$

которое отличается от (28) только тем, что в правой части вместо нуля стоит 4π . Это значит, что точечный заряд компенсируется однородным зарядом, распространенным по всей решетке с плотностью -1 . Функция \tilde{Z} представляет собой такое решение дифференциального уравнения (50), которое является периодичным в решетке и имеет особенную точку V/r в узлах решетки. Из \tilde{Z} можно вычислить вектор Герца периодической составляющей поля:

$$\tilde{\mathbf{Z}} = \mathbf{P}_0 e^{-i\omega t} e^{\frac{2\pi i}{\lambda} \mathbf{r} \mathbf{s}} \tilde{Z} = \mathbf{P} \tilde{Z}. \quad (51)$$

Для того чтобы определить действующее на один диполь эффективное поле, отсюда надо вычесть дипольный потенциал рассматриваемой точки. Вычислив его для нулевой точки, мы получим для дипольного потенциала:

$$\psi = p_0 \frac{e^{-i\omega \left(t - \frac{r}{c}\right)}}{r}. \quad (52)$$

Вектор Герца эффективного поля примет вид:

$$\mathbf{Z}' = \bar{\mathbf{Z}} + \tilde{\mathbf{Z}} - \psi = \bar{\mathbf{Z}} + \mathbf{P} \Psi, \quad (53)$$

где

$$\Psi = V \tilde{Z} - \frac{e^{2\pi i \left(\frac{r}{\lambda_0} - \frac{\mathbf{r} \mathbf{s}}{\lambda}\right)}}{r}. \quad (54)$$

Отсюда мы можем вычислить по формулам § 74 (4) эффективное поле:

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{E}_x' &= \bar{\mathcal{E}}_x + \sum_y \beta_{xy} \mathcal{P}_y, \\ \mathcal{H}_x' &= \bar{\mathcal{H}}_x - \sum_y \gamma_{xy} \mathcal{P}_y, \end{aligned} \right\} \quad (55)$$

где

$$\beta_{xy} = \beta_{yx} = \left[\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} + \frac{2\pi i}{\lambda} \left(\hat{s}_x \frac{\partial \Psi}{\partial y} + \hat{s}_y \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) + 4\pi^2 \Psi \left(\frac{\delta_{xy}}{\lambda_0^2} - \frac{\hat{s}_x \hat{s}_y}{\lambda^2} \right) \right]_0, \quad (56)$$

$$\gamma_{xy} = -\gamma_{yx} = \frac{2\pi i}{\lambda_0} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial z} - \frac{2\pi i}{\lambda} \hat{s}_z \right)_0. \quad (57)$$

Индекс 0 в этих формулах означает, что значение функции берется в месте рассматриваемого диполя (в нулевой точке). Символ δ_{xy} означает 1 или 0, в зависимости от того, идет ли речь о составляющей типа xx или xy .

Все эти соображения легко обобщить для того случая, когда диполи образуют не простую плоскую решетку, а более сложную решеткообразную систему, как это имеет место в действительных кристаллах. В самом деле, каждую решеткообразную структуру мы можем рассматривать, как наложение простых решеток, и очевидно, что при этом поля единичных решеток просто складываются. Поэтому можно сказать, что функция Ψ , фигурирующая в уравнении (53), определяется уравнением (54) самым общим образом; в последнем уравнении \tilde{Z} есть то решение дифференциального уравнения (50), которое периодически в решетке и имеет особенную точку V/r во всех диполях решетки (составленной из простых решеток).

Формула (55) вместе с (47), (48) и § 73 (3) дает три линейных векторных соотношения между векторами \mathcal{D} , \mathcal{E} , \mathcal{P} . Исключив из них \mathcal{P} , мы получаем основное уравнение кристаллооптики глава V, § 58 (1), (2). Но теперь диэлектрическая анизотропия

$$\bar{\mathcal{D}}_x = \sum_y \varepsilon_{xy} \bar{\mathcal{E}}_y \quad (58)$$

разбита на анизотропию отдельных атомов, выражаемую тензором α_{xy} , и анизотропию взаимодействия в решетке, выражаемую тензором β_{xy} . В общем случае этот тензор β_{xy} зависит также от длины волны (как λ , так и λ_0), но для видимого света, λ которого велико относительно линейных размеров ячейки, функцию Ψ и, следовательно, также величины β можно разложить по степеням a/λ .

Абсолютная величина \mathbf{k} имеет порядок $1/a$. Поэтому в самом грубом приближении (т. е. для бесконечно длинных волн)

мы получим для амплитуды дополнительного поля

$$\Psi = \varphi_0 - \frac{1}{r}, \quad (59)$$

где

$$\varphi_0 = 4\pi \sum_l' \frac{e i l r}{|l|^3}. \quad (60)$$

Здесь φ_0 означает функцию (17), которая выражает потенциал решетки, состоящей из точечных зарядов, компенсированных равномерным слоем с плотностью -1 , а $\varphi_0 - \frac{1}{r}$ есть потенциал той же системы без одной точки. Тензор β сводится к

$$\beta_{xy} = \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} \right)_0. \quad (61)$$

Для кубической решетки из соображений симметрии, которые мы уже неоднократно разъясняли, следует, что

$$\left. \begin{aligned} \beta_{yz} = \beta_{zx} = \beta_{xy} = 0, \\ \beta_{xx} = \beta_{yy} = \beta_{zz} = \frac{4\pi}{3} \end{aligned} \right\} \quad (62)$$

Поле, дополнительное к среднему, снова равно $\frac{4\pi}{3} \mathfrak{F}$. Но строгая теория решетки дает больше, — она позволяет обобщить этот результат в двух направлениях.

Для произвольных кристаллов можно задать эффективное поле. Ограничиваясь опять тем же приближением, т. е. предполагая, что волны очень длинны (a/λ очень мало), мы имеем такую задачу: нужно найти решение уравнения:

$$\Delta \Psi_0 = 4\pi \quad (63)$$

периодичное в решетке и имеющее полюсы вида $1/r$ в диполях решетки за исключением одной единственной точки решетки.

Эту чисто математическую задачу полностью разрешил Эвальд. Ряд Фурье (60) для φ_0 нельзя непосредственно использовать для численного определения Ψ_0 , но для этой функции можно найти другие хорошо сходящиеся выражения. Эта теория потенциала решетки образует особую главу молекулярной физики и выходит из рамок настоящей книги¹. Упомянем здесь только, что Эвальду удалось вычислить составляющие эффективного поля ромбической решетки по трем взаимно перпендикулярным направлениям; он получил анизотропию, совпадающую

¹ См. цитируемую на стр. 440 книгу М. Born, Atomtheorie des festen Zustandes, гл. V.

порядком величины с наблюдаемой. Большого, конечно, нельзя ждать, так как к анизотропии, обусловленной кристаллической структурой, присоединяется еще анизотропия отдельных молекул или атомов¹ решетки, выражающаяся через α_{xy} , о которой мы ничего не знаем.

Второе обобщение заключается в том, что мы учитываем конечность отношения a/λ . Взяв в выражении эффективного поля члены первого порядка относительно a/λ , мы получаем явление *оптического вращения или оптической активности*, к которым мы вернемся в § 83 и 84. Разложение до более высоких членов до сих пор не нашло никакого физического истолкования. Случай, когда a/λ имеет порядок 1, осуществляется в рентгенооптике (см. выше).

Одно принципиально важное следствие изложенной здесь вкратце теории решетки относится к вопросу *происхождения светорассеяния* (явление Тиндала), на который мы уже указывали в конце предыдущего параграфа. В кристаллических решетках особенно ясно, при каких условиях происходит отклонение от правильного распространения света, т. е. рассеяние.

Обыкновенный свет (a/λ мало) распространяется, как мы уже видели, в основном как плоская волна, амплитуда которой изменяется от действия решетки. Никакого рассеяния в сторону из наших формул усмотреть нельзя. Поэтому мы должны заключить, что в неограниченном идеальном кристалле, диполи которого согласно нашему предположению совпадают с узлами решетки, *совершенно не будет рассеяния*. Существующее же в действительности светорассеяние должно происходить вследствие отклонений от правильного положения и вследствие движений диполей. В самом деле, если представить себе, что диполь выведен из положения покоя, то электромагнитное поле можно разбить на две части: идеальную, которая удовлетворяет вышеизложенным законам, и другую, которая происходит от диполей, имеющих небольшие неправильные отклонения от узлов решетки. Фазы вторичных волн этой части поля, таким образом, не будут правильно складываться; можно также сказать, что дипольные волны некогерентны. Вследствие этого возникает рассеянный свет, интенсивность которого можно вычислить, сложив интенсивности тех сферических волн, которые соответствуют колебаниям электрических моментов диполей относительно их средней амплитуды.

В некристаллических изотропных средах, в особенности в газах, эти соотношения не так ясны, так как здесь вообще не существует идеально правильных положений, но мы уже видели в предыдущем параграфе, что здесь также можно притти к тем же результатам, введя среднюю равномерную плотность диполей, от которой действительная плотность немного откло-

¹ Атомы изотропные в газообразном состоянии, будучи расположены в виде решетки, могут также быть оптически анизотропны.

няется. Электромагнитное поле распадается на две части, из которых одна определяется средним значением \mathfrak{P} электрического момента \mathfrak{P} на единицу объема и удовлетворяет уравнениям Максвелла, а вторая, соответствующая рассеянному свету, определяется квадратичным отклонением светового момента

$$(\overline{\Delta \mathfrak{P}})^2 = (\overline{\mathfrak{P}^2} - \overline{\mathfrak{P}}^2). \quad (64)$$

После этих соображений мы можем перейти (§ 81) к явлениям дисперсии.

§ 76. СЛУЧАЙ ИЗОТРОПИИ. ФОРМУЛА ЛОРЕНЦ-ЛОРЕНЦА

Вернемся к исследованию изотропных веществ; мы их можем рассматривать, как совершенно неупорядоченную совокупность атомов или молекул, из которых каждый может быть оптически характеризуем своим тензором поляризации a_{xy} . Обозначим координаты системы, неподвижной относительно молекул, X, Y, Z , и координаты системы, неподвижной в пространстве x, y, z . Тогда согласно § 73 уравнение эллипсоида поляризации можно представить в двух видах:

$$\sum_{XY} a_{XY} XY = \sum_{xy} a_{xy} xy = \text{const.} \quad (1)$$

Рассмотрим теперь два единичных вектора e_1, e_2 в обеих координатных системах. Пусть вектор e_1 имеет составляющие (X_1, Y_1, Z_1) и соответственно (x_1, y_1, z_1) , а e_2 составляющие (X_2, Y_2, Z_2) и (x_2, y_2, z_2) . Тогда квадратичная форма (1) выразится в полярной форме:

$$\sum_{XY} a_{XY} X_1 Y_2 = \sum_{xy} a_{xy} x_1 y_2. \quad (2)$$

Пусть e_1, e_2 имеют определенные положения в пространстве (которые мы сейчас определим), а молекулы занимают все возможные положения. Тогда в нашем уравнении (2) все a_{xy} и произведения $x_1 y_2$ — постоянные числа, а a_{xy} и произведения $X_1 Y_2$ зависят от положения молекул. Среднее значение (2) по всем положениям молекул равно:

$$\sum_{XY} a_{XY} \overline{X_1 Y_2} = \sum_{xy} \overline{a_{xy} x_1 y_2}, \quad (3)$$

также и в том случае, когда распределение молекул задано произвольным статистическим законом (в дальнейшем мы воспользуемся этим). Посредством этих формул средние значения тензорных составляющих, а следовательно, и значения $\overline{a_{xy}}$, сводятся к средним значениям произведений составляющих двух единичных векторов $\overline{X_1 Y_2}$.

Положим сначала в рассматриваемом простом случае изотропного распределения направлений, что $e_1 = e_2 = e$. Тогда, очевидно,

$$X_1 X_2 = X^2, \dots \text{и}$$

$$\overline{X^2} = \overline{Y^2} = \overline{Z^2} = \frac{1}{3}, \quad \overline{YZ} = \overline{ZX} = \overline{XY} = 0 \quad (4)$$

Расположим теперь e поочередно по трем координатным направлениям, т. е. положим, что неподвижные координаты равны сначала $(1, 0, 0)$, затем $(0, 1, 0)$, затем $(0, 0, 1)$; тогда из (3) следует:

$$\overline{a_{xx}} = \overline{a_{yy}} = \overline{a_{zz}} = \frac{1}{3} (a_{xx} + a_{yy} + a_{zz}) = \frac{1}{3} (a_x + a_y + a_z) = a, \quad (5)$$

где a_x, a_y, a_z — составляющие тензора поляризации в системе его главных осей.

Пусть теперь e_1 и e_2 взаимно перпендикулярны. Тогда, очевидно, средние произведения равны:

$$\left. \begin{aligned} \overline{X_1 X_2} = \overline{Y_1 Y_2} = \overline{Z_1 Z_2} &= 0, \\ \overline{X_1 Y_2} = \overline{X_2 Y_1} = \dots &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Расположим затем оба взаимно перпендикулярные векторы e_1 и e_2 так, чтобы они поочередно совпадали с одной парой неподвижных осей [т. е. положим, например, сначала $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$ и сделаем круговую перестановку]; тогда наша формула (3) даст:

$$\overline{a_{yz}} = \overline{a_{zx}} = \overline{a_{xy}} = 0. \quad (7)$$

Подробно разобрав здесь этот метод, мы далее (§ 77) вычислим более сложные средние значения как для случая функции a_{xy} , так и для более общего закона распределения молекул.

Итак, мы имеем следующий результат.

Средний эллипсоид поляризации есть сфера: средняя поляризуемость a есть арифметическое среднее главных поляризуемостей.

Отсюда следует:

$$p = a\mathfrak{E}'. \quad (8)$$

Если, как мы в дальнейшем всюду будем предполагать, тензор поляризации a_{xy} есть эрмитовский тензор (этому соответствует то, что мы пренебрегаем тормозящими силами в атоме), то элементы по диагонали вещественны и a также вещественна. Но если имеется заметная потеря энергии, то a комплексна. Здесь мы сталкиваемся с явлением, аналогичным явлению в металлах, для которых мы получили комплексный показатель преломления (см. главу VI). Мы вернемся еще к этому пункту. В последующих общих рассуждениях a может быть и комплексна, но в приложениях мы всегда предварительно полагаем, что a вещественна. Положим, кроме того, что не только направления молекул распределены изотропно, но что и расположения молекул в пространстве можно считать квазиизотропными, так что

эффективная сила поля \mathcal{E}' и среднее поле \mathcal{E} связаны соотношением § 73 (30):

$$\mathcal{E}' = \mathcal{E} + \frac{4\pi}{3} \mathfrak{P}. \quad (9)$$

Если число молекул на единицу объема равно N , то

$$\mathfrak{P} = Np \quad (10)$$

и после исключения p и \mathcal{E}' из (8), (9), (10) следует:

$$\mathfrak{P} = \frac{\alpha N}{1 - \frac{4\pi}{3} \alpha N} \mathcal{E}. \quad (11)$$

Введя вектор диэлектрического смещения

$$\mathcal{D} = \mathcal{E} + 4\pi \mathfrak{P}, \quad (12)$$

мы получим:

$$\mathcal{D} = \frac{1 + \frac{2}{3} 4\pi \alpha N}{1 - \frac{1}{3} 4\pi \alpha N} \mathcal{E}; \quad (13)$$

следовательно, оптическая диэлектрическая постоянная, ϵ или квадрат показателя преломления [см. главу I, § 5 (1)], связана с поляризуемостью α следующим образом:

$$\epsilon = n^2 = \frac{1 + \frac{2}{3} 4\pi \alpha N}{1 - \frac{1}{3} 4\pi \alpha N}. \quad (14)$$

Поскольку мы считаем α вещественным, как это мы будем делать в дальнейшем, то и n также вещественно. Однако, когда имеются тормозящие силы и, следовательно, α комплексна, то показатель преломления оказывается комплексным. Мы уже рассматривали этот случай в главе VI, § 67 и видели, что здесь имеет место поглощение световой волны. Но в этой главе мы ограничимся рассмотрением прозрачных тел (областей спектра с хорошей пропускаемостью). Мы будем заниматься главным образом зависимостью оптических констант от плотности, температуры и молекулярной анизотропии. Конечно, поглощение также зависит от этих параметров, но исследование показателя преломления имеет большее значение. В следующей главе, в которой будет идти речь о взаимодействии атомов и светового поля, мы вернемся к поглощению и разберем его более подробно.

Решая уравнение (14) относительно α , получим:

$$\alpha = \frac{3}{4\pi N} \cdot \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2} = \frac{3}{4\pi N} \cdot \frac{n^2 - 1}{n^2 + 2}. \quad (15)$$

Курьезно, что эту формулу почти одновременно нашли два исследователя с почти одинаковыми фамилиями¹. По их имени она носит название формулы Лорентц-Лоренца. Сущность ее состоит в следующем.

Так как α — атомная константа, зависящая в сильной степени от частоты света, то это должно относиться также и к правой части формулы. Вместо *атомной поляризации* α часто также пользуются так называемой молекулярной преломляемостью; эта величина равна α , умноженной на $4\pi/3$ и на число Лшмидта N . Так как $N/N_0 = \mu/\rho$, где μ есть молекулярный вес, а ρ плотность, то для молекулярной преломляемости имеем:

$$P = \frac{4\pi}{3} N\alpha = \frac{\mu}{\rho} \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2} = \frac{\mu}{\rho} \frac{n^2 - 1}{n^2 + 2}. \quad (16)$$

Множитель $\frac{\mu}{\rho}$ означает объем грамммолекулы. Величина P имеет размерность и порядок величины молекулярного объема. Для газов n^2 очень мало отличается от 1, и поэтому мы можем подставить вместо знаменателя в (16) 3 и получим *приближенную формулу для газов*:

$$\alpha = \frac{n^2 - 1}{4\pi N}, \quad P = \frac{\mu}{\rho} \frac{n^2 - 1}{3}. \quad (17)$$

Формулы (16) и (17) основаны на допущении полной изотропности направлений молекул. При этом мы также неявно предполагаем, что электромагнитное поле света, имеющее вообще определенное направление в пространстве, не изменяет этого распределения направлений. В действительности, это предположение само собой разумеется для видимого света или еще более коротких волн, и вот из каких соображений: в одноатомном газе эллипсоид поляризации вообще представляет собой сферу²; двухатомные и многоатомные молекулы, вследствие большой массы ядра (большого момента инерции) не могут реагировать на быстрые световые колебания. Только при очень

¹ Н. А. Lorentz, Wiedem. Ann., т. 9 (1880), стр. 641; L. Lorenz, Wiedem. Ann. т. 11 (1881), стр. 70.

Уже до этого R. Clausius (Mechanische Wärmetheorie, т. 2, стр. 62, 2 изд., Braunschweig, 1879) и O. F. Mossotti [Mem. della Soc. scient. Modena, т. 14 (1850), стр. 49] вывели аналогичную формулу для статических полей; они пытались объяснить диэлектрические свойства изоляторов, рассматривая атомы, как маленькие проводящие шарики, расстояние между которыми велико по сравнению с их диаметром, и получили следующее выражение для относительного заполнения g пространства этими шариками (ϵ есть диэлектрическая постоянная):

$$g = \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2}.$$

² По воззрениям современной квантовой механики атомов, свободно вращающиеся атомы ведут себя при всех обстоятельствах изотропно относительно внешних световых полей.

медленных колебаниях (в крайней инфракрасной части спектра) и в статических полях молекулы, в особенности обладающие постоянным электрическим диполем, стремятся ориентироваться по направлению внешнего электрического поля, насколько это позволяет их температурное движение. Действительно, в области волн Герца (длина волны порядка нескольких дециметров) в дипольных жидкостях (например в воде) наблюдалось аномальное, зависящее от температуры, поведение комплексного показателя преломления, что по Дебаю¹ объясняется ориентирующим действием светового поля на молекулы. Этот эффект возрастает с уменьшением частоты света, причем оптические диэлектрические постоянные непрерывно переходят в статические. Мы рассмотрим эту оптику дипольных жидкостей в главе VIII, § 101.

Теперь же мы проверим, насколько формулы (16) и (17) совпадают с опытом. Они, очевидно, выражают зависимость показателя преломления определенного цвета от плотности и должны сохранять силу при всех таких изменениях плотности, при которых сохраняется молекулярная структура и изотропия. Поэтому мы исследуем сначала влияние изменения температуры и агрегатного состояния, затем примесей различных веществ, молекулярная преломляемость которых вычисляется при сохранении молекулярной структуры по обычному аддитивному правилу смеси. Наконец, мы покажем, что даже при соединении различных атомов в молекулы можно до известной степени складывать молекулярную преломляемость молекулы из соответственно выбранных атомных коэффициентов преломления составных частей.

В газах $n^2 - 1$ очень строго пропорционально ρ [см. (17)], что и следовало ожидать, так как здесь лучше всего осуществляются предположения теории. Остается привести доказательства этого. Как показывает табл. 11,² даже в очень сильно сжатых газах, для которых коэффициент преломления уже сильно отличается от единицы, молекулярная преломляемость почти совершенно постоянна.

Важно, что величина P остается почти постоянной даже при сжижении, как показывает табл. 12.

Теперь рассмотрим смесь нескольких жидкостей и выведем правило смешения для молекулярной преломляемости. Если в единице объема содержатся N_1, N_2, \dots молекул различного рода, то мерой концентрации служат так называемые *молекулярные дроби*:

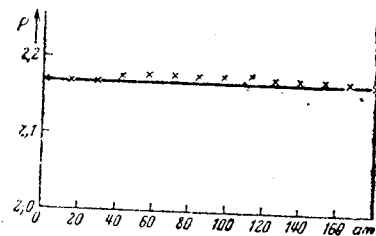
$$f_1 = \frac{N_1}{N}, \quad f_2 = \frac{N_2}{N}, \dots; \quad N = N_1 + N_2 + \dots \quad (18)$$

¹ См. главу VIII, § 101, стр. 749, сноска 1.

² Значения в последующих таблицах вычислены заново по данным Landolt-Börnstein, Physikalisch-Chemische Tabellen, 5 изд. (Berlin, 1923).

Если μ_1, μ_2, \dots — молекулярные веса составных частей, т. е. $\mu_1/N, \mu_2/N, \dots$ веса отдельных атомов, то масса единицы объема, т. е. плотность, есть:

$$\rho = \frac{\mu_1 N_1 + \mu_2 N_2 + \dots}{N} \quad (19)$$



Фиг. 187. Молекулярная рефракция воздуха при различных давлениях.

Таблица 11

Молекулярная рефракция для воздуха при различных давлениях света натрия линии D. Температура около 14,5° C (фиг. 187)

Давление в ат	n	P
1,00	1,0002929	2,170
14,84	1,004338	2,170
28,58	1,008385	2,170
42,13	1,01241	2,177
55,72	1,01643	2,178
69,24	1,02044	2,180
82,65	1,02440	2,178
96,16	1,02842	2,178
109,56	1,03242	2,179
123,04	1,03633	2,175
136,21	1,04027	2,174
149,53	1,04421	2,173
162,76	1,04818	2,172
176,27	1,05213	2,170

Таблица 12

Молекулярная рефракция для различных агрегатных состояний для D-линии натрия. В последних трех столбцах верхние значения относятся к твердому или жидкому состоянию, нижние — к газообразному. Плотности газов вычислены из плотности водорода (0,00009)

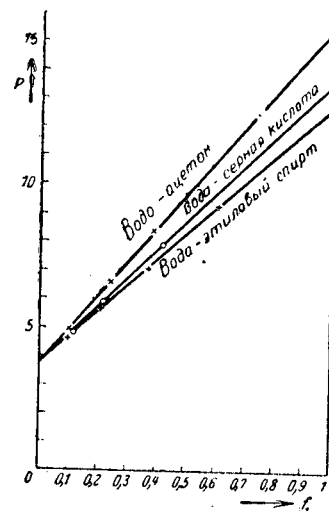
Вещество	Формула	Молекулярный вес	n	ρ	P
Бром	Br_2	160	1,659 1,000113	3,12	9,45 8,38
Хлор	Cl_2	71	1,367 1,000773	1,33	5,99 5,72
Кислород	O_2	32	1,221 1,000271	1,124	2,00 2,01
Водород	H_2	2	1,10 1,000139	0,071	0,92 1,02
Азот	N_2	28	1,205 1,000296	0,808	2,27 2,193
Сера		64	1,929 1,001111	2,04	7,46 8,23
Фосфор	P_2	62	2,144 1,001212	1,83	9,24 8,98
Бромистый водород	HBr	81	1,352 1,000573	1,630	10,75 8,48
Хлористый водород	HCl	36,5	1,245 1,000447	0,95	6,88 6,62
Вода	H_2O	18	1,334 1,000249	1,000	3,71 3,70
Аммиак	NH_3	17	1,325 1,000373	0,616	5,55 5,53
Сероводород	H_2S	34	1,384 1,000623	0,91	8,74 9,22
Трехводородистый фосфор	PH_3	34	1,317 1,000789	0,622	10,75 11,68
Оксись серы	SO_2	64	1,410 1,000690	1,359	11,67 10,22
Сероуглерод	CS_2	76	1,628 1,00147	1,264	21,34 21,78
Оксись азота	NO	30	1,330 1,000297	1,269	4,82 4,40
Закись азота	N_2O	44	1,193 1,000516	0,870	6,25 7,64
Углекислота	CO_2	44	1,192 1,000449	0,796	6,80 6,66
Метилловый спирт	CH_4O	32	1,3308 1,000549	0,7938	8,25 8,14
Хлороформ	CHCl_3	119,5	1,4467 1,001436	1,4898	21,42 21,28
Этиловый спирт	$\text{C}_2\text{H}_6\text{O}$	46	1,3623 1,000871	0,800	12,76 12,92
Ацетальдеид	$\text{C}_2\text{H}_4\text{O}$	44	1,3316 1,000811	0,800	11,27 12,02
Ацетон	$\text{C}_3\text{H}_6\text{O}$	58	1,3589 1,00108	0,791	16,13 15,98

Введем теперь средний молекулярный вес $\bar{\mu} = \mu_1 f_1 + \mu_2 f_2 + \dots$; тогда

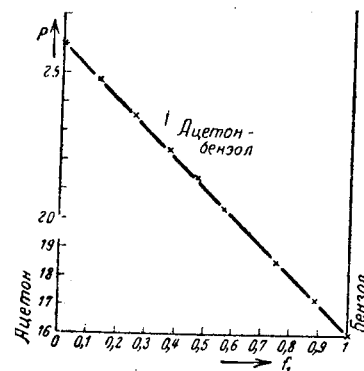
$$\frac{\bar{\mu}}{\rho} = \frac{\mu_1 f_1 + \mu_2 f_2 + \dots}{\rho} = \frac{N}{N}. \quad (20)$$

С другой стороны, вместо уравнения (15) мы, очевидно, имеем теперь:

$$\frac{4\pi}{3} (N_1 a_1 + N_2 a_2 + \dots) = \frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} \quad (21)$$



Фиг. 188. Молекулярная рефракция жидкой смеси.



Фиг. 189. Молекулярная рефракция ацетона в бензоле.

или, введя *парциальные молекулярные преломляемости*,

$$P_1 = \frac{4\pi}{3} N a_1, \quad P_2 = \frac{4\pi}{3} N a_2, \dots$$

$$\frac{N}{\rho} = \frac{\bar{\mu}}{\rho} \frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} = f_1 P_1 + f_2 P_2 + \dots \quad (22)$$

Окончательно получим для средней молекулярной преломляемости

$$\bar{P} = \frac{\bar{\mu}}{\rho} \frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} = f_1 P_1 + f_2 P_2 + \dots \quad (23)$$

В подтверждение этой формулы приводим табл. 13 (ср. фиг. 188 и 189).

Наконец, сравним молекулярную преломляемость соединения с атомными преломляемостями образующих его атомов. Если

молекула состоит из $\nu_1, \nu_2 \dots$ различных атомов, то, очевидно, должно быть:

$$P = P_1 \nu_1 + P_2 \nu_2 + \dots \quad (24)$$

И этот аддитивный закон выполняется с замечательной точностью. Вообще можно, и прежде всего для органических соединений, приписать каждому атому известную преломляемость, которую он сохраняет в соединении. В органических соединениях приходится учитывать характер связи, для чего можно каждому атому приписывать особую атомную преломляемость в зависимости от вещества, с которым он вступает в соединение. В табл. 14 мы приводим атомные преломляемости для натрового света.

Табл. 15 показывает, насколько выполняется аддитивный закон в соединениях.

Таблица 13

Молекулярная рефракция для растворов. В предпоследнем столбце даны значения $f_1 \cdot P_1 + f_2 \cdot P_2$; в последнем соответствующие значения $\frac{\bar{\mu}}{\rho} \frac{n^2 - 1}{n^2 + 2}$.

Вода — серная кислота. D-линия; 15°C

Весовые проценты	$f_1 = 1 - f_2$	$\bar{\mu}$	n	ρ	$P_{\text{вычисл}}$	$P_{\text{наблюд}}$
0	0	18,00	1,3336	0,9991	3,72	3,72
19,98	0,044	21,52	1,3578	1,1381	4,16	4,15
39,76	0,109	26,72	1,3817	1,2936	4,80	4,81
59,98	0,216	35,28	1,4065	1,4803	5,88	5,87
80,10	0,425	52,00	1,4308	1,6955	7,95	7,93
100	1	98	1,4277	1,8417	13,68	13,68

Вода — ацетон. D-линия; 16°C

Весовые проценты	$f_1 = 1 - f_2$	$\bar{\mu}$	n	ρ	$P_{\text{вычисл}}$	$P_{\text{наблюд}}$
0	0	18,0	1,334	0,999	3,71	3,71
25,0	0,098	21,7	1,352	0,967	4,86	4,85
50,0	0,243	27,2	1,364	0,924	6,59	6,56
66,9	0,394	33,0	1,367	0,888	8,37	8,35
89,9	0,741	46,2	1,365	0,827	12,48	12,48
100	1	56,0	1,361	0,796	15,55	15,55

(Продолж. табл. 13)

Вода — этиловый спирт. F-линия; 20°C

Весовые проценты	$f_1 = 1 - f_2$	$\bar{\mu}$	n	ρ	$P_{\text{вычисл}}$	$P_{\text{наблюд}}$
0	0	18,00	1,337	0,998	3,75	3,75
20,75	0,093	20,61	1,3508	0,970	4,61	4,59
40,89	0,213	23,97	1,3616	0,939	5,69	5,66
59,98	0,370	28,36	1,3670	0,899	7,10	7,07
79,99	0,610	35,08	1,3693	0,854	9,29	9,27
100	1	46,00	1,3676	0,805	12,85	12,85

Ацетон — бензол. D-линия; 16°C

Весовые проценты ацетона	$f_1 = 1 - f_2$	$\bar{\mu}$	n	ρ	$P_{\text{вычисл}}$	$P_{\text{наблюд}}$
0	0	78	1,504	0,885	26,06	26,06
9,8	0,126	75,5	1,489	0,876	24,82	24,82
20,0	0,252	72,9	1,472	0,866	23,55	23,58
31,0	0,377	70,4	1,456	0,856	22,30	22,36
40,0	0,473	68,5	1,443	0,847	21,38	21,45
49,5	0,569	66,6	1,428	0,839	20,40	20,40
69,4	0,753	63,0	1,401	0,822	18,56	18,61
84,7	0,882	60,3	1,380	0,810	17,27	17,25
100	1	58,0	1,361	0,797	16,09	16,09

Таблица 14

Атомная рефракция важнейших элементов для света
D-линии натрия

Элемент	Атомный вес	P
Водород	1	1,02
Углерод	12	2,11
Кислород	16	2,01
Азот молекулярный	14	2,19
„ в первичных аминах		2,32
„ во вторичных аминах		2,50

(Продолж. табл. 14)

Элемент	Атомный вес	P
Азот в четвертичных аминах . .		2,84
„ в имидах		3,78
„ в нитрилах		3,12
Фосфор	31	8,98
Сера	32	8,23
Хлор	35,5	5,72
Бром	80	8,38
Иод	126,9	13,90

Таблица 15

Молярная рефракция соединений, вычисленная из атомной рефракции их элементов ($P_{\text{вычисл}}$) и полученная по формуле Лорентц-Лоренц ($P_{\text{наблюд}}$)

Соединение	Формула	$P_{\text{наблюд}}$	$P_{\text{вычисл}}$
Вода	H ₂ O	4,06	3,71
Аммиак	NH ₃	5,28	5,53
Бромистый водород	HBr	9,41	8,48
Хлористый водород	HCl	6,75	6,62
Трехводородистый фосфор	PH ₃	12,07	11,68
Сероводород	H ₂ S	10,29	9,22
Сернистая кислота	SO ₂	12,24	10,22
Серовуглерод	CS ₂	18,57	21,78
Углекислота	CO ₂	6,11	6,67
Оксид азота	NO	4,19	4,40
Закись азота	N ₂ O	6,38	7,64
Хлороформ	CHCl ₃	20,30	21,28
Метиловый спирт	CH ₃ O	8,23	8,25
Ацетальдеид	C ₂ H ₄ O	10,42	11,56
Этиловый спирт	C ₂ H ₅ O	12,39	12,02
Ацетон	C ₃ H ₆ O	14,50	15,98

Аддитивный закон для молекулярной рефракции смесей вытекает из теории (поскольку мы для смеси принимаем те же простые допущения относительно оптического взаимодействия, которые мы приняли для ее составных частей), но поразительно, что этот закон справедлив и для соединений. В самом деле, соединения образуются взаимодействием электронов и именно тех электронов, которые определяют в то же время оптические свойства. Поэтому нельзя считать само собой разумеющимся, что последние обладают тем свойством аддитивности, о котором свидетельствует табл. 15. Конечно, необходимость приписывать атомной преломляемости в различных соединениях азота (см. табл. 14) различные значения указывает, что именно валентные электроны неравноценны в различных соединениях.

Во всяком случае предыдущие таблицы показывают, что константа рефракции или поляризуемость α , действительно, является вполне определенным свойством атома. Заметим еще, что ею пользуются при объяснении других явлений, прежде всего, при объяснении, с точки зрения молекулярной теории, сцепления ван дер Ваальса, явления адсорбции на поверхности и, наконец, происхождения химической валентности (в комплексных соединениях) и образованных ею кристаллов (молекулярных решеток). В этих явлениях одна молекула поляризует другую, вследствие чего возникает энергия взаимодействия. Мы не будем останавливаться на этом, так как, не пользуясь квантовой механикой¹, механизм этого явления трудно объяснить.

§ 77. ВЫНУЖДЕННАЯ АНИЗОТРОПИЯ. ВЫЧИСЛЕНИЕ СРЕДНИХ ЗНАЧЕНИЙ

Воздействуя внешними электрическими или магнитными полями на оптически изотропные вещества, можно их сделать искусственно анизотропными. Мы вычислим здесь среднюю поляризацию первоначально изотропной совокупности молекул под действием постоянной силы \mathcal{F} , причем величину F силы будем считать такой малой, что можно пренебречь членами порядка выше второго. Затем мы выведем особые формулы, когда F представляет собой силу электрического и соответственно магнитного поля (см. § 78—80).

Фиксируем положение молекул, выразив положение связанной с молекулой координатной системы (X, Y, Z) относительно некоторой неподвижной системы (x, y, z) тремя какими-либо параметрами, например, углами Эйлера ϑ, φ, ψ (фиг. 190). Под действием поля \mathcal{F} вероятность того, что молекула находится в некотором заданном положении, зависит только от энергии W молекулы, и согласно теореме Максвелла-Больцмана плотность вероятностей Φ , отнесенная к элементу $d\Omega = \sin \vartheta d\vartheta d\varphi d\psi$

$$\Phi = Ce^{-\frac{W}{kT}}, \quad (1)$$

¹ Подробнее см. F. London, Z. Physik. Chem. Abt. B, т. 11, стр. 222.

где постоянная C определяется из условия:

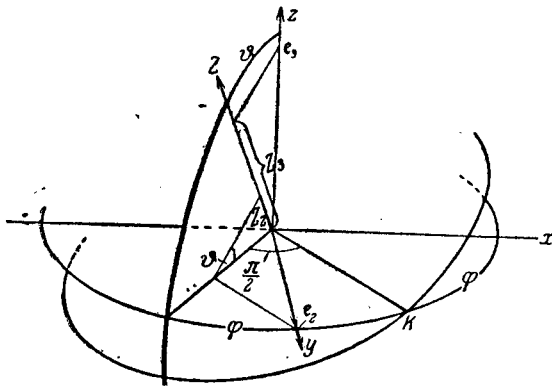
$$\int \Phi d\Omega = C \int e^{-\frac{W}{kT}} d\Omega = 1. \quad (2)$$

Здесь T означает абсолютную температуру, а k постоянную Больцмана.

Энергия W имеет составные части различного происхождения, которые мы расположим по порядку степеней; в них входит малая по нашему условию сила поля F . Если молекула имеет постоянный электрический или магнитный момент $p^{(0)}$, то ее энергия имеет составную часть, линейную относительно F :

$$-p^{(0)}\mathfrak{F} = -\sum_X p_X^{(0)}\mathfrak{F}_X;$$

знак минус показывает, что энергия имеет минимум, когда твердый диполь $p^{(0)}$ параллелен внешнему полю \mathfrak{F} .



Фиг. 190. К усреднению векторных составляющих.

Если молекула способна деформироваться, то существует статический (электрический или магнитный)¹ тензор деформации $\alpha_{XY}^{(0)}$. В поле \mathfrak{F} энергия деформации имеет согласно § 73(5) значение:

$$u = \frac{1}{2} \sum_{XY} \alpha_{XY}^{(0)} \mathfrak{F}_X \mathfrak{F}_Y$$

и согласно § 73(12):

$$\dot{u} - \dot{p}^{(0)}\mathfrak{F} = 0.$$

¹ Тензор деформации в постоянном магнитном поле, согласно квантовой теории связан с тензором электрического момента инерции. Но мы не можем на этом останавливаться.

Если поле \mathfrak{F} , как мы предполагали, не изменяется во времени, то это уравнение можно интегрировать, и мы получим:

$$u - p^{(0)}\mathfrak{F} = W;$$

W означает потенциальную энергию молекулы в поле. Полагая, что при отсутствии поля энергия равна нулю

$$p_X^{(0)} = \sum_Y \alpha_{XY}^{(0)} \mathfrak{F}_Y,$$

мы найдем:

$$W = -\frac{1}{2} \sum_{XY} \alpha_{XY}^{(0)} \mathfrak{F}_X \mathfrak{F}_Y = -u;$$

таким образом энергия в поле прямо противоположна потенциальной энергии деформации.

Пренебрегая высшими степенями относительно F , получим:

$$W = -\sum_X p_X^{(0)} \mathfrak{F}_X - \frac{1}{2} \sum_{XY} \alpha_{XY}^{(0)} \mathfrak{F}_X \mathfrak{F}_Y. \quad (3)$$

Эту энергию мы будем в дальнейшем рассматривать как функцию относительного положения молекул и поля.

Пусть тензор поляризации для светового поля, действующего на молекулы вместе с внешним статическим полем \mathfrak{F} , есть A_{XY} ; его составляющие будут функциями напряжения поля \mathfrak{F} . Разложив их, как выше энергию, до членов второго порядка относительно F включительно, получим:

$$A_{XY} = \alpha_{XY} + \sum_Z \alpha_{XYZ} \mathfrak{F}_Z + \frac{1}{2} \sum_{X'Y'} \alpha_{XYX'Y'} \mathfrak{F}_{X'} \mathfrak{F}_{Y'}. \quad (4)$$

Последнюю сумму следует понимать так: индексы X', Y' изменяются по осям, связанным с молекулой, независимо друг от друга.

В силу допущения об отсутствии затухания (см. § 73, стр. 413) каждый коэффициент должен быть эрмитовским относительно обоих первых индексов X, Y . Далее, все коэффициенты разложения $\alpha_{XY}, \alpha_{XYX'Y'}$ ряда Тэйлора (4) симметричны относительно последних индексов. При перестановке первых и последних индексов мы увидим, что из природы электрического или магнитного поля вытекает и другая симметрия.

Чтобы вычислить средние значения составляющих A_{xy} тензора A в неподвижной системе, введем, как в § 76, два неподвижных вектора e_1, e_2 с составляющими x_k, y_k, z_k в неподвижной системе и X_k, Y_k, Z_k ($k=1, 2$) в системе, связанной с молекулами. Далее мы заставим их независимо друг от друга совпадать с каждой из осей неподвижной системы. Кроме того,

введем единичный вектор e_s , который всегда должен совпадать с неподвижной осью z , направленной по полю, т. е.

$$\mathfrak{F} = F e_s \quad (5)$$

в выражении (3) энергии. Так как это выражение мало при слабом поле, мы можем разложить по степеням F экспоненциальный множитель в функции распределения (1) и получим:

$$\Phi = C \left[1 + \frac{F}{kT} \sum_X p_X^{(0)} X_s + \frac{F^2}{2} \sum_{XY} \left(\frac{1}{kT} \alpha_{XY}^{(0)} + \frac{1}{k^2 T^2} p_X^{(0)} p_Y^{(0)} \right) X_s Y_s \right]. \quad (6)$$

Вычислим теперь постоянную C как функцию напряжения поля. В интегралах, которые появятся при этом вычислении, мы должны считать каждое положение молекулы одинаково вероятным, так как анизотропия уже учтена весовой функцией Φ . Вследствие того, что в среднем составляющие неподвижного вектора исчезают при повороте его координатной системы, а произведение имеет значения, указанные в § 76 (4), мы имеем:

$$\frac{1}{C} = 1 + \frac{F^2}{6} \sum_X \left(\frac{1}{kT} \alpha_{XX}^{(0)} + \frac{1}{k^2 T^2} p_X^{(0)^2} \right),$$

следовательно,

$$C = 1 - \frac{F^2}{6} \sum_X \left(\frac{1}{kT} \alpha_{XX}^{(0)} + \frac{1}{k^2 T^2} p_X^{(0)^2} \right). \quad (7)$$

Подставив это значение C в (6), мы получим:

$$\left. \begin{aligned} \Phi = 1 + \frac{F}{kT} \sum_X p_X^{(0)} X_s + \\ + \frac{F^2}{2} \left[\sum_{XY} \left(\frac{1}{kT} \alpha_{XY}^{(0)} + \frac{1}{k^2 T^2} p_X^{(0)} p_Y^{(0)} \right) X_s Y_s - \right. \\ \left. - \frac{1}{3} \sum_X \left(\frac{1}{kT} \alpha_{XX}^{(0)} + \frac{1}{k^2 T^2} p_X^{(0)^2} \right) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Это выражение мы можем толковать так: оно означает вероятность того, что вектор \mathfrak{F} внешнего поля имеет заданное направление $e_s = (X_s, Y_s, Z_s)$ в системе координат, связанной с молекулой.

Чтобы вычислить средние значения $\overline{A_{xy}}$ пространственных координат тензора A в неподвижной системе, воспользуемся формулой, аналогичной § 76 (3):

$$\sum_{xy} \overline{A_{xy}} x_1 y_2 = \sum_{XY} A_{XY} \overline{X_1 Y_2}, \quad (9)$$

где e_1, e_2 два вектора *неподвижных в пространстве*. В правой части мы обозначили среднюю двумя черточками, чтобы показать, что это средняя, взвешенная с помощью функции Φ :

$$\overline{X_1 Y_2} = \int X_1 Y_2 \Phi d\Omega.$$

Подставив в (9) вместо A_{XY} значение (4) и вместо Φ значение (8), мы должны теперь определить „изотропную“ среднюю составляющих, получающихся при этом произведении. Получаем:

$$\begin{aligned} \sum_{x,y} \overline{A_{xy}} x_1 y_2 = \text{среднее значение от} & \left\{ 1 + \frac{F}{kT} \sum_X p_X^{(0)} X_s + \right. \\ & + \frac{F^2}{2} \left[\sum_{XY} \left(\frac{1}{kT} \alpha_{XY}^{(0)} + \frac{1}{k^2 T^2} p_X^{(0)} p_Y^{(0)} \right) X_s Y_s - \right. \\ & \left. \left. - \frac{1}{3} \sum_X \left(\frac{1}{kT} \alpha_{XX}^{(0)} + \frac{1}{k^2 T^2} p_X^{(0)^2} \right) \right] \right\} \times \\ & \times \left(\sum_{XY} a_{XY} X_1 Y_2 + F \sum_{XYZ} a_{XYZ} X_1 Y_2 Z_s + \frac{F^2}{2} \sum_{XYX'Y'} a_{XYX'Y'} X_1 Y_2 X'_s Y'_s \right), \end{aligned}$$

следовательно:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{x,y} \overline{A_{xy}} x_1 y_2 = \sum_{XY} a_{XY} \overline{X_1 Y_2} + F \sum_{XYZ} \left(a_{X,YZ} + \frac{1}{kT} a_{XY} p_Z^{(0)} \right) \overline{X_1 Y_2 Z_s} + \\ + \frac{F^2}{2} \left\{ \sum_{XYX'Y'} \left[a_{XYX'Y'} + \frac{1}{kT} (a_{XY} \alpha_{X'Y'}^{(0)} + 2a_{XYX'} p_{Y'}^{(0)}) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{k^2 T^2} a_{XY} p_X^{(0)} p_{Y'}^{(0)} \right] \overline{X_1 Y_2 X'_s Y'_s} - \frac{1}{3kT} \sum_{XYZ} a_{XY} \times \right. \\ \left. \times (\alpha_{ZZ}^{(0)} + \frac{1}{kT} p_Z^{(0)^2}) \overline{X_1 Y_2 Z_s} \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Этим самым наша задача определения средних значений составляющих тензора A_{xy} сводится к вычислению средних значений произведений составляющих трех взаимно перпендикулярных единичных векторов для изотропного распределения.

Средние значения произведений двух векторных составляющих мы уже определили в § 76 (4) и (6). Также просто вычислить средние значения произведений трех или четырех векторных составляющих, заметив, что среди поворотов координатных осей есть также поворот вокруг оси на углы $\pi/2$ и π . Так например, при таком повороте вокруг оси z (x, y, z) переходит в ($y, -x, z$) и соответственно в ($-x, -y, z$). Отсюда следует, что из всех средних значений произведений по три множителя от нуля отличны только те, в которых все три век-

тора e_1, e_2, e_3 , расположены по различным осям, а полученные значения либо равны, либо равны с противоположным знаком, в зависимости от того, получены ли они путем четной или нечетной перестановки индекса. Таким образом мы имеем:

$$\begin{aligned} X_1 Y_2 Z_3 &= Y_1 Z_2 X_3 = Z_1 X_2 Y_3 = -X_1 Z_2 Y_3 = \\ &= -Y_1 X_2 Z_3 = -Z_1 Y_2 X_3 = J. \end{aligned} \quad (11)$$

Значение этой величины J легче всего определить, заметив, что детерминант

$$\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix} = 6J. \quad (12)$$

Для трех взаимно перпендикулярных единичных векторов детерминант (12) равен единице. Отсюда

$$J = \overline{X_1 Y_2 Z_3} = \dots = \frac{1}{6}. \quad (13)$$

Из средних значений членов четвертого порядка, очевидно, от нуля отличаются только следующие:

$$\left. \begin{aligned} J_1 &= \overline{X_1^4} = \overline{X_2^4} = \overline{X_3^4} = \dots, \\ J_2 &= \overline{X_1^2 Y_1^2} = \overline{X_2^2 Y_2^2} = \overline{X_3^2 Y_3^2} = \dots, \\ J_3 &= \overline{X_1^2 X_2^2} = \overline{X_1^2 X_3^2} = \overline{X_2^2 X_3^2} = \dots, \\ J_4 &= \overline{X_1 Y_1 X_2 Y_2} = \overline{X_1 Y_1 X_3 Y_3} = \dots, \\ J_5 &= \overline{X_1^2 Y_2^2} = \overline{X_1^2 Y_3^2} = \overline{X_2^2 Z_2^2} = \dots \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Величины J с разными значками связаны тождествами (см. примечание 24):

$$\left. \begin{aligned} 1 &= \overline{e_1^4} = \overline{(X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2)^2} = \overline{X_1^4} + \dots + 2\overline{X_1^2 Y_1^2} + \dots = 3(J_1 + 2J_2), \\ 1 &= \overline{e_2^4} = \overline{(X_2^2 + Y_2^2 + Z_2^2)^2} = \overline{X_2^4} + \dots + 2\overline{X_2^2 Y_2^2} + \dots = 3(J_2 + 2J_5), \\ 0 &= \overline{(e_1 e_2)^2} = \overline{(X_1 X_2 + Y_1 Y_2 + Z_1 Z_2)^2} = \\ &= \overline{X_1^2 X_2^2} + \dots + 2\overline{X_1 Y_1 X_2 Y_2} + \dots = 3(J_3 + 2J_4). \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Таким образом достаточно вычислить J_1 и J_3 . Для этого вычисления можно положить, что вектор e_3 имеет направление неподвижной оси z , которая образует с осью Z эйлеровский угол ϑ , так что

$$\left. \begin{aligned} Z_3 &= \cos \vartheta, \\ Z_2 &= \cos \varphi \sin \vartheta \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

(фиг. 190). Затем, очевидно,

$$J_1 = \overline{Z_3^4} = \overline{\cos^4 \vartheta} = \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \cos^4 \vartheta \sin \vartheta d\vartheta d\varphi d\psi}{\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin \vartheta d\vartheta d\varphi d\psi} = \frac{1}{5} \quad (17)$$

и

$$J_3 = \overline{Z_2^2 Z_3^2} = \overline{\cos^2 \varphi \cos^2 \vartheta \sin^2 \vartheta} = \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \cos^2 \varphi \cos^2 \vartheta \sin^2 \vartheta d\vartheta d\varphi d\psi}{\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin \vartheta d\vartheta d\varphi d\psi} = \frac{1}{15} \quad (18)$$

Из тождеств (15) следует:

$$J_1 = \frac{1}{5}, \quad J_2 = \frac{1}{15}, \quad J_3 = \frac{1}{15}, \quad J_4 = -\frac{1}{30}, \quad J_5 = \frac{2}{15}. \quad (19)$$

Теперь мы можем вычислить средние значения $\overline{A_{xy}}$ согласно

ОПЕЧАТКА			
Стр.	Строка	Напечатано	Должно быть
469	формула 19	$J_3 = \frac{1}{25}, J_4 = \frac{1}{30},$	$J_3 = \frac{1}{15}, J_4 = -\frac{1}{30}$

№ 469.

$$\begin{aligned} &+ \frac{1}{kT} \left[\frac{1}{15} (\alpha_{xx} \alpha_{xx}^{(0)} + \dots) + \frac{2}{15} (\alpha_{xx} \alpha_{yy}^{(0)} + \dots) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{30} (\alpha_{xy} \alpha_{xy}^{(0)} + \dots) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{2}{15} (\alpha_{xx,x} p_x^{(0)} + \dots) + \frac{4}{15} (\alpha_{xx,y} p_y^{(0)} + \dots) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{9} (\alpha_{xx} + \alpha_{yy} + \alpha_{zz}) (\alpha_{xx}^{(0)} + \alpha_{yy}^{(0)} + \alpha_{zz}^{(0)}) \right] + \\ &+ \frac{1}{k^2 T^2} \left[\frac{1}{15} (\alpha_{xx} p_x^{(0)2} + \dots) - \frac{1}{30} (\alpha_{xy} p_x^{(0)} p_y^{(0)} + \dots) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{2}{15} (\alpha_{xx} p_y^{(0)2} + \dots) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{9} (\alpha_{xx} + \alpha_{yy} + \alpha_{zz}) (p_x^{(0)2} + p_y^{(0)2} + p_z^{(0)2}) \right] \Big\}, \quad (20) \end{aligned}$$

тора e_1, e_2, e_3 , расположены по *различным* осям, а полученные значения либо равны, либо равны с противоположным знаком, в зависимости от того, получены ли они путем четной или нечетной перестановки индекса. Таким образом мы имеем:

$$\begin{aligned} \overline{X_1 Y_2 Z_3} &= \overline{Y_1 Z_2 X_3} = \overline{Z_1 X_2 Y_3} = -\overline{X_1 Z_2 Y_3} = \\ &= -\overline{Y_1 X_2 Z_3} = -\overline{Z_1 Y_2 X_3} = J. \end{aligned} \quad (11)$$

Значение этой величины J легче всего определить, заметив, что детерминант

$$\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix} = 6J. \quad (12)$$

Для трех взаимно перпендикулярных единичных векторов детерминант (12) равен единице. Отсюда

$$J = \overline{X_1 Y_2 Z_3} = \dots = \frac{1}{6}. \quad (13)$$

1
от

$$J_5 = \overline{X_1^2 Y_2^2} = \overline{X_1^2 Y_3^2} = \overline{X_2^2 Z_3^2} = \dots$$

Величины J с разными значками связаны тождествами (см. примечание 24):

$$\left. \begin{aligned} 1 &= \overline{e_1^4} = (\overline{X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2})^2 = \overline{X_1^4} + \dots + 2\overline{X_1^2 Y_1^2} + \dots = 3(J_1 + 2J_2), \\ 1 &= \overline{e_1^2 e_2^2} = (\overline{X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2})(\overline{X_2^2 + Y_2^2 + Z_2^2}) = \\ &= \overline{X_1^2 X_2^2} + \dots + \overline{X_1^2 Y_2^2} + \dots = 3(J_3 + 2J_5), \\ 0 &= (\overline{e_1 e_2})^2 = (\overline{X_1 X_2 + Y_1 Y_2 + Z_1 Z_2})^2 = \\ &= \overline{X_1^2 X_2^2} + \dots + 2\overline{X_1 Y_1 X_2 Y_2} + \dots = 3(J_3 + 2J_4). \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Таким образом достаточно вычислить J_1 и J_3 . Для этого вычисления можно положить, что вектор e_3 имеет направление неподвижной оси z , которая образует с осью Z эйлеровский угол ϑ , так что

$$\left. \begin{aligned} Z_3 &= \cos \vartheta, \\ Z_2 &= \cos \varphi \sin \vartheta \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

(фиг. 190). Затем, очевидно,

$$J_1 = \overline{Z_3^4} = \overline{\cos^4 \vartheta} = \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \cos^4 \vartheta \sin \vartheta d\vartheta d\varphi d\psi}{\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin \vartheta d\vartheta d\varphi d\psi} = \frac{1}{5} \quad (17)$$

и

$$J_3 = \overline{Z_2^2 Z_3^2} = \overline{\cos^2 \varphi \cos^2 \vartheta \sin^2 \vartheta} = \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \cos^2 \varphi \cos^2 \vartheta \sin^2 \vartheta d\vartheta d\varphi d\psi}{\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin \vartheta d\vartheta d\varphi d\psi} = \frac{1}{15} \quad (18)$$

Из тождеств (15) следует:

$$J_1 = \frac{1}{5}, \quad J_2 = \frac{1}{15}, \quad J_3 = \frac{1}{15}, \quad J_4 = -\frac{1}{30}, \quad J_5 = \frac{2}{15}. \quad (19)$$

Теперь мы можем вычислить средние значения $\overline{A_{xy}}$ согласно (10), выбрав соответствующим образом положение векторов e_1, e_2 (e_3 параллелен z); найдем:

при $e_1 = e_2 \parallel x$ или y :

$$\begin{aligned} \overline{A_{xx}} &= \overline{A_{yy}} = \frac{1}{3} (\alpha_{xx} + \alpha_{yy} + \alpha_{zz}) + \\ &+ \frac{F^2}{2} \left\{ \frac{1}{15} (\alpha_{xx}, xx + \dots) - \frac{1}{30} (\alpha_{xy}, xy + \dots) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{2}{15} (\alpha_{xx}, yy + \dots) + \right. \\ &+ \frac{1}{kT} \left[\frac{1}{15} (\alpha_{xx} \alpha_{xx}^{(0)} + \dots) + \frac{2}{15} (\alpha_{xx} \alpha_{yy}^{(0)} + \dots) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{30} (\alpha_{xy} \alpha_{xy}^{(0)} + \dots) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{2}{15} (\alpha_{xx}, x p_X^{(0)} + \dots) + \frac{4}{15} (\alpha_{xx}, y p_Y^{(0)} + \dots) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{9} (\alpha_{xx} + \alpha_{yy} + \alpha_{zz}) (\alpha_{xx}^{(0)} + \alpha_{yy}^{(0)} + \alpha_{zz}^{(0)}) \right] + \\ &+ \frac{1}{k^2 T^2} \left[\frac{1}{15} (\alpha_{xx} p_X^{(0)2} + \dots) - \frac{1}{30} (\alpha_{xy} p_X^{(0)} p_Y^{(0)} + \dots) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{2}{15} (\alpha_{xx} p_Y^{(0)2} + \dots) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{9} (\alpha_{xx} + \alpha_{yy} + \alpha_{zz}) (p_X^{(0)2} + p_Y^{(0)2} + p_Z^{(0)2}) \right] \Big\}, \end{aligned} \quad (20)$$

при $e_1 = e_2 = e_3 \parallel z$:

$$\begin{aligned} \overline{A_{zz}} = & \frac{1}{3} (a_{xx} + a_{yy} + a_{zz}) + \\ & + \frac{F^2}{2} \left\{ \frac{1}{5} (a_{xx, xx} + +) + \frac{1}{15} (a_{xx, yy} + + + +) + \right. \\ & + \frac{1}{kT} \left[\frac{1}{5} (a_{xx} \alpha_{xx}^{(0)} + +) + \frac{1}{15} (a_{xx} \alpha_{yy}^{(0)} + + + +) + \right. \\ & + \frac{2}{5} (a_{xx, x} p_x^{(0)} + +) + \frac{2}{15} (a_{xx, y} p_y^{(0)} + + + +) - \\ & - \frac{1}{9} (a_{xx} + a_{yy} + a_{zz}) (\alpha_{xx}^{(0)} + \alpha_{yy}^{(0)} + \alpha_{zz}^{(0)}) \left. \right] + \\ & + \frac{1}{k^2 T^2} \left[\frac{1}{5} (a_{xx} p_x^{(0)2} + +) + \frac{1}{15} (a_{xx} p_y^{(0)2} + + + +) - \right. \\ & - \left. \frac{1}{9} (a_{xx} + a_{yy} + a_{zz}) (p_x^{(0)2} + p_y^{(0)2} + p_z^{(0)2}) \right] \left. \right\}, \end{aligned} \quad (21)$$

при $e_1 \parallel x, e_2 \parallel y, e_3 \parallel z$:

$$\begin{aligned} \overline{A_{xy}} = -\overline{A_{yx}} = & -\frac{F}{6} \left\{ a_{xy, z} - a_{yx, z} + a_{yz, x} - a_{zy, x} + \right. \\ & + a_{zx, y} - a_{xz, y} + \frac{1}{kT} \left[p_x^{(0)} (a_{yz} - a_{zy}) + p_y^{(0)} (a_{zx} - a_{xz}) + \right. \\ & + p_z^{(0)} (a_{xy} - a_{yx}) \left. \right] \left. \right\}, \end{aligned} \quad (22)$$

и наконец

$$\overline{A_{xx}} = \overline{A_{yy}} = \overline{A_{zz}} = \overline{A_{xy}} = 0. \quad (23)$$

Введем сокращенное обозначение:

$$\begin{aligned} \overline{A_{xx}} = \overline{A_{yy}} = & a + \frac{F^2}{2} (a - b), \quad (a) \\ \overline{A_{zz}} = & a + \frac{F^2}{2} (a + 2b), \quad (b) \\ \overline{A_{xy}} = -\overline{A_{yx}} = & -iFf. \quad (c) \end{aligned} \quad (24)$$

Здесь величина

$$a = \frac{1}{3} (a_{xx} + a_{yy} + a_{zz})$$

тождественна со средней поляризуемостью, которую мы ввели в § 73 (17). Далее

$$\left. \begin{aligned} a &= a_0 + \frac{1}{kT} a_1 + \frac{1}{k^2 T^2} a_2, \quad (a) \\ b &= b_0 + \frac{1}{kT} b_1 + \frac{1}{k^2 T^2} b_2, \quad (b) \\ f &= f_0 + \frac{1}{kT} f_1, \quad (c) \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

где коэффициенты $a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2, f_0, f_1$ зависят только от свойств молекул. При вычислении этих коэффициентов можно для упрощения так выбрать систему координат, связанную с молекулами, чтобы она совпадала с главными осями вещественного статического тензора поляризуемости; тогда смешанные члены $\alpha_{xy}^{(0)}$ пропадают. Коэффициенты главных членов обозначим $\alpha_{xx}^{(0)}, \dots$ вместо $\alpha_{xx}^{(0)}, \dots$. Тогда

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{9} (a_{xx, xx} + +) - \frac{1}{45} (a_{xy, xy} + + + +) + \quad (a) \\ &+ \frac{1}{9} (a_{xx, yy} + + + +), \\ a_1 &= \frac{2}{9} (a_{xx, x} p_x^{(0)} + +) - \frac{2}{45} (a_{xy, x} p_y^{(0)} + + + +) + \quad (b) \\ &+ \frac{2}{9} (a_{xx, y} p_y^{(0)} + + + +), \\ a_2 &= -\frac{1}{45} (a_{xy} p_x^{(0)} p_y^{(0)} + + + +), \quad (c) \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} b_0 &= \frac{2}{45} (a_{xx, xx} + +) + \frac{1}{90} (a_{xy, xy} + + + +) - \quad (a) \\ &- \frac{1}{45} (a_{xx, yy} + + + +), \\ b_1 &= \frac{2}{45} (a_{xx} \alpha_x^{(0)} + +) - \frac{1}{45} (a_{xx} \alpha_y^{(0)} + + + +) + \quad (b) \\ &+ \frac{4}{45} (a_{xx, x} p_x^{(0)} + +) - \frac{2}{45} (a_{xx, y} p_y^{(0)} + + + +) + \end{aligned} \quad (27)$$

¹ Диэлектрический тензор света α_{xy} комплексен (эрмитовский), и поэтому невозможно избавиться от смешанных членов α_{xy} путем подбора системы координат; для этого необходимо комплексное унитарное преобразование, простой же вещественный поворот системы координат недостаточен.

$$\left. \begin{aligned}
 & + \frac{1}{45} (\alpha_{xy}, x p_y^{(0)} + + + + +), \\
 b_2 = & \frac{2}{45} (\alpha_{xx} p_x^{(0)2} + +) + \frac{1}{90} (\alpha_{xy} p_x^{(0)} p_y^{(0)} + + + + +) - \\
 & - \frac{1}{45} (\alpha_{xx} p_y^{(0)2} + + + + +), \\
 f_0 = & \frac{i}{6} (\alpha_{xy,z} - \alpha_{yx,z} + \alpha_{yz,x} - \alpha_{zy,x} + \alpha_{zx,y} - \alpha_{xz,y}), \quad (a) \\
 f_1 = & \frac{i}{6} \left[p_x^{(0)} (\alpha_{yz} - \alpha_{zy}) + p_y^{(0)} (\alpha_{zx} - \alpha_{xz}) + p_z^{(0)} (\alpha_{xy} - \alpha_{yx}) \right] \quad (b)
 \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

Когда затухание равно нулю, т. е. когда A и a эрмитовские тензоры, все величины a , b , f вещественны.

Важно заметить, что все наши вычисления средних остаются верными, когда мы пользуемся не классической, а квантовой механикой. Ее главный отличительный признак в том, что система не может принимать во внешнем поле всех возможных положений, а только определенное дискретное конечное число их; это так называемое *квантование направлений*. Для каждого из этих дискретных положений энергия W имеет определенное значение, зависящее от двух квантовых чисел (полного импульса и его составляющей в направлении поля). Больцмановская формула средних значений с интегралом по всем направлениям заменяется соответствующей формулой суммы по всем возможным значениям квантовых чисел направлений. Хотя эти формулы отличаются по виду от классических, но результат получается точно такой же, как в классической теории¹.

Для среднего электрического момента световой волны под действием внешнего поля F получим согласно (24):

$$\left. \begin{aligned}
 \bar{p}_x = & \left[a + \frac{F^2}{2} (a - b) \right] \mathcal{E}'_x - i F f \mathcal{E}'_y, \quad (a) \\
 \bar{p}_y = & i F f \mathcal{E}'_x + \left[a + \frac{F^2}{2} (a - b) \right] \mathcal{E}'_y, \quad (b) \\
 \bar{p}_z = & \left[a + \frac{F^2}{2} (a + 2b) \right] \mathcal{E}'_z. \quad (c)
 \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

Сделаем теперь допущение (которое в действительности никогда вполне точно не осуществляется), что распределение в пространстве центров молекул существенно не изменяется под

влиянием внешнего поля, так что и здесь можно положить:

$$\mathcal{E}' = \mathcal{E} + \frac{4\pi}{3} \mathfrak{P}. \quad (30)$$

Тогда, если поле равно нулю, мы имеем формулы § 76 (14), (15), с помощью которых мы вводим диэлектрическую постоянную $\epsilon = n^2$ (или показатель преломления n) изотропной среды, не подвергающейся действию поля. В членах, содержащих F и F^2 , которые во всяком случае малы, мы можем заменить \mathcal{E}' его значением, которое оно имеет при поле, равном нулю, именно [см. § 76 (11), (15), § 77 (30)]:

$$\mathcal{E}' = \frac{\epsilon + 2}{3} \mathcal{E}, \quad (31)$$

тогда

$$\left. \begin{aligned}
 \mathfrak{D}_x = & \epsilon_{xx} \mathcal{E}_x + \epsilon_{xy} \mathcal{E}_y, \quad (a) \\
 \mathfrak{D}_y = & \epsilon_{yx} \mathcal{E}_x + \epsilon_{yy} \mathcal{E}_y, \quad (b) \\
 \mathfrak{D}_z = & \epsilon_{zz} \mathcal{E}_z, \quad (c)
 \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

где

$$\left. \begin{aligned}
 \epsilon_{xx} = \epsilon_{yy} = \epsilon + & \frac{F^2}{2} N (a - b) \frac{\epsilon + 2}{3}, \quad (a) \\
 \epsilon_{zz} = \epsilon + & \frac{F^2}{2} N (a + 2b) \frac{\epsilon + 2}{3}, \quad (b) \\
 \epsilon_{xy} = -\epsilon_{yx} = & -i F N f \frac{\epsilon + 2}{3}. \quad (c)
 \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

Мы видим, что вещество под действием внешнего поля в основном ведет себя, как одноосный кристалл, причем коэффициенты поляризуемости и соответственно диэлектрические постоянные, вообще говоря, комплексны.

§ 78. ЯВЛЕНИЕ ФАРАДЕЯ

Явления, основанные на воздействии электрических и магнитных полей на свет, обычно объединяются под общим названием электро- и магнитооптики. Первое открытие в этой области было сделано Фарадеем в 1846 г.¹. Это одна из больших вех на пути развития теории света. Фарадей, который был убежден в единстве всех явлений природы, искал в течение многих лет взаимодействие между светом и электромагнитными силами. После многих безуспешных попыток ему удалось, наконец, его обнаружить. Он вполне сознавал значение этого открытия и с гордостью написал в своих *Experimental*

¹ См. M. Born и P. Jordan, *Elementare Quantenmechanik*, гл. IV, § 30, Berlin, 1930.

¹ M. Faraday, *Philos. Transact., Roy. Soc., Lond.* 1846, стр. 1; *Pogg. Ann.* t. 68 (1846). стр. 105.

Researches¹, что ему удалось „намагнитить и наэлектризовать световой луч и сделать светящейся магнитную световую линию“.

Действительно, это открытие стало фундаментом электромагнитной теории света. Оно дало толчок многим подобным опытам, из которых наиболее значительным по последствиям оказалось открытие (в 1896 г.) эффекта Зеемана (см. § 89, 96). Оно послужило очень ценным средством исследования механизма светового излучения и поглощения, а также тесно связанных с ним проблем строения атома.

Опыт Фарадея заключается в следующем². Прозрачное тело (свинцовое стекло) (см. примечание 25 в конце книги) помещается между двумя просверленными полюсами сильного электромагнита, и через него пропускается линейно поляризованный световой луч, *параллельный силовым линиям* магнита. С помощью анализатора можно установить, что при включении поля выходящий свет оказывается поляризованным в другой плоскости.

Угол χ поворота плоскости поляризации пропорционален напряжению поля H и толщине l тела:

$$\chi = RlH. \quad (1)$$

Этот закон был установлен уже Фарадеем³; более строго его проверили Видеман⁴ и Верде⁵. Величину R называют (собственно говоря, несправедливо) постоянной Верде. Для данного материала она зависит также от частоты и температуры. В настоящее время для более точного определения вращения пользуются так называемыми полутеневыми приборами, т. е. поляризационными приборами, в которых поле зрения разлагается на две или больше частей, и эти части кажутся одинаково освещенными только при одном определенном положении анализатора (см. примечание 26). Изменение освещенности, вызываемое магнитным вращением, компенсируется вращением анализатора. В комбинации со спектральным прибором (монокроматором) это устройство может служить для определения зависимости вращательной способности от длины волны. Особенно удобна для этого пластинка Савара (глава V, § 65), наиболее тонко реагирующая на наличие поляризации.

Особенно большой вращательной способностью обладает сернистый углерод CS_2 . Приводим значение вращательной способности (l в см, H в гауссах, температура t в °C, длина волны

¹ Exp. Res. (Lond., 1839) § 2148, т. III: „I have at last succeeded in magnetizing and electrifying a ray of light, and in illuminating a magnetic line of force“.

² Подробнее см. R. Ladenburg, Die magnetische Drehung d. Polarisations-ebene (Faradayeffekt) в Müller-Pouillet, Lehrb. d. Phys., 11 изд., т. II, 2 пол., 2-й гл. XXXVI, стр. 2119 и дальше. Braunschweig, 1929.

³ M. Faraday, Philos. Mag., т. 29 (1846), стр. 153; Pogg. Ann., т. 70 (1847), стр. 283.

⁴ G. Wiedemann, Pogg. Ann., т. 82 (1851), стр. 215.

⁵ E. Verdet, Ann. Chim. et Phys., т. 41 (1854), стр. 570.

натровой D -линии, χ в дуговых минутах) в функции температуры для сернистого углерода и для воды:

$$\text{для } CS_2: R_t = 0,04347 (1 - 1,69 \cdot 10^{-3} t),$$

$$\text{для } H_2O: R_t = 0,01311 (1 - 3,2 \cdot 10^{-5} t - 3,2 \cdot 10^{-6} t^2).$$

Чтобы получить более наглядное представление о величине эффекта, вычислим из этой формулы, что при напряжении поля 10 000 гауссов, толщине слоя 1 см и температуре 0°C вращение составляет для CS_2 7°14,7'. Для газов магнитное вращение значительно меньше и было обнаружено много позже. Для усиления эффекта применяется возможно большее давление. Например, для водорода H_2 при 85 ат и 9,5°C, при освещении натриевой D -линией и при напряжении поля 10 000 гауссов χ оказывается равным 4,60 дуговым минутам. Для углекислоты, CO_2 , при 1 ат и 6,5°C и прочих одинаковых условиях $\chi = 0,086$ дуговых минут. Особенно большие значения магнитного вращения имеют по Кундту¹ прозрачные слои железа, кобальта и никеля. Например, железный слой около 1/50 мм толщины дает уже полное вращение на 360°. Это, понятно, связано с сильным намагничиванием этих тел. В табл. 16 приведены значения различных порядков².

Теоретическое объяснение эффекта вытекает из теории Френеля о естественной вращательной способности (см. § 83). Френель объяснил наблюдаемое во многих телах естественное вращение (например в кварце параллельно оси) круговым двойным преломлением; линейно поляризованный свет при входе в кристалл расщепляется на два противоположно вращающихся круговых колебания, которые распространяются с различной скоростью и при выходе, соединяясь, образуют линейное колебание противоположного направления.

Для объяснения этого явления можно непосредственно воспользоваться выведенной в предыдущем параграфе общей теорией искусственно анизотропных тел, приняв только следующие частные условия.

Напряжение поля F в данном случае тождественно с магнитным полем H .³ Члены второй степени в последующем выводе отбрасываем в соответствии с законом Фарадея (1). Тогда формулы § 77 (32) сводятся к

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{D}_x &= \varepsilon \mathfrak{E}_x - i\varepsilon' \mathfrak{E}_y, & (a) \\ \mathfrak{D}_y &= i\varepsilon' \mathfrak{E}_x + \varepsilon \mathfrak{E}_y, & (b) \\ \mathfrak{D}_z &= \varepsilon \mathfrak{E}_z, & (c) \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

¹ A. Kundt, Wiedem. Ann., т. 23 (1884), стр. 228, т. 27 (1885), стр. 191.

² По Ладенбургу (см. сноску 3, стр. 474), стр. 2126.

³ Ввиду того, что прозрачные тела всегда слабо намагничиваются, действующую силу поля H' в них можно считать равной заданному внешнему полю H .

Таблица 16

	5890 Å	10 ⁴ гаус.
Вода (25°)	2°10'	Толщина слоя 1 см
Сероуглерод (25°)	6°55'	
Кварц	2°46'	
Кислород	0,0559'	1 ат
Водород	0,0537'	
Углекислота	0,0862'	
Железо	130°	Толщина слоя 10 ⁻³ см
Никель	50°	

где

$$\varepsilon' = i s_{xy} = H N f \frac{\varepsilon + 2}{3} \quad (3)$$

вещественно. Умножив уравнение (2b) на $\pm i$ и сложив его с (2a), получим:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_x \pm i \mathcal{D}_y &= (\varepsilon \mp \varepsilon') (\mathcal{E}_x \pm i \mathcal{E}_y), & (a) \\ \mathcal{D}_z &= \varepsilon \mathcal{E}_z. & (b) \end{aligned} \quad (4)$$

Мы можем теперь выразить произвольное колебание не через прямоугольные составляющие \mathcal{E}_x , \mathcal{E}_y , \mathcal{E}_z , а через линейные комбинации

$$\mathcal{E}_+ = \mathcal{E}_x + i \mathcal{E}_y, \quad \mathcal{E}_- = \mathcal{E}_x - i \mathcal{E}_y, \quad \mathcal{E}_z = \mathcal{E}_z. \quad (5)$$

Тогда из наших уравнений (4) видно, что соответствующие составляющие \mathcal{D}

$$\mathcal{D}_+ = \mathcal{D}_x + i \mathcal{D}_y, \quad \mathcal{D}_- = \mathcal{D}_x - i \mathcal{D}_y, \quad \mathcal{D}_z = \mathcal{D}_z \quad (6)$$

удовлетворяют уравнению

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_+ &= (\varepsilon - \varepsilon') \mathcal{E}_+, & (a) \\ \mathcal{D}_- &= (\varepsilon + \varepsilon') \mathcal{E}_-, & (b) \\ \mathcal{D}_z &= \varepsilon \mathcal{E}_z. & (c) \end{aligned} \quad (7)$$

Согласно основному уравнению оптики [см. главу V, § 58 (14), а также главу VII, § 75 (47)] $\mathcal{D} = n^2 [\mathcal{E} - \hat{s}(\mathcal{E}\hat{s})]$ волна, параллельная внешнему полю, т. е. распространяющаяся по направлению оси z , должна удовлетворять уравнению:

$$\mathcal{D}_x = n^2 \mathcal{E}_x, \quad \mathcal{D}_y = n^2 \mathcal{E}_y, \quad \mathcal{D}_z = 0. \quad (8)$$

Принимая во внимание (7), видим, что в этом направлении распространяются две различные волны:

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{D}_+ &= 0, \text{ т. е. } \frac{\mathcal{D}_y}{\mathcal{D}_x} = i \text{ и } n_-^2 = \varepsilon + \varepsilon', \\ \mathcal{D}_- &= 0, \text{ т. е. } \frac{\mathcal{D}_y}{\mathcal{D}_x} = -i \text{ и } n_+^2 = \varepsilon - \varepsilon', \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

или приближенно

$$\left. \begin{aligned} n_+ &= n - \frac{\varepsilon'}{2n}, \\ n_- &= n + \frac{\varepsilon'}{2n}, \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

где $n = \sqrt{\varepsilon}$ показатель преломления при отсутствии поля. Согласно главе I, § 8 (3) и (4) для волны n_+ вращение вокруг направления распространения положительно; по традиции ее называют *левополяризованной*.

Разность показателей преломления, т. е. *круговое двойное преломление*, равно:

$$n_- - n_+ = \frac{\varepsilon'}{n}. \quad (11)$$

Это дает нам основание для объяснения вращения плоскости поляризации.

Рассмотрим теперь плоскопараллельный слой вещества, имеющий толщину l , и положим, что ось z и направление поля нормальны к пластинке. Если линейный свет падает в направлении положительного поля, а ось x параллельна направлению колебания в плоскости входа, то амплитуды световых колебаний (временной множитель $e^{i\omega t}$) в плоскости входа равны:

$$\mathcal{D}_x = 1, \quad \mathcal{D}_y = 0, \text{ т. е. } \mathcal{D}_+ = 1, \quad \mathcal{D}_- = 1. \quad (12)$$

По выходе из слоя амплитуды должны быть равны:

$$\mathcal{D}_+ = e^{-\frac{2\pi i}{\lambda_0} n_+ l}, \quad \mathcal{D}_- = e^{-\frac{2\pi i}{\lambda_0} n_- l}. \quad (13)$$

Отсюда получается:

$$\mathcal{D}_x = \frac{1}{2} \left(e^{-\frac{2\pi i}{\lambda_0} n_+ l} + e^{-\frac{2\pi i}{\lambda_0} n_- l} \right) = \frac{1}{2} e^{-\frac{2\pi i}{\lambda_0} n l} \left(e^{\frac{2\pi i}{\lambda_0} (n - n_+) l} + e^{\frac{2\pi i}{\lambda_0} (n - n_-) l} \right). \quad (14)$$

Так как в силу (10) $n - n_+$ и $n - n_-$ равны с противоположным знаком, то можно заменить скобки косинусом; получим:

$$\mathcal{D}_x = e^{-\frac{2\pi i}{\lambda_0} n l} \cdot \cos \left(\frac{\pi}{\lambda_0} \cdot \frac{\varepsilon'}{n} l \right). \quad (15)$$

Совершенно аналогично

$$\mathfrak{D}_y = e^{-\frac{2\pi i}{\lambda_0} nl} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{\lambda_0} \cdot \frac{\epsilon'}{n} l\right), \quad (16)$$

и мы получим, что отношение амплитуд есть

$$\frac{\mathfrak{D}_y}{\mathfrak{D}_x} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{\lambda_0} \cdot \frac{\epsilon'}{n} l\right). \quad (17)$$

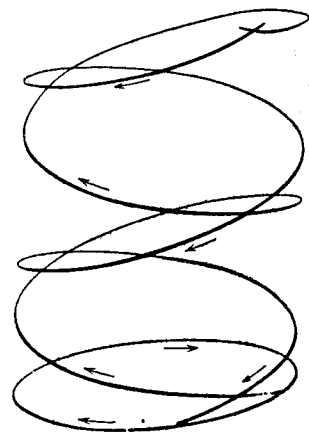
Это отношение вещественно, т. е. колебание по выходе из пластинки опять линейно, но повернуто на угол:

$$\chi = \frac{\pi}{\lambda_0} \cdot \frac{\epsilon'}{n} l = \frac{\pi}{\lambda_0} (n_- - n_+) l = \frac{\pi}{\lambda_0} N \frac{\epsilon + 2}{3} \cdot \frac{f}{n} Hl. \quad (18)$$

Согласно (1) постоянная Верде

$$R = \frac{\chi}{Hl} = \frac{\pi}{\lambda_0} (n_- - n_+) \frac{1}{H} = \frac{\pi}{\lambda_0} \frac{n^2 + 2}{3n} Nf. \quad (19)$$

Если направление света противоположно полю, то знак угла вращения будет обратный, т. е. вместо правого вращения мы будем иметь левое (фиг. 191). Поэтому, если луч, вышедший из вещества, заставить с помощью отражения пройти вторично тот же путь в обратном направлении, то суммарное вращение будет вдвое больше, чем после одного прохождения (в противоположность тому, что происходит при естественном вращении, см. § 83).



Фиг. 191. Направление вращения по отношению к направлению распространения.

Для газов множитель $(n^2 + 2)/3n$ почти равен 1; для других веществ он, как и величина f , зависит от частоты; правда, при частоте, достаточно далекой от области поглощения вещества, эта зависимость незначительна. Таким образом зависимость вращательной способности от света связана, главным образом, с величиной $1/\lambda_0$.

Вспомним определение постоянной Фарадея [§ 77 (25c)]:

$$f = f_0 + \frac{1}{kT} f_1. \quad (20)$$

Величины f_0 , f_1 представляют собой атомные постоянные, образованные согласно § 77 (28) из составляющих тензоров третьего ранга, причем из таких, в которые входят только различные индексы осей.

Для большинства веществ вращательная способность почти не зависит от температуры, а только от величины f_0 . Эта величина теснейшим образом связана с эффектом Зеемана, т. е. с явлением расщепления спектральной линии в магнитном поле. Хотя мы будем заниматься этим явлением только в главе VIII, (§ 89), мы все же приведем здесь рассуждение Анри Беккереля, с помощью которого можно очень простым образом свести вращательную способность атомов к зависимости показателя преломления от длины волны. Для этого служит весьма общая теорема Лармора о влиянии магнитного поля на движение электронов в атоме. Мы коротко ее выведем.

Известно, что сила, с которой магнитное поле \mathfrak{H} действует на электрический заряд $-e$ (электроны заряжены отрицательно), который движется со скоростью v , равна $-\frac{e}{c} v \times \mathfrak{H}$. С другой

стороны, представим себе, что магнитного поля нет, но что система координат вращается со скоростью, которая по величине и направлению выражается вектором ω , параллельным магнитному полю. Тогда, как известно, к вращающейся системе приложимы те же ньютоновские уравнения движения „масса \times ускорение = сила“, но к внешним силам нужно прибавить добавочные силы, во-первых, центробежную силу, пропорциональную угловой скорости, и, во-вторых, силу Кориолиса, равную по величине и направлению $2m v \times \omega$. Если угловая скорость мала, то квадратичной центробежной силой можно пренебречь, и действие магнитного поля на отрицательный электрон будет эквивалентно вращению системы, причем величина угловой скорости связана с напряжением магнитного поля уравнением:

$$\omega_L = \frac{e}{2mc} H. \quad (21)$$

Это выражение называется *частотой Лармора* [см. § 89 (4)].

Беккерель рассуждает следующим образом: так как масса атомного ядра очень велика, и все электроны имеют равные массы и заряды, то действие магнитного поля совершенно равносильно тому, как если бы система всех электронов равномерно вращалась вокруг ядра с частотой ω_L , а осью вращения служило бы направление поля. Тогда все внутренние частоты во вращающейся системе были бы такими же, как в невращающейся системе под действием магнитного поля.

Разложим мысленно линейно поляризованную волну, которая падает в направлении силовых линий, на две круговые волны с частотой ω , вращающиеся в противоположных направлениях; тогда частоты этих волн относительно фиктивной вращающейся системы координат различны; волна, вращающаяся против частоты Лармора, имеет частоту $\omega + \omega_L$, а другая $\omega - \omega_L$.

Если $n(\omega)$ есть показатель преломления при отсутствии поля, то скорость положительной волны определяется значением этой

функции для частоты $\omega - \omega_L$, а скорость отрицательной — ее значением для частоты $\omega + \omega_L$. Таким образом мы получим (вплоть до членов высшего порядка):

$$n_- - n_+ = n(\omega + \omega_L) - n(\omega - \omega_L) = 2 \frac{\partial n}{\partial \omega} \omega_L. \quad (22)$$

Подставив значения ω_L из (21) и воспользовавшись соотношением

$$\omega \frac{\partial n}{\partial \omega} = -\lambda_0 \frac{\partial n}{\partial \lambda_0}, \quad (23)$$

мы получим для постоянной Верде R формулу Беккереля:

$$R = -\frac{e}{2\pi mc^2} \lambda_0 \frac{\partial n}{\partial \lambda_0}. \quad (24)$$

Эта формула справедлива лишь для атомов, магнитное вращение которых сводится только к части, не зависящей от температуры, т. е. к величине f_0 , для которой мы имеем в силу (19)

$$Nf_0 = \frac{-e}{2\pi mc^2} \frac{3n}{n^2 + 2} \lambda_0^2 \frac{\partial n}{\partial \lambda_0} = -9,35 \cdot 10^{-5} \frac{3n}{n^2 + 2} \lambda_0^2 \frac{\partial n}{\partial \lambda_0}, \quad (25)$$

где e/mc равно $1,76 \cdot 10^7$ эл.ст.ед. z^{-1} .

Определим из (24) знак вращательной способности. Во всех областях спектра, где вещество прозрачно, $\partial n / \partial \lambda$ согласно опыту, меньше нуля, что подтверждается также и теорией, как мы видим в главе VIII. В этом случае говорят о нормальной дисперсии. В этих областях, как следует из нашего уравнения (24), постоянная Верде положительна. Можно наглядно пояснить это правило знаков так: положительное вращение означает правое вращение вокруг направления магнитного поля (вращение от x к y с перемещением вдоль z). Но в этом направлении течет электрический ток, создающий магнитное поле. Таким образом положительное направление совпадает с направлением тока в электромагнитах, создающих поле.

Формула Беккереля (24) была бы совершенно точна для одноатомных газов, если бы имела место классическая теория прецессии Лармора. Но этого нет в случае так называемого *аномального явления Зеемана*. Согласно новейшей квантовой механике это объясняется тем, что каждый отдельный электрон уже представляет собой элементарный магнит, который совершает в поле прецессионное движение; к этому движению присоединяется вращательное движение электрона. Согласно квантовой теории мы должны брать для различных спектральных линий различные прецессии Лармора, которые получаются путем умножения наших ω_L на определенные числа, так называемые „ g -множители Ланде“.

Для молекулярных газов формула (24) не может быть совершенно строгой уже потому, что при нескольких ядрах отпадает свободное вращение системы электронов. Но формула (24) приближенно верна. Чтобы показать это, вычислим из данного явления Фарадея¹ удельный заряд электрона e/m (см. табл. 17). Хорошее совпадение дает только водород. Но замечательно, что порядок величины получается во всех случаях правильный.

То, что в диамагнитных телах магнитное вращение почти не зависит от температуры, совпадает с опытом. Магнитное вра-

Таблица 17

Вычисление e/mc из эффекта Фарадея по формуле (25)

Вещество	e/mc в эл. ст. ед. z^{-1}	e/mc в процентах действительного значения
Водород	$1,75 \cdot 10^7$	99
Азот	1,11	63
Углекислота	1,00	56
Вода	1,58	89
Метиловый спирт	1,08	61
Этиловый спирт	1,15	65
Гексан	1,10	62

щение поддается измерению лишь в немногих случаях, например для CS_2 , где оно хорошо совпадает со значением, вычисленным из дисперсии.

Трудно проверить зависимость вращательной способности от длины волны, на которую указывает формула Беккереля, потому что $\partial n / \partial \lambda_0$ обычно очень мало в области прозрачности и почти не поддается измерению. Эта проверка была выполнена для водорода при 85 ат.^2 Табл. 18 указывает на почти полное совпадение.² Для твердых тел, например каменной соли, сильвина и т. д., получается также хорошее совпадение, если вычесть из показателя преломления ту часть, которую дают инфракрасные колебания ядра (см. главу VIII, § 95).

В непосредственной близости к области поглощения эта простая теория оказывается неверной. Более строгую теорию мы изложим в главе VIII.

Из нашей теории следует, что для молекулярных газов вращение должно содержать член, зависящий от температуры (f_1/kT). Существование этого *парамагнитного вращающего* дока-

¹ По уже цитированной на стр. 474 статье Ладенбурга, стр. 2160.

² S. M. Kirt. Ann. Physik, т. 64 (1921), стр. 572; L. H. Sierse na u. M. de Haas, Physik Z., т. 14 (1913), стр. 568; J. F. Sirks, там же, т. 14 (1913), стр. 340.

³ По Ладенбургу, стр. 2162.

зал Лаленбург на основании различных, ранее непонятных, явлений. Еще раньше Жан Беккерель указывал на связь своих наблюдений над вращением в кристаллах при низких температурах с парамагнетизмом. Если мы введем вектор \mathbf{b} с составляющими $b_x = i a_{yz} = -i a_{zy}$, который мы определили в § 73 (15), и заменим $p^{(0)}$ постоянным магнитным моментом $m^{(0)}$ молекулы, то согласно § 77 (28b)

$$f_1 = \frac{1}{3} m^{(0)} \mathbf{b}. \quad (26)$$

Существование подобного момента $m^{(0)}$ есть отличительный признак парамагнитного вещества. Пусть связанная с молекулами ось Z совпадает с направлением $m^{(0)}$ и пусть $m_z^{(0)} = |m^{(0)}| = m_0$.

Если \mathbf{e} есть единичный вектор в направлении поля [неподвижные координаты (0, 0, 1), координаты в системе, связан-

Таблица 18

Сравнение дисперсии q и магнитного вращения χ для водорода при 85 ат.

Для χ_0 значения относятся к $\lambda = 4047 \text{ Å}$

λ	$q = \lambda_0 \frac{\partial n}{\partial \lambda_0} 10^4$	q/q_{4047}	χ/χ_{4047}	Δ в процентах
5893 Å	0,0625	0,445	0,447	+ 0,8
5780	0,06447	0,460	0,465	+ 1,1
4358	0,11937	0,843	0,848	+ 0,6
4047	0,1409	1,000	1,000	—
3365	0,17628	1,25	1,233	— 1,3
3130	0,25496	1,813	1,80	— 0,7
2805	0,33316	2,362	2,395	+ 1,3
2654	0,38290	2,74	2,77	+ 1,1
2537	0,42992	3,054	3,12	+ 2,1
2482	0,45517	3,234	3,32	+ 2,5

ной с молекулой (X, Y, Z), то магнитная энергия равна $-m_0 H Z$, а вероятность такого расположения на единицу телесного угла равна:

$$e^{\frac{m_0 H Z}{kT}} = 1 + \frac{m_0 H Z}{kT} + \dots \quad (27)$$

Средний магнитный момент единицы объема по соображениям симметрии должен совпадать с направлением z и

$$\overline{M}_z = N \overline{m_z^{(0)}} = N m_0 \overline{Z} = N m_0 \overline{Z} + N \frac{m_0^2 H}{kT} \overline{Z^2} = \frac{N m_0^2 H}{3kT}, \quad (28)$$

а магнитная восприимчивость на единицу объема равна:

$$\chi = \frac{N m_0^2}{3kT}. \quad (29)$$

Это известный закон Кюри зависимости парамагнетизма от температуры. Таким образом парамагнитная составляющая вращательной способности зависит от температуры точно таким же образом, как сам парамагнетизм, но она пропорциональна не квадрату парамагнитного момента, а [согласно (26)] скалярному произведению $m \mathbf{b}$ момента на неподвижный относительно молекул вектор \mathbf{b} („вектор вращения“). В молекулах, имеющих ось симметрии, \mathbf{b} должен быть параллелен или антипараллелен m_0 ; но его величина не зависит от парамагнитного момента, а только от частоты в соответствии с присущим \mathbf{b} характером деформации. Знак величины m_0 может быть положителен или отрицателен в зависимости от угла между \mathbf{b} и m_0 ; даже в молекуле с осевой симметрией \mathbf{b} и m_0 могут быть параллельны или антипараллельны ($m^{(0)} \mathbf{b} \geq 0$). Поэтому может случиться, что парамагнитная составляющая вращательной способности (в области прозрачности) имеет знак, обратный знаку обычного диамагнитного вращения, и даже может в некоторых случаях изменить знак суммарного вращения. Это и наблюдается в действительности, например в растворах железных солей, а также в кристаллических соединениях других сильно парамагнитных веществ, в особенности редких земель¹.

Таблица 19

Отношение вращательных способностей при различных длинах волн и температурах, сравненное с обратным отношением температур

$T_1 = 291^\circ$	λ	5461	4358	4046	T_1/T_2
$T_2 = 20^\circ,4$	χ_2/χ_1	13,1	13,9	13,9	14,5

$T_1 = 20^\circ,4$	λ	6391	4850	4150	3800	T_1/T_2
$T_2 = 4^\circ,2$	χ_2/χ_1	3,90	4,04	4,05	4,08	4,85

Характерная для парамагнитного вращения температурная зависимость была экспериментально найдена для некоторых

¹ I. Verdet, Ann. Chim. et Phys. (13), т. 52 (1858), стр. 151; H. Becquerel, там же, т. 5 (1908), стр. 238.

кристаллов (например тизонита)¹. В этих опытах доходили до температуры жидкого гелия. Табл. 19 показывает, что отношение вращательных способностей при двух различных температурах не зависит от длины волны и обратно пропорционально температуре. Что здесь мы действительно имеем дело с парамагнитным вращением, подтверждается также поведением дисперсии в этом явлении.

§ 79. ЯВЛЕНИЕ КОТТОН-МУТОНА*

Исследуем теперь, как распространяется свет в магнитном поле *перпендикулярно к силовым линиям*. Очевидно, что для того, чтобы обнаружить влияние магнитного поля, надо взять H по крайней мере с членами второго порядка. Но тогда необходимо также учесть зависимость от H диэлектрических постоянных ϵ_{xx} и ϵ_{zz} . Поэтому мы напомним основные уравнения § 77 (32) в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{D}_x &= \epsilon_e \mathfrak{E}_x - i\epsilon' \mathfrak{E}_y, \\ \mathfrak{D}_y &= i\epsilon' \mathfrak{E}_x + \epsilon_e \mathfrak{E}_y, \\ \mathfrak{D}_z &= \epsilon_o \mathfrak{E}_z, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

где индексы o и e соответствуют обозначениям „обыкновенный“ и „необыкновенный“ („ordinär“ и „extraordinär“) в теории двуосных кристаллов, с которыми последующие рассуждения имеют тесную аналогию. Согласно § 77 (33) имеем:

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_o &= \epsilon + H^2 N (a + 2b) \frac{\epsilon + 2}{6}, \\ \epsilon_e &= \epsilon + H^2 N (a - b) \frac{\epsilon + 2}{6}, \\ \epsilon' &= H N f \frac{\epsilon + 2}{3}. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Для волны, перпендикулярной к полю, например, параллельной оси x , из основного уравнения главы V, § 58 (14) следует:

$$\mathfrak{D}_z = 0, \quad \mathfrak{D}_y = n^2 \mathfrak{E}_y, \quad \mathfrak{D}_x = n^2 \mathfrak{E}_x. \quad (3)$$

Из уравнения (1) следует:

$$\mathfrak{E}_x = i \frac{\epsilon'}{\epsilon_e} \mathfrak{E}_y, \quad (4)$$

так что второе уравнение принимает вид:

$$\mathfrak{D}_y = \frac{\epsilon_e^2 - \epsilon'^2}{\epsilon_e} \mathfrak{E}_y. \quad (5)$$

Исключая \mathfrak{E}_y и \mathfrak{E}_z , получим:

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{D}_y \left(\frac{1}{n^2} - \frac{\epsilon_e}{\epsilon_e^2 - \epsilon'^2} \right) &= 0, \\ \mathfrak{D}_z \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{\epsilon_o} \right) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Таким образом распространяются две линейно поляризованные волны со взаимно перпендикулярными колебаниями:

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{D}_y &= 1, & \mathfrak{D}_z &= 0, \\ \mathfrak{D}_y &= 0, & \mathfrak{D}_z &= 1. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Их показатели преломления

$$\left. \begin{aligned} n_1 &= \sqrt{\frac{\epsilon_e^2 - \epsilon'^2}{\epsilon_e}} = \sqrt{\epsilon} \left[1 + H^2 N \frac{\epsilon + 2}{6\epsilon} \left(a - b - f^2 N \frac{\epsilon + 2}{3\epsilon} \right) \right], \\ n_2 &= \sqrt{\epsilon_o} = \sqrt{\epsilon} \left[1 + H^2 N \frac{\epsilon + 2}{6\epsilon} (a + 2b) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Таким образом мы имеем обыкновенное линейное двойное преломление, сила которого зависит от поля. Найдем средний показатель преломления, для чего положим, что в отсутствии поля $\sqrt{\epsilon} = n$. Тогда

$$\bar{n} = \frac{2n_1 + n_2}{3} = n \left[1 + H^2 N \frac{n^2 + 2}{6n^3} \left(a - \frac{2}{3} f^2 N \frac{n^2 + 2}{3n^2} \right) \right]. \quad (9)$$

Далее следует:

$$\left. \begin{aligned} n_1 - \bar{n} &= -H^2 N \frac{n^2 + 2}{6n} \left(b + \frac{f^2}{3} N \frac{n^2 + 2}{3n^2} \right), \\ n_2 - \bar{n} &= 2H^2 N \frac{n^2 + 2}{6n} \left(b + \frac{f^2}{3} N \frac{n^2 + 2}{3n^2} \right), \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

откуда получается простое соотношение:

$$\frac{n_2 - \bar{n}}{n_1 - \bar{n}} = -2. \quad (11)$$

Двойное преломление равно согласно (10):

$$n_2 - n_1 = H^2 N \frac{n^2 + 2}{6n} \left(3b + f^2 N \frac{n^2 + 2}{3n^2} \right). \quad (12)$$

Оно зависит как от постоянной анизотропии b , так и от квадрата постоянной Фарадея f .

¹ J. Becquerel. Kamerlingh Onnes и W. de Haas, C. R. Acad. Sci., Paris, т. 181 (1925), стр. 831; см. также A. S. S. van Heel, Диссертация, Leiden, 1925; fysik. Ber., 1925, стр. 704.

Явление поперечного двойного преломления в магнитном поле впервые было наблюдаемо Коттоном и Мутоном¹. Даже при самых благоприятных обстоятельствах оно чрезвычайно мало и поэтому никогда не наблюдается в газах, а только в жидкостях и немногих стеклообразных твердых телах. Для того чтобы обнаружить его, помещают жидкость между двумя скрещенными николями. При включении магнитного поля, перпендикулярного к ходу лучей, темное поле зрения освещается. Это явление нельзя скомпенсировать путем вращения анализатора; для этого нужно поставить между николями компенсатор. Если l есть световой путь в веществе, находящемся под действием поля, то полученная разность фаз равна:

$$\Delta = \frac{n_2 - n_1}{\lambda_0} l = C \sin^2 \theta, \quad (13)$$

откуда можно вычислить постоянную Коттон-Мутона, подставив в уравнение выражение (12). Двойное преломление для поля, равного единице, т. е. величину $C \lambda_0 = (n_2 - n_1) / H^2$, называют абсолютной постоянной Коттон-Мутона. Знак C может быть положительным или отрицательным (например, он положительный для нитробензола и отрицательный для сероуглерода). В табл. 20 приведены некоторые результаты измерения.

Таблица 20

Постоянная Коттон-Мутона C для жидкости. t — температура в °C, λ_0 — длина волны в μ

Жидкость	t	λ_0	$C \cdot 10^{13}$
Ацетон	20,2	578	37,6
Анилин	25,0	589	5,1
Бензол	26,5	580	7,5
Бензиловый спирт . . .	20,2	589	5,91
Хлороформ	17,2	578	— 65,8
Нитробензол	16,3	578	23,5
Сероуглерод	23,0	580	— 4,0
Толуол	19,4	589	6,71

Изменение абсолютного значения показателя преломления, или связь (11) с явлением Фарадея, никогда не проверялось экспериментально, так как явление очень слабо.

Что касается температурной зависимости, то теория согласно § 77 дает, что постоянная Коттон-Мутона должна иметь вид:

$$C = C_0 + \frac{1}{T} C_1 + \frac{1}{T^2} C_2. \quad (14)$$

Член C_0 , вообще говоря, мал относительно следующего члена $\frac{1}{T} C_1$, так как первый соответствует диамагнетизму, а второй — парамагнетизму, а нам известно, что в веществах, имеющих парамагнитный, т. е. постоянный момент, диамагнетизм всегда гораздо слабее, чем парамагнетизм. Поэтому мы можем ожидать, что при высоких температурах постоянная Коттон-Мутона будет приблизительно пропорциональна T^{-1} . Действительно, наблюдение показало такого рода температурную зависимость — постоянные убывали с возрастанием температуры¹.

Тот факт, что двойное преломление в направлении, перпендикулярном полю, пропорционально H^2 , показывает, что если мы берем в явлении Фарадея только члены первого порядка относительно H , то при переходе от продольного к поперечному направлению круговое двойное преломление всегда равно нулю. Если же мы берем также члены второго порядка, то при некотором определенном промежуточном направлении наблюдения произойдет переход от кругового двойного преломления к линейному. Хотя при экспериментах почти не пользуются такими направлениями, но все же интересно проследить, как происходит этот переход, для чего мы сейчас вычислим общий случай магнитооптического эффекта; мы можем, не нарушая общности, так повернуть систему координат вокруг направления поля, чтобы волновая нормаль была в плоскости xz :

$$\hat{s}_x = \sin \theta, \quad \hat{s}_y = 0, \quad \hat{s}_z = \cos \theta. \quad (15)$$

Составляющие вектора \mathcal{D} параллельны и перпендикулярны к плоскости xz :

$$\mathcal{D}_{\parallel} = \mathcal{D}_x \cos \theta - \mathcal{D}_z \sin \theta, \quad \mathcal{D}_{\perp} = \mathcal{D}_y. \quad (16)$$

Далее, имеем условия поперечности:

$$\mathcal{D}_x \sin \theta + \mathcal{D}_z \cos \theta = 0. \quad (17)$$

Решение уравнений 16, 17 дает:

$$\mathcal{D}_x = \mathcal{D}_{\parallel} \cos \theta, \quad \mathcal{D}_y = \mathcal{D}_{\perp}, \quad \mathcal{D}_z = -\mathcal{D}_{\parallel} \sin \theta. \quad (18)$$

Тогда оптические основные уравнения главы V, § 58 (14) дают:

$$\mathcal{D}_{\parallel} = n^2 \mathcal{E}_{\parallel}, \quad \mathcal{D}_{\perp} = n^2 \mathcal{E}_{\perp}, \quad (19)$$

где \mathcal{E}_{\parallel} и \mathcal{E}_{\perp} образованы аналогично \mathcal{D}_{\parallel} и \mathcal{D}_{\perp} .

¹ A. Cotton u. H. Mouton, C. R. Acad. Sci., Paris, т. 145 (1907), стр. 229.

¹ G. Szivessy, Ann. Physik (4), т. 69 (1922), стр. 236.

Решим теперь уравнения (1) относительно составляющих \mathcal{E} и мы получим с помощью уравнений (16):

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{E}_{\parallel} &= \left(\frac{\epsilon_e \cos^2 \vartheta}{\epsilon_e^2 - \epsilon'^2} + \frac{\sin^2 \vartheta}{\epsilon_0} \right) \mathcal{D}_{\parallel} + \frac{i\epsilon' \cos \vartheta}{\epsilon_e^2 - \epsilon'^2} \mathcal{D}_{\perp}, \\ \mathcal{E}_{\perp} &= -\frac{i\epsilon' \cos \vartheta}{\epsilon_e^2 - \epsilon'^2} \mathcal{D}_{\parallel} + \frac{\epsilon_e}{\epsilon_e^2 - \epsilon'^2} \mathcal{D}_{\perp}. \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

Решая совместно (19) и (20), получим:

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{D}_{\parallel} \left(\frac{\epsilon_e \cos^2 \vartheta}{\epsilon_e^2 - \epsilon'^2} + \frac{\sin^2 \vartheta}{\epsilon_0} - \frac{1}{n^2} \right) + \mathcal{D}_{\perp} \frac{i\epsilon' \cos \vartheta}{\epsilon_e^2 - \epsilon'^2} &= 0, \\ -\mathcal{D}_{\parallel} \frac{i\epsilon' \cos \vartheta}{\epsilon_e^2 - \epsilon'^2} + \mathcal{D}_{\perp} \left(\frac{\epsilon_e}{\epsilon_e^2 - \epsilon'^2} - \frac{1}{n^2} \right) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

Отсюда мы получаем для отношения амплитуд:

$$\frac{\mathcal{D}_{\parallel}}{\mathcal{D}_{\perp}} = \frac{-\frac{i\epsilon' \cos \vartheta}{\epsilon_e^2 - \epsilon'^2}}{\frac{\epsilon_e \cos^2 \vartheta}{\epsilon_e^2 - \epsilon'^2} + \frac{\sin^2 \vartheta}{\epsilon_0} - \frac{1}{n^2}} = \frac{\frac{\epsilon_e}{\epsilon_e^2 - \epsilon'^2} - \frac{1}{n^2}}{\frac{i\epsilon' \cos \vartheta}{\epsilon_e^2 - \epsilon'^2}}. \quad (22)$$

Это дает нам прежде всего квадратное уравнение для n^2 , аналогичное волновому уравнению:

$$\left(\frac{\epsilon_e \cos^2 \vartheta}{\epsilon_e^2 - \epsilon'^2} + \frac{\sin^2 \vartheta}{\epsilon_0} - \frac{1}{n^2} \right) \left(\frac{\epsilon_e}{\epsilon_e^2 - \epsilon'^2} - \frac{1}{n^2} \right) = \frac{\epsilon'^2 \cos^2 \vartheta}{(\epsilon_e^2 - \epsilon'^2)^2}. \quad (23)$$

Отсюда следует:

$$\begin{aligned} \frac{1}{n^2} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\epsilon_e (2 - \sin^2 \vartheta)}{\epsilon_e^2 - \epsilon'^2} + \frac{\sin^2 \vartheta}{\epsilon_0} \right) \pm \\ &\pm \sqrt{\frac{\sin^4 \vartheta}{4} \left(\frac{\epsilon_e}{\epsilon_e^2 - \epsilon'^2} - \frac{1}{\epsilon_0} \right)^2 + \frac{\epsilon'^2 \cos^2 \vartheta}{(\epsilon_e^2 - \epsilon'^2)^4}}. \end{aligned} \quad (24)$$

Таким образом отношение амплитуд

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{D}_{\parallel}}{\mathcal{D}_{\perp}} &= \\ &= -i \frac{\frac{\sin^2 \vartheta}{2} \left(\frac{\epsilon_e}{\epsilon_e^2 - \epsilon'^2} - \frac{1}{\epsilon_0} \right) \pm \sqrt{\frac{\sin^4 \vartheta}{4} \left(\frac{\epsilon_e}{\epsilon_e^2 - \epsilon'^2} - \frac{1}{\epsilon_0} \right)^2 + \frac{\epsilon'^2 \cos^2 \vartheta}{(\epsilon_e^2 - \epsilon'^2)^4}}}{\frac{\epsilon'}{\epsilon_e^2 - \epsilon'^2} \cos \vartheta}. \end{aligned} \quad (25)$$

Проверим эти формулы для обоих известных предельных случаев.

1. Распространение параллельно полю $\vartheta = 0$:

$$\frac{1}{n^2} = \frac{\epsilon_e \mp \epsilon'}{\epsilon_e^2 - \epsilon'^2} = \frac{1}{\epsilon_e \pm \epsilon'}, \quad \frac{\mathcal{D}_{\parallel}}{\mathcal{D}_{\perp}} = \pm i,$$

и так как $\mathcal{D}_{\parallel} = \mathcal{D}_x$, $\mathcal{D}_{\perp} = \mathcal{D}_y$,

$$n_{\pm}^2 = \epsilon_e \mp \epsilon', \quad \frac{\mathcal{D}_y}{\mathcal{D}_x} = \mp i. \quad (26)$$

Это соответствует распространению двух волн с круговой поляризацией, как мы уже знаем из § 78 (9).

2. Распространение перпендикулярно к полю, $\vartheta = \pi/2$:

$$\frac{1}{n^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\epsilon_e}{\epsilon_e^2 - \epsilon'^2} + \frac{1}{\epsilon_0} \right) \pm \frac{1}{2} \left(\frac{\epsilon_e}{\epsilon_e^2 - \epsilon'^2} - \frac{1}{\epsilon_0} \right), \quad (27)$$

следовательно,

$$\frac{1}{n_1^2} = \frac{\epsilon_e}{\epsilon_e^2 - \epsilon'^2}, \quad \frac{1}{n_2^2} = \frac{1}{\epsilon_0} \quad (28)$$

аналогично формуле (8) и соответственно обоим случаям:

$$\mathcal{D}_{\perp} = 0, \quad \mathcal{D}_{\parallel} = 0. \quad (29)$$

Таким образом в этом случае мы имеем линейное двойное преломление, что согласно с результатами, полученными в начале этого параграфа.

Для распространения в косом направлении мы получим следующее.

Вычеркнув члены второго порядка относительно H , т. е. полагая $\epsilon_e = \epsilon_0 = \epsilon$ и учитывая только член, содержащий f , мы получим:

$$\frac{1}{n^2} = \frac{1}{\epsilon} \pm \frac{\epsilon'}{\epsilon^2} \cos \vartheta, \quad (30)$$

следовательно:

$$n_{-} - n_{+} = \frac{\epsilon'}{\epsilon} \cos \vartheta \quad (31)$$

и

$$\frac{\mathcal{D}_{\parallel}}{\mathcal{D}_{\perp}} = \pm i. \quad (32)$$

Тогда мы получим для каждого направления круговое двойное преломление, величина которого пропорциональна $\cos \vartheta$; следовательно, при переходе от направления, параллельного полю, к перпендикулярному, эта величина стремится к нулю. При поперечном направлении двойного преломления вообще нет.

Наоборот, рассматривая только члены второй степени, т. е. полагая $\epsilon' = 0$, мы этим самым отбрасываем явление Фарадея и получаем:

$$\left(\frac{\mathfrak{D}_{\parallel}}{\mathfrak{D}_{\perp}}\right)_{+} = \infty, \left(\frac{\mathfrak{D}_{\parallel}}{\mathfrak{D}_{\perp}}\right)_{-} = 0. \quad (33)$$

Это обыкновенное двойное преломление, как в одноосном кристалле:

$$n_{-} - n_{+} = \frac{\epsilon_0}{2} \sin^2 \vartheta \left(\frac{1}{\epsilon_e} - \frac{1}{\epsilon_o} \right). \quad (34)$$

В общем случае оба рода двойного преломления складываются, причем в продольном направлении наблюдается только круговое, а в поперечном — только линейное. Во всяком другом направлении имеет место эллиптическое двойное преломление, т. е. распространяются два эллиптических колебания, большие оси которых соответственно параллельны и перпендикулярны главному сечению и которые имеют несколько различные показатели преломления. При переходе от $\vartheta = 0$ к $\vartheta = \pi/2$ эллипсы переходят от окружности к прямой линии.

§ 80. ЯВЛЕНИЕ КЕРРА

Рассмотрим теперь случай, когда прозрачное тело становится двояко преломляющим под действием электрического поля. Это явление, которое тщетно пытался обнаружить Фарадей, было открыто в 1875 г. Керром¹, имя которого оно носит. Керр наблюдал это явление на тонких стеклянных пластинках между металлическими электродами. Когда свет идет через пластинку, перпендикулярную к электрическому полю конденсатора, то мы наблюдаем через скрещенные николи изменение освещения, которое нельзя устранить вращением анализатора; следовательно, свет поляризован эллиптически. Общее исследование показало, что вещество под действием поля ведет себя, как одноосный кристалл с осью, параллельной полю.

Относительно твердых тел надо иметь в виду, что здесь это явление может быть вторичным, т. е. электрическое поле производит сначала механическую деформацию, следствием которой является оптическая анизотропия. Но можно различными путями убедиться в том, что наряду с этим косвенным действием поля существует также и прямое. Прежде всего Керр (1879) указывал на двойное преломление в жидкости, например в сероуглероде, где механическая анизотропия исключается; даже в газах удалось получить двойное преломление. Затем можно разделить оба эти явления, воспользовавшись тем обстоятельством, что при внезапном включении или выключении поля механическое действие происходит с некоторой инерцией, тогда как явление

Керра в собственном смысле слова (наблюдаемое в чистом виде в жидкостях и газах) практически свободно от инерции (см. стр. 497).

Теория этого явления¹ заключена в наших общих формулах § 77 (24) по (29). Нам придется уточнить их только в одном пункте. В формулах § 77 (24) среднее значение тензора поляризации определяется для вещества, находящегося под действием внешнего поля F , причем среднее берется по всем направлениям молекул, но электрическое и магнитное поля обладают неодинаковой симметрией относительно плоскостей отражения. Плоскостью симметрии для магнитного поля служит плоскость, перпендикулярная к его направлению. Плоскостью же симметрии электрического поля параллельна его направлению. При вычислениях средних в § 77 это обстоятельство не учитывалось.

Что касается магнитного поля, для которого плоскость симметрии перпендикулярна к его направлению, то из этого факта не вытекает никакого изменения формул, так как поворот оси z на 180° , очевидно, не влияет на величины § 77 (24), потому что единственная составляющая тензора \bar{A} , в которую z входит как индекс, есть A_{zz} .

Но в уравнении электрического эффекта необходимо учесть наличие плоскостей симметрии, параллельных полю, внеся соответствующее изменение в уравнение. Например, если направление оси x мы обратим путем отражения от плоскости yz , то соотношения между поляризацией p и световым полем \mathfrak{E} не изменятся только в том случае, когда $\bar{A}_{xy} = 0$. Но согласно § 77 (24с) это означает, что в электрическом поле величина f должна исчезнуть. Это видно также из определения величины f через молекулярные константы [§ 77 (28a,b)].

Но при этом уточнении из уравнения § 77 (29) исчезают все линейные относительно F члены. В выражение F нужно подставить не непосредственно внешнее электрическое поле E , а действующее поле $E \frac{\epsilon^0 + 2}{3}$, где ϵ^0 есть статическая диэлектрическая постоянная. Тогда уравнение § 77 (33) точно совпадает

¹ Первая теория явления Керра была дана Фогтом (W. Voigt, Lehrbuch d. Magneto- u. Elektrooptik, стр. 353. Leipzig u. Berlin, 1908). В ней учитывается только прямое действие поля на тензор деформации, т. е. наша постоянная b_0 в § 77 (27a). Ориентирующее действие поля вывел сам Керр [Philos. Mag., т. 50 (1875), стр. 446] для объяснения найденного им двойного преломления. Р. Languevin [Ann. Chim. et Phys., т. 5 (1905), стр. 70; Le Radium, т. 7 (1910), стр. 243]; J. J. Larmor [Phil. s. Trans. Roy. Soc. London (A), т. 190 (1897), стр. 232] и др. математически разработали эту теорию, но только для случая, когда молекула не имеет электрического момента, следовательно, здесь идет речь о тех членах константы b_1 в § 77 (27b), которые не исчезают при $p_0 = 0$. Общий случай с учетом электрического собственного момента был исследован Борном [M. Born, Abh. Berl. Akad., 1916, стр. 614, особ. стр. 647; Ann. Physik (4), т. 55 (1918), стр. 177, особ. стр. 215]. Здесь, кроме дополнительных членов b_1 , появляется также константа b_2 из § 77 (27с), следовательно, температурная зависимость в общем виде § 77 (25b).

¹ J. Kerr. Philos. Mag. (4), т. 50 (1875), стр. 337, 446; (5), т. 8 (1879), стр. 85, 229; т. 13 (1882), стр. 53, 248; т. 37, стр. 380; т. 38 (1894), стр. 144.

с формулами для одноосного кристалла с главными диэлектрическими постоянными:

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_e &= \epsilon + E^2 N(a-b) \frac{\epsilon+2}{3} \left(\frac{\epsilon^0+2}{3} \right)^2, \\ \epsilon_o &= \epsilon + E^2 N(a+2b) \frac{\epsilon+2}{3} \left(\frac{\epsilon^0+2}{3} \right)^2. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Таким образом геометрические соотношения при распространении света остаются без изменения.

