

В. Л. БИДЕРМАН

# ТЕОРИЯ МЕХАНИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ

ДОПУЩЕНО  
МИНИСТЕРСТВОМ ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО  
СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ СССР  
В КАЧЕСТВЕ УЧЕБНИКА  
ДЛЯ СТУДЕНТОВ ВУЗОВ,  
ОБУЧАЮЩИХСЯ ПО СПЕЦИАЛЬНОСТИ  
«ДИНАМИКА И ПРОЧНОСТЬ МАШИН»

Дорогой  
Виктор Иванович  
от автора

21.2.80

Видю



МОСКВА «ВЫСШАЯ ШКОЛА» 1980

ББК 22.23  
Б59  
УДК 534

Рецензент — кафедра «Механика и процессы управления» Ленинградского политехнического института им. М. И. Калинина.

**Бидерман В. Л.**

Б 59 Теория механических колебаний: Учебник для вузов. — М.: Высш. школа, 1980. — 408 с., ил.

В пер.: 1р. 20 к.

В книге изложены основы теории колебаний линейных и нелинейных механических систем, а также применение общих методов к динамическому расчету машиностроительных конструкций, таких, как роторы турбомашин, системы виброизоляции и др. Рассмотрены колебания, вызываемые детерминированными и случайными переменными нагрузками, а также ударом или периодическим изменением параметров системы. Значительное внимание уделено численным методам расчета с применением ЦВМ.

Предназначается в качестве учебника для машиностроительных специальностей вузов.

**ВАДИМ ЛЬВОВИЧ БИДЕРМАН**

## **ТЕОРИЯ МЕХАНИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ**

Зав. редакцией К. И. Аношина

Редактор Н. Н. Ещенко

Переплет художника В. З. Казакевича

Художественный редактор Н. К. Гуторов

Технический редактор Л. А. Муравьева

Корректор Г. И. Кострикова

ИБ № 2108

Изд. № От-304 Сдано в набор 25.04.79. Подп. в печать 30.10.79. Т-18561. Формат 60×90/16. Бум. тип. № 2. Гарнитура литературная. Печать высокая. Объем 25,5 усл. печ. л. 22,93 уч.-изд. л. Тираж 10 000 экз. Зак. № 318. Цена 1 р. 20 к.

Издательство «Высшая школа»,  
Москва, К-51, Неглинная ул., д. 29/14

Ярославский полиграфкомбинат Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли,  
150014, Ярославль, ул. Свободы, 97.

Б  $\frac{30106-024}{001(01)-80}$  66—80

2105000000

531  
ББК 22.23

© ИЗДАТЕЛЬСТВО «ВЫСШАЯ ШКОЛА», 1980

*Посвящается  
150-летию Московского  
высшего технического училища  
имени Н. Э. Баумана (1830—1980)*

## **Предисловие**

Основой настоящей книги послужили лекции, читаемые в МВТУ им. Н. Э. Баумана студентам специальности «Динамика и прочность машин». Этим определяется направленность курса: автор стремился не только познакомить читателей с основными закономерностями теории механических колебаний, но и вооружить их современными методами решения практических задач. Автор надеется, что эта особенность книги сделает ее полезной как для студентов, изучающих предмет, так и для инженеров и научных работников, встречающихся с расчетом и анализом колебательных процессов.

В первых трех главах книги рассмотрены колебания линейных и нелинейных систем с одной степенью свободы, колебания систем с конечным числом степеней свободы, а также колебания стержней с распределенной массой. В этих главах задача об определении собственных частот и форм колебаний решается традиционными приемами, приводящими к алгебраическому или трансцендентному частотному уравнению.

Для сложных систем такой способ расчета связан с большими трудностями. Пути преодоления этих трудностей освещены в гл. IV книги. Первый путь, используемый при ориентировочных расчетах, состоит в предельном упрощении расчетной схемы и применении приближенных формул. Второй путь, особенно эффективный при проведении расчетов на вычислительных машинах, состоит в применении специальных численных методов. Рассмотрено несколько таких методов.

В книге также излагаются методы расчета колебаний пластин и оболочек, теория упругого удара, приведены краткие сведения об автоколебаниях и аэроупругих колебаниях. Уделено внимание теории случайных колебаний, которая находит большое применение в практике расчета конструкций.

Изложение методов теории колебаний сопровождается примерами их применения к анализу ряда прикладных задач. Более сложные технические задачи, имеющие самостоятельное значение, объединены в последней главе книги. Их изучение не требует предварительной проработки книги в целом. Так, теория виброизоляции и принципы вибрационного перемещения могут быть изучены сразу вслед за гл. I, колебания пружин, вращающихся валов и лопаток турбомашин — после гл. IV, а колебания дисков — после гл. V.

По сравнению с ранее изданной работой автора\* в настоящую книгу внесены существенные изменения. Развито изложение матричных методов расчета, включая метод конечных элементов. Более полно освещен расчет динамики оболочек, изложен метод осреднения для решения нелинейных задач. При анализе систем с вязким трением введена диссипативная функция Рэлея.

*Автор*

---

\* Прикладная теория механических колебаний. М., Высшая школа, 1972.



## ГЛАВА I

### КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ

Числом степеней свободы механической системы называется число координат, определяющих ее положение. Все реальные деформируемые тела обладают бесконечным числом степеней свободы, соответствующих всевозможным их деформированным состояниям. Однако в зависимости от характера изучаемого явления и требуемой точности можно ограничить число учитываемых в расчете степеней свободы, выбирая в качестве расчетной схемы реальной конструкции систему, обладающую несколькими или даже одной степенью свободы.

Закономерности, устанавливаемые в этой главе, для систем с одной степенью свободы, имеют большое значение, так как задачу о колебаниях системы с произвольным числом степеней свободы часто удается свести к ряду задач о колебаниях систем с одной степенью свободы (см. § 12 и 16).

#### § 1. РАСЧЕТНЫЕ СХЕМЫ И УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ

Ограничение числа учитываемых в расчете степеней свободы может быть выполнено различными способами. Часто в реальной конструкции можно выделить массивные элементы, деформацией которых можно пренебречь, и упругие элементы, массу которых можно не учитывать. В этом случае расчетная схема представляет собой ряд жестких массивных тел, соединенных упругими связями. Так, например, система, представленная на рис. 1.1,а, может рассматриваться как система с одной степенью свободы, если масса пружины мала по сравнению с массой груза, если нас не интересует поведение отдельных витков пружины, а груз может перемещаться только в вертикальном направлении.

Другим примером систем с одной степенью свободы может служить диск, закрепленный на упругом валике (рис. 1.1,б). Если масса валика пренебрежимо мала по сравнению с массой диска, а диск может перемещаться только поворачиваясь в своей плоскости вокруг оси валика,

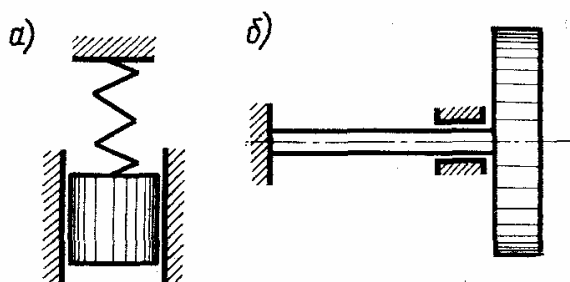


Рис. 1.1

то положение этой системы фиксируется единственной координатой — углом поворота диска.

На рис. 1.2 представлены системы с двумя степенями свободы. Положение грузов (рис. 1.2, а), масса которых значительно больше массы пружин, при движении в вертикальном направлении определяется двумя координатами:  $x_1$  и  $x_2$ . Системы, изображенные на рис. 1.2, б, в, могут рассматриваться как системы с двумя степенями свободы,

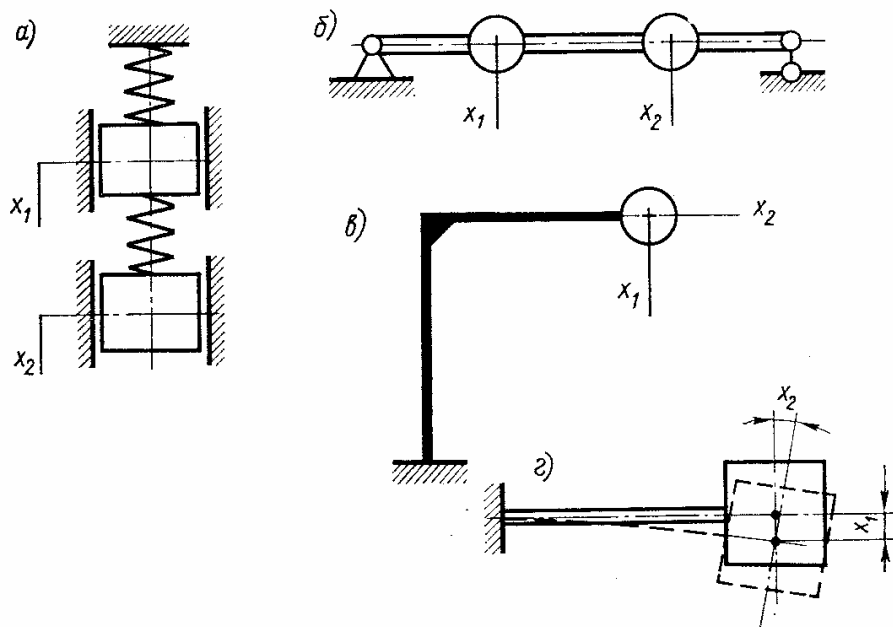


Рис. 1.2

если собственные массы балки и рамы малы по сравнению с массой колеблющихся грузов, а размеры грузов невелики, так что массы их можно считать сосредоточенными.

В случае больших поперечных размеров груза (рис. 1.2, в) положение его определяется смещением центра массы  $x_1$  и углом поворота груза  $x_2$ . Такая система имеет две степени свободы.

Выше были рассмотрены примеры, в которых ограничение числа степеней свободы достигалось путем пренебрежения массой одних частей системы (пружин, стержней) и деформируемостью других (грузы, диски). Другой способ состоит в том, что на основе тех или иных соображений заранее задается форма движения системы.

Так, например, при изгибе балки ее положение в данный момент, как и положение любого деформируемого тела, определяется бесчисленным множеством координат. Однако уже в сопротивлении материалов число степеней свободы балки ограничивается благодаря использованию гипотезы плоских сечений. Согласно этой гипотезе, положение всех точек балки определяется положением точек, лежащих на ее оси. Благодаря принятию гипотезы плоских сечений задача существенно упрощается (становится одномерной), но число степеней свободы остается бесконечным.

Дальнейшее упрощение достигается на основе предположения, что в процессе движения соотношения между прогибами различных точек

балки не изменяются. В этом случае принимают, что прогибы балки определяются равенством:

$$\xi(z, t) = x(t) f(z).$$

Здесь  $x(t)$  — неизвестная функция времени,  $f(z)$  — заданная функция абсциссы  $z$ . Так как перемещение любой точки балки определяется теперь единственной переменной  $x(t)$ , полученная расчетная схема имеет одну степень свободы (см. § 26 гл. IV).

Необходимо иметь в виду, что возможность схематизировать реальную упругую систему и представить ее в виде системы с одной, двумя и большим числом степеней свободы зависит не только от вида системы, но и от характера воздействующих на нее сил.

Так, например, если в системе, изображенной на рис. 1.1, *a*, оттянуть пружину в сторону, а затем отпустить, то возникнут ее боковые колебания, при которых нельзя пренебречь собственной массой пружины, как бы мала она ни была. При исследовании такого рода колебаний систему уже нельзя рассматривать как имеющую одну степень свободы.

Таким образом, выбор той или иной расчетной схемы может быть сделан только в результате изучения физической природы рассматриваемых явлений и в зависимости от требований, предъявляемых к точности расчета.

**Уравнения движения.** После того как на основе тех или иных соображений выбрана расчетная схема системы, имеющей одну, несколько или бесчисленное множество степеней свободы, необходимо для этой схемы составить уравнения движения. Уравнения движения составляются на основе методов, рассматриваемых в теоретической механике. Наиболее общими являются методы, основанные на применении вариационного принципа Гамильтона или уравнений Лагранжа II рода.

Для того чтобы воспользоваться этими методами, надо предварительно составить выражения для кинетической энергии  $T$  системы, ее потенциальной энергии  $U$  и виртуальной работы  $\delta W$ , воздействующих на систему неконсервативных сил\*. Величина  $U$  зависит от обобщенных координат  $q_r$  системы, а величина  $T$  — от координат  $q_r$  и обобщенных скоростей  $\dot{q}_r = dq_r/dt$ . Виртуальная работа может быть представлена в виде

$$\delta W = \sum_r Q_r \delta q_r, \quad (1.1)$$

причем обобщенные силы  $Q_r$  могут зависеть от координат, скоростей и времени.

Согласно принципу Гамильтона [32], наряду с действительным за-

---

\* Неконсервативные силы — это силы, работа которых зависит не только от начального и конечного состояний системы, но и от того, каким образом происходил переход от одного положения к другому. К неконсервативным силам относятся, в частности, силы трения и внешние возмущающие силы, зависящие от времени.

коном изменения обобщенных координат  $q_r(t)$  в интервале времени  $t_1 \leq t \leq t_2$  рассматривается варьированный закон  $q_r(t) = q_r(t) + \delta q_r(t)$ , причем на границах интервала  $t_1$  и  $t_2$  координаты не варьируются:  $t = t_1, t_2; \delta q_r = 0$ .

Установлено, что при этом выполняется равенство

$$\int_{t_1}^{t_2} \{\delta[T - U] + \delta W\} dt = 0. \quad (1.2)$$

Так как величины, входящие в подынтегральное выражение формулы (1.2), зависят от законов изменения во времени обобщенных координат, оказывается возможным определить эти законы методами вариационного исчисления. Так, в частности, для каждой из координат  $q_r(t)$  должно выполняться дифференциальное уравнение, аналогичное известному из вариационного исчисления уравнению Эйлера

$$\frac{\partial}{\partial q_r}(T - U) - \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial}{\partial \dot{q}_r}(T - U) \right] + Q_r = 0.$$

Учитывая, что потенциальная энергия зависит только от координат и не зависит от скоростей, получаем

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_r} + \frac{\partial U}{\partial q_r} = Q_r. \quad (1.3)$$

Уравнение (1.3) называется *уравнением Лагранжа II рода*.

Чаще всего для вывода уравнений движения упругих систем используют квазистатические способы, основанные на применении принципа Даламбера. В этом случае рассматривают равновесие системы с приложенными к ней силами инерции. При этом для составления уравнений динамического равновесия линейно-упругих систем естественно применить метод перемещений или метод сил строительной механики.

Рассмотрим некоторые простые примеры составления уравнений движения механических колебательных систем.

**Пример 1.** Составить дифференциальное уравнение свободного движения однородного жесткого стержня, шарнирно закрепленного верхним концом и удерживаемого в вертикальном положении спиральной пружиной (рис. 1.3). Стержень находится в поле сил тяжести. Трением пренебречь.

**Решение.** Воспользуемся уравнением Лагранжа II рода. Положение стержня в любой момент времени определяется углом  $\varphi$  отклонения его от вертикали (система с одной степенью свободы).

Кинетическая энергия стержня  $T = I\dot{\varphi}^2/2$ , где  $I$  — момент инерции стержня относительно точки подвеса.

Потенциальная энергия системы состоит из двух частей — потенциальной энергии деформации пружины  $U_1$  и потенциала силы тяжести  $U_2$ :  $U_1 = c\varphi^2/2$ , где  $c$  — жесткость пружины; потенциал  $U_2$  равен произведению веса стержня  $mg$  на высоту подъема его центра тяжести  $R(1 - \cos\varphi)$ :

$$U = U_1 + U_2 = c\varphi^2/2 + mgR(1 - \cos\varphi).$$

Находим:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = I\dot{\varphi}; \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) = I\ddot{\varphi}; \quad \frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0; \quad \frac{\partial U}{\partial \varphi} = c\varphi + mgR \sin \varphi.$$

Подставляя эти величины в уравнение (1.3) и учитывая, что  $Q = 0$ , получаем уравнение движения в виде

$$I\ddot{\varphi} + c\varphi + mgR \sin \varphi = 0. \quad (1.4)$$

Это же уравнение легко получить и на основе принципа Даламбера, приравняв нулю сумму моментов относительно точки подвеса сил инерции ( $-I\ddot{\varphi}$ ), момента ( $-c\varphi$ ), создаваемого пружиной, и момента силы тяжести ( $-mgR \sin \varphi$ ).

Заметим, что дифференциальное уравнение (1.4) является нелинейным; это затрудняет его решение. Если угол отклонения  $\varphi$  мал, то уравнение (1.4) можно упростить, разлагая  $\sin \varphi$  в ряд и учитывая только первый член ряда. Таким образом мы получим приближенное линейное уравнение, описывающее малые колебания системы:

$$I\ddot{\varphi} + (c + mgR) \varphi = 0. \quad (1.5)$$

**Пример 2.** Составить уравнение движения несжимаемой жидкости плотностью  $\rho$  в U-образной трубке постоянного сечения (рис. 1.4). Трением пренебречь.

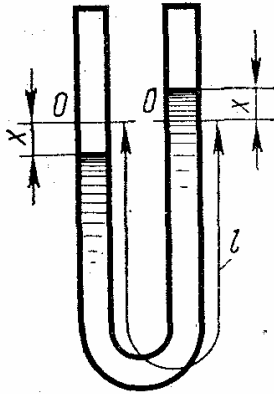


Рис. 1.4

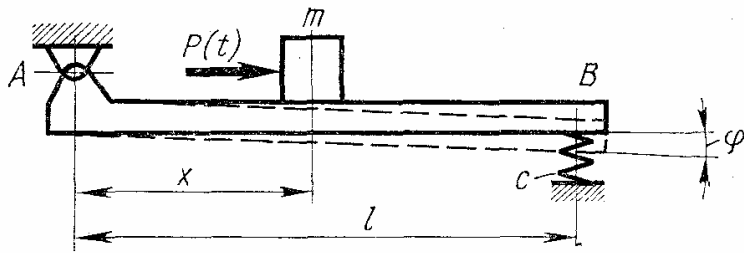


Рис. 1.5

**Решение.** В состоянии покоя уровень жидкости находится на линии  $OO$ . Если уровень жидкости в правой трубке поднимется на  $x$ , то в левой он на столько же понизится. При этом потенциальная энергия жидкости в поле сил тяжести увеличится на  $U = \rho F g x^2$ , где  $F$  — площадь сечения трубки;  $\rho F g x$  — вес жидкости, перемещаемой из левой трубки в правую.

Кинетическая энергия жидкости, движущейся в трубке со скоростью  $\dot{x}$ , составляет  $T = \rho F l \dot{x}^2 / 2$ .

Используя уравнение Лагранжа, получаем

$$\rho F l \ddot{x} + 2\rho F g x = 0.$$

**Пример 3.** По жесткой направляющей  $AB$  под действием силы  $P(t)$ , направленной параллельно  $AB$ , движется груз массой  $m$  (рис. 1.5). Левый конец направляющей закреплен шарнирно, правый оперт на пружину жесткостью  $c$ . Момент инерции массы направляющей относительно точки  $A$  равен  $I$ . Составить уравнения движения системы. Весовыми нагрузками пренебречь.

**Решение.** Положение системы в процессе движения определяется двумя координатами — углом наклона  $\varphi$  направляющей и расстоянием  $x$  центра тяжести груза от точки  $A$ . Составим выражение для кинетической энергии:

$$T = m [\dot{x}^2 + (x\dot{\varphi})^2] / 2 + I\dot{\varphi}^2 / 2.$$

Потенциальная энергия равна энергии деформации пружины  $U = c(\varphi l)^2/2$ .  
(Угол  $\varphi$  предполагается малым.)

Элементарная работа силы  $P(t)$   $\delta W = P(t)\delta x$ . Имеем:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}; \quad \frac{\partial T}{\partial x} = m\dot{x}\dot{\varphi}^2; \quad \frac{\partial U}{\partial x} = 0; \quad Q_x = P(t),$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = (I + mx^2)\dot{\varphi}; \quad \frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial \varphi} = cl^2\varphi; \quad Q_{\varphi} = 0.$$

Уравнения Лагранжа получают такой вид:

$$m\ddot{x} - m\dot{x}\dot{\varphi}^2 = P(t),$$

$$(I + mx^2)\ddot{\varphi} + 2mx\dot{x}\dot{\varphi} + cl^2\varphi = 0.$$

Эти уравнения легко получить и используя принцип Даламбера.

В примерах 1 и 2 рассмотрены системы с одной степенью свободы, в примере 3 — с двумя степенями свободы. В дальнейшем в пределах этой главы рассматриваются колебания систем только с одной степенью свободы. Эти системы наиболее просты, а закономерности, справедливые для них, справедливы и для более сложных систем. Как мы увидим далее, часто задача о колебаниях сложной системы с  $n$  степенями свободы может быть сведена к  $n$  задачам о колебаниях системы с одной степенью свободы.

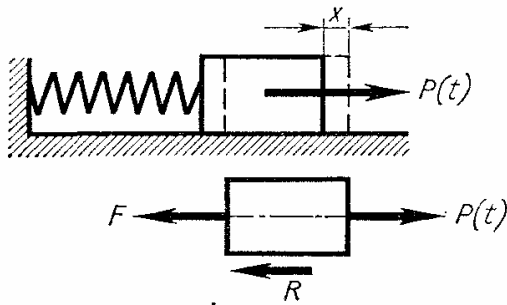


Рис. 1.6

Уравнение движения системы с одной степенью свободы включает в общем случае четыре члена — силу инерции, силу трения, силу упругости и возмущающую силу.

Рассмотрим, например, тело массой  $m$  (рис. 1.6), которое может перемещаться в заданном направлении и удерживается упругой связью. Уравнение движения этого тела имеет вид

$$-m\ddot{x} - R - F + P(t) = 0,$$

где  $\ddot{x}$  — ускорение груза;  $R$  — сила трения;  $F$  — сила упругости, действующая на тело со стороны упругого элемента;  $P(t)$  — возмущающая сила.

Представляет интерес рассмотрение свободных колебаний идеализированной системы при отсутствии сил трения. В этом случае  $P(t) = 0$ ,  $R = 0$ , система изолирована от окружающей среды и запас энергии в ней постоянен. Такие системы называются *консервативными*. Для консервативных систем с одной степенью свободы в любой момент времени силы инерции уравновешиваются силами упругости.

## § 2. СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ЛИНЕЙНОЙ КОНСЕРВАТИВНОЙ СИСТЕМЫ

В большинстве упругих систем при достаточно малых перемещениях сила упругости линейно зависит от перемещения  $x$ . Если начало отсчета смещения  $x$  выбирать так, что при  $x = 0$   $F = 0$ , то для линейной системы  $F = cx$ , где  $c$  — коэффициент упругости системы.

Итак, дифференциальное уравнение движения при свободных колебаниях консервативной линейной системы имеет вид

$$m\ddot{x} + cx = 0. \quad (2.1)$$

Вид уравнения не меняется при действии на систему постоянных сил (например, силы тяжести), если смещение тела отсчитывать от положения его статического равновесия. Действительно, уравнение движения тела массой  $m$  (см. рис. 1.1,а), находящегося под действием силы тяжести и совершающего свободные колебания, имеет вид

$$m\ddot{x} = mg - c(x + f_{\text{ст}}), \quad (2.2)$$

где  $f_{\text{ст}} = mg/c$  — удлинение пружины от силы тяжести груза.

Следовательно, слагаемые  $mg$  и  $cf_{\text{ст}}$  в уравнении (2.2) взаимно уничтожаются, и уравнение (2.2) совпадает с (2.1).

Уравнение движения одномассовой консервативной линейной системы, совершающей свободные крутильные колебания (см. рис. 1.1,б), записывают аналогично:

$$I\ddot{x} + cx = 0,$$

где  $I$  — момент инерции движущегося тела;  $x$  — угол поворота тела;  $c$  — крутильная жесткость упругой связи.

Как известно, решение уравнения (2.1) имеет вид

$$x = C_1 \cos pt + C_2 \sin pt, \quad (2.3)$$

где  $p = \sqrt{c/m}$  — угловая частота;  $C_1$  и  $C_2$  — постоянные интегрирования, определяемые из начальных условий.

Обозначив смещение и скорость в начальный момент  $t = 0$  соответственно через  $x_0$  и  $\dot{x}_0$ , после подстановки в уравнение (2.3) найдем:

$$C_1 = x_0, \quad C_2 = \dot{x}_0/p. \quad (2.4)$$

Выражение (2.3) можно записать в виде

$$x = A \sin(pt + \varphi). \quad (2.5)$$

Таким образом, движение груза при свободных колебаниях консервативной одномассовой линейной системы описывается синусоидальным законом с амплитудой колебаний  $A$ , периодом  $\tau$  и начальной фазой  $\varphi$  (рис. 2.1), при этом

$$A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} = \sqrt{x_0^2 + (\dot{x}_0/p)^2}, \quad (2.6)$$

$$\operatorname{tg} \varphi = C_1/C_2 = px_0/\dot{x}_0. \quad (2.7)$$

Период колебаний  $\tau$  определяется из условия  $p\tau = 2\pi$ , откуда

$$\tau = 2\pi/p = 2\pi \sqrt{m/c}. \quad (2.8)$$

Число колебаний в единицу времени (техническая частота)

$$\nu = 1/\tau = p/(2\pi). \quad (2.9)$$

Частота в герцах равна числу колебаний в секунду.

Часто в технической литературе частоту и период колебаний связывают со статической деформацией

$f_{\text{ст}}$  упругой связи, вызванной силой, равной весу груза,  $f_{\text{ст}} = mg/c$ .  
Имеют место следующие формулы:

$$p = \sqrt{g/f_{\text{ст}}}; \quad \nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{g/f_{\text{ст}}}; \quad \tau = 2\pi \sqrt{f_{\text{ст}}/g}. \quad (2.10)$$

Очевидно, что величина  $f_{\text{ст}}$  введена в формулы (2.10) формально и эти формулы справедливы независимо от того, совпадает или не совпадает направление силы тяжести с направлением движения груза.

Рассмотрим изменение энергии при свободных колебаниях линейной консервативной системы.

В любой момент времени система обладает запасом кинетической энергии груза  $T$  и потенциальной энергии деформации упругой связи  $U$ , которые равны:

$$T = 1/2 m \dot{x}^2 = 1/2 m A^2 p^2 \cos^2(pt + \varphi),$$

$$U = 1/2 c x^2 = 1/2 c A^2 \sin^2(pt + \varphi).$$

Так как  $p^2 = c/m$ , коэффициенты при квадратах синуса и косинуса в выражениях  $U$  и  $T$  одинаковы. Следовательно, полная энергия системы  $\Pi$  сохраняет постоянное значение:

$$\Pi = U + T = 1/2 c A^2 \quad (2.11)$$

$$U_{\text{max}} = T_{\text{max}}.$$

Изменение кинетической и потенциальной энергии во времени представлено на рис. 2.2.

Весьма удобным является изображение закона движения системы на фазовой плоскости (фазовый «портрет»). *Фазовым портретом движения* называется графическое изображение зависимости скорости движения от смещения. Уравнение движения (2.5) вместе с полученным из этого уравнения выражением для скорости

$$\dot{x} = Ap \cos(pt + \varphi)$$



представляет собой уравнение фазовой траектории в параметрической форме. Исключив параметр  $pt + \varphi$ , найдем

$$x^2 + \dot{x}^2/p^2 = A^2. \quad (2.12)$$

Уравнение (2.12) является уравнением эллипса с полуосями, равными  $A$  и  $pA$  (рис. 2.3). Верхняя полуплоскость соответствует возрастанию смещения, нижняя — убыванию.

Размеры эллипса зависят от начальных условий, определяющих амплитуду колебаний  $A$ . Все возможные свободные колебания линей-

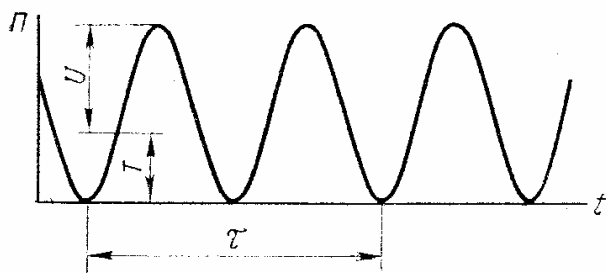


Рис. 2.2

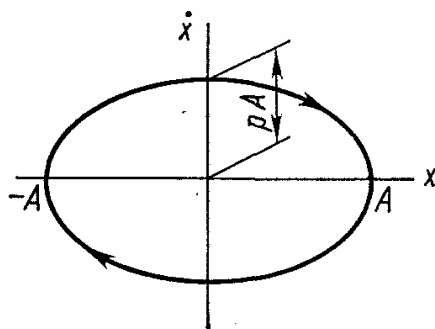


Рис. 2.3

ной консервативной системы изображаются семейством эллипсов, каждый из которых соответствует определенному уровню энергии. Чем больше амплитуда колебаний  $A$ , тем больше полная энергия системы. Если значения энергии откладывать по оси, перпендикулярной чертежу, получится поверхность (параболоид), нижняя точка которой соответствует нулевому энергетическому уровню. Точка, изображающая значения смещения и скорости в данный момент (изображающая точка), перемещается по горизонтали этой поверхности.

Заметим, что если изменить масштаб построения фазовой траектории и откладывать по оси абсцисс  $x$ , а по оси ординат —  $\dot{x}/p$ , то фазовая траектория (рис. 2.4) будет представлять собой окружность радиусом  $A$ , причем изображающая точка будет равномерно двигаться по этой окружности с угловой скоростью, равной угловой частоте колебания  $p$ .

