

Научное издание

<i>ТРУБЕЦКОВ Дмитрий Иванович</i>	<i>КУРАЕВ Александр Александрович</i>
<i>ХРАМОВ Александр Евгеньевич</i>	<i>КОРОНОВСКИЙ Алексей Александрович</i>
<i>БЛИОХ Юрий Павлович</i>	<i>ГРИШИН Сергей Валерьевич</i>
<i>ДМИТРИЕВ Борис Савельевич</i>	<i>ЖАРКОВ Юрий Дмитриевич</i>
<i>ЕГОРОВ Евгений Николаевич</i>	<i>КАЛИНИН Юрий Александрович</i>
<i>МАЛЮГИНА Мария Александровна</i>	<i>МАНЕНКОВ Александр Бенционович</i>
<i>МОЛОТКОВ Иван Анатольевич</i>	<i>МОСКАЛЕНКО Ольга Игоревна</i>
<i>НУСИНОВИЧ Григорий Семенович</i>	<i>ПОПОВ Павел Вячеславович</i>
<i>РЕМПЕН Ирина Сергеевна</i>	<i>СТАРОДУБОВ Андрей Викторович</i>
<i>ФИЛАТОВ Роман Андреевич</i>	<i>ФИЛАТОВА Анастасия Евгеньевна</i>
<i>ШАРАЕВСКИЙ Юрий Павлович</i>	

**МЕТОДЫ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКИ И ТЕОРИИ ХАОСА В  
ЗАДАЧАХ ЭЛЕКТРОНИКИ СВЕРХВЫСОКИХ ЧАСТОТ**

Том 2

**НЕСТАЦИОНАРНЫЕ И ХАОТИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ**

Редактор *С.А. Тюрина*  
Оригинал-макет: *Е.Н. Водоватова*  
Оформление переплета: *Н.В. Гришина*

Подписано в печать 16.02.09. Формат 60×90/16. Бумага офсетная.  
Печать офсетная. Усл. печ. л. 24. Уч.-изд. л. 24. Тираж экз.  
Заказ №

Издательская фирма «Физико-математическая литература»  
МАИК «Наука/Интерпериодика»  
117997, Москва, ул. Профсоюзная, 90  
E-mail: [fizmat@maik.ru](mailto:fizmat@maik.ru), [fmlsale@maik.ru](mailto:fmlsale@maik.ru);  
<http://www.fml.ru>

Неизвестная типография

...  
...  
...  
...

УДК 537.5  
ББК 22.333  
М 54



*Издание осуществлено при поддержке  
Российского фонда фундаментальных  
исследований по проекту 08-02-07003*

Авторский коллектив:

Трубецков Д.И., Кураев А.А., Храмов А.Е.,  
Короновский А.А., Блюх Ю.П., Гришин С.В., Дмитриев Б.С.,  
Жарков Ю.Д., Егоров Е.Н., Калинин Ю.А., Малюгина М.А.,  
Маненков А.Б., Молотков И.А., Москаленко О.И.,  
Нусинович Г.С., Попов П.В., Ремпен И.С., Стародубов А.В.,  
Филатов Р.А., Филатова А.Е., Шараевский Ю.П.

**Методы нелинейной динамики и теории хаоса в задачах электроники сверхвысоких частот.** В 2 т. Т. 2. **Нестационарные и хаотические процессы** / Под ред. Д.И. Трубецкова, А.Е. Храмова, А.А. Короновского. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009. — 384 с. — ISBN 978-5-9221-1084-6.

Во втором томе книги «Нестационарные и хаотические процессы» рассмотрены такие современные области исследования в радиофизике, электронике и нелинейной динамике как разработка новых принципов генерации хаотических сигналов СВЧ-диапазона и создание на их основе источников широкополосных шумоподобных сигналов для современных информационно-телекоммуникационных систем, различные методы управления хаотическими колебаниями в пучково-плазменных системах, синхронизация (в том числе и хаотическая) в приборах электроники сверхвысоких частот, нелинейные волновые процессы в системах с магнитостатическими волнами и при распространении волновых пучков. Для физиков различных специальностей, интересующихся процессами взаимодействия электронов с электромагнитными полями, для научных работников, аспирантов и инженеров, проводящих исследования в области вакуумной СВЧ электроники, радиофизики, радиотехники и физики плазмы. Она может быть полезна студентам старших курсов соответствующих специальностей.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие ко второму тому . . . . .	7
<b>Глава 1. Сложная динамика, хаос и образование структур в распределенных системах сверхвысококачественной электроники . . . .</b>	<b>11</b>
<i>А. А. Короновский, И. С. Ремпен, А. Е. Храмов</i>	
1.1. Сверхвысококачественная электроника глазами нелинейной динамики (общий взгляд) . . . . .	11
1.2. ЛБВ-генераторы с обратной связью (шумотроны) . . . . .	21
1.3. Хаотические колебания в системах «электронный поток — встречная (обратная) электромагнитная волна» . . . . .	28
1.4. Диод Пирса: от регулярных автоколебаний к хаосу . . . . .	39
1.5. Виркатор и другие . . . . .	47
1.6. Клистронные генераторы хаоса . . . . .	53
Заключение . . . . .	55
Список литературы . . . . .	56
<b>Глава 2. Хаотические колебания и управление ими в диоде Пирса</b>	<b>63</b>
<i>А. А. Короновский, И. С. Ремпен, А. Е. Храмов</i>	
2.1. Гидродинамическая модель диода Пирса . . . . .	66
2.2. Управление колебаниями в диоде Пирса с использованием запаздывающей обратной связи . . . . .	69
2.3. Стабилизация неустойчивого состояния равновесия с помощью непрерывной обратной связи . . . . .	73
2.4. Неустойчивые периодические пространственно-временные состояния . . . . .	76
2.5. Стабилизация неустойчивых периодических состояний с помощью непрерывной обратной связи . . . . .	82
Заключение . . . . .	87
Список литературы . . . . .	88
<b>Глава 3. Низковольтный виркатор: теория и эксперимент . . . . .</b>	<b>91</b>
<i>Е. Н. Егоров, Ю. А. Калинин, А. А. Короновский, Д. И. Трубецков, Р. А. Филатов, А. Е. Храмов</i>	
3.1. Маломощные хаотические широкополосные колебания в пучках заряженных частиц с виртуальным катодом . . . . .	92
3.2. Влияние распределения электронов по скоростям на хаотические колебания в электронном потоке в режиме образования виртуального катода . . . . .	106

3.3. Влияние положительных ионов на колебательные процессы в электронном пучке с виртуальным катодом. Низковольтный виркатор — генератор хаотических радиоимпульсов . . . . .	113
3.4. Лабораторный макет низковольтного виркатора и результаты его исследования. . . . .	118
Заключение . . . . .	122
Список литературы . . . . .	123
<b>Глава 4. Влияние двумерных эффектов динамики заряженных частиц на колебания в электронных потоках с виртуальным катодом</b> . . . . .	126
<i>Е. Н. Егоров, С. А. Куркин, А. Е. Храмов</i>	
4.1. Вводные замечания. . . . .	126
4.2. Формирование и нелинейная динамика виртуального катода в случае нерелятивистских энергий электронного потока. . . . .	127
4.3. Влияние внешнего магнитного поля на физические процессы в слаборелятивистском электронном потоке с виртуальным катодом	150
4.4. Хаотическая динамика релятивистского электронного пучка с виртуальным катодом при изменении величины внешнего магнитного поля . . . . .	157
Заключение . . . . .	170
Список литературы . . . . .	171
<b>Глава 5. Генерация и усиление широкополосных хаотических колебаний в системе «лампа бегущей волны с коллектором-генератором»</b> . . . . .	173
<i>Ю. А. Калинин, А. Е. Храмов</i>	
5.1. Схема гибридного прибора «лампа бегущей волны с коллектором-генератором» . . . . .	175
5.2. Особенности генерации и усиления сигналов в электронно-волновом усилителе с коллектором-генератором. . . . .	177
5.3. Хаотические СВЧ-колебания в коллекторе-рекуператоре лампы бегущей волны . . . . .	179
5.4. Усиление широкополосных хаотических сигналов, генерируемых виртуальным катодом, лампой бегущей волны . . . . .	181
Заключение . . . . .	183
Список литературы . . . . .	184
<b>Глава 6. Физика пасотрона</b> . . . . .	186
<i>Ю. П. Блюх, Г. С. Нусинович</i>	
6.1. Формирование ионного канала в пасотроне. . . . .	187
6.2. Возбуждение синхронной волны . . . . .	193
6.3. Ионный шум . . . . .	197
Заключение . . . . .	201
Список литературы . . . . .	202

<b>Глава 7. Нестационарные процессы и неавтономная динамика в электронно-волновых системах типа «электронный поток — встречная (обратная) электромагнитная волна»</b> . . . . .	204
<i>Д. И. Трубецков, А. А. Короновский, А. Е. Храмов</i>	
7.1. Вводные замечания. . . . .	204
7.2. Полоса синхронизации . . . . .	205
7.3. Численное моделирование неавтономного поведения гиро-ЛВВ . . . . .	212
7.4. Длительность установления синхронного режима . . . . .	224
7.5. Переходной хаос вблизи границы синхронизации. . . . .	226
Заключение . . . . .	236
Список литературы . . . . .	237
<b>Глава 8. Хаотическая синхронизация в электронике сверхвысоких частот</b> . . . . .	240
<i>А. А. Короновский, П. В. Попов, Р. А. Филатов, А. Е. Филатова, А. Е. Храмов</i>	
8.1. Синхронизация временных масштабов и другие типы хаотической синхронизации . . . . .	240
8.2. Синхронизация временных масштабов в ЛОВ с поперечным полем . . . . .	249
8.3. Синхронизация временных масштабов и полная хаотическая синхронизация в гидродинамических моделях диода Пирса . . . . .	261
8.4. Полная синхронизация сети, состоящей из распределенных систем сверхвысокочастотной электроники. . . . .	266
Заключение . . . . .	277
Список литературы . . . . .	277
<b>Глава 9. Обобщенная хаотическая синхронизация в диапазоне сверхвысоких частот</b> . . . . .	286
<i>А. А. Короновский, А. Е. Храмов, О. И. Москаленко, П. В. Попов, Р. А. Филатов, А. В. Стародубов, Б. С. Дмитриев, Ю. Д. Жарков</i>	
9.1. Обобщенная хаотическая синхронизация и способы ее диагностики . . . . .	286
9.2. Обобщенная хаотическая синхронизация в однонаправленно связанных гидродинамических моделях диода Пирса . . . . .	292
9.3. Обобщенная хаотическая синхронизация в системе двух связанных клистронных автогенераторов хаоса . . . . .	298
9.4. Скрытая передача информации на основе явления обобщенной синхронизации . . . . .	307
Заключение . . . . .	311
Список литературы . . . . .	312
<b>Глава 10. Нелинейные эффекты при туннелировании, в волноводах и при распространении волновых пучков</b> . . . . .	316
<i>И. А. Молотков, А. Б. Маненков</i>	
10.1. Нелинейные туннельные эффекты . . . . .	316

---

10.2. Принцип Ферма для нелинейной среды . . . . .	335
Заключение . . . . .	345
Список литературы . . . . .	346
<b>Глава 11. Нелинейные явления на магнитостатических волнах в диапазоне сверхвысоких частот . . . . .</b>	<b>348</b>
<i>Ю. П. Шараевский, М. А. Малюгина, С. В. Гришин</i>	
11.1. Магнитостатические волны в ферромагнитных пленках . . . . .	348
11.2. Параметрические явления в ферромагнитных пленках при рас- пространении магнитостатических волн . . . . .	353
11.4. Нелинейные магнитостатические волны в связанных ферромаг- нитных пленках. . . . .	371
Заключение . . . . .	380
Список литературы . . . . .	380
Сведения об авторах. . . . .	384

## Предисловие ко второму тому

Второй том коллективной монографии посвящен исследованию нестационарных нелинейных процессов в системах и устройствах радиофизики и электроники сверхвысоких частот. Во втором томе книги рассмотрены такие современные области исследования в радиофизике, электронике и нелинейной динамике, как разработка новых принципов генерации хаотических сигналов СВЧ-диапазона и создание на их основе источников широкополосных шумоподобных сигналов для современных информационно-телекоммуникационных систем, различные методы управления хаотическими колебаниями в пучково-плазменных системах, синхронизация (в том числе и хаотическая) в приборах электроники сверхвысоких частот, нелинейные волновые процессы в системах с магнитостатическими волнами и при распространении волновых пучков.

В главе 1 второго тома монографии предложен общий взгляд на сверхвысокочастотную электронику с позиций нелинейной динамики. Приводится обзор состояния современных исследований нелинейных нестационарных процессов в различных приборах и устройствах сверхвысокочастотной электроники, намечаются основные пути дальнейших исследований в этом направлении.

Глава 2 посвящена изложению методов управления хаотическими колебаниями в такой эталонной распределенной пучково-плазменной системе, как гидродинамическая модель диода Пирса. Наиболее важным здесь является создание и апробация методов выделения неустойчивых периодических пространственно-временных состояний хаотической динамики распределенной системы. Далее предлагаются методы стабилизации выделенных неустойчивых периодических пространственно-временных состояний с помощью непрерывной обратной связи, сигнал которой воздействует на систему в единственной точке пространства на границе диодного промежутка.

В главе 3 излагаются основы теории и результаты экспериментальных исследований макетов новых перспективных источников широкополосных хаотических сигналов СВЧ-диапазона на основе интенсивных нерелятивистских электронных пучков с виртуальным катодом, формируемом в тормозящем поле (низковольтных виркаторов).

Глава 4 посвящена рассмотрению важного теоретического аспекта динамики пучков заряженных частиц с виртуальным катодом, а именно учету двумерных эффектов динамики заряженных частиц в пространстве дрейфа виркатора. В главе рассмотрена иерархия усложняющихся систем, содержащих электронные потоки с виртуальным катодом. В начале главы детально рассмотрен механизм формирования и колебаний виртуального катода в нерелятивистском пучке с виртуальным катодом в тормозящем поле, сопоставлены результаты двумерной теории с экс-

периментальными данными исследования низковольтного виркатора. Далее в главе 4 представлены результаты анализа релятивистских систем с виртуальным катодом, а именно найдены зависимости пускового тока виркатора от величины внешнего магнитного поля, изучена нелинейная динамика и выходные характеристики релятивистского виркатора на пролетном токе.

Наконец, в главе 5 представлены результаты экспериментального исследования нового «гибридного» прибора СВЧ на основе широкополосного СВЧ-усилителя — лампы бегущей волны (ЛБВ), включающего в качестве одного из элементов многоступенчатый коллектор с возможностью формирования в его пространстве виртуального катода за счет торможения пучка электронов, выходящих из пространства взаимодействия ЛБВ.

В главе 6 изложено современное состояние теоретических и экспериментальных исследований в такой новой и активно развивающейся области электроники больших мощностей, как создание приборов, в которых транспортировка электронного пучка осуществляется за счет ионной фокусировки без ведущего магнитного поля. Такие приборы получили в литературе название пасотронов. В главе рассмотрены основные физические явления, происходящие при образовании удерживающего пучок ионного канала и при взаимодействии пучка с синхронной волной замедляющей структуры.

Главы 7–9 посвящены рассмотрению неавтономной динамики и процессов синхронизации систем электроники сверхвысокочастотного диапазона, включая режимы хаотической синхронизации. Особенностью описания процессов в этих главах является тот факт, что отправным пунктом в рассмотрении этих явлений является теория хаотической синхронизации, активно развивающаяся сегодня. Последовательность изложения в этих главах следующая: сначала излагаются теоретические основы хаотической синхронизации, а затем рассматриваются особенности синхронного поведения систем сверхвысокочастотной электроники, начиная от двух связанных осцилляторов и заканчивая сетями, состоящими из большого числа нелинейных систем СВЧ электроники.

В главе 10 монографии рассматриваются нелинейные волновые процессы, причем рассматриваются случаи, в которых учет нелинейности ведет не просто к уточнению описания явлений, но к принципиальному изменению волновой динамики. В этой главе анализируются (1) нелинейные туннельные эффекты и (2) нелинейные вариационные принципы типа принципа Ферма. Такой анализ позволил исследовать нетривиальные явления, возникающие в волноводах и при распространении волновых пучков.

В последней главе 11 рассмотрены нелинейные явления в структурах на основе ферромагнитных пленок при возбуждении в них магнитостатических волн (МСВ). Описаны особенности дисперсионных характеристик различных типов МСВ в зависимости от направления

внешнего магнитного поля. Выделены два механизма, которые играют существенную роль в нелинейных процессах в ферромагнитных пленках: первый, связанный с параметрическим возбуждением МСВ коротковолновых спиновых волн; второй, обусловленный нелинейностью самой среды и приводящий, в частности, к модуляционной неустойчивости волн. Изложены результаты теоретического и экспериментального исследования основных нелинейных эффектов на магнитостатических волнах, связанных с этими механизмами. Описаны результаты теоретического исследования особенностей нелинейных эффектов самодействия магнитостатических волн в новом классе распределенных систем — связанных ферромагнитных структурах.

Все вопросы, которым посвящена монография, впервые излагаются в систематизированном виде и с достаточно полным охватом материала, включая детальное описание нестационарных нелинейных математических моделей и экспериментальных результатов, а также некоторых технических деталей новых устройств. Следует отметить, что в монографии делается упор на детальное сопоставление результатов численного моделирования и экспериментальных исследований, что позволяет выделить границы применимости предложенных моделей и объяснить результаты натуральных экспериментов. При написании глав книги мы старались построить изложение таким образом, чтобы читатель мог получить достаточно полное и современное представление о той или иной проблеме, не прибегая к другим источникам. В то же время каждая глава снабжена достаточно подробным списком литературы, так что читатель при необходимости сможет легко обратиться к первоисточникам.

Большая часть изложенных во втором томе монографии результатов в области нелинейной динамики электронно-волновых систем опубликована, в основном, в периодических изданиях, часто недоступных для широкого круга читателей, или напечатана в очень краткой форме. Систематизация результатов исследований нелинейных нестационарных процессов, включая хаотические режимы колебаний, в приборах и устройствах радиофизики и электроники сверхвысоких частот, их целенаправленное изложение в монографии представляются своевременными и важными. Заметим, что в монографии представлены также и новые результаты, в частности, приведены новые примеры, иллюстрирующие теорию, в ряде случаев нам удалось рассмотреть исследуемые процессы с более общих позиций.

Авторы хотят выразить признательность Российскому фонду фундаментальных исследований, который на протяжении многих лет поддерживал исследования, результаты которых вошли во второй том коллективной монографии.

Результаты исследований, изложенных в главах 1–6 монографии, поддержаны грантами Российского фонда фундаментальных исследований 05-02-08030-офи-п, 07-02-12071-офи (конкурсы ориентированных фундаментальных исследований), 02-02-16351-а, 05-02-16286-а,

06-02-81013-Бел-а, 06-02-72007-МНТИ-а, 08-02-00053-а, 09-02-00255-а; в главах 7–9 — грантами РФФИ 01-02-17392-а, 06-02-16451-а, 05-02-16273-а, 07-02-00044; в главе 10 — грантами 05-02-16176, 05-02-16931 и 06-02-16805; в главе 11 — грантами 02-02-16353, 04-02-16296, 05-02-16273, 07-02-00639. Также авторы хотят высказать признательность Президентской программе поддержки молодых российских ученых (проекты МД-1884.2007.2 и МК-1320.2007.9) и ведущих научных школ Российской Федерации (ведущая научная школа, руководимая чл.-корр. РАН, проф. Д. И. Трубецковым), а также Фонду некоммерческих программ «Династия» за финансовую поддержку коллектива исследователей, подготовивших данную монографию.

Монография предназначена для физиков различных специальностей, интересующихся процессами взаимодействия электронов с электромагнитными полями, для научных работников, аспирантов и инженеров, проводящих исследования в области вакуумной СВЧ электроники, радиофизики, радиотехники и физики плазмы. Она может быть полезна студентам старших курсов соответствующих специальностей.

*Авторы*

## Глава 1

# СЛОЖНАЯ ДИНАМИКА, ХАОС И ОБРАЗОВАНИЕ СТРУКТУР В РАСПРЕДЕЛЕННЫХ СИСТЕМАХ СВЕРХВЫСОКОЧАСТОТНОЙ ЭЛЕКТРОНИКИ

А. А. Кураев, Д. И. Трубецков, А. Е. Храмов

Возбуждение регулярных автоколебаний в распределенных системах можно трактовать как возникновение из хаоса некоторой упорядоченной пространственно-временной структуры.

*Ланда П. С.* Автоколебания в распределенных системах. М.: Наука. 1983. С. 7.

В радиотехнике и электронике известен целый ряд приложений, где необходимы генераторы шумоподобных колебаний, в роли которых могут выступать различные устройства, функционирующие в режиме динамического хаоса. Примерами могут служить генераторы с запаздывающей связью на лампе бегущей волны... и на лампе обратной волны...

*Кузнецов С. П.* Динамический хаос. М.: Физматлит, 2001. С. 19.

*Сверхвысокочастотная электроника глазами нелинейной динамики (общий взгляд). ЛБВ-генераторы с обратной связью (шумотроны). Хаотические колебания в системах «электронный поток — встречная (обратная) электромагнитная волна». Диод Пирса: от регулярных автоколебаний к хаосу. Виркатор и другие. Клистронные генераторы хаоса.*

### **1.1. Сверхвысокочастотная электроника глазами нелинейной динамики (общий взгляд)**

Когда-то С.М. Рытов определил радиофизику как «физику для радио и радио для физики». Право С.М. Рытова давать определения подтвердил тогда академик Минц, сказав, что «радиофизика — это то,

чем занимается С. М. Рытов». Но термин родился в Нижнем Новгороде, тогда еще Горьком. В «Избранных очерках о зарождении и взрослении радиофизики в горьковско-нижегородских местах» М. А. Миллер отмечает, что В. И. Гапонов писал в «Горьковской правде»: «Радиофизика держится на трех китах: теории колебаний, электродинамике и электронике». Тема этой главы — третий кит — электроника.

Правда, сегодня, согласно опять же М. А. Миллеру, «радиофизика... вымахала за пределы, отпущенные ей при рождении: она проникла в акустику, в гидро-, гео- и астрофизику, в газо- и плазмодинамику, в твердотелье и уж конечно во все видимые и невидимые диапазоны электромагнетизма». Добавим сюда и науку о живом.

Радиофизика стала нелинейной, причем нелинейность стала понятием первичным. Появилось то, что называют нелинейной динамикой или синергетикой, то, что можно назвать современной наукой о колебаниях и волнах.

По Ю. Л. Климонтовичу «синергетика — не самостоятельная научная дисциплина, но новое междисциплинарное направление; цель синергетики — выявление общих идей, общих методов и общих закономерностей в самых разных областях естествознания, а также социологии и даже лингвистики; более того в рамках синергетики происходит кооперирование различных специальных дисциплин».

Представляется, что на отдельные дисциплины разумно взглянуть глазами нелинейной динамики. Главы этой монографии — подобный взгляд на вакуумную сверхвысокочастотную (СВЧ) электронику, точнее на ее отдельные объекты.

Что связывает нелинейную динамику и СВЧ электронику, какие общие физические процессы и явления они изучают? Их много: самовозбуждение колебаний в неравновесной среде, возникновение и эволюция динамического хаоса, излучение в неоднородной среде — усиление и параметрические явления, нелинейные волны, образование паттернов, процессы синхронизации.

Нелинейная динамика изменила СВЧ электронику в первую очередь благодаря решению нестационарных задач. Хокни и Банеман эмоционально писали применительно к магнетрону: «...вместо того, чтобы искать этот вечно ускользающий стационарный режим, можно следить за пространственно-временной эволюцией системы...».

И, конечно, новый толчок исследованиям дало открытие сложной динамики в нелинейных системах и особенно, динамического хаоса, а также фрактальной геометрии.

Здесь следует отметить, что первые автогенераторы хаотических СВЧ-колебаний появились в «достохастический» период, когда еще никто не осмеливался говорить о хаотических колебаниях в динамических системах. К ним, в первую очередь, следует отнести шумовые генераторы, в которых электронный поток движется в скрещенных статических электрическом и магнитном полях (генераторы магнетронного типа) [1]. Попытки понять аномально высокий уровень шумов в та-

ких приборах и устройствах привели к гипотезе об их турбулентном происхождении (этому во многом способствовала известная аналогия между диокотронной неустойчивостью и неустойчивостью Гельмгольца в гидродинамических течениях) [1, 2]. Практически в то же время В. Я. Кисловым и его сотрудниками был предложен так называемый шумотрон — ЛБВ-генератор с запаздывающей обратной связью [3]. Роль шумотрона как экспериментальной модели, на которой проверялись все теоретические результаты, полученные при изучении хаоса в динамических системах, трудно переоценить. Можно смело утверждать, что ЛБВ-генератор с запаздывающей обратной связью стал в нелинейной динамике наряду с карсинотроном эталонной моделью распределенной автоколебательной системы.

Далее кратко рассмотрим глазами нелинейной динамики «коллекцию» примеров в рамках пяти идей, создавших СВЧ электронику. Более подробно остановимся на некоторых экземплярах коллекции, в частности на лампе обратной волны как распределенной автоколебательной системе, демонстрирующей сложную динамику и хаос. Кроме того, опишем образование паттернов и их взаимодействие в СВЧ устройствах с виртуальным катодом.

Начнем с напоминаний об особенностях СВЧ электроники по сравнению с электроникой низких частот.

В любом электронном приборе взаимодействие переменного электромагнитного поля (электромагнитных колебаний или волн) с электронами (свободными или связанными) является основным в его работе. Поле воздействует на электронный поток, создает в нем переменный ток, который, в свою очередь, изменяет поле. Конечно, для конкретных расчетов нужно детализировать устройство электронного прибора, но всегда имеется связка «поле — электроны» (см. рис. 1.1).

Следуя [4], сформулируем, какими свойствами обладают низкочастотные лампы (например, вакуумный триод), а потом проследим, выполняются ли эти свойства на СВЧ (0,3–3000 ГГц).

Для низкочастотных ламп справедливо следующее.

1) Переменные поля в лампе не должны проявлять волновых свойств, в частности вводы и выводы, выполненные в виде проводов, не должны существенно влиять на свойства лампы и ее цепи. Если  $D$  — характерный размер лампы,  $k = 2\pi/\lambda$  — волновое число,  $\lambda$  — длина волны, то волновые свойства не проявляются при  $kD \ll 1$ , или  $D \ll \lambda$ .

2) Электроны в лампе не должны проявлять своей инерционности (время пролета их между электродами  $t_{\text{пр}}$  пренебрежимо мало по сравнению с периодом  $T$  колебаний поля). Это условие можно записать так:  $\omega t_{\text{пр}} \ll 1$  или  $t_{\text{пр}} \ll T$ . Оба приведенных условия можно переписать единообразно: если ввести  $t_{\text{расп}} = D/c$  — время распространения волны через лампу и ее цепь ( $c$  — скорость света в пустоте), то оба приведенных выше неравенства можно представить следующим образом:  $\omega t_{\text{расп}} \ll 1$ . В СВЧ электронике свойства, сформулированные выше,



КОЛЕБАНИЯ, + ЭЛЕКТРОНЫ  
ВОЛНЫ Взаимодействие

(Могут быть акустические, а не только электромагнитные)

Рис. 1.1. Колебания, волны и электроны в электронных приборах

нарушаются и нужно написать, что

$$D \sim \lambda, \quad t_{\text{пр}} \sim T \quad \text{или даже} \gg T, \quad (1.1)$$

кроме того, вводы и выводы энергии существенно влияют на работу лампы.

Именно эти особенности привели к появлению пяти основных идей, создавших СВЧ электронику, которые кратко изложим, выделяя основные колебательно-волновые нелинейные явления и эффекты [5].

**Идея первая.** Модуляция электронов по скорости и группирование электронов в пространстве дрейфа.

Как известно, этой идее соответствует одна простая модель, в которой вдоль оси  $x$  движется поток невзаимодействующих частиц так, что в эйлеровых переменных  $(x, t)$  их скорость удовлетворяет уравнению

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} = 0. \quad (1.2)$$

В электронике СВЧ это уравнение описывает в рамках так называемой кинематической теории поведение электронного потока в трубе дрейфа приборов клистронного типа (детали можно найти, например, в [6]). Различие в скоростях электронов приводит в трубе дрейфа к образованию электронных уплотнений — группированию электронов потока.

Пусть в момент времени  $t = 0$  поток оказывается возмущенным по скорости по закону  $a \sin kx$ , где  $k = \omega/v_0$  — волновое число, соответ-

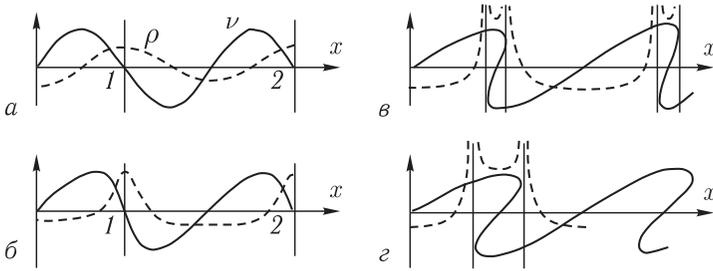


Рис. 1.2. Эволюция во времени синусоидального возмущения в пучке не взаимодействующих частиц. Здесь сплошными линиями обозначена скорость, штриховыми — плотность. а) Начальное состояние, соответствующее синусоидальному возмущению скорости; б) образование электронных уплотнений (группирование частиц около точек 1 и 2); в, г) опрокидывание волны скорости и образование удвоенного числа особенностей на кривой  $\rho = \rho(x)$

ствующее волне скорости малой амплитуды с частотой  $\omega$ ;  $v_0 = \text{const}$ . В системе координат, движущейся со скоростью  $v_0$  ( $v = v_0 + u$ ) уравнение  $dv/dt = 0$  примет вид:  $\partial u/\partial t + u \partial u/\partial x = 0$ , решение которого имеет вид простой волны  $u = U(t - x/u)$ , где выражение для  $U$  определяется начальным возмущением. Рис. 1.2 иллюстрирует процесс эволюции потока на фазовой плоскости  $(u, x)$ .

Начальное состояние потока — синусоида  $a \sin kx$  на плоскости  $(u, x)$ ; здесь же штриховой линией показана зависимость плотности объемного заряда потока от  $x$  (рис. 1.2, а). С течением времени происходит искажение профиля волны: частицы с  $u > 0$  уходят вперед, а с  $u < 0$  отстают от волны. Одновременно образуются сгущения частиц вблизи точек 1 и 2, где  $u = 0$ , и происходит группирование потока (рис. 1.2, б). Волна постепенно становится все круче, и в конце концов производная  $\partial u/\partial x$  на ее переднем фронте обращается в бесконечность (в бесконечность обращается в этой точке и плотность  $\rho(x)$  объемного заряда потока). В следующий момент происходит опрокидывание волны, и функция  $u(x, t)$  перестает быть однозначной (рис. 1.2, в, г): у нее появляется точка поворота, т.е. образуются встречные пучки. После опрокидывания волны функция  $\rho(x)$  имеет удвоенное число особенностей (рис. 1.2, в, г).

В СВЧ электронике для описания процесса группирования электронов отказываются от переменных Эйлера  $(x, t)$  и переходят к переменным Лагранжа  $(t, t_0)$  или  $(x, t_0)$ , где  $t_0$  — начальный момент влета электронов в трубу дрейфа. Наглядное представление о группировании в трубе дрейфа дает так называемая пространственно-временная диаграмма на плоскости  $(x, \omega t_0)$  на рис. 1.3. Каждой линии на диаграмме соответствует траектория одной заряженной частицы.

Из рис. 1.3 видно, что за период высокочастотного воздействия траектории сходятся (образуются уплотнения частиц) или расходятся (образуется разрежения частиц), что и иллюстрирует процесс группирования.

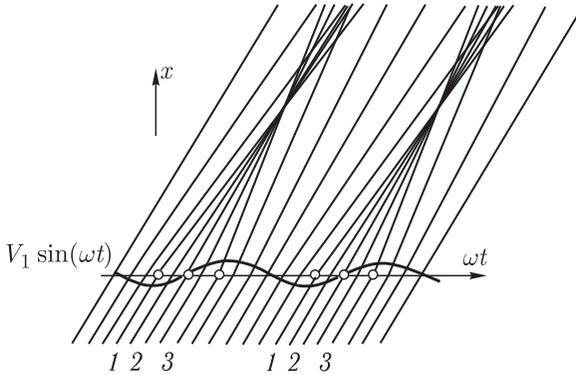


Рис. 1.3. Пространственно-временная диаграмма группирования электронов в пространстве дрейфа: 1 — электрон, который тормозится полем; 2 — электрон, не испытывающий воздействия со стороны поля; 3 — электрон, который ускоряется полем

Сравнивая «волновой» и «корпускулярный» подходы к описанию группирования, можно сделать вывод, что процесс опрокидывания волн соответствует явлению обгона одних частиц другими.

Рассмотренная модель сильно идеализирована, поскольку не учитывает сил кулоновского взаимодействия между частицами. в частности, для волн малой амплитуды в системе дисперсии нет. Поскольку в модели, учитывающей влияние сил пространственного заряда, дисперсия появляется, естественным становится предположение о возможности существования в электронном потоке уединенных волн и даже солитонов. В большинстве работ, посвященных нелинейным волнам пространственного заряда (ВПЗ) исходные уравнения путем «насильственных» упрощений сводились к уравнению Кортевега-де-Вриза (КдВ), на основе чего делался вывод о возбуждении в электронном потоке КдВ-солитонов. В работе [7] были найдены точные решения в виде уединенных волн, определены условия их устойчивости и проведено численное моделирование процессов в электронном потоке. Показано, что при эволюции широкого класса начальных возмущений образуются одна или несколько уединенных волн и «осциллирующий хвост» малой амплитуды. Пример такой эволюции иллюстрирует рис. 1.4, на котором приведены зависимости скорости (*a*) и плотности заряда (*b*) от координаты в различные моменты времени.

Расчеты показали, что столкновение попутных волн является упругим с достаточно большой степенью точности (см. рис. 1.5).

Существует качественное отличие между взаимодействием волн с сильно различающимися и близкими амплитудами: в последнем случае столкновение происходит без образования одиночного пика. Столкновение встречных волн (т.е. быстрой и медленной) является существенно неупругим.

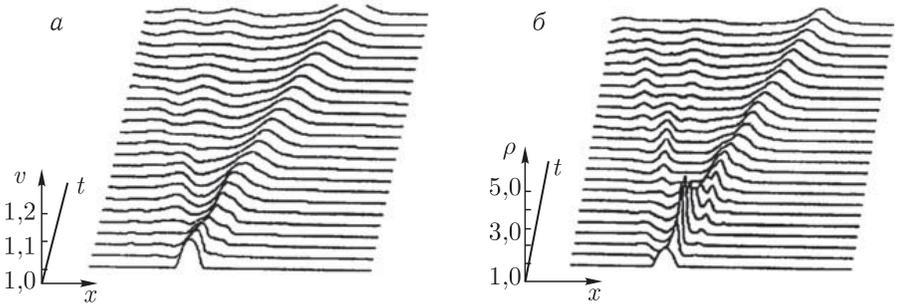


Рис. 1.4. Образование уединенной волны и осциллирующего хвоста при эволюции возмущения: а) скорость электронов; б) плотность заряда. Из работы [7]

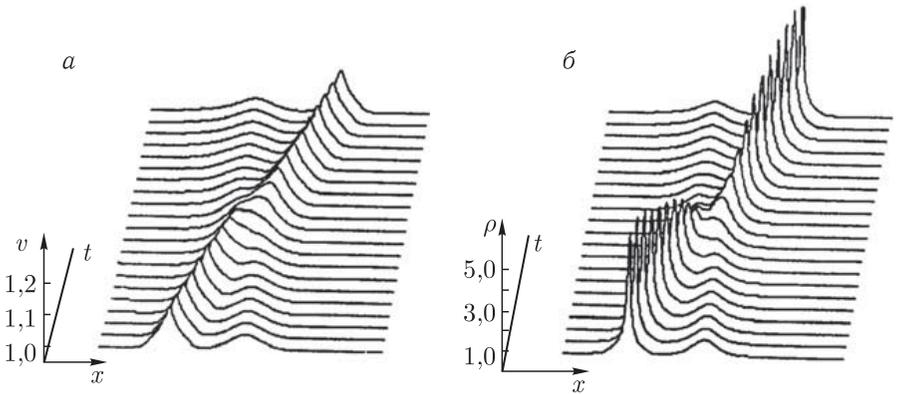


Рис. 1.5. Взаимодействие двух быстрых уединенных волн с сильно различающимися амплитудами: а) скорость электронов; б) плотность заряда. Из работы [7]

Особую группу приборов с динамическим способом управления электронным потоком (скоростная модуляция с последующим группированием) составляют генераторы со сверхпределными токами (виркаторы), работа которых основана на формировании в пространстве взаимодействия виртуального катода (ВК) — области с потенциалом поля пространственного заряда, близким к потенциалу источника электронов. Одной из простейших моделей виркаторов на пролетном токе является модель диода Пирса, в которой поток электронов, статический пространственный заряд которого скомпенсирован фоном неподвижных ионов, поступает в эквипотенциальное дрейфовое пространство (описание модели и результатов численного моделирования приведено ниже). Применение современных методов нелинейной динамики (расчет размерностей восстановленных аттракторов колебаний ВК, вычисление максимальных ляпуновских характеристических показателей, определение взаимных корреляций между колебаниями плотности заряда

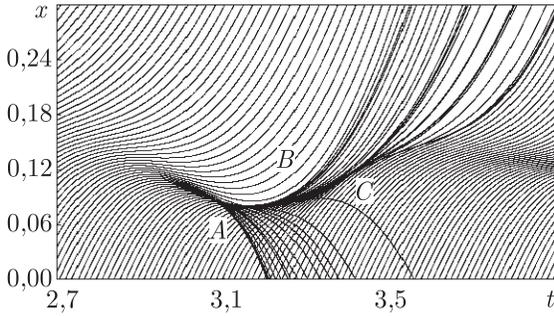


Рис. 1.6. Пространственно-временная диаграмма движения электронов в диоде Пирса, демонстрирующая образование двух взаимодействующих электронных структур (см. подробнее подраздел 1.4.2)

в различных сечениях потока) позволило обнаружить области хаотических колебаний ВК в пространстве управляющих параметров системы.

Анализ физических процессов в электронном потоке проводился при помощи построения пространственно-временных диаграмм. Типичный результат для одного периода колебаний виртуального катода представлен на рис. 1.6. Каждая кривая показывает изменение местоположения  $x$  крупной частицы — электрона с течением времени  $t$ . На одном периоде колебаний можно выделить два сгустка кривых, которым соответствуют два сгустка, формирующихся в электронном потоке. Эти сгустки возникают при любых начальных условиях и представляют собой автоструктуры. Первый сгусток соответствует ВК. При его распаде поступающий в систему поток модулируется полем первого сгустка и в результате превращения модуляции по скорости в модуляцию по плотности формируется второй сгусток. Возникновению хаотических колебаний соответствует критическое значение плотности заряда во втором сгустке, при котором часть потока начинает отражаться от него, оказывая воздействие на формирование ВК на следующем периоде колебаний, что приводит к формированию распределенной обратной связи в системе.

Таким образом, возникновение хаотических колебаний в электронном потоке с ВК связано с усилением связи между структурами (возникновением распределенной внутренней обратной связи по потоку).

**Идея вторая.** Взаимодействие электронного потока, движущегося в скрещенных статических электрическом и магнитном полях, с ВЧ электромагнитном полем (магнетронное взаимодействие).

Нет сомнения в том, что спицы пространственного заряда в магнетроне представляют собой динамические автоструктуры, эволюция которых по-прежнему не понята до конца (см. «О трех загадках в магнетроне» [6, лекция 7]). И лишь в последние годы представления и методы нелинейной динамики позволяют продвинуться в понимании сложных процессов в облаке пространственного заряда и объяснении,

например, больших шумов в магнетроне. Так, Г.Г. Моносовым [8] в компьютерном эксперименте обнаружен процесс хаотической модуляции в магнетроне. Качественно этот процесс можно описать следующим образом. Наложенное на однородный статический электронный поток высокочастотное поле резонаторной системы сначала приводит к образованию выпуклости, на которую постепенно накручиваются новые слои электронов, образуя локальную вращающуюся втулку. Когда верхние слои этой втулки поднимаются достаточно близко к аноду, они под действием высокочастотного поля резонаторной системы отрываются от локальной втулки и постепенно в виде сгустков импульсами оседают на аноде. После оседания сгустка локальная втулка постепенно восстанавливается и описанный процесс продолжается вновь. Нерегулярность этого процесса связана с тем, что время образования локальной втулки не связано со временем прохождения втулки от одной щели к другой. Поэтому процесс отрыва порций заряда от локальной втулки каждый раз начинается при новом исходном состоянии втулки. Вследствие этого от втулки каждый раз отрываются разные порции заряда. Такая хаотическая автомодуляция может являться одной из причин возникновения шумового пьедестала в частотном спектре сигнала, генерируемого магнетроном.

Сложная, в том числе хаотическая, динамика имеет место в усилителе обратной волны со скрещенными полями (амплитроне) и определяется возникающей обратной связью между входом и выходом прибора [9] (см. также [6]).

**Идея третья.** Взаимодействие электронного потока с замедленной бегущей электромагнитной волной (лампа с бегущей волной — ЛБВ).

Интересно, что нелинейная теория ЛБВ началась с поиска решений в виде нелинейных стационарных волн в работе Л. Бриллюена (J. Appl. Phys. 1949. V. 20, № 12. P. 1196). Для СВЧ электроники режимы возбуждения стационарных нелинейных волн, по крайней мере сегодня, интереса не представляют. Обзор теории нелинейных волн в электронных потоках и системах «электронный поток — электромагнитное поле» представлен в работе [10], где детально обсуждены вопросы, связанные с возможностью возбуждения и распространения в указанных системах уединенных волн, в частности — солитонов.

Истории было угодно, чтобы уже упомянутый выше ЛБВ-генератор с запаздывающей обратной связью (шумотрон), предложенный В. Я. Кисловым, стал первым СВЧ-генератором мощных шумовых (как впоследствии выяснилось, хаотических) сигналов (см., например, [3], а также [6]). Именно в натуральных экспериментах с шумотроном обнаруживались те или иные сценарии динамического хаоса и проводилось сопоставление с теорией.

**Идея четвертая.** Взаимодействие электронного потока с обратной электромагнитной волной (лампа с обратной волной — ЛОВ, или карсинотрон).

Сложная динамика различных вариантов ЛОВ как распределенной автоколебательной системы исследована весьма полно как теоретически, так и экспериментально (см. [6], лекции 12, 13 и библиографию к ним). Тем не менее исследования продолжаются и обнаруживаются все больше и больше новых особенностей и тонкостей.

История исследований карсинотрона как распределенной автоколебательной системы начинается в Институте прикладной физики АН СССР (Горький) и Саратовском государственном университете, в которых в 70-х годах прошлого столетия был выполнен цикл работ по изучению последовательности бифуркаций, наблюдаемых в генераторе с обратной волной (карсинотроне) на пути к режиму хаотической автомодуляции (последний характеризуется СВЧ-излучением со сплошным спектром мощности) [11–13, 18]. Было показано (теоретически и экспериментально), что характер переходов качественно не меняется в различных вариантах исследуемой системы и определяется одним и тем же единственным безразмерным параметром — безразмерной длиной лампы — аналогом числа Рейнольдса.

Важным и центральным моментом этих исследований стало создание *нестационарной* теории карсинотрона и дальнейшее численное решение полученных уравнений в частных производных на ЭВМ (см., например, [11, 14–16]). Как численные исследования, так и экспериментальные данные показали, что переход «порядок — хаос» в системе «электронный поток — обратная электромагнитная волна» соответствует возникновению неустойчивости по отношению к малым возмущениям начальных условий. Хорошо известно, что главным атрибутом динамического хаоса служит наличие чувствительности фазовых траекторий к малым вариациям начальных условий. На рис. 1.7 представлены результаты численного эксперимента, иллюстрирующего ее присутствие в динамике модели ЛОВ в области развитого хаоса [16]. На графике наложены два десятка зависимостей амплитуды выходного сигнала от времени, полученных при задании в качестве начальных условий распределений амплитуды поля с малой случайной добавкой. Видно, что на начальном участке они совпадают, а с течением времени расходятся друг относительно друга все сильнее и сильнее — картина «замазывается».

Предшественником нестационарной нелинейной теории лампы обратной волны (как нерелятивистской, так и с учетом релятивистских эффектов) стала нестационарная теория лампы обратной волны магнетронного типа, подробно изложенная в [14]. После построения простейшей нестационарной нелинейной теории ЛОВ М- и О-типа были проведены исследования различных вариантов как нерелятивистских, так и релятивистских карсинотронов [17–20], в частности карсинотронов с отражениями от концов замедляющих систем [20, 21], были обнаружены тонкие эффекты нелинейной динамики нерелятивистской и релятивистской лампы обратной волны О-типа [15, 16, 22], ЛОВ

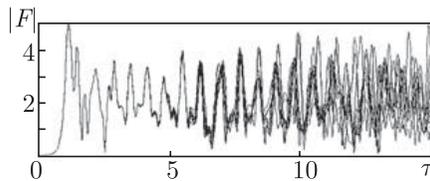


Рис. 1.7. Иллюстрация свойства чувствительности динамики к малому возмущению начальных условий: на графике наложены два десятка зависимостей амплитуды выходного сигнала ЛОВ от времени при  $L = 6,1$ , причем в качестве начальных условий задавалось распределение амплитуды поля на уровне 0,01 со случайной добавкой порядка 0,001. Рисунок взят из работы [16]

со связанными волноведущими структурами [23], ЛОВ с поперечным полем [24], ЛОВ на аномальном эффекте Доплера [22, 25].

**Идея пятая.** Взаимодействие криволинейных электронных потоков с электромагнитными полями. Мазеры на циклотронном резонансе (МЦР).

Эта идея как бы с самого начала принадлежала не только СВЧ электронике, но и нелинейной динамике: основополагающая статья называлась «Индуктированное излучение возбужденных классических электронов-осцилляторов и его использование в высокочастотной электронике» [26]. Наиболее удобной средой для будущих приборов оказался поток электронов-осцилляторов, вращающихся в магнитном поле. При взаимодействии таких осцилляторов с электромагнитным полем имеет место фазовая группировка, возникающая из-за неизохронности электронов-осцилляторов, т. е. вследствие релятивистской зависимости циклотронной частоты вращения от энергии электронов. Для МЦР изучены такие нелинейные явления как конкуренция и синхронизация мод, автомодуляция и хаос, рассмотрены различные модификации МЦР. Подробный обзор нелинейных явлений в МЦР дан в первой главе первого тома монографии.

Конечно, этот краткий обзор связи основных идей СВЧ электроники с нелинейной динамикой далеко не полон: в частности, даже не упомянут параметрический способ управления электронным потоком, используемый в лазерах на свободных электронах; не обсуждена идея использования эффекта сверхизлучения ансамбля классических электронов-осцилляторов для генерации сверхмощных импульсов СВЧ излучения.

«Коллекцию» примеров можно пополнять. Однако, перейдем к более подробному обсуждению некоторых «экземпляров коллекции».

## 1.2. ЛБВ-генераторы с обратной связью (шумотроны)

ЛБВ-генератор с внешней запаздывающей обратной связью (шумотрон) занимает важное место среди систем с хаотическим поведением. Интерес к изучению хаотической динамики ЛБВ-генератора с запазды-

вающей обратной связью обусловлен прежде всего тем, что в подобной системе наиболее просто реализуются режимы, в которых генератор ведет себя подобно динамической системе как с большим, так и с малым числом степеней свободы [27]. С одной стороны, рассматривая ЛБВ-генератор как наглядную и технически реализуемую модель сплошной среды, можно попытаться ответить на ряд вопросов, связанных с проблемой турбулентности, и провести некоторые аналогии с хаотической динамикой в гидродинамических течениях. С другой стороны, введение фильтра в цепь обратной связи генератора делает число степеней свободы конечным и зависящим от полосы пропускания, что позволяет исследовать режимы с различным известным числом возбуждаемых собственных мод. Последнее дает возможность изучить особенности процесса перехода к хаотической генерации и свойства хаотического сигнала в зависимости от числа степеней свободы рассматриваемой распределенной активной среды.

ЛБВ-генератор с внешней обратной связью по праву может считаться одним из самых «старых» автогенераторов шума. Стохастические автоколебания в детерминированной модели генератора на ЛБВ экспериментально наблюдались Котыревым и Плиссом еще в 1960 г. [28]. Уровень нерегулярных сигналов был настолько низок, что их изучению не было уделено должного внимания. Действующий генератор шума на ЛБВ с петлей обратной связи был впервые предложен в США, его мощность составляла 200 Вт в полосе частот порядка 2 ГГц [29]. Группа сотрудников ИРЭ АН СССР под руководством В. Я. Кислова независимо создала СВЧ-генератор шума на ЛБВ (шумотрон) и детально изучила его режимы при изменении параметров внешней обратной связи [3, 30].

Значение шумотрона как модели, на которой проверялись многие идеи теории детерминированного хаоса, трудно переоценить. Группа В. Я. Кислова экспериментально и теоретически исследовала генераторы, состоящие из ЛБВ с фильтром в цепи обратной связи и двух ЛБВ, последовательно замкнутых в кольцо. В экспериментах было показано, что при изменении глубины обратной связи  $\gamma = 10 \lg(P_{\text{вх}}/P_{\text{вых}})$  ( $P_{\text{вх}}$  и  $P_{\text{вых}}$  — соответственно мощности на входе и выходе ЛБВ или каскада ЛБВ) на плоскости параметров генератора существуют зоны регулярных и хаотических режимов. Хаотические автоколебания при этом возникают в результате непериодической автомодуляции амплитуд собственных мод кольцевой системы на падающем участке амплитудной характеристики [30].

Для анализа хаотических автоколебаний ЛБВ-генератора была предложена элементарная феноменологическая модель, включающая последовательно соединенные и замкнутые цепью обратной связи безынерционный усилитель с функцией преобразования сигнала  $F(x)$ , фильтр с линейным оператором  $\hat{F}$  и линию задержки с длительностью запаздывания  $T$  [31]. Последовательные преобразования сигнала в трех элементах схемы приводят к следующему интегральному урав-

нению генератора с запаздывающей обратной связью:

$$x(t) = \int_{-\infty}^t F(x(t-T))g(t-\tau) d\tau, \quad (1.3)$$

где  $g(t-\tau)$  — импульсная переходная функция фильтра. Для узкополосного фильтра уравнение (1.3) преобразуется к виду

$$\dot{x}(t) + \varepsilon x(t) = \varepsilon F(x(t-T)), \quad (1.4)$$

где  $\varepsilon$  — малый параметр, обратно пропорциональный добротности фильтра. Если колебания в генераторе устанавливаются быстро, то уравнение (1.4) можно свести к простому соотношению

$$x(t) = F(x(t-T)). \quad (1.5)$$

Функция  $F(x)$  в общем случае может содержать амплитудную или фазовую нелинейность (переменную задержку). Топологически, наиболее близка к амплитудной характеристике ЛБВ аппроксимация вида  $F(x) = \gamma_0 x e^{-x^2}$ . Но, вообще говоря, функция  $F(x)$  неявно определяется системой уравнений возбуждения волновода пучком и уравнений, описывавших процессы в электронном потоке под действием поля применительно к модели ЛБВ.

Уравнение (1.5), в свою очередь, может быть сведено к дискретно-разностному уравнению (отображению)

$$x_n = F(x_{n-1}), \quad (1.6)$$

где  $x_n$  — значение амплитуды сигнала в момент времени  $t_n = nT$  (подробнее см. [27]). Удачный подход к нахождению вида функции  $F(x)$ , основанный на построении функционального отображения для описания ЛБВ-генератора с запаздывающей обратной связью, был развит в работе Ю. П. Блюха с соавторами [32].

На основе уравнений (1.5) и (1.6) было проведено численное моделирование динамики генераторов на ЛБВ с внешней обратной связью [31], позволившее выявить ряд общих закономерностей перехода к хаосу в таких системах. Хаотические режимы в ЛБВ-генераторе наблюдались уже в случаях, когда в полосу пропускания фильтра  $\Delta f$  попадала всего одна собственная частота кольцевой системы. Области хаотических колебаний существовали в определенных интервалах изменения глубины обратной связи  $\gamma$ . С увеличением параметра  $\gamma$  наблюдалось постепенное усложнение генерируемого сигнала. Генерация хаотических сигналов имела место лишь при достаточно больших значениях  $T\Delta f$ , то есть в случаях, когда задержка или нелинейность в исследуемой системе были достаточно велики.

Развитие сложных режимов облегчалось при расширении полосы пропускания фильтра, то есть в многомодовом случае. Существенную роль тогда играла комбинационная неустойчивость, возникающая в результате взаимодействия и энергообмена между собственными модами кольцевой системы. Области хаотических колебаний при этом расширялись, появлялись новые области параметров, в которых наблюдались режимы хаотической генерации. Наиболее равномерный спектр генерируемого шумового сигнала получался при введении фазовой нелинейности, то есть переменной задержки [31]. Для большинства исследованных аппроксимаций функции  $F(x)$  с ростом управляющего параметра в ЛБВ-генераторе с внешней обратной связью наблюдался переход к хаосу через последовательность бифуркаций удвоения периода. Многие из полученных результатов были подтверждены при расчетах по измеренным амплитудным характеристикам ЛБВ и экспериментально.

Во всех перечисленных выше работах по изучению хаотических режимов в ЛБВ-генераторах использовались стационарные методы, не учитывающие динамику взаимодействия электронов с бегущей электромагнитной волной. Основным ограничением при этом является необходимость задания аналитического выражения амплитудной характеристики усилителя и передаточной функции полосового фильтра, что позволяет анализировать лишь узкополосные сигналы. Поэтому следующим шагом в теоретическом исследовании нерегулярных колебаний в электронно-волновых системах с бегущей электромагнитной волной стало создание нелинейной нестационарной теории ЛБВ, наиболее корректно описывающей взаимодействие электронного потока с полем сложного, в общем случае широкополосного, сигнала [33]. Такая электронная модель позволяет понять процессы развития и установления нерегулярных колебаний, переходов из одного режима в другой на уровне электронно-волнового взаимодействия, рассчитать энергетические характеристики этих процессов. Численное моделирование в рамках этой теории проводилось на основе совместного решения уравнений движения крупных частиц и уравнения для синхронного поля в замедляющей системе. Это дает возможность определить зависимость сгруппированного тока  $I$  и поля  $F$  от безразмерной длины системы  $L$ , параметра рассинхронизма  $b$  и безразмерного времени  $\tau$ .

Анализ непрерывных и импульсных режимов колебаний в рамках нестационарной нелинейной модели ЛБВ-генератора с внешней обратной связью дал следующие результаты [33, 34]. При отсутствии рассинхронизма ( $b = 0$ ) в системе устанавливаются колебания, близкие к монохроматическим (рис. 1.8, а). Рассинхронизм приводит к перераспределению энергии колебаний из низкочастотной области спектра мощности в высокочастотную, ширина спектра при этом резко увеличивается, колебания становятся нерегулярными (рис. 1.8, б). Сдвиг спектра объясняется тем, что для поддержания колебаний большой амплитуды в ЛБВ с малым усилением необходимы высокие значе-

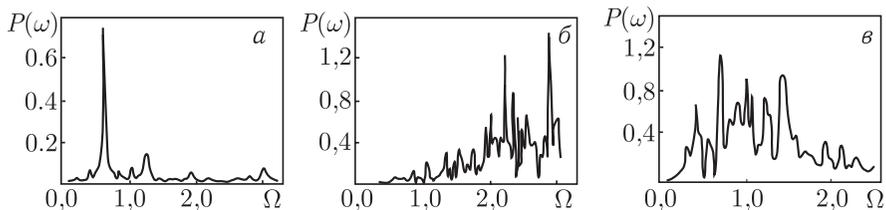


Рис. 1.8. Усложнение спектра генерации ЛБВ-генератора при изменении основных управляющих параметров (численное моделирование): а)  $L = 3,0$ ,  $C = 0,1$ ,  $b = 0$ ; б)  $L = 6,0$ ,  $C = 0,1$ ,  $b = 1,8$ ; в)  $L = 6,0$ ,  $C = 0,03$ ,  $b = 1,8$  ( $\Omega = \omega/\omega_0$ ;  $L = 2\pi CN$ , где  $\omega_0$  — частота максимального усиления ЛБВ,  $N$  — электрическая длина,  $C$  — параметр усиления Пирса)

ния параметра рассинхронизма, что возможно на высоких частотах за счет падения сопротивления связи (аналог крестатронного режима), расширение спектра при больших величинах  $b$  связано с более пологой зависимостью спектральных амплитуд от безразмерной длины  $L$  и, следовательно, от частоты. С ростом усиления в системе генерируются колебания все более сложного вида, спектр генерации становится сплошным и менее изрезанным (рис. 1.8, в).

К возникновению хаотической динамики выходного излучения и закономерному усложнению сложных колебаний ЛБВ-генератора приводит увеличение времени прохождения сигнала по цепи обратной связи, рост тока электронного пучка и геометрической длины лампы. Интересным результатом является переход к хаосу при уменьшении параметра усиления Пирса  $C$  для фиксированной безразмерной длины  $L$ . Это определяется тем, что при постоянном параметре  $L$  с уменьшением параметра усиления геометрическая длина  $l$  пространства взаимодействия должна быть больше.

Ввиду сложности строгого теоретического исследования нелинейных хаотических автоколебаний в генераторах на ЛБВ весьма важными представляются экспериментальные исследования. Техника их к настоящему времени хорошо разработана и сравнительно проста, а результаты представляются достоверными и точными. Экспериментальные исследования хаотизации колебаний показали многообразие переходов к хаосу в ЛБВ-генераторе и позволили подробно исследовать возникающую иерархию хаотических режимов.

Экспериментальное изучение путей перехода к одномодовому и многомодовому режимам хаотических автоколебаний проводилось на модели генератора, представляющего собой замкнутую в кольцо цепочку из ЛБВ, резонансного фильтра и линии задержки [35, 36]. Управляющим параметром являлась глубина обратной связи, а начальные условия формировались изменением частоты  $f_p$  первоначально возбуждаемой моды и расстройки центральной частоты резонансного фильтра от  $f_p$ . Было обнаружено, что в зависимости от значений управляющих параметров такая система может демонстрировать различные сценарии перехода к хаосу. Кратко опишем их.

*Последовательность бифуркаций удвоения периода.* С ростом глубины обратной связи  $\gamma$  уверенно наблюдались три бифуркации удвоения периода исходного цикла периодических колебаний, а далее возникал хаотический режим, характеризующийся странным аттрактором, который представляет широкую ленту в фазовом пространстве.

*Бифуркации квазипериодических движений. «Жесткое» возникновение хаотической генерации. Перемежаемость.* В некоторых областях параметров режим периодической автомодуляции сменялся квазипериодическими колебаниями амплитуды выходного сигнала, имеющими вид биений двух регулярных мод с несоизмеримыми частотами  $f_1$  и  $f_2$ . В фазовом пространстве колебаний амплитуды поля в этом случае существует двумерный тор. В зависимости от управляющих параметров и способа начального возбуждения генератора переход от двухчастотных квазипериодических колебаний к хаотическим автоколебаниям происходил либо жестким образом, либо через перемежаемость. В первом случае в фазовом пространстве появлялся трехмерный тор, жесткое разрушение которого приводило к рождению странного аттрактора — реализовывался механизм Рюэля–Такенса. Во втором случае хаотизация режима квазипериодических колебаний возникала либо жестко, либо через перемежаемость.

*Переходы к хаосу через перемежаемость.* В натурном эксперименте в работе [36] наблюдались переходы к хаосу через перемежаемость режимов стационарной генерации и периодической автомодуляции. В этом случае в системе наблюдались режимы, близкие к стационарной генерации или периодической автомодуляции выходного сигнала, которые прерывались всплесками хаотической генерации. С ростом тока электронного потока длительность регулярных фаз уменьшается, так что хаотические фазы возникали чаще, а регулярный режим постепенно исчезал, и в системе устанавливались хаотические колебания. В зависимости от выбора управляющих параметров в эксперименте были зафиксированы переходы к хаосу через перемежаемость от режимов стационарной генерации (рис. 1.9, а) и периодической автомодуляции (рис. 1.9, б). Более того, в узкой области управляющих параметров наблюдалась перемежаемость «хаос — хаос» между двумя режимами хаотических колебаний, рожденными в результате потери устойчивости циклами различного периода (рис. 1.9, в).

Аналогичные результаты получены при теоретическом анализе ЛБВ с запаздывающей обратной связью методом функционального отображения в работе [32]. На рис. 1.10 показаны примеры временных реализаций сигнала генератора с запаздывающей обратной связью при увеличении тока пучка. Хорошо видно, что выходной сигнал демонстрирует перемежающееся поведение системы, когда участки с плавноменяющейся регулярной автомодуляцией сменяются участками с нерегулярным поведением, длительность которых возрастает с увеличением тока пучка.

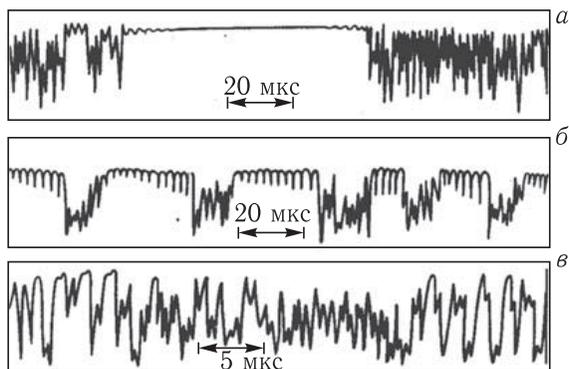


Рис. 1.9. Осциллограммы огибающей выходного сигнала ЛБВ с запаздывающей обратной связью, иллюстрирующие переход к хаосу через перемежаемость от режима стационарной генерации (а) и периодической автомодуляции (б). На (в) показаны характеристики колебаний в системе в режиме перемежаемости «хаос — хаос» (из работы [36])

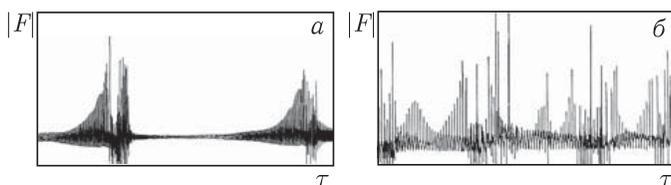


Рис. 1.10. Примеры временных реализаций выходного сигнала  $|F|$  ЛБВ-генератора с запаздывающей обратной связью при увеличении тока пучка (а, б), полученные в результате численного моделирования (из работы [32])

Было показано, что в случае перемежающегося поведения хаотическая генерация возникает по частотному механизму, т. е. обусловлена частотными свойствами системы и вследствие этого взаимодействием нескольких мод кольцевой системы. Об этом свидетельствует спектр сигнала, в котором наблюдались спутники, отстоящие друг от друга на расстоянии порядка  $2\pi/\tau$ , где  $\tau$  — время прохождения сигнала по системе.

Дальнейшее увеличение глубины связи  $\gamma$  в случае отсутствия узкополосного фильтра в цепи обратной связи приводило к переходу к многомодовому хаосу для 3–15 собственных мод при фиксированных значениях тока и ускоряющего напряжения. С ростом  $\gamma$  режим одномодовой генерации сменялся многомодовым режимом. Частотный интервал между частотами  $f_i$  мод был порядка  $\Omega = 1/\tau$ . Дальнейшее увеличение параметра  $\gamma$  приводило к синхронизации мод и установлению единого периодического процесса периода  $\tau$ . Затем наблюдались две бифуркации удвоения периода, в спектре при этом появлялись компоненты  $f_i + \Omega/2$  и  $f_i + \Omega/4$ , где  $f_i$  — частоты собственных мод. Детальный анализ эволюции спектра не выявил дальнейших удвоений

периода колебаний, рост параметра  $\gamma$  приводил лишь к зашумлению спектра.

На сегодняшний день ЛБВ-генератор с внешней обратной связью, наряду с генератором обратной волны О-типа, является самым исследованным СВЧ-генератором шума. На плоскостях параметров различных его модификаций найдены области регулярных и хаотических режимов, подробно исследованы сценарии перехода к хаосу для одномодовых и отчасти для многомодовых режимов, изучена динамика ЛБВ-генератора с плазменным заполнением и выявлены особенности нелинейной динамики в этом случае [37]. Однако до сих пор остается невыясненным ряд важных вопросов. Так, например, много неясного в осмыслении физических основ хаотической генерации в распределенной активной среде с глобальной неустойчивостью «электронный поток — бегущая электромагнитная волна» с внешней обратной связью. Непонятно до конца, как влияет распределенность рассматриваемой системы на механизмы перехода к хаосу, особенности сценариев перехода к хаосу, в случае когда существенными оказываются несколько мод.

### **1.3. Хаотические колебания в системах «электронный поток — встречная (обратная) электромагнитная волна»**

В нелинейной динамике в качестве примера неравновесной среды очень часто приводят электронные системы типа «взаимодействующие электронный поток — электромагнитная волна». В таких системах неустойчивость может быть связана с существованием волн с отрицательной энергией, то есть волн, с ростом амплитуды которых общая энергия системы «среда — волна» уменьшается. Наиболее известные примеры таких волн — медленная волна пространственного заряда (что реализуется, например, в ЛОВО) и медленная циклотронная волна (последняя имеет место в гиrolампе со встречной волной, которую мы будем рассматривать в этом разделе). Хорошо известно [38], что взаимодействие волн с отрицательной энергией с волнами с положительной энергией и с поглощающей средой приводят к неустойчивости: отдавая энергию, такая волна нарастает по амплитуде. Физические механизмы, обуславливающие неустойчивость в электронных системах, связаны с черенковской или циклотронной неустойчивостями, а также с аномальным эффектом Доплера.

Для возникновения автоколебаний неустойчивость должна быть либо абсолютной, либо глобальной. Обе неустойчивости имеют место при наличии обратной связи. Если система не кольцевая, как это имеет место в уже рассмотренном выше шумотроне, то обратная связь реализуется при взаимодействии электронного потока с обратной электромагнитной волной (с противоположно направленными фазовой и групповой скоростями — лампа обратной волны) или со встречной

волной. Причем встречные волны могут возникать как при отражении от стенок (есть резонатор), так и из-за специфики процессов взаимодействия.

Все вышеназванные системы имеют много общего между собой в плане их описания. Последнее проявляется в том, что для анализа процессов в системах «электронный поток — встречная электромагнитная волна» возможно использовать сходные математические модели, которые основаны на самосогласованных уравнениях, включающих в себя линейные уравнения возбуждения электромагнитного поля в волноведущей системе током электронного пучка и нелинейные, в общем случае, уравнения, описывающие процессы в электронном пучке под действием поля.

Примечательным является то, что при определенных условиях уравнение ВЧ электромагнитной волны остается одним и тем же для разных автоколебательных систем; различаются лишь уравнения активной неравновесной среды — электронного потока. Благодаря этому можно провести сравнительный анализ систем «электронный поток — встречная (обратная) волна» с различными механизмами взаимодействия электронного потока с электромагнитным полем с достаточно общих колебательно-волновых позиций. Такой подход был развит в обзоре [22], а также был изложен в монографиях [14, 39]. Здесь мы не будем останавливаться подробно на построении общей нестационарной теории таких систем, отсылая к работам [14, 22, 40], а более подробно обсудим вопросы нелинейной динамики двух электронно-волновых систем со встречными (обратными) волнами — ЛОВ О-типа (ЛОВО) и гиролампы со встречной волной (гирос-ЛВВ).

**1.3.1. Лампа обратной волны — эталонная модель распределенной автоколебательной системы.** В лампе обратной волны (ЛОВ) электронный пучок взаимодействует с волной в специальной электродинамической структуре (замедляющей системе), причем фазовая скорость  $v_\phi$  волны близка к скорости  $v_0$  электронов, а групповая скорость  $v_{гр}$  направлена навстречу пучку (рис. 1.11). Благодаря первому условию, электроны подвергаются эффективному накапливающемуся действию поля волны. По мере движения пучка вдоль системы в нем образуются сгустки и возникает высокочастотная составляющая тока. Благодаря тому, что распространение испущенного сгустками излучения (в смысле направления потока энергии) происходит навстречу пучку, обеспечивается наличие в системе внутренней обратной связи и возможность автоколебаний. В этом отличие ЛОВ от лампы бегущей волны (ЛБВ), в которой перенос энергии волной осуществляется в направлении движения пучка и которая используется как усилитель.

Вопросы нелинейной динамики распределенной активной среды «электронный поток — обратная электромагнитная волна», видимо, являются наиболее хорошо изученными в электронике сверхвысоких частот. Достаточно упомянуть основополагающие пионерские рабо-

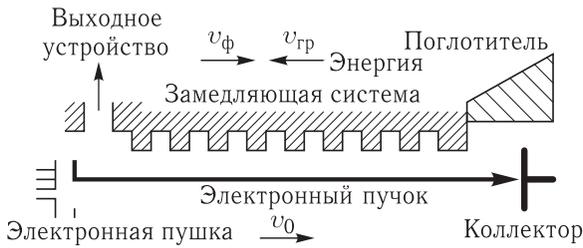


Рис. 1.11. Схематическое изображение ЛОВО-генератора

ты [11, 13], монографию [14] и обзорные статьи [17, 22]. Также в книге [6] вопросам нелинейной динамики ЛОВ была посвящена отдельная лекция. Поэтому здесь не будем останавливаться подробно на этом вопросе. Скажем только, что как численно на основе нелинейной нестационарной теории, так и экспериментально с помощью специально сконструированных макетов ЛОВ, в которых уменьшена роль пространственного заряда и увеличена длина пространства взаимодействия, был обнаружен переход к хаосу через постепенное усложнение формы автомодуляции выходного излучения. При этом с ростом бифуркационных параметров (тока пучка или длины системы) наблюдалось несколько характерных переходов «порядок — хаос» и «хаос — порядок», заканчивающихся установлением развитых хаотических колебаний. Детальное исследование бифуркационных переходов в простейшей однопараметрической модели ЛОВО было проведено в работе [15].

Среди последних важных результатов исследования нелинейной динамики ЛОВ следует упомянуть проведенный в работе [16] детальный анализ статистических и динамических характеристик хаотических колебаний в ЛОВО. В частности, было обнаружено, что «слабый» хаос в ЛОВ, который возникает при малых длинах пространства взаимодействия, характеризуется единственным положительным ляпуновским показателем. В случае развитого хаоса, который имеет место в «длинной» системе (либо в системе с большим превышением тока пучка над стартовым значением), положительных ляпуновских показателей два, т. е. развитый хаос в ЛОВ является режимом гиперхаоса. О значительных перестройках хаотической динамики по мере увеличения длины системы (тока пучка) также свидетельствует и функция распределения амплитуды выходного сигнала ЛОВ  $f(|F(t, x = 0)|)$  (рис. 1.12). Для слабого хаоса эта функция имеет характерный вид с рядом пиков, которые связаны с наиболее вероятными значениями минимумов и максимумов амплитуды выходного сигнала, реализующихся с определенной степенью регулярности. В режиме развитого хаоса функция распределения имеет сглаженный вид с одним выраженным максимумом, форма которого близка к рэлеевской (показана пунктиром на рис. 1.12, б), которая соответствует форме распределения комплексного случайного процесса, мнимая и действительная части которого представляют собой случайные процессы с гауссовым распределением.

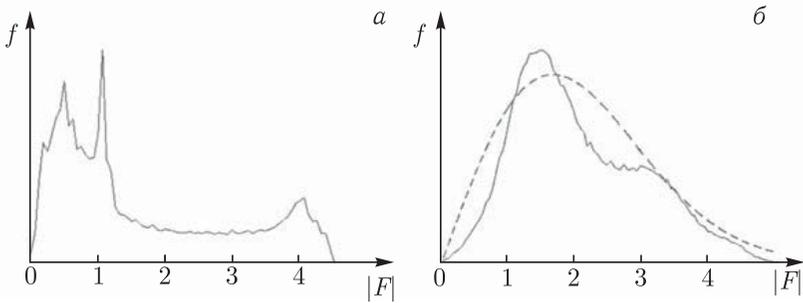


Рис. 1.12. Функция распределения величин безразмерной амплитуды выходного сигнала ЛОВО в режиме слабого и развитого хаоса, построенная в результате численного моделирования. Штриховой линией показана функция распределения Рэлея, отвечающая случайному сигналу, у которого действительная и мнимая части комплексной амплитуды характеризуются гауссовым распределением (из работы [16])

Следует также отметить, что в последнее время был проведен ряд теоретических и экспериментальных работ по изучению классической и хаотической синхронизации в приборах со встречной (обратной) волной [41–45], в том числе и ЛОВ типа О [46, 47]. Некоторые вопросы исследования синхронизации в электронно-волновых системах со встречной волной будут затронуты в главах 6 и 7 монографии.

**1.3.2. Нелинейная динамика винтового электронного потока, взаимодействующего со встречной электромагнитной волной.** Практически каждому прибору О-типа соответствует его аналог среди мазеров на циклотронном резонансе [39]. Среди последних особый интерес вызывают гиролампы бегущей волны и гиролампы встречной волны, в которых реализуется взаимодействие винтовых электронных потоков с бегущими волнами волноводов в режимах усиления сигнала или генерации с перестраиваемой частотой излучения. В данном параграфе мы остановимся достаточно подробно на нелинейной динамике гирогенератора со встречной волной (гиرو-ЛВВ).

Следует отметить, что при выполнении условия синхронизма между электромагнитной и циклотронной волнами

$$\omega - \beta_0 v_{\parallel} \approx \omega_c, \tag{1.7}$$

имеет место эффективное взаимодействие винтового пучка с волнами волноведущей электродинамической структуры. Здесь  $\beta_0$  — постоянная распространения волны;  $v_{\parallel}$  — продольная (вдоль направления магнитного поля  $\mathbf{B}_0$ ) скорость движения электронов;  $\omega_c$  — циклотронная частота. Если пучок взаимодействует с одной ТЕ модой регулярного волновода, а вектор  $\mathbf{B}_0$  направлен вдоль оси волновода, то

$$\beta_0 = \pm \frac{\omega_{кр}}{c} \sqrt{\left(\frac{\omega}{\omega_{кр}}\right)^2 - 1}, \tag{1.8}$$

где  $\omega_{кр}$  — критическая частота данной моды. При данных  $\omega_c$ ,  $\omega_{кр}$  и  $v_{\parallel}$  дисперсионные соотношения (1.7) и (1.8) определяют в общем случае два значения частоты, вблизи которых реализуется эффективное взаимодействие пучка и поля. Наиболее интересным для нас является случай, когда дисперсионная характеристика пучка пересекает обе ветви дисперсионной характеристики волноводной моды (рис. 1.13), одна из которых соответствует прямой волне ( $\beta_0 > 0$ ), а другая — встречной ( $\beta_0 < 0$ ). С учетом знаков потоков мощности ясно, что в первом случае возможно усиление сигнала с частотой, близкой к  $\omega_1$  ( $v_{гр}(\omega_1) = \left. \frac{d\omega}{d\beta} \right|_{\omega=\omega_1} > 0$ ), и генерация колебаний на частоте  $\omega_2$  ( $v_{гр}(\omega_2) < 0$ ).

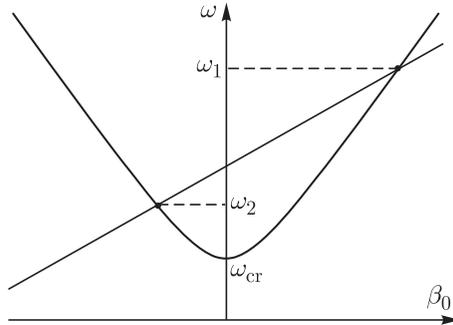


Рис. 1.13. Дисперсионные характеристики винтового электронного пучка и волноводной моды для случая генерации колебаний (частота  $\omega_2$ )

Нелинейная нестационарная теория гирогенератора со встречной волной описывается системой уравнений в частных производных, полученных методом усреднений на основе простой, не учитывающей влияние пространственного заряда, модели винтового электронного пучка, взаимодействующего со встречной электромагнитной волной (см. [39])

$$\frac{d\theta}{d\xi} - j\mu(1 - |\theta|^2)\theta = F, \quad (1.9)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \tau} - \frac{\partial F}{\partial \xi} = -I, \quad I = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \theta d\varphi_0, \quad (1.10)$$

$$\theta(0) = \exp(j\varphi_0), \quad \varphi_0 \in [0, 2\pi], \quad (1.11)$$

где  $\theta$  — комплексный радиус траекторий электронов винтового пучка;  $\mu = v_{\parallel}/(2\varepsilon c)$  — параметр неизохронности, характеризующий меру инерционности системы;  $\tau$  и  $\xi$  — безразмерные время и продольная координата;  $\varepsilon$  — параметр взаимодействия, который для гиро-ЛВВ

имеет вид

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{I_0 K}{4V_0} \left(1 + \frac{v_{\perp 0}^2}{v_{\parallel}^2}\right)} \ll 1. \quad (1.12)$$

Здесь  $K$  — коэффициент взаимодействия электронного пучка со встречной электромагнитной волной;  $v_{\perp 0}$  — начальная поперечная скорость электронов;  $I_0$  и  $V_0$  — постоянные составляющие тока и ускоряющего напряжения электронного пучка.

Следует отметить, что к. п. д. гирогенератора со встречной волной в режимах стационарной генерации имеет сравнительно небольшие значения  $\eta_{\perp \max} \approx 0,2$ . Причина этого в инерционном характере фазовой группировки: промодулированный по поперечной скорости на входе в пространство взаимодействия сильным полем выходного сигнала винтовой электронный пучок быстро группируется. Электроны-осцилляторы образуют фазовый сгусток, который затем также быстро разгруппировывается, и электроны не успевают отдать полю значительную часть своей поперечной энергии. Напомним, что основные преимущества гиро-ЛВВ в возможности перестройки частоты генерации при изменении величины магнитного поля или ускоряющего напряжения.

В работах [22, 48, 49] было показано, что при взаимодействии винтового пучка со встречной электромагнитной волной с ростом длины системы  $A$  и параметра неизохронности  $\mu$  наблюдается генерация как монохроматических, так и сложных хаотических сигналов с узкополосным спектром. Последнее вполне закономерно, учитывая что механизм взаимодействия электронной и электромагнитных волн в гиро-ЛВВ инерционный и с точки зрения нелинейной динамики имеет ряд схожих черт с аналогичным механизмом ЛОВ типа О. При больших величинах параметра  $\mu$  все результаты, полученные при анализе нестационарных процессов в ЛОВО, качественно справедливы для гиро-ЛВВ, причем совпадение тем точнее, чем больше параметр неизохронности [22]. При малых значениях  $\mu$  в системе превалирует не инерционный механизм ограничения амплитуды колебаний из-за перегруппировки электронов, а другой механизм, связанный с фазовой нелинейностью электронов-осцилляторов винтового пучка. Он заключается в том, что сформировавшийся в пучке фазовый сгусток с небольшим разбросом энергий при малом  $\mu$  на некотором участке пространства взаимодействия может вести себя подобно одному «большому» электрону-осциллятору. В этом случае ограничение амплитуды колебаний определяется главным образом нарушением фазы между электронной волной, образованной такими сгустками, и электромагнитной волной, а не «разрушением» (разгруппировкой) электронных сгустков, как в ЛОВО.

На рис. 1.14, *a* представлена карта режимов колебаний гиро-ЛВВ на плоскости управляющих параметров «длина пространства взаимодействия  $A$  — параметр неизохронности электронов-осцилляторов  $\mu$ ». Кривая 1 соответствует бифуркационной линии возникновения стационарного (одночастотного) режима генерации на частоте  $\omega_0$ . Кривая 2 —

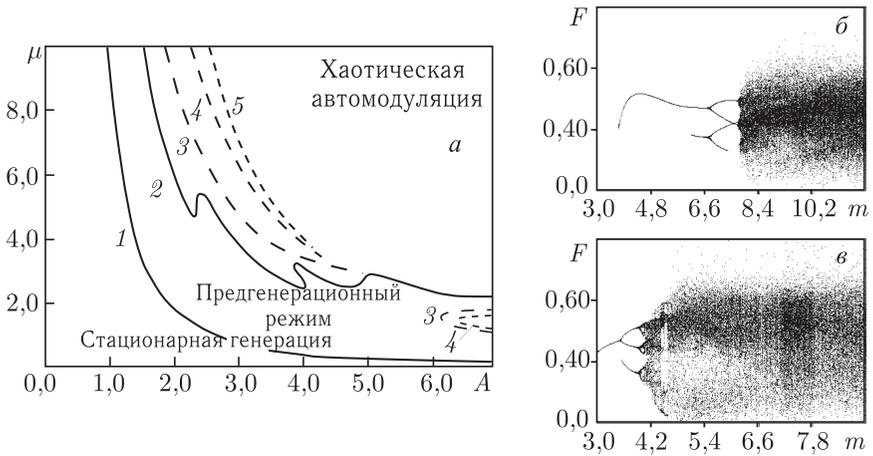


Рис. 1.14. а) Области реализации различных состояний giro-ЛВВ на плоскости параметров  $(\mu, A)$ ; б, в) бифуркационные диаграммы колебаний поля на выходе лампы  $\xi = 0$  соответственно при  $A = 3,0$  и  $A = 4,0$  (из работ [22, 50])

линия потери устойчивости одночастотного режима. При переходе через нее амплитуда выходного сигнала  $|F(\xi = 0, \tau)|$  начинает зависеть от времени — возникает режим автомодуляции. Вблизи линии 2 имеет место одночастотная автомодуляция. В этом случае в спектре выходного сигнала содержатся базовая высокочастотная спектральная составляющая  $\omega_0$  и частоты  $\omega_0 \pm 2\pi f_A$ ,  $f_A$  — частота автомодуляции. На линии 3 происходит усложнение выходного сигнала: имеет место удвоение периода автомодуляции. Кривая 4 соответствует возникновению сложнопериодической модуляции выходного сигнала. Кривая 5 — линия перехода к режимам хаотической автомодуляции, когда зависимость  $|F(\xi = 0, \tau)|$  ведет себя существенно нерегулярно, а спектр генерации становится сплошным, хотя и остается достаточно узкополосным. Переходы между колебательными режимами иллюстрируются рис. 1.14, б, в, на которых представлены бифуркационные диаграммы колебаний медленно меняющейся амплитуды выходного поля  $|F(\xi = 0, \tau)|$  с изменением параметра неизохронности  $\mu$  при двух значениях безразмерной длины системы. С увеличением неизохронности электронов-осцилляторов в системе наблюдается возбуждение автоколебаний с постоянной амплитудой (режим стационарной генерации). При некотором  $\mu = \mu_{кр}$  возникает периодическая автомодуляция. Максимумы поля на бифуркационных диаграммах откладываются, начиная с этого значения параметра неизохронности  $\mu_{кр}$ . С дальнейшим ростом параметра неизохронности имеет место удвоение периода автомодуляции, и далее генератор переходит в режим хаотической автомодуляции выходного сигнала.

Характерными особенностями пространственно-временной динамики giro-ЛВВ являются, во-первых, возникновение устойчивых одноча-

стотных режимов колебаний с «многогорбыми» распределениями амплитуды электромагнитного поля вдоль координаты пространства взаимодействия (в численном моделировании были зафиксированы двух- и трехгорбые распределения) и, во-вторых, бифуркационная линия потери устойчивости одночастотного режима генерации (линия 2 на рис. 1.14, а) оказывается сложно устроенной, поскольку переход в режим периодической автомодуляции может происходить из режимов с различными пространственными распределениями поля.

В работах [51–53] была предложена разновидность giro-ЛВВ со связанными волноведущими системами (СВС). Уравнения, описывающие данную систему, были получены применительно к giro-ЛВВ СВС в работе [51], и в форме связанных волн имеют вид:

$$\frac{\partial F_S}{\partial \tau} - \frac{\partial F_S}{\partial \xi} = -I_1 \exp [j\hat{\alpha}\xi], \quad (1.13)$$

$$\frac{\partial F_F}{\partial \tau} - \frac{\partial F_F}{\partial \xi} = -I_1 \exp [-j\hat{\alpha}\xi], \quad (1.14)$$

$$\frac{d\theta}{d\xi} - j\mu(1 - |\theta|^2)\theta = \frac{1}{2}(F_S \exp [-j\hat{\alpha}\xi] - F_F \exp [j\hat{\alpha}\xi]), \quad (1.15)$$

где  $F_S = F_1 + F_2$  — амплитуда «медленной» нормальной волны (ее постоянная распространения  $\beta_S = \beta_0 + \hat{\alpha}$ ;  $\beta_0$  — постоянная распространения встречной волны на частоте «холодного» синхронизма) и  $F_F = F_2 - F_1$  — амплитуда «быстрой» ( $\beta_F = \beta_0 - \hat{\alpha}$ ) нормальной волны связанной системы;  $F_{1,2}$  — медленно меняющиеся комплексные безразмерные амплитуды полей соответственно в первой и второй электродинамической структуре;  $\xi$  и  $\tau$  — безразмерные продольная координата и время;  $\hat{\alpha}$  — параметр связи. Амплитуда ВЧ тока пучка  $I_1$ , пропускаемого через одну из электродинамических структур, опре-

деляется как  $I_1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \theta d\varphi_0$ , где  $\theta = r \exp (j\varphi)$  — комплексный радиус траекторий электронов винтового пучка.

Управляющими параметрами модели являются безразмерная длина системы  $A$ , параметр неизохронности  $\mu$  и коэффициент связи  $\hat{\alpha}$ . Если рассматривается система с постоянным током пучка  $I_0$ , то при постоянном  $\mu$  изменение  $A$  соответствует изменению геометрической длины системы  $l$ . При неизменной длине  $l$  при изменении  $A$  за счет изменения тока  $I_0$  постоянное значение сохраняет параметр  $\mu A$ .

Важность рассмотрения задачи о giro-ЛВВ СВС связана с необходимостью повышения к. п. д. и выходной мощности (которая определяется увеличением тока пучка) с сохранением одночастотной генерации. Для достижения этого необходимо так изменить распределение поля вдоль длины системы, чтобы вблизи выхода лампы поле было мало, а в области коллектора оно имело один максимум, где сформировавшийся фазовый сгусток электронов отдавал бы полю значительную

долю своей энергии. Одним из путей решения данной проблемы может быть использование распределенного отбора мощности путем применения идентичных СВС, через одну из которых проходит винтовой электронный пучок.

Возможность повышения порога автомодуляции путем использования СВС иллюстрирует рис. 1.15, на котором представлены зависимости величины параметра неизохронности  $\mu_{\text{aut}}$ , при которой наблюдается возникновение автомодуляции выходного сигнала gyro-ЛВВ СВС, от коэффициента связи  $\alpha$  для различных длин пространства взаимодействия  $A$ . Из него следует, что значения  $\mu_{\text{aut}}$  значительно увеличиваются при введении связи между волноведущими системами. Максимальное увеличение наблюдается при  $\alpha \approx 1,0$ , которое по абсолютной величине тем больше, чем меньше длина пространства взаимодействия  $A$ .

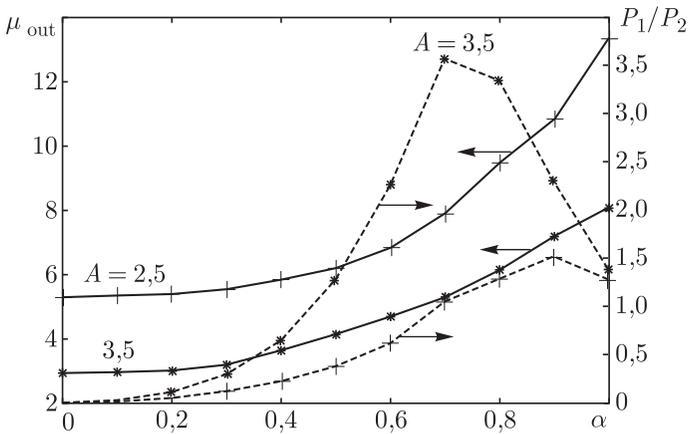


Рис. 1.15. Зависимость величины параметра неизохронности  $\mu_{\text{aut}}$ , при котором наблюдается возникновение автомодуляции (сплошная линия), и зависимости отношения потоков мощности  $P_1/P_2$  на выходе системы вблизи границы автомодуляции  $\mu_{\text{aut}}(\hat{\alpha})$  (штриховая линия) от коэффициента связи  $\hat{\alpha}$  для различных значений параметра  $A$  (из работы [52])

Такое поведение границы автомодуляции в gyro-ЛВВ СВС определяется тем, что при введении связи между двумя электродинамическими системами дополнительная обратная связь, с которой связано возникновение автомодуляционных режимов в СВЧ приборах с длительным взаимодействием, подавляется, так как теперь часть мощности встречной волны с групповой скоростью  $v_g$ , обеспечивающей обратную связь, «уходит» в систему без винтового пучка. В результате граница области автомодуляции сдвигается в область больших значений параметра неизохронности  $\mu$  (больших токов пучка).

Для понимания процесса перекачки ВЧ мощности между волноведущими системами на рис. 1.15 представлены зависимости отношений

$P_2/P_1$  величин потоков мощности в волноведущих системах без пучка и с пучком от коэффициента связи  $\hat{\alpha}$ . Видно, что с ростом коэффициента связи в диапазоне  $\hat{\alpha} \in (0, 0, 0, 7)$  имеет место быстрый рост мощности, «перекачиваемой» из первой во вторую систему, так что  $\sqrt{P_2/P_1} \sim \exp[\gamma\hat{\alpha}]$ . При больших коэффициентах связи  $\hat{\alpha} > 0,7$  имеет место насыщение роста потока мощности  $P_2$ . Однако рост величины  $\mu_{\text{aut}}(\hat{\alpha})$  продолжается, что связано с особенностями распределений полей  $F_{1,2}$  в связанных волноведущих структурах при больших коэффициентах связи. При больших коэффициентах связи  $\hat{\alpha}$  существенная часть мощности встречной волны в системе с пучком начинает ответвляться в связанную с ней волноведущую структуру уже вблизи входа лампы, что также способствует разрыву дополнительной обратной связи, приводящей к автомодуляции.

Рассмотрим теперь возникающие режимы генерации giro-ЛВВ СВС с изменением управляющих параметров  $\mu$  и  $A$  при фиксированной связи между волноведущими системами  $\hat{\alpha} = 0,6$ , соответствующей максимальному к. п. д. генерации в giro-ЛВВ СВС.

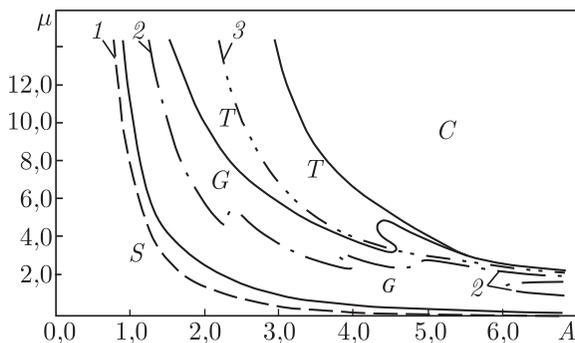


Рис. 1.16. Карта характерных режимов генерации giro-ЛВВ СВС на плоскости управляющих параметров ( $A, \mu$ ), построенная при коэффициенте связи  $\hat{\alpha} = 0,6$ . Область  $S$  — область отсутствия колебаний,  $G$  — одночастотной,  $T$  — периодической и  $C$  — хаотической автомодуляции; штриховыми и штрихпунктирными линиями отмечены соответствующие бифуркационные линии для giro-ЛВВ без СВС ( $\hat{\alpha} = 0$ ) (из работы [51])

На рис. 1.16 представлено разбиение плоскости параметров «безразмерная длина системы  $A$  — параметр неизохронности  $\mu$ » на характерные режимы пространственно-временных колебаний в giro-ЛВВ СВС. На рисунке выделены области отсутствия колебаний (область  $S$ ), одночастотной генерации ( $G$ ), периодической ( $T$ ) и хаотической ( $C$ ) автомодуляции выходного сигнала. Одновременно на карте режимов нанесены линии возникновения стационарной генерации (штриховая линия 1), перехода к периодической (линия 2) и хаотической (линия 3) автомодуляции выходного сигнала в giro-ЛВВ без связанных волноведущих систем ( $\hat{\alpha} = 0$ ).

Из анализа карты режимов (см. рис. 1.16) можно сделать следующие выводы.

*Во-первых*, как обсуждалось выше, область стационарной генерации giro-ЛВВ СВС расширяется по сравнению со случаем  $\hat{\alpha} = 0$ .

*Во-вторых*, граница области автомодуляции имеет сложную изрезанную форму. Последнее связано с тем, что для giro-ЛВВ СВС (как и для giro-ЛВВ без СВС [48] или релятивистской ЛОВ типа О [54]) характерны устойчивые «многогорбые» распределения амплитуды электромагнитного поля. Последнее связано с конкуренцией двух механизмов нелинейности в исследуемой системе — фазового и инерционного. Первый определяется фазовой нелинейностью электронов-осцилляторов винтового пучка и приводит к нарушению фазовых соотношений между электронной и электромагнитной волнами. Второй механизм связан с инерционностью взаимодействия электронной и электромагнитной волн и сводится к разрушению фазовых сгустков и перегруппировке электронов-осцилляторов. Возникновение сложной формы границы области автомодуляции обусловлено возможностью перехода в режим периодической автомодуляции из режимов стационарной генерации с различными пространственными распределениями.

*В-третьих*, граница области хаотической автомодуляции выходного сигнала giro-ЛВВ СВС при малых длинах пространства взаимодействия, как и линия потери устойчивости режима стационарной генерации, отодвигается в сторону больших значений параметра  $\mu$  (ср. расположение штриховой линии  $\mathcal{Z}$ , соответствующей giro-ЛВВ без СВС, с границей области  $\mathcal{C}$  хаотической автомодуляции giro-ЛВВ СВС на карте режимов, рис. 1.16).

В giro-ЛВВ со связанными волноведущими системами изменяется характер перехода к хаотической генерации по сравнению с giro-ЛВВ без распределенного отбора мощности. Для giro-ЛВВ характерен переход к хаотической динамике через постепенное усложнение формы периодической автомодуляции (например, при увеличении параметра  $A$  возникновению хаоса предшествует одно-два удвоения периода автомодуляции). Ситуация меняется при введении связи  $\hat{\alpha} > 0,3-0,4$ . Численное моделирование показало, что для giro-ЛВВ СВС, в отличие от giro-ЛВВ или ЛОВ типа О, не характерны сложнопериодические режимы автомодуляции. В анализируемом диапазоне изменения управляющих параметров наблюдались два основных типа перехода от режимов регулярной динамики к хаотической генерации.

При больших значениях параметра неизохронности  $\mu$  и малых длинах системы  $A$  имеет место переход к хаотической автомодуляции через перемежаемость. Амплитуда выходного сигнала  $|F_{1,2}(\tau)|$  в этом случае ведет себя во времени так, что стадии почти периодических колебаний (близких к колебаниям в области периодической автомодуляции) сменяются стадиями коротких хаотических всплесков, которые

резко отличаются по амплитуде и частоте от стадии регулярной динамики.

При больших  $A$  и малых  $\mu$  имеет место переход к хаотической генерации через постепенное усложнение динамики выходного поля с ростом надкритичности ( $\mu - \mu_{\text{aut}}$ ).

При значениях параметра  $A > 5-6$  переход к хаосу в гиро-ЛВВ СВС происходит сразу от режима стационарной генерации, минуя режим периодической автомодуляции.

## 1.4. Диод Пирса: от регулярных автоколебаний к хаосу

**1.4.1. Диод Пирса и неустойчивость Пирса.** Наиболее простой электронной моделью со сложной динамикой является диод Пирса [55–59]. В простейшей модели диода одномерный моноскоростной электронный поток с постоянной плотностью пространственного заряда, нейтрализованного неподвижным ионным фоном, движется между заземленными сетками (см. рис. 1.17, *a*). Единственным бифуркационным параметром задачи является параметр Пирса  $\alpha = \omega_p L / v_0$  — невозмущенный угол пролета электронов по плазменной частоте  $\omega_p$  ( $v_0$  — скорость электронов на входе в межсеточном пространстве,  $L$  — расстояние между сетками).

Неустойчивость в диоде Пирса возникает при  $\alpha > \pi$  и определяется существованием внешней обратной связи через цепь, соединяющую сетки, поскольку они заземлены [6, 55].

На рис. 1.17, *b* представлена зависимость величины минимума потенциала в диодном промежутке от тока  $I$  инжектируемого в него пучка со скоростью  $v_0$ . Из рисунка видно, что с увеличением тока  $I$  глубина «провисания» потенциала  $\phi_{\min}$  в пучке становится все больше, и при некотором критическом значении тока  $I_{\text{SCL}}$  величина  $\phi_{\min}$  переходит скачком с устойчивой ветви, соответствующей полному стационарному прохождению потока через диодный промежуток, на ветвь, которая соответствует колеблющемуся виртуальному катоду (ВК).

При токах пучка больше критической величины  $I_{\text{SCL}}$  высота потенциального барьера в диодном промежутке (ВК) становится больше кинетической энергии влетающих в пространство взаимодействия электронов. В этом случае электроны останавливаются перед ВК и разворачиваются, что приводит к смещению ВК и максимума плотности пространственного заряда в сторону плоскости инжекции. Кроме того, величина плотности пространственного заряда быстро увеличивается, так как практически все электроны оказываются захваченными движущимся к входной плоскости ВК, образующим сгусток электронов. По мере приближения к плоскости инжекции величина потенциального барьера уменьшается и в некоторый момент времени становится меньше кинетической энергии влетающих электронов. Снижение величины

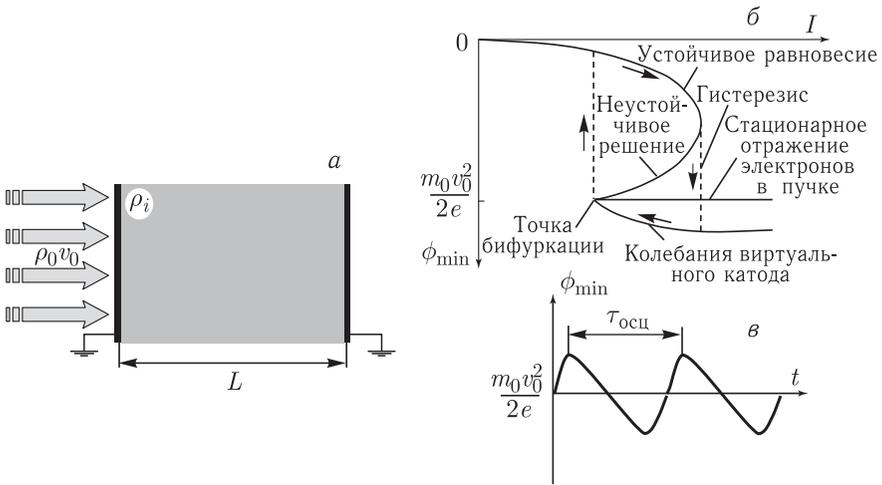


Рис. 1.17. а) Схематическое изображение диода Пирса; б) величина минимума потенциала  $\phi_{\min}$  в пространстве взаимодействия как функция тока  $I$  инжектируемого пучка; в) временная зависимость величины минимума потенциала поля пространственного заряда

потенциального барьера продолжается и после того, как отраженные электроны покидают пространство взаимодействия. Инжектируемые электроны теперь легко преодолевают уменьшившийся потенциальный барьер и двигаются к выходной плоскости промежутка. ВК начинает смещаться к центру диода до тех пор, пока не восстановится потенциальный барьер достаточной высоты для отражения электронов. Далее процесс повторяется. Ток отраженных от ВК и пролетных электронов оказывается промодулированным на частоте  $\omega_{\text{ВК}}$  колебаний ВК. Сказанное можно иллюстрировать и временной зависимостью величины минимума потенциала поля пространственного заряда в области дрейфа (рис. 1.17, в). Колебания потенциала напоминают релаксационные: нарастание происходит почти в 3 раза быстрее, чем спад. Положение минимума потенциала также осциллирует относительно своего стационарного положения. Частота осцилляций потенциала также определяется частотой колебаний ВК:  $\omega_{\text{осц}} = 1/\tau_{\text{осц}} = \omega_{\text{ВК}}/2\pi$  и зависит от плазменной частоты  $\omega_p$  нелинейно, имея тенденцию к увеличению с ростом тока пучка.

Вернемся к рис. 1.17, а. Если теперь в состоянии, когда в системе имеется колеблющейся ВК, начать уменьшать ток пучка  $I$ , то амплитуда колебаний  $\Delta\phi_{\min}(t)$  уменьшается, а координата  $\phi_{\min}$  в пространстве стремится к центру диодного промежутка. Состояние системы возвращается к прежнему устойчивому равновесию при достижении точки бифуркации. Таким образом, в окрестности  $I \sim I_{\text{SCL}}$  существует гистерезисная петля, которая обозначена на рис. 1.17, а штриховой линией. За точкой бифуркации существует четыре возможных состояния, два

из которых устойчивы и реализуются в зависимости от предыстории, а остальные два — неустойчивы и физически нереализуемы.

Наиболее простой и фундаментальной моделью, которая позволяет изучить особенности физических процессов в потоке с ВК, является модель плоского диодного промежутка, в который инжектируется сверхкритический ток  $I > I_{\text{SCL}}$  (модель диода Пирса и ее различные модификации). Впервые численно такая система была исследована в 60-х годах Бриджесом и Бедселлом [60, 61]. Это был один из важных, наряду с работой по моделированию динамики электронного пучка в магнетронном диоде [62], вычислительных экспериментов в электронике. В нем сразу же была обнаружена нестационарная динамика электронного потока со сверхкритическим током в диодном промежутке. К достоинствам модели диода Пирса следует отнести простоту, легкость численного моделирования, возможность получения аналитических результатов, общность получаемых результатов<sup>1)</sup>. В последнее время активно исследуются более реалистичные модели генераторов на ВК (виркаторов [64, 65]). Обычно такие исследования проводятся численно в рамках электромагнитного моделирования в двух или даже трех измерениях (см., например, [6, 6, 66]).

**1.4.2. Хаотические колебания виртуального катода в диоде Пирса.** Для анализа нестационарной нелинейной динамики ВК в плоской геометрии необходимо использовать численное моделирование методом «частиц в ячейке» [6, 66]. В этом случае электронный поток представляется в виде совокупности крупных частиц (заряженных листов), динамика которых описывается нерелятивистскими уравнениями движения. Поле пространственного заряда находится с помощью численного решения уравнения Пуассона.

Рассмотрим динамику электронного потока с ВК в диоде Пирса при изменении управляющего параметра  $\alpha$  [39, 68, 69]. На рис. 18 показаны характерные динамические состояния колебаний ВК при различных значениях параметра Пирса. Для каждого состояния представлены спектр мощности, проекция восстановленного аттрактора и часть

---

<sup>1)</sup> Отметим, что при значении параметра Пирса  $\alpha \sim 3\pi$  в диоде Пирса наблюдается возникновение колебаний в пучке со сверхкритическим током без образования ВК. В этом случае возможно описание процессов в системе в рамках гидродинамического приближения [6]. В работах [56–58] было показано, что при уменьшении параметра Пирса в диапазоне  $\alpha \in (2,8575\pi, 3\pi)$  наблюдаются бифуркации, которые приводят к возникновению хаотического аттрактора по сценарию Фейгенбаума. В работах [59, 63] было проведено исследование возможности управления сложными колебаниями в гидродинамической модели диода Пирса с помощью подключения внешней запаздывающей обратной связи и на основе идей стабилизации хаотических колебаний с помощью непрерывной обратной связи. Результаты этих исследований будут изложены в следующей главе монографии.

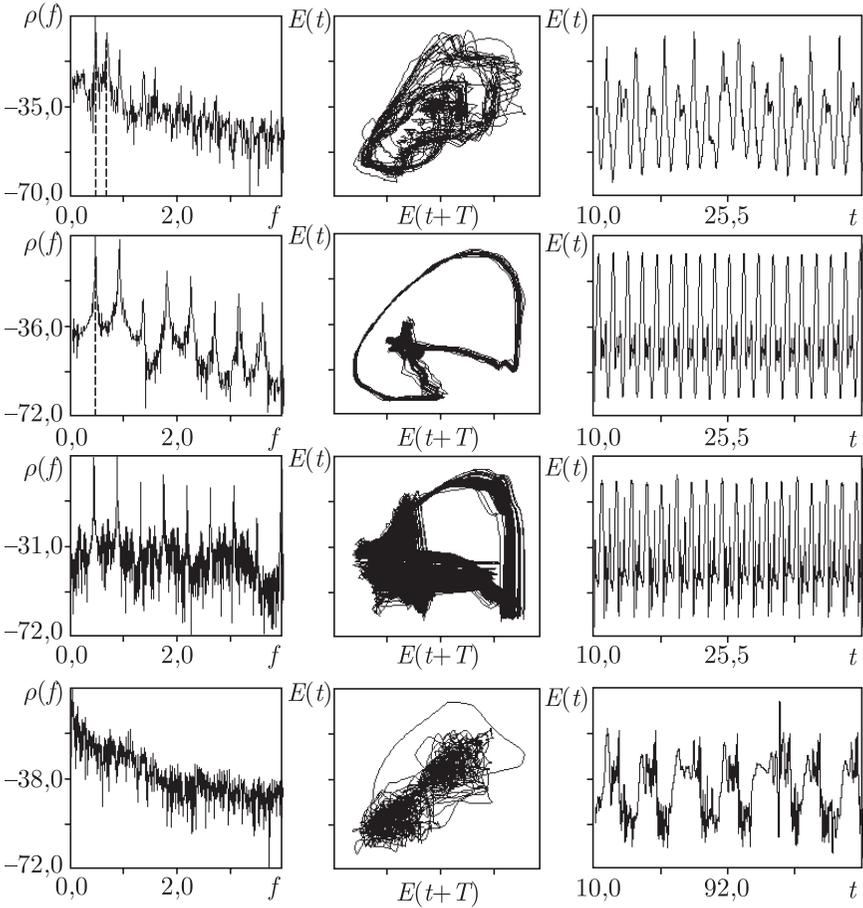


Рис. 1.18. Характеристики колебаний для следующих значений параметра Пирса:  $\alpha/\pi = 1,20$  (а);  $1,50$  (б);  $1,76$  (в);  $2,60$  (г). Штриховыми линиями в спектрах отмечены базовые частоты

временной реализации колебаний напряженности электрического поля на выходе системы.

Сразу после превышения параметром Пирса предельного значения в потоке возникают нерегулярные колебания ВК (рис. 18, а), в спектре можно выделить две частоты (отмечены на рис. 18, а штриховыми линиями), находящиеся в иррациональном отношении, при этом шумовой пьедестал в спектре имеет значительную высоту. Фазовый портрет соответствует сильно размытому предельному циклу. При значении  $\alpha > 1,3\pi$  поведение системы становится близким к регулярному, аттрактор превращается в узкую ленту, в спектре мощности выделяется только основная частота и ее гармоники (рис. 18, б). На фазовом портрете появляется неоднородность: в области, соответствующей отсутствию ВК в системе, фазовая траектория проводит относительно боль-

ше времени. Внутри каждого периода колебаний в реализации можно выделить промежуток почти неизменных значений поля и следующий за ним острый пик.

Дальнейший рост  $\alpha$  приводит к расширению ленты аттрактора, что соответствует нерегулярности колебаний в электронном пучке. В спектре мощности при этом растет уровень шумового пьедестала и расплываются отдельные спектральные пики (см. рис. 18, в). При  $\alpha > 1,86\pi$  нерегулярность колебаний резко уменьшается. Аттрактор представляет узкую ленту сложной формы. В спектре мощности можно выделить большое число высших гармоник, имеющих почти одинаковую с гармоникой основной частоты амплитуду, что свидетельствует о сильной нелинейности процессов в системе. При  $\alpha > 2,48\pi$  в системе возникают шумоподобные колебания, которые на фазовом портрете представляют собой блуждание изображающей точки между двумя притягивающими центрами (рис. 18, г).

Для изучения физических процессов, приводящих к хаотизации колебаний, вернемся к пространственно-временной диаграмме электронного потока для одного периода колебаний ВК (рис. 1.6). Буквами на ней отмечены различные характерные траектории заряженных частиц в пучке. Когда плотность заряда в области ВК достаточна, ВК перестает существовать, поскольку часть потока отражается от него (на рис. 1.6 эта часть потока обозначена буквой *A*), а другая часть, затормозившаяся в области ВК, уходит к выходной плоскости, создавая пролетный ток (часть потока, обозначенная символом *B*). В процессе распада ВК плотность заряда в нем падает, а следовательно, уменьшается напряженность создаваемого им тормозящего поля. Поэтому на электроны, поступающие в систему позже, действует меньшее тормозящее поле, и их скорость изменяется на меньшую величину, чем у влетевших ранее. В результате образуется сгусток электронов за ВК, проходящий по системе к выходной сетке. На пространственно-временной диаграмме формированию вторичного сгустка соответствует сближение кривых (область *C*). Образование вторичного сгустка приводит ко второму увеличению плотности заряда в потоке.

Рассмотрим зависимость величины  $\rho_{\max 2}$  второго максимума плотности заряда от параметра Пирса, представленную на рис. 1.19 (сплошная линия). Величина второго максимума определяет характер динамики электронного потока: хаотическим режимам соответствует значение плотности заряда во втором сгустке большее 20, а его уменьшение приводит к слаберегулярным колебаниям. Анализ пространственно-временных диаграмм электронного потока показывает, что при значениях  $\rho_{\max 2} > 20$  в пучке с ВК возникают отражения части потока от формирующегося вторичного сгустка.

Характеристикой сложности колебаний в электронном пучке в диоде Пирса является значение  $\lambda$  максимальной ляпуновской экспоненты. Рост амплитуды плотности заряда во втором максимуме приводит к увеличению величины  $\lambda$  (рис. 1.19, штриховая линия). Из рис. 1.19

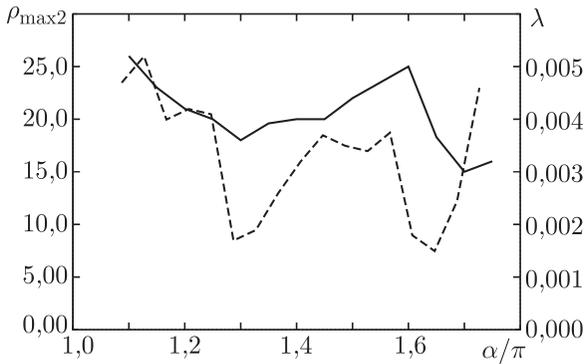


Рис. 1.19. Зависимость плотности заряда во вторичном сгустке (сплошная линия) и максимальной ляпуновской экспоненты (штриховая линия) от параметра Пирса  $\alpha$

видно, что рост плотности вторичного сгустка  $\rho_{\max 2}$  сопровождается ростом ляпуновской экспоненты  $\lambda$ . Качественное различие между двумя хаотическими режимами связано с тем, насколько плотность пространственного заряда во втором сгустке превышает критическое значение. В первом режиме нерегулярных колебаний величина  $\rho_{\max 2}$  настолько велика, что отраженный поток существует постоянно, а во втором режиме превышение небольшое, и отраженный поток возникает не на каждом периоде колебаний.

Значение  $\rho_{\max 2}$  определяется амплитудой потенциала поля пространственного заряда в области ВК и расстоянием между входной сеткой и местом формирования ВК. При увеличении параметра Пирса величина плотности пространственного заряда в области ВК уменьшается и для того, чтобы остановить электрон достаточно меньшего уплотнения электронного потока. Это уменьшение наиболее резко происходит при увеличении  $\alpha$  от  $\pi$  до  $1,3\pi$ , что объясняет первое уменьшение плотности заряда во втором максимуме и возникновение слабого нерегулярного режима при  $\alpha \approx 1,3\pi$ . Расстояние между входной сеткой и ВК также уменьшается с ростом  $\alpha$ , но неравномерно с ростом надкритичности. Это расстояние сильно уменьшается при  $\alpha \approx 1,7\pi$ , что приводит к снижению плотности заряда во втором сгустке, так как он не успевает сформироваться.

Таким образом, возникновение хаоса в диоде Пирса определяется взаимодействием двух электронных структур (ВК и вторичного сгустка, формирование которого определяется кинематическим эффектом — превращением модуляции по скорости в области ВК в модуляцию по плотности). Усложнение хаотических колебаний связано с увеличением связи между этими электронными структурами.

**1.4.3. Колебания в пролетном промежутке при произвольной степени нейтрализации.** Рассмотрим динамику пучка со сверхкри-

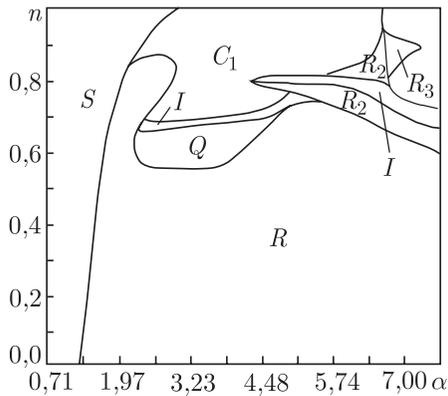


Рис. 1.20. Разбиение плоскости параметров  $(\alpha, n)$  на области с различными типами колебаний виртуального катода

тическим током в пролетном промежутке с произвольной плотностью  $n = \rho_i / \rho_0$  ионного фона  $0 < n < 1$ .

На рис. 1.20 представлена карта режимов на плоскости управляющих параметров  $(\alpha, n)$ . Различные области на ней соответствуют различным режимам колебаний виртуального катода в диодном промежутке.

Область, обозначенная символом  $S$  и расположенная слева на карте режимов, — это область стационарного состояния, соответствующая полному прохождению потока через диодный промежуток. Граница этой области определяется зависимостью критического значения параметра Пирса  $\alpha_{кр}$  от плотности ионного фона  $n$ . При малых значениях плотности ионного фона  $n < 0,5-0,7$ , в том числе и для случая пучка без нейтрализации ( $n = 0$ ) пространственного заряда потока, наблюдаются регулярные колебания виртуального катода. Соответствующая область обозначена на карте режимов символом  $R$ . Область  $Q$  — область квазипериодических колебаний в потоке с виртуальным катодом. В этом случае в спектре колебаний поля имеют место колебания с несоизмеримыми частотами.

При больших  $n \sim 1,0$  и  $\alpha < 2\pi$  имеют место хаотические колебания (обозначенные символом  $C_1$  на карте режимов), подобные описанным выше для случая  $n = 1$ . На рис. 21, *a* показана пространственно-временная диаграмма электронного пучка для случая  $n = 0,7$ ,  $\alpha = 3,23$ . Из рисунка видно, что на каждом периоде колебаний в системе за счет кинематической неустойчивости в пролетном потоке возникает вторичный электронный сгусток, от которого отражается часть электронов. Отраженные от вторичного сгустка электроны, возвращаясь обратно к плоскости инжекции в момент времени, когда начинается формирование виртуального катода на следующем периоде колебаний, возмущают начальное состояние и тем самым приводят к усложнению динамики виртуального катода, как это было описано выше.

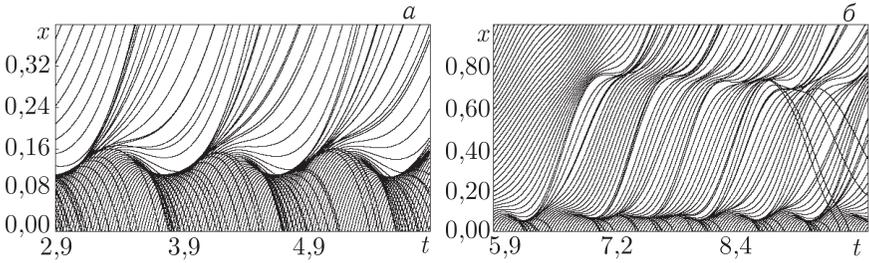


Рис. 1.21. Пространственно-временные диаграммы колебаний в электронном пучке с виртуальным катодом для различных режимов хаотических колебаний: а) режим слабохаотических колебаний ( $n = 0,7$ ,  $\alpha = 2,3$ ); б) режим развитого хаоса ( $n = 1,0$ ,  $\alpha = 7,0$ )

В области  $\alpha \sim 2\pi$  и  $n > 0,7$  при изменении управляющих параметров имеет место перестройка между различными типами колебаний виртуального катода. Область  $R_2$  — область регулярных колебаний в пучке с виртуальным катодом, образом которых в фазовом пространстве является двухоборотный цикл. В спектре кроме основной частоты колебаний виртуального катода  $\omega_{\text{ВК}}$  и ее гармоник  $k\omega_{\text{ВК}}$  ( $k$  — целое) наблюдаются ярко выраженные субгармоники этих частот  $k\omega_{\text{ВК}}/2$ .

Переход к хаотическим колебаниям из режимов  $Q$  и  $R_2$  имеет место через перемежаемость (область  $I$  на карте режимов (рис. 1.20)), когда регулярная временная реализация прерывается хаотическими всплесками. При росте плотности ионного фона длительность хаотических стадий увеличивается и в системе устанавливается хаотический режим  $S_1$ . Переход к хаотическим режимам с ростом плотности ионного фона по сценарию перемежаемости обуславливается следующим. С ростом плотности ионного фона растет плотность заряда  $\rho_2$  во вторичном сгустке, формирующимся в «пролетном» потоке. При некоторой плотности  $n_2$  возникают отражения электронов от него, влияющие на динамику виртуального катода на последующем периоде колебаний. Однако, при  $n \approx n_2$  это происходит не на каждом периоде колебаний. Поэтому колебания представляют собой регулярные колебания, прерываемые короткими стадиями хаотической динамики. С ростом плотности ионного фона при  $n > n_2$  наблюдается увеличение  $\rho_2$ : отражения от вторичного сгустка становятся все более частыми и, как результат, растет длительность хаотической стадии колебаний.

На рис. 1.20 режим колебаний виртуального катода с малой частотой обозначен символами  $S_2$  и  $R_3$ . Область  $R_3$  соответствует режиму регулярных колебаний виртуального катода. Режим  $S_2$  — режим развитых хаотических колебаний со сплошным спектром и слабо выраженной на фоне шумового пьедестала базовой частотой в спектре. Рассмотрим пространственно-временную диаграмму потока (рис. 1.21 б), построенную для последнего случая ( $n = 1$ ,  $\alpha = 7,0$ ). Из рисунка видно, что динамика потока существенно сложнее, чем при  $\alpha < 2\pi$ . Электронный пучок сильно тормозится не только в области инжекции

( $x \sim 0,1$ ), но и вблизи выхода системы ( $x \sim 0,7-0,8$ ). Из пространственно-временной диаграммы видно, что динамика потока сильно нерегулярна — отражающий электроны виртуальный катод возникает нерегулярно во времени, наблюдается также отражение электронов от второго сгустка вблизи выходной сетки. Характерный временной масштаб динамики виртуального катода в этом случае существенно меньше, чем при меньшей плотности ионного фона.

## 1.5. Виркатор и другие

**1.5.1. Генераторы на виртуальном катоде.** Генераторы на виртуальном катоде (или, как их еще называют, *виркаторы*<sup>1)</sup>) — это новый класс приборов релятивистской электроники, использующий для генерации импульсов сверхмощного СВЧ излучения колебания виртуального катода в электронном пучке со сверхкритическим током (см., например, [39, 64, 65]). Свойства и характерные особенности сложных колебаний в активной среде «электронный пучок с виртуальным катодом» обсуждались в предыдущем разделе главы для плоской геометрии в нерелятивистском случае. Экспериментальное доказательство генерации СВЧ излучения за счет колебаний виртуального катода и дальнейший «взрывной» интерес к виркаторам обусловлены, в первую очередь, значительными успехами в развитии сильноточной электроники (высоковольтной техники, техники создания и транспортировки интенсивных электронных пучков). В мощной релятивистской электронике обычно имеют дело с пучками, формируемыми электронными пушками сильноточных ускорителей с холодными катодами со взрывной эмиссией и направляемыми сильными продольными магнитными полями. Токи таких электронных пучков достигают величины 100 кА, а ускоряющие напряжения — 50 МВ. Экспериментальные исследования и результаты численного моделирования свидетельствуют, что генераторы на виртуальном катоде являются источниками мощности исключительно высокого уровня: характерная выходная мощность генераторов на виртуальном катоде составляет  $P > 500$  МВт, диапазон генерируемых частот 2–30 ГГц, к. п. д. 0,1–10 %. Длительность импульса высокочастотного излучения определяется возможностями сильноточных ускорителей и соответствует величине 30–500 нс.

Предшественниками виркаторов, наиболее близкими по идее, являются такие хорошо известные генераторы СВЧ излучения, как генератор Баркгаузена–Курца [70], отражательный клистрон [6], электронно-волновой генератор с тормозящим полем [71, гл. V].

Наиболее распространенным типом генератора на виртуальном катоде является виркатор на пролетном токе, принципиальная схема которого показана на рис. 1.22. Электроны ускоряются в промежутке

<sup>1)</sup> От английского *virtual cathode oscillator* — VIRCATOR.

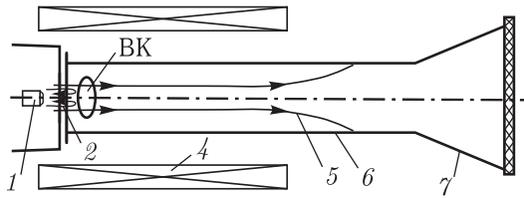


Рис. 1.22. Схема виркатора на пролетном токе: 1 — катод; 2 — анод; 3 — фокусирующая магнитная система (сверхпроводящий соленоид); 4 — электронный пучок; 5 — волновод; 6 — выходной рупор (из работы [65])

«катод–анод» и через анодную фольгу или сетку, прозрачные для высокоэнергетических электронов, попадают в дрейфовое пространство. Если ток инжектируемых электронов выше предельного тока для данной геометрии, то часть электронов тормозится собственным полем потока и отражается в сторону анода, другая часть электронного потока продолжает свое движение, пока не достигнет коллектора или стенок камеры. Таким образом, в виркаторе на пролетном токе из области виртуального катода в стационарном состоянии испускаются электроны и в прямом и в обратном направлениях. Отраженные электроны образуют поток осциллирующих электронов. Положение виртуального катода и степень деления тока на отраженный и проходящий через виртуальный катод определяются величиной приложенного напряжения, а также геометрией диода и дрейфового пространства. При увеличении инжектируемого тока проходящий ток уменьшается и стремится к величине предельного тока [72], а виртуальный катод приближается к аноду. Стационарное состояние потока с виртуальным катодом является неустойчивым и переходит в колебательное состояние с частотой, близкой к плазменной частоте  $\omega_p$  потока. Генерация в виркаторах с пролетным током происходит благодаря двум основным механизмам: за счет колебаний частиц вокруг анода в промежутке «катод — виртуальный катод» и за счет колебаний виртуального катода как единого целого [73]. Многочисленные модификации виркаторов на пролетном токе различаются геометрией катодов, анодов, электродинамическими системами, устройствами вывода СВЧ излучения, а также отсутствием или наличием внешнего ведущего магнитного поля.

Уже первые экспериментальные и численные исследования генерации СВЧ излучения с помощью колебаний виртуального катода показали, что выходное излучение виркатора имеет сплошной спектр с типичной шириной полосы  $\Delta\omega/\omega \sim 20\text{--}50\%$ . В 1985 г. появилась первая теоретическая работа Говарда Брандта [74], в которой с помощью численного моделирования исследовалась нелинейная динамика и турбулентность в электронном пучке с виртуальным катодом.

Обычно теоретические исследования генераторов на виртуальном катоде проводятся численно в рамках электромагнитного или электростатического моделирования в двух или даже трех измерениях. Такое моделирование позволяет провести детальный анализ физиче-

ских процессов в пучках заряженных частиц с виртуальным катодом и сопоставить результаты численного и физического моделирования. Остановимся на некоторых важных результатах таких исследований более подробно.

**1.5.2. Хаос и структуры в электронном пучке с виртуальным катодом: электромагнитное моделирование.** Опишем механизм развития хаотических колебаний в релятивистском электронном пучке со сверхкритическим током в виркаторе. В качестве модели виркатора рассмотрим отрезок цилиндрического волновода, помещенный в продольное магнитное поле (МП). Через сечение  $z = 0$  волновода (плоскость инжекции) внутрь системы поступает моноскоростной трубчатый электронный поток с релятивистским фактором  $\gamma_0$ . Рассмотрение физических процессов в такой системе будем проводить в рамках электромагнитного моделирования [6, 66, 67].

Изучим усложнение колебаний ВК в виркаторе при увеличении параметра тока пучка  $\alpha = I/I_{SCL}$ . Будем предполагать, что величина ведущего МП достаточно велика, так что движение электронов можно рассматривать близким к одномерному. Хаотическая динамика и процессы образования и взаимодействия когерентных структур в электронном пучке со сверхкритическим током в такой системе были детально исследованы в работах [75, 76].

Численное исследование показывает, что с увеличением тока пучка  $\alpha$  наблюдается усложнение колебаний в электронном потоке. На рис. 1.23 приведены временные реализации, спектры мощности и фа-

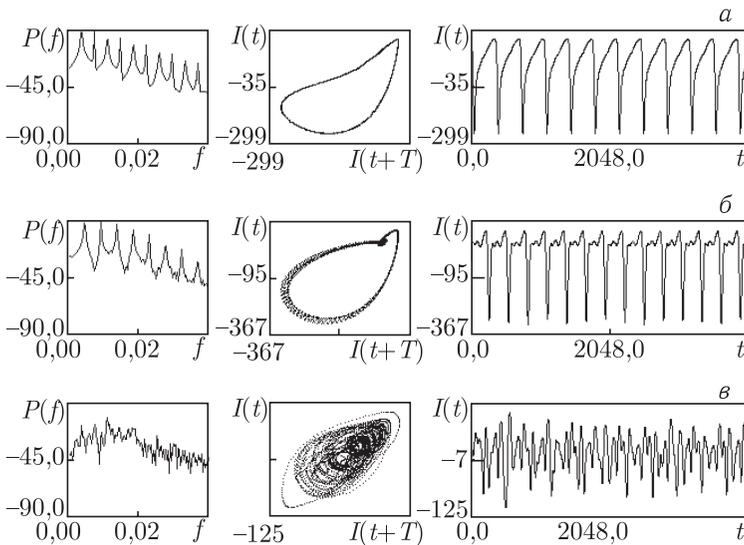


Рис. 1.23. Характеристики колебаний тока  $I(t)$  пучка в области ВК для различных динамических режимов:  $\alpha = 1,4$  (а);  $2,0$  (б);  $4,0$  (в)

зовые портреты колебаний тока пучка в области ВК для различных режимов генерации.

При малых значениях  $\alpha$  ( $\alpha < 1,7$ ) в системе устанавливаются регулярные колебания релаксационного типа (рис. 1.23, *а*). Спектр мощности содержит узкие пики, являющиеся кратными гармониками основной частоты. С увеличением  $\alpha$  происходит разрушение периодических колебаний, и последовательно с ростом надкритичности появляются два типа хаотического поведения. В первом случае ( $1,7 < \alpha < 3$ ), как видно из рис. 1.23, *б*, хаотическая динамика появляется на базе одного неустойчивого предельного цикла, соответствующего динамике системы в регулярном режиме при меньшем токе пучка. Во втором случае ( $\alpha > 3$ ; рис. 1.23 *в*) фазовый портрет колебаний более однороден, структура аттрактора сложна, спектр мощности сильно зашумлен.

Сложная динамика электронного потока определяется формированием в пространстве дрейфа нескольких областей отражения заряженных частиц (нескольких «виртуальных катодов»), которые связаны между собой через отраженные от них электроны [75, 76].

Это иллюстрирует функция распределения  $\Phi(\tau)$  электронов по временам жизни  $\tau$  в пространстве взаимодействия (рис. 1.24). В регулярном режиме (рис. 1.24, *а*, сплошная линия)  $\Phi(\tau)$  имеет двугорбый вид. Площадь под кривой пропорциональна числу существующих в потоке пролетных и отраженных к плоскости инжекции частиц. Максимум отраженных частиц соответствует единственной структуре в электронном пучке — ВК. С увеличением  $\alpha$  отраженные частицы начинают доминировать в общем числе инжектируемых частиц (см. рис. 1.24, *а*, пунктирная линия); область возможных времен жизни отраженных частиц увеличивается. За счет появления долгоживущих частиц в потоке возникает внутренняя распределенная обратная связь, обеспечивающая связь между основной структурой (ВК) и возникающей вторичной структурой, которой соответствует третий максимум на кривой  $\Phi(\tau)$  (отмечен стрелкой на рис. 1.24, *а*). Однако при небольшой надкритичности

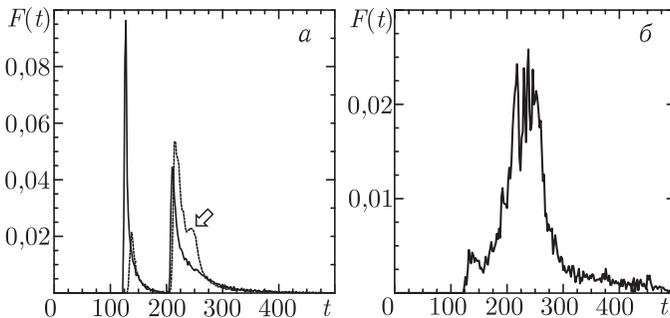


Рис. 1.24. Распределение электронов по временам жизни в пространстве взаимодействия для следующих параметров: *а*) сплошная линия —  $\alpha = 1,4$ ; пунктирная линия —  $\alpha = 2,0$ ; *б*)  $\alpha = 4,0$

точности эффективность этой связи мала (общее количество частиц, отраженных от вторичного ВК, мала) и движение слабонерегулярно (в фазовом пространстве наблюдается размытый предельный цикл). Для развитого хаоса (рис. 1.24, б) характерна сильно изрезанная форма  $\Phi(\tau)$ , которая позволяет выделить несколько примерно равных по количеству групп заряженных частиц с различными временами жизни. Это означает, что в системе формируется несколько ВК (несколько пространственно-временных структур) на различном расстоянии от плоскости инжекции. Отражение части потока от каждого ВК оказывает влияние на условия формирования других структур, что обеспечивает несколько петель обратной связи с различными временами запаздывания. Такая распределенная связь между всеми структурами в потоке приводит к сильно нерегулярной динамике системы при большой надкритичности  $\alpha$ . Заметим, что аналогичные результаты демонстрирует и анализ внутренней структуры электронного потока с помощью декомпозиции пространственно-временных данных по алгоритму Карунена–Лоэва (КЛ) [76].

Рассмотрим теперь динамику электронного пучка в виркаторе при изменении величины  $B$  ведущего магнитного поля (МП) [77]. Будем исследовать виркаторную систему, представляющую собой замкнутый отрезок цилиндрического волновода длиной  $L = 0,16$  м и радиусом  $R = 0,3L$ . Аксиально-симметричный трубчатый релятивистский пучок, инжектируемый в волноводную камеру, характеризуется нулевой поперечной скоростью и однородным распределением плотности тока в поперечном направлении. Энергия ускорения электронов 560 кэВ, внутренний радиус и толщина инжектируемого релятивистского пучка соответственно  $r_b = 0,2L$  и  $\Delta_b = 0,03L$ . В качестве источника внешнего МП предполагался соленоид цилиндрического сечения, создающий однородное МП в пределах рабочей камеры виркатора.

На рис. 1.25 показаны спектры мощности колебаний продольного электрического поля в области ВК при токе пучка  $\alpha = 1,5$  и при различных значениях величины  $B$  ведущего магнитного поля. При значительных величинах  $B$  колебания в системе оказываются близкими к одночастотным (рис. 1.25, а;  $B = 40$  кГс). В спектре мощности наблюдается один ярко выраженный пик, соответствующий частоте  $f \approx 2,5(\omega_p/2\pi)$ . С уменьшением величины ведущего МП наблюдается усложнение спектра генерации, заключающееся в появлении дополнительных частотных компонент и увеличении мощности шумового пьедестала до уровня  $-30$ – $20$  дБ. При малых величинах  $B$  в спектре мощности наряду с ВЧ компонентами в области 3–6 ГГц появляются НЧ компоненты с частотами  $f < 500$  МГц. При отсутствии ведущего МП спектр генерации становится сплошным в диапазоне 3,5–6 ГГц, причем шумовой пьедестал поднимается до уровня  $-10$  дБ (см. рис. 1.25, б). Изрезанность хаотического спектра не превышает 3–10 дБ.

Таким образом, при фиксированном токе пучка с уменьшением величины фокусирующего МП в системе с ВК наблюдается последо-

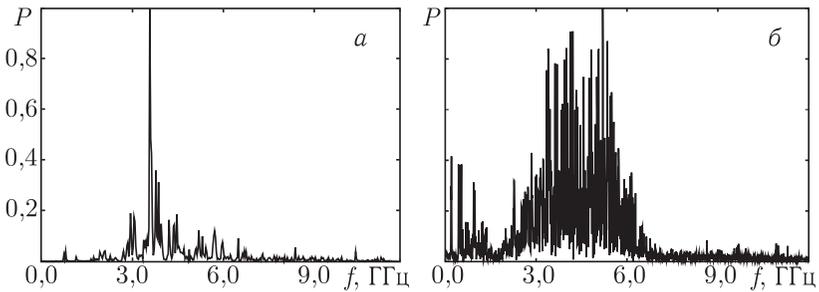


Рис. 1.25. Спектры колебаний продольного электрического поля в области ВК для различных значений величины ведущего МП: а) 40 кГц; б) 0 и одинаковом токе пучка  $\alpha = 1,5$

вательное усложнение спектра генерации, начиная от одночастотных колебаний при близкой к одномерной динамике электронов до многочастотных широкополосных хаотических колебаний. При этом при малых  $B < 5$  кГц динамика пучка оказывается принципиально двумерной, в частности, в системе наблюдается интенсивное токооседание электронов на стенки рабочей камеры.

Выше было показано, что хаотизация выходного излучения с ростом тока пучка определяется формированием нескольких электронных структур (ВК) в пространстве дрейфа. Каждый из ВК воздействует на другие структуры через отраженный от него электронный поток. Как следствие, в системе формируется несколько цепей обратной связи, которые и приводят к усложнению динамики пространственного заряда электронного пучка со сверхкритическим током. При уменьшении величины МП наблюдается аналогичная ситуация, но теперь электронные структуры формируются не только в различных продольных сечениях пространства взаимодействия, но и имеет место сложная картина динамики пучка в поперечном направлении.

Таким образом, усложнение динамики электронного пучка с ВК с увеличением тока пучка или уменьшением величины ведущего МП определяется одним и тем же физическим механизмом, а именно формированием и взаимодействием пространственных структур в пучке с ВК. Однако, реализация данного механизма в каждом из случаев различна. Так, при уменьшении величины ведущего МП основную роль играет динамика пучка в поперечном направлении (т.е. двумерные эффекты), и, в первую очередь, начинается рост «поперечных» электронных структур в пучке со сверхкритическим током. Более подробно данные вопросы будут рассмотрены в главе 4 второго тома монографии.

**1.5.3. Низковольтные виркаторы: источники маломощных широкополосных хаотических колебаний СВЧ диапазона.** Из предыдущих разделов понятно, что электронные потоки с виртуальными катодами при определенных условиях являются источниками сверхмощных хаотических колебаний в сантиметровом и миллиметровом

диапазоне длин волн. Однако существует возможность создания источников маломощных сверхширокополосных хаотических СВЧ колебаний на основе нерелятивистских пучков с виртуальным катодом, который формируется за счет глубокого торможения потока заряженных частиц в пространстве дрейфа [78, 79].

В настоящее время наиболее изученными являются следующие генераторы хаоса на основе нерелятивистских потоков заряженных частиц с виртуальным катодом.

1. Маломощные широкополосные генераторы хаотических колебаний с использованием интенсивного электронного пучка со сверхкритическим первеансом. В подобных системах для формирования виртуального катода используется дополнительное торможение электронного потока за счет подачи отрицательного потенциала на сетки, расположенные в пространстве взаимодействия, или коллектор. Как показали экспериментальные исследования и численное моделирование, изменяя тормозящий потенциал, возможно управлять как амплитудой хаотических колебаний, так и шириной полосы частот (от узкополосных, близких к одночастотным колебаниям, до хаотических колебаний с шириной полосы частот более октавы). Результаты исследования низковольтных виркаторов будут изложены в главе 3.

2. Генераторы хаотического широкополосного сигнала средней мощности, использующие в качестве источника колебаний виртуальный катод, который специальным образом формируется в области коллектора ЛБВ средней мощности (коллектор-генератор в режиме образования виртуального катода). Сигнал, снимаемый из области виртуального катода, подается на вход ЛБВ, которая его усиливает. Некоторые вопросы исследования генерации и усиления широкополосных хаотических сигналов в широкополосной ЛБВ с коллектором-генератором изложены в главе 5.

