Научное издание

КОРОНОВСКИЙ Алексей Александрович
ХРАМОВ Александр Евгеньевич

НЕПРЕРЫВНЫЙ ВЕЙВЛЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ

Редактор *Н.Б. Бартошевич-Жагель*
Оригинал-макет: *В.В. Худяков*
Оформление переплета: *А.А. Логунов*

ЛР № 071930 от 06.07.99. Подписано в печать 29.01.03.
Формат 60×90/16. Бумага офсетная. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 11. Уч.-изд. л. 12,1. Заказ №

Издательская фирма «Физико-математическая литература»
МАИК «Наука/Интерпериодика»
117997 Москва, Профсоюзная, 90
E-mail: fizmat@maik.ru

Отпечатано с готовых диапозитивов в ПФ «Полиграфист».
160001, г. Вологда, ул. Челюскинцев, 3.
Тел.: (8172) 72-55-31, 72-61-75, факс (8172) 72-60-72.
E-mail: form.pfp@votel.ru http://www.vologda/~pfpv

ISBN 5-9221-0389-X

9 785922 103893

УДК 517, 551(551.2+583.1), 621.317, 621.385.6
ББК 22.16, 32.841
К68

Короновский А. А., Храмов А. Е. **Непрерывный вейвлетный анализ и его приложения**. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. — 176 с. — ISBN 5-9221-0389-X.

В книге рассматривается такой современный метод анализа временных рядов, как непрерывный вейвлетный анализ. Излагаются общие сведения и понятия вейвлетного преобразования, математический аппарат, методика численной реализации вейвлетного преобразования, вейвлетный анализ случайных процессов, способы применения вейвлетного преобразования к анализу нелинейных систем различной природы. Затрагиваются аспекты, связанные с исследованием пространственно-распределенных систем, и, соответственно, структур, возникающих как во времени, так и пространстве, с помощью вейвлетного анализа.

Для научных работников, занимающихся цифровой обработкой данных и анализом динамических систем, а также для аспирантов и студентов, специализирующихся в области теории колебаний и волн, радиофизики, нелинейной динамики. Книга будет также полезна читателям других специальностей, имеющим дело с анализом сложных процессов, протекающих в системах самой различной природы.

ISBN 5-9221-0389-X

Предисловие

> Вейвлеты являются сравнительно новым изобретением в прикладной математике. Это название само по себе возникло около десятилетия назад... За последние десять лет интерес к ним вырос взрывообразно. Их нынешний успех объясняется несколькими причинами. С одной стороны, концепция вейвлетов может рассматриваться как синтез идей, возникших за последние двадцать или тридцать лет в технике..., физике... и чистой математике. Вследствие своего междисциплинарного происхождения, вейвлеты представляются привлекательными для ученых и инженеров с самыми разными научными интересами...
>
> Ингрид Добеши. Из введения к книге «Десять лекций по вейвлетам». — Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001

Книга ставит своей целью дать научным работникам, инженерам, преподавателям высших учебных заведений, аспирантам, проводящим исследования в области нелинейной физики и нелинейной теории колебаний и волн (или, более широко, нелинейной динамики), достаточно полное представление о теории и практическом применении такого современного метода анализа и диагностики пространственно-временны́х данных, как вейвлетный анализ. Она включает подробное описание особенностей и преимуществ непрерывного вейвлетного и бикогерентного вейвлетного преобразования при анализе данных, порождаемых динамическими системами различной природы, методики эффективной численной реализации вейвлетного преобразования, рассмотрение вейвлетных спектров случайных процессов, а также обсуждение некоторых примеров применения вейвлетного анализа к исследованию распределенных динамических систем.

Во введении делается попытка, отталкиваясь от хорошо известного читателю спектрального (Фурье) анализа и его разновидности — оконного преобразования Фурье, ответить на вопрос: в чем смысл вейвлетного анализа и в чем его преимущества перед уже имеющимися методами анализа структуры временны́х рядов? Во введении мы постепенно подводим читателя к определению вейвлетного преобразования, вводя его не строго, а феноменологическим образом.

Первая глава книги посвящена строгому рассмотрению базовых понятий и математического аппарата непрерывного вейвлетного преобразования и содержит подробное описание методики его численной реализации. Разбираются характерные особенности численного алгоритма реализации вейвлетного преобразования с использованием преобразования Фурье. Рассматриваются некоторые трудности, связанные с такой методикой, после чего дается описание практической реализации метода с использованием алгоритма быстрого преобразования Фурье. Обсуждаются вопросы реконструкции исходного сигнала по вейвлетному спектру.

Во второй главе рассматривается применение непрерывного вейвлетного анализа к ряду модельных сигналов, что дает читателю возможность «почувствовать» на конкретных простых примерах достоинства, недостатки и особенности вейвлетного анализа. В ней иллюстрируются особенности универсальных путей в хаос, реализующихся в нелинейных конечномерных динамических системах (переход к хаосу через каскад бифуркаций удвоения периода и переход к хаосу через перемежаемость), с позиций непрерывного вейвлетного анализа. В заключение этой главы мы обсудим некоторые вопросы такого традиционного приложения вейвлетного анализа, как исследование геофизических процессов.

Бикогерентный вейвлетный анализ составляет содержание третьей главы книги. После общих замечаний и определений подробно излагаются характерные особенности, методика интерпретации и пределы применимости бикогерентного вейвлетного преобразования. Особое внимание уделяется методике оценки статистического уровня шума и статистической ошибки, возникающей при численном расчете бикогерентности. Так же как и при изложении непрерывного вейвлетного преобразования, приводятся некоторые примеры анализа с помощью бикогерентного вейвлетного преобразования простых модельных сигналов.

Четвертая глава является введением в вейвлетный анализ шумовых сигналов. В ней последовательно рассматриваются особенности спектров случайных процессов, а именно белого и цветного шума, с позиций вейвлетного преобразования, а также делаются оценки уровней достоверности вейвлетных спектров сигналов со случайными составляющими. В заключительной, пятой, главе книги содержится небольшой обзор приложений вейвлетного анализа к исследованию систем различной природы и более подробно рассматриваются два конкретных примера таких исследований.

В основу книги положены как оригинальные исследования авторов, так и многочисленные оригинальные публикации, обзорные работы и книги, вышедшие в последнее время (по большей части за рубежом [1]) и посвященные вейвлетному анализу и его приложениям в различных областях науки. Книга снабжена достаточно большой библиографией, посвященной как непосредственно теории и методике применения вейвлетного анализа, так и приложению вейвлетного преобразования к анализу различных процессов и явлений.

Авторы искренне надеются, что настоящая книга будет полезна всем интересующимся современными проблемами анализа, прогноза и моделирования процессов в системах самой различной природы (физической, геологической, экономической, медицинской и т. п.). На наш взгляд, книга будет представлять несомненный интерес для студентов и аспирантов естественнонаучных и прикладных специальностей, работающих в области нелинейной физики, нелинейной теории колебаний и волн или занимающихся вопросами анализа и диагностики различных данных.

В заключение мы хотим выразить свою признательность и благодарность коллегам по Саратовскому государственному университету им. Н.Г. Чернышевского, которые поддерживали нашу работу на различных ее этапах. Мы благодарны чл.-корр. РАН, профессору Д.И. Трубецкову и профессору Ю.И. Левину за поддержку и интерес к данной работе, доцентам В.Г. Анфиногентову и М.И. Перченко за полезные и плодотворные обсуждения проблематики, Н.Н. Левиной за помощь на различных этапах подготовки рукописи монографии. Особенно хочется поблагодарить родных и близких для каждого из нас людей, без их поддержки, помощи и сочувствия книга вряд ли бы вышла в свет.

А.А. Короновский
А.Е. Храмов

*Саратовский государственный университет
им. Н.Г. Чернышевского,
Факультет нелинейных процессов*

[1]) Среди них наиболее известны три книги на русском языке по данной тематике, в которых рассматриваются преимущественно вопросы дискретного вейвлетного анализа: *Добеши И.* Десять лекций по вейвлетам. М.-Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2001, которая представляет собой перевод известной книги *I. Daubechies.* Ten Lectures on Wavelets. SIAM, 1991; *Блаттер С.* Вейвлет-анализ. Основы теории. М.: Постмаркет, 2001 (*Blatter C.* Wavelets: a Primer, Natick, Mass.: A.K. Peters, 1998) и *Чуи С.К.* Введение в вейвлеты. М.: Мир, 2001 (*Chui C.K.* Introduction to Wavelets, Boston: Academic Press, 1992).

Введение

Вейвлетный анализ [1]), возникший сравнительно недавно, как оказалось, является мощным средством анализа динамики систем и привлекает в последнее время все большее внимание исследователей. Отражением этого факта служит большое число работ, ориентированных на начинающего исследователя, посвященных изложению основных понятий и сущности вейвлетного преобразования. Среди подобных работ особенно можно выделить обзорные работы Н.М. Астафьевой [1, 2], статью, написанную Торренсом и Компо [3], ряд вводных и обзорных курсов по вейвлетам, сборники статей и специальные выпуски журналов, посвященных различным аспектам вейвлетного анализа [4–28], а также другие многочисленные публикации по данной тематике (см. библиографию к приведенным работам). Тем не менее, мы не смогли удержаться, чтобы не пополнить этот ряд (приведенный выше в очень «усеченном» виде) еще одной книгой. В ней мы постарались, опираясь на хорошо известные физические представления и примеры, объяснить механизм работы вейвлетного преобразования, методику эффективной численной реализации вейвлетного анализа, возможности его применения для анализа сложных режимов, порожденных нелинейными динамическими системами, при этом особо мы останавливаемся на проблеме вейвлетного анализа сигналов в присутствии тех или иных шумов. Заметим, что вопросы приложения вейвлетного анализа к исследованию динамического хаоса и турбулентности в системах различной природы вызывают в настоящее время большой интерес и привлекают внимание исследователей, работающих в различных областях науки (см., например, [29–33]).

Следует сразу оговориться, что в книге, в полном соответствии с ее названием, рассматривается только непрерывный вейвлетный анализ. Наряду с непрерывным вейвлетным анализом существует дискретное вейвлетное преобразование (см. работы [5, 34–41]), на котором в этой книге не останавливаемся.

Начнем наше рассмотрение с хорошо известного читателю спектрального анализа, отталкиваясь от него, как от основы, являющейся в какой-то мере предшественником и базой вейвлетного анализа. Первым вопросом, на котором следует остановиться, является основной вопрос: а для чего нужен вейвлетный анализ? Существует ведь хорошо себя зарекомендовавший, эффективный и привычный аппарат спек-

[1]) Заметим, что применяемый в данной книге термин «вейвлет» является транскрипцией английского слова *wavelet*. Это связано с тем, что термин уже достаточно «прижился» в естественно-научной и математической среде, а имеющиеся русскоязычные варианты (*всплеск*, *мелкая* или *короткая волна*) следует признать неудачными.

трального анализа [43], использующий ряды и/или интегралы Фурье. В то же самое время реализация вейвлетного анализа несколько более сложна, чем реализация преобразования Фурье. Тем не менее оказывается, что привычный спектральный анализ не всегда помогает понять, как устроен анализируемый сигнал.

Рассмотрим в качестве простого примера сигнал, являющийся суммой двух гармонических сигналов с разными частотами ω_1 и ω_2:

$$f(t) = \cos(\omega_1 t) + \cos(\omega_2 t). \tag{1}$$

В этом случае в фурье-спектре будут присутствовать два пика (рис. 1) на частотах ω_1 и ω_2 [1]. Когда обе частоты присутствуют в сигна-

Рис. 1. Сигнал, представляющий собой суперпозицию двух гармонических сигналов с частотами $\omega_2 = 2{,}5\omega_1$ и его спектр. Шкала нелогарифмическая

ле постоянно, спектральный подход четко выделяет существующие в сигнале частоты, предоставляя исследователю полную информацию об «устройстве» исследуемого сигнала. Если же частоты в сигнале появляются или исчезают с течением времени, спектральный анализ (см. рис. 2, на котором представлен случай сигнала, в котором гармонический процесс с одной частотой ω_1 сменяется в некоторый момент времени процессом с другой частотой ω_2) не дает полной информации:

$$f(t) = (1 - H(t))\cos(\omega_1 t) + H(t)\cos(\omega_2 t), \tag{2}$$

где $H(t)$ — функция Хевисайда. Глядя на спектр сигнала (2), ничего нельзя сказать о том, какие частоты присутствовали в сигнале в тот или иной момент времени.

Из вида спектра совершенно неясно, был ли исследуемый сигнал суммой двух гармонических сигналов (как в первом случае, см. рис. 1) или же в сигнале частоты существовали отдельно в разные моменты времени (рис. 2). Информацию об этом из вида спектрального представления $|S(\omega)|$ сигнала получить невозможно.

Из рассмотренного простого примера следует, что спектральный анализ, позволяющий выделить присутствующие в сигнале гармони-

[1] Следует оговорить, что в дальнейшем рассматривается диапазон положительных значений частот — отрицательный диапазон, по сути дела, является зеркальным отражением положительного и не несет никакой дополнительной смысловой нагрузки.

ки, является эффективным средством анализа временны́х реализаций, частотный состав которых не изменяется с течением времени. В тех же случаях, когда в сигнале (как, например, в случае, описываемом

Рис. 2. Гармонический сигнал, у которого резко изменяется частота с величины ω_1 на $\omega_2 = 2{,}5\omega_1$ и его спектр (шкала нелогарифмическая). По виду спектра нельзя отличить данный случай от предыдущего, когда рассматриваемый сигнал представлял собой сумму двух гармонических сигналов (см. рис. 1)

соотношением (2)) возникают (или исчезают) гармоники или частота гармоник плавно изменяется с течением времени (см. рис. 3, на котором представлен спектр мощности сигнала, у которого медленно меняется частота: $f(t) = \cos\,(\omega t)$, где $\omega = \omega_1 + a\,(\omega_2 - \omega_1)\,t$), необходим иной (хотя, может быть, в чем-то похожий на спектральный) метод анализа временно́го ряда.

Рис. 3. Сигнал, частота которого линейно возрастает с течением времени, $\omega = \omega_1 + a(\omega_2 - \omega_1)t$ и его спектр. Глядя на сплошной спектр, можно предполагать, что в сигнале присутствуют все частоты, попадающие в диапазон $[\omega_1;\ 2\omega_2 - \omega_1]$. Шкала нелогарифмическая

Невозможность отследить появление (исчезновение) или изменение частотных составляющих сигнала кроется в самом механизме спектрального анализа, а именно: при преобразовании Фурье

$$S(\omega) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t}\, dt \qquad (3)$$

интегрирование проводится по всей длине временно́й реализации (от $-\infty$ до $+\infty$) и каждая гармоника, присутствующая во временно́й реализации в тот или иной интервал времени, накладывает свой «отпечаток» на общий вид спектра. Следовательно, если возникает задача определить, как менялся частотный состав сигнала с течением времени, необходимо отказаться от интегрирования по всему временно́му интервалу $(-\infty,+\infty)$ и рассматривать некоторый диапазон длительностью $2T$ $[t_0 - T;\ t_0 + T]$, где t_0 — интересующий нас момент времени, в который мы хотим локально определить частотные составляющие, присутствующие в сигнале:

$$S(\omega, t_0) = \int\limits_{t_0-T}^{t_0+T} f(t)e^{-j\omega t}\,dt. \tag{4}$$

Для того чтобы составить представление о всем сигнале, необходимо сдвигать «окно» длительностью $2T$ вдоль временно́й реализации. В этом случае, в зависимости от выбора t_0, получается «свой» спектр, изменяющийся по мере того, как «окно» фурье-преобразования перемещается вдоль реализации (рис. 4). Фактически t_0 является переменной величиной, и возникает необходимость рассматривать поверхность $S(\omega, t_0)$.

Однако подобный подход, называемый оконным преобразованием Фурье, тоже не очень хорош (см., например, работу [22]). Все дело в том, что при преобразовании Фурье гармонического сигнала спектр имеет вид δ-функции только в том случае, если этот сигнал постоянной частоты имеет бесконечную длительность (т. е. начинается в момент времени $t = -\infty$ и заканчивается в $t = +\infty$) и интегрирование проводится по этому же бесконечному интервалу времени. В случае, если же сигнал имеет конечную длительность (или, что почти то же самое, интегрирование ведется по конечному интервалу времени), его спектральный образ имеет конечную ширину, и чем меньше длительность сигнала, тем большую ширину в пространстве частот имеет его фурье-образ. Таким образом, при применении оконного преобразования Фурье, с одной стороны, необходимо выбирать ширину окна $2T$ как можно меньшей, чтобы четко выявить момент появления или исчезновения той или иной частотной составляющей сигнала; с другой стороны, при этом падает разрешение метода в частотном диапазоне. Иначе говоря, более или менее точно определяя момент появления какой-либо частоты, мы, в то же самое время, ничего не можем сказать о значении этой частотной компоненты: возникла ли эта частотная составляющая одна или же одновременно возникло несколько составляющих, близких по частотам. Попытка же улучшить разрешение метода в частотном диапазоне приводит к ухудшению временно́го разрешения — идеальным случаем, с точки зрения выявления частот, является само преобразование Фурье (3), но, как мы уже видели, с точки зрения анализа временно́й динамики частотных составляющих оно является малоэффективным.

Рис. 5 иллюстрирует сказанное. Анализируемый сигнал представляет собой четыре синусоидальных сигнала с разными частотами, последовательно сменяющими друг друга. На рисунках *а*, *б* и *в* показана

Рис. 4. Оконное преобразование Фурье временнóго сигнала (2), представляющего собой два последовательных участка гармонических сигналов с разными частотами ω_1 и ω_2. Окно преобразования сдвигается вдоль временнóй реализации, что приводит к трансформации спектра (нижняя часть рисунка). Шкала нелогарифмическая

поверхность $S(\omega, t)$ для различной ширины окна $2T$. Хорошо видно, что не удается одновременно четко определить характер сигнала и в частотном, и во временнóм диапазонах. Следовательно, оконное преобразование Фурье, при всей его оригинальности, является не слишком эффективным средством для анализа сигналов, частотные составляющие которых меняются с течением времени.

Рис. 5. Сигнал, представляющий из себя «набор» четырех синусоид, существовавших в различные интервалы времени (в интервал времени от 0 до 250 миллисекунд частота синусоидального сигнала составляла $f = 300$ Гц, затем от 250 до 500 миллисекунд — $f = 200$ Гц, от 500 до 750 миллисекунд — $f = 100$ Гц и от 750 до 1000 миллисекунд — $f = 50$ Гц) был подвергнут оконному преобразованию Фурье. Различные рисунки соответствуют различной ширине окна. Отчетливо видно, что чем лучше локализована частота сигнала, тем менее четко удается выделить момент времени, когда эта частотная составляющая появилась в сигнале, и наоборот (из работы [21])

Таким образом, необходимо как-то модифицировать оконное преобразование Фурье (4), чтобы осталась возможность отслеживать изменения, происходящие во времени, но, по-возможности, уменьшить недостатки, связанные с неточностью определения частот. Безусловно, читатель понимает, что теперь, по логике вещей, авторы должны ввести определение вейвлетного преобразования и показать, что оно лучше справляется с поставленными задачами, нежели оконное преобразование Фурье. Тем не менее мы позволим себе еще на некоторое время отодвинуть момент, когда появится формальное определение вейвлетного преобразования, и постараемся «плавно» подвести к нему читателя. Подумаем немного над тем, как можно было бы, используя оконное преобразование Фурье (4), получить более или менее полную информацию о динамике частотных составляющих в исследуемом сигнале.

Обратим внимание на то, что, хотя оконное преобразование Фурье, выполненное один раз, не дает полной информации о сигнале, совокупность подобных преобразований одного и того же сигнала, выполненных с различной шириной окна $2T$, оказывается гораздо более информативной (см. рис. 5 *а–в*). Можно использовать результаты оконного преобразования с малой шириной окна для определения моментов времени, когда происходят изменения спектрального состава сигнала, а преобразования с большой шириной окна — для выделения соответствующих спектральных компонент. Другое дело, что подобный подход оказывается неудобным. Фактически, у нас возникает необходимость рассматривать функцию не двух переменных $S(\omega, t_0)$ (4), а трех — $S(\omega, t_0, T)$, которая требует представления в четырехмерном пространстве, что ведет к вполне понятным сложностям.

Для уменьшения числа переменных можно «связать» каким-либо образом частоту ω с длительностью «окна» T, например, для каждого временнóго масштаба T положить $\omega = 2\pi n/T$ $(n \in \mathbb{R})$. Тогда преобразование Фурье (4) будет иметь вид

$$S(T, t_0) = \int\limits_{t_0-T}^{t_0+T} f(t) \exp\left\{-j\,\frac{2\pi n}{T}\,t\right\} dt. \tag{5}$$

Фактически, в трехмерном пространстве (ω, t_0, T), на котором определена функция $S(\omega, t_0, T)$, выделяется некоторая поверхность σ, в точках которой и рассматривается вышеописанная функция S. Понятно, что часть информации в этом случае теряется, но «оставшейся части» вполне достаточно, чтобы составить представление об особенностях рассматриваемой временнóй реализации $f(t)$, поскольку введенная в рассмотрение поверхность σ «охватывает» как весь частотный, так и временнóй диапазоны (рис. 6).

Рис. 6. Поверхность σ, определенная в трехмерном пространстве «частота–время–ширина окна»

Более того, размер окна, которое должно «выделять» различные гармоники, оказывается «завязан» на соответствующий временнóй масштаб — понятно, что для выявления низкочастотных гармоник необходимо проанализировать больший отрезок временнóй реализации по сравнению с тем случаем, когда анализируются высокочастотные гармоники. Соотношение $\omega = 2\pi n/T$ как раз и обеспечивает разумное соотношение анализируемой частоты ω и ширины анализирующего окна T.

Рассмотрим результат преобразования (5) для временнóй реализации $f(t) = \sin(\omega t)$. В этом случае несложные, но достаточно громоздкие выкладки дают

$$S(T, t_0) = \frac{2T \sin(\omega T)}{\omega^2 T^2 - 4\pi^2 n^2} \left[\omega T \sin(\omega t_0) - j2\pi n \cos(\omega t_0)\right] \exp\left[-j2\pi n \frac{t_0}{T}\right]. \tag{6}$$

Точно так же, как и при спектральном анализе, результат преобразования имеет и действительную, и мнимую части. По аналогии с преобразованием Фурье имеет смысл рассматривать квадрат модуля величины S:

$$|S(T, t_0)|^2 = \frac{4T^2 \sin^2(\omega T)}{(\omega^2 T^2 - 4\pi^2 n^2)^2} \left[\omega^2 T^2 \sin^2(\omega t_0) + 4\pi^2 n^2 \cos^2(\omega t_0)\right]. \tag{7}$$

Можно убедиться, что в рассматриваемом случае величина $|S(T, t_0)|^2$ принимает максимальное значение при $T \longrightarrow 2\pi n/\omega$, равное n^2/ω^2 (рис. 7). Таким образом, в рассматриваемом случае, аналогично фурье-анализу, происходит выделение временнóго масштаба T, соответствующего частоте сигнала.

Рис. 7. Результат преобразования (5) для одной и той же временнóй реализации $f(t) = \sin(\omega t)$, $\omega = \pi$, $t_0 = 0$. В случае (*а*) $n = 2$, (*б*) $n = 4$

Здесь следует обратить внимание на несколько важных моментов.

Во-первых, для одного и того же сигнала $f(t) = \sin(\omega t)$ при разных значениях параметра n (характеризующего число полных периодов анализирующей синусоиды, «укладывающихся» в окне шириной T), значение ширины окна, при котором величина $|S(T, t_0)|^2$ является максимальной, оказывается различной (см. рис. 7 *а, б*). Этот факт становится вполне понятным, если обратить внимание на то, что величина $|S(T, t_0)|^2$ является максимальной для такой ширины окна, при которой гармоническое заполнение этого окна имеет ту же самую частоту ω, что и анализируемый сигнал $f(t)$ (рис. 8). Иными словами, величина $|S(T, t_0)|^2$ максимальна, когда $T = 2\pi n/\omega$, где ω — частота анализируемого сигнала $f(t)$. Фактически, то же самое происходит и при спектральном анализе, однако значение переменной, при котором исследуемая функция имеет максимум, зависит от того, каким образом

Рис. 8. (a) Временна́я реализация $f(t) = \sin(\omega t)$, $\omega = \pi$ и несколько окон интегрирования (*б–д*) различной ширины $2T$ с анализирующим заполнением $\exp(-j2\pi n/T)$. Действительная часть заполнения показана сплошной линией, мнимая — пунктирной. Максимальное значение (сравните с рис. 7 *а*) $|S(T, t_0)|^2$ достигается при $T = 4$ (случай (*в*)), когда частота заполнения $\exp(-j2\pi n/T)$ совпадает с частотой сигнала $f(t)$. Рисунки (*г*) и (*д*) иллюстрируют сдвиг окна интегрирования шириной $2T$ на величину, определяемую второй переменной t_0

«устроено» анализирующее окно, и не всегда совпадает с соответствующим временны́м масштабом, присутствующим в сигнале. Следует также заметить, что чем большее число периодов укладывается в окне интегрирования (чем больше величина n), тем отчетливее выражено наличие данной гармоники в $|S(T, t_0)|^2$ (ср. рис. 7 *а* и 7 *б*). Однако, как следствие этого, ширина окна, при котором $|S(T, t_0)|^2$ принимает максимальное значение, также увеличивается (см., опять-таки, рис. 7 *а, б*), что, как было указано выше, ведет к ухудшению разрешающих свойств преобразования во временно́м диапазоне (в то время как разрешение в частотном диапазоне улучшается).

Во-вторых, следует помнить, что получающаяся в результате преобразования (5) величина $S(T, t_0)$ является функцией двух переменных — T и t_0. Величина T определяет временно́й диапазон, по которому осуществляется интегрирование в формуле (5) и одновременно частоту анализирующего заполнения. Таким образом, частота анализирующего заполнения оказывается жестко связана с шириной окна T. В то же время переменная t_0 определяет момент времени, в который осуществляется описываемое преобразование; фактически t_0 определяет сдвиг окна интегрирования вдоль оси времени. Но когда окно интегрирования сдвигается, анализирующее гармоническое заполнение «остается на месте» (см. рис. 8 *г, д*), иными словами, фаза заполнения все время непрерывно изменяется по мере сдвига окна вдоль оси времени. Оказывается удобным зафиксировать фазу заполнения относительно анализирующего окна, для чего следует модифицировать соотношение (5):

$$S(T, t_0) = \int\limits_{t_0-T}^{t_0+T} f(t) \exp\left\{-j\,\frac{2\pi n}{T}\,(t - t_0)\right\} dt. \tag{8}$$

Изменение фазы заполнения не оказывает влияния на величину $|S(T, t_0)|^2$, поскольку влияет только на аргумент комплексной функции $S(T, t_0)$. Для гармонического сигнала $f(t) = \sin(\omega t)$ соотношение (8) дает

$$S(T, t_0) = \frac{2T\sin(\omega T)}{\omega^2 T^2 - 4\pi^2 n^2}\left[\omega T \sin(\omega t_0) - j 2\pi n \cos(\omega t_0)\right]. \tag{9}$$

Нетрудно видеть, что все различие между соотношениями (6) и (9) состоит лишь в множителе $\exp(-j2\pi n t_0/T)$.

В-третьих, необходимо обратить внимание на тот факт, что две гармоники исходного сигнала с различными частотами, но с одинаковой амплитудой, выделяются преобразованием (8) в виде двух максимумов различной высоты (рис. 9). Квадраты этих максимумов, S_1 и S_2, соотносятся как

$$\frac{S_1^2}{S_2^2} = \left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^2, \tag{10}$$

что следует из формулы (7). Иными словами, чем больше частота гармоники, тем менее она заметна по сравнению с гармониками меньших частот. Из вышесказанного следует, что если в анализируемом сигнале присутствуют две гармоники с сильно различающимися

Рис. 9. Преобразование (8) для сигнала $f(t) = \sin(\omega_1 t) + \sin(\omega_2 t)$, $\omega_1 = \pi$, $\omega_2 = 2\pi$. Пунктирной линией нанесена парабола T^2, характеризующая положение максимумов гармоник соответствующих частот и единичной амплитуды частотами, то гармонику с большей частотой при анализе с помощью соотношения (8) можно просто не заметить, если не предпринять соответствующих мер.

Фактически преобразование (8) уже является вейвлетным преобразованием (с некоторыми поправками), к которому был осуществлен «плавный» переход от спектрального анализа. Заметим, что выражение (8) можно переписать в виде

$$S(T, t_0) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\psi^*\left(\frac{t-t_0}{T}\right) dt, \tag{11}$$

где $\psi(\xi)$ — анализирующая функция (рис. 10),

$$\psi(\xi) = \left[H(\xi+1) - H(\xi-1)\right] e^{j2\pi\xi}, \tag{12}$$

содержащая в себе все вышеописанные свойства (звездочка здесь и далее обозначает комплексное сопряжение).

Рис. 10. Действительная (сплошная линия) и мнимая (пунктирная линия) части Sin-вейвлета

Преобразование (11) осуществляется растяжением и сдвигом функции $\psi(\xi)$ так, как это было описано выше и показано на рис. 8. В этом случае величина T описывает растяжение, а t_0 — сдвиг анализирующей функции. Функция (12) является, с точностью до нормировочного коэффициента, «материнским», или «базовым», вейвлетом («mother wavelet»), из которого получаются все остальные вейвлеты других масштабов $\psi((t-t_0)/T)$ путем сдвига и растяжения. Для удобства на материнский вейвлет накладывается условие единичной нормы в пространстве $L^2(\mathbb{R})$, т. е.

$$\|\psi\|_{L^2} = \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \psi(\xi)\psi^*(\xi)d\xi\right)^{1/2} = 1. \tag{13}$$

С учетом соотношения (13) рассматриваемый «материнский вейвлет» (будем обозначать его ψ_0) имеет вид

$$\psi_0(\xi) = \frac{H(\xi+1) - H(\xi-1)}{\sqrt{2}}\, e^{j2\pi\xi}. \tag{14}$$

Нетрудно видеть, что вейвлетные функции для других масштабов $\psi_0((t-t_0)/T)$, полученные «растяжением» и сдвигом материнского вейвлета ψ_0, не удовлетворяют соотношению (13). Для того чтобы оно выполнялось, необходимо на соответствующем временно́м масштабе T ввести корректирующий коэффициент, зависящий от этого масштаба.

Тогда и в преобразовании (11) следует использовать не просто «растянутую» и «сдвинутую» функцию $\psi_0((t-t_0)/T)$, а, с учетом масштабирующего коэффициента $T^{-1/2}$,

$$\psi_{T,t_0}(t) = \frac{1}{\sqrt{T}}\,\psi_0\left(\frac{t-t_0}{T}\right). \tag{15}$$

Тогда преобразование (11) примет вид

$$S(T,t_0) = \frac{1}{\sqrt{T}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\psi^*\left(\frac{t-t_0}{T}\right)dt. \tag{16}$$

Это соотношение и есть настоящее непрерывное вейвлетное преобразование, такое как вводится в литературе (см., например, [1–3]). Единственное, что еще следует отметить, это обозначения. Поскольку изначальной отправной точкой наших рассуждений было преобразование Фурье, то и вейвлетное преобразование, полученное феноменологически с помощью плавного перехода и качественных рассуждений, содержит те же самые обозначения. Но для вейвлетного преобразования традиционно принято обозначать временно́й масштаб через s (т. е. $T \equiv s$), а само преобразование — через $W(s,t_0)$ (хотя, справедливости ради, следует отметить, что встречаются и другие обозначения):

$$W(s,t_0) = \frac{1}{\sqrt{s}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\psi^*\left(\frac{t-t_0}{s}\right)dt. \tag{17}$$

Таким образом, нам удалось осуществить плавный переход от преобразования Фурье к вейвлетному преобразованию, из которого понятны суть и основная идея последнего. Фактически при вейвлетном преобразовании производится разложение по другому функциональному базису, нежели функции sin и cos, как это имеет место при фурье-преобразовании. В качестве базисных функций выступают вейвлеты ψ_{s,t_0}, получающиеся растяжением и сдвигом материнского вейвлета ψ_0. Материнский вейвлет (14), полученный плавным переходом от фурье-преобразования, показан на рис. 10. Будем называть эту вейвлетную функцию Sin-вейвлетом. Этот вейвлет не имеет широкого применения на практике, мы ввели его исключительно из методологических соображений. Однако важной отличительной чертой вейвлетного преобразования является тот факт, что в качестве материнского вейвлета может быть выбрана *любая* функция, удовлетворяющая определенным условиям, о которых речь пойдет ниже.

Глава I
НЕПРЕРЫВНЫЙ ВЕЙВЛЕТНЫЙ АНАЛИЗ

I.1. Базовые понятия и определения

Непрерывное вейвлетное преобразование осуществляется путем свертки

$$W(s, t_0) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\psi^*_{s,t_0}(t)\, dt \tag{I.1}$$

анализируемой функции $f(t)$ с двухпараметрической вейвлетной функцией $\psi_{s,t_0}(t)$, которая получается из материнского вейвлета $\psi_0(t)$:

$$\psi_{s,t_0}(t) = \frac{1}{\sqrt{s}}\, \psi_0\left(\frac{t - t_0}{s}\right). \tag{I.2}$$

Параметр s, называемый масштабом вейвлетного преобразования ($s \in \in \mathbb{R}^+$), отвечает за ширину вейвлета, а $t_0 \in \mathbb{R}$ — параметр сдвига, определяющий положение вейвлета на оси t. Множитель $1/\sqrt{s}$ в соотношении (I.2) введен для того, чтобы все вейвлетные функции ψ_{s,t_0} имели постоянную (единичную) норму в пространстве $L^2(\mathbb{R})$:

$$\|\psi_{s,t_0}\|_{L^2} = \|\psi_0\|_{L^2} = 1, \tag{I.3}$$

где норма пространства $L^2(\mathbb{R})$ определяется как

$$\|f\|_{L^2} = \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x) f^*(x)\, dx\right)^{1/2}. \tag{I.4}$$

Отметим, что выполнение условия (I.3), в силу теоремы Парсеваля, приводит к

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \widehat{\psi}(\omega)\widehat{\psi}^*(\omega) d\omega = 1, \tag{I.5}$$

где $\widehat{\psi}(\omega)$ — фурье-образ вейвлетной функции.

Из последних соотношений, в частности, следует, что непрерывное вейвлетное преобразование изометрически отображает пространство функций одной переменной в двумерное вейвлетное пространство:

$$W : L^2(\mathbb{R}) \to \mathcal{W}((\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+),$$

и, следовательно, информация, содержащаяся в коэффициентах вейвлетного преобразования, является избыточной. Отсюда следует, например, тот факт, что непрерывное вейвлетное преобразование случайного сигнала будет показывать наличие корреляции, которой нет в сигнале, но которая естественным образом присутствует в самом преобразовании. Это является достаточно существенным недостатком вейвлетного преобразования и его необходимо учитывать при интерпретации вейвлетных спектров.

Материнский вейвлет ψ_0 может быть выбран достаточно произвольно (например, так, как это было сделано во введении), однако при этом он должен удовлетворять ряду условий.

Условие локализации. Базисная вейвлетная функция (материнский вейвлет) ψ_0 должна быть локализована как во временно́м, так и в частотном представлении. Для этого необходимо, чтобы ψ_0 была задана на конечном интервале и обладала достаточной регулярностью.

Условие допустимости. Материнский вейвлет должен быть выбран таким образом, чтобы его фурье-образ $\widehat{\psi}_0(\omega)$ удовлетворял условию

$$C_\psi = 2\pi \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\widehat{\psi}_0(\omega)|^2}{\omega}\, d\omega < \infty. \tag{I.6}$$

Отметим, что для практического применения часто достаточно рассмотрения только положительных частот (следствие разумного условия $s > 0$), поэтому материнский вейвлет должен удовлетворять соотношению

$$C_\psi = 2 \times 2\pi \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{|\widehat{\psi}_0(\omega)|^2}{\omega}\, d\omega = 2 \times 2\pi \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{|\widehat{\psi}_0(-\omega)|^2}{\omega}\, d\omega < \infty. \tag{I.7}$$

Подчеркнем также, что для всех практических целей условие (I.6) эквивалентно требованию *нулевого среднего*

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \psi_0(t)\, dt = 0, \tag{I.8}$$

или

$$\widehat{\psi}_0(0) = 0, \tag{I.9}$$

что следует из соотношения (I.6).

Иногда бывает необходимым, чтобы не только нулевой момент (I.8) обращался в нуль, но и все первые m моментов были равны нулю:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} t^m \psi_0(t)\, dt = 0. \tag{I.10}$$

Такие вейвлеты (вейвлеты m-го порядка) позволяют анализировать мелкомасштабные флуктуации и особенности высокого порядка, игнорируя при этом наиболее регулярные (полиномиальные) составляющие сигнала. В этом случае коэффициенты вейвлетного преобразования будут малы в областях, где функция имеет гладкость до порядка обращающихся в нуль моментов, и вейвлетное преобразование будет реагировать только на изменения функции высокого порядка. Действительно, раскладывая в вейвлетном преобразовании (17) функцию $f(t)$ в ряд Тейлора в окрестности точки t_0, получим

$$\begin{aligned} W(s,t_0) = \frac{1}{\sqrt{s}}\Bigg[f(t_0)\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\psi_0^*\left(\frac{t-t_0}{s}\right)dt \,+ \\ + f'(t_0)\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(t-t_0)\psi_0^*\left(\frac{t-t_0}{s}\right)dt + \ldots \\ \ldots + f^{(n)}(t_0)\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(t-t_0)^n\psi_0^*\left(\frac{t-t_0}{s}\right)dt + \ldots\Bigg]. \end{aligned} \tag{I.11}$$

В этом случае первые m слагаемых соотношения (I.11) в силу (I.10) обращаются в нуль и существенное влияние оказывают изменения высоких порядков. Заметим, что для практических целей иногда оказывается достаточным, чтобы условие (I.10) выполнялось приблизительно.

Наконец, следует упомянуть еще *условие ограниченности*

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|\psi_0(t)|^2 dt < \infty. \tag{I.12}$$

В качестве оценки хорошей локализации и ограниченности могут служить соотношения $|\psi_0(t)| < 1/(1+|t|^n)$, или $|\widehat{\psi}_0(\omega)| < 1/(1+|\omega-\omega_0|^n)$, где ω_0 — доминантная частота вейвлета, а величина параметра n должна быть как можно большей [2].

В том случае, если условие допустимости (I.6) выполняется, существует обратное вейвлетное преобразование

$$f(t) = \frac{1}{C_\psi}\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{ds}{s^2\sqrt{s}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\psi_0\left(\frac{t-t_0}{s}\right)W(s,t_0)\,dt_0. \tag{I.13}$$

Таким образом, вейвлетное преобразование осуществляется с единственной материнской вейвлетной функцией, которая хорошо локализована и быстро стремится к нулю. С помощью нее покрывается вся ось $\mathbb{R}(-\infty,\infty)$ за счет системы сдвигов (переносов). Пусть такие сдвиги являются целыми, т. е. рассматриваются сдвиги вида $\psi(\eta-k)$. Введем тогда аналог частоты, который запишем для определенности через степени двойки: $\psi(2^j\eta - k)$, где j, k — целые числа. Учитывая вышесказанное с помощью масштабных преобразований $(1/2)^j$ и сдвигов $k/2^j$ возможно описать все частоты и покрыть ими всю ось, имея единственную базовую вейвлетную функцию. Заметим, что норма (13) вейвлетной функции $||\psi_0(2^j\eta - k)||_{L^2} = 2^{-j/2}||\psi_0(\eta)||_{L^2}$, поэтому если базисная вейвлетная функция $\psi_0(\eta)$ имеет единичную норму, то все функции $\{\psi_{jk}\}$, порождаемые ею

$$\psi_{jk}(\eta) = 2^{j/2}\psi_0(2^j\eta - k),$$

также будут иметь единичную норму.

Базисная вейвлетная функция называется ортогональной и составляет ортонормированный базис в том случае, если

$$||\psi_{jk}\psi_{lm}||^2_{L^2} = \delta_{jl}\delta_{km}. \tag{I.14}$$

Один из примеров ортогонального вейвлета будет приведен чуть ниже (подробнее обсуждение этих вопросов см. в книге И. Добеши [5]).

Конкретный выбор анализирующего материнского вейвлета определяется тем, какую информацию необходимо извлечь из сигнала. Каждая базовая вейвлетная функция ψ_0 характеризуется различными свойствами, что позволяет, используя разные вейвлетные функции, выявить все особенности анализируемого сигнала $f(t)$.

Одним из наиболее часто используемых комплексных материнских вейвлетов является морлет-вейвлет [44]

$$\psi_0(\eta) = \pi^{-1/4}\exp(j\omega_0\eta)\exp(-\eta^2/2), \tag{I.15}$$

где ω_0 — параметр вейвлета. Обычно рассматривается морлет-вейвлет с параметром $\omega_0 = 6{,}0$. Морлет-вейвлет обладает базисом, хорошо локализованным в реальном и фурье-пространстве, причем с увеличением ω_0 растет разрешение в фурье-пространстве, но ухудшается локализация во времени. Морлет-вейвлет фактически является аналогом Sin-вейвлета, рассмотренного во введении. Морлет-вейвлет представляет собой синусоидальную функцию, модулированную функцией Гаусса, а Sin-вейвлет — прямоугольным импульсом.

Другим комплексным вейвлетом является вейвлет Паула [45]

$$\psi_0(\eta) = \frac{2^m j^m m!}{\sqrt{\pi(2m!)}}(1 - j\eta)^{-(m+1)}, \tag{I.16}$$

где m — порядок вейвлета. В данной работе мы будем часто обращаться к вейвлету Паула порядка $m = 4$. Заметим, что чем больше параметр m, тем больше нулевых моментов имеет паул-вейвлет.

В качестве действительных базовых вейвлетных функций широко используется семейство DOG вейвлетов [32], которые конструируются на базе производных функции Гаусса:

$$\psi_0(\eta) = \frac{(-1)^{m+1}}{[\Gamma(m+1/2)]^{1/2}}\frac{d^m}{d\eta^m}\exp\left(\frac{-\eta^2}{2}\right). \tag{I.17}$$

Материнский вейвлет, соответствующий $m = 1$, называется WAVE вейвлетом; $m = 2$ — MHAT-вейвлетом (*Mexican Hat* — «Мексиканская шляпа»).

Часто в качестве действительного материнского вейвлета также применяется дискретный FHAT-вейвлет, более известный под названием «Французская шляпа» (French hat)

$$\psi_0(\eta) = \begin{cases} 1, & |\eta| < 1/3, \\ -1/2, & 1/3 < |\eta| \leqslant 1, \\ 0, & |\eta| > 1. \end{cases} \tag{I.18}$$

Примером ортогональной дискретной базисной вейвлетной функции, порождающей ортонормированный базис, является HAAR-вейвлет:

$$\psi_0(\eta) = \begin{cases} 1, & 0 \leqslant \eta < 1/2, \\ -1, & 1/2 \leqslant \eta < 1, \\ 0, & \eta < 0, \ \eta \geqslant 1. \end{cases} \tag{I.19}$$

Легко показать, что любые две функции ψ_{jk} и ψ_{lm}, полученные с помощью материнской вейвлетной функции (I.19) по формуле (I.2) с помощью масштабных преобразований 2^{-j}, 2^{-l} и сдвигов $k/2^j$, $m/2^l$, ортогональны и имеют единичную норму.

Недостатком FHAT- и HAAR-вейвлетов является их негладкость — они имеют резкие границы, вследствии чего возникают бесконечные (убывающие как $1/\omega$) хвосты фурье-образов вейвлетных функций. Для HAAR-вейвлета также следует отметить несимметрию его образа в фурье-пространстве. Для ряда приложений эти особенности не существенны, а иногда односторонность HAAR-вейвлета даже становится достоинством [2].

Существуют и другие базовые вейвлетные функции, которые применяются для различных приложений. В работах [46–49] представлены примеры материнских вейвлетов, а также способы их конструирования.