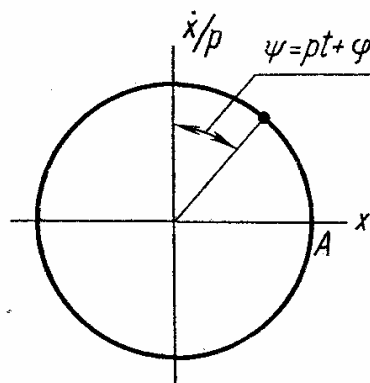


Рис. 2.4

При наличии рассеяния энергии изображающая точка перемещается по спирали, приближаясь к началу координат.

### § 3. ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ БЕЗ ТРЕНИЯ

В качестве модели системы с одной степенью свободы вновь рассмотрим тело массой  $m$ , удерживаемое упругой связью с жесткостью  $c$  (рис. 3.1). На тело действует переменная внешняя сила  $P(t)$ . В этом

случае уравнение движения груза имеет вид

$$m\ddot{x} + cx = P(t),$$

или после деления на  $m$

$$\ddot{x} + p^2x = P(t)/m, \quad (3.1)$$

Общее решение линейного неоднородного уравнения (3.1) равно сумме какого-либо частного его решения  $x_*$  и общего решения (2.3) однородного уравнения (2.1):

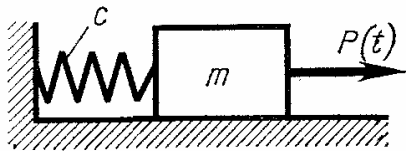


Рис. 3.1

$$x = x_* + C_1 \cos pt + C_2 \sin pt. \quad (3.2)$$

**Импульсивная нагрузка.** Для вычисления частного решения рассмотрим сначала воздействие на систему (рис. 3.1) импульсивной нагрузки. Пусть на неподвижную и недеформированную систему в течение бесконечно малого времени —  $\theta < t < 0$  действует бесконечно большая сила, так что импульс силы

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \int_{-\theta}^0 P dt = J$$

имеет конечное значение. В соответствии с теоремой импульсов тело получает за время действия импульса скорость  $v = J/m$ . Смещение груза за время действия импульса при  $\theta \rightarrow 0$  стремится к нулю. Таким образом, по окончании действия импульса при  $t = 0$  тело имеет нулевое смещение и скорость  $v$ .

Далее (при  $t > 0$ ) система совершает *свободные* колебания в соответствии с формулой (2.3). Начальные условия свободного движения определяются равенствами  $x_0 = 0$ ,  $\dot{x}_0 = v = J/m$ , и, следовательно [см. уравнение (2.4)], закон движения определяется зависимостью

$$x = (\dot{x}_0/p) \sin pt = [J/(mp)] \sin pt. \quad (3.3)$$

Введем специальное обозначение для закона движения системы под действием *единичного* импульса

$$Y(t) = [1/(mp)] \sin pt. \quad (3.4)$$

Функцию  $Y(t)$  можно назвать *реакцией системы на единичный импульс*.

**Возмущающая сила, изменяющаяся по произвольному закону.** Поскольку рассматриваемая система является линейной, для нее справедлив принцип суперпозиции. Это означает, что перемещение (в функции времени), вызываемое несколькими нагрузками, равно сумме перемещений, вызываемых каждой из нагрузок.

Пусть к системе, изображенной на рис. 3.1, приложена сила  $P(t)$ , меняющаяся по произвольному закону. Найдем частное решение уравнения движения, предполагая, что в начальный момент  $t = 0$  система

неподвижна и не деформирована. Произвольную нагрузку представим в виде суммы следующих один за другим бесконечно малых импульсов  $dJ = P(\vartheta)d\vartheta$  (рис. 3.2). Каждый из таких импульсов вызывает в момент  $t > \vartheta$  смещение

$$dx_* = P(\vartheta) d\vartheta Y(t - \vartheta),$$

где  $Y$  — реакция системы на единичный импульс.

Полное смещение в момент  $t$  равно сумме смещений, вызываемых всеми элементарными импульсами, приложенными при  $\vartheta < t$ . Иначе говоря,

$$x_*(t) = \int_0^t P(\vartheta) Y(t - \vartheta) d\vartheta. \quad (3.5)$$

Для рассматриваемой системы реакция на единичный импульс должна быть заменена ее значением [см. уравнение (3.4)] и тогда

$$x_* = \frac{1}{mp} \int_0^t P(\vartheta) \sin p(t - \vartheta) d\vartheta. \quad (3.6)$$

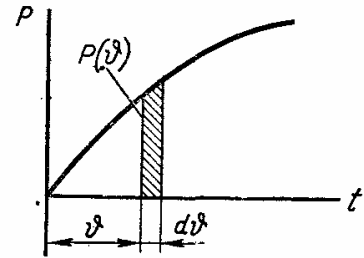


Рис. 3.2

Следует отметить, что область применения формулы (3.5), называемой интегралом Дюамеля, значительно шире, чем формулы (3.6), справедливой лишь для рассмотренной простейшей одномассовой системы. При выводе формулы (3.5) использовался только принцип суперпозиции. Поэтому зависимость (3.5) выражает частное решение для *любой линейной* системы через ее реакцию на единичный импульс.

Нетрудно проверить подстановкой, что выражение (3.6) в самом деле представляет собой частное решение неоднородного дифференциального уравнения (3.1). При дифференцировании выражения (3.6) следует учесть, что  $t$  является верхним пределом интеграла и, кроме того, входит в подынтегральное выражение в качестве параметра. Поэтому производная  $dx_*/dt$  складывается из производной по верхнему пределу и производной по параметру:

$$x_* = \frac{1}{mp} \int_0^t P(\vartheta) \sin p(t - \vartheta) d\vartheta,$$

$$\frac{dx_*}{dt} = \frac{1}{mp} P(t) \sin p(t - t) + \frac{1}{m} \int_0^t P(\vartheta) \cos p(t - \vartheta) d\vartheta =$$

$$= \frac{1}{m} \int_0^t P(\vartheta) \cos p(t - \vartheta) d\vartheta,$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2x_*}{dt^2} &= \frac{1}{m} P(t) \cos p(t - t) - \frac{p}{m} \int_0^t P(\vartheta) \sin p(t - \vartheta) d\vartheta = \frac{1}{m} P(t) - \\ &\quad - p^2 x_*. \end{aligned}$$

Подстановка последнего выражения в уравнение (3.1) обращает его в тождество.

Так как при  $t = 0$   $x_*(0) = 0$ ,  $\dot{x}_*(0) = 0$ , то постоянные  $C_1$  и  $C_2$  в выражении (3.2) связаны с начальными условиями движения теми же зависимостями (2.4), как и при свободных колебаниях. Поэтому при ненулевых начальных условиях перемещение в любой момент времени определяется выражением

$$x(t) = x_0 \cos pt + \frac{1}{p} \dot{x}_0 \sin pt + \frac{1}{pm} \int_0^t P(\vartheta) \sin p(t - \vartheta) d\vartheta.$$

В заключение отметим, что путем замены переменной интегрирования на  $t - \vartheta$  интеграл Дюамеля (3.5) может быть представлен также в виде

$$x_*(t) = \int_0^t P(t - \vartheta) Y(\vartheta) d\vartheta. \quad (3.7)$$

или после подстановки выражения (3.4)

$$x_*(t) = \frac{1}{pm} \int_0^t P(t - \vartheta) \sin p\vartheta d\vartheta. \quad (3.8)$$

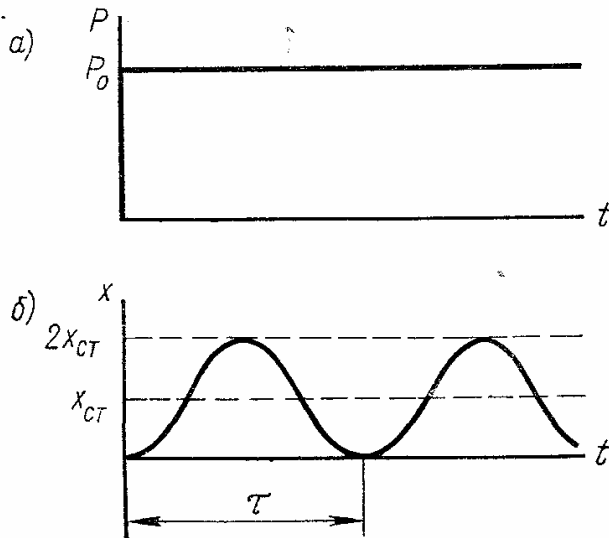


Рис. 3.3

**Внезапная нагрузка.** Пусть при  $t = 0$  к неподвижной и недеформированной системе прикладывается мгновенно возрастающая и в дальнейшем сохраняющая постоянное значение  $P_0$  нагрузка (рис. 3.3 а). Пользуясь выражением (3.7) и вынося постоянную силу  $P_0$  за знак интеграла, находим при  $t > 0$

$$x = P_0 \int_0^t Y(\vartheta) d\vartheta = P_0 Y_1(t).$$

Здесь введена функция

$$Y_1(t) = \int_0^t Y(\vartheta) d\vartheta,$$

которую можно назвать реакцией системы на внезапно приложенную единичную нагрузку. Для системы рис. 3.1

$$Y_1(t) = \int_0^t Y(\vartheta) d\vartheta = \int_0^t \frac{1}{mp} \sin p\vartheta d\vartheta = \frac{1}{mp^2} (1 - \cos pt) \quad (3.9)$$

и, следовательно, перемещение системы под действием внезапно приложенной нагрузки составляет

$$x = [P_0/(mp^2)](1 - \cos pt). \quad (3.10)$$

Так как  $mp^2 = c$  (жесткость упругой связи), то  $P_0/(mp^2) = x_{ст}$  представляет собой статическую деформацию упругой связи и из формулы (3.10) следует, что максимальное динамическое перемещение при внезапном приложении нагрузки вдвое больше статического. График зависимости  $x(t)$  приведен на рис. 3.3,б.

**Линейно возрастающая нагрузка.** Закон изменения нагрузки (рис. 3.4,а) задан формулой  $P(t) = kt$ . Если эта нагрузка прикладывается к неподвижной и недеформированной системе, то перемещения определяются формулой (3.7)

$$x = \int_0^t k(t - \vartheta) Y(\vartheta) d\vartheta = kY_2(t).$$

Здесь введено обозначение

$$Y_2(t) = \int_0^t (t - \vartheta) Y(\vartheta) d\vartheta$$

для функции, которую можно назвать *реакцией системы на линейно возрастающую нагрузку*.

Выполняя интегрирование по частям, нетрудно установить связь функции  $Y_2(t)$  с функцией  $Y_1(t)$ :

$$\begin{aligned} Y_2(t) &= \int_0^t (t - \vartheta) Y(\vartheta) d\vartheta = \left[ (t - \vartheta) \int_0^{\vartheta} Y(\vartheta_1) d\vartheta_1 \right]_0^t + \\ &+ \int_0^t \int_0^{\vartheta} Y(\vartheta_1) d\vartheta_1 d\vartheta = \int_0^t Y_1(\vartheta) d\vartheta. \end{aligned}$$

Итак, реакции линейной системы на единичный импульс  $[Y(t)]$ , на внезапно приложенную  $[Y_1(t)]$  и на линейно возрастающую нагрузку  $[Y_2(t)]$  связаны зависимостями

$$Y_1(t) = \int_0^t Y(\vartheta) d\vartheta, \quad Y_2(t) = \int_0^t Y_1(\vartheta) d\vartheta. \quad (3.11)$$

В частном случае системы, представленной на рис. 3.1,

$$Y_2(t) = \int_0^t \frac{1}{mp^2} (1 - \cos p\vartheta) d\vartheta = \frac{1}{mp^2} \left( t - \frac{1}{p} \sin pt \right). \quad (3.12)$$

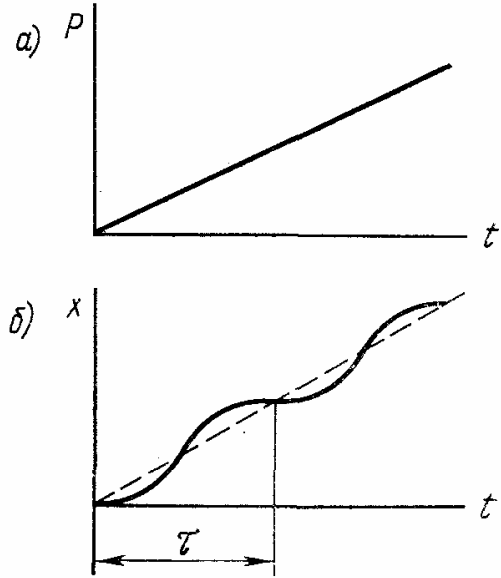


Рис. 3.4

Перемещения, вызываемые силой  $P(t) = kt$ , определяются при этом выражением

$$x = kY_2(t) = kt/(mp^2)[1 - \sin pt/(pt)] = P(t) c^{-1}[1 - \sin pt/(pt)].$$

Здесь первое слагаемое соответствует статическому перемещению, пропорциональному приложенной в данный момент нагрузке, второе слагаемое отражает влияние колебаний. График изменения перемещений показан на рис. 3.4, б.

**Выражение частного решения уравнения движения через реакции системы на внезапно приложенную и линейно возрастающую нагрузку**

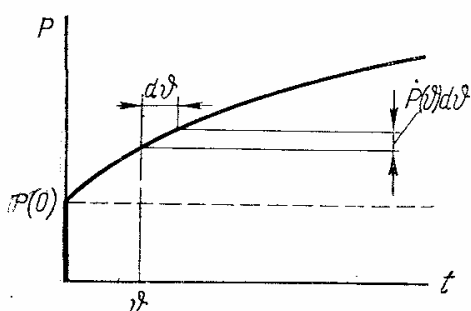


Рис. 3.5

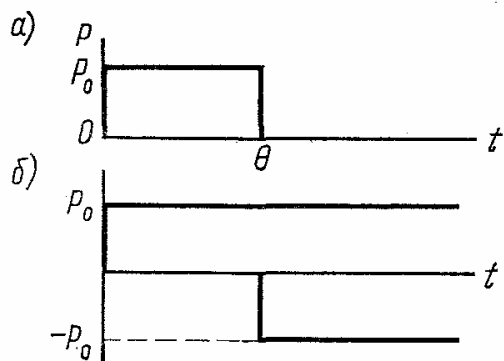


Рис. 3.6

ки. Наряду с формулами (3.5) и (3.7), в которые входит реакция системы на единичный импульс, закон вынужденного движения можно также выразить через функции  $Y_1(t)$  или  $Y_2(t)$ . Произвольную нагрузку  $P(t)$  можно представить не только как последовательность импульсов, но и как последовательность внезапно приложенных постоянных нагрузок (рис. 3.5). В момент времени  $t = 0$  прикладывается начальная нагрузка  $P(0)$ , а в момент  $\vartheta$  — бесконечно малая нагрузка  $dP = \dot{P}(\vartheta)d\vartheta$  ( $\dot{P}$  — скорость роста нагрузки). Используя реакцию системы на внезапно приложенную нагрузку  $Y_1$  и суммируя эффект всех ранее приложенных нагрузок, получаем в момент времени  $t$

$$x(t) = P(0)Y_1(t) + \int_0^t \dot{P}(\vartheta)Y_1(t - \vartheta) d\vartheta. \quad (3.13a)$$

Нетрудно убедиться в том, что наряду с формулами (3.5), (3.13a) справедлива и формула

$$x(t) = P(0)Y_1(t) + \dot{P}(0)Y_2(t) + \int_0^t \ddot{P}(\vartheta)Y_2(t - \vartheta) d\vartheta, \quad (3.13б)$$

в которой смещение выражается через реакцию системы на линейно возрастающую нагрузку.

Формулы (3.13a) и (3.13б) можно получить путем интегрирования по частям выражений (3.5) или (3.7) с учетом того, что функции  $Y$ ,  $Y_1$  и  $Y_2$  связаны между собой зависимостями (3.11).

Приведем два простых примера использования функций  $Y_1(t)$ ,  $Y_2(t)$  для расчета переходных процессов в линейной системе с одной степенью свободы.

1. Постоянная сила  $P_0$  воздействует на систему в течение времени  $0 < t < \theta$  (рис. 3.6, а).

Закон изменения нагрузки представим как внезапное приложение силы  $P_0$  при  $t = 0$  и внезапное приложение отрицательной силы  $-P_0$  при  $t = \theta$  (рис. 3.6, б). Первая из этих нагрузок (при  $t > 0$ ) вызовет перемещение

$$x_1 = P_0 Y_1(t),$$

а вторая (при  $t > \theta$ )

$$x_2 = -P_0 Y_1(t - \theta),$$

где  $Y_1(t) = c^{-1} (1 - \cos pt)$  — реакция системы на единичную нагрузку.

Таким образом, полное перемещение, вызванное обеими нагрузками, составит: при  $0 \leq t \leq \theta$

$$x = P_0 Y_1(t) = P_0 c^{-1} (1 - \cos pt),$$

при  $t \geq \theta$

$$\begin{aligned} x &= P_0 Y_1(t) - P_0 Y_1(t - \theta) = P_0 c^{-1} [\cos p(t - \theta) - \cos pt] = \\ &= 2P_0 c^{-1} \sin(p\theta/2) \sin p(t - \theta/2). \end{aligned}$$

Из полученных формул видно, что если время приложения нагрузки  $\theta$  превышает половину периода собственных колебаний ( $\theta > \pi/p$ ), то максимум перемещения  $x_{\max} = 2P_0/c = 2x_{\text{ст}}$  достигается еще во время действия нагрузки; если время действия нагрузки меньше полупериода собственных колебаний, то максимальное перемещение достигается уже после прекращения действия нагрузки. В этом случае

$$x_{\max} = 2P_0 c^{-1} \sin(p\theta/2) = x_{\text{ст}} 2 \sin(p\theta/2).$$

2. Нагрузка возрастает от нуля до  $P_0$  в течение времени  $\theta$  и затем сохраняет постоянное значение (рис. 3.7а).

Нагрузку рассматривают как сочетание двух линейно возрастающих:  $P_1 = P_0 t/\theta$ , прикладываемой начиная с  $t = 0$ , и  $P_2 = -P_0(t - \theta)/\theta$ , прикладываемой начиная с  $t = \theta$  (рис. 3.7, б).

Соответственно при  $0 \leq t \leq \theta$

$$x = [P_0/\theta] Y_2(t) = P_0 (mp^{3\theta})^{-1} (pt - \sin pt),$$

при  $t > \theta$

$$x = [P_0/\theta] [Y_2(t) - Y_2(t - \theta)] = P_0 (mp^{3\theta})^{-1} [p\theta - \sin pt + \sin p(t - \theta)].$$

Последнюю формулу представим в виде

$$x = x_{\text{ст}} [1 - 2 \cos p(t - \theta/2) \sin(p\theta/2)/(p\theta)].$$

Второе слагаемое в прямых скобках представляет собой отношение разницы между динамическим и статическим перемещениями к статическому. Максимальная величина этого отношения составляет

$$[(x - x_{\text{ст}})/x_{\text{ст}}]_{\max} = 2 \sin(p\theta/2)/(p\theta);$$

она тем меньше, чем больше время возрастания нагрузки в сравнении с периодом собственных колебаний.

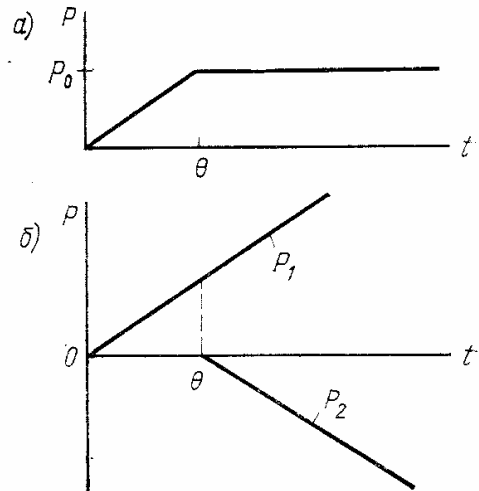


Рис. 3.7

В приведенных простых задачах можно было получить результат и не пользуясь методом наложения, однако при расчете нестационарных процессов в более сложных линейных системах этот метод обладает значительными преимуществами.

**Гармоническое возбуждение.** Поведение линейной системы без трения при гармонической возмущающей силе

$$P(t) = P_0 \cos \omega t,$$

где  $\omega$  — угловая частота изменения нагрузки, описывается уравнением движения

$$\ddot{x} + p^2 x = (P_0/m) \cos \omega t. \quad (3.14)$$

Решение этого уравнения можно получить, вычислив интеграл в формуле (3.6) при  $P(\vartheta) = P_0 \cos \omega \vartheta$ . Полученное в результате выражение представляет собой сумму колебаний с частотами  $p$  и  $\omega$ . Слагаемые, изменяющиеся с частотой собственных колебаний  $p$ , зависят от начальных условий.

В реальных системах свободные колебания с частотой  $p$  со временем затухают и через некоторое время устанавливаются не зависящие от начальных условий стационарные колебания с частотой возмущения  $\omega$ . Решение уравнения (3.14), отвечающее таким стационарным колебаниям, представим в виде

$$x = A \cos \omega t. \quad (3.15)$$

Подставляя это выражение в уравнение (3.14), получаем

$$-\omega^2 A \cos \omega t + p^2 A \cos \omega t = \frac{P_0}{m} \cos \omega t,$$

откуда амплитуда вынужденных колебаний

$$A = P_0/[m(p^2 - \omega^2)] = A_0 \beta, \quad (3.16)$$

где  $A_0 = P_0/(mp^2) = P_0/c$  — равновесная амплитуда, равная статической деформации упругой связи амплитудной силой  $P_0$ ;  $\beta = (1 - \omega^2/p^2)^{-1}$  — коэффициент усиления колебаний в связи с инерционностью системы (коэффициент динамичности).

Коэффициент  $\beta$  зависит от отношения частоты изменения возмущающей силы к частоте собственных колебаний системы. Эта зависимость графически представлена на рис. 3.8. Отрицательные значения  $\beta$  означают, что колебания системы происходят в противофазе с возмущающей силой, поэтому практическое значение имеют абсолютные значения этого коэффициента.

При частоте возмущения, равной частоте собственных колебаний системы, амплитуда вынужденных колебаний стремится к бесконечности. Это объясняется тем, что если колебания происходят с собственной частотой, то силы упругости уравниваются силами инерции при любом значении амплитуды колебаний. Внешняя возмущающая сила оказывается неуравновешенной.

Таким образом, в случае резонанса сделанное допущение о возмож-



ности рассматривать стационарные колебания является необоснованным и, чтобы изучить процесс развития колебаний, нужно рассмотреть решение уравнения движения в форме (3.6).

Так как при резонансе  $\omega = p$  и  $P(t) = P_0 \cos pt$ , получим (начальные условия предполагаются нулевыми)

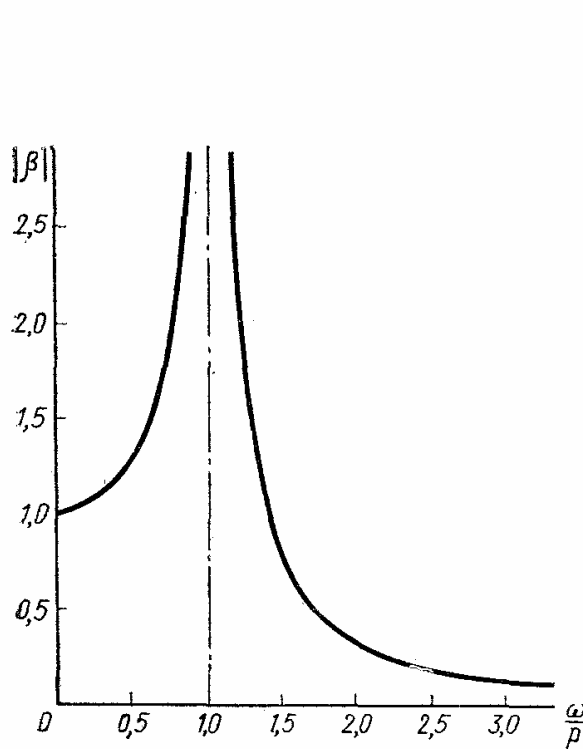


Рис. 3.8

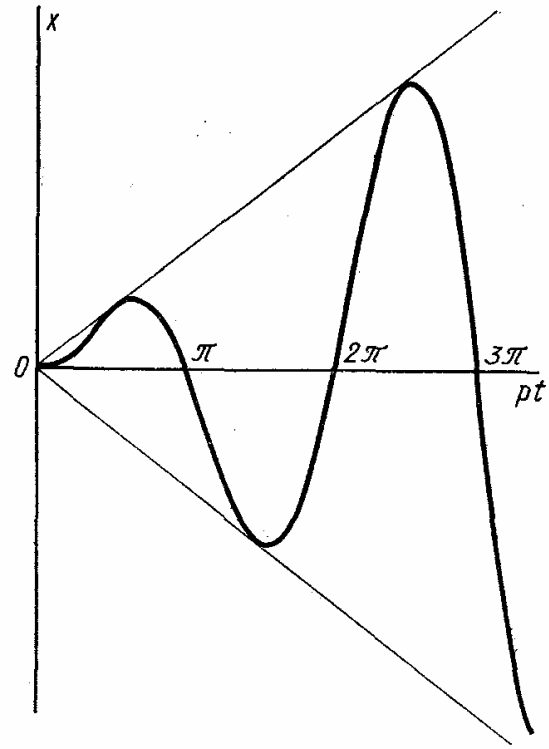


Рис. 3.9

$$\begin{aligned}
 x(t) &= \frac{P_0}{pm} \int_0^t \cos p\vartheta \sin p(t - \vartheta) d\vartheta = \\
 &= \frac{P_0}{pm} \left[ \sin pt \int_0^t \cos^2 p\vartheta d\vartheta - \cos pt \int_0^t \cos p\vartheta \sin p\vartheta d\vartheta \right] = \frac{P_0}{2pm} t \sin pt.
 \end{aligned}$$

Как видно из полученной формулы, колебания при резонансе не являются гармоническими, а размахи их растут пропорционально времени. График движения показан на рис. 3.9. Конечно, безграничное нарастание колебаний возможно лишь в рассматриваемой идеализированной линейной системе при отсутствии потерь. В реальных системах наличие потерь и проявление нелинейности при достаточно больших размахах колебаний приводит к ограничению амплитуд. Но и в реальных механических системах коэффициенты динамичности при резонансе оказываются настолько большими, что работа при режимах, близких к резонансному, как правило, недопустима.

**Негармоническое периодическое возбуждение.** Пусть внешняя сила, действующая на одномассовую систему, изменяется по некоторому произвольному, но периодическому закону (рис. 3.10) с периодом  $\theta$ .

В этом случае вынужденные установившиеся колебания могут быть рассчитаны двумя способами. Наиболее простой метод расчета состоит в том, что периодическая внешняя нагрузка представляется в виде ряда Фурье

$$P(t) = a_0 + a_1 \cos \omega t + a_2 \cos 2\omega t + \dots + \\ + b_1 \sin \omega t + b_2 \sin 2\omega t + \dots, \quad (3.17)$$

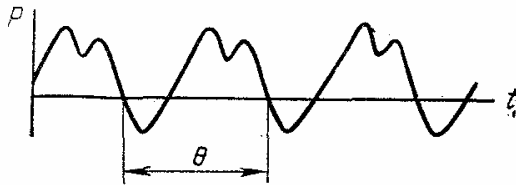


Рис. 3.10

где  $\omega$  — частота, соответствующая периоду  $\theta$  возмущающей силы,

$$\omega = 2\pi/\theta.$$

Коэффициенты разложения определяются по известным формулам теории рядов Фурье:

$$a_0 = \frac{1}{\theta} \int_0^\theta P(t) dt, \quad a_k = \frac{2}{\theta} \int_0^\theta P(t) \cos k\omega t dt, \\ b_k = \frac{2}{\theta} \int_0^\theta P(t) \sin k\omega t dt.$$

Смещение груза от действия силы  $P(t)$ , представленной в виде ряда (3.17), на основе принципа независимости действия сил равно сумме смещений, вызванных каждым из членов ряда и определяемых по формулам (3.15) и (3.16):

$$x = \frac{a_0}{c} + \frac{a_1}{c(1 - \omega^2/p^2)} \cos \omega t + \frac{a_2}{c(1 - 4\omega^2/p^2)} \cos 2\omega t + \dots + \\ + \frac{b_1}{c(1 - \omega^2/p^2)} \sin \omega t + \frac{b_2}{c(1 - 4\omega^2/p^2)} \sin 2\omega t + \dots \quad (3.18)$$

Амплитуда колебаний стремится к бесконечности при обращении в нуль знаменателя любого члена ряда, т. е. при  $\omega = p$ ;  $\omega = p/2$ ;  $\omega = p/3$  и т. д.

Таким образом, при негармоническом периодическом возбуждении резонанс возникает, когда частота любой  $k$ -й гармоники совпадает с собственной частотой колебаний системы:

$$k\omega = p (k = 1, 2, 3, \dots).$$

Не обязательно, конечно, осуществляются все резонансы. В разложении силы  $P(t)$  в ряд Фурье некоторые коэффициенты могут оказаться равными нулю; соответствующих гармоник не будет и в выражении для  $x$ .

Решение задачи о колебаниях под действием произвольной периодической нагрузки с помощью рядов Фурье целесообразно для выявления условий резонанса.