## 1.6. Клистронные генераторы хаоса

В последнее время определенный интерес в качестве источников узкополосного хаотического сигнала вызывают генераторы на основе многорезонаторных клистронов с внешней запаздывающей обратной связью [80–82]. Основным недостатком такого генератора хаоса является чрезвычайно узкая рабочая полоса частот, определяемая полосой пропускания резонаторов клистрона, что не позволяет создать шумовой сигнал с полосой больше нескольких процентов. Вместе с тем, если такой ширины полосы достаточно, то простота конструкции, а также высокий к. п. д., свойственный клистроноу, делают генератор хаотических колебаний на основе клистрона-усилителя с обратной связью достаточно привлекательным.

Обратная связь в клистроне наиболее просто осуществляется за счет ответвления части мощности с выхода прибора во входной модулирующий резонатор через внешнюю линию с задержкой во времени.

Цепь обратной связи характеризуется в этом случае коэффициентом затухания сигнала  $A$  и задержкой  $d$  в цепи обратной связи.

В работах [80, 81] изучена теоретическая модель, описывающая сложную хаотическую динамику двухрезонаторного клистронного генератора с запаздывающей обратной связью. в кинематическом приближении и в предположении малой добротности входного резонатора модель сводится к уравнению с запаздыванием [80] (ср. также с уравнением (1.4))

$$\frac{dF(\tau)}{d\tau} + \gamma F(\tau) = 2\alpha J_1(|F(\tau - 1)|) \frac{F(\tau - 1)}{|F(\tau - 1)|}, \quad (1.16)$$

где  $F$  — безразмерная медленно меняющаяся амплитуда колебаний напряжения на зазоре выходного резонатора;  $\tau$  — безразмерное время;  $\gamma$  — параметр затухания в выходном резонаторе;  $\alpha$  — параметр пропорциональный току пучка;  $J_1$  — функция Бесселя 1-го порядка. Следует отметить, что уравнение (1.16) описывает также простую модель гироклистрона с запаздывающей обратной связью.

С увеличением  $\alpha$  в модели (1.16) последовательно наблюдались самовозбуждение колебаний на основной моде (частота которой в точности равна частоте холодного резонатора) и установление режима стационарной генерации, а затем возникновение режимов периодической автомодуляции. При дальнейшем увеличении  $\alpha$  происходит переход от периодической автомодуляции к хаотической. В области хаотических колебаний с изменением управляющих параметров наблюдается большое число окон периодической автомодуляции.

В работах [81–83] приводятся результаты экспериментального исследования клистронного генератора с внешней обратной связью. Генератор реализован на пролетном клистроне, выход которого соединен со входом. В цепь обратной связи был включен поляризационный аттенюатор, позволяющий в широких пределах изменять затухание в цепи обратной связи  $L$  (то есть изменять уровень мощности, который подается на вход клистрона с его выхода). Рассмотрим последовательность режимов колебаний, наблюдаемых в эксперименте при изменении затухания  $L$  при неизменных значениях тока пучка  $I_0$  и ускоряющего напряжения  $V_0$ . Экспериментальные спектры выходного сигнала генератора при различных значениях  $L$  представлены на рис. 1.26.

При  $L \approx 10$  дБ в автоколебательной системе возбуждались стационарные гармонические колебания на частоте  $f_0 \approx 2,8$  ГГц, близкой к частоте максимального усиления исходного клистронного усилителя в режиме малого входного сигнала. Уменьшение затухания приводило вначале к росту амплитуды стационарных колебаний, а при  $L \approx 7,6$  дБ возникал режим периодической автомодуляции с частотой  $f_a \approx 3,5$  МГц. В спектре выходного сигнала (рис. 1.26, а) появлялись частотные составляющие  $f_0 \pm f_a$ . Если уменьшать  $L$  дальше, то при  $L \approx 3$  дБ наблюдались удвоения периода автомодуляции (рис. 1.26, б). В спектре генерации это соответствует появлению частотных состав-

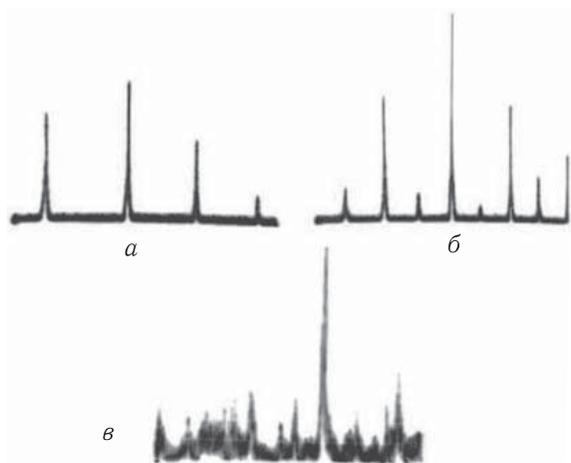


Рис. 1.26. Спектры выходного излучения генератора, наблюдаемые в эксперименте в режиме периодической модуляции (а), автомодуляции с удвоенным периодом (б) и хаотических автоколебаний (в) (из работы [81])

ляющих  $f_0 \pm f_a/2^n$ . И при  $L \approx 0,5$  дБ генерация становилась хаотической. Спектр генерации в данном случае является сплошным, хотя можно выделить в нем максимумы на основной частоте  $f_0$ , на частоте автомодуляции  $f_a$  и ее субгармониках (рис. 1.26, в).

В ряде работ было проведено исследование некоторых аспектов сложной нелинейной динамики клистронных генераторов хаоса, в частности, был исследован генератор хаотических радиоимпульсов на основе неавтономного клистронного генератора [84], изучены режимы хаотической синхронизации в связанных клистронных генераторах [85, 86]. Последний вопрос будет затронут в последующих главах.

## Заклучение

В главу вошли не все даже «любимые» результаты. Не изложены подробно результаты теоретического и экспериментального исследования ЛОВ. Они хорошо согласуются с развитой нестационарной теорией. Не рассмотрены важные вопросы о влиянии пространственного заряда, потерь и отражений в замедляющей системе на динамику ЛОВ. В частности, не обсужден изящный результат перехода абсолютной неустойчивости в конвективную при определенном значении параметра диссипации. Не рассмотрены различные модификации ЛОВ, такие как ЛОВ со связанными замедляющими системами, ЛОВ на аномальном доплеровском эффекте, ЛОВ с поперечным полем, пениотрон на встречной волне, а также методы подавления автомодуляции.

Что еще привнесла нелинейная динамика в СВЧ электронику?

Предложена и подробно изучена феноменологическая модель электронной турбулентности (заметим, что в нелинейной динамике такие

модели занимают важное место). Предполагается, что существует последовательность электронных структур, оказывающих друг на друга взаимное влияние. Под электронной структурой понимается в данном случае малый объем электронной среды, состоящий из электронов-осцилляторов (нелинейных, неизохронных осцилляторов). Для каждого электронного ансамбля имеет место сверхизлучение, возникающее, как известно, в результате взаимодействия осцилляторов через поле собственного излучения, являющегося для них фазирующим. Проведен анализ усложнения пространственно-временной динамики процесса в потоке взаимно связанных электронных структур; изучены также возможности управления динамикой такого потока с помощью расположенных на его пути объемных резонаторов [69].

В работе [87] предложена радиотехническая модель — аналог генератора на вакуумном микротриоде под внешним гармоническим воздействием и ее математическая модель. Показано существование сложных режимов, включая хаотические, и продемонстрировано качественное соответствие результатов вычислительного и натурального эксперимента. Подобный подход типичен для нелинейной динамики.

Не обсуждена синхронизация (как классическая, так и хаотическая) электронно-волновых устройств СВЧ диапазона. Этому вопросу ниже будут посвящены отдельные главы.

Примеры использования методов и идей нелинейной динамики в СВЧ электронике можно продолжить.

## Список литературы

1. *Arnaud J.* Bruit anormal dans les canons electroniques a champs electricques et magnetique croises // *Ann. Radioelct.* 1964. V. 19, № 75. P. 3.
2. *Кузнецов С. П.* Турбулентное движение электронного потока в скрещенных полях // *ЖТФ.* 1977. Т. 47, № 12. С. 2483.
3. *Кислов В. Я., Мясин Е. А., Залогин Е. Н.* Исследование стохастических автоколебательных режимов в автогенераторах с запаздыванием // *Радиотехника и электроника.* 1979. Т. 24, № 6. С. 1118.
4. *Вайнштейн Л. А., Солнцев В. А.* Лекции по сверхвысокочастотной электронике. — М.: Сов. радио, 1973.
5. *Трубецков Д. И., Кузнецов С. П., Рыскин Н. М., Храмов А. Е.* Сложная динамика распределенных систем сверхвысокочастотной электроники // *Нелинейные волны'2004: Сб. ст./Отв. ред. А. В. Гапонов-Грехов, В. И. Некоркин.* — Н. Новгород: ИПФ РАН, 2005. — С. 287–326.
6. *Трубецков Д. И., Храмов А. Е.* Лекции по сверхвысокочастотной электронике для физиков. Т. 1. — М.: Физматлит, 2003.
7. *Рыскин Н. М.* Уединенные волны пространственного заряда // *Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика.* 1994. Т. 2, № 5. С. 93–100.
8. *Моносов Г. Г.* Исследование электромагнитных шумов в магнетроне с помощью двумерного компьютерного моделирования // *Материалы меж-*

- дународной межвузовской конференции «Современные проблемы электроники и радиофизики СВЧ». — Саратов: Изд-во ГосУНЦ «Колледж», 2001. — С. 114.
9. *Riyopoulos S. A.* Feedback-induced noise in crossed field devices // IEEE Trans. Plasma Sci. 1992. V. 20, № 3. С. 60.
  10. *Рыскин Н. М., Трубецков Д. И.* Нелинейные электронные волны. Методы и результаты для приборов О-типа // Радиотехника и электроника. 1993. Т. 38, № 2. С. 193.
  11. *Гинзбург Н. С., Кузнецов С. П., Федосеева Т. Н.* Теория переходных процессов в релятивистской ЛОВ // Изв. вузов. Радиофизика. 1978. Т. 21, № 7. С. 1037–1052.
  12. *Гинзбург Н. С., Кузнецов С. П.* Периодические и стохастические автомодуляционные режимы в электронных генераторах с распределенным взаимодействием // Релятивистская высокочастотная электроника. — Горький: АН СССР Ин-т прикладной физики, 1981. — С. 101.
  13. *Безручко Б. П., Кузнецов С. П., Трубецков Д. И.* Экспериментальное наблюдение стохастических автоколебаний в динамической системе электронный пучок — обратная электромагнитная волна // Письма в ЖЭТФ. 1979. Т. 29, № 3. С. 180–184.
  14. Электроника ламп с обратной волной / Под. ред. В. Н. Шевчика и Д. И. Трубецкова. — Саратов: Изд-во Саратовск. ун-та, 1975.
  15. *Рыскин Н. М., Титов В. Н., Трубецков Д. И.* Детали перехода к хаосу в системе электронный пучок — обратная электромагнитная волна // Докл. АН СССР. 1998. Т. 358. С. 620.
  16. *Кузнецов С. П., Трубецков Д. И.* Хаос и гиперхаос в лампе обратной волны // Изв. вузов. Радиофизика. 2004. Т. XLVII, № 5–6. С. 383.
  17. *Пегель И. В.* Моделирование нестационарных процессов в релятивистской лампе обратной волны методом макрочастиц // Изв. вузов. Физика. 1996. Т. 39, № 12. С. 62.
  18. *Гинзбург Н. С., Зайцев Н. И., Иляков Е. В., Кулагин И. С., Новожилова Ю. В., Сергеев А. С., Ткаченко А. К.* Наблюдение автомодуляционных режимов генерации в мощной ЛОВ // Письма в ЖТФ. 1998. Т. 24, № 20. С. 66.
  19. *Гинзбург Н. С. и др.* Теоретические и экспериментальные исследования автомодуляционных режимов генерации 3-сантиметровой ЛОВ с мегаваттным уровнем мощности // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1999. Т. 7, № 5. С. 60.
  20. *Трубецков Д. И., Ремпен И. С., Рыскин Н. М., Титов В. Н., Храмов А. Е.* Управление сложными колебаниями в распределенных системах сверхвысокочастотной электроники // Радиотехника. 2003. Т. 67, № 2. С. 36–44.
  21. *Levush B., Antonsen T. M., Bromborsky A., Lou W. R., Carmel Y.* Theory of relativistic backward wave oscillator with end reflections // IEEE Trans. Plasma Sci. 1992. V. 20, No. 3. P. 263.

22. Трубецков Д. И., Четвериков А. П. Автоколебания в распределенных системах «электронный поток — встречная (обратная) электромагнитная волна» // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1994. Т. 2, № 5. С. 3.
23. Балакирев В. А., Островский А. О., Ткач Ю. В. К теории автомодуляционных процессов в системе связанных гофрированных волноводов, возбуждаемых прямолинейными электронными потоками // ЖТФ. 1991. Т. 61, № 9. С. 94.
24. Кузнецов С. П., Четвериков А. П. К теории лампы обратной волны с поперечным полем // Радиотехника и электроника. 1978. Т. 23, № 2. С. 385.
25. Кузнецов С. П., Четвериков А. П. Нестационарная нелинейная теория ультрарелятивистской ЛОВ на аномальном эффекте Доплера // Изв. вузов. Радиофизика. 1981. Т. 24, № 1. С. 109.
26. Гапонов А. В., Петелин М. И., Юлпатов В. К. Индуцированное излучение возбужденных классических электронов-осцилляторов и его использование в высокочастотной электронике // Изв. вузов. Радиофизика. 1967. Т. 10, № 9, 10. С. 1415.
27. Кузнецов С. П. Сложная динамика генератора с запаздывающей обратной связью // Изв. вузов. Радиофизика. 1982. Т. 25. С. 1410.
28. Плисс Л. Е., Котырев Е. А. Спектральные особенности устойчивой генерации колебаний в генераторах с запаздывающей обратной связью в мягком режиме // Радиотехника и электроника. 1965. Т. 10, № 9. С. 1628.
29. Zellers C. A., Ries Y. E. High power source employing a feedback path around a travelling wave tube. Пат. 3178655 (США). Кл. 331-78. No. 152883; Заявл. 16.11.1961; Опубл. 13.04.1965.
30. Кислов В. Я., Мясин Е. А., Залогин Н. Н. О нелинейной стохастизации автоколебаний в электронно-волновом генераторе с задержанной обратной связью // Радиотехника и электроника. 1980. Т. 25, № 10. С. 2160.
31. Кислов В. Я. Теоретический анализ шумоподобных колебаний в электронно-волновых системах и автогенераторах с запаздыванием и сильной нелинейностью // Радиотехника и электроника. 1980. Т. 25, № 8. С. 1683.
32. Блюх Ю. П. и др. Применение метода функционального отображения для исследования ЛБВ-генератора с запаздывающей обратной связью // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1993. Т. 1, № 1, 2. С. 34.
33. Манькин И. А., Школьников В. Г. К нестационарной нелинейной теории ЛБВ // Радиотехника и электроника. 1981. Т. 26, № 9. С. 1918.
34. Школьников В. Г., Манькин И. А. Сверхширокополосные сигналы в СВЧ системах. Ч. II. Нестационарная электроника. Усиление сигналов со сплошным спектром в ЛБВ // Обзоры по электронной технике. Сер. 1. Электроника СВЧ. — М.: ЦНИИ «Электроника», 1984.
35. Кац В. А. Возникновение и эволюция хаоса в распределенном генераторе с запаздыванием. Эксперимент // Изв. вузов. Радиофизика. 1985. Т. 28, № 2. С. 161.

36. Кац В. А., Трубецков Д. И. Возникновение хаоса при разрушении квазипериодических режимов и переходе через перемежаемость в распределенном генераторе с запаздыванием // Письма в ЖЭТФ. 1983. Т. 39, № 3. С. 116–119.
37. Bliokh Yu. P., Liybarsky M. G., Podobinsky V. O., Fainberg Ya. B., Granatstein V. L., Carmel Y., Nusinovich G. S. Chaotic oscillations enhanced by magnetosonic waves in plasma-filled travelling-wave tubes // Physics of Plasma. 1998. V. 5, № 11. P. 4061.
38. Рабинович М. И., Трубецков Д. И. Введение в теорию колебаний и волн. — М.—Ижевск: РХД, 2000.
39. Трубецков Д. И., Храмов А. Е. Лекции по сверхвысокочастотной электронике для физиков. Т. 2. — М.: Физматлит, 2004.
40. Четвериков А. П. Периодические и хаотические автоколебания в простых распределенных электронно-волновых системах // Изв. РАН. Сер. физ. 1994. Т. 58, № 8. С. 171.
41. Kou C. S., Chen S. H., Barnett L. R., Chen H. Y., Chu K. R. Experimental study of an injection-locked gyrotron backward-wave oscillator // Phys. Rev. Lett. 1993. V. 70, № 7. P. 924.
42. Grudiev A., Schunemann K. Numerical analysis of an injection-locked gyrotron backward-wave oscillator with tapered sections // Phys. Rev. E. 2003. V. 68. P. 016501.
43. Трубецков Д. И., Короновский А. А., Храмов А. Е. Синхронизация распределенных автоколебательных систем электронно-волновой природы с обратной волной // Изв. вузов. Радиофизика. 2004. Т. XLVII, № 5–6. С. 343–372.
44. Hramov A. E., Koronovskii A. A., Popov P. V., Rempen I. S. Chaotic synchronization of coupled electron-wave systems with backward waves // Chaos. 2005. V. 15, № 1. P. 013705.
45. Бунина В. В., Короновский А. А., Попов П. В., Храмов А. Е. Хаотическая синхронизация в связанных лампах обратной волны с распределенным вводом сигнала // Изв. РАН. Сер. физ. 2005. Т. 69, № 12. С. 1727–1731.
46. Храмов А. Е. К вопросу о синхронизации колебаний в распределенной активной системе «электронный пучок — обратная электромагнитная волна» // Радиотехника и электроника. 2004. Т. 49, № 7. С. 859–868.
47. Дмитриев Б. С., Жарков Ю. Д., Короновский А. А., Попов П. В., Скороходов В. Н., Храмов А. Е. Исследование синхронизации автоколебаний в лампе обратной волны (теория и эксперимент) // ЖТФ. 2007. Т. 77, № 9. С. 108–114.
48. Дмитриев А. Ю., Трубецков Д. И., Четвериков А. П. Нестационарные процессы при взаимодействии винтового электронного пучка со встречной волной в волноводе // Изв. вузов. Радиофизика. 1991. Т. 34, № 9. С. 595.
49. Nusinovich G. S., Vlasov A. N., Antonsen T. M. Nonstationary phenomena in tapered gyro-backward-wave oscillators // Phys. Rev. Lett. 2001. V. 87, № 21. P. 218301.

50. *Короновский А. А., Трубецков Д. И., Храмов А. Е.* Влияние внешнего сигнала на автоколебания распределенной системы винтовой электронный пучок — встречная электромагнитная волна // Изв. вузов. Радиофизика. 2002. Т. XLV, № 9. P. 773–792.
51. *Короновский А. А., Трубецков Д. И., Храмов А. Е.* Исследование колебаний в гирогенераторе со встречной волной и связанными электродинамическими системами // ЖТФ. 2003. Т. 73, № 6. С. 110–117.
52. *Короновский А. А., Храмов А. Е.* О возможности увеличения порога автомодуляции в гирогенераторе со встречной волной и связанными электродинамическими системами // Письма в ЖТФ. 2003. Т. 29, № 4. С. 63–70.
53. *Короновский А. А., Трубецков Д. И., Храмов А. Е.* Совместные колебания, включая режимы синхронизации, в гирогенераторах со встречной волной и связанными линиями передачи // Радиотехника и электроника. 2004. Т. 49, № 9. С. 1118–1127.
54. *Трубецков Д. И., Анфиногентов В. Г., Рыскин Н. М., Титов В. Н., Храмов А. Е.* Сложная динамика электронных приборов СВЧ (нелинейная нестационарная теория с позиций нелинейной динамики) // Радиотехника. 1999. Т. 63, № 4. С. 61–68.
55. *Pierce J. R.* Limiting currents in electron beam in presence ions // J. Appl. Phys. 1944. Т. 15. С. 721.
56. *Godfrey B. B.* Oscillatory nonlinear electron flow in Pierce diode // Phys. Fluids. 1987. V. 37. P. 1553.
57. *Kuhn S., Ender A.* Oscillatory nonlinear flow coherent structures in Pierce-type diodes // J. Appl. Phys. 1990. V. 68. P. 732.
58. *Анфиногентов В. Г., Трубецков Д. И.* Хаотические колебания в гидродинамической модели диода Пирса // Радиотехника и электроника. 1992. Т. 37. С. 2251.
59. *Hramov A. E., Rempen I. S.* Investigation of the complex dynamics regime control in Pierce diode with the delay feedback // Intern. J. Electronics. 2004. V. 91, № 1. P. 1–12.
60. *Bridges W. B., Birdsall C. K.* Space-charge instabilities in electron diodes. I // J. Appl. Phys. 1961. V. 32. P. 2611.
61. *Bridges W. B., Birdsall C. K.* Space-charge instabilities in electron diodes. II // J. Appl. Phys. 1963. V. 34, № 10. P. 2946.
62. *Vuneman O., Yu S. P., Kouyers G. P.* Time-dependent computer analysis of electron-wave interaction in crossed fields // J. Appl. Phys. 1965. V. 35, № 8. P. 2550–2559.
63. *Hramov A. E., Koronovskii A. A., Rempen I. S.* Controlling chaos in spatially extended beam-plasma system by the continuous delayed feedback // Chaos. 2006. V. 16, № 1. P. 013123.
64. *Рухадзе А. А., Столбецов С. Д., Тараканов В. П.* Виркаторы (обзор) // Радиотехника и электроника. 1992. Т. 37, № 3. С. 385.
65. *Дубинов А. Е., Селемир В. Д.* Электронные приборы с виртуальным катодом // Радиотехника и электроника. 2002. Т. 47, № 6. С. 575.

66. *Birdsall C. K., Langdon A. B.* Plasma physics, via computer simulation. — N. Y: McGraw-Hill, 1985.
67. *Anderson T. M., Mondelli A. A., Levush B., Verboncoeur J. P., Birdsall C. K.* Advances in modelling simulation of vacuum electron devices // Proc. IEEE. 1999. V. 87, № 5. P. 804–839.
68. *Анфиногентов В. Г.* Хаотические колебания в электронном потоке с виртуальным катодом // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1994. Т. 2, № 5. С. 69.
69. *Trubetskov D. I., Mchedlova E. S., Anfinogentov V. G., Ponomarenko V. I., Ryskin N. M.* Nonlinear waves, chaos patterns in microwave devices // Chaos. 1996. V. 6, № 3. P. 358.
70. *Barkhausen H., Kurz K.* Die kürzesten, mit vacuumröhren herstellbaren wellen // Phys Zs. 1920. Bd. 21, Nr. 1. S. 1.
71. *Шевчик В. Н., Шведов Г. Н., Соболева А. Н.* Волновые и колебательные явления в электронных потоках на сверхвысоких частотах. — Саратов: Изд-во Саратовск. ун-та, 1962.
72. *Дубинов А. Е., Ефимова И. А.* // ЖТФ. 2003. Т. 73, № 9. С. 126.
73. *Диденко А. Н.* Механизм генерации мощных СВЧ колебаний в виркаторе // ДАН СССР. 1991. Т. 321, № 4. С. 727.
74. *Brandt H. E.* The turbutron // IEEE Trans. Plasma Sci. 1985. V. 13, № 6. P. 513.
75. *Анфиногентов В. Г., Храмов А. Е.* К вопросу о механизме возникновения хаотической динамики в вакуумном СВЧ генераторе на виртуальном катоде // Изв. вузов. Радиофизика. 1998. Т. XLI, № 9. С. 1137–1146.
76. *Храмов А. Е.* Хаос и образование структур в электронном потоке с виртуальным катодом в ограниченном пространстве дрейфа // Радиотехника и электроника. 1999. Т. 44, № 5. С. 551–556.
77. *Егоров Е. Н., Храмов А. Е.* Исследование хаотической динамики в электронном пучке с виртуальным катодом во внешнем магнитном поле // Физика плазмы. 2006. Т. 32, № 8. С. 742–754.
78. *Калинин Ю. А., Короновский А. А., Храмов А. Е., Егоров Е. Н., Филатов Р. А.* Экспериментальное и теоретическое исследование хаотических колебательных явлений в нерелятивистском электронном потоке с виртуальным катодом // Физика плазмы. 2005. Т. 31, № 11. С. 1009–1025.
79. *Егоров Е. Н., Калинин Ю. А., Левин Ю. И., Трубецков Д. И., Храмов А. Е.* Вакуумные генераторы широкополосных хаотических колебаний на основе нерелятивистских электронных пучков с виртуальным катодом // Изв. РАН. Сер. физ. 2005. Т. 69, № 12. С. 1724.
80. *Афанасьева В. В., Лазерсон А. Г.* Динамический хаос в двухрезонаторных клистронных генераторах с запаздывающей обратной связью // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1995. Т. 3, № 5. С. 88.
81. *Дмитриев Б. С., Жарков Ю. Д., Рыскин Н. М., Шигаев А. М.* Теоретическое и экспериментальное исследование хаотических колебаний клистронного генератора с запаздыванием // Радиотехника и электроника. 2001. Т. 46, № 5. С. 604.

82. *Shigaev A.M., Dmitriev B.S., Zharkov Yu.D., Ryskin N.M.* Chaotic dynamics of delayed feedback klystron oscillator its control by external signal // IEEE Transactions on Electron Devices. 2005. V.52, №5. P.790–797.
83. *Дмитриев Б.С., Жарков Ю.Д., Клокотов Д.В., Рыскин Н.М.* Экспериментальное исследование сложной динамики в многорезонаторном клистронном автогенераторе с запаздывающей обратной связью // ЖТФ. 2003. Т.73, №7. С.105.
84. *Скорыходов В.Н., Семеновых П.Ю., Бирюков А.А., Дмитриев Б.С., Жарков Ю.Д.* Каскадный клистронный автогенератор с запаздыванием // ЖТФ. 2005. Т.75, №12. С.94.
85. *Стародубов А.В., Короновский А.А., Храмов А.Е., Жарков Ю.Д., Дмитриев Б.С.* Исследование обобщенной синхронизации в системе двух связанных клистронных автогенераторов хаоса // Письма в ЖТФ. 2007. V.33, №14. P.58.
86. *Dmitriev B.S., Hramov A.E., Koronovskii A.A., Starodubov A.V., Trubetskov D.I., Zharkov Y.D.* First Experimental Observation of Generalized Synchronization Phenomena in Microwave Oscillators // Phys. Rev. Lett. 2009. V.102, №7. P.074101.
87. *Пономаренко В.И., Трубецков Д.И.* Сложная динамика автогенератора на вакуумном микротриоде: вычислительный и аналоговый эксперименты на радиотехнической модели // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1994. Т.2, №6. С.56–65.

## Глава 2

# ХАОТИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ И УПРАВЛЕНИЕ ИМИ В ДИОДЕ ПИРСА

А. А. Короновский, И. С. Ремпен, А. Е. Храмов

Показательна история управления хаосом. В 1990 г. появилась статья Э.Отта, Ч.Гребоджи и Дж.Йорке... «Управление хаосом», которая вызвала настоящий взрыв публикаций. По данным журнала Science Citation Index в начале 2000-х годов по этой тематике публиковалось более 400 статей в год, а их общее число перевалило за 3000. В статье [Э.Отта с соавторами] был сделан вывод, что даже малое управление в виде обратной связи, приложенное к нелинейной (хаотически колеблющейся) системе, может коренным образом изменить ее динамику и свойства, например, превратить хаотическое движение в периодическое... Развитие методов управления хаотическими процессами стимулировалось новыми потребностями появившихся приложений в лазерных и химических технологиях, технике телекоммуникаций, биологии и медицине.

Фрадков А. Л. О применении кибернетических методов в физике // УФН. 2005. Т. 175, № 2. С. 114.

*Гидродинамическая модель диода Пирса. Управление колебаниями в диоде Пирса с использованием запаздывающей обратной связи. Стабилизация неустойчивого состояния равновесия с помощью непрерывной обратной связи. Неустойчивые периодические пространственно-временные состояния. Стабилизация неустойчивых периодических состояний с помощью непрерывной обратной связи.*

В этой главе пойдет речь об одной из важных моделей пучково-плазменной электроники — диоде Пирса, который позволяет при анализе некоторых режимов колебаний в электронном потоке ограничиться гидродинамическим описанием [1–4]. Эта модель интересна тем,

что, несмотря на ее относительную простоту, демонстрирует многие нелинейные явления, включая динамический хаос, классический сценарий перехода к хаотической динамике, перестройку хаотического аттрактора с изменением управляющего параметра, синхронизацию хаотических колебаний. Все это делает диод Пирса удобной базовой моделью пучково-плазменной системы для применения методов нелинейной динамики к анализу сложного поведения пространственно-распределенных автоколебательных систем, а также для изучения методов управления сложными пространственно-временными колебаниями.

Наиболее важным свойством систем различной природы, демонстрирующих хаотическую динамику, является невозможность предсказать их поведение на длительных временах эволюции. Одновременно, наличие хаотической динамики в той или иной динамической системе может стать серьезной трудностью в ряде приложений, когда необходимо устойчивое поведение во времени или пространстве. Одним из способов подавления хаотической динамики с сохранением важных особенностей поведения системы и возможностью предсказания ее динамики на любых интервалах времени является использование схем управления хаосом с помощью различных типов обратной связи. В идеальном случае обратная связь должна представлять очень слабое возмущение динамики системы (то есть сигнал в цепи обратной связи должен быть сравним с уровнем шумов), так чтобы важные особенности поведения систем были сохранены.

В уже ставшей классической работе E. Ott, C. Grebogy, J. Yorke (OGY) [5] было показано, что неустойчивые периодические орбиты, составляющие «скелет» хаотического аттрактора динамической системы с малым числом степеней свободы [6], могут быть использованы для управления динамикой нелинейной системы, причем стабилизация неустойчивой периодической орбиты требует весьма малого возмущения поведения системы. В [5] предложен алгоритм управления, который определяет методику изменения управляющего параметра  $\zeta$  хаотической системы. Управление параметром осуществляется в дискретные моменты времени, когда фазовая траектория системы проходит через выбранное сечение Пуанкаре (в некоторой точке  $x$ ), чтобы направить ее к стабилизируемой неустойчивой орбите, которой в сечении Пуанкаре соответствует неустойчивая неподвижная точка  $x_0$ . Величина и знак необходимого для стабилизации изменения параметра  $\Delta\zeta_n$  на  $n$ -м прохождении системы через сечение Пуанкаре, которое может рассматриваться как сигнал некоторой обратной связи, определяется из линейной теории, когда текущее состояние системы  $x_n$  находится в окрестности неподвижной точки  $x_0$ :

$$\Delta\zeta_n = \frac{\lambda_u}{\lambda_u - 1} \frac{\Delta x_n \cdot \mathbf{f}_n}{(\partial x_0 / \partial \zeta) \cdot \mathbf{f}_u}. \quad (2.1)$$

Здесь  $\lambda_u$  и  $\mathbf{f}_u$  — собственное значение и сопряженный собственный вектор неустойчивого многообразия неустойчивой неподвижной точки

$x_0$ ,  $\Delta x_n = x_n - x_0$  — отклонение траектории  $x$  системы от неустойчивой неподвижной точки, соответствующей периодической орбите.

Дискретная коррекция (2.1) управляющего параметра, пропорциональная величине  $\Delta x$ , производится только тогда, когда фазовая траектория пересекает выбранное сечение Пуанкаре. Эту коррекцию нужно реализовывать до тех пор, пока необходимо поддерживать нахождение системы на неустойчивой периодической орбите. Последнее связано с тем, что присутствующие шумы уводят систему от неустойчивой периодической орбиты, что требует компенсации подобного ухода в течение всего времени стабилизации. Показано, что алгоритм OGY достаточно груб к наличию шумов и неточным знаниям о динамической системе (последнее, например, имеет место в эксперименте) и может быть применен к системам с конечным числом степеней свободы [7], в том числе и к системам с достаточно большой размерностью фазового пространства.

Очевидно, что весьма проблематично применить алгоритм OGY к управлению хаотической динамикой высокочастотных распределенных пучково-плазменных систем, так как он требует точного определения состояния системы и затем резкого изменения параметров системы в момент прохождения сечения Пуанкаре по всей длине пространственно-распределенной хаотической системы<sup>1)</sup>. В этом случае более перспективно применение алгоритма стабилизации неустойчивых периодических орбит, впервые предложенного для хаотических систем с малым числом степеней свободы К. Ругагас в работе [9]. В этом случае используется *непрерывная* [10], а не дискретная (2.1) резкоизменяющаяся обратная связь, что делает такую схему более подходящей для управления высокочастотной пространственно-временной хаотической динамикой. Схема К. Ругагас предполагает синхронизацию системы с ее сдвинутым на один период орбиты в прошлое состоянием посредством непрерывного изменения доступного управляющего параметра  $\varepsilon$ , равного по величине

$$\varepsilon(t) = \gamma(\xi(t) - \xi(t - T)), \quad (2.2)$$

где  $\xi(t)$  — анализируемая переменная системы;  $\gamma$  — коэффициент обратной связи и  $T$  — период стабилизируемой неустойчивой периодической орбиты. В случае, когда стабилизация неустойчивой орбиты произошла, сигнал обратной связи  $\varepsilon(t)$  сравним с уровнем шумов в системе. Важно то, что вся требуемая для стабилизации орбиты информация, исключая информацию о периоде  $T$  неустойчивой орбиты

---

<sup>1)</sup> Здесь можно сослаться на единственную известную авторам теоретическую работу по управлению хаосом с помощью алгоритма OGY в распределенной сверхвысокочастотной пучковой системе с виртуальным катодом [8] (см. также [1, Т. 1, Л. 9]). Из знакомства с работой становится понятно, что практическая реализация подобной схемы применительно к распределенной ВЧ электронной активной системе весьма затруднительна.

и необходимом коэффициенте обратной связи  $\gamma$ , содержится в измеряемом временном ряде  $\xi(t)$ , т. е. определяется автоматически в реальном времени. Применение подобной схемы управления хаосом с непрерывной обратной связью теоретически и экспериментально анализировалось применительно к управлению хаосом в различных физических системах и моделях [11–13], в том числе и распределенных, включая лазеры [14] и модели процессов типа «реакция–диффузия» [15]. Среди подобных исследований особо отметим работы [13, 15]. Так, в [13] исследовалась задача об управлении пространственно-временным хаосом в модели Гинзбурга–Ландау с помощью большого (но конечного) числа малых локальных возмущений. Подобная техника позволила как стабилизировать неустойчивые структуры хаотической пространственно-временной динамики, так и синхронизовать два хаотических состояния. В [15] рассматривалось управление хаотической генерацией импульсов в модели глобально связанных реакционно-диффузионных систем, используемых для описания процессов динамики переноса заряда в бистабильном полупроводнике. При управлении данным способом распределенными системами сигнал непрерывной обратной связи предполагается пространственно однородным, т. е. возмущение, вносимое в каждую точку пространства, одинаково. Последнее делает реализацию подобной схемы управления хаосом на практике применительно к пучково-плазменным системам достаточно затруднительной.

В данной главе мы рассмотрим различные подходы к управлению пространственно-временными хаотическими колебаниями в гидродинамической модели диода Пирса с учетом особенностей, присущих электронно-волновым системам в диапазоне сверхвысоких частот.

## 2.1. Гидродинамическая модель диода Пирса

Диод Пирса представляет собой две бесконечные плоские параллельные сетки, пронизываемые моноэнергетическим на входе электронным потоком. Сетки, ограничивающие систему, заземлены и находятся на расстоянии  $L$  друг от друга. Плотность заряда  $\rho_0$  и скорость  $v_0$  на входе в систему поддерживаются постоянными. Пространство между сетками равномерно заполнено нейтрализующим фоном неподвижных ионов с плотностью заряда  $|\rho_i/\rho_0| = 1$ . Динамика подобной системы определяется единственным управляющим параметром

$$\alpha = \frac{\omega_p L}{v_0}, \quad (2.3)$$

называемым параметром Пирса, представляющим собой угол пролета электронов в диодном промежутке по плазменной частоте  $\omega_p$ .

Динамика электронного потока в диоде Пирса в рамках гидродинамического приближения описывается самосогласованной системой

уравнений движения, непрерывности и Пуассона относительно безразмерных переменных [1]

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + v \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \alpha^2 (\rho - 1), \quad (2.6)$$

с граничными условиями:

$$v(0, t) = 1, \quad \rho(0, t) = 1, \quad \varphi(0, t) = \varphi(1, t) = 0. \quad (2.7)$$

В уравнениях (2.4)–(2.7) гидродинамической теории диода Пирса использованы безразмерные переменные потенциала поля пространственного заряда  $\varphi$ , плотности заряда  $\rho$ , скорость электронного потока  $v$ , пространственной координаты  $x$  и времени  $t$ , которые связаны с соответствующими размерными переменными соотношениями  $\varphi' = (v_0^2/\eta)\varphi$ ,  $\rho' = \rho_0\rho$ ,  $v' = v_0v$ ,  $x' = Lx$ ,  $t' = (L/v_0)t$ , где штрихом обозначены размерные величины,  $\eta$  — удельный заряд электрона.

Устойчивое состояние электронной жидкости в пролетном промежутке с нейтрализующим ионным фоном, как было впервые показано J. Pierce [16], теряет устойчивость при  $\alpha > \pi$ , в результате чего в системе формируется виртуальный катод. Вместе с тем, в узком диапазоне параметра Пирса в окрестности  $\alpha \sim 3\pi$  рост неустойчивости подавляется нелинейностью в системе, и в пролетном промежутке со сверхкритическим током наблюдается режим полного прохождения потока, что позволяет описать динамику потока в рамках гидродинамического подхода [1, Т.1, Л.4].

В последнем случае в узкой области значений  $\alpha$ , соответствующих динамике электронного потока без отражений, система демонстрирует хаотические колебания [1, 3, 17]. Возникновению хаотической динамики предшествует последовательность бифуркаций удвоения периода, что иллюстрирует рис. 2.1, на котором представлена бифуркационная диаграмма колебаний плотности пространственного заряда  $\rho$  в сечении системы  $x = 0,2$ . При уменьшении параметра Пирса  $\alpha$  от  $2,88\pi$  до  $2,86\pi$  рассматриваемая модель демонстрирует переход от регулярной динамики к хаотической через каскад удвоений периода, завершающийся установлением слабохаотических колебаний с четко выраженным временным масштабом (так называемый режим ленточного хаоса). С дальнейшим уменьшением величины управляющего параметра  $\alpha$  происходит перестройка хаотических колебаний в системе: колебания существенно усложняются, исчезает четко выделенный временной масштаб колебаний, усложняется спектральный состав колебаний электронного потока (режим спирального хаоса).

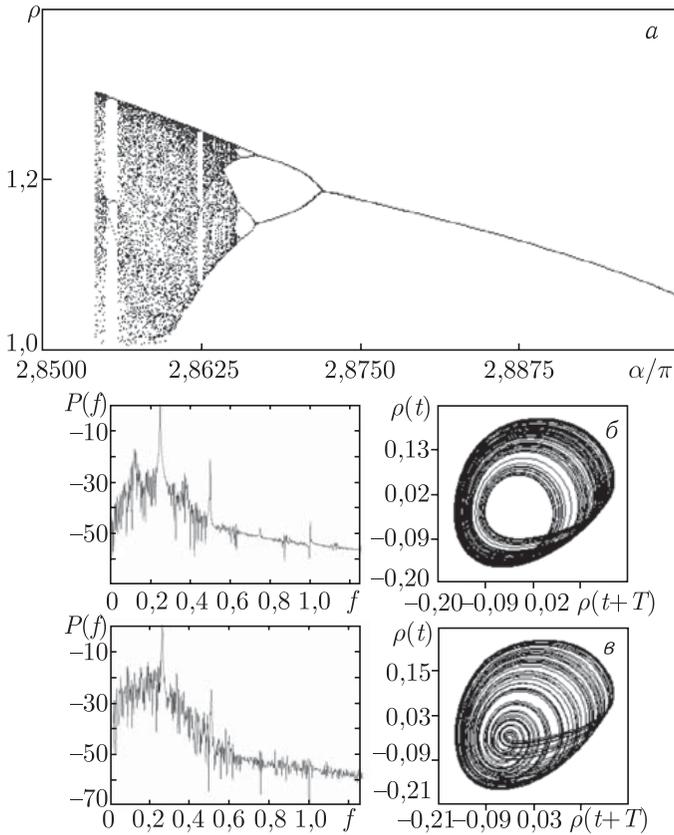


Рис. 2.1. Бифуркационная диаграмма колебаний электронного потока при изменении параметра Пирса  $\alpha$  (а). Вид фазовых портретов и спектров мощности для режима «ленточного»  $\alpha = 2,862\pi$  (б) и «спирального» хаоса  $\alpha = 2,857\pi$  (в)

Рассмотрим последовательно различные способы, которые были предложены в работах [18–21] для управления колебательными процессами в диоде Пирса. Вначале мы рассмотрим наиболее простую схему, основанную на использовании запаздывающей обратной связи, которая подключается к диоду Пирса и позволяет определенным образом перестраивать динамические режимы в системе [18, 20, 22]. Тем не менее, это еще не схема управления хаосом в классическом понимании, так как сигнал в цепи обратной связи весьма велик, то есть мы не имеем дело со стабилизацией неустойчивых периодических состояний диода Пирса. Поэтому далее мы остановимся на более сложных схемах управления хаосом в диоде Пирса [19, 21, 23], которые основаны на схеме непрерывной обратной связи (2.2). Рассмотрение данных вопросов невозможно без обсуждения методов выделения неустойчивых пространственно-временных периодических состояний динамики диода Пирса, на чем мы также остановимся в этой главе.

## 2.2. Управление колебаниями в диоде Пирса с использованием запаздывающей обратной связи

Одним из простейших способов влияния на поведение динамической системы является введение в систему запаздывающей обратной связи. В диод Пирса внешняя обратная связь может быть введена путем модуляции разности потенциалов между входной и выходной сетками диода сигналом, снимаемым из некоторого сечения  $x_{OC}$  пространства взаимодействия. В качестве такого сигнала использовались колебания плотности пространственного заряда  $\rho(x_{OC}, t)$ . Введение такого рода обратной связи может быть рассмотрено как подключение к пространству взаимодействия цепи (волновода) обратной связи с линией задержки. В этом случае цепь обратной связи возбуждается колебаниями в электронном потоке. Сигнал, прошедший через линию задержки, подается в пространство взаимодействия.

В модели введение запаздывающей обратной связи приводит к изменению граничного условия для потенциала на правой границе системы (2.4)–(2.7)

$$\varphi(1, t) = f_{\text{fb}}(t) = A(\rho(x_{OC}, t - d) - \rho_0) \quad (2.8)$$

Здесь  $A$  — коэффициент обратной связи, характеризующий, какая часть мощности колебаний ответвляется в цепь обратной связи;  $d$  — запаздывание в цепи обратной связи, точка подключения обратной связи  $x_{OC}$  в пространстве взаимодействия выбрана равной  $x_{OC} = 0,2$ .

На рис. 2.2 можно видеть карту режимов рассматриваемой системы на плоскости управляющих параметров  $d$  и  $A$  при  $\alpha = 2,86\pi$ , соответствующем режиму «спирального» хаоса. Для сравнения отметим, что характерный временной масштаб колебаний в потоке без обратной связи в безразмерных единицах времени  $\tau = 4,06$ . Символами  $T_n$  на плоскости управляющих параметров обозначены области периодических колебаний с циклами периода  $n$ .

При малых значениях коэффициента обратной связи  $A \ll 1$  в системе наблюдаются хаотические колебания, аналогичные колебаниям в диоде без обратной связи. Увеличение коэффициента  $A$  приводит к различному поведению в зависимости от длительности запаздывания в цепи обратной связи. При запаздывании  $d > \tau/2$  с увеличением  $A$  наблюдается увеличение сложности колебаний в электронном потоке. Характер хаотической динамики качественно не меняется, однако вид спектра мощности, фазового портрета и временной реализации усложняется; возрастает амплитуда колебаний в электронном потоке. Дальнейшее увеличение коэффициента обратной связи приводит к качественно иной динамике системы. Амплитуда колебаний быстро растет с течением времени, и начиная с какого-то момента в потоке возникают отраженные электроны — в системе возникает колеблющийся во времени и пространстве виртуальный катод, от которого отражается часть электронного потока обратно к плоскости инжекции. Формирование

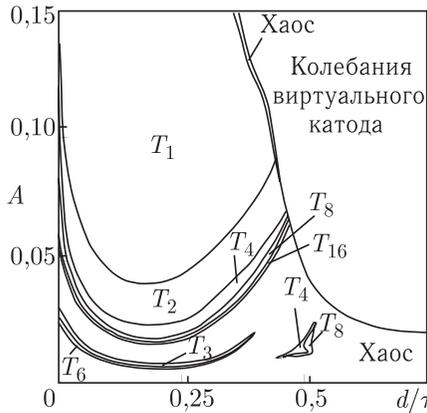


Рис. 2.2. Карта режимов на плоскости параметров обратной связи ( $A$ ,  $d$ ). Длительность задержки  $d$  нормирована на характерный временной масштаб колебаний  $\tau$

виртуального катода в потоке определяется следующим механизмом. Колебательная динамика в диоде Пирса определяется двумя основными механизмами — развитием неустойчивости Пирса и ограничением ее нелинейностью. Введение обратной связи с  $d > \tau/2$  и  $A > 0,02$  способствует разрушению механизма нелинейного ограничения и, как следствие, неограниченному росту неустойчивости, заканчивающемуся формированием виртуального катода. Гидродинамическая модель корректно описывает процессы в потоке только при отсутствии в нем обгонов и отражений частиц, в противном случае уравнения (2.4)–(2.7) становятся несправедливыми.

В отличие от предыдущего случая, при длительности запаздывания  $d < \tau/2$  с ростом  $A$  сложность колебаний в электронном потоке уменьшается. В достаточном широком диапазоне параметров обратной связи удастся подавить хаотические колебания, и в системе устанавливаются периодические режимы колебаний. На рис. 2.2 легко проследить особенности переходов от одних режимов к другим при изменении управляющих параметров. При небольших коэффициентах  $A$  колебания в диоде остаются хаотическими, однако их сложность, оцениваемая по виду фазового портрета, уменьшается по сравнению с колебаниями в диоде без обратной связи. С ростом  $A$  в хаосе возникают окна периодичности, и при  $A > 0,03$  имеет место переход к периодическим колебаниям через обратный каскад удвоений периода. Границы областей циклов периода  $T_{16}$ ,  $T_8$ ,  $T_4$ ,  $T_2$  и  $T_1$  показаны на плоскости управляющих параметров. Заметим, что с ростом коэффициента  $A$  амплитуда колебаний в системе уменьшается: максимальная амплитуда колебаний плотности заряда  $\rho(x, t)$  монотонно падает, стремясь к невозмущенному значению  $\rho_0$ . Таким образом, введение запаздывающей обратной связи с малой длительностью задержки приводит к возникновению периодических колебаний вблизи неустойчивого состояния равновесия системы.

Перейдем к анализу физических процессов, протекающих в электронном потоке и определяющих такую динамику системы. Исследование распространения электронных волн в диодном промежутке показывает [17, 20], что динамика потока в основном определяется близостью системы к однородному состоянию равновесия, соответствующему следующим распределениям, характеризующим динамику системы величин в безразмерном виде:

$$\bar{v}(x) = 1,0, \quad \bar{\rho}(x) = 1,0, \quad \bar{\varphi}(x) = 0,0. \quad (2.9)$$

«Расстояние» между текущим состоянием системы и неустойчивым равновесием может быть определено как

$$S(t) = \left( \int_0^1 ((\rho(x, t) - \rho_0)^2 + (v(x, t) - v_0)^2 + (\varphi(x, t) - \varphi_0)^2) dx \right)^{1/2}. \quad (2.10)$$

Рис. 2.3 иллюстрирует изменения величины отклонения системы от неустойчивого состояния равновесия с течением времени в случае хаотических и регулярных колебаний системы с обратной связью. Можно видеть, что в первом случае система в некоторые моменты времени очень близко подходит к состоянию равновесия ( $S(t) \approx 0$ ). Далее за счет неустойчивости происходит нарастание колебаний до ограничения их нелинейностью. Далее процесс повторяется. Однако, всякий раз  $S$  оказывается различным, также различными оказываются пространственные распределения величин около состояния равновесия. По этой причине развитие неустойчивости начинается каждый раз с новых начальных условий и динамика системы сильно нерегулярна.

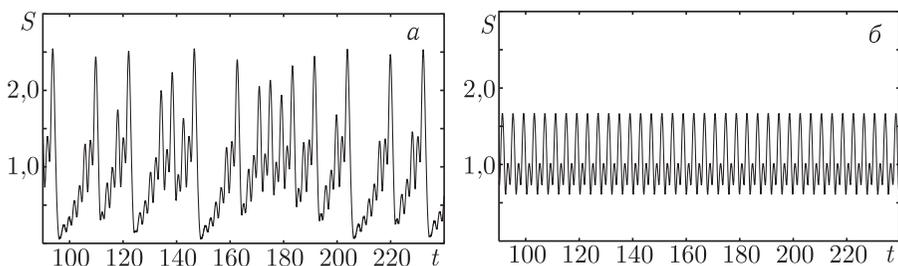


Рис. 2.3. Изменение во времени расстояния между текущим состоянием системы и состоянием равновесия  $S(t)$  для хаотических (режим спирального хаоса) (а) и регулярных (цикл периода 1) (б) колебаний системы с обратной связью

Степень нелинейности системы можно проанализировать путем вычисления нелинейных энергетических функционалов

$$W_k = \frac{1}{2} (\rho v^2) dx - \frac{1}{2}, \quad W_p = \frac{1}{2} (\rho \varphi) dx, \quad (2.11)$$

которые соответственно описывают переход энергии основного движения потока в кинетическую энергию волнового возмущения пучка и потенциальную энергию поля пространственного заряда. Для режимов

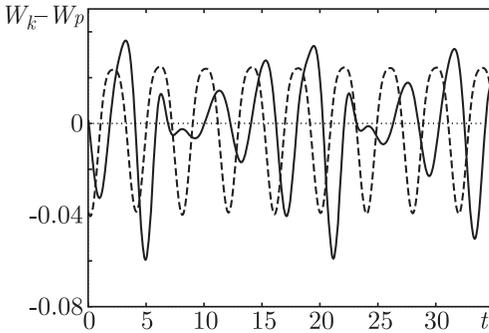


Рис. 2.4. Изменение во времени разности энергий  $\Delta W(t) = W_p - W_k$  для режима «спирального» хаоса (пунктирная линия) и «ленточного» хаоса (сплошная линия)

хаотической динамики максимальные значения функционалов больше, чем для регулярных процессов, что указывает на большую степень нелинейности в режиме развитого хаоса. На рис. 2.4 приведены зависимости от времени величины  $\Delta W(t) = W_p - W_k$ , которая характеризует преобразования различных видов энергии в процессе колебательно-волновой динамики в пучке. В режиме периодической динамики видно (штриховая линия на рис. 2.4, что энергия регулярно переходит из кинетической в потенциальную, причем максимумы зависимости соответствуют накоплению заряда в диодном промежутке.

Как можно видеть на рис. 2.4, в режиме хаотической динамики существуют определенные моменты времени, когда  $\Delta W(t) \approx 0$ , что соответствует положению системы возле состояния неустойчивого равновесия. Далее энергия волнового движения опять начинает нарастать во времени. Уменьшение энергии возмущения и длительное движение около состояния неустойчивого равновесия наблюдается только после резкого возрастания величины  $\Delta W$ . Физически это связано с тем, что в этом случае в пучке возникает стоячая электронная волна, плотность пространственного заряда которой в области выходной сетки резко возрастает. Тогда тормозящее поле этого электронного уплотнения сильно уменьшает скорость пучка ниже по координате, и, как следствие, диодный промежуток покидает значительно большее количество электронов, чем поступает в него. В результате распределения величин становятся близкими к состоянию равновесия. Далее процесс повторяется, но уже с новых «начальных условий».

После включения обратной связи вышеописанный процесс нарушается. При длительности задержки  $d < \tau/2$  сигнал обратной связи действует так, что способствует уменьшению накопления заряда в выходной области диода и ускорению пучка в моменты времени, когда имеет место максимум величины  $\Delta W(t)$ . В результате рост амплитуды электронных волн, распространяющихся в пучке, ограничивается, и, как следствие этого, степень нелинейности уменьшается: система не приближается к состоянию неустойчивого равновесия. При  $d > \tau/2$ ,

наоборот, сигнал обратной связи способствует росту амплитуды электронных волн, и как следствие, за счет вышеописанного механизма наблюдается усложнение динамики пучка, а при больших  $A$  происходит образование виртуального катода.

### 2.3. Стабилизация неустойчивого состояния равновесия с помощью непрерывной обратной связи

Перейдем теперь к описанию методов управления хаотической динамикой в гидродинамической модели диода Пирса. Как уже говорилось выше, исследуемая система (2.4)–(2.7) имеет неустойчивое однородное состояние равновесия, определяемое соотношениями (2.9). Для стабилизации этого неустойчивого состояния использовалась схема управления пространственно-временным хаосом с помощью непрерывной внешней обратной связи [21, 24], которая осуществлялась с помощью изменения значения потенциала на правой границе системы по закону:

$$\varphi(x = 1, 0, t) = f_{\text{fb}}(t) = K(\rho(x_{\text{fix}}, t) - \rho(x_{\text{fix}}, t - d)), \quad (2.12)$$

где  $K$  — коэффициент обратной связи и  $d$  — длительность задержки в цепи обратной связи. В формуле (2.12) величина  $\rho(x_{\text{fix}}, t)$  представляет собой колебания плотности пространственного заряда в некоторой фиксированной точке  $x = x_{\text{fix}} = 0,2$  пространства. В случае установления режима стабилизации неустойчивого состояния, когда система находится точно в неустойчивом состоянии равновесия, сигнал обратной связи  $f_{\text{fb}}$  сравним с уровнем шумов.

Результаты по стабилизации неустойчивого состояния равновесия в распределенной автоколебательной пучково-плазменной системе (2.4)–(2.7) с помощью схемы с непрерывной обратной связью (2.12) представлены на рис. 2.5. Показаны временные реализации колебаний плотности  $\rho(x_{\text{fix}}, t)$  пространственного заряда нестабилизируемой системы, колебаний плотности  $\rho_s(x_{\text{fix}}, t)$  заряда в стабилизируемой системе (при включении обратной связи) и сигнала  $f_{\text{fb}}(t)$  в цепи непрерывной обратной связи с параметрами  $K = 0,8$  и  $d = 0,15$ . Стрелкой и штриховой линией показаны моменты времени включения обратной связи. До момента включения обратной связи система демонстрирует хаотические колебания со значительной амплитудой. Однако после включения обратной связи в распределенной автоколебательной системе наблюдается быстрое уменьшение амплитуды колебаний, заканчивающееся стабилизацией неустойчивого состояния равновесия (2.9). После короткого переходного процесса управляющий сигнал в цепи обратной связи относительно мал по сравнению с сигналом до начала стабилизации (он составляет менее 0,01 % по амплитуде). Последнее означает, что в системе реализуется управление хаосом (стабилизация

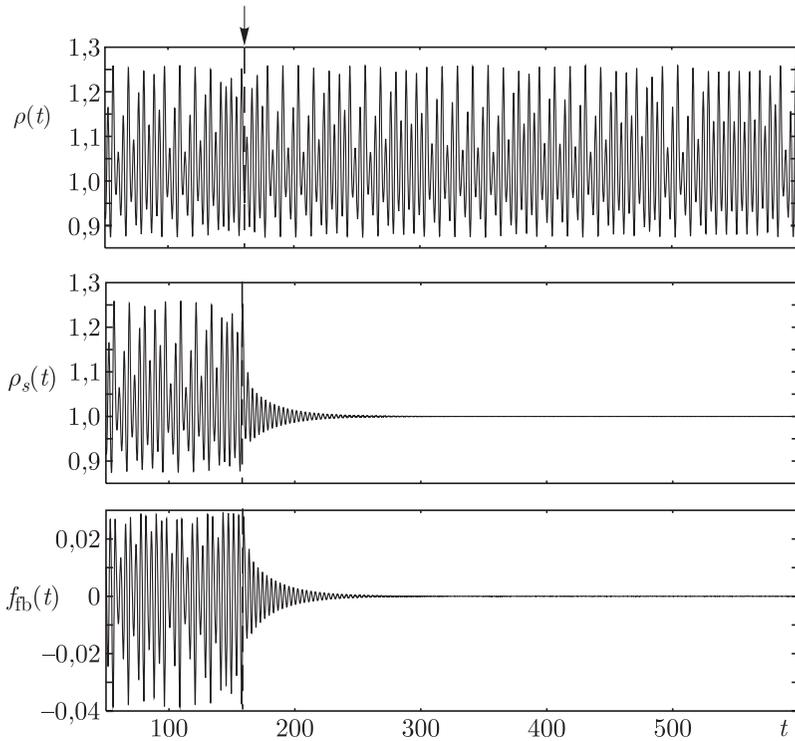


Рис. 2.5. Временные реализации колебаний плотности  $\rho(x_{\text{fix}}, t)$  пространственного заряда нестабилизируемой системы, колебаний плотности  $\rho_s(x_{\text{fix}}, t)$  заряда в стабилизируемой системе (при включении обратной связи) и сигнала  $f_{\text{fb}}(t)$  в цепи непрерывной обратной связи

неустойчивого состояния системы) за счет обратной связи с относительно малой амплитудой управляющего сигнала.

Область управляющих параметров обратной связи на плоскости  $(K, d)$ , в которой возможно управление хаосом в пучково-плазменной системе, показана на рис. 2.6. При малых коэффициентах обратной связи  $K$  в системе имеют место хаотические колебания, подобные наблюдающимся в системе без управляющей обратной связи (область  $C$  на рис. 2.6). С ростом величины  $K$  наблюдается разрушение хаотических колебаний и установление периодических автоколебаний (область  $P$ ). При этом сигнал обратной связи не мал, поэтому данный режим динамики нельзя считать режимом управления хаосом. С дальнейшим увеличением параметра  $K$  имеет место установление режима управления хаосом (заштрихованная область  $S$ ), когда в системе стабилизируется неустойчивое состояние равновесия и система ведет себя так, как это изображено на рис. 2.5. Ширина области, в которой возможно управление хаосом, на карте режимов сильно зависит от длительности задержки  $d$ . Существуют пороговые значения длительностей  $d_1$  и  $d_2$ ,

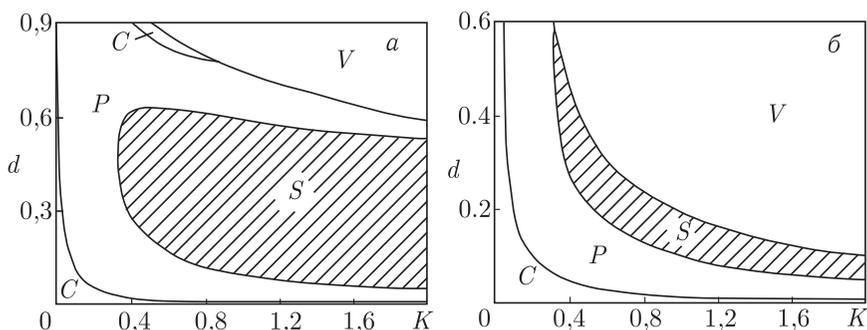


Рис. 2.6. Карты режимов колебаний в стабилизируемой внешней непрерывной обратной связью распределенной системе на плоскости управляющих параметров  $(K, d)$  для (а) режима ленточного хаоса ( $\alpha = 2,862\pi$ ) и (б) спирального хаоса ( $\alpha = 2,857\pi$ ). Заштрихована область стабилизации неустойчивого состояния равновесия

так что только в диапазоне  $d \in (d_1, d_2)$  наблюдается установление режима стабилизации неустойчивого состояния равновесия.

При больших величинах  $d$  и  $K$  возникают отражения электронов в пучке (область  $V$  на рис. 2.6), когда исходные уравнения гидродинамической теории диода Пирса оказываются неприменимы [1].

Анализ устойчивости состояния исследуемой распределенной системы с управляемой обратной связью возможно провести с помощью расчета ляпуновского показателя  $\Lambda$  стабилизируемой хаотической си-

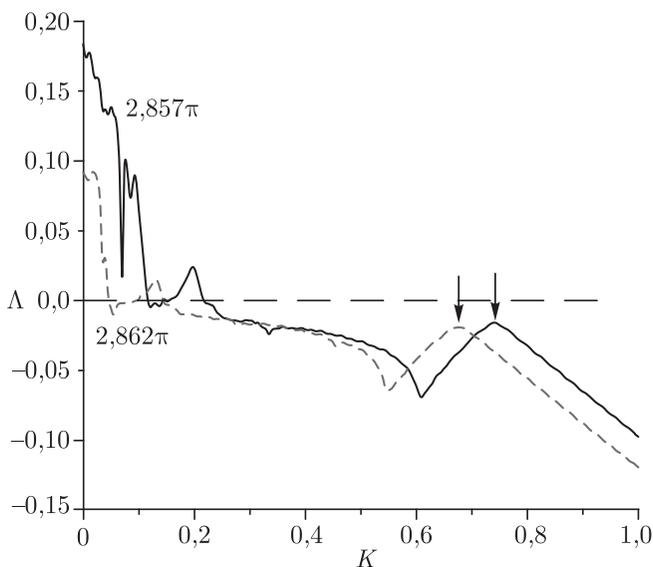


Рис. 2.7. Зависимость максимального ляпуновского показателя  $\Lambda$  для двух различных хаотических режимов (ленточного и спирального хаоса) от параметра  $K$  обратной связи

стемы [21]. При коэффициенте обратной связи  $K = 0$  величины ляпуновских показателей  $\Lambda$  стабилизируемой системы совпадают с ляпуновскими показателями  $\lambda$  невозмущенной системы. Расчет максимального ляпуновского показателя осуществлялся с помощью процедуры Бенеттина [25], адаптированной для анализа распределенной системы [26, 27].

Рис. 2.7 показывает зависимость максимального ляпуновского показателя  $\Lambda$  от параметра  $K$  для двух различных хаотических режимов (ленточного и спирального хаоса). Эта характеристика определяет границу применимости метода стабилизации неустойчивого однородного состояния равновесия. Подавление хаотической динамики в системе с обратной связью возможно только в тех интервалах  $K$ , где величина  $\Lambda(K) < 0$ . Этим интервалам соответствуют области  $P$  и  $S$  на рис. 2.6. Величина параметра  $K$ , при котором возникает стабилизация неустойчивого состояния равновесия показана стрелкой для обоих типов хаотической динамики. Видно, что установлению режима стабилизации предшествует рост ляпуновского показателя, а за порогом стабилизации  $K = K_c$  величина  $\Lambda(K)$  линейно спадает. Такое поведение характерно для обоих типов хаотической динамики в исследуемой системе.

## 2.4. Неустойчивые периодические пространственно-временные состояния

Как уже мы отмечали во введении, неустойчивые периодические орбиты, составляющие «скелет» хаотического аттрактора динамической системы с малым числом степеней свободы, могут быть использованы для управления динамикой нелинейной системы, причем стабилизация неустойчивой периодической орбиты требует весьма малого возмущения поведения системы. Методы нахождения неустойчивых периодических орбит в системах с малым числом степеней свободы изучены достаточно подробно [28, 29]. Более сложно выделить неустойчивые периодические пространственно-временные состояния *распределенной* автоколебательной системы, аналогичные неустойчивым периодическим орбитам хаотического аттрактора динамической системы с малым числом степеней свободы.

Первоначальную информацию о наборе неустойчивых периодических орбит, присутствующих в хаотическом аттракторе, позволяет получить построение гистограмм времен возврата фазовой точки к фиксированным «стартовым» состояниям, выбираемым случайным образом по всему хаотическому аттрактору. Этот метод выявления неустойчивых циклов был впервые предложен в работе D.P. Lathrop и E.J. Kostelich [28]. Если некоторая фазовая точка  $\mathbf{R}_i$  принадлежит неустойчивому циклу с периодом  $T$ , то фазовая траектория, пройдя точки  $\mathbf{R}_{i+1}$ ,  $\mathbf{R}_{i+2}$ , ...,  $\mathbf{R}_k$ , окажется вблизи исходного состояния с заданной точностью  $\varepsilon > 0$ :

$$\|\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_{i+m}\| < \varepsilon, \quad (2.13)$$

где  $m = T/\Delta t$  — период орбиты в дискретных единицах времени. Далее строится распределение (гистограмма) времен возврата, по которой легко выделить характерные времена соответствующих неустойчивых периодических орбит, а затем отыскать и сами неустойчивые циклы.

При анализе неустойчивых пространственно-временных состояний в исследуемой *распределенной* автоколебательной пучково-плазменной системе рассматривались временные колебания плотности пространственного заряда  $\rho(x_0, t)$ , снимаемые в фиксированных точках  $x_0$  пространства взаимодействия. Далее, по временным реализациям  $\rho(x_0, t)$  в псевдофазовом пространстве восстанавливались аттракторы, соответствующие колебаниям в фиксированных точках пространства  $x_0$ . С помощью метода D.P. Lathrop и E.J. Kostelich [28] (2.13) в восстановленном хаотическом аттракторе выделялись неустойчивые орбиты, по которым далее определялись неустойчивые пространственно-временные состояния. При изменении величины параметра Пирса  $\alpha$  «набор» пространственно-временных орбит в хаотическом аттракторе и частота их посещения изменяется. Размерность фазового пространства, в котором восстанавливался хаотический аттрактор, выбиралась равной 3, учитывая результаты построения конечномерной модели динамики диода Пирса с помощью галеркинской аппроксимации [20].

На рис. 2.8 представлены гистограммы времен возврата при различных значениях параметра Пирса  $\alpha$ , построенные для хаотических аттракторов, восстановленных по колебаниям плотности пространственного заряда в фиксированной точке пространства взаимодействия  $x_0 = 0,2$ . Из рисунка можно видеть, что в режиме ленточного хаоса (рис. 2.8, а, построенный при  $\alpha = 2,862\pi$  и рис. 2.8, б,  $\alpha = 2,861\pi$ ) одна из неустойчивых орбит в значительной степени доминирует в спектре времен возврата, то есть изображающая точка посещает ее значительно чаще, чем другие неустойчивые орбиты. Заметим, что период наиболее посещаемой неустойчивой орбиты в режиме ленточного хаоса меняется с уменьшением параметра Пирса. Действительно, как видно из рис. 2.8, а, б, в случае  $\alpha = 2,862\pi$  наиболее посещаемой является

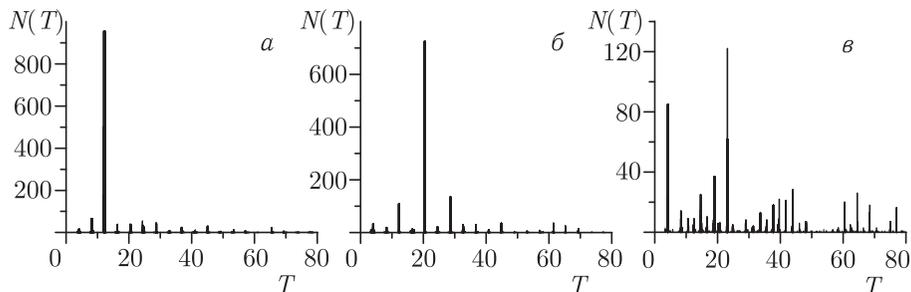


Рис. 2.8. Гистограммы времен возврата фазовой траектории к фиксированным точкам аттрактора при различных значениях управляющего параметра: а)  $\alpha = 2,862\pi$ ; б)  $\alpha = 2,861\pi$ ; в)  $\alpha = 2,857\pi$

орбита с периодом  $T = 12,177$ , при  $\alpha = 2,861\pi$  преобладающей уже становится орбита периода  $T = 20,159$ . Следует отметить, что аналогичные результаты получаются при выборе другой точки пространства  $x_0$ , из которой снимается сигнал.

Для режима развитого (спирального) хаоса (см. рис. 2.8, в, построенный при  $\alpha = 2,857\pi$ ) набор неустойчивых периодических орбит восстановленного хаотического аттрактора колебаний оказывается существенно сложнее. При этом различные неустойчивые периодические состояния, как видно из представленных на рис. 2.8 гистограмм, посещаются системой более часто и равномерно.

Каждой неустойчивой периодической орбите восстановленного хаотического аттрактора соответствует неустойчивое пространственно-временное состояние исходной распределенной системы. На рис. 2.9 показаны такие неустойчивые периодические пространственно-временные состояния исходной распределенной системы — колебания плотности пространственного заряда  $\rho(x, t)$  электронного потока, соответствующие неустойчивым орбитам аттракторов, восстановленных по скалярным временным реализациям. Различные неустойчивые пространственно-временные состояния на рис. 2.9 отличаются периодом  $T$ .

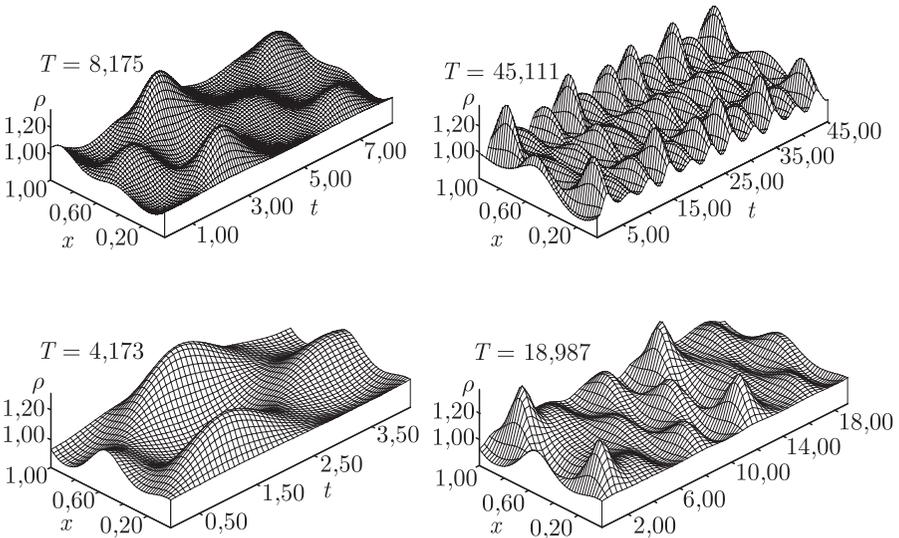


Рис. 2.9. Вид неустойчивых периодических пространственно-временных состояний различных периодов  $T$  распределенной системы в режиме (а) ленточного хаоса  $\alpha = 2,862\pi$  и (б) развитого (спирального) хаоса  $\alpha = 2,857\pi$ . Периоды  $T$  неустойчивых состояний приведены на рисунках

Определенные методом построения гистограмм времен возврата, неустойчивые пространственно-временные состояния уточнялись с помощью SD-метода, предложенного P. Schmelcher и F. Diakonov [29], адаптированного для анализа распределенной системы [30].

В качестве вектора состояния в данном случае использовался вектор, составленный из значений плотности пространственного заряда, снимаемых из различных точек пространства взаимодействия:  $\mathbf{R}(t) = \{\rho(x = 0,25, t), \rho(x = 0,5, t), \rho(x = 0,75, t)\}^T$ .

Далее в восстановленном фазовом пространстве выбирается некоторая произвольная плоскость (в данном случае  $\rho(x = 0,25, t) = 1,0$ ), которая рассматривается как плоскость сечения Пуанкаре. Будем обозначать состояние системы, соответствующее моменту  $n$ -го пересечения фазовой траекторией выбранного сечения Пуанкаре, как  $\mathbf{R}_n$  (отметим, что данное пересечение происходит в некоторый момент времени  $t^n$ ). Тогда описание поведения системы можно свести к дискретному отображению вида

$$\mathbf{R}_{n+1} = \mathbf{G}(\mathbf{R}_n), \quad (2.14)$$

где  $\mathbf{G}(\cdot)$  — оператор эволюции. Очевидно, что аналитическое выражение для оператора  $\mathbf{G}$  найти невозможно, однако, численно интегрируя исходную систему гидродинамических уравнений (2.4)–(2.6), возможно найти последовательность значений  $\{\mathbf{R}_n\}$ , получающуюся из отображения (2.14).

SD-метод для нахождения неустойчивых периодических орбит предполагает исследование вспомогательного отображения [29]:

$$\mathbf{R}_{n+1} = \mathbf{R}_n + \mu \mathbf{C}[\mathbf{G}(\mathbf{R}_n) - \mathbf{R}_n]. \quad (2.15)$$

В [29] строго показано, что подобное отображение в случае анализа дискретных систем и систем с малым числом степеней свободы позволяет эффективно стабилизировать неустойчивые периодические орбиты исходной системы, которые в случае модифицированной системы (2.15) из седловых становятся устойчивыми по всем направлениям. Применение SD-метода к анализу распределенной системы также оказывается эффективным для выделения неустойчивых пространственно-временных периодических состояний.

В уравнении (2.15)  $\mu = 0,1$  — константа метода и  $\mathbf{C}$  — матрица, которая была выбрана в виде [29]

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.16)$$

Вспомогательное отображение (2.15) позволяет определить только неустойчивое периодическое состояние низшего периода  $T_1$ , которому соответствует единственное прохождение системой за период  $T_1$  выбранного сечения Пуанкаре. Для нахождения неустойчивых периодических состояний с периодом  $T_p$  более высокого порядка, которые характеризуются прохождением фазовой траекторией сечения Пуанкаре  $p$  раз за период  $T_p$ , необходимо рассматривать модифицированное отображение вида

$$\mathbf{R}_{n+1} = \mathbf{R}_n + \mu \mathbf{C}[\mathbf{G}^p(\mathbf{R}_n) - \mathbf{R}_n], \quad (2.17)$$

где  $\mathbf{G}^p(\cdot)$  —  $p$  раз проитерированное отображение  $\mathbf{G}(\cdot)$  (т.е. при численном решении исходной системы гидродинамических уравнений и восстановлении отображения (2.17) следует рассматривать только каждое  $p$ -е пересечение фазовой траектории плоскости сечения Пуанкаре, где  $p$  — очевидно, целое).

Таким образом, численно итерируя отображение (2.17), при различных значениях  $p$  удается найти неустойчивые периодические пространственно-временные состояния, которые в модифицированной системе, описываемой отображением (2.17), оказываются устойчивыми. Поэтому результатом интегрирования модифицированной системы (которая представляет собой систему гидродинамических уравнений с учетом процедуры (2.17)) оказывается периодическое решение, соответствующее неустойчивому периодическому состоянию в исходной системе.

При численном итерировании отображения (2.15) возникает единственная сложность, связанная с тем, что при нахождении состояния  $\mathbf{R}_{n+1}$  в момент времени  $t^{n+1}$  в соответствии с формулой (2.17) известны только координаты этого состояния в сечении Пуанкаре, но не определены соответствующие ему пространственные распределения плотности пространственного заряда  $\rho(x, t^{n+1})$ , скорости  $v(x, t^{n+1})$  электронного потока и потенциала  $\phi(x, t^{n+1})$ . Для нахождения данных пространственных распределений была использована следующая процедура. Система гидродинамических уравнений, описывающая диод Пирса, интегрировалась до тех пор, пока некоторое состояние  $\mathbf{R}_s$  системы не совпадало с искомым состоянием  $\mathbf{R}_{n+1}$  с некоторой заданной точностью:  $\|\mathbf{R}_{n+1} - \mathbf{R}_s\| < \delta$ , где величина  $\delta$  была выбрана равной  $\delta = 10^{-3}$ . При выполнении данного условия пространственные распределения, соответствующие состоянию  $\mathbf{R}_s$ , принимались за пространственные распределения состояния  $\mathbf{R}_{n+1}$  и далее делалась очередная итерация в соответствии с формулой (2.17).

Сходимость процедуры SD-метода иллюстрирует рис. 2.10, *а*, на котором показана зависимость значений плотности пространственного заряда  $\rho_n(x = 0,25)$  в момент прохождения изображающей точкой в восстановленном фазовом пространстве плоскости сечения Пуанкаре от номера  $n$  итерации SD-метода при выделении неустойчивого состояния первого порядка ( $p = 1$ ). Хорошо видно, что итерационный процесс SD-метода сходится к определенному значению, соответствующему неустойчивому периодическому во времени пространственно-временному состоянию системы.

На рис. 2.10, *б* показаны временные зависимости плотности пространственного заряда в фиксированной точке пространства диодного промежутка  $x = 0,2$ , соответствующие неустойчивым периодическим пространственно-временным состояниям с различными порядками  $p$  (и соответственно периодами  $T$ ), выделенные SD-методом.

В качестве количественной характеристики для каждого выделенного неустойчивого периодического состояния полезно рассмотреть со-

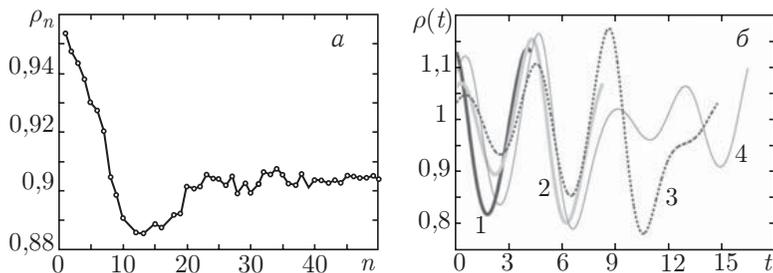


Рис. 2.10. а) Зависимость значений плотности пространственного заряда  $\rho$  в момент прохождения изображающей точки в псевдофазовом пространстве сечения Пуанкаре от номера итерации SD-метода при выделении орбиты первого порядка ( $p = 1$ , период  $T = 4,2$ ). б) Временные реализации плотности пространственного заряда в фиксированной точке пространства диодного промежутка  $x = 0,2$ , соответствующие различным неустойчивым периодическим пространственно-временным состояниям, выделенным с помощью SD-метода: линия 1 —  $T = 4,2$  ( $p = 1$ ); 2 —  $T = 9,1$  ( $p = 2$ ); 3 —  $T = 16,9$  ( $p = 3$ ); 4 —  $T = 18,9$  ( $p = 4$ ). Параметр Пирса  $\alpha = 2,857\pi$

ответствующую ему величину максимальной ляпуновской экспоненты  $\Lambda$ . Определение подобной характеристики весьма важно для дальнейшего анализа возможности стабилизации неустойчивых пространственно-временных состояний. Рассчитанные значения максимальных ляпуновских экспонент  $\Lambda^T$  для наиболее часто посещаемых неустойчивых пространственно-временных периодических состояний исследуемой системы для режима развитого (спирального) хаоса ( $\alpha = 2,857\pi$ ) представлены в табл. 2.1.

Таблица 2.1. Значения максимального ляпуновского показателя  $\Lambda^T$  для периодических состояний различного периода  $T$  в режиме развитого хаоса ( $\alpha = 2,857\pi$ )

Период неустойчивого состояния $T$	Максимальный ляпуновский показатель $\Lambda^T$
4,347	0,854
8,289	1,194
10,581	0,698
12,501	0,629
14,613	0,337
18,987	0,266
23,115	0,186
39,636	0,094

## 2.5. Стабилизация неустойчивых периодических состояний с помощью непрерывной обратной связи

Простейшей схемой стабилизации выделенных неустойчивых периодических состояний может стать схема, подобная описанной в предыдущем разделе, в которой сигнал обратной связи формируется следующим образом (см. формулу (2.12)):

$$\varphi(x = 1.0, t) = f_{fb}^T(t) = K(\rho(x_{fix}, t) - \rho(x_{fix}, t - T_k)) = K\xi(t), \quad (2.18)$$

где  $K$  — как и выше, коэффициент обратной связи, а длительность задержки обратной связи выбирается равной временному периоду  $T_k$   $k$ -го неустойчивого периодического состояния. Здесь, как и в случае стабилизации состояния неустойчивого однородного равновесия, в качестве опорной точки, откуда снимается сигнал обратной связи, было выбрано  $x_{OC} = 0,2$ .

Подобная схема весьма эффективна для стабилизации неустойчивого периодического пространственно-временного состояния с наименьшим периодом  $T_1$ . На рис. 2.11 с помощью оттенков серого цвета показаны распределения плотности пространственного заряда  $\rho(x, t)$  в пространстве и во времени в случае свободных колебаний в системе и в режиме стабилизации неустойчивого периодического состояния. Момент включения непрерывной обратной связи обозначен стрелкой и штриховой линией. На этих диаграммах удобно проследить особенности сложного пространственно-временного поведения исследуемой системы и перехода системы от режимов хаотических колебаний к периодическому поведению на основе стабилизируемого периодического состояния. Хорошо видно, что в течение 2–3 характерных временных периодов  $T_1$  в хаотической системе устанавливается периодическая динамика, соответствующая неустойчивому периодическому состоянию.

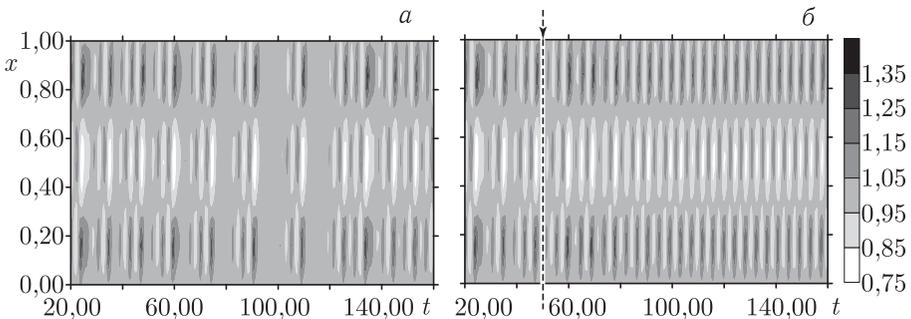


Рис. 2.11. Пространственно-временная динамика диода Пирса в режиме спирального хаоса  $\alpha = 2,857\pi$  (а) и в режиме стабилизации неустойчивого состояния наименьшего периода  $T = 4,173$  (б). Момент включения процедуры стабилизации неустойчивого состояния на (б) показан стрелкой и штриховой линией

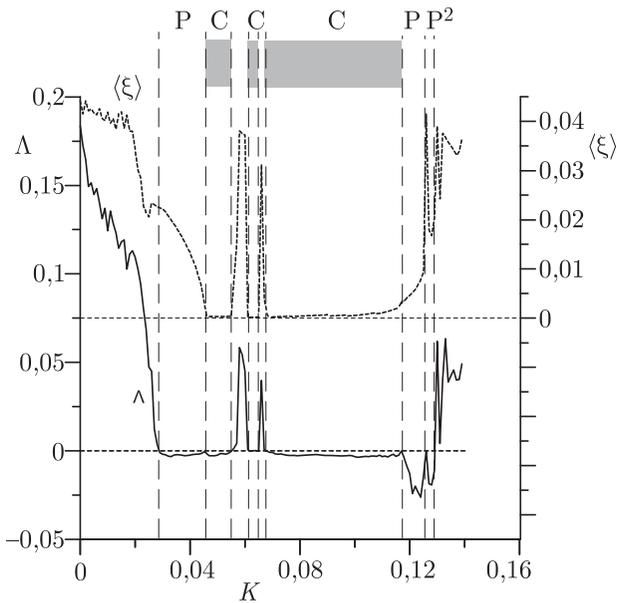


Рис. 2.12. Зависимость максимальной неустойчивой ляпуновской экспоненты  $\Lambda$  (сплошная линия) и среднего значения сигнала в цепи непрерывной обратной связи  $\langle \xi \rangle$  (штриховая линия) от коэффициента  $K$  непрерывной обратной связи в режиме спирального хаоса ( $\alpha = 2,857\pi$ )

Особенности влияния на исследуемую хаотическую распределенную систему непрерывной обратной связи вида (2.18) можно проанализировать, рассмотрев зависимости максимальной ляпуновской экспоненты  $\Lambda$  и среднего значения  $\langle \xi \rangle$  сигнала в цепи непрерывной обратной связи от коэффициента обратной связи  $K$  (см. рис. 2.12). При малых коэффициентах обратной связи в системе имеют место хаотические колебания, практически не отличающиеся от колебаний в системе без обратной связи (см. рис. 2.13, *a*, на котором представлена временная реализация колебаний плотности пространственного заряда в сечении пролетного промежутка  $x = 0,2$  в системе без обратной связи). С ростом величины  $K$  наблюдается уменьшение сложности колебаний в системе (уменьшается величина максимальной ляпуновской экспоненты  $\Lambda$ ) и одновременно уменьшается амплитуда и среднее значение сигнала  $\langle \xi \rangle$  в цепи обратной связи. В некоторых диапазонах значений коэффициента  $K$  сигнал обратной связи становится равным нулю (серая область *C* на рис. 2.12), а максимальная ляпуновская экспонента в этой области  $\Lambda < 0$ . Пространственно-временная динамика системы в этом случае точно соответствует неустойчивому периодическому пространственно-временному состоянию. Этот режим управления пространственно-временным хаосом иллюстрирует рис. 2.13, *б, в*, на котором показаны соответственно колебания плотности пространственного заряда в стабилизируемой системе и сигнал в цепи обратной связи.

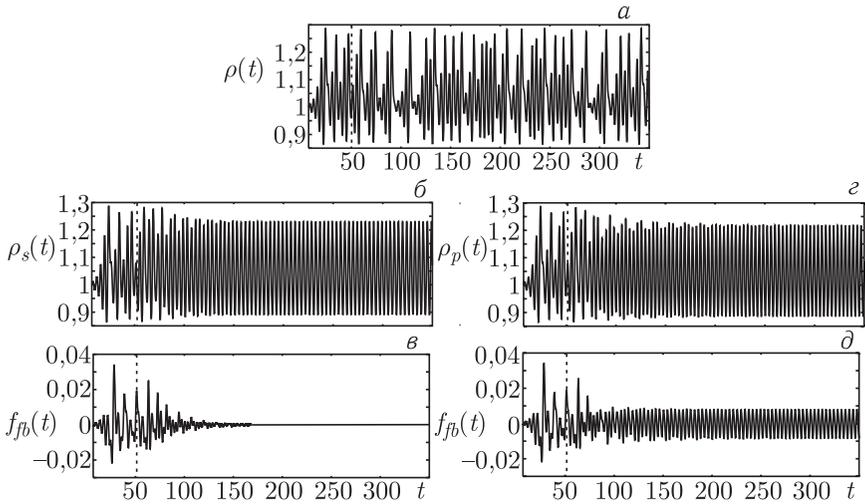


Рис. 2.13. Временные реализации колебаний  $\rho(x_{OC}, t)$  в нестабилизируемой системе (а),  $\rho_s(x_{OC}, t)$  в стабилизируемой системе в режиме ( $K = 0,07$ ,  $d = T = 4,173$ ) стабилизации неустойчивого состояния с наименьшим периодом  $T = 4,173$  (б), сигнал  $f_{fb}(t)$  в цепи обратной связи (в),  $\rho_p(x_{OC}, t)$  и  $f_{fb}(t)$  (г и д) в системе в режиме периодических колебаний ( $\Lambda < 0$ ), отличным от режима стабилизации неустойчивой орбиты ( $K = 0,035$ ,  $d = T = 4,173$ ), для режима спирального хаоса  $\alpha = 2,857\pi$ . Штриховой линией отмечен момент времени включения сигнала непрерывной обратной связи

На зависимости  $\Lambda(K)$  особо отмечены области, в которых амплитуда сигнала обратной связи  $\langle \xi \rangle$  не мала, однако величина  $\Lambda < 0$ . Эти режимы, обозначенные на рис.2.12 символом  $P$ , соответствуют периодическим колебаниям системы вблизи неустойчивого состояния равновесия. С ростом коэффициента обратной связи на базе режима  $P$  в системе происходит удвоение периода колебаний (область на рис.2.12 при больших  $K$ , обозначенная как  $P^2$ ). При больших значениях  $K > 0,15$  в системе наблюдаются резкий рост амплитуды колебаний и, как следствие, отражения частиц в электронном потоке, так что исходная система гидродинамических уравнений становится неприменима.

Остановимся еще на одном важном вопросе. Изложенная методика эффективна и удобна для стабилизации неустойчивых состояний с невысокими периодами. Однако возможны случаи, когда в системе необходимо добиться динамики, соответствующей одному из высших периодических состояний. Стабилизация таких состояний с помощью непрерывной обратной связи вида (2.18) оказывается невозможной. Анализ схем управления хаосом с непрерывной обратной связью вида (2.18) применительно к системам с малым числом степеней свободы, описываемым обыкновенными дифференциальными уравнениями, показал, что эффективная стабилизация неустойчивых периодических

орбит возможна только в том случае, когда максимальная ляпуновская экспонента  $\lambda$  и период орбиты  $\tau$  удовлетворяют следующему условию [7]

$$\lambda\tau \leq \Theta, \quad (2.19)$$

где  $\Theta$  — константа, определяемая исследуемой системой. То же самое оказывается справедливым и для распределенных систем.

Поэтому необходимо модифицировать схему (2.18) управления хаосом таким образом, чтобы была возможность стабилизации неустойчивых периодических состояний с большими значениями максимальной ляпуновской экспоненты и большими периодами  $T_k$ . Рассмотрим схему стабилизации неустойчивых периодических состояний, которая является одной из разновидностей методики К. Ругаса [9] управления хаосом. Суть методики заключается в следующем [31]: сигнал непрерывной обратной связи формируется таким образом, что на поведение системы в момент времени  $t$  оказывает влияние состояние системы не только в момент времени  $(t - T_k)$ , но и в моменты времени  $(t - mT_k)$  с некоторыми весовыми коэффициентами. Таким образом, непрерывная обратная связь при стабилизации неустойчивых периодических состояний с высшими периодами  $T_k > T_1$  применительно к нашей задаче может быть формально описана следующим выражением

$$\varphi(x=1,0,t) = f_{fb}^T(t) = K \left( (1-r) \sum_{m=1}^M r^{m-1} (\rho(x_{OC}, t) - \rho(x_{OC}, t - md)) \right), \quad (2.20)$$

где  $K$  — сигнал обратной связи;  $d$  — длительность запаздывания обратной связи, выбираемая равной периоду  $T_k$  неустойчивого состояния;  $M$  — достаточно велико ( $M \gg 1$ ), а величина  $r$  ( $0 \leq r < 1$ ) характеризует вклад предыдущих состояний системы в сигнал обратной связи: малые величины  $r$  соответствуют малому вкладу предыдущих состояний в сигнал обратной связи, большие  $r$  — большому весу предыдущих состояний в сигнале (2.20). Случай  $r = 0$  соответствует случаю простейшей схемы (2.18) непрерывной обратной связи, которая рассматривалась выше. С ростом величины  $r$  существует возможность стабилизации тех неустойчивых периодических орбит с большими отношениями  $\lambda T_k$  (2.19), которые невозможно стабилизировать с помощью стандартной схемы (2.18). Так, в работе [7] показано, что в случае применения схемы управления хаосом с непрерывной обратной связью вида (2.20) возможна стабилизация неустойчивых периодических состояний, для которых выполняется оценочное соотношение

$$\lambda T \leq \Theta \frac{1+r}{1-r}. \quad (2.21)$$

Однако следует обратить внимание на следующее необходимое условие. Применение схемы (2.20) для стабилизации неустойчивых состояний большого периода, для которых выполняется условие (2.21),

требует точного определения периода неустойчивой орбиты  $T_k$ . При длительности задержки  $d$  непрерывной обратной связи (2.20), даже незначительно отличающейся от величины  $T_k$ , невозможно точно стабилизировать неустойчивое периодическое состояние системы, и в цепи обратной связи наблюдаются периодические колебания  $\xi(t)$  с амплитудой, значительно превышающей уровень шумов в системе. Стабилизация неустойчивого состояния оказывается возможной только при относительной точности определения периода орбиты и, соответственно, длительности запаздывания  $d$  в цепи обратной связи  $\varepsilon < 0,01\%$ .

Для уточнения значений периодов  $T_k$  неустойчивых периодических состояний возможно использование следующей методики. При неточной «настройке» длительности задержки  $d$  в цепи обратной связи на период  $T_k$  неустойчивого  $k$ -го состояния система характеризуется отрицательной максимальной ляпуновской экспонентой, а в цепи обратной связи наблюдаются колебания с амплитудой, существенно превышающей уровень шумов в системе, и с некоторым базовым периодом  $\Theta \neq T_k$ , зависящим от параметров  $K$  и  $d$  обратной связи (см. рис. 2.13,  $z, \partial$ ). В работе [7] была найдена аналитическая оценка связи между неизвестным периодом  $T_k$  неустойчивого состояния, параметрами  $K$  и  $d$  непрерывной обратной связи и периодом  $\Omega$  в следующем виде

$$\Omega(K, d) = T_k + \frac{K}{K - g}(d - T_k) + O((d - T)^2). \quad (2.22)$$

Здесь  $g$  — неизвестный параметр системы, который определяется видом нелинейной хаотической системы и зависит от вида и способа введения непрерывной обратной связи. Таким образом в соотношении (2.22) есть две неизвестные величины — период  $T_k$  неустойчивого периодического состояния и параметр системы  $g$ .

Выберем два набора значений  $(K_1, d_1)$ ,  $(K_2, d_2)$ , где величины  $d_{1,2}$  выбираются близкими к найденным периодам неустойчивых состояний, определим для них  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  и численно решим систему двух нелинейных уравнений (2.22), определив значения  $g$  и  $T_k$ . Далее в качестве  $d$  возьмем найденное значение  $T_k$  и повторим процедуру. Окончательно, после нескольких таких итераций, определим с необходимой степенью точности значение периода неустойчивого состояния  $T_k$ , которое далее возможно стабилизировать с помощью схемы (2.20), подбирая соответствующее значение параметра  $K$  обратной связи.

Численный анализ стабилизации неустойчивых периодических состояний с помощью непрерывной обратной связи вида (2.20) показал, что существует возможность стабилизации орбит с периодом  $T < 25,0$ . Неустойчивые состояния с большим периодом стабилизировать не удавалось, хотя в системе устанавливались периодические колебания. Однако форма этих колебаний не была близка к виду неустойчивых периодических состояний, а сигнал в цепи обратной связи был велик, что не позволяет говорить о стабилизации хаоса в этом случае. С ростом периода  $T$  стабилизируемой неустойчивой орбиты необходимо было

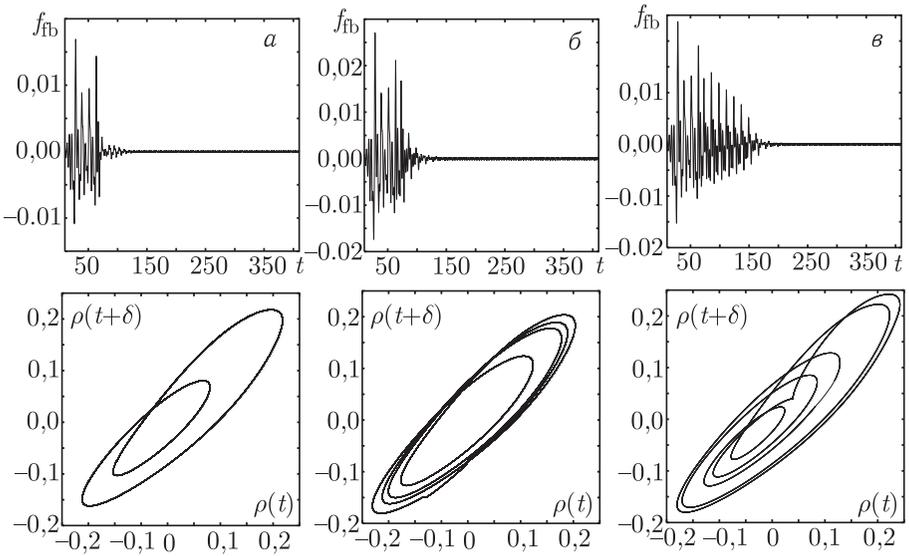


Рис. 2.14. Стабилизация неустойчивых периодических состояний высших периодов с помощью непрерывной обратной связи вида (2.20): а)  $T = 8,3829$  ( $M = 3, K = 0,03, r = 0,2$ ); б)  $T = 16,6582$  ( $M = 12, K = 0,012, r = 0,38$ ); в)  $T = 23,1286$  ( $M = 20, K = 0,008, r = 0,56$ ). На рисунках представлены величина сигнала обратной связи  $f_{fb}$  как функция времени (сверху) и фазовый портрет колебаний плотности пространственного заряда  $\rho(x_{OC} = 0,2, t)$ , восстановленный по методу Такенса,  $\delta = 0,5$  (снизу). Обратная связь включается в момент времени  $t = 50,0$

увеличивать параметры  $M$  и  $r$  для достижения эффекта управления хаосом. Одновременно с ростом периода неустойчивого состояния резко уменьшается диапазон коэффициента  $K$  обратной связи, в котором наблюдается стабилизация неустойчивого периодического во времени состояния.

Стабилизацию неустойчивых периодических состояний высокого периода иллюстрирует рис. 2.14, на котором представлены характеристики системы с обратной связью вида (2.20). Параметры  $M, r$  и  $K$  обратной связи, при которых наблюдалась стабилизация неустойчивых состояний, представлены в подписи к рисунку. Точное значение периодов  $T$  неустойчивых состояний определялось по вышеописанной методике. На рис. 2.14 показаны орбиты с периодами  $T \approx 8, T \approx 16$  и  $T \approx 23$ . Последнее состояние характеризуется максимальным периодом, которое удалось стабилизировать в режиме развитого хаоса ( $\alpha = 2,857\pi$ ) с помощью описанной методики управления хаосом в распределенной автоколебательной системе.

## Заклучение

Во главе 2 был рассмотрен ряд эффективных и доступных с точки зрения практической реализации способов управления хаосом в про-

странственно-распределенной пучково-плазменной системе на примере гидродинамической модели диода Пирса. В основу рассмотренных схем положены идеи управления хаосом в нелинейных системах с малым числом степеней свободы. Для управления сложной динамикой могут быть использованы различные схемы с запаздывающей обратной связью, которые позволяют стабилизировать как неустойчивое состояние равновесия, так и неустойчивые периодические во времени пространственно-временные состояния, аналогичные неустойчивым периодическим орбитам хаотического аттрактора динамических систем с малым числом степеней свободы. В последнем случае рассмотрены два различных подхода к выделению неустойчивых периодических пространственно-временных состояний пространственно-временного хаоса.

### Список литературы

1. Трубецков Д. И., Храмов А. Е. Лекции по сверхвысокочастотной электронике для физиков. В 2-х т. — М.: Физматлит, 2003.
2. Klinger T., Schroder C., Block D., Greiner F., Piel A., Bonhomme G., Naulin V. Chaos control and taming of turbulence in plasma devices // Phys. Plasmas. 2001. V. 8, № 5. P. 1961–1968.
3. Godfrey B. B. Oscillatory nonlinear electron flow in Pierce diode // Phys. Fluids. 1987. V. 30. P. 1553.
4. Kuhn S., Ender A. Oscillatory nonlinear flow and coherent structures in Pierce-type diodes // J. Appl. Phys. 1990. V. 68. P. 732.
5. Ott E., Grebogi C., Yorke J. A. Controlling chaos // Phys. Rev. Lett. 1990. V. 64, № 11. P. 1196–1199.
6. Cvitanović P. Periodic orbits as the skeleton of classical and quantum chaos // Physica D. 1991. V. 51. P. 138–151.
7. Just W. Handbook of Chaos Control / Ed. H. G. Schuster. — Weinheim: Wiley-VCH, 1999.
8. Friedel H., Grauer R., Spatschek H. K. Controlling chaotic states of a Pierce diode // Phys. of plasmas. 1998. V. 5, № 9. P. 3187–3194.
9. Pyragas K. Continuous control of chaos, by self-controlling feedback // Phys. Lett. A. 1992. V. 170. P. 421–428.
10. Chen Y. H., Chou M. Y. Continuous feedback approach for controlling chaos // Phys. Rev. E. 1994. V. 50, № 3. P. 2331–2334.
11. Gauthier D. J., Sukow D. W., Concannon H. P., Socolar J. E. S. Stabilizing unstable periodic orbits in a fast diode resonator using continuous time-delay autosynchronization // Phys. Rev. E. 1994. V. 50, № 3. P. 2343–2346.
12. Franz-Josef Elmer Controlling friction // Phys. Rev. E. 1998. V. 57, № 5. P. 4903–4906.
13. Boccaletti S., Bragard J., Arecchi F. T. Controlling and synchronizing space time chaos // Phys. Rev. E. 1999. V. 59, № 6. P. 6574–6578.

14. *Meucci R., Ciofini M., Abbate R.* Suppressing chaos in lasers by negative feedback // *Phys. Rev. E.* 1996. V. 53, № 6. P. R5537–R5540.
15. *Franceschini G., Bose S., Schöll E.* Control of chaotic spatiotemporal spiking by time-delay autosynchronization // *Phys. Rev. E.* 1999. V. 60, № 5. P. 5426–5434.
16. *Pierce J. R.* Limiting currents in electron beam in presence ions // *J. Appl. Phys.* 1944. V. 15. P. 721.
17. *Анфиногентов В. Г., Трубецков Д. И.* Хаотические колебания в гидродинамической модели диода Пирса // *Радиотехника и электроника.* 1992. Т. 37. С. 2251.
18. *Храмов А. Е., Ремпен И. С.* Влияние обратной связи на сложную динамику в гидродинамической модели диода Пирса // *Радиотехника и электроника* 2002. Т. 47, № 6. С. 732–738.
19. *Ремпен И. С., Храмов А. Е.* Стабилизация неустойчивых периодических состояний хаотической динамики в диоде Пирса // *Изв. РАН. Сер. физ.* 2004. Т. 68, № 12. С. 1789–1793.
20. *Hramov A. E., Rempen I. S.* Investigation of the complex dynamics and regime control in Pierce diode with the delay feedback // *Intern. J. Electronics.* 2004. V. 91, № 1. P. 1–12.
21. *Hramov A. E., Koronovskii A. A., Rempen I. S.* Controlling chaos in spatially extended beam-plasma system by the continuous delayed feedback // *Chaos.* 2006. V. 16, № 1. P. 013123.
22. *Ремпен И. С., Храмов А. Е.* Управление режимами колебаний электронного потока со сверхкритическим током в диоде Пирса // *Изв. РАН. Сер. физ.* 2001. Т. 65, № 12. С. 1689–1694.
23. *Короновский А. А., Ремпен И. С., Храмов А. Е.* Исследование неустойчивых периодических пространственно-временных состояний в распределенной автоколебательной системе со сверхкритическим током // *Изв. РАН. Сер. физ.* 2003. Т. 67, № 12. С. 1705–1708.
24. *Ремпен И. С., Короновский А. А., Храмов А. Е.* Управление хаосом в электронном пучке со сверхкритическим током в гидродинамической модели диода Пирса // *Письма в ЖТФ.* 2003. Т. 29, № 23. С. 67–74.
25. *Benettin G., Galgani L., Giorgilli A., Strelcyn J.-M.* Lyapunov characteristic exponents for smooth dynamical systems and for Hamiltonian systems: A method for computing all of them. P. I. Theory. P. II. Numerical application // *Meccanica.* 1980. V. 15. P. 9–30.
26. *Короновский А. А., Ремпен И. С., Храмов А. Е.* Исследование неустойчивых периодических пространственно-временных состояний в распределенной автоколебательной системе со сверхкритическим током // *Изв. РАН. Сер. физ.* 2003. Т. 67, № 12.
27. *Короновский А. А., Попов П. В., Храмов А. Е.* Обобщенная хаотическая синхронизация в связанных уравнениях Гинзбурга–Ландау // *ЖЭТФ.* 2006. Т. 130, № 4(10). С. 748–764.
28. *Lathrop D. P., Kostelich E. J.* Characterization of an experimental strange attractor by periodic orbits // *Phys. Rev. A.* 1989. V. 40, № 7. P. 4028–4031.

29. *Pingel D., Schmelcher P., Diakonov F. K.* Detecting unstable periodic orbits in chaotic continuous-time dynamical systems // *Phys. Rev. E.* 2001. V. 64, № 2. P. 026214.
30. *Hramov A. E., Koronovskii A. A.* Detecting unstable periodic spatio-temporal states of spatial extended chaotic systems // *Europhys. Lett.* 2007. V. 80. P. 10001.
31. *Socolar J. E. S., Sukow D. W., Gauthier D. J.* Stabilizing unstable periodic orbits in fast dynamical systems // *Phys. Rev. E.* 1994. V. 50, № 4. P. 3245–3248.

## Глава 3

# НИЗКОВОЛЬТНЫЙ ВИРКАТОР: ТЕОРИЯ И ЭКСПЕРИМЕНТ

Е. Н. Егоров, Ю. А. Калинин, А. А. Короновский,  
Д. И. Трубецков, Р. А. Филатов, А. Е. Храмов

На первый взгляд кажется, что проблемы, связанные с пространственным зарядом, не должны отличаться сложностью, поскольку взаимодействие электронов определяется хорошо известными электродинамическими... законами... Аналогичное представление существовало и при первоначальном подходе «к изучению плазмы... Поведение плазменного состояния диктуется очень простыми законами... Таким образом, мы имеем дело с классической физикой электронов..., которая, к нашему удивлению, оказывается более сложной, чем квантовая физика, из-за нелинейных эффектов и нестабильностей различных типов...» (Вайскопф В. // УФН. 1970. Т. 101. С. 736). Сложность свойств плазмы сродни сложности свойств плотных электронных образований...

*Вайнштейн Л. А., Солнцев В. А.* Лекции по сверхвысокочастотной электронике для физиков. М.: Сов. радио, 1973. С. 11.

*Маломощные хаотические широкополосные колебания в пучках заряженных частиц с виртуальным катодом. Влияние распределения электронов по скоростям на хаотические колебания в электронном потоке в режиме образования виртуального катода. Влияние положительных ионов на колебательные процессы в электронном пучке с виртуальным катодом. Низковольтный виркатор — генератор хаотических радиоимпульсов. Лабораторный макет низковольтного виркатора и результаты его исследования.*

В настоящее время достигнуты определенные успехи в теоретических (в основном, в рамках численного моделирования) и экспери-

ментальных исследованиях физических процессов и нестационарной динамики в пучках заряженных частиц с виртуальным катодом [1, 2]. Одним из интересных и важных результатов данных исследований стал вывод о том, что при определенных условиях интенсивные пучки заряженных частиц с виртуальным катодом могут быть источниками широкополосных хаотических колебаний в сантиметровом и миллиметровом диапазонах длин волн [3–7].

Значительный интерес к источникам хаотических сигналов обусловлен широким их применением в системах радиолокации и радиопротиводействия, информационно-телекоммуникационных устройствах на основе хаотических сигналов, в системах промышленного применения и медицины (см., например, [8–10]). Весьма важным с практической точки зрения представляется создание источников широкополосных хаотических сигналов на основе интенсивных *нерелятивистских* электронных пучков в режимах с формированием виртуального катода. Такие системы, учитывая использование в них нерелятивистских пучков заряженных частиц, получили название *низковольтных виркаторов* [11].

В данной главе приводятся результаты теоретических и экспериментальных исследований новых перспективных источников широкополосных хаотических сигналов СВЧ диапазона на основе интенсивных нерелятивистских электронных пучков с виртуальным катодом, формируемым в тормозящем поле (низковольтных виркаторов).

### **3.1. Маломощные хаотические широкополосные колебания в пучках заряженных частиц с виртуальным катодом**

Как уже обсуждалось в первой главе монографии (см. также [12, 13]), для формирования в пучке заряженных частиц колеблющегося виртуального катода необходимо использование сильноточных релятивистских электронных пучков с токами, превышающими предельный вакуумный (сверхкритический) ток [14]. Однако существует возможность уменьшения необходимого для формирования нестационарного виртуального катода тока пучка, которая заключается в использовании систем с дополнительным торможением электронов [6], в которых нестационарный виртуальный катод формируется при сравнительно малых токах пучка и при превышении некоторого критического значения тормозящего электроны поля. В этом случае для формирования колеблющегося виртуального катода используется дополнительное торможение потока за счет подачи отрицательного потенциала на сетки, расположенные в пространстве взаимодействия, или коллектор.

Маломощный генератор широкополосных хаотических колебаний на основе нерелятивистского электронного пучка с виртуальным ка-

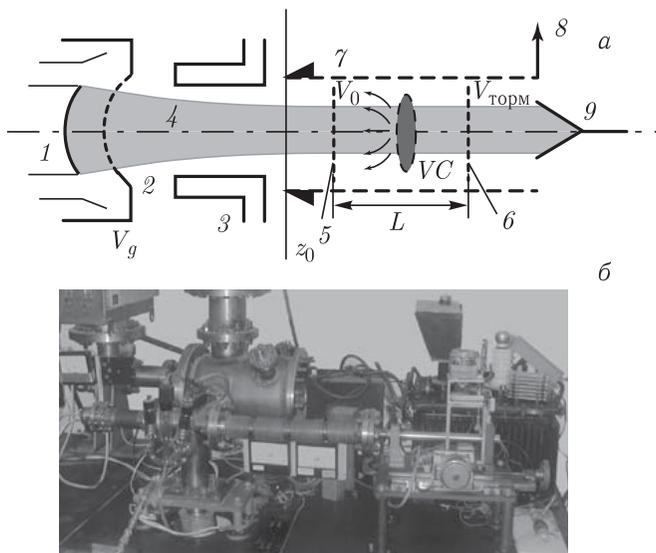


Рис. 3.1. Схема (а) и внешний вид (б) экспериментальной установки по исследованию хаотических колебаний в пучке с виртуальным катодом в системе сверхкритическим первеансом. Здесь 1 — термокатод с напряжением накала  $V_n$ ; 2 — сетка пушки с напряжением  $V_g$ ; 3 — второй анод пушки; 4 — формируемый сходящийся электронный пучок; 5 — входная сетка диодного промежутка; 6 — выходная сетка, на которую подается тормозящий потенциал; 7 — ОСЗС; 8 — вывод энергии; 9 — коллектор

тодом (нерелятивистский виркатор) представляет собой электровакуумный прибор (см. рис. 3.1, а), состоящий из электронно-оптической системы (ЭОС) 1–3, формирующей сплошной аксиально-цилиндрический пучок 4, пространства с виртуальным катодом, образованного сетками 5 и 6, широкополосного вывода СВЧ мощности 7 (отрезка широкополосной электродинамической системы — спирали, нагруженной с одной стороны на поглотитель, а с другой — на вывод энергии 8), коллектора 9. Виртуальный катод создается путем торможения пучка подачей отрицательного относительно входной (первой) сетки 5 потенциала  $V_{\text{торм}}$  на выходную (вторую) сетку 6.

В представленных здесь экспериментах источником электронов служил термокатод, который работал в режиме ограничения тока пространственным зарядом. ЭОС формировала аксиально-симметричный сходящийся цилиндрический электронный пучок, который сопровождается продольным магнитным полем, формируемым соленоидом, в который помещалось пространство дрейфа. Величина сопровождающего магнитного поля менялась в пределах от 0 до 250 Гс. Ускоряющее напряжение электронного пучка в экспериментах составляло 1,5 кВ. Ток пучка на выходе ЭОС менялся в пределах 50–100 мА в зависимости от напряжения накала катода и от ускоряющего напряжения. Скоростной разброс электронов на выходе ЭОС был весьма малым

(не превышал в относительных единицах величины 0,2%), так что электронный пучок можно считать моноскоростным.

После ЭОС электронный пучок попадает в сеточный зазор (диодный промежуток). Потенциал первой сетки  $V_0$  равен потенциалу анода  $V_A$  (ускоряющее напряжение), потенциал второй сетки  $V_{\text{торм}} = V_0 - \Delta V_{\text{торм}}$  изменяется от значений  $V_{\text{торм}}/V_0 = 1$  ( $\Delta V_{\text{торм}} = 0$ , отсутствие торможения, классический диод Пирса) до  $V_{\text{торм}}/V_0 = 0$  ( $\Delta V_{\text{торм}} = V_0$ , полное торможение электронного потока). Величина  $\Delta V_{\text{торм}}$  имеет смысл разности потенциалов между сетками, создающей тормозящее поле в диодном промежутке.

Увеличение тормозящего потенциала второй сетки можно рассматривать как увеличение первеанса электронного пучка в диодном промежутке:

$$p = \frac{I}{\bar{V}^{3/2}}, \quad (3.1)$$

где  $\bar{V} = (V_0 + V_{\text{торм}})/2$  — эффективный потенциал.

При увеличении тормозящей разности потенциалов  $\Delta V_{\text{торм}}$  между сетками диодного промежутка при некотором критическом первеансе  $p = p_{\text{кр}}$  в системе наблюдалось возникновение виртуального катода, колебания которого во времени и пространстве модулировали электронный пучок, причем часть электронов отражалась от виртуального катода обратно к входной сетке. В результате в системе со сверхкритическим первеансом возникали хаотические колебания виртуального катода, вид и мощность которых существенно зависит от разности потенциалов  $\Delta V_{\text{торм}}$  между сетками диодного промежутка.

Все результаты, представленные в данном разделе, были получены на разборной вакуумной установке при непрерывной откатке (при минимальном давлении остаточных газов  $10^{-6}$ – $10^{-7}$  Тор). Внешний вид установки представлен на рис. 3.1, б.

Колебания в исследуемой системе определяются наличием виртуального катода в междусеточном пространстве с тормозящим полем. Как показали экспериментальные исследования, изменяя тормозящий потенциал (т. е. первеанс электронного пучка в диодном промежутке), получаем возможность управлять как амплитудой широкополосных хаотических колебаний, так и шириной полосы частот (от узкополосных, близких к одночастотным колебаниям до хаотических колебаний с шириной полосы более октавы). При малом торможении колебания виртуального катода близки к регулярным, и спектр генерируемого излучения является дискретным. С дальнейшим увеличением торможения электронов в системе возникают широкополосные хаотические колебания. При значительном торможении пучка генерация снова исчезает.

На рис. 3.2, а показана зависимость нормированной интегральной мощности  $P_{\Sigma}$  колебаний от разности потенциалов  $\Delta V_{\text{торм}}/V_0$ . Нормировка мощности на рис. 3.2, а осуществлялась на максимальную

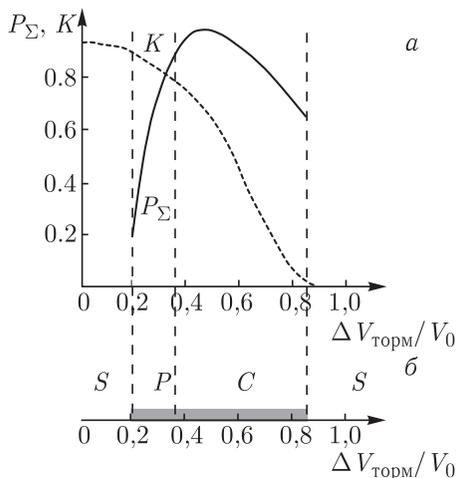


Рис. 3.2. Зависимость нормированной интегральной мощности  $P_{\Sigma}$  взаимодействия и токопрохождения  $K$  через диод от нормированной разности потенциалов  $\Delta V_{\text{торм}}/V_0$  между сетками для моноскоростного пучка; б) области характерных режимов генерации системы на виртуальном катоде с моноскоростным пучком при изменении тормозящего потенциала:  $S$  — область отсутствия генерации СВЧ излучения;  $P$  — область регулярных колебаний виртуального катода;  $C$  — область хаотической широкополосной генерации системы. Серым показана область формирования нестационарного виртуального катода (зона генерации в исследуемом электронно-волновом генераторе)

величину генерируемой интегральной мощности. Из рисунка можно видеть, что при малом торможении интегральная мощность  $P_{\Sigma}$  колебаний в пучке с виртуальным катодом мала. С увеличением  $\Delta V_{\text{торм}}/V_0$  мощность растет и при некотором оптимальном тормозящем потенциале достигает максимального значения. Далее интегральная мощность генерируемых колебаний снова уменьшается. На рис. 3.2, а также показана величина  $K$  токопрохождения через диодный промежуток, которая определяется как отношение усредненной во времени величины выходящего через вторую сетку тока  $\langle I_{\text{out}} \rangle$  (здесь  $\langle \cdot \rangle$  означает усреднение во времени) к величине тока пучка  $I_0$ , формируемого электронной пушкой:  $K = \langle I_{\text{out}} \rangle / I_0$ . Из рисунка следует, что с увеличением тормозящего потенциала (в отличие от интегральной мощности  $P_{\Sigma}$  колебаний величина токопрохождения  $K$  монотонно уменьшается). Это означает, что с ростом тормозящей разности потенциалов  $\Delta V_{\text{торм}}$  число электронов, отражающихся от виртуального катода обратно ко входной сетке, увеличивается. При некоторой достаточно большой разности потенциалов  $\Delta V_{\text{торм}}$  между сетками наблюдается практически полное отражение электронов от виртуального катода, и величина токопрохождения становится близкой к нулю:  $K \approx 0$ . В этом режиме виртуальный катод в электронном пучке становится стационарным и генерация прекращается (интегральная мощность равна нулю).

На рис. 3.2, б представлены области характерных режимов генерации системы на виртуальном катоде с моноскоростным пучком при изменении (увеличении) тормозящего потенциала. Серым показана область формирования нестационарного виртуального катода, т. е. область генерации СВЧ излучения. На диаграмме отмечены области значений тормозящего потенциала, в которых имеет место отсутствие колебаний в пучке с виртуальным катодом (область  $S$ ), область регулярных колебаний виртуального катода (область  $P$ ) и область хаотической широкополосной генерации (область  $C$ ). Видно, что в системе имеет место последовательный переход от стационарного состояния потока к хаотическим колебаниям через область периодической динамики. При этом с ростом тормозящего потенциала сложность хаотических колебаний увеличивается (расширяются полосы генерируемых частот и уменьшается изрезанность спектра мощности).

Последнее иллюстрирует рис. 3.3, на котором показаны спектры мощности СВЧ колебаний, экспериментально полученные для различных тормозящих потенциалов. Из рисунка видно, что с ростом торможения имеет место постепенное усложнение спектра мощности генерации. При последовательном увеличении тормозящего потенциала, в системе сменяются различные режимы: сначала возникают одночастотные колебания, характеризующиеся достаточно узким спектром (рис. 3.3, а). Далее, по мере увеличения параметра, колебания становятся многочастотными, спектр колебаний усложняется, оставаясь, однако при малых торможениях дискретным (рис. 3.3, б, в). Частота колебаний виртуального катода при этом увеличивается. При дальнейшем увеличении торможения (увеличивая  $\Delta V_{\text{торм}}/V_0$ ) при некоторых значениях потенциала второй сетки колебания становятся хаотическими,

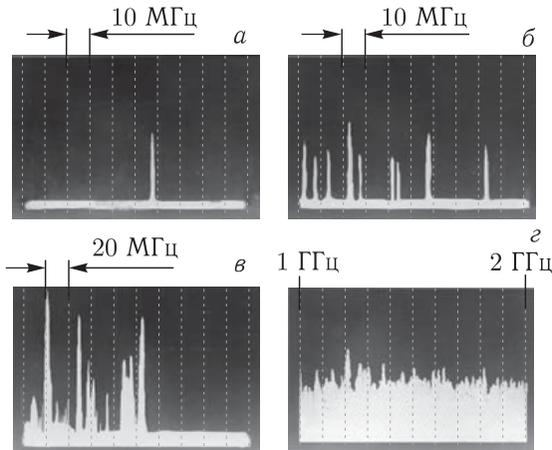


Рис. 3.3. Экспериментальные спектры мощности колебаний виртуального катода для различных тормозящих потенциалов: а)  $\Delta V_{\text{торм}}/V_0 = 0,2$ ; б)  $0,24$ ; в)  $0,28$ ; з)  $0,5$

а спектр, соответственно, сплошным в достаточно широком диапазоне частот (рис. 3.3, *г*).

В связи с подобным усложнением спектрального состава колебаний пучка с виртуальным катодом при увеличении торможения электронов (что определяет увеличение первеанса электронного потока в диодном промежутке) важно количественно проанализировать спектральные характеристики генерации низковольтной системы с виртуальным катодом. На рис. 3.4 представлены зависимости нормированной ширины полосы  $\Delta f/f$  генерации системы, измеренные по спектрам мощности колебаний, снимаемых отрезком спирали в области виртуального катода, для различных величин ведущего магнитного поля. Также для удобства рассмотрения на рис. 3.4 нанесена зависимость характерной (наиболее интенсивной в спектре мощности) частоты генерации в системе от величины тормозящей разности потенциалов  $\Delta V_{\text{торм}}/V_0$ . Ширина полосы частот  $\Delta f$  определялась по уровню 3 дБ в спектре мощности колебаний.

Из рис. 3.4 следует, что с ростом тормозящей разности потенциалов  $\Delta V_{\text{торм}}/V_0$  (с ростом первеанса  $p$  пучка) наблюдается монотонное увеличение характерной частоты генерации системы на виртуальном катоде. В работах [15, 16] было теоретически показано, что характерная частота колебаний виртуального катода пропорциональна плазменной частоте электронного потока:  $f_{\text{ВК}} \sim f_p$ . На рис. 3.4 представлена также теоретическая зависимость плазменной (редуцированной) частоты  $f_p$  электронного потока от разности потенциалов между сетками диодного промежутка:

$$f_p = \sqrt{\frac{2^{3/2} \pi \eta^{1/2} p \bar{V}}{\varepsilon_0 r^2}}, \quad (3.2)$$

где  $p$  — первеанс и  $r$  — радиус электронного пучка;  $\bar{V} = (V_0 + \Delta V_{\text{торм}})/2$ ,  $\eta$  — удельный заряд электронов;  $\varepsilon_0$  — диэлектрическая постоянная. Из сравнения зависимостей для характерной частоты генерации видно, что частота колебаний виртуального катода связана с плазменной частотой соотношением

$$f_{\text{ВК}} = k f_p, \quad (3.3)$$

где  $k \approx 0,5$  — коэффициент пропорциональности. При этом, как следует из соотношения (3.2), зависимость частоты  $f_{\text{ВК}}$  от тормозящего потенциала может быть представлена зависимостью  $f_{\text{ВК}} \sim \sqrt{\bar{V}}$ .

Нормированная ширина полосы  $\Delta f/f$  генерации в пучке с виртуальным катодом также увеличивается с ростом тормозящей разности потенциалов в диодном промежутке. Однако вид зависимостей  $\Delta f/f(V_{\text{торм}})$  при больших значениях фокусирующего магнитного поля ( $B = 220$  Гс) и отсутствии магнитного поля ( $B = 0$ ) различен. В первом случае имеет место монотонное расширение полосы частот генерации с увеличением тормозящего потенциала  $\Delta V_{\text{торм}}$ . В случае отсутствия

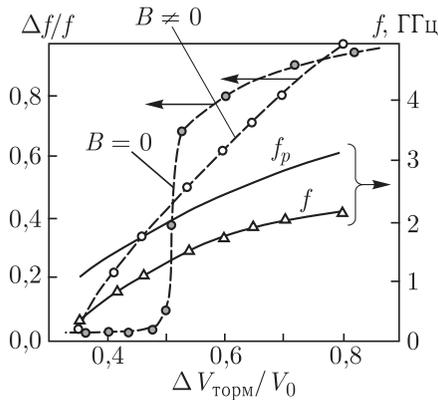


Рис. 3.4. Зависимость характерной частоты и ширины полосы хаотических колебаний в пучке с виртуальным катодом от разности потенциалов  $\Delta V_{\text{торм}}/V_0$  между сетками. Также на рисунке показана теоретическая зависимость (3.2) плазменной частоты  $f_p$  электронного пучка в междусеточном пространстве

внешнего ведущего магнитного поля наблюдается резкое скачкообразное расширение ширины полосы частот генерации при  $\Delta V_{\text{торм}}/V_0 \approx 0,5$ . С дальнейшим увеличением тормозящего потенциала второй сетки диодного промежутка (с дальнейшим увеличением первеанса электронного пучка), как следует из рис. 3.4, происходит монотонное расширение полосы частот  $\Delta f/f$ .

Таким образом, можно говорить о двух характерных режимах работы рассматриваемого электронно-волнового генератора на виртуальном катоде: режиме узкополосных близких к регулярным колебаний, который реализуется при малых превышениях первеансом пучка критического значения (малом торможении пучка в диодном промежутке) и режиме развитой хаотической генерации с широкополосным спектром (последний реализуется при больших первеансах электронного потока, т. е. при значительном торможении потока).

Рассмотрим особенности физических процессов в пучке с виртуальным катодом. Важной экспериментальной характеристикой, которая позволяет проанализировать состояние электронного пучка в области виртуального катода и которая допускает экспериментальное измерение, является распределение электронов, прошедших через область виртуального катода на второй сетке, по скоростям.

На рис. 3.5 приведены спектры скоростей электронов после второй сетки для различных значений  $\Delta V_{\text{торм}}/V_0$ , снятых с помощью ВЧ-зонда [17], размещенного на выходе пролетного промежутка. Видно, что развитие колебаний виртуального катода с увеличением торможения электронного потока в диодном промежутке приводит к существенным изменениям в спектрах скоростей. Наиболее важным эффектом здесь является расширение спектра  $\Delta v/v_0$  скоростей и увеличение изрезанности кривой распределения электронов по скоростям с уве-

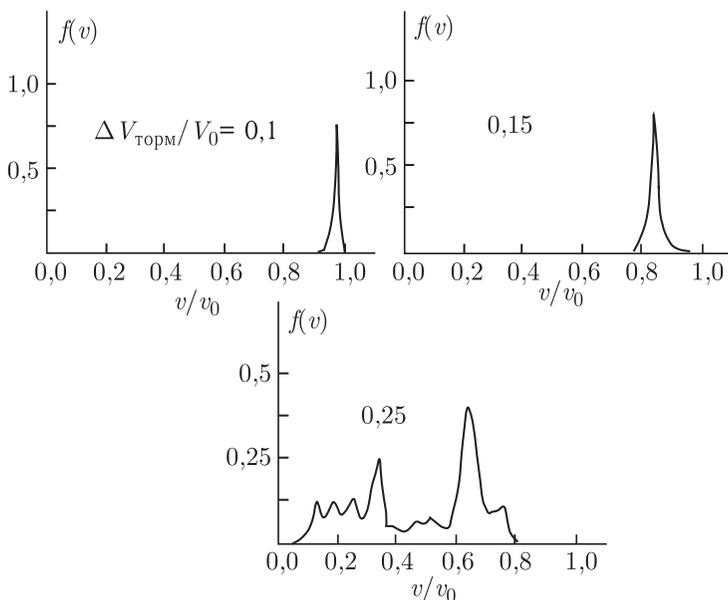


Рис. 3.5. Распределения электронов по скоростям на выходе из второй сетки для различных значений тормозящего потенциала  $\Delta V_{\text{торм}}/V_0$

личением торможения пучка, а, следовательно, усложнением хаотических колебаний в пучке с виртуальным катодом. Такая трансформация спектра скоростей электронов с увеличением первеанса пучка может быть связана с процессами формирования нескольких электронных структур (сгустков) в области виртуального катода [5, 18]. Так, при малом торможении, когда колебания в системе близки к регулярным, спектр скоростей электронов близок к  $\delta$ -функции. Это означает, что в системе формируется единственная электронная структура — виртуальный катод. С увеличением торможения распределение электронов по скоростям становится весьма сложным (многогорбым), что является косвенным свидетельством сложной перегруппировки электронов и, следовательно, формирования электронных структур (сгустков) в области виртуального катода.

Рассмотрим теперь результаты численного моделирования нелинейных нестационарных процессов в простой модели пучка с виртуальным катодом в тормозящем поле, обсудим и сопоставим теоретические и экспериментальные результаты исследования колебаний виртуального катода в рассматриваемой схеме низковольтного виркатора.

Моделирование нелинейных нестационарных процессов в пучке заряженных частиц с виртуальным катодом проводилось в рамках одномерной модели пролетного промежутка с тормозящим полем и использованием метода крупных частиц [19, 20]. Очевидно, что предположение об одномерности движения электронного потока выполняется не во всех режимах рассматриваемого экспериментального электронно-

волнового генератора с виртуальным катодом. Однако можно предположить, что основные физические механизмы формирования виртуального катода в диодном промежутке с торможением окажутся выявленными с помощью такого простого моделирования. Более строгий анализ физических процессов в пучке с виртуальным катодом с учетом двумерных эффектов движения электронного потока будет представлен в следующей главе.

Кратко рассмотрим схему численного моделирования. В плоской геометрии электронный поток представляется в виде совокупности крупных частиц (заряженных листов), инжектируемых через равные промежутки времени с постоянной скоростью в пространство взаимодействия. Перейдем от размерных величин потенциала  $\varphi$  и напряженности  $E$  поля пространственного заряда, плотности  $\rho$  и скорости  $v$  электронов, пространственной координаты  $x$  и времени  $t$ , к безразмерным переменным, которые определяются следующими соотношениями

$$\begin{aligned} \varphi &= \left(\frac{v_0^2}{\eta}\right)\varphi', & E &= \left(\frac{v_0^2}{L\eta}\right)E', & \rho &= \rho_0\rho', \\ v &= v_0v', & x &= Lx', & t &= \left(\frac{L}{v_0}\right)t', \end{aligned} \quad (3.4)$$

где штрихом обозначены безразмерные величины (далее штрихи над ними будем опускать),  $\eta$  — удельный заряд электрона,  $v_0$  и  $\rho_0$  — статические (невозмущенные) скорость и плотность электронного потока,  $L$  — длина пролетного промежутка.

Для каждого заряженного листа (крупной частицы) решаются нерелятивистские уравнения движения, которые в безразмерных переменных записываются в виде:

$$\frac{d^2x_i}{dt^2} = -E(x_i), \quad (3.5)$$

где  $x_i$  — координата  $i$ -го заряженного листа;  $E(x_i)$  — напряженность поля пространственного заряда в точке с координатой  $x_i$ .

Для вычисления напряженности и потенциала поля пространственного заряда, а также плотности заряда вводится равномерная пространственная сетка с шагом  $\Delta x$ . Потенциал поля пространственного заряда в квазистатическом приближении определяется уравнением Пуассона, которое в одномерном приближении имеет вид:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = \alpha^2\rho(x). \quad (3.6)$$

Здесь  $\alpha = \omega_p L/v_0$  — параметр Пирса, зависящий от тока пучка, как  $\alpha \propto \sqrt{I}$ . Напряженность поля  $E$  пространственного заряда определялась численным дифференцированием полученных значений потенциала:  $E(x) = -\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x}$ .

Уравнение Пуассона (3.6) должно быть дополнено следующими граничными условиями:

$$\varphi(x=0) = \varphi_0, \quad \varphi(x=1) = \varphi_0 - \Delta\varphi, \quad (3.7)$$

где  $\varphi_0$  — величина ускоряющего потенциала (в нашей нормировке  $\varphi_0 = 1$ ),  $\Delta\varphi$  — величина тормозящей разности потенциалов между сетками. Здесь и далее в главе обозначение потенциала диодного промежутка греческой буквой  $\varphi$  будет относиться к безразмерным величинам, применяемым в численной модели, а обозначение потенциала латинской буквой  $V$  будет относиться к экспериментальным данным.

Для вычисления плотности пространственного заряда использовалась процедура линейного взвешивания частиц (листов) на пространственной сетке (метод «частиц в ячейке»), снижающая сеточный шум [20].

Для моделирования вывода мощности низковольтного виркатора отрезок спиральной замедляющей системы (ОСЗС), используемый в качестве съемника энергии СВЧ колебаний, следуя [21, 22] представлялся в виде эквивалентной длинной линии, состоящей из последовательно соединенных индуктивностей  $L$  и шунтирующих емкостей  $C$  [23]. Если считать, что электронный пучок движется параллельно длинной линии в непосредственной близости от нее, так что все силовые линии, соответствующие отдельным частям заряда  $q(x)$  пучка, заканчиваются на длинной линии и начинаются при одном и том же значении продольной координаты  $x$ , то заряд пучка  $q(x)$  может рассматриваться как индуцированный в длинной линии. Тогда ОСЗС описывается телеграфными уравнениями, дополненными слагаемым, описывающим возбуждение электромагнитных волн пучком:

$$\frac{\partial I}{\partial t} = -\frac{1}{L} \frac{\partial U}{\partial x}, \quad \frac{\partial U}{\partial t} = -\frac{1}{C} \frac{\partial I}{\partial x} + \frac{1}{C} \frac{\partial q}{\partial t}. \quad (3.8)$$

Обратным влиянием возбуждаемого поля ОСЗС на динамику заряда пренебрегаем, т.е. рассматриваем приближение заданного тока. Последнее предположение справедливо, если электронный поток не находится в синхронизме с бегущей электромагнитной волной в длинной линии. Телеграфные уравнения (3.8) решались численно в предположении согласования линии передачи на левом  $x=0$  и правом  $x=l$  концах ОСЗС. Распределение величины заряда пучка  $q(t, x)$ , возбуждающего электромагнитные волны в линии передачи, бралось из решения задачи методом частиц.

Колебания в пучке с виртуальным катодом далеки от гармонических, поэтому выходная мощность системы определяется следующим выражением

$$P = \frac{1}{TK} \int_0^T U^2(t, x=l) dt, \quad (3.9)$$

где интеграл означает усреднение во времени мгновенной мощности  $P_m(t) = U^2(t, l)/K$  на правом конце (выходе) линии передачи,  $l$  — длина линии передачи,  $K$  — сопротивление связи.

На рис. 3.6 показано примерное разбиение плоскости параметров «параметр Пирса  $\alpha$  — тормозящая разность потенциалов между сетками  $\Delta\varphi$ » на характерные режимы колебаний электронного потока в диодном промежутке. В области  $T$  на рис. 3.6 реализуется режим полного прохождения электронного потока через пролетный промежуток, при этом в электронном потоке не формируется виртуальный катод и колебания в пучке отсутствуют. Линия 1 на карте режимов определяется формулой для границы аperiодической бурсиановской неустойчивости [24]

$$\alpha_{\text{кр}}(\Delta\varphi) = \frac{\sqrt{2}}{3}(1 + \sqrt{1 - 2\Delta\varphi})^{3/2} \quad (3.10)$$

и соответствует критическим значениям управляющих параметров (параметр Пирса  $\alpha$  и разности потенциалов  $\Delta\varphi$ ), при которых в системе возникает неустойчивость и в пучке формируется нестационарный колеблющийся в пространстве и во времени виртуальный катод. При отсутствии торможения  $\Delta\varphi = 0$  критическое значение параметра Пирса, при котором в системе формируется нестационарный виртуальный катод, равно  $\alpha_{\text{кр}} = 4/3$  [13] (критическое значение  $\alpha_{\text{кр}}$  отмечено стрелкой на оси абсцисс на рис. 3.6). С увеличением тормозящей разности потенциалов  $\Delta\varphi$  граница области в пространстве параметров, в которой возникает нестационарный виртуальный катод, смещается в сторону меньших значений параметра Пирса  $\alpha$ . Последнее позволяет путем увеличения тормозящего потенциала на второй сетке диода получить генерацию СВЧ колебаний с помощью виртуального катода при токах пучка, меньших по сравнению со случаем системы без торможения.

Линия 2 на карте режимов (см. рис. 3.6) соответствует значениям управляющих параметров, при которых в системе происходит подавление колебаний, и в пучке возникает стационарный виртуальный катод с полным отражением всех электронов, инжектируемых в диодный промежуток. Данный режим, обозначенный символом  $S$ , возникает при большом торможении и может быть описан аналитически в рамках стационарной теории электронного потока со сверхкритическим током (см., например, [25]).