По аналогии со спектром мощности фурье-преобразования $P(\omega) = |\widehat{f}(\omega)|^2$ можно ввести в рассмотрение мгновенное

$$E(s, t_0) = |W(s, t_0)|^2 \tag{I.20}$$

и интегральное

$$\langle E(s) \rangle = \int |W(s, t_0)|^2 \, dt_0 \tag{I.21}$$

распределения энергии по масштабам вейвлетного преобразования.

Интегральное распределение энергии по масштабам для вейвлетного преобразования связано с фурье-спектром мощности соотношением вида

$$\langle E(s) \rangle \sim s \int P(\omega) |\widehat{\psi}_0(s\omega)|^2 \, d\omega. \tag{I.22}$$

Из соотношения (I.22) следует, что распределение энергии по масштабам $\langle E(s) \rangle$ представляет собой сглаженный спектр мощности фурье-преобразования, причем характер сглаживания определяется фурье-образом материнского вейвлета ψ_0. Подробнее на вопросах сглаживания и сравнения вейвлетных и фурье-спектров мощности остановимся в § IV.4.

Как уже обсуждалось выше во введении, для получения точной информации о высокочастотных гармониках исследуемого сигнала с высокой разрешающей способностью во времени нам необходимо извлекать ее из коротких временны́х интервалов, а не из всего сигнала, в то время как информацию о низкочастотной части спектра необходимо получать, анализируя достаточно длительные интервалы времени. На рис. I.1 иллюстрируются возможности частотно-временно́й локализа-

Рис. I.1. Частотно-временна́я локализация в фазовом пространстве (t, ω) для различных преобразований: (*а*) дискретная выборка (преобразование Шенона), (*б*) преобразование Фурье, (*в*) оконное фурье-преобразование, (*г*) вейвлетное преобразование

ции различных преобразований. На рис. I.1 *а* показана схема разбиения фазового пространства (t, ω) для выборки дискретных значений сигнала, где в качестве базисной функции служит δ-функция (преобразование Шеннона). В этом случае получаем, что сигнал оказывается хорошо локализован во времени и совершенно не разрешен по частоте. Из рис. I.1 *б*, соответствующего преобразованию Фурье, видно, что мы имеем хорошее разрешение по частоте и не имеем локализации во времени. Рис. I.1 *в* соответствует оконному преобразованию Фурье. Из рисунка понятно, что в данном случае временно́е разрешение на больших и малых масштабах постоянно и определяется размером окна. В случае же вейвлетного преобразования базисные функции имеют уменьшающееся с увеличением масштаба s временно́е разрешение (определяемое шириной вейвлетной функции $\psi(t/s)$) и увеличивающееся с масштабом разрешение по частоте (определяемое шириной фурье-образа вейвлетной функции $\widehat{\psi}(s\omega)$), что дает хорошую временну́ю локализацию на малых масштабах и хорошее частотное разрешение при больших масштабах (рис. I.1 *г*).

Основным свойством вейвлетного преобразования, принципиальным для анализа сложных нестационарных процессов, является способность сохранять локальность представления сигнала, и, как следствие, локально реконструировать сигнал. Существует возможность выделить вклад определенного масштаба в тот или иной момент времени или реконструировать только часть сигнала. Фактически имеет место связь между локальным поведением сигнала и локальным поведением коэффициентов его вейвлетного преобразования. Под локальностью понимается то, что для реконструкции части сигнала необходимо рассматривать коэффициенты вейвлетного преобразования, относящиеся только к подобласти вейвлетного пространства (см. рис. I.2 *а*), так на-

Рис. I.2. Угол влияния вейвлетного преобразования

зываемому углу влияния. Если базовая вейвлетная функция ψ_0 хорошо локализована в интервале ΔT для $s = 1$, то коэффициенты вейвлетного спектра, соответствующие моменту времени t_0', будут содержаться в конусе влияния, ограниченном прямыми $s = t_0' - (t_0\Delta T)/2$ и $s = t_0' + (t_0\Delta T)/2$. Заметим, что, в свою очередь, коэффициент $W(s, t_0)$ в точке (t_0', s') зависит от значений ряда из определяемого тем же углом влияния временно́го диапазона около значения t_0' (рис. I.2 *б*)). Диапазон этот тем больше, чем больше анализируемый масштаб s', т. е. высокочастотная (или, что то же самое, мелкомасштабная) информация вычисляется на основе малых по длительности отрезков сигнала, а низкочастотная — больших. Одновременно, если ψ_0 хорошо локализована и в фурье-пространстве в частотном интервале $\Delta\Omega$ вокруг доминантной частоты ω_0 для $s = 1$, то коэффициенты вейвлетного преобразования, соответствующие частоте ω сигнала, будут находиться в полосе $[\omega_0/\left(\omega + \Delta\Omega/2s\right), \omega_0/\left(\omega - \Delta\Omega/2s\right)]$.

Например, если функция $f(x)$ локально гладкая, то соответствующие коэффициенты вейвлетного преобразования остаются малыми. Если же $f(x)$ содержит сингулярность, тогда в ее окрестности амплитуда вейвлет-коэффициентов существенно возрастает. Если вейвлет-коэффициенты подвержены случайным ошибкам, то они будут действовать на реконструируемый сигнал только локально вблизи возмущения, в то время как преобразование Фурье будет распространять ошибки по всему реконструируемому сигналу.

I.2. Численная реализация непрерывного вейвлетного преобразования

Рассмотрим теперь численную реализацию процедуры вейвлетного преобразования какой-либо величины, ведущей себя нестационарным образом во времени. При численном анализе мы имеем дело с временно́й реализацией интересующей нас величины, заданной в дискретные моменты времени. Будем рассматривать случай, когда значения величины заданы через равные интервалы времени [1]. Тогда для проведения вейвлетного анализа мы располагаем временны́м рядом величины $\{x\}$, где каждое из значений x_n задано с одинаковым временны́м интервалом Δt, $n = 0, \ldots, N-1$, N — число отсчетов в исследуемом ряду.

Непрерывное вейвлетное преобразование некоторой дискретной последовательности $\{x\}$ определяется как свертка этой последовательности $\{x\}$ и базисной вейвлетной функции $\psi(\eta)$ (I.1), которая соответствующим образом перенормируется с масштабом s и сдвигается по временно́й шкале на интервал $n\Delta t$:

$$W(n, s) = \sum_{n'=0}^{N-1} x_n \psi^* \left(\frac{(n'-n)\Delta t}{s} \right). \qquad \text{(I.23)}$$

Тогда, изменяя масштабный коэффициент s и величину сдвига во времени вейвлетной функции $n\Delta t$, можно восстановить и локализовать динамику любых особенностей процесса $\{x\}$ в пространстве масштабов s, т. е. определить как мгновенную амплитуду колебаний на данном временно́м масштабе, так и особенности динамики каждого из масштабов с течением времени.

Расчет вейвлетного преобразования с непосредственным использованием соотношения (I.23) не является оптимальным, за исключением случая, упоминаемого в сноске на стр. 25. Процесс расчета может быть существенно ускорен (т. е. может быть уменьшено число машинных операций, которые необходимо выполнить), если перейти от представ-

[1] Это наиболее типичный случай, встречающийся при анализе данных в приложениях теории колебаний и волн. Вместе с тем можно предположить и случай, когда значения переменной могут задаваться в «случайные» моменты времени. Например, временна́я реализация, составленная из цен продажи акций на бирже, если учитываются не усредненные цены, а непосредственно стоимость каждой сделки, будет именно таким рядом, так как время совершения операции купли-продажи произвольно. Для таких рядов развитый здесь метод не может быть применен, и в этом случае необходимо пользоваться расчетом вейвлетного преобразования непосредственно исходя из определения (см. формулу (I.1)).

ления вейвлетного преобразования (I.23) к выражению его через фурье-образы исходного сигнала $\widehat{x}_k$ и вейвлетной функции $\widehat{\psi}$ [3, 42].

Для записи непрерывного вейвлетного преобразования в фурье-пространстве процедура (I.23) должна быть проделана N раз для каждого значения масштаба s, где N — число точек временно́й реализации. Если предположить, что $\{x\}$ — комплексная последовательность, а вейвлетная функция заранее вычислена во всем интересующем нас диапазоне значений [1)], то в этом случае требуется совершить $\mathcal{L} \times 8N^3 + \mathrm{O}(N)$ арифметических операций, здесь $\mathcal{L}$ — число масштабов s, на которых осуществляется расчет выражения (I.23). Действительно, в каждой точке дискретного пространства (n, s), размерность которого $N \times \mathcal{L}$, требуется в соответствии с соотношением (I.23) совершить N комплексных умножений (по 6 арифметических операций) и $N - 1$ комплексное сложение (2 арифметические операции).

Теорема о свертке позволяет нам при данном масштабе s одновременно найти все значения $W(n, s)$ в фурье-представлении (n меняется в пределах $(0, N - 1)$), используя дискретное преобразование Фурье. Для последовательности x_n дискретное преобразование Фурье выражается как

$$\widehat{x}_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_n \mathrm{e}^{-2\pi jkn/N}, \tag{I.24}$$

где $k \cdot \Delta t^{-1} \subset (0, \ldots, (N-1) \cdot \Delta t^{-1})$ образует последовательность частот исходного сигнала x_n, заданного последовательностью N значений с временны́м интервалом Δt. Очевидно, что в пределе при использовании непрерывного фурье-преобразования функция $\psi(t/s)$ будет иметь фурье-образ вида

$$\widehat{\psi}(s\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi\left(\frac{t}{s}\right) \mathrm{e}^{-j\omega t}\, dt, \tag{I.25}$$

т. е. перенормировка вейвлетной функции в фурье-пространстве учитывается умножением частоты на масштабный множитель s. Аналогичное выражение можно записать, применяя дискретное фурье-преобразование

$$\widehat{\psi}(ks) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \psi\left(\frac{n}{s}\right) \mathrm{e}^{-2\pi jkn/N}, \tag{I.26}$$

но в случае, когда фурье-образ вейвлетной функции может быть найден аналитически, более естественна запись в виде (I.25).

[1)] Последнее сильно уменьшает время расчета, что определяется сложным видом вейвлетной функции, но одновременно требует, во-первых, интерполяции значений функции ψ, а следовательно, снижает точность вычислений и также требует затрат машинного времени, и, во-вторых, увеличивает объем требуемой машинной памяти.

Тогда в фурье-пространстве вейвлетное преобразование записывается как простое умножение фурье-образа сигнала $\widehat{x}$ на комплексно сопряженный фурье-образ вейвлетной функции $\widehat{\psi}^*$, а выражение для вейвлетного преобразования $W(n, s)$ может быть получено с помощью обратного фурье-преобразования

$$W(n, s) = \sum_{k=0}^{N-1} \widehat{x}_k \widehat{\psi}^*(s\omega_k) \mathrm{e}^{j\omega_k n\Delta t}, \tag{I.27}$$

где частота ω_k, очевидно, дается выражением вида

$$\omega_k = \begin{cases} 2\pi k/N\Delta t & \text{при} \quad k \leqslant N/2, \\ -2\pi k/N\Delta t & \text{при} \quad k > N/2. \end{cases} \tag{I.28}$$

Тогда, учитывая выражение (I.27), можно одновременно для всех значений n найти непрерывное вейвлетное преобразование $W(n, s)$ при данном масштабе s, применяя для нахождения сумм в уравнениях (I.24) и (I.27) процедуру быстрого преобразования Фурье (БПФ). Как хорошо известно [50], применение процедуры БПФ требует для расчета сумм вида (I.24) или (I.27) всего $N \log_2 N$ операций. Тогда для расчета вейвлетного преобразования $W(n, s)$ по всем рассматриваемым масштабам s, если не учитывать затраты на нахождение фурье-образа сигнала $\widehat{x}$ (его, очевидно, достаточно найти только один раз), требуется только $\mathcal{L} \times N \log_2 N$ операций, что при больших N существенно меньше, чем при реализации вейвлетного преобразования непосредственно с использованием определения (I.23).

Вместе с тем использование для вычисления вейвлетного преобразования представления сигнала и вейвлетной функции в фурье-пространстве, и, в частности, использование для ускорения расчетов процедуры БПФ, накладывает ряд требований на реализацию процедуры расчета. Рассмотрим эти требования более подробно.

I.2.1. Нормировка вейвлетной функции. Для корректного сравнения и анализа результатов вейвлетного преобразования временны́х реализаций различных сигналов и даже одного сигнала на различных масштабах s при использовании спектрального представления сигнала $\{\widehat{x}\}$ и базисной вейвлетной функции $\widehat{\psi}$ требуется осуществление процедуры нормализации функции ψ на каждом из масштабов s. Данная процедура сводится к получению единичной энергии на каждом масштабе:

$$\widehat{\psi}(s\omega_k) = \left(\frac{2\pi s}{\Delta t}\right)^{1/2} \widehat{\psi}_0(s\omega_k). \tag{I.29}$$

Представление различных базовых вейвлетных функций $\psi_0(\eta)$, их фурье-образы и ряд других характеристик приведены на рис. I.3 и, соответственно, в табл. I.1. Постоянный множитель каждой из базисных вейвлетных функций выбран так, чтобы обеспечить выполнение

Рис. I.3. Типы базисных вейвлетных функций. Представлены действительные (сплошные линии) и мнимые (штриховые линии) части материнских вейвлетов (слева) и их фурье-образы (справа): (*а*) соответствует морлет-вейвлету с $\omega_0 = 6,0$; (*б*) — морлет-вейвлету ($\omega_0 = 16$); (*в*) — MHAT-вейвлету (DOG-вейвлет с $m = 2$); (*г*) — вейвлету Паула с $m = 4$ и (*д*) — FHAT-вейвлету условия нормировки, т. е. получения единичной энергии,

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \left|\widehat{\psi}_0(\omega)\right|^2 d\omega = 1. \tag{I.30}$$

Используя такую нормализацию, на каждой шкале s, если учесть выражения (I.28) и (I.29), получаем

$$\sum_{k=0}^{N-1} \left|\widehat{\psi}(s\omega_k)\right|^2 = N, \tag{I.31}$$

где N — число отсчетов временно́й реализации.

Отсюда видно, что вейвлетное преобразование определяется амплитудой фурье-гармоник $\widehat{x}_k$ и не зависит от соответствующих фурье-коэффициентов базисной вейвлетной функции.

При использовании для вычисления вейвлетного преобразования непосредственно выражения (I.23), с учетом определения фурье-преобразования и сравнивая с соотношением (I.29), нормализация вейвлетной функции для различных масштабов запишется как

$$\psi\left(\frac{(n'-n)\Delta t}{s}\right) = \left(\frac{\Delta t}{s}\right)^{1/2} \psi_0\left(\frac{(n'-n)\Delta t}{s}\right), \tag{I.32}$$

где $\psi_0(\eta)$ есть вейвлетная функция, норма которой

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \left|\psi_0(\eta)\right|^2 d\eta = 1, \tag{I.33}$$

т. е. вейвлетная функция ψ_0 имеет единичную энергию.

I.2.2. Выбор набора временны́х масштабов, по которому производится вейвлетное преобразование. Важным аспектом расчета вейвлетного преобразования является выбор набора временны́х масштабов $\{s\}$, используемого при расчете $W(n, s)$ (I.27).

При использовании в качестве базисной вейвлетной функции ортогонального вейвлета [5, 35] выбор множества масштабов $\{s\}$ ограничен фиксированным конечным дискретным набором шкал [3].

Для неортогональных вейвлетных базисных функций набор $\{s\}$ может быть выбран произвольно из соображений получения более полной информации для анализа поверхности $W(n, s)$ [51]. Наиболее удобным является запись набора масштабов s_l как степеней двойки:

$$s_l = s_0 2^{l\Delta s}, \quad l = 0, \ldots, \mathcal{L}, \quad \mathcal{L} = \frac{\log_2(N\Delta t/s_0)}{\Delta s}. \tag{I.34}$$

Здесь s_0 — минимальный разрешаемый при вейвлетном преобразовании временно́й масштаб, $s_{\mathcal{L}}$ — наибольший масштаб, на котором производится анализ, $\mathcal{L}$ — число масштабов, используемых при расчете вейвлетного спектра. Минимальный масштаб s_0 должен быть выбран таким, чтобы эквивалентный этому масштабу фурье-период был порядка

Таблица I.1. Некоторые вейвлетные базисные функции и их основные свойства

Вейвлет	$\psi_0(\eta)$	$\widehat{\psi}_0(s\omega)$	τ_s	Λ
Морлет	$\pi^{-1/4} e^{j\omega_0\eta} e^{-\eta^2/2}$	$\pi^{-1/4} H(\omega) e^{(s\omega-\omega_0)^2/2}$	$\sqrt{2}\, s$	$\dfrac{4\pi s}{\omega_0+\sqrt{2+\omega_0^2}}$
DOG	$\dfrac{(-1)^{m+1}}{\left[\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)\right]^{1/2}} \dfrac{d^m}{d\eta^m} e^{\frac{-\eta^2}{2}}$	$\dfrac{(j)^m}{\left[\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)\right]^{1/2}} (s\omega)^m e^{\frac{-(s\omega)^2}{2}}$	$\sqrt{2}\, s$	$\dfrac{2\pi s}{\left[m+\frac{1}{2}\right]^{1/2}}$
Паул	$\dfrac{2^m j^m m!}{\sqrt{\pi(2m!)}} (1-j\eta)^{-(m+1)}$	$\dfrac{2^m}{\sqrt{m(2m-1)}} H(\omega)(s\omega)^m e^{-s\omega}$	$s/\sqrt{2}$	$\dfrac{4\pi s}{(2m+1)}$
FHAT	$\begin{cases} 1, & \lvert\eta\rvert < 1/3, \\ -1/2, & 1/3 < \lvert\eta\rvert \leqslant 1, \\ 0, & \lvert\eta\rvert > 1 \end{cases}$	$3H(s\omega)\left(\dfrac{\sin(s\omega)}{s\omega} - \dfrac{\sin(3s\omega)}{3s\omega}\right)$	$\sqrt{2}\, s$	$1{,}33s$

Здесь $H(x)$ — функция Хевисайда.

$2\Delta t$ (см. ниже). Оптимальный выбор величины Δs определяется в первую очередь шириной $\Delta\widehat{\psi}$ фурье-образа базисной вейвлетной функции $\widehat{\psi}$. При выборе величины Δs большей, чем ширина $\widehat{\psi}$ в фурье-пространстве, мы получим плохое разрешение вейвлетного преобразования по масштабам: часть масштабов окажется исключенной из рассмотрения. И наоборот, выбор величины $\Delta s \ll \Delta\widehat{\psi}$, благодаря конечной ширине вейвлетной функции в фурье-пространстве, практически не повысит «разрешающей способности» вейвлетного преобразования, а лишь увеличит необходимое время счета.

Например, для вышерассмотренного морлет-вейвлета с параметром $\omega_0 = 6{,}0$, максимальное значение $(\Delta s)_{\max}$, которое обеспечивает приемлемое для практических целей разрешение, примерно равно 0,5. Для других базисных вейвлетных функций, например вейвлета Паула, максимальное значение Δs может быть увеличено: $\Delta s \approx 1{,}0$. Очевидно, что выбор величин $\Delta s < (\Delta s)_{\max}$ будет приводить к улучшению разрешения по временны́м масштабам вейвлетного преобразования. В п. I.2.6 мы более подробно остановимся на корректном выборе величин s_0 и Δs.

I.2.3. Длина анализируемой временно́й реализации. Применение для расчета вейвлетного преобразования в соответствии с соотношениями (I.24) и (I.27) процедуры БПФ накладывает ограничения на длину N анализируемой временно́й реализации x_n. Величина N для удовлетворения условиям процедуры БПФ должна обязательно являться степенью 2: $N = 2^p$, где p — натуральное число.

Обычно получить временну́ю реализацию с числом отсчетов, удовлетворяющим этому требованию, не составляет особых сложностей. Однако возможны ситуации, когда число доступных отсчетов временно́й реализации фиксировано и не может быть легко увеличено (например, климатические или геологические данные). Если длина такой временно́й реализации порядка (но несколько меньше) 2^p, то свойства вейвлетного преобразования позволяют достаточно эффективно провести анализ такой реализации не по длине 2^{p-1}, а 2^p путем формирования суррогатной временно́й реализации, в которой первые и последние $(2^p - N)/2$ отсчетов заполнены постоянными величинами, например средними значениями исходной временно́й реализации $\overline{x} = \sum_n x_n/N$ или нулями. В этом случае при вейвлетном анализе мы лишь получим соответствующее расширение области влияния краевых эффектов на вейвлетный спектр на плоскости (n, s) (см. следующий пункт).

I.2.4. Область влияния краевых условий в вейвлетном спектре. Осуществление вейвлетного преобразования конечной временно́й реализации приводит к тому, что вблизи границ вейвлетного спектра по оси абсцисс n ($n = 0$ и $n = N - 1$) появляются ошибки в расчетах функции $W(n, s)$, так как использование фурье-преобразования (I.27) предполагает, что данные $\{x\}$ периодичны и имеют период длиной N. Наличие области, в которой результаты расчета вейвлетного спектра не верны, может быть качественно объяснено тем, что вейвлетная функция $\psi\left((n' - n)\Delta t/s\right)$ на данном конкретном масштабе s

при приближении к границе начинает выходить за пределы рабочей области, и расчет значений $W(n, s)$ вблизи границ становится некорректным. Отсюда очевидно, что область влияния краевых эффектов должна сужаться с уменьшением временны́х масштабов s.

Одним из решений данной проблемы [1)] [3, 42] является создание новой временно́й реализации x'_n длиной $2N$, в которой первые N отсчетов соответствуют исходному сигналу x_n, а следующие N позиций, начиная с $n = N$, заполняются нулями. Вейвлетное преобразование (I.27) производится над новой суррогатной временно́й реализацией x'_n. Так как $N = 2^p$, то при расчете получающихся в результате фурье-преобразования сумм можно опять воспользоваться процедурой БПФ, но теперь уже для работы с временны́м рядом с числом отсчетов 2^{p+1}. Такая методика уменьшает влияние краевых эффектов и одновременно является достаточно быстрой благодаря возможности использовать технику БПФ [2)].

Использование заполненной наполовину нулями суррогатной временно́й реализации x'_n при вейвлетном анализе приводит к появлению сильной неоднородности на границах исходного временно́го ряда x_n. Однако благодаря тому, что суррогатный временно́й ряд наполовину заполнен постоянной во времени величиной (нулями), возмущения, вносимые этой неоднородностью, лежат в области очень больших временны́х масштабов, в то время как спектр исходной неоднородности (которая формально существенно меньше внесенной) лежал бы в области масштабов анализируемого сигнала. Так что внесение такой неоднородности приводит к уменьшению амплитуды W около границ исходного ряда. Очевидно, чем больше будет длина той части суррогатного ряда, которая заполнена нулями, тем меньше влияние краевых эффектов. Использование для анализа ряда, в котором длина последовательности нулей равна длине исходного сигнала, видимо, является оптимальной в смысле баланса скорости вычислений, затрат машинной памяти и точности осуществления вейвлетного преобразования вблизи границ исходного временно́го ряда [3, 53].

Под *областью влияния краевых условий* будем понимать область вейвлетного спектра $W(n, s)$ на плоскости (n, s), где краевые эффекты становятся важными и ими уже нельзя пренебречь. Следуя работе Christopher Torrence и Gilbert Compo [3], определим область влияния краевых эффектов через эффективную ширину τ_s автокорреляционной функции, рассчитанной по мощности вейвлетного преобразования, на каждом из временны́х масштабов s. Величина τ_s выбирается так, что она соответствует такому смещению относительно границы,

---

[1)] Существуют и другие методы понижения влияния краевых эффектов (см., например, [52]).

[2)] Если N — длина исходной временно́й реализации, требуется всего $\mathcal{L} \times$ $\times\, 2N(1 + \log_2 N)$ арифметических операций для реализации вейвлетного преобразования с использованием данной методики уменьшения влияния краевых эффектов.

что мощность вейвлетного преобразования ряда с краевой неоднородностью спадает в логарифмической шкале в 2 раза [1]. Такой выбор границы области влияния краевых эффектов гарантирует нам, что краевые эффекты пренебрежимо малы уже на временах $(N - n)\Delta t > \tau_s$ и $n\Delta t > \tau_s$ на соответствующих масштабах s.

Заметим также, что размер τ_s области влияния краевых эффектов определяет нам также характерное время влияния на форму вейвлетного спектра мощности единичного, большой амплитуды выброса (пика) на временно́й реализации процесса. Исследуя характерную ширину пика в спектре мощности вейвлетного преобразования, можно отличить «быстрый», большой амплитуды выброс на временно́й реализации, появление которого может быть связано, например, со случайными шумовыми процессами в исследуемой системе, от постоянной гармонической компоненты с эквивалентным фурье-периодом.

I.2.5. Соотношение между масштабами вейвлетного преобразования и частотами гармонического анализа. Из анализа рис. I.3 видно, что максимум фурье-образа базовой вейвлетной функции $\widehat{\psi}(s\omega)$ не приходится на частоту $1/s$, т. е. в общем случае не существует равенства между длинами волн Λ фурье-преобразования и масштабами s вейвлетного анализа, причем для каждой базисной вейвлетной функции вид зависимости $\Lambda(s)$ свой собственный (см. табл. I.1). Используя приведенные данные, можно проанализировать соотношения между фурье-периодом и масштабами вейвлетного преобразования различных типов вейвлетов. Так, для морлет-вейвлета с частотой заполнения $\omega_0 = 6{,}0$ величина $\Lambda = 1{,}03s$, или $\Lambda \cong s$, т. е. в данном частном случае масштаб вейвлетного преобразования практически эквивалентен фурье-периоду.

Однако уже для морлет-вейвлета с $\omega_0 = 16$ масштабы соотносятся с длиной волны Λ как $s = 2{,}5527\Lambda$. Для MHAT-вейвлета фурье-период примерно в 4 раза больше, чем масштаб вейвлетного преобразования ($s = 0{,}2518\Lambda$), для вейвлета Паула с $m = 4$, как несложно видеть, $s = 0{,}7166\Lambda$. Очевидно, что вид этих соотношений не имеет глубокого физического смысла, но их надо обязательно учитывать при сравнении и анализе результатов фурье-преобразования и вейвлетного преобразования с различными базовыми вейвлетными функциями [2].

Вид соотношений между величинами s и Λ может быть легко найден либо аналитически, путем подстановки в выражение (I.27) гармонической функции с известной частотой и аналитическом вычислении соответствующего ей масштаба s, определяемого по максимуму спектра мощности вейвлетного преобразования, либо численно, с единственным отличием, что спектр мощности вейвлетного преобразования в этом случае рассчитывается по вышеизложенной методике.

[1] Это соответствует уменьшению мощности в линейной шкале в e^2 раз.

[2] В первую очередь это касается спектров мощности, определяемых вейвлетными преобразованиями с различными видами базовой вейвлетной функции.

I.2.6. Реконструкция временно́го ряда по вейвлетному спектру. Вейвлетное преобразование (I.1) (или, для дискретного временно́го ряда, (I.23)) может рассматриваться как полосно-пропускающий фильтр с известной частотной характеристикой (вейвлетной функцией ψ). Поэтому можно реконструировать исходный сигнал по известному вейвлетному спектру $W(n,s)$ используя либо обращение свертки (I.1), либо конструируя обратный фильтр. Такие операции достаточно просты при работе с ортогональным вейвлетным преобразованием, при котором разложение сигнала происходит по базису ортогональных базисных функций. Однако в случае непрерывного вейвлетного анализа реконструкция исходного сигнала $\{x_n\}$ является сложной проблемой благодаря избыточности информации об исследуемом сигнале, которая содержится в коэффициентах вейвлетного спектра. В работах [32, 54] предложена простая процедура реконструкции исходного сигнала, в которой используется избыточность информации, содержащейся в вейвлетном спектре, и которая базируется на знании вида вейвлетного преобразования некоторой известной функции, наиболее простая из которых есть δ-функция. В этом случае реконструируемый временно́й ряд x_n может быть представлен как сумма всех коэффициентов вейвлетного преобразования на всех рассматриваемых временны́х масштабах [3]:

$$x_n = \frac{\Delta s \sqrt{\Delta t}}{K_\delta \psi_0(0)} \sum_{l=0}^{\mathcal{L}} \frac{W(n, s_l)}{\sqrt{s_l}}, \tag{I.35}$$

где коэффициенты $\psi_0(0)$ и $1/\sqrt{s}$ связаны с осуществлением «обратной» к описанной в п. I.2.1 перенормировки базисной вейвлетной функции для получения единичной энергии на каждом из временны́х масштабов s.

Для чисто действительного сигнала $x_n = \mathrm{Re}\,\{x_n\}$ формула реконструкции упрощается и принимает вид

$$x_n = \frac{\Delta s \sqrt{\Delta t}}{K_\delta \psi_0(0)} \sum_{l=0}^{\mathcal{L}} \frac{\mathrm{Re}\,\{W(n, s_l)\}}{\sqrt{s_l}}. \tag{I.36}$$

Коэффициент K_δ, фигурирующий в формулах (I.35) и (I.36), находится из реконструкции δ-функции по вейвлетному спектру δ-функции, построенного с материнским вейвлетом $\psi_0(\eta)$. Для нахождения K_δ конструируется временно́й ряд, значения которого описываются функцией, состоящей из δ-функции в момент времени $n=0$, т. е. $x_n = \delta_{n0}$. Амплитуды фурье-гармоник спектра такого сигнала задаются хорошо известной величиной $\widehat{x}_k = 1/N$ и постоянны для всех k. При подстановке величин $\widehat{x}_k$ в соотношение (I.27) для момента времени $n=0$ (момент всплеска) вейвлетный спектр принимает вид

$$W_\delta(s) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N} \widehat{\psi}^*(s\omega_k). \tag{I.37}$$

Из формулы для реконструкции временно́го ряда (I.36) тогда следует, что

$$K_\delta = \frac{\Delta s\sqrt{\Delta t}}{\psi_0(0)} \sum_{l=0}^{\mathcal{L}} \frac{\operatorname{Re}\{W(n, s_l)\}}{\sqrt{s_l}}. \tag{I.38}$$

Параметр K_δ не зависит от временно́го масштаба s и является константой для каждой базисной вейвлетной функции ψ_0. В табл. I.2 приведены значения K_δ и $\psi_0(0)$ для наиболее часто используемых вейвлетных функций.

Таблица I.2. Характеристики базисных вейвлетных функций, необходимые для реконструкции сигнала по вейвлетному спектру

Вейвлет	K_δ	$\psi_0(0)$
Морлет ($\omega_0 = 6{,}0$)	0,776	$\pi^{-1/4}$
Паул ($m = 4$)	1,132	1,079
DOG ($m = 2$)	3,541	0,867
DOG ($m = 6$)	1,966	0,884

Полная энергия сигнала должна остаться неизменной после осуществления вейвлетного преобразования. Отсюда следует аналог теоремы Парсеваля для вейвлетного преобразования, который для дискретно заданного сигнала $\{x_n\}$ записывается в виде

$$\sigma^2 = \frac{\Delta s \Delta t}{K_\delta N} \sum_{n=0}^{N} \sum_{l=0}^{\mathcal{L}} \frac{|W(n, s_l)|^2}{s_l}, \tag{I.39}$$

где σ^2 — среднеквадратичное отклонение значений переменной временно́го ряда. В соотношении (I.39) предполагается, что для реконструкции исходного сигнала используется δ-функция.

Соотношения (I.35) и (I.39) могут быть использованы для проверки точности численной реализации вейвлетного преобразования. Далее на основе полученной информации о точности расчета вейвлетного спектра можно достаточно адекватно выбирать величины наименьшего масштаба s_0 и шага Δs, которые будут удовлетворять необходимой точности анализа.

I.3. Адаптивные вейвлетные базисные функции

В предыдущем параграфе (см. п. 1.2.4) обсуждалось, что любой реально анализируемый сигнал имеет конечную длину. На его границах возникают ошибки в вычислении вейвлетного преобразования $W(t, s)$, поэтому на поверхности вейвлетного спектра выделяется область влияния краевых условий, которая определяет область корректного расчета коэффициентов вейвлетного преобразования.

Однако наряду с краевыми неоднородностями иногда на практике в экспериментальных временны́х рядах возникают неоднородности, связанные с промежутками в сигнале, в течение которых его значения не определены. В первую очередь, такие ситуации возникают при обработке данных, имеющих геофизическую, астрофизическую, социально-экономическую, демографическую и т. п. природу. В качестве примера можно привести данные по хромосферной активности звезд [55], для которых типично присутствие таких неопределенных промежутков в записях (см. рис. I.4). Промежутки в данных в этом случае определяются особенностями астрофизических измерений (длительностью сезонного окна благоприятных наблюдений, неблагоприятными метеорологическими условиями (облачным небом), ремонтом и обновлением аппаратуры телескопа и т. д.).

Рис. I.4. Характерная зависимость магнитной активности S звезды от времени. Хорошо заметны временны́е промежутки, в которых изучаемая величина не определена. Для примера приведены данные по звезде HD 201091. Время измеряется в месяцах (из работы [55])

Применение вейвлетного преобразования к анализу сигналов требует данных, непрерывно распределенных во времени. Конечно, в некоторых случаях возможно использование тех или иных методов интерполяции, но при наличии во временны́х рядах широких временны́х интервалов отсутствия данных такая интерполяция может стать затруднительной. Последнее имеет место, например, тогда, когда сигнал сильно нерегулярен, а интервал, на котором требуется провести интерполяцию, сравним с характерным временны́м масштабом процесса. Интерполяция будет вносить, во-первых, большие искажения в вейвлетный спектр процесса за счет ошибок интерполяции исходного сигнала. Здесь наиболее серьезный недостаток заключается в том, что любая сглаживающая интерполяционная процедура будет приводить к недооценке энергии процесса, приходящейся на высокочастотную часть спектра. И, во-вторых, ошибки появятся из-за неоднородностей на границах неопределенных промежутков сигнала. Последнее, как и неоднородности, связанные с конечной длиной анализируемого временно́го ряда, является причиной особенно существенных погрешностей на больших временны́х масштабах s (в низкочастотной части спектра процесса).

Одним из методов исследования рядов с подобными особенностями является вейвлетное преобразование, у которого вейвлетная базисная функция модифицируется с помощью соответствующей адаптивной процедурой для сохранения особенностей сигнала, заданного временны́м рядом с неоднородным распределением интервалов наблюдения. Следуя работе [55], рассмотрим один из таких методов построения адаптируемого вейвлетного базиса более подробно. Заметим, что границу ограниченного во времени непрерывного ряда можно рассматривать как полубесконечный промежуток без данных. Поэтому изложенные в данном параграфе подходы могут быть также использованы как альтернативные вышеизложенному нами методу уменьшения влияния ограниченности ряда на расчет вейвлетного спектра.

Рассмотрим одномерный сигнал $\chi(t)$, значения которого определены только в некоторые интервалы времени. Сконструируем новый сигнал $\chi'(t)$, который имеет вид

$$\chi'(t) = \chi(t)G(t), \tag{I.40}$$

где $G(t)$ — функция, принимающая значение, равное 1, если сигнал $\chi(t)$ определен, и значение, равное 0, если сигнал не определен (т. е. внутри промежутка или за границами временно́го ряда). Новая функция $\chi'(t)$ определена и непрерывна на интервале $t \in (-\infty, \infty)$.

Применяя к сигналу (I.40) вейвлетное преобразование (I.1), получаем выражение

$$W'(s, t_0) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \chi(t){\psi'}^*_{s,t_0}(t)\, dt, \tag{I.41}$$

где

$$\psi'_{s,t_0}(t) = \psi_{s,t_0}(t)G(t). \tag{I.42}$$

Вдали от промежутка, где сигнал χ не определен, функция ψ', используемая вместо исходного материнского вейвлета, совпадает с базовой вейвлетной функцией ψ. Вблизи промежутка функция ψ' уже отличается от базовой функции. Однако, как не трудно видеть, для нее не выполняется условие нулевого среднего (I.8)

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \psi'_{s,t_0}(t)\ dt \neq 0 \tag{I.43}$$

или, относительно фурье-образа,

$$\widehat{\psi}'_{s,t_0}(0) \neq 0. \tag{I.44}$$

Выражение (I.44) показывает, что фурье-образ $|\widehat{\psi}'(\omega)|^2$ расширяется в область низких частот вплоть до частоты $\omega = 0$. Сингулярности на границах промежутка приводят к генерации высокочастотных спектральных составляющих (высокочастотного паразитного «шума»). Поэтому адаптивная процедура должна строиться таким образом, чтобы уменьшить влияние паразитных частот в спектре как на низкочастотной, так и высокочастотной границе спектра сигнала. Таким образом, проблема интерполяции функции $\chi(t)$ сводится к замене «испорченной» базисной функции ψ' адаптированной вейвлетной функцией $\widetilde{\psi}$, которая будет удовлетворять условию (I.8) и стремиться к функции ψ, если неопределенный промежуток в сигнале будет уменьшаться.

Представим базовую вейвлетную функцию в виде произведения двух функций:

$$\psi_0(\eta) = \phi_0(\eta)\Phi(\eta), \tag{I.45}$$

где Φ — положительная масштабирующая (огибающая) функция (удобно использовать в качестве нее функцию Гаусса $\Phi(\eta) = \exp\left(-\eta^2/2\right)$) и ϕ_0 — заполнение огибающей Φ. Например, если рассматривается вейвлетное преобразование с базовым морлет-вейвлетом, то в качестве функции заполнения мы должны взять комплексную гармоническую функцию $\phi(\eta) = \exp\,(j\omega_0\eta)$ (см. формулу (I.15)). Если рассматривается MHAT-вейвлет, то $\phi(\eta) = 1 - \eta^2$ (формула (I.17)).

В такой терминологии адаптированный вейвлет $\widetilde{\psi}$ представляется в форме

$$\widetilde{\psi}_{s,t_0}(t) = \frac{1}{\sqrt{s}}\left[\phi\left(\frac{t-t_0}{s}\right) - C(s,t_0)\right]\Phi\left(\frac{t-t_0}{s}\right)G(t). \tag{I.46}$$

Параметр C, определяемый для каждого временно́го масштаба s и сдвига во времени t_0, может быть найден из условия

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\widetilde{\psi}_{s,t_0}(t)\,dt = 0.$$

Подставляя в последнее соотношение выражение (I.46), можно найти явный вид функции $C(s,t_0)$:

$$C(s,t_0) = \left[\int\limits_{-\infty}^{\infty}\Phi\left(\frac{t-t_0}{s}\right)G(t)\,dt\right]^{-1}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\phi\left(\frac{t-t_0}{s}\right)\Phi\left(\frac{t-t_0}{s}\right)G(t)\,dt. \tag{I.47}$$

Изменения вида адаптированного материнского вейвлета в присутствии единственного промежутка, где не определены значения сигнала $\chi(t)$, показаны на рис. I.5. На нем приведены адаптированные морлет-вейвлеты для случая, когда сигнал $\chi(t)$ задается либо функцией синус, либо функцией косинус и неопределенный промежуток в сигнале располагается точно на положительном полупериоде гармонической функции. Адаптированный вейвлетный базис теперь конструируется на основе функций с разрывами. Однако сингулярности появляются на границах неопределенного промежутка и не вносят новых искажений в вейвлетный спектр сигнала с особенностью.

В следующей главе, которая посвящена обсуждению характерных вейвлетных спектров некоторых модельных сигналов, мы сравним результаты применения к рассматриваемым данным вейвлетного и адаптированного вейвлетного преобразования (см. гл. II, § II.7).

В настоящее время технология построения адаптированных вейвлетных базисов для различных приложений активно развивается [56, 57]. Это связано с тем, что при использовании разложения исследуемого сигнала по вейвлетному базису мы не ограничены в выборе типа материнского вейвлета. Поэтому можно поставить вопрос о нахождении наилучшей базисной вейвлетной функции, которая бы оптимальным образом удовлетворяла нашим требованиям к диагностике исследуемого процесса. Проблеме построения адаптивных вейвлетных базисных функций для дискретного вейвлетного преобразования по-

Рис. I.5. Вид (*а*) морлет-вейвлета и (*б, в*) адаптированных вейвлетов, сконструированных на его основе, в случае когда неопределенный промежуток располагается на положительном полупериоде сигнала в виде функции косинуса или синуса. Сплошные линии — действительная часть, штриховые — мнимая часть вейвлета (из работы [55])

священа книга [58]. Среди других применений адаптированных вейвлетных базисов можно назвать обработку, в первую очередь кодирование, графической информации (см, например, [59, 60]), а также анализ геофизических данных [61].

В заключение этой главы заметим, что помимо вейвлетного анализа и оконного преобразования Фурье, которое обсуждалось во введении, существуют и другие техники частотно-временно́й локализации [5]. Одним из примером является распределение Вигнера, описанное применительно к анализу нестационарных сигналов в обзоре [62]. Распределение Вигнера $\Xi(t, v)$ записывается в виде [63]

$$\Xi(t, v) = \frac{1}{2\pi} \int x \left(t + \frac{\tau}{2}\right) x^* \left(t - \frac{\tau}{2}\right) \mathrm{e}^{-jv\tau}\, d\tau, \qquad (\mathrm{I}.48)$$

или, в фурье-пространстве,

$$\Xi(t, v) = \frac{1}{2\pi} \int \widehat{x}\left(v - \frac{u}{2}\right) \widehat{x}^*\left(v + \frac{u}{2}\right) \mathrm{e}^{-jut}\, du, \tag{I.49}$$

где $x(t)$ — анализируемый сигнал, $\widehat{x}(u)$ — его фурье-образ.

Характеристическая функция преобразования Вигнера определяется как [64]

$$M(u, \tau) = \iint \Xi(t, v) \mathrm{e}^{j(ut+v\tau)}\, dt\, dv. \tag{I.50}$$

Подставляя определение (I.48) для $\Xi(t, v)$ в последнее выражение, находим, что

$$M(u, \tau) = \int x^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right) x\left(t + \frac{\tau}{2}\right) \mathrm{e}^{jut}\, dt. \tag{I.51}$$

Функция $M(u, \tau)$ (I.51) является известной в математике и теории распознавания образов как функция неопределенности [64]. В фурье-пространстве она записывается как

$$M(u, \tau) = \int \widehat{x}^*\left(v + \frac{u}{2}\right) \widehat{x}\left(v - \frac{u}{2}\right) \mathrm{e}^{j\tau v}\, dv, \tag{I.52}$$

т. е. преобразование Вигнера есть обратное двукратное фурье-преобразование частотно-временно́й функции неопределенности M. Функция неопределенности широко используется в ряде приложений, связанных с обработкой и передачей сигналов, и, в частности, в радарных системах, для решения вопросов повышения разрешения, устранения неоднозначности определения параметров цели, оценки точности измерения параметров цели, устранения местных помех и т. п.

В отличие от вейвлетного преобразования и оконного преобразования Фурье в распределении Вигнера $\Xi(t, v)$ отсутствует какая-либо базисная функция, по которой производится разложение сигнала. Исследуемый сигнал входит в распределение Вигнера квадратичным, а не линейным образом, что является причиной возникновения явления интерференции [5]. Преимущества распределения Вигнера проявляются тогда, когда анализируемый сигнал имеет очень короткое время существования. В случае сигнала с бо́льшей длительностью использование распределения Вигнера менее информативно и привлекательно. Некоторые примеры приложений распределения Вигнера приведены в работах [62, 65]. В монографии [5] отмечается (см. также [66]), что абсолютные величины оконного преобразования Фурье и вейвлетные преобразования некоторой функции могут быть получены также «сглаживанием» ее распределения Вигнера, сделанного подходящим образом. Однако при этом теряется информация о фазе, и обратное преобразование уже невозможно.

Глава II
МОДЕЛЬНЫЕ ПРИМЕРЫ ВЕЙВЛЕТНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

В данной главе на ряде простых примеров проиллюстрируем основные особенности вейвлетного преобразования, его сходства и отличия от классического спектрального (Фурье) анализа.