Характеристической константой этого явления служит двойное преломление перпендикулярно к полю. *Постоянной Керра* называется выражение:

$$B = \frac{n_o - n_e}{\lambda E^2} = N \frac{n^2 + 2}{6n} \left(\frac{n^0 + 2}{3} \right)^2 \frac{3b}{\lambda}. \quad (2)$$

Здесь используется формула § 79 (12) (при $f=0$ и $F=E \frac{\epsilon^0+2}{3}$ вместо $F=H$). (Вместо B часто встречается величина $B\lambda = K_e$). Кроме того, для искусственного двойного преломления, в отличие от любого одноосного кристалла, имеет место согласно § 79 (11) соотношение:

$$\frac{n_o - \bar{n}}{n_e - \bar{n}} = -2. \quad (3)$$

Значение постоянных Керра, разумеется, зависит от длины волны λ используемого света и от температуры испытуемого вещества. Для сероуглерода, который часто служит нормальным веществом, при 20° С и натровом свете ($\lambda = 589 \text{ м}\mu$),

$$B = 3,21 \cdot 10^{-7},$$

где E измерено в абсолютных электростатических единицах (1 эл. ст. ед. = 300 В/см). Относительные измерения других веществ легко произвести методом компенсации, причем нормальной жидкостью служит сероуглерод.

Численные значения сильно отличаются, как показывает табл. 21¹.

Величина электрического двойного преломления является мерой молекулярной анизотропии, точнее мерой констант b_0 , b_1 , b_2 [§ 77 (27)], из которых образуется выражение b согласно § 77 (25b):

$$b = b_0 + \frac{b_1}{kT} + \frac{b_2}{k^2 T^2}.$$

¹ Таблица эта заимствована из Müller-Pouillet, Lehrb. d. Physik, 11 изд., т. II 2 пол., 2 ч., стр. 2218.

Таблица 21

Константы Керра для различных жидкостей и родов стекла при 20°С. Свет натрия

	$B \cdot 10^7$
Бензол C_6H_6	0,60
Сероуглерод CS_2	3,21
Хлороформ $CHCl_3$	-3,46
Вода H_2O	4,7
Хлорбензол C_6H_5Cl	10,0
Нитротолуол $C_6H_7NO_2$	123
Нитробензол $C_6H_5NO_2$	220
Флинтглас Шотта ¹	
№ 2 О 3031	0,029
О 4818	0,099
С 350	0,14

Сделаем разложение:

$$B = B_0 + B_1 + B_2. \quad (4)$$

Члены B_1 и B_2 , зависящие от температуры, при обычных и низких температурах велики по сравнению с членом B_0 , представляющим деформацию молекулы непосредственно световым полем.

Для всех молекул простой структуры, и прежде всего для двухатомных молекул, оптическая система главных осей точно или по крайней мере с большим приближением совпадает с диэлектрической (статической). Можно приравнять нулю смешанные члены α_{xy} , а вместо α_{xx} написать просто α_x . Тогда для веществ, не имеющих диполей ($p^{(0)} = 0$), постоянная, определяющая явление Керра, равна:

$$b_1 = \frac{1}{45} [(\alpha_x - \alpha_y)(\alpha_x^0 - \alpha_y^0) + (\alpha_y - \alpha_z)(\alpha_y^0 - \alpha_z^0) + (\alpha_z - \alpha_x)(\alpha_z^0 - \alpha_x^0)]. \quad (5)$$

Для веществ с диполями в это выражение входят также члены, содержащие p^0 , но так как они умножены на малые величины α_{xyz} , то они не имеют существенного значения; кроме того,

¹ По измерениям О. Д. Тауэрна (Ann. Physik, т. 32 (1910), стр. 1034); механическое двойное преломление выведено по исследованиям F. Pockels'a Göttinger Abh., т. 39 (1893)].

² Номера представляют собой фабричную нумерацию плашки.

в этом случае имеется член:

$$b_2 = \frac{1}{45} [(a_x - a_y)(p_x^{02} - p_y^{02}) + (a_y - a_z)(p_y^{02} - p_z^{02}) + (a_z - a_x)(p_z^{02} - p_x^{02})]. \quad (6)$$

Согласно экспериментальным данным этот член вообще велик по сравнению с членами, содержащими b_1 .

Для жидкости теоретические формулы, в особенности, касающиеся температурной зависимости, не вполне справедливы, так как здесь часто имеет место ассоциация молекул, зависящая от температуры. Зато в последнее время были проведены многочисленные исследования явления Керра в газах, вполне подтвердившие теорию¹.

Полагая, что газы удовлетворяют уравнению идеальных газов, мы имеем следующее выражение для числа молекул в единице объема при давлении p :

$$N = \frac{p}{kT}. \quad (7)$$

Подставляя это значение в (2), мы получим ($\epsilon^0 = 1$):

$$B = p \frac{n^2 + 2}{6n} \left(\frac{n^2 + 2}{3} \right)^2 \frac{3}{\lambda} \left(\frac{b_0}{kT} + \frac{b_1}{k^2 T^2} + \frac{b_2}{k^3 T^3} \right) = B_0 + B_1 + B_2. \quad (8)$$

Таблица 22
Температурная зависимость констант Керра для газов²

1	2	3	4	5	6
T	Давление в мм рт. ст.	$B \cdot 10^{10}$ при $\lambda = 589$ мμ	$B \cdot 10^{10}$ при $\lambda = 589$ мμ 760 мм, идеальное газовое уравнение	BT^3	BT^3
Хлористый этил, C_2H_5Cl					
291	880	10,59	9,16	$7,76 \cdot 10^5$	$2,26 \cdot 10^5$
328,7	951	8,07	6,46	6,98	2,29
377	1050	5,78	$4,19 \pm 0,04$	5,95	2,24
Бромистый метил, CH_3Br					
293	950	9,37	7,49	$6,43 \cdot 10^5$	$1,88 \cdot 10^5$
368	1100	5,51	$3,80 \pm 0,08$	5,15	1,89
Сероуглерод, CS_2					
329,7	903	4,27	3,59	$3,90 \cdot 10^5$	$1,29 \cdot 10^5$
379,7	1090	3,73	2,60	3,75	1,42

¹ Н. А. Stuart, Kerreffekt u. Molekülbau. Z. Physik, т. 55 (1929), стр. 358; Über den Kerreffekt an Gasen u. Dämpfen, ч. I, Z. Phys., т. 59 (1930), стр. 13; ч. II; там же, т. 63 (1930), стр. 533.

² По Н. А. Stuart, Über den Kerreffekt и т. д., часть II, стр. 538.

В табл. 22 приведены измерения, сделанные при различных температурах и давлениях (столбец 3), которые пересчитаны на нормальное давление (столбец 4). Сравнивая с теорией, мы должны иметь в виду, что оба первых газа, хлористый этил и бромистый метил, имеют молекулярные диполи, а последний, сероуглерод, не имеет диполей. Полагая, что постоянная b_0 прямого воздействия поля мала, мы должны ждать, что согласно (8) произведение BT^3 для дипольных газов, а для газов, не имеющих диполей, произведение BT^3 , будет приблизительно постоянным. Оба последних столбца показывают, что это так и есть в действительности.

Приведем также значения постоянных Керра для некоторых газов¹.

Таблица 23
Постоянные Керра для некоторых газов

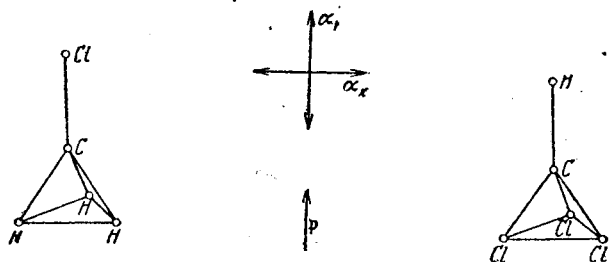
	Температура в °C	Давление в мм рт. ст.	$B \cdot 10^{10}$ набл. при 589 мμ	$B \cdot 10^{10}$ при 589 мμ и пересчит. на 760 мм. Идеальное газовое уравнение
Сероуглерод	56,7	903	4,27	3,59
Четыреххлористый углерод	99,4	1015	$< \pm 0,65$	$< \pm 0,03$
Этиловый эфир	62,7	1427	$-1,24$	$-0,66$
Этиленовый спирт	19,5	838	$-1,90$	$-1,73$
Ацетон	83,1	1356	9,60	5,38
Метилловый спирт	98,8	1350	$< \pm 0,13$	$< \pm 0,07$
Этиловый спирт	102,0	1258	$< \pm 0,14$	$< \pm 0,08$
	18,0	880	10,59	9,16

Еще одно замечание относительно знаков явления Керра. Мы ограничиваемся рассмотрением таких молекул, для которых оптическая система главных осей совпадает с диэлектрической, т. е. приписываем постоянным b_1 и b_2 форму (5) и (6). Опыт показывает, что постоянная Керра B может быть и отрицательной. По нашему предположению из (5) и (6) следует, что b_1 всегда положительно: так как направления наибольших диэлектрической и оптической поляризуемостей совпадают, то множители входящих в (5) произведений имеют всегда одинаковые знаки. Если B отрицательно, то отрицательный знак может происходить только от дипольного члена b_2 . Из этого следует, что постоянная Керра может быть отрицательной только для дипольных веществ, и, действительно, опыт подтверждает в этом

¹ По Н. А. Stuart, Über den Kerreffekt usw., ч. II, стр. 538.

пункте теорию. Но член b_2 может быть отрицателен только в том случае, когда направление максимальной оптической поляризуемости не совпадает с направлением электрического момента, а перпендикулярно или почти перпендикулярно к нему.

Это очень хорошо видно на примере хлористого метила и хлороформа. Обе молекулы имеют осевую симметрию, и электрический момент направлен по оси симметрии $\alpha_v = C - Cl$, соответственно $C - H$ (фиг. 192). Для молекулы CH_3Cl ось наибольшей



Фиг. 192. Главные поляризуемости для хлористого метила и хлороформа.

поляризуемости есть $Cl - C$ (см. также § 81, стр. 497), т. е. постоянная Керра положительна. Напротив, для молекулы $CHCl_3$, благодаря сильной поляризуемости и взаимодействию трех атомов Cl , $C - H$ есть ось наименьшей поляризуемости, таким образом электрический момент перпендикулярен α_{max} и постоянная Керра отрицательна.

В некоторых случаях положительное b_1 может перекрыть отрицательное b_2 . Но так как b_1 умножается на $1/kT$, а b_2 на $1/k^2T^2$, мы можем, измеряя постоянные Керра при двух различных температурах, определить отдельно b_1 и b_2 и, следовательно, найти знак b_2 . По этой же причине при очень высоких температурах явление Керра положительно для всех веществ.

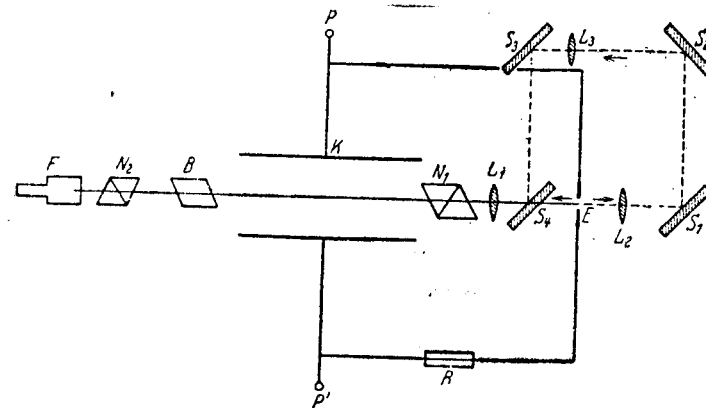
Опыт покаывает, что для большинства веществ направление наибольшей поляризации совпадает с направлениями наибольшей длины молекулы. Зная знак явления Керра и, кроме того, направление электрического момента, мы можем судить о строении молекулы (см. § 81).

Сделаем еще несколько замечаний об инерции электрического двойного преломления. Ее измеряют с помощью прибора Абрагама и Лемуана¹. На фиг. 193 схематически изображен этот прибор. Электрическое поле создается быстрыми электрическими колебаниями при разряде конденсатора; искровой промежуток (разрядник) E служит вместе с тем источником света. Свет этой искры отчасти проходит прямо через жидкость между пластинками конденсатора K , отчасти отражается от зеркал S_1 по S_4 и затем попадает в конденсатор. Таким образом, зная

¹ H. Abraham u. J. Lemoine, C. R. Acad. Sci. Paris, т. 129 (1899), стр. 206.

длину пути и скорость света, легко вычислить время между разрядом конденсатора, происходящим одновременно с появлением искры, и попаданием вспышки в конденсатор. Вращая николь N_2 , можно измерить двойное преломление.

Таким образом было найдено, что время, в течение которого исчезает двойное преломление в сероуглероде, равно приблизительно 10^{-8} сек. Малая величина этого так называемого времени релаксации ясно указывает на то, что здесь мы имеем дело с первичным эффектом (а не со следствием механической анизотропии).



Фиг. 193. Прибор Абрагам-Лемуана. PP' — полюсы высоковольтного трансформатора, E — искровой промежуток как источник света, R — жидкое сопротивление, K — пластинка конденсатора в исследуемой жидкости (конденсатор Керра), N_1, N_2 — николи, B — двоякопреломляющая призма, F — зрительная труба, L_1, L_2, L_3 — линзы, S_1, S_2, S_3, S_4 — зеркала (S_4 — откидное).

Благодаря этому отсутствию инерции элемент Керра является идеальным реле для превращения оптических сигналов в электрические. В настоящее время он широко применяется в технике¹, например, в телевидении и звуковом кино. В научных исследованиях также пользуются элементами Керра для измерения очень малых промежутков времени, например, времени затухания флуоресценции и т. п.²

§ 81. РАССЕЯНИЕ СВЕТА

Мы уже указывали в конце § 74 и 75, что свет распространяется по обычным законам уравнений Максвелла только в идеальной кристаллической решетке при очень низкой температуре.

¹ В деле технического применения особенно велики заслуги А. Каролуса [Physik Z., т. 29 (1928), стр. 698].

² Более подробные литературные сведения см. у P. Pringsheim, Fluoreszenz und Phosphoreszenz, 3 изд. Strukt. d. Mat., т. VI, Berlin, 1928.

В реальных веществах всегда имеет место потеря света вследствие рассеяния, происходящего от того, что молекулы сами по себе или вследствие теплового движения расположены не идеально правильно.

Рассеяние света называют также явлением Тиндаля. Тиндаль¹ наблюдал путь светового луча в мутных средах (коллоидальных растворах); впоследствии он производил также опыты над газами и нашел, что рассеянный свет поляризован. Мы уже говорили в главе VI, § 70—71 о рассеянии во взвешенных частицах. Мы вернемся к нему в этом параграфе. Главным образом мы будем рассматривать здесь молекулярное светорассеяние, которое имеется даже в самых чистых веществах вследствие атомной структуры и теплового движения. Это явление интересно по различным причинам: во-первых, оно дает меру величины спонтанных отклонений и позволяет определить число молекул в $см^3$, а кроме того, наблюдение над поляризацией рассеянного света дает возможность судить об анизотропии молекулы, совершенно аналогично тому, как мы это показали выше (§ 80) для явления Керра.

Мы уже видели в конце § 74 и 75, что рассеянный свет зависит от флуктуаций электрического момента \mathfrak{P} на единицу объема вокруг своего среднего значения $\bar{\mathfrak{P}}$. Связанные со средним значением $\bar{\mathfrak{P}}$ электромагнитные волны, складываясь, дают плоскую проходящую волну. Разности

$$\mathfrak{P} - \bar{\mathfrak{P}} = \Delta \mathfrak{P} \quad (1)$$

дают некогерентные сферические волны, которые полностью не уничтожаются и распространяются во все стороны в виде рассеянного света.

Поэтому нам нужно сначала найти, как создается электрическое поле колеблющегося диполя и какая энергия излучения посылается в каждом направлении. С этой целью обратимся к формулам § 74 (4) и (3):

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{E} &= \text{grad div } \mathfrak{Z} - \frac{1}{c^2} \ddot{\mathfrak{Z}}, \\ \mathfrak{H} &= \frac{1}{c} \text{rot } \mathfrak{Z}, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

полагаем в них вектор Герца \mathfrak{Z} равным согласно § 74 (5):

$$\mathfrak{Z} = \frac{[\mathfrak{p}]}{r} = -\frac{\mathfrak{p} \left(t - \frac{r}{c} \right)}{r}, \quad (3)$$

где $\mathfrak{p}(t)$ есть момент колеблющегося диполя, а квадратные скобки означают запаздывание. На большом расстоянии от диполя можно пренебречь высшими членами относительно $1/r$. Для остальных членов получим:

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{E} &= \frac{1}{c^2 r^3} \mathfrak{r} \times (\mathfrak{r} \times \ddot{\mathfrak{p}}), \\ \mathfrak{H} &= -\frac{1}{c^2 r^2} (\mathfrak{r} \times \ddot{\mathfrak{p}}). \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Пусть диполь совершает гармонические колебания:

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_0 e^{i\omega t}; \quad (5)$$

тогда

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{E} &= -\frac{\omega^2}{c^2 r^3} \mathfrak{r} \times (\mathfrak{r} \times \mathfrak{p}), \\ \mathfrak{H} &= \frac{\omega^2}{c^2 r^2} \mathfrak{r} \times \mathfrak{p}. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Прежде чем заняться молекулярным рассеянием, вернемся к явлению Тиндаля в мутных средах, о котором мы говорили в главе VI, § 70 и 71. Мы утверждали там, что парциальные волны первого порядка, дифрагируемые маленькими диэлектрическими полупроводящими шариками, можно представлять себе как поля колеблющихся диполей. Для доказательства примем, что момент \mathfrak{p} колеблется в направлении x , и введем полярные координаты, как в главе VI, § 70 (8). Тогда из (6) следует:

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{E}_x &= \frac{\omega^2}{c^2} p_0 (\sin^2 \vartheta \sin^2 \varphi + \cos^2 \vartheta) \frac{e^{-\frac{i\omega}{c} r}}{r}, \\ \mathfrak{E}_y &= -\frac{\omega^2}{c^2} p_0 \sin^2 \vartheta \sin \varphi \cos \varphi \frac{e^{-\frac{i\omega}{c} r}}{r}, \\ \mathfrak{E}_z &= -\frac{\omega^2}{c^2} p_0 \sin \vartheta \cos \vartheta \cos \varphi \frac{e^{-\frac{i\omega}{c} r}}{r}, \\ \mathfrak{H}_x &= 0, \\ \mathfrak{H}_y &= \frac{\omega^2}{c^2} p_0 \cos \vartheta \frac{e^{-\frac{i\omega}{c} r}}{r}, \\ \mathfrak{H}_z &= -\frac{\omega^2}{c^2} p_0 \sin \vartheta \sin \varphi \frac{e^{-\frac{i\omega}{c} r}}{r}. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

¹ J. Tyndall, Proc. Roy. Soc., Lond., т. 17 (1868), стр. 92, 222, 317.

Пересчитав на полярные координаты согласно главе VI, § 70 (9) например:

$$\mathcal{E}_\theta = \mathcal{E}_x \frac{\partial \vartheta}{\partial x} + \mathcal{E}_y \frac{\partial \vartheta}{\partial y} + \mathcal{E}_z \frac{\partial \vartheta}{\partial z}, \quad (8)$$

получим:

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{E}_\theta &= \frac{\omega^2}{c^2} p_0 \cos \vartheta \cos \varphi \frac{e^{-\frac{i\omega}{c}r}}{r}, \\ \mathcal{E}_\varphi &= -\frac{\omega^2}{c^2} p_0 \frac{\sin \varphi}{\sin \vartheta} \frac{e^{-\frac{i\omega}{c}r}}{r}, \\ \mathcal{H}_\theta &= \frac{\omega^2}{c^2} p_0 \sin \varphi \frac{e^{-\frac{i\omega}{c}r}}{r}, \\ \mathcal{H}_\varphi &= \frac{\omega^2}{c^2} p_0 \frac{\cos \vartheta \cos \varphi}{\sin \vartheta} \frac{e^{-\frac{i\omega}{c}r}}{r}. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Сравним эти выражения с формулами главы VI, § 71 (11). Мы видим, что первая электрическая парциальная волна, действительно, имеет тот же вид, что приведенная здесь дипольная волна; но здесь, в (9), мы имеем дипольное колебание в пустоте с вещественной амплитудой, в то время как в главе VI, § 71 речь шла о дипольном колебании в среде с диэлектрической постоянной $\epsilon^{(a)}$ и с комплексной амплитудой, т. е. с разностью фаз относительно падающей волны. Не обращая внимания на это различие, мы найдем путем сравнения следующую формулу для максимальной амплитуды эквивалентного диполя:

$$\frac{\omega^2}{c^2} p_0 = \left| \frac{\alpha^3}{k_2^{(a)} \sqrt{\epsilon^{(a)}}} \frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} \right|. \quad (10)$$

Воспользовавшись (2) и § 70 (55с), найдем:

$$p_0 = R^3 \epsilon^{(a)} \left| \frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} \right| = R^3 \epsilon^{(a)} \sqrt{\frac{\omega^2 (\epsilon^{(i)} - \epsilon^{(a)})^2 + 16\pi^2 \sigma^2}{\omega^2 (\epsilon^{(i)} + 2\epsilon^{(a)})^2 + 16\pi^2 \sigma^2}}. \quad (11)$$

При отсутствии проводимости (n равно n) мы получим:

$$p_0 = R^3 \epsilon^{(a)} \frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} = R^3 \epsilon^{(a)} \frac{\epsilon^{(i)} - \epsilon^{(a)}}{\epsilon^{(i)} + 2\epsilon^{(a)}}. \quad (12)$$

Таким образом для рассеяния от диэлектрического шара имеет существенное значение его показатель преломления, точнее множитель $(n^2 - 1)/(n^2 + 2)$, хорошо известный нам из теории молекулярного преломления (§ 76).

Теперь займемся молекулярным рассеянием. При этом мы будем обращать внимание, главным образом, на поляризацию и с этой целью введем единичный вектор q , параллельный направлению, пропускаемому анализатором. Поэтому мы должны считать его перпендикулярным к радиус-вектору r :

$$qr = 0. \quad (13)$$

Тогда составляющая вектора электрического поля \mathcal{E} в направлении q , являющаяся световым вектором, равна:

$$\mathcal{E}q = -\frac{\omega^2}{c^2} \cdot \frac{1}{r^3} q [r \times (r \times p)] = \frac{\omega^2}{c^2} \frac{pq}{r}. \quad (14)$$

Интенсивность рассеянной волны, наблюдаемой в части пространства V , выражается формулой [см. § 75 (64)]:

$$|\Delta \sum \mathcal{E}q|^2 = J, \quad (15)$$

где значек Δ означает отклонение от среднего значения величины (14), а суммирование производится по всем сферическим волнам, исходящим от отдельных молекул внутри V . Таким образом, подставляя (14) в (15), мы получим для интенсивности излучения, рассеиваемого объемом V :

$$J = \frac{\omega^4}{c^4} \cdot \frac{1}{r^2} |\Delta \sum_k p_k q|^2 = \frac{(2\pi)^4}{\lambda^4 r^2} |\Delta \sum_k p_k q|^2, \quad (16)$$

где p_k есть мгновенный момент k -той молекулы.

J пропорционально $\frac{1}{\lambda^4}$. Хотя квадрат отклонения момента и

зависит от частоты, т. е. от длины волны света, но в очень малой степени (точнее: на достаточном расстоянии от линии поглощения). Поэтому можно сказать: *интенсивность рассеяния света в основном обратно пропорциональна четвертой степени длины волны.*

Этим объясняется по Релею¹ голубой цвет неба и дополнительный к нему красный цвет солнца при низком стоянии, когда прямой свет должен пройти толстый воздушный слой. К этому явлению мы еще вернемся ниже.

Флуктуации величины $\sum_k p_k q$, очевидно, имеют две причины:

во-первых, флуктуирует число \mathcal{N} молекул в V :

$$\mathcal{N} = \bar{\mathcal{N}} + \Delta \mathcal{N}, \quad (17)$$

во-вторых, флуктуирует момент отдельной молекулы:

$$p_k = \bar{p}_k + \Delta p_k. \quad (18)$$

Следовательно, мгновенный момент в V :

$$\sum_k p_k = \sum_{k=1}^{\mathcal{N}} (\bar{p}_k + \Delta p_k) = \bar{p}_k (\bar{\mathcal{N}} + \Delta \mathcal{N}) + \sum_{k=1}^{\bar{\mathcal{N}}} \Delta p_k, \quad (19)$$

¹ Lord Rayleigh, Philos. Mag. (4), т. 41 (1871), стр. 107, 447; (5), т. 47 (1899), стр. 375; Sci. Pap. Bur. Stand., т. I, № 8, 9 т. II, № 247.

и

$$\Delta \sum_k p_k = \bar{p}_k \Delta \mathfrak{N} + \sum_{k=1}^{\mathfrak{N}} \Delta p_k. \quad (20)$$

Мы можем теперь принять, что флуктуация \mathfrak{N} и флуктуация моментов p_k статистически независимы друг от друга. При вычислении среднего значения величины $|\Delta \sum_k p_k q|^2$ член с произведениями отпадает, и мы получаем:

$$\begin{aligned} |\Delta \sum_k p_k q|^2 &= (\Delta \sum_k p_k q) (\Delta \sum_k p_k q)^* = |p_k q|^2 (\Delta \mathfrak{N})^2 + \\ &+ \left| \sum_{k=1}^{\mathfrak{N}} \Delta p_k \cdot q \right|^2. \end{aligned} \quad (21)$$

Таким образом мы можем вычислить отдельно влияние флуктуаций числа молекул и флуктуаций отдельных моментов и в конце сложить их.

Задача вычисления флуктуаций плотности решается статистической механикой. Мы ограничимся здесь идеальными газами, в которых отсутствуют взаимодействия между молекулами. Мы получим:

$$(\Delta \mathfrak{N})^2 = \overline{\mathfrak{N}} = NV, \quad (22)$$

где N есть число молекул в единице объема¹, при этом мы

¹ Приведем простое доказательство. Пусть единица объема разбита на две части V и $1-V$, где $V \ll 1$. Пусть очень большое число N молекул произвольно разбросано в единице объема. Вероятность того, что \mathfrak{N} из них попадут в объем V , равна:

$$W(\mathfrak{N}) = \frac{N!}{N!(N-\mathfrak{N})!} V^{\mathfrak{N}} (1-V)^{N-\mathfrak{N}},$$

так как вероятность того, что произвольно взятая молекула находится внутри V равна V , а вероятность того, что две независимые друг от друга молекулы находятся внутри V , равна V^2 и т. д. Аналогично $(1-V)^{N-\mathfrak{N}}$ представляет вероятность того, что $N-\mathfrak{N}$ независимых друг от друга молекул лежат вне объема V . Необходимо еще добавить факториал, чтобы выразить, что состояние в смысле распределения не изменяется при перестановке молекул внутри или вне объема V . По формуле бинома

$$\sum_{\mathfrak{N}=0}^N W(\mathfrak{N}) = 1.$$

Вычислим теперь среднее значение числа частиц V :

$$\bar{\mathfrak{N}} = \sum_{\mathfrak{N}=0}^N \mathfrak{N} \cdot W(\mathfrak{N}) = NV \sum_{\mathfrak{N}=1}^N \frac{(N-1)!}{(\mathfrak{N}-1)!(N-\mathfrak{N})!} V^{\mathfrak{N}-1} (1-V)^{N-\mathfrak{N}}.$$

полагаем, что объем V мал по сравнению с единицей объема. Далее, для идеальных газов можно положить, что флуктуации по направлениям также независимы друг от друга, так что мы можем отбросить члены с произведениями в выражении:

$$\left| \sum_{k=1}^{\mathfrak{N}} \Delta p_k \cdot q \right|^2; \quad (23)$$

тогда у нас останутся только члены, содержащие квадраты, число которых равно \mathfrak{N} и которые можно считать равными между собою, так что вся сумма (23) сведется к

$$\mathfrak{N} |\Delta p \cdot q|^2;$$

здесь Δp есть отклонение момента отдельной молекулы. Теперь уравнение (21) примет вид:

$$|\Delta \sum_k p_k \cdot q|^2 = \mathfrak{N} [|\overline{p q}|^2 + |\Delta p \cdot q|^2]. \quad (24)$$

Эту формулу можно еще упростить, заметив, что

$$|\Delta p \cdot q|^2 = |(p - \bar{p}) q|^2 = |p q|^2 - |\bar{p} q|^2. \quad (25)$$

Если мы теперь здесь заменим $\mathfrak{N} - 1$ через \mathfrak{N}' , то суммирование по \mathfrak{N}' будет происходить от 0 до $N-1$. Сумма будет опять равна 1 согласно теореме бинома, и мы получим:

$$\bar{\mathfrak{N}} = NV,$$

т. е. среднее значение числа молекул, находящихся в объеме V , так относится к полному числу молекул, как величина объема V к полному объему.

Аналогичным образом вычислим среднее значение:

$$\begin{aligned} \overline{\mathfrak{N}(\mathfrak{N}-1)} &= \sum_{\mathfrak{N}=0}^N \mathfrak{N}(\mathfrak{N}-1) W(\mathfrak{N}) = \\ &= V^2 N(N-1) \sum_{\mathfrak{N}=2}^{N-1} \frac{(N-2)!}{(\mathfrak{N}-2)!(N-\mathfrak{N})!} V^{\mathfrak{N}-2} (1-V)^{N-\mathfrak{N}}. \end{aligned} \quad (a)$$

Здесь снова возможна замена $\mathfrak{N}-2$ через \mathfrak{N}' и применение теоремы бинома. Из (a) следует:

$$\overline{\mathfrak{N}(\mathfrak{N}-1)} = N(N-1) V^2.$$

Теперь легко определить квадрат флуктуации:

$$(\Delta \mathfrak{N})^2 = (\mathfrak{N} - \bar{\mathfrak{N}})^2 = \overline{\mathfrak{N}^2} - \bar{\mathfrak{N}}^2 = \overline{\mathfrak{N}(\mathfrak{N}-1)} + \bar{\mathfrak{N}} - \bar{\mathfrak{N}}^2. \quad (b)$$

Если можно пренебречь 1 в сравнении с N , то

$$\overline{\mathfrak{N}(\mathfrak{N}-1)} = \bar{\mathfrak{N}}^2 = N^2 V^2,$$

так что (b) переходит в

$$(\Delta \mathfrak{N})^2 = \bar{\mathfrak{N}} = NV, \quad (22)$$

Подставив (25) в (24), найдем окончательно:

$$|\Delta \sum_k p_k \cdot q|^2 = \bar{N} |\bar{p} q|^2. \quad (26)$$

Эта формула показывает, что сила рассеяния пропорциональна среднему числу рассеивающих частиц в объеме V . Она дает рассеяние, происходящее от флуктуаций плотности и от колебаний моментов.

Мы примем сначала, что флуктуация момента отсутствует совсем; это предположение справедливо тогда, когда рассеивающими частицами являются атомы или вообще молекулы с осевой симметрией. Основанную на этом предположении упрощенную теорию впервые выдвинул Релей¹, который объяснил его голубой цвет неба (рассеяние вследствие флуктуаций плотности воздуха). Поэтому говорят о рассеянии Релея; оно выражается формулой (16), причем

$$|\Delta \sum_k p_k \cdot q|^2 = \bar{N} |\bar{p} q|^2. \quad (27)$$

Хотя это выражение, конечно, недостаточно для рассеяния в воздухе (двухатомные молекулы O_2 и N_2), но мы вычислим его, следуя историческому развитию теории. Согласно § 73 (19), (18):

$$\bar{p} = \alpha \mathcal{E}', \quad \alpha = \frac{1}{3} (\alpha_{xx} + \alpha_{yy} + \alpha_{zz}). \quad (28)$$

Поэтому

$$|\Delta \sum_k p_k q|^2 = \bar{N} \alpha^2 |\mathcal{E}' q|^2. \quad (29)$$

Для газов мы можем считать, что действующая сила поля \mathcal{E}' и поле падающего света \mathcal{E} равны; следовательно, согласно § 76 (17)

$$\alpha = \frac{n^2 - 1}{4\pi N}. \quad (30)$$

Ограничиваясь простым случаем, когда падающий свет поляризован линейно, т. е. $\mathcal{E} = \mathcal{E}'$ вещественно, мы можем ввести скалярное произведение:

$$\mathcal{E}' q = \mathcal{E} q = E \cos \psi, \quad (31)$$

где ψ есть угол между вектором колебания первичного света и служащим для наблюдения анализатором. Тогда окончательное выражение интенсивности света Релея будет согласно (16) и (29):

$$J = AE^2 \cos^2 \psi, \quad (32)$$

где

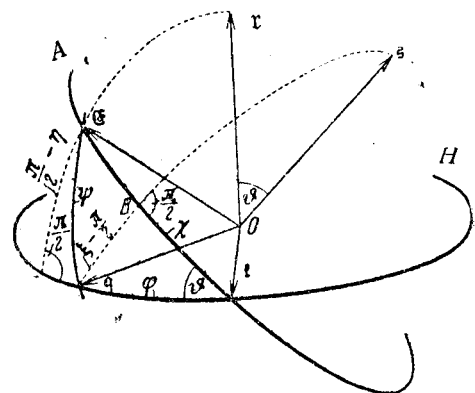
$$A = \bar{N} \frac{\pi^2 (n^2 - 1)^2}{N^2 r^2 \lambda^4} = \frac{V}{N} \frac{\pi^2 (n^2 - 1)}{r^2 \lambda^4}. \quad (33)$$

¹ См. стр. 501 сноска 1.

Таким образом интенсивность рассеяния при постоянной плотности (заданном N) пропорциональна числу \bar{N} молекул, участвующих в рассеянии объема V , а при постоянном объеме V рассеяния — обратно пропорциональна плотности N .

Исследуем теперь соотношения поляризации.

Перпендикулярная к лучу зрения плоскость H (изображенная горизонтально на фиг. 194) содержит направление колебаний q анализатора. Пусть \mathfrak{z} есть вектор в направлении волновых нормалей; в перпендикулярной к нему „экваториальной“ плоскости A находится направление колебаний \mathcal{E} возбуждающей волны (фиг. 194). Примем узловую линию \mathfrak{f} , т. е. линию пересечения плоскостей A и H , за ось, от которой будем отсчитывать углы, определяющие направления q и \mathcal{E} , а именно, углы φ между q и \mathfrak{f} в плоскости H , определяющие положение анализатора, и в плоскости A углы χ между \mathcal{E} и \mathfrak{f} , определяющие направление первичных колебаний. Обозначим ϑ угол между направлением волновых нормалей \mathfrak{z} и лучом зрения t .



Фиг. 194. Геометрические соотношения при светорассеянии.

$$t\mathcal{E} = \eta, \quad \mathcal{E}A = \frac{\pi}{2} - \eta, \quad \mathfrak{z}q = \xi,$$

$$Bq = \xi - \frac{\pi}{2}, \quad \mathfrak{f}\mathcal{E} = \chi, \quad \mathfrak{f}q = \varphi, \quad q\mathcal{E} = \psi.$$

Тогда сферический треугольник $\mathcal{E}\mathfrak{f}q$ дает для угла ψ между направлениями первичных и вторичных колебаний

$$\cos \psi = \cos \varphi \cos \chi + \sin \varphi \sin \chi \cos \vartheta. \quad (34)$$

Рассмотрим несколько частных случаев.

1. Если первичное излучение не поляризовано, и если E^2 есть его полная интенсивность, то интенсивность рассеянного излучения с направлением колебаний q есть:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} J d\chi &= AE^2 \frac{1}{2} (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi \cos^2 \vartheta) = \\ &= AE^2 \frac{1}{2} (1 - \sin^2 \varphi \sin^2 \vartheta) = \\ &= AE^2 \frac{1}{2} \sin^2 \xi. \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

Введенный здесь угол ξ удовлетворяет соотношению:

$$\pm \cos \xi = \sin \varphi \sin \vartheta. \quad (36)$$

Если взять эту формулу со знаком минус, то ξ имеет, как видно из фиг. 194, простой геометрический смысл: это угол между направлением падающего луча ϑ и направлением поляризации рассеянного света φ .

а) Если, в частности, направление зрения *параллельно* первичному лучу ($\vartheta = 0$, $\xi = \frac{\pi}{2}$), то множитель при AE^2 имеет независящее от φ значение $\frac{1}{2}$; следовательно, рассеянное излучение не поляризовано, и его интенсивность (вдвое большая, чем составляющая по φ) равна AE^2 .

б) Если луч зрения *перпендикулярен* к первичному лучу ($\vartheta = \frac{\pi}{2}$), то интенсивность в направлении, параллельном φ , равна $\frac{1}{2} AE^2 \cos^2 \varphi$; следовательно, вторичное излучение полностью поляризовано, и направление его колебаний перпендикулярно к первичному лучу.

2. Если при *поляризованном первичном свете* рассматривать рассеянный свет без анализатора, то интенсивность рассеянного света равна:

$$\left. \begin{aligned} \int_0^{2\pi} J d\varphi &= AE^2 \pi (\cos^2 \chi + \sin^2 \chi \cos^2 \vartheta) = \\ &= AE^2 \pi (1 - \sin^2 \chi \sin^2 \vartheta) = \\ &= AE^2 \pi \sin^2 \eta, \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

где

$$\pm \cos \eta = \sin \vartheta \sin \chi; \quad (38)$$

если взять формулу со знаком плюс, то η есть угол между направлением зрения η и направлением электрического поля \mathcal{E} .

а) Если луч зрения *параллелен* первичному лучу, то интенсивность рассеянного света равна πAE^2 и, следовательно, не зависит от направления поляризации первичного луча.

б) Если луч зрения *перпендикулярен* к первичному лучу, то при вращении луча зрения вокруг первичного луча интенсивность рассеяния изменяется по закону $AE^2 \pi \cos^2 \chi$, следовательно, имеет максимум перпендикулярно к направлению первичных колебаний ($\chi = 0$) и исчезает параллельно ему ($\chi = \frac{\pi}{2}$).

3. Если *первичный луч не поляризован* и если его рассматривают *без анализатора*, то интенсивность рассеяния

$$2 \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} J d\varphi d\chi = AE^2 \pi (1 + \cos^2 \vartheta). \quad (39)$$

Таким образом она имеет максимум параллельно падающему лучу, и минимум, равный половине максимума, перпендикулярно к нему. Эта формула (39) опять дает нам распределение *яркости небесного света*, где ϑ есть угол между лучом зрения относительно солнца и направлением наблюдения.

В заключение выведем еще выражение для *полной рассеиваемой энергии* при неполяризованном первичном луче. Она равна:

$$2 \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} J d\varphi d\chi \sin \vartheta d\vartheta = \frac{8\pi}{3} AE^2. \quad (40)$$

Изложенная здесь вкратце теория неприменима к анизотропным молекулам с неравномерным распределением направления. Возьмем, например, случай, когда направление зрения наблюдателя перпендикулярно к падающему неполяризованному свету; согласно нашим формулам [см. случай 1б] рассеянный свет должен быть полностью поляризован. Это следует понимать так: пренебрежение отклонениями отдельных молекулярных моментов равнозначно допущению изотропности молекулярной структуры, при которой момент светового вектора параллелен самому вектору. Наблюдатель, направление взгляда которого лежит в плоскости, перпендикулярной к падающему свету, воспринимает таким образом только ту составляющую колебания, которая лежит в этой плоскости.

В действительности при наблюдении над многоатомными газами, например воздухом, и в этом случае также обнаруживается *неполяризованная составляющая света*. Чтобы суметь понять это явление, надо выйти за пределы первоначальной теории Релея; это расширение теории уже содержится в наших общих формулах. Наглядно можно пояснить этот процесс *деполяризации* следующим образом¹.

Для анизотропной молекулы момент \mathfrak{p} не параллелен вектору поля \mathcal{E} . Поэтому в общем случае момент \mathfrak{p} имеет составляющую перпендикулярную к первичному колебанию и хотя среднее значение этой нормальной составляющей, взятое по всем возможным положениям молекулы, равно нулю, но

¹ Объяснение деполяризации для коллоидальных частиц впервые дал R. Gans [Ann. Physik (4), т. 37 (1912), стр. 881], рассматривавший частицы как проводящие эллипсоиды. Независимо от него M. Born (Verh. dtsch. Physik Ges., 1917, стр. 243) дал вывод деполяризации для молекулярного рассеяния из общего положения о тензорной взаимосвязи между силой возбуждающего поля и электрическим моментом и во второй работе (там же, 1918, стр. 16) обобщил вывод и дал вычисление для частных моделей молекул. Позднее R. Gans [Ann. Physik (4), т. 62 (1920), стр. 331] воспользовался деполяризацией для определения формы ультрамикроскопических частиц и, наконец, также для определения асимметрии молекул (там же, т. 65, 1921, стр. 97). По этому вопросу имеется значительная литература; выдающимися исследователями в этой области являются наряду с Гансом прежде всего Кабанн и Раман. Полное изложение вопроса см. J. Cabannes, La diffusion moléculaire de la lumière. Paris, 1929.

среднее значение ее квадрата, входящее в выражение рассеяния, не равно нулю. Действительно, мы покажем, что в общей формуле (26), кроме члена, пропорционального $\cos^2 \phi$ (выражающего отношение поляризации, объясненное выше), имеется также член, не зависящий от ϕ и дающий неполяризованную составляющую. Вычисление производится следующим образом:

Имеем:

$$pq = \sum_{XY} \alpha_{XY} q_X \mathcal{E}_{Y'}, \quad (41)$$

где X, Y, Z есть неподвижная относительно молекулы система координат, в которой величины α_{XY} постоянны. Ограничиваясь снова линейно поляризованным светом (\mathcal{E}' вещественно) и газами ($\mathcal{E} = \mathcal{E}'$), положим (фиг. 195):

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{E} &= E e_1, \\ q &= c e_1 + s e_2, \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

где

$$e_1 e_2 = 0, \quad c = \cos \phi, \quad s = \sin \phi, \quad (43)$$

Фиг. 195. К теории рассеяния света.

где e_1, e_2 взаимно перпендикулярные, неподвижные относительно пространства, единичные векторы. Из (41) получаем:

$$|pq|^2 = E^2 \sum_{XYX'Y'} \alpha_{XY} \alpha_{X'Y'}^* (cX_1 + sX_2)(cX'_1 + sX'_2) Y_1 Y'_1. \quad (44)$$

В этом выражении искомая средняя сводится к вычисленным в § 77 (14) и (19) средним произведениям составляющих перпендикулярных векторов. Очевидно

$$\overline{X_1 X'_2 Y_1 Y'_1} = \overline{X_2 X'_1 Y_1 Y'_1} = \dots = 0, \quad (45)$$

и

$$\left. \begin{aligned} |pq|^2 &= E^2 \left(c^2 \sum_{XYX'Y'} \alpha_{XY} \alpha_{X'Y'}^* \overline{X_1 X'_1 Y_1 Y'_1} + \right. \\ &\quad \left. + s^2 \sum_{XYX'Y'} \alpha_{XY} \alpha_{X'Y'}^* \overline{X_2 X'_2 Y_1 Y'_1} \right) \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

Введя сокращенное обозначение:

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= \alpha_{XX} \alpha_{XX}^* + \alpha_{YY} \alpha_{YY}^* + \alpha_{ZZ} \alpha_{ZZ}^*, \\ A_2 &= \alpha_{YY} \alpha_{ZZ}^* + \alpha_{ZZ} \alpha_{YY}^* + \alpha_{ZZ} \alpha_{XX}^* + \alpha_{XX} \alpha_{ZZ}^* + \alpha_{XX} \alpha_{YY}^* + \alpha_{YY} \alpha_{XX}^*, \\ A_3 &= \alpha_{YZ} \alpha_{ZY}^* + \alpha_{ZY} \alpha_{YZ}^* + \alpha_{ZX} \alpha_{XZ}^* + \alpha_{XZ} \alpha_{ZX}^* + \alpha_{XY} \alpha_{YX}^* + \alpha_{YX} \alpha_{XY}^*, \\ A_4 &= \alpha_{YZ} \alpha_{ZY}^* + \alpha_{ZY} \alpha_{YZ}^* + \alpha_{ZX} \alpha_{XZ}^* + \alpha_{XZ} \alpha_{ZX}^* + \alpha_{XY} \alpha_{YX}^* + \alpha_{YX} \alpha_{XY}^*, \end{aligned} \right\} \quad (47)$$

напишем:

$$\left. \begin{aligned} \overline{|pq|^2} &= \frac{E^2}{30} [c^2 (6A_1 + 2A_2 + 2A_3 + 2A_4) + s^2 (2A_1 - A_2 - A_3 + 4A_4)] = \\ &= \frac{E^2}{30} [(2A_1 - A_2 - A_3 + 4A_4) + c^2 (4A_1 + 3A_2 + 3A_3 - 2A_4)] \end{aligned} \right\} \quad (48)$$

или, полагая

$$\left. \begin{aligned} \Omega_0 &= \frac{1}{9} (A_1 + A_2), \\ \Omega_1 &= \frac{1}{90} (2A_1 - A_2 + 9A_3 - 6A_4), \\ \Omega_2 &= \frac{1}{30} (2A_1 - A_2 - A_3 + 4A_4). \end{aligned} \right\} \quad (49)$$

получаем:

$$\overline{|pq|^2} = E^2 [(\Omega_0 + \Omega_1) c^2 + \Omega_2]. \quad (50)$$

Особенно важен случай, когда частота падающего света далека от всех линий поглощения. Тогда α является эрмитовским тензором ($\alpha_{XY} = \alpha_{YX}^*$) и согласно (47) $A_3 = A_4$; следовательно $\frac{1}{3} \Omega_2 = \Omega_1 = \frac{1}{3} \Omega$, откуда следует в силу (50) и (43)¹:

¹ Вычислим отдельно для частного случая вещественного тензора α ($A_3 = A_4$) средние значения квадратов и произведений тензора α , которые нам понадобятся позже. Вычисление производится, как показано выше; для четырех неподвижных в пространстве единичных векторов e_1, e_2, e_3, e_4 с составляющими x_k, y_k, z_k в связанной с молекулой системе и X_k, Y_k, Z_k — в неподвижной системе имеем согласно § 76 (3) уравнение:

$$\sum_{xyx'y'} \alpha_{xy} \alpha_{x'y'}^* x_1 y_2 x'_3 y'_4 = \sum_{XYX'Y'} \alpha_{XY} \alpha_{X'Y'}^* \overline{X_1 Y_2 X'_3 Y'_4}.$$

Выбрав все четыре вектора параллельными оси x , мы получим:

$$\overline{\alpha_{xx}^2} = \sum_{XYX'Y'} \alpha_{XY} \alpha_{X'Y'}^* \overline{X Y X' Y'}.$$

Следовательно, согласно § 77 (14), (19)

$$\overline{\alpha_{xx}^2} = \frac{1}{15} (3A_1 + A_2 + 2A_3). \quad (a)$$

Далее, согласно (49) при $A_3 = A_4$

$$A_1 + A_2 = 9\Omega_0, \quad A_3 - A_2 = 10\Omega - 6\Omega_0.$$

Отсюда следует из (a):

$$\overline{\alpha_{xx}^2} = \Omega_0 + \frac{4}{3} \Omega. \quad (b)$$

$$|\overline{pq}|^2 = \Omega_0 \cos^2 \psi \cdot E^2 + \Omega \left(1 + \frac{\cos^2 \psi}{3} \right) E^2. \quad (51)$$

В этой формуле релеевская составляющая рассеяния отделена от той части, которая основана на колебаниях моментов; мы видим, что обе величины в общем одного порядка. Только тогда, когда молекула оптически изотропна (обладает центральной симметрией), вторая часть исчезает ($\Omega = 0$). Но для всех многоатомных молекул эта часть не равна нулю. Поэтому та форма, в которой мы написали уравнение (51), нецелесообразна; удобнее разделить выражение на поляризованную и неполяризованную части. Написав для интенсивности падающего линейно поляризованного света $E^2 = J_0$, получим из (16), (26), (51) для рассеяния в любом направлении:

$$J = J_0 \frac{(2\pi)^4}{\lambda^4 r^2} \bar{n} \left[\left(\Omega_0 + \frac{\Omega}{3} \right) \cos^2 \psi + \Omega \right]. \quad (52)$$

Параметры Ω_0 и Ω в этом случае равны:

$$\Omega_0 = \alpha^2 = \frac{1}{9} (\alpha_{xx} + \alpha_{yy} + \alpha_{zz})^2 = \left(\frac{n^2 - 1}{4\pi N} \right)^2 \quad (53)$$

[см. (30)] и

$$\Omega = \frac{1}{15} [(\alpha_{xx} + \alpha_{yy} + \alpha_{zz})^2 - 3(\alpha_{yy}\alpha_{zz} + \alpha_{zz}\alpha_{xx} + \alpha_{xx}\alpha_{yy}) + 3(\alpha_{yz}^2 + \alpha_{zx}^2 + \alpha_{xy}^2)] = \frac{1}{30} [(\alpha_{yy} - \alpha_{zz})^2 + (\alpha_{zz} - \alpha_{xx})^2 + (\alpha_{xx} - \alpha_{yy})^2 + 6(\alpha_{yz}^2 + \alpha_{zx}^2 + \alpha_{xy}^2)]. \quad (54)$$

Можно дальше упростить последнее выражение, допустив, что в молекуле имеется оптическая система главных осей, не зависящая от частоты. Такая система имеется, например, в двух-

Расположим теперь e_1 и e_2 параллельно оси x , а e_3 и e_4 параллельно оси y ; мы получим тогда аналогичным образом:

$$\alpha_{xx}\alpha_{yy} = \frac{1}{15} (A_1 + 3A_2 - A_3) = \Omega_0 - \frac{2}{3}\Omega. \quad (c)$$

Наконец, расположив e_1 и e_3 параллельно оси x , а e_2 и e_4 параллельно оси y , получим:

$$\alpha_{xy}^2 = \frac{1}{30} (2A_1 - A_2 + 3A_3) = \Omega. \quad (d)$$

Конечно, можно свести вычисление $|\overline{pq}|^2$ к данным здесь средним значениям, вместо того чтобы пользоваться указанным в тексте методом.

атомных молекулах, у которых главная ось совпадает с линией, соединяющей центры. В этом случае мы можем положить:

$$\alpha_{xy} = \dots = 0. \quad (55)$$

Кроме того, для сокращения обозначим, как выше (см. § 80, стр. 493) $\alpha_{xx} = \alpha_x$, ... Тогда

$$\begin{aligned} \Omega &= \frac{1}{30} [(\alpha_y - \alpha_z)^2 + (\alpha_z - \alpha_x)^2 + (\alpha_x - \alpha_y)^2] = \\ &= \frac{1}{15} [(\alpha_x^2 + \alpha_y^2 + \alpha_z^2) - (\alpha_y\alpha_z + \alpha_z\alpha_x + \alpha_x\alpha_y)] = \\ &= \frac{1}{5} [3\Omega_0 - (\alpha_y\alpha_z + \alpha_z\alpha_x + \alpha_x\alpha_y)]. \end{aligned} \quad (56)$$

Так как согласно определению главные поляризуемости являются положительными числами, то из (56) вытекает неравенство:

$$\Omega \leq \frac{3}{5} \Omega_0. \quad (57)$$

Легко видеть, что знак равенства может стоять только в случае *полной анизотропии*, т. е. тогда, когда индуцированный произвольным полем диполь может колебаться только в одном единственном постоянном молекулярном направлении; тогда все составляющие тензора α равны нулю, за исключением одного, например α_x , и мы имеем уравнение:

$$\Omega_0 = \left(\frac{\alpha_x}{3} \right)^2, \quad \Omega = \frac{1}{15} \alpha_x^2 = \frac{3}{5} \Omega_0. \quad (58)$$

Если в молекуле имеется такая постоянная система главных осей, то с нею совпадают также главные оси статического тензора деформации $\alpha^{(0)}$. Для упрощения положим, кроме того, что деформации по главным осям α_x , α_y , α_z зависят от частоты в основном так же, как статические деформации, и отличаются от них только постоянными множителями; мы можем тогда положить:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{xy}^{(0)} &= \dots = 0, \\ \alpha_{xx}^{(0)} &= \alpha_x^{(0)} = \sigma \alpha_x, \dots, \end{aligned} \right\} \quad (59)$$

где

$$\sigma = \frac{n^2 - 1}{n^2 - 1}. \quad (60)$$

Для *неполяризованных веществ* эффект Керра в основном определяется константой b_1 , § 80 (5), которая в нашем случае равна:

$$b_1 = \frac{\sigma}{45} [(\alpha_y - \alpha_z)^2 + (\alpha_z - \alpha_x)^2 + (\alpha_x - \alpha_y)^2], \quad (61)$$

следовательно, согласно (56) и (60)

$$b_1 = \frac{2\sigma}{3} \Omega = \frac{2}{3} \frac{n^2 - 1}{n^2 - 1} \Omega. \quad (62)$$

Так как Ω_0 выражается через показатель преломления, то во все выражения, определяемые из наблюдения, входит только одна постоянная Ω . Вместо нее обычно вводят другую величину — степень деполяризации. Степень деполяризации для линейно поляризованного падающего света называется отношение наименьшей интенсивности рассеяния к наибольшей возможной, т. е. отношение значений J из (52), получаемых подстановками $\cos \psi = 0$ и $\cos \psi = 1$; следовательно,

$$\Delta = \frac{\Omega}{\Omega_0 + \frac{4}{3} \Omega}. \quad (63)$$

Степень деполяризации естественного падающего света определяется иначе, так как в этом случае $\cos^2 \psi$ должно быть средней по χ функцией χ , ϑ и φ ; значит, вместо него следует подставить согласно (35) выражение $\frac{1}{2} (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi \cos^2 \vartheta) = \frac{1}{2} \sin^2 \xi \equiv \frac{1}{2}$, где ξ есть угол между направлением \mathbf{z} первичного луча и положением анализатора φ . Следовательно отношение наименьшей интенсивности рассеяния к наибольшей равно:

$$\Delta' = \frac{2\Omega}{\Omega_0 + \frac{7}{3} \Omega}. \quad (64)$$

Величины Δ и Δ' являются обе монотонно возрастающими функциями Ω , в чем мы сейчас убедимся. Подставив вместо Ω согласно (57) максимальное значение, получим:

$$\Delta \leq \frac{1}{3}, \quad \Delta' \leq \frac{1}{2}. \quad (65)$$

Эти значения соответствуют случаю полной анизотропии, т. е. значениям (58) для Ω_0 и Ω .

Мы можем теперь ввести всюду вместо Ω степень деполяризации Δ' ; получим:

$$\Omega = \Omega_0 \frac{3\Delta'}{6-7\Delta'}, \quad (66)$$

и согласно (56) и (53)

$$(\alpha_Y - \alpha_Z)^2 + (\alpha_Z - \alpha_X)^2 + (\alpha_X - \alpha_Y)^2 = \frac{45}{8\pi^2} \frac{n^2 - 1}{N} \frac{\Delta'}{6-7\Delta'}. \quad (67)$$

Кроме Δ' , легко поддается наблюдению полное рассеяние, или, что то же самое, при незначительном поглощении света в газе, полные световые потери падающего луча, так называемая экстинкция.

Мы должны вычислить из выражения (52) полное рассеяние для неполяризованного первичного луча, как мы это сделали уже в (40) без учета анизотропии (усреднение по χ , интегрирование по φ и ϑ и умножение на 2; в результате $\cos^2 \psi$ заменяется величиной $\frac{8\pi}{3}$, а константа умножается на 8π). Тогда будем иметь:

$$J = J_0 \frac{(2\pi)^4}{\lambda^4 r^2} \bar{N} 8\pi \left[\left(\Omega_0 + \frac{1}{3} \Omega \right) \cdot \frac{1}{3} + \Omega \right]. \quad (68)$$

Коэффициент экстинкции равен:

$$h = \frac{J}{J_0} = \frac{8\pi}{9} \frac{(2\pi)^4}{\lambda^4 r^2} \bar{N} (3\Omega_0 + 10\Omega). \quad (69)$$

Легко наблюдать среднюю интенсивность естественного света (без анализатора) рассеиваемого перпендикулярно к падающему лучу, т. е. при $\vartheta = \frac{\pi}{2}$. Из (52) получим для $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ (беря среднюю по φ и χ и умножая на 2):

$$J_{\perp} = J_0 \frac{(2\pi)^4}{\lambda^4 r^2} 2\bar{N} \left[\left(\Omega_0 + \frac{1}{3} \Omega \right) \frac{1}{4} + \Omega \right],$$

следовательно:

$$J_{\perp} = J_0 \frac{(2\pi)^4}{\lambda^4 r^2} \bar{N} \frac{1}{2} \left(\Omega_0 + \frac{13}{3} \Omega \right). \quad (70)$$

Введя в оба выражения (69) и (70) вместо Ω величину Δ' с помощью формулы (66), мы получим [согласно (22) $\bar{N} = VN$]:

$$h = 8\pi \frac{(2\pi)^4}{\lambda^4 r^2} \bar{N} \Omega_0 \frac{2 + \Delta'}{6-7\Delta'} = \frac{8\pi^3 V}{N \lambda^4 r^2} (n^2 - 1)^2 \frac{2 + \Delta'}{6-7\Delta'}, \quad (71)$$

и

$$J_{\perp} = J_0 \frac{3\pi^2 V}{N \lambda^4 r^2} (n^2 - 1)^2 \frac{1 + \Delta'}{6-7\Delta'}. \quad (72)$$

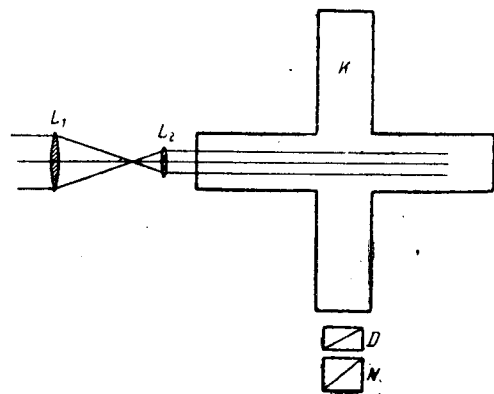
Наконец, введем степень деполяризации в соотношение (62) между постоянной Керра и рассеянием. Получим:

$$b_1 = 2 \frac{(n^2 - 1)(n^2 - 1)}{(4\pi N)^2} \frac{\Delta'}{6-7\Delta'}, \quad (73)$$

откуда, согласно § 80(2), найдем для самой постоянной Керра в газах (при $n \approx 1$, $b = b_1/kT$):

$$B = \frac{3}{2} \frac{N}{\lambda} \frac{b_1}{kT} = \frac{3}{16\pi^2} \frac{1}{\lambda} \frac{1}{NkT} (n^2 - 1)(n^2 - 1) \frac{\Delta'}{6-7\Delta'}. \quad (74)$$

Эта формула (74) связывает две постоянные, полученные совершенно различными путями. Экспериментальная проверка этого соотношения дает особенно яркое подтверждение теории. Приводим некоторые данные в табл. 24¹. В первом столбце дана наблюдаемая степень поляризации Δ' , во втором — электри-



Фиг. 196. Установка для наблюдения молекулярного светорассеяния в газах.
 L_1, L_2 — линзы, K — наполненная газом крестообразная трубка, D — двоякопреломляющая ахроматизованная призма, N — николев.

ческий момент p , в третьем — вычисленные из Δ' по (74) постоянные Керра, а в четвертом — непосредственно измеренная постоянная Керра. Мы видим, что для веществ, не имеющих дипольного момента, получается вполне хорошее совпадение, чего нельзя сказать о дипольных газах.

Таблица 24

Сравнение вычисленных из рассеяния и непосредственно измеренных констант Керра

Вещество	Δ'	$p \cdot 10^{18}$	$B \cdot \lambda \cdot 10^{15}$ вычисленное	$B \cdot \lambda \cdot 10^{15}$ наблюдаемое
N_2O	0,13 ₆	0?	3,2	3,08
CO_2	0,08	0	1,36	1,41
Cl_2	0,044	—	2,0	2,2
HCl	0,008 ₃	1,03 ₄	0,19	5,75
NH_3	0,01	1,44	0,10 ₄	3,48
SO_2	0,041	1,61	1,75	—9,85

В таблицах 25, 26 приведены также степени деполяризации различных газов и паров. Экспериментальная установка показана на фиг. 196.

¹ По Н. А. Stuart, Kerreffekt und Molekülbau, стр. 366.

Таблица 25

Степень деполяризации газов Δ'^1

Вещество	Делей ² 1918	1920	Ганс ³ 1920	Кабанн и Гранье ⁴ 1923	Раман и Рао ⁵ 1923	Рао ⁶ 1927
Водород	0,017	0,0383	—	0,022	0,036	0,0274
Азот	0,030	0,0406	0,030	0,0375	—	0,0357
Кислород	0,060	0,094	0,066	0,0645	0,084	0,0642
Воздух	0,042	0,050	—	0,041	0,0437	0,0415
Оксись углерода	0,032	—	—	0,017	—	—
Углекислота	0,080	0,117	0,073	0,098	0,106	0,097
Закись азота	0,14	0,154	0,12	0,122	0,143	0,120
Оксись азота	—	—	—	0,026	—	—
Аммиак	—	—	0,010	—	—	—
Криптон	—	—	—	0,0055	—	—
Неон	—	—	—	< 1	—	—
Аргон	—	—	—	0,0055	—	—
Ксенон	—	—	—	0,0055	—	—
Хлор	—	—	—	—	—	0,0437

Как видно из данных предварительной проверки теории на простых телах, приведенных в табл. 24, ею можно воспользоваться для определения констант анизотропии $\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z$. Это удастся⁷ с помощью предположения, которое безусловно оправдывается хотя бы приближенно для многих молекул, что направление перманентного электрического момента совпадает с одной из осей деформации, например с осью Z . Тогда мы имеем $p_x^0 = p_y^0 = 0, p_z^0 = p^0$ и получаем следующие формулы для констант анизотропии:

¹ См. также таблицы степени деполяризации в J. Cabannes, La diffusion moléculaire, стр. 87—89, Paris, 1929, или в цитированной работе Landolt-Börnstein, стр. 88 и далее.

² Lord Rayleigh, Proc. Roy. Soc., Lond., т. 94 (1918), стр. 453; т. 95 (1918) стр. 155; т. 97 (1920), стр. 435; т. 98 (1920), стр. 57.

³ R. Gans, Ann. Physik (4), т. 65 (1921), стр. 97.

⁴ J. Cabannes и J. Granier, J. Physique Radium (6), т. 4 (1923), стр. 276.

⁵ C. V. Raman и H. S. Rao, Philos. Mag., т. 46 (1923), стр. 426.

⁶ J. R. Rao, Indian J. Phys., т. 2 I (1927), стр. 81.

⁷ По Н. А. Stuart, Z. Physik, т. 55 (1929), стр. 367.

Таблица 26

Степень деполяризации Δ' паров¹

Вещество	Rao ² , 1927	Кабанн и Гранье ³ 1925/26
Метан	—	0,015
Этан	—	0,016
Пропан	—	0,016
Бутан	—	0,017
Пентан	0,013	0,012
Гексан	0,013	0,015
Гептан	0,014	—
Октан	0,017	—
Метиловый спирт . . .	0,016	—
Этиловый спирт	0,009	—
Бензол	0,042	0,044
Толуол	0,046	0,0426
Хлороформ	0,017	0,0167
Сероуглерод	0,112	—
Эфир	0,026	—

$$\alpha_X + \alpha_Y + \alpha_Z = 3\alpha,$$

[см. § 73 (18)]

$$2\alpha_Z - \alpha_X - \alpha_Y = 3\beta = \frac{45kT}{p^{02}} (kTb - b_1) =$$

$$= \frac{45kT}{p^{02}} \left(kTb - 2 \frac{(n^{02} - 1)(n^2 - 1)}{(4\pi N)^2} \frac{\Delta'}{6 - 7\Delta'} \right).$$

[см. § 80 (6),
§ 77 (25b), § 81
(73)].

(75a)

$$\begin{aligned} (\alpha_X - \alpha_Y)^2 + (\alpha_Y - \alpha_Z)^2 + (\alpha_Z - \alpha_X)^2 &= 3\gamma = \frac{45b_1}{p^{02}} = \\ &= 90 \left(\frac{n^2 - 1}{4\pi N} \right)^2 \frac{\Delta'}{6 - 7\Delta'}. \end{aligned}$$

[см. § 81 (56),
(60), (73)].

¹ См. также таблицы степени деполяризации у J. Cabannes'a, La diffusion moléculaire стр. 87—89, Paris 1929 или в цитированной работе Landolt—Börnstein стр. 88 и далее.

² J. R. Rao, Indian. J. Phys., т. 2 I (1927), стр. 61.

³ J. Cabannes и J. Granler, C. R. Acad. Sci., Paris, т. 182 (1926), стр. 885.

Решая эти квадратные уравнения, мы получим константы анизотропии как функции постоянных Керра и деполяризации, именно:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_Z &= \alpha + \beta, \\ \alpha_X &= \alpha - \frac{\beta}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{2\gamma - 3\beta^2}, \\ \alpha_Y &= \alpha - \frac{\beta}{2} \mp \frac{1}{2} \sqrt{2\gamma - 3\beta^2}. \end{aligned} \right\} \quad (75b)$$

Величины α , β , γ определяются путем измерения показателя преломления, степени деполяризации и постоянной Керра b (при данной температуре).

Содержащуюся еще в уравнениях (75b) двужначность соответствия осей X , Y обоим решениям α_X и α_Y можно устранить во многих случаях, как мы сейчас увидим, с помощью других физических соображений.

Для двухатомных молекул формулы (75) упрощаются еще больше, так как $\alpha_X = \alpha_Y$.

Таким образом получаются приведенные в табл. 27 значения постоянных анизотропии для HCl , NH_3 и SO_2 .

Таблица 27

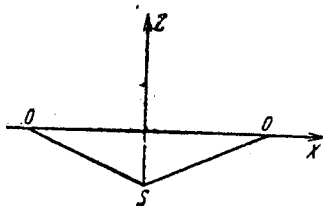
HCl	$\alpha_X = \alpha_Y = 23,9 \cdot 10^{-25}$ $\alpha_Z = 31,6$
NH ₃	$\alpha_X = 23,3$ $\alpha_Y = 20,3$ $\alpha_Z = 24,2$
SO ₂	$\alpha_X = 55,5$ $\alpha_Y = 28,0$ $\alpha_Z = 35,1$

Которая из обеих осей X , Y соответствует большей поляризации, можно определить тогда, когда из других соображений приблизительно известна „форма“ молекулы, как она известна, например, для SO_2 и NH_3 .

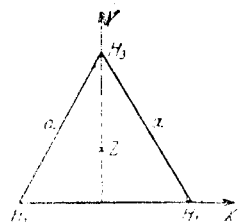
Так как SO_2 обладает статическим электрическим моментом, то три атома O , S , O не могут лежать на одной прямой, а должны образовать треугольник (фиг. 197); направление момента, или ось Z , совпадает с высотой, проходящей через вершину S . Если заставить ось X совпасть с основанием OO , т. е. сделать Y перпендикулярным к плоскости треугольника, то должно быть $\alpha_X > \alpha_Y$; действительно, расположенные в виде цепочки

диполи взаимно поляризуются и обращаются друг к другу противоположными полюсами. Очевидно, это имеет место в направлении X , но не в направлении Y . Вследствие этого в направлении X усиливаются действия внешнего поля.

Рассмотрим аналогичную схему аммиака. Молекула представляет собой трехгранную пирамиду, основанием которой служит равносторонний треугольник $H_1 H_2 H_3$. Направление электрического момента, т. е. ось Z , очевидно, перпендикулярно к основанию. За ось X возьмем, например, сторону $H_1 H_2$ основания, за ось Y — перпендикулярную к нему высоту треугольника. Упомянутое усиление происходит здесь следующим образом.



Фиг. 197. Главные оси поляризуемости для SO_2 .



Фиг. 198. Главные оси поляризуемости для NH_3 .

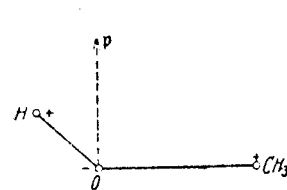
Если r есть проекция расстояния между атомами на направлении луча, то усиление поляризации приблизительно пропорционально r . Если направление луча параллельно X , то усиление для атомной пары $H_1 H_2$ пропорционально стороне треугольника a (фиг. 198), для пар же $H_1 H_3$ и $H_3 H_2$ оно вдвое меньше, т. е. равно $\frac{a}{2}$; общее усиление, следовательно, равно

$2a$. Соответственно, для направления Y мы найдем, что атомы H_1, H_2 не дают никакого усиления, что для пар $H_1 H_3$ и $H_3 H_2$ оно равно h и, следовательно, в сумме равно $2h$, где $h = \frac{a}{2}\sqrt{3}$ есть высота треугольника. Таким образом усиление в направлениях Y и X относятся приблизительно как $\frac{1}{2}\sqrt{3}:1=0,866$.

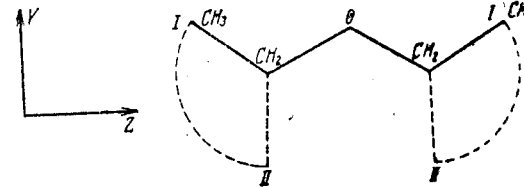
Табл. 27 дает нам $\alpha_X:\alpha_Y=0,871$. Если даже это совпадение случайно, все же можно считать доказанным, каким осям соответствует максимальная и минимальная поляризуемость: оси X соответствует большее α , как мы приняли, сначала без обоснования, в табл. 27.

Кроме оптической анизотропии молекулы, определяемой константами анизотропии, часто можно определить также геометрическую анизотропию, т. е. структуру. Так например, мы найдем¹, что молекулы метилового спирта CH_3OH расположены не

по прямой, а по ломаной линии. Если бы молекула была вытянута по прямой, т. е. если бы атом H лежал на продолжении оси $C—O$, момент p^0 , слагающийся из момента \overrightarrow{OH} и $\overrightarrow{OCH_3}$, совпадал бы с направлением максимальной поляризуемости, и постоянная Керра была бы большим положительным числом. Так как постоянная Керра практически равна нулю, то молекула должна иметь форму ломаной (фиг. 199). Можно более точно определить угол у атома O , направление электрического момента и оптических осей, комбинируя наблюдения постоянной Керра и электрического момента, молекулярного преломления и т. д.



Фиг. 199. Расположение атомов в метиловом спирте.



Фиг. 200. Расположение атомов в этиловом эфире.

В случае диэтилового эфира $(C_2H_5)_2O$ всестороннее исследование эллипсоида поляризации приводит нас к совершенно определенной конфигурации молекулы. Значения осей (см. табл. 29) показывают, что направление z является почти осью оптической симметрии молекулы (фиг. 200); по правилам стереохимии следовало бы ждать, что каждая из групп CH_3 может свободно вращаться вокруг соединительной линии $O—C$. В этом случае оба положения, обозначенные I и II на фиг. 200, были бы равноценны (т. е. встречались бы в среде одинаково часто). Но это несовместимо с исключительным значением оси z как оптической оси симметрии. Поэтому положение I должно быть особым положением в том смысле, что оно является устойчивым положением равновесия, вокруг которого совершаются вращательные колебания с незначительными амплитудами. В противоположность этому конфигурация II невозможна как устойчивое положение равновесия.

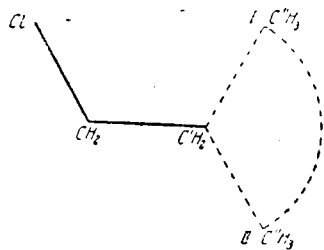
Для хлористого пропила C_3H_7Cl оказывается, что как „ковшеобразная“ форма I , так и вытянутая „зигзагообразная“ форма II (фиг. 201) противоречат наблюдениям над постоянной Керра и степенью деполяризации. Таким образом эти конфигурации не особенно устойчивы, и крайние группы CH_3 обладают значительной способностью вращения; они описывают окружность: направление $C'—C''$ описывает конус, осью которого является $C—C'$.

В следующих таблицах (28) и (29) приведены некоторые новые измерения¹ степени деполяризации и постоянной Керра

¹ Н. А. Stuart, Kerreffekt in Gasen und Dämpfen, II, Z. Physik, т. 63 (1930), стр. 547; Ergebn. exakt. Naturwiss., т. 10 (1931), стр. 196.

¹ По Н. А. Stuart, Kerreffekt und Molekülbau; Kerreffekt in Gasen und Dämpfen; Ergebn. exakt. Naturwiss. т. 10; K. L. Wolf, G. Briegleb u. H. A. Stuart, Z. Physik. Chem. т. 6 (1929), стр. 163.

в газах, молекулы которых обладают осевой симметрией; в табл. 28 даны результаты для бездипольного момента, а в табл. 29 — для газов, обладающих дипольным моментом. В табл. 28 приведены поляризуемости α_Z и $\alpha_X = \alpha_Y$, вычисленные



Фиг. 201. Расположение атомов в хлористом пропилене.

из измеренной степени деполяризации из постоянной Керра B_1 , определенной в § 80 (4), и средней поляризуемости α . Кроме того, в ней дана анизотропия $\alpha_Z - \alpha_X$. Степени деполяризации для высокосимметричных молекул, как например CH_4 , CCl_4 , и для благородных газов вследствие трудности измерения очень неточны и слишком велики, так что по измерениям степени деполяризации нельзя судить, обладает ли данное вещество полной центральной симметрией или же имеется небольшая анизотропия.

В случае CCl_4 измерение постоянной Керра, которое здесь

Таблица 28

Константы анизотропии и Керра и степень деполяризации для газов, не содержащих диполей

Вещество	$\Delta' \cdot 10^2$	$B \cdot \lambda \cdot 10^{15}$		Температура к B_1 в градусах Цельсия	$\alpha \cdot 10^{25}$	$(\alpha_Z - \alpha_X) \cdot 10^{25}$	$\alpha_Z \cdot 10^{25}$	$(\alpha_X = \alpha_Y) \cdot 10^{25}$
		наблюденное	вычисленное из Δ'					
H_2	2,7	—	0,034	20	8,2	3,77	10,7	6,9
N_2	3,6	—	0,23	20	17,6	9,28	23,8	14,5
O_2	6,4	—	0,33	20	15,9	11,4	23,5	12,1
Cl_2	4,3	2,30	2,03	20	45,3	26,4	63	36,5
CO_2	9,8	1,43	1,70	18	26,5	24,2	43	18,8
CS_2	14,3	21,0	16,4	56,7	87,4	97,0	151,4	55,4
N_2O	12,5	3,08	2,80	26	29,9	31,4	51	19,5
$(\text{CN})_2$	12,0	4,30	6,7	20	50,1	34,5	72,6	37,8
C_2H_2	12	1,85	3,26	20	33,2	23,5	48,9	25,4
CCl_4	0,52	$\pm 0,2$	0,67	99,4	105	0	105	105
CH_4	1,5	—	0,22	20	26,1	(8,84)	(32,0)	(23,2)
C_2H_6	1,6	—	0,72	20	45,0	15,6	56	40
C_6H_6	4,2	5,9	5,8	105	107,3	61,0	66,7	127,7
C_6H_{12}	1,0	—	2,8	18	109	30,0	89	119
Ar	0,6	—	0,031	18	16,8	(3,6)	(19,2)	(15,6)
Kr	0,55	—	0,07	18	25,6	(5,2)	(29,1)	(23,9)

Таблица 29

Константы анизотропии и Керра. Дипольные моменты и степень деполяризации для дипольных газов

Вещество	$p^{(0)} \cdot 10^{18}$	$\Delta' \cdot 10^2$	$B \cdot \lambda \cdot 10^{15}$	$B_1 \cdot \lambda \cdot 10^{15}$	$B_2 \cdot \lambda \cdot 10^{15}$	$\alpha \cdot 10^{25}$	$\alpha_Z \cdot 10^{25}$	$\alpha_X \cdot 10^{25}$	$\alpha_Y \cdot 10^{25}$
HCl	1,034	0,66	5,75	0,188	5,56	25,5	31,6	23,9	23,9
$(\text{C}_2\text{H}_5)_2\text{O}$. .	1,14	2,56	— 3,8	3,75	— 7,55	87,3	112,6	70,7	78,7
$(\text{C}_2\text{H}_5)_2\text{O}$. .	2,72	1,7	31,2	0,98	30,2	61,8	69,5	46,9	69,1
CH_3OH	1,68	1,6	$< \pm 0,4$	0,3	от 0,1 до — 0,7	36,7	44,3	29,9	35,7
CO	0,10	2,1	—	0,158	0,054	19,7	25,0	17,1	17,1
HCN	2,65	—	93,0	1,08	92,0	25,8	38,9	19,2	19,2
H_2S	0,931	1,0	1,59	0,28	1,31	37,8	39,3	32,9	42,0
SO_2	1,61	4,3	— 9,84	1,75	— 11,6	39,6	35,1	28,0	55,5
NH_3	1,44	1,3	3,48	—	—	22,6	24,2	23,3	20,0
CH_3Cl	1,89	1,5	35,6	0,58	35,0	50,3	60,0	45,5	45,5
CHCl_3	0,95	1,7	— 7,5	1,4	— 8,9	85,5	66,8	94,8	94,8

очень точно, дает для анизотропии $\alpha_Z - \alpha_X$ значение 0, а как верхнюю границу — величину приблизительно в 10 раз меньшую, чем вычисленная из степени деполяризации. В табл. 29, кроме степени деполяризации Δ' и постоянной Керра $B = B_1 + B_2$ (величиной B_0 можно пренебречь относительно B_1 и B_2 , см. § 80, стр. 494), приведен дипольный момент $p^{(0)}$. Наконец, здесь также вычислены три главные поляризуемости из момента степени деполяризации или постоянной Керра и из молекулярного преломления (средней поляризуемости α). Все измерения приведены к длине волны $\lambda = 5890 \text{ \AA}$.

Во всех предыдущих рассуждениях мы предполагали известным число Лошмидта N . Но можно также, наоборот, определить число Лошмидта, зная отношение интенсивности рассеянного света к интенсивности падающего или зная коэффициент экстинкции и пользуясь степенью деполяризации Δ' . Это можно сделать в лаборатории с помощью аппарата, схематически изображенного на фиг. 196, а также путем измерения рассеяния небесного света. В табл. 30 приведены некоторые результаты измерения, рассчитанные на грамммолекулу. Среднее значение очень хорошо совпадает со значениями, найденными другим путем.

Таблица 30

Определение числа Лошмидта N на моль из погасания света в газах (парах) и из цвета неба

Лабораторные опыты	$N \cdot 10^{-23}$	Цвет неба	$N \cdot 10^{-23}$
Юинг ¹ (эфир)	5,95	Фауль ³	6,05
(бензол)	6,05	Дембер ⁴	6,4
(хлороформ)	5,98		
(метилловый спирт)	6,24		
(этиловый спирт)	6,08		
Дор ² (хлористый этил)	6,08		
Среднее значение	6,06		

Что касается степени поляризации небесного света, то, как нашел Араго еще в 1809 г., его максимум лежит в соответствии с теорией на расстоянии около 90° от солнца. Поляризация там неполная, но значительно большая, чем можно было ожидать на основании лабораторных изменений. Объяснение этого, очевидно, следует искать в „многократном рассеянии“, которое не предусматривается нашей теорией.

Теория светового рассеяния применима также к жидкостям и твердым телам. Наша общая формула (16) остается верной и в этом случае, но простая зависимость между величиной отклонения электрического момента и средним числом частиц здесь не имеет места. Эта зависимость основывалась на предположении, что между молекулами нет механического взаимодействия, что верно только для идеальных газов. Однако для жидкости также можно теоретически вычислить спонтанные колебания плотности и степени поляризации. Принцип этого вычисления, принадлежащий Смолуховскому⁵ и Эйнштейну⁶, заключается в том, что из формулы Больцмана, связывающей энтропию S и вероятность W некоторого микросостояния

$$S = k \cdot \log W, \quad (76)$$

вычисляется вероятность состояния, отклоняющегося от равновесия:

$$\frac{W}{W_0} = e^{\frac{1}{k}(S - S_0)}. \quad (77)$$

¹ Scott Ewing, J. Opt. Soc. Amer., т. 12 (1926), стр. 15.

² P. Daure, C. R. Acad. Sc. Paris, т. 180 (1925), стр. 2032.

³ F. E. Fowle, Astrophys. Journ., т. 40 (1914), стр. 435.

⁴ H. Dember, Ann. Physik (4), т. 49 (1916), стр. 599.

⁵ M. v. Smoluchowski, Ann. Physik (4), т. 25 (1908), стр. 205.

⁶ A. Einstein, Ann. Physik (4), т. 33 (1910), стр. 1275.

Здесь S рассматривается как функция макроскопических параметров, например плотности ρ и температуры T , а флуктуации $S - S_0 = \Delta S$ выражаются по законам термодинамики через флуктуации Δp и ΔT . Для того чтобы ввести в рассмотрение еще и флуктуации поляризации β , нужно знать, кроме того, зависимость энтропии от β и учитывать также член с $\Delta\beta$, входящий в ΔS . Мы не будем производить это сложное вычисление¹, но скажем только, что флуктуации плотности пропорциональны сжимаемости вещества, а флуктуации поляризации могут быть приведены в непосредственную связь с эффектом Керра. Для флуктуации плотности внутри некоторого заданного объема V получаем формулу²:

$$\overline{(\Delta\rho)^2} = \frac{kT\rho}{V} \frac{d\rho}{dp} = \frac{kT\rho^2\kappa}{V}, \quad (78)$$

¹ См. R. Gans, Z. Physik, т. 17 (1923), стр. 353.

² Приведем краткий вывод формулы флуктуации плотности. Первое и второе начала термодинамики можно записать вместе следующим образом:

$$TdS = pdV + dE,$$

где E — энергия, S — энтропия. Отсюда при постоянной температуре имеем:

$$\frac{\partial S}{\partial V} = \frac{p}{T}, \quad \frac{\partial^2 S}{\partial V^2} = \frac{1}{T} \frac{dp}{dV}.$$

Если рассматривать S как функцию V , считая все прочие независимые переменные фиксированными, и рассмотреть флуктуацию для некоторого количества жидкости M около его равновесия, то в разложении ΔS в ряд по степеням $\xi = \Delta V$, при постоянстве остальных независимых параметров, выпадут члены первого порядка, так что

$$\Delta S = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 S}{\partial V^2} \xi^2 = \frac{1}{2T} \frac{dp}{dV} \xi^2.$$

Поэтому

$$W = W_0 e^{-\beta \xi^2}, \quad \beta = -\frac{1}{kT} \frac{dp}{dV},$$

где для всех устойчивых положений равновесия $\left(\frac{dp}{dV} < 0\right)$ β положительно. Из условия

$$\int_0^\infty W d\xi = 1$$

можно определить W_0 , и мы получаем тогда:

$$\overline{(\Delta V)^2} = \overline{\xi^2} = \int_0^\infty W \xi^2 d\xi = \frac{1}{2\beta} = -kT \frac{dV}{dp}.$$

Но $V = \frac{M}{\rho}$, следовательно

$$\Delta\rho = -\frac{\rho^2}{M} \Delta V,$$

и таким образом

$$\overline{(\Delta\rho)^2} = \frac{\rho^4}{M^2} \overline{(\Delta V)^2} = \frac{kT\rho}{V} \frac{d\rho}{dp}.$$

где

$$\alpha = \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dp} \quad (79)$$

есть сжимаемость. Эта формула в случае идеальных газов переходит в другую, полученную выше. В этом случае $\rho = \frac{RT}{\mu}$ $\rho = \frac{kT}{m}$ ρ , где $\mu = Nm$ есть молекулярный вес (m — масса молекулы, N — число Лошмидта для грамммолекулы). Отсюда следует:

$$(\Delta\rho)^2 = \frac{\rho m}{V} = \frac{Nm^2}{V}, \quad (80)$$

где $N = \frac{\rho}{m}$ есть число молекул в единице объема. Флуктуация числа частиц $\mathfrak{N} = \rho \frac{V}{m}$ в постоянном объеме V равна, следовательно:

$$(\Delta\mathfrak{N})^2 = \frac{V^2}{m^2} (\Delta\rho)^2 = VN = \overline{\mathfrak{N}}, \quad (81)$$

и эта формула совпадает с нашим прежним уравнением (22).

Сжимаемость жидкости очень мала, но увеличивается по мере приближения к критической точке, в которой она теоретически равна бесконечности. Вблизи критической точки световое рассеяние должно быть очень значительным, и, действительно, при этих условиях наблюдается помутнение жидкости (называемое *критической опалесценцией*). Однако с помощью современных средств исследования даже в самых чистых жидкостях (а также в кристаллах)¹ можно вполне отчетливо наблюдать и измерять рассеяние.

§ 82. ЭФФЕКТ РАМАНА

Несколько лет тому назад (1928 г.) индийский физик Раман² (и почти одновременно с ним и независимо от него русские физики Ландсберг и Мандельштам)³ сделал открытие в резуль-

¹ Новейшие исследования рассеяния в кристаллах были произведены Г. Ландсбергом [Z. Physik, т. 43 (1927), стр. 773; т. 45 (1927), стр. 442]; Г. Ландсбергом и К. Вульфсоном, [Z. Physik, т. 58 (1929), стр. 95]; Г. Ландсбергом и С. Л. Мандельштамом [Z. Physik, т. 73 (1931), стр. 502]. Разработка теории была начата Р. Гансом [Ann. Physik, т. 77 (1925), стр. 317] и продолжена М. Леонтовичем и С. Л. Мандельштамом [Physik Z. d. Sowjetunion, т. 1 (1932), стр. 317].

² C. V. Raman и K. S. Krishnan, Nature, Lond., т. 121 (1928), стр. 501; C. V. Raman там же, стр. 619; Indian J. Phys., т. 2 (1928), стр. 387; C. V. Raman и K. S. Krishnan, Nature, Lond., т. 121 (1928), стр. 711; Indian J. Phys. т. 2 (1928), стр. 399; Proc. Roy. Soc. Lond., т. 122 (1929), стр. 23.

³ G. Landsberg и L. Mandelstam, Naturwiss., т. 16 (1928), стр. 557, 772; J. Russ. phys. chem. Soc., т. 60 (1928), стр. 335. Независимо от них два французских физика, Рокар и Кабани, указали на возможность явления и пытались обнаружить его. Y. Rocard, C. R. Acad. Sci., Paris, т. 186 (1928), стр. 1107; J. Cabannes, там же, т. 186 (1928), стр. 1201.

тате систематического изучения свойств рассеяния света, что, кроме нормального рассеяния — эффекта Тиндаля, при котором рассеянный свет имеет ту же частоту, что и первичный, — существуют другого рода рассеянные лучи, обладающие частотой, отличной от частоты падающего света. Раман сумел доказать, что здесь речь идет не о „флюоресценции“, т. е. о явлении, при котором свет сперва поглощается, а затем излучается вторично с измененной окраской.

Для *рассеяния Рамана* характерно следующее: при монохроматическом первичном излучении вторичное излучение состоит из некоторого числа монохроматических волн; таким образом разность между их колебательными числами и соответствующим числом падающего света является константой рассеивающего вещества.

За несколько лет, прошедших со времени открытия, наблюдение эффекта Рамана стало одним из наиболее могущественных и удобных средств для исследования собственных частот молекул¹.

Хотя, как мы сейчас увидим, явление Рамана в молекулах² может быть объяснено на основе классической теории, замечательно, что возможность этого явления была предсказана Смекалем³ из квантово-механических соображений. Изложим вкратце ход рассуждения Смекала.

Он пользуется идеей квантовой теории, что свет представляет собой не „волну“, а „дождь частиц“. Основание для такого представления мы рассмотрим подробно в главе VIII, § 90, но мы можем предполагать известным следующее основное представление: монохроматический луч света с частотой ν рассматривается как поток световых квантов $h\nu$ (где h — постоянная Планка), а молекулярная система задается дискретным рядом стационарных состояний, обладающих определенной энергией.

Пусть основное состояние молекулы имеет энергию E_1 , а возбужденное состояние — энергию $E_2 (> E_1)$. Тогда частота света, нужного для приведения молекулы из состояния E_1 в состояние E_2 , равна $(E_2 - E_1)/h = \nu_0$. Если на молекулу попадает „световой квант“ $h\nu$, то имеется некоторая вероятность его „отражения“, т. е. рассеяния, причем атом остается в состоянии E_1 . Но если $h\nu > E_2 - E_1$, то мыслим такой процесс, когда световой квант отразится с потерей энергии $E_2 - E_1$. В этом случае мы будем наблюдать рассеянное излучение другой окраски (большей длины волны) с частотой $\nu' = \nu - (E_2 - E_1)/h = \nu - \nu_0$. Если в газе имеются возбужденные молекулы, т. е. молекулы, находящиеся на более высоком уровне E , то световой квант $h\nu$ при ударе может увеличиться на величину моле-

¹ Для более глубокого изучения рекомендуем К. W. F. Kohlrausch, Der Smekal-Raman-Effekt, Berlin, 1931. Плачак, Релеевское рассеяние и Раман-эффект. Харьков, ДНТБУ, 1934 (Ред.)

² В противоположность атомам.

³ A. Smekal, Naturwiss., т. 11 (1923), стр. 873.

кулярной энергии, и тогда молекула окажется в начальном состоянии E_1 , а излучение будет иметь частоту $\nu' = \nu + \nu_0$. Это рассеянное излучение большей частоты будет во столько раз слабее излучения с меньшей частотой, во сколько число возбужденных молекул меньше числа нормальных. На этом основании Смекаль предсказал, что для каждой собственной частоты ν_0 следует ждать два монохроматических излучения рассеяния с „комбинированными частотами“ $\nu - \nu_0$ и $\nu + \nu_0$, причем первое сильное, а второе слабое.

Позднее, когда квантовая механика была систематически разработана, эти соображения подтвердились и подверглись более строгой разработке¹. Но уже спустя некоторое время после открытия Рамана, Кабани и Рокар указали, что основные черты этого открытия легко объяснимы с помощью классической оптики². Позднее Плачек³ дал условия такой классической теории явления.

В рассмотренных до сих пор случаях эффекта Рамана мы имели дело с рассеянием в молекулах, а частота ν_0 , на которую рассеянное излучение отличается от падающего света, есть частота движений ядер. Классическая трактовка задачи возможна при следующих условиях:

1. Движение ядер так медленно по сравнению с движением электронов, что конфигурация системы электронов в каждое мгновение почти не отличается от той конфигурации, которая имела бы место, если бы ядра оставались в покое. Это условие выполняется, когда электронные частоты велики по сравнению с ядерными.

2. Частота ν возбуждающего света велика по сравнению с частотой движения ядер.

3. Разности между электронными частотами и частотой падающего света велики по сравнению с частотой движений ядер (т. е. первичная частота достаточно далека от частот поглощения, так что отсутствует возмущающее влияние резонанса).

Если эти три условия выполнены, то каждому мгновенному положению ядер соответствует некоторая определенная поляризуемость, характеризующая поведение молекулы относи-

тельно света. Но эта поляризуемость не будет уже постоянной — она будет изменяться во времени соответственно ритму движений ядер. Как наиболее простой пример рассмотрим изотропную молекулу, остающуюся изотропной при колебании атомов (ядер); тогда эллипсоид поляризации представляет собой шар и только величина поляризуемости изменяется вследствие колебаний [таковы, например, колебания тетраэдрической молекулы CCl_4 , при которых все атомы Cl одновременно приближаются к атому C (глава VIII, § 100)]. Считая колебания в первом приближении гармоническими с частотой ν_0 , мы будем иметь для поляризуемости уравнение¹

$$\alpha = \alpha^T + 2\alpha^R \cos(2\pi\nu_0 t + \delta), \quad (1)$$

где индексы T и R должны напоминать о явлениях Тиндаля и Рамана. Если падающий свет имеет частоту ν , а напряжение поля есть:

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \cos 2\pi\nu t, \quad (2)$$

то индуцированный момент:

$$p = \alpha \mathcal{E} = [\alpha^T + 2\alpha^R \cos(2\pi\nu_0 t + \delta)] \mathcal{E}_0 \cos 2\pi\nu t = \alpha^T \mathcal{E}_0 \cos 2\pi\nu t + \alpha^R \mathcal{E}_0 \{ \cos[2\pi(\nu + \nu_0)t + \delta] + \cos[2\pi(\nu - \nu_0)t - \delta] \}. \quad (3)$$

Формула показывает, что возбужденный момент содержит, кроме части, в которую входит частота ν падающего света, еще две составные части с комбинационными частотами $\nu - \nu_0$ и $\nu + \nu_0$, амплитуда которых пропорциональна коэффициенту α^R изменения поляризации вследствие собственных колебаний. Поэтому рассеянный свет содержит, кроме падающей частоты ν , обе комбинационные частоты $\nu - \nu_0$ и $\nu + \nu_0$, так называемые линии Рамана, причем последние не когерентны с падающим светом, так как в соответствующие члены входит фаза δ ядерных колебаний, изменяющаяся беспорядочно от молекулы к молекуле. По этой причине рассеяние Рамана не интерферирует с обычным, и каждое из них может быть отдельно вычислено из формул предыдущих параграфов. Следует только иметь в виду следующие различия:

1. Возникающее вследствие колебаний изменение поляризации, максимум которой равен α^R , вообще мало по сравнению со своим значением α^T в состоянии покоя (в отсутствии колебаний), поэтому рассеяние Рамана, пропорциональное $|\alpha^R|^2$, чрезвычайно слабо относительно обычного рассеяния Тиндаля, которое пропорционально $|\alpha^T|^2$.

2. Как мы уже видели (§ 74, 75), когерентное рассеянное излучение в идеально равномерной среде (бесконечной дипольной решетке) проявлялось бы не в виде дифракции, а вызывало бы в возбуждающей волне только те изменения, которые мы

¹ Множитель 2 при α^R поставлен для того, чтобы избежать неудобных множителей в дальнейшем.

¹ H. A. Kramers u. W. Heisenberg, Z. Physik, т. 31 (1925), стр. 681; M. Born, W. Heisenberg u. P. Jordan, Z. Physik, т. 35 (1926), стр. 557. Эффект Рамана вычисляли по дисперсионной теории Крамер-Гейзенберга C. Manneback [Z. Physik, т. 62 (1930), стр. 224] и J. H. van Vleck [Proc. Nat. Ac. Amer., т. 15 (1929), стр. 754]. Кроме того, к исследованиям Маннебака примыкают работы Плачека (см. прим. 3).

² J. Cabannes, C. R. Acad. Sc. Paris, т. 186 (1928), стр. 1714; J. Cabannes u. Y. Rocard, J. d. Phys., т. 10 (1929), стр. 52.

³ G. Placzek, Z. Physik, т. 70 (1931), стр. 84; Leipzig. Vorträge, 1931, стр. 71. Впервые в этом простом способе рассмотрения удалось применить Раман-эффект к проблеме строения молекулы. Нижеследующее изложение (здесь и во многих местах § 100 главы VIII), за которое я приношу благодарность Е. Теллеру, близко совпадает с изложением Плачека.

называем „преломлением“ и „дисперсией“; доступный наблюдению рассеянный свет возникает только вследствие колебаний плотности, и только в газах последние пропорциональны среднему числу молекул. В противоположность этому некогерентный рассеянный свет Рамана наблюдается всегда непосредственно как таковой и пропорционален числу рассеивающих частиц. Таким образом в газах зависимость обоих видов рассеяния от числа рассеивающих частиц одинакова, для жидкостей же и твердых тел различна. С понижением температуры обычное некогерентное рассеяние в жидкостях и твердых телах также уменьшается, так как при этом уменьшаются флуктуации плотности, тогда как рассеяние Рамана всегда остается пропорциональным самой плотности. Правда, в действительности рассеяние Рамана также уменьшается с падением температуры, так как амплитуды колебания уменьшаются, а вместе с ними уменьшаются и величины α^2 ; согласно классической теории они должны были бы совершенно исчезнуть при абсолютном нуле. На самом деле это не так, и линия $\nu - \nu_0$ (в противоположность другой комбинационной линии $\nu + \nu_0$) сохраняет и при $T = 0$ конечную амплитуду.

Здесь мы наталкиваемся на одно свойство рассеяния Рамана, необъяснимое с классической точки зрения. Однако оно вытекает из вышеприведенного квантового представления Смекаля, так как согласно квантовой теории начальное состояние осциллятора не свободно от колебаний, и при $T = 0$ имеется некоторое нулевое колебание. По Смекалю линия $\nu - \nu_0$ пропорциональна числу молекул в начальном состоянии, а линия $\nu + \nu_0$ — числу молекул в возбужденном состоянии; поэтому первая остается при $T = 0$, а вторая исчезает.

3. Согласно § 81 (16) интенсивность рассеянного света с частотой $\omega = 2\pi\nu$ пропорциональна ω^4 (ν^4 или $1/\lambda^4$). Поэтому интенсивности обеих линий Рамана, соответствующих собственной частоте ν_0 , должны были бы относиться как $[(\nu + \nu_0)/(\nu - \nu_0)]^4$, и линия более высокой частоты должна была бы быть более сильной (правда, разница невелика, так как по предположению $\nu \gg \nu_0$). Опыт противоречит этому: как мы видели из пункта второго при $T = 0$ остается только линия $\nu - \nu_0$.

В этом случае классическая теория оказывается опять не состоятельной, тогда как квантовое представление дает правильное описание фактов. Линия $\nu - \nu_0$ соответствует переходу атома или молекулы из начального состояния в возбужденное, а линия $\nu + \nu_0$ обратному переходу, и частота процессов отношения, как число молекул в соответствующих исходных состояниях. Начальное состояние имеет значительный перевес, тем больший, чем ниже температура.

Превосходство квантовой теории в этом вопросе не является исключением. Во всех случаях, когда речь идет об интенсивности, классическая теория оказывается непригодной, тогда как квантовая теория правильно описывает „условия возбуждения“.

Вышеизложенные основные черты теории явления Рамана справедливы также для наиболее общего случая анизотропных молекул, о которых речь будет ниже, поэтому нет надобности возвращаться к ним.

Прежде чем исследовать влияние колебания на процесс рассеяния скажем несколько слов

о влиянии вращения молекулы на явления Рамана,

которое, разумеется, только в газообразном состоянии подчиняется простым законам.

Если тензор поляризуемости в системе координат, связанной с молекулами (X, Y, Z) не изотропен, то его составляющие в неподвижной системе (x, y, z) являются функциями времени и тогда, когда молекулы не колеблются (как мы и будем считать в дальнейшем); поэтому в рассеянном свете появляются смешанные линии. Но частоты вращения вообще значительно меньше, чем вибрационные частоты, и соответственно этому смещение линий значительно меньше. Вибрации соответствуют коротким инфракрасным волнам длиной от 3 до 50 μ , следовательно, эти частоты от 0,1 до $1,5 \cdot 10^{14}$ сек^{-1} . Частоты вращения соответствуют длинам волн от 0,1 до 1 мм, т. е. частотам от 0,3 до $3 \cdot 10^{12}$ сек^{-1} . Последнее условие можно получить вычислением с помощью закона распределения статистической механики. Согласно этому закону средняя кинетическая энергия одной кинетической степени свободы постоянно равна $\frac{1}{2} kT$,

где $k = 1,36 \cdot 10^{-18}$ эрг/град есть постоянная Больцмана. Таким образом для молекулы, момент инерции которой A и частота $\omega_0 = 2\pi\nu_0$, имеем $\frac{A}{2} \omega_0^2 = \frac{1}{2} kT$. Порядок величины момента инерции

определяется величиной mr^2 , где m есть масса атома (для водорода $m \approx 10^{-24}$ г), а r есть расстояние между ядрами в молекуле ($\approx 10^{-8}$ см); следовательно, для наиболее легких атомов A есть величина порядка 10^{-40} $\text{г} \cdot \text{см}^2$. Подставив эти величины, мы найдем, что при комнатной температуре $T \approx 300^\circ \text{ абс}$, $\omega_0 \approx 10^{13}$ сек^{-1} , чему соответствует длина волны $\lambda_0 \approx 2 \cdot 10^{-2}$ см. Для тяжелых атомов она соответственно больше.

Согласно классической теории распределение частот вращения следует закону Максвелла и вычисляется из соответствующих им энергий вращения. Поэтому можно было бы ожидать, что *ротационный эффект Рамана* будет иметь вид непрерывного расширения линии рассеяния. В противоположность этому квантовая теория говорит, что в действительности возможны лишь дискретные вращательные состояния¹. Вероятность их определяется через энергию по закону распределения Максвелла. Таким

¹ Мы не можем углубляться в эту теорию „квантования направлений“ и отсылаем к учебникам квантовой теории, например, В. А. Sommerfeld, *Atombau und Spektrallinien*, 5 изд. Braunschweig, 1931.

образом ротационный эффект Рамана состоит, как и колебательный, из *дискретных линий*, тесно окружающих первоначальную линию. Мы будем рассматривать вращение лишь согласно классической механике; дискретные квантовые вращательные состояния получаются путем отбора их из непрерывного многообразия классических возможностей по так называемым „квантовым правилам“. Но нам незачем на этом останавливаться.

В некоторый определенный момент составляющие x, y, z неподвижной системы связаны с координатами X, Y, Z системы, связанной с молекулой, ортогональным преобразованием; это преобразование мы запишем следующими, легко понятными, символами:

$$X = \sum_x \cos(Xx) \cdot x. \quad (4)$$

Если молекула вращается, то направляющие косинусы являются функциями времени. В силу уравнения инвариантности § 76 (1)

$$\sum_{xy} \alpha_{xy} xy = \sum_{XY} \alpha_{XY} XY, \quad (5)$$

имеем:

$$\alpha_{xy} = \sum_{XY} \cos(Xx) \cos(Yy) \alpha_{XY}. \quad (6)$$

Мы должны сюда еще подставить вместо α_{XY} функцию времени, определяемую колебательным процессом. Тогда каждая составляющая α_{xy} тензора поляризации есть функция времени, $\alpha_{xy}(t)$.

В дальнейшем мы всюду будем предполагать, что вращение и колебание не зависят друг от друга; это значит, что возникающая при колебании деформация так мало влияет на моменты инерции, что их можно считать практически постоянными. Тогда частота вращения ω_r и частота колебаний ω_s будут постоянными взаимно независимыми числами.

В этом случае формула (6) показывает, как вращения и колебания определяют временную функцию $\alpha_{xy}(t)$.

Вращение определяет произведение направляющих косинусов:

$$\cos(Xx) \cos(Yy) = D_{XY}^{xy}(t). \quad (7)$$

О самих вращательных движениях мы должны знать только следующее: для каждой могущей свободно вращаться молекулы имеется некоторая неподвижная в пространстве ось импульсов, и каждая неподвижная относительно молекулы ось описывает в наиболее общем случае трехосного момента инерции фигуру Лиссажу на поверхности единичной сферы; эта фигура покрывает с равномерной плотностью некоторую зону по сфере, осью которой служит вышеупомянутая ось импульсов. Только в случае двухатомной молекулы (так называемого *простого ротатора*, состоящего из двух материальных точек) или волчка движение сводится к простой прецессии с единственной частотой ω_r . Но вообще движение является произвольной периодической функ-

цией времени со всеми возможными частотами и может быть представлено в виде ряда Фурье. Поэтому напомним:

$$D_{XY}^{xy}(t) = \sum_r d_{XY}^{xy}[\omega_r] \cos(\omega_r t + \delta_r), \quad (8)$$

где суммирование распространено на все имеющиеся частоты вращения, из которых состоит движение.

Вследствие того, что каждой частоте вращения соответствует произвольная фаза, отдельные составляющие вращения статистически независимы друг от друга, и поэтому каждая образует свою линию Рамана. Однако мы, несмотря на это, сохраним пока суммирование по r , потому что дальнейшие рассуждения будут справедливы и для случая, когда отдельные рамановские линии не разрешаются.

Согласно (7) уравнение (8) дает зависимость от времени первого множителя $\cos(Xx) \cos(Yy)$ в сумме (6). Второй множитель $\alpha_{XY}(t)$ определяется вибрациями.

При этом имеет существенное значение то, что каждый колебательный процесс некоторой системы материальных точек можно представить при достаточно малых амплитудах как результат наложения чисто гармонических колебаний, так называемых *собственных колебаний*. Мы разберем подробнее эту теорию, так как она понадобится нам не только здесь, но, в другом аспекте, также и в дальнейшем (глава VIII, § 98).

Нормальные координаты и собственные колебания

Пусть некоторая система n материальных точек m_1, m_2, \dots, m_n , находящихся в положениях равновесия, связана квазиупругими силами. Пусть перемещение массы m_k есть u_k . Тогда кинетическая энергия системы

$$T = \frac{1}{2} \sum_k m_k \dot{u}_k^2. \quad (9)$$

Положим, что все точки связаны между собой, так что потенциальная энергия выражается общей квадратичной формой всех составляющих смещения:

$$U = \frac{1}{2} \sum_{kl} \sum_{XY} a_{XY}^{kl} u_X^k u_Y^l, \quad a_{XY}^{kl} = a_{YX}^{lk}. \quad (10)$$

Мы можем теперь ввести так называемые *нормальные координаты*, в которых не только кинетическая, но также и потенциальная энергия выражается суммой квадратов. Чтобы избавиться от неудобных множителей, содержащих массу, положим:

$$\left. \begin{aligned} \sqrt{m_k} u_k &= v_k, \\ \frac{a_{XY}^{kl}}{\sqrt{m_k m_l}} &= K_{XY}^{kl}; \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

тогда мы получим:

$$U = \frac{1}{2} \sum_{kl} \sum_{XY} K_{XY}^{kl} v_X^k v_Y^l, \quad K_{XY}^{kl} = K_{YX}^{lk}, \quad (12)$$

$$T = \frac{1}{2} \sum_k \dot{v}_k^2. \quad (13)$$

Нормальные координаты определяются как решения однородных уравнений колебания, которые мы можем записать, введя сокращенное обозначение:

$$\mu = \omega^2, \quad (14)$$

в виде:

$$\mu v_k = \sum_l \sum_Y K_{XY}^{kl} v_{lY}. \quad (15)$$

Корни векового уравнения

$$|K_{XY}^{kl} - \mu \delta_{kl} \delta_{XY}| = 0 \quad (16)$$

обозначим $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_j, \dots$, и пусть μ_j соответствует „собственный вектор“ $e_k^{(j)}$, т. е. пусть имеет место тождество

$$\mu_j e_{kX}^{(j)} = \sum_l \sum_Y K_{XY}^{kl} e_{lY}^{(j)}. \quad (17)$$

Вписав каждое собственное значение так часто, какова его кратность, и перенумеровав ($j=1, 2, \dots, 3n$), мы можем так выбрать систему собственных векторов, чтобы их составляющие образовали в $3n$ -мерном пространстве ортогональную матрицу:

$$\begin{vmatrix} e_{1X}^{(1)} & e_{1X}^{(2)} & \dots & e_{1X}^{(3n)} \\ e_{1Y}^{(1)} & e_{1Y}^{(2)} & \dots & e_{1Y}^{(3n)} \\ e_{1Z}^{(1)} & e_{1Z}^{(2)} & \dots & e_{1Z}^{(3n)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ e_{nY}^{(1)} & e_{nY}^{(2)} & \dots & e_{nY}^{(3n)} \\ e_{nZ}^{(1)} & e_{nZ}^{(2)} & \dots & e_{nZ}^{(3n)} \end{vmatrix}$$

т. е. чтобы имели место, в зависимости от того, суммируем ли мы по строкам или по столбцам, уравнения:

$$\sum_{k=1}^n e_k^{(j)} e_k^{(h)} = \delta_{jh}, \quad (18)$$

$$\sum_{j=1}^{3n} e_{kX}^{(j)} e_{lY}^{(j)} = \delta_{kl} \delta_{XY}. \quad (19)$$

Вместо системы n единичных векторов $e_k^{(j)}$ ($k=1, 2, \dots, n$) в обычном пространстве мы можем говорить об *одном собственном векторе в $3n$ -мерном конфигурационном пространстве*; соответствующие различным собственным частотам ω_j ($j=1, 2, \dots, 3n$) собственные векторы $e_k^{(j)}$ образуют тогда ортогональную систему координат в конфигурационном пространстве.

Введем $3n$ переменных ξ_j ($j=1, 2, \dots, 3n$) с помощью ортогональных преобразований

$$v_{kX} = \sum_j e_{kX}^{(j)} \xi_j, \quad (20)$$

решение которых

$$\xi_j = \sum_k e_k^{(j)} v_k \quad (21)$$

мы получим, подставляя в (12) и (13) и используя формулы ортогональности (18) и (19):

$$T = \frac{1}{2} \sum_j \dot{\xi}_j^2, \quad (22)$$

$$U = \frac{1}{2} \sum_j \mu_j \xi_j^2. \quad (23)$$

Теперь уравнения движений свободных колебаний принимают вид:

$$\ddot{\xi}_j + \mu_j \xi_j = 0, \quad (j=1, 2, \dots, 3n); \quad (24)$$

они показывают, что движение можно представить как сумму $3n$ гармонических собственных колебаний ξ_j ; именно, из формул (11) и (20) следует:

$$v_{kX} = \frac{1}{\sqrt{m_k}} \sum_j e_{kX}^{(j)} \xi_j, \quad \xi_j = \xi_j^0 e^{i\omega_j t}, \quad \mu_j = \omega_j^2. \quad (25)$$

Электрический момент всей системы может быть выражен в виде:

$$p = \sum_j Q^{(j)} \xi_j, \quad (26)$$

где

$$Q^{(j)} = \sum_k \frac{e_k}{\sqrt{m_k}} e_k^{(j)}. \quad (27)$$

Эти *собственные моменты* представляют собой закрепленные в молекуле векторы, однозначно заданные динамическим механизмом.

Может случиться, что некоторой собственной частоте ω_j соответствует несколько собственных моментов $Q^{(j)}$: тогда, очевидно, каждая линейная комбинация последних также является собственным моментом ω_j . Это случай вырождения.

Колебательный и вращательный эффект Рамана

Возвращаясь к эффекту Рамана, мы должны иметь в виду, что каждое собственное колебание совершенно не зависит относительно амплитуды и фазы от других собственных колебаний, таким образом каждое дает независимое слагаемое полного некогерентного света Рамана. Поэтому мы можем исследовать каждую из этих составляющих эффекта Рамана отдельно, как это мы делали в случае вращения, причем мы будем поступать так, как если бы молекула совершала монохроматическое собственное колебание $\omega_s = 2\pi\nu_s$ с неподвижным относительно нее собственным вектором $\mathcal{Q}^{(s)}$. Тогда тензор поляризуемости в неподвижной относительно молекулы системе будет иметь вид:

$$\alpha_{XY} = \alpha_{XY}^T + 2\alpha_{XY}^R \cos(\omega_s t + \delta_s). \quad (28)$$

Подставляя выражения (7), (8) и (28) в (6), мы получим:

$$\alpha_{xy}(t) = \sum_{XY} \sum_r d_{XY}^{xy} [\omega_r] \cos(\omega_r t + \delta_r) \cdot [\alpha_{XY}^T + 2\alpha_{XY}^R \cos(\omega_s t + \delta_s)]. \quad (29)$$

Полагаем

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{xy}^T(t) &= \sum_r \alpha_{xy}^T [\omega_r] \cos(\omega_r t + \delta_r), \quad (a) \\ \alpha_{xy}^R(t) &= \sum_r \alpha_{xy}^R [\omega_r] \cos(\omega_r t + \delta_r), \quad (b) \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{xy}^T[\omega_r] &= \sum_{XY} d_{XY}^{xy} [\omega_r] \alpha_{XY}^T, \quad (a) \\ \alpha_{xy}^R[\omega_r] &= \sum_{XY} d_{XY}^{xy} [\omega_r] \alpha_{XY}^R, \quad (b) \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

тогда из (29) следует:

$$\alpha_{xy}(t) = \alpha_{xy}^T(t) + 2\alpha_{xy}^R(t) \cos(\omega_s t + \delta_s). \quad (32)$$

Это уравнение заменило простую формулу (1), соответствующую изотропной молекуле. Подставив сюда опять \mathcal{E} в форме (2) (периодической функции времени) и сравнив с разложением в ряд Фурье (30) коэффициентов $\alpha_{xy}^T(t)$ и $\alpha_{xy}^R(t)$, мы увидим, что электрический момент совершает движение, которое представляет собой сумму простых гармонических колебаний с частотами

$$\omega' = \omega \pm \omega_r \pm \omega_s, \quad (33)$$

т. е.

$$p(t) = \sum_{\omega'} p[\omega'] \cos(\omega' t + \delta'). \quad (34)$$

Сюда может входить как одна первоначальная частота ($\omega_r = 0$, $\omega_s = 0$), так и одна частота вращения ($\omega_s = 0$) или одна частота колебания ($\omega_r = 0$).

Тогда линия Рамана ω' определяется монохроматической частью электрического момента $p[\omega']$ по тем же правилам, которые мы применили к рассеянию Тиндала в § 81. Но в этом случае играет роль не средний квадрат флуктуации, а квадрат полного момента, и, аналогично тому, что мы имели в § 81 (16), интенсивность рассеяния в объеме V , содержащая в среднем \bar{N} молекул, выражается формулой:

$$I = \frac{\omega'^4}{c^4} \frac{1}{r^2} \bar{N} \overline{p[\omega'] \cdot q|^2}, \quad (35)$$

где средняя взята по всем возможным положениям молекулы, т. е. ее неподвижной в пространстве оси импульса.

Рассмотрим теперь случай, когда частота вращения не разрешена, т. е. когда ω_r можно пренебречь по сравнению с $\omega \pm \omega_s$. Тогда ротационные линии, группирующиеся вокруг начальной частоты или вокруг колебательной линии, вызовут расширение этих линий. Мы утверждаем, что сумма интенсивности всех линий вращения имеет то же значение, как если бы не вращали молекулу, а взяли среднюю по неподвижным, но произвольно ориентированным молекулам. В частности для случая рассеяния неизменной частоты ν сумма всех составляющих вращения тождественна с вычисленным в предыдущем параграфе обычным рассеянием Тиндала.

Докажем это следующим образом: пренебрегая ω_r в выражении (29), мы найдем, что сумма всех частот вращения пропорциональна $\sum_r \overline{p[\omega \pm \omega_s \pm \omega_r] \cdot q|^2}$. Но, как известно, сумма квадратов всех коэффициентов Фурье равна среднему по времени от квадрата соответствующей функции, т. е. наша сумма имеет вид:

$$\overline{p[\omega \pm \omega_s, t] \cdot q|^2}. \quad (36)$$

Первое усреднение производится по времени, второе — по пространственной ориентации; эти операции, очевидно, можно переставить. Но среднее значение момента, взятое по всем положениям молекул в некоторый определенный момент, очевидно, не зависит от времени; следовательно, мы получим такой же самый результат, как в предыдущем параграфе для не вращающейся, неподвижной в пространстве, молекулы. Усреднение по времени не изменяет этого результата, и таким образом наше утверждение доказано.

Ограничимся сперва этим случаем неразрешенной вращательной структуры. Согласно только что доказанному мы можем заменить величины $\alpha_{xy}^T(t)$ и $\alpha_{xy}^R(t)$, зависящие от времени, константами α_{xy}^T , α_{xy}^R , которые соответствуют неподвижной произвольно ориентированной молекуле; согласно (34) и (32) получим:

$$p_x = \sum_y \alpha_{xy} \mathcal{E}_y = \sum_y [\alpha_{xy}^T + 2\alpha_{xy}^R \cos(\omega_s t + \delta_s)] \mathcal{E}_y^0 \cos \omega t. \quad (37)$$

Преобразуя это уравнение, как выше было сделано с формулой (3), увидим, что для колебательного явления Рамана характерным является тензор поляризации.