В областях, отмеченных символами  $P$  и  $C$  на рис. 3.6, наблюдаются различные характерные режимы колебаний в электронном пучке с виртуальным катодом. Из анализа карты режимов можно сделать вывод, что с ростом тормозящего потенциала в системе наблюдается последовательная смена колебательных режимов в пучке с виртуальным катодом. Области  $P$  — это режимы регулярных колебаний виртуального катода, которые возникают, во-первых, при малых тормозящих потенциалах второй сетки (т. е. при малых превышениях первеансом  $p$  критического значения  $p_{\text{кр}}$ , при котором в системе возникает вирту-

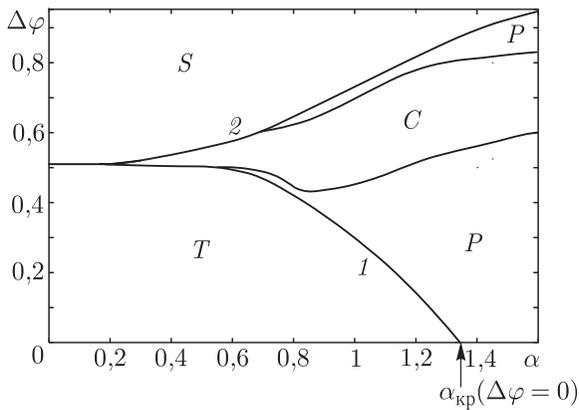


Рис. 3.6. Разбиение плоскости параметров «параметр Пирса — тормозящая разность потенциалов» на характерные режимы поведения электронного потока в диодном промежутке с торможением. Здесь  $C$  — режим хаотических колебаний в пучке с виртуальным катодом,  $P$  — периодические колебания виртуального катода,  $S$  — стационарный виртуальный катод и  $T$  — полное прохождение электронного потока через диодный промежуток. Стрелкой показано значение параметра  $\alpha_{кр} = 4/3$ , при котором в системе в отсутствие торможения формируется нестационарный виртуальный катод. Кривые 1 и 2 соответствуют критическим значениям параметра Пирса  $\alpha_{кр}(\Delta\varphi)$ , зависящих от тормозящего потенциала, при которых в системе формируется нестационарный колеблющийся виртуальный катод

альный катод), и во-вторых, при значительном торможении электронов (вблизи линии 2 на карте режимов, рис. 3.6, соответствующей переходу системы к состоянию со стационарным виртуальным катодом).

С увеличением торможения при  $\Delta\varphi \approx 0,5$  система от регулярных колебаний переходит к режиму хаотической генерации, отмеченному на рис. 3.6 символом  $C$ . Подобная картина хорошо согласуется с вышеописанными данными экспериментального исследования. Так, с увеличением тормозящей разности потенциалов  $\Delta V_{\text{торм}}$  второй сетки в экспериментальном макете низковольтного виркатора вначале возбуждаются близкие к регулярным колебания, которые далее с увеличением торможения усложняются. При больших величинах  $\Delta V_{\text{торм}}$  наблюдается широкополосная хаотическая генерация. Качественно похожая картина наблюдается и в рассмотренном численном моделировании. Однако имеют место и существенные количественные отличия результатов простой одномерной теории от результатов экспериментального исследования, на которых остановимся подробнее.

На рис. 3.7 (штриховая линия 2) показана рассчитанная в рамках нелинейной нестационарной теории зависимость мощности выходного электромагнитного поля от величины тормозящего потенциала  $\Delta V_{\text{торм}}/V_0$  [23]. Сравнение экспериментальной и теоретической зависимостей показывает их хорошее качественное и количествен-

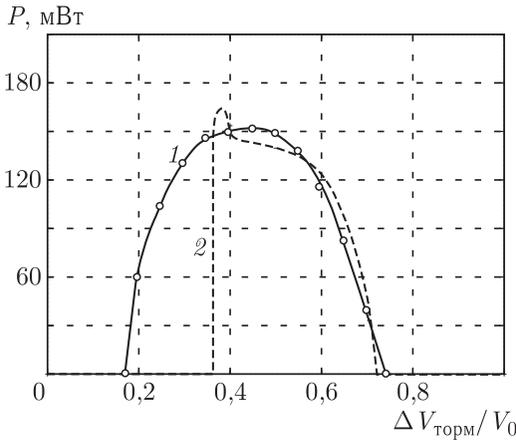


Рис. 3.7. Зависимость мощности генерации электромагнитных колебаний, снимаемых с выхода ОСЗС, от тормозящего потенциала  $\Delta V_{\text{торм}}/V_0$  (сплошная линия 1 — эксперимент; штриховая линия 2 — численный расчет по нелинейной нестационарной теории, формула (3.9))

ное соответствие при больших величинах тормозящего потенциала  $\Delta V_{\text{торм}}/V_0 > 0,4$ . При таких значениях тормозящего потенциала используемая нестационарная одномерная теория оказывается справедливой, т. е. динамика пучка при больших величинах тормозящего потенциала и фокусирующего магнитного поля близка к одномерной.

Однако при малых величинах тормозящего потенциала  $\Delta V_{\text{торм}}/V_0$  ситуация изменяется. Экспериментальная зависимость на рис. 3.7 показывает, что в области  $\Delta V_{\text{торм}}/V_0 < 0,4$  мощность генерации плавно уменьшается, обращаясь в ноль при торможении  $\Delta V_{\text{торм}}/V_0 \approx 0,18$ . Таким образом, колебания в пучке с виртуальным катодом с ростом торможения возникают мягко, область генерации соответствует тормозящим потенциалам  $\Delta V_{\text{торм}}/V_0 \in [0,18; 0,72]$ . В численном моделировании наблюдается резкий срыв генерации при  $\Delta V_{\text{торм}}/V_0 \approx 0,38$ , что не согласуется с экспериментальными данными. Соответственно численно определяемая область генерации низковольтного виркатора уменьшается.

Проведенный анализ позволяет предположить, что причиной несоответствия теории и эксперимента при малых тормозящих потенциалах является отсутствие учета двумерного движения электронов в пространстве взаимодействия. В этом случае при малых тормозящих потенциалах в области виртуального катода динамика пучка оказывается принципиально двумерной, наблюдается значительное токооседание на замедляющую систему, и предложенная одномерная модель оказывается неприменимой [6]. Рассмотрению двумерных эффектов динамики виртуального катода в пространстве дрейфа с тормозящим полем посвящена отдельная следующая глава.

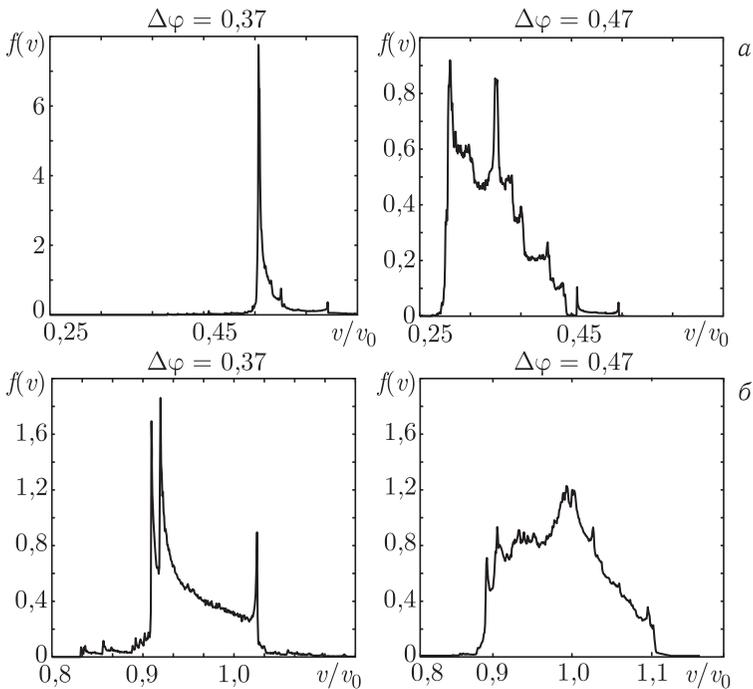


Рис. 3.8. Распределения электронов по скоростям: *а*) на выходе из второй сетки (прошедшие через виртуальный катод электроны); *б*) отраженные от виртуального катода электроны (на выходе первой сетки) при параметре Пирса  $\alpha = 0,9$  для значений тормозящих разностей потенциалов  $\Delta\varphi = 0,37$  и  $0,47$

Отметим, что результаты численного моделирования хорошо подтверждают высказанное выше предположение о том, что хаотизация колебаний виртуального катода определяется процессами формирования нескольких электронных структур (сгустков) в пучке с виртуальным катодом. В частности, наличие сложной внутренней динамики и процессов образования и взаимодействия нескольких электронных структур подтверждают функции распределения  $f(v)$  заряженных частиц по скоростям для регулярного режима колебаний, представленные на рис. 3.8. Распределения электронов по скоростям построены на выходе из второй сетки (прошедшие через виртуальный катод электроны (пролетный ток)) и на выходе первой сетки (отраженные от виртуального катода электроны (обратный ток)). Из рис. 3.8, *а* видно, что функция распределения электронов по скорости на выходе второй сетке в режиме регулярных колебаний имеет единственный максимум. Последнее хорошо совпадает с видом экспериментально полученного распределения скоростей электронов на выходе второй сетки при малом тормозящем потенциале на ней, которому соответствует близкая к одночастотной генерация, (ср. с рис. 3.5, случай  $\Delta V_{\text{торм}}/V_0 = 0,1$ ). Распределение также имеет вид кривой с одним максимумом. Вид

функции распределения электронов, отраженных от виртуального катода, к плоскости инжекции (к первой сетке) более сложен: в данном случае на графике функции распределения четко выделяются три основных пика, что позволяет предположить наличие трех основных электронных структур в системе.

В данном разделе рассмотрены основные аспекты динамики низковольтного электронного потока с виртуальным катодом в тормозящем поле. В следующих разделах рассмотрено влияние ряда факторов (в первую очередь, разброса электронов по скоростям и остаточных газов) на генерацию широкополосных хаотических сигналов в низковольтном виркаторе, а также приведены результаты исследования созданного лабораторного макета низковольтного виркатора.

### **3.2. Влияние распределения электронов по скоростям на хаотические колебания в электронном потоке в режиме образования виртуального катода**

При исследовании колебаний в пучках заряженных частиц с виртуальным катодом, формируемым в тормозящем поле, нами рассматривались моноскоростные пучки заряженных частиц. Можно ожидать, что использование многоскоростного пучка, формируемого электронной пушкой, может сильно повлиять на характеристики хаотической генерации виртуального катода. Поэтому в данном разделе обсудим результаты экспериментального и теоретического исследования влияния разброса электронов по скоростям на характеристики широкополосной хаотической генерации в пучке с виртуальным катодом [25].

Схема исследуемой системы оставалась неизменной (см. рис. 3.1). Многоскоростной пучок формировался электронно-оптической системой (ЭОС) с термокатодом за счет изменения параметров электронной пушки. Рассмотрим более подробно структуру пучка, формируемого пушкой с термокатодом, в плоскости влета пучка в пространство взаимодействия (исследуемая плоскость отмечена на рис. 3.1,  $a$  символом  $z_0$ ). Спектры скоростей измерялись с помощью метода подвижных диаграмм и энергоанализатора с тормозящим полем [17, 27]. Минимальный разброс электронов по продольным скоростям ( $\Delta v/v_0 \approx 0,2\%$ ) имеет место в режиме ограничения тока пространственным зарядом (напряжение накала катода  $V_n = 6,3$  В) и потенциалом на сетке, равным естественному. Данный режим работы ЭОС является типичным, и электронные пушки обычно работают в таком режиме. Выход из данного режима работы ЭОС приводит к расширению распределений электронов по скоростям и углам (формированию многоскоростных пучков). На рис. 3.9 показано изменение разброса продольных скоростей от величин потенциала сетки (в режиме ограничения тока пространственным зарядом,  $V_n = 6,3$  В), от напряжения накала катода (при потенциале на сетке равном естественному) и при учете обоих факторов (при изменении напряжения накала и потенциале сетки в 1,6

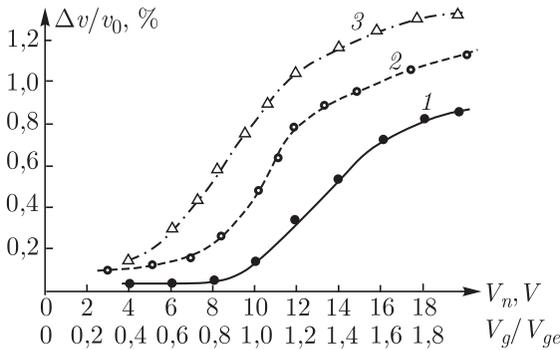


Рис. 3.9. Зависимость разброса  $\Delta v/v_0$  продольных скоростей электронов от величин: 1 — потенциала сетки (в режиме ограничения тока пространственным зарядом,  $V_n = 6,3$  В); 2 — напряжения накала катода (при потенциале на сетке, равном естественному); 3 — при введении обоих факторов (при изменении напряжения накала и потенциале сетки в 1,6 раз больше естественного,  $V_g = 1,6V_{ge}$ )

раз больше естественного  $V_g = 1,6V_{ge}$ ). Измерения были выполнены для точки поперечного сечения пучка  $r = 0,5r_b$ . Отсюда следует, что изменяя напряжение накала катода и потенциал сетки пушки относительно естественного возможно управлять разбросом электронов по скоростям в пределах 0,05–2,5% и, следовательно, исследовать влияние начального разброса скоростей пучка  $\Delta v/v_0$  на генерацию в системе с виртуальным катодом.

Рассмотрим влияние разброса электронов по скоростям для режима хаотической генерации в системе в режиме образования виртуального катода, выбрав значение отражающего потенциала  $\Delta V_{\text{торм}}/V_0 = 0,5$ . При данном значении потенциала, как обсуждалось в предыдущем разделе, наблюдается широкополосная хаотическая генерация, а интегральная мощность выходного излучения близка к максимальной.

На рис. 3.10, а показана зависимость ширины полосы генерируемых частот  $\Delta f/f$  и изрезанности спектра мощности  $N$  колебаний в пучке с виртуальным катодом от потенциала сетки (в режиме ограничения тока пространственным зарядом,  $V_n = 6,3$  В), от напряжения накала катода (при потенциале на сетке равном естественному  $V_g = V_{ge}$ ) и при учете обоих факторов (при изменении напряжения накала и потенциале сетки в 1,6 раз больше естественного  $V_g = 1,6V_{ge}$ ). Ширина полосы генерации и величина изрезанности спектра являются параметрами, характеризующими сложность колебаний в системе. Чем шире полоса частот и меньше изрезанность спектра, тем колебания в системе более «хаотичны» и близки к шумоподобным.

Из рис. 3.10, а видно, что ширина полосы  $\Delta f/f$  максимально при учете обоих факторов (кривая 3) и возрастает по сравнению со случаем моноскоростного пучка в 1,6 раз. В свою очередь, изрезанность спектра в оптимальном с точки зрения получения сложных хаотических

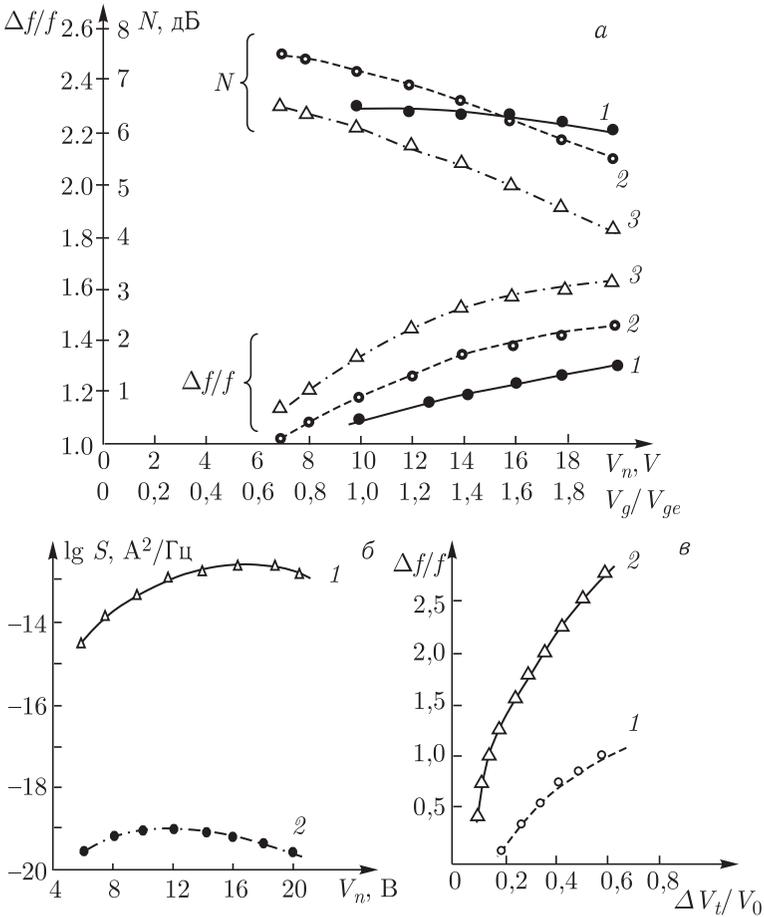


Рис. 3.10. а) Зависимость ширины полосы  $\Delta f/f$  генерируемых частот и изрезанности спектра мощности  $N$  колебаний в пучке с виртуальным катодом от: 1 — потенциала сетки (в режиме ограничения тока пространственным зарядом,  $V_n = 6,3$  В); 2 — от напряжения накала катода (при потенциале на сетке, равном естественному) и 3 — при учете обоих факторов (при изменении напряжения накала и потенциале сетки в 1,6 раз больше естественного  $V_g = 1,6V_{ge}$ ). б) Зависимость логарифма средней интенсивности  $S$  шума в пучке от напряжения накала для: 1 — колебаний виртуального катода в диапазоне частот 1–10 ГГц; 2 — дробового шума [28]. в) Зависимость ширины полосы  $\Delta f/f$  генерации от тормозящего потенциала для случаев: 1 — моноскоростного электронного потока и 2 — многоскоростного пучка с  $\Delta v/v_0 \approx 1,1$

колебаний со сплошным спектром режиме уменьшается до 4 дБ при накале катода  $V_n = 20$  В и потенциале сетки  $V_g = 1,6V_{ge}$ .

Отметим, что усложнение колебаний в пучке с виртуальным катодом с увеличением скоростного разброса определяется динамической природой колебаний в электронном потоке (динамическим хаосом),

а не шумами в электронном потоке. Так, измерения показали, что уровень средней интенсивности шума на выходе второй сетки пролетного промежутка на 60–70 дБ выше средней интенсивности дробового шума, составляющей величину  $S_0 = 10^{-19} \text{ А}^2/\text{Гц}$ . В качестве примера на рис. 3.10, б показана зависимость средней интенсивности шума  $S$  в пучке от напряжения накала  $V_n$  катода для системы с торможением  $\Delta V_{\text{торм}}/V_0 = 0,5$  и для дробового шума (по данным работы [28]). Хорошо видно, что интенсивность шумоподобных колебаний в пучке с виртуальным катодом существенно превосходит интенсивность дробового шума, при этом максимум интенсивности дробового шума приходится на напряжение накала  $V_n = 12 \text{ В}$ , а максимум интенсивности шумоподобных колебаний на  $V_n = 18 \text{ В}$ .

Важным управляющим параметром исследуемого электронно-волнового генератора является величина отражающего потенциала, с ростом которого, как отмечалось выше, наблюдается усложнение характеристик генерации. На рис. 3.10, в показана зависимость полосы широкополосных хаотических колебаний от тормозящего потенциала для случаев моноскоростного электронного потока и многоскоростного пучка с  $\Delta v/v_0 \approx 1,1\%$  ( $V_n = 12 \text{ В}$  и  $V_g/V_{ge} = 1,6$ ). В многоскоростном пучке генерация начинается при меньших значениях тормозящего потенциала  $\Delta V_{\text{торм}}/V_0 \approx 0,05$  и быстро при  $\Delta V_{\text{торм}}/V_0 \approx 0,2$  достигает октавы. Далее с ростом торможения полоса генерации расширяется значительно быстрее по сравнению со случаем односкоростного пучка и достигает значения 2,5–3 октавы (для сравнения — в случае моноскоростного пучка возможно достичь ширины полосы генерации не более одной октавы [6]).

Рассмотрим результаты численного моделирования влияния скоростного разброса на характеристики хаотической генерации системы с виртуальным катодом. Используемая математическая модель соответствовала модели, описанной в предыдущем разделе. Для моделирования инжекции электронного пучка с начальным разбросом продольных скоростей использовалась модификация методики, представленной в монографиях [19, 20], для воспроизведения начальных распределений частиц в плазменных системах.

В качестве начальных распределений электронов по скоростям, которые задавались при инжекции пучка в диодный промежуток, использовались экспериментально измеренные функции распределения  $f(v)$ . В качестве задаваемого распределения строилась функция  $f(v)$ , представляющая собой усредненное распределение по всем точкам  $r/r_b$  поперечного сечения пучка, в которых проводились измерения.

Для инжекции частиц со скоростями, распределенными по  $f(v)$ , строилась интегральная функция распределения

$$F(v) = \int_0^v f(v') dv' / \int_0^{v_{\text{max}}} f(v') dv', \quad (3.11)$$

где  $F(v=0) = 0$  и  $F(v=v_{\max}) = 1$ ,  $v_{\max}$  — некоторая максимальная скорость инжектируемых электронов и

$$\frac{dF(v)}{dv} = f(v) \left[ \int_0^{v_{\max}} f(v') dv' \right]^{-1}. \quad (3.12)$$

Если теперь функцию  $F(v_s)$  приравнять некоторому распределению чисел  $R_s$  ( $R_s \in (0, 1)$ ), то распределение  $v_s$ , как несложно видеть, будет соответствовать  $f(v)$ . Тогда, выбирая набор чисел  $R_s$  (в нашем моделировании рассматривался набор из 30 чисел ( $s = 0, \dots, 29$ ), распределенных от 0 до 1) и численно малыми шагами интегрируя (3.10), задаем скорости  $v_s$  инжектируемых частиц, определяемые равенством  $F(v_s) = R_s$ .

Используя подобную методику, возможно задать любое экспериментальное распределение электронов по скоростям на входе в пространство взаимодействия (плоскость  $z_0$  на рис. 3.1, *a*).

Зафиксируем значения параметра Пирса  $\alpha = 0,9$  и тормозящего потенциала второй сетки  $\Delta\varphi = 0,46$ , при которых в случае моноскоростного пучка в системе возникает хаотическая генерация и рассмотрим результаты численного моделирования динамики виртуального катода в многоскоростном потоке.

На рис. 3.11, *a–в* показаны численно рассчитанные спектры мощности  $P(f)$  тока пучка в области виртуального катода (в точке  $x = 0,4$  пространства диодного промежутка с торможением) при  $\alpha = 0,9$ ,  $\Delta\varphi = 0,46$  и различных начальных разбросах  $\Delta v/v_0$  электронов по скоростям. Из представленных данных следует, что численное моделирование подтверждает результаты экспериментальных исследований: с ростом начального разброса электронов по скоростям наблюдается существенное усложнение колебаний в пучке с виртуальным катодом: наблюдается рост шумового пьедестала в спектре мощности (спектр мощности зашумляется), уменьшается изрезанность  $N$  и растет полоса частот хаотического сигнала.

Подобное поведение также иллюстрирует рис. 3.12, *a*, на котором представлены зависимости средней интенсивности шума  $S$  в пучке, нормированной изрезанности спектра  $N$  (нормировка осуществлялась на величину изрезанности спектра при нулевом скоростном разбросе  $\Delta v = 0$  электронов пучка) и ширины полосы генерации  $\Delta f/f$  от величины начального разброса  $\Delta v/v_0$  электронов инжектируемого пучка.

Из рисунков 3.11, *a* и 3.12, *a* следует, что при малых скоростных разбросах  $\Delta v/v_0 < 0,01$  в численном моделировании не наблюдается существенного качественного изменения поведения системы. Однако в диапазоне начальных скоростных разбросов  $\Delta v/v_0 \sim 0,01–0,03$  имеет место расширение полосы частот генерируемых хаотических сигналов, увеличение спектральной плотности шума  $\lg S$  и уменьшение изрезанности спектра мощности в рабочей полосе частот. Однако при

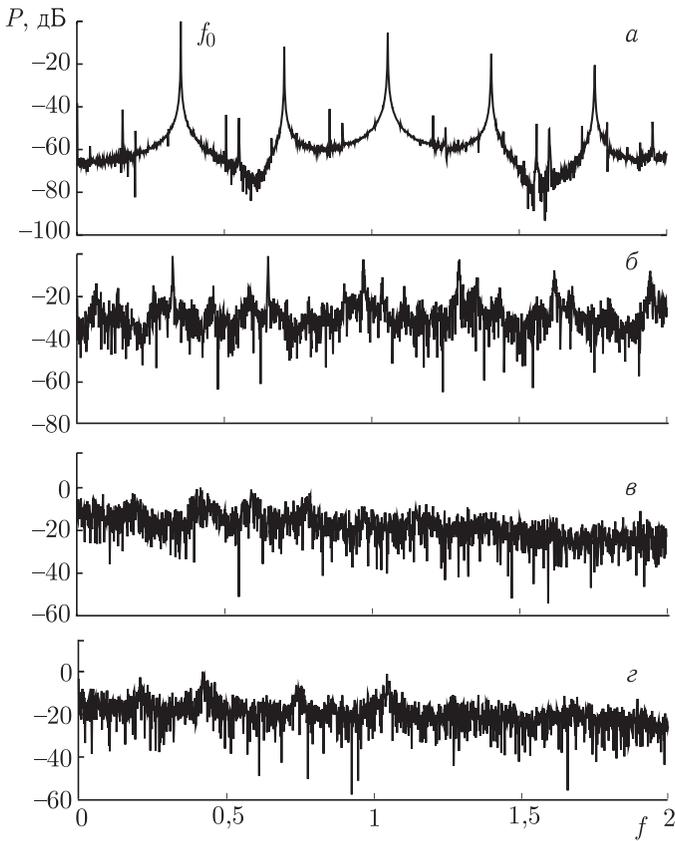


Рис. 3.11. Спектры мощности колебаний тока пучка в области виртуального катода ( $x = 0,4$ ) в диодном промежутке с торможением при параметре Пирса  $\alpha = 0,9$  и различных начальных разбросах электронов по скоростям: а)  $\Delta v/v_0 = 0,5\%$ ,  $\Delta\varphi = 0,46$ ; б)  $\Delta v/v_0 = 3\%$ ,  $\Delta\varphi = 0,46$ ; в)  $\Delta v/v_0 = 5\%$ ,  $\Delta\varphi = 0,46$ ; д)  $\Delta v/v_0 = 3\%$ ,  $\Delta\varphi = 0,6$

больших скоростных разбросах  $\Delta v/v_0 > 0,04$  характеристики практически перестают меняться, насыщаясь на некотором уровне. Подобная динамика системы при увеличении скоростного разброса электронов наблюдается и при других значениях параметра Пирса и тормозящего потенциала второй сетки.

Увеличение тормозящего потенциала второй сетки при некотором фиксированном скоростном разбросе также приводит к усложнению динамики системы. Это хорошо видно при сравнении спектров мощности, представленных на рис. 3.11, б и рис. 3.11, г, которые построены при одинаковом скоростном разбросе  $\Delta v/v_0 = 0,03$  и разных тормозящих потенциалах, соответственно,  $\Delta\varphi = 0,46$  и  $0,6$ . Из рисунков следует, что с ростом торможения в системе наблюдается зашумление спектра мощности, когда на фоне основных спектральных компонент и их

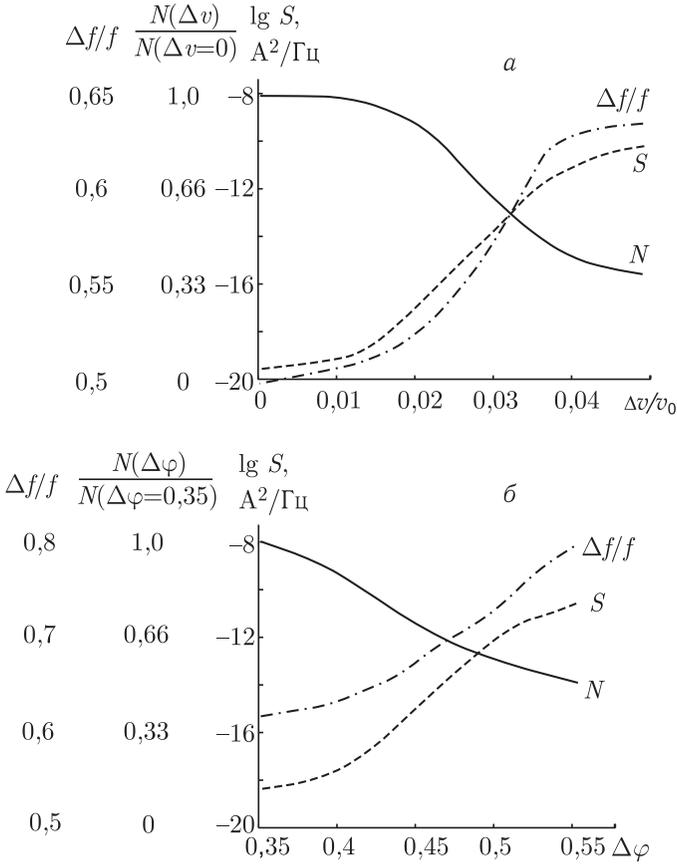


Рис. 3.12. Зависимости средней интенсивности шума  $S$  в пучке, нормированной изрезанности спектра  $N$  и ширины полосы генерации  $\Delta f/f$  от величины (а) начального разброса  $\Delta v/v_0$  электронов по скоростям ( $\alpha = 0,9$ ,  $\Delta \varphi = 0,46$ ); б) тормозящего потенциала  $\Delta \varphi$  ( $\alpha = 0,9$ ,  $\Delta v/v_0 = 0,03$ )

гармоник наблюдается быстрый рост шумового пьедестала, который поглощает некоторые выделенные гармоники в спектре генерации.

Интегральные характеристики спектров мощности колебаний в этом случае представлены на рис. 3.12, б, на котором они показаны в зависимости от тормозящего потенциала второй сетки. Область изменения потенциала была выбрана из условия наблюдения хаотических колебаний в пучке с виртуальным катодом при используемом параметре Пирса  $\alpha = 0,9$ . Приведенные данные свидетельствуют об усложнении спектральных характеристик широкополосной генерации в пучке с виртуальным катодом с ростом тормозящего потенциала при наличии начального скоростного разброса инжектируемого электронного потока.

### **3.3. Влияние положительных ионов на колебательные процессы в электронном пучке с виртуальным катодом. Низковольтный виркатор — генератор хаотических радиоимпульсов**

Важной задачей исследования колебательных явлений в пучке с виртуальным катодом является учет влияния положительных ионов на колебания пространственного заряда в потоке электронов с виртуальным катодом. Наличие положительных ионов в пучке (которые возникают благодаря ионизации остаточных газов [6]), с одной стороны, компенсирует пространственный заряд, тем самым препятствуя образованию виртуального катода [13], а с другой — возбуждает дополнительные колебания ионов (релаксационные, плазменные, радиальные) [29], что приводит к уменьшению изрезанности в спектре мощности широкополосных хаотических колебаний виртуального катода [6]. Также известно [30], что при инжектировании релятивистского электронного пучка со сверхкритическим током в рабочую камеру виркатора, заполненную газом низкого давления, сначала в ней формируется виртуальный катод, в области которого происходит интенсивная ионизация газа (скорость электронов мала, а их концентрация в области виртуального катода сильно превосходит концентрацию в плоскости инжекции). За счет ионизации и появления положительного заряда ионов происходит зарядовая нейтрализация виртуального катода, в результате чего он смещается по направлению движения пролетных электронов к выходной стенке трубы дрейфа. При достижении виртуального катода выходной сетки СВЧ генерация в виркаторе прекращается.

Схема исследуемой низковольтной системы с виртуальным катодом отличается от рассмотренной выше (см. рис. 3.1) тем, что камера прибора заполнена газом конечного давления. Моделирование нелинейных нестационарных процессов в пучке заряженных частиц с виртуальным катодом проводилось в рамках одномерной модели пролетного промежутка с тормозящим полем с использованием метода крупных частиц (подробнее схема численного моделирования описана в [31]) с учетом ионизации нейтрального газа в рабочей камере электронным потоком. Положительные ионы вводились путем расчета коэффициента ионизации  $\epsilon$ , который определяется, как количество ионов, образуемых одним электроном в газе на пути в 1 см при давлении в  $p_0 = 1$  мм рт. ст. и температуре  $20^\circ\text{C}$ , и зависит от энергии ионизирующего электрона и рода газа [32]. Известно, что максимум зависимости приходится на малые энергии, порядка 100 эВ, поэтому роль ионизации остаточного газа в пучке с виртуальным катодом очень велика, так как именно в подобной системе наблюдается очень большое число заряженных частиц с малой энергией (электронов, затормозившихся в области виртуального катода). При численном моделировании использовались

значения коэффициента ионизации, соответствующие зависимости для водорода, т.е. полагалось, что пространство взаимодействия низковольтного виркатора заполнено однородным по составу газом.

Исследуем с помощью предложенной модели влияние ионизации остаточных газов и динамики положительных ионов на физические процессы в пучке с виртуальным катодом. На рис. 3.13 приведены пространственно-временная диаграмма электронного потока, инжектируемого в пространство взаимодействия, заполненное остаточным газом (рис. 3.13, а). Давление остаточного газа в рабочей камере, при котором строился рисунок, равно  $p = 5 \cdot 10^{-5}$  мм рт. ст. Каждая линия на рис. 3.13, а соответствует траектории движения отдельной заряженной частицы в координатах  $(x, t)$ . На рис. 3.13, б, в показано распределение плотности пространственного заряда электронов пучка (рис. 3.13, б) и положительных ионов (рис. 3.13, в). На рисунках оттенком серого цвета показана величина плотности пространственного заряда, более темные области отвечают большим величинам плотности пространственного заряда. Рисунок иллюстрирует процесс образования виртуального катода в пространстве дрейфа, который характеризуется сгущением траекторий электронов на пространственно-временной диаграмме и, как следствие, резким увеличением плотности пространственного заряда электронного пучка. С образованием виртуального катода начинается активная ионизация остаточного газа в области виртуального катода, где скорости электронов близки к нулю (это хорошо видно на рис. 3.13, в). Далее, по мере компенсации пространственного заряда ионами, плотность которых в области виртуального катода увеличивается (рис. 3.13, а, в), происходит смещение виртуального катода, как целого, ко второй сетке, заканчивающееся выходом его из пространства взаимодействия, а следовательно, прекращением СВЧ генерации в системе. Возможна ситуация, когда виртуальный катод не вытесняется из пространства взаимодействия. В этом случае колебания виртуального катода, как целого, затухают и он становится стационарным, что также приводит к срыву генерации в системе.

После прекращения колебаний виртуального катода в системе ионы под действием внешнего поля начинают дрейфовать к выходной сетке системы, вследствие этого снижается величина положительного пространственного заряда в пространстве взаимодействия и создаются условия для повторного возникновения нестационарного виртуального катода и возобновления генерации. Затем процесс вытеснения виртуального катода за счет генерации ионов и компенсации пространственного заряда пучка повторяется, после чего снова происходит дрейф ионов к отрицательной сетке, понижение плотности ионов в пространстве взаимодействия, появление виртуального катода и т. д.

В результате этих процессов выходной сигнал виркатора, снимаемый с конца ОСЗС, в режиме сильного влияния ионизации остаточных газов представляет собой последовательность хаотических радиоимпульсов с примерно равными интервалами между ними.

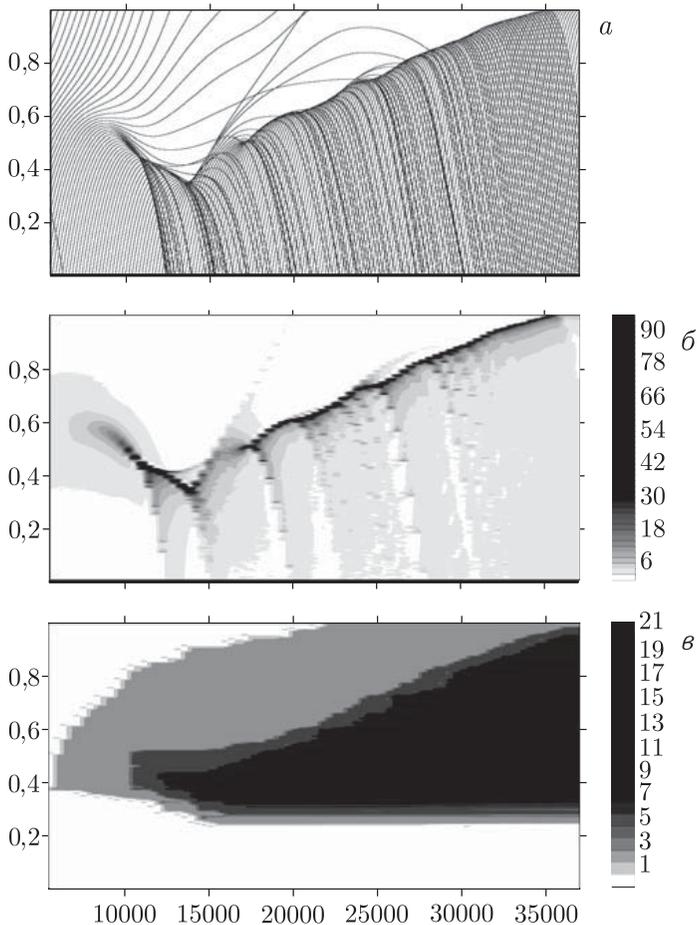


Рис. 3.13. Пространственно-временная диаграмма электронного потока (а), распределение плотности пространственного заряда электронов (б) и ионов (в)

На рис. 3.14 на одном графике приведена зависимость выходного сигнала низковольтного виркатора  $U(t)$  (кривая 1) и суммарной плотности заряда ионов  $\rho_{is}(t)$  в пространстве взаимодействия (кривая 2) при значении тормозящей разности потенциалов  $\Delta\varphi = 0,45$  и давлении остаточных газов  $p = 9 \cdot 10^{-6}$ .

Из рис. 3.14 хорошо видно, что на зависимости выходного сигнала наблюдаются временные интервалы, когда в системе имеет место генерация СВЧ сигнала со значительной амплитудой, они соответствуют моментам возникновения в системе виртуального катода, в эти моменты плотность ионного фона резко возрастает. А также интервалы времени, когда генерация практически подавляется, — моменты времени, когда в системе исчезает виртуальный катод и происходит медленный дрейф ионов из пространства взаимодействия, суммарная

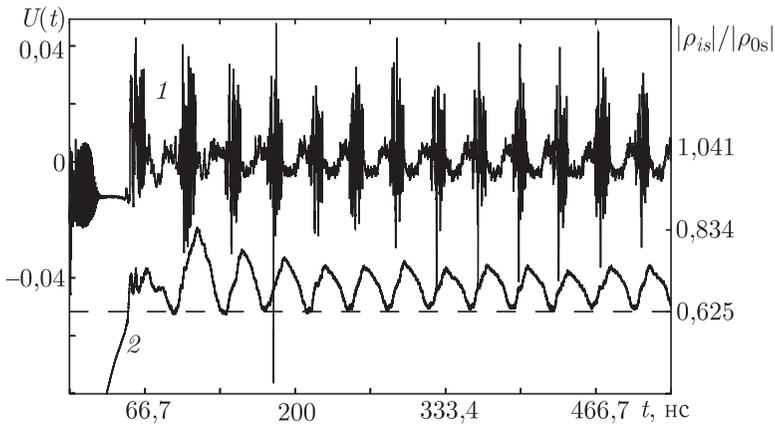


Рис. 3.14. Выходной сигнал низковольтного виркатора  $U(t)$  (линия 1) и зависимость суммарной плотности положительного заряда  $\rho_{is}(t)$  (линия 2), построенные при значении тормозящей разности потенциалов  $\Delta\varphi = 0,45$  и давлении остаточных газов  $p = 1,5 \cdot 10^{-6}$

плотность ионного фона падает и при достижении некоторого порогового значения (отмечено пунктирной линией) происходит возобновление генерации.

Подавление колебаний в пучке с виртуальным катодом в присутствии положительных ионов в пролетном промежутке можно связать с величиной критического параметра Пирса  $\alpha_{кр}$ , при котором формируется нестационарный колеблющийся виртуальный катод (см. рис. 3.6, кривые 1 и 2) [34]. Изменение плотности положительного пространственного заряда можно рассматривать как изменение эффективного параметра Пирса  $\alpha_{эфф}(\tau) = \alpha\sqrt{1 - \rho_i(\tau)}$ , который определяет колебания виртуального катода в присутствии ионов. Увеличение плотности ионов приводит к увеличению эффективного параметра  $\alpha_{эфф}$ . Колеблющийся виртуальный катод в процессе ионизации наблюдается до тех пор, пока эффективное значение параметра Пирса  $\alpha_{эфф}$  превышает соответствующее критическое значение  $\alpha_{кр}(\Delta\varphi)$ , которое зависит от величины тормозящего потенциала ( $\Delta\varphi$ ), как показано на рис. 3.6. Другими словами, условие  $\alpha\sqrt{1 - \rho_i} = \alpha_{кр}(\Delta\varphi)$  определяет максимальную плотность ионов  $\rho_{i,max}$  в области виртуального катода, при которой колебания виртуального катода еще наблюдаются:

$$\rho_i \leq \rho_{i,max} = \{1 - [\alpha/\alpha_{кр}(\Delta\varphi)]^2\}. \quad (3.13)$$

Длительность существования (время жизни)  $\tau_{ВК}$  виртуального катода соответствует времени, в течение которого электронный пучок благодаря ионизации газа создает ионный фон плотностью  $\rho_{i,max}$ . Тогда время жизни виртуального катода можно оценить, используя уравнение для

изменения плотности ионов от времени:

$$\frac{d\rho_i}{dt} = 2\varepsilon_{\max} \frac{p}{p_0} v_0, \quad (3.14)$$

где учтено, что коэффициент ионизации  $\varepsilon$  максимален в области виртуального катода, где энергия электронов мала, множитель 2 отражает тот факт, что ионизацию газа обеспечивают как электроны, движущиеся к виртуальному катоду, так и электроны, отраженные от него.

С использованием уравнений (3.13) и (3.14) легко получить выражение для времени жизни виртуального катода:

$$\tau_{\text{ВК}} \simeq (\alpha - \alpha_{\text{кр}}(\Delta\varphi))^2 \frac{p_0}{2\alpha\varepsilon_{\max}} p v_0. \quad (3.15)$$

Данное выражение показывает, что время жизни виртуального катода максимально, когда разность  $\alpha - \alpha_{\text{кр}}(\Delta\varphi)$  достигает максимального значения, что имеет место при тормозящей разности потенциалов  $\Delta\varphi \simeq 0,5$  (см. рис. 3.6).

Таким образом, увеличение величины положительного пространственного заряда в области виртуального катода, которое имеет место при ионизации остаточных газов, соответствует уменьшению эффективного параметра Пирса и переходу системы в предгенерационный режим с полным прохождением электронного потока (переход через линию «1» рис. 3.6) либо с образованием стационарного виртуального катода (переход через линию «2» рис. 3.6), а последующий дрейф ионов из пространства взаимодействия и, следовательно, снижение положительной плотности заряда эквивалентен увеличению эффективного параметра Пирса и возобновлению генерации.

Таким образом, зная карту режимов колебаний в диодном промежутке с тормозящим полем без ионного фона (рис. 3.6), можно эффективно управлять характеристиками выходного сигнала низковольтного виркатора в режиме сильного влияния ионизации остаточных газов (генерации хаотических радиоимпульсов). Следует отметить, что теоретически обнаруженные эффекты были далее подтверждены экспериментально на разборном вакуумном макете низковольтного виркатора [33].

В работе [31] была показана возможность управления временем жизни нестационарного виртуального катода в пространстве взаимодействия, то есть длительностью импульса, с помощью изменения параметров системы (тормозящего потенциала и давления остаточных газов). Длительность промежутка между импульсами будет определяться скоростью дрейфа положительных ионов, пропорциональной тормозящему полю в диодном промежутке. Подобный режим работы низковольтного виркатора может быть использован для создания на его основе генератора хаотических радиоимпульсов для систем передачи информации с помощью хаотических сигналов [8]. При этом существует возможность широкой перестройки длины и скважности хаотических радиоимпульсов.

### 3.4. Лабораторный макет низковольтного виркатора и результаты его исследования

Экспериментальные результаты, описанные в предыдущем разделе, были получены на разборной вакуумной установке при непрерывной откачке. На основе данных экспериментальных и теоретических результатов был разработан лабораторный макет низковольтного виркатора как прототип управляемого источника широкополосных (с шириной полосы частот более октавы) хаотических колебаний сантиметрового диапазона длин волн.

Конструкция низковольтного виркатора в целом содержит все те же конструктивные элементы, что и разборный вакуумный макет (см. рис. 3.1). Отличие заключается в том, что из конструкции исключена вторая сетка  $b$ , а тормозящий потенциал  $V_{\text{торм}}$  подается непосредственно на коллектор. Внешний вид лабораторного макета низковольтного виркатора показан на рис. 3.15. Все исследования проводились при следующих параметрах макета: ускоряющее напряжение менялось в диапазоне 0,6–2,0 кВ, ток составлял величину  $I = 150$  мА; система работала в импульсном режиме при скважности  $Q = 100$  и длине импульса  $t = 50$  мкс; сопротивление связи ОСЗС составляло  $K \approx 120$  Ом, замедление  $n \approx 10$ ; измерения проводились как без внешнего фокусирующего электроны магнитного поля, так и при наличии внешнего магнитного поля, которое создавалось магнитными кольцами, надеваемыми на лампу.

Рассмотрим основные результаты исследования генерации широкополосных хаотических сигналов, полученные с помощью лабораторного макета низковольтного виркатора. В целом полученные результаты находятся в хорошем соответствии с результатами, представленными в первом разделе главы и полученными на разборной вакуумной установке. Однако есть и ряд различий, обусловленных особенностями экспериментального макета.

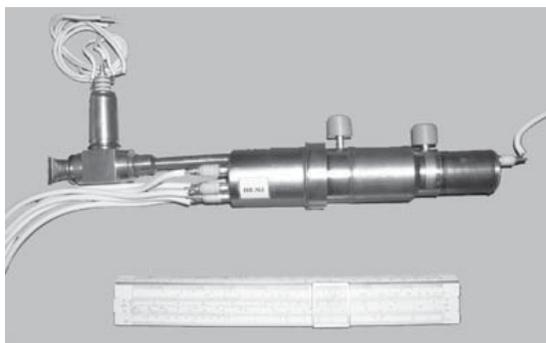


Рис. 3.15. Внешний вид лабораторного макета низковольтного виркатора

В режиме без внешнего фокусирующего электроны магнитного поля зависимость интегральной ВЧ мощности от параметра торможения  $V_{\text{торм}}/V_0$  имеет вид кривой с одним максимумом вблизи величины  $V_{\text{торм}}/V_0 = 0,1$ . Соответствующая зависимость показана на рис. 3.16 сплошной линией. При небольших тормозящих потенциалах ( $V_{\text{торм}}/V_0 \approx 0,4-0,55$ ) в системе возникают колебания на длинноволновом конце СВЧ диапазона в пределах 100–300 МГц. Соответствующие спектры генерируемых сигналов, снятые с помощью СВЧ спектроанализатора ESA-L Agilent Technologies E4408B, показаны на рис. 3.17.

При уменьшении тормозящего потенциала  $V_{\text{торм}}$  наблюдается расширение спектра генерации в сторону высоких частот (см. рис. 3.16, штриховая линия), одновременно растет интегральная мощность колебаний (рис. 3.16, сплошная линия). Оптимальные значения ширины полосы и мощности достигаются при  $V_{\text{торм}}/V_0 = 0,08$ : интегральная мощность шумоподобных колебаний составляет величину порядка 3,2 Вт, а ширина полосы колебаний достигает 2,5 ГГц (соответствующий спектр мощности колебаний показан на рис. 3.17, б). При дальнейшем увеличении торможения полоса генерируемых частот и мощность генерации уменьшаются, а спектр колебаний становится дискретным (рис. 3.17, в).

Также в режиме без внешнего магнитного поля исследовались зависимости выходной мощности и ширины полосы генерации от ускоряющего потенциала  $V_0$ , которые показаны на рис. 3.18. Показано, что по мере увеличения ускоряющего потенциала колебания, так же как и в предыдущем случае, возникают вначале на длинноволновой части спектра. При дальнейшем изменении величины ускоряющего потенциала в системе могут реализовываться различные колебательные режимы

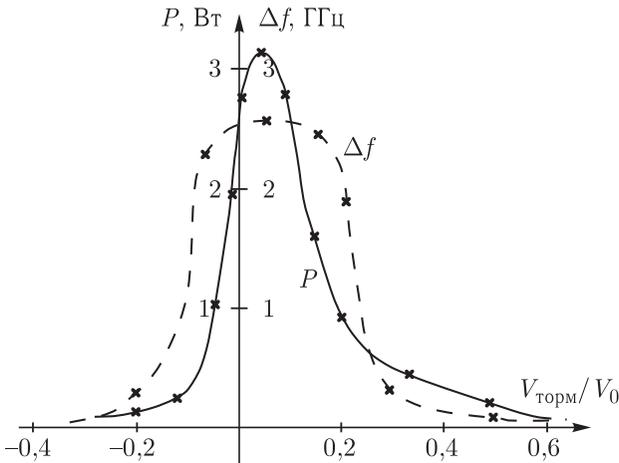


Рис. 3.16. Экспериментальная зависимость выходной мощности низковольтного виркатора (сплошная кривая) и ширины полосы генерации (пунктирная линия) от величины  $V_{\text{торм}}/V_0$

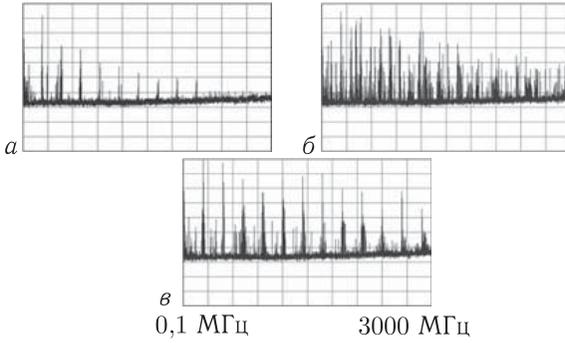


Рис. 3.17. Спектры колебаний на выходе низковольтного виркатора в зависимости от нормированного тормозящего напряжения  $V_{\text{торм}}/V_0$ : а)  $V_{\text{торм}}/V_0 = 0,5$ ; б)  $V_{\text{торм}}/V_0 = 0,12$ ; в)  $V_{\text{торм}}/V_0 = 0,06$ ; величина ускоряющего потенциала  $V_0 = 1780$  В

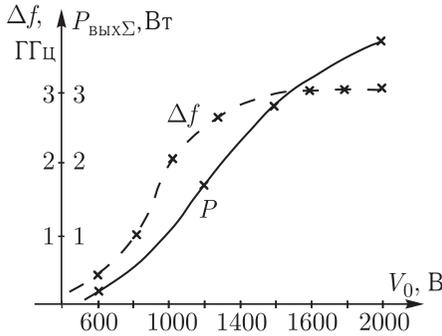


Рис. 3.18. Зависимости интегральной мощности генерации (сплошная линия) и полосы генерируемых частот (штриховая линия) от ускоряющего напряжения  $V_0$

от близких к регулярным до хаотических. При этом максимальная выходная мощность соответствует хаотическому режиму генерации и составляет величину порядка 3,5 Вт, а ширина полосы генерируемых частот имеет величину порядка 2 ГГц. Соответствующие зависимости мощности и ширины полосы генерации представлены на рис. 3.18, спектры колебаний для данного случая приведены на рис. 3.19. Следует отметить, что в режимах без фокусировки электронов пучка магнитным полем наблюдались режимы генерации с сильно изрезанным спектром мощности, когда перепады мощности спектральных компонент в рабочей полосе частот превышали 10–20 дБ. Введение внешнего магнитного поля улучшало данную характеристику низковольтного виркатора.

Для исследования зависимости характеристик генерации низковольтного виркатора от магнитного поля в прибор была введена система внешней магнитной фокусировки пучка с помощью постоянных магнитов — магнитная периодическая фокусирующая система (МПФС).

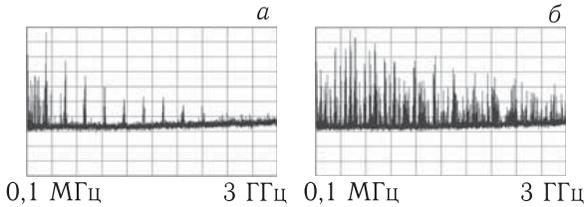


Рис. 3.19. Спектры колебаний на выходе низковольтного виркатора в зависимости от ускоряющего напряжения  $V_0$ : а)  $V_0 = 1500$  В; б)  $V_0 = 1850$  В

Система допускала изменение числа используемых кольцевых магнитов. В проведенных экспериментах число магнитных колец менялось от 1 до 4. Существовала возможность изменять величину магнитного поля в области виртуального катода в пределах от 0 до 700 Гс. Вначале были исследованы характеристики генерации низковольтного виркатора при одном кольцевом магните, который был расположен в области виртуального катода. В результате экспериментального исследования было показано, что при увеличении максимальной индукции магнитного поля от 0 до 700 Гс полоса генерируемых частот расширяется с 0,3 ГГц до 3 ГГц (рис. 3.20, а), т.е. введение неоднородного магнитного поля в области виртуального катода приводит к увеличению диапазона генерируемых низковольтным виркатором частот. Подробно физические механизмы подобного расширения полосы генерируемых частот во внешнем магнитном поле рассмотрены в главе 4.

В эксперименте с лабораторным макетом также исследовались зависимости мощности и ширины полосы хаотической генерации от числа  $N$  постоянных магнитов МПФС (рис. 3.20, б). При увеличении числа колец от 1 до 4 мощность выходных колебаний постепенно возрастает до 600 мВт. В то же время ширина полосы частот спектра колебаний расширяется, он становится практически сплошным в полосе частот

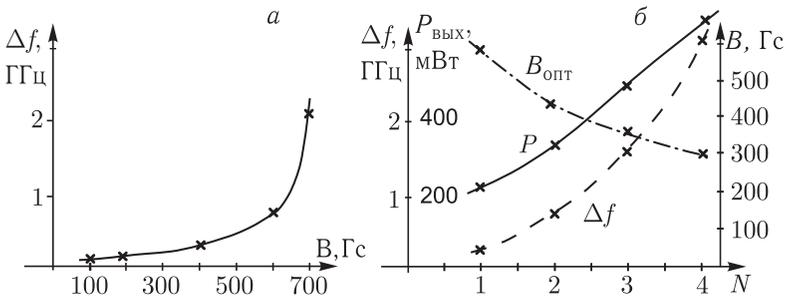


Рис. 3.20. а) Зависимость ширины полосы частот генерации от величины внешнего фокусирующего магнитного поля; б) Зависимость выходной интегральной мощности (сплошная линия) и ширины полосы частот генерации (штриховая линия) от числа  $N$  колец МПФС. Штрих-пунктирной линией показана оптимальная величина внешнего магнитного поля для характеристик выходного излучения низковольтного виркатора

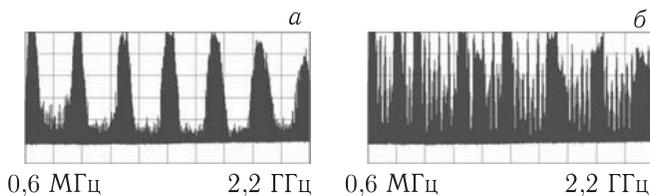


Рис. 3.21. Спектры колебаний на выходе низковольтного виркатора в зависимости от количества колец магнитной периодической фокусирующей системы: а) 2 кольца; б) 4 кольца

шириной до 3 ГГц (рис. 3.21). Спектр на рис. 3.21, а соответствуют случаю двух колец в системе МПФС, рис. 3.21, б — четырем. При этом оптимальная величина магнитного поля, при котором наблюдается максимальная мощность и ширина полосы генерации, снижается с 600 до 300 Гс (см. рис. 3.20, б, штрихпунктирная линия).

## Заключение

Представленные в данной главе экспериментальные и теоретические результаты показывают, что различные устройства с нерелятивистскими низковольтными электронными потоками в режимах формирования виртуального катода могут служить эффективными, легко управляемыми источниками широкополосных хаотических колебаний в сантиметровом и миллиметровом диапазонах длин волн.

К достоинствам рассмотренных здесь генераторов хаотических сигналов СВЧ диапазона (низковольтных виркаторов) следует отнести следующие. (1) Простота конструкции данного класса приборов и возможность работы без фокусирующего магнитного поля, а следовательно, возможность отказаться в конструкции прибора от фокусирующей электроны системы. (2) Простота управления спектральными характеристиками генерации путем изменения тормозящего потенциала, при этом существует возможность получения как одночастотных колебаний при малом торможении, так и хаотических сигналов, сложность которых, оцениваемая по ширине полосы и изрезанности спектра, с увеличением торможения возрастает. (3) В режимах хаотической генерации при оптимальной настройке тормозящего потенциала и скоростного разброса электронного пучка существует возможность получать хаотические сигналы с шириной полосы более 1,5–2 октавы и изрезанностью спектра менее 5 дБ. (4) Существуют возможности повышения выходной мощности широкополосного СВЧ излучения низковольтного виркатора путем увеличения тока пучка за счет использования магнетронно-инжекторной электронной пушки или многолучевых систем.

Следует отметить, что в данной главе были затронуты не все важные аспекты исследования генерации сигналов СВЧ диапазона в нерелятивистских потоках заряженных частиц с виртуальным катодом. Часть этих вопросов, в частности, вопросы учета двумерных эффектов

динамики заряженных частиц в области виртуального катода, будут затронуты в следующих двух главах. Из нерассмотренных в данной монографии вопросов, тем не менее представляющих значительный интерес, следует отметить, во-первых, задачу о миниатюаризации низковольтного виркатора, т. е. создание миниатюрного источника широкополосного хаотического сигнала с малыми ускоряющими напряжениями, и во-вторых, задачу о повышении частоты генерации системы на виртуальном катоде. Одним из путей решения последней задачи представляется повышение плотности тока электронных пучков, что возможно достичь, используя катоды с полевой эмиссией. Другой не менее перспективный путь — использовать добротные резонаторы, настроенные на высшие гармоники частот виртуального катода (виркатор на  $n$ -й гармонике).

### Список литературы

1. Дубинов А. Е., Селемир В. Д. Электронные приборы с виртуальным катодом // Радиотехника и электроника. 2002. Т. 47, № 6. С. 575.
2. Дубинов А. Е., Ефимова И. А., Корнилова И. Ю., Сайков С. К., Селемир В. Д., Тараканов В. П. Нелинейная динамика электронных пучков с виртуальным катодом // ФЭЧАЯ. 2004. Т. 35, № 2. С. 462.
3. Brandt H. E. The turbutron // IEEE Trans. Plasma Sci. 1985. Т. 13, № 6. С. 513.
4. Анфиногентов В. Г., Храмов А. Е. Сложное поведение электронного потока с виртуальным катодом и генерация хаотических сигналов в виртуальных системах // Изв. РАН. Сер. физ. 1997. Т. 61, № 12. С. 2391–2401.
5. Анфиногентов В. Г., Храмов А. Е. К вопросу о механизме возникновения хаотической динамики в вакуумном СВЧ генераторе на виртуальном катоде // Изв. вузов. Радиофизика. 1998. Т. XLI, № 9. С. 1137–1146.
6. Калинин Ю. А., Короновский А. А., Храмов А. Е., Егоров Е. Н., Филатов Р. А. Экспериментальное и теоретическое исследование хаотических колебательных явлений в нерелятивистском электронном потоке с виртуальным катодом // Физика плазмы. 2005. Т. 31, № 11. С. 1009–1025.
7. Егоров Е. Н., Храмов А. Е. Исследование хаотической динамики в электронном пучке с виртуальным катодом во внешнем магнитном поле // Физика плазмы. 2006. Т. 32, № 8. С. 742–754.
8. Дмитриев А. С., Панас А. И. Динамический хаос: новые носители информации для систем связи. — М.: Физматлит, 2002.
9. Special issue on applications of nonlinear dynamics to electronic and information engineering // Proc. IEEE 2002. V. 90, № 5.
10. Dronov V., Hendrey M. R., Antonsen T. M., Ott E. Communication with a chaotic traveling wave tube microwave generator // Chaos. 2004. V. 14, № 1. P. 30.

11. *Егоров Е.Н., Калинин Ю.А., Левин Ю.И., Трубецков Д.И., Храмов А.Е.* Вакуумные генераторы широкополосных хаотических колебаний на основе нерелятивистских электронных пучков с виртуальным катодом // Изв. РАН. Сер. физ. 2005. Т. 69, № 12. Р. 1724.
12. *Диденко А.Н., Красик Я.Е., Перельгин С.Ф., Фоменко Г.П.* Генерация мощного СВЧ излучения релятивистским электронным пучком в триодной системе // Письма в ЖТФ. 1979. Т. 5, № 6. С. 321.
13. *Трубецков Д.И., Храмов А.Е.* Лекции по сверхвысокочастотной электронике для физиков. — М.: Физматлит, 2004. — Т. 2.
14. *Кузелев М.В., Рухадзе А.А.* Электродинамика плотных электронных пучков в плазме. — М.: Наука, 1990.
15. *Диденко А.Н., Ращиков В.И.* Генерация мощных СВЧ колебаний в системах с виртуальным катодом // Физика плазмы. 1992. Т. 18. С. 1182.
16. *Granatstein V.L., Alexeff I.* High power microwave sources. — Artech House Microwave Library, 1987.
17. *Калинин Ю.А., Есин А.Д.* Методы и средства физического эксперимента в вакуумной СВЧ электронике. — Саратов: Изд-во СГУ, 1991.
18. *Храмов А.Е.* Хаос и образование структур в электронном потоке с виртуальным катодом в ограниченном пространстве дрейфа // Радиотехника и электроника. 1999. Т. 44, № 5. С. 551–556.
19. *Рошаль А.С.* Моделирование заряженных пучков. — М.: Атомиздат, 1979.
20. *Birdsall C.K., Langdon A.B.* Plasma physics, via computer simulation. — NY: McGraw-Hill, 1985.
21. *Morey I.J., Birdsall C.K.* Travelling-wave-tube simulation: the IBC code // IEEE Trans. Plasma Sci. 1990. V. 18, № 3. Р. 482.
22. *Трубецков Д.И., Храмов А.Е.* Лекции по сверхвысокочастотной электронике для физиков. — М.: Физматлит, 2003. — Т. 1.
23. *Егоров Е.Н., Калинин Ю.А., Короновский А.А., Храмов А.Е., Морозов М.Ю.* Исследование мощности СВЧ генерации в нерелятивистском электронном пучке с виртуальным катодом в тормозящем поле // Письма в ЖТФ. 2006. Т. 32, № 9. С. 71–78.
24. *Akimov P.V., Schamel H., Kolinsky H., Ender A., Kuznetsov V.I.* The true nature of space-charge-limited currents in electron vacuum diodes: A Lagrangian revision with corrections // Phys. Plasmas. 2001. V. 8. P. 3788.
25. *Привезенцев А.П., Фоменко Г.П., Филипенко Н.М.* Колебания электронного потока в плоском пролетном промежутке // ЖТФ. 1981. Т. 51, № 6. С. 1161.
26. *Калинин Ю.А., Храмов А.Е.* Экспериментальное и теоретическое исследование влияния распределения электронов по скоростям на хаотические колебания в электронном потоке в режиме образования виртуального катода // ЖТФ. 2006. Т. 76, № 5. С. 25–34.

27. Калинин Ю. А., Панин А. Ф., Украинская Т. Н. Экспериментальное исследование спектра продольных составляющих скорости электронов в течении периода ВЧ поля // Электронная техника. 1976. Сер. 1. № 2. С. 111.
28. Амирян Р. А., Горенков В. С., Мякинъков Ю. П. Источники низкочастотного модуляционного шума в ЛБВ // Электронная техника. 1980. Сер. 1. № 4. С. 13.
29. Колесников Е. К., Мануйлов А. С., Филиппов Б. В. Динамика пучков заряженных частиц в газоплазменных средах. — СПб: Изд-во Санкт-Петербургск. ун-та, 2002.
30. Селемир В. Д., Дубинов А. Е., Птицын Б. Г. и др. Влияние вакуумных условий на СВЧ генерацию в виркаторе // Письма в ЖТФ. 2001. Т. 27, № 22. С. 73–79.
31. Филатов Р. А., Калинин Ю. А., Храмов А. Е., Трубецков Д. И. Влияние положительных ионов на колебательные процессы в электронном пучке с виртуальным катодом // Изв. вузов. Радиофизика. 2006. Т. XLIX, № 10. С. 853–863.
32. Алимовский И. В. Электронные пучки и электронные пушки. — М.: Сов. радио, 1966.
33. Филатов Р. А., Калинин Ю. А., Храмов А. Е. Исследование влияния положительных ионов на СВЧ генерацию в низковольтном виркаторе // Письма в ЖТФ. 2006. Т. 32, № 11. С. 61–67.
34. Filatov R. A., Hramov A. E., Bliokh Y. P., Koronovskii A. A., Felsteiner J. Influence of background gas ionization on oscillations in a virtual cathode with a retarding potential // Phys. Plasmas. 2009. V. 16. P. 033106.

## Глава 4

# ВЛИЯНИЕ ДВУМЕРНЫХ ЭФФЕКТОВ ДИНАМИКИ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ НА КОЛЕБАНИЯ В ЭЛЕКТРОННЫХ ПОТОКАХ С ВИРТУАЛЬНЫМ КАТОДОМ

Е. Н. Егоров, С. А. Куркин, А. Е. Храмов

Моделирование в двух и трех пространственных измерениях гораздо более реалистично, чем в одном измерении.

*Бэдсел Ч., Ленгдон А.* Физика плазмы и численное моделирование. М.: Энергаториздат, 1989. С. 295.

*Формирование и нелинейная динамика виртуального катода в случае нерелятивистских энергий электронного потока. Влияние внешнего магнитного поля на физические процессы в слаборелятивистском электронном потоке с виртуальным катодом. Хаотическая динамика релятивистского электронного пучка с виртуальным катодом при изменении величины внешнего магнитного поля.*

### 4.1. Вводные замечания

В предыдущей главе была рассмотрена простейшая одномерная модель системы с виртуальным катодом (низковольтного виркатора). Такую модель можно считать достаточно грубым приближением к реальной виркаторной системе, которая тем не менее дает удовлетворительное качественное описание работы низковольтного виркатора, однако есть ряд существенных расхождений теоретических и экспериментальных данных. Основным моментом, отличающим результаты численных исследований одномерной модели от экспериментальных данных, является характер зависимости мощности генерируемых колебаний от тормозящего потенциала в системе. Одномерная модель, как показали исследования, не может предсказать мягкого возбуждения колебаний в системе при увеличении тормозящего потенциала  $\Delta V_{\text{торм}}/V_0$  от минимального значения. Одномерная модель демонстрирует жесткое

возникновение генерации в системе при значениях параметра торможения  $\Delta V_{\text{торм}}/V_0$ , значительно больших по величине, чем наблюдается в физическом эксперименте.

Возможной причиной такого несоответствия является то, что одномерная модель принципиально не может учитывать поперечные движения электронного потока, которые неизбежно возникают при движении электронов в тормозящем поле. Понятно, что наличие ненулевых поперечных скоростей электронов в потоке должно влиять на энергетические соотношения в системе (как в случае релятивистских, так и нерелятивистских систем).

В данной главе рассмотрены физические процессы, происходящие в системах с виртуальным катодом, для нерелятивистского, слаборелятивистского и ультрарелятивистского электронных пучков с учетом двумерных эффектов динамики заряженных частиц в области виртуального катода.

## 4.2. Формирование и нелинейная динамика виртуального катода в случае нерелятивистских энергий электронного потока

**4.2.1. Исследуемая модель.** Рассматриваемая в данном разделе модель является классической моделью для изучения динамики пучка заряженных частиц с виртуальным катодом, а также часто используется для рассмотрения различных типов неустойчивостей в пучково-плазменных системах [1, 2]. В качестве пространства дрейфа электронного потока используется замкнутый отрезок цилиндрического волновода длиной  $L$  и радиусом  $R$ , закрытый с торцов сеточными электродами (см. рис. 4.1). Аксиально-симметричный моноскоростной на входе сплошной электронный пучок 2 со скоростью  $v_0$ , током  $I$  и радиусом  $R_b$  инжектируется в пространство взаимодействия 4 через левую (вход-

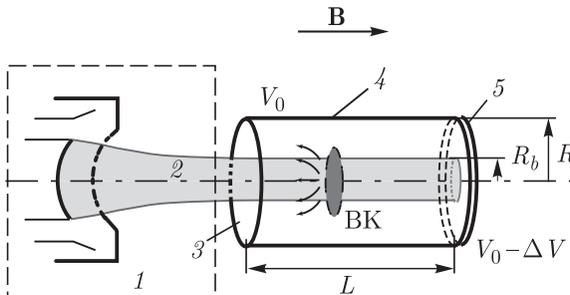


Рис. 4.1. Схема исследуемой системы, цифрами обозначены соответственно: 1 — электронная пушка; 2 — нерелятивистский электронный пучок; 3 — входной электрод; 4 — цилиндр, ограничивающий пространство дрейфа в поперечном направлении; 5 — выходной электрод

ную) сетку 3 и выводится через правую (выходную) 5, а также может оседать на боковой стенке пространства взаимодействия. Вдоль оси системы прикладывается внешнее однородное фокусирующее магнитное поле с индукцией  $B$ . На правый (выходной) электрод 5, изолированный от цилиндра 4, может подаваться тормозящий потенциал  $V_0 - \Delta V$ , по величине меньший или равный ускоряющему. Необходимость введения дополнительного электрода с тормозящим потенциалом подробно обсуждалась в предыдущей главе.

Для описания нелинейных нестационарных процессов в такой системе в случае нерелятивистских и слабoreлятивистских энергий электронов удобно использовать самосогласованную систему уравнений Пуассона–Власова [3], при этом кинетическое уравнение Власова решается классическим для подобных задач методом частиц [4, 5]. В настоящее время подобные самосогласованные модели являются основным инструментом численного моделирования и анализа физических процессов в различных электронных и плазменных приборах сверхвысоких частот [6] и в задачах физики плазмы [7]. Отметим, что применение модели, основанной на нахождении самосогласованного поля пространственного заряда с помощью уравнения Пуассона, не позволяет корректно изучать вопрос о критическом токе релятивистских электронных пучков с релятивистскими факторами  $\beta_0 = v_0/c \gtrsim 0,5$ , так как при этом не учитывается собственное магнитное поле электронного потока и связанные с ним эффекты пинчевания пучка.

В уравнениях, описывающих динамику слабoreлятивистского электронного пучка, используются следующие безразмерные переменные потенциала  $\varphi$ , напряженности  $E$  поля пространственного заряда, плотности  $\rho$  и скорости  $v$  электронов, пространственных координат  $z$  и  $r$ , времени  $t$ :

$$\begin{aligned} \varphi' &= \left(\frac{v_0^2}{\eta_0}\right)\varphi, & E' &= \left(\frac{v_0^2}{L\eta_0}\right)E, & B' &= \left(\frac{v_0}{L\eta_0}\right)B, & \rho' &= \rho_0\rho, \\ v' &= v_0v, & z' &= Lz, & r' &= Lr, & t' &= \left(\frac{L}{v_0}\right)t, \end{aligned} \quad (4.1)$$

где штрихом обозначены соответствующие размерные величины,  $\eta_0$  — удельный заряд покоящегося электрона;  $v_0$  и  $\rho_0$  — не зависящие от радиуса статические (невозмущенные) скорость и плотность электронного потока на входе в систему;  $L$  — длина пространства взаимодействия.

Для каждой крупной частицы решались уравнения движения с учетом слабого релятивизма, которые в цилиндрических координатах в безразмерных переменных (4.1) записываются в виде:

$$\frac{d^2 r_i}{dt^2} - r_i \left(\frac{d\theta_i}{dt}\right)^2 = \eta(z_i, \theta_i, r_i) \left(E_r + r_i B \frac{d\theta_i}{dt}\right), \quad (4.2)$$

$$r_i \frac{d^2 \theta_i}{dt^2} + 2 \frac{d\theta_i}{dt} \frac{dr_i}{dt} = -\eta(z_i, \theta_i, r_i) B \frac{dr_i}{dt}, \quad (4.3)$$

$$\frac{d^2 z_i}{dt^2} = \eta(z_i, \theta_i, r_i) E_z, \quad i = 1, \dots, N_0, \quad (4.4)$$

где

$$\eta(z_i, \theta_i, r_i) = \left( 1 - \frac{\beta_0^2}{2} \left[ \left( \frac{dr_i}{dt} \right)^2 + \left( r_i \frac{d\theta_i}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dz_i}{dt} \right)^2 \right] \right). \quad (4.5)$$

Здесь  $z_i$ ,  $r_i$  и  $\theta_i$  — соответственно продольная, радиальная и азимутальная координаты заряженных частиц;  $E_z$  и  $E_r$  — продольная и радиальная компоненты электрического поля;  $B = B_z$  — продольная компонента внешнего магнитного поля (предполагается, что радиальная составляющая внешнего магнитного поля равна нулю  $B_r = 0$ ), а  $\beta_0 = v_0/c$ , где  $v_0$  — статическая (невозмущенная) скорость электронного потока на входе в систему,  $c$  — скорость света. Азимутальные составляющие полей отсутствуют, поскольку система является аксиально симметричной. Индексом « $i$ » обозначены номера частиц,  $N_0$  — полное число заряженных частиц, моделирующих электронный поток.

Распределение потенциала в пространстве взаимодействия рассчитывалось самосогласованным образом с помощью уравнения Пуассона:

$$\frac{1}{r} \frac{d\varphi}{dr} + \frac{d^2 \varphi}{dr^2} + \frac{d\varphi^2}{dz^2} = \alpha^2 \rho, \quad (4.6)$$

где

$$\alpha = L \left( \frac{|\rho_0|}{\varphi_0 \varepsilon_0} \right)^{1/2} = \frac{\sqrt{2} \omega_p L}{v_0} \quad (4.7)$$

— безразмерный управляющий параметр (критерий подобия задачи [8, Т.2, Л. 4]), пропорциональный току пучка, как  $\alpha \sim \sqrt{I}$ , и длине пространства взаимодействия, как  $\alpha \sim L$ .

Уравнение Пуассона (4.6) решается при следующих граничных условиях:

$$\left. \frac{d\varphi}{dr} \right|_{r=0} = 0, \quad (4.8)$$

$$\varphi(z = 0, r) = \varphi_0, \quad \varphi(z = 1, r) = 1 - \Delta\varphi, \quad \varphi(z, r = R) = \varphi_0, \quad (4.9)$$

где условие (4.8) на оси симметрии  $r = 0$  определяется аксиальной симметрией пространства взаимодействия, условие (4.9) задается тем, что пучок инжектируется в эквипотенциальное пространство, ограниченное проводящей цилиндрической поверхностью радиуса  $R$  под ускоряющим потенциалом. При этом тормозящий потенциал  $\Delta\varphi = (V_0 - V_{\text{торм}})/V_0$  меняется в пределах от 0 до 1. При движении в пространстве взаимодействия электроны выводятся из пространства

взаимодействия при пересечении входной и выходной сеток  $z = 0$  и  $z = 1$ , а также боковой поверхности  $r = R$ .

Для большей наглядности последующего изложения соотнесем используемые в дальнейшем безразмерные параметры с реальными физическими величинами. Для этого

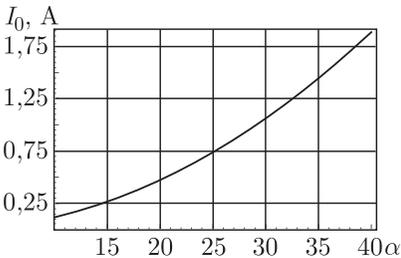


Рис. 4.2. Кривая зависимости невозмущенного тока системы  $I_0$  от величины безразмерного параметра подобия  $\alpha$

зададим следующие основные геометрические и рабочие параметры системы: ускоряющее пучок напряжение  $V_0 = 2$  кВ; длина системы  $L = 10$  см; радиус пучка, если это не упоминается особо, положим равным  $R_b = 2$  мм. При заданных значениях реальных физических величин мы можем легко поставить в соответствие параметру  $\alpha$  величину тока невозмущенной системы. Соответствующая зависимость показана на рис. 4.2.

Еще раз отметим, что применимость потенциального приближения, используемого в данном случае, ограничена случаем нерелятивистских и слаборелятивистских скоростей электронов пучка, которые и будут рассматриваться в разделах 4.1–4.3 данной главы. Случай релятивистских пучков будет рассматриваться в разделе 4.4.

**4.2.2. Физические процессы в электронном потоке с виртуальным катодом в системе с торможением. Механизм формирования виртуального катода в системе без фокусировки электронов магнитным полем.** Для начала детально рассмотрим механизм формирования виртуального катода в электронном потоке в трубе дрейфа без фокусировки пучка магнитным полем. Для этого будем рассматривать систему с нерелятивистским электронным потоком ( $\eta(z_i, \theta_i, r_i) = 1$ ) в пространстве дрейфа с дополнительным торможением пучка. В этом случае основными управляющими параметрами системы являются ток системы  $I$  (или параметр Пирса  $\alpha$ ) и величина тормозящей разности потенциалов между входным и выходным электродами  $\Delta V$  (или  $\Delta \varphi$  в нормированных единицах). Внешнее фокусирующее магнитное поле также примем равным нулю ( $B = 0$ ).

Как показало численное моделирование с помощью модели, описанной в разделе 4.2.1, процесс образования виртуального катода в пространстве дрейфа развивается следующим образом. Пусть в начальный момент времени через пространство взаимодействия транспортируется пучок электронов с величиной тока  $I_0$ , значительно меньшей критического значения  $I_0 < I_{кр}$ , необходимого для возникновения виртуального катода в пространстве дрейфа. На выходной электрод пространства дрейфа при этом подается некоторое напряжение величиной  $\varphi_0 - \Delta \varphi$ . По мере увеличения тока пучка  $I_0$  за счет возрастающего поля про-

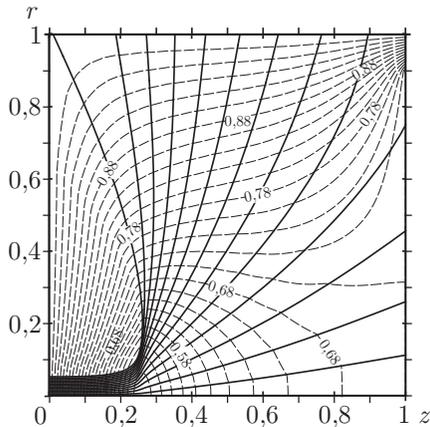


Рис. 4.3. Траектории заряженных частиц (сплошные линии), моделирующих пучок электронов и распределение потенциала в верхней полуплоскости сечения пространства дрейфа плоскостью  $(z, r)$ . Штриховыми линиями обозначены эквипотенциальные линии, цифрами, соответственно, величина потенциала в нормированных единицах. Значения управляющих параметров:  $\alpha = 18$ ,  $\Delta\varphi = 0,3$

пространственного заряда при отсутствии внешней фокусировки происходит расширение радиуса пучка при распространении к выходному концу пространства дрейфа. Соответственно, ближе к выходному концу трубы дрейфа уменьшается плотность тока пучка. В этом случае электроны либо покидают пространство взаимодействия через выходную сетку, либо оседают на стенках пролетного канала. Дальнейшее увеличение тока пучка приводит к тому, что под действием тормозящего потенциала и собственного кулоновского поля пучка часть заряженных частиц (в основном на периферии пучка) отражается в сторону входной границы системы. При этом наблюдается сгущение траекторий электронов в области, удаленной от оси системы. На рис. 4.3 представлены траектории электронов (жирные черные линии) в момент образования виртуального катода. Штриховыми линиями на рис. 4.3 нанесены эквипотенциальные линии в пространстве взаимодействия с обозначенной на них величиной потенциала в нормированных единицах. Область с минимальным потенциалом (потенциальная яма), образуемая вблизи оси системы, является областью локализации виртуального катода.

Отметим, что в случае классических приборов виркаторного типа, когда используются системы без дополнительного торможения и, соответственно, пространство взаимодействия представляет собой эквипотенциальную полость, величину тока  $I_{кр}$ , при которой образуется виртуальный катод, принято называть предельным вакуумным (сверхкритическим) током [1]. В нашем случае, из-за наличия дополнительного торможения в системе, критическое значение тока  $I_{кр}^{\Delta\varphi}$ , при котором образуется виртуальный катод, принимает меньшие значения по

сравнению со случаем эквипотенциальной полости ( $I_{\text{кр}}^{\Delta\varphi} < I_{\text{кр}}$ ). В этом случае, как уже обсуждалось в главе 3, удобно пользоваться понятием эффективного первеанса пучка, величина которого определяется формулой (3.1). При этом величина тока  $I_{\text{кр}}^{\Delta\varphi}$ , при которой образуется виртуальный катод, будет тем меньше, чем больше величина тормозящего потенциала  $\Delta V$  и, соответственно, чем больше эффективный первеанс  $p_{\text{эф}}$  пучка.

При введении дополнительного торможения в пространстве дрейфа важным становится вопрос о влиянии соотношения геометрических размеров пространства дрейфа на процессы образования и динамики виртуального катода. Наиболее важным параметром здесь является отношение радиуса и длины пролетного канала  $R/L$ .

В случае, когда отношение  $R/L$  мало (длинная и узкая труба дрейфа), распределение потенциала в трубе дрейфа таково, что область пониженного потенциала, необходимого для образования нестационарного виртуального катода в нерелятивистском пучке, образуется вблизи выходного конца (выходного электрода) пространства дрейфа, где плотность тока пучка мала из-за увеличения радиуса пучка при отсутствии внешнего фокусирующего поля. В свою очередь, в первой половине трубы дрейфа, где плотность тока довольно велика, потенциал пространства при этом почти не меняется и имеет величину, близкую к величине ускоряющего напряжения. Поэтому даже при наличии дополнительного торможения, эффективный первеанс пучка ( $p_{\text{эф}}$ ) в различных областях пространства дрейфа не достигает критических значений ( $p_{\text{кр}}$ ), при которых образуется виртуальный катод. При этом при больших тормозящих потенциалах возможно частичное отражение электронов пучка вблизи выходного конца пространства дрейфа. Однако данный режим неэффективен, потому что в этом случае будут отсутствовать нестационарные колебания виртуального катода.

Другая ситуация складывается при больших отношениях  $R/L$  ( $R/L \approx 1$ ). В этом случае в начале пространства дрейфа потенциал существенно меньше, чем был бы потенциал в системе с малым радиусом пространства дрейфа. В этом случае в начале трубы дрейфа эффективный первеанс пучка  $p_{\text{эф}}$  может достигнуть критического значения  $p_{\text{кр}}$ , при котором в системе образуется виртуальный катод. Таким образом, в случае, когда геометрические размеры системы таковы, что  $R/L \approx 1$ , для начала генерации в системе с виртуальным катодом требуются меньшие по величине токи пучка, а управление динамикой системы с помощью тормозящего потенциала становится более эффективным.

Необходимо отметить также, что образование нестационарного виртуального катода, как правило, происходит в начале пространства дрейфа. При этом продольная координата, в которой образуется виртуальный катод, зависит от конкретных значений тока пучка  $I$  и дополнительной тормозящей разности потенциалов  $\Delta\varphi$ : чем больше величина тока и тормозящего напряжения, тем ближе виртуальный катод прижимается ко входному электроду системы.

Рассмотрим теперь более подробно физические процессы, сопровождающие колебания виртуального катода в пучке заряженных частиц. На рис. 4.4 приведено распределение плотности пространственного заряда в начале пространства взаимодействия в области образования виртуального катода. На представленных рисунках приведена верхняя полуплоскость сечения пространства дрейфа плоскостью  $(z, r)$ . На рис. 4.4, *а* изображено мгновенное распределение плотности пространственного заряда в различные моменты времени в течение одного характерного периода колебаний (кадры 1–3). Рис. 4.4, *б* демонстрирует распределение плотности пространственного заряда пучка в пространстве дрейфа, усредненное за характерный период колебаний виртуального катода  $\langle \rho(z, r) \rangle_{T_{vc}}$  ( $T_{vc}$  — период колебаний виртуального катода). Величина плотности пространственного заряда на приведенных рисунках отображена интенсивностью окраски. Наиболее интенсивно закрашенные участки соответствуют наибольшей величине пространственного заряда пучка  $|\rho|$  и, соответственно, местоположению виртуального

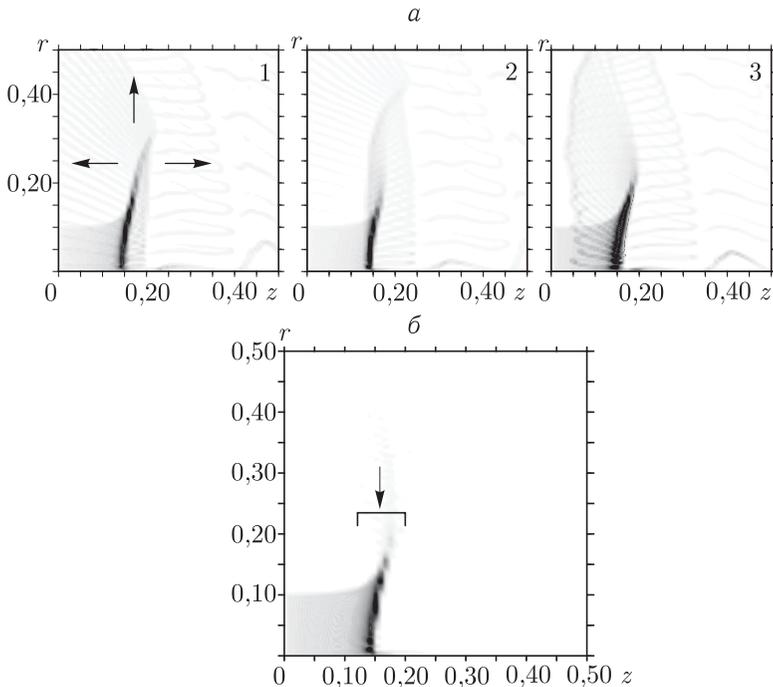


Рис. 4.4. Распределение плотности пространственного заряда в пространстве взаимодействия в различные моменты времени в течение периода колебаний (*а*) кадры 1–3) и распределение величины плотности пространственного заряда, усредненной за период (*б*). Масштаб на всех рисунках одинаковый. Временной интервал между различными кадрами  $\Delta t \approx T_{vc}/3$ , где  $T_{vc} = 0,192$  — характерный период колебаний виртуального катода в безразмерных единицах.

Значения управляющих параметров:  $\alpha = 22$ ,  $\Delta\varphi = 0,5$

катода в пространстве дрейфа (на рис. 4.4, б положение виртуального катода отмечено стрелкой).

Мгновенные распределения плотности пространственного заряда вне области минимума потенциала изображены на рис. 4.4, а светло-серым цветом. Частицы, не локализованные в области виртуального катода, движутся от него в трех направлениях: по радиусу от центра пучка к периферии и, в продольном направлении, в сторону левой и правой границ системы (направления движения отмечены стрелками на кадре 1 на рис. 4.4, а). Развитие во времени процесса «веерообразного» движения заряженных частиц из области ВК можно проследить по трем кадрам на рис. 4.4, а. Одновременно удобно следить за траекториями отдельных частиц, инжектируемых в пространство взаимодействия в некоторые различные моменты времени  $t_1$  и  $t_2 = t_1 + \tau$  ( $\tau = 0,0272$ ) в течение одного характерного периода колебаний виртуального катода, которые показаны на рис. 4.5.

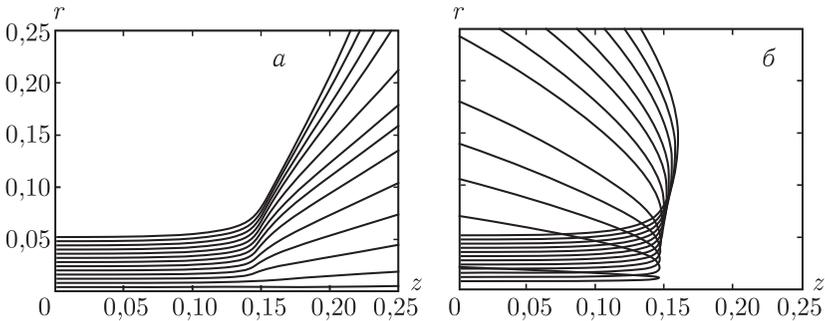


Рис. 4.5. Характерные траектории частиц, вошедших в пространство взаимодействия в момент времени  $t_1$  (а) и  $t_2 = t_1 + 0,0272$  (б) в течение одного периода колебаний

По мере накопления заряда в области виртуального катода (за счет дополнительного торможения частиц на стенках формируемой в пространстве взаимодействия потенциальной ямы) и дальнейшего связанного с ним понижения потенциала в этой области при достижении потенциалом некоторой критической величины значительная часть электронного потока отражается обратно к плоскости инжекции. В результате резкого «сброса» заряда в сторону входной сетки величина потенциальной ямы вновь уменьшается, и электроны пучка, вновь подошедшие к виртуальному катоду, практически полностью беспрепятственно проходят через область пониженного потенциала. В результате, в течение некоторого промежутка времени в сторону входной и выходной границ системы с некоторой задержкой во времени начинают двигаться два электронных сгустка (см. кадр 1). Процесс формирования пар сгустков с определенной степенью периодичности повторяется. При этом степень повторяемости процесса формирования и динамики виртуального катода определяется тем, какой режим

колебаний виртуального катода (периодический или хаотический) наблюдается в системе. Промежуток времени, разделяющий моменты образования пар сгустков, является характерным периодом колебаний виртуального катода —  $T_{vc}$ .

На рис. 4.5 этот процесс иллюстрируют две характерные картины траекторий заряженных частиц, вошедших в диодный промежуток в моменты времени, разделенные интервалом  $\tau = [t_2 - t_1] \ll T_{vc}$ , значительно меньшим характерного периода колебаний виртуального катода (рис. 4.5, *а* и *б*). Из приведенных рисунков видно, что электронный поток, вошедший в пространство взаимодействия в момент времени  $t_1$  (см. рис. 4.5, *а*), преодолевает потенциальный барьер и проходит вглубь пространства дрейфа. Иначе ведут себя частицы, вошедшие в пространство через промежуток времени  $\tau$  (см. рис. 4.5, *б*). Частицы пучка в этом случае, отразившись от виртуального катода, движутся ко входной и боковой границе системы, через которые и покидают пространство дрейфа. В результате заряженные частицы, вошедшие в пространство в различные моменты времени, формируют сгустки слева и справа от виртуального катода, как это обсуждалось выше. Отметим, что подобное переключение системы между двумя характерными типами движения заряженных частиц происходит достаточно быстро за интервал времени  $\tau$ , значительно меньший характерного периода  $\tau \ll T_{vc}$  колебаний виртуального катода ( $T_{vc} = 0,192$  в безразмерных единицах времени).

Понятно, что время образования пары движущихся в прямом и обратном направлениях сгустков электронов зависит от скорости, с которой накапливается заряд в области виртуального катода. Это, в свою очередь, напрямую зависит от скорости электронного потока и плотности тока пучка. По мере увеличения либо скорости инжектируемого электронного потока, либо плотности заряда пучка возможна ситуация, при которой второй (выходной) сгусток не будет успевать формироваться за счет большой скорости накопления заряда в области виртуального катода. Т.е. с течением времени будет происходить периодический «сброс» электронов в сторону первой сетки, но потенциал пространства в области виртуального катода не будет понижаться до критических величин, при которых возможно какое-либо значительное токопрохождение через эту область. Этот режим не реализуем физически в рассматриваемой ситуации без фокусировки пучка магнитным полем. Это связано с наличием поперечного движения несфокусированного пучка и малыми энергиями заряженных частиц, уход которых на периферию потока в радиальном направлении не позволяет держать потенциал в области виртуального катода в закритическом значении все время.

Проследить движение электронных сгустков в пространстве взаимодействия удобно, рассматривая распределение плотности пространственного заряда в системе. На рис. 4.6 представлено распределение усредненной по поперечному сечению системы плотности пространственного заряда по продольной координате  $z$  с течением времени

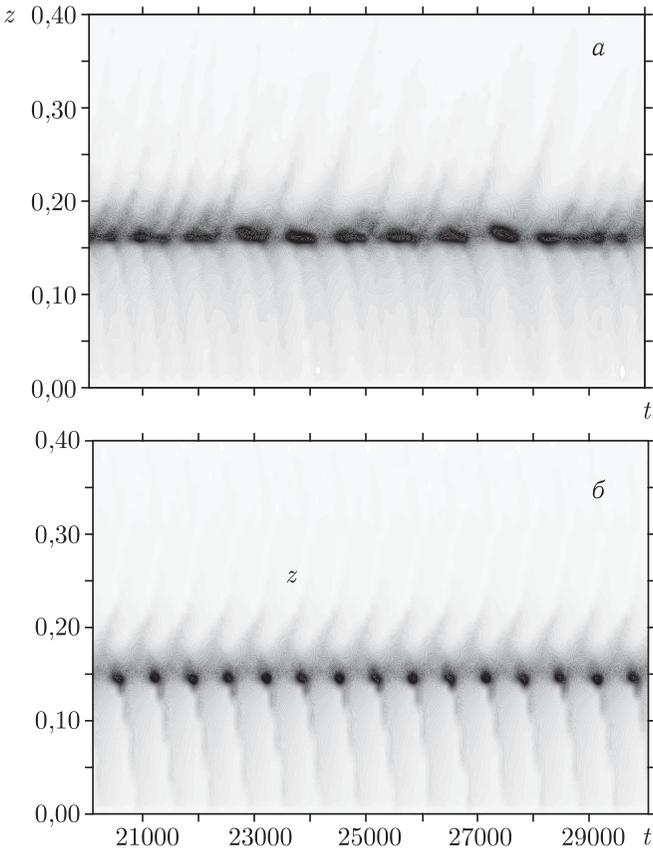


Рис. 4.6. Распределение по продольной координате  $z$  усредненной по радиусу системы плотности пространственного заряда с течением времени  $\langle \rho(t, z) \rangle_r$ . Значения управляющих параметров:  $\alpha = 22$ , а)  $\Delta\varphi = 0,3$ , режим хаотических колебаний; б)  $\Delta\varphi = 0,7$ , режим периодических колебаний

$\langle \rho(t, z) \rangle_r$ . Величина плотности пространственного заряда  $|\rho|$  отображается интенсивностью серого цвета. Видно, что в области возникновения виртуального катода  $z \in (0,1-0,2)$  величина плотности заряда с течением времени изменяется — серый цвет на рисунке меняет свою интенсивность от светло-серого до темно-серого при движении вдоль оси времени. При этом, как обсуждалось выше, в обе стороны из области виртуального катода попеременно выходят электронные сгустки. Плотность пространственного заряда сгустков справа от виртуального катода постепенно уменьшается по мере продвижения по продольной координате к выходу системы  $z = 1$ . Это связано с тем, что электроны, прошедшие через область виртуального катода, постепенно оседают на стенках пролетного канала, не доходя до правой границы системы. Слева от виртуального катода сгустки электронов выходят через бо-

ковую поверхность либо покидают пространство взаимодействия через левую (выходную) границу системы.

На рис. 4.6, *a* видно, что в данном случае электронные сгустки возникают и покидают область виртуального катода нерегулярно, в отличие от ситуации, соответствующей рис. 4.6, *б*, который соответствует значениям управляющих параметров, при которых в системе реализуется регулярный режим колебаний. Здесь четко просматривается периодическая во времени структура максимумов и минимумов плотности пространственного заряда, возникающая в области виртуального катода ( $z \approx 0,17$ ). Движущиеся в пространстве дрейфа электронные сгустки наводят ВЧ-поле в отрезке электродинамической системы, служащей для вывода энергии СВЧ колебаний. Таким образом характер формирования и движения электронных сгустков в пространстве дрейфа будет определять характер выходного излучения системы с виртуальным катодом.

Другим моментом, отличающим два этих случая, является область локализации виртуального катода в пространстве взаимодействия. Из рисунков видно, что в первом случае (рис. 4.6, *a*) положение виртуального катода соответствует точке с координатой  $z \approx 0,17$ , во втором (рис. 4.6, *б*) —  $z \approx 0,145$ . Как отмечалось выше, это связано с тем, что при увеличении тормозящего потенциала выходного электрода виртуальный катод смещается в сторону входной сетки. При этом он остается локализованным примерно в одной точке пространства взаимодействия. В данном случае отсутствует периодический дрейф виртуального катода в сторону входной сетки, как в случае одномерной модели, описанной в предыдущей главе. Это также является следствием двумерности движения частиц. В одномерном случае движение частиц происходит либо в направлении к выходной (прошедшие электроны), либо в направлении входной (отраженные электроны) сеток, поэтому влияние отраженных от виртуального катода электронов на характеристики пучка значительно сильнее, чем в случае движения в двух пространственных координатах, когда электроны, отраженные от виртуального катода, оседают на боковой поверхности пространства взаимодействия и не оказывают значительного влияния на пучок вблизи входной сетки.

**4.2.3. Нелинейная динамика электронного потока с виртуальным катодом в тормозящем поле без фокусировки электронов магнитным полем.** Обсудим более подробно нелинейную динамику нерелятивистской системы с виртуальным катодом в тормозящем поле. На рис. 4.7 представлена карта режимов на плоскости управляющих параметров ( $\alpha$ ,  $\Delta\varphi$ ) изучаемой системы.

Как было показано в предыдущем разделе, формирование и движение сгустков электронов в пространстве дрейфа однозначно определяют характер выходного излучения прибора. Поэтому удобно исследовать колебательные режимы системы с виртуальным катодом, изучая

характер СВЧ излучения на выходе отрезка спиральной замедляющей системы системы (ОСЗС). Последняя моделировалась методом эквивалентных схем, как это описано в предыдущей главе, где в качестве тока, возбуждающего ОСЗС, выбирался усредненный по радиусу канала ток системы  $\langle I_b \rangle_r$ .

Как видно из рис. 4.7, исследуемая система может демонстрировать различные колебательные режимы. При малых значениях тока и тормозящей разности потенциалов в системе наблюдается полное токопрохождение без образования в электронном потоке виртуального катода (область, обозначенная буквой  $T$  на рис. 4.7). По мере увеличения тормозящего потенциала в системе при малых значениях тока в пространстве дрейфа образуется нестационарный виртуальный катод. Значения параметров, при которых возникает нестационарный виртуальный катод, соответствуют линии, обозначенной цифрой  $1$ . Этой линии соответствует критическое значение  $p_{кр}$  первеанса пучка. Видно, что возникновение нестационарного виртуального катода в системе возможно либо при достаточно большой величине тормозящего потенциала в системе (при малых токах пучка), либо при любой величине  $\Delta\varphi$  (в том числе и в случае равенства тормозящего потенциала нулю  $\Delta\varphi = 0$ ), если ток пучка достигает достаточной величины. В этом случае в системе возникают слабые нерегулярные пространственно-временные колебания. На карте параметров этому режиму соответствует область обозначенная буквой  $C$  — область, в которой в системе реализуется хаотический режим колебаний виртуального катода. Дальнейшее увеличение тормозящего потенциала приводит к последовательной смене колебательных режимов в системе — от хаотического (область  $C$  на рис. 4.7) через многочастотный режим (область  $Q$ ) к регулярным колебаниям ВК в пучке (область  $P$  на карте параметров на рис. 4.7).

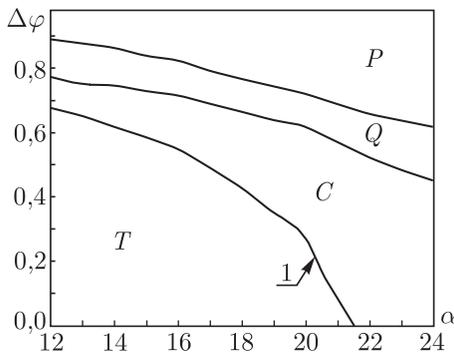


Рис. 4.7. Карта режимов на плоскости управляющих параметров ( $\Delta\varphi$ ,  $\alpha$ ). Буквами на рисунке обозначены: буквой  $T$  — режим без образования нестационарного виртуального катода;  $C$  — хаотический режим колебаний ВК;  $Q$  — режим многочастотных колебаний;  $P$  — режим регулярных колебаний;

$$R/L = 1$$

Спектры и временные зависимости сигнала  $U(t)$  с выхода ОСЗС, соответствующие динамическим режимам на рис. 4.7, представлены на рис. 4.8. На рис. 4.8, *а* показаны характеристики выходного излучения соответствующие хаотическому колебательному режиму (область *С*). Видно, что этому режиму соответствует сплошной спектр генерации, без ярко выраженных пиков в широком частотном диапазоне, с постепенно понижающейся амплитудой по мере продвижения в область высоких частот. Спектр генерации характеризуется слабой изрезанностью и высоким развитым шумовым пьедесталом. Временная реализация, которая снималась на выходе замедляющей системы, возбуждаемой электронным потоком, имеет сильно нерегулярный характер, без характерных временных масштабов. На рис. 4.8, *б* показан спектр мощности, соответствующий колебаниям в области *Q* на плоскости управляющих параметров (см. рис. 4.7). Спектр генерации в этом случае становится

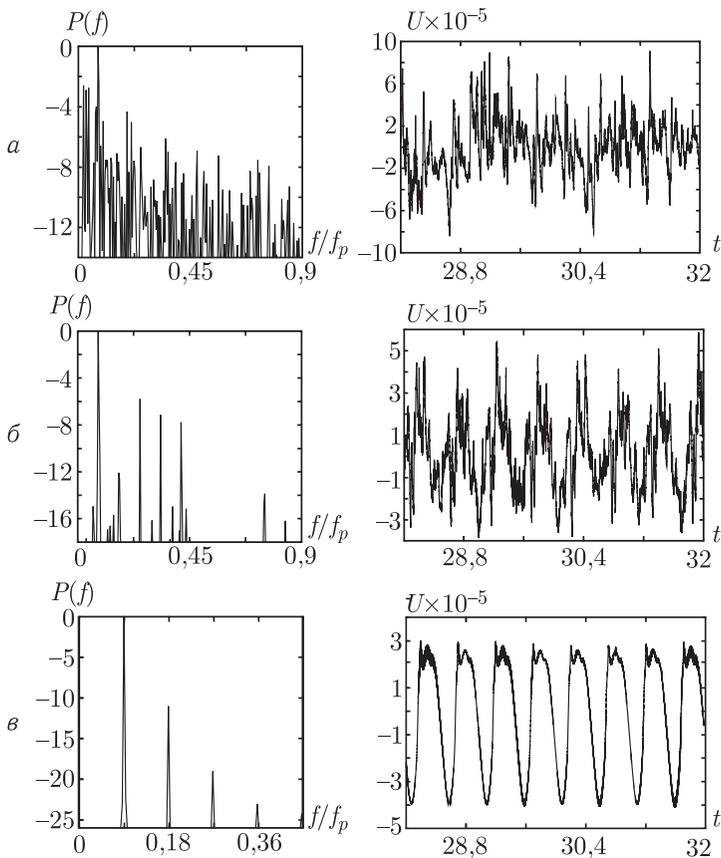


Рис. 4.8. Спектр и временная реализация колебаний ВЧ напряжения на выходе отрезка спиральной замедляющей системы. Величины управляющих параметров:  $\alpha = 22$ , *а*)  $\Delta\varphi = 0,3$ ; *б*)  $0,6$ ; *в*)  $0,9$ . Плазменная частота  $f_p = 5,8$  ГГц

сильно изрезанным с одной преобладающей частотой, высота шумового пьедестала по сравнению с режимом «С» снижается. На рис.4.8, в представлен спектр и временная реализация для режима, отмеченного на карте параметров буквой  $P$ . Отчетливо видно, что спектр в данном случае является дискретным и содержит интенсивные гармоники основной частоты колебаний виртуального катода, а временная реализация имеет регулярный характер. Последнее говорит о сильно нелинейном характере регулярных колебаний виртуального катода при большой величине тормозящего потенциала.

В данном случае можно говорить о том, что по мере увеличения тормозящего потенциала в системе электронный поток значительно ограничивается в движении в продольном направлении. За счет этого движение электронного потока, а, следовательно, и процессы формирования виртуального катода становятся более регулярными, а хаотическая динамика заряженных частиц пучка подавляется. При этом движение в поперечном направлении не оказывает значительного влияния на выходной сигнал, снимаемый с выходного конца ОСЗС.

**4.2.4. Мощность генерации в системе с виртуальным катодом в режимах без фокусировки электронного потока магнитным полем.** Обсудим зависимость мощности СВЧ генерации в нерелятивистской системе с виртуальным катодом от значений основных управляющих параметров.

На рис. 4.9 представлены численно рассчитанные зависимости выходной мощности генерации пучка с виртуальным катодом от тормозящего напряжения для пяти различных значений радиуса пролетного

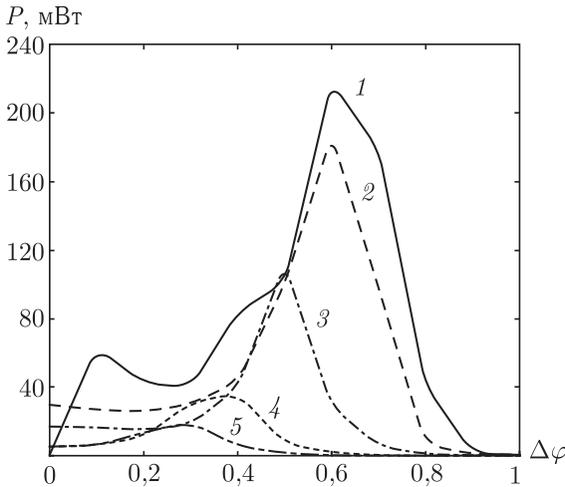


Рис. 4.9. Зависимости мощности СВЧ колебаний на выходе ОСЗС для различных радиусов пролетного канала: 1 —  $R/L = 0,25$ ; 2 —  $R/L = 0,3$ ; 3 —  $R/L = 0,4$ ; 4 —  $R/L = 0,6$ ; 5 —  $R/L = 0,8$ . Значение управляющего параметра  $\alpha = 37$

канала ( $R/L$ ). Из него видно, что зависимость мощности от тормозящего потенциала для всех значений нормированного радиуса пролетного канала  $R/L$  имеет вид кривой с одним ярко выраженным максимумом. Максимальная мощность генерации достигается при значениях тормозящего потенциала, примерно равных половине ускоряющего ( $\Delta\varphi = 0,5$ ), в зависимости от радиуса пролетного канала. С физической точки зрения объяснить это можно следующим образом. При малой величине тормозящего потенциала основная масса заряженных частиц проходит через пространство взаимодействия и быстро выводится из него через выходную сетку. В этом случае число частиц, принимающих участие в образовании ВК и возбуждении ОСЗС, невелико (см., например, [9]). Поэтому при малых торможениях в системе мощность колебаний мала и постепенно увеличивается по мере увеличения параметра  $\Delta\varphi$  (см. рис. 4.9). По мере увеличения тормозящего потенциала и, соответственно, накопления заряда в пространстве дрейфа растет и мощность, передаваемая пучком ВЧ полю ОСЗС. При дальнейшем росте тормозящей разности потенциалов ( $\Delta\varphi > \Delta\varphi_{\max}$ ) электроны пучка перестают проникать вглубь пространства дрейфа, и большая часть из них отражается от виртуального катода и выводится из системы через первую (входную) сетку. В этом случае ВЧ ток пучка, возбуждающий колебания в ОСЗС, также мал. Таким образом, при формировании зависимости мощности от тормозящего потенциала конкурируют два процесса, непосредственно связанные с воздействием торможения — это накопление заряда в пространстве взаимодействия (при малых значениях тормозящего потенциала) и вытеснение электронов пучка из пространства взаимодействия (при больших значениях  $\Delta\varphi$ ). Конкуренция данных процессов приводит к наличию некоторого оптимального значения тормозящего потенциала  $\Delta\varphi_{\max}$ , при котором мощность на выходе системы становится максимальной.

Из рис. 4.9 следует также, что по мере увеличения радиуса пролетного канала максимальное значение выходной мощности становится меньше по величине и смещается при этом в область меньших значений тормозящего потенциала. Уменьшение величины максимальной мощности объясняется тем, что увеличение радиуса пролетного канала приводит одновременно к увеличению радиуса ОСЗС. Это, в свою очередь, приводит к уменьшению сопротивления связи  $K$ , а следовательно и мощности, которую регистрирует и отдает в нагрузку электродинамическая система. Смещение же максимального значения в сторону меньших значений тормозящего потенциала связано с тем, что влияние тормозящего потенциала выходного электрода на поведение пучка значительно сильнее при  $R/L \approx 1$ . В связи с этим процесс вытеснения пучка из пространства взаимодействия за счет торможения начинает превалировать при меньших значениях  $\Delta\varphi$ .

На рис. 4.10 представлены численно рассчитанные зависимости выходной мощности прибора от тормозящего напряжения при трех различных значениях параметра  $\alpha$ . Из приведенных рисунков видно, что

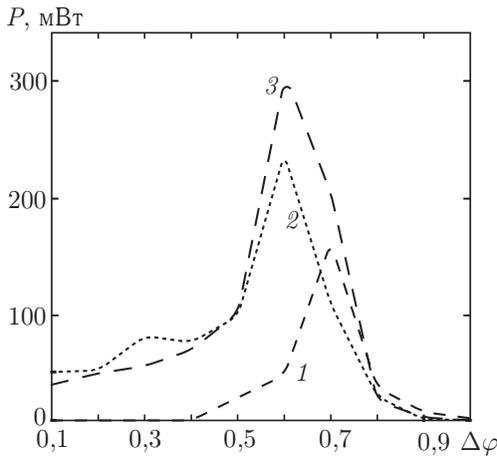


Рис. 4.10. Зависимость мощности выходного излучения от тормозящего потенциала для различных значений параметра  $\alpha$ : 1 —  $\alpha = 35$ ; 2 —  $\alpha = 38$ ; 3 —  $\alpha = 40$ ; радиус пролетного канала  $R/L = 0,25$

для небольших значений тока (кривая 1) генерация в системе начинается только при достижении определенной критической величины тормозящего потенциала. По мере увеличения тока критическая величина  $\Delta\varphi$ , при которой возникает виртуальный катод, уменьшается, а значение тормозящего потенциала, при котором достигается максимум выходной мощности, смещается в сторону меньших значений. Одновременно наблюдается рост мощности генерации низковольтного виркатора. Смещение максимума мощности в область меньших тормозящих потенциалов в этом случае также объясняется увеличением тока пучка при неизменном радиусе канала, что эквивалентно увеличению эффективного первеанса пучка в начале области взаимодействия, то есть виртуальный катод формируется в системе при меньших значениях  $\Delta\varphi$ .

**4.2.5. Нелинейная динамика нерелятивистского электронного потока с виртуальным катодом во внешнем магнитном поле.** В предыдущем разделе рассматривался вопрос о влиянии двумерных эффектов движения электронного потока в пространстве дрейфа с дополнительным торможением электронного потока без фокусировки пучка внешним магнитным полем. Был подробно изучен процесс возникновения и последующей динамики виртуального катода в нерелятивистском электронном пучке. В частности, было показано, что учет двумерности движения заряженных частиц в пространстве дрейфа становится принципиальным при описании процессов формирования виртуального катода, а также последующей динамики пучка с виртуальным катодом. Наличие электронов с ненулевой поперечной составляющей скорости оказывает значительное влияние на характеристики

выходного излучения и определяет характер зависимости выходной мощности нерелятивистской системы с виртуальным катодом.

В данном разделе рассматривается случай фокусировки пучка однородным во всем пространстве взаимодействия продольным магнитным полем. Будем рассматривать относительно небольшие величины внешнего магнитного поля в диапазоне от 0 до 600 Гс, что соответствует величинам внешнего магнитного поля, используемым в эксперименте, результаты которого представлены в предыдущей главе.

Следует ожидать, что наличие магнитного поля в системе качественно не изменит физические механизмы, приводящие к возникновению виртуального катода, так как его образование в пространстве взаимодействия определяется эффективным первеансом пучка  $p_{\text{эф}}$  в пространстве дрейфа и не зависит от траекторий отдельных заряженных частиц. Последние, однако, определяют процесс формирования электронных сгустков и характер транспортировки заряженных частиц через пространство дрейфа, а, следовательно, определяют характер выходного излучения системы. Понятно, что наличие ведущего магнитного поля значительно изменяет характер движения электронов в пучке. Поэтому вначале рассмотрим подробнее динамику виртуального катода, а именно процесс формирования плотных электронных сгустков в области минимума потенциала.

На рис. 4.11 приведены мгновенные распределения плотности пространственного заряда  $\rho(z, r)$  в пространстве взаимодействия в некоторый момент времени для случаев отсутствия (рис. 4.11, *а*) и наличия (рис. 4.11, *б* и *в*) внешнего магнитного поля в системе. Как видно из рисунков, наличие даже относительно слабого магнитного поля (рис. 4.11, *б*,  $B = 240$  Гс) приводит к тому, что движение заряженных частиц в поперечном направлении ограничивается магнитным полем. Заряженные частицы, в отличие от случая  $B = 0$  (см. рис. 4.11, *а*), движутся преимущественно в продольном направлении, лишь слабо увеличивая свою радиальную координату, и, соответственно, электронные сгустки (справа и слева от области локализации виртуального катода на рис. 4.11, *б*) также смещаются от виртуального катода в основном в сторону входной или выходной сеток. В этом случае значительно уменьшается токооседание на стенках рабочей камеры в электродинамической системе и увеличивается время пребывания заряженных частиц в пространстве взаимодействия.

Удобно проследить этот процесс на примере траекторий отдельных частиц. На рис. 4.12 представлены характерные траектории частиц, вошедших в пространство взаимодействия в различные моменты времени в течение одного периода колебаний. В отличие от случая  $B = 0$  в ситуации с внешним магнитным полем в течение одного периода колебаний может реализоваться ситуация с полным отражением электронного потока (рис. 4.12, *а*), с полным прохождением электронного потока (рис. 4.12, *в*), а также ситуация с частичным проникновением электронов пучка вглубь пространства взаимодействия (рис. 4.12, *б*).

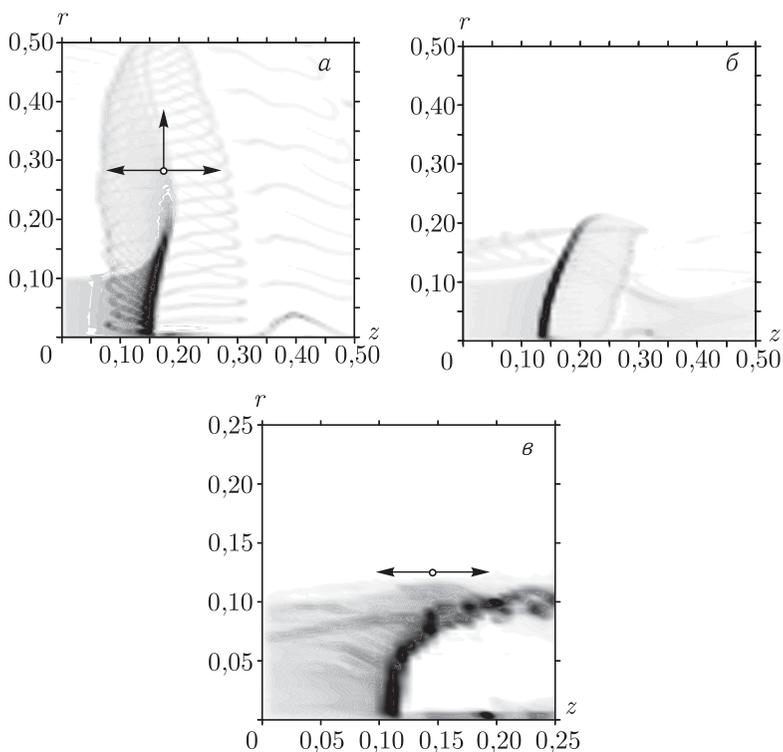


Рис. 4.11. Распределение плотности пространственного заряда в пучке электронов при отсутствии магнитного поля (*а*), при магнитном поле величиной  $B = 240$  Гс (*б*) и при  $B = 480$  Гс (*в*)

В этом случае механизм формирования электронных сгустков (когда часть периода колебаний электроны проникают через потенциальный барьер виртуального катода, а часть периода отражаются от него), описанный в предыдущем разделе, разрушается. Время, за которое формируется сгусток справа от виртуального катода, увеличивается за счет времени периода, когда происходит частичное проникновение электронов через потенциальный барьер. В результате часть пространственного заряда, которая раньше составляла часть электронного сгустка, теперь оказывается распределенной по пространству дрейфа пучка. В итоге в пучке не могут сформироваться достаточно плотные ограниченные в пространстве сгустки электронов.

При больших магнитных полях (рис. 4.11, *в*, величина магнитного поля  $B = 480$  Гс) движение по радиусу к боковой стенке практически полностью подавляется. Заряженные частицы в этом случае движутся в сторону входной и выходной сеток по винтовым траекториям в пределах радиуса невозмущенного пучка. При этом область максимальной плотности заряженных частиц в области виртуального катода (отображается черным цветом на рис. 4.11) расширяется в продольном на-

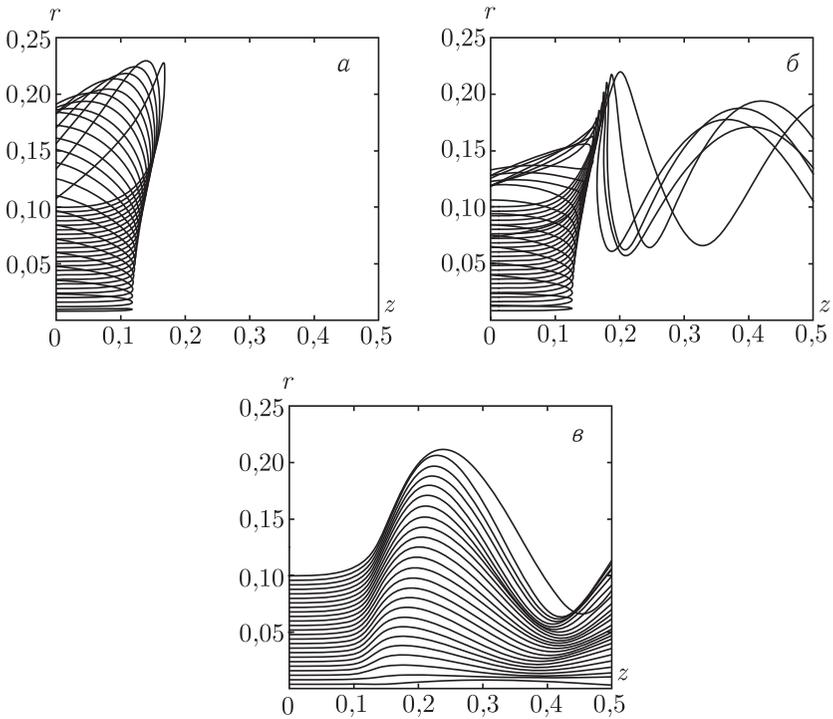


Рис. 4.12. Траектории заряженных частиц в электронном потоке, вошедших в пространство взаимодействия в различные моменты времени в течение одного периода колебаний. Значения управляющих параметров:  $\alpha = 24$ ;  $\Delta\varphi = 0,2$ ; величина магнитного поля  $B = 240$  Гс

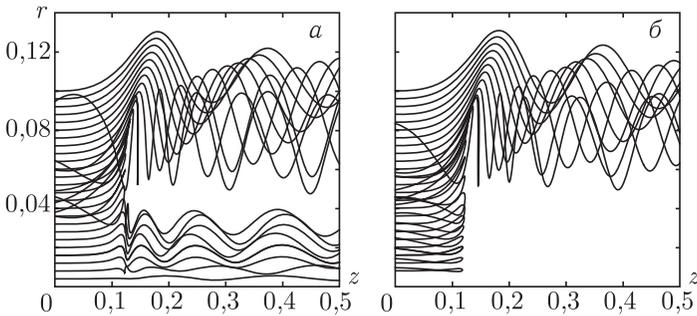


Рис. 4.13. Траектории заряженных частиц в электронном потоке, вошедших в пространство взаимодействия в различные моменты времени в течение одного периода колебаний. Значения управляющих параметров:  $\alpha = 24$ ;  $\Delta\varphi = 0,2$ ; величина магнитного поля  $B = 480$  Гс

правлении. Движение отдельных частиц в этом случае не претерпевает значительных изменений, кроме уменьшения радиуса винтовой траектории (рис. 4.13). При этом часть электронного потока на периферии

проникает вглубь пространства взаимодействия в течение всего периода колебаний виртуального катода (см. рис. 4.13, *a*), а часть (в центре пучка) может либо проникать через область виртуального катода, либо отражаться от него в зависимости от глубины потенциальной ямы (см. рис. 4.13, *a* и *б*). Таким образом, при больших внешних магнитных полях механизм формирования сгустков окончательно подавляется. В этом случае четко выделить электронные уплотнения вне области виртуального катода невозможно.

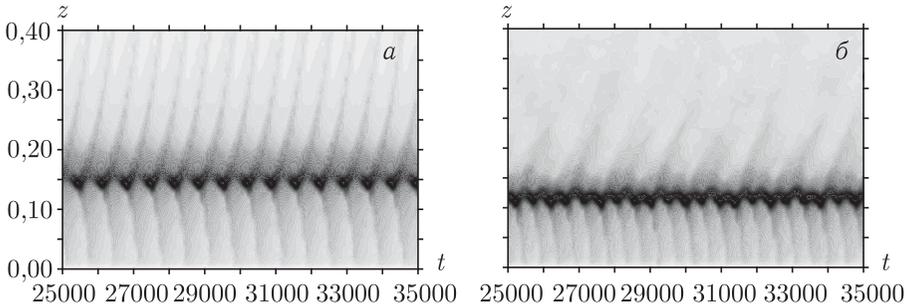


Рис. 4.14. Распределение плотности пространственного заряда  $\langle \rho(z, t) \rangle_r$  в пространстве взаимодействия. Значения управляющих параметров:  $\alpha = 22$ ; а)  $\Delta\varphi = 0,2$ ; б)  $\Delta\varphi = 0,8$ . Величина магнитного поля  $B = 240$  Гс

На рис. 4.14 показана усредненная по поперечной координате плотность пространственного заряда  $\langle \rho(z, t) \rangle_r$ . Черным цветом, как и ранее, обозначена область максимальной величины плотности пространственного заряда. Из приведенных рисунков видно, что в системе с малым магнитным полем ( $B = 240$  Гс) при меньшем торможении (рис. 4.14, *a*) в системе формируются сгустки электронов, которые отражены на рисунке отдельными темными линиями, отходящими от области виртуального катода ( $z_{vc} = 0,15$ ) в стороны входного и выходного концов пространства взаимодействия. Поведение пучка в этом случае аналогично случаю отсутствия магнитного поля (см. рис. 4.6). Однако в этом случае электронные сгустки большее время находятся в пространстве взаимодействия из-за ограничения поперечного движения электронного потока. При увеличении тормозящей разности потенциалов при той же величине магнитного поля из-за увеличения потенциального барьера в области виртуального катода движение заряженных частиц в сторону выходного электрода значительно затрудняется (см. рис. 4.14, *б*), но сохраняется периодический «сброс» электронных сгустков из области виртуального катода в сторону входной сетки.

При больших значениях магнитного поля формирование электронных сгустков в пролетном через виртуальный катод токе практически прекращается (см. рис. 4.15). Как обсуждалось выше, в этом случае лишь небольшая часть электронного потока в центре пучка периодически модулируется по плотности, поэтому процесс формирования

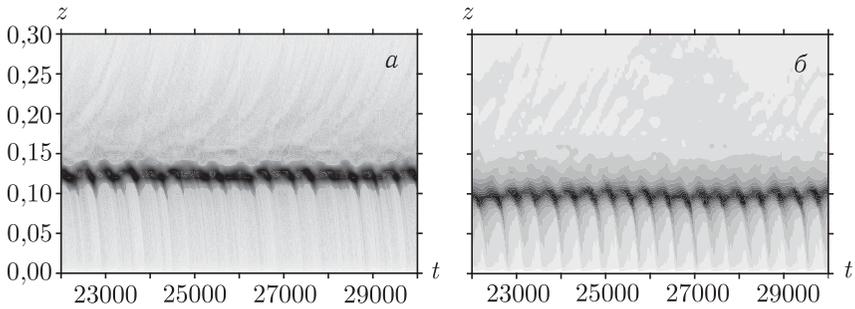


Рис. 4.15. Распределение плотности пространственного заряда  $\langle \rho(z, t) \rangle_r$  в пространстве взаимодействия. Значения управляющих параметров:  $\alpha = 24$ ; а)  $\Delta\varphi = 0,2$ ; б)  $\Delta\varphi = 0,8$ . Величина магнитного поля  $B = 480$  Гс

сгустков выражен крайне слабо. В этом случае справа от виртуального катода в потоке преобладает нерегулярное хаотическое движение заряженных частиц в общем поле пространственного заряда. Слева от виртуального катода при этом периодически происходит накопление заряда в области виртуального катода и «сброс» хорошо сформированных сгустков заряженных частиц в сторону входного конца пространства взаимодействия (см. рис. 4.15). При этом в случае малой тормозящей разности потенциалов существует слабая модуляция тока пучка по плотности справа от виртуального катода (см. рис. 4.15, а). При увеличении тормозящего потенциала в системе процесс модуляции проходящего тока в поле виртуального катода окончательно прекращается (см. рис. 4.15, б).

Описанный выше характер движения заряженных частиц в пространстве дрейфа при наличии внешнего магнитного поля приводит к ряду особенностей динамики системы. Как показали исследования, при наличии магнитного поля в системе с виртуальным катодом реализуются три основных режима. На рис. 4.16 представлена карта режимов на плоскости управляющих параметров «тормозящая разность потенциалов  $\Delta\varphi$  — ток пучка  $\alpha$ » для случая  $B = 480$  Гс.

При малых значениях тормозящего потенциала и тока пучка в системе реализуется режим, обозначенный буквой «Т» на рис. 4.16, при котором в системе наблюдается прохождение электронного потока через пространство взаимодействия без образования виртуального катода. Буквой «D» обозначен режим, при котором в системе существует нестационарный колеблющийся виртуальный катод. Различным значениям величины внешнего магнитного поля могут соответствовать регулярные, сложнопериодические или хаотические колебания. Спектры мощности колебаний в режиме «D» для двух значений величины внешнего магнитного поля представлены на рис. 4.17, а и б. Видно, что в случае относительно малых магнитных полей ( $B = 240$  Гс) при малом торможении ( $\Delta\varphi = 0,2$ , когда в системе еще не полностью разрушен механизм формирования сгустков) в системе реализуется регулярный

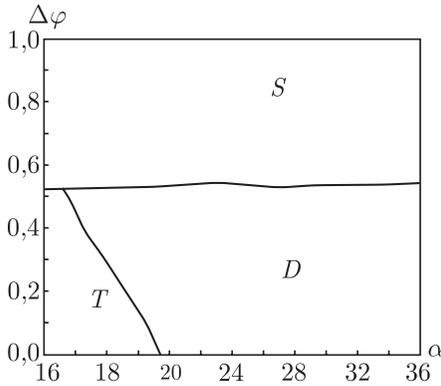


Рис. 4.16. Карта режимов на плоскости управляющих параметров  $(\alpha, \Delta\varphi)$  при  $B = 480$  Гс. Буквами обозначены области:  $T$  — область, в которой отсутствует нестационарный виртуальный катод,  $D$  — область, в которой реализуется нестационарный виртуальный катод,  $S$  — область затухающих низкочастотных колебаний виртуального катода. Сплошная линия  $1$  соответствует границе возникновения в системе нестационарного виртуального катода

режим с дискретным спектром. По мере увеличения магнитного поля, колебания в системе усложняются и при некоторой величине внешнего магнитного поля становятся хаотическими (рис. 4.17, б,  $B = 480$  Гс), характеризующимися широкой полосой частот и достаточно равномерным распределением мощности по всей полосе частот.

При значении параметра  $\Delta\varphi > 0,5$  система, при всех значениях тока пучка, переходит в режим, который на карте параметров (рис. 4.16) обозначен буквой « $S$ ». Этот режим характеризуется затухающими во времени низкочастотными колебаниями в диапазоне 200–600 МГц. В этом случае колебания на выходе ОСЗС определяются сложным

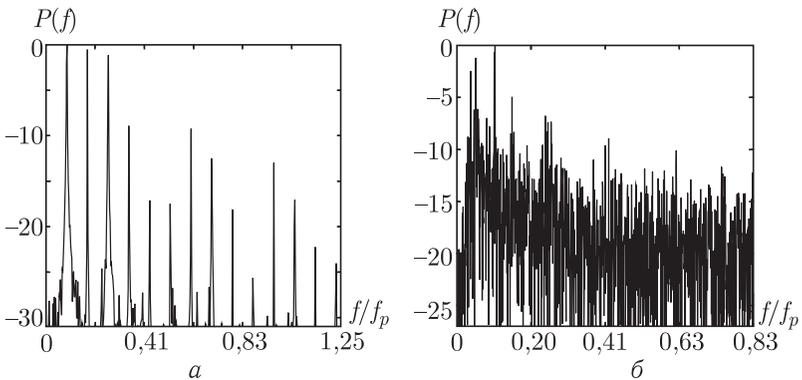


Рис. 4.17. Спектр мощности колебаний в системе с виртуальным катодом при значениях управляющих параметров  $\Delta\varphi = 0,2, \alpha = 24, B = 240$  Гс (а) и  $B = 480$  Гс (б). Плазменная частота  $f_p = 6,4$  ГГц

движением отдельных заряженных частиц в пространстве дрейфа, а не модуляцией величины тока колебаниями виртуального катода, как это наблюдалось при отсутствии магнитного поля. Этот режим может рассматриваться как квазистационарное состояние виртуального катода, при котором высокочастотные колебания в системе практически полностью подавляются.

На рис. 4.18, *а* представлена зависимость мощности колебаний виртуального катода от тормозящего потенциала в системе для различных значений продольного магнитного поля. На этом рисунке можно выделить две характерные области поведения системы. В диапазоне значений тормозящей разности потенциалов  $0 \leq \Delta\varphi < 0,4$  мощность в системе уменьшается по мере увеличения значения управляющего параметра для различных значений магнитного поля в 2–8 раз. При значениях  $\Delta\varphi \geq 0,4$  величина мощности для всех значений внешнего магнитного поля остается примерно на одном уровне.

При малых значениях тормозящей разности потенциалов мощность генерации возрастает при увеличении магнитного поля (см. рис. 4.18, *б*, кривая 1). Это происходит за счет увеличения токопрохождения через систему благодаря наличию магнитной фокусировки электронов, а также тому, что доля кинетической энергии продольного движения в этом случае значительно больше, чем энергия поперечного движения. Существует оптимальная величина магнитного поля ( $B \approx 300$  Гс), при которой мощность будет достигать максимального значения. Падение же мощности при увеличении тормозящей разности потенциалов в диапазоне  $0 \leq \Delta\varphi < 0,4$  можно объяснить тем, что наличие внешнего магнитного поля (как было показано выше) разрушает механизм образования когерентных электронных сгустков. Забегая вперед, скажем, что аналогичные закономерности были найдены для релятивистского электронного пучка с виртуальным катодом во внешнем магнитном поле [10].

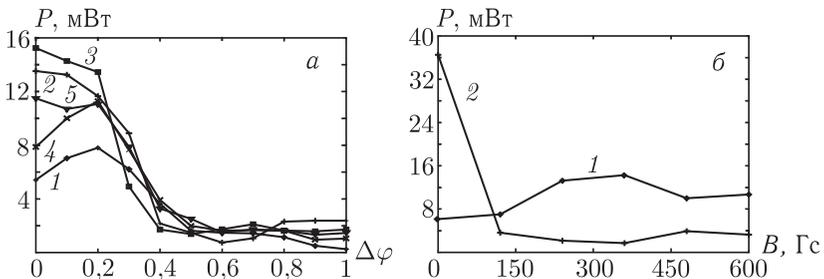


Рис. 4.18. Зависимость мощности колебаний в системе с виртуальным катодом: *а*) от величины тормозящего потенциала  $\Delta\varphi$  для различных значений величины магнитного поля: 1 —  $B = 120$  Гс; 2 —  $B = 240$  Гс; 3 —  $B = 360$  Гс; 4 —  $B = 480$  Гс; 5 —  $B = 600$  Гс при  $\alpha = 37$ ; *б*) от величины магнитного поля для различных значений тормозящей разности потенциалов: 1 —  $\Delta\varphi = 0,1$ ; 2 —  $\Delta\varphi = 0,4$

В случае  $\Delta\varphi \geq 0.4$  (рис. 4.18, б, кривая 2) процессы вытеснения пространственного заряда из пространства взаимодействия начинает преобладать над эффектом накопления заряда за счет торможения, что, на фоне разрушения механизма образования электронных сгустков, подавляет генерацию в системе. Как и обсуждалось выше, при данных значениях управляющих параметров в системе устанавливается режим, близкий к стационарному состоянию виртуального катода. При этом подобная динамика слабо зависит от величины магнитного поля.

### **4.3. Влияние внешнего магнитного поля на физические процессы в слаборелятивистском электронном потоке с виртуальным катодом**

Механизм возникновения и динамики виртуального катода, рассмотренный в предыдущем разделе, детально описывает процессы, происходящие в пространстве дрейфа при наличии сверхкритического для данной системы тока [11]. Наличие в данном случае дополнительного торможения в системе не изменяет принципиально физику происходящих в системе процессов, в то же время позволяя эффективно управлять виркаторной системой в плане спектральных и энергетических характеристик выходного излучения.

Однако нерелятивистская система с виртуальным катодом не позволяет значительно повысить мощность выходного излучения системы, а также значительно продвинуться в более высокочастотную область СВЧ излучения без использования дополнительных внешних систем усиления и преобразования сигнала. Поэтому интересным является исследование систем со слаборелятивистскими электронными потоками в режиме образования виртуального катода. В данном разделе главы исследуется влияние релятивистского фактора  $\beta_0$ , а также магнитного поля на процессы в системе с виртуальным катодом в случае слаборелятивистских скоростей электронного потока.

**4.3.1. Критический ток слаборелятивистского электронного потока при изменении внешнего магнитного поля.** Начнем наше рассмотрение с определения зависимостей критического тока  $I_0$  слаборелятивистского электронного пучка, при которой в пучке возникает нестационарный виртуальный катод и возможна генерация мощного СВЧ излучения, от величины магнитного поля. В данном разделе будем рассматривать режим работы системы без дополнительного торможения, т.е.  $\Delta\varphi = 0$  в граничных условиях (4.9) для системы (4.2)–(4.6).

Изучим вначале случай фиксированного отношения начального радиуса пучка  $R_b$  на входе пространства взаимодействия и радиуса канала  $R$  пространства взаимодействия  $\sigma = R_b/R$ . Будем называть  $\sigma$  параметром заполнения пучком канала пространства взаимодействия. Отношение радиуса к длине пространства взаимодействия будем счи-

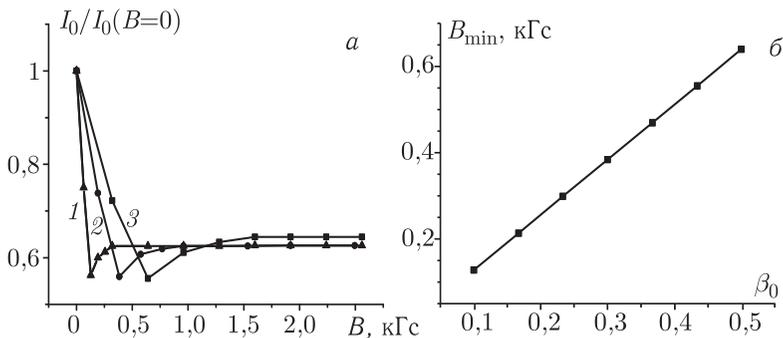


Рис. 4.19. а) Зависимости нормированной величины критического тока пучка  $I_0/I_0(B=0)$  (нормировка осуществляется на величину тока пучка  $I_0$  при  $B=0$ ) от величины  $B$  внешнего магнитного поля при  $\sigma = 0,5$  и различных скоростях электронного потока на входе в систему:  $\beta_0 = 0,1, 0,3$  и  $0,5$ ; б) зависимость оптимальной величины внешнего магнитного поля  $B_{\min}$  от величины  $\beta_0$

тать постоянным и равным  $R/L = 0,25$ . На рис. 4.19, а показаны зависимости нормированной величины критического тока пучка  $I_0$  от величины индукции  $B$  внешнего магнитного поля при  $\sigma = 0,5$ . Величины критического тока пучка были нормированы на величину  $I_0$  при нулевом внешнем магнитном поле  $B = 0$ . Различные кривые на рис. 4.19, а соответствуют различным величинам скорости электронного потока  $\beta_0 = v_0/c$ , инжектируемого в пространство взаимодействия. Из рисунка хорошо видно, что на зависимостях  $I_0(B)$  можно выделить две различные характерные области изменения тока пучка при увеличении магнитного поля. В первой области, соответствующей малым величинам магнитного поля, наблюдается монотонное уменьшение критического тока пучка при увеличении индукции  $B$ . Во второй области при больших внешних магнитных полях критический ток электронного пучка монотонно растет с увеличением магнитного поля. Как следствие, существует некоторое значение магнитного поля  $B_{\min}$ , при котором критический ток пучка минимален. Последнее означает, что существует оптимальное магнитное поле в смысле получения минимального тока пучка, при котором в системе возникает нестационарный колеблющийся виртуальный катод. С ростом внешнего магнитного поля величина критического тока пучка увеличивается, асимптотически приближаясь к величине предельного вакуумного тока для сплошного пучка, найденной ранее в работах [1, 12, 13] для случая бесконечного внешнего фокусирующего электроны магнитного поля.