В первом параграфе мы рассматриваем простейшие модельные примеры: вейвлетные спектры некоторых модельных сигналов (гармоническая волна, последовательность прямоугольных импульсов, сигналы с изменяющимся во времени спектральным составом, сигналы с локализованными во времени особенностями).

Во втором параграфе делается попытка обобщить особенности вейвлетного анализа временны́х сигналов, порождаемых динамическими системами с малым числом степеней свободы, при переходе к режимам динамического хаоса по сценарию Фейгенбаума (через удвоение периода колебаний) и перемежаемость. В последнем случае предлагается метод выделения характерных структур во временно́м ряде с помощью анализа вейвлетного спектра, который в данной главе применяется к определению средней длительности ламинарной и турбулентной фаз при перемежаемости.

В заключительном параграфе рассматриваются некоторые вопросы применения вейвлетного анализа геофизических и метеорологических данных на примере исследования явления Эль-Ниньо [67]. Заметим, что работ по данной тематике в настоящее время очень много и вейвлетный анализ можно рассматривать уже как стандартный метод анализа геофизических явлений и процессов. Также отметим, что вейвлетное преобразование было в 1980 г. впервые предложено Ж. Морлетом [1]) именно для анализа сейсмических наблюдений и акустических сигналов [71].

II.1. Применение вейвлетного преобразования к модельным сигналам

Вейвлетный спектр $W(t_0, s) = |W(t_0, s)|e^{-j\varphi_W(t_0,s)}$ одномерного сигнала $f(t)$ представляет собой две поверхности амплитуды $|W|$ и фазы φ_W коэффициентов вейвлетного преобразования в трехмерном пространстве. Способы визуализации и представления этой информации

[1]) Идея разложения сигнала или поля по базису, функции которого характеризуют как определенный временно́й/пространственный масштаб, так и его локализацию во времени/пространстве, рассматривались рядом математиков задолго до Морлета [68–70].

могут быть различными. Обычно вместо малонаглядного трехмерного изображения поверхностей пользуются представлением их в виде проекций на плоскость (t_0, s) [1]) с изолиниями или изоуровнями, позволяющими проследить изменение интенсивности амплитуды $|W|$ и эволюцию фазы φ_W коэффициентов вейвлетного преобразования на различных масштабах и во времени. Также достаточно информативным оказывается рассмотрение интегрального $\langle E(s)\rangle$ (I.21) и мгновенного $E(s)$ (I.20) распределений энергии по масштабам вейвлетного преобразования.

В ряде работ (см., например, [1, 2]) в качестве характеристики вейвлетного спектра рассматриваются картины локальных экстремумов поверхности $|W(t_0, s)|$ (так называемый skeleton), которые позволяют четко выявить структуру анализируемого процесса. Однако такой способ представления результатов вейвлетного анализа менее распространен, и здесь будем использовать метод проекций вейвлетных поверхностей.

На приведенных в книге иллюстрациях результатов применения вейвлетного преобразования интенсивность окраски на проекциях амплитуды вейвлетного преобразования пропорциональна абсолютной величине коэффициентов $|W(t_0, s)|$. На проекциях фазы вейвлетного преобразования интенсивность окраски строится так, что белый цвет соответствует фазе $\varphi_W = 0$, далее с ростом фазы окраска темнеет и достигает максимальной интенсивности при $\varphi_W = \pi$, а при дальнейшем увеличении фазы интенсивность окраски уменьшается и становится опять белой при $\varphi_W = 2\pi$. Такое построение интенсивности окраски в зависимости от величины φ_W связано с тем, что фаза есть 2π-периодическая функция, поэтому окраска точек (t_0, s) проекции, где фаза $\varphi_W(t_0, s)$ равна $\varphi_0 + 0$ и $\varphi_0 + 2\pi$ не должна различаться.

По вертикальной оси s (или $f_s = 1/s$) выбирается, если не оговаривается особо, логарифмический масштаб, который позволяет представить результаты вейвлетного преобразования в достаточно широком диапазоне масштабов. U-образная кривая на проекциях вейвлетных поверхностей выделяет область влияния краевых условий (см. п. I.2.4).

Рассмотрим применение непрерывного вейвлетного преобразования к ряду модельных сигналов, которые имеют особенности, встречающиеся в сигналах, которые характеризуют реальные процессы, порождаемые нелинейными динамическими системами.

II.1.1. Гармонический сигнал. На рис. II.1 показаны результаты применения вейвлетного преобразования с базовым морлет-вейвлетом с параметром $\omega_0 = 6{,}0$ (рис. II.1 *а*), с МНАТ-вейвлетом (рис. II.1 *б*) и с паул-вейвлетом с $m = 4$ (рис. II.1 *в*) к сигналу

$$f(t) = \sin(2\pi f_0 t), \qquad t = n\Delta t, \qquad n = 1,\ 2, \ldots \tag{II.1}$$

[1]) Либо на плоскость (t_0, f_s) при рассмотрении вместо временны́х масштабов s соответствующих им частот $f_s = 1/s$.

Здесь частота $f_0 = 5{,}0$, частота дискретизации $f_\Delta = 1/\Delta t = 1/0{,}0001 = 10^4$.

Проекция поверхности амплитуды $|W(t_0, s)|$ коэффициентов вейвлетного преобразования гармонического сигнала, построенного с базовым морлет-вейвлетом, представляет собой неизменяющуюся с увеличением параметра t_0 картину. Интегральное распределение энергии по масштабам $f_s = 1/s$ в данном случае имеет один максимум, который соответствует частоте $f_s = f_0/1{,}03$. Ширина распределения энергии $\langle E \rangle$ по масштабам больше, чем ширина фурье-спектра мощности, что связано с меньшим разрешением вейвлетного преобразования по масштабам. Из рисунка видно, что вейвлетное преобразование (для примера, с морлет-вейвлетом с $\omega_0 = 6{,}0$) не сможет различить на масштабах $s \approx 0{,}2$ частоты, которые отличаются на величину $\Delta f_s \approx 1{,}5$. Данное значение Δf_s определяется по ширине зависимости $\langle E(f_s) \rangle$ на половинном уровне мощности (см. рис. II.1 *а*). Одновременно фурье-анализ позволяет разрешить частоту с существенно меньшим Δf. При этом важным моментом является то, что при увеличении длительности анализируемой временно́й реализации сигнала разрешение по частоте фурье-анализа будет возрастать, в то время как разрешение вейвлетного преобразования по масштабам останется неизменным, так как оно не зависит от длительности анализируемого ряда (числа характерных периодов анализируемой гармоники, укладывающихся на длине исследуемого временно́го ряда). В то же время разрешение вейвлетного преобразования по масштабам уменьшается с ростом частоты. Одновременно амплитуда спектральных составляющих сигнала линейно уменьшается с ростом частоты f_s (ср. с рис. 9, аналитически построенным для Sin-вейвлета).

Сравнивая результаты вейвлетного преобразования гармонического сигнала с различными базовыми вейвлетными функциями, можно увидеть основные особенности каждого из них. Результаты вейвлетного преобразования, как видно из сравнения соответствующих проекций распределения амплитуды $|W|$, отличаются для разных базисных функций. Это требует различной интерпретации результатов в случае использования различных материнских вейвлетов ψ_0. Видно, что разрешение по масштабам вейвлетного преобразования с базовым MHAT-вейвлетом существенно меньше, чем с паул-вейвлетом, которое в свою очередь имеет худшее разрешение, чем преобразование с морлет-вейвлетом. Рост параметра ω_0 у морлет-вейвлета способствует увеличению разрешения вейвлетного преобразования по временны́м масштабам с ухудшением разрешения во времени. Одновременно MHAT-вейвлет позволяет получить более высокое разрешение особенностей сигнала во времени t. Аналогично, преобразование с базовым морлет-вейвлетом «улучшает» свое разрешение во времени с уменьшением параметра ω_0. Следует также обратить внимание на то, что соотношения расположения максимумов в распределениях энергии по масштабам f_s с соответствующей частотой f гармонического анализа для различных базисных вейвлетных функций отличаются друг от друга. Как неслож-

а

б

в

Рис. II.1. (*а*) Временна́я реализация синусоидального сигнала, соответствующая проекция распределения амплитуды $|W(t_0, s)|$ вейвлетного преобразования, интегральное распределение энергии по масштабам $\langle E \rangle$, полученные с помощью базисного морлет-вейвлета ($\omega_0 = 6{,}0$), а также приведенный для сравнения фурье-спектр мощности сигнала $P(f)$; (*б*) соответствующие характеристики вейвлетного преобразования с базисным МНАТ-вейвлетом; (*в*) характеристики вейвлетного преобразования с базисным паул-вейвлетом. Длительность временно́й реализации $N = 16384 = 2^{14}$ отсчетов, $\Delta t = 0{,}0001$, частота сигнала $f = 5{,}0$

но видеть, они соответствуют вышеприведенным соотношениям, связывающим масштабы Λ фурье-преобразования и масштабы s вейвлетного преобразования (см. стр. 33).

Рассмотрим теперь, как ведет себя фаза вейвлетного преобразования $\varphi_W(t_0, s)$. На рис. II.2 показаны проекции распределения фаз

Рис. II.2. Временна́я реализация синусоидального сигнала (II.1) и соответствующие распределения фазы $\varphi_W(t_0, s)$ вейвлетного преобразования, полученные с помощью базисного (*а*) морлет- ($\omega_0 = 6{,}0$) и (*б*) паул-вейвлета. Длительность реализации $N = 8192 = 2^{13}$, $\Delta t = 0{,}001$, частота сигнала $f = 5{,}0$

коэффициентов вейвлетного преобразования синусоидального сигнала (II.1), построенные с базовым морлет-вейвлетом ($\omega_0 = 6{,}0$) (см. рис. II.2 *а*) и паул-вейвлетом ($m = 4$) (см. рис. II.2 *б*). Из рисунка видно, что проекция поверхности фазы вейвлетного преобразования $W(t_0, s)$ имеет в широком диапазоне масштабов, лежащих в окрестности частоты $f_s \sim f_0 = 5{,}0$ сигнала, «полосатый» вид: фаза периодически меняется от 0 до 2π с изменением временно́го сдвига t_0 и практически не зависит от масштаба f_s. Картина меняется лишь при $f_s < 0{,}6$ (область больши́х масштабов), что связано с влиянием краевых условий, и при $f_s > 17$ (область очень малых масштабов), где амплитуда коэффициентов $|W(t_0, f_s)|$ вейвлетного преобразования пренебрежимо мала по сравнению с амплитудой коэффициентов в области $f_s \approx f_0$.

Заметим, что соответствующие распределения фазы, полученные с морлет- и паул-вейвлетами [1]), качественно подобны: различия проявляются лишь в области малых масштабов.

Для анализа вышеприведенных данных обратимся к аналитическим результатам, полученным для вейвлетного преобразования гармонического сигнала (II.1) с базовым Sin-вейвлетом.

Из формулы (9) следует, что фаза вейвлетного преобразования в этом случае дается соотношением

$$\varphi_W(t_0, s) = -\operatorname{arctg}\frac{2\pi n}{\omega s}\,\frac{1}{\operatorname{tg}\omega t_0}. \tag{II.2}$$

На рис. II.3 показана зависимость фазы от временно́го сдвига t_0 и масштаба s, построенная для частоты сигнала $\omega = 1{,}5$ и параметра $n = 5$. Видно, что фаза φ_W во всем диапазоне изменения масштаба s меняется почти периодически, причем длительность периода равна $2\pi/\omega$, что полностью совпадает с результатами численного расчета вейвлетного преобразования с базовыми вейвлетами Морлета и Паула (см. рис. II.2).

Рис. II.3. Фаза вейвлетного преобразования синусоидального сигнала с базовым Sin-вейвлетом

Для сравнения приведем картину распределения амплитуды и фазы коэффициентов вейвлетного преобразования двухчастотного сигнала:

$$f(t) = \sin(2\pi f_1 t) + \sin(2\pi f_2 t), \tag{II.3}$$

где $f_1 = 10$, $f_2 = 100$ (рис. II.4). Видно, что на поверхности фазы четко выделяются две области: область, где период изменения фазы вейвлетного преобразования равен величине $1/f_1$, и область, где период равен $1/f_2$, причем между этими областями существует достаточно четкая граница.

Рассмотрим теперь другие особенности в распределениях фазы φ_W коэффициентов вейвлетного преобразования, представленных на рис. II.2.

Прежде всего обратим внимание на близкую к регулярной структуру проекции распределения фаз, полученных как с базовым морлет-вейвлетом, так и паул-вейвлетом в области самых малых разрешаемых (при данной длине временно́й реализации и числе отсчетов N) временны́х масштабов $f_s > 200$ ($s < 0{,}005$) (отмечено на рис. II.2). Логично предположить, что такая структура поверхности связана с дискретизацией сигнала с шагом $\Delta t = 0{,}0001$ (длительность временно́й реализа-

---

[1]) Для вейвлетного преобразования с базовым MHAT-вейвлетом фаза $\varphi_W \equiv 0$, так как мнимая часть данного вейвлета тождественно равна нулю.

Рис. II.4. Временнáя реализация сигнала (II.3) и соответствующие проекции распределения амплитуды $|W(t_0, s)|$ и фазы $\varphi_W(t_0, s)$ коэффициентов вейвлетного преобразования с базовым морлет-вейвлетом ($\omega_0 = 6{,}0$). Длительность временнóй реализации $N = 8192 = 2^{13}$ отсчетов, $\Delta t = 0{,}0001$

ции $t_{\max} = 8{,}192$, $N = 8192$). Для проверки этого предположения было рассчитано вейвлетное преобразование (с базовым морлет-вейвлетом) сигнала с такой же длительностью $t_{\max}$, но шагом дискретизации в два раза большим и, следовательно, числом отсчетов $N = 4096$. Результаты расчета представлены на рис. II.5. Видно, что данная характерная область проекции поверхности фазы сместилась в диапазон масштабов $f_s > 100$ ($s < 0{,}01$), т. е. ее положение изменилось в два раза, что соответствует характеру изменения шага дискретизации. Полностью аналогичная картина наблюдается и в случае расчета с базовым вейвлетом Паула. Для экономии места соответствующая иллюстрация не приводится.

Другой характерной особенностью вейвлетного преобразования с базовым морлет-вейвлетом является наличие характерных «кустообразных» структур на поверхности фаз φ_W, которые наблюдаются на рис. II.2 *а* при $t_0 = 2{,}05$ и $t_0 = 4{,}10$. Фактически данные характерные структуры могут быть интерпретированы как некоторые возмущения регулярного изменения фазы коэффициентов вейвлетного преобразования с увеличением значения t_0 на самых различных масштабах f_s.

Рис. II.5. Временна́я реализация синусоидального сигнала (II.1) и соответствующая проекция распределения фазы $\varphi_W(t_0, s)$ вейвлетного преобразования, полученная с помощью базисного морлет-вейвлета ($\omega_0 = 6{,}0$) с шагом дискретизации по времени в два раза большим, чем для сигнала, представленного на рис. II.2 ($N = 4096 = 2^{12}$, $\Delta t = 0{,}002$, частота сигнала $f = 5{,}0$)

Чтобы понять, с чем может быть связано появление такой структуры на поверхности, рассмотрим синусоидальный сигнал (II.1), в котором в какой-то момент времени введен мгновенный скачок фазы $\Delta\phi$. Результаты вейвлетного преобразования такого тестового сигнала с различными базовыми вейвлетными функциями ψ_0 приведены на рис. II.6. Величина резкого изменения фазы была выбрана равной $\Delta\phi = \pi/3$. В момент скачка фазы сигнала на проекции поверхности распределения фазы коэффициентов вейвлетного преобразования (см. рис. II.6 *а*) появляется вышеописанная характерная «кустообразная» структура. Очевидно, что она связана с теми или иными вариациями фазы анализируемого сигнала. Видно, что размер особенности на поверхности вдоль оси t_0 увеличивается с рассмотрением все бо́льших масштабов s. Это связано с тем, что базисная вейвлетная функция (в данном случае морлет-вейвлет ($\omega_0 = 6{,}0$) с сильно осциллирующими «хвостами») при рассмотрении все бо́льших временны́х масштабов s масштабируется линейно с ростом s. Поэтому при приближении к моменту скачка фаз коэффициенты вейвлетного преобразования начинают тем раньше нести в себе информацию о сдвиге фаз на временно́й реализации сигнала, чем на большем масштабе осуществляется анализ исследуемого сигнала.

Этим же объясняется появление таких структур на границах исследуемого ряда (см. рис. II.2): когда соответствующим образом масштабируемая и сдвигаемая во времени базовая вейвлетная функция начинает выходить за границу, то в коэффициентах вейвлетного преобразования появляется информация об этой неоднородности.

В случае вейвлетного преобразования с базовым вейвлетом Паула ситуация несколько другая (см. рис. II.6 *б*). Это связано с тем, что паул-вейвлет — неосциллирующая функция, поэтому информация о скачке

а

б

Рис. II.6. Результаты вейвлетного преобразования сигнала с мгновенным скачком фазы (отмечен стрелкой), полученные с помощью базисного (*а*) морлет- ($\omega_0 = 6{,}0$) и (*б*) паул-вейвлета. Сверху показана временна́я реализация сигнала, далее — распределения фаз и амплитуд вейвлетного преобразования ($N = 8192 = 2^{13}$, $\Delta t = 0{,}001$, частота сигнала $f = 5{,}0$)

фазы содержится только в коэффициентах вейвлетного преобразования, координата t_0 которых близка к моменту скачка (см. рис. I.2). То есть особенность сигнала в виде скачка фазы на вейвлетной поверхности существенно более локализована во времени, чем в случае преобразования с базовым морлет-вейвлетом. Одновременно для вейвлетного преобразования с базовым вейвлетом Паула имеет место существенно большее искажение распределения амплитулы $|W|$ вблизи скачка фазы исследуемого синусоидального сигнала.

На рис. II.7 демонстрируется проекция амлитуды коэффициентов $|W(t_0, s)|$, а на рис. II.8 — мгновенные распределения энергии $E(s)$

Рис. II.7. Временна́я реализация сигнала с изменяющейся скачком частотой (*а*), проекция распределения амплитуды $|W(t_0, s)|$ вейвлетного преобразования (*б*) и распределение энергии по масштабам (*в*), полученные с помощью базисного морлет-вейвлета ($\omega_0 = 16$). На рис. (*г*) для сравнения приведен фурье-спектр мощности данного сигнала. Длительность временно́й реализации $N = 16384 = 2^{14}$ отсчетов, $\Delta t = 0{,}0001$, частота сигнала изменяется скачком с величины $f_0 = 90{,}0$ до величины $3f_0$

по масштабам вейвлетного преобразования сигнала, в котором одна гармоника сменяет другую в некоторый момент времени (частота сигнала скачком увеличивается в три раза). Вейвлетное преобразование сигнала со скачком частоты осуществлялось с базовым морлет-вейвлетом с параметром $\omega_0 = 16{,}0$. Из рисунка видно, что модуль вейвлетного преобразования $|W(t_0, s)|$ позволяет определить как частоту (мгновенную) сигнала, так и момент времени, когда произошло из-

Рис. II.8. Мгновенные распределения энергии вейвлетного преобразования для сигнала с изменяющейся скачком частотой (см рис. II.7) для моментов времени: (*а*) $t = 0{,}20$ (в сигнале присутствует только одна частота); (*б*) $t = 0{,}41$ (момент времени, когда происходит скачок частоты); (*в*) $t = 0{,}60$ (момент времени после скачка частоты)

менение (ср. с рис. 4, на котором представлены результаты анализа аналогичного сигнала с помощью оконного фурье-преобразования). Таким образом, несмотря на то, что разрешение по частоте вейвлетного преобразования существенно меньше, чем фурье-преобразования (ср. ширину пиков в распределении энергии по масштабам вейвлетного преобразования и в фурье-спектре), вейвлетное преобразование может быть эффективно использовано для выделения временны́х интервалов существования тех или иных гармоник в сложных сигналах.

II.1.2. Последовательность прямоугольных импульсов. Рассмотрим результаты вейвлетного преобразования сигнала с базовыми вейвлетами Морлета и Паула, представляющего собой последовательность прямоугольных импульсов со скважностью 2 (рис. II.9). Спектр мощности такого сигнала представлен на рис. II.10. Из рассмотрения проекции распределения амплитуд коэффициентов $|W|$ можно сделать вывод, что для обеих базисных вейвлетных функций вейвлетное преобразование «замечает» основной масштаб сигнала, соответствующий первой гармонике в спектре фурье-преобразования, а для морлет-вейвлета — еще и масштаб, численно равный периоду второй гармоники, что хорошо видно на рис. II.11 *а*.

Также в моменты времени, соответствующие скачкам амплитуды сигнала (началу/концу прямоугольного импульса) на поверхности, соответствующей анализу с материнским вейвлетом Паула, наблюдается всплеск амплитуд коэффициентов вейвлетного преобразования, имеющих высокие частоты f_s (см. рис. II.9 *б*). Это связано с тем, что для разложения исследуемого сигнала в ряд по базовым вейвлетным функциям, локальным во времени, в точках, где имеет место сингулярность (разрыв производной сигнала), необходимо существенно больше гармоник для корректного описания исходной функции, чем в точках, где исследуемый сигнал ведет себя гладким непрерывным образом. Именно вейвлетное преобразование с базисным вейвлетом Паула наиболее приспособлено для анализа такой мелкомасштабной динамики на коротких интервалах времени.

а

б

Рис. II.9. Вид временно́й реализации сигнала, представляющего собой последовательность прямоугольных импульсов; проекции распределения амплитуды и фазы коэффициентов вейвлетного преобразования с базовыми морлет-вейвлетом (*а*) и паул-вейвлетом (*б*). Длительность временно́й реализации $N = 12^{13}$ отсчетов, $\Delta t = 0{,}0001$

Рис. II.10. Спектр мощности сигнала, представляющего собой последовательность прямоугольных импульсов (см. рис. II.9)

Фаза коэффициентов вейвлетного преобразования ведет себя существенно более сложным образом, чем в предыдущем случае. Из проекции распределения фаз $\varphi_W(t_0, s)$ хорошо видно (см. рис. II.9), что на такой проекции четко выделяется основная частота сигнала, а далее распределение становится достаточно сложным — оно представляет собой интерференционную картину, которая возникает как результат

Рис. II.11. Распределение энергий по масштабам сигнала, представляющего собой последовательность прямоугольных импульсов, полученное в результате вейвлетного преобразования с базовыми морлет-вейвлетом (*а*) и паул-вейвлетом (*б*)

суммирования фаз большого числа локальных базисных функций на различных характерных масштабах сигнала. Более «бедная» картина распределения фаз вейвлетного преобразования с базовым паул-вейвлетом объясняется теми же причинами, что были названы при анализе гармонического сигнала с резким изменением (скачком) фазы.

Заметим также, что именно на распределении фаз коэффициентов вейвлетного преобразования можно точно выделить местоположение в сигнале особенностей, в нашем конкретном случае — того момента во времени, когда производная сигнала $x(t)$ претерпевает разрыв.

II.1.3. Амплитудно-модулированный сигнал. На рисунке II.12 демонстрируются результаты применения вейвлетного преобразования к амплитудно-модулированному сигналу:

$$f(t) = [1 + m \sin(2\pi f_m t)] \sin(2\pi f_0 t), \tag{II.4}$$

где $f_0 = 40$, $f_m = 8$ и глубина модуляции $m = 0{,}25$. Видно, что спектр вейвлетного преобразования с базовым морлет-вейвлетом $(\omega_0 = 6{,}0)$

Рис. II.12. Временна́я реализация амплитудно-модулированного сигнала, вейвлетная поверхность и мгновенные распределения энергии по масштабам (сплошная линия отвечает распределению $E(f_s)$ при значении t_0, соответствующему максимуму вейвлетной поверхности (более темной области на проекции, отмеченной стрелкой *1*), пунктирная — минимуму (более светлой области вдоль линии $f_s = f_0$); *2*), полученные с морлет-вейвлетом $(\omega_0 = 6{,}0)$. Длительность реализации $N = 16384 = 12^{14}$ отсчетов, $\Delta t = 0{,}0001$

может быть интерпретирован как сигнал с частотой $f_s = f_0$, который с периодом $1/f_m$ увеличивает (уменьшает) свою амплитуду. Мгновенные распределения энергии по масштабам, представленные на том же рисунке и соответствующие моментам, когда на вейвлетной поверхности вдоль линии $f_s = f_0$ достигается максимум (сплошная линия) и минимум (пунктирная линия), показывают, что энергия сигнала содержится все время в одном масштабе $s = 1/f_0$. Одновременно видно, что с периодом $1/f_m$ происходит изменение интенсивности данного масштаба, а также изменение ширины распределения энергии E. Классический фурье-спектр амплитудно-модулированного сигнала также приведен на рисунке: он содержит основную частоту f_0 и два сателлита, отстоящих от него на частоту f_m.

Однако с уменьшением отношения f_0/f_m и увеличением глубины модуляции m ситуация меняется. Для иллюстрации этого на рис. II.13 показаны результаты вейвлетного преобразования сигнала (II.4) с параметрами $f_0 = 80$, $f_m = 50$ и $m = 2$. В данном случае вейвлетное преобразование просто показывает наличие в сигнале трех временны́х масштабов $1/(f_0 - f_m)$, $1/f_0$ и $1/(f_0 + f_m)$, динамика которых не из-

Рис. II.13. Характеристики вейвлетного преобразования с морлет-вейвлетом ($\omega_0 = 6{,}0$) амплитудно-модулированного сигнала с $f_0/f_m \sim 1$ и глубиной модуляции $m = 2$. На рис. *а* показана временна́я реализация сигнала, рис. *б* демонстрирует проекцию поверхности амплитуд коэффициентов вейвлетного преобразования, *в* — распределение энергии по масштабам $\langle E(f_s)\rangle$, нормированное на s^2, *г* — фурье-спектр мощности сигнала. Длительность временно́й реализации $N = 12^{12}$ отсчетов, $\Delta t = 0{,}0001$

меняется с течением времени. Интегральное распределение энергии по масштабам также обнаруживает наличие трех временны́х масштабов. На рис. II.13 оно представлено в нормированном виде $\langle E\rangle/s^2$. В фурье-спектре мощности присутствуют три гармоники с примерно одинаковыми амплитудами. В результате вейвлетного преобразования сигнала с гармониками с различными частотами, но одинаковыми амплитудами, выделяются масштабы, амплитуда которых, как было показано выше (см. соотношение (10)), обратно пропорциональна частоте сигнала. Поэтому для сравнения распределения энергии по масштабам вейвлетного преобразования с фурье-спектром имеет смысл рассматривать зависимость $\langle E(f_s)\rangle$ в нормированном виде. Тогда вейвлетный спектр, как и фурье-спектр, демонстрирует наличие в сигнале гармоник с одинаковой амплитудой (см. рис. II.13).

II.1.4. Сигнал с изменяющейся частотой. Рассмотрим теперь, что может дать вейвлетное преобразование для сигналов, у которых спектральный состав изменяется непрерывно во времени. Для примера проанализируем синусоидальный сигнал, у которого частота изменяется линейно с течением времени:

$$f(t) = \sin\left(2\pi f_0 t^2\right), \tag{II.5}$$

где $f_0 = 50$. На рис. II.14 приведены результаты вейвлетного преобразования такого сигнала с применением базового морлет-вейвлета с параметром $\omega_0 = 16$.

Рис. II.14. Характеристики вейвлетного преобразования с базовым морлет-вейвлетом ($\omega_0 = 16$) для сигнала с линейным изменением частоты. Сплошная линия на распределении по масштабам $E(f_s)$ соответствует интегральному распределению, штриховые линии — мгновенным распределениям в моменты времени, указанные непосредственно на рисунке. Длительность временнóй реализации $N = 12^{14}$ отсчетов, $\Delta t = 0{,}0001$

Из рассмотрения проекции вейвлетной поверхности вне области влияния граничных условий видно, что вейвлетное преобразование четко демонстрирует линейное изменение частоты сигнала: $f_{\text{эфф}} = f_0 \cdot t$. Отличие зависимости расположения максимума (темная область) на вейвлетной поверхности от линейной функции объясняется тем, что по оси f_s значения частот откладываются в логарифмическом масштабе. Интегральное распределение энергии по масштабам $\langle E \rangle$ (сплошная линия на рисунке) близко к соответствующему фурье-спектру мощности. В то же самое время мгновенные распределения энергии по масштабам отчетливо фиксируют мгновенную частоту сигнала (см. штриховые линии, соответствующие моментам времени $t = 0{,}79$ и $t = 1{,}31$). Осцилляции в области больших временны́х масштабов на распределении по энергии (отмечены стрелкой на рисунке) соответствуют области влияния краевых условий, а следовательно, относятся к численным эффектам и не имеют физического смысла.

Отличие абсолютных величин по осям f_s и f для распределения по энергиям обусловливается вышеописанным (см. п. I.2.5) соотношением между масштабами вейвлетного преобразования f_s и частотами гармонического анализа. Для морлет-вейвлета с параметром $\omega_0 = 16$ имеем $f = 2{,}5527 f_s$.

II.1.5. Сигналы с особенностями. При анализе сигналов самой различной природы часто встречается ситуация, когда во временно́м ряду имеются локализованные особенности, например импульс, резкий скачок, сбой фазы колебаний и т. д. Наиболее часто данные особенности возникают при экспериментальном определении тех или иных величин, однако они могут иметь и динамическую природу. При фурье-анализе подобных рядов невозможно локализовать особенность во времени. Действительно, фурье-преобразование не теряет информацию о виде сигнала $x(t)$, однако в силу нелокального характера тригонометрических функций эта информация полностью делокализована среди всех спектральных коэффициентов $\widehat{x}(\omega)$. Часто очень трудно, а иногда и невозможно, при наличии некоторого шума исследовать свойства исходного сигнала $x(t)$ по его фурье-образу. Особенно отчетливо это проявляется при исследовании сигнала, который представляет собой функцию, гладкую почти всюду, за исключением нескольких сингулярных точек. Положение сингулярности во времени связано с фазами всех фурье-коэффициентов, и единственной возможностью определить их местоположение является реконструкция исходного сигнала $x(t)$ по его фурье-образу. Степенной закон изменения спектра $f^{-\alpha}$ такого сигнала, где α — положительный коэффициент, называемый показателем сингулярности, показывает глобальную нерегулярность исследуемой функции $x(t)$. Однако при этом теряется существенная информация о том, что рассматриваемый сигнал регулярен почти всюду, за исключением нескольких «особых» точек. Если эти сингулярные точки имеют случайный характер (например, в результате ошибок измерений), то их невозможно отфильтровать, так как информация об этих особенностях содержится во всех коэффициентах фурье-преобразования.

Отметим важное свойство вейвлетного преобразования. Последнее сохраняет локальность представления сигнала, и, следовательно, позволяет реконструировать только часть временно́го ряда или выделить вклад определенного масштаба в некоторый конкретный момент времени. Для этого необходимо рассматривать только те коэффициенты вейвлетного преобразования, которые принадлежат обсуждавшемуся в предыдущей главе (§ I.1) углу влияния. Если функция $x(t)$ локально гладкая, соответствующие коэффициенты вейвлетного преобразования остаются малыми, если же $x(t)$ содержит сингулярность, то в ее окрестности имеет место значительное возрастание амплитуды и скачки фазы коэффициентов вейвлетного преобразования. Если коэффициенты W подвержены случайным ошибкам, то они будут действовать на реконструируемый сигнал локально вблизи точки случайного возмущения, тогда как преобразование Фурье распространяет ошибки по всему реконструируемому ряду. Фурье-преобразование также очень чувствительно к фазовым ошибкам вследствие чередующегося характера тригонометрических рядов, что не имеет места при вейвлетном анализе. Более того, благодаря избыточности информации, содержащейся в вейвлетном спектре, существует возможность исправить ошибки, заложенные в исходный ряд.

Проиллюстрируем вышесказанное, для чего рассмотрим результаты применения вейвлетного преобразования к сигналам с особенностями. Выше мы уже рассматривали результаты анализа сигналов со скачком фазы (рис. II.6) и с резким изменением частоты сигнала (рис. II.7), поэтому на таких особенностях здесь не останавливаемся.

На рис. II.15 демонстрируются результаты вейвлетного преобразования с базовым вейвлетом Паула для сигнала с резким скачком амплитуды (рис. II.15 *а*). Рис. II.16 соответствует вейвлетному преобразованию сигнала, на временно́й реализации которого наблюдается «излом» (рис. II.16 *а*). Вейвлетное преобразование сигнала с особенностью в виде δ-функции показано на рис. II.17. На рис II.18 — вейвлетное преобразование синусоидального сигнала, у которого в какой-то момент времени наблюдается резкий очень короткий выброс амплитуды. Из рисунков видно, что в последнем случае выброс амплитуды оказывает влияние на распределение фазы коэффициентов вейвлетного преобразования (рис. II.18 *г*) только в области малых масштабов, что позволяет эффективно выделять из временно́й реализации такие быстрые выбросы.

Из анализа рисунков II.15–II.18 следует, что все точечные особенности сопровождаются всплесками амплитуды $|W(t_0, s)|$ коэффициентов вейвлетного преобразования. Однако существенно точнее данные особенности можно выделить из сигнала, анализируя распределение фазы φ_W коэффициентов вейвлетного спектра. В момент времени, соответствующий особенности в сигнале, наблюдается быстрое изменение фазы, которое существенно легче локализовать во времени. Более того, проводя тот или иной анализ структуры поверхности фазы вейвлетного преобразования (в том числе и методами распознавания образов для автоматизации такого анализа [72]) можно легко выделить и локализовать во времени те или иные изолированные особенности во временно́м ряде. Подробнее это обсуждается в следующей главе, где на основе анализа вейвлетного спектра предложена методика выделения характерных структур анализируемого нестационарного процесса.

II.1.6. Применение адаптированного вейвлетного базиса к сигналам с особенностью. В гл. I (п. I.4) обсуждались сигналы с особенностями в виде промежутков времени, в течение которых

Рис. II.15. Временна́я реализация сигнала с особенностью в виде скачка (*а*), его фурье-спектр мощности (*б*) и вейвлетное преобразование с базовым паул-вейвлетом (*в, г*)

Рис. II.16. Временна́я реализация сигнала с особенностью в виде излома (*а*), его фурье-спектр мощности (*б*) и вейвлетное преобразование с базовым паул-вейвлетом (*в, г*)

Рис. II.17. δ-функция (a), ее фурье-спектр мощности ($б$) и вейвлетное преобразование с базовым паул-вейвлетом ($в$, $г$)

Рис. II.18. Сигнал $x(t) = \sin(\omega t)$, у которого наблюдается резкий очень короткий скачок амплитуды (a), его фурье-спектр мощности ($б$) и вейвлетное преобразование с базовым паул-вейвлетом ($в$, $г$)

сигнал по тем или иным причинам не был определен [1]. Особенностью применения стандартных алгоритмов спектрального и вейвлетного анализа к исследованию такого сигнала являются принципиальные ошибки вычисления распределения энергии по спектральным компонентам в низкочастотной и высокочастотной областях спектра. Поэтому для более точного вейвлетного анализа таких сигналов удобно использовать метод построения адаптированного вейвлетного базиса, предложенный в работе [55].

В этом параграфе рассмотрим простой тестовый пример применения данной методики к сигналу, представляющему собой гармоническую функцию с периодом T, у которой на некотором временно́м интервале T_G значения не определены. Возможны две характерных ситуации.

• Длительность интервала $T_G > T$. В этом случае для корректного описания процесса возможно применение только адаптивного вейвлетного базиса, так как невозможно осуществить интерполяцию сигнала на временны́х промежутках более одного периода.

• $T_G < T$. Случай, когда, на первый взгляд, удобно использовать интерполяцию данных на временно́м интервале T_G. Однако при интерполяции временно́го ряда теряется достоверная информация о всех высокочастотных составляющих сигнала, частота которых $f \geqslant 1/T_G$. Высокочастотную часть спектра возможно корректно восстановить, используя только адаптивный вейвлетный базис.

На рис. II.19 показано сравнение результатов, полученных с помощью стандартного вейвлетного преобразования с интерполяцией не-

Рис. II.19. Сравнение результатов расчета вейвлетного спектра синусоидального сигнала с особенностью в виде незаданного временно́го промежутка с помощью стандартного вейвлетного преобразования (a) и преобразования с адаптируемым материнским вейвлетом ($б$)

[1] Напомним, что к подобным сигналам может быть сведен и любой ограниченный во времени ряд.

достающих данных и вейвлетного преобразования с адаптированной базовой функцией применительно к гармоническому сигналу, у которого неопределенный промежуток времени $T_G > T$. Основное преимущество вейвлетного преобразования с адаптированным материнским вейвлетом, как хорошо видно из рисунка, в данном примере заключается в том, что удается снизить величину определяемой спектральной мощности, приходящуюся на колебания с бóльшими временны́ми масштабами.

II.2. Пути к хаосу с точки зрения вейвлетного анализа

Хорошо известно, что в динамических системах с малой размерностью фазового пространства [1)], системах с дискретным и непрерывным временем, наблюдаются универсальные маршруты перехода от регулярных режимов колебаний к хаотическим, так называемые пути в хаос [73]. На данный момент можно выделить три таких перехода к хаосу, обладающие универсальными свойствами:

- переход к хаосу через субгармонический каскад (сценарий Фейгенбаума);
- переход к хаосу через перемежаемость;
- переход к хаосу через разрушение квазипериодических движений.

В данном параграфе мы постараемся проиллюстрировать сценарии перехода к хаосу через удвоения периода и перемежаемость с позиций вейвлетного анализа, а также выявить характерные особенности вейвлетного преобразования анализируемых сигналов, соответствующих различным типам перехода к хаосу.

II.2.1. Переход к хаосу через субгармонический каскад. Классической конечномерной потоковой системой, демонстрирующей переход к хаосу через каскад удвоений периода, является система Рёсслера [74]:

$$\begin{cases} \dot{x} = -(y + z), \\ \dot{y} = x + ey, \\ \dot{z} = w - mz + xz. \end{cases} \tag{II.6}$$

Рассмотрим именно эту систему в качестве базовой для анализа каскада бифуркаций удвоения периода с помощью вейвлетного анализа.

Для численного решения системы уравнений (II.6) использовался метод Рунге–Кутта 4-го порядка с шагом по времени $\Delta t = 0{,}001$. Система исследовалась при фиксированных значениях параметров $e = w = 0{,}2$, параметр m изменялся в пределах $2{,}0 \leqslant m \leqslant 6{,}0$. В этом диапазоне управляющего параметра наблюдался переход к хаосу через последовательность бифуркаций удвоения периода. На рис. II.20

[1)] То есть с малым числом степеней свободы.

представлена соответствующая бифуркационная диаграмма колебаний в системе при изменении параметра m в пределах $2{,}0 \leqslant m \leqslant 6{,}0$.

Рис. II.20. Бифуркационная диаграмма колебаний в системе Рёсслера при изменении параметра m ($e = w = 0{,}2$)

Рассмотрим характерные особенности, которые наблюдаются в этом случае при анализе временны́х рядов, порождаемых системой Рёсслера, с помощью вейвлетного преобразования с базовым морлет-вейвлетом. На рис. II.21 показаны соответствующие спектры мощности в логарифмическом масштабе, проекции фазовых портретов временны́х реализаций переменной $x(t)$, построенные по методу Такенса [1)] [75], проекции поверхностей распределения амплитуд коэффициентов вейвлетного преобразования $|W(t, f_s)|$ и распределения энергии по временны́м масштабам $\langle E \rangle$ при различных значениях управляющего параметра m. Анализировались временны́е ряды, из которых предварительно был удален переходной процесс.

На рис. II.21 *а* демонстрируются характеристики колебаний для периодического режима с периодом T_1 ($m = 2{,}6$). Поверхность распределения амплитуд коэффициентов вейвлетного преобразования $|W|$ в этом случае качественно подобна поверхности, характерной для периодического сигнала (см., например, рис. II.1 *а*, на котором было представлено распределение $|W|$, полученное для синусоидального сигнала). Наличие фурье-гармоник основной частоты сигнала с малой амплитудой практически не оказывает влияния на вид вейвлетного спектра.

Аналогичные результаты можно наблюдать и анализируя усредненное распределение энергии $\langle E \rangle$ по временны́м масштабам s колебаний. Оно имеет единственный максимум, который соответствует (с точностью до коэффициента 1,03) базовой частоте сигнала f_b (отмечена на рисунке) в спектре мощности $P(f)$.

Рассмотрим теперь, как трансформируется распределение амплитуд коэффициентов вейвлетного преобразования с увеличением бифуркационного параметра m. На рис. II.21 *б* показаны характеристики

[1)] То есть по временно́му ряду $x(t)$ строится n-мерный вектор вида $\{x(t),\ x(t+\tau),\ x(t+2\tau), \ldots, x(t+n\tau)\}$, который, как показано Такенсом, может рассматриваться как вектор в фазовом пространстве. Величина τ — время задержки, которое выбирается произвольно [75].

Рис. II.21. Спектры мощности, фазовые портреты, проекции поверхности $|W(t, f_s)|$ и распределения энергии по временны́м масштабам $\langle E(f_s)\rangle$, полученные с базовым морлет-вейвлетом по временны́м реализациям $x(t)$ системы Рёсслера (II.6). *а*. Бифуркационный параметр $m = 2{,}6$ (цикл T_1).

Длительность временно́й реализации $N = 2^{14}$ отсчетов, $\Delta t = 0{,}001$;

сигнала после первой бифуркации прибавления периода ($m = 3{,}6$). На вейвлетной поверхности $|W|$ появляется второй максимум (более темная область при $f_s \sim 5{,}0$). Это хорошо видно на распределении $\langle E(f_s)\rangle$, на котором появляется второй максимум, соответствующий

Рис. II.21 *б*. Бифуркационный параметр $m = 3{,}6$ (цикл T_2). Длительность временнóй реализации $N = 2^{14}$ отсчетов, $\Delta t = 0{,}001$;

субгармонике $f_b/2$ в спектре мощности. Причем соотношение между амплитудами локальных максимумов в распределении энергии по масштабам вейвлетного преобразования и фурье-спектре мощности существенно разное. Оно, в соответствии с выражением (10), имеет вид

$$\frac{P(f_b)}{P(f_b/2)} = \frac{1}{4}\,\frac{P(f_{bs})}{P(f_{bs}/2)}. \tag{II.7}$$

Рис. II.21 *в*. Бифуркационный параметр $m = 4{,}2$ (цикл T_{10}). Длительность временно́й реализации $N = 2^{14}$ отсчетов, $\Delta t = 0{,}001$;

Следует также обратить внимание на характерную структуру вейвлетной поверхности в области больших частот (малых временны́х масштабов). Эта структура представляет собой периодически наблюдающиеся «горбы» на поверхности $|W|$, локализованные вблизи максимумов (причем максимумов с наибольшей амплитудой) на временно́й реализации процесса. Это связано с тем, что именно вблизи этих максимумов вид временно́й реализации $x(t)$ наиболее сильно отличается от

Рис. II.21 *г*. Бифуркационный параметр $m = 5{,}1$ (режим хаотической динамики). Длительность временно́й реализации $N = 2^{14}$ отсчетов, $\Delta t = 0{,}001$

вида гармонической функции, и для описания его необходимо наибольшее число гармоник в разложении Фурье (ср. с рис. II.9, на котором представлены результаты непрерывного вейвлетного преобразования сигнала, представляющего собой последовательность прямоугольных импульсов). В последнем примере четко проявляются основные различия между фурье-анализом и вейвлетным анализом. Для первого данные эффекты могут быть учтены только в «среднем»: они выражаются в наличии у сигнала гармоники с базовой частотой f_b. На временны́х масштабах даже порядка одного периода колебаний вейвлетный анализ четко показывает, когда сигнал действительно существенно отличается от гармонического, а когда близок к нему.