В случае, если нас интересует закон стационарного движения, целесообразен другой путь решения. Предположим, что нагрузка, дей-

ствующая на систему, меняется по некоторому периодическому закону (рис. 3.10). Выбрав произвольно начало отсчета времени, рассмотрим движение в течение одного периода  $\theta$  возмущающей силы. Общее решение уравнения движения можно записать в форме (3.6):

$$x = x_0 \cos pt + \dot{x}_0 \frac{1}{p} \sin pt + \frac{1}{mp} \int_0^t P(\vartheta) \sin p(t - \vartheta) d\vartheta.$$

Смещение  $x_0$  и скорость  $\dot{x}_0$  в начале отсчета времени определяются из условий периодичности движения:

$$x_{t=\theta} = x_0, \quad \dot{x}_{t=\theta} = \dot{x}_0. \quad (3.19)$$

Подставляя в эти условия выражение для  $x$ , получаем:

$$x_0(1 - \cos p\theta) - \dot{x}_0 \frac{1}{p} \sin p\theta = B_1, \quad (3.20)$$

$$x_0 p \sin p\theta + \dot{x}_0(1 - \cos p\theta) = B_2,$$

$$\text{где} \quad B_1 = \frac{1}{mp} \int_0^\theta P(\vartheta) \sin p(\theta - \vartheta) d\vartheta,$$

$$B_2 = \frac{1}{m} \int_0^\theta P(\vartheta) \cos p(\theta - \vartheta) d\vartheta. \quad (3.21)$$

Решая систему уравнений (3.20), определяем  $x_0$  и  $\dot{x}_0$ :

$$x_0 = 1/2 [B_1 + (B_2/p) \operatorname{ctg}(p\theta/2)]; \quad (3.22)$$

$$\dot{x}_0 = 1/2 [B_2 - B_1 p \operatorname{ctg}(p\theta/2)].$$

Подстановка значений  $x_0$  и  $\dot{x}_0$  в общее выражение для  $x$  позволяет определить в замкнутой форме закон движения за период  $0 \leq t \leq \theta$ .

Как видно из формул (3.22),  $x_0$  и  $\dot{x}_0$  обращаются в бесконечность при  $\sin(p\theta/2) = 0$ , т. е. если  $p\theta = 2k\pi$ .

Таким образом, этот путь решения приводит к тому же условию резонанса, что и разложение возмущающей силы в ряд Фурье.

В качестве примера рассмотрим поведение упругой одномассовой системы при действии периодических импульсов. Установив начало отсчета времени сразу после очередного импульса, так что следующий импульс величиной  $J$  воздействует в самом конце рассматриваемого периода при  $t = \theta - \varepsilon$  ( $\varepsilon \rightarrow 0$ ), найдем:

$$B_1 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{mp} \int_{\theta-\varepsilon}^\theta P(\vartheta) \sin p(\theta - \vartheta) d\vartheta = 0,$$

$$B_2 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{m} \int_{\theta-\varepsilon}^\theta P(\vartheta) \cos p(\theta - \vartheta) d\vartheta = \frac{1}{m} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\theta-\varepsilon}^\theta P(\vartheta) d\vartheta = \frac{J}{m}.$$

По формулам (3.22) находим смещение и скорость при  $t = 0$ :

$$x_0 = \frac{J}{2mp} \operatorname{ctg} \frac{p\theta}{2}, \quad \dot{x}_0 = \frac{J}{2m}.$$

Поскольку на протяжении всего периода  $0 \leq t \leq \theta$  — возмущающая сила отсутствует, уравнение движения имеет вид

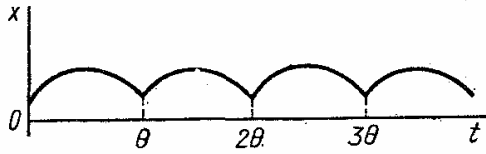


Рис. 3.11

$$\begin{aligned} x &= x_0 \cos pt + \frac{\dot{x}_0}{p} \sin pt = \\ &= \frac{J}{2mp} \left[ \operatorname{ctg} \frac{p\theta}{2} \cos pt + \sin pt \right] \\ &\quad (0 \leq t \leq \theta). \end{aligned} \quad (3.23)$$

Движение в другие периоды времени определяется условиями периодичности. Характер движения при  $\theta < \pi/p$  показан на рис. 3.11.

#### § 4. ЗАТУХАНИЕ СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ

**Вязкое трение.** Рассмотрим свободные колебания системы с одной степенью свободы с учетом трения. Уравнение движения имеет вид

$$m\ddot{x} + cx + R = 0. \quad (4.1)$$

Зависимость силы трения  $R$  от смещения или скорости движения определяется физической природой трения. Наиболее простым случаем является так называемое вязкое трение, когда сила трения пропорциональна скорости движения:  $R = \alpha \dot{x}$ .

Сила сопротивления, пропорциональная скорости движения, возникает, например, в гидравлических амортизаторах, работающих при ламинарном режиме течения жидкости, успокоителях колебаний, основанных на действии токов Фуко, и других технических устройствах. В этом случае

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + p^2x = 0, \quad (4.2)$$

где

$$n = \alpha/(2m), \quad p^2 = c/m.$$

По правилу решения линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами составляем характеристическое уравнение

$$s^2 + 2ns + p^2 = 0,$$

откуда при  $p^2$ , большем  $n^2$ ,

$$s = -n \pm i \sqrt{p^2 - n^2}.$$

Обозначим

$$\sqrt{p^2 - n^2} = p_1. \quad (4.3)$$

Тогда решение уравнения (4.2) будет определяться формулой

$$x = e^{-nt} (C_1 \cos p_1 t + C_2 \sin p_1 t) \quad (4.4)$$

или

$$x = Ae^{-nt} \cos(p_1 t + \varphi), \quad (4.5)$$

где

$$A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}, \quad \operatorname{tg} \varphi = -C_2/C_1.$$

Следовательно, при наличии вязкого трения движение груза описывается непериодическим законом, представленным графически на рис. 4.1. Однако часто это движение называют периодическими затухающими колебаниями, несмотря на неточность такого названия. Под периодом  $\tau_1$  этих колебаний понимают время между двумя максимальными смещениями.

$$\tau_1 = 2\pi/p_1 = 2\pi/\sqrt{p^2 - n^2}.$$

(4.6)

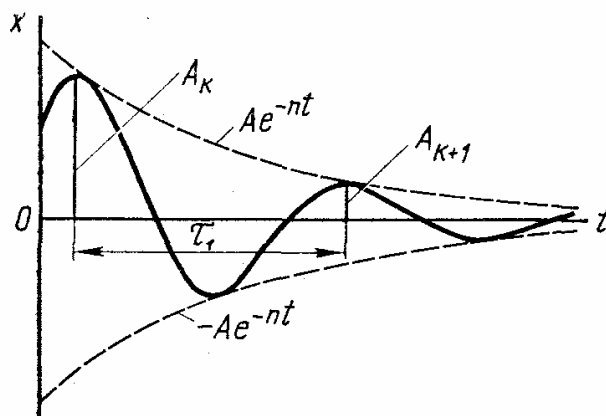


Рис. 4.1

Величину  $p_1$  называют соответственно угловой частотой затухающих колебаний. Отношение двух последовательных максимальных отклонений  $A_k, A_{k+1}$  составляет

$$A_k/A_{k+1} = e^{n\tau_1}. \quad (4.7)$$

Таким образом, последовательные максимальные отклонения системы от равновесного положения представляют собой члены геометрической прогрессии со знаменателем, равным  $e^{-n\tau_1}$ . Чаще рассматривают не отношение двух последовательных отклонений, а логарифм этого отношения, который называют *логарифмическим декрементом* колебания:

$$\delta = \ln(A_k/A_{k+1}) = n\tau_1. \quad (4.8)$$

В металлоконструкциях, где нет специально введенных элементов трения, логарифмический декремент составляет обычно от нескольких сотых до десятых долей единицы.

Если колебания затухают медленно и отношение двух последовательных отклонений  $A_k/A_{k+1}$  близко к единице, то

$$\delta = \ln \frac{A_k}{A_{k+1}} = \ln \frac{A + \Delta A/2}{A - \Delta A/2} \approx \frac{\Delta A}{A} \quad (4.9)$$

$$[\Delta A = A_k - A_{k+1}; \quad A = (A_k + A_{k+1})/2].$$

Таким образом, при малом затухании логарифмический декремент примерно равен отношению изменения амплитуды колебаний за период  $\tau_1$  к амплитуде  $A$ .

Так как логарифмический декремент колебания

$$\delta = n\tau_1 = 2\pi n/p_1 = 2\pi n/\sqrt{p^2 - n^2},$$

то

$$n^2 = p^2 (1/2 \delta/\pi)^2 [1 + (1/2 \delta/\pi)^2]^{-1}. \quad (4.10)$$

Подставив это значение  $n^2$  в формулу (4.3), установим связь между  $p_1$ ,  $p$  и  $\delta$ :

$$p_1 = \sqrt{p^2 - n^2} = p/\sqrt{1 + \delta^2/(2\pi)^2}. \quad (4.11)$$

Из формулы (4.11) видно, что даже при значительном затухании частота  $p_1$  затухающих колебаний мало отличается от частоты  $p$  собственных колебаний соответствующей консервативной системы. Так, например, при сравнительно большом затухании, когда каждый следующий размах вдвое меньше предыдущего ( $\delta = \ln 2 = 0,693$ ), частота  $p_1$  лишь на 0,6% меньше, чем  $p$ . Таким образом, можно считать, что трение не влияет на частоту колебаний и  $p_1 \approx p$ .

Определим постоянные интегрирования в уравнении затухающих колебаний (4.4). Обозначив смещение и скорость в начальный момент времени  $t = 0$  соответственно через  $x_0$  и  $\dot{x}_0$ , найдем

$$x_0 = C_1; \quad \dot{x}_0 = -C_1 n + C_2 p_1.$$

Итак,

$$C_1 = x_0; \quad C_2 = (\dot{x}_0 + nx_0)/p_1$$

и выражение для смещения, удовлетворяющее начальным условиям имеет вид

$$x = e^{-nt} [x_0 \cos p_1 t + (\dot{x}_0 + nx_0) p_1^{-1} \sin p_1 t]. \quad (4.12)$$

Заметим, что если движение вызвано импульсом силы  $J$ , приложенным к неподвижной системе при  $t = 0$ , то возникает начальная скорость  $\dot{x}_0 = J/m$  и смещения изменяются по закону

$$x = [J/(mp_1)] e^{-nt} \sin p_1 t.$$

Полагая в этой формуле  $J = 1$ , находим реакцию на единичную импульсную нагрузку системы с трением, пропорциональным скорости:

$$Y(t) = (mp_1)^{-1} e^{-nt} \sin p_1 t. \quad (4.13)$$

**Сухое трение.** Рассмотрим движение упруго закрепленного груза массой  $m$  по шероховатой поверхности (рис. 4.2). Сила трения, действующая на груз, постоянна по величине и направлена против движения. Уравнение свободных колебаний такой системы имеет вид

$$m\ddot{x} + cx \pm R_0 = 0, \quad (4.14)$$

где знак плюс соответствует этапу движения, на котором скорость

положительна, а знак минус — этапу движения, на котором скорость отрицательна. Зависимость от  $x$  полной действующей на груз силы  $F = cx \pm R_0$  показана на рис. 4.3. Запишем уравнение (4.14) в форме

$$m\ddot{x} + cx + R_0 \operatorname{sgn} \dot{x} = 0. \quad (4.15)$$

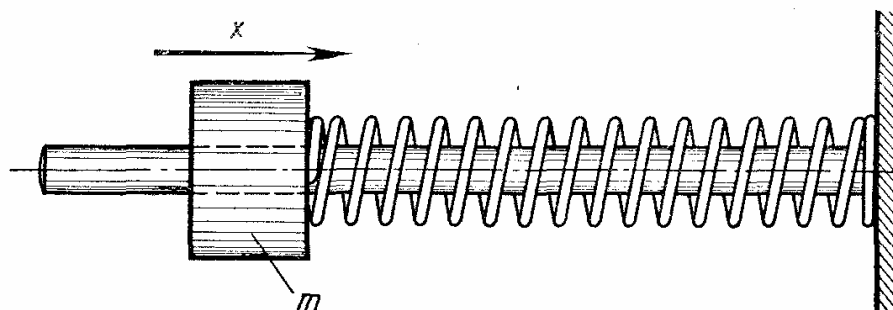


Рис. 4.2

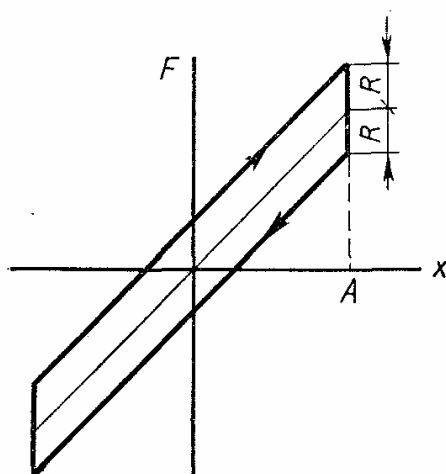


Рис. 4.3

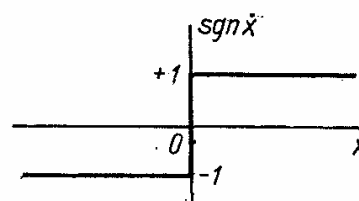


Рис. 4.4

Функция  $\operatorname{sgn} \dot{x}$  (читается: «знак  $\dot{x}$ » или «сигнум  $\dot{x}$ ») есть единичная функция, имеющая знак аргумента (рис. 4.4). При  $\dot{x} > 0$   $\operatorname{sgn} \dot{x} = 1$ , при  $\dot{x} < 0$   $\operatorname{sgn} \dot{x} = -1$ , при  $\dot{x} = 0$  принимают  $\operatorname{sgn} \dot{x} = 0$ .

Уравнение (4.15) содержит нелинейное слагаемое. Тем не менее мы легко найдем решение этого уравнения, рассмотрев последовательные интервалы движения, на каждом из которых знак скорости постоянен.

Отклоним груз в крайнее правое положение на величину  $A$  и отпустим его без начальной скорости. В этом случае

$$x_0 = A, \quad \dot{x}_0 = 0. \quad (4.16)$$

Под действием натяжения пружины на первом этапе груз движется влево ( $\dot{x} < 0$ ) и уравнение движения будет

$$m\ddot{x} + cx - R_0 = 0,$$

или с учетом обозначений  $c/m = p^2$  и  $R_0/c = a$

$$\ddot{x} + p^2 x = p^2 a. \quad (4.17)$$

Коэффициент  $a$  представляет собой отклонение груза под действием максимально возможной силы трения. При отклонении груза на величину, меньшую или равную  $a$ , движение не начнется, так как силы упругости пружины недостаточно для преодоления силы трения (полоса  $-a < x < a$  называется *зоной застоя*). Поэтому уравнение (4.17) имеет место при  $A > a$ . Общее решение уравнения (4.17) имеет вид

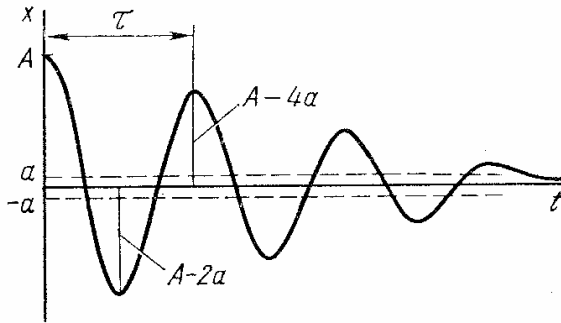


Рис. 4.5

$$x = a + C_1 \cos pt + C_2 \sin pt.$$

Определяя постоянные из начальных условий (4.16), получаем

$$x = a + (A - a) \cos pt. \quad (4.18)$$

Закон движения (4.18) справедлив, пока  $\dot{x} < 0$ . Так как

$$\dot{x} = -p(A - a) \sin pt,$$

то скорость движения будет отрицательной до момента времени  $t_1$ , определяемого из условия  $pt_1 = \pi$ . В этот момент груз остановится. Смещение его

$$\begin{aligned} x &= a + (A - a) \cos \pi = \\ &= -(A - 2a). \end{aligned}$$

Под влиянием трения отклонение груза уменьшилось по абсолютной величине на  $2a$ .

После остановки груз начнет двигаться вправо. Повторяя приведенные выше расчеты, можно показать, что движение слева направо также продолжается в течение времени  $\pi/p$ . Максимальное отклонение вправо равно  $A - 4a$ . Процесс движения продолжается до тех пор, пока груз не остановится в зоне застоя. Зависимость смещения от времени на каждом этапе движения представляет собой косинусоиду, смещенную по оси  $x$  на величину  $+a$  или  $-a$ , с амплитудой, уменьшающейся по закону арифметической прогрессии (рис. 4.5).

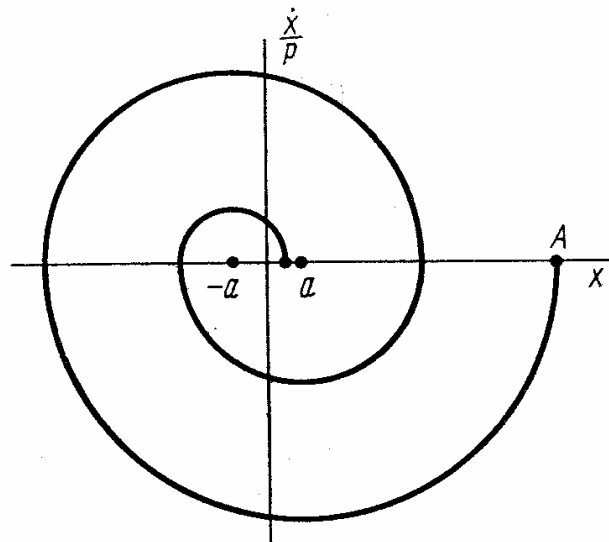


Рис. 4.6



Время между двумя соседними максимумами отклонения, которое условно можно назвать периодом движения,

$$\tau = 2\pi/p.$$

Наличие сухого трения не меняет частоту колебаний.

Фазовый портрет свободных колебаний системы с сухим трением представлен на рис. 4.6. В координатах  $x, \dot{x}/p$  гармонический закон движения изображается дугами окружности. Если в уравнение (4.17) ввести новую переменную ( $x - a$ ), то получится уравнение гармонических колебаний без трения. Это движение на фазовой плоскости изображается полуокружностью радиусом  $(A - a)$  с центром в точке  $(x = a)$ . На втором этапе движения, когда  $\dot{x} > 0$ , уравнение дви-

$$\ddot{x} + p^2x = -p^2a$$

может рассматриваться как уравнение гармонических колебаний со смещением ( $x + a$ ). На фазовой плоскости на втором этапе движения получаем полуокружность с центром в точке  $(x = -a)$ . И так до тех пор, пока кривая при  $\dot{x} = 0$  не попадет в зону застоя  $-a < x < a$ .

**Сила трения, пропорциональная смещению** (позиционное трение). Рассмотрим систему, состоящую из груза массой  $m$ , закрепленного на

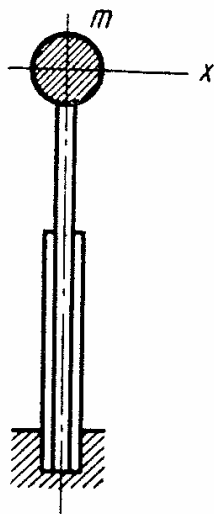


Рис. 4.7

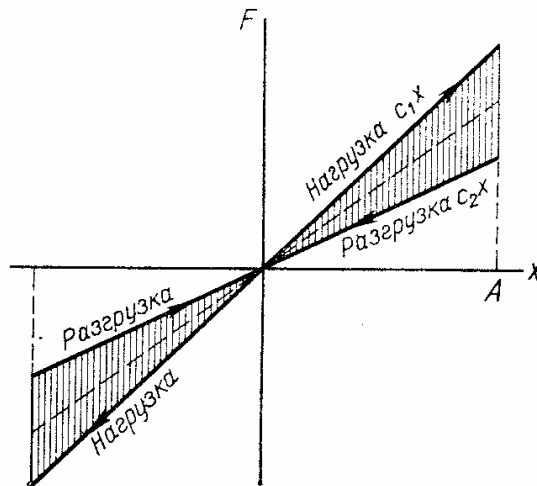


Рис. 4.8

рессоре, листы которой собраны без предварительного натяга (рис. 4.7). Сила трения листов рессоры друг о друга пропорциональна контактному давлению, которое в свою очередь пропорционально смещению.

Зависимость между реакцией рессоры, действующей на груз, и смещением груза для рассматриваемой системы представлена на рис. 4.8. Обозначим  $c_1$  — жесткость системы при увеличении смещения  $x$

по модулю;  $c_2$  — жесткость при уменьшении абсолютного значения смещения;  $c_0 = 1/2 (c_1 + c_2)$  — жесткость упругого элемента системы при отсутствии трения. На каждой четверти периода характеристика системы прямолинейна, поэтому движение массы описывается синусоидой. При переходе через равновесное положение меняется частота собственных колебаний от  $p_2 = \sqrt{c_2/m}$  до  $p_1 = \sqrt{c_1/m}$ . Отклоним груз в крайнее правое положение на величину  $A$ ; скорость движения его в этот момент  $\dot{x}_0 = 0$ . Если груз отпустить, то он начнет двигаться влево под действием силы упругости, уменьшенной на величину сил трения. Частота собственных колебаний груза будет  $p_2$ , а время движения до равновесного положения  $\tau_2/4 = \pi/(2p_2)$ . При переходе груза в равновесное положение скорость его станет  $p_2 A$ . Дальнейшее движение влево определяется жесткостью  $c_1$ . Крайнего левого положения груз достигает через время  $\tau_1/4 = \pi/(2p_1)$ . Наибольшее смещение влево равно  $p_2 A/p_1$ . Продолжая рассуждения, находим, что максимальное отклонение вправо в конце полного периода движения вычисляется по формуле  $A(p_2^2/p_1^2)$  и, следовательно, логарифмический декремент

$$\delta = \ln(p_1^2/p_2^2) = \ln(c_1/c_2).$$

При малом затухании, когда разность жесткостей  $c_1 - c_2$  существенно меньше средней жесткости  $c_0$ , получим

$$\delta = \ln \frac{c_1}{c_2} = \ln \frac{c_0 + (c_1 - c_2)/2}{c_0 - (c_1 - c_2)/2} \approx \frac{c_1 - c_2}{c_0}. \quad (4.19)$$

Характер движения показан на рис. 4.9.

Как видно из полученных формул, при силе трения, пропорциональной смещению, декремент колебания постоянен и, следовательно, точно так же, как и при вязком трении, последовательные амплитуды составляют геометрическую прогрессию.

Как видно из рис. 4.9, период затухающих колебаний

$$\begin{aligned} \tau &= 2\tau_2/4 + 2\tau_1/4 = \\ &= \pi(1/p_1 + 1/p_2). \end{aligned}$$

Соответствующая этому периоду угловая частота

$$p = \frac{2\pi}{\tau} = \frac{2}{1/p_1 + 1/p_2}.$$

Заметим, что

$$p_1 = \sqrt{\frac{c_1}{m}} = \sqrt{\frac{c_0}{m} \left(1 + \frac{c_1 - c_2}{2c_0}\right)} = p_0 \sqrt{1 + \frac{1}{2}\delta},$$

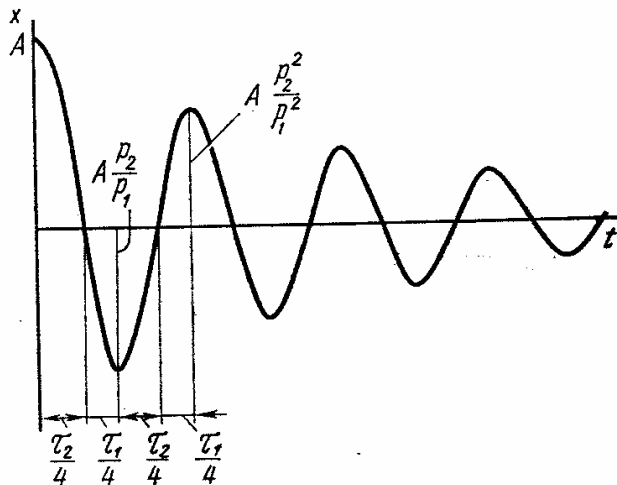


Рис. 4.9

$$p_2 = \sqrt{\frac{c_2}{m}} = \sqrt{\frac{c_0}{m} \left(1 - \frac{c_1 - c_2}{2c_0}\right)} = p_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2} \delta},$$

где  $p_0 = \sqrt{c_0/m}$  — собственная частота консервативной системы.  
Тогда

$$p = 2p_0 \sqrt{1 - \delta^2/4} / (\sqrt{1 + \delta/2} + \sqrt{1 - \delta/2}).$$

При небольших декрементах это выражение отличается от  $p_0$  на величину второго порядка малости. Поэтому, подобно вязкому и сухому трению, трение, пропорциональное смещению, практически не влияет на частоту колебаний.

**Энергетическая оценка сил сопротивления.** Рассмотрим один  $k$ -й период затухающих свободных колебаний системы. В начале периода отклонение максимально и равно  $A_k$ , в конце — также максимально и равно  $A_{k+1}$ . Поскольку в рассматриваемых положениях скорость равна нулю, вся энергия системы представляет собой энергию деформации упругой связи:

$$U_k = 1/2 c A_k^2, \quad U_{k+1} = 1/2 c A_{k+1}^2. \quad (4.20)$$

Таким образом, за период рассеивается энергия

$$W = \Delta U = 1/2 c (A_k^2 - A_{k+1}^2). \quad (4.21)$$

Если затухание не очень велико, то движение в течение одного периода мало отличается от гармонического колебания со средней амплитудой

$$A = 1/2 (A_k + A_{k+1}),$$

которому соответствует средняя энергия

$$U = 1/2 c A^2.$$

Преобразуя формулу (4.21), находим

$$W = \Delta U = 1/2 c (A_k + A_{k+1}) (A_k - A_{k+1}) = c A \Delta A = 2U \Delta A / A, \quad (4.22)$$

где  $\Delta A = A_k - A_{k+1}$  — уменьшение амплитуды колебаний за один период.

Уменьшение энергии  $\Delta U$ , с другой стороны, может быть с высокой точностью подсчитано как работа сил сопротивления за один период стационарного колебания с амплитудой  $A$ .

Отношение энергии, рассеиваемой за один период гармонического колебания, к максимальной упругой энергии называется *коэффициентом поглощения* или *относительным гистерезисом* и обозначается

$$\psi = W/U. \quad (4.23)$$

В зависимости от природы сил трения величина  $\psi$  может тем или иным способом зависеть от амплитуды и частоты колебаний. Так как мы рассматриваем затухание свободных колебаний,  $\psi$  должно подсчитываться при частоте  $\omega$ , равной частоте  $p$  собственных колебаний. С вве-

дением значения  $\psi$  формула (4.22) приобретает вид

$$\Delta A/A = 1/2 \psi_{\omega=p}. \quad (4.24)$$

Левая часть равенства (4.24) приблизительно равна логарифмическому декременту колебания  $\delta$  [см. формулу (4.9)], поэтому имеется простая связь между  $\delta$  и коэффициентом поглощения

$$\delta \approx 1/2 \psi_{\omega=p}. \quad (4.25)$$

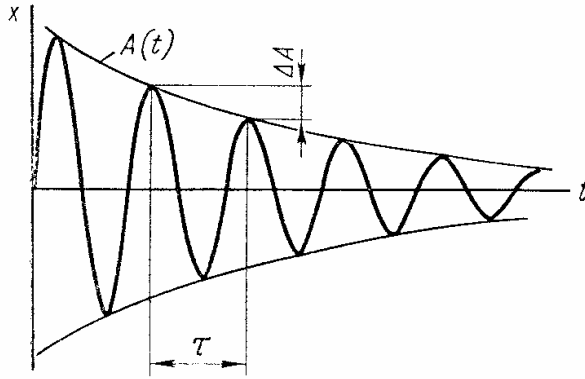


Рис. 4.10

Если коэффициент поглощения  $\psi$  не зависит от амплитуды, то логарифмический декремент колебания постоянен, последовательные амплитуды составляют геометрическую прогрессию. В этом случае уравнение огибающей  $A(t)$  (рис. 4.10) имеет вид

$$A(t) = A_0 e^{-\delta t/\tau} = A_0 e^{-1/2 \psi t/\tau}. \quad (4.26)$$

Уравнение огибающей можно записать и при произвольной зависимости  $\psi(A)$ . Изменение амплитуды  $\Delta A$  за один период приближенно можно выразить в форме

$$\Delta A = -\tau dA/dt. \quad (4.27)$$

Если в этом выражении заменить  $\Delta A$  его значением из уравнения (4.24), получим

$$1/2 A \psi(A) = -\tau dA/dt. \quad (4.28)$$

Таким образом, мы получили дифференциальное уравнение для функции  $A(t)$ . Переменные здесь разделяются и, интегрируя это уравнение при начальном условии  $A_{t=0} = A_0$ , находим

$$t = 2\tau \int_A^{A_0} \frac{dA}{A \psi(A)}. \quad (4.29)$$

В частном случае, если  $\psi$  не зависит от  $A$ , мы приходим к формуле (4.26).

Применим выведенные приближенные формулы к случаю вязкого трения. При гармоническом колебании  $x = A \cos \omega t$  сила вязкого трения  $R = \alpha \dot{x}$  совершает за один период работу

$$W = \int_0^{2\pi/\omega} R \dot{x} dt = \alpha \int_0^{2\pi/\omega} \dot{x}^2 dt = \alpha A^2 \omega^2 \int_0^{2\pi/\omega} \sin^2 \omega t dt = \pi \alpha A^2 \omega. \quad (4.30)$$

Эта работа изображается площадью заштрихованной на рис. 4.11

гистерезисной петли, имеющей форму эллипса. Отношение  $W$  к максимальной энергии  $U = cA^2/2$  составляет

$$\psi = \pi \alpha A^2 \omega / (cA^2/2) = 2\pi \alpha \omega / c = 4\pi n \omega / p^2. \quad (4.31)$$

Таким образом, при вязком трении коэффициент поглощения не зависит от амплитуды и прямо пропорционален частоте. Следовательно, энергетический подход, так же как и точное решение, приводит к выводу, что амплитуды колебаний при вязком трении убывают по экспоненте.