Мы можем теперь воспользоваться результатами предыдущего параграфа и найдем для интенсивности вибрационной линии согласно § 81 (52):

$$J = J_0 \frac{(\omega \pm \omega_s)^4}{c^4} \frac{1}{r^2} \Re \left[\left(\Omega_0^R + \frac{\Omega^R}{3} \right) \cos^2 \phi + \Omega^R \right]. \quad (38)$$

Здесь Ω_0^R и Ω^R определяются составляющей α_{XY}^R тензора поляризации точно так же, как в § 81 (53) и (54) они выражались через составляющие тензора $\alpha_{XY} = \alpha_{XY}^I$ в состоянии покоя, т. е.

$$\Omega_0^R = \frac{1}{9} (\alpha_{XX}^R + \alpha_{YY}^R + \alpha_{ZZ}^R)^2, \quad (39)$$

$$\Omega^R = \frac{1}{30} [(\alpha_{YY}^R - \alpha_{ZZ}^R)^2 + (\alpha_{ZZ}^R - \alpha_{XX}^R)^2 + (\alpha_{XX}^R - \alpha_{YY}^R)^2 + 6(\alpha_{YZ}^R + \alpha_{ZX}^R + \alpha_{XY}^R)]. \quad (40)$$

Несмотря на это формальное совпадение, между явлением Рамана и обычным рассеянием имеется существенное различие. Когда тензор α^R преобразуется к главным осям, диагональные элементы $\alpha_{XX}^R = \alpha_X^R, \dots$ могут быть также отрицательны, т. е. эллипсоид поляризации может и вытягиваться и сплющиваться вследствие колебания. Но отсюда следует, что Ω_0^R может быть также равен нулю.

Степень деполаризации для линейно поляризованного падающего света, выраженная с помощью § 81 (63) в виде:

$$\Delta^R = \frac{\Omega^R}{\Omega_0^R + \frac{4}{3} \Omega^R}, \quad (41)$$

которая была $\equiv \frac{1}{3}$ для обычного рассеяния, здесь удовлетворяет неравенству:

$$\Delta^R \leq \frac{3}{4}, \quad (42)$$

причем Δ^R достигает верхней границы $\frac{3}{4}$ при $\Omega_0^R = 0$.

Еще более существенное различие между рассеянием Рамана и рассеянием Тиндаля возникает при освещении светом, *поляризованным по кругу*. Вследствие неопределенности тензора α_{XY}^R , направление вращения рассеянного света противоположно направлению падающего. Это можно объяснить следующим образом.

Рассмотрим распространяющуюся в направлении z волну ($\mathcal{E}_z = 0$) и введем вместо \mathcal{E}_x и \mathcal{E}_y линейные комбинации:

$$\mathcal{E}_r = \mathcal{E}_x + i\mathcal{E}_y, \quad \mathcal{E}_l = \mathcal{E}_x - i\mathcal{E}_y, \quad (43)$$

когда $\mathcal{E}_l = 0$, то, очевидно, мы имеем правополяризованный свет с амплитудой \mathcal{E}_r , и наоборот. Соответственно введем определения:

$$p_r = p_x + ip_y, \quad p_l = p_x - ip_y. \quad (44)$$

Полагая

$$\left. \begin{aligned} p_x &= a_{xx}\mathcal{E}_x + a_{xy}\mathcal{E}_y, \\ p_y &= a_{yx}\mathcal{E}_x + a_{yy}\mathcal{E}_y, \end{aligned} \right\} \quad (45)$$

получим:

$$\left. \begin{aligned} p_r &= a_{rr}\mathcal{E}_r + a_{rl}\mathcal{E}_l, \\ p_l &= a_{lr}\mathcal{E}_r + a_{ll}\mathcal{E}_l, \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

где

$$\left. \begin{aligned} a_{rr} &= a_{ll} = \frac{1}{2} (a_{xx} + a_{yy}), \\ a_{rl} &= \frac{1}{2} (a_{xx} - a_{yy} + 2ia_{xy}), \\ a_{lr} &= \frac{1}{2} (a_{xx} - a_{yy} - 2ia_{xy}). \end{aligned} \right\} \quad (47)$$

Пусть правовращающийся свет падает на молекулу. Каково будет отношение интенсивностей право- и левовращающихся составляющих света, рассеянного назад относительно падающего света на 180° ? Подставим в (46) $\mathcal{E}_l = 0$. Кроме того, вспомним, что момент, правовращающийся в направлении падающего света, кажется левовращающимся при наблюдении в противоположном направлении, и наоборот.

Отсюда находим искомое отношение, коэффициент обращения;

$$P = \frac{J_l}{J_r} = \frac{|p_r|^2}{|p_l|^2} = \frac{\overline{a_{rr} a_{rr}^*}}{\overline{a_{lr} a_{lr}^*}} = \frac{\overline{a_{xx}^2 + a_{yy}^2 + 2a_{xx} a_{yy}}}{\overline{a_{xx}^2 + a_{yy}^2 - 2a_{xx} a_{yy} + 4a_{xy}^2}} = \frac{\overline{a_{xx}^2 + a_{xx} a_{yy}}}{\overline{a_{xx}^2 - a_{xx} a_{yy} + 2a_{xy}^2}}, \quad (48)$$

где средние берутся по всем положениям в пространстве.

Входящие в (48) средние значения мы уже определили в уравнениях (b), (c) и (d) сноски главы VII, § 81, стр. 509.

$$\overline{a_{xx}^2} = \Omega_0 + \frac{4}{3} \Omega, \quad (49)$$

$$\overline{a_{xx} a_{yy}} = \Omega_0 - \frac{2}{3} \Omega, \quad (50)$$

$$\overline{a_{xy}^2} = \Omega. \quad (51)$$

Таким образом для P (введя снова верхний индекс R) получаем:

$$P^R = \frac{J_l}{J_r} = \frac{3Q_0^R + Q^R}{6Q^R}. \quad (52)$$

Если рассматриваемая линия Рамана возникает вследствие оптически изотропного колебания молекулы, т. е. $Q^R = 0$, то отсюда следует, что $\frac{J_l}{J_r} = \infty$, т. е. рассеиваемый в обратном направлении (отклоненный на 180°) свет является полностью левополяризованным, как, очевидно, и следовало ждать.

Но для такой линии Рамана с чрезвычайно анизотропными колебаниями, т. е. при $Q_0^R = 0$, получается замечательное следствие, а именно:

$$P^R = \frac{J_l}{J_r} = \frac{1}{6}, \quad (53)$$

т. е. при падающем правовращающемся свете под углом 180° (т. е. назад) правовращающийся свет рассеивается в 6 раз больше, чем левовращающийся, и это, очевидно, показывает, что направление вращения момента почти полностью обращается. Этот поразительный результат¹ можно наглядно пояснить, представив себе неподвижную в пространстве молекулу и сделав специальное допущение, что поляризуемость и напряжение поля связаны соотношением:

$$\left. \begin{aligned} p_x &= [\alpha^T + 2\alpha^R \cos(\omega t + \delta)] \mathcal{E}_x, \\ p_y &= [\alpha^T - 2\alpha^R \cos(\omega t + \delta)] \mathcal{E}_y, \end{aligned} \right\} \quad (54)$$

т. е., что в одной и той же фазе колебания молекулы составляющая \mathcal{E}_x поля \mathcal{E} заставляет эллипсоид поляризации расширяться в направлении x (но не в направлении y), а \mathcal{E}_y сжимает его в направлении y (но не в направлении x). Это можно выразить также так: $\alpha_{xx}^R = -\alpha_{yy}^R = \alpha^R$, тогда как все остальные составляющие дополнительного тензора равны нулю. Тогда согласно § 47 $\alpha_{rr} = 0$, $\alpha_{rl} = \alpha^R$ и уравнение (48) показывает, что

$P^R = \frac{J_l}{J_r} = 0$; таким образом правовращающийся падающий свет после рассеяния распространяется назад опять таки как правовращающийся, следовательно, направление вращения в моменте

¹ Сам Раман думал, что наблюдаемое для кругового света изменение знака вращения нельзя объяснить элементарным путем, а только с помощью „спина“ светового кванта (С. V. Raman u. S. Bhagavantam, Ind. Journ. Physik т. 6; стр. 353 (1931); Nature, т. 178 (1931), стр. 727; также см. S. Bhagavantam, Ind. Journ. Physik, т. 7, стр. 107 (1932).

Приведенное в тексте простое объяснение было дано G. Placzek'ом (Leipzig. Vortr., 1931, стр. 71).

заменяется противоположным. Здесь механизм совершенно нагляден: когда электрический вектор колеблется в направлении x , дополнительная поляризация направлена в ту же сторону; когда он колеблется в оси y , она направлена в противоположную сторону. Но отсюда следует, что правовращение электрического вектора означает левое вращение дополнительной поляризации. При усреднении по всем положениям отношение $1:\infty$ ослабевает до $1:6$, что совершенно понятно.

Ясно, что в рассеянии Тиндаля такого обращения направления нет. В этом случае согласно § 81 (57) $Q \leq \frac{3}{5} Q_0$, откуда выражение, соответствующее § 82 (52), для предельной анизотропии ($Q = \frac{3}{5} Q_0$) равно 1, т. е. $J_l = J_r$; таким образом рассеиваемый назад свет полностью деполаризован.

Нижеследующее рассуждение относится к случаю, когда вращательная структура эффекта Рамана не разрешена. Исследуем теперь случай, когда наблюдению доступна только одна линия вращения. Для более точного описания возникающих при этом явлений следовало бы знать относительное положение эллипсоида инерции и эллипсоида поляризации. Ниже (глава VIII, § 100) мы подробно разберем этот вопрос для некоторых простых моделей молекул. Здесь же ограничимся несколькими общими особенностями явления вращения.

Напомним, что чисто вращательный эффект Рамана определяется тензором $\alpha_{xy}^T(t)$, вращательно колебательный эффект — тензором $\alpha_{xy}^R(t)$ [см. (30)], причем отдельная линия вращения, соответствующая частоте вращения ω_r , определяется коэффициентами Фурье (31) $\alpha_{xy}^T[\omega_r]$ и соответственно $\alpha_{xy}^R[\omega_r]$. Можно выразить инварианты (39) и (40) через эти тензоры, — поскольку тензоры являются функциями времени, то и инварианты будут функциями времени $Q_0(t)$ и $Q(t)$ или функциями частоты вращения $Q_0[\omega_r]$ и $Q[\omega_r]$. Из этих последних величин мы можем образовать степень деполаризации $\Delta[\omega_r]$ для линейного света по (41) и коэффициент обращения $P[\omega_r]$ по (52).

Мы видим, что эти явления могут иметь место только тогда, когда величины анизотропии $Q^T(t)$ и $Q^R(t)$ не равны нулю; иначе эллипсоид поляризации был бы сферой, и вращение молекулы не могло бы вызвать рассеяния. Наоборот, ротационная структура не зависит от других инвариантов $Q_0^T(t)$ и $Q_0^R(t)$, т. е. от диагональной суммы или шпура тензора поляризации:

$$\left. \begin{aligned} \alpha^T(t) &= \frac{1}{3} (\alpha_{xx}^T + \alpha_{yy}^T + \alpha_{zz}^T), \\ \alpha^R(t) &= \frac{1}{3} (\alpha_{xx}^R + \alpha_{yy}^R + \alpha_{zz}^R). \end{aligned} \right\} \quad (55)$$

Действительно, эта структура определяется изменениями неподвижных в пространстве составляющих тензора поляризации, происходящими при вращении, а эти последние остаются такими же, когда диагональные члены тензора изменяются на одну и ту же величину.

Представим себе тензор поляризации $\alpha_{xy}^T(t)$ и $\alpha_{xy}^R(t)$ разложенными на две составляющие, одну — обладающую шаровой симметрией и другую, шпур которой равен нулю, т. е. построим выражения:

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha'_{xy}(t) = \alpha(t) \cdot \delta_{xy} \text{ шаровая симметрия} \\ \alpha''_{xy}(t) = \alpha_{xy}(t) - \alpha(t) \cdot \delta_{xy} \text{ составляющая не имеющая шпура} \end{array} \right\} \quad (56)$$

$$\alpha_{xy}(t) = \alpha'_{xy}(t) + \alpha''_{xy}(t)$$

(при этом оставляем открытым вопрос о наличии колебаний, т. е. опускаем верхний индекс).

Соответствующим образом можно разложить коэффициенты Фурье:

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha'_{xy}[\omega_r] = \alpha[\omega_r] \cdot \delta_{xy} \text{ шаровая симметрия} \\ \alpha''_{xy}[\omega_r] = \alpha_{xy}[\omega_r] - \alpha[\omega_r] \cdot \delta_{xy} \text{ не имеющий шпура} \end{array} \right\} \quad (57)$$

$$\alpha_{xy}[\omega_r] = \alpha'_{xy}[\omega_r] + \alpha''_{xy}[\omega_r]$$

Мы утверждаем, что обе составляющие участвуют в рассеянии независимо друг от друга, т. е. имеют место следующие соотношения (аргументом ω_r пренебрегаем):

$$\overline{\alpha_{xx}^2} = \overline{\alpha_{xx}^{'2}} + \overline{\alpha_{xx}^{'2}}, \quad \overline{\alpha_{xy}^2} = \overline{\alpha_{xy}^{'2}} + \overline{\alpha_{xy}^{'2}}, \quad \overline{\alpha_{xx}\alpha_{yy}} = \overline{\alpha_{xx}'\alpha_{yy}'} + \overline{\alpha_{xx}''\alpha_{yy}''}. \quad (58)$$

Доказательство, очевидно, следует из того, что средние значения $\alpha_{xx}\alpha_{xx}$, $\alpha_{xy}\alpha_{xy}$, $\alpha_{xx}\alpha_{yy}$ равны 0. Для второго это тривиально, так как тензор $\alpha'[\omega_r]$ имеет только диагональные элементы; для двух других это вытекает из того, что диагональные элементы сферосимметричной части $\alpha'[\omega_r]$ равны друг другу и не зависят от ориентации молекулы, так что оба средних сводятся к $\alpha' \cdot \alpha''_{xx}$

и соответственно $\alpha' \cdot \alpha''_{yy}$; но $\overline{\alpha_{xx}''} = \overline{\alpha_{yy}''} = \frac{1}{3}(\overline{\alpha_{xx}''} + \overline{\alpha_{yy}''} + \overline{\alpha_{zz}''}) = \overline{\alpha''} = 0$, так как тензор α'' по условию не имеет шпура. Этим доказываются наше утверждение.

Отсюда следует, что для получения интенсивности ротационной и ротационно-вибрационной линии Рамана надо приравнять нулю инварианты $\Omega_0^T[\omega_r]$ и соответственно $\Omega_0^R[\omega_r]$; таким образом в обоих случаях получаем $\Delta = \frac{3}{4}$ и $P = \frac{1}{6}$.

Сферо-симметрическая составляющая тензора поляризации существует только для таких линий, для которых отсутствует вращение, т. е. для рассеяния Тиндала и для чисто вибрационных линий. В этом случае доказанное нами положение утверждает только то, что рассеянный свет складывается длительно из двух тензоров, сферо-симметрического и тензора, не имеющего шпура; иначе говоря, инварианты Ω_0 и Ω аддитивно составлены из соответствующих тензоров. Таким образом для вычисления степени деполаризации Δ и коэффициента обращения P можно воспользоваться общими формулами (41) и (48). Вопрос о величине обеих частей или об условиях, при которых та или другая часть равна нулю, можно решить, только исходя из определенной модели молекулы. Мы вернемся к этому в главе VIII, § 100.

§ 83. ОПТИЧЕСКАЯ ВРАЩАТЕЛЬНАЯ СПОСОБНОСТЬ ИЗОТРОПНЫХ ТЕЛ

До сих пор (см. § 73—75) мы исходили из предположения, что длина волны λ света очень велика по сравнению с размерами молекулы a (соответственно с расстояниями между узлами кристаллической решетки). Теперь нам предстоит рассмотреть явления, необъяснимые при таком допущении и мы расширим соответствующим образом нашу теорию, учитывая в первом приближении отношения a/λ .

Эти явления были открыты Араго¹ в 1811 г. Вспомним законы распространения света в одноосных кристаллах, рассмотренные нами в главе V. Мы видели там, что в направлении оптической оси в таком кристалле нет двойного преломления; линейно поляризованный падающий световой луч, параллельный этому направлению, проходит через кристалл без изменений.

Таким образом должен был-бы вести себя кварц, являющийся в оптическом отношении одноосным кристаллом. Однако Араго сделал наблюдение, что вырезанная из кварца перпендикулярно к оптической оси плоско параллельная пластинка вращает плоскость поляризации перпендикулярного к ней линейно поляризованного луча. Это явление было подробнее изучено Био и Френель нашел (около 1820 г.), что оно может быть объяснено *круговым и двойным преломлением* совершенно подобно тому, как мы объясняли двойное преломление, искусственно создаваемое в магнитном поле (явление Фарадея, см. § 78). Но между этим *естественным вращением плоскости поляризации* и магнитным есть существенное различие.

Если мы заставим линейно поляризованный световой луч с помощью зеркала дважды пройти один и тот же путь через кварцевую пластинку, то в результате он окажется поляризованным в первоначальной плоскости, тогда как при магнитном

¹ F. Arago, Mém. de la classe des sciences math. et phys. de l'Inst., 1811 (1), стр. 115; Oeuvres compl., т. 10, стр. 54, Paris—Leipzig, 1858.

вращении угол поворота в этом случае удваивается, как мы видели в § 78. Дело происходит так, как если бы в кристаллической пластинке, вдоль ее оси, находилась некоторая *постоянная* для определенной длины волны *винтовая поверхность*, вдоль которой световой вектор движется независимо от поступательного распространения света, тогда как при магнитном вращении знак поворота зависит от направления распространения света.

Более тщательное исследование явления показало, что оно происходит во всех тех кристаллах¹, которые существуют в двух энантиоморфных формах, т. е. в таких формах, которые при отражении от плоскости переходят одна в другую (как правая и левая рука).

Оптическое поведение правого и левого кристалла определяется соответственно правым и левым винтом для светового вектора.

Это явление, обозначаемое также несколько неопределенным термином *свободной оптической активности*, происходит не только с лучами, параллельными оси; для каждого направления распространения законы, данные в главе V для показателя преломления и для направления колебаний, несколько изменяются. Важно то обстоятельство, что даже некоторые *кубические* кристаллы (т. е. такие кристаллы, которые должны были бы быть изотропными по обычной кристаллооптике), обнаруживают в каждом направлении оптическую (одинаковую) вращательную способность (например, хлорновато-кислый натрий).

Но это явление вообще не ограничивается одними кристаллами. Оно наблюдается также в жидкостях, в особенности в растворах. Здесь мы должны также предположить, что оно зависит от строения отдельной молекулы. В каждой молекуле должно иметься определенное направление винта, и, несмотря на изотропное распределение молекулярных осей, в среднем получается некоторый вращательный эффект. Например, существует право- и левовращающий сахар, т. е. их водные растворы вращают плоскость поляризации первый вправо, а второй влево. Раствор, состоящий из равных количеств обеих разновидностей, понятно, не обладает вращательной способностью. Химическое вещество (соединение или смесь), которое можно разложить на две оптически активные составляющие, называется *рацемическим*.

Оптическая активность является для химии важнейшим средством исследования молекулярной структуры. Уже в 1860 г. Пастер² высказал мысль, что активность происходит от асиммет-

ричности строения молекулы. В 1874 г. вант-Гоф¹ и Ле-Бель², независимо друг от друга и почти одновременно, сделали из этой гипотезы плодотворные выводы для органической химии. Они пришли к убеждению, что для понимания оптической активности необходимо оперировать пространственными моделями молекул. До тех пор химия пыталась представить все многообразие химических соединений с помощью *плоскостной* схемы валентностей; теперь же было признано необходимым расположить направление химических связей *в пространстве*. Это послужило началом *стереохимии*, учения о пространственном расположении атомов и валентностей господствующего в настоящее время в органической химии. Открытие вант-Гофа и Ле-Беля основывалось на допущении, что органические соединения вращают плоскость поляризации, тогда когда имеется „асимметричный атом углерода“, т. е. такой атом, четыре валентности которого насыщены четырьмя различными атомами или радикалами. Если представить себе углеродный атом с его четырьмя валентностями в виде тетраэдра, то условие отсутствия плоскости симметрии состоит в том, что у четырех вершин находятся различные частицы. Переставив две частицы, мы получим зеркальную конфигурацию, которая соответствует молекуле с противоположным направлением вращения. Такие две конфигурации называются *оптическими изомерами*. Новейшие исследования показали, что оптическая изомерия никоим образом не ограничивается углеродными соединениями, — она имеет место всегда, когда молекула по своей химической структуре не обладает зеркальной симметрией³.

Прежде пытались описать (по Друде и Фогту)⁴ законы распространения света в активных веществах, расширяя соотношение между электрическим моментом p и действующей силой поля \mathcal{E} таким образом, чтобы оно соответствовало наличию определенного направления винта. При этом отказывались от использования этой зависимости между p и \mathcal{E} для построения модели молекулы. Такая модель была дана, независимо друг от друга и почти одновременно, Озееном и автором этой книги⁵, причем главным результатом оказалось то, что не требуется никаких новых допущений кроме тех, которые уже были сделаны в обыкновенной теории преломления и дисперсии

¹ J. H. van't Hoff, Voorsteel tot uitbreiding der tegenwoordig in de scheikunde gebruikte struktur-formules in de ruimte etc. Utrecht, 1874; Bull. Soc. chim. France (2), т. 23 (1875), стр. 296, 338; Ber. dtsch. chem. Ges., т. 10 (1877), стр. 1620.

² J. A. le Bel, Bull. Soc. Chim. France (2), т. 22 (1874), стр. 337.

³ Более точное определение см. стр. 550.

⁴ W. Voigt, Drudes Ann. т. 69 (1899), стр. 307; Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, 1903, стр. 155; P. Drude, Lehrbuch der Optik, II. Abschn., гл. VI, стр. 368, Leipzig, 1900; F. Pockels, Lehrbuch der Kristalloptik, II часть, гл. II, § 6, стр. 319, Leipzig, 1906; P. Drude, Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, 1892, стр. 400; 1904, стр. 1.

⁵ M. Born, Dynamik der Kristallgitter, § 36, стр. 109, Leipzig, 1915; Physik Z. т. 16, (1915), стр. 437, т. 16 (1915), стр. 251; Ann. Physik (4), т. 55 (1917), стр. 177; C. W. Oseen, Ann. Physik (4), т. 48 (1915), стр. 1.

¹ Л. И не только в таких: теоретическим условием наличия вращательной способности у кристаллов является, как мы увидим, отсутствие центра симметрии (см. стр. 560); в молекулах, кроме того, не должно быть плоскости симметрии или отражательной оси симметрии (см. стр. 549).

² L. Pasteur, Über die Asymmetrie bei natürlich vorkommenden organischen Verbindungen, 1868 (Ostwalds Klassiker 28).

(см. главу VIII). Простейшей механической моделью анизотропной молекулы является система взаимно связанных гармонических резонаторов. Такая модель нужна для объяснения тех явлений молекулярной анизотропии, о которых была речь в предыдущих параграфах. Для объяснения оптической активности в этой модели ничего не нужно изменять, но вычисления должны быть точнее.

Мы уже не можем считать длину волны бесконечно большой по сравнению с диаметром a молекулы, а должны учитывать члены первого порядка относительно a/λ . Мы покажем сейчас, что из этой поправки непосредственно вытекает теория активности.

При этом нужно углубить описание оптического поведения нашей молекулы: задание тензора деформации α уже недостаточно, чтобы определить зависимость колебаний, вызванных в молекуле действием света, в функции от длины волны.

Мы должны выбрать такую модель, которая позволяет рассматривать отдельно различные части молекул и не требует описания собственно механизма действия.

Уже в § 72 при определении магнитного момента мы видели, что даже тогда, когда последний равен нулю для невозмущенной молекулы, в случае возмущения может возникнуть момент, величина которого будет, очевидно, порядка a/λ . Поэтому мы не можем довольствоваться вычислением электрического момента молекулы, но должны также учитывать создаваемый световой волной магнитный момент¹.

Представим себе молекулу, состоящую из движущихся по орбитам электрических зарядов e_k , и будем рассматривать радиус-векторы \mathbf{r}_k как функции времени. Тогда средний магнитный момент по определению равен:

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2c} \sum_k e_k (\mathbf{r}_k \times \dot{\mathbf{r}}_k). \quad (1)$$

По предположению этот момент равен нулю для невозмущенного состояния. Если на молекулу действует световая волна, \mathbf{r}_k заменяется величиной $\mathbf{r}_k + \mathbf{u}_k$. Пренебрегая квадратными членами относительно \mathbf{u}_k , получим:

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2c} \sum_k e_k \left[(\mathbf{r}_k \times \dot{\mathbf{u}}_k) + (\mathbf{u}_k \times \dot{\mathbf{r}}_k) \right], \quad (2)$$

где черточки означают усреднение по движениям электронов в молекуле. Ввиду того, что временная средняя каждой полной производной по времени равна нулю, должно быть

$$\overline{\mathbf{r}_k \times \dot{\mathbf{u}}_k} + \overline{\dot{\mathbf{r}}_k \times \mathbf{u}_k} = \frac{d}{dt} (\mathbf{r}_k \times \mathbf{u}_k) = 0. \quad (3)$$

¹ См. G. L. Palumbo, Ann. Physik (4), т. 79 (1926), стр. 533 (дополнение P. Гауса); V. Bursian и A. Timorew, Z. Physik, т. 38 (1926), стр. 475.

Отсюда

$$\mathbf{m} = \frac{1}{c} \sum_k e_k (\mathbf{r}_k \times \dot{\mathbf{u}}_k). \quad (4)$$

Это преобразование позволяет нам, даже учитывая магнитное возмущение, пользоваться *статической* моделью; последнюю мы построим следующим образом.

Пусть дана система дискретных точечных зарядов e_k , могущих перемещаться относительно своих неподвижных в пространстве положений равновесия \mathbf{r}_k . Мы можем определить возникающее при этих перемещениях \mathbf{u}_k электрические и магнитные моменты:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{p} &= \sum_k e_k \mathbf{u}_k, & (a) \\ \mathbf{m} &= \frac{1}{c} \sum_k e_k (\mathbf{r}_k \times \dot{\mathbf{u}}_k) & (b) \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

[множитель $1/2$, входивший в формулу (1), исчезает в силу (4)]. Далее предположим, что перемещения зависят *линейно* от составляющих \mathfrak{E}_k сил, действующих на частицы, причем сразу от всех:

$$u_{kx} = \sum_l \sum_y A_{xy}^{kl} \mathfrak{E}_{ly}. \quad (6)$$

Если мы, кроме того, допустим, что взаимодействия частиц обусловлены консервативными силами, то коэффициенты при силах A_{xy}^{kl} в (6) симметричны относительно пар индексов x, k и y, l :

$$A_{xy}^{kl} = A_{yx}^{lk}. \quad (7)$$

От этой дискретной модели легко перейти к модели с непрерывным распределением зарядов, соответствующим воззрениям квантовой механики; для этого следует увеличить плотность положения равновесия и соответственно уменьшить точечные заряды e_k . Никаких предположений относительно распределения скоростей (или молекулярных токов Ампера) мы не должны делать, так как они уже содержатся в вышеизложенных соображениях относительно магнитного момента [исчезновение множителя $1/2$ в (56)].

Коэффициенты A_{xy}^{kl} при фиксированных индексах k, l представляют собой пространственный тензор второго ранга. Такой тензор можно разложить на симметричную (s) и на антисимметричную (a) части:

$$A_{xy}^{kl} = s_{xy}^{kl} + a_{xy}^{kl}; \quad (8)$$

при этом

$$\left. \begin{aligned} s_{xy}^{kl} &= \frac{1}{2} (A_{xy}^{kl} + A_{yx}^{kl}) = s_{yx}^{kl}, & (a) \\ a_{xy}^{kl} &= \frac{1}{2} (A_{xy}^{kl} - A_{yx}^{kl}) = -a_{yx}^{kl} = -a_z^{kl}. & (b) \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

В (9b) мы пользуемся известным фактом, что три отличные от нуля составляющие антисимметрического тензора второго ранга преобразуются как составляющие аксиального вектора a^{kl} . Обе части будут в дальнейшем играть совершенно различную роль.

Предположим, что приложенные в различных точках внешние силы \mathbb{R}_k являются результатом действия световой волны,

которая выражается формулой: $\mathbb{E} = \mathbb{E}^0 e^{i\omega t} e^{-\frac{2\pi i}{\lambda} r \cdot \mathbb{S}}$. Тогда

$$\mathbb{R}_k = e_k \mathbb{E}^0 e^{-\frac{2\pi i}{\lambda} r_k \cdot \mathbb{S}}. \quad (10)$$

Вместо перемещений u_k введем их максимальную амплитуду U_k в силу уравнения:

$$u_k = U_k e^{-\frac{2\pi i}{\lambda} r_k \cdot \mathbb{S}}. \quad (11)$$

Они не зависят от случайного положения атома относительно фазы световой волны, точно так же, как амплитуда \mathbb{E}^0 световой волны сама не зависит от фазы. Само собой разумеется, что экспоненциальный множитель в уравнениях (дифференциальных уравнениях Максвелла, материальных уравнениях) исчезает, и последние сводятся к соотношению между максимальными амплитудами.

Напишем выражение амплитуды электрического момента нашей молекулы:

$$p_0 = \sum_k e_k U_k. \quad (12)$$

Чтобы вычислить ее, подставим (10) и (11) в (6) и получим:

$$U_{kx} = \sum_l \sum_v A_{xy}^{kl} e_l \mathbb{E}_y^0 e^{\frac{2\pi i}{\lambda} (r_k - r_l) \cdot \mathbb{S}}, \quad (13)$$

и следовательно

$$p_x = \sum_{k,l} \sum_y A_{xy}^{kl} e_k e_l e^{\frac{2\pi i}{\lambda} (r_k - r_l) \cdot \mathbb{S}} \mathbb{E}_y^0. \quad (14)$$

Допустим теперь, что длина волны велика относительно размеров молекулы, и разложим экспоненциальную функцию в (14) до членов первого порядка включительно:

$$p_x = \sum_{k,l} \sum_y A_{xy}^{kl} e_k e_l \left[1 + \frac{2\pi i}{\lambda} (r_k - r_l) \cdot \mathbb{S} \right] \mathbb{E}_y^0. \quad (15)$$

Для этого выражения напомним сокращенно:¹

$$p_x = \sum_y \alpha_{xy} \mathbb{E}_y^0 + \sum_{y,z} \alpha_{xy,z} \mathbb{E}_y^0 \mathbb{E}_z^0, \quad (16)$$

где

$$\alpha_{xy} = \sum_{k,l} A_{xy}^{kl} e_k e_l, \quad (17)$$

$$\alpha_{xy,z} = \frac{2\pi i}{\lambda} \sum_{k,l} A_{xy}^{kl} (z_k - z_l) e_k e_l. \quad (18)$$

При этом α_{xy} вещественны, $\alpha_{xy,z}$ — мнимы.

Легко видеть, что величины (17) зависят только от симметрической части A_{xy}^{kl} , а величина (18) — только от антисимметрической. Можно переставить индексы суммирования k, l , затем выполнить симметричную перестановку (7) и мы получим:

$$\alpha_{xy} = \sum_{k,l} A_{yx}^{kl} e_k e_l, \quad (19)$$

$$\alpha_{xy,z} = -\frac{2\pi i}{\lambda} \sum_{k,l} A_{yx}^{kl} (z_k - z_l) e_k e_l. \quad (20)$$

Построим теперь полусумму выражений (19) и (17), а также (20) и (18); получим:

$$\alpha_{xy} = \alpha_{yx} = \sum_{k,l} s_{xy}^{kl} e_k e_l, \quad (21)$$

$$\alpha_{xy,z} = -\alpha_{yx,z} = \frac{2\pi i}{\lambda} \sum_{k,l} a_{xy}^{kl} (z_k - z_l) e_k e_l. \quad (22)$$

В предельном случае бесконечно длинных волн остаются только α_{xy} , тождественные с составляющими введенного выше (см. § 73) тензора деформации. Те новые явления, которые мы рассматриваем здесь, связаны с дополнительными членами $\alpha_{xy,z}$. Вследствие антисимметричности первых двух индексов мы можем упростить вид этих дополнительных членов, введя новые обозначения. $\alpha_{xy,z}$ исчезают, если первые два индекса равны между собой; остающиеся составляющие равны по величине и противоположны по знаку; напишем для них;

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{yz,x} &= -\alpha_{zy,x} = -ig_{xz}, \alpha_{yz,y} = -\alpha_{zy,y} = -ig_{xy}, \alpha_{yz,z} = \\ &= -\alpha_{zy,z} = -ig_{yz}, \\ \alpha_{zx,x} &= -\alpha_{xz,x} = -ig_{yx}, \alpha_{zx,y} = -\alpha_{xz,y} = -ig_{yy}, \alpha_{zx,z} = \\ &= -\alpha_{xz,z} = -ig_{yz}, \\ \alpha_{xy,x} &= -\alpha_{yx,x} = -ig_{zx}, \alpha_{xy,y} = -\alpha_{yx,y} = -ig_{zy}, \alpha_{xy,z} = \\ &= -\alpha_{yx,z} = -ig_{zz}. \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

¹ Введенные здесь тройные индексы не совпадают с индексами § 77, обозначенными теми же буквами.

С помощью введенного в (96) аксиального вектора a^{kl} мы можем кратко написать:

$$g_{xy} = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \sum_{k,l} a_x^{kl} (y_k - y_l) e_k e_l. \quad (24)$$

Величины g_{xy} при этом образуют составляющую некоторого тензора (в общем случае несимметричного), который мы назовем *тензором гирации*; он вещественен, если коэффициенты A_{xy}^{kl} вещественны, что имеет место при исчезающе малом торможении (см. главу VIII, § 99).

Напишем дополнительные члены в (16) следующим образом:¹

$$\sum_{yz} a_{xy,z} \mathcal{E}_y \delta_z = -i \mathcal{E}_y (g_{zx} \delta_x + g_{zy} \delta_y + g_{zz} \delta_z) + i \mathcal{E}_z (g_{yx} \delta_x + g_{yy} \delta_y + g_{yz} \delta_z) = -i (\mathcal{E}_y \delta_x - \mathcal{E}_z \delta_y), \quad (25)$$

где

$$\delta_x = g_{xx} \delta_x + g_{xy} \delta_y + g_{xz} \delta_z, \dots \quad (26)$$

Уравнение (16) теперь примет вид:

$$p_x = \sum_y a_{xy} \mathcal{E}_y + i (\delta \times \mathcal{E})_x. \quad (27)$$

Эта формула в точности совпадает с условием [§ 73 (17)]. Только там тензор деформации α_{xy} отнесен к координатной системе, связанной с молекулой, а приложенная сила поля обозначена не \mathcal{E} , а \mathcal{E}' . Это показывает, что наша модель дает наиболее общий эрмитовский тензор деформации. Отсюда получается зависимость гирационной части δ от волновой нормали δ с помощью формулы (26).

Построим теперь из (5b) магнитный момент; мы получим, подставив (6) и (10) в это уравнение $\left(\mathcal{E} = i\omega \mathcal{E} = \frac{2\pi ci}{\lambda_0} \mathcal{E} = \frac{2\pi ci}{n\lambda} \mathcal{E} \right)$:

$$m_x = \frac{2\pi i}{\lambda n} \sum_{k,l} e_k e_l [\mathcal{E}_x (y_k A_{zx}^{kl} - z_k A_{yx}^{kl}) + \mathcal{E}_y (y_k A_{zy}^{kl} - z_k A_{yy}^{kl}) + \mathcal{E}_z (y_k A_{zz}^{kl} - z_k A_{yz}^{kl})]. \quad (28)$$

Пусть A разложено согласно (8) на s и a ; мы утверждаем прежде всего, что часть, происходящая от a , не зависит от выбора начала координат; действительно:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{k,l} e_k e_l y_k a_{zx}^{kl} &= \sum_{k,l} e_k e_l y_l a_{zx}^{kl} = \sum_{k,l} e_k e_l y_l a_{xz}^{kl} = \\ &= - \sum_{k,l} e_k e_l y_l a_{zx}^{kl} = \frac{1}{2} \sum_{k,l} e_k e_l a_{zx}^{kl} (y_k - y_l), \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

чем доказывается наше утверждение.

¹ Мы пишем вместо \mathcal{E}' просто \mathcal{E} .

Напротив, величины, образованные соответствующим образом из симметрической части s , зависят от положения начала координат, или наоборот: если при постоянном начале координат молекула перемещается как целое, то эти симметрические составляющие принимают все возможные значения, причем их вариации линейны относительно перемещения молекулы. Так как молекулы занимают все возможные положения, то средняя величина этой составляющей равна нулю. Сумма сводится к одной антисимметрической части, и из (28) следует:

$$\begin{aligned} m_x &= \frac{2\pi i}{n\lambda} \cdot \frac{1}{2} \sum_{k,l} e_k e_l \{ [a_{zx}^{kl} (y_k - y_l) - a_{yx}^{kl} (z_k - z_l)] \mathcal{E}_x + \\ &+ [a_{zy}^{kl} (y_k - y_l) - a_{yy}^{kl} (z_k - z_l)] \mathcal{E}_y + [a_{zz}^{kl} (y_k - y_l) - a_{yz}^{kl} (z_k - z_l)] \mathcal{E}_z \} = \\ &= \frac{2\pi i}{n\lambda} \cdot \frac{1}{2} \sum_{k,l} e_k e_l \{ [a_z^{kl} (z_k - z_l) - a_y^{kl} (y_k - y_l)] \mathcal{E}_x + \\ &+ a_x^{kl} (y_k - y_l) \mathcal{E}_y + a_x^{kl} (z_k - z_l) \mathcal{E}_z \}, \end{aligned}$$

т. е., следовательно, согласно (24):

$$m_x = -\frac{i}{2n} [(g_{yy} + g_{zz}) \mathcal{E}_x - g_{xy} \mathcal{E}_y - g_{xz} \mathcal{E}_z] \quad (30)$$

или же

$$m_x = -\frac{i}{2n} [3g \mathcal{E}_x - \sum_y g_{xy} \mathcal{E}_y], \quad (31)$$

где

$$g = \frac{1}{3} (g_{xx} + g_{yy} + g_{zz}) = \frac{2\pi n}{\lambda_0} \cdot \frac{1}{3} \sum_{k,l} a^{kl} (r_k - r_l) e_k e_l. \quad (32)$$

Формулы (31) показывают, что действие светового вектора на магнитный момент определяется тем же тензором g_{xy} , который, согласно (25) и (26) определяет электрический момент.

Рассмотрим теперь *оптически активные жидкости и газы*. Здесь мы должны брать средние моменты по изотропному распределению направлений молекулы. Согласно с результатами § 76 (77) мы получим:

$$\left. \begin{aligned} \overline{g_{xx}} &= \overline{g_{yy}} = \overline{g_{zz}} = g, \\ \overline{g_{yz}} &= \overline{g_{zx}} = \overline{g_{xy}} = 0 = \overline{g_{zy}} = \overline{g_{xz}} = \overline{g_{yx}}. \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

Инвариант g мы назовем *постоянной гирации* молекулы (он соответствует введенной в § 73 средней поляризуемости a).

g отлично от нуля только тогда, когда молекула не имеет ни центра симметрии, ни плоскости симметрии. Оси симметрии допускаются в любом числе. Для доказательства возьмем закрепленную в молекуле систему координат; тогда аксиальный вектор a^{kl} преобразуется, как произведение двух полярных век-

торов $\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2$, скалярное произведение $\alpha^{kl}(\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_l)$, как $(\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2) \cdot \mathbf{r}_3$, т. е. как определитель, выражающий объем

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix};$$

но последний меняет знак как при каждом отражении от плоскости ($x \rightarrow x, y \rightarrow y, z \rightarrow -z$), так и при каждом отражении от точки ($x \rightarrow -x, y \rightarrow -y, z \rightarrow -z$).

При каждом таком отражении каждой паре точек k, l будет, таким образом, соответствовать вторая пара k', l' с соответственно равными зарядами, $e_k = e_{k'}$, $e_l = e_{l'}$, тогда как значения скалярных произведений для обеих пар равны и противоположны $\alpha^{kl}(\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_l) = -\alpha^{k'l'}(\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_l)$. Таким образом члены попарно взаимно уничтожаются.

Теперь соотношения (26) выглядят так:

$$\mathbf{d} = g\mathbf{s}, \quad (34)$$

а (27) и (31) переходят при усреднении в

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{p} &= \alpha \mathbf{E}' + ig(\mathbf{s} \times \mathbf{E}'), \quad (a) \\ m &= -\frac{i}{n} g \mathbf{E}', \quad (b) \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

причем мы ввели действующую силу поля \mathbf{E}' .

Из этих уравнений (35) непосредственно выводятся моменты единицы объема, \mathbf{P} и \mathbf{M} , или диэлектрическое смещение \mathbf{D} и магнитная индукция \mathbf{B} :

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{D} &= \mathbf{E} + 4\pi \mathbf{P} = \mathbf{E} + 4\pi N\mathbf{p}, \quad (a) \\ \mathbf{B} &= \mathbf{H} + 4\pi \mathbf{M} = \mathbf{H} + 4\pi N\mathbf{m}. \quad (b) \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

Чтобы определить зависимость действующего поля \mathbf{E}' от светового поля \mathbf{E} , достаточно отбросить, как в § 76, дополнительные члены с g , так что снова получится уравнение [см. § 77 (31), § 76 (15)]:

$$\mathbf{E}' = \frac{\epsilon + 2}{3} \mathbf{E}, \quad \text{где} \quad \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2} = \frac{4\pi N\alpha}{3}. \quad (37)$$

Теперь основные оптические уравнения для изотропных активных тел приобретают вид:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{D} &= \epsilon \mathbf{E} + i\gamma(\mathbf{s} \times \mathbf{E}), \quad (a) \\ \mathbf{B} &= \mathbf{H} - \frac{i}{n} \gamma \mathbf{E}, \quad (b) \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

где

$$\gamma = \frac{4\pi N}{3} (\epsilon + 2) g. \quad (39)$$

Так как речь идет об изотропных телах, мы можем, не нарушая общности, считать, что ось z параллельна волновой нормали. Тогда наши уравнения (38) примут такой вид:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{D}_x &= \epsilon \mathbf{E}_x - i\gamma \mathbf{E}_y, & \mathbf{B}_x &= \mathbf{H}_x - \frac{i\gamma}{n} \mathbf{E}_x, \\ \mathbf{D}_y &= \epsilon \mathbf{E}_y + i\gamma \mathbf{E}_x, & \mathbf{B}_y &= \mathbf{H}_y - \frac{i\gamma}{n} \mathbf{E}_y, \\ \mathbf{D}_z &= \epsilon \mathbf{E}_z, & \mathbf{B}_z &= \mathbf{H}_z - \frac{i\gamma}{n} \mathbf{E}_z. \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

Мы не можем пользоваться теперь, как мы это делали раньше (§ 78), оптическими основными уравнениями главы V, § 58 (14), так как их вывод основывался на предположении $\mathbf{B} = \mathbf{H}$, — мы должны прибегнуть непосредственно к уравнениям Максвелла для плоских волн [сравним главу V, § 58 (13), где вместо \mathbf{H} стоит \mathbf{B}]:

$$n(\mathbf{H} \times \mathbf{s}) = \mathbf{D}, \quad n(\mathbf{E} \times \mathbf{s}) = -\mathbf{B}; \quad (41)$$

при нашем выборе координатной системы получаем:

$$\left. \begin{aligned} n \mathbf{H}_y &= \mathbf{D}_x, & -n \mathbf{E}_y &= \mathbf{B}_x, \\ -n \mathbf{H}_x &= \mathbf{D}_y, & n \mathbf{E}_x &= \mathbf{B}_y, \\ 0 &= \mathbf{D}_z, & 0 &= \mathbf{B}_z. \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

Из этих уравнений (42) следует, что волна поперечна относительно всех векторов. Таким образом нам остается только исследовать соотношения в плоскости xu , для чего мы введем, как в § 78 (5) и (6), комбинации:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{E}_+ &= \mathbf{E}_x + i\mathbf{E}_y, \\ \mathbf{E}_- &= \mathbf{E}_x - i\mathbf{E}_y, \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

и соответствующие комбинации для остальных векторов. Тогда нашу систему четырех уравнений (40) и (42) можно написать в виде:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{D}_+ &= (\epsilon - \gamma) \mathbf{E}_+, & \mathbf{B}_+ &= \mathbf{H}_+ - \frac{i\gamma}{n} \mathbf{E}_+, \\ \mathbf{D}_- &= (\epsilon + \gamma) \mathbf{E}_-, & \mathbf{B}_- &= \mathbf{H}_- - \frac{i\gamma}{n} \mathbf{E}_-, \\ \mathbf{D}_+ &= -in \mathbf{H}_+, & \mathbf{B}_+ &= in \mathbf{E}_+, \\ \mathbf{D}_- &= in \mathbf{H}_-, & \mathbf{B}_- &= -in \mathbf{E}_-. \end{aligned} \right\} \quad \begin{matrix} (a) \\ (b) \end{matrix} \quad (44)$$

Мы видим, что положительные и отрицательные колебания представлены отдельно.

Приравнявая выражения (а) и (b) для \mathfrak{D}_+ и \mathfrak{B}_+ и соответственно \mathfrak{D}_- и \mathfrak{B}_- , мы получаем четыре уравнения:

$$\left. \begin{aligned} (\varepsilon - \gamma) \mathfrak{E}_+ &= -in \mathfrak{H}_+, & \mathfrak{H}_+ - \frac{i\gamma}{n} \mathfrak{E}_+ &= in \mathfrak{E}_+, \\ (\varepsilon + \gamma) \mathfrak{E}_- &= in \mathfrak{H}_-, & \mathfrak{H}_- - \frac{i\gamma}{n} \mathfrak{E}_- &= in \mathfrak{E}_-. \end{aligned} \right\} \quad (45)$$

Исключение \mathfrak{H}_+ и \mathfrak{H}_- дает:

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{E}_+ [n^2 + \gamma - (\varepsilon - \gamma)] &= 0, & (a) \\ \mathfrak{E}_- [n^2 - \gamma - (\varepsilon + \gamma)] &= 0. & (b) \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

Мы видим таким образом, что распространяются две круговые волны, а именно, согласно главе I, § 8 (3) и (4):

$$\left. \begin{aligned} \text{правовращающаяся: } \mathfrak{E}_+ = 0, \quad \frac{\mathfrak{E}_y}{\mathfrak{E}_x} = i \text{ и } n_-^2 - \varepsilon - 2\gamma = 0, & (a) \\ \text{левовращающаяся: } \mathfrak{E}_- = 0, \quad \frac{\mathfrak{E}_y}{\mathfrak{E}_x} = -i \text{ и } n_+^2 - \varepsilon + 2\gamma = 0. & (b) \end{aligned} \right\} \quad (47)$$

Отсюда приближенно следует¹:

$$\left. \begin{aligned} n_+ &= n - \frac{\gamma}{n}, & (a) \\ n_- &= n + \frac{\gamma}{n}, & (b) \end{aligned} \right\} n = \sqrt{\varepsilon} \quad (48)$$

Здесь n есть средний показатель преломления².

Падающий линейно поляризованный свет вследствие этого поворачивается на единицу длины на угол:

$$\chi = \frac{\pi}{\lambda_0} (n_- - n_+) = \frac{2\pi\gamma}{\lambda_0 n} = \frac{8\pi^2}{3} N \frac{n^2 + 2}{n \lambda_0} g \quad (49)$$

[(см. § 78 (18)], причем независимо от направления распространения света.

¹ Если пренебречь магнитным дополнительным членом [в (45) членами с

$i\gamma/n$], то в (48) вместо γ будет всюду стоять величина $\gamma/2$.

² То, что две круговых волны будут преломляться призмой под различными углами соответственно показателям преломления n_+ и n_- , было непосредственно показано на растворах сахара Флейшлем (E. v. Fleisch; см. § 84, стр. 560, примеч. 1) и, кроме того, может быть выяснено при помощи метода, придуманного Френелем, для активных кристаллов.

Наша формула (49) является для оптической активности аналогом формулы Лорентц-Лоренца, § 76 (15). Действительно, если мы введем удельное вращение $[\gamma] = \frac{\chi}{N}$, то согласно нашей формуле (32) выражение

$$\frac{[\chi]}{n^2 + 2} = \frac{8\pi^2}{3} \frac{g}{\lambda_0 n} = -\frac{16\pi^3}{9} \frac{1}{\lambda_0^2} \sum_{kl} \alpha^{kl} (r_k - r_l) e_k e_l \quad (50)$$

должно быть независимым от плотности, а для растворов — от концентрации. Но при проверке этого утверждения надо строго следить за тем, какие мы ввели предположения. Мы считаем, что молекулы окружающей среды не оказывают ощутительного действия на молекулы вращающего вещества и что влияние соседних молекул может быть учтено с помощью действующей силы поля. Измерение вращательной способности дает зависимость величины (50) от плотности, из которой можно заключить, что окружение молекулы производит в ней деформацию. Такие измерения были проделаны Вольфом и Фолькманом¹ над двумя веществами — ментоном $C_{10}H_{18}O$ и лимоненом $C_{10}H_{16}$ в различных растворителях. Определяя диэлектрические постоянные и молекулярную поляризацию, они определили диэлектрический дипольный момент этих веществ и нашли, что ментон имеет значительный дипольный момент ($2,8 \cdot 10^{-18}$ эл. ст. ед.), а дипольный момент лимонена лежит ниже границы точного наблюдения. Поэтому можно было ждать, что молекулы ментона находятся в сильном взаимодействии с окружающей средой, а молекулы лимонена — в слабом взаимодействии. В согласии с этим было установлено, что у первого вещества при переходе из раствора в неполярном растворителе гептане к полярному растворителю — метиловому спирту, происходит значительное смещение ультрафиолетового поглощения, в лимонене же этого нет.

Затем была определена вращательная способность и оказалось, что величина (50) в самых разнообразных растворителях дает очень малые отклонения для лимонена и очень большие для ментона (табл. 31).

В целом оказывается, что формула (50) далеко не так хорошо совпадает с опытом, как закон рефракции Лорентц-Лоренца; вращательная способность гораздо чувствительнее к внешним возмущениям. Этот факт нам станет понятным позже, при более детальном изучении механизма в главе о дисперсии (см. главу VIII, § 99).

Данные об удельном вращении многочисленных органических тел, в особенности различных видов сахара, можно найти в спра-

¹ K. L. Wolf u. H. Volkmann, Z. physik. Chem. Abt., т. 3 (1929), стр. 139; H. Volkmann, там же, т. 10 (1930), стр. 161.

Таблица 31

Сравнение удельной вращательной способности и величины (50) для лимонена и ментона в растворах объемной концентрации q с теми же величинами для чистого лимонена и ментона. Длина волны $\lambda=589$ мμ.

Растворитель	Лимонен			Ментон		
	q	$\Delta [\chi]$ °/о	$\Delta \frac{[\chi]}{n^2+2}$ °/о	q	$\Delta [\chi]$ °/о	$\Delta \frac{[\chi]}{n^2+2}$ °/о
Гептан C_7H_{16}	2,404	—3,7	+1,6	11,734	—0,44	+ 3,2
Метиловый спирт CH_3OH	2,2692	—8,77	—0,1	8,3098	—21,6	—15,2
Ацетон $(CH_3)_2CO$	3,5382	—6,1	+1,5	10,34	—11,3	—6,32
Бензол C_6H_6	2,3436	+0,3	—2,1	12,224	—39,3	—21,9
Сероуглерод CS_2	3,9065	+0,7	—8,0	10,54	—12,6	—21,9
Нитробензол $C_6H_5NO_2$	5,9233	+9,3	+3,56	10,946	—7,51	—13,4
Четыреххлористый углерод CCl_4	2,9731	—5,61	—4,87	—	—	—

вочнике Ландольт—Бернштейн¹; из него видно, что удельное вращение (приблизительно при температуре 20° и натровом D -свете) чрезвычайно сильно зависит от концентрации. Для двух стерео-изомерных виноградных сахаров $C_6H_{12}O_6$, L -фруктозы и D -глюкозы удельное вращение, экстраполированное для концентрации 0, равно соответственно —92° и +52°. Отсюда можно судить о величине эффекта.

§ 84. ОПТИЧЕСКИ АКТИВНЫЕ КРИСТАЛЛЫ

Теперь мы займемся теорией оптической активности кристаллов, в которых впервые было открыто явление вращения (кварц). В этом случае можно принять для электрического и магнитного момента одного атома или молекулы в решетке допущение § 83 (5), введя, кроме того, в эту формулу член, обусловленный взаимодействием отдельных атомов в кристаллической решетке. Соответствующий метод изложен в § 75.

Без вычисления очевидно, что члены, появляющиеся вследствие этого в выражении момента единицы объема, будут иметь такую же форму, как для одной молекулы, так как весь кристалл можно рассматривать до известной степени, как одну огромную анизотропную молекулу.

Мы примем еще одно упрощение и отбросим дополнительный член, соответствующий магнитному моменту. Строго говоря, это неверно, ибо, как мы это видели, в жидкостях этот член равен по величине электрическому моменту.

¹ Physik.-chem. Tabellen, т. 2, № 188, стр. 999.

Полная теория еще не разработана в литературе,—как легко убедиться, она значительно сложнее той теории, которую мы сейчас выведем, пренебрегая магнитным дополнительным членом. Мы это делаем потому, что и при таком упрощении ясно выступают некоторые главные черты явления. Однако результаты, разумеется, нуждаются в количественной, а может быть, и в качественной поправке¹.

В соответствии с формулами (27) § 83 для электрического момента \mathfrak{p} мы напишем соотношение между вектором смещения \mathfrak{D} и электрическим полем \mathfrak{E} в виде²:

$$\mathfrak{D}_x = \epsilon_x \mathfrak{E}_x + i(\mathfrak{G} \times \mathfrak{E})_x. \quad (1)$$

Здесь $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$ —ранее введенные главные диэлектрические постоянные (см. главу V) без учета вращательной способности, а \mathfrak{G} вектор гирации, зависящий от направления волновых нормалей по формуле:

$$\mathfrak{G}_x = g_{xx} \mathfrak{s}_x + g_{xy} \mathfrak{s}_y + g_{xz} \mathfrak{s}_z. \quad (2)$$

g_{xy} являются при данной частоте константами вещества, величина которых порядка отношения константы решетки к длине волны. Мы должны теперь связать уравнения (1) с уравнениями Максвелла для плоской волны [см. главу V, § 58 (14)]:

$$\mathfrak{D} = n^2 [\mathfrak{E} - \mathfrak{s}(\mathfrak{s} \cdot \mathfrak{E})]. \quad (3)$$

Полагая равными оба выражения (1) и (3), получаем следующие линейные уравнения для составляющих:

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x [\epsilon_x - (1 - \mathfrak{s}_x^2)n^2] + \mathfrak{G}_y [n^2 \mathfrak{s}_x \mathfrak{s}_y - i\mathfrak{G}_z] + \mathfrak{G}_z [n^2 \mathfrak{s}_x \mathfrak{s}_z + i\mathfrak{G}_y] &= 0, \\ \dots\dots\dots \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Приравняв нулю детерминанты, получим для n^2 квадратное уравнение:

$$\left. \begin{aligned} n^4 (\epsilon_x \mathfrak{s}_x^2 + \epsilon_y \mathfrak{s}_y^2 + \epsilon_z \mathfrak{s}_z^2) - \\ - n^2 [\epsilon_y \epsilon_z (\mathfrak{s}_y^2 + \mathfrak{s}_z^2) + \epsilon_x \epsilon_z (\mathfrak{s}_z^2 + \mathfrak{s}_x^2) + \epsilon_x \epsilon_y (\mathfrak{s}_x^2 + \mathfrak{s}_y^2) - (\mathfrak{s} \times \mathfrak{G})^2] + \\ + \epsilon_x \epsilon_y \epsilon_z - (\epsilon_x \mathfrak{G}_x^2 + \epsilon_y \mathfrak{G}_y^2 + \epsilon_z \mathfrak{G}_z^2) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

¹ В надлежащем месте (стр. 556) мы укажем в выноске, в чем заключается сложность строгой теории.

² В книге К. Försterling'a „Lehrbuch der Optik“ полностью выведена теория вращающихся кристаллов с учетом дополнительного магнитного члена. Однако, это удалось только потому, что выражение электрического дополнительного члена было взято отличным от нашего, именно в форме:

$$\sum_y g_{xy} (\mathfrak{s} \times \mathfrak{E})_y;$$

это выражение в общем случае нельзя, однако, привести в согласие с нашей формулой $\mathfrak{D} \times \mathfrak{E}$, где $\mathfrak{D}_x = \sum_y g_{xy} \mathfrak{s}_y$; оно с ним совпадает в случае изотропных веществ. Предположение Försterling'a нельзя обосновать при помощи молекулярной теории, хотя это и утверждается на стр. 200 его книги.

При $\mathcal{G} = 0$ это уравнение переходит в уравнение Френеля главы V, § 59 (3), корни которого обозначим n'_0 и n''_0 , поэтому можно написать (5) в виде:

$$(n^2 - n'^2_0)(n^2 - n''^2_0) = G^2, \quad (6)$$

где

$$G^2 = \frac{\epsilon_x \mathcal{G}_x^2 + \epsilon_y \mathcal{G}_y^2 + \epsilon_z \mathcal{G}_z^2 - n^2 (\mathcal{G} \times \mathcal{G})^2}{\epsilon_x \mathcal{G}_x^2 + \epsilon_y \mathcal{G}_y^2 + \epsilon_z \mathcal{G}_z^2}. \quad (7)$$

G есть скалярный параметр гирации, в G вместо n надо подставить n'_0 и n''_0 в зависимости от того, к какому показателю преломления вычисляется поправка. Зависимость этих двух ветвей G' , G'' от волнового направления \mathcal{G} очень сложна; ее обычно упрощают по Фогту¹, пренебрегая в выражении (7) двойным преломлением, т. е. полагают в нем $\epsilon_x = \epsilon_y = \epsilon_z = n^2$. Это предположение практически вполне достаточно²; тогда имеем:

$$G = \mathcal{G} \mathcal{G}. \quad (8)$$

Подставляя в эту формулу выражение (2) для составляющих \mathcal{G} , получим:

$$G = g_{xx} \mathcal{G}_x^2 + g_{yy} \mathcal{G}_y^2 + g_{zz} \mathcal{G}_z^2 + 2\bar{g}_{yz} \mathcal{G}_y \mathcal{G}_z + 2\bar{g}_{zx} \mathcal{G}_z \mathcal{G}_x + 2\bar{g}_{xy} \mathcal{G}_x \mathcal{G}_y, \quad (9)$$

$$\left. \begin{aligned} \bar{g}_{xy} &= \frac{1}{2} (g_{xy} + g_{yx}), \dots \end{aligned} \right\}$$

где

Откладывая величины, обратные квадратному корню, из абсолютного значения G на соответствующем направлении распространения света, мы получим поверхность второй степени. Эту поверхность назовем поверхностью гирации.

Предполагая, что

$$n^2_0 > n''^2_0, \quad (10)$$

¹ W. Voigt, Drudes Ann., т. 69 (1899), стр. 307; Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, 1903, стр. 155; Ann., Physik (4), т. 18, (1905) стр. 646.

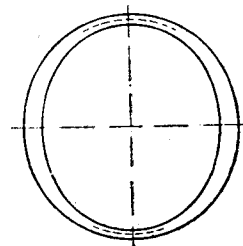
² Укажем, что изменится, если мы будем рассматривать магнитный момент с дополнительными членами. G^2 будет гораздо более сложной функцией составляющих \mathcal{G} . Вычисляя с приближением Фогта и полагая в дополнительных членах $\epsilon_x = \epsilon_y = \epsilon_z = n^2$, найдем, что G^2 является общей формой четвертой степени относительно \mathcal{G}_x , \mathcal{G}_y , \mathcal{G}_z , из которой нельзя извлечь квадратный корень, как это имело место в формуле (8). Самое G является, таким образом, не квадратичной формой, а квадратным корнем из формы четвертой степени. Однако коэффициенты этой формы четвертой степени представляют собой квадратичные комбинации коэффициентов (несимметрического) тензора g_{xy} . Возможные случаи симметрии, таким образом, снова исчерпываются рассмотрением этого тензора.

найдем, что корни (6) равны:

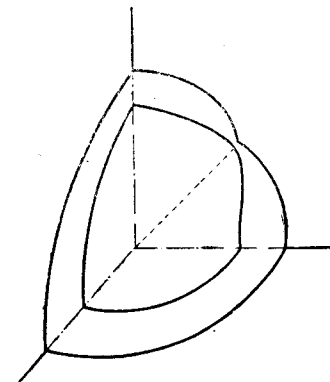
$$\left. \begin{aligned} n'^2 &= \frac{1}{2} [n'^2_0 + n''^2_0 + \sqrt{(n'^2_0 - n''^2_0)^2 + 4G^2}], \\ n''^2 &= \frac{1}{2} [n'^2_0 + n''^2_0 - \sqrt{(n'^2_0 - n''^2_0)^2 + 4G^2}], \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

причем берется положительное значение квадратного корня.

Когда G равно нулю, то n' переходит в n'_0 , а n'' в n''_0 . Величина G , которая, как мы сейчас увидим, определяется из вращения плоскости поляризации параллельно оптической оси, согласно опыту всегда мала; она мала даже относительно двойного преломления $n'_0 - n''_0$, если только волновая нормаль не



Фиг. 202. Разрез через поверхность нормалей одноосного активного кристалла.



Фиг. 203. Нормальная поверхность двухосного активного кристалла.

лежит слишком близко к оптической оси (на которой линейное двойное преломление исчезает). Поэтому вне оптической оси обе полости поверхности Френеля (т. е. величины $c'_n = \frac{c}{n'}$, $c''_n = \frac{c}{n''}$ как функции волнового направления \mathcal{G}) искажаются незначительно. Зато в непосредственной близости оптической оси поверхности оказываются сильно искаженными. В то время как при $G = 0$ обе части их сходятся в вершине конуса, при конечном G они совершенно разделены. На фиг. 202, 203 даны изображения, соответствующие одноосному и двухосному кристаллам.

Чтобы определить форму колебания, возьмем из (3)

$$\mathcal{E} = \frac{1}{n^2} \mathcal{D} + \mathcal{G} (\mathcal{G} \mathcal{E}) \quad (12)$$

и подставим это выражение в члены нулевого порядка (1); мы получим тогда:

$$\mathcal{D}_x \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{\epsilon_x} \right) = -\mathcal{G}_x (\mathcal{G} \mathcal{E}) - \frac{i}{\epsilon_x} (\mathcal{E} \times \mathcal{G})_x. \quad (13)$$

Заменим в дополнительном члене \mathfrak{E} приближенно через $\frac{1}{n^2}$ \mathfrak{D} и $\epsilon_x = \epsilon_y = \epsilon_z$ через \bar{n}^2 , где \bar{n} есть средний показатель преломления; мы получим с таким же приближением, как в формулах (11):

$$\mathfrak{D}_x \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{\epsilon_x} \right) = -\mathfrak{s}_x(\mathfrak{E}) - \frac{i}{n^4} (\mathfrak{D} \times \mathfrak{G})_x. \quad (14)$$

Эти уравнения решаются при допущении

$$n = n', \quad \mathfrak{D} = \mathfrak{D}' - ik_1 \mathfrak{D}', \quad |\mathfrak{D}'| = |\mathfrak{D}''|, \quad (15)$$

где \mathfrak{D}' и \mathfrak{D}'' — векторы колебания неактивного кристалла, длины которых полагаем равными между собой. Коэффициент k_1 должен иметь порядок величины G ; мы должны его определить. С этой целью подставим условие (15) в (14) и разделим действительную и мнимую части; члены второго порядка здесь отсутствуют; получим:

$$\mathfrak{D}'_x \left(\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{\epsilon_x} \right) + \mathfrak{s}_x(\mathfrak{E}') = 0, \quad k_1 \left[\mathfrak{D}''_x \left(\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{\epsilon_x} \right) + \mathfrak{s}_x(\mathfrak{E}'') \right] = \frac{1}{n^4} (\mathfrak{D}' \times \mathfrak{G})_x. \quad (16)$$

Но \mathfrak{D}' и \mathfrak{D}'' удовлетворяют уравнениям главы V, § 60 (10) при подстановке в них n'_0 и n''_0 вместо n ; вычтя эти уравнения из предыдущих соответствующих уравнений, получим:

$$\mathfrak{D}'_x \left(\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n_0'^2} \right) = 0, \quad k_1 \mathfrak{D}''_x \left(\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n_0'^2} \right) = \frac{1}{n^4} (\mathfrak{D}' \times \mathfrak{G})_x. \quad (17)$$

Согласно (11) n'^2 и $n_0'^2$ отличаются только на величины порядка G , тогда как $n'^2 - n_0'^2$ — конечная величина порядка $n_0'^2 - n_0''^2$; таким образом первое из этих уравнений (17) удовлетворяется с достаточным приближением, а второе служит для определения k_1 . Так как векторы \mathfrak{s} , \mathfrak{D}' , \mathfrak{D}'' попарно взаимно перпендикулярны и так как, кроме того, мы выбираем $|\mathfrak{D}'| = |\mathfrak{D}''|$, то можно положить:

$$\mathfrak{D}' = \mathfrak{D}'' \times \mathfrak{s},$$

откуда получим:

$$\mathfrak{D}' \times \mathfrak{G} = \mathfrak{G} \times (\mathfrak{s} \times \mathfrak{D}'') = \mathfrak{s} (\mathfrak{G} \mathfrak{D}'') - \mathfrak{D}'' (\mathfrak{G} \mathfrak{s}).$$

Подставляя эти выражения в (17) и умножив скалярно на \mathfrak{D}'' , мы получим в силу равенства $\mathfrak{s} \mathfrak{D}'' = 0$:

$$k_1 \left(\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n_0'^2} \right) = -\frac{G}{n^4}, \quad (18)$$

или с достаточным приближением

$$k_1 = \frac{G}{n'^2 - n_0'^2}. \quad (19)$$

Точно так же докажем, что существует второе решение:

$$n = n'', \quad \mathfrak{D} = \mathfrak{D}'' - ik_2 \mathfrak{D}', \quad |\mathfrak{D}'| = |\mathfrak{D}''|, \quad (20)$$

где

$$k_2 = -\frac{G}{n''^2 - n_0'^2}, \quad (21)$$

Так как из (11) следует, что

$$n'^2 + n''^2 = n_0'^2 + n_0''^2,$$

то должно быть

$$k_1 = k_2 = \frac{2G}{n_0'^2 - n_0''^2 + \sqrt{(n_0'^2 - n_0''^2)^2 + 4G^2}} = k.$$

Поэтому можно также написать:

$$k = \frac{1}{2G} [\sqrt{(n_0'^2 - n_0''^2)^2 + 4G^2} - (n_0'^2 - n_0''^2)]. \quad (22)$$

Эта величина постоянно ≤ 1 .

Умножив оба решения (15) и (20) на множитель $e^{i\varphi}$, где

$$\varphi = -\omega t + \frac{2\pi}{\lambda} (\mathfrak{s} \mathbf{r}), \text{ и взяв действительные части, получим:}$$

$$\left. \begin{aligned} n = n', \quad \mathfrak{D} &= \mathfrak{D}' \cos \varphi + k \mathfrak{D}'' \sin \varphi, \\ n = n'', \quad \mathfrak{D} &= \mathfrak{D}'' \cos \varphi + k \mathfrak{D}' \sin \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

Расположив систему координат так, чтобы ось x была параллельна \mathfrak{D}' , а ось y параллельна \mathfrak{D}'' , и положив $|\mathfrak{D}'| = |\mathfrak{D}''| = D$ получим решения (23) в виде:

$$\left. \begin{aligned} n = n', \quad \mathfrak{D}_x &= D \cos \varphi, \quad \mathfrak{D}_y = kD \sin \varphi, \quad \mathfrak{D}_z = 0, \\ n = n'', \quad \mathfrak{D}_x &= kD \sin \varphi, \quad \mathfrak{D}_y = D \cos \varphi, \quad \mathfrak{D}_z = 0. \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

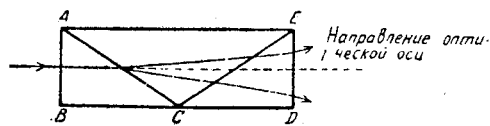
Это формула для двух эллиптических колебаний с одинаковыми отношениями осей k и противоположным направлением обращения; большие оси их скрещены и параллельны соответственно \mathfrak{D}' и \mathfrak{D}'' .

В направлении оптической оси для одноосных кристаллов и соответственно в направлениях биномали (оптических осей для двухосных кристаллов) $n_0' = n'' = \bar{n}$; здесь k достигает своего максимального значения 1, т. е. мы имеем две круговые волны.

с противоположным вращением, показатели преломления которых n_l и n_r , равны согласно (11):

$$n_l = \bar{n} + \frac{G}{2n}, \quad n_r = \bar{n} - \frac{G}{2n}. \quad (25)$$

Прямое доказательство различной преломляемости правой и левой круговой волны было получено Френелем¹ с помощью кварцевых призм; так как явление очень слабо, то лучше всего ставить несколько таких призм одну за другой, как показано на фиг. 204 (две правые призм и одна левая).



фиг. 204. Френелева призма для доказательства существования кругового двойного преломления.

Линейно поляризованная волна, падающая перпендикулярно на кристаллическую пластинку, вырезанную нормально к оси и имеющую толщину 1, подвергается вращению плоскости поляризации на угол:

$$\chi = \frac{\omega}{2c} (n_l - n_r) = \frac{\omega G}{2cn} = \frac{\pi G}{\lambda n}. \quad (26)$$

χ называется *удельной вращательной способностью*.

Для всех направлений, заметно отклоняющихся от оптических осей, k мало и имеет порядок величины G , так как при $G \ll n_0'^2 - n_0''^2$ имеем согласно (22) в первом приближении:

$$k = \frac{G}{n_0'^2 - n_0''^2} = \frac{G}{2n(n_0' - n_0'')}. \quad (27)$$

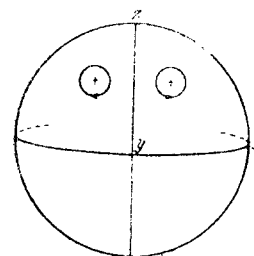
Опыт показывает, что отношение осей действительно чрезвычайно мало, что подтверждают результаты, полученные нашим методом приближения.

Рассмотрим теперь особенности формы гирационных поверхностей при различных видах симметрии кристалла. При этом мы должны помнить, что вращение возникает вследствие того, что некоторое определенное направление распространения в кристалле связано с постоянным положительным направле-

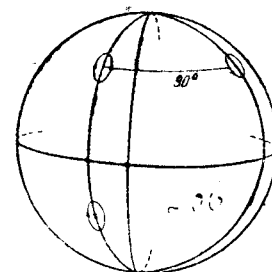
¹ A. Fresnel, Ann. Chim. Phys. (2), т. 28 (1825), стр. 147 (Oeuvres compl., т. 1 стр. 731, Paris, 1866). См. также J. Babinet, C. R. Acad. Sci., Paris, т. 4 (1837), стр. 900; J. Stefan, Wien. Ber. (2), т. 50 (1864), стр. 380; Poggend. Ann., т. 124 (1865), стр. 623; V. v. Lang, Wien. Ber. (2), т. 60 (1869), стр. 767; Poggend. Ann., т. 140 (1870), стр. 460; A. Cornu, C. R. Acad. Sci., Paris, т. 92 (1881), стр. 1369; E. v. Fleischl, Wien. Ber. (2), т. 90 (1884), стр. 378; Wiedem. Ann., т. 24 (1885), стр. 127.

нием вращения. Отсюда следует, что при наличии центра симметрии G должно быть тождественно равно нулю: при изменении знака распространения G должно также изменить знак, а в квадратичной форме (9) это возможно только тогда, когда G тождественно равно нулю. Таким образом наличие центра симметрии исключает оптическую активность.

Напротив, в случае существования плоскости симметрии или зеркально-поворотной оси вполне возможна оптическая активность. В самом деле, в случае *плоскости симметрии*, например плоскости yz , вращение для двух направлений, расположенных зеркально симметрично относительно нее, должно быть равно



Фиг. 205. Оптическое вращение при наличии плоскости симметрии.



Фиг. 206. Оптическое вращение при наличии зеркально-поворотной оси.

по величине и противоположно направлено (фиг. 205), т. е. G должно переходить в G при перестановке от \hat{s}_x к $-\hat{s}_x$. Отсюда следует, что G сводится к

$$G = 2\hat{s}_x (g_{xy}\hat{s}_y + g_{xz}\hat{s}_z). \quad (28)$$

В случае *зеркально-поворотной оси* примем ее за ось z . [Мы можем ограничиться случаем четверной оси (см. примечание 27), так как все остальные могут быть образованы из нее путем комбинации с другими элементами симметрии]. Тогда при переходе от $\hat{s}_x, \hat{s}_y, \hat{s}_z$ к $-\hat{s}_y, \hat{s}_x, -\hat{s}_z$ величины G переходят в $-G$ (фиг. 206). Отсюда следует:

$$G = g_{xx}(\hat{s}_x^2 - \hat{s}_y^2) + 2g_{xy}\hat{s}_x\hat{s}_y. \quad (29)$$

Наконец, рассмотрим случай *оси симметрии*. Направления, переходящие одно в другое при вращении вокруг этой оси, должны соответствовать равным значениям G . Например, если ось z есть ось симметрии, то должно быть

$$G = g_{xx}\hat{s}_x^2 + g_{yy}\hat{s}_y^2 + g_{zz}\hat{s}_z^2 + 2g_{xy}\hat{s}_x\hat{s}_y. \quad (30)$$

Если ось симметрии выше второго порядка, то

$$G = g_{xx}(\hat{s}_x^2 + \hat{s}_y^2) + g_{zz}\hat{s}_z^2. \quad (31)$$

В этом случае гиационная поверхность имеет вращательную ось симметрии.

Комбинируя эти данные, можно определить форму гиационной поверхности для каждого класса кристалла. Из 32 классов кристаллов 21 класс является ацентрическими, из них 15 таких, для которых может иметь место оптическая активность. Такими являются главным образом энантиоморфные группы (т. е. группы, не имеющие зеркальных поверхностей), но, кроме них, есть несколько кристаллов с плоскостью симметрии и зеркальной осью. Всего существует 8 различных типов гиационных поверхностей второй степени, но мы не будем их здесь перечислять. Кроме того, в природе нельзя найти примера всех 8 типов.

Рассмотрим подробно *оптически одноосные* кристаллы. Им соответствует, очевидно, наш последний случай (31), когда гиационная поверхность обладает вращательной симметрией относительно оптической оси. Обозначив ϑ угол, образуемый волновыми нормалью с осью z ($\hat{s}_z = \cos \vartheta$, $\sqrt{\hat{s}_x^2 + \hat{s}_y^2} = \sin \vartheta$), получим:

$$G = g_{xx} \sin^2 \vartheta + g_{zz} \cos^2 \vartheta. \quad (32)$$

Тогда круговое двойное преломление параллельно оптической оси согласно (25)

$$n_l - n_r = \frac{g_{zz}}{n}. \quad (33)$$

Вместе с тем рассмотрим поведение света перпендикулярно к оптической оси. Обозначим, как раньше, показатели преломления без учета активности n_o и n_e (обыкновенный и необыкновенный луч); тогда эллиптичность обоих взаимно перпендикулярных эллипсов колебания будет равна при распространении перпендикулярно оптической оси:

$$k = \frac{g_{xx}}{2n(n_o - n_e)}. \quad (34)$$

Измеряя двойное преломление параллельно и эллиптичность перпендикулярно к оси, мы найдем параметры g_{xx} и g_{zz} . Они (вопреки старой теории Друде) заметно отличаются друг от друга. По Фогту для кварца $n_l - n_r = 0,000071$, $n_e - n_o = 0,00911$, $k = 0,0019$, $n = 1,54880$ при $t = 18^\circ$ и $\lambda = 5890 \text{ \AA}$. Отсюда можно вычислить g_{zz} и g_{xx} по формулам (33) и (34):

$$g_{zz} = 0,00010996, \quad g_{xx} = 0,00005362.$$

Требуемого теорией вращения плоскости поляризации в направлении бинормали двuosных кристаллов долго не удавалось обнаружить. Наконец, Фогт¹ нашел его для кристаллов трост-

никового сахара, а Поклингтон¹ наблюдал его в кристаллах тростникового сахара и сегнетовой соли.

Если вырезать из активных кристаллов плоскопараллельные пластинки, то интерференционные явления, которые мы рассматривали для неактивных кристаллов в главе V, § 64, изменятся вообще мало; лишь вблизи оптических осей они изменятся очень значительно. Исследование этих явлений дает возможно ть проверить теорию, но мы не будем останавливаться на этом ввиду сложности геометрических соотношений.

В заключение заметим, что можно разделить обе составляющие вращательной способности — происходящую от молекул и обусловленную кристаллическим строением, растворив кристалл в жидкости. При этом останется только молекулярная составляющая; взяв среднюю по всем направлениям, мы, очевидно, получим:

$$g = \frac{1}{3} (g_{xx} + g_{yy} + g_{zz}) \quad (35)$$

и в частности для одноосных кристаллов:

$$g = \frac{2}{3} g_{xx} + \frac{1}{3} g_{zz}. \quad (36)$$

Здесь g_{xx} можно определить непосредственно из вращательной способности в направлении оптической оси кристалла. Мы видим, что это выражение (36) не совпадает с формулой для жидкости (так как $g_{xx} \neq g_{zz}$) даже тогда, когда вращательная способность происходит исключительно от молекул, а не от их кристаллического расположения. Вращательная способность раствора всегда равна нулю, когда молекула обладает какой бы то ни было зеркальной симметрией, в чем легко убедиться, образовав средние в обеих формулах (34) и (35). Это согласуется с правилом Пастера, вытекающим из соображений предыдущего параграфа (см. стр. 543), что оптически активные вещества дают только те кристаллы, которые кристаллизуются в энантиоморфных формах.

Но бывает и так, что кристаллы, для которых сумма (35) и (36) равна нулю, полностью утрачивают в растворе свою вращательную способность, например кварц. В этом случае можно с уверенностью заключить, что вращательная способность в кристаллическом состоянии не молекулярного происхождения, а вызвана несимметричным строением решетки. И действительно оказалось возможным вычислить вращательную способность кварца из данных построения решетки при допущении оптической изотропии в точках решетки².

¹ См. работы, цитированные в сноске 1 на стр. 556.

¹ H. C. Pocklington, Philos. Mag. (6), т. 2 (1901), стр. 368.

² E. A. Hylleraas, Z. Physik, т. 44 (1927), стр. 871.

Глава восьмая

ИЗЛУЧЕНИЕ, ПОГЛОЩЕНИЕ, ДИСПЕРСИЯ

§ 85. КЛАССИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ СВЕТОВОГО ИСТОЧНИКА

Теперь мы должны заняться вопросом возникновения (*излучения*) и уничтожения (*поглощения*) света; с этим последним явлением тесно связано цветорассеяние (дисперсия), возникающее при прохождении света через прозрачные тела. Трудность объяснения этих явлений в рамках классической оптики состоит в том, что, как показали исследования последних десятилетий, здесь появляются совершенно новые закономерности, не подчиняющиеся классической теории и даже отчасти противоречащие ей. Речь идет о явлениях, составляющих предмет квантовой теории. Тем не менее мы ограничимся изложением классических методов для всех тех явлений, к которым они применимы, не затрагивая области квантовых процессов. Вместе с тем мы опишем эксперименты, в которых классическая оптика оказывается неверной, и установим границы ее применимости (§ 90).

Прежде всего построим на основе классических воззрений *модель атома или молекулы, излучающей свет*.

Мы уже не раз прибегали к представлению, что колеблющийся диполь является центром электромагнитной сферической волны, распространяющейся по классическим законам теории Максвелла. При этом временной закон, по которому изменялся момент самого диполя, был еще произвольным, — так, в теории рассеяния мы полагали его пропорциональным напряжению поля падающего света (см. главу VII, § 81). В процессе *светового излучения* вместо этого должен быть задан механизм, с помощью которого диполь совершает *свободные колебания*; энергию для свободных колебаний он получает от электрического или теплового возбуждения.

Из опыта известно, что колебания отдельного атома *строго монохроматичны*, как это показывает тонкость спектральных линий в разреженных газах. Отсюда можно заключить, что колебательный процесс приблизительно *гармоничен*.

Поэтому моделью центра излучения мы можем считать *гармонический вибратор*. Незатухающий линейный вибратор с ампли-

тудой $u(t)$ удовлетворяет уравнению колебаний:

$$m\ddot{u} + au = 0, \quad (1)$$

где m есть масса, a — квазиупругая постоянная.

Классическая физика полагает, что электроны в атоме находятся в положениях равновесия, вокруг которых они смогут совершать небольшие колебания. x — координата такого электрона удовлетворяет уравнению колебания (1). Точнее, координаты всех электронов удовлетворяют системе линейных уравнений; путем введения так называемых „нормальных координат“ эти уравнения приводятся к форме несвязанных колебаний, которые выражаются уравнением (1), где u уже не означает просто евклидовскую пространственную координату (см. главу VII, § 82). Мы вернемся еще к рассмотрению таких моделей (см. § 98).

В последующем мы будем иметь дело только с электронами, изотропно связанными с положением равновесия; векторная амплитуда u электрона, каждая составляющая которой удовлетворяет уравнению (1), колеблется по формуле:

$$u = u_0 e^{i\omega_0 t}, \quad \omega_0^2 = \frac{a}{m}. \quad (2)$$

Если заряд частицы есть e , то амплитуда u имеет момент:

$$p = eu. \quad (3)$$

Соответствующее световое колебание, согласно главе VII, § 81 (4) выразится уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{E} &= \frac{1}{c^2 r^3} \mathbf{r} \times (\mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{p}}), \\ \mathfrak{H} &= -\frac{1}{c^2 r^2} \mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{p}}. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Вычислим сначала излучение в некотором определенном направлении. Оно выражается вектором Пойнтинга, глава I, § 2 (7), который можно представить согласно (4) в виде:

$$\mathcal{S} = \frac{c}{4\pi} \mathcal{E} \times \mathfrak{H} = \frac{c}{4\pi} \frac{1}{c^4 r^5} \mathbf{r} (\mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{p}})^2. \quad (5)$$

Это уравнение показывает, во-первых, что для излучения в некотором направлении имеет значение только составляющая \ddot{p} , перпендикулярная направлению наблюдения \mathbf{r} , и во-вторых, что вектор луча совпадает с направлением наблюдения, т. е. направлен по радиусу. Его величина равна:

$$S = |\mathcal{S}| = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{c^3 r^2} (\ddot{p})^2 \sin^2 \vartheta, \quad (6)$$

где ϑ есть угол между направлением $\ddot{\mathbf{r}}$ и радиус вектора \mathbf{r} к точке наблюдения. Потеря излучения по всем направлениям или излучение в единицу времени равно интегралу по сферической поверхности:

$$\eta = \int \int S r^2 \sin \vartheta d\vartheta d\varphi = \frac{2}{3} \frac{1}{c^3} (\ddot{\mathbf{p}})^2, \quad (7)$$

или же, после замены \mathbf{p} гармоническим колебанием с циклической частотой ω_0 :

$$\eta = \frac{2}{3} \frac{\omega_0^4}{c^3} p^2. \quad (8)$$

Эта потеря энергии показывает, что наша модель источника света не может быть абсолютно верной, так как незатухающее колебание возможно лишь при постоянной энергии, тогда как в действительности энергия колебания непрерывно переходит в энергию излучения. Наше предположение может быть только приближением в том смысле, что потеря энергии при большом числе колебаний очень мала по сравнению со средней энергией, заключенной в резонаторе. Справедливость такого предположения мы докажем числовым расчетом (см. § 86, стр. 572).

Кроме этого затухания, существуют и другие явления, отнимающие энергию у вибратора. Мы разберем их подробно в следующих параграфах.

Перечислим вкратце наиболее важные причины: потеря излучением, явление Допплера, вызванное тепловым движением, передача энергии посредством ударов, электрические и другие взаимодействия атомов. Мы ограничимся, как обычно, тем случаем, когда ширина $\Delta\nu$ спектральных линий, возникающая вследствие этих процессов, мала по сравнению с абсолютным значением частоты ν центра тяжести линии.

Спектроскопические затухания обнаруживаются в виде расширения спектральных линий, как мы сейчас объясним.

Процесс излучения, обладающий этим свойством, проще всего описать с помощью затухающего гармонического колебания, выражаемого уравнением:

$$m\ddot{u} + a\dot{u} + bu = 0; \quad (9)$$

это уравнение получается из уравнения (1), к которому прибавлен член $b\dot{u}$, соответствующий затуханию. Решение этого уравнения есть:

$$u = u_0 \cdot e^{-\frac{\gamma}{2}t} \cdot e^{\pm i\omega_0 t}, \quad (10)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \omega_0 &= \sqrt{\frac{a}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}, \\ \gamma &= \frac{b}{m}. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Согласно нашему предположению, что ширина линии мала,

$$\gamma \ll \omega_0, \quad (12)$$

так что практически в большинстве случаев можно пользоваться, как в (2), упрощенной формулой:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{a}{m}}. \quad (13)$$

Множитель $\frac{1}{2}$ при γ нужно ввести потому, что мы относим ослабление колебаний не к амплитуде, а к энергии, которая пропорциональна $|u|^2$, и, следовательно, может быть написана в виде:

$$W = W_0 e^{-\gamma t}. \quad (14)$$

Обратную величину $\tau = \frac{1}{\gamma}$ часто называют по аналогии с понятиями квантовой механики средней продолжительностью жизни колебательного состояния¹.

Амплитуды напряжения поля излучаемого света пропорциональны электрическому моменту:

$$p = eu = p_0 e^{-\frac{\gamma}{2}t} \cdot e^{\pm i\omega_0 t} \quad (15)$$

или в вещественной форме:

$$p = p_0 e^{-\frac{\gamma}{2}t} \cdot \cos(\omega_0 t + \delta), \quad (16)$$

где δ означает фазу.

Если волна, излучаемая таким колебанием, попадает в спектральный аппарат, она дает не бесконечно тонкую спектральную линию, а линию конечной ширины. Чтобы получить ее, мы должны разложить функцию (16) на чисто гармонические составляющие.

Положим, что вибратор находится в покое [т. е. $p(t) = 0$], от $t = -\infty$ до $t = 0$, а от момента $t = 0$ до $t = +\infty$ выражается

¹ Это обозначение соответствует квантово-механическому представлению. Вообразим себе вместо непрерывно излучающегося резонатора систему многих квантоиспускающих центров, отдающих полную начальную энергию W_0 дискретными элементарными актами по закону радиоактивного распада. Тогда вероятность, что в момент t квант еще не излучен, пропорциональна $e^{-\gamma t}$, а средняя продолжительность жизни равна:

$$\bar{t} = \frac{\int_0^{\infty} t e^{-\gamma t} dt}{\int_0^{\infty} e^{-\gamma t} dt} = \frac{1}{\gamma} = \tau.$$

функцией (16). Определенная таким образом прерывная функция может быть представлена сходящимся интегралом Фурье:

$$p(t) = \int_{-\infty}^{\infty} q(\nu) e^{2\pi i \nu t} d\nu. \quad (17)$$

Мы получим коэффициент Фурье $q(\nu)$ с помощью формул:

$$q(\nu) = \int_0^{\infty} p(t) e^{-2\pi i \nu t} dt, \quad (18)$$

нижнюю границу полагаем равной нулю, так как колебание $p(t)$ равно нулю до момента возбуждения.

Когда $p(t)$ действительно, то

$$q(\nu) = q^*(-\nu). \quad (19)$$

Свет приобретает конечную (поддающуюся измерению) интенсивность благодаря тому, что большое число таких процессов возбуждения и затухания следуют друг за другом. Предположим, что каждый новый процесс начинается только тогда, когда предыдущий почти совершенно уничтожен; тогда энергия, излучаемая в единицу времени, пропорциональна выражению:

$$\bar{p}^2 = \frac{1}{T} \int_0^T p^2(t) dt = \frac{n}{N} \sum_{k=1}^N \int_{t_k}^{t_{k+1}} p^2(t) dt. \quad (20)$$

Здесь n есть число возбуждений в секунду, N соответствующее число за время T , т. е.

$$nT = N;$$

далее, $t_1, t_2, \dots, t_k, \dots$ — моменты возникновения возбуждения. Согласно сделанному предположению, интегралы в выражении (20) равны между собой:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} p^2(t) dt &= \int_0^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} d\nu p(t) q(\nu) e^{2\pi i \nu t} = 2 \int_0^{\infty} q(\nu) \cdot q^*(\nu) d\nu = \\ &= 2 \int_0^{\infty} |q(\nu)|^2 d\nu. \end{aligned} \quad (21)$$

Отсюда мы получаем:

$$\bar{p}^2 = n \int_0^{\infty} p^2(t) dt = 2n \int_0^{\infty} |q(\nu)|^2 d\nu. \quad (22)$$

Согласно (8) средняя энергия, излучаемая в единицу времени, равна:

$$\bar{\eta} = \frac{2}{3} \frac{\omega_0^4}{c^3} \bar{p}^2 = \frac{4}{3} n \frac{16\pi^4}{c^3} \nu_0^4 \int_0^{\infty} |q(\nu)|^2 d\nu = n \int_0^{\infty} \epsilon_{\nu} d\nu. \quad (23)$$

Здесь

$$\epsilon_{\nu} = \frac{64\pi^4}{3c^3} \cdot \nu_0^4 \cdot |q(\nu)|^2 \quad (24)$$

означает среднюю интенсивность излучения на интервал частоты $d\nu$ и на один процесс возбуждения.

Подставим в (18) вместо $p(t)$ действительное выражение (16), вследствие чего косинус выразится двумя экспоненциальными функциями; тогда

$$\begin{aligned} q(\nu) &= \frac{p_0}{2} \left[\int_0^{\infty} e^{(-\frac{\gamma}{2} + i\omega_0 - 2\pi i \nu)t + i\delta} dt + \int_0^{\infty} e^{(-\frac{\gamma}{2} - i\omega_0 - 2\pi i \nu)t - i\delta} dt \right] = \\ &= \frac{p_0}{2} \left[\frac{-e^{i\delta}}{i(\omega_0 - \omega) - \frac{\gamma}{2}} + \frac{e^{-i\delta}}{i(\omega_0 + \omega) + \frac{\gamma}{2}} \right], \end{aligned} \quad (25)$$

где

$$\omega_0 = 2\pi \nu_0, \quad \omega = 2\pi \nu.$$

Это выражение (25) должно, конечно, удовлетворять уравнению (19). Далее из (25) следует:

$$\begin{aligned} |q(\nu)|^2 &= \frac{p_0^2}{4} \left[\frac{1}{(\omega_0 - \omega)^2 + \frac{\gamma^2}{4}} + \frac{1}{(\omega_0 + \omega)^2 + \frac{\gamma^2}{4}} - \right. \\ &\quad \left. - 2 \frac{\left(\omega_0^2 - \omega^2 - \frac{\gamma^2}{4} \right) \cos 2\delta + \gamma \omega_0 \sin 2\delta}{\left(\omega_0^2 - \omega^2 - \frac{\gamma^2}{4} \right)^2 + \omega_0^2 \gamma^2} \right]. \end{aligned} \quad (26)$$

Эта формула дает спектральное распределение света одного резонатора, начинающего колебаться в момент $t=0$ с произвольной фазой δ . Согласно нашему предположению излучение заключается в том, что в течение наименьшего, поддающегося измерению, промежутка времени процесс возбуждения в одном атоме или в нескольких атомах, равных между собой, происходит чрезвычайно часто. При этом начальная фаза δ каждого возбуждения совершенно произвольна. Наблюдением можно уста-

новить только среднюю величину (26), причем последний член, зависящий от фазы, выпадает. Можно произвести дальнейшее упрощение уравнения (26), основываясь на том, что γ мало относительно ω_0 . Вследствие этого вторая дробь в (26) никогда не может быть больше порядка величины $1/\omega_0^2$, тогда как первая дробь вблизи $\omega = \omega_0$ доходит до порядка величины $1/\gamma^2$. Поэтому для спектрального излучения можно написать с большим приближением:

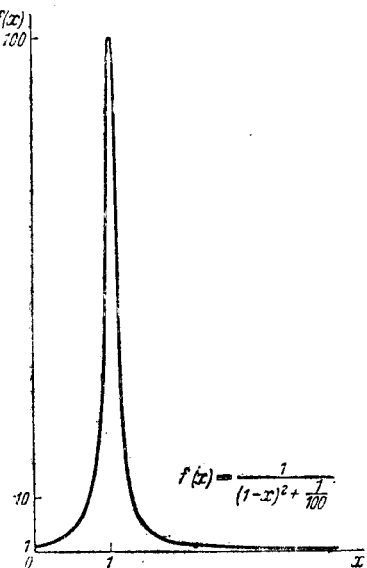
$$\epsilon_\nu = \frac{16\pi^4}{3c^3} \nu_0^4 p_0^2 \frac{1}{4\pi^2 (\nu_0 - \nu)^2 + \frac{\gamma^2}{4}} \quad (27)$$

На фиг. 207

$$f(x) = \frac{\epsilon_\nu}{\frac{4\pi^2}{3c^3} \nu_0^4 p_0^2} = \frac{1}{(1-x)^2 + \frac{1}{4} \Gamma^2} \quad (28)$$

где

$$\frac{\nu}{\nu_0} = x, \quad \Gamma = \frac{\gamma}{2\pi\nu_0} = \frac{\gamma}{\omega_0} \quad (29)$$



Фиг. 207. Форма спектральной линии, обязанная затуханию.

10^{-4} (см. § 86). Поэтому ширина линии на фигуре очень увеличена.

Кривая симметрична относительно $x=1$, но физический смысл имеет только та область $x \geq 0$, которая начинается с $x=0$ со значением $\frac{1}{(1+\frac{1}{4}\Gamma^2)} \approx 1$. Ординаты $f(x)$ всюду

очень малы, кроме узкой области вблизи места резонанса $x=1$ (при $|x-1| \ll \frac{1}{2}\Gamma$). Кривая имеет максимум при $x=1$ и согласно (28) и (29)

$$f(1) = \frac{4}{\Gamma^2} = \frac{16\pi^2 \nu_0^2}{\gamma^2} \quad (30)$$

Точку, где кривая достигает половины максимального значения, мы найдем из

$$\frac{1}{(1-x_h)^2 + \frac{1}{4}\Gamma^2} = \frac{2}{\Gamma^2}$$

откуда следует:

$$1 - x_h = \pm \frac{1}{2} \Gamma. \quad (31)$$

Разность этих двух частот — так называемая *ширина половинного значения* (или половинная ширина) — равна в x -масштабе $\Delta x = \Gamma$, и согласно (29) в масштабе ω и ν :

$$\left. \begin{aligned} \Delta\omega &= \omega_0 \Delta x = \omega_0 \Gamma = \gamma, \\ \Delta\nu &= \frac{1}{2\pi} \Delta\omega = \frac{\gamma}{2\pi}. \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

Мы найдем полную силу света, интегрируя по ν и соответственно x ; подставляя $x-1 = \frac{1}{2}\xi\Gamma$, найдем:

$$\int_0^\infty f(x) dx = \frac{2}{\Gamma} \int_{-\infty}^\infty \frac{d\xi}{\xi^2 + 1} = \frac{2\pi}{\Gamma},$$

причем вместо очень большой по абсолютной величине нижней границы $-2/\Gamma$ подставляем приближенно $-\infty$. Тогда для полного излучения имеем:

$$\left. \begin{aligned} \epsilon &= \int_0^\infty \epsilon_\nu d\nu = \frac{4\pi^2}{3c^3} \nu_0^4 p_0^2 \int_0^\infty f(x) dx = \\ &= \frac{8\pi^3}{3c^3} \frac{\nu_0^3}{\Gamma} p_0^2 = \frac{16\pi^4}{3c^3} \frac{\nu_0^4}{\gamma} p_0^2. \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

Это выражение дает полную энергию, излучаемую резонатором с силой возбуждения (начальным моментом резонатора) p_0 .

Эта энергия должна совпадать с полной энергией резонатора в момент $t=0$, если затухание происходит исключительно от потери при излучении, и, следовательно, нет других причин для расширения спектральных линий. Из этого факта можно немедленно сделать заключение относительно величины затухания. Согласно (16) начальная амплитуда момента $p = p_0 \cos \delta$ и, следовательно, амплитуда и ее изменение во времени в момент возбуждения (пренебрегаем затуханием)

$$u = u_0 \cos \delta, \quad \dot{u} = -u_0 \omega_0 \sin \delta. \quad (34)$$

Отсюда начальная энергия вибратора

$$W = \frac{m}{2} \dot{u}^2 + \frac{a}{2} u^2 = \frac{m}{2} \omega_0^2 u_0^2 \sin^2 \delta + \frac{a}{2} u_0^2 \cos^2 \delta = \frac{a}{2} u_0^2 \quad (35)$$

или, присоединив уравнения (3) и (13),

$$W = \frac{m\omega_0^2}{2e^2} p_0^2. \quad (36)$$

Сравнивая это выражение с (33), мы получим для постоянной затухания, которую обозначим γ_0 :

$$\gamma_0 = \frac{8}{3} \pi^2 \frac{e^2}{mc^3} v_0^2 = \frac{2}{3} \frac{e^2}{mc^3} \omega_0^2. \quad (37)$$

В параграфе 86 (5) мы выведем это выражение другим образом и сравним его с другими причинами затухания. Эти другие причины основаны на обмене энергии данного резонатора с другими атомами или полями, и поэтому в этом случае, разумеется, не приходится ждать, что энергия возбуждения W совпадет с излучаемой энергией ϵ .

§ 86. ШИРИНА ЛИНИЙ ИЗЛУЧЕНИЯ. ЗАТУХАНИЕ ВСЛЕДСТВИЕ ИЗЛУЧЕНИЯ И ЯВЛЕНИЯ ДОППЛЕРА

В этом и в следующих параграфах мы рассмотрим одну за другой различные физические причины затухания или, иначе говоря, ширины спектральной линии.

1. ЗАТУХАНИЕ ВСЛЕДСТВИЕ ИЗЛУЧЕНИЯ

Мы видели уже в предыдущем параграфе, как выражается затухание вследствие излучения через частоту вибратора и универсальные константы. Здесь мы дадим второй вывод затухания без помощи разложения момента в ряд Фурье.

Потеря энергии через излучение настолько мала, что можно было бы брать среднюю энергию для большого числа колебаний и это среднее считать медленно изменяющейся функцией времени. (Оправдание такого предположения будет дано на следующей странице).

Как известно, средняя потенциальная энергия гармонического вибратора равна средней кинетической:

$$\frac{m}{2} \overline{\dot{u}^2} = \frac{a}{2} \overline{u^2}. \quad (1)$$

Поэтому полная энергия

$$W = \frac{m}{2} \overline{\dot{u}^2} + \frac{a}{2} \overline{u^2} = a \overline{u^2} = \frac{m\omega_0^2}{e^2} p^2. \quad (2)$$

Заменив в § 85 (8) p^2 средней величиной из (2)

$$\overline{p^2} = \frac{We^2}{m\omega_0^2},$$

найдем потерю энергии в единицу времени:

$$\eta = -\frac{dW}{dt} = \frac{2}{3} \frac{e^2}{m} \frac{\omega_0^2}{c^3} W. \quad (3)$$

Это уравнение можно рассматривать как дифференциальное уравнение медленно изменяющейся со временем энергии W вибратора. Его решение есть:

$$W = W_0 e^{-\gamma_0 t}, \quad (4)$$

где

$$\gamma_0 = \frac{2}{3} \frac{e^2}{mc^3} \omega_0^2 = \frac{1}{\tau_0}. \quad (5)$$

γ_0 называется („классической“) *натуральной шириной линии* (точнее, шириной половинного значения) в масштабе ω (сравн. § 85, стр. 564), а τ_0 — натуральной средней продолжительности жизни. Относительная натуральная ширина линии [см. § 85 (29), (31), (32)] есть:

$$\Gamma_a = \frac{\gamma_0}{\omega_0} = \frac{2}{3} \frac{e^2}{mc^3} \omega_0 = \frac{4\pi}{3} \frac{e^2}{mc^2} \frac{1}{\lambda_0}, \quad (6)$$

где λ_0 — длина волны центра тяжести линии.

Эти величины можно вычислить для каждой спектральной линии заданной частоты, подставляя вместо e и m заряд и массу электрона, именно e равно $4,77 \cdot 10^{-10}$ эл. ст. ед., а $e/mc = 1,76 \cdot 10^7$ эл. ст. ед.:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\gamma_0} = \tau_0 &= \frac{3}{8\pi^2} \frac{1}{e \frac{e}{mc}} \lambda_0^2 = 4,53 \cdot \lambda_0^2, \quad (a) \\ \Gamma_0 &= 1,17 \cdot 10^{-12} \cdot \frac{1}{\lambda_0}. \quad (b) \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Подставив сюда среднюю длину волны видимого спектра, например, полагая λ_0 равно $5 \cdot 10^{-5}$ см, получим:

$$\left. \begin{aligned} \gamma_0 &= 8,85 \cdot 10^7 \text{ сек}^{-1}, \\ \tau_0 &= 1,13 \cdot 10^{-8} \text{ сек}, \\ \Gamma_0 &= 2,34 \cdot 10^{-8}. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Мы видим, что относительная естественная ширина линии чрезвычайно мала или естественная продолжительность жизни чрезвычайно велика по сравнению с продолжительностью светового колебания, которое равно для данной длины волны $1,67 \cdot 10^{-15}$ сек.

Это подтверждает результаты нашего приближенного метода для видимого света. Вообще область применения метода определяется требованием, что $\tau_0 \gamma_0 \gg 1$ или

$$2\pi\Gamma_0 \ll 1,$$

т. е. согласно (7)

$$\lambda_0 \gg 7,36 \cdot 10^{-12} \text{ см.}$$

Этому требованию еще удовлетворяют самые короткие (технически осуществимые) рентгеновские лучи, длина волны которых равна приблизительно $5 \cdot 10^{-10}$ см; начиная с наиболее жестких γ лучей с длиной волны порядка 10^{-11} см метод оказывается непригодным. Но для этих лучей уже самые предпосылки нашего расчета оказываются весьма спорными.

Во-первых, классическая теория взаимодействия резонатора с полем излучения вообще неверна и должна быть заменена более тонкой квантовой теорией; в квантовой теории ширина линии выражается не одной универсальной формулой, в которую входит только частота, а зависит более сложным образом от известных индивидуальных констант линий (их „силы“). Мы вернемся к этому ниже (§ 90). Но и квантовая теория в ее нынешней форме отказывается служить при длинах волн порядка радиуса-электрона, который принимаем равным 10^{-13} см.

Непосредственное измерение τ_0 производится в принципе по методу, данному Вином¹. Вин заставлял каналовые лучи, состоящие из светящихся атомов водорода, проходить через тонкую диафрагму в пространство, где поддерживается высокий вакуум с помощью чрезвычайно мощных насосов. В этом пространстве, очевидно, устранено вредное влияние соударений на излучение; наблюдая изменение яркости луча, мы можем непосредственно констатировать падение интенсивности со временем. Определяя, кроме того, с помощью явления Допплера скорость каналовых лучей, мы можем пересчитать шкалу длин на шкалу времени и получить постоянную затухания γ_0 , т. е. среднюю продолжительность жизни τ_0 . Этот результат совпадает с данными вышеприведенных теоретических расчетов по порядку величины, но отнюдь не по численному значению, и простая зависимость (7) от одной длины волны λ_0 также не подтверждается.

В действительности нельзя и ждать такого совпадения по различным причинам. Во-первых, классическая модель нашего светового источника не соответствует действительности; во-вторых, с точки зрения квантовой теории процесс излучения совсем не так прост, как это кажется с первого взгляда, ибо согласно этому учению различные линии и их частоты связаны между собой тем, что исходное состояние одной линии является конечным состоянием другой. Однако мы в дальнейшем будем довольствоваться тем, что наша модель дает правильный порядок величины затухания². Другое определение естественной ширины

¹ W. Wien, Ann. Physik (4), т. 60 (1919), стр. 597, т. 66 (1921), стр. 229, т. 73 (1924), стр. 483, т. 83 (1927), стр. 1.

² Бывают случаи, когда средняя продолжительность жизни τ_0 значительно больше 10^{-8} сек. Для объяснения этого квантовая теория пользуется понятием „метастабильного состояния“; это такое состояние, из которого вообще невозможен переход к более низкому состоянию, когда энергия излучается виртуальными вибраторами (диполями). Но возможна гораздо более медленная отдача энергии колеблющимися квадрупольями. Для косвенного определения таких больших продолжительностей жизни существует несколько методов. Назовем один из них, принадлежащий О. Stern'у и М. Vollmer'у [Physik, т. (20) (1919),

линии основано на точном измерении дисперсионной кривой; о нем будет речь ниже (см. § 93).

Мы не ограничимся одним вычислением спадания энергии, а попытаемся также выразить ослабление моментов с помощью дополнительного члена в уравнении колебания [§ 85 (1)]. Назовем его диссипативной силой \mathfrak{R} и напишем соответственно уравнение колебания:

$$m\ddot{u} + au = \mathfrak{R}. \quad (9)$$

Работа, совершаемая затуханием излучения за промежуток времени (t_1, t_2) , должна быть равна потере энергии за тот же промежуток, т. е. согласно § 85 (7):

$$\int_{t_1}^{t_2} (u \mathfrak{R}) dt = -\frac{2}{3} \frac{1}{c^3} \int_{t_1}^{t_2} (\ddot{p})^2 dt. \quad (10)$$

В частности, выбрав моменты t_1, t_2 так, что ускорение электрона в них равно нулю, мы получим, интегрируя по частям правую часть (10), следующее уравнение:

$$\int_{t_1}^{t_2} (u \mathfrak{R}) dt = \frac{2}{3} \frac{1}{c^3} \int_{t_1}^{t_2} (\ddot{p} \ddot{p}) dt = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \int_{t_1}^{t_2} (\ddot{u} \ddot{u}) dt. \quad (11)$$

Строго говоря, оно справедливо лишь для двух выбранных нами моментов времени. Ему можно удовлетворить, положив

$$\mathfrak{R} = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \ddot{u} = \frac{2}{3} \frac{1}{c^3} \ddot{p}, \quad (12)$$

но очевидно, что это условие не является необходимым.

Этот результат можно обосновать более строго, исследуя действие электронного излучения на сам электрон¹. Правда, здесь повидимому, необходимо предварительное знание распределения зарядов внутри электрона, что открывает большой простор для произвола. Фактически же результат совершенно не зависит от

стр. 183] и основанный на остаточном свечении флюоресценции: молекулы, возбужденные диафрагмированным световым лучем, диффундируют из луча; продолжительность жизни измеряется по пути диффузии. Этим методом О. Heil сумел определить для NO_2 продолжительности жизни 10^{-8} сек. [Z. f. Physik, т. 77 (1932), стр. 563]. Подробнее о квадрупольном излучении, на котором мы не останавливаемся здесь, см. А. Rubinovicz и J. Blaton, Erg. d. exakten Naturw. т. 11 (1932), стр. 176.

¹ См. Abraham, Theorie der Elektrizität 5 изд., т. 2, гл. 2, и 3 Leipzig u. Berlin, 1923. Из специальной литературы см. G. A. Schott, Electromagnetic Radiation and the Mechanical Reactions Arising from it. Cambridge, 1912; K. Schwarzschild, Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, 1903, I, стр. 128, II, стр. 132, III, стр. 245; G. Herglotz, там же, 1903, стр. 257; H. Hertz, там же, 1906, стр. 229; A. Sommerfeld, там же, 1904, I, стр. 99, II, стр. 363; Sitzgsber. Bayer. Akad., 1907, стр. 155.

этих условий. Поэтому в дальнейших рассуждениях будем считать, что он имеет место поскольку мы должны основываться на классической электронной теории.

Уравнением движения будет дифференциальное уравнение третьего порядка:

$$m\ddot{u} + au - \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \ddot{u} = 0. \quad (13)$$

Таким образом диссипативная сила, вызванная излучением, действует по иному закону, чем простые силы затухания, которые в обычной механике принимают пропорциональными скорости и противоположного ей направлениями.

Показательная функция

$$u = u_0 e^{\mu t} \quad (14)$$

является решением линейного дифференциального уравнения (13); для μ получим характеристическое уравнение:

$$m\mu^2 + a - \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \mu^3 = 0. \quad (15)$$

Так как дополнительный член мал, мы можем решить это уравнение путем последовательных приближений, приняв за нулевое приближение

$$\mu_0 = i\omega_0 = i\sqrt{\frac{a}{m}} \quad (16)$$

и подставляя это выражение в добавочный член (15). Мы получим для μ квадратное уравнение

$$\mu^2 + \omega_0^2 + \frac{2}{3} \frac{e^2}{mc^3} i\omega_0^3 = 0$$

или согласно (5)

$$\mu^2 + \omega_0^2 + i\omega_0 \gamma_0 = 0, \quad (17)$$

откуда

$$\mu = i\omega_0 \sqrt{1 + i \frac{\gamma_0}{\omega_0}} = i\omega_0 - \frac{\gamma_0}{2}. \quad (18)$$

При этом знак корня выберем так, чтобы действительная часть μ была отрицательна, соответственно затуханию колебания.

Если бы мы выбрали нулевое приближение вместо (16) в виде $\mu = -i\omega_0$, мы должны были бы написать в (18) $-i$ вместо i . Мы найдем, таким образом, что полное колебание диполя выражается:

$$p = p_0 e^{-\frac{\gamma_0}{2} t} e^{\pm i\omega_0 t}, \quad (19)$$

что согласно с § 85 (15). Но это выражение удовлетворяет дифференциальному уравнению § 85 (9) с обычным членом пер-

вого порядка, если подставить вместо константы b

$$b = m \gamma_0 = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \omega_0^3. \quad (20)$$

Вся эта классическая теория затухания светового излучения, разумеется, несовместима с современной квантовой теорией света и вещества. Она заменяется картиной, в принципе аналогичной классической, в которой учитывается обратное воздействие энергии, отдаваемой в поле излучения, на атомные колебательные процессы. При этом получается, что ширина линий всегда порядка γ_0 [см. (5)]; но при λ_0 появляются некоторые безразмерные константы, они могут значительно отличаться для различных линий и зависят от того способа, каким линии возникают во время квантовых скачков. Мы вернемся к этому в § 90.

II. ЯВЛЕНИЕ ДОППЛЕРА

Естественная ширина спектральной линии экспериментально, вообще говоря, не наблюдается по различным причинам: во-первых, потому, что, за исключением случаев высокого разрежения, свободное колебание вибратора всегда нарушается, во-вторых, и главным образом потому, что при вычислении молчаливо предполагается, что излучающий диполь находится в покое.

Однако в действительности атомы или молекулы движутся с большими скоростями, которые зависят (поскольку атом не находится под действием внешнего поля) от температуры газа. Вследствие этого движения возникает известное явление *Допплера*¹: покоящийся наблюдатель измеряет не ту частоту, которую найдет наблюдатель, перемещающийся вместе с центром испускания.

В этой книге мы не касались оптики движущихся систем, так как систематическое развитие ее возможно лишь в рамках теории относительности². Поэтому мы приводим здесь только результат, даваемый релятивистской кинематикой для явления Допплера (впрочем, совпадающий с элементарными, но не строгими соображениями классической кинематики)³.

¹ Ch. Doppler, Abh. d. K. Böhmischen Ges. d. Wiss. (5), т. II (1842), стр. 465.

² Литературу см. „Введение“, стр. 12, сноска 1.

³ Приведем вкратце релятивистский вывод. Пусть даны две системы Σ и Σ' , движущиеся друг относительно друга со скоростью v параллельно оси x . Пусть световая волна в пустоте имеет в первой системе частоту ν , а ее волновая нормаль образует с осью x угол ϑ . Соответствующие величины во второй системе пусть будут ν' и ϑ' . Фаза волны инвариантна относительно преобразования Лорентца, т. е.

$$\nu \left(t - \frac{x \cos \vartheta + y \sin \vartheta}{c} \right) = \nu' \left(t' - \frac{x' \cos \vartheta' + y' \sin \vartheta'}{c} \right).$$

Если ω_0 есть покоящаяся частота светового источника, а ξ — составляющая его движения в направлении к наблюдателю, то для последнего частота будет равна:

$$\omega = \omega_0 \left(1 + \frac{\xi}{c} \right). \quad (21)$$

Соответствующая длина волны есть:

$$\lambda = \lambda_0 \left(1 - \frac{\xi}{c} \right). \quad (22)$$

Рассмотрим теперь газ в температурном равновесии, каждая из молекул которого несет вибратор с частотой ω_0 . По закону Максвелла вероятность того, чтобы составляющая скорости в направлении x заключалась между ξ и $\xi + d\xi$, равна:

$$d\omega = \sqrt{\frac{\beta}{\pi}} e^{-\beta \xi^2} d\xi, \quad (23)$$

где

$$\beta = \frac{\mu}{2RT}, \quad (24)$$

тут $R = 8,313 \cdot 10^7$ эрг/градус есть абсолютная газовая постоянная, а μ молекулярный вес. Мы выбрали постоянный множитель в (23) с таким расчетом, чтобы полная вероятность равнялась 1:

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\omega = \sqrt{\frac{\beta}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta \xi^2} d\xi = 1. \quad (25)$$

Теперь с помощью формулы (21) каждой составляющей скорости ξ приписывается определенная частота ω . Поэтому можно вместо ξ

Само преобразование Лорентца гласит:

$$x' = \frac{1}{\alpha} (x - vt), \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \frac{1}{\alpha} \left(t - \frac{v}{c^2} x \right); \quad \alpha = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

Ограничиваясь величинами первого порядка относительно v/c , можем положить $\alpha = 1$. Сравнивая коэффициенты при x, y, t , получим:

$$v = v' \left(1 + \frac{v}{c} \cos \vartheta \right), \quad \sin \vartheta = \sin \vartheta' \left(1 - \frac{v}{c} \cos \vartheta \right).$$

Если вибратор покоится в системе Σ' , то

$$v' = v_0, \quad \xi = v \cos \vartheta,$$

и мы приходим к данной в тексте формуле. Соотношение между ϑ и ϑ' выражает закон аберрации.

ввести в закон распределения ω с помощью формул:

$$\xi = \frac{c}{\omega_0} (\omega - \omega_0), \quad d\xi = \frac{c}{\omega_0} d\omega; \quad (26)$$

мы получим:

$$d\omega = \sqrt{\frac{\beta}{\pi}} e^{-\beta \frac{c^2}{\omega_0^2} (\omega - \omega_0)^2} \cdot \frac{c}{\omega_0} d\omega. \quad (27)$$

Предполагая, что каждый атом испускает относительно движущейся вместе с ним системы одинаковую энергию (притом строго монохроматическую), мы найдем, что наблюдаемая интенсивность равна:

$$J = J_0 \cdot e^{-\left(\frac{\omega - \omega_0}{\frac{\delta}{2}}\right)^2}, \quad (28)$$

где доплерова ширина

$$\frac{\delta}{2} = \frac{\omega_0}{c \sqrt{\beta}} = \frac{\omega_0}{c} \sqrt{\frac{2RT}{\mu}} \quad (29)$$

есть то расстояние частоты от ω_0 , на котором распределены интенсивности (28) убывает на одну e -тую часть¹.