Рис. II.21 *в* демонстрирует характеристики колебаний в системе Рёсслера при значении управляющего параметра $m = 4{,}2$ (цикл периода 10, что хорошо видно на фазовом портрете). Усредненное распределение энергии по масштабам практически не изменяется по сравнению с предыдущим случаем. Сама поверхность коэффициентов вейвлетного спектра $|W|$ имеет в области временны́х масштабов $f \in (f_b/2,\, f_b)$ более сложную структуру. Однако, интенсивность данных временны́х масштабов существенно меньше, чем интенсивность временно́го масштаба, соответствующего субгармонике $f_b/2$.

Характеристики режима ленточного хаоса $(m = 5{,}1)$ в системе Рёсслера показаны на рис. II.21 *г*. Спектр мощности имеет высокий шумовой пьедестал, на котором выделяются основная частота, ее гармоники и субгармоники. На проекции поверхности распределения амплитуды коэффициентов вейвлетного преобразования наблюдается максимум, соответствующий базовой частоте f_b, однако в отличие от предыдущих случаев амплитуда этого максимума (а следовательно, и энергия движения системы, соответствующая этому временно́му масштабу $s_b = 1/f_b$) меняется с течением времени. Это выражается в изменении толщины и тона соответствующей линии на проекции $|W|$ на плоскость $(t,\, f_s)$. Что касается динамики на временны́х масштабах, больших $1/f_b$, то она сильно нерегулярна (это хорошо видно из анализа вейвлетной поверхности в области $f_s \in (2{,}0,\ 7{,}0)$). Однако энергия, заключенная в этих масштабах, существенно меньше, чем в основном масштабе (см. распределение энергий $\langle E\rangle$). Заметим также, что нерегулярная динамика на малых частотах приводит к тому, что на кривой $\langle E\rangle$ наблюдаются равномерно спадающие «хвосты» распределения. К последним распределениям мы еще вернемся, когда будем рассматривать результаты вейвлетного анализа перехода к хаосу через перемежаемость на примере системы Лоренца (см. п. II.2.2).

Для сравнения вейвлетного преобразования с базовым морлет-вейвлетом на рис. II.22 приведена проекция поверхности $|W|$, построенная с материнским MHAT-вейвлетом для временно́й реализации переменной x системы Рёсслера с параметрами $e = w = 0{,}2$ и $m = 4{,}2$ (цикл периода 10). Интерпретация данной поверхности существенно сложнее. Что касается распределения энергии $\langle E\rangle$ по масштабам, то оно существенно шире и не демонстрирует тонкую структуру в области малых частот, как в случае вейвлетного анализа с морлет-вейвлетом. Заметим также, что в данном случае временно́й масштаб вейвлетного преобразования, соответствующий максимуму энергии в вейвлетном

[1]) Напоминаем, что для MHAT-вейвлета фаза коэффициентов вейвлетного спектра тождественно равна нулю.

Рис. II.22. Проекция поверхности распределения амплитуд коэффициентов вейвлетного [1] преобразования $|W(t, f_s)|$ и распределение энергии по временны́м масштабам $\langle E(f_s)\rangle$, полученные с базовым MHAT-вейвлетом по временно́й реализации $x(t)$ системы Рёсслера (II.6) с бифуркационным параметром $m = 4{,}2$ (параметры $e = w = 0{,}2$) (цикл T_{10}). Длительность временно́й реализации $N = 2^{12}$ отсчетов, $\Delta t = 0{,}001$

спектре, не совпадает по величине с периодом фурье-преобразования (см. рис. II.21 *в*) [2].

Таким образом, можно сделать вывод, что анализ распределения амплитуды коэффициентов вейвлетного спектра $|W|$ позволяет эффективно обнаружить только первую бифуркацию удвоения периода, после которой интенсивность первой субгармоники базовой частоты после удвоения в спектре достаточно велика. Следующие бифуркации удвоения приводят к усложнению вейвлетной поверхности $|W|$ в области больших временны́х масштабов s, но интенсивность данных масштабов мала. Вследствие конечной ширины фурье-образа $\widehat{\psi}$ базовой вейвлетной функции появление все новых слабовыраженных в спектре временны́х масштабов $s_{i+1} = 2s_i$, где i — номер бифуркации, выражается в появлении размытого, очень слабо выраженного пьедестала в области малых величин f_s в распределении $\langle E\rangle$. Но вейвлетный анализ не

[2] Данные вопросы подробно обсуждались в гл. I (см. табл. I.1).

позволяет выделить каждый из этих временны́х масштабов отдельно. Даже применение более «частотноизбирательного» вейвлета Морлета с $\omega_0 = 16$ (см. рис. I.3 и табл. I.1) позволяет «заметить» в распределении энергий по масштабам только масштаб $s = 4T$, соответствующий третьей бифуркации удвоения. Дальнейшее увеличение параметра ω_0 материнской вейвлетной функции Морлета (последнее соответствует уменьшению ширины вейвлета Морлета в фурье-пространстве, а следовательно, повышает частотную избирательность вейвлетного преобразования) сводит на нет основное достоинство вейвлетного преобразования, а именно возможность эффективного выделения локальных особенностей анализируемого сигнала. Фактически, увеличивая параметр ω_0, мы приходим к оконному преобразованию Фурье, достоинства и недостатки которого обсуждались во введении.

Аналогичная ситуация складывается и при анализе распределения фаз φ_W коэффициентов вейвлетного спектра сигналов, генерируемых динамическими системами при переходе к хаосу через удвоение периода. В качестве примера на рис. II.23 представлены результаты расчета поверхности $\varphi_W(t, f_s)$ вейвлетного спектра, полученного с базовым морлет-вейвлетом, сигналов, генерируемых системой Рёсслера при переходе к хаосу через удвоение периода. Из рисунков видно, что распределения фаз вейвлетных коэффициентов в различных режимах качественно не отличаются друг от друга.

Некоторые отличия проявляются, во-первых, в высокочастотной области, где правильная картина распределения фаз коэффициентов вейвлетного преобразования искажается с увеличением управляющего параметра m. Последнее связано с изменением спектрального состава колебаний при их усложнении в результате перехода к хаосу в области высоких частот, существенно превышающих базовую частоту в спектре сигнала. И, во-вторых, происходит изменение поверхности φ_W в области низких частот, которые уже определяются явлением последовательных прибавлений периода с увеличением m. Однако это изменение не существенно, и поэтому распределение фаз коэффициентов вейвлетного преобразования также не может быть эффективным средством анализа характерных особенностей различных режимов колебаний динамических систем, демонстрирующих каскад удвоений периода.

II.2.2. Переход к хаосу через перемежаемость. Переход к хаосу через перемежаемость (исследованный впервые в работах И. Помо и П. Манневиля [76, 77]) обычно рассматривается на примере модели Лоренца [78, 79]:

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma(x - z), \\ \dot{y} = rx - xz - y, \\ \dot{z} = xy - bz. \end{cases} \tag{II.8}$$

При значениях управляющих параметров $s = 10$, $b = 8/3$ и при $r < r^*$ временна́я реализация, генерируемая системой Лоренца (например, величины x, которую мы и будем рассматривать в дальнейшем),

а

б

в

Рис. II.23. Распределение фазы $\varphi_W(t,\, f_s)$ коэффициентов вейвлетного преобразования с базовым морлет-вейвлетом по временно́й реализации $x(t)$ системы Рёсслера (II.6) с бифуркационными параметрами (*а*) $m = 2{,}6$; (*б*) $m = 4{,}2$ (цикл T_{10}) и (*в*) $m = 5{,}1$ (режим хаотической динамики) представляет собой периодическое движение. При превышении порога $r^* \cong 166{,}07$ регулярные колебания переменной x (ламинарная фаза) начинают прерываться хаотическими всплесками, которые с ростом управляющего параметра r становятся все более и более длительными, пока движение полностью не хаотизируется. Перемежаемость в системе Лоренца классифицируется как перемежаемость I-го рода [80, 81].

Проанализируем результаты вейвлетного преобразования с базовым морлет-вейвлетом соответствующих сигналов $x(t)$, порождаемых системой Лоренца при вышеназванных значениях параметров. Временны́е реализации были получены, как и в предыдущем случае, методом Рунге–Кутта 4-го порядка с шагом по времени $\Delta t = 0{,}0001$.

На рис. II.24 демонстрируется временна́я реализация $x(t)$ и соответствующая проекция поверхности $|W|$ при значении бифуркационного

Рис. II.24. Вейвлетная поверхность $|W(t, f_s)|$, полученная по временно́й реализации $x(t)$ системы Лоренца (II.8) с параметром надкритичности $r - r^* = 0{,}03$ ($r = 166{,}1$). Длительность временно́й реализации $N = 2^{15}$ отсчетов, $\Delta t = 0{,}0001$

параметра $r = 166{,}1$. На вейвлетной поверхности четко выделяются характерные структуры, соответствующие ламинарной и турбулентной фазам во временно́й реализации.

Структура вейвлетной поверхности, соответствующая регулярной фазе движения, имеет профиль $|W(t = \mathrm{const}, f_s)|$, на котором наблюдаются два глобальных максимума (см. рис. II.24) — им соответствуют две темные области, расположенные параллельно оси времени. В пределах ламинарной фазы с течением времени коэффициенты вейвлетного преобразования остаются неизменными. Наличие структуры, демонстрирующей два глобальных максимума, связано, в первую очередь, с особенностями спектра Фурье сигнала. На рис. II.25 приведен фурье-спектр сигнала (в нелогарифмическом масштабе), построенный по отрезку временно́й реализации $x(t)$, соответствующему ламинарной фазе движения. Хорошо видно наличие двух преобладающих в спектре гармоник с частотами $f_1 = 41{,}3$ и $f_2 = 131{,}3$. Эти временны́е масштабы также хорошо заметны на вейвлетном спектре (см. рис. II.24) на тех же частотах. Именно благодаря наличию их в спектре мощности на вейвлетной поверхности наблюдается картина из двух максимумов.

После входа системы в турбулентную фазу вид поверхности $|W|$ сильно изменяется. Можно сказать, что в режиме хаотической динамики наблюдается «всплеск» разномасштабных колебательных явлений, причем основная энергия приходится на масштабы s, соответствующие $f_s \in (f_1, f_2)$. Заметим, что области на поверхности $|W|$, соответствующие хаотическим фазам, четко локализованы во времени.

Рис. II.25. Спектр мощности Фурье (в нелогарифмическом масштабе) временно́й реализации $x(t)$, генерируемой системой Лоренца при значении бифуркационного параметра $r = 166{,}1$, построенный в течение ламинарной фазы движения ($t \in (0{,}2,\ 0{,}6)$; см. рис. II.23).

На рис. II.26 представлена вейвлетная поверхность, полученная в результате вейвлетного преобразования одной турбулентной фазы, соответствующей отрезку временно́й реализации $t \in (0{,}25,\ 1{,}06)$ — первый турбулентный всплеск на рис. II.24. Проанализируем структуры этой поверхности. Как уже обсуждалось, в течение ламинарной фазы структура поверхности не меняется во времени. Мгновенное распределение энергии по масштабам в этом случае также не зависит от времени (см. рис. II.27 *а*). Оно имеет два характерных глобальных максимума, которые связаны с наличием частот f_1 и f_2, доминирующих в спектре Фурье,

Рис. II.26. Вейвлетная поверхность $|W(t, f_s)|$, полученная по временно́й реализации $x(t)$ системы Лоренца (II.8) с одной турбулентной фазой при параметре надкритичности $r - r^* = 0{,}03$ ($r = 166{,}1$). Длительность временно́й реализации $N = 2^{13}$ отсчетов, $\Delta t = 0{,}0001$

построенном для ламинарной фазы. Переход к турбулентной фазе начинается с «расщепления» масштабов $1/f_1$ и $1/f_2$. В результате этого наблюдается выделение в энергетическом спектре одного преобладающего масштаба. Далее, на протяжении всей турбулентной фазы имеет место возбуждение и подавление колебаний в системе

Рис. II.27. Мгновенные распределения по энергиям, полученные в результате вейвлетного преобразования (см. рис. II.26), для ламинарной (*а*, $t = 0{,}36$) и турбулентной (*б, в*, соответственно $t = 0{,}56$, $t = 0{,}72$) фазы движения в системе Лоренца

на различных временны́х масштабах, но преимущественно меньших, чем временно́й масштаб $s_1 = 1/f_1$. Распределение по энергиям существенно нестационарно в течение хаотической фазы. Единственной его особенностью, наблюдающейся в течение всего хаотического «всплеска», является наличие преобладающего масштаба $1/f_s \sim \sim 0{,}011$ (знак «$\sim$» поставлен ввиду того, что расположение максимума меняется и величина $0{,}011$ является усредненной по длительности нескольких турбулентных фаз). Само распределение по энергиям сильно меняется с течением времени. Для иллюстрации на рис. II.27 *б, в* представлены мгновенные распределения $E(f_s)$ для моментов времени $t = 0{,}56$ и $t = 0{,}72$. Хорошо видно, что они существенно различаются как числом максимумов в спектре, так и их расположением.

С ростом бифуркационного параметра длительность ламинарных фаз уменьшается, и при $r > 167{,}0$ они практически исчезают из временно́й реализации. Вместе с тем вейвлетный анализ успешно выделяет ламинарные фазы с длительностью порядка $2 \div 3$ периодов колебаний на основной частоте в спектре. Это иллюстрирует рис. II.28, на котором представлены результаты вейвлетного преобразования для величины $r = 167{,}0$ (выделены области ламинарных фаз движения). Видно, что на вейвлетной поверхности в соответствующих местах появляется характерная для ламинарной фазы структура распределения амплитуды коэффициентов $|W|$ вейвлетного преобразования.

Аналогичная ситуация наблюдается не только при анализе временны́х реализаций, порождаемых системой Лоренца и другими потоковыми системами. Это подтверждается, например, результатами анализа временно́й реализации, порожденной логистическим отображением

$$x_{n+1} = \varepsilon x_n (1 - x_n). \tag{II.9}$$

На рис. II.29 приведены результаты анализа временно́й реализации длиной 256 итераций с исключенным переходным процессом. Значение управляющего параметра $\varepsilon^* - \varepsilon = 0{,}002$. При критическом значении

Рис. II.28. Поверхность $|W(t, f_s)|$, полученная по временно́й реализации $x(t)$ системы Лоренца (II.8) с параметром надкритичности $r - r^* = 0{,}93$ ($r = 167{,}0$). Черными прямоугольниками выделены ламинарные фазы движения

Рис. II.29. Поверхность $|W(n, f_s)|$, полученная по временно́й реализации x_n логистического отображения с параметром $\varepsilon = 1 + \sqrt{8} - 0{,}002$

$\varepsilon^* = 1 + \sqrt{8}$ [80] наблюдался регулярный цикл периода 3, а ниже, при $\varepsilon < \varepsilon^*$, ламинарные фазы прерывались хаотическими всплесками.

Из анализа вейвлетной поверхности и ее сопоставления с временно́й реализацией видно, что ламинарным фазам движения соответствует также некоторая типичная структура поверхности. Выход из области ламинарной фазы движения, как и в случае динамики системы Лоренца, сопровождается характерным расслоением временно́го масштаба, соответствующего регулярным колебаниям системы. Также существенно различаются характерные распределения энергии колебаний по временны́м масштабам в режиме хаоса и ламинарной фазы. В последнем случае распределение энергии по масштабам E не меняется и имеет вид, приведенный на рис. II.30 *а*. В турбулентной фазе движения распределение по энергиям зависит от времени (см. рис. II.30 *б, в*).

Рис. II.30. Мгновенные распределения по энергиям, полученные в результате вейвлетного преобразования (см. рис. II.29), для ламинарной (*а*, $n = 136$) и турбулентной (*б, в*, соответственно $n = 62$, $n = 220$) фазы движения в логистическом отображении

Таким образом, результаты вейвлетного анализа, представленные ранее для модели Лоренца, имеют достаточно универсальный характер в плане рассмотрения сценария перехода к хаосу через перемежаемость [1].

Результаты, рассмотренные выше, свидетельствуют о возможности использования особенностей вейвлетного преобразования временны́х реализаций систем, демонстрирующих переход к хаосу через перемежаемость, применительно к анализу длительности ламинарных (и турбулентных) фаз движения.

Классическими методами выделения регулярных фаз движения являются методы, основанные на анализе «текущего» периода колебаний или амплитуды колебаний. Очевидно, что первый метод может работать лишь тогда, когда ламинарная фаза представляет сигнал, очень близкий к строго регулярному, что не всегда имеет место. Реально ламинарная фаза представляет собой *почти* периодическое движение, что затрудняет применение данного метода и снижает его точность.

[1] По крайней мере это справедливо для перемежаемости I типа. К этому типу перемежаемости относится динамика и логистического отображения, и системы Лоренца [80]. Вместе с тем, видимо, можно ожидать, что и анализ поведения систем, демонстрирующих перемежаемость II и III типа, покажет картину, подобную описанной здесь, конечно с соответствующими особенностями, характерными именно для этих типов.

Второй метод может быть применен только в том случае, когда в хаотической области амплитуда колебаний существенно отличается от амплитуды колебаний в регулярном режиме. В противном случае мы опять сталкиваемся с необходимостью иметь строгую периодичность колебаний в фазе ламинарного движения.

С другой стороны, метод выделения регулярных фаз, основанный на вейвлетном преобразовании, оказывается более предпочтительным. Как было обнаружено выше, вейвлетная поверхность в области ламинарной и турбулентной фаз движения обладает существенно различными структурами. Причем слабая нерегулярность сигнала в течение ламинарной фазы движения практически не отражается на структуре вейвлетной поверхности и, следовательно, не будет приводить к ошибке в определении длительности каждой из характерных фаз движения. Поэтому, если тем или иным образом анализировать структуру вейвлетной поверхности, можно достаточно просто осуществить поиск и определение длительностей ламинарных и турбулентных фаз при перемежаемости [82, 83].

В качестве простейшего метода анализа структуры вейвлетной поверхности может быть предложена методика, основанная на определении числа максимумов F на мгновенных распределениях энергии по масштабам колебаний $E(f_s)|_{t=\text{const}}$. В течение ламинарной фазы число максимумов постоянно, при переходе к турбулентной фазе величина F начинает сильно зависеть от времени. На рис. II.31 *а* демонстрируются результаты такого расчета для сигнала, генерируемого системой Лоренца при значении управляющего параметра $r = 166{,}1$. Из него видно, что предложенная методика эффективно позволяет выделить ламинарные фазы движения. Учитывая, что величина F принимает только целые значения, не представляет сложности определить, например, длительность ламинарной фазы движения по зависимости $F(t)$. Описанная методика успешно работает и при увеличении параметра надкритичности. Рис. II.31 *б* демонстрирует результаты расчета зависимости $F(t)$ при значении $r = 167{,}0$ (см. рис. II.28, на котором представлена соответствующая поверхность амплитуд коэффициентов вейвлетного преобразования при таком значении параметра r). Видно, что и в этом случае существенно более короткие ламинарные фазы легко обнаруживаются с применением описанной методики анализа вейвлетной поверхности.

Для иллюстрации данного метода были определены средние длительности l ламинарных и турбулентных фаз движения в зависимости от параметра надкритичности r. Число ламинарных фаз (а соответственно, и турбулентных фаз), по которым определялись данные характеристики, составляло $600 \div 800$ [1]. На рис. II.32 представлены результаты расчета для системы Лоренца. Средняя длительность ла-

[1] Машинное время обработки одной реализации такой длительности на персональном компьютере с процессором PII 400 MHz и ОЗУ 128 MB составляло около 40 мин.

Рис. II.31. Зависимости числа максимумов F на мгновенных распределениях энергии E от времени, определенные по временны́м реализациям системы Лоренца, для следующих значений управляющего параметра: *а* — $r = 166{,}1$, *б* — $r = 167{,}0$

минарной фазы движения уменьшается с ростом r, а средняя длительность хаотической фазы меняется существенно слабее, хотя и имеет тенденцию к увеличению с ростом надкритичности. Последнее вполне объяснимо, так как хаотическая фаза движения есть не что иное, как стадия реламинаризации, т. е. возвращение к регулярному движению. Понятно, что длительность реламинаризации слабо зависит от параметра надкритичности r. На рис. II.33 показана зависимость $\ln l$ от величины $\ln(r - r^*)$. Благодаря логарифмическому масштабу легко можно убедиться, что уменьшение длительности ламинарной фазы происходит пропорционально квадратному корню из надкритичности $(r - r^*)$ от порога перемежаемости (по крайней мере при небольших значениях величины $(r - r^*)$), что и предсказывает теория переме-

Рис. II.32. Средняя длительность ламинарной (○) и турбулентной (□) фаз колебаний $x(t)$ в модели Лоренца вблизи порога перемежаемости в зависимости от параметра надкритичности r

Рис. II.33. Средняя длительность ламинарной фазы движений вблизи порога перемежаемости, построенная в двойном логарифмическом масштабе. Точки — результаты работы процедуры выделения ламинарных фаз с помощью вейвлетного преобразования. Пунктирная линия — степенная функция от величины $r - r^*$ с показателем «1/2». Хорошо видно, что при малом превышении порога перемежаемости $r > r^*$ рост длительности $\langle l \rangle$ пропорционален $\sqrt{r - r^*}$, как и предсказывает теория. При больших величинах надкритичности наблюдается отклонение роста длительности ламинарной фазы от степенного закона

жаемости I рода. Таким образом, предложенный метод подтверждает результаты, хорошо известные в литературе.

Аналогичные результаты были получены для длительностей ламинарных и турбулентных фаз при анализе логистического отображения в диапазоне управляющего параметра $\varepsilon \in (1{,}738,\ 1{,}752)$. На рис. II.34 приведены зависимости длительностей ламинарных и турбулентных фаз от ε. Как и в случае соответствующих зависимостей, полученных

Рис. II.34. Средняя длительность ламинарной (○) и турбулентной (□) фаз колебаний x_n в логистическом отображении вблизи порога перемежаемости в зависимости от управляющего параметра ε

для системы Лоренца, длительность регулярной фазы колебаний растет с ростом параметра по степенному закону, а длительность турбулентной фазы остается примерно постоянной при различных значениях ε.

II.3. Вейвлетный анализ геофизических данных: первое приложение вейвлетного анализа

Одними из первых практических приложений вейвлетного преобразования стали анализ и изучение временны́х рядов геофизической природы, а именно долговременных временны́х рядов, полученных наблюдениями за сейсмической активностью, изменениями метеорологических параметров того или иного атмосферного или океанического процесса и т. п.

В этом параграфе рассматривается пример такого анализа реальных метеорологических данных наблюдений за явлениями Южное Колебание и Эль-Ниньо [67]. Исследование этого глобального для Земли атмосферного процесса, в том числе и с помощью вейвлетного анализа, достаточно хорошо изучено (см., например, работы [2, 3, 84]), поэтому здесь мы рассматриваем анализ процесса Эль-Ниньо с помощью вейвлетов как один из модельных примеров.

Следуя работе [2], кратко остановимся вначале на описании сути этого чрезвычайно важного для всей динамики климата Земли явления.

Южное Колебание — это крупномасштабный атмосферный процесс, развивающийся над акваторией Тихого океана. Южное Колебание тесно связано с явлением Эль-Ниньо — резким потеплением океанических вод вблизи тихоокеанского побережья Центральной Америки. Этот глобальный процесс планетарного масштаба в системе атмосфера–океан оказывает заметное влияние на динамику всей климатической системы планеты. Меняются циркуляция Гадлея (Хэдли) [1] и расположение областей активной конвекции в приэкваториальной зоне. Процессы в тропической зоне играют важную роль в формировании динамики климата в масштабах десятилетия и более [2].

El-Niño (Эль-Ниньо; англ. Christ Child) — это испанское название теплого течения в океане, появлявшееся чаще всего к Рождеству и существовавшее в течение некоторого времени. Теплое течение могло появиться в мае или даже в июне, однако, термин Эль-Ниньо за ним и связанными с ним явлениями с течением времени закрепился.

Обычно при анализе Южного Колебания рассматривается динамика температуры поверхности воды в центре Тихого океана [3]. Исследуемая характеристика — Niño SST (*Sea Surface Temperature*) — определяется как средняя сезонная температура поверхности Тихого океана в области, лежащей между 5° с.ш. — 5° ю.ш. и 90° — 150° з.д. Наиболее полные данные о динамике Niño SST за 1871–1996 гг. можно найти в источниках [3, 86] (см. также сайт Центра предсказания климата (Climate Prediction Center) в Интернете [2]).

В 1920-х годах английский ученый Гильберт Уолкер работал в Индии над проблемой предсказания муссонов, приносящих иногда катастрофические ливни. Изучая, в частности, показания барометров, он обнаружил зависимость между данными, полученными на станциях в западной и восточной частях Тихого океана. Термин Южное Колебание был введен им для обозначения аномалий приземного атмосферного давления вдоль тропической зоны. Чередование знаков аномалий напоминает гигантские качели, перекачивающие массы воздуха между восточным и западным полушариями. Вблизи центров действия Южного Колебания противоположного знака находятся станции Таити (17° ю.ш., 150° з.д.) и Дарвин (12° ю.ш., 150° в.д.). Именно поэтому временно́й ряд разностей нормализованных аномалий давления этих станций представляет собой наиболее обоснованный индекс Южного Колебания SOI (*South Oscillations Index*), обозначаемый далее как $C(t)$.

Связь между этими двумя явлениями, Эль-Ниньо и Южным Колебанием, была понята гораздо позже — после сильного явления Эль-Ниньо в 1957 г. Общепринятая гипотеза этой связи [67] может быть про-

[1] Циркуляция Гадлея (Хэдли) связана с формированием мощных конвективных ячеек в атмосфере Земли. Они находятся в северном и южном полушариях в поясе от экватора до 20°–30° широты. Циркуляция Гадлея обусловлена межширотным перепадом температуры, возникающим потому, что нагревание поверхности и атмосферы солнечным излучением растет от полюсов к экватору. Вблизи экватора воздух в ячейках поднимается. Поскольку воздух содержит много водяного пара, его подъем сопровождается образованием мощных кучево-дождевых облаков, имеющих вид башен. При конденсации водяного пара в этих облаках выделяется много тепла, которое идет на дополнительный разогрев атмосферы вблизи экватора, что значительно усиливает циркуляцию Хэдли (подробнее см. популярную статью Г.М. Шведа [85]).

[2] Его электронный WWW–адрес: http://nic.fb4.noaa.gov/data/cddb/.

иллюстрирована следующей простой физической картиной [2] (см. также рис. II.35 и II.36, взятые из работ [2, 87]).

Рис. II.35. Схематическое распределение дождевых зон над тропической частью Тихого океана при $C > 0$ (a) и $C < 0$ ($б$); доминирующий приповерхностный ветер показан стрелкой, дождевые зоны — серыми областями (рисунок взят из работы [2])

Рис. II.36. Структура атмосферной циркуляции и расположение областей повышенной конвекции в приэкваториальной зоне при $C > 0$ (a) и $C < 0$ ($б$); направление циркуляции показано стрелками, зоны повышенной конвекции — серыми областями (рисунок взят из работы [2])

При нормальных условиях $C \cong 0$ северо-восточные и юго-восточные ветры нагоняют теплую воду в западную часть Тихого океана (см. рис. II.35 *а*; уровень моря здесь на 40 см превышает уровень моря в восточной части. Сгон воды сопровождается апеллингом — подъемом глубинной холодной богатой питательными веществами воды у тихоокеанского побережья Южной Америки. При $C > 0$ описанные явления выражены сильнее. Когда индекс $C(t)$ Южного Колебания уменьшается и становится отрицательным, градиент давления между восточной и западной частями Тихого океана заметно уменьшается. Не испытывая сопротивления ветра (см. рис. II.35 *б*), теплая вода устремляется на восток, достигает берегов Южной Америки и затем движется к северу, к югу и в виде отраженной волны на запад. Область теплой воды быстро расширяется.

Повышение температуры поверхности в восточной и центральной частях Тихого океана меняет расположение областей конвекции в атмосфере. Обычно конвекция активна над Индонезией и в западной части Тихого океана (см. рис. II.35 *а* и рис. II.36 *а*, серая область на рисунке). С уменьшением индекса Южного Колебания в окрестностях австралийско-индонезийского центра действия наступает период очень сухой погоды, а в центральных и восточных частях Тихого океана, где дождей обычно не бывает, начинаются проливные дожди. Население прибрежных стран Южной Америки страдает от наводнений и шквалов; из-за прекращения прибрежного апеллинга и выноса питательных веществ мигрируют и гибнут птицы, животные, рыба.

Одновременно меняется расположение областей конвекции в атмосфере не только над Тихим океаном, но и во всей приэкваториальной зоне. Сухая погода приходит на западные побережья Африки и Южной Америки, где обычно выпадает нормальное количество осадков (см. рис. II.36 *а, б*). Наблюдается смещение путей распространения тропических циклонов. Так, в Атлантике при Эль-Ниньо заметно уменьшается число дней с тропическими циклонами. Необычное расположение областей повышенной конвекции при Эль-Ниньо возмущает атмосферную циркуляцию не только в приэкваториальной зоне, но и на всем земном шаре. Связанные с этим аномалии погоды обнаруживаются в зонах умеренных широт. Так, сильное Эль-Ниньо 1982–1983 гг. привело к тому, что зимой 1982–1983 гг. с Северной Атлантики через Скандинавию двигались на восток необычайно интенсивные циклоны. Многие природные явления, происходящие во время действия Эль-Ниньо имеют тяжелые экологические и экономические последствия.

Рассмотрим результаты вейвлетного анализа временны́х рядов SOI и Niño SST, следуя работам [2, 3].

На рис. II.37 приводятся результаты вейвлетного преобразования, взятые из работы [3] (проекции поверхности амплитуды и фазы коэффициентов вейвлетного преобразования), временно́го ряда Niño SST с базовым морлет-вейвлетом с параметром $\omega_0 = 6{,}0$ (рис. II.37 *б*) и МНАТ-вейвлетом (рис. II.37 *в*). Статистические данные об аномалиях давления и поверхностной температуры океана охватывают период чуть более столетия. Поэтому делаются попытки реконструкции ис-

6*

Рис. II.37. (a) Временнóй ряд Niño SST (с 1871 по 1996 года), используемый для вейвлетного анализа; (*б* и *в*) вейвлетные спектры $|W|^2$, построенные соответственно с вейвлетом Морлета ($\omega_0 = 6{,}0$) и MHAT-вейвлетом по ряду Niño SST. Левая ось ординат на рис. *б, в* соответствует фурье-периодам (в годах), правая — масштабам вейвлетного преобразования (также в годах). Штриховкой отмечена область влияния краевых условий. Жирные черные контуры отмечают область 95 % уровня достоверности (см. гл. IV) (рисунок взят из работы [3])

тории Южного Колебания на большие интервалы времени. В основу кладутся косвенные свидетельства, которые могут говорить о событиях Эль-Ниньо. Например, свидетельства о засухах и наводнениях, состоянии снега и льда на горных вершинах, составе ископаемой микрофлоры, скорости роста скелета кораллов, кольцах роста деревьев и др. В работе [2] наиболее достоверными считаются данные [88] о частоте событий Эль-Ниньо за последние 500 лет. В первую очередь эти данные основаны на свидетельствах о количестве тайфунов в Южном Китае, холодных зимах в Восточной Азии, засухах в Австралии, наводнениях на Ниле и в Перу, причиной которых являются события Эль-Ниньо. За период 1470–1987 гг. обнаружено 114 событий Эль-Ниньо со средним интервалом между ними около 4,5 лет.

На рис. II.38 *а* представлен график зависимости усредненного по десятилетию числа событий Эль-Ниньо от времени (за десятилетие происходило от 1 до 4 событий). Картина коэффициентов вейвлетно-

Рис. II.38. (*а*) Динамика событий Эль-Ниньо за 500 лет, (*б*) вейвлетный спектр $|W(t, s_0)|$ и (*в*) мощность вейвлетного спектра $|W|^2$ (из работы [2])

го преобразования неусредненных данных, состоящих из ряда нулей и единиц, показана на рис. II.38 *б*, на котором шкала масштабов s линейно растет вниз до 330 лет. Мгновенное распределение энергии вейвлетного преобразования $E(t_0, s) = |W(t_0, s)|^2$ показано на рис. II.38 *в* для диапазона масштабов s до 100 лет.

Показанные на рис. II.38 *в* распределения энергии по масштабам $\langle E(s)\rangle$ для различных моментов времени t_0, полученные по коэффициентам вейвлетного преобразования, имеют три максимума — в диапазонах масштабов около 9–10, 37–40 и 150 лет.

Масштаб 9–10 лет обычно связывают с лунным циклом в 18,6 лет, который присутствует в динамике засух, наводнений и температуры в Северной Америке. Масштаб 37–40 лет согласуется с 70–80-летним циклом Эль-Ниньо, обнаруженным в [20, 23, 25]; причины генерации этого цикла пока неясны. Третий характерный масштаб (около 150 лет — ему соответствуют самые крупномасштабные детали на рис. II.38 *б*) находится на границе из-за недостаточной длины анализируемого ряда и может быть признан недостоверным [2].

Мгновенные распределения энергии по масштабам $E(t_0, s)$ (см. рис. II.38 *в*) позволяет детально изучить характерные масштабы (а также временну́ю динамику характерных масштабов) исследуемого атмосферного процесса. На фоне сложной нерегулярной динамики процесса вблизи некоторых масштабов видна структура, похожая на квазипериодическую [2]. В начале и в конце анализируемого временно́го ряда выделяются по три детали с масштабами 41–43 года, в середине рисунка — несколько существенных всплесков амплитуды коэффициентов вейвлетного преобразования с масштабами около 25–30 лет, которые формируют две крупномасштабные детали приблизительно в 1891–1893 гг. Кроме того, можно выделить интервалы во времени, в которых существенную роль играет мелкомасштабная динамика атмосферы с характерными временны́ми масштабами $s < 11$ лет.

Таким образом, вейвлетный анализ позволил эффективно выделить некоторые основные закономерности долговременно́й динамики явления Эль-Ниньо [2]. Так, существуют локальные периодичности с масштабами от 8 до 11 лет, при этом необходимо дополнительное изучение вопроса о том, связаны ли они с лунным циклом в 18,6 года или с 22-летним циклом солнечной активности. О меньших масштабах при шаге дискретизации данных в один год говорить не имеет смысла. Крупномасштабная динамика не показывает устойчивого 70–80-летнего цикла. Существуют достаточно продолжительные эпохи повторяющейся длительности — около 25–30 лет, 40–42 года и, возможно, порядка 90 лет. О более длительных эпохах не позволяет говорить конечная длина ряда событий Эль-Ниньо.

При интерпретации результатов необходимо помнить, что анализируемые данные реконструированы по косвенным свидетельствам и, кроме того, не отражают информации об интенсивности процесса (в них содержится только информация о наличии или отсутствии явления Эль-Ниньо в течение года). Поэтому гораздо больше (и гораздо более достоверной) информации содержат данные наблюдений за последнее столетие, результаты вейвлетного анализа которого представлены на рис. II.37. Кратко мы еще будем возвращаться к этим результатам в гл. IV. В работе [2] также подробно обсуждается динамика среднемесячных и суточных колебаний значений индекса Южного Колебания. Однако подробное обсуждение этих вопросов выходит за рамки данной книги.

Заметим также, что для заинтересовавшихся проблемами анализа метеорологических и геофизических данных методами вейвлетного анализа можно порекомендовать работы [89–100], где эти вопросы освещены существенно более подробно. В частности, работы [2, 101–103] непосредственно касаются исследований Южного Колебания методами вейвлетного анализа.

Глава III
БИКОГЕРЕНТНОЕ ВЕЙВЛЕТНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ

В данной главе будет рассмотрен новый метод анализа сложных нестационарных процессов — бикогерентное вейвлетное преобразование. Если вернуться снова к фурье-анализу, то расчеты спектров Фурье высокого порядка [104] и, в частности, фурье-биспектров [105] широко применяются для анализа сложной динамики различных систем, например в задачах исследования турбулентности, гидродинамики, физики плазмы, оптики, медицины, геофизики и др. (см., например, работы [106–114]).

Бикогерентное вейвлетное преобразование представляет собой расчет вейвлетного биспектра, являющегося обобщением вейвлетного преобразования. Нормализованный биспектр (бикогерентность) характеризует фазовые соотношения (фазовую связь) между различными частотными составляющими, присутствующими в сигнале. О фазовой связи можно говорить в том случае, когда в анализируемом сигнале одновременно присутствуют две частоты ω_1 и ω_2, сумма (или разность) которых (а также сумма фаз ϕ_1 и ϕ_2 этих частотных компонент) остается постоянной в течение некоторого промежутка времени. Бикогерентность является количественной мерой такой фазовой связи. Величина бикогерентности является функцией частот ω_1 и ω_2 и должна быть близка к единице, если анализируемый сигнал содержит три частоты (ω_1, ω_2, ω), удовлетворяющие соотношениям

$$\omega_1 + \omega_2 = \omega, \qquad \phi_1 + \phi_2 = \phi + \text{const}. \tag{III.1}$$

В случае, когда соотношение (III.1) не выполняется, бикогерентность, определенная относительно частот ω_1, ω_2 и ω, равна нулю.

Дело в том, что при нахождении вейвлетного спектра $W(t, s)$ анализируемый процесс считается результатом наложения в любой момент времени статистически некоррелированных процессов на различных временны́х масштабах и производится оценка распределения мощности среди этих временны́х масштабов s в каждый момент времени t. При этом исследуются только линейные механизмы, определяющие динамику процесса, так как фазовые соотношения между частотными составляющими исключаются (см., например, работу [105]). Фактически можно сказать, что имеющейся информации в вейвлетном спектре достаточно для полного статистического описания гауссова процесса с известным средним значением. Однако когда анализируемый сигнал содержит сложную структуру различных временны́х гармоник и либо порождается *нелинейной* динамической системой, либо в нем в силу тех или иных причин появляются отклонения от гауссовости, то одного вейвлетного спектра мощности уже недостаточно для полного описания процесса. В этом случае можно предположить, что в сигнале появляется фазовая связь между некоторыми частотными компонентами. Информацию, касающуюся отклонений от гауссовости и наличия нелинейностей, позволяют получить спектры более высокого порядка, в частности спектр третьего порядка, или биспектр. Поэтому обобщение биспектра на вейвлетное преобразование позволит анализировать такие принципиально нелинейные явления, как временна́я динамика фазовой связи между теми или иными компонентами в сигналах, а также выделять в наборах пространственно-временны́х данных коротко живущие структуры.

III.1. Основные понятия и определения бикогерентного вейвлетного преобразования

Непрерывный вейвлетный взаимный спектр (*cross spectrum*) определяется как

$$K_{hg}(s) = \int_T W_f(s,\tau) W_g^*(s,\tau)\, d\tau, \tag{III.2}$$

где $h(t)$ и $g(t)$ — анализируемые сигналы; W_h и W_g — вейвлетные спектры, построенные по сигналам h и g соответственно; T — промежуток времени, в течение которого анализируется взаимный спектр; «$*$» обозначает операцию комплексного сопряжения.

Введем также вейвлетный взаимный спектр с временно́й задержкой:

$$K_{hg}(s,\Delta\tau) = \int_T W_h(s,\tau) W_g^*(s,\tau+\Delta\tau)\, d\tau, \tag{III.3}$$

где $\Delta\tau$ — задержка во времени. Вейвлетный взаимный спектр с задержкой позволяет оценить изменение структуры сигнала между моментами времени, разделенными промежутком времени $\Delta\tau$.

Нормализованный вейвлетный взаимный спектр с задержкой (взаимная вейвлетная когерентность) определяется величиной

$$\gamma_{hg}(s,\Delta\tau) = \frac{K_{hg}(s,\Delta\tau)}{\sqrt{\langle E_h(s)\rangle \langle E_g(s)\rangle}}, \tag{III.4}$$

которая принимает значения из интервала $[0,1]$. Здесь $\langle E_h(s)\rangle$ и $\langle E_g(s)\rangle$ — распределение энергии по масштабам вейвлетного преобразования сигналов $h(t)$ и $g(t)$ соответственно. Напомним, что распределение энергии по масштабам может быть записано в терминах фурье-образа сигнала $h(t)$ и фурье-образа материнского вейвлета $\widehat{\psi}_0$ (см. формулу (I.22)).

Введем теперь по аналогии с фурье-биспектром [113] вейвлетный взаимный биспектр [116, 117]

$$B_{hg}(s_1, s_2) = \int_T W_h^*(s, \tau) W_g(s_1, \tau) W_g(s_2, \tau)\, d\tau, \tag{III.5}$$

где

$$\frac{1}{s} = \frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_2} \tag{III.6}$$

есть правило суммирования частот.

Вейвлетный взаимный биспектр есть мера фазовой связи на интервале времени T, которая проявляется между компонентами вейвлетных спектров сигнала $g(t)$ на масштабах s_1 и s_2 и сигнала $h(t)$ на масштабе s. Рассматривая частоты $\omega_s = 2\pi/s$, соответствующие масштабам вейвлетного преобразования, правило суммирования частот (III.6) можно переписать в виде

$$\omega_s = \omega_{s1} + \omega_{s2}. \tag{III.7}$$

Тогда вейвлетный взаимный биспектр может быть интерпретирован как фазовая связь между волнами (вейвлетами), частоты которых удовлетворяют условию (III.7). Одновременно можно определить понятие вейвлетного автобиспектра сигнала $h(t)$:

$$B(s_1, s_2) = B_{hh}(s_1, s_2). \tag{III.8}$$

Из определений (III.5), (III.8) и условия суммирования частот (III.6) вытекают следующие основные свойства взаимного биспектра и автобиспектра.

1. В общем случае взаимный биспектр $B_{hg}(\omega_{s1}, \omega_{s2})$ и автобиспектр $B(\omega_{s1}, \omega_{s2})$ являются комплексными функциями, т. е. их можно представить в виде модуля и фазы:

$$B(\omega_{s1}, \omega_{s2}) = |B(\omega_{s1}, \omega_{s2})| \exp\left[j\psi_B(\omega_{s1}, \omega_{s2})\right]. \tag{III.9}$$

2. Для взаимного биспектра выполняется свойство симметрии (рис. III.1 *а*)

$$B_{hg}(\omega_{s1}, \omega_{s2}) = B_{hg}(\omega_{s2}, \omega_{s1}) = B_{hg}^*(-\omega_{s2}, -\omega_{s1}) = B_{hg}^*(-\omega_{s1}, -\omega_{s2}). \tag{III.10}$$

Для автобиспектра имеют место более сложные свойства симметрии:

$$\begin{aligned} B(\omega_{s1}, \omega_{s2}) &= B(\omega_{s2}, \omega_{s1}) = B^*(-\omega_{s2}, -\omega_{s1}) = B^*(-\omega_{s1}, -\omega_{s2}) = \\ &= B(-\omega_{s1} - \omega_{s2}, \omega_{s2}) = B(\omega_{s1}, -\omega_{s1} - \omega_{s2}) = \\ &= B(-\omega_{s1} - \omega_{s2}, \omega_{s1}) = B(\omega_{s2}, -\omega_{s1} - \omega_{s2}). \end{aligned} \tag{III.11}$$

Из последнего соотношения следует, что знание автобиспектра в секторе $\omega_{s2} \geqslant 0$, $\omega_{s2} - \omega_{s1} \geqslant 0$ (на рис. III.1 *б* отмечен буквой A) достаточно для его полного описания на всей плоскости $(\omega_{s1}, \omega_{s2})$. Далее, с учетом свойств симметрии (III.11), существует возможность восстановить автобиспектр во всех остальных секторах плоскости $(\omega_{s1}, \omega_{s2})$.