По формуле (4.25) находим декремент:

$$\delta = 1/2 \psi_{\omega=p} = 2\pi n / p. \quad (4.32)$$

Это значение декремента практически совпадает с точным [см. формулу (4.8)], так как

$$\tau_1 \approx \tau = 2\pi / p.$$

Заметим, что из формул (4.31) и (4.32) следует, что при частоте, отличной от резонансной ( $\omega \neq p$ ), коэффициент поглощения при вязком трении связан с декрементом формулой

$$\psi = 2\delta \omega / p. \quad (4.33)$$

В качестве второго примера рассмотрим силу сопротивления, пропорциональную смещению (см. рис. 4.8). В этом случае при полном цикле стационарного колебания с амплитудой  $A$  рассеивается энергия, изображенная заштрихованной на рис. 4.8 гистерезисной петлей,

$$W = (c_1 - c_2) A^2.$$

Относя  $W$  к максимальной упругой энергии  $U = c_0 A^2/2$ , получим

$$\psi = W/U = 2(c_1 - c_2)/c_0.$$

Так же как и при вязком трении, коэффициент поглощения не зависит от амплитуды колебаний, но в отличие от вязкого трения  $\psi$  не зависит и от частоты.

Значение декремента при небольшом затухании

$$\delta = \psi/2 = (c_1 - c_2)/c_0$$

совпадает с точным [см. формулу (4.19)].

Как при вязком трении, так и при силе сопротивления, пропорциональной смещению, относительный гистерезис не зависит от амплитуды колебаний. Поэтому в обоих случаях декремент колебания постоянен и последовательные амплитуды составляют геометрическую прогрессию.

Несмотря на совершенно различную форму гистерезисной петли (см. рис. 4.8 и 4.11), общий характер затухания колебаний в обоих случаях одинаков. На этом основании можно установить, что главной

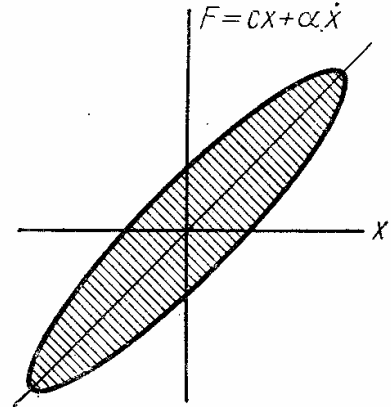


Рис. 4.11

характеристикой трения при колебаниях является коэффициент поглощения, форма же петли гистерезиса второстепенна [34].

Применим энергетический метод к изучению затухания колебаний при сухом трении. В этом случае площадь петли гистерезиса (см. рис. 4.3)

$$W = 4RA,$$

и коэффициент поглощения

$$\psi = W/U = 4RA/(cA^2/2) = 8R/(cA) = 8a/A. \quad (4.34)$$

В данном случае  $\psi$  зависит от амплитуды, а следовательно, и логарифмический декремент

$$\delta = \psi/2 = 4a/A$$

не является постоянным.

По формуле (4.29) находим

$$t = 2\tau \int_A^{A_0} \frac{dA}{A\psi} = 2\tau \int_A^{A_0} \frac{dA}{8a} = \frac{\tau}{4a} (A_0 - A),$$

откуда

$$A = A_0 - 4at/\tau.$$

Таким образом, и в этом случае результат энергетического расчета совпадает с точным — амплитуды убывают по линейному закону, причем за каждый период  $\tau$  амплитуда уменьшается на  $4a$ .

Формула (4.28) может быть использована для определения зависимости коэффициента поглощения от амплитуды опытным путем. Для этого, построив огибающую записи затухающих колебаний, ее дифференцируют и при каждом значении амплитуды определяют  $\psi$  по формуле

$$\psi(A) = -2\tau A^{-1} dA/dt. \quad (4.35)$$

Такой способ определения зависимости  $\psi(A)$  не может претендовать на большую точность, так как включает дифференцирование опытной кривой.

**Потери на внутреннее трение в материале. Конструкционный гистерезис.** В связи с несовершенством упругих свойств материала зависимости между напряжением и деформацией при его нагрузке и разгрузке несколько отличаются друг от друга. При циклической деформации в координатах  $\sigma, \epsilon$  (или  $\tau, \gamma$  при деформации сдвига) точка, изображающая напряженное и деформированное состояние, описывает замкнутую кривую — петлю гистерезиса.

Для металлов при напряжениях, меньших предела пропорциональности, ширина петли гистерезиса столь мала, что непосредственное ее наблюдение большей частью невозможно. Однако энергетическая оценка внутреннего трения — относительный гистерезис  $\psi$  — может быть определена из опытов по затуханию свободных колебаний [по формуле (4.35)] или другими динамическими методами.

Многочисленные исследования внутреннего трения в металлах свидетельствуют о том, что  $\psi$  не зависит от частоты колебаний, но зависит от амплитуды  $\sigma$  изменения напряжений.

Зависимости  $\psi(\sigma)$ , полученные при однородном напряженном состоянии (т. е. при постоянных по всему объему детали напряжениях), могут быть пересчитаны и для деталей, напряженное состояние которых неоднородно. Для этого определяют поглощение энергии  $W$  за цикл деформации во всем объеме  $V$  детали:

$$W = \int_V \psi(\sigma) \frac{\sigma^2}{2E} dV,$$

где  $\sigma$  — величина напряжения в данной точке детали.

Коэффициент поглощения для детали в целом определяется как отношение  $W$  к максимальной упругой энергии:

$$U = \int_V \frac{\sigma^2}{2E} dV.$$

Приведенные выше формулы записаны для одноосного напряженного состояния. Не представляет труда написать аналогичные формулы для чистого сдвига, а также обобщить их на случай сложного напряженного состояния [40]. Следует отметить, что для металлических конструкций расчеты внутреннего трения в материале имеют небольшое значение, так как это трение мало и обычно во много раз перекрывается потерями на трение в сочленениях деталей — так называемым конструкционным гистерезисом.

Даже в специальных установках для изучения внутреннего трения трудно исключить конструкционный гистерезис так, чтобы он не влиял на результаты опытов. В этом одна из причин больших расхождений в величинах  $\psi(\sigma)$ , полученных для одинаковых материалов различными экспериментаторами.

Значительно большее значение, чем для металлов, внутреннее трение имеет для высокомолекулярных материалов — разного рода пластмасс и резины. Для этих материалов  $\psi$  мало зависит от амплитуды напряжений, но существенно зависит от температуры и в некоторых диапазонах — от частоты колебаний.

Величина  $\psi$  для полимеров много больше, чем для металлов. Так, например, для наполненных резин  $\psi$  имеет порядок 0,1...1,0, что приблизительно в 100 раз превышает значения  $\psi$ , характерные для сталей. Ниже приведены\* ориентировочные значения коэффициентов поглощения  $\psi$  различных материалов при амплитуде деформации сдвига  $\gamma = 0,001$ :

Сталь различных марок . . . . .	0,01...0,02
Чугун серый . . . . .	0,23
Медь . . . . .	0,33
Латунь . . . . .	0,01
Никель . . . . .	0,03
Пробка . . . . .	0,04
Дерево . . . . .	0,07...0,14
Бетон . . . . .	0,26
Железобетон . . . . .	0,25

\* См.: Корчинский И. Л. Расчет строительных конструкций на вибрационную нагрузку. М. Стройиздат, 1948.

В качестве простейшего примера конструкционного гистерезиса рассмотрим знакопеременное кручение вала с напрессованной на него втулкой (рис. 4.12, а). При повороте втулки на валу возникают силы трения, интенсивность которых зависит от натяга. Обозначим предельный момент сил трения на единицу длины вала через  $\mu$ . При приложении к валу крутящего момента  $M$  на некотором участке  $z$  возникает

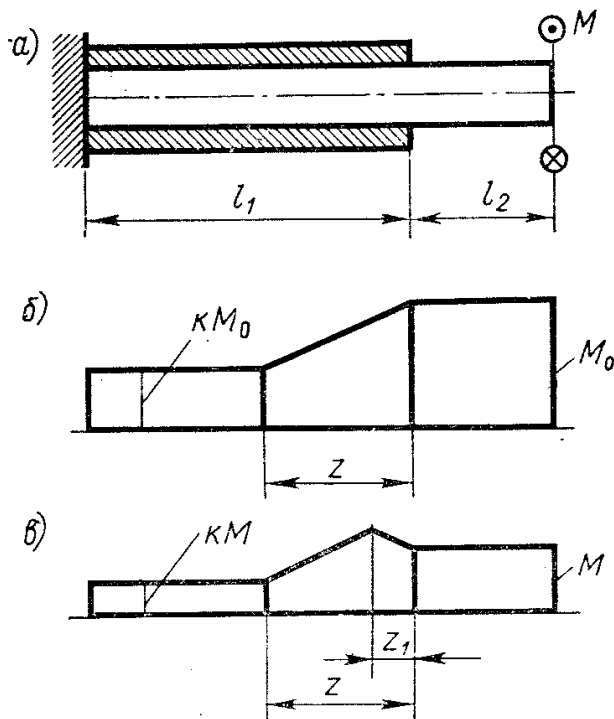


Рис. 4.12

проскальзывание и на этом участке между валом и втулкой действует равномерно распределенный момент сил трения интенсивностью  $\mu$ . Эпюра моментов по длине вала показана на рис. 4.12, б. Значение момента  $kM$  на участке, где проскальзывание отсутствует, можно найти из условия равенства относительных углов закручивания вала и втулки на этом участке:

$$kM/(GJ_1) = (1 - k)M/(GJ_2),$$

где  $GJ_1$  и  $GJ_2$  — жесткости на кручение соответственно вала и втулки. Отсюда

$$k = GJ_1/(GJ_1 + GJ_2).$$

Величину участка проскальзывания  $z$  найдем из условия

$$(M - kM)/z = \mu,$$

откуда

$$z = (1 - k)M/\mu.$$

Длина этого участка возрастает прямо пропорционально приложенному моменту. Угол закручивания всего вала определяется равенством

$$\varphi = \frac{1}{GJ_1} \left[ kMl_1 + Ml_2 + \frac{M - kM}{2} z \right] = \delta_0 M + \frac{(1 - k)^2}{2\mu GJ_1} M^2,$$

где  $\delta_0$  — податливость конструкции при условии жесткого скрепления вала со втулкой,

$$\delta_0 = (kl_1 + l_2)/(GJ_1).$$

Таким образом, зависимость угла закручивания от момента при первом нагружении является нелинейной (линия  $OA$  на рис. 4.13)

Если после приложения момента  $M_0$  [при этом  $z = z_0 = (1 - k)M_0/\mu$ ,  $\varphi_0 = \delta_0 M_0 + (1 - k)^2 M_0^2 / (2\mu GJ_1)$ ]



уменьшать величину момента, то около края втулки возникает зона  $z$  обратного проскальзывания. На рис. 4.12,б показана эпюра крутящих моментов при  $M = M_0$ , а на рис. 4.12,в — эпюра моментов при разгрузке, когда  $M < M_0$ . Из условия, что на участке  $(z_0 - z_1)$  интенсивность момента трения  $\mu$ , а на участке  $z_1 - \mu$ , находим

$$M + \mu z_1 = kM + \mu (z_0 - z_1),$$

откуда

$$z_1 = (z_0/2) - [(1 - k)M/(2\mu)].$$

На основании эпюры рис. 4.12,в определяем угол закручивания вала:

$$\begin{aligned} \varphi &= \delta_0 M + \mu (z_0^2 - 2z_1^2)/(2GJ_1) = \\ &= \delta_0 M + (1 - k)^2 (M_0^2 + \\ &+ 2MM_0 - M^2)/(4\mu GJ_1). \end{aligned}$$

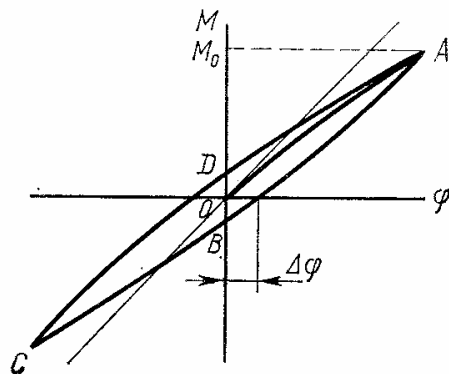


Рис. 4.13

Зависимость  $\varphi$ ,  $M$  при изменении  $M$  от  $M_0$  до  $(-M_0)$  в процессе разгрузки представлена параболой  $ABC$  на рис. 4.13. При полной разгрузке ( $M = 0$ ) остаточный угол закручивания

$$\Delta\varphi = (1 - k)^2 M_0^2/(4\mu GJ_1).$$

При  $M = -M_0$   $z_1$  становится равным  $z_0$  и эпюра моментов оказывается точно такой же, как и при максимальной нагрузке (см. рис. 4.12,б), но с измененными знаками моментов. Поэтому процесс повторной нагрузки не будет, в сущности, отличаться от процесса разгрузки и на рис. 4.13 изобразится параболой  $CDA$ , симметричной с  $ABC$ . Площадь ограниченной параболой петли гистерезиса, равная рассеянной за цикл энергии, составляет

$$W = 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2M_0 \cdot \Delta\varphi = \frac{2}{3} (1 - k)^2 M_0^3/(\mu GJ_1).$$

Отнеся эту величину к максимальной упругой энергии  $U = \delta_0 M_0^2/2$ , найдем коэффициент поглощения  $\psi = \frac{4}{3} (1 - k)^2 M_0/(\mu GJ_1 \delta_0)$ , который для рассматриваемой системы оказался пропорциональным амплитуде.

Как рассмотренная выше, так и другие решенные теоретически задачи конструкционного демпфирования относятся к сильно схематизированным системам. Результаты решения этих задач позволяют выяснить принципиальные особенности явления (зависимость  $\psi$  от амплитуды и других факторов). Однако рассчитать теоретически потери на гистерезис в реальных конструкциях, как правило, не удастся. В этих случаях пользуются статистическими данными о коэффициенте поглощения.

В цитированной выше работе И. Л. Корчинского приведены ориентировочные данные о коэффициенте поглощения  $\psi$  в строительных конструкциях из различных материалов:

Стальные конструкции . . . . .	0,16...0,18
Деревянные конструкции . . . . .	0,30...0,35
Железобетонные конструкции . . . . .	0,5
Кирпичная кладка . . . . .	0,25

Эти цифры включают как потери на внутреннее трение в материале, так и потери на конструкционный гистерезис. Сравнение этих цифр с приведенными выше данными для потерь на внутреннее трение показывает, что для стальных конструкций основную роль играет конструкционный гистерезис, тогда как для деревянных и железобетонных конструкций роль внутреннего трения в материале и потерь в соединениях примерно одинакова.

## § 5. ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМ ПРИ ВЯЗКОМ ТРЕНИИ

Возмущающая сила, изменяющаяся по произвольному закону. Зная реакцию системы на единичный импульс [см. формулу (4.13)], можно, используя метод наложения, написать выражение для перемещений первоначально неподвижной системы при воздействии на нее произвольной силы  $P(t)$ :

$$x = \int_0^t P(\vartheta) Y(t - \vartheta) d\vartheta.$$

Эта формула отличается от формулы (3.5) для системы без трения только видом функции  $Y(t)$ . Подставив значение этой функции из формулы (4.13), получим

$$x = \frac{e^{-nt}}{mp_1} \int_0^t P(\vartheta) e^{n\vartheta} \sin p_1(t - \vartheta) d\vartheta. \quad (5.1)$$

Формула (5.1) соответствует нулевым начальным условиям. Если надо учесть условия, отличные от нулевых, то к выражению (5.1) следует добавить свободные колебания в соответствии с формулой (4.12).

В качестве примера рассмотрим воздействие на систему с вязким трением внезапной нагрузки  $P(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ P_0 & (t \geq 0) \end{cases}$ . В этом случае

$$x = \frac{P_0}{mp_1} e^{-nt} \int_0^t e^{n\vartheta} \sin p_1(t - \vartheta) d\vartheta.$$

Интеграл удобно вычислить, перейдя к показательной форме записи тригонометрической функции:

$$x = \frac{P_0}{mp_1} \int_0^t e^{-n(t-\vartheta)} \frac{1}{2i} [e^{ip_1(t-\vartheta)} - e^{-ip_1(t-\vartheta)}] d\vartheta =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{P_0}{2mp_1i} \left[ \frac{1}{n-ip_1} e^{-(n-ip_1)(t-\vartheta)} - \frac{1}{n+ip_1} e^{-(n+ip_1)(t-\vartheta)} \right]_0^t = \\
&= \frac{P_0}{mp_1(n^2+p_1^2)} [p_1 - e^{-nt}(p_1 \cos p_1 t + n \sin p_1 t)].
\end{aligned}$$

Учитывая, что  $m(n^2 + p_1^2) = mp^2 = c$ , а  $P_0/c = x_{ст}$  представляет собой статическую деформацию системы силой  $P_0$ , получаем

$$x/x_{ст} = 1 - e^{-nt} [\cos p_1 t + (n/p_1) \sin p_1 t].$$

На рис. 5.1 показано изменение  $x/x_{ст}$  при различных значениях затухания в системе, характеризуемого величиной коэффициента  $n/p$ .

Рассмотренная задача имеет большое значение в теории регистрирующих приборов с инерционными элементами (шлейфовые осциллографы, индикаторы и т. п.). Пользуясь графиком на рис. 5.1, можно установить, что необходимое для таких приборов демпфирование соответствует  $n/p \approx 0,75$ . При меньших значениях демпфирования максимальное показание прибора значительно превышает значение измеряемой величины (при скачкообразном ее изменении); большее демпфирование приводит к замедленному установлению показаний прибора.

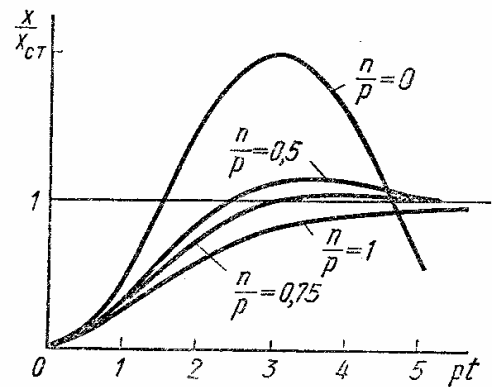


Рис. 5.1

**Гармоническое возбуждение.** Пусть возмущающая сила  $P(t)$  меняется по закону

$$P(t) = P_0 \cos \omega t.$$

В этом случае дифференциальное уравнение движения имеет вид

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + p^2x = (P_0/m) \cos \omega t. \quad (5.2)$$

Как и в случае консервативной системы, найдем частное решение уравнения (5.2), описывающее стационарное периодическое движение с периодом возмущающей силы. Движение, зависящее от начальных условий, со временем затухает и не представляет практического интереса. Для отыскания частного решения используем метод комплексных амплитуд: введем в рассмотрение комплексную величину  $x_*$ , действительная часть которой совпадает с выражением для смещения

$$\operatorname{Re} x_* = x.$$

Зависимость возмущающей силы от времени также представим в комплексной форме  $P_*(t) = P_0 e^{i\omega t}$ , так что

$$P(t) = \operatorname{Re} P_*(t) = P_0 \cos \omega t.$$

Действительная часть решения уравнения

$$\ddot{x}_* + 2n\dot{x}_* + p^2x_* = P_0e^{i\omega t}/m \quad (5.3)$$

совпадает с решением уравнения (5.2), так как коэффициенты уравнения являются действительными величинами.

Искомое решение запишем в виде

$$x_* = A_*e^{i\omega t}. \quad (5.4)$$

Подставив это выражение в формулу (5.3), получим

$$(-\omega^2 + 2ni\omega + p^2)A_* = P_0/m,$$

откуда определяется *комплексная амплитуда*

$$A_* = \frac{P_0}{m(p^2 - \omega^2 + i2n\omega)},$$

или в показательной форме

$$A_* = Ae^{-i\varphi}, \quad (5.5)$$

где

$$A = \frac{P_0}{m\sqrt{(p^2 - \omega^2)^2 + 4n^2\omega^2}}; \quad \varphi = \arctg \frac{2n\omega}{p^2 - \omega^2}. \quad (5.6)$$

Подставляя значение  $A_*$  в формулу (5.4), находим

$$x_* = Ae^{i(\omega t - \varphi)} = A[\cos(\omega t - \varphi) + i\sin(\omega t - \varphi)].$$

Таким образом, действительное перемещение

$$x = \operatorname{Re} x_* = A \cos(\omega t - \varphi). \quad (5.7)$$

Следовательно, величины  $A$  и  $\varphi$  в формуле (5.5) представляют собой соответственно амплитуду колебаний и запаздывание по фазе перемещения по отношению к возмущающей силе. Комплексная амплитуда  $A_*$  одновременно характеризует как действительную амплитуду, так и фазу колебаний. Поэтому при исследовании колебаний методом комплексных амплитуд обычно не переходят к тригонометрической записи [см. формулу (5.7)], ограничиваясь равноправной с ней показательной формой (5.5).

Проанализируем формулу (5.6) для амплитуды вынужденных колебаний. Отношение  $A$  к так называемой равновесной амплитуде  $A_0 = P_0/c$ , называемое *коэффициентом динамичности*  $\beta$ , равно

$$\beta = \frac{A}{A_0} = \frac{1}{\sqrt{(1 - \omega^2/p^2)^2 + 4n^2\omega^2/p^4}}. \quad (5.8)$$

(Заметим, что равновесная амплитуда  $A_0$  представляет собой статическую деформацию упругой связи под действием максимальной силы  $P_0$ .)

Непосредственное определение коэффициента  $n$ , характеризующего силы вязкого трения, затруднительно. Поэтому в формулу (5.8) целе-

сообразно вместо  $n$  ввести коэффициент поглощения  $\psi$ , используя зависимость (4.31). Тогда

$$\beta = 1/\sqrt{(1 - \omega^2/p^2)^2 + \psi^2/(4\pi^2)}. \quad (5.9)$$

Преимуществом формулы (5.9) является то, что коэффициент динамичности ставится в зависимость от энергетической характеристики

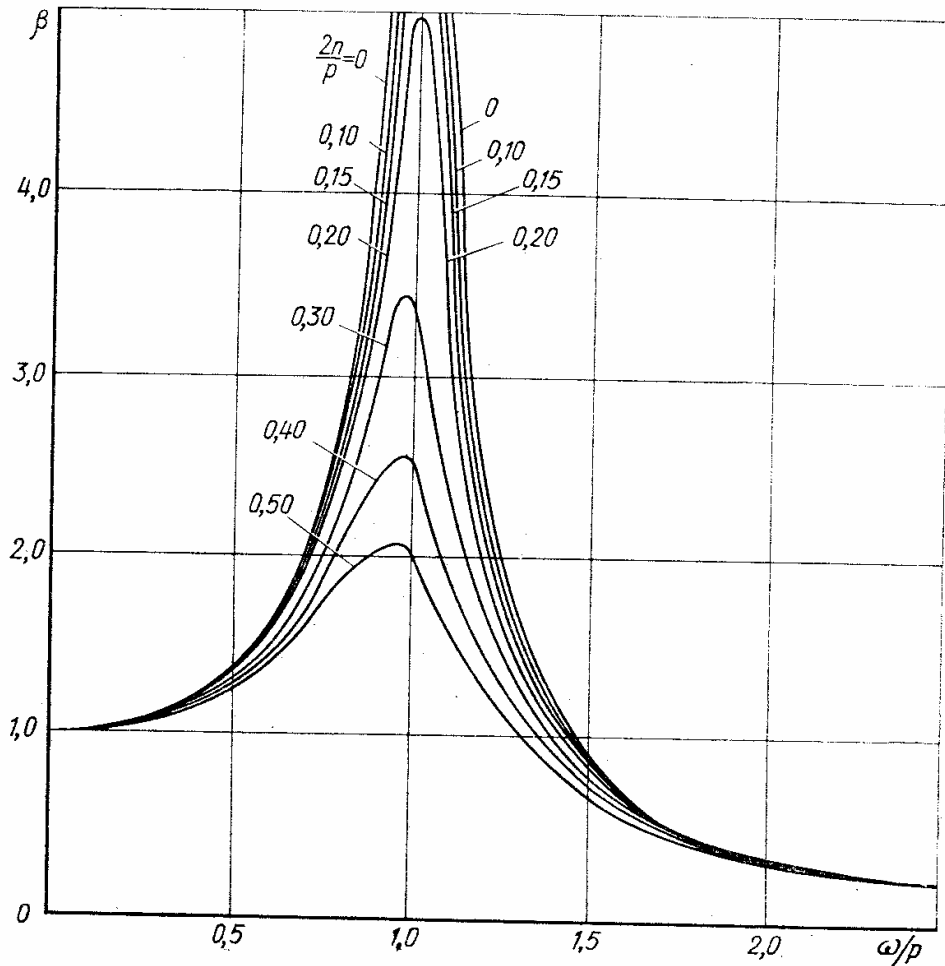


Рис. 5.2

трения  $\psi$ , что позволяет использовать эту формулу не только для вязкого трения, но и для других законов трения.

Можно также ввести в формулу для коэффициента динамичности логарифмический декремент  $\delta$ . Воспользовавшись приближенной зависимостью (4.25), получим

$$\beta = 1/\sqrt{(1 - \omega^2/p^2)^2 + (\delta/\pi)^2 (\omega/p)^2}. \quad (5.10)$$

Из анализа приведенных выше зависимостей следует, что при приближении частоты возмущения  $\omega$  к частоте собственных колебаний  $p$  коэффициент динамичности возрастает (рис. 5.2). Максимум амплитуды колебаний достигается приблизительно при  $\omega/p = 1$ ; при этом

$$\beta_{\max} = 2\pi/\psi_{\omega=p} \approx \pi/\delta. \quad (5.11)$$

По аналогии с электрическими системами эта величина называется иногда *добротностью механической системы*. Чем меньше логарифмический декремент  $\delta$ , тем больше добротность системы и тем больше амплитуда вынужденных колебаний в области резонанса. Вместе с тем при режимах, далеких от резонанса ( $\omega \ll p$  или  $\omega \gg p$ ), затухание мало влияет на величину коэффициента динамичности. Это дает возможность расчет таких режимов вести без учета демпфирования.

Проследим за изменением угла сдвига фазы  $\varphi$  в зависимости от час-

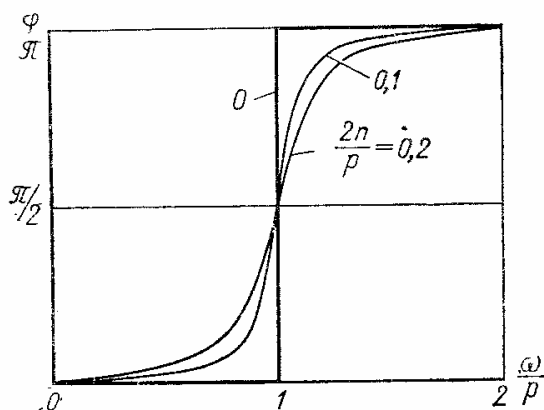


Рис. 5.3

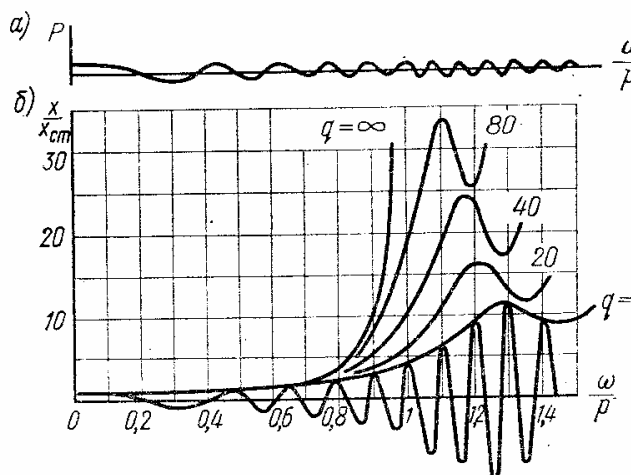


Рис. 5.4

тоты колебаний и величины логарифмического декремента затухания (рис. 5.3). В системах с небольшим трением угол сдвига существен только в области резонанса. При переходе через резонанс  $\varphi$  изменяется от 0 до  $\pi$  тем быстрее, чем меньше трение. В положении резонанса независимо от величины затухания сдвиг фазы всегда равен  $\pi/2$  и энергия, доставляемая системе возмущающей силой, максимальна.

**Проход через резонанс.** Большие амплитуды колебаний при резонансе заставляют избегать резонансных областей. При этом часто приходится работать при частоте изменения возмущающей силы, большей собственной частоты колебаний системы. В этом случае система проходит через резонанс во время разгона и при выбеге.

При проходе через резонанс развиваются меньшие амплитуды колебаний, чем при стационарном резонансном режиме, так как энергия, необходимая для раскачивания системы, доставляется только в течение короткого промежутка времени.