Мы введем (по аналогии с обозначениями γ, Γ) независимые от частоты величины:

$$\Delta = \frac{\delta}{\omega_0} = \frac{2}{c} \sqrt{\frac{2RT}{\mu}}. \quad (30)$$

Так как $d\nu/\nu = |d\lambda/\lambda|$, то величина Δ дает также относительную ширину линии, выраженную в длинах волн. Подставляя вместо R и c их числовые значения, найдем:

$$\Delta = 8,60 \cdot 10^{-7} \sqrt{\frac{T}{\mu}}; \quad (31)$$

так например для воздуха при комнатной температуре ($\mu = 29$, $T = 292$):

$$\Delta = 2,73 \cdot 10^{-6}.$$

Сравнивая это значение со значением Γ_0 в (8), мы видим, что для видимого света ($\lambda_0 = 5 \cdot 10^{-5}$ см), для которого Γ_0 равен, как мы нашли, $2,34 \cdot 10^{-8}$; явление Доплера при обычной температуре, оказывается, значительно больше; мы получаем:

$$\frac{\Delta}{\Gamma_0} = \frac{2,76 \cdot 10^{-6}}{2,34 \cdot 10^{-8}} = 117. \quad (32)$$

¹ Чтобы получить ширину половинного значения для эффекта Доплера, надо умножить δ на $\sqrt{\log 2}$.

Температура, при которой затухание вследствие явления Допплера и потеря излучения были бы одного порядка, практически недостижима (даже для наиболее тяжелых молекул, для которых эта температура была бы наиболее высокой, она равна нескольким сотым градуса по абсолютной шкале).

Майкельсону¹ впервые удалось измерить явления Допплера в линиях излучения. Результаты его были подробно разобраны Шенроком². В табл. 32 сопоставлены вычисленные и наблюдаемые значения для ряда газов и паров, дающие очень хорошее совпадение, тем лучше, что в эксперименте не было полностью исключено расширение линий под влиянием электрических полей³ (см. § 88).

Таблица 32
Сравнение доплеровской ширины, измеренной Майкельсоном и вычисленной Шенроком

Элемент	Атомный вес	Температура в °C	Длина волн в Å	Половинная ширина в Å	
				наблюдаемая	вычисленная
H	1,008	50	6563	0,047	0,042
			4861	0,061	0,031
O	16	600	6158	0,025	0,016
			6154	0,013	0,0100
Na	23	250	5688	0,012	0,0097
			5149	0,013	0,0088
			4984	0,010	0,0085
Zn	65,4	900	6362	0,014	0,0096
			4811	0,011	0,0073
Cd	112,4	280	6438	0,0066	0,0051
			5086	0,0048	0,0040
			4800	0,0079	0,0038
Hg	200	140	5791	0,0033	0,0030
			5770	0,0049	0,0030
			5461	0,0029	0,0028
Tl	204	250	4358	0,0046	0,0022
			5351	0,0030	0,0031

¹ А. А. Michelson, Philos. Mag., т. 34 (1892), стр. 280.
² О. Schönrock, Ann. Physik, т. 20 (1906), стр. 995.
³ Надо иметь в виду, что приводимые здесь величины являются половинными значениями, получаемыми из наших формул путем умножения на $\sqrt{\log 2}=0,833$.

Это влияние было полностью устранено в экспериментах Фабри и Бюиссона¹, результаты которых приведены в табл. 33. Совпадение с теоретическими значениями превосходно и подтверждает прежде всего температурную зависимость.

Важным условием для применимости формулы (31) является предположение, что светящиеся газовые молекулы действительно имеют скорость, соответствующую температуре. В очень многих случаях (во всех видах люминисценции) эти условия не выполняются, например когда возбужденная молекула отдает при ударе другим молекулам свою энергию и при этом не вызывает в них свечения и т. д.

Закон распределения (28) симметричен относительно основной частоты ω_0 , но значительно отличается от распределения, возникающего вследствие затухания: интенсивность убывает при возрастании расстояния от ω_0 , как показательная функция, т. е. очень быстро, тогда как формула § 85 (27) для затухающего вибратора дает алгебраическое, т. е. медленное, убывание.

Теперь посмотрим, что получается, когда расширение полос вызывается, одновременно с затуханием вследствие излучения, также и явлением Допплера. Обозначим через ω' частоту в системе, движущейся вместе с атомом; вероятность того, что эта

Таблица 33
Сравнение измеренных и вычисленных половинных значений ширины при различных температурах

Элемент	Длина волн в Å	Половинная ширина при комнатной температуре		Половинная ширина при температуре жидкого воздуха	
		наблюдаемая Å	вычисленная Å	наблюдаемая Å	вычисленная Å
He	5876	0,0180	0,0180	0,0108	0,0104
Ne	5852	0,0080	0,0080	0,0050	0,0047
Kr	5570	0,0041	0,0041	0,0026	0,0024

частота в системе наблюдателя будет близка к ω , равна, согласно (27):

$$dw = \frac{2}{\sqrt{\pi\delta}} e^{-\left(\frac{\omega-\omega'}{\delta/2}\right)^2} d\omega'. \tag{33}$$

Тогда на основании формулы затухания § 85 (27) интенсивность вибратора с собственной частотой ω_0 равна для частоты ω' в

¹ Ch. Fabry u. H. Buisson, C. R. Acad. Sc, Paris, т. 154 (1912), стр. 1224, 1500.

движущейся системе:

$$J = J_0 \frac{\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2}{(\omega_0 - \omega')^2 + \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2}, \quad (34)$$

где J_0 есть максимальная интенсивность. Каждая частота ω' дает составляющую частоты ω , наблюдаемой в неподвижной системе; складывая их, мы получаем:

$$J = J_0 \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 \frac{2}{\sqrt{\pi} \delta} \int_0^\infty \frac{e^{-\left(\frac{\omega - \omega'}{\delta/2}\right)^2}}{(\omega_0 - \omega')^2 + \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2} d\omega'. \quad (35)$$

Полагая

$$\frac{\omega - \omega_0}{\frac{\gamma}{2}} = \frac{4\pi(\nu - \nu_0)}{\gamma} = x, \quad \frac{\omega' - \omega_0}{\frac{\gamma}{2}} = \frac{4\pi(\nu' - \nu_0)}{\gamma} = y, \quad \frac{\delta}{\gamma} = \eta, \quad (36)$$

получим из (35):

$$J = J_0 \frac{1}{\sqrt{\pi} \eta} \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{-\left(\frac{x-y}{\eta}\right)^2}}{y^2 + 1} dy. \quad (37)$$

Здесь нижний предел интеграла $-\omega_0: \frac{\gamma}{2}$, очень большой по абсолютной величине, заменен на $-\infty$.

Мы увидим, что точно такой же интеграл определяет кривую поглощения, а другой интеграл, очень сходно построенный, определяет кривую дисперсии (см. § 93). Так как обе кривые очень тесно связаны, мы рассмотрим этот вопрос в § 93. Упомянем здесь только, что для каждого значения η на достаточно большом расстоянии x от середины линии функция (37)

переходит в простую функцию $J = J_0 \frac{1}{1 + x^2}$, совпадающую с кривой испускания затухающего вибратора [§ 85 (27)]. Таким образом, измеряя интенсивности на большом расстоянии от середины линии, можно определить постоянную затухания γ ; это измерение было произведено Минковским (см. § 93, стр. 647).

§ 87. ШИРИНА ЛИНИЙ ИСПУСКАНИЯ. ЗАТУХАНИЕ ВСЛЕДСТВИЕ СТОЛКНОВЕНИЙ

Ширина линии, получающаяся при явлении Допплера, очевидно, не зависит от плотности газа или давления (при постоянной температуре), но опыт показывает, что изотермическое изменение давления оказывает значительное влияние на ширину и форму спектральных линий. Таким образом необходимо рассматривать и влияние соударений светящихся атомов или молекул. Молекулярные силы можно разбить на два класса: силы,

действующие только при непосредственном соприкосновении, т. е. во время самого удара, и силы, действующие на конечном расстоянии.

Рассмотрим сперва силы первой категории. Подобно тому, как в теории газов можно в самом грубом приближении заменить силы, действующие при непосредственном соприкосновении, допущением, что атомы ведут себя, как упругие шары, отскакивающие друг от друга при ударе, также и в оптике можно воспользоваться согласно Майкельсону¹ и Лорентцу² подобной же простой гипотезой для описания действия столкновения на световые колебания.

Мы предполагаем, что при каждом столкновении колебание электрического момента на мгновение прекращается, и что в это же мгновение возбуждается новое колебание с произвольной фазой и амплитудой.

Это может произойти несколькими способами, причем особенное значение имеют два предельных случая.

Во-первых, колебание может быть действительно полностью уничтожено вследствие столкновения, причем вся энергия колебания превращается в энергию переноса соударяющихся частиц (теплоту).

Во-вторых, проходящая мимо частица может только воздействовать на колебание, не вызывая большой потери энергии. Сильные влияния при большой близости частиц изменяют частоту колебания во время удара; после удара вибратор продолжает колебаться, хотя и с первоначальной частотой, но с измененной фазой. Изменение частоты во время удара вследствие своей кратковременности не может быть непосредственно наблюденно; его влияние заключается только в сдвиге фазы по статистическому закону.

Различие обоих явлений особенно ясно в тех случаях, когда можно непосредственно наблюдать ослабление возбуждения атома (вследствие удара или поглощения света), например при флюоресценции. В первом случае при увеличении числа ударов излучение ослабевает, в последнем случае не ослабевает; мы вернемся к этому в конце параграфа.

Если пренебречь затуханиями других видов и явлением Допплера, то в обоих случаях колебательный процесс состоит из следующих друг за другом гармонических колебаний. Собственная частота ω_0 их одинакова, но амплитуды и фазы их, a_k и δ_k в моменты t_1, t_2, \dots претерпевают произвольные изменения. Пусть составляющая электрического момента определяется уравнением:

$$p(t) = a_k \cos(\omega_0 t + \delta_k) \text{ для } t_k \leq t < t_{k+1} \quad (1)$$

$$(k = \dots -2, -1, 0, 1, 2, \dots).$$

¹ A. Michelson, *Astrophys. J.*, т. 2 (1895), стр. 251.

² H. A. Lorentz, *Versl. Afd. Natuurk. Akad. Wet. Amsterd.*, т. 14 (1905), стр. 518 577; *Proc. Acad. Amsterd.*, т. 18 (1915), стр. 134.

Мы должны найти для этого колебания коэффициенты Фурье, определяемые уравнением:

$$q(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} p(t) e^{-i\nu t} dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{a_k}{2} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \left(e^{i[(\omega_0 - \omega)t + \delta_k]} + e^{-i[(\omega_0 + \omega)t + \delta_k]} \right) dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{a_k}{2} \left(\frac{e^{i(\omega_0 - \omega)t_{k+1}} - e^{i(\omega_0 - \omega)t_k}}{i(\omega_0 - \omega)} e^{i\delta_k} - \frac{e^{-i(\omega_0 + \omega)t_{k+1}} - e^{-i(\omega_0 + \omega)t_k}}{i(\omega_0 + \omega)} e^{-i\delta_k} \right). \quad (2)$$

Чтобы вычислить спектральное распределение, мы должны образовать $|q(\nu)|^2$ и взять среднюю по фазам δ_k . При этом все произведения членов с различными k уничтожатся, а в квадрате члена с определенным k останутся только два слагаемых, именно квадраты абсолютных величин, написанных выше дробей. Мы получим:

$$|q(\nu)|^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{a_k^2}{4} \left(\left| \frac{1 - e^{i(\omega_0 - \omega)\tau_k}}{\omega_0 - \omega} \right|^2 + \left| \frac{1 - e^{i(\omega_0 + \omega)\tau_k}}{\omega_0 + \omega} \right|^2 \right), \quad (3)$$

где

$$\tau_k = t_{k+1} - t_k. \quad (4)$$

Напишем (3) в виде:

$$|q(\nu)|^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{a_k^2}{2} \left[\frac{1 - \cos(\omega_0 - \omega)\tau_k}{(\omega_0 - \omega)^2} + \frac{1 - \cos(\omega_0 + \omega)\tau_k}{(\omega_0 + \omega)^2} \right]. \quad (5)$$

Величины τ_k означают время между каждыми двумя столкновениями, которые испытывает одна молекула и которые, следовательно, должны быть пропорциональны длине свободного пути между этими соударениями. Поэтому мы можем принять, что величины τ_k подчиняются тем же статистическим законам, что и длина свободного пути: вероятность того, что τ_k заключено между τ и $\tau + d\tau$, есть:

$$d\omega = \frac{1}{\tau} e^{-\frac{\tau}{\bar{\tau}}} d\tau. \quad (6)$$

Здесь множитель выбран так, что

$$\int_0^{\infty} d\omega = 1. \quad (7)$$

Тогда

$$\int_0^{\infty} \tau d\omega = \bar{\tau} \quad (8)$$

есть среднее время между двумя столкновениями, или продолжительность свободного колебания.

Расположим теперь члены нашей суммы (5) по величинам τ_k и сгруппируем члены, лежащие в одном и том же интервале $d\tau$. Тогда сумма равна:

$$|q(\nu)|^2 = \frac{a^2}{\tau} \int_0^{\infty} e^{-\frac{\tau}{\bar{\tau}}} \left[\frac{1 - \cos(\omega_0 - \omega)\tau}{(\omega_0 - \omega)^2} + \frac{1 - \cos(\omega_0 + \omega)\tau}{(\omega_0 + \omega)^2} \right] d\tau, \quad (9)$$

где a^2 есть среднее значение a_k^2 . Согласно интегральной формуле

$$\int_0^{\infty} e^{-\beta\tau} \cos \alpha\tau d\tau = \frac{\beta}{\alpha^2 + \beta^2} \quad (10)$$

мы получим:

$$|q(\nu)|^2 = \frac{a^2}{\tau} \frac{1}{(\omega_0 - \omega)^2} \left(\bar{\tau} - \frac{\frac{1}{\tau}}{(\omega_0 - \omega)^2 + \frac{1}{\tau^2}} \right) + \frac{a^2}{\tau} \frac{1}{(\omega_0 + \omega)^2} \times \left(\bar{\tau} - \frac{\frac{1}{\tau}}{(\omega_0 + \omega)^2 + \frac{1}{\tau^2}} \right) = \frac{a^2}{(\omega_0 - \omega)^2 + \frac{1}{\tau^2}} + \frac{a^2}{(\omega_0 + \omega)^2 + \frac{1}{\tau^2}}. \quad (11)$$

Вторую дробь в правой части можно отбросить по тем же причинам, по которым мы делали это при упрощении формулы § 85 (27): вблизи собственной частоты ω_0 преобладающее значение имеет первый член, так как его знаменатель мал (порядка $\frac{1}{\tau}$). Окончательно получаем:

$$|q(\nu)|^2 = \frac{a^2}{(\omega_0 - \omega)^2 + \left(\frac{\gamma_s}{2}\right)^2}, \quad (12)$$

где¹

$$\frac{\gamma_s}{2} = \frac{1}{\bar{\tau}}. \quad (13)$$

Таким образом удары действуют так же, как затухание вида, рассмотренного в § 85.

Определим теперь порядок величины этого эффекта, зависящего так же, как длина свободного пути, от давления p и температуры T . Если

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi m}} \quad (14)$$

¹ Эквивалентная средняя долговечность квантового резонатора $\tau_s = \frac{1}{\gamma_s}$ равна следовательно $\frac{1}{2} \bar{\tau}$, т. е. половине среднего времени свободного пробега.

есть средняя скорость молекулы, а l — длина свободного пути, то, очевидно,

$$\bar{\tau} \bar{v} = l, \quad (15)$$

а постоянное затухание при ударе равно:

$$\frac{\gamma_s}{2} = \frac{1}{\tau} = \frac{\bar{v}}{l} = \frac{1}{l} \sqrt{\frac{8RT}{\pi \mu}}. \quad (16)$$

Для смеси газов μ надо заменить по правилам кинетической теории газов *эффективным молекулярным* весом $\frac{mM}{m+M}$ ¹.

Половина относительной ширины линии поэтому равна:

$$\Gamma_s = \frac{\gamma_s}{\omega_0} = \frac{\gamma_s}{2} \frac{\lambda_0}{\pi c} = \frac{\lambda_0}{l} \frac{1}{\pi c} \sqrt{\frac{8RT}{\pi \mu}}. \quad (17)$$

Сравнивая это выражение с тем, которое мы получили для явления Доплера в § 86 (30), мы получим²:

$$\frac{\Delta}{\Gamma_s} = \pi^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{l}{\lambda_0} = 5,57 \cdot \frac{l}{\lambda_0}. \quad (18)$$

Таким образом оба явления одного порядка величины, если длина свободного пути приблизительно равна длине волны применяемого света. Этот случай имеет место для видимого света при комнатной температуре. При переходе к более высоким давлениям при той же температуре более сильным является влияние столкновения, а при более низких давлениях — явление Доплера. В вышеупомянутых (см. § 86, стр. 581) опытах Фабри и Бюиссона по определению доплеровской ширины линии давление было около 1 мм рт. ст., так что влиянием столкновений можно было пренебречь.

Можно получить зависимость лорентцовой ширины в функции от давления, применив к длине свободного пути формулу Максвелла³:

$$l = \frac{kT}{\sqrt{2\pi \sigma^2 p}}, \quad (19)$$

¹ См. J. H. Jeans, *Dynamische Theorie der Gase*, стр. 318, Braunschweig, 1926.

² Если вычислять доплерову ширину линии как убывание интенсивности наполовину, а не на e -тую часть, то следует еще умножить на $\sqrt{\log 2} = 0,833$. Тогда вместо (18) мы получим:

$$\frac{\Delta}{\Gamma_s} = 4,64 \cdot \frac{l}{\lambda_0}. \quad (18a)$$

³ Ср. J. H. Jeans, *Dynamische Theorie der Gase*, стр. 46.

где σ есть диаметр молекулы. Таким образом полная зависимость величины γ_s от p и T выражается:

$$\gamma_s = 8 \sqrt{\pi} \frac{N \sigma^2}{\sqrt{R \mu}} \frac{p}{\sqrt{T}} = 9,43 \cdot 10^{20} \frac{p \sigma^2}{\sqrt{\mu T}}, \quad (20)$$

где N есть число Лошмидта для грамммолекулы. Умножая эту величину на $1,0133 \cdot 10^6$, мы выразим давление в атмосферах; тогда ширина

$$\Gamma_s = \frac{\gamma_s}{2\pi c} \lambda_0 = 5,08 \cdot 10^{15} \cdot \lambda_0 \frac{p \sigma^2}{\sqrt{\mu T}}. \quad (21)$$

Подставляя сюда, например, значения, соответствующие азоту $\mu = 28$, $\sigma = 3,1 \cdot 10^{-8}$ см, и беря видимый свет (λ_0 равно $5 \cdot 10^{-5}$ см), мы получим:

$$\Gamma_s = 4,60 \cdot 10^{-5} \frac{p}{\sqrt{T}},$$

т. е. при обыкновенной температуре ($T = 300$) и давлении 1 ат

$$\Gamma_s = 2,66 \cdot 10^{-6}.$$

Действительно, эта величина того же порядка, что и вычисленное из § 86 (31) значение Δ .

Образуем отношение $\frac{\Gamma_s}{\Gamma_0}$; согласно § 86 (7) и § 87 (21):

$$\frac{\Gamma_s}{\Gamma_0} = 4,34 \cdot 10^{27} \cdot \lambda_0^3 \cdot \frac{p \sigma^2}{\sqrt{\mu T}}. \quad (22)$$

Для видимого света $\lambda_0 = 5 \cdot 10^{-5}$ см и комнатной температуры $T = 300^\circ$ мы получим для азота ($\sigma = 3,1 \cdot 10^{-8}$ см, $\mu = 28$):

$$\frac{\Gamma_s}{\Gamma_0} = 115 \cdot p.$$

Мы видим, что при этих условиях при давлении 1/200 ат ударное затухание уже стало меньшим, чем радиационное. Этой возможностью сделать ударное затухание ничтожно малым по сравнению с радиационным путем понижения давления воспользовался Минковский в своей работе по измерениям естественной ширины линии; ниже (§ 94) мы еще вернемся к ней (см. также § 86).

Тщательная проверка теории Лорентца была произведена Фюхтбауэром и его сотрудниками, причем не только для линий излучения, но и для линий поглощения¹. Чтобы уменьшить эффект Допплера, они выбирали возможно более тяжелые поглощающие атомы (цезий, ртуть), а чтобы увеличить число столкновений были введены добавочные газы под большим давлением. В первой работе² исследовались пары цезия с добавлением азота при давлении до 3 ат. Кривая интенсивности по форме вполне соответствовала формуле теории затухания. Мы вернемся к этому после того, как мы выведем соответствующую формулу для поглощения (см. § 94). Но абсолютное значение ширины линии оказалось значительно больше теоретического, вычисляемого из фактического числа ударов. Чтобы объяснить эту ширину по теории Лорентца, следует предположить, что число соударений в единице времени примерно в два-три раза больше, чем это дает кинетическая теория газов.

Во второй работе³ наблюдалось свечение ртутных паров в различных газах (А, Н₂, N₂, СО₂, О₂, Н₂О) и фотометрировалась линия $\lambda_0=2537 \text{ \AA}$. При этом добавочный газ был под давлением 50 ат. Измеренная ширина оказалась, в соответствии с нашей теорией, пропорциональной плотности. Форма линии поглощения была не вполне одинаковой для различных добавочных газов: для Н₂ она была почти симметрична, для других газов несколько несимметрична, с некоторым расширением линий в красную область. Об этой асимметрии нам придется сейчас говорить.

В табл. 34 приведены результаты вышеупомянутых измерений. Мы увидим, что величина $\Gamma \cdot \frac{\sqrt{T}}{p}$, которая согласно (21) должна быть постоянной для каждого определенного газа, действительно оказывается достаточно постоянной, особенно для азота и водяного пара. Зато при самых низких из измеренных давлений большинство газов, в особенности водяной пар, дают отклонение в сторону увеличения ширины линии. Таким образом несомненно, что на расширение линии, кроме числа ударов, влияет еще другая причина, зависящая от давления. В § 88 мы познакомимся с этими причинами и прежде всего с эффектом Штарка; в частности, мы увидим, что при низких давлениях ширина линии для водяного пара определяется именно эффектом Штарка.

Повидимому в области высоких давлений эффект Штарка также проявляется в некоторой степени.

¹ Мы покажем ниже (§ 91—93), что кривые поглощения в тонких слоях совпадают с кривыми излучения; см. также примечание в конце § 86.
² Chr. Füchtbauer u. W. Hofmann, Ann. Physik (4), т. 43 (1914), стр. 96.
³ Chr. Füchtbauer, G. Joos u. Dinkelacker, Ann. Physik (4), т. 71 (1923), стр. 204.

Таблица 34

Расширение линии ртути $\lambda_0=2537 \text{ \AA}$ вследствие примеси постороннего газа

T — абсолютная температура, p — давление постороннего газа, $\Delta\lambda$ — измеренная половина ширины в см, Γ_* — относительное затухание. В столбце 5 приведены характерные для молекул константы $\Gamma_* \cdot \sqrt{\frac{T}{p}}$, не зависящие от давления и температуры, которые вычислены из значений столбца 4. Для каждого газа приведено среднее значение этой величины.

1	2	3	4	5
T	p	$\Delta\lambda$	$\Gamma_* = \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0}$	$\Gamma_* \cdot \frac{\sqrt{T}}{p}$
Аргон				
292	10,4	$2,31 \cdot 10^{-9}$	$0,915 \cdot 10^{-4}$	$1,50 \cdot 10^{-4}$
292	14,0	2,74	1,08	1,32
300	25,5	4,62	1,82	1,24
301	25,5	4,98	1,96	1,33
312	50,0	9,85	3,88	1,37
312	50,3	10,0	3,94	1,38
Среднее . .				1,36
Водород				
301	17,8	5,21	2,05	2,00
302	17,5	5,21	2,05	2,04
304	30,0	6,75	2,66	1,55
308	30,0	7,67	3,02	1,77
308	30,0	7,16	2,82	1,65
308	36,0	8,05	3,17	1,55
314	50,0	11,9	4,67	1,65
Среднее . .				1,74
Азот				
291	10,0	1,94	0,762	1,30
291	10,2	1,96	0,770	1,29
302	25,3	4,43	1,69	1,16
299	20,0	3,61	1,42	1,23
299	20,0	3,43	1,35	1,17
297	20,3	3,48	1,37	1,16
310	50,0	8,23	3,24	1,14
Среднее . .				1,21

Продолж. табл. 34

1	2	3	4	5
T	p	$\Delta\lambda$	$\Gamma_s = \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0}$	$\Gamma_s \cdot \frac{\sqrt{T}}{p}$

Кислород

306	34,7	5,41	2,13	1,08
-----	------	------	------	------

Углекислота

300	9,5	2,54	1,00	1,82
300	10,1	2,97	1,17	2,00
312	25,2	5,64	2,22	1,56
322	42,5	13,0	5,12	2,15
324	46,7	14,7	5,77	2,22

Среднее . . 1,95

Водяной пар

495	23,7	3,73	1,47	1,38
497	24,7	3,78	1,49	1,35
498	25,0	3,71	1,46	1,30

Среднее . . 1,34

Таблица 35

Сравнение газокинетического диаметра молекул с вычисленным из ширины линий по (24) (μ —эффективный молекулярный вес)

1	2	3	4	5	6
Газ	C	μ	$\sigma_{опт}$	$\sigma_{кин}$	$\frac{\sigma_{опт}}{\sigma_{кин}}$
Аргон А . . .	$3,2 \cdot 10^{-8}$	33,2	$7,7 \cdot 10^{-8}$	$2,8 \cdot 10^{-8}$	2,8
Водород Н ₂ . .	3,7	1,96	4,4	2,3	1,9
Азот N ₂ . . .	3,1	24,6	6,9	3,1	2,2
Кислород O ₂ .	2,9	27,6	6,7	2,9	2,3
Углекислота CO ₂	3,9	36,0	9,6	3,2	3,0
Водяной пар Н ₂ O	3,2	16,1	6,4	2,6	2,5

В табл. 35 мы вычислили величину

$$C = \sqrt{\Gamma_s \frac{\sqrt{T}}{p}} \frac{1}{5,08 \cdot 10^{15} \lambda_0} \quad (23)$$

для применявшейся здесь длины волны $\lambda_0 = 2537 \text{ \AA}$ для каждого газа. Согласно (21) должно быть

$$\sigma = C \cdot \sqrt[4]{\mu}, \quad (24)$$

где вместо μ следует подставить эффективный молекулярный вес $\frac{mM}{m+M}$ светящегося и добавленного газа.

Мы видим, что (в особенности для аргона и водорода) имеет место отчетливый ход вместе с давлением. Так как, однако, числа имеют неправильный разброс, а нас интересует только порядок величины результата, мы будем в дальнейшем вести расчет лишь со средними значениями, приведенными в табл. 34 (в столбце 5) для каждого газа. Из них вычислены значения C в табл. 35 (столбец 2); столбец 3 дает эффективный молекулярный вес μ , посредством которого в столбце 4 составлены „оптические молекулярные диаметры“ $\sigma_{опт}$. Далее, для сравнения приведены в столбце 5 „газокинетические диаметры“ $\sigma_{кин}$ сталкивающихся атомов газа и определены отношения обоих диаметров (столбец 6). Мы видим, что эти отношения, как мы уже говорили выше, лежат между 2 и 3¹.

Недавно Цеманским² были предприняты аналогичные измерения для ряда других газов, среди которых имеются также А, Н₂, N₂; его результаты, полученные путем несколько иного вычисления, приведены в табл. 36. Они находятся в известном согласии со столбцом 4 табл. 35.

Таблица 36

Оптические эффективные поперечники по Цеманскому

Газ	$\sigma_{опт}$	$\sigma_{кин}$	$\frac{\sigma_{опт}}{\sigma_{кин}}$
Аргон А	$7,85 \cdot 10^{-8}$	$2,8 \cdot 10^{-8}$	2,8
Водород Н ₂	4,95	2,3	2,2
Азот N ₂	7,15	3,1	2,3
Гелий He	3,88	1,9	2,0
Оксись углерода СО	6,68	3,2	2,1
Аммиак NH ₃	8,45	—	—
Метан CH ₄	6,51	—	—
Пропан C ₃ H ₈	8,58	—	—

¹ Цитируемая в выноске 3, стр. 588, работа содержит, кроме того, еще определение абсолютных значений полного поглощения. В § 94 мы еще вернемся к результатам этой работы, связанными с так называемой „интенсивностью“ линий.

² М. W. Zemansky, Physl. Rev. (2), т. 36 (1930), стр. 219.

Для этих газов оптические эффективные поперечники также значительно большие, чем газокINETические.

Для разрешения этой трудности имеются лишь две возможности: или можно считать основы теории Лорентца¹ правильными,—тогда мы будем вынуждены предположить, что радиус действия атома или молекулы для оптических процессов во много раз больше, чем для газокINETических ударов,—или мы вообще должны искать другие причины и другой механизм расширения.

Имеется несколько обстоятельств, говорящих в пользу первой возможности. Если колебание излучающего атома прерывается вследствие столкновения, то после столкновения атомы должны заново возбуждаться, вследствие чего общее излучение должно ослабевать. В некоторых случаях это действительно наблюдается в виде гашения флуоресценции посторонним газом. Это явление может стать вполне понятным лишь на основе методов квантовой механики, и потому здесь мы его только слегка касаемся.

Как мы уже видели (глава VII, § 81), рассеянное излучение испускается каждым газом во все стороны; однако выход при этом вообще крайне ничтожен. Выход гораздо больше, если частота излучаемого света совпадает с собственной частотой рассеивающей молекулы. Существуют, впрочем, особые линии, для которых рассеяние света той же частоты имеет выход равный 1, так что вся падающая энергия превращается в рассеянный свет. (С точки зрения квантовой теории такие линии характеризуются тем, что из верхнего терма возможен переход лишь к самому нижнему терму рассматриваемой линии и ни к какому другому). Мы рассмотрим позже (§ 97) некоторые свойства резонансных линий, поскольку это позволяет классическая теория.

Если к данному пару прибавить посторонние газы, то резонансные линии становятся слабее². Было показано, что этот эффект очень сильно зависит от рассматриваемой линии и рода

¹ Можно было бы думать, что предположения Лорентца, основанные на классической теории, должны существенно видоизменяться квантовой теорией. Это, однако, не имеет места (см. H. Kallmann и F. London, Z. Phys. Chem. серия B, т. 2 (1929), стр. 207; V. Weisskopf, Z. Phys. т. 75, стр. 287 (1932). Представление Лорентца о скачке фазы можно истолковать и квантово теоретически. „Продолжительность удара“, т. е. время непосредственного соседства светового атома с возмущающей частицей, порядка 10^{-13} сек, она велика в сравнении с частотой световых колебаний. Поэтому возникающие при взаимодействии силы вызывают почти „адиабатическое“ смещение термов. Однако соответствующего изменения частоты вследствие его малой продолжительности нельзя наблюдать непосредственно; его действие заключается лишь в том, что после разобращения обеих частиц изменяется фаза по отношению к состоянию до удара и притом чисто статистически. Поэтому для наблюдаемого света мы опять приходим к представлениям Лорентца.

² Квантовая теория объясняет это тем, что часть атомов, находящихся в верхнем энергетическом состоянии, отдает свою энергию при дополнительных столкновениях атомам примеси и вследствие этого выбывает из процесса излучения.

прибавленного газа. Однако выход благодаря столкновениям с посторонним газом во всяком случае соответствует взаимодействиям, простирающимся в области шириной от десяти до ста газокINETических эффективных поперечников; иногда же эта область бывает еще большей¹.

Точно такой же поперечник нужно подставить в формулу (20) для ширины линии, так как каждое гасящее столкновение обрывает колебание.

Расширение вследствие столкновений не всегда, однако, связано с гашением флуоресценции. Наблюдалось, что, например, примесь благородных газов расширяет линии поглощения данного газа таким образом, как этого нужно было ожидать по теории ударного затухания не ослабляя, однако, резонансного света. Примесь благородных газов расширяет линии, но не гасит флуоресценции. Поэтому нужно заключить, что в этих случаях столкновения не прекращают колебания атома, но лишь изменяют его фазу. Здесь, следовательно, имеет место второй из упомянутых на стр. 583 механизмов явления.

Если мы знаем взаимодействия, возникающие при столкновении двух атомов, то мы в состоянии вычислить для этих случаев „оптический“ поперечник². Мы получаем его из максимального расстояния, на котором сталкивающийся атом при

¹ Мысль воспользоваться гашением флуоресценции, возникающим благодаря примеси посторонних газов, для определения „оптического эффективного поперечника“, была выдвинута Штерном и Фольмером [O. Stern и M. Volmer, Phys. Z., т. 20 (1919), стр. 183]; они употребляли пары йода с примесью азота и получили диаметр приблизительно в 75 раз больший, чем газокINETический.

Новейшие исследования в этом направлении можно найти в книгах: J. Franck und P. Jordan, Anregung von Quantensprüngen durch Stöße. Berlin, 1926; P. Pringsheim, Fluoreszenz und Phosphoreszenz im Lichte der neueren Atomtheorie. 3 изд., 1928, см. далее обзор: J. Franck, Naturwiss., т. 14 (1926), стр. 211. Другое явление, еще более чувствительное к возмущениям, нежели самая резонансная флуоресценция, это отношение интенсивностей земановских составляющих. Шютц [Schütz, Z. Phys., т. 35 (1926), стр. 260, 864] нашел при этом радиусы действия, в 100 раз большие газокINETических. Тот же эффект при недостаточном разрешении спектральных линий проявляется как деполаризация резонансного света. Измерения Датта в институте Франка [G. L. Datta, Z. Phys., т. 37 (1926), стр. 625] дали заметный эффект на D_2 -линии паров натрия с примесью паров ртути и калия уже при длине свободного пути, в десять тысяч раз большей газокINETического поперечника.

Что касается объяснения большой ширины областей, то его легко дает квантовая теория на основании замечания, сделанного нами выше (стр. 592, сноска 1). Мы видели там, что фазы до столкновения и после столкновения „некогерентны“, если во время столкновения происходит благодаря силам взаимодействия заметное смещение термов. Отсюда сразу же ясно, что области, в которых это имеет место, могут иногда простираются за пределы газокINETического поперечника. (Подробнее см. в цитированной на стр. 592 в сноске 1 работе Вейскопфа).

² При затухании вследствие столкновений однородных атомов (т. е. при высоких давлениях самого излучающего газа, без примесей) температурная зависимость от σ так велика, что самая ширина становится независимой от температуры. Именно σ^2 пропорционально $1/\sqrt{T}$. Если эту зависимость подставить в (20) и принять во внимание, что при определенной плотности ρ пропорционально T , то T выпадает. См. V. Weisskopf, Z. Phys., т. 77 (1932), стр. 393.

прохождении мимо излучающего атома может еще заметно изменять фазу последнего. Как и следовало ожидать, он больше газокинетического поперечника. Удивительна, однако, его зависимость от температуры; она происходит оттого, что при медленных движениях уже самые слабые взаимодействия могут изменять фазу, так что эффективный оптический поперечник с понижением температуры возрастает¹. Поэтому уравнение (20) лишь приближенно дает температурную зависимость затухания вследствие столкновений, ибо температурная зависимость от σ во внимание не принимается.

Однако, как было уже сказано, можно думать о совсем других причинах расширения. Одной из возможных причин является действие электрического поля, окружающего рассеивающие молекулы. Оно вызывает хорошо известное смещение и расщепление линий — так называемый эффект Штарка. Мы исследуем теперь этот эффект, причем получим результат, что он не является причиной большой ширины линий, измеренных Фюхтбауэром и его сотрудниками, и пригоден лишь для толкования небольшой асимметрии в форме этих линий и для объяснения незначительной зависимости эффективного поперечника от давления (непостоянство величин в столбце 5 табл. 34).

Однако для некоторых линий эффект Штарка является весьма существенным, и мы приступим поэтому к его непосредственному рассмотрению.

§ 88. ШИРИНА ЛИНИЙ ИСПУСКАНИЯ. РАСШИРЕНИЕ ВСЛЕДСТВИЕ ЭФФЕКТА ШТАРКА И ВСЛЕДСТВИЕ СВЯЗИ *

Сразу же после открытия эффекта Штарка сам Штарк указал², что под действием электрических полей, окружающих атомы, спектральные линии должны претерпевать расщепление и смещение, благодаря которым возникает зависящее от давления расширение линий. Некоторые факты подтвердили это предположение: например, расширение возрастает внутри серии совершенно так же, как расщепление вследствие эффекта Штарка, т. е. в общем случае с возрастанием порядкового номера; кроме того, в тех случаях, когда эффект Штарка несимметричен или односторонен, расширение имеет тот же характер.

Количественное выражение этой мысли принадлежит Гольтсмарку³. Его теория исходит из следующих предположений.

Каждый атом или молекула окружен электрическим полем \mathfrak{F}_n ; это поле сильнее всего для заряженных частиц, ионов, но оно существует также и для нейтральных частиц и зависит от распределения зарядов диполей, квадрупольных и т. д. Все эти поля создают в месте нахождения светящейся частицы

резльтирующее поле

$$\mathfrak{F} = \sum_{n=1}^N \mathfrak{F}_n. \quad (1)$$

Предположим, что это результирующее поле 1) *постоянно* во времени, т. е., говоря точнее, оно достаточно медленно изменяется по сравнению с колебательным движением излучающих электронов; 2) что его можно считать практически однородным в атоме. При этих двух допущениях смещение линий вычисляется, как обыкновенный эффект Штарка.

Оба эти допущения в действительности точно не выполняются. Но легко видеть, что первое достаточно близко к действительности для видимого света и не слишком высоких температур. Дальность действия молекулярных полей можно положить равным 10^{-7} см (приблизительно десятикратный диаметр молекулы), а среднюю молекулярную скорость считать порядка 10^5 см/сек. Тогда „время прохождения“ одной молекулы через поле равно максимум 10^{-12} сек, тогда как световое колебание видимой области длится около 10^{-15} сек. Таким образом поле, действительно, можно считать постоянным в течение большого числа световых колебаний.

Труднее определить влияние неравномерности поля. Штерн¹ вычислил эффект Штарка для неоднородных электрических полей и при этом обратил внимание, что неравномерность может влиять на ширину линий. Но количественный расчет еще не был произведен.

Мы приведем основные мысли работы Гольтсмарка, главным образом, ради методики. Прежде всего он вычисляет вероятность

$$W(X_0, Y_0, Z_0) \cdot \Delta X \cdot \Delta Y \cdot \Delta Z, \quad (2)$$

что поле \mathfrak{F} в месте нахождения светящейся частицы имеет составляющие между $X_0 - \frac{1}{2} \Delta X$ и $X_0 + \frac{1}{2} \Delta X$... Пусть x_{11}, x_{21}, \dots

x_{n1} означают какие-нибудь параметры положения первой „возмущающей“ молекулы, а $x_{12}, x_{22}, \dots, x_{n2}$ — параметры второй и т. д. Тогда составляющие X_n, Y_n, Z_n поля \mathfrak{F} являются функциями $n \cdot N$ величин $x_{11}, x_{21}, \dots, x_{nN}$. Вероятность того, что координаты n -той частицы лежат в некоторой определенной области, есть дробная часть соответствующего фазового пространства

$$\sigma_n dx_{1n} dx_{2n} \dots dx_{nN} = \sigma_n d\tau_n. \quad (3)$$

Тогда очевидно

$$W(X_0, Y_0, Z_0) \cdot \Delta X \cdot \Delta Y \cdot \Delta Z = \frac{G_N}{V_N}, \quad (4)$$

¹ См. цитированную в сноске 2 (стр. 593) работу Вейскопфа.

² J. Stark, Elektrische Spektralanalyse chemischer Atome. Leipzig, 1914.

³ J. Holtzmark, Ann. Physik (4), т. 58 (1919), стр. 577; Physik Z., т. 25 (1924), стр. 73; Z. Physik, т. 31 (1925), стр. 803; т. 34 (1925), стр. 722.

¹ O. Stern, Physik. Z., т. 23 (1922), стр. 476.

где

$$V_N = \int \int \dots \int \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_N d\tau_1 d\tau_2 \dots d\tau_N \quad (5)$$

взято по всему фазовому пространству, а G_N есть тот же интеграл, но взятый по той части фазового пространства, которая определяется неравенствами:

$$G_N: X_0 - \frac{1}{2} \Delta X < X < X_0 + \frac{1}{2} \Delta X \dots \quad (6)$$

Эти интегралы вычисляются по методу Маркова¹ с помощью разрывного множителя Дирихле. Как известно,

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \alpha \xi}{\xi} e^{i\beta \xi} d\xi = \begin{cases} 1 & \text{для } |\beta| < |\alpha|, \\ 0 & \text{для } |\beta| > |\alpha|, \end{cases} \quad (7)$$

так что мы можем написать:

$$G_N = \frac{1}{\pi^3} \int \rho^2 d\rho d\Omega \cdot \Phi \int \dots \int \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_N d\tau_1 \dots d\tau_N \cdot e^{i\mathbf{s} \cdot (\sum_n \mathbf{\tilde{r}}_n - \mathbf{\tilde{r}}_0)} \quad (8)$$

здесь \mathbf{s} есть вектор с составляющими ξ, η, ζ ; $\rho = |\mathbf{s}|$ и

$$\rho^2 d\rho d\Omega = d\xi d\eta d\zeta, \quad (9)$$

$$\Phi = \frac{\sin \frac{\Delta X}{2} \xi}{\xi} \cdot \frac{\sin \frac{\Delta Y}{2} \eta}{\eta} \cdot \frac{\sin \frac{\Delta Z}{2} \zeta}{\zeta}. \quad (10)$$

После вынесения за знак внутреннего интеграла в (8) множителя $e^{-i\mathbf{s} \cdot \mathbf{\tilde{r}}_0}$ этот интеграл распадается на произведение интегралов, которые равны между собой, так как $\mathbf{\tilde{r}}_1, \mathbf{\tilde{r}}_2, \dots$ представляют собой одинаковые функции аргументов x_{11}, x_{21}, \dots и соответственно x_{12}, x_{22}, \dots . Таким образом, полагая

$$G = \int e^{i\mathbf{s} \cdot \mathbf{\tilde{r}}_0} \sigma d\tau, \quad V = \int \sigma d\tau, \quad (11)$$

получим:

$$G_N = \frac{1}{\pi^3} \int \rho^2 d\rho d\Omega \cdot \Phi e^{-i\mathbf{s} \cdot \mathbf{\tilde{r}}_0} G^N \quad (12)$$

и соответственно:

$$V_N = V^N, \quad (13)$$

¹ А. А. Марков, Исчисление вероятностей. § 33 и 37. Госиздат. Москва, 1924. См. также М. v. Laue, Ann. Physik, т. 47 (1915), стр. 853.

так что (4) переходит в

$$W(X_0, Y_0, Z_0) \Delta X \cdot \Delta Y \cdot \Delta Z = \frac{1}{\pi^3} \int \rho^2 d\rho d\Omega \cdot \Phi e^{-i\mathbf{s} \cdot \mathbf{\tilde{r}}_0} \left(\frac{G}{V} \right)^N. \quad (14)$$

Этот интеграл надо вычислить для предельного случая, когда N очень велико. Так как интеграл, как мы увидим, хорошо сходится, то под знаком интеграла можно перейти к бесконечно малым областям $\Delta F = (\Delta X, \Delta Y, \Delta Z)$; при этом Φ преобразуется в $\frac{1}{8} \Delta X \Delta Y \Delta Z$, и мы получим:

$$W(X_0, Y_0, Z_0) = \frac{1}{8\pi^3} \int \rho^2 d\rho d\Omega e^{-i\mathbf{s} \cdot \mathbf{\tilde{r}}_0} \left(\frac{G}{V} \right)^N. \quad (15)$$

Пусть ϑ_0, φ_0 — полярные углы, образуемые направлением \mathbf{s} с $\mathbf{\tilde{r}}_0$ как полярной осью. Тогда

$$\mathbf{s} \cdot \mathbf{\tilde{r}}_0 = \rho F_0 \cos \vartheta_0, \quad d\Omega = \sin \vartheta_0 d\vartheta_0 d\varphi_0. \quad (16)$$

Интеграл G есть среднее по всем возможным положениям возмущающей молекулы и поэтому может зависеть только от величины ρ вектора \mathbf{s} :

$$G = G(\rho); \quad (17)$$

интеграл V — постоянная величина. Из (15) следует:

$$W(X_0, Y_0, Z_0) = \frac{1}{8\pi^3} \int_0^{2\pi} d\varphi_0 \int_0^\pi \int_0^\infty \sin \vartheta_0 d\vartheta_0 \rho^2 d\rho e^{-i\rho F_0 \cos \vartheta_0} \left(\frac{G(\rho)}{V} \right)^N. \quad (18)$$

Здесь можно выполнить интегрирование по φ_0 и ϑ_0 , после чего получим:

$$W(X_0, Y_0, Z_0) = \frac{1}{2\pi^2 F_0} \int_0^\infty \rho d\rho \sin(\rho F_0) \cdot \left(\frac{G(\rho)}{V} \right)^N. \quad (19)$$

Обозначая через $W(F_0) dF_0$ вероятность того, что сила поля заключена между F_0 и $F_0 + dF_0$, найдем:

$$W(F_0) dF_0 = \int_{\text{единичную сферу}} W(X_0, Y_0, Z_0) dX_0 dY_0 dZ_0 = \\ = W(X_0, Y_0, Z_0) F_0^2 4\pi dF_0, \quad (20)$$

следовательно

$$W(F_0) = \frac{2F_0}{\pi} \int_0^\infty \rho d\rho \sin(\rho F_0) \left(\frac{G(\rho)}{V} \right)^N. \quad (21)$$

Таким образом наша задача окончательно сводится к вычислению интегралов $G(\rho)$ и V . Для возможности вычисления необходимы условия относительно поля, исходящего от возмущающей молекулы.

Пусть молекула состоит из некоторого числа зарядов ϵ_s в точках $r_s = (x_s, y_s, z_s)$. Тогда потенциал в точке наблюдения $r = (x, y, z)$ равен

$$\varphi = \sum_s \frac{\epsilon_s}{R_s}. \quad (22)$$

Здесь R_s означает расстояние точки наблюдения от заряда ϵ_s , т. е.

$$R_s^2 = (x - x_s)^2 + (y - y_s)^2 + (z - z_s)^2 = r^2 \left[1 + \left(\frac{r_s}{r} \right)^2 - 2 \frac{r r_s}{r^2} \right]. \quad (23)$$

Отсюда легко получить разложение φ в ряд:

$$\varphi = \frac{\sum \epsilon_s}{r} + \frac{r \sum \epsilon_s r_s}{r^2} - \frac{1}{2r^3} \left[\sum \epsilon_s r_s^2 - 3 \sum \epsilon_s \frac{(r r_s)^2}{r^2} \right] + \dots \quad (24)$$

Первый член в правой части, очевидно, соответствует кулоновскому полю результирующего заряда $\epsilon = \sum \epsilon_s$. Если последний не равен нулю, т. е. в случае иона, следующими членами можно пренебречь. Если же он равен нулю, то величина выражения определяется вторым членом; этот второй член представляет собой поле диполя, момент которого есть $p = \sum \epsilon_s r_s$. Если же и второй член равен нулю ($p = 0$), то решающим является третий член, выражающий потенциал квадруполь.

Если ограничиться этими членами, то мы должны различать три случая:

- 1) ионы,
- 2) диполи,
- 3) квадруполь.

В третьем случае φ , очевидно, имеет вид:

$$\varphi = -\frac{1}{2r^5} (\Theta_{11} x^2 + \Theta_{22} y^2 + \Theta_{33} z^2 + \Theta_{23} yz + \Theta_{31} zx + \Theta_{12} xy). \quad (25)$$

Коэффициенты Θ_{ik} квадратичной формы могут быть выражены следующим образом: введем обозначение:

$$\Theta_1 = \sum \epsilon_s x_s^2; \quad \Theta_2 = \sum \epsilon_s y_s^2; \quad \Theta_3 = \sum \epsilon_s z_s^2. \quad (26)$$

Тогда

$$\left. \begin{aligned} \Theta_{11} &= -2\Theta_1 + \Theta_2 + \Theta_3; \quad \Theta_{22} = \Theta_1 - 2\Theta_2 + \Theta_3; \quad \Theta_{33} = \Theta_1 + \Theta_2 - 2\Theta_3; \\ \Theta_{23} &= -6 \sum \epsilon_s y_s z_s; \quad \Theta_{31} = -6 \sum \epsilon_s z_s x_s; \quad \Theta_{12} = -6 \sum \epsilon_s x_s y_s. \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

Как известно, оси координат можно всегда направить так, чтобы квадратичная форма была приведена к главным осям. Тогда величины Θ_{23} , Θ_{31} , Θ_{12} исчезают. Кроме того, мы в дальнейшем будем считать, что молекула обладает осью симметрии. Это в действительности имеет место для всех двухатомных моле-

кул (N_2 , O_2 , и т. д.) и для многих многоатомных молекул (H_2O , NH_3 и т. д.) Тогда $\Theta_1 = \Theta_2$, и следовательно:

$$\Theta_{11} = \Theta_{22} = \Theta_3 - \Theta_1 = A; \quad \Theta_{33} = 2(\Theta_1 - \Theta_3) = -2A \quad (28)$$

и потенциал φ выразится так:

$$\varphi = -\frac{A}{2r^5} (x^2 + y^2 - 2z^2). \quad (29)$$

Рассмотрим поле \mathfrak{F} и скалярное произведение $\mathfrak{s}\mathfrak{F}$ отдельно для трех случаев.

1. Ион

В этом случае

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= \frac{\epsilon}{r}; \quad \mathfrak{F} = -\text{grad } \varphi = \frac{\epsilon}{r^3} r, \\ \mathfrak{s}\mathfrak{F} &= \frac{\epsilon}{r^3} r \mathfrak{s} = \frac{\epsilon}{r^2} \rho \cos \vartheta_1, \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

где ϑ_1 — угол между \mathfrak{s} и r .

2. Диполь

В этом случае

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= \frac{rp}{r^3}; \quad \mathfrak{F} = -\text{grad } \varphi = -\frac{p}{r^3} + \frac{3r(rp)}{r^5}, \\ \mathfrak{s}\mathfrak{F} &= -\frac{1}{r^3} \mathfrak{s} p + \frac{3}{r^5} (rp) (\mathfrak{s}r). \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

Если мы выберем \mathfrak{s} за полярную ось, и обозначим полярный угол и азимут для r через ϑ_1 , φ_1 и для p через ϑ_2 и φ_2 , то очевидно (см. фиг. 208)

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{s}r &= \rho r \cos \vartheta_1, \\ \mathfrak{s}p &= \rho p \cos \vartheta_2, \\ rp &= rp [\cos \vartheta_1 \cos \vartheta_2 + \sin \vartheta_1 \sin \vartheta_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)]. \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

Здесь

$$\mathfrak{s}\mathfrak{F} = -\frac{1}{r^3} \rho p \{ \cos \vartheta_2 - 3 \cos \vartheta_1 [\cos \vartheta_1 \cos \vartheta_2 + \sin \vartheta_1 \sin \vartheta_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)] \}. \quad (33)$$

3. Квадруполь

Положим для сокращения

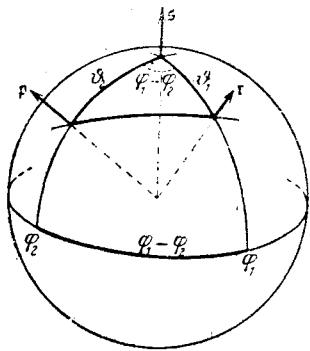
$$-x^2 - y^2 + 2z^2 = \beta^2; \quad (34)$$

Тогда потенциал

$$\varphi = \frac{A\beta^2}{2r^5}, \quad (35)$$

а напряжение поля¹

$$\left. \begin{aligned} X &= -\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{A}{2} \frac{x}{r^5} \left(2 + 5 \frac{\beta^2}{r^2} \right), \\ Y &= -\frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{A}{2} \frac{y}{r^5} \left(2 + 5 \frac{\beta^2}{r^2} \right), \\ Z &= -\frac{\partial\varphi}{\partial z} = -\frac{A}{2} \frac{z}{r^5} \left(4 - 5 \frac{\beta^2}{r^2} \right). \end{aligned} \right\} \quad (36)$$



Фиг. 208. К вычислению поля Пусть с есть полярная ось, а ϑ_1, φ_1 полярно-дипольной (квадрупольной) ные углы τ и ϑ_2, φ_2 полярные углы δ ; молекулы. тогда

$$\left. \begin{aligned} x &= r \sin \vartheta_1 \cos \varphi_1, & \delta_x &= \rho \sin \vartheta_2 \cos \varphi_2, \\ y &= r \sin \vartheta_1 \sin \varphi_1, & \delta_y &= \rho \sin \vartheta_2 \sin \varphi_2, \\ z &= r \cos \vartheta_1, & \delta_z &= \rho \cos \vartheta_2. \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

Тогда

$$\delta\delta = \frac{3A\rho}{2r^4} \{ (5 \cos^2 \vartheta_1 - 1) [\cos \vartheta_1 \cos \vartheta_2 - \sin \vartheta_1 \sin \vartheta_2 \cos (\varphi_1 - \varphi_2)] - 2 \cos \vartheta_1 \cos \vartheta_2 \}. \quad (38)$$

Во всех трех случаях скалярное произведение имеет вид

$$\delta\delta = \frac{\rho}{r^k} \omega_k, \quad (k = 2, 3, 4) \quad (39)$$

где ω_k зависит только от величин угла.

Мы можем теперь вычислить интегралы G и V . Чтобы обойти затруднительный вопрос о сходимости, представим себе, что вся система находится внутри шара радиуса R . Конфигурация молекулы относительно светящейся точки определена, если известен в случае иона вектор $\tau = (r, \vartheta_1, \varphi_1)$, а в случае диполя и квадруполья сверх того еще и направление (ϑ_2, φ_2) дипольной или квадрупольной оси; для придания однообразного вида формулам припишем также иону определенную ось (ϑ_2, φ_2)

¹ В цитированной статье Гольцмарка в Appalen в этом месте допущена ошибка. В следующей его работе [Physik. Z., т. 25 (1924), стр. 79], где теория дается в более строгом виде с учетом конечных молекулярных объемов, эта ошибка, повидимому, исправлена, так как в окончательной формуле для случая квадруполья [формула (62), стр. 79] стоит не тот числовой множитель, что в Appalen, именно 4,87 вместо 11,49.

(излишнее интегрирование уничтожится в конечном результате). Таким образом

$$\epsilon d\tau = r^2 dr d\Omega_1 d\Omega_2, \quad (40)$$

где

$$d\Omega_1 = \sin \vartheta_1 d\vartheta_1 d\varphi_1, \quad d\Omega_2 = \sin \vartheta_2 d\vartheta_2 d\varphi_2; \quad (41)$$

при этом

$$V = \frac{16}{3} \pi^2 R^3, \quad (42)$$

и

$$G = \int \int d\Omega_1 d\Omega_2 \int_0^R r^2 e^{i \frac{\rho \omega_k}{r^k}} dr. \quad (43)$$

Введя подстановку

$$\rho \frac{\omega_k}{r^k} = u, \quad r^2 dr = -\frac{1}{k} (\rho \omega_k)^{\frac{3}{k}} u^{-\frac{3+k}{k}} du, \quad (44)$$

получим:

$$G = \int \int d\Omega_1 d\Omega_2 \frac{1}{k} (\rho \omega_k)^{\frac{3}{k}} \int_a^\infty e^{iu} u^{-\frac{3+k}{k}} du. \quad (45)$$

Нижний предел интеграла равен

$$a = \frac{\rho \omega_k}{R^k} \quad (46)$$

и при постоянном ρ может быть сделан путем выбора R произвольно малым. Подставив это значение a в множитель перед внутренним интегралом, мы получим

$$\frac{G}{V} = \frac{3}{16\pi^2 k} \int \int d\Omega_1 d\Omega_2 \alpha^{\frac{3}{k}} \int_a^\infty e^{iu} u^{-\frac{3+k}{k}} du. \quad (47)$$

Интеграл

$$J_m(\alpha) = \int_a^\infty e^{iu} u^{-m} du, \quad m = \frac{k+3}{k} \quad (48)$$

надо разложить по степеням малой величины α . Выполним это разложение для случая $k=2$ (ион).

Двукратное интегрирование по частям дает нам

$$\left. \begin{aligned} J_{\frac{5}{2}}(\alpha) &= \frac{2}{3} \alpha^{-\frac{3}{2}} e^{i\alpha} + \frac{4}{3} i \alpha^{-\frac{1}{2}} e^{i\alpha} - \frac{4}{3} J_{\frac{1}{2}}(\alpha) = \\ &= \frac{2}{3} \alpha^{-\frac{3}{2}} \left(1 + 3i\alpha - \frac{5}{2} \alpha^2 + \dots \right) - \frac{4}{3} J_{\frac{1}{2}}(\alpha), \end{aligned} \right\} \quad (49)$$

далее

$$\left. \begin{aligned} J_{\frac{1}{2}}(\alpha) &= \int_0^\infty e^{iu} u^{-\frac{1}{2}} du - \int_0^\alpha e^{iu} u^{-\frac{1}{2}} du = \\ &= e^{i\frac{\pi}{4}} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) - \int_0^\alpha \left(1 + iu - \frac{1}{2}u^2 + \dots\right) u^{-\frac{1}{2}} du = \\ &= \sqrt{\pi} e^{i\frac{\pi}{4}} - 2\alpha^{\frac{1}{2}} - \frac{2}{3}i\alpha^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{5}\alpha^{\frac{5}{2}} + \dots \end{aligned} \right\} \quad (50)$$

Подставляя это выражение в (49), найдем:

$$\left. \begin{aligned} \alpha^{\frac{3}{2}} J_{\frac{3}{2}}(\alpha) &= \frac{2}{3} \left(1 + 3ia - \frac{5}{2}\alpha^2 + \dots\right) - \\ &- \frac{4}{3} \left(\sqrt{\pi} \alpha^{\frac{3}{2}} e^{i\frac{\pi}{4}} - 2\alpha^2 - \frac{2}{3}i\alpha^3 + \dots\right) = \\ &= \frac{2}{3} \left(1 + 3ia - 2\sqrt{\pi} \alpha^{\frac{3}{2}} e^{i\frac{\pi}{4}} + \frac{3}{2}\alpha^2 + \dots\right) \end{aligned} \right\} \quad (51)$$

Подставляя дальше это выражение в (47) и воспользовавшись уравнением (46), мы получим среднее по направлениям:

$$\bar{\omega}_k = \frac{1}{16\pi^2} \int \int d\Omega_1 d\Omega_2 \omega_k, \quad \bar{\omega}_k^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{16\pi^2} \int \int d\Omega_1 d\Omega_2 \omega_k^{\frac{3}{2}} \dots \quad (52)$$

Первое из них всегда равно нулю (как в случае иона, так и для диполей и квадрупольей). Таким образом для случая иона ($k=2$) найдем

$$\frac{G}{V} = 1 - 2\sqrt{\pi} e^{i\frac{\pi}{4}} \frac{\rho^{\frac{3}{2}}}{R^3} \bar{\omega}_2^{\frac{3}{2}} + \dots \quad (53)$$

Если n есть число возмущающих молекул в единице объема, то число их в нашем шаре радиуса R равно

$$N = \frac{4\pi}{3} R^3 n. \quad (54)$$

Отсюда

$$\frac{G}{V} = 1 - \frac{g_2}{N}, \quad (55)$$

где

$$g_2 = \frac{8\pi\sqrt{\pi}}{3} e^{i\frac{\pi}{4}} \rho^{\frac{3}{2}} \bar{\omega}_2^{\frac{3}{2}} \cdot n. \quad (56)$$

Предельное значение N -ной степени выражения (55) равно

$$\left(\frac{G}{V}\right)^N = \left(1 - \frac{g_2}{N}\right)^N \rightarrow e^{-g_2}. \quad (57)$$

Сравнивая (30) и (39), получим, что для иона

$$\omega_2 = \varepsilon \cos \vartheta_1. \quad (58)$$

Здесь в силу (41) и (52)

$$\begin{aligned} \bar{\omega}_2^{\frac{3}{2}} &= \varepsilon^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{1}{2} \int_0^\pi \cos^{\frac{3}{2}} \vartheta_1 \sin \vartheta_1 d\vartheta_1 = \\ &= \frac{1}{2} \varepsilon^{\frac{3}{2}} \int_{-1}^1 x^{\frac{3}{2}} dx = \frac{1}{5} \varepsilon^{\frac{3}{2}} (1-i). \end{aligned} \quad (59)$$

Подставляя, кроме того, в (56)

$$e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{i+1}{\sqrt{2}}, \quad (60)$$

получим

$$\begin{aligned} g_2 &= \frac{8\pi\sqrt{\pi}}{3} \frac{i+1}{\sqrt{2}} \frac{1}{5} (1-i) \rho^{\frac{3}{2}} \varepsilon^{\frac{3}{2}} \cdot n = \\ &= \frac{8\pi\sqrt{2\pi}}{15} \rho^{\frac{3}{2}} \varepsilon^{\frac{3}{2}} n = 4,21 \cdot \rho^{\frac{3}{2}} \varepsilon^{\frac{3}{2}} n. \end{aligned} \quad (61)$$

В случае квадруполья ($k=4$) вычисление производится точно таким же образом; в случае диполя ($k=3$) возникает небольшое затруднение: при $k=3$ показатель m в интеграле (48) целое число, $m=2$; интеграл J_2 при помощи интегрирования по частям приводится к

$$J_1 = \int_\alpha^\infty e^{iu} u^{-1} du. \quad (62)$$

Но этот интеграл при $\alpha=0$ логарифмически бесконечен. Поэтому при разложении по степеням α надо прежде всего вычесть логарифмический член, который получается путем замены показателя -1 выражением $-1+\lambda$, затем произвести разложение, после чего перейти к пределу $\lambda=0$. Мы не будем здесь делать этих вычислений, а приведем только результаты по Гольтсмарку¹.

¹ Для квадрупольей мы приводим не первоначальный численный множитель Гольтсмарка, а позднейший, правильный (см. стр. 600 сноска 1).

Соответственно формуле (57)

$$\left(\frac{G}{V}\right)^N \rightarrow e^{-g_k}. \quad (63)$$

При этом
для ионов [см. (61)]

$$g_2 = c_2 \rho^{\frac{3}{2}}, \quad c_2 = 4,21 \cdot \epsilon^{\frac{3}{2}} n; \quad (64)$$

для диполей

$$g_3 = c_3 \rho, \quad c_3 = 4,54 \cdot p n; \quad (65)$$

для квадруполов

$$g_4 = c_4 \rho^{\frac{3}{4}}, \quad c_4 = 4,87 \cdot A^{\frac{3}{4}} n. \quad (66)$$

Введем теперь в (21) вместо ρ новую переменную интегрирования

$$v = \frac{1}{2} F_0 \quad (67)$$

и введем обозначение

$$f = \frac{F_0}{c_k^{k/3}}. \quad (68)$$

Теперь мы можем пересчитать вероятность по шкале f и получим

$$W(F_0) dF_0 = W(f) df; \quad (69)$$

и воспользовавшись (63), получим

$$W(f) = \frac{2}{\pi f} \int_0^\infty v dv \sin v e^{-\left(\frac{v}{f}\right)^k}. \quad (70)$$

Величину f можно рассматривать как „приведенное напряжение поля“, т. е. как напряжение поля, выраженное в единицах некоторого нормального напряжения

$$\bar{F}^{(k)} = c_k^{k/3}, \quad (71)$$

характерного для молекулы рассматриваемого газа.

В случае диполя ($k=3$) можно взять квадратуру (70) до конца. Мы получим¹

$$\begin{aligned} \int_0^\infty v dv \sin v e^{-\frac{v}{f}} &= \Im \left(\int_0^\infty v dv e^{v(i-\frac{1}{f})} \right) = \\ &= \Im \left(\frac{1}{(i-1/f)^2} \right) = \frac{2/f}{(1+1/f^2)^2}. \end{aligned} \quad (72)$$

¹ Буква \Im означает мнимую часть.

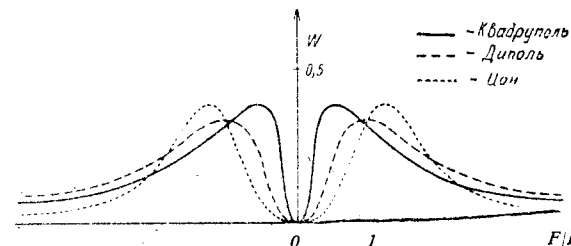
Следовательно, в силу (70)

$$W(f) = \frac{4}{\pi} \frac{f^2}{(1+f^2)^2}. \quad (73)$$

Легко убедиться, что

$$\int_0^\infty W(f) df = 1. \quad (74)$$

В случае иона или квадруполя соответствующей квадратуры нельзя взять; Гольтсмарк вычислил его с помощью рядов и механических квадратур. Результат показан на фиг. 209. Мы видим, что в каждом из трех случаев как очень малые поля, так



Фиг. 209. Функции распределения напряжения поля вблизи молекулы.

и очень большие имеют ничтожно малую вероятность. Существует максимум вероятности, который находится для иона в точке 1,4, для диполя 1,0 и для квадруполя 0,6. Внутри кривая вероятности гораздо круче, чем снаружи.

Последняя часть вычисления заключается в определении формы линии с помощью найденной таким образом вероятности поля. Для этой цели разумеется необходимо знать величину эффекта Штарка. Распределение интенсивности в шкале частот выражается функцией $J(F, \nu)$. Тогда наблюдаемая интенсивность равна

$$J(\nu) = \int_0^\infty J(F, \nu) W(F) dF. \quad (75)$$

$J(F, \nu)$ вообще есть весьма сложная функция, известная лишь для немногих случаев. Для нашего приближенного вычисления достаточно будет считать, что она отлична от нуля только в одном определенном интервале частот и постоянна в нем, так что площадь образованного таким образом прямоугольника равна интенсивности J_0 нерасщепленной линии. Таким образом мы полагаем

$$J(F, \nu) = \begin{cases} \frac{J_0}{2\sigma} & \text{для } |\nu - \nu_m| < \sigma, \\ 0 & \text{для } |\nu - \nu_m| > \sigma; \end{cases} \quad (76)$$

здесь середину ν_m , а также расстояние $\sigma = \nu_a - \nu_m$ внешней составляющей ν_a (быстро колеблющейся) от середины разложения Штарка следует рассматривать как функции силы поля F . Только те прямоугольники дадут составляющие интенсивности ν , для которых $\sigma \geq |\nu - \nu_m|$. Интенсивность равна

$$J(\nu) = \frac{J_0}{2} \int_{\bar{F}}^{\infty} \frac{W(F')}{\sigma(F')} dF' = \frac{J_0}{2} \int_f^{\infty} \frac{W(f')}{\sigma(Ff')} df', \quad (77)$$

где $F = \bar{F}f$ есть напряжение поля, вызывающего расщепление $2(\nu - \nu_m)$.

Что же касается эффекта Штарка, как функции силы поля, то здесь следует различать два случая:

1. *Водородоподобные линии*: в этом случае ν_m не зависит от поля и равно частоте ν_0 первоначальной линии, а *расщепление пропорционально напряжению поля*

$$2\sigma = aF. \quad (78)$$

По квантовой теории такие линии возникают вследствие скачка отдельного электрона, слабо связанного с атомом.

2. *Линии, не подобные водородным*: здесь эффект Штарка заключается не в расщеплении, а в *одностороннем смещении, пропорциональном квадрату напряжения поля*;

$$\nu_m - \nu_0 = bF^2, \quad (79)$$

тогда как σ можно считать постоянным и очень малым. Тогда из (77) следует

$$J(\nu) = \frac{J_0}{2b} \frac{W(F)}{F} = \frac{J_0}{2b} \cdot \frac{W\left(\sqrt{\frac{\nu - \nu_0}{b}}\right)}{\sqrt{\frac{\nu - \nu_0}{b}}}.$$

Этот случай встречается значительно чаще и с точки зрения квантовой теории объясняется тем, что светящийся электрон тесно связан с остовом атома. Смещение ν_m в этом случае всегда чрезвычайно мало и лишь в немногих случаях доступно измерению¹. На теории возникающих вследствие этого асимметричных линий мы не будем останавливаться.

Насколько важно различие между линейным и квадратичным эффектом Штарка для ширины линий видно из того, что принятое в спектроскопии *наименование серий* по сути основано на этом разделении. Наиболее яркие линии спектра одновалентных атомов образуют *серии*; наиболее важные из них называются *главной серией, диффузной и резкой* побочной сериями. Как

произошло, что большую или меньшую резкость линий признали настолько важным отличительным признаком, что положили его в основу классификации линий, так что даже в квантовой теории соответствующие термы обозначаются буквами s, p, d ¹.

s -термы соответствуют вытянутым электронным орбитам, при которых светящийся электрон очень близко подходит к ядру и, следовательно, проникает в атомный остаток и связан с ним; движение сильно отличается от водорода, где атомный остаток состоит только из ядра, практически не имеющего протяжения. Здесь в s -терме внешнее электрическое поле очень мало влияет на орбиту, смещение энергии очень мало и возрастает с квадратом поля.

d -термы соответствуют электронным орбитам, приближающимся к окружности; они не проникают в атомный остаток, следовательно, слабо связаны с ним и ведут себя как соответствующая орбита водородного атома, т. е. чувствительны к внешнему полю и дают большое смещение энергии, линейно зависящее от силы поля. p -термы занимают промежуточное положение между этими случаями (см. примечание 28).

Линии, возникающие при комбинации (ps), образуют резкую побочную серию, комбинация (pd) дает диффузную серию; таким образом характер их определяется термом s и соответственно d и очевидно, что линии (ps) значительно резче, чем линии (pd).

Этих замечаний достаточно, чтобы показать важность эффекта Штарка для вопроса о ширине линии. В цитированной выше работе Гольтсмарк исследовал сначала линейный эффект Штарка. В этом случае мы имеем

$$J(\nu) = \frac{J_0}{a\bar{F}} \int_f^{\infty} \frac{W(f')}{f'} df', \quad (80)$$

где

$$f = \frac{2(\nu - \nu_0)}{a\bar{F}}. \quad (81)$$

В случае диполя этот интеграл можно вычислить; получим:

$$J(\nu) = \frac{J_0}{a\bar{F}^{(3)}} \frac{4}{\pi} \int_f^{\infty} \frac{f'}{(1+f'^2)^2} df' = \frac{J_0}{a\bar{F}^{(3)}} \frac{2}{\pi} \frac{1}{1+f^2} \quad (82)$$

или, полагая

$$\frac{\gamma}{2} = a\bar{F}^{(3)} \pi, \quad (83)$$

$$J(\nu) = \frac{J_0}{a\bar{F}^{(3)}} \frac{2}{\pi} \frac{\left(\frac{\gamma}{4\pi}\right)^2}{(\nu - \nu_0)^2 + \left(\frac{\gamma}{4\pi}\right)^2}. \quad (84)$$

¹ s означает *sharp* (резкая), p — *prinzipal* (главная), d — *diffuse* (диффузная).

¹ J. Stark, Ann. Physik, т. 48 (1915), стр. 210; H. Lüssem, Ann. Physik, т. 49 (1916), стр. 879; G. Siebert, Ann. Physik, т. 56 (1918), стр. 587 и 593; R. Ladenburg, Physik. Z., т. 22 (1921), стр. 549. См. обзорную статью Ladenburg, Die Starkeffekte höherer Atome Physik. Z., т. 30 (1929), стр. 369.

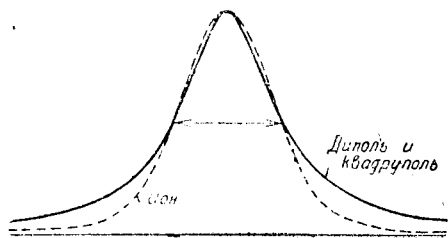
В этом случае в распределение интенсивности совершенно такое же, как при затухании, величина которого γ . Эта величина γ , как мы уже видели, означает ширину половинного значения в шкале $\omega = 2\pi\nu$.

В случае иона или квадруполья можно найти числовое значение интеграла, соответствующее (77). На фиг. 210 результат изображен графически как функция f . Здесь видно, что кривые для диполей и квадрупольей практически совпадают. Абсцисса выбрана так, что ширина половинного значения одинакова в обоих случаях. Вычисление дает

$$\left. \begin{aligned} 1,25 a \overline{F^{(2)}} &= 3,25 a \epsilon n^{\frac{2}{3}} \text{ (ион),} & (a) \\ a \overline{F^{(3)}} &= 4,54 a p n \text{ (диполь),} & (b) \\ 0,67 a \overline{F^{(4)}} &= 5,52 a A n^{\frac{4}{3}} \text{ (квадруполь)} & (c) \end{aligned} \right\} \quad (85)$$

ширина линии получается в \AA , если расщепление a вычислено в $\text{\AA}/\text{эл. ст. ед.}$. Итак мы получаем следующий результат:

В линейном эффекте Штарка ширина половинного значения пропорциональна 1) константе a эффекта Штарка, 2) константе заряда возмущающей молекулы (ϵ , p , A) и 3) некоторой степени числа молекул (плотности).



Фиг. 210. Распределение интенсивности для ионного, дипольного и квадрупольного излучения.

ный момент для водородной молекулы H_2 известен из теории Дебая², которая связывает его с величиной сил сцепления Ван-дер-Ваальса. Эти силы также происходят от электрических полей, взаимодействующих между молекулами, и позволяют поэтому вычислить A . Найдем

$$A = 4,4 \cdot 10^{-26} g^{\frac{1}{2}} \text{ см}^{\frac{7}{2}} \text{ сек}^{-1}. \quad (86)$$

Если в молекулярном газе вследствие электрического разряда появляется небольшое число водородных атомов, то испускаемые ими линии серии Бальмера (явлением Допплера пренебрегаем) станут шире вследствие воздействия квадрупольных полей

молекул. Эффект Штарка для первой линии Бальмера H_α равен около 1\AA при поле 15 эл. ст. ед., т. е. ¹

$$a = \frac{1}{15} \text{\AA}/\text{эл. ст. ед.}$$

При 0°C и давлении 760 мм число молекул

$$n = 27,7 \cdot 10^{18} \text{ см}^{-3}.$$

Из этих значений вычислен последний столбец таблицы 37 по формуле (85с), причем всюду прибавлена половина доплеровской ширины, соответствующая температуре 10°C согласно § 86 (31) $0,048 \text{\AA}$. Совпадение оказывается очень хорошим. Гольтсмарк пытался также вычислить расширение спектральных линий в вольтовой дуге, принимая за причину его наличие свободных электронов и ионов. В этом случае он также получил правильный порядок величины.

Таблица 37

Значения половинной ширины H_α в \AA

Давление в см	Половина половинной ширины по Майкель- сону в \AA	Половина половинной ширины по (85с) в \AA
20	0,2	0,154
9	0,128	0,087
7,1	0,116	0,076
4,7	0,095	0,062
2,3	0,071	0,056
1,3	0,056	0,051
0,9	0,053	0,050
0,5	0,050	0,049
0,3	0,048	0,048

В заключение Гольтсмарк вычислил распределение интенсивности для случая квадратичного эффекта Штарка. В этом случае, как мы уже говорили, расщепления нет, есть только одностороннее смещение линий. Возникающее вследствие него

¹ A. Michelson, Philos. Mag. (5), т. 34 (1892), стр. 289.

² P. Debye, Münch. Ber. Math.-Physik, Kl. 1915, стр. 1.

¹ Теоретически приводимое здесь значение не соответствует расстоянию между крайними составляющими; они являются в виде трех слабых линий, интенсивность которых меньше $1/1000$ рассматриваемой.

одностороннее расширение изображено Гольтсмарком на рисунке¹.

Как мы уже указывали (см. § 87) это явление, возможно, является причиной небольшой асимметрии ртутной линии $\lambda = 2537 \text{ \AA}$, которую наблюдали Фюхтбауэр и его сотрудники в присутствии добавочных газов под высоким давлением.

Можно указать и другие причины, вызывающие расширение линий. Укажем на работу Гольтсмарка², в которой взаимодействие излучающих диполей и атомов рассматривается как механический процесс. Аналогичный взгляд в квантово-теоретической форме высказал Менсинг³, но так как обе гипотезы оперируют только с двухсторонним взаимодействием излучающих частиц, они не могут объяснить сильного расширения, наступающего при добавлении посторонних газов. Мы вернемся ниже (§ 93) к этому расширению вследствие связи и увидим, что оно выводится самым простым образом с помощью формулы Лорентц-Лоренца без всяких дополнительных допущений⁴. Расширение спектральных линий вследствие теплового движения и взаимодействия между молекулами есть мешающий момент в исследовании основных вопросов о природе испускания света, ибо для покоящегося изолированного атома мы имеем только естественную ширину линии, обусловленную затуханием излучения. В дальнейшем мы ограничимся этим случаем и исследуем, в каких границах пригодна наша модель вибратора.

§ 89. ЭЛЕКТРОННАЯ ТЕОРИЯ ЭФФЕКТА ЗЕЕМАНА

Гармонический вибратор в качестве модели источника света в течение долгого времени, казалось, удовлетворял всем требованиям; особенно наглядным подтверждением этого считалось открытое Зееманом⁵ *расщепление* спектральных линий в сильных магнитных полях.

Уже Фарадей в связи с его исследованиями, которые привели впоследствии к открытию магнитного вращения плоскости поляризации (см. главу VII, § 78), ставил перед собой задачу обнаружить изменения спектральных линий в магнитном поле, но его экспериментальные средства (сила электромагнитов, разрешающая способность спектроскопов) были недостаточны,

¹ J. Holtzmark, Physik. Z., т. 25 (1924), фиг. 3, стр. 82.

² J. Holtzmark, Z., Physik., т. 34 (1925), стр. 722.

³ L. Mensing, Z. Physik., т. 34 (1925), стр. 602.

⁴ С точки зрения волновой механики расширение линии вследствие эффекта Штарка и вследствие связи рассмотрены у В. Мгровка, Ann. Physik., (5), т. 12 (1932), стр. 753.

⁵ P. Zeeman, Akad. Wet. Amsterd., т. 5 (1896, стр. 181, 242; Philos. Mag., т. 43 (1897), стр. 226, т. 44 (1897), стр. 265.

Технические средства нашего времени, имевшиеся в распоряжении Зеемана, позволяют наблюдать это явление и измерять его с большой точностью.

Вскоре после первого открытия Зеемана Г. А. Лорентц обратил внимание на то, что объяснение этого явления содержится в его электронной теории¹, если в основу ее положить модель светового источника, с которой мы имели дело в § 85 и 86. Исследуем сначала, что вытекает из этой теории. Прежде всего мы должны определить силу, действующую на заряженную частицу в магнитном поле. Как известно, она перпендикулярна к вектору скорости электрона и направлению магнитного поля и пропорциональна величинам обоих векторов и заряду частицы (по величине и знаку). Для *отрицательного* электрона с зарядом $-e$ она равна в электростатических единицах

$$\mathfrak{F} = -\frac{e}{c} \mathbf{v} \times \mathfrak{H}. \quad (1)$$

Этот член мы должны подставить в правую часть уравнения колебания § 86 (9); при этом отбрасываем член затухания. После умножения на e/m получим

$$\ddot{\mathbf{p}} + \omega_0^2 \mathbf{p} + \frac{e}{mc} \dot{\mathbf{p}} \times \mathfrak{H} = 0, \quad \omega_0^2 = \frac{a}{m}. \quad (2)$$

Для интегрирования этого уравнения удобно расположить систему координат так, чтобы ось z была параллельна магнитному полю. Тогда из (2) следует

$$\left. \begin{aligned} \ddot{p}_x + \omega_0^2 p_x + 2\omega_L \dot{p}_y &= 0, \\ \ddot{p}_y + \omega_0^2 p_y - 2\omega_L \dot{p}_x &= 0, \\ \ddot{p}_z + \omega_0^2 p_z &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Здесь

$$\omega_L = \frac{e}{2mc} H. \quad (4)$$

Эта величина (размерность которой обратна времени) характеризует силу явления Зеемана и называется *частотой* Лармора [см. § 78 (21)].

Составляющая колебания, параллельная силовым линиям магнитного поля, остается без изменения, ее частота равна частоте невозмущенного атома ω_0 . Колебания же, перпендикулярные полю, изменяются соответственно его напряжению.

¹ H. A. Lorentz, La théorie électromagnétique de Maxwell. Leiden. 1892. Впоследствии Лорентц много занимался эффектом Зеемана. Назовем некоторые из его работ: Versl. Akad. Amsterd., т. 6 (1898), т. 8 (1900), т. 18 (1909); Arch. Néerl. Haarl., т. 7 (1902), т. 15 (1911).

Мы решим оба линейные дифференциальные уравнения с помощью обычной подстановки

$$p_x = ae^{i\omega t}, \quad p_y = be^{i\omega t}, \quad (5)$$

где a, b две постоянные, в общем случае комплексные, определяющие амплитуду и фазу колебания. Подставляя (5) в (3), мы получим два линейных однородных уравнения

$$\left. \begin{aligned} a(\omega_0^2 - \omega^2) + 2i\omega_L \omega b &= 0, \\ b(\omega_0^2 - \omega^2) - 2i\omega_L \omega a &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Приравнявая нулю детерминант этих уравнений, мы получаем квадратное уравнение относительно ω^2

$$(\omega^2 - \omega_0^2)^2 = 4\omega_L^2 \omega^2. \quad (7)$$

Обозначая меньший из корней ω' и больший ω'' , мы получим

$$\left. \begin{aligned} \omega'^2 - \omega_0^2 &= -2\omega_L \omega', \\ \omega''^2 - \omega_0^2 &= 2\omega_L \omega'', \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

так как отрицательные значения ω не имеют смысла, то отсюда следует

$$\left. \begin{aligned} \omega' &= -\omega_L + \sqrt{\omega_0^2 + \omega_L^2}, \\ \omega'' &= \omega_L + \sqrt{\omega_0^2 + \omega_L^2}. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Таким образом в магнитном поле оба колебания, перпендикулярные к силовым линиям, имеющие при отсутствии возмущения одинаковую частоту, переходят в два колебания с различными частотами, из которых одна ω' меньше, а другая ω'' больше первоначальной частоты ω_0 .

Расстояние между обеими спектральными линиями в обычной шкале частот (число колебаний в секунду, $\nu = \omega/2\pi$) равно

$$\nu'' - \nu' = 2\nu_L = \frac{e}{2\pi mc} H. \quad (10)$$

Согласно (9) первоначальная частота ω_0 не лежит точно посредине между ω' и ω'' ; но для не слишком сильных полей мы можем с достаточным приближением пренебречь квадратом ω_L по сравнению с квадратом ω_0 ; тогда из (9) следует

$$\omega' = \omega_0 - \omega_L, \quad \omega'' = \omega_0 + \omega_L, \quad (11)$$

и ω_0 лежит посредине между ω' и ω'' .

Форму колебаний соответствующих ω' и ω'' можно вывести из одного из уравнений (6); для этого, воспользовавшись уравнениями (8), напомним отношение

$$\left. \begin{aligned} \frac{b'}{a'} &= \frac{\omega'^2 - \omega_0^2}{2i\omega_L \omega'} = i, \\ \frac{b''}{a''} &= \frac{\omega''^2 - \omega_0^2}{2i\omega_L \omega''} = -i. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Эти два уравнения показывают, что оба измененные колебания являются *круговыми*, причем в *более медленном* колебании составляющая y опережает составляющую x на $\pi/2$, т. е. движение по кругу происходит от оси y к оси x и, следовательно, является отрицательным вращением вокруг совпадающего с осью z направления магнитного поля. Наблюдателю, стоящему со стороны положительного направления поля, круговое движение представляется вращением по часовой стрелке, т. е. *правокруговым колебанием*. Более быстрое колебание имеет противоположное направление и кажется этому наблюдателю *левокруговым*.

Установив это, мы легко можем определить, что должно представиться наблюдателю, наблюдающему световой источник в магнитном поле.

Главными направлениями являются *параллельное* к силовым линиям и *перпендикулярное* к ним; говорят о *продольном* и *поперечном* эффекте Зеемана. Первое можно наблюдать, разумеется, только в том случае, если полюсы магнитов просверлены.

Согласно замечанию по поводу формулы § 85 (5), что имеет значение только перпендикулярная к направлению наблюдения составляющая \vec{p} или при гармоническом колебании самого вектора \vec{p} при *продольном* наблюдении в спектроскоп мы видим только волну, происходящую от составляющих x и y колебания; таким образом мы наблюдаем *дублет* линий, и если направление наблюдения противоположно силовым линиям, то более *медленная* составляющая поляризована по *кругу вправо*, а составляющая с более *высокой частотой* — *влево*.

Это направление вращения колебания, разумеется, зависит от того, что мы считаем колеблющуюся частицу отрицательной. Правильность такого предположения можно проверить путем наблюдения. И действительно, первые измерения, произведенные Зееманом и другими, подтвердили именно этот результат, предсказанный теорией для продольного эффекта. Измеряя расщепление, т. е. частоту Лармора, (10) и одновременно точно измеряя магнитное поле, мы определяем *удельный заряд* e/m ; этот результат также хорошо совпадал с теми значениями, которые были получены для удельного заряда из опытов по отклонению катодных лучей.

Наблюдение *поперечного эффекта* Зеемана в некоторых из исследованных вначале случаев также дало предсказанный теорией результат. Если луч зрения параллелен оси x , то перпендикулярной к нему плоскостью является плоскость yz . Таким

образом испускаемый свет состоит из составляющей, колеблющейся параллельно направлению z с первоначальной частотой ν_0 , и двух колебаний, параллельных оси y , образуемых проекциями круговых колебаний на плоскость yz и имеющих частоты ν' и ν'' . Таким образом мы имеем *триплет* линий, причем *средняя* линия колеблется *параллельно силовым линиям*, а обе *крайние перпендикулярно* к ним.

Экспериментальное подтверждение этой простой теории в первых наблюдениях должно казаться нам теперь счастливой случайностью. Очень скоро были найдены линии, с которыми теоретические выводы не согласовались ни качественно, ни количественно. Так например, уже D -линии натрия, служившие предметом многих опытов, расщепляются отнюдь не в *нормальный* триплет, а одна из них в *квартет*, а другая в *секстет*. Другие линии расщепляются еще более сложным образом; в особенности сложны поляризационные отношения отдельных составляющих. Расстояния между двумя расщепленными составляющими также далеко не всегда определяются частотой Лармора; хотя и здесь, даже в самых сложных случаях господствует простой закон¹, согласно которого расстояния между линиями являются рациональными кратными частоты Лармора с относительно малыми знаменателями. Далее было найдено, что линии, принадлежащие к одинаковой серии, дают одинаковое расщепление Зеемана, и даже линии различных элементов, принадлежащие к одной и той же группе периодической системы, дают в соответствующих сериях одинаковое расщепление.

Все эти явления были названы вначале *аномальным* эффектом Зеемана; этот эпитет свидетельствует о значении, которое приписывалось положенной в основу теории модели светового источника — электрическому резонатору. Однако, с течением времени становилось все более и более ясным, что более сложные случаи расщепления никак не являются аномалиями, что, напротив, простые триплеты встречаются относительно редко.

Фогт² и Лорентц³ сделали попытку объяснить этот аномальный эффект Зеемана колебаниями не отдельных несвязанных электронов, а целой системы связанных электронов. Фогту особенно посчастливилось; так например, он дал для D -линий натрия простой механизм связи, совершенно правильно дающий описанное выше расщепление на *квартет* и *секстет* и даже расщепление при больших силах поля. Пашен и Бак⁴ эмпирически установили, что при чрезвычайно больших полях расщепление перестает быть пропорциональным H , картина рас-

щепления становится более сложной, и наконец, при самых сильных полях она снова упрощается и снова появляется нормальный триплет (примечание 29). Модель Фогта позволила объяснить и этот переход к сильным полям.

Несмотря на это новейшая теория отказалась от этих гипотез, так как за это время представление о строении атома совершенно изменилось благодаря квантовой теории (см. § 90). Ланде¹ первый дал на основе эмпирических данных квантовое описание расщепления Зеемана. Полученный таким образом материал сыграл важнейшую роль в создании самой квантовой механики и ее применения к строению атома. Назовем здесь работы Зоммерфельда, Гейзенберга, Паули. Вершиной их явилось подготовленное Паули², сформулированное Уленбеком и Гудсмитом³ открытие, что электрон сам обладает магнитным моментом и, следовательно, является одновременно „магнетоном“.

В настоящее время мы имеем полную теорию атомных и молекулярных спектров, включая их поведение в магнитном поле. Но изложение этой теории выходит за пределы этой книги⁴.

Теперь естественно задаться вопросом, оказывает ли электрическое поле какое-либо действие на спектральные линии. Исходя из нашей модели, мы не можем предполагать существования такого действия; действительно, введя постоянную электрическую силу

$$\mathfrak{E} = -e\mathfrak{E}^0 \quad (13)$$

в уравнение колебания § 86 (9)

$$m\ddot{u} + au = -e\mathfrak{E}^0, \quad (14)$$

мы преобразуем его подстановкой

$$u' = u + \frac{e}{a}\mathfrak{E}^0$$

в

$$m\ddot{u}' + au' = 0. \quad (15)$$

Таким образом мы имеем тот же колебательный процесс вокруг слегка смещенного положения равновесия. Это явление также пытались обнаружить экспериментально, причем исходили из теоретических соображений, что закон квазиупругих сил § 86 (9), по всей вероятности, является приближенным и должен

¹ См. C. Runge u. F. Paschen, Berl. Ber., 1902, стр. 380, 720.

² W. Voigt, Ann. Physik (3), т. 68 (1899), стр. 352; Magneto- und Elektrooptik, стр. 186. Leipzig, 1908.

³ H. A. Lorentz, Ann. Physik (3), т. 63 (1897), стр. 278.

⁴ F. Paschen u. E. Back, Ann. Physik (4), т. 39 (1912), стр. 897, т. 40 (1913), стр. 960.

¹ A. Landé, Z. Physik, т. 5 (1921), стр. 231, т. 15 (1923), стр. 189.

² W. Pauli, Z. Physik, т. 31 (1925), стр. 765.

³ G. E. Uhlenbeck u. S. Goudsmit, Naturwiss., т. 13 (1925), стр. 953.

⁴ Укажем на книгу E. Back u. A. Landé, Zeemaneffekt u. Multiplettstruktur. Berlin (1925), и A. Sommerfeld, „Atombau u. Spektrallinien. 5 издание Braun-schweig, 1931. С. Фриш, Атомные спектры, Гостехиздат, 1933 (Ред.).

быть дополнен членами высших порядков¹. В этом случае действительно, как легко видеть, следует ожидать, что частота зависит от внешнего поля.

Наконец Штарку² удалось в 1913 году обнаружить расщепление водородных линий Бальмера; его метод заключался в спектроскопическом исследовании канальных лучей, состоящих из атомов водорода. Но ту сложную картину расщепления, которая получилась в этом случае, классическая теория была не в состоянии объяснить. Напротив, квантовая теория наряду с эффектом Зеемана полностью объяснила также и эффект Штарка.

Мы воспользовались этим явлением уже в предыдущем параграфе при расшифровке различных типов расширения полос и при этом подчеркивали, что расщепление в собственном смысле слова имеет место отнюдь не для всех линий, а только для одного класса водородоподобных линий. Более углубленное квантотеоретическое исследование этого вопроса выходит из рамок этой книги.

§ 90. КВАНТОВЫЕ ПРОЦЕССЫ И ГРАНИЦЫ КЛАССИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ

Действительным толчком к изменению классической теории послужили не описанные только что тонкие оптические явления разложения спектральных линий в электрическом и магнитном полях, а совершенно другого рода световые явления, происходящие в накаливаемых твердых телах.

Разлагая в спектр излучение такого тела, мы получаем распределение интенсивности, зависящее, вообще говоря, от свойств тел, так что излучение бывает особенно сильным в известных областях спектра и слабее в других. Но как показал Кирхгоф с помощью термодинамических методов, для абсолютно черного тела существует универсальный закон распределения интенсивности по частотам, зависящий только от температуры и ни от каких других физических свойств излучающего тела.

Абсолютно черной поверхности в природе не существует. Однако ее можно осуществить искусственно, построив по Вину и Люммеру³ замкнутое со всех сторон полое тело (печь) и наблюдая через маленькое отверстие его излучение при нагреве. Это отверстие имеет свойства *абсолютно черной поверхности*, так как падающий извне пучок лучей, попадая в полость, при достаточно неправильной форме последней не имеет никакой вероятности выйти из нее опять. Излучение отверстия, следовательно, является излучением полностью поглощающей черной поверхности, и поэтому само излучение называется „черным“.

¹ См. W. Voigt, *Magneto- und Elektrooptik*, гл. IX, X.

² J. Stark, *Berl. Ber., Nov. 1913, Ann. Physik*, т. 43 (1914), стр. 965, 983. См. также J. Stark, *Elektrische Spektralanalyse*. Leipzig 1914. Кроме того *Nachr. Ges. Wiss. Göttingen*, 1914.

³ W. Wien u. O. Lummer, *Wied. Ann.*, т. 56 (1895), стр. 451.

Спектральный закон распределения черного излучения пытались вывести теоретически, строя простую модель механизма поглощения и излучения и полагая, что результат будет неизменно правильным, поскольку модель не противоречит общим законам природы. Наиболее простой моделью, удовлетворяющей этим требованиям и сверх того обладающей свойством светящегося газового атома монохроматически колебаться, является введенный нами в § 85 гармонический вибратор.

Но тут получился замечательный результат: при применении статистических законов, подтверждаемых газовой теорией и другими термодинамическими дисциплинами, получается совершенно неверный и внутренне противоречивый закон излучения, так называемый закон Релея¹ и Джинса², согласно которому интенсивность пропорциональна квадрату частоты.

Наоборот, элементарный опыт показывает, что при очень высоких частотах интенсивность падает опять до нуля.

После того как все попытки примирить эти противоречия в рамках классической теории потерпели неудачу, Планк³ выдвинул в 1900 году совершенно новую гипотезу относительно процессов излучения и поглощения света. Согласно этой гипотезы, эти процессы совершаются в виде *ряда элементарных актов*, при которых конечная энергия ϵ переходит из корпускулярной в световую энергию, и кроме того существует замечательное соотношение, что величина *кванта энергии* ϵ пропорциональна частоте света

$$\epsilon = h\nu. \quad (1)$$

Коэффициент пропорциональности h называется *постоянной Планка*, а также *квантом действия*. С помощью этой гипотезы Планку удалось установить закон излучения, который до настоящего времени полностью подтверждается; путем сравнения с измерениями Планк смог определить величину h :

$$h = 6,57 \cdot 10^{-27} \text{ эргсек.}$$

Вместе с тем удалось путем определения второй постоянной, входящей в закон Планка, впервые точно установить число Лошмидта (число молекул в граммолекуле) или, что сводится к тому же, электрический элементарный квант (заряд электрона или протона).

С этого времени *квантовая теория* Планка, как была названа новая дисциплина, все более выдвигалась на центральное место в физике и в настоящее время полностью завоевала его. Оказалось, что классическая теория является лишь частным или предельным случаем более общей и широкой теории, которая

¹ Lord Rayleigh, *Philos. Mag.*, т. 49 (1900), стр. 539.

² J. H. Jeans, *Philos. Mag.*, т. 10 (1905), стр. 91.

³ M. Planck, *Verh. dtsch. physik. Ges.* (14. Dez.) 1900; *Ann. Physik* (4), т. 4 (1901), стр. 553, 554.

в наше время достигла большой законченности и позволяет объяснить строение атома и молекулы, происходящие в них процессы, их взаимодействия со световым полем и до известной степени также и более тонкое строение самого светового поля.

Мы ограничимся здесь только несколькими важными пунктами, имеющими отношение к оптике. Здесь идет речь, главным образом, о двух постановках вопроса.

Одна касается обмена энергии между атомами или молекулами с одной стороны и светом с другой стороны, вторая — физического строения самого света.

Что касается первого вопроса, то мы обязаны Бору¹ основными чертами теории строения атомов, основанной на гипотезе Планка. По Бору классическая теория недостаточна для движений электронов вокруг ядра. Вместо нее утверждается, что атом может существовать только в ряде дискретных „стационарных“ состояний, которым соответствуют определенные значения энергии E_1, E_2, \dots . Если атом совершает обмен энергии с другим атомом или со светом, то каждый раз перемещается конечная разность энергии между двумя такими состояниями, $E_n - E_m$. В частности отсюда получается для возможных испускаемых или поглощаемых частот

$$h\nu_{nm} = E_n - E_m, \quad (2)$$

чем объясняется *комбинационный принцип* спектральных линий, установленный Ритцем² и носящий его имя. Ритц эмпирически установил, что спектральные линии газов могут быть расположены так, что их частоты оказываются разностями ряда *термов* T_n . По Бору значение терма является таким образом мерой энергии стационарного состояния в соответствии с уравнением

$$hT_n = E_n. \quad (3)$$

Кроме того, из этого боровского представления вытекает определенное утверждение относительно условий возбуждения спектральных линий; например, для возбуждения первой линии требуется прибавление *конечного* количества энергии (повышение уровня энергии E_1 до E_2). Это подтверждается опытами Франка и Герца³ над столкновениями электронов. Бесчисленное множество подобных следствий для более сложных случаев было проверено экспериментально.

Вычисляя значения энергии E_n для выбранной модели, Бор сначала пытался придерживаться классической механики, присоединив к ней известные так называемые „квантовые условия“,

¹ N. Bohr, Philos. Mag., т. 26 (1913), стр. 1, перепечатано в книге N. Bohr, Abhandlungen über Atombau. Braunschweig, 1921; см. также N. Bohr, Drei Aufsätze über Spektrum und Atombau. 2 издание. Braunschweig, 1924

² W. Ritz, Astrophys. Journ., т. 28 (1908), стр. 237; см. также Ges. Werke herausgeg. v. d. Schweizer Physik. Ges., стр. 162. Paris, 1911.

³ J. Franck u. G. Hertz, Verh. dtsh. physik. Ges., т. 15 (1913), стр. 613.

отбирающие из континуума механически возможных орбит некоторое дискретное семейство. Его работа увенчалась успехом; он получил совершенно точно сериальный закон линий водородного атома, так называемую формулу Бальмера, причем входящую в эту формулу константу оказалось возможным выразить через заряд и массу электрона и постоянную Планка h .

Но при дальнейшем исследовании становилось все более ясным, что для того чтобы не впасть в противоречие со все растущим числом опытных фактов из области атомной физики, законы классической механики следует изменить *коренным образом*. Таким образом постепенно сложилась современная *квантовая механика* атомов, являющаяся замкнутым в себе, свободным от противоречий учением, в котором классическая механика содержится как предельный случай. Мы не можем больше останавливаться на этом вопросе, но в дальнейшем мы будем указывать в отдельных местах на расхождения между старыми и новыми формулами для некоторых оптических констант.

Перейдем теперь ко второму вопросу, к *строению самого света*. Здесь также обнаружилось, что теория Максвелла, на которой мы основывались в предыдущем изложении, недостаточна. Для ее улучшения были введены некоторые существенные допущения; однако законченной квантовой теории электромагнитного поля в настоящее время еще нет. Поэтому мы остановимся только на одном важном пункте — воскрешении эмиссионной теории света Эйнштейном¹.

Планковское представление о квантовом обмене энергии между светом и материей Эйнштейн интерпретировал в 1905 году в том смысле, что свет сам имеет характер „корпускул“, несущих энергию $h\nu$. Его главные аргументы были статистического характера и относились к флуктуациям, имеющим место при излучении или поглощении света в атоме. Если вычислять неправильные дрожательные движения, которые совершал бы в электромагнитном поле пустого пространства атом, несущий на себе классический вибратор в качестве светочувствительного прибора и предположить планковский закон спектрального распределения энергии поля, то в этом предположении движения окажутся значительно меньшими, чем вычисленное на основе кинетической теории газов (брауновское движение). Но это ведет к противоречию, так как отсюда следует, что энергия должна постоянно переходить из атома в поле излучения. Эйнштейн показал, что из этого положения можно выйти, только предположив, что процесс испускания происходит не в виде классической сферической волны, а в виде выбрасывания в определенном направлении „светового кванта“, причем атом получает импульс отдачи $h\nu/c$. Так Эйнштейн пришел к воззрениям, что свет состоит из отдельных световых корпускул или световых квантов.

¹ A. Einstein, Ann. Physik (4), т. 17 (1905), стр. 132; ср. там же т. 20 (1906), стр. 199.

Но это представление совершенно противоречит подтвержденной бесчисленными наблюдениями волновой теории, и поэтому понадобилось много времени и накопление большого количества опытного материала в пользу корпускулярного представления, чтобы новая гипотеза вошла прочно в физику. Перечислим важнейшие из этих опытов.

Когда коротковолновой свет (ультрафиолетовый свет или рентгеновские лучи) падает на металлическую пластинку, то из нее вырываются электроны. Это явление в настоящее время можно наблюдать на открытом воздухе и подсчитать электроны с помощью *счетчика* Гейгера¹, в котором электрон, образуя ионы, производит разряд между острием (или тонкой проволокой) и пластинкой. Для количественных измерений опыты все же производятся в высоком вакууме. При этом была установлена следующая закономерность: скорость v или кинетическая энергия $\frac{m}{2} v^2$ электронов не зависит от яркости света, а только от частоты, именно

$$\frac{1}{2} m v^2 + A = h\nu; \quad (4)$$

это соответствует формуле Планка, если учесть, что при выходе электрона из металла совершается *работа выхода* A . Число вылетающих электронов пропорционально интенсивности света. С помощью наблюдения над малыми (коллоидальными) металлическими частицами, которые находятся в конденсаторе во взвешенном состоянии и приходят в движение при выходе отдельного электрона, было установлено, что для наступления *фотоэлектрического эффекта* не требуется времени аккумуляции; при любом слабом свете, при котором накопление кинетической энергии $\frac{m}{2} v^2$ согласно волновой теории требует значительного

времени, испускание электронов начинается непосредственно вслед за освещением.

Все эти наблюдения резко противоречат воззрениям классической теории света, но они сразу же становятся понятными, если представить себе свет как град снарядных выстрелов, выбивающих электроны из металла.

Другая группа явлений, еще лучше подтверждающих это представление, связана с рассеянием чрезвычайно коротких волн, например рентгеновских лучей, в веществах со слабо связанными электронами (молекулы из легких атомов, например углеводороды и т. д.). Комптон² открыл, что возникающее при этом

¹ W. Bothe u. H. Geiger, Z. Physik, т. 72 (1925), стр. 639.

² H. A. Compton, Bull. Nat. Res. Council., т. 20 (1922), стр. 10; Physic. Rev., т. 21 (1923), стр. 483. См. также P. Debye, Physik. Z., т. 24 (1923), стр. 161.

вторичное излучение имеет несколько более длинную волну, чем первичное, т. е. меньшее $h\nu$. Потерянную энергию мы находим опять в „электронах отдачи“, которые выбиваются в процессе рассеяния из атома рассеивающего вещества. Кроме того удалось также установить закон импульсов для *эффекта Комптона*. Если мы положим, что связь электронов с атомами достаточно слаба, чтобы пренебречь ею относительно значений $h\nu$ рентгеновского света, то к столкновению светового кванта с электроном можно применить теорему сохранения энергии и импульсов и отсюда вычислить как абсолютное значение потери энергии, так и ее зависимость от направления рассеиваемого кванта или электрона отдачи; и то, и другое подтверждается наблюдением.

Наконец, полная одновременность появления рассеянного светового кванта и электрона отдачи также была доказана (с помощью метода камеры Вильсона)¹.

Благодаря этому и другим опытам устраняется всякая возможность сомневаться в реальности световых квантов.

Таким образом мы имеем парадоксальное положение что две, повидимому столь противоречащие друг другу концепции, как волновая теория и корпускулярная теория света, оказываются одновременно справедливыми, каждая в известной области явлений, причем не видно, каким образом они разграничены. Поэтому перед физикой стоит трудная задача создать квантовую теорию света или, более обще, электромагнитного поля, которая включала бы обе концепции.

Хотя еще нет удовлетворительной во всех отношениях теории, но для многих целей достаточно следующего представления: в световом процессе имеются как волны, так и корпускулы, именно волны определяют вероятность появления светового кванта. Число появляющихся в некотором объеме световых квантов с частотой ν равно интенсивности света (плотности энергии) в нем, деленной на $h\nu$. Это представление объясняет, например, такое явление, которое можно объяснить как волновой, так и корпускулярной теорией. С помощью какого-либо интерференционного прибора — пусть это будет, например, двойное зеркало Френеля (см. главу III, § 36) — мы создаем неподвижные в пространстве интерференционные полосы и вносим в это пространство острие счетчика Гейгера. Тогда счетчик дает изменяющуюся от места к месту интенсивность света путем непосредственного подсчета числа вторичных квантов.

Если принять представление о квантах слишком буквально и поставить себе задачей проследить путь отдельного кванта от источника до острия счетчика, то мы неумолимо приходим к представлениям, несовместимым с классической механикой. Правда, покуда мы рассматриваем только *один* путь, мы не

¹ C. T. R. Wilson, Proc. Roy. Soc. Lond. (A), т. 85 (1911), стр. 285. Ср. также Jahrb. Radioaktivität, т. 10 (1913), стр. 34.

встречаем никакого затруднения. Например, представим себе, что при слабом источнике света во время наблюдения как раз происходит испускание, которое мы наблюдаем с помощью свободного электрона в поле зрения. Тогда этот электрон появится в любом месте поля зрения.

Кроме того направление, по которому приходит электрон, также можно определить с некоторой точностью, поместив перед щелью счетчика вторую щель. (Щели можно взять настолько широкие, чтобы пренебречь дифракцией в них и вместе с тем узкие относительно расстояния между двумя интерференционными полосами двойного зеркала). В результате получим, что квант кажется исходящим из некоторой точки двойного зеркала, как и следует ждать по корпускулярной теории.

Новое по сравнению с классической теорией излучение появляется тогда, когда мы наблюдаем *большое число квантов* и подсчитываем их плотность в различных частях поля зрения. Тогда, ввиду того, что утверждения волновой теории безусловно верны, число появлений кванта в определенном месте различно от точки к точке, в зависимости от освещенности этого места. В интерференционных минимумах квантов почти не будет, в максимумах их будет наибольшее число. Если это явление попытаться представить корпускулярно, то мы натолкнемся на следующий парадокс.

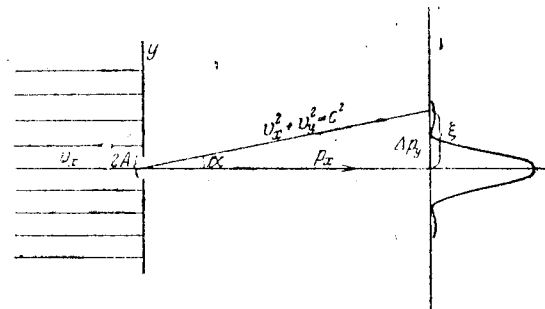
Одна корпускула ударяется только об *одно* из зеркал. Но ее появление в поле зрения определяется в равной степени *обоими* зеркалами (так как интерференция возникает благодаря наличию второго зеркала). Поэтому, если представить себе два кванта, попадающие оба на первое зеркало, но в разное время, и изменить в этот промежуток времени положение обоих зеркал и, следовательно, интерференционную картину в поле зрения таким образом, чтобы на месте световой полосы оказалась темная, то появление второго кванта в рассматриваемом месте будет исключено, хотя в первом зеркале, которое одно является причиной отражения обоих квантов, ничего не изменилось, и следовательно, путь обоих квантов должен быть одинаковым.

Корень этого противоречия, очевидно, лежит в предположении, что *оба кванта попадают на одно и то же зеркало*. Чтобы разрешить эту дилемму, мы должны критически взвесить, имеет ли это предположение вообще какой-нибудь физический смысл. Такой анализ был произведен Гейзенбергом¹ и Бором².

Только те утверждения имеют физический смысл, правильность или неправильность которых может быть проверена опытом.

Чтобы показать, что такая проверка в нашем случае невозможна, мы должны спросить себя: возможно ли вообще прове-

рить и если да, то как, попал ли световой квант на некоторое определенное зеркало? Такое решение возможно только тогда, если зеркало как то реагирует на прохождение кванта. Фотографический слой или другой химический реагент совершенно поглотил бы квант; таким образом вторая часть опыта, наблюдение кванта в поле, отпала бы. Можно было бы попытаться обнаружить квант, сделав зеркала до такой степени легкими, чтобы попадание на них квантов сообщало им заметный импульс (эффект Комптона). Но тогда квант оказался бы уже не правильно отраженным, а слегка отклоненным и кроме того потерял бы энергию, т. е. изменил бы свою частоту (цвет); во всяком случае, он появился бы в другом месте интерференционного



Фиг. 211. К соотношениям неопределенностей Гейзенберга.

поля, чем предусматривает первоначальная теория с неподвижными зеркалами.

Таким образом мы можем заключить, что между корпускулярной и волновой теорией ни в коем случае не может оказаться противоречие, если мы вышеуказанным образом ограничим физические утверждения.

Правда, при этом мы совершенно отказываемся от принципа, который являлся одной из основ классической физики, именно от *закона причинности*, или точнее от утверждения, что процесс может быть вычислен по господствующим физическим законам, если точно известно начальное положение¹.

Оказалось, что в квантовой теории точное определение начального состояния, т. е. *одновременное* измерение всех определяющих его величин ограничено самими законами природы. В квантовой механике корпускул (электронов и протонов) это ограничение получается формальным путем. Но его можно наглядно пояснить, используя законы волновой теории для оценки точности измерения корпускулярных величин и наоборот. Для света этот прием можно пояснить следующим образом.

¹ Направление времени здесь не играет никакой роли; речь здесь идет только о детерминированности процесса состоянием в произвольный момент времени.

¹ W. Heisenberg, Z. Physik, т. 33 (1925), стр. 879, т. 43 (1927), стр. 172.

² N. Bohr, Naturwiss., т. 17 (1929), стр. 483. См. также сборник „Atomtheorie und Naturbeschreibung“, Berlin, 1931.

Пусть параллельный световой пучок падает нормально на экран со щелью шириной $2A$. Тогда на экране, параллельном плоскости щели, появляется дифракционное изображение, описанное нами в главе IV, § 48, стр. 213 и выраженное формулой (14), глава IV, § 48 (см. также фиг. 211). Наиболее важная особенность светового распределения состоит в том, что почти весь свет приходится на центральную полосу, ширина которой $a = \sin \alpha$ (α — угол отклонения) в обозначениях главы IV, § 48

$$kaA = \frac{2\pi}{\lambda} aA = \pi. \quad (5)$$

Свет, попадающий в щель, таким образом идет в основном на освещение полосы шириной $2a = \frac{\lambda}{A}$. Эта полоса, как мы уже неоднократно подчеркивали при рассмотрении дифракционных явлений, тем шире, чем уже щель.

Посмотрим теперь на этот процесс дифракции с корпускулярной точки зрения. Тогда мы должны будем принять, что световой квант с импульсом $p = \frac{h\nu}{c}$ падает нормально на щель.

Вероятность его появления в плоскости экрана характеризуется распределением интенсивности в дифракционной фигуре. Отбросив детали этого распределения, мы видим, что световой квант должен появиться где то в полосе шириной $2a = \frac{\lambda}{A}$. Для всех

квантов, появляющихся вне центра дифракционной фигуры таким образом имело место отклонение в сторону, обусловленное наличием щели — явление, разумеется, непонятное с последовательно корпускулярной точки зрения. Таким образом можно сказать, что должна возникнуть боковая составляющая импульса кванта Δp_y . Отсюда

$$p = \sqrt{p_x^2 + \Delta p_y^2} = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda}. \quad (6)$$

Из фиг. 211 следует

$$\frac{\Delta p_y}{p} = \sin \alpha = a = \frac{\lambda}{2A}, \quad (7)$$

следовательно

$$\Delta p_y = \frac{\lambda}{2A} \frac{h}{\lambda} = \frac{h}{2A}. \quad (8)$$

Описанный прибор можно рассматривать как приспособление для измерения с некоторой точностью координаты светового кванта. Именно, если световой квант проходит через щель

шириной $2A$, то его координата y в плоскости щели, перпендикулярная длине щели, известна с погрешностью

$$\Delta y = 2A. \quad (9)$$

Подставив это значение (9) в (8), мы получим

$$\Delta y \Delta p_y = h. \quad (10)$$

Это соотношение (разумеется только приближенно верное) означает следующее.

При измерении с помощью диафрагмы координаты светового кванта с точностью Δy благодаря этому возникает сама собой — именно вследствие волнового характера процесса — неопределенность в соответствующей составляющей импульса Δp_y , причем произведение обеих неточностей равно универсальной величине h .

Это гейзенберговское соотношение неопределенностей можно вывести, как мы уже говорили, формальным путем для каждой координаты и соответствующего импульса. На этом соотношении основан тот факт, что корпускулярная и волновая концепции никогда не могут оказаться в противоречии до тех пор, пока мы действительно ограничиваемся утверждениями, которые могут быть проверены экспериментально.

В квантовой механике материальных частиц (электронов, протонов и т. д.) также обнаружилось, что наряду с корпускулярной возможна также волновая трактовка. Здесь идет речь о форме теории, ведущей начало от де-Броглия¹ и называемой волновой механикой. Наибольшим успехом этого нового вида квантовой теории следует считать, что удалось экспериментально обнаружить также и для материальных частиц явления интерференции, совершенно подобные тем, которые мы описали для света. Первое открытие этого рода было сделано Девисоном и Гермером² и относится к электронным лучам, дифрагируемым в решетке кристалла никеля. Позже Томсон³, Рупп (см. примеч. 30) Кикучи⁴ и другие повторили интерференционные опыты Лауэ над катодными лучами. Наконец, Эстерману и Штерну⁵ удалось „получить интерференцию“ материальных атомов (водорода и гелия) в кристаллических решетках.

На фиг. 212 воспроизведена дифракционная картина, получаемая при прохождении узкого пучка катодных лучей через тонкий серебряный слой. При этом мы получаем расположение, аналогичное расположению Дебая-Шеррера для рентгеновских лучей, бесчисленные маленькие кристаллики в различных ориентировках.

¹ L. de Broglie, Ann. Physique (10), т. 3 (1924), стр. 22 (Thèses, Paris, 1924).

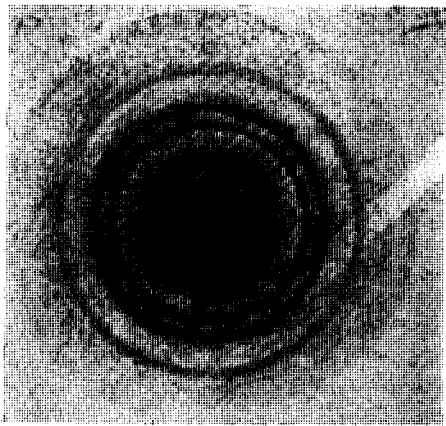
² C. Davisson u. L. H. Germer, Physic. Rev., т. 30 (1927), стр. 705; Proc. Nat. Acad., т. 14 (1928), стр. 317; Nature, Lond., т. 119 (1927), стр. 558.

³ C. P. Thomson, Proc. Roy. Soc., Lond. A., т. 117 (1928), стр. 600; т. 119 (1928), стр. 651.

⁴ S. Kikuchi, Japan. J. Physics, т. 5 (1928), стр. 83; см. также подытоживающую статью в Physik. Z., т. 31 (1930), стр. 777.

⁵ L. Estermann u. O. Stern, Z. Physik, т. 61 (1930), стр. 95.

В этой книге мы будем заниматься только такими явлениями, в которых корпускулярный характер света не играет существенной роли. Несмотря на это, мы не можем обойтись без квантовой механики, как только мы хотим несколько глубже исследовать взаимодействие между светом и материей, что нам предстоит сделать в этой главе. Но при этом нам понадобится скорее



Фиг. 212. Дифракция электронов в кристаллах серебра (снято в физической лаборатории I. G. Farbenfabrik Oppau).