Рис. III.1. (*а*) Области симметрии взаимного биспектра. При вычислении биспектра достаточно рассмотреть только одну из отмеченных на рисунке областей. (*б*) Области симметрии автобиспектра. При нахождении $B(\omega_{s1}, \omega_{s2})$ достаточно провести расчет по формуле (III.8) для одного из двенадцати секторов, после чего необходимо воспользоваться свойствами симметрии (III.11)

При анализе сигналов удобно пользоваться не только взаимным биспектром (III.5), но и понятием вейвлетной взаимной бикогерентности, которая определяется как нормализованный вейвлетный взаимный биспектр:

$$b_{hg}(s_1, s_2) = \\ = |B_{hg}(s_1, s_2)| \left(\int\limits_T |W_g(s_1, \tau) W_g(s_2, \tau)|^2 \, d\tau \, \langle E_h(s) \rangle \right)^{-1/2}. \quad \text{(III.12)}$$

Как видно из определения (III.12), функция вейвлетной взаимной бикогерентности сочетает в себе две принципиально различные характеристики, а именно вейвлетный биспектр B и вейвлетный спектр W процесса. Величина взаимной бикогерентности может принимать в соответствии с определением (III.12) значения в интервале $[0, 1]$.

Аналогично тому, как это делалось при введении понятия автобиспектра (III.8), можно определить вейвлетную автобикогерентность сигнала $h(t)$:

$$b(s_1, s_2) = b_{hh}(s_1, s_2). \quad \text{(III.13)}$$

При численной реализации процедуры расчета вейвлетной взаимной бикогерентности и автобикогерентности, как и в случае нахождения непрерывного вейвлетного преобразования (см. главу II), имеем дело с дискретно заданным сигналом $\{x\}$ с числом отсчетов N. Расчет вейвлетных спектров W_h и W_g будет эффективен при использовании описанной в гл. II процедуры, в которой для ускорения расчета вейвлетного преобразования применяется быстрое преобразование Фурье. Использование в качестве материнских вейвлетов неортогональных вейвлетных базисных функций позволяет произвольно выбрать набор временны́х масштабов $\{s\}$, по которым будет осуществляться вейвлетное преобразование функций h и g. В данном случае удобно использовать запись набора масштабов s_i в линейном масштабе относительно частот f_s:

$$f_{sl} = f_{s0} + l\Delta f_s, \qquad l = 0, \ldots, \mathcal{L}. \tag{III.14}$$

Здесь

$$f_{s0} = \frac{f_N}{f_N N\Delta t - 1}, \qquad \mathcal{L} = \frac{f_N - f_{s0}}{\Delta f_s},$$

где f_N — частота Найквиста, равная половине частоты дискретизации f_Δ.

Важной характеристикой бикогерентного вейвлетного преобразования является суммированная бикогерентность, которая определяется как

$$b_\Sigma(s) = \sqrt{\frac{1}{N_s}\sum \left(b(s_1, s_2)\right)^2}, \tag{III.15}$$

где суммирование производится по всем масштабам s_1 и s_2, удовлетворяющим условию (III.6); b обозначает либо взаимную бикогерентность, либо автобикогерентность; N_s — число слагаемых в сумме. Вводится также понятие полной бикогерентности, которая записывается в виде

$$b = \sqrt{\frac{1}{N_S}\sum\sum \left(b(s_1, s_2)\right)^2}, \tag{III.16}$$

где суммирование теперь уже производится по всем анализируемым масштабам s_1 и s_2, N_S — общее число суммируемых величин. Коэффициенты $1/N_s$ и $1/N_S$ необходимы для того, чтобы величины b_Σ и b принимали значения из интервала $[0, 1]$.

По найденным численно величинам вейвлетного взаимного биспектра и автобиспектра полезно восстанавливать суммированный биспектр

$$B_\Sigma(s) = \sqrt{\frac{1}{N_s}\sum \left(B(s_1, s_2)\right)^2}, \tag{III.17}$$

где все обозначения совпадают с обозначениями, используемыми в формуле (III.15).

В связи с неоднозначностью выбора материнского вейвлета возникает вопрос о том, какой базисной вейвлетной функцией необходимо пользоваться при расчетах величин вейвлетной бикогерентности и вейвлетного взаимного биспектра. Наиболее удобным для дальнейшей интерпретации результатов, на наш взгляд, оказывается вейвлет Морлета, для которого можно легко сопоставить масштабы вейвлетного преобразования s (или соответствующие им частоты $\omega_s = 2\pi/s$) и длины волн Λ (или частоты $\omega = 2\pi/\Lambda$) преобразования Фурье. Это позволяет анализировать результаты вейвлетного бикогерентного анализа в принятых в фурье-анализе терминах частот и фаз сигналов. Далее, если не оговаривается особо, для анализа в качестве базового вейвлета будет использоваться морлет-вейвлет с $\omega_0 = 6$.

Интерпретация «физического смысла» понятия бикогерентности в общем случае не является тривиальной. В простейшем случае выявить физический смысл бикогерентности возможно при рассмотрении взаимодействия связанных волн-осцилляторов в системах с квадратичной нелинейностью. Системы с квадратичной нелинейностью являются эталонными моделями нелинейной теории колебаний и волн и описывают целый ряд эффектов, связанных с резонансным взаимодействием трех осцилляторов, которое происходит только при условии, что нормальные частоты системы удовлетворяют условию [119]

$$\omega_1 \pm \omega_2 = \omega_3. \tag{III.18}$$

Так, например, модель с квадратичной нелинейностью описывает взаимодействие высокочастотных и низкочастотных электромагнитных волн в среде, состоящей из осцилляторов с собственной частотой ω_0 (рис. III.2 *а,б*, на которых представлены соответствующие дисперсион-

Рис. III.2. Дисперсионные диаграммы, иллюстрирующие различные случаи резонансного взаимодействия трех связанных волн-осцилляторов

ные диаграммы), или связь частот и волновых векторов при вынужденном рассеянии Мандельштама–Бриллюэна (рис. III.2 *в*). Данная модель находит свое применение и при анализе некоторых типов турбулентности дрейфовых волн в плазме [120, 121], что делает ее интересной и с точки зрения анализа нестационарных нелинейных процессов в распределенных системах.

На практике квадратичная нелинейность приводит к тому, что в результате взаимодействия двух гармонических составляющих (двух мод) процесса часть мощности выделяется на суммарных и (или) разностных частотах этих составляющих. Эффекты, связанные с квадратичными нелинейностями, приводят к определенным фазовым соотношениям, называемым квадратичной связью по фазе. Поэтому при анализе сигнала может возникнуть вопрос: не являются ли моды, частоты которых на определенном интервале времени удовлетворяют соотношению (III.18), действительно связанными? Анализируя вейвлетный спектр (как и фурье-спектр мощности) на этот вопрос ответить нельзя, поскольку в нем все фазовые соотношения подавлены. Однако биспектр позволяет выявить и оценить фазовую связь. Рассмотрим два процесса:

$$x_1(t) = \sin(2\pi f_1 t + \phi_1) + \sin(2\pi f_2 t + \phi_2) + \sin(2\pi f_3 t + \phi_3), \qquad \text{(III.19)}$$

$$x_2(t) = \sin(2\pi f_1 t + \phi_1) + \\ + \sin(2\pi f_2 t + \phi_2) + \sin(2\pi f_3 t + (\phi_1 + \phi_2)), \qquad \text{(III.20)}$$

где частоты f_1, f_2 и f_3 гармонически связаны (т. е. имеет место соотношение $f_1 + f_2 = f_3$), а ϕ_1, ϕ_2 и ϕ_3 — независимые равномерно распределенные на интервале $[0, 2\pi]$ случайные величины. Из соотношения (III.19) видно, что f_3 — независимая гармоническая составляющая (мода) процесса, так как ϕ_3 — независимая случайная фаза. В сигнале (III.20) соствляющая f_3 является результатом фазовой связи между модами f_1 и f_2. Очевидно, что процессы $x_1(t)$ и $x_2(t)$ имеют примерно одинаковые вейвлетные спектры $W_1(t, s) \approx W_2(t, s)$ (и одинаковые спектры мощности $P_1 = P_2$). Однако, как не сложно видеть, вейвлетный автобиспектр процесса x_1 тождественно равен нулю, тогда как в вейвлетном автобиспектре процесса x_2 будет наблюдаться максимум в области $\omega_{s1} - \omega_{s2} \geqslant 0$, $\omega_{s2} > 0$. При $f_1 \geqslant f_2$ этот максимум приходится на частоты $\omega_{s1} = 2\pi f_1$, $\omega_{s2} = 2\pi f_2$.

Вопрос о виде биспектра в рассматриваемом случае будет обсуждаться нами подробнее в § III.3. Пока же отметим, что расчет вейвлетной бикогерентности позволяет оценить и величину связи между модами системы с квадратичной нелинейностью.

В модели с квадратичной нелинейностью связь между модами или масштабами s_1, s_2 и s может быть записана через коэффициент связи $A(s_1, s_2, \tau)$ [117] в виде

$$W_f(s, \tau) = W_f^0(s, \tau) + A(s_1, s_2, \tau) W_g(s_1, \tau) W_g(s_2, \tau), \qquad \text{(III.21)}$$

где рассматриваемые масштабы s_1, s_2 и s удовлетворяют соотношению (III.6). Величина $W_f^0(s, \tau)$ определяет вклад в исследуемый процесс на масштабе s всех масштабов s_i, не удовлетворяющих условию резонанса (III.18), причем вклады от каждого из этих масштабов являются статистически независимыми. Уравнение (III.21) выражает существование квадратичной связи между тремя вейвлетными преобразованиями. В случае, когда коэффициент связи $A(s_1, s_2, \tau)$ слабо изменяется в течение интервала времени T, проведем усреднение соотношения (III.21) на этом временно́м интервале:

$$\int_T W_f(s, \tau)\, d\tau = \int_T W_f^0(s, \tau)\, d\tau + \int_T A(s_1, s_2, \tau) W_g(s_1, \tau) W_g(s_2, \tau)\, d\tau.$$

Отсюда, с учетом выражения (III.5) и того факта, что первый интеграл в правой части равен нулю, легко получить следующую оценку коэффициента связи

$$|A(s_1, s_2, \tau')|^2 = \frac{|b_{hg}(s_1, s_2)|^2 \langle E_f(s)\rangle}{\int\limits_T |W_g(s_1, \tau) W_g(s_2, \tau)|^2 \, d\tau}, \qquad \text{(III.22)}$$

где τ' — момент времени, соответствующий середине временно́го интервала T. Таким образом, коэффициент связи между модами системы с квадратичной нелинейностью может быть определен путем расчета с помощью бикогерентного вейвлетного преобразования функции бикогерентности b_{hg} при условии, что интервал усреднения T выбирается заведомо меньшим, чем характерный масштаб изменения коэффициента связи.

Более детальная интерпретация бикогерентного вейвлетного анализа возможна, когда нестационарный процесс, происходящий в исследуемой распределенной системе, анализируется в нескольких пространственно разделенных точках наблюдения. Рассмотрим для примера случай, когда по временны́м реализациям сигналов некоторых наблюдаемых величин (например, скорость, давление и т. п.), фиксируемых в двух точках турбулентного поля, рассчитывается взаимная бикогерентность. Такой анализ позволяет получить существенно больше информации о динамике системы. Здесь можно выделить два основных преимущества по сравнению со случаем, когда анализируемый сигнал получен из одной точки, принадлежащей этому турбулентному полю. Во-первых, в этом случае возможно более эффективно выделить и подавить любые шумы, которые присутствуют в полученных в результате измерения сигналах. Это будет иметь место при условии, что оба измерения могут быть рассмотрены как статистически независимые. И, во-вторых, существует возможность анализировать пространственную структуру турбулентного поля. Дело в том, что величина взаимной бикогерентности уменьшается в случае, когда точки наблюдения разнесены на некоторое расстояние. Последнее позволяет определять характерные размеры пространственно-временны́х структур, формирующихся в исследуемой распределенной системе, а также анализировать их взаимодействие [1].

В качестве дальнейшего шага можно ввести решетку из точек наблюдения за эволюцией исследуемого поля, что позволит построить взаимный вейвлетный спектр и рассчитать по нему вейвлетную бикогерентность как во времени, так и во всем исследуемом пространстве.

[1] Конечно, при таком анализе обязательно необходимо учитывать скорость движения анализируемого поля вдоль линии, соединяющей точки наблюдения. Без учета этого в некоторых случаях расчет взаимной корреляции сигналов, измеренных в этих двух точках, даст лишь оценку расстояния между точками наблюдения.

III.2. Оценка погрешности расчета вейвлетной бикогерентности

Рассмотрим методику оценки статистического уровня шума ε и статистической ошибки Δb, возникающей при вычислении бикогерентности из-за конечной длины исследуемого временнóго ряда, ошибок округления и т. д. Зависимость накапливающейся статистической ошибки от анализируемого временнóго масштаба f_s позволяет определить ту область временны́х масштабов бикогерентного преобразования, в которой полученная величина бикогерентности лежит ниже уровня статистической ошибки. Очевидно, в этой области масштабов результаты вейвлетного бикогерентного анализа неверны.

Пусть временнóй интервал T, в течение которого производится интегрирование при расчетах вейвлетного бикогерентного преобразования, соответствует N отсчетам временнóго ряда. Если предположить, что все вейвлетные коэффициенты для каждого конкретного масштаба статистически независимы, то статистический уровень шума ε при расчете бикогерентности b составляет $1/\sqrt{N}$ благодаря суммированию по N значениям. Однако вейвлетные коэффициенты некоторого временнóго масштаба не являются статистически независимыми благодаря тому, что рассматриваемые нами вейвлетные базисы не строго ортогональны. Каждый из коэффициентов вейвлетного преобразования, определяемого формулой (I.1), находится интегрированием в диапазоне $-\infty < t < \infty$. Благодаря периодичности с периодом s вейвлетных функций на масштабе s (см. рис. I.3 и таблицу) статистически независимыми можно считать только те коэффициенты, которые разделены интервалом $s/2$ или числом точек $M(s) = s\omega_\Delta/4\pi$, где ω_Δ — частота дискретизации. Тогда суммирование при расчете бикогерентности производится не по N значениям, а только по $N/\max\{M(s)\}$, где максимум приходится на значения масштабов s, которые играют основную роль при определении характерных величин бикогерентности [117]. Отсюда следует, что статистический уровень шума в бикогерентности $b(\omega_{s1}, \omega_{s2})$ может быть вычислен по формуле

$$\varepsilon(b(\omega_{s1}, \omega_{s2})) = \sqrt{\frac{\omega_\Delta}{2}\,\frac{1}{N}\Big/ \min\{|\omega_{s1}|, |\omega_{s2}|, |\omega_{s1} \pm \omega_{s2}|\}}\,. \qquad \text{(III.23)}$$

Из последнего соотношения видно, что на низких частотах статистический шум может доминировать в бикогерентности, и анализ бикогерентности должен быть ограничен только высокочастотными составляющими исследуемого процесса.

Статистическая ошибка в определении бикогерентности $b(\omega_{s1}, \omega_{s2})$ может быть получена из соотношения (III.12). Каждый из сомножителей в этом уравнении представляет собой интеграл по временнóму интервалу T, т. е. при численном расчете ошибка составит $1/\sqrt{N}$. Следовательно, ошибка в определении бикогерентности будет равна

$$\frac{\Delta(b(\omega_{s1}, \omega_{s2}))}{b(\omega_{s1}, \omega_{s2})} \sim \frac{2}{N}. \tag{III.24}$$

Заметим, что в уравнениях (III.23) и (III.24) предполагается, что с помощью вейвлетного бикогерентного анализа можно выделить когерентные структуры в крайне зашумленных данных при условии, что когерентность сохраняется в течение длительных промежутков времени, таких что вклад шума в бикогерентность быстро уменьшается с увеличением N. Например, если предположить, что бикогерентность благодаря наличию в зашумленном сигнале когерентной составляющей, по крайней мере, в $\mathcal{Z}$ раз выше максимального уровня шума, то допустимое отношение сигнал/шум будет равно $\mathcal{Z}\varepsilon$, где ε определяется уравнением (III.23). Во многих случаях (принципиально, чтобы N было достаточно велико), как видно из соотношения (III.23), величина $\mathcal{Z}\varepsilon$ может принимать значения много меньше 1. В последнем случае бикогерентное вейвлетное преобразование может рассматриваться как эффективный фильтр для выделения полезного сигнала из шума.

На рис. III.3 представлены взятые из работы [117] результаты анализа случайных данных с гауссовым распределением вероятностей и с ча-

Рис. III.3. Зависимости суммированной бикогерентности как функция частоты для гауссова шума при различной длительности N анализируемого ряда *а* — 200, *б* — 400, *в* — 800, *г* — 1600 отсчетов (из работы [117]) стотой дискретизации 1 МГц. Зависимости суммированной бикогерентности $b_\Sigma(s)$ были получены с базовым морлет-вейлетом с параметром $\omega_0 = 6$. Как видно из графиков, суммированная бикогерентность с увеличением длины N анализируемого ряда приближается к бикогерентности, предсказываемой формулой (III.23) (штриховая линия).

III.3. Применение бикогерентного вейвлетного анализа к модельным сигналам

Для анализа результатов применения вейвлетного бикогерентного анализа к исследуемым сигналам удобно рассматривать проекции поверхностей, соответствующих вейвлетному взаимному биспектру $|B_{hg}(s_1, s_2)|$ (III.5) и вейвлетной бикогерентности $b_{hg}(s_1, s_2)$ (III.12), на плоскости параметров $(\omega_{s1}, \omega_{s2})$, где $\omega_s = 1/s$. Следует учитывать, что частоты ω_{s1}, ω_{s2} и ω_s могут принимать и отрицательные значения. Последнее необходимо для того, чтобы рассмотреть все возможные комбинации сумм и разностей частот ω_{s1} и ω_{s2}. При этом нет необходимости рассматривать всю плоскость. Во-первых, частоты ω_{s1}, ω_{s2} и ω_s должны быть меньше частоты Найквиста, которая равна половине частоты дискретизации ω_Δ, и, во-вторых, так как частоты ω_{s1} и ω_{s2} взаимозаменяемы, мы можем ограничиться рассмотрением случая $\omega_{s1} \geqslant \omega_{s2}$. Очевидно также, что случаи $(\omega_{s1}, \omega_{s2})$ и $(-\omega_{s1}, -\omega_{s2})$ полностью идентичны, поэтому можно рассматривать только один из них, при этом необходимо учитывать свойства симметрии, присущие биспектру и автобиспектру (см. рис. III.1).

Для того чтобы выяснить свойства бикогерентного вейвлетного преобразования и методику его применения к анализу сложных многочастотных сигналов, рассмотрим в качестве примеров некоторые модельные сигналы следующего вида:

$$x(t) = a_r \sin(2\pi f_r t) + a_s \sin(2\pi f_s t) + a_t \sin(2\pi f_t t). \qquad \text{(III.25)}$$

Данные модельные сигналы представлялись временны́ми рядами, содержащими $N = 1024$ точек с шагом по времени либо $\Delta t = 0{,}01$, что соответствует частоте дискретизации $f_\Delta = 100$, либо $\Delta t = 1$ ($f_\Delta = 1$).

Рассмотрим вначале результаты применения вейвлетного бикогерентного анализа к одночастотному сигналу, заданному формулой (III.25), где $a_1 = 1$, $a_2 = a_3 = 0$ и $f_1 = 5$. На рис. III.4 представлены вейвлетный автобиспектр и вейвлетная автобикогерентность такого сигнала.

Автобиспектр (рис. III.4 a) показывает шесть максимумов на поверхности, построенной в координатах (f_1, f_2). Из них два являются невырожденными максимумами и располагаются в точках с координатами $f_1 = f_2 = 5$ и $f_1 = 10$, $f_2 = -5$. Первый из невырожденных максимумов соответствует локальному максимуму поверхности амплитуды коэффициентов вейвлетного преобразования $|W_x|$ на частотах $f_1 = f_r$ и $f_2 = f_r$, второй — $f_2 = f_r$ и $f = f_1 + f_2 = f_r$. Остальные максимумы всегда расположены симметрично этим двум максимумам относительно линий $f_1 = f_2$ и $f_1 + f_2 = 0$ и дублируют уже имеющуюся информацию, поэтому при рассмотрении их можно не учитывать. Несмотря на то что в подынтегральное выражение соотношения (III.5),

Рис. III.4. Вейвлетный автобиспектр (*а*) и автобикогерентность (*б*) одночастотного сигнала

определяющего вейвлетный автобиспектр $B(f_1, f_2)$, входит на всем интервале времени близкий к 0 третий сомножитель ($W_x^*(f, \tau) \approx 0$), максимумы все же проявляются на вейвлетном биспектре, хотя они и очень малы (порядка 10^{-18}). Как и следовало ожидать, бикогерентность (рис. III.4 *б*) при этом не показывает наличия в сигнале квадратично связанных составляющих. Картина, наблюдаемая при $f \sim 0$ (центральная область на проекции поверхности автобикогерентности), в данном случае не должна рассматриваться как проявление свойств анализируемого сигнала: значения бикогерентности в этой области находятся в пределах статистической ошибки. Одновременно в области таких низких частот (или соответственно больших масштабов) имеют место значительные ошибки в расчете коэффициентов вейвлетного преобразования, что также, в свою очередь, существенно искажает распределение значений бикогерентности в области $f \sim 0$.

Рассмотрим более подробно вопрос о точности численного расчета в этой области частот. Исследование точности различных способов численной реализации вейвлетного преобразования показало, что использование преобразования Фурье может приводить к накоплению ошибок округления, связанных с конечной точностью вычисления значений гармонических базисных функций. Возникающие ошибки, как правило, не вносят значительного вклада в картину распределения коэффициентов, однако начинают играть существенную роль на больших масштабах, где амплитуда анализируемого сигнала становится малой. В этом случае ошибки округления не вносят значительного вклада в распределение амплитуд коэффициентов вейвлетного спектра, однако значительно искажают распределение фазы вейвлетного преобразования. Последнее оказывает сильное влияние на точность расчета вейвлетного биспектра и вейвлетной бикогерентности.

Кроме того, на малых масштабах могут появляться неточности, связанные с ограниченностью диапазона частот, используемых в преобразовании Фурье. При этом искажается фурье-образ вейвлетной функции на соответствующих временны́х масштабах. Например, для базового морлет-вейвлета искажение его фурье-образа на малых масштабах s иллюстрирует рис. III.5.

Рис. III.5. Представление фурье-образа вейвлета Морлета при численной реализации расчета вейвлетного преобразования на различных масштабах s

Рассмотрим теперь сигнал, в спектре которого две частоты: $f_r = 5$ и $f_s = 10$; амплитуды сигналов $a_r = a_s = 1$, $a_t = 0$. Вид биспектра для такого сигнала (рис. III.6 *а*) не отличается от рассмотренного в предыдущем примере: максимумы появляются на тех же частотах, однако их высота становится заметно большей. Вейвлетная бикогерентность (рис. III.6 *б*) при этом показывает наличие в спектре связанных составляющих. Это объясняется выбранным соотношением частот для данного сигнала:

$$f_r + f_r = f_s. \tag{III.26}$$

Примечательно то, что картина, наблюдаемая вблизи $f = 0$, совпадает с аналогичной для рассмотренного выше одночастотного сигнала,

Рис. III.6. Вейвлетный биспектр (*а*) и автобикогерентность (*б*) двухчастотного сигнала с отношением частот, определяемым соотношением (III.26)

7*

т. е. определяется не особенностями анализируемого сигнала, а ошибками расчета вейвлетного преобразования с помощью преобразования Фурье. Суммированная бикогерентность в области низких частот также находится в пределах статистической ошибки, а в области больших частот в несколько раз превышает последнюю.

Рассмотрим теперь двухчастотный сигнал, для которого, в отличие от предыдущего, не выполняется равенство (III.26). В этом случае частоты удовлетворяют соотношению

$$f_r + f_r = f_s + \Delta f, \tag{III.27}$$

где $f_r = 5$, $f_s/f_r = \sqrt{5}$, т. е. $\Delta f \approx 1{,}18$.

На вейвлетном биспектре (рис. III.7 *а*) максимумы имеют высоту того же порядка, что и в случае одночастотного сигнала, и соответствуют тому условию, что хотя бы две из трех частот $f_1 + f_2$, f_1 или f_2 совпадают по абсолютной величине с частотами f_r и f_s в исходном сигнале

Рис. III.7. Вейвлетный автобиспектр (*а*) и автобикогерентность (*б*) двухчастотного сигнала с отношением частот, определяемым соотношением (III.27)

(следовательно, их число удваивается по сравнению с предыдущим случаем (см. рис. III.7 *а*)). Вейвлетная бикогерентность (рис. III.7 *б*) на плоскости (f_1, f_2) показывает отсутствие в сигнале связанных составляющих. Напомним, что сложное распределение бикогерентности в области вблизи окрестности нуля $(f_{1,2} \sim 0)$ связано с численными эффектами.

Об отсутствии связи между частотами f_s и f_r, которые находятся друг с другом в несоизмеримом соотношении, свидетельствует и суммированная бикогерентность, представленная на рис. III.8. На нем изображены зависимости бикогерентности $b_\Sigma(f)$ для случая двухчастотного сигнала с частотами, кратными друг другу, и для случая с несоизмеримыми частотами. В случае кратных частот (рис. III.8 *а*) суммированная бикогерентность в частотной области $f \sim f_r$, f_s существенно превышает уровень статистической ошибки (отмечен на рисунке штриховой линией). Наоборот, в случае частот, находящихся в иррациональном соотношении между собой, суммированная бикогерентность (рис. III.8 *б*)

Рис. III.8. Вейвлетная суммированная бикогерентность для двухчастотного сигнала, частоты которого удовлетворяют соотношению (III.26) (*а*) и соотношению (III.27) (*б*)

превышает уровень статистической ошибки только в области $f \sim f_r = 5{,}0$. В диапазоне частот $f > 7{,}0$ бикогерентность не превышает уровня статистической ошибки, что свидетельствует об отсутствии фазовой связи (бикогерентности) между гармониками, присутствующими в спектре анализируемого сигнала.

Рассмотрим теперь сигнал, на примере которого хорошо видны свойства бикогерентного вейвлетного преобразования — трехчастотный сигнал, заданный формулой (III.25) с амплитудами $a_r = a_s = a_t = 1$ и частотами, определяемыми «резонансным» соотношением

$$f_r + f_s = f_t, \quad f_r = 0{,}02, \quad f_s = 0{,}04, \quad f_s = 0{,}06. \tag{III.28}$$

На вейвлетном автобиспектре (рис. III.9 *а*) хорошо видны три максимума в точках поверхности $B(f_1, f_2)$, соответствующих гармоникам сигнала, находящихся в резонансе между собой: (f_s, f_r), $(f_t, -f_r)$ и $(f_t, -f_s)$. Максимум также появляется в точках (f_r, f_r) и $(-f_r, -f_r)$. Это связано с тем, что частота f_r является наименьшей частотой в спектре сигнала и подынтегральное выражение в определении вейвлетного биспектра (III.5), как несложно непосредственно убедиться, принимает максимальное значение именно в этих точках [1]. На тех же частотах появляются максимумы и на поверхности, представляющей вейвлет-

Рис. III.9. Вейвлетный биспектр (*а*) и автобикогерентность (*б*) трехчастотного сигнала с отношением частот, определяемым соотношением (III.28) (случай резонанса)

ную бикогерентность (рис. III.9 *б*). Это говорит о наличии в сигнале квадратично связанных спектральных составляющих, частоты которых можно определить по расположению максимумов на плоскости (f_1, f_2).

Аналогичную картину демонстрирует и расчет суммированного биспектра B_Σ (рис. III.10 *а*) и суммированной бикогерентности b_Σ

Рис. III.10. Суммированный вейвлетный биспектр (*а*) и суммированная бикогерентность (*б*) сигнала, определяемого соотношением (III.28) (случай резонанса)

[1]) Здесь необходимо учесть, что амплитуда коэффициентов вейвлетного преобразования зависит от частоты сигнала (см. формулы (10) и (II.7)). Ср. также с рис. III.10, на котором приведена суммированная бикогерентность для сигнала (III.28).

(рис. III.10 *б*). На зависимости $B_\Sigma(f)$ четко видны три максимума, соответствующие частотам, находящимся в резонансе. Суммированная бикогерентность $b_\Sigma(f)$ заметно превышает уровень статистической ошибки (штриховая линия) и также демонстрирует три максимума на частотах f_r, f_s и f_t, что показывает наличие фазовой связи между соответствующими гармониками исследуемого сигнала.

Заметим также, что в резонансном случае максимумы на зависимости суммированного вейвлетного биспектра «ложатся» на гиперболу $[B_\Sigma(f)]_{\max} \sim 1/f$ (отмечена на рисунке), а максимумы на вейвлетной бикогерентности — на прямую линию $[b_\Sigma(f)]_{\max} = a - bf$ (также отмечена на рисунке), где a и b — константы.

Выше, при обсуждении свойств вейвлетного преобразования, было показано, что вейвлетный анализ обладает меньшими, чем фурье-анализ, возможностями по разрешению отдельных частот в анализируемом сигнале. Разрешающая способность вейвлетного преобразования определяется свойствами базисной вейвлетной функции, а именно шириной ее фурье-образа. Поэтому бикогерентное вейвлетное преобразование имеет «сглаживающий» характер, который «унаследован» им от вейвлетного преобразования.

Рассмотрим эту важную особенность бикогерентного вейвлетного преобразования, взяв в качестве модельного сигнал, рассмотренный в предыдущем примере, но со следующим отличием: частота третьей составляющей f_t немного отличается от суммы двух других частот так, что

$$f_t = f_s + f_r + \Delta f. \tag{III.29}$$

Рассмотрим два случая: случай слабой расстройки, когда $\Delta f \ll f_t$, и случай сильной расстройки, когда $\Delta f \sim f_t$. Значения частот f_s и f_r выберем такими же, как и в предыдущем случае (см. соотношение (III.28)).

В случае слабой расстройки величина Δf была выбрана равной 0,003. Фурье-бикогерентность показывает для такого сигнала отсутствие связанных составляющих. На вейвлетном автобиспектре (рис. III.11 *а*) при введении расстройки максимумы немного искажаются, но остаются на тех же частотах, что и без нее. Вейвлетная автобикогерентность также показывает наличие связанных компонент. При этом области высокой бикогерентности понижаются и «вытягиваются» вдоль прямых $f_1 = \pm f_r$, $f_2 = \pm f_r$ и $f_2 = f_1 + (f_r \pm f_s)$ (рис. III.11 *б*).

Суммированный автобиспектр и суммированная бикогерентность (рис. III.12) также показывают наличие фазовой связи между компонентами, однако уровень бикогерентности понижается примерно в 1,5 раза (ср. рис. III.10 *б* и рис. III.12 *б*). Высота пиков в суммированном вейвлетном биспектре также понижается. Заметим, что снижение уровня бикогерентности и амплитуды максимумов в биспектре тем больше, чем сильнее расстройка по частоте Δf.

Одновременно в случае «приблизительного» резонанса высота максимумов на кривых $B_\Sigma(f)$ и $b_\Sigma(f)$ уже не подчиняется простым зако-

Рис. III.11. Вейвлетный биспектр (a) и автобикогерентность ($б$) трехчастотного сигнала со слабой расстройкой частот относительно условия резонанса ($\Delta f = 0{,}03$)

номерностям, сформулированным выше и наследуемым от вейвлетного преобразования. Это связано с тем, что в отсутствие точного равенства частот, как это было в предыдущем случае (сигнал (III.28)), при расчете вейвлетного биспектра в соответствии с формулой (III.5) появляется ряд особенностей. Так, когда рассматривается точка поверхности с ко-

Рис. III.12. Суммированный вейвлетный биспектр (a) и суммированная бикогерентность ($б$) сигнала, определяемого соотношением (III.29) с малой расстройкой по частоте $\Delta f = 0{,}003$

ординатами (f_r, f_s), это соответствует условию максимума амплитуды вейвлетного спектра W_x на частотах f_r и f_s. Однако на частоте $(f_r + f_s)$ условие резонанса не выполняется, поэтому третий сомножитель $W(f_r + f_s)$ подынтегрального выражения своего максимума не достигает. В случае точного резонанса частота $(f_r + f_s)$ точно равна частоте f_t третьей гармонической составляющей сигнала, а следовательно, на частоте $(f_r + f_s)$ будет иметь место максимум на вейвлетной поверхности. То есть наличие максимума на кривой суммированного биспектра и бикогерентности есть либо следствие суммирования локальных максимумов биспектра, соответствующих максимумам на соответствующей вейвлетной поверхности [1]) (случай резонанса), либо суммирование при расчете B_Σ будет происходить по точкам биспектра, не соответствующим максимумам вейвлетного спектра мощности (случай отсутствия точного резонанса), и тогда закономерности вейвлетного преобразования относительно распределения энергии сигнала по временны́м масштабам не будут транслироваться на случай расчета вейвлетных биспектров и далее на вейвлетную бикогерентность.

Рассмотрим теперь случай сильной расстройки по частоте $\Delta f = 0{,}01$. Соответствующие характеристики бикогерентного вейвлетного анализа приведены на рис. III.13 и рис. III.14.

Рис. III.13. Вейвлетный биспектр (*а*) и автобикогерентность (*б*) трехчастотного сигнала с сильной расстройкой частот относительно условия резонанса ($\Delta f = 0{,}01$)

Рис. III.14. Суммированный вейвлетный биспектр (*а*) и суммированная бикогерентность (*б*) сигнала, определяемого соотношением (III.29) с большой расстройкой по частоте $\Delta f = 0{,}01$

[1]) И тогда для амплитуд пиков на суммированном биспектре выполняются соотношения, полученные нами для амплитуд пиков на мгновенных распределениях энергии по масштабам вейвлетного преобразования (10).

Вейвлетный биспектр и вейвлетная бикогерентность имеют вид, характерный для двухчастотного сигнала с кратным отношением частот (ср. с рис. III.6). Кривые суммированного биспектра и суммированной бикогерентности также качественно подобны случаю двухчастотного сигнала (см. рис. III.7) и характеризуются наличием только двух максимумов, соответствующих частотам f_r и f_s. Это свидетельствует о том, что в случае сильной расстройки говорить о фазовой синхронизации всех трех сигналов уже не приходится.

Бикогерентность, связанная с третьей гармонической составляющей сигнала с частотой f_t, равна нулю. Одновременно бикогерентный вейвлетный анализ выделяет высокую бикогерентность гармоник с частотами f_s и f_r.

Вышесказанное позволяет сделать вывод, что бикогерентный вейвлетный анализ является эффективным средством анализа фазовой связи между спектральными составляющими сложных нестационарных сигналов, порождаемых нелинейными динамическими системами.

Кроме вышеописанных нами возможностей по выделению резонансных ситуаций, вейвлетная бикогерентность позволяет анализировать наличие корреляций, которые являются существенными свойствами самого сигнала и не являются следствием резонансного взаимодействия между частотами, как это было в предыдущих модельных примерах. Исследуем в качестве примера сигнал, представляющий собой последовательность прямоугольных импульсов с частотой $f_r = 5$. Спектр Фурье такого сигнала содержит много кратных частот. Результаты вейвлетного преобразования такого сигнала представлены в § II.2. Вейвлетный биспектр (рис. III.15), как и следует ожидать, показывает

Рис. III.15. Вейвлетный биспектр (*а*) и автобикогерентность (*б*) сигнала, представляющего собой последовательность прямоугольных импульсов

наличие многих связанных составляющих на частотах, кратных 5. По всей видимости, из-за того что энергия одного сигнала распределена по многим составляющим, бикогерентность, хотя и демонстрирует наличие в сигнале связанных составляющих, но тем не менее не достигает 1, и ее максимальное значение составляет величину порядка 0,3. Суммированная бикогерентность, как видно из рис. III.16, не превышает при

Рис. III.16. Суммированная бикогерентность сигнала, представляющего собой последовательность прямоугольных импульсов

этом уровня статистического шума. Последний результат понятен, так как между гармониками, составляющими фурье-спектр последовательности прямоугольных импульсов, нет неизменной фазовой связи (III.1), поэтому бикогерентность близка к нулю.

И, наконец, рассмотрим результаты вейвлетного бикогерентного анализа шумового сигнала, представляющего случайную величину с гауссовым распределением, для имитации которого был использован стандартный конгруэнтный мультипликативный генератор псевдослучайных чисел [122, Chapter 7; P. 266]. На рис. III.17 приведены вейвлетный биспектр и вейвлетная бикогерентность, построенные с базовым морлет-вейвлетом ($\omega_0 = 6$).

Рис. III.17. Вейвлетный биспектр (*а*) и автобикогерентность (*б*) шумового сигнала

Вид вейвлетного биспектра (рис. III.17 *а*) и бикогерентности (рис. III.17 *б*) свидетельствует об отсутствии в сигнале корреляций. Сложная структура поверхности вблизи начала координат $f_{1,2} \sim 0$, как уже обсуждалось выше, порождается численными эффектами (которые определяются ошибками в вычислении коэффициентов вейвлетного преобразования), связанными с расчетом вейвлетного преобразования с использованием фурье-преобразования. Вид кривой суммированной бикогерентности совпадает с приведенной на рис. III.3.

В гл. V (§ V.2) будет приведен пример применения бикогерентного вейвлетного преобразования к анализу процессов структурообразования в активной среде — электронном пучке со сверхкритическим током в диодном промежутке в присутствии неоднородного ионного фона.

Глава IV
УРОВНИ ЗНАЧИМОСТИ В ВЕЙВЛЕТНОМ СПЕКТРЕ И ВЕЙВЛЕТНЫЙ АНАЛИЗ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Одной из важных проблем практического применения как спектральных методов анализа, так и вейвлетного преобразования временны́х сигналов является оценка влияния шумов, что, в свою очередь, требует определения вида соответствующего «фонового» спектра и так называемого уровня значимости спектра. Дело в том, что реальные физические процессы, анализируемые различными разновидностями спектральных методов и с помощью вейвлетного преобразования, обычно характеризуются присутствием шумов. Анализируемые в этом случае временны́е ряды (получаемые в результате экспериментального исследования, регистрации природных процессов или, например, определения тех или иных экономических показателей), содержат наряду с полезным сигналом шумовую компоненту, которая проявляется как случайное «дрожание» регистрируемой переменной около некоторого «основного» значения (полезного сигнала), причем последний также динамически меняется во времени. Поэтому фактический спектр (как фурье, так и вейвлетный) процесса предполагает наличие некоторого фона, обусловленного этим шумом. Очень важно правильно определить величину и форму распределения по временны́м масштабам мощности этого шумового фона (фонового спектра), для того чтобы иметь возможность оценить минимальные амплитуды коэффициентов вейвлетного преобразования, которые характеризуют исследуемый динамический процесс, а не связаны с сопутствующими ему шумами (уровень значимости спектра). Для такой оценки необходимо определить процедуру сравнения регистрируемого вейвлетного спектра со спектрами сигналов, порождаемыми случайными процессами.

Для многих природных процессов характерны фоновые спектры, соответствующие либо белому шуму (с равномерным фурье-спектром), либо цветному («красному») шуму (для которого характерно падение мощности спектральных компонент с ростом частоты).

Исследование характеристик вейвлетных спектров случайных процессов было впервые проведено в работах [123, 3]. В этой главе рассматриваются теоретические вейвлетные спектры и распределения по энергиям вейвлетного преобразования белого и цветного (красного) шума, которые затем сравниваются с результатами соответствующего численного расчета. Полученные результаты далее используются для задания уровня значимости вейвлетного спектра.

IV.1. Вейвлетный спектр красного шума

Простейшей моделью красного шума является одномерный с единичным запаздыванием авторегресионный (Марков) процесс

$$x_{n+1} = \alpha x_n + \xi_n, \tag{IV.1}$$

где α — задаваемый коэффициент автокорреляции процесса, построенный с единичным запаздыванием, $x_0 = 0$ и ξ — случайная величина, моделирующая гауссов белый шум. Дискретный нормализованный фурье-спектр мощности случайного процесса (IV.1) определяется выражением [124]

$$P_k = \frac{1-\alpha^2}{1+\alpha^2 - 2\alpha\cos(2\pi k/N)}, \tag{IV.2}$$

где $k = 0, 1, \ldots, N/2$ — номер фурье-гармоники с круговой частотой $\omega_k = 2\pi k/N$.

Таким образом, выбирая соответствующий коэффициент автокорреляции с единичным запаздыванием, фурье-спектр мощности (IV.2) можно использовать как модельный для случайного процесса, являющегося красным шумом. На рис. IV.1 представлены соответствующие спектры мощности для различных параметров α. Заметим, что значе-

Рис. IV.1. Фурье-спектр мощности красного шума при различных коэффициентах корреляции α

ние $\alpha = 0$ соответствует белому шуму и отмечено на рис. IV.1 горизонтальной сплошной линией $P = 1{,}0$.

Будем проводить дальнейший анализ, опираясь на результаты вейвлетного и фурье-анализа явления Эль-Ниньо (обсуждавшегося в § II.3), следуя работе Кристофера Торенса и Гильберта Компо [3]. На рис. IV.2 представлен фурье-спектр мощности Niño SST. Спектр нормирован на величину $N/2\sigma^2$, где N — число отсчетов во временно́м ряду, σ^2 — среднеквадратичное отклонение значений переменной временно́го ряда Niño SST. Использование такой нормировки означает, что белый шум в ней будет иметь постоянную спектральную мощность, равную 1 на всех частотах.

Фоновый спектр красного шума (IV.2) для $\alpha = 0{,}72$ показан на рис. IV.2 нижней штриховой линией *1*. Оценка коэффициента α для явления Эль-Ниньо — $(\alpha_1 + \sqrt{\alpha_2}\,)/2$ [3], где α_1 и α_2 — коэффициенты автокорреляции временно́го ряда Niño SST с запаздыванием, равным 1 и 2 соответственно. Из рис. IV.2 видно, что фурье-спектр мощности колебаний характеристик Южного Колебания Niño SST в области $2 \div 8$ лет значительно превышает фоновый спектр красного шума.

Вейвлетное преобразование в соответствии с соотношением (I.27) представляет собой «набор» полосовых фильтров, последовательно действующих на сигнал. Если исследуемый сигнал может рассматриваться как марковский процесс (IV.1), то можно предположить, что мгновенное распределение энергии $E(s)$ по масштабам вейвлетного преобразования (мгновенный вейвлетный спектр; см. формулу (12)), определяемое как вертикальное сечение вейвлетной поверхности W в некоторый момент времени $t_0 = \mathrm{const}$, выражается формулой (IV.2). Для проверки этой гипотезы в работе [3] были проанализированы методом Монте-Карло [122] вейвлетные спектры 100 000 временны́х реализаций, порождаемых гауссовым случайным процессом, и 100 000 реализаций красного шума (IV.1). Примеры вейвлетных спектров мощности $|W(n,s)|^2$ двух из 200 000 сигналов, представляющих собой соответственно белый и красный шум, показаны на рис. IV.3.

Рис. IV.2. Нормированный фурье-спектр мощности временно́го ряда Niño SST (сплошная линия). Нижняя штриховая линия *1* соответствует спектру мощности красного шума (IV.2) при $\alpha = 0{,}72$. Верхняя штриховая линия *2* — 95 % доверительной границе спектра мощности (из работы [3])

Под методом Монте-Карло понимается следующая численная процедура. Создается $I = 100\,000$ случайных временны́х рядов, содержащих 512 отсчетов (шумы порождались в одном случае белым шумом, в другом — красным шумом (IV.2)). Для каждого из них рассчитывается вейвлетный спектр с базовым морлет-вейвлетом ($\omega_0 = 6{,}0$). Затем рассматриваются мгновенные распределения энергии $E_i(s)$ ($i = 1, \ldots, I$) каждого из вейвлетных спектров в момент времени $n = 256$. Для каждого из временны́х масштабов s все 100 000 величин

Рис. IV.3. (*а*) Вейвлетные спектры мощности $|W|^2$ для гауссова белого шума. Для построения спектра использовался ряд с 512 временны́ми отсчетами. Спектр нормализован на величину $1/\sigma^2$, контуры соответствуют уровням мощности 1,0, 2,0 и 3,0. Контуры, отмеченные жирной линией, соответствуют 95 % доверительной границе вейвлетного спектра случайного процесса. (*б*) Аналогичный рисунок для красного шума с $\alpha = 0{,}70$. Контуры соответствуют уровням 1,0, 5,0 и 10,0. Контуры, отмеченные жирной линией, определяют 95 % доверительную границу мощности вейвлетного спектра (из работы [3])

$E_i(s)$ сортировались по индексу i в порядке их увеличения (роста мощности). После этого появлялась возможность построить мощность E_i в зависимости от порядкового номера i. Типичные результаты представлены на рис. IV.4, на котором показана зависимость энергии вейвлетного спектра от индекса i в момент времени $n = 256$ и на некотором масштабе s.