Для количественного изучения движения рассмотрим колебания под действием возмущающей силы  $P(t) = P_0 \cos ht^2$  (рис. 5.4, а). Скорость нарастания частоты изменения возмущающей силы зависит от величины коэффициента  $h$ . Мгновенная частота

$$\omega = \frac{d}{dt} (ht^2) = 2ht. \quad (5.12)$$

В момент резонанса  $t_*$  мгновенная частота  $\omega$  равна частоте собственных колебаний системы  $p$ . Поэтому

$$t_* = p/(2h).$$

Дифференциальное уравнение движения имеет вид

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + p^2x = (P_0/m) \cos ht^2.$$

Решение этого уравнения можно представить в форме (5.1):

$$x = \frac{P_0}{mp_1} e^{-nt} \int_0^t \cos(h\vartheta^2) e^{n\vartheta} \sin p_1(t - \vartheta) d\vartheta.$$

Интеграл выражается через табулированные функции (интеграл вероятности от комплексного аргумента). Подробности вычислений приведены в работе [52]. Ниже ограничимся описанием качественной картины явления и приведем приближенные зависимости, полученные А. М. Кацом.

На рис. 5.4,б представлены характерные зависимости смещения  $x$  от времени или пропорциональной ему мгновенной частоты  $\omega$ . Эти зависимости построены для системы без затухания. Величины  $q$ , поставленные около огибающих кривых, характеризуют темп роста частоты возмущения. Величина

$$q = t_*/\tau = p^2/(4\pi h) \quad (5.13)$$

представляет собой число периодов собственных колебаний, прошедших от начала движения до резонанса. Чем больше  $q$ , тем меньше скорость нарастания частоты возмущающей силы. Кривые на рис. 5.4 свидетельствуют о том, что чем быстрее происходит разгон, тем меньше максимальные размахи колебаний и тем больше мгновенная частота, при которой они достигаются. Расчет и эксперименты показали, что как частота, при которой размахи колебаний максимальны, так и величина этих размахов существенно зависят от демпфирования, характеризуемого логарифмическим декрементом  $\delta$ .

Частота возмущения  $\omega_*$ , при которой достигаются максимальные отклонения системы, определяется по приближенной формуле

$$\omega_* = p \left( 1 \pm \frac{1}{1 + 0,14\delta/\pi \sqrt{2\pi q}} \sqrt{\frac{3}{4q}} \right). \quad (5.14)$$

Знак минус в этой формуле относится к движению, происходящему при убывающей частоте возмущения. В этом случае под  $q$  понимается количество периодов собственных колебаний от момента резонанса до полной остановки системы. Наибольший коэффициент динамичности

$$\beta_{\max} = \frac{f}{\sqrt{1/(2\pi q) + (\delta/\pi)^2}}. \quad (5.15)$$

Функция  $f$  зависит от  $\sqrt{1 + \pi/(2q\delta^2)}$  следующим образом:

$\frac{1}{\sqrt{1 + \pi/(2q\delta^2)}}$	0	0,2	0,4	0,6	0,8	0,9	1,0
$f$	1,46	1,26	1,13	1,05	1,01	1,00	1,00

В качестве примера возьмем систему, имеющую добротность  $\pi/\delta = 100$ , что соответствует декременту  $\delta = 0,0314$ . При стационарном резонансном режиме движения такой системы коэффициент динамичности  $\beta = 100$  [см. формулу (5.10)]. При проходе через резонанс со скоростью разгона, характеризуемой величиной  $q = 16,2$ , по формулам (5.14) и (5.15) найдем:  $\omega_* = 1,21p$ ,  $\beta_{\max} = 13,3$ .

Таким образом, при проходе через резонанс амплитуды колебаний увеличиваются значительно меньше, чем при стационарном движении.

Как видно из рис. 5.4, возрастание амплитуд колебаний происходит в основном в небольшом диапазоне изменения частоты возмущения, когда она приближается к собственной частоте. Поэтому приведенные зависимости можно приближенно использовать и при законе изменения частоты, отличном от линейного. В этом случае под  $q$  следует понимать величину  $p^2/(\pi\varepsilon)$ , где  $\varepsilon = (d\omega/dt)_{\omega=p}$  — скорость изменения частоты возмущения в момент резонанса.

Рассмотренная постановка задачи не всегда соответствует реальным условиям. Процесс разгона, как правило, является нерегулируемым.

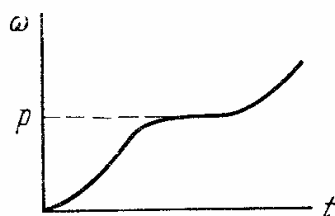


Рис. 5.5

Закон изменения частоты возмущения задается уравнением движения машины и зависит от затрат энергии на колебания, которые тем больше, чем больше амплитуда колебаний. По мере увеличения амплитуды колебаний все меньшая часть мощности двигателя тратится на разгон, скорость нарастания частоты возмущения замедляется. Качественная зависимость частоты возмущения от времени для двигателей с ограниченной мощностью представлена на рис. 5.5.

Проход через резонанс в случае ограниченной мощности двигателя с учетом влияния колебаний на разгон двигателя представляет собой сложную нелинейную задачу. Эта задача рассматривается в работах [16, 31].

## § 6. ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМ С ТРЕНИЕМ, ОТЛИЧНЫМ ОТ ВЯЗКОГО

**Гармоническое возбуждение (приближенное решение).** При трении, не пропорциональном скорости, уравнения движения являются нелинейными и их решение становится затруднительным. При гармоническом возбуждении эффективным является приближенный способ расчета. Уравнение движения при произвольной зависимости силы трения от смещения и скорости может быть записано в виде

$$m\ddot{x} + R(x, \dot{x}) + cx = P_0 \cos(\omega t + \varphi). \quad (6.1)$$

Приближенное решение этого уравнения представим в виде гармонического колебания, отстающего по фазе от возмущающей силы на угол  $\varphi^*$ ,

$$x = A \cos \omega t. \quad (6.2)$$

\* В данном случае фазовый угол  $\varphi$  включен в выражение возмущающей силы, а не перемещения. Это позволяет несколько упростить выкладки и не влияет на результат, так как существенна лишь разность между фазами силы и перемещения.



Скорость движения определяется формулой

$$\dot{x} = -A\omega \sin \omega t. \quad (6.3)$$

Очевидно, что сила трения  $R(A \cos \omega t, -A\omega \sin \omega t)$  в этом случае также является периодической функцией периода  $\tau = 2\pi/\omega$ , причем она обращается в нуль при  $\cos \omega t = \pm 1$ , когда скорость движения также обращается в нуль. Поэтому функцию  $R$  можно разложить в ряд Фурье\*:

$$R(x, \dot{x}) = R_1(A, \omega) \sin \omega t + R_2(A, \omega) \sin 2\omega t + \dots, \quad (6.4)$$

где

$$R_1(A, \omega) = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{2\pi/\omega} R(A \cos \omega t, -A\omega \sin \omega t) \sin \omega t dt, \quad (6.5)$$

$$R_2(A, \omega) = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{2\pi/\omega} R(A \cos \omega t, -A\omega \sin \omega t) \sin 2\omega t dt, \dots$$

Подставляя выражения (6.2) и (6.4) в левую часть дифференциального уравнения (6.1), получаем

$$\Phi(t) = (c - m\omega^2) A \cos \omega t + R_1 \sin \omega t + R_2 \sin 2\omega t + \dots$$

Легко видеть, что ни при каком выборе постоянных  $A$  и  $\varphi$  это выражение, содержащее гармоники с частотами  $2\omega$ ,  $3\omega$  и последующие, не может в точности совпадать с правой частью уравнения (6.1), не содержащей таких гармоник. Это и понятно, так как выражение (6.2) не является точным решением уравнения (6.1). Поэтому мы вынуждены ограничиться требованием, чтобы совпадали только слагаемые, изменяющиеся с основной частотой  $\omega$  в левой и правой частях уравнения (6.1). (Этот метод приближенного решения задачи называется *методом гармонического баланса*.)

Таким образом, приходим к двум уравнениям:

$$(c - m\omega^2) A = P_0 \cos \varphi, \quad R_1(A, \omega) = -P_0 \sin \varphi. \quad (6.6)$$

Уравнения (6.6) позволяют, зная зависимость  $R_1(A, \omega)$ , определить амплитуду стационарных колебаний  $A$  и фазовый угол  $\varphi$ . Как видно из уравнений (6.6), в приближенном решении существенна лишь одна основная гармоника  $R_1$  силы трения.

Рассмотрим физический смысл этой гармоники.

В формуле (6.5) учтем зависимость  $\dot{x} = -A\omega \sin \omega t$ , тогда

$$R_1(A, \omega) = -\frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi/\omega} R(A \cos \omega t, -A\omega \sin \omega t) \dot{x} dt.$$

---

\* Предполагается, что слагаемое, пропорциональное  $\cos \omega t$ , в разложении (6.4) отсутствует. Учет этого слагаемого привел бы к изменению эквивалентной жесткости  $c$ .

Интеграл в этом выражении представляет собой работу  $W$  силы сопротивления за цикл (площадь петли гистерезиса). Вводя вновь коэффициент поглощения  $\psi = W/U$ , получаем

$$\int_0^{2\pi/\omega} R(A \cos \omega t, -A\omega \sin \omega t) \dot{x} dt = \psi U = \psi c A^2/2$$

и окончательно

$$R_1(A, \omega) = -cA\psi/(2\pi). \quad (6.7)$$

Подставив значение  $R_1$  в формулы (6.6), приведем их к такому виду:

$$A(1 - \omega^2/p^2) = A_0 \cos \varphi, \quad (6.8)$$

$$A\psi/(2\pi) = A_0 \sin \varphi.$$

Здесь дополнительно обозначено:  $P_0/c = A_0$  — равновесная амплитуда и  $c/m = p^2$ .

Из уравнений (6.8) находим амплитуду колебаний:

$$A = A_0 / \sqrt{(1 - \omega^2/p^2)^2 + \psi^2/(4\pi^2)} \quad (6.9)$$

и тангенс фазового угла:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\psi/(2\pi)}{1 - \omega^2/p^2}. \quad (6.10)$$

Эти формулы, являющиеся приближенными при любом законе трения, совпадают с точными формулами (5.6) для вязкого трения.

Таким образом, с расчетной точки зрения произвольный закон трения может быть приближенно заменен эквивалентным вязким трением с таким же коэффициентом поглощения.

Следует отметить важное отличие формулы (6.9) от формулы (5.6) для вязкого трения. Тогда как при вязком трении формула (5.6) определяет амплитуду колебаний в явном виде, при невязком трении коэффициент поглощения  $\psi$  также зависит от амплитуды и последняя определяется формулой (6.9) неявно.

В качестве примера рассмотрим вынужденные колебания при сухом трении. В этом случае [см. формулу (4.34)] коэффициент поглощения обратно пропорционален амплитуде и  $\psi = 8a/A$ , где  $a = R_0/c$  — полуширина зоны застоя. Подставив указанное значение  $\psi$  в формулу (6.9), найдем

$$A = \frac{A_0}{\sqrt{(1 - \omega^2/p^2)^2 + 16a^2/(\pi^2 A^2)}}.$$

Отсюда

$$A = \frac{\sqrt{A_0^2 - (4a/\pi)^2}}{|1 - \omega^2/p^2|}. \quad (6.11)$$

Полученная формула позволяет сделать следующие выводы:

1. Колебания возникают, только если  $A_0 > (4/\pi)a$ , т. е. если амплитуда воз-

мушающей силы  $P_0$  достаточно велика по сравнению с силой трения  $R_0$ :  $P_0 > (4/\pi)R_0$ .

2. Если  $P_0 > (4/\pi)R_0$ , то наличие сухого трения не ограничивает амплитуду при резонансе и при  $\omega \rightarrow p$   $A \rightarrow \infty$ .

Формула (6.10) для фазового сдвига после подстановки значения  $\psi$  и амплитуды  $A$  принимает вид

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{1}{\sqrt{(\pi P_0)^2 / (4R_0)^2 - 1}} \operatorname{sgn} \left( 1 - \frac{\omega^2}{p^2} \right),$$

откуда видно, что абсолютная величина фазового угла не зависит от частоты, но при переходе через резонансную частоту знак  $\operatorname{tg} \varphi$  меняется. Таким образом, при  $\omega < p$  перемещение отстает по фазе от возмущающей силы на угол  $\varphi$ , а при  $\omega > p$  — на угол  $\pi - \varphi$ .

Все приведенные выводы основаны на приближенном решении задачи. В следующем разделе рассмотрено точное решение той же задачи, данное Ден-Гартогом [21].

**Вынужденные колебания при сухом трении (точное решение).**  
Уравнение движения системы с сухим трением при гармоническом возбуждении имеет вид

$$m\ddot{x} + cx + R_0 \operatorname{sgn} \dot{x} = P_0 \cos(\omega t + \varphi). \quad (6.12)$$

Рассмотрим безостановочное стационарное движение системы с периодом возмущающей силы, причем предположим, что в моменты  $t = 0, 2\pi/\omega, 4\pi/\omega, \dots$  перемещение груза максимально ( $x = A, \dot{x} = 0$ ). Соответственно при  $t = \pi/\omega, 3\pi/\omega, 5\pi/\omega, \dots$   $x = -A$ . Таким образом, мы определяем угол  $\varphi$  как фазовый сдвиг между максимумами силы и перемещения.

Рассмотрим движение в течение одного полупериода  $0 \leq t \leq \pi/\omega$ . Все это время скорость отрицательна и уравнение движения имеет вид

$$m\ddot{x} + cx - R_0 = P_0 \cos(\omega t + \varphi).$$

Решение этого уравнения таково:

$$x = C_1 \cos pt + C_2 \sin pt + a + \frac{A_0}{1 - \omega^2/p^2} \cos(\omega t + \varphi),$$

где

$$c/m = p^2; \quad R_0/c = a; \quad P_0/c = A_0.$$

Условия  $x(0) = A, \dot{x}(0) = 0$  приводят к равенствам

$$C_1 + a + \frac{A_0}{1 - \omega^2/p^2} \cos \varphi = A, \quad (6.13)$$

$$C_2 p - \frac{A_0 \omega}{1 - \omega^2/p^2} \sin \varphi = 0. \quad (6.14)$$

Еще два условия получим при  $t = \pi/\omega$  ( $x = -A; \dot{x} = 0$ ):

$$C_1 \cos \lambda + C_2 \sin \lambda + a - \frac{A_0}{1 - \omega^2/p^2} \cos \varphi = -A; \quad (6.15)$$

$$-C_1 p \sin \lambda + C_2 p \cos \lambda + \frac{A_0 \omega}{1 - \omega^2/p^2} \sin \varphi = 0, \quad (6.16)$$

где  $\lambda = \pi p/\omega$ .

Система четырех уравнений (6.13)...(6.16) определяет четыре неизвестные:  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $A$ ,  $\varphi$ . Сложив почленно уравнения (6.13) и (6.15), а также (6.14) и (6.16), получим систему, содержащую только  $C_1$  и  $C_2$ :

$$\begin{aligned} C_1(1 + \cos \lambda) + C_2 \sin \lambda + 2a &= 0, \\ -C_1 \sin \lambda + C_2(1 + \cos \lambda) &= 0, \end{aligned}$$

откуда  $C_1 = -a$ ,  $C_2 = -a \operatorname{tg}(\lambda/2)$ .

Подставив эти значения постоянных в уравнения (6.13) и (6.14), приходим к равенствам

$$A = \frac{A_0}{1 - \omega^2/p^2} \cos \varphi, \quad -a \operatorname{tg} \frac{\pi p}{2\omega} = \frac{A_0 \omega/p}{1 - \omega^2/p^2} \sin \varphi,$$

из которых уже легко определить амплитуду:

$$A = \frac{\sqrt{A_0^2 - \{a(p/\omega)(1 - \omega^2/p^2) \operatorname{tg} [\pi p/(2\omega)]\}^2}}{|1 - \omega^2/p^2|}. \quad (6.17)$$

Сравнивая эту точную формулу с приближенной формулой (6.11) устанавливаем, что они различаются лишь структурой второго члена в подкоренном выражении. Впрочем, вблизи резонанса (т. е. при  $\omega \rightarrow p$ ) формула (6.17) переходит в формулу (6.11), так как

$$\lim_{\omega \rightarrow p} (p/\omega)(1 - \omega^2/p^2) \operatorname{tg} [\pi p/(2\omega)] = -4/\pi.$$

Таким образом, для наиболее важной зоны больших амплитуд колебаний вблизи резонанса приближенная формула (6.11) дает надежные результаты.

Формула (6.17) справедлива только в том случае, если характер движения соответствует принятому при ее выводе, т. е. если за полупериод  $0 \leq t \leq \pi/\omega$  скорость  $\dot{x}$  остается отрицательной. Это приводит к условию

$$ap \left( \sin pt - \operatorname{tg} \frac{\pi p}{2\omega} \cos pt \right) - \frac{A_0 \omega}{1 - \omega^2/p^2} \sin(\omega t + \varphi) \leq 0 \quad (6.18)$$

при

$$0 \leq t \leq \pi/\omega.$$

Если условие (6.18) не выполняется, то на самом деле происходит не безостановочное движение, а движение с остановками.

Характер одного из возможных режимов такого движения, при котором за каждый полупериод изменения возмущающей силы имеет место одна остановка при максимальных перемещениях, показан на рис. 6.1. В этом случае движение начинается при фазе возмущающей силы  $\varphi_1$ , когда упругая сила становится равной сумме возмущающей силы и силы трения:

$$cA = P_0 \cos \varphi_1 + R_0.$$

Это движение (с начальными условиями  $x_0 = A$ ,  $\dot{x}_0 = 0$ ) продолжается до тех пор, пока скорость не станет равной нулю при смещении  $x = -A$ , т. е. фазе возмущающей силы  $\varphi_2$ .

Таким образом, для описания движения рассматриваемого типа имеются следующие условия: в начале движения ( $t = 0$ )

$$x_0 = A, \quad \dot{x}_0 = 0,$$

$$cA = P_0 \cos \varphi_1 + R_0,$$

в момент остановки ( $t_1 = \varphi_2/\omega$ )

$$x = -A, \quad \dot{x} = 0.$$

Получается система пяти уравнений с пятью неизвестными ( $C_1$ ,  $C_2$ ,  $A$ ,  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$ ), решение которой должно удовлетворять условию  $\varphi_2 < \varphi_1 + \pi$ .

Чрезвычайно трудоемкое решение этой системы выполнено Ден-Гартогом [21]. Результаты расчета показаны на рис. 6.2, где построены амплитудно-частотные характеристики системы при различных отношениях силы сухого трения  $R_0$  к амплитуде возмущающей силы  $P_0$ . Безостановочные режимы движения [расчет их выполняется по формуле (6.17)] изображаются точками, лежащими выше штриховой линии. Ниже этой линии

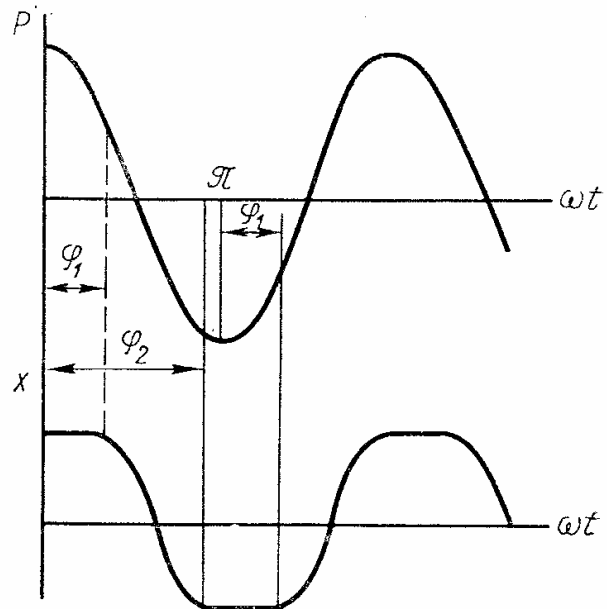


Рис. 6.1

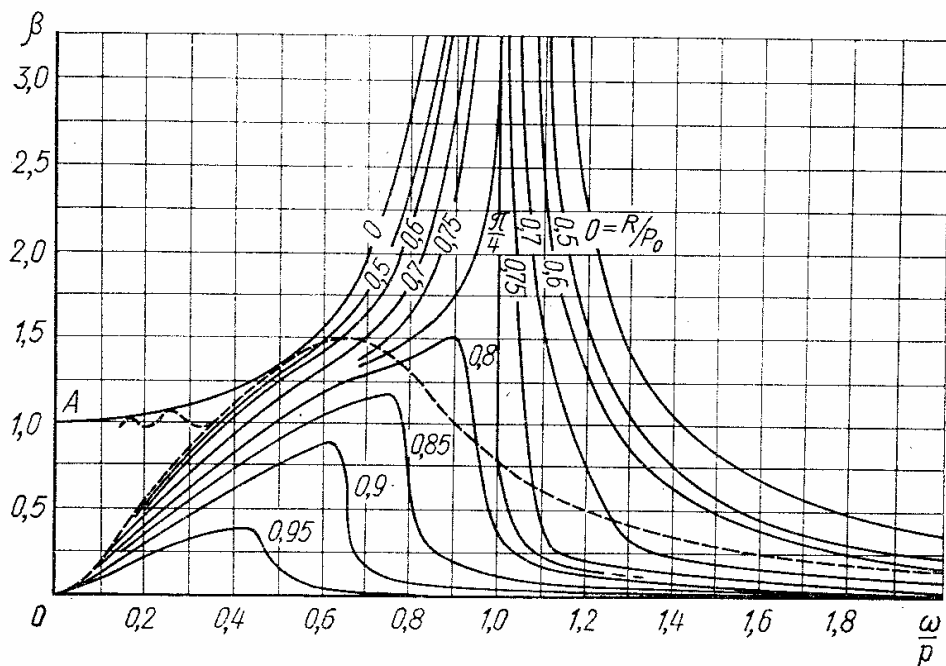


Рис. 6.2

изображены кривые, соответствующие режимам движения с одной остановкой за полупериод.

Возможны также режимы движения более чем с одной остановкой за полупериод. Соответствующие этим режимам амплитудно-частотные характеристики на рис. 6.2 не показаны — они расположены в нижнем левом треугольнике рисунка.

Решение задачи о режимах периодического движения с остановками изложенным методом является весьма сложным. Кроме того, при некоторых сочетаниях параметров оказываются возможными (т. е. удовлетворяющими условиям периодичности) различные режимы с одной и несколькими остановками. В этих случаях, чтобы установить, какой из возможных режимов реализуется в действительности, надо дополнительно рассмотреть их устойчивость.

Значительно быстрее ведет к цели решение задачи *методом математического моделирования*, ставшим возможным в связи с развитием вычислительной техники. Сущность этого метода состоит в том, что нелинейное уравнение движения (6.12) интегрируют на ЭВМ при произвольных начальных условиях\*. Так как в уравнении движения учтено затухание, через некоторое время устанавливается стационарный режим. Вычисления прекращают, когда различия между смещениями при последовательных периодах становятся меньше наперед заданной допустимой ошибки.

Следует еще раз подчеркнуть, что рассмотренный сложный анализ нужен только при большом трении и малых частотах возбуждения. При интенсивных колебаниях (выше штриховой линии на рис. 6.2) происходит безостановочное движение, при котором достаточно точна формула (6.11).

## § 7. ПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ ВОЗБУЖДЕНИЕ КОЛЕБАНИЙ

**Сущность явления.** Колебания механических систем могут вызываться не только внешними силами, непосредственно совершающими работу на основных перемещениях системы, но и внешними воздействиями, изменяющими параметры системы (жесткость, массу).

В некоторых случаях при периодически изменяющихся параметрах возникают нарастающие колебания системы, имеет место так называемый *параметрический резонанс*.

Примером параметрических колебаний является раскачивание на качелях. В этом случае удастся увеличивать размахи колебаний только за счет периодического изменения расстояния центра тяжести системы от точки подвеса качелей. Тот же процесс может быть воспроизведен на маятнике с переменной длиной. Примером параметрического возбуждения колебаний является также явление динамической неустойчивости стержней (рис. 7.1), когда под действием периодически изменяющейся *продольной* силы стержень совершает *поперечные* колебания.

---

\* Учитывая возможную неоднозначность решения, следует опробовать различные варианты начальных условий.

Так же как и при обычном резонансе, при параметрическом резонансе колебания развиваются в связи с непрерывным поступлением энергии в систему. Проследим этот процесс на примере динамической неустойчивости стержня.

Пусть стержень (рис. 7.1) совершает собственные поперечные колебания с частотой  $p$  (рис. 7.2,а):

$$x = f \cos pt.$$

При этом верхний шарнир получает небольшие вертикальные перемещения  $\xi$  с удвоенной частотой (рис. 7.2,б). Он опускается вниз

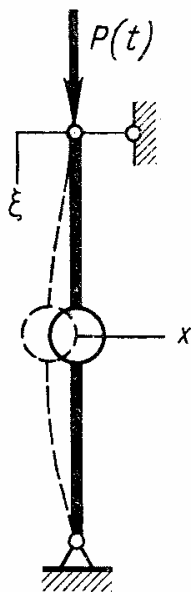


Рис. 7.1

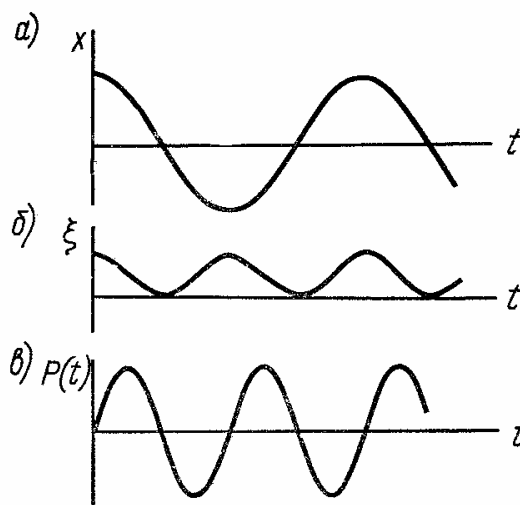


Рис. 7.2

при отклонениях груза  $x$  влево и вправо и занимает наивысшее положение, когда груз проходит положение статического равновесия. Если продольная сила изменяется также с частотой вдвое большей, чем частота поперечных колебаний груза (рис. 7.2,в), то она при каждом цикле совершает работу и энергия системы непрерывно нарастает.

Составим уравнение движения груза  $m$ , закрепленного на стержне:

$$m\ddot{x} + c(t)x = 0. \quad (7.1)$$

В данном случае жесткость стержня  $c$  является функцией времени, так как она зависит от величины продольной силы  $P(t)$ , приложенной в данный момент. В соответствии с приближенной формулой\*

$$c(t) = c_0 [1 - P(t)/P_3],$$

где  $c_0$  — жесткость стержня при отсутствии продольной силы;  $P_3$  — эйлерова критическая сила для стержня.

\* См.: Феодосьев В. И. Сопротивление материалов. М., Наука, 1974, гл. XIV, § 102.

Таким образом, уравнение (7.1) может быть записано в виде

$$\ddot{x} + p^2 [1 - P(t)/P_0] x = 0 \quad (p^2 = c_0/m). \quad (7.2)$$

Если  $P(t)$  является периодической (с периодом  $\tau$ ) функцией времени, то уравнение (7.2) называется *уравнением Хилла*.

Сосредоточим внимание на одном периоде  $\tau$  изменения параметра. Сконструируем два решения уравнения (7.2), удовлетворяющие начальным условиям:

$$x_1(0) = 1, \quad \dot{x}_1(0) = 0, \quad (7.3)$$

$$x_2(0) = 0, \quad \dot{x}_2(0) = 1.$$

Очевидно, что построить такие решения можно всегда, хотя бы путем численного интегрирования уравнения (7.2). Тогда общее решение уравнения (7.2) получит вид

$$x(t) = x(0) x_1(t) + \dot{x}(0) x_2(t), \quad (7.4)$$

где  $\dot{x}(0)$  и  $x(0)$  — начальные значения скорости и смещения.

Вычислим значения  $x$  и  $\dot{x}$  в конце периода при  $t = \tau$ :

$$x(\tau) = x(0) x_1(\tau) + \dot{x}(0) x_2(\tau), \quad (7.5)$$

$$\dot{x}(\tau) = x(0) \dot{x}_1(\tau) + \dot{x}(0) \dot{x}_2(\tau).$$

Если предположить, что выполняются равенства

$$x(\tau) = \sigma x(0), \quad \dot{x}(\tau) = \sigma \dot{x}(0), \quad (7.6)$$

где  $\sigma$  — число, большее единицы, то это означает, что в течение периода  $\tau$  и смещение и скорость возрастают в  $\sigma$  раз. При следующем периоде снова произойдет такое же возрастание размахов и т. д. Таким образом, при  $|\sigma| > 1$  уравнения (7.6) являются достаточными условиями неустойчивости процесса и неограниченного нарастания колебаний.

Подставив в уравнения (7.6) выражения (7.5), получим систему линейных однородных уравнений относительно  $x(0)$ ,  $\dot{x}(0)$ . Условие наличия нетривиальных решений этого уравнения приводит к равенству

$$\begin{vmatrix} x_1(\tau) - \sigma & x_2(\tau) \\ \dot{x}_1(\tau) & \dot{x}_2(\tau) - \sigma \end{vmatrix} = 0,$$

т. е. к квадратному уравнению относительно  $\sigma$

$$\sigma^2 - [x_1(\tau) + \dot{x}_2(\tau)] \sigma + x_1(\tau) \dot{x}_2(\tau) - \dot{x}_1(\tau) x_2(\tau) = 0. \quad (7.7)$$

Свободный член уравнения (7.7) тождественно равен единице. В



самом деле,  $x_1$  и  $x_2$  являются решениями уравнения (7.1):

$$\ddot{x}_1 + c(t)x_1 = 0, \quad \ddot{x}_2 + c(t)x_2 = 0.$$

Умножая первое из этих равенств на  $x_2$ , второе — на  $x_1$ , вычитая почленно и интегрируя от нуля до  $\tau$ , находим

$$\int_0^\tau (\ddot{x}_2 x_1 - \ddot{x}_1 x_2) dt = [\dot{x}_2 x_1 - \dot{x}_1 x_2]_0^\tau = 0,$$

т. е.

$$\dot{x}_2(\tau)x_1(\tau) - \dot{x}_1(\tau)x_2(\tau) = \dot{x}_2(0)x_1(0) - \dot{x}_1(0)x_2(0) = 1.$$

Таким образом, характеристический множитель определяется равенством

$$\sigma = A \pm \sqrt{A^2 - 1},$$

где

$$A = [x_1(\tau) + \dot{x}_2(\tau)]/2.$$

Очевидно, что если

$$|A| > 1, \quad (7.8)$$

то одно из значений  $|\sigma| > 1$  и движение неустойчиво. Если  $|A| < 1$ , то действительные значения  $\sigma$  отсутствуют и неустойчивое движение, отвечающее уравнениям (7.6), невозможно.