квантовая механика атома, чем света. Строго говоря, как законы светового поля, так и законы атома должны были бы подвергнуться „квантизации“. Для атомов она неизбежна, если мы хотим избежать слишком большого расхождения с опытом; для света мы можем в значительной степени продолжать пользоваться классической теорией Максвелла; ее можно сочетать без всяких затруднений с формальным аппаратом квантовой механики атома. Результат, который мы можем здесь только привести¹, можно сформулировать так.

Атом (точно так же каждая молекула, каждый кристалл) ведет себя по отношению к свету, как система гармонических вибраторов, собственные частоты которых определяются боровским соотношением для уровней энергии стационарных состояний. Грубую картину взаимодействия материи и света можно получить, приведя в соответствие каждому атому бесконечное число таких резонаторов, которые мы рассматривали в предыдущем параграфе, так что каждому боровскому переходу соответствует некоторый *виртуальный вибратор*². Только константа вибратора уже не выражается просто через заряд и массу электрона, как в § 85 (1). По Ладенбургу³, который провел это исследование еще до систематического развития квантовой теории, мы устраняем эти отклонения, придавая величине e^2/m множитель f , означающий *силу вибратора* или, соответственно, спектральной линии.

¹ Литературу см. стр. 12, сноска 1.

² Мы уже указывали раньше (§ 86, стр. 574, сноска 1), что более тонкая форма квантовой теории знает не только диполи (линейные вибраторы), но и квадруполь (и более высокие полярные системы). Квадрупольное излучение происходит при квантовых скачках из „метастабильных“ состояний с большой продолжительностью жизни; оно вообще слабо, и мы не будем его рассматривать.

³ R. Ladenburg, Z. Physik, т. 4 (1921), стр. 451; см. также R. Ladenburg и F. Reiche, Naturwiss., т. 11 (1923), стр. 584.

Тогда имеет место так называемый *закон сумм f Томаса и Куна*¹, доказываемый в квантовой механике, гласящий, что сумма значений f для всех спектральных линий, оканчивающихся на некотором уровне, минус сумма значений f для линий, для которых этот уровень является начальным, равна числу z электронов, от скачка которых происходят эти спектральные линии. Ниже (§ 98) мы рассмотрим классическую модель, для которой имеет место аналогичный закон, именно систему взаимно связанных частиц равного заряда и массы, совершающих незатухающие колебания. Подобная система по своим колебаниям эквивалентна квантовомеханическому испусканию от некоторого уровня ко всем прочим.

Дальше мы даем обзор всех явлений испускания, поглощения и дисперсии, поскольку они допускают трактовку с помощью этого простого допущения. Собственные частоты и соответствующие коэффициенты силы мы вообще считаем заданными атомными постоянными; определение их — дело атомной квантовой механики. Только в одном предельном случае мы сделаем исключение, именно для *инфракрасных* собственных частот. Они соответствуют относительно медленным колебаниям атомных ядер. Для таких колебаний больших масс квантовомеханические законы с достаточным приближением переходят в классическую механику (принцип соответствия Бора). Поэтому в этой области можно пользоваться обычной теорией связанных вибраторов; с помощью ее и учитывая симметрию молекулы, мы получим ряд важных следствий (см. § 100).

Упомянем здесь еще одно принципиально важное явление, которое не фигурировало в нашем опыте и вообще почти не обнаруживается экспериментально, благодаря своей незначительности — так называемую *отрицательную дисперсию*. В строгих формулах квантовой механики для взаимодействия света и материи имеются члены, в которых $\frac{e^2}{m}$ входит с обратным знаком

(т. е. $f < 0$). Здесь также можно построить классический аналог: электронные орбиты атома при отсутствии воздействия света являются сложными, многократно периодическими движениями; когда они подвергаются воздействию светового поля, то это воздействие нельзя описать просто как наложение обычных вибраторов, а только вводя упомянутые члены с отрицательной дисперсией².

Эмпирически существование отрицательной дисперсии было установлено Ладенбургом³.

¹ W. Thomas, Naturwiss., т. 13 (1925), стр. 627; W. Kuhn, Z. Physik, т. 33 (1925), стр. 408. F. Reiche und Thomas, Z. Physik, т. 34 (1925), стр. 510.

² См. H. A. Kramers, Nature, Lond., т. 113 (1924), стр. 673. т. 114 (1924), стр. 310; затем H. A. Kramers и W. Heisenberg, Z. Physik, т. 31 (1925), стр. 681.

³ R. Ladenburg, Z. Physik, т. 65 (1930), стр. 167, 189.

§ 91. ВЫНУЖДЕННОЕ КОЛЕБАНИЕ ВИБРАТОРА. СИЛА И ЗАТУХАНИЕ ИЗЛУЧЕНИЯ ОПТИЧЕСКИХ РЕЗОНАТОРОВ

Гармонический вибратор, служивший нам моделью светового источника, естественно считать тем органом материального атома, через который он влияет на *распространение* света (показатель преломления), и который в конечном счете производит *поглощение* света.

Рассмотрим сначала, что дает в этом смысле простой изотропный вибратор. Представим себе, что на такой вибратор падает электромагнитная волна с чисто периодическим электрическим полем $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 e^{i\omega t}$. Тогда уравнение колебаний вибратора мы получим из § 85 (9), заменив ноль в правой части этого уравнения через $e\mathcal{E}$:

$$m\ddot{u} + a\dot{u} + bu = e\mathcal{E}_0 e^{i\omega t}. \quad (1)$$

Вопрос о причине затухания, т. е. о физическом смысле констант b , оставляем открытым. Нам придется показать, что как затухание излучения, так и лорентцово затухание, как в случае излучения, так и при поглощении, могут быть формально выражены с помощью такого члена bu . Влияние эффекта Допплера, разумеется, не учитывается в уравнении (1), но, как мы увидим дальше, это легко сделать позднее при вычислении.

Общее решение дифференциального уравнения (1) можно получить из любого частного, прибавив к нему общее решение *однородного* уравнения § 85 (9); последнее означает затухающее колебание, которым по истечении достаточно долгого времени можно пренебречь. Тогда должно остаться решение, синхронное с падающей волной и, следовательно, изменяющееся по закону $u = u_0 e^{i\omega t}$. Подставляя это выражение в (1), получим для u_0 линейное уравнение

$$u_0(-m\omega^2 + a + ib\omega) = e\mathcal{E}_0. \quad (2)$$

Разделив на m , мы получим собственное колебание *свободного* (не затухающего) вибратора, т. е. $\omega_0 = \sqrt{\frac{a}{m}}$ [см. § 85 (2)]; введя,

кроме того, *постоянную затухания* $\gamma = \frac{b}{m}$ из § 85 (11), найдем для амплитуды p_0 электрического момента $p = p_0 e^{i\omega t}$ уравнение

$$p_0 = eu_0 = \frac{e^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega_0} \mathcal{E}_0. \quad (3)$$

Здесь $\gamma\omega$ заменено через $\gamma\omega_0$, что допустимо вследствие малости γ по сравнению с ω и ω_0 (ср. § 85, стр. 570).

Так как эта величина (3) *комплексна*, то это значит, что *фаза* вынужденного колебания *смещена* относительно падающей волны.

В частности, если речь идет о затухании излучения, то член затухания в колебательном уравнении в действительности не

первого, а третьего порядка относительно u и, следовательно, дает вместо $ib\omega$, фигурирующего в (2), выражение $-\frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} i\omega^3$.

Точно так же, как в § 86, мы можем заменить здесь с достаточным приближением ω^3 через ω_0^3 . Это вытекает из того, что постоянная затухания γ принимает значение γ_0 [см. § 86 (5)], соответствующее затуханию излучения. Мы рассмотрим сначала только это затухание излучения и посмотрим, какие изменения вносятся сюда квантовой теорией.

Мы говорили в предыдущих параграфах, что квантовомеханическую структуру атома можно учесть, приписав каждому вибратору некоторый коэффициент силы f , на который следует умножить величину $\frac{e^2}{m}$. Таким образом вместо (3) мы должны написать

$$p_0 = eu_0 = \frac{f \frac{e^2}{m}}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega_0} \mathcal{E}_0. \quad (4)$$

Можно было бы думать, что в случае чистого затухания излучения в этом уравнении можно просто написать γ_0 вместо γ . Но во-первых, это противоречило бы нашему правилу, что $\frac{e^2}{m}$ всюду должно быть умножено на коэффициент f ; согласно § 86 (5) γ_0 пропорционально $\frac{e^2}{m}$ и, следовательно, для резонатора силы f затухание излучения должно было бы быть не γ_0 , а $f\gamma_0$. Затем можно показать, что это правдоподобное допущение совершенно строго выводится из теоремы сохранения энергии¹.

Если все остальные причины затухания отсутствуют, то энергия W_a , отнимаемая резонатором у падающей волны в единицу времени, должна быть равна излучаемой за то же время энергии W_s .

Но $W_a = p\overline{\dot{u}}$ есть средняя работа, производимая вибратором; согласно § 85 (7) излучаемая энергия $W_s = \frac{2}{3c^2} \overline{\dot{p}^2}$. Мы можем

вычислить эти величины с помощью (4), причем операции следует проводить лишь над вещественной частью, так как мы имеем дело с квадратами. Таким образом мы получаем для момента

$$p = \mathcal{E}_0 \frac{e^2}{m} f \frac{(\omega_0^2 - \omega^2) \cos \omega t + \gamma\omega_0 \sin \omega t}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega_0^2}. \quad (5)$$

¹ Предполагается, что рассматриваемая спектральная линия не связана ни с какой другой, т. е., выражаясь квантотеоретически, что между ее начальным и конечным уровнями невозможен со сколько-нибудь заметной вероятностью ни один переход, кроме рассматриваемого (см. дальше на стр. 632).

Дифференцируя по t и умножая затем на $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \cos \omega t$, мы получим, взяв среднюю по времени,

$$W_a = \overline{\mathcal{E} \dot{p}} = \frac{1}{2} \mathcal{E}_0^2 f \frac{e^2}{m} \frac{\gamma \omega_0^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega_0^2}. \quad (6)$$

При этом мы должны написать в числителе вместо появляющегося при дифференцировании множителя ω , его значение при резонансе, т. е. ω_0 (ср. стр. 628).

Далее из $\ddot{p} = -\omega^2 p$ находим:

$$W_s = \frac{2}{3c^3} \ddot{p}^2 = \frac{1}{2} \mathcal{E}_0^2 \frac{2}{3c^3} f^2 \frac{\left(\frac{e^2}{m}\right)^2 \omega_0^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega_0^2}, \quad (7)$$

где опять в числителе вместо ω пишем ω_0 .

Так как при чистом затухании излучения должно быть $W_a = W_s$, то, сравнивая (6) с (7), получим

$$f \frac{e^2}{m} \gamma \omega_0^2 = \frac{2}{3c^3} f^2 \left(\frac{e^2}{m}\right)^2 \omega_0^4,$$

следовательно

$$\gamma = \frac{2}{3} \frac{e^2}{m} \frac{\omega_0^2}{c^3} f = \gamma_0 f. \quad (8)$$

Этим доказывается наше утверждение.

В соответствии со сделанным в конце предыдущего параграфа замечанием о роли резонатора в квантовой теории, мы не можем ожидать, что описанный механизм с одной единственной собственной частотой действительно выражает оптическое поведение атома. Поэтому мы примем, как уже упоминалось выше, что атом содержит целый (бесконечный) ряд „виртуальных“ вибраторов. В классическом представлении каждый вибратор соответствует высшей гармонике (обертону) в разложении Фурье для движения механической системы из z электронов, движущихся вокруг ядра (или атомного остатка) (см. § 98, стр. 697, сноска 1). В квантовой теории эти высшие гармоники не являются гармоническими, а определяются комбинационным принципом Ритца или боровским условием частот. Соответствующая z электронам величина $z \frac{e^2}{m}$ распределяется между соответствующими виртуальными вибраторами.

Каждому вибратору мы приводим в соответствие коэффициент силы f_k (k номер вибратора) и пишем соответствующую собственную частоту вместо $\omega_0 = 2\pi\nu_0$ теперь в виде $\omega_k = 2\pi\nu_k$, а соответствующее затухание вместо γ в виде γ_k . При чистом затухании излучения все γ_k опять пропорциональны γ_0 из § 86 (5). Однако нельзя полагать $\gamma_k = f_k \gamma_0$, где f_k есть определяемый числителем формулы (4) коэффициент силы соответствующей спек-

тральной линии. Согласно вышеприведенному выводу это означало бы, что энергия, поглощаемая из падающего излучения, снова полностью излучается с той же самой частотой. Согласно квантовой теории этого вообще не бывает¹: если падающее излучение возбуждает более высокий уровень энергии, то это вызывает излучение всех спектральных линий, которые связаны (допустимыми) переходами с более низкими уровнями. Потеря энергии вследствие излучения распределяется поэтому между несколькими спектральными линиями. Каждой такой спектральной линии $n \rightarrow m$ соответствует некоторый коэффициент силы в числителе дисперсионной формулы (6), который мы теперь обозначим f_{nm} .

Суммируя эти f_{nm} при постоянном n по всем уровням E_m системы, мы получим уже упоминавшийся в предыдущем параграфе (см. § 90, стр. 626) закон суммы Томаса и Куна

$$\sum_{E_m > E_n} f_{mn} - \sum_{E_m < E_n} f_{nm} = z, \quad (9)$$

где z есть число электронов, участвующих в процессе². Если бы механизм системы действительно состоял из z не связанных линейных гармонических одинаковых вибраторов с массой m и зарядом e , то эта сумма означала бы только то, что система в z раз сильнее отдельного вибратора.

В действительности система сложнее, она эквивалентна большому числу вибраторов, но сумма их сил (при неизменяющемся исходном состоянии) остается независимо от этого равной числу z электронов.

Мы уже заметили (§ 85, стр. 567, сноска 1), что квантотеоретически постоянная затухания отдельного вибратора соответствует продолжительности жизни верхнего состояния. Пользуясь этим понятием продолжительности жизни, мы получаем наглядное описание естественного затухания всех спектральных линий³.

Каждому уровню энергии n мы должны соотнести определенную продолжительность жизни τ_n и соответствующую ей известную ширину спектральной линии $\gamma_n = \frac{1}{\tau_n}$. При этом $\gamma_n = \gamma_0 \sum_m f_{nm}$, где f_{nm} — коэффициенты силы всех тех линий, которые соответствуют переходу со спонтанным излучением из исходного уровня n на

¹ Существует исключительный случай, когда от некоторого уровня возможен только один переход к более низкому уровню; в этом случае говорят о „резонансной“ линии (см. § 87 и 97).

² Вместо (9) можно написать просто $\sum_m f_{mn} = z$, беря f_{nn} с плюсом при излучении, с минусом для поглощения.

³ V. Weisskopf u. E. Wigner, Z. Physik, т. 63 (1930), стр. 54; также V. Weisskopf, Ann. Physik (5), т. 9 (1931), стр. 23.

более глубоко лежащий род уровней m . Спектральная линия γ_{nm} , соответствующая переходу от n к m , имеет естественную ширину линии

$$\gamma_{nm} = \gamma_n + \gamma_m = \gamma_0 \left(\sum_l f_{nl} + \sum_k f_{mk} \right), \quad (10)$$

т. е. ее ширина составлена аддитивно из ширины начального и конечного состояния. Здесь следует указать, что основной уровень имеет бесконечно большую продолжительность жизни, т. е. ширина его равна нулю. Выше расположенный уровень энергии, связанный с основным *одним* допустимым переходом, имеет коэффициент силы $f_{1,0}$, произведение которого на γ_0 есть ширина соответствующей линии $\gamma_{1,0}$, так называемой *резонансной линии*. Если 2 есть следующий уровень, от которого возможен переход к 1 и 0, то его ширина есть $\gamma_0 (f_{2,0} + f_{2,1})$. Тогда мы имеем три возможных спектральных линии: $\gamma_{1,0}$ с шириной $\gamma_0 f_{1,0}$, $\gamma_{2,0}$ с шириной $\gamma_0 (f_{2,0} + f_{2,1})$ и $\gamma_{2,1}$ с шириной $\gamma_0 (f_{2,0} + f_{2,1} + f_{1,0})$. Отсюда получается известная связь между шириною различных линий, ибо ширина линии $\gamma_{2,1}$ определяется полностью шириною остальных двух линий.

Если резонансная линия $\gamma_{1,0}$ (ильна ($f_{1,0}$ велико), то она также широка. Для остальных линий такой зависимости нет; например, линия $\gamma_{2,1}$ может быть слабой ($f_{2,1}$ мало) и все же иметь большую ширину (если резонансная линия $\gamma_{1,0}$ сильна).

Аналогично можно определить в каждом случае соотношение между силой и шириной различных линий. Теоретическое обоснование, конечно, возможно только с помощью более тонких методов квантовой механики.

§ 92. ВЛИЯНИЕ ЗАТУХАНИЯ ВСЛЕДСТВИЕ СТОЛКНОВЕНИЙ И ВСЛЕДСТВИЕ ЭФФЕКТА ДОПЛЕРА НА ПРОЦЕСС РЕЗОНАНСА

Покажем теперь, что теория лорентцова затухания при ударе может быть непосредственно перенесена на процесс рассеяния и поглощения. В результате влияние столкновений в среднем заменится константой затухания, которая связана со средней длиной свободного пробега таким же точно образом, как в случае эмиссионных линий (§ 87). Затем мы рассмотрим явление Доплера и покажем, что здесь получается точно такая же формула, как в случае излучения (§ 86).

Вообразим себе сначала покоящийся резонатор, *затухающий только вследствие излучения*¹, т. е. удовлетворяющий уравнению § 91 (1); b означает константу торможения.

Положим, что вибратор колеблется не свободно, а в соответствии с предположением лорентцовой теории ударов (§ 87) может испытывать вследствие столкновения с другими молекулами

беспорядочные изменения фазы и амплитуды. Мы выразим эти изменения, предполагая, что в некоторый момент времени t_0 колебание уничтожается, и возбуждается новое колебание, т. е. что

$$u(t_0) = 0, \quad \dot{u}(t_0) = 0. \quad (1)$$

Частота, с которой следуют друг за другом эти моменты возбуждения, должна соответствовать закону длины свободного пути [см. § 87 (6)].

Поэтому мы должны теперь исходить не из решения § 91 (3), соответствующего стационарному вынужденному колебанию резонатора в поле падающей волны, но исследовать решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям (1).

Мы получим, как в § 91, общее решение неоднородного линейного уравнения § 91 (1) из частных решений [§ 91 (3)], прибавив к ним общие решения соответствующего однородного уравнения, т. е. § 85 (9). Но их решения были согласно § 85 (10)

$$u = u_0 e^{-\frac{\gamma_0}{2} t} e^{\pm i \omega_0 t}. \quad (2)$$

Для сокращения положим

$$\omega_1 = \omega_0 + i \frac{\gamma_0}{2}. \quad (3)$$

Входящие в (2) частоты равны ω_1 и умноженная на -1 сопряженная с ней комплексная $-\omega_1^*$. Для любой составляющей u общий интеграл колебательного уравнения § 91 (1) есть

$$u = A e^{i \omega t} + \beta_1 e^{i \omega_1 t} + \beta_2 e^{-i \omega_1^* t}. \quad (4)$$

Здесь мы полагаем

$$A = \frac{\frac{e}{m}}{\omega_0^2 - \omega^2 + i \omega_0 \gamma_0} E_0; \quad (5)$$

$E = E_0 e^{i \omega t}$ означает составляющую светового вектора \mathcal{E} в направлении u . β_1 и β_2 — постоянные интегрирования, величины которых определяются из граничных условий (1)

$$\left. \begin{aligned} \beta_1 &= -A \frac{\omega + \omega_1^*}{2\omega_0} e^{i(\omega - \omega_1^*) t_0}, \\ \beta_2 &= A \frac{\omega - \omega_1}{2\omega_0} e^{i(\omega + \omega_1) t_0}. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Тогда, введя величину

$$t - t_0 = \tau, \quad (7)$$

¹ Поэтому мы в дальнейшем обозначаем постоянную затухания γ_0 (см. § 85, стр. 572).

мы получим из интеграла (4)

$$u = A e^{i\omega t} \left(1 - \frac{\omega + \omega_1^*}{2\omega_0} e^{-i(\omega - \omega_1)\tau} + \frac{\omega - \omega_1}{2\omega_0} e^{-i(\omega + \omega_1^*)\tau} \right). \quad (8)$$

Умножив на e , мы образуем электрический момент. Так как резонатор изотропен, мы можем производить вычисление над векторами. Самый момент напишем в следующем виде:

$$p = \frac{e^2}{m} \mathcal{E} \Phi(\tau), \quad (9)$$

где

$$\Phi(\tau) = \frac{1 - \frac{\omega + \omega_1^*}{2\omega_0} e^{-i(\omega - \omega_1)\tau} + \frac{\omega - \omega_1}{2\omega_0} e^{-i(\omega + \omega_1^*)\tau}}{(\omega_1 - \omega)(\omega_1^* + \omega)}. \quad (10)$$

Согласно (5) знаменателем должна была бы служить величина $\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma_0\omega$; ввиду малости γ_0 это выражение практически не отличается от

$$(\omega_1 - \omega)(\omega_1^* + \omega) = \omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma_0\omega + \frac{\gamma_0^2}{4}.$$

Примем для частоты ударов, следовательно, для распределения значений τ , то же допущение, что в § 87 (6), т. е. положим

$$d\omega = \frac{1}{\tau} e^{-\frac{\tau}{\tau_0}} d\tau. \quad (11)$$

Тогда среднее значение Φ вычисляется элементарно. Мы получаем

$$\int \Phi(\tau) d\omega = \frac{1}{\tau_0} \int_0^\infty e^{-\frac{\tau}{\tau_0}} \Phi(\tau) d\tau = \frac{1}{\left(\omega_1 - \omega + \frac{i}{\tau}\right) \left(\omega_1^* + \omega - \frac{i}{\tau}\right)}. \quad (12)$$

Знаменатель этого выражения дает

$$\omega_1 \omega_1^* + (\omega_1 - \omega_1^*) \left(\omega - \frac{i}{\tau} \right) - \left(\omega - \frac{i}{\tau} \right)^2.$$

Члены, которые по сравнению с квадратами частот ω и ω_0 второго порядка относительно обеих постоянных затухания γ_0 и $\frac{1}{\tau}$, мы отбрасываем и в произведении с одной из этих величин пишем ω_0 вместо ω . Тогда согласно (3)

$$\left(\omega_1 - \omega + \frac{i}{\tau} \right) \left(\omega_1^* - \omega - \frac{i}{\tau} \right) = \omega_0^2 - \omega^2 + i \left(\gamma_0 + \frac{2}{\tau} \right) \omega_0 = \omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega_0, \quad (13)$$

где

$$\gamma = \gamma_0 + \gamma_s, \quad \gamma_s = \frac{2}{\tau}. \quad (14)$$

Таким образом к затуханию излучения γ_0 просто прибавляется затухание при ударе $\gamma_s = \frac{2}{\tau}$ в точном соответствии с § 87 (13). Тогда средний момент, как следует из (9), есть

$$\bar{p}_0 = \frac{e^2}{m} \mathcal{E}_0 \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega_0}. \quad (15)$$

Мы сейчас введем здесь упрощение, к которому будем часто прибегать впоследствии. Вообще γ чрезвычайно мало относительно ω_0 [см. § 85 (12)]. Ограничиваясь теми областями ω , для которых разность $|\omega - \omega_0| \ll \omega_0$, мы можем заменить $\omega_0^2 - \omega^2$ в знаменателе через $2\omega_0(\omega_0 - \omega)$ и получим

$$\bar{p}_0 = \frac{e^2}{m} \frac{1}{2\omega_0} \mathcal{E}_0 \frac{1}{\omega_0 - \omega + i\frac{\gamma}{2}}. \quad (16)$$

Дальше легко учесть также и эффект Допплера. Для этого воспользуемся следующими соображениями.

Если резонатор движется так, что его составляющая скорости в направлении светового луча равна ξ , то световое поле действует не с частотой состояния покоя, а с частотой, измененной вследствие эффекта Допплера [см. § 86 (21)]

$$\omega' = \omega \left(1 + \frac{\xi}{c} \right). \quad (17)$$

Таким образом колебания резонатора выражаются только что выведенной „резонансной кривой“ (15) с моментом

$$\bar{p}_0 = \frac{e^2}{m} \mathcal{E}_0 \frac{1}{\omega_0^2 - \omega'^2 + i\gamma\omega_0}. \quad (18)$$

Излучаемая резонатором вторичная волна имеет в подвижной системе, связанной с резонатором в направлении падающей волны частоту ω' , но в неподвижной системе первоначальную частоту ω ; таким образом происходит не изменение частоты, но лишь изменение интенсивности возбужденных колебаний.

Приняв снова выведенный в § 86 (23) закон распределения скоростей, мы получим для вероятности того, что резонатор входит в средний момент, как раз с частотой ω' , выражение § 86 (33). Отсюда получается, что средний по всем скоростям момент равен

$$\bar{p}_0 = \frac{e^2}{m} \mathcal{E}_0 \frac{2}{\sqrt{\pi} \bar{v}} \int_0^\infty \frac{e^{-\left(\frac{\omega - \omega'}{\bar{v}}\right)^2} d\omega'}{\omega_0^2 - \omega'^2 + i\gamma\omega_0}. \quad (19)$$

Предположим теперь, что доплерова ширина δ приблизительно того же порядка, что и ширина вследствие торможения γ (отношение может отклоняться вверх или вниз на одну степень десяти, но во всяком случае γ и δ должны быть очень малы относительно ω_0). Тогда показательная функция в (19) уже равна нулю для тех частей в области интегрирования ω' , при которых имеет место неравенство $|\omega_0 - \omega'| \ll \omega_0$; поэтому можно воспользоваться приближением, которое мы ввели на предыдущей странице и заменить в знаменателе $\omega_0^2 - \omega'^2$ через $2\omega_0(\omega_0 - \omega')$.

Полагая опять, как в § 86 (36):

$$\left. \begin{aligned} \frac{\omega - \omega_0}{\frac{\gamma}{2}} &= \frac{4\pi(\nu - \nu_0)}{\gamma} = x, \\ \frac{\omega' - \omega_0}{\frac{\gamma}{2}} &= \frac{4\pi(\nu' - \nu_0)}{\gamma} = y, \quad \frac{\delta}{\gamma} = \eta, \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

найдем

$$\bar{p}_0 = -\frac{e^2}{m} \mathfrak{E}_0 \frac{1}{\sqrt{\pi} \delta \omega_0} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\frac{x-y}{\eta}\right)^2} \frac{dy}{y-i}, \quad (21)$$

или после разделения на вещественную и мнимую части

$$\bar{p}_0 = -\frac{e^2}{m} \mathfrak{E}_0 \frac{1}{\sqrt{\pi} \delta \omega_0} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\frac{x-y}{\eta}\right)^2} \frac{y dy}{y^2+1} + i \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\frac{x-y}{\eta}\right)^2} \frac{dy}{y^2+1} \right). \quad (22)$$

Здесь опять вместо нижнего предела подставлена уже известным нам образом $-\infty$.

Мы видим, что в это выражение входит тот же симметричный относительно x интеграл, который в § 86 (37) выражал излучение и, кроме того, сходный, антисимметрический относительно x интеграл. Действительно мы сейчас увидим (§ 93, II), что процесс поглощения протекает совершенно так же, как излучение.

§ 93. Ход дисперсии и поглощения, вызванный одной спектральной линией

Выше мы нашли, исходя из различных предположений, электрический момент как функцию силы поля и получали в каждом случае формулу вида

$$p_0 = \alpha \mathfrak{E}_0. \quad (1)$$

Мы видели, что для затухания как вследствие излучения так и вследствие удара функция α имеет тот же вид [см. § 91 (3) и § 92 (15)]. Для эффекта Штарка в случае диполя получается та же функция, в других случаях подобная ей, которую практически можно считать тождественной. Мы рассмотрим сейчас эти случаи, обозначая постоянную затухания γ независимо от ее происхождения. Далее мы введем в числитель формул коэффициент силы f и воспользуемся приближенными формулами § 92 (16). Тогда, пренебрегая эффектом Доплера, получим

$$\alpha = f \frac{e^2}{m} \frac{1}{2\omega_0} \frac{1}{\omega_0 - \omega + i \frac{\gamma}{2}} = -f \frac{e^2}{m} \frac{1}{2\omega_0} \left[\frac{\omega - \omega_0}{(\omega - \omega_0)^2 + \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2} + i \frac{\frac{\gamma}{2}}{(\omega - \omega_0)^2 + \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2} \right]; \quad (2)$$

напротив, учитывая эффект Доплера,

$$\alpha = -f \frac{e^2}{m} \frac{1}{2\omega_0} \frac{2}{\gamma} \left[\varphi\left(\frac{\omega - \omega_0}{\frac{\gamma}{2}}, \eta\right) + i \psi\left(\frac{\omega - \omega_0}{\frac{\gamma}{2}}, \eta\right) \right], \quad \eta = \frac{\delta}{\gamma}, \quad (3)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \varphi(x, \eta) &= \frac{1}{\sqrt{\pi} \eta} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y e^{-\left(\frac{x-y}{\eta}\right)^2}}{y^2+1} dy, \\ \psi(x, \eta) &= \frac{1}{\sqrt{\pi} \eta} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\left(\frac{x-y}{\eta}\right)^2}}{y^2+1} dy. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Формула (1) дает нам переход к соображениям главы VII, § 73. Мы определили из нашей модели тензор поляризуемости α_{xy} ; вследствие изотропии этой модели получается

$$\alpha_{yz} = \alpha_{zx} = \alpha_{xy} = 0, \quad \alpha_{xx} = \alpha_{yy} = \alpha_{zz} = \alpha. \quad (5)$$

Согласно главы VII, § 76 (14) мы можем теперь сразу найти оптическую диэлектрическую постоянную или соответственно показатель преломления. Мы ограничимся сперва рассмотрением газов (число молекул N на единицу объема относительно мало). Для газов имеется простая формула [см. главу VII, § 76 (17)]:

$$n^2 = 1 + 4\pi N \alpha, \quad (6)$$

где n есть введенный в главе VI, § 67 (9) комплексный показатель преломления

$$n = n(1 - ix), \quad (7)$$

а x — показатель поглощения.

Мы должны представить α в виде суммы всех членов, соответствующих отдельным резонаторам в молекуле, которые выражаются вышеприведенными формулами (2) или (3).

Ограничимся сперва рассмотрением *окрестности резонирующей точки* ω_0 . Положим, что собственные частоты ω_0 достаточно удалены друг от друга, и что ширина их достаточно мала; тогда сумму влияний всех остальных линий в области рассматриваемой линии можно считать практически постоянной; мнимая часть α мала по сравнению с его вещественной частью, как можно видеть из формы кривой соответствующей одной линии. Поэтому мы можем заменить сумму значений всех остальных линий постоянной вещественной величиной n_0^2 , т. е. написать вместо (6)

$$n^2 = n_0^2 + 4\pi N\alpha, \quad (8)$$

где вместо α должна быть подставлена одна из величин (2) или (3). Мы различаем два случая.

1. ДИСПЕРСИЯ И ПОГЛОЩЕНИЕ ПРИ ПРЕНЕБРЕЖЕНИИ ЭФФЕКТОМ ДОППЛЕРА

Рассмотрим сначала случай столь малой температуры, что эффектом Допплера можно пренебречь, следовательно, надо применить формулу (2)¹.

Как обычно, мы назовем через ν число колебаний в секунду. Далее введем обозначение

$$\rho = Nf \frac{e^2}{\pi m}, \quad \nu = \frac{\omega}{2\pi}. \quad (9)$$

Сравнивая (7) и (8) с (2), получим

$$\left. \begin{aligned} n^2(1 - x^2) &= n_0^2 + \frac{1}{2\nu_0} \frac{\rho(\nu_0 - \nu)}{(\nu_0 - \nu)^2 + \left(\frac{\gamma}{4\pi}\right)^2}, \\ 2n^2x &= \frac{\gamma}{8\pi\nu_0} \frac{\rho}{(\nu_0 - \nu)^2 + \left(\frac{\gamma}{4\pi}\right)^2}. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Сравнивая далее второе выражение (10) с распределением интенсивности эмиссионных линий (при пренебрежении эффектом Допплера), выраженной формулой (27) § 85, мы найдем, что обе функции одинаковым образом зависят от ν . Таким образом фиг. 207 на стр. 570 одновременно представляет функцию $2n^2x$.

Построим диаграмму, в которой преломление и поглощение выражаются одинаковыми универсальными (для всех веществ) кривыми. С этой целью введем опять переменные из § 92 (20)

$$\frac{4\pi(\nu - \nu_0)}{\gamma} = \frac{\omega - \omega_0}{\frac{\gamma}{2}} = x \quad (11)$$

и постоянную

$$M = \frac{2\pi\rho}{\nu_0\gamma} = \frac{2Nfe^2}{\gamma\nu_0 m}. \quad (12)$$

Тогда мы получим

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{M} [n^2(1 - x^2) - n_0^2] &= -\frac{x}{1 + x^2}, \quad (a) \\ \frac{1}{M} 2n^2x &= \frac{1}{1 + x^2}. \quad (b) \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

В случае *чистого затухания вследствие излучения* M имеет простой смысл: согласно § 91 (8)

$$\gamma = \frac{8\pi^2}{3} \frac{e^2}{mc^3} \nu_0^2 f,$$

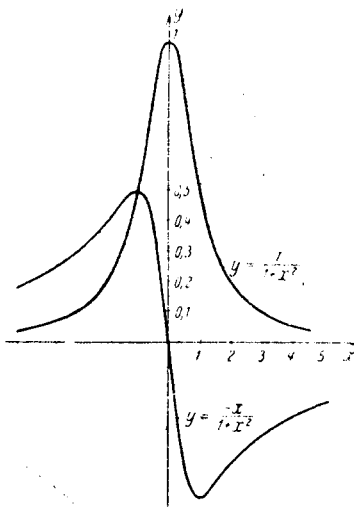
следовательно

$$M = \frac{3}{4\pi^2} \frac{c^3}{\nu_0^3} N = \frac{3}{4\pi^2} \lambda_0^3 N, \quad (14)$$

т. е. M отличается от числа молекул в кубике, построенном на длине волны, численным множителем (приблизительно 1/13).

Кривые (13) изображены на фиг. 213. Здесь ординаты отложены в гораздо большем масштабе, чем абсциссы, для того, чтобы рисунок был ближе к действительному характеру узкой абсорбционной линии. Кривая (13b) тождественна с эмиссионной кривой, которую мы рассматривали в § 85; кривая (13a) антисимметрична относительно оси ординат; она проходит через начало и имеет максимум $\frac{1}{2}$ при $x = -1$ и минимум $-\frac{1}{2}$ при $x = 1$.

Когда M очень мало, мы, очевидно, получим (систематически путем разложения n и x по степеням M) приближенное решение (13), пренебрегая x^2 по сравнению с 1, заменяя $n^2 - n_0^2$ через



Фиг. 213. Кривые дисперсии и поглощения вблизи спектральной линии газа при низких давлениях.

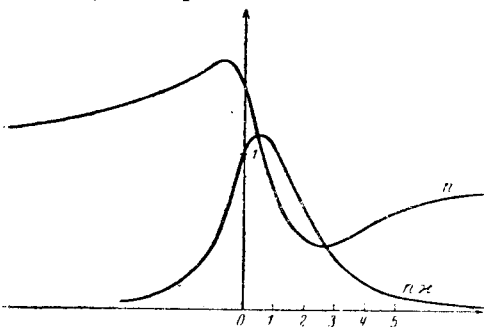
¹ См. A. Goldhammer, Dispersion und Absorption des Lichts (Leipzig, 1913) и L. Natanson, Bull. Acad. de Cracovie (1907), стр. 316; (1910), стр. 907, 915.

$2n_0(n - n_0)$ и $2n^2x$ через $2nn_0x$; мы получим тогда

$$\left. \begin{aligned} \frac{n - n_0}{M} &= -\frac{x}{1 + x^2}, & (a) \\ \frac{2n_0}{M} &= \frac{1}{1 + x^2}. & (b) \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Теперь кривые фиг. 213 непосредственно выражают изменение показателей преломления и поглощения.

При большем M надо пользоваться более общими формулами (13) и решать их относительно n и n_x ; тогда мы получаем



Фиг. 214. Кривые дисперсии и поглощения вблизи спектральной линии газа при высоких давлениях.

сходные по форме кривые, несколько несимметричные. На фиг. 214 изображены эти кривые для $n_0 = 1$ и $M = 3$. Мы видим, что максимум n_x , а также вся кривая n несколько сдвинуты в сторону больших частот; кроме того кривая поглощения несколько шире.

Смещение и расширение зависят от давления, так как согласно (12) M пропорционально числу N диспергирующих молекул в

единице объема. Они становятся заметными, когда M порядка 1 или больше. (Если бы речь шла о чистом затухании излучения, то это означало бы согласно (14), что в волновом кубике находится около 13 атомов). Мы имеем здесь влияние плотности, совершенно отличное от лорентцова затухания при ударе. Оно происходит вследствие того, что электрическое поле света представляет собой просто усредненное значение моментов всех молекул в единице объема. Таким образом мы впервые встречаемся с эффектом, о котором мы уже упоминали выше под названием *резонансного расширения* или *расширения вследствие связи*. Мы получим его полностью, если учтем более точно взаимодействия отдельных атомных резонаторов; здесь не требуется никаких новых допущений, так как это взаимодействие уже полностью учтено в формуле Лорентц-Лоренца, ибо эта формула была ни чем иным, как выражением воздействия на средний момент встречного излучения одинаковых резонаторов.

Мы дадим вкратце вывод формулы для смещения и расширения линии вследствие взаимодействия (см. аналогичное вычисление в § 95, стр. 671). Напишем согласно § 91 (4) формулу Лорентц-Лоренца § 76 (15) в виде

$$\frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} = \frac{4\pi}{3} Na = \beta, \quad \beta = \frac{4\pi^2}{3} \rho \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega_0}, \quad (16)$$

откуда немедленно следует

$$n^2 - 1 = \frac{3\beta}{1 - \beta} = \frac{4\pi^2 \rho}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega_0 - \frac{4\pi^2}{3} \rho}$$

или

$$n^2 - 1 = \frac{4\pi^2 \rho}{(\omega_0^2 - \omega^2) + i\gamma\omega_0}, \quad (17)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \bar{\omega}_0 &= \omega_0 \sqrt{1 - \frac{4\pi^2}{3} \frac{\rho}{\omega_0^2}} = \omega_0 \left(1 - \frac{2\pi^2}{3} \frac{\rho}{\omega_0^2} + \dots \right), \\ \bar{\gamma} &= \gamma \sqrt{1 + \frac{4\pi^2}{3} \frac{\rho}{\omega_0^2}} = \gamma \left(1 + \frac{2\pi^2}{3} \frac{\rho}{\omega_0^2} + \dots \right). \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Вид уравнения (17) опять точно совпадает с (6), когда мы пренебрегаем взаимодействием между резонаторами, но только в это выражение для α , как функции частоты, должны быть подставлены вместо ω_0 и γ измененные значения $\bar{\omega}_0$ и $\bar{\gamma}$. Из (18) мы видим, подставляя вместо ρ его значение (9), что как частота, так и торможение испытывают смещение, пропорциональное плотности. Учитывая в (17) действие других полос поглощения, для чего заменяем единицу в левой части через n_0^2 , мы получим

$$n^2 - n_0^2 = -\frac{M}{x - i}, \quad (19)$$

но здесь в определениях (11) и (12) x и M вместо величин $\nu_0(\omega_0)$ и γ надо поставить $\nu_0(\bar{\omega}_0)$ и $\bar{\gamma}$.

Формула (19) совершенно равнозначна с (13). Выражаемое уравнениями (18) резонансное расширение по Вейскопфу¹ хорошо согласуется с опытом (например, для D -линий натрия); на этом мы не будем останавливаться.

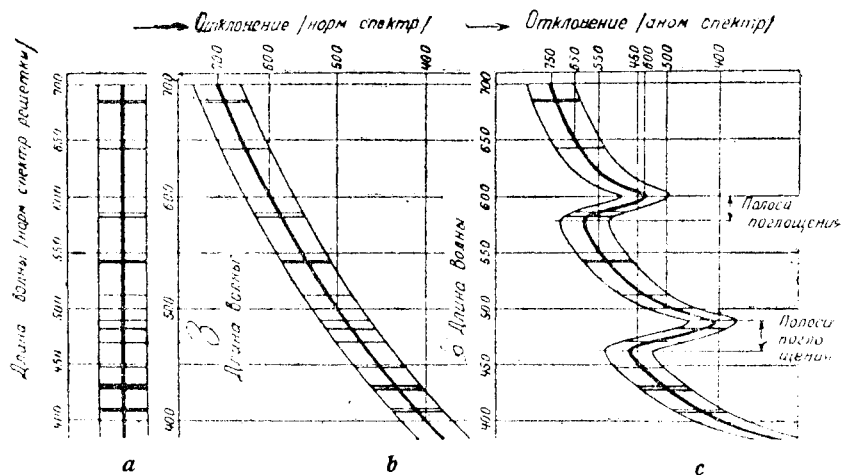
Обычно наблюдения сходятся с простой формулой (15), так как внутренняя часть абсорбционных полос почти недоступна наблюдению, и кроме того эффект Доплера перекрывает там влияние искажения вследствие связи согласно (13). На некотором расстоянии от середины линии формулы (15) всегда имеют место.

Мы видим, что во всех случаях показатель преломления вне ширины половинного значения абсорбционной полосы возрастает с увеличением частоты (*нормальная дисперсия*); внутри абсорбционной полосы имеет место обратная зависимость: в этом случае говорят об *аномальной дисперсии*. Для узких абсорб-

¹ V. Weisskopf, Z. Physik, т. 75 (1932), стр. 287.

ционных полос, например для газов, она проявляется чрезвычайно слабо, так как она совпадает как раз с областью наиболее сильного поглощения. Тем не менее существуют вещества со слабыми растянутыми областями поглощения, из которых можно приготовить достаточно тонкие слои и с помощью их наблюдать падение показателя преломления в аномальной области.

В 1860 году Леру¹, производя измерения с призмой, наполненной парами иода, открыл, что красные лучи отклоняются сильнее голубых (при 700° С показатель преломления для красного света был 1,0205, для фиолетового 1,019). В 1870 году



Фиг. 215. а—вертикально расположенный спектр решетки, б—спектр, смещенный наискось нормально рассеивающей призмой, скрещенной с решеткой, с—спектр, искаженный скрещенной с решеткой аномально рассеивающей призмой. (По Н. Kessler'y, Handb. d. Physik, т. 18).

Христиансен² нашел аномальную дисперсию в щелочном растворе фуксина, — анилиновом красителе, дающем в зеленом свете сильную полосу поглощения. Он работал с призмой, состоявшей из двух стеклянных пластинок, наклоненных под углом 1°, между которыми находился раствор, удерживаемый капиллярными силами. В этом случае фиолетовый свет слабее отклонялся, чем красный. Первые детальные исследования этого явления были сделаны Кундтом³, который ввел метод скрещенных призм.

Первая призма с нормальной дисперсией (вместо нее можно также взять решетку) отбрасывает горизонтальный спектр. Этот спектр пропускается через призму из исследуемого вещества, причем преломляющее ребро перпендикулярно к ребру первой

призмы. Если дисперсия во второй призме нормальна, двойное отклонение дает косую цветную полосу (см. фиг. 215b). Но как только наступает аномальная дисперсия, эта полоса неправильным образом искажается (см. фиг. 215c). При тонких абсорбционных линиях части полосы, лежащие внутри линии, не видны, но аномалию дисперсии можно узнать по разрыву в ходе кривой. Это явление было продемонстрировано Вудом¹ на парах натрия. В его опыте натровый пар, введенный в бунзеновскую горелку с помощью шарика из соли, доведен до свечения и имеет сам форму призмы. Так как D-линия состоит из двух очень близких составляющих, то получаются изображения (см. фиг. 216), в которых отчетливо можно увидеть двукратный разрыв вблизи обеих линий.

Теоретически аномальная дисперсия уже содержится в первых формулах дисперсии Кеттелера², Зельмейера³ и Гельмгольца⁴.

В последнее время ею занимались Копферман и Ладенбург⁵.

II. ДИСПЕРСИЯ И ПОГЛОЩЕНИЕ ПРИ УЧЕТЕ ЭФФЕКТА ДОПЛЕРА

Мы должны теперь воспользоваться для α формулой (3)⁶.

¹ R. W. Wood, Physikal Optics, стр. 116. New York, 1923: Физическая оптика, Опти, 1937, стр. 134.

² E. Ketteler, Pogg. Ann., т. 140 (1870), стр. 1—53, 177—219.

³ W. Sellmeier, Pogg. Ann., т. 143 (1871), стр. 272.

⁴ H. v. Helmholtz, Pogg. Ann., т. 154 (1875), стр. 582.

⁵ H. Kopfermann u. R. Ladenburg, Z. Phys. Chem. Abt. A (Haber-Bd., 1928), стр. 375.

⁶ Сжатый очерк рассматриваемых ниже соотношений (без доказательства формул см. F. Reiche), Verh. dtsh. physik. Ges., 1913, стр. 3). Его выражение для функции

$$\psi = \int_0^{\infty} d\xi e^{-\xi - \frac{1}{4}\eta\xi^2} \cdot \cos(x\xi)$$

можно получить из нашего выражения, воспользовавшись тождеством

$$\frac{1}{1+y^2} = \int_0^{\infty} e^{-\xi} \cdot \cos(y\xi) d\xi.$$

Эту же задачу рассматривает М. W. Zemansky, Phys. Rev. (2), т. 36 (1930), стр. 219.



Фиг. 216. Аномальная дисперсия натровых D-линий при трех различных давлениях пара (фото G. Carlo).

¹ F. P. Leroux, Ann. Chim. et Physique (3), т. 41 (1861), стр. 285; см. C. R., т. 55 (1862), стр. 126.

² C. Christiansen, Pogg. Ann., т. 141 (1870), стр. 479; т. 143 (1871), стр. 250.

³ A. Kundt, Pogg. Ann., т. 142 (1871), стр. 163; т. 143 (1871), стр. 149; т. 144 (1871), стр. 128; т. 145 (1872), стр. 67 и 164.

Введя снова переменную x из (11) и постоянную M из (12), мы получим в соответствии с (13) две функции

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{M} [n^2(1-x^2) - n_0^2] &= -\varphi(x, \eta), \quad x = \frac{\omega - \omega_0}{\frac{\gamma}{2}}, \\ \frac{1}{M} 2n^2x &= \psi(x, \eta), \quad \eta = \frac{\delta}{\gamma}. \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

Построим кривую зависимости обеих функций φ и ψ , определяемых уравнениями (4), для различных значений параметра η . Можно показать, что обе эти функции являются действительной и мнимой частью гауссова интеграла ошибок для комплексного аргумента; можно воспользоваться известным разложением в ряд этого интеграла и таким образом легко получить соответствующее разложение для наших функций φ и ψ . Для этого положим

$$\chi(x, \eta) = \sqrt{\pi} \eta (\psi + i\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\frac{x-y}{\eta}\right)^2} \frac{dy}{1-iy}. \quad (21)$$

Имеем

$$\frac{1}{1-iy} = \int_0^{\infty} e^{-(1-iy)\xi} d\xi,$$

т. е.

$$\chi(x, \eta) = \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{-\frac{1}{\eta^2}(x^2 - 2xy + y^2)} \int_0^{\infty} e^{-(1-iy)\xi} d\xi.$$

Изменив последовательность интегрирования, получим

$$\begin{aligned} \chi(x, \eta) &= e^{-\frac{x^2}{\eta^2}} \int_0^{\infty} d\xi e^{-\xi} \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{-\frac{1}{\eta^2} \left[y - \left(x + i \frac{\eta^2 \xi}{2} \right) \right]^2} \cdot e^{\frac{1}{\eta^2} \left(x + i \frac{\eta^2 \xi}{2} \right)^2} = \\ &= \int_0^{\infty} d\xi e^{-\xi + ix\xi - \frac{1}{4} \frac{\eta^2 \xi^2}{\eta^2}} \int_{-\infty}^{\infty} du e^{-\frac{u^2}{\eta^2}}, \end{aligned}$$

где

$$u = y - \left(x + i \frac{\eta^2 \xi}{2} \right).$$

Как известно

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{\eta^2}} du = \eta \sqrt{\pi}.$$

Здесь

$$\begin{aligned} \chi(x, \eta) &= \eta \sqrt{\pi} e^{\left(\frac{1-ix}{\eta}\right)^2} \int_0^{\infty} d\xi e^{-\left(\frac{1}{2}\eta\xi + \frac{1-ix}{\eta}\right)^2} = \\ &= 2\sqrt{\pi} e^{\left(\frac{1-ix}{\eta}\right)^2} \int_0^{\infty} dw e^{-w^2}. \end{aligned}$$

Введем гауссову функцию для ошибок,

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-w^2} dw; \quad \Phi(\infty) = 1. \quad (22)$$

Тогда

$$\chi(x, \eta) = \pi e^{\left(\frac{1-ix}{\eta}\right)^2} \left[1 - \Phi\left(\frac{1-ix}{\eta}\right) \right]. \quad (23)$$

Известны следующие разложения в ряд¹: при $|x| \gg 1$ имеем асимптотически

$$1 - \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{e^{-x^2}}{x} \left[1 - \frac{1}{2x^2} + \frac{1 \cdot 3}{(2x^2)^2} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{(2x^2)^3} + \dots \right], \quad (24)$$

и ряд, сходящийся для всех значений x

$$1 - \Phi(x) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{x}{1} - \frac{x^3}{1! \cdot 3} + \frac{x^5}{2! \cdot 5} - \dots \right), \quad (25)$$

Далее получаем согласно (23): асимптотическое разложение² для $|x| \gg 1$:

$$\chi(x, \eta) = \frac{\eta \sqrt{\pi}}{1-ix} \left\{ 1 - \frac{\eta^2 \cdot 1}{2(1-ix)^2} + \frac{\eta^4 \cdot 1 \cdot 3}{2^2(1-ix)^4} - \frac{\eta^6 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5}{2^3(1-ix)^6} + \dots \right\}; \quad (26)$$

равномерно сходящийся степенной ряд

$$\begin{aligned} \chi(x, \eta) &= \pi e^{\left(\frac{1-ix}{\eta}\right)^2} \left\{ 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left[\frac{1-ix}{\eta} - \frac{(1-ix)^3}{\eta^3 \cdot 1! \cdot 3} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{(1-ix)^5}{\eta^5 \cdot 2! \cdot 5} - \dots \right] \right\}. \end{aligned} \quad (27)$$

Разложив на вещественную и мнимую части и снова введя нормирующие множители, мы получим следующие разложения для искомых функций (примечание 31):

¹ S. Jahnke-Emde, Funktionentafeln, IX, стр. 31.

² Асимптотическое разложение можно получить также, разлагая функцию $1/(1-iy)$ по степеням $i(y-x)/(1-ix)$ и интегрируя почленно (21).

для больших значений x :

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= \frac{x}{1+x^2} \left[1 - \frac{\eta^2 \cdot 1}{2} \frac{\binom{3}{1} - \binom{3}{3} x^2}{(1+x^2)^2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\eta^4 \cdot 1 \cdot 3}{2^2} \frac{\binom{5}{1} - \binom{5}{3} x^2 + \binom{5}{5} x^4}{(1+x^2)^4} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\eta^6 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5}{2^3} \frac{\binom{7}{1} - \binom{7}{3} x^2 + \binom{7}{5} x^4 - \binom{7}{7} x^6}{(1+x^2)^6} + \dots \right]; \\ \psi &= \frac{1}{1+x^2} \left[1 - \frac{\eta^2 \cdot 1}{2} \frac{1 - \binom{3}{2} x^2}{(1+x^2)^2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\eta^4 \cdot 1 \cdot 3}{2^2} \frac{1 - \binom{5}{2} x^2 + \binom{5}{4} x^4}{(1+x^2)^4} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\eta^6 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5}{2^3} \frac{1 - \binom{7}{2} x^2 + \binom{7}{4} x^4 - \binom{7}{6} x^6}{(1+x^2)^6} + \dots \right]; \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

для малых значений x :

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= \frac{2}{\eta} e^{\frac{1-x^2}{\eta^2}} \left\{ \cos \frac{2x}{\eta^2} \cdot \left[\frac{x}{\eta} - \frac{1}{\eta^3 \cdot 1! \cdot 3} \left(\binom{3}{1} x - \binom{3}{3} x^3 \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{\eta^5 \cdot 2! \cdot 5} \left(\binom{5}{1} x - \binom{5}{3} x^3 + \binom{5}{5} x^5 \right) + \dots \right] \right. \\ &\quad \left. - \sin \frac{2x}{\eta^2} \cdot \left(\frac{1}{2} \sqrt{\pi} + \left[-\frac{1}{\eta} + \frac{1}{\eta^3 \cdot 1! \cdot 3} \left(1 - \binom{3}{2} x^2 \right) \right. \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left. - \frac{1}{\eta^5 \cdot 2! \cdot 5} \left(1 - \binom{5}{2} x^2 + \binom{5}{4} x^4 \right) + \dots \right] \right) \right\}, \\ \psi &= \frac{2}{\eta} e^{\frac{1-x^2}{\eta^2}} \left\{ \sin \frac{2x}{\eta^2} \cdot \left[\frac{x}{\eta} - \frac{1}{\eta^3 \cdot 1! \cdot 3} \left(\binom{3}{1} x - \binom{3}{3} x^3 \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{\eta^5 \cdot 2! \cdot 5} \left(\binom{5}{1} x - \binom{5}{3} x^3 + \binom{5}{5} x^5 \right) + \dots \right] \right. \\ &\quad \left. + \cos \frac{2x}{\eta^2} \cdot \left(\frac{1}{2} \sqrt{\pi} + \left[-\frac{1}{\eta} + \frac{1}{\eta^3 \cdot 1! \cdot 3} \left(1 - \binom{3}{2} x^2 \right) \right. \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left. - \frac{1}{\eta^5 \cdot 2! \cdot 5} \left(1 - \binom{5}{2} x^2 + \binom{5}{4} x^4 \right) + \dots \right] \right) \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

Из рядов (28) вытекает прежде всего важный результат, что для каждого η обе кривые на достаточном расстоянии от середины линии сходятся к простым дисперсионным кривым (13). Этим обстоятельством воспользовался Минковский¹ для измерения естественной ширины линии и расширения вследствие повышенного давления без вредного влияния эффекта Допплера. Он профотометрировал абсорбционную кривую на достаточном расстоянии от середины линии и показал, что она изменяется как простая кривая затухания (13); по крутизне подъема (в шкале x) он смог определить γ . В опыте с D -линиями натрия для естественной ширины линии обеих составляющих было найдено значение $\gamma_0 = 0,62 \cdot 10^8 \text{ сек}^{-1}$. Расширение вследствие давления заметно при давлении чистого пара натрия 10^{-2} мм ; при этом оказалось, что зависимость уже не соответствует чистой кривой затухания, что, вероятно, объясняется влиянием соседних атомов (резонансное расширение), о котором мы уже говорили.

С помощью наших рядов (28) и (29), области сходимости которых отчасти покрывают друг друга, и с помощью численных квадратур можно вычислить функцию. Результат приведен в таблице 38, в которой кроме того приведены для сравнения элементарные функции $1/(1+x^2)$ и $x/(1+x^2)$ (начерченные пунктиром на фиг. 217). Функции изображены на фиг. 217². Кривые показывают следующее.

Рассмотрим сначала симметричную кривую поглощения ψ . Здесь все кривые (для различных η) пересекают предельную кривую $1/(1+x^2)$ в окрестности точки $x = \pm 1$ (т. е. $\omega - \omega_0 = \pm \gamma/2$); внутри этой области в. е. они лежат ниже предельной кривой, а вне ее лежат выше; на большом расстоянии они асимптотически приближаются к предельной кривой.

Для антисимметрической дисперсионной кривой φ все кривые для различных η при достаточно большом расстоянии x от середины проходят выше предельной кривой $x/(1+x^2)$, к которой они также асимптотически приближаются. Но они пересекают предельную кривую на большем расстоянии от середины, чем кривые ψ , именно при тем больших значениях x , тем больше η . Именно этим объясняется то, что эффект Допплера в непосредственной близости к линии искажает характерный ход дисперсионной кривой.

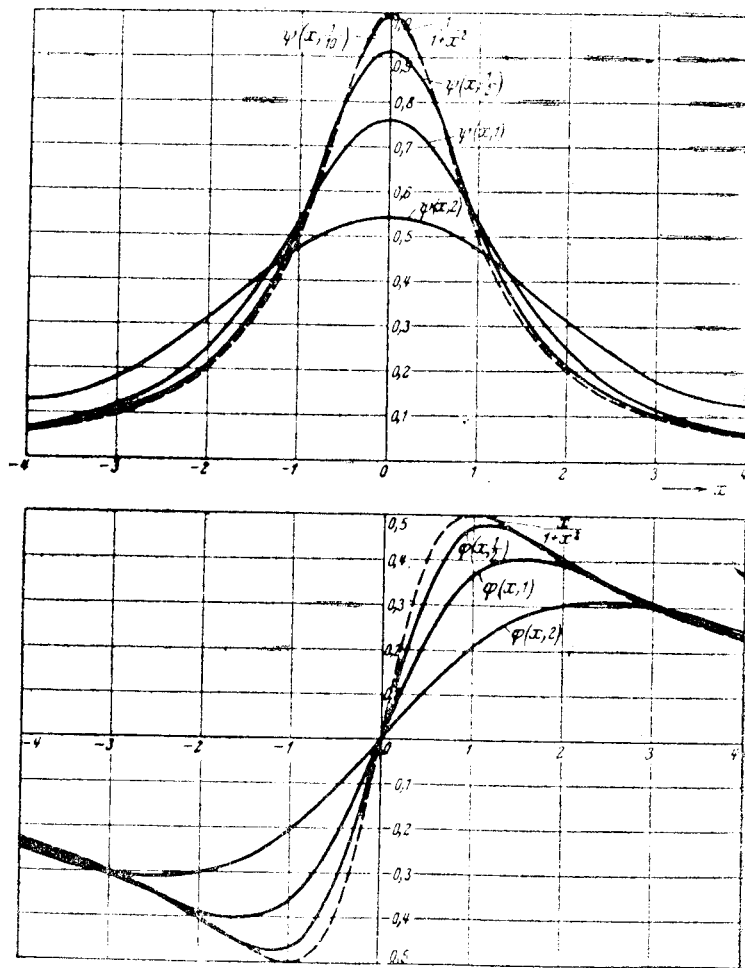
Те же замечания, которые мы сделали по поводу формул (13) относительно несимметричного изменения величин n и n_x ,

¹ R. Minkowski, Z. Physik, т. 36 (1926), стр. 839. Минковский и многие другие авторы, занимавшиеся этим вопросом, при рассмотрении одновременного влияния на дисперсию затухания и эффекта Допплера, ссылаются на работу W. Voigt (Münch. Ber. 1912, стр. 603). Однако вывод формул Фогта спорен, а сами формулы сложны и неясны.

² Числовые вычисления функции были сделаны кандидатами математики Р. Бунгерсом и Ф. Болпом. Функцию, близкую к кривой фиг. 217, дает M. W. Zemansky, Physic. Rev. (2), т. 36 (1930), стр. 219.

остаются в силе и для изложенной здесь теории, так как левые части уравнений (20) и (13) одинаковы. Далее

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(x, \eta) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy}{y^2 + 1} = \pi. \quad (30)$$



Фиг. 217. Кривые поглощения и дисперсии с учетом эффекта Доплера.

Полный интеграл поглощения таким образом имеет то же значение, что и интеграл простой абсорбционной кривой.

Таблица 38

Интегралы $\psi(x, \eta) = \frac{1}{\sqrt{\pi\eta}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+y^2} e^{-\frac{(x-y)^2}{\eta}} dy$ и $\varphi(x, \eta) = \frac{1}{\sqrt{\pi\eta}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y}{1+y^2} e^{-\frac{(x-y)^2}{\eta}} dy$

при значениях параметра $\eta = 2, 1, 1/2, 1/10$; также их предельные кривые

x	$\frac{1}{1+x^2}$	$\psi(x, 2)$	$\psi(x, 1)$	$\psi(x, \frac{1}{2})$	$\psi(x, \frac{1}{10})$	$\frac{x}{1+x^2}$	$\varphi(x, 2)$	$\varphi(x, 1)$	$\varphi(x, \frac{1}{2})$	$\varphi(x, \frac{1}{10})$
0.0	1,000	0,545	0,758	0,910	0,995	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
0.2	0,962	0,542	0,749	0,890	0,958	0,192	0,045	0,093	0,145	0,189
0.4	0,862	0,534	0,714	0,835	0,861	0,345	0,090	0,173	0,270	0,341
0.6	0,735	0,518	0,663	0,751	0,735	0,441	0,133	0,264	0,361	0,439
0.8	0,610	0,497	0,606	0,632	0,610	0,488	0,171	0,322	0,438	0,487
1.0	0,500	0,473	0,532	0,525	0,501	0,500	0,204	0,361	0,470	0,499
1.2	0,410	0,444	0,461	0,434	0,411	0,492	0,238	0,388	0,474	0,491
1.4	0,338	0,410	0,405	0,356	0,339	0,473	0,257	0,399	0,467	0,473
1.6	0,281	0,374	0,346	0,301	0,282	0,450	0,280	0,402	0,446	0,450
1.8	0,236	0,342	0,292	0,251	0,237	0,425	0,292	0,400	0,425	0,425
2.0	0,200	0,308	0,254	0,212	0,201	0,400	0,304	0,392	0,401	0,400
2.2	0,171	0,286	0,212	0,179	0,171	0,376	0,310	0,374	0,379	0,376
2.4	0,148	0,255	0,180	0,156	0,148	0,355	0,314	0,357	0,358	0,355
2.6	0,129	0,228	0,155	0,134	0,129	0,335	0,311	0,338	0,338	0,335
2.8	0,113	0,201	0,138	0,117	0,113	0,316	0,305	0,321	0,318	0,316
3.0	0,100	0,180	0,117	0,103	0,100	0,300	0,299	0,307	0,302	0,300
3.2	0,089	0,162	0,101	0,092	0,089	0,285	0,291	0,293	0,287	0,285
3.4	0,080	0,149	0,090	0,082	0,080	0,272	0,282	0,279	0,274	0,272
3.6	0,072	0,140	0,080	0,074	0,072	0,259	0,272	0,266	0,261	0,259
3.8	0,065	0,133	0,072	0,066	0,065	0,246	0,259	0,252	0,247	0,246
4.0	0,059	0,127	0,065	0,060	0,059	0,235	0,243	0,240	0,236	0,235

§ 94. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОНСТАНТ ПОГЛОЩЕНИЯ И ДИСПЕРСИИ ДЛЯ ГАЗОВ

В этом параграфе мы предположим, что температура газов настолько мала, т. е. молекулярный вес настолько велик,

что эффектом Доплера можно пренебречь; влияние его мы также рассмотрим в свое время.

Таким образом мы будем исходить из дисперсионных формул § 93 (10) и (13). Форма абсорбционных полос (n и χ) зависит кроме собственной частоты ν_0 также от обеих констант ρ и γ . Обе они составлены из молекулярных констант и констант, выражающих свойства газа, как целого; так ρ выражается кроме универсальной константы e^2/m через произведение силы f (молекулярная константа) и число молекул N (плотность), а γ при не слишком малом давлении в основном через длину свободного пути l (эффективное сечение), а при малом давлении опять таки через коэффициент силы f . Мы опишем различные методы, служащие для определения этих констант. Для этого можно воспользоваться измерениями ослабления вследствие поглощения или измерениями показателя преломления.

1. ПОГЛОЩЕНИЕ

Для определения обеих констант ρ и γ достаточно независимого измерения двух точек на абсорбционной кривой; еще большего можно достигнуть, разумеется, промерив целиком всю кривую. Но этот метод, однако, представляет большие затруднения, вследствие узости линии. Поэтому мы изложим сперва простые методы, в которых имеют дело с отдельными, легко определяемыми экстремальными или суммарными величинами.

С помощью спектрального аппарата небольшой разрешающей силы, можно только отделить рассматриваемую линию от остальных, но не определить изменение интенсивности внутри самой линии. Можно изменить ослабление света от источника с некоторым непрерывным распределением интенсивности произведенной в слое рассматриваемого газа в области данной спектральной линии. Если при этом воспользоваться источником света, для которого распределение интенсивности в области рассматриваемой спектральной линии постоянно, то в таком случае говорят о *суммарном поглощении*. С другой стороны в качестве светового источника можно взять светящийся слой того же самого газа. Тогда мы получаем поглощение линии „в себе самой“, так называемое *самообращение*.

Формулы § 93 дают непосредственно только поглощение в бесконечно тонком слое. В действительности же мы имеем дело большей частью со слоями конечной толщины; следовательно, необходимо исследовать различные виды поглощения в слое конечной толщины. Это особенно важно потому, что вариация толщины слоя дает параметр, позволяющий при некоторых условиях определить обе постоянные ρ и γ , не разрешая самих линий. Рассмотрим сначала этот простой метод, а затем перейдем к тем методам, в которых с помощью высокой разрешающей способности производится действительное фотометрическое определение изменения поглощения по спектру.

1. Суммарное поглощение

а) Бесконечно тонкие слои. Согласно главы VI, § 67 (18), (19) уменьшение энергии в бесконечно тонком слое толщины d выражается для монохроматического света произведением χd , где

$$\chi = \frac{4\pi\nu}{c} n\chi. \quad (1)$$

Если источником света служит непрерывный спектр, энергия которого может считаться постоянной в области рассматриваемой линии поглощения, то полное поглощение равно

$$A = \int_0^\infty d \cdot \chi(\nu) d\nu = \frac{4\pi}{c} d \cdot \int_0^\infty \nu \cdot n\chi \cdot d\nu. \quad (2)$$

Ограничиваясь случаем слабого поглощения [симметричные абсорбционные линии § 93 (15)] и введя вместо ν переменную интегрирования x § 93 (11), имеем согласно § 93 (15) после подстановки $-\infty$ вместо нижнего предела $-4\pi\nu_0/\gamma$

$$A = \frac{\gamma M}{2cn_0} \cdot d \cdot \nu_0 \int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{1+x^2}. \quad (3)$$

То же самое имеет место, согласно § 93 (30) и тогда, когда мы пользуемся общей дисперсионной формулой с учетом эффекта Доплера. Из (3) следует по § 93 (12)

$$A = \frac{\pi}{c} \frac{M}{2n_0} \nu_0 \gamma d = \frac{\pi^2 \rho}{cn_0} d = \frac{\pi N f e^2}{cmn_0}. \quad (4)$$

В этой формуле заслуживает внимания то, что суммарное поглощение в бесконечно тонком слое зависит только от ρ , т. е. от произведения числа молекул и силы линии Nf , но совершенно не зависит от затухания¹.

Для определения коэффициента силы f можно воспользоваться измерениями суммарного поглощения, вычисляя число молекул

¹ Укажем на то, что квантотеоретическая интерпретация формулы (4) вместе с формулой § 85 (37) для естественной ширины линии приводит к очень важному эйнштейновскому соотношению между вероятностями поглощения и излучения световых квантов. Мы видели в сноске 1 на стр. 567 § 85, что

величину $\tau = \frac{1}{\gamma}$ можно толковать как продолжительность жизни возбужденного атома. Естественная продолжительность жизни равна $\tau_0 = \frac{1}{f\gamma_0}$, где f есть коэффициент силы соответствующей линии и согласно § 85 (37)

$$\gamma_0 = \frac{2}{3} \frac{e^2}{mc^3} \omega_0^2 = \frac{8\pi^2}{3} \frac{e^2}{mc^3} \nu_0^2.$$

Обозначим по Эйнштейну величину вероятности излучения светового кванта $h\nu_0$ в секунду

$$A = \gamma_0 f.$$

из давления пара. Это было сделано для ртутной линии $\lambda_0 = 2537 \text{ \AA}$ в работе Фюхтбауэра, Иооса и Динкелакера, о которой мы подробно говорили выше (см. § 87, стр. 588, сноска 2 и стр. 591, сноска 1). Из полученных кривых экстраполируется предельное значение суммарного поглощения для бесконечно малых давлений. Получается следующий результат:

Ртутная линия 2537: $f = 1/35 = 0,0286$ (см. табл. 41 на стр. 665).

б) Конечная толщина слоя. Непрерывный фон. На практике всегда имеют дело с конечной толщиной слоя. В этом случае поглощение выражается формулой¹

$$A = \int_{\nu_0 - \delta}^{\nu_0 + \delta} (1 - e^{-\lambda d}) d\nu. \quad (5)$$

С другой стороны, согласно формулы (4) текста для случая изолированной спектральной линии ($n_0 = 1$) энергия, поглощаемая одной молекулой ($Nd = 1$) из параллельного линейно поляризованного луча с интенсивностью J равна $\frac{\pi f e^2}{c m} J$. Введем теперь вместо J пространственную плотность излучения u ; согласно главы I § 2 (4) и (7):

$$J = \frac{c}{4\pi} \overline{\mathcal{E}}^2, \quad u = \frac{1}{4\pi} \overline{\mathcal{E}}^2 = \frac{3}{4\pi} \overline{\mathcal{E}}_x^2 = \frac{3}{c} J.$$

Тогда энергия, поглощаемая в однородном поле излучения с плотностью u , равна $\frac{\pi f e^2}{3m} u$, откуда получается путем деления на $h\nu_0$ число поглощаемых квантов; напишем его

$$B u = \frac{\pi f e^2}{3m} \frac{1}{h\nu_0} u;$$

тогда B есть вероятность поглощения одного кванта $h\nu_0$ в секунду.

Разделив обе полученные формулы друг на друга

$$A = \frac{8\pi^2}{3} \frac{e^2 f}{m c^3} \nu_0^2, \quad B = \frac{\pi}{3} \frac{e^2 f}{m} \frac{1}{h\nu_0},$$

получим

$$\frac{A}{B} = \frac{8\pi h}{c^3} \nu_0^3.$$

Эйнштейн получил это соотношение при своем знаменитом выводе формулы излучения Планка на основе понятий о вероятности поглощения и излучения светового кванта (см. A. Einstein, Physik Z., т. 18 (1917), стр. 121 или M. Born, Vorlesungen über Atommechanik, т. I, § 2, стр. 7, Berlin, 1925).

¹ Излагаемая дальше теория поглощения в слоях конечной толщины была развита главным образом Ладенбургом и Рейхе. См. R. Ladenburg u. F. Reiche, Sitzgsber. Schles. Ges. vaterl. Kult. 21 Febr. 1912. R. Ladenburg u. F. Reiche, Ann. Physik (4), т. 42 (1913), стр. 181. В этой работе поглощение на единицу частоты (циклической частоты) обозначается A , тогда как здесь та же буква означает полное поглощение по всему спектру, поскольку оно зависит от одной линии. Этим объясняется, что наши окончательные формулы отличаются от цитируемой работы в одном случае на множитель 2π , а в другом — на множитель 2δ . При этом δ есть такая разность частот, что в точках $\nu_0 \pm \delta$ поглощение практически равно нулю, т. е. δ велико относительно ширины половинного значения γ . Поэтому в последующих интегралах можно поставить $\pm \infty$ вместо пределов $\pm 4\pi\delta/\gamma$.

Подставим теперь выражение (1) в (5); заменим в нем ν через ν_0 и воспользуемся для λx выражением § 93 (15b). Введем сокращенные обозначения

$$\zeta = \frac{2\pi\nu_0}{cn_0} Md = \frac{4\pi^2}{cn_0} \frac{\rho}{\gamma} d = \frac{4\pi}{cn_0} \frac{e^2}{m} \frac{Nf}{\gamma} d, \quad (6)$$

тогда получим

$$A = \frac{\gamma}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (1 - e^{-\frac{\zeta}{1+x^2}}) dx. \quad (7)$$

Тогда интегрирование по частям дает

$$A = \frac{\zeta\gamma}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\zeta}{1+x^2}} \frac{x^2 dx}{(1+x^2)^2}. \quad (8)$$

С помощью подстановки

$$x = \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \quad (9)$$

интеграл (8) сводится к известным функциям Бесселя¹

$$\left. \begin{aligned} I_0(z) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi e^{iz \cos \varphi} d\varphi, \\ I_1(z) &= -\frac{i}{\pi} \int_0^\pi e^{iz \cos \varphi} \cos \varphi d\varphi, \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

вследствие чего он примет вид

$$\begin{aligned} A &= \frac{\zeta\gamma}{4\pi} e^{-\frac{\zeta}{2}} \int_0^\pi e^{-\frac{\zeta}{2} \cos \varphi} (1 - \cos \varphi) d\varphi = \\ &= \frac{\zeta\gamma}{4} e^{-\frac{\zeta}{2}} \left[I_0\left(i\frac{\zeta}{2}\right) - i I_1\left(i\frac{\zeta}{2}\right) \right]. \end{aligned} \quad (11)$$

¹ См. главу IV, § 49 (4); но в нашей формуле (10) мы используем другое интегральное выражение (Ганзена) (см. Jahnke-Emde, Funktionentafeln, стр. 169, Лейпциг и Берлин, 1909, есть русское издание).

Особенно важны последние два предельных случая, которые легко получить из известных свойств бесселевых функций¹ — уже рассмотренный случай *очень тонких слоев* ($\zeta \ll 1$) и противоположный случай *очень толстых слоев* ($\zeta \gg 1$). В первом случае получаем с помощью разложения бесселевых функций по степеням

$$A_0 = \frac{\zeta \gamma}{4}, \quad (12)$$

во втором случае с помощью асимптотических рядов

$$A_\infty = \frac{\gamma}{2\pi} \sqrt{\pi \zeta}. \quad (13)$$

В обеих формулах напомним вместо ζ его значение из (6); тогда

$$\left. \begin{aligned} A_0 &= \frac{\pi^2}{cn_0} \rho d, & (a) \\ A_\infty &= \sqrt{\frac{\pi \rho \gamma d}{cn_0}}. & (b) \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Первая формула тождественна выведенным выше уравнениям (4) и выражает независимость полного поглощения в тонком слое от постоянных затухания. При большой толщине поглощающего слоя суммарное поглощение зависит как от ρ , так и от γ и пропорционально корню из их произведения. Таким образом, как утверждалось выше, комбинируя изменения при различной толщине слоя, можно определить отдельно обе постоянные.

с) Конечная толщина слоя. Самообращение. Иногда при измерении поглощения некоторой спектральной линии пользуются в качестве источника света той же линией. Получаются простые соотношения, если речь идет о температурном свечении, и во всяком случае если применим закон температурного излучения Кирхгофа²: *отношение эмиссионной способности к поглощательной способности является для каждой температуры универсальной функцией частоты*. Эту функцию можно считать постоянной в области узких спектральных линий, и тогда для излучательной способности получается уравнение

$$E(\nu) = E_0(1 - e^{-\gamma d}). \quad (15)$$

¹ Для малых z имеем разложение в степенной ряд (см. Jahnke-Emde, стр. 92):

$$I_0(iz) = 1 + \frac{\left(\frac{1}{2}z\right)^2}{(1!)^2} + \dots, \quad I_1(iz) = \frac{iz}{2} \left[1 + \frac{\left(\frac{1}{2}z\right)^2}{1 \cdot 2} + \dots \right],$$

а для больших z асимптотическое разложение (см. Jahnke-Emde, стр. 100)

$$I_0(iz) \rightarrow \frac{e^z}{\sqrt{2\pi z}}, \quad I_1(iz) \rightarrow i \frac{e^z}{\sqrt{2\pi z}}.$$

² См., например, М. Planck, Wärmestrahlung, 5 изд., 1 отд., 2 глава, Лейпциг, 1923.

Измеряя часть этой интенсивности, поглощенную в объеме поглощения, мы получаем так называемое самообращение¹

$$A_L = \frac{\int_{\nu_0-\delta}^{\nu_0+\delta} E(\nu)(1-e^{-\gamma d}) d\nu}{\int_{\nu_0-\delta}^{\nu_0+\delta} E(\nu) d\nu} = 1 - \frac{\int_{\nu_0-\delta}^{\nu_0+\delta} E(\nu)e^{-\gamma d} d\nu}{\int_{\nu_0-\delta}^{\nu_0+\delta} E(\nu) d\nu} =$$

$$= 1 - \frac{\int_{\nu_0-\delta}^{\nu_0+\delta} (1-e^{-\gamma d}) e^{-\gamma d} d\nu}{\int_{\nu_0-\delta}^{\nu_0+\delta} (1-e^{-\gamma d}) d\nu}. \quad (16)$$

С помощью § 93 (15b) и введенных выше обозначений (6) эти формулы можно привести к виду

$$A_L = 1 - \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \left(1 - e^{-\frac{\zeta}{1+x^2}}\right) e^{-\frac{\zeta}{1+x^2}} dx}{\int_{-\infty}^{\infty} \left(1 - e^{-\frac{\zeta}{1+x^2}}\right) dx} = 1 - \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{-\frac{\zeta}{1+x^2}} - e^{-\frac{2\zeta}{1+x^2}}\right) dx}{\int_{-\infty}^{\infty} \left(1 - e^{-\frac{\zeta}{1+x^2}}\right) dx} =$$

$$= 1 + \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \left[\left(1 - e^{-\frac{\zeta}{1+x^2}}\right) - \left(1 - e^{-\frac{2\zeta}{1+x^2}}\right)\right] dx}{\int_{-\infty}^{\infty} \left(1 - e^{-\frac{\zeta}{1+x^2}}\right) dx} = 2 - \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \left(1 - e^{-\frac{2\zeta}{1+x^2}}\right) dx}{\int_{-\infty}^{\infty} \left(1 - e^{-\frac{\zeta}{1+x^2}}\right) dx}.$$

Тогда интегрирование по частям дает

$$A_L = 2 \left\{ 1 - \frac{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{2\zeta}{1+x^2}} \frac{x^2}{(1+x^2)^2} dx}{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\zeta}{1+x^2}} \frac{x^2}{(1+x^2)^2} dx} \right\}.$$

Выполнив подстановку (9) и воспользовавшись функциями Бесселя, получим окончательно

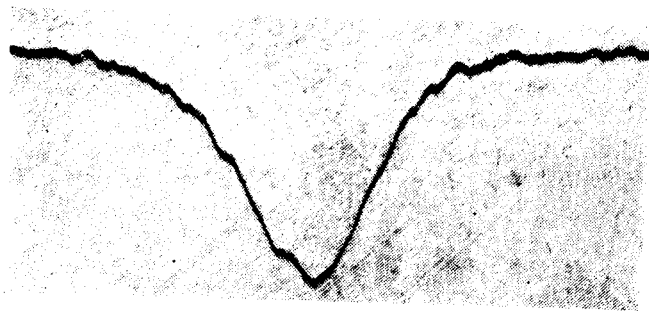
$$A_L = 2 \left\{ 1 - e^{-\frac{\zeta}{2}} \frac{I_0(i\zeta) - iI_1(i\zeta)}{I_0\left(i\frac{\zeta}{2}\right) - iI_1\left(i\frac{\zeta}{2}\right)} \right\}. \quad (17)$$

¹ Это понятие было введено в цитированной в сноске 1 на стр. 652 работе Ладенбург-Рейхе.

Эти отметки получаются с помощью стандартного источника света, перед которым помещены фильтры (пластинки дымчатого стекла), или вращающийся сектор и т. д.

В регистрирующих аппаратах, служащих для фотометрирования пластинок, светочувствительным органом являются либо термоэлементы (по Моллю)¹, либо фотоэлементы (по Коху)².

В обоих приборах пластинку передвигают перед узкой освещенной щелью. Изображение щели проектируется с помощью



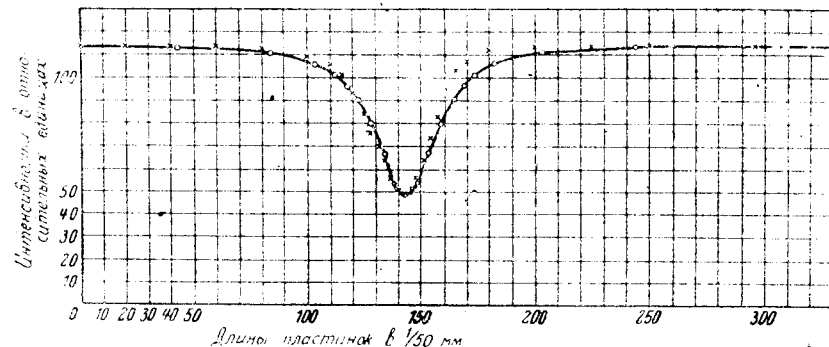
Фиг. 219. Поглощение цезиевой линии 4555 Å при 129,8° С и давлении 2360 мм Hg (По Chr. Füchtbauer'у и Hofmann'у Ann. Physik (4), т. 43 (1914), стр. 96).

системы линз на светочувствительный орган. Оно получается различной интенсивности вследствие того, что оно проходит перед местами пластинки с различным почернением. Показания гальванометра, которым измеряется термо- или фототок, регистрируются на второй пластинке, движущейся с постоянной скоростью, но быстрее первой пластинки. Увеличивая отношение скоростей обеих пластинок, можно значительно увеличить масштаб кривой распределения интенсивности (до 50 раз).

Приведем здесь пример субъективного и регистрационного метода, оба из уже упоминавшейся работы Фюхтбауэра и Гофмана³ о расширении вследствие давления цезиевой линии $\lambda_0 = 4555 \text{ Å}$. Распределение интенсивности, показанное на фиг. 219, получено с помощью регистрирующего фотометра Коха. Обращаем внимание читателя на незначительную асимметрию, о которой мы уже упоминали в § 88. На фиг. 220 показан результат измерения той же пластинки гартмановским фотометром; измеренные значения отмечены крестиками и сводятся к посто-

янной падающей интенсивности. Сплошная кривая изображает величину $e^{-\chi d}$, где при вычислении χ использовано симметричное выражение для $n\chi$ [см. § 93 (15)]. Экспериментальные точки показывают, что со стороны длинных волн имеется значительное отклонение от симметричной кривой, которое, как мы указывали выше (§ 88), возможно, объясняется эффектом Штарка (квадратичным).

Мы видели в § 86 на стр. 582, что на достаточном расстоянии от спектральной линии эффект Доплера не сказывается, и рас-



Фиг. 220. Поглощение цезиевой линии 4555 Å при 129,8° С и давлении 2360 мм Hg

Сплошная линия: теоретическая кривая $1 - e^{-\frac{c}{1+\chi^2}}$ (вычисленные точки обозначены кружками). Прошедшие интенсивности, приведенные к постоянной падающей интенсивности, обозначены крестиками.

пределение интенсивности при тонких слоях выражается согласно § 93 (15)

$$n\chi = \frac{\pi^2 p \gamma}{2\omega_0 n_0 (\omega - \omega_0)^2} \quad (21)$$

Измеряя отношение интенсивности, прошедшей через слой толщины d к падающей

$$\frac{J}{J_0} = e^{-\frac{2\pi\gamma\omega_0 d}{c}} = e^{-\frac{4\pi n\chi d}{\lambda_0}} \quad (22)$$

и полагая $n_0 = 1$, мы найдем согласно (21)

$$\gamma = \frac{c(\omega - \omega_0)^2}{\pi^2 d} \log \frac{J}{J_0} \quad (23)$$

Проницаемость середины линий при относительно высоких давлениях (начиная от $p = 0,01 \text{ мм}$) практически равна нулю, так что измерению доступны вообще только внешние части кривой J . Этим и объясняется то, что формулу (14b), приведенную выше (1b, стр. 654) для полного поглощения в слое, выведенную без

¹ W. J. H. Mol, H. C. Burger и van der Bilt, Bull. Astr. Instr. Netherlands, т. 3 (1925), № 21.

² P. R. Koch, Ann. Physik, т. 39 (1912), стр. 705; F. Goos, Z. Instrumentenkd., т. 41 (1921), стр. 313.

³ Аналогичные измерения для газов A, H₂, N₂, O₂, CO₂ и H₂O см. у Chr. Füchtbauer, G. Joos и G. Dinkelacker Ann. Physik (4), т. 71 (1923), стр. 201.

учета эффекта Доплера, мы можем совершенно спокойно применить здесь. Оба способа [полное поглощение (14b) и поглощение во внешних частях линий (23)] дают произведение $\rho\gamma$. При достаточно низких давлениях, когда шириной, обусловленной столкновениями, можно пренебречь, мы и получаем таким образом чистое затухание излучения, поскольку можно определить ρ .

Это определение можно произвести, как мы сейчас увидим, измеряя либо дисперсию, либо магнитную вращательную способность (см. стр. 686).

По этому методу Минковский¹ нашел для D -линий натрия ($\lambda_0 = 5893\text{Å}$) почти точно совпадающее значение $\gamma = 0,62 \cdot 10^8 \text{ сек}^{-1}$. Классическая формула для затухания излучения [см. § 86 (7a)] дает $\gamma_0 = 0,636 \cdot 10^8 \text{ сек}^{-1}$. Но, как мы сейчас увидим, f равно для обеих D -линий 0,973 (см. табл. 40, стр. 665). Далее, между верхним уровнем D -линий и начальным состоянием атома натрия не находится никакое другое состояние. Поэтому истинная ширина излучения линии, равная согласно соображений § 91 $\gamma = \gamma_0 \times \times f = 0,619 \cdot 10^8 \text{ сек}^{-1}$ поразительно хорошо совпадает с данными наблюдения.

Действительная проверка ширины линии в связи со значениями f , которую мы объясняли выше (§ 91), должна производиться с помощью линий, для которых значения f лежат не так близко к единице и для которых существует *больше одного* перехода от верхнего уровня и, следовательно, существует зависимость между величинами ширины линий. Развитие метода Минковского в этом направлении было бы весьма желательно. Следует еще отметить, что в исследовании Минковского при повышенном давлении (начиная от 0,02 мм) кривая поглощения уже отличалась от резонансной кривой (21) с константой затухания. Здесь по всей вероятности сказывалось резонансное расширение (см. § 93, стр. 640).

II. ДИСПЕРСИЯ

Интерференционные аппараты являются исключительно тонким средством для обнаружения малых изменений показателя преломления и дают возможность поэтому проследить дисперсионную кривую далеко за пределами области собственного поглощения, т. е. до длин волн, для которых проникаемость еще велика. При этом пользуются главным образом описанным в главе III § 40 рефрактометром Жамена.

Из исследователей, занимавшихся в последнее время систематическим изучением дисперсии в окрестности спектральной линии с целью определения оптических констант ρ и γ , назовем

¹ R. Minkowski, Z. Physik, т. 36 (1926), стр. 839.

прежде всего Ладенбурга [примечание 32]. Одна из его первых работ¹ касалась поглощения красной водородной линии H_α (первый член серии Бальмера атомного спектра); в качестве светового источника и в качестве трубки поглощения он применял трубки Гейслера (см. фиг. 221, 222), но различных размеров и под различным электрическим напряжением: источник света — узкий капилляр — находился под сильным разрядным напряжением; вследствие этого получалась сильно расширенная H_α -линия. Абсорбционный капилляр был широк и находился под более слабым напряжением. Он возбуждался от того же самого искрового разряда, что и узкий капилляр. Тогда на фоне широкой линии излучения первой трубки видна была узкая абсорбционная линия второй.

Затем Ладенбург и Лориа² наблюдали с помощью того же прибора дисперсию вблизи линии H_α , причем через абсорбционную трубку пропусклся луч от рефрактометра Жамена³. Тогда наблюдатель видит красную, а также зелено-голубую водородную линию в виде тонких темных линий на светлом фоне. Интерференционные полосы дают непосредственно изменение показателя преломления. На фиг. 223 совершенно ясно видно отклонение вблизи абсорбционных линий, требуемое теорией. Предполагая, что прямолинейно выступающий острый угол интерференционных полос совпадает вблизи абсорбционной линии с точкой перегиба кривой n , т. е. с точкой половинного значения, можно было бы измерить ширину половинного значения и силу дисперсии. Было найдено, что

$$\gamma = 1,1 \cdot 10^{12} \text{ сек}^{-1}$$

$$\frac{M}{2n_0} = \frac{\pi \rho}{n_0 \gamma_0 \gamma} = 1,5 \cdot 10^{-6} \text{ см}^3.$$

Произведение коэффициента силы на число диспергирующих атомов, согласно § 93 (12) и полагая $n_0 = 1$, равно

$$fN = 4,7 \cdot 10^{12},$$

тогда как число молекул в единице объема оказалось при тех же условиях опыта равным приблизительно

$$N = 2 \cdot 10^{11}.$$

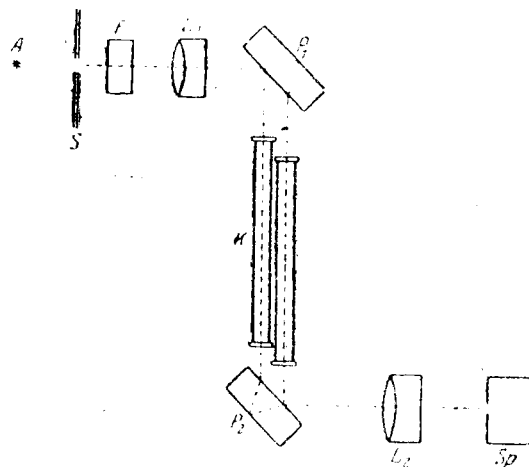
Если бы f равнялось единице, то из 50 000 молекул мы имели бы только один диспергирующий H -атом⁴.

¹ R. Ladenburg, Verh. dtsch. physik. Ges., т. 10 (1908), стр. 550.

² R. Ladenburg u. St. Loria, Physik. Z., т. 9 (1908), стр. 875.

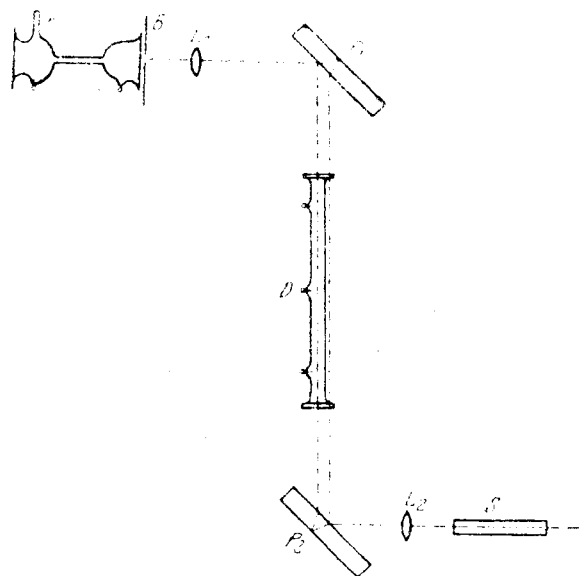
³ В позднейших работах второй луч, как показано на нашем рисунке 221, также пропускается через такую же трубку, но без напряжения (компенсатор).

⁴ В то время когда производились эти опыты, происхождение линейчатого спектра атома в связи с полосатым спектром молекулы не было еще ясно.



Фиг. 221. Прибор для наблюдения аномальной дисперсии вблизи спектральной линии с помощью интерферометра Жамена.

A —дуговая лампа, S —щелевая диафрагма, F —фильтр, L_1, L_2 —линзы, P_1, P_2 —пластинки Жамена, K —компенсатор, Sp —спектрограф.



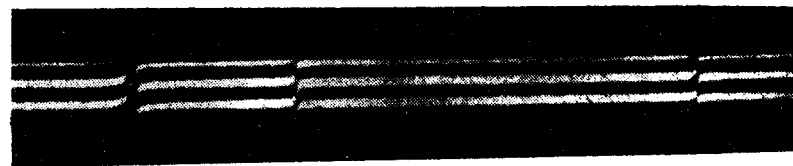
Фиг. 222. Прибор для наблюдения хода дисперсии вблизи светящейся водородной линии H_β серии Бальмера.

A —светящийся капилляр, B —диафрагма в фокусе, L_1, L_2 —линзы, P_1, P_2 —пластинки Жамена, D —гейслерова трубка, закрытая двумя плоско параллельными пластинками, Sp —спектрограф.

Из новейших исследований этого рода приведем еще прекрасный снимок Копфермана и Ладенбурга (фиг. 223), показывающий ход дисперсии в неоновой трубке под напряжением¹.

Из двух констант ρ и γ вторая существенно зависит от условий опыта (давление, температура и т. д.). Но первая, кроме плотности или атомного числа N , зависит от коэффициента силы f , который является настоящей атомной константой.

Так как квантовая теория атомного строения позволяет более или менее точно вычислить значение f , то экспериментаторы стремились получить эмпирическое подтверждение теории.



Фиг. 223. Аномальная дисперсия в светящемся неоне (По Kopfermann'у и R. Ladenburg'у; Z. Physik, т. 48).

В основном это требует лишь определения числа N светящихся атомов. Это определение просто, если речь идет об абсорбционных линиях, соответствующих переходу от начального состояния к возбужденному; оно значительно труднее, когда начальное состояние само является возбужденным. Мы не можем углубляться в частности этого метода, так как он имеет лишь косвенное отношение к оптике, но мы даем таблицу измеренных значений f , так как эта величина является важной константой для многих вопросов атомной физики². Для водородного атома можно определить значения f из квантовой теории Шредингера; по Сугиура³ получаются следующие теоретические значения для серий Лаймана и Бальмера (табл. 39).

В табл. 39 вычислена также и сумма значений f для примыкающего к границе серии континуума в виде интеграла. Этим достигается то, что f удовлетворяют правилу о сумме [§ 91 (9), стр. 631] (один светящийся электрон, следовательно, $z = 1$)⁴.

Отношения значений f можно проверить экспериментально, так как атомное число N начального состояния сокращается при делении. Ладенбург и Рейхе нашли для соотношения сил

¹ Н. Kopfermann и R. Ladenburg, Z. Physik, т. 48 (1928), стр. 30.

² Она означает вероятность перехода при взаимодействии атомов с излучением.

³ М. Y. Sugiyura, J. Physique Radium (6), т. 8 (1927), стр. 113.

⁴ Значение f для первого члена серии Бальмера $f_{1,2}$ взято с отрицательным знаком, с которым оно участвует при образовании суммы. Впрочем, $f_{1,2} = -1/4 f_{2,1}$ вследствие вырождения состояния $n = 2$: оно распадается при снятии вырождения на 4 состояния (имеет вес 4).

Таблица 39

Значения f для серии Лаймана ($f_{n,1}$) и серии Бальмера по Сугиура

n	λ_0 в Å	$f_{n,1}$	λ_0 в Å	$f_{n,2}$
1	—	—	—	—0,104
2	1216	0,4162	—	—
3	1026	0,0791	6563	0,6408
4	972	0,0290	4861	0,1193
5	950	0,0139	4340	0,0447
6	938	0,0078	4102	0,0224
7	931	0,0048	3970	0,0127
8	926	0,0032	3889	0,0080
9	923	0,0022	3835	0,0054
$\sum_{10}^{\infty} f_n$	—	0,0079	—	0,0185
$\sum f_n$	—	0,5641	—	0,768
$\int_0^{\infty} df$	—	0,437	—	0,225

Полная сумма 1,001 — 0,993

первых двух бальмеровских линий значение 4,5, тогда как теоретическая величина таблицы 39 равна 5,37¹.

Сугиура² вычислил значения f для главных линий атома Na и получил близкие значения.

В согласии с этими результатами Минковский нашел, что первая линия ($3_2 - 3_1$) дает значение f , практически равное единице (см. стр. 660).

Существует еще один независимый способ для определения значения ρ и из него величины f с помощью аномального магнитного вращения (эффект Фарадея) вблизи спектральных линий. Мы вернемся к нему ниже (§ 96).

В заключение приводим сводку значений f для ряда металлических паров (табл. 41)³.

Таблица 40

Значения f для главной серии атома Na

$n_2 - 3_1$	Спектроскопическое обозначение	λ_0 в Å	f
$3_2 - 3_1$	$2^2P - 1^2S$	5893	0,9728
$4_2 - 3_1$	$3^2P - 1^2S$	3303	0,0144
$5_2 - 3_1$	$4^2P - 1^2S$	2853	0,0056
$6_2 - 3_1$	$5^2P - 1^2S$	2680	0,0028
$7_2 - 3_1$	$6^2P - 1^2S$	2594	0,0017
$8_2 - 3_1$	$7^2P - 1^2S$	—	0,0011
$\sum_3^8 f$	—	—	0,998
$2_2 - 3_1$	—	—	—0,043
$\sum f - f_{непр}$	—	—	0,955

Таблица 41

Значения f для паров некоторых металлов

Элемент	Серийное обозначение	Длина волны в Å	f
Na	$1^2S_{\frac{1}{2}} - 2^2P_{\frac{1}{2}}$	5893	0,35
	$1^2S_{\frac{1}{2}} - 2^2P_{\frac{3}{2}}$	5890	0,70
Hg	$1^1S_0 - 2^1P_1$	2537	0,0286
	$1^2S_{\frac{1}{2}} - 3^2P_{\frac{1}{2}}$	4593	0,0048
	$1^2S_{\frac{1}{2}} - 3^2P_{\frac{3}{2}}$	4555	0,01
	$1^2S_{\frac{1}{2}} - 4^2P_{\frac{1}{2}}$	3899	0,00053
Cs	$1^2S_{\frac{1}{2}} - 4^2P_{\frac{3}{2}}$	3877	0,002
	$1^2S_{\frac{1}{2}} - 5^2P_{\frac{1}{2}}$	3617	0,00012
	$1^2S_{\frac{1}{2}} - 5^2P_{\frac{3}{2}}$	3612	0,00064

¹ R. Ladenburg u. F. Reiche, Naturwiss., т. 11 (1923), стр. 584. Новое определение [A. Carst u. R. Ladenburg, Z. Physik, т. 48 (1928), стр. 192] дало для отношения $f_{4,2} : f_{3,2}$ значение 4,66.

² M. Y. Sugiura, Philos. Mag., т. 4 (1917), стр. 502.

³ Ср. R. Minkowski, Müller-Pouillet, Lehrbuch d. Physik, 2 изд., т. 2 II, стр. 1702. Значения f для Na взяты из работы R. Ladenburg u. E. Thiele [Z. Physik, т. 72 (1931), стр. 697].

Продолж. табл. 41

Элемент	Серийное обозначение	Длина волны в Å	f
Cd	$1^1S_0 - 2^3P_1$	3261	0,0019
	$1^1S_0 - 2^1P_1$	2288	0,20
Tl	$2^3P_{\frac{3}{2}} - 2^3S_{\frac{1}{2}}$	3776	0,08
	$2^3P_{\frac{3}{2}} - 3^3D_{\frac{5}{2}}$	3768	0,20

Здесь значения f для мультиплетов даются отдельно. Для натрия сумма обоих значений f для двух D -линий равна единице в согласии с вышесказанным¹ и таблицей 40. О ртутной линии $\lambda_0 = 2537 \text{ Å}$ мы уже говорили выше (см. § 94, стр. 652). Остальные измерения были сделаны Фюхтбауэром (линии Cs) и Куном² (линии Cd и Tl).

§ 95. ДИСПЕРСИОННЫЕ КРИВЫЕ В ПРОЗРАЧНОЙ ОБЛАСТИ ГАЗОВ И ТВЕРДЫХ ТЕЛ

Из предыдущих параграфов следует, что уже на небольшом расстоянии от собственной частоты (спектральной линии) порядка нескольких γ поглощение незаметно мало.

Рассмотрим теперь области, лежащие не в непосредственной близости спектральных линий, и назовем их для краткости *областями прозрачности*. В этом случае мы должны вычеркнуть постоянную затухания в формулах, связывающих момент с силой поля; тогда формулы § 91 (4) и § 92 (15) дадут:

$$p_0 = f \frac{e^2}{m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2} \mathcal{E}_0. \quad (1)$$

Но все резонансные точки дадут ту же самую величину; поэтому мы обозначим их индексом k , т. е. напишем $2\pi\nu_k = \omega_k, f_k$ в соответствии с § 93 (9):

$$p_k = N \frac{e^2}{\pi m} f_k. \quad (2)$$

Таким образом мы получим теперь в соответствии с § 93 (10) (при $n_0 = 1, \gamma = \kappa = 0$) для показателя преломления следующее уравнение:

$$n^2 - 1 = 4\pi N \alpha = \sum_k \frac{p_k}{\nu_k^2 - \nu^2} = \sum_k \frac{p_k}{c^2} \frac{\lambda_k^2}{\lambda^2 - \lambda_k^2}. \quad (3)$$

¹ То обстоятельство, что сумма измеренных значений даже немного больше единицы, может быть объясняется не погрешностью измерения, а взаимодействием внутренних электронов.

² W. Kuhn, Kgl. Danske Vidensk. Selskab., Math.-fys. Medd., т. VII (1926), № 12.

отсюда на основании тождества $\frac{\lambda^2}{\lambda^2 - \lambda_k^2} = 1 + \frac{\lambda_k^2}{\lambda^2 - \lambda_k^2}$

$$n^2 - 1 = a + \sum_k \frac{b_k}{\lambda^2 - \lambda_k^2}, \quad (4)$$

где

$$\left. \begin{aligned} a &= \sum_k \frac{p_k}{\nu_k^2} = \frac{1}{c^2} \sum_k p_k \lambda_k^2, \\ b_k &= \frac{c^2 p_k}{\nu_k^4} = \frac{1}{c^2} p_k \lambda_k^4. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Рассмотрим сначала предельный случай бесконечно длинных волн или бесконечно малых частот. Как мы знаем (см. главу I, § 5), в этой области для известных веществ имеет место соотношение $n^2 = \epsilon$, где ϵ означает статическую диэлектрическую постоянную; это те вещества, которые не несут статических диполей. Напротив, в дипольных веществах от ϵ следует отнять часть, обратно пропорциональную температуре, чтобы получить предельное значение n^2 . Тогда наши формулы (4) и (2) дают в пределе $\nu \rightarrow 0$:

$$\epsilon = 1 + a = 1 + N \frac{e^2}{\pi m} \sum_k \frac{f_k}{\nu_k^2}. \quad (6)$$

Таким образом, зная собственную частоту и ее силу, можно определить диэлектрическую постоянную. Мы убедимся, что даже грубое знание области поглощения некоторого газа дает правильный порядок величины для его диэлектрической постоянной.

Число N молекул в единице объема выражается через число их N в граммолекуле с помощью плотности d и молекулярного веса μ по формуле $N = N \frac{d}{\mu}$. Преобразуем $N \frac{e^2}{m} = \frac{d}{\mu} N e \frac{e}{m}$. Здесь $N e = F = 2,895 \cdot 10^{14}$ эл. ст. ед. есть фарадеевская электролитическая постоянная и $\frac{e}{m} = 5,3 \cdot 10^{17}$ эл. ст. ед./2, определяемая из измерений над катодными лучами. За плотность примем плотность воздуха при атмосферном давлении и 0°C , $d = 0,0012$, за μ — средний молекулярный вес воздуха, равный 28,8; тогда

$$N \frac{e^2}{\pi m} = 2,048 \cdot 10^{21}.$$

¹ Величина, обозначенная в главе I § 5 буквой a не вполне совпадает с a этого параграфа, так как там она относилась лишь к движениям электронов, здесь же она охватывает также ядерные колебания.

Воздух прозрачен в видимой части спектра, в ультрафиолетовой же он имеет области поглощений при $\lambda = 1860 \text{ Å} = 1,86 \cdot 10^{-5} \text{ см}$; соответственно $\nu_k = 1,6 \cdot 10^{15} \text{ сек}^{-1}$, поэтому сумма будет порядка $\nu_k^{-2} = 3,9 \cdot 10^{-31}$. Таким образом

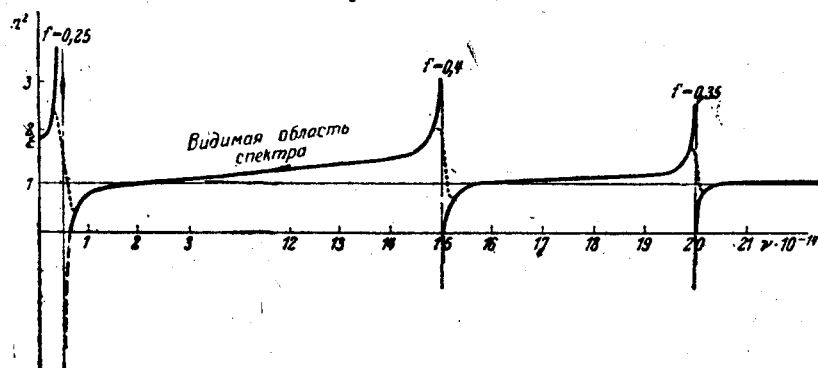
$$\epsilon - 1 = 8 \cdot 10^{-4}.$$

Действительно, для средней диэлектрической постоянной воздуха при атмосферном давлении и 0°C имеем:

$$\epsilon - 1 = 5,9 \cdot 10^{-4}.$$

Сопоставив этот результат с правилом Лорентц-Лоренца (глава VII, § 76) для пересчета диэлектрических постоянных на различные плотности, мы увидим, что наша теория дает правильный порядок величины ϵ .

Мы сможем точнее проверить формулу (6) только тогда, когда мы действительно определим собственные частоты.



Фиг. 224. Изменение показателя преломления при дисперсии (сильно схематизованное).

Для этого рассмотрим поведение величины n^2 во всей спектральной области; мы увидим, что всюду, где имеет силу наше уравнение (3), т. е. в прозрачной области, показатель преломления монотонно возрастает с возрастанием частоты, т. е. с убыванием длины волны. Мы говорим в этом случае о *нормальной дисперсии* (см. § 93, стр. 641). В этом приближении собственные частоты являются точками разрыва, в которых $n^2 - 1$ изменяет знак. Таким образом со стороны коротких волн вблизи каждой собственной частоты есть небольшая область, в которой n^2 отрицательно. Эта область, где наша формула (4) не имеет смысла, естественно совпадает с той областью вблизи абсорбционной линии, в которой затуханием γ уже нельзя пренебрегать. Фиг. 224 схематически изображает поведение n^2 ; она включает три собственные частоты. Предельная формула (3), не учитывающая затухания, выражается сплошной линией при $n^2 > 0$. В обла-

стях поглощения пунктиром показано действительное поведение n^2 (при аномальной дисперсии), определяемое формулами § 93 (15) и фиг. 214, стр. 640.

Обычно, чтобы получить показатель преломления во всей спектральной области, достаточно знать одну или две собственные частоты в ультрафиолетовой области. Так например, можно получить по Коху¹ простую формулу для *водорода, кислорода и воздуха* между $\lambda = 0,436 \mu$ и $\lambda = 8,68 \mu$

$$n^2 - 1 = a + \frac{b}{\lambda^2 - \lambda_0^2}, \quad (7)$$

где постоянные a, b, λ_0 имеют значения согласно табл. 42.

Таблица 42

Дисперсия водорода, кислорода и воздуха между $\lambda = 0,436$ и $\lambda = 8,68 \mu$ при 0°C и давлении 760 мм Hg.

Газ	$a \cdot 10^8$	$b \cdot 10^8$	$\lambda_0^2 \cdot 10^{-8} \text{ см}^2$	$\nu_0 \cdot 10^{15} \text{ сек}^{-1}$
Водород	27 216	211,2	0,007760	3,40
Кислород	52 842	369,9	0,007000	3,55
Воздух	57 642	327,7	0,005685	3,98

С помощью полученных таким образом чисел мы можем несколько точнее проверить формулу (6) для диэлектрической постоянной. В табл. 43 сопоставлены значения $1 + a$ из табл. 42 с непосредственно измеренными значениями ϵ при той же температуре и давлении. Как видим, получается хорошее совпадение.

Таблица 43

Сравнение дисперсии со статическими диэлектрическими постоянными при 0°C и давлении 760 мм Hg

Газ	$1 + a$	ϵ
Водород	1,00027216	1,000264
Кислород	1,00052842	1,000547
Воздух	1,00057642	1,000590

Сделаем еще одно замечание относительно экстраполируемых из дисперсионной формулы собственных частот ν_0 .

Мы видим, что здесь речь идет о полосах поглощения в самой крайней ультрафиолетовой области, так называемой „области Шумана“. Положение действительных абсорбционных линий моле-

¹ J. Koch, Nov. Act. Soc. Ups. (4), т. 2 (1909), № 5, стр. 61.

кул H_2 , O_2 , N_2 приблизительно известно из атомной квантовой механики; они находятся в той же области, в которой лежат линии поглощения соответствующих атомов H , O , N . Как известно, основная линия атома H является первым членом серии Лаймана, обозначаемым обычно $\nu = \frac{3}{4} R$, где

$$R = 3,29 \cdot 10^{15} \text{ сек}^{-1}$$

есть так называемая частота Ридберга, определяющая энергию ионизации атома из начального состояния или начала непрерывного поглощения. Табл. 42 показывает, что вычисленные из дисперсии/собственные частоты действительно лежат в этой области спектра. Более точно определить их положение невозможно, так как спектр поглощения молекул в действительности в высшей степени сложен. То, что одночленная дисперсионная формула все же дает удовлетворительный результат, зависит от того, что протяжение области поглощения (которая лежит приблизительно между $\frac{1}{2}R$ и $2R$) относительно мало по сравнению с ее частотным расстоянием от области, в которой определяется показатель преломления, так что ее можно заменить средней частотой.

В части спектра, не содержащей ни одной собственной частоты, можно заменить более точную формулу (3) или (4) с достаточным приближением более простой формулой. Для всех веществ, кажущихся глазу прозрачными, такой областью является *видимая* часть спектра.

Собственные частоты, расположенные вне этого спектра со стороны коротких волн, мы назовем *фиолетовыми* и будем обозначать ν_v , а лежащие со стороны длинных волн назовем *красными* и будем обозначать ν_r . Тогда дисперсионную формулу (3) можно разложить в ряд по ν или λ :

$$\left. \begin{aligned} n^2 - 1 &= A + B\nu^2 + C\nu^4 + \dots \\ &= A + \frac{B'}{\nu^2} + \frac{C'}{\nu^4} + \dots \\ &= A + \frac{Bc^2}{\lambda^2} + \frac{Cc^4}{\lambda^4} + \dots \\ &= \frac{B'\lambda^2}{c^2} + \frac{C'\lambda^4}{c^4} + \dots \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Здесь

$$A = \sum_v \frac{\rho_v}{\nu_v^2}, \quad B = \sum_v \frac{\rho_v}{\nu_v}, \quad C = \sum_v \frac{\rho_v}{\nu_v^3}, \dots, \quad B' = \sum_r \rho_r, \quad C' = \sum_r \rho_r \nu_r^2, \dots \quad (9)$$

В такой свободной от поглощения области n для газов так мало отличается от единицы, что $n^2 - 1$ можно заменить $2(n - 1)$. Обычно члены B' , C' , происходящие от инфракрасных

собственных частот, не оказывают большого влияния. Отбрасывая их и обрывая, кроме того, ряд (8) на λ^{-2} , мы получим так называемую *дисперсионную формулу Коши*, которая была найдена еще до резонансной теории дисперсии¹; она гласит (для газов):

$$n - 1 = A_1 \left(1 + \frac{B_1}{\lambda^2} \right), \quad (10)$$

где

$$A_1 = \frac{A}{2}, \quad B_1 = \frac{Bc^2}{A}. \quad (11)$$

Таблица 44

Константы A_1 и B_1 в дисперсионной формуле Коши для различных газов

Газ	$A_1 \cdot 10^5$	$B_1 \cdot 10^{11}$
Аргон	27,92	5,6
Азот	29,19	7,7
Гелий	3,48	2,3
Водород	13,6	7,7
Кислород	26,63	5,07
Воздух	28,79	5,67
Этан	73,65	9,08
Метан	42,6	14,41

Таблица 45

Сравнение наблюдаемого показателя преломления для воздуха с вычисленным из формулы Коши (10)

$\gamma \cdot 10^5 \text{ см}$	$(n-1) \cdot 10^4$ наблюдаемое	$(n-1) \cdot 10^4$ вычисленное	Разность
7,594	2,905	2,907	0,002
6,563	2,916	2,917	0,001
5,896	2,928	2,926	0,000
5,378	2,935	2,935	0,000
5,184	2,940	2,940	0,000
4,861	2,948	2,948	0,000
4,677	2,951	2,954	0,003
4,308	2,966	2,967	0,001
3,959	2,983	2,983	0,000
3,728	2,995	2,996	0,001
3,441	3,016	3,017	0,001
3,180	3,040	3,041	0,001
3,021	3,056	3,058	0,002
2,948	3,065	3,067	0,002

В табл. 44 приведены значения A_1 и B_1 для некоторых важных газов. В табл. 45 сопоставлены значения, вычисленные из формул Коши, с наблюдаемыми. Как видим, получается прекрасное совпадение.

При переходе к телам большой плотности, т. е. к *жидкому и твердому (изотропному) состоянию*, вместо формулы (3) мы должны пользоваться уравнениями Лорентц-Лоренца [глава VII § 76 (15)]; согласно этому уравнению имеем в области прозрачности, т. е. пренебрегая затуханием:

$$\frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} = \frac{4\pi}{3} N\alpha \quad (12)$$

¹ L. Cauchy, Bull. des sc. math., т. 14 (1830), стр. 9; Sur la dispersion de la lumière. Nouv. exerc. de math. 1836.

или

$$n^2 - 1 = \frac{12\pi Na}{3 - 4\pi Na}, \quad (13)$$

где

$$4\pi Na = \frac{Ne^2}{\pi m} \sum_k \frac{f_k}{\nu_k^2 - \nu^2} = \sum_k \frac{\rho_k}{\nu_k^2 - \nu^2}. \quad (14)$$

Однако, пренебрегая зависимостью от плотности или числа частиц N , мы можем привести опять формулу (13) к виду дисперсионной формулы, как в случае газов, но собственные частоты изменятся¹. Если число собственных частот ν_k практически конечно, то $n^2 - 1$ согласно (13) есть рациональная функция ν^2 , которую можно разложить на простейшие дроби. Мы должны определить нули знаменателя, т. е. корни уравнения:

$$3 - 4\pi Na = 3 - \sum_k \frac{\rho_k}{\nu_k^2 - \nu^2} = 0. \quad (15)$$

Обозначим их $\bar{\nu}_k$; тогда уравнение (13) можно привести к виду

$$n^2 - 1 = \sum_k \frac{\bar{\rho}_k}{\bar{\nu}_k^2 - \nu^2}, \quad (16)$$

тождественному с формулой (3) для разреженных газов.

Так, например, в случае, когда мы рассматриваем только одну собственную частоту, ν_1 есть корень уравнения $3 - \rho_1/(\nu_1^2 - \nu^2) = 0$, т. е.

$$\left. \begin{aligned} \bar{\nu}_1^2 &= \nu_1^2 - \frac{1}{3} \rho_1, \\ \bar{\rho}_1 &= \rho_1, \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

что совпадает с § 93 (18).

По этой формуле собственные частоты газообразного состояния пересчитываются на частоты конденсированного состояния; в общем случае этот пересчет сложнее. Он не имеет большого значения, так как мы предполагаем, что молекула не изменяется при конденсации, чего в действительности никогда не бывает.

Дисперсионная формула [(3) или (4)] была применена к ряду прозрачных кристаллов, прежде всего к трем кубическим кристаллам — плавиковому шпату, каменной соли и сильвину, для которых достаточно двучленной формулы. Константы приведены в табл. 46.

¹ Мы уже произвели этот пересчет для одной единственной спектральной линии при наличии затухания в § 93, стр. 635.