Зависимости на рис. 4.19, а построены при различных величинах статической скорости  $\beta_0 = v_0/c$  электронного потока на входе в пространство взаимодействия. Из рисунка следует, что изменение величины скорости в рассматриваемых случаях нерелятивистских и слабо-релятивистских электронных пучков не ведет к качественным измене-

ниям вида зависимости критического тока  $I_0$  от величины внешнего магнитного поля  $B$ : для любых скоростей инжектируемого потока при малых магнитных полях величина критического тока уменьшается с ростом  $B$  и, наоборот, при больших внешних магнитных полях — монотонно растет. Однако величина  $B_{\min}$  существенно зависит от величины скорости  $\beta_0$  электронного потока на входе в пространство взаимодействия (рис. 4.19, б): величина оптимального магнитного поля линейно увеличивается с ростом скорости  $\beta_0$  инжектируемого электронного потока.

Изучим теперь вопрос влияния величин коэффициента  $\sigma$  заполнения пучком пространства взаимодействия на критический ток, при котором в электронном пучке возникает нестационарный виртуальный катод. На рис. 4.20, а показаны соответствующие зависимости  $I_0(B)$  для различных  $\sigma$  и фиксированной скорости электронного потока  $\beta_0 = 0,5$  на входе в систему. С ростом коэффициента заполнения  $\sigma$  ток пучка, необходимый для возникновения виртуального катода, увеличивается, при этом оптимальное значение магнитного поля  $B_{\min}$ , при котором критический ток пучка минимален, практически не зависит от коэффициента заполнения и определяется только скоростью  $\beta_0$  инжектируемого в пространство взаимодействия электронного потока.

На рис. 4.20, б представлены зависимости критического тока пучка от величины коэффициента заполнения  $\sigma$  пучком пространства взаимодействия для различных характерных величин внешнего магнитного поля. С ростом  $\sigma$  величина критического тока пучка монотонно возрастает, при этом характер зависимостей  $I_0(\sigma)$  для различных внешних магнитных полей изменяется слабо. Минимальное значение критиче-

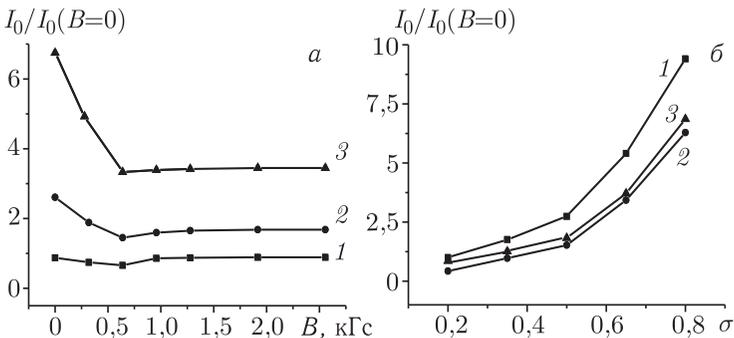


Рис. 4.20. а) Зависимости нормированной величины  $I_0/I_0(B=0)$  критического тока электронного пучка от величины внешнего магнитного поля для различных параметров  $\sigma$  заполнения пучком волновода: 1 —  $\sigma = 0,2$ ; 2 —  $0,5$  и 3 —  $0,9$ ; б) зависимости критического тока пучка от величины коэффициента заполнения  $\sigma$  пучком пространства взаимодействия для различных величин внешнего магнитного поля: 1 —  $B = 0$ ; 2 —  $B \approx B_{\min} = 0,6$  кГс и 3 —  $B = 2,5$  кГс. Скорость электронного потока на входе системы постоянна и равна  $\beta_0 = 0,5$

ского тока пучка для различных значений коэффициента заполнения  $\sigma$  наблюдается при оптимальной величине внешнего магнитного поля  $B = B_{\min}$  (кривая 2 на рис. 4.20, б).

**4.3.2. Физические процессы в пучке со сверхкритическим током при изменении внешнего магнитного поля.** Опишем физические процессы в электронном пучке, происходящие при формировании виртуального катода и определяющие описанный в разделе 4.3.1

характер зависимости  $I_0(B)$ , при различных величинах фокусирующего электроны магнитного поля. Характерной зависимостью, показывающей перестройку динамики виртуального катода в системе при изменении магнитного поля, является зависимость токораспределения в системе от величины внешнего магнитного поля. На рис. 4.21 показаны зависимости числа  $N$  крупных частиц, отраженных от виртуального катода и выходящих из пространства взаимодействия через входную сетку (кривая 2), через боковую поверхность (кривая 1), а также проходящих через виртуальный катод и выходящих из пространства взаимодействия через выходную сетку (кривая 3), от величины внешнего магнитного поля, фокусирующего пучок в пространстве взаимодействия виркатора.

Рис. 4.21 иллюстрирует, что характер динамики заряженных частиц пучка в пространстве взаимодействия принципиально различен при малых и больших величинах ведущего магнитного поля. Так, при малых величинах индукции магнитного поля  $B < 0,5$  кГс в системе наблюдается большое число заряженных частиц, покидающих пространство дрейфа через боковую поверхность. Число таких частиц, отражающихся от виртуального катода и уходящих из системы в радиальном (поперечном) направлении, максимально при нулевом магнитном поле и монотонно уменьшается с ростом величины прикладываемого магнитного поля (кривая 1 на рис. 4.21). Одновременно число частиц, отражающихся от виртуального катода в продольном направлении и уходящих через плоскость инжекции (входную сетку), а также число частиц, проходящих через колеблющийся виртуальный катод и покидающих пространство взаимодействия через выходную сетку, монотонно растет с ростом внешнего магнитного поля (см. кривые 2 и 3 на рис. 4.21

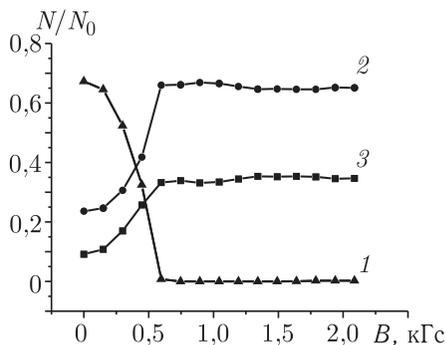


Рис. 4.21. Нормированные зависимости числа  $N/N_0$  крупных частиц, выходящих из пространства взаимодействия через: 1 — боковую поверхность пространства взаимодействия; 2 — входную и 3 — выходную сетку, от величины внешнего магнитного поля. Кривые построены при  $\beta_0 = 0,5$  и  $\sigma = 0,5$

соответственно). Такое поведение соответствует на рис. 4.19, *a* области уменьшения величины критического тока пучка с увеличением внешнего магнитного поля при  $B < B_{\min}$  (ср. рис. 4.19 и рис. 4.21 для величин магнитного поля  $B < 0,5$  кГс). При больших внешних магнитных полях  $B > 0,5$  кГс число частиц, покидающих пространство взаимодействия в поперечном направлении через боковую стенку пространства взаимодействия (частицы, отраженные от виртуального катода в поперечном направлении), становится близким к нулю (см. кривую 1 на рис. 4.21), а число частиц движущихся в продольном направлении и выходящих из пространства взаимодействия через входную и выходную сетки системы перестает меняться с изменением величины ведущего магнитного поля (см. кривые 2 и 3 на рис. 4.21).

Величина магнитного поля, при котором поперечная динамика отраженных от виртуального катода заряженных частиц становится незначительной ( $N_{\text{ref}\perp} \approx 0$ ), если сравнить рис. 4.19 и 4.21, близка к определенной выше оптимальной величине магнитного поля  $B_{\min}$ , при которой величина критического тока пучка минимальна.

Такое поведение зависимости токораспределения от магнитного поля означает, что в случаях малых и больших величин внешнего магнитного поля формирование и динамика виртуального катода в пучке заряженных частиц протекает различным образом. При малых величинах индукции магнитного поля  $B < B_{\min}$ , когда магнитное поле слабо удерживает электроны пучка, в системе преобладает поперечная динамика заряженных частиц. При больших магнитных полях, когда ток через боковую проводящую поверхность, ограничивающую пространство взаимодействия в радиальном направлении, равен нулю, динамика пространственного заряда пучка преимущественно протекает в продольном направлении (одновременно наблюдается и циклотронное вращение электронов в магнитном поле). При магнитных полях  $B \sim B_{\min}$  поведение системы определяется как поперечной, так и продольной динамикой заряженных частиц в области виртуального катода. Полученные результаты хорошо согласуются с результатами, полученными для случая нерелятивистских электронных потоков. Видно, что качественно процесс образования виртуального катода и динамики всего потока в целом не изменяется.

Проиллюстрируем динамику пучка в области виртуального катода усредненными по периоду колебаний распределениями плотности пространственного заряда в области формирования виртуального катода (что соответствует  $z \in (0, 0,2)$ ) для различных характерных значений индукции  $B$  внешнего магнитного поля (см. рис. 4.22). Максимум плотности пространственного заряда (темная область на проекциях распределений  $|\rho(z, r)|$ ) соответствует области виртуального катода, в которой происходит остановка и поворот заряженных частиц обратно к плоскости инжекции или к боковой стенке пространства взаимодействия. Электронный поток тормозится полем пространственного заряда виртуального катода, и скорости заряженных частиц в области вир-

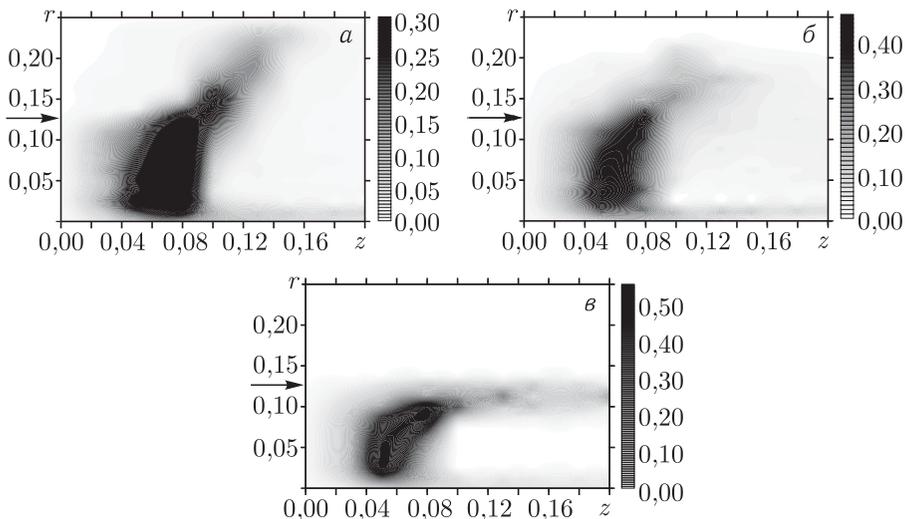


Рис. 4.22. Распределения плотности пространственного заряда в области виртуального катода (усредненные за характерный период колебаний виртуального катода) для трех различных величин магнитного поля: а)  $B = 0$ ; б)  $B \approx B_{\min} = 0,6$  кГс; в)  $B = 2,0$  кГс. Коэффициент заполнения пучком пространства взаимодействия  $\sigma = 0,5$ . Градациями серого цвета показаны абсолютные величины безразмерной плотности  $|\rho(r, z)|$  пространственного заряда в различных точках  $(r, z)$  пространства взаимодействия (соответствующие шкалы, сопоставляющие значения  $|\rho|$  и оттенки серого цвета, представлены справа от распределений). Стрелкой показана граница пучка в радиальном направлении

туального катода оказываются близкими к нулю, поэтому плотность пространственного заряда  $|\rho|$  в нем максимальна. Сравнивая распределения, построенные для различных значений внешнего магнитного поля, можно сделать вывод, что виртуальный катод формируется практически в одной и той же области пространства по продольной координате  $z \sim 0,04-0,08$  для  $\sigma = 0,5$ , не зависящей от величины индукции  $B$  магнитного поля. Вместе с тем пространственно-временная динамика электронов пучка в поперечном (по отношению к оси системы) направлении в области виртуального катода существенно определяется величиной внешнего магнитного поля.

Рис. 4.22, а, иллюстрирующий случай отсутствия внешнего магнитного поля ( $B = 0$ ), показывает, что в области виртуального катода наблюдается значительное расширение электронного потока в поперечном (радиальном) направлении, вследствие чего на распределениях наблюдаются ненулевые значения плотности пространственного заряда по всему поперечному сечению системы в области вблизи плоскости инжекции. Качественно подобная картина наблюдается и при ненулевых, но малых внешних магнитных полях ( $B < B_{\min}$ ). Такое поведение пучка связано с тем, что за счет сил пространственного заряда, которые

весьма велики благодаря формированию плотного сгустка электронов в области виртуального катода, электроны приобретают поперечную скорость и быстро уходят в радиальном направлении, оседая на ограничивающую пространство взаимодействия боковую цилиндрическую стенку. Подобная динамика электронов в поперечном направлении за счет сил пространственного заряда, не ограничиваемых наличием слабого (или нулевого) внешнего магнитного поля, приводит к существенному расширению пучка в радиальном направлении и преобладающему повороту частиц в области виртуального катода не в продольном, а в поперечном направлении. Как следствие этого величина токооседания на боковую поверхность пространства взаимодействия оказывается весьма значительной (рис. 4.21).

Значительное расширение пучка в радиальном направлении приводит к уменьшению величины плотности пространственного заряда в области виртуального катода и, как следствие, к увеличению необходимого тока пучка (критического тока) для достижения необходимой величины плотности заряда в пространстве взаимодействия для начала поворота и отражения частиц в пучке — формирования колеблющегося нестационарного виртуального катода, отражающего от себя часть электронов к входной сетке и на боковую поверхность системы.

С увеличением величины индукции  $B$  магнитное поле начинает препятствовать смещению электронов пучка в поперечном направлении, поэтому число электронов, покидающих пространство взаимодействия в радиальном направлении через боковую стенку, начинает уменьшаться с ростом  $B$  (рис. 4.21). Из анализа распределения плотности пространственного заряда при оптимальном магнитном поле  $B = B_{\min}$  (рис. 4.22, б) следует, что ограничение поперечного движения электронов за счет внешнего магнитного поля приводит к увеличению плотности пространственного заряда в области виртуального катода (ср. шкалу градиаций серого цвета на рис. 4.22, а и б) и, как следствие, уменьшению необходимого тока пучка (как и следует из рис. 4.19), при котором возможно появление отражений частиц и колебаний виртуального катода в электронном потоке.

При больших магнитных полях ( $B \gg B_{\min}$ ), когда пучок сильно замагничен, как видно из рис. 4.22, в, виртуальный катод располагается практически полностью в пределах начального радиуса пучка. Радиальных движений и радиальных колебаний пространственного заряда вдоль всего радиуса  $R$  пространства взаимодействия в этом случае практически не наблюдается. В рассматриваемом случае изменение магнитного поля в области  $B > B_{\min}$  уже не приводит к существенным изменениям плотности пространственного заряда электронов в области виртуального катода и, как следствие, к изменениям критического тока пучка с увеличением фокусирующего пучок магнитного поля.

Исходя из вышесказанного, представляется правильным различать два типа виртуальных катодов для случаев малых и больших фокусирующих магнитных полей. Для малых магнитных полей динамика

заряженных частиц пучка, приводящая к формированию виртуального катода, преимущественно происходит в поперечном направлении под действием сил пространственного заряда, которые способствуют значительному расширению электронного потока в радиальном направлении. В этом случае можно говорить о «поперечном» виртуальном катоде, в котором динамика пространственного заряда происходит преимущественно в радиальном направлении. Такой виртуальный катод реализуется в низковольтном виркаторе при отсутствии или слабой фокусировке магнитным полем. Иная ситуация складывается при больших фокусирующих магнитных полях, когда в системе преобладает продольная динамика заряженных частиц. В этом случае можно говорить о «продольном» виртуальном катоде. Поведение электронного пучка со сверхкритическим током с продольным виртуальным катодом изучено более детально и обычно реализуется в виркаторах при фокусировке пучка внешними большими магнитными полями. В этом случае величина критического тока определяется известным соотношением [2].

#### **4.4. Хаотическая динамика релятивистского электронного пучка с виртуальным катодом при изменении величины внешнего магнитного поля**

Итак, мы рассмотрели зависимости критических токов, при которых в пучке заряженных частиц формируется виртуальный катод, и особенности нелинейной динамики виртуального катода для нерелятивистских и слаборелятивистских пучков заряженных частиц с учетом двумерной динамики электронов в области виртуального катода. Представляется важным рассмотреть нелинейную динамику и хаотическую генерацию в релятивистском пучке заряженных частиц при формировании в нем виртуального катода. В связи с этой задачей следует отметить работы [14, 15], в которых были предприняты попытки теоретического анализа процессов в пучке с виртуальным катодом в различных модификациях виркаторов с учетом конечности магнитного поля, фокусирующего электроны пучка. В данном разделе проведем детальный анализ нелинейных нестационарных процессов в релятивистском электронном потоке со сверхкритическим током с учетом двумерных эффектов при изменении величины внешнего магнитного поля.

**4.4.1. Математическая модель.** В качестве исследуемой системы, как и выше, рассмотрим замкнутый отрезок цилиндрического волновода длиной  $L = 0,16$  м и радиусом  $R = 0,3L$ . Внутрь рабочей камеры через сечение  $z = 0$  инжектируется моноэнергетический аксиально-симметричный трубчатый релятивистский электронный пучок с нулевой поперечной скоростью и однородным распределением плотности тока в поперечном направлении. Энергия ускорения электронов 560 кэВ (что соответствует скорости электронов на входе в систему  $v_0/c = 0,88$ , где  $c$  — скорость света), внутренний радиус и толщина инжектируемого

релятивистского пучка соответственно  $r_b = 0,2L$  и  $\Delta_b = 0,03L$ . Отраженные от виртуального катода электроны осаждаются на входной сетке («редитронная» схема [16]). В качестве источника внешнего магнитного поля предполагается соленоид цилиндрического сечения, создающий однородное магнитное поле в пределах рабочей камеры виркатора.

В общем виде уравнения модели, описывающей процессы в релятивистском пучке в виркаторной системе, могут быть записаны так:

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, \quad (4.10)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi\rho, \quad \operatorname{div} \mathbf{H} = 0, \quad (4.11)$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} + e \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}, \mathbf{H}] \right) \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} = 0, \quad (4.12)$$

$$\rho = e \int f d\mathbf{p}, \quad \mathbf{j} = e \int f \mathbf{v} d\mathbf{p} \quad (4.13)$$

с соответствующими заданными начальными и граничными условиями. Здесь  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  — напряженности электрического и магнитного полей,  $f = f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$  — функция распределения электронов,  $\rho$  и  $\mathbf{j}$  — плотности заряда и тока,  $\mathbf{v}$  и  $\mathbf{p}$  — скорость и импульс электронов.

Учитывая геометрию исследуемой нами системы, обладающей аксиальной симметрией пространства взаимодействия, перейдем в цилиндрическую систему координат, причем с учетом аксиальной симметрии будем иметь, что  $\partial/\partial\theta = 0$ . Отметим, что подобное упрощение исключает из рассмотрения аксиально-несимметричные моды, которые могут возбуждаться при взаимодействии пучка с электромагнитным полем [17]. Тогда, предполагая отсутствие внешних переменных полей  $E_\theta$ ,  $H_r$  и  $H_z$  и начального импульса электронов пучка  $p_\theta$ , роторные уравнения Максвелла (4.10) преобразуем к виду:

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_\theta}{\partial t} &= -c \left( \frac{\partial E_r}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial r} \right), \\ \frac{\partial E_r}{\partial t} &= -c \frac{\partial H_\theta}{\partial z} - 4\pi j_r(r, z), \\ \frac{\partial E_z}{\partial t} &= \frac{c}{r} \frac{\partial (r H_\theta)}{\partial r} - 4\pi j_z(r, z). \end{aligned} \quad (4.14)$$

Интегрирование уравнений (4.14) с соответствующими начальными и граничными условиями возможно провести численно на сдвинутых друг относительно друга пространственно-временных сетках с постоянными шагами по времени  $\Delta t$  и соответственно по продольной и радиальной координатам  $\Delta z$  и  $\Delta r$ , на каждой из которых определим одну из полевых компонент [3, 6, 7, 18].

Для решения уравнения Власова (4.12), как и в предыдущих разделах, применялся метод крупных частиц, в соответствии с которым

динамика электронного пучка моделируется совокупностью конечного числа крупных частиц, которые в аксиально-симметричной геометрии представляются в виде заряженных колец различного радиуса. Для каждой из крупных частиц численно решались релятивистские уравнения движения

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{E} + \frac{[\mathbf{p}, \mathbf{B}]}{\gamma}, \quad \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{\mathbf{p}}{\gamma} \quad (4.15)$$

при помощи алгоритма Бориса [19] применительно к цилиндрической системе координат. При этом рассчитываются три компоненты скорости  $\mathbf{v}$  заряженной частицы — продольная  $v_z$ , радиальная  $v_r$  и азимутальная  $v_\theta$  составляющие. Далее, зная все координаты и скорости крупных частиц, плотности пространственного заряда  $\rho(z, t)$  и тока  $j(z, t)$  электронного потока можно восстановить с помощью стандартной процедуры билинейного взвешивания частиц на сетке в цилиндрической системе координат в двух измерениях [7].

**4.4.2. Генерация хаотических сигналов релятивистским электронным пучком с виртуальным катодом во внешнем магнитном поле.** При рассмотрении сложной нестационарной динамики в релятивистском пучке с виртуальным катодом, в первую очередь, остановимся на перестройке режимов генерации при изменении величины  $B$  внешнего фокусирующего магнитного поля.

На рис. 4.23 показаны спектры мощности колебаний продольного электрического поля в области виртуального катода при токе пучка  $I = 1,5I_0$ , где  $I_0$  — предельный вакуумный ток, при котором в пучке формируется нестационарный виртуальный катод, и при различных значениях величины  $B$  магнитного поля. Уменьшение магнитного поля приводит к увеличению влияния эффектов двумерного движения заряженных частиц в области виртуального катода. Действительно, при значительных величинах магнитного поля, когда динамика электронов пучка близка к одномерной, колебания в системе оказываются близкими к одночастотным (рис. 4.23, а;  $B = 40$  кГс). В спектре мощности наблюдается один ярко выраженный преобладающий пик, соответствующий частоте  $f \approx 2,5(\omega_p/2\pi)$ . Далее, с уменьшением величины ведущего магнитного поля наблюдается усложнение спектра генерации, заключающееся в появлении дополнительных частотных компонент и увеличении мощности шумового пьедестала (рис. 4.23, б;  $B = 20$  кГс). При малых величинах  $B$  в спектре мощности наряду с ВЧ компонентами в области 3–6 ГГц появляются низкочастотные компоненты с частотами  $f < 500$  МГц (рис. 4.23, в;  $B = 6$  кГс). В отсутствие магнитного поля спектр мощности генерации становится сплошным в диапазоне 3,5–6 ГГц, шумовой пьедестал поднимается до уровня –10 дБ (рис. 4.23, г). Описанная картина демонстрирует усложнение хаотической генерации в релятивистском пучке с виртуальным катодом с уменьшением внешнего магнитного поля и типична для различных скоростей электронов  $\beta_0 = v_0/c$  и токов  $I$  пучка.

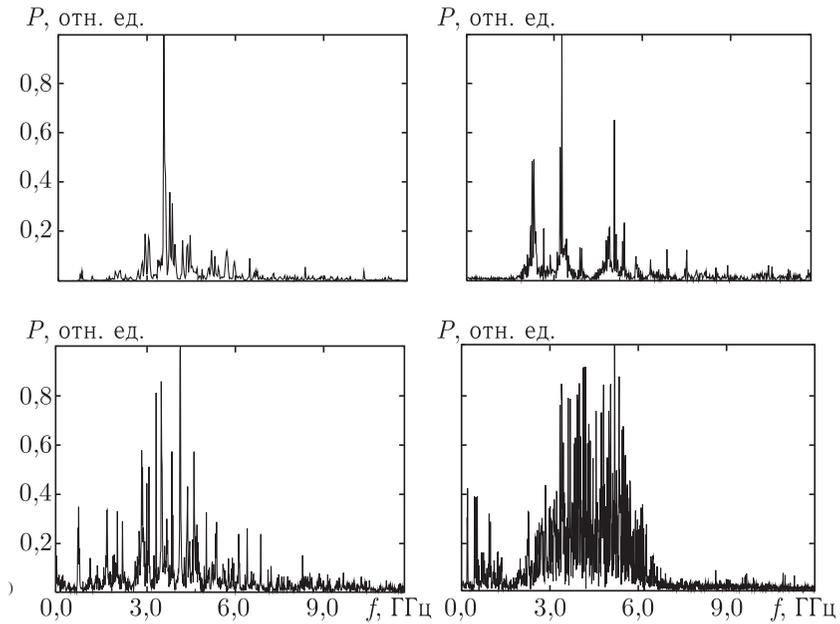


Рис. 4.23. Нормированные спектры мощности (в нелогарифмическом масштабе) колебаний электрического поля в области виртуального катода для различных значений величины ведущего магнитного поля: а)  $B = 40$  кГс; б)  $20$  кГс; в)  $6$  кГс; г)  $0$

Ранее для анализа процессов в пучке с виртуальным катодом использовалось рассмотрение величины токораспределения в системе в зависимости от величины прикладываемого магнитного поля. На рис. 4.24 показаны усредненные во времени величины тока  $\langle j_{tr} \rangle$ , проходящего через виртуальный катод и оседающего на коллектор, тока  $\langle j_r \rangle$ , отраженного от виртуального катода обратно к плоскости инжекции, и, наконец, тока  $\langle j_w \rangle$ , оседающего на стенки пространства дрейфа, ограничивающие систему в поперечном направлении в зависимости от величины  $B$  фокусирующего магнитного поля при малом и большом токе пучка. Токи  $\langle j_{tr} \rangle$ ,  $\langle j_r \rangle$  и  $\langle j_w \rangle$  нормированы на величину тока инжектируемого пучка. При больших величинах фокусирующего магнитного поля ( $B > 10$  кГс) величины проходящего  $\langle j_{tr} \rangle$  и отраженного  $\langle j_r \rangle$  потоков слабо зависят от величины фокусирующего пучок магнитного поля. Так, с ростом  $B$  наблюдается незначительный рост величины  $\langle j_{tr} \rangle$  и соответственно уменьшение  $\langle j_r \rangle$ . Это область значений величины  $B$  магнитного поля, при котором двумерная динамика электронов в конечном магнитном поле не приводит к изменению токораспределения в системе. Инжектируемый электронный пучок, как и в случае бесконечного фокусирующего магнитного поля (когда динамика электронов принципиально одномерная), динамическим образом распределяется в области виртуального катода на два потока — поток

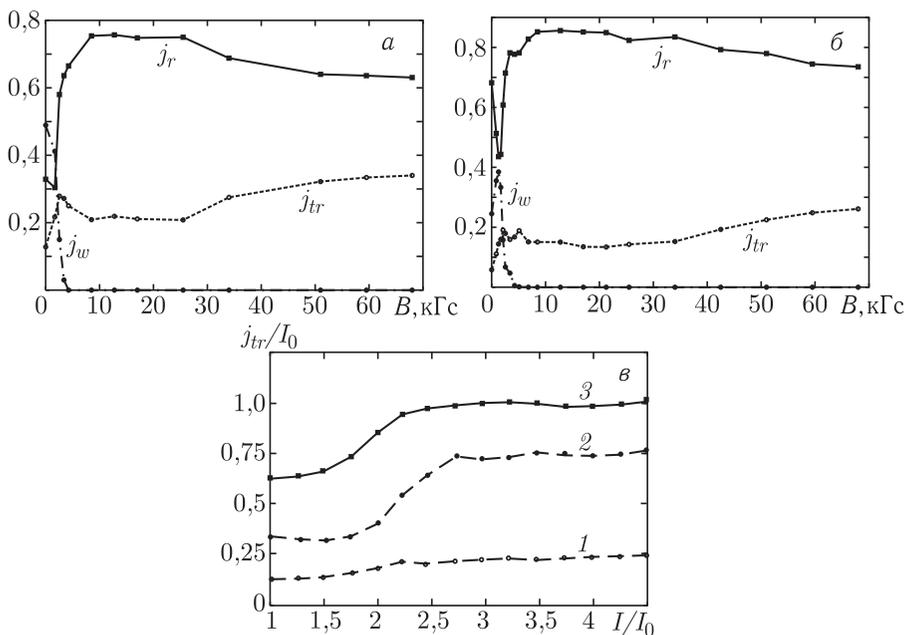


Рис. 4.24. Усредненные во времени величины отраженного к плоскости инжекции от виртуального катода, проходящего к коллектору и осевшего на ограничивающую стенку токов электронного потока в зависимости от магнитного поля  $B$  при  $I = 1,5I_0$  (а) и  $I = 4I_0$  (б). Зависимость величины проходящего тока от величины инжектируемого тока при различных величинах магнитного поля: 1 —  $B = 60$  кГс; 2 — 4 кГс; 3 — 0

электронов, отраженных от виртуального катода обратно к плоскости инжекции, и поток электронов, проходящих через виртуальный катод к коллекторному концу пространства взаимодействия.

Величина проходящего через виртуальный катод тока  $\langle j_{tr} \rangle$  при больших величинах фокусирующего магнитного поля близка к величине предельного вакуумного тока в пространстве взаимодействия. Последнее хорошо согласуется с известными экспериментальными и теоретическими данными (см., например, [20, 21]), из которых следует, что величина пролетного за виртуальный катод тока близка к предельному вакуумному току. Зависимость величины пролетного тока при магнитном поле  $B = 60$  кГс от величины инжектируемого тока пучка представлена на рис. 4.24, в. Видно, что при малых инжектируемых токах пучка величина проходящего тока меньше величины предельного значения. С ростом тока пучка величина пролетного тока быстро стремится к предельному вакуумному значению. Подобное поведение зависимости пролетного тока от величины инжектируемого тока пучка требует дальнейшего теоретического анализа. При малых величинах фокусирующего магнитного поля, как видно из рис. 4.24, в, величина проходящего тока меньше величины предельного вакуумного тока, что

связано с оседанием части электронного потока на стенки пространства дрейфа, ограничивающие систему в поперечном направлении. С ростом величины фокусирующего магнитного поля токооседание на поперечные стенки уменьшается и соответственно проходящий ток стремится к предельному вакуумному значению.

Динамика пучка принципиально меняется при малых фокусирующих магнитных полях. Так, токооседание на поперечные стенки рабочей камеры виркатора возникает при малых фокусирующих магнитных полях  $B < 5\text{--}10$  кГс и быстро увеличивается с уменьшением магнитного поля. Максимум величины  $\langle j_w \rangle$  приходится на величину  $B \sim 0\text{--}2$  кГс, когда резко уменьшается величина тока, выходящего из системы через плоскость инъекции. Исследование характерных траекторий крупных частиц, моделирующих пучок, показывает, что пучок, оседающий на стенках рабочей камеры, почти полностью состоит из электронов, отраженных от виртуального катода. Значение  $B_w$  магнитного поля, при котором наблюдается появление электронов, оседающих на поперечных стенках пространства дрейфа, можно рассматривать как критическое, при котором влияние двумерных эффектов на динамику пространственного заряда становится весьма существенным. Отметим, что именно при значениях магнитного поля  $B < B_w$  в системе наблюдается существенное расширение полосы частот многочастотного хаотического сигнала, генерируемого виркатором.

Таким образом, при фиксированном токе пучка с уменьшением величины фокусирующего магнитного поля в системе с виртуальным катодом (а следовательно, с ростом влияния двумерных эффектов динамики электронов на колебания виртуального катода) наблюдается последовательное усложнение спектра генерации, начиная от одночастотных колебаний при близкой к одномерной динамике электронов до многочастотных широкополосных хаотических колебаний, когда динамика пучка принципиально двумерная и наблюдается токооседание электронов на стенки рабочей камеры.

**4.4.3. Эффективность релятивистского генератора на виртуальном катоде в зависимости от величины магнитного поля.** Определим к.п.д.  $\eta$  взаимодействия электронного пучка с электромагнитным полем в виркаторе как

$$\eta = \frac{W_{e\text{ ВХ}} - W_{e\text{ ВЫХ}}}{W_{e\text{ ВХ}}}, \quad (4.16)$$

где  $W_{e\text{ ВХ}}$  — энергия, вносимая в пространство взаимодействия инжектируемым электронным пучком;  $W_{e\text{ ВЫХ}}$  — энергия покидающих пространство взаимодействия электронов. Несложно показать, что к. п. д. взаимодействия (4.16) может быть выражен соотношением

$$\eta = \frac{\gamma_0 - \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M \gamma_k}{\gamma_0 - 1}, \quad (4.17)$$

где  $\gamma_0$  — релятивистский фактор электронов на входе в пространство взаимодействия;  $\gamma_k$  — релятивистский фактор  $k$ -й заряженной частицы, покидающей пространство взаимодействия;  $M$  — число заряженных частиц, вышедших из пространства взаимодействия.

На рис. 4.25 показаны зависимость к. п. д. взаимодействия  $\eta$  (4.17) от величины  $B$  фокусирующего магнитного поля (циклотронной частоты  $\omega_c$ ) при различных превышениях током пучка критического значения (предельного вакуумного тока  $I_0$ , при котором в системе формируется нестационарный виртуальный катод). Из рисунка видно, что для каждого значения тока пучка существует оптимальная величина  $B_{\text{опт}}$  магнитного поля, при котором к. п. д. взаимодействия максимален. Оптимальное магнитное поле соответствует малым величинам  $B_{\text{опт}} \lesssim 10$  кГс и увеличивается с ростом тока пучка. Так, при  $I \approx I_0$  величина  $B_{\text{опт}} \approx 0$ , а при  $I = 4I_0$  оптимальное магнитное поле уже  $B_{\text{опт}} \approx 9$  кГс. Величина максимального к. п. д. генерации виркатора при рассматриваемых в данной главе параметрах пучка составляет величину  $\eta \sim 0,06$ .

При изменении величины ведущего магнитного поля относительно оптимального значения наблюдается резкое уменьшение к. п. д. взаимодействия пучка с электромагнитным полем. При больших значениях магнитного поля  $B > 20$  кГс к. п. д. взаимодействия слабо меняется с изменением магнитного поля и не превышает величины  $\eta \sim 0,01-0,02$  в зависимости от тока пучка  $I/I_0$ . Следует отметить, что аналогичные экспериментальные данные были получены в [15, 22], где впервые было экспериментально обнаружено наличие оптимального внешнего магнитного поля (соответствующего сравнительно малым значениям), при котором мощность генерации виркатора максимальна.

Подобная зависимость к. п. д. от магнитного поля определяется характером движения заряженных частиц в области виртуального катода. Рассмотрим движение заряженных частиц в самосогласованном поле в области виртуального катода подробнее, для чего будем анализировать характерные траектории заряженных частиц и распределения электрического поля в радиальном направлении  $E(r, z)$  в области виртуального катода. Отметим, что необходимо различать электроны, движущиеся к виртуальному катоду (их скорость  $v_z > 0$ ), и электроны, отраженные от него обратно к плоскости инжекции (со скоростью  $v_z < 0$ ). Первая часть электронного потока (инжектируемые

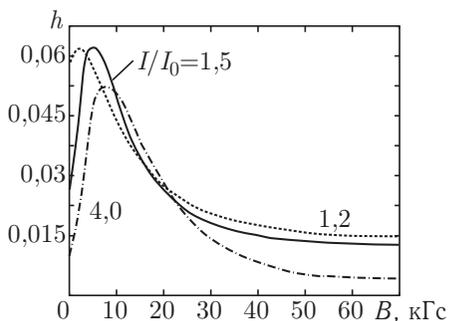


Рис. 4.25. Зависимость к. п. д. взаимодействия от величины фокусирующего магнитного поля при различных превышениях током пучка  $I$  критического значения  $I_0$

в пространство взаимодействия электроны), испытывая на себе действие тормозящего электрического поля  $E_z$  потенциального барьера (виртуального катода), тормозится, отдавая энергию ВЧ полю. Вторая часть потока (отраженные электроны), наоборот, выходя из области виртуального катода ускоряется тем же полем  $E_z$  и забирает энергию у ВЧ поля. Однако тормозящее для инжектируемого потока (или ускоряющее поле для отраженных электронов, для которых  $v_z < 0$ ) поле  $E_z$  имеет распределение вдоль радиуса  $r$  пространства взаимодействия с максимумом, который приходится на координату  $r_b$ , соответствующую радиусу инжектируемого пучка, т. е.  $\max[E_z(r)] = E_z(r = r_b)$ . При  $r > r_b$  и  $r < r_b$  электрическое поле  $E_z(r)$  быстро спадает по абсолютной величине. Это иллюстрирует рис. 4.26, на котором качественно показано характерное распределение поля  $E_z$  вдоль радиуса  $r$  пространства взаимодействия в области виртуального катода. Вид распределения  $E_z(r)$  качественно не меняется при большой и малой величине ведущего магнитного поля. Вместе с тем, вид характерных траекторий заряженных частиц в области виртуального катода сильно зависит от величины внешнего магнитного поля. На рис. 4.26 качественно показаны характерные особенности динамики электронов в области виртуального катода при большом (сверху) и малом (внизу) фокусирующем магнитном поле. Черной жирной стрелкой показаны характерная траектория в координатах  $(r, z)$  инжектируемого электронного пучка, для которого поле  $E_z$  является тормозящим. Серыми стрелками показаны характерные траектории электронов, отраженных от виртуального катода, для которых поле  $E_z$  является уже ускоряющим. При значительном ведущем магнитном поле отраженный от виртуального катода электронный пучок имеет тот же радиус, что и входящий (инжектируемый) электронный пучок. Следовательно, отраженные электроны испытывают воздействие электрического поля той же амплитуды, что и инжектируемые электроны. Тогда энергия, отданная пучком ВЧ по-

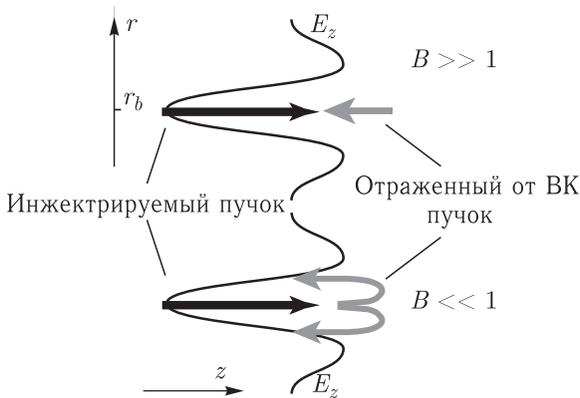


Рис. 4.26. Качественная картина динамики пучка в области виртуального катода при большом и малом магнитном поле

лю при торможении, близка к энергии, приобретенной отраженным пучком за счет ускорения. В результате к. п. д. взаимодействия ( $a$ , следовательно, и мощность излучения) оказываются весьма малыми ( $\eta \sim 0,01-0,02$ )<sup>1)</sup>.

Другая ситуация складывается при малой величине ведущего магнитного поля. В этом случае отраженный пучок вследствие слабой фокусировки имеет возможность вернуться к плоскости инжекции по другой траектории, отличной от траектории инжектируемого пучка. Как показано на рис. 4.26 для малых  $B$ , отраженные от виртуального катода электроны испытывают на себе действие ускоряющего поля, абсолютная величина которого меньше величины тормозящего поля. Следовательно, величина энергии, отбираемой у поля ускоряющимися отраженными электронами, меньше, чем величина энергии, отданная инжектируемыми электронами ВЧ полю. В результате к. п. д. взаимодействия при уменьшении величины фокусирующего магнитного поля растёт и в режиме максимального к. п. д. достигает  $\eta \sim 0,06$ .

Отметим, что при постоянной энергии инжектируемого потока дефокусирующее действие пространственного заряда тем выше, чем больше ток инжектируемого пучка (больше величина пространственного заряда), а, следовательно, с ростом тока пучка величина оптимального магнитного поля должна возрастать для обеспечения наиболее эффективных условий взаимодействия пучка с полем, что хорошо видно на рис. 4.26.

**4.4.4. Образование и взаимодействие структур в электронных пучках с виртуальным катодом при изменении внешних магнитных полей.** Одним из важных и перспективных подходов к пониманию механизмов возникновения сложной хаотической динамики пространственно-распределенных систем является выделение и анализ пространственно-временных когерентных структур, формирующихся в таких системах [23–29]. Для выделения когерентных структур удобно воспользоваться методом ортогональной декомпозиции пространственно-временных данных по Карунену–Лоэву [30, 31], который ранее применялся для анализа динамики и взаимодействия пространственно-временных структур в пучково-плазменных системах с виртуальным катодом в случае одномерного движения заряженных частиц [9, 32, 33].

Задача выделения когерентных структур по Карунену–Лоэву сводится к решению интегрального уравнения вида [30]

$$\int K(z, z')\Psi(z') dz' = \Lambda\Psi(z), \quad (4.18)$$

<sup>1)</sup> Отметим, что в этом качественном рассмотрении не учитываются прошедшие через виртуальный катод электроны, которые тоже ускоряются и отбирают некоторую часть энергии ВЧ поля. Однако, суммарная доля таких электронов существенно меньше числа отраженных от виртуального катода электронов (см. рис. 4.24) и при качественном рассмотрении их можно не учитывать.

где ядро уравнения имеет вид

$$K(z, z') = \langle \xi(z, t) \xi(z', t) \rangle_t, \quad (4.19)$$

где  $\langle \dots \rangle_t$  обозначает усреднение во времени. В качестве функций  $\xi(z, t)$  может быть выбран набор пространственно-временных распределений любой физической величины, приведенный к нулевому среднему. Удобно в качестве  $\xi(z, t)$  выбрать величины плотности тока пучка  $j_z(z, t)$ . Собственное значение  $\Lambda_n$ , соответствующее  $n$ -й моде КЛ  $\Psi_n$ , пропорционально энергии, заключенной в этой моде. Мерой этой энергии может служить величина

$$W_n = \frac{\Lambda_n}{\sum_i \Lambda_i} (\times 100 \%). \quad (4.20)$$

Однако, в рассматриваемом случае мы имеем дело с двумерным движением электронного потока, поэтому удобно выделять отдельно «поперечные» и «продольные» структуры в электронном пучке. В первом случае (выделение «поперечных» структур, характеризующих динамику пространственного заряда в радиальном направлении) ядро уравнения (4.18) формируется как

$$K(r, r') = \frac{1}{T} \frac{1}{L} \int_0^T \int_0^L u(z, r, t) u(z, r', t) dz dt. \quad (4.21)$$

В случае выделения «продольных» структур (т. е. структур, определяющих динамику системы в направлении распространения электронного пучка) ядро уравнения принимает вид:

$$K(z, z') = \frac{1}{T} \frac{1}{R} \int_0^T \int_0^R u(z', r, t) u(z, r, t) dr dt. \quad (4.22)$$

Здесь  $u(z, r, t)$  — набор пространственно-временных данных с нулевым средним (в качестве подобных данных здесь использована плотность  $\rho(z, r, t)$  пространственного заряда электронного потока с исключенным средним);  $T$  — промежуток времени, за который проводится усреднение. Энергия поперечных и продольных когерентных структур определяется, как и выше, с помощью анализа собственных значений мод Карунена–Лоэва (4.18).

На рис. 4.27 приведены зависимости энергии  $W_n$  (в %) пяти «поперечных» и «продольных» когерентных структур с наибольшей энергией от величины фокусирующего магнитного поля (циклотронной частоты  $\omega_c$ ) для тока пучка  $I = 1,5I_0$ . Отметим, что во всех режимах, как близких к регулярным колебаниям, так и со сложной динамикой, число ( $n$ ) когерентных структур, на которые приходится более 90% колебательной энергии, не велико и составляет величину  $n = 2-5$ .

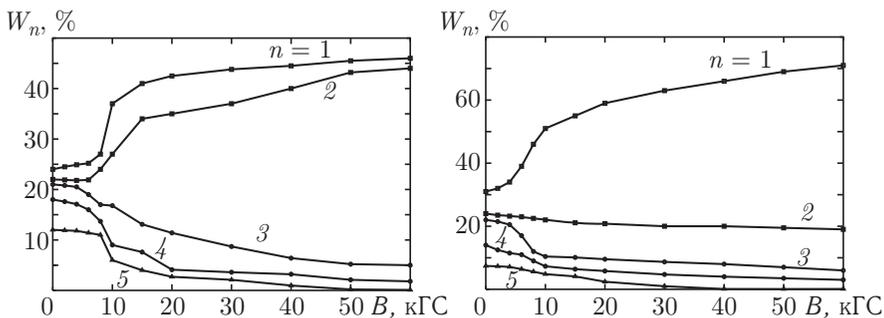


Рис. 4.27. Зависимости энергии  $W_n$  «поперечных» (а) и «продольных» (б) когерентных структур с наибольшей энергией от величины фокусирующего магнитного поля (циклотронной частоты  $\omega_c$ )

При больших величинах  $B$  магнитного поля основная энергия колебательного движения в системе сосредоточена в двух высших поперечных и одной продольной структурах Карунена–Лоэва. С уменьшением величины магнитного поля в системе возникают дополнительные структуры, в результате наблюдается уменьшение энергии основных обладающих максимальной энергией структур и рост доли энергии низших мод с номерами  $n = 2-5$ . При малом магнитном поле ( $B \sim 0$ ) динамика системы в поперечном (радиальном) направлении определяется пятью высшими модами, относительная энергия которых примерно одинакова. Последнее свидетельствует о сложной динамике пространственного заряда именно в поперечном направлении. Среди «продольных» структур даже при малом магнитном поле остается одна преобладающая по величине энергии  $W_1$  основная структура, которую следует связать с динамикой виртуального катода. Отметим, что последнее хорошо согласуется с результатами работы [33], где проводился анализ процессов структурообразования в пучке с виртуальным катодом в случае одномерного движения.

Для подтверждения связи усложнения динамики электронного пучка с динамикой структур были рассчитаны распределения  $\Phi(\tau)$  заряженных частиц по временам жизни  $\tau$  в пространстве взаимодействия, которые представлены на рис. 4.28. Из него следует, что при большом магнитном поле (рис. 4.28, а) функция распределения имеет единственный ярко выраженный максимум (отмечен на рисунке), который соответствует периоду  $T_{ВК}$  колебаний виртуального катода (который соответствует основной частоте  $f_{ВК} = 1/T_{ВК}$  в спектре мощности на рис. 4.23, а, построенном для тех же значений тока пучка и магнитного поля). Можно сделать вывод, что в данном случае динамика системы определяется только одной электронной структурой — виртуальным катодом, и соответственно, виркаторная система при большом фокусирующем магнитном поле генерирует близкое к одночастотному излучение. Это подтверждает рис. 4.29, а, на котором представлены конфигурационные портреты электронного пучка при  $B = 40$  кГс. На

представленных портретах точки соответствуют заряженным крупным частицам, которые используются в численном моделировании. Из конфигурационного портрета, построенного в координатах  $(z, v_z/c)$  (см. рис. 4.29, *а*), видно, что основная масса заряженных частиц отражается в одной точке  $x = x_{ВК}$  пространства взаимодействия, которая соответствует виртуальному катоду (отмечена штриховой линией на рис. 4.29, *а*). Из конфигурационного портрета в координатах  $(z, r)$  следует, что электронный поток не меняет свою толщину по мере распространения вдоль пространства взаимодействия. Таким образом, при большом ведущем магнитном поле в системе формируется единственная электронная структура — виртуальный катод, динамика которой существенна в продольном направлении.

С уменьшением величины магнитного поля (см. рис. 4.28, *б, в*) вид функции распределения  $\Phi(\tau)$  становится более сложным. Теперь  $\Phi(\tau)$  имеет несколько максимумов, каждый из которых соответствует своей электронной структуре в пучке. Из анализа конфигурационных портретов электронного пучка (см. рис. 4.29, *б, в*), построенных при малых величинах ведущего магнитного поля, также следует, что динамика электронов в области виртуального катода значительно усложняется. Во-первых, наблюдается значительное уширение электронного пучка в поперечном направлении; во-вторых, область пространства взаимодействия, в которой имеет место одновременное отражение электро-

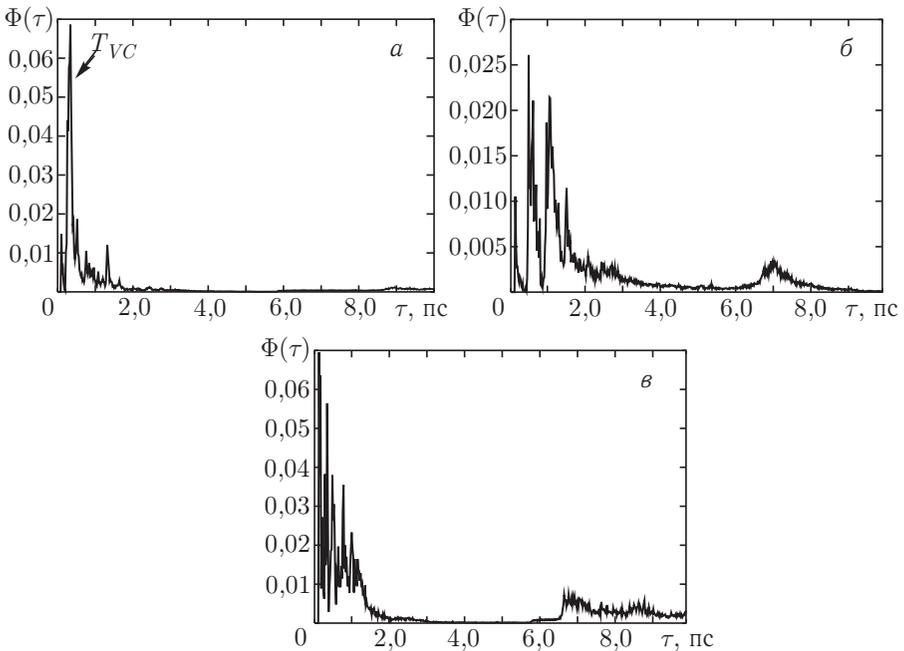


Рис. 4.28. Распределения заряженных частиц по временам жизни в пространстве взаимодействия для  $B = 40$  кГс (*а*);  $B = 8$  кГс (*б*) и  $B = 0$  (*в*)

нов, значительно расширяется. Последнее соответствует формированию в системе нескольких виртуальных катодов (нескольких областей, в которых происходит отражение электронов обратно к плоскости инжекции). Анализ времен жизни отраженных заряженных частиц показал, что каждый из максимумов на функции распределения (см. рис. 4.28, б, в) соответствует своей характерной области отражения частиц, т. е. своему виртуальному катоду. В работе [33] было показано, что хаотизация выходного излучения виркатора при больших величинах фокусирующего магнитного поля определяется формированием нескольких виртуальных катодов в пространстве дрейфа. Каждый из виртуальных катодов воздействует на другие через отраженный от него

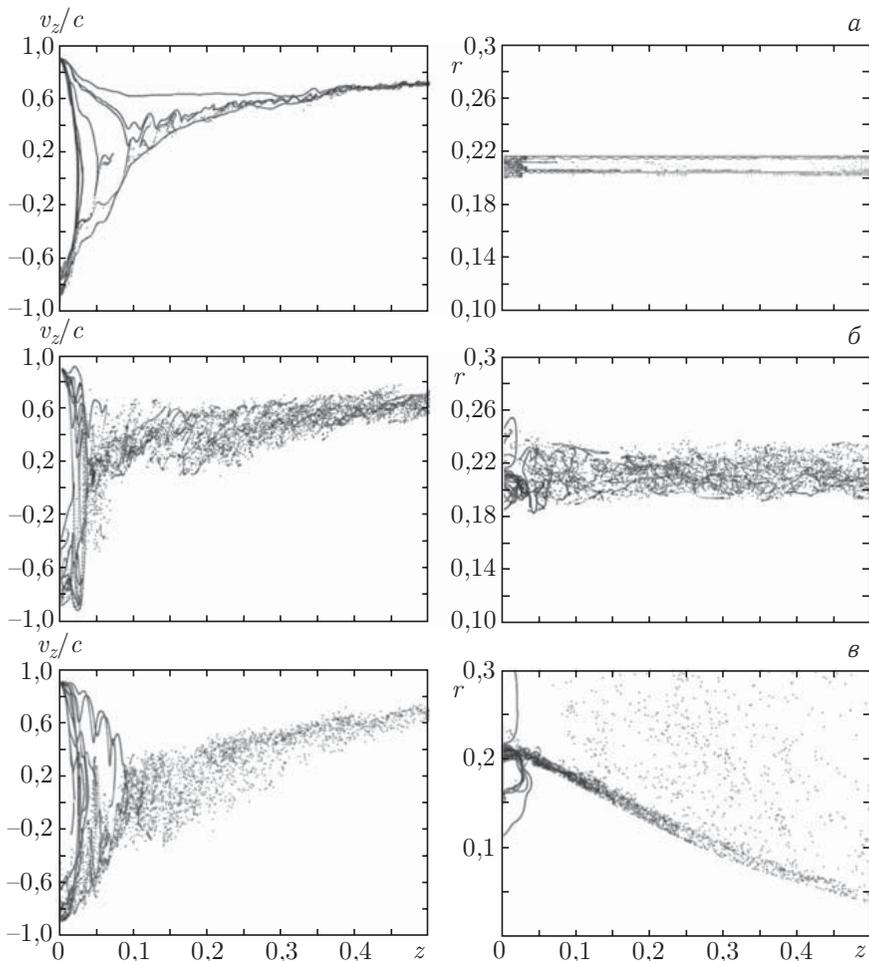


Рис. 4.29. Конфигурационные портреты электронного пучка в координатах  $(v_z/c, z)$  и  $(r, z)$  в пространстве взаимодействия для  $B = 40$  кГс (а),  $B = 8$  кГс (б) и  $B = 0$  (в)

электронных поток. Как следствие, в системе формируется несколько цепей обратной связи, которые и приводят к усложнению динамики пространственного заряда электронного пучка со сверхкритическим током. При малых магнитных полях наблюдается аналогичная ситуация, но теперь электронные структуры формируются не только в различных продольных сечениях пространства взаимодействия, но и имеют сложную картину динамики пространственного заряда в поперечном (радиальном) направлении. Таким образом, формирование и взаимодействие электронных структур в пучке с виртуальным катодом приводит к существенному усложнению выходного излучения виркатора при малых величинах ведущего магнитного поля.

В заключение можно сделать вывод, что усложнение динамики электронного пучка с виртуальным катодом с увеличением тока пучка или уменьшением величины ведущего магнитного поля определяется одним и тем же физическим механизмом, а именно формированием и взаимодействием пространственных структур в пучке с виртуальным катодом. Однако реализация данного механизма в каждом из случаев различна. Так, при уменьшении величины ведущего магнитного поля основную роль играет динамика пучка в поперечном направлении (т. е. двумерные эффекты), и, в первую очередь, начинается рост «поперечных» электронных структур в пучке со сверхкритическим током. При большом фокусирующем магнитном поле при увеличении тока пучка поперечная динамика менее существенна и сводится к возникновению колебаний пространственного заряда пучка в поперечном направлении.

## **Заключение**

Приведенные в данной главе результаты позволяют сделать вывод о том, что в пучке заряженных частиц с виртуальным катодом значительную роль играют поперечные движения электронов, что не учитывается в одномерных моделях, которые часто используются для описания процессов в виркаторных системах. Это становится особенно важным при рассмотрении интегральных характеристик (таких как выходная мощность и к. п. д. прибора) системы с виртуальным катодом. В главе подробно изложены физические процессы, сопровождающие образование и динамику виртуального катода в электронных потоках, которые качественно схожи для нерелятивистских, слаборелятивистских и релятивистских энергий частиц. Изменение внешнего магнитного поля позволяет эффективно управлять характеристиками генерации виркатора, что хорошо подтверждается экспериментами с низковольтной системой, описанными в разделе 3.4 главы 3. В частности, показано, что системы с виртуальным катодом могут демонстрировать разнообразное поведение, включающее в себя различные режимы от регулярных до сложных хаотических колебаний. Наиболее важным результатом главы является вывод о том, что учет поперечного движения заряженных частиц в пространстве взаимодействия является

принципиально необходимым для точного и корректного описания физических процессов, происходящих в пучках заряженных частиц в режиме образования виртуального катода, а также для проведения расчетов тех или иных конструкций приборов с виртуальным катодом.

### Список литературы

1. Кузелев М. В., Рухадзе А. А. Электродинамика плотных электронных пучков в плазме. — М.: Наука, 1990.
2. Кузелев М. В., Рухадзе А. А., Стрелков П. С. Плазменная релятивистская СВЧ электроника. — М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2002.
3. Рошаль А. С. Моделирование заряженных пучков. — М.: Атомиздат, 1979.
4. Поттер Д. Вычислительные методы физики. — М.: Мир, 1975.
5. Хокни Р., Иствуд Дж. Численное моделирование методом частиц. — М.: Мир, 1987.
6. Anderson T. M., Mondelli A. A., Levush B., Verboncoeur J. P., Birdsall C. K. Advances in modelling and simulation of vacuum electron devices // Proc. IEEE. 1999. V. 87, № 5. P. 804–839.
7. Birdsall C. K., Langdon A. B. Plasma physics, via computer simulation. — NY: McGraw-Hill, 1985.
8. Трубецков Д. И., Храмов А. Е. Лекции по сверхвысокочастотной электронике для физиков: В 2-х т. — М.: Физматлит, 2003.
9. Храмов А. Е. Хаос и образование структур в электронном потоке с виртуальным катодом в ограниченном пространстве дрейфа // Радиотехника и электроника. 1999. Т. 44, № 5. С. 551–556.
10. Морозов М. Ю., Храмов А. Е. Влияние внешнего магнитного поля на величину критического тока электронного пучка, при котором формируется виртуальный катод // Физика плазмы. 2007. Т. 33, № 7. С. 610–619.
11. Hramov A. E., Koronovskii A. A., Morozov M. Yu., Mushtakov A. V. Effect of external magnetic field on critical current for the onset of virtual cathode oscillations in relativistic electron beams // Phys. Lett. A. 2008. V. 372. P. 876–883.
12. Рухадзе А. А., Богданкевич Л. С., Росинский С. Е., Рухлин В. Г. Физика сильноточных релятивистских пучков. — М.: Атомиздат, 1980.
13. Granatstein V. L., Alexeff I. High power microwave sources. — Artech House Microwave Library, 1987.
14. Lindsay P. A., Toh W. K., Chen X. The influence of an axial magnetic field on the performance of a coaxial vircator // IEEE Trans. Plasma Sci. 2002. V. 30, № 3. P. 1186–1195.
15. Chen X., Toh W. K., Lindsay P. A. Physics of the interaction process in a typical coaxial virtual cathode oscillator based on computer modelling using MAGIC // IEEE Trans. Plasma Sci. 2004. V. 32. P. 835.
16. Davis H. A., Bartsch R. R., Kwan T. J. T., Sherwood E. G., Stringfield R. M. Experimental confirmation of the reditron concept // IEEE Trans. Plasma Sci. 1988. V. 16, № 2. P. 192.
17. Антошкин М. Ю., Григорьев В. П., Коваль Т. В., Саблин Н. И. Электромагнитный код в полярной системе координат для математического моде-

- лирования излучения в коаксиальном триоде с виртуальным катодом // Математическое моделирование. 1995. Т. 7, № 8. С. 25.
18. Григорьев А. Д. Современные методы моделирования нестационарных электромагнитных полей // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1999. Т. 7, № 4. С. 48.
  19. Boris J. P., Lee R. Optimization of particle calculations in 2 and 3 dimensions // Commun. Math. Phys. 1969. V. 12. P. 131–136.
  20. Дубинов А. Е., Ефимова И. А. // ЖТФ. 2003. Т. 73, № 9. С. 126 (in Russian).
  21. Беломытцев С. Я., Гришков А. А., Кицанов С. А. и др. // Письма ЖТФ. 2005. Т. 31, № 2. С. 22.
  22. Jiang W., Kitano H., Huang L., Masugata K., Yatsui K. Effect of longitudinal magnetic field on microwave efficiency of virtual cathode oscillator // IEEE Trans. Plasma Sci. 1996. V. 24. P. 187.
  23. Гапонов-Грехов А. В., Рабинович М. И. Автоструктуры, хаотическая динамика ансамблей // Нелинейные волны. Структуры и бифуркации. — М.: Наука, 1987. — С. 7–44.
  24. Рабинович М. И., Суцук М. М. Регулярная и хаотическая динамика структур в течениях жидкости // УФН. 1990. Т. 160, № 1. С. 3.
  25. Bauer F., Shamel H. Spatio-temporal structures in collisionless electrostatic plasma // Physica D. 1992. V. 54. P. 235.
  26. Ахромеева Т. С., Курдюмов С. П., Малинецкий Г. Г., Самарский А. А. Нестационарные структуры и диффузионный хаос. — М.: Наука, 1992.
  27. Walgraef D. Spatio-temporal pattern formation. — N. Y.: Springer-Verlag, 1996.
  28. Трибельский М. И. Коротковолновая неустойчивость и переход к хаосу в распределенных системах с дополнительной симметрией // УФН. 1997. Т. 167, № 2. С. 168–190.
  29. Малинецкий Г. Г., Потапов А. Б. Современные проблемы нелинейной динамики. — М.: Эдиториал УРСС, 2000.
  30. Ватанабе С. Разложение Карунена–Лоэва и факторный анализ. Теория и приложения // Автоматический анализ сложных изображений / Под ред. Э. М. Бравермана. — М.: Мир, 1969. — С. 310.
  31. Aubry N., Holmes P., Lumley J. L., Stone E. Application of dynamical system theory to coherent structures in the wall region // Physica D. 1989. V. 37. P. 1.
  32. Анфиногентов В. Г., Храмов А. Е. Нелинейные явления в потоке со сверхкритическим током в неоднородном ионном фоне // Изв. РАН. Сер. физ. 1998. Т. 62, № 12. С. 2428.
  33. Анфиногентов В. Г., Храмов А. Е. К вопросу о механизме возникновения хаотической динамики в вакуумном СВЧ генераторе на виртуальном катоде // Изв. вузов. Радиофизика. 1998. Т. XLI, № 9. С. 1137–1146.

## Глава 5

# ГЕНЕРАЦИЯ И УСИЛЕНИЕ ШИРОКОПОЛОСНЫХ ХАОТИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ В СИСТЕМЕ «ЛАМПА БЕГУЩЕЙ ВОЛНЫ С КОЛЛЕКТОРОМ-ГЕНЕРАТОРОМ»

Ю. А. Калинин, А. Е. Храмов

...история создания электронных приборов — это не случайный процесс, а закономерность, связанная с необходимостью в них бурно развивающихся промышленности, средств связи, транспорта. Новые электронные приборы возникали тогда, когда существовавшие приборы уже не могли удовлетворять растущим к ним требованиям и становились в каком-то смысле тормозом на пути технического прогресса...

*Вайсбурд Ф. И., Панаев Г. А., Савельев Б. Н.* Из введения к книге «Электронные приборы и усилители». М.: УРСС, 2004.

Для получения мощных широкополосных шумов в СВЧ диапазоне потребовалось создание специальных генераторов, в которых хаотизация колебаний достигается не за счет воздействия флуктуаций, а вследствие собственной сложной динамики многоконтурной автоколебательной системы со специфическими нелинейностями.

*Залогин Н. Н., Кислов В. В.* Широкополосные хаотические сигналы в радиотехнических и информационных системах. М.: Радиотехника, 2006. С. 6.

*Схема гибридного прибора «лампа бегущей волны с коллектором-генератором». Особенности генерации и усиления сигналов в электронно-волновом усилителе с коллектором-генератором. Хаотические СВЧ колебания в коллекторе-рекуператоре лампы бегущей волны. Усиление широкополосных хаотических сигналов, генерируемых виртуальным катодом, лампой бегущей волны.*

В предыдущих главах монографии рассмотрен новый источник широкополосных хаотических сигналов на основе электронного пучка

с виртуальным катодом, формирующимся в тормозящем статическом поле — низковольтный виркатор. Напомним, что принцип работы низковольтного виркатора заключается в том, что нерелятивистский интенсивный электронный пучок инжектируется в пространство взаимодействия с тормозящим полем. В результате в электронном пучке формируется виртуальный катод, колебания которого регистрируются широкополосной электродинамической системой. Как мы увидели выше, подобный генератор способен демонстрировать различные режимы от близких к одночастотным колебаниям до генерации хаотических сигналов с шириной полосы частот до 2 октав. Однако уровень выходной СВЧ мощности такого генератора весьма низкий [2–4]. В экспериментальном макете низковольтного виркатора при токе пучка  $I_0 = 100\text{--}300$  мА и ускоряющем напряжении  $V_0 = 1\text{--}3$  кВ были обнаружены СВЧ колебания в диапазоне 1–5 ГГц с мощностью порядка 0,2–2,0 Вт при электронном КПД, не превышающем 1–2%.

Поэтому весьма актуальным является создание генератора с возможностями низковольтного виркатора по генерации широкополосных хаотических сигналов, но с большими КПД и выходной мощностью. Одним из решений данной задачи является использование различных усилительных цепочек, включающих в себя низковольтный виркатор в качестве задающего генератора шумоподобных колебаний и широкополосный усилитель мощности. Одна из возможных схем такой усилительной цепочки представлена на рис. 5.1. Она состоит из мало-мощного управляемого источника шума на основе электронного пучка с виртуальным катодом, широкополосного усилителя сигнала — спиральной ЛБВ с коэффициентом усиления  $K_y \sim 50$  дБ и усилителя мощности (мощной ЛБВ с коэффициентом усиления 10–20 дБ). Выходная мощность шумоподобного сигнала такой цепочки может достигать  $P_{\text{out}} \sim 2\text{--}10$  кВт в импульсном режиме. Однако такая схема обладает и недостатками, связанными с необходимостью обеспечить питание нескольких электронно-вакуумных приборов. Одним из возможных решений данной проблемы является использование вместо первых двух элементов усилительной цепочки «гибридного» СВЧ-прибора на основе широкополосного СВЧ-усилителя — лампы бегущей волны (ЛБВ), включающего в качестве одного из элементов многоступенчатый коллектор с возможностью формирования в его пространстве виртуального катода за счет торможения пучка электронов, выходящих из пространства взаимодействия ЛБВ [1]. В этом случае существует возможность создать компактную многофункциональную систему «генератор-усилитель» с одним электронным пучком, мощность и КПД которой в первую очередь будут определяться характеристиками усилителя, а спектральные характеристики выходного сигнала — свойствами колебаний виртуального катода в коллекторе мощной ЛБВ.

В данной главе представлены результаты экспериментального исследования такого нового «гибридного» прибора СВЧ на основе лампы бегущей волны с коллектором-генератором. Новый прибор обладает



Рис. 5.1. Усилительная цепочка с маломощным СВЧ-генератором хаоса. Здесь 1 — маломощный генератор шума с виртуальным катодом (низковольтный виркатор); 2 — широкополосный усилитель шума (ЛБВО с коэффициентом усиления  $K_y \sim 50\text{--}60$  дБ); 3 — усилитель мощности (прозрачная мощная ЛБВ с  $K_y \sim 10\text{--}20$  дБ)

высокой мощностью, достижимой в ЛБВ, наряду с возможностями низковольтного виркатора по формированию различных режимов колебаний, включая режимы широкополосной хаотической генерации со слабой изрезанностью спектра мощности в диапазоне частот более октавы.

### 5.1. Схема гибридного прибора «лампа бегущей волны с коллектором-генератором»

На рис. 5.2, *a* представлены конструктивные элементы многофункционального гибридного СВЧ-прибора на основе широкополосного электронного усилителя с коллектором-генератором [1]. Прибор состоит из нескольких основных функциональных модулей — источника электронов (электронной пушки) 1, мощного широкополосного усилителя СВЧ сигнала 2, коллектора-генератора 3 и элемента связи 4. Усилительный модуль прибора (лампа бегущей волны) содержит источник электронов 1, формирующий электронный пучок с током  $I_0$ , который попадает в пространство взаимодействия 2. Пространство взаимодействия представляет собой отрезок электродинамической замедляющей

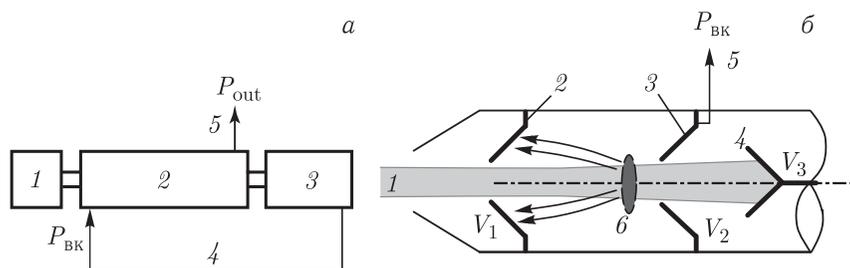


Рис. 5.2. *a*) Блок-схема гибридного многофункционального генератора-усилителя. Здесь 1 — источник электронов (электронная пушка); 2 — мощный широкополосный усилитель СВЧ сигнала; 3 — коллектор-генератор; 4 — элемент связи. *б*) Схема трехступенчатого коллектора-генератора ЛБВ. Здесь 1 — отработанный в пространстве взаимодействия ЛБВ электронный пучок, попадающий из него в область коллектора; 2–4 — секции коллектора-рекуператора с потенциалами  $V_{1,2,3}$ ; 5 — широкополосный вывод энергии СВЧ колебаний из коллектора-рекуператора; 6 — схематичное изображение образуемого в пучке виртуального катода

системы, в котором происходит взаимодействие электронного потока с синхронной электромагнитной волной, за счет чего имеет место усиление СВЧ сигнала, одновременно электроны пучка теряют часть своей кинетической энергии [5]. Далее, отработанный пучок на выходе из замедляющей системы попадает в область многоступенчатого коллектора электронов 3, совмещающего функции генератора СВЧ сигналов на основе виртуального катода (низковольтного виркатера). СВЧ сигнал  $P_{ВК}$ , снимаемый в коллекторе-генераторе с помощью широкополосного элемента связи (отрезок спирали или диафрагма, нагруженные на коаксиальную линию), по цепи связи 4 (волновод или коаксиальная линия) попадает на вход усилительного модуля (ЛБВ), далее, усиливаясь в ЛБВ до мощности  $P_{out}$ , выводится через элемент вывода энергии 5 в нагрузку.

Таким образом, мы получаем комбинированный многофункциональный вакуумный СВЧ прибор, в котором с помощью одного электронного пучка осуществляется генерация и усиление СВЧ сигналов с различным спектральным составом и мощностью. Отметим, что в рассматриваемом устройстве отсутствует как таковая *цепь обратной связи*, что позволяет создать генератор СВЧ сигналов с возможностью перестройки режимов генерации от монохроматического до широкополосного шумоподобного сигнала с малой изрезанностью спектра и шириной полосы частот, достигающей 1–2 октавы. Малая изрезанность спектра и широкая полоса генерируемых частот связана с отсутствием строгих фазовых условий, определяемых цепью запаздывающей обратной связи, как это имеет место в источниках хаотического сигнала типа ЛБВ с обратной связью (шумотронов), в которых связываются цепью обратной связи непосредственно выход и вход ЛБВ, в результате чего система превращается в добротный резонатор [6–8]. Источником СВЧ колебаний в предложенной системе на основе ЛБВ с коллектором-генератором служит нестационарный виртуальный катод, формируемый в коллекторе-рекуператоре со специально предусмотренным широкополосным выводом энергии. Управление режимами колебаний виртуального катода возможно путем изменения тормозящего потенциала на ступенях коллектора.

На рис. 5.2, б представлена схема используемого в эксперименте 3-х ступенчатого *коллектора-генератора* ЛБВ, на которой показаны: 1 — отработанный в пространстве взаимодействия ЛБВ электронный пучок, попадающий из него в область коллектора, 2 — первая секция коллектора-рекуператора, на которую подается потенциал  $V_1 < V_0$  ( $V_0$  — ускоряющий потенциал электронов пучка), 3 — вторая секция коллектора-рекуператора с потенциалом  $V_2 < V_1$ , 4 — третья секция коллектора-рекуператора с потенциалом  $V_3 < V_2$ , 5 — широкополосный вывод энергии СВЧ-колебаний из коллектора-рекуператора (в рассматриваемой конструкции коллектора-генератора в качестве вывода мощности используется коаксиальная линия, подключенная к диафрагме второй секции трехсекционного коллектора), 6 — схематичное изоб-

ражение образующегося в коллекторе-генераторе виртуального катода (в зависимости от соотношения потенциалов секций коллектора виртуальный катод может возникнуть как во второй, так и в третьей секциях коллектора-генератора).

## **5.2. Особенности генерации и усиления сигналов в электронно-волновом усилителе с коллектором-генератором**

Рассмотрим кратко принцип действия многофункционального прибора «электронный усилитель (ЛБВ) с коллектором-генератором». Отработанный в ЛБВ электронный пучок с большим разбросом по скоростям (см., например, [9]) входит в пространство коллектора-генератора. Далее в коллекторе-генераторе отработанный электронный пучок попадает в область тормозящего поля, образованного разностью потенциалов  $V_1 - V_3$  ( $V_3 \leq V_2 \leq V_1$ ), в результате чего в пучке формируется нестационарный виртуальный катод [2] (см. также [10], где обсуждается формирование и нестационарные колебания виртуального катода в пучке с большим разбросом электронов по скоростям, как это имеет место в ЛБВ). Пространственно-временные колебания виртуального катода регистрируются отрезком широкополосной электродинамической системы коллектора-генератора. Характер колебаний изменяется от одночастотных и многочастотных до шумоподобных в зависимости от соотношения потенциалов  $V_{1,2,3}$  секций коллектора.

Здесь следует отметить, что использование отработанного электронного пучка ЛБВ для генерации хаотических сигналов за счет формирования виртуального катода имеет важное преимущество. В разделе 3.2 монографии было показано, что увеличение разброса электронного потока по скоростям значительно улучшает такие важные характеристики хаотического СВЧ сигнала низковольтного виркатора как ширина полосы генерируемых с помощью виртуального катода частот (она значительно расширяется, см. рис.5.3). Результаты по генерации хаотических сигналов многоскоростным электронным потоком с виртуальным катодом были получены при малых скоростных разбросах (не более 2–4%), которые обеспечивались выбором режима работы электронной пушки с термокатодом.

В лампе бегущей волны в режиме с входным сигналом также наблюдается значительный разброс электронов пучка по скоростям на выходе пространства взаимодействия, который имеет место за счет группирования и взаимодействия пучка с синхронной электромагнитной волной в ЛБВ [9]. Соответствующие экспериментально измеренные функции распределения электронов по скоростям на выходе пространства взаимодействия в различных фазах внешнего высокочастотного поля показаны на рис.5.3. Хорошо видно, что в случае ЛБВ имеет место существенно более значительный разброс электронов по скоростям, который в некоторых фазах ВЧ поля приближается к 40%.

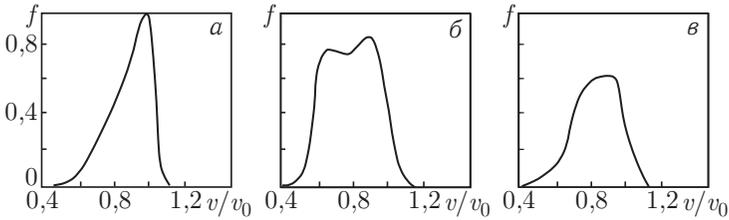


Рис. 5.3. Функции распределения электронов по скоростям на выходе пространства взаимодействия ЛБВ в различных фазах внешнего высокочастотного поля: а)  $\omega t = 1,5$ ; б) 3,5; в) 5,5

Естественно ожидать, что подобный скоростной разброс должен привести к улучшению характеристики СВЧ сигнала в режиме хаотической генерации, то есть ширина полосы частот генерируемых виртуальным катодом колебаний должна расширяться, одновременно должна уменьшаться изрезанность спектра мощности хаотического сигнала.

СВЧ сигнал колебаний виртуального катода, снимаемый из коллектора-генератора, через элемент вывода энергии по цепи связи поступает на вход усилителя (лампы бегущей волны), где происходит усиление сигнала, генерируемого коллектором-генератором. Далее полученный усиленный хаотический широкополосный сигнал выводится из комбинированного прибора с выхода ЛБВ в полезную нагрузку. Такая схема позволяет значительно увеличить выходную мощность комбинированного прибора ЛБВ с коллектором-генератором по сравнению с низковольтным виркаторм при использовании тех же токов пучка и ускоряющих напряжений [2, 3, 11].

В последующих разделах главы изложены результаты экспериментального исследования генерации и усиления широкополосного хаотического сигнала в электронно-волновой системе «ЛБВ-усилитель с коллектором-генератором». Отметим, что в экспериментах в качестве ЛБВ-усилителя использовались пакетированные спиральные ЛБВ сантиметрового диапазона длин волн (рабочая полоса частот 1–2 ГГц) с трехступенчатым электростатическим коллектором. Основные характеристики ЛБВ следующие. Ускоряющее напряжение  $V_0 = 2\text{--}2,5$  кВ, ток пучка  $I_0 = 100\text{--}150$  мА. Коэффициент усиления в одночастотном режиме составляет  $K_y = 40\text{--}45$  дБ, выходная мощность  $P_{\text{out}} = 40\text{--}55$  Вт, электронный КПД  $\eta_e = 22\text{--}24\%$ , технический КПД  $\eta_T = 35\text{--}42\%$ . Рассматривались ЛБВ с нормальной  $+6\%$  дисперсией замедляющей системы и ЛБВ с аномальной  $-4\%$  дисперсией.

Для анализа широкополосных хаотических сигналов, генерируемых в системе, использовался высокочастотный анализатор спектра Agilent ESA E4402B (диапазон частот от 10 кГц до 3 ГГц) и ваттметр поглощаемой мощности МЗ-51. Для анализа также использовались высокодобротные (полоса частот 2–4 МГц) фильтры с записью детектируемого сигнала с помощью ЭПП-09. Это позволяло определить спектральную

плотность мощности шума колебаний, генерируемых электронным пучком с виртуальным катодом в коллекторе-генераторе и усиливаемых широкополосной ЛБВ среднего уровня мощности.

### 5.3. Хаотические СВЧ-колебания в коллекторе-рекуператоре лампы бегущей волны

Рассмотрим вначале характеристики генерируемых в коллекторе-рекуператоре спиральной ЛБВ колебаний [12] и убедимся, что их природа обусловлена колебаниями виртуального катода, формируемого в обработанном электронном пучке.

На рис. 5.4 показаны экспериментальные зависимости КПД  $\eta$  генерации и мощности  $P$  сигнала, регистрируемого с выхода коллектора-рекуператора при изменении потенциала  $V_2$  второй секции коллектора при потенциале на третьей секции  $V_3 = 0$  и двух различных потенциалах  $V_1$  первой секции (отмечены на рисунках). Отметим, что КПД колебаний в коллекторе-рекуператоре определялся как [13]

$$\eta = \frac{P_{\text{ВК}}}{\sum_i I_i V_i}, \quad i = 1, 2, 3, \quad (5.1)$$

где  $I_i$  и  $V_i$  — ток и потенциал  $i$ -й ступени коллектора-рекуператора;  $P_{\text{ВК}}$  — мощность колебаний, регистрируемых на выходе коллектора.

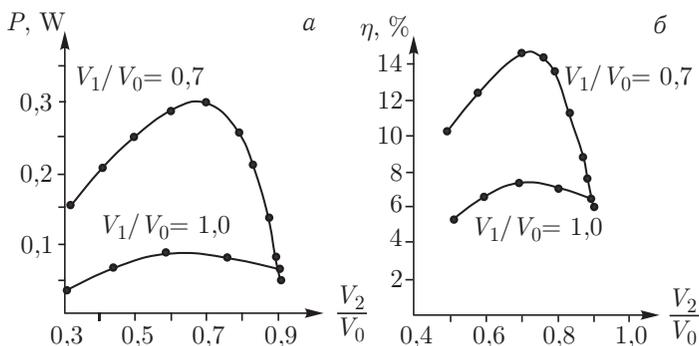


Рис. 5.4. Зависимость КПД  $\eta$  (а) и мощности  $P$  (б) СВЧ-колебаний в коллекторе-рекуператоре от потенциала  $V_2$  второй секции коллектора при двух значениях потенциала первой секции (значения отмечены на рисунке)

Как видно из рис. 5.4, а, мощность генерации при этом достигает величины порядка 300 мВт в наиболее благоприятном режиме работы. При этом КПД (см. рис. 5.4, б) подобного коллектора-генератора достигает величин от 4 % до 14 % в зависимости от тормозящего потенциала  $V_2$  и различного соотношения потенциалов электродов внутри коллектора-генератора.

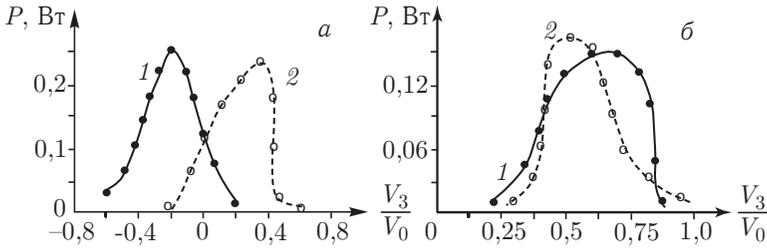


Рис. 5.5. Зависимость мощности  $P$  СВЧ-колебаний при изменении потенциала  $V_3$  третьей секции коллектора-генератора при фиксировании различных тормозящих потенциалов на первой и второй секциях коллектора: 1 —  $V_1/V_0 = V_2/V_0 = 1$ ; 2 —  $V_1/V_0 = 0,7$ ,  $V_2/V_0 = 0,5$ . Рис. *а* построен для статического режима ЛБВ (режим без входного ВЧ сигнала), рис. *б* — для динамического режима, когда на вход ЛБВ подается СВЧ сигнал, генерируемый коллектором-генератором

Аналогичные зависимости наблюдаются при изменении потенциала  $V_3$  третьей секции коллектора-генератора при фиксировании различных тормозящих потенциалов на первой и второй секциях коллектора. Соответствующие зависимости на рис. 5.5, построенные для статического (рис. 5.5, *а*; случай, когда на вход ЛБВ не подается входной сигнал для усиления — статический режим ЛБВ, который характеризуется отсутствием разброса электронов по скоростям на выходе из замедляющей системы — на входе коллектора-генератора) и динамического режимов (рис. 5.5, *б*; на вход ЛБВ-усилителя подается для усиления СВЧ сигнал, генерируемый коллектором-генератором, разброс по скоростям электронов достаточно велик). Видно, что с увеличением торможения мощность генерации достигает своего максимума и затем снова уменьшается. Последнее хорошо согласуется с результатами экспериментальных и теоретических исследований низковольтного виркатора (см. главу 3, а также работы [2, 3, 10]).

Соответствующие спектры колебаний в пучке с виртуальным катодом, регистрируемые на выходе коллектора-генератора, в статическом и динамическом режимах работы ЛБВ показаны на рис. 5.6. Спектры на рис. 5.6, *а, б* получены по сигналу, снятому с выхода коллектора-генератора в статическом режиме, на рис. 5.6, *в, г* — в динамическом режиме работы ЛБВ. Рис. 5.6, *а, в* построены при малых тормозящих потенциалах на ступенях коллектора, рис. 5.6, *б, г* — при большом торможении пучка в коллекторе. Видно, что при малом торможении в статическом режиме работы ЛБВ наблюдается генерация близкого к одночастотному сигнала (см. рис. 5.6, *а*). С увеличением торможения электронов в коллекторе или увеличением разброса электронов по скоростям (динамический режим работы ЛБВ) СВЧ-колебания виртуального катода в коллекторе-генераторе начинают характеризоваться многочастотным хаотическим спектром генерации (см. рис. 5.6, *б, в, г*). Однако в динамическом режиме работы ЛБВ, который характери-

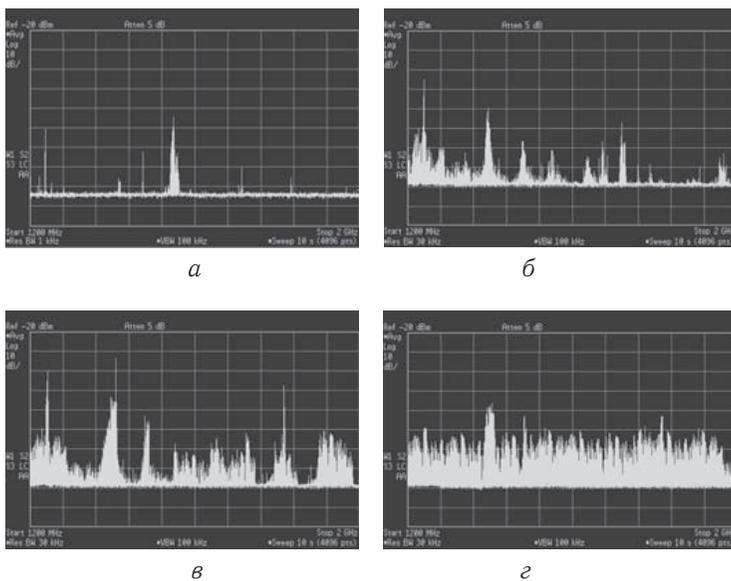


Рис. 5.6. Спектры регистрируемых колебаний в коллекторе-генераторе. Рис. *а* построен для статического режима работы ЛБВ при потенциалах коллектора  $V_1/V_0 = 0,7$ ,  $V_2/V_0 = 0,5$  и  $V_3/V_0 = 0,45$ ; *б* — статического режима работы при  $V_1/V_0 = 0,7$ ,  $V_2/V_0 = 0,5$  и  $V_3/V_0 = 0,25$ ; *в* — динамического режима работы при  $V_1/V_0 = 0,7$ ,  $V_2/V_0 = 0,5$  и  $V_3/V_0 = 0,7$ ; *г* — динамического режима работы при  $V_1/V_0 = 0,7$ ,  $V_2/V_0 = 0,5$  и  $V_3/V_0 = 0,6$

зуются значительным разбросом электронов по скоростям на входе в коллектор-генератор, генерируемый сигнал демонстрирует сплошной спектр генерации в полосе частот  $\Delta f > 1$  ГГц и существенно меньшую изрезанность  $N$  в рабочей полосе частот ( $N = P_{\max}/P_{\min}$ , где  $P_{\max}$  и  $P_{\min}$  — максимальная и минимальные спектральные мощности в рассматриваемой полосе частот генерации). Последнее показывает, что, изменяя тормозящие потенциалы, подаваемые на ступени коллектора, можно управлять не только мощностью генерируемых колебаний, но и их спектральным составом.

#### 5.4. Усиление широкополосных хаотических сигналов, генерируемых виртуальным катодом, лампой бегущей волны

Рассмотрим теперь выходные характеристики рассматриваемого гибридного усилителя-генератора хаотических сигналов, которые позволят продемонстрировать преимущества конструкции многофункционального прибора на основе электронно-волнового усилителя с коллектором-генератором.

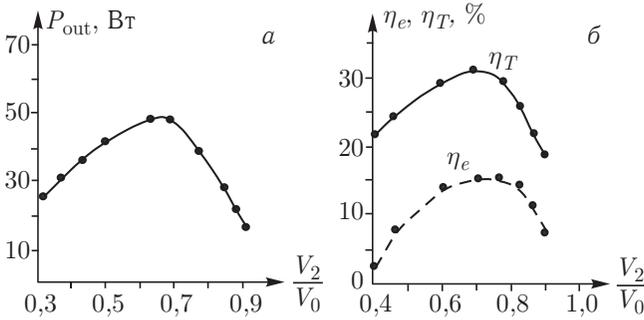


Рис. 5.7. Зависимости интегральной выходной мощности усиливаемого сигнала  $P_{out}$  (а), электронного  $\eta_e$  и технического  $\eta_T$  КПД (б) гибридного прибора от потенциала  $V_2/V_0$  второй секции коллектора-генератора

На рис. 5.7 показаны зависимости выходной мощности и КПД (электронного  $\eta_e$  и технического  $\eta_T$ ) многофункционального прибора, измеренные по характеристикам, снимаемым с выхода ЛБВ-усилителя с нормальной дисперсией замедляющей системы. Таким образом, на рис. 5.7 представлены выходные характеристики всего прибора в целом, а не только коллектора-генератора, как на рисунках в предыдущем разделе. Видно, что интегральная мощность  $P_{out}$  широкополосных хаотических колебаний, регистрируемых в коллекторе-генераторе, усиливается более чем в сто раз, достигая 50 Вт, что составляет усиление по мощности около 30 дБ. При этом технический КПД такого «гибридного» прибора увеличивается более чем в два раза до 30%, а максимальный электронный КПД составляет величину порядка 25%.

Последнее означает, что КПД всего прибора определяется, в первую очередь, КПД лампы бегущей волны, который достаточно высок. КПД генерации хаотических колебаний в коллекторе-генераторе, как и в случае низковольтного виркатора, весьма низок и не превышает 1–2%, однако это практически не влияет на выходные характеристики гибридного усилителя-генератора.

Рассмотрим подробнее результаты усиления СВЧ сигналов с различной полосой частот с помощью ЛБВ-усилителя с нормальной и аномальной дисперсией. Зависимости выходной мощности ЛБВ от частоты сигнала приведены на рис. 5.8. На рисунке показаны зависимости выходной мощности для различных усиливаемых СВЧ сигналов — одночастотных и широкополосных хаотических (с шириной полосы  $\Delta f/f < 0,5-1,5$ ), генерируемых в области коллектора-генератора при различных потенциалах на секциях коллектора. Из рисунка видно, что с ростом ширины полосы усиливаемого сигнала выходная мощность быстро падает как для ЛБВ со спиральной замедляющей системой с нормальной, так и аномальной дисперсией. При усилении узкополосных сигналов  $\Delta f/f \leq 1,0$  с точки зрения максимальной интегральной мощности более предпочтительно использовать ЛБВ с нормальной дисперсией (кривые 1, 3, 5 на рис. 5.8), которая характеризуется большей

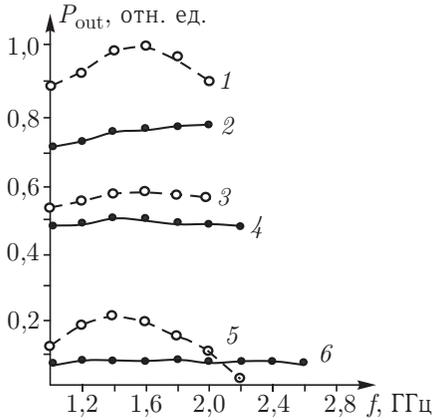


Рис. 5.8. Зависимости выходной мощности (в относительных единицах) от частоты на выходе ЛБВ для случаев: 1 — одночастотный усиливаемый входной сигнал  $\Delta f/f = 0$ , ЛБВ с нормальной +6% дисперсией спиральной замедляющей системы; 2 — одночастотный входной сигнал  $\Delta f/f = 0$ , ЛБВ с аномальной -4% дисперсией; 3 — широкополосный хаотический входной сигнал (полоса частот входного сигнала  $\Delta f/f = 0,5$ ), ЛБВ с нормальной +6% дисперсией; 4 — широкополосный хаотический входной сигнал (полоса частот  $\Delta f/f = 0,5$ ), ЛБВ с аномальной -4% дисперсией; 5 — широкополосный хаотический входной сигнал (полоса частот  $\Delta f/f = 1,5$ ), ЛБВ с нормальной +6% дисперсией; 6 — широкополосный хаотический входной сигнал (полоса частот  $\Delta f/f = 1,5$ ), ЛБВ с аномальной -4% дисперсией

выходной мощностью на всех частотах в рабочей полосе ЛБВ. Однако при усилении широкополосных хаотических сигналов  $\Delta f/f > 1,0$  использование спиральной замедляющей системы с аномальной дисперсией позволяет получить более широкую полосу усиливаемых частот выходного сигнала (ср. кривые 5 и 6, построенные при ширине полосы  $\Delta f/f = 1,5$  входного (генерируемого в коллекторе-генераторе) сигнала).

## Заклучение

В главе представлены результаты исследования нового «гибридного» многофункционального электронно-волнового прибора СВЧ диапазона на основе лампы бегущей волны с коллектором-генератором. Данный прибор предназначен для получения широкополосных хаотических СВЧ-сигналов сантиметрового и миллиметрового диапазонов длин волн среднего и большого уровня мощности. Для генерации широкополосных хаотических колебаний в приборе используется принцип низковольтного виркатора, то есть генерация маломощных колебаний в пучке с нестационарным виртуальным катодом, формируемым в статическом тормозящем поле. Нестационарный виртуальный катод в новом гибридном приборе формируется в многоскоростном электронном потоке, попадающем в пространство коллектора-рекуператора ЛБВ.

Сигнал, генерируемый виртуальным катодом, снимается с помощью широкополосного элемента связи и подается на вход ЛБВ, где и усиливается до среднего уровня мощности. К преимуществам нового прибора можно отнести следующее.

1. Предложенный гибридный прибор сочетает достоинства низковольтного виркатора в плане получения сверхширокополосных хаотических сигналов в СВЧ-диапазоне и большую выходную мощность, характеризующую лампу бегущей волны. При этом принципиально широкая рабочая полоса усиливаемых частот в ЛБВ позволяет эффективно усиливать широкополосный хаотический СВЧ сигнал, генерируемый с помощью колебаний виртуального катода в коллекторе. Одновременно в предлагаемой схеме нет необходимости формировать отдельный электронный пучок для создания нестационарного виртуального катода в низковольтном виркаторе, который формируется в отработанном в ЛБВ электронном потоке, поступающем в коллектор-генератор. Последнее позволяет создать компактную многофункциональную систему с одним электронным пучком. КПД всей системы определяется, в первую очередь, КПД ЛБВ-усилителя и может достигать 30–50 %.

2. Характеристики хаотической генерации в предложенной схеме в плане расширения ширины полосы частот и уменьшения изрезанности спектра могут быть более оптимальными по сравнению с ранее предложенным низковольтным виркатором, так как в динамическом режиме работы ЛБВ разброс скоростей электронов на входе в коллектор-генератор может быть весьма значителен. Как показано в работе [10], это позволяет значительно улучшить спектральные характеристики широкополосной хаотической генерации в системе с виртуальным катодом.

3. Ширина и изрезанность (неравномерность) спектра генерации предложенной системы на основе ЛБВ с коллектором-генератором в отличие от ЛБВ-генератора с обратной связью (шумотрона) ограничены только шириной полосы генерируемых частот в пучке с виртуальным катодом (которая достигает при оптимальных условиях двух октав) и шириной полосы усиления ЛБВ и никак не определяются фазовыми и амплитудными условиями в цепи обратной связи благодаря ее отсутствию. Элемент связи между коллектором-генератором и входом ЛБВ фактически не является элементом обратной связи, обеспечивая только подачу маломощного хаотического сигнала, генерируемого виртуальным катодом, на вход усилителя.

## Список литературы

1. Храмов А. Е., Егоров Е. Н., Калинин Ю. А. Электровакуумный прибор СВЧ-диапазона. Патент на изобретение № 2288518 // Изобретения. Полезные модели: Официальный бюллетень Федеральной службы по интеллектуальной собственности, патентам и товарным знакам. — М.: ФИПС, 2006.

2. Калинин Ю. А., Короновский А. А., Храмов А. Е., Егоров Е. Н., Филатов Р. А. Экспериментальное и теоретическое исследование хаотических колебательных явлений в нерелятивистском электронном потоке с виртуальным катодом // *Физика плазмы*. 2005. Т. 31, № 11. С. 1009–1025.
3. Егоров Е. Н., Калинин Ю. А., Короновский А. А., Храмов А. Е., Морозов М. Ю. Исследование мощности СВЧ генерации в нерелятивистском электронном пучке с виртуальным катодом в тормозящем поле // *Письма в ЖТФ*. 2006. Т. 32, № 9. С. 71–78.
4. Егоров Е. Н., Калинин Ю. А., Короновский А. А., Храмов А. Е. Исследование зависимости мощности СВЧ-генерации низковольтного виркатора от управляющих параметров // *ЖТФ*. 2007. Т. 77, № 10. С. 139–142.
5. Трубецков Д. И., Храмов А. Е. Лекции по сверхвысокочастотной электронике для физиков: В 2-х т. — М.: Физматлит, 2003.
6. Кислов В. Я., Мясин Е. А., Залогин Е. Н. Исследование стохастических автоколебательных режимов в автогенераторах с запаздыванием // *Радиотехника и электроника*. 1979. Т. 24, № 6. С. 1118.
7. Кислов В. Я., Мясин Е. А., Залогин Е. Н. О нелинейной стохастизации автоколебаний в электронно-волновом генераторе с задержанной обратной связью // *Радиотехника и электроника*. 1980. Т. 25, № 10. С. 2160.
8. Кузнецов С. П. Сложная динамика генератора с запаздывающей обратной связью // *Изв. вузов. Радиофизика*. 1982. Т. 25. С. 1410.
9. Калинин Ю. А., Панин А. Ф., Украинская Т. Н. Экспериментальное исследование спектра продольных составляющих скорости электронов в течении периода ВЧ поля // *Электронная техника*. 1976. Сер. 1, № 2. С. 111.
10. Калинин Ю. А., Храмов А. Е. Экспериментальное и теоретическое исследование влияния распределения электронов по скоростям на хаотические колебания в электронном потоке в режиме образования виртуального катода // *ЖТФ*. 2006. Т. 76, № 5. С. 25–34.
11. Егоров Е. Н., Калинин Ю. А., Левин Ю. И., Трубецков Д. И., Храмов А. Е. Вакуумные генераторы широкополосных хаотических колебаний на основе нерелятивистских электронных пучков с виртуальным катодом // *Изв. РАН. Сер. физ.* 2005. Т. 69, № 12. С. 1724.
12. Калинин Ю. А., Муштаков А. В., Храмов А. Е. Исследование хаотических СВЧ-колебаний в коллекторе-рекуператоре лампы бегущей волны // *Письма в ЖТФ*. 2007. Т. 33, № 15. С. 56–61.
13. Лебедев И. В. Техника и приборы СВЧ. Ч. 1 и 2. — М.: Высшая школа, 1972.

## Глава 6

# ФИЗИКА ПАСОТРОНА

Ю. П. Блюх, Г. С. Нусинович

...Мы не советуем читателю подходить к теории электронных приборов как к собранию уравнений и формул, по которым можно производить практические расчеты, не вникая в существо вопроса.

*Вайнштейн Л. А., Солнцев В. А.* Лекции по сверхвысокочастотной электронике. М.: Сов. радио, 1973.

*Формирование ионного канала в пасотроне. Возбуждение синхронной волны. Ионный шум.*

В 1992 г. на конференции SPIE в Лос Анжелесе была представлена работа [1], в которой сообщалось о создании PASOTRONa — нового источника СВЧ-излучения. PASOTRON (Plasma-Assisted Slow-wave Oscillator), в зависимости от замедляющей структуры (ЗС), представляет собой либо лампу обратной волны (ЛОВ), либо лампу бегущей волны (ЛБВ). Единственным отличием пасотрона от аналогичных традиционных устройств является то, что транспортировка электронного пучка осуществляется за счет ионной фокусировки, без ведущего магнитного поля. Отсутствие тяжелых, объемных и энергоемких соленоидов делает пасотрон привлекательным для ряда приложений, где массогабаритным характеристикам придается особое значение. Отказ от ведущего магнитного поля меняет не только «потребительские» характеристики пасотрона. Значительно богаче становится и физика пасотрона, и вот почему. В традиционных лампах прямой или обратной волны проблемы *транспортировки* пучка и *возбуждения* им синхронной волны решаются *независимо* друг от друга. В пасотроне же обе эти проблемы *взаимосвязаны* и должны решаться *самосогласованно*.

Здесь мы кратко опишем основные физические явления, происходящие при образовании удерживающего пучок ионного канала и при взаимодействии пучка с синхронной волной замедляющей структуры. Мы не будем излагать историю развития представлений о физике па-

сотрона, претерпевших за прошедшее время значительные изменения, а сразу перейдем к современному состоянию теории и эксперимента.

## 6.1. Формирование ионного канала в пасотроне

Схематически работу пасотрона можно описать следующим образом. Электронный пучок инжектируется в камеру, предварительно заполненную нейтральным газом. Пучок ионизует газ, электроны образующейся плазмы выбрасываются на стенки камеры кулоновским полем пучка, а ионы, наоборот, захватываются этим полем, частично нейтрализуя заряд пучка. В отсутствие электромагнитных полей радиальное движение частиц пучка определяется двумя силами: дефокусирующей силой кулоновского поля суммарного объемного заряда пучка и ионов и фокусирующей силой Лоренца, обусловленной продольным движением электронов пучка в азимутальном магнитном поле тока пучка. В отсутствие ионов сила Лоренца в  $\beta^2$  раз меньше силы кулоновского расталкивания, и пучок расширяется в радиальном направлении (здесь  $\beta = v_z/c$ ,  $v_z$  — продольная компонента скорости частиц пучка). По мере накопления ионов сила кулоновского расталкивания уменьшается и, как только степень нейтрализации  $f = n_i/n_b$  ( $n_i$  и  $n_b$  — плотности ионов и пучка соответственно) превысит критическое значение  $f_c = \gamma^{-2}$  (здесь  $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$  — релятивистский фактор пучка), радиальная расходимость пучка сменяется его фокусировкой [2]. Условие фокусировки

$$f > \gamma^{-2} \quad (6.1)$$

известно как условие Будкера [3]. Образовавшийся ионный канал позволяет провести пучок сквозь ЗС, где, как в обычных ЛБВ или ЛОВ, пучок возбуждает прямую или обратную волну, находящуюся в черенковском синхронизме с электронами пучка. Наличие аномально большого количества ионов в камере потребовало использования плазменного катода [4], не боящегося ионной бомбардировки. Схематически конструкция пасотрона изображена на рис. 6.1.

Такая простая картина при внимательном рассмотрении оказывается значительно более сложной. Начнем с того, что к плотности газа в камере предъявляются два противоречивых требования. С одной стороны, плотность его должна быть достаточно велика, чтобы время образования ионного канала (время формирования нерасходящегося пучка) было малым по сравнению с длительностью импульса тока. С другой стороны, плотность газа в ЗС должна быть достаточно мала, чтобы избежать СВЧ-пробоя при большом (мегаваттном) уровне мощности. Чтобы выполнить эти противоречивые условия в пасотроне создается сильный градиент плотности газа [5]. Перепад давлений между пространством дрейфа (область между пушкой и входом в ЗС) и областью внутри ЗС составляет почти два порядка, от  $2,0 \cdot 10^3$  мкТор до 40 мкТор. Плотность газа в ЗС настолько мала, что для пол-

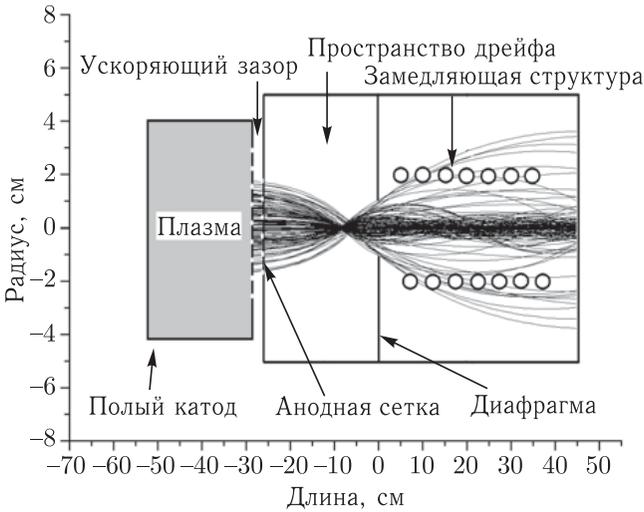


Рис. 6.1. Схема пазотрона

ной зарядовой нейтрализации пучка требуется время, превосходящее длительность импульса пучка  $t_p \approx 100$  мкс. Однако все переходные процессы, связанные с формированием ионного канала по всей длине заканчиваются, как следует из теории [6] и подтверждается экспериментально [7], через 10–15 мкс после начала импульса. Чтобы понять, как за столь короткое время образуется ионный канал, удерживающий пучок даже в той области, где плотность газа пренебрежимо мала, проследим за поведением всех частиц, участвующих в процессе образования ионного канала при инжекции электронного пучка в нейтральный газ.

**6.1.1. «Быстрая» и «медленная» ионизация.** Электронный пучок инжектируется в первоначально нейтральный газ. Сначала силы кулоновского расталкивания приводят к расширению пучка и выбрасыванию значительной его части на стенки камеры. Одновременно начинается ионизация газа. Образующиеся электроны быстро выбрасываются на стенки полем объемного заряда пучка и не участвуют в процессе образования канала. Ионы же оказываются в трехмерной потенциальной яме, рельеф которой определяется распределением суммарного заряда ионов и электронов пучка и меняется со временем. Как правило, радиус камеры, в которой распространяется пучок, намного меньше ее длины. Поэтому характерное время поперечного движения ионов в потенциальной яме намного меньше характерного времени движения в продольном направлении. Радиальные колебания ионов в самосогласованном потенциале приводят к быстрому перемешиванию частиц и образованию квазистационарного радиального распределения плотности ионов. Характерное время перемешивания составляет порядка десятых долей микросекунды, а характерное время накопления

заряда ионов до уровня, требуемого для радиального удержания пучка, — несколько микросекунд. Мы не будем рассматривать быстрые процессы, обусловленные радиальным движением ионов, а будем для простоты предполагать, что в результате перемешивания устанавливается постоянная по сечению пучка степень нейтрализации заряда  $f$ .

Обратим теперь внимание на продольное движение ионов. Для этого рассмотрим распределение потенциала в камере. На входном торце камеры расположена сетка, служащая анодом пушки, а на выходном торце расположен коллектор. Анодная сетка, коллектор и стенки камеры находятся под одним потенциалом (см. рис. 6.1). Частично скомпенсированный по заряду электронный пучок создает в камере потенциальную яму, имеющую форму «корыта» (рис. 6.2).

Без учета краевых эффектов у торцов камеры потенциал на оси определяется выражением:

$$\varphi|_{r=0} = -\frac{I_b}{v_z} [1 - f(z, t)] \left[ 1 + 2 \ln \frac{a_w}{a(z, t)} \right], \quad (6.2)$$

где  $I_b$  — ток пучка;  $a_w$  и  $a$  — радиусы камеры и пучка соответственно. Вблизи торцов, на расстоянии порядка радиуса камеры, потенциал (6.2) возрастает до потенциала камеры  $\varphi = 0$ . Продольное движение ионов определяется продольным электрическим полем потенциала (6.2).

Описание продольного движения ионов является сложной самосогласованной задачей. Действительно, безразмерная погонная плотность ионов  $f$  меняется как со временем, так и с расстоянием. Причинами изменения являются как движение ионов в поле с потенциалом (6.2), так и ионизация газа пучком. В свою очередь, потенциал  $\varphi$  зависит от продольного распределения ионов и от радиуса пучка  $a$ . Последний же зависит от профиля плотности ионов  $f$ , поскольку величина  $f$  определяет радиальную силу, действующую на электроны пучка. Очевидно, что такая сложная задача нуждается в дальнейших упрощающих предположениях и моделях.

Рассмотрим одну из таких моделей. Пусть  $t_{\parallel}$  — характерное время движения ионов вдоль камеры в потенциале (6.2), а  $t_{\text{ion}}$  — время, необходимое для полной зарядовой нейтрализации пучка. Рассмотрим два крайних случая:  $t_{\text{ion}} \ll t_{\parallel}$  («быстрая» ионизация) и  $t_{\text{ion}} \gg t_{\parallel}$  («медленная» ионизация). В первом случае погонная плотность ионов достигнет значения  $f = 1$ , при котором исчезает потенциальная яма объемного заряда, раньше, чем ионы существенно сместятся в продольном направлении. Пренебрегая таким смещением, будем считать

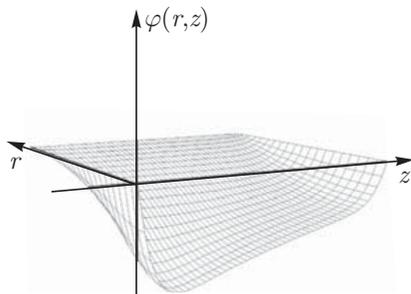


Рис. 6.2. Потенциальная яма объемного заряда пучка

ионы продольно-неподвижными. В этом случае изменение погонной плотности ионов обусловлено только локальной скоростью ионизации, которая определяется плотностью (вообще говоря, продольно-неоднородной) нейтрального газа. Решая уравнения для огибающей пучка, в котором плотность ионов линейно возрастает во времени, можно описать динамику сжатия пучка и установления стационарного состояния.

Если время ионизации намного превышает время продольного движения,  $t_{\text{ion}} \gg t_{\parallel}$ , перемешивание колеблющихся в продольном направлении частиц происходит быстрее, чем изменение их общего числа. Поэтому можно пренебречь быстрыми вариациями плотности с характерным временем  $t_{\parallel}$  и рассматривать стационарное самосогласованное распределение плотности ионов и потенциала. Полное число ионов в камере в таком приближении является параметром указанного распределения.

В качестве примера приведем результаты моделирования динамики фокусировки пучка, инжектируемого в сильно неоднородный нейтральный газ. Моделирование проводилось при следующих значениях параметров: безразмерная длина камеры

$$\xi_c \equiv \left(\frac{2I_b}{I_A}\right)^{1/2} (\gamma\beta)^{-1} \left(\frac{L}{a(0)}\right) = 9,0 \quad (6.3)$$

и плотность газа

$$n_g(\xi) = n_0 \exp(-\xi). \quad (6.4)$$

Здесь  $I_A = (mc^3/e)\gamma\beta$  — альфвеновский ток. На рис. 6.3 представлены зависимости безразмерного радиуса пучка  $\rho(\xi) = a(\xi)/a(0)$  в разные моменты времени  $\tau = t/t_{\text{ion}}$  ( $t_{\text{ion}} = (n_0\sigma v_b)^{-1}$ ,  $\sigma$  — сечение ионизации

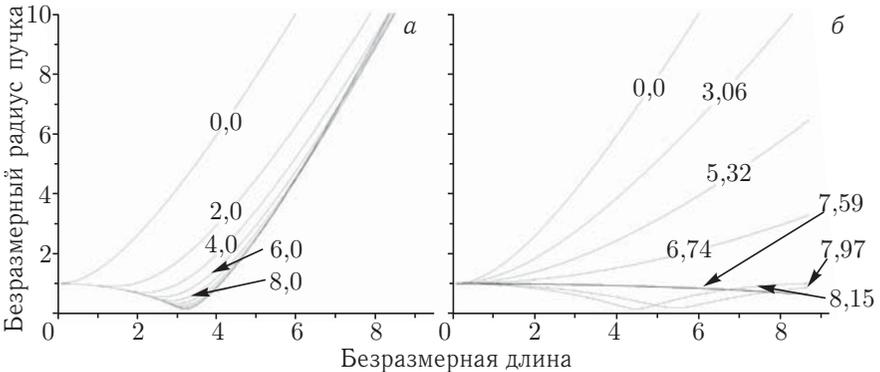


Рис. 6.3. Ионная фокусировка пучка при инжекции в сильно неоднородный нейтральный газ. Плотность газа убывает экспоненциально вдоль системы,  $n(\xi) = n_0 \exp(-\xi)$ . Слева в безразмерных переменных изображены зависимости радиуса пучка  $\rho$  от продольной координаты  $\xi$  через равные интервалы времени  $\Delta\tau = 2,0$ , полученные в модели «быстрой» ионизации. Справа изображены аналогичные зависимости, но рассчитанные по модели «медленной» ионизации. Соответствующие моменты времени  $\tau$  указаны на рисунке

газа электронами пучка). Из сравнения рисунков следует, что при  $t_{\text{ion}} \gg t_{\parallel}$  (рис. 6.3, б) ионный канал образуется вдоль всей системы за время  $\tau \sim 10$ , тогда как при  $t_{\text{ion}} \ll t_{\parallel}$  (рис. 6.3, а) радиальное удержание пучка наблюдается только на длине  $\xi \leq 3$ , а на больших расстояниях ионный канал не образуется и через значительно большее время. Таким образом, режим «медленной» ионизации обеспечивает достаточно быстрое образование продольно-однородного ионного канала вдоль всей длины камеры даже в случае сильной неоднородности нейтрального газа.

Детальное теоретическое исследование процесса образования ионного канала изложено в работе [6], а в работе [7] приведены экспериментальные данные, подтверждающие правильность теоретической модели.

**6.1.2. Устойчивость ионного канала.** На первый взгляд, сильный градиент плотности газа и выполнение неравенства  $t_{\parallel} \ll t_{\text{ion}}$  гарантируют отсутствие плазмы в системе только до тех пор, пока полное количество ионов  $N_i$  не сравняется с полным числом электронов пучка  $N_b$  в объеме камеры. По мере приближения количества ионов к числу пучковых электронов потенциальная яма, заполняясь ионами, становится все мельче и мельче, скорость выноса ионов из присеточной области падает, неравенство  $t_{\parallel} \ll t_{\text{ion}}$  нарушается и в системе образуется плазма. На самом же деле равенство  $N_i = N_b$  никогда не достигается и условие  $t_{\parallel} \ll t_{\text{ion}}$  остается справедливым на протяжении всего импульса тока пучка. Дело в том, что наряду с источником ионов — ударной ионизацией газа пучком — существует и сток, обеспечивающий постоянный уход ионов из системы и поддерживающий глубину потенциальной ямы (и, следовательно, величину ускоряющего ионы электрического поля) на достаточном для выполнения неравенства  $t_{\parallel} \ll t_{\text{ion}}$  уровне.

Сток ионов обусловлен несколькими причинами. Одна из них связана с неустойчивостью самосогласованной системы «ионный канал — электронный пучок». Физический механизм неустойчивости следующий. Пусть плотность ионов меньше плотности пучка, но выше требуемой критерием Будкера:  $n_b > n_i > n_b \gamma^{-2}$ . Электроны такого частично скомпенсированного по заряду пучка, двигаясь в продольном направлении, осциллируют в поперечном направлении (бетатронные колебания), образуя так называемый фазово-перемешанный пучок [8]. Рассмотрим эволюцию малого положительного локализованного возмущения плотности ионов  $\delta n_i > 0$  (см. рис. 6.4). Повышенное значение плотности ионов вызывает увеличение фокусирующей электроны пучка силы. Если продольный размер неоднородности мал по сравнению с характерным пространственным периодом бетатронных колебаний, то локальное увеличение фокусирующей силы приводит к образованию перетяжки (фокуса) на профиле плотности пучка за возмущением плотности ионов. Увеличение плотности электронов в области перетяжки приводит к появлению продольной компоненты электрического поля,

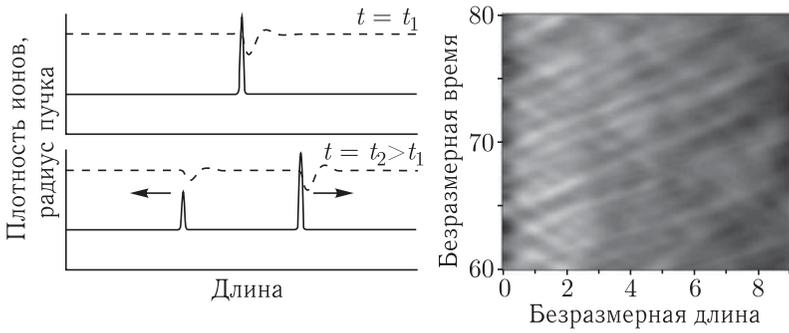


Рис. 6.4. Слева: схема эволюции возмущения плотности ионов канала (сплошная линия) и вызванного им возмущения радиуса пучка (пунктирная линия). Начальное возмущение распадается на два согласованных возмущения плотности ионов и радиуса пучка, распространяющихся в противоположных направлениях. Возмущение, распространяющееся в направлении движения пучка (слева направо) возрастает, а распространяющееся в противоположном направлении уменьшается. Справа: пространственно-временное распределение плотности ионов в режиме развитой неустойчивости. Ионы возникают в левой части камеры, у анодной сетки, и вытягиваются вдоль пучка его пространственным зарядом. Часть ускоренных ионов достигает коллектора, а часть отражается от приколлекторного потенциального барьера, образуя движущиеся в обратном направлении потоки

ускоряющей ионы, образующие возмущение плотности, вдоль пучка. Смещение ионов приводит к одновременному смещению перетяжки пучка, и процесс ускорения ионов продолжается. Ускоренные таким образом ионы приобретают энергию, достаточную для преодоления потенциального барьера вблизи коллектора, и покидают систему. Этим обеспечивается убыль ионов, компенсирующая их постоянное производство при ионизации газа. Более детальный анализ, проведенный в работе [9], показывает, что указанный механизм ускорения ионов канала может стабилизировать число ионов в системе на уровне, недостаточном для полной зарядовой компенсации пучка, но достаточном для фокусировки пучка.

На рис. 6.4 слева схематически изображена эволюция возмущения плотности ионов и вызванного им возмущения равновесного радиуса пучка. Справа изображено пространственно-временное распределение плотности ионов в режиме развитой неустойчивости. Обратите внимание на сильную неоднородность и нестационарность плотности ионов, являющуюся источником ионного шума в спектре СВЧ-колебаний (см. ниже).

Предотвратить полную зарядовую компенсацию пучка и, следовательно, предотвратить появление плазмы помогает диафрагма, размещенная на входе в ЗС и перехватывающая часть ионов. Введение диафрагмы в конструкцию пасотрона позволило заметно увеличить его к. п. д. [5].

Таким образом, перечисленные физические свойства и конструктивные особенности пасотрона обеспечивают достаточно быстрое образование ионного канала и транспортировку пучка вдоль всей системы и предотвращают появление плазмы как в пространстве дрейфа, так и в области взаимодействия пучка с синхронной модой ЗС.

## 6.2. Возбуждение синхронной волны

В основе взаимодействия электронного пучка с волной в пасотроне, как и в традиционных приборах СВЧ ЛБВ или ЛОВ, лежит пучковая неустойчивость: пучок неустойчив относительно возбуждения электромагнитных волн, находящихся с ним в черенковском синхронизме, т.е. волн, фазовая скорость  $v_{ph}$  которых близка к скорости пучка  $v_b$ . Линейная стадия развития пучковой неустойчивости в пасотроне описывается точно такими же уравнениями, как и в обычных лампах прямой или обратной волны. Однако способ транспортировки пучка кардинально меняет нелинейный механизм насыщения пучковой неустойчивости.

**6.2.1. Исходные уравнения.** Динамику развития пучковой неустойчивости в пасотроне, как и в традиционных приборах, можно описать с помощью укороченного уравнения для комплексной амплитуды  $\varepsilon$  синхронной моды ЗС

$$\frac{1}{v_g} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} = - \left( \frac{I_b}{N S_0 \gamma} \right) \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta_0 \int_{S_w} ds_0 \left[ I_0(k_{\perp} r) + i\gamma \frac{dr}{dz} I_1(k_{\perp} r) \right] e^{-i\theta} \quad (6.5)$$

и уравнений движения электронов пучка. В (6.5)  $v_g$  — групповая скорость моды;  $N$  — ее норма;  $S_0$  — начальное сечение пучка;  $\theta$  и  $\theta_0$  — соответственно текущая и начальная фазы частиц пучка в волне;  $r$  — текущий радиус траектории электрона пучка. Интегрирование в (6.5) производится вдоль траекторий частиц, находящихся в сечении  $S_w$  замедляющей структуры. Частицы, вышедшие из сечения  $S_w$  (попавшие на стенку камеры или ЗС), исключаются из дальнейшего рассмотрения. Предполагается, что поля волны аксиально-симметричны, т.е.  $E_z \propto I_0(k_{\perp} r)$ ,  $E_r \propto H_{\varphi} \propto I_1(k_{\perp} r)$ , где  $k_{\perp} = (k_z^2 - \omega^2/c^2)^{1/2} = k_z/\gamma$ ,  $k_z$  — продольная компонента волнового вектора и  $\omega = k_z v_b$  — частота синхронной волны. Первое подынтегральное слагаемое описывает взаимодействие электронов пучка с продольной, а второе — с поперечной компонентами полей волны (последнее слагаемое отсутствует в моделях с «замороженным» поперечным движением электронов пучка).

В отсутствие сильного ведущего магнитного поля к привычному уравнению, описывающему продольное движение частиц пучка в поле

волны:

$$\frac{d^2\theta}{dz^2} = \frac{\omega}{v_b^3} \left(1 - \frac{1}{k} \frac{\partial\theta}{\partial z}\right)^3 \frac{e}{m\gamma^4} I_0(k_\perp r) |\varepsilon| \cos(\theta + \alpha), \quad (6.6)$$

где  $d/dz$  — производная вдоль траектории частицы и  $\alpha = \arg \varepsilon$ , следует добавить уравнение, описывающее поперечное движение электронов.

Описание радиального движения частиц пучка начнем со случая, когда электромагнитная волна отсутствует. Будем предполагать, как это обычно делается, что плотность ионов канала  $n_i$  пропорциональна плотности пучка:  $n_i = f n_b$ . Тогда уравнение радиального движения отдельного электрона пучка в параксиальном приближении может быть записано в виде [10]:

$$\frac{d^2r}{dz^2} = -\frac{2I_b}{I_A} \frac{(f - \gamma^{-2}) I(r)}{\beta^2 r I_b} + \frac{M^2}{m^2 \gamma^2 v_b^2} \frac{1}{r^3}, \quad (6.7)$$

где  $I(r)$  — ток, протекающий через сечение радиуса  $r$ ;  $M$  — угловой момент данного электрона (является инвариантом в силу цилиндрической симметрии задачи). Это уравнение пригодно для решения задачи о движении частиц пучка в пространстве дрейфа между катодом и входом в пространство взаимодействия с волной.

В присутствии синхронной электромагнитной волны на частицы пучка действует добавочная радиальная сила  $e(E_r - \beta H_\varphi)$  и в правой части (6.7) появляется добавочное слагаемое  $(e/m\gamma v_b^2)(E_r - \beta H_\varphi)$ . Кроме того, теперь связь  $n_i = f n_b$  нуждается в уточнении. Дело в том, что при взаимодействии с синхронной волной в первоначально продольно-однородном пучке возникает модуляция плотности. В каждой точке пространства плотность пучка зависит от фазы волны  $\theta$ , т.е. осциллирует с частотой  $\omega$ . Малоподвижные ионы не успевают отслеживать столь быстрые осцилляции плотности пучка, и их плотность определяется *усредненной* по времени, или по фазе  $\theta$ , плотностью пучка:  $n_i(z, r) = f \langle n_b(\theta, z, r) \rangle$ . Что же касается собственных полей пучка — электрического поля пространственного заряда и магнитного поля тока — то они зависят от фазы  $\theta$ .

Исходя из вышесказанного, уравнение радиального движения частиц пучка в присутствии синхронной волны принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{d^2r}{dz^2} = & -\frac{2I_b}{I_A \beta^2 \gamma^2} [B\langle\eta\rangle + (\langle\eta\rangle - \eta)] \frac{1}{r} + \frac{M^2}{m^2 \gamma^2 v_b^2} \frac{1}{r^3} + \\ & + \frac{e}{m\gamma^3 v_b^2} I_1(k_\perp r) |\varepsilon| \sin(\theta + \alpha). \end{aligned} \quad (6.8)$$

Здесь  $B = \gamma^2 f - 1$  — параметр Будкера;  $\eta(r) = I(r)/I_b$  — доля частиц пучка, содержащихся в сечении с радиусом  $r$ .

Уравнения (6.5), (6.6) и (6.8), образующие полную систему, следует дополнить граничными условиями. Будем считать, что в плоскости инжекции пучка в пространство взаимодействия с волной, в плоскости  $z = 0$ , все частицы имеют одинаковую продольную скорость  $v_z = v_b$ , т. е.  $\left. \frac{d\theta}{dt} \right|_{z=0} = 0$ , и равномерно распределены по фазе влета  $\theta_0 \in (0, 2\pi]$ . Что же касается радиальной координаты  $r|_{z=0}$  и радиальной скорости  $v_r|_{z=0} = v_b \left. \frac{dr}{dz} \right|_{z=0}$  каждого из электронов пучка, то они определяются решением уравнения движения (6.7) с соответствующими граничными условиями на катоде. Граничные условия для амплитуды волны  $\varepsilon$  зависят от типа решаемой задачи: ЛБВ-усилитель, ЛБВ-генератор с обратной связью, ЛОВ с внешней обратной связью или без нее.

**6.2.2. Роль пространственного заряда пучка.** Важным для дальнейшего анализа свойством пучковой неустойчивости является то, что глубина продольной модуляции плотности пучка экспоненциально возрастает с длиной и на нелинейной стадии близка к 100%. А это означает, что при  $B \leq 1$  обязательно наступит момент, когда второй член в квадратных скобках в уравнении (6.8) превысит первое слагаемое. Другими словами, будкеровское условие радиального удержания (6.1) может нарушаться для частиц пучка, образующих в результате развития неустойчивости сгустки плотности [11]. Для слаборелятивистского пучка, для которого  $\gamma^2 - 1 \ll 1$ , параметр  $B \ll 1$ . Поэтому для частиц пучка, входящих в состав сгустка, для которых  $\eta > \langle \eta \rangle$ , неравенство

$$\eta - \langle \eta \rangle > B \langle \eta \rangle \quad (6.9)$$

выполняется уже на линейной стадии, когда амплитуда волны далека от амплитуды насыщения неустойчивости. Неравенство (6.9) означает, что для соответствующих частиц пучка кулоновское расталкивание превалирует над фокусирующим действием ионного канала: ионный канал не в состоянии удержать эти частицы, и они разлетаются в радиальном направлении. Энергообмен между электронами пучка и волной продолжается до тех пор, пока частицы не достигнут стенок камеры. Более того, темп передачи энергии от частиц волне усиливается по мере приближения их к ЗС, поскольку продольное электрическое поле замедленной волны, ответственное за энергообмен, вблизи ЗС больше, чем в приосевой области.

Таким образом, качественно картина развития пучковой неустойчивости в пасотроне (для определенности, рассмотрим ЛБВ-пасотрон) выглядит следующим образом. Возникающий на линейной стадии развития неустойчивости сгусток сохраняется и на нелинейной ее стадии. Поэтому входящие в него частицы — а это большая часть пучка — разлетаются в радиальном направлении, продолжая группироваться в продольном направлении, и высыпаются на стенки ЗС (см. рис. 6.5). За область высыпания в системе остается незначительная доля частиц

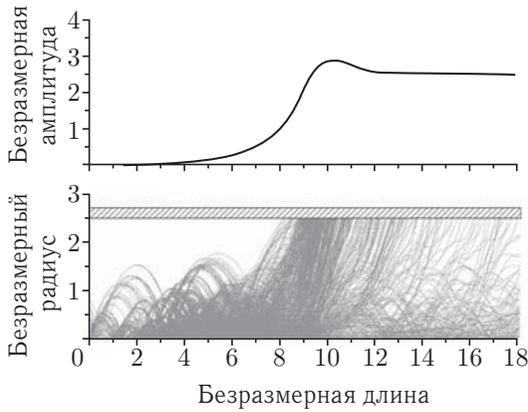


Рис. 6.5. Траектории частиц пучка (внизу) и амплитуда волны  $|\varepsilon(z)|$  (вверху) в ЗС. Радиус нормирован на начальный радиус пучка у анодной сетки, нормировка амплитуды волны и продольной координаты такая же, как и в традиционной теории ЛБВ (ЛОВ)

пучка, взаимодействие которых с возбужденной волной уже не может сколько-нибудь значительно изменить ее амплитуду. Другими словами, за областью высыпания пучка волна распространяется без изменения амплитуды и наблюдаемая на выходе ЗС амплитуда определяется ее значением в области высыпания. Поскольку уравнения пучковой неустойчивости «оторваны» от уравнений радиального движения, то зависимость амплитуды волны от продольной координаты вплоть до области высыпания пучка качественно такая же, как и в традиционной ЛБВ. Очевидно, что оптимальным является такой выбор параметров, при котором область высыпания совпадает с местом, где амплитуда достигает своего максимального значения  $\varepsilon_{\max}$ . Частицы пучка должны достичь стенки ЗС,  $r(z) = a_w$ , в том же месте  $z = z_w$ , в котором амплитуда достигает своего насыщения,  $|\varepsilon(z_w)| = \varepsilon_{\max}$ . Это означает, что при прочих равных условиях существует оптимальное соотношение между радиусом замедляющей системы и начальным радиусом пучка, при котором к. п. д. пасотрона будет максимальным [12–14].

Результат этого качественного рассмотрения можно сформулировать иначе. Взаимодействие пучка с волной эффективно происходит только на ограниченном отрезке ЗС, до области высыпания частиц пучка на стенки. Это означает, что пасотрон сам «выбирает» длину пространства взаимодействия (эффективную длину ЗС) [14, 15]. Такая формулировка применима не только к ЛБВ-пасотрону, но и к ЛОВ-пасотрону. На рис. 6.6 представлен результат решения нестационарных уравнений ЛОВ-пасотрона. Несмотря на то, что фактическая длина ЗС велика, ЛОВ-пасотрон работает в режиме монохроматической генерации, тогда как обычная ЛОВ с магнитным удержанием пучка в этих условиях работает в режиме сильной стохастической автомодуляции. Причиной стабильности работы ЛОВ-пасотрона является сокращение

эффективно действующей длины ЗС — безразмерная эффективная длина, «выбранная» пасотроном, равна  $\simeq 2,5$ , тогда как фактическая длина равна 5,0.

Величина эффективной длины пространства взаимодействия пучка с волной зависит от соотношения между радиусом перехватывающей электроны поверхности (ЗС, стенки камеры) и начальным радиусом пучка. Если входная диафрагма перехватывает часть пучка на входе в ЗС, то радиус отверстия диафрагмы также влияет на величину эффективной длины.

Таким образом, два эффекта определяют нелинейную динамику пасотрона. Первый эффект — это захват частиц пучка потенциальной ямой возбуждаемой волны. Качественно этот эффект проявляется в пасотроне так же, как и в обычных лампах бегущей или обратной волны. В обычной ЛБВ этот эффект приводит к осцилляциям амплитуды волны вдоль ЗС, если последняя достаточно длинная.

Второй эффект, действующий одновременно с первым, — появление большого объема заряда сгустков частиц пучка, приводящего к радиальному разлету частиц, их высыпанию на стенки камеры или ЗС и прекращению взаимодействия пучка с волной.

Ряд экспериментальных данных подтверждает описанную выше картину развития неустойчивости в пасотроне. К таковым относятся исчезновение коллекторного тока одновременно с началом генерации СВЧ-колебаний [5, 11, 16], возможность укорочения длины ЗС без сколько-нибудь заметного изменения параметров возбуждаемого СВЧ сигнала [5], оптимизация мощности СВЧ сигнала подбором величины начального радиуса пучка [15].

### 6.3. Ионный шум

В вакуумных источниках СВЧ-излучения с магнитным удержанием пучка, работающих в непрерывном режиме или с достаточно длинным импульсом тока пучка, присутствие ионов является причиной появления так называемого ионного шума. Ионный шум ассоциируется с продольным движением накапливающихся ионов, образующихся в результате ионизации остаточного газа электронами пучка. Вариации поля объемного заряда ионов вызывают вариации радиуса пучка, что, в свою очередь, приводит к появлению вариаций параметров СВЧ-излу-

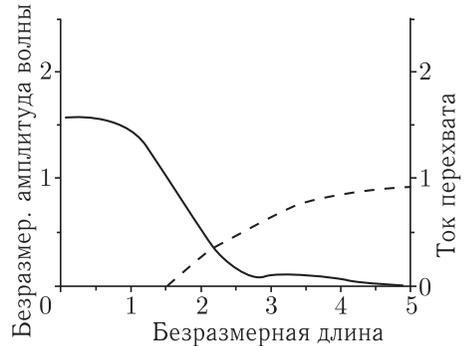


Рис. 6.6. Продольное распределение амплитуды волны и тока перехвата в ЛОВ-пасотроне. Фактическая безразмерная длина ЗС равна 5, эффективная длина 2,5

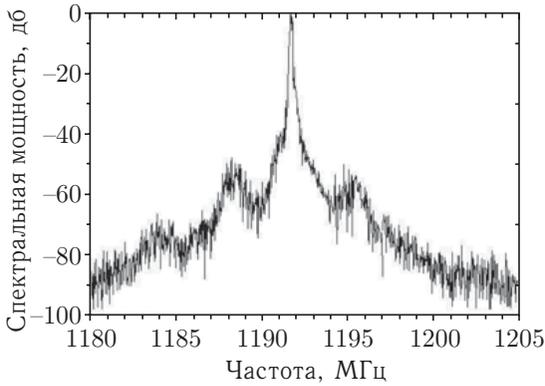


Рис. 6.7. Экспериментально полученный спектр СВЧ сигнала ЛОВ-пасотрона [19]

чения [17, 18]. На первый взгляд кажется очевидным, что в пасотроне, где количество ионов на несколько порядков больше, чем в вакуумных приборах, и нет сильного ведущего магнитного поля, стабилизирующего радиальное движение электронов пучка, ионный шум должен быть очень сильным. Однако экспериментальные данные [19] о спектральных характеристиках излучения пасотрона показали, что уровень ионного шума в пасотроне неожиданно низкий,  $-40 \div -50$  дБ (см. рис. 6.7). Причиной столь малого влияния нестационарных вариаций плотности ионов на спектральные характеристики пасотрона является описанный выше механизм насыщения неустойчивости, обусловленный высыпанием частиц пучка на стенки камеры.

Действительно, для слаборелятивистского пучка параметр Будкера мал,  $B \ll 1$ , и на большей части области, где происходит передача энергии от пучка к волне, роль ионов пренебрежимо мала. С другой стороны, в пространстве дрейфа, где отсутствует электромагнитная волна, т.е. нет модуляции плотности пучка, ионы полностью определяют транспортировку пучка и, в частности, его радиус на входе в ЗС. Именно в этой области влияние флуктуаций плотности ионов оказывает наибольшее влияние на параметры пучка и, следовательно, на спектр генерируемого СВЧ-излучения.

Приведенные выше рассуждения приводят к следующей упрощенной модели, которая описывает связь между вариациями плотности ионов  $\tilde{n}_i$  с характеристиками спектра СВЧ-излучения пасотрона. В пространстве взаимодействия, в ЗС, параметр Будкера постоянен, а в пространстве дрейфа  $B = B_0 + \tilde{B}$ , где  $\tilde{B} = \gamma^2 \tilde{n}_i / n_b$  — вариации параметра  $B$  и  $B_0$  — его среднее значение. Эффективная длина ЗС пасотрона,  $L_{\text{eff}}$ , определяющая характеристики генерируемого СВЧ сигнала, зависит не только от радиуса камеры  $a_w$ , но и от длины пространства дрейфа  $L_{\text{drift}}$  и значения параметра Будкера  $B$  в этой области. Влияние флуктуаций плотности ионов в пространстве дрейфа минимально, если параметры

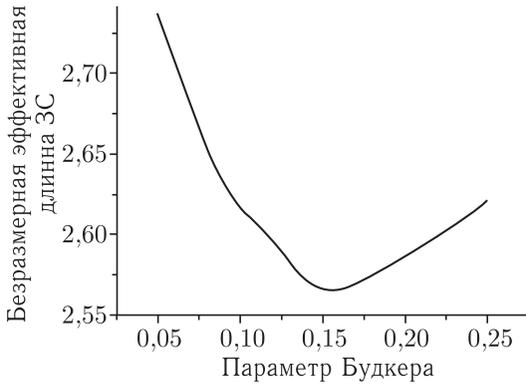


Рис. 6.8. Зависимость безразмерной эффективной длины ЗС от величины параметра Будкера в пространстве дрейфа

$a_w$ ,  $L_{\text{drift}}$  и  $B_0$  выбраны таким образом, что  $dL_{\text{eff}}/dB_0 = 0$ . Численное моделирование показало, что такой набор параметров действительно существует. На рис. 6.8 изображена зависимость безразмерной длины  $\xi_{\text{eff}}$  пространства взаимодействия (длины, на которой ток перехвата достигает 50% тока пучка) от величины параметра Будкера в пространстве дрейфа. При расчетах были выбраны параметры экспериментальной установки, описанной в [5] и работающей в режиме ЛОВ. Как следует из приведенной на рис. 6.8 зависимости, вблизи минимума кривой  $L_{\text{eff}}(B)$  вариациям параметра Будкера  $\pm 20\%$  соответствует вариация эффективной длины менее 1%.