Пограничным является случай  $|A| = 1$ ,  $|\sigma| = 1$ . Таким образом, для того чтобы установить, имеет ли место параметрический резонанс при данном законе изменения параметра, необходимо вычислить решения  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$  и проверить соблюдение неравенства (7.8).

Вычисление решений  $x_1$ ,  $x_2$  в общем виде оказывается несложным, если  $c(t)$  меняется по кусочно-постоянному закону (например, если в течение половины периода продольная сила постоянная сжимающая, а в течение второй половины — постоянная растягивающая). Решение для этого случая см. в работе [40].

Практически более важен случай, когда параметр меняется по гармоническому закону

$$c(t) = c_0 + c_1 \cos \omega t.$$

При этом уравнение (7.1) получает вид

$$\ddot{x} + [c_0/m + (c_1/m) \cos \omega t] x = 0. \quad (7.9)$$

Это уравнение, называемое *уравнением Матье*, хорошо изучено. Характер его решений зависит от двух безразмерных коэффициентов.

В самом деле, введя «безразмерное» время  $\vartheta = \omega t/2$ , приведем уравнение (7.9) к виду

$$d^2x/d\vartheta^2 + (l + 2q \cos 2\vartheta) x = 0, \quad (7.10)$$

где

$$l = 4c_0/(m\omega^2) = 4p^2/\omega^2, \quad q = 2c_1/(m\omega^2).$$

Коэффициенты  $l$  (характеризующий отношение собственной частоты системы при среднем значении параметра  $c_0$  к частоте изменения параметра) и  $q$  (характеризующий степень изменения параметра) полностью определяют устойчивость движения. Плоскость изменения  $l$  и  $q$  может быть разделена на области, соответствующие устойчивым и неустойчивым движениям.

Такая диаграмма (диаграмма Айнса-Стретта) представлена на рис. 7.3. Области устойчивости на рисунке заштрихованы. Таким образом, для того чтобы определить, устойчиво или неустойчиво движение, описываемое уравнением (7.9), достаточно вычислить коэффициенты  $l$ ,  $q$ , нанести соответствующую точку на диаграмму и установить, попадает ли она в устойчивую (заштрихованную) или в неустойчивую (белую) область.

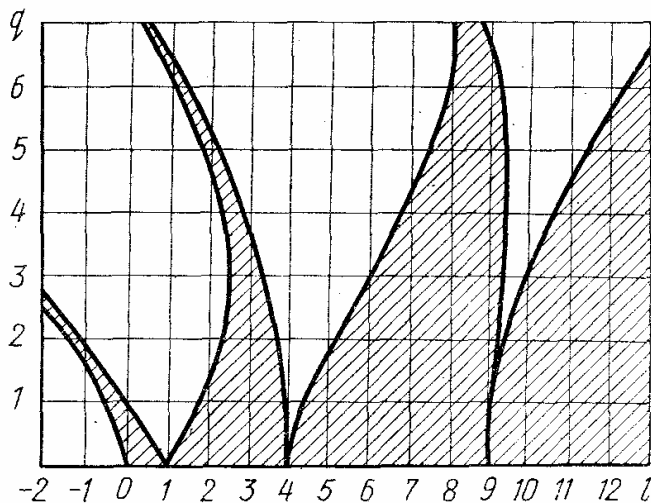


Рис. 7.3

Проследим, как изменяется устойчивость системы при изменении частоты  $\omega$ . В этом случае отношение  $q/l$  сохраняет постоянное значение и соответствующая точка на диаграмме Айнса-Стретта движется по лучу, проходящему через начало координат. При этом точка последовательно попадает то в области устойчивости, то в области неустойчивости. Как легко видеть, при малом изменении параметра ( $q$  мало) неустойчивость имеет место при значениях параметра  $l = 1, 4, 9, \dots$ , т. е. при отношениях  $p/\omega = 1/2; 1; 3/2; 2; 5/2$  и т. д.

**Приближенное определение границ зон устойчивости.** Как уже указывалось, границам зон устойчивости соответствуют значения  $|\sigma| = 1$ . Следовательно, в этом случае возможны периодические решения уравнения (7.10). При этом период движения должен вдвое превышать период изменения параметра.

Такое движение можно разложить в ряд Фурье:

$$x = a_0 + a_1 \cos \vartheta + a_2 \cos 2\vartheta + \dots + b_1 \sin \vartheta + b_2 \sin 2\vartheta + \dots \quad (7.11)$$

Таким образом, границы зон устойчивости соответствуют тем сочетаниям безразмерных коэффициентов, при которых уравнение движения имеет решение вида (7.11).

Приведем вычисления для случая, когда в системе имеется вязкое трение; при этом в уравнение движения входит член, пропорциональный  $\dot{x}$ , и оно может быть приведено к виду

$$d^2x/d\vartheta^2 + \alpha_1 dx/d\vartheta + (l + 2q \cos 2\vartheta)x = 0. \quad (7.12)$$

Для того чтобы приближенно определить границы первой (наибо-

лее важной), области неустойчивости, достаточно в выражении (7.11) удерживать только слагаемые, пропорциональные  $\cos \vartheta$  и  $\sin \vartheta$ :

$$x = a \cos \vartheta + b \sin \vartheta. \quad (7.13)$$

Подставляя это выражение в левую часть уравнения (7.12) и производя несложные тригонометрические преобразования, получаем

$$F(\vartheta) = a[(l-1) \cos \vartheta - \alpha_1 \sin \vartheta + q(\cos \vartheta + \cos 3\vartheta)] + \\ + b[(l-1) \sin \vartheta + \alpha_1 \cos \vartheta - q(\sin \vartheta - \sin 3\vartheta)] \neq 0.$$

Применяя метод гармонического баланса, который уже использовался в предыдущем параграфе, приравняем нулю коэффициенты при  $\sin \vartheta$  и  $\cos \vartheta$  [более строгое выполнение равенства  $F(\vartheta) = 0$  потребовало бы учета большего числа слагаемых в выражении (7.11)]. Получаем

$$a(l-1+q) + b\alpha_1 = 0, \quad (7.14)$$

$$a(-\alpha_1) + b(l-1-q) = 0.$$

Приравнявая нулю определитель системы (7.14), находим условие, при котором возможно равенство (7.13):

$$(l-1)^2 - q^2 + \alpha_1^2 = 0. \quad (7.15)$$

Это условие и представляет собой приближенное уравнение границ первой зоны неустойчивости. При этом неустойчивости соответствует неравенство

$$(l-1)^2 - q^2 + \alpha_1^2 < 0. \quad (7.16)$$

На рис. 7.4 показаны рассчитанные по уравнению (7.15) границы при  $\alpha_1 = 0$  и  $\alpha_1 = 0,2$ . Для сравнения штриховой линией показана также точная граница при  $\alpha_1 = 0$  по диаграмме Айнса-Стретта. Формула (7.15) показывает, что при наличии вязкого трения параметрический резонанс возможен только при  $|q| > \alpha_1$ , т. е. при достаточно большом изменении параметра. При удержании большего числа слагаемых в выражении (7.11) и соответственно более точном выполнении равенства  $F(\vartheta) = 0$  можно уточнить границы первой области неустойчивости и рассчитать границы других областей.

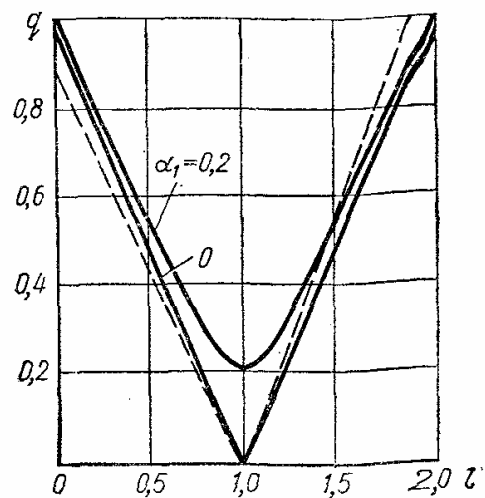


Рис. 7.4

## § 8. КОЛЕБАНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

**Вводные замечания.** Несмотря на то что все реальные конструкции являются в той или иной степени нелинейными, большая часть практических расчетов выполняется на основе линейной теории. Как пра-

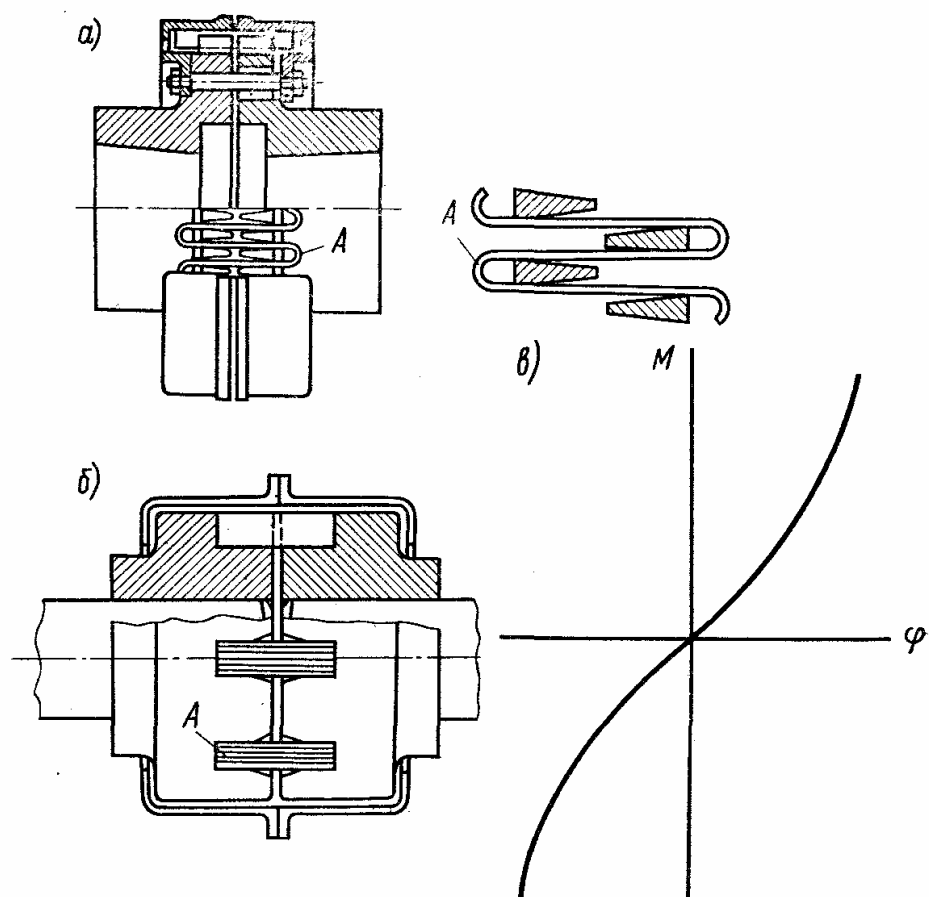


Рис. 8.1

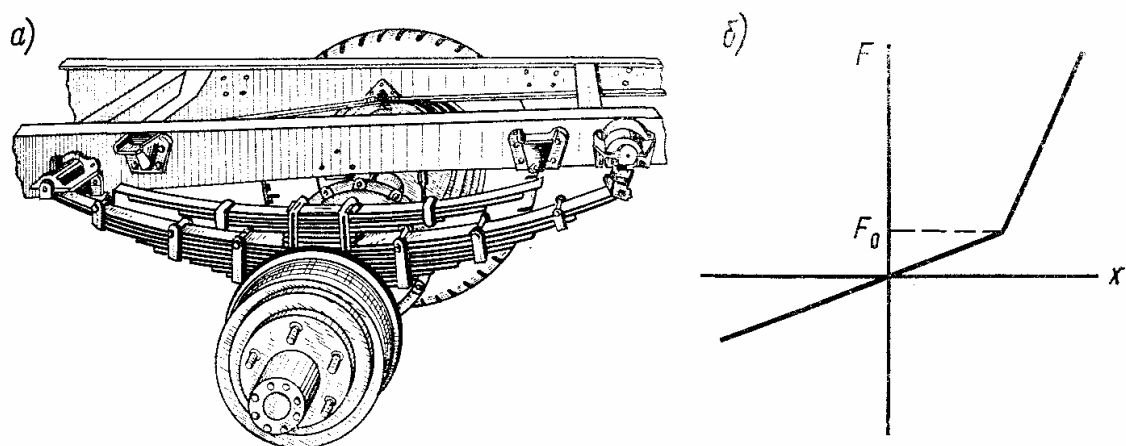


Рис. 8.2

вило, такие расчеты приводят к удовлетворительным результатам. Однако иногда возникают явления, которые не могут быть объяснены в рамках линейной теории. К ним относятся, например, наличие нескольких устойчивых режимов вынужденных колебаний, реализация которых зависит от начальных условий; колебания с частотами, отличными от частоты возмущения, и т. п. Это делает необходимым проведение расчетов на основе нелинейной теории.

Особенно необходимы нелинейные расчеты для существенно нелинейных систем, таких, как упругие системы с ограничителями хода, системы с нелинейными муфтами и др.

В настоящем разделе нелинейные колебания рассмотрены лишь кратко, более полная теория содержится в работах [9, 29, 54].

Примером упругих элементов с нелинейными характеристиками являются муфты, показанные на рис. 8.1, а, б. В муфте со змеевидной пружинной (рис. 8.1, а) с увеличением крутящего момента стальная лента прижимается к зубьям, в связи с чем длина деформируемой части ее уменьшается и жесткость соответственно повышается. Зависимость передаваемого момента от угла взаимного поворота половин муфты показана на рис. 8.1, в. Аналогичную характеристику имеет и муфта на рис. 8.1, б. Здесь увеличение жесткости достигается благодаря тому, что при увеличении момента пластинчатые рессоры прижимаются к краям вырезов в полумуфтах.

На рис. 8.2, а показана рессора грузового автомобиля с подрессорником. Зависимость прогиба рессоры от нагрузки на нее показана на рис. 8.2, б. При нагрузке  $F$ , меньшей  $F_0$ , деформируется только основная рессора, при  $F > F_0$  в работу включается также подрессорник и жесткость соответственно увеличивается.

**Свободные колебания.** Рассмотрим простейшую нелинейную систему с одной степенью свободы — груз  $m$  на нелинейной пружине.

Упругая характеристика пружины, т. е. зависимость усилия  $F$  от смещения  $x$ , может быть задана аналитически или графически. В зависимости от вида характеристики она называется несимметричной (рис. 8.3, а) или симметричной (рис. 8.3, б). Если жесткость ( $dF/dx$ ) возрастает с увеличением  $x$ , как на рис. 8.3, б, характеристика называется *жесткой*, в противном случае (рис. 8.3, в) — *мягкой*.

Уравнение свободных колебаний консервативной системы имеет вид

$$m\ddot{x} + F(x) = 0. \quad (8.1)$$

Первый интеграл этого уравнения легко может быть вычислен. Обозначив  $\dot{x} = y$ , приведем уравнение (8.1) к виду

$$mydy/dx + F(x) = 0,$$

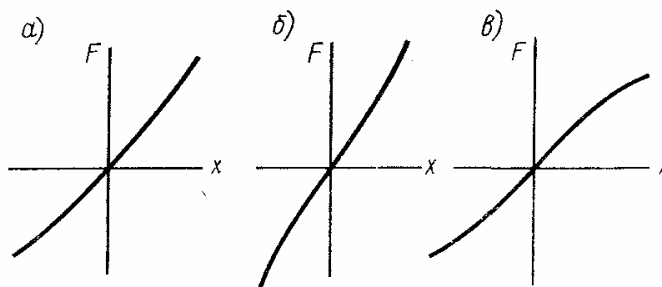


Рис. 8.3

откуда

$$\frac{my^2}{2} + \int_0^x F(x) dx = C, \quad (8.2)$$

где  $C$  — постоянная.

Равенство (8.2) выражает закон сохранения энергии; первый член левой части представляет собой кинетическую энергию, второй — потенциальную. Уравнение (8.2) позволяет изобразить фазовый портрет движения, т. е. семейство траекторий в координатах  $x, y$  (рис. 8.4).

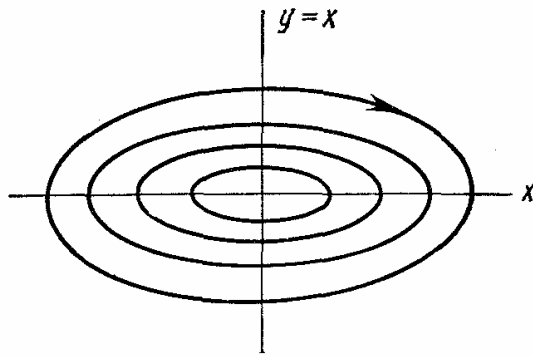


Рис. 8.4

Так как уравнение (8.2) четное относительно  $y = x$ , траектории симметричны относительно оси  $x$ . В случае симметричной упругой характеристики  $F(x)$  они симметричны также и относительно вертикальной оси.

Для определения закона движения требуется выполнить второе интегрирование:

$$t = \int \frac{dx}{\dot{x}} = \int \left\{ \frac{2}{m} \left[ C - \int_0^x F(x) dx \right] \right\}^{-1/2} |dx|. \quad (8.3)$$

В отличие от привычного представления перемещения  $x$  в функции времени  $t$  формула (8.3) дает обратную зависимость. В процессе колебания  $x$  то возрастает, то убывает, однако отношение  $dx/\dot{x}$  всегда положительно, поэтому в формулу (8.3) входит абсолютное значение  $dx$ .

Используя формулу (8.3), можно определить период колебания как время, затрачиваемое на полный цикл движения, при котором изображающая точка обходит полностью фазовую траекторию. Учитывая симметрию фазовой траектории, находим

$$\tau = 2 \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \left\{ \frac{2}{m} \left[ C - \int_0^x F(x) dx \right] \right\}^{-1/2} dx. \quad (8.4)$$

При этом постоянная  $C$  определяется формулой

$$C = \int_{x_{\min}}^0 F(x) dx = \int_0^{x_{\max}} F(x) dx = \frac{1}{2} m (\dot{x})_{\max}^2$$

Для системы с симметричной упругой характеристикой  $x_{\max} = -x_{\min} = A$

$$\tau = 4 \int_0^A \left[ \frac{2}{m} \int_x^A F(x) dx \right]^{-1/2} dx. \quad (8.5)$$

Из формул (8.4) и (8.5) следует важная особенность нелинейных систем — зависимость периода свободных колебаний от амплитуды

В качестве примера нелинейной системы рассмотрим систему с кубической характеристикой

$$F(x) = kx^3.$$

Так как характеристика симметричная, используем формулу (8.5):

$$\tau = 4 \int_0^A \left[ \frac{2k}{m} \int_x^A x^3 dx \right]^{-1/2} dx = 8 \sqrt{\frac{m}{2k}} \int_0^A \frac{dx}{\sqrt{A^4 - x^4}}.$$

Перейдя к переменной интегрирования  $\xi = x/A$ , получим

$$\tau = 8 \sqrt{\frac{m}{2k}} \frac{1}{A} \int_0^1 \frac{d\xi}{\sqrt{1 - \xi^4}}.$$

Определенный интеграл (выражающийся через эллиптический) равен  $0,927\sqrt{2}$  и, следовательно,

$$\tau = 7,416 \sqrt{m/k} A^{-1}.$$

Таким образом, период свободных колебаний рассмотренной системы обратно пропорционален амплитуде.

Свободные колебания нелинейной системы являются периодическими, но не гармоническими; соответствующее перемещение может быть разложено в ряд Фурье:

$$x = A_0 + A_1 \cos \omega_* t + B_1 \sin \omega_* t + A_2 \cos 2\omega_* t + \dots \quad (8.6)$$

Здесь  $\omega_* = 2\pi/\tau$  — основная частота колебания, зависящая от амплитуды.

Среди гармонических коэффициентов особое место занимает  $A_0$ ; этот коэффициент характеризует смещение центра колебания от положения статического равновесия.

Если упругая характеристика системы является симметричной, то, как следует из симметрии фазовых траекторий относительно оси  $y$ ,  $A_0$  и все четные коэффициенты разложения равны нулю.

Для представления закона движения в форме разложения в ряд Фурье (8.6) следует предварительно обратить зависимость (8.3) и найти  $x(t)$ . Вычисления оказываются обычно чрезвычайно затруднительными. Поэтому для приближенного определения периода  $\tau$  колебания (или основной его частоты), а также нескольких первых коэффициентов разложения [см. формулу (8.6)] большей частью используются приближенные методы. Некоторые из таких методов рассмотрены далее.

**Системы с кусочно-линейной характеристикой (метод припасовывания).** Среди нелинейных систем, колебания которых успешно могут быть изучены точно, следует указать на системы с кусочно-линейными характеристиками.

В качестве примера рассмотрим систему, изображенную на рис. 8.5,а. Упругая сила  $F$ , действующая на груз (рис. 8.5,б), определяется в зависимости от смещения  $x$  следующими формулами:

$$\text{при } |x| \leq a \quad F(x) = c_1 x,$$

$$\text{при } |x| \geq a \quad F(x) = c_1 x + c_2 (|x| - a) \operatorname{sgn} x.$$

Здесь  $\operatorname{sgn} x$  — знак смещения  $x$  (при  $x > 0$   $\operatorname{sgn} x = 1$ , при  $x < 0$   $\operatorname{sgn} x = -1$ ,  $\operatorname{sgn} 0 = 0$ ),  $c_1$  — жесткость двух пружин 1,  $c_2$  — жесткость одной из пружин 2.

Очевидно, что если амплитуда колебаний груза меньше зазора  $a$ , то груз совершает свободные гармонические колебания с частотой  $p_1 = \sqrt{c_1/m}$ , не зависящей от амплитуды. Поэтому рассмотрим случай, когда амплитуда колебаний  $A$  больше  $a$ .

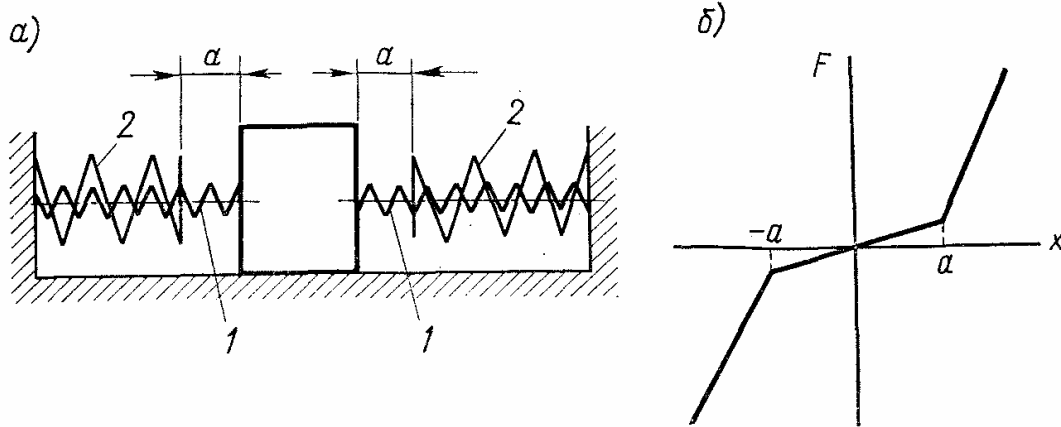


Рис. 8.5

Пусть груз отведен в крайнее правое положение и отпущен без начальной скорости; тогда при  $x \geq a$  будет справедливо уравнение,

$$m\ddot{x} + c_1x + c_2(x - a) = 0, \quad (8.7)$$

которое следует проинтегрировать при начальных условиях  $x_0 = A$ ,  $\dot{x}_0 = 0$ .

Соответствующее решение имеет вид

$$x = \frac{c_2}{c_1 + c_2} a (1 - \cos p_2 t) + A \cos p_2 t, \quad (8.8)$$

где

$$p_2 = \sqrt{(c_1 + c_2)/m}.$$

Приравнявая  $x = a$ , находим значение времени  $t_*$ , при котором груз перестанет касаться пружины 2:

$$a = \frac{c_2}{c_1 + c_2} a (1 - \cos p_2 t_*) + A \cos p_2 t_*,$$

откуда

$$t_* = \frac{1}{p_2} \arccos \frac{c_1 a}{(c_1 + c_2) A - c_2 a}. \quad (8.9)$$

Скорость груза в этот момент составит

$$\begin{aligned} \dot{x}_* &= p_2 \left( a \frac{c_2}{c_1 + c_2} - A \right) \sin p_2 t_* = -p_2 \left( A - a \frac{c_2}{c_1 + c_2} \right) \times \\ &\times \sqrt{1 - \left[ \frac{c_1 a}{(c_1 + c_2) A - c_2 a} \right]^2}. \end{aligned} \quad (8.10)$$



Начиная с этого момента груз движется только под действием пружины 1 и уравнение движения имеет вид

$$m\ddot{x} + c_1x = 0. \quad (8.11)$$

Обозначив  $\vartheta = t - t_*$ , имеем для интегрирования уравнения (8.11) следующие условия: при  $\vartheta = 0$   $x = a$ ;  $\dot{x} = \dot{x}_*$ . Следовательно,

$$x = a \cos p_1 t + (\dot{x}_*/p_1) \sin p_1 t, \quad (8.12)$$

где

$$p_1 = \sqrt{c_1/m}.$$

Момент прихода груза в среднее положение  $\vartheta_*$  найдем из условия  $x = 0$ , откуда

$$\vartheta_* = \operatorname{arccotg}[-\dot{x}_*/(p_1 a)].$$

Полное время, затраченное грузом на переход из крайнего правого в среднее положение, составляет, очевидно, четверть периода колебаний и равно  $\tau/4 = t_* + \vartheta_*$ .

После несложных преобразований

$$\begin{aligned} \frac{\tau}{4} = & \frac{1}{p^2} \arccos \frac{c_1/c_2}{(1 + c_1/c_2) A/a - 1} + \\ & + \frac{1}{p_1} \arcsin \sqrt{\frac{c_1/c_2 (1 + c_1/c_2)}{[(1 + c_1/c_2) A/a - 1]^2 + c_1/c_2}}. \end{aligned} \quad (8.13)$$

Как легко видеть, при  $A \rightarrow a$   $\tau \rightarrow 2\pi/p_1$ , а при  $A \rightarrow \infty$   $\tau \rightarrow 2\pi/p_2$ . Таким образом, основная частота колебания  $\omega_* = 2\pi/\tau$  меняется от  $p_1$  до  $p_2$  с изменением амплитуды. График зависимости  $\omega_*(A)$  (так называемая *скелетная кривая*) показан на рис. 8.6.

Метод, которым мы воспользовались в решении этой задачи, состоял в том, что на каждом участке движения точно решалось соответствующее линейное дифференциальное уравнение, причем постоянные на каждом последующем участке определялись из условий непрерывности изменения перемещения и скорости. Этот метод называется *методом припасовывания*.

Весьма удобной является графоаналитическая интерпретация метода припасовывания. Она основана на том, что в координатах  $x, \dot{x}/p$  свободное движение линейной системы изображается дугой окружности, по которой изображающая точка движется с угловой скоростью  $p$ , равной угловой частоте соответствующей линейной системы (см. § 2).

Для рассмотренной выше задачи графическое построение показано на рис. 8.7. Так же как и при аналитическом решении, полагаем, что в начальный момент груз отведен вправо на величину  $A$ . Этому состоянию отвечают точка 1 на упругой характеристике и точка 1 на фазовой диаграмме (рис. 8.7, а, б). Отложив по оси ординат отношение  $\dot{x}/p_2$  ( $p_2 = \sqrt{(c_1 + c_2)/m}$ , где  $c_1 + c_2$  — уклон упругой характеристики на

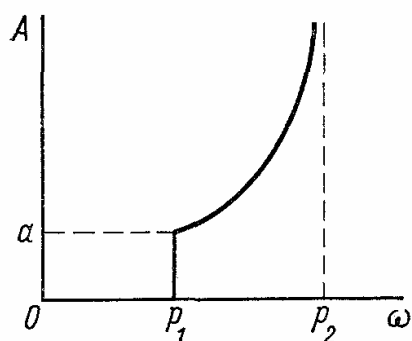


Рис. 8.6

участке  $I-II$ ), обнаружим, что фазовый портрет движения изображается дугой окружности  $1-2$ . Центр этой окружности лежит в точке  $O_1$ , соответствующей пересечению прямой  $I-II$  с осью абсцисс. Точка 2 соответствует переходу на участок  $O-II$  упругой характеристики. Чтобы и дальше фазовая траектория изображалась дугой окружности, по оси ординат надо откладывать теперь не  $\dot{x}/p_2$ , а  $\dot{x}/p_1$  ( $p_1 = \sqrt{c_1/m}$ , где  $c_1$  — уклон упругой характеристики на участке  $O-II$ ). В связи с изменением масштаба начальной точкой движения будет точка  $2'$  ( $|Q2'| = |Q2|p_2/p_1$ ), а движение изобразится дугой окружности  $2'3$ . Точка 3 соответствует прохождению груза через положение равновесия.