Таблица 46

Константы дисперсионной формулы (4) для некоторых кристаллов. Сравнение констант $1 + a$ с диэлектрическими постоянными ϵ . Длины волн измеряются в $\mu = 10^{-4}$ см

	Плавиковый шпат	Каменная соль	Сильвин
b_1	0,00612	0,018	0,0150
λ_1^2	0,00888	0,0162	0,0234
b_2	5099	3977	10747
λ_2^2	1258	3149	4517
$1 + a$	6,09	5,18	4,55
ϵ	6,7 — 6,9	5,81 — 6,29	4,94

В последней строке даны для сравнения значения диэлектрической постоянной ϵ , которые должны были бы быть равны значениям $1 + a$. Мы видим, что эти величины, действительно, приблизительно равны.

В следующей таблице (47) сопоставлены длины волн, вычисленные из вышеприведенных значений λ_k^2 , с соответствующими частотами для тех же трех кристаллов.

Таблица 47

Собственные длины волн и собственные частоты некоторых кристаллов. Длины волн в μ , частоты в сек⁻¹

	Плавиковый шпат	Каменная соль	Сильвин
λ_1	0,0940	0,127	0,153
λ_2	35,5	56,1	67,2
ν_1	$3,19 \cdot 10^{15}$	$1,75 \cdot 10^{15}$	$1,95 \cdot 10^{15}$
ν_2	$8,57 \cdot 10^{12}$	$5,35 \cdot 10^{12}$	$4,47 \cdot 10^{12}$

Таким образом на основании наблюдения показателя преломления в области прозрачности, к которой относится видимый спектр, следует ожидать, что эти кристаллы дадут две различные группы абсорбционных полос, — одну инфракрасной области от 30 до 50 μ и другую — ультрафиолетовую от 100 до 150 μ .

Это предсказание дисперсионной теории подтвердилось впоследствии непосредственным измерением.

Проникнуть в *инфракрасную область* впервые удалось Рубенсу и его сотрудникам¹. При этом он пользовался преимуще-

¹ Н. Rubens и E. F. Nichols, Wied. Ann., т. 60 (1897), стр. 45; Н. Rubens и E. Aschkinass, там же, т. 65 (1898), стр. 253; т. 67 (1899), стр. 459; Н. Rubens и H. Hoinagel, Philos. Mag., 1910, стр. 761; Н. Rubens, Verh. dtsch. physik. Ges., т. 13 (1911), стр. 102; Н. Rubens и G. Hertz, Berl. Ber. 1912, стр. 256; Н. Rubens, там же, 1913, стр. 513; Н. Rubens и H. v. Wartenberg, там же, 1914, стр. 169; Н. Rubens, там же, 1915, стр. 4; 1916, стр. 1280; Th. Liebisch и Н. Rubens, там же, 1919, стр. 198 и 876.

ственно „методом остаточных лучей“; сильное возрастание показателя преломления вблизи собственного колебания обуславливает соответствующее возрастание отражательной способности [ср. главу I, § 11(6)]. С помощью многократного отражения можно выделить из неоднородного теплового излучения селективно отраженные длины волн (остаточные лучи).

В последнее время Черни и Барнесу¹ удалось исследовать проницаемость галоидных солей щелочных металлов для инфракрасных лучей по всей области поглощения. Для получения чрезвычайно тонких слоев (толщиной в несколько μ) они пользовались методом, разработанным Полем и его сотрудниками при исследовании ультрафиолетовых абсорбционных максимумов солей (испарение в высоком вакууме). Они нашли для всех кристаллов резкие абсорбционные полосы, соответствующие максимумам Рубенса.

Таблица 48

Инфракрасные собственные колебания некоторых кристаллов ².
Сравнение максимумов поглощения и отражения с экстраполированными из дисперсии длинами волн (в μ)

Вещество	Поглощение	Остаточные лучи	Дисперсия
Фтористый литий LiF	32,6	17,0	—
Фтористый натр NaF	40,6	35,8	—
Хлористый натрий (Каменная соль) NaCl	61,1	52,0	56,1
Хлористый калий (Сильвин) KCl	70,7	63,4	67,2
Хлористый рубидий RbCl	84,8	73,8	—
Хлористый цезий CsCl	102,0	—	—
Бромистый натрий NaBr	74,7	—	—
Бромистый калий KBr	88,3	81,5	—
Бромистый рубидий RbBr	114,0	—	—
Бромистый цезий CsBr	134,0	—	—
Иодистый натрий NaI	85,5	—	—
Иодистый калий KI	102,0	94,1	—
Иодистый рубидий RbI	129,5	—	—
Хлористое серебро AgCl	—	81,5	—
Бромистое серебро AgBr	—	112,7	—
Однoхлористый таллий TlCl	117,0	91,9	—
Однoбромистый таллий TlBr	—	117,0	—
Однoиодистый таллий TlI	—	151,8	—
Цинковая обманка ZnS	—	30,9	—
Плавиковый шпат CaF ₂	—	31,6	35,5

В таблице 48 приведены наиболее важные длины волн остаточных лучей, только что названные абсорбционные максимумы и, наконец, экстраполированные из дисперсионной кривой собственные колебания.

¹ R. B. Barnes u. M. Czerny, Z. Physik, т. 72 (1931), стр. 447; R. B. Barnes, Z. Physik, т. 75 (1932), стр. 723.
² Ср. H. Rubens, Berl. Ber., 1917, стр. 47.

Мы видим, что максимум селективного отражения отличается от максимума поглощения, причем максимум поглощения соответствует более длинным волнам, т. е. меньшим собственным частотам. Это связано с тем, что, как мы разъясняли в § 93, показатель преломления и, следовательно, также отражательная способность [см. главу I, § 11(6)] не вполне симметрично изменяется вблизи линии поглощения (фиг. 214); при этом кривая показателя преломления смещена относительно поглощения в сторону коротких волн. Это соответствует наблюдаемому различию между максимумами. Экстраполированные из дисперсионной кривой значения лежат как раз между значениями, соответствующими поглощению и отражению. Таким образом совпадение можно считать очень хорошим.

Скажем еще несколько слов о физическом процессе, соответствующем этим колебаниям. Тот факт, что собственные колебания многих твердых прозрачных тел распадаются на две группы, из которых одна лежит в инфракрасной, а другая в ультрафиолетовой области, объясняется по Друде¹ тем, что первые вызваны частотами колебаний атомов или ионов, а последние — колебаниями электронов. Если бы силы трения были равны для обоих, то длины волн отошлись бы, как квадратные корни из масс

$$\frac{\lambda_r}{\lambda_v} = \sqrt{\frac{m_r}{m_v}}. \tag{18}$$

Если μ есть молекулярный вес, m — масса электрона, m_H — масса водородного атома, то

$$m_v = m, \quad m_r = \mu m_H,$$

а так как $m_H/m = 1845$, то

$$\frac{\lambda_r}{\lambda_v} = \sqrt{1845 \mu} = 43,0 \cdot \sqrt{\mu}. \tag{19}$$

Действительно, это соотношение, найденное впервые Габером², хорошо выполняется для трех вышерассмотренных кристаллов (см. табл. 49).

Это означает, что силы сцепления почти одинаковы для электронов и ионов. Отклонения чисел дают меру разницы между силами.

Маделунг³ привел в связь частоты остаточных лучей с упругими

¹ P. Drude, Ann. Physik (4), т. 14 (1904), стр. 677.
² F. Haber, Verh. d. deutsch. Phys. Ges., т. 13 (1911), стр. 1117.
³ E. Madelung, Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, math.-phys. Kl., 1909, стр. 100; 1910, стр. 43; Physik. Z., т. 11 (1910), стр. 898.

Таблица 49

Сравнение значений λ_e и λ_r из таблицы 47 с соотношением (19).
Длины волн в μ

	Плавиковый шпат	Каменная соль	Сильвин
μ	78,1	58,5	74,6
λ_e	0,094	0,127	0,153
λ_r	35,5	56,1	67,2
$\frac{\lambda_r}{\lambda_e \sqrt{\mu}}$	43	58	51

константами кристалла. Он первый (до открытия рентгеновского анализа кристалла) выдвинул гипотезу, что рассматриваемые кристаллы построены из ионных решеток, и что остаточные лучи соответствуют колебаниям решетки из положительных ионов относительно решетки отрицательных ионов.

Исходя из этого, он вывел зависимость между частотами остаточных лучей и сжимаемостью кристалла, которая, впрочем, дает правильно лишь порядок величины. С помощью этого соотношения и формулы (19) (одинаковый порядок величины сил сцепления ионов и электронов) следует, что упругие силы кристаллов одинаковой природы с внутриаомными силами, связывающими электроны в атоме.

Этим было положено начало современной электрической теории кристаллических решеток¹. В этой теории ионы рассматриваются, как элементы, из которых построена кристаллическая решетка солей; ионы притягиваются по закону Кулона и отталкиваются силой, резко возрастающей при уменьшении расстояния между ионами. Можно вычислить механизм такой ионной решетки², причем сразу же получаются наиболее важные физические константы решетки (упругость, пьезоэлектричество, диэлектрическая постоянная, инфракрасные собственные частоты и т. п.). Из этой механики решетки сразу становится понятным, почему силы сцепления между ионами должны быть того же порядка величины, что и силы между электронами в атоме: и те, и другие основаны на кулоновском взаимодействии между элементарными

¹ М. Born и А. Landé, Berl. Ber., 1918, стр. 1048; дальнейшие литературные указания можно найти в книге М. Born, Atomtheorie des festen Zustandes, Berlin u. Leipzig, 1921.

² Необходимое для этого вычисление „потенциалов решетки“ было впервые проделано Маделунгом (Physik. Z., т. 19 (1918), стр. 542). См. цитированную в примечании 1 книгу Борна. Расчет инфракрасных и собственных частот на основе теории решетки см. в работе М. Born и Е. Brody, Z. Physik, т. 11 (1922), стр. 327. Вычисленные значения прекрасно совпадают с абсорбционными максимумами, наблюдаемыми 10 годами позже Барнесом (см. работу, цитированную в списке 1 на стр. 674; см. также М. Born, Z. Physik, т. 76 (1932), стр. 559.

зарядами на расстояниях порядка нескольких ангстремов. Но заметим, что полное понимание этих зависимостей возможно только на основе квантовой теории.

Таблица 50

Ультрафиолетовые максимумы поглощения в кристаллах некоторых галогенидов

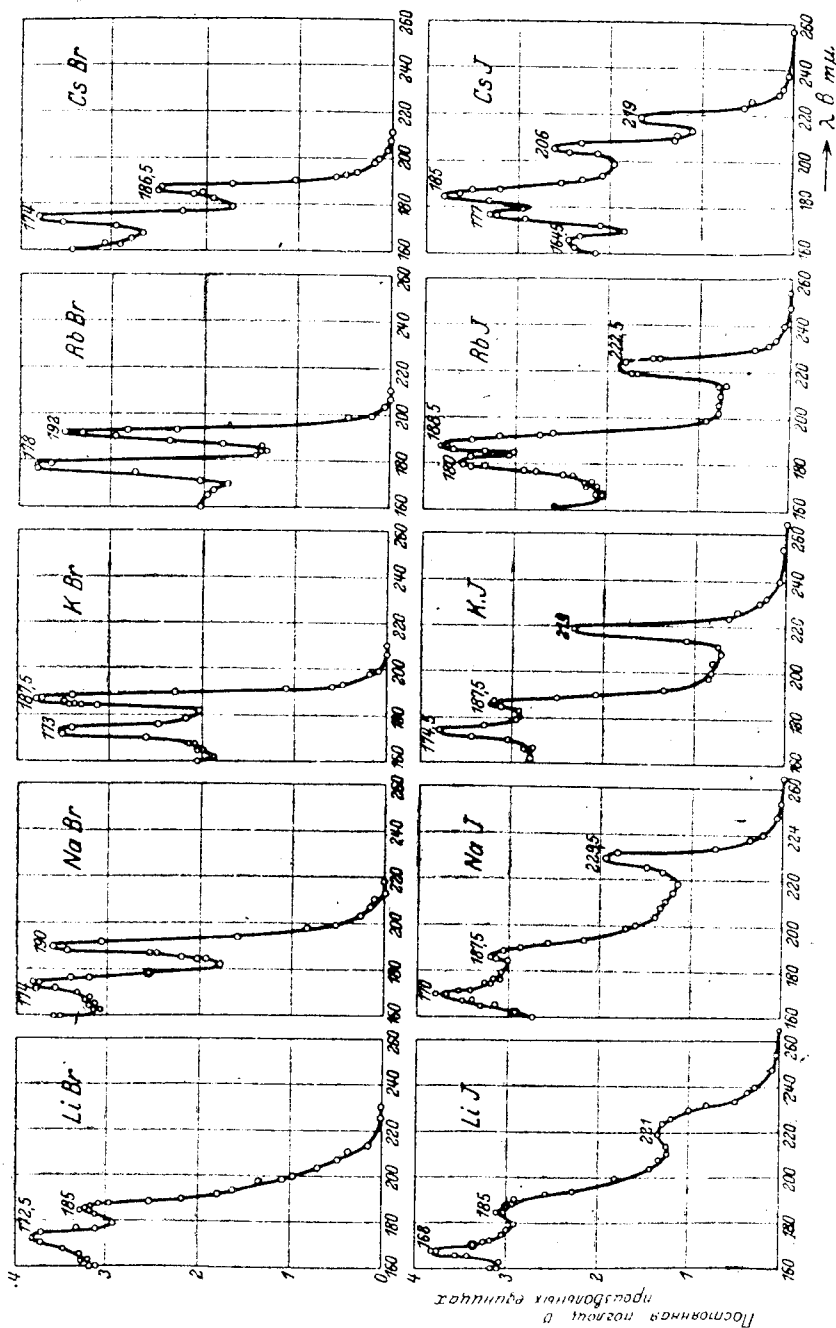
Вещество	Длины волн максимумов поглощения в μ				
	1	2	3	4	5
Na Cl	>160	—	—	—	—
KCl	162,5	—	—	—	—
Rb Cl	167	—	—	—	—
Cs Cl	163	—	—	—	—
Li Br	172,5	185	—	—	—
Na Br	174	190	—	—	—
KBr	173	187,5	—	—	—
Rb Br	178	192	—	—	—
Cs Br	174	186,5	—	—	—
Li J	168	185	221	—	—
Na J	170	187,5	229,5	—	—
K J	174,5	187,5	219	—	—
Rb J	180	188,5	222,5	—	—
Cs J	164,5	177	185	206	219
Tl Cl	245	216	—	—	—
Tl Br	273	239	—	—	—
Tl J	289	ок. 250	ок. 220	—	—
Pb Cl ₂	271	219	—	—	—
Pb J ₂	303	278	—	—	—

В последнее время Поль и его ученики¹ нашли с помощью непосредственного измерения поглощения ультрафиолетовые абсорбционные линии многих галогидных солей щелочных металлов. На табл. 50 приведены измеренные длины волн. Там имеются также каменная соль и сильвин, благодаря чему мы можем сравнить экстраполированные из дисперсионной формулы (4) собственные частоты с непосредственным наблюдением. Мы видим, что совпадение весьма грубое, что вполне естественно при экстраполяционном характере дисперсионной формулы.

На фиг. 225а и б графически представлены кривые поглощения, измеренные Гильшем и Полем¹.

Мы видим, что область поглощения действительно лежит в области собственных частот, экстраполированных из дисперсионной формулы; но так как в области поглощения содержится несколько максимумов, то, разумеется, нельзя ожидать строгого совпадения (см. прим. 33).

¹ W. Flechsig, Z. Physik, т. 36 (1926), стр. 605; R. Hilson и R. W. Pohl, там же, т. 48 (1928), стр. 384; т. 57 (1929), стр. 145; т. 59 (1930), стр. 812; т. 64 (1930), стр. 606. Значения таблицы 50 взяты из кривой в статье R. Hilsch и R. W. Pohl, Z. Physik, т. 59 (1930), стр. 817; эта кривая приведена нами на фиг. 225а.



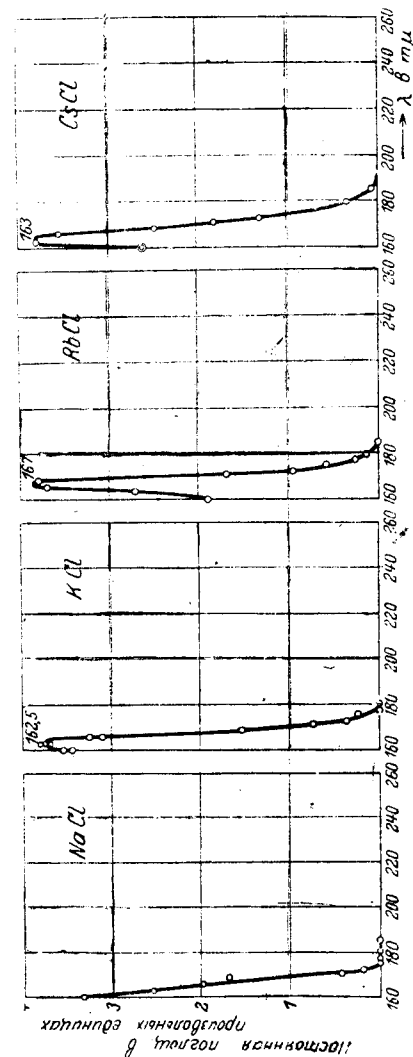
Фиг. 225a. Ультрафиолетовое поглощение кристаллов галогенидов (по R. Hilsch и R. W. Pohl, Z. Physik, т. 59).

В самое последнее время Черни¹ предпринял новую тщательную проверку дисперсионной теории на каменной соли и сильвине. Он произвел новые измерения в инфракрасной области (отражательная способность при почти перпендикулярном падении и проникаемость плоскопараллельных пластинок). Полученные им результаты, охватывающие всю доступную часть спектра, могут быть выражены нашей четырехчленной формулой. Он пытался также улучшить совпадение, введя для каждого члена константу затухания. Общая форма кривой воспроизводится при этом очень хорошо, но получаются небольшие отклонения, особенно в инфракрасной части, имеющей такой вид, как если бы и дальше лежали области поглощения. Очень вероятно, что последние существуют благодаря инородным включениям в кристаллах.

Для жидкости и изотропных твердых тел дисперсионные формулы, как правило, используются только для интерполирования в более или менее обширных областях спектра. Более общие закономерности здесь не обнаруживаются. Поэтому мы не будем останавливаться на этих телах.

§ 96. ОБРАТНЫЙ ЭФФЕКТ ЗЕЕМАНА И ДИСПЕРСИЯ ПРИ ЭФФЕКТЕ ФАРАДЕЯ *

Теперь мы должны найти параметры всех оптических эффектов, которые мы рассматривали в предыдущей главе, а именно эффекта Фарадея, Коттон-Мутона, Керра, светорассеяния и вра-



Фиг. 225b. Ультрафиолетовое поглощение кристаллов галогенидов (по R. Hilsch и R. W. Pohl, Z. Physik, т. 59).

¹ М. Czerny, Z. Physik, т. 65 (1930), стр. 600.

щательной способности в функции от частоты. Мы выразим эти эффекты через тензор поляризуемости A_{xy} , отнесенный к связанной с молекулой системе координат X, Y, Z . Он представлял собою функцию составляющих внешнего поля \mathfrak{E} (с точностью до членов второго порядка включительно) [см. главу VII, § 77 (4)]

$$A_{xy} = \alpha_{xy} + \sum_z \alpha_{xyz} \mathfrak{E}_z + \frac{1}{2} \sum_{x'y'} \alpha_{xyx'y'} \mathfrak{E}_{x'} \mathfrak{E}_{y'}. \quad (1)$$

Таким образом мы должны теперь определить коэффициенты α_{xy} , α_{xyz} , $\alpha_{xyx'y'}$ этого выражения из модели, выражающей резонансные свойства молекулы, и затем образовать из этих коэффициентов инвариантные комбинации, выражающие различные эффекты. Мы никоим образом не стремимся к полноте и общности, так как (мы это уже не раз подчеркивали) точная теория взаимодействия светового поля и молекулы возможна лишь на основе квантовой механики. Мы ограничимся тем, что покажем, что даже простая классическая модель может отобразить существенные черты этих явлений.

Рассмотрим прежде всего поведение атома, находящегося во внешнем магнитном поле под действием световой волны, т. е. явление, обратное Зееман-эффекту (§ 89). При этом сразу же получится дисперсия эффекта Фарадея.

В качестве простейшей модели воспользуемся, как в § 89, изотропно связанным отрицательным электроном, но учтем при этом затухание, пропорциональное скорости. Мы получим уравнение колебания резонатора под действием электрического поля в постоянном магнитном поле \mathfrak{E} , введя в уравнения § 89 (3) наряду с членами затухания электрическую силу поля

$$\left. \begin{aligned} \ddot{p}_x + \gamma \dot{p}_x + \omega_0^2 p_x + 2\omega_L \dot{p}_y &= \frac{e^2}{m} \mathfrak{E}_x^0, & (a) \\ \ddot{p}_y + \gamma \dot{p}_y + \omega_0^2 p_y - 2\omega_L \dot{p}_x &= \frac{e^2}{m} \mathfrak{E}_y^0, & (b) \\ \ddot{p}_z + \gamma \dot{p}_z + \omega_0^2 p_z &= \frac{e^2}{m} \mathfrak{E}_z^0, & (c) \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

где γ есть введенная в § 85 общая постоянная затухания, а ω_L ларморовская частота [см. § 89 (4)]. Здесь составляющие x и y вектора p взаимно связаны; для разделения их образуем выражения:

$$\left. \begin{aligned} p_x + i p_y &= p_{\pm}, & p_x - i p_y &= p_{\mp}, & (a) \\ \mathfrak{E}_x^0 + i \mathfrak{E}_y^0 &= \mathfrak{E}_{\pm}^0, & \mathfrak{E}_x^0 - i \mathfrak{E}_y^0 &= \mathfrak{E}_{\mp}^0. & (b) \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Полагая далее, что все переменные пропорциональны $e^{i\omega t}$, получим

$$\left. \begin{aligned} p_{\pm} &= \frac{\frac{e^2}{m} \mathfrak{E}_{\pm}^0}{\omega_0^2 - \omega^2 + \omega(2\omega_L + i\gamma)} = \alpha_{\pm} \mathfrak{E}_{\pm}^0, & (a) \\ p_{\mp} &= \frac{\frac{e^2}{m} \mathfrak{E}_{\mp}^0}{\omega_0^2 - \omega^2 - \omega(2\omega_L - i\gamma)} = \alpha_{\mp} \mathfrak{E}_{\mp}^0, & (b) \\ p_z &= \frac{\frac{e^2}{m} \mathfrak{E}_z^0}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\gamma} = \alpha_z \mathfrak{E}_z^0. & (c) \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Так как атом по предположению изотропен, то эти формулы имеют силу как в неподвижной, так и в связанной с молекулой системе координат. Приведя их к виду

$$p_x = \sum_y A_{xy} \mathfrak{E}_y^0, \quad (5)$$

получим

$$\left. \begin{aligned} p_x &= \frac{1}{2} (\alpha_{\pm} \mathfrak{E}_{\pm}^0 + \alpha_{\mp} \mathfrak{E}_{\mp}^0) = \\ &= \frac{1}{2} \left[\alpha_{\pm} (\mathfrak{E}_x^0 + i \mathfrak{E}_y^0) + \alpha_{\mp} (\mathfrak{E}_x^0 - i \mathfrak{E}_y^0) \right] = \\ &= \frac{\alpha_{\pm} + \alpha_{\mp}}{2} \mathfrak{E}_x^0 + i \frac{\alpha_{\pm} - \alpha_{\mp}}{2} \mathfrak{E}_y^0 = A_{xx} \mathfrak{E}_x^0 + A_{xy} \mathfrak{E}_y^0, \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

и аналогично для остальных составляющих, так что тензор A в неподвижной системе приобретает вид:

$$\left. \begin{aligned} A_{xx} &= A_{yy} = \frac{1}{2} (\alpha_{\pm} + \alpha_{\mp}), & (a) \\ A_{xy} &= -A_{yx} = \frac{i}{2} (\alpha_{\pm} - \alpha_{\mp}), & (b) \\ A_{zz} &= \alpha_z, & (c) \\ A_{xz} &= A_{zx} = A_{yz} = A_{zy} = 0, & (d) \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

В силу изотропии атома эти выражения являются одновременно средними значениями соответствующих составляющих, которые мы представили в главе VII, § 77 (24) как функцию внешней силы поля до членов второго порядка; но выведенные здесь формулы являются совершенно строгими для любой силы поля. Мы получили таким образом опять нашу прежнюю общую теорию и можем непосредственно вывести формулы главы VII, § 79 для общего случая распространения света в среде, находящейся под действием магнитного поля, но мы не будем раз

лагать диэлектрическую постоянную по степеням H см. главу VII, § 79 (2)], а примем общие зависимости, выражаемые нашими формулами (7). Мы ограничиваемся газом, для которого можно считать эффективное поле равным полю падающей волны. Из

$$\mathfrak{D} = \mathfrak{E} + 4\pi \mathfrak{P} = \mathfrak{E} + 4\pi Np \quad (8)$$

получаем соотношения главы VII, § 77 (32) или равнозначные § 79 (1)

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} = \varepsilon_e &= 1 + 4\pi N\alpha_{xx} = 1 + 4\pi N \cdot \frac{1}{2} (\alpha_\xi + \alpha_\eta), \quad (a) \\ \varepsilon_{xy} = -\varepsilon_{yx} = -i\varepsilon' &= 4\pi N\alpha_{xy} = 4\pi N \cdot \frac{1}{2} (\alpha_\xi - \alpha_\eta), \quad (b) \\ \varepsilon_{zz} = \varepsilon_0 &= 1 + 4\pi N\alpha_{zz} = 1 + 4\pi N\alpha_z. \quad (c) \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Единственная разница по сравнению с тем, что мы имели раньше в том, что теперь мы учитываем затухание и поэтому должны считать все показатели преломления комплексными.

Таким образом согласно § 78 (9), § 79 (7), (8) или § 79 (26), (28), (29) мы имеем следующие главные случаи:

1. *Распространение параллельно полю*: две круговые волны

$$\frac{\mathfrak{D}_y}{\mathfrak{D}_x} = \pm i, \quad n_{\pm}^2 = \varepsilon_e \pm \varepsilon'. \quad (10)$$

2. *Распространение перпендикулярно полю*: линейное двойное преломление

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{D}_z &= 0, \quad n_1^2 = \varepsilon_e - \frac{\varepsilon'^2}{\varepsilon_e}, \quad (a) \\ \mathfrak{D}_x &= 0, \quad n_2^2 = \varepsilon_0. \quad (b) \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Для произвольного направления распространения имеем эллиптическую поляризацию, как выведено в главе VII, § 79, но мы не будем на этом останавливаться.

Рассмотрим теперь несколько ближе продольный эффект; подставив значения (9), мы получим из (10) и (4) для двух показателей преломления

$$\left. \begin{aligned} n_-^2 &= 1 + 4\pi N\alpha_\eta = 1 + \frac{4\pi N \frac{e^2}{m}}{\omega_0^2 - \omega^2 - \omega(2\omega_L - i\gamma)}, \quad (a) \\ n_+^2 &= 1 + 4\pi N\alpha_\xi = 1 + \frac{4\pi N \frac{e^2}{m}}{\omega_0^2 - \omega^2 + \omega(2\omega_L + i\gamma)}. \quad (b) \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Прежде чем перейти к разбору этих формул, обобщим их, таким образом, чтобы они соответствовали более общей модели чем изотропный резонатор.

Пусть оптическое поведение молекулы описывается несколькими резонаторами; введем при e^2/m множитель силы f (а также соответствующий множитель при γ из § 91 (10), поскольку γ означает затухание излучения). Полагая, как выше [§ 95 (2)],

$$\rho_i = N \frac{e^2}{\pi m} f_i \quad (13)$$

и вводя частоты $\nu = \omega/2\pi$, получим

$$\left. \begin{aligned} n_-^2 &= 1 + \sum_i \frac{\rho_i}{\nu_i^2 - \nu^2 - \nu(2\nu_L - i\frac{\gamma}{2\pi})}, \quad (a) \\ n_+^2 &= 1 + \sum_i \frac{\rho_i}{\nu_i^2 - \nu^2 + \nu(2\nu_L + i\frac{\gamma}{2\pi})}. \quad (b) \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Рассмотрим сначала область, где поглощение незаметно мало и где можно пренебречь γ . Тогда показатели преломления действительны, и, разлагая в ряд дополнительный член $\nu\nu_L$, мы получим:

$$n_- - n_+ = \frac{n_-^2 - n_+^2}{2n} = \frac{2\nu\nu_L}{n} \sum_i \frac{\rho_i}{(\nu_i^2 - \nu^2)^2}, \quad (15)$$

где n — показатель преломления в отсутствии поля.

Подставим сюда значения ρ_i из (13) и ларморовскую частоту из § 89 (4) или § 89 (10) и вычислим вращательную способность, т. е. постоянную Верде [см. главу VII, § 78 (19)]

$$\begin{aligned} R &= \frac{\pi}{\lambda_0} (n_- - n_+) \frac{1}{H} = \frac{e}{2mc^2} \frac{\nu^2}{n} \sum_i \frac{\rho_i}{(\nu_i^2 - \nu^2)^2} = \\ &= N \frac{e^3}{2\pi c^2 m^2} \frac{\nu^2}{n} \sum_i \frac{f_i}{(\nu_i^2 - \nu^2)^2}. \end{aligned} \quad (16)$$

Эта формула означает закон *вращательной дисперсии* в области незаметного поглощения. При этом для R получаются всюду положительные значения, что основано на сделанном нами предположении, что заряд электрона равен $-e$ ($e > 0$). Это согласуется с результатами нашего исследования знака вращения в главе VII, § 78 в связи с уравнением Беккереля, к которому мы сейчас вернемся.

Мы видим, что в постоянные Верде R входят те же самые параметры, как и в дисперсию преломления, а именно существенную роль у них играет лишь постоянная ρ или Nf . Поэтому эти атомные постоянные можно определить как из обычных измерений дисперсии преломляющей способности, так и из

наблюдений дисперсии эффекта Фарадея. Мы еще вернемся к этому.

Существенное различие между зависимостью R от частоты и от преломления в следующем: в знаменателе (16) стоит квадрат разности $\nu_l^2 - \nu^2$, т. е. вращательная способность имеет одинаковый знак по обе стороны линии поглощения, тогда как разность между показателем преломления и его средним значением меняет знак.

Мы можем теперь проверить непосредственным вычислением выведенное в главе VII, § 78 уравнение Беккереля (24). Комбинируя уравнение (16) с производной уравнения § 95 (3), получим:

$$R = \frac{e}{2mc^2} \nu \frac{dn}{d\nu} = -\frac{e}{2mc^2} \lambda_0 \frac{dn}{d\lambda_0}, \quad (17)$$

где $\lambda_0 = c/\nu$ длина волны в пустоте.

С помощью этого соотношения теперь легко перенести на вращательную способность разложение по степеням § 95 (7). Мы получим

$$R = \frac{e}{2mc^2} \frac{\nu^2}{n} \left(B + 2C\nu^2 + \dots + \frac{B'}{\nu^4} + \frac{2C'}{\nu^6} + \dots \right) \quad (18)$$

Наша модель дает только не зависящую от температуры, или *диамагнитную*, часть вращательной способности. Зависящую от температуры, или *парамагнитную*, часть, разумеется, нельзя найти таким путем, так как она, как показывает вывод в главе VII, § 77 и особенно формула (28b) для f_1 , основана на анизотропии молекулы. Для того чтобы определить дисперсию этой части, следовало бы исходить из модели, для которой тензор поляризуемости α_{XY} не вырожден с шаровой симметрией, так что разности $\alpha_{XY} - \alpha_{YX}, \dots$ отличны от нуля; кроме того, молекула должна иметь постоянный магнитный момент m_0 .

При слабом поглощении α есть эрмитовский тензор, и его можно заменить аксиальным вектором \mathbf{b} с составляющими

$$b_X = i\alpha_{YZ} = -i\alpha_{ZY}, \dots \quad (19)$$

Для этого случая мы имели формулу в главе VII, § 78 (26): $f_1 = \frac{1}{3} m_0 \mathbf{b}$. Знак f_1 , как видим, зависит от взаимного положения векторов m_0, \mathbf{b} . Далее, полагаем, что отдельные составляющие тензора α_{XY} или векторные компоненты b_X, b_Y, b_Z определяются в отношении их зависимости от частоты поведением простых резонаторов; отсюда следует, что они должны изменяться как преломляющая способность $n^2 - 1$, т. е. иметь различные знаки по обе стороны линии поглощения.

Этим различием в поведении дисперсии можно воспользоваться для разделения диамагнитного и парамагнитного эффектов.

Рассмотрим теперь подробнее поведение вращения в непосредственной близости от линии поглощения ν_0 , точно таким же

способом, как для показателя преломления в тех же условиях. Напишем:

$$n_{\pm}^2 = n_0^2 + \frac{\rho_0}{\nu_0^2 - \nu^2 + i\nu \frac{\gamma}{2\pi} \pm 2\nu\nu_L}, \quad (20)$$

где n_0 опять означает часть показателя преломления, обусловленную всеми собственными частотами кроме ν_0 . Введем опять переменную x [см. § 93 (11)]

$$x = \frac{\omega - \omega_0}{\frac{\gamma}{2}} = \frac{4\pi(\nu - \nu_0)}{\gamma}. \quad (21)$$

Тогда мы можем положить вблизи от линии поглощения

$$\nu^2 - \nu_0^2 = \frac{\gamma\nu_0}{2\pi} x \quad (22)$$

и писать ν_0 вместо ν в остальных членах знаменателя. Введя

$$x_L = \frac{4\pi\nu_L}{\gamma}, \quad (23)$$

получим при $M = 2\pi\rho_0/\gamma\nu_0$ [§ 93 (12)]

$$n_{\pm}^2 = n_0^2 - \frac{M}{x \mp x_L - i} \quad (24)$$

или, разложив на действительную и мнимую часть,

$$\left. \begin{aligned} n_{\pm}^2 (1 - x_{\pm}^2) &= n_0^2 - \frac{M(x \mp x_L)}{(x \mp x_L)^2 + 1}, & (a) \\ 2n_{\pm}^2 x_{\pm} &= \frac{M}{(x \mp x_L)^2 + 1}. & (b) \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

Сравнение с § 93 (13) показывает, что показатели преломления и поглощения изменяются так, как если бы собственная частота правовращающей относительно направления света (левокруговой) волны была смещена от $x = 0$ в $x = x_L$, а для левовращающей (правокруговой) волны в $x = -x_L$.

Для показателя поглощения формула (25b) выражает продольный обратный эффект Зеемана: первоначальная линия поглощения расщепляется на две линии; падающая волна разлагается на две волны различной скорости и с противоположной круговой поляризацией, соответствующие двум различным показателям поглощения, причем каждый из показателей изменяется точно так же, как для первоначальной линии, и только максимум поглощения смещен на $\pm \nu_L$.

Об этом эффекте можно повторить сказанное уже нами по поводу испускания: в действительности вытекающий из этой

классической теории так называемый *нормальный триплет* осуществляется лишь в редких случаях. Гораздо чаще линия поглощения, как и линия испускания, распадается на более сложные системы линий, объяснение которых дает квантовая теория. Мы не можем здесь углубляться в эту теорию, а хотим только установить: изменение показателя преломления упрощается во всех случаях благодаря тому, что при x_+ складываются действия тех самых линий расщепления, которые при излучении дают правовращающий (лево-круговой) свет, а при x_- — остальные.

Теперь рассмотрим изменение показателя преломления. Формулы показывают, что вблизи линии поглощения должно быть сильное увеличение кругового двойного преломления. Мы получим (пренебрегая x^2) для угла поворота на единицу длины [§ 78 (18)]

$$\chi = \frac{\pi}{\lambda} (n_- - n_+) = \frac{\pi M}{2n_0 \lambda} \left[\frac{x - x_L}{(x - x_L)^2 + 1} - \frac{x + x_L}{(x + x_L)^2 + 1} \right]. \quad (26)$$

Фиг. 226. Магнитно-вращательное двойное преломление вблизи спектральной линии (Фарадей-эффект).

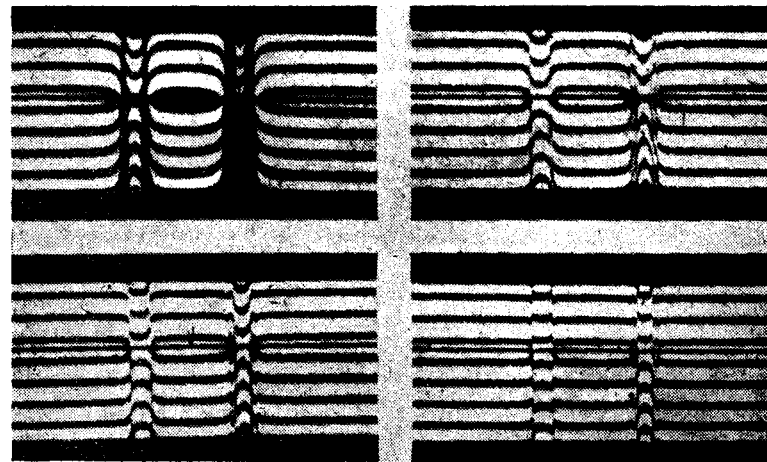
Чтобы получить наглядное представление о зависимости этого угла от частоты, лучше всего построить отдельные кривые для каждого из членов, стоящих в скобках в правой части (26), соответствующих n_- и n_+ . На фиг. 226 для x_L выбраны три различных значения, относящихся, как числа 1, 3, 5. Расстояние обеих кривых каждой фигуры всегда пропорционально вращательной способности, причем последняя положительна, если кривая n_- расположена выше кривой n_+ . Это имеет место и вправо и влево от области поглощения, но между составляющими Зеемана знак изменяется.

Это своеобразное поведение магнитного вращения, как функции частоты вблизи от линии поглощения, носит название эффекта Макалузо-Корбино¹.

¹ D. Macaluso u. O. M. Corbino, Vers. d. Ital. Phys., Turin, 1898, 23 сент.; C. R. Acad. Sci. Paris, т. 127 (1898), стр. 548; Nuovo Cimento (4), т. 8 (1898), стр. 257; т. 9 (1899), стр. 381.

Оба эти исследователя заставляли линейно поляризованный солнечный свет проходить через параллельное ему магнитное поле, в котором находилось окрашенное парами натрия пламя, а затем попадать через анализатор в шель спектрографа.

При скрещенных николях и невозбужденном поле в спектре наблюдалось лишь изображение D -линий на темном фоне. При возбуждении поля по обе стороны каждой D -линии возникали светлые полосы, симметрично сдвигавшиеся при убывании силы поля и симметрично раздвигавшиеся с возрастанием его.



Фиг. 227. Аномальное вращение в окрестности D -линии натрия [по Н. М. Hansen'у, Ann. Physik (4), т. 43 (1914), стр. 169].

Это наблюдение соответствует требованиям теории.

Вращение достигало в непосредственной близости полос поглощения большой величины, если поле было достаточно сильное. Вращение доходило до 250° .

Если Зееман-эффект не дает „нормального“ триплета, то как n_+ , так и n_- имеет несколько резонансных точек, и изменение вращательной способности соответственно усложняется. Более подробно см. об этом специальную литературу¹.

В настоящее время для наблюдения пользуются интерференционными методами, в которых положение линий интерференции очень чувствительно к вращению плоскости поляризации. На фиг. 227 воспроизведен снимок, сделанный Ганзенем²; мы

¹ W. Voigt, Magneto- u. Elektrooptik, Leipzig, 1908; R. Ladenburg, Magneto- und Elektrooptik in Müller-Pouillet; P. Zeeman u. T. L. de Bruin, Magnetische Zerlegung der Spektrallinien, Handbuch d. physik. Optik, т. 2, 2. Hälfte, 1 Teil; P. Zeeman, Researches in Magneto-Optics. Deutsche Übers. Leipzig, 1914; E. Back u. A. Landé, Zeemaneffekt Berlin, 1925.

² Н. М. Hansen, Ann. Physik, (4), т. 43 (1914), стр. 169.

видим на нем аномальное вращение в обеих D -линиях натрия (при 27 400 гаусс). В D_2 -линии мы можем даже признать изменение между внутренними и внешними составляющими квартета. Измеряя линии интерференции вне области поглощения, можно определить ρ_0 , а при одновременном измерении плотности пара — силу f линий. Такого рода измерения в последнее время делались очень часто¹; результаты уже приведены нами в таблицах 39—41 § 94.

В заключение скажем несколько слов о поперечном эффекте. В этом случае мы имеем согласно (11) линейное двойное преломление. Мы можем привести (11a) к виду

$$\frac{1}{n_1^2} = \frac{\epsilon_c}{\epsilon_c^2 - \epsilon'^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\epsilon_c + \epsilon'} + \frac{1}{\epsilon_c - \epsilon'} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n_-^2} + \frac{1}{n_+^2} \right). \quad (27)$$

Поперечный эффект сводится этим к продольному. Преломление составляющей, колеблющейся параллельно полю ($\mathcal{D}_\perp = 0$) согласно (11b), (9c) и (4c) не зависит от поля

$$n_z^2 = \epsilon_0 = 1 + 4\pi N a_z = n^2, \quad (28)$$

где n показатель преломления среды в отсутствии поля.

Из (27) следует строго

$$\frac{(1 + ix_1)^2}{n_1^2(1 + x_1^2)^2} = \frac{1}{2} \left[\frac{(1 + ix_+)^2}{n_+^2(1 + x_+^2)^2} + \frac{(1 + ix_-)^2}{n_-^2(1 + x_-^2)^2} \right]. \quad (29)$$

Разлагая на вещественную и мнимую части, получим

$$\left. \begin{aligned} \frac{1 - x_1^2}{n_1^2(1 + x_1^2)^2} &= \frac{1}{2} \left[\frac{1 - x_+^2}{n_+^2(1 + x_+^2)^2} + \frac{1 - x_-^2}{n_-^2(1 + x_-^2)^2} \right], \quad (a) \\ \frac{x_1}{n_1^2(1 + x_1^2)^2} &= \frac{1}{2} \left[\frac{x_+}{n_+^2(1 + x_+^2)^2} + \frac{x_-}{n_-^2(1 + x_-^2)^2} \right]. \quad (b) \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

Пренебрегая x^2 относительно единицы, получим очень простые формально соотношения

$$\frac{1}{n_1^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n_+^2} + \frac{1}{n_-^2} \right), \quad \frac{x_1}{n_1^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{x_+}{n_+^2} + \frac{x_-}{n_-^2} \right), \quad (31)$$

и положив в заключение, что во втором уравнении n_+ , n_- , n_1 практически равны между собой, получим

$$x_1 = \frac{1}{2} (x_+ + x_-). \quad (32)$$

Полагая кроме того по (28) $x_z = x$, где x есть показатель поглощения в отсутствии поля, мы получим для поперечного

¹ F. Haber u. H. Zisch, Z. Physik, т. 9 (1923), стр. 302; R. Minkowski, Z. Physik, т. 36 (1926), стр. 839; A. Ellet, J. Opt. Soc. Amer., т. 10 (1925), стр. 427.

обратного эффекта Зеемана следующий результат: падающая волна расщепляется на две части различной скорости, из которых одна колеблется параллельно полю и сохраняет прежний вид спектра поглощения, тогда как колебание второй перпендикулярно полю и она имеет два максимума поглощения, смещенные относительно первоначального положения на $\pm \nu_L$. Кроме того наблюдаются три линии поглощения — „нормальный триплет Зеемана“. Если расщепление частот, как это бывает в большинстве случаев, отличается от нормального, мы получаем соответствующий спектр поглощения с максимумами на месте каждой составляющей Зеемана. Нам незачем дальше останавливаться на этом вопросе.

На некотором расстоянии от линии поглощения наблюдается линейное двойное преломление (см. главу VII, § 79, эффект Коттон-Мутона).

Разложим n_\pm [см. (14)] по частотам Лармора в области слабого поглощения и найдем

$$n_\pm^2 = 1 + \sum_l \frac{\rho_l}{\nu_l^2 - \nu^2} \mp \nu_L \sum_l \frac{2\nu\rho_l}{(\nu_l^2 - \nu^2)^2} + \nu_L^2 \sum_l \frac{4\nu^2\rho_l}{(\nu_l^2 - \nu^2)^3} \mp \dots \quad (33)$$

$$= n^2 \mp \Sigma_1 + \Sigma_2 \mp \dots,$$

где

$$n^2 = 1 + \sum_l \frac{\rho_l}{\nu_l^2 - \nu^2} = n^2; \quad (34)$$

n означает показатель преломления параллельного полю колебания или, что то же самое, показатель преломления при отсутствии поля. Мы получим с помощью (31)

$$n_1^2 = \frac{2n^2 + n_-^2}{n_+^2 + n_-^2} = \frac{(n^2 + \Sigma_2)^2 - \Sigma_1^2}{n^2 + \Sigma_2} \quad (35)$$

и приближенно

$$n_1 - n_2 = \frac{\Sigma_2 - \frac{1}{n^2} \Sigma_1^2}{2n} = \quad (36)$$

$$= \frac{1}{8n} H^2 \frac{e^2}{\pi^2 m^2 c^2} \left[\sum_l \frac{\nu^2 \rho_l}{(\nu_l^2 - \nu^2)^3} - \frac{1}{n^2} \left(\sum_l \frac{\nu \rho_l}{(\nu_l^2 - \nu^2)^2} \right)^2 \right].$$

Этим определяется зависимость от частоты поперечного двойного преломления, определение которого см. в главе VII, § 79 (12).

Эффект Коттон-Мутон также сильно увеличивается вблизи линии поглощения, что впервые было замечено Фогтом¹.

¹ W. Voigt, Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, 1898, № 4; Wied. Ann., т. 67 (1899), стр. 359.

§ 97. РЕЗОНАНСНАЯ ФЛЮОРЕСЦЕНЦИЯ И ВЛИЯНИЕ НА НЕЕ МАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ *

В главе VII, § 81, 82 мы видели, что электрические моменты, возбуждаемые световой волной в молекуле, проявляются не только своим влиянием на показатель преломления (и поглощения), но и вызываемым ими рассеянием (эффекты Тиндала и Рамана). Дисперсия рассеяния определяется зависимостью составляющих тензора деформации от частоты; мы видим, что свет, частота которого совпадает с собственной частотой рассеивающей молекулы или очень близка к ней, будет рассеиваться особенно сильно. Если бы классическая теория была вполне применимой, то весь поглощаемый резонатором свет должен был бы перейти в рассеянное излучение. В § 91 мы уже воспользовались этим соображением. Но в действительности, как мы заметили уже там, явление, вообще говоря, осложняется квантовомеханическим резонансом: если возможно *несколько* переходов от возбужденного падающим светом состояния молекулы к более низкому уровню, то поглощенная энергия распределяется между этими состояниями в некоторой определенной пропорции. Этим определяется случай, когда возможен лишь один единственный спонтанный переход от возбужденного уровня; только в этом случае, когда вся поглощенная энергия снова рассеивается, мы говорим о *резонансной флюоресценции*, и в этом случае явление вполне удовлетворительно описывается с помощью модели классического резонатора.

Зададимся теперь вопросом, как ведет себя резонансный свет, если *спектральная линия расщепляется под действием магнитного поля на несколько составляющих*. По классической теории мы получаем здесь триплет Зеемана, о котором была речь в § 96. В действительности, как мы уже говорили, резонансные линии также часто дают значительно более сложное разложение, и формулы, которые будут приведены ниже, должны быть в действительности соответственно расширены. Мы не будем здесь рассматривать соотношение интенсивности и поляризации резонансного света в магнитном поле; такие исследования относятся к квантовой теории атомных спектров¹. Нам гораздо больше интересует одно явление, наблюдаемое в слабых полях.

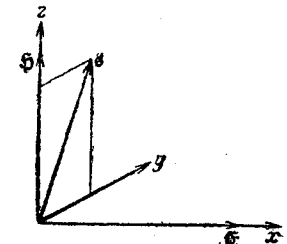
Обычно при таких опытах световой источник (обычно искра или дуга) имеет высокую температуру, и поэтому эмиссионная линия широка. Положим, что она значительно шире линии поглощения рассеивающего газа („резонансной лампы“), что она настолько широка, что при рассматриваемых магнитных полях все зеемановские составляющие находятся внутри ширины возбуждающего света. Далее мы предположим, что дисперсия настолько мала, что резонансная линия кажется неразрешенной.

* Для более подробного изучения этого явления укажем на книгу P. Pringsheim, Fluoreszenz u. Phosphoreszenz, 3 издание, Berlin, 1928.

Тогда резонансный свет, разумеется, не будет уже обладать поляризационными свойствами, которые присущи отдельной зеемановской составляющей.

Если *магнитного поля нет*, то рассеивающие атомы являются изотропными резонаторами и поэтому дают обычное релеевское рассеяние, линейно поляризованное при линейно поляризованном падающем свете.

Если магнитное поле усиливается, и зеемановские компоненты раздвигаются (продолжая оставаться внутри возбуждающей линии), то возникает вращательная анизотропия вокруг направления магнитного поля; атомы как бы распадаются на два класса так, что одна половина прецессирует вправо, а другая влево вокруг магнитного поля с частотой Лармора. Из этого следует с одной стороны, что поляризация убывает с возрастанием зеемановского разделения, а с другой стороны, что направление максимальной поляризации (короче „плоскость поляризации“) поворачивается. Интенсивность этих обоих явлений, очевидно, зависит от ширины линии резонирующего атома.



Фиг. 228. К теории резонансной флюоресценции.

Предельный случай полной деполяризации наступает, когда разделение зеемановских составляющих больше ширины линии.

*Деполяризацию в магнитном поле можно наблюдать*¹; очевидно она дает меру для ширины линий и, следовательно, для постоянной затухания. Этот метод особенно важен потому, что им можно пользоваться при самых малых давлениях, когда ширина линий в основном зависит только от затухания излучения (примечание 34).

Выразим теперь эти качественные соотношения в виде формул, причем только для простого случая, когда вектор магнитного поля H перпендикулярен электрическому вектору E падающего линейно поляризованного света. Если выбрать, как в предыдущем параграфе, ось z за направление H , а ось x за направление светового поля E , то падающее излучение E должно лежать в плоскости yz (см. фиг. 228). Для возбужденного момента имеем формулы § 96 (4), где

$$E_x = E, \quad E_y = E_z = 0, \quad \text{т. е. } E_\xi = E_\eta = E. \quad (1)$$

Если (см. главу VII, § 81) q есть единичный вектор, перпендикулярный направлению наблюдения и выражающий главное направление анализирующего николя, то наблюдаемая сила

¹ См. W. Hanle, Erg. exakt. Naturwiss., т. 4 (1925), стр. 214; Z. Physik, т. 30 (1924), стр. 93; т. 35 (1926), стр. 346. См. R. W. Wood u. A. Ellet, Proc. Roy. Soc. Lond., т. 103 (1923), стр. 396; A. Ellet, Nature, Lond., т. 114 (1924), стр. 431; J. opt. Soc. Amer., т. 10 (1924), стр. 590.

света пропорциональна

$$J = |p_q|^2 = |pq|^2. \quad (2)$$

Здесь, согласно § 96 (5), (7)

$$p_x = A_{xx} E, \quad p_y = A_{yx} E, \quad p_z = 0, \quad (3)$$

откуда следует

$$J = |pq|^2 = E^2 [|A_{xx}|^2 q_x^2 + |A_{yx}|^2 q_y^2 + (A_{xx} A_{yx}^* + A_{yx} A_{xx}^*) q_x q_y]. \quad (4)$$

При этом, согласно § 96 (7)

$$\left. \begin{aligned} A_{xx} &= \frac{1}{2} (\alpha_\xi + \alpha_\eta), & (a) \\ A_{yx} &= -\frac{i}{2} (\alpha_\xi + \alpha_\eta), & (b) \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

а α_ξ , α_η подставляются из § 96 (4). Чтобы упростить эти формулы, введем обозначения

$$\left. \begin{aligned} \frac{\omega_0 - \omega}{\frac{\gamma}{2}} &= x, & x + i &= y, & (a) \\ \frac{\omega_L}{\frac{\gamma}{2}} &= \xi, & \frac{e^2}{m \gamma \omega_0} &= C. & (b) \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Тогда

$$\alpha_\xi = C \frac{1}{y + i}, \quad \alpha_\eta = C \frac{1}{y - \xi}, \quad (7)$$

следовательно, согласно (5)

$$A_{xx} = C \frac{y}{y^2 - \xi^2}, \quad A_{yx} = C i \frac{\xi}{y^2 - \xi^2}. \quad (8)$$

Введя далее сокращение

$$\left. \begin{aligned} a &= |y|^2 = x^2 + 1 = \left(\frac{\omega_0 - \omega}{\frac{\gamma}{2}} \right)^2 + 1, \\ b &= \frac{y^2 + y^{*2}}{2} = x^2 - 1 = \left(\frac{\omega_0 - \omega}{\frac{\gamma}{2}} \right)^2 - 1, \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

получим

$$\left. \begin{aligned} |A_{xx}|^2 &= C^2 a K, & (a) \\ |A_{yx}|^2 &= C^2 \xi^2 K, & (b) \\ A_{xx} A_{yx}^* + A_{yx} A_{xx}^* &= 2C^2 \xi K, & (c) \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

где

$$K = \frac{1}{(y^2 - \xi^2)(y^{*2} - \xi^2)} = \frac{1}{a^2 - 2\xi^2 b + \xi^4} \quad (11)$$

или

$$K = \frac{1}{|y - \xi|^2 |y + \xi|^2} = \frac{1}{[(x - \xi)^2 + 1][(x + \xi)^2 + 1]} = \left. \begin{aligned} &= \frac{1}{4\xi x} \left[\frac{1}{(x - \xi)^2 + 1} - \frac{1}{(x + \xi)^2 + 1} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Из этих дробей одна имеет максимум при $x = \xi$, а другая при $x = -\xi$. Приближенно мы можем заменить переменную x в множителе дробей через ξ и соответственно $-\xi$. Тогда получим приближенно

$$K = \frac{1}{4\xi^3} \left[\frac{1}{(x - \xi)^2 + 1} + \frac{1}{(x + \xi)^2 + 1} \right]. \quad (13)$$

Согласно (4)

$$J = E^2 C^2 K (a q_x^2 + \xi^2 q_y^2 + 2\xi q_x q_y), \quad (14)$$

и с тем же приближением (вместо a подставляем $\xi^2 + 1$)

$$J = E^2 C^2 K [\xi^2 (q_x^2 + q_y^2) + q_x^2 + 2\xi q_x q_y] = E^2 C^2 K [\xi^2 q_x^2 + (q_x + \xi q_y)^2]. \quad (15)$$

До сих пор мы полагали, что возбуждение вызывается строго монохроматическим светом. В действительности по нашему предположению возбуждающая линия должна быть широка относительно линии поглощения.

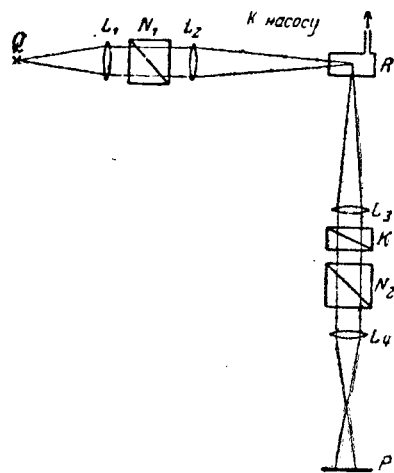
В экспериментальной установке спектральная линия газа (ртути), пройдя через коллиматор и поляризатор, попадает в резонансную лампу, в которой находится тот же газ под другим, обычно значительно более низким, давлением, и выходящий в каком-либо направлении рассеянный свет рассматривается в анализатор или фотографируется. Фиг. 229 показывает случай, когда направление наблюдения перпендикулярно к распространению возбуждающего света¹. На фигуре показаны кроме николя линзы, служащие для отображения; простой анализатор заменен комбинацией клина из бикварца и николя, обладающей более высокой чувствительностью относительно поляризации (ср. главу V, § 65).

Пусть α есть угол возбуждающего луча \mathfrak{z} относительно магнитного поля, так что в нашей координатной системе \mathfrak{z} имеет составляющие 0, $\sin \alpha$, $\cos \alpha$. Направление наблюдения τ должно быть перпендикулярно к \mathfrak{z} , так что составляющие τ равны 0, $\cos \alpha$, $-\sin \alpha$. Тогда единичный вектор q положения анализатора имеет составляющие

$$q: \cos \phi, \sin \alpha \sin \phi, \cos \alpha \sin \phi. \quad (16)$$

¹ Ср. W. Hanle, Erg. exakt. Naturwiss., т. 4, стр. 218.

Здесь ϕ есть азимут поляризации (см. фиг. 230), отсчитываемый от положения, когда пропускаемое колебание параллельно



Фиг. 229. Схема прибора для наблюдения резонансной флуоресценции (по W. Hanle из *Ergebniss der exakten Naturwissenschaften*, т. 4)

Q—ртутная лампа, L_1 —кварцевая линза, N_1 —николь, L_2 —линза из плавленого шпата, R—сосуд с газом, L_3 —линза из плавленого шпата, K—клин вращающего кварца или компенсатор Бабиня, N_2 —николь, L_4 —кварцевая линза, P—камера.

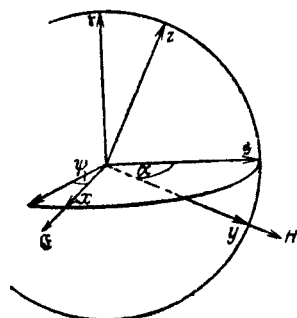
зеemanовского расщепления, выражается в шкале x функцией $J_0(x)$. Полагаем затем

$$A = C^2 \int_{-\infty}^{\infty} K(x) J_0(x) dx. \quad (17)$$

Тогда интенсивность рассеянного света, наблюдаемого без спектрального разложения, есть

$$\left. \begin{aligned} J &= A [\xi^2 \cos^2 \phi + (\cos \phi + \xi \sin \alpha \sin \phi)^2] \\ &= A \left\{ \cos 2\phi \cdot \frac{1}{2} (\xi^2 \cos^2 \alpha + 1) + \sin 2\phi \cdot \xi \sin \alpha + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} [\xi^2 (1 + \sin^2 \alpha) + 1] \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Постоянная A зависит еще от формы (затухания) падающего света, затухания γ резонирующих атомов и от магнитной силы поля H (через посредство ω_L и ξ). Нас интересует только зави-



Фиг. 230. К теории поляризации резонансного света.

электрическому вектору падающего света (оси x) (см. главу VII, § 81, стр. 514). Азимут возрастает при повороте анализатора кратчайшим путем в положение, антипараллельное падающему электрическому вектору.

Распределение интенсивности падающего света, которое мы, согласно вышесказанному, предполагаем широким относительно

симостью интенсивности рассеянного света от положения анализатора, т. е. род поляризации рассеянного света.

Если поле H очень сильно т. е. $\xi \gg 1$, то мы можем пренебречь в (18) всеми независимыми от ξ или линейными относительно ξ членами по сравнению с членами с ξ^2 ; получим

$$J = A \xi^2 (\cos^2 \phi + \sin^2 \alpha \sin^2 \phi). \quad (19)$$

Пусть направление наблюдения попрежнему перпендикулярно к направлению ξ и к силе поля возбуждающего света, а магнитное поле поворачивается, т. е. α изменяется; тогда при ξ , перпендикулярном ξ , окажется, что направление наблюдения совпадает или противоположно магнитному полю. Тогда скобки (19) равны единице, т. е. никакой поляризации нет. Оба круговых колебания, возникающих под действием магнитного поля, некогерентны и не дают видимой поляризации.

Если направление наблюдения наклонно, $\alpha \neq \pi/2$, то наступает постепенно увеличивающаяся поляризация, которая становится полной при $\alpha = 0$ ($\xi \parallel \xi$; наблюдение $\perp \xi$), т. е. множитель равен $\cos^2 \phi$.

Если магнитное поле средней силы, так что ξ сравнимо с единицей, мы получаем частичную поляризацию и вместе с тем зависящее от поля вращение плоскости поляризации. Чтобы убедиться в этом, определим положение анализатора ϕ_0 , соответствующее максимальной интенсивности. Дифференцируя скобки (18), получим

$$\frac{1}{2} \sin 2\phi_0 (\xi^2 \cos^2 \alpha + 1) - \xi \sin \alpha \cos 2\phi_0 = 0, \quad (20)$$

откуда

$$\operatorname{tg} 2\phi_0 = \frac{2\xi \sin \alpha}{\xi^2 \cos^2 \alpha + 1}. \quad (21)$$

Это уравнение имеет два решения $\phi_0, \phi_0 + \pi/2$, из которых одно, например ϕ_0 , может дать максимум J .

Этот угол ϕ_0 назовем углом плоскости поляризации частично деполаризованного света. Измеряя его и α , мы находим величину ξ и при этом, поскольку ω_L известно из теории эффекта Зеемана (с квантовомеханическим уточнением), находим также и γ . Среднее значение интенсивности по всем ϕ равно

$$\bar{J} = A \frac{1}{2} [\xi^2 (1 + \sin^2 \alpha) + 1]. \quad (22)$$

Степенью поляризации назовем значение величины

$$\frac{J(\phi) - \bar{J}}{\bar{J}} = \frac{(\xi^2 \cos^2 \alpha + 1) \cos 2\phi + 2\xi \sin \alpha \sin 2\phi}{\xi^2 (1 + \sin^2 \alpha) + 1}. \quad (23)$$

при $\psi = \psi_0$, т. е.

$$P = \frac{\sqrt{(\xi^2 \cos^2 \alpha - 1)^2 + 4\xi^2}}{\xi^2(1 + \sin^2 \alpha) + 1}. \quad (24)$$

В вышерассмотренном предельном случае $\xi \perp \xi$ (направление наблюдения противоположно ξ , $\alpha = \pi/2$) в частности будет

$$P = \frac{\sqrt{1 + 4\xi^2}}{1 + 2\xi^2}. \quad (25)$$

На фиг. 231а и б даны ψ_0 и P как функции ξ для этого случая.

В случае $\xi \parallel \xi$ (наблюдение $\perp \xi$, $\alpha = 0$)

$$\operatorname{tg} 2\psi_0 = 0, \psi_0 = 0, P = 1, \quad (26)$$

Фиг. 231а. Вращение плоскости поляризации резонансного света в магнитном поле. Функция

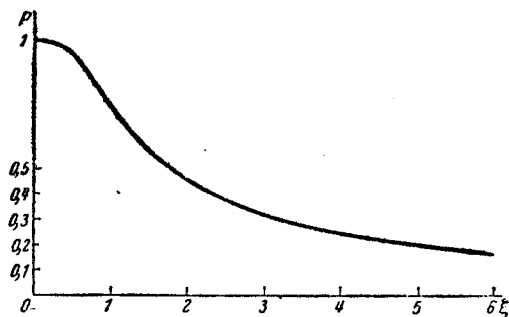
$$\psi_0 = \frac{1}{2} \arctg 2\xi.$$

т. е. независимо от магнитного поля полная поляризация наступает в направлении падающего луча, что также непосредственно очевидно.

Деполаризация в малых магнитных полях исследовалась сначала Вудом, вращение плоскости поляризации Ганле и позже Вудом и Эллетом¹. Измерение ψ_0 и P в функции поля H подтвердили кривые фиг. 231.

Затем с помощью известной нам уже частоты Лармора ω_L было определено значение констант затухания. При этом классическое значение ω_L [см. § 89 (4)] должно быть заменено для каждой рассматриваемой линии квантово-теоретическим значением, отличающимся от первого на рациональную дробь.

Для натровых D -линий измерения ψ_0 и P дали хорошо совпадающее значение $\gamma = 0,71 \cdot 10^8 \text{ сек}^{-1}$; выше (см. § 93, стр. 646) мы нашли с помощью совершенно независимого способа



Фиг. 231б. Степень поляризации резонансного света в магнитном поле, перпендикулярном к падающему лучу и при наблюдении против

$$\text{магнитного поля. Функция } P = \frac{\sqrt{1 + 4\xi^2}}{1 + 2\xi^2}.$$

Минковского (путем измерения поглощения на некотором расстоянии от линии) значение $\gamma_0 = 0,62 \cdot 10^8 \text{ сек}^{-1}$, которое очень точно совпадало со значением, вычисленным по классической теории, даже при учете множителя f . Зависимость вращения плоскости поляризации от силы поля также хорошо совпадает с теорией. Но зависимость деполаризации совпадает лишь при не слишком слабых полях. Этого, впрочем, и следует ожидать, так как вышеизложенная теория не учитывает эффекта Доплера, существенно влияющего на дисперсию и поглощение близ середины линии.

Сила поля, для которой при наблюдении $\parallel \xi$ деполаризация оказывалась полной (т. е. поляризация P (25) нельзя измерить) равна для D -линий около 100 гаусс.

Для ртутной линии $\lambda_0 = 2537 \text{ Å}$ состояние полной деполаризации достигается уже при крайне незначительном поле около 2 гаусс; уже отсюда следует заключить, что затухание в этом случае гораздо слабее. Действительно, измерение ширины линии для длины волны $\lambda_0 = 2537 \text{ Å}$ дает $\gamma = 10^7 \text{ сек}^{-1}$. Классическая ширина этой линии, согласно § 86 (7а) дает $\gamma_0 = 3,4 \cdot 10^8 \text{ сек}^{-1}$, т. е. истинная ширина составляет $1/34$ классической. Отсюда мы должны заключить, что для этой линии коэффициент силы $f = 0,029$, что блестяще подтверждается приведенной в § 94 таблице 41, величиной определенной Фюхтбауэром из полного поглощения линии¹.

Разумеется, классическая оптика дает такие прекрасные результаты не случайно. Новейшие квантовомеханические исследования взаимодействия атома с его собственным полем излучения, вследствие чего происходит ширина линии (см. § 90), хотя и значительно сложнее, но приводят в конце концов к таким математическим закономерностям, которые отличаются от классических формул не по форме, а только по смыслу и выбору констант. Все в конце концов сводится к тому, чтобы ввести коэффициенты f и правильно приписать их определенным линиям согласно происходящим квантовым переходам, о чем мы уже говорили в § 90.

§ 98. ДИСПЕРСИЯ КЕРР-ЭФФЕКТА И РАССЕЯНИЯ. РЕЗОНАНСНЫЕ КОЛЕБАНИЯ

Рассмотрим теперь дисперсию остальных разобранных в главе VII эффектов, основанных на естественной или созданной внешними полями анизотропии молекулы. С этой целью вычислим в общем виде составляющие тензора деформации $A_{\alpha\beta}$ для

¹ Различие в ширине резонансных линий Na и Hg основано на том, что для Na переход совершается внутри некоторого ряда термов (дублетный терм), а для Hg мы имеем переход из одного ряда термов в другой (триплетный терм, т. е. так называемую интеркомбинационную линию). Квантовая теория дает исчерпывающее объяснение этого явления.

неподвижной относительно молекулы системы сначала в отсутствии поля (α_{XY}), а затем при воздействии внешнего поля [см. главу VII, § 77 (4)].

Для анизотропной молекулы в отсутствии поля наиболее простой моделью является резонатор, состоящий из материальной частицы, связанной различными силами с тремя неподвижными относительно молекулы координатными направлениями; потенциальная энергия его, следовательно, равна

$$U = \frac{1}{2} (a_X u_X^2 + a_Y u_Y^2 + a_Z u_Z^2). \quad (1)$$

Эта модель эквивалентна трем линейным вибраторам со взаимно перпендикулярными колебаниями различной частоты. Такая молекула имеет независимую от частоты систему главных осей, причем различным осям соответствуют различные главные деформации α_X , α_Y , α_Z , и эти величины равны определенной выше функции частоты линейного вибратора.

По классической теории силы взаимно перпендикулярных колебаний равны между собой (равны e^2/m); но при квантовомеханической интерпретации резонатора мы имеем право приписать трем колебаниям различные коэффициенты силы f_X , f_Y , f_Z .

Мы даже можем считать частоты равными между собой и тем не менее получим, вследствие различия коэффициентов силы, анизотропное образование, не имеющее аналога в классической теории.

Несколько более общую модель молекулы, для которой главные оси деформации зависят от частоты, мы получим, рассматривая произвольную систему связанных вибраторов, кинетическая и потенциальная энергия которых [глава VII, § 82 (9), (10)] выражаются уравнениями

$$T = \frac{1}{2} \sum_k m_k \dot{u}_k^2, \quad (2)$$

$$U = \frac{1}{2} \sum_{kl} \sum_{XY} a_{XY}^{kl} u_X^l u_Y^k, \quad a_{XY}^{kl} = a_{YX}^{lk}, \quad (3)$$

где индексы k , l проходят все точки системы. Если эта общая анизотропия даже едва заметно проявляется в эффекте Керра и в рассеянии, она все же имеет очень важное значение при рассмотрении оптической активности (см. § 99).

Мы уже показали в главе VII, § 82 как можно ввести нормальные координаты; сперва мы исключаем массу с помощью условия главы VII, § 82 (11)

$$\sqrt{m_k} u_k = v_k, \quad \frac{a_{XY}^{kl}}{\sqrt{m_k m_l}} = K_{XY}^{kl}. \quad (4)$$

Затем производим ортогональное преобразование согласно главы VII, § 82 (20) и получим систему уравнений

$$v_{kX} = \sum_j e_{kX}^{(j)} \dot{\xi}_j, \quad (5)$$

решение которой дается выражением главы VII, § 82 (21)

$$\dot{\xi}_j = \sum_k e_k^{(j)} v_k, \quad (6)$$

причем кинетическая и потенциальная энергии преобразуются в суммы квадратов [глава VII, § 82 (22), (23)]

$$T = \frac{1}{2} \sum_j \dot{\xi}_j^2, \quad (7)$$

$$U = \frac{1}{2} \sum_j \mu_j \xi_j^2. \quad (8)$$

Здесь $\mu_j = \omega_j^2$ корни векового уравнения [глава VII, § 82 (16)]

$$|K_{XY}^{kl} - \mu \delta_{kl} \delta_{XY}| = 0, \quad (9)$$

а собственные векторы $e_k^{(j)}$ [см. главу VII, § 82 (18), (19)] образуют ортогональную систему

$$\sum_{k=1}^n e_k^{(j)} e_k^{(h)} = \delta_{jh}, \quad (10)$$

$$\sum_{j=1}^{3n} e_{kX}^{(j)} e_{lY}^{(j)} = \delta_{kl} \delta_{XY}, \quad (11)$$

удовлетворяющую линейным уравнениям главы VII, § 82 (17)

$$\mu_j e_{kX}^{(j)} = \sum_l \sum_Y K_{XY}^{kl} e_{lY}^{(j)}. \quad (12)$$

Исследуем теперь, как реагирует эта система на световую волну. Предположим, что волна действует на k -тую частицу с силой \mathfrak{F}_k (которую можно считать равной $e_k \mathfrak{E}$, только пренебрегая размерами атома относительно длины волны).

Уравнения колебаний в старых составляющих перемещения имеют вид

$$m_k \ddot{u}_{kX} + \sum_l \sum_Y a_{XY}^{kl} u_{lY} = \mathfrak{F}_{kX}. \quad (13)$$

Вводя обозначение (4), мы получим для колебания с частотой $\omega = \sqrt{\mu}$

$$\mu_{kX} - \sum_i \sum_Y K_{XY}^{kl} \vartheta_{iY} = -\frac{1}{\sqrt{m_k}} \mathfrak{R}_{kX}. \quad (14)$$

Подвергнув систему составляющих $\frac{1}{\sqrt{m_k}} \mathfrak{R}_k$ тому же преобразованию в трехмерном пространстве, которое мы произвели выше [см. (5) и (6)] с вектором ϑ_k , т. е.

$$K_j = \sum_k \frac{1}{\sqrt{m_k}} e_k^{(j)} \mathfrak{R}_k, \quad (15)$$

мы приведем уравнение движения (13) к виду

$$\mu \xi_j - \mu_j \xi_j = -K_j, \quad (16)$$

решение его есть

$$\xi_j = \frac{K_j}{\mu_j - \mu}. \quad (17)$$

Решение в прежних переменных есть

$$u_{kX} = \frac{1}{\sqrt{m_k}} \sum_j e_{kX}^{(j)} \frac{K_j}{\mu_j - \mu}, \quad (18)$$

Подставляя сюда значение (15), мы видим, что это выражение имеет форму

$$u_{kX} = \sum_i \sum_Y A_{XY}^{kl} \mathfrak{R}_{iY}; \quad (19)$$

коэффициент A_{XY}^{kl} равен

$$A_{XY}^{kl} = \frac{1}{\sqrt{m_k m_l}} \sum_j \frac{e_{kX}^{(j)} e_{lY}^{(j)}}{\omega_j^2 - \omega^2}, \quad (20)$$

где μ заменено через ω^2 , и введена собственная частота $\omega_j = \sqrt{\mu_j}$ [глава VII, § 82 (25)].

Предположим теперь, что длина волны велика относительно размера атома, т. е.

$$\mathfrak{R}_{kX} = e_k \mathfrak{E}_X, \quad (21)$$

и образуем электрический момент; мы получим

$$p_X = \sum_j \sum_Y \frac{\mathfrak{R}_X^{(j)} \mathfrak{R}_Y^{(j)}}{\omega_j^2 - \omega^2} \mathfrak{E}_Y, \quad (22)$$

в формулу 22 введем вектор [см. также главу VII, § 82 (27)]

$$\mathfrak{R}^{(j)} = \sum_k \frac{e_k}{\sqrt{m_k}} e_k^{(j)}. \quad (23)$$

Этот физический вектор представляет собой электрический момент нормированного (свободного) j -того собственного колебания. Из отношений ортогональности (11) и (10) собственных векторов $e_k^{(j)}$ для векторов $\mathfrak{R}^{(j)}$ следует

$$\sum_j \mathfrak{R}_X^{(j)} \mathfrak{R}_Y^{(j)} = \sum_{j,k,l} \frac{e_k e_l}{\sqrt{m_k m_l}} e_{kX}^{(j)} e_{lY}^{(j)} = \sum_k \frac{e_k^2}{m_k} \delta_{XY}, \quad (24)$$

или, если принять, что для всех z колеблющихся частиц заряд e и масса m равны,

$$\sum_j \mathfrak{R}_X^{(j)} \mathfrak{R}_Y^{(j)} = z \frac{e^2}{m} \delta_{XY}. \quad (25)$$

Формула (22) имеет вид, из которого мы исходили в главе VII

$$p_X = \sum_Y \alpha_{XY} \mathfrak{E}_Y, \quad (26)$$

причем тензор поляризации имеет определенное действительное значение

$$\alpha_{XY} = \sum_j \frac{\mathfrak{R}_X^{(j)} \mathfrak{R}_Y^{(j)}}{\omega_j^2 - \omega^2}. \quad (27)$$

Затухание можно ввести, заменяя ω^2 через $\omega^2 - i\gamma\omega$. Сравнивая формулу (27) с формулой § 95 (1), применяемой в общей дисперсионной теории, мы видим, что наша связанная система материальных точек эквивалентна некоторому числу линейных вибраторов, причем j -тый вибратор дает для составляющей XY тензора поляризуемости коэффициент силы $f_{XY}^{(j)}$

$$f_{XY}^{(j)} \frac{e^2}{m} = \mathfrak{R}_X^{(j)} \mathfrak{R}_Y^{(j)}. \quad (28)$$

Согласно (25), мы получаем отсюда для величин $f^{(j)}$ закон суммы

$$\sum_j f_{XY}^{(j)} = z \delta_{XY}. \quad (29)$$

Это — классический аналог квантовомеханического закона суммы, о котором мы говорили в § 91, стр. 630. При этом оказывается, что f -суммы для смешанных составляющих тензора поляризуемости α равны нулю, а для диагональных составляющих α_{XX} равны числу колеблющихся частиц.

Образовав среднюю поляризуемость для свободно вращающихся молекул

$$\alpha = \frac{1}{3} (\alpha_{XX} + \alpha_{YY} + \alpha_{ZZ}) = \frac{1}{3} \sum_j \frac{\mathfrak{R}^{(j)2}}{\omega_j^2 - \omega^2}, \quad (30)$$

мы найдем, что соответствующее ей значение f есть шпур

$$f^{(j)} = \frac{1}{3} (f_{xx}^{(j)} + f_{yy}^{(j)} + f_{zz}^{(j)}) = \frac{1}{3} \frac{m}{e^2} \Omega^{(j)2}, \quad (31)$$

и имеет место теорема об инвариантности суммы

$$\sum_j f^{(j)} = \frac{1}{3} \frac{m}{e^2} \sum \Omega^{(j)2} = z. \quad (32)$$

Но не следует забывать, что содержание квантовомеханического закона о сумме f значительно шире классической теории системы вибраторов¹. Мы видим это уже в случае $z=1$, в котором классическая теория вибратора дает только одну, а квантовая теория бесконечное число частот различной силы. Также и в нашем случае произвольного числа (z) колеблющихся электронов, квантовая теория дала бы бесконечное многообразие спектральных термов, причем каждому переходу между ними соответствует одно значение f . Квантотеоретический закон суммы f относится к бесконечному числу частот, соответствующих переходам от некоторого уровня ко всем остальным. Наши классические формулы таким образом имеют лишь приближенное значение.

Для некоторой определенной частоты ω можно преобразовать тензор α_{xy} к главным осям, но вообще система главных осей будет различна для каждой частоты.

Мы видели выше (глава VII, § 80, 81), что для определения рассеяния и главной части Керр-эффекта достаточно знать один тензор деформации в отсутствии поля для частоты ω и частоты 0; в данном случае к нему надо присоединить постоянный дипольный момент $p^{(0)}$. При этом мы принимаем, что величины $\alpha_{xy,z}$ и $\alpha_{xy}, x'y'$, описывающие зависимость тензора деформации от электрического поля, малы. Что это так, видно из того, что эффект Штарка очень мал для большинства веществ (за исключением водорода и подобных ему атомов). Электрическое поле E действует следующим образом при квадратичном эффекте Штарка: сначала происходит смещение собственных частот ω_k , пропорциональное E^2 , затем соответствующее изменение коэффициентов силы $f^{(j)}$, линейное относительно E . Оба эффекта крайне слабы; даваемая ими зависимость α_{xy} от частоты непосредственно выражается формулами (27); для нас нет смысла углубляться в это.

Вспомним теперь, что как эффект Керра, так и рассеяние в значительной степени определяются константами b_1 и b_2 ,

¹ По принципу соответствия системе виртуальных резонаторов квантовой теории соответствует не классическая система резонаторов, а механическая система материальных точек, взаимодействующих с кулоновскими силами. Такая система в общем случае имеет бесконечно много периодов, один основной период и его обертона. Последние, действительно, соответствуют виртуальным резонаторам квантовой теории (см. § 91, стр. 628).

выражаемыми в случае независимых от частоты главных осей деформации формулами главы VII, § 80 (5), (6). Таким образом зависимость от частоты обеих величин выражается тремя величинами $\alpha_x - \alpha_y$, $\alpha_y - \alpha_z$, $\alpha_z - \alpha_x$, которые связаны с частотой простой дисперсионной формулой; для нашей общей модели эта формула

$$\alpha_x - \alpha_y = \sum_j \frac{\varphi_{xy}^{(j)}}{\omega_j^2 - \omega^2}, \quad (33)$$

где

$$\varphi_{xy}^{(j)} = \Omega_x^{(j)2} - \Omega_y^{(j)2}; \quad (34)$$

для каждой из трех величин имеем

$$\sum_j \varphi_{xy}^{(j)} = 0. \quad (35)$$

Разложения по частотам и длинам волн, которыми пользуются для практических применений, имеют такую же форму, как для показателя преломления.

Рассмотрим теперь рассеяние. Оно состоит из двух частей, пропорциональных $1/\lambda^4$. Для атомов и изотропных молекул имеет место только релеевское рассеяние \mathcal{Q}_0 , зависящее согласно главы VII, § 81 (53) только от показателя преломления, именно от величины $(n^2 - 1)^2$. Этим определяется его дисперсия. В прозрачных областях зависимость этого множителя от длины волны мала относительно $1/\lambda^4$. Но вблизи собственной частоты должен наступить резонанс и, следовательно, селективное увеличение рассеяния. Последнее наблюдалось Ландсбергом и Мандельштамом¹ в парах ртути. Пары ртути освещались мощной искрой между цинковыми электродами испускавшей волны в пределах $\lambda_0 = 2502 \text{ \AA}$ и $\lambda_0 = 2558 \text{ \AA}$, между которыми находится резонансная линия ртути $\lambda_0 = 2537 \text{ \AA}$. В силу формул рассеяния следовало бы ожидать, что вторая линия даст рассеяние примерно в 12 раз большее, чем первое. В действительности линия 2502 \AA вообще не была видна в рассеянном свете, вторая же была отчетлива.

Для анизотропных молекул кроме рассеяния Релея имеется еще введенный в главе VII, § 81 (51) дополнительный член, зависящий от инварианта \mathcal{Q} и являющийся причиной деполяризации света. Мы рассматривали его там только для того случая, когда в молекуле есть неподвижные оси деформации, а зависимость главных деформаций α_x , α_y , α_z от частоты практически не изменяется, так что можно положить [см. § 81 (59), (60)]

$$\alpha_x^0 = \alpha \alpha_x, \alpha_y^0 = \alpha \alpha_y, \alpha_z^0 = \alpha \alpha_z, \quad (36)$$

где

$$\alpha = \frac{n^0 - 1}{n^2 - 1}. \quad (37)$$

¹ G. Landsberg u. L. Mandelstam, Z. Physik, т. 72 (1931), стр. 130.

Что касается условий, при которых это предположение справедливо при трех взаимно перпендикулярных линейных осцилляторах, то мы видим, что оно имеет место как раз в случае, когда три частоты равны между собой, и только коэффициенты силы f_x, f_y, f_z различны.

Если имеет место (36), то инварианта Ω пропорциональна согласно § 81 (62) константе b_1 Керр-эффекта и зависит только от разностей $\alpha_x - \alpha_y, \alpha_y - \alpha_z, \alpha_z - \alpha_x$. Следовательно, ее дисперсия определяется только множителем σ [см. (37)], т. е. величиной $(n^2 - 1)$. Поэтому нам незачем останавливаться на этом.

§ 99. ДИСПЕРСИЯ ЕСТЕСТВЕННОЙ ВРАЩАТЕЛЬНОЙ СПОСОБНОСТИ ДЛЯ ЖИДКОСТЕЙ И ГАЗОВ *

Как мы показали в главе VII, § 83, оптическая активность зависит не только от тензора поляризации молекулы, но также от геометрической конфигурации колеблющейся системы. Поэтому этим явлением можно воспользоваться также для определения положения резонаторов в молекуле. Это было выполнено Куном и его сотрудниками¹, получившими данные о химическом строении молекулы. Ввиду важности этих выводов, мы несколько подробнее остановимся на дисперсии вращательной способности.

На основании формулы (32) в главе VII, § 83 параметр вращения

$$g = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{1}{3} \sum_{kl} e_k e_l a^{kl} (r_k - r_l). \quad (1)$$

Здесь a^{kl} был аксиальный вектор, относящийся к антисимметрическому составляющим тензора A_{XY}^{kl} , который мы вычислили в § 98 (20). Мы найдем с помощью этих значений

$$-a_z^{kl} = \frac{1}{2} (A_{XY}^{kl} - A_{YX}^{kl}) = \frac{1}{\sqrt{m_k m_l}} \frac{1}{2} \sum_j \frac{e_k^{(j)} e_l^{(j)} - e_k^{(j)} e_l^{(j)}}{\omega_j^2 - \omega^2} \quad (2)$$

или короче

$$a^{kl} = \frac{-1}{\sqrt{m_k m_l}} \frac{1}{2} \sum_j \frac{e_k^{(j)} \times e_l^{(j)}}{\omega_j^2 - \omega^2}. \quad (3)$$

Подставляя это в (1), найдем

$$g = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{1}{3} \sum_j \frac{1}{\omega_j^2 - \omega^2} \frac{1}{2} \sum_{kl} \frac{e_k e_l}{\sqrt{m_k m_l}} (r_k - r_l) (e_l^{(j)} \times e_k^{(j)}). \quad (4)$$

Переставим в члене с r_l индексы k и l ; тогда этот член будет равен первому члену с r_k , и двойная сумма с множителем $\frac{1}{2}$ будет равна

$$\sum_{kl} \frac{e_k e_l}{\sqrt{m_k m_l}} r_k (e_l^{(j)} \times e_k^{(j)}) = \sum_{kl} \frac{e_k e_l}{\sqrt{m_k m_l}} e_l^{(j)} (e_k^{(j)} \times r_k), \quad (5)$$

Введем определенный в § 98 (23) вектор $\mathcal{Q}^{(j)}$ и кроме того вектор¹

$$\mathcal{R}^{(j)} = \sum_k \frac{e_k}{\sqrt{m_k}} (e_k^{(j)} \times r_k). \quad (6)$$

Тогда двойная сумма равна скалярному произведению $\mathcal{Q}^{(j)} \mathcal{R}^{(j)}$, и из (4) следует

$$g = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{1}{3} \sum_j \frac{\mathcal{Q}^{(j)} \mathcal{R}^{(j)}}{\omega_j^2 - \omega^2}. \quad (7)$$

Эта формула совершенно аналогична § 98 (30) для средней поляризуемости, но в сумме числителей имеется существенное различие. Именно

$$\sum_j \mathcal{Q}^{(j)} \mathcal{R}^{(j)} = \sum_{kl} \frac{e_k e_l}{\sqrt{m_k m_l}} r_k \sum_j e_l^{(j)} \times e_k^{(j)} \quad (8)$$

и это выражение согласно § 98 (11) исчезает, так как в векторном произведении перемножаются только составляющие по различным осям

$$\sum \mathcal{Q}^{(j)} \mathcal{R}^{(j)} = 0, \quad (9)$$

наоборот, в противоположность § 98 (32)

$$\frac{1}{3} \sum_j \mathcal{Q}^{(j)2} = z \frac{e^2}{m}.$$

Если отдельные частоты дают составляющие показателя преломления одинакового знака, то при вращении знаки различны для различных частот. Вследствие этого круговое двойное преломление оказывается очень малым на некотором расстоянии от полос поглощения по сравнению с величиной самого показателя преломления. Приведем здесь некоторые числовые данные.

Есть много веществ с удельным весом около единицы, для которых удельное вращение видимой области ($\lambda_0 = 5 \cdot 10^{-5}$ см)

¹ Векторы $\mathcal{R}^{(j)}$ зависят от выбора начала координат. Но скалярные произведения $\mathcal{Q}^{(j)} \mathcal{R}^{(j)}$, количественно характеризующего вращательную способность, от выбора начала не зависят.

¹ W. Kuhn, Z. physik. Chem. Ser. B, т. 4 (1929), тетр. 1/2, стр. 14; Trans. Faraday Soc., т. 23, часть 6 (1930), № 109, стр. 293; W. Kuhn u. E. Braun, Z. physik. Chem. Ser. B, т. 8 (1930), тетр. 4, стр. 281; т. 8 (1930), тетр. 5/6, стр. 443; W. Kuhn, K. Freudenberg u. J. Wolf, Ber. deutsch. Chem. Ges., т. 63 (1930), тетр. 9, стр. 2367.

равно около 10° . Тогда из формулы главы VII, § 83 (49) имеем следующее значение показателя преломления

$$n_- - n_+ = \frac{\chi'_0}{\pi} = \frac{2\pi}{360} \cdot 10 \frac{5 \cdot 10^{-5}}{\pi} = 2,8 \cdot 10^{-6}, \quad (10)$$

т. е. он чрезвычайно мал по сравнению с показателем преломления, который имеет порядок величины единицы.

Вращательную способность на значительном расстоянии от линии поглощения можно разложить в ряд по степеням λ или $1/\lambda$, как мы это делали в дисперсионной теории (см. § 95). Так как согласно (7) g пропорционально $\lambda^{-1} = n\lambda_0^{-1}$, то χ равно $1/\lambda_0^2$, умноженному на величину, которая сама зависит от ω или λ_0 и может быть разложена в степенной ряд такого же вида. Мы получаем

$$\chi = \frac{1}{\lambda_0^2} \left(D_0 + \frac{D_1}{\lambda_0^2} + \dots + E_1 \lambda_0^2 + E_2 \lambda_0^4 + \dots \right) \quad (11)$$

Ограничившись первым членом, мы получим так называемую *формулу Био*¹, дающую в видимой области достаточно удовлетворительное выражение для вращательной способности. При расширении спектральной области можно по мере необходимости определять дополнительные члены. Как показывает опыт, практически имеет значение только член, соответствующий ультрафиолетовым частотам (коэффициенты D). Инфракрасные частоты (коэффициенты E) существенно не изменяют вращательной способности.

Но мы сейчас не ограничимся этой грубой интерполяционной формулой, а рассмотрим области, в которых лежат полосы поглощения. Нам придется для этого воспользоваться общей формулой (7); но ее содержание слишком неопределенно, и поэтому мы должны попытаться получить более наглядную картину возникновения вращательной способности.

В вышеизложенной дисперсионной теории преломления квантовая теория выражалась в том, что каждому переходу от одного уровня к другому надо было привести в соответствие некоторый „виртуальный линейный вибратор силы f_j “. Возникает, естественно, вопрос, нельзя ли объяснить вращательную способность столь же элементарным образом. Из наших формул непосредственно вытекает, что одного резонатора для этого недостаточно; кроме всего должно быть известно его „положение“ в молекуле, так как в векторы $\mathfrak{H}^{(j)}$ входят не только амплитуды собственных колебаний $e_k^{(j)}$, но и радиусы векторы r_k резонаторов, определяющие их положение.

Наиболее простой из всех мыслимых моделей, не зависящей от абсолютного положения вибратора в молекуле, является следующая: два линейных вибратора, находящиеся на расстоянии d и колеблющиеся перпендикулярно к соединительной

линии. Мы назовем такую систему *парой вибраторов* по аналогии с парой сил в динамике твердых тел¹. Как в паре сил можно изменять плечо, одновременно изменяя величину сил, точно также и здесь можно изменять расстояние d , изменяя нормирование собственных колебаний. Положим собственные колебания нормированными на единицу (см. примечание 35) и получим отсюда при заданной величине $\mathfrak{H}^{(j)}$ $\mathfrak{L}^{(j)}$ совершенно определенное d , которое назовем „плечом пары вибраторов“. Оно будет порядка атомных размеров.

Определение d представляет интерес в том случае, когда неактивная молекула становится активной при присоединении атома или радикала (химический обмен). Мы можем тогда принять, что d есть мера расстояния, на котором локализуется пара резонаторов, образуемая соединением двух несвязанных вибраторов. Ясно, что химия может извлечь пользу из таких определений.

Определим теперь частный вид нашей формулы для случая пары вибраторов.

Пусть Z есть направление оси пары, X — направление колебаний первого, Y — второго резонатора. Назовем их приведенные амплитуды для сокращения u_1 и v_2 (вместо v_{1X} и v_{2Y}); тогда наши уравнения колебаний § 82 (15) напишутся в виде

$$\begin{aligned} \mu u_1 &= K_{XX} u_1 + K_{XY} v_2, & (a) \\ \mu v_2 &= K_{XY} u_1 + K_{YY} v_2. & (b) \end{aligned} \quad (12)$$

Мы можем разложить диагональные члены следующим образом

$$\begin{aligned} K_{XX} &= \omega_1^2 + K', & (a) \\ K_{YY} &= \omega_2^2 + K', & (b) \end{aligned} \quad (13)$$

где ω_1^0, ω_2^0 частоты несвязанных резонаторов, а K' изменение частоты, происходящее вследствие образования пары; для простоты полагаем, что они равны для обоих резонаторов. Далее пишем для параметров

$$K_{XY} = K. \quad (14)$$

Теперь мы можем сразу написать выражение собственных векторов; вследствие того, что наше колебание происходит в двухмерном пространстве, преобразование § 82 (20) или (21) означает поворот в плоскости и, следовательно, должно иметь вид

$$\begin{aligned} \xi_1 &= u_1 \cos \alpha + v_2 \sin \alpha, & (a) \\ \xi_2 &= -u_1 \sin \alpha + v_2 \cos \alpha. & (b) \end{aligned} \quad (15)$$

¹ J. B. Biot, Mém. de l'Acad. des Sciences, т. 2 (1817), стр. 41.

¹ В динамической паре силы антипараллельны, здесь же колебания взаимно перпендикулярны.

Полагая сначала, что потенциальная энергия есть функция u_1, v_2 , а затем ξ_1, ξ_2 [см. § 82 (23)]

$$2U = K_{XX}u_1^2 + 2K_{XY}u_1v_2 + K_{YY}v_2^2 = \mu_1 \xi_1^2 + \mu_2 \xi_2^2 \quad (16)$$

и, подставив величины (15), мы получим следующие формулы

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2K_{XY}}{K_{XX} - K_{YY}} = \frac{2K}{\omega_1^{02} - \omega_2^{02}}, \quad (17)$$

$$\left. \begin{aligned} \mu_1 \} &= \frac{1}{2} (K_{XX} + K_{YY}) \mp \frac{1}{2} \sqrt{(K_{YY} - K_{XX})^2 + 4K_{XY}^2} \\ \mu_2 \} &= K' + \frac{\omega_1^{02} + \omega_2^{02}}{2} \mp \frac{(\omega_1^{02} - \omega_2^{02})}{2 \cos 2\alpha} \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Дополнив собственные векторы тождественно исчезающими составляющими, мы получим для μ_1

$$e_1^{(1)} = (\cos \alpha, 0, 0), \quad e_2^{(1)} = (0, \sin \alpha, 0), \quad (19a)$$

а для μ_2

$$e_1^{(2)} = (-\sin \alpha, 0, 0), \quad e_2^{(2)} = (0, \cos \alpha, 0). \quad (19b)$$

Отсюда немедленно следует согласно § 98 (23) и § 99 (6)

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{L}^{(1)} &= \left(\frac{e_1}{\sqrt{m_1}} \cos \alpha, \frac{e_2}{\sqrt{m_2}} \sin \alpha, 0 \right), & (a) \\ \mathfrak{L}^{(2)} &= \left(-\frac{e_1}{\sqrt{m_1}} \sin \alpha, \frac{e_2}{\sqrt{m_2}} \cos \alpha, 0 \right), & (b) \\ \mathfrak{M}^{(1)} &= \left(d \frac{e_2}{\sqrt{m_2}} \sin \alpha, 0, 0 \right), & (c) \\ \mathfrak{M}^{(2)} &= \left(d \frac{e_2}{\sqrt{m_2}} \cos \alpha, 0, 0 \right), & (d) \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

и отсюда для числителей дисперсионных формул

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{L}^{(1)2} &= \frac{e_1^2}{m_1} \cos^2 \alpha + \frac{e_2^2}{m_2} \sin^2 \alpha, & (a) \\ \mathfrak{L}^{(2)2} &= \frac{e_1^2}{m_1} \sin^2 \alpha + \frac{e_2^2}{m_2} \cos^2 \alpha, & (b) \\ \mathfrak{L}^{(1)}\mathfrak{M}^{(1)} &= d \frac{e_1 e_2}{\sqrt{m_1 m_2}} \sin \alpha \cos \alpha, & (c) \\ \mathfrak{L}^{(2)}\mathfrak{M}^{(2)} &= -d \frac{e_1 e_2}{\sqrt{m_1 m_2}} \sin \alpha \cos \alpha. & (d) \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

Из этих величин мы можем сейчас же образовать согласно § 98 (30) деформацию

$$\alpha = \frac{\frac{1}{3} \mathfrak{L}^{(1)2}}{\omega_1^2 - \omega^2} + \frac{\frac{1}{3} \mathfrak{L}^{(2)2}}{\omega_2^2 - \omega^2} \quad (22)$$

и согласно (7) параметр вращения

$$g = \frac{2\pi}{\lambda} \left(\frac{\frac{1}{3} \mathfrak{L}^{(1)}\mathfrak{M}^{(1)}}{\omega_1^2 - \omega^2} + \frac{\frac{1}{3} \mathfrak{L}^{(2)}\mathfrak{M}^{(2)}}{\omega_2^2 - \omega^2} \right). \quad (23)$$

Мы видим, что g пропорционален величине $d \sin \alpha \cos \alpha$. Отсюда можно вывести все существенные условия для возникновения вращательной способности:

- 1) плечо d пары вибраторов не должно быть исчезающе малым относительно длины световой волны,
- 2) оба вибратора пары должны быть связаны и
- 3) должны иметь различные частоты.

В самом деле, если $K = 0$, то согласно (17) угол $\alpha = 0$ или $\alpha = \pi/2$, т. е. в силу (21с, d) и (23) g также равно 0. Дальше, в силу $\mathfrak{L}^{(1)}\mathfrak{M}^{(1)} = -\mathfrak{L}^{(2)}\mathfrak{M}^{(2)}$ из (23) следует, что $g = 0$ если $\omega_1 = \omega_2$; для этого согласно (18) необходимо и достаточно, чтобы кроме $K = 0$ также $\omega_1^0 = \omega_2^0$.

Не следует думать, что активная пара осцилляторов возможна уже при одной двуатомной молекуле; такая молекула обладает осевой симметрией относительно линии, соединяющей ядра, и перпендикулярные к ней направления x и y ничем не отличаются друг от друга. При трехатомной молекуле вращательная способность также еще невозможна, так как плоскость, определяемая тремя ядрами, является плоскостью симметрии. Только начиная с четырехатомной молекулы расположение четырех атомов может произвести в вибраторе необходимую асимметрию. Таким образом мы приходим к пониманию открытого Вантгофом и Лебелем закона, что для вращательной способности необходим асимметричный атом углерода (или другое асимметричное образование).

Для дальнейшего рассуждения введем упрощающее допущение, что показатель преломления n очень мало отличается от единицы (что действительно имеет место для газов), так что [см. главу VII, § 76 (15)]

$$n^2 - 1 = 4\pi N\alpha. \quad (24)$$

Для лево- и правовращающих волн можно ввести особую константу деформации α_+ или α_- :

$$n_+^2 - 1 = 4\pi N\alpha_+, \quad n_-^2 - 1 = 4\pi N\alpha_-. \quad (25)$$

Согласно главы VII, § 83 (47)

$$n_+^2 = n^2 - 2\gamma, \quad n_-^2 = n^2 + 2\gamma, \quad (26)$$

где теперь

$$\gamma = 4\pi N g. \quad (27)$$

Тогда мы получим

$$a_+ = a - \frac{2\gamma}{4\pi N} = a - 2g, \quad a_- = a + \frac{2\gamma}{4\pi N} = a + 2g. \quad (28)$$

Мы можем теперь ввести коэффициенты силы. Напишем, например,

$$a_+ = \frac{e^2}{m} \left(\frac{f_1^+}{\omega_1^2 - \omega^2} + \frac{f_2^+}{\omega_2^2 - \omega^2} \right) \quad (29)$$

и аналогично для a_- ; тогда

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{3} Q^{(1)2} \mp \frac{4\pi}{3\lambda} Q^{(1)} R^{(1)} &= \frac{e^2}{m} \cdot \left\{ \frac{f_1^+}{f_1^-} \right\} \\ \frac{1}{3} Q^{(2)2} \mp \frac{4\pi}{3\lambda} Q^{(2)} R^{(2)} &= \frac{e^2}{m} \cdot \left\{ \frac{f_2^+}{f_2^-} \right\} \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

Кроме того введем теперь коэффициенты силы, пренебрегая резонаторной связью (см. § 91) обоих вибраторов, т. е. положим

$$\frac{1}{3} \frac{e_i^2}{m_i} = \frac{e^2}{m} f_i^0, \quad \frac{1}{3} \frac{e_j^2}{m_j} = \frac{e^2}{m} f_j^0. \quad (31)$$

Тогда согласно (21)

$$\left. \begin{aligned} \frac{f_1^+}{f_1^-} &= f_1^0 \cos^2 \alpha + f_2^0 \sin^2 \alpha \pm \frac{4\pi}{\lambda} d \sqrt{f_1^0 f_2^0} \sin \alpha \cos \alpha, \\ \frac{f_2^+}{f_2^-} &= f_2^0 \cos^2 \alpha + f_1^0 \sin^2 \alpha \pm \frac{4\pi}{\lambda} d \sqrt{f_1^0 f_2^0} \sin \alpha \cos \alpha. \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

Но как известно, величины γ прямо зависят от общего поглощения соответствующих спектральных линий (см. § 94, I, 1a) в бесконечно тонком слое. Именно, независимо от констант затухания (если только они не слишком велики) из § 94 (4) следует для поглощения в слое толщиной единица.

$$A = \frac{\pi}{c} \frac{e^2}{m} N \frac{f}{n}. \quad (33)$$

Так как право- и левокруговой волне для каждой полосы поглощения соответствуют два различных значения f , то, следовательно, право- и левокруговой свет поглощаются различно, в частности полное поглощение каждой отдельной полосы различно для обеих противоположных колеблющихся волн. Это явление называется *круговым дихроизмом*. Оно было экспери-

ментально обнаружено Коттоном¹ и называется эффектом Коттона. Мерой этого эффекта является величина

$$\frac{A_1^- - A_1^+}{A_1} = \Gamma_1, \quad (34)$$

и соответствующая величина Γ_2 для второй полосы, где знаменателем является среднее значение

$$A_1 = \frac{A_1^+ + A_1^-}{2}. \quad (35)$$

не трудно получить

$$\Gamma_1 = \frac{f_1^- - f_1^+}{f_1}, \quad f_1 = \frac{f_1^+ + f_1^-}{2} \quad (36)$$

и

$$\Gamma_2 = \frac{f_2^- - f_2^+}{f_2}, \quad f_2 = \frac{f_2^+ + f_2^-}{2}. \quad (37)$$

Подстановкой формулы (32), мы можем представить оба выражения с помощью функции

$$\Gamma(\alpha) = \frac{8\pi d}{\lambda} \frac{\sqrt{f_1^0 f_2^0} \sin \alpha \cos \alpha}{f_1^0 \cos^2 \alpha + f_2^0 \sin^2 \alpha} \quad (38)$$

в виде

$$\Gamma_1 = \Gamma(\alpha), \quad \Gamma_2 = \Gamma\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right). \quad (39)$$

$\Gamma(\alpha)$ называется *коэффициентом анизотропии* пары вибраторов. Согласно главы VII, § 83 (49) и § 99 (23), (31) вращательная способность равна:

$$\chi = 8\pi^2 N \frac{g}{n\lambda_0} = 16\pi^3 N \frac{e^2}{m} \frac{1}{\lambda_0^2} \left(\frac{1}{\omega_1^2 - \omega^2} - \frac{1}{\omega_2^2 - \omega^2} \right) d \sqrt{f_1^0 f_2^0} \sin \alpha \cos \alpha. \quad (40)$$

Мы можем разложить ее на части, соответствующие обоим собственным колебаниям, т. е. написать $\chi = \chi_1 + \chi_2$. Вместо этого мы можем также взять составные части двойного преломления [§ 83 (49)]

$$(n_- - n_+)_1 = \frac{\lambda_0}{\pi} \chi_1, \quad (n_- - n_+)_2 = \frac{\lambda_0}{\pi} \chi_2. \quad (41)$$

Разделим обе эти части на соответствующие части

$$n_2 - 1 = 4\pi N \alpha = 4\pi N \frac{a_+ + a_-}{2}$$

¹ A. Cotton, Ann. Chim. Physique, т. 8 (1891), стр. 360.

[см. (24)], т. е. согласно (28) получаем

$$\left. \begin{aligned} (n^2 - 1)_1 &= 4\pi N \left(\frac{\alpha_+ + \alpha_-}{2} \right)_1 = 4\pi N \frac{e^2}{m} \frac{f_1^+ + f_1^-}{2(\omega_1^2 - \omega^2)} = \\ &= 4\pi N \frac{e^2}{m} \frac{f_1^0 \cos^2 \alpha + f_2^0 \sin^2 \alpha}{\omega_1^2 - \omega^2} \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

Тогда, пренебрегая разностью между λ и λ_0 , мы получим по (38)

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{n_- - n_+}{n^2 - 1} \right)_1 &= \frac{\lambda_0 \chi_1}{\pi(n^2 - 1)_1} = \frac{1}{2} \Gamma(\alpha), \\ \left(\frac{n_- - n_+}{n^2 - 1} \right)_2 &= \frac{\lambda_0 \chi_2}{\pi(n^2 - 1)_2} = \frac{1}{2} \Gamma\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right). \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

Таким образом величина, вносимая каждой полосой поглощения в двойное преломление, определяется ее дихроизмом Γ_1 или Γ_2 , и обе эти величины можно выразить согласно (39) через коэффициент анизотропии $\Gamma(\alpha)$. Введя сокращенное обозначение

$$\frac{\sqrt{f_1^0 f_2^0}}{f_1^0 + f_2^0} = \bar{f}, \quad \frac{f_1^0 - f_2^0}{f_1^0 + f_2^0} = \delta, \quad (44)$$

мы можем написать коэффициент анизотропии

$$\Gamma(\alpha) = \frac{8\pi d}{\lambda} \bar{f} \frac{\sin 2\alpha}{1 + \delta \cos 2\alpha}. \quad (45)$$

Найдем теперь наибольшее значение этого выражения для пары вибраторов с определенными силами f_1^0, f_2^0 в несвязанном состоянии, которое оно может иметь при различных связях, т. е. при различных значениях α . Так как $\Gamma(\alpha)$ исчезает при $\alpha = 0$ и $\alpha = \frac{\pi}{2}$, то между этими двумя значениями должен находиться экстремум. Находим для него условия

$$\cos 2\alpha = -\delta. \quad (46)$$

Максимальное значение $\Gamma(\alpha)$ есть

$$[\Gamma(\alpha)]_{\max} = \frac{8\pi d}{\lambda} \bar{f} \frac{1}{\sqrt{1 - \delta^2}}. \quad (47)$$

Величина $\Gamma\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$, соответствующая второй полосе поглощения, имеет максимум при

$$\cos 2\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = -\cos 2\alpha = -\delta. \quad (48)$$

Разумеется максимальное значение одинаково для обеих полос. Рассмотрим теперь два предельных случая.

1. Оба несвязанных вибратора имеют одинаковую силу:

$$f_1^0 = f_2^0. \quad (49)$$

Тогда

$$\left. \begin{aligned} \bar{f} &= \frac{1}{2}, \quad \delta = 0, \quad \alpha_{\max} = \frac{\pi}{4}, \\ [\Gamma(\alpha)]_{\max} &= \frac{4\pi d}{\lambda} \end{aligned} \right\} \quad (50)$$

2. Один вибратор значительно слабее другого

$$f_1^0 \gg f_2^0. \quad (51)$$

Полагаем

$$\frac{f_2^0}{f_1^0} = p \ll 1.$$

Тогда

$$f = \sqrt{p}, \quad \delta = \frac{1-p}{1+p} = 1 - 2p, \quad \sqrt{1 - \delta^2} = 2\sqrt{p}, \quad (52)$$

следовательно,

$$[\Gamma(\alpha)]_{\max} = \frac{4\pi d}{\lambda}. \quad (53)$$

Мы получаем важный результат, что в этих двух противоположных случаях наибольшее значение коэффициента анизотропии, которое вообще может быть достигнуто выбором связи, одинаково.

Это имеет существенное значение для понимания количественных соотношений, наблюдаемых во вращающих органических веществах.

Цитированные исследования Куна и его сотрудников относятся к растворам органических веществ. В них часто наблюдается следующее явление: при переходе от видимой области к фиолетовой в некотором месте наблюдается слабое поглощение, которое можно приписать наличию полосы очень малой силы (f_2^0), лежащей в близком ультрафиолете. При дальнейшем продвижении в ультрафиолетовую область поглощение очень сильно возрастает, поэтому в крайней ультрафиолетовой части наблюдается очень сильная полоса (f_1^0).

Если проследить таким образом изменение вращательной способности или дихроизма по всему спектру, то мы увидим, что вблизи полосы (f_2^0) обе эти величины ведут себя как при наличии полосы поглощения (с затуханием), а дальше в ультрафиолетовой области снова возрастают как поглощение. Пример такого поведения показан на фиг. 232.

Действие ближайшей полосы можно вычислить отдельно: из поглощения мы получаем (f_2^0), из вращательной способности —

величину $\Gamma_2 = \Gamma \left(\alpha + \frac{\pi}{2} \right)$; с другой стороны можно определить сумму $f_1^0 + f_2^0$ простым подсчетом участвующих в процессе поглощения электронов.

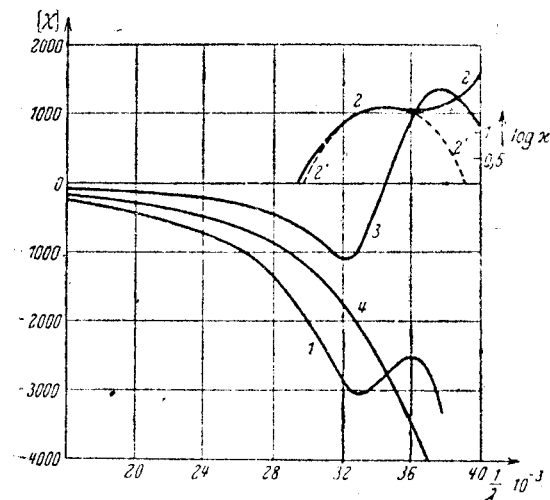
В качестве примера приведем изображенный на фиг. 232 случай раствора метиламида азидопропионовой кислоты



здесь

$$f_2 = 4,7 \cdot 10^{-4}.$$

¹Число электронов во всех атомах равно 76. Из них 20 очень прочно связаны (в К-оболочке), и, следовательно, не имеют никакого значе-



Фиг. 232. Диметиламид азидопропионовой кислоты в эфире.

1—молекулярное вращение наблюдаемое, 2—поглощение наблюдаемое, 3—поглощение вычисленное, 4—вращающаяся часть азидополосы вычисленная, 5—разность между наблюдаемым и вычисленным вращениями.

та, то составная часть множителя анизотропии, происходящая от более далекой полосы, имеет ту же величину, а именно обе части равны, согласно (53), $4\pi \frac{d}{\lambda}$. Но и в неопредельном

¹ По W. Kuhn и E. Braun, Z. physik. Chem. Abt. B, т. 8 (1930), стр. 281. Эти авторы не довольствуются тем, что задают дисперсионный член с затуханием для отдельной линии поглощения, а вводят кроме того допущение, что он соответствует полосе из отдельных линий. Распределение поглощения в этой полосе они предполагают экспоненциальным и получают правильную картину изменения части поглощения, даваемой этой полосой.

Мы не приводим этих расчетов; количественные результаты их ненадежны, ввиду ряда других пренебрежений (например, авторы пренебрегают влиянием плотности по закону Лоренца-Лоренца).

случае, когда часть множителя анизотропии, происходящая от далекой полосы, сравнительно больше, ее участие во вращательной способности не будет большим, так как она лежит дальше слабой полосы, вследствие чего ее действие в видимой части оказывается сильно ослабленным. Это ясно видно на фиг. 232.

Мы можем теперь вычислить из формулы (53) расстояния d , характеризующие активность, и найдем из заданных значений $\Gamma = 0,02$ и длины волн $\lambda = 2900 \text{ \AA}$ значение

$$d = \frac{\Gamma \lambda}{4\pi} = \frac{0,02 \cdot 2,9 \cdot 10^{-5}}{4 \cdot \pi} = 4,6 \cdot 10^{-8} \text{ см.}$$

Этот результат очень интересен; мы знаем, что диаметр молекул равен всего нескольким ангстремам. Плечо вибраторной пары таким образом порядка диаметра молекулы, и оба связанных вибратора в нашей системе, следовательно, находятся в крайних точках молекулы. Этим, быть может, объясняется чувствительность вращательной способности по отношению к влияниям соседних молекул и другим возмущениям.

Исследование большого числа химических соединений с систематическим изменением состава привело к выводам, что отдельные расположенные в ближней ультрафиолетовой области полосы поглощения, участвующие во вращении плоскости поляризации, происходят от совершенно определенных молекулярных групп или радикалов. Так, в вышеприведенном примере ближняя полоса поглощения определяется группой N_3 . Ту же самую роль она играет в других соединениях, например в метилом эфире азидопропионовой кислоты $\text{CH}_3\text{CHN}_3\text{COOCH}_3$. Она вызывает в них определенную полосу поглощения, но последняя только тогда участвует в оптической активности, когда остальные молекулы достаточно асимметричны. Так например, простое соединение этилазид $\text{C}_2\text{H}_5\text{N}_3$ оптически не активно. Поэтому, вводя некоторые заместители, можно сделать активной слабую полосу поглощения, которая сама по себе оптически не активна. Кун называет это влияние *вициальным действием*. Можно количественно сравнивать силу вициального действия различных заместителей на одну и ту же поглощающую группу, например N_3 . Так, можно сравнивать действие группы COOCH_3 с действием группы $\text{CON}(\text{CH}_3)_2$ на группу N_3 , превращая сложный эфир азидопропионовой кислоты в диметиламид при неизменной конфигурации и определяя в обоих случаях участие полосы N_3 в оптическом вращении. При этом вообще оказывается, что такое изменение заместителей не оказывает большого влияния на происходящую от полосы N_3 часть активности, если только конфигурация сама по себе достаточно асимметрична. Зато часть активности, исходящая непосредственно от замененных групп, меняется очень сильно; например активности, даваемые обеими упомянутыми группами COOCH_3 и $\text{CON}(\text{CH}_3)_2$, диаметрально

противоположны. Отсюда следует, что вицинальное действие в основном происходит от сильных полос поглощения, расположенных в крайней фиолетовой области, на интенсивность и характер которых химические изменения мало влияют, тогда как главная часть вращательной способности происходит от слабых полос поглощения в ближней части спектра. Эти слабые полосы естественно более подвержены возмущениям, чем сильные.

На основании этого правила можно составить перечень химических процессов, происходящих при изменении вращательной способности, и даже до известной степени предвидеть величину оптической активности.

Полностью свести вращательную способность к молекулярным константам очень трудно, так как явление очень чувствительно к структурным изменениям.

§ 100. ИНФРАКРАСНЫЕ КОЛЕБАНИЯ И ЭФФЕКТ РАМАНА

Во всех последующих рассуждениях мы будем рассматривать собственные частоты и соответствующие коэффициенты сил как характеристические константы атомов или молекул, вывод которых из строения системы (ядер и электронов) есть задача квантовой механики. Но уже в § 90 мы указывали, что в случае движения больших масс квантовая теория асимптотически переходит в классическую механику, и поэтому в области инфракрасных частот, к которой принадлежат колебания ядер друг относительно друга, можно с большим приближением пользоваться законами классической механики. Вывод атомных или молекулярных частот, основанных на электронных движениях, выходит из рамок этой книги, но мы можем вычислить *инфракрасные собственные колебания ядерной системы молекулы*. Нашей целью при этом будет сделать на основании наблюдения частот и их сил выводы относительно строения молекулы, по возможности без специальных допущений относительно действующих между отдельными атомами сил, которые можно было бы определить только на основании полного знания электронной конфигурации.

Мы постараемся воспользоваться главным образом *свойствами симметрии* молекулы, которыми определяется наличие или отсутствие известных собственных колебаний в спектре. Мы говорим о *правилах отбора* для определения наличия спектральных линий; последние часто дают точный критерий для распознавания на основе наблюдения различных возможных молекулярных структур.

Кроме непосредственных наблюдений в *инфракрасной спектральной области*, обычно производящихся над поглощением, можно также воспользоваться измерением *эффекта Рамана*. Мы видели уже в главе VII, § 82, что наблюдаемые в некогерентном рассеянном свете частоты отличаются от излучаемой на частоту вращения ω_r или на частоту ядерного колебания ω_s . Это

дает возможность определять инфракрасные частоты ω_r и ω_s через расстояния между рассеянными рамановскими линиями с помощью наблюдения видимой области (излучения видимой частоты). Мы рассмотрим здесь оба метода вместе ¹.