Вблизи минимума кривой  $L_{\text{eff}}(B)$  амплитуда установившихся колебаний на входе ЗС также слабо зависит от величины параметра Будкера. На рис. 6.9 изображены зависимости амплитуды  $\varepsilon_{\text{out}}$  выходного СВЧ сигнала от параметра  $B$  для разных значений радиуса  $a_w$  перехватывающей электроны поверхности. При неверном выборе  $a_w$  (например,  $a_w = 1,6$  на рис. 6.9) зависимость  $\varepsilon_{\text{out}}(B)$  может быть достаточно сильной.

Используя приведенную зависимость  $\varepsilon_{\text{out}}(B)$  можно определить спектр генерируемого СВЧ сигнала в присутствии флуктуаций плотности ионов (флуктуаций параметра  $B$ ). На рис. 6.10 представлен пример рассчитанных реализации и спектра выходного СВЧ сигнала ЛОВ-пасотрона. При численном моделировании не принимались во внимание естественная и техническая ширины спектра на несущей частоте, поэтому на рис. 6.10, б он изображен узкой линией. Строго говоря, шумовой спектр, вызванный нестационарностью плотности ионов, должен накладываться на спектр СВЧ-излучения, ширина которого определяется шумами электронной пушки и цепей питания.

Оценим характерные частоты, связанные с вариациями плотности ионов в пасотроне со следующими параметрами [5]: ускоряющее напряжение пучка  $U_b = 55$  кВ,  $I_b = 45$  А, начальный радиус пучка

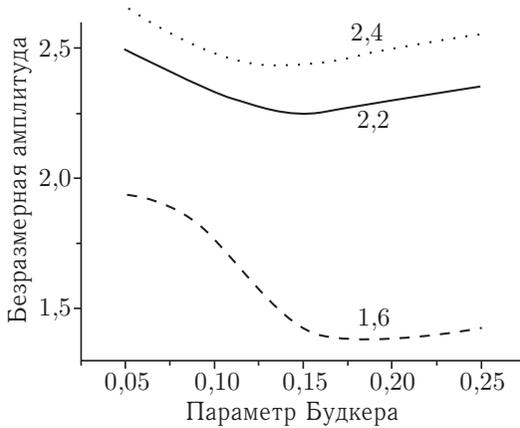


Рис. 6.9. Зависимость безразмерной амплитуды генерируемого СВЧ сигнала от величины параметра Будкера в пространстве дрейфа при различных значениях радиуса перехватывающей ток поверхности. Кривые отмечены значениями безразмерного радиуса

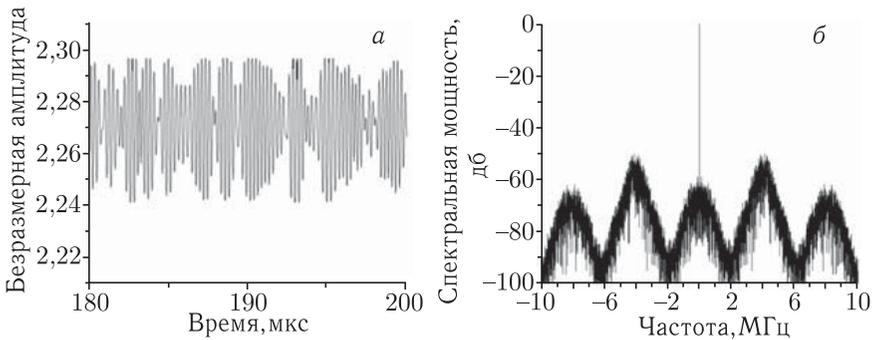


Рис. 6.10. а) Пример зависимости безразмерной амплитуды выходного сигнала ЛОВ-пасотрона от времени; б) спектр выходного сигнала ЛОВ-пасотрона. При численном моделировании предполагалось, что уровень флуктуаций плотности ионов  $\tilde{n}_i/n_{i0} = 2\%$  ( $\tilde{B}/B_0 = 20\%$ )

2 см, радиус камеры 4,8 см, длина пространства дрейфа 30 см, рабочий газ гелий. Пороговое значение степени зарядовой нейтрализации, при превышении которой происходит ионная фокусировка пучка,  $f = 0,815$ . Указанным параметрам соответствует глубина потенциальной ямы, в которой движутся ионы,  $\Delta\varphi \simeq 1,5$  кВ. Характерное время поперечных колебаний ионов гелия  $t_{\perp} \simeq 0,042$  мкс, характерное время движения вдоль пространства дрейфа  $t_{\parallel} \simeq 0,26$  мкс, что соответствует частотам 23,8 МГц и 3,85 МГц соответственно. Таким образом, спутники, изображенные на рис. 6.10, б, расположены на расстоянии  $\sim 4$  МГц от несущей частоты. Сравнение экспериментального (рис. 6.7) и теоретически полученного спектров (рис. 6.10, б) демонстрирует хорошее совпадение: спутники расположены на расстоянии  $\sim 4$  МГц от

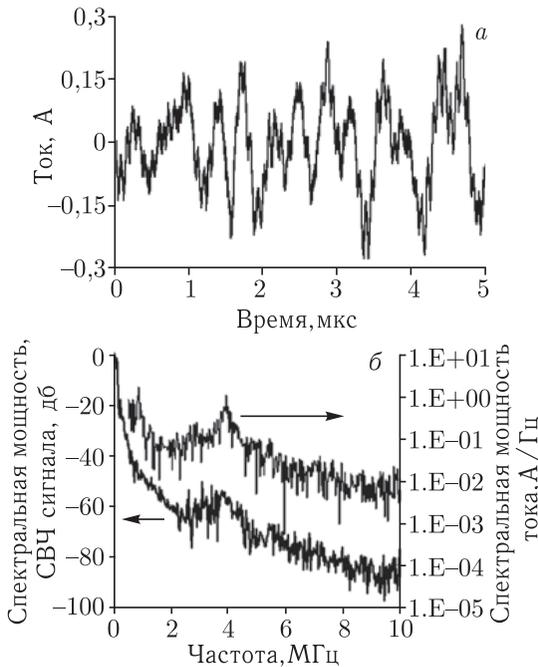


Рис. 6.11. *а*) Зависимость переменной составляющей (постоянная составляющая отфильтрована) тока пучка на входе в ЗС от времени; *б*) сравнение спектров выходного сигнала ЛОВ-пасотрона и спектра флуктуаций тока на входе в ЗС. Частота отсчитывается от несущей частоты 1192 МГц

несущей частоты, а уровень ионного шума в обоих случаях составляет примерно  $-50$  дБ.

Тот факт, что шумовые спутники на спектре СВЧ сигнала связаны именно с флуктуациями плотности ионов в пространстве дрейфа, был подтвержден следующим экспериментом [20]. Для измерения флуктуаций тока, обусловленных процессами в пространстве дрейфа, перед входом в ЗС был поставлен цилиндр Фарадея. Результат таких измерений показан на рис. 6.11, *а*. Здесь следует отметить, что флуктуации полного тока пучка, входящего в ЗС, связаны с флуктуациями провисания потенциала в пространстве дрейфа, которые, в свою очередь, обусловлены флуктуациями количества ионов. Сравнение спектров флуктуаций тока и СВЧ сигнала (рис. 6.11, *б*) указывает на четкую их корреляцию, т. е. спутники на спектре СВЧ сигнала обусловлены именно флуктуациями плотности ионов в пространстве дрейфа.

## Заклучение

В этой короткой главе мы постарались облегчить читателю следование совету, вынесенному в эпиграф, и сделали упор на качественное описание физических процессов, отличающих пасотрон от его

вакуумных аналогов. Отсутствие сильного ведущего магнитного поля предоставляет частицам пучка больше свободы, их движение становится *многомерным*, а *транспортировка* пучка через пространство взаимодействия и *возбуждение* им синхронной волны оказываются *взаимосвязанными*. Кроме пучка и волны, в физике пасотрона появляется еще одно «действующее лицо» — ионы, динамика которых определяет условия транспортировки пучка и спектральные характеристики возбуждаемых СВЧ-колебаний. Учет всех этих особенностей является принципиальным для корректного теоретического описания пасотрона и адекватной трактовки экспериментальных данных. Мы надеемся, что смогли передать читателю привлекательность физики пасотрона, заключающуюся в «глобальной» взаимосвязи разнообразных процессов.

### Список литературы

1. *Goebel D. M., Schumacher R. W., Butler J. M., Hyman J., Jr., Santoru J., Watkins R. M., Harvey R. J., Dolezal F. A., Eisenhart R. L., Schneider A. J.* // Proc. SPIE. 1992. V. 1629. P. 119.
2. *Bennett W. H.* // Phys. Rev. 1934. V. 45. P. 890.
3. *Budker G. I.* // CERN Symposium on High Energy Accelerators, Geneva, Switzerland, CERN. 1956. V. 1. P. 68.
4. *Goebel D. M., Butler J. M., Schumacher R. W., Santoru J., Eisenhart R. L.* // IEEE Proc. Plasma Sci. 1994. V. 22. P. 547.
5. *Shkvarunets A. G., Carmel Y., Nusinovich G. S., Abu-elfadl T. M., Rodgers J., Antonsen T. M., Jr., Granatstein V., Goebel D. N.* // Phys. Plasmas. 2002. V. 9. P. 4114.
6. *Bliokh Yu. P., Nusinovich G. S.* // IEEE Trans. Plasma Sci. 2001. V. 29, № 6. P. 951.
7. *Carmel Y., Shkvarunets A., Nusinovich G. S., Rodgers J., Bliokh Yu. P., Goebel D. M.* // Phys. Plasmas. 2003. V. 10, № 12. P. 4865.
8. *Lee E. P.* // Phys. Fluids. 1978. V. 21. P. 1327.
9. *Bliokh Yu. P., Nusinovich G. S., Felsteiner J., Granatstein V. L.* // Phys. Rev. E. 2002. V. 66. P. 056503.
10. *Reiser M.* Theory and Design of Charged Particles Beams. N. Y.: Wiley, 1994.
11. *Goebel D. M., Schumacher R. W., Eisenhart R. L.* // IEEE Trans. Plasma Sci. 1998. V. 26. P. 354.
12. *Nusinovich G. S., Bliokh Yu. P.* // Phys. Rev. E. 2000. V. 62. P. 2657.
13. *Abu-elfadl T. M., Nusinovich G. S., Shkvarunets A. G., Carmel Y., Antonsen T. M., Jr., Granatstein V. L., Goebel D. M.* // IEEE Trans. Plasma Sci. 2002. V. 30. P. 1126.
14. *Bliokh Yu. P., Nusinovich G. S.* // Phys. Plasmas. 2006. V. 13. P. 023102.

15. *Abu-elfadl T.M., Nusinovich G.S., Antonsen T.M., Jr., Granatstein V.L.* // Phys. Plasmas. 2003. V. 10. P. 3746.
16. *Ponti E.S., Goebel D.M., Poeschel R.L.* // Proc. SPIE. 1996. V. 2843. P. 240.
17. *Gilmour A. S., Jr.* Microwave Tubes. Norwood, MA: Artech House, 1986.
18. *Manheimer W.M., Freund H.P., Levush B., Antonsen T.M., Jr.* // Phys. Plasmas. 2001. V. 8. P. 297.
19. *Nusinovich G.S., Carmel Y., Shkvarunets A.G., Rodgers J.C., Antonsen T.M., Jr., Granatstein V.L., Bliokh Y.P., Goebel D.M., Verboncoeur J.P.* // IEEE Trans. Electron Devices. 2005. V. 52. P. 845.
20. *Bliokh Yu.P., Nusinovich G.S., Rodgers J.C., Shkvarunets A.G., Carmel Y., Felsteiner J.* // IEEE Trans. Plasma Sci. 2008. V. 36. P. 701.

## Глава 7

# НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ПРОЦЕССЫ И НЕАВТОНОМНАЯ ДИНАМИКА В ЭЛЕКТРОННО-ВОЛНОВЫХ СИСТЕМАХ ТИПА «ЭЛЕКТРОННЫЙ ПОТОК — ВСТРЕЧНАЯ (ОБРАТНАЯ) ЭЛЕКТРОМАГНИТНАЯ ВОЛНА»

Д. И. Трубецков, А. А. Короновский, А. Е. Храмов

Мы понимаем синхронизацию как подстройку ритмов осциллирующих объектов за счет слабого взаимодействия между ними.

*Пиковский А., Розенблюм М., Куртс Ю.*  
Синхронизация. Фундаментальное нелинейное явление. М.: Техносфера, 2003.  
С. 26.

*Вводные замечания. Полоса синхронизации. Численное моделирование неавтономного поведения гиро-ЛВВ. Длительность установления синхронного режима. Переходной хаос вблизи границы синхронизации.*

### 7.1. Вводные замечания

Автоколебательная система, на которую воздействует внешний сигнал или которая связана с другой автоколебательной системой, может принципиально по-разному вести себя в зависимости от амплитуды и частоты воздействующего на нее сигнала. Наиболее фундаментальное нелинейное явление, наблюдаемое в этом случае, — синхронизация автоколебаний. Открытие и описание эффекта синхронизации периодических колебаний в автоколебательных системах со сосредоточенными параметрами (то есть системах, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями или отображениями) восходит еще к работам Гюйгенса [1–3]. В настоящей главе приведены результаты исследования неавтономных автоколебаний и явления синхронизации (как классической, так и хаотической) в эталонной для теории вол-

новых процессов и сверхвысокочастотной электроники системе «взаимодействующий электронный поток — встречная электромагнитная волна». Автономная динамика подобных электронно-волновых систем в настоящее время хорошо изучена, выявлены общие закономерности и конкретные особенности нелинейных процессов (см., например, [4–6]). Поэтому неравновесные активные системы, в которых имеет место взаимодействие электронов-осцилляторов со встречными электромагнитными волнами, являются весьма удобным объектом для исследования неавтономной динамики и явления синхронизации в распределенных автоколебательных системах.

Исследование влияния внешних сигналов на автоколебательные системы сверхвысокочастотной электроники является весьма важным, поскольку позволяет решить целый ряд прикладных задач, среди которых стабилизация частоты и фазы высокочастотного излучения мощных генераторов, возможность получения генерации, близкой к одночастотной, или, наоборот, установление режимов шумовой (хаотической) генерации, фазировка мощных генераторов для повышения выходной мощности путем сложения излучения (фазированные антенные решетки на сверхмощных сверхвысокочастотных генераторах (например, [7–9]), в ряде случаев — повышение КПД и мощности выходного излучения [10, 11] неавтономных систем сверхвысокочастотной электроники).

В рамках данной главы будет рассмотрена неавтономная динамика и процессы синхронизации системы «взаимодействующий электронный поток — встречная электромагнитная волна» на примере мазера на циклотронном резонансе со встречной волной (гиролампой со встречной волной). Гирогенератор со встречной волной (гиро-ЛВВ) описывается системой нестационарных нелинейных уравнений (1.9)–(1.11), которые были приведены в главе 1.

Внешний управляющий сигнал вводится на коллекторном конце системы и описывается нестационарным граничным условием следующего вида

$$F(\xi = A, \tau) = F_{\text{вн}}(\tau), \quad (7.1)$$

где  $F_{\text{вн}}(\tau)$  — внешний сигнал, воздействующий на гири-ЛВВ. В простейшем случае управляющий сигнал представляет собой гармонический процесс  $F_{\text{вн}} = F_0 \exp[j\Omega\tau]$ . Здесь  $F_0$  — амплитуда внешнего гармонического сигнала,  $\Omega$  — отстройка частоты внешнего воздействия от частоты «холодного» синхронизма  $\hat{\omega}$ .

## 7.2. Полоса синхронизации

Проанализируем, следуя работам Р. Адлера, Б. Е. Железковского и Э. В. Кальянова [13, 14], ширину полосы фазовой синхронизации и характеристики автоколебаний при выходе из области синхронизации в гири-ЛВВ [15]. Предполагая случай слабого внешнего сигнала

$E_0$ , вводимого на коллекторном конце лампы (см. (7.1)), будем считать, что он влияет только на фазовые соотношения выходного сигнала  $E_{\text{вых}}$ . При этом предположим, что изменение амплитуды выходного сигнала мало  $\Delta E_{\text{вых}} \ll E_{\text{вых}}$  и, как следствие, будем пренебрегать им по сравнению с самой величиной  $E_{\text{вых}}$ . Тогда, если частота внешнего сигнала и собственная частота автоколебаний в гиро-ЛВВ отличаются, возникает фазовый сдвиг  $\varphi$  между колебаниями поля на выходе в автономном и неавтономном режиме, обусловленный изменением условий взаимодействия поля бегущей волны с винтовым пучком.

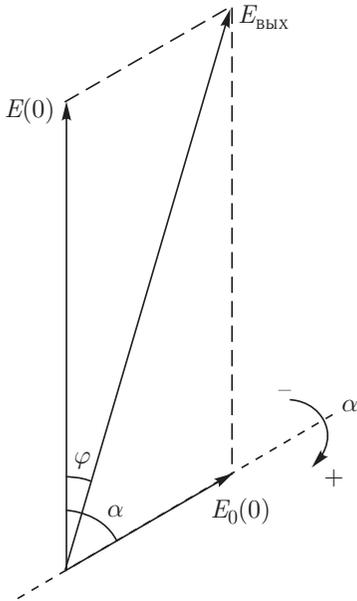


Рис. 7.1. Векторная диаграмма мгновенных напряженностей полей на выходе гиро-ЛВВ

На рис. 7.1 представлена векторная диаграмма мгновенных напряженностей выходящего  $E_{\text{вых}}$ , собственного  $E$  и внешнего  $E_0$  полей на выходе  $\xi = 0$  гиро-ЛВВ. В соответствии с ней выразим возникающий фазовый сдвиг  $\varphi$  через мгновенную разность фаз  $\alpha$  между полем  $E_{\text{вых}}$  неавтономной гиро-ЛВВ и управляющим сигналом  $E_0$  на выходе системы как

$$\varphi = -\frac{|E_0(0)|}{E(0)} \sin \alpha. \quad (7.2)$$

Записанное выражение справедливо как в полосе синхронизации, так и при выходе из нее.

Мгновенная разность фаз  $\alpha$  между полем синхронизируемой системы с частотой  $\omega$  и внешним гармоническим воздействием (его частота равна  $\Omega$ ) может быть записана как  $\omega - \Omega = d\alpha/d\tau$ , где производная  $d\alpha/d\tau$  имеет смысл мгновенной угловой частоты биений. Тогда, вводя невозмущенную частоту биений автономных колебаний и внешнего сигнала ( $\omega_0 - \Omega$ ), отстройку частоты выходного поля неавтономной системы от частоты автономных колебаний ( $\omega - \omega_0$ ), уравнение для  $\alpha$  можно записать в виде:

$$\omega - \omega_0 = \frac{d\alpha}{\tau} - (\omega_0 - \Omega). \quad (7.3)$$

Режим синхронизации колебаний поля на выходе системы соответствует разности фаз  $\alpha = \text{const}$  или  $d\alpha/d\tau = 0$ .

Найдем изменение фазы  $\varphi$  сигнала на выходе гиро-ЛВВ при изменении частоты ее колебаний под воздействием внешнего поля. Для

этого необходимо задать распределение высокочастотного поля  $E(x)$  вдоль системы. Аналитическое решение данной задачи проведем в рамках линейного стационарного приближения. Предполагая изменения величины поля и радиуса траектории электронов малыми, линеаризуем исходную нестационарную систему уравнений (1.9)–(7.1), а также перейдем от нестационарного уравнения возбуждения (1.9) к стационарному.

Вводя новые переменные  $\bar{I} = I e^{j\mu\xi}$  и  $\bar{F} = F e^{j\mu\xi}$ , легко получить следующую систему линейных уравнений

$$\frac{d^2\bar{I}}{\xi^2} + \bar{I} = -jb\bar{F}, \quad (7.4)$$

$$\frac{d\bar{F}}{\xi} - j(b + \mu)\bar{F} = -\bar{I}, \quad (7.5)$$

где

$$b = \frac{\omega + \beta_0 v_{\parallel} - \omega_c}{k\varepsilon v_{\parallel}} \quad (7.6)$$

— параметр рассинхронизма,  $k = \omega/c$ .

Для решения системы уравнений (7.4) и (7.5) воспользуемся методом последовательных приближений [4, 16]. Задавая в качестве нулевого приближения поле невозмущенной волны  $E^0(\xi) = E_0 e^{-j\beta_0(\xi-A)}$ , получаем, что распределение поля вдоль пространства взаимодействия в первом приближении определяется следующим образом

$$E(\xi) = E_0 e^{-j\beta_0(\xi-A)} \left[ (1 + \xi^2 \operatorname{Re} \Psi(\Phi_0) + \mu\xi^3 \operatorname{Re} \Theta(\Phi_0))^2 + (\xi^2 \operatorname{Im} \Psi(\Phi_0) + \mu\xi^3 \operatorname{Im} \Theta(\Phi_0))^2 \right]^{1/2} \times \exp(\psi_1(\Phi_0, \xi, \mu)), \quad (7.7)$$

где функция  $\psi_1(\Phi_0, \xi, \mu)$ , описывающая фазу поля в gyro-LWB, записывается как

$$\psi_1(\Phi_0, \xi, \mu) = \operatorname{arctg} \frac{\xi^2 \operatorname{Im} \Psi(\Phi_0) + \mu\xi^3 \operatorname{Im} \Theta(\Phi_0)}{1 + \xi^2 \operatorname{Re} \Psi(\Phi_0) + \mu\xi^3 \operatorname{Re} \Theta(\Phi_0)}, \quad (7.8)$$

а функции  $\Theta(\Phi_0)$  и  $\Psi(\Phi_0)$  имеют вид, характерный для квадратичной и линейной группировки соответственно [16]

$$\begin{aligned} \Psi(\Phi_0) &= \frac{1 - e^{-j\Phi_0} - j\Phi_0}{\Phi_0^2}, \\ \Theta(\Phi_0) &= \frac{2(e^{-j\Phi_0} - 1) + j\Phi_0(e^{-j\Phi_0} + 1)}{\Phi_0^3}. \end{aligned} \quad (7.9)$$

Величина  $\Phi_0 = (b + \mu)\xi$  представляет собой относительный угол пролета электронов–осцилляторов в пространстве взаимодействия.

Тогда в соответствии с соотношением (7.7) фазу поля на выходе гиро-ЛВВ относительно фазы управляющего сигнала можно записать как

$$\psi = -\beta_0 A + \psi_1(\Phi_0, A, \mu). \quad (7.10)$$

Найдем изменение фазы поля (а следовательно, и частоты генерации) при воздействии на систему внешнего сигнала. Для этого разложим фазу в ряд по углу пролета  $\Phi_0$  около точки, соответствующей частоте  $\omega_0$  автономных колебаний. Полагая, что изменение частоты мало, ограничимся первым членом в разложении фазы поля (7.10), что дает

$$\psi = \psi_{\omega_0} + \left( \frac{\partial}{\partial \Phi_0} \psi_1(\Phi_0, A, \mu) \right)_{\omega_0} \Delta \Phi_0, \quad (7.11)$$

где  $|\Delta \Phi_0| = |\Phi_0 - (\Phi_0)_{\omega_0}| \ll 1$ .

Перейдем от величины  $|\Delta \Phi_0|$  к изменению частоты. Для этого воспользуемся определением относительного угла пролета  $\Phi_0$ . Продифференцируем выражение (7.6). Тогда

$$\frac{db}{d\omega} = \frac{\frac{\omega_c}{\omega^2} - \frac{v_{\parallel}}{v_{\Phi}^2} \frac{dv_{\Phi}}{\omega}}{(v_{\parallel} \varepsilon / c)}.$$

Подставляя в полученное выражение значение  $dv_{\Phi}/d\omega$  из формулы Рэлея

$$v_{\text{гр}} = \frac{1}{1 - \frac{\omega}{v_{\Phi}} \frac{dv_{\Phi}}{d\omega}},$$

получаем

$$\frac{db}{d\omega} = \frac{1}{v_{\parallel} \varepsilon k} \left( \frac{\omega_c}{\omega} - \frac{v_{\parallel}}{v_{\Phi}} \left( 1 + \frac{v_{\Phi}}{v_{\text{гр}}} \right) \right). \quad (7.12)$$

Тогда приближенное соотношение, связывающее относительное изменение угла пролета  $\Phi_0$  с малой отстройкой частоты внешнего сигнала от частоты автономной генерации, записывается как

$$\Delta \Phi_0 \simeq \frac{Ac}{v_{\parallel} \varepsilon} \left( \frac{\omega_c}{\omega} - \frac{v_{\parallel}}{v_{\Phi}} \left( 1 + \frac{v_{\Phi}}{v_{\text{гр}}} \right) \right) \frac{\omega_0 - \omega}{\omega}. \quad (7.13)$$

Окончательно выражение для фазового сдвига между полем синхронизируемой гиро-ЛВВ и управляющим сигналом на выходе системы с учетом выражений (7.10) и (7.13) принимает вид:

$$\varphi = \hat{s}((\Phi_0)_{\omega_0}) \frac{Ac}{v_{\parallel} \varepsilon} \left( \frac{\omega_c}{\omega} - \frac{v_{\parallel}}{v_{\Phi}} \left( 1 + \frac{v_{\Phi}}{v_{\text{гр}}} \right) \right) \frac{\omega_0 - \omega}{\omega}, \quad (7.14)$$

где функция  $\hat{s}(\Phi_0)$  определяется как

$$\hat{s}(\Phi_0) = \frac{\partial}{\partial \Phi_0} \arctg \frac{\xi^2 \text{Im } \Psi(\Phi_0) + \mu \xi^3 \text{Im } \Theta(\Phi_0)}{1 + \xi^2 \text{Re } \Psi(\Phi_0) + \mu \xi^3 \text{Re } \Theta(\Phi_0)}. \quad (7.15)$$

Используя соотношения (7.2), (7.3) и (7.14), окончательно получаем дифференциальное уравнение для разности фаз  $\alpha$  между выходным полем неавтономной giro-ЛВВ и внешним сигналом в виде:

$$\frac{d\alpha}{d\tau} + S(\Phi_0, A, \mu) \frac{E_0}{E_{\text{вых}}} \frac{\omega_0 v_{\parallel} \varepsilon}{c} \left( \frac{\omega_c}{\omega} - \frac{v_{\parallel}}{v_{\Phi}} \left( 1 + \frac{v_{\Phi}}{v_{\text{Гр}}} \right) \right)^{-1} \sin \alpha + \omega_0 - \Omega = 0, \quad (7.16)$$

где функцию

$$S(\Phi_0, A, \mu) = \frac{1}{\widehat{s}(\Phi_0, A, \mu)} \frac{1}{A} \quad (7.17)$$

назовем коэффициентом синхронизации.

Уравнение (7.16) описывает поведение фазы выходного поля giro-ЛВВ при воздействии на нее высокочастотного поля с частотой  $\Omega$ . Из него следует, что возможен режим синхронизации неавтономной giro-ЛВВ, который соответствует случаю постоянной разности фаз между выходным и управляющим сигналом ( $d\alpha/d\tau = 0$ ). В этом случае неавтономная генерация происходит на частоте внешнего воздействия. Максимальная величина частотной отстройки, при которой еще возможно существование синхронного режима работы, определяется условием  $\sin \alpha = \pm 1$ . Тогда ширина полосы синхронизации  $\Delta\omega = 2|\omega_0 - \Omega_s|$ , где  $\Omega_s$  — частота, соответствующая границе области синхронизации, определяется в соответствии с уравнением (7.16) выражением

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = 2S(\Phi_0, A, \mu) \frac{E_0}{E_{\text{вых}}} \frac{v_{\parallel} \varepsilon}{c} \left( \frac{\omega_c}{\omega} - \frac{v_{\parallel}}{v_{\Phi}} \left( 1 + \frac{v_{\Phi}}{v_{\text{Гр}}} \right) \right)^{-1}. \quad (7.18)$$

Из полученного соотношения следует, что ширина полосы синхронизации определяется, в первую очередь, коэффициентом синхронизации и амплитудой управляющего сигнала.

Относительная ширина полосы синхронизации  $\Delta\omega/\omega_0$ , как следует из соотношения (7.18), пропорциональна отношению амплитуд  $E_0/E_{\text{вых}}$  управляющего и выходного сигнала giro-ЛВВ.

На рис. 7.2 представлены зависимости величины коэффициента синхронизации  $S$  от основных управляющих параметров — параметра неизохронности  $\mu$  и безразмерной длины пространства взаимодействия  $A$ . Из рис. 7.2, а следует, что при  $\mu > 6,0$  величина  $S$  (а следовательно, и ширина области синхронизации  $\Delta\omega \sim S$ ) перестает меняться с ростом  $\mu$ . При  $\mu < 6,0$  для малых длин  $A < 2,5$  с увеличением параметра неизохронности область синхронизации расширяется, а при больших  $A$  — наоборот, сужается. С увеличением длины системы при постоянном параметре неизохронности наблюдается уменьшение коэффициента синхронизации и ширины области синхронизации (см. рис. 7.2, б). При больших длинах пространства взаимодействия  $A$  функция коэффициента синхронизации  $S$  при различных значениях параметра  $\mu$  аппроксимируется как  $S(\Phi_0, A, \mu) \sim 1/A$ .

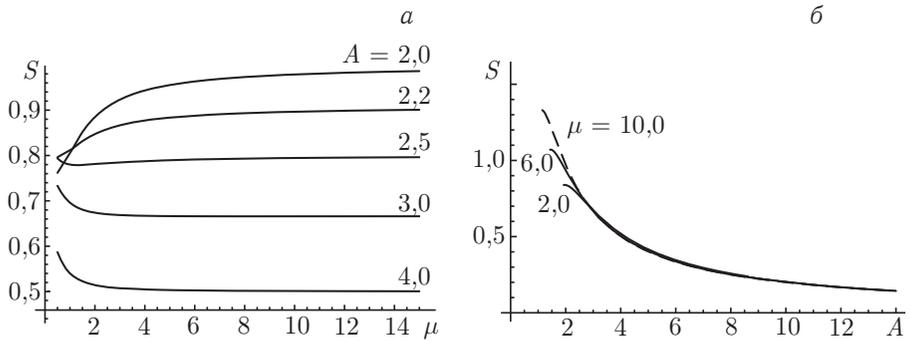


Рис. 7.2. Зависимости коэффициента синхронизации  $S$  от параметра неавтономности (а) и длины системы (б)

Уравнение (7.16) позволяет проанализировать поведение неавтономной системы и вне области синхронизации, определяемой соотношением (7.18). Перепишем для удобства рассмотрения уравнение (7.16) в виде

$$\frac{d\alpha}{d\tau} + \omega_0 \kappa \sin \alpha = \Omega - \omega_0, \quad (7.19)$$

где

$$\kappa = S(\Phi_0, A, \mu) \frac{E_0}{E_{\text{вых}}} \frac{v_{\parallel} \varepsilon}{c} \left( \frac{\omega_c}{\omega} - \frac{v_{\parallel}}{v_{\Phi}} \left( 1 + \frac{v_{\Phi}}{v_{\text{гр}}} \right) \right)^{-1}.$$

Из уравнения (7.19) следует, что при  $\kappa \geq |\Omega - \omega_0|/\omega_0$  величина  $\alpha(\tau)$  при  $\tau \rightarrow \infty$  асимптотически стремится к постоянному значению  $\alpha = \text{const}$ , что соответствует режиму синхронизации в активной среде «винтовой электронный пучок, взаимодействующий со встречной волной». При  $\kappa < |\Omega - \omega_0|/\omega_0$  не существует постоянного не зависящего от времени сдвига фаз между сигналом, генерируемым неавтономной гиро-ЛВВ и управляющим сигналом. В системе имеют место биения с периодом  $T_A$ . Зависимость величины  $T_A$  от расстройки  $|\Omega - \omega_0|$  для различных значений параметра  $\kappa$  представлена на рис. 7.3, а. Заметим, что изменение величины  $\kappa$  можно интерпретировать, учитывая, что  $\kappa \sim E_0$ , как изменение амплитуды внешнего воздействия при прочих равных параметрах. Из рис. 7.3, а следует, что период автомодуляции стремится к бесконечности при приближении к границе области синхронизации  $|\Omega - \omega_0|/\omega_0 \rightarrow \kappa$ . Одновременно видно, что с ростом амплитуды внешнего воздействия увеличивается период биений поля на выходе лампы при одинаковой величине расстройки. При увеличении величины  $|\Omega - \omega_0|$  период биений уменьшается и стремится к одинаковым величинам для различных амплитуд внешнего воздействия. Одновременно, при увеличении отстройки форма автомодуляции становится близкой к синусоидальной.

Заметим, что уравнение (7.16) (или уравнение (7.19)) можно использовать и для описания характерных особенностей пространствен-

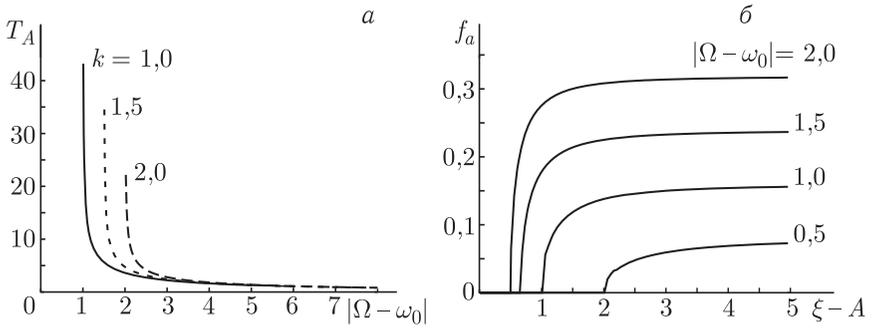


Рис. 7.3. Зависимости периода  $T_A$  биений поля на выходе giro-ЛВВ от расстройки  $|\Omega - \omega_0|$  (а) и частоты автомодуляции  $f_A$  от координаты пространства взаимодействия для различных величин расстройки ( $A = 5$ ,  $\kappa = 1,0$ ) (б)

ной динамики неавтономной giro-ЛВВ. Определяющей характеристикой неавтономных колебаний в giro-ЛВВ является коэффициент синхронизации (7.17), который, учитывая соотношения для распределения поля (7.7) и фазы поля (7.8), может рассматриваться как функция продольной координаты формальной заменой  $A \leftrightarrow \xi$ . Тогда зависимости коэффициента синхронизации  $S$  от длины системы  $A$ , представленные на рис. 7.2, а, можно интерпретировать как распределение величины  $S$  вдоль системы при фиксированном безразмерном параметре  $A$ , параметре неизохронности  $\mu$  и расстройке  $b$ .

Будем считать фазу  $\alpha = \alpha(\tau, \xi)$  не только функцией времени, но и координаты, и рассмотрим решение уравнения (7.19) в каждой точке пространства взаимодействия с учетом того, что коэффициент  $\kappa$  также является функцией координаты:  $\kappa = \kappa(\xi)$ .

Режим синхронизации имеет место при  $\kappa \geq |\Omega - \omega_0|/\omega_0$  и функция  $\kappa = \kappa(\xi)$  является спадающей с ростом  $\xi$  (при больших  $\xi$ , как было показано выше, можно считать, что  $\kappa \sim 1/\xi$ ). Тогда при малых  $\xi$  и достаточно малой расстройке всегда будет иметь место режим синхронизации, соответствующий постоянному значению фазы  $\alpha = \text{const}$ . Однако с ростом координаты  $\xi$  и уменьшением величины  $\kappa(\xi)$  может возникнуть ситуация, что и режим синхронизации разрушится. Это означает, что пространство взаимодействия лампы делится на две характерные области — область длины  $A_s$ , где имеет место режим синхронизации колебаний (область синхронизации, примыкающая к коллекторному концу лампы;  $A_s$  — длина синхронизации), и область длины  $(A - A_s)$ , в которой наблюдается разрушение режима синхронизации.

Таким образом, в неавтономной системе с длительным взаимодействием типа «винтовой электронный поток — встречная электромагнитная волна» имеют место колебания с меняющейся частотой и формой колебаний в пространстве взаимодействия. Это иллюстрирует рис. 7.3, б, на котором представлены зависимости частоты биений  $f_A$  поля  $E(\xi)$  от пространственной координаты для различных значений расстройки

$|\Omega - \omega_0|$ . Видно, что длина синхронизации  $A_s$ , то есть область, где колебания поля синхронны с внешним сигналом (этой области соответствует частота биений  $f_A = 0$ ) увеличивается с уменьшением величины  $|\Omega - \omega_0|$ .

### 7.3. Численное моделирование неавтономного поведения гироскопа

Обратимся теперь к изучению синхронизации автоколебаний в гироскопе путем численного интегрирования нелинейной нестационарной системы уравнений (1.9), (7.1). Рассмотрим влияние внешнего сигнала на режимы стационарной генерации и периодической автомодуляции. Параметры, при которых проводились исследования, следующие: безразмерная длина системы полагалась равной  $A = 3,0$ ; параметр неизохронности  $\mu = 2,0$  (в автономном режиме наблюдается стационарная генерация с амплитудой  $F = 0,42$  выходного поля) и  $\mu = 4,0$  (режим периодической автомодуляции выходного сигнала).

На рис. 7.4 представлено разбиение плоскости параметров «амплитуда  $F_0$  — частота  $\Omega$  внешнего воздействия» на характерные режимы пространственно-временных колебаний в гироскопе для режима стационарной генерации (рис. 7.4, а) и автомодуляции (рис. 7.4, б) в автономном режиме. Рассмотрим динамику генератора под воздействием управляющего сигнала более подробно.

При близости частоты внешнего воздействия  $\Omega$  к собственной частоте стационарной генерации автономной системы  $\omega_0$  в генераторе имеет место режим синхронизации (отмечен на рис. 7.4, а и 7.4, б), в котором частота выходного сигнала  $\omega$  определяется частотой  $\Omega$  внешнего воздействия, а амплитуда выходного сигнала  $F(\xi = 0, \tau)$  после окончания переходного процесса устанавливается постоянной  $F(\xi = 0, \tau) = \text{const}$  (режим стационарной генерации). В случае  $\mu = 2,0$  синхронизация колебаний наблюдается при сколь угодно малой амплитуде  $F_0$  внешнего сигнала, а область синхронизации симметрично расширяется при отстройке частоты  $\Omega$  от  $\omega_0$  при увеличении величины  $F_0$ . В случае  $\mu = 4,0$  режим стационарной генерации на частоте внешнего воздействия возникает при конечной амплитуде  $F_0$  внешнего воздействия и форма области синхронизации сильно несимметричная. При выходе из области синхронизации с изменением параметров внешнего сигнала, как видно из рис. 7.4, имеет место сложная картина перестройки колебательных режимов генератора. Рассмотрим характеристики различных колебательных режимов неавтономной системы, при необходимости снова обращаясь к рис. 7.4.

При пересечении управляющими параметрами границы области синхронизации на карте режимов (см. рис. 7.4) наблюдается переход системы в режим автомодуляции, который характеризуется тем, что амплитуда выходного сигнала генератора  $|F(\xi = 0, \tau)|$  начинает зависеть от времени. При этом в зависимости от частоты и амплитуды внешнего

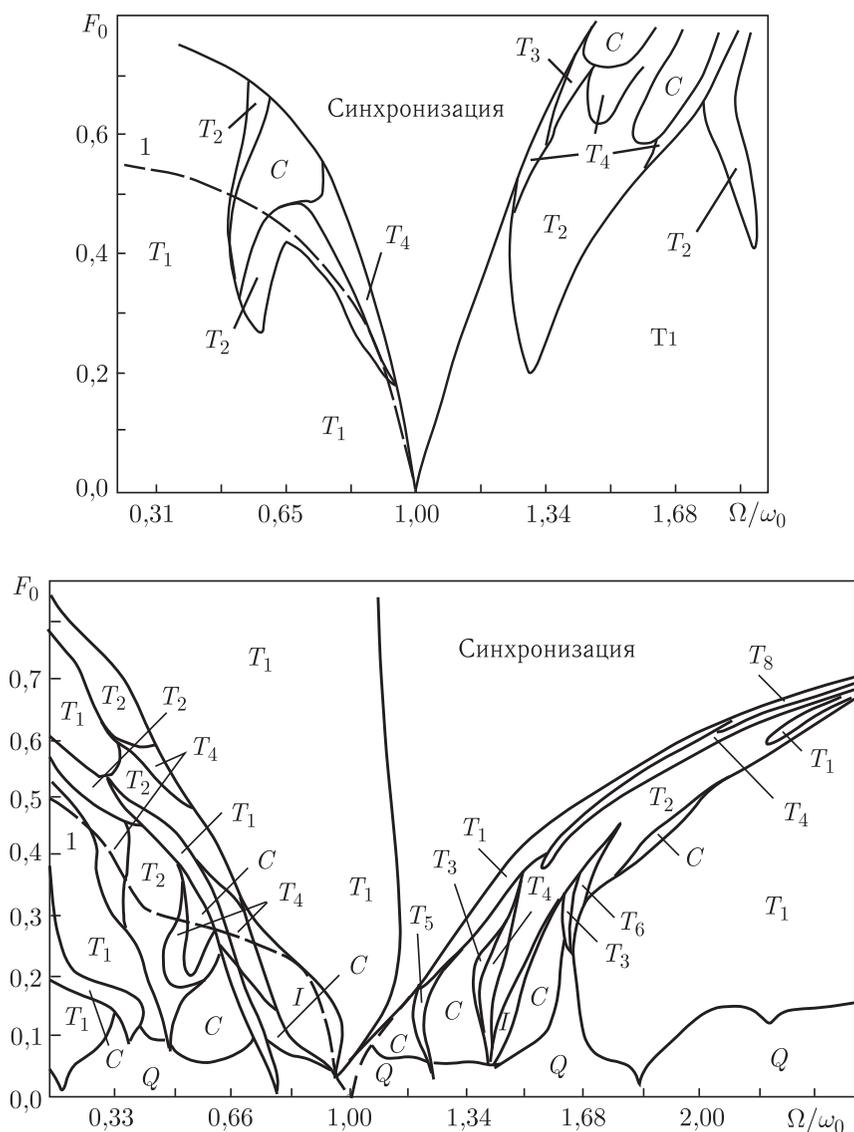


Рис. 7.4. Карты режимов на плоскости управляющих параметров «частота — амплитуда внешнего воздействия» для автономных режимов стационарной генерации (а) и периодической автомодуляции (б)

сигнала могут возникать как режимы периодической, так и хаотической автомодуляции. В последнем случае амплитуда выходного сигнала ведет себя существенно нерегулярно, имеют место колебания со сплошным спектром. На карте режимов области периодической автомодуляции обозначены символами  $T_i$ , где индекс  $i$  соответствует периоду автомодуляции, области хаотической автомодуляции — символом  $C$ .

При малой фазовой нелинейности ( $\mu = 2,0$ ) из рис. 7.4, *а* видно, что режимы периодической автомодуляции с единственной базовой частотой  $f_A = 1/T_A$  возникают при небольших амплитудах внешнего воздействия  $F_0$ . Период автомодуляции на границе области синхронизации стремится к бесконечности и с ростом расстройки плавно уменьшается (аналогично см. рис. 7.3, *а*). С ростом  $F_0$  при определенных частотах  $\Omega$  наблюдается явление удвоения периода (области  $T_2$  и  $T_4$  на карте режимов). При большой амплитуде внешнего воздействия на карте режимов наблюдается несколько областей хаотической автомодуляции. Переход к ним происходит из режимов периодической автомодуляции после одного или двух удвоений периода автомодуляции  $T_A$ .

При большом параметре неизохронности  $\mu = 4.0$  вид карты режимов вне области синхронизации существенно меняется (см. рис. 7.4, *б*). Перестройка режимов при изменении параметров внешнего воздействия достаточно сложна: имеет место большое количество переходов «порядок — хаос» и «хаос — порядок», сопровождающихся изменением различных динамических характеристик выходного сигнала генератора (спектра мощности, фазового портрета и т. д.).

При небольших амплитудах внешнего сигнала в системе наблюдаются квазипериодические автоколебания (соответствующие области на карте режимов отмечены символом  $Q$ ). В области  $(\Omega - \omega_0) < 0$ , как видно из рис. 7.4, *б*, к границе клюва синхронизации примыкает область периодической автомодуляции (область  $T_1$ ), которая с увеличением амплитуды внешнего воздействия сильно расширяется. При больших расстройках  $(\Omega - \omega_0)$  и амплитуде внешнего сигнала  $F_0$ , меньшей, чем необходимо для возникновения режимов периодической автомодуляции  $T_1$ , наблюдаются различные режимы как хаотической, так и периодической автомодуляции выходного сигнала неавтономной системы.

Выход из области периодической автомодуляции при уменьшении частоты управляющего сигнала  $\Omega$  происходит через режим перемежаемости (область на карте режимов (рис. 7.4, *б*), обозначенная символом  $I$ ). В этом случае у зависимости амплитуды  $|F|$  выходного сигнала генератора от времени наблюдаются фазы почти периодических колебаний, прерываемых короткими фазами нерегулярных движений.

При большой нелинейности  $\mu$  характер перехода системы из области синхронизации в режим модуляции амплитуды выходного поля претерпевает изменение. Так, модуляция возбуждается мягко по амплитуде, при этом частота модуляции поля имеет конечное значение  $f_A(\Omega_s) \neq 0$  на границе клюва синхронизации.

При захвате базовой частоты  $\omega$  выходного сигнала  $F(\tau) \exp(j\omega t)$  внешним сигналом с частотой  $\Omega$  имеет место следующее важное явление, названное в работах [15, 17–19] квазисинхронизацией автоколебаний. Под режимом синхронизации понимается режим стационарной генерации на частоте внешнего сигнала. Однако область захвата базовой частоты генерируемого сигнала существенно больше, чем область

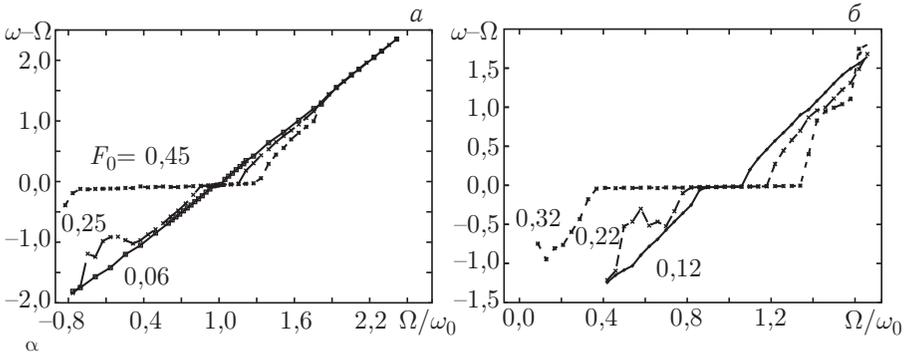


Рис. 7.5. Разность частот  $(\Omega - \omega)$  внешнего воздействия и колебаний при различных амплитудах внешнего сигнала для случая  $\mu = 2,0$  (а) и  $\mu = 4,0$  (б)

стационарной генерации на частоте внешнего поля (область, отмеченная как *режим синхронизации* на рис. 7.4).

Будем называть неавтономный режим генерации распределенной системы, в котором высокочастотные автоколебания происходят на частоте внешнего управляющего сигнала, режимом *квазисинхронизации*. В режиме квазисинхронизации огибающая выходного ВЧ поля  $|F(\tau)|$  может демонстрировать сложную динамику (низкочастотную модуляцию выходного поля).

Рис. 7.5 иллюстрирует вышесказанное. На нем представлены зависимости разности частот  $(\omega - \Omega)$  высокочастотных колебаний на выходе системы от нормированной частоты управляющего сигнала  $\Omega/\omega_0$  при различных амплитудах  $F_0$  при  $\mu = 2,0$  (рис. 7.5, а) и  $\mu = 4,0$  (рис. 7.5, б).

Из сравнения рис. 7.4 и рис. 7.5 видно, что область захвата частоты со стороны больших частот совпадает с границей области модуляции выходного поля (и соответственно области синхронизации), а со стороны меньших частот (справа на рис. 7.4) частота внешнего воздействия, при которой имеет место захват частоты, лежит существенно левее границы режима стационарной генерации. Граница области захвата базовой частоты генерации (режима квазисинхронизации) нанесена на рис. 7.4 штриховой линией (кривая 1). Заметим, что линия 1 и граница области синхронизации не совпадают при любой сколь угодно малой амплитуде внешнего воздействия  $F_0$  как в случае малой ( $\mu = 2,0$ ; рис. 7.4, а), так и большой фазовой нелинейности ( $\mu = 4,0$ ; рис. 7.4, б).

В режиме квазисинхронизации генерация высокочастотного излучения имеет место на частоте  $\omega_0 \approx \Omega$ , а амплитуда выходного поля  $|F|$  медленно меняется с временным масштабом  $T_A$ . Область квазисинхронизации исследуемой неавтономной системы соответствует области на карте режимов (см. рис. 7.4) между линией 1 и правой границей клюва синхронизации (см. рис. 7.5).

При выходе из области квазисинхронизации частота ВЧ генерации при увеличении отстройки частоты внешнего воздействия  $\Omega$  от частоты

генерации  $\hat{\omega}$  автономной системы стремится к частоте автономной генерации.

Таким образом, можно говорить о «расщеплении» границы клюва синхронизации при воздействии внешнего гармонического сигнала на автоколебания в распределенной активной среде «винтовой электронный пучок — встречная электромагнитная волна». Если под синхронизацией понимать установление в активной среде колебаний на частоте управляющего воздействия  $\Omega$  и без дополнительных спектральных компонент в спектре мощности генерации (то есть с неизменяющейся во времени амплитудой поля  $|F|$ ), то граница области синхронизации соответствует области стационарной генерации на карте режимов (сплошная линия на рис. 7.4). Другая ситуация складывается, если под синхронизацией понимать только захват базовой частоты в спектре мощности генерации гиро-ЛВВ управляющим сигналом, так что  $|\Omega - \omega| = \text{const}$ . В последнем случае стоит говорить о режиме *квазисинхронизации*, который занимает существенно большую область на плоскости управляющих параметров  $(\Omega/\omega_0, F_0)$ . При этом в режиме квазисинхронизации амплитуда выходного сигнала  $|F(\xi = 0, \tau)|$  может вести себя достаточно сложно во времени, совершая как периодические, так и хаотические колебания. Вместе с тем ВЧ генерация в системе происходит на частоте внешнего воздействия.

Рассмотрим физические процессы, сопровождающие перестройку режимов колебаний в гиро-ЛВВ под воздействием внешнего управляющего сигнала с амплитудой  $F_0$  и частотой  $\Omega$ .

Частота ВЧ генерации определяется как поправка  $\omega$  к частоте «холодного» синхронизма  $\hat{\omega}$ . Частота  $\omega_0$  определяется фазой  $\varphi_F(\xi, \tau)$  поля  $F(\xi, \tau) = |F(\xi, \tau)| \exp\{j\varphi_F(\xi, \tau)\}$ . В режиме одночастотной ВЧ генерации поправка  $\omega_0$  к частоте может быть представлена в виде

$$\omega_0 = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{\varphi_F(0, \tau)}{\tau}. \quad (7.20)$$

Если считать фазу  $\varphi_F(\xi, \tau)$  периодической функцией с периодом  $2\pi$ , то есть рассматривать функцию

$$\overline{\varphi}_F(\xi, \tau) = \varphi_F(\xi, \tau) \bmod 2\pi, \quad (7.21)$$

то  $\overline{\varphi}_F$  ведет себя периодически с периодом  $1/\omega_0$  (см. рис. 7.6, а, на котором представлены проекции распределения поля  $|F|$  и фазы поля  $\overline{\varphi}_F$  на плоскость  $(\xi, \tau)$  в режиме стационарной автономной генерации). В режиме сложной динамики фазы  $\overline{\varphi}_F(\tau)$  частота  $\omega_0$ , находящаяся из соотношения (7.20), определяет характерный временной масштаб ВЧ генерации.

Квазисинхронизация колебаний, то есть генерация ВЧ излучения на частоте  $\omega_0 = \Omega$ , соответствует периодическим колебаниям фазы  $\overline{\varphi}_F$  с частотой  $\Omega$ . При этом амплитуда выходного ВЧ поля  $|F|$  может

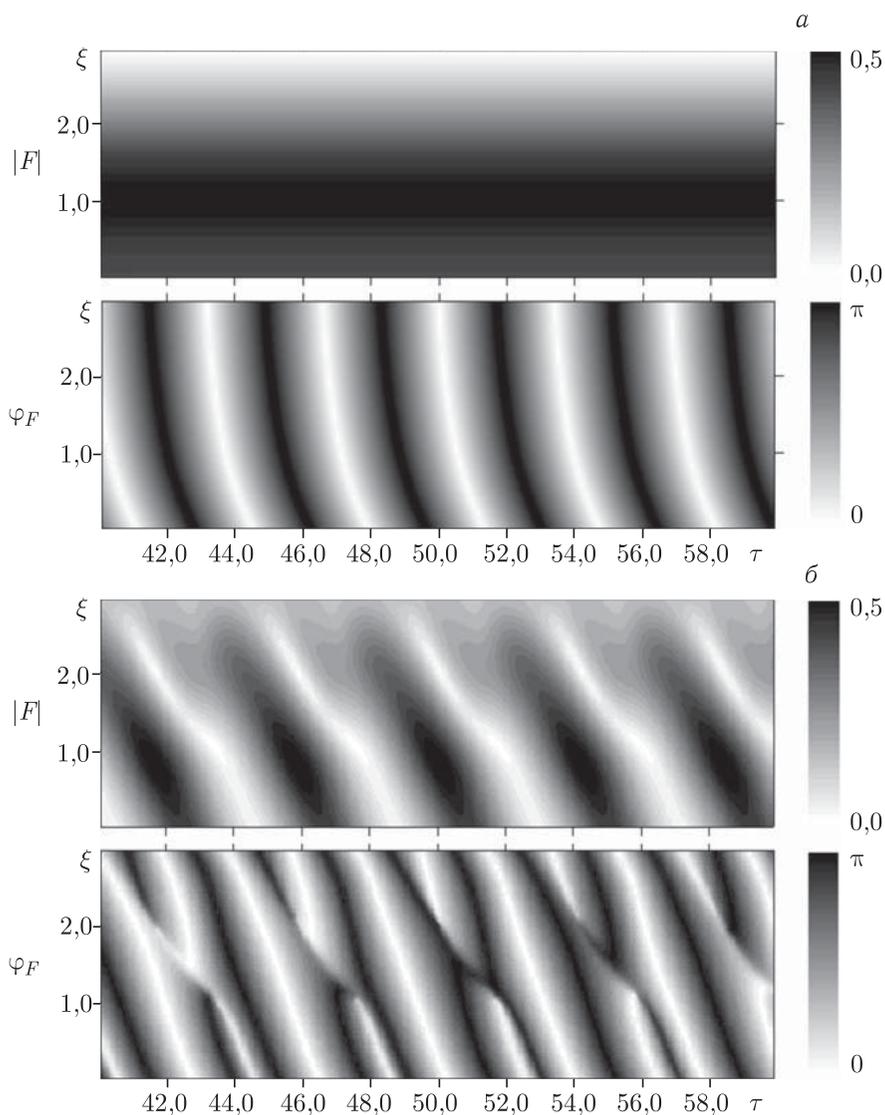
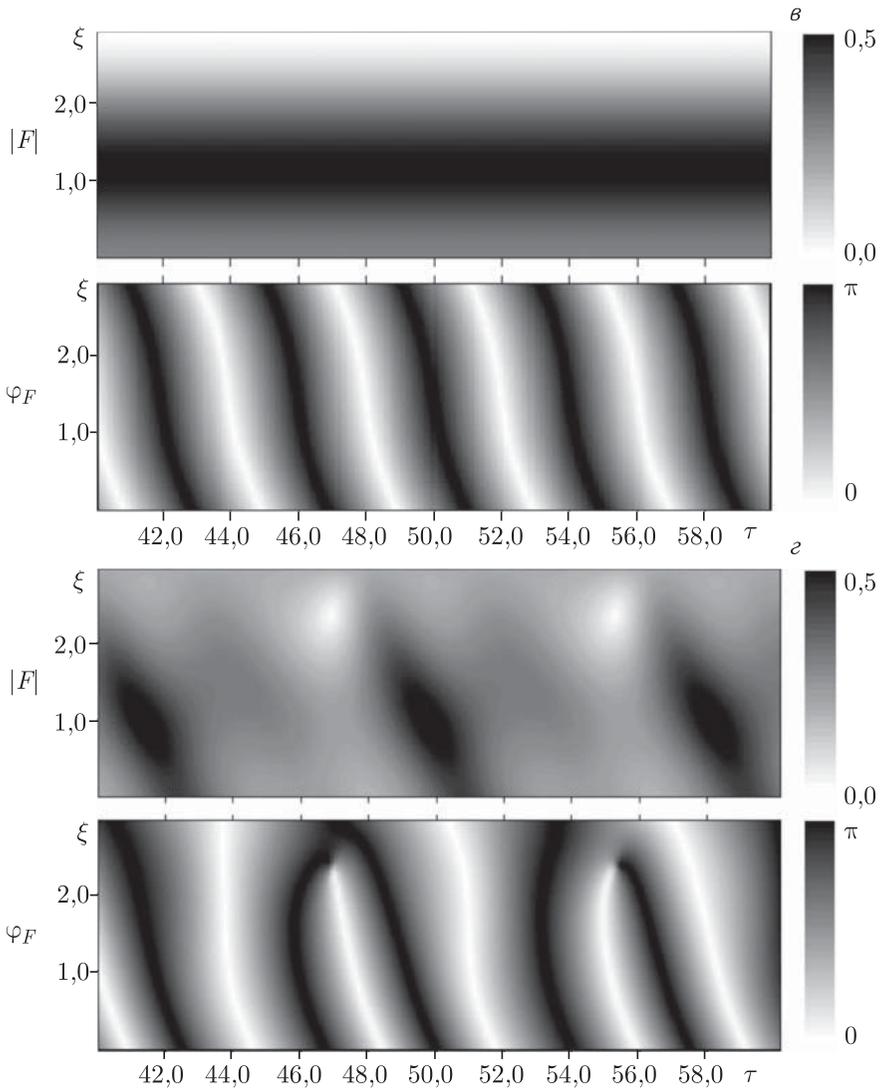


Рис. 7.6. Пространственно-временные распределения амплитуды и фазы поля при  $\mu = 2,0$  (построенные при амплитуде внешнего воздействия  $F_0 = 0,3$ ). а) Автономный режим генерации; б) режим автомодуляции с периодом 1, отличный от квазисинхронизации

вести себя во времени достаточно сложно, демонстрируя как режимы периодической, так и хаотической автомодуляции.

Рассмотрим подробнее поведение амплитуды и фазы поля  $F$  в гиро-ЛВВ в области синхронизации и вне ее при малой неизохронности  $\mu = 2,0$ . На рис. 7.6, б-г показаны пространственно-временные распре-



Продолжение рис. 7.6. а) Режим стационарной генерации, область синхронизации; б) режим автомодуляции с периодом 2, отличный от режима квазисинхронизации

деления амплитуды и фазы поля  $F(\xi, \tau)$ , построенные для различных режимов неавтономной генерации gyro-ЛВВ.

Как показывает анализ рис. 7.6, б и 7.6, г, в режиме, отличном от режимов квазисинхронизации и синхронизации, пространство взаимодействия можно условно разделить на две области. В первой, примыкающей к коллекторному концу системы  $\xi = A$ , колебания фазы  $\varphi_F$  происходят с частотой внешнего воздействия  $\Omega$ . Далее в достаточно узкой

области пространства взаимодействия наблюдается резкое изменение величины фазы поля  $\overline{\varphi}_F$ , которая практически скачком изменяется на величину  $\pi$ . В области вблизи выхода системы  $\xi = 0$  колебания фазы имеют место на частоте  $\omega$  отличной от  $\Omega$ . То есть пространство взаимодействия неавтономной системы делится на две характерные области пространственно-временных колебаний — область синхронных с управляющим сигналом временных колебаний и область, в которой имеют место колебания на частоте отличной от частоты управляющего сигнала. Эти две характерные области разделены узкой областью, в которой наблюдаются резкие скачкообразные изменения фазы поля  $\overline{\varphi}_F$ . С увеличением отстройки  $(\Omega - \Omega_s) < 0$  от границы клюва квазисинхронизации  $\Omega_s$  область пространства, в которой наблюдаются синхронные колебания, уменьшается.

В режиме квазисинхронизации колебания во всем пространстве взаимодействия происходят на частоте внешнего воздействия  $\Omega$ . На проекции распределения  $\overline{\varphi}_F(\xi, \tau)$  (рис. 7.6, в) имеет место периодическая картина, идентичная наблюдаемой в случае автономных колебаний (см. рис. 7.6, а), но с частотой  $\omega_0 = \Omega$ .

При большой неизохронности  $\mu > 3.0$ , соответствующей автомодуляции выходного сигнала гиро-ЛВВ в автономном режиме, картина разрушения состояния квазисинхронизации при отрицательной отстройке  $(\Omega - \Omega_s) < 0$  выглядит аналогично. На рис. 7.7, а представлены распределения  $|F(\xi, \tau)|$  и  $\overline{\varphi}_F(\xi, \tau)$ , построенные при  $\mu = 4.0$  и параметрах внешнего сигнала, соответствующих области вблизи границы клюва квазисинхронизации. Амплитуда выходного сигнала  $|F|$  в этом случае ведет себя сложным образом, демонстрируя хаотическую автомодуляцию. Последнее хорошо видно на пространственно-временном распределении амплитуды  $|F|$  поля (см. рис. 7.7, а). Что касается распределения  $\overline{\varphi}_F$ , которое определяет частоту генерации системы в данном режиме, то оно близко к характерному для режима квазисинхронизации (это выражается в отсутствии резких скачков фазы поля). При этом фаза в пространстве ведет себя нерегулярным образом, характерная частота генерации  $\omega_0 < \Omega$ . Однако, как и раньше, в области вблизи правого конца системы динамика фазы регулярна и происходит на частоте, равной частоте управляющего сигнала  $\Omega$ .

При положительной отстройке  $(\Omega - \Omega_s) > 0$  и большой величине параметра неизохронности  $\mu$  ситуация меняется. В этом случае в области, примыкающей к правой границе системы  $\xi = A$ , наблюдаются не колебания на частоте внешнего сигнала  $\Omega$ , как было при малом  $\mu$ , а имеют место квазипериодические колебания с базовыми частотами  $\omega_0$  и  $\Omega$ . Это хорошо видно из анализа пространственно-временного распределения фазы  $\overline{\varphi}_F$  (см. рис. 7.7, б), построенного для режима периодической автомодуляции, не соответствующей области квазисинхронизации.

Возникновение автомодуляционных режимов в исследуемой системе под воздействием управляющего сигнала определяется, во-первых,

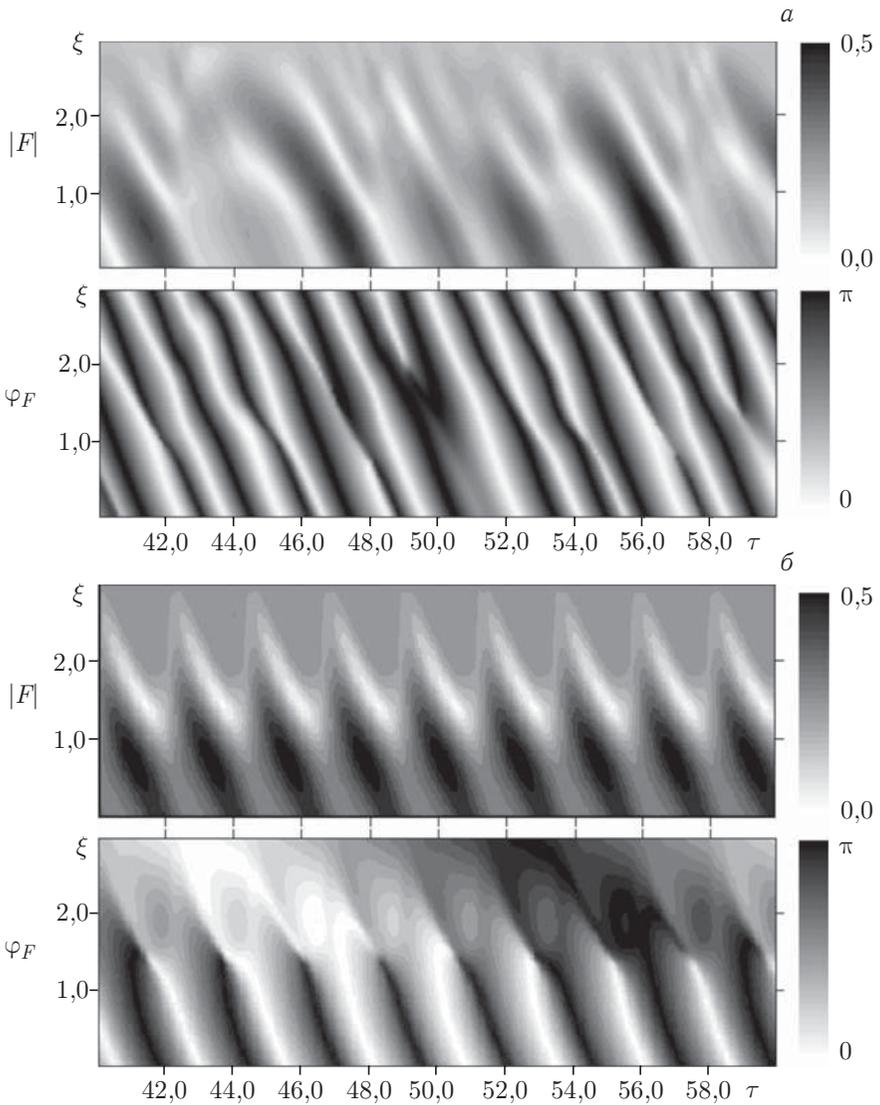


Рис. 7.7. Пространственно-временные распределения амплитуды и фазы поля при  $\mu = 4,0$  (построенные при амплитуде внешнего воздействия  $F_0 = 0,32$ ): а) область вблизи границы клюва квазисинхронизации, хаотическая автомодуляция амплитуды выходного сигнала ( $\Omega/\omega_0 = 1,8$ ); б) режим периодической автомодуляции, не соответствующий области квазисинхронизации ( $\Omega/\omega_0 = 0,14$ )

запаздывающим характером обратной связи [20], и, во-вторых, перегруппировкой электронов в сильном поле [6, 21], то есть с амплитудной нелинейностью системы.

На рис. 7.8, а представлены распределения сгруппированного тока  $|I(\xi)|$  (сплошная линия) и поля  $|F(\xi)|$  (штриховая линия) в режи-

ме стационарной генерации (параметр неизохронности  $\mu = 2,0$ ) в автономном режиме работы гиро-ЛВВ. Оба распределения имеют вид функций с одним максимумом. Это соответствует формированию на длине пространства взаимодействия одного фазового сгустка в потоке электронов-осцилляторов. Падение величины  $|I(\xi)|$  к концу пространства взаимодействия  $\xi = A$  свидетельствует о разгруппировке фазового сгустка. При малых амплитудах внешнего воздействия в режиме синхронизации качественно вид распределений тока и поля не меняется (см. рис. 7.8, б, соответствующий границе области синхронизации).

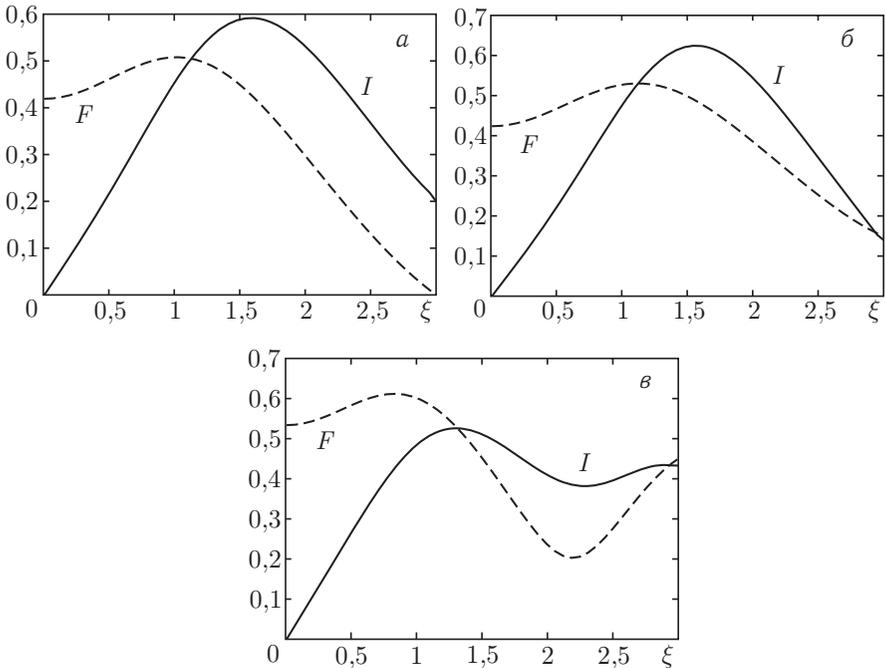


Рис. 7.8. Распределения амплитуды тока  $|I(\xi)|$  (сплошная линия) и поля  $|F(\xi)|$  (штриховая линия): а) при стационарной генерации (параметр неизохронности  $\mu = 2,0$ ) в автономном режиме; б) в неавтономном режиме при малых амплитудах внешнего воздействия, соответствующем границе области синхронизации (режим стационарной генерации на частоте внешнего воздействия); в) в неавтономном режиме, соответствующем периодической автомодуляции выходного сигнала (большая амплитуда внешнего воздействия)

При выходе из области синхронизации влияние внешнего сигнала сказывается в нарушении фазовых соотношений, соответствующих режиму стационарной генерации, между комплексными амплитудами поля  $F$  и тока  $I$ . Как следствие этого, режим синхронизации со стационарными распределениями тока и поля вдоль системы теряет устойчивость. Это связано с возникновением дополнительной распределенной обратной связи в системе: сгруппированный в сильном поле винтовой

электронный пучок приходит к коллекторному концу системы  $\xi = A$  со скоростью  $v_{\parallel}$  уже перегруппировавшись; возбуждаемое сгруппированным током поле смещается со скоростью  $v_g$  к входному концу  $\xi = 0$  системы; сгруппированный в слабом поле пучок возбуждает теперь сильное поле, в котором винтовой электронный пучок и перегруппировывается. Таким образом, при переходе частоты  $\Omega$  границы области синхронизации при данном  $F_0$  ранее стационарные распределения  $|I|$  и  $|F|$  начинают смещаться в сторону  $\xi = 0$ , причем максимум поля растет по величине при движении из-за взаимодействия с волной тока, пока не достигнет конца системы (точки  $\xi = 0$ ). Из оставшегося распределения  $F(\xi)$  под влиянием внешнего поля опять выделяется основной тип колебаний, и процесс периодически повторяется с временным масштабом  $T_A$ .

Следует заметить, что при большой величине параметра неизохронности ( $\mu > 3,0$ ), когда в автономной системе наблюдается автомодуляция амплитуды выходного сигнала, при воздействии на систему гармоническим сигналом в режиме синхронизации удается разорвать дополнительную внутреннюю обратную связь. Это обусловлено тем, что внешний управляющий сигнал «навязывает» исследуемой системе некоторое распределение фазы поля  $\varphi_F$  в пространстве взаимодействия, которое характеризуется отсутствием резких скачков фазы в пространстве и соответствует оптимальному в смысле возникновения режима стационарной генерации фазовому соотношению между волнами тока  $I$  и поля  $F$  в giro-ЛВВ.

Ситуация меняется при росте амплитуды внешнего воздействия  $F_0$ . В этом случае влияние внешнего сигнала приводит к разгруппировке и далее к формированию вторичного фазового сгустка. Как следствие, распределения тока и поля вдоль пространства взаимодействия приобретают двугорбый вид (см. рис. 7.8, в, соответствующий области синхронизации; на зависимости  $|I(\xi)|$  появляется второй максимум в области  $\xi > 2,5$ ). При потере устойчивости режима, характеризуемого «многогорбыми» распределениями поля и тока, при выходе из области синхронизации за время прохода излучения вдоль длины системы успевают сформироваться не один как при малой амплитуде  $F_0$ , а два или четыре максимума. Поэтому при выходе из области синхронизации и потери устойчивости режима стационарной генерации возникают режимы автомодуляции с периодом 2 и 4.

Учитывая все вышесказанное, можно, как и при анализе фазовой синхронизации в рамках линейной стационарной теории, ввести длину синхронизации  $A_s$  (совпадающую с длиной области синхронных колебаний  $\xi \in (A - A_s, A)$ ), на которой имеют место высокочастотные колебания на частоте внешнего воздействия  $\Omega$ . Далее в области пространства взаимодействия  $\xi \sim A_s$  имеет место разрушение режима синхронизации, которое связано с резкими скачками фазы поля и, как следствие, с изменением внутренней структуры электронного пучка (фазовой перегруппировкой электронов-осцилляторов винтового

пучка). Разрушение режима синхронизации на длине синхронизации  $A_s$  определяется нарушением фазовых соотношений между волной тока и поля, приводящим к возникновению более сложной структуры пространственно-временных распределений поля  $F$ . При фиксированных безразмерной длине системы  $A$  и параметре неизохронности  $\mu$  «паразитный» набег фазы поля, возникающий за счет воздействия на систему управляющего сигнала с амплитудой  $F_0$  и приводящий на длине синхронизации  $A_s$  к разрушению режима колебаний на частоте внешнего воздействия, постоянен и не зависит от частоты внешнего воздействия. Обозначая «паразитный» набег фазы через  $\Delta\varphi$  запишем, что  $\Delta\varphi = |\Omega - \omega_0|A_s/v_g$  или, выражая величину  $A_s$ , окончательно получаем выражение для длины синхронизации

$$A_s = \frac{\Delta\varphi v_g}{|\Omega - \omega_0|}. \quad (7.22)$$

Зависимость набег фазы  $\Delta\varphi$  от амплитуды внешнего поля при малых  $F_0$  может быть представлена как  $\Delta\varphi = \chi F_0$ , где  $\chi$  — коэффициент пропорциональности, зависящий при фиксированной длине системы от параметра неизохронности  $\mu$ . Это определяется тем, что при небольшом увеличении амплитуды внешнего поля  $F_0$  имеет место уменьшение фазовой разгруппировки и последующей перегруппировки электронов-осцилляторов винтового потока, приводящее к нарушению фазового соотношения  $\Delta\varphi$  и, как следствие, сохранению режима синхронных колебаний на бóльшей длине пространства  $A_s$ .

Границе области квазисинхронизации соответствует длина синхронизации, равная длине пространства взаимодействия  $A_s = A$ . Тогда из соотношения (7.22) следует, что для границы области квазисинхронизации на плоскости  $(\Omega, F_0)$  можно записать

$$|\Omega_s - \omega_0| = \frac{\chi v_g}{A} F_0 = \text{const } F_0, \quad (7.23)$$

где частота  $\Omega_s$  соответствует границе клюва.

Полученные в результате численного моделирования в рамках нелинейной нестационарной теории феноменологические выражения для границы клюва синхронизации (7.23) и длины синхронизации (7.22) хорошо подтверждают представленные в начале раздела результаты анализа фазовой синхронизации giro-ЛВВ в рамках линейной стационарной теории. Последняя позволила правильно предсказать форму границы области синхронизации при малых амплитудах внешнего воздействия  $F_0$ , качественно описать характеристики асинхронного режима (амплитуду и частоту автомодуляции). Более того, в рамках стационарной линейной теории удалось правильно описать пространственную динамику в неавтономной активной среде — было получено, что синхронизация автоколебаний имеет место только на некоторой длине  $A_s$  (длине синхронизации), которая зависит как от парамет-

ров активной среды, так и от характеристик управляющего сигнала. Вместе с тем, линейная стационарная теория не позволила описать наблюдаемое в численном эксперименте явление расщепления клова синхронизации и возникновение режимов квазисинхронизации, когда ВЧ генерации имеет место на частоте внешнего воздействия  $\omega = \Omega$ , одновременно демонстрируя нестационарную во времени динамику медленно меняющейся амплитуды поля  $|F(\tau)|$ .

#### 7.4. Длительность установления синхронного режима

Остановимся теперь на важном с прикладной точки зрения вопросе: как быстро будет происходить процесс установления режима синхронизации (т. е. какова будет длительность переходного процесса) в активной среде «винтовой электронный пучок — встречная электромагнитная волна». Последнее очень важно при синхронизации системы, работающей в импульсном режиме, когда необходимо уменьшить длительность установления синхронного режима. Рассмотрим зависимость длительности установления режима синхронизации в гиро-ЛВВ, следуя работе [22].

В вышеупомянутой работе рассматривается вопрос о том, какое влияние оказывает начальная разность фаз ВЧ поля в режиме стационарной генерации и внешнего воздействия на длительность интервала времени, за который осуществляется синхронизация распределенной системы. Предполагается, что внешнее воздействие вида  $F_{\text{вн}} = F_0 \exp[j(\Omega\tau + \varphi)]$  включается, когда в автономной гиро-ЛВВ завершается переходной процесс и устанавливается режим стационарной генерации. Начальная фаза внешнего сигнала  $\varphi$  меняется от 0 до  $2\pi$ , тогда как момент времени, в который включается внешнее воздействие, остается фиксированным.

На рис. 7.9 для различных сечений  $\xi$  пространства взаимодействия лампы показаны зависимости длительности  $D$  установления режима синхронизации от начальной фазы внешнего поля  $\varphi$ , с которой подается внешний синхронизирующий сигнал. Управляющие параметры исследуемой модели (1.9), (7.1) выбраны следующими:  $A = 3,0$ ,  $\mu = 2,0$ ,  $F_0/\bar{F} = 0,1$  и  $\Omega/\omega_0 = 0,0154$ , где  $\bar{F}$  и  $\omega_0$  — амплитуда и частота автономных колебаний.

Из рисунка следует, что длительность переходного процесса сильно зависит от начальной фазы входного сигнала и имеет четко выраженные максимум и минимум, причем максимальная и минимальная длительности установления режима синхронизации отличаются примерно на порядок. Минимальная длительность переходного процесса составляет величину  $T_{\text{min}} < 20,0$ , которая соответствует всего 2–3 характерным временам  $\tau_A$  запаздывания распределенной обратной связи исследуемого генератора. Характерное время реакции системы на внешнее воздействие определяется длиной лампы  $A$ , груп-

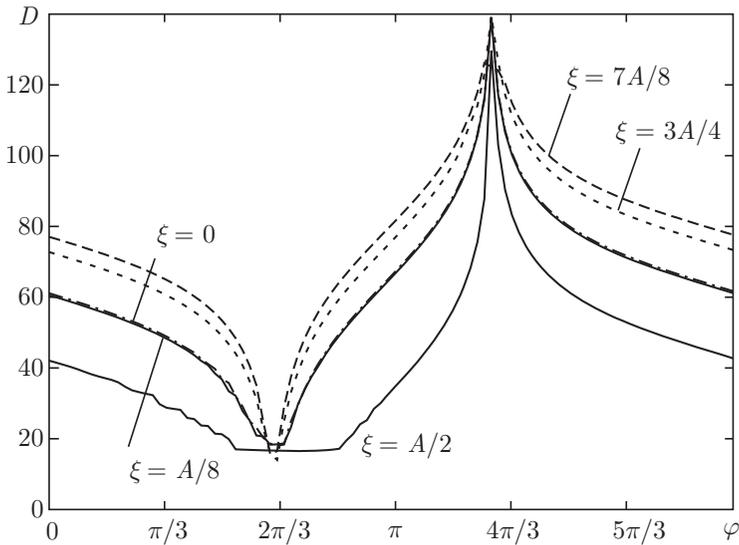


Рис. 7.9. Длительность  $D$  установления режима синхронизации в активной распределенной среде «винтовой электронный поток — встречная электромагнитная волна» как функция фазы внешнего поля для различных сечений пространства взаимодействия

повой скоростью распространения волны в волноведущей структуре  $v_g$  и переносной скоростью пучка  $v_{\parallel}$ . Внешнее поле, подаваемое на вход лампы, распространяется навстречу пучку, производя модуляцию винтового электронного потока, который, в свою очередь, переносит эту информацию ко входу (коллекторному концу) лампы со скоростью  $v_{\parallel}$ , возбуждая в волноведущей системе встречную электромагнитную волну, поле которой складывается с внешним полем. В результате характерное время равно  $\tau_A \approx A(1/v_g + 1/v_{\parallel})$ , что в безразмерных переменных составляет величину  $\tau_A \approx 6,0$ .

Последнее означает, что при оптимальной фазе внешнего поля происходит сверхбыстрая синхронизация распределенной автоколебательной системы со встречной волной, которая осуществляет обратную связь. В случае максимальной длительности  $T$  установление режима синхронизации осуществляется за времена  $T > 20\tau_A$ .

Сравнивая зависимости  $D(\xi)$  длительности переходного процесса, построенные для различных сечений пространства взаимодействия лампы (см. рис. 7.9), можно видеть, что в режиме сверхбыстрой синхронизации наблюдается практически одновременное установление синхронного режима во всем объеме активной среды. При фазах  $\varphi$  внешнего поля, отличных от оптимальной, длительность переходного процесса различна в различных сечениях лампы. Наиболее короткий переходной процесс имеет место в середине пространства взаимодействия  $\xi = A/2$ .

## 7.5. Переходной хаос вблизи границы синхронизации

И в заключение главы отметим, что вблизи правой границы клова синхронизации неавтономной гиро-ЛВВ наблюдается явление, называемое переходным хаосом. Под переходным хаосом в отличие от «классического» динамического хаоса (образом которого в фазовом пространстве является странный аттрактор, к которому асимптотически стремятся фазовые траектории из определенной области фазового пространства при  $t \rightarrow \infty$  [23–25], в нелинейных динамических системах понимается следующее [26]: в фазовом пространстве системы, демонстрирующей переходной хаос, существует так называемое «хаотическое седло» (*chaotic saddle*) — хаотическое множество в фазовом пространстве, которое является неустойчивым по одному из направлений. Фазовая траектория, стартуя из точек фазового пространства, лежащих вблизи хаотического седла, долгое время демонстрирует непериодическое поведение, после чего покидает его окрестность по неустойчивому направлению и достигает аттрактора, который может быть как периодическим, так и хаотическим.

Неустойчивое хаотическое множество может быть охарактеризовано в тех же терминах, что и странный аттрактор (размерность, показатели Ляпунова и т. д.). В этом случае подсчет соответствующих характеристик осуществляется по ансамблю сравнительно коротких временных реализаций, описывающих переходной хаотический процесс в рассматриваемой системе. При этом, как правило, используется процедура «сшивания» временных реализаций. В большинстве случаев переходной хаос изучается на примере относительно простых конечномерных систем с дискретным и непрерывным временем.

Как следует из проведенных исследований, в гиро-ЛВВ в неавтономном режиме наблюдается явление переходного хаоса [27, 28]. На рис. 7.10 представлены характерные временные реализации выходного сигнала  $F(\xi = 0, \tau)$  в режиме переходного хаоса, полученные при различных амплитудах начального возмущения.

Из рис. 7.10 видно, что в зависимости от амплитуды начального возмущения длительность переходного процесса различна, но, в итоге, в гиро-ЛВВ устанавливается режим стационарной генерации на частоте внешнего воздействия. Длительный переходной процесс носит нерегулярный хаотический характер, что свидетельствует о наличии в системе явления переходного хаоса.

Для изучения характеристик переходного хаоса необходимо создать искусственную длинную временную реализацию, представляющую собой сшитые короткие отрезки переходных процессов, соответствующие переходному хаосу. Для анализа режима переходного хаоса и процедуры сшивания коротких временных реализаций, характеризующих неустойчивый режим переходного хаоса, использовались временные ряды, порождаемые колебаниями амплитуды поля  $|F(\tau)|$ , снимаемого с выхода системы  $\xi = 0$ .

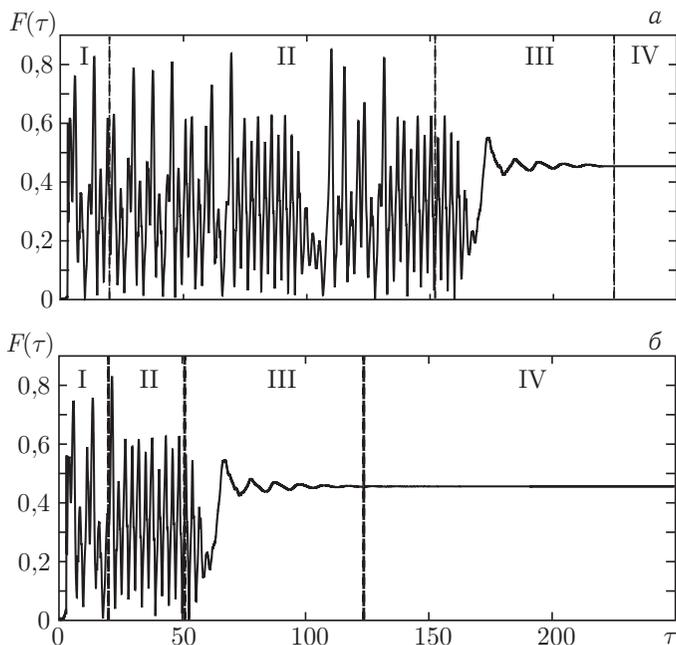


Рис. 7.10. Типичные временные реализации амплитуды выходного сигнала неавтономной гиро-ЛВВ в режиме переходного хаоса. Реализации построены для различных амплитуд начального возмущения. Вертикальными штриховыми линиями показаны различные участки временной реализации системы, находящейся в режиме переходного хаоса: I — эволюция системы от начального состояния до неустойчивого хаотического режима; II — собственно, сам режим переходного хаоса; III — выход системы на асимптотический режим, IV — конечное асимптотически устойчивое состояние. Видно, что после длительного нерегулярного переходного процесса в системе устанавливается режим стационарной генерации

Временная реализация, порождаемая исследуемой системой в режиме переходного хаоса, может быть «разделена» на четыре части (см. рис. 7.10): I — эволюция системы от начального состояния до неустойчивого хаотического режима, II — собственно, сам режим переходного хаоса, III — выход системы на асимптотический режим, IV — конечное асимптотически устойчивое состояние. Непосредственную информацию о неустойчивом хаотическом седле предоставляет участок II временной реализации, в то время как участки I, III и IV соответствуют другим состояниям системы. Поэтому для анализа характеристик хаотического седла, существующего в фазовом пространстве системы, необходимо «отбросить» участки I, III и IV временной реализации [26], чтобы затем «склеить» участки реализации, отвечающие хаотическому (но неустойчивому) режиму. Подобный подход позволяет затем применить к полученной искусственно длинной временной реализации стандартные методы анализа (см., например, [29–31]).

Одним из возможных способов получения искусственно длинной временной реализации является непосредственное «объединение» усеченных временных реализаций друг с другом. При этом переменная  $F$  получаемой новой искусственно длинной реализации в моменты времени, соответствующие «объединению» различных усеченных реализаций, может претерпевать разрыв, то есть

$$\lim_{t \rightarrow T_n - 0} F(t) \neq \lim_{t \rightarrow T_n + 0} F(t), \quad (7.24)$$

где  $T_n$  — моменты времени, соответствующие «объединению» усеченных временных реализаций.

При восстановлении аттрактора в фазовом пространстве методом задержек (методом Такенса) [32, 33] по такой искусственно полученной длительной временной реализации возникает, однако,  $J$  ложных точек аттрактора [26]:

$$J = d \frac{T}{\Delta\tau} (n - 1), \quad (7.25)$$

где  $T$  — длительность задержки;  $n$  — количество усеченных временных реализаций, объединяемых в одну;  $d$  — размерность фазового пространства, в котором восстанавливается аттрактор;  $\Delta\tau$  — шаг по времени.

Другой, более корректный способ получения подобной реализации заключается в том, чтобы обеспечить «сшивание» участков двух различных временных реализаций. Пусть  $x(t)$  и  $y(t)$  — две различные временные реализации, которые должны быть «сшиты». Если аттрактор будет восстанавливаться в  $d$ -мерном фазовом пространстве, то для «сшивания» фазовых траекторий должно выполняться условие

$$\sqrt{\sum_{i=0}^{d-1} (x(t_1 + i \times T) - y(t_2 + i \times T))^2} < \varepsilon, \quad (7.26)$$

где  $\varepsilon$  — точность, с которой осуществляется «сшивание» реализаций (в работе было выбрано  $\varepsilon = 2,5 \cdot 10^{-3}$ ),  $t_1$  и  $t_2$  — моменты времени для реализаций  $x(t)$  и  $y(t)$ , в которые происходит их «сшивание». Условие (7.26) может быть заменено на аналогичное

$$|x(t_1 + i \times T) - y(t_2 + i \times T)| < \varepsilon, \quad i = \overline{0, \dots, d-1}. \quad (7.27)$$

Для процедуры (7.27) сшивания временных реализаций необходимо знание размерности фазового пространства  $d$ , в которое вкладывается восстановленный хаотический аттрактор, соответствующий режиму переходного хаоса. Оценим величину  $d$ , рассчитав корреляционную размерность  $D$  аттрактора [29, 30], восстановленного по искусственной длинной временной реализации, созданной без процедуры сшивания, для различных, увеличивающихся значений размерности пространства

вложения  $d = 2, 3, 4, \dots$ . Размерность фазового пространства будет равна величине размерности пространства вложения  $d$ , при которой величина корреляционной размерности  $D$  насыщается [34].

Конечно, такая оценка является не совсем точной, учитывая наличие «ложных» точек в фазовом пространстве, однако, как было показано в работе [35], оценка корреляционной размерности по коротким отрезкам хаотических временных реализаций является достаточно достоверной. Поэтому предложенная методика может быть использована для оценки размерности фазового пространства  $d$ . Далее, осуществив процедуру корректного сшивания коротких временных рядов, проверим полученные результаты по расчету корреляционной размерности с использованием искусственной длинной хаотической реализации.

Корреляционная размерность аттрактора  $D$  есть функция масштаба наблюдения  $\varepsilon$ :

$$D(\varepsilon) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln C(\varepsilon, d)}{\ln \varepsilon}, \quad (7.28)$$

где  $C(\varepsilon, d)$  — число пар точек, расстояние между которыми в псевдофазовом пространстве размерности  $d$  меньше  $\varepsilon$  (редуцированный корреляционный интеграл), дается соотношением

$$C(\varepsilon, d) = \frac{1}{MN} \sum_{j=1}^M \sum_{i=1, i \neq j}^N H(\varepsilon - \|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|). \quad (7.29)$$

Здесь  $M$  — число точек редукции;  $N$  — число точек во временной реализации;  $H$  — функция Хевисайда;  $\mathbf{x}$  — вектор состояния в псевдофазовом пространстве, восстанавливаемый по методу Такенса.

На рис. 7.11, *a* представлены результаты расчета размерности  $D(\varepsilon)$  по «несшитой» временной реализации переходного хаоса для различных значений размерности пространства вложения  $d$ . Длина временной реализации была выбрана  $N = 6 \cdot 10^4$ , а число точек редукции  $M = 10^4$ . Временная реализация сшита из трех коротких рядов, то есть число ложных точек в псевдофазовом пространстве составляет в соответствии с соотношением (7.25)  $J = 3200$ .

Из рисунка видно, что хаотический аттрактор, соответствующий переходному хаосу, сильно неоднороден, о чем свидетельствует отсутствие области скейлинга на зависимостях наклона корреляционного интеграла от масштаба наблюдения. Однако начиная с размерности пространства вложения  $d = 3-4$  вид кривых  $D(\varepsilon)$  не меняется. Поэтому в качестве оценки размерности пространства вложения можно принять  $d = 4$ . Именно такая размерность псевдофазового пространства будет использоваться далее для конструирования искусственной длинной временной реализации путем сшивания коротких временных рядов, характеризующих переходной хаос.

При «сшивании» участков усеченных временных реализаций возникает необходимость определить значение параметра времени задержки

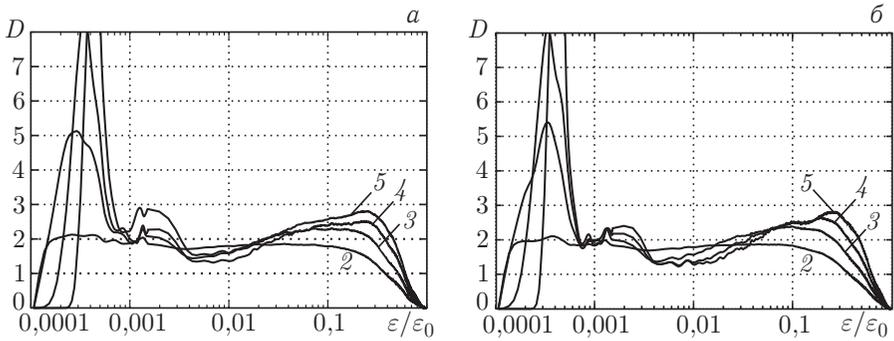


Рис. 7.11. Корреляционная размерность  $D$  как функция масштаба наблюдения для: а) аттрактора, восстановленного по временной реализации, полученной путем простого объединения соответствующих усеченных реализаций без обеспечения условия сшивания (7.27) и б) аттрактора, восстановленного по корректно «сшитой» длинной реализации. Цифрами отмечены размерности пространства вложения  $d$ , для которых рассчитывалась корреляционная размерность

$T$ . Было проведено сшивание усеченных реализаций с различными значениями параметра  $T$  и проанализировано, насколько эффективно работает метод в каждом случае. Для этого одна из временных реализаций  $x(t)$  (будем называть ее « $x$ -реализация») рассекалась на две части  $x_1(t)$  и  $x_2(t)$  в момент времени  $\hat{t}$  так, что

$$x(t) = \begin{cases} x_1(t), & \text{если } t \leq \hat{t}, \\ x_2(t), & \text{если } t \geq \hat{t}. \end{cases} \quad (7.30)$$

После этого временная реализация  $x_1(t)$  «сшивалась» с некоторой другой временной реализацией  $y(\theta)$ , которую будем называть « $y$ -реализацией» (см. (7.27)), при этом требовалось, чтобы выполнялось условие

$$t_1 = \hat{t} - (d - 1) \times T. \quad (7.31)$$

В том случае, если  $x$ - и  $y$ -реализации эквивалентны, то есть, если  $x(t) \equiv y(\theta)$ , то имеет место соотношение

$$x_2(t) \equiv y(t_2 + (d - 1) \times T + (t - \hat{t})), \quad t \geq \hat{t}. \quad (7.32)$$

В случае, если фазовые траектории, соответствующие  $x$ - и  $y$ -реализациям, близки друг к другу в  $d$ -мерном фазовом пространстве (но не эквивалентны), в силу неустойчивости они будут расходиться с течением времени и через интервал времени  $\Delta t$  разойдутся на расстояние, превышающее некоторое значение  $\varepsilon_2$  (в нашем случае  $\varepsilon_2 = 2,5 \cdot 10^{-2}$ ):

$$|x_2(\hat{t} + \Delta t) - y(t_2 + (d - 1) \times T + \Delta t)| > \varepsilon_2. \quad (7.33)$$

Продолжительность интервала времени, в течение которого различия между «сшитыми» временными реализациями  $x(t)$  и  $y(\theta)$  не превышают по модулю  $\varepsilon_2$ , характеризует качество проведенного «сшивания» временных реализаций — чем больше значение  $\Delta t$ , тем более удачной оказалась проведенная операция объединения различных временных реализаций в одну искусственно длинную реализацию.

На рис. 7.12 приведена зависимость среднего значения  $\Delta t$  от выбранного времени задержки  $T$ . Из представленного графика видно, что среднее значение интервала времени  $\Delta t$ , в течение которого сшитые реализации оказываются практически идентичными, не зависит от выбранной величины времени задержки  $T$ . Лишь при малых временах задержки среднее значение  $\Delta t$  уменьшается.

Анализ нормированного распределения (см. рис. 7.13) величины  $\Delta t$  показывает, что при времени задержки  $T = 1,6$  доля «неудачных» объединений различных временных реализаций оказывается наименьшей.

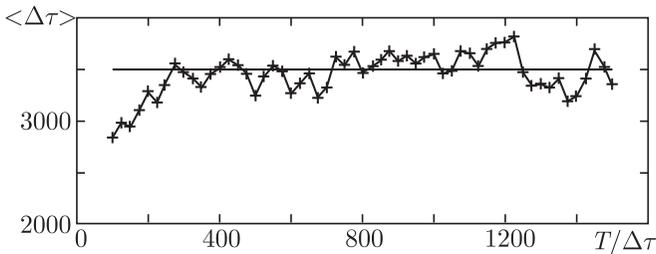


Рис. 7.12. Зависимость средней величины  $\langle \Delta t \rangle$  от выбранного значения времени задержки  $T$ . Усреднение проводилось по 300 точкам «сшивки»

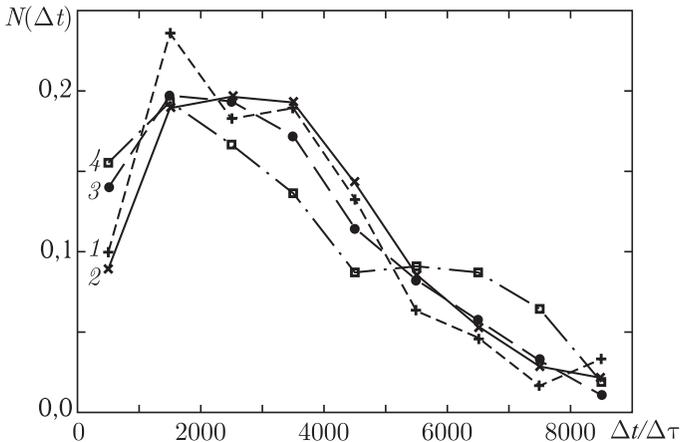


Рис. 7.13. Нормированное распределение длительностей  $\Delta t$  при различных значениях времени задержки  $T$ : кривая 1 ( $\times$ ) — длительность времени задержки  $T = 0,8$ ; кривая 2 ( $+$ ) —  $T = 1,86$ ; кривая 3 ( $\bullet$ ) —  $T = 2,4$ ; кривая 4 ( $\square$ ) —  $T = 3,82$ . Распределения построены по 300 сшитым реализациям для каждого времени задержки  $T$

Иными словами, в этом случае число «сшитых» временных реализаций, у которых интервал  $\Delta t$  оказывается маленьким, невелико. Одновременно, в ходе проведенного исследования выяснилось, что с увеличением длительности времени задержки  $T$  уменьшается число «сшиваний» участков различных реализаций. Исходя из вышеизложенного, время задержки для проведения операции сшивания было выбрано  $T = 1,6$ . Следует также отметить, что при выборе времени задержки  $T = 1,6$  длительность временного интервала  $(d - 1) \cdot T$  оказывается сопоставимой с характерным временным масштабом колебаний.

Рассмотрим теперь непосредственно «сшитые» реализации. На рис. 7.14 приведены примеры наиболее удачного (а) и неудачного (б) сшивания с временем задержки  $T = 1,6$ . Из рисунка видно, что даже в случае самого неудачного «сшивания»,  $y$ -реализация хорошо соответствует  $x$ -реализации, с которой она сшивается.

Важным моментом является то обстоятельство, что все временные реализации, которые используются для построения искусственной, по-

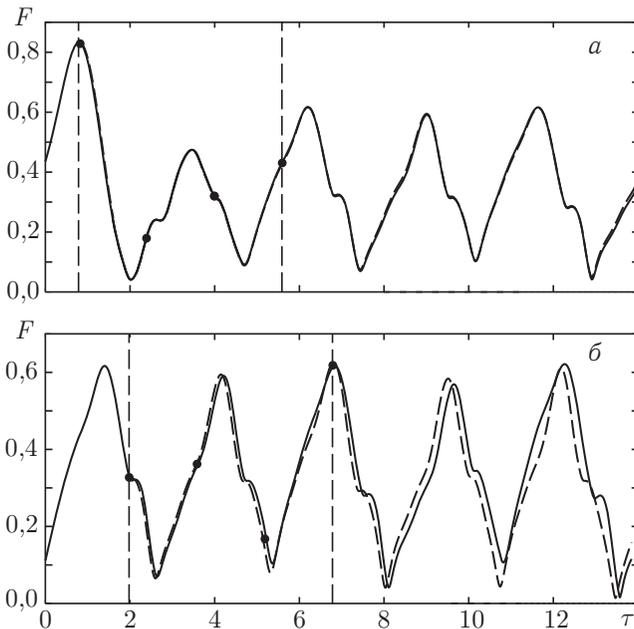


Рис. 7.14. Удачное (а) и неудачное (б) «сшивание» временных реализаций. Время задержки в обоих случаях составляет  $T = 1,6$ . Интервал времени  $\Delta t$ , в течение которого различие между  $x$ - и  $y$ -реализациями не превышает величины  $\varepsilon_2$ , составляет  $\Delta t_a = 30,09$  и  $\Delta t_b = 0,28$  временных единиц, соответственно. Вертикальные пунктирные линии ограничивают временной отрезок длительностью  $(d - 1)T$ , на котором осуществляется «сшивание» участков  $x$ - и  $y$ -реализаций. Кружками (●) показаны точки, по которым осуществляется «сшивание» (см. соотношение (7.27)).  $x$ -реализация показана сплошной линией,  $y$ -реализация — пунктирной

рождены распределенной системой. Следовательно, тот факт, что две временные реализации хорошо сшиваются, еще не гарантирует того, что состояния исходной распределенной системы оказываются близкими в моменты времени  $t_1$  и  $t_2$  для  $x$ - и  $y$ -реализаций соответственно. Поэтому необходимо рассмотреть пространственные распределения амплитуды поля  $|F(\xi)|$  и тока  $|I(\xi)|$  в гиро-ЛВВ в моменты времени, которые соответствуют точкам сшивания временных реализаций  $x(t)$  и  $y(\theta)$ .

Рисунок 7.15 иллюстрирует пространственные распределения величин  $|F(\xi)|$  и  $|I(\xi)|$  в случае «удачного» сшивания временных реализаций при выбранном значении времени задержки  $T = 1,6$  (см. также рис. 7.14, а) и соответствующие распределения после того, как прошел интервал времени  $\Delta t_a = 30,09$  и  $x$ -,  $y$ -реализации разошлись на расстояние  $\varepsilon_2$ . Аналогичные зависимости приведены на рис. 7.16 для самого неудачного сшивания (см. рис. 7.14, б), интервал времени  $\Delta t_a$  выбран тем же самым и составляет величину  $\Delta t_a = 30,09$ . Несмотря

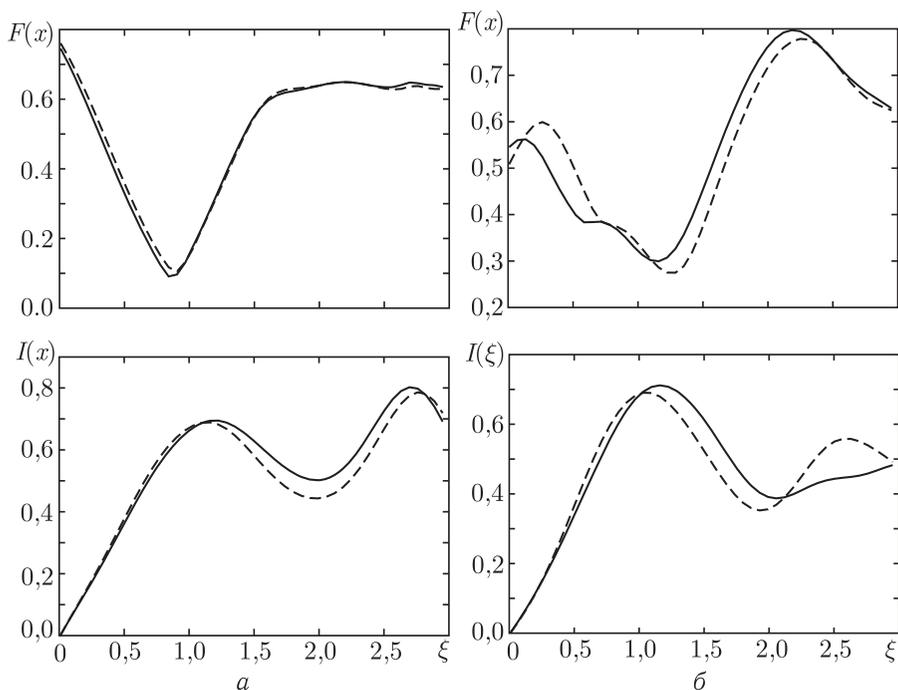


Рис. 7.15. Пространственные распределения амплитуды поля  $F$  и тока  $I$  для случая «удачного» сшивания временных реализаций с  $T = 1,6$ . Сшиваются временные реализации с начальной амплитудой  $\delta_0 = 0,0041$  (сплошная линия) в момент времени  $\tau = 29,36$  и  $\delta_0 = 0,0012$  (штриховая линия) в момент времени  $\tau = 106,16$  (рис. а). Рис. б иллюстрирует расхожимость временных реализаций и соответствует интервалу времени, прошедшему с момента, соответствующего рис. а,  $\Delta t_a = 30,09$

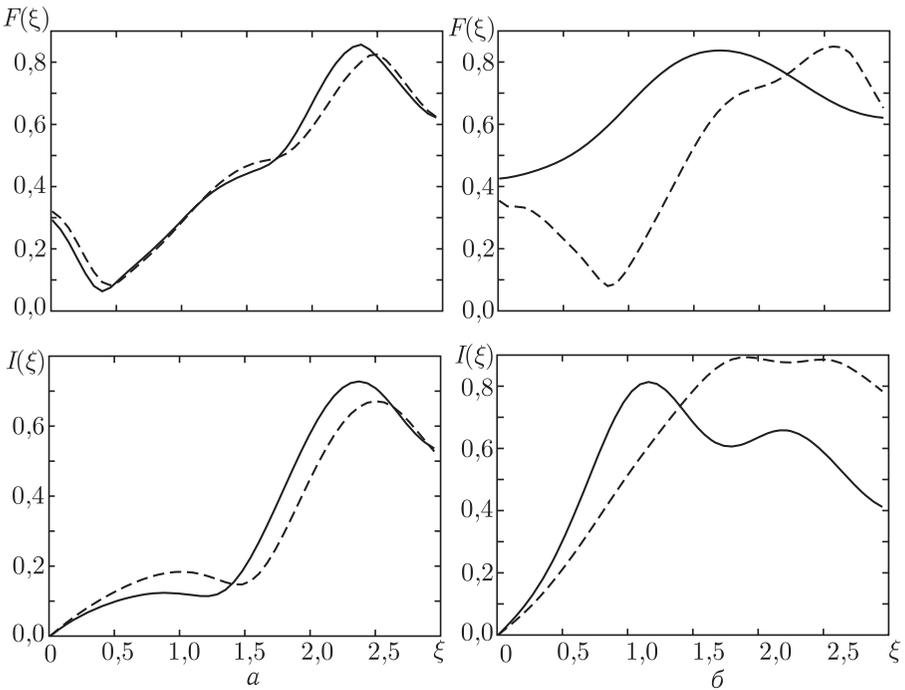


Рис. 7.16. Пространственные распределения амплитуды поля  $F$  и тока  $I$  для случая «плохого» сшивания временных реализаций с временем задержки  $T = 1,6$ . Сшиваются временные реализации с начальной амплитудой  $\delta_0 = 0,0033$  (сплошная линия) в момент времени  $\tau = 54,97$  и  $\delta_0 = 0,0012$  (штриховая линия) в момент времени  $\tau = 111,80$  (рис. *a*). Рис. *б* иллюстрирует расхождение временных реализаций и соответствует интервалу времени, прошедшему с момента, соответствующего рис. *a*,  $\Delta t_a = 30,09$

на то, что даже в случае неудачного сшивания  $x$ - и  $y$ -реализаций пространственные распределения  $|F(\xi)|$  и  $|I(\xi)|$  явно отличаются друг от друга, эти отличия носят количественный характер. В то же самое время, видно, что структуры, существующие в распределенной системе, порождающей  $x$ - и  $y$ -реализации, в моменты сшивания этих реализаций, соответствуют друг другу. Так, в случае «хорошего» сшивания после расхождения двух временных реализаций на расстояние  $\varepsilon_2$  в обоих случаях имеет место двугорбое распределение первой гармоники сгруппированного тока, что соответствует двум электронным структурам (двум фазовым сгусткам электронов-осцилляторов винтового пучка) на длине пространства взаимодействия, хотя величина второго максимума сгруппированного тока сильно различается в обоих случаях. Для «плохой» сшивки временных реализаций по истечении такой же длительности  $\Delta t_a$ , как и в первом случае, имеет место существенно более сильное расхождение динамики системы. При сравнении распределений, представленных на рис. 7.16, *a* и *б*, видно что имеет место не

просто количественное, но и качественное различие внутренней структуры электронного пучка и поля в системе. Однако, если рассматривать интервал времени  $\Delta t_b = 0,28$ , через который временные реализации расходятся на расстояние  $\varepsilon_2$ , то можно сделать тот же вывод, что и раньше: разница между состояниями только количественная. Качественно система ведет себя в обоих случаях одинаково. Таким образом, качество сшивания, в первую очередь, оказывает влияние на длину интервала времени  $\Delta t$ , в течение которого две временные реализации можно считать идентичными (ср. времена  $\Delta t_a$  и  $\Delta t_b$  для случая хорошей и плохой сшивки соответственно). Очевидно, что длительность  $\Delta t$  определяется, во-первых, качеством сшивания, а, во-вторых, величиной максимального ляпуновского показателя  $\lambda_1$ , который служит мерой скорости разбегания близлежащих фазовых траекторий хаотического множества, соответствующего переходному хаосу.

С учетом вышеизложенного можно сделать вывод о том, что предлагаемая процедура сшивания усеченных временных реализаций, порождаемых распределенной системой, позволяет корректно создать искусственную длинную временную реализацию, по которой можно определить характеристики переходного хаоса.

Сравним вначале результаты, полученные при расчете корреляционной размерности восстановленного аттрактора по «несшитой» длинной временной реализации при наличии ложных точек, с расчетом  $D$  по корректно сшитому временному ряду. Для корректного сравнения длина временной реализации  $N = 6 \cdot 10^4$  и число точек редукции  $M = 10^4$  были выбраны теми же, что и в предыдущем случае. Результаты расчета представлены на рис. 7.11, б, на котором представлены кривые  $D(\varepsilon)$  для размерности пространства вложения  $d = 2, 3, 4$  и 5. Видно, что полученные нами ранее оценочные результаты хорошо согласуются с более точным расчетом корреляционной размерности. Размерность пространства вложения  $d$  в данном случае также не превышает четырех. Последнее означает, что размерность псевдофазового пространства, которая была оценена в предыдущем разделе, была выбрана корректно.

Также можно сделать вывод, что для оценки корреляционной размерности аттрактора, восстановленного по коротким временным реализациям переходного хаоса, не требуется процедуры сшивания, и небольшое число ложных точек в фазовом пространстве не оказывает существенного влияния на расчет корреляционной размерности.

Рассмотрим теперь такую важную характеристику переходного хаоса, как максимальная ляпуновская экспонента  $\lambda_1$ . Оценка максимального ляпуновского характеристического показателя производилась с помощью процедуры, предложенной в работах [36, 37]. В соответствии с ней величина  $\lambda_1$  определяется как

$$\lambda_1 = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \frac{\chi(t)}{\chi(t_0)}, \quad (7.34)$$

где  $\chi(t)$  — расстояние в момент времени  $t$  между двумя изображающими точками  $\mathbf{x}'$  и  $\mathbf{x}''$  в фазовом пространстве. Предполагаем, что в начальный момент времени эти точки близки, то есть  $\|\mathbf{x}' - \mathbf{x}''\| = \chi(t_0) \ll R$ , где  $R$  — характерный геометрический размер аттрактора в фазовом пространстве. Положительное значение максимального ляпуновского показателя  $\lambda$  свидетельствует о хаотической динамике системы. При этом через промежуток времени  $\tau \approx \ln(R/\chi(t_0))/\lambda$  поведение системы становится непредсказуемым, т. е. величина ляпуновского показателя характеризует степень неустойчивости и сложности хаотического процесса.

Теперь, следя за динамикой системы при старте из точек  $\mathbf{x}'$  и  $\mathbf{x}''$  и анализируя расстояние  $\chi(t_0 + m\Delta\tau) = \|\mathbf{x}'(t_0 + m\Delta\tau) - \mathbf{x}''(t_0 + m\Delta\tau)\|$  между текущими состояниями системы, находим интервал времени  $m\Delta\tau$ , за который траектории расходятся на расстояние, большее  $\chi_{\max}$ . Далее находится новая точка  $\mathbf{x}''_m$  на аттракторе, которая близка к точке  $\mathbf{x}'(t_0 + m\Delta\tau)$  ( $\|\mathbf{x}'(t_0 + m\Delta\tau) - \mathbf{x}''_m\| = \chi(t_0 + m\Delta\tau) \ll R$ ) и сдвинута от нее по направлению вектора  $\mathbf{x}''(t_0 + m\Delta\tau) - \mathbf{x}'(t_0 + m\Delta\tau)$ . После чего процедура повторяется заново.

Для определения среднего по аттрактору значения максимального ляпуновского показателя вышеописанную процедуру необходимо повторить  $M$  раз до достижения величиной

$$\langle \lambda_1 \rangle = \frac{1}{M\Delta\tau} \sum_{m=1}^M \ln \frac{\chi(t_0 + m\Delta\tau)}{\chi(t_0 + (m-1)\Delta\tau)} \quad (7.35)$$

асимптотического значения.

В результате расчетов по вышеизложенной методике для «хорошо» сшитой временной реализации было получено следующее значение максимального ляпуновского характеристического показателя  $\lambda_1 = 0,098 \pm 0,011$ .

Заметим, что если незначительно сместиться по параметрам в область хаотической генерации ( $\Omega = 0,1$ ,  $F_0 = 0,62$ ; напомним, что переходной хаос изучался нами в области  $\Omega = 0,0$ ,  $F_0 = 0,62$ ), то такие характеристики хаотического аттрактора, как восстановленный аттрактор и фурье-спектр мощности, подобны характеристикам переходного хаоса. Однако, максимальная ляпуновская экспонента хаотического аттрактора  $\lambda_1 = 0,002$ . То есть неустойчивое хаотическое множество (переходной хаос) — более неустойчивый (а, следовательно, «более хаотичный») режим, чем хаотический аттрактор, существующий «пососедству» в пространстве параметров.

## Заключение

Таким образом, в настоящей главе рассмотрена неавтономная динамика и нестационарные процессы в электронно-волновой системе типа «электронный поток — встречная (обратная) электромагнитная волна»

на примере гиро-ЛВВ. Аналитически рассмотрены характеристики автоколебаний, ширина полосы фазовой синхронизации в зависимости от значений управляющих параметров системы. Приведены результаты численного моделирования неавтономного поведения гиро-ЛВВ, рассмотрена длительность установления синхронного режима и явление переходного хаоса, наблюдающееся вблизи границы синхронного режима.

### Список литературы

1. *Huygens C.* Horologium oscillatorium, sive de motu pendulorum an horologia aptato demonstrationes geometrica. — Paris, 1673.
2. *Трубецков Д. И.* Синхронизация: ученый и время. — Саратов: Изд-во ГосУНЦ «Колледж», 2005.
3. *Пиковский А. С., Розенблюм М. Г., Куртс Ю.* Синхронизация. Фундаментальное нелинейное явление. — М.: Техносфера, 2003.
4. *Трубецков Д. И., Храмов А. Е.* Лекции по сверхвысокочастотной электронике для физиков. Т. 1. — М.: Физматлит, 2003.
5. Электроника ламп с обратной волной / Под. ред. В. Н. Шевчика и Д. И. Трубецкова. — Саратов: Изд-во Саратовск. ун-та, 1975.
6. *Трубецков Д. И., Четвериков А. П.* Автоколебания в распределенных системах «электронный поток — встречная (обратная) электромагнитная волна» // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1994. Т. 2, № 5. С. 3.
7. *Woo W., Benford J., Fittinghoff D., Harteneck B., Price D., Smith R., Sze H.* Phase locking of high-power microwave oscillator // J. Appl. Phys. 1989. Т. 65, № 2. Р. 861.
8. *Храмов А. Е.* Колебания в системе связанных генераторов на виртуальном катоде виртодного типа // Радиотехника и электроника. 1999. Т. 44, № 2. С. 211–217.
9. *Дубинов А. Е., Селемир В. Д.* Электронные приборы с виртуальным катодом // Радиотехника и электроника. 2002. Т. 47, № 6. С. 575.
10. *Солнцев В. А.* Электронная техника // Электроника СВЧ. 1966. № 9. С. 30.
11. *Железовский Е. Е., Кальянов Э. В.* Вопросы радиоэлектроники. Сер. I // Электроника. 1965. № 4. С. 44.
12. *Трубецков Д. И., Храмов А. Е.* Лекции по сверхвысокочастотной электронике для физиков. Т. 2. — М.: Физматлит, 2004.
13. *Adler R.* A study of locking phenomena in oscillators // Proc. IRE. 1946. Т. 34, № 6. Р. 351–367.
14. *Железовский Б. Е., Кальянов Э. В.* Многочастотные режимы в приборах СВЧ. — М.: Связь, 1978.
15. *Трубецков Д. И., Храмов А. Е.* Синхронизация автоколебаний в распределенной автоколебательной среде «винтовой электронный пучок — встречная электромагнитная волна» // Изв. РАН. Сер. физ. 2002. Т. 66, № 12. С. 1761–1767.

16. *Шевчик В. Н., Трубецков Д. И.* Аналитические методы расчета в электронике СВЧ. — М.: Сов. радио, 1970.
17. *Трубецков Д. И., Храмов А. Е.* Синхронизация автоколебаний в распределенной системе «винтовой электронный поток — встречная электромагнитная волна» // Письма в ЖТФ. 2002. Т. 28, № 18. С. 34–42.
18. *Трубецков Д. И., Храмов А. Е.* О синхронизации хаотических автоколебаний в распределенной системе «винтовой электронный поток — встречная электромагнитная волна» // Радиотехника и электроника. 2003. Т. 48, № 1. С. 116–124.
19. *Храмов А. Е.* К вопросу о синхронизации колебаний в распределенной активной системе «электронный пучок — обратная электромагнитная волна» // Радиотехника и электроника. 2004. Т. 49, № 7. С. 859–868.
20. *Кузнецов С. П.* Сложная динамика генератора с запаздывающей обратной связью // Изв. вузов. Радиофизика. 1982. Т. 25. С. 1410.
21. *Гинзбург Н. С., Кузнецов С. П., Федосеева Т. Н.* Теория переходных процессов в релятивистской ЛОВ // Изв. вузов. Радиофизика. 1978. Т. 21, № 7. С. 1037–1052.
22. *Короновский А. А., Трубецков Д. И., Храмов А. Е.* О сверхбыстрой синхронизации автоколебаний в распределенной активной среде «винтовой электронный пучок — встречная электромагнитная волна» // Доклады РАН. 2003. Т. 389, № 6. С. 749–752.
23. *Рабинович М. И., Трубецков Д. И.* Введение в теорию колебаний и волн. — М.–Ижевск: РХД, 2000.
24. *Шустер Г.* Детерминированный хаос. — М.: Мир, 1988.
25. *Берже П., Помо И., Видаль К.* Порядок в хаосе. — М.: Мир, 1991.
26. *Janosi I. M., Tél T.* Time-series analysis of transient chaos // Phys. Rev. E. 1994. V. 49, № 4. P. 2756–2763.
27. *Короновский А. А., Ремпен И. С., Трубецков Д. И., Храмов А. Е.* Переходной хаос в распределенной активной среде «винтовой электронный пучок — встречная электромагнитная волна» // Изв. РАН. Сер. физ. 2002. Т. 66, № 12. С. 1754–1760.
28. *Hramov A. E., Koronovskii A. A., Rempen I. S., Trubetskoy D. I.* Investigation of transient chaos in gyro-backward-wave-oscillator synchronized by the external signal // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2002. Т. 10, № 3. P. 97–108.
29. *Grassberger P., Procaccia I.* Characterization of strange attractors // Phys. Rev. Lett. 1983. V. 50, № 5. P. 346–349.
30. *Grassberger P., Procaccia I.* Measuring the strangeness of strange attractors // Physica D. 1983. V. 9. P. 189–208.
31. *Dhamala M., Lai Y.-C., Kostelich E. J.* Analyses of transient chaotic time series // Phys. Rev. E. 2001. V. 64. P. 056207.
32. *Packard N. H., Crutchfield J. P., Farmer J. D., Shaw R. S.* Geometry from a time series // Phys. Rev. Lett. 1980. V. 45. P. 712–716.

33. *Takens F.* Detecting strange attractors in dynamical systems turbulence // Lectures Notes in Mathematics / Es. D. RL.-S. Young. — N. Y.: Springer-Verlag, 1981. — P. 366.
34. *Бабин А. В., Вишик М. И.* Аттракторы эволюционных уравнений с частными производными и оценка их параметров // УМН. 1983. Т. 38, № 4. С. 133.
35. *Kipchatov A. A., Krasichkov L. V.* On reconstruction of chaotic attractor from time series represented as «clusters» // Proc. of Intern. Conf. Dynamical Systems & Chaos / Ed. Y. Aizawa. — World Scientific Singapore, 1995. P. 355.
36. *Wolf A., Swift J., Swinney H. L., Vastano J.* Determining Lyapunov exponents from a time series // Physica D. 1989. V. 16. P. 285.
37. *Eckmann J. P., Kamphorst S. O., Ruelle D., Gilberto D.* Lyapunov exponents from a time series // Phys. Rev. A. 1986. V. 34, № 6. P. 4971–4979.

## Глава 8

# ХАОТИЧЕСКАЯ СИНХРОНИЗАЦИЯ В ЭЛЕКТРОНИКЕ СВЕРХВЫСОКИХ ЧАСТОТ

А. А. Короновский, П. В. Попов, Р. А. Филатов,  
А. Е. Филатова, А. Е. Храмов

Динамический хаос (хаотические колебания) представляет собой нерегулярное и непредсказуемое на большие времена движение в детерминированных нелинейных динамических системах. Причинами нерегулярности и непредсказуемости является собственная динамика системы, а не влияние шумов и внешних возмущающих факторов... Отечественные и зарубежные исследования показали, что динамический хаос может быть использован в коммуникационных системах в качестве несущих информацию колебаний. При этом оказалось, что динамический хаос по своим свойствам во многом отличается от такого традиционного носителя информации, как гармонические колебания, и его с полным основанием можно называть новым типом информации для систем связи.

*Дмитриев А. С., Панас А. И.* Динамический хаос: новые носители информации для систем связи. М.: Физматлит, 2002.

*Типы хаотической синхронизации. Синхронизация временных масштабов. Синхронизация временных масштабов и полная хаотическая синхронизация в гидродинамических моделях диода Пирса. Синхронизация временных масштабов в ЛОВ с поперечным полем. Устойчивость синхронного состояния сети, состоящей из распределенных систем сверхвысокочастотной электроники.*

### **8.1. Синхронизация временных масштабов и другие типы хаотической синхронизации**

Изучение поведения нелинейных динамических систем (как с сосредоточенными, так и распределенными параметрами), способных демонстрировать сложное поведение, уже давно находится в центре

пристального внимания исследователей [1–16]. Одним из центральных моментов при этом является изучение неавтономной динамики нелинейных систем, прежде всего проблем, связанных с исследованиями явления синхронизации, берущими свое начало с работ Гюйгенса.

Синхронизация [3, 17–21] имеет важное фундаментальное и практическое значение (например, при скрытой передаче информации с помощью хаотических сигналов [22–25], при управлении системами сверхвысокочастотной электроники [26] и т. п.). Первоначально рассматривалась синхронизация периодических колебаний, однако интенсивное развитие теории динамического хаоса [27–32] вызвало новый интерес к проблеме синхронизации автоколебательных систем, демонстрирующих хаотическую динамику [2, 3, 33–35]. С развитием теории динамического хаоса и хаотической синхронизации было выявлено достаточно большое число различных типов хаотического синхронного поведения связанных динамических систем с потоковым временем: *полная синхронизация* [36–42], *синхронизация с запаздыванием* (лаг-синхронизация) [43, 44], *обобщенная синхронизация* [45, 46], *частотная синхронизация* [47, 48], *фазовая синхронизация* [49, 50] и *частичная синхронизация* [51]. Активно исследуется также неавтономное поведение динамических систем, находящихся под негармоническим (импульсным, квазипериодическим) воздействием [52, 53].

Остановимся кратко теперь на различных типах хаотической синхронизации. Режим полной синхронизации означает совпадение векторов состояния взаимодействующих осцилляторов  $\mathbf{x}_1(t) \cong \mathbf{x}_2(t)$ , различие между ними стремится к нулю при условии  $t \rightarrow \infty$  [22, 40, 41, 54]. Режим полной синхронизации наблюдается для *идентичных* связанных систем. В том случае, если управляющие параметры взаимодействующих систем слегка отстроены друг от друга, вектора состояний осцилляторов  $\mathbf{x}_1(t)$  и  $\mathbf{x}_2(t)$  оказываются близкими ( $|\mathbf{x}_1(t) - \mathbf{x}_2(t)| \approx 0$ ), но, в то же время, отличаются друг от друга.

Другой тип хаотической синхронизации — синхронизация с запаздыванием. В этом случае временная реализация одной из систем оказывается как бы сдвинута во времени относительно другой на некоторый временной интервал  $\tau$ :  $\mathbf{x}_1(t + \tau) = \mathbf{x}_2(t)$ . При увеличении параметра связи между осцилляторами временной сдвиг уменьшается и стремится к нулю, а режим синхронизации с запаздыванием демонстрирует все больше признаков режима полной синхронизации [43, 44, 55].

Режим обобщенной синхронизации [45, 46, 56] подробно рассмотрен в главе 9; он вводится в рассмотрение для однонаправленно связанных систем и означает, что существует некоторое функциональное соотношение между векторами состояния связанных осцилляторов, то есть  $\mathbf{x}_2(t) = \mathbf{F}[\mathbf{x}_1(t)]$ . Следует отметить, что полная синхронизация и синхронизация с запаздыванием являются частными случаями обобщенной синхронизации.

Наконец, необходимо упомянуть режим фазовой синхронизации [57, 58], которая является одним из важнейших объектов

исследования современной теории нелинейных колебаний. Явление фазовой синхронизации экспериментально наблюдалось для радиотехнических генераторов [59], лазеров [60, 61], электрохимических осцилляторов [62], сердечного ритма [63], газового разряда [64, 65], солнечной активности [66] и т. д. (см. также монографии и обзоры [2, 3, 49, 50, 67–69]). Фазовая синхронизация означает, что происходит захват фаз хаотических сигналов, в то время как амплитуды этих сигналов остаются несвязанными друг с другом и выглядят хаотическими.

Как уже отмечалось выше, в русскоязычной литературе под термином «фазовая синхронизация», возникшим достаточно давно, изначально понималось другое явление [51, 70, 71], суть которого состоит в следующем: синхронизация генераторов колебаний достигается за счет воздействия на них полученного некоторым способом преобразования фаз этих генераторов, причем генераторы и преобразователи фаз могут быть самой различной природы. В настоящее же время в русскоязычной научной литературе [3, 33, 72–74] термин «фазовая синхронизация» широко используется и в смысле работ [57, 58, 75], хотя, конечно, это вносит некоторую путаницу. Поэтому сразу следует отметить, что в настоящей книге термин «фазовая синхронизация» используется в том смысле, в котором его трактуют работы [33, 57, 58, 67, 75]. В основе этой концепции фазовой синхронизации лежит понятие мгновенной фазы  $\varphi(t)$  хаотического сигнала [57, 58, 67, 76].

Следует сразу отметить, что не существует универсального способа введения фазы хаотического сигнала, который бы давал корректные результаты для любых динамических систем. Так, существует несколько способов введения фазы, подходящих для «хороших» систем с простой топологией хаотического аттрактора, которые в литературе называют «системами с хорошо определенной фазой» или «системами с фазово-когерентным аттрактором». Хаотический аттрактор таких систем должен быть таковым, что проекция фазовой траектории на некоторую плоскость состояний  $(x, y)$  все время вращается вокруг начала координат, не пересекая и не огибая его. В этом случае мгновенная фаза  $\varphi(t)$  хаотического сигнала может быть введена как угол в полярной системе координат на плоскости  $(x, y)$  [43, 75]

$$\varphi = \arctg y/x. \quad (8.1)$$

Тот факт, что проекция фазовой траектории все время вращается вокруг начала координат и не огибает его, приводит к тому, что средняя частота  $\bar{\Omega}$  хаотического сигнала, определяемая как средняя скорость изменения фазы (8.6) совпадает с основной частотой  $\Omega_0 = 2\pi f_0$  фурье-спектра  $S(f)$  колебаний системы, что, в свою очередь, рассматривается как критерий корректности введения в рассмотрение мгновенной фазы хаотического сигнала [77]. Если же проекция фазовой траектории ведет себя так, что в какие-то моменты времени она огибает начало координат, не делая полного оборота вокруг него, то это приводит к тому, что начало координат «замазывается» участками фазовой траектории и

такой аттрактор называют «фазово-некогерентным», а саму систему — системой с «плохо определенной фазой».

Другим способом определения фазы для хаотической динамической системы является введение в рассмотрение аналитического сигнала [57, 67]

$$\zeta(t) = x(t) + j\tilde{x}(t) = A(t)e^{j\varphi(t)}, \quad (8.2)$$

где функция  $\tilde{x}(t)$  является преобразованием Гильберта временной реализации  $x(t)$

$$\tilde{x}(t) = \frac{1}{\pi} \text{P. V.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x(\tau)}{t - \tau} d\tau \quad (8.3)$$

(P. V. в соотношении (8.3) означает, что интеграл вычисляется в смысле главного значения). Соответственно, фаза  $\varphi(t)$  хаотического сигнала  $x(t)$  определяется из соотношений (8.2) и (8.3).

Третьим способом, традиционно используемым для определения фазы хаотического сигнала, является поверхность сечения Пуанкаре [57, 67], так что фаза определяется как

$$\varphi(t) = 2\pi \frac{t - t_n}{t_{n+1} - t_n} + 2\pi n, \quad t_n \leq t \leq t_{n+1}, \quad (8.4)$$

где  $t_n$  — момент времени, соответствующий  $n$ -му пересечению поверхности сечения Пуанкаре фазовой траекторией.

Режим фазовой синхронизации означает, что фазы хаотических сигналов взаимодействующих осцилляторов оказываются захваченными (то есть их разность не нарастает по модулю с течением времени)

$$|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)| < \text{const}. \quad (8.5)$$

При этом возможно ввести среднюю частоту хаотического сигнала. Частота хаотического сигнала определяется как средняя скорость изменения фазы

$$\bar{\Omega} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\varphi(t)}{t} = \langle \dot{\varphi}(t) \rangle. \quad (8.6)$$

Очевидно, что захват фаз влечет за собой совпадение частот хаотических сигналов, которые должны быть (в силу соотношений (8.5) и (8.6)) одинаковыми для взаимодействующих систем. Как уже отмечалось выше, принято считать, что для корректного введения в рассмотрение непрерывной фазы хаотического сигнала  $\varphi(t)$  средняя частота  $\bar{\Omega}$  хаотического сигнала  $x(t)$  должна совпадать с основной частотой  $\Omega_0 = 2\pi f_0$  фурье-спектра  $S(f)$  [77].

Очевидно, что для систем с фазово-когерентным аттрактором способы (8.1)–(8.4) дают практически одинаковые результаты (динамика мгновенной фазы для этих двух методов не будет сильно отличаться на интервалах времени, меньше характерного периода возврата фазовой

траектории к поверхности сечения Пуанкаре) [33]. Известно, что мгновенная фаза, вводимая с помощью преобразования Гильберта, ведет себя в случае фазово-когерентного аттрактора практически так же, как и фазы, вводимые способами (8.1) и (8.4) (см., например, [75]).

Все подходы, описанные выше, дают сходные корректные результаты для «хороших» систем с фазово-когерентным аттрактором [75]. В то же самое время, эти методы имеют свои ограничения [78], в частности, для систем с плохо определенной фазой (см., например, [49, 77]). Тем не менее, в ряде случаев фазовая синхронизация подобных систем может быть выявлена с помощью косвенных наблюдений [75, 79] и измерений [80].

Все вышеназванные типы хаотической синхронизации связаны друг с другом (см., например, [45, 55, 59]), однако характер этой взаимосвязи во многом остается невыясненным. Для каждого типа синхронного поведения существуют свои способы диагностики. В частности, режим полной хаотической синхронизации может быть диагностирован простым сравнением векторов состояний  $\mathbf{x}_1(t)$  и  $\mathbf{x}_2(t)$  взаимодействующих систем, а для выявления режима синхронизации с запаздыванием необходимо использовать функцию подобия [43]

$$S^2(\tau) = \frac{\langle |\mathbf{x}_2(t + \tau) - \mathbf{x}_1(t)|^2 \rangle}{\sqrt{\langle |\mathbf{x}_1(t)|^2 \rangle \langle |\mathbf{x}_2(t)|^2 \rangle}}. \quad (8.7)$$

В том случае, если наблюдается режим синхронизации с запаздыванием, функция подобия имеет минимум  $\sigma = \min_{\tau} S(\tau) \approx 0$  для значения  $\tau$ , соответствующего временному сдвигу между векторами состояния взаимодействующих систем.

Режим обобщенной синхронизации более труден для диагностики, поскольку вид функциональной зависимости  $\mathbf{F}[\cdot]$  может быть весьма сложным и далеко не всегда известно, как его определить. Тем не менее, существует несколько методов, позволяющих определить наличие режима обобщенной синхронизации в связанных системах, таких как метод ближайших соседей [45, 81], метод вспомогательной системы [82] или вычисление условных ляпуновских показателей [41, 83].

Наконец, для описания и анализа фазовой синхронизации вводится фаза  $\varphi(t)$  хаотического сигнала [49, 50, 57, 58, 67, 68]. Режим фазовой синхронизации означает, что фазы хаотических сигналов взаимодействующих осцилляторов оказываются захваченными и удовлетворяют соотношению

$$|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)| < \text{const}, \quad (8.8)$$

то есть их разность не нарастает по модулю с течением времени.

Все вышеперечисленные типы хаотической синхронизации считаются различными, и, как уже говорилось выше, каждый из них имеет свои особенности и свои способы диагностики. Тем не менее, в последнее время в научной литературе активно обсуждается вопрос о взаимосвязи этих типов синхронного поведения друг с другом.

В частности, в [84, 85] описан подход для изучения явления фазовой и полной хаотической синхронизации с точки зрения теории информации. Известны работы, в которых делаются попытки рассматривать разные типы синхронизации связанных хаотических осцилляторов как различные виды проявления единых закономерностей, возникающих в связанных нелинейных системах (см., например, [86, 87]). В то же самое время, следует признать, что эти попытки имеют отчасти искусственный характер, и использовать результаты данных обобщений при исследовании поведения каких-либо конкретных нелинейных систем, представляющих по тем или иным причинам интерес для исследователей, достаточно затруднительно.

Использование предложенного в последнее время подхода [88–92] к описанию синхронного поведения хаотических осцилляторов — синхронизации временных масштабов — позволяет рассматривать все вышеназванные типы синхронного поведения с единых позиций, и, что представляется чрезвычайно важным, он может быть легко использован на практике при анализе поведения сложных систем. Основная идея этого подхода заключается в том, что необходимо анализировать поведение рассматриваемых систем на различных временных масштабах, вводимых в рассмотрение с помощью непрерывного вейвлетного преобразования.

Следует отметить, что непрерывное вейвлетное преобразование [93–96] является весьма эффективным средством анализа поведения нелинейных систем. В частности, непрерывный вейвлетный анализ использовался при изучении синхронизации сигналов, снятых с коры головного мозга [97–99], синхронизации связанных лазеров [100], для выделения основной частоты колебаний при авторегуляции нефронов [101] и др. Поскольку в основе предложенного подхода лежит анализ поведения системы на различных временных масштабах, непрерывное вейвлетное преобразование очень хорошо подходит для этой цели.