Рис. IV.4. К иллюстрации расчета методом Монте-Карло распределения коэффициентов вейвлетного спектра шумового сигнала, а также определения 95 % уровня достоверности распределения энергии вейвлетного преобразования

Если теперь рассматривается некоторая максимальная энергия, которую не превышают энергии P из I коэффициентов вейвлетных преобразований на исследуемом временно́м масштабе s, то $(P/I) \times 100\,\%$ вейвлетных спектров лежат ниже этой максимальной энергии, и только $(1 - P/I) \times 100\,\%$ — выше. На рис. IV.5 приведена иллюстрация этой процедуры для случая $P = 95\,000$. Тогда 95 % уровень будет соответствовать 95 % уровню достоверности распределения энергии вейвлетного спектра (или 5 % уровню значимости). В следующем параграфе мы более подробно остановимся на этой важной характеристике вейвлетного преобразования.

Рис. IV.5. Мгновенное распределение E энергии по масштабам наблюдения вейвлетного преобразования и 95 % уровень достоверности белого (*а*) и красного с коэффициентом корреляции $\alpha = 0{,}70$ (*б*) шумов. Сплошные линии — теоретическая зависимость (IV.2), точки — усредненное по 100 000 вейвлетных спектров значение на каждом из временны́х масштабов s (из работы [3])

Теоретические распределения энергии $E(s)$ вейвлетного спектра, построенные в соответствии с формулой (IV.2), показаны сплошными линиями на рис. IV.5 *а* для белого шума и на рис. IV.5 *б* для красного; точки соответствуют результатам моделирования методом Монте-Карло. Из рисунка следует, что в среднем мгновенное распределение энергии по масштабам вейвлетного преобразования цветного шума описывается фурье-спектром мощности (IV.2).

Из вышесказанного следует, что нижняя штриховая линия *1* на рис. IV.2 также соответствует распределению $E(s)$ энергии по масштабам s вейвлетного спектра красного шума. Таким образом, если выбрать случайное сечение $t_0 = \text{const}$ вейвлетного спектра Niño SST (см. рис. II.37 *б*), то фоновое распределение энергии $E(s)$ в этот момент времени в предположении, что случайная составляющая процесса является красным шумом, будет в среднем определяться формулой (IV.2).

IV.2. Уровень значимости и достоверности вейвлетного спектра

Для вейвлетного спектра некоторого сложного процесса, содержащего шумовую компоненту, можно предложить следующую нулевую гипотезу. Пусть исследуемый сигнал $\{x_n\}$ имеет интегральное распределение по энергиям $\langle E(s)\rangle$ вейвлетного преобразования, определяемое формулой (IV.2), тогда если максимальное значение мгновенных распределений энергии $E(s)$ по масштабам значительно превышает фоновый спектр, то можно предполагать, что это достоверно только с некоторой вероятностью. Будем рассматривать уровень значимости вейвлетного спектра, равный 5 % (что соответствует уровню достоверности 95 %). Уровень значимости 5 % определяет такой интервал амплитуд коэффициентов вейвлетного преобразования, в котором достоверность их определения не меньше величины $(100\,\% - 5\,\%) = 95\,\%$ (см. рис. IV.4).

Нормализованный фурье-спектр мощности временно́го ряда Niño SST на рис. IV.2 определяется как $N|\widehat{x}_k|^2/2\sigma^2$, где N — число точек временно́го ряда Niño SST, $\widehat{x}_k$ определяется разложением (I.24), σ^2 — среднеквадратичное отклонение значений переменной ряда от среднего значения.

Если x_n — нормально распределенная случайная величина, то ее действительная и мнимая части также нормально распределены. Так как квадрат нормально распределенной величины подчиняется χ^2-распределению с одной степенью свободы, то величина $|\widehat{x}_k|^2$ есть распределение χ^2 с двумя степенями свободы [125] (см. рис. IV.4), которое будем здесь обозначать как χ_2^2. Для определения 95 % уровня достоверности вейвлетного спектра $|W|^2$ необходимо умножить фоновый спектр мощности (IV.2) на величину $0{,}95\chi_2^2$ [124]. Уровень 95 % достоверного фурье-спектра мощности Niño SST в приведенной выше нормировке показан на рис. IV.2 штриховой линией *2*. Заметим, что только несколько спектральных компонент имеют мощность, превышающую 95 % достоверный интервал.

В предыдущем параграфе было показано, что мгновенное распределение энергии по масштабам вейвлетного преобразования случайного процесса повторяет его средний фурье-спектр мощности. Если компоненты фурье-спектра распределены нормально, то коэффициенты вейвлетного спектра (являющиеся результатом прохождения обратных фурье-гармоник через систему полосовых фильтров (I.27)) также являются нормально распределенными, поэтому коэффициенты вейвлетного спектра $|W(n,s)|^2$ должны быть распределены как χ_2^2. Верхние кривые на рис. IV.5 показывают 95 % достоверный уровень вейвлетного спектра, полученного в предыдущем параграфе методом Монте-Карло. Так как мы предполагаем, что в каждой точке вейвлетного спектра (n,s) на рис. II.37 *б*, построенной с базовым комплексным морлет-вейвлетом, имеет место случайный процесс, аналогичный красному шуму, то каждый из коэффициентов $|W(n,s)|^2$, как уже обсуждалось выше, распределен по закону χ_2^2. Заметим, что если вейвлетное преобразование осуществляется с использованием действительного материнского вейвлета (например, MHAT-вейвлета, который был базовым при построении вейвлетного спектра Niño SST на рис. II.37 *в*), то коэффициенты $|W|^2$ вейвлетного спектра в каждой точке (n,s) подчиняются χ^2-распределению с одной степенью свободы, обозначаемому как χ_1^2.

Таким образом, в предположении, что средний фоновый спектр мощности порожаемым красным шумом, т. е. определяемым формулой (IV.2), распределения коэффициентов фурье-спектра мощности задаются для всех частот k соотношением

$$\frac{N|x_k|^2}{2\sigma^2} \Longrightarrow \frac{1}{2} P_k \chi_2^2, \tag{IV.3}$$

где знак «$\Longrightarrow$» заменяет фразу «распределено как».

Соответствующее распределение для коэффициентов вейвлетного спектра мощности для каждого времени n и масштаба s запишется как

$$\frac{|W(n,s)|^2}{\sigma^2} \Longrightarrow \frac{1}{2} P_k \chi_2^2. \tag{IV.4}$$

Коэффициент $1/2$ учитывает и устраняет влияние двух степеней свободы соответствующего распределения. Для действительного материнского вейвлета в уравнении (IV.4) необходимо было бы записать $P_k\chi_1^2$. Величина P_k в формуле (IV.4) есть усредненный фурье-спектр коэффициента с номером k, который соответствует временно́му масштабу s вейвлетного преобразования. Соотношение между частотами k и масштабами s обсуждалось нами ранее в п. I.2.5. Для используемого морлет-вейвлета с $\omega_0 = 6{,}0$ шкала временны́х масштабов $s \approx 1/f$, что облегчает интерпретацию результатов вейвлетного преобразования.

После нахождения соответствующего фонового спектра мощности и выбора некоторого значения уровня достоверности для χ^2 (в нашем случае рассматривается уровень, равный 95 %) можно рассчитать соотношение (IV.4) для каждого масштаба и найти границу области, характеризующейся 95 % уровнем достоверности.

Как и в фурье-анализе, сглаживание распределения энергии по масштабам вейвлетного преобразования может быть использовано для увеличения степеней свободы и повышения уровня достоверности спектра в областях с большой амплитудой коэффициентов вейвлетного спектра. При рассмотрении вейвлетного спектра сглаживание может выполняться как во временно́й (t_0), так и масштабной (s) области. Далее (см. § IV.4) более подробно обсудим динамику уровня достоверности и числа степеней свободы в распределении при различных способах сглаживания вейвлетного спектра.

В области влияния краевых условий вейвлетного спектра вид распределения тот же, т. е. χ^2. Однако если временна́я реализация дополнена нулями (см. п. I.2.3), то усредненный спектр должен быть уменьшен в $\left(1 - \frac{1}{2}\exp\left[-\frac{2t}{\tau_s}\right]\right)$, где t — расстояние (во времени) от начала мгновенного распределения энергии по масштабам вейвлетного преобразования, τ_s — константа, зависящая от вида материнского вейвлета. Этот пример обсуждался в п. I.2.3 (см. также табл. I.1).

В связи с тем что в этом параграфе мы определили некоторые важные понятия, кратко вернемся снова к обсуждению явления Эль-Ниньо с позиций вейвлетного анализа. На рис. II.37 95 % уровень достоверности для ряда Niño SST показан на вейвлетных спектрах $|W|^2$ в виде контурных линий. В течение 1875–1910 и 1960–1990 гг. колебания на временны́х масштабах в диапазоне 2–8 лет превышали 95 % уровень, рассчитанный для красного шума с коэффициентом корреляции $\alpha = 0{,}72$. В течение 1920–1960 гг. существует несколько изолированных областей вейвлетного спектра, в которых имеет место превышение вейвлетной мощностью 95 % уровня. Эти области располагаются преимущественно вблизи временно́го масштаба процесса $s \sim 2$ года.

Проведем некоторые оценки. Уровень достоверности, равный 95 %, означает, что 5 % мощности процесса, определяемого по вейвлетному спектру, должно быть выше этого уровня. На рис. IV.3 *б*, построенном для красного шума, примерно 5 % точек находится внутри области, ограниченной 95 % уровнем достоверности. Для вейвлетного спектра временно́го ряда Niño SST примерно 4,9 % точек вейвлетного спектра обладает мощностью, превышающей 95 % уровень достоверности. Последнее означает, что проводя подобные оценки для вейвлетного спектра Niño SST нельзя оценить соотношение между сигналом и шумом. Однако распределения мощности различных масштабов во времени в вейвлетном спектре могут использоваться для анализа элемента случайности во временно́м ряде. На рис. IV.3 *б* и рис. IV.5 *б* вейвлетный спектр демонстрирует постепенное увеличение суммарной площади и спектральной энергии 95 % области значимости вейвлетного спектра с ростом временно́го масштаба s. Одновременно мгновенные распределения энергии $E(n,s)$, конечно, могут демонстрировать случайные отклонения в ту или другую сторону от интегрального распределения энергии по масштабам $\langle E(s)\rangle$. В отличие от этого на рис. II.37, построенном для явления Эль-Ниньо, области значимости вейвлетного спектра кластеризуются как во времени, так и по шкале масштабов, что свидетельствует о меньшей степени случайности процесса Niño SST по сравнению с красным шумом, вейвлетный спектр которого представлен на рис. IV.3 *б*.

IV.3. Доверительный интервал вейвлетного спектра

Под доверительным интервалом понимается вероятность того, что *истинная* амплитуда некоторого коэффициента вейвлетного спектра в момент времени n на временно́м масштабе s находится в некотором заранее заданном интервале относительно тем или иным образом найденной амплитуды вейвлетного коэффициента при тех же n и s. Переписывая соотношение (IV.4) в виде

$$\frac{|W(n,s)|^2}{P_k\sigma^2} \Longrightarrow \frac{1}{2}\,\chi_2^2, \qquad \text{(IV.5)}$$

можно заменить величину теоретической мощности коэффициента вейвлетного спектра $P_k\sigma^2$ величиной искомой *истинной* мощности соответствующего коэффициента вейвлетного спектра, обозначив ее через

$\mathcal{W}^2(n, s)$. Доверительный интервал для величины $\mathcal{W}^2(n, s)$ тогда будет определяться следующим неравенством:

$$\frac{2}{\chi_2^2(p/2)}\,|W(n, s)|^2 \leqslant \mathcal{W}^2(n, s) \leqslant \frac{2}{\chi_2^2(1-p/2)}\,|W(n, s)|^2, \qquad \text{(IV.6)}$$

где p есть требуемый уровень значимости (в нашем случае он равен 0,05 при уровне достоверности 95 %), а $\chi_2^2(p/2)$ обозначает амплитуду распределения χ^2 при значении $p/2$. Для действительной базисной вейвлетной функции (например, MHAT-вейвлета) соотношение (IV.6) перепишется в виде

$$\frac{1}{\chi_1^2(p/2)}\,|W(n, s)|^2 \leqslant \mathcal{W}^2(n, s) \leqslant \frac{1}{\chi_1^2(1-p/2)}\,|W(n, s)|^2. \qquad \text{(IV.7)}$$

Используя формулы (IV.6) или (IV.7), можно найти доверительные интервалы для максимумов в вейвлетном спектре и далее сравнить их либо с амплитудой среднего фонового спектра на данном масштабе, либо с другими максимумами. Такие оценки позволяют определить, например, наличие сингулярностей во временнóм ряду и эффективно выделить их из сигнала.

IV.4. Сглаживание вейвлетного спектра по времени и по масштабам

В гл. I были введены понятия интегрального (I.21) и мгновенного (12) распределений энергии по масштабам вейвлетного преобразования. Для дискретно заданного сигнала, который анализируется с помощью вейвлетного преобразования, удобно ввести следующие дополнительные виды распределения энергий по масштабам вейвлетного преобразования.

Усредненное по временнóму интервалу распределение энергии по масштабам определяется формулой

$$\overline{E}_n(s) = \frac{1}{M}\sum_{n=n_1}^{n_2} |W(n, s)|^2, \qquad \text{(IV.8)}$$

где нижний индекс n в левой части равенства может произвольно выбираться из интервала $n \in [n_1, n_2]$, $M = n_2 - n_1 + 1$ — число точек, по которому производится суммирование. Рассчитывая величину $\overline{E}_n^2(s)$ на каждом временнóм шаге, можно построить вейвлетный спектр, усредненный по некоторому временнóму интервалу M.

Как о предельном случае распределения (IV.8), когда $n_1 = 0$, $n_2 = N - 1$, $M = N$ — полное число отсчетов исследуемой временнóй реализации, говорят об *интегральном распределении* (I.21) *энергии по масштабам*, которое в дискретной форме имеет вид

$$\langle E(s)\rangle = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} |W(n, s)|^2. \qquad \text{(IV.9)}$$

На рис. IV.6 (жирная сплошная линия) показано нормированное интегральное распределение энергии $\langle E(s)\rangle/\sigma^2$ по временны́м масштабам вейвлетного преобразования для ряда Niño SST. Сплошной тонкой линией показан такой же, как и на рис. IV.2, фурье-спектр мощности, но усредненный по пяти соседним точкам. Заметим, что чем сильнее мы «сглаживаем» (увеличиваем интервал усреднения) фурье-спектр мощности, тем ближе в соответствии с соотношением (I.22) он приближается к соответствующему распределению $\langle E(s)\rangle$, причем с увеличением величины масштаба s необходимый интервал усреднения уменьшается. Впервые сопоставление усредненного фурье-спектра мощности и интегрального распределения энергии вейвлетного спектра было проведено в работе [89]. В работе [126] было показано, что интегральное распределение энергии $\langle E\rangle$ дает объективную оценку спектральной мощности временно́го ряда. В более поздней [127] работе также предполагалось, что распределение $\langle E(s)\rangle$ дает правильную оценку фонового спектра, в то время как экстремумы (максимумы) в мгновенных распределениях энергии $E(s)$ по масштабам вейвлетного преобразования должны обязательно тестироваться на достоверность.

Рис. IV.6. Нормированный фурье-спектр мощности временно́го ряда Niño SST (сплошная тонкая линия), сглаженный по пяти соседним точкам. Сплошная жирная линия — нормированное интегральное распределение $E(s)/\sigma^2$ по масштабам вейвлетного преобразования ряда Niño SST. Нижняя штриховая линия *1* соответствует спектру мощности красного шума (IV.2) при $\alpha = 0{,}72$. Верхняя штриховая линия *2* — 95 % доверительной границе спектра мощности (из работы [3])

При усреднении вейвлетного спектра в соответствии с формулой (IV.8) можно увеличить число степеней свободы распределения в каждой точке вейвлетной поверхности и соответственно увеличить достоверность наблюдающихся максимумов в вейвлетном спектре. Для определения числа степеней свободы нам требуется знать число независимых точек. При рассмотрении спектра случайного процесса мощность каждой из спектральных компонент не зависит от мощности других компонент, поэтому средняя мощность M спектральных компонент, каждая из которых обладает двумя степенями свободы, имеет χ^2-распределение с $2M$ степенями свободы [128].

В случае усредненного по временно́му интервалу распределения энергии $\overline{E}$ вейвлетного спектра, как и в случае фурье-спектра, производим усреднение по M соседним точкам, однако теперь эти точки не являются независимыми, поскольку коррелируют как во времени t_0, так и на различных масштабах (см., например, рис. IV.3). Более того, корреляция во времени возрастает с ростом масштаба s, т. е. с «растяжением» вейвлетной функции. Введем величину ν, которая будет определять число степеней свободы, тогда для вейвлетного спектра $\nu \propto M$ и $\nu \propto 1/s$. Простейшая формула, определяющая функциональную зависимость между числом степеней свободы и параметрами усредненного распределения энергии, следующая: $\nu = 2M\Delta t/\varkappa$ [3], где $\varkappa = \gamma s$ — длина декорреляции на масштабе s. Результаты моделирования показывают, что функция $\varkappa(s, M)$ дает очень грубую оценку при малых M или больши́х масштабах s, однако при усреднении по нескольким соседним точкам, которые сильно связаны, функция $\varkappa$ тем не менее дает разумную оценку числа степеней свободы ν [3].

На рис. IV.7 показаны результаты расчета усредненного распределения энергии вейвлетного спектра $\overline{E}(s)$ (IV.8) и 95 % доверительной

Рис. IV.7. Результаты численного расчета усредненного распределения энергии вейвлетного спектра и 95 % доверительной границы распределения энергии для белого шума. В качестве базовой вейвлетной функции использовался морлет-вейвлет с $\omega_0 = 6{,}0$. Число около каждой из кривых сответствует числу точек M, по которым производилось усреднение (см. формулу (IV.8)). Сплошные линии соответствуют теоретически рассчитанной 95 % доверительной границе по формуле (IV.10) с учетом выражения (IV.11), точки — результаты моделирования методом Монте-Карло. Усредненное распределение энергии по масштабам вейвлетного преобразования $\langle E\rangle$ представлено линией *1* (теоретическая зависимость) и точками (результаты моделирования) внизу рисунка (кривые совпадают для всех M) (из работы [3])

границы распределения энергии для белого шума, полученные с базовым морлет-вейвлетом ($\omega_0 = 6{,}0$), для различных значений точек усреднения M. Эти распределения могут быть феноменологически апроксимированы распределением

$$\frac{\overline{E}(s)}{\sigma^2} \Longrightarrow P_k \frac{\chi^2_\nu}{\nu}, \qquad \text{(IV.10)}$$

где P_k — предполагаемый фоновый спектр мощности, χ^2_ν есть χ^2-распределение с ν степенями свободы, где число степеней свободы определяется выражением

$$\nu = 2\sqrt{1 + \left(\frac{M\Delta t}{\varkappa}\right)^2}. \qquad \text{(IV.11)}$$

Для действительного материнского вейвлета (например, МНАТ-вейвлета) распределение в каждой точке вейвлетной поверхности характеризуется только одной степенью свободы и коэффициент «2» в соотношении (IV.11) должен быть опущен.

Параметр $\gamma = \varkappa/s$ в формуле (IV.11) определяется эмпирически путем подгонки величины абсолютной ошибки к 95 % уровню доверительной ошибки расчета вейвлетного спектра путем численного моделирования методом Монте-Карло. Экспериментально найденные величины γ приведены в табл. IV.1 для четырех наиболее часто используемых базисных вейвлетных функций. Относительная ошибка между распределением, полученным численно методом Монте-Карло, и теоретическим χ^2_ν/ν-распределением (IV.10) менее 7 % для всех масштабов и любых значений M. Из рис. IV.7 следует, что белый шум имеет более высокий 95 % уровень достоверности вейвлетного спектра на бо́льших масштабах s, чем на меньших.

Таблица IV.1. Характеристики некоторых базисных вейвлетных функций, необходимые для оценки спектра случайного процесса

Вейвлет	γ	Δs_0
Морлет ($\omega_0 = 6$)	2,32	0,60
Паул ($m = 4$)	1,17	1,50
DOG ($m = 2$)	1,43	1,40
DOG ($m = 6$)	1,37	0,97

Заметим также, что если некоторое число точек, используемых для усреднения, находится в области влияния краевых условий, то число M должно быть уменьшено примерно на половину числа таких точек для учета уменьшения амплитуды вейвлетных коэффициентов (уменьшения количества информации за счет усекания границей временно́го ряда конуса влияния (см. рис. I.2)) в этой области.

Линия 95 % уровня достоверности для интегрального распределения энергии вейвлетного спектра Эль-Ниньо приведена на рис. IV.6 (штриховая линия *2*). Только широкий максимум в области масштабов $s \sim 4$ года превышает доверительный уровень. Заметим, что хотя интегральная мощность $\langle E(s)\rangle$ на других временны́х масштабах и не превышает 95 % доверительной границы, максимумы на мгновенных распределениях энергии $E(s)$ могут быть выше нее.

Для рассмотрения флуктуаций мощности в некотором диапазоне (полосе) масштабов рассматривают *усредненную по масштабам мощность вейвлетного спектра* как сумму мощности вейвлетных коэффициентов с некоторыми весами в полосе масштабов $s \in [s_{j_1}, s_{j_2}]$:

$$\left\langle W^2(n) \right\rangle = \frac{\Delta s \Delta t}{K_\delta} \sum_{j=j_1}^{j_2} \frac{|W(n, s_j)|^2}{s_j}, \qquad \text{(IV.12)}$$

где все обозначения совпадают с введенными в § I.2.

Сравнивая формулы (IV.12) и (I.39) находим, что введенная величина $\left\langle W^2(n) \right\rangle$ представляет собой временну́ю зависимость усредненной по некоторому диапазону масштабов дисперсии σ^2. Отсюда следует, что усредненная по диапазону масштабов мощность вейвлетного спектра позволяет проанализировать либо воздействие одного временно́го сигнала на другой, либо воздействие одной гармоники на другую в одном сигнале.

Для иллюстрации усреднения мощности вейвлетного спектра по масштабам на рис. IV.8 показано усреднение вейвлетного спектра на рис. II.37 *б* по всем временны́м масштабам в диапазоне $s \in [2, 8]$ лет,

Рис. IV.8. Усредненная по временны́м масштабам в диапазоне $s \in [2, 8]$ лет мощность вейвлетных спектров, построенных по рядам Niño SST (сплошная линия *1*) и SOI (штриховая линия *2*). Горизонтальные линии соответствуют 95 % уровню достоверности для Niño SST (сплошная линия; фоновый шум предполагается красным с $\alpha = 0,72$) и SOI (штриховая линия; фоновый шум — красный с $\alpha = 0,61$) (из работы [3])

которое фактически является мерой изменения энергии колебаний, характеризующих процесс Эль-Ниньо, с течением времени. Зависимость $\left\langle W^2(n) \right\rangle$ показывает ярко выраженный период динамики Эль-Ниньо с 1920 по 1960 г., когда энергия колебаний (а следовательно, и их амплитуда) существенно уменьшилась. На рис. IV.8 также показаны колебания индекса Южного Колебания (SOI, см. § II.3), которые хорошо коррелируют с временно́й динамикой Niño SST (коэффициент корреляции составляет величину, равную 0,72). Оба временны́х ряда показывают согласованные внутривековые изменения, включая характерный пятнадцатигодичный период временно́й динамики Южного Колебания. Для более подробного анализа относительной динамики Niño SST и SOI можно использовать такие характеристики, обсуждавшиеся нами в гл. III, как взаимный вейвлетный спектр (III.2), взаимный вейвлетный биспектр (III.5) и вейвлетную бикогерентность (III.12).

Представленные результаты расчета по вейвлетным спектрам временны́х рядов Niño SST и SOI их усредненных энергетических характеристик $\langle W^2 \rangle$ убедительно подтверждают изложенные в § II.3 предположения о связи явлений Эль-Ниньо и Южного Колебания.

Как и в случае усредненного по временны́м интервалам распределения энергии $\overline{E}(s)$ вейвлетного спектра (IV.8), число степеней свободы увеличивается при усреднении по временны́м масштабам s, поэтому важно найти аналитическое выражение для оценки доверительного интервала усредненной по временны́м масштабам мощности вейвлетного спектра (IV.12). В рассматриваемом случае наиболее удобно для нормализации мощности вейвлетного спектра использовать величину g, равную мощности вейвлетного спектра сигнала, представляющего собой белый шум. Из определения (IV.12), с учетом результатов п. I.2.6, следует, что искомый нормировочный коэффициент g будет определяться выражением $g = \Delta s \Delta t \sigma^2 / (K_\delta \overline{S})$, где величина $\overline{S}$ представляет собой сумму вида

$$\overline{S} = \left(\sum_{j=j_1}^{j_2} \frac{1}{s_j} \right)^{-1}. \qquad \text{(IV.13)}$$

На рис. IV.9 показаны результаты расчета основных статистических характеристик для усредненного по временны́м масштабам s распределения энергии вейвлетного спектра $\langle W^2(n) \rangle$ в зависимости от числа масштабов $M_s = j_2 - j_1 + 1$, по которым производится усреднение. Используя для нормализации спектра коэффициент g, полученный для белого шума, получаем, что распределение усредненного вейвлетного спектра мощности может быть представлено как

$$\frac{\langle W^2(n) \rangle}{g} \Longrightarrow \overline{P} \frac{\chi^2_\nu}{\nu}, \qquad \text{(IV.14)}$$

где усредненный по масштабам теоретический спектр мощности $\overline{P}$ определяется соотношением

$$\overline{P} = \overline{S} \sum_{j=j_1}^{j_2} \frac{P_j}{s_j}. \qquad \text{(IV.15)}$$

Для белого шума спектр мощности будет равномерным на всех масштабах на уровне единицы благодаря процедуре нормализации.

Число степеней свободы ν в распределении (IV.14) может быть оценено в соответствии с формулой [3]:

$$\nu = 2M_s \frac{\overline{S}}{S_m} \sqrt{1 + \frac{M_s \Delta s}{\Delta s_0}}\,, \qquad \text{(IV.16)}$$

где $S_m = s_0 2^{(j_1+j_2)\Delta s/2}$, Δs_0 — коэффициент декорреляции, аналогичный параметру $\varkappa$ в формуле (IV.11). Коэффициент $\overline{S}/S_m$ учитывает уменьшение числа степеней свободы распределения, наблюдаемое

Рис. IV.9. Результаты численного расчета усредненного по M_s масштабам вейвлетного спектра и 95 % доверительной границы распределения энергии для белого шума. Представленные на рисунке результаты получены при усреднении, которое проводилось по интервалу масштабов вокруг масштаба $\overline{s} = 16\Delta t$, однако результаты не зависят от центрального масштаба $\overline{s}$. Сплошные линии соответствуют теоретически рассчитанной по формуле (IV.14) с учетом выражения (IV.16) 95 % доверительной границе, точки — результаты моделирования методом Монте-Карло с различными типами материнских вейвлетов. Усредненное распределение энергии по масштабам вейвлетного преобразования $\langle E \rangle$ представлено линией E (теоретическая зависимость) и точками (результаты моделирования) внизу рисунка. Видно, что зависимости $\langle E \rangle$ совпадают для всех используемых типов базисных функций, в то время как 95 % доверительная граница зависит от вида базисной вейвлетной функции и минимальна для вейвлета Морлета (кривая *1*) (из работы [3])

в численном моделировании, благодаря коэффициенту $1/s_j$ в выражении (IV.12). Заметим, что при использовании в качестве базисной вейвлетной функции действительного вейвлета коэффициент 2 в формуле (IV.16) должен быть опущен.

Длина декорреляции Δs_0 определяется эмпирически, как и величина $\gamma = \varkappa/s$ при усреднении во времени, подгонкой величины абсолютной ошибки к 95 % уровню доверительной ошибки расчета вейвлетного спектра путем численного моделирования методом Монте-Карло. Результаты численного определения величины Δs_0 для некоторых материнских вейвлетов представлены в табл. IV.1. Сплошные линии на рис. IV.9 соответствуют теоретическим распределениям (IV.14) с учетом (IV.16) для вейвлета Морлета с $\omega_0 = 6{,}0$ (кривая *1*), вейвлета Паула с параметром $m = 4$ (кривая *2*) и DOG-вейвлетов с $m = 2$ и $m = 6$ (соответственно кривые *3* и *4*). Для всех этих базисных вейвлетов относительная ошибка между χ^2_ν-распределением с учетом (IV.16) и результатами расчета распределения методом Монте-Карло составляет величину меньшую, чем 1,5 %. Заметим, что оценка (IV.16) для числа степеней свободы χ^2-распределения справедлива только для уровня достоверности, равного или меньшего 95 % [3].

На рис. IV.8 тонкими сплошной и штриховой линией показаны теоретические 95 % уровни достоверности для усредненных по масштабам вейвлетных спектров временны́х рядов Niño SST и SOI соответственно. При расчетах использовались следующие параметры: $\Delta s = 0{,}125$, суммирование производилось в диапазоне временны́х масштабов (с учетом того, что в качестве базового вейвлета использовался вейвлет Морлета с параметром $\omega_0 = 6{,}0$ можно говорить о соответствующем таком же диапазоне фурье-периодов Λ) между 2 и 8 годами (точнее 2,1 ÷ 7,6 года), $M_s = 16$; $\overline{S} = 0{,}221$; $S_m = 3{,}83$; $\Delta s_0 = 0{,}60$ и $\nu = 6{,}44$. Так как временны́е ряды Niño SST и SOI имеют хотя и близкие, но различные фоновые спектры, определяемые спектром красного шума (коэффициент корреляции для Niño SST равен $\alpha = 0{,}72$, для SOI — $\alpha = 0{,}61$), то уровни достоверности для них несколько различаются.

В заключение этой главы отметим, что интересным применением вейвлетного преобразования может стать вейвлетная фильтрация временны́х рядов. Как обсуждалось выше в гл. I, вейвлетное преобразование сигнала $\{x_n\}$ можно рассматривать как некоторую систему полосовых фильтров с одинаковой формой, но изменяющимся положением и шириной. Производя восстановление сигнала $\{x_n\}$ в соответствии с формулой (I.36) только по некоторому диапазону масштабов $s \in [s_1, s_2]$, можно реконструировать вейвлетно-фильтрованный сигнал $\{x_n^w\}$:

$$x_n^w = \frac{\Delta s \sqrt{\Delta t}}{K_\delta \psi_0(0)} \sum_{l=l_1}^{l_2} \frac{\mathrm{Re}\,\{W(n, s_l)\}}{\sqrt{s_l}}. \qquad \text{(IV.17)}$$

Такой фильтр имеет передаточную характеристику, определяемую суммой всех вейвлетных функций между масштабами с номерами l_1 и l_2.

Фильтрация, аналогичная (IV.17), может проводиться также одновременно по масштабам s и во времени n путем задания некоторой пороговой мощности вейвлетных коэффициентов $|W(n, s)|^2$, ниже которой коэффициенты не используются для восстановления исходного (фильтрованного) сигнала. Такая процедура может рассматриваться как эффективная адаптивная процедура удаления шумовой компоненты из сигнала (см., например, [129]), так как не учитываются области с малой амплитудой коэффициентов вейвлетного преобразования. Последние, как можно предполагать, обусловливаются наличием шумов.

Подобная техника фильтрации с использованием вейвлетного преобразования превосходит традиционную методику выделения шумов с помощью классических фильтров (см., например, [50]), действие которых заключается в простом удалении части спектральных компонент из фильтруемого сигнала.

Фильтрация вида (IV.17) позволяет эффективно выделить и подавить влияние точечных особенностей во временны́х рядах, обсуждаемых нами в п. II.1.6. Спектральная мощность подобных сингулярностей в вейвлетном спектре распределена по значительному диапазону временны́х масштабов, причем основная ее часть находится вне диапазона масштабов Δs_b, значимых для «гладкой части» анализируемого сигнала. Поэтому восстановление ряда $\{x_n^w\}$ по диапазону вейвлетного спектра $s \in \Delta s_b$ позволяет автоматически исключить из рассмотрения подобные особенности в том случае, когда они являются результатом тех или иных ошибок. Традиционная фильтрация не позволяет в данном случае эффективно решить проблему подавления такого рода шумов в сигнале.

Другим применением техники вейвлетной фильтрации может стать анализ пространственных структур с применением двумерного вейвлетного преобразования к пространственно-временны́м данным. Такой подход был использован в работе [54], где двумерное турбулентное течение было «сжато» с использованием ортогонального вейвлетного базиса. Такое сжатие позволило удалить несущественные, с малой амплитудой («пассивные») паттерны турбулентного движения, сведя описание сложного динамического процесса к анализу нескольких «активных» структур со значительной амплитудой.

Глава V
О НЕКОТОРЫХ ПРИМЕНЕНИЯХ ВЕЙВЛЕТНОГО АНАЛИЗА

В настоящей главе будут даны некоторые иллюстрации применения вейвлетного преобразования к анализу сложных нелинейных систем. Представленные в этой главе примеры касаются колебаний в такой активной среде, как электронный пучок со сверхкритическим током. В первом параграфе рассматривается сложная пространственно-временна́я динамика электронного потока с виртуальным катодом в виркаторе и ее анализ с помощью вейвлетного преобразования. Второй параграф посвящен рассмотрению задачи выделения характерных структур, формирующихся в электронном пучке с виртуальным катодом в диодном промежутке с неоднородным плазменным заполнением, с помощью вейвлетной бикогерентности. Рассмотрение именно таких примеров обусловлено, в первую очередь, научными интересами авторов книги и базируется на наших работах.

В конце главы мы сделаем краткий обзор некоторых других приложений вейвлетного анализа к исследованию сложных нелинейных явлений в системах различной природы.

V.1. Анализ динамики разномасштабных временны́х возмущений в виркаторе с помощью вейвлетного анализа

Генераторы сверхмощного высокочастотного излучения, использующие в качестве активной среды электронный пучок со сверхкритическим током, являются одними из наиболее перспективных устройств современной релятивистской электроники [130].

Принцип их действия основан на эффекте электростатической неизлучательной неустойчивости в потоке при инжекции в пространство взаимодействия электронного пучка с током I, превышающего некоторое предельное для данной геометрии рабочей камеры значение. В этом случае в вакуумной дрейфовой камере пространственный заряд электронного потока создает потенциальный барьер, препятствующий пролету электронов. При этом существует некоторое максимальное значение тока пучка I_0, выше которого стационарная транспортировка пучка в данной геометрии становится невозможной. Величина тока I_0 носит название «предельный вакуумный ток». При превышении этого значения высота потенциального барьера будет столь велика (порядка величины ускоряющего напряжения), что электроны будут останавливаться и отражаться от него к области инжекции (аноду). Этот формирующийся в пространстве взаимодействия барьер традиционно называется виртуальным катодом.

В случае аксиальной симметрии дрейфовой камеры и трубчатого, моноскоростного на входе, полностью замагниченного [1)] потока значение предельного тока определяется выражением [131]

$$I_0 = \frac{mc^3}{e} \frac{(\gamma_0^{2/3} - 1)^{3/2}}{2\ln(R/r_b) + \Delta/r_b}, \tag{V.1}$$

где величина mc^3/e носит название «альфенов ток» и численно равна 17,03 кА; $\gamma_0 = 1/\sqrt{(1 - v_0^2/c^2)}$ — релятивистский фактор потока на входе в систему; R и r_b — радиус дрейфовой камеры и потока соответственно; Δ — толщина пучка. При токе пучка I, превышающем критический ток I_0, задача инжекции потока в пространство дрейфа не имеет устойчивых стационарных решений [130, 131].

Виртуальный катод в пространстве взаимодействия ведет себя существенно нестационарным образом, колеблясь как во времени, так и в пространстве. Приборы, использующие для генерации сверхмощного СВЧ-излучения колебания виртуального катода, называются генераторами на виртуальном катоде или виркаторами (от англ. vircator — *virtual cathode oscillator*).

Экспериментальные данные, полученные с помощью как натурных, так и вычислительных экспериментов, свидетельствуют о том, что электронный поток с виртуальным катодом обладает сложной нерегулярной динамикой. Виркаторы характеризуются сплошным широкополосным спектром излучения с типичной шириной полосы $\Delta f/f \sim \sim 50\,\%$. Еще в 1985 г. Брандт [132], исследуя так называемый турбутрон, высказал идею о нелинейности динамики прибора с виртуальным катодом. В работах многих групп исследователей обнаружены различные проявления нелинейной динамики электронного потока с виртуальным катодом, в частности синхронизация колебаний виртуального катода внешними сигналами [133–136], хаотическое поведение потока с виртуальным катодом [137–141], возникновение и взаимодействие когерентных пространственно-временны́х структур [142, 143].

В наших работах [143, 144] с помощью численного моделирования исследовалась нестационарная нелинейная динамика электронного потока в виркаторе с позиций формирования и взаимодействия в электронном пучке когерентных пространственных структур. В статье [145] сложные колебания в такой системе анализировались с помощью вейвлетного преобразования. Рассмотрим результаты такого анализа подробнее.

Исследуемая система (рис. V.1) представляет собой замкнутый отрезок цилиндрического волновода длиной L и радиусом R, помещенный в сильное продольное магнитное поле. Через сечение $z = 0$ (плоскость инжекции) внутрь системы поступает моноскоростной элек-

---

[1)] То есть имеющего только одну продольную составляющую скорости, направленную вдоль оси системы.

тронный поток с релятивистским фактором $\gamma_0 = 2{,}3$. В предположении фокусировки пучка сильным продольным магнитным полем рассматривается одномерное движение потока в направлении оси z. При фик-

Рис. V.1. Исследуемая модель генератора на виртуальном катоде (виркатора)

сированной геометрии пространства взаимодействия основным управляющим параметром, от которого зависит поведение системы, является отношение тока пучка I к предельному вакуумному току I_0, обозначаемое здесь через α.

Для описания эволюции электромагнитного поля рассматривалась полная нестационарная система уравнений Максвелла, которая с учетом аксиальной симметрии прибора вырождается в систему для ТМ-волн. В цилиндрической системе координат она имеет вид

$$\begin{gathered}\frac{\partial H_\vartheta}{\partial t} = -c\left(\frac{\partial E_r}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial r}\right), \qquad \frac{\partial E_r}{\partial t} = -c\,\frac{\partial H_\vartheta}{\partial z}, \\ \frac{\partial E_z}{\partial t} = -\frac{c}{r}\,\frac{\partial r H_\vartheta}{\partial r} - 4\pi j_z,\end{gathered} \tag{V.2}$$

где плотность тока, благодаря замагниченности электронного пучка, будет иметь одну продольную компоненту $\jmath = (0, 0, j_z)$.

Динамика заряженных частиц описывается бесстолкновительным кинетическим уравнением Власова

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v_z\frac{\partial f}{\partial z} + eE_z\frac{\partial f}{\partial p_z} = 0, \tag{V.3}$$

где $f(t, z, p_z)$ — функция распределения электронов пучка, p_z — релятивистский импульс и $v_z = p_z/m\sqrt{1 + p_z^2/m^2c^2}$.

Решение уравнения Власова базируется на методе макрочастиц, который сводит (V.3) к системе из P (P — число макрочастиц) обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dv_{zk}}{dt} = (1 - v_{zk}^2)^{3/2}E_{zk}, \tag{V.4}$$

$$E_{zk} = \int\!\!\int E_z(r, z)h(|r - r_k|, |z - z_k|)r\,dr\,dz, \quad k = 1, \ldots, P. \tag{V.5}$$

Здесь h — нормированная функция «вклада».

Консервативная разностная схема для численного решения задачи (V.2)–(V.4) строилась в соответствии с работами [146–148].

Численное моделирование показало, что с увеличением тока пучка α наблюдается последовательное усложнение колебаний в электронном потоке. На рис. V.2 приведены временны́е реализации, фурье-спектры мощности и фазовые портреты (восстановленные по методу Такенса

Рис. V.2. Спектры мощности, фазовые портреты и временны́е реализации колебаний тока пучка из области виртуального катода для различных последовательно усложняющихся динамических режимов: (*а*) $\alpha = 1{,}4$; (*б*) $\alpha = 2{,}0$; (*в*) $\alpha = 4{,}0$. Графики построены в безразмерных единицах времени

[75]; см. также сноску на стр. 63) колебаний тока пучка в области виртуального катода для различных режимов генерации, возникающих по мере увеличения надкритичности α (увеличения тока пучка I, инжектируемого в рабочую камеру виркатора).

При малых токах пучка ($\alpha < 1{,}7$) имеют место регулярные колебания релаксационного типа (рис. V.2 *а*). Спектр мощности содержит узкие пики, являющиеся кратными гармониками основной частоты $f_b \approx 1{,}3\omega_p/\pi$, где ω_p — плазменная частота электронного потока, $f_b = 2{,}95$ ГГц. Проекция аттрактора соответствует однотактному предельному циклу.

Вейвлетный анализ с базовым морлет-вейвлетом, результаты которого представлены на рис. V.3, выделяет во временно́й динамике системы наличие основного масштаба колебаний, который соответствует основной гармонике в спектре Фурье $f_b = 2{,}95$ ГГц ($s_b = 0{,}34$ нс).

Его хорошо видно как на вейвлетной поверхности $|W(t, f)|$, так и на распределении энергий $\langle E \rangle$ по масштабам (наибольший локальный максимум на распределении). Второй по величине локальный макси-

Рис. V.3. Распределение амплитуд коэффициентов вейвлетного спектра и интегральное распределение энергии по масштабам колебаний тока пучка из области виртуального катода для режима регулярной динамики ($\alpha = 1{,}4$)

мум на зависимости $\langle E(s) \rangle$ в области меньших временны́х масштабов приходится на время $s = s_b/2$, т. е. соответствует второй гармонике основной частоты f_b в фурье-спектре мощности анализируемого сигнала (ср. с рис. II.11, полученным для сигнала, представляющего собой последовательность прямоугольных импульсов). Следовательно, основные особенности результатов вейвлетного преобразования определяются сложным спектральным составом исследуемого периодического сигнала. Заметим, что в области масштабов $s \approx 0{,}1$ нс наблюдается еще один максимум (отмечен стрелкой на рисунке), природу которого обсудим ниже.

С увеличением α происходит разрушение периодических колебаний, и последовательно с ростом надкритичности появляются два типа хаотического поведения. В первом случае ($1{,}7 < \alpha < 3{,}0$), как видно из рис. V.2 *б*, хаотический аттрактор появляется на базе одного неустойчивого предельного цикла, соответствующего притягивающему множеству периодических движений при $\alpha < 1{,}7$. Во втором случае (рис. V.2 *в*; $\alpha > 3{,}0$) фазовый портрет более однороден; структура аттрактора сложна и состоит из множества неустойчивых периодических орбит; спектр мощности сильно зашумлен, в нем нет четко выраженных пиков.

На рис. V.4 и V.5 представлены результаты вейвлетного преобразования для обоих типов хаотического поведения соответственно. Рассмотрим их в контексте физических процессов, протекающих в электронном пучке.

Возникновение слабохаотической колебательной динамики в электронном потоке с виртуальным катодом (см. рис. V.4; $\alpha = 2{,}0$) сопровождается возрастанием относительной высоты максимума на распределении $\langle E(s)\rangle$, соответствующего масштабу $s_b/2$, по сравнению с высотой максимума на основном масштабе колебаний s_b в пучке. Это характеризует увеличение нелинейности колебаний в системе. Одновременно возрастает энергия, соответствующая второму базовому масштабу колебаний в системе, отмеченному стрелкой на распределении $\langle E(s)\rangle$. Анализ распределения амплитуд коэффициентов вейвлетного преобразования показывает, что в любой момент времени динамику системы определяют все вышеназванные временны́е масштабы. Вид распределения энергии по масштабам не зависит от времени и повторяет вид интегрального распределения $\langle E(s)\rangle$.