Построенная часть фазового портрета изображает четверть периода собственных колебаний. При вычислении периода следует учесть, что изображающая точка движется по дуге  $1-2$  с угловой скоростью  $p_2$ , а по дуге  $2'3$  — с угловой скоростью  $p_1$ .

Таким образом,

$$\tau/4 = \varphi_2/p_2 + \varphi_1/p_1.$$

Легко проверить, что эта формула совпадает с формулой (8.13).

В качестве других примеров рассмотрим систему с зазором (рис. 8.8, а) и систему с натягом (рис. 8.8, б).

В первой из этих систем колебательное движение возможно, только если амплитуда превышает зазор  $a$ . Упругие характеристики и графические построения для этих систем показаны на рис. 8.9, а, б и 8.10, а, б; они не нуждаются в дополнительных пояснениях.

Для первой из этих систем период определяется из соотношения

$$\frac{\tau}{4} = \frac{\pi}{2p} + \frac{a}{p(A-a)},$$

а основная частота колебания

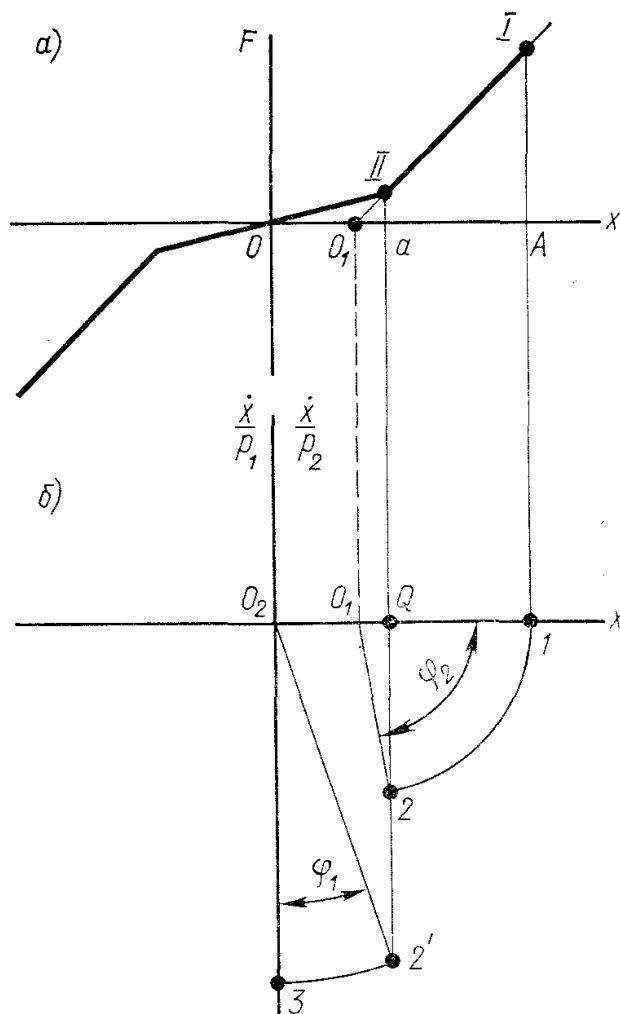


Рис. 8.7

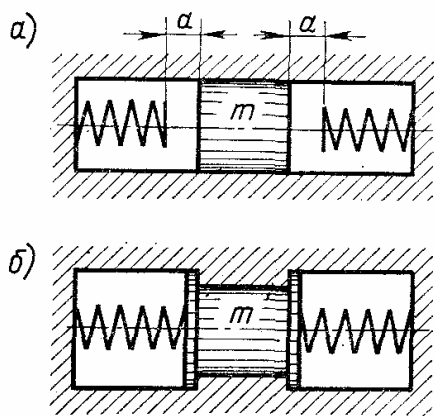


Рис. 8.8

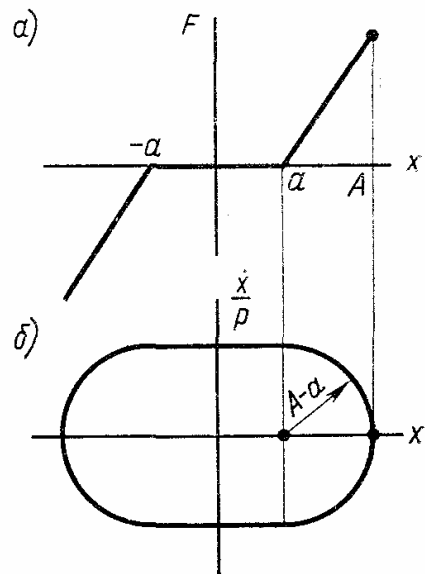


Рис. 8.9

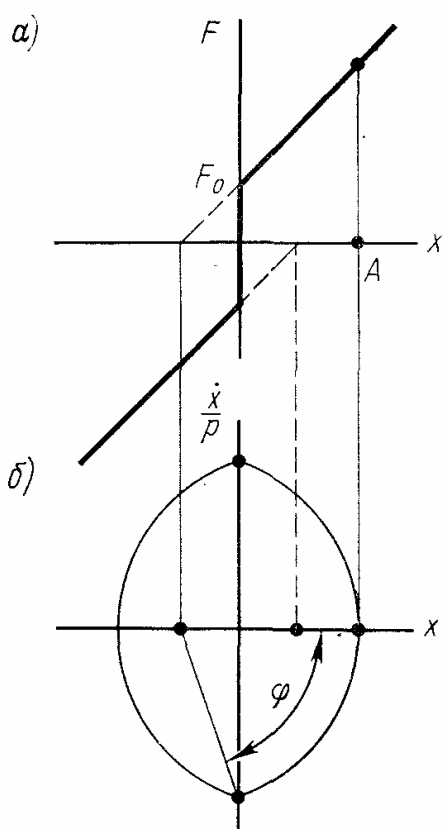


Рис. 8.10

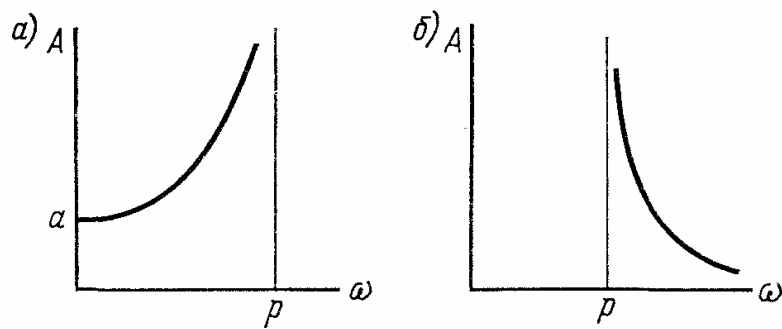


Рис. 8.11

$$\omega_* = \frac{2\pi}{\tau} = \frac{p}{1 + 2a/[\pi(A-a)]}.$$

Для второй системы

$$\frac{\tau}{4} = \frac{\varphi}{p} = \frac{1}{p} \arccos \frac{a}{A+a} \quad \left(a = \frac{F_0}{c}\right),$$

$$\omega_* = \frac{2\pi}{\tau} = \frac{\pi p}{2 \arccos [a/(A+a)]}.$$

В приведенных формулах  $p = \sqrt{c/m}$ , где  $c$  — уклон упругой характеристики. Скелетные кривые, т. е. зависимости  $\omega_*(A)$ , для этих систем показаны на рис. 8.11, а, б.

Упругие характеристики систем, показанных на рис. 8.5 и 8.8, а относятся к жестким (так как с увеличением  $x$  уклон характеристики возрастает), а системы на рис. 8.8, б — к мягким. Как видно из соответствующих скелетных кривых, для жестких систем с увеличением амплитуды частота свободных колебаний возрастает, для мягких — уменьшается.

**Метод гармонического баланса.** Разработано много приближенных методов для расчета периодических движений нелинейных систем. Остановимся на методе гармонического баланса.

Уравнение движения нелинейной консервативной системы можно записать в виде

$$\ddot{x} + f(x) = 0 \quad | f(x) = F(x)/m |. \quad (8.14)$$

Искомое периодическое решение может быть представлено в виде ряда Фурье (8.6)

$$x = A_0 + A_1 \cos \omega_* t + B_1 \sin \omega_* t + A_2 2\omega_* t + \dots,$$

где  $\omega_*$  — неизвестная основная частота колебания.

Подставив это выражение в левую часть уравнения (8.14), получим периодическую (периода  $2\pi/\omega_*$ ) функцию времени

$$\Phi(t) = -\omega_*^2 (A_1 \cos \omega_* t + B_1 \sin \omega_* t) - 4\omega_*^2 (A_2 \cos 2\omega_* t + B_2 \sin 2\omega_* t) + \dots + f(A_0 + A_1 \cos \omega_* t + B_1 \sin \omega_* t + \dots).$$

Для того чтобы функция  $\Phi(t)$  тождественно обращалась в нуль, необходимо, чтобы равнялись нулю все коэффициенты разложения ее в ряд Фурье. Это требование приводит к серии равенств:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi/\omega_*} f(x) dt &= 0, \\ k^2 \omega_*^2 A_k &= \frac{\omega_*}{\pi} \int_0^{2\pi/\omega_*} f(x) \cos k\omega_* t dt, \\ k^2 \omega_*^2 B_k &= \frac{\omega_*}{\pi} \int_0^{2\pi/\omega_*} f(x) \sin k\omega_* t dt \quad (k = 1, 2, \dots). \end{aligned} \quad (8.15)$$

Аргумент функции  $f(x)$  под интегралами должен быть заменен выражением (8.6).

Таким образом, получается бесконечная система нелинейных уравнений относительно коэффициентов  $A, B$ .

При приближенном расчете в выражении (8.6) удерживают только несколько гармоник и приравнивают нулю такое же количество гармонических коэффициентов функции  $\Phi(t)$ . Чаще всего ограничиваются выражением

$$x = A_0 + A_1 \cos \omega_* t + B_1 \sin \omega_* t.$$

Так как в уравнение движения (8.14) время явно не входит (система автономна), то, выбирая соответствующим образом начало отсчета времени, можно добиться, чтобы коэффициент  $B_1$  обратился в нуль. Тогда

$$x = A_0 + A \cos \omega_* t, \quad (8.16)$$

причем  $A_0$  и  $A$  определяются из уравнений

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi/\omega_*} f(A_0 + A \cos \omega_* t) dt &= 0, \\ A - \frac{1}{\pi \omega_*} \int_0^{2\pi/\omega_*} f(A_0 + A \cos \omega_* t) \cos \omega_* t dt &= 0. \end{aligned} \quad (8.17)$$

Эти два уравнения позволяют установить связь между  $A_0, A$  и  $\omega_*$ , т. е. построить приближенно скелетную кривую для нелинейной системы. Для системы с симметричной характеристикой  $A_0 = 0$  и сохраняется только второе из уравнений (8.17).

В качестве примера рассмотрим систему с кубической нелинейностью. Пусть упругая сила  $F(x)$  связана со смещением зависимостью

$$F(x) = cx + \gamma_1 x^3.$$

При  $\gamma_1 > 0$  характеристика является жесткой, при  $\gamma_1 < 0$  — мягкой (рис. 8.12). Имеем

$$f(x) = \frac{1}{m} F(x) = p^2 (x + \gamma x^3),$$

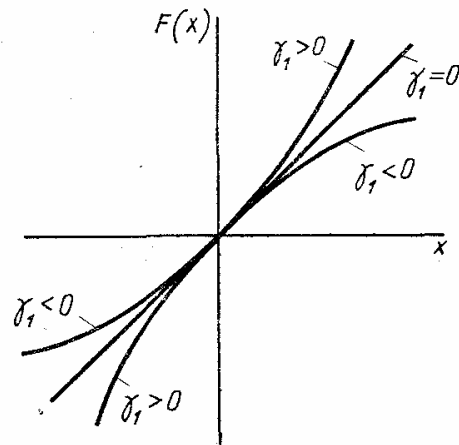


Рис. 8.12

где  $p = \sqrt{c/m}$  — собственная частота линейной системы (при  $\gamma_1 = 0$ ),  $\gamma = \gamma_1/c$ .

В данном случае в связи с симметрией упругой характеристики  $A_0 = 0$  и задавая

$$x = A \cos \omega_* t, \quad (8.18)$$

получим по уравнению (8.17)

$$A - \frac{1}{\pi \omega_*} \int_0^{2\pi/\omega_*} p^2 (A \cos \omega_* t + \gamma A^3 \cos^3 \omega_* t) \cos \omega_* t dt = 0.$$

Выполняя интегрирование\*, находим

$$A - (p^2/\omega_*^2) (A + 3/4 \gamma A^3) = 0,$$

откуда

$$\omega_*^2 = p^2 (1 + 3/4 \gamma A^2).$$

Таким образом, мы сразу получаем приближенное уравнение скелетной кривой (рис. 8.13). Однако мы не имеем еще информации о форме колебания, так как в выражении (8.18) пренебрегли всеми гармониками, кроме первой.

Для того чтобы определить приближенно и третью гармонику колебания, примем

$$x = A_1 \cos \omega_* t + A_3 \cos 3\omega_* t. \quad (8.19)$$

При этом полагаем, что  $A_3 \ll A_1$ .

Подстановка принятого значения  $x$  в выражение упругой силы приводит к равенству

$$f(x) = \frac{c}{m} (x + \gamma x^3) = p^2 (A_1 \cos \omega_* t + \gamma A_1^3 \cos^3 \omega_* t +$$

$$+ A_3 \cos 3\omega_* t + 3\gamma A_1^2 A_3 \cos^2 \omega_* t \cos 3\omega_* t + \dots),$$

где в связи с малостью  $A_3$  опущены слагаемые, содержащие  $A_3^2$  и  $A_3^3$ .

Используя тождества

$$\cos^3 \omega_* t = 3/4 \cos \omega_* t + 1/4 \cos 3\omega_* t,$$

$$\cos^2 \omega_* t \cos 3\omega_* t = 1/4 \cos \omega_* t + 1/2 \cos 3\omega_* t + 1/4 \cos 5\omega_* t,$$

находим в соответствии с равенствами (8.15):

$$\omega_*^2 A_1 = p^2 [A_1 + 3/4 \gamma A_1^3 + 3/4 \gamma A_1^2 A_3],$$

$$9\omega_*^2 A_3 = p^2 [1/4 \gamma A_1^3 + A_3 + 3/2 \gamma A_1^2 A_3].$$

Пренебрегая в первом из этих уравнений малым последним членом в правой части, получаем прежнее уравнение скелетной кривой

$$\omega_*^2 = p^2 (1 + 3/4 \gamma A_1^2)$$

и, подставив это значение во второе уравнение, находим

$$A_3 = A_1 \frac{\gamma A_1^2}{32 + 21\gamma A_1^2}. \quad (8.20)$$

Зависимость отношения  $A_3/A_1$  от  $\gamma A_1^2$  показана на рис. 8.14. Как видно, это отношение не превышает  $1/21 = 0,047$ , что оправдывает сделанное допущение о его малости.

Величина  $\gamma A_1^2 = \gamma_1 A_1^3 / (c A_1)$  имеет простой физический смысл — это отношение нелинейной части восстанавливающей силы при отклонении  $A_1$  к линейной (рис. 8.15), которое характеризует эффективную нелинейность системы.

Рассмотренная задача имеет и точное решение (см. [29]), которое выражается

\* Заметим, что проведение интегрирования не обязательно. Можно непосредственно подставить выражение (8.18) в уравнение  $\ddot{x} + p^2(x + \gamma x^3) = 0$ , воспользоваться тождеством  $\cos^3 \omega_* t = 3/4 \cos \omega_* t + 1/4 \cos 3\omega_* t$  и приравнять нулю сумму членов уравнения, содержащих множителем  $\cos \omega_* t$ .

через эллиптические функции. Разлагая это решение в ряд Фурье, можно установить, что оно содержит не только первую и третью гармоники, но и все гармоники нечетных порядков. При приближенном решении для нахождения этих гармоник потребовалось бы учесть большее число членов в выражении (8.6).

Следует отметить, что найденное выше приближенное значение амплитуды

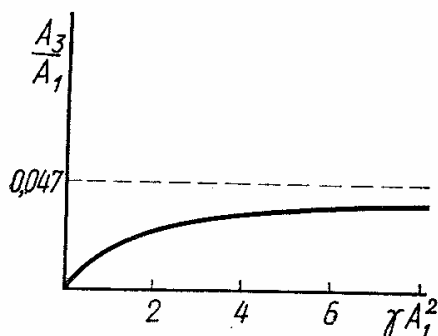


Рис. 8.14

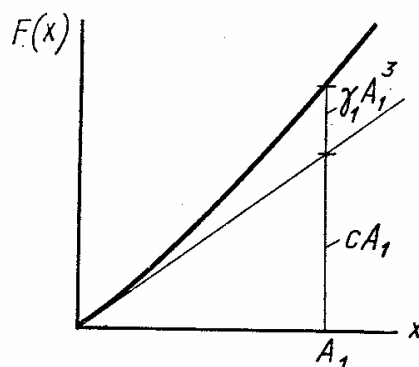


Рис. 8.15

третьей гармоники  $A_3$  весьма близко к точному; так, согласно точному решению, при  $A_1 = \infty$  отношение  $A_3/A_1$  стремится к 0,045, а не к 0,047, как получено приближенно.

**Вынужденные колебания нелинейной системы при гармоническом возбуждении.** Рассмотрим систему с кубической упругой характеристикой и вязким трением. Уравнение движения имеет вид

$$m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + cx + \gamma_1 x^3 = P_0 \sin(\omega t + \varphi). \quad (8.21)$$

Здесь  $m$  — масса,  $\alpha$  — коэффициент вязкого трения,  $F(x) = cx + \gamma_1 x^3$  — упругая восстанавливающая сила,  $P_0 \sin(\omega t + \varphi)$  — возмущающая сила. Фазовый угол  $\varphi$  включен в выражение возмущающей силы для упрощения вычислений.

Приближенное решение уравнения (8.21) будем искать в форме\*

$$x = A \sin \omega t \quad (8.22)$$

и используем метод гармонического баланса. Подставим выражение (8.22) в левую часть уравнения (8.21), используем тождество  $\sin^3 \omega t = \frac{3}{4} \sin \omega t - \frac{1}{4} \sin 3\omega t$  и раскроем синус суммы в правой части уравнения (8.21). Затем приравняем нулю члены, содержащие  $\sin \omega t$  и  $\cos \omega t$  в отдельности:

$$(c - m\omega^2) A + \frac{3}{4} \gamma_1 A^3 = P_0 \cos \varphi, \quad (8.23)$$

$$\alpha A \omega = P_0 \sin \varphi.$$

(При этом член  $\frac{1}{4} \gamma_1 A^3 \sin 3\omega t$  остается несбалансированным.)

Учитывая, что

$$c/m + \frac{3}{4} (\gamma_1/m) A^2 = \omega_*^2(A) \quad (8.24)$$

\* Если бы угол  $\varphi$  не был включен в выражение возмущающей силы, следовало бы принять  $x = A \sin(\omega t - \varphi)$ , что привело бы к несколько более сложным выкладкам.

представляет собой квадрат частоты свободных колебаний (зависящий от амплитуды), и обозначая  $\alpha/m = 2n$ , получаем

$$[\omega_*^2(A) - \omega^2] A = (P_0/m) \cos \varphi, \quad (8.25)$$

$$2n\omega A = (P_0/m) \sin \varphi.$$

Исключив отсюда фазовый сдвиг, найдем

$$\{[\omega_*^2(A) - \omega^2]^2 + 4n^2\omega^2\} A^2 = (P_0/m)^2. \quad (8.26)$$

Разделив уравнения (8.25) одно на другое почленно, получим значение фазы колебаний

$$\operatorname{tg} \varphi = 2n\omega/(\omega_*^2 - \omega^2). \quad (8.27)$$

Уравнение (8.26) дает зависимость между частотой возмущающей силы и амплитудой вынужденных колебаний. Решив это уравнение относительно  $\omega^2$ , получим

$$\omega^2 = \omega_*^2(A) - 2n^2 \pm \sqrt{[P_0/(mA)]^2 - 4n^2\omega_*^2(A) + 4n^4}. \quad (8.28)$$

При малом демпфировании  $n^2 \ll \omega_*^2$  и формула (8.28) может быть приведена к виду

$$\omega^2 = \omega_*^2(A) \pm \sqrt{[P_0/(mA)]^2 - 4n^2\omega_*^2(A)}. \quad (8.29)$$

Построение зависимости  $\omega$ ,  $A$ , называемой амплитудно-частотной характеристикой, согласно формуле (8.29) показано на рис. 8.16. В координатах  $\omega^2$ ,  $A$  построена скелетная кривая, т. е. зависимость  $\omega_*^2(A)$ , а затем на каждом уровне амплитуды влево и вправо от нее по горизонтали отложены отрезки

$$b = \sqrt{[P_0/(mA)]^2 - 4n^2\omega_*^2(A)}.$$

Для жесткой системы амплитудно-частотная характеристика имеет вид, показанный на рис. 8.16, а, а для мягкой — на рис. 8.16, б.

Существенной особенностью нелинейных систем является возможность реализации нескольких различных периодических режимов при изменении частоты в определенных пределах. Так, как видно из рис. 8.16, а, при  $\omega_- < \omega < \omega_+$  уравнение (8.29) дает три режима: с большими амплитудами  $A_1$ , с

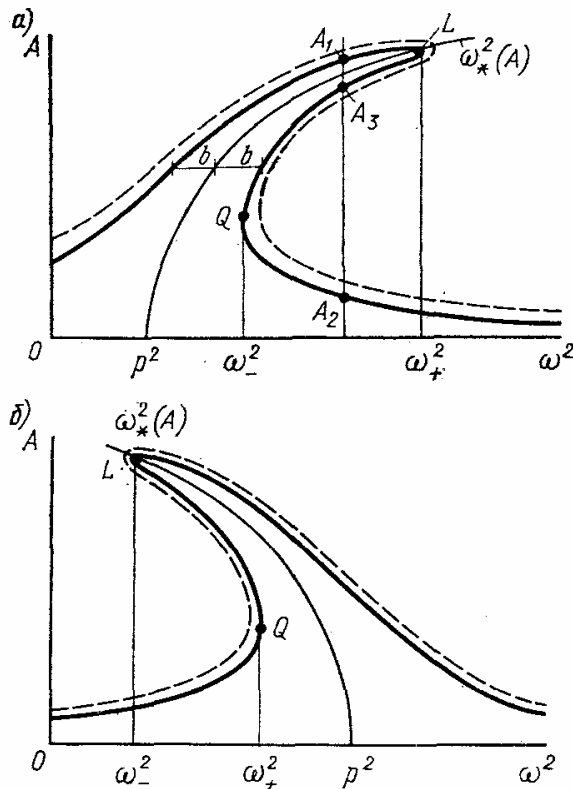


Рис. 8.16



малыми амплитудами  $A_2$  и с промежуточными амплитудами  $A_3$ . Правда, как мы увидим далее, устойчивыми являются только режимы  $A_1$  и  $A_2$ , а режим  $A_3$  неустойчив и не реализуется практически.

Реализация того или иного устойчивого режима зависит от начальных условий движения. Так, если медленно увеличивать частоту возмущающей силы, амплитуды будут изменяться по линии  $KL$  (рис. 8.17). В точке  $L$  произойдет срыв колебаний и при дальнейшем увеличении частоты амплитуды будут изменяться по линии  $MN$ . При медленном уменьшении частоты амплитуды меняются по линии  $NQRK$ . Следует отметить, что, поскольку в интервале частот  $\omega_- < \omega < \omega_+$  возможны два устойчивых периодических режима, система, колеблющаяся в одном из них, может перейти на другой при каких-либо дополнительных внешних воздействиях.

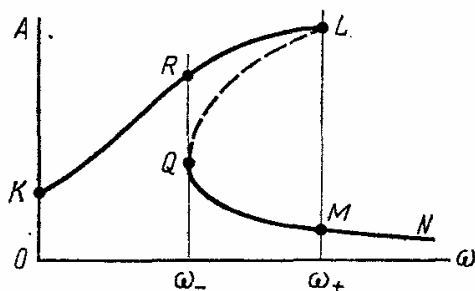


Рис. 8.17

Исследуем зависимость амплитуды колебаний от амплитуды возмущения. Как видно из формулы (8.29), увеличение  $P_0$  приводит к увеличению отрезков  $b$ , откладываемых влево и вправо от скелетной кривой. Таким образом, на рис. 8.16,а штриховая кривая соответствует большему значению возмущающей силы, чем сплошная. Обратим внимание на то, что в режимах  $A_1$  и  $A_2$  увеличение силы приводит к увеличению амплитуды колебаний ( $\partial A / \partial P_0 > 0$ ), а в режиме  $A_3$  — к уменьшению амплитуды ( $\partial A / \partial P_0 < 0$ ). Как мы увидим далее, неравенство  $\partial A / \partial P_0 < 0$  является признаком неустойчивости режима.

Исследуем устойчивость периодических колебаний системы, рассмотренной выше. Предположим, что выражение  $x = x_0(t)$  удовлетворяет уравнению

$$\Phi(\ddot{x}, \dot{x}, x, t) = m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + cx + \gamma_1 x^3 - P_0 \sin(\omega t + \varphi) = 0. \quad (8.30)$$

Рассмотрим выражение

$$x = x_0 + \xi, \quad (8.31)$$

где  $\xi$  — малое отклонение смещения  $x$  от  $x_0$ , соответствующего стационарному режиму.

Подставляя выражение (8.31) в уравнение (8.30) и учитывая, что  $x_0$  удовлетворяет ему тождественно, находим

$$[(\partial \Phi / \partial \ddot{x}) \ddot{\xi} + (\partial \Phi / \partial \dot{x}) \dot{\xi} + (\partial \Phi / \partial x) \xi]_{x=x_0} = 0. \quad (8.32)$$

Если решения этого линейного относительно  $\xi$  уравнения устойчивы, то малые отклонения от стационарного режима не возрастают и этот режим также устойчив. Если решения уравнения (8.32) неустойчивы, то и режим также неустойчив.

В нашем случае уравнение (8.32) имеет вид

$$m\ddot{\xi} + \alpha\dot{\xi} + (c + 3\gamma_1 x_0^2)\xi = 0,$$

или после подстановки вместо  $x_0$  приближенного решения (8.22), где  $A$  и  $\omega$  связаны равенством (8.26),

$$m\ddot{\xi} + \alpha\dot{\xi} + [c + 3/2\gamma_1 A^2 - 3/2\gamma_1 A^2 \cos 2\omega t]\xi = 0. \quad (8.33)$$

Полученное уравнение есть уравнение Матье, рассмотренное в § 7. Обозначив  $\omega t = \vartheta$  и поделив уравнение (8.33) почленно на  $m$ , приведем его к виду (7.12):

$$\ddot{\xi} + \alpha_1 \dot{\xi} + (l + 2q \cos 2\vartheta)\xi = 0,$$

где точками обозначены производные по  $\vartheta$ .

При этом

$$\alpha_1 = \frac{\alpha}{m\omega}, \quad l = \frac{c + 3/2\gamma_1 A^2}{m\omega^2}, \quad q = -\frac{3}{4} \frac{\gamma_1 A^2}{m\omega^2}.$$

Условием неустойчивости является неравенство (7.16)

$$(l - 1)^2 - q^2 + \alpha_1^2 < 0.$$

После подстановки значений  $l$ ,  $q$ ,  $\alpha_1$  с учетом обозначений  $\alpha/m = 2n$  и  $\omega_*^2 = (c + 3/4\gamma_1 A^2)/m$  приведем условие неустойчивости к виду

$$[\omega_*^2(A) - \omega^2]^2 + 4n^2\omega^2 + [\omega_*^2(A) - \omega^2] 3\gamma_1 A^2/(2m) < 0. \quad (8.34)$$

Продифференцировав уравнение (8.26), вычислим частную производную  $\partial(P_0^2)/\partial(A^2)$  при  $\omega = \text{const}$ :

$$\frac{\partial(P_0^2)}{\partial(A^2)} = m^2 \left\{ [\omega_*^2(A) - \omega^2]^2 + 4n^2\omega^2 + 2[\omega_*^2(A) - \omega^2] A^2 \frac{d(\omega_*^2)}{d(A^2)} \right\}.$$

Так как  $d(\omega_*^2)/d(A^2) = 3/4\gamma_1/m$ , то

$$\begin{aligned} \partial(P_0^2)/\partial(A^2) = m^2 \{ & [\omega_*^2(A) - \omega^2]^2 + 4n^2\omega^2 + \\ & + [\omega_*^2(A) - \omega^2] 3\gamma_1 A^2/(2m) \}. \end{aligned}$$

Это выражение только множителем  $m^2$  отличается от левой части неравенства (8.34). Таким образом, условие неустойчивости (8.34) можно записать в виде

$$\partial P_0/\partial A < 0.$$

Итак, стационарное движение неустойчиво, если возрастанию силы соответствует убывание амплитуды. Как уже указывалось выше, это условие выполняется на участках  $QL$  амплитудно-частотных характеристик.

**Энергетическая оценка амплитуд резонансных колебаний нелинейных систем.** Часто нет необходимости в построении всей амплитудно-частотной характеристики системы, а достаточно лишь оценить максимально возможные амплитуды.