Поведение связанных хаотических систем может быть охарактеризовано с помощью *непрерывного множества фаз*, которое можно определить с помощью непрерывного вейвлетного преобразования [93, 94] хаотической временной реализации  $x(t)$

$$W(s, t_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \psi_{s, t_0}^*(t) dt, \quad (8.9)$$

где  $\psi_{s, t_0}(t)$  — вейвлетная функция, получающаяся из материнского вейвлета  $\psi_0(t)$ :

$$\psi_{s, t_0}(t) = \frac{1}{\sqrt{s}} \psi\left(\frac{t - t_0}{s}\right). \quad (8.10)$$

Временной масштаб  $s$  определяет ширину вейвлета  $\psi_{s, t_0}(t)$ ,  $t_0$  — временной сдвиг вейвлетной функции вдоль оси времени, символ «\*»

в соотношении (8.9) означает комплексное сопряжение. Следует отметить, что при проведении вейвлетного анализа понятие «временной масштаб», как правило, используется вместо понятия «частота», традиционного для фурье-преобразования.

В качестве материнского вейвлета был использован морлет-вейвлет [102]

$$\psi_0(\eta) = \frac{1}{\sqrt[4]{\pi}} \exp(j\omega_0\eta) \exp\left(\frac{-\eta^2}{2}\right). \quad (8.11)$$

Выбор значения параметра вейвлета  $\omega_0 = 2\pi$  обеспечивает соотношение  $s \simeq f$  между временным масштабом  $s$  вейвлетного преобразования и частотой  $f$  преобразования Фурье.

Вейвлетная поверхность

$$W(s, t_0) = |W(s, t_0)| e^{j\varphi_s(t_0)} \quad (8.12)$$

характеризует поведение системы на каждом временном масштабе  $s$  в любой момент времени  $t_0$ . Величина  $|W(s, t_0)|$  характеризует наличие и интенсивность соответствующего временного масштаба  $s$  в момент времени  $t_0$ . Как правило, в рассмотрение также вводят мгновенное

$$E(s, t_0) = |W(s, t_0)|^2 \quad (8.13)$$

и интегральное

$$\langle E(s) \rangle = \int |W(s, t_0)|^2 dt_0 \quad (8.14)$$

распределения энергии по временным масштабам.

Следует отметить, что при использовании вейвлетного преобразования (8.9) для каждого временного масштаба  $s$  оказывается естественным образом определена непрерывная фаза  $\varphi_s(t) = \arg W(s, t)$ . Иными словами, оказывается возможным характеризовать поведение каждого временного масштаба  $s$  с помощью ассоциированной с ним фазы  $\varphi_s(t)$ , являющейся непрерывной функцией временного масштаба  $s$  и времени  $t$ . Введенное в рассмотрение таким образом семейство фаз наиболее полным образом характеризует поведение связанных систем: возможно описать поведение каждого временного масштаба с помощью ассоциированной с ним фазы  $\varphi_s(t)$ .

Рассмотрим теперь поведение двух связанных хаотических осцилляторов. Если для временных реализаций  $x_{1,2}(t)$ , порождаемых рассматриваемыми системами, можно найти интервал временных масштабов  $s_l \leq s \leq s_h$ , для которого выполняется *условие захвата фаз*

$$|\varphi_{s1}(t) - \varphi_{s2}(t)| < \text{const} \quad (8.15)$$

и условие ненулевой энергии (доля энергии вейвлетного спектра, приходящаяся на данный интервал временных масштабов, оказывается отличной от нуля)

$$E_{snhr} = \int_{s_l}^{s_h} \langle E(s) \rangle ds > 0, \quad (8.16)$$

то такой режим называется *синхронизацией временных масштабов*.

Очевидно, что в случае классической синхронизации периодических осцилляторов синхронное поведение будет наблюдаться на всех временных масштабах в силу определений вейвлетного преобразования (8.9), временного масштаба  $s$ , ассоциированной с ним непрерывной фазы  $\varphi_s(t)$  и самого определения режима синхронизации временных масштабов. В случае хаотических колебаний ситуация оказывается сложнее. Тем не менее, если два связанных хаотических осциллятора находятся в одном из вышеперечисленных режимов хаотической синхронизации (фазовая синхронизация, обобщенная синхронизация, синхронизация с запаздыванием, полная синхронизация), то в этом случае для временных реализаций  $\mathbf{x}_{1,2}(t)$ , порождаемых этими осцилляторами, обязательно существует диапазон синхронных временных масштабов, для которых выполняются условия захвата фаз (8.15) и ненулевой энергии (8.16) и, соответственно, реализуется режим синхронизации временных масштабов. Иными словами, режимы фазовой синхронизации, обобщенной синхронизации, синхронизации с запаздыванием и полной синхронизации являются частными случаями синхронизации временных масштабов. Для того, чтобы диагностировать режим синхронизации временных масштабов, необходимо проверить выполнение условий (8.15) и (8.16) для некоторого диапазона временных масштабов.

Следует также отметить, что условие захвата фаз (8.15) может быть обобщено на случай  $m : n$  синхронизации. При этом вместо условия (8.15) должно быть проверено более общее соотношение на различных диапазонах временных масштабов  $s_{1l} \leq s_{n1} \leq s_{1h}$  и  $s_{2l} \leq s_{m2} \leq s_{2h}$

$$|m\varphi_{s_{n1}}(t) - n\varphi_{s_{m2}}(t)| < \text{const}. \quad (8.17)$$

В этом случае временной масштаб  $s_{m1}$  первой системы и, соответственно, временной масштаб  $s_{n2}$  второй системы должны удовлетворять соотношению  $s_{m2}/s_{n1} = m/n$ . Условие ненулевой энергии вейвлетного спектра, приходящейся на диапазон синхронных масштабов (8.16), остается неизменным, но диапазоны временных масштабов  $s_{1l} \leq s_{n1} \leq s_{1h}$  и  $s_{2l} \leq s_{m2} \leq s_{2h}$  используются, разумеется, разные.

Поскольку возникновение любого типа синхронной динамики хаотических систем приводит к тому, что возникает диапазон синхронных временных масштабов, можно также ввести в рассмотрение количественную характеристику — меру хаотической синхронизации. Мера хаотической синхронизации  $\gamma$  может быть определена как доля энергии

вейвлетного спектра, приходящаяся на синхронные временные масштабы

$$\gamma_{1,2} = \frac{1}{E_{1,2}} \int_{s_l}^{s_h} \langle E_{1,2}(s) \rangle ds, \quad (8.18)$$

где  $[s_l; s_h]$  — диапазон временных масштабов, для которых выполняется условие захвата фаз (8.15);  $E_{1,2}$  — полная энергия вейвлетного спектра

$$E_{1,2} = \int_0^{+\infty} \langle E_{1,2}(s) \rangle ds \quad (8.19)$$

первой и второй систем соответственно.

Мера  $\gamma$  хаотической синхронизации равняется нулю в случае полностью асинхронной динамики и принимает значение, равное единице, в случае синхронизации с запаздыванием и полной синхронизации. Если же в системе реализуется режим хаотической фазовой или обобщенной синхронизации, то величина  $\gamma$  принимает значения в диапазоне от нуля до единицы в зависимости от доли энергии вейвлетного спектра, приходящейся на синхронные временные масштабы. Таким образом, введенная в рассмотрение мера хаотической синхронизации  $\gamma$  позволяет не только различать синхронную и асинхронную динамику, но и количественно характеризовать степень синхронизма при синхронизации временных масштабов<sup>1)</sup>.

Следует отметить, что даже в том случае, когда связанные хаотические осцилляторы не демонстрируют синхронного поведения, могут существовать временные масштабы  $s^*$ , для которых разность фаз  $\varphi_{s1}(t) - \varphi_{s2}(t)$  оказывается ограниченной. Такие временные масштабы играют роль границ, разделяющих области временных масштабов, на которых разность фаз возрастает и убывает. Тем не менее, очевидно, что присутствие таких временных масштабов не означает факта наличия синхронной динамики, поскольку эти масштабы имеют меру ноль и доля энергии вейвлетного спектра, приходящаяся на них, также оказывается равной нулю<sup>2)</sup>. Вследствие этого мера синхронизации временных масштабов, в соответствии с соотношением (8.18), также оказывается равной нулю, а, следовательно, режим, реализующийся в данном случае в системе, будет классифицирован как асинхронный.

Если в системе возможно синхронное поведение на нескольких различных диапазонах временных масштабов, как это происходит, например, для ЛОВ с поперечным полем, описанной ниже в разделе 8.2 (см. также [92, 105, 106]), то в этом случае возможно ввести меру синхронизации на каждом диапазоне синхронных временных масштабов.

<sup>1)</sup> В некоторой степени мера хаотической синхронизации сходна с индексом синхронизации, использованным в работах [103, 104].

<sup>2)</sup> Соответственно не выполняется условие ненулевой энергии (8.16).

В заключение этого раздела следует отметить, что мера синхронизации оказывается равной единице как в случае полной синхронизации, так и в случае синхронизации с запаздыванием. В обоих случаях все временные масштабы оказываются синхронизованными. Таким образом, режим полной синхронизации и синхронизации с запаздыванием, по сути дела, являются одним и тем же видом синхронного поведения, и разграничение их на два вида обусловлено исторически сложившимися особенностями. Точно так же, как в случае классической синхронизации периодического осциллятора внешним гармоническим сигналом при совпадении собственной частоты осциллятора и частоты внешнего воздействия сдвиг фаз между внешним сигналом и колебаниями осциллятора может быть равен нулю, а при ненулевой расстройке частот, в соответствии с уравнением Адлера [107], возникает ненулевой сдвиг фаз (и, соответственно, можно говорить о ненулевом времени запаздывания  $\tau$ ), но оба случая рассматриваются как один синхронный режим, точно так же при взаимодействии хаотических осцилляторов с идентичными параметрами временной сдвиг между состояниями осцилляторов равен нулю, а при неидентичности осцилляторов наблюдается ненулевое запаздывание, тем большее, чем больше расстройка.

Ниже будет рассмотрено несколько примеров синхронного поведения связанных электронных систем сверхвысокочастотного диапазона, таких как ЛОВ с поперечным полем и гидродинамические модели диода Пирса.

## 8.2. Синхронизация временных масштабов в ЛОВ с поперечным полем

Начнем рассмотрение хаотической синхронизации в системах сверхвысокочастотной электроники с синхронного поведения системы, состоящей из двух связанных ламп обратной волны (ЛОВ) с поперечным полем.

ЛОВ с поперечным полем является простейшей моделью электронно-волновой системы с обратной волной, в которых обнаруживаются сложные автоколебательные режимы, и содержит взаимодействующие встречные электронную и электромагнитную волны с кубичной фазовой нелинейностью [108]. Для ЛОВ с поперечным полем нелинейное ограничение роста амплитуд волн связано с нелинейным смещением фазы электронной волны. Анализ явления синхронизации в такой системе является важным как для выяснения общих закономерностей неавтономной динамики распределенных активных сред различной природы, так и для различных технических приложений ЛОВ.

Рассмотрим основные уравнения, которые описывают модель двух связанных электронно-волновых сред со встречной волной и кубичной фазовой нелинейностью.

Взаимодействие двух встречных бездисперсных волн может быть описано в линейном приближении системой уравнений

$$\frac{\partial F}{\partial \tau} - \frac{\partial F}{\partial \xi} = -AI, \quad (8.20)$$

$$\frac{\partial I}{\partial \tau} + \frac{\partial I}{\partial \xi} = -AF, \quad (8.21)$$

где  $F = |F| \exp[j\varphi_F]$  и  $I = |I| \exp[j\varphi_I]$  — соответственно безразмерные медленно меняющиеся во времени и пространстве по сравнению с  $\exp[j(\hat{\omega}t - \hat{k}\xi)]$  амплитуды электромагнитной и электронной волн;  $\tau$  и  $\xi$  — безразмерные время и координата,  $\hat{\omega}$  и  $\hat{k}$  — частота и волновое число, соответствующие точке пересечения дисперсионных кривых невзаимодействующих электронной и электромагнитной волны,  $A$  — безразмерный управляющий параметр, который можно рассматривать как безразмерные длину системы или ток электронного пучка [108].

Решение линейных уравнений (8.20) и (8.21) предсказывает безграничный экспоненциальный рост амплитуды каждой из волн. Для стабилизации колебаний в системе взаимодействующих волн необходим учет влияния какого-либо нелинейного явления в электронной волне. Одним из простейших нелинейных эффектов является неизохронность электронов-осцилляторов, выражающаяся в зависимости частоты электрона-осциллятора от его энергии [13, 109]. Неизохронность электронов-осцилляторов в системе взаимодействующих встречных волн отражается в нелинейном изменении фазы  $\varphi_I$  электронной волны.

Предположим, что при изменении энергии волны  $W = \alpha I^2$  ( $\alpha$  — коэффициент пропорциональности) та часть фазы электронной волны  $\varphi_I$ , которая пропорциональна продольной координате  $\xi$ , в первом приближении линейно зависит от энергии, что определяется сдвигом частоты излучения за счет эффекта Доплера [109]. Тогда уравнение (8.21) в системе координат со смещенным временем  $\tau' = (\tau - \xi)/2$ ,  $\xi' = \xi$  можно переписать в виде

$$\frac{\partial I}{\partial \xi'} + j|I|^2 I = -AF, \quad (8.22)$$

где штрихи у новых переменных опущены.

Система уравнений (8.20) и (8.22) описывает процессы в системе взаимодействующих встречных волн с кубичной фазовой нелинейностью (ЛОВ с поперечным полем [108]). В автономном режиме уравнения (8.20) и (8.22) необходимо дополнить стандартными граничными условиями  $F(\xi = 1, \tau) = 0$  и  $I(\xi = 0, \tau) = 0$ , которые отражают отсутствие электромагнитной и электронной волн на границах системы. Автономная нелинейная динамика ЛОВ с поперечным полем при увеличении бифуркационного параметра  $A$  подробно описана в работах [108, 110, 111]. При  $\pi/2 < A < 1,83$  в системе возбуждается

одночастотный режим колебаний со стационарными пространственными распределениями  $F(\xi)$  и  $I(\xi)$ . При  $A > 1,83$  система генерирует многочастотные периодические колебания (режим периодической автомодуляции поля), причем при  $A > 2,05$  временная последовательность выходного поля  $F(\tau, \xi = 0)$  имеет вид импульсов с мелкими осцилляциями между ними, возникающими в результате возбуждения сложных «многогорбых» пространственных распределений  $F(\xi)$  и  $I(\xi)$ . Причиной возникновения последних является быстрое нелинейное изменение фазы электронной волны вдоль координаты пространства взаимодействия. Наконец, при  $A > 4,1$  возбуждаются хаотические автоколебания [111].

Исследуемая система двух однонаправленно связанных ЛОВ с поперечным полем описывается следующими уравнениями:

$$\frac{\partial F_{1,2}}{\partial \tau} - \frac{\partial F_{1,2}}{\partial \xi} = -A_{1,2}I_{1,2}, \quad (8.23)$$

$$\frac{\partial I_{1,2}}{\partial \xi} + j|I_{1,2}|^2 I_{1,2} = -A_{1,2}F_{1,2}, \quad (8.24)$$

где индекс «1» соответствует ведущей, а индекс «2» — ведомой активным средам.

Однонаправленная связь между автоколебательными системами записывается в виде нестационарного граничного условия для медленно меняющейся амплитуды поля  $F_2$  ведомой активной среды, при этом граничное условие для первой ведущей активной среды остается неизменным:

$$I_1(\xi = 0, \tau) = 0, \quad F_1(\xi = 1, 0, \tau) = 0, \quad (8.25)$$

$$I_2(\xi = 0, \tau) = 0, \quad F_2(\xi = 1, 0, \tau) = \rho F_1(\xi = 0, 0, \tau), \quad (8.26)$$

где  $\rho = R \exp[j\theta]$  — комплексный коэффициент связи ( $R$  — амплитуда и  $\theta$  — фаза коэффициента связи).

Подобное введение связи, когда управляющий сигнал воздействует только на границе распределенной активной среды, является естественным и физически просто реализуемым, в отличие, например, от работ [49, 112], посвященных изучению хаотической синхронизации распределенных модельных сред, в которых связь была пространственно однородной, т.е. управляющий сигнал снимался и воздействовал в каждой точке связанных активных сред.

Для ведущей и ведомой систем значения управляющих параметров зафиксируем равными  $A_1 = 4,2$  и  $A_2 = 4,9$ , что соответствует режимам хаотической автомодуляции поля в ЛОВ. Величина фазы коэффициента связи  $\theta$  выбрана постоянной  $\theta = \pi$  и не влияет на процессы в связанной системе.

Проанализируем установление режима хаотической синхронизации двух распределенных электронно-волновых систем при изменении амплитуды коэффициента связи  $R$ .

Рассмотрим поведение связанной системы с вышеназванными значениями управляющих параметров ведущей и ведомой активных сред при увеличении амплитуды коэффициента связи  $R$  и будем анализировать колебания  $F_{r1,2}(\tau) = \text{Re}[F_{1,2}(\xi = 0, \tau)]$  на выходе активных сред.

На рис. 8.1, *а* и *б* показаны спектры мощности и фазовые портреты (восстановленные по методу задержек Такенса [113]) колебаний на выходе соответственно ведущей и ведомой системы в автономных режимах колебаний (т.е. при  $R = 0$ ). Выходное поле  $F_{r1}$  (см. рис. 8.1, *а*) ведущей системы, которое подается на вход пространства взаимодействия  $\xi = 1$  второй ведомой активной среды, демонстрирует фурье-спектр мощности колебаний, соответствующий хаотическим колебаниям. На фоне сплошного шумового пьедестала, который располагается на уровне примерно  $-30$  дБ, в спектре наблюдаются два ярко выраженных пика базовых частот, которые отмечены на рис. 8.1, *а*, как  $f_m$  и  $f_b$ . Частота  $f_b$  близка к частоте  $\hat{\omega}$  синхронизма соответствующих линейных невзаимодействующих волн. При уменьшении безразмерного тока пучка  $A_1$  в распределенной системе устанавливается режим периодических колебаний на частоте, близкой к частоте  $f_b$ , которая лежит в СВЧ-диапазоне. Вторая частота, обозначенная как  $f_m$  и располагающаяся в низкочастотной части спектра, определяет характерную частоту низкочастотной модуляции амплитуды  $F_1$  поля.

С ростом бифуркационного параметра  $A$  колебания в системе усложняются, что видно из анализа спектра мощности на рис. 8.1, *б*, построенного при  $A_2 = 4,9$  и  $R = 0$  (автономная генерация). Шумовой пьедестал в спектре мощности в большей части диапазона частот поднимается до уровня  $-(5-10)$  дБ, на его фоне уже невозможно выделить какие-либо характерные частоты колебаний в активной среде.

Будем рассматривать поведение ведомой системы «2» при воздействии на нее поля ведущей системы при увеличении амплитуды  $R$  коэффициента связи между распределенными автоколебательными системами. Рост параметра  $R$  означает, что мощность внешнего сигнала, воздействующего на систему, увеличивается как  $R^2$ .

С ростом параметра связи  $R$  спектр генерации ведомой системы изменяется, что иллюстрируют рис. 8.1, *в*, *г*. При малом  $R < 0,3$  (рис. 8.1, *в*) в спектре на фоне развитого шумового пьедестала появляется слабо выраженная частота (отмечена стрелкой), соответствующая основной частоте  $f_b$  в спектре ведущей системы (см. рис. 8.1, *а*). При больших значениях  $R > 0,3$  в спектре ведомой системы возрастает энергия спектральных компонент, соответствующих базовым частотам в спектре мощности ведущей системы (отмечены на рис. 8.1, *г*, построенном при  $R = 0,5$ ).

Рассмотрим установление синхронизации временных масштабов в системе связанных электронно-волновых сред. На рис. 8.2 показаны границы  $s_1$  и  $s_2$  диапазонов синхронизованных временных масштабов на плоскости  $(R, s)$ .

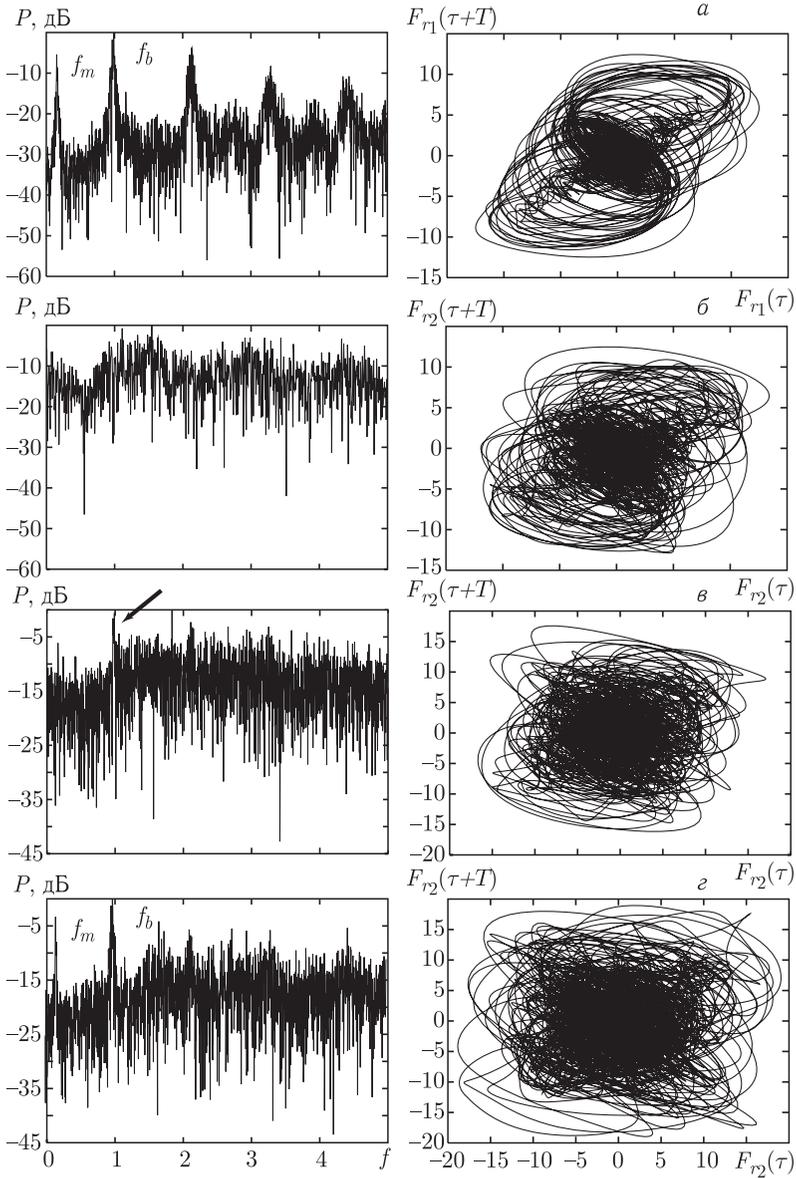


Рис. 8.1. Спектры мощности и фазовые портреты колебаний в автономных ведущей (а) и ведомой (б) ЛОВ и неавтономной ведомой системе при  $R = 0,2$  (e) и  $R = 0,5$  (z)

Особенностью динамики данной системы является наличие синхронизации временных масштабов хаотических сигналов каждой из подсистем при сравнительно большой амплитуде коэффициента связи  $R$  для двух диапазонов соответственно вблизи базовых временных масштабов  $s_b = 1/f_b$  и  $s_m = 1/f_m$ . На рис. 8.2 соответствующие диапазоны

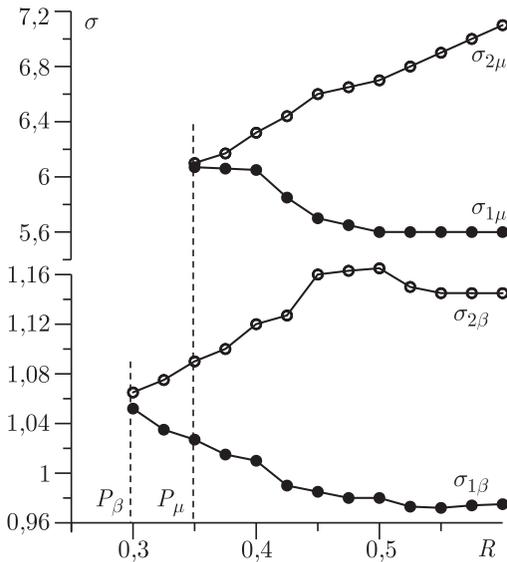


Рис. 8.2. Границы  $s_1$  и  $s_2$  диапазонов синхронизованных временных масштабов на плоскости  $(R, s)$  для базовых масштабов  $s_b$  (снизу) и  $s_m$  (сверху)

синхронизованных масштабов показаны для области вблизи базового масштаба  $s_b$  снизу и масштаба  $s_m$  — сверху рисунка.

Из анализа рис. 8.2 следует, что при величинах коэффициента связи  $R \in (0; 0,29)$  в системе не наблюдается установления режима хаотической синхронизации. Последнее означает, что не существует ни одного временного масштаба  $s$ , для динамики фазы которого выполнялось бы условие хаотической синхронизации (8.15).

С ростом параметра связи  $R$  возникает диапазон масштабов  $\Delta s = s_2 - s_1$ , для которого выполняется условие захвата фаз (8.15), и энергия, приходящаяся на этот диапазон, отлична от нуля (8.16). Последнее означает, что в связанных активных средах устанавливается режим хаотической синхронизации временных масштабов [88].

С ростом связи  $R$  вначале происходит синхронизация временных масштабов вблизи базового масштаба  $s_b$  при  $R = R_b$  (отмечен на рис. 8.2), и только с дальнейшим увеличением коэффициента связи при  $R = R_m > R_b$  имеет место захват фаз временных масштабов в области базового масштаба  $s_m$ , соответствующего частоте модуляции амплитуды выходного поля ЛОВ.

Рассмотрим, с чем связано возникновение диапазона  $\Delta s$  синхронизуемых временных масштабов (т. е. масштабов, для которых выполняется критерий синхронизации (8.15) и (8.16)) вблизи базовой частоты  $f_b = 1/s_b$ . Изучим вид вейвлетных спектров мощности  $\langle E_{1,2}(s) \rangle$ , определяемых интегральным соотношением (8.14), для ведущей и ведомой систем. Вейвлетные спектры колебаний выходного поля ведущей (штриховая линия 1) и ведомой (сплошная линия 2) ЛОВ представ-

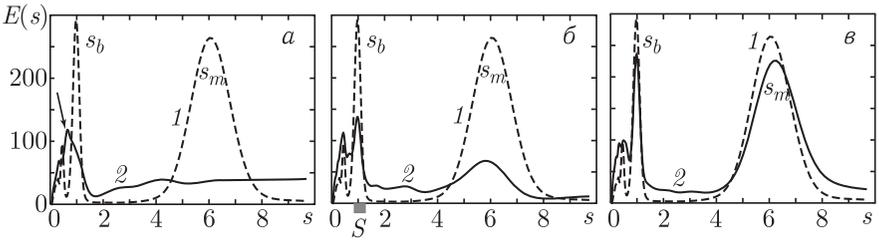


Рис. 8.3. Вейвлетные спектры мощности колебаний выходного поля ведущей (штриховая линия) и ведомой (сплошная линия) ЛОВ для различных амплитуд коэффициента связи: а)  $R = 0$ ; б)  $R = 0,2$  и в)  $R = 0$

лены на рис. 8.3 для различных значений параметра связи  $R$ . Вид вейвлетного спектра  $\langle E_1 \rangle$  ведущей ЛОВ не меняется (т.к. для нее выбрано фиксированное значение параметра  $A_1$  и на нее не воздействует внешнее поле) и представлен на всех рисунках для удобства сравнения с вейвлетными спектрами мощности  $\langle E_2 \rangle$  ведомой ЛОВ при различных  $R$ .

На рис. 8.3, а показаны вейвлетные спектры мощности колебаний для автономных генераторов. Колебания в каждой из активных сред имеют существенно различные вейвлетные спектры. Так, в вейвлетном спектре  $\langle E_1 \rangle$  ведомой системы выделяются базовые временные масштабы  $s_b$  (соответствующие высокой частоте  $f_b$ ) и  $s_m$  (соответствующий модуляционным колебаниям с основной частотой  $f_m$ ), отмеченные на рис. 8.3. В вейвлетном спектре автономной ведущей системы четко выделяются временные масштабы, соответствующие высокочастотным спектральным компонентам (отмечены стрелкой на рис. 8.3, а), однако расположение максимума в вейвлетном спектре  $\langle E_2 \rangle$  не соответствует базовому временному масштабу  $s_b$  ведущей системы, т.е. основные частоты в каждой из подсистем не совпадают. Что касается больших масштабов (соответствующих низким модуляционным частотам), то для них вид вейвлетных спектров принципиально различен. В ведомой системе в области масштаба  $s_m$  вейвлетный спектр сплошной и однородный, т.е. модуляционные колебания демонстрируют сплошной шумоподобный спектр без выделенных на фоне шумового пьедестала частот (временных масштабов).

С увеличением коэффициента связи  $R$  условие синхронизации (8.15) и (8.16) начинает выполняться только для тех временных масштабов  $s$ , энергия которых в вейвлетных спектрах колебаний ведущей и ведомой систем весьма значительна. Действительно, при  $R \approx 0,3$  условие синхронизации выполняется только для временных масштабов вблизи основного масштаба  $s_b = 1/f_b \approx 1,0$  (см. также рис. 8.2). Как следует из анализа рис. 8.3, б, это тот диапазон временных масштабов<sup>1)</sup>, на который приходится максимальная энергия вейвлетного спек-

<sup>1)</sup> На рисунке он выделен серым цветом и символом  $S$  на оси масштабов  $s$ .

тра колебаний. Из рис. 8.3, б видно, что одновременно увеличивается энергия вейвлетного спектра, приходящаяся на масштаб  $s_m$ . Однако, при  $R \approx 0,3$  его энергии невелика, и синхронизация временных масштабов модуляционных колебаний поля не наблюдается.

При больших коэффициентах связи  $R > 0,35$  виды вейвлетных спектров колебаний полей на выходе ведущей и ведомой систем становятся близкими друг к другу (см. рис. 8.3, в). В спектрах примерно с одинаковой интенсивностью представлены временные масштабы, соответствующие базовым частотам  $s_m$  и  $s_b$ . Анализ динамики при этом показывает, что условия синхронизации (8.15) и (8.16) выполняются для обоих наиболее интенсивных временных масштабов в спектре мощности и соответственно выделяются два диапазона масштабов, в которых имеет место захват фаз (см. рис. 8.2 для  $R > 0,35$ ).

Таким образом, синхронизация временных масштабов хаотических колебаний поля в связанных активных средах наблюдается в первую очередь для тех масштабов  $s$ , энергия которых в спектре мощности колебаний значительна.

С увеличением связи диапазон временных масштабов, для которых выполняются условия (8.15) и (8.16), начинает расширяться. В синхронную динамику начинают вовлекаться масштабы, которые находятся вблизи наиболее интенсивных масштабов и энергия которых тоже достаточно значительна.

Последнее хорошо иллюстрирует рис. 8.2, из которого следует, что для обоих базовых масштабов  $s_b$  и  $s_m$  наблюдается расширение диапазона синхронизованных масштабов  $\Delta s$  с ростом величины коэффициента связи  $R$ . При больших амплитудах коэффициента связи  $R$  между ЛОВ диапазон синхронных масштабов  $\Delta s_b = s_{2b} - s_{1b}$  в области базового масштаба  $s_b$  перестает расширяться и, более того, сужается при  $R > 0,5$ . В то же время в области масштабов  $s_m$ , описывающих модуляцию амплитуды выходного поля, диапазон синхронных масштабов  $\Delta s_m = s_{2m} - s_{1m}$  продолжает линейно расширяться с ростом  $R$  за счет роста верхней границы области синхронизованных масштабов  $s_{2m}$ . Последнее связано с тем, что с ростом  $R$  энергия в вейвлетном спектре ведомой системы перераспределяется таким образом, что наблюдается увеличение интенсивности больших масштабов  $s > s_m$ . Тогда наиболее интенсивные временные масштабы оказываются расположенными вблизи верхней границы  $s_{2m}$  синхронизованных масштабов, поэтому именно эти масштабы оказываются синхронизованными в первую очередь при увеличении связи.

Рассмотрим поведение меры хаотической синхронизации для исследуемой системы. В данном случае, когда синхронное поведение наблюдается для двух базовых масштабов, можно ввести меры синхронизации  $\gamma_b$  и  $\gamma_m$  соответственно для каждого из масштабов  $s_b$  и  $s_m$ , а также интегральную характеристику меры синхронизации активной распределенной среды  $\gamma = \gamma_b + \gamma_m$ . Зависимость величины  $\gamma$  от коэффициента

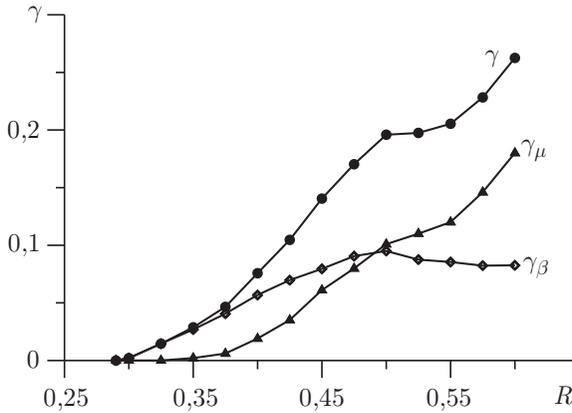


Рис. 8.4. Зависимости величин  $\gamma_b$ ,  $\gamma_m$  и  $\gamma$  от амплитуды коэффициента связи  $R$  однонаправленно связанных ЛОВ

связи  $R$  характеризует степень хаотической синхронизации колебаний в связанных электронно-волновых системах с обратной волной.

На рис. 8.4 показаны зависимости величин  $\gamma_b$ ,  $\gamma_m$  и  $\gamma$  от параметра связи  $R$  между подсистемами. Видно, что при малых  $R < 0,4-0,5$  основная доля энергии колебательного процесса, приходящаяся на синхронизованные масштабы, соответствует базовому масштабу  $s_b$  ( $\gamma_b > \gamma_m$ ), т.е. в первую очередь, в связанной системе происходит захват фаз частот  $f \sim f_b$ , близких к частоте синхронизма электронной и электромагнитной волн в активной среде. Далее с ростом  $R$  происходит захват частот, близких к частоте модуляции  $f_m$  поля ведущей ЛОВ. С ростом  $R$  все большее число масштабов, описывающих низкочастотную хаотическую модуляцию выходного сигнала ЛОВ, оказывается синхронизованным. Следовательно, относительная доля энергии синхронизованных низкочастотных модуляционных колебаний  $\gamma_m$  растет с увеличением  $R$ . При  $R > 0,5$  доля энергии синхронных низкочастотных модуляционных временных масштабов  $\gamma_m$  становится больше величины  $\gamma_b$ , характеризующей долю энергии синхронных ВЧ колебаний.

Интегральная доля энергии  $\gamma$ , приходящейся на синхронные временные масштабы, как видно из рис. 8.4, растет с ростом амплитуды коэффициента связи. Однако даже при больших величинах  $R$ , когда на ведомую активную среду воздействует сигнал ведущей системы весьма значительной мощности ( $R^2 \sim 0,3-0,4$ ), доля энергии, приходящейся на синхронные масштабы, не превышает величины  $\gamma \sim 0,3$ .

Таким образом, при хаотической синхронизации двух однонаправленно связанных ЛОВ с поперечным полем при увеличении коэффициента связи  $R$  вначале наблюдается синхронизация временных масштабов колебаний вблизи наиболее интенсивного в вейвлетном спектре мощности временного масштаба  $s_b$ , близкого к частоте синхрониз-

ма электронной и электромагнитной волн. С ростом  $R$  происходит увеличение энергии синхронизованных масштабов в области базового масштаба  $s_b$  и, одновременно, возникает синхронизация временных масштабов  $\Delta s_m$ , описывающих низкочастотные модуляционные колебания амплитуды поля  $F$  в ЛОВ. С дальнейшим увеличением связи рост энергии колебательных процессов, приходящейся на синхронные временные масштабы, происходит только за счет увеличения диапазона синхронных масштабов  $\Delta s_m$ . Данное поведение двух связанных ЛОВ количественно описывает мера взаимной хаотической синхронизации  $\gamma = \gamma(R)$ .

Рассмотрим теперь физические процессы, сопровождающие процесс установления режима хаотической синхронизации в неавтономной активной среде взаимодействующих встречных волн. В первую очередь, будем интересоваться пространственной динамикой ведомой активной среды при установлении хаотической синхронизации.

Внешний хаотический сигнал  $F_{\text{ext1}}(\tau) = F_1(\tau, \xi = 0)$ , генерируемый ведущей (первой) ЛОВ, воздействует в точке  $\xi = L$  ведомой системы и далее распространяется навстречу электронной волне к выходу ЛОВ,  $\xi = 0$ . Здесь  $L$  — безразмерная длина активной среды, которая в нашей нормировке равна  $L = 1,0$ . Режим синхронизации активной электронно-волновой среды в целом (т. е. тот режим, который был рассмотрен ранее) означает, что имеет место синхронизация временных масштабов внешнего сигнала  $F_{\text{ext1}}(\tau)$  и сигнала  $F_{\text{out2}}(\tau) = F_2(\tau, \xi = 0)$ , снимаемого с выхода ведомой (второй) среды. Будем теперь анализировать пространственно-временную динамику ведомой системы, анализируя наличие синхронизации временных масштабов внешнего сигнала  $F_{\text{ext1}}(\tau)$  и сигналов  $F_2(\tau, \xi)$ , снимаемых из различных точек  $\xi$  пространства ведомой активной среды.

Для определенности рассмотрим синхронизацию временных масштабов, находящихся вблизи наиболее интенсивного масштаба  $s_b$  в вейвлетном спектре мощности внешнего хаотического сигнала. Около этого временного масштаба, как было показано выше, синхронизация временных масштабов возникает при меньшем значении параметра связи  $R$  (при меньшей энергии внешнего сигнала  $P_{\text{ext}} = R^2 |F_{\text{ext1}}|^2$ ). Будем исследовать диапазон  $\Delta s_b$  синхронных временных масштабов как функцию координаты пространства активной среды. Зависимость  $\Delta s_b(\xi)$  и рассчитанная по ней мера синхронизации  $\gamma(\xi)$  являются характеристиками, описывающими пространственную динамику установления режима хаотической синхронизации активной среды при воздействии внешнего хаотического сигнала на одном из ее концов.

На рис. 8.5, *a* на плоскости «координата ( $\xi - L$ ) пространства взаимодействия, отсчитываемая от входа системы  $\xi = L$ , — временные масштабы  $s$ » представлены границы области синхронизованных масштабов в различных сечениях пространства для трех значений амплитуды коэффициента связи  $R$ .

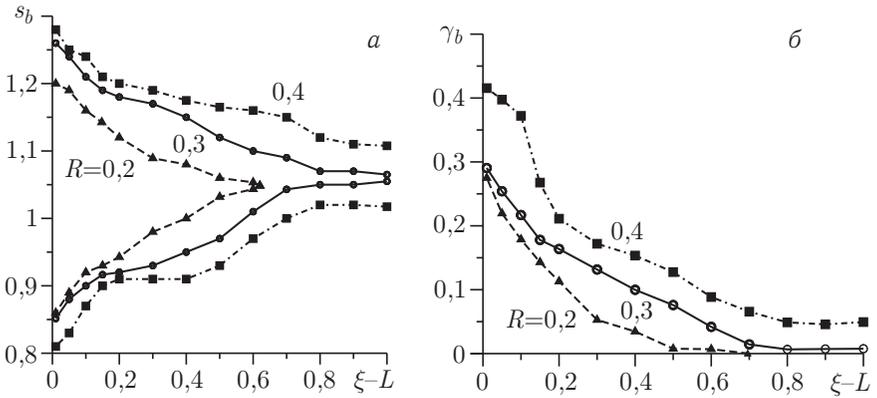


Рис. 8.5. Границы области синхронизованных масштабов на плоскости «координата  $(\xi - L)$  пространства взаимодействия, отсчитываемая от входа системы  $\xi = L$ , — временные масштабы  $s$ » (а); мера синхронизации  $\gamma_b(\xi)$  как функция координаты  $(\xi - L)$  пространства взаимодействия (б), построенная для различных значений амплитуды коэффициента связи  $R$

Из рис. 8.5, а видно, что ширина области временных масштабов, для которых выполняются условия синхронизации (8.15) и (8.16), максимальна в области пространства, примыкающей к границе активной среды  $\xi = L = 1,0$ , на которую подается управляющий сигнал ведущей ЛОВ (см. граничные условия (8.26) для поля  $F_2$  ведомой ЛОВ). Далее по мере продвижения вдоль активной среды к выходу лампы  $\xi = 0$  наблюдается постепенное уменьшение диапазона  $\Delta s_b$  синхронизованных масштабов. Мера синхронизации  $\gamma_b(\xi)$  (см. рис. 8.5, б) ведет себя вдоль пространства активной среды аналогично ширине области синхронизованных масштабов  $\Delta s_b$ . По мере уменьшения координаты  $\xi$  пространства взаимодействия величина энергии вейвлетного спектра колебаний, приходящаяся на область синхронизованных масштабов, постепенно уменьшается.

В качестве иллюстрации режима хаотической синхронизации всей активной среды на рис. 8.5, а показаны зависимости границ области синхронизованных масштабов, построенные для  $R = 0,3 \approx R_b$ . Видно, что теперь во всех сечениях пространства активной среды наблюдается не равный нулю диапазон синхронных временных масштабов  $\Delta s$ . В этом случае можно говорить о синхронной динамике (с точки зрения хаотической синхронизации) всей активной среды как единого целого. С увеличением параметра связи диапазон синхронизованных временных масштабов  $\Delta s(\xi)$  расширяется (см. рис. 8.5, а,  $R = 0,4$ ), что хорошо согласуется с полученными ранее результатами. Динамика относительной энергии вейвлетного спектра колебаний, приходящейся на синхронные временные масштабы в этом случае вблизи входа  $\xi = L$  системы составляет величину 30–40% в точке  $\xi = 0,99L$ . По мере продвижения сигнала вдоль пространства величина  $\gamma_b$  уменьша-

ется и на выходе системы  $\xi = 0$  доля синхронной энергии не превышает 1–5%.

Если величина коэффициента связи  $R$  соответствует значениям, при которых не наблюдается хаотическая синхронизация связанных ЛЮВ ( $R < 0,29$ ), то ширина области синхронизованных масштабов достигает нуля на длине пространства взаимодействия  $\xi_s < L$ . Последнее означает, что в асинхронном хаотическом режиме вдоль пространства взаимодействия неавтономной (ведомой) активной среды наблюдается сложная пространственная динамика захвата фаз временных масштабов колебаний поля  $F_2(\tau, \xi)$ , которая характеризуется следующей зависимостью ширины области синхронизованных временных масштабов (см. рис. 8.5, а,  $R = 0,2$ )

$$\begin{aligned} \Delta s \neq 0 & \text{ при } \xi > L - \xi_s, \\ \Delta s = 0 & \text{ при } \xi < L - \xi_s. \end{aligned} \tag{8.27}$$

Тогда можно говорить о том, что пространство неавтономной (ведомой) активной среды в асинхронном режиме работы делится на две характерные области. Первая из них длиной  $\xi_s$  и координатами  $\xi \in (L - \xi_s, L)$  примыкает к входу активной среды  $\xi = L$  и характеризуется тем, что колебания поля  $F_2(\tau, \xi)$  в ней демонстрируют хаотическую синхронизацию с колебаниями входного сигнала  $F_{\text{ext1}}(\tau)$  (а следовательно, и отличную от нуля меру хаотической синхронизации  $\gamma_b|_{\xi > L - \xi_s} \neq 0$ ) на временных масштабах, лежащих в некотором диапазоне  $\Delta s$ . Эту область пространства естественно назвать областью синхронных колебаний, а ее длину  $\xi_s$  — длиной синхронизации. Вторая область  $\xi \in (0, L - \xi_s)$  есть область, в которой хаотическая синхронизация разрушается и диапазон синхронизованных временных масштабов (8.27), а также мера синхронизации  $\gamma_b$  в ней равны нулю.

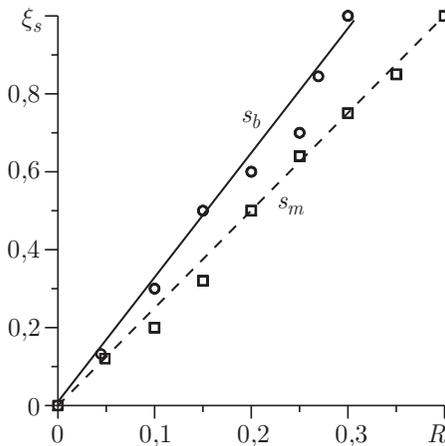


Рис. 8.6. Зависимость длины синхронизации  $\xi_s$  от параметра связи  $R$  для базового и модуляционного временных масштабов  $s_b$  и  $s_m$

Зависимость длины синхронизации  $\xi_s$  от параметра связи приведена на рис. 8.6. С увеличением коэффициента связи длина синхронизации  $\xi_s$  растет, и при некотором значении  $R = R_b$  длина синхронизации становится равной длине пространства взаимодействия  $\xi_s \equiv L$ . Последнее означает, что во всем пространстве активной электронно-волновой среды устанавливается режим хаотической синхронизации, а следовательно, можно говорить о хаотической синхронизации ЛОВ как единого целого. Именно этот режим рассматривался ранее, когда исследовалась динамика временных масштабов хаотического сигнала ведомой системы, который снимался с выхода  $\xi = 0$ .

Таким образом, исследование синхронизации временных масштабов для подобной системы является эффективным методом анализа хаотической синхронизации как с качественных, так и с количественных позиций, используя меру хаотической синхронизации.

### **8.3. Синхронизация временных масштабов и полная хаотическая синхронизация в гидродинамических моделях диода Пирса**

Перейдем теперь к рассмотрению явления хаотической синхронизации в двух распределенных системах сверхвысокочастотной электроники — связанных гидродинамических моделях диода Пирса. Как уже отмечалось выше, диод Пирса является одной из хорошо изученных классических моделей пучково-плазменных систем СВЧ электроники, демонстрирующих различные режимы хаотической динамики (см. главу 2).

Необходимо подчеркнуть, что ранее большинство исследований хаотической синхронизации проводилось либо для систем с малым числом степеней свободы [3, 49, 69], либо для эталонных моделей распределенных систем (например, цепочки и решетки связанных нелинейных осцилляторов [10, 114], связанных уравнений Гинзбурга–Ландау [115–117], Курамото–Сивашинского [118]). Отдельно отметим близкие к нашей тематике исследования синхронизации низкочастотных колебаний в плазме [65, 119]. Приведенные работы показывают, что при введении однонаправленной или симметричной связи распределенные системы могут демонстрировать различные типы синхронной динамики, а именно, полную, обобщенную и синхронизацию с запаздыванием. Однако, детальных исследований хаотической синхронизации в пучково-плазменных системах сверхвысокочастотного диапазона практически не проводилось (редкими исключениями являются работы [24, 120]). Тем не менее, изучение явления хаотической синхронизации в распределенных пучково-плазменных системах сверхвысокочастотного диапазона представляется весьма важным и актуальным в связи с широкими возможностями применения синхронных режимов динамики взаимодействующих систем для передачи информации с по-

мощью хаотических колебаний [24], а также управления хаотическими колебаниями в системах СВЧ электроники [92, 105].

Рассмотрим два связанных диода Пирса в гидродинамическом приближении (см. подробнее главу 2, а также [121]):

$$\frac{\partial^2 \varphi_{1,2}}{\partial x^2} = \alpha_{1,2}^2 (\rho_{1,2} - 1), \quad (8.28)$$

$$\frac{\partial \rho_{1,2}}{\partial t} = -\frac{\partial (\rho_{1,2} v_{1,2})}{\partial x}, \quad (8.29)$$

$$\frac{\partial v_{1,2}}{\partial t} = -v_{1,2} \frac{\partial v_{1,2}}{\partial x_{1,2}} + \frac{\partial \varphi_{1,2}}{\partial x}, \quad (8.30)$$

с граничными условиями:

$$v_{1,2}(0, t) = 1, \quad \rho_{1,2}(0, t) = 1, \quad \varphi_{1,2}(0, t) = 0, \quad (8.31)$$

где индексы «1» и «2» относятся соответственно к первой и второй пучково-плазменным системам.

Взаимная связь между системами осуществляется с помощью изменения значения безразмерного потенциала на правых границах обеих взаимодействующих систем:

$$\varphi_{1,2}(1, 0, t) = \varepsilon \{ \rho_{1,2}(x = 1, 0, t) - \rho_{2,1}(x = 1, 0, t) \}. \quad (8.32)$$

В нестационарных граничных условиях, описывающих двунаправленную (8.32) связь между системами, величина  $\varepsilon$  представляет собой коэффициент связи между системами, а величины  $\rho_{1,2}(x = 1, t)$  есть колебания безразмерной плотности пространственного заряда, регистрируемые на выходе каждой из систем. Такой тип связи является физическим и легко реализуемым в эксперименте. На выходе диодного промежутка, образованного сетками [122], прозрачными для электронного потока, размещается отрезок спиральной замедляющей системы [123], который регистрирует колебания плотности пространственного заряда электронного пучка. Далее сигнал с выхода отрезка замедляющей системы первой СВЧ-системы подается на одну из сеток диодного промежутка второй из связанных СВЧ-систем, что приводит к модуляции разности потенциалов в пространстве взаимодействия. В этом случае параметр  $\varepsilon$  зависит только от параметров замедляющей системы (сопротивление связи, длина системы и т. д.), линии связи (волновое сопротивление, затухание и т. д.) и не зависит от связываемых систем.

Изучим динамику взаимно связанных диодов Пирса (8.28)–(8.30) с граничными условиями (8.31) и (8.32) при фиксированном значении параметра Пирса одной из систем  $\alpha_1 = 2,861\pi$  и изменении управляющего параметра  $\alpha_2$  второй системы в диапазоне  $\alpha \in (2,850\pi, 2,870\pi)$ , в котором в системе реализуется хаотическая динамика (см. главу 2).

Численное моделирование показывает, что при слабой расстройке хаотических систем  $\Delta\alpha = \alpha_1 - \alpha_2$  наблюдается установление синхро-

низации временных масштабов, которая определяется путем анализа динамики разности фаз на различных временных масштабах  $s$ . Введение непрерывного множества фаз  $\phi_s(t)$  хаотического сигнала на различных временных масштабах  $s$  осуществлялось с помощью непрерывного вейвлетного преобразования, обсуждавшегося выше в разделе 8.1. В качестве анализируемых временных рядов рассматривались хаотические колебания плотности пространственного заряда  $\rho_{1,2}(t)$  в точке пространства взаимодействия  $x = 0,2$ .

Поведение связанных пучково-плазменных систем иллюстрирует рис. 8.7, *a*, построенный при  $\alpha_1 = 2,861\pi$  и  $\alpha_2 = 2,860\pi$ , на котором показано изменение диапазона синхронных масштабов при увеличении

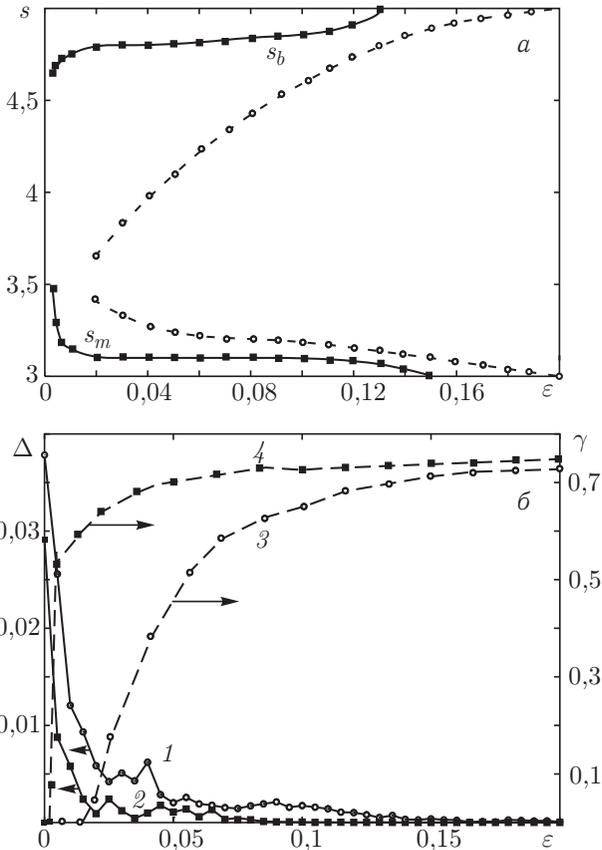


Рис. 8.7. Зависимости нижней  $s_m$  и верхней  $s_b$  границ области синхронизированных масштабов (*a*) и зависимости меры идентичности  $\Delta$  хаотических пространственно-временных колебаний (графики 1, 2) и величины  $\gamma$  относительной энергии (графики 3, 4), приходящейся на синхронные масштабы (*б*), от величины параметра связи  $\epsilon$  для малой  $\alpha_1/\pi = 2,860$ ,  $\alpha_2/\pi = 2,861$  (отмечены черными квадратами) и большой  $\alpha_1/\pi = 2,860$ ,  $\alpha_2/\pi = 2,858$  (отмечены черными кружками) расстройки параметров

параметра связи  $\varepsilon$ . Из рис. 8.7, *а* видно, что при  $\varepsilon > 0,0007$  в системе появляются временные масштабы, на которых динамика пучково-плазменных колебаний синхронна. Данный режим соответствует режиму синхронизации временных масштабов хаотических колебаний. С ростом параметра связи  $\varepsilon$  диапазон синхронных масштабов увеличивается и при  $\varepsilon \approx 0,08-0,1$  динамика системы практически во всем диапазоне временных масштабов становится синхронной — в связанных пучково-плазменных системах возникает режим, близкий к синхронизации с запаздыванием со сдвигом колебаний между состояниями систем во времени  $\tau \approx 0,07$ . Далее, с ростом параметра связи  $\varepsilon$  сдвиг во времени между колебаниями уменьшается, и связанная система стремится к режиму полной хаотической синхронизации, характеризуемой близкой к идентичной динамикой каждой из связанных систем во времени ( $\tau \approx 0$ ).

При большей расстройке параметров  $\Delta\alpha$  связанных пучково-плазменных систем, когда спектральный состав колебаний в электронном пучке существенно сложнее, наступление синхронизации временных масштабов наблюдается при больших значениях коэффициента связи. На рис. 8.7, *а* для случая  $\alpha_1 = 2,860\pi$  и  $\alpha_2 = 2,858\pi$  показаны соответствующие границы  $[s_m, s_b]$  области синхронных масштабов. Как и выше, с ростом  $\varepsilon$  возникает диапазон синхронных временных масштабов и система стремится к режиму полной хаотической синхронизации, однако это происходит при значительно больших значениях параметров связи, чем в случае малой расстройки. Для анализа степени близости колебаний в каждой из распределенных систем была рассчитана зависимость меры идентичности  $\Delta$  пространственно-временных хаотических колебаний систем от  $\varepsilon$ , которая определяется как [124]

$$\Delta = \langle |\rho_1(x, t) - \rho_2(x, t)| + |v_1(x, t) - v_2(x, t)| + |\phi_1(x, t) - \phi_2(x, t)| \rangle, \quad (8.33)$$

где  $\langle \dots \rangle$  означает усреднение по времени и пространству. Результаты показаны на рис. 8.7, *б* (графики 1, 2), из которого видно, что функция  $\Delta(\varepsilon)$  быстро спадает с ростом связи, стремясь к нулю. Из рис. 8.7, *б* (график 1, кружки) видно, что величина  $\Delta$  при большой расстройке по параметру пучково-плазменных систем при увеличении параметра связи  $\varepsilon$  остается не равной нулю (хотя и становится достаточно малой при  $\varepsilon > 0,17$ ) в отличие от случая слабой расстройки (рис. 8.7, *б* (график 2, квадраты)). Режимы колебаний, для которых  $\Delta(\varepsilon) \approx 0$ , являются режимами полной хаотической синхронизации.

Представляется важным проведение количественной оценки возникающей между двумя связанными распределенными системами синхронизации — от ситуации, когда динамика систем асинхронна, до режима полной синхронизации, когда временная и пространственная динамика систем практически совпадают. Для этой цели введем в рассмотрение количественную характеристику меры хаотической синхронизации связанных систем, которая определяется как относительная

доля энергии вейвлетного спектра, приходящаяся на диапазон синхронных временных масштабов  $[s_m; s_b]$ :

$$\gamma = \int_{s_m}^{s_b} \langle E(s) \rangle ds / \int_0^{\infty} \langle E(s) \rangle ds, \quad (8.34)$$

где  $\langle E(s) \rangle$  — интегральное распределение энергии вейвлетного спектра по масштабам, определяемое формулой (8.14). Значение величины  $\gamma = 0$  свидетельствует об отсутствии режима хаотической синхронизации связанных подсистем. Величина  $\gamma > 0$  показывает, что в системе реализуется режим синхронизации временных масштабов, означающий наличие синхронизированных масштабов, для которых выполняются условия (8.15) и (8.16). Значение  $\gamma = 1$  показывает, что колебания в каждой из подсистем близки друг к другу, т. е. реализуется режим полной синхронизации. Рост  $\gamma$  от 0 до 1 свидетельствует об увеличении доли энергии, приходящейся на синхронные временные масштабы  $s$ .

На рис. 8.7, б (графики 3, 4) показаны зависимости  $\gamma(\varepsilon)$  для двух рассмотренных выше наборов значений управляющих параметров  $\alpha_{1,2}$ . Видно, что с ростом параметра связи имеет место увеличение доли энергии хаотических пространственно-временных колебаний, приходящейся на синхронизированные масштабы, что соответствует сближению колебаний в каждой из распределенных систем и установлению в итоге (при больших величинах параметра связи) режима полной хаотической синхронизации.

На рис. 8.8 на плоскости управляющих параметров  $(\alpha_2, \varepsilon)$  показана граница области полной хаотической синхронизации в системе двунаправленно связанных диодов Пирса, построенная при фиксированном значении параметра Пирса  $\alpha_1 = 2,861\pi$ . Из рисунка видно, что с ростом параметра связи фактически при сколь угодно значительной неидентичности управляющих параметров  $\alpha_{1,2}$  диоды Пирса демонстрируют режим полной синхронизации. Это относится как к слабо хаотическим колебаниям и малой расстройке параметров, так

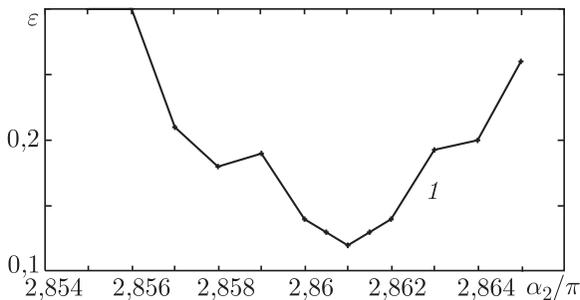


Рис. 8.8. Плоскость управляющих параметров  $(\alpha_2/\pi, \varepsilon)$  при значении  $\alpha_1 = 2,861\pi$ . Линией показана граница возникновения режима полной хаотической синхронизации связанных распределенных пучково-плазменных систем

и к развитому хаосу даже при значительном отличии управляющих параметров в каждой из подсистем. При слабой неидентичности взаимодействующих систем режим полной синхронизации в распределенных пучково-плазменных системах наступает при минимальных значениях параметра связи  $\varepsilon$ . С ростом уровня неидентичности диодов Пирса мы наблюдаем увеличение значений параметра связи, при которых динамика связанных систем становится идентичной.

Итак, с позиций синхронизации временных масштабов рассмотрена динамика двух связанных гидродинамических моделей диода Пирса, продемонстрировано, каким образом при увеличении связи между системами происходит переход от асинхронной динамики к полной хаотической синхронизации, найдены численные значения границы режима полной синхронизации по параметру связи  $\varepsilon$  для различных значений управляющего параметра Пирса.

Понятно, что если две связанные друг с другом системы могут демонстрировать режим полной хаотической синхронизации, то подобного же поведения можно ожидать и в случае, если связанных идентичных систем будет больше. Если таких взаимодействующих хаотических систем достаточно много, то в этом случае говорят о *сетях* нелинейных элементов. Конечно, в этом случае существует специфика, связанная именно с большим числом взаимодействующих систем. В следующем разделе рассматривается режим полной синхронизации сети, в качестве узлового элемента которой выбрана та же самая гидродинамическая модель диода Пирса, которая была рассмотрена в этом разделе.

#### **8.4. Полная синхронизация сети, состоящей из распределенных систем сверхвысокочастотной электроники**

К настоящему времени наиболее изученным эффектом коллективного поведения взаимодействующих объектов, демонстрирующих хаотическую динамику, является синхронизация двух связанных нелинейных систем [3, 49]. Однако в последнее десятилетие активно развивается теория взаимодействия большого числа нелинейных систем — сетей нелинейных элементов [10, 125, 126]. Особое внимание исследователей привлекают сложные, состоящие из хаотических элементов сети, структура которых нерегулярна и характеризуется большой разнородностью в мощности межэлементной связи [127–131]. Интерес к изучению подобных сетей связан как с необходимостью анализа разнообразных природных, социальных и технических объектов, так и с важностью изучения фундаментальных аспектов явления хаотической синхронизации в системе многих связанных парциальных подсистем [132, 133].

Изменение управляющих параметров элементов сети и величины связи между взаимодействующими системами приводит к различным

режимам коллективного поведения сети — асинхронной динамике, полной синхронизации, кластерной синхронизации [126]. Асинхронная динамика наблюдается в том случае, когда динамика любой пары элементов сети  $\forall i, j$  не демонстрирует синхронизма,  $\mathbf{x}_i \neq \mathbf{x}_j$ . Под режимом полной синхронизации понимается состояние сети, когда все ее элементы после переходного процесса демонстрируют полностью идентичную динамику. Если управляющие параметры сети подобраны таким образом, что лишь часть элементов демонстрирует синхронизм в своей динамике, говорят о наличии синхронного кластера. Отметим, что типичной является ситуация сосуществования в одной сети неидентичных элементов нескольких синхронных кластеров.

В данной главе мы рассмотрим режим полной синхронизации сети, состоящей из распределенных пучково-плазменных систем сверхвысокочастотного диапазона. Исследование подобных сетей представляется весьма интересным в связи с широкими возможностями применения СВЧ электроники для передачи информации с помощью хаотических колебаний [24, 134], а также управления хаотическими колебаниями в системах СВЧ электроники [92, 105]. Отметим, что успешное решение задачи о получении полной синхронизации в подобных системах позволит создать эффективные методы повышения мощности СВЧ-устройств электроники больших мощностей за счет сложения излучения от нескольких источников, каждый из которых демонстрирует сложные широкополосные режимы генерации. Таким образом, исследование полной синхронизации в сложных сетях связанных распределенных систем сверхвысокочастотной электроники представляется интересной и важной задачей.

В настоящей главе мы обратимся к теоретическому и численному изучению сети, состоящей из взаимосвязанных пучково-плазменных систем со сверхкритическим током — гидродинамических моделей диода Пирса (гидродинамическая модель диода Пирса была подробно рассмотрена в главе 2, а режим хаотической синхронизации двух связанных таких систем — в разделе 8.3 настоящей главы). Мы рассмотрим, каким образом возможно диагностировать режим полной синхронизации и заранее сконструировать сеть для достижения максимально возможного диапазона искомого режима динамики без прямого численного расчета сети.

Рассмотрим сеть, состоящую из  $N$  диодов Пирса. Сопоставим динамике  $i$ -го элемента сети состояние  $\mathbf{U}_i(x, t) = (\varphi_i(x, t), \rho_i(x, t), v_i(x, t))^T$ , где временная и пространственная динамика безразмерных потенциала  $\varphi_i(x, t)$  электрического поля, плотности  $\rho_i(x, t)$  и скорости  $v_i(x, t)$  электронного пучка описываются в рамках гидродинамического приближения самосогласованной системой уравнений движения, непрерывности и Пуассона (подробнее см. главу 2):

$$\frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial x^2} = \alpha^2 (\rho_i - 1), \quad \frac{\partial \rho_i}{\partial t} = -\frac{\partial(\rho_i v_i)}{\partial x}, \quad \frac{\partial v_i}{\partial t} = -v_i \frac{\partial v_i}{\partial x} - \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \quad (8.35)$$

с граничными условиями:

$$\varphi_i(0, t) = 0, \quad \rho_i(0, t) = 1, \quad v_i(0, t) = 1. \quad (8.36)$$

Связь между элементами сети вводится модификацией граничных условий на правой границе каждой из связанных систем:

$$\varphi_i(1, t) = -\sigma \sum_{j=1}^N G_{ij} \rho_j(1, t), \quad (8.37)$$

где индекс  $i$  — номер элемента, включенного в сеть;  $N$  — количество элементов в сети. Величина  $\sigma$  представляет собой коэффициент связи между системами, а величины  $\rho_j(1, t)$  есть колебания безразмерной плотности пространственного заряда, регистрируемые на выходе каждой из систем. Матрица коэффициентов связи  $G$  является симметричной и удовлетворяет условию диссипативности связи (элемент матрицы  $G_{ij}$  ( $i \neq j$ ) равняется единице, если  $i$ -й элемент связан с  $j$ -м, и принимается равным 0 в противном случае, сумма каждой строки матрицы нулевая  $G_{ii} = -\sum_{j \neq i} G_{ij}$ , собственные числа матрицы являются действительными  $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_N$ ).

Введем в рассмотрение оператор эволюции (8.35)  $i$ -го элемента сети

$$\hat{L}(\mathbf{U}_i) = 0. \quad (8.38)$$

Очевидно, что для произвольной сети идентичных элементов независимо от значений управляющих параметров элементов и величины связи между системами, существует синхронное многообразие  $\mathbf{U}_i(x, t) = \mathbf{U}_s(x, t)$ ,  $\forall i$  как выделенное решение системы (8.38) с соответствующими граничными условиями (8.36)–(8.37). Если сеть идентичных элементов находится на синхронном многообразии, то в идеальных условиях (при полном отсутствии внешних и внутренних шумов в системе) элементы сети будут демонстрировать идентичное поведение при сколь угодно долгом времени наблюдения. Но, тем не менее, отнюдь не для любой сети будет наблюдаться режим полной синхронизации, иными словами, лишь для выделенного класса сетей решение  $\mathbf{U}_s(x, t)$  будет устойчивым к шумам, неизбежным как в реальных системах, так и при численном моделировании. Таким образом, возникает задача нахождения диапазона устойчивости режима полной синхронизации. Необходимо заметить, что численный расчет даже сравнительно небольшой сети (порядка  $10^2$ – $10^3$  элементов) занимает весьма продолжительное машинное время. Понятно, что при увеличении числа элементов сети будет расти и время, необходимое для численного моделирования. Отметим, что традиционные методы расчета границ устойчивости для рассматриваемой задачи являются практически непригодными. Например, стандартная процедура построения

карт ляпуновских показателей для сети, содержащей порядка десятков тысяч нелинейных распределенных элементов, приведет к необходимости расчета такого же количества старших ляпуновских экспонент, что даже на современной вычислительной технике потребует огромных временных ресурсов. В настоящее время разработан метод диагностики устойчивости сети, состоящей из любого числа взаимодействующих идентичных и слабо неидентичных элементов с малым числом степеней свободы, основанный на рассмотрении некоторого старшего ляпуновского показателя лишь одной системы [128, 135]. На базе подхода, изложенного в [135], разработан подобный метод для рассматриваемой сети распределенных пучково-плазменных систем сверхвысокочастотного диапазона, позволяющий провести исследование режима полной синхронизации сети без численного расчета динамики всех элементов сети. Итак, обратимся к рассмотрению предлагаемой методики.

Рассмотрим малые отклонения  $\xi = (\xi^\varphi, \xi^\rho, \xi^v)^T$  от синхронного состояния  $\mathbf{U}_s$  сети; в таком случае поведение  $i$ -го элемента сети описывается следующей системой уравнений

$$\widehat{L}(\mathbf{U}_s + \xi_i) = 0 \quad (8.39)$$

с граничными условиями:

$$\begin{aligned} \varphi_i(1, t) + \xi_i^\varphi(1, t) &= -\sigma \sum_{j=1}^N G_{ij} (\rho_j(1, t) + \xi_j^\rho(1, t)), \\ \rho_i(0, t) + \xi_i^\rho(0, t) &= 1, \\ v_i(0, t) + \xi_i^v(0, t) &= 1. \end{aligned} \quad (8.40)$$

Раскладывая функции в правых частях уравнения (8.39) в ряды Тейлора по малым добавкам  $\xi$ , пренебрегая членами второго и высших порядков малости, можно переписать уравнения (8.39), (8.40) в виде

$$\partial \widehat{L}(\mathbf{U}_s, \xi_i) = 0, \quad (8.41)$$

где  $\partial \widehat{L}(\mathbf{U}_s, \xi_i)$  — линеаризованный вблизи синхронного многообразия  $\mathbf{U}_s(x, t)$  оператор эволюции  $\widehat{L}(\cdot)$ . Для исследуемой сети диодов Пирса оператор  $\partial \widehat{L}(\mathbf{U}_s, \xi)$  записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \xi^\varphi}{\partial x^2} &= \alpha^2 \xi^\rho, \\ \frac{\partial \xi^\rho}{\partial t} &= -\xi^\rho \frac{\partial v_s}{\partial x} - v_s \frac{\partial \xi^\rho}{\partial x} - \xi^v \frac{\partial \rho_s}{\partial x} - \rho_s \frac{\partial \xi^v}{\partial x}, \\ \frac{\partial \xi^v}{\partial t} &= -v_s \frac{\partial \xi^v}{\partial x} - \xi^v \frac{\partial v_s}{\partial x} - \frac{\partial \xi^\varphi}{\partial x}. \end{aligned} \quad (8.42)$$

Полученный оператор  $\partial \widehat{L}(\mathbf{U}_s, \xi)$  является линейным относительно малых отклонений  $\xi$ . Соответственно, граничные условия (8.37)

и (8.40) для малых отклонения  $\xi_i$  от синхронного состояния примет вид:

$$\begin{aligned}\xi_i^\varphi(1, t) &= -\sigma \sum_{j=1}^N G_{ij} \xi_j^\rho(1, t), \\ \xi_i^\rho(0, t) &= 0, \\ \xi_i^v(0, t) &= 0.\end{aligned}\tag{8.43}$$

С помощью некоторой матрицы  $V$  приведем матрицу коэффициентов связи  $G$  к диагональной форме

$$\tilde{G} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_N \end{pmatrix},\tag{8.44}$$

Вводя обозначение  $\varsigma_i = V\xi_i$ , получим, что устойчивость синхронного состояния  $[\mathbf{U}_i(x, t) = \mathbf{U}_s(x, t), \forall i]$  определяется  $N$  операторами эволюции

$$\partial \widehat{L}(\mathbf{U}_s, \varsigma_i) = 0\tag{8.45}$$

с граничными условиями

$$\varsigma_i^\varphi(1, t) = -\sigma \lambda_i \varsigma_i^\rho(1, t), \quad \varsigma_i^\rho(0, t) = 0, \quad \varsigma_i^v(0, t) = 0.\tag{8.46}$$

Заметим, что уравнения (8.45) и (8.46) отличаются от предыдущих (8.41) и (8.43) только наличием в них в качестве множителей собственных чисел  $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_N$  матрицы коэффициентов связи  $G$ .

Синхронное состояние  $[\mathbf{U}_i(x, t) = \mathbf{U}_s(x, t), \forall i]$  будет устойчивым лишь в том случае, если любые отклонения  $\varsigma_i$  от синхронной динамики с течением времени будут затухать. Введем понятие *главного пространственного ляпуновского показателя* (для краткости, дальше будем использовать термин «главный показатель» или «главный ляпуновский показатель»), аналогичное понятию максимального ляпуновского показателя в сосредоточенных системах. Ниже мы подробно обсудим введенную характеристику, рассмотрим методы расчета пространственных ляпуновских показателей. Однако сейчас ограничимся лишь интуитивно понятной аналогией с ляпуновской экспонентой для систем с малым числом степеней свободы.

Выполнив замену  $\nu = (-\sigma \lambda_i)$  в уравнении (8.46), получаем, что линейная устойчивость синхронного состояния целиком определяется зависимостью главного ляпуновского показателя  $\Lambda$  от параметра  $\nu$ . Итак, синхронное состояние  $[\mathbf{U}_i(x, t) = \mathbf{U}_s(x, t), \forall i]$ , связанное с собственным числом  $\lambda_1 = 0$ , является устойчивым, когда все уравнения (8.45), ассоциированные с оставшимися собственными числами  $\lambda_i$  ( $i = 2, \dots, N$ ), с граничными условиями (8.46) дают затухающие

решения. Таким образом, мы можем ограничиться решением одного уравнения в частных производных

$$\partial \widehat{L}(\mathbf{U}_s, \varsigma) = 0 \quad (8.47)$$

с граничными условиями

$$\varsigma^\varphi(1, t) = \nu \varsigma_i^\rho(1, t), \quad \varsigma^\rho(0, t) = 0, \quad \varsigma^v(0, t) = 0 \quad (8.48)$$

для нахождения зависимости главного ляпуновского показателя  $\Lambda$  от параметра связи  $\nu$ . Еще раз подчеркнем то, что от анализа комплекта из  $N$  уравнений (8.41) с соответствующими граничными условиями (8.43) мы перешли к расчету всего одной распределенной системы (8.47), (8.48).

Зависимость главного ляпуновского показателя  $\Lambda(\nu)$  может принимать отрицательные значения на конечной области значений параметра  $\nu$   $I_{st} = (\nu_1; \nu_2)$  или на полубесконечном интервале ( $\nu_2 = \infty$ ), аналогично старшей ляпуновской экспоненте для сосредоточенных систем [136]. Условие устойчивости для исходной сети (8.37)–(8.38) будет выполняться, если все множество собственных чисел  $\lambda_i$  ( $i = 2, \dots, N$ ) матрицы коэффициентов связи  $G$  попадает в устойчивый интервал параметра  $\nu$   $I_{st}$ , иными словами, должны выполняться условия  $\sigma|\lambda_2| > \nu_1$  и  $\sigma|\lambda_N| < \nu_2$ . Следовательно, для определенной топологии сетей может вообще не существовать устойчивого режима полной синхронизации. К примеру, если максимальное и минимальное собственные числа матрицы  $G$  имеют разные знаки, то сеть соответствующей топологии не достигнет режима полной синхронизации, какой бы ни была введенная связь между элементами.

Итак, мы получили метод, позволяющий нам с помощью расчета старшего ляпуновского показателя  $\Lambda$  для одного уравнения (8.47) с граничными условиями (8.48), определить диапазоны устойчивости режима полной синхронизации сетей (на основе диодов Пирса с управляющим параметром  $\alpha$ ) произвольных топологий, задаваемых с помощью матрицы  $G$ .

Однако возникает проблема расчета характеристики пространственно-распределенной системы, аналогичной ляпуновской экспоненте для динамических систем с малым числом степеней свободы. Очевидно, что определение усредненной скорости разбегания изначально близких состояний (чем, фактически, и является ляпуновский показатель для систем с малым числом степеней свободы) для описания поведения пространственно-распределенных систем оказывается очень заманчивой и перспективной идеей. Попытки адаптировать и обобщить понятие максимального ляпуновского показателя для анализа динамики распределенных систем, как правило, сводятся в конечном итоге к расчету ляпуновского показателя теми же самыми способами, что и для систем со сосредоточенными параметрами. Один из возможных способов — вычисление старшего ляпуновского показателя по временной реали-

зации, полученной по сигналу, регистрируемому в одной из точек пространства распределенной системы (см., например, работу [137]), точно так же, как это делается для систем со сосредоточенными параметрами [138, 139]. В качестве альтернативы можно также рассчитывать спектр ляпуновских показателей, пользуясь алгоритмом Бенеттина [140] и работая с дискретной моделью распределенной системы, которая получается при использовании конечно-разностных методов. В таком случае дискретизованная распределенная система рассматривается как конечномерная динамическая система с очень большой размерностью и характеризуется спектром, содержащим очень большое число ляпуновских показателей, из которых затем рассматриваются лишь несколько старших. Такой метод определения ляпуновских показателей распределенной системы весьма близок к предлагаемой нами методике расчета старшей пространственной ляпуновской экспоненты. Наконец, возможно адаптировать методику расчета спектра ляпуновских экспонент [140, 141] к распределенным системам, учитывая их специфику [117, 120, 142].

Как уже говорилось выше, мы будем рассматривать количественную величину, характеризующую динамику распределенной системы, названную пространственным ляпуновским показателем, который характеризует устойчивость пространственно-временных состояний исследуемой распределенной системы. Рассмотрим подробнее, что мы будем понимать под пространственной ляпуновской экспонентой.

Пусть исследуемая пространственно-распределенная система характеризуется в момент времени  $t_0$  состоянием  $\mathbf{U}(\mathbf{x})$  ( $\mathbf{x}$  — пространственный вектор). Введем расстояние  $S(\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2)$  между двумя различными состояниями системы, которое определим как интеграл по пространству

$$S(\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2) = \left( \int_V \|\mathbf{U}_1(\mathbf{x}) - \mathbf{U}_2(\mathbf{x})\|^2 dV \right)^{1/2}, \quad (8.49)$$

где  $V$  — объем системы.

Рассмотрим эволюцию двух систем, стартующих из близких (но различных) начальных условий  $\mathbf{U}^0(\mathbf{x})$  и  $\tilde{\mathbf{U}}^0(\mathbf{x}) = \mathbf{U}^0(\mathbf{x}) + \tilde{\xi}(\mathbf{x})$ , где  $\tilde{\xi}(\mathbf{x})$  — случайная функция,  $S(\mathbf{U}^0, \tilde{\mathbf{U}}^0) = \varepsilon$ ,  $\varepsilon$  близко к нулю. Эти два начальных состояния с течением времени стремятся к  $\mathbf{U}_1(\mathbf{x})$  и  $\tilde{\mathbf{U}}_1(\mathbf{x})$  соответственно. Отношение  $S(\mathbf{U}_1, \tilde{\mathbf{U}}_1)/\varepsilon$  характеризует рост (или затухание) возмущения  $\tilde{\xi}(\mathbf{x})$  за интервал времени  $T$ .

Переопределим теперь возмущенное состояние  $\tilde{\mathbf{U}}_1(\mathbf{x})$  так, чтобы его отклонение от невозмущенного состояния  $\mathbf{U}_1(\mathbf{x})$  стало равно исходному значению  $\varepsilon$ :  $\tilde{\mathbf{U}}_1^0(\mathbf{x}) = \varepsilon \tilde{\mathbf{U}}_1 / S(\mathbf{U}_1, \tilde{\mathbf{U}}_1)$ . Повторяя данную процедуру  $M$  раз, где  $M$  достаточно велико, получаем, что изменение амплитуды

возмущения за  $M$  шагов будет выражаться формулой

$$P_M = \prod_{k=1}^M \frac{S(\mathbf{U}_k, \tilde{\mathbf{U}}_k)}{\varepsilon}. \quad (8.50)$$

Значение главного пространственного ляпуновского показателя будет определяться как

$$\Lambda = \frac{1}{MT} \ln P_M = \frac{1}{MT} \sum_{k=1}^M \ln \frac{S(\mathbf{U}_k, \tilde{\mathbf{U}}_k)}{\varepsilon}. \quad (8.51)$$

В таком случае максимальная ляпуновская пространственная экспонента (8.51) будет положительной в том случае, когда малые отклонения между двумя начальными состояниями возрастают со временем, отрицательной, когда малые отклонения стремятся к нулю, и равной нулю, когда расстояние между возмущенным и невозмущенным состоянием системы остается постоянным.

Таким образом, предложенная максимальная пространственная ляпуновская экспонента позволяет описать поведение распределенной системы аналогично максимальному ляпуновскому показателю для систем с малом числом степеней свободы. Данная характеристика может быть использована как для поиска границы между хаотической и периодической динамиками распределенной системы, так и для анализа на устойчивость некоторых выделенных состояний системы (например, неустойчивых периодических состояний, играющих в распределенных системах ту же роль, что и неустойчивые периодические орбиты, встроенные в хаотический аттрактор сосредоточенной системы [143]). Очевидно, что главный ляпуновский показатель может быть использован и для анализа устойчивости синхронного состояния  $\mathbf{U}_s$  сети распределенных элементов, таких, как диод Пирса.

Итак, приступим к исследованию режима полной синхронизации  $\mathbf{U}_s(x, t)$  сети на базе диодов Пирса. Для этого был рассчитан главный ляпуновский показатель сети для двух значений управляющих параметров элементов —  $\alpha_1 = 2,858\pi$  и  $\alpha_2 = 2,864\pi$ , соответствующих различным режимам хаотической динамики единичного диода Пирса [144]. Зависимости главного ляпуновского показателя от модифицированного параметра связи  $\nu$  показаны на рис. 8.9. Как уже говорилось выше, используя полученные данные — область отрицательных значений главного ляпуновского показателя — мы можем указать диапазон параметра связи  $\sigma$ , на котором произвольная сеть диодов Пирса демонстрирует синхронную динамику.

Начнем исследование сетей на базе распределенных систем пучково-плазменной природы с простейшего случая — двух взаимодействующих диодов Пирса. Очевидно, что этот «вырожденный случай» сети вполне может быть рассмотрен с позиций формализма главного

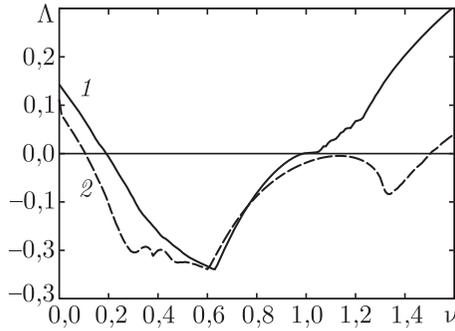


Рис. 8.9. Зависимости максимального ляпуновского показателя от параметра  $\nu$  для управляющих параметров  $\alpha_1 = 2,858\pi$  (график 1, сплошная линия) и  $\alpha_2 = 2,864\pi$  (график 2, пунктирная линия). На всем диапазоне отрицательных значений параметра  $\nu$  зависимости главного показателя системы  $\Lambda$  положительны для выбранных значений управляющего параметра Пирса  $\alpha_{1,2}$

ляпуновского показателя. В системе двух связанных элементов  $U_{1,2}$  матрица коэффициентов связи записывается следующим образом

$$G = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}. \quad (8.52)$$

Ранее уже было показано (см. главу 8.3, а также, например, [144]), что режим полной синхронизации в системе двух взаимодействующих диодов Пирса наблюдается для диапазонов значений параметра связи  $\sigma \geq \sigma_c^{\alpha_1} = 0,09$  при управляющем параметре  $\alpha_1$  и  $\sigma \geq \sigma_c^{\alpha_2} = 0,05$  при  $\alpha_2$ . Собственные числа матрицы коэффициентов связи  $G$  данной системы легко находятся и принимают значения  $\lambda_1 = 0$ ,  $\lambda_2 = -2$ . Следовательно, в данном случае модифицированный параметр связи  $\nu$  определяется как  $2\sigma$ .

Из рис. 8.9 можно видеть, что главный ляпуновский показатель становится отрицательным, когда выполняется соотношение  $\nu \approx 2\sigma_c^{\alpha_1}$  для значения параметра Пирса  $\alpha_1$ . Для значения параметра Пирса  $\alpha_2$  главный ляпуновский показатель меняет знак при  $\nu \approx 2\sigma_c^{\alpha_2}$ . Отметим, что главный ляпуновский показатель отрицателен лишь для значений параметра  $\nu$ , принадлежащих интервалу  $(\nu_1^{\alpha_{1,2}}, \nu_2^{\alpha_{1,2}})$ ,  $\nu_1^{\alpha_1} \approx 0,18$ ,  $\nu_2^{\alpha_1} \approx 0,99$ ,  $\nu_1^{\alpha_2} \approx 0,1$ ,  $\nu_2^{\alpha_2} \approx 1,5$ . Следовательно, когда величина параметра связи между системами  $\sigma$  выходит за пределы  $\sigma_2^{\alpha_{1,2}} = \nu_2^{\alpha_{1,2}}/|\lambda_2|$ , режим полной синхронизации разрушается. Для выбранных управляющих параметров  $\alpha_{1,2}$  верхние границы режима синхронизации принимают значения  $\sigma_2^{\alpha_1} = 0,495$  и  $\sigma_2^{\alpha_2} = 0,750$  соответственно.

При прямом численном моделировании динамики связанных диодов Пирса существование режима полной синхронизации может быть показано с помощью интегральной характеристики, усредненной по промежутку времени  $T$ , так называемой ошибки синхронизации, ранее

вводимой в рассмотрение для сетей элементов с малым числом степеней свободы [128]. В нашем случае, ошибка синхронизации для сети распределенных элементов может быть записана следующим образом

$$\langle E \rangle = \frac{1}{T(N-1)} \sum_{j>1} \int_t^{t+T} e_{j,1}(t') dt', \tag{8.53}$$

где

$$e_{i,j}(t) = \int_0^1 (|\varphi_i - \varphi_j| + |\rho_i - \rho_j| + |v_i - v_j|) dx \tag{8.54}$$

есть мгновенная усредненная по пространству ошибка синхронизации между состояниями  $\mathbf{U}_{i,j}(x, t)$  двух связанных диодов Пирса под номерами  $i$  и  $j$  из всего множества диодов Пирса сети.

Ошибка синхронизации  $\langle E \rangle$  для двух взаимно связанных диодов Пирса для значений управляющего параметра  $\alpha_1 = 2,858\pi$  и  $\alpha_2 = 2,864\pi$  показана на рис. 8.10, *а*, *б* соответственно. Подчеркнем, что значения параметра связи  $\sigma_{1,2}^{\alpha_{1,2}}$ , при которых происходит разрушение режима полной синхронизации, находятся в весьма хорошем соответствии со значениями  $\sigma$ , теоретически рассчитанными методом главного ляпуновского показателя для обоих значений параметра Пирса  $\alpha_{1,2}$ .

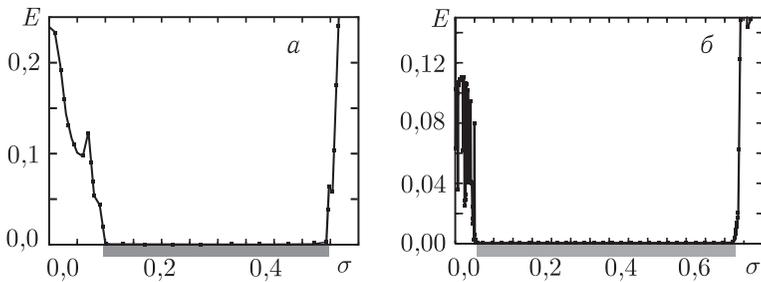


Рис. 8.10. Зависимость ошибки синхронизации  $\langle E \rangle$  от параметра связи  $\sigma$  для двух взаимно связанных диодов Пирса с управляющим параметром  $\alpha_1 = 2,858\pi$  (*а*) и  $\alpha_2 = 2,864\pi$  (*б*). Границы области устойчивого режима полной синхронизации, теоретически полученные на основе метода главного ляпуновского показателя, показаны серыми квадратами

Теперь обратимся к изучению динамики сети, состоящей из 70 диодов Пирса. Топология сети определяется случайно сгенерированной матрицей коэффициентов связи  $G$  (как и раньше, матрица  $G$  удовлетворяет условию диссипативности). Максимальное собственное число матрицы  $G$  принимает значение  $\lambda_2 = -24,42$ , минимальное ненулевое собственное число —  $\lambda_70 = -46,06$ . Прямое численное моделирование показывает, что режим полной синхронизации наблюдается в диапазоне параметра связи  $\sigma \in (0,0041; 0,0326)$ . Ошибка синхронизации исследуемой сети показана на рис. 8.11, теоретически рассчитанные

Таблица 8.1. Границы режима полной синхронизации сети диодов Пирса

$\alpha/\pi$	Теоретический расчет		Численное моделирование		Ошибка, %	
	$\sigma_1^t$	$\sigma_2^t$	$\sigma_1^n$	$\sigma_2^n$	$\delta_1$	$\delta_2$
2,858	0,00740	0,02150	0,00741	0,02145	0,135	0,233
2,859	0,00765	0,02084	0,00768	0,02082	0,295	0,084
2,860	0,00741	0,02171	0,00742	0,02170	0,028	0,024
2,861	0,00614	0,02822	0,00616	0,02822	0,327	0,003
2,862	0,00491	0,02844	0,00493	0,02843	0,328	0,024
2,863	0,00491	0,03105	0,00494	0,03103	0,453	0,061
2,864	0,00414	0,03257	0,00431	0,03251	0,148	0,002

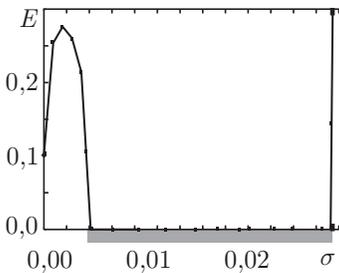


Рис. 8.11. Зависимость ошибки синхронизации  $\langle E \rangle$  от параметра связи  $\sigma$  для сети, состоящей из 70 взаимосвязанных диодов Пирса с параметром Пирса  $\alpha_2 = 2,864\pi$ . Границы области устойчивого режима полной синхронизации, теоретически полученные на основе метода главного ляпуновского показателя, показаны серыми квадратами

с помощью метода главного ляпуновского показателя границы  $\sigma_1 = 0,0043$  и  $\sigma_2 = 0,0325$  режима полной синхронизации, показаны серыми квадратами. На рис. 8.11 мы ограничиваемся рассмотрением зависимости ошибки синхронизации  $\langle E \rangle$  от параметра связи сети  $\sigma$  лишь для одного управляющего параметра  $\alpha_2 = 2,864\pi$ , поскольку различие в значениях  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  параметра Пирса не оказывает принципиального влияния на качественный характер зависимости главного ляпуновского показателя от параметра  $\nu$  (как было показано на примере сети из двух элементов, см. рис. 8.9).

В заключение обратим внимание на точность предложенного подхода к исследованию режима полной синхронизации сети пространственно распределенных систем пучково-плазменной природы. В табл. 8.1 представлены границы режима полной синхронизации для сети из

70 диодов Пирса при различных значениях параметра Пирса  $\alpha$ . Граничные значения  $\sigma_{1,2}^t$  и  $\sigma_{1,2}^n$  синхронного состояния получены теоретическим расчетом с помощью метода главного ляпуновского показателя и прямым численным моделированием сети соответственно. Матрица коэффициентов связи  $G$  не изменилась. Квадратичная разность  $\delta_{1,2} = 2 \frac{|\sigma_{1,2}^t - \sigma_{1,2}^n|}{\sigma_{1,2}^t + \sigma_{1,2}^n}$  между граничными значениями, рассчитанными двумя способами, показывает весьма хорошее совпадение двух различных подходов к исследованию полной хаотической синхронизации в сети элементов. Наблюдается замечательное совпадение теоретического прогноза и результатов численного моделирования сети.

## Заключение

Таким образом, в настоящей главе рассмотрены различные типы хаотической синхронизации, обсуждены их особенности и методы диагностики. Приведен подход к описанию синхронного поведения хаотических систем с позиций синхронизации временных масштабов, вводимых в рассмотрение с помощью непрерывного вейвлетного преобразования с базовым вейвлетом Морле. Приведены результаты изучения синхронного поведения гидродинамических моделей диода Пирса, а также описание синхронного поведения ЛОВ с поперечным полем с позиций синхронизации временных масштабов. В заключительной части главы обсуждены вопросы устойчивости синхронного состояния сети, состоящей из распределенных систем сверхвысокочастотной электроники на примере сети, узлами которой выступают гидродинамические модели диода Пирса.

## Список литературы

1. Кузнецов С. П. Динамический хаос. Сер. «Современная теория колебаний и волн». — М.: Физматлит, 2001.
2. Анищенко В. С., Вадивасова Т. Е., Астахов В. В. Нелинейная динамика хаотических и стохастических систем. — Саратов: Изд-во Саратовск. ун-та, 1999.
3. Анищенко В. С., Астахов В. В., Вадивасова Т. Е. и др. Нелинейные эффекты в хаотических и стохастических системах. — М.–Ижевск: Ин-т компьютерных исследований, 2003.
4. Шустер Г. Детерминированный хаос. — М.: Мир, 1988.
5. Берже П., Помо И., Видаль К. Порядок в хаосе. — М.: Мир, 1991.
6. Климонтович Ю. Л. Введение в физику открытых систем. — М.: Янус-К, 2002.
7. Гукенхеймер Дж., Холмс Ф. Нелинейные колебания, динамические системы и бифуркации векторных полей. — М.–Ижевск: Ин-т компьютерных исследований, 2002.
8. Шильников Л. П., Шильников А. Л., Тураев Д. В., Чуа Л. Методы качественной теории в нелинейной динамике. — М.–Ижевск: Ин-т компьютерных исследований, 2004.
9. Брур Х. В., Дюмортье Ф., Стрин С., Такенс Ф. Структуры в динамике. — М.–Ижевск: Ин-т компьютерных исследований, 2003.
10. Афраймович В. С., Некоркин В. И., Осипов Г. В., Шалфеев В. Д. Устойчивость, структуры и хаос в нелинейных сетях синхронизации. — Горький: ИПФ АН СССР, 1989.
11. Landa P. S. Nonlinear oscillations waves in dynamical systems. — Dordrecht–Boston–London: Kluwer Academic Publishers, 1996.
12. Анищенко В. С., Вадивасова Т. Е. Синхронизация автоколебаний и колебаний, индуцированных шумом // Радиотехника и электроника. 2002. Т. 47, № 2. С. 133–162.

13. Трубецков Д. И., Храмов А. Е. Лекции по сверхвысокочастотной электронике для физиков. Т. 1. — М.: Физматлит, 2003.
14. Трубецков Д. И., Храмов А. Е. Лекции по сверхвысокочастотной электронике для физиков. Т. 2. — М.: Физматлит, 2004.
15. Виноградова М. Б., Руденко О. В., Сухоруков А. П. Теория волн. — М.: Наука, 1990.
16. Сухоруков А. П. Нелинейные волновые взаимодействия в оптике и радиофизике. — М.: Наука, 1988.
17. Блехман И. И. Синхронизация динамических систем. — М.: Наука, 1971.
18. Блехман И. И. Синхронизация в природе и технике. — М.: Наука, 1981.
19. Ланда П. С., Рендель Ю. С., Шер В. Ф. Синхронизация колебаний в системе Лоренца // Изв. вузов. Радиофизика. 1989. Т. 32, № 9. С. 1172.
20. Ланда П. С., Розенблюм М. Г. О синхронизации распределенных автоколебательных систем // Доклады РАН. 1992. Т. 324, № 1. С. 63–38.
21. Landa P. S., Rosenblum M. G. Synchronization chaotization of oscillations in coupled self-oscillating systems // Appl. Mech. Rev. 1993. V. 46, № 7. P. 414–426.
22. Murali K., Lakshmanan M. Transmission of signals by synchronization in a chaotic van der Pol–Duffing oscillator // Phys. Rev. E. 1994. V. 48 № 3. P. R1624–R1626.
23. Yang T., Wu C. W., Chua L. O. Cryptography based on chaotic systems // IEEE Trans. Circuits Syst. 1997. V. 44, № 5. P. 469–472.
24. Дмитриев А. С., Панас А. И. Динамический хаос: новые носители информации для систем связи. — М.: Физматлит, 2002.
25. Anishchenko V. S., Pavlov A. N. Global reconstruction in application to multichannel communication // Phys. Rev. E. 1998. V. 57. P. 2455–2457.
26. Трубецков Д. И., Короновский А. А., Храмов А. Е. Синхронизация распределенных автоколебательных систем электронно-волновой природы с обратной волной // Изв. вузов. Радиофизика. 2004. Т. XLVII, № 5–6. С. 343–372.
27. Неймарк Ю. И., Ланда П. С. Стохастические и хаотические колебания. — М.: Наука, 1987.
28. Дмитриев А. С., Кислов В. Я. Стохастические колебания в радиофизике и электронике. — М.: Наука, 1989.
29. Анищенко В. С. Сложные колебания в простых системах. — М.: Наука, 1990.
30. Анищенко В. С., Астахов В. В., Летчфорд Т. Е. Многочастотные и стохастические автоколебания в автогенераторе с инерционной нелинейностью // Радиотехника и электроника. 1980. Т. 27, № 10. С. 1972.
31. Анищенко В. С., Вадивасова Т. Е., Астахов В. В. Нелинейная динамика хаотических и стохастических систем. Фундаментальные основы и избранные проблемы. — Саратов: Изд-во Саратовск. ун-та, 1999.
32. Дмитриев А. С., Кислов В. Я., Старков С. О. Экспериментальное исследование образования и взаимодействия странных аттракторов в кольцевом автогенераторе // ЖТФ. 1985. Т. 5, № 12. P. 2417–2419.
33. Пиковский А. С., Розенблюм М. Г., Куртс Ю. Синхронизация. Фундаментальное нелинейное явление. — М.: Техносфера, 2003.

34. Анищенко В. С., Постнов Д. Э. Эффект захвата фазовой частоты хаотических колебаний. Синхронизация странных аттракторов // Письма в ЖТФ. 1988. Т. 14, № 6. С. 569.
35. Матросов В. В., Шалфеев В. Д., Касаткин Д. В. Анализ областей генерации хаотических колебаний взаимосвязанных фазовых систем // Изв. вузов. Радиофизика. 2006. Т. 49, № 5. С. 448–457.
36. Fujisaka H., Yamada T. Stability theory of synchronized motion in coupled-oscillator system // Progress of Theor. Phys. 1983. V. 69. P. 32.
37. Пиковский А. С. О взаимодействии странных аттракторов. Препринт ИПФ АН СССР. — Горький, 1983.
38. Кузнецов С. П. Универсальность и подобие в поведении связанных систем Фейгенбаума // Изв. вузов. Радиофизика. 1986. Т. 29. С. 1050.
39. Афраймович В. С., Веричев Н. Н., Рабинович М. И. Стохастическая синхронизация колебаний в диссипативных системах // Изв. вузов. Радиофизика. 1986. Т. 29. С. 1050.
40. Pecora L. M., Carroll T. L. Synchronization in chaotic systems // Phys. Rev. Lett. 1990. V. 64, № 8. P. 821–824.
41. Pecora L. M., Carroll T. L. Driving systems with chaotic signals // Phys. Rev. A. 1991. Т. 44, № 4. P. 2374–2383.
42. Шабунин А. В., Николаев С. М., Астахов В. В. Двухпараметрический бифуркационный анализ режимов полной синхронизации хаоса в ансамбле из трех осцилляторов с дискретным временем // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2005. Т. 13, № 5–6. С. 24–39.
43. Rosenblum M. G., Pikovsky A. S., Kurths J. From phase to lag synchronization in coupled chaotic oscillators // Phys. Rev. Lett. 1997. V. 78, № 22. P. 4193–4196.
44. Taherion S., Lai Y.-C. Observability of lag synchronization of coupled chaotic oscillators // Phys. Rev. E. 1999. V. 59, № 6. P. R6247–R6250.
45. Rulkov N. F., Sushchik M. M., Tsimring L. S., Abarbanel H. D. I. Generalized synchronization of chaos in directionally coupled chaotic systems // Phys. Rev. E. 1995. V. 51, № 2. P. 980–994.
46. Kocarev Lj., Parlitz U. Generalized synchronization, predictability, equivalence of unidirectionally coupled dynamical systems // Phys. Rev. Lett. 1996. V. 76, № 11. P. 1816–1819.
47. Анищенко В. С., Вадивасова Т. Е., Постнов Д. Э., Сафонова М. А. Вынужденная и взаимная синхронизация хаоса // Радиотехника и электроника. 1991. Т. 36. С. 338.
48. Anishchenko V. S., Vadivasova T. E., Postnov D. E., Safoнова M. A. Synchronization of chaos // Intern. J. Bifurcation Chaos. 1992. Т. 2, № 3. С. 633–644.
49. Pikovsky A. S., Rosenblum M. G., Kurths J. Synchronization: a universal concept in nonlinear sciences. — Cambridge University Press, 2001.
50. Anishchenko V. S., Astakhov V., Neiman A., Vadivasova T. E., Schimansky-Geier L. Nonlinear dynamics of chaotic stochastic systems. Tutorial modern developments. — Heidelberg: Springer-Verlag, 2001.
51. Ланда П. С. К вопросу о частичной синхронизации // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2004. Т. 12, № 4. С. 48–59.

52. Кузнецов А. П., Станкевич Н. В., Тюрюкина Л. В. Особенности картины синхронизации импульсами в автоколебательной системе с трехмерным фазовым пространством // Письма ЖТФТ. 2006. Т 32, № 8. С. 41–47.
53. Jalnine A., Kuznetsov S. P., Osbaldestin A. H. Dynamics of small perturbations of orbits on a torus in a quasiperiodically forced 2d dissipative map // Regular Chaotic Dynamics. 2006. V. 11, № 1. P. 19–30.
54. Murali K., Lakshmanan M. Drive-response scenario of chaos synchronization in identical nonlinear systems // Phys. Rev. E. 1994. V. 49, № 6. С. 4882–4885.
55. Zheng Z., Hu G. Generalized synchronization versus phase synchronization // Phys. Rev. E. 2000. V. 62, № 6. P. 7882–7885.
56. Pyragas K. Weak strong synchronization of chaos // Phys. Rev. E. 1996. V. 54, № 5. P. R4508–R4511.
57. Rosenblum M. G., Pikovsky A. S., Kurths J. Phase synchronization of chaotic oscillators // Phys. Rev. Lett. 1996. V. 76, № 11. P. 1804–1807.
58. Osipov G. V., Pikovsky A. S., Rosenblum M. G., Kurths J. Phase synchronization effect in a lattice of nonidentical Rössler oscillators // Phys. Rev. E. 1997. V. 55, № 3. P. 2353–2361.
59. Parlitz U., Junge L., Lauterborn W. Experimental observation of phase synchronization // Phys. Rev. E. 1996. V. 54, № 2. P. 2115–2117.
60. Tang D. Y., Dykstra R., Hamilton M. W., Heckenberg N. R. Experimental evidence of frequent entrainment between coupled chaotic oscillators // Phys. Rev. E. 1998. V. 57, № 3. P. 3649–3651.
61. Allaria E., Arecchi F. T., Garbo A. D., Meucci R. Synchronization of homoclinic chaos // Phys. Rev. Lett. 2001. V. 86, № 5. P. 791–794.
62. Kiss I. Z., Hudson J. L. Phase synchronization suppression of chaos through intermittency in forcing of an electrochemical oscillator // Phys. Rev. E. 2001. V. 64, № 4. P. 046215.
63. Anishchenko V. S., Balanov A. G., Janson N. B., Igosheva N. B., Bordyugov G. V. Entrainment between heart rate weak nonlinear forcing // Intern. J. Bifurcation Chaos. 2000. V. 10, № 10. P. 2339–2348.
64. Ticos C. M., Rosa E., Pardo W. B., Walkenstein J. A., Monti M. Experimental real-time phase synchronization of a paced chaotic plasma discharge // Phys. Rev. Lett. 2000. V. 85, № 14. P. 2929.
65. Rosa E., Pardo W. B., Ticos C. M., Walkenstein J. A., Monti M. Phase synchronization of chaos in a plasma discharge tube // Intern. J. Bifurcation Chaos. 2000. V. 10, № 11. P. 2551–2563.
66. Palus M., Kurths J., Schwarz U., Novotna D., Charvatova I. Is the solar activity cycle synchronized with the solar inertial motion? // Intern. J. Bifurcation Chaos. 2000. V. 10, № 11. P. 2519–2526.
67. Pikovsky A. S., Rosenblum M. G., Kurths J. Phase synchronisation in regular chaotic systems // Intern. J. Bifurcation Chaos. 2000. V. 10, № 10. P. 2291–2305.
68. Anishchenko V. S., Vadivasova T. E. Synchronization of self-oscillations noise-induced oscillations // J. of Commun. Technology Electronics. 2002. V. 47, № 2. P. 117–148.
69. Boccaletti S., Kurths J., Osipov G. V., Valladares D. L., Zhou C. T. The synchronization of chaotic systems // Phys. Rep. 2002. V. 366. P. 1.

70. Фазовая синхронизация / Под ред. Шахгильдяна В.В., Белюстиной Л.Н. — М.: Связь, 1975.
71. *Леонов Г. А., Смирнова В. Б.* Математические проблемы теории фазовой синхронизации. — СПб.: Наука, 2000.
72. *Короновский А. А., Храмов А. Е.* Анализ фазовой хаотической синхронизации с помощью непрерывного вейвлетного анализа // Письма в ЖТФ. 2004. Т. 30, № 14. С. 29–36.
73. *Анищенко В. С., Вадивасова Т. Е., Окрокверцхов Г. А., Стрелкова Г. И.* Статистические свойства динамического хаоса // Успехи физических наук. 2005. Т. 175, № 2. С. 163.
74. *Короновский А. А., Куровская М. К., Храмов А. Е.* О соотношении фазовой синхронизации хаотических осцилляторов и синхронизации временных масштабов // Письма в ЖТФ. 2005. Т. 31, № 19. С. 76–82.
75. *Pikovsky A. S., Rosenblum M. G., Osipov G. V., Kurths J.* Phase synchronization of chaotic oscillators by external driving // Physica D. 1997. V. 104, № 4. P. 219–238.
76. *Rosenblum M. G., Kurths J.* Analysis synchronization phenomena from bivariate data by means of the Hilbert transform // Nonlinear analysis of physiological data / Eds.: Kantz H. Kurths J. — Berlin: Springer, 1998. — P. 91–99.
77. *Анищенко В. С., Вадивасова Т. Е.* Взаимосвязь частотных и фазовых характеристик хаоса. Т. Два критерия синхронизации // Радиотехника и электроника. 2004. Т. 49, № 1. С. 123.
78. *Anishchenko V. S., Vadivasova T. E., Strelkova G. I.* Instantaneous phase method in studying chaotic stochastic oscillations and its limitations // Fluctuation Noise Lett. 2004. V. 4, № 1. P. L219–L229.
79. *Pikovsky A. S., Rosenblum M. G., Kurths J.* Synchronization in a population of globally coupled chaotic oscillators // Europhys. Lett. 1996. V. 34, № 3. P. 165–170.
80. *Rosenblum M. G., Pikovsky A. S., Kurths J.* Locking-based frequency measurement synchronization of chaotic oscillators with complex dynamics // Phys. Rev. Lett. 2002. V. 89, № 26. P. 264102.
81. *Pecora L. M., Carroll T. L., Heagy J. F.* Statistics for mathematical properties of maps between time series embeddings // Phys. Rev. E. 1995. V. 52, № 4. P. 3420–3439.
82. *Abarbanel H. D. I., Rulkov N. F., Sushchik M. M.* Generalized synchronization of chaos: The auxiliary system approach // Phys. Rev. E. 1996. V. 53, № 5. P. 4528–4535.
83. *Pyragas K.* Conditional Lyapunov exponents from time series // Phys. Rev. E. 1997. V. 56, № 5. P. 5183–5188.
84. *Shabunin A., Demidov V., Astakhov V., Anishchenko V. S.* Information theoretic approach to quantify complete phase synchronization of chaos // Phys. Rev. E. 2002. V. 65, № 5. P. 056215.
85. *Шабунин А. В., Демидов В. Е., Астахов В. В., Анищенко В. С.* Количество информации как мера синхронизации хаоса // Письма в ЖТФ. 2001. Т. 27, № 11. С. 78–85.
86. *Voccaletti S., Pecora L. M., Pelaez A.* Unifying framework for synchronization of coupled dynamical systems // Phys. Rev. E. 2001. V. 63. P. 066219.

87. *Brown R., Kosarev Lj.* A unifying definition of synchronization for dynamical systems // *Chaos*. 2000. V. 10, № 2. P. 344–349.
88. *Короновский А. А., Храмов А. Е.* Анализ хаотической синхронизации динамических систем с помощью вейвлетного преобразования // *Письма в ЖЭТФ*. 2004. Т. 79, № 7. P. 391–395.
89. *Короновский А. А., Москаленко О. И., Храмов А. Е.* Новый тип универсальности при хаотической синхронизации динамических систем // *Письма в ЖЭТФ*. 2004. Т. 80, № 1. С. 25–28.
90. *Hrmatov A. E., Koronovskii A. A.* An approach to chaotic synchronization // *Chaos*. 2002. V. 14, № 3. P. 603–610.
91. *Hrmatov A. E., Koronovskii A. A.* Time scale synchronization of chaotic oscillators // *Physica D*. 2005. V. 206, № 3–4. P. 252–264.
92. *Hrmatov A. E., Koronovskii A. A., Popov P. V., Rempen I. S.* Chaotic synchronization of coupled electron-wave systems with backward waves // *Chaos*. 2005. V. 15, № 1. P. 013705.
93. *Короновский А. А., Храмов А. Е.* Непрерывный вейвлетный анализ и его приложения. — М.: Физматлит, 2003.
94. *Daubechies I.* Ten lectures on wavelets // SIAM. Philadelphia, 1992.
95. *Kaiser G.* A friendly guide to wavelets. — Springer Verlag, 1994.
96. *Torresani B.* Continuous wavelet transform. — Paris: Savoie, 1995.
97. *Lachaux J. P. et al.* Studying single-trials of the phase synchronization activity in the brain // *Intern. J. Bifurcation Chaos*. 2000. V. 10, № 10. P. 2429–2439.
98. *Lachaux J. P. et al.* Estimating the time-course of coherence between single-trial brain signals: an introduction to wavelet coherence // *Neurophysiol. Clin.* 2002. V. 32, № 3. P. 157–174.
99. *Quyен M. L. V. et al.* Comparison of Hilbert transform wavelet methods for the analysis of neuronal synchrony // *J. Neuroscience Methods*. 2001. V. 111. P. 83–98.
100. *DeShazer D. J., Breban R., Ott E., Roy R.* Detecting phase synchronization in a chaotic laser array // *Phys. Rev. Lett.* 2001. V. 87, № 4. P. 044101.
101. *Sosnootseva O. V., Pavlov A. N., Mosekilde E., Holstein-Rathlou N.-H.* Bimodal oscillations in nephron autoregulation // *Phys. Rev. E*. 2002. V. 66, № 6. P. 061909.
102. *Grossman A., Morlet J.* Decomposition of Hardy function into square integrable wavelets of constant shape // *SIAM J. Math. Anal.* 1984. V. 15, № 4. P. 273.
103. *Shabunin A., Astakhov V., Anishchenko V. S.* Developing chaos on base of traveling waves in a chain of coupled oscillators with period-doubling. Synchronization hierarchy of multistability formation // *Intern. J. of Bifurcation Chaos*. 2002. V. 12, № 8. P. 1895–1908.
104. *Shabunin A., Astakhov V., Kurths J.* Quantitative analysis of chaotic synchronization by means of coherence // *Phys. Rev. E*. 2005. V. 72, № 1. P. 016218.
105. *Короновский А. А., Попов П. В., Храмов А. Е.* Хаотическая синхронизация однонаправленно связанных электронных сред со встречной волной // *ЖТФ*. 2005. Т. 75, № 4. С. 1–9.

106. *Короновский А. А., Попов П. В., Храмов А. Е.* Хаотическая синхронизация однонаправленно связанных ламп обратной волны с поперечным полем // Изв. РАН. Сер. физ. 2004. Т. 68, № 12. С. 1794–1798.
107. *Adler R.* A study of locking phenomena in oscillators // Proc. IRE. 1946. V. 34, № 6. P. 351–367.
108. *Четвериков А. П.* Периодические и хаотические автоколебания в простых распределенных электронно-волновых системах // Изв. РАН. Сер. физ. 1994. Т. 58, № 8. С. 171.
109. *Гапонов А. В., Петелин М. И., Юлпатов В. К.* Индуцированное излучение возбужденных классических электронов-осцилляторов и его использование в высокочастотной электронике // Изв. вузов. Радиофизика. 1967. Т. 10, № 9, 10. С. 1415.
110. *Кузнецов С. П., Четвериков А. П.* Нестационарная нелинейная теория ультрарелятивистской ЛОВ на аномальном эффекте доплера // Изв. вузов. Радиофизика. 1981. Т. 24, № 1. С. 109.
111. *Четвериков А. П.* Нелинейная динамика системы взаимодействующих встречных электромагнитной волны и электронной волны с кубичной фазовой нелинейностью // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1994. Т. 2, № 5. С. 46.
112. *Kurths J., Pikovsky A. S.* Symmetry breaking in distributed systems modulation spatio-temporal intermittency // Chaos Solit. Fract. 1995. Т. 5, № 10. P. 1893–1899.
113. *Takens F.* Detecting strange attractors in dynamical systems turbulence // Lectures Notes in Mathematics / Ed. D. R. L.-S. Young. — N. Y.: Springer-Verlag, 1981. — P. 366.
114. *Kocarev Lj., Tasev Z., Stojanovski T., Parlitz U.* Synchronizing spatiotemporal chaos // Chaos. 1997. V. 7, № 4. P. 635–643.
115. *Voccaletti S., Bragard J., Arecchi F. T., Mancini H.* Synchronization in non-identical extended systems // Phys. Rev. Lett. 1999. V. 83, № 3. P. 536–539.
116. *Hramov A. E., Koronovskii A. A., Popov P. V.* Generalized synchronization in coupled Ginzburg–Landau equations and mechanisms of its arising // Phys. Rev. E. 2005. V. 72, № 3. P. 037201.
117. *Короновский А. А., Попов П. В., Храмов А. Е.* Обобщенная хаотическая синхронизация в связанных уравнениях Гинзбурга–Ландау // ЖЭТФ. 2006. Т. 130, № 4(10). С. 748–764.
118. *Tasev Z., Kocarev Lj., Junge L., Parlitz U.* Synchronization of Kuramoto–Sivashinsky equations using spatial local coupling // Intern. J. Bifurcation Chaos. 2000. V. 10, № 4. P. 869–873.
119. *Fukuyama T., Kozakov R., Testrich H., Wilke C.* Spatiotemporal synchronization of coupled oscillators in a laboratory plasma // Phys. Rev. Lett. 2006. V. 96. P. 024101.
120. *Короновский А. А., Филатов Р. А., Храмов А. Е.* Хаотическая синхронизация в пучково-плазменных системах со сверхкритическим током // Радиотехника и электроника. 2007. Т. 52, № 3.
121. *Трубецков Д. И., Храмов А. Е.* Лекции по сверхвысокочастотной электронике для физиков: В 2-х т. — М.: Физматлит, 2003.
122. *Калинин Ю. А., Короновский А. А., Храмов А. Е., Егоров Е. Н., Филатов Р. А.* Экспериментальное и теоретическое исследование хаотических

- колебательных явлений в нерелятивистском электронном потоке с виртуальным катодом // *Физика плазмы*. 2005. Т. 31, № 11. С. 1009–1025.
123. *Калинин Ю. А., Есин А. Д.* Методы и средства физического эксперимента в вакуумной СВЧ электронике. — Саратов: Изд-во СГУ, 1991.
  124. *Bragard J., Arecchi F. T., Boccaletti S.* Characterization of synchronized spatiotemporal states in coupled non identical complex Ginzburg–Landau equations // *Intern. J. Bifurcation Chaos*. 2000. V. 10. P. 2381.
  125. *Dorogovtsev S. N., Mendes J. F. F.* Evolution of networks. — Oxford University Press, 2003.
  126. *Boccaletti S., Latora V., Moreno V., Chavez M., Hwang D.-U.* Complex networks: Structure dynamics // *Phys. Rep.* 2006. V. 424. P. 175–308.
  127. *Chavez M., Hwang D.-U., Amann A., Hentschel H. G. E., Boccaletti S.* Synchronization is enhanced in weighted complex networks // *Phys. Rev. Lett.* 2005. V. 94. P. 218701.
  128. *Hwang D.-U., Chavez M., Amann A., Boccaletti S.* Synchronization in complex networks with age ordering // *Phys. Rev. Lett.* 2005. V. 94. P. 138701.
  129. *Motter A. E., Zhou C. T., Kurths J.* Network synchronization, diffusion, the paradox of heterogeneity // *Phys. Rev. E*. 2005. V. 71, № 1. P. 016116.
  130. *Zhou C. T., Motter A. E., Kurths J.* Universality in the synchronization of weighted random networks // *Phys. Rev. Lett.* 2006. Т. 96, № 3. P. 034101.
  131. *Motter A. E., Zhou C. T., Kurths J.* Enhancing complex-network synchronization // *Europhys. Lett.* 2005. V. 69, № 3. P. 334–340.
  132. *Strogatz S. H.* Exploring complex networks // *Nature*. 2001. V. 410. P. 268–276.
  133. *Newman M. E. J.* The structure function of complex networks // *SIAM Rev.* 2003. Т. 45. P. 167–256.
  134. *Дмитриев А. С., Старков С. О.* Передача информации с использованием хаоса и классическая теория информации // *Зарубежная радиоэлектроника. Успехи современной радиоэлектроники*. 1998. № 11. С. 4–32.
  135. *Боккалетти С., Короновский А. А., Трубецков Д. И., Храмов А. Е., Храмова А. Е.* Устойчивость синхронного состояния произвольной сети связанных элементов // *Изв. вузов. Радиофизика*. 2006. Т. XLIX, № 10. С. 917–924.
  136. *Pecora L. M., Carroll T. L.* Master stability functions for synchronized coupled systems // *Phys. Rev. Lett.* 1998. V. 80, № 10. P. 2109–2112.
  137. *Короновский А. А., Ремпен И. С., Трубецков Д. И., Храмов А. Е.* Переходной хаос в распределенной активной среде «винтовой электронный пучок — встречная электромагнитная волна» // *Изв. РАН. Сер. физ.* 2002. Т. 66, № 12. С. 1754–1760.
  138. *Wolf A., Swift J., Swinney H. L., Vastano J.* Determining Lyapunov exponents from a time series // *Physica D*. 1989. V. 16. P. 285.
  139. *Eckmann J. P., Kamphorst S. O.* Lyapunov exponents from time series // *Phys. Rev. A*. 1986. V. 34, № 6. P. 4971–4979.
  140. *Benettin G., Galgani L., Giorgilli A., Strelcyn J.-M.* Lyapunov characteristic exponents for smooth dynamical systems for Hamiltonian systems: A method for computing all of them. P.I. Theory. P.II. Numerical application // *Meccanica*. 1980. V. 15. P. 9–30.

- 
141. *Benettin G., Galgani L., Strelcyn J.-M.* Kolmogorov entropy numerical experiments // *Phys. Rev. A.* 1976. Т. 14. P. 2338.
  142. *Кузнецов С. П., Трубецков Д. И.* Хаос и гиперхаос в лампе обратной волны // *Изв. вузов. Радиофизика.* 2004. Т. XLVII, № 5–6. С. 383.
  143. *Hramov A. E., Koronovskii A. A., Rempen I. S.* Controlling chaos in spatially extended beam-plasma system by the continuous delayed feedback // *Chaos.* 2006. V. 16, № 1. P. 013123.
  144. *Filatov R. A., Hramov A. E., Koronovskii A. A.* Chaotic synchronization in coupled spatially extended beam-plasma systems // *Phys. Lett. A.* 2006. V. 358. P. 301–308.

## Глава 9

# ОБОБЩЕННАЯ ХАОТИЧЕСКАЯ СИНХРОНИЗАЦИЯ В ДИАПАЗОНЕ СВЕРХВЫСОКИХ ЧАСТОТ

А. А. Короновский, А. Е. Храмов, О. И. Москаленко,  
П. В. Попов, Р. А. Филатов, А. В. Стародубов,  
Б. С. Дмитриев, Ю. Д. Жарков

Обычно обобщенная синхронизация наблюдается при однонаправленной связи, когда одна система (вынуждающая) действует на другую (вынуждаемую), но обратного воздействия нет... Установление обобщенной синхронизации можно интерпретировать как подавление собственной динамики вынуждаемой системы воздействием со стороны другой, так что она «подчиняется управлению».

*Пиковский А., Розенблюм М., Куртс Ю.*  
Синхронизация. Фундаментальное нелинейное явление. М.: Техносфера, 2003. С. 196.

*Обобщенная хаотическая синхронизация и способы ее диагностики. Обобщенная хаотическая синхронизация в однонаправленно связанных гидродинамических моделях диода Пирса. Обобщенная хаотическая синхронизация в системе двух связанных клистронных автогенераторов хаоса. Скрытая передача информации на основе явления обобщенной синхронизации.*

### 9.1. Обобщенная хаотическая синхронизация и способы ее диагностики

Одним из вызывающих большой интерес видов синхронного хаотического поведения является режим обобщенной синхронизации однонаправленно связанных хаотических осцилляторов [1–7]. Данный тип синхронного поведения означает, что между состояниями взаимодействующих однонаправленно связанных ведущего  $x_d(t)$  и ведомого  $x_r(t)$  хаотических осцилляторов (с непрерывным или дискретным временем), существует некоторая функциональная зависимость  $F[\cdot]$ , такая, что

после завершения переходного процесса имеет место установление функционального соотношения  $\mathbf{x}_r(t) = \mathbf{F}[\mathbf{x}_d(t)]$ . При этом, сам вид данной зависимости  $\mathbf{F}[\cdot]$  может быть достаточно сложным, а процедура нахождения этой зависимости весьма нетривиальна. По виду функциональной зависимости  $\mathbf{F}[\cdot]$  — гладкой или фрактальной — выделяют соответственно сильную и слабую обобщенные синхронизации [2]. При этом следует отметить, что в качестве взаимодействующих осцилляторов могут выступать две разные динамические системы, в том числе и с различной размерностью фазового пространства. Явление обобщенной синхронизации описано также для распределенных систем различной природы [8, 9].

К настоящему времени предложено несколько методов для диагностирования режима обобщенной синхронизации между хаотическими осцилляторами, таких как метод ближайших соседей [1, 10] или часто используемый метод вспомогательной системы [4]. Суть метода вспомогательной системы сводится к следующему: наряду с ведомой системой  $\mathbf{x}_r(t)$  рассматривается идентичная ей вспомогательная система  $\mathbf{x}_a(t)$ . Начальные условия для вспомогательной системы  $\mathbf{x}_a(t_0)$  выбираются отличными от начального состояния ведомой системы  $\mathbf{x}_r(t_0)$ , однако лежащими в бассейне притяжения того же аттрактора. В случае отсутствия режима обобщенной синхронизации между взаимодействующими системами векторы состояния ведомой  $\mathbf{x}_r(t)$  и вспомогательной  $\mathbf{x}_a(t)$  систем принадлежат одному и тому же хаотическому аттрактору, но являются различными. В том случае, когда имеет место режим обобщенной синхронизации, в силу выполнения соотношений  $\mathbf{x}_r(t) = \mathbf{F}[\mathbf{x}_d(t)]$  и, соответственно,  $\mathbf{x}_a(t) = \mathbf{F}[\mathbf{x}_d(t)]$ , после завершения переходного процесса состояния ведомой и вспомогательной систем должны стать идентичными  $\mathbf{x}_r(t) \equiv \mathbf{x}_a(t)$ . Таким образом, эквивалентность состояний ведомой и вспомогательной систем после переходного процесса (который может быть достаточно длительным [11]) является критерием наличия обобщенной синхронизации между ведущим и ведомым осцилляторами.

Анализ режима обобщенной синхронизации может быть проведен также с помощью вычисления условных ляпуновских показателей [12, 13]. В этом случае рассчитываются ляпуновские показатели для ведомой системы, а так как ее поведение зависит от поведения ведущей системы, то эти ляпуновские показатели отличаются от ляпуновских показателей автономной ведомой системы и называются условными. Критерием существования обобщенной синхронизации в однонаправленно связанных динамических системах является отрицательность старшего условного ляпуновского показателя [2, 12]. Следует также отметить, что для однонаправленно связанных хаотических осцилляторов режимы полной синхронизации и синхронизации с запаздыванием также являются частными случаями режима обобщенной синхронизации и представляют собой случаи сильной обобщенной синхронизации [2].

Отметим также, что иногда понятие обобщенной синхронизации используется и для взаимно связанных хаотических осцилляторов [14, 15], при этом в качестве условия существования обобщенной синхронизации по-прежнему выступает условие существования функциональной взаимосвязи между векторами состояний связанных хаотических осцилляторов  $\mathbf{x}_1(t) = \mathbf{F}[\mathbf{x}_2(t)]$ . В частности, режим синхронизации с запаздыванием во взаимно связанных осцилляторах может рассматриваться как режим обобщенной синхронизации, поскольку в данном случае необходимое соотношение имеет вид  $\mathbf{x}_1(t) = \mathbf{x}_2(t - \tau)$ .

Остановимся, следуя работам [16–18], на механизмах, приводящих к установлению режима обобщенной хаотической синхронизации. Для этого рассмотрим поведение двух однонаправленно связанных хаотических осцилляторов

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_d &= \mathbf{H}(\mathbf{x}_d, \mathbf{g}_d), \\ \dot{\mathbf{x}}_r &= \mathbf{G}(\mathbf{x}_r, \mathbf{g}_r) + \varepsilon \mathbf{P}(\mathbf{x}_d, \mathbf{x}_r),\end{aligned}\tag{9.1}$$

где  $\mathbf{x}_{d,r}$  — векторы состояний ведущей и ведомой систем соответственно;  $\mathbf{H}$  и  $\mathbf{G}$  определяют векторное поле рассматриваемых систем;  $\mathbf{g}_d$  и  $\mathbf{g}_r$  являются векторами параметров, слагаемое  $\mathbf{P}$  отвечает за однонаправленную связь между системами, а параметр  $\varepsilon$  определяет силу связи между ними.

Если размерности фазовых пространств ведущей и ведомой систем равны  $N_d$  и  $N_r$ , то поведение однонаправленно связанных хаотических осцилляторов (9.1) может быть охарактеризовано с помощью спектра ляпуновских показателей  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_{N_d+N_r}$ . В силу независимости поведения ведущей системы от состояния ведомого осциллятора, спектр ляпуновских показателей может быть разделен на две части: ляпуновские показатели ведущей системы  $\lambda_1^d \geq \dots \geq \lambda_{N_d}^d$  и условные ляпуновские показатели  $\lambda_1^r \geq \dots \geq \lambda_{N_r}^r$ . Как уже говорилось выше, критерием возникновения обобщенной синхронизации служит смена знака с «плюса» на «минус» старшего условного ляпуновского показателя  $\lambda_1^r$ .

Как правило, режим обобщенной синхронизации рассматривается для двух идентичных хаотических осцилляторов со слегка различающимися параметрами, связанных однонаправленной диссипативной связью. Поэтому начнем рассмотрение именно с этого случая. Другие типы связи, а также ситуации, когда обобщенная синхронизация наблюдается в различных динамических системах будут рассмотрены чуть далее. В случае одинаковых связанных систем с диссипативной однонаправленной связью размерности фазовых пространств ведущей и ведомой систем равны друг другу ( $N_d = N_r = N$ ), а уравнения (9.1) могут быть переписаны в виде

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_d &= \mathbf{H}(\mathbf{x}_d, \mathbf{g}_d), \\ \dot{\mathbf{x}}_r &= \mathbf{H}(\mathbf{x}_r, \mathbf{g}_r) + \varepsilon \mathbf{A}(\mathbf{x}_d - \mathbf{x}_r),\end{aligned}\tag{9.2}$$

где  $\mathbf{A} = \{\delta_{ij}\}$  — матрица связи;  $\varepsilon$  — скалярный параметр, характеризующий силу связи;  $\delta_{ii} = 0$  или 1,  $\delta_{ij} = 0$  ( $i \neq j$ ).

Рассмотрим ведомую систему  $\mathbf{x}_r(t)$  как некоторую неавтономную модифицированную систему

$$\dot{\mathbf{x}}_m = \mathbf{H}'(\mathbf{x}_m, \mathbf{g}_r, \varepsilon) \quad (9.3)$$

под внешним воздействием  $\varepsilon \mathbf{A} \mathbf{x}(t)$

$$\dot{\mathbf{x}}_m = \mathbf{H}'(\mathbf{x}_m, \mathbf{g}_r, \varepsilon) + \varepsilon \mathbf{A} \mathbf{x}_d, \quad (9.4)$$

где

$$\mathbf{H}'(\mathbf{x}, \mathbf{g}) = \mathbf{H}(\mathbf{x}, \mathbf{g}) - \varepsilon \mathbf{A} \mathbf{x}. \quad (9.5)$$

Следует обратить внимание, что слагаемое  $(-\varepsilon \mathbf{A} \mathbf{x})$  фактически вносит дополнительную диссипацию в модифицированную систему (9.3). Действительно, сжатие фазового объема в фазовом пространстве характеризуется дивергенцией векторного поля. Очевидно, что дивергенция векторного поля модифицированной системы и дивергенция векторного поля ведомой системы связаны друг с другом соотношением

$$\operatorname{div} \mathbf{H}' = \operatorname{div} \mathbf{H} - \varepsilon \sum_{i=1}^N \delta_{ii} \quad (9.6)$$

(где  $N$  — размерность фазового пространства модифицированной системы). Таким образом, диссипация в модифицированной системе оказывается больше, чем в ведомой. При этом величина диссипации нарастает с увеличением параметра связи  $\varepsilon$ .

Очевидно, что режим обобщенной синхронизации, возникающий в системе (9.2) при увеличении параметра связи  $\varepsilon$ , может быть рассмотрен как следствие двух взаимосвязанных процессов, протекающих одновременно. Первый из этих процессов — увеличение диссипации в модифицированной системе (9.3), а второй — возрастание амплитуды внешнего сигнала. Понятно, что оба процесса связаны друг с другом посредством параметра  $\varepsilon$  и не могут быть реализованы в ведомой системе (9.2) независимо друг от друга. Тем не менее, для лучшего понимания механизмов, приводящих к возникновению режима обобщенной синхронизации, рассмотрим сначала оба этих процесса независимо друг от друга. Начнем рассмотрение с изучения автономного поведения модифицированной системы (9.3).

Для рассматриваемой модифицированной системы величина  $\varepsilon$  выступает в качестве параметра диссипации. Когда  $\varepsilon$  равна нулю, поведение модифицированной системы  $\mathbf{x}_m(t)$  полностью совпадает с поведением ведомой системы  $\mathbf{x}_r(t)$  в отсутствие связи. С увеличением параметра диссипации  $\varepsilon$  динамика модифицированной системы (9.3) должна упрощаться. Вследствие этого модифицированная система  $\mathbf{x}_m(t)$  должна совершать переход от хаотических колебаний к регулярным

(периодическим), и, может быть (в случае большого значения параметра диссипации), — даже к стационарному состоянию. В этом случае один из ляпуновских показателей модифицированной системы  $\lambda_0^m$  является нулевым (или отрицательным в случае, если в модифицированной системе (9.3) реализуется стационарное состояние), а все остальные ляпуновские показатели отрицательны ( $0 > \lambda_1^m \geq \dots \geq \lambda_{N-1}^m$ ). В то же самое время, следует отметить, что спектр ляпуновских показателей модифицированной системы (9.3) отличается от условных ляпуновских показателей  $\lambda_1^r \geq \dots \geq \lambda_N^r$  ведомой системы (9.2), так как, в отличие от модифицированной системы, спектр условных ляпуновских показателей определяется не только поведением ведомой, но также и динамикой ведущей системы (9.2). Соответственно, рассматривая только спектр ляпуновских показателей модифицированной системы, нельзя сделать вывод о существовании режима обобщенной синхронизации в исходной системе (9.2) однонаправленно связанных хаотических осцилляторов.

Внешний же сигнал в соотношении (9.4), наоборот, стремится навязать хаотическую динамику ведущей системы  $\mathbf{x}_d(t)$  модифицированной системе  $\mathbf{x}_m(t)$ , и, соответственно, усложнить динамику последней. Понятно, что режим обобщенной синхронизации может существовать только в том случае, если собственная хаотическая динамика модифицированной системы  $\mathbf{x}_m(t)$  будет подавлена за счет увеличения диссипации. Очевидно, что только при выполнении этого условия текущее состояние модифицированной системы  $\mathbf{x}_m(t)$  будет определяться внешним сигналом, то есть будет выполняться соотношение  $\mathbf{x}_m(t) = \mathbf{F}[\mathbf{x}_d(t)]$ . В соответствии с соотношением (9.4) функциональное соотношение  $\mathbf{x}_r(t) = \mathbf{F}[\mathbf{x}_d(t)]$  также будет справедливым, что соответствует режиму обобщенной синхронизации.

Итак, возникновение режима обобщенной синхронизации в рассматриваемой системе (9.2) возможно только для таких значений параметра  $\varepsilon$ , при которых модифицированная система (9.3) демонстрирует периодические колебания или переходит в стационарный режим. В то же самое время хорошо известно, что даже периодическое внешнее воздействие может привести к возникновению хаотической динамики в системе, демонстрирующей периодическое поведение. Поэтому установившийся регулярный режим должен быть достаточно устойчив, чтобы внешнее воздействие не могло возбудить собственную хаотическую динамику модифицированной системы  $\mathbf{x}_m(t)$ , и, соответственно, разность значений параметров связи  $\varepsilon = \varepsilon_{GS}$  (момент возникновения режима обобщенной синхронизации) и  $\varepsilon = \varepsilon_p$  (точка перехода к периодическим колебаниям в модифицированной системе) может быть достаточно большой.

В режиме обобщенной синхронизации ( $\varepsilon > \varepsilon_{GS}$ ) амплитуда внешнего воздействия оказывается относительно малой по сравнению с амплитудой периодических колебаний в модифицированной системе  $\mathbf{x}_m(t)$  (в том случае, если имеют место регулярные колебания). Соответственно,

но, режим обобщенной синхронизации может в данном случае рассматриваться как слабое внешнее хаотическое возмущение периодической динамики.

Аналогичный вывод можно сделать и в случае, когда при достаточно больших значениях параметра  $\varepsilon$  в модифицированной системе  $\mathbf{x}_m(t)$  устанавливается стационарный режим. В этом случае режим обобщенной синхронизации является, фактически, хаотическим возмущением стационарного состояния. Иными словами, поведение системы является переходным процессом, который стремится закончиться стационарным состоянием, возмущаемым внешним хаотическим воздействием. В том случае, если управляющие параметры  $\mathbf{g}_{d,r}$  рассматриваемых ведущей и ведомой систем различаются незначительно, а величина параметра  $\varepsilon$  достаточно большая, переходной процесс будет достаточно быстрым, и соответственно в фазовом пространстве модифицированной системы  $\mathbf{x}_m(t)$  изображающая точка будет следовать за возмущенным «стационарным состоянием» с некоторым малым запаздыванием  $\tau$ , что соответствует режиму синхронизации с запаздыванием.

Развитый подход к объяснению явления обобщенной синхронизации, основанный на рассмотрении динамики модифицированной системы, позволяет объяснить известный факт [6, 19] (см. также раздел 9.2), что порог возникновения режима обобщенной синхронизации в ряде случаев практически не зависит от величины расстройки значений управляющих параметров связанных хаотических осцилляторов, изменяющейся в достаточно широких пределах. Из приведенного рассмотрения следует, что устойчивость периодического режима (наличие которого необходимо для возникновения обобщенной синхронизации) обусловлена, прежде всего, свойствами самой модифицированной системы  $\mathbf{x}_m(t)$ . Поэтому величина  $\varepsilon_{GS}$ , соответствующая моменту возникновения режима обобщенной синхронизации, слабо зависит от величины расстройки управляющих параметров.

В то же самое время значение управляющего параметра  $\varepsilon_{GS}$ , при котором возникает режим обобщенной синхронизации, как правило, не совпадает с точками бифуркаций в модифицированной системе (см., например, [18]). Причиной такого несоответствия является внешнее воздействие со стороны ведущей системы, поскольку даже гармоническое внешнее воздействие может возбуждать хаотические колебания в системах с периодической динамикой. Соответственно, в этом случае бифуркационные точки модифицированной системы под внешним воздействием будут сдвинуты в сторону больших значений параметра  $\varepsilon$  по сравнению с автономной динамикой модифицированной системы. Очевидно, что в этом случае момент возникновения режима обобщенной синхронизации не будет совпадать с бифуркационными точками автономной модифицированной системы.

Обсудим теперь вопрос о механизмах возникновения обобщенной синхронизации в случае однонаправленно связанных различных динамических систем либо в случае недиссипативной связи. Известно

несколько примеров таких систем [2, 4]. Очевидно, что если тип связи диссипативный, то различие ведущей и ведомой систем не играют значительной роли, а соответственно, все вышеизложенное остается справедливым и в этом случае. В то же самое время, если однонаправленная связь не является диссипативной, то использовать подход модифицированной системы не представляется возможным.

Оказывается, что в случае недиссипативной связи между системами (как, например, в случае двух связанных клистронных автогенераторов хаоса, рассмотренных далее в разделе 9.3) величина внешнего сигнала, воздействующего на ведомую систему со стороны ведущей, оказывается сопоставимой с амплитудой собственных колебаний в системе или даже превосходит ее в несколько раз. Очевидно, что внешняя сила перемещает изображающую точку в фазовом пространстве ведомой системы в области с сильной сходимостью фазовых траекторий, в результате чего собственная хаотическая динамика системы оказывается подавленной и возникает режим обобщенной синхронизации.