Мы предполагаем, что колебания ядер настолько медленны, что в каждый момент можно с большим приближением считать электронную систему такой, как если бы ядра покоились в соответствующем положении. Тогда электронная система играет двойную роль: 1) она определяет действующие между ядрами силы; закон этих сил нас не интересует, нам важны только *отношения симметрии*, непосредственно вытекающие из равенства или неравенства ядер (мы заметим, что потенциальной энергией этих сил является как раз электронная энергия, усредненная по электронным движениям и вычисленная для постоянной ядерной конфигурации); 2) она определяет для каждого ядерного положения две важные для оптики величины: электрический дипольный момент молекулы p и ее поляризуемость α_{xy} . Обе являются средними по электронным движениям и зависят только от положения ядер.

Дипольный момент определяет согласно § 85 (33) инфракрасное излучение, пропорциональное $|p|^2$, (входящие сюда множители нас не интересуют) и инфракрасное поглощение.

Тензор поляризуемости α_{xy} определяет эффект Рамана по правилам главы VII, § 82: надо образовать инварианты \mathcal{Q}_0 и \mathcal{Q} для соответствующих линий Рамана, из которых можно вычислить интенсивность света Рамана, в частности степень деполяризации Δ линейного света и коэффициент обращения P для кругового света.

При малых амплитудах колебаний в Раман-эффекте и в инфракрасной области входят только частоты самих нормальных колебаний (основные частоты без обертонов).

Если бы амплитуды колебаний были несколько больше, то как в Раман-эффекте, так и в инфракрасных колебаниях в общем случае имелись бы *обертоны* по следующим двум причинам: во-первых, закон сил вблизи положений равновесия ядер не строго линеен, ядерное движение содержит члены Фурье, соответствующие обертонам $\pm n\omega_s$ и комбинационным колебаниям основных частот. Кроме того, если даже ядерное колебание чисто гармонично, зависимость величин p и α_{xy} от амплитуд ядерных колебаний может содержать квадраты или более высокие члены достаточно большой величины.

В этом случае обертоны тем слабее, чем выше их порядок. Нам придется говорить и о них, но в основном мы будем заниматься только основным колебанием.

Разберем отдельно случай с различным числом атомов (или атомных ядер в молекуле).

¹ В изложении последующего участвовал д-р Теллер.

I. ДВУХАТОМНЫЕ МОЛЕКУЛЫ

Чистый инфракрасный ротационный спектр может быть только тогда, когда молекула имеет постоянный дипольный момент. Вибрационно ротационная линия может быть только тогда, когда молекула асимметрична для соответствующего собственного колебания; в противном случае дипольный момент равен нулю для каждой амплитуды колебаний.

Для рамановских линий ограничений такого рода нет.

Опишем теперь по порядку наиболее важные свойства инфракрасного и рамановского спектра.

1. Инфракрасные колебания

а) Чистое вращение. Двухатомная молекула („гантель“) вращается по законам классической механики вокруг неподвижной в пространстве оси, перпендикулярной к линии, соединяющей ядра, т. е. оси Z ; примем эту ось вращения за неподвижную в пространстве ось z . Тогда составляющие постоянного момента в системе, связанной с молекулой, будут $p_x^{(0)} = 0$, $p_y^{(0)} = 0$, $p_z^{(0)} = p^{(0)}$ (см. фиг. 233), в неподвижной системе будем иметь

$$\left. \begin{aligned} p_x &= p^{(0)} \cos \omega_r t, \\ p_y &= p^{(0)} \sin \omega_r t, \\ p_z &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

следовательно

$$p^2[\omega_r] = p^{(0)2}. \quad (2)$$

Фиг. 233. Вращающаяся двух атомная молекула.

Таким образом каждой частоте вращения ω_r соответствует одна инфракрасная линия, и все испускаемые молекулой линии имеют одинаковые множители интенсивности $p^{(0)2}$. Тогда *распределение интенсивности* в наблюдаемом спектре зависит только от частоты, с которой встречаются различные частоты вращения. Ее можно вычислить по закону распределения Больцмана

$$N_r = ag_r e^{-\frac{\epsilon_r}{kT}}, \quad (3)$$

где ϵ_r есть энергия вращения для частоты ω_r , а g_r статистический вес этого состояния.

Последнее имеет следующее значение: вращательное состояние ω_r вырождено, т. е. существует бесконечно много вращений молекулы с той же самой частотой ω_r ; они отличаются направлением неподвижного вращательного импульса. Чтобы определить g_r , рассмотрим, например, движение одного из ядер вокруг общего центра тяжести. При вращении вокруг постоянной оси вектор импульса этой материальной точки вращается в не-

которой плоскости; если заставить эту плоскость вращаться вокруг некоторой лежащей в ней оси, мы получим все возможные направления импульсов, причем каждое по два раза. Это равносильно тому, что ось вращения совершает полный оборот в некоторой плоскости. Таким образом вырождение не двукратно бесконечно, как можно было бы думать, но только однократно; вес g_r равен длине окружности, описываемой вектором вращательного импульса. Так как вращательный импульс пропорционален ω_r , то g_r также пропорционален ω_r . Отсюда получаем, что число молекул в состоянии вращения ω_r

$$N_r = b \omega_r e^{-\frac{\epsilon_r}{kT}} = b \omega_r e^{-\frac{A}{2kT} \omega_r^2}, \quad (4)$$

где A есть момент инерции молекулы. Интенсивность излучения мы получим, умножив это выражение на ω_r^4

$$\left. \begin{aligned} I_r &\propto \omega_r^5 e^{-\frac{A}{2kT} \omega_r^2} \propto x^5 e^{-x^2}, \\ x &= \sqrt{\frac{A}{2kT}} \omega_r. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Но полное поглощение линии согласно § 94 (4)

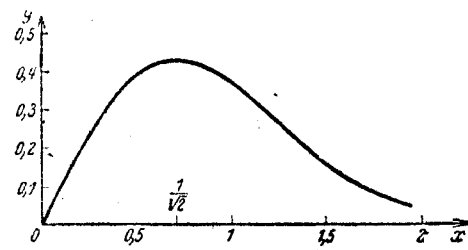
$$A \propto N, \quad (6)$$

откуда

$$A \propto x e^{-x^2}. \quad (7)$$

Эта функция графически изображена на фиг. 234. Ее максимум лежит при $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\omega_r = \sqrt{\frac{kT}{A}}$ и, следовательно, с возрастанием температуры перемещается к более высоким частотам. Экспериментальное определение положения молекул при данной температуре дает момент инерции A молекулы. Чисто ротационные спектры мало известны, так как лежат в малодоступной крайней инфракрасной области; измерения в этой области производились главным образом над галоидными¹ соединениями водорода.

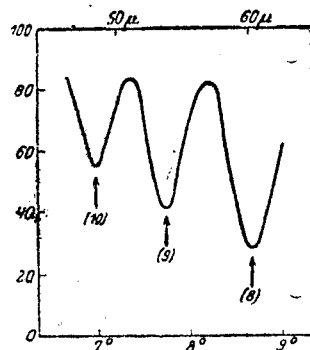
В действительности в спектре представлены отнюдь не все частоты вращения, на это обстоятельство, объясняемое квантовой механикой, мы уже указывали в главе VII, § 82; существует только дискретный ряд приблизительно равноотстоящих (эквидистантных) линий вращения. Картина, изображенная на фиг. 234, имеет место лишь при неполном спектральном разрешении тонких ротационных² линий. Современная экспериментальная



Фиг. 234. Кривая поглощения полосы вращения. Функция $y = x e^{-x^2}$.

¹ Метод наблюдения в инфракрасной области и полученные результаты см. Cl. Schaefer и F. Matossi, Das ultrarote Spektrum. Berlin, 1930.

техника достигла разрешения ротационной структуры; вследствие этого момент инерции определяется гораздо точнее, чем посредством нахождения максимума полосы. На фиг. 235 изображен отрезок разрешенной ротационной полосы.



Фиг. 235. Элемент разрешенной инфракрасной полосы вращения (HCl). (По К. Шефери и Ф. Матусси, Инфракрасные спектры. ОНТИ, 1935).

$$\left. \begin{aligned} p_x &= (p^{(0)} + 2p^{(1)} \cos \omega_s t) \cos \omega_r t \\ &= p^{(0)} \cos \omega_r t + p^{(1)} [\cos (\omega_s + \omega_r) t + \cos (\omega_s - \omega_r) t], \\ p_y &= (p^{(0)} + 2p^{(1)} \cos \omega_s t) \sin \omega_r t \\ &= p^{(0)} \sin \omega_r t + p^{(1)} [\sin (\omega_s + \omega_r) t - \sin (\omega_s - \omega_r) t], \\ p_z &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

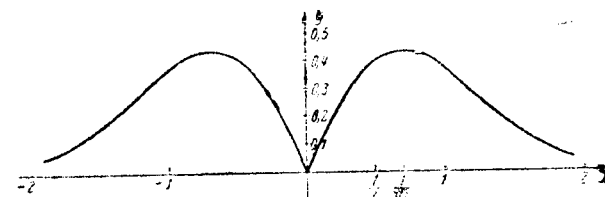
Первые члены выражают состояние без колебаний, о котором мы говорили выше (интенсивность $p^{(0)2}$). Следующие члены показывают, что каждой колебательной частоте ω_s соответствуют комбинационные частоты $\omega_s \pm \omega_r$ с равными интенсивностями $p^{(1)2}$; зато несмещенная линия колебания отсутствует в спектре (отсутствует один член с $\omega_s t$; см. также фиг. 237, где отсутствует вершина $\omega_r = 0$). Таким образом полный спектр состоит из двух ветвей, симметричных относительно ω_s .

Эти области поглощения в коротковолновой инфракрасной части спектра называются *двойными полосами Бьеррума*. Для вычисления интенсивности излучения следует умножить на $(\omega_s \pm \omega_r)^4$, но так как вообще $\omega_r \ll \omega_s$, то этот множитель постоянен для определенной двойной полосы и может быть отброшен. Распределение интенсивности в излучении или поглощении выражается функцией

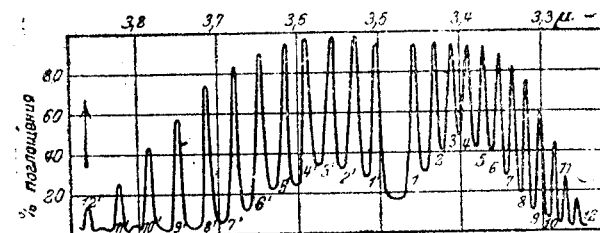
$$J \propto A \propto |x| e^{-x^2}, \quad x = \sqrt{\frac{A}{2kT}} \omega_r; \quad (10)$$

оно изображено на фиг. 236. Максимум лежит опять при $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$,

$\omega_r = \sqrt{\frac{kT}{A}}$. В действительности полосы в силу квантовомеханических законов состоят из многих приблизительно эквиди-



Фиг. 236. Кривая поглощения вращательно-колебательной полосы. Функция $y = |x| e^{-x^2}$.



Фиг. 237. Главная полоса HCl по Imes (из К. Шефери и Ф. Матусси, Инфракрасные спектры. ОНТИ, 1935).

стантных линий. В качестве примера укажем на двойную полосу HCl (основное колебание) по Аймсу¹ (см. фиг. 237).

2. Раман-эффект

Для двухатомной молекулы линия, соединяющая ядра, очевидно, является осью симметрии и, следовательно, также главной осью тензора поляризации; поэтому мы должны положить в нашей связанной с молекулой координатной системе

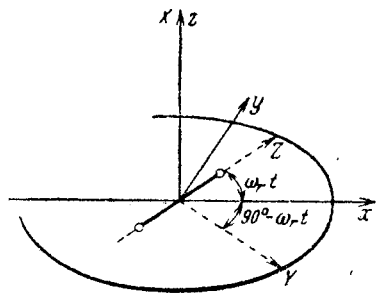
$$\alpha_{xy} = \alpha_{yz} = \alpha_{zx} = 0.$$

Мы видели в главе VII, § 82, стр. 525, что тензор поляризации удобно разложить на две части — сферически симметричную и часть, шпур которой равен нулю; первая ничего не вносит во вращательный Раман-эффект. Поэтому можно образовать одну только не имеющую шпура часть и вычислить из нее ротационную линию. Затем к ней можно прибавить симметричную часть для линий, не имеющих вращения. Вследствие того, что направления X и Y эквивалентны, мы имеем для части, свободной от шпура,

$$\alpha_{xx} = \alpha_{yy} = -\frac{1}{2} \alpha_{zz} = -\frac{1}{2} \alpha_z. \quad (11)$$

¹ E. S. Imes, Astrophys. J., т. 50 (1919), стр. 251.

Вычислим теперь составляющие в неподвижной системе; при этом мы можем заставить ось X совпасть с неподвижной осью z , т. е. осью вращения молекулы (см. фиг. 238). Дадим схему направляющих косинусов



	X	Y	Z
x	0	$\sin \omega_r t$	$\cos \omega_r t$
y	0	$-\cos \omega_r t$	$\sin \omega_r t$
z	1	0	0

Согласно § 82 (6) и (11) получим

$$a_{xy} = \sum_X \cos(xX) \cos(yX) a_{XX}. \quad (12)$$

Фиг. 238. К вращательному Раман-эффекту двухатомной молекулы.

Отсюда

$$\left. \begin{aligned} a_{xx} &= a_{ZZ} \cos^2 \omega_r t + a_{YY} \sin^2 \omega_r t = \frac{a_Z}{4} (1 + 3 \cos 2\omega_r t), \\ a_{yy} &= a_{ZZ} \sin^2 \omega_r t + a_{YY} \cos^2 \omega_r t = \frac{a_Z}{4} (1 - 3 \cos 2\omega_r t), \\ a_{zz} &= a_{XX} = -\frac{1}{2} a_Z, \\ a_{yz} &= 0, \\ a_{zx} &= 0, \\ a_{xy} &= -(a_{YY} - a_{ZZ}) \cos \omega_r t \sin \omega_r t = \frac{3}{4} a_Z \sin 2\omega_r t. \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} (a) \\ (b) \end{array} \quad (13)$$

Для того чтобы учесть колебания, мы должны положить аналогично (8)

$$a_Z = a_Z^I + 2a_Z^R \cos \omega_s t. \quad (14)$$

Тогда соответственно (9)

$$\left. \begin{aligned} a_{xx} &= \frac{1}{4} (a_Z^I + 2a_Z^R \cos \omega_s t) + \\ &+ \frac{3}{4} \{ a_Z^I \cos 2\omega_r t + a_Z^R [\cos(\omega_s + 2\omega_r)t + \cos(\omega_s - 2\omega_r)t] \}, \\ a_{yy} &= \frac{1}{4} (a_Z^I + 2a_Z^R \cos \omega_s t) - \\ &- \frac{3}{4} \{ a_Z^I \cos 2\omega_r t + a_Z^R [\cos(\omega_s + 2\omega_r)t + \cos(\omega_s - 2\omega_r)t] \}, \\ a_{zz} &= -\frac{1}{2} (a_Z^I + 2a_Z^R \cos \omega_s t), \end{aligned} \right\} (a) \quad (15)$$

$$\left. \begin{aligned} a_{yz} &= 0, \\ a_{zx} &= 0, \\ a_{xy} &= \frac{3}{4} a_Z^I \sin 2\omega_r t + \frac{3}{4} a_Z^R [\sin(\omega_s + 2\omega_r)t - \sin(\omega_s - 2\omega_r)t]. \end{aligned} \right\} (b) \quad (15)$$

Легко убедиться, что шпур этого тензора равен нулю.

Уравнения показывают, что кроме спектральной линии, соответствующей частоте падающего света (частота 0 в поляризуемости), в рассеянном свете имеется чистое вращение с двойной частотой $2\omega_r$ и затем чистое колебание с частотой ω_s , сопровождаемое двумя эквидистантными вращательно-колебательными линиями $\omega_s \pm 2\omega_r$.

Легко понять, почему в эффекте Рамана вращательные линии всегда имеют двойную частоту. Оба направления главной оси тензора поляризуемости физически равноценны (даже в асимметричных молекулах, как HCl); таким образом, при повороте вокруг оси, перпендикулярной этой главной оси, тензор совпадает сам с собою.

Чтобы вычислить интенсивности имеющихся линий, мы должны поступать как в главе VII, § 82 (37) и (38). Образует

$$p_x = \sum_y a_{xy} \mathcal{E}_y = \sum_y a_{xy} \mathcal{E}_y^{(0)} \cos \omega t, \quad (16)$$

где a_{xy} подставляется из (15). Затем разложим $a_{xy} \cos \omega t$ в ряд Фурье и применим к отдельным частотам формулу (52) из главы VII, § 81¹. Для этого нужно образовать инварианты асимметрии тензора, входящие в ряд Фурье в качестве множителей при различных частотах. Обозначим их $\mathcal{Q}[\omega_k]$, где ω_k частота, на которую соответствующая линия Рамана смещена относительно падающего света². Мы получим:

$$\left. \begin{aligned} \text{Чистое рассеяние Тиндала} \quad \mathcal{Q}[0] &= \frac{3}{80} a_Z^I{}^2, & (a) \\ \text{Чистый вращательный Раман-эффект} \quad \mathcal{Q}[\pm 2\omega_r] &= \frac{9}{160} a_Z^I{}^2, & (b) \\ \text{Чистый колебательный Раман-эффект} \quad \mathcal{Q}[\pm \omega_s] &= \frac{3}{80} a_Z^R{}^2, & (c) \\ \text{Вращательно-колебательный Раман-эффект} \quad \mathcal{Q}[\pm \omega_s \pm 2\omega_r] &= \frac{9}{160} a_Z^R{}^2. & (d) \end{aligned} \right\} (17)$$

¹ Разумеется, при этом мы получим только ту часть Раман-эффекта, которая происходит от не имеющей следа части поляризуемости, так как мы предполагали отсутствие шпура. Поэтому в последующие формулы \mathcal{Q}_0 не входят.

² Здесь \mathcal{Q} определяется точно так же, как в главе VII, § 81 (54), а именно

$$\mathcal{Q} = \frac{1}{30} [(a_{yy} - a_{zz})^2 + (a_{zz} - a_{xx})^2 + (a_{xx} - a_{yy})^2 + 6(a_{xy}^2 + a_{yz}^2 + a_{zx}^2)],$$

но, как мы уже говорили, вместо a_{xy} надо подставить соответствующие коэффициенты Фурье.

В силу (11) инвариант асимметрии поляризуемости в связанной с молекулой системе равен

$$\Omega = \frac{3}{20} \alpha_z^2, \quad (18)$$

или [в результате усреднения умноженного на $\cos \omega t$ уравнения (14)]

$$\Omega^T = \frac{3}{20} \alpha_z^2, \quad \Omega^R = \frac{3}{20} \alpha_z^2. \quad (19)$$

Отсюда следует

$$\left. \begin{aligned} \Omega[0] &= \frac{1}{4} \Omega^T, & (a) \\ \Omega[\pm 2\omega_r] &= \frac{3}{8} \Omega^T, & (b) \\ \Omega[\pm \omega_s] &= \frac{1}{4} \Omega^R, & (c) \\ \Omega[\pm \omega_s \pm 2\omega_r] &= \frac{3}{8} \Omega^R. & (d) \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

Учитывая формулу (52), глава VII, § 81, мы получим окончательное выражение интенсивности

$$J[\omega_k] = J_0 \frac{(\omega + \omega_k)^4}{c^4} \frac{1}{r^2} \Re \left(\frac{\Omega[\omega_k]}{3} \cos^2 \psi + \Omega[\omega_k] \right). \quad (21)$$

Следует еще учесть, что в формуле (11) не учитывается часть поляризуемости с шаровой симметрией. Последняя согласно главы VII, § 82, входит лишь в чистое рассеяние Тиндаля и чисто колебательный эффект Рамана. Полная формула интенсивности таким образом гласит

$$J[\omega_k] = J_0 \frac{(\omega + \omega_k)^4}{c^4} \frac{1}{r^2} \Re \left(\left(\Omega_0[\omega_k] + \frac{\Omega[\omega_k]}{3} \right) \cos^2 \psi + \Omega[\omega_k] \right). \quad (22)$$

Здесь $\Omega_0[0] = \Omega_0^T$ есть сферически симметричная часть связанной с молекулой поляризуемости. Далее

$$\Omega_0[\pm \omega_s] = \Omega_0^R \text{ и } \Omega_0[\pm 2\omega_r] = \Omega_0[\pm \omega_s \pm 2\omega_r] = 0.$$

Для контроля можно сложить $J[0]$ и $J[\pm 2\omega_r]$. Сумма должна равняться вычисленному в главе VII, § 81 (52) рассеянию Тиндаля, если пренебречь различием между множителями $(\omega + \omega_k)^4$. Это происходит вследствие того, что мы предполагали там, что молекулы неподвижны в пространстве и, что то же самое, принимали, что вращение бесконечно медленно, и линии чистого вращательного Раман-эффекта имеют ту же частоту, что линии

чистого эффекта Тиндаля. Таким образом интенсивности $J[\pm 2\omega_r]$ уже содержатся в формуле (52), глава VII, § 81¹. Подобным же образом сумма $J[\omega_s]$ и $J[\omega_s \pm 2\omega_r]$ дает формулу (52), глава VII, § 81.

Укажем еще, что не имеющая шпура часть Ω поляризуемости всегда входит в те линии Рамана (20а, с), для которых сдвиг частот не зависит от частоты вращения ω_r . Если сферически симметричная составляющая Ω_0 поляризуемости равна 0 [и если пренебречь множителями $(\omega + \omega_k)^4/(\omega + \omega_{k'})^4$], мы получим

$$\frac{J[0]}{J[2\omega_r]} = \frac{J[\omega_s]}{J[\omega_s + 2\omega_r]} = \frac{2}{3}. \quad (23)$$

Если Ω_0 не равно нулю, то отношение $J[0]/J[2\omega_r]$ и соответственно $J[\omega_s]/J[\omega_s + 2\omega_r]$ всегда больше $\frac{2}{3}$.

Таким образом для двухатомных молекул во вращательном эффекте Рамана всегда наблюдается независимая от вращения линия (20а или 20с). По обе стороны от нее могут также появиться две симметричные ветви (20b) и (20d), расстояние между которыми вдвое больше, чем в двойных полосах Бьерума в инфракрасном спектре.

II. МНОГОАТОМНЫЕ МОЛЕКУЛЫ *

В многоатомных молекулах исследование инфракрасных колебаний и Раман-эффекта значительно сложнее, но гораздо интереснее. Центральная проблема заключается в следующем: какие можно сделать выводы из соображений симметрии относительно инфракрасного и рамановского спектра? И наоборот: зная инфракрасный и рамановский спектр, что можно сказать о симметрии молекулы?²

1. Свойства симметрии и правила отбора

Имея в виду эту цель, мы должны сказать еще несколько слов относительно симметрических свойств колебаний.

Как мы видели в главе VII, § 82, каждой собственной частоте $\omega^{(i)}$ соответствует некоторое число линейных независимых собственных колебаний, каждое из которых состоит из определенной комбинации перемещений $e_k^{(i)}$ N молекул, здесь $e_k^{(i)}$ есть относенный к точке k системы собственный вектор³. Совокупность всех $e_k^{(i)}$ ($k = 1, 2, \dots, N$) при одном определенном собственном

¹ В доказательство этого утверждения см. также главу VII, § 82, стр. 540.

² Мы не будем останавливаться здесь на чертах инфракрасного и рамановского спектра, зависящих от количественных свойств молекулы (например, от характера предполагаемого закона сил), т. е. не будем вычислять частоты и интенсивности получающихся линий.

³ На фигурах мы показываем истинные перемещения, а не нормированные собственные векторы (различие между ними: множитель \sqrt{m}).

колебании можно рассматривать как *собственный вектор* в *3N-мерном конфигурационном пространстве*. Число линейно независимых собственных векторов $e_k^{(j)}$, соответствующих некоторой собственной частоте $\omega^{(j)}$, называется *числом вырождения* $\omega^{(j)}$; если оно равно единице, то говорят, что данное собственное колебание *не вырождено*.

Выражение, что молекула обладает известной *симметрией*, означает, что существуют известные *повороты, отражения*¹ или *зеркальные повороты*², которые, будучи произведены над покоящейся молекулой, вызывают лишь перестановку одинаковых ядер. Если молекула не находится в состоянии покоя, то соответствующий поворот, отражение или зеркальный поворот изменяет перемещение ядер.

Под *симметрической операцией* будем подразумевать следующее: сначала производится некоторое вращение, отражение или поворот с отражением, который вызвал бы в покоящейся молекуле лишь перестановку одинаковых ядер, а затем производится перестановка ядер, возвращающая каждое ядро в положение, близкое к начальному положению покоя. Заметим, что каждая симметрическая операция не изменяет скалярной величины, являющейся функцией перемещения ядра (к векторам и тензорам это не относится, так как их составляющие изменяются при повороте, отражении или зеркальном повороте).

Если молекула находится в состоянии покоя, то симметрическая операция всегда переводит ее в само себя. Но если молекула находится, например, в состоянии наибольшей элонгации при собственном колебании, и положения атомных ядер описываются системой собственных векторов $e_k^{(j)}$ или, короче, „собственным вектором $e_k^{(j)}$ в конфигурационном пространстве“, то результат симметрической операции может быть различен в зависимости от вида собственного колебания. Собственный вектор $e_k^{(j)}$ может оказаться неизменным после симметрической операции; он может также, например после отражения, изменить знак или перейти в некоторое новое положение. Частота колебания, которую можно представить как скалярную функцию перемещения, не изменится при симметрической операции. В последнем случае, когда собственный вектор переходит в новое перемещение, мы можем рассматривать это новое перемещение как собственный вектор той же самой частоты колебания. Одной и той же частоте соответствует несколько собственных колебаний: это явление называется *вырождением*; его называют *необходимым вырождением*, так как оно обусловлено симметрией молекулы. Наряду с этим могут существовать вырождения,

¹ Отражения могут происходить от плоскости или от центра симметрии.

² Зеркальный поворот есть вращение вокруг некоторой оси и последующее отражение от перпендикулярной к ней плоскости.

необусловленные молекулярной симметрией; их называют *случайными вырождениями*.

При случайном вырождении не все перемещения, возникающие вследствие симметрической операции, взаимно ортогональны. В общем случае они не будут даже линейно независимыми, но мы можем, разумеется, выбрать из них некоторое число ортогональных собственных векторов, из которых все остальные могут быть образованы линейно.

Подытоживая, мы можем сказать: собственный вектор либо не изменяется при всех симметрических операциях, и тогда колебание называется *полно симметричным*; либо он изменяет знак при известных симметрических операциях, тогда о колебании говорят, что оно *антисимметрично относительно соответствующей операции*; либо же существует несколько собственных векторов, переходящих друг в друга при симметрической операции, и тогда колебание *вырождается*.

Случайное вырождение может возникнуть вследствие того, что силы, действующие на ядра, случайно удовлетворяют некоторым условиям¹. Точное выполнение таких условий было бы бесконечно невероятным и поэтому никогда в действительности не происходит. При вычислении нормальных координат в основу был положен гармонический закон сил. Но в действительности силы несколько ангармоничны, вследствие чего частоты не могут быть точно определены, но зависят отчасти от амплитуд. Если две частоты настолько близки, что разность между ними одного порядка с этой неточностью, то возникают упомянутые новые явления. Однако для молекул, состоящих из немногих атомов, этот случай встречается сравнительно редко, почему мы не будем останавливаться на этом явлении.

Общая задача заключается в определении того, каковы должны быть симметрические свойства колебания, для того чтобы они могли наблюдаться в инфракрасном или рамановском спектре. Иными словами, мы должны исследовать, изменяется ли электрический момент или поляризуемость молекулы при колебании с данной симметрией и как именно. Исчерпывающий ответ на этот вопрос может быть дан только после всестороннего разбора каждой возможной симметрии; это можно сделать с помощью некоторых общих теорем. Мы рассмотрим здесь только несколько примеров таких теорем и затем применим их к двум очень простым типам молекул.

В главе VII, § 82 было показано, что если шпур тензора поляризуемости исчезает, $\Omega_0 = 0$, то соответствующая линия имеет степень деполаризации $\Delta = \frac{3}{4}$. Таким образом исчезновение шпура легко доказать экспериментально. В случае равенства нулю шпура можно доказать следующую теорему,

¹ На этом основано, например, то, что для CO_2 частота распадается на две близкие. Подобное же наблюдается для CCl_4 [см. E. Fermi, Z. Physik, т. 71 (1931), стр. 250].

приняв, что составляющие поляризуемости линейно зависят только от перемещений (в первом приближении это допущение хорошо подтверждается).

1. Теорема: *шпур изменения поляризуемости исчезает для всех колебаний кроме полно симметричных.*

Докажем сперва лемму. Рассмотрим собственный вектор $e_k^{(j)}$ и произведем над ним симметрическую операцию S_i из группы операций, переводящих покоящуюся молекулу в самое себя. Перемещение, возникающее вследствие этого, обозначим $S_i e_k^{(j)}$. Мы получим следующую лемму:

Лемма: *если $e_k^{(j)}$ не полно симметричное колебание, то*

$$\sum S_i e_k^{(j)} = 0, \quad (24)$$

где суммирование распространено на все симметрические операции ¹.

Введем для рассматриваемой величины сокращенное обозначение

$$\overline{e_k^{(j)}} = \sum_i S_i e_k^{(j)}. \quad (25)$$

Тогда $\overline{e_k^{(j)}}$ есть собственный вектор, соответствующий тому же собственному значению, что и $e_k^{(j)}$ и обладающий свойством оставаться инвариантным для всех симметрических операций

$$S_i \overline{e_k^{(j)}} = \overline{e_k^{(j)}}. \quad (26)$$

Действительно, применив S_l к правой части (25), мы получим $\sum_i (S_l S_i) e_k^{(j)}$, где $(S_l S_i)$ есть симметрический оператор, означающий применение S_i , а затем S_l ; если S_i обозначает последовательно все симметрические операции, то то же происходит с $(S_l S_i)$, и мы можем написать вместо него снова S_i , так как индекс суммы не играет роли.

Доказательство нашей леммы состоит в следующем: предположим, что $e_k^{(j)}$ не полно симметричный вектор, а $\overline{e_k^{(j)}} \neq 0$; тогда мы можем найти собственный вектор $e_k^{(j')}$, соответствующий той же собственной частоте, что и $e_k^{(j)}$, но из которого с помощью всех операций S_i можно образовать систему собственных векторов $S_i e_k^{(j')}$, линейно независимую от системы $S_i e_k^{(j)}$; в этом случае мы получили бы случайное вырождение, а так как оно исключается, то должно быть $\overline{e_k^{(j)}} = 0$.

Этот вектор $e_k^{(j')}$ построен так

$$e_k^{(j')} = e_k^{(j)} - \frac{1}{N} \overline{e_k^{(j)}}, \quad (27)$$

где N есть число всех симметрических операций, включая тождество. С помощью операции S_i получаем из него согласно (26) вектор

$$S_i e_k^{(j')} = S_i e_k^{(j)} - \frac{1}{N} \overline{e_k^{(j)}}. \quad (28)$$

Мы видим, что совокупность всех векторов (28) (к которой принадлежит и вектор (27), так как в S_i входит тождественное преобразование) переходит сама в себя при всех симметрических операциях. Далее все $S_i e_k^{(j')}$, будучи линейными комбинациями $S_i e_k^{(j)}$, относятся к одной и той же собственной частоте. Наконец, $S_i e_k^{(j')}$ равны 0 тогда и только тогда, когда $e_k^{(j)}$ полно симметричен, т. е. когда $S_i e_k^{(j)} = e_k^{(j)}$. Совершенно очевидно, что это условие выполняется при $S_i e_k^{(j)} = 0$; что оно необходимо, видно из следующего.

Если $S_i e_k^{(j)} = 0$, то при $S_i = 1$ из (27) следует:

$$e_k^{(j)} = \frac{1}{N} \overline{e_k^{(j)}}$$

и из (28)

$$S_i e_k^{(j)} = \frac{1}{N} \overline{e_k^{(j)}}.$$

Следовательно, $e_k^{(j)} = S_i e_k^{(j)}$, т. е. $e_k^{(j)}$ полно симметричен.

Положим теперь, что $e_k^{(j)}$ не полно симметричен, т. е.

$$S_i e_k^{(j)} \neq 0. \quad (29)$$

Но согласно (28) сумма этих величин всегда равна 0:

$$\sum_i S_i e_k^{(j)} = 0. \quad (30)$$

Если бы $\overline{e_k^{(j)}} \neq 0$, то система векторов $S_i e_k^{(j')}$ непременно отличалась бы от системы $S_i e_k^{(j)}$ и была бы линейно независимой от нее. Для доказательства последнего, покажем, что каждый вектор $S_i e_k^{(j')}$ ортогонален к линейной комбинации $\overline{e_k^{(j)}}$ векторов $S_i e_k^{(j)}$.

Так как каждая скалярная функция перемещения остается без изменения при симметрических операциях, то скалярные

¹ Под ними подразумеваются (см. тождество 1) такие симметрические операции, которые вообще не изменяют молекулу.

произведения должны удовлетворять соотношению

$$\begin{aligned}\sum_k \bar{e}_k^{(j)} \cdot S_i e_k^{(j')} &= S_i \sum_k \bar{e}_k^{(j)} \cdot S_i e_k^{(j')} = \frac{1}{N} \sum_i \sum_k S_i \left(\bar{e}_k^{(j)} \cdot S_i e_k^{(j')} \right) = \\ &= \frac{1}{N} \sum_k \sum_i S_i \bar{e}_k^{(j)} \cdot (S_i S_i) e_k^{(j')} = \frac{1}{N} \sum_k \sum_i \bar{e}_k^{(j)} \cdot (S_i S_i) e_k^{(j')} = \\ &= \frac{1}{N} \sum_k \bar{e}_k^{(j)} \sum_i (S_i S_i) e_k^{(j')} = \frac{1}{N} \sum_k \bar{e}_k^{(j)} \sum_i S_i e_k^{(j')} = 0.\end{aligned}$$

Таким образом при $\bar{e}_k^{(j)} \neq 0$ должно было бы иметь место случайное вырождение, и формула (24) доказана.

В общем случае, когда случайные вырождения не исключаются, лемма должна быть сформулирована так: $\bar{e}_k^{(j)}$ равен 0 для каждого колебания, из которого нельзя выделить ни одного полно симметричного колебания.

Теперь легко доказать нашу теорему об исчезновении шпура. Обозначим $\alpha(e_k^{(j)})$ изменение шпура тензора поляризации при перемещении $e_k^{(j)}$. Это изменение в качестве скалярной величины не изменяется при симметрической операции, поэтому

$$\alpha(e_k^{(j)}) = \alpha(S_i e_k^{(j)}) = \frac{1}{N} \sum_i \alpha(S_i e_k^{(j)}). \quad (31)$$

Далее мы предположили, что поляризуемость и, следовательно, также шпур линейно зависят от перемещений, следовательно,

$$\alpha(e_k^{(j)}) = \frac{1}{N} \sum_i \alpha(S_i e_k^{(j)}) = \frac{1}{N} \alpha\left(\sum_i S_i e_k^{(j)}\right) = 0. \quad (32)$$

Шпур изменения поляризуемости исчезает, как мы утверждали. Отсюда следует, что пропорциональная α^2 величина также равна 0.

$$\mathfrak{Q}_0(e_k^{(j)}) = 0. \quad (33)$$

Теперь мы приходим к

2. Теорема: если некоторое колебание антисимметрично относительно какого-нибудь элемента симметрии, то шпур соответствующего изменения поляризуемости для основной частоты строго равен 0 (т. е. не только в предположении, что поляризуемость линейно зависит от перемещений). Далее, равны 0 шпуры тех коэффициентов Фурье поляризуемости, которые соответствуют нечетным кратным данной основной частоты¹. Другими словами: степень деполаризации основного тона и четных обертонов колебания строго равна $\frac{3}{4}$.

¹ Так как основной частоте соответствует основной тон, двойной частоте — первый обертон, тройной частоте — второй обертон, то мы видим, что вообще четному кратному основному тону соответствует нечетный обертон, и наоборот, нечетному кратному основному тону четный обертон. Такой способ выражения зависимости несколько неудобен, но едва ли может быть заменен иным.

Доказательство весьма просто: через полпериода данного колебания перемещение меняет знак. Но так как колебание антисимметрично, то существует симметрическая операция, при которой перемещение также меняет знак. Через полпериода колебание молекулы находится в положении, в которое его могла бы перевести из начального положения в начале колебания также симметрическая операция. Отсюда следует, что шпур поляризуемости должен быть одинаковым в обоих положениях. Так как, следовательно, через полпериода шпур поляризуемости принимает первоначальное значение, то нечетные кратные основной частоты (меняющей знак через полколебания) должны отсутствовать в ряде Фурье.

О частном случае, когда имеется центр симметрии, можно сказать еще больше. В этом случае исчезает не только шпур для основного тона и четных обертонов колебаний, антисимметричных относительно центра симметрии, что означало бы, что степень деполаризации равна $\frac{3}{4}$, но эти частоты вообще должны отсутствовать в Раман-эффекте. Например, при отражении от центра симметрии не только шпур, но весь тензор поляризуемости остается без изменения, и поэтому все вышесказанное относительно коэффициента Фурье применимо к каждой составляющей поляризуемости.

При наличии центра симметрии для инфракрасного спектра также имеются важные правила отбора. Дипольный момент изменяет знак при отражении от центра симметрии. Отсюда непосредственно вытекает, что нормальные колебания, симметричные относительно центра симметрии, должны отсутствовать в инфракрасном спектре, и он может содержать только колебания, меняющие знак при отражении. Заметим, кроме того, что в этих антисимметрических колебаниях нечетные обертоны должны отсутствовать. Это объясняется тем, что относящиеся к этим обертонам члены в ряде Фурье через каждые полколебания опять принимают первоначальный знак, тогда как перемещения и, следовательно, также дипольный момент, при этом меняют знак. Мы видим, что в этом случае в инфракрасном спектре отсутствуют именно те частоты, которые возможны в Раман-эффекте, они могут быть, однако, запрещенными благодаря другим правилам отбора. На поведении комбинационных колебаний, в которые входит сумма частот нормальных колебаний, мы не будем больше останавливаться.

2. Примеры многоатомных молекул

Рассмотрим теперь частные примеры.

а) N_2O . Прежде всего возьмем молекулу N_2O . Мы предполагали относительно нее (основываясь главным образом на отсутствии у нее постоянного дипольного момента), что она имеет

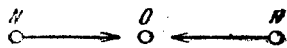
вытянутую симметричную форму, т. е., что ее три атома расположены по прямой на равных расстояниях в последовательности N—O—N.

Но из наблюдений инфракрасного спектра можно заключить, что это расположение неверно. Мы покажем сейчас, насколько эта схема противоречит инфракрасному спектру, и какая схема соответствовала бы ему.

Определим сначала нормальное колебание молекулы, т. е. определим перемещения $e_{kX}^{(j)}$, удовлетворяющие уравнению (17), глава VII, § 82

$$\mu_j e_{kX}^{(j)} = \sum_I \sum_Y K_{XY}^{kl} e_{lY}^{(j)} \quad (34)$$

Воспользовавшись молекулярной симметрией, мы можем найти без вычисления все нормальные колебания. Мы ищем такое нормальное колебание, которое определенным образом преобразуется симметрическими операциями.



Фиг. 239. Симметрично прямолинейная модель N_2O . Вполне симметричные колебания (ν_1).



Фиг. 240. Симметрично прямолинейная модель N_2O , перенос вдоль оси фигуры.

Например, определим сначала для N_2O *полно симметрическое колебание*. Очевидно, существует только одно *полно симметрическое* перемещение, именно такое, при котором атом O остается в покое, когда оба атома N приближаются по оси на одинаковое расстояние к атому O (см. фиг. 239). Обозначим его частоту ν_1 .

Затем определим нормальное колебание, которое остается неизменным при повороте вокруг оси, а при отражении от центра симметрии, т. е. от атома O, меняет знак. Таким перемещением является, конечно, *перенос вдоль оси фигуры*, изображенный на фиг. 240. Далее видим, что это перемещение удовлетворяет уравнению (34), именно, при $\mu_j = 0$. Правая часть этого уравнения выражает силу, действующую при данном перемещении, а в случае переноса эта сила равна 0. В этом смысле перенос можно называть *несобственным* нормальным колебанием. Он безусловно принадлежит к числу собственных векторов $e_{kX}^{(j)}$.

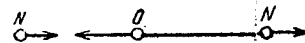
Но существуют также другие перемещения, обладающие той же симметрией, что и перенос. Чтобы выбрать из них собственный вектор, вспомним уравнение (18), глава VII, § 82

$$\sum e_l^{(j)} e_l^{(h)} = \delta_{jh} \quad (35)$$

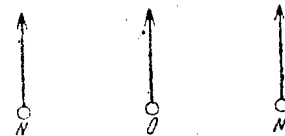
Если мы выберем для $e_l^{(h)}$ перенос, то мы получим для $e_l^{(j)}$ условие, являющееся ни чем иным, как теоремой о центре тяжести.

Существует только одно перемещение, обладающее требуемой симметрией, и для которого центр тяжести остается неизменным; обозначим его ν_2 . Оно изображено на фиг. 241. Перемещение атома N относится к перемещению O, как вес атома O к удвоенному весу атома N.

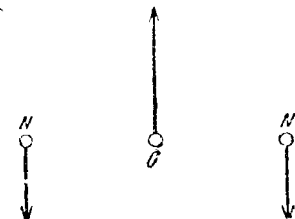
Дальше определим колебание, неизменяющееся при повороте вокруг оси фигуры, но симметричное относительно плоскости,



Фиг. 241. Симметрично прямолинейная модель N_2O . Инвариантное относительно центра тяжести колебание по оси фигуры (ν_2).



Фиг. 242. Симметрично прямолинейная модель N_2O . Перенос перпендикулярно к оси фигуры.



Фиг. 243. Симметрично прямолинейная модель N_2O . Двукратно вырожденное несобственное нормальное колебание перпендикулярно к оси фигуры (ν_3).

проходящей через ось (например плоскости чертежа), и кроме того антисимметричное при отражении от центра симметрии¹. Несобственное нормальное колебание, удовлетворяющее такому преобразованию, есть изображенный на фиг. 242 перенос. Искомое собственное колебание должно быть ортогонально к нему, т. е. должно удовлетворять теореме о центре тяжести. Этим самым оно опять однозначно определяется, и мы получаем изображенное на фиг. 243 колебание ν_3 . Абсолютные величины перемещений для него такие же, как для ν_2 . Очевидно, что

¹ Легко видеть, что нет необходимости в существовании собственно нормальных колебаний, которые преобразуются при симметричных операциях произвольно заданным образом. Например, для двухатомной молекулы из одинаковых атомов существует только одно собственное нормальное колебание — именно *полно симметричное*. Ко всем остальным свойствам преобразования относятся только *несобственные* нормальные колебания (законом или свойством преобразования нормального колебания называется закономерность, которой подчиняется нормальное колебание при симметрической операции).

Мы выбираем здесь законы преобразования с таким расчетом, чтобы они привели нас к собственно нормальным колебаниям. Например, если бы мы потребовали, чтобы перемещение было симметрично относительно центра симметрии, то мы бы получили только одно несобственно нормальное колебание именно *вращение*.

ν_4 двукратно вырождено, так как колебание может точно также происходить перпендикулярно к плоскости чертежа.

Итак мы нашли четыре нормальных колебания, именно ν_1 , ν_2 и ν_3 ; последнее следует считать за два колебания. Других собственных нормальных колебаний не может быть, так как полное число нормальных колебаний равно разности между числом степеней свободы (т. е. 9) и пятью несобственными нормальными колебаниями (три переноса и двумя вращениями). Таким образом мы определили все четыре колебания.

Основной тон ν_2 и ν_3 запрещен в эффекте Рамана, так как эти колебания ведут себя антисимметрично при отражении от центра симметрии; колебание же ν_1 запрещено для инфракрасного спектра, так как оно не меняет знака при той же операции¹. В ν_2 и ν_3 дипольный момент может изменяться, следовательно, эти колебания могут содержаться в инфракрасном спектре; в колебании же ν_1 изменяется поляризуемость, следовательно, оно должно входить в спектр Рамана.

И действительно, была найдена рамановская линия при 1282 см^{-1} ,² которая должна соответствовать ν_1 . Но оказалось³, что N_2O имеет в инфракрасном спектре три сильные полосы поглощения, а именно: при 592 см^{-1} , 1290 см^{-1} и 2220 см^{-1} . Таким образом колебание, встречающееся в Раман-эффекте и соответствующее, следовательно, ν_1 , встречается также и в инфракрасном спектре, что резко противоречит нашим теоретическим выводам.

Отсюда следует заключить, что наша гипотеза о расположении атомов в молекуле N_2O не соответствует действительности.

Для нахождения правильной модели молекулы некоторым указанием может служить то, что молекула N_2O при столкновении с электроном может распасться на N_2 и O .⁴ Отсюда можно заключить, что оба атома N были расположены в молекуле N_2O рядом. И действительно, можно удовлетворительно объяснить спектр N_2O , полагая, что три атома лежат на прямой в последовательности $\text{N}-\text{N}-\text{O}$.⁵ Мы должны предположить, что расположение атомов линейно, потому что только в этом

¹ Непосредственно очевидно, что дипольный момент не изменяется при полно симметричном колебании ν_1 .

² R. G. Dickinson, R. T. Dillon и F. Rasetti, Physic. Rev., т. 34 (1929), стр. 582. Вторая рамановская линия, уже противоречащая выведенному нами правилу отбора, была найдена при $2 \cdot 16\text{ см}^{-1}$. S. Bhagavantam, Nature, Lond., т. 127 (1931), стр. 817.

³ E. F. Barker и E. K. Plyler, Physic. Rev., т. 38 (1931), стр. 1827.

⁴ См. резюме работы: H. D. Smyth, Rev. Moderne Physics, т. 3 (1931), стр. 389.

⁵ Симметрия молекулы не дает никаких оснований для того, чтобы перманентный дипольный момент такой модели равнялся нулю. То, что экспериментально было установлено отсутствие дипольного момента, объясняется вероятно тем, что он случайно очень мал. Впрочем, инфракрасный и рамановский спектры можно было бы также хорошо объяснить с помощью линейной схемы $\text{N}-\text{O}-\text{N}$, причем однако атомы N должны были бы находиться на различных расстояниях от O. Но это противоречило бы вышеупомянутому опыту с электронным ударом.

случае можно понять простую ротационную структуру инфракрасных колебательных полос. Если бы молекула имела вид ломаной, то ее три момента инерции были бы различны, и ее вращение происходило бы в основном как движение асимметричного волчка. Но в этом случае, ввиду сложности движения, ряд Фурье для вращательного движения содержал бы больше членов, и спектр был бы чрезвычайно сложным. Мы не будем здесь останавливаться на трудном вопросе, как выглядит ротационная структура в случае ломаной схемы. Мы ограничимся рассмотрением линейной схемы, причем, как мы уже говорили, результаты совпадают с опытом.

Для схемы $\text{N}-\text{O}-\text{N}$ мы могли точно задать нормальные колебания. Это объяснялось тем, что каждому закону преобразования соответствовало только одно нормальное колебание, и все эти колебания определялись соображением симметрии. При схеме $\text{N}-\text{N}-\text{O}$ это, вообще говоря, невозможно. Нормальное колебание зависит от сил, удерживающих ядра в положениях равновесия и немогущих быть заранее определенными.

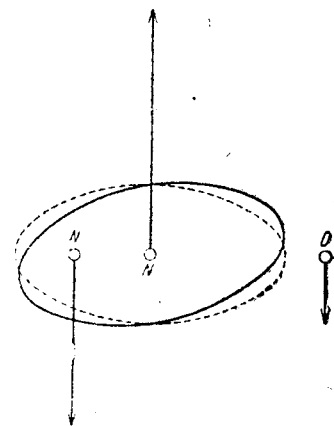
Однако колебанию ν_3 соответствует перемещение, которое и в данном случае может быть однозначно определено; это перемещение симметрично относительно плоскости чертежа, в которой должна лежать ось молекулы, *антисимметрична* ко второй плоскости, проходящей через молекулярную ось и перпендикулярной к плоскости чертежа, и ортогональна ко всем несобственным нормальным колебаниям¹. Разумеется, ν_3 опять будет двукратно вырожденным (см. фиг. 244).

Колебания ν_1 и ν_2 обладают только той симметрией, что они не изменяются при повороте вокруг оси фигуры. Форма перемещений при ν_1 и ν_2 зависит от закона сил.

Что касается правил отбора, то все колебания встречаются как в инфракрасном, так и в рамановском спектре, так как в каждом из упомянутых перемещений может изменяться и дипольный момент, и поляризуемость.

Как в инфракрасном спектре, так и в Раман-эффекте ротационная структура для колебаний ν_1 и ν_2 должна быть совершенно такой же, как в двухатомной молекуле. Именно при этих

¹ При определении его нужно пользоваться не только законом импульсов, как для предыдущей схемы, но и законом момента импульса, т. е. учитывать, что колебание ортогонально к несобственному нормальному колебанию, соответствующему вращению.



Фиг. 244. Антисимметрично прямолнейная модель N_2O . Двукратно вырожденное несобственное нормальное колебание перпендикулярно к оси фигуры (ν_3). Измерение поляризуемости этого колебания.

колебаниях движение совершается вдоль молекулярной оси и, следовательно, дипольный момент и поляризуемость изменяются в основном так же, как в двухатомной молекуле.

Наоборот, для колебания ν_s соотношения будут совершенно иными, чем в двухатомных молекулах. Рассмотрим сначала инфракрасный спектр. Электрический момент перпендикулярен к оси молекулы и, следовательно, не перпендикулярен к оси вращения (как это было в двухатомной молекуле), а образует с ней угол ϑ , причем каждое ϑ можно считать равновероятным. Для составляющих электрического момента в неподвижной системе получим [координатная система выбрана так же, как в (9)]

$$\left. \begin{aligned} p_x &= 2p^{(1)} \sin \vartheta \cos \omega_s t \cdot \cos \omega_r t = p^{(1)} \sin \vartheta [\cos (\omega_s + \omega_r) t + \cos (\omega_s - \omega_r) t], \\ p_y &= 2p^{(1)} \sin \vartheta \cos \omega_s t \cdot \sin \omega_r t = p^{(1)} \sin \vartheta [\sin (\omega_s + \omega_r) t - \sin (\omega_s - \omega_r) t], \\ p_z &= 2p^{(1)} \cos \vartheta \cos \omega_s t. \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

Мы видим, что кроме ветвей, имевшихся также для двухатомных молекул, здесь получается, кроме того, несдвинутая колебательная линия. Для того чтобы вычислить ее, возведем в квадрат моменты и возьмем среднее по ϑ ; мы увидим, что сумма интенсивностей сдвинутых линий ($\omega_s \pm \omega_r$) равна интенсивности несмещенной линии. Этот результат можно объяснить, разложив изменение дипольного момента на две составляющие, из которых одна колеблется вдоль оси вращения, а другая перпендикулярна к ней. На первую из этих составляющих вращение не оказывает никакого влияния, и она вызывает несмещенную линию. Вторая составляющая ведет себя совершенно так же, как электрический момент двухатомной молекулы.

Относительно Раман-эффекта колебания ν_s несомненно прежде всего, что изменение поляризуемости имеет только лишнюю шпура часть, так как ν_s вырождено, а мы показали выше, что шпур изменения поляризуемости равен нулю для всех колебаний, кроме полно симметричных.

Обозначим ось молекулы опять Z . Пусть X' есть направление, в котором изменяется электрический момент. Пусть Y' перпендикулярно X' и Z . Тогда мы видим, что только составляющая $\alpha_{X'Z}^R$ изменения поляризуемости отлична от нуля, так как только она имеет те же симметрические свойства, что и нормальное колебание, и так как только она симметрична относительно плоскости $X'Z$ и антисимметрична относительно плоскости $Y'Z$. Это означает, что главные оси поляризуемости не изменяются при колебании ν_s по величине, а только по направлению. Тензор поляризуемости колеблется в плоскости $X'Z$, как показано на фиг. 244. Пусть ось вращения есть опять X , а ϑ угол между X и X' . Тогда в силу схемы, стр. 721 и формулы (6) (глава VII, § 82) мы получим уравнения, аналогичные (15)

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{xx} &= 2\alpha_{YZ} \cos \omega_r t \sin \omega_r t = \alpha_{YZ} \sin 2\omega_r t, \\ \alpha_{yy} &= -2\alpha_{YZ} \sin \omega_r t \cos \omega_r t = -\alpha_{YZ} \sin 2\omega_r t, \\ \alpha_{zz} &= 0; \\ \alpha_{yz} &= \alpha_{XZ} \sin \omega_r t, \\ \alpha_{zx} &= \alpha_{XZ} \cos \omega_r t, \\ \alpha_{xy} &= -\alpha_{YZ} (\cos^2 \omega_r t - \sin^2 \omega_r t) = -\alpha_{XZ} \cos 2\omega_r t. \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

Мы должны опять образовать инварианты $\bar{\alpha}[\omega_k]$ и затем взять среднее по всем значениям ϑ . При этом следует иметь в виду, что

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{XZ} &= \cos \vartheta \cdot \alpha_{X'Z}, \quad \alpha_{X'Z} = \alpha_{X'Z}^T + 2\alpha_{X'Z}^R \cos \omega_s t, \\ \alpha_{YZ} &= \sin \vartheta \cdot \alpha_{X'Z}; \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

α_{XZ} и α_{YZ} входят в $\bar{\alpha}[\omega_k]$ в виде квадрата, и поэтому усреднение по ϑ дает множитель $\frac{1}{2}$. Мы получаем

$$\left. \begin{aligned} \bar{\alpha}[\pm \omega_s] &= 0, \\ \bar{\alpha}[\pm \omega_s, \pm \omega_r] &= \frac{1}{20} (\alpha_{X'Z}^R)^2, \\ \bar{\alpha}[\pm \omega_s, \pm 2\omega_r] &= \frac{1}{20} (\alpha_{X'Z}^R)^2. \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

Получается такой результат, как если бы в этом случае несмещенная колебательная линия выпадала из Раман-эффекта, причем появляются четыре вращательные ветви равной интенсивности ($\pm \omega_r$ и $\pm 2\omega_r$). Таким образом в спектре имеется и *простая* ротационная частота; ось молекулы при колебании уже не является главной осью поляризуемости, и последняя уже не возвращается в первоначальное положение после поворота на 180° , как в двухатомной молекуле¹.

Мы уже говорили выше, что ротационная структура в инфракрасном спектре совпадает с теорией при предположении, что молекула построена по схеме $N-N-O$. При частотах 1290 см^{-1} и 2220 см^{-1} находятся двойные полосы Бьеррума, а при 592 см^{-1} находится полоса с тремя максимумами. В Раман-эффекте до сих пор наблюдались лишь колебания 1282 см^{-1} и 2226 см^{-1} . Измерения деполяризации и исследования ротационной структуры до сих пор не производились.

б) Тетраэдрические молекулы AB_4 . В качестве второго примера рассмотрим молекулы типа AB_4 , где атомы B образуют тетраэдр, в центре которого находится атом A . Такой молекулой обладает, например, четыреххлористый углерод.

¹ Исчерпывающий квантотеоретический разбор этой и аналогичных ротационных структур в Раман-эффекте дают Г. Плачек и Э. Теллер. (Z. Physik).

Определим сначала нормальные колебания такой молекулы. Здесь также оказывается, что симметрические свойства не определяются однозначно, а зависят еще от сил, действующих между атомами. Но нас интересует не столько сама форма нормальных колебаний, сколько число линейно независимых колебаний, относящихся к каждому симметрическому свойству. Это число, очевидно, не зависит от принятых допущений относительно сил. Поэтому мы можем выбирать произвольно сами силы¹ (отказываясь таким образом, как мы уже подчеркивали на стр. 725, сноска 2, от количественного определения свойств спектра). Соответственно этому, мы зададим силы так, чтобы нормальные колебания были возможно проще.

Пусть атомы B связаны между собой большими силами и образуют трудно деформируемый тетраэдр, в центре которого находится атом A , удерживаемый гораздо более слабыми силами.

При таком допущении анализ колебания нашей модели распадается на две отдельные проблемы.

I. Вопрос о движении постоянного тетраэдра относительно слабо связанного атома A , находящегося в центре.

II. Вопрос о движении четырех атомов B друг относительно друга.

Так как согласно нашему допущению атом A удерживается в центре слабой силой, то колебание I должно иметь малую частоту. Наоборот, колебания II происходят с большой частотой, так как атомы B связаны большими силами; поэтому рассматривая движение этого типа, можно считать, что атом A отсутствует.

Мы ищем нормальные колебания для обоих типов движения.

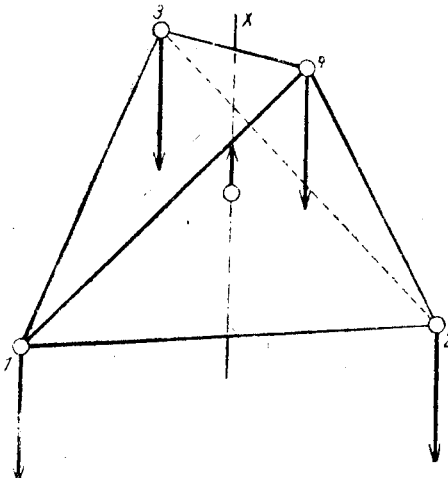
I. Относительному движению атома A по отношению к неизменному тетраэдру соответствуют три степени свободы. Существует только одно нормальное колебание, которое *троекратно вырождено*.

Потенциальная энергия должна быть независима от того, к какому из четырех B атомов приближается атом A ; так как она является квадратичной функцией составляющих перемещения атома A , она должна быть центрально симметричной, и, следовательно, может зависеть только от расстояния атома A от центра тетраэдра. Таким образом колебание происходит в любом направлении с одинаковой частотой; это *троекратно вырожденное нормальное колебание*. Обозначим его $\nu_3^{(1)}$.

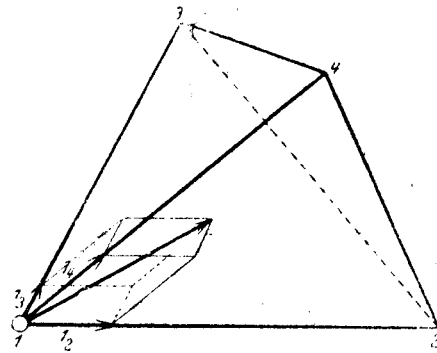
На фиг. 245 изображено такое колебание. Атом A движется по линии, соединяющей середины двух ребер тетраэдра. Легко видеть, что эта прямая является зеркально-поворотной осью тетраэдра. В дальнейших рассуждениях она будет играть большую роль; обозначим ее X . Очевидно, отношение перемещений

атомов B к перемещению атома A равно отношению атомного веса A к четырехкратному атомному весу B .¹

II. Чтобы описать колебание самого тетраэдра, перенумеруем вершины 1, 2, 3, 4. Перемещения атомов B разложим в каждой вершине на косоугольные составляющие по трем направлениям тетраэдра. Обозначим эту косоугольную систему,



Фиг. 245. Тетраэдрическая молекула. Троекратно вырожденное нормальное колебание ($\nu_3^{(1)}$).



Фиг. 246. Разложение вектора на составляющие по ребрам тетраэдра.

например в точке 1, следующим образом: l_2, l_3, l_4 . На фиг. 246 показано разложение на составляющие произвольного вектора в точке 1.

В дальнейшем нам понадобится скалярное произведение двух векторов, разложенных на такие составляющие. Скалярное произведение двух векторов (ξ', η, ζ') и (ξ'', η'', ζ'') в некоторой произвольной косоугольной системе ξ, η, ζ выражается формулой

$$(\xi', \eta', \zeta') \cdot (\xi'', \eta'', \zeta'') = \xi' \xi'' + \eta' \eta'' + \zeta' \zeta'' + (\xi' \eta'' + \eta' \xi'') \cos(\xi, \eta) + (\eta' \zeta'' + \zeta' \eta'') \cos(\eta, \zeta) + (\zeta' \xi'' + \xi' \zeta'') \cos(\zeta, \xi).$$

В нашем случае $\cos(\xi, \eta) = \cos(\eta, \zeta) = \cos(\zeta, \xi) = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$; скалярное произведение двух векторов $(2'_1, 2'_2, 2'_3)$ и $(2''_1, 2''_2, 2''_3)$ равно следовательно

$$(2'_1, 2'_2, 2'_3) \cdot (2''_1, 2''_2, 2''_3) = 2'_1 2''_1 + 2'_2 2''_2 + 2'_3 2''_3 + \frac{1}{2} (2'_1 2''_2 + 2'_2 2''_1 + 2'_2 2''_3 + 2'_3 2''_2 + 2'_3 2''_1 + 2'_1 2''_3).$$

(40)

¹ Эти силы не обязательно должны быть такими же, какие действуют в молекуле; наши допущения очень отличаются от реальных сил молекулы.

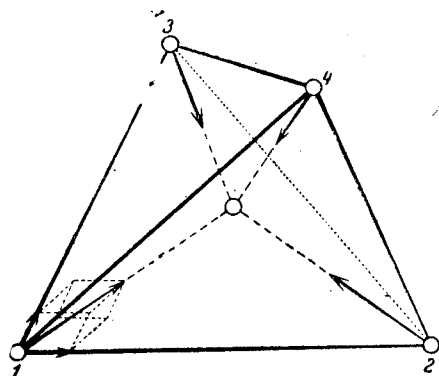
² Здесь и дальше нижним индексом обозначается степень вырождения.

¹ На фиг 245 соотношения масс взято как в CH_4 .

1. Сначала определим *полно симметричное нормальное колебание* тетраэдра. Очевидно, существует только одно перемещение атомов B , которое полно симметрично, т. е. при всех симметрических операциях переходит само в себя, или, другими словами, при котором сохраняется симметрия тетраэдра. Это перемещение, при котором все атомы B приближаются к центру на одинаковое расстояние. Оно имеет составляющие¹

$$1_2^{(1)} = 1_3^{(1)} = 1_4^{(1)} = 2_1^{(1)} = 2_3^{(1)} = 2_4^{(1)} = 3_1^{(1)} = 3_2^{(1)} = 3_4^{(1)} = 4_1^{(1)} = 4_2^{(1)} = 4_3^{(1)}. \quad (41)$$

Обозначим это колебание $\nu_1^{(II)}$. Оно изображено на фиг. 247.



Фиг. 247. Тетраэдрическая молекула. Полно симметричное нормальное колебание ($\nu_1^{(II)}$).

2. Мы ищем такое нормальное колебание, которое не изменяется при вращательном отражении от оси X , которое кроме того симметрично относительно плоскости, проходящей через X и сторону (1, 2), и ортогонально к полно симметрическому колебанию ν_1 (41).

Требуемая ортогональность может иметь место только тогда, когда перемещения *каждого* атома B взаимно ортогональны в обоих колебаниях. Колебания атома B не изменяются вследствие вращательного отражения от оси X ; следовательно, ска-

лярные произведения обоих перемещений равны в каждой вершине тетраэдра, и левая часть (35) равна учетверенному скалярному произведению, т. е. каждое из этих произведений равно 0. Поэтому должно быть

$$1_2^{(1)} 1_2^{(2)} + 1_3^{(1)} 1_3^{(2)} + 1_4^{(1)} 1_4^{(2)} + \frac{1}{2} \left(1_2^{(1)} 1_2^{(2)} + 1_3^{(1)} 1_4^{(2)} + 1_4^{(1)} 1_2^{(2)} + 1_3^{(1)} 1_2^{(2)} + 1_4^{(1)} 1_3^{(2)} + 1_2^{(1)} 1_4^{(2)} \right) = 0. \quad (42)$$

Кроме того, вследствие нашего условия симметрии

$$1_3^{(2)} = 1_4^{(2)}.$$

В силу (41)

$$1_2^{(2)} = -2 \cdot 1_3^{(2)} = -2 \cdot 1_4^{(2)}. \quad (43a)$$

¹ Верхний индекс (1) составляющих соответствует индексу 1 в ν_1 ; нижний индекс означает оси (ребра тетраэдра).

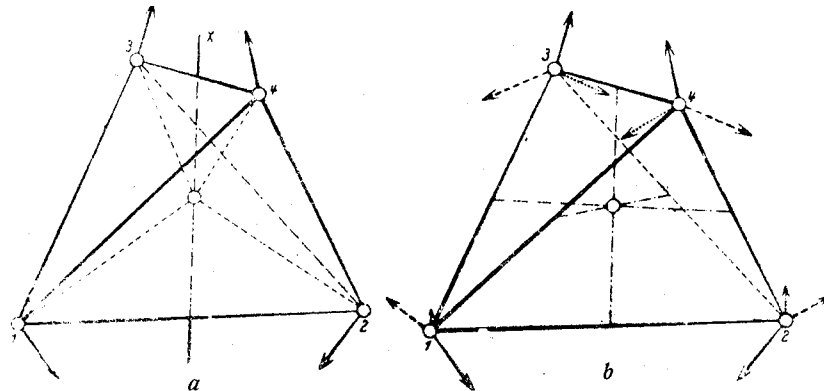
Далее из симметрии следует

$$\begin{aligned} 2_1^{(2)} &= -2 \cdot 2_3^{(2)} = -2 \cdot 2_4^{(2)}, \\ 3_4^{(2)} &= -2 \cdot 3_2^{(2)} = -2 \cdot 3_1^{(2)}, \\ 4_3^{(2)} &= -2 \cdot 4_2^{(2)} = -2 \cdot 4_1^{(2)} \end{aligned} \quad (43b)$$

и

$$1_2^{(2)} = 2_1^{(2)} = 3_4^{(2)} = 4_3^{(2)}. \quad (43c)$$

Выражаемое этим колебание обозначим $\nu_2^{(II)}$. Оно изображено на фиг. 248a. Колебание, как мы сейчас покажем, *двукратно вырождено*.



Фиг. 248. Тетраэдрическая молекула. a —двукратно вырожденное нормальное колебание ($\nu_2^{(II)}$), b —вырожденные нормальные колебания с частотой ($\nu_2^{(II)}$).

Можно прежде всего указать два колебания, получаемые из ν_2 (с помощью симметрических операций); мы найдем их, переименовав в (43) порядок углов 1, 2, 3, 4 на 2, 3, 4, 1 и 1, 3, 2, 4. То, что несмотря на это получается только двукратно вырожденное колебание, объясняется тем, что между тремя названными колебаниями существует линейная зависимость.

На фиг. 248b показана первоначальная система собственных векторов (сплошной линией) и две только что описанные, получающиеся из первой (соответствующая перестановке 2, 3, 4, 1 показана пунктиром, а соответствующая 1, 3, 2, 4 — штрихами). Легко видеть, что три вектора в каждой вершине тетраэдра лежат в одной плоскости и образуют друг с другом углы $\frac{2\pi}{3}$. Их сумма равна 0 в каждой вершине, так же как сумма наших трех перемещений.

Поэтому в действительности имеется только два линейно независимых колебания.

3. Наконец, мы ищем такое нормальное колебание, которое меняет знак при вращательном отражении от оси X и симмет-

рично относительно плоскости, проходящей через ось X и ребро $(1, 2)$. Несобственное нормальное колебание этого рода есть перенос в направлении X . Из требования, что искомое собственное нормальное колебание ортогонально к этому несобственному, следует аналогично нашему пункту 2, что соответствующие векторы перемещения должны быть взаимно перпендикулярны в каждой вершине тетраэдра, т. е. перемещение B -атомов должно быть перпендикулярно оси X .

Кроме того, перемещение атома B при вершине 1 должно в силу наших условий симметрии лежать в плоскости, проходящей через X и $(1, 2)$. Отсюда следует, что этот атом B попросту движется по ребру $(1, 2)$. Следовательно, вследствие антисимметрии относительно вращательного отражения для оси X должно быть соотношение

$$1_2^{(3)} = 2_1^{(3)} = -3_4^{(3)} = -4_3^{(3)}, \quad (44)$$

все остальные составляющие равны нулю.

Обозначим это нормальное колебание $\nu_3^{(II)}$ (см. фиг. 249). Оно *троекратно вырождено*. Действительно, заменяя 1, 2, 3, 4 через 2, 3, 4, 1 и 1, 3, 4, 2, мы получим три перемещения, между которыми на

этот раз нет никакого линейного соотношения. Мы покажем сейчас, что эти системы этих собственных векторов взаимно ортогональны, откуда следует, что они линейно независимы.

Для доказательства независимости рассмотрим, например, перемещение, составляющие которого заданы в (44), и перемещение

$$2_3^{(3)} = 3_2^{(3)} = -4_1^{(3)} = -1_4^{(3)}, \quad (45)$$

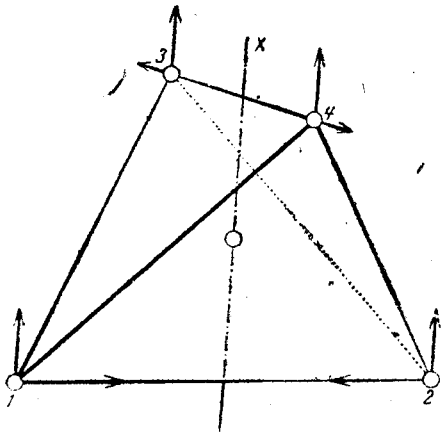
все остальные составляющие равны нулю.

Подставив эти системы составляющих в левую часть (35), мы получим в силу (40)

$$1_2^{(3)} 1_4^{(3)} + 2_1^{(3)} 2_3^{(3)} + 3_4^{(3)} 3_2^{(3)} + 4_3^{(3)} 4_1^{(3)} = 0$$

Согласно (44) и (45) эти четыре слагаемые равны по абсолютной величине, но два из них положительны, а два отрицательны. Сумма, следовательно, равна 0, и перемещения ортогональны.

Легко видеть, что перемещение (44) и образуемые из него с помощью симметрических операций ведут себя при симметри-



Фиг. 249. Тетраэдрическая молекула. Троекратно вырожденное нормальное колебание ($\nu_3^{(II)}$).

ческих операциях, как изображенное на фиг. 245 колебание $\nu_3^{(I)}$ и получающееся из него путем симметрических операций¹.

Таким образом правила отбора для $\nu_3^{(I)}$ и $\nu_3^{(II)}$ одинаковы.

Так как AB_4 состоит из пяти материальных точек, то должно быть всего $5 \cdot 3 - 6 = 9$ собственных нормальных колебаний. Мы нашли ровно столько, именно *одно полно симметричное* $\nu_1^{(I)}$, *два — тройкратно вырожденных* $\nu_3^{(I)}$, $\nu_3^{(II)}$, *одно — двукратно вырожденное* $\nu_2^{(II)}$.

Перейдем теперь к рассмотрению *правил отбора*. При *полно симметричном нормальном колебании* $\nu_1^{(II)}$ электрический момент молекулы не изменяется. Колебание *не дает инфракрасного спектра*. Изменяется только сферическая часть поляризуемости. Таким образом колебание сказывается в *рамановском спектре*, причем степень деполаризации равна 0.

Для удобства рассмотрения двукратно- и тройкратно вырожденных колебаний введем следующую прямоугольную систему координат: оси Y и Z соответственно параллельны $(1,2)$ и $(3,4)$, ось X перпендикулярна к обеим; таким образом она совпадает с введенной нами зеркально поворотной осью. Оси Y и Z сами не являются зеркально поворотными осями, но получаются из двух остальных зеркально поворотных осей тетраэдра поворотом их на $\frac{\pi}{4}$.

Предположим, что колебание $\nu_2^{(II)}$ имеет форму (43). Оно *не дает инфракрасного спектра*, так как его дипольный момент остается равным 0, и следовательно, колебание инвариантно относительно поворота с отражением относительно X , тогда как момент должен изменять знак при этой операции.

Так как колебание вырождено, то изменение шпура поляризуемости равно 0, но колебание проявляется в *Раман-эффекте*.

Плоскости XY и XZ остаются во время колебания зеркальными плоскостями, поэтому изменение поляризуемости имеет форму эллипсоида, главные оси которого X, Y, Z . Отсюда следует

$$\alpha_{XY}^R = \alpha_{YZ}^R = \alpha_{ZX}^R = 0. \quad (46)$$

Так как колебание инвариантно относительно поворотного отражения от X , то

$$\alpha_{YY}^R = \alpha_{ZZ}^R, \quad (47)$$

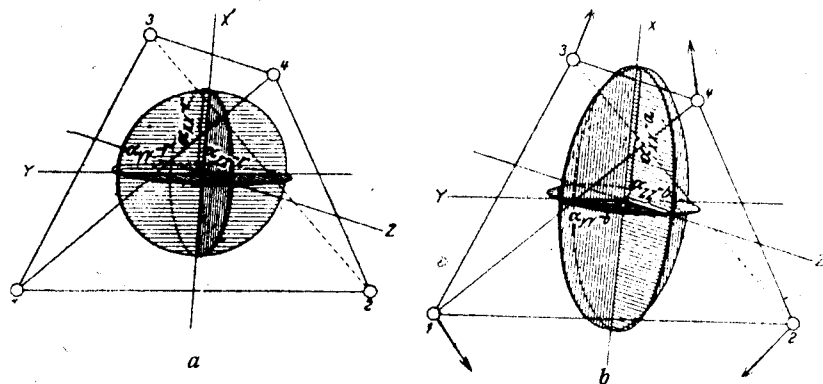
а из отсутствия шпура следует:

$$\alpha_{YY}^R = -\frac{1}{2} \alpha_{XX}^R. \quad (48)$$

¹ Из $\nu_3^{(I)}$ получаются три колебания в направлении трех четверных осей тетраэдра. Этими осями являются линии, соединяющие середины ребер $(1,2)$ с $(3,4)$ и, соответственно, $(2,3)$ с $(4,1)$ и $(1,3)$ с $(2,4)$. Оси взаимно перпендикулярны.

На фиг. 250а представлена поляризуемость в состоянии покоя. Она имеет вид шара; на фигуре изображены его меридиональные сечения. На фиг. 250б изображена поляризуемость при описанном перемещении $\nu_3^{(II)}$. Отклонения ее главных осей от шара равны α_{XX}^R , α_{YY}^R , α_{ZZ}^R . Поляризуемость представляет собой в силу (47) эллипсоид вращения, для которого тоже показаны меридиональные сечения. Таким образом мы получаем наглядное представление о поведении поляризуемости во время колебания.

Троекратно вырожденное нормальное колебание дает инфракрасный спектр. При колебании типа I очевидно, что момент может изменяться. При колебании типа II это не столь очевидно; но следует помнить, что в действительности нормальными колебаниями являются не $\nu_3^{(I)}$ и $\nu_3^{(II)}$, а любые линейные комбинации, так как $\nu_3^{(I)}$ и $\nu_3^{(II)}$ являются нормальными колебаниями только



Фиг. 250. Поляризуемость тетраэдрической молекулы.
а — в состоянии покоя,
б — при колебании $\nu_3^{(II)}$.

при выбранном нами законе сил. Кроме того, при перемещении $\nu_3^{(II)}$ также может возникнуть дипольный момент вследствие сплющивания электронного облака в направлении X.

В Раман-эффекте шпур опять исчезает; колебание дает эффект Рамана.

Опишем изменение поляризуемости также при этом колебании. С этой целью возьмем $\nu_3^{(I)}$ в изображенной на фиг. 245 форме¹. Главными осями изменения поляризации, естественно, окажутся опять X, Y, Z. Так как колебание антисимметрично относительно зеркально поворотной оси, то α_{XX}^R исчезает. Но $\alpha_{YY}^R = -\alpha_{ZZ}^R$ может быть отлично от 0. Поляризуемость при колебании $\nu_3^{(I)}$ изображена на фиг. 251.

Таким образом мы видим: из 4 нормальных колебаний AB_4 инфракрасный спектр дают только два трехкратно вырожденных, тогда как в рамановском спектре встречаются все

¹ Разумеется, мы получили бы то же самое для $\nu_3^{(II)}$.

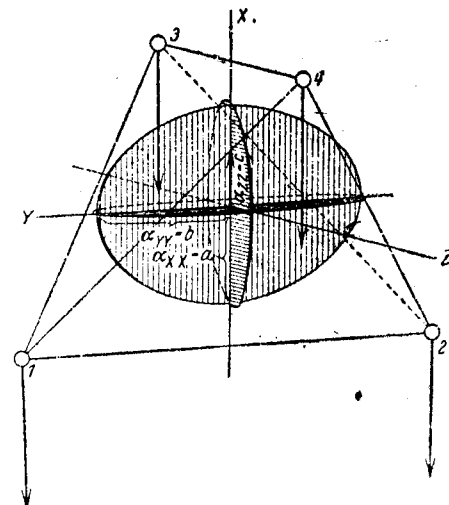
четыре колебания. При этом степень деполаризации полно симметрического колебания равна 0, а дважды и трижды вырожденных — $\frac{3}{4}$.

Таким образом по поведению в спектрах можно различать три рода колебаний. Например, полно симметрическое является колебанием, степень деполаризации которого в Раман-эффекте равна 0; дважды вырожденное есть такое колебание, которое не входит в инфракрасный спектр и имеет в рамановском спектре степень деполаризации $\frac{3}{4}$; трижды вырожденные являются такие колебания, которые входят в оба спектра и имеют в рамановском спектре степень деполаризации $\frac{3}{4}$.

Требования теории в основном подтверждаются для молекул типа AB_4 . Было найдено¹, что четырехгалогидные соединения углерода, метани другие соединения типа AB_4 имеют две сильные частоты в инфракрасном спектре². Так например, для CCl_4 они лежат при 315 см^{-1} и 774 см^{-1} . В Раман-эффекте для CCl_4 были найдены все 4 основных колебания. Кабанн³ исследовал степень деполаризации рамановской линии CCl_4 и нашел, что линия 457 см^{-1} деполаризована очень слабо, а остальные (217 см^{-1} , 315 см^{-1} , 774 см^{-1}) очень сильно (приблизительно $\frac{3}{4}$).

Таким образом колебание 217 см^{-1} есть двукратно вырожденное $\nu_2^{(II)}$, колебание 457 см^{-1} невырожденное $\nu_1^{(II)}$, а колебания 315 и 774 см^{-1} — трижды вырожденные $\nu_3^{(II)}$, $\nu_3^{(I)}$.

Мы видим, что для молекул типа AB_4 исследование инфракрасного спектра и эффекта Рамана до сих пор подтверждало представление химиков о тетраэдрической форме молекулы.



Фиг. 251. Поляризуемость тетраэдрической молекулы при колебании $\nu_3^{(I)}$.

¹ См. цитированные книги Schaefer и Matossi (стр. 718, сноска 1) и Kohlhausch (стр. 525).

² В CCl_4 частота удваивается при 780 см^{-1} . Причина этого заключается по видимому [согласно Fetmi, см. Z. Physik, т. 71 (1931), стр. 250] в том, что это колебание случайно вырождается при сумме колебаний 315 см^{-1} и 457 см^{-1} .

³ F. Cabannes, Trans. Faraday Soc., т. 25 (1929), стр. 813.

§ 101. ДИСПЕРСИЯ ДИПОЛЬНЫХ ЖИДКОСТЕЙ

Уже при первом разборе основного уравнения Максвелла $n^2 = \epsilon$ и области его применимости (см. главу I, § 5) мы указывали на то, что отклонения оптических диэлектрических постоянных от статических вызываются не только колебаниями электронов или ионов в собственном смысле слова, что мы подробно разбирали выше, но что они могут также происходить вследствие вращения молекулы, как целого. Как раз для наиболее важных веществ, как например воды и других жидкостей, влияние вращательного движения на дисперсию играет большую роль; например для воды статическая диэлектрическая постоянная (при комнатной температуре) равна приблизительно 81, а квадрат показателя преломления (в видимой части спектра) равен около 1,8; расхождение чрезвычайно велико. Более тщательные исследования показали, что в этих важных веществах имеют место особые соотношения, не подчиняющиеся обычной дисперсионной теории, о которой мы до сих пор говорили.

При исследовании дисперсии воды, обнаруживается, что с увеличением длины волны показатель преломления остается одного и того же порядка до самой крайней инфракрасной области; переход к большим значениям при медленно изменяющихся (квазистатических) полях происходит в области самых коротких волн Герца (длина волны порядка 1 метр), т. е. в области чрезвычайно трудно доступной для эксперимента; в ней находится максимум поглощения, вблизи которого диэлектрическая постоянная довольно равномерно возрастает от малых оптических значений к большому статическому.

Такое поведение трудно объяснить с помощью собственных колебаний молекул воды; молекулярные собственные колебания такой низкой частоты ($\nu = c/\lambda \approx 10^8 \text{ сек}^{-1}$) несовместимы с известным порядком величины атомных масс и молекулярных сил. Естественно попытаться объяснить эту область аномальной дисперсии с помощью молекулярного вращения; но и здесь мы наталкиваемся на трудности.

Прежде всего поставим вопрос: мы рассматриваем вещество, состоящее из недеформируемых молекул. Пусть каждая молекула несет постоянный диполь; пусть направления всех этих диполей равномерно распределены в пространстве. Если на систему действует электрическая переменная поля световой волны, то дипольные молекулы испытывают воздействие вращательных моментов, вследствие которого равномерное распределение изменяется таким образом, что возникает средний момент, параллельный внешнему полю. Спрашивается, при каких частотах влияние этой переориентировки на показатель преломления станет заметным? При этом мы совершенно пренебрегаем температурным движением, которое стремится нарушить порядок, созданный внешним полем; к влиянию его мы еще вернемся.

Пренебрегая, как сказано, температурным движением, представим себе, что невозмущенная молекула находится в покое под углом ϑ_0 к оси z . Под действием электрического светового поля напряжения E , колебания которого параллельны оси z , диполь отклонится от положения покоя на $\vartheta_1 = \vartheta - \vartheta_0$; предположим, что воздействие поля настолько слабо, что можно положить $|\vartheta_1| \ll \vartheta_0$. Если A есть момент инерции молекулы относительно оси, перпендикулярной к дипольному моменту и к z , то уравнения движения вынужденного колебания напишутся так

$$A\ddot{\vartheta}_1 = -Ep_0 \sin \vartheta_0, \quad (1)$$

где минус означает, что вращательный момент поля стремится уменьшить угол ϑ .

Если $E = E_0 e^{i\omega t}$ и полагая также $\vartheta_1 = \xi e^{i\omega t}$, мы получим

$$\xi = \frac{p_0 \sin \vartheta_0}{A \omega^2} E_0. \quad (2)$$

Составляющая электрического момента в направлении оси z равна

$$\left. \begin{aligned} p &= p_0 \cos \vartheta = p_0 \cos (\vartheta_0 + \vartheta_1) \\ &= p_0 \cos \vartheta_0 - p_0 \sin \vartheta_0 \cdot \vartheta_1 + \dots \\ &= p_0 \cos \vartheta_0 - \frac{p_0^2 \sin^2 \vartheta_0}{A \omega^2} E + \dots \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Из нашего предположения о равновероятности всех направлений следует

$$\left. \begin{aligned} \overline{\cos \vartheta_0} &= 0, \\ \overline{\sin^2 \vartheta_0} &= \frac{1}{4\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2 \vartheta_0 \cdot \sin \vartheta_0 d\vartheta_0 d\varphi_0 = \frac{2}{3}. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Отсюда следует

$$\overline{R} = -\frac{2p_0^2}{3A\omega^2} E = \alpha e^{i\pi} E, \quad (5)$$

где

$$\alpha = \frac{2p_0^2}{3A\omega^2}. \quad (6)$$

Здесь α означает, следовательно, часть средней поляризуемости, происходящую от вращающего действия поля; множитель $e^{i\pi} = -1$ происходит оттого, что свободная частица колеблется под влиянием периодической силы всегда в противоположной фазе.

Вычислим теперь величину $\frac{4\pi}{3} Na$, определяющую показатель преломления. Напишем

$$\frac{4\pi}{3} Na = \frac{\omega_0^2}{\omega^2}, \quad \omega_0 = p_0 \sqrt{\frac{8\pi N}{9A}}. \quad (7)$$

Влияние поворотов будет заметно в той части спектра, где ω имеет порядок величины ω_0 . Чтобы вычислить ω_0 , воспользуемся дипольным моментом и моментом инерции молекулы. Порядок величины обоих моментов вытекает непосредственно из определения; для двухатомных молекул

$$p_0 = er, \quad A = mr^2, \quad (8)$$

где e —эффективный заряд, m —эффективная масса, r —атомное расстояние. Имеем

$$e \approx 5 \cdot 10^{-10} \text{ эл. ст. ед.}, \quad r \approx 10^{-8} \text{ см},$$

а для водорода

$$m \approx 10^{-24} \text{ г.}$$

Таким образом из (8) следует

$$p_0 \approx 5 \cdot 10^{-18}, \quad A \approx 10^{-40}. \quad (9)$$

Величины p_0 и A для отдельных молекул можно определить очень точно: p_0 из температурной зависимости диэлектрической постоянной в газообразном состоянии, A из расстояний между линиями в спектрах молекулы; полученные таким образом величины совпадают по порядку с вышеприведенными значениями и только p_0 оказывается несколько меньше, что совершенно естественно, вследствие пространственного распределения зарядов; для воды $p_0 = 1,84 \cdot 10^{-18}$. Примем для подсчета $p_0 \approx 10^{-18}$.

Число молекул в см^3 при 0°C для воды

$$N = \frac{N}{18} \approx 3 \cdot 10^{22}, \quad (10)$$

откуда

$$\omega_0 \approx 3 \cdot 10^{13} \text{ сек}^{-1}. \quad (11)$$

Соответствующая длина волны есть

$$\lambda_0 = \frac{4\pi c}{\omega_0} \approx 130 \mu. \quad (12)$$

Поэтому влияние вращательного колебания на показатель преломления должно сказываться, начиная с крайней инфракрасной области.

Но было бы совершенно неправильным строить по указанному здесь методу количественную теорию, и вот из каких сообра-

жений: во-первых, амплитуда вращательного колебания не останется малой вблизи критической частоты ω_0 , как мы предположили при вычислении. Таким образом нам нужны более строгие формулы, более точно отражающие поведение недеформируемых тел под действием периодических вращательных моментов. Но кроме того, этот метод искажает физическую сущность явления, так как тепловое движение молекулы не рассматривается. Тепловое движение имеет тенденцию разрушить всякий установленный порядок. Насколько быстро это происходит, зависит, очевидно, от того, насколько часты возмущения (столкновения), испытываемые молекулой со стороны ее соседей. Число столкновений в парообразном состоянии можно вычислить на основе кинетической теории газов. Средний промежуток времени между двумя ударами есть

$$\tau_s = \frac{l}{\bar{v}}, \quad (13)$$

где l средняя длина свободного пробега, \bar{v} средняя скорость частиц; эти величины приведены в § 87 (19) и (14). Подставляя эти величины в (13), получим

$$\tau_s = \frac{1}{4N\sigma^2 p} \sqrt{\frac{\mu RT}{\pi}}. \quad (14)$$

Это дает нам для воды ($\mu = 18$, $\sigma \approx 10^{-8} \text{ см}$) при $p = 1 \text{ ат}$ и $T = 300^\circ$ $\tau_s \approx 10^{-9} \text{ сек}$. Таким образом время удара очень велико по сравнению с продолжительностью колебания, определяемого из (11). $2\pi/\omega_0 \approx 10^{-13} \text{ сек}$, т. е. вращательные колебания могут происходить, практически не испытывая влияния теплового движения. Таким образом для водяного пара переход от оптической к статической диэлектрической постоянной определяется описываемым механизмом; он происходит вблизи 100μ . Но мы не будем на этом останавливаться.

Но для жидкой воды и подобных ей жидкостей дело обстоит совершенно иначе. Продолжительность удара возрастает пропорционально плотности, а так как жидкости плотнее паров больше чем в 1000 раз, то время ударов приближается к порядку величины поворотного колебания. Поэтому становится вообще невозможно говорить об ударах, свободном пробеге и т. д.; кинетическую теорию газов следует заменить другими статистическими методами, более соответствующими природе жидкости. Мы вкратце изложим их и применим их к нашему случаю, как это было сделано впервые Дебаем¹.

Влияние теплового движения в жидкости состоит также в стремлении разрушить порядок, установленный внешним полем.

¹ P. Debye, Ber. dt. ch. physik. Ges., т. 15 (1913), стр. 777, Physik. Z., т. 13 (1912), стр. 97; см. та же книга того же автора: Die Molekeln, глава V, стр. 88, Leipzig, 1929 (есть русское издание).

Существует характеристическая величина, так называемое *время релаксации*; оно определяется так.

Вообразим себе, что постоянное внешнее поле создало некоторую упорядоченность в молекулах, которая выражается с помощью функции распределения дипольных направлений; если поле внезапно исчезнет, то это асимметрическое распределение обратится к шаровой симметрии, что произойдет в течение некоторого конечного времени, называемого *временем релаксации* τ .

Если продолжительность колебаний внешнего поля порядка τ , то можно ожидать, что тепловое движение оказывает значительное действие на процесс дисперсии, и при этом возможно вычислить порядок величины τ из измеримых физических свойств вещества.

Это задача статистической динамики, связанная с теорией *брауновских движений*. Для решения ее воспользуемся методом, данным Эйнштейном¹.

Представим себе частицу, могущую двигаться вдоль оси x , подвергающуюся неподдающимся учету воздействиям. На вопрос: „каково положение частицы в момент t ?“ — мы не можем ответить. Но можно задать вопрос: „какова вероятность, что в момент t частица будет находиться в интервале $(x, x+dx)$?“ Обозначим эту вероятность $W(x, t)dx$. Нормируем ее так, что для всякого t

$$\int_{-\infty}^{\infty} W(x, t) dx = 1. \quad (15)$$

Неподдающиеся учету изменения положения также можно характеризовать только с помощью вероятности. Фиксируем некоторый малый промежуток времени τ_0 , и пусть $\varphi(x, \xi)d\xi$ есть вероятность того, что частица за время τ_0 произведет перемещение из точки x на ξ , т. е. в интервале $x+\xi, x+\xi+d\xi$; произведем опять нормирование:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x, \xi) d\xi = 1. \quad (16)$$

Далее предположим, что $\varphi(x, \xi)$ заметно отличается от 0 только в непосредственной близости исходной точки, т. е. при малых значениях $|\xi|$, и что она ведет себя примерно как функция ошибок (но необязательно должна быть симметричной).

Допустим, что наша частица наблюдается очень часто, или, что тоже самое, что наблюдению одновременно подвергается очень большое число N независимых друг от друга частиц, рассеянных в интервале. Затем вычислим изменение числа частиц, находящихся в dx за время τ_0 , т. е. $\tau_0 N \frac{\partial W}{\partial t} dx$. Если промежу-

ток времени τ_0 достаточно велик, то все первоначально находившиеся в интервале частицы успеют продиффундировать из него. С другой стороны, из интервала при $x-\xi$ с длиной $d\xi$ первоначально содержавшего $NW(x-\xi, t)d\xi$ частиц, часть $NW(x-\xi, t)\varphi(x-\xi, \xi)d\xi dx$ частиц перейдут в dx . Отсюда получаем (отбрасывая общий множитель $N dx$) следующее уравнение для $W(x, t)$

$$\tau_0 \frac{\partial W}{\partial t} = \int_{-\infty}^{\infty} W(x-\xi, t) \varphi(x-\xi, \xi) d\xi - W(x, t). \quad (17)$$

Это сложное интегрально-дифференциальное уравнение; мы решим его только для случая, когда вероятность смещения имеет вышеуказанный характер функции ошибок. Подинтегральное выражение в (17) есть медленно изменяющаяся функция первого аргумента $x-\xi$; мы можем разложить его в ряд Тейлора по ξ ; при этом второй аргумент функции φ , именно ξ , следует считать постоянным. Получаем

$$\left. \begin{aligned} W(x-\xi) \varphi(x-\xi, \xi) \\ = W(x) \varphi(x, \xi) - \xi \frac{\partial}{\partial x} [W(x) \varphi(x, \xi)] + \\ + \frac{1}{2} \xi^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} [W(x) \varphi(x, \xi)] - + \dots \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Теперь можно интегрировать по частям. Тогда кроме интеграла (16) появятся средние значения

$$\left. \begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \xi \varphi(x, \xi) d\xi = \bar{\xi}, \\ \int_{-\infty}^{\infty} \xi^2 \varphi(x, \xi) d\xi = \bar{\xi}^2, \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

которые в общем случае еще зависят от x ; они, очевидно, означают среднее перемещение и средний квадрат перемещения из положения x под действием внешних причин.

Подставив их, мы преобразуем наше интегральное уравнение (17) в дифференциальное

$$\frac{\partial W}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial x} \left(\bar{\xi} W \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\bar{\xi}^2 W \right). \quad (20)$$

Это уравнение диффузии вдоль оси x .

Возмущение можно разложить на две части: постоянно действующую внешнюю силу и подчиняющиеся статистическим законам удары; пусть постоянная сила производит за время τ_0 смещение s .

¹ A. Einstein, Ann. Physik (4), т. 19 (1906), стр. 371.

Удары должны происходить в среднем симметрично с обеих сторон, так что происходящая от них часть среднего смещения $\bar{\xi} = 0$. Средний квадрат смещения беспорядочных ударов по известным законам статистики не является величиной второго порядка, подобно квадрату правильных возмущений s^2 , а должен быть учтен. Положим, что он не зависит от координат

$$\frac{\bar{\xi}^2}{2\tau_0} = D. \quad (21)$$

D называется *постоянной диффузии*.

Вычисляя смещение s вследствие внешних сил, мы будем поступать так, как если бы сумма всех неправильных возмущений была заменена силой, имеющей характер трения, настолько большой, что ее инерцией можно пренебречь по сравнению с ним.

Таким образом движение s выразилось бы уравнением

$$\frac{ds}{dt} = BK, \quad (22)$$

где K есть внешняя сила, а B постоянная, называемая *подвижностью* и означающая скорость, которую сообщает частице постоянная сила, равная единице. Для малого интервала τ_0

$$\frac{\bar{\xi}}{\tau_0} = \frac{s}{\tau_0} = BK. \quad (23)$$

При этих обозначениях наше уравнение (20) примет вид

$$\frac{\partial W}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}(BKW) + D \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}. \quad (24)$$

Перенесем теперь эти соображения на частицу, могущую двигаться в пространстве, на которую действуют векториальная сила \mathfrak{R} и беспорядочные удары. При этом допустим, что удары по трем пространственным направлениям практически не зависят друг от друга и в среднем оказывают одинаковое действие, т. е. что

$$\bar{\xi}^2 = \bar{\eta}^2 = \bar{\zeta}^2 = 2\tau_0 D, \quad \bar{\eta}\bar{\zeta} = \bar{\xi}\bar{\eta} = \bar{\xi}\bar{\zeta} = 0. \quad (25)$$

Мы получим только одну постоянную диффузии и согласно (24) будем иметь для $W(x, y, z, t)$ уравнение

$$\frac{\partial W}{\partial t} = -\text{div}(BW \cdot \mathfrak{R}) + D \cdot \Delta W = \text{div}\{-BW \cdot \mathfrak{R} + D \text{grad } W\}. \quad (26)$$

Умножив величину в фигурных скобках на число частиц N в единице объема, получим

$$\Omega = N\{BW \cdot \mathfrak{R} - D \text{grad } W\}. \quad (27)$$

Ω означает по наглядному смыслу операций дивергенции „плотность тока“, т. е. число частиц, проходящих через перпендикулярную вектору Ω единичную площадку в положительном направлении, уменьшенное на соответствующее число для отрицательного направления. Ω состоит из тока, происходящего от силы \mathfrak{R} и диффузионного тока.

Отсюда легко перейти к интересующему нас случаю, в котором речь идет не о диффундирующих частицах, а о *диполях*, вращающихся вокруг некоторой точки и испытывающих при этом действие внешнего вращательного момента и неправильных ударов. Для этого нам нужно только ввести полярные координаты r, ϑ, φ , приравнять нулю частные производные по r и дать r постоянное значение r_0 . Если мы предположим, кроме того, что внешняя сила \mathfrak{R} симметрична относительно полярной оси z и ограничимся решениями W , независимыми от φ , то члены с производными по φ отпадут.

Введем вместо составляющей силы \mathfrak{R}_ϑ , действующей на концы диполя, вращательный момент вокруг оси перпендикулярной к оси диполя и оси z

$$r_0 \mathfrak{R}_\vartheta = L \quad (28)$$

и определим вместо констант B и D , относящихся к линейному движению, константы вращения

$$\frac{B}{r_0^2} = \beta, \quad \frac{D}{r_0^2} = \delta. \quad (29)$$

Из (26) получим для $W(\vartheta, t)$ дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left\{ \sin \vartheta \left(-\beta L W + \delta \frac{\partial W}{\partial \vartheta} \right) \right\}. \quad (30)$$

Величина в фигурных скобках, умноженная на N , т. е.

$$Q = N \sin \vartheta \left(\beta L W - \delta \frac{\partial W}{\partial \vartheta} \right), \quad (31)$$

выражает плотность потока для перехода через параллельный круг единичной сферы.

Для вращательного момента имеем его значение

$$L = -E p_0 \sin \vartheta. \quad (32)$$

Рассмотрим теперь случай *статистического равновесия*.

Тогда не только $\frac{\partial W}{\partial t} = 0$, но и плотность потока (31) $Q = 0$.

Это означает

$$\beta E p_0 \sin \vartheta \cdot W + \delta \frac{\partial W}{\partial \vartheta} = 0. \quad (33)$$

Его решение есть

$$W = W_0 e^{\frac{\beta}{\epsilon} E p_0 \cos \vartheta} = W_0 e^{-\frac{\beta U}{\epsilon}}, \quad (34)$$

где

$$U = -E p_0 \cos \vartheta \quad (35)$$

есть энергия диполя в положении ϑ .

Формула (34) должна быть тождественна с уравнением распределения Больцмана

$$W = W_0 e^{-\frac{U}{kT}}. \quad (36)$$

Сравнивая, находим

$$\beta kT = \epsilon = \frac{(\Delta \vartheta)^2}{2\tau_0}. \quad (37)$$

Это знаменитая формула Эйнштейна для среднего квадрата смещения (в данном случае угла поворота), с помощью которой можно определить постоянную Больцмана k и число Лошмидта N , если известна подвижность. Мы не будем останавливаться на этом вопросе; нас интересует время релаксации.

Исключая δ из дифференциального уравнения (30), найдем

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \frac{\beta}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(kT \sin \vartheta \frac{\partial W}{\partial \vartheta} + E p_0 \sin^2 \vartheta \cdot W \right). \quad (38)$$

Мы должны прежде всего искать решение, соответствующее возврату к неупорядоченному состоянию при выключении постоянного поля; полагаем $E=0$ и получаем дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \frac{kT\beta}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial W}{\partial \vartheta} \right). \quad (39)$$

Оно решается при начальном условии, что

$$W(\vartheta, 0) = W_0 e^{\frac{E p_0}{kT} \cos \vartheta}; \quad (40)$$

E_0 означает здесь величину поля, возникающего в начальный момент $t=0$ и постоянного при $t < 0$. Входящий в это уравнение (40) показатель в практически интересных случаях мал по сравнению с единицей. Именно, как мы уже говорили,

$$p_0 \approx 10^{-18} \text{ эл. ст. ед.}, \quad k = 1,37 \cdot 10^{-16} \text{ эрг/град}^{-1}.$$

Таким образом при комнатной температуре $T=300^\circ$ и при поле $E_0 = 1$ эл. ст. ед. = 300 В/см

$$\frac{p_0 E_0}{kT} = 2,4 \cdot 10^{-5};$$

здесь следует заметить, что свет не дает таких высоких полей. Поэтому мы можем заменить показательную функцию первым членом ее разложения и написать начальное условие (40) в виде

$$W(\vartheta, 0) = W_0 \left(1 + \frac{E_0 p_0}{kT} \cos \vartheta \right). \quad (41)$$

Попробуем теперь решить дифференциальное уравнение (39) с помощью допущения

$$W = W_0 \left[1 + \frac{E_0 p_0}{kT} \psi(t) \cos \vartheta \right], \quad (42)$$

где $\psi(t)$ есть функция, подлежащая еще определению и которая должна удовлетворять в силу (41) начальному условию $\psi(0)=1$. Подставляя (42) в (39), получаем обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{d\psi}{dt} = -2\beta kT \psi, \quad (43)$$

а решение, удовлетворяющее начальному условию, есть

$$\psi(t) = e^{-2\beta kT \cdot t} = e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad (44)$$

где

$$\tau = \frac{1}{2\beta kT}. \quad (45)$$

Эта величина τ и есть, очевидно, искомое *время релаксации*, так как она определяет скорость, с которой первоначально анизотропное распределение (41) превращается в равномерное $W = W_0$.

Величина τ зависит от подвижности β . Для газов ее можно было бы вычислить точно с помощью кинетической теории. Но для жидкости это невозможно, ввиду отсутствия законченной кинетической теории такого рода плотных распределений.

Тем не менее Эйнштейну удалось следующим образом определить β .

Когда макроскопический шар радиуса a вращается равномерно в жидкости с внутренним трением η , то вращательный момент L , необходимый для преодоления трения, может быть строго вычислен из гидродинамики вязких жидкостей. „Угловая подвижность“ β связана с моментом L и угловой скоростью уравнением

$$\frac{d\varphi}{dt} = \beta L. \quad (46)$$

По Стоксу¹

¹ G. G. Stokes, Cambr. Trans., т. 8 (1815), стр. 287; Math. a. Physic. Pap. I, стр. 75. См. также H. Lamb, Hydrodynamik. Deutsch von J. Friedel § 322, стр. 678 (11). Leipzig u. Berlin, 1907.

$$\beta = \frac{1}{8\pi\eta a^3}. \quad (47)$$

Можно попытаться применить эту формулу к одной молекуле, хотя, разумеется, в этом случае обоснованность формулы весьма сомнительна. Однако Эйнштейн показал, что соответствующая формула для переносного движения $B = \frac{1}{6} \pi \eta a$ вполне удовлетворительно выражает диффузию растворенных молекул. Поэтому можно ожидать, что формула (47) даст хотя бы порядок величины явления.

Сделав такое допущение, мы найдем, что время релаксации (45)

$$\tau = \frac{4\pi\eta a^3}{kT}. \quad (48)$$

где a означает радиус молекулы. Для воды при комнатной температуре $\eta = 0,01$, $a = 2 \cdot 10^{-8}$ см, т. е.

$$\tau = 2,4 \cdot 10^{-11} \text{ сек}, \quad (49)$$

что соответствует длине волны приблизительно 1 см.

Так как a и η сильно зависят от вещества, а η также и от температуры, то можно ожидать, что критическая длина волны, при которой наступает „аномальная дисперсия“, захватит довольно большую область в самых коротких волнах Герца.

Введем в дифференциальное уравнение (38) вместо β время релаксации τ из (45). Вместе с тем будем писать E' вместо E чтобы показать, что в плотной среде сила поля E' , действующая на одну молекулу, отличается от среднего поля E . Тогда уравнение примет вид

$$2\tau \frac{\partial W}{\partial t} = \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial W}{\partial \vartheta} + \frac{E' p_0}{kT} \sin^2 \vartheta \cdot W \right). \quad (50)$$

Рассмотрим теперь случай периодической световой волны

$$E' = E_0 e^{i\omega t} \quad (51)$$

и решим уравнение (50) с помощью наложения на равномерное распределение дополнительного распределения, колеблющегося с частотой света.

$$W = W_0 \left(1 + C \frac{E_0 p_0}{kT} e^{i\omega t} \cos \vartheta \right). \quad (52)$$

Пренебрегая членами порядка выше первого относительно E_0 , мы удовлетворим уравнению (50) при

$$C = \frac{1}{1 + i\omega\tau}. \quad (53)$$

Тогда функция распределения W напишется полностью в виде

$$W = W_0 \left(1 + \frac{1}{1 + i\omega\tau} \frac{E' p_0}{kT} \cos \vartheta \right). \quad (54)$$

Мы видим, что при $\omega\tau = 0$ эта функция переходит в приближенную формулу (41) Больцмановского распределения (36), тогда как при очень больших значениях $\omega\tau$ она постоянна. Переход от одного предельного случая к другому произойдет при таких частотах, при которых $\omega\tau$ порядка единицы.

Вычислим теперь средний момент молекулы в направлении z и получим согласно (54)

$$\bar{p} = \frac{1}{W_0} \int_0^\pi p_0 \cos \vartheta \cdot W \cdot \sin \vartheta d\vartheta = \frac{p_0^2}{3kT} \frac{E'}{1 + i\omega\tau}. \quad (55)$$

Таким образом часть поляризуемости, даваемая ориентационным эффектом, равна

$$\alpha_1 = \frac{p_0^2}{3kT} \frac{1}{1 + i\omega\tau}. \quad (56)$$

Так как она комплексна, то мы имеем не только дисперсию, но и поглощение.

Прибавим к этой части α величину α_0 , основанную на обычной прямой деформации молекулы под действием поля; тогда на основании закона Лоренца-Лоренца мы получим для молекулярной рефракции [см. главу VII, § 76 (16)]

$$\begin{aligned} P &= \frac{\mu}{\rho} \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2} = \frac{4\pi}{3} N \alpha = \frac{4\pi}{3} N (\alpha_0 + \alpha_1) = \\ &= \frac{4\pi}{3} N \left(\alpha_0 + \frac{p_0^2}{3kT} \frac{1}{1 + i\omega\tau} \right), \end{aligned} \quad (57)$$

где

$$\epsilon = n^2 = n^2 (1 - ix)^2 \quad (58)$$

означает полную диэлектрическую постоянную [см. главу VI, § 67 (9)]. Вместо того, чтобы характеризовать свойство жидкости величинами α_0 и p_0 , удобнее воспользоваться ими для другой цели. Введем молекулярную рефракцию при $\omega\tau = \infty$ и $\omega\tau = 0$ (т. е. при постоянном τ для $\lambda = 0$ и $\lambda = \infty$)

$$\left. \begin{aligned} P_0 &= \frac{\mu}{\rho} \frac{\epsilon_0 - 1}{\epsilon_0 + 2} = \frac{4\pi}{3} N \alpha_0, \\ P_1 &= \frac{\mu}{\rho} \frac{\epsilon_1 - 1}{\epsilon_1 + 2} = \frac{4\pi}{3} N \left(\alpha_0 + \frac{p_0^2}{3kT} \right). \end{aligned} \right\} \quad (59)$$

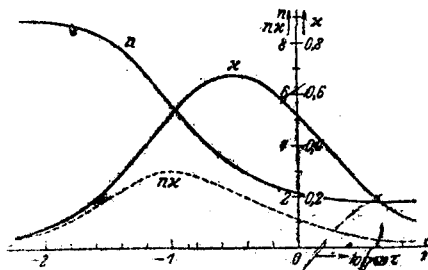
Тогда ϵ_0 есть диэлектрическая постоянная для коротких волн и больших частот, которую назовем кратко *оптической*

диэлектрической постоянной, а ϵ_1 есть обычная статическая диэлектрическая постоянная. Тогда полная молекулярная рефракция есть

$$P = P_0 + \frac{P_1 - P_0}{1 + i\omega\tau} \quad (60)$$

Решая уравнение (57) относительно ϵ , найдем

$$\epsilon = \frac{1 + 2\frac{P}{\mu}}{1 - \frac{P}{\mu}} \quad (61)$$



Фиг. 252. Дисперсия и поглощение дипольной жидкости (P. Debye, Polare Molekeln, Leipzig, 1929).

и подставляя значение (60) для P

$$\epsilon = \frac{\frac{\epsilon_1}{\epsilon_1 + 2} + i\omega\tau \frac{\epsilon_0}{\epsilon_0 + 2}}{\frac{1}{\epsilon_1 + 2} + i\omega\tau \frac{1}{\epsilon_0 + 2}} \quad (62)$$

Введем еще переменную

$$x = \frac{\epsilon_1 + 2}{\epsilon_0 + 2} \omega\tau; \quad (63)$$

мы получим, согласно (58), для показателя преломления поглощения

$$\left. \begin{aligned} n^2 &= \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{\epsilon_1^2 + \epsilon_0^2 x^2}{1 + x^2}} + \frac{\epsilon_1 + \epsilon_0 x^2}{1 + x^2} \right), \\ n^2 k^2 &= \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{\epsilon_1^2 + \epsilon_0^2 x^2}{1 + x^2}} - \frac{\epsilon_1 + \epsilon_0 x^2}{1 + x^2} \right). \end{aligned} \right\} \quad (64)$$

Если x пробегает значения от 0 до ∞ , то n^2 монотонно убывает от большего значения ϵ_1 к малому значению ϵ_0 ; $n^2 k^2$ начинается с 0, и, пройдя через максимум, стремится опять к 0

(точно так же ведет себя x). На фиг. 252 показаны функции n , nx и k для $\epsilon_1 = 81$, $\epsilon_0 = 3$ (вода).

В общем случае максимум x выражается уравнением

$$\omega\tau = \frac{\epsilon_0 + 2}{\epsilon_1 + 2} \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\epsilon_0}} \quad (65)$$

и равен

$$x_{\max} = \frac{\sqrt{\epsilon_1} - \sqrt{\epsilon_0}}{\sqrt{\epsilon_1} + \sqrt{\epsilon_0}}. \quad (66)$$

Квадрат показателя преломления для этого $\omega\tau$ равен

$$n^2 = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{\epsilon_0 \epsilon_1}}{\epsilon_0 + \epsilon_1} (\sqrt{\epsilon_0} + \sqrt{\epsilon_1})^2. \quad (67)$$

Эта формула дает теоретическое объяснение качественному поведению аномальной дисперсии дипольных жидкостей.

Конечно, можно наоборот определить эмпирически из измерений n и k константу $\omega\tau$ (65), от которой зависит изменение обеих величин. При этом следует иметь в виду следующее.

Дипольные жидкости, к которым собственно относится эта теория, имеют, благодаря большим электрическим моментам их молекул, склонность к ассоциации, т. е. к соединению молекул. Благодаря этому затрудняется сравнение с экспериментальными данными для чистых жидкостей. Идеальным был бы случай, когда дипольная жидкость растворяется в другой не дипольной жидкости, благодаря чему понизилась-бы степень ассоциации. Но такие эксперименты не были сделаны.

Для проверки своей теории Дебай пользовался данными Мицусимы¹, измерявшего диэлектрическую постоянную и поглощение различных спиртов при трех длинах волн $\lambda_0 = 3,08$ м, 9,5 м и 50 м в температурной области от +60 до -60°C. Согласно (48) время релаксации τ обратно пропорционально абсолютной температуре T ; имеем

$$\omega\tau = \frac{2\pi\tau}{\lambda} = \frac{8\pi^2 a^3}{k} \frac{\eta}{\lambda T}. \quad (68)$$

Здесь постоянная внутреннего трения η очень сильно зависит от температуры и возрастает с падением ее. Таким образом η/T сильно увеличивается с падением температуры. Кривая на фиг. 252 таким образом может означать не только „кривую дисперсии“, т. е. выражать зависимость от λ при постоянной температуре, но ее можно также рассматривать как кривую температурной зависимости при постоянном λ . Мы видим, что для постоянной длины волны при падении температуры должен

¹ S. Mizushima, Bull. chem. Soc. Japan, т. 1 (1926), стр. 47, 83, 115, 143, 163; Physik. Z., т. 28 (1927), стр. 418. См. также D. W. Kitchin u. H. Müller, Physic. Rev., т. 32 (1928), стр. 979.

наступить максимум поглощения и одновременно резкое падение показателя преломления. Так как η есть известная функция T , то единственной неизвестной является радиус молекулы a . Дебай показывает, что измерения над пропиловым спиртом дают для a значение $2,2 \cdot 10^{-8}$ см, и это значение имеет правильный порядок величины; то же самое относится к остальным спиртам. Смелая гипотеза Эйнштейна относительно применимости формулы Стокса к одной молекуле таким образом подтверждается поразительным образом. Но существуют также исключения, например глицерин, для которого получается слишком маленький радиус $a = 0,35 \cdot 10^{-8}$ см. Можно сказать, что внутреннее трение при повороте одной молекулы значительно меньше, чем при вращении макроскопических шаров в той же самой жидкости. Можно было бы выяснить насколько это явление зависит от ассоциации, исследовав раствор глицерина в неполярных жидкостях.

В заключение скажем, что в твердых телах вблизи точки плавления также наблюдается аномальная дисперсия, которая происходит от вращения молекул в уже расшатанной кристаллической решетке¹.

ПРИМЕЧАНИЯ РЕДАКТОРА

Примечание 1 (к стр. 7). А также М. В. Ломоносова (см. „Слово о происхождении света“, сочинения М. В. Ломоносова, т. IV, стр. 392, изд. Академии наук, 1898).

Примечание 2 (к стр. 11). Прекрасный обзор механических теорий света дан в книге Г. А. Лорентца, Теории и модели эфира, ОНТИ НКТП СССР, 1936.

Примечание 3 (к стр. 16). Даем краткую сводку необходимых формул векторного анализа. Векторы в книге обозначаются готическими буквами, например \mathfrak{C} , \mathfrak{B} , \mathfrak{a} и т. д.

\mathfrak{A}_n — проекция (составляющая) вектора на направление n ;
 $\mathfrak{A}_x, \mathfrak{A}_y, \mathfrak{A}_z$ — проекция (составляющая) вектора \mathfrak{A} на направление координатных осей; \mathfrak{A}_s — проекция на направление линии s ;

\mathfrak{A}_n — проекция на направление нормали к некоторой поверхности.
 Длина (абсолютное значение) вектора обозначается символом $|\mathfrak{A}|$. Квадрат длины обозначается \mathfrak{A}^2 без скобок (или в скобках).

Существуют два вида произведения двух векторов:

1. Скалярное произведение. В книге обозначается символом „точка“, или произведением без точки

$$\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B}.$$

Оно представляет собою скаляр, равный произведению абсолютных значений двух векторов на косинус угла между их направлениями

$$\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B} = |\mathfrak{A}| \cdot |\mathfrak{B}| \cos(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}).$$

Если векторы \mathfrak{A} и \mathfrak{B} даны через их составляющие по осям координат, то

$$\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B} = \mathfrak{A}_x \mathfrak{B}_x + \mathfrak{A}_y \mathfrak{B}_y + \mathfrak{A}_z \mathfrak{B}_z.$$

2. Векторное произведение. В книге обозначается символом крестика

$$\mathfrak{C} = \mathfrak{A} \times \mathfrak{B}.$$

Оно представляет собою вектор, перпендикулярный к обоим векторам \mathfrak{A} и \mathfrak{B} , а по абсолютной величине равный произведению абсолютных величин обоих векторов на синус угла между ними.

Направление вектора определяется правилом буравчика. Если совместить винт буравчика с вектором \mathfrak{C} , а ручку с вектором \mathfrak{A} , то направление \mathfrak{C} будет совпадать с направлением поступательного движения буравчика при вращении ручки от \mathfrak{A} к \mathfrak{B} . Составляющие вектора \mathfrak{C} равны

$$[\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}]_x = \mathfrak{A}_y \mathfrak{B}_z - \mathfrak{A}_z \mathfrak{B}_y; [\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}]_y = \mathfrak{A}_z \mathfrak{B}_x - \mathfrak{A}_x \mathfrak{B}_z;$$

$$[\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}]_z = \mathfrak{A}_x \mathfrak{B}_y - \mathfrak{A}_y \mathfrak{B}_x.$$

¹ См. J. Errera, J. Physique Radium (6), т. 5, стр. 304. Более подробные сведения см. в цитированной на стр. 749 книге Дебая.