При переходе к режиму развитого хаоса вейвлетный анализ (см. рис. V.5) демонстрирует на распределении $|W(t, f)|$ сильно нерегулярно зависящую от времени структуру локальных максимумов. Такой вид поверхности свидетельствует о сложной нестационарной динамике большого числа временны́х масштабов, возбуждаемых в электронном пучке со сверхкритическим током в виркаторе.

Одновременно из интегрального распределения энергии по масштабам видно, что основная энергия возмущения теперь приходится на малые временны́е масштабы $s \sim 1{,}2$ нс. Это определяет рост основной частоты выходного излучения виркатора, которая на основании теоретических оценок зависит от тока пучка как $f \sim \sqrt{I}$ [149, 150].

Сложная динамика обнаруженных с помощью вейвлетного анализа разномасштабных возмущений определяется формированием в пространстве дрейфа нескольких областей отражения заряженных частиц (нескольких «виртуальных катодов»), которые связаны между собой через отраженные от них электроны.

Это иллюстрирует функция распределения $\Phi(\tau)$ электронов по временам жизни τ в пространстве взаимодействия (рис. V.6). В регуляр-

Рис. V.4. Распределение амплитуд коэффициентов вейвлетного спектра и интегральное распределение энергии по масштабам колебаний тока пучка из области виртуального катода для режима слабохаотической динамики ($\alpha = 2{,}0$)

ном режиме (рис. V.6 *а*, сплошная линия) $\Phi(\tau)$ имеет двугорбый вид. Площадь под кривой пропорциональна числу существующих в потоке пролетных и отраженных к плоскости инжекции частиц. Характерные траектории заряженных частиц в координатах (z, t) и (v, z) с временами жизни, соответствующими максимумам $\Phi(\tau)$, приведены на рис. V.7 *а*. Видно, что в потоке существует единственная структура — виртуальный катод.

С увеличением α отраженные частицы начинают доминировать в общем числе инжектируемых частиц (см. рис. V.6 *а*, пунктирная линия); область возможных времен жизни отраженных частиц увеличивается. За счет появления долгоживущих частиц в потоке возникает

Рис. V.5. Распределение амплитуд коэффициентов вейвлетного спектра и интегральное распределение энергии по масштабам колебаний тока пучка из области виртуального катода для режима развитого хаоса ($\alpha = 4{,}0$)

внутренняя распределенная обратная связь, обеспечивающая взаимосвязь между основной структурой (виртуальным катодом) и возникающей вторичной структурой, которой соответствует третий максимум на кривой $\Phi(\tau)$ (отмечен стрелкой на рис. V.6 *а*). Однако при небольшой надкритичности эффективность этой связи мала (общая масса частиц, отраженных от вторичного виртуального катода, невелика) и движение слабонерегулярно (в фазовом пространстве наблюдается размытый предельный цикл).

Для развитого хаоса (рис. V.6 *б*) характерна сильно изрезанная форма $\Phi(\tau)$, которая позволяет выделить несколько примерно равных по массе групп заряженных частиц с различными временами жизни. В этом случае процессы в потоке могут быть интерпретированы

Рис. V.6. Распределение заряженных частиц по временам жизни в пространстве взаимодействия для следующих параметров: (a) сплошная линия — $\alpha = 1{,}4$, пунктирная линия — $\alpha = 2{,}0$; ($б$) — $\alpha = 4{,}0$

Рис. V.7. Характерные траектории заряженных частиц, время жизни которых в пространстве взаимодействия соответствует максимумам функции распределения по временам жизни $\Psi(\tau)$, для режима регулярных (a) и развитых хаотических ($б$) колебаний

как формирование нескольких виртуальных катодов (нескольких пространственно-временны́х структур) на различном расстоянии от плоскости инжекции (см. рис. V.7 *б*, на котором изображены траектории заряженных частиц, времена жизни которых соответствуют максимумам распределения $\Phi(\tau)$ (отмечены цифрами на рис. V.6 *б* и V.7 *б*)). Это также подтверждается приведенными на рис. V.8 распределениями плоскостей, в которых наблюдается отражение заряженных частиц, по

Рис. V.8. Распределение плоскостей отражения электронов в пространстве взаимодействия при различных значениях параметра надкритичности: кривая *1* — $\alpha = 1{,}4$, *2* — $\alpha = 2{,}0$, *3* — $\alpha = 4{,}0$

продольной координате. Видно, что в случае регулярных движений (кривая *1* на рис. V.8) функция распределения имеет ярко выраженный максимум, соответствующий тому, что в потоке существует единственная отражающая плоскость (виртуальный катод), которая четко локализована в пространстве. Рост тока приводит к уширению функции распределения, причем в режиме слабого хаоса на кривой *2* выделяются два глобальных максимума, соответствующих двум структурам в потоке, а в режиме развитого хаоса (кривая *3*) форма распределения сильно изрезана, при этом каждый максимум соответствует своей структуре (виртуальному катоду). Отметим, что максимумы на кривых покоятся на высоком основании, связанном с тем, что каждый из формирующихся виртуальных катодов колеблется как во времени, так и в пространстве, однако наиболее вероятные места локализации отражающих плоскостей соответствуют именно максимумам распределения.

Динамика каждой из таких пространственно-временны́х структур приводит при вейвлетном анализе соответствующих временны́х реализаций к появлению на распределениях амплитуд коэффициентов вейвлетного преобразования $|W(t, f)|$ большого числа локальных максимумов на различных временны́х масштабах в интервале $s \in \in (0{,}1,\ 0{,}4)$ нс. Именно в этом диапазоне лежат характерные временны́е масштабы динамики формирующихся в системе структур (виртуальных катодов).

При этом смещение максимума в распределении энергии $\langle E(s) \rangle$ в сторону малых временны́х масштабов с увеличением α определяется тем, что область отражения заряженных частиц с ростом тока пучка, инжектируемого в дрейфовую камеру, «прижимается» к плоскости инжекции. Соответственно уменьшается время пролета в пространстве взаимодействия электронов, отражаемых от виртуального катода. Следовательно, временны́е масштабы колебаний виртуальных катодов уменьшаются, одновременно с этим растет основная частота f_b, а также поднимается и становится более сплошным и однородным шумовой пьедестал в спектре излучения виркатора. Вместе с тем развитые длинноволновые возмущения (см. рис. V.5; область $s \sim 0{,}3 \div 0{,}4$ на зависимости $\langle E(s) \rangle$) определяют наличие запаздывающей обратной связи, длительность которой примерно в три раза превышает характерное время колебаний основных электронных структур в системе. Такая ситуация, как хорошо известно для систем с запаздыванием (см., например, работы, посвященные анализу электронных систем с запаздывающей обратной связью [151–153]), приводит к усложнению (хаотизации) автоколебаний.

Отражение части потока от каждого виртуального катода оказывает влияние на условия формирования других структур в потоке, что обеспечивает несколько петель внутренней обратной связи с различными временами запаздывания. Такая распределенная связь между всеми структурами в потоке приводит к сильно нерегулярной динамике системы при большой надкритичности α.

Заметим, что аналогичные результаты демонстрирует и анализ внутренней структуры электронного потока с помощью декомпозиции пространственно-временны́х данных по алгоритму Карунена–Лоэва (КЛ) [154, 155]. Задача выделения мод КЛ сводится к решению интегрального уравнения вида

$$\int K(z, z')\Psi(z')\, dz' = \Lambda\Psi(z), \tag{V.6}$$

где ядро уравнения имеет вид

$$K(z, z') = \langle \xi(z, t)\xi(z', t) \rangle_t\,; \tag{V.7}$$

здесь $\langle \ldots \rangle_t$ обозначает усреднение во времени. В качестве функций $\xi(z, t)$ может быть выбран набор пространственно-временны́х распределений любой физической величины, приведенный к нулевому среднему. В работе [143] в качестве функций $\xi(z, t)$ были выбраны величины плотности тока пучка $j_z(z, t)$. Собственное значение Λ_n, соответствующее n-й моде КЛ Ψ_n, пропорционально энергии, заключенной в этой моде. Мерой этой энергии может служить величина

$$W_n = \frac{\Lambda_n}{\sum\limits_i \Lambda_i} \times 100\,\%. \tag{V.8}$$

Отметим, что разложение КЛ является оптимальным в том смысле [143], что собственные функции задачи (V.6)–(V.7) составляют хорошо приспособленный базис, так что среднеквадратичная ошибка ε минимизируется: $\varepsilon = \min \left\langle ||\xi - \xi^N|| \right\rangle$, где ξ — точное решение, ξ^N — приближенное решение, а N — размерность базиса.

На рис. V.9 приведены зависимости энергии первых десяти мод КЛ W_n (в %) для различных значений надкритичности. В регулярном режиме ($\alpha = 1{,}4$) порядка 90 % энергии потока заключено в первых

Рис. V.9. Распределение энергии по модам Карунена–Лоэва для следующих параметров: $\triangle$ — $\alpha = 1{,}4$, $\square$ — $\alpha = 2{,}0$, $\circ$ — $\alpha = 4{,}0$

двух модах ($W_1 + W_2 \sim 90\,\%$). С ростом α спектр энергий мод уширяется, энергия из первой моды постепенно перекачивается в высшие моды, и при $\alpha \sim 4$ основная энергия заключена уже в первых четырех модах ($\sum\limits_{n=1}^{4} W_n \sim 90\,\%$), причем энергии второй, третьей и четвертой мод примерно одинаковы. Вместе с тем во всех режимах, как периодических, так и со сложной динамикой, число мод с энергией, большей, чем 1 % от общей энергии потока, невелико.

Пространственные распределения мод характеризуются сложной многогорбой формой, причем с ростом номера моды n они усложняются, теряя симметричность, свойственную высшей моде. Временна́я динамика основных мод с номерами $n = 1, 2$ при малой надкритичности достаточно регулярна. Можно выделить интервалы времени, когда на временно́й реализации наблюдается всплеск амплитуды, связанный с формированием в потоке виртуального катода и его распадом, и когда амплитуды мод примерно равны нулю (в потоке отсутствуют пространственные структуры; виртуальный катод «открыт», и в системе имеются электроны, проходящие к коллектору, расположенному в плоскости $x = L$). Колебания первой и второй моды во всех режимах происходят с постоянным сдвигом фаз, поэтому, следуя работе [156], можно предположить, что они описывают динамику одной пространственно-временно́й структуры.

Одновременно поведение мод с номерами $n \geqslant 3$ демонстрирует сильно нерегулярную динамику их амплитуд во времени, причем основная частота колебаний этих мод существенно превышает частоту колебаний высших мод и примерно равна 8,3 ГГц. Последняя соответствует временно́му масштабу, отмеченному на рис. V.3 и рис. V.4 стрелкой. То есть выявленный вейвлетным преобразованием второй характерный временно́й масштаб колебаний связывается с динамикой когерентных структур, которым соответствуют высшие моды КЛ.

Таким образом, нестационарное перераспределение колебательной энергии в распределенной нелинейной системе между различными пространственно-временны́ми структурами (виртуальными катодами), формирующимися в электронном пучке, а также наличие запаздывающей обратной связи между ними, приводит к тому, что вейвлетное преобразование демонстрирует наличие сложной динамики разномасштабных временны́х возмущений в системе. Анализ распределения вейвлетных коэффициентов позволяет выделить характерные особенности временно́й динамики системы и связать их с особенностями физических процессов в том или ином режиме колебаний исследуемой распределенной системы. Результаты вейвлетного анализа хорошо согласуются с результатами, полученными выделением когерентных структур с помощью декомпозиции пространственно-временны́х данных по алгоритму КЛ.

V.2. Исследование процессов структурообразования в электронном пучке со сверхкритическим током с помощью вейвлетной бикогерентности

Рассмотрим некоторые результаты применения вейвлетной бикогерентности к анализу процессов структурообразования в системе плазменной природы — диодном промежутке, заполненном неоднородным ионным фоном и пронизываемым электронным пучком со сверхкритическим током. Модель диодного промежутка позволяет исследовать коллективные процессы в плазме и влияние граничных условий, приводящее к различным типам неустойчивостей в пучке [157]. Интерес к подобной системе со стороны нелинейной теории колебаний и волн определяется возможностью использования ее как модели распределенной активной среды с глобальными связями.

Рассматриваемая нами диодная модель является классической при анализе неизлучательных пучковых неустойчивостей в электронно-плазменных системах. Так, еще в 1944 г. Дж. Пирс [158] исследовал электростатическую неустойчивость, обусловленную конечным продольным размером системы, полностью скомпенсированного ионным фоном пучка с большим током. Данная неизлучательная неустойчивость приводит к возбуждению волн пространственного заряда с нарастающей во времени амплитудой. Нарастание волн пространственного заряда завершается образованием виртуального катода, который формирует встречную электронную волну. Условия возникновения неустойчивости определяются модовым составом плазменных колебаний в пучке. Спектр одномерных волн в пространстве с пучком определяется из дисперсионного уравнения [131] (в потенциальном приближении)

$$k_{||}^2 - \frac{\omega_p^2 k_{||}^2}{\left(\omega - k_{||} v_0\right)^2} = 0, \tag{V.9}$$

где $k_{||}$ — волновое число пучковой волны, ω_p и v_0 — соответственно плазменная частота и невозмущенная скорость пучка. В системе с увеличением тока пучка появляется область частот, в которой существует встречная пучку волна. Условие возникновения встречной волны определяет условие развития электростатической неустойчивости. Поток с виртуальным катодом можно интерпретировать как активную резонансную систему [159], в которой начальное возмущение плотности пространственного заряда усиливается на частоте $\sim 2\omega_p$.

Несмотря на свою простоту, система демонстрирует богатый набор динамических режимов на нелинейной стадии развития электростатической неустойчивости, включая детерминированный хаос [139, 142, 164].

В работах [160–162] рассматривается диодная система, образованная двумя плоскими, параллельными друг другу электродами с одинаковыми потенциалами, находящимися на расстоянии L друг от друга. Область длины Δx_i, начинающаяся с точки с координатой x_i, заполнена неподвижным ионным фоном с концентрацией n_i. Электронный поток с плотностью пространственного заряда $\rho_0 = n_0 \cdot e$ инжектируется в диодный промежуток с постоянной скоростью v_0. Управляющими параметрами системы являются параметр Пирса

$$\alpha = \frac{\omega_p L}{v_0}, \tag{V.10}$$

который представляет собой невозмущенный угол пролета по плазменной частоте, параметр неоднородности

$$n = \frac{n_i}{n_0} \tag{V.11}$$

и геометрические параметры неоднородности ионного слоя x_i и Δx_i. Последний параметр не изменялся и был положен равным $0{,}2L$. Отметим, что в случае $n = 1$ и $x_i = 0$, $\Delta x_i = L$ («классический» диод Пирса) неустойчивость в потоке возникает при $\alpha > \pi$ и в системе формируется виртуальный катод [130, 158].

Численное моделирование вышеописанной системы осуществлялось методом «частиц в ячейке» в рамках одномерного электростатического моделирования [146, 163].

Рис. V.10, на котором представлены карты режимов на плоскости управляющих параметров (α, n) и (x_i, n), демонстрирует характерные режимы, реализующиеся в исследуемой системе при изменении управляющих параметров. Для диагностики режимов колебаний анализировались колебания потенциала в плоскости $x/L = 0{,}25$. Из рассмотрения карт режимов видно, что в системе наблюдается сложная смена различ-

Рис. V.10. Разбиение плоскостей параметров «ток пучка α — плотность ионного фона n» при $x_i/L = 0{,}05$ (*а*) и «координата ионного слоя x_i — плотность ионного слоя n» при $\alpha = 1{,}75\pi$ (*б*) на характерные режимы колебаний в диодном промежутке со сверхкритическим током с неоднородным распределением ионного фона

ных типов колебательной динамики при изменении тока пучка, плотности ионного фона и расположения ионного слоя. На рис. V.11 представлены характеристики (фурье-спектры мощности, фазовые портреты, восстановленные по методу Такенса, и временны́е реализации потенциала поля пространственного заряда в сечении $x/L = 0{,}25$) различных режимов колебаний в диодном промежутке.

Для малой степени неоднородности ($n < 1{,}0 \div 2{,}0$) колебания виртуального катода регулярны (область, обозначенная знаком «R» на картах режимов; рис. V.11 *а*, построенный при управляющих параметрах $\alpha = 1{,}75\pi$, $n = 0{,}5$, $x_i = 0{,}05L$). Рост плотности ионного слоя приводит к возникновению квазипериодических движений в системе (см. рис. V.10, область Q и рис. V.11 *б*, $\alpha = 1{,}34\pi$, $n = 1{,}0$, $x_i = 0{,}05L$). При смещении ионного слоя к правой границе системы область квазипериодической динамики на плоскости управляющих параметров расширяется.

Дальнейшее увеличение неоднородности ионного слоя n приводит к возникновению различных типов хаотической динамики электронных волн в диодном промежутке с неоднородным распределением ионного фона. Область $C1$ соответствует слабохаотическим колебаниям (рис. V.11 *в*, $\alpha = 2{,}86\pi$, $n = 2{,}0$, $x_i = 0{,}05L$), возникающим в результате разрушения квазипериодических движений. При этом в спектре мощности наблюдаются пики на двух несоизмеримых базовых частотах, которые наследуются от квазипериодического режима. Аттрактор представляет собой узкую ленту в фазовом пространстве. С ростом степени неоднородности ионного фона (величины n) на базе режима $C1$ возникает новый хаотический режим $C2$, который характеризуется увеличением нерегулярности колебаний в системе и, как следствие, ростом шумового пьедестала в спектре мощности; аттрактор в фазовом

Рис. V.11. Спектры мощности, фазовые портреты и временны́е реализации колебаний потенциала $\phi(t)$ в сечении $x = 0{,}25L$ для различных динамических режимов, реализующихся в системе пространстве представляет собой широкую ленту (рис. V.11 *г*, $\alpha = 2{,}0\pi$, $n = 2{,}5$, $x_i = 0{,}05L$). При величинах $x_i < 0{,}2$ в узком диапазоне управляющих параметров, соответствующих области $C4$ карты режимов, наблюдаются развитые хаотические колебания, характеристики которых приведены на рис. V.11 *д*, $\alpha = 2{,}0\pi$, $n = 3{,}5$, $x_i = 0{,}05L$. В спектре мощности имеет место высокий шумовой пьедестал, медленно спадающий с ростом частоты, на фоне которого наблюдаются пики базовых частот и их гармоник. Фазовый портрет колебаний однороден и сильно зашумлен.

На плоскости управляющих параметров выделена область F, в которой происходит резкое увеличение частоты колебаний в электронном пучке (см. работы [160, 161]). Соответствующие характеристики колебаний в этом случае представлены на рис. V.11 *е*, $\alpha = 1{,}75\pi$, $n = 3{,}5$, $x_i = 0{,}05L$. Рисунок построен при том же токе пучка, что и рис. V.11 *а*, но при существенно большей плотности ионного слоя. Из сравнения спектров мощности в обоих случаях видно, что имеет место увеличение базовой частоты генерации примерно в два раза. Заметим, что наиболее интенсивная гармоника в спектре мощности колебаний в диапазоне управляющих параметров, принадлежащих области $C4$ на карте режимов, соответствует базовой частоте генерации в режиме F.

При очень больших плотностях ионного слоя, располагающегося вблизи плоскости инжекции электронного пучка, в системе возникают сильно нерегулярные колебания без выделенной базовой частоты с быстро спадающим с ростом частоты спектром мощности (область $C3$; рис. V.11 *ж*, $\alpha = 2{,}4\pi$, $n = 5{,}0$, $x_i = 0{,}05L$). Фазовый портрет колебаний в данном случае однороден.

Возникает вопрос: с чем связана такая сложная перестройка различных режимов колебаний с изменением управляющих параметров системы — тока пучка и неоднородности распределения ионного фона? Можно предположить, следуя работам [141, 165, 166], что вышеописанное поведение системы определяется особенностями динамики и взаимодействия формирующихся в системе когерентных структур.

Воспользуемся для анализа процессов формирования и взаимодействия когерентных структур в электронном пучке вейвлетной бикогерентностью [162, 163]. Для этого будем исследовать пространственно-временны́е данные колебаний потенциала $\phi(x,t)$ поля пространственного заряда в диодном промежутке для различных характерных режимов динамики.

Рассмотрим вначале простейший случай — режим регулярных колебаний, реализующийся при небольших токах пучка α и малой степени неоднородности ионного фона (область R на карте режимов, рис. V.10). Соответствующее пространственно-временно́е распределение величины $\phi(x,t)$ для значений параметров $\alpha = 1{,}54\pi$, $n = 0{,}5$ и $x_i = 0{,}05$ представлено на рис. V.12 *а*. В спектре колебаний потенциала во всех сечениях диодного промежутка в этом случае присутствуют колебания с базовой частотой $f_0 = 0{,}98$ ГГц.

Найдем полную бикогерентность b (см. формулу (III.16)) данных по колебаниям потенциала $\phi(x,t)$ и гармонического сигнала с частотой, соответствующей базовой частоте f_0 в спектре мощности колебаний потенциала. То есть в качестве сигнала $h(t)$ в соотношении (III.16)

а *б*

Рис. V.12. Пространственно-временна́я динамика потенциала поля пространственного заряда в режиме (*а*) регулярных и (*б*) хаотических (режим $C3$) колебаний в диодном промежутке с неоднородным распределением ионного фона

выбирается сигнал $a \cdot \sin 2\pi f_0 t$; в качестве сигнала $g(t)$ — колебания $\phi(x_{fix}, t)$ в некоторой фиксированной точке пространства $x = x_{fix}$. В качестве материнской вейвлетной функции при расчетах использовался вейвлет Морлета, который, как уже обсуждалось ранее, позволяет легко интерпретировать полученные результаты. На рис. V.13 *а* представлены результаты расчета величины полной бикогерентности

Рис. V.13. (*а*) Зависимость величины полной бикогерентности $b(x)$ от координаты и (*б*) проекция поверхности суммированного биспектра $B_{\Sigma}(x/L, f)$, построенные для режима регулярных колебаний (режим R)

в зависимости от координаты. Зависимость $b(x)$ является функцией с одним максимумом, который располагается в области вблизи плоскости инжекции. Отсюда видно, что наибольшая полная бикогерентность (т. е. максимальная фазовая связь между колебаниями потенциала и динамикой основного временно́го масштаба в системе) соответствует колебаниям потенциала в области $x/L \approx 0{,}1$. Последнее означает, что основная пространственно-временна́я структура, определяющая базовые временны́е и пространственные масштабы поведения рассматриваемой системы, локализована вблизи области $x/L \sim 0{,}1$.

Рассчитаем теперь суммированный вейвлетный биспектр $B_\Sigma(f)$ (см. соотношение (III.17)) пространственно-временны́х данных колебаний потенциала в диодном промежутке. При этом в качестве сигнала $h(t)$ выбираются колебания потенциала $\phi(x,t)$ в области $x/L = 0{,}1$, для которой максимальна величина полной бикогерентности процесса; в качестве сигнала $g(t)$ используются колебания потенциала $\phi(x,t)$ в различных сечениях диодного промежутка. Данная процедура позволяет определить области в пространстве, где имеет место сильная фазовая связь между временны́ми колебаниями, т. е. возможно выделить и локализовать в пространстве формирующиеся в системе когерентные структуры.

Результаты расчета суммированного вейвлетного биспектра приведены на рис. V.13 *б*, на котором представлена проекция поверхности величины B_Σ в координатах (x, f), где x — координата сечения диода, относительно которого рассчитывается бикогерентность, f — частоты, на которых определялась суммированная бикогерентность. Из рисунка видно, что на поверхности суммированной бикогерентности $B_\Sigma(x, f)$ четко выделяется область, где вейвлетная бикогерентность резко возрастает. Эта область, локализованная на плоскости (x, f) вблизи $x/L \sim 0{,}05 \div 0{,}2$; $f \sim 0{,}8 \div 1{,}2$ ГГц, определяет единственную пространственно-временну́ю структуру в пучке, которая расположена вблизи плоскости инжекции (она пространственно ограничена областью $x/L < 0{,}2$) и имеет характерный временно́й масштаб $T = 1/f \sim \sim 1$ нс. Заметим, что на поверхности наблюдается еще один максимум (высота которого примерно в три раза меньше максимума при $f \sim \sim 1{,}9$ ГГц) на частоте $f \sim 3{,}8$ ГГц. Он связан с динамикой той же когерентной структуры и определяется квадратичной нелинейностью, а именно фазовой связью между временно́й динамикой базового масштаба T и его гармоникой $T/2$.

Проанализируем с помощью вейвлетной бикогерентности динамику системы в области F на карте режимов (см. рис. V.10), где наблюдается резкий скачок частоты генерации. Рассмотрим колебания потенциала $\phi(x,t)$ при тех же, что и в предыдущем случае, значениях тока пучка $\alpha = 1{,}54\pi$ и координаты расположения слоя $x_i = 0{,}05$, но существенно большей плотности ионов $n = 3{,}75$. На рис. V.14 представлены соответствующая зависимость полной бикогерентности $b(x)$ колебаний потенциала в различных сечениях диодного промежутка x и гармонического сигнала с частотой, равной базовой частоте генерации (в данном случае $f_0 = 3{,}1$ ГГц), и поверхность суммированной бикогерентности $B_\Sigma(x, f)$.

Из рис. V.14 *а* видно, что область высокой бикогерентности прижимается непосредственно к плоскости инжекции $x = 0$. Из распределения амплитуд коэффициентов суммированного вейвлетного биспектра вдоль пространства взаимодействия (рис. V.14 *б*) следует, что в системе, как и раньше, формируется только одна когерентная структура, определяющая поведение электронного потока. Однако теперь она

Рис. V.14. (*а*) Зависимость величины полной бикогерентности $b(x)$ от координаты и (*б*) проекция поверхности суммированного биспектра $B_\Sigma(x/L, f)$, построенные для режима F

в пространстве взаимодействия располагается вблизи входной сетки диодного промежутка, занимая область $x/L \in (0{,}0,\ 0{,}1)$. Характерный временно́й масштаб динамики этой структуры примерно в два раза превышает характерный временно́й масштаб динамики системы в случае малой степени неоднородности (предыдущий случай) и численно равен $T \approx 0{,}5$ нс. Как и в предыдущем случае, ярко выражена динамика временно́го масштаба второй гармоники базовой частоты, что свидетельствует о сильной нелинейности колебаний.

Таким образом, в рассматриваемом случае увеличение степени неоднородности системы приводит к изменению условий формирования когерентной структуры, определяющей динамику электронного пучка. В результате такой перестройки внутренней структуры электронного пучка изменяется характерный пространственный масштаб Λ_F динамики единственной структуры. Он становится примерно в два раза меньше пространственного масштаба Λ_R когерентной структуры в режиме регулярных колебаний.

Известно [167], что для систем с виртуальным катодом имеет место связь между средним временем пролета τ_e отраженных от виртуального катода электронов и частотой генерации f, которая дается простым выражением $f \sim 1/\tau$. В нашем случае можно оценить время пролета для режимов F и R соответственно как

$$\tau_F \sim \frac{\Lambda_F}{v_0}, \qquad \tau_R \sim \frac{\Lambda_R}{v_0}.$$

Отсюда следует, что частота генерации f_F в диоде с сильной неоднородностью ионного фона (режим F) связана с частотой генерации f_R в случае малой неоднородности как $f_F \approx 2f_R$, что и наблюдается при численном моделировании.

Рассмотрим теперь режимы развитых хаотических колебаний в системе.

Исследуем вначале режим, реализующийся в диодном промежутке при большом токе пучка α^2 и большой степени неоднородности n электронного пучка при расположении ионного слоя вблизи плоскости инжекции (режим $C3$ на карте режимов (рис. V.10)). Рассмотрим пространственно-временны́е колебания потенциала поля пространственного заряда при следующих значениях управляющих параметров: $\alpha = 2{,}125\pi$, $n = 4{,}0$, $x_i = 0{,}05$. Соответствующее распределение величины $\phi(x, t)$ представлено на рис. V.12 *б*. Заметим, что спектральный состав колебаний потенциала при переходе от одного сечения диода к другому в данном режиме практически не изменяется.

На рис. V.15 приведены результаты расчета зависимости полной бикогерентности $b(x)$ колебаний потенциала и поверхность суммированной бикогерентности $B_\Sigma(x, f)$. Из рис. V.15 *а* следует,

Рис. V.15. (*а*) Зависимость величины полной бикогерентности $b(x)$ от координаты и (*б*) проекция поверхности суммированного биспектра $B_\Sigma(x/L, f)$, построенные для режима $C3$

что наибольшая полная бикогерентность соответствует колебаниям потенциала в области $x/L \approx 0{,}25$. Это означает, что в данном режиме основная пространственно-временна́я структура, определяющая характерные особенности поведения рассматриваемой системы, в первую очередь базовые временны́е и пространственные масштабы колебаний в пучке, локализована в области $x/L \sim 0{,}25$.

Расчет суммированного вейвлетного биспектра показал, что на поверхности $B_\Sigma(x, f)$ четко выделяются две области, где вейвлетная бикогерентность резко возрастает: одна область локализована на плоскости (x, f) вблизи $x/L \sim 0{,}2 \div 0{,}4$; $f \sim 2{,}5$ ГГц, а другая — вблизи $x/L \sim 0{,}1 \div 0{,}2$; $f \sim 1{,}0$ ГГц. В каждой из этих областей, где коэффициенты вейвлетного биспектра велики, имеет место фазовая связь между колебаниями в различных сечениях диодного промежутка на соответствующих временны́х масштабах. Причем величина бикогерентности в первой области существенно превышает соответствующую величину во второй области. Каждую из этих областей на плоскости (x, f) можно связать со своей когерентной структурой, поведение которой определяет динамику электронного пучка в данном случае.

Из рис. V.15 *б* четко видно, что одна из структур, базовая (она была определена нами из результатов расчета полной вейвлетной бикогерентности), занимает большую область в пространстве взаимодействия и имеет малый временно́й масштаб $T_1 \approx 0{,}4$ нс. Другая структура, вторичная, имеет малый пространственный масштаб, располагаясь между плоскостью инжекции и базовой структурой. Ее характерный временно́й масштаб существенно больше и составляет $T_2 \approx 1{,}0$ нс. Можно предположить, что взаимодействием этих структур, имеющих различные временны́е масштабы динамики, определяются в этом случае особенности сложной хаотической динамики электронного пучка. Так, вторичная структура, временно́й масштаб которой T_2 существенно превышает масштаб T_1, взаимодействуя с базовой структурой, выполняет роль некоторой распределенной обратной связи, оказывающей воздействие на динамику электронного пучка. Последнее и приводит к хаотизации колебаний в электронном пучке в этом случае — она связана со сложным запаздывающим (из-за различных характерных временны́х масштабов) взаимодействием между когерентными структурами, формирующимися в системе.

Рассмотрим теперь режим, реализующийся в системе при большой плотности ионного слоя $n = 4{,}5$, который располагается вдали от плоскости инжекции в сечении с координатой $x_i = 0{,}25$. Параметр Пирса в рассматриваемом нами случае равен $\alpha = 3{,}0\pi$. Вид фурье-спектра мощности и фазового портрета колебаний в сечении $x/L = 0{,}25$ диодного промежутка соответствует режиму $C2$ на картах режимов (см. рис. V.10 и рис. V.11 *е*).

В отличие от предыдущих случаев, временна́я динамика поля пространственного заряда в различных точках диодного промежутка принципиально различна. Так, спектральный состав колебаний качественно и количественно меняется при продвижении вдоль пространства взаимодействия. Это иллюстрирует рис. V.16, на котором представлены фурье-спектры мощности (в нелогарифмическом масштабе) колебаний потенциала ϕ в различных сечениях пространства взаимодействия. Вблизи плоскости инжекции колебания потенциала слабохаотические, на фоне небольшого слаборазвитого шумового пьедестала наблюдается ярко выраженный пик базовой частоты генерации $f_0 = 2{,}24$ ГГц в диоде и ее второй гармоники $2f_0$. Ситуация меняется при продвижении вдоль пространства взаимодействия к выходной сетке системы. В спектре мощности повышается шумовой пьедестал, медленно спадающий с ростом частоты. В низкочастотной части спектра ($f < f_0$) наблюдается появление спектральных составляющих, энергия которых в спектре

Рис. V.16. Фурье-спектры мощности колебания потенциала поля пространственного заряда в различных сечениях x/L диодного промежутка (масштаб нелогарифмический): (*а*) $x/L = 0{,}05$, (*б*) $x/L = 0{,}45$

превышает энергию частоты f_0, также присутствующей в спектре временны́х колебаний потенциала, анализируемого в центральной области пространства взаимодействия $x/L \sim 0{,}5$. Так амплитуда доминирующей частоты f_1 в низкочастотной области спектра (см. рис. V.12 *б*) превышает амплитуду гармоники частоты f_0 в 1,57 раза.

Можно предположить, что такое изменение поведения системы, выражающееся в появлении пространственно развитых хаотических колебаний, определяется качественной перестройкой внутренней структуры электронного потока в данном случае.

Исследуем пространственную динамику величины полной бикогерентности $b(x)$ колебаний потенциала поля $\phi(x, t)$ и гармонического сигнала. Будем рассматривать гармонические сигналы, частоты которых соответствуют характерным частотам в фурье-спектре мощности колебаний в различных точках пространства взаимодействия. Такими характерными частотами являются частота f_0, которая соответствует основному временно́му масштабу в области инжекции электронного пучка, и частота f_1, которая определяет характерный временно́й масштаб динамики в электронном пучке в центральной части пространства взаимодействия.

Результаты расчета представлены на рис. V.17. Из него видно, что зависимости полной вейвлетной бикогерентности $b(x)$, построенные для частот гармонического сигнала, соответствующих различным характерным временны́м масштабам колебаний в системе, имеют принципиально различный вид.

Распределение вдоль пространства взаимодействия полной бикогерентности колебаний потенциала и гармонического процесса с частотой f_0 (кривая *1* на рис. V.17) показывает, что максимальная фазовая связь между колебаниями потенциала и динамикой временнóго мас-

Рис. V.17. Зависимости величины полной бикогерентности $b(x)$ от координаты, построенные при различных частотах гармонического сигнала. Кривая *1* соответствует частоте f_0; *2* — f_1; *3* — f_2

штаба $T_0 = 1/f_0$ имеет место в области $x/L < 0{,}1$. Эту область можно связать с пространственно-временнóй структурой, которая располагается вблизи плоскости инжекции и динамика которой определяет появление в спектре мощности частоты f_0. Во всем остальном пространстве взаимодействия полная бикогерентность колебаний потенциала и гармоники с частотой f_0 мала и свидетельствует о слабой связи между динамикой этой когерентной структуры и колебаниями в остальном пространстве взаимодействия.

Аналогичная картина складывается при рассмотрении распределения $b(x)$ колебаний потенциала и гармонического процесса с частотой f_1 (кривая *2* на рис. V.17). В этом случае максимум бикогерентности приходится на область $x \in (0{,}3L,\ 0{,}6L)$. Данную область логично связать с еще одной когерентной структурой, формирующейся в системе и имеющей характерный временнóй масштаб $T_1 = 1/f_1$. Заметим, что в данном случае величина полной бикогерентности в области формирования первой структуры достаточно велика. Это свидетельствует о том, что вторая структура оказывает достаточно сильное влияние на динамику первой структуры, в то время как обратного влияния, как мы установили выше, нет.

Таким образом, в случае пространственно-временнóго хаоса в диодном промежутке с сильно неоднородным распределением ионного фона с помощью анализа только спектрального состава колебаний $P(f)$ и величины полной бикогерентности b в различных сечениях x/L пространства взаимодействия удалось выделить когерентные структуры, формирующиеся в системе, а также выявить характерные особенности взаимодействия между ними. В основу диагностики пространственно-временны́х структур была положена сильная зависимость от координаты пространства взаимодействия величины полной вейвлетной бикогерентности колебаний в системе и гармонического сигнала с частотой, соответствующей тому или иному характерному временно́му масштабу динамики системы.

Для сравнения на рис. V.17 (кривая *3*) приведена рассчитанная зависимость полной вейвлетной бикогерентности колебаний потенциала и гармонического сигнала с частотой, отличной от характерных частот в спектрах мощности, построенных по колебаниям потенциала в различных сечениях диодного промежутка. Для определенности был выбран сигнал с частотой f_2, отмеченной в спектре мощности на рис. V.16 *б*. Из рисунка видно, что бикогерентность, а следовательно, и фазовая связь между колебаниями в системе и динамикой выбранного временно́го масштаба, невелика и практически не зависит от координаты пространства взаимодействия. Аналогичная картина получается при выборе других частот для анализа. При этом меняется только величина бикогерентности, но не ее характер распределения в пространстве, а именно $b(x) \approx \text{const}$.

Из полученных результатов следует, что при анализе с помощью вейвлетной бикогерентности легко обнаружить базовые временны́е масштабы динамики исследуемой системы. Здесь же проявляются преимущества анализа пространственно-временны́х данных с помощью вейвлетной, а не фурье-бикогерентности. Дело в том, что при выделении из массивов данных информации о когерентных структурах с помощью фурье-бикогерентности рассмотренная нами методика потребует очень точного определения характерного временно́го масштаба, на который при этом будет еще наложено условие неизменности во времени. Расчет вейвлетной бикогерентности для нахождения фазовой связи двух колебательных процессов (III.1), благодаря конечной ширине в фурье-пространстве материнского вейвлета (в нашем случае вейвлета Морлета), не требует точного определения характерного временно́го масштаба. Так, например, временно́й масштаб анализируемого процесса может меняться в достаточно широких пределах (а именно таких, чтобы ширина фурье-спектра колебаний временно́го масштаба была меньше ширины фурье-образа базисной вейвлетной функции на каждом из рассматриваемых масштабов наблюдения).

В заключение этого параграфа проиллюстрируем полученные результаты по выделению когерентных структур из пространственно-временны́х данных физическими картинами динамики электронного пучка в диодном промежутке с неоднородным распределением ионного фона.

Для этого исследуем пространственно-временны́е диаграммы электронного потока для вышерассмотренных случаев (рис. V.18). Каждая линия на диаграммах соответствует траектории одной заряженной частицы. Сгущение траекторий соответствует сгусткам (электронным структурам) в электронном потоке.

В режиме регулярных колебаний (область R на карте режимов) вид пространственно-временно́й диаграммы пучка (рис. V.18 *а*) качественно совпадает с «классическим» видом диаграммы электронного потока без ионного фона (см., например, [161]). На ней хорошо видно, что в электронном пучке на каждом периоде колебаний формируется

Рис. V.18. Пространственно-временны́е диаграммы электронного потока в различных режимах колебаний единственный электронный сгусток — виртуальный катод, который колеблется как в пространстве, так и во времени и от которого отражается большая часть электронного потока обратно к плоскости инжекции. Максимум плотности пространственного заряда колеблющегося виртуального катода приходится на область $x/L \sim 0{,}1$, в которой большая часть электронов останавливается (их скорость $v \approx 0$) и поворачивает обратно. Это совпадает с результатами бикогерентного вейвлетного анализа, который определяет наличие когерентной структуры в системе в этой же области (ср. с рис. V.12).

При увеличении степени неоднородности (повышении величины плотности ионного слоя n) и при переходе системы в режим F имеет место изменение динамики электронного пучка, что иллюстрирует рис. V.18 *б*. Из него видно, что в потоке, как и раньше, формируется только один сгусток электронов (виртуальный катод), однако теперь его колебания в пространстве происходят с очень малой амплитудой. Анализ пространственно-временны́х данных с помощью вейвлетной бикогерентности (см. рис. V.14) выявил уменьшение характерного пространственного масштаба когерентной структуры, формирующейся в этом режиме, по сравнению с режимом R. Действительно, максимум плотности пространственного заряда смещается к плоскости инжекции, в результате чего и наблюдается скачок частоты генерации в системе. Заметим, что такая перестройка внутренней структуры электронного потока происходит скачком, также скачком возрастает частота генерации в диодном промежутке (см., например, [160]). Хаотизация колебаний в пучке в этом случае (см. спектр мощности и фазовый портрет колебаний на рис. V.11 *е*) происходит за счет возмущающего влияния метастабильных частиц, находящихся в области $x/L \sim 0{,}2$ пространства взаимодействия в течение нескольких характерных периодов колебаний основной структуры (виртуального катода). Возвращаясь к плоскости инжекции, они оказывают влияние на пространственно-временну́ю динамику виртуального катода в рассматриваемом режиме.

Ситуация меняется при переходе к режимам развитых хаотических колебаний. В режиме $C3$ плотность компенсирующего заряд электронного потока ионного слоя столь велика, что основная структура в пучке — отражающий от себя электроны виртуальный катод — «вытесняется» из ионного слоя и формируется на его границе. Это четко продемонстрировал бикогерентный анализ (см. рис. V.15), выделив базовую когерентную структуру в электронном пучке в области $x/L \sim \sim 0{,}3$. Одновременно между виртуальным катодом, находящимся вне ионного слоя, и входной сеткой диодного промежутка возникает потенциальная яма с экстремумом при $x/L \approx 0{,}05$, что хорошо видно на рис. V.14. В нее захватываются частицы, отраженные от виртуального катода и имеющие небольшую скорость при подходе к выходной плоскости. Захваченные частицы, колеблющиеся в этой потенциальной яме, хорошо видны на пространственно-временно́й диаграмме (рис. V.18 *в*). Пространственно-временна́я динамика в этом режиме подобна динамике потока в генераторе на виртуальном катоде триодного типа (см., например, [168]), в котором также имеет место двугорбый потенциальный профиль. В триоде с виртуальным катодом возникает «вихревая» автоструктура, состоящая из захваченных потенциальной ямой частиц. Взаимодействие между виртуальным катодом и вихрем приводит к усложнению динамики в потоке, аналогично описанному в работе [168]. Вихревую автоструктуру можно связать со второй когерентной структурой, выделенной с помощью обработки данных вейвлетной бикогерентностью, так как расположение этих структур, а также характерные пространственные и временны́е масштабы их динамики близки.

В режиме $C2$ при расположении ионного слоя вдали от плоскости инжекции динамика электронного пучка сильно усложняется. Как видно из рис. V.18 *г*, в диодном промежутке формируются два сгустка электронов — виртуальный катод вблизи плоскости инжекции и сгусток электронов, колеблющихся в потенциальной яме, связанной с наличием в середине пространства взаимодействия нейтрализующего слоя ионов с плотностью $n = 4{,}5$. Сопоставляя пространственно-временну́ю диаграмму для этого случая с результатами расчета величины полной бикогерентности для различных характерных временны́х масштабов колебаний в системе (см. рис. V.17), приходим к выводу, что бикогерентный анализ позволяет выделить обе характерные электронные структуры, формирующиеся в системе.

Таким образом, используя бикогерентный вейвлетный анализ, удалось выделить из набора пространственно-временны́х данных когерентные структуры, формирующиеся в нелинейной распределенной системе, демонстрирующей различные режимы колебательной динамики, включая режимы развитого пространственно-временно́го хаоса, оценить характерные временны́е масштабы и локализацию в пространстве найденных структур. Полученные с помощью расчета вейвлетной бикогерентности результаты находятся в хорошем соответствии с физической картиной внутренней динамики электронного пучка в диодном промежутке. Так, например, удалось связать формирующиеся когерентные структуры с электронными сгустками в пучке.

Подводя итоги данного параграфа, можно утверждать, что вышерассмотренная методика анализа данных позволит эффективно выделять когерентные структуры, определяющие динамику распределенных систем различной природы, демонстрирующих пространственно развитый хаос.

V.3. Некоторые другие приложения вейвлетного анализа

Перечислим кратко некоторые другие приложения *непрерывного* вейвлетного преобразования к анализу нелинейных систем различной природы. Сразу оговоримся, что этот параграф не претендует на подробный анализ, носит обзорный характер и включен в главу для полноты изложения.