Таким образом, можно выделить два схожих механизма, приводящих к установлению режима обобщенной синхронизации, в основе которых лежит подавление собственных хаотических колебаний с помощью дополнительного введения диссипации. Это осуществляется с помощью введения дополнительного диссипативного слагаемого, либо смещением изображающей точки системы в области фазового пространства с сильной сходимостью фазовых траекторий. Рассмотрим теперь особенности возникновения режима обобщенной хаотической синхронизации в системах сверхвысокочастотной электроники и начнем рассмотрение с уже хорошо известной читателю гидродинамической модели диода Пирса.

## **9.2. Обобщенная хаотическая синхронизация в однонаправленно связанных гидродинамических моделях диода Пирса**

Настоящий раздел посвящен изучению явления обобщенной синхронизации в однонаправленно связанных пучково-плазменных системах СВЧ электроники. Как и в разделе 8.3, в качестве рассматриваемой системы снова обратимся к связанным диодам Пирса в гидродинамическом приближении (подробнее о модели см. главу 2). Напомним вид уравнений, описывающих эту классическую модель сверхвысокочастотной электроники:

$$\frac{\partial^2 \varphi_{1,2}}{\partial x^2} = \alpha_{1,2}^2 (\rho_{1,2} - 1), \quad (9.7)$$

$$\frac{\partial \rho_{1,2}}{\partial t} = - \frac{\partial (\rho_{1,2} v_{1,2})}{\partial x}, \quad (9.8)$$

$$\frac{\partial v_{1,2}}{\partial t} = -v_{1,2} \frac{\partial v_{1,2}}{\partial x_{1,2}} + \frac{\partial \varphi_{1,2}}{\partial x}, \quad (9.9)$$

с граничными условиями:

$$v_{1,2}(0, t) = 1, \quad \rho_{1,2}(0, t) = 1, \quad \varphi_{1,2}(0, t) = 0, \quad (9.10)$$

где индексы «1» и «2» относятся к первой и второй пучково-плазменным системам соответственно.

Граничные условия для системы гидродинамических уравнений (9.7)–(9.9), описывающих динамику связанных диодов Пирса в случае однонаправленной связи, запишутся следующим образом:

$$\begin{cases} \varphi_1(1, t) = 0, \\ \varphi_2(1, t) = \varepsilon(\rho_2(x = 1, t) - \rho_1(x = 1, t)), \end{cases} \quad (9.11)$$

где первая «1» (ведущая) система находится в режиме автономных колебаний, воздействуя на вторую «2» (ведомую) систему.

Для диагностики режима обобщенной синхронизации нами будет использован метод вспомогательной системы и расчет максимальной условной ляпуновской экспоненты, описанные выше в разделе 9.1.

Начнем изучение обобщенной хаотической синхронизации в однонаправленно связанных диодах Пирса с метода вспомогательной системы [4]. В этом случае для диагностики обобщенной хаотической синхронизации одновременно с численным интегрированием ведущей и ведомой систем диодов Пирса решается дополнительная система уравнений (9.7)–(9.9) с граничными условиями (9.10), (9.11), так называемая — вспомогательная система  $(\rho_a(x, t), v_a(x, t), \varphi_a(x, t))$ . При численном интегрировании связанных диодов Пирса  $\rho_{1,2}(x, t), v_{1,2}(x, t), \varphi_{1,2}(x, t)$  и вспомогательной системы  $\rho_a(x, t), v_a(x, t), \varphi_a(x, t)$  значение управляющего параметра Пирса во вспомогательной системе выбирается равным значению управляющего параметра в ведомой системе, но начальные условия вспомогательной системы выбираются отличными от начальных условий в ведомом диоде Пирса. При этом для анализа возникновения режима обобщенной синхронизации удобно построить разность колебаний  $|\rho_2(x, t) - \rho_a(x, t)|$  в ведомой  $(\rho_2(x, t))$  и вспомогательной  $(\rho_a(x, t))$  системах во всем пространстве взаимодействия. Результаты численного моделирования динамики однонаправленно связанных диодов Пирса с помощью метода вспомогательной системы представлены на рис. 9.1, из которого видно, что при малых значениях параметра связи колебания плотности заряда в ведомой и вспомогательной системах остаются различными по всему пространству взаимодействия (рис. 9.1, а), а при достаточно больших значениях  $\varepsilon$  колебания в ведомой и вспомогательной системах становятся идентичными (рис. 9.1, б), т. е. в связанных системах возникает режим обобщенной синхронизации.

Полученные с помощью метода вспомогательной системы результаты были подтверждены с помощью расчета старшего условного ляпуновского показателя  $\lambda$  [2, 12]. Напомним, что под условными ляпунов-

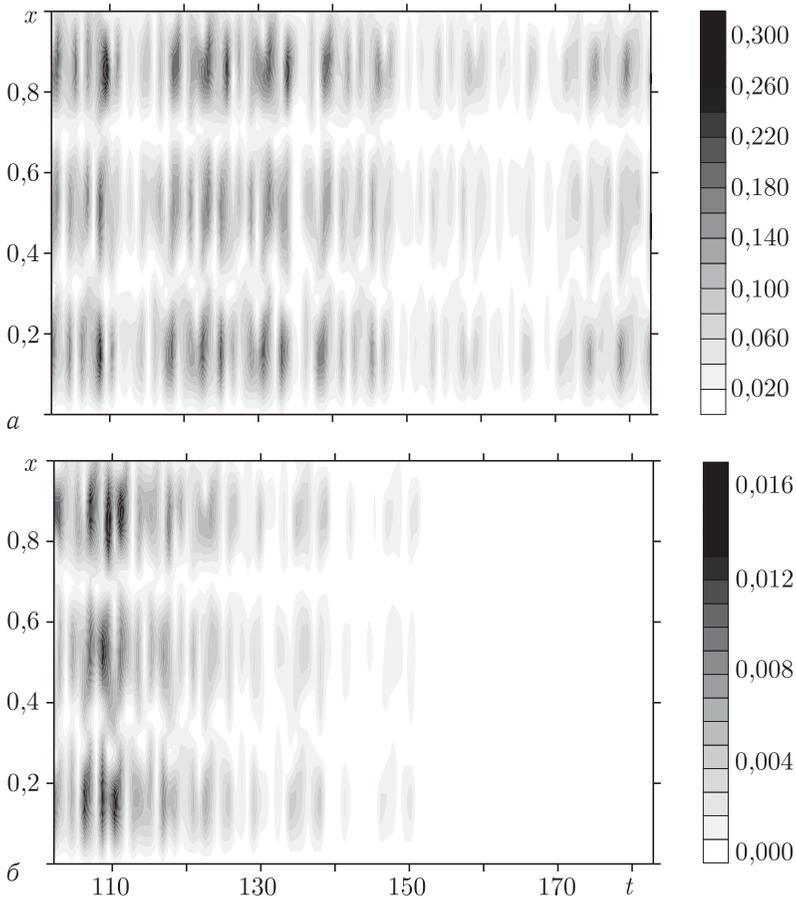


Рис. 9.1. Пространственно-временная эволюция разности состояний (величин плотности пространственного заряда) ведомой и вспомогательной пучково-плазменных систем  $|\rho_2(x, t) - \rho_a(x, t)|$ . а)  $\varepsilon = 0,05$ , отсутствие режима обобщенной хаотической синхронизации; б)  $\varepsilon = 0,2$ , режим обобщенной хаотической синхронизации: после переходного процесса в ведомой и вспомогательной системах устанавливаются одинаковые пространственно-временные состояния

скими показателями понимают ляпуновские показатели ведомой системы. В том случае, когда старший условный ляпуновский показатель становится отрицательным, говорят о наступлении режима обобщенной синхронизации. Численный расчет старшего условного пространственного ляпуновского показателя осуществлялся модифицированным методом Бенеттина, адаптированным для анализа распределенной системы (подробное описание см. в главе 7, разд. 7.4).

На рис.9.2 приводится соответствующая зависимость старшего условного ляпуновского показателя  $\lambda$  от величины параметра связи при значениях параметров  $\alpha_1 = 2,858\pi$  и  $\alpha_2 = 2,862\pi$ . Можно видеть,

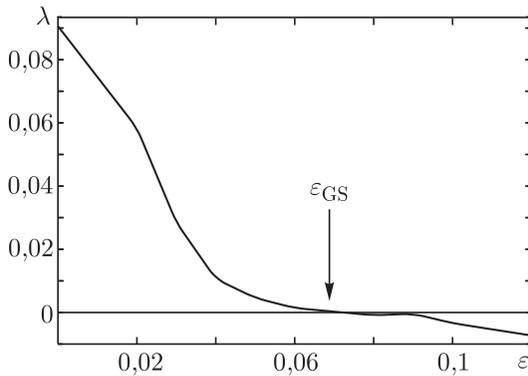


Рис. 9.2. Зависимость максимальной условной ляпуновской экспоненты от параметра связи  $\varepsilon$  для значений параметров Пирса ведомой и ведущей систем:  $\alpha_1 = 2,858\pi$  и  $\alpha_2 = 2,862\pi$ . Стрелкой отмечено значение параметра связи, при котором в системе устанавливается режим обобщенной синхронизации

что при определенной величине параметра связи  $\varepsilon = \varepsilon_{GS}$  (отмечено стрелкой на рис. 9.2) в распределенной пучково-плазменной системе устанавливается режим обобщенной хаотической синхронизации, который характеризуется тем, что значение старшей условной ляпуновской экспоненты становится меньше нуля  $\lambda_{\max} < 0$ .

Рассмотрим возможность возникновения режима обобщенной синхронизации при неидентичных управляющих параметрах ведомой и ведущей систем диодов Пирса. Зафиксируем управляющий параметр одной системы и, меняя параметр Пирса другой, построим зависимость порога возникновения режима обобщенной синхронизации  $\varepsilon_{GS}$  от величины неидентичности между системами. На рис. 9.3, а данная зависимость построена для фиксированного значения параметра ведущей системы  $\alpha_1$ . Наглядно видно, что с увеличением параметра ведомой системы (иными словами, с переходом ведомой системы в область более простых, слабохаотических колебаний, подробнее см. главу 2) порог возникновения обобщенной синхронизации снижается. На рис. 9.3, б величина порога  $\varepsilon_{GS}$  обобщенной синхронизации построена при фиксированном значении управляющего параметра  $\alpha_2$  ведомой системы при изменении параметра  $\alpha_1$  ведущей. Можно видеть, что при малых расстройках между ведущей и ведомой системами величина порога режима обобщенной синхронизации слабо зависит от параметров ведущей системы. Таким образом, в распределенной пучково-плазменной системе с увеличением параметра связи наблюдается установление режима обобщенной синхронизации.

Обратимся к анализу механизма возникновения обобщенной синхронизации в связанных распределенных пучково-плазменных системах с помощью метода модифицированной системы, весьма подробно описанного в разделе 9.1. Этот метод даст нам возможность выявить механизмы установления режима обобщенной синхронизации в одно-

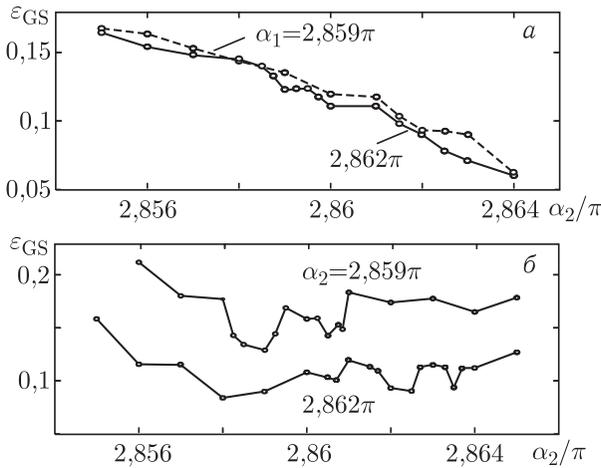


Рис. 9.3. Зависимость порога возникновения обобщенной хаотической синхронизации от параметра ведущей  $\alpha_2$  (а) и ведомой  $\alpha_1$  (б) распределенных систем (для фиксированных значений параметра  $\alpha$ : 1 — 2,859 $\pi$ ; 2 — 2,862 $\pi$ )

направленно связанных хаотических распределенных системах СВЧ электроники. Для применения данного метода необходимо рассмотреть динамику автономной модифицированной ведомой системы с учетом введения в систему однонаправленной связи. В нашем случае автономная модифицированная распределенная система будет описываться уравнениями (9.7)–(9.9) при следующих граничных условиях для потенциала:

$$\begin{cases} \varphi_m(0, t) = 0, \\ \varphi_m(1, t) = \varepsilon \rho_m(1, t). \end{cases} \quad (9.12)$$

В таком виде модифицированная распределенная система (9.7)–(9.9) может рассматриваться как гидродинамическая модель диода Пирса с подключенной к нему цепью обратной связи. Подобная система была достаточно подробно рассмотрена в работах [20, 21], где исследовалось влияние внешней обратной связи на хаотические колебания в диоде Пирса. В приведенных статьях показано, что с увеличением коэффициента обратной связи (в нашем случае параметра  $\varepsilon$  модифицированной системы) в гидродинамической модели диода Пирса наблюдается переход от хаотической динамики к периодическим колебаниям через каскад бифуркаций удвоения периода.

Как упоминалось выше (см. 9.1 или, например, [18]), условием возникновения режима обобщенной синхронизации является возникновение в модифицированной системе регулярных колебаний или стационарных состояний. Таким образом, учитывая результаты работ [20, 21], можно утверждать, что при рассмотрении обобщенной синхронизации хаотических колебаний в гидродинамической модели диода Пирса ре-

ализуется аналогичный механизм установления обобщенной синхронизации с переходом ведомой системы в режим периодических колебаний, однако, в исследуемом случае он определяется не введением в систему дополнительной диссипации, а перестройкой режимов колебаний в модифицированной системе за счет подключения некоторой обратной связи.

Описанное явление иллюстрирует рис. 9.4, *а*, на котором показана бифуркационная диаграмма колебаний плотности пространственного заряда в диоде Пирса с обратной связью (регистрируемая в точке пространства системы  $x = 0,2$ ), при изменении параметра  $\varepsilon$ . Из бифуркационной диаграммы видно, что с увеличением параметра связи колебания в модифицированной системе становятся периодическими и далее наблюдается установление стационарного состояния. Однако значение параметра связи, при котором в модифицированной системе имеет место установление периодических колебаний, существенно меньше порогового значения  $\varepsilon_{GS}$ , при котором возникает режим обобщенной синхронизации. Это связано с тем, что для нахождения порога обобщенной синхронизации необходимо рассматривать модифицированную систему под внешним воздействием (см. 9.1) ведущей системы. В этом случае внешнее воздействие приводит к увеличению значения параметра  $\varepsilon$ , при котором имеет место возникновение периодических колебаний. В простейшем случае такое внешнее воздействие можно задать гармоническим, его частота и амплитуда должны соответствовать основной базовой частоте в спектре мощности ведущей хаотической системы.

Итак, изменим граничные условия (9.12) для модифицированной системы (9.7)–(9.9), добавив в них внешний гармонический сигнал:

$$\begin{cases} \varphi_m(0, t) = 0, \\ \varphi_m(1, t) = \varepsilon \rho_r(1, t) - \varepsilon A \cos(2\pi f_0 t), \end{cases} \quad (9.13)$$

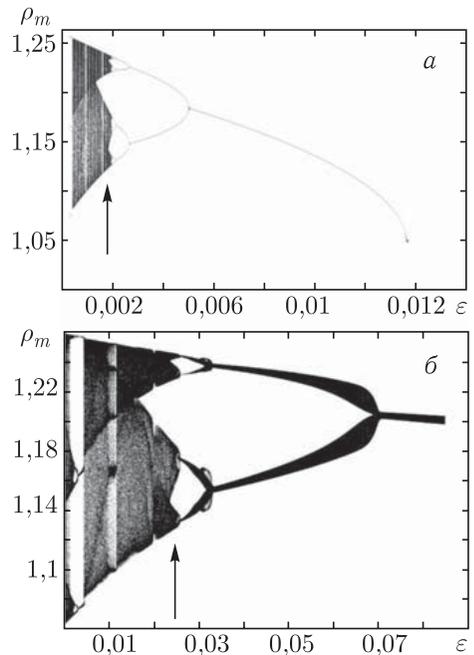


Рис. 9.4. Бифуркационные диаграммы колебаний плотности пространственного заряда в модифицированной системе в случае автономной динамики (*а*) и под внешним гармоническим воздействием (*б*). Параметр Пирса модифицированной системы  $\alpha_m = 2,862\pi$

где  $A = 0,78$  и  $f_0 = 1,0$  выбраны таким образом, чтобы моделировать основной пик в спектре мощности ведущей системы.

На рис. 9.4, б показана бифуркационная диаграмма колебаний в диоде Пирса для данного случая. Видно, что бифуркационные точки для модифицированной системы с внешним воздействием сдвигаются в сторону больших значений  $\varepsilon$ , относительно автономного случая (рис. 9.4, а), при этом в системе при больших значениях коэффициента обратной связи  $\varepsilon$  наблюдаются не периодические, а двухчастотные колебания с несоизмеримыми временными масштабами (квазипериодические регулярные колебания), что хорошо видно из бифуркационной диаграммы. Поэтому значение параметра, при котором возникает обобщенная синхронизация, принимает большие значения по сравнению со значением параметра  $\varepsilon$ , при котором в автономной модифицированной системе наблюдается переход от хаотических колебаний к периодической динамике.

Таким образом, было рассмотрено явление обобщенной синхронизации в однонаправленно связанных пучково-плазменных системах со сверхкритическим током на примере гидродинамических моделей диодов Пирса. Найдены пороги возникновения обобщенной синхронизации и исследован сценарий перехода от асинхронной динамики к режиму обобщенной синхронизации.

### **9.3. Обобщенная хаотическая синхронизация в системе двух связанных клистронных автогенераторов хаоса**

Следует отметить, что почти все исследования хаотической синхронизации в электронно-волновых системах сверхвысококачастотной электроники в подавляющем большинстве своем являются численными. В качестве исключения можно отметить, пожалуй, лишь работы по наблюдению частотной синхронизации в таких системах, когда удается пронаблюдать захват основной частоты спектра (см., например, [22]). Экспериментальные же исследования различных типов хаотической синхронизации в системах сверхвысококачастотной электроники на сегодняшний день практически отсутствуют. Прежде всего, это связано как с техническими, так и концептуальными трудностями наблюдения различных типов хаотической синхронизации в диапазоне сверхвысоких частот.

В настоящем разделе описан, пожалуй, первый и пока единственный эксперимент по наблюдению режима обобщенной хаотической синхронизации для систем сверхвысококачастотной электроники. Экспериментальные исследования явления обобщенной хаотической синхронизации проводились на примере системы двух однонаправленно связанных промышленных пятирезонаторных пролетных клистронных усилителей КУ-134Е. В клистронных усилителях использованы двухзазорные объемные резонаторы, работающие на противофазном виде

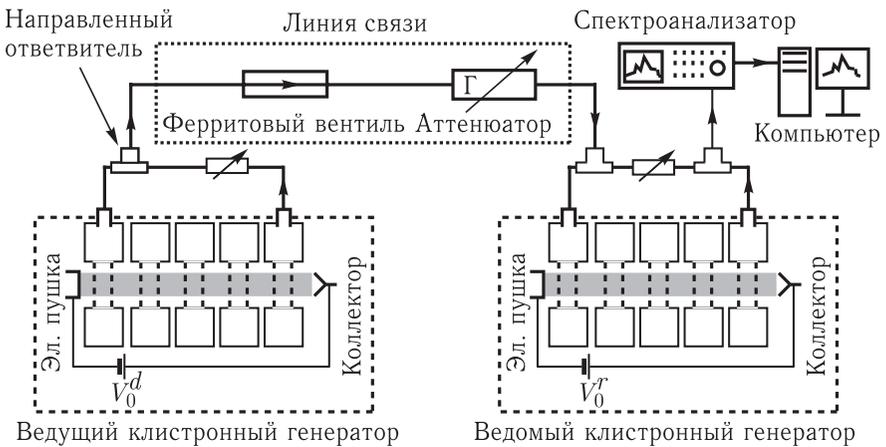


Рис. 9.5. Схема экспериментальной установки по наблюдению режима обобщенной хаотической синхронизации в двух однонаправленно связанных клистронных генераторах хаоса

колебаний. По конструкции и техническим данным клистронные усилители почти идентичны. Принципиальная схема экспериментальной установки приведена на рис. 9.5. Один из клистронных генераторов использовался как ведущий, другой — как ведомый. Основные управляющие параметры генераторов были следующими: собственная частота ведущего клистронного генератора  $f_0^d = 2800$  МГц, значение ускоряющего напряжения  $V_0^d = 2100$  В, постоянный ток пучка  $I_0^d = 52$  мА. Для введения расстройки между генераторами управляющие параметры для ведомого клистронного генератора устанавливались следующими:  $f_0^r = 2795$  МГц,  $V_0^r = 1898$  В,  $I_0^r = 50$  мА. При указанных значениях управляющих параметров используемые генераторы находились в режиме генерации хаотического сигнала. В линию связи между генераторами был включен поляризационный аттенюатор для регулировки мощности подаваемого на ведомый генератор сигнала, или другими словами, для изменения величины связи между генераторами. Для предотвращения влияния ведомого генератора на ведущий в линию связи был введен ферритовый вентиль.

Как уже отмечалось выше (см. раздел 9.1), наличие режима обобщенной хаотической синхронизации между ведущим  $\mathbf{x}_d(t)$  и ведомым  $\mathbf{x}_r(t)$  генераторами означает, что после завершения переходного процесса имеет место установление функционального соотношения  $\mathbf{x}_r(t) = \mathbf{F}[\mathbf{x}_d(t)]$ . К сожалению, ни один из вышеперечисленных в разделе 9.1 способов диагностики наличия режима обобщенной хаотической синхронизации не может быть использован для генераторов, работающих в сверхвысокочастотном диапазоне. Действительно, метод вспомогательной системы, хорошо себя зарекомендовавший в подобного рода исследованиях, требует наличия двух идентичных генераторов —

ведомого и вспомогательного. Понятно, что этот способ может быть с легкостью использован при численном моделировании поведения систем; возникающие сложности удается преодолеть при проведении экспериментов с низкочастотными хаотическими генераторами (см., например, [23]), когда удается создать два практически одинаковых генератора. Однако создание двух *абсолютно идентичных* сверхвысокочастотных генераторов на сегодняшний день представляется совершенно непосильной задачей. Точно также на данный момент труднодоступным является получение длительных записей временных реализаций систем, генерирующих колебания в сверхвысокочастотном диапазоне, а следовательно, затруднительно использовать и метод ближайших соседей, и расчет старшей условной ляпуновской экспоненты [24]. Вследствие этого необходим принципиально новый метод диагностики режима обобщенной хаотической синхронизации, который мог бы быть использован для систем сверхвысокочастотного диапазона.

Одной из важнейших характеристик поведения систем является фурье-спектр колебаний. В настоящее время хорошо известно, что использование фурье-спектров при изучении хаотической синхронизации может оказаться весьма полезным и эффективным [25, 26]. Поскольку при установлении режима обобщенной хаотической синхронизации кардинальным образом перестраивается динамика ведомой системы [18], можно ожидать, что эти изменения будут находить свое отражение и в спектрах мощности колебаний. Кроме этого, работа со спектром мощности на сверхвысоких частотах не представляет значительной трудности, в отличие, например, от получения длительных записей временных реализаций. В описываемом эксперименте для работы со спектрами использовался цифровой спектроанализатор ESA-E Series E4402B (Agilent Technologies), связанный с компьютером. Экспериментально полученные спектры автономных ведущего и ведомого клистронных генераторов приведены на рис. 9.6.

Для того, чтобы зафиксировать качественные изменения в спектре мощности ведомого генератора, происходящие с увеличением парамет-

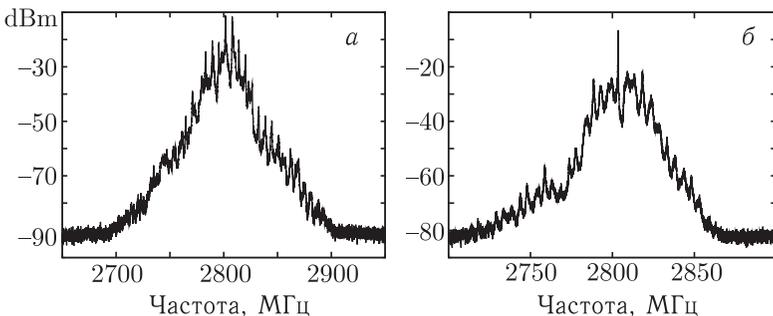


Рис. 9.6. Экспериментально полученные спектры колебаний (а) ведущего и (б) ведомого генераторов, находящихся в автономном режиме генерации

ра связи  $\varepsilon = 10^{-\Gamma/20}$  (где  $\Gamma$  — коэффициент ослабления связующего волновода), была использована следующая характеристика

$$\sigma(\varepsilon) = \frac{1}{P^d} \int_0^\infty \left( \frac{\partial S^r(f, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right)^2 df, \quad (9.14)$$

где  $P^d = \int_0^\infty S^d(f) df$  — полная мощность колебаний ведущего генератора и  $S^r(f, \varepsilon)$  — спектр мощности ведомого генератора, полученный при фиксированной величине параметра связи  $\varepsilon$ .

Производная  $\partial S^r(f, \varepsilon)/\partial \varepsilon$  характеризует изменения спектра мощности  $S^r(f, \varepsilon)$  ведомой системы, происходящие при варьировании параметра связи  $\varepsilon$ . До тех пор, пока не произошли значительные изменения в динамике ведомой системы, характеристика  $\sigma(\varepsilon)$  изменяется незначительно при малых изменениях величины параметра связи. Поскольку возникновение режима обобщенной хаотической синхронизации означает значительную перестройку поведения ведомой системы [1, 18], величина  $\varepsilon$  также должна претерпевать значительные изменения, как только между ведущим и ведомым генераторами устанавливается режим обобщенной синхронизации.

Поскольку спектры мощности, полученные в ходе экспериментальных исследований, представлены в виде дискретных данных, интеграл в соотношении (9.14) должен быть заменен на сумму. Соответственно, после такой замены соотношение (9.14) примет вид

$$\sigma(\varepsilon) = \frac{1}{\Delta \varepsilon^2 P^d} \sum_{i=0}^N (\langle S^r(f_i, \varepsilon) \rangle - \langle S^r(f_i, \varepsilon - \Delta \varepsilon) \rangle)^2, \quad (9.15)$$

где  $P^d = \sum_{i=1}^N \langle (S^d(f_i))^2 \rangle$ ,  $N = 2^{13}$  — число спектральных компонент в дискретном представлении спектра мощности, получаемом с помощью спектроанализатора,  $\langle \cdot \rangle$  означает усреднение по ансамблю наблюдений. В описываемом эксперименте усреднение проводилось по результатам 16 измерений.

Экспериментально полученная характеристика  $\sigma(\varepsilon)$  приведена на рис. 9.7. Из рисунка видно, что величина  $\sigma(\varepsilon)$  практически монотонно уменьшается с ростом параметра связи  $\varepsilon$  до тех пор, пока при значении  $\varepsilon \approx 0,8$  не наблюдается отчетливо выраженный пик, свидетельствующий о значительной трансформации спектра мощности ведомой системы, и, соответственно, о серьезном изменении ее динамики.

Тем не менее, необходимо убедиться, что наблюдаемый пик на зависимости  $\sigma(\varepsilon)$  действительно соответствует порогу возникновения режима обобщенной хаотической синхронизации. С этой целью, параллельно с экспериментальными исследованиями, было проведено чис-

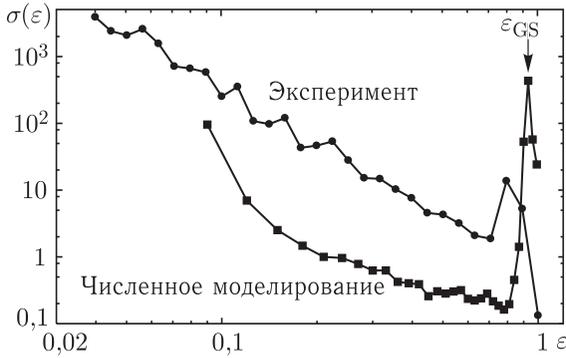


Рис. 9.7. Зависимости  $\sigma(\varepsilon)$ , полученные экспериментально (точки показаны символами  $\bullet$ ) и численно ( $\blacksquare$ ). Величина параметра связи  $\varepsilon = 1$  соответствует максимально возможному значению, соответствующему полной передаче (без ослабления) сигнала ведущего генератора в ведомую систему

ленное моделирование простой модели двух однонаправленно связанных клистронных генератора хаоса с петлей обратной связи. Поскольку поведение автономных клистронных генераторов находится в хорошем соответствии с результатами численного моделирования [27], можно ожидать, что подобное же соответствие будет иметь место и для двух однонаправленно связанных генераторов.

Кратко опишем используемую модель системы однонаправленно связанных клистронных генераторов хаоса с запаздывающей обратной связью. Следуя работам [27–29], поведение ведущего и ведомого автогенераторов описывается следующей системой уравнений:

$$\begin{aligned}
 \dot{F}_1^d(\tau) + \gamma^d F_1^d(\tau) &= \gamma^d F_2^d(\tau - \Delta\tau), \\
 \dot{F}_2^d(\tau) + \gamma^d F_2^d(\tau) &= -2i\alpha^d e^{-i\psi} J_1(|F_1^d(\tau)|) \frac{F_1^d(\tau)}{|F_1^d(\tau)|}, \\
 \dot{F}_1^r(\tau) + \gamma^r F_1^r(\tau) &= \gamma^r (F_2^r(\tau - \Delta\tau) + \varepsilon F_2^d(\tau)), \\
 \dot{F}_2^r(\tau) + \gamma^r F_2^r(\tau) &= -2i\alpha^r e^{-i\psi} J_1(|F_1^r(\tau)|) \frac{F_1^r(\tau)}{|F_1^r(\tau)|},
 \end{aligned}
 \tag{9.16}$$

где величины с индексом «d» относятся к ведущей, а с индексом «r» — ведомой системам;  $F_1(\tau)$  и  $F_2(\tau)$  — нормированные медленно меняющиеся комплексные амплитуды колебаний напряжения на зазорах соответственно входного и выходного резонаторов;  $J_1(\cdot)$  — функция Бесселя первого рода первого порядка;  $\tau$  — безразмерное время;  $\Delta\tau = 1$  — безразмерное время задержки в цепи обратной связи;  $\alpha$  — параметр возбуждения резонатора, имеющий смысл произведения коэффициента усиления на глубину обратной связи;  $\psi$  — полный набег фазы за время распространения сигнала по петле обратной связи;  $\gamma$  — параметр затухания;  $\varepsilon$  — параметр связи, характеризующий затухание в цепи связи между ведущим и ведомым автогенераторами. Значе-

ния управляющих параметров были выбраны следующими:  $\alpha^r = 10,9$ ,  $\alpha^d = 15,4$ ,  $\psi = 0,4875\pi$ ,  $\gamma^r = 1,0$ ,  $\gamma^d = 1,41$  [27]. При данных значениях управляющих параметров используемые модели клистронных автогенераторов в автономном режиме ( $\varepsilon = 0$ ) демонстрировали хаотическое поведение. Численное решение вышеприведенной системы проводилось с помощью одношагового метода Эйлера: шаг по времени выбирался равным  $t = 0,001$ .

Зависимость  $\sigma(\varepsilon)$ , полученная по результатам численного моделирования системы (9.16), показана на рис. 9.7. Из рисунка видно, что и в этом случае на зависимости  $\sigma(\varepsilon)$  существует отчетливо выраженный пик, точно так же как и в случае кривой  $\sigma(\varepsilon)$ , полученной экспериментально, причем имеет место хорошее соответствие результатов экспериментального исследования и численного моделирования. Для определения порога диагностики явления обобщенной синхронизации при численном моделировании системы (9.16) можно использовать метод вспомогательной системы. Учитывая особенности исследуемой системы, приведем более детальное описание применения этого метода.

Будем характеризовать состояние клистронного автогенератора величиной безразмерной комплексной амплитуды колебаний напряжения на зазоре выходного резонатора, другими словами — амплитудой выходного сигнала  $F_2(\tau)$ . Режим обобщенной синхронизации означает, что величины амплитуд выходного сигнала с ведущего  $F_2^d(\tau)$  и ведомого  $F_2^r(\tau)$  автогенераторов находятся в функциональной зависимости  $G[\cdot]$ , такой, что после завершения переходного процесса имеет место установление функционального соотношения  $F_2^r(\tau) = G[F_2^d(\tau)]$ . Метод вспомогательной системы, учитывая особенности исследуемой системы (9.16), заключается в следующем [4]: наряду с ведомым автогенератором рассматривается идентичная ему вспомогательная система — вспомогательный автогенератор, начальные условия для которого задаются отличными от начального состояния ведомого автогенератора. Обозначим  $F_2^a(\tau)$  величину амплитуды колебаний выходного сигнала вспомогательного автогенератора. В случае отсутствия режима обобщенной синхронизации между взаимодействующими автогенераторами системы  $F_2^r(\tau)$  и  $F_2^a(\tau)$  являются различными. В режиме обобщенной синхронизации, в силу выполнения соотношений  $F_2^r(\tau) = G[F_2^d(\tau)]$  и  $F_2^a(\tau) = G[F_2^d(\tau)]$ , после завершения переходного процесса данные величины должны стать идентичными  $F_2^r(\tau) \equiv F_2^a(\tau)$ . Таким образом, эквивалентность состояний, а именно амплитуд колебаний напряжения на зазорах выходных резонаторов ведомого и вспомогательного автогенераторов после переходного процесса (который может быть достаточно длительным [11]), является критерием наличия обобщенной синхронизации. Наглядней всего это можно проиллюстрировать на плоскости  $(|F_2^r(\tau)|, |F_2^a(\tau)|)$ , на которой при наличии явления обобщенной синхронизации будет наблюдаться прямая линия, соответствующая диагонали этой плоскости.

Для диагностики обобщенной синхронизации при проведении численного моделирования хаотический сигнал с ведущего автогенератора подавался одновременно на ведомый автогенератор, который в автономном режиме также демонстрировал хаотическое поведение, и на вспомогательную систему. В ходе численного моделирования изменялось значение параметра связи  $\varepsilon$  между автогенераторами и отслеживалось соотношение между состояниями ведомого и вспомогательного автогенераторов. Было установлено, что при параметре связи  $\varepsilon \approx 0,91$  в исследуемой системе наблюдается эквивалентность состояний во времени ведомой и вспомогательной систем. Последнее, как было отмечено выше, служит критерием наступления режима обобщенной синхронизации в исследуемой системе [4]. На рис. 9.8 слева приведены спектры, построенные по временным реализациям ведущего и ведомого автогенераторов, а справа — вид плоскости  $(|F_2^r(\tau)|, |F_2^a(\tau)|)$  при различных значениях параметра связи  $\varepsilon$ . Рисунки 9.8, а, б построены при  $\varepsilon = 0,0$  — автономный режим работы ведомого и вспомогательного автогенераторов. На рис. 9.8, в, г приведены спектры и плоскость  $(|F_2^r(\tau)|, |F_2^a(\tau)|)$  при  $\varepsilon = 0,89$ . Состояния ведомого и вспомогательного автогенераторов все еще различны. В спектре ведомого автогенератора стали проявляться частотные компоненты на частотах ведущего автогенератора. Другими словами, можно сказать, что наблюдается режим частотной синхронизации между ведомым и ведущим автогенераторами. При  $\varepsilon \approx 0,93$  (рис. 9.8, д, е) состояния ведомого и вспомогательного автогенераторов являются эквивалентными друг другу, что, как было описано выше, соответствует режиму обобщенной синхронизации.

Несомненно важным является вопрос о механизмах возникновения режима обобщенной хаотической синхронизации в связанных клистронных генераторах хаоса. Данное явление можно объяснить следующим образом. В [16] было установлено, что в основе механизма, приводящего к возникновению режима обобщенной хаотической синхронизации в однонаправленно связанных модельных системах, лежит подавление собственных хаотических колебаний в ведомой системе. Поэтому возникает вопрос: каким образом может быть подавлена собственная хаотическая динамика в клистронном автогенераторе хаоса? Известно, что характеристики клистронных усилителей определяются величиной первой гармоники сгруппированного тока [31, 32]. Последнее обусловлено тем, что такие автоколебательные системы, как клистроны, используемые в СВЧ электронике, характеризуются ярко выраженными резонансными свойствами — полоса пропускания их очень узка — поэтому выходные резонаторы, входящие в конструкцию клистронов, взаимодействуют лишь с одной из гармонических составляющих сгруппированного тока, а именно, первой, основной гармоникой. Пользуясь соотношениями из теории каскадной группировки электронов в пространстве дрейфа, можно выписать выражение для амплитуды первой гармоники сгруппированного тока в рамках исполь-

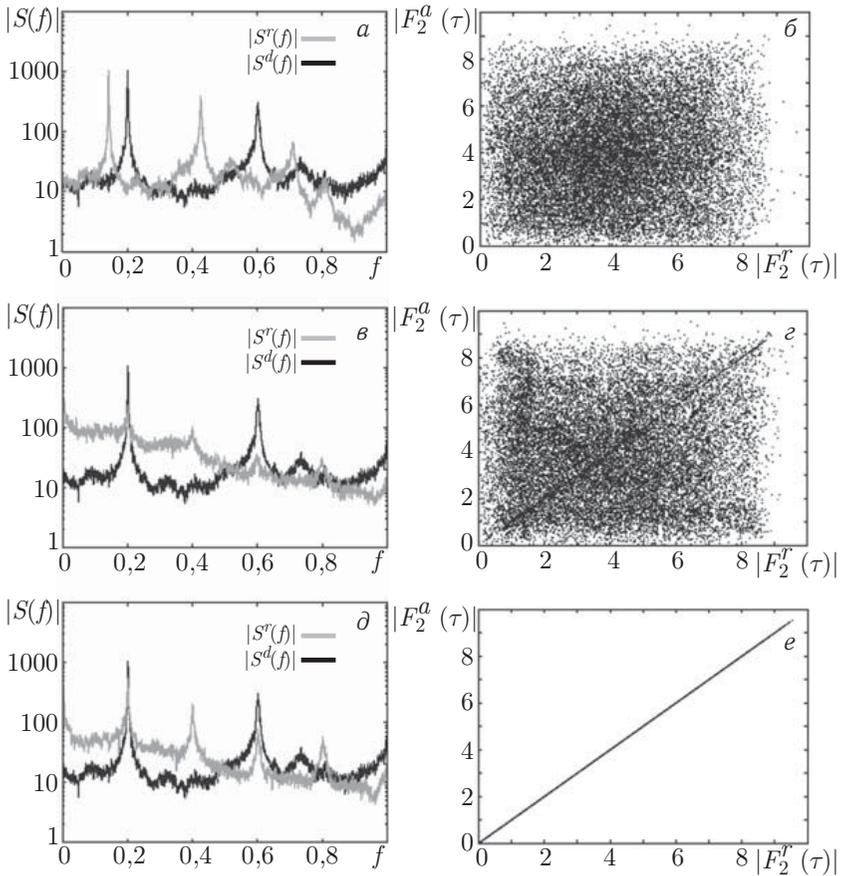


Рис. 9.8. Спектры, построенные по временным реализациям ведущего  $F_2^d(\tau)$  и ведомого  $F_2^r(\tau)$  автогенераторов, и вид плоскости  $(|F_2^r(\tau)|, |F_2^a(\tau)|)$  при различных значениях параметра связи: а, б)  $\varepsilon = 0,0$ ; в, г)  $\varepsilon = 0,89$ ; д, е)  $\varepsilon = 0,93$ .  
Из работы [30]

зубой модели [27]:

$$I_1 = 2iI_0J_1\left(\frac{|F_1(\tau)|}{2}\right) \exp[-i(\theta_0 - \arg(F_1(\tau)))], \quad (9.17)$$

где  $I_0$  — постоянный ток электронного пучка;  $\theta_0$  — невозмущенный угол пролета в пространстве дрейфа между первым и вторым резонаторами;  $\arg(F_1(\tau))$  — фаза колебаний в первом резонаторе.

На рис. 9.9 показана зависимость  $|I_1/I_0|$  от величины  $\varepsilon$ : квадратиками указаны полученные численно значения  $|I_1/I_0|$  при различных величинах параметра связи. Как видно из рисунка, при  $\varepsilon \approx 0,9$  наблюдается резкое изменение величины амплитуды первой гармоники. Исходя из представленных результатов, можно утверждать, что вносимое воздействие при параметре связи  $\varepsilon \approx 0,91$  со стороны ведущего автогенератора

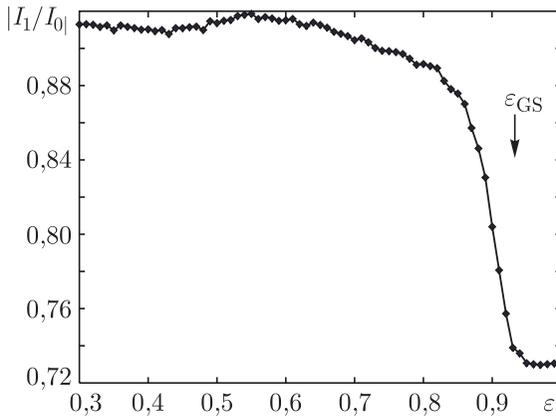


Рис. 9.9. Зависимость усредненной по времени величины первой гармоники сгруппированного тока  $|I_1/I_0|$  в ведомом клистронном автогенераторе от величины параметра связи  $\varepsilon$ . Стрелкой указано значение параметра связи  $\varepsilon = \varepsilon_{GS}$ , при котором возникает режим обобщенной хаотической синхронизации. Из работы [30]

ра фактически приводит к срыву генерации собственных хаотических колебаний в ведомом автогенераторе, так как при данном уровне величины нормированной амплитуды первой гармоники сгруппированного тока ( $|I_1/I_0| \approx 0,72-0,73$ ), как показали проведенные эксперименты, он может генерировать лишь одночастотный сигнал. Хаотическая же генерация наблюдается при значениях  $|I_1/I_0| \approx 0,87-0,9$ . Таким образом, механизм установления режима обобщенной синхронизации следующий. При подаче хаотического сигнала с ведущего автогенератора на ведомый между данными системами сначала устанавливается режим частотной синхронизации, о чем свидетельствуют рис. 9.8, в, г. Если бы автогенераторы работали в режиме генерации периодического сигнала, то наблюдалось бы и явление обобщенной синхронизации, то есть совпадение колебаний амплитуд выходного сигнала в ведомом и вспомогательном автогенераторах. Однако собственная неподдавленная хаотическая динамика ведомого автогенератора и, следовательно, вспомогательного, не позволяет установить однозначное соотношение между амплитудами выходных сигналов с ведущего и ведомого автогенераторов [16, 18]. Как только собственная хаотическая динамика в ведомом и, соответственно во вспомогательном, автогенераторе подавлена (рис. 9.9), наблюдается режим обобщенной синхронизации (рис. 9.8, д, е).

Таким образом, в данной главе приведены результаты экспериментального и теоретического исследования явления обобщенной хаотической синхронизации в системе однонаправлено связанных многорезонаторных пролетных клистронных генераторов с запаздывающей обратной связью. Предложена новая методика диагностики явления обоб-

щенной синхронизации, основанная на анализе спектрального состава сигнала ведомой системы (клистронного генератора). Данная методика применена как на экспериментально полученных данных, так и на данных, полученных в ходе численного моделирования. Проведенные исследования показали хорошее качественное совпадение экспериментально и численно полученных результатов. Важно также отметить, что предложенный способ диагностики возникновения режима обобщенной хаотической синхронизации, основанный на рассмотрении изменений спектра мощности ведомой системы при изменении параметра связи, может быть использован и для других систем, в том числе низкочастотного диапазона.

#### **9.4. Скрытая передача информации на основе явления обобщенной синхронизации**

Перейдем теперь к описанию того, как явление обобщенной хаотической синхронизации [1] может быть использовано для скрытой передачи информации.

В настоящее время в литературе уже предложено достаточно большое число способов скрытой передачи данных на основе хаотической синхронизации [33–47]. Большая часть из них основана на явлении полной хаотической синхронизации [12, 48] и синхронного отклика. Это, в первую очередь, хаотическая маскировка [34], переключение хаотических режимов [49], нелинейное подмешивание информационного сигнала к хаотическому [50], модулирование управляющих параметров передающего генератора полезным цифровым сигналом [51] и др. Существуют также попытки использования других типов синхронного поведения, например, обобщенной [46] и фазовой [52] хаотической синхронизации, для скрытой передачи информации. Иногда для повышения конфиденциальности передачи информации используют несколько типов синхронного поведения одновременно, например, обобщенную и полную хаотическую синхронизацию (см., например, [46, 53]).

Каждый из вышеперечисленных способов, несмотря на совершенно разные принципы и специфику работы, в той или иной степени характеризуется рядом общих недостатков и трудностей при технической реализации:

- во-первых, принципиальным требованием известных способов передачи данных является необходимость обеспечения высокой степени идентичности генераторов хаоса, используемых в передающем и принимающем устройствах, реализация чего представляется весьма серьезной технической проблемой, особенно в течение длительного времени эксплуатации устройств;

- во-вторых, на качество передачи информации с помощью вышеуказанных схем сильное влияние оказывают искажения и шумы различных типов в канале связи. Если интенсивность шума и искажений передаваемого сигнала превышает некоторый порог (который сравним

с естественными шумами и искажениями), то система передачи данных на основе полной хаотической синхронизации оказывается неработоспособной;

- в-третьих, в ряде случаев параметры передающего устройства, генерирующего несущий хаотический сигнал, могут быть реконструированы по временной реализации [54] передаваемого сигнала. Поскольку передающее и принимающее устройства должны быть идентичными, в этом случае третья сторона может (реконструировав параметры исходной системы) дешифровать скрытое сообщение.

Очевидно, одним из серьезных недостатков известных методов является требование идентичности генераторов передающего и принимающего устройств. В то же время, особенности явления обобщенной синхронизации позволяют легко избавиться от этого требования (см. раздел 9.1). Поскольку этот режим может наблюдаться как для осцилляторов одного типа с различающимися параметрами, так и для колебательных систем разного типа (в том числе и с разной размерностью фазового пространства), то в этом случае генераторы передающего и принимающего устройств могут быть разными.

Схема для скрытой передачи информации, основанная на явлении обобщенной хаотической синхронизации, показана на рис. 9.10 (см. также [55, 56]). Способ скрытой передачи информации, основанный на явлении обобщенной синхронизации, заключается в следующем. Полезный сигнал кодируется в виде бинарного кода. Один или несколько управляющих параметров генератора хаотических автоколебаний 2 модулируются полезным двоичным сигналом 1. Это значит, что в зависимости от передаваемого в течение заданного интервала времени двоичного бита («0» или «1») управляющие параметры генератора хаоса 2 изменяются каким-либо образом, например, незначительным изменением положения основной частоты в спектре хаотического сигнала передающего генератора. Сформированный таким образом сигнал

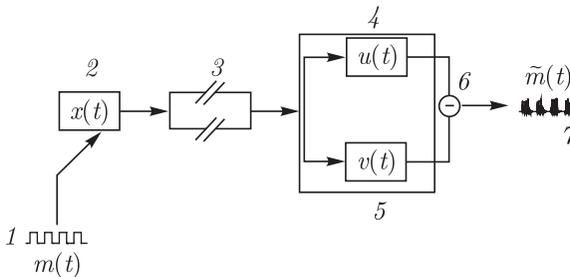


Рис. 9.10. Схема скрытой передачи информации при помощи обобщенной хаотической синхронизации. Цифрами на рисунке обозначены: 1 — полезный цифровой сигнал; 2 — передающий генератор хаоса; 3 — канал связи; 4 — принимающий генератор хаоса; 5 — третий генератор, идентичный принимающему генератору 4 по управляющим параметрам; 6 — вычитающее устройство; 7 — дешифрованный информационный сигнал

поступает в канал связи *З* и с определенной мощностью передается по каналу связи принимающей стороне. На принимающем конце канала связи находится приемник. Принцип работы приемника основан на детектировании обобщенной хаотической синхронизации с помощью метода вспомогательной системы [4]. Для этого на принимающей стороне сигнал, снятый с канала связи, подают на два идентичных генератора хаотических автоколебаний *4* и *5*, способных находиться с передающим генератором в режиме обобщенной хаотической синхронизации. Сигналы, снимаемые с выходов генераторов принимающей стороны, подаются на вычитающее устройство *б*.

Модуляцию управляющих параметров передающего генератора необходимо выбирать таким образом, чтобы в зависимости от передаваемого двоичного бита «0»/«1» между передающим и принимающими генераторами существовал или отсутствовал режим обобщенной хаотической синхронизации. Допустим, управляющие параметры передатчика выбираются таким образом, что при передаче двоичного бита «0» между передающим и принимающими генераторами реализуется режим обобщенной синхронизации. Тогда, в силу наличия функциональной зависимости между состояниями хаотических осцилляторов, колебания, генерируемые двумя идентичными генераторами на принимающей стороне канала связи, будут идентичными и после прохождения вычитающего устройства будет наблюдаться отсутствие каких-либо колебаний, то есть двоичный «0». Напротив, при передаче двоичного бита «1» между передающим и принимающими генераторами отсутствует режим обобщенной синхронизации, и колебания ведомых генераторов на принимающей стороне будут различными. После прохождения вычитающего устройства будут наблюдаться хаотические колебания с ненулевой амплитудой, то есть двоичный бит «1».

Таким образом, такая схема позволяет преодолеть трудности, возникающие при практической реализации известных ранее способов скрытой передачи информации, в частности, избавиться от требования идентичности хаотических генераторов передающего и принимающего устройств. Вместо этого, на принимающей стороне канала связи появляется дополнительный генератор хаоса *5*, идентичный принимающему *4* по управляющим параметрам. Следует, однако, отметить, что наличие идентичных генераторов на одной стороне канала связи позволяет легко осуществить их юстировку, что является принципиальным преимуществом.

Другим принципиальным достоинством предложенного способа скрытой передачи информации является значительная устойчивость к шумам и флуктуациям, которые могут возникать в каналах связи реальных устройств. Как уже отмечалось выше, схемы, основанные на использовании других типов синхронного поведения (в частности, полной и фазовой синхронизации, а также на «ином» использовании режима обобщенной синхронизации), характеризуются низкой устойчивостью к шумам. В предложенной схеме сигналы, поступающие

на «идентичные» генераторы хаоса принимающего устройства, всегда будут одинаковыми, даже при добавлении шума в канал связи (см. рис.9.10). Влияние шума на обобщенную синхронизацию подробно исследовалось в работе [57] и было показано, что для ряда систем роль шума при обобщенной синхронизации является конструктивной. Более того, известно, что режимы обобщенной синхронизации и синхронизации, индуцированной шумом<sup>1)</sup>, обусловлены одним и тем же механизмом и, по сути дела, могут быть рассмотрены как один тип синхронного поведения [59, 60]. Это говорит о возможности совместного использования режимов обобщенной синхронизации и синхронизации, индуцированной шумом, для скрытой передачи информации.

Учет этого факта приводит к логичному шагу на пути совершенствования предложенного способа скрытой передачи информации. Дело в том, что несмотря на его принципиальные достоинства над известными ранее методами (устойчивость к шумам, простота технической реализации), его конфиденциальность оказывается недостаточно высокой: сигнал, передаваемый по каналу связи, несет на себе следы модуляции управляющего параметра, что, теоретически, может позволить третьей стороне в некоторых случаях декодировать информационное сообщение. Понятно, что улучшить конфиденциальность предлагаемого способа скрытой передачи информации можно путем простой модификации, совершенствования уже предложенного.

Принципиальная схема для реализации «усовершенствованного» способа скрытой передачи информации приведена на рис.9.11. Ее единственным отличием от предыдущей схемы (рис.9.10) является наличие дополнительного генератора шума 3 и сумматора 4 (показаны на рисунке серым прямоугольником). Таким образом, перед передачей по каналу связи детерминированный сигнал, генерируемый передающим генератором хаоса 2, содержащий полезную информацию, примешивается в сумматоре к стохастическому сигналу, производимому генератором шума 3. Мощность шумового сигнала может существенно превосходить мощность детерминированного. Следовательно, по каналу связи будет передаваться сигнал, по своим характеристикам не отличающийся от стохастического, что гарантирует высокую степень конфиденциальности передачи информации и делает ее дешифрацию третьей стороной невозможной. В то же самое время, сигнал, восстановленный в принимающем устройстве, качественно не отличается от аналогичного сигнала в отсутствие генератора шума. Такой эффект достигается за счет совместного использования режимов обобщенной

---

<sup>1)</sup> Под индуцированной шумом синхронизацией понимается следующее: случайный сигнал  $\xi(t)$ , действующий на два независимых, но идентичных хаотических генератора, приводит к тому, что они полностью синхронизируются (т.е. после завершения переходного процесса начинают демонстрировать идентичные колебания [58]).

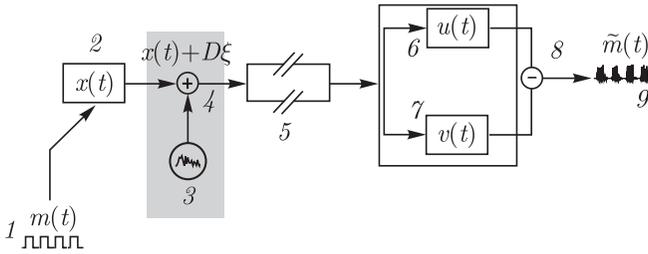


Рис. 9.11. Схема скрытой передачи информации на основе режимов обобщенной синхронизации и синхронизации, индуцированной шумом. Дополнительные элементы по сравнению со схемой (рис. 9.10), т. е. генератор шума и сумматор, показаны на рисунке серым прямоугольником. Цифрами на рисунке обозначены: 1 — полезный цифровой сигнал; 2 — передающий генератор хаоса; 3 — генератор шума; 4 — сумматор; 5 — канал связи; 6 — принимающий генератор хаоса; 7 — третий генератор, идентичный принимающему генератору 6 по управляющим параметрам; 8 — вычитающее устройство; 9 — дешифрованный информационный сигнал

синхронизации и синхронизации, индуцированной шумом, для скрытой передачи данных.

Таким образом, «усовершенствованный» способ скрытой передачи информации позволяет избавиться от всех недостатков, характерных для известных ранее схем. Во-первых, он не требует наличия идентичных генераторов на различных сторонах канала связи, что говорит о достаточно простой возможности его технической реализации. Во-вторых, он обладает значительной устойчивостью к шумам и флуктуациям в канале связи. Можно сказать, что в данном случае шум играет конструктивную роль, в то время как для всех известных в настоящее время способов скрытой передачи данных роль шума является деструктивной. В-третьих, возможность использования дополнительного генератора шума на передающей стороне канала связи гарантирует высокую степень конфиденциальности передачи информации. По сути дела, по каналу связи передается стохастический сигнал, что не дает никакой возможности третьей стороне дешифровать информационное сообщение.

## Заклучение

Итак, в настоящей главе рассмотрено явление обобщенной хаотической синхронизации, способы ее диагностики и проявления в системах сверхвысокочастотной электроники. Приведены результаты по численному исследованию обобщенной хаотической синхронизации в однопольно связанных гидродинамических моделях диода Пирса. Описаны результаты экспериментального исследования обобщенной хаотической синхронизации в системе двух связанных клистронных автогенераторов хаоса. В заключительной части главы обсуждена возмож-

ность использования явления обобщенной синхронизации для скрытой передачи информации.

### Список литературы

1. *Rulkov N.F., Sushchik M.M., Tsimring L.S., Abarbanel H.D.I.* Generalized synchronization of chaos in directionally coupled chaotic systems // *Phys. Rev. E.* 1995. V. 51, № 2. P. 980–994.
2. *Pyragas K.* Weak strong synchronization of chaos // *Phys. Rev. E.* 1996. V. 54, № 5. P. R4508–R4511.
3. *Kocarev Lj., Parlitz U.* Generalized synchronization, predictability, equivalence of unidirectionally coupled dynamical systems // *Phys. Rev. Lett.* 1996. V. 76, № 11. P. 1816–1819.
4. *Abarbanel H.D.I., Rulkov N.F., Sushchik M.M.* Generalized synchronization of chaos: The auxiliary system approach // *Phys. Rev. E.* 1996. V. 53, № 5. P. 4528–4535.
5. *Parlitz U., Junge L., Lauterborn W.* Experimental observation of phase synchronization // *Phys. Rev. E.* 1996. V. 54, № 2. P. 2115–2117.
6. *Zheng Z., Hu G.* Generalized synchronization versus phase synchronization // *Phys. Rev. E.* 2000. V. 62, № 6. P. 7882–7885.
7. *Guan S., Lai C.-H., Wei G.W.* Bistable chaos without symmetry in generalized synchronization // *Phys. Rev. E.* 2005. V. 71, № 3. P. 036209.
8. *Hramov A.E., Koronovskii A.A., Popov P.V.* Generalized synchronization in coupled Ginzburg–Landau equations and mechanisms of its arising // *Phys. Rev. E.* 2005. V. 72, № 3. P. 037201.
9. *Короновский А.А., Москаленко О.И., Филатов Р.А., Храмов А.Е.* Исследование обобщенной синхронизации хаотических систем // *Изв. РАН. Сер. физ.* 2005. Т. 69, № 12. С. 1741–1745.
10. *Pecora L.M., Carroll T.L., Heagy J.F.* Statistics for mathematical properties of maps between time series embeddings // *Phys. Rev. E.* 1995. V. 52, № 4. P. 3420–3439.
11. *Hramov A.E., Koronovskii A.A.* Intermittent generalized synchronization in unidirectionally coupled chaotic oscillators // *Europhys. Lett.* 2005. V. 70, № 2. P. 169–175.
12. *Pecora L.M., Carroll T.L.* Driving systems with chaotic signals // *Phys. Rev. A.* 1991. V. 44, № 4. P. 2374–2383.
13. *Pyragas K.* Conditional Lyapunov exponents from time series // *Phys. Rev. E.* 1997. V. 56, № 5. P. 5183–5188.
14. *Осипов Г.В.* Беседа на международном симпозиуме «Topical Problems of Nonlinear Wave Physics (NWP-2005)», *Nonlinear Dynamics: Theory Applications*, Санкт-Петербург — Нижний Новгород, 2–9 августа 2005 г. 2005.
15. *Шабунин А.В., Николаев С.М., Астахов В.В.* Двухпараметрический бифуркационный анализ формирования и разрушения режимов частичной синхронизации хаоса в ансамбле из трех осцилляторов с дискретным временем // *Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика.* 2005. Т. 13, № 5–6. С. 40–55.

16. Короновский А. А., Москаленко О. И., Храмов А. Е. О механизмах, приводящих к установлению режима обобщенной синхронизации // ЖТФ. 2006. Т. 76, № 2. С. 1–9.
17. Короновский А. А., Москаленко О. И., Храмов А. Е. Об установлении режима обобщенной синхронизации в хаотических осцилляторах // Письма в ЖТФ. 2006. Т. 32, № 3. С. 40–48.
18. Hramov A. E., Koronovskii A. A. Generalized synchronization: a modified system approach // Phys. Rev. E. 2005. V. 71, № 6. P. 067201.
19. Filatov R. A., Hramov A. E., Koronovskii A. A. Chaotic synchronization in coupled spatially extended beam-plasma systems // Phys. Lett. A. 2006. V. 358. P. 301–308.
20. Храмов А. Е., Ремпен И. С. Влияние обратной связи на сложную динамику в гидродинамической модели диода Пирса // Радиотехника и электроника. 2002. Т. 47, № 6. С. 732–738.
21. Hramov A. E., Rempen I. S. Investigation of the complex dynamics regime control in Pierce diode with the delay feedback // Intern. J. Electronics. 2004. V. 91, № 1. P. 1–12.
22. Дмитриев Б. С., Жарков Ю. Д., Короновский А. А., Попов П. В., Скороходов В. Н., Храмов А. Е. Исследование синхронизации автоколебаний в лампе обратной волны (теория и эксперимент) // ЖТФ. 2007. Т. 77, № 9. С. 108–114.
23. Rulkov N. F. Images of synchronized chaos: experiments with circuits // Chaos. 1996. V. 6. P. 262–279.
24. Dmitriev B. S., Hramov A. E., Koronovskii A. A., Starodubov A. V., Trubitskov D. I., Zharkov Y. D. First Experimental Observation of Generalized Synchronization Phenomena in Microwave Oscillators // Phys. Rev. Lett. 2009. V. 102, № 7. P. 074101.
25. Hramov A. E., Koronovskii A. A., Kurovskaya M. K., Moskalenko O. I. Synchronization of spectral components and its regularities in chaotic dynamical systems // Phys. Rev. E. 2005. V. 71, № 5. P. 056204.
26. Shabunin A., Astakhov V., Kurths J. Quantitative analysis of chaotic synchronization by means of coherence // Phys. Rev. E. 2005. V. 72, № 1. P. 016218.
27. Shigaev A. M., Dmitriev B. S., Zharkov Yu. D., Ryskin N. M. Chaotic dynamics of delayed feedback klystron oscillator and its control by external signal // IEEE Transactions on Electron Devices. 2005. V. 52, № 5. P. 790–797.
28. Дмитриев Б. С., Жарков Ю. Д., Кижяева К. К., Клокотов Д. В., Рыскин Н. М., Шигаев А. М. Сложная динамика многорезонаторных клистронных автогенераторов с запаздывающей обратной связью // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2002. Т. 10, № 5. С. 37–46.
29. Рыскин Н. М., Шигаев А. М. Сложная динамика двухрезонаторного клистрона-генератора с запаздывающей обратной связью // ЖТФ. 2006. Т. 10, № 1. С. 72–81.
30. Dmitriev B. S., Hramov A. E., Koronovskii A. A., Starodubov A. V., Trubitskov D. I., Zharkov Y. D. First Experimental Observation of Generalized Synchronization Phenomena in Microwave Oscillators // Phys. Rev. Lett. 2009. V. 102, № 7. P. 074101.

31. *Шевчик В.Н.* Основы электроники сверхвысоких частот. — М.: Сов. радио, 1959.
32. *Вайнштейн Л.А., Солнцев В.А.* Лекции по сверхвысокочастотной электронике. — М.: Сов. радио, 1973.
33. *Parlitz U., Chua L.O., Kocarev Lj., Halle K.S., Shang A.* Transmission of digital signal by chaotic synchronization // Intern. J. Bifurcation Chaos. 1992. V. 2, № 4. P. 973–977.
34. *Cuomo M.K., Oppenheim A.V., Strogatz S.H.* Synchronization of Lorenz-based chaotic circuits with application to communications // IEEE Trans. Circuits Syst. 1993. V. 40, № 10. P. 626.
35. *Kocarev Lj., Parlitz U.* General approach for chaotic synchronization with application to communication // Phys. Rev. Lett. 1995. V. 74, № 25. P. 5028–5031.
36. *Peng J.H., Ding E.J., Ding M., Yang W.* Synchronizing hyperchaos with a scalar transmitted signal // Phys. Rev. Lett. 1996. V. 76, № 6. P. 904–907.
37. *Eguia M.C., Rabinovich M.I., Abarbanel H.D.I.* Information transmission recovery in neural communications channels // Phys. Rev. E. 2000. V. 62, № 5. P. 7111–7122.
38. *Fischer I., Liu Y., Davis P.* Synchronization of chaotic semiconductor laser dynamics on subnanosecond time scales and its potential for chaotic communication // Phys. Rev. A. 2000. V. 62. P. 011801(R).
39. *Rulkov N.F., Vorontsov M.A., Illing L.* Chaotic free-space laser communication over a turbulent channel // Phys. Rev. Lett. 2002. V. 89, № 27. P. 277905.
40. *Yuan Z.L., Shields A.J.* Comment on secure communication using mesoscopic coherent states // Phys. Rev. Lett. 2005. V. 94. P. 048901.
41. *Li Q.S., Liu Y.* Enhancement sustainment of internal stochastic resonance in unidirectional coupled neural system // Phys. Rev. E. 2006. V. 73. P. 016218.
42. *Fradkov A.L., Andrievsky B., Evans R.J.* Chaotic observer-based synchronization under information constraints // Phys. Rev. E. 2006. V. 73. P. 066209.
43. *Murali K., Lakshmanan M.* Transmission of signals by synchronization in a chaotic van der Pol–Duffing oscillator // Phys. Rev. E. 1994. V. 48, № 3. P. R1624–R1626.
44. *Boccaletti S., Farini A., Arcelli F.T.* Adaptive synchronization of chaos for secure communication // Phys. Rev. E. 1997. V. 55, № 5. P. 4979–4981.
45. *Carroll T.L., Johnson G.A.* Synchronizing broadband chaotic systems to narrow-band signals // Phys. Rev. E. 1998. V. 57, № 2. P. 1555–1558.
46. *Terry J.R., VanWiggeren G.D.* Chaotic communication using generalized synchronization // Chaos, Solitons Fractals. 2001. V. 12. P. 145–152.
47. *Lucamarini M., Mancini S.* Secure deterministic communication without entanglement // Phys. Rev. Lett. 2005. V. 94. P. 140501.
48. *Pecora L.M., Carroll T.L.* Synchronization in chaotic systems // Phys. Rev. Lett. 1990. V. 64, № 8. P. 821–824.
49. *Dieudonné H., Kennedy M.P., Hasler M.* Chaos shift keying: modulation demodulation of a chaotic carrier using self-synchronizing Chua's circuits // IEEE Trans. on Circ. Sys. I. 1993. V. 40. P. 634–642.

50. *Dmitriev A. S., Panas A. I., Starkov S. O.* Experiments on speech music signals transmission using chaos // Intern. J. Bifurcations Chaos. 1995. V. 5, № 4. P. 1249–1254.
51. *Yang T., Chua L. O.* Secure communication via chaotic parameter modulation // IEEE Trans. on Circ. Sys. I. 1996. V. 43. P. 817–819.
52. *Chen J. Y., Wong K. W., Cheng L. M., Shuai J. W.* A secure communication scheme based on the phase synchronization of chaotic systems // Chaos. 2003. V. 13, № 2. P. 508–514.
53. *Murali K., Lakshmanan M.* Secure communication using a compound signal from generalized synchronizable chaotic systems // Phys. Lett. A. 1998. V. 241. P. 303–310.
54. *Ponomarenko V. I., Prokhorov M. D.* Extracting information masked by the chaotic signal of a time-delay system // Phys. Rev. E. 2002. V. 66, № 2. P. 026215.
55. *Короновский А. А., Москаленко О. И., Попов П. В., Храмов А. Е.* Устройство для секретной передачи информации: Патент на полезную модель № 57538 // Изобретения. Полезные модели: Официальный бюллетень Федеральной службы по интеллектуальной собственности, патентам и товарным знакам. — М.: ФИПС, 2006. 10.10.2006. № 28.
56. *Короновский А. А., Москаленко О. И., Попов П. В., Храмов А. Е.* Способ секретной передачи информации: Патент на изобретение № 2295835 // Изобретения. Полезные модели: Официальный бюллетень Федеральной службы по интеллектуальной собственности, патентам и товарным знакам. — М.: ФИПС, 2007.
57. *Guan S., Lai Y.-C., Lai C.-H.* Effect of noise on generalized chaotic synchronization // Phys. Rev. E. 2006. V. 73. P. 046210.
58. *Fahy S., Hamann D. R.* Transition from chaotic to nonchaotic behavior in randomly driven systems // Phys. Rev. Lett. 1992. V. 69, № 5. P. 761–764.
59. *Hramov A. E., Koronovskii A. A., Moskalenko O. I.* Are generalized synchronization noise-induced synchronization identical types of synchronous behavior of chaotic oscillators? // Phys. Lett. A. 2006. V. 354, № 5–6. P. 423–427.
60. *Короновский А. А., Москаленко О. И., Трубецков Д. И., Храмов А. Е.* Обобщенная синхронизация и синхронизация, индуцированная шумом, единый тип поведения связанных хаотических систем // Доклады РАН. 2006. Т. 407, № 6. С. 761–765.

## Глава 10

# НЕЛИНЕЙНЫЕ ЭФФЕКТЫ ПРИ ТУННЕЛИРОВАНИИ, В ВОЛНОВОДАХ И ПРИ РАСПРОСТРАНЕНИИ ВОЛНОВЫХ ПУЧКОВ

И. А. Молотков, А. Б. Маненков

Лучше сконцентрировать внимание на нетривиальных вопросах, относящихся к избранным областям, чем провести поверхностный обзор приложений, выбранных из всевозможных разделов физики.

*Уизем Дж.*, член Королевского Общества.

*Нелинейные туннельные эффекты. Характеристики мод в волноводах с нелинейными диэлектриками. Принцип Ферма для нелинейной среды.*

При изучении нелинейных волновых процессов особый интерес представляют те случаи, когда учет нелинейности ведет не только к некоторому уточнению описания явлений, но и к принципиальному изменению волновой динамики. Среди таких случаев в этой главе анализируем следующие два: 1) нелинейные туннельные эффекты и 2) нелинейные вариационные принципы типа принципа Ферма. Такой анализ позволяет исследовать нетривиальные явления, возникающие в волноводах и при распространении волновых пучков.

### 10.1. Нелинейные туннельные эффекты

**10.1.1. Введение.** Эффекты туннелирования, хорошо известные по линейным задачам распространения волн, квантовой механики и оптики (см., например, [1, 2]), недостаточно изучены в случаях, когда потенциальный барьер конечной высоты представляет собой нелинейную среду. Нелинейная среда при этом может быть описана в рамках различных моделей. По-видимому, самой простой и актуальной из них является классическая модель Клейна–Фока–Гордона (КФГ) [3–5]. Со-

гласно Уизему уравнение КФГ является замечательным примером волновой модели, сочетающей признаки как гиперболического (т. е. с существованием вещественных волновых фронтов), так и дисперсионного (т. е. с нетривиальным дисперсионным соотношением) движения.

Несмотря на свою простоту, модель КФГ описывает широкий круг важных физических явлений, таких как распространение волн в нелинейных средах с дисперсией в области низких частот (например, в плазме и ферритах, [6]) и в средах с неустойчивостями (лазерные усилители). Особенно широко применялось уравнение КФГ для анализа переходов Джозефсона между двумя сверхпроводниками [3]. Обсуждаемая модель позволяет также установить принципиально новые физические эффекты, возникающие при нелинейном туннелировании.

Изучение различных нелинейных сред связано также с задачами распространения мощного микроволнового или оптического излучения в новых композиционных материалах, изготовленных на основе имплантации наночастиц (или микрочастиц) [7–10], а также в фотонных кристаллах [11]. Размер наночастиц и расстояние между ними могут быть существенно меньше длины волны излучения  $\lambda$  (даже в оптическом диапазоне), и в этом случае свойства подобных сред с периодическим расположением частиц могут быть описаны в рамках модели непрерывной среды, которая имеет некоторые усредненные электрические параметры (проницаемости), как в стандартной электродинамике сплошных сред [12]. Следует учесть, что наночастицы могут иметь весьма сложную структуру, при этом, несмотря на их малые по сравнению с  $\lambda$  размеры, в них могут возникать различные резонансные явления, которые изменяют свойства композиционных материалов. Например, в средах с металлическими наночастицами возможны плазмонные резонансы, что приводит к изменению проницаемости материала и он становится нелинейным.

Далее обращаемся к модели КФГ, анализу которой будет уделено основное внимание в данной главе. Это означает, что изучаемое волновое решение  $u(x, t)$  предполагается удовлетворяющим нелинейному уравнению КФГ

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} + V(x) \Phi'(u) = 0. \quad (10.1)$$

В этом уравнении  $c$  — скорость распространения, множитель  $V(x)$  описывает форму потенциального барьера, а учитывающий нелинейность среды потенциал  $\Phi(u)$  имеет вид

$$\Phi(u) = \frac{1}{2}u^2 + \sigma u^4. \quad (10.2)$$

При  $\sigma = 0$  уравнение (10.1) становится линейным, случай  $\sigma = -1/24$  соответствует разложению по малой амплитуде уравнения  $\sin$ -Гордона. Нелинейному туннелированию в рамках модели КФГ посвящены работы [13, 14]. Работа [13] связана с анализом эффектов в случае, когда производная от потенциала  $\Phi(u)$  близка к  $\sin(u)$ . Используемые нами

далее способы исследования основаны на малоамплитудном приближении и отличны от способов, использованных в [13]. В работе [14] также речь идет о возмущении уравнения  $\sin$ -Гордона, применяются численные методы решения. Отметим еще, что малость коэффициента  $\sigma$  в формуле (10.2) далее не предполагается.

Изучаемую задачу можно рассматривать не только в терминах потенциала, но и в терминах показателя преломления. Роль барьера при  $0 < x < l$  в этом случае играет менее плотная (по сравнению со средами при  $x < 0$  и  $x > l$ ) среда, в которой показатель преломления меньше, чем в соседних средах. При этом должна реализовываться ситуация полного внутреннего отражения. Для обычных электродинамических или акустических сред это означает рассмотрение, по крайней мере, пространственно-двумерных задач. В разделе 10.1 изучаем преимущественно пространственно-одномерные задачи, переходя к двумерному случаю лишь в конце раздела.

Изложение начнем с формулировки некоторых упрощающих задачу предположений и анализа волнового процесса в наиболее сложной области — внутри барьера. Затем анализируем прохождение сквозь барьер в целом, особому исследованию подвергаем случай низкого барьера. После этого разберем конкретное приложение — задачу о вытекающих модах в волноводе с нелинейными стенками.

**10.1.2. Интегрирование уравнения КФГ.** Нелинейное уравнение (10.1) при потенциале (10.2) является достаточно трудным для аналитического исследования. В связи с этим сделаем следующие упрощающие предположения: 1) положим

$$V(x) = V_0 = \text{const} \quad (10.3)$$

внутри барьера  $0 < x < l$ ; 2) полагаем, что резонансные явления внутри барьера отсутствуют; 3) будем предполагать амплитуду падающей на барьер волны малой; 4) перейдем к стационарной задаче, выделяя зависимость от времени  $t$  в виде множителя  $\exp(-i\omega t)$ , где  $\omega$  — заданная частота.

Предположение 1) о постоянстве высоты барьера существенно упрощает анализ и в ряде случаев позволяет находить точные решения. Предположение 2) исключает существование внутрибарьерных собственных функций. Предположение 3) позволяет в последующем анализе использовать анзац Стокса [3, 15]. Наконец, преобразование 4) ведет к определенному упрощению исходного уравнения (10.1).

В соответствии со сказанным подставляем решение

$$u = U(x) \exp(-i\omega t) + \text{к. с.} \quad (10.4)$$

в уравнение (10.1), в котором  $\Phi(u)$  и  $V(x)$  имеют вид (10.2) и (10.3). Далее считаем, что в рассматриваемой среде высшие гармоники подавляются; такая ситуация возникает, если амплитуда падающей волны

уменьшается с течением времени (т. е. частота  $\omega$  имеет малую отрицательную мнимую часть), а поглощение в среде растет с ростом частоты. Получаем уравнение

$$c^2 U_{xx} - (V_0 - \omega^2)U - 4\sigma V_0(3|U|^2 U + U^3 \exp(-2i\omega t)) + \text{к. с.} = 0.$$

В условиях стационарной задачи множитель  $\exp(-2i\omega t)$  в соответствии со сказанным выше пренебрежимо мал. В итоге приходим к основному для дальнейшего уравнению

$$U_{xx} = \kappa^2 U + 12\sigma V|U|^2 U. \quad (10.5)$$

Здесь обозначено:  $V = V_0/c^2$  и

$$\kappa^2 = V - \frac{\omega^2}{c^2}. \quad (10.6)$$

Случай  $V \leq k_0^2 = \omega^2/c^2$  или  $\omega^2 \geq V_0$  соответствует надбарьерному распространению [1] и не рассматривается нами. Уравнение (10.5) представляет собой нелинейное стационарное уравнение Шредингера. Равенство (10.6) определяет дисперсионное соотношение, характерное для модели КФГ.

Параметр  $\sigma$  в уравнении (10.5) может быть как положительным, так и отрицательным. В то же время рассматриваемый барьер может быть и достаточно низким, что соответствует случаю, когда величина  $\kappa^2$  в (10.5) и (10.6), хотя и положительна, но мала. Сочетание отрицательного  $\sigma$  и низкого барьера даже при сделанном предположении о малости амплитуды может привести к изменению знака выражения

$$\kappa^2 - 12V|U|^2. \quad (10.7)$$

Случай отрицательной разности (10.7) исследуется отдельно в п. 10.1.4. Сейчас же будем предполагать эту разность положительной.

Решая уравнение (10.5), используем упомянутый выше анзац Стокса в видоизмененной форме. В этом пункте мы не рассматриваем взаимодействие волны внутри барьера с границами  $x = 0$  и  $x = l$ , ширину барьера  $l$  здесь и далее предполагаем конечной. Ищем решение в виде

$$U = \exp(i\psi)[a \exp(-\kappa x) + \rho_1 a^3 \exp(-3\kappa x) + \rho_2 a^5 \exp(-5\kappa x) + \dots], \quad (10.8)$$

где  $a$  — малый положительный параметр, имеющий смысл амплитуды волны;  $\rho_1$  и  $\rho_2$  — неизвестные коэффициенты. Фаза  $\psi$  не зависит от  $x$ , но может зависеть от амплитуды. Множитель  $\exp(i\psi)$  при подстановке в (10.5) остается неопределенным, он будет найден в следующем пункте. Главное слагаемое скобки в (10.8) учитывает обычное для линейной задачи экспоненциальное затухание при углублении в барьер.

Положительность этого слагаемого позволяет далее снять в уравнении (10.5) знак модуля.

Подстановка разложения (10.8) в уравнение (10.5) и обычное приравнивание коэффициентов при различных степенях  $a$  дает решение

$$U = a \exp(i\psi - \kappa x) \left[ 1 + \frac{3\sigma V}{2\kappa^2} a^2 \exp(-2\kappa x) + \left( \frac{3\sigma V}{2\kappa^2} a^2 \right)^2 \exp(-4\kappa x) + \dots \right] \quad (10.9)$$

внутри барьерной области. Формула (10.9) демонстрирует возбуждение поправочных слагаемых с кратными показателями. Нетрудно проверить, что и дальнейшие члены разложения (10.9) образуют геометрическую прогрессию. Поэтому

$$U = a \exp(i\psi - \kappa x) \left[ 1 - \frac{3\sigma V}{2\kappa^2} a^2 \exp(-2\kappa x) \right]^{-1}. \quad (10.10)$$

Из формулы (10.10) вытекает очевидное условие применимости используемого малоамплитудного приближения

$$a < \sqrt{\frac{2\kappa^2}{3|\sigma|V}}. \quad (10.11)$$

Нетрудно проверить, что при условии (10.11) формула (10.10) дает точное решение уравнения (10.5). Таким образом, в данном случае малоамплитудный подход явился подсказкой для построения точного решения.

### 10.1.3. Сшивание решений. Волна, прошедшая сквозь барьер.

Решение (10.9) или (10.10) для барьерной области должно быть сшито при  $x = 0$  и  $x = l$  с волнами вне барьера. В виду стандартности процедуры сшивания опишем ее один раз, в дальнейшем будем приводить лишь результаты соответствующих вычислений.

Начнем со сшивания при  $x = 0$ . В правой части (10.9) ограничимся двумя слагаемыми. Из области  $x < 0$  к барьеру подходит падающая волна

$$U_0 = A_0 \exp[i(k_0 x + \phi_0)] \quad (10.12)$$

и возникает отраженная волна

$$\tilde{U}_0 = \tilde{A}_0 \exp[-i(k_0 x + \tilde{\phi}_0)].$$

Сумма этих двух волн должна непрерывно вместе с первой производной по  $x$  переходить в решение (10.9). Получаем систему уравнений

$$\begin{aligned} A_0 \exp(i\phi_0) + \tilde{A}_0 \exp(-i\tilde{\phi}_0) &= \exp(i\psi)(a + \mu a^3), \\ ik_0(A_0 \exp(i\phi_0) - \tilde{A}_0 \exp(-i\tilde{\phi}_0)) &= -\kappa \exp(i\psi)(a + 3\mu a^3), \end{aligned} \quad (10.13)$$

где  $\mu = 3\sigma V/(2\kappa^2)$ . Исключаем из уравнений (10.13) отраженную волну:

$$2k_0 A_0 \exp(i\phi_0) = \exp(i\psi) [(k_0 + i\kappa)a + (k_0 + 3i\kappa)a^3]. \quad (10.14)$$

В уравнении (10.14) характеристики  $A_0$ ,  $k_0$ ,  $\phi_0$  падающей волны считаем заданными, а параметры  $a$  и  $\psi$  — искомыми. Из этого уравнения в старшем порядке получаем:

$$a = \frac{2k_0}{\sqrt{k_0^2 + \kappa^2}} A_0 + O(A_0^3), \quad \psi = \psi_0 + O(A_0^2), \quad \psi_0 = \phi_0 - \operatorname{arctg}(\kappa/k_0).$$

Учет члена с  $a^3$  в (10.14) позволяет найти более точные формулы

$$a = \frac{2k_0}{\sqrt{k_0^2 + \kappa^2}} A_0 + pA_0^3, \quad \psi = \psi_0 + qA_0^2, \quad (10.15)$$

в которых

$$p = -\frac{8k_0^3\mu(k_0^2 + 3\kappa^2)}{(k_0^2 + \kappa^2)^{5/2}}, \quad q = -\frac{8\kappa k_0^3\mu}{(k_0^2 + \kappa^2)^2}.$$

Равенство (10.15), подставленное в (10.9), дает окончательное выражение для поля внутри барьера:

$$U = \exp(i\psi_0 - \kappa x) \left\{ \frac{2k_0}{\sqrt{k_0^2 + \kappa^2}} A_0 + \mu A_0^3 \left[ \left( p + iq \frac{2k_0}{\sqrt{k_0^2 + \kappa^2}} \right) + \frac{8k_0^3}{(k_0^2 + \kappa^2)^{3/2}} \exp(-2\kappa x) \right] + O(A_0^5) \right\}. \quad (10.16)$$

Что касается параметров  $\tilde{A}_0$  и  $\tilde{\phi}_0$  отраженной волны, то они определяются из системы уравнений (10.13) и оказываются следующими:

$$\begin{aligned} \tilde{A} &= A_0 + \frac{16\kappa k_0^3}{(k_0^2 + \kappa^2)^{5/2}} (k_0 \sin \phi_0 - \kappa \cos \phi_0) \mu A_0^3, \\ \tilde{\phi} &= -\phi_0 + 2 \operatorname{arctg} \frac{\kappa}{k_0} + \frac{16\kappa k_0^3}{(k_0^2 + \kappa^2)^{5/2}} (k_0 \cos \phi_0 + \kappa \sin \phi_0) \mu A_0^2. \end{aligned} \quad (10.17)$$

Таким образом, амплитуда отраженной при  $x = 0$  волны практически совпадает с амплитудой падающей. Амплитуда же волны, проникающей в барьер, может быть как больше, так и меньше амплитуды падающей волны.

Переходим к сшиванию волновых полей при  $x = l$ . Со стороны барьера на эту границу падает волна

$$U = \exp(i\psi) [a \exp(-\kappa x) + \mu a^3 \exp(-3\kappa x)],$$

а назад в барьер уходит отраженная волна

$$\tilde{U} = \exp(i\tilde{\psi}) \{ \tilde{a} \exp[\kappa(x-l)] + \mu\tilde{a}^3 \exp[3\kappa(x-l)] \}.$$

Сумма этих двух волн должна переходить в волну

$$U_1 = A_1 \exp[ik_1(x-l) + i\phi_1], \quad (10.18)$$

уходящую в область  $x > l$ , где  $k_1$  — волновое число, соответствующее среде  $x > l$ . Снова получаем систему двух уравнений и исключаем из этой системы главную часть волны, ушедшей назад в барьер:

$$2\kappa a \exp(i\psi) [\exp(-L) + 2\mu a^2 \exp(-3L)] - 2\mu\kappa\tilde{a}^3 \exp(i\tilde{\psi}) = (\kappa - ik_1)A_1 \exp(i\phi_1), \quad (10.19)$$

где  $L = \kappa l$ . Поскольку в уравнение (10.19) входят также параметры  $\tilde{a}$ ,  $\tilde{\psi}$  волны  $\tilde{U}$ , то из исходной системы уравнений сшивания при  $x = l$  необходимо извлечь второе следствие — результат исключения главной части волны  $U$ . Это следствие имеет вид

$$-2\mu\kappa a^3 \exp(-3L) + 2\kappa \exp(i\tilde{\psi}) \tilde{a}(1 + 2\mu\tilde{a}^2) = (\kappa + ik_1)A_1 \exp(i\phi_1).$$

Отсюда следует, что

$$\tilde{a} = \frac{\sqrt{\kappa^2 + k_1^2}}{2\kappa} A_1 + O(A_1^3), \quad \tilde{\psi} = \phi_1 + \arctg \frac{k_1}{\kappa} + O(A_1^2). \quad (10.20)$$

Использование последних формул позволяет превратить уравнение (10.19) в непосредственную связь  $A$ ,  $\phi_1$  и  $a$ ,  $\psi$ . В результате преобразований находим, что

$$A_1 = \frac{2\kappa a}{\sqrt{\kappa^2 + k_1^2}} \exp(-L) \left[ 1 + \frac{\mu(\kappa^2 + 3k_1^2)}{2(\kappa^2 + k_1^2)} a^2 \exp(-2L) \right], \quad (10.21)$$

$$\phi_1 = \psi + \arctg \frac{k_1}{\kappa} - \frac{2\kappa\mu k_1}{\kappa^2 + k_1^2} a^2 \exp(-2L). \quad (10.22)$$

После вывода формул (10.21) и (10.22) можно выразить амплитуду  $A_1$  прошедшей барьер волны через исходную амплитуду  $A_0$ :

$$A_1 = \frac{4k_0\kappa A_0}{\sqrt{k_0^2 + \kappa^2} \sqrt{\kappa^2 + k_1^2}} \exp(-L) - \frac{16\mu k_0^3 \kappa (k_0^2 + 3\kappa^2) A_0^3}{(k_0^2 + \kappa^2)^{5/2} \sqrt{\kappa^2 + k_1^2}} \exp(-L) + \frac{8\mu k_0^3 \kappa (\kappa^2 + 3k_1^2)}{(k_0^2 + \kappa^2)^{3/2} (\kappa^2 + k_1^2)^{3/2}} A_0^3 \exp(-3L). \quad (10.23)$$

Если  $k_1 = k_0 = k$ , что имеет место при совпадении окружающих барьер сред, то формула (10.23) упрощается:

$$A_1 = \frac{4\kappa k}{k^2 + \kappa^2} A_0 \exp(-L) - \frac{16\mu\kappa k^3(k^2 + 3\kappa^2)}{(k^2 + \kappa^2)^3} A_0^3 \exp(-L) + \frac{8\mu\kappa k^3(\kappa^2 + 3k^2)}{(k^2 + \kappa^2)^3} A_0^3 \exp(-3L). \quad (10.24)$$

**10.1.4. Низкий барьер.** Перейдем к еще не рассмотренному случаю, когда коэффициент  $\sigma$  отрицателен и отрицательна разность (10.7). В этом случае, если амплитуда поля не слишком мала, уравнение (10.5) внутри барьера может иметь не монотонно убывающие, а осциллирующие решения. Эти осциллирующие решения, очевидно, могут отражаться от границ барьера, что существенно усложняет волновую картину. Мы здесь будем изучать лишь некоторый типичный вариант появления осциллирующих решений внутри барьера и не будем рассматривать случаи, когда разность (10.7) проходит через нуль.

Начнем с построения осциллирующего решения уравнения (10.5), еще не взаимодействовавшего с границами барьера. Такое решение ищем в виде

$$U = a \exp(i\psi + iKx), \quad (10.25)$$

где  $a$ ,  $\psi$  и  $K$  подлежат определению. В результате подстановки в уравнение (10.5) получаем

$$K^2 = \chi a^2 V - \kappa^2, \quad \chi = 12|\sigma|. \quad (10.26)$$

При условии (10.26) формула (10.25) дает точное решение уравнения (10.5). Далее считаем, что

$$K^2 > 0. \quad (10.27)$$

Решение (10.25), (10.26) описывает волну, бегущую внутри барьера без затухания, и не учитывает взаимодействие волны с границами. Амплитуда  $a$  и фаза  $\psi$  в (10.25), (10.26) неизвестны и должны определяться из условий сшивания при  $x = 0$ .

Равенство  $K = 0$  определяет границу выполнения условия (10.27) и устанавливает связь между квадратом амплитуды  $a^2$  и относительной высотой барьера  $V/k_0^2$ . Забегая вперед и используя соотношение (10.30), можно говорить о граничном равенстве  $K = 0$  как о связи между заданными исходными величинами  $A_0^2$  и  $V/k_0^2$ :

$$A_0^2 = \frac{1}{4\chi} \left( 1 - \frac{1}{(V/k_0^2)} \right). \quad (10.28)$$

На рис. 10.1 изображена упомянутая граница существования двух режимов при двух значениях параметра  $\chi$ . Кривая 1 построена для  $\chi = 1$ , а кривая 2 — для  $\chi = 2$ . Выше этих кривых режим осцилляций, а ниже — режим затухания.

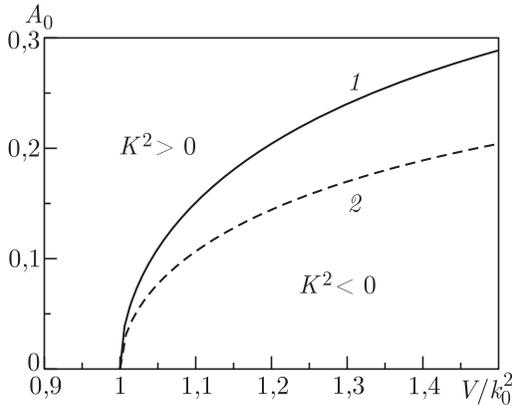


Рис. 10.1. Границы различных режимов поведения волн внутри барьера. Кривые 1 и 2 соответствуют значениям  $\sigma = -1/12$  и  $\sigma = -1/6$

Переходим к учету отражений от границ  $x = 0$  и  $x = l$ . В результате двух отражений (по одному от каждой из этих границ) волна (10.25) приобретает дополнительный множитель

$$Q \exp(2iKl), \quad \text{где} \quad Q = \frac{k_0 - K k_1 - K}{k_0 + K k_1 + K} < 1. \quad (10.29)$$

Если бы число подобных отражений было неограниченно, то волна (10.25), вместо (10.29), приобрела бы дополнительный множитель  $[1 - Q \exp(2iKl)]^{-1}$ .

Отражения от границ ведут к уменьшению амплитуды волны (10.25). К такому уменьшению приводит уже первое отражение от границы  $x = l$ . Затем, при отражении от границы  $x = 0$  амплитуда  $a$  заменяется на амплитуду  $aQ < a$ . Для новой амплитуды условие (10.27) может оказаться уже не выполненным, и осциллирующая внутри барьера волна превратится в волну затухающую. Конечно, такое преобразование в затухающую волну может произойти как после первого, так и после любого из последующих отражений.

Для определенности ограничимся случаем качественного преобразования барьерной волны после первого отражения от границы  $x = 0$ . Таким образом, считаем, что осциллирующая волна прошла путь  $2l$  внутри барьера (туда и обратно) и превратилась в волну затухающую. Тогда расчет взаимодействий на границах дает следующие приближенные формулы:

$$a = 2A_0 \left[ 1 - \frac{4K}{k_0} \sin^2(Kl) \right], \quad \psi = \phi_0, \quad A_1 = \frac{2K}{k_1} a, \quad \phi_1 = \psi + Kl. \quad (10.30)$$

Невыписанные в (10.30) поправки имеют порядок  $A_0^2$  или  $K/k_1$  по сравнению с единицей. В этих формулах также предполагается, что

барьер не является очень тонким, так что затухающая волна успевает существенно затухнуть на его ширине.

В итоге внутри барьера в старшем порядке имеем волну

$$U^+ = a \exp(iKx + i\psi),$$

бегущую направо, и волну

$$U^- = - \left[ 1 - \frac{2K}{k_1} \right] a \exp[-iK(x - 2l) + i\psi],$$

бегущую налево. Оба эти выражения с рассматриваемой точностью представляют собой решения уравнения (10.5). Нетрудно проверить, что с такой же степенью точности уравнению (10.5) удовлетворяет и сумма  $U^+ + U^-$ .

Наконец, для поля за барьером ( $x > l$ ) получаем:

$$U_1 = A_1 \exp[ik_1(x - l) + i\phi_1]. \quad (10.31)$$

Амплитуда  $A_1$  и фаза  $\phi_1$  выражаются через  $a$  и  $A_0$  формулами (10.30). Таким образом, при выполнении условия (10.27) нелинейный барьер оказывается прозрачным. Второе важное отличие в формулах (10.31) и (10.23) для области за барьером в том, что в случае низкого барьера появляется зависимость (10.26) барьерного волнового числа от амплитуды падающей волны.

**10.1.5. Численный анализ.** Дополним асимптотическое исследование задачи численным анализом. В этом случае не обязательно предполагать амплитуду  $A_0$  падающей на барьер волны весьма малой величиной. По-прежнему рассматриваем барьер постоянной высоты  $V_0$  (хотя переменный профиль  $V(x)$  барьера может исследоваться аналогично), на который слева набегают волна (10.12).

Для численного решения уравнения (10.5), не связанного с малоамплитудным приближением, целесообразно использовать вариант метода пристрелки (стрельбы) [16, 17]. Более простой представляется ситуация вблизи границы  $x = l$ , поскольку в окрестности  $x = 0$  приходится иметь дело как с падающей, так и с отраженной волной. Поэтому введем вспомогательный параметр  $B$ , представляющий собой некоторое возможное значение амплитуды  $U(x)$  при  $x = l$ . В силу непрерывности при  $x = l$  поля  $U(x)$  вместе с первой производной по  $x$  и условия излучения при  $x > l$  имеем

$$U(l) = B \exp(i\phi_1), \quad U'(l) = ik_1 B \exp(i\phi_1). \quad (10.32)$$

Уравнение (10.5) и условия (10.32) определяют задачу Коши, которую будем интегрировать в обратном направлении, т.е. от точки  $x = l$

к точке  $x = 0$ . При выбранном значении  $B$  находим численно  $U(0)$ ,  $U'(0)$  и, следовательно, падающую волну

$$A_0 \exp(i\phi_0) = \frac{1}{2} \left[ U(0) + \frac{U'(0)}{ik_0} \right].$$

В результате устанавливаем связь

$$A_0 = F(B) \tag{10.33}$$

между амплитудами прошедшей барьер и падающей на него волн в некотором интервале значений параметра  $B$ .

Далее в уравнении (10.33) считаем амплитуду  $A_0$  заданной и находим численно соответствующее ей значение параметра  $B = A_1$ . Описанная схема позволяет найти все физические характеристики задачи, включая поле внутри барьера и комплексный коэффициент прохождения

$$T = \left( \frac{A_1}{A_0} \right) \exp(\phi_1 - \phi_0).$$

При больших значениях параметра  $l$  рассматриваемая задача для уравнения (10.5) близка к классу так называемых жестких задач [17, 18]. Многие стандартные алгоритмы (например, основанные на формулах Рунге–Кутты) неприменимы к таким задачам из-за возникновения неустойчивости при их решении и из-за сильного влияния ошибок округления. Для интегрирования уравнения (10.5) использовался модифицированный метод Гира [19]. Описанный выше подход, основанный на интегрировании уравнения (10.5) в обратном направлении, при котором в режиме туннелирования поле растет, также увеличивает устойчивость вычислений. Отметим также, что при  $\kappa l > 10$  для повышения устойчивости расчетов можно преобразовать уравнение (10.5), применяя замену переменных, которая часто используется в методе ВКБ.

**10.1.6. Результаты расчетов.** Рассмотрим конкретные итоги вычислений. Прежде всего, сравним результаты расчетов численным методом и методом, описанным в пунктах 10.1.3 и 10.1.4. Для простоты везде далее считаем, что среды слева и справа от барьера одинаковы, т. е. волновые числа в них равны  $k_1 = k_0$ .

Начинаем со случаев затухания внутри барьера. На рис. 10.2 представлен результат расчета модуля коэффициента прохождения  $T$  волны сквозь барьер при  $k_0 l = 10$  и  $V/k_0^2 = 1,21$ . Сплошные кривые 1 и 3 построены численно при значениях коэффициента нелинейности  $\sigma = 1/12$  и  $\sigma = -1/12$  соответственно. Пунктирные кривые 2 и 4 рассчитаны по формуле (10.23) при тех же значениях  $\sigma$ . Видно, что результаты этих двух способов расчета при  $A_0 < 0,15$  совпадают с графической точностью.

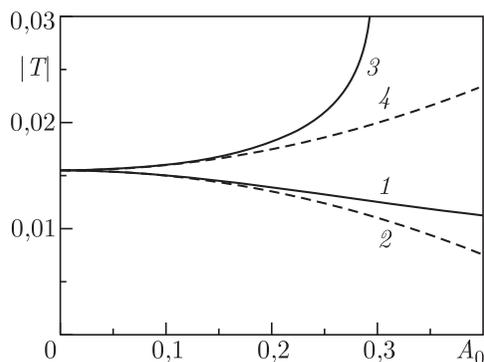


Рис. 10.2. Зависимость модуля коэффициента прохождения волны от ее амплитуды для барьера с параметрами  $k_0 l = 10$  и  $V/k_0^2 = 1,21$ . Кривые 1, 2 и 3, 4 соответствуют значениям  $\sigma = 1/12$  и  $\sigma = -1/12$

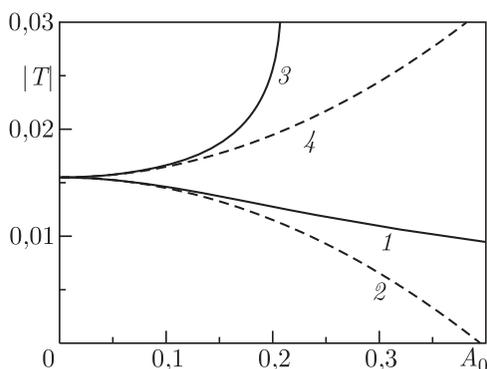


Рис. 10.3. Зависимость модуля коэффициента прохождения волны от ее амплитуды для барьера с параметрами  $k_0 l = 10$  и  $V/k_0^2 = 1,21$ . Кривые 1, 2 и 3, 4 соответствуют значениям  $\sigma = 1/6$  и  $\sigma = -1/6$

Рис. 10.3 показывает, как изменяются графики  $T(A_0)$  при увеличении по сравнению с рис. 10.2 коэффициента нелинейности  $\sigma$ . Кривые 1 и 2 здесь относятся к случаю  $\sigma = 1/6$ , а кривые 3 и 4 — к случаю  $\sigma = -1/6$  соответственно. Остальные параметры задачи те же, что и на рис. 10.2. Соответствие кривых и методик расчета здесь то же, что и на предыдущем рисунке. Рис. 10.3 показывает, что при увеличении  $|\sigma|$  влияние нелинейного члена в уравнении (10.5) на зависимость  $T(A_0)$  выражено сильнее. Заметим также, что при более сильной нелинейности слегка сужается интервал амплитуд  $A_0$ , в котором результаты расчетов двумя методами совпадают.

На рис. 10.4 приведено распределение амплитуды  $|U(x)|$  при нескольких значениях коэффициента  $\sigma$ . Параметры задачи здесь следующие:  $k_0 l = 10$ ,  $V/k_0^2 = 1,21$  и  $A_0 = 0,2$ . Сплошные кривые 1 и 2 рассчитаны численно при значениях  $\sigma = 1/6$  и  $\sigma = -1/6$  соответственно. На

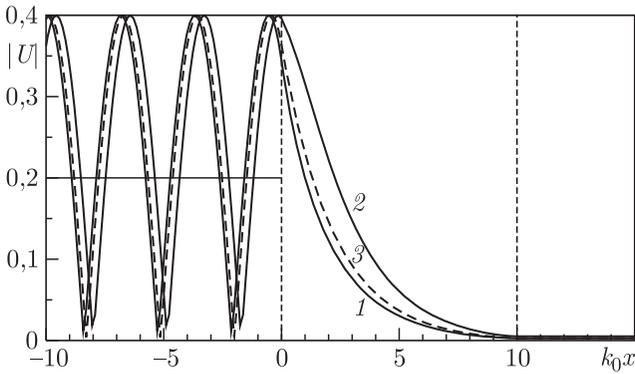


Рис. 10.4. Модуль волнового поля для барьера с параметрами  $k_0l = 10$  и  $V/k_0^2 = 1,21$ . Кривые 1, 2 и 3 соответствуют значениям  $\sigma = 1/6, -1/6$  и  $0$

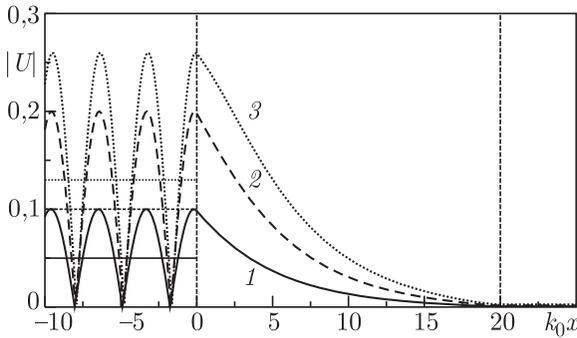


Рис. 10.5. Модуль волнового поля для барьера с параметрами  $k_0l = 20$  и  $V/k_0^2 = 1,04$ . Кривые 1, 2 и 3 соответствуют амплитудам  $A_0 = 0,05, -0,1$  и  $0,13$  (затухающий режим внутри барьера)

этом же рисунке для сравнения пунктиром приведено распределение модуля поля в линейной задаче, т.е. при  $\sigma = 0$ . Чтобы яснее показать различие между нелинейными и линейными задачами, параметр  $\sigma$  выбран достаточно большим по модулю. На рисунке горизонтальные линии представляют модули поля падающей и прошедшей волн, а вертикальные штриховые линии определяют границы барьера.

Опишем теперь результаты расчета для случая низкого барьера. Везде далее считаем, что  $k_0l = 20$ ,  $V/k_0^2 = 1,04$  и  $\sigma = -1/12$ . По сравнению с предыдущими случаями длина барьера увеличена, чтобы детальнее показать поведение решений. Все кривые на рис. 10.5 и 10.6 рассчитаны численно. На рис. 10.5 приведены графики  $|U(x)|$  для случаев, когда амплитуды падающих на барьер волн равны  $A_0 = 0,05, 0,1$  и  $0,13$  (кривые 1, 2 и 3 соответственно). Как и на рис. 10.4, горизонтальными линиями показаны распределения падающих волн, а вертикальными — границы барьера. При всех значениях  $A_0$  мы

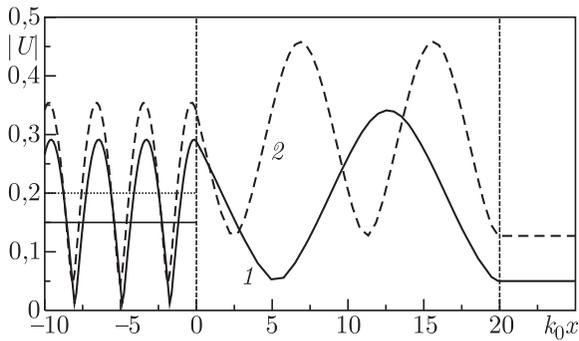


Рис. 10.6. Модуль волнового поля для барьера с параметрами  $k_0 l = 20$  и  $V/k_0^2 = 1,04$ . Кривые 1 и 2 соответствуют амплитудам  $A_0 = 0,15$  и  $0,2$  (осциллирующий режим внутри барьера)

находимся ниже граничной кривой, показанной на рис. 10.1, т. е. в зоне затухания волны внутри барьера, когда  $K^2 < 0$ .

Наконец, рис. 10.6 иллюстрирует случай, когда амплитуда падающей волны такова, что мы находимся выше граничной кривой на рис. 10.1 и имеем дело с осцилляциями поля внутри барьера, когда  $K^2 > 0$ . Для этого рисунка амплитуды увеличены до значений  $A_0 = 0,15$  и  $0,2$  (кривые 1 и 2 соответственно). При таких значениях  $A_0$  волна проходит сквозь барьер с достаточно большой амплитудой  $A_1$  на выходе из барьера, т. е. происходит просветление нелинейного барьера.

**10.1.7. Волновод с нелинейной стенкой.** Применим описанные методы и результаты к исследованию волн в открытых многослойных диэлектрических волноводах. Слоистые структуры исследовались в литературе уже достаточно давно, причем как с линейными, так и с нелинейными диэлектриками [20–22]. В указанных работах в основном рассматривались поверхностные (направляемые) моды. Мы же будем исследовать случай, когда моды являются вытекающими. Далее рассматриваем двумерную систему, изображенную на рис. 10.7. Волновод представляет собой пятислойную структуру: центральный диэлектрический волноведущий слой, окруженный сверху и снизу двумя нелинейными диэлектрическими слоями. Толщину центрального слоя обозначим через  $2d$ , а его постоянную проницаемость — через  $\epsilon_0$ . Будем рассматривать частный случай, когда проницаемость окружающей среды также равна  $\epsilon_0$  (рис. 10.7). Толщины покрывающих слоев обозначим через  $d_1$ .

Рассматриваем ТЕ-случай, когда электрическое поле имеет только одну компоненту  $E_x$ . Предполагаем, что проницаемость промежуточных слоев нелинейна и описывается выражением

$$\epsilon = \epsilon_1 + \alpha |E_x|^2, \quad (10.34)$$

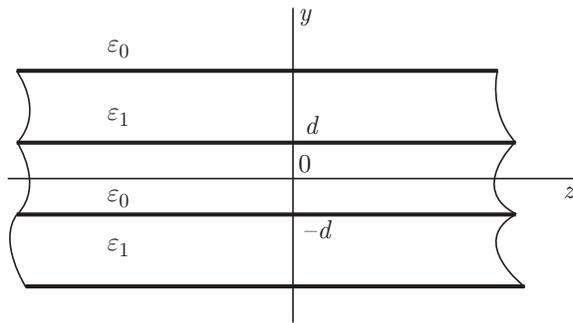


Рис. 10.7. Геометрия планарного волновода

в котором постоянная  $\varepsilon_1$  — линейная часть, а постоянный коэффициент  $\alpha$  может быть как положительным, так и отрицательным. Электрическое поле мод, бегущих вдоль волновода, можно приближенно представить в виде

$$E_x = \Phi(y) \exp [i(\beta z - \omega t)], \quad (10.35)$$

где  $\beta$  — постоянная распространения;  $\omega$  — частота и  $t$  — время. Функция  $\Phi(y)$  удовлетворяет уравнению

$$\Phi'' + \{k^2\varepsilon(y, |\Phi|^2) - \beta^2\}\Phi = 0, \quad (10.36)$$

в котором проницаемость  $\varepsilon(y, |\Phi|^2)$ , различная для различных слоев, описана выше. При выводе (10.36), как и при выводе (10.5), предполагали, что высшие временные гармоники подавляются. Такое приближение оправдано в случае, когда затухание волн на таких гармониках велико, что наблюдается, в частности, в оптическом диапазоне.

В дальнейшем будем рассматривать случай, когда

$$\varepsilon_1 < \varepsilon_0. \quad (10.37)$$

Парциальные лучи мод, распространяющиеся в такой системе, в линейном случае (при  $\alpha = 0$ ) испытывают полное внутреннее отражение на границах  $y = \pm d$ . При конечной толщине  $d_1$  эти парциальные лучи туннелируют через нелинейные слои (см. 10.1.4) и мода является вытекающей, т.е. имеет радиационные потери. Для определенности рассматриваем лишь верхнюю половину картины, изображенной на рис. 10.7, полагая, что  $y > 0$ .

Пусть толщина  $d_1$  нелинейного слоя достаточно велика, так что поле на внешней границе  $y = d + d_1$  волновода мало. Это означает, что рассматриваются моды слабо вытекающие. Для дальнейшего существенно, что величина  $\text{Im} \beta$  положительна и мала (см. далее (10.45)), поэтому множитель  $\exp(i\beta z)$  медленно убывает по модулю с ростом  $z$ . Положительность  $\text{Im} \beta$  и связанное с этим слабое убывание нелинейной части показателя преломления (10.34) приводит к тому, что формула (10.35) не учитывает полностью зависимость поля от

координаты  $z$ , особенно при больших  $z$ . Далее рассматриваем ту часть волновода, в которой

$$0 \leq z \ll Z, \quad Z = O\left(\frac{1}{\operatorname{Im} \beta}, \frac{1}{\alpha |A|^2 k}\right). \quad (10.38)$$

Здесь  $A$  — амплитуда поля на оси, а  $k = \omega/c$  — волновое число в пустоте. Громоздкий анализ, который мы опускаем, показывает, что в области (10.38) используемое уравнение (10.36) дает достаточно точное описание физических процессов. Заметим, что при значениях  $z \gg Z$  волновые поля моды во всех слоях экспоненциально малы.

С учетом результатов, полученных в разделе 10.1.2 для основной моды  $TE_0$ , функцию  $\Phi(y)$  можно представить в виде:

$$\Phi = \begin{cases} A \cos(\kappa y), & \text{при } |y| < d; \\ B_1 \exp[-p(|y| - d)] + B_3 \exp[-3p(|y| - d)] + \\ \quad + B_{-1} \exp[p(|y| - d - d_1)], & \text{при } d < |y| < d + d_1; \\ C \exp[i\kappa(|y| - d - d_1)], & \text{при } |y| > d + d_1, \end{cases} \quad (10.39)$$

при этом волновые числа связаны соотношениями

$$\beta^2 = k^2 \varepsilon_1 + p^2 = k^2 \varepsilon_2 - \kappa^2. \quad (10.40)$$

При выводе этих формул учтена симметрия волновода и четность моды  $TE_0$ . В силу неравенства (10.37) и предположения о слабо вытекающем характере мод, величины  $\kappa$ ,  $p$  и  $\beta$  имеют малые мнимые части.

При выводе формулы (10.39) для нелинейного слоя, как и в предыдущих пунктах, использован метод малоамплитудного приближения, в предположении, что осевая амплитуда  $A$  в волноведущем слое мала. Вследствие этого малы и прочие амплитуды в (10.39). Не ограничивая общность анализа, амплитуду  $A$  можно считать вещественной и положительной ( $A > 0$ ). Отметим также (см. раздел 10.1.2), что, как следует из уравнения (10.36), коэффициент

$$B_3 = -\alpha \frac{k^2}{8p^2} B_1^3.$$

Далее выписываем граничные условия при  $y = d$  и  $y = d + d_1$ . Поскольку коэффициент  $B_3$  уже выражен через  $B_1$ , то получающаяся система 4-х уравнений для 4-х коэффициентов в (10.39) дает дисперсионное соотношение (ДС):

$$\begin{aligned} p \cos(\kappa d) - \kappa \sin(\kappa d) &= \\ &= \alpha A^2 \frac{k^2}{4p} \cos^3(\kappa d) + 2p \frac{p + i\kappa}{p - i\kappa} \cos(\kappa d) \exp(-2pd_1). \end{aligned} \quad (10.41)$$

Уравнения (10.36), их решения (10.39), а также ДС содержат два малых параметра: множитель типа  $\exp(-2pd_1)$  и нелинейный параметр  $\alpha$  (или  $\alpha A^2$ ), с которыми мы фактически уже встретились в связи с неравенством (10.38). Первый параметр связан с тем, что изучаемые волны являются слабо вытекающими. Второй параметр имеет другую природу — он связан с нелинейностью задачи. При построении приближенного решения ограничимся главными членами разложений по указанным выше малым параметрам. Отметим, что в левой части (10.41) собраны члены порядка единицы, а в правой части — поправочные члены.

Введем безразмерную частоту

$$\nu = kd\sqrt{\varepsilon_0 - \varepsilon_1}. \quad (10.42)$$

Для основной моды  $TE_0$  соотношению (10.41) можно придать вид неявной связи между  $\kappa$  и  $\nu$ :

$$\frac{\kappa d}{\cos \kappa d} = \nu + \frac{1}{\nu} \left[ \alpha A^2 \frac{(kd)^2 (\kappa d)^2}{4\nu^2} + 2(pd)^2 \frac{p + i\kappa}{p - i\kappa} \exp(-2pd_1) \right]. \quad (10.43)$$

Уравнение (10.43) удобно использовать для численного анализа ДС, решая его, например, итерациями. В нулевом приближении для волновода, ограниченного полубесконечными слоями из линейного диэлектрика (т. е. при  $\alpha = 0$  и  $d_1 = 0$ ), получаем хорошо известное ДС планарного волновода:

$$\kappa d = \nu \cos(\kappa d).$$

Амплитудные множители в (10.39) выражаются через осевую амплитуду  $A$  согласно формулам:

$$\begin{aligned} B_1 &= \left[ 1 + \frac{k^2}{8p^2} \alpha A^2 - \frac{p + i\kappa}{p - i\kappa} \exp(-2pd_1) \right] A \cos(\kappa d), \\ B_3 &= -\frac{k^2}{8p^2} \alpha [A \cos(\kappa d)]^3, \quad B_{-1} = \frac{(p + i\kappa)}{(p - i\kappa)} B_1 \exp(-pd_1), \\ C &= \frac{2p}{(p - i\kappa)} B_1 \exp(-pd_1). \end{aligned} \quad (10.44)$$

В этих формулах для расчета величины  $\cos(\kappa d)$  используется соотношение (10.43), а в правых частях выражений для  $B_{-1}$  и  $C$  следует выразить  $B_1$  через  $A$  (см. первую строку в (10.44)). Формулы (10.44) вместе с (10.39) полностью определяют волновые поля во всех слоях рассматриваемой системы.

Переходим к анализу динамики этих волновых полей. Фазовые параметры мод  $\operatorname{Re} \beta$  можно вычислить из соотношения  $\beta = \sqrt{k^2 \varepsilon_0 - \kappa^2}$ , используя выражение для  $\kappa$ , которое следует из ДС. Коэффициент затухания  $\operatorname{Im} \beta$  пропорционален  $\exp(-2pd_1)$  и для слабо вытекающих

мод, когда  $|p|d_1 \gg 1$ , он мал ( $\text{Im } \beta \ll k$ ). Для оценки  $\text{Im } \beta$  можно использовать соотношения, которые получаются из уравнения сохранения энергии. В результате вычислений, которые мы опускаем, получаем приближенно

$$\text{Im } \beta = \frac{|C|^2 \text{Re } \kappa}{I_w \text{Re } \beta}, \quad I_w = \int_{-d-d_1}^{d+d_1} |\Phi(y)|^2 dy, \quad (10.45)$$

где коэффициент  $C$  определяется из формул (10.44). Приведенное соотношение имеет простой физический смысл: величина  $\text{Im } \beta$  пропорциональна отношению потоков мощностей в поперечном и продольном направлениях. В линейной системе ( $\alpha = 0$ ) или при малой нелинейности парциальные лучи туннелируют через промежуточный слой, так что в этих случаях радиационные потери оказываются экспоненциально малыми. При сильной нелинейности при определенных значениях параметров (см. ниже) коэффициент затухания  $\text{Im } \beta$  может быть большим (сравнимым с волновым числом  $k$ ).

Заметим, что сдвиг фазовой постоянной  $\text{Re } \beta$  за счет нелинейности диэлектрика пропорционален  $|\alpha A^2|$  и для его расчета можно ограничиться главными членами разложений по указанным выше малым параметрам. В отличие от сдвига  $\text{Re } \beta$  сдвиг величины  $\text{Im } \beta$  за счет нелинейности существенно меньше, он пропорционален  $|\alpha A^2 \exp(-2pd_1)|$ , поэтому для вычисления этой величины из ДС необходимо добавить в формулы (10.39) и (10.41) следующие члены разложения по степеням малых параметров.

Изучим подробнее связь между задачей о туннелировании, исследованной в первых разделах главы, и волноводной задачей. Для простоты рассмотрим случай высоких частот (вдали от отсечки), когда  $\nu \gg 1$ . Как известно, вытекающая мода образована суперпозицией парциальных лучей, которые распространяются вдоль волновода, попеременно отражаются от промежуточных слоев и частично туннелируют сквозь них. Используя геометрооптические соображения, можно показать, что коэффициент затухания моды за счет вытекания равен

$$\text{Im } \beta = \frac{\text{Re } \kappa}{4 \text{Re } (\beta d)} [1 - |R|^2]. \quad (10.46)$$

Здесь через  $R$  обозначен коэффициент отражения парциальных лучей, падающих на границу  $y = d$  под углом скольжения  $\theta = \arctg(\text{Re } \kappa / \text{Re } \beta)$ . Вывод соотношения (10.46) проводится по той же схеме, что и для волноводов с линейными слоистыми стенками [20]. Величина  $(1 - |R|^2)$  для структуры без диэлектрических потерь равна коэффициенту прохождения  $|T|^2$  лучей через нелинейный слой. Коэффициент  $|T|^2$  может быть рассчитан так же, как в 10.1.6, обобщая приведенные там формулы на случай наклонного падения.

Учитывая уже рассмотренные зависимости  $|T|^2$  от  $\alpha$ , можно убедиться, что при больших по модулю отрицательных  $\alpha$  величина потока мощности в окружающую волновод среду резко уменьшается. Наоборот, при положительных  $\alpha$  поток значителен. Итак, при большой мощности, передаваемой по волноводу, и  $\alpha > 0$  нелинейная диэлектрическая стенка может стать почти прозрачной для падающих на нее лучей и в этом случае затухание моды будет велико, т.е. волновод не будет канализировать мощность вдоль оси. Подбирая параметры стенки, на основе такой системы можно изготовить, например, ограничители мощности. По-видимому, этот эффект может быть также использован для измерения характеристик нелинейных диэлектриков.

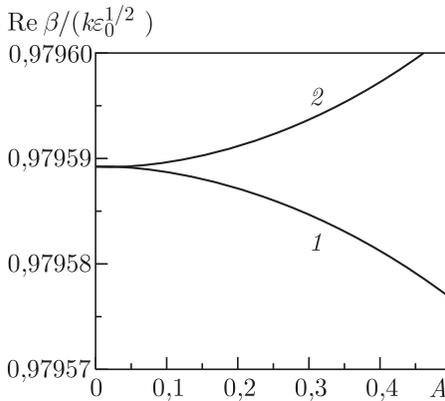


Рис. 10.8. Зависимость постоянной распространения вытекающей моды  $TE_0$  от амплитуды поля на оси планарного волновода. Кривые 1 и 2 соответствуют значениям  $\alpha = -0,1$  и  $\alpha = 0,1$

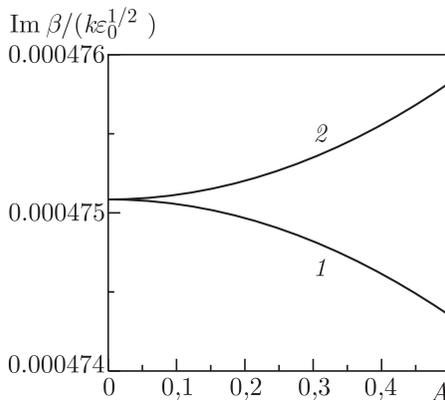


Рис. 10.9. Зависимость коэффициента затухания вытекающей моды  $TE_0$  от амплитуды поля на оси планарного волновода. Кривые 1 и 2 соответствуют значениям  $\alpha = -0,1$  и  $\alpha = 0,1$

Приведем результаты расчетов основных характеристик вытекающей моды  $TE_0$ . Расчет комплексных значений постоянной распространения  $\beta$  проводился с помощью численного интегрирования уравнения (10.36) по методике, сходной с методикой, описанной в разделе 10.1.5. На рис. 10.8 изображена зависимость безразмерного фазового параметра  $\text{Re } \beta / (k\sqrt{\varepsilon_0})$  от осевой амплитуды  $A$  электрического поля моды  $TE_0$ . Расчеты проводились для волновода с параметрами:  $kd = 1,5$ ,  $d_1/d = 1$ ,  $\varepsilon_0 = 12$  и  $\varepsilon_1 = 10$ . Кривая 1 построена для  $\alpha = -0,1$ , а кривая 2 — для  $\alpha = 0,1$ . На рис. 10.9 показаны зависимости относительных потерь  $\text{Im } \beta / (k\sqrt{\varepsilon_0})$  моды  $TE_0$  от амплитуды  $A$  на оси. Как и выше, кривая 1 построена для  $\alpha = -0,1$ , а кривая 2 — для  $\alpha = 0,1$ . При расчетах использовались те же параметры волновода, что и для рис. 10.8. Как следует из рис. 10.9, радиационные потери моды  $TE_0$  существенно зависят от передаваемой мощности.

## 10.2. Принцип Ферма для нелинейной среды

Актуальность вывода вариационного принципа Ферма для нелинейной среды связана с важностью задач о локализованных волновых процессах. Локализация или сосредоточенность волновых решений означает, что эти решения отличны от констант лишь в малых окрестностях некоторых подмногообразий — кривых или поверхностей, которые будем обозначать буквой  $l$ . Такие кривые (или поверхности)  $l$  в задачах о солитонных решениях имеют смысл осевых линий узких волновых пучков, в других (о решениях типа кинка) — смысл волновых фронтов. Особенность всех этих задач в том, что для них заранее не известны как сами волновые решения, так и подмногообразия  $l$ , в окрестности которых решения сосредоточены. Эту трудность удается эффективно преодолеть путем вывода для  $l$  траекторного вариационного принципа.

**10.2.1. Траекторные вариационные принципы.** Наряду с широко известными вариационными принципами Лагранжа, Гамильтона, Якоби и др., определяющими весьма общие законы движения и динамику физических полей, важное значение имеют также траекторные вариационные принципы, выделяющие реальные пути движения среди множества кинематически возможных. В связи с линейными задачами оптики и механики траекторные вариационные принципы формулировались еще в XVII и XVIII веках Ферма, Эйлером и Мопертюи. Вариационные принципы, о которых пойдет речь в этой главе, обобщают принцип Ферма на случай нелинейных сред. В отличие от классического принципа Ферма здесь получаем вариационные принципы, содержащие параметр, связанный с интенсивностью волнового поля. Другое важное отличие от линейного случая в том, что выводимые далее нелинейные вариационные принципы определяют траектории не лучей, а осевых линий узких волновых пучков. Наши построения показывают, что входящие в эти вариационные принципы функционалы могут быть

найлены без знания самого волнового решения. Таким образом, две задачи, указанные выше, удается полностью разделить.

Наконец, само построение вариационного принципа Ферма может быть осуществлено двумя путями: либо на основе подходящего анзатца, либо с помощью принципа Уизема. Оба пути ведут к полностью совпадающим результатам. Предварительным этапом построения траекторного вариационного принципа служит нахождение естественного уравнения для  $l$ , иначе говоря, явного выражения для кривизны (в трехмерном случае — кривизны и кручения) этой кривой.

Начнем с первого из названных путей. Конкретизируя задачу, будем моделировать распространение узких интенсивных волновых пучков с помощью нелинейного уравнения Гельмгольца, которое является классическим модельным уравнением нелинейной оптики и нелинейной теории волн в плазме [24–26]. Другая классическая модель [27, 28] описания аналогичных нелинейных волновых явлений связана с нелинейным уравнением Шредингера, но ведет к совершенно аналогичным асимптотическим решениям для волновых пучков. Используемый подход позволяет строить решения уравнения Гельмгольца (или Шредингера) при весьма общих типах нелинейности (см. [5, 15]). Для простоты изложения далее ограничимся задачами для кубически нелинейных сред.

Рассматриваем двумерное и трехмерное нелинейные уравнения Гельмгольца

$$\Delta u + \omega^2[a(x, y)|u|^2 + b(x, y)]u = 0, \quad \omega \gg 1, \quad (10.47)$$

$$\Delta u + \omega^2[a(x, y, z)|u|^2 + b(x, y, z)]u = 0, \quad \omega \gg 1, \quad (10.48)$$

в которых  $\Delta$  — дву- или трехмерные операторы Лапласа;  $\omega$  — безразмерная частота, а функции  $a(x, y)$  и  $a(x, y, z)$  строго положительны. Квадратные скобки в (10.47) и (10.48) имеют смысл квадратов показателей преломления нелинейных сред.

**10.2.2. Двумерная задача. Выбор анзатца.** Начинаем с двумерного случая. Будем искать комплекснозначные решения уравнения (10.47), сосредоточенные в окрестности некоторой кривой  $l$  на плоскости  $(x, y)$  и имеющие смысл волн, бегущих вдоль  $l$  [29].

В окрестности кривой  $l$  вводим естественную систему координат — длину дуги  $s$  и расстояние по нормали  $n$ . Длину кривой  $l$  будем считать бесконечной, а координаты  $(s, n)$  меняющимися от  $-\infty$  до  $+\infty$ . Далее полагаем

$$a(x, y) = \alpha(s, n), \quad b(x, y) = \beta(s, n). \quad (10.49)$$

Вводим также растянутую нормаль  $\nu = \omega n$ . Условие сосредоточенности (локализации) запишем в виде

$$\lim_{\nu \rightarrow \pm\infty} u = 0. \quad (10.50)$$

Это условие — нелинейный аналог условия, выделяющего нормальные волны внутреннего волновода [30].

Изучаемое асимптотическое решение имеет смысл стационарного волнового пучка, кривая  $l$  — осевой линии этого пучка. Изложенный далее асимптотический подход, как уже отмечалось выше, позволяет преодолеть существенную трудность, характерную для подобных задач: дает возможность отделить задачу об определении осевой линии  $l$  от задачи об определении сконцентрированного вблизи  $l$  поля.

Решение задачи будем искать в виде:

$$u(s, \nu, \omega) = U(s, \nu, \omega) \exp[i\omega Q(s, \nu, \omega)],$$

$$U(s, \nu, \omega) = \sum_j U_j(s, \nu) \omega^{-j}, \quad Q(s, \nu, \omega) = \sum_j Q_j(s, \nu) \omega^{-j}, \quad (10.51)$$

где  $U_j$  и  $Q_j$  вещественны, все  $U_j$  экспоненциально убывают при  $\nu \rightarrow \pm\infty$ , а  $Q_j$  допускают при  $\nu \rightarrow \pm\infty$  не более чем степенной рост. Подставим (10.51) в (10.47) и отделим в получившемся уравнении вещественную и мнимую части:

$$\Delta U + \omega^2 [f(U^2, s, \nu/\omega) - (\nabla Q)^2] U = 0, \quad (10.52)$$

$$\operatorname{div}(U^2 \nabla Q) = 0. \quad (10.53)$$

Перейдем от (10.52) и (10.53) к рекуррентной последовательности уравнений, получающихся приравниванием нулю коэффициентов при каждой степени  $\omega$ . Поскольку

$$\operatorname{div}(U^2 \nabla Q) = \omega^2 (U^2 Q_\nu)_\nu + \frac{\omega \kappa}{(1 + \kappa \nu / \omega)} U^2 Q_\nu + \frac{1}{(1 + \kappa \nu \omega)} \frac{\partial}{\partial s} \left[ \frac{U^2 Q_s}{(1 + \kappa \nu / \omega)} \right] \quad (10.54)$$

(здесь  $\kappa(s)$  — кривизна кривой  $l$ ), то, как нетрудно видеть, двум старшим уравнениям, следующим из (10.53), можно удовлетворить, считая  $Q_0$  и  $Q_1$  зависящими только от  $s$ . Положим:

$$Q_0(s) = \int_0^s q(s) ds. \quad (10.55)$$

Самое старшее уравнение, вытекающее из (10.52), имеет вид

$$U_{0\nu\nu} + [\alpha(s, 0) U_0^2 + \beta(s, 0) - q^2(s)] U_0 = 0.$$

Для существования решения этого уравнения, удовлетворяющего условию сосредоточенности (10.50), необходимо выполнение условия

$$q^2(s) > \beta(s, 0). \quad (10.56)$$

Само решение при этом имеет вид

$$U_0(s, \nu) = \left[ 2 \frac{q^2(s) - \beta(s, 0)}{\alpha(s, 0)} \right]^{1/2} \frac{1}{\operatorname{ch} \left[ \nu \sqrt{q^2(s) - \beta(s)} \right]}. \quad (10.57)$$

Старшее следствие уравнения (10.53) с учетом (10.55) имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial \nu} (U_0^2 Q_{2\nu}) + \frac{\partial}{\partial s} (q(s) U_0^2) = 0.$$

Интегрируя по  $\nu$  и принимая во внимание экспоненциальное убывание  $U_0$  при  $\nu \rightarrow \pm\infty$ , получаем закон сохранения

$$\frac{q[q^2 - \beta(s, 0)]^{1/2}}{\alpha(s, 0)} = A = \text{const}. \quad (10.58)$$

При выводе (10.58) использована табличная формула

$$\int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{ch}^{-2\gamma}(x) dx = \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma + 1/2)}. \quad (10.59)$$

Вытекающее из (10.52) уравнение для  $U_1(s)$  является линейным и неоднородным, его правая часть в соответствии с (10.54) содержит кривизну  $\kappa(s)$  осевой линии  $l$ . Условие разрешимости задачи для этого уравнения в результате преобразований дает формулу

$$\kappa(s)[2q^2 + \beta(s, 0)] + \frac{\alpha_n(s, 0)}{2\alpha(s, 0)} [q^2 - \beta(s, 0)] + \frac{3}{2} \beta_n(s, 0) = 0. \quad (10.60)$$

Уравнение (10.60) не может быть выполнено на произвольной кривой  $l$ . Это уравнение определяет связь между  $\kappa(s)$ ,  $\alpha(s, n)$  и  $\beta(s, n)$  на  $l$ , гарантирующую возможность построения изучаемого решения в окрестности  $l$ .

Закон сохранения (10.58) позволяет выписать явное выражение для  $q^2(s)$

$$q^2(s) = \frac{1}{2} \left[ \beta(s, 0) + \sqrt{\beta^2(s, 0) + 4A^2\alpha^2(s, 0)} \right] \quad (10.61)$$

и тем самым упростить равенство, определяющее кривизну:

$$\kappa(s) \left( 2\beta + \sqrt{\beta^2 + 4A^2\alpha^2} \right) + \frac{\alpha_n}{4\alpha} \left( \sqrt{\beta^2 + 4A^2\alpha^2} - \beta \right) + \frac{3}{2} \beta = 0. \quad (10.62)$$

Теперь кривизна выражена только через заданные функции  $\alpha(s, n)$  и  $\beta(s, n)$ .

**10.2.3. Применение принципа Уизема.** Переходим к другому способу определения осевой линии  $l$ , связанному с использованием вариационного принципа Уизема. Подробные описания применения этого принципа можно найти в книгах [3, гл. 11 и 14] и [15, гл. 4 и 5].

Снова обращаемся к поставленной выше задаче о сосредоточенном вблизи гладкой кривой  $l$  решении уравнения (10.47). Для использования принципа Уизема нужно построить соответствующий задаче усредненный лагранжиан. Для этого, в свою очередь, нужно указать вытекающий из постановки задачи характер зависимости искомого решения от быстрой переменной. В данном случае, используя связанные с кривой  $l$  координаты  $s, n$ , мы ищем решение, которое при  $\omega \rightarrow \infty$  имеет вид

$$u = U(s, \nu) \exp(i\omega Q(s)), \quad \text{Im } U = \text{Im } Q = 0, \quad \lim_{\nu \rightarrow \pm\infty} U = 0, \quad (10.63)$$

причем  $\nu = \omega n$  и есть указанная быстрая переменная. Тогда функция  $U \approx U_0$  в первом приближении удовлетворяет уже известному нам уравнению

$$U_{\nu\nu} + \left[ \alpha \left( \frac{s, \nu}{\omega} \right) U^2 + \beta \left( \frac{s, \nu}{\omega} \right) - q^2(s) \right] U = 0, \quad q(s) = Q'(s). \quad (10.64)$$

Уравнение (10.64) при условии (10.56) имеет положительное решение (10.57), достаточно быстро убывающее при  $\nu \rightarrow \pm\infty$  для всех  $s$ . Именно это решение и рассматривается далее.

Уравнению (10.47) соответствует плотность функции Лагранжа

$$|\nabla u|^2 - \omega^2 \left[ \frac{1}{2} \alpha(s, n) |u|^4 + \beta(s, n) |u|^2 \right], \quad (10.65)$$

где  $|\nabla u|^2$  означает скалярное произведение  $\nabla u$  на комплексно сопряженное выражение.

Вычисляем выражение (10.65) на функциях (10.63), интегрируем по быстрой переменной  $\nu = \omega n$  и используем табличную формулу (10.59). Получаем усредненный лагранжиан

$$\bar{L}(n, s) = \frac{4q^2(s) \sqrt{q^2(s) - \beta(s, n)}}{\alpha(s, n)} \left[ 1 + \frac{1}{(1 + n\kappa(s))^2} \right]. \quad (10.66)$$

Для вывода условия, определяющего кривую  $l$ , образуем функционал

$$L[n(s)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{L}(n, s) \sqrt{(1 + n\kappa)^2 + n_s^2} ds \quad (10.67)$$

вдоль любой гладкой кривой  $n = n(s)$ , близкой к кривой  $n = 0$ , т. е. к  $l$ . Здесь

$$dS = \sqrt{(1 + n\kappa)^2 + n_s^2} ds \quad (10.68)$$

элемент длины дуги кривой  $n = n(s)$ , а выражение для  $\bar{L}$  задано формулой (10.66).

Варьирование функционала (10.67) целесообразно провести следующим образом (см., например, [30]). В координатах  $n, s$  рассматриваем близкие к  $l$  в метрике  $C^1$  кривые  $n = n(s)$ , удовлетворяющие уравнению Эйлера

$$\frac{d}{ds} \left( \frac{\partial \Psi}{\partial n_s} \right) - \frac{\partial \Psi}{\partial n} = 0, \quad \Psi = \bar{L}(n, s) \sqrt{(1 + n\kappa)^2 + n_s^2}. \quad (10.69)$$

Кривая  $l$  является экстремалью, если тривиальное решение  $n = 0$  удовлетворяет уравнению (10.69). Это, в свою очередь, имеет место лишь при условии равенства нулю коэффициента при первой степени  $n$  в разложении  $\Psi$ . Поскольку

$$\Psi = \bar{L}(0, s) + n[\kappa \bar{L}(0, s) + \bar{L}_n(0, s)] + O(n^2 + n_s^2), \quad (10.70)$$

то определяющее кривую  $l$  условие имеет вид

$$\kappa(s) = -\frac{\bar{L}_n(0, s)}{\bar{L}(0, s)}. \quad (10.71)$$

Используя выражения (10.66) и (10.61), вычисляем правую часть (10.71) и снова получаем равенство (10.62). Таким образом, оба рассмотренных подхода ведут к одному и тому же естественному уравнению для осевой линии.

Покажем, что условие (10.62) эквивалентно также некоторому однопараметрическому принципу Ферма. Формулировка этого принципа связана с построением гамильтониана  $H_0$ , соответствующего усредненному лагранжиану  $\bar{L}(0, s)$ , и с естественным продолжением  $H_0$  в плоскости  $(x, y)$ , т. е. с переходом от  $H_0(s)$  к  $H(x, y)$ .

Выполним намеченные построения. Лагранжиан  $L(0, s)$  содержит единственный импульс  $Q' = q$ . Поэтому преобразование Лежандра, связывающее функции Гамильтона и Лагранжа [31], в данном случае имеет вид

$$H_0(s) = -\bar{L}(0, s) + q \frac{\partial \bar{L}(s, 0)}{\partial q} = \frac{8(2q^2 + \beta(s, 0))\sqrt{q^2 - \beta(s, 0)}}{3\alpha(s, 0)}. \quad (10.72)$$

Используем формулу (10.61):

$$H_0(s) = \frac{16A^2}{3} \alpha(s, 0) \frac{\sqrt{\beta^2(s, 0) + 4A^2\alpha^2(s, 0)} + 2\beta(s, 0)}{\sqrt{\beta^2(s, 0) + 4A^2\alpha^2(s, 0)} + \beta(s, 0)}. \quad (10.73)$$

Правая часть (10.73) допускает продолжение в плоскости  $(x, y)$ , в результате получаем функцию Гамильтона на этой плоскости

$$H(x, y, A) = a(x, y) \frac{\sqrt{b^2(x, y) + 4A^2a^2(x, y)} + 2b(x, y)}{\sqrt{b^2(x, y) + 4A^2a^2(x, y)} + b(x, y)}.$$

Несущественный постоянный множитель  $16A^2/3$  здесь опущен. Параметром в этом принципе является константа  $A$ , которая имеет смысл интенсивности пучка. В зависимости положения и формы осевой линии  $l$  от интенсивности  $A$  как раз и проявляется нелинейность рассматриваемого явления.