Из определения векторного умножения следует

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \times \mathbf{A}.$$

1. Произведение трех векторов

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \times \mathbf{C} = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}$$

представляет собою скаляр, равный объему параллелепипеда, построенного на векторах \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} . Из свойств определителя следует:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \times \mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B} \cdot \mathbf{C} = -\mathbf{A} \cdot \mathbf{C} \times \mathbf{B} \text{ и т. д.}$$

2. Произведение $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$ представляет собою вектор, лежащий в плоскости \mathbf{B} , \mathbf{C} ; коэффициенты $\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}$ и $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ являются скалярами.

В дальнейшем придется иметь дело со скалярными и векторными полями. Функция точки φ непрерывна и имеет определенное значение в каждой точке пространства.

Вектор, составляющие которого равны

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}; \frac{\partial \varphi}{\partial y}; \frac{\partial \varphi}{\partial z},$$

называется градиентом функции φ и обозначается символом

$$\text{grad } \varphi.$$

Вектор градиента нормален к поверхности уровня $\varphi = \text{const}$.

3. Полем вектора \mathbf{A} называется пространство, в каждой точке которого вектор \mathbf{A} имеет определенное направление и меняется непрерывно при переходе от точки к точке. Точковыми линиями поля вектора \mathbf{A} называются кривые, к которым вектор \mathbf{A} касателен в каждой точке.

Расхождением (дивергенцией) поля называется скаляр, равный

$$\text{div } \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}.$$

Вихрем вектора (rot) называется вектор

$$\text{rot } \mathbf{A},$$

составляющие которого равны:

$$\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}; \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}; \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}.$$

Из определения следует:

$$\text{rot grad } \varphi = 0$$

$$\text{div rot } \mathbf{A} = 0$$

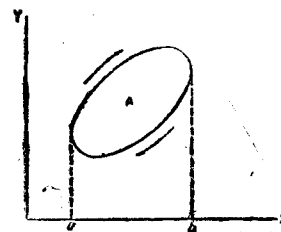
$$\text{div grad } \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = \Delta \varphi$$

$$\text{rot rot } \mathbf{A} = \text{grad div } \mathbf{A} - \Delta \mathbf{A}.$$

Следующие две теоремы будут часто встречаться в книге: обе они являются трехмерным обобщением теоремы Грина на плоскости.

1. Теорема Грина:

$$\int_0 (Pdx + Qdy) = \int_A \int \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) dx dy.$$



Действительно, очевидно,

$$\int_a^b dx \int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial P}{\partial y} dy = \int_a^b [P(y_2) - P(y_1)] dx$$

от точки a до точки b ; если изменить знак второго слагаемого и направление интегрирования для него, получим

$$\int_a^b + [P(y_2) - P(y_1)] dx = \int_a^b P(y_2) dx + \int_b^a P(y_1) dx = \int_0 P(y) dx.$$

Проделав ту же операцию для Q , получим формулу (1).

2. Теорема Гаусс-Остроградского:

$$\begin{aligned} \iiint_V \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) dx dy dz = \\ = \iint_S (A_x dy dz + A_y dx dz + A_z dx dy) \end{aligned}$$

или

$$\iiint_V \text{div } \mathbf{A} dv = \iint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}.$$

Тройной интеграл распространен на замкнутый объем, двойной интеграл на поверхность, ограничивающую этот объем.

3. Теорема Стокса:

$$\iint_S \text{rot } \mathbf{A} d\mathbf{S} = \int_0 \mathbf{A} ds.$$

Одиночный интеграл взят по некоторому замкнутому контуру, двойной — распространен на часть любой поверхности, ограниченную этим контуром.

Примечание 4 (к стр. 17). Уравнения Максвелла в составляющих по прямоугольным осям имеют такой вид:

$$\frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{H}_y}{\partial z} - \frac{1}{c} \dot{\mathfrak{D}}_x = \frac{4\pi}{c} i_x; \quad \frac{\partial \mathfrak{H}_x}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial x} - \frac{1}{c} \dot{\mathfrak{D}}_y = \frac{4\pi}{c} i_y; \\ \frac{\partial \mathfrak{H}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{H}_x}{\partial y} - \frac{1}{c} \dot{\mathfrak{D}}_z = \frac{4\pi}{c} i_z.$$

Эти три уравнения равносильны уравнению (1а). Уравнение (1б) напишется в виде следующих трех уравнений:

$$\frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial z} + \frac{1}{c} \dot{\mathfrak{B}}_x = 0; \quad \frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial x} + \frac{1}{c} \dot{\mathfrak{B}}_y = 0; \\ \frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial y} + \frac{1}{c} \dot{\mathfrak{B}}_z = 0. \quad (1б)$$

Уравнения (2а) и (2б) напишутся в виде двух уравнений

$$\frac{\partial \mathfrak{D}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{D}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{D}_z}{\partial z} = 4\pi\rho \quad (2а) \\ \frac{\partial \mathfrak{B}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{B}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{B}_z}{\partial z} = 0. \quad (2б)$$

Примечание 5 (к стр. 59). А. А. Лебедев в Государственном оптическом институте в Ленинграде разработал метод уменьшения рефлексов путем нанесения на поверхность стекла тонких прозрачных слоев (см. Н. Ф. Тимофеева, Журнал теоретической и экспериментальной физики 6, II, 1936).

Примечание 6 (к стр. 62). Это же можно демонстрировать и на так называемом оптическом контакте. Если наложить две совершенно плоские и чистые, хорошо отполированные стеклянные поверхности, то они слипаются между собою. При этом зазор между ними будет составлять только долю световой волны. В таком случае от границы между стеклами уже не происходит полного внутреннего отражения. Это можно наблюдать, поместив на оптическом контакте гипотенузу двух прямоугольных призм. Если на оптическом контакте помещена только часть гипотенузы, можно наблюдать переход от полного внутреннего отражения к почти полному отсутствию отражения. Возникающие при оптическом контакте силы сцепления, повидимому, молекулярного происхождения. Оптическим контактом широко пользуются в оптической технике для уничтожения рефлексов, например, в так называемом кубике Льюмера.

Примечание 7 (к стр. 65). В главе IV (дифракция) читатель найдет оценку величины области перехода на границе тени. Она может быть значительно больше длины световой волны. Размеры ее — порядка френелевой зоны.

Примечание 8 (к стр. 115). В настоящее время оптическое стекло в достаточном количестве и хорошего качества производится в СССР на заводах: Лензос (Ленинградский завод оптического стекла) и Изюмском заводе оптического стекла. Оптическая промышленность Союза совершенно не пользуется импортным стеклом.

Примечание 9 (к стр. 147). Следует отметить, что вычислители — практики часто пренебрегают теорией ошибок третьего порядка и пользуются исключительно тригонометрическими расчетами хода лучей, отыскивая нужное решение методом проб и постепенных приближений.

Однако человек, владеющий теорией ошибок, может извлечь из нее значительно больше, чем это думают практики (см. книжку Берека, автор которой придает теории значительно большее значение).

Примечание 10 (к стр. 151). У Борна описка, Гипотенуза призмы не серебрится. Тут имеет место полное внутреннее отражение.

Примечание 11 (к стр. 152). В заключение укажем некоторую литературу по геометрической оптике на русском языке:

1. М. Берек, Основы практической оптики, Гостехиздат, 1933.
2. Оплотехника, Курс лекций и упражнений (конспект), изд. Военно-воздушной Академии РККА.

3. В. С. Игнатовский, Элементарные основы теории оптических приборов, Гостехиздат 1933.

Примечание 12 (к стр. 166). По этой причине интерференционные явления в значительно более толстых пластинках можно наблюдать через малое отверстие.

Примечание 13 (к стр. 166). Цветами тонких пластинок пользуются для получения сферических поверхностей заданного радиуса кривизны. Изготавливается „пробное стекло“ заданного радиуса, который тщательно измеряется (например, сферометром). Другое измеряемое стекло накладывается на „пробное стекло“. В случае равенства кривизны обоих стекол воздушный промежуток между ними должен иметь одинаковую толщину, что может быть замечено по цветам тонких пластинок. В случае, если кривизна обоих стекол неодинакова, ее легко измерить по числу интерференционных колец.

Примечание 14 (к стр. 180). В эшелоне не наблюдаем кривых равного наклона, а дифракционное явление. Плоская волна, попав в эшелон, дифрагирует и собирается в главном фокусе линзы. Интерференционная картина, видимая в эшелоне, представляет собою прямые, параллельные щели коллиматора. В современных эшелонах число ступеней доводится до 60. Эшелон из стекла непрозрачен для ультрафиолетового света, поэтому изредка пользуются кварцевым эшелоном, или отражательным эшелоном, в котором наблюдение ведется не в проходящем, а в отражающем свете (см. Р. Вуд, Физическая оптика. Перевод с 3-го издания, Ленинград 1937).

Примечание 15 (к стр. 186). Майкельсон называл видимостью величину

$$V = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}.$$

Примечание 16 (к стр. 201). Совершенно непонятная описка Борна. В центре тени от круглого экрана всегда имеется полная интенсивность света. В центре тени от круглого отверстия, как это только что было показано, получается свет или темнота в зависимости от того — нечетное или четное число зон пропускает отверстие. Принцип Бабинне (стр. 211) относится ко всей дифракционной картине, кроме центральной части.

Примечание 17 (к стр. 211). Принцип Бабинне имеет силу в случае фраунгоферовой дифракции.

Примечание 18 (к стр. 226). Вернее, недавно еще пользовались. В настоящее время для инфракрасной области используются исключительно решетками „эшелетт“, т. е. плоскими отражательными решетками, в которых профиль штриха выбран так, чтобы весь дифрагированный отраженный свет оказался в одном порядке (см. R. H. Badger and C. Howley Cartwright, Physical Review 33, 692, 1934).

Примечание 19 (к стр. 228). Описка. Вогнутая решетка чертится на сферической, а не на цилиндрической поверхности. Подробная статья о вогнутой решетке появится вскоре в „Физической энциклопедии“.

Примечание 20 (к стр. 229). В последнее время решетки получили новое применение для работы в коротковолновой части спектра, короче 1000 Å и в области очень мягких рентгеновых лучей (длиннее 10 Å). В этой части спектра все тела обладают значительным поглощением, и потому решетка является единственным спектральным прибором, с которым можно работать в далеком ультрафиолете. Однако коэффициенты отражения металлов в далеком ультрафиолете малы. Поэтому выгоднее всего оказалось чертить решетки на стекле, которое и химически более устойчиво, чем металл. Число штрихов доводится до 1000 на миллиметр (см. Manne Siegbahn and T. Magnusson, Zs. f.

Phys. 62, 435, 1930; Sven Fagerberg, Zs. f. Phys, 62, 457, 1930; M. Södermann, Phil. May 10, 600, 1930).

Примечание 21 (к стр. 238). Зернистое строение фотографической эмульсии полагает предел четкости изображения на фотопластинке. Увеличивать изображение можно до тех пор, пока не станут видны отдельные зерна. Однако в этом отношении можно пойти несколько дальше: во-первых — применяя микрофотометр, а во-вторых — пользуясь качающимся объективом Линника (см. Известия Государственного оптического института).

Примечание 22 (к стр. 323). Слюда — мусковит отрицательный двуосный кристалл моноклинной системы. Ее главные показатели преломления равны

$$n_x = 1,560; n_y = 1,594; n_z = 1,598.$$

Ось оптической симметрии нормальна к плоскости спайности. Пластины в четверть волны из слюды имеют толщину в 35 μ .

Примечание 23 (к стр. 329). Это не вполне верно и вот почему: источник света никогда не бывает точечным, и потому никогда нельзя получить пучок параллельных лучей. По этой причине пучок лучей, проходящий через компенсатор Солейля, не проходит через него весь под одним и тем же углом наклона, и, следовательно, различные лучи получают различную эллиптичность. Отметим еще одно обстоятельство, чрезвычайно понижающее чувствительность и точность компенсаторов: это — рефлексы от поверхностей клиньев. На первый взгляд может показаться, что интенсивностью 1/625 интенсивности прямого пучка можно пренебречь. Однако, когда прямой пучок потушен николем, интенсивность дважды отраженных лучей может превзойти интенсивность прямого пучка.

Примечание 24 (к стр. 468). В формулах (15) и следующих выписан первый член, от остальных членов выписан знак плюс, а самый член не выписан. Например, уравнение первое в формулах (15) обозначает

$$I = e^4 = (X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2)^2 + X_1^4 + Y_1^4 + Z_1^4 + 2X_1^2 Y_1^2 + 2X_1^2 Z_1^2 + 2Y_1^2 Z_1^2 = 3(J_1 + 2J_2).$$

Примечание 25 (к стр. 474). Не свинцовое, а урановое стекло, которым и до сих пор пользуются в качестве флюоресцирующего экрана.

Примечание 26 (стр. 474). Полутеневые приборы. Принцип полутеневых приборов заключается в следующем: глаз очень хорошо определяет равенство интенсивностей и гораздо хуже замечает изменение интенсивности во времени и в пространстве. В полутеневых приборах в поляризаторе мы имеем два поля зрения. Каждое из них поляризовано, но направления поляризации обоих полей составляют друг с другом малый угол ϕ . Если главное сечение анализатора делит пополам малый угол ϕ , то оба поля будут казаться одинаково освещенными. Установка тем точнее, чем меньше угол ϕ . Но, с другой стороны, при этом понижается общая яркость поля зрения. Ее можно повысить, увеличив яркость источника света. Наиболее совершенный полутеневой поляриметр был построен Липпихом. В нем поляризатором служит призма Глан-Томсона. Половина призмы прикрыта другой призмой Глан-Томсона, главное сечение которой составляет малый угол ϕ с сечением первой призмы. Поворачивая вторую призму, можно менять угол ϕ . Несмотря на то, что второй поляризатор тушит часть света, прошедшего через первый, на результат измерений это не влияет (см. Hdb. d. Phys. XIX, стр. 740 и след., 1928, а также статью Вавилова С. И., Техническая энциклопедия т. 17).

Примечание 27 (стр. 561). Следует сказать: не двойной оси, а зеркально поворотной оси четвертого порядка, так как зеркально поворотная ось второго порядка эквивалентна центру симметрии.

Примечание 28 (к стр. 607). Предыдущие популярные определения термов несущественны для книги Борна, однако, они могут запутать читателя, так как не соответствуют ни старой боровской теории, ни новой квантовой механике. Согласно последней s терм не обладает моментом количества движения. Момент количества движения электрона в p -состоянии равен $\hbar/2\pi$ (\hbar — план.

ковская постоянная), в d -состоянии — $2\hbar/2\pi$ и т. п. Об орбитах электрона говорить не приходится. Однако все, что изложено в книге Борна относительно проникания электрона во внутренние оболочки атома, остается справедливым и сейчас.

Примечание 29 (к стр. 615). Причем две или более близких спектральных линии вместе дают один нормальный триплет, как будто бы он происходил от одной единственной линии.

Примечание 30 (к стр. 625). В дальнейшем оказалось, что все опыты Руппа были, мягко выражаясь, неверны, и он от них отказался.

Примечание 31 (к стр. 645). В формулах на следующей странице цифры в скобках представляют собою дроби $\frac{3}{1}; \frac{3}{3}; \frac{5}{1}; \frac{5}{2}; \frac{5}{5}$ и т. д.

Примечание 32 (к стр. 661). Следует отметить ряд чрезвычайно точных исследований аномальной дисперсии, произведенных акад. Д. С. Рождественским и его школой, которые публиковались в течение ряда лет (начиная с 1903 г.) в журнале Физического общества, в Журнале теоретической и экспериментальной физики и в Известиях Государственного оптического института.

Примечание 33 (к стр. 677). В области рентгеновых лучей твердые тела также обладают заметным, хотя и очень малым (меньше единицы), показателем преломления. Таким образом пучок рентгеновых лучей может претерпеть полное внутреннее отражение от поверхности тела. Этот показатель преломления надо принимать во внимание при прецизионном определении периодов кристаллических решеток, потому что тогда в формуле Брэгга λ есть длина волны не в пустоте, а внутри кристалла.

Вблизи полос поглощения рентгеновы лучи претерпевают аномальную дисперсию. Однако кривая дисперсии имеет вид не кривой с разрывом, как на рис. 224 стр. 667, а кривой с точкой возврата у границы поглощения, как это следует в данном случае из теории дисперсии (см. М. Корсунский, Физика рентгеновых лучей).

Примечание 34 (к стр. 691). Ширина линий при малых давлениях зависит от затухания излучением и от эффекта Доплера. Однако вещества с большим молекулярным весом, о которых идет здесь речь, — ртуть и иод, — обладают малой доплеровой шириной, которая, однако, превосходит естественную (см. стр. 658).

Примечание 35 (к стр. 707). Нормировка собственных колебаний определяется выбором коэффициентов в формуле (20) этого параграфа или в формуле (23) § 98 и (27) § 82.

ИМЕННОЙ И ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

(Цифры, напечатанные курсивом, относятся к таблицам)

А

- Аббе*, Э. 115; инвариант линзы 143; инвариант преломления 136; коллинеарное изображение 88; ограничение лучей 112; получение изображения в микроскопе 246; рефрактометр 64; стигматическое изображение 86; условие синусов 124; численная апертура 127, 246.
- Аберрации кривая 129.
- Аберрация, сферическая (геометрически) 129; (с волновой точки зрения) 277.
- Абрагам*, Г., аппаратура Абрагам и Лемуана (инерция Керр-эффекта) 497.
- Абрагам*, М. (и *Беккер*) учебник 16, 575.
- Абсолютные оптические инструменты 85 и сл.
- Азимут поляризации при отражении 50; главный 352.
- Азот, анизотропия, главные поляризуемости, средняя поляризуемость, постоянная Керра 520; газикинетический поперечник, эффективный оптический поперечник 597; константы дисперсии 677; молекулярная рефракция 458; расширение ртутной линии 2537 Å примесь азота 589; степень деполаризации 515, 520.
- Азота закись, N_2O , анизотропия 520; главные поляризуемости, средняя поляризуемость 520; двойные полосы Бьеррума 736; инфракрасные спектры 720; молекулярная рефракция 458, 462; нормальные колебания 731; постоянная Керра 514, 520; степень деполаризации 515, 520; строение молекулы 731 и сл.; явление Рамана 734.
- Азота окись, NO , молекулярная рефракция 458, 462; степень деполаризации 515.
- Аймс*, двойные полосы 721.
- Аккомодация глаза 148.
- Активность, естественная, оптическая 542 и сл.; для газов 549; для жидкостей 549; для кристаллов 554 и сл.
- Алюминий, коэффициент отражения 356; показатель поглощения 356; показатель преломления 356.
- Аммиак, NH_3 , главные поляризуемости 517, 521; дипольный момент 514, 521; Керра постоянная 514, 521; модель молекулы 517; молекулярная рефракция 458, 462; положение главных осей поляризуемости 518; средняя поляризуемость 521; степень деполаризации 514, 515, 521; эффективный оптический поперечник 597.
- Амичи*, уменьшение расходимости лучей в микроскопе 84.
- Ампера* молекулярный ток 411, 412.
- Амплитуда 31; комплексная 32; соотношение амплитуд при металлическом отражении 355; Френелевы формулы см. Френель.
- Анализатор 51, 331.
- Анизотропия, вынужденная 463 и сл.; коэффициент анизотропии для пары осцилляторов (естественное вращение) 711; член в постоянной Керра 495; аммиака 521; ацетона 521; метилового спирта 521; окиси углерода 521; сероводорода 521; синильной кислоты 521; хлористого водорода 521; хлористого

- метила 521; хлороформа 521; этилового эфира 521.
- Анизотропия, вращательная 639; искусственная 463 и сл.; тензор см. тензор поляризуемости.
- Анилин, $C_6H_5NH_2$, постоянная Коттона и Мутона 486.
- Аномальная дисперсия см. дисперсия.
- Аномальный эффект Зеемана см. Зеемана эффект.
- Антарес, диаметр 255; параллакс 255.
- Антисимметрические колебания 727.
- Апертура численная 127; угол 113.
- Апертурная блenda 113.
- Апланатические сферы 83; пары точек 125.
- Араго* 8, вращение плоскости поляризации 541; поперечность световых волн 9, 156.
- Арагонит 320, 344.
- Аргон, анизотропия 520; газикинетический поперечник молекулы 590; главные поляризуемости 520; константы дисперсии 677; оптический поперечник молекулы 597; постоянная Керра 520, средняя поляризуемость 520; степень деполаризации 515, 520; расширение ртутной линии 2537 Å вследствие столкновений 589.
- Арктур, диаметр 255; параллакс 255.
- Асимметрический атом углерода 543, 709.
- Астигматизм (геометрия) 130, 132, 146; волновая оптика 277; глаза 149.
- Астигматическая разность 76.
- Астрономическая труба см. труба.
- Атомная поляризация (рефракция) см. рефракция.
- Аффинное изображение см. изображение.
- Ахроматизация 114; оптических систем 118; плоскости изображений и размеров изображений 118; фокусных расстояний 116.
- Ацетальдегид, CH_3CHO , молекулярная рефракция 458, 462.
- Ацетилен, C_2H_2 , анизотропия 520; главные поляризуемости 520; постоянная Керра 520; средняя поляризуемость 520; степень деполаризации 520.
- Ацетон, $(CH_3)_2CO$, главные деполаризуемости 521; дипольный момент 521; для водных растворов 460; молекулярная рефракция 458, 462; постоянная Керра 495, 521; постоянная Коттона и Мутона 486; раствор бензола в ацетоне 461; степень деполаризации 521.

Ашкинас (и Рубенс) остаточные лучи 673.

Б

- Бабин*, Ж., вращательная способность 560; компенсатор 327; принцип 201, 211.
- Базис решетки 230.
- Бакк*, Э. (и *Ланде*), учебник 615, 687; *Пашена* и *Бакка* явление 614.
- Бальмерова линия первая (H_α), доплерова ширина 608; естественная ширина 660; Штарк-эффект 609; серия, формула 619; длина волны, коэффициент силы 664.
- Баркер* (и *Плайлер*), эффект Рамана 734.
- Барнес*, инфракрасное поглощение (собственные частоты) галоидных солей щелочных металлов 674; (и *Чернш*) 674.
- Бартолин*, Э., двойное преломление известкового шпата 6.
- Бегебольд* (*Чапский* и *Эпштейн*), абсолютные оптические инструменты 86.
- Беккер*, Р., (учебник *Абрагам-Беккера*) 16, 575.
- Беккерель*, А., дисперсия магнитного вращающего 479, 683.
- Беккерель*, Ж., парамагнитное вращение 482, 484.
- Ле-Бель*, оптическая активность 543.
- Бенедикт* (и *Зенфлебен*), рассеяние света металлическими сферами 392.
- Бензиловый спирт, $C_6H_5CH_2OH$, постоянная Коттона и Мутона 486.
- Бензол, C_6H_6 , анизотропия 520; главные поляризуемости 520; диэлектрическая постоянная 27; молекулярная рефракция раствора в ацетоне 467; показатель преломления 27; постоянная Керра 493, 520; постоянная Коттона и Мутона 486; средняя поляризуемость 520; степень деполаризации 516, 520.
- Бенуа*, измерение нормального метра в длинах волн 176, 178.
- Бернштейн* (и *Ландольт*), физико-химические таблицы 456, 516, 554.
- Бетельгейзе, диаметр 255; параллакс 255.
- Билье*, билинга 160.
- Ван-дер-Бильт* (*Моль* и *Бюргер*), регистрирующий фотометр с термозащитой 658.
- Био*, Ж. Б., круговое двойное преломление 541; формула для враще-

ния 706; корпускулярная теория 7.
 Био-Савара, закон 16.
 Бипризма 160.
 Блатон (и Рубинович), квадрупольное излучение 575.
 Блашке (учебник) 75.
 Бленда 112 и сл., 206, апертурная 113; линза без бленды 144; ограничивающая поле зрения 114.
 Близорукость 148.
 Блох, Э., (учебник) 12.
 Блумер, рассеяние света металлическими частицами 392, 395.
 Бойль, Р., ньютоновы кольца 6.
 Больцман, Л., показатели преломления газов 27, 29.
 Бор, Н., начало причинности 622, 623; начало соответствия 627; световые кванты 13; строение атома 12, 618.
 Борн, М., (учебник) 12, 14, 440; (и Йордан) учебник 12; потенциалы решетки 676, (и Броди) вычисление инфракрасных собственных частот 676; теория кристаллических решеток 440, (и Ланде) 676; температурная зависимость Керр-эффекта 491; молекулярное рассеяние света 507; естественное вращение плоскости поляризации 543; (Гейзенберг и Йордан) квантовая механика 526.
 Боте, В., оптика аморфных тел 421; (и Гейгер) счетчик 620.
 Бочкообразная дисторсия 132.
 Браве, А., компенсатор 327, 328.
 Брайлей, абберация звезд 13.
 Браун, Е. (и Кун), оптическая активность 704; полосы поглощения метиламида азидопропионовой кислоты 714.
 Брауновское движение 618, 750.
 Бриглеб, Г., (Вольф и Стюарт), измерение степени деполяризации 519.
 Бриллюэн, Л., электронная теория металлов 403; скорость сигнала 357.
 Де-Брогль, Л., учебник 12; волновая механика 12, 625.
 Броди, Е. (и Борн), инфракрасные собственные частоты 676.
 Бром, молекулярная рефракция 458; теоретическая атомная рефракция 462; бромистое серебро, AgBr, длина волны остаточных лучей 674; бромистый водород, HBr, молекулярная рефракция 458, 462.
 Брунс, Г., абсолютные оптические инструменты 86; эйконал 96, 97.

Брюстер, Де., угол поляризации 47; поглощающие кристаллы 369.
 Де-Брюен (и Зеeman), магнитное разложение спектральных линий 687.
 Брэгг, У. Х. (отец) и У. Л. (сын), рентгеновские спектры 230, 234.
 Брэгга формула для отражения рентгеновых лучей от кристалла 234.
 Бунзен (и Кирхгоф) спектральный анализ 11.
 Бурсиан, В. Р. (и Тиморева), оптическая активность 544.
 Бутан, C₄H₁₀, степень деполяризации 516.
 Бюиссон, А. (и Фабри), доплеровская ширина 581, 586.
 Бюргер (Молль и Ван-дер-Бильт), регистрирующий прибор (термоэлемент) 658.
 Бхагавантам, явление Рамана 734 (и Раман) 538.
 Бьеррума двойная полоса 720, 725; для закиси азота 736; для хлористого водорода 720.

В

Ваальс-ван-дер, сцепление 463; 608.
 Валентный электрон 463, 607.
 Вартенберг, Г. (и Рубенс), инфракрасные собственные частоты 673.
 Вебер, В. (и Кольрауш), скорость света 11, 17.
 Вейерштрасс, построение луча, преломленного сферой 82.
 Вейль, Г., учебник 12, 14.
 Вейскопф, В., расширение вследствие связи 641, (и Вигнер) затухание излучения 631; затухание вследствие столкновений 594.
 Вектор электрический 162, 385; магнитный 385; вектор потенциал см. потенциал; векторная волна 32.
 Верде, Э., магнитное вращение 474, 483; постоянная 474, 480, 683; для углекислоты, сероуглерода, воды, водорода 476.
 Верден-ван-дер, учебник 12.
 Вибратор свободный, гармонический 564; вынужденные колебания 628; затухающий 566; пара 707; множитель анизотропии 711; плечо 707; сила 626, 628.
 Вигнер, Э., учебник 12, (и Вейскопф) затухание вследствие излучения 631.
 Видеман, Г., явление Фарадея 474.
 Видимость интерференционных полос 181, 186.
 Вильсон, С. Т. Р., камера 621.

Вин, В. (и Люммер), абсолютно черная поверхность 616; дифракция 291; измерение долговечности возбужденных состояний 574.
 Винер, О., стоячие волны 160, 161.
 Винтовые оси в поглощающих кристаллах 369.
 Виртуальный источник света 157; вибратор см вибратор; изображение 83.
 Висмут, показатель поглощения, показатель преломления, отражательная способность 356.
 Вицинальное действие 715.
 Внешняя коническая рефракция 320, 323.
 Вогнутая решетка; установка 228, 229; фокусирующее действие 229.
 Вода, показатель преломления 27, 81; диэлектрическая постоянная 27; дипольный момент 749; коэффициент эллиптичности 57; постоянная Керра 493; магнитное вращение 476; радиус молекулы 748; молекулярная рефракция 458, 462; молекулярная рефракция водных растворов этилового спирта, ацетона, серной кислоты 460; 461; постоянная Верде 476.
 Водород атомный, линии поглощения (серия Лаймана) 663; серия Бальмера 663.
 Водород молекулярный, анизотропия, главные поляризуемости, постоянная Керра, средняя поляризуемость 520; теоретическая атомная рефракция 461; показатель преломления, диэлектрическая постоянная 27; степень деполяризации 515, 520; дисперсия 668, 482; доплерова ширина 580; газокINETический и оптический поперечник молекулы 590, 591; магнитное вращение 476, 482; расширение ртутной линии 2537 Å 589; постоянная Верде 478.
 Водяной пар, газокINETический и оптический поперечник молекулы 590, 591; расширение ртутной линии 2537 Å 589.
 Возбуждения условия для спектральных линий 618.
 Воздух, показатель преломления 27; степень деполяризации 515; диэлектрическая постоянная 27, 668, 669; дисперсия 669, 671; молекулярная рефракция 579; относительная доплерова ширина 579; рассеяние в воздухе см. рассеяние.
 Волластон, рефрактометр 64; спектральные линии 11.

Волн длины 31; измерение нормального метра 177; серия Бальмера 663; красная кадмиевая линия 176, 178; фраунгоферовы линии 115, 243; основных линий натрия 664; серия Лаймана 663; натровые D-линии 181, 580; измерение длин волн 225.
 Волновая механика 625.
 Волны стоячие 160, 161; волновой вектор 440; волновое число 31.
 Вольф, К. Л. (и Фолькман), активные кристаллы 554; (Стюарт и Бриглеб) явление Керра 519.
 Вольф, Я. (Кун и Фрейденберг) дисперсия естественного вращения 704.
 Восприимчивость магнитная 483.
 Вращательная способность 451; диамагнитная и парамагнитная часть 684; дисперсия вращательной способности см. дисперсия; изотропные тела 541 и сл.; удельная 560.
 Вращательные колебания, влияние на показатель преломления 748.
 Вращательный Раман-эффект 530, 534, 723.
 Вращение молекулы 529 и сл.
 Вращение плоскости поляризации естественное 541; магнитное, зависимость от направления луча 487; в прозрачных слоях железа 475; в железе 476; углекислоте 476; никеле 476; кварце 476; кислороде 476; сероуглероде 476; воде 476; водороде 476, 482; см. также явления Фарадея; парамагнитное 482; температурная зависимость 483; знак заминчивания магнитного вращения 478; естественного 541; удельное естественное левой фруктозы 554; правой глюкозы 554; виноградного сахара 554.
 Вторичные нормали (спектральные линии) 225; вторичный спектр 115.
 Входная блenda см. апертурная блenda.
 Вуд, Р. В., аномальная дисперсия в парах натрия 643; (и Эллет) деполяризация в магнитном поле 696; учебник 51; полное внутреннее отражение 59; переходные слои 59.
 Вырождение 533; случайное 727; степень вырождения 726.
 Г
 Габер, Ф., собственные частоты твердых тел 675 (и Цим) множители силы 688.

- Гаген (и Рубенс) инфракрасные отражения 358, 359.
- Газ, линии поглощения 648 и сл.; дипольные см. диполь; формула дисперсии 666 и сл.; Керр-эффект 494; закон Лорентц-Лоренца 455; молекулярная рефракция 455; оптически активный 549 и сл.
- Гайдинггер, интерференция в плоско-параллельных пластинках 165; коническая рефракция 322.
- Галилей, Г., 5; труба 151.
- Гамилтон, 8; характеристическая функция 96 и сл.; коническая рефракция 8, 320.
- Ганзен, аномальное явление Зеемана 687.
- Ганле, деполяризация резонансного света в магнитном поле 691, 693, 695.
- Ганс, Р., дифракция от проводящего эллипсоида 400; степень деполяризации 515; рассеяние света 507; магнитный момент 544; флуктуации поляризации 523; (и Галпель) излучение диполя 390; рассеяние в кристаллах 524; неполяризованная компонента рассеянного света 392.
- Галпель (и Ганс) дипольное излучение 390.
- Гармоническая плоская волна см. плоская волна.
- Гармонические собственные частоты 533; плоские волны 31; колебания 31, 564; гармонический вибратор см. вибратор; волна 30 и сл.
- Гартман, спектрофотометр 657.
- Гаудсмит (и Юленбек) спин электрона 615.
- Гаусс, К. Ф., диоптрика 101, 105 и сл., 118.
- Гаусвальдт, интерференция в кристаллических пластинках одноосных 339; двuosных 344.
- Гашение флюоресценции посторонним газом 593; Озеена теорема 424, 438.
- Гейгер (и Боте), счетчик 620.
- Гейзенберг, В., строение атома 615; теория дисперсии 526; начало причинности 622, учебник 12; (и Крамерс) отрицательная дисперсия 627; квантовая механика 12; соотношения неопределенности 622 и сл.
- Гейль, продолжительность жизни возбужденных молекул 575.
- Гейне, учебник 378.
- Гексагональная система 309.
- Гексаметилен, C_6H_{12} , анизотропия 520; степень деполяризации 520; главные поляризуемости 520; постоянная Керра 520; средняя поляризуемость 520.
- Гексан, C_6H_{14} , степень деполяризации 516.
- Гелий, константы дисперсии 671; доплерова ширина 580; газокINETический и оптический поперечник 591.
- Гельмгольц, Г., аномальная дисперсия 643.
- Геометрические ошибки изображения 118, 270.
- Геометрическая оптика 65 и сл., 387; область приложимости 69.
- Гептан, C_7H_{16} , степень деполяризации 516.
- Гергеллоу, электронная теория 575.
- Герке, Е., пластинка Люммера и Герке 179, 239; видимость интерференции 190.
- Гермер, дифракция электрона 625.
- Герц, Г. (и Рубенс), остаточные лучи 673; (и Франк) упругие удары 618.
- Герц, Г., 11; опыты с электромагнитными волнами 11; оптика подвижных тел 14.
- Герц, П., электронная теория 575.
- Герца вектор 421; волны 30.
- Герцгербер, учебник 147.
- Гиббс, измерение скорости света 24.
- Гиллераас, вращательная способность 563.
- Гильберт, Д. (и Курант), учебник 188.
- Гильш, Р. (и Поль), максимум поглощения кристаллов галогенидов 677.
- Гинар 115.
- Гирации поверхность 556, 560; константа 549; для кварца 562; тензор 548; вектор 555.
- Гираяма (и Шейнер) дифракционные фигуры 218.
- Глаз 147; аккомодация 148; астигматизм 149; расстояние ясного зрения 148; близорукость 148; разрешающая способность 244; световые потери 148; модель 148; дальность зрения 148.
- Глицерин, $C_3H_5(OH)_3$, коэффициент эллиптичности для отраженного света 58; радиус молекулы 759.
- Глубина проникновения света в металлах 350.
- Глубина, ощущение 148.
- Глюкоза правая, $C_6H_{12}O_6$, естественное вращение 554.

- Голландская труба см. галилеева труба.
- Гольнагель (и Рубенс), остаточные лучи 673.
- Гольдгаммер, А., учебник 638.
- Гольтсмарк, явление Штарка 594, 600, 603, 607, 608, 609, 610.
- Гомоцентричные пучки 75.
- Гоос, регистрирующий фотометр (фотоэлектрический) 658.
- Гофман (и Фюхтбауер), затухание вследствие столкновений 588, 658.
- Гофф, Я. Г. вант, оптическая активность 543.
- Границы приложимости классической оптики 616 и сл.
- Граничные условия 38 и сл., 52, 171, 282, 371.
- Гранье (и Кабанн), степень деполяризации 515, 516.
- Гримальди, дифракция 6, 193.
- Грин, Г., 9; теорема Грина 201.
- Грин, Г., теорема Грина 201.
- Грюнейзен, измерение скорости света 24.
- Гуи, рассеяние света 291; поглощение в линии 656.
- Гук, Р., ньютоновы кольца 6; волновая теория света 6.
- Гульстранд, А., ошибки изображения высшего порядка 147; очки 148; теория глаза 147.
- Гюйгенс, Хр. 6; дифракция 195, сферические волны 194, 201; волновая теория 6; графическое построение преломленной волны в кристаллах 321; принцип 26, 195 и сл., 201, и сл., 215, 222.
- Д**
- Дажерр, фотография 118.
- Дальность зрения 148.
- Дальнометр стереоскопический 151.
- Дарвин, Г., тиндалево рассеяние 421.
- Датта, газокINETический поперечник 593.
- Дор, П., определение лашмидтова числа 522.
- Двойное зеркало, см. Френель, зеркало.
- Двойное преломление см. преломление.
- Двойные звезды, разрешение 253.
- Двойные полосы Бьеррума 720, 725; в закиси азота 736; в хлористом водороде 720 и сл.
- Двойко-вогнутая линза 110.
- Двойко-выпуклая линза 110.
- Двуосные кристаллы 306, 313, 324, 340 и сл.; поглощающие 367 и сл.; активные, поверхность нормалей 557; поверхность постоянной разности фаз 343; оси нормалей 313; ось лучей 319.
- Двушмерная решетка 229.
- Дебай, П., дифракция от проводящих сфер 370, 388; дисперсия дипольных жидкостей 456, 749, 759; световое давление на рассеивающие частицы 401; дифракционная теория ошибок изображения 262, 269, 270; влияние вращающей молекул на показатель преломления 29; (Шеррер, Хелл) спектроскопия рентгеновых лучей 230, 234; расширение линий вследствие Штарк-эффекта 594, 607; теория Комптон-эффекта 620.
- Девиссон (и Гермер), дифракция электронных лучей 625.
- Декарт, Р., 5.
- Демер, определение числа Лашмидта 522.
- Деполяризация света, рассеянного от проводящих шаров 397; света, рассеянного молекулами 521 и сл.; резонансного излучения посторонними газами 593; магнитным полем 696; степень деполяризации 397, 512; в рамановских линиях 724; для четыреххлористого углерода 745; для тиндалевского рассеяния этана 516, 520; этилового спирта 516; аммиака 514, 515, 521; аргона 515, 520; ацетона 521; бензола 516, 520; бутана 516; хлора 514, 515, 520; хлороформа 516, 521; хлористого водорода 514, 521; циана 520; синильной кислоты 521; этилового эфира 516, 521; гептана 516; гексаметилен 520; гексана 516; уголекислоты 514, 515, 520; окиси углерода 515, 521; криптона 515, 520; воздуха 515; метана 516, 520; метилового спирта 516, 521; хлористого метила 521; метилена 520; неона 515; октана 516; пентана 516; пропана 516; кислорода 515, 520; сернистого ангидрида 514, 521; сероуглерода 516, 520; сероводорода 521; окиси азота 515; закиси азота 514, 515, 520; азота 515, 520; четыреххлористого углерода 520; толуола 516; водорода 515, 520; ксенона 515.
- Деформация линзы 143; деформации работа для молекулы 416.

Деформируемость главная см. поляризуемости тензор см. поляризуемости тензор.

Джинс, учебник 586; закон излучения Релея-Джинса 617.

Джоулево тепло 18, 19, 347.

Диакустика 78, 83.

Диаметр земной орбиты 255; солнца 255; неподвижной звезды 254; Антареса, Арктур и Бетельгейзе 255.

Диафрагма см. бленда.

Диккинсон (Диллон и Расетти), эффект Рамана 734.

Диллон (Диккинсон и Расетти) Раман-эффект 734.

Динкелаккер, О. (Иос и Фюхтбауер) расширение вследствие столкновений 588, 652, 658.

Диоптрика см. Гаусс.

Диоптрическое изображение см. изображение.

Диоптрия 149.

Диполь 29, 390, 409, 421, 594, 598, 602, 626 и сл.; плотность объемная 409; электростатический 409; поле колеблющегося диполя 498, 604; дипольные жидкости, дисперсия 746 и сл.; свободное колебание 564 и сл.; газы 514 и сл.; решетки (распространение световых волн) 442; потенциал 439, 443; дипольный член в постоянной Керра 495; для аммиака 521; ацетона 521; хлороформа 521; хлористого водорода 521; этилового эфира 521; окиси углерода 521; метилового спирта 521; хлористого метила 521; сернистого ангидрида 521; сероводорода 521.

Дипольная волна 421, 424, 430 и сл. 500.

Дипольный момент аммиака 514, 521; ацетона 521; хлороформа 521; хлористого водорода 514, 521; синильной кислоты 521; этилового эфира 521; окиси углерода 521; лимонена 553; ментона 553; метилового спирта 521; хлористого метила 521; сернистого ангидрида 521; сероводорода 521; воды 748.

Дипольное излучение, распределение интенсивности 389, 608.

Дирак, П. А. М., учебник 12.

Дисперсия ход, принимая во внимание Допплер-эффект 643; пренебрегая Допплер-эффектом 638; произведенный спектральной линией 636 и сл.; в возбужденном неоне 663; в прозрачной области 666 и сл.

Дисперсионная способность 114; призмы 242; флинта 115; крона 115.

Дисперсионная формула Коши для газов 671; константы 669; для кристаллов 673; этана 671; аргона 671; флуорита 673; гелия 671; воздуха 671; метана 671; кислорода 671; каменной соли 673; азота 671; сильвина 673; водорода 671.

Дисперсия 564 и сл.; аномальная 641; на фуксиновой призме 642; в парах иода 642; в парах натрия 643; метод скрещенных призм 642; осей 296; преломления 357, 456, 668, 683; для водорода 482, 669; кислорода 669; воздуха 669; твердых тел 671; жидкостей 671; дипольной жидкости 745; поляризации 398; рассеяния 690, 697 и сл.; магнитного вращения 481; естественного вращения 704 и сл.; для метиламида азидопропионовой кислоты 714; явления Фарадея 679 и сл.; 683; для Керр-эффекта 697 и сл.; вблизи спектральной линии 660; отрицательная 627; нормальная 641, 668; вращательная 683.

Диссипативная сила 575.

Дисторсия 132; 277.

Дифракционная решетка см. решетка.

Дифракционная теория ошибок изображения 262.

Дифракция и формулы Фраунгофера для прямоугольника и щели 211; для круга 216; для параллелограмма и эллипса 218; для решетки 220; для статистически распределенных отверстий 219; Френеля для края экрана 255; Зоммерфельда для края экрана 280.

Дифракция, теория Гюйгенса 195 и сл.; Кирхгофа 206 и сл.; Зоммерфельда 280 и сл.; от проводящих сфер 369 и сл.; электронных лучей 625 и сл.

Диффузное излучение 126; отражение 126; диффузная серия 607.

Дихроизм, круговой 710.

Диэлектрик изотропный 18.

Диэлектрическая постоянная, определение из показателя преломления 669; главная 295, 360; оптическая 454, 757; статистическая 758; для этилового спирта 27; бензола 27; флуорита 30, 673; углекислоты 27; окиси углерода 27; воздуха 27; 669, 671; метилового спирта 27; кислорода 669.

каменной соли 30, 673; сильвина 30, 673; воды 27; водорода 27, 669.

Диэлектрические сферы, диаграмма излучения 397; диэлектрический тензор 293, 294, 359; диэлектрическая главная система осей 295; диэлектрическое смещение 16.

Дизтиловый эфир, $(C_2H_5)_2O$, степень деполаризации 516, 521; дипольный момент 521; главные поляризуемости 521; постоянная Керра 495, 521; средняя поляризуемость 521; модель молекулы 519.

Длина оптическая 87.

Долговечность, средняя 567, 573, 574, 585; естественная 573, 651.

Доллоу, ахроматические объективы 115.

Дополнительные бленды 211; цвета 331.

Допплер 14, 577.

Допплерова ширина см. ширина; эффект 566, 572 и сл., 577 и сл., 581, 582, 586, 627, 637, 638 и сл.; ход дисперсии и поглощения, принимаемая во внимание Допплер-эффект 643; пренебрегая Допплер-эффектом 638; влияние на резонанс 632 и сл.

Друде, П., связь между инфракрасными и ультрафиолетовыми собственными колебаниями 675; параметр гирации 562, показатель преломления и поглощения металла 355; переходные слои 52.

Духи в спектральных аппаратах 171 227.

Е

Единичные векторы, средние значения произведений компонент 429, 452, 468, 533.

Естественная активность, естественное вращение см. вращение; естественная долговечность см. долговечность; ширина линии см. ширина; естественный свет 49.

Ж

Жамен, Ж., интерференционный рефлектометр 174, 175; компенсатор 327; оптические константы металлов 356.

Железо, показатель поглощения 356; показатель преломления 356; магнитное вращение 476; отражательная способность 356; желез-

ные слои, магнитные вращения в прозрачных слоях 475.

З

Завинчивания знак для явления Фарадея 478; для естественного вращения 541.

Запаздывающий потенциал см. потенциал.

Заряд электронов 573.

Затухание см. ширина спектральных линий.

Звуковое кино 497.

Зеeman, П., расщепление спектральных линий 610, 614; учебник 686; Зеemана явление 474, 479, 679; аномальное 480, 613; электронная теория 609 и сл.; обратное 679, 685 и сл.; продольное и поперечное 613, 682.

Зейдель, Эйконал 118, 140.

Зельмейер, аномальная дисперсия 643.

Зенфтлибен (и Бенедикт) дифракция от проводящих сфер 392; линейное поглощение 656.

Зеркальный объектив 251.

Зиберт, явление Штарка 606.

Зигбан, Н., рентгеновские спектры 230; учебник 237.

Зидентопф (и Зигмонди), ультрамикроскоп 246.

Золото, коэффициент поглощения 356; показатель преломления 356; суммарное излучение малых золотых частиц 399; диаграммы излучения малой сферы 393; отражательная способность 356.

Зоммерфельд, А., теория дифракции 206, 281 (и Рунге) геометрическая оптика 67; учебник 12; сверхсветовые фазовые скорости в металлах 357; квантовая механика 615; влияние излучения на электрон 575.

Зоны, построение Френеля 196, 206.

Зорге, К. (и Люммер), переходные слои 59.

Зрачок входа 113; зрачок выхода 113.

Зрение обоими глазами 148.

И

Идиоформные кольца 369.

Излучение 564, 574; черное 616; закон Кирхгофа 616; закон Релея и Джинса 617; излучение диффузное 126; в единицу времени 566; эйнштейновы коэффициенты 651.

Изображение, аффинное (бесфокусное, телескопическое) 90, 93, 98, 101; диоптрическое (прямо бегущее) 93; рассеивающее 93; катоптрическое (обратно бегущее) 93; собирающее 93; коллинеарное 88; с помощью линз 110; стигматическое (точечное) 83; центрированное 90, 94; сложение изображений 94; изображения ошибки, геометрические 118 и сл.; волновые 270 и сл.

Изображение, мнимое, действительное 83; ахроматизация плоскости изображения 118; ошибки, геометрическая теория 127 и сл.; дифракционная теория 262 и сл.; сагиттальная плоскость изображения 132; тангенциальная 132, 277.

Изображений принцип Томсона 281.

Изогрифы 332, 346; главные 332, 338; построение 345.

Изомерия оптическая 543.

Изохроматы 332, 336, 337, 344; главные 332, 338.

Иммерсионный объектив 84, система 246.

Инвариант преломления Аббе 136; линзы Аббе 143.

Инерции момент молекулы 530.

Интенсивность света 45, 154; с точки зрения квантовой механики 621; рамановского света 723; рассеянного света см. рассеянный свет; при полном внутреннем отражении 61; удельная яркость 126; распределение внутри спектральной линии 182; интенсивность инфракрасных колебаний 718.

Интерференция 153 и сл.; в кристаллических пластинках 325, 329, 340; приборы 153; явления 30; в поглощающих кристаллах 364; в отраженном свете 167; когерентный свет 153; кривые равной толщины 165; равного наклона 165, 167; положение максимумов 233; порядок интерференции 221; интерференционный рефрактометр см. рефрактометр; видимость 186; спектроскопия 170, 180, 190, 253; рассеяние рентгеновых лучей 233; опыт Юнга 157, 219; частиц материи 624.

Интерферометр 175 и сл.; Майкельсона 175; Фабри и Перо 178, 225.

Инфракрасные собственные частоты кристаллов 674 и сл.; молекул 718 и сл.

Иод, теоретическая атомная рефракция 462; аномальная дисперсия в парах 642.

Ион 594, 598, 675.

Ионная решетка см. решетка.

Иоос (Фюхтбауер и Динкелаккер) расширение вследствие столкновений 588, 652, 658.

Иордан (и Борн), учебник 12 (и Франк), учебник 593; (Борн и Гейзенберг) квантовая механика 526.

Ирис. см. апертурная блenda.

Искусственная анизотропия 463.

К

Кабанн, учебник 507; (и Гранье) измерение деполаризации 515; Раман-эффект 526, 745.

Кадмий, показатель поглощения 356; показатель преломления 356; отражательная способность 356; кадмиевая линия, длина волны красной кадмиевой линии в качестве единицы длины 178.

Калий бромистый, КВг, длины волн остаточных лучей 674; инфракрасное поглощение 674; ультрафиолетовое поглощение 677.

Калий иодистый, КJ, остаточные лучи 674; инфракрасное поглощение 674; ультрафиолетовое поглощение 677.

Калий хлористый см. сильвин.

Калъман (и Лондон), квантовая теория ширины спектральных линий 592.

Кальцит (известковый шпат) показатель преломления 325; ромбоздр 325.

Каменная соль, NaCl, показатель преломления, диэлектрическая постоянная 30, 673; константы дисперсии, собственные частоты 673; инфракрасные максимумы поглощения 676; ультрафиолетовые максимумы поглощения 677.

Камера обскуры 147, 149.

Камерлинг Оннес (Беккерель и де Хаас), температурная зависимость парамагнитного вращения 484.

Канадский бальзам, показатель преломления 325.

Каналовые лучи 574.

Каратеодори, абсолютные оптические инструменты 86.

Кардиоид-конденсор (Зидентоф и Зигмонди) 246.

Каролус, конденсатор Керра 497.

Карст, А. (и Ладенбург), факторы силы бальмеровых линий 664.

Катакаустика 78.

Катоптрическое изображение 93.

Каустика 74, 77; эллипсоида вращения 77; построение 80.

Каустическая поверхность см. каустика; кривая 77 и сл.

Квадруполь, поле 600; излучение 390, 574.

Квазизотропная совокупность молекул 418; квазистатическое поле 30.

Квант, света, энергии 617, 619.

Квантование направлений 472, 529.

Квантовые условия 618; теория, механика 525, 615.

Кварц 312, 541; преломление 562; двойное преломление 562; коэффициент эллиптичности 562; постоянная гирации 562; магнитное вращение 476.

Квинке, измерение оптических постоянных кобальта 356.

Кельвин, упругий эфир 10.

Кениг, А., учебник 147.

Кеплерова труба 150.

Керр, электрическое двойное преломление 490, 491.

Керр - эффект 490 и сл.; связь с рассеянием 511, 512, 513; дисперсия Керр-эффекта см. дисперсия; температурная зависимость 494; инерция 497; в газах 494; знак 495.

Керра конденсатор 497.

Керра постоянная 493; член, выражающий анизотропию, см. анизотропия; дипольный член постоянной Керра см. дипольный член; для этана 520; этилового спирта 495; хлористого этила 494, 495; окиси этилена 495; аммиака 514, 521; аргона 520; ацетона 495, 521; бензола 493, 520; хлора 514, 520; хлорбензола 493; хлороформа 493, 521; хлористого водорода 514, 521; циана 520; синильной кислоты 521; этилового эфира 495, 521; флюнта 493; гексаметилен 520; углекислоты 514, 520; окиси углерода 521; криптона 520; метана 520; метилового спирта 495, 521; бромистого метила 494; хлористого метила 521; метилена 520; нитробензола 493; нитролуола 493; кислорода 520; сернистого газа 514, 521; сероуглерода 493, 494, 495, 520; сероводорода 521; закиси азота 514, 520; азота 520; четыреххлористого углерода 495, 520; воды 493; водорода 520.

Кеттелер, аномальная дисперсия 643; светящееся ребро 60.

Кикучи, катодные лучи 625.

Кислород, полосы поглощения 669; анизотропия 520; теоретическая атомная рефракция 467; степень деполаризации 515, 520; диэлектрическая постоянная 669; константы дисперсии 671; доплерова ширина 580; газокINETИЧЕСКИЙ поперечник молекулы 590; главные поляризуемости 520; постоянная Керра 520; магнитное вращение 476; средняя поляризуемость 520; молекулярная рефракция 458; оптический поперечник молекулы 597; расширение ртутной линии 2437 Å 589.

Кирн, формула Беккереля 481.

Кирхгоф, Г., 10, 11; дифракция 206, 208; упругий эфир 10; распространение света 201; абсолютно черное тело 616; (и Бунзен), спектральный анализ 11.

Кирхгофа теорема для теплового излучения 201.

Китхин (и Мюллер), дипольные жидкости 759.

Классическая модель источника света 564 и сл.

Клаузиус, Р., механическая теория тепла 455.

Клейн, Ф., эйконал 86, 96.

Книппинг, кристаллическая решетка 230.

Кобальт, показатель поглощения 356; показатель преломления 356; отражательная способность 356.

Когерентный свет 153; когерентности длина 183; когерентности время 183, 189.

Колебаний плоскость 36; эллипс 37; при металлическом отражении 354; колебаний направление 36; 305 и сл., число 31.

Коллинеация с осевой симметрией 89 и сл.

Коллоидные растворы 389.

Кольрауш, К. В. Ф., учебник 525.

Кольрауш, Р., 11 (и Вебер), скорость электромагнитных волн 11, 16, 24; рефрактометр 64.

Кольшоттер, А., геометрическая оптика 98, 119, 146.

Кома, геометрически 130, 144; с волновой точки зрения 277; для тонких линз 145.

Комбинационные частоты 526, 527.

Комбинационный принцип в спектроскопии см. Ритц.

Компенсатор 327; см. Бабине, см. Солейль.
 Комптон, эффект Комптона 620.
 Конвекционный ток 403.
 Коническая рефракция внешняя 319, 320, 323; внутренняя 320, 321.
 Конусный анализатор Маха 52.
 Координаты, разделение криволинейных координат 281.
 Копферманн (и Ладенбург) аномальная дисперсия 643, 663.
 Корбино (и Макалузо) аномальная дисперсия магнитного вращения 686.
 Корню, А., двойное преломление кругового вращения 560; спираль 261.
 Корпускулярная теория света 619.
 Косинуса закон (ламбертов) 126.
 Коттон, А., эффект (круговой дихроизм) 710 и Мутон магнитное двойное преломление 486.
 Коттон-Мутон эффект 484 и сл., 679, 689; константа 486; для анилина 486; ацетона 486; бензола 486; бензилового спирта 486; хлороформа 486; нитробензола 486; сероуглерода 486; толуола 486.
 Кох, П. П., фотометр 658.
 Кох, Я., формула дисперсии 669.
 Коши, упругая теория света 8; формула дисперсии 671.
 Коэффициент поглощения 348, 638; главный 365.
 Край, дифракция от края; теория Френеля 257; теория Зоммерфельда 281.
 Крамерс, отрицательная дисперсия 627; (и Гейзенберг) квантовая механика 526.
 Криволинейные координаты 281.
 Кривые равной разности хода см. изохроматы; равной толщины, равного наклона 165; равной разности фаз см. изогирь; каустические 77 и сл.
 Криптон, анизотропия 520; степень деполаризации 515, 520; доплерова ширина 581; главные поляризуемости 520; постоянная Керра 520; средняя поляризуемость 520.
 Кристалл, поглощающий см. поглощение; определение скорости распространения света 303 и сл.; направление колебаний 304; закон преломления 321; константы дисперсии 672, 673; электрическая теория решетки 676; оптика решеток 439 и сл.; кристаллическая решетка 230; построение Гюйгенса для преломления 321; кри-

сталлические классы оптические 309 и сл.; измерение главных показателей преломления 324; оптика кристаллической решетки 18, 293, и сл.; интерференция в пластинках см. интерференция; длины волн остаточных лучей 674; рассеяние в кристаллах 232, 524; ультрафиолетовое поглощение 677.
 Критическая опалесценция 524.
 Кришнан (и Раман) явления Рамана 524.
 Крон 114; показатель преломления для фраунгоферовых линий 115; дисперсия 115.
 Круг, дифракция от круглых отверстий 216; круговая частота см. частота циклическая.
 Круговое двойное преломление см. преломление, круговая поляризация см. поляризация; круговой дихроизм 710.
 Круговые сечения эллипсоида нормалей 310.
 Ксенон, степень деполаризации 515.
 Куммер, куммерова система лучей 70.
 Кун, В., естественное вращение 704; определение коэффициентов силы 666; теорема о сумме f 627, 631; видоизмененное действие 715.
 Кундт, магнитное вращение в кристаллических слоях 475; металлические призмы 351; метод скрещенных призм 641.
 Курант, Р. (и Гильберт), учебник 187, 215, 376.
 Кюри, закон (парамагнетизм) 483.

Л

Ладенбург (и Рейхе), поглощение в конечных слоях 652 (и Копферманн); аномальная дисперсия 643; беккерелево соотношение 481; (и Копферманн, и Лориа) ход дисперсии вблизи спектральной линии 661, 663; (и Леви, и Рейхе) линейчатое поглощение 657; магнитное вращение 474, 475; отрицательная дисперсия 627; (и Рейхе, и Карст, и Тиле) коэффициенты силы 626, 664, явление Штарка 608.
 Лайманова серия, коэффициенты силы 663; длины волн 664.
 Ламберт, закон косинусов 126.
 Ланг, круговое двойное преломление 560.
 Ланде, А. (и Борн, М.) электрическая теория кристаллических решеток 676; явление Зеемана 615; (и Бак)

687; множитель Ланде для явления Зеемана 480.
 Ландольт (и Бернштейн), физико-химические таблицы 456, 516, 554.
 Ландсберг, Г. (и Мандельштам), резонансное рассеяние 703; рассеяние в кристаллах 524.
 Ланжевен, П., явление Керра 491.
 Лаплас, Пьер-Симон, эмиссионная теория 7.
 Лармор, влияние магнитного поля на движение электронов 479; явление Керра 491; частота 479, 611; прецессия 480.
 Лауэ, М., дифракция 220; учебник 14; спектроскопия рентгеновых лучей 230.
 Леви, С. (и Ладенбург), прозрачность 656.
 Левый кристалл 542; круговой свет 37, 560.
 Лем, Г. (Ламб) учебник 755.
 Лемуан (и Абрагам) инерция двойного преломления 496.
 Леонардо-да-Винчи дифракция 193.
 Леонтович, М. (и Мандельштам) рассеяние в кристаллах 524.
 Леру, аномальная дисперсия 641.
 Либиш, Т. (и Рубенс) дисперсия осей 296; максвелловы соотношения 29; остаточные лучи 673.
 Либман, абсолютные оптические инструменты 86.
 Лимошен, $C_{10}H_{16}$, дипольный момент 553.
 Линза, инвариант Аббе 143; изображение с помощью линзы 110; двояко-вогнутая 110; двояко-выпуклая 110; деформация 143; тонкая 110, 116, 144 и сл.; свободная от комы 145; оптический прогиб 142; плоско-выпуклая 110.
 Литий бромистый, LiBr, ультрафиолетовое поглощение 677; фтористый, LiF, инфракрасное поглощение 674; длины волн остаточных лучей 674; иодистый, LiI, ультрафиолетовое поглощение 677.
 Ллойд, коническая рефракция 8, 321, 322.
 Лондон, Ф., квантовая теория 463; (и Кальман) 592.
 Лорентц, Г. А. 14; аномальное явление Зеемана 611, 614; лорентцова сила 36; световой эфир 14; закон 455; затухание вследствие столкновений 582.
 Лорентц-Лоренца закон 432, 452 и сл., 455, 640; для газов 455.

Лоренц, Л., см. Лорентц-Лоренца закон.
 Лориа, Ст. (и Ладенбург), дисперсия вблизи линий 661.
 Лошмидтово число, определение 521, 522.
 Лундблад, оптика аморфных тел 421, 424, 439.
 Лупа 149.
 Лучей ось 310; в двусном кристалле 320; пучок бесконечно тонкий 75; эллипсоид 306, 307, 310; поле 73; скорость 296, 298; уравнение Френеля 300; показатель 299; луч обыкновенный, необыкновенный 312; куммерова система 70.
 Люммер, О. (и Вин), абсолютно черная поверхность 616; (и Рейхе) возникновение изображения в микроскопе 246; кривые равного наклона 165, 167; учебник 111; видимость интерференции 190; (и Зорге) переходные слои 59.
 Люммера и Герке пластинка 179, 239; куммерова система 70.
 Люминесценция 581.
 Люссем, явление Штарка 606.

М

Магнетон 615.
 Магний, показатель поглощения 356; показатель преломления 356; отражательная способность 356; магний платино-синеродистый $Mg[Pt(CN)_6]$ 367.
 Магнитное поле, расщепление линий см. Зеемана явление.
 Магнитооптика 473 и сл.
 Магнитооптический эффект, общее 487.
 Маделунг, теория остаточных лучей 675.
 Майкельсон, А. А., эфирный ветер 14; измерение нормального метра 178, 179; доплерова ширина 580; зависимость Штарк-эффекта от давления 608; получение штриховых решеток 226, 227; интерферометр 175; измерение малых углов 251; измерение скорости света 24; видимость интерференции 190; затухание вследствие столкновений 582; эшелон 179; разрешение сложных линий 182.
 Макалузо (Кобрино), дисперсия явления Зеемана 686.
 Мак-Келлог, 9; световой эфир 9, 10.
 Максвелл, Дж. Кл. 10; теория света 11; световой путь 86.
 Максвелла формула для показателя преломления 26, 29, 357, 666;

- для свободной длины пути 586; уравнения 16 и сл., 19, 21, 22, 66, 193, 347, 359, 360, 402, 403; в полярных координатах 372; теорема о световом пути 88.
- Малус**, 7; поляризация света 7; закон 70.
- Мандельштам**, Л. (и **Ландсберга**) явление Рамана 524, 702.
- Мандельштам** С. Л. (и **Леонтович**) рассеяние в кристаллах 524.
- Маннебак**, явление Рамана 526.
- Марков**, А. А., учебник 596.
- Марх**, А., учебник 12.
- Маскар**, интерференционные кривые равного наклона 165, 167; радуга 388.
- Материальные уравнения 17, 20, 293.
- Матосси** (и **Шефер**), учебник 718.
- Маунт** Вильсон обсерватория 244.
- Мах**, Э., интерференционный рефрактометр 174, 175; конический анализатор 52.
- Маяк** 149.
- Мебиус**, В., теория радуги 388.
- Медь**, показатель поглощения 350, 356; показатель преломления 356; глубина проникания света 350; электропроводность 349, 358; отражательная способность 356.
- Мейер**, оптические константы металлов 356.
- Мензинг**, расширение спектральных линий 610.
- Ментон**, $C_{10}H_{18}O$, дипольный момент 553.
- Металлические частицы, дифракция 369.
- Металлооптика 18, 347 и сл.; металлическое зеркало; отражательная способность 161.
- Метан**, CH_4 , анизотропия 520; степень деполяризации 516, 520; константы дисперсии 671; главные поляризуемости 520; постоянная Керра 520; положение главных осей поляризуемости 496; средняя поляризуемость 520.
- Метастабильное состояние** 574, 626.
- Метиламид** азидпропионовой кислоты, $CH_3CHN_3CON(CH_3)_2$, дисперсия поглощения 715; дисперсия вращения 714; момент пары вибраторов 711.
- Ми**, Г., дифракция от проводящих сфер 370, 387, 392; эффект 393.
- Мизес**, Р., (и **Франк**) учебник Римана-Вебера 188.
- Микроскоп** 84, 114, 152; граница разрешения 246 и сл.; уменьшение расходимости лучей 84; поляризационный 346.
- Минимум отклонения (в призме) 241.
- Минковский**, Р., измерение затухания вследствие излучения 582, 587, 647, 660; коэффициент силы 664.
- Минор**, измерение оптических констант металлов 356.
- Мицushima**, оптические константы спиртов 759.
- Множители силы, теорема о сумме 626, 663, 702.
- Модель двухатомной молекулы 718.
- Молекула, гантельная модель 718; система главных осей 510; модель молекулы аммиака 518; этилового эфира 519; метилового спирта 518; хлористого пропила 519; двуокиси серы 517; закиси азота 731 и сл.; вибрации 529; радиус для глицерина 760; для пропилового спирта 760; воды 756; симметрические свойства 549, 725 и сл.; момент инерции 529.
- Молекулы поперечник, газокINETический и оптический 587, 591; для аргона, углекислоты, кислорода, азота, водорода, водяных паров 591.
- Молекулярная рефракция см. рефракция.
- Молекулярные проценты 456.
- Молль** (**Бюргер** и **Ван-Дер-Вильт**) фотометр (термоэлемент) 658.
- Момент диполя см. дипольный момент; момент электрический, отнесенный к единице объема 27, 409; магнитный 412; момент магнитный электрона 615; флуктуации момента 498, 502.
- Монобромнафталин**, $C_{10}H_7Br$, показатель преломления 246.
- Моноклиная система 310.
- Монохроматический свет 159, 241, 564.
- Москотти**, диэлектрические свойства изоляторов 455.
- Мровка**, квантовая теория ширины спектральных линий 610.
- Мутные среды, явление Тиндалля 499.
- Мутон** (и **Коттон**), поперечное магнитное двойное преломление 486.
- Мюллер**, Г. (и **Китхин**), дипольные жидкости 759.

Н

- Навье**, упругое твердое тело 9.
- Намагниченность 402 и сл.; намагниченность на единицу объема 412.

- Направление, флуктуация молекул по направлениям 507.
- Напансон**, Л., теория дисперсии 638.
- Натрий бромистый**, $NaBr$, инфракрасное поглощение 674; ультрафиолетовое поглощение 677.
- Натрий иодистый**, NaI , инфракрасное поглощение 674; ультрафиолетовое поглощение 677.
- Натрий фтористый**, NaF , инфракрасное поглощение, длина волны остаточных лучей 674.
- Натрий хлористый** см. каменная соль.
- Натрий**, показатель поглощения, показатель преломления 356; доплеровская ширина 580; отражательная способность 356.
- Натровая** призма, аномальная дисперсия 643.
- Натровые D-линии**, разрешение 181; доплеровская ширина 580; естественная ширина 647, 660; коэффициенты силы 661; длины волн 181, 580.
- Небо**, цвет 501; распределение яркости 507.
- Нейман**, К., упругий эфир 10.
- Нейман**, Ф., упругая теория света 9, 47.
- Некогерентный свет 153; рамановское излучение 528.
- Необыкновенный луч (одноосный кристалл) 312.
- Неон**, степень деполяризации 515, ход дисперсий в возбужденном неоне 663; доплеровская ширина 581.
- Неопределенности соотношения 625.
- Неподвижные звезды; измерение диаметра 254.
- Непрерывности уравнение 17.
- Никель**, магнитное вращение 476.
- Николь**, В., 51; призма 325.
- Никольс** (и **Рубенс**), остаточные лучи 673.
- Нитробензол**, $C_6H_5NO_2$, постоянная Коттона и Мутона 486; постоянная Керра 493.
- Нитротолуол**, $C_6H_7NO_2$, постоянная Керра 493.
- Нордгейм**, Л. электронная теория металлов 403.
- Нормалей** ось двусосного кристалла 306, 310, 317; эллипсоид 304; для одноосного кристалла 312.
- Нормалей** поверхность для одноосного кристалла 310; для одноосного активного кристалла 557; для двусосного кристалла 310; для двусосного активного кристалла 557; уравнение Френеля 300, 301, 360; для поглощающих кристаллов 360, 362.
- Нормаль волновая 296, 308.
- Нормаль первого порядка (спектроскопия) 225.
- Нормальные колебания см. собственные колебания 731; для закиси азота 731; для тетраэдрической молекулы 736 и сл.
- Нормальное явление Зеемана см. зееманово явление; спектр 224; триплет 686; метр 178; нормальные координаты 531 и сл. 565.
- Норренберг**, поляризатор 51.
- Нулевое положение компенсатора 329.
- Ньютон**, И., 6; ахроматизация линз 114; эмиссионная теория 193, 195; разложение белого света 6.
- Ньютонов потенциал 201; ньютоновы кольца 6, 163 и сл., 166.

О

- Обертон 717.
- Обратная решетка 235, 440.
- Обратно бегущие изображения см. катоптрическое изображение.
- Обратное фокусное расстояние 149.
- Обратное явление Зеемана см. зееманово явление.
- Обращение рамановских линий 537, 538, 539.
- Объектив фотографический 85, 116, 133, 149.
- Обыкновенный луч 312.
- Оваллоид 307.
- Одноосный кристалл 306, 310 и сл., 324; поглощающий 366 и сл.; активный см. активность; главное сечение эллипсоида нормалей 312; интерференционные фигуры в пластинках 339; поверхность нормалей 311; обыкновенный и необыкновенный луч 311, 312; направление поляризации 312; положительный, отрицательный 312.
- Озген**, оптика аморфных тел 421, 424; теория оптической активности 543; теорема о затухании 424, 438.
- Октан**, C_8H_{18} , степень деполяризации 576.
- Олово, показатель поглощения, показатель преломления, отражательная способность 356.
- Ома** закон 18.
- Опалесценция критическая 524.
- Оптическая активность см. активность; инструменты 147 и сл.

П

абсолютные 85 и сл.; оптическая изомерия см.; изомерия; длина, световой путь 85 эффективный поперечник см. эффективный поперечник.

Оптически более плотная и менее плотная среда 44.

Оптический прогиб линзы 142.

Оптический электрон см. валентный электрон.

Орбита земная, диаметр 255.

Ортотомная система 70.

Освещенность 126.

Оси, дисперсия 296; оптически активных кристаллов 557; одноосных кристаллов 312 и сл.; двуосных кристаллов 315.

Остаточные лучи 29, 674; длины волн для бромистого серебра, хлористого серебра, флуорита, бромистого калия, иодистого калия, фтористого лития, фтористого натрия, хлористого рубидия, каменной соли, сильвина, бромистого таллия, иодистого таллия, хлористого таллия, цинковой обманки 674.

Острота зрения 244.

Отбора правила для спектральных линий 716, 725, 731; для Раман-эффекта в записи азота 732; для тетраэдрической молекулы 742.

Относительности теория 356.

Отражательная решетка 226, 227.

Отражательная способность 46, 49; роговицы 148; алюминия, сурьмы, свинца, кадмия, кобальта, железа, золота, меди, магния, натрия, платины, ртути, серебра 356; серебряного зеркала 161; стали, висмута 356.

Отражение 42, 48; диффузное 126; селективное 674; строгая теория для изотропных тел 421; металлическое 347, 351 и сл.

Отражение полное внутреннее 44, 59 и сл.

Отраженный свет 41; яркость 48; в металлах 351; интерференция 167; поляризация 52; полное внутреннее отражение 60.

Отрицательная дисперсия 627.

Отрицательный одноосный кристалл 312.

Очки 148.

Ошибки изображения см. изображения ошибки; хроматические см. цветовые искажения третьего порядка 127 и сл. 140; системы 135; центрированные системы 135 и сл. пятого порядка 128.

Падения плоскость 25; нормаль 41; угол 25; главный угол падения 352.

Палумбо, вращательная способность 544.

Параллакс для Антареса, Арктура, Бетельгейзе 255.

Параллелепипед Френеля 64.

Параллелограмм, Фраунгоферова дифракция 218.

Парамагнетизм, закон Кюри 483.

Парамагнитная часть вращательной способности 483, 684.

Парциальные волны, электрические, магнитные при дифракции от сферы 385, 387, 500.

Пастер, Л., оптическое вращение 542, 563.

Паули, В., учебник 14; магнетон 615.

Пашен, Ф. (и Рунге), явление Зеемана 614.

Пашен-Бакка явление 614.

Пентаг, C_5H_{12} , степень деполяризации 576.

Первичный, вторичный спектр 115.

Перемещения квадрат, эйнштейнова формула 522.

Периодические ошибки решеток 227.

Перо, А. (и Фабри), интерферометр 178, 225; измерение нормального метра 179, 190.

Петцваль, теория ошибок изображений 119; теорема 141.

Пихт, учебник 270.

Плайлер (и Баркер), явление Рамана 734.

Планк, М. 12, учебник 16, 654; квантовая теория 12, 13, 617; постоянная 617.

Пластинки из одноосных кристаллов, интерференционные фигуры 340 и сл.

Пластинки тонких цвета 163.

Пластинчатый поляризатор 51.

Платина, показатель поглощения 356; показатель преломления 356; отражательная способность 356.

Плечек, Г., явление Рамана 526, 538; (и Теллер) 736.

Плеохроизм 363.

Плоские волны 20 и сл., 194; гармонические 30 и сл.; распространение в проводящих телах 347 и сл.

Плоские сетки в решетке 236.

Плоско-выпуклая линза 110.

Плоскопараллельные пластинки, измерение 168.

Плоскость видения 391.

Плоскость референции интерферометра 175.

Плотности флуктуации в газах 503; в жидкостях 523.

Побочная серия см. серия.

Поверхностный слой 52.

Поверхность каустическая см. каустика; постоянной разности хода в кристаллах 336; постоянной разности фаз в кристаллах 342, риманова 284, 285.

Поггендорф, коническая рефракция 322.

Поглощающие кристаллические пластинки, интерференционные явления 365.

Поглощающий кристалл 359, одноосный 366; двуосный 367; френелево уравнение 362; главные колебания 365; идиоформные кольца 369, поворотные оси 369.

Поглощение 564, 636 и сл., 650; суммарное 651; в конечных слоях 652, 654; в очень толстых слоях 654; в бесконечно тонких слоях 651; в линиях (самообращение) 650, 651, 654; инфракрасное 717; в галоидных кристаллах 674; ультрафиолетовое в галоидных кристаллах 677; вероятность поглощения (эйнштейновы коэффициенты) 652.

Поглощения ход вследствие Допплера-эффекта 643; пренебрегая Допплера-эффектом 638; внутри спектральной линии 636 и сл., 657.

Пойтинга вектор 19, 23, 399, 565.

Показателей преломления главных разность 562; для кристаллов 324.

Показатель преломления 25, 639, 640, 647; зависимость от плотности 455; ход дисперсии см. дисперсия; влияние вращательных колебаний на показатель преломления 747; комплексный 348, 638; для рентгеновых лучей 230; для этилового спирта 27; алюминия 356; сурьмы 356; бензола 27; свинца 356; кадмия 356; кобальта 356; железа 356; флинт-гласа 58, 115; флуорита 30; золота 356; известкового шпата 325; канадского бальзама 325; углекислоты 27; крона 115; меди 356; воздуха 27; магния 356; метилового спирта 27; монобромнафталина 246; натрия 356; платины 356; кварца 562; ртути 356; серебра 356; стали 356; каменной соли 30; сильвина 30; водорода 27;

висмута 356; кедрового масла 246; цинка 356; олова 356.

Покельс, Ф., явление Керра 493.

Поклингтон, активные кристаллы 563.

Поле иона 598; квадруполь 598, см. также квадруполь; электрическое (влияние на спектральные линии) см. Штарк-эффект; магнитная деполяризация с помощью магнитного поля 691; магнитное (свойства симметрии) 491; магнитное поперечное двойное преломление 486; поведение атома в магнитном поле см. Зеемана эффект.

Полировка, влияние на отражение 58.

Полихроизм 399.

Половинная ширина см. ширина линий.

Полоса, Бьеррума двойная 720, 725; полоса ротационно-колебательная 720.

Полутеневые приборы 474.

Поляризатор 51, 324, 329; стопа пластинок 51.

Поляризации плоскость 36, 47; эллипсоид 416 и сл., степень 392; угол (Брюстер) 47; поляризационный микроскоп 346.

Поляризация 45 и сл.; отраженного света 52; рассеянного света см. рассеянный свет; дисперсия поляризации 398; электрическая 398 и сл.; линейная, круговая и эллиптическая 20, 35 и сл., 63.

Поляризуемости тензор 413 и сл., 452, 464, 491, 540, 680; шпур 417.

Поляризуемость 526; главная 453, 495, 496; положение главных осей в аммиаке 518; хлороформе 496; хлористом водороде 517; хлористом метиле 496; сернистом газе 517; (анизотропия) этана 520; аммиака 517, 521; аргона, ацетона, бензола, хлора, хлороформа 520; хлористого водорода 517, 521; циана, синильной кислоты, этилового эфира, гексаметилен, углекислоты, окиси углерода, криптона, метана, метилового спирта, хлористого метила, метилена, кислорода 520—521; сернистого газа 517, 521; сероуглерода, сероводорода, закиси азота, азота, четыреххлористого углерода, водорода 520—521; средняя 453; для этана, аммиака, аргона, ацетона, бензола, хлора, хлороформа, хлористого водорода, циана, синильной кислоты, этилового

эфира, гексаметилен, углекислоты, окиси углерода, криптона, метана, метилового спирта, хлористого метила, метилена, кислорода, сернистого газа, сероуглерода, сероводорода, закиси азота, азота, четыреххлористого углерода, водорода 520—521.

Поль, Р. В., (и *Гильш*) ультрафиолетовые максимумы поглощения 677.

Поля зрения угол 114.

Полярископ 339.

Поперечное двойное преломление в магнитном поле 486; поперечное явление Зеемана см. Зеемана явление.

Поперечное увеличение 91.

Порядка третьего, пятого ошибки см. ошибки.

Порядок интерференции, дифракции см. интерференция, дифракция.

Потенциал, ньютон 201; запаздывающий 406; скалярный 405; вектор потенциал 405, 410.

Потенциальная энергия молекулы 465.

Предметная решетка 249.

Предметов пространство 89.

Предметы светящиеся 245; несамосветящиеся 246.

Преломление 24, 25, 26, 45, 101 и сл.; инвариант Аббе 136; дисперсия преломления см. дисперсия; двойное 320; линейное двойное преломление кристаллов 320; линейное поперечное двойное преломление в магнитном поле 486, 682, 689; естественное круговое 541, 562; магнитное круговое 477; эллиптическое в кристаллах 325; для кварца 562.

Преломление в кристаллах, построение Гюйгенса 321; в изотропных средах 421 и сл.; поверхностей вращения 101.

Преломленная волна 41.

Прецессия ларморова см. Лармор.

Приведенная длина волны 31.

Призма, угол отклонения 240; минимум угла 241; разрешающая способность 239, 243; бипризма см. Френель; дисперсия 242; Никола см. Николь.

Призмная труба 151; призмный спектрограф 180, 224.

Принсгейм, П., учебник 497.

Принс, дифракция от многих отверстий 220.

Пробега время, среднее, свободного 584, 585.

Проводящие сферы см. дифракция; тела 347.

Продольное явление Зеемана 613, 679 и сл.

Проекционные аппараты 149.

Прозрачные жидкости, искажение изображений 81.

Прозрачные области спектра 660.

Прозрачные слои железа, магнитное вращение 475, 476.

Проницаемость магнитная 18.

Пропан, C_3H_8 , степень деполяризации 516; оптический поперечник 597.

Пропиловый спирт, C_3H_7OH , радиус молекулы 760.

Прямо бегущее изображение см. изображение диоптрическое.

Прямоугольник, френелева дифракция 211; френелева дифракция 258.

Пауссон, световой эфир 9; уравнение 441.

Пульфрих, рефрактометр 64, стереокомпаратор 148.

Р

Работа вырывания электрона (фотоэлектрический эффект) 620.

Радуга, теория 388.

Разрешение натровых D -линий 181; двойных звезд 254.

Разрешающая способность 84, 154, 238, 239; решетки 238; призмы 239, 243; трубы 244; микроскопа 244, 245, 246.

Раман, определение формы ультрамикроскопических частиц 507; (и *РАО*) степень деполяризации 515; рамановское рассеяние 525; (и *Бхагвантам*) явление обращения 538.

Рамана явление 524 и сл.; 716 и сл.; для двуатомной молекулы 718; многоатомной 725; для закиси азота 734; для тетраэдрической молекулы 736.

Рао, степень деполяризации 515.

Расетти (*Диккинсон* и *Диллон*), явление Рамана 734.

Распространение сигнала 357.

Рассеивательное изображение см. изображение.

Рассеяние молекулярное 402, 410, 439, 697; связь с постоянной Керра 513 и сл.; рассеяние света в твердых телах 522; в жидкостях 522; в кристаллах 524; интенсивность в неполяризованной части 392; интерференция рентгеновых лучей 230, 234, 402; релеево 390, 391, 397, 504; раманово см. *Раман*; тиндалево 527, 535.

Расстояние ясного зрения 148.

Растворения угол см. апертуры угол. Расхождение лучей, уменьшение в микроскопе 84.

Расширение спектральных линий см. ширина.

Рацемическая смесь 542.

Резкая побочная серия 606.

Резкость интерференционных полос 168 и сл.

Резонансная флюоресценция 690; деполяризация 593.

Резонатор, осциллятор см. вибратор.

Рейхе, Ф. (и *Люммер*), изображение несветящихся предметов 246; (и *Ладенбург*) поглощение в конечных слоях 652; дифракционная теория ошибок изображений 270; доплерова ширина в спектральных линиях 643; когерентная длина 189; (и *Ладенбург*) коэффициенты силы 626, 663 664.

Релаксации время для затухающего вибратора 497; для совокупности диполов 755.

Релей, 10; упругий эфир 10; периодические ошибки решетки 223; поляризация света рассеянного от малых частиц 397; деполяризация рассеянного света 515; закон излучения Релей-Джинса 617; рассеяние света (неба) 501, 504; переходные слои 57 и сл.; сверхсветовая скорость фазы 357.

Ремер, О., определение скорости света 6.

Рентгеновские спектры 230 и сл.; показатель преломления 231; интерференция 402.

Рефрактометр 64, 324; Жамена 174; Маха 174.

Рефракция коническая см. коническая рефракция; атомная 455, 459; теоретическая атомная для брома, хлора, иода, углерода, фосфора, кислорода, серы, азота, водорода 461, 462; молекулярная зависимость от плотности 456; аддитивность 460.

Рефракция молекулярная, зависимость от обработки 459 и сл.; для раствора этилового спирта в воде 461; ацетона в воде 460; бензола в ацетоне 461; серной кислоты в воде 460; для этилового спирта, аммиака, ацетальдегида, ацетона 458, 462; брома, бромистого водорода 458, 462; хлора 458; хлороформа, хлористого водорода 458, 462; газов 455; углекислоты 458; 462; воздуха 457; метилового спирта 458, 462; фос-

фора 458; фосфористого водорода 458, 462; кислорода, серы 458; сернистого газа, сероуглерода, сероводорода, окиси азота, закиси азота 458, 462; азота 458; воды 458, 462; водорода 458.

Решетка в качестве спектрального аппарата 224; атомная 231; разрешающая способность 238 и сл.; установка 228; базис кристаллической решетки 230; дифракционная 220 и сл.; дипольная см. диполь; прозрачная штриховая 248; плоская двухмерная 229 и сл., 233; недостатки 227; функция решетки 223; изготовление 226; ионная 676; вогнутая 228; установка вогнутой решетки 228; фокусирующее действие вогнутой решетки 228; кристаллическая 230; молекулярная 463; оптика кристаллических решеток 439 и сл.; порядок спектра 239; потенциал 450; пространственная 230 и сл.; отражательная 228, 229; обратная 235, 440; спектрограф с решеткой 224; спектр решетки 224; число штрихов 239; строение 237; ступенчатая (эшелон) 239; электрическая теория кристаллических решеток 676; элементарная ячейка 230, 440 и сл.

Ридбергова частота 670.

Ритчи, В., комбинационный принцип 618.

Роговица, показатель преломления и отражательная способность 148.

Розенберг, теория радуги 388.

Роккар (и *Кабан*), явление Рамана 524.

Ромбическая система 310.

Рор, Макс фон, учебник 140, 147; дифрагирование лучей 112.

Ротатор 530.

Ротационно-колебательные полосы 720 и сл.

Роуланд, Г. А., получение решеток 226, 228, конвекционный ток 403.

Ртуть, показатель поглощения, показатель преломления 356; доплерова ширина спектральных линий 580; полное излучение бесконечно малых ртутных капелек 400.

Рубенс, остаточные лучи 29, 30, 296, 358, 359, 673, 674.

Рубидий бромистый, $RbBr$, инфракрасное поглощение 673, ультрафиолетовое поглощение 677.

Рубидий иодистый, RbI , инфракрасное поглощение 674; ультрафиолетовое поглощение 677.

Рубидий хлористый, $RbCl$, инфракрасное поглощение 674; ультрафиолетовое поглощение 677.
 Рубинович, А. (и Блатон), квадратурное излучение 575.
 Рунге, К. (и Пашен), законы явления Зеэмана 613.
 Рунге, Я., геометрическая оптика 67.
 Рупп, Г., дифракция электронных лучей 624; и примечания.

С

Савар, пластинка 339.
 Сагиттальная поверхность изображения, сагиттальное искривление изображения 132.
 Сахар тростниковый, $C_{12}H_{22}O_{11}$, вращательная способность 562, 563.
 Сверхсветовые скорости 357.
 Света поглощение см. поглощение; давление 401; электрическое действие 620; свет эллиптический см. эллиптический; эмиссия см. испускание; световая фотография 214, 218, 238; скорость см. скорость; кванты 525, 526, 617, 618, 619, 620; классическая модель светового источника 564 и сл.; световые лучи 65; световые потери в глазу 148; в фотографическом аппарате 149; световой путь (теорема Максвелла) 66, 67, 68, 88.
 Свинец, показатель поглощения 356; показатель преломления 356; отражательная способность 356; свинец хлористый, $PbCl_2$, ультрафиолетовые максимумы поглощения 677; иодистый, PbJ_2 , ультрафиолетовые максимумы поглощения 677.
 Свободные электроны 359; свободная длина пути, средняя 585, свободные колебания диполя 564, время свободного пробега 586; формула Максвелла 586.
 Связь, расширение линий вследствие связи 609, 640; смещение линий вследствие связи 640.
 Сегнетова соль, $(C_2H_3O_2)_2 NaK$, 563.
 Селективное отражение 674.
 Сера, теоретическая атомная рефракция 462; молекулярная рефракция 458.
 Серебро, показатель поглощения, показатель преломления 356; суммарное излучение малых частиц 400; отражательная способность 161, 356.

Серебро хлористое, $AgCl$, длина волны остаточных лучей 674.
 Серия, главная, резкая и диффузная побочная 606.
 Серная кислота, H_2SO_4 , молекулярная рефракция водных растворов 460.
 Сернистый ангидрид, SO_2 , степень деполаризации, дипольный момент, постоянная Керра 514, 521; главные поляризуемости 517, 521; положение главных поляризуемостей 518; средняя поляризуемость 521; модель молекулы 517; молекулярная рефракция 458, 462.
 Сероводород, H_2S , степень деполаризации, дипольный момент, главные поляризуемости, постоянная Керра, средняя поляризуемость 521; молекулярная рефракция 458, 462.
 Сероуглерод, CS_2 , анизотропия 520; постоянная Коттона и Мутона 486; степень деполаризации 520, 516; главные поляризуемости 520; постоянная Керра 493, 494, 495, 520; магнитное вращение 476; молекулярная рефракция 458, 462; константа Верде 478.
 Сильвин, KCl показатель преломления 30; диэлектрическая постоянная 30, 673; константы дисперсии, собственные частоты 673; остаточные лучи, инфракрасные максимумы поглощения 674; ультрафиолетовые максимумы поглощения 677.
 Силы коэффициенты 629, 650, 683; определение 659; для серии Бальмера 663, 664; для серии Лаймана 663, 664; для главной серии натрия 665; для D-линий натрия 660; для линий кадмия, цезия, натрия, ртути, таллия 665.
 Симметрия электрического и магнитного поля 491; преобразование 728.
 Синильная кислота, HCN , степень деполаризации 521; дипольный момент 521; главные поляризуемости 521; постоянная Керра 521; средняя поляризуемость 521.
 Синусов условие 124 и сл., 133, 246.
 Сиркс, парамагнитное вращение 481.
 Сиртсема (и де-Хаас), парамагнитное вращение 481.
 Система оптическая, ортотомная 70; центрированная 100.
 Скольжения угол 234.
 Скорость энергии см. лучевая скорость; света 24, 300; по нормали

296, 298, фазовая 296; лучевая 296, 198, сверхсветовая 357.
 Сжекал, А., явление Рамана 525, 528.
 Смит, явление Рамана 734.
 Смуловский, М., флуктуации 522.
 Снеллсус, закон преломления 5, 24 и сл., 103.
 Собирательное изображение см. изображение.
 Собственные колебания, свободные связанных систем (теория нормальных координат) 531; вынужденные (резонанс) 696 и сл.; вырождение 726.
 Собственный вектор 532, 725.
 Солейль, компенсатор 328.
 Солнечная постоянная 23.
 Солнца диаметр 255.
 Соответствия принцип 627, 702.
 Сопряженные точки 74.
 Спектр 180; от решетки 224; от двухмерной решетки 230; линейчатой 182; нормальный 224; первичный, вторичный 115; рамановский 716 и сл.; от пространственной решетки 230 и сл.; порядок спектра 191, 224, 250; Спектрограф с решеткой 180, 224; призменный 224; вакуумный 224.
 Спектроскопия 180; интерференционная 190, 253, 170, 180.
 Сталь, показатель поглощения, показатель преломления, отражательная способность 356.
 Стекло, показатель преломления 51.
 Стереоскопический дальномер 148.
 Стереоскоп 148.
 Стереоскопическая труба см. труба.
 Стереоскопический дальномер 151.
 Стереохимия 543.
 Стефан, круговое двойное преломление 560.
 Стигматическое изображение 83, 86, 105.
 Стокс, Дж., Г., 10; световой эфир 10; движение в вязких жидкостях 755.
 Столкновений число 587.
 Столкновениями ионизация, опыты Франка и Герца 618.
 Стоячие световые волны 160 и сл.
 Структурный множитель 233.
 Струтин, В., см. Релей.
 Стурт, явление Керра 494, 495, 514, 515, 519, 520; (Вольф и Бриглеб) 519.
 Сугура, множители силы 663, 664.
 Сурьма, показатель поглощения 356; показатель преломления 356; отражательная способность 356.

Сферическая аберрация, геометрически 129, 145; с волновой точки зрения 277.
 Сферы, апланатические 83; угловой эквивалент для сферы 101; дифракция от проводящих сфер 369 и сл.; 385 и сл.; сферические волны 191, 195, 199, 267.
 Сходимость см. угловое увеличение.
 Сцепление ван-дер-Ваальсова 463, 608.
 Счетчик Гейгера 690.

Т

Таллий бромистый, $TlBr$, ультрафиолетовое поглощение 677; остаточные лучи 674.
 Таллий, доплера ширина 580.
 Таллий иодистый, TlJ , ультрафиолетовое поглощение 677; остаточные лучи 674.
 Таллий хлористый, $TlCl$, ультрафиолетовое поглощение 677; остаточные лучи 674; максимумы инфракрасного поглощения 674.
 Тангенциальная поверхность изображения 130; искривление изображения 131, 277; положение главных осей 277.
 Тауэрн, электрическое двойное преломление 493.
 Твердые тела, дисперсия 671; рассеяние света 522.
 Телескопическое изображение см. аффинное изображение.
 Теллер (и Плачек), явление Рамана 736.
 Телецентрический ход лучей 113.
 Тело абсолютно черное 616.
 Темное поле зрения 246.
 Тензор анизотропии, см. поляризуемости тензор.
 Тензор: электропроводности 359; оптически диэлектрический постоянная 293, 294; поляризуемости см. поляризуемости тензор; гирации см. гирация; средние значения компонент 452, 467, 533, 534.
 Тень геометрическая 65, 69, 208, 258, 262, 291.
 Тетрагональная система 309.
 Тетраэдрические молекулы 736.
 Тизонит 484.
 Тиле (и Ладенбург), коэффициенты силы 664.
 Тиморев, А. В. (и Бурсиан), оптическое вращение 544.
 Тиндаль, Дж., рассеяние 451, 498, 525.
 Толуол, $C_6H_5C_2H_5$, постоянная Коттона и Мутона 486; степень деполаризации 516.

Толщины равной кривые 165.
 Томас, теорема о сумме множителей
 силы 627, 631.
 Томсон, В. см. Кельвин.
 Томсон, К. П., интерференция катод-
 ных лучей 625.
 Томсона принцип изображений 281;
 угол 397.
 Точечное изображение см. изображе-
 ние стигматическое.
 Точки сопряженные 74, 89; апланати-
 ческая пара точек 83, 125.
 Тригональная система 309.
 Триклинная система 310.
 Труба 85, 114, 133; астрономическая
 150; граница разрешения 244;
 стереоскопическая 148, 151; га-
 лилеева 151; голландская см. га-
 лилеева; кеплерова см. астро-
 номическая; призменная 151;
 сложная 150.
 Турмалин 367.

У

Увеличение угловое 94, 95; с помощью
 лупы 149; боковое 91; смещение
 диэлектрическое 16.
 Углекислота CO_2 , анизотропия 520;
 показатель преломления 27; сте-
 пень деполаризации 514, 515,
 520; диэлектрическая постоянная
 27; газокINETический поперечник
 молекулы 590; главные поляри-
 зуемости 520; постоянная Керра
 514, 520; магнитное вращение
 476; средняя поляризуемость
 520; молекулярная рефракция
 458, 462; оптический поперечник
 молекулы 591; расширение ртут-
 ной линии 2537Å 589; постоян-
 ная Верде 474.
 Углерода асимметрический атом 543,
 709; атомная рефракция 461.
 Углерода двуокись см. углекислота.
 Углерода окись, CO , показатель пре-
 ломления 27; степень деполари-
 зации 5, 521; диэлектрическая
 постоянная 27; дипольный мо-
 мент 521; газокINETический диа-
 метр 590; главные поляризуемо-
 сти 521; постоянная Керра 521;
 средняя поляризуемость 521.
 Угловое увеличение 94, 95.
 Угловой эйконал см. эйконал.
 Угол полной поляризации Брюстера
 47; измерение малых углов 251
 и сл.
 Удельная яркость света 126.
 Узловые точки 92.
 Ультрамикроскоп 246.
 Установка решеток см. решетка.

Ф

Фабри Ш. и Бюиссон, доплерова
 ширина 581, 586 (и Перо) интер-
 ферометр 178; нормальный метр
 178; видимость интерференции
 190.
 Фаза 31; комплексная 351; разность
 фаз 31, 155; при металлическом
 отражении 354.
 Фарадей, М. Ю., электрической двой-
 ное преломление 490; магнитное
 вращение 10, 473 и сл.; действие
 магнитного поля на спектраль-
 ные линии 610.
 Фарадея константа 478.
 Фарадея эффект 473 и сл., 679 и сл.;
 вычисление заряда электрона 487;
 дисперсия Фарадея эффекта см.
 дисперсия; знак заворачивания
 478; см. также вращение магнит-
 ное.
 Фауль, определение числа Ломмита
 521 и сл.
 Фейк, Р., суммарное излучение от
 малых частиц 400.
 Ферма, П., 5; принцип 70 и сл.
 Ферми, Э., Раман-эффект 727, 745.
 Физо 8, скорость света 24; измерение
 малых углов 251; теория уве-
 личения эфира 8, 14; видимость ин-
 терференции 181; волновая тео-
 рия 9.
 Фейшль, Е., круговое двойное пре-
 ломление 560.
 Флекк ван, явление Рамана 526.
 Флексиг, В., поглощение в кристал-
 лах галидов 677.
 Флинт 114; показатель преломления
 58; показатель преломления для
 фраунгоферовых линий 115; дис-
 персия 115; коэффициент эллип-
 тичности 57; постоянная Керра
 493.
 Флюоресценция 525, 575; тушение по-
 сторонним газом 593; резонансная
 см. резонанс.
 Флуорит (плавиковый шпат), CaF_2 , по-
 казатель преломления 29; диэ-
 лектрическая постоянная 29, 673;
 константы дисперсии 673; соб-
 ственные частоты 673.
 Фогт, В., поглощающие кристаллы
 369; дисперсия магнитного вра-
 щения 687; доплерова ширина
 647; обратное явление Зеемана
 689; явление Керра 491; кони-
 ческая рефракция 322; оптическое
 вращение 543, 556, 562; пере-
 ходные слои 57; явление Зеемана
 613.

Фокальная плоскость 76; поверхность
 см. каустика; линия 75; точка
 69, 74 и сл., 89, 262, 263, 266;
 бесфокусное изображение см. изо-
 бражение аффинное; фокусное
 расстояние 91; ахроматизация фо-
 кусного расстояния 116.
 Фокусирующее действие вогнутой ре-
 шетки 228.
 Фольке, переходные слои 59.
 Фолькман (и Вольф), оптическое вра-
 щение 553.
 Фольмер (и Штерн), флюоресценция
 575, 593.
 Фосфор, теоретическая атомная реф-
 ракция 462; молекулярная реф-
 ракция 458.
 Фосфористый водород, молекулярная
 рефракция 458, 462.
 Фосфористый водород, молекулярная
 рефракция 458, 462.
 Фотографический объектив 85, 116,
 133; аппарат 149.
 Фотометр Гартмана 657; Коха 658.
 Фотометрия, основной закон 126.
 Фотофорез 401.
 Франк, Дж. (и Йордан), учебник 593
 (и Герц) столкновения 618.
 Франк, Ф. (и Мизес), учебник 188.
 Фраунгофер, 11, 115, получение ре-
 шеток 226, спектр солнца 11;
 спектрометр 115; фраунгоферова
 дифракция см. дифракция; фраун-
 гоферовы линии 115.
 Фрейденберг, К. (Вольф и Кун), поло-
 жение резонатора в молекуле 704.
 Френелева дифракция см. дифракция;
 коэффициенты отражения 41 и сл.;
 для кристаллов 299, 438; для пол-
 ного внутреннего отражения 60;
 уравнение нормалей см. нормали;
 зеркала 159, 621; бипризма 160;
 параллелепипед 64, зоны 196, 205.
 Френель, О. Ж., 7, 8; колебание эфира
 47, 156, 312; дифракция 193, 201,
 257; дисперсия 8; эффект увле-
 чения 13, 14; естественное враще-
 ние 475; параллелепипед 64; маяк
 149; волновая теория 7; круговое
 двойное преломление 541, 560;
 зоны 206.
 Френкель, Я. И., учебник 12, 16.
 Фридрих, кристаллическая решетка
 и рентгеновы лучи 230.
 Фруктоза левая, $\text{C}_6\text{H}_{12}\text{O}_6$, естествен-
 ное вращение 554.
 Фуко, Л., 9; скорость света 24; волно-
 вая теория 9.
 Фукиновая призма; аномальная дис-
 персия 642.
 Функция характеристическая 96.

Фухтбауер, Хр. (и Гофман), затухание
 вследствие столкновений 588, 594,
 610; (Иоос и Динкелаккер) 588,
 652, 659, 697.

Х

Хаас, В. И. (Беккерель) (и Камерлинг
 Оннес) температурная зависимость
 парамагнитного вращения 484.
 Хаас, М. (и Сиртсема) дисперсия вра-
 щения 481.
 Характеристическая функция 96.
 Хвольсон, О. Д., учебник 48, 50.
 Хеел ван, температурная зависимость
 парамагнитного вращения 484.
 Хелд ван-дер, поглощение в линиях
 657.
 Хёлл, рентгеновские спектры 230, 234.
 Хлор, анизотропия 520; теоретическая
 атомная рефракция 458; степень
 деполаризации 514, 515, 520;
 главные поляризуемости 520; по-
 стоянная Керра 514, 520; сред-
 няя поляризуемость 520; молеку-
 лярная рефракция 458.
 Хлорбензол, $\text{C}_6\text{H}_5\text{Cl}$, постоянная Кер-
 ра 493.
 Хлористый водород, HCl , степень де-
 поларизации 514, 521; дипольный
 момент 514, 521; двойная полоса
 720; главные поляризуемости 517,
 521; постоянная Керра 514, 521;
 положение главных осей поляри-
 зации 517; средняя поляризуе-
 мость 521; молекулярная рефрак-
 ция 458, 462.
 Хлористый пропилен, $\text{C}_3\text{H}_5\text{Cl}$, модель
 молекулы 520.
 Хлористый этил, $\text{C}_2\text{H}_5\text{OH}$, постоянная
 Керра 494, 495.
 Хлороформ, CHCl_3 , постоянная Кот-
 тона и Мутона 486; степень депо-
 ларизации 516, 521; дипольный
 момент 521; главные поляризуе-
 мости 521; постоянная Керра
 493, 521; положение главных
 осей поляризации 496; средняя
 поляризуемость 521; молекуляр-
 ная рефракция 458.
 Хола разность 31, 155; абсолютная
 175; относительная 175; поверх-
 ности равной разности хода в кри-
 сталлах 336.
 Холл, получение ахроматических
 объективов 114.
 Хроматические ошибки 85, 114 и сл.

Ц

Цветовые искажения 114.
 Цвет неба 501.

Цвет тонких пластинок 163 и сл.; дополнительные (получение) 331. Цветорассеяние см. дисперсия. Цезий бромистый, Cs Br, инфракрасный максимум поглощения 674; ультрафиолетовые максимумы поглощения 677; хлористый, CsCl, инфракрасный максимум поглощения 674; ультрафиолетовые максимумы поглощения 677; иодистый, CsI, ультрафиолетовые максимумы поглощения 677.

Цеманский, явление Доплера 643, 647; расширение вследствие примеси постороннего газа 591.

Центрированное изображение 90, 93; системы 100, 270; ошибки третьего порядка 133 и сл.

Циан, (CN)₂, анизотропия 520; степень деполаризации 520; главные поляризуемости 520; постоянная Керра 520; средняя поляризуемость 520.

Цилиндрическая волна 291.

Цинк, показатель поглощения, показатель преломления, отражающая способность 356; доплерова ширина 580.

Цинковая обманка, ZnS, остаточные лучи 674.

Циш (и Габер), обратное явление Зеемана 688.

Ч

Чапский и Эппенштейн, учебник 86, 95, 147.

Частота 31.

Черная поверхность 616; черное тело 358; черное излучение 616.

Черни, М., дисперсия каменной соли 679; (и Барнес) прозрачность галлоидных солей щелочных металлов 674.

Четверть длины волны пластинка 326.

Четыреххлористый углерод, CCl₄, анизотропия; деполаризация; тиндалево рассеяние; главные поляризуемости, средняя поляризуемость 520; постоянная Керра 520, 495; рамановские линии 745; инфракрасные частоты 745.

Численная апертура 127, 246.

Ш

Шварцшильд, К., дифракция от проводящих сфер 383; эйконал 98, 119; геометрические ошибки изображения 98, 124, 147; реакция излучения на электрон 575.

Шейнер (и Гиравья), дифракционные явления 218.

Шенрок доплерова ширина 580.

Шеррер, рентгеновские спектры 230, 234 и сл.

Шефер, К., остаточные лучи 29; (и Маттосси) учебник 719.

Шивесси, температурная зависимость постоянной Коттона и Мутона 487.

Ширина и когерентность 182, 183.

Ширина спектральных линий (половинная ширина) введение 571; теория ширины линии испускания, естественная ширина (затухание излучением) 572 и сл.; доплерова ширина 577 и сл.; затухание вследствие столкновений 582 и сл.; вследствие Штарк-эффекта и связи 594 и сл.; теория ширины линий поглощения, естественная ширина (затухание вследствие излучения) 628 и сл.; расширение вследствие столкновений и явления Доплера 632 и сл.; следствие связи (эффекты резонанса) 640; измерение ширины линий, естественная ширина натровых D-линий 647; доплерова ширина D-линий кадмия 580; гелия 581; криптона 581; натрия 580; неона 581; ртути 580; водорода 580; цинка 580; расширение ртутной линии 2537A вследствие примеси серебра, уголекислоты, кислорода, азота, водорода, водяного пара 589, 590; расширение вследствие Штарк-эффекта и связей для балмеровской линии H_α 608; методы для определения ширины линии 649 и сл.

Ширман, дисперсия поляризации 398, 399.

Шити, В., резонансная флюоресценция 593; ход поглощения 657.

Шмидт, переходные слои 59.

Шотт, О., 115.

Шотт, Г. А., учебник 575.

Шпур поляризуемости 417; теорема об изменении шпура 727.

Шредингер, Э., волновая механика 12; учебник 15.

Штарк, И., расщепление в электрическом поле 594, 606, 616.

Штарка явление, расширение спектральных линий вследствие него 588, 594, 595 и сл., 605.

Штерн, О. (и Фольмер) определение долговечности с помощью флюоресценции 574, 593; (и Эстер-

ман) интерференция лучей материи 625; явление Штарка в неоднородных полях 594.

Штриховая решетка 180, 233, 248.

Шумановские лучи 224, 669.

Щ

Щелочных металлов галиды, инфракрасный максимум поглощения 674, ультрафиолетовый максимум поглощения 677.

Э

Эвальд, П. П., оптика решеток 230, 231, 440, 446, 450.

Эддингтон, учебник 14.

Эйконал 95 и сл.; Брунса 97; Зейделя 118 и сл.; сложной системы 133; угловой, Шварцшильда 98 и сл., 124; для сферы 102.

Эйлер, Л. волновая теория 7.

Эйнштейн, А., 14; вероятность поглощения и испускания 651; подвижность в вязких жидкостях 754; брауновское движение 750; эмиссионная теория света 619; энтропия 522; формула для среднего квадрата отклонения 754; планковский квант действия 13; теория относительности 14.

Экран дополнительный 211.

Экстинкция 513.

Электролиз, константа Фарадея 667.

Электрон 28, 617; вычисление заряда из эффекта Фарадея 487; оптический (валентный) 607; квантовая теория движения электрона 617 и сл.

Электронная теория явления Зеемана 610.

Электрооптика 473.

Электропроводность 18, 480; удельная 18; тензор 359; меди 349, 357.

Электростатическая теория кристаллических решеток 676.

Элементарный пучок 75.

Элет (и Вуд), деполаризация резонансного излучения в магнитном поле 691, 696; коэффициент силы 688.

Эллипсоид показателей см. нормалей эллипсоид.

Эллиптическая поляризация см. поляризация.

Эллиптический свет 37.

Эллиптичность при отражении 57, 58; для флинта 58; для жидкостей 58; глицирина 58; кварца 562; воды 58.

Эмде (и Янке) таблицы функций 216.

Эмиссия 564, 574; в единицу времени

566; теория Эйнштейна 618; вероятность, эйнштейновы коэффициенты 651; инфракрасная 718.

Энантиоморфные кристаллы 542.

Энергии плотность 19; электрическая 19; полная 19.

Энергия, скорость см. скорость луча, магнитная 19; потенциальная молекулы 465; квант энергии см. квант; закон сохранения 20; поток 23.

Энтропия 523.

Эпидиаскоп 149.

Эппенштейн, О. (и Чапский), учебник 86, 95, 147.

Эренгафт, фотофорез 401.

Эри, интерференционные полосы 169; теория радуги 388; пластинка в четверть волны 326.

Эррера, аномальная дисперсия твердых тел 760.

Эсмарх, В., оптика аморфных тел 421.

Эстерман, Л. (и Штерн) интерференция материальных лучей 625.

Этап, C₂H₆, анизотропия 520; степень деполаризации 516, 520; константа дисперсии 671; главные поляризуемости 520; постоянная Керра 520; средняя поляризуемость 520.

Этилена окись, (CH₂)₂O, постоянная Керра 495.

Этиловый спирт, C₂H₅OH, показатель преломления 27, степень деполаризации 516, диэлектрическая постоянная 27; постоянная Керра 495; молекулярная рефракция 158, 462; молекулярная рефракция водных растворов 467.

Этиловый эфир см. диэтиловый эфир.

Эффективный поперечник, газокINETический и оптический для аргона, гелия, окиси углерода, азота, водорода 591; оптический для аммиака, метана, пропана 591.

Эшелон 179, 239.

Ю

Юинг, С., определение лордшидтова числа 522.

Юнг, Томас 7, 291; интерференция 157, 219; поперечные колебания 8; модель глаза 148.

Юленбек (и Хаудсмит), магнетон 615.

Я

Ядерные движения 28, 526; частоты 526.

Янке (и Эмде) таблицы функций 216, 276, 653.

Ячейка элементарная решетки 203.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Параграфы, обозначенные звездочками, могут быть опущены в первом чтении.

Предисловие редактора	Стр.
Предисловие	3
Введение	5

Глава первая

Электромагнитная теория света для прозрачных изотропных тел без цветорассеяния

§ 1. Уравнения Максвелла	16
§ 2. Закон сохранения энергии	18
§ 3. Распространение плоских волн	20
§ 4. Закон преломления Снеллиуса	24
§ 5. Формула Максвелла для показателя преломления	26
§ 6. Скалярная простая гармоническая волна	30
§ 7. Простые гармонические векторные волны. Эллиптическая поляризация	32
§ 8. Линейная и круговая поляризация	35
§ 9. Граничные условия на поверхности соприкосновения двух сред	38
§ 10. Формулы Френеля для отражения и преломления плоской волны	40
§ 11. Поляризация при отражении и преломлении	45
§ 12. Влияние переходного слоя на поляризацию отраженного света	52
§ 13. Полное внутреннее отражение	59

Глава вторая

Геометрическая оптика

§ 14. Предельный переход к бесконечно малой длине волны	65
§ 15. Теорема Малуса и принцип Ферма	70
§ 16. Фокальные свойства бесконечно узкого пучка	75
§ 17. Каустические поверхности и кривые	77
§ 18. Преломление на шаровой поверхности	82
§ 19. Абсолютные оптические инструменты	85
§ 20. Коллинеация с осев и симметрией	89
§ 21. Характеристическая функция и эйконал	95
§ 22. Угловой эйконал	98
§ 23. Угловой эйконал для преломления на поверхности вращения	101
§ 24. Диоптрика Гаусса	105
§ 25. Ограничение лучей при помощи диафрагм	112
§ 26. Хроматическая аберрация	114
§ 27. Эйконал Зейделя	118
§ 28. Условие синусов	122

*§ 29. Ошибки третьего порядка	127
*§ 30. Эйконал Зейделя для сложной оптической системы	133
*§ 31. Ошибки третьего порядка для центрированной системы линз	135
*§ 32. Пример. Тонкая линза	142
§ 33. Оптические приборы	147

Глава третья

Интерференция

§ 34. Интерференция двух лучей	153
§ 35. Опыт Юнга	157
§ 36. Двойное зеркало Френеля, бипризма Френеля, билинза Билле	159
§ 37. Стоячие волны	160
§ 38. Цвета тонких пластинок и ньютоновы кольца	163
§ 39. Резкость интерференционных полос	168
§ 40. Интерференционный рефрактометр	173
§ 41. Интерферометры	175
§ 42. Интерференционные спектрометры и их разрешающая способность	180

Глава четвертая

Дифракция

§ 43. Сущность дифракционных явлений. Сферические волны	193
§ 44. Принцип Гюйгенса	195
§ 45. Принцип Гюйгенса в формулировке Кирхгофа	201
§ 46. Теория дифракции Кирхгофа	206
§ 47. Классификация дифракционных явлений. Принцип Бабинне	210
§ 48. Дифракционные явления Фрунгофера от прямоугольника и от щели	211
§ 49. Дифракционные явления от круглого отверстия	216
§ 50. Дифракционные отверстия других форм	218
§ 51. Дифракционные решетки	220
§ 52. Плоская двумерная решетка. Пространственная решетка. Рентгеновские спектры	229
1. Опыт Лауэ	234
2. Опыт Брэггов и Дебай-Шеррер-Хелла	—
§ 53. Разрешающая сила оптических приборов	237
§ 54. Измерение малых углов	251
§ 55. Дифракционное явление Френеля	255
§ 56. Поведение световых волн вблизи точек геометрического схождения лучей; дифракционная теория ошибок изображения	262
*§ 57. Зоммерфельдова строгая теория дифракционных явлений	280

Глава пятая

Кристаллооптика

§ 58. Электромагнитная теория света для случая анизотропных тел	293
§ 59. Формулы Френеля для распространения света в кристаллах	299
§ 60. Геометрические построения для определения скорости и направления распространения волн	303
§ 61. Оптические классы кристаллов. Оптически изотропные и одноосные кристаллы	309
§ 62. Оптически двуосные кристаллы	313
§ 63. Измерение оптических свойств кристаллов. Поляризатор и компенсатор	324
1. Призма Николя	325
2. Компенсаторы	—

§ 64. Интерференция в кристаллических пластинках	329
§ 65. Интерференционные фигуры в пластинках одноосного кристалла в сходящемся свете	334
§ 66. Интерференционные фигуры в пластинках из оптически двуосных кристаллов	340

Глава шестая

Металлооптика

§ 67. Распространение плоских волн в проводящем веществе	347
§ 68. Отражение света на поверхности металла	351
§ 69. Поглощающие кристаллы	359
I. Одноосные кристаллы	366
II. Двуосные кристаллы	367
*§ 70. Дифракция в проводящем шаре	369
*§ 71. Физические свойства рассеянного света	385

Глава седьмая

Молекулярная оптика

§ 72. Поляризация и намагничивание	402
*§ 73. Тензор поляризуемости и действующая сила поля	413
*§ 74. Молекулярная теория распространения света, преломление и отражение в изотропных средах	421
*§ 75. Оптика кристаллических решеток	439
§ 76. Случай изотропии. Формула Лорентц-Лоренца	452
*§ 77. Вынужденная анизотропия. Вычисление средних значений	463
*§ 78. Явление Фарадея	473
*§ 79. Явление Коттон-Мутона	484
*§ 80. Явление Керра	490
*§ 81. Рассеяние света	497
*§ 82. Раман-эффект	524
*§ 83. Оптическая вращательная способность изотропных тел	541
*§ 84. Оптически активные кристаллы	554

Глава восьмая

Излучение, поглощение, дисперсия

§ 85. Классическая модель светового источника	564
§ 86. Ширина линий излучения. Затухание вследствие излучения и явления Допплера	572
I. Затухание вследствие излучения	577
II. Явление Допплера	582
*§ 87. Ширина линий испускания. Затухание вследствие столкновений	594
*§ 88. Ширина линий испускания. Расширение вследствие эффекта Штарка и вследствие связи	610
§ 89. Электронная теория эффекта Зеемана	616
§ 90. Квантовые процессы и границы классической теории	628
§ 91. Вынужденное колебание вибратора. Сила вибратора и затухание оптических резонаторов вследствие излучения	632
§ 92. Влияние затухания вследствие столкновений и вследствие эффекта Допплера на процесс резонанса	636
§ 93. Ход дисперсии и поглощения, вызванный одной спектральной линией	638
I. Дисперсия и поглощение при пренебрежении эффектом Допплера	643
II. Дисперсия и поглощение при учете эффекта Допплера	649
§ 94. Экспериментальное определение констант поглощения и дисперсии для газов	

I. Поглощение	650
1. Суммарное поглощение	651
2. Кривая поглощения	657
II. Дисперсия	660
§ 95. Дисперсионные кривые в прозрачной области для газов и твердых тел	666
*§ 96. Обратный эффект Зеемана и дисперсия при эффекте Фарадея	679
*§ 97. Резонансная флюоресценция и влияние на нее магнитных полей	690
*§ 98. Дисперсия Керр-эффекта и рассеяния. Резонансные колебания	697
*§ 99. Дисперсия естественной вращательной способности для жидкостей и газов	704
§ 100. Инфракрасные колебания и эффект Рамана	716
I. Двухатомные молекулы	718
1. Инфракрасные колебания	—
2. Раман-эффект	721
II. Многоатомные молекулы	725
1. Свойства симметрии и правила отбора	—
2. Пример многоатомных молекул	731
*§ 101. Дисперсия дипольных жидкостей	746
Примечания редактора	767
Именной и предметный указатель	768