Исследование астрофизических объектов. В последние несколько лет появился ряд работ [55, 169–172] (см. также [25] (Chapter 3: *A. Bijaoui*, Wavelets and Astrophysical Applications. P. 77)), в которых выявляются те или иные особенности в данных, имеющих астрофизическую природу. Здесь методами непрерывного вейвлетного анализа были исследованы свойства солнечной активности, выражаемой временны́ми рядами числа групп солнечных пятен и видимого солнечного диаметра, а также выявлены ее характерные масштабы. С помощью адаптивных вейвлетных базисов были исследованы особенности хромосферной активности ряда звезд, фиксируемой по магнитной активности их поверхностей. Также с помощью вейвлетного преобразования исследуются характеристики и внутренняя структура крупных астрофизических объектов с использованием их детальных графических изображений.

В качестве иллюстрации подобного исследования астрофизических объектов рассмотрим некоторые результаты вейвлетного анализа солнечной активности за период с 1610 по 1994 гг. следуя работе П. Фрика и др. [170]. В качестве исходных для вейвлетного анализа использовались данные по среднемесячному значению K числа групп солнечных пятен [173]. Такая характеристика более точно и адекватно описывает характер солнечной активности, чем часто используемый индекс Вульфа [173, 174]. Исследуемый сигнал и его вейвлетный спектр, построенный с базовым морлет-вейвлетом ($\omega_0 = 6{,}0$), показаны на рис. V.19 *а*. На рис. V.19 *б* приведено интегральное распределение энергии по масштабам вейвлетного преобразования (кривая *1*) и соответствующий фурье-спектр мощности (кривая *2*) колебаний величины K. На вейвлетном спектре и в распределении энергии по масштабам можно выделить две характерные области со значительной амплитудой коэффициентов вейвлетного преобразования (темные области, вытянутые вдоль оси t_0 на рис. V.19 *а* и соответствующие им пики в распределении $\langle E(s)\rangle$; последние отмечены стрелками на рис. V.19 *б*).

Временны́е масштабы, на которые приходятся эти максимумы, соответствуют знаменитым 11-летним циклам (Schwabe cycle) и 100-летним циклам (Gleissberg cycle) солнечной активности. Из сравнения фурье- и вейвлетного спектра на рис. V.19 *б* хорошо видны некоторые преимущества вейвлетного преобразования. В фурье-спектре мощности, и в распределении энергии по масштабам $\langle E\rangle$ вейвлетного преобразования наблюдается хорошо выраженный максимум, соответствующий 11-летнему циклу. Однако наряду с ним в фурье-спектре мощности содержится значительное количество максимумов, которые являются артефактами различных неточностей данных и не отражают глобальных процессов на Солнце. В отличие от этого вейвлетный спектр четко выделяет два базовых масштаба динамики солнечной активности.

Диагностика состояния и динамики плазмы в установках управляемого термоядерного синтеза. Процессы в плазме рабочих камер установок УТС характеризуются сложной нелинейной ди-

Рис. V.19. (*а*) Временна́я реализация и соответствующий вейвлетный спектр среднемесячного числа групп солнечных пятен, характеризующего солнечную активность за период с 1610 по 1994 год; (*б*) фурье-спектр мощности (кривая *1*) и распределение энергии по масштабам вейвлетного преобразования (кривые *2*), построенные для вейвлетного спектра на рис. *а* (из работы [170])

намикой, демонстрируя такие феномены, как перемежаемость, турбулентность, неустойчивости при взаимодействии плазменных волн и т. п. При анализе таких явлений возрастает роль методов диагностики сложных процессов по экспериментальным временны́м рядам, снимаемым с установки, так как непосредственное исследование явлений в рабочей камере затруднено. При диагностике динамики плазмы и выделении характерных масштабов и структур в данном случае развиты методы, использующие как вейвлетный анализ [175], так и вейвлетную бикогерентность [118, 176, 177].

Например, в работе М. Хеллера и др. [176] методами бикогерентного вейвлетного анализа выделялись когерентные пространственные структуры из экспериментальных данных электростатических колебаний плазмы в рабочей камере Токамака. Характерные спектры суммированной бикогерентности $b_\Sigma(f_s)$, построенные с помощью морлет-вейвлета ($\omega_0 = 6{,}0$), показаны на рис. V.20. Величина суммированной бикогерентности строилась по различным временны́м интервалам ΔT от начального момента развития процесса: рис. V.20 *а* — $\Delta T = 0 \div 3{,}3$ мс, рис. V.20 *б* — $\Delta T = 13{,}2 \div 16{,}5$ мс. Уровень статистической ошибки представлен на рисунках штриховой линией. Анализируя результаты расчета величины бикогерентности можно выделить два частотных интервала, в которых суммированная бикогерентность достигает максимума: $\Delta f_1 \approx 10 \div 30$ кГц и $\Delta f_2 \approx 60 \div 70$ кГц, причем величина бикогерентности в последнем частотном интервале практически не меняется с течением времени. Временна́я динамика бикогерентности (ср. рис. V.20 *а* и *б*) характеризует процессы формирования и взаимодействия когерентных структур в плазме.

Рис. V.20. Спектры суммированной бикогерентности $b_\Sigma(f_s)$, построенные для колебаний плазмы в Токамаке за различные временны́е интервалы ΔT. Штриховые линии соответствуют статистическому уровню шума (III.23) (из работы [176])

Так, очевидно, через $10 \div 15$ мс от начала процесса в системе формируются пространственно-временны́е структуры с характерным временны́м масштабом динамики $s \sim 0{,}5$ мкс (соответственно частота $f_s \sim \sim 20$ кГц).

Вейвлетный анализ в биологии и медицине. Применение вейвлетов для исследования биологических объектов в настоящее время также активно развивается. Основные направления применения вейвлетного преобразования здесь: (1) анализ сердечной деятельности, выявление ее патологий и т. п.; (2) исследование клеток крови; (3) изучение ДНК-последовательностей; (4) анализ характеристик нестационарных физиологических сигналов; (5) обработка изображений, получаемых с помощью рентгенограмм и ультразвукового исследования. Более подробно данные вопросы рассматриваются в работах [27], [178–186], там же приведена достаточно полная библиография по этой теме.

Значительно более полный обзор приложений методов как непрерывного, так и дискретного вейвлетного анализа к исследованию различных систем можно найти в работах [1, 11, 25–27, 41].

Одним из таких приложений вейвлетов, непосредственно не связанным с диагностикой временны́х и пространственных данных, является использование ортонормированных вейвлетных базисов для решения нелинейных волновых уравнений [187–189]. Например, в работах [190, 191] предложен алгоритм решения уравнения Бюргерса с использованием вейвлетных базисов, и с его помощью исследованы свойства решений с автомодельными начальными условиями. В работах [192–195] рассматривается решение задач электродинамики (решение уравнений Максвелла) и электроники (моделирование вакуумных и твердотельных сверхвысокочастотных устройств и схем) с использованием специально сконструированных вейвлетных базисов.

Список литературы

1. *Астафьева Н.М.* Вейвлет-анализ: основы теории и примеры применения // УФН. 1996. Т. 166, № 11. С. 1145–1170.
2. *Астафьева Н.М.* Вейвлет-анализ: спектральный анализ локальных возмущений (основы теории и примеры применения) // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1996. Т. 4, № 2. С. 3–39.
3. *Christopher Torrence and Gilbert P. Compo.* A Practical Guide to Wavelet Analysis // Bulletin of the American Meteorological Society. 1998. V. 79. P. 61.
4. *Lewalle J.* Tutorial on Continuous Wavelet Analysis of Experimental Data. http://www.ecs.syr.edu/faculty/lewalle/tutor/tutor.html.
5. *Daubechies I.* Ten Lectures on Wavelets. SIAM, 1991 (*Добеши И.* Десять лекций по вейвлетам. — М.-Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2001).
6. *Blatter C.* Wavelets: A Primer, Natick, Mass.: A.K. Peters, 1998 (*Блаттер Ч.* Вейвлет-анализ. Основы теории. — М.: Постмаркет, 2001).
7. *Chui C.K.* Introduction to Wavelets, Boston: Academic, 1992 (Чуи К. Введение в вейвлеты. — М.: Мир, 2001).
8. *Meyer Y.* Wavelets: Algorithms and Applications. — Philadelphia: SIAM, 1993.
9. *Meyer Y.* Wavelets and Operators. — Cambridge: Cambridge University Press, 1992.
10. *Chan Y.T.* Wavelet Basics. — Boston: Kluwer Acad., 1995.
11. *Meyer Y. and Roques S.* Progress in wavelets analysis and applications. — Editions Frontiéres, Gif-sur-Yvette, 1993.
12. *Ogden R.T.* Essential wavelets for statistical applications and data analysis. — Birkhäuser, Boston, Basel, Berlin, 1997.
13. *Ruskai M.B.*, *Beylkin G.*, *Coifman R.*, *Daubechies I.*, *Mallat S.*, *Meyer Y. and Raphael L.* Wavelets and their applications and data analysis. — Boston: Jones and Bartlett, 1992.
14. *Carmonia R.* Practical Time-Frequency Analysis. — Academic Press, 1998
15. Special issue on wavelet transforms and multiresolution signal analysis // IEEE Transacton Theory. 1992. V. 38, № 2.
16. Special Issue on Wavelet Applications in Engineering // Applied and Computational Harmonic Analysis. 2001. V. 10, № 3.
17. *Strang G.* Wavelets // American Scientist. 1994. V. 82. P. 250.

18. *Holschneider M.* Wavelets, An Analysis Tool. — Clarendon Press, 1993.
19. *Farge M.*, *Hunt J.C.R. and Vassilicos J.C.* Wavelets, Fractals and Fourier Transforms. — Oxford: Oxford University Press, 1995.
20. *Holschneider M.* Wavelets: An analysis tool. — Oxford: Oxford University Press, 1995. — 455 p.
21. *Polikar R.* The Wavelet Tutorial / Electronic publication in the Internet: http://www.public.iastate.edu/rpolikar/WAVELETS/WTtutorial.html
22. *Kaiser G.* A Friendly Guide to Wavelets. — Birkhäuser, 1994. — 300 p.
23. *Torresani B.* Continuous Wavelet Transform. — Paris: Savoire, 1995.
24. *Akansu A.N. and Haddad R.A.* Multiresolution Signal Decomposition: Transforms, Subbands, Wavelets. — Academic Press, 1996.
25. Wavelets in Physics / Eds J.C. Van den Berg. — Cambridge: Cambridge University Press, 1998.
26. Wavelets in Geophysics / Eds E. Foufoula-Georgiou and P. Kumar. — Academic Press, 1994.
27. Wavelets in Medicine and Biology / Eds A. Aldroubi, M. Unser. — Boca Raton: CRC Press. FL, 1994.
28. Wavelets: An elementary treatment of theory and applications / Eds T. Koornwinder. — Singapore: World Scientific, 1993.
29. *Argoul F.*, *Arneodo A.*, *Grasseau G.*, *Gagne Y.*, *Hopfinger E.J. and Frisch U.* Wavelet analysis of turbulence reveals the multifractal nature of the Richardson cascade // Nature. 1989. V. 338. P. 51–53.
30. *Newland D.E.* An Introduction to Random Vibrations, Spectral and Wavelet Analysis. — N. Y.: John Wiley, 1993.
31. *Купцов П.В.*, *Кузнецов С.П.* Вейвлет-анализ критических аттракторов // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1999. Т. 7, № 5. С. 10.
32. *Farge M.* Wavelet transform and their applications to turbulence // Annu. Rev. Fluid. Mech. 1992. V. 24. P. 395.
33. *Короновский А.А.*, *Храмов А.Е.* Непрерывный вейвлетный анализ в приложениях к задачам нелинейной динамики. — Саратов: Изд-во ГосУНЦ «Колледж», 2002.
34. *Heil C.E. and Walnut D.F.* Continuous and diskrete wavelet transforms // SIAM Rev. 1989. V. 31. P. 628–666.
35. *Daubechies I.* Orthogonal bases of compactly supported wavelets // Comm. P. Appl. Math. 1988. V. 41, № 7. P. 906.
36. Wavelets / Eds J.M. Combes, A. Grossman and P. Tchamitchian. — Berlin: Springer-Verlag, 1989. — 386 p.
37. *Mallat S.* A theory for multiresolution signal decomposition: the wavelet representation // IEEE Trans. on Pattern Anal. Machine Intell. 1989. № 2. P. 7.

38. *Lindsay R.W., Percival D.B. and Rothrock D.A.* The discrete wavelet transform and the scale analysis of the surface properties of sea ice // IEEE Trans. Geosci. Remote Sens. 1996. V. 34. P. 771.

39. *Mallat S.* Multiresolution approximation and wavelet orthonormal bases of $L^2(\mathbb{R})$ // Trans. Am. Math. Soc. 1989. V. 315. P. 69–88.

40. *Захаров В.Г.* Разработка и применение методов вейвлет-анализа к нелинейным гидродинамическим системам. / Дисс. на соискание уч. ст. к.ф.-м.н. — Пермь, Институт механики сплошных сред Уральского отделения РАН, 1997. — 92 с.

41. *Dremin I.M., Ivanov O.V. and Nechitailo V.A.* Wavelets and their use / Electronic preprint in Internet: http://arXiv.org/hep-ph/0101182, 16 January 2001.

42. *Анфиногентов В.Г., Короновский А.А., Храмов А.Е.* Вейвлетный анализ и его использование для анализа динамики нелинейных динамических систем различной природы // Изв. РАН, сер. физическая. 2000. Т. 64, № 12. С. 2383–2390.

43. *Анго А.* Математика для электро- и радиоинженеров. — М.: Наука. 1967. 778 с.

44. *Grossman A. and Morlet J.* Decomposition of Hardy function into square integrable wavelets of constant shape // SIAM J. Math. Anal. 1984. V. 15, № 4. P. 273.

45. *Paul T.* Function analitic on half-plane as quantum mechanical states // J. Math. Phys. 1984. V. 24, № 25. P. 136.

46. *Daubechies I.* The wavelet transform, time–frequency localization and signal analysis. IEEE Trans. Inform. Theory. 1990. V. 36. P. 961–1004.

47. *Mallat S.G.* Multiresolution approximation and wavelet orthonormal bases of $\mathrm{L}^2(\mathrm{R})$ // Trans. Amer. Math. Soc. 1989. V. 315. P. 69.

48. *Lemarie P.G. and Meyer Y.* Ondeteless et bases hilbertinennes // Rev. Math. Ibero-Americana. 1986. V. 2. P. 1.

49. *Battle G.* A block spin construction of ondeletters. Part 1 // Com. Math. Phys. 1987. V. 110. P. 607.

50. *Отнес Р., Эноксон Л.* Прикладной анализ временны́х рядов. — М.: Мир, 1982. 428 с.

51. *Feichtinger H.G. and Grochenig K.* Non-Orthogonal Wavelet and Gabor Expansions, and Group Representations. / In: Wavelets and their applications. Eds G. Beylkin, R. Coifman, I. Daubechies, et al. Jones and Bartlett. — Boston. MA 02116. USA. 1992. P. 353–376.

52. *Meyers S.D., Kelly B.G. and O'Brien J.J.* An introduction to wavelet analysis in oceanography and meteorology: With application to the dispertion of Yanai waves // Mon. Wea. Rev. 1993. V. 121. P. 2858.

53. *Короновский А.А., Храмов А.Е.* Введение в непрерывный вейвлетный анализ для специалистов в области нелинейной динамики. Ч. I // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. Т. 9, № 4/5. 2001. С. 3.

54. *Farge M., Coirand E., Meyer Y., Pascal F., Wickerhauser M.V.* Improved predictability of two dimensional turbulent flows using wavelet packet compression // Fluid Dyn. Res. 1992. V. 10. P. 229.
55. *Frick P., Baliunas S.L., Galyagin D., Sokoloff D. and Soon W.* Wavelet analysis of stellar chromosperic activity variations // The Astrophisical Journal. 1997. V. 483. P. 426.
56. *Graps A.* An introduction to wavelets // IEEE Computational Science and Engineering. 1995. V. 2, № 2.
57. *Новиков Л.В.* Адаптивный вейвлет-анализ сигналов // Научное приборостроение. 1999. Т. 9, № 2.
58. *Wickerhauser V.* Adapted Wavelet Analysis from Theory to Software. — Boston: AK Peters, 1994.
59. *Strutz T. and Muller E.* Adaptive Wavelet Transformation for Image Coding Using a Forecast Decomposition Selection / Picture Coding Symposium'97. 10–12 September. Berlin. Germany. 1997. P. 67–72.
60. *Strutz T., Schwarz H. and Muller E.* Predictive Image Coding With Adaptive Wavelet Transform / Proceedings of SPIE. V. 3164. San Diego. CA. USA. 27 July — 1 August 1997. P. 279–290.
61. *Yiou P., Sornette D. and Chil M.* Data–adaptive wavelets and multi–scale SSA / Electronic preprint in Internet: http://arXiv.org/chao-dyn/9810034, 29 October 1998.
62. *Boashash B.* Time-frequency signal analysis. In: Advances in spectrum analysis and array processing. / Eds by S. Haykin. NJ: Prentice–Hall, Englewood Cliffs. 1990. P. 418–517.
63. *Qian S. and Chen D.* Joint Time-Frequency Analysis. — Prentice Hall, 1996.
64. *Cohen L.* Time-Frequency Analysis. — Prentice-Hall, 1995.
65. *Jance C.P. and Kaizer A.* Time–frequency distributions of loud–speakers: the application of the Wigner distribution // J. Audio Engrg. Soc. 1983. V. 37. P. 198. P. 418–517.
66. *Flandrin P.* Some aspects of non-stationary signal processing with emphases on time-frequency and time-scale methods / In: Wavelets. Eds J.M. Combes, A. Grossman, Ph. Tchamitchian. — Berlin: Springer-Verlag, 1989. P. 68.
67. *Wirtki K.* El-Nino — the dynamic response of the equatorial Pacific ocean to atmospheric forcing // J. Phys. Oceanogr. 1975. V. 5. P. 572.
68. *Haar A.* Zur Theorie der Ortogonalen Funktionensysteme. — Göttingen. 1909.
69. *Littlewood J. and Paley P.* Theorem on Fourier series and power series // Proc. London Math. Soc. 1937. V. 42, № 2. P. 52.
70. *Calderon A.P.* Intermediate spaces and interpolation, the complex method // Stud. Math. 1964. V. 24. P. 113.
71. *Morlet J.* In: Issues in Acoustic Signal-Image Processing and Recognition / Ed by C.H. Chen. — Berlin: Springer-Verlag, 1983. P. 223.

72. *Фу К.* Последовательные методы в распознавании образов и обучении машин. — М.: Наука, 1971.
73. *Кузнецов С.П.* Динамический хаос. — М.: Физматлит, 2001.
74. *Rössler O.E.* An equation for continious chaos // Phys. Letters. V. 57A. 1976. P. 397.
75. *Takens F.* Detecting strange attractors in dynamical systems and turbulence. / In: Lectures Notes in Mathematics, Warwick 1980 / Eds Rand D. and Young L.-S. — N.Y.: Springer-Verlag, 1981. P. 366.
76. *Manneville P. and Pomeau Y.* Different ways to turbulence in dissipative dynamical system // Physica. 1980. V. 1D. P. 219.
77. *Manneville P. and Pomeau Y.* Intermittent transition to turbulence in dissipative dynamical system // Comm. Math. Phys. 1980. V. 74. P. 189.
78. *Lorenz E.N.* Determenistic nonpereodical flow // J. Atmos. Sci. V. 20. 1963. P. 130.
79. *Manneville P. and Pomeau Y.* Intermittency and the Lorenz model // Phys. Lett. 1979. V. 75A. P. 1.
80. *Шустер Г.* Детерминированный хаос. — М.: Мир, 1988.
81. *Берже П.*, *Помо И.*, *Видаль К.* Порядок в хаосе. О детерминистическом подходе к турбулентности. — М.: Мир, 1991.
82. *Короновский А.А.*, *Храмов А.Е.* Об эффективном анализе перехода к хаосу через перемежаемость с помощью вейвлетного преобразования // Письма в ЖТФ. 2001. Т. 27, № 1. С. 3.
83. *Короновский А.А.*, *Храмов А.Е.* Введение в непрерывный вейвлетный анализ для специалистов в области нелинейной динамики. Ч. II // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2002. Т. 10, № 1/2. С. 3.
84. *Астафьева Н.М.*, *Сонечкин Д.М.* Мультимасштабный анализ индекса Южного Колебания // ДАН. 1995. Т. 344, № 4. С. 539.
85. *Швед Г.М.* Циркуляция атмосферы // Соросовский Образовательный Журнал. 1997.
86. *Rayner N.A.*, *Horton E.B.*, *Parker D.E.*, *Folland C.K. and Hackett R.B.* Version 2.2 of the global sea–ice and sea surface temperature data set, 1903–1994. / Tech. Rep., CRTN 74, Hadley Centre for Climate Prediction and Research. 1996.
87. *MacKenzie D.* How the Pacific drains the Nile // New Scientist. 1987. April 16. P. 16.
88. *Wang Shaowu.* Reconstruction of El-Niño event chronology for the last 600 years period // Acta Meteorologica Sinica. 1992. V. 6, № 1. P. 47.
89. *Hudgins L.*, *Friehe C.A. and Mayer M.E.* Wavelet transforms and atmospheric turbulence // Phys. Rev. Lett. 1993. V. 71. P. 3279.

90. *Lau K.-M. and Weng H.-Y.* Climate signal detection using wavelet transform: How to make a time series sing // Bulletin of the American Meteorological Society. 1995. V. 76. P. 2391.

91. *Fournier A.* Wavelet analysis of observed geopotential and wind: Blocking and local energy coupling across scales / SPIE Proceedings. 1996. V. 2825. Wavelet Applications in Signal and Image Processing IV / Eds M.A. Unser, A. Aldroubi and A.F. Laine. 6–9 August 1996. Denver. CO.

92. *Fournier A.* Wavelet representation of lower-atmospheric long nonlinear wave dynamics, governed by the Benjamin-Davis-Ono-Burgers equation / SPIE Proceedings. 1995. V. 2491. Wavelet Applications II / Eds Harold H. Szu, 17–21 April 1995. Orlando, FL. Part 2. P. 672.

93. *Liu P.-C.* Wavelet spectrum analysis and ocean wind waves / Wavelets in Geophysics. E. Foufoula-Georgiou and P. Kumar, Eds. — Academic Press, 1994. P. 151–166.

94. *Fournier A. and Stevens D.E.* Wavelet multiresolution analysis of numerically simulated 3d radiative convection / SPIE Proceedings. 1996. V. 2762. Wavelet Applications III / Eds Harold H. Szu. 8–12 April 1996. Orlando. FL; P. 642.

95. *Стаховский И.Р.* Вейвлетный анализ временны́х сейсмических рядов // ДАН. 1996. Т. 350, № 3. С. 393.

96. *Сонечкин Д.М.*, *Даценко Н.М.*, *Иващенко Н.Н.* Новый способ экстраполяции хаотических временны́х рядов посредством вейвлетов с приложением к динамике климата. / Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1996. Т. 4, № 4,5. С. 108.

97. *Bolton E.W.*, *Maasch K.A. and Lilly J.M.* A wavelet analysis of Pio–Pleistocene climate indicators: A new view of periodicity evolution // Geophys. Res. Letters. 1995. V. 22. P. 2753.

98. *Chao B.F. and Naito I.* Wavelet analysis provides a new tool for studying earth's rotation // EOC. 1995. V. 76. P. 161.

99. *Даценко Н.М.*, *Сонечкин Д.М.* Вейвлетный анализ временны́х рядов и динамика атмосферы // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1993. Т. 1, № 1,2. С. 3.

100. *Baliunas S.*, *Frick P.*, *Sokoloff D. and Soon W.* Time scales and trends in the Central England temperature data (1659–1990) // Geophysical Research Letters. 1997. V. 24, № 11. P. 1351.

101. *Wang B.* Interdecadal changes in El Niño onset in the last four decades // J. Climate. 1995. V. 8. P. 267.

102. *Wang Y.* Temporal structure of the Southern Oscillation as revealed by waveform and wavelet analysis // J. Climate. 1996. V. 9. P. 1586.

103. *Weng H.-Y. and Lau K.-M.* Wavelets, period doubling, and time–frequency localization with application to organization of convection over the tropical western Pacific // J. Atmos. Sci. Vol. 51. 1994. P. 2523.

104. *Малахов А.Н.* Кумулятивный анализ негауссовых случайных процессов и их преобразований. — М.: Сов. радио, 1978.
105. *Nicias C.L. and Raghuveer M.R.* Bispectrum estimations: a digital signal processing framework // Proc. IEEE. 1987. V. 75, № 7. P. 869.
106. *Mendel J.M.* // Proc. IEEE. 1991. V. 79, № 3. C. 278.
107. *Haykin S.* Nonlinear methods of spectral analysis. — N.Y.: Springer-Verlag, 1979.
108. *Герман В.Х.*, *Левиков С.П.*, *Цвецинский А.С.* Биспектральный анализ колебаний уровня моря // Метеорология и гидрология. 1980. № 11. С. 63.
109. *Helland K.N.*, *Itsweire E.C. and Lii K.S.* A program for computation of bispectra with application to spectral energy transfer in fluid turbulence // Adv. Eng. Software. 1985. V. 7, № 1. C. 22.
110. *Helland K.N.*, *Lii K.S. and Rosenblatt M.* Bispectra of atmospheric and wind tunnel turbulence. In: Applications of Statistics / Eds by P.R. Krishnaiah. — N.Y.: North Holland, 1977. P. 223.
111. *Helland K.N.*, *Lii K.S. and Rosenblatt M.* Bispectra and energy transfer in grid-generated turbulence. In: Developments in Statistics. V. 2 / Eds by P.R. Krishnaiah. — N.Y.: Academic Press, 1978. P. 123.
112. *Kim Y.C. and Powers E.J.* // Phys. Fluids. 1978. V. 21, № 8. P. 1452.
113. *Ritz Ch.P.*, *Powers E.J. and Bengtson R.D.* Experimental Measurement of Three-Wave Coupling and Energy Cascading // Phys. Fluids. 1989. V. B1, № 1. P. 153.
114. *Ritz Ch.P.*, *Powers E.J.*, *Rhodes T.L.*, *Bengtson R.D.*, *Gentle K.W.*, *Hong Lin*, *Phillips P.E.*, *Wootton A.J.*, *Brower D.L.*, *Luhmann N.C.*, *Peebles W.A.*, *Schoch P.M. and Hickok R.L.* Advanced Plasma Fluctuation Analysis Techniques and Their Impact on Fusion Research // Rev. Sci. Instrum. 1988. V. 59, № 8. P. 1739.
115. *Huber P.J.*, *Kleiner B.*, *Gasser T. and Dumermuth G.* Statistical methods for investigation phase relations in stationary stochastic processes // IEEE Trans. Audio Electroacoust. 1971. V. AU-19. P. 78.
116. *van Milligen B.Ph.*, *Hidalgo C. and Sánchez E.* Nonlinear phenomena and intermittency in plasma turbulence // Phys. Rev. Lett. V. 74, № 3 1995. P. 395.
117. *van Milligen B.Ph.*, *Sánchez E.*, *Estrada T.*, *Hidalgo C.*, *Brañas B.*, *Carreras B. and Carcía L.* Wavelet bicoherence: A new turbulence analysis tool // Phys. Plasmas. 1995. V. 2, № 8. P. 3017.
118. *van Milligen B.Ph.*, *Sánchez E.*, *Estrada T.*, *Hidalgo C.*, *Carreras B. and Carcía L.* Investigation of turbulence with wavelet bicoherence // Proceedings of 22th European Conference of Control Fusion and Plasma Physics. — Bournemouth, 1995. V. 19C, Part IV, E.P.S. P. 165.
119. *Рабинович М.И.*, *Трубецков Д.И.* Введение в теорию колебаний и волн. — М.-Ижевск: НИЦ Регулярная и хаотическая динамика, 2000.

120. *Kim Y.C. and Powers E.J.* Digital bispectral analysis and its applications to nonlinear wave interactions. IEEE Trans. Plasma Sci. 1979. V. PS-7. P 120.

121. *Kim Y.C., Beall J.M. and Powers E.J.* Bispectrum and nonlinear wave coupling // Phys. Fluids. 1980. V. 23, № 2. C. 258.

122. *Press W.H., Teukolsky S.A., Vetterling W.T. and Flannery B.P.* Numerical Recipes in FORTRAN: The Art of Scientific Computing. — Cambridge University Press, 1986, 1992.

123. *Qiu L.-J., Er M.H.* Wavelet spectrogram of noisy signals // Int. J. Elec. 1995. V. 79. P. 665.

124. *Gilman D.L., Fuglister E.J., Mitchell J.R.* On the power spectrum of «red noise» // J. Atmos. Sci. 1963. V. 20. P. 182.

125. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров. — М.: Наука, 1973.

126. *Percival D.P.* On estimation of the wavelet variance // Biometrika. 1995. V. 82. P. 619.

127. *Kestin T.A., Karoly D.J., Yano J.-I. and Rayner N.* Time-frequency variability of ENSO and stochastic simulations // J. Climate. 1998.

128. *Spiegel M.R.* Schaum Outline of Theory and Problems of Probability and Statistics. — McGraw-Hill, 1975.

129. *Dömötör Á.* Disturbance separation by wavelet identification / Proc. of the 6th International Specialist Workshop on Nonlinear Dynamics of Electronic Systems. Budapest. 16–18 July 1998. Hungary. P. 207–210.

130. High Power Microwave Electronics / Eds Granatstein V.L., Alexeff I. — Boston: Artech Hourse, 1987.

131. *Кузелев М.В., Рухадзе А.А.* Электродинамика плотных электронных пучков в плазме. — М.: Наука, 1990.

132. *Brandt H.E.* The turbutron // IEEE Trans. Plasma Sci. 1985. V. PS-13, № 6. P. 513.

133. *Woo W., Benford J., Fittingoff D., Harteneck B., Price D., Smith R. and Sze H.* Phase locking of high-power microwave oscillators // J.Appl.Phys. 1989. V. 65, № 2. P. 861.

134. *Hramov A.E.* Influence of external action on chaotic dynamics of virtual cathode oscillations // Proceedings of 5th International Specialist Workshop on Nonlinear Dynamics of Electronic Systems (NDES'97) (June 26–27 1997, Moscow, Russia). — Moscow, 1997. P. 443–448.

135. *Anfinogentov V.G. and Hramov A.E.* Virtual cathode oscillation driven by the external signal / Proceedings of 6th International Specialist Workshop on Nonlinear Dynamics of Electronic Systems (NDES'98) (July 16–18, 1998, Budapest, Hungary). — Budapest: 1998. P. 307–310.

136. *Hramov A.E. and Rempen I.S.*Investigation of generation characteristic of high power microwave virtual cathode generator with input

cavity / Proceedings o Int. Vacuum Electron Source Conference (IVESC'2002) (July 15–19, 2002, Saratov, Russia). — Saratov, 2002. P. 379–381.

137. *Привезенцев А.П.*, *Саблин Н.И.*, *Филипенко Н.М.*, *Фоменко Г.П.* Нелинейные колебания виртуального катода в триодной системе // Радиотехника и электроника. 1992. Т. 37, Вып. 7. С. 1242.

138. *Привезенцев А.П.*, *Фоменко Г.П.* Сложная динамика потока заряженных частиц с виртуальным катодом // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1994. Т. 2, № 5. С. 56.

139. *Анфиногентов В.Г.* Хаотические колебания в электронном потоке с виртуальным катодом // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1994. Т. 2, № 5. С. 69.

140. *Anfinogentov V.G.* Chaotic dynamics of electron beam with virtual cathode in the bounded system / In: the Proceedings of 11th International Conference on High-Power Particle Beams (BEAMS'96) (Prague, Czech Republic, 1996). — Prague, 1996. V. 1. P. 381.

141. *Трубецков Д.И.*, *Анфиногентов В.Г.*, *Рыскин Н.М.*, *Титов В.Н.*, *Храмов А.Е.* Сложная динамика электронных приборов СВЧ (нелинейная нестационарная теория с позиций нелинейной динамики) // Радиотехника. 1999. Т. 63, № 4. С. 61.

142. *Анфиногентов В.Г.* Взаимодействие когерентных структур и хаотическая динамика в электронном потоке с виртуальным катодом // Письма в ЖТФ. 1995. Т. 21, Вып. 8. С. 70.

143. *Храмов А.Е.* Хаос и образование структур в электронном потоке с виртуальным катодом в ограниченном пространстве дрейфа // Радиотехника и электроника. 1999. Т. 44, № 5. С. 551.

144. *Анфиногентов В.Г.*, *Храмов А.Е.* К вопросу о механизме возникновения хаотической динамики в вакуумном СВЧ генераторе на виртуальном катоде // Известия вузов. Радиофизика. 1998. Т. XLI, № 9. С. 1137.

145. *Анфиногентов В.Г.*, *Храмов А.Е.* Исследование колебаний в электронном потоке в виркаторе и виртоде // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. Т. 7, № 2,3. 1999. С. 33.

146. *Birdsall C.K. and Langdon A.B.* Plasma physics, via computer simulation. – N.Y.: McGraw-Hill, 1985.

147. *Свешников А.Г.*, *Якунин С.А.* Численные модели бесстолкновительной плазмодинамики // Математическое моделирование. 1989. Т. 1, № 4. С. 1.

148. *Храмов А.Е.* Математическая модель виркатора на пролетном токе / В сб.: Труды седьмой межвузовской конференции «Математическое моделирование и краевые задачи» (28–30 мая 1997, Самара, Россия), Т. 2. Самара: 1997, С. 94.

149. *Диденко А.Н.*, *Ращиков В.И.* Генерация мощных СВЧ-колебаний в системах с виртуальным катодом // Физика плазмы. 1992. Т. 18. С. 1182.

150. *Диденко А.Н.* Механизм генерации мощных СВЧ-колебаний в виркаторе // ДАН СССР. 1991. Т. 321, № 4. С. 727.

151. *Кислов В.Я.*, *Мясин Е.А.*, *Залогин Н.Н.* О нелинейной стохастизации колебаний в электронноволновом генераторе с задержанной обратной связью // Радиотехника и электроника. 1979. V. 25. С. 2160.

152. *Кислов В.Я.* Теоретический анализ шумоподобных колебаний в электронноволновых система и автогенераторах с запаздыванием. Лекции по электронике СВЧ и радиофизике (5-я зимняя школа-семинар, Саратов,1981). — Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1981. С. 78.

153. *Кузнецов С.П.* Сложная динамика генератора с запаздывающей обратной связью // Известия вузов. Радиофизика. 1982. Т. 25. С. 1410.

154. *Lumley J.L.* The structure of ingomogeneous turbulent flows. In: the Atmospheric Turbulence and Radio Wave Propagation: Proc. of the Int. Colloquim / Ed. by A.M. Yaglom and V.I. Tatarsky. — Moscow: Nauka, 1967. P. 166.

155. *Ватанабе С.* Разложение Карунена–Лоэва и факторный анализ. Теория и приложения. В кн: Автоматический анализ сложных изображений / Под. ред. Э.М. Бравермана. — М.: Мир, 1969. С. 310.

156. *Aubry N.*, *Holmes P.*, *Lumley J. and Stone E.* Application of dynamical system theory to coherent structures in the wall region // Physica D. 1989. V. 37. P. 1.

157. *Незлин М.В.* Динамика пучков в плазме. — М.: Энергоиздат, 1982.

158. *Pierce J.* Limiting currents in electron beam in presence of ions // J.Appl.Phys. 1944. V. 15. P. 721.

159. *Блиох Ю.П.*, *Магда И.И.*, *Нейстетер С.И.*, *Прокопенко Ю.В.* Исследование частотного спектра одномерной СВЧ системы на виртуальном катоде // Физика плазмы. 1992. Т. 18, № 9. С. 1191.

160. *Анфиногентов В.Г.*, *Храмов А.Е.* Влияние неоднородности ионного фона на частоту колебаний виртуального катода // Письма в ЖТФ. 1998. Т. 24, № 21. С. 74.

161. *Анфиногентов В.Г.*, *Храмов А.Е.* Нелинейные явления в потоке со сверхкритическим током в неоднородном ионном фоне // Известия РАН, сер. физич. 1998. Т. 62, № 12. С. 2428.

162. *Храмов А.Е.*, *Короновский А.А.*, *Левин Ю.И.* Исследование процессов структурообразования в электронном пучке с виртуальным катодом с помощью вейвлетной бикогерентности // Письма в ЖТФ. 2002. Т. 28, № 13. С. 57.

163. *Короновский А.А.*, *Храмов А.Е.* Исследование когерентных структур в электронном пучке со сверхкритическим током с помощью вейвлетной бикогерентности // Физика плазмы. 2002. Т. 28, № 8. С. 722.

164. *Matsumoto H., Yokoyama H. and Summers D.* Computer simulation of the chaotic dynamics of the Pierce beam-plasma system // Phys. Plasmas. 1996. V. 3, № 1. C. 177.

165. *Ахромеева Т.С., Курдюмов С.П., Малинецкий Г.Г., Самарский А.А.* Нестационарные структуры и диффузионный хаос. — М.: Наука, 1992.

166. *Trubetskov D.I., Mchedlova E.S., Anfinogentov V.G., Ponomarenko V.I., Ryskin N.M.* Nonlinear waves, chaos and pattern formation in microwave electronics // CHAOS. 1996. V. 6, № 3. P. 358.

167. *Привезенцев А.П., Фоменко Г.П., Филипенко Н.М.* Колебания электронного потока в плоском пролетном промежутке // ЖТФ. 1981. Т. 51, № 6. С. 1161.

168. *Анфиногентов В.Г., Храмов А.Е.* Влияние распределенной обратной связи на хаотические колебания виртуального катода // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. Т. 6, № 1. 1998. С. 9.

169. *Frick P., Beck R., Berkhuijsen E.M. and Patrickeyev I.* Scaling and correlation analysis of galactic images // Mon. Not. R. Astron. Soc. 2001.

170. *Frick P., Galyagin D., Hoyt D.V., Nesme-Ribes E., Schatten K.H., Sokoloff D. and Zakharov V.* Wavelet analysis of solar activity recorded by sunspot groups // Astron. Astrophys. 1997. V. 328. P. 670.

171. *Nesme-Ribes E., Frick P., Sokoloff D., Zakharov V., Vigoroux A. and Laclar F.* Wavelet analysis of the Maunder minimum as recorded in solar diameter data // Comptes Rendus Acad. Sci. (Paris). 1995. V. 321, Series Iib. P. 525.

172. *Frick P., Nesme-Ribes E., Sokoloff D., Galyagin D., Hoyt D., Laclare F., Ribes J.-C., Schatten K., Vigouroux A. and Zakharov V.* Wavelet analysis of solar activity recorded by sunspot groups and solar diameter data / SOLERS22 1996 Workshop. National Solar Observatory at Sacramento Peak. Sunspot. New Mexico. 17–21 June 1996.

173. *Hoyt D.V., Schatten K.H. and Nesme-Ribes E.* // Geophys. Res. Let. 1994. V. 21. P. 2067.

174. *Hoyt D.V. and Schatten K.H.* // Solar Phys. 1992. V. 138. P. 3877.

175. *Dose V., Venus G. and Zome H.* Wavelet analysis of fusion plasma transients // Phys. Plasmas. 1997. V. 4, № 2. P. 323.

176. *Heller M.V.A.P., Brasilio Z.A., Caldas I.L., Stöckel J. and Petržílka J.* Scrape-off layer intermittency in the CASTOR tokamak / Proceedings of 25th EPS Conference on Controlling Fusion and Plasma Physics. Praha, 29 June — 3 July. ECA 1998. V. 22C. P. 718.

177. *Сарксян К.А., Скворцова Н.Н., Харчев Н.К., Миллиген Б.Ф.* Структуры ионно-звуковой турбулентности в замагниченной плазме с током // Физика плазмы. 1999. Т. 25, № 4. С. 346.

178. *Vannucci M. and Lio P.* Wavelet analysis of biological sequences: applications to protein structure and genomics // Sankhya. Series B. 2001. V. 63. P. 218.

179. *Lio P. and Vannucci M.* Wavelet change-point prediction of transmembrane proteins // Bioinformatics. 2000. V. 16. P. 376.

180. *Metin Akay.* Time Frequency and Wavelets in Biomedical Signal Processing. — Wiley-IEEE Press, 1997.

181. Mathematical Imaging: Wavelet Applications in Signal and Image Processing IX / Proceedings of SPIE 4478. / Eds A.F. Laine, M.A. Unser, A. Aldroubi, 2001.

182. *Stefanovska A.*, *Bracic M.*, *Kvernmo H.* Wavelet analysis of oscillations in the peripheral blood circulation measured by laser Doppler technique // IEEE Trans. Biomed. Eng. 1999. V. 46. P. 1230.

183. *Joho S. Asanoi H.*, *Remah H.A.*, *Igawa A.*, *Kameyama T.*, *Nozawa T.*, *Umeno K.*, *Inoue H.* Time-varying specral analysis of heart rate and left ventricular pressure variability during balloon coronary occlusion in humans: a sympathoexicitatory response to myocardial ischemia // J. Am. Coll. Cardiol. 1999. V. 34. P. 1924.

184. *Kadambe S.*, *Murray R.*, *Boudreaux Barlets G.* Wavelet transform-based QRS complex detector // IEEE Trans. Biomed. Eng. 1999. V. 46. P. 838.

185. *Туровский Я.А.*, *Мишин В.В.*, *Битюцкая Л.А.*, *Киселева Е.В.*, *Яковлев В.Н.*, *Проскурин И.Н.* Вейвлетный анализ временны́х рядов вариабельности сердечного ритма // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2002. Т. 10, № 5.

186. *Unser M. and Aldroubi A.* A Review of Wavelets in Biomedical Applications // Proceedings of the IEEE. 1996. V. 84, № 4. P. 626.

187. *Kejser J.* Wavelet Based Approach to Numerical Solution of Nonlinear Partial Differential Equations / Ph.D. dissertation. Dept. Math., Univ. Colorado, Boulder, CO, 1995.

188. *Bertluzza S. and Naldi G.* A Wavelet Collacation Method for the Numerical Solution of Partial Differential Equations / Appl. Comput. Harmon. Anal. 1996. V. 3. P. 1.

189. *Zhiqiang Cai and Weinan E.* Hierarchical method for elliptic problems using wavelet // Communications on Applied Numerical Methods. 1992. V. 8. P. 829.

190. *Zakharov V.G.* Numerical simulation of Burgers' Equation by hierarchical wavelet bases / Proc. on The Second Int. Scientific School-Seminar «Dynamic and Stochastic Wave Phenomena». N.Novgorod–Moscow–N.Novgorod. 21–22 June 1994.

191. *Захаров В.Г.* Решение уравнения Бюргерса с использованием вейвлет-базисов // Математическое моделирование систем и процессов. 1995. № 3. С.24. — Пермь: изд-во ПГТУ.

192. *Rubinacci G. et al.* Interpolating Wavelets for the Solving of Maxvell Equations in the Time Domains // IEEE Trans. Magn. 1998. V. 34. P. 2775.
193. *Toupikov M.*, *Pan G. and El-Ghazaly S.M.* Global Modeling of Microwave Devices Using Wavelets / IEEE MTT-S Int. Microwave Symp. Dig. V. 1. Baltimore. MD. June 1998. P. 263–266.
194. *Goasguen S. and El–Ghazaly S.M.* Interpolating Wavelet Scheme toward Global Modeling of Microwave Circuits / IEEE MTT-S Int. Microwave Symp. Dig. V. 1. Boston. MA. June 2000. P. 375–378.
195. *Goasguen S.*, *Tomeh M.M. and El–Ghazaly S.M.* Electromagnetic and Semiconductor Device Simulation Using Interpolating Wavelets // IEEE Trans. Microwave Theory and Techniques. 2001. V. 49, № 12. P. 2258.

ОГЛАВЛЕНИЕ