Определяющий линию  $l$  принцип Ферма может быть сформулирован так:

$$\delta \int H(x, y, A) dS = 0. \quad (10.74)$$

Нетрудно проверить, что из вариационного равенства (10.74) вытекает условие (10.62). Для этого достаточно повторить приведенные выше рассуждения с заменой  $\bar{L}$  на  $H$ : перейти к переменным  $s$  и  $n$ , использовать формулу (10.68) и разложение типа (10.70). В итоге получаем равенство

$$\kappa(s) = - \left[ \frac{1}{H} \frac{\partial H}{\partial n} \right]_{n=0},$$

совпадающее с (10.62), что и требовалось установить. Вывод принципа (10.74) из принципа Уизема аналогичен получению принципа Мопертюи на основе принципа наименьшего действия [32].

Для весьма интенсивных пучков (при  $A \rightarrow \infty$ ) вариационный принцип (10.74) превращается в равенство

$$\delta \int a(x, y) dS = 0. \quad (10.75)$$

**10.2.4. Трехмерная задача.** В трехмерном случае построение как вариационного принципа, так и естественного уравнения для кривой  $l$  аналогичны двумерному случаю. Приведем без вывода некоторые результаты, относящиеся к случаю, когда исходным уравнением является уравнение (10.48). Если в двумерном случае в соответствии с (10.57) ширина пучка связана с величиной разности  $q^2 - \beta(s, 0)$ , то аналогичное свойство имеет место и в трехмерном случае. Здесь такую же роль играет величина

$$q^2(s) - b(x, y, z) \Big|_l. \quad (10.76)$$

Вместо (10.71) в трехмерном случае получаем, что

$$q(s) = Aa(x, y, z) \Big|_l. \quad (10.77)$$

Линия  $l$  теперь удовлетворяет однопараметрическому принципу Ферма

$$\delta \int H(x, y, z, A) dS = 0, \quad (10.78)$$

в котором

$$H = A^2 a(x, y, z) + \frac{b(x, y, z)}{a(x, y, z)} \quad (10.79)$$

и функция  $a(x, y, z)$  строго положительна. Параметр в этом принципе — константа  $A$  — по-прежнему имеет смысл интенсивности пучка. Эта интенсивность удовлетворяет условию

$$A^2 a^2(x, y, z) > b(x, y, z), \quad (10.80)$$

аналогичному условию (10.56) в двумерном случае.

**10.2.5. Нелинейная среда волноводного типа.** Из вариационного принципа (10.78), (10.79) вытекает ряд важных физических следствий. Весьма важен следующий эффект: пучок не может проникнуть в области пространства, где не выполнено условие (10.80). Это обстоятельство чрезвычайно существенно при анализе распространения пучков в нелинейных и неоднородных средах волноводного типа.

Пусть изучается процесс, удовлетворяющий уравнению (10.48) с коэффициентами, зависящими лишь от одной координаты  $a = a(x)$ ,  $b = b(x)$ . Будем считать, что осевая линия  $l$  целиком лежит в плоскости  $(x, y)$ , т. е. при  $z = 0$ . Вариационный принцип (10.78), (10.79) теперь имеет вид

$$\delta \int h(x, A) dS = 0, \quad h = A^2 a(x) + \frac{b(x)}{a(x)}. \quad (10.81)$$

Зона возможного движения пучка в соответствии с условием (10.80) определяется неравенством

$$A^2 a^2(x) \geq b(x). \quad (10.82)$$

Чтобы среда имела волноводный характер, положим функцию  $h(x, A)$  имеющей максимум  $x = \xi(A)$  для всех  $A$ . Пример такой функции для фиксированного значения  $A$  показан на рис. 10.10. Возникающая ситуация есть ситуация внутреннего волновода. Если бы функция  $h$  была обычным показателем преломления (не зависящим от  $A$ ), то типичный геометрооптический луч  $l_0$  располагался бы между двумя каустиками  $x = X_{\pm}$ , попеременно касаясь их в процессе распространения. Геометрия луча в линейном случае [33] показана на рис. 10.11.

В нелинейном случае эффекты несравненно богаче. Выпишем дифференциальное уравнение для осевой линии  $l$ , разыскиваемой в виде  $y = y(x)$ . Это уравнение следует из уравнения Эйлера, соответствующего вариационному равенству (10.81), и после преобразований принимает вид

$$\frac{y''}{1 + y'^2} = \left[ \frac{a'}{a} + \frac{a^2(b/a^2)'}{A^2 a^2 + b} \right] y' = \frac{h'}{h} y'. \quad (10.83)$$

Совместим начальную точку осевой линии с точкой  $x = \xi$ ,  $y = 0$ . Уравнение (10.83) легко интегрируется:

$$\frac{y'^2(x)}{1 + y'^2(x)} = \frac{y'^2(\xi)}{1 + y'^2(\xi)} \frac{h^2(x)}{h^2(\xi)}. \quad (10.84)$$

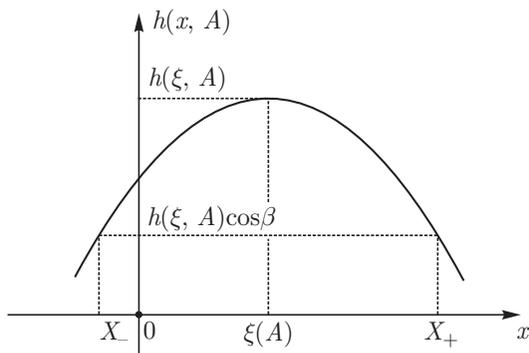
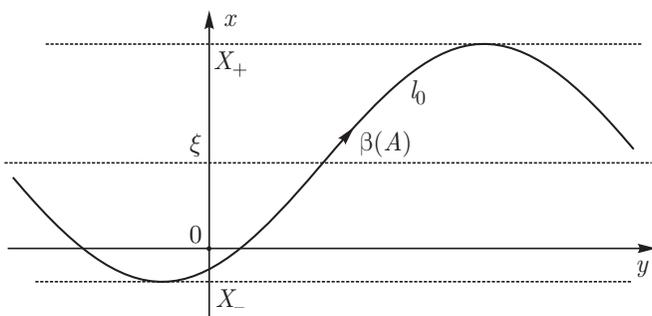
Рис. 10.10. Функция  $h(\xi, A)$  при фиксированном значении  $A$ 

Рис. 10.11. Траектория луча в планарном волноводе

На основании (10.84) можно заключить, что форма осевой линии существенно зависит от начального ее направления по отношению к градиенту неоднородности.

Если  $y(\xi) = 0$ , то решение уравнения (10.84) имеет вид  $y(x) = 0$ , т.е. осевая линия совпадает с осью  $Oy$ . Однако параметры пучка при изменении  $y$  будут меняться. Подобная задача о распространении пучка в неоднородной плазме параллельно градиенту неоднородности рассматривалась Н. С. Ерохиным и Р. З. Сагдеевым [25].

Уже отмечалось, что ширина пучка определяется разностью (10.76). С учетом (10.77) имеем

$$q^2 - b = A^2 a^2 - b > 0. \quad (10.85)$$

Если разность (10.85) убывает по  $y$ , то пучок по мере своего продвижения по этой координате дефокусируется. Если же эта разность возрастает, то, наоборот, пучок фокусируется. В частности, при подходе к области  $A^2 a^2 - b < 0$  происходит полное расплывание пучка. Этот факт естественен, так как разность (10.85) непосредственно связана с шириной пучка.

Возвращаемся к уравнению (10.84). Что происходит при  $y'(\xi) = \operatorname{tg} \beta \neq 0$ ? При условии

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} h(x) = 0$$

возможны следующие варианты поведения осевой линии.

А) Пусть величина

$$b(x)/a^2(x) \quad (10.86)$$

убывает с ростом  $|x - \xi|$ . Тогда дефокусировки нет. Пусть для определенности  $x > \xi$ . Пучок поворачивает в сторону уменьшения координаты  $x$  при приближении к прямой  $x = x_*$ , такой, что  $y'(x_*) = \infty$ . В точке поворота

$$h(x_*) = h(\xi) \frac{\sqrt{y'^2(\xi) + 1}}{|y'(\xi)|} = \frac{h(\xi)}{|\sin \beta|}, \quad y'(\xi) = \operatorname{tg} \beta. \quad (10.87)$$

Конечно, положение искомой линии поворота зависит от интенсивности пучка  $A$  и от начального угла  $\beta$ , т. е.  $x_* = x_*(A, \beta)$ . Очевидно, что

$$h(x_*) > h(\xi).$$

Это означает, что линии поворота  $x = x_*$  в рассматриваемом случае в действительности нет. Факт убывания дроби (10.86) гарантирует выполнение условия (10.82). Следовательно, в отличие от линейной задачи пучок может уйти сколь угодно далеко по координате  $y$ . Закон Снеллиуса в нелинейной задаче не выполняется.

Б) Если дробь (10.86) возрастает с ростом  $|x - \xi|$ , то в зависимости от интенсивности  $A$  и угла  $\beta$  пучок либо дефокусируется, либо поворачивает, не успевая приблизиться к области, в которой  $A^2 a^2(x) < b(x)$ . При заданном  $A$  легко вычислить критическое значение угла  $\beta$ , разделяющее два указанных варианта преобразования пучка. Пусть  $x(b/a^2)$  — функция, обратная по отношению к функции (10.84). Если  $x_*(A, \beta)$  — корень уравнения (10.85) — больше, чем величина  $x(A^2) = x(b/a^2)|_{b/a^2 = A^2}$ , т. е. если выполнено неравенство

$$\frac{b(x_*)}{a^2(x_*)} > A^2, \quad (10.88)$$

то дефокусировки не будет. В противном случае пучок покинет волновод и рассеется в пространстве. В случае равенства  $b(x_*) = A^2 a^2(x_*)$  получаем уравнение для определения критического начального угла  $\beta$  в зависимости от интенсивности  $A$ .

В более общих случаях нелинейных сред, например, для различных типов сред с насыщением нелинейности (см. [15]), усложняется как выражение  $h(x, A)$ , так и неравенство (10.85), что ведет к дополнительным эффектам.

В целом нелинейная неоднородная среда весьма богата физическими эффектами, связанными с распространением интенсивных волновых пучков. Еще один важный пример дает теория наклонного распространения подобных СВЧ-пучков в ионосфере (см. [34]).

## Заклучение

В этой главе рассмотрены две важные задачи теории распространения волн в нелинейных средах с переменным профилем диэлектрической проницаемости. В разделе 10.1 проанализированы туннельные эффекты, когда барьер постоянной высоты представляет собой хорошо известную в физике нелинейную среду Клейна–Фока–Гордона. В основе построения решений основного уравнения (10.5) лежит метод малоамплитудного приближения, восходящий к Дж. Стоксу. Этот метод позволил получить формулы (10.9), (10.23) и (10.29)–(10.31). Для уравнения (10.5) найдены также точные решения (10.10) и (10.25).

В указанном приближении получены явные формулы, описывающие как волновой процесс внутри барьера, так и волну, прошедшую сквозь барьер. Для барьера общего типа найдены отличия в затухании, обусловленные нелинейностью барьерной среды.

Отдельно исследовано прохождение волны сквозь низкий барьер, непрозрачный в случае линейной среды, который может стать прозрачным в нелинейном случае. Получено условие (10.27) для физических параметров задачи, когда нелинейность барьера ведет к осцилляциям волнового поля внутри него и к его просветлению. В случае низкого нелинейного барьера установлен также новый физический эффект: зависимость (10.26) барьерного волнового числа от амплитуды падающей волны.

Примененный численный анализ не только дал полное согласие с аналитическими формулами при малых амплитудах, но и позволил установить характер изменения волновых полей и коэффициента прохождения барьера при увеличении амплитуды.

В разделе 10.1.7 продемонстрировано применение теории тунnelирования к волноводным задачам. Роль барьера здесь играет нелинейная стенка волновода. В случае больших по модулю отрицательных значений  $\alpha$  стенка представляет собой непрозрачный или слабо прозрачный барьер. При положительных  $\alpha$  барьер просветлен, а рассматриваемая мода быстро затухает. Результаты раздела могут быть использованы для создания различных элементов интегральных схем в СВЧ и оптическом диапазонах.

В разделе 10.2 получены траекторные нелинейные вариационные принципы, обобщающие принципы Ферма. Первая особенность новых вариационных принципов состоит в том, что они содержат параметр, связанный с интенсивностью волнового поля. Поэтому траектории лучей или осевых линий пучков в нелинейных задачах оказываются зависящими от интенсивности. Вторая особенность — возникновение

зон, не доступных лучам. Эти зоны представляют собой области пространства, в которых не выполнены условия (10.56) или (10.80). На границах таких областей происходит дефокусировка рассматриваемых пучков.

В разделе 10.2.5 показано, что для систем волноводного типа, сочетающих нелинейность и специальную неоднородность, возможно появление разнообразных физических ситуаций, отсутствующих в линейном случае.

### Список литературы

1. Ландау Л. М., Лифшиц Е. М. Квантовая механика. — М.: Наука, 1974.
2. Бреховских Л. М. Волны в слоистых средах. — М.: Наука, 1973.
3. Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. — М.: Мир, 1977.
4. Найфэ А. Методы возмущений. — М.: Мир, 1976.
5. Молотков И. А., Вакуленко С. А. Сосредоточенные нелинейные волны. — Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1988.
6. Миронов В. А. // Изв. вузов. Радиофизика. 1971. Т. 14, № 9. С. 1450.
7. Ryasnyansky A. I., Palpant B. et al. Nonlinear optical properties of copper nanoparticles synthesized in indium tin oxide matrix by ion implantation // J. Opt. Soc. Am. B. 2006. V. 23, № 7. P. 1348.
8. Виноградова О. П., Марухина М. С., Сидоров А. И. Самофокусировка излучения в композитном материале с наночастицами // Письма в ЖТФ. 2005. Т. 31, № 12. С. 79.
9. Enkrich C., Wegener M. et al. Magnetic Metamaterials at telecommunication and visible frequencies // Phys. Rev. Lett. 2005. V. 95, № 20. P. 3901.
10. Metal-Polymer Nanocomposites / Eds.: Nicolais L., Carotenuto G. — Hoboken, NJ: J. Wiley, 2005.
11. Кившарь Ю. С., Агравал Г. П. Оптические солитоны. — М.: Физматлит, 2005.
12. Ландау Л. М., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. — М.: Наука, 1992.
13. Newell A. C. Nonlinear tunneling // J. Math. Phys. 1978. V. 19, № 5. P. 1126.
14. Lomdahl P. S., Soerensen O. H. et al. Multiple frequency generation by bunched soliton in Josephson tunnel junctions // Phys. Rev. B. 1981. V. 24, № 12. P. 7460.
15. Молотков И. А. Аналитические методы в теории нелинейных волн. — М.: Физматлит, 2003.
16. На Ц. Вычислительные методы решения прикладных граничных задач. — М.: Мир, 1982.
17. Рябенский В. С. Введение в вычислительную математику. — М.: Наука, 1994.

18. Современные численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений /Под ред. Холл Дж., Уатт Дж. — М.: Мир, 1979.
19. *Каханер Д., Моулер К., Нэш С.* Численные методы и программное обеспечение. — М.: Мир, 1998.
20. *Маненков А.Б.* Затухание быстрых волн в диэлектрических трубах // Радиотехника и электроника. 1977. Т. 22, № 10. С. 2043.
21. *Ogusu K.* Analysis of non-linear multilayer waveguides with Kerr-like permittivities // Opt. Quantum Electron. 1989. V. 21, № 2, P. 109.
22. *Trutschel U., Lederer F., Golz M.* Nonlinear guides waves in multilayer systems // IEEE J. Quantum Electron. 1989. V. 25, № 2. P. 194.
23. *Вайнштейн Л. А., Маненков А. Б.* Возбуждение открытых волноводов // Сб. «Лекции по электронике СВЧ и радиофизике». — Саратов: СГУ, 1986. Кн. 1. С. 141–197.
24. *Ахманов С. А., Сухоруков А. П., Хохлов Р. В.* Самофокусировка и дифракция света в нелинейной среде // Успехи физ. наук. 1967. Т. 93, № 1. С. 19.
25. *Ерохин Н. С., Сагдеев Р. З.* Особенности самофокусировки и поглощение энергии мощных волновых пучков в неоднородной плазме // ЖЭТФ. 1982. Т. 83, № 1. С. 128.
26. *Зейгер С. Г., Климонтович Ю. Л., Ланда П. С., Фрадкин Э. Е.* Волновые и флуктуационные процессы в лазерах. — М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1974.
27. *Таланов В. И.* О самофокусировке электромагнитных волн в нелинейных средах // Изв. вузов. Радиофизика. 1964. Т. 7, № 3. С. 564.
28. *Chiao R. Y., Garmire E., Townes C. H.* Self-trapping of optical beams // Phys. Rev. Lett. 1964. V. 13, № 15. P. 479.
29. *Вакуленко С. А., Молотков И. А.* Волны в нелинейной неоднородной среде, сосредоточенные в окрестности заданной кривой // ДАН СССР. 1982. Т. 262, № 3. С. 587.
30. *Бабич В. М., Булдырев В. С.* Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн. Метод эталонных задач. — М.: Наука, 1972.
31. *Гельфанд И. М., Фомин С. В.* Вариационное исчисление. — М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1961.
32. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Механика. — М.: Наука, 1958.
33. *Адамс М.* Введение в теорию оптических волноводов. — М.: Мир, 1984.
34. *Molotkov I. A., Cherkashin Yu. N.* Some nonlinear effects of wave beams propagation in the ionosphere // J. Atmosph. and Terr. Phys. 1994. V. 56, № 11. P. 1477.

## НЕЛИНЕЙНЫЕ ЯВЛЕНИЯ НА МАГНИТОСТАТИЧЕСКИХ ВОЛНАХ В ДИАПАЗОНЕ СВЕРХВЫСОКИХ ЧАСТОТ

Ю. П. Шараевский, М. А. Малюгина, С. В. Гришин

До свидания, камень!  
И да будет волна!

*Самойлов Д.*

*Магнитостатические волны в ферромагнитных пленках. Параметрические явления в ферромагнитных пленках при распространении магнитостатических волн. Нелинейные магнитостатические волны в ферромагнитных пленках. Эффекты самовоздействия волн (модуляционная неустойчивость, образование солитонов). Нелинейные магнитостатические волны в связанных ферромагнитных структурах.*

### **11.1. Магнитостатические волны в ферромагнитных пленках**

**11.1.1. Введение.** В последние десятилетия получили интенсивное развитие исследования волновых процессов в тонких ферритовых пленках и, особенно, процессов, связанных с магнитостатическими спиновыми волнами (МСВ) [1–7]. Магнитостатические спиновые волны представляют собой медленные волны (волны прецессии намагниченности). Если обменное взаимодействие в процессе их распространения не играет существенной роли, а основную роль играет диполь-дипольное взаимодействие, то эти волны обычно просто называют «магнитостатическими». Интерес к этим волнам связан, прежде всего, с тем, что они обладают целым рядом преимуществ перед другими типами волн в кристаллах [5–7]: легко возбуждаются практически во всем диапазоне сверхвысоких частот (1–40 ГГц); обладают большим замедлением; существует возможность управления дисперсионными

характеристики этих волн с помощью внешних нагрузок и магнитного поля; обладают уникальными нелинейными характеристиками. С помощью линий передачи на МСВ можно реализовать практически все основные операции, используемые для функциональной обработки сигналов [5–8]: управляемую задержку, фильтрацию, преобразование спектра, ограничение сигнала, подавление побочных сигналов и шумов и т. д.

Следует подчеркнуть, что широкие фундаментальные исследования МСВ стали возможными благодаря созданию промышленной технологии получения монокристаллических тонкопленочных ферритовых структур с заданными значениями намагниченности и малым затуханием, в частности, эпитаксиальных пленок железо-иттриевого граната (ЖИГ) [9, 10].

Уже на первых стадиях экспериментального исследования магнитоэлектронных волн было выяснено, что нелинейные явления играют существенную роль в волновых процессах в ферритовых пленках [11, 12]. Можно выделить два основных нелинейных механизма в ферромагнитных пленках: первый, обусловленный нелинейностью самой среды и приводящий, в частности, к модуляционной неустойчивости [7, 13, 14]; второй — параметрический механизм, связанный с возбуждением магнитоэлектронной волной коротковолновых спиновых волн (СВ) (см., например, [2, 7, 14–19]).

Рассмотрим ферромагнитную пленку, помещенную в постоянное магнитное поле  $\vec{H}_0$ , ориентированное параллельно или по нормали к поверхности пленки (рис. 11.1).

С макроскопической точки зрения поведение ферромагнитной среды описывается вектором намагниченности  $\vec{M}$  (магнитным моментом единицы объема). Уравнения движения для вектора намагниченности с учетом потерь в среде можно записать в виде [1, 2, 7]:

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = -\gamma [\vec{M} \vec{H}_{\text{эф}}] + \frac{\alpha_0}{|\vec{M}|} \left[ \vec{M} \frac{d\vec{M}}{dt} \right], \quad (11.1)$$

где  $\gamma$  — гиромагнитное отношение;  $\vec{H}_{\text{эф}}$  — эффективное магнитное поле, действующее на магнитный момент  $\vec{M}$  в данной точке;  $\alpha_0$  — безразмерный параметр потерь.

Эффективное магнитное поле можно представить следующим образом [1, 2]:

$$\vec{H}_{\text{эф}} = \vec{H}_{\text{об}} + \vec{H}_a + \vec{H}_d + \vec{H}, \quad (11.2)$$

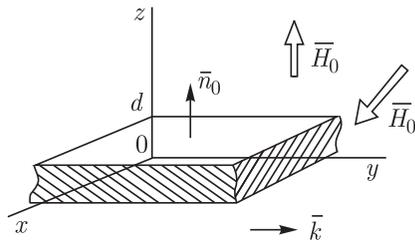


Рис. 11.1. Ферритовая пленка толщиной  $D$  в магнитном поле  $\vec{H}_0$

где  $\overline{H}_{об}$  — эффективное обменное поле, связанное с действием обменных сил;  $\overline{H}_a$  — поле анизотропии, зависящее от ориентации магнитного момента относительно кристаллографических осей (для многих ферромагнетиков с кубической решеткой поле анизотропии мало, поэтому при дальнейшем рассмотрении положим  $\overline{H}_a = 0$ );  $\overline{H}_d$  — размагничивающее поле, зависящее от формы образца;  $\overline{H} = \overline{H}_0 + \overline{h}$  — приложенное внешнее магнитное поле, содержащее постоянную  $\overline{H}_0$  и переменную  $\overline{h}$  составляющие.

Для описания длинноволновых возбуждений (магнитоэлектронных волн) в ферромагнитной среде с длинами волн  $\lambda \gg a$  ( $a$  — постоянная кристаллической решетки) обменное взаимодействие можно не учитывать и положить  $\overline{H}_{об} = 0$ . Если длина возмущений  $\lambda \sim a$ , то специфика волн обусловлена, в основном, обменным взаимодействием ( $\overline{H}_{об} \neq 0$ ) и волны этого типа носят названия спиновых волн (СВ).

Если мы рассматриваем одномерную модель ферромагнетика и если считать, что возмущение намагниченности распространяется в направлении оси  $z$ , то для обменного поля можно использовать соотношение [1, 2, 14, 16]:

$$\overline{H}_{об} = \beta a^2 \frac{\partial^2 \overline{M}}{\partial z^2}, \quad (11.3)$$

где  $\beta$  — обменная константа.

Предположим, что мы имеем однородно намагниченный ферромагнетик с намагниченностью насыщения  $\overline{M}_0$  и внешнее магнитное поле  $\overline{H}_0$  приложено вдоль оси  $z$ , причем в статическом состоянии  $\overline{H}_0 / \overline{M}_0$  (рис. 11.2). Если вывести эту систему из состояния равновесия, то вектор намагниченности будет прецессировать вокруг равновесного положения (т.е. вокруг оси  $z$ ), причем таким образом, что длина его остается постоянной:

$$|\overline{M}|^2 = M_0^2 = m_x^2 + m_y^2 + M_z^2 = \text{const}, \quad (11.4)$$

где  $m_x, m_y, M_z$  — компоненты вектора намагниченности.

В общем случае уравнение движения (11.1) для вектора намагниченности с учетом (11.4) является нелинейным и его можно линеаризовать при условии:

$$|\overline{h}| \ll |\overline{H}_0|, \quad m_{x,y} \ll M_0. \quad (11.5)$$

В линейной теории, предполагая малость волн возмущений, мы получаем, что  $M_z \approx M_0 = \text{const}$ . При больших амплитудах высокочастотного магнитного поля конец вектора  $\overline{M}$  при вынужденной прецессии будет двигаться по поверхности сферы  $S$ , что приводит к уменьшению продольной составляющей намагниченности  $\overline{M}_z$  (рис. 11.2).

Изменение продольной компоненты намагниченности играет основную роль в нелинейных и параметрических процессах, которые наблюдаются в намагниченном до насыщения ферромагнетике (см., например, [2, 7, 16, 20, 21] и библиографию к ним).

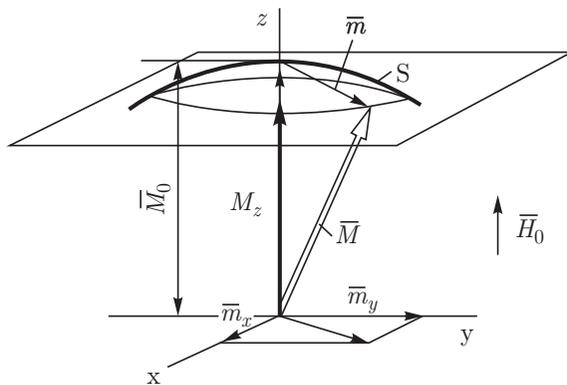


Рис. 11.2. Модель нелинейного ферромагнетика

Гиротропная среда, в качестве которой мы рассматриваем непроводящую ферромагнитную среду, характеризуется тензором магнитной проницаемости  $\bar{\mu}$  и скалярной величиной диэлектрической проницаемости  $\epsilon$ , т. е. уравнения среды имеют вид [22]:

$$\bar{b} = \bar{\mu}\bar{h}, \quad \bar{d} = \epsilon\bar{e}, \quad (11.6)$$

где  $\bar{e}$ ,  $\bar{h}$  — ВЧ составляющие напряженности электрического и магнитного полей;  $\bar{d}$ ,  $\bar{b}$  — ВЧ составляющие электрической и магнитной индукции соответственно.

В общем случае, когда направление магнитного поля относительно осей координат произвольно, ферромагнитная среда описывается тензором  $\bar{\mu}$  в виде:

$$\bar{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_{11} & \mu_{12} & \mu_{13} \\ \mu_{21} & \mu_{22} & \mu_{23} \\ \mu_{31} & \mu_{32} & \mu_{33} \end{pmatrix}, \quad (11.7)$$

где составляющие тензора  $\mu_{i,j}$  являются комплексными функциями частоты, волнового числа, параметров среды, величины и направления магнитного поля  $\bar{H}_0$ .

Нас будут интересовать медленные электромагнитные волны в ферромагнитных пластинах (пленках), для которых будем считать, что выполняется квазистатическое приближение [22]:  $2\pi/\lambda \gg \omega/c$  или  $\omega\lambda \gg 2\pi c$ , где  $\lambda$  — длина волны в среде;  $\omega$  — частота;  $c$  — скорость света.

В этом приближении запаздывающими членами в уравнениях Максвелла можно пренебречь и для магнитных полей в непроводящей среде можно записать уравнения [22]:

$$\text{rot } \bar{h} = 0, \quad \text{div}(\bar{\mu}\bar{h}) = 0. \quad (11.8)$$

Система уравнений (11.8) аналогична уравнениям магнитоэлектроники, но в рассматриваемом случае магнитная проницаемость среды зависит

от частоты. Поэтому медленные электромагнитные волны в таких ферромагнитных средах, как уже отмечалось выше, получили название магнитоэлектрических.

Зная вид тензора магнитной проницаемости  $\overline{\mu}$  и используя соответствующие граничные условия, из системы уравнений (11.8) можно получить дисперсионные уравнения для всех типов магнитоэлектрических волн, которые могут распространяться в ферромагнитных пленках.

В зависимости от ориентации постоянного магнитного поля  $\overline{H}_0$  различают следующие типы МСВ [1–4]: 1) прямые объемные МСВ (ПОМСВ), распространяющиеся в нормально намагниченной пленке феррита; 2) поверхностные магнитоэлектрические волны (ПМСВ), распространяющиеся перпендикулярно к магнитному полю, лежащему в плоскости пленки (касательное намагничивание); 3) обратные объемные МСВ (ООМСВ), распространяющиеся вдоль магнитного поля в касательно намагниченной пленке.

Для случая нормально намагниченной пленки (магнитное поле  $\overline{H}_0$  направлено вдоль оси  $z$  — рис. 11.1) соотношения для компонент тензора намагниченности (11.7) принимают вид:  $\mu_{11} = \mu_{22} = \mu$ ,  $\mu_{12} = -\mu_{21} = j\mu_a$ ,  $\mu_{13} = \mu_{23} = \mu_{31} = \mu_{32} = 0$ ,  $\mu_{33} = 1$ . Если не учитывать обменное взаимодействие и затухание в среде, то выражения для компонент тензора можно представить как [2]:

$$\mu = \frac{\omega_H(\omega_H + \omega_M) - \omega^2}{\omega_H^2 - \omega^2}, \quad (11.9)$$

где  $\omega_H = \gamma H_0$  — частота прецессии;  $\omega_M = 4\pi\gamma M_0$  — частота намагничивания.

Дисперсионное уравнение для прямых объемных МСВ в этом случае с учетом (11.8) и (11.9), а также соответствующих граничных условий можно записать следующим образом [2, 7]:

$$\mu k^2 + k_z^2 = 0, \quad (11.10)$$

где  $k$  — искомая постоянная распространения волны в плоскости  $(x, y)$ , а  $k_z$  — постоянная распространения волны, описывающая распределение полей в поперечном направлении.

Качественный вид дисперсионной зависимости, отвечающий этому случаю в соответствии с (11.10), показан на рис. 11.3 (кривая 1).

Для поверхностных волн в ферритовой пленке (постоянное магнитное поле направлено вдоль оси  $x$  — рис. 11.1), распространяющихся вдоль оси  $y$ , компоненты тензора (11.7) можно представить так:  $\mu_{11} = 1$ ,  $\mu_{22} = \mu_{33} = \mu$ ,  $\mu_{23} = -\mu_{32} = j\mu_a$ ,  $\mu_{12} = \mu_{21} = \mu_{31} = \mu_{13} = 0$ .

Дисперсионное уравнение для поверхностных МСВ в ферритовой пленке, нагруженной на полубесконечные слои диэлектрика, в этом случае будет иметь вид [2, 7]:

$$1 + 2\mu \operatorname{cth} kD + \mu^2 - \mu_a^2 = 0. \quad (11.11)$$

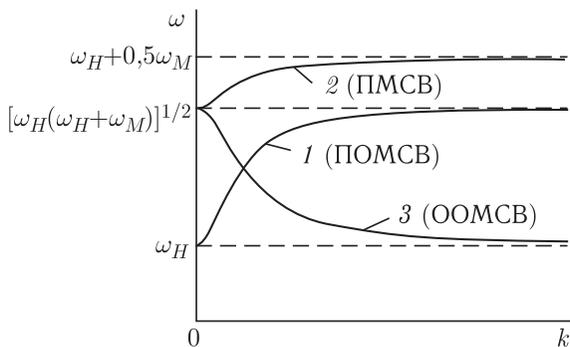


Рис. 11.3. Качественный вид дисперсионных зависимостей для различных типов МСВ

Качественный вид дисперсионной зависимости в соответствии с соотношением (11.11) приведен на рис. 11.3 (кривая 2).

Для обратных объемных МСВ, распространяющихся вдоль оси  $x$ , имеем:  $\mu_{11} = 1$ ,  $\mu_{22} = \mu_{33} = \mu$ ,  $\mu_{23} = -\mu_{32} = -j\mu_a$ ,  $\mu_{12} = \mu_{13} = \mu_{21} = \mu_{31} = 0$ . Для свободной пленки феррита дисперсионное уравнение для этого типа волн можно записать как [2, 7]:

$$1 + 2\sqrt{-\mu} \operatorname{ctg} \left( \frac{kD}{\sqrt{-\mu}} \right) + \mu = 0, \quad (11.12)$$

а качественный вид дисперсионной зависимости соответствует кривой 3 на рис. 11.3.

Как следует из вида кривой 3 на рис. 11.3 и из соотношения (11.12), волна в этом случае обладает аномальной дисперсией, причем фазовая и групповая скорости этой волны направлены в разные стороны, поэтому в данном случае такой тип волны и получил название обратной объемной МСВ.

## 11.2. Параметрические явления в ферромагнитных пленках при распространении магнитостатических волн

**11.2.1. Частотные границы параметрических процессов для магнитостатических волн.** В ходе экспериментальных исследований по распространению МСВ в пленках железо-иттриевого граната (ЖИГ) было обнаружено (см., например, [2, 6, 11, 14, 15, 19, 23]), что, начиная с достаточно низкого уровня мощности (порядка единиц и десятки микроватт), в длинноволновом диапазоне частот (до 5 ГГц) наблюдается дополнительно увеличение потерь. Механизм этих потерь связан с явлениями, характерными для нелинейного ферромагнитного резонанса (НФР): когда амплитуда сигнала достигает «пороговой» величины, в ферромагнетике происходит параметрическое возбужде-

ние тепловых спиновых волн определенной частоты. Возбуждение СВ происходит за счет энергии колебаний однородной прецессии, что и приводит к дополнительному затуханию этой прецессии. Начиная с работы Г. Сулла [24] параметрическая нестабильность СВ в объемных образцах ферромагнетика была исследована достаточно подробно (см. монографии [2, 14, 16, 20, 21] и библиографию к ним).

Особенности спиновых нестабильностей при возбуждении МСВ по сравнению с накачкой однородным ВЧ полем связаны: во-первых, с неоднородностью накачки, т. е. с зависимостью ВЧ значений полей и намагниченности от координат; во-вторых, с необходимостью учета дисперсии МСВ [25]. Было показано, что за нелинейные потери МСВ в длинноволновом диапазоне частот ответственны параметрические процессы первого порядка, при которых возбуждается СВ на половинной частоте МСВ [11, 15, 17–20, 23].

При параметрическом резонансе первого порядка для взаимодействующих волн должны выполняться следующие соотношения [2, 7]:

$$\begin{cases} \omega = \omega_k + \omega_{k'}, \\ \bar{k}_0 = \bar{k} - \bar{k}', \end{cases} \quad (11.13)$$

где  $\omega_{k,k'}$  — частоты возбуждения спиновых волн;  $\bar{k}, \bar{k}'$  — волновые векторы СВ;  $\omega, \bar{k}_0$  — частота и волновой вектор МСВ.

Магнитоэлектрические волны различной природы могут распространяться лишь в ограниченной полосе частот (см. рис. 11.3), что вместе с условиями параметрического резонанса первого порядка (11.13) определяет частотные границы, при которых возможно возбуждение спиновых волн.

Спектр спиновых волн в неограниченном ферромагнетике описывается дисперсионным соотношением [2, 7]:

$$\omega_k^2 = \omega'_H (\omega'_H + \omega_M \sin^2 \theta_k), \quad (11.14)$$

где  $\omega'_H = \omega_H + \beta a^2 k^2$ ,  $\theta_k$  — угол между направлением поля  $\bar{H}_0$  и направлением волнового вектора СВ  $\bar{k}$ . Отметим, что для СВ с большим  $k$  учет граничных условий несущественен, т. к. размеры реально используемых ферритовых пленок значительно больше длины СВ.

Для того, чтобы было возможно параметрическое возбуждение СВ, частота  $\omega$  должна удовлетворять условию  $\omega \geq 2\omega_{k_{\min}}$ . Из анализа дисперсионного соотношения для спиновых волн (11.14) получаем, что  $\omega_{k_{\min}} = \omega_H$  — минимальная частота спиновой волны.

Полоса пропускания МСВ определяется следующими соотношениями: для объемных МСВ

$$\omega_H \leq \omega \leq [\omega_H(\omega_H + \omega_M)]^{1/2}, \quad (11.15)$$

для поверхностных МСВ в свободной пластине феррита

$$[\omega_H(\omega_H + \omega_M)]^{1/2} \leq \omega \leq \omega_H + \frac{1}{2}\omega_M, \quad (11.16)$$

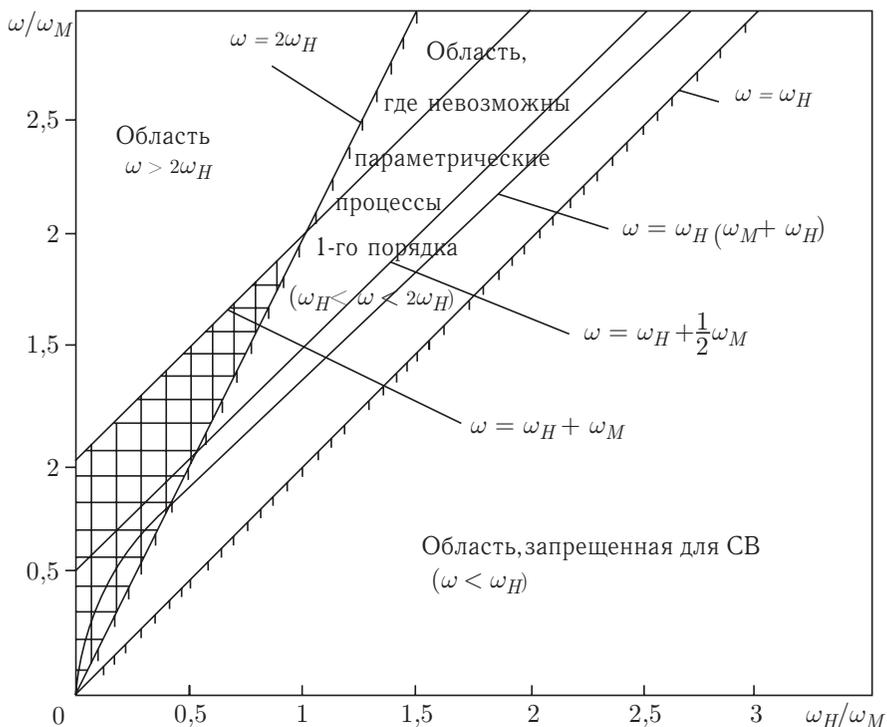


Рис. 11.4. Линии граничных частот для магнитостатических и спиновых волн

для поверхностных МСВ в металлизированной ферритовой пластине  $[\omega_H(\omega_H + \omega_M)]^{1/2} \leq \omega \leq \omega_H + \omega_M$ .

На рис. 11.4 приведены линии граничных частот для объемных МСВ и поверхностных МСВ в зависимости от величины  $\omega_H/\omega_M = = \bar{H}_0/4\pi M_0$ , а так же линии  $\omega = \omega_H$  и  $\omega = 2\omega_H$ . Заштрихованная область соответствует области существования МСВ, где  $\omega \geq 2\omega_H$ , т.е. в этой области возможно параметрическое усиление спиновых волн на половинной частоте накачки ( $\omega/2$ ), что должно приводить к нелинейному затуханию магнитостатической волны. Для пленки ЖИГ ( $M_0 = 145$  Гс), наиболее широко используемого в СВЧ технике материала, согласно рис. 11.4 граничная частота для ОМСВ составляет 3,2 ГГц, для ПМСВ в свободной пленке феррита — 4,9 ГГц, для ПМСВ в металлизированной пленке — 9,8 ГГц.

Таким образом, для МСВ в ЖИГ-пленках, как уже было отмечено выше, нелинейные потери должны наблюдаться только в длинноволновой части СВЧ-диапазона, что подтверждается экспериментальными результатами.

**11.2.2. Параметрическое возбуждение спиновых волн магнитостатической волной.** Рассмотрим основные особенности взаимодействия СВ с магнитостатическими волнами в касательно намагничен-

ной ферромагнитной пленке при параметрических процессах первого порядка, когда должны выполняться условия (11.13). Предположим, что в пленке возбуждается поверхностная МСВ, распространяющаяся перпендикулярно внешнему магнитному полю и возбуждающему элементу (см. рис. 11.1). Волновая диаграмма для параметрических

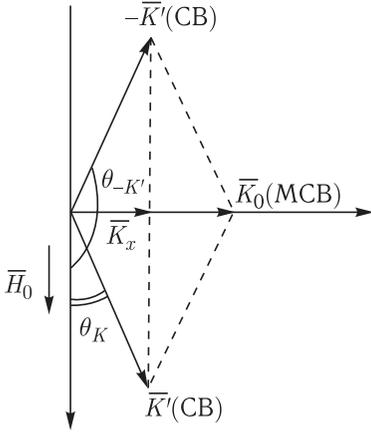


Рис. 11.5. Резонансное условие для волновых векторов СВ  $(\vec{k}, -\vec{k}')$  и магнитоэлектрической волны  $\vec{k}_0$

относящиеся к МСВ;  $h_d^\pm, h_{обм}^\pm, h_z^d, h_z^{обм}$  — ВЧ магнитные поля, относящиеся к СВ.

Представим  $m_\pm = m_\pm^0 + m_{k_\pm}$ , где составляющие намагнитченности  $m_\pm^0$  относятся к МСВ, а  $m_{k_\pm}$  относятся к СВ, и разложим в ряд Фурье по плоским волнам [2, 16, 24]:

$$m_{k^\pm} = \sum_k \left\{ \begin{array}{l} m_k(r, t) \\ m_{-k}^*(r, t) \end{array} \right\} e^{-jk r}. \quad (11.18)$$

Связь ВЧ магнитных полей с намагнитченностями можно найти из уравнений магнитоэлектрики (11.8) и соотношения (11.3), используя соответствующие граничные условия [2, 7]. Используя выражения для ВЧ магнитных полей с учетом (11.18) и рассматривая СВ с изменяющейся в пространстве амплитудой как волновой пакет, составленный из плоских СВ и распространяющийся с групповой скоростью  $\vec{V}_g = \partial\omega_k / \partial\vec{k}$ , с учетом условия (11.13) уравнение для медленно изменяющейся в пространстве амплитуды этого волнового пакета  $b_k$  можно записать в виде:

$$\frac{\partial b_k}{\partial t} = V_g \text{grad}_{\vec{\tau}_\perp} b_k - j \left[ \left( \omega_k - \frac{\omega}{2} \right) + j\alpha_k \right] b_k = jV_k b_{-k}^*, \quad (11.19)$$

процессов первого порядка при взаимодействии ПМСВ и СВ показана на рис. 11.5, т. к. СВ могут возбуждаться при любых значениях угла  $\theta_k$ . Положим, что для ПМСВ разрешены параметрические процессы первого порядка, т. е.  $\omega \geq 2\omega_{k, \min}$ .

Используем уравнение движения (11.1) без учета диссипативного члена ( $\alpha_0 = 0$ ) и представим его в виде [7]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial m_\pm}{\partial t} = & \pm j\omega_H m_\pm \mp j\gamma(1 - m_z)h_\pm + \\ & + j\gamma[\mp(1 - m_z)(h_d^\pm + h_{обм}^\pm) \pm \\ & \pm m_\pm(h_z^{об} + h_z^d)], \quad (11.17) \end{aligned}$$

где  $m_\pm = (m_x \pm jm_y)/M_0$  — безразмерные комплексные ВЧ компоненты намагнитченности;  $m_z = \frac{1}{2}m_+m_-$ ;  $h_\pm = h_x \pm jh_y$  — ВЧ магнитные поля,

где  $V_k = \frac{\omega_M}{2} \sin \theta_k \cos \theta_k e^{-j\Delta \vec{k}'_0 \vec{r}_\perp} (\tilde{m}_+^0 e^{-j\varphi_k} \frac{\omega'_H + \omega_k}{2\omega_k} + \tilde{m}_-^0 e^{j\varphi_k} \frac{\omega'_H - \omega_k}{2\omega_k})$ ;

$\varphi_k = \arctg \frac{k_y}{k_x}$ ;  $\sin \theta_k = \frac{(k_x^2 + k_y^2)^{1/2}}{k}$ ;  $\cos \theta_k = \frac{k_z}{k}$ ;  $\alpha_k$  — постоянная затухания СВ на частоте  $\omega_k$ ,  $\tilde{m}_\pm^0$  — медленно меняющаяся амплитуда намагниченности для МСВ ( $(m_+^0 = \tilde{m}_+^0 e^{j(\omega t - k_0 x)} + m_-^0 e^{-j(\omega t - k_0 x)} = (m_-^0)^*)$ ),  $r_\perp$  — радиус-вектор, лежащий в плоскости  $(x, y)$ . При получении уравнения (11.19) использовалось преобразование Гольдштейна–Примакова [2, 24]:  $m_k = \lambda_k b_k - \mu_k b_{-k}'$ ,  $m_{-k} = \lambda_k b_{-k}' - \mu_k b_k$ , где  $\lambda_k = \left[ \frac{A_k + \omega_k}{2\omega_k} \right]^{1/2}$ ,  $\mu_k = \left[ \frac{A_k + \omega_k}{2\omega_k} \right]^{1/2} e^{2j\varphi_k}$ ,  $A_k = \omega_H + \omega_M (\beta a^2 k^2 + 1/2 \sin^2 \theta_k)$ . Аналогичное уравнение может быть записано и для  $b_{-k}'$ .

Если предположить, что амплитуда МСВ остается постоянной в процессе взаимодействия со СВ, т. е.  $\tilde{m}_0^0 = \text{const}$ , причем  $\tilde{m}_0^0 \gg \tilde{m}_0^-$ , то из системы уравнений для  $b_k$  (11.19) и  $b_{-k}'$  можно получить условие для пороговой амплитуды МСВ и выражение для инкремента нарастания амплитуды СВ вдоль оси  $x$ .

Предположим, что  $b_k = \tilde{b}_{k_0} e^{j(\Delta \omega t - \Delta k x) + \lambda x}$ , в этом случае условие для пороговой амплитуды МСВ примет следующий вид:

$$|\tilde{m}_+^0|_{\text{пор}}^2 = \frac{\alpha_k^2 + \left( |\omega_k - \omega/2| - \frac{1}{2} \beta_k \Delta k^2 \right)^2}{\frac{\omega_M^2}{16} \sin^2 \theta_k \left( \frac{\omega'_H + \omega_k}{2\omega_k} \right)^2}. \quad (11.20)$$

При выводе соотношения (11.20) учитывался второй порядок разложения дисперсионного соотношения (11.14) для  $\omega_k$  — частоты спиновой волны.

Из соотношения (11.20) следует, что минимальный пороговый уровень соответствует частотной составляющей  $\omega_k$  в волновом пакете, отстроенной от частоты  $\omega/2$  на величину  $\Delta \omega = \frac{2|\omega_k - \omega/2|}{\beta_k} V_g$ .

Зависимость пороговой величины намагниченности для МСВ, в соответствии с (11.20), от величины  $\Delta f = \Delta \omega / 2\pi$  показана на рис. 11.6 (кривая 1). Из кривой, представленной на рис. 11.6, видно, что минимальный пороговый уровень мощности при частоте накачки МСВ  $f = 2$  ГГц приходится на величину  $\Delta f = 230$  кГц.

Для инкремента нарастания амплитуды СВ вдоль длины пространства взаимодействия  $x$  можно получить следующее соотношение:

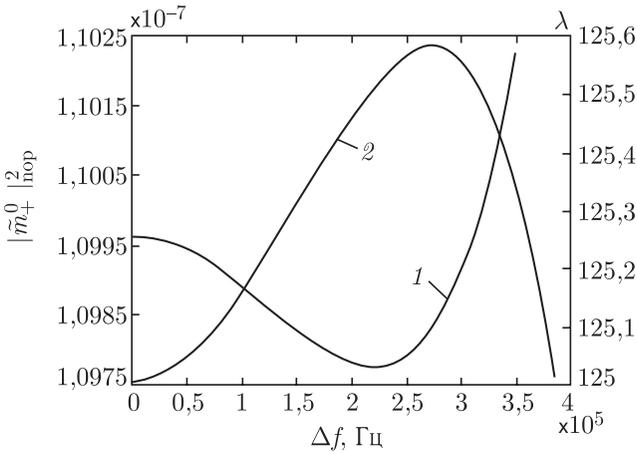


Рис. 11.6. Зависимость порогового уровня намагниченности ПМСВ и инкремента нарастания  $\lambda$  для СВ от отстройки по частоте от половинной частоты накачки  $f_0 = 2$  ГГц,  $H_0 = 180$  Э,  $\alpha_k = 2,8 \cdot 10^{-4}$  ГГц,  $\omega_M/2\pi = 4,9$  ГГц

$$(V_g\lambda + \alpha_k)^2 - \left[ \frac{\beta_k\lambda\Delta k \left[ \left( \omega_k - \frac{\omega}{2} \right) + \frac{1}{2}\beta_k \right] (\lambda^2 - \Delta k^2)}{(v_g\lambda + \alpha_k)} \right]^2 + \left[ \left( \omega_k + \frac{\omega}{2} \right) + \frac{1}{2}\beta_k(\lambda^2 - \Delta k^2) \right]^2 - (\beta_k\lambda\Delta k)^2 = |V_k|^2. \quad (11.21)$$

Рассчитанная зависимость инкремента нарастания  $\lambda$  от  $\Delta f$  из (11.21) для значения  $|\tilde{m}_+^0|$ , вдвое превышающего пороговое значение, представлена на рис. 11.6 (кривая 2). Из рис. 11.6 видно, что максимум величины  $\lambda$  соответствует частотам  $\omega_k$ , также отстроенным на определенную величину от частоты  $\omega/2$ .

Полученные выше результаты рассмотрения теоретической модели, описывающей взаимодействие МСВ со СВ при параметрических процессах первого порядка, вполне согласуются с экспериментальными данными. В качестве примера на рис. 11.7 показаны огибающие спектров спин-волновых пакетов на выходе линии передачи для различных значений частоты сигнала. Для экспериментального исследования использовалась линия передачи, представляющая собой входной и выходной элементы связи в виде микрополосковых линий, нагруженных ферромагнитной пленкой, на вход которой подавался регулярный входной сигнал большой мощности ( $\sim 22$  дБ·мВт) в полосе возбуждения ПМСВ. С выходного элемента связи снимался сигнал, равный примерно половине частоты входного сигнала  $f$ , и подавался на вход анализатора спектра фирмы Agilent Technologies серии ESA-E E4402B. Из результатов, представленных на рис. 11.7, видно, что в области частоты  $f/2$  возбуждаются два спин-волновых пакета, отстроенных от

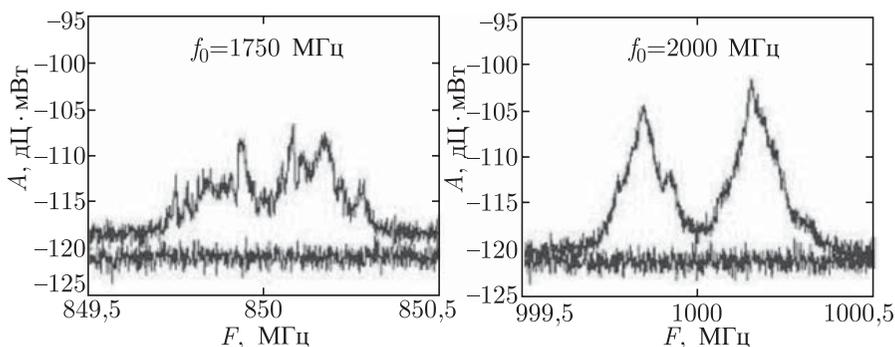


Рис. 11.7. Огибающие возбужденных спин-волновых пакетов на половинной частоте при различных значениях частоты  $f_0$  ПМСВ

частоты  $f/2$  на величину  $\Delta f \sim 300$  кГц, причем полученные величины отстрок достаточно хорошо совпадают с теоретически рассчитанными значениями.

Рассмотренные выше параметрические процессы в ферромагнитных пленках при возбуждении МСВ играют очень важную роль, т. к. они проявляются, как уже отмечалось выше, при сравнительно небольших уровнях мощности, приводят к дополнительным нелинейным потерям МСВ в длинноволновом диапазоне частот и используются при создании различных нелинейных устройств на МСВ (шумоподавителей, ограничителей мощности, амплитудных корректоров и др.) (см., например, [27–34]).

### 11.3. Нелинейные магнитостатические волны в ферромагнитных пленках

В результате ряда экспериментальных и теоретических исследований распространения МСВ в тонких ферромагнитных пленках при уровнях мощности порядка от одного до десятков милливольт было обнаружено (см., например, [35–42]), что повышение мощности выше некоторого «порогового» значения вызывает самопроизвольное возникновение модуляции огибающей амплитуды ВЧ магнитного поля, волна становится модуляционно неустойчивой.

Данные эффекты, обусловленные развитием модуляционной неустойчивости (МН), относят ко второму классу нелинейных эффектов, которые могут иметь место в ферромагнитных пленках. Механизм развития модуляционной неустойчивости связан с взаимодействием несущей волны с частотой  $\omega_0$  и спутников с близкими частотами  $\omega_+$  и  $\omega_-$ , симметрично отстоящими от несущей. Имеет место так называемый четырехволновой резонанс, причем для взаимодействующих волн должны выполняться следующие соотношения [43]:

$$2\omega_0 = \omega_+ + \omega_- \quad \text{и} \quad 2\bar{k} = \bar{k}_+ + \bar{k}_-. \quad (11.22)$$

Возмущения с частотами  $\omega_+$  и  $\omega_-$ , для которых выполнено записанное выше условие резонанса и которые можно рассматривать как модуляцию основной волны, нарастают, черпая энергию из основной волны. Модуляционная неустойчивость может приводить к различным эффектам самовоздействия, которые включают в себя самомодуляцию или самофокусировку волны, а также в некоторых случаях приводит к возможности существования волн стационарного профиля, в частности, солитонов огибающей. Формирование волн стационарного профиля в таких пленках в первую очередь связано с совместным влиянием дисперсии МСВ и нелинейности среды в процессе распространения сигнала, которые для наблюдения указанных эффектов должны взаимно компенсироваться.

### 11.3.1. Основные уравнения. Модуляционная неустойчивость.

Первые исследования подобных явлений в неограниченном ферро- и антиферромагнетике с дисперсией, обусловленной обменным взаимодействием, можно отнести к середине 70-х годов. В работе Лукомского В. Г. [42] впервые с использованием метода возмущений было получено нелинейное уравнение для амплитуды огибающей магнитоэлектрического потенциала поверхностной МСВ в виде модельного уравнения Шредингера и показана возможность солитонного решения в случае неустойчивости относительно поперечных возмущений.

Приведем вывод нелинейного волнового уравнения, описывающего развитие модуляционной неустойчивости и эволюцию огибающей при распространении МСВ, на примере ПОМСВ в нормально намагниченной пленке [7, 26]. Рассмотрим одиночную нормально намагниченную пластину ферромагнетика толщиной  $D$  с намагниченностью насыщения  $\overline{M}_0$ . Рассматриваемая пленка бесконечна в направлении осей  $x$  и  $y$ , сверху и снизу ограничена диэлектриком (рис. 11.1). Будем предполагать, что при возбуждении МСВ конечной амплитуды невозможны параметрические процессы первого порядка (см. раздел 11.2).

Для получения нелинейного волнового уравнения воспользуемся уравнением движения вектора намагниченности в виде (11.1).

Уравнение (11.1) необходимо дополнить уравнениями магнитоэлектрики (11.8), которые для рассматриваемого случая можно представить в виде уравнения для магнитоэлектрического потенциала [2, 7]:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = -4\pi \frac{\partial m_y}{\partial y}, \quad (11.23)$$

где  $\psi$  — магнитоэлектрический потенциал, определяющий компоненты ВЧ магнитного поля в уравнении (11.1) ( $h_x = \frac{\partial \psi}{\partial x}$ ,  $h_y = \frac{\partial \psi}{\partial y}$ ).

Используя соотношение (11.4), выражение для компоненты  $M_z$ , ввиду малости величин  $m_x$  и  $m_y$ , можно записать как:

$$M_z \approx M_0 \left( 1 - \frac{m_x^2 + m_y^2}{2M_0^2} \right). \quad (11.24)$$

Для ПОМСВ в свободной ферромагнитной пленке соотношение для магнитостатического потенциала в случае рассматриваемой нормально намагниченной и безграничной в плоскости  $(x, y)$  структуры  $(\partial/\partial x = 0)$  можно представить как [7]:

$$\psi(y, t) = \psi_0(y, t) \left( \cos k_z z + \frac{k}{k_z} \sin k_z z \right) e^{j(\omega t - ky)}, \quad (11.25)$$

где  $\psi_0(y, t)$  — медленно меняющаяся амплитуда магнитостатического потенциала, зависящая от координаты  $y$  и времени  $t$ ;  $k_z$  и  $k$  — поперечное и продольное волновые числа соответственно;  $\omega$  — частота сигнала. Связь между  $k_z$ ,  $k$  и  $\omega$  определяется соответствующим дисперсионным соотношением (11.10), которое в длинноволновом приближении ( $k \ll k_z$  и  $k_z D \ll 1$ ) можно представить следующим образом:

$$k_z^2 \approx \frac{2k}{D} \quad \text{и} \quad \frac{2}{kD} = \frac{\omega_M \omega_H}{\omega^2 - \omega_H^2}. \quad (11.26)$$

С учетом сделанных предположений из уравнения (11.23) для магнитостатического потенциала получим:

$$\psi(y, t) = 4\pi \frac{1}{k_z^2} \frac{\partial m_y}{\partial y}. \quad (11.27)$$

Используя полученное соотношение (11.26) и нелинейное соотношение для продольной составляющей вектора намагниченности (11.24), уравнение (11.1) можно записать в виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 m}{\partial t^2} = & -(\omega_H + j\alpha_0 \omega)^2 m - 2(\omega_H + j\alpha_0 \omega) \omega_M a |m|^2 m + \\ & + (\omega_H + j\alpha_0 \omega) \omega_M \frac{1}{k_z^2} \left( 1 - a \left( 1 - \frac{\omega_M}{\omega_H} \right) |m|^2 \right) \frac{\partial^2 m}{\partial y^2} - \\ & - 2\alpha_0 (\omega_H + j\alpha_0 |m|^2) \frac{\partial m}{\partial t} + \frac{\alpha_0 \omega_M}{k_z^2} (1 - a |m|^2) \frac{\partial^3 m}{\partial y^2 \partial t}, \end{aligned} \quad (11.28)$$

где  $a = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{\omega_H^2}{\omega^2} \right)$ .

При линеаризации уравнения (11.28) ( $|m|^2 = 0$ ) приходим к дисперсионному соотношению (11.26).

Используя для преобразования полученного нелинейного уравнения (11.28) «метод возмущений», развитый, например, в работе [44], во втором порядке малости можно получить уравнение для медленно меняющейся амплитуды магнитостатического потенциала. Аналогичное уравнение можно получить и для других типов магнитостатических волн, в том числе для ПМСВ и ООМСВ. Заметим, что в этом случае  $\partial/\partial x \neq 0$  и  $\partial/\partial y \neq 0$ , в связи с чем для получения нелинейного

уравнения для этих типов волн стандартно пользуются приближениями геометрической оптики [13], а именно «методом огибающих». В общем виде нелинейное уравнение, описывающее эволюцию огибающей МСВ в продольном и поперечном направлениях в ферромагнитной пленке, имеет следующий вид [13]:

$$j \left( \frac{\partial}{\partial t} + V \frac{\partial}{\partial y} \right) \varphi + \frac{A_x}{2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{A_y}{2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - B |\varphi|^2 \varphi - j \alpha \varphi = 0, \quad (11.29)$$

где коэффициенты зависят от типа волны, соответственно, и параметров пленок,  $V = \partial \omega / \partial k_y$  — групповая скорость МСВ в направлении распространения  $y$ ;  $A_y = \partial^2 \omega / \partial^2 k_y$  — коэффициент, характеризующий дисперсионное расплывание волны в направлении  $y$ ;  $A_x = \partial^2 \omega / \partial^2 k_x$  — коэффициент, характеризующий дифракционное расплывание в направлении  $x$ ;  $B = \partial \omega / \partial |\varphi|^2$  — коэффициент нелинейности;  $k_{x,y}$  — составляющие вектора  $\vec{k}$  вдоль осей  $x$  и  $y$  соответственно;  $\alpha$  — коэффициент затухания волны  $\alpha = \alpha_0 \omega$ .

Уравнение (11.29) является нелинейным параболическим уравнением Шредингера, которое описывает эволюцию амплитуды комплексной огибающей плоской монохроматической волны в среде с кубической нелинейностью [43, 44]. Это уравнение (11.29) является одним из основных уравнений «нелинейной физики». Оно описывает широкий класс нелинейных эффектов в различных областях физики, в частности, эволюцию оптических волн в нелинейных кристаллах, волн на поверхности жидкости, ленгмюровских волн в плазме, тепловых волн в твердых телах и др. (см., например, [45, 47]).

Нелинейное уравнение (11.29) описывает динамику огибающей высокочастотного волнового пакета, т.е. модуляцию волны. Последняя может быть связана с воздействием внешних сил или полей (вынужденная модуляция), а может возникать самопроизвольно в результате развития разного рода неустойчивостей (самомодуляция), что имеет место в рассматриваемом случае. Нелинейные явления и эффекты, связанные с модуляцией волн, очень разнообразны [36, 37]. Первая попытка изучения модулированных нелинейных волн была предпринята Дж. Уиземом в 60-х годах [44]. Было показано, что при распространении волн в нелинейной среде имеет место самовоздействие волн, т.е. изменение различных характеристик волны при изменении ее амплитуды. Появление эффектов самовоздействия нелинейных волн применительно к волновым процессам, описываемым уравнением (11.29), является следствием развития модуляционной неустойчивости относительно малых возмущений и приводит к появлению волн-сателлитов с близкими к несущей частотами.

Модуляционная неустойчивость в этом случае в нелинейных средах с дисперсией возможна только при определенном соотношении знаков нелинейности и дисперсии групповой скорости, что отражает, так называемый, критерий Лайтхилла [48].

Так МН относительно продольных возмущений применительно к уравнению (11.29) имеет место, если:

$$A_y B < 0. \quad (11.30)$$

Решение (11.29) будет также неустойчиво относительно поперечных возмущений, если:

$$A_x B < 0. \quad (11.31)$$

Строго проблема эволюции локализованного в пространстве начального возмущения, исходя из уравнения (11.29), решается с помощью метода обратной задачи рассеяния [49]. Решение уравнения (11.29) для ПОМСВ в виде уединенных стационарных волн модуляции (волн огибающей) имеет вид солитоноподобного импульса, затухающего во времени [40, 43]:

$$\varphi(y, t) = \varphi_0 \exp(-4\alpha t) \frac{\exp \left[ j \left( \frac{(1 - \exp(-4\alpha t))}{4\alpha} B \frac{\varphi_0^2}{2} + V^2 \right) t + jV \right]}{\operatorname{ch} \left[ \sqrt{\left| \frac{B}{A} \right|} \varphi_0 \exp(-4\alpha t) [y - Vt] \right]}. \quad (11.32)$$

где  $\varphi_0$  — амплитуда солитона;  $V$  — скорость солитона, причем амплитуда и скорость являются независимыми переменными.

**11.3.2. Нелинейные эффекты самовоздействия.** Анализ коэффициентов НУШ для различных типов МСВ показывает, что ПОМСВ неустойчивы в направлении распространения; ПМСВ устойчивы в продольном направлении (возможно как отсутствие стационарных состояний, так и решение в виде «темных солитонов») и неустойчивы в поперечном (возможна нелинейная самоканализация волны); ООМСВ неустойчивы в обоих направлениях (возможно образование двумерных солитонов огибающей) [35–42].

Основными нелинейными эффектами, к которым может приводить развитие модуляционной неустойчивости в этом случае, являются: образование уединенных волн (солитонов огибающей), либо самомодуляция огибающей при амплитуде сигнала выше некоторого порогового значения (с дальнейшим переходом к хаотической динамике при увеличении амплитуды сигнала). Проиллюстрируем эти основные нелинейные эффекты на основе численного исследования с использованием уравнения (11.29) с соответствующими коэффициентами.

Для более детального описания эволюции волнового пакета в нелинейных диспергирующих средах в литературе принято вводить в рассмотрение некоторые характерные величины. Предположим, что минимальные размеры продольных и поперечных возмущений не превышают, соответственно, длину импульса  $VT_{\text{имп}}$  ( $T_{\text{имп}}$  — длительность начального импульса). Тогда пороговое значение амплитуды входного сигнала  $|\varphi_0^{\text{пор}}|^2$ , необходимое для возникновения МН относительно про-

дольных возмущений, можно оценить как  $|\varphi_0^{\text{пор}}|^2 = \frac{\pi^2 A_y}{2V^2 T_{\text{имп}}^2 B}$ . Так, например, если положить  $D = 20$  мкм,  $L = 5$  мм,  $T_{\text{имп}} = 20$  нс и рассмотреть пленку железо-иттриевого граната с намагниченностью насыщения  $M_0 = 140$  Гс, то значение пороговой мощности  $P^{\text{пор}} \sim 0,4$  мВт. Можно также ввести следующие характерные масштабы: нелинейная длина  $L_n = \frac{V}{B|\varphi_0|^2}$  или длина, на которой действие нелинейности приводит к возрастанию амплитуд возмущений в  $e$  раз; длина дисперсионного расплывания  $L_{\text{dis}} = T_{\text{имп}}^2 \frac{V^3}{A}$ , т. е. расстояние, на котором ширина импульса удваивается из-за влияния дисперсии групповой скорости; диссипативная длина  $L_d = V/\alpha$ , характеризующая влияние диссипации в процессе волновой эволюции. В случае  $L_n \sim L_{\text{dis}}$  имеет место формирование стационарных состояний, соответствующих, при импульсном возбуждении, формированию солитонов огибающей. В диссипативных средах для возникновения эффектов самовоздействия необходимо, чтобы  $|\varphi|^2 \gg \alpha/2B$ .

*Импульсное возбуждение.* Характерный вид дисперсионной характеристики для чисто дипольной ПОМСВ представлен на рис. 11.3 (кривая 1). В приведенных ниже результатах расчета значение рабочей частоты ( $f = 2,6$  ГГц) было выбрано вблизи нижней границы полосы пропускания с целью увеличения групповой скорости, что приводит к уменьшению влияния потерь на эволюцию импульса. Коэффициенты в уравнении (11.29) на данной частоте имеют следующие значения:  $V = 1,5 \cdot 10^7$  см/с,  $A = -3,6 \cdot 10^4$  см<sup>2</sup>/с,  $B = 3 \cdot 10^{10}$  с<sup>-1</sup>,  $\alpha = 3 \cdot 10^6$  с<sup>-1</sup>. Пороговое значение амплитуды входного сигнала, необходимое для начала процессов самовоздействия, для приведенных выше значений параметров равно  $\varphi_0^{\text{пор}} \approx 0,01$ .

Необходимо подчеркнуть, что формирование МСВ солитонов происходит аналогично формированию оптических солитонов в нелинейных оптических волноводах [47]. Основные отличия при распространении МСВ связаны с существенным влиянием диссипации на волновую эволюцию из-за малых длин распространения и связанной с этим необходимостью учета процесса «входа» импульса МСВ в пленку на начальных стадиях процесса эволюции [50].

Начальные условия в этом случае необходимо задавать в виде:

$$\varphi(y, 0) = \begin{cases} \varphi_0 \zeta(0), & y = 0, \\ 0, & 0 < y < L. \end{cases} \quad (11.33)$$

Граничные условия задавались как:

$$\begin{aligned} \varphi(0, t) &= \begin{cases} \varphi_0 \zeta(t), & 0 < t \leq T_{\text{имп}}, \\ 0, & T_{\text{имп}} < t \leq t_{\text{набл}}. \end{cases} \\ \varphi(L, t) &= 0, \quad 0 < t \leq t_{\text{набл}}, \end{aligned} \quad (11.34)$$

где  $\zeta(t)$  — функция изменения амплитуды волны на входе во времени, которая при приведенных ниже расчетах задавалась в виде «гауссианы»  $\zeta(t) = \exp \left[ -16 \frac{(t - T_{\text{имп}}/2)^2}{T_{\text{имп}}^2} \right]$  либо прямоугольника

$$\zeta(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t \leq T_{\text{имп}} \\ 0, & T_{\text{имп}} < t \leq t_{\text{набл}} \end{cases}, \quad t_{\text{набл}} — \text{ время наблюдения.}$$

В последнем случае при  $T_{\text{имп}} = t_{\text{набл}}$  граничные условия соответствуют случаю непрерывного возбуждения системы, а при  $T_{\text{имп}} < t_{\text{набл}}$  реализуется импульсное возбуждение структуры.

Поведение огибающей амплитуды сигнала ПОМСВ в случае импульсного возбуждения системы показано на рис. 11.8. Приведены формы временного импульса в различных выходных плоскостях, рассчитанные из уравнения (11.29) при различных значениях  $\varphi_0$ . При  $\varphi_0 < 0,01$  ( $\varphi_0 < \varphi_0^{\text{пор}}$ ) порог солитонообразования не достигнут и образование солитона не происходит, в эволюции импульса основную роль играет дисперсионное расплывание волны. С ростом амплитуды волны на входе  $\varphi_0$  расплывание импульса уменьшается за счет компенсации нелинейностью дифракционного расплывания и при  $\varphi_0 = 0,015$  (рис. 11.8, а) указанные эффекты полностью компенсируют друг друга — наблюдается волноводное распространение импульса. При  $\varphi_0 = 0,015, 0,02$  (рис. 11.8, а, б) имеет место образование одного солитона, при увеличении амплитуды входного сигнала увеличивается число солитонов, на которые разбивается входной импульс (см. кривые

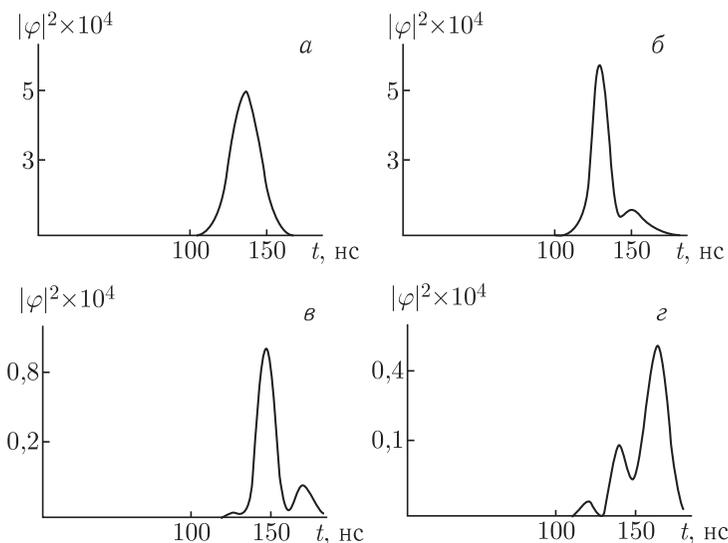


Рис. 11.8. Форма временного импульса в различных выходных плоскостях на расстоянии  $y = 1,5$  см при:  $\varphi_0 = 0,015$  (а);  $\varphi_0 = 0,02$  (б);  $\varphi_0 = 0,025$  (в);  $\varphi_0 = 0,03$  (г) ( $T_{\text{имп}} = 100$  нс)

на рис. 11.8, в и г), в частности, при  $\varphi_0 = 0,3$  (рис. 11.8, г) наблюдается образование трех солитоноподобных формирований. Учет диссипации в среде приводит к уменьшению амплитуды импульса с течением времени вдоль направления распространения.

*Непрерывный сигнал.* В случае возбуждения системы непрерывным сигналом в нелинейной дисперсионной среде развитие модуляционной неустойчивости может привести к эффектам самомодуляции амплитуды огибающей МСВ, связанной с ростом волны модуляции. Наблюдение процессов, связанных с самомодуляцией нелинейных МСВ, возможно лишь в области сильной дисперсии (см., например, работы [38, 39]). Области сильной дисперсии имеют место, если обменное взаимодействие наравне с дипольным принимает участие в формировании спектра МСВ [2]. Учет обменного взаимодействия, а именно учет взаимодействия длинноволновых возмущений (магнитоэлектрических волн) со спиновыми волнами, длина которых  $\lambda \sim a$ , необходим в тех случаях, когда размер тела (в каком-либо одном измерении, в нашем случае толщина ферромагнитной пленки  $D$ ) становится сравнимым или меньше, чем  $\lambda$ . Это условие можно записать как  $D \approx \frac{1}{k} = \sqrt{\frac{\gamma \Lambda a^2}{\omega}}$ ,  $\Lambda = \beta M_0$ , где  $k$  — такое волновое число, при котором вклад неоднородного обменного взаимодействия в частоту спиновых волн становится существенным [2]. Оценка для пленки железо-иттри-

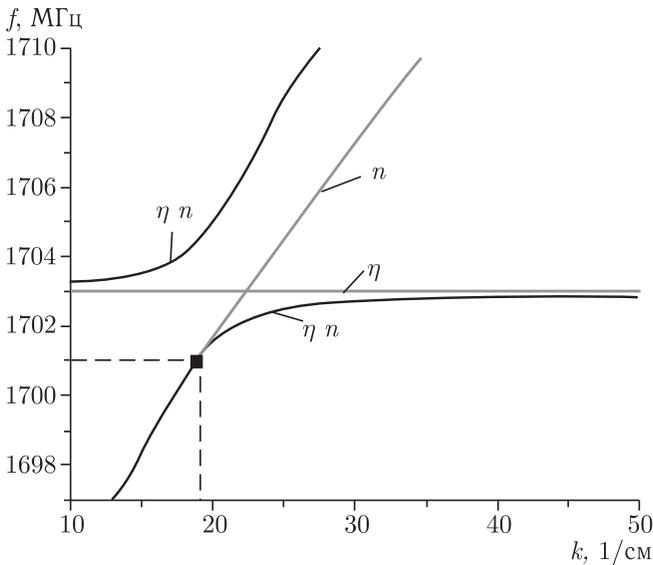


Рис. 11.9. Дисперсионные кривые для ПОМСВ в пленке ЖИГ (показана область дипольно-обменной «щели» при взаимодействии обменной моды с номером  $\eta = 3$  и дипольной моды  $n = 1$ ),  $D = 5$  мкм,  $H_0 = 2350$  Э,  $M_0 = 140$  Гс,  $\Lambda = 5 \cdot 10^7$  см<sup>-1</sup>

евого граната и для сантиметрового диапазона волн дает, что для пленок толщиной  $D \sim 10\text{--}5$  см учет эффективных обменных полей уже является необходимым.

Дисперсионная характеристика дипольно-обменных ПОМСВ для пленки ЖИГ со свободными поверхностными спинами приведена на рис. 11.9. Из рис. 11.9 видно, что влияние обменного взаимодействия приводит к тому, что в области синхронизма дипольной моды с номером  $n$  и обменной моды с номером  $\eta$  имеет место «рассталкивание» дипольной и обменной дисперсионных кривых и образование дипольно-обменной «щели» с сильной дисперсией.

Выберем рабочую частоту возбуждения в области сильной дисперсии вблизи дипольно-обменной «щели» на нижней ветви дисперсионной кривой (точка на рис. 11.9), что необходимо для выполнения критерия Лайтхилла (11.30). Параметры в уравнении (11.29) при выбранной частоте  $f = 1,701$  ГГц имеют следующие значения:  $V = 4 \cdot 10^4$  см/с,  $A = -1,5 \cdot 10^4$  см<sup>2</sup>/с,  $B = 3 \cdot 10^{10}$  с<sup>-1</sup>,  $\alpha = 3 \cdot 10^6$  с<sup>-1</sup>.

Результаты численного моделирования уравнения (11.29), иллюстрирующие развитие модуляционной неустойчивости в рассматриваемом случае, представлены на рис. 11.10. При амплитуде входного сигнала меньше порогового значения ( $\varphi_0 = 0,01$ ) модуляция волны огибающей отсутствует (рис. 11.10, а). При увеличении амплитуды входного сигнала (до  $\varphi_0 = 0,024$ ) амплитуда огибающей на приемной антенне начинает осциллировать с некоторой частотой (см. рис. 11.10, б). Дальнейшее увеличение амплитуды приводит к росту частоты модуляции от 2,5 МГц при  $\varphi_0 = 0,024$  до 6,8 МГц при  $\varphi_0 = 0,03$ . В фазовом пространстве подобному поведению соответствует предельный цикл. При  $\varphi_0 = 0,034$  одночастотная периодическая модуляция теряет устойчивость и в спектре появляется две частотные составляющие на частотах  $F = 4,5$  МГц и  $F = 9$  МГц (см. рис. 11.10, в). При дальнейшем увеличении амплитуды входного сигнала модуляционный спектр усложняется и в фазовом пространстве наблюдается движение с периодом  $4T$  (рис. 11.10, г), при  $\varphi_0 = 0,04$  огибающая демонстрирует хаотическое поведение, в фазовом пространстве имеет место странный аттрактор, а спектр сигнала становится сплошным (см. рис. 11.10, д). Данная динамика волновой эволюции при изменении амплитуды входного сигнала аналогична известному в нелинейной динамике переходу к хаосу по сценарию Фейгенбаума через последовательность удвоения периода [39]. Можно заметить, что в данном случае имеет место довольно короткий каскад удвоений периода, что нередко наблюдается для распределенных систем.

При изменении значения групповой скорости и дисперсии можно наблюдать иной сценарий перехода к хаотическому поведению при увеличении амплитуды входного сигнала. В частности показано (см., например, [38]), что при  $V = 4 \cdot 10^5$  см/с,  $A = -1,5 \cdot 10^5$  см<sup>2</sup>/с,  $B = 3 \cdot 10^{10}$  с<sup>-1</sup> наблюдается переход к хаотической модуляции по известному сценарию Рюэля–Такенса.

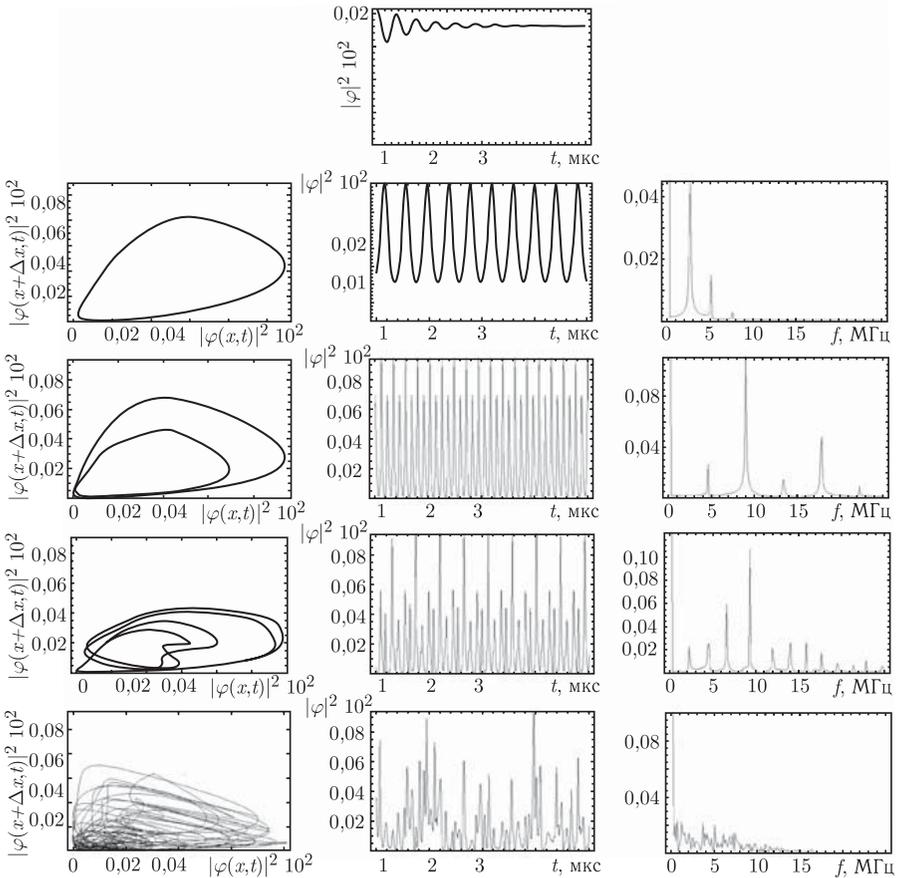


Рис. 11.10. Фазовые портреты, временные реализации эволюции огибающей ПОМСВ и спектры мощности сигнала при разных значениях амплитуды входного сигнала на расстоянии 0,5 см от входной антенны:  $\varphi_0 = 0,01$  (а),  $\varphi_0 = 0,024$  (б);  $\varphi_0 = 0,034$  (в);  $\varphi_0 = 0,035$  (г);  $\varphi_0 = 0,04$  (д)

**11.3.3. Результаты экспериментального исследования.** Первые результаты по экспериментальному наблюдению солитонов огибающей ПОМСВ в тонких ферромагнитных пленках были получены Калиникосом Б. А. с соавторами и приведены в работе [35]. Наблюдалось формирование солитонов огибающей в пленках с закрепленными спинами, и при этом частота несущей входного сигнала лежала в области обменных «щелей» дипольно-обменного спектра спиновых волн. В работе [37] при наблюдении распространения нелинейных, чисто дипольных ПОМСВ изучалась зависимость интегральной мощности выходного импульса МСВ от мощности входного сигнала. Эксперименты показали, что потери при распространении коротких импульсов ( $T_{\text{имп}} > 70$  нс), имеющих амплитуду выше некоторого порога, оказы-

ваются меньше, чем для длинных импульсов такой же амплитуды и меньше, чем потери при распространении МСВ в линейном режиме. Полученные результаты объяснялись формированием солитонов огибающей. Результаты по наблюдению профилей солитонов огибающей чисто дипольной ПОМСВ в пленках со свободными поверхностными спинами приведены в работе [36]. Наблюдалось формирование солитонов огибающей в пленках ЖИГ толщиной 7,2 мкм с намагниченностью  $M_0 = 140$  Гс, помещенных во внешнее магнитное поле  $H_0 = 3744$  Э. Возбуждение осуществлялось прямоугольными импульсами длительностью  $T_{\text{имп}} = 5-50$  нс на частотах входного сигнала 5,6–6,0 ГГц, близких к нижней границе полосы пропускания. Основные параметры модели в этом случае имели следующие значения:  $V = 4,76 \cdot 10^6$  см/с,  $A = -2,9 \cdot 10^3$  см<sup>2</sup>/с,  $B = 3 \cdot 10^{10}$  с<sup>-1</sup>. Формирование солитонов огибающей ПОМСВ наблюдалось в [36] при увеличении мощности входного сигнала от 0,16 Вт до 2,8 Вт. Результаты исследования, приведенные в этой работе, показаны на рис. 11.11. В этом случае, как и при численном анализе с использованием нелинейного уравнения Шредингера (11.29), при мощности входного сигнала ниже некоторого порогового значения, которое с достаточной точностью можно оценить, распространение импульса линейно (см. рис. 11.11, а). Увеличение входной мощности приводит к возможности формирования солитона огибающей и дальнейшему увеличению числа наблюдаемых солитонов ПОМСВ (рис. 11.11, в–г).

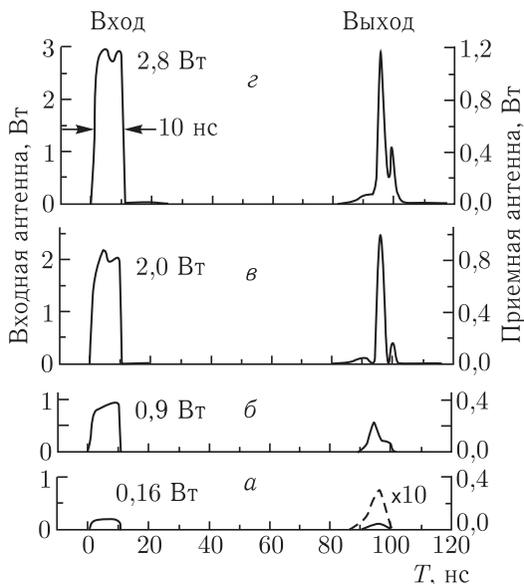


Рис. 11.11. Результаты лабораторного эксперимента: форма импульса ПОМСВ на входной и приемной антенне для различных значений мощности входного сигнала ( $D = 7,2$  мкм,  $H_0 = 3744$  Э,  $f = 5,6$  ГГц,  $T_{\text{имп}} = 10$  нс) [36]

Самомодуляция МСВ при возбуждении непрерывным сигналом наблюдалась экспериментально в работах [38, 39]. В частности, в [39] наблюдался переход в хаотический режим и возникновение странного аттрактора после разрушения двухчастотного периодического тора при распространении дипольно-обменных ПОМСВ. В эксперименте ис-

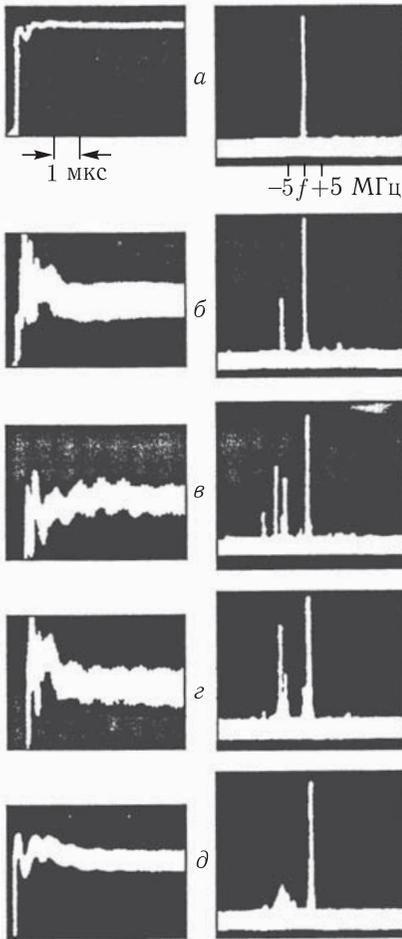


Рис. 11.12. Результаты лабораторного эксперимента: (осциллограммы (слева) и спектрограммы (справа) сигнала ( $T_{\text{имп}} = 8$  мкс) на выходе макета при разных значениях входной мощности: а) 5 мВт; б) 14 мВт; в) 16 мВт; г) 20 мВт; д) 25 мВт) [38]

пользовались пленки с параметрами  $D = 3,5-7$  мкм,  $\Delta H = 0,2-0,5$  Э,  $M_0 = 140$  Гс, с закрепленными поверхностными спинами, ориентации III, намагниченные по нормали к поверхности. На входную антенну подавался сигнал частоты  $f = 3453$  МГц, модулированный прямоугольными импульсами с длительностью  $T_{\text{имп}} = 5-20$  мкс и с частотой повторения 100 Гц. Мощность сигнала увеличивалась от 0,1 до 50 мВт. На рис. 11.12 показаны осциллограммы и спектрограммы сигнала на выходе экспериментального макета при разных значениях входной мощности  $P^{\text{вх}}$ . Видно, что при превышении величины входной мощности порогового уровня ( $P^{\text{вх}} = 14$  мВт — рис. 11.12, б) волна в пленке становится модуляционно неустойчивой, в спектре выходного сигнала появляется модуляционная составляющая. При увеличении мощности (см. рис. 11.12, в) в спектре появляется вторая модуляционная составляющая, несоизмеримая с первой, и составляющая на комбинационной частоте. Затем спектр расширяется (рис. 11.12, г), а при  $P^{\text{вх}} = 25$  мВт возникает широкий пик хаотической модуляции (рис. 11.12, д). Качественная картина модуляционной неустойчивости в этом случае соответствует сценарию Рюэля–Такенса. В работе [38] был зафиксирован переход к хаотическим модуляциям амплитуды огибающей через последовательность удвоения периода.

Таким образом, приведенные экспериментальные результаты в основном подтверждают результаты численного моделирования, изложенные выше.

## 11.4. Нелинейные магнитоэлектронные волны в связанных ферромагнитных пленках

**11.4.1. Модель и система уравнений для амплитуд огибающих.** Использование связи значительно расширяет функциональные возможности электродинамических систем, и в радиофизике все более широкое применение находят связанные структуры в виде длинных линий, волноводов, периодических замедляющих систем и т. д. В качестве другого класса нелинейных линий передачи на МСВ с ферромагнитными пленками могут рассматриваться слоистые структуры, в которых ферромагнитные пленки разделены диэлектрическими промежутками [50–53]. В частности, если мы имеем две ферромагнитные пленки, то подобная структура может рассматриваться как две связанные линии передачи, в каждой из которых распространяется магнитоэлектронная волна.

Рассмотрим структуру, которая представляет собой два тонких ферромагнитных слоя 1 и 2 толщиной  $D_{1,2}$  и с намагниченностью насыщения  $M_{0,2}$  соответственно, разделенных диэлектрическим промежутком толщины  $d$  (рис. 11.13). Структура бесконечна в направлении осей  $x$  и  $y$ , постоянное магнитное поле  $\vec{H}_0$  приложено по нормали к поверхности слоев. В этом случае в пленках будут распространяться прямые объемные МСВ (см. раздел 11.1).

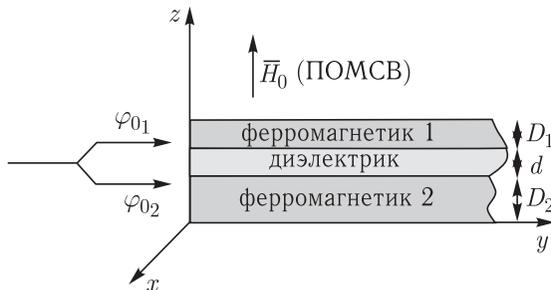


Рис. 11.13. Схематическое изображение исследуемой модели

При рассмотрении данной структуры предполагается [50, 51], что взаимное влияние магнитоэлектронных волн в каждой из пленок осуществляется через высокочастотные магнитные поля (связь носит чисто электродинамический характер), что позволяет в уравнениях движения для вектора намагниченности и уравнениях магнитоэлектроники, записанных для каждого слоя 1 и 2, эффективные магнитные поля  $\vec{H}_{1,2}$

в каждом слое представить следующим образом:

$$\bar{H}_{1,2} = \bar{H}_{1,2}^0 + \bar{h}_{1,2} + K\bar{h}_{2,1}, \quad (11.35)$$

где  $\bar{h}_{2,1}$  — переменные ВЧ магнитные поля;  $\bar{H}_{1,2}^0$  — постоянные компоненты;  $K$  — коэффициент связи между слоями. Значение  $K$  можно рассчитать на основе линейной теории (см., например, [7, 44]), и тогда  $K = \exp(-2kd)$ , где  $k$  — постоянная распространения волны в системе.

Допустим также, что нелинейность каждой пленки определяется только величиной переменной намагниченности этой пленки, т. е. нелинейность, обусловленная изменением продольной компоненты магнитного момента  $M_{z1,2}$ , для каждого слоя в соответствии с (11.24) задается в виде [7]:

$$M_{z1,2} \approx M_{01,2}(1 - |m_{1,2}|^2), \quad (11.36)$$

где  $m_{1,2}$  — переменные намагниченности в каждой из пленок, значения которых определяются ВЧ магнитными полями как одной, так и другой пленки.

Получение системы нелинейных уравнений для МСВ в рассматриваемой связанной структуре можно проводить аналогично случаю одиночной пленки, описанному выше в разделе 11.3.

Нулевой порядок метода возмущений приводит к дисперсионному соотношению для связанных ПОМСВ, соответствующие зависимости показаны на рис. 11.14. Важной особенностью связанных структур является расщепление дисперсионной кривой, соответствующей волне в одиночной пленке, на две, т. е. возбуждение на одной частоте  $\omega$  двух нормальных волн — быстрой и медленной волн с различными волновыми числами  $k_{6,м}$ . Отметим, что во всей полосе пропускания обе волны распространяются с разными фазовыми скоростями, что приводит к интерференции этих волн и, в линейном случае, к периодической перекачке энергии из одной волны в другую.

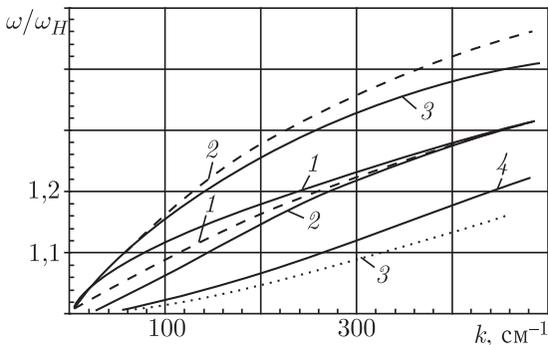


Рис. 11.14. Дисперсионные зависимости для быстрых (сплошные кривые 1, 3) и медленных мод (сплошные кривые 2, 4) связанной структуры, пунктирные кривые 1–3 соответствуют дисперсионной зависимости для одиночной пленки

Выписывая члены первого порядка малости при использовании метода возмущений, можно получить стандартную систему линейных волновых уравнений для амплитуд огибающих волн, описывающую линейную перекачку сигнала между связанными линиями [36]. Длина, на которой происходит линейная перекачка сигнала из одной линии в другую, определяется как  $L_{\text{лин}} = \frac{2\pi}{k_6 - k_M}$ . При приближении частоты к нижней границе полосы пропускания  $L_{\text{лин}}$  увеличивается, поэтому далее, при рассмотрении нелинейных процессов, будем предполагать, что длина системы меньше длины линейной перекачки.

Учитывая члены, соответствующие второму порядку малости, можно получить систему связанных нелинейных волновых уравнений для комплексных огибающих амплитуд быстрой и медленной волн в структуре. Эту систему уравнений можно представить в следующем виде [50, 51, 53]:

$$\begin{cases} j\left(\frac{\partial}{\partial t} + V_6 \frac{\partial}{\partial y}\right)\varphi_6 + \frac{A_6}{2} \frac{\partial^2 \varphi_6}{\partial y^2} - \\ \quad - \frac{B_{66}}{4}(|\varphi_6|^2 + |\varphi_M|^2)\varphi_6 - \frac{B_{6M}}{4}(\varphi_6\varphi_M^* + \varphi_M\varphi_6^*)\varphi_6 - j\alpha_6\varphi_6 = 0, \\ j\left(\frac{\partial}{\partial t} + V_M \frac{\partial}{\partial y}\right)\varphi_M + \frac{A_M}{2} \frac{\partial^2 \varphi_M}{\partial y^2} - \frac{B_{MM}}{4}(|\varphi_M|^2 + |\varphi_6|^2)\varphi_M - \\ \quad - \frac{B_{M6}}{4}(\varphi_M\varphi_6^* + \varphi_6\varphi_M^*)\varphi_6 - j\alpha_M\varphi_M = 0. \end{cases} \quad (11.37)$$

В уравнениях (11.37) введены следующие обозначения  $V_{6,M} = \frac{\partial\omega}{\partial k_{6,M}}$ ,  $A_{6,M} = \frac{\partial^2\omega}{\partial^2 k_{6,M}}$ ,  $B_{66} = \frac{\partial\omega}{\partial|\varphi_6|^2}|_{k=k_6}$ ,  $B_{M6} = \frac{\partial\omega}{\partial|\varphi_6|^2}|_{k=k_M}$ ,  $B_{6M} = \frac{\partial\omega}{\partial|\varphi_M|^2}|_{k=k_6}$ ,  $B_{MM} = \frac{\partial\omega}{\partial|\varphi_M|^2}|_{k=k_M}$  — коэффициенты, характеризующие групповые скорости, дисперсию и нелинейность, соответственно, и зависящие от параметров пленок и величины связи, причем индекс «б» относится к быстрой волне, а индекс «м» — к медленной.

Первое уравнение системы (11.37) описывает эволюцию огибающей быстрой моды, а второе уравнение — медленной моды. При этом комплексные амплитуды волн в каждой из пленок  $\varphi_{1,2} = m_{1,2} \exp[j(\omega t - k_{1,2}y)]$ , где  $k_{1,2}$  — постоянные распространения в пленках связаны с  $\varphi_{6,M}$  соотношениями  $\varphi_{6,M} = N(\varphi_{1,2} \pm R_{1,2}\varphi_{1,2})$ , где  $N$  и  $R_{1,2}$  — коэффициенты, значения которых определяются относительными параметрами пленок (если пленки одинаковые, то  $N = R_{1,2} = 1$ ).

Аналогичная система уравнений может быть получена также для ПМСВ и ООМСВ с использованием приближений геометрической оптики и «метода огибающей» на основе нелинейных дисперсионных соотношений для связанных МСВ [53]. Получаемая таким способом система совпадает с системой (11.37), если пренебречь в ней комплекс-

но сопряженными членами. Оценки показывают, что это можно делать, если связь между пленками достаточно сильная.

Если пленки одинаковые, то в (11.37)  $B_{66} = B_{6m} = B_6$ , а  $B_{mm} = B_{m6} = B_m$ . При  $d \rightarrow \infty$  система (11.37) распадается на два несвязанных НУШ вида (11.29) с коэффициентами, соответствующими несвязанным пленкам 1 и 2, а при  $d = 0$  получим уравнение с коэффициентами, соответствующими одиночной пленке удвоенной толщины.

Полученная система (11.37) для описания связанных волн в ферромагнитных пленках аналогична нелинейным уравнениям для связанных волн в других нелинейных средах, в частности, подобная система уравнений используется для анализа нелинейной динамики поведения оптических сигналов [47]. Однако применительно к ферромагнитным пленкам анализ нелинейных связанных МСВ имеет ряд существенных особенностей, которые необходимо учитывать. Прежде всего, отметим, что коэффициенты в уравнениях (11.37), в отличие от уравнения (11.29), сильно зависят от связи и могут меняться в широких пределах. Связь приводит: во-первых, к изменению коэффициентов дисперсии (возможно изменение знака при изменении связи), коэффициентов нелинейности, групповой скорости, во-вторых, к появлению в уравнениях перекрестных нелинейных членов.

**11.4.2. Влияние связи на модуляционную неустойчивость в связанной структуре.** Указанные выше особенности для связанной системы, в первую очередь, сказываются на условиях возникновения модуляционной неустойчивости при прохождении МСВ. В случае возбуждения одной из нормальных волн в структуре ( $\varphi_{0,6m} \neq 0$ ,  $\varphi_{0,6} = 0$ ) система (11.37) распадается на два несвязанных НУШ для каждой из нормальных волн, с коэффициентами, зависящими от величины связи. Условие модуляционной неустойчивости в этом случае будет иметь вид:

$$A_{6,m} B_{66,mm} < 0. \quad (11.38)$$

Анализ коэффициентов в уравнениях (11.37) показывает, что действие связи не приводит к смене знаков коэффициентов нелинейности, а именно  $B_{66,mm} < 0$  для ПОМСВ и  $B_{66,mm} > 0$  для ПМСВ и ООМСВ при любой величине связи. Однако возможно изменение знаков коэффициентов дисперсии  $A_{6,m}$  для одной из нормальных мод в определенной области частот. Это говорит о том, что в этих областях выполняется (либо нарушается) критерий модуляционной неустойчивости для одной из нормальных мод и она становится неустойчивой (устойчивой), в отличие от данного типа МСВ в одиночной пленке.

При возбуждении двух нормальных мод ( $\varphi_{0,6m} \neq 0$ ,  $\varphi_{0,6} \neq 0$ ), как показано в [46, 54], в отличие от одиночного уравнения Шредингера, решение которого является модуляционно неустойчивым только при определенном соотношении знаков коэффициентов нелинейно-

сти и дисперсии, решение связанной системы нелинейных уравнений неустойчиво, если выполняется следующее соотношение:

$$C^2 > h_{\delta} h_m, \quad (11.39)$$

где  $h_{\delta, m} = A_{\delta, m} \chi_{\delta, m}^2 (A_{\delta, m} \chi_{\delta, m}^2 + B_{\delta, m} \varphi_{0, m}^2)$ ,  $C^2 = \chi_{\delta}^2 \chi_m^2 A_{\delta} A_m B_{\delta} B_m \varphi_{0, \delta}^2 \varphi_{0, m}^2$ ,  $\chi_{\delta, m}$  — волновые числа возмущений.

Анализ показывает, что при любом соотношении параметров можно всегда найти такие  $\chi_{\delta, m}$ , для которых условие (11.39) будет выполняться. Применительно к рассматриваемой задаче это означает, что при возбуждении в связанной структуре одновременно двух мод решение системы уравнений (11.37) будет неустойчиво даже в том случае, если решение каждого из уравнений в отдельности устойчиво, т.е. МСВ являются модуляционно неустойчивыми в структуре при возбуждении двух нормальных волн независимо от направления магнитного поля (возбуждение ПОМСВ или ПМСВ). Данный вид модуляционной неустойчивости, возникающей при одновременном распространении двух модуляционно устойчивых волн, связанных через нелинейность, называется кросс-модуляцией [46, 54].

**11.4.3. Влияние связи на нелинейные эффекты самовоздействия.** Остановимся на основных характерных особенностях распространения различного типа нелинейных МСВ в линии передачи на основе связанных ферромагнитных структур по сравнению с волнами в одиночной пленке.

*Прямые объемные МСВ.* В результате численного исследования на основе уравнений (11.37) показано, что при импульсном возбуждении ПОМСВ в структуре из двух ферромагнитных пленок (при величине сигнала больше некоторого порогового значения  $\varphi_0^{\text{пор}}$ ) имеют место следующие основные особенности [50, 51].

При возбуждении одной волны в такой структуре характер эволюции полностью определяется зависимостью коэффициентов дисперсии и групповых скоростей в нелинейных уравнениях от величины связи. В зависимости от характера возбуждения (возбуждение быстрой или медленной моды) и величины связи ПОМСВ может быть как устойчива, так и неустойчива относительно продольных возмущений (при  $\varphi_0 > \varphi_0^{\text{пор}}$  возможно либо формирование уединенной волны, либо расплывание начального профиля (см. результаты на рис. 11.15)). В одиночной пленке ПОМСВ всегда неустойчива, т.е. при  $\varphi_0 > \varphi_0^{\text{пор}}$  имеет место формирование уединенной волны огибающей. При одновременном возбуждении двух волн в связанной структуре волна является неустойчивой независимо от величины параметра  $d$ , и имеет место формирование уединенной волны огибающей на выходе со скоростью и амплитудой больше, чем в одиночной пленке.

Особенности распространения МСВ при возбуждении непрерывным сигналом покажем на примере дипольно-обменных ПОМСВ [52], для

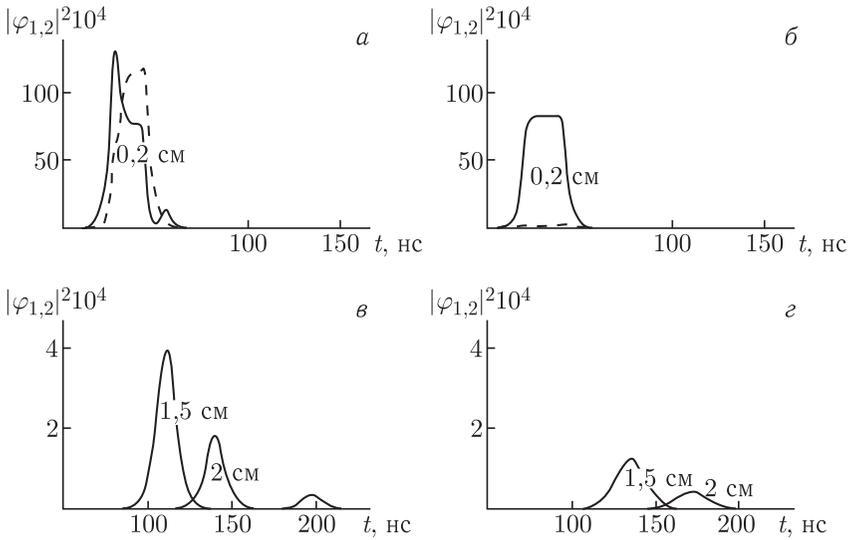


Рис. 11.15. Форма огибающей импульса в пленке 1 (сплошные кривые) и в пленке 2 (пунктирные кривые) связанной структуры при возбуждении обеих мод при  $\varphi_0 = 0,15$  (а) и  $\varphi_0 = 0,1$  (б); медленной моды при  $\varphi_0 = 0,15$  (в); быстрой моды при  $\varphi_0 = 0,15$  (з)

которых в одиночных пленках при  $\varphi_0 > \varphi_0^{\text{пор}}$  имеет место самомодуляция на частоте  $F$ .

Как следует из результатов численного расчета, самомодуляция дипольно-обменной ПОМСВ в связанной структуре наблюдается независимо от способа возбуждения и величины связи, т. к. учет обменного взаимодействия приводит к тому, что коэффициенты дисперсии быстрой и медленной волн в связанной структуре не меняют знак. Частота модуляции зависит от величины связи, как показано на рис. 11.16, причем частота растет с увеличением связи при возбуждении только быстрой волны ( $F_6$ ), а при возбуждении только медленной волны ( $F_M$ ), либо двух волн ( $F_{6M}$ ) — при увеличении  $d$  частота сначала растет, а затем убывает.

Влияние связи и способа возбуждения на характер хаотической модуляции при увеличении амплитуды входного сигнала показано на рис. 11.17. При возбуждении только быстрой волны имеет место переход к регулярному поведению огибающей с увеличением связи (рис. 11.17, а); последовательное изменение характера волновой эволюции в направлении «хаос–порядок–хаос» с увеличением связи при возбуждении только медленной волны приведено на рис. 11.17, б, а при возбуждении двух волн — на рис. 11.17, в. Наличие нелинейной связи приводит к тому, что при изменении коэффициента связи в системе наблюдается тот же сценарий перехода к хаосу, что и при увеличении амплитуды входного сигнала в одиночной линии.

*Поверхностные МСВ.* Как отмечалось выше, поверхностные магнитоэлектронные волны, распространяющиеся в одиночной касательно намагниченной ферромагнитной пленке, при повышении уровня сигнала являются устойчивыми относительно продольных возмущений, т. е. для такого типа волн отсутствует модуляционная неустойчивость в направлении распространения возмущения. В тоже время в слоистых структурах, например, типа феррит–полупроводник [55] или феррит–диэлектрик–металл, введение дополнительного слоя (полупроводника или металла) может приводить при определенных условиях к модуляционной неустойчивости ПМСВ, причем этот эффект обусловлен, в основном, изменением характера дисперсии волн. Модуляционная неустойчивость ПМСВ в одиночной ферромагнитной пленке может наблюдаться также при возбуждении двух сигналов на разных частотах, причем в данной ситуации неустойчивость обусловлена взаимным влиянием двух модуляционно устойчивых волн [54].

Что касается ПМСВ в связанной структуре, то в работе [53] на основе численных расчетов показана возможность модуляционной неустойчивости ПМСВ в связанной структуре из двух ферромагнитных пленок, разделенных тонким слоем диэлектрика в узкой области частот при возбуждении одной (быстрой или медленной) моды в структуре. Данный эффект связан с изменением характера дисперсии ПМСВ и появлением областей с положительной дисперсией на дисперсионных характеристиках быстрой и медленной волн в связанной структуре. Кроме того, как отмечалось в п. 11.4.2, независимо от того, наблюдается ли модуляционная неустойчивость в одиночной пленке, МСВ в связанной структуре всегда является модуляционно неустойчивой при одновременном возбуждении двух волн. Поэтому ПМСВ, устойчивые в одиночной пленке, могут быть модуляционно неустойчивы в связанной структуре как при возбуждении одной моды (быстрой или медленной) за счет изменения характера дисперсии, так и при возбуждении двух мод за счет возникновения нелинейной связи.

Необходимо подчеркнуть, что характеристики ПМСВ сильно зависят от граничных условий (использование металлических экранов

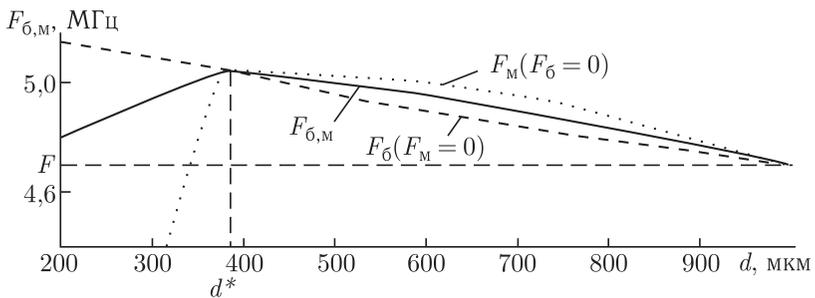


Рис. 11.16. Зависимости частоты модуляции  $F$  от  $d$  при возбуждении обеих мод (сплошная кривая), быстрой моды (штриховая), медленной моды (точечная)

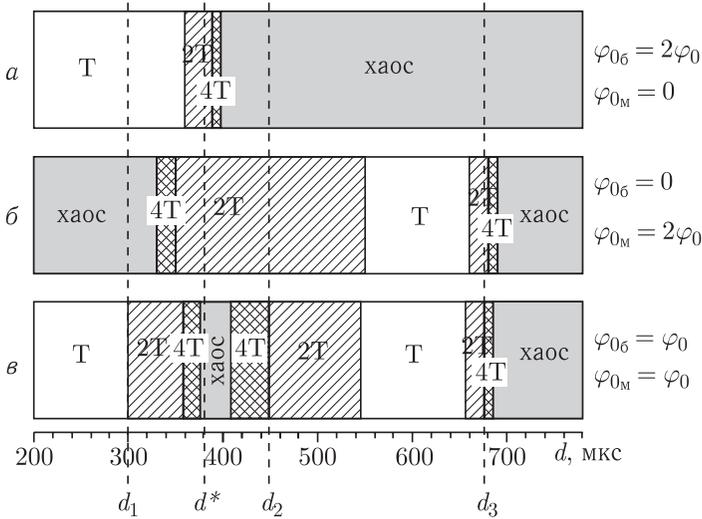


Рис. 11.17. Различные режимы поведения огибающей сигнала при возбуждении быстрой моды (а); медленной моды (б); при возбуждении обеих мод (в)

в структуре, пленок с различными характеристиками и т. д.) [7]. Например, если пленки в структуре разной намагниченности, то частотные полосы пропускания нормальных мод разные, и в этом случае, в зависимости от частоты сигнала и от соотношения параметров, в структуре можно возбудить либо одну, либо две моды [53]. Кроме того, наличие металлических экранов позволяет получать любой вид дисперсии МСВ — нормальную, аномальную, линейную зависимость и пр. (см. кривые на рис. 11.18), а также дает возможность управлять полосой возбуждения ПМСВ, изменяя ее в широких пределах. Как видно из рис. 11.18 на заданной частоте  $\omega/\omega_H$  в зависимости от величины

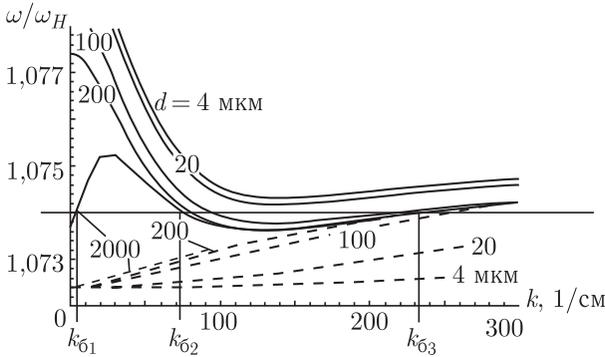


Рис. 11.18. Дисперсионные характеристики ПМСВ для медленной волны (пунктирная линия), для быстрой волны (сплошная линия) в структуре из двух ферромагнитных пленок (при  $D_{1,2} = 20$  мкм,  $H_0 = 2630$  Э,  $4\pi M_{01,02} = 1750$  Гс, расстояние от ферромагнитных пленок до металлических экранов  $L = 200$  мкм)

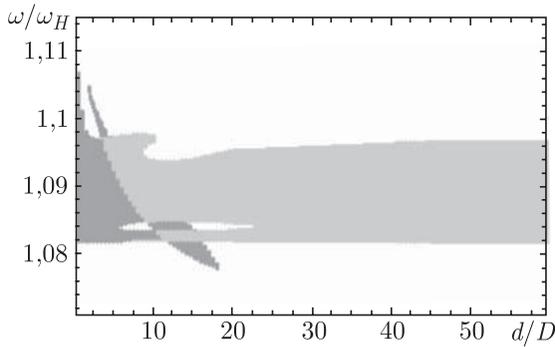


Рис. 11.19. Плоскость параметров  $(\omega/\omega_H, d/D)$ , демонстрирующая области модуляционной неустойчивости при возбуждении быстрой волны в системе «металл–ферромагнетик–диэлектрик–ферромагнетик–металл» (при  $D_{1,2} = D$ ,  $L = 0,5d$ ,  $H_0 = 2630$  Э,  $4\pi M_{01,02} = 1750$  Гс)

связи (расстояния между ферромагнитными пленками  $d$ ) возможно распространение: одной нормальной моды (быстрой или медленной), двух мод (быстрой и медленной, либо двух быстрых), трех мод (двух быстрых и медленной) или четырех мод (трех быстрых  $\varphi_{\delta_1, \delta_2, \delta_3}$  с  $k_{\delta_1, \delta_2, \delta_3}$ , соответственно, и одной медленной  $\varphi_M$ ). Изменение дисперсии волн приводит к изменению характера МН и основных характеристик нелинейных процессов самовоздействия.

В качестве примера на рис. 11.19 показана плоскость параметров, демонстрирующая области МН при возбуждении только быстрой волны в структуре металл–ферромагнетик–диэлектрик–ферромагнетик–металл. В структуре из двух пленок в отсутствие металлических экранов имеет место очень узкая область частот, соответствующая модуляционной неустойчивости ПМСВ [53]. По мере приближения экранов (с уменьшением  $L$ ) область частот, соответствующая неустойчивости ПМСВ, значительно расширяется, сдвигается в сторону более высоких частот и расщепляется на две, как показано на рис. 11.19. Различным цветом на рис. 11.19 показаны области неустойчивости, которые возникают при различных способах возбуждения: возбуждение только  $\varphi_{\delta_1}$  (волна с волновым числом  $k_{\delta_1}$ , см. рис. 11.19 (темный цвет)) или  $\varphi_{\delta_2}$  (волна с волновым числом  $k_{\delta_2}$ , светлый цвет)). Приближение металлических экранов приводит к существенной деформации областей параметров, соответствующих МН. Таким образом, как мы уже отмечали, введение связи приводит к возникновению МН ПМСВ, устойчивой в одиночной пленке, а изменение граничных условий существенным образом влияет на характер этой неустойчивости. В этом случае открывается возможность эффективно управлять областью МН на плоскости параметров за счет изменения расстояния между пленками и до металлических экранов.

Приведенные выше результаты свидетельствуют о том, что в структуре, состоящей из двух ферромагнитных пленок, за счет наличия

связи между пленками наблюдается более широкий спектр нелинейных явлений, чем в одиночной пленке при возбуждении МСВ.

В частности, наблюдаются: формирование уединенных волн в некотором диапазоне значений коэффициента связи при возбуждении одной моды, а также при одновременном возбуждении двух мод; зависимость частоты самомодуляции от величины связи (характер которой определяется способом возбуждения системы); различные сценарии развития модуляционной неустойчивости (одночастотная, многочастотная модуляция, хаос) при различной связи и разных способах возбуждения.

## Заключение

В этой главе рассмотрены основные нелинейные явления в структурах на основе ферромагнитных пленок при возбуждении в них магнитоэлектронных волн. Приведены основные модельные уравнения, позволяющие описать распространение МСВ в таких структурах при различных уровнях сигнала. Рассмотрены особенности дисперсионных характеристик для различных типов МСВ в зависимости от направления внешнего магнитного поля. Выделены два механизма, которые играют существенную роль в нелинейных процессах в ферромагнитных пленках: первый, связанный с параметрическим возбуждением магнитоэлектронными волнами коротковолновых спиновых волн в длинноволновом диапазоне; второй, обусловленный нелинейностью самой среды и приводящий, в частности, к модуляционной неустойчивости волн. Приведены результаты теоретического и экспериментального исследования нелинейных эффектов на магнитоэлектронных волнах, связанных с этими механизмами. Описаны результаты теоретического исследования особенностей нелинейных эффектов самовоздействия магнитоэлектронных волн в новом классе распределенных систем — связанных ферромагнитных структурах. Отмечено, что полученные результаты могут представлять интерес для создания широкого класса устройств для функциональной обработки сигнала на основе нелинейных линий передачи на МСВ в диапазоне сверхвысоких частот.

Часть результатов, относящихся к этой главе, носит чисто обзорный характер, но не претендует на полноту изложения ввиду ограниченности объема главы, поэтому для читателя сделаны подробные ссылки на соответствующую литературу.

## Список литературы

1. Гуревич А. Г. Магнитный резонанс в ферритах и антиферромагнетиках. — М.: Наука, 1973.
2. Гуревич А. Г., Мелков Г. А. Магнитные колебания и волны. — М.: Наука, 1994.
3. Гуляев Ю. В., Зильберман П. Е. Спинволновая электроника. — М.: Знание, 1988.

4. *Моргенталер Ф. Р.* Электромагнитные и спиновые волны в ферритовых средах: Обзор // ТИИЭР. 1988. Т. 76. С. 50.
5. *Исхак В. С.* Применение магнитостатических волн: Обзор // ТИИЭР. 1988. Т. 76, № 2. С. 86.
6. *Adam J. D., Daniel M. R., Emtage P. R., Tilisa S. N.* Magnetostatic waves. Thin Films Adv. Electron Devices. — Boston, 1991. P. 1.
7. *Вашковский А. В., Стальмахов В. С., Шараевский Ю. П.* Магнитостатические волны в электронике сверхвысоких частот. — Саратов: Изд-во СГУ, 1993.
8. *Баруздин С. А., Егоров Ю. В., Калиникос Б. А., Ковшиков Н. Г., Кожусь Н. В., Матюшев В. В., Наумов К. П., Смирнов Ю. Г., Ушаков В. Н.* Функциональные устройства обработки сигналов (основы теории и алгоритмы). — М.: Радио и связь, 1997.
9. *Гласс Х. Л.* Ферритовые пленки для СВЧ-устройств // ТИИЭР. 1988. Т. 76, № 2. С. 64.
10. *Яковлев Ю. М.* Гранатовые эпитаксиальные структуры спин-волновой электроники // Обзоры по электронной технике. Сер. 6. 1986. Т. 7. С. 1227.
11. *Shilz W.* Spin-wave propagation in epitaxial YIG films // Philips Res. Rep. 1973. V. 28, № 1. P. 50.
12. *Collins J. H., Pizzurella F. A.* Propagating magnetic waves in thick films // Intern. J. Electronics. 1973. V. 34, № 3. P. 319.
13. *Звездин А. К., Попов А. Ф.* К нелинейной теории магнитостатических спиновых волн // ЖЭТФ. 1983. Т. 84, № 2. С. 606.
14. *Philip E. Wigen* Nonlinear phenomena and chaos in magnetic materials. — World Scientific Publisher, 1994.
15. *Гуляев Ю. В., Темирязов А. Г., Тихомирова М. Н., Зильберман П. Е.* Нелинейные спиновые волны и резонансы в неоднородных пленках железо-иттриевого граната // Радиотехника и электроника. 2003. Т. 48, № 2. С. 161.
16. *Львов В. С.* Нелинейные спиновые волны. — М.: Наука, 1987.
17. *Вендик О. Г., Калиникос Б. А., Чарторижский Д. Н.* Нестабильность спиновых волн в касательно намагниченных ферромагнитных пленках // ЖЭТФ. 1977. Т. 19, № 2. С. 387.
18. *Мелков Г. А., Шолом С. В.* Параметрическое возбуждение спиновых волн поверхностной магнитостатической волной // ЖЭТФ. 1989. Т. 96, № 2. С. 712.
19. *Медников А. М.* Нелинейные эффекты при распространении поверхностных спиновых волн в пленках ЖИГ // ФТТ. 1981. Т. 23, № 1. С. 242.
20. *Гусев В. Н., Гуревич А. Г., Анисимов А. Н. и др.* Частотные зависимости затухания и пороги нелинейности поверхностных спиновых волн в пленках // ФТТ. 1986. Т. 28, № 11. С. 2969.
21. Нелинейные свойства ферритов в полях СВЧ: Сборник статей / Пер. с англ. В. Я. Антоньянца и др.; Под ред. А. Л. Микаэляна. — М.: Иностран. лит., 1963.
22. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Электродинамика сплошных сред. — М.: Наука, 1982.

23. *Гусев В. Н.* Порог параметрической неустойчивости при возбуждении поверхностных магнитоэлектронических волн в ферритовой пленке // ЖЭТФ. 1990. Т. 97, № 6. С. 1901.
24. *Suhl H.* The nonlinear behavior of ferrites at high microwave signal levels // Proc. IRE. 1956. V. 44, № 10. P. 1270.
25. *Вугальтер Г. А.* Порог параметрической неустойчивости при возбуждении поверхностных магнитоэлектронических волн в ферритовой пленке // ЖЭТФ. 1990. Т. 97, № 6. С. 1901.
26. *Стальмахов В. С., Шараевский Ю. П.* Магнитоэлектронические волны в нелинейных средах // Лекции по электронике СВЧ и радиофизике (VI Зимняя школа-семинар). — Саратов, 1983. — Т. 2. С. 123.
27. *Adam J. D., Stitzer S. N.* A magnetostatic wave signal-to-noise enhancer // J. Appl. Phys. Lett. 1980. V. 36, № 6. С. 485.
28. *Stitzer S. N.* Frequency selective microwave power limiting in thin YIG films // IEEE Trans. on Magn. 1983. V. MAG-19, № 5. P. 1874.
29. *Nomoto T., Maisushita Y.* A signal-to-noise reduction in DBS reception // IEEE Trans. Microwave Theory and Techn. 1993. V. 41, № 8. P. 1316.
30. *Гурзо В. В., Прокушкин В. Н., Рейхель В. В., Шараевский Ю. П.* Характеристики аттенюатора с динамической нелинейностью на поверхностных магнитоэлектронических волнах // Изв. вузов. Сер. «Радиоэлектроника». 1986. Т. 29, № 9. С. 95.
31. *Пантелеев А. А., Прокушкин В. Н., Шараевский Ю. П.* Амплитудный корректор на магнитоэлектронических волнах для СВЧ-усилителей // Электронная техника. Сер. «Электроника СВЧ». 1991. № 2. С. 55.
32. *Шараевский Ю. П., Гришин С. В., Гурзо В. В. и др.* Взаимодействие регулярных и шумовых сигналов в нелинейной линии передачи на магнитоэлектронических волнах // Радиотехника и электроника. 1995. Т. 40, № 7. С. 1064.
33. *Гришин С. В., Шараевский Ю. П.* Нелинейное подавление сверхвысокочастотных сигналов в резонансной линии передачи на магнитоэлектронических волнах // Письма в ЖТФ. 2005. Т. 31, № 2. С. 77.
34. *Гришин С. В., Шараевский Ю. П.* Взаимодействие сверхвысокочастотных сигналов в резонансной линии передачи на магнитоэлектронических волнах // ЖТФ. 2006. Т. 76, № 8. С. 107.
35. *Калиникос Б. А., Ковшиков Н. Г., Славин А. Н.* Спин-волновые солитоны в ферромагнитных пленках: наблюдение модуляционной неустойчивости спиновых волн при непрерывном возбуждении // Письма в ЖТФ. 1984. Т. 10, № 15. С. 936.
36. *Tsankov M. A., Chen M., Patton C. E.* Forward volume wave microwave envelope solitons in yttrium iron garnet films: Propagation, decay, and collision // J. Appl. Phys. 1997. V. 76, № 7. P. 4274.
37. *De Gasperis P., Margelli R., Miccoli G.* Magnetostatic soliton propagation at microwave frequency in magnetic garnet films // Phys. Rev. Lett. 1987. V. 59, № 4. P. 481.
38. *Славин А. Н., Дудко Г. М.* Переход от модуляционной неустойчивости к хаосу в пленках ЖИГ // ЖТФ. 1989. Т. 31, № 31. P. 114.
39. *Дудко Г. М., Казаков Г. Т., Кожевников, Филимонов Ю. А.* Удвоение периода и хаос при 4-магнонном распаде МСВ в пленках ЖИГ // ПЖТФ. 1987. Т. 13. С. 736.

40. *Lihong Li, Ken'ichiro Ya.* An attenuation of magnetostatic wave envelope solitons // *J. Appl. Phys.* 1998. V. 37. P. 1829.
41. *Boardman A. D., Nikitov S. A., Xie K., Mehta H.* Bright magnetostatic spin-wave envelope solitons in ferromagnetic films // *J. Mag. Mag. Mat.* 1995. V. 145. P. 357.
42. *Лукомский В. П.* Нелинейные магнитостатические волны в ферромагнитных пластинах // *Укр. физ. журн.* 1978. Т. 23, № 1. С. 134.
43. *Рабинович М. И., Трубецков Д. И.* Введение в теорию колебаний и волн. — М.: Наука, 1984.
44. *Уизем Дж.* Линейные и нелинейные волны. — М.: Наука, 1977.
45. *Манаков С. В.* К теории двумерной стационарной самофокусировки электромагнитных волн // *ЖЭТФ.* 1973. Т. 65, № 8. С. 505.
46. *Agrawal G. P.* Modulation instability by cross-phase modulation // *Phys. Rev. Lett.* 1987. V. 59, № 8. P. 880.
47. *Ueda T., Kath W.* Dynamics of coupled solitons in nonlinear optical fibres // *Phys. Rev. A.* 1990. V. 42, № 1. P. 563.
48. *Lighthill M. J.* // *J. Inst. Math. Appl.* 1965. V. 1. P. 269.
49. *Захаров В. Е., Шабат А. Б.* Точная теория двумерной самофокусировки и одномерной автомодуляции волн в нелинейных средах // *ЖЭТФ.* 1971. Т. 61, № 2. С. 118.
50. *Дудко Г. М., Малюгина М. А., Шараевский Ю. П.* Распространение импульсов магнитостатических волн в двухслойной ферромагнитной структуре // *Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика.* 2003. Т. 8, № 6. С. 116.
51. *Малюгина М. А., Шараевский Ю. П.* Моделирование нелинейных процессов на магнитостатических волнах в связанных ферромагнитных структурах // *Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика.* 2000. Т. 8, № 3. С. 59.
52. *Дудко Г. М., Малюгина М. А., Шараевский Ю. П.* Самомодуляция дипольно-обменных магнитостатических волн в нормально намагниченной связанной ферромагнитной структуре // *Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика.* 2004. Т. 12, № 1–2. С. 40.
53. *Шараевский Ю. П., Малюгина М. А., Яровая Е. В.* Модуляционная неустойчивость поверхностных магнитостатических волн в структурах типа ферромагнетик-диэлектрик-ферромагнетик // *Письма в ЖТФ.* Т. 32, № 3. С. 33.
54. *Короткевич А. О., Никитов С. А.* Фазовая кросс-модуляция поверхностных магнитостатических спиновых волн // *ЖЭТФ.* 1999. Т. 116, № 6. С. 2058.
55. *Киндяк А. С.* Нелинейные поверхностные магнитостатические волны в феррит-полупроводниковой структуре // *ЖТФ.* 1999. Т. 69, № 6. С. 119.

## Сведения об авторах



**Трубцов Дмитрий Иванович** — член-корреспондент РАН, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой электроники, колебаний и волн факультета нелинейных процессов Саратовского государственного университета. Область научных интересов — нелинейные колебания и волны, вакуумная и плазменная электроника, СВЧ электроника, радиофизика, статистическая радиофизика. Автор более 500 научных работ, в том числе ряда изобретений и монографий.



**Калинин Юрий Александрович** — доктор технических наук, профессор, руководитель Отделения физики нелинейных систем НИИ Естественных наук Саратовского госуниверситета. Область научных интересов — радиофизика, вакуумная и плазменная СВЧ электроника. Автор и соавтор более 400 научных работ, из которых более 40 патентов на изобретения.



**Москаленко Ольга Игоревна** — кандидат физико-математических наук, ассистент кафедры нелинейной физики факультета нелинейных процессов Саратовского государственного университета. Область научных интересов — нелинейная динамика, потоковые динамические системы, динамический хаос, хаотическая синхронизация, скрытая передача информации. Автор 16 статей в центральных реферируемых научных журналах и 4 патентов РФ.



**Короновский Алексей Александрович** — доктор физико-математических наук, профессор кафедры электроники, колебаний и волн Саратовского государственного университета. Область научных интересов — нелинейная динамика, динамический хаос, хаотическая синхронизация, электронный поток, вейвлетный анализ. Автор более 150 статей, а также ряда изобретений и монографий (в соавторстве).



**Кравченко Виктор Филиппович** — заслуженный деятель науки РФ, доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник ИРЭ РАН, профессор кафедры «Высшая математика» МГТУ им. Н.Э.Баумана. Автор и соавтор 20 монографий, многих оригинальных научных работ. Создатель научной школы: подготовил 10 докторов и 17 кандидатов наук. Главный редактор журналов «Электромагнитные волны и электронные системы» и «Успехи современной радиоэлектроники». Область научных интересов — радиофизика, математическая физика, вычислительные методы в прикладной математике, R-функции и атомарные функции.



**Попов Павел Вячеславович** — кандидат физико-математических наук. Область научных интересов — нелинейная динамика распределенных сред, динамических хаос, синхронизация. Автор 14 статей в центральных реферируемых журналах и 3 патентов РФ.



**Храмов Александр Евгеньевич** — доктор физико-математических наук, профессор кафедры электроники, колебаний и волн факультета нелинейных процессов Саратовского государственного университета. Область научных интересов — радиофизика в той ее части, которая связана со взаимодействием свободных электронов с электромагнитными полями, нелинейная динамика распределенных активных сред, методы анализа и моделирования динамических систем. Автор более 100 статей, ряда изобретений и монографий (в соавторстве).



**Филатова Анастасия Евгеньевна** — кандидат физико-математических наук. Область научных интересов — радиофизика, нелинейная динамика, хаотическая синхронизация, сложные сети. Автор 15 статей в центральных реферируемых журналах.



**Филатов Роман Андреевич** — магистрант Саратовского государственного университета. Область научных интересов — радиофизика, вакуумная и плазменная СВЧ электроника. Автор 10 статей в центральных реферируемых научных журналах.



**Егоров Евгений Николаевич** — кандидат физико-математических наук, старший преподаватель кафедры электроники, колебаний и волн Саратовского государственного университета. Область научных интересов — радиофизика, нелинейная динамика, вакуумная и плазменная СВЧ электроника, бифуркации и хаос, виртуальный катод. Автор 12 статей в центральных реферируемых журналах и 5 патентов Российской Федерации.



**Стародубов Андрей Викторович** — кандидат физико-математических наук. Область научных интересов — радиофизика и СВЧ электроника, динамических хаос, явление хаотической синхронизации, анализ временных рядов, непрерывное и дискретное вейвлетное преобразование, переходные процессы. Результаты проведенных исследований опубликованы в соавторстве в ряде центральных реферируемых научных журналов.



**Ремпен Ирина Сергеевна** — кандидат физико-математических наук, старший преподаватель кафедры электроники, колебаний и волн Саратовского государственного университета. Область научных интересов — нелинейная динамика, распределенные системы, теория колебаний и волн, управление хаосом, СВЧ электроника. Автор ряда статей в центральной печати.



**Куркин Семен Андреевич** – аспирант кафедры электроники, колебаний и волн Саратовского государственного университета. Область научных интересов: исследование нелинейных нестационарных процессов в электронно-волновых системах, СВЧ электроника. Автор 5 статей в центральной печати.



**Навроцкий Анатолий Александрович** — старший преподаватель кафедры «Вычислительные методы и программирование» Белорусского государственного университета информатики и радиоэлектроники (ВМиП БГУИР). Область научных интересов: компьютерное моделирование электровакуумных приборов СВЧ.



**Синицын Анатолий Константинович** — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой «Вычислительные методы и программирование» Белорусского государственного университета информатики и радиоэлектроники (ВМиП БГУИР). Область научных интересов — компьютерное моделирование электровакуумных приборов СВЧ.



**Дмитриев Борис Савельевич** — кандидат физико-математических наук, профессор кафедры нелинейной физики Саратовского государственного университета. Ведет курсы общей физики (механика, молекулярная физика и термодинамика, электродинамика). Область научных интересов — микроволновая электроника и радиофизика. Опубликовал более 120 научных и научно-методических работ и учебных пособий.



**Жарков Юрий Дмитриевич** — доктор физико-математических наук, профессор кафедры электроники, колебаний и волн Саратовского государственного университета. Область научных интересов — физическое моделирование процессов взаимодействия потоков заряженных частиц с СВЧ-полями, исследование сложной динамики в СВЧ-генераторах с запаздывающей обратной связью. Опубликовал более 200 работ, среди них несколько учебных пособий, 20 изобретений.



**Шараевский Юрий Павлович** — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой нелинейной физики Саратовского государственного университета, занимается исследованиями в области нелинейной динамики и физики нелинейных волновых процессов в тонких магнитных пленках. Автор более 120 научных и научно-методических работ, 2 коллективных монографий.



**Малюгина Мария Александровна** — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры нелинейной физики факультета нелинейных процессов Саратовского государственного университета. Область научных интересов — волновые явления в тонких ферромагнитных пленках, физика магнитных явлений, нелинейные процессы в ферромагнетиках. Имеет ряд публикаций по данной тематике.



**Кураев Александр Александрович** — доктор физико-математических наук, профессор, заслуженный деятель науки Беларуси, заведующий кафедрой «Антенны и устройства СВЧ» Белорусского государственного университета информатики и радиоэлектроники. Область научных интересов — физическая электроника, радиофизика, вычислительные методы.



**Гришин Сергей Валерьевич** — кандидат физико-математических наук, старший преподаватель кафедры электроники, колебаний и волн факультета нелинейных процессов Саратовского государственного университета. В 2007 г. стал обладателем гранта Президента Российской Федерации для поддержки молодых российских ученых — кандидатов наук и их научных руководителей. Область научных интересов — волновые явления в тонких ферромагнитных пленках, математическое моделирование нелинейных процессов в радиофизических системах на основе ферромагнитных пленок. Имеет более 50 работ, опубликованных в отечественных и зарубежных научно-технических журналах и сборниках.



**Аксенчик Анатолий Владимирович** — доктор физико-математических наук, профессор кафедры вычислительных методов и программирования Белорусского государственного университета информатики и радиоэлектроники. Область научных интересов — компьютерное моделирование радиофизических процессов.



**Попкова Татьяна Леонидовна** — кандидат физико-математических наук, доцент, начальник управления подготовки научных кадров высшей квалификации Белорусского государственного университета информатики и радиоэлектроники. Область научных интересов — радиофизика.



**Рак Алексей Олегович** — инженер-электроник Белорусского государственного университета информатики и радиоэлектроники. Область научных интересов — радиофизика, телекоммуникации.



**Яроменок Сергей Иванович** — кандидат физико-математических наук, начальник отдела студенческой науки и магистратуры Белорусского государственного университета информатики и радиоэлектроники. Научные интересы — задачи математической физики, линейная алгебра и матричный анализ, численные методы в математическом моделировании физических процессов.



**Лущицкая Ирина Владимировна** — ассистент кафедры «Вычислительные методы и программирование» учреждения Белорусского государственного университета информатики и радиоэлектроники (ВМИП БГУИР). Область научных интересов — радиофизика.



**Блюх Юрий Павлович** — доктор физико-математических наук. С 1970 по 2000 г. работал в Харьковском физико-техническом институте (м. н. с., с. н. с., начальник лаборатории). С 2000 г. — старший научный сотрудник лаборатории физики плазмы физического факультета Израильского института технологий «Технион». Область научных интересов — плазменная электроника, плазмоника, электродинамика метаматериалов, резонансные волновые явления в неупорядоченных средах.

**Нусинович Григорий Семенович** — с 1977 по 1990 г. — старший научный сотрудник и заведующий лабораторией в Институте прикладной физики Академии наук СССР, г. Горький, был членом научного совета по физической электронике Академии наук СССР. С 1991 г. работает в Институте исследований в электронике и прикладной физике в США, член Исполнительного комитета наук о плазме и Заявительного комитета ассоциации IEEE Nuclear and Plasma Sciences и старший редактор IEEE-PS, член IEEE и APS.



**Молотков Иван Анатольевич** — доктор физико-математических наук, профессор, лауреат Государственной премии СССР, автор свыше 200 опубликованных работ, в том числе десяти монографий (в соавторстве).



**Маненков Александр Бенционович** — доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Института физических проблем РАН. Под руководством П. Л. Капицы занимался разработкой микроволновой аппаратуры для плазменных исследований. Совместно с Л. А. Вайнштейном построил общую теорию возбуждения открытых волноводов. Область научных интересов — анализ задач возбуждения, распространения и дифракции волн в открытых электродинамических структурах, численное исследование различных задач радиофизики (включая оптику) и электроники.