Как видно из рис. 8.16, максимальная амплитуда соответствует точке пересечения амплитудно-частотной характеристики со скелетной кривой  $\omega = \omega_*(A)$ . При этом, как следует из уравнения (8.26), резонансная амплитуда определяется равенством

$$4n^2\omega_*^2(A) A^2 = (P_0/m)^2.$$

Это уравнение удобно решать графически, построив в координатах  $\omega, A$  (рис. 8.18) кривую 1  $\omega_*(A)$  (т. е. скелетную кривую) и кривую 2:

$$2n\omega A = P_0/m. \quad (8.35)$$

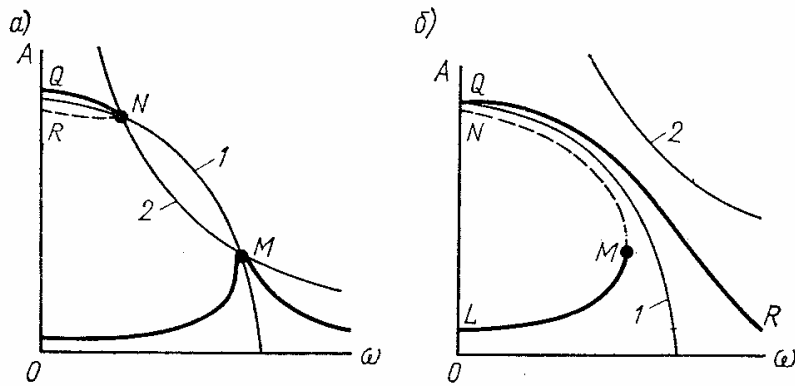


Рис. 8.18

Точка пересечения этих кривых определяет резонансный режим. Кривая 2 выражает условие энергетического баланса при резонансе. В самом деле, работа, рассеиваемая за цикл силами вязкого трения, составляет [см. формулу (4.30)]

$$W = \pi\alpha A^2\omega.$$

Работа же, совершаемая за цикл силой  $P(t) = P_0 \sin(\omega t + \varphi)$  на перемещении  $x = A \sin \omega t$ ,

$$L = \int_0^{2\pi/\omega} P(t) \dot{x}(t) dt = \omega P_0 A \int_0^{2\pi/\omega} \sin(\omega t + \varphi) \cos \omega t dt = \pi P_0 A \sin \varphi. \quad (8.36)$$

При стационарном режиме  $L = W$  или

$$\alpha A^2\omega = P_0 A \sin \varphi. \quad (8.37)$$

Так как  $\sin \varphi \leq 1$ , то энергетически возможны только амплитуды

$$A \leq P_0/(\alpha\omega). \quad (8.38)$$

Так как  $\alpha/m = 2n$ , то ясно, что кривая 2 по формуле (8.35) как раз определяет уровень максимально возможных по условию энергетичес-

кого баланса амплитуд. Этот уровень реализуется только при резонансе ( $\omega = \omega_*$ ), когда фазовый угол равен  $\pi/2$  [см. формулу (8.27)]. Указанное построение дает возможность определить вид амплитудно-частотных характеристик без их фактического построения, зная только скелетную кривую и кривую баланса мощности.

Так, например, для системы с мягкой характеристикой возможны два варианта взаимного расположения скелетной кривой  $I$  и кривой энергетического баланса. В первом случае (рис. 8.18,а), когда возмущающая сила мала, имеются две точки пересечения кривых. Точке  $M$  соответствует резонансная кривая обычной формы. Однако левее точки  $N$  кривая энергетического баланса снова идет выше скелетной кривой и здесь имеет место дополнительная ветвь  $QNR$  амплитудно-частотной характеристики (нижняя часть этой ветви соответствует неустойчивым режимам). Второй вариант (соответствующий большему значению возмущающей силы) изображен на рис. 8.18,б. Здесь кривая энергетического баланса везде идет выше скелетной кривой, следовательно, и в этом случае силы трения не ограничивают амплитуд колебаний и амплитудно-частотная характеристика имеет две ветви:  $LMN$  и  $QR$  (часть  $MN$  соответствует неустойчивым режимам).

Рассмотрим случай, когда амплитуда гармонической возмущающей силы пропорциональна квадрату частоты. (Чаще всего это связано с тем, что возмущающая сила — сила инерции неуравновешенных вращающихся масс.)

Положим

$$P(t) = K\omega^2 \sin(\omega t + \varphi),$$

где  $K$  — постоянная.

Работу силы  $P(t)$  найдем, заменив в формуле (8.36)  $P_0$  на  $K\omega^2$ . Тогда условие энергетического баланса (8.38) принимает вид

$$A \leq K\omega/\alpha \quad (8.39)$$

и, следовательно, линия энергетического баланса в координатах  $\omega$ ,  $A$  представляет собой прямую, проходящую через начало координат.

Возможны два случая взаимного расположения этой прямой и скелетной кривой системы с жесткой кубической упругой характеристикой (кривые  $1$  и  $2$ , рис. 8.19):

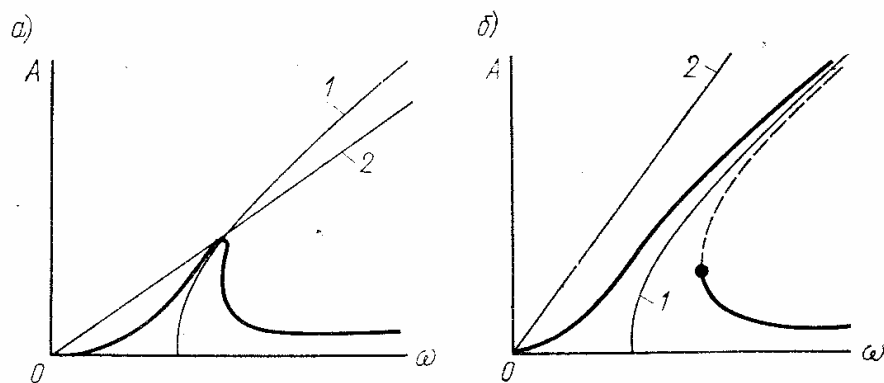


Рис. 8.19

1. При большом демпфировании [ $\alpha > K\sqrt{3\gamma_1/(4m)}$ ] есть одна точка пересечения (рис. 8.19,а) и амплитудно-частотная характеристика имеет обычный для системы с вязким трением вид.

2. При малом демпфировании [ $\alpha < K\sqrt{3\gamma_1/(4m)}$ ] точек пересечения нет. В этом случае вязкое трение не ограничивает амплитуды колебаний и при любых высоких частотах возможны два устойчивых режима колебаний с малыми и большими амплитудами (рис. 8.19,б).

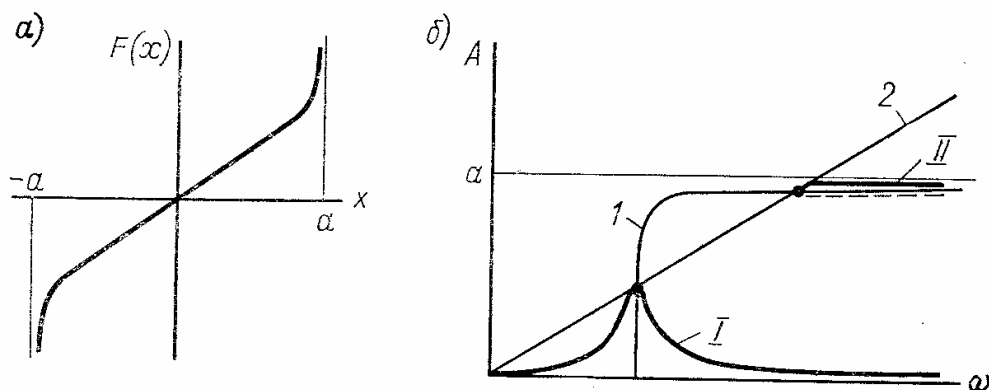


Рис. 8.20

Для систем с кубической нелинейностью амплитудно-частотные характеристики (см. рис. 8.18 и 8.19) можно было бы построить по формуле (8.29).

Однако использованный здесь прием, предложенный в работе [29], может быть успешно применен и в таких задачах, где получение даже приближенного решения затруднительно.

В качестве еще одного примера рассмотрим колебания системы с упругой характеристикой, имеющей вертикальные асимптоты (рис. 8.20,а) при возмущающей силе, пропорциональной квадрату частоты. Приблизительно такую характеристику имеют системы с весьма жесткими упорами, ограничивающими возможные амплитуды колебаний. Скелетная кривая этой системы имеет вид кривой 1 на рис. 8.20,б. Если демпфирование достаточно велико, то прямая 2, выражающая условие энергетического баланса, дважды пересекает скелетную кривую (при  $\omega = \omega_-$  и при  $\omega = \omega_+$ ). Соответственно и амплитудно-частотная характеристика имеет две ветви. Амплитуды, определяемые первой ветвью I, столь малы, что нелинейность системы заметно не проявляется. Ветвь II соответствует колебаниям с ударами об ограничитель. При частоте, большей  $\omega_+$ , возможны как устойчивые колебания с малыми амплитудами, так и колебания с большими амплитудами. Переход с одного режима на другой может быть следствием случайных импульсов, получаемых системой.

Интересно отметить, что если бы мы проводили расчет системы на основе линейной теории, то получили бы только ветвь I и пришли бы к выводу, что колебания с большими амплитудами не возникают. Таким образом, в данном случае нелинейный анализ позволяет выявить качественно новые свойства системы.

**Субгармонические колебания.** Весьма существенной особенностью нелинейных систем является возможность возникновения в них колебаний, частота которых отличается от частоты возмущающей силы. Колебания, частота которых меньше частоты возмущающей силы, называются *субгармоническими*.

Рассмотрим приближенно субгармонические колебания системы с кубической нелинейностью и вязким трением.

Выше мы видели, что при свободных колебаниях такой системы движение содержит третью, пятую и др. нечетные гармоники. Поэтому, если на систему действует возмущающая сила, изменяющаяся также с частотой в три, пять и т. д. раз большей, чем частота колебаний, сила оказывается в резонансе с соответствующей гармоникой перемещения. При этом она совершает работу, достаточную для преодоления сил трения.

Проведем приближенный расчет субгармонического резонанса на третьей гармонике. При этом предположим, что закон движения при резонансе не отличается от закона свободных колебаний системы без трения, который приближенно определяется по формуле (8.19)

$$x = A_1 \cos \omega_* t + A_3 \cos 3\omega_* t,$$

где

$$\omega_* = p^2 (1 + \frac{3}{4} \gamma A_1^2), \quad A_3 = A_1 \gamma A_1^2 / (32 + 21 \gamma A_1^2).$$

Если возмущающая сила изменяется по закону

$P(t) = P_0 \cos(\omega t + \varphi)$  при  $\omega = 3\omega_*$ , то ее работа за цикл колебания составляет

$$L = \int_0^{2\pi/\omega} P(t) \dot{x} dt = 3\pi P_0 A_3 \sin \varphi.$$

При вычислении работы трения за период колебания

$$W = \int_0^{2\pi/\omega} \alpha \dot{x}^2 dt$$

можно в выражении  $x$  пренебречь третьей гармоникой, которая не превышает 5% от первой. Тогда снова получим формулу (4.30)

$$W = \pi \alpha A_1^2 \omega_* = \pi \alpha A_1^2 \omega / 3.$$

Условие энергетического баланса приводит к равенству

$$\pi \alpha A_1^2 \omega / 3 = 3\pi P_0 A_3 \sin \varphi.$$

Заменив  $A_3$  его значением, найдем

$$\sin \varphi = \frac{\alpha \omega}{9P_0} \left( \frac{32}{\gamma A_1} + 21 A_1 \right).$$

Колебания энергетически возможны, если правая часть равенства не больше единицы:

$$\frac{\alpha \omega}{9P_0} \left( \frac{32}{\gamma A_1} + 21 A_1 \right) \leq 1. \quad (8.40)$$

Область возможных колебательных режимов в координатах  $\omega$ ,  $A$ , определяемая неравенством (8.40), на рис. 8.21 заштрихована. Граница этой области соответствует значению  $\varphi = \pi/2$ , которое реализуется при резонансных режимах. На рис. 8.22,а на один график нанесены как скелетная кривая для субгармонических колебаний  $\omega = 3\omega_*$ , так и кривая энергетического баланса. Точки  $M$  и  $N$  пересечения кри-

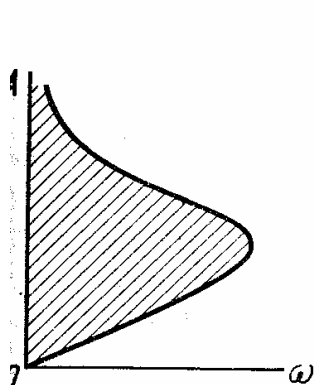


Рис. 8.21

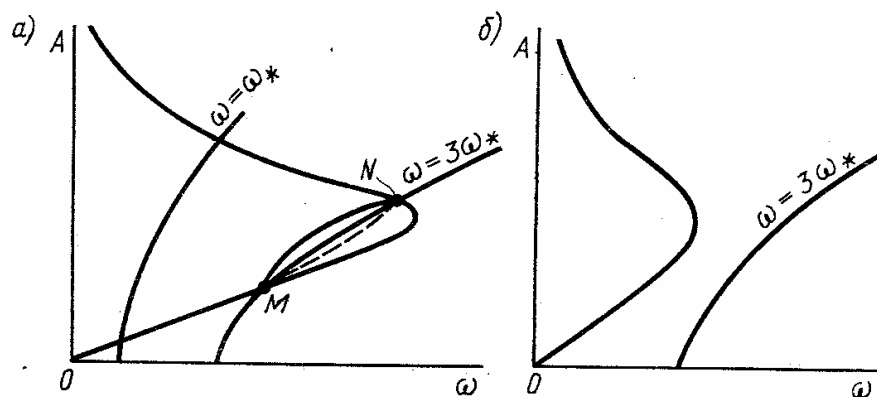


Рис. 8.22

вых отвечают двум резонансным режимам, а амплитудно-частотная зависимость имеет вид замкнутой фигуры (нижняя граница этой фигуры соответствует наустойчивым режимам).

Таким образом, возможные амплитуды субгармонических колебаний ограничиваются условием энергетического баланса как сверху, так и снизу. Амплитуда не может быть больше той, которая соответствует точке  $N$ , в связи с ростом потерь на трение. Колебания с малыми амплитудами невозможны, так как при этом система приближается к линейной и быстро уменьшается амплитуда третьей гармоники, на которой совершает работу возмущающая сила.

Заметим, что, увеличив демпфирование, можно добиться, чтобы скелетная кривая и кривая энергетического баланса не пересекались (рис. 8.22,б). При этом субгармонические колебания в системе вообще не смогут возникнуть.

## § 9. МЕТОД ОСРЕДНЕНИЯ

В предыдущих параграфах основным приближенным методом, использовавшимся при исследовании систем с нелинейными упругими характеристиками или нелинейным трением, был метод гармонического баланса. С помощью этого метода можно было рассчитать стационарные режимы движения нелинейных систем. В отличие от метода гармонического баланса метод осреднения позволяет исследовать и процесс установления стационарного режима. При этом для самого стационарного режима метод осреднения приводит к тем же результатам, что и метод гармонического баланса.

Метод осреднения был первоначально применен Ван-дер-Полем для исследования автоколебаний, а впоследствии развит Н. М. Крыло-

вым, Н. Н. Боголюбовым и Ю. А. Митропольским применительно к большому кругу важных задач. Метод основан на предположении, что движение системы настолько мало отличается от гармонического, что в течение одного «периода» этим отличием можно пренебречь, но от периода к периоду амплитуда и фаза колебания медленно меняются.

Пусть уравнение движения в виде, разрешенном относительно второй производной перемещения, представлено в форме

$$\ddot{x} = F(x, \dot{x}, t), \quad (9.1)$$

где правая часть — нелинейная, вообще говоря, функция  $x$ ,  $\dot{x}$  и времени.

Предполагается, что решение уравнения (9.1) мало отличается от гармонического колебания с некоторой частотой  $\omega$ . Для этого, очевидно, необходимо, чтобы правая часть уравнения (9.1) мало отличалась от величины  $-\omega^2 x$ . Следовательно, предположение о близости движения к гармоническому колебанию с частотой  $\omega$  эквивалентно предположению о малости функции:

$$\Phi(x, \dot{x}, t) = F(x, \dot{x}, t) + \omega^2 x. \quad (9.2)$$

Поэтому в дальнейшем вместо уравнения (9.1) будем рассматривать эквивалентное ему уравнение

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \Phi(x, \dot{x}, t), \quad (9.3)$$

правая часть которого предполагается малой.

Решение уравнения (9.3) [а следовательно, и (9.1)] отыскивается в форме

$$x = a \sin(\omega t + \varphi), \quad (9.4)$$

где  $a$  и  $\varphi$  — медленно изменяющиеся функции времени (т. е. функции, изменением которых в течение периода  $2\pi/\omega$  можно пренебречь, учитывая лишь их изменение от периода к периоду). Так как вместо одной неизвестной функции  $x(t)$  мы ввели две ( $a$ ,  $\varphi$ ), их можно связать дополнительной зависимостью. Положим

$$\dot{a} \sin(\omega t + \varphi) + a \dot{\varphi} \cos(\omega t + \varphi) = 0. \quad (9.5)$$

Тогда для производной  $dx/dt$  получим

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{d}{dt}[a \sin(\omega t + \varphi)] = \omega a \cos(\omega t + \varphi) + \dot{a} \sin(\omega t + \varphi) + \\ &+ a \dot{\varphi} \cos(\omega t + \varphi) = \omega a \cos(\omega t + \varphi). \end{aligned} \quad (9.6)$$

Вычислим

$$\ddot{x} = -\omega^2 a \sin(\omega t + \varphi) + \omega \dot{a} \cos(\omega t + \varphi) - \omega a \dot{\varphi} \sin(\omega t + \varphi).$$

Подставим значения  $\ddot{x}$ ,  $\dot{x}$ ,  $x$  в уравнение (9.3):

$$\omega \dot{a} \cos \vartheta - \omega a \dot{\varphi} \sin \vartheta = \Phi\left(a \sin \vartheta, \omega a \cos \vartheta, \frac{\vartheta - \varphi}{\omega}\right). \quad (9.7)$$



Здесь обозначено  $\vartheta = \omega t + \varphi$  и в выражении (9.2) функции  $\Phi(x, \dot{x}, t)$  величины  $x, \dot{x}$  заменены их значениями (9.4), (9.6) и  $t \rightarrow (\vartheta - \varphi)/\omega$ .

После такой замены функция  $\Phi$  представляет собой не что иное, как погрешность в выполнении исходного дифференциального уравнения (9.1) решением вида (9.4) при постоянных во времени  $a$  и  $\varphi$ . Решив совместно уравнения (9.5) и (9.7), найдем:

$$\dot{a} = \frac{1}{\omega} \Phi \left( a \sin \vartheta, \omega a \cos \vartheta, \frac{\vartheta - \varphi}{\omega} \right) \cos \vartheta, \quad (9.8)$$

$$\dot{\varphi} = -\frac{1}{\omega a} \Phi \left( a \sin \vartheta, \omega a \cos \vartheta, \frac{\vartheta - \varphi}{\omega} \right) \sin \vartheta.$$

Выражения (9.8) — точные; они получены путем замены в исходном уравнении переменной  $x(t)$  переменными  $a, \varphi$ .

Изменение амплитуды и фазы за один период, в течение которого  $\vartheta$  изменяется на  $2\pi$ , можно подсчитать по формулам

$$\Delta a = \int_0^{2\pi} \dot{a} \frac{dt}{d\vartheta} d\vartheta, \quad \Delta \varphi = \int_0^{2\pi} \dot{\varphi} \frac{dt}{d\vartheta} d\vartheta. \quad (9.9)$$

Так как  $\vartheta = \omega t + \varphi$ , то  $dt/d\vartheta = 1/(\omega + \dot{\varphi})$ . При вычислении интегралов (9.9) используем основное предположение метода осреднения — будем пренебрегать изменчивостью  $a$  и  $\varphi$  в подынтегральных выражениях. Тогда

$$\Delta a = \frac{1}{\omega^2} \int_0^{2\pi} \Phi \left( a \sin \vartheta, \omega a \cos \vartheta, \frac{\vartheta - \varphi}{\omega} \right) \cos \vartheta d\vartheta,$$

$$\Delta \varphi = -\frac{1}{\omega^2 a} \int_0^{2\pi} \Phi \left( a \sin \vartheta, \omega a \cos \vartheta, \frac{\vartheta - \varphi}{\omega} \right) \sin \vartheta d\vartheta.$$

Средние за цикл скорости изменения амплитуды и фазы составляют [читателя не должно вводить в заблуждение то, что эти осредненные величины обозначены так же, как и истинные в уравнениях (9.8)]:

$$\dot{a} = (\omega/2\pi) \Delta a = (1/\omega) B(a, \varphi), \quad (9.10)$$

$$\dot{\varphi} = (\omega/2\pi) \Delta \varphi = -[1/(\omega a)] C(a, \varphi),$$

где

$$B(a, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Phi \left( a \sin \vartheta, \omega a \cos \vartheta, \frac{\vartheta - \varphi}{\omega} \right) \cos \vartheta d\vartheta,$$

$$C(a, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Phi \left( a \sin \vartheta, \omega a \cos \vartheta, \frac{\vartheta - \varphi}{\omega} \right) \sin \vartheta d\vartheta, \quad (9.11)$$

причем в подынтегральных выражениях  $a$ ,  $\varphi$  считаются постоянными.

Выражения (9.10) представляют собой дифференциальные уравнения, определяющие «медленное» изменение амплитуды и фазы.

Если нас интересуют такие стационарные процессы, при которых и амплитуда и фаза остаются постоянными, то следует принять  $\dot{a} = 0$ ,  $\dot{\varphi} = 0$  и стационарные значения амплитуды  $A$  и фазы  $\varphi_0$  определяются уравнениями

$$B(A, \varphi_0) = 0, \quad C(A, \varphi_0) = 0.$$

Эти уравнения совпадают с уравнениями, к которым приводит метод гармонического баланса.

Исследовав поведение интегралов уравнений (9.10) при начальных условиях, мало отличающихся от  $A$  и  $\varphi_0$ , можно определить, устойчив или неустойчив стационарный режим.

Для автономных систем, т. е. для систем, в уравнения движения которых время явно не входит,  $\Phi(x, \dot{x}, t) = \Phi(x, \dot{x})$ . В этом случае коэффициенты  $B$  и  $C$  от фазы  $\varphi$  не зависят и уравнения (9.10) получают вид

$$\dot{a} = (1/\omega) B(a); \quad \dot{\varphi} = -[1/(\omega a)] C(a), \quad (9.12)$$

где

$$B(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Phi(a \sin \vartheta, a\omega \cos \vartheta) \cos \vartheta d\vartheta, \\ C(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Phi(a \sin \vartheta, a\omega \cos \vartheta) \sin \vartheta d\vartheta. \quad (9.13)$$

При применении уравнений (9.12) для расчета стационарных режимов автономной системы возможны два пути. Во-первых, можно из условий  $\dot{a} = 0$ ,  $\dot{\varphi} = 0$  определить значения амплитуды и частоты стационарных колебаний ( $A$ ,  $\omega_*$ ). При этом расчет не отличается от расчета методом гармонического баланса. Во-вторых, можно принять некоторое фиксированное значение  $\omega_1$  (например, равное частоте колебаний порождающей линейной системы) и определить амплитуду  $A$  из условия  $\dot{a} = 0$  [т. е.  $B(A) = 0$ ]. Тогда частота стационарных колебаний определяется равенством

$$\omega_* = \frac{d}{dt}(\omega_1 t + \varphi) = \omega_1 + \dot{\varphi} = \omega_1 - \frac{1}{\omega_1 A} C(A).$$

Рассмотрим примеры применения метода осреднения к некоторым задачам, которые уже решены выше другими методами.

**Пример 1.** Свободные колебания системы с сухим трением. Дифференциальное уравнение движения (4.15) представим в форме

$$\ddot{x} + \omega_1^2 x = - (R_0/m) \operatorname{sgn} \dot{x},$$

где  $\omega_1 = \sqrt{c/m}$  — частота колебаний консервативной системы. В данном случае

$$\Phi(x, \dot{x}) = -(R_0/m) \operatorname{sgn} \dot{x}; \quad \Phi(a \sin \vartheta, \omega a \cos \vartheta) = -(R_0/m) \operatorname{sgn}(\cos \vartheta).$$

Подстановка этого выражения в формулы (9.13) приводит к значениям

$$B(a) = -\frac{R_0}{2\pi m} \int_0^{2\pi} \operatorname{sgn}(\cos \vartheta) \cos \vartheta d\vartheta = -\frac{2}{\pi} \frac{R_0}{m},$$

$$C(a) = -\frac{R_0}{2\pi m} \int_0^{2\pi} \operatorname{sgn}(\cos \vartheta) \sin \vartheta d\vartheta = 0$$

и по формулам (9.12) находим:

$$\dot{a} = -[2/(\pi\omega_1)](R_0/m); \quad \dot{\varphi} = 0.$$

Следовательно, угловая частота затухающих колебаний

$$\omega_* = \frac{d}{dt}(\omega_1 t + \varphi) = \omega_1$$

равна собственной частоте системы без трения, а скорость убывания амплитуды постоянна, причем за один период  $2\pi/\omega_1$  она уменьшается на величину

$$\Delta a = (2\pi/\omega_1) |\dot{a}| = 4R_0/(m\omega_1^2) = 4R_0/c.$$

Полученные результаты совпадают с точными.

**Пример 2.** Вынужденные колебания системы с кубической нелинейностью и вязким трением.

Решение уравнения движения

$$m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + cx + \gamma_1 x^3 = P_0 \sin \omega t$$

ищем в форме  $x = a \sin(\omega t + \varphi)$ . [Заметим, что здесь в отличие от уравнений (8.22), (8.23)  $\varphi$  — опережение фазы смещения по сравнению с силой.] В этом случае

$$\Phi(x, \dot{x}, t) = [(m\omega^2 - c)x - \gamma_1 x^3 - \alpha\dot{x} + P_0 \sin \omega t]/m.$$

После подстановки  $x = a \sin \vartheta$ ,  $\dot{x} = a\omega \cos \vartheta$ ,  $\vartheta = \omega t + \varphi$  получим

$$\Phi = [(m\omega^2 - c)a \sin \vartheta - \gamma_1 a^3 \sin^3 \vartheta - \alpha a \omega \cos \vartheta + P_0 \sin(\vartheta - \varphi)]/m.$$

Вычислим:

$$B(a, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Phi \cos \vartheta d\vartheta = -\frac{1}{2} \frac{\alpha}{m} a \omega - \frac{P_0}{2m} \sin \varphi,$$

$$C(a, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Phi \sin \vartheta d\vartheta = \frac{1}{2} \left( \omega^2 - \frac{c}{m} \right) a - \frac{3}{8} \frac{\gamma_1}{m} a^3 + \\ + \frac{P_0}{2m} \cos \varphi.$$

По формулам (9.10) находим:

$$\dot{a} = -(\alpha\omega a + P_0 \sin \varphi)/(2m\omega),$$

$$\dot{\varphi} = -[(m\omega^2 - c)a - 3/4 \gamma_1 a^3 + P_0 \cos \varphi]/(2m\omega a). \quad (9.14)$$

При стационарном режиме  $a = A = \text{const}$ ,  $\varphi = -\varphi_0 = \text{const}$  ( $\varphi_0$  — отставание по фазе перемещения от силы). Отсюда следуют уравнения

$$\alpha \omega A = P_0 \sin \varphi_0, \quad (9.15)$$

$$(c + \frac{3}{4}\gamma_1 A^2 - m\omega^2) A = P_0 \cos \varphi_0,$$

которые не отличаются от уравнений (8.23), полученных методом гармонического баланса, и приводят к тем же амплитудно-частотным характеристикам.

Исследуем теперь устойчивость стационарных колебаний. С этой целью положим

$$a = A + \varepsilon u, \quad \varphi = -\varphi_0 + \varepsilon v, \quad (9.16)$$

где  $\varepsilon$  — бесконечно малый параметр.

Подставляя выражения (9.16) в уравнения (9.14), учитывая, что при  $a = A$ ,  $\varphi = -\varphi_0$  правые части этих уравнений тождественно равны нулю, и сохраняя только линейно зависящие от  $\varepsilon$  слагаемые, приходим к следующей системе дифференциальных уравнений относительно  $u$  и  $v$ :

$$\dot{u} = -(\alpha \omega u + P_0 \cos \varphi_0 v)/(2m\omega),$$

$$\dot{v} = -[(m\omega^2 - c - \frac{3}{4}\gamma_1 A^2/4) u + P_0 \sin \varphi_0 v]/(2m\omega A).$$

Заменив здесь  $P_0 \cos \varphi_0$  и  $P_0 \sin \varphi_0$  их значениями в соответствии с формулами (9.15) и введя обозначения  $\omega_*^2 = (c + \frac{3}{4}\gamma_1 A^2)/m$ ,  $\alpha/m = 2n$  (см. § 8), представим уравнения в таком виде:

$$\dot{u} + nu + [1/(2\omega)] (\omega_*^2 - \omega^2) Av = 0, \quad (9.17)$$

$$[1/(2A\omega)] [\omega^2 - \omega_*^2 - 3\gamma_1 A^2/(2m)] u + \dot{v} + nv = 0.$$

Решение уравнений (9.17) можно записать в виде  $u = C_1 e^{st}$ ,  $v = C_2 e^{st}$ . После подстановки получим систему алгебраических уравнений

$$C_1 (s + n) + C_2 (\omega_*^2 - \omega^2) A/(2\omega) = 0,$$

$$C_1 [\omega^2 - \omega_*^2 - 3\gamma_1 A^2/(2m)]/(2A\omega) + C_2 (s + n) = 0.$$

Приравняв нулю определитель этой системы, приходим к квадратному уравнению относительно характеристического показателя  $s$

$$(s + n)^2 + (\omega_*^2 - \omega^2) [\omega_*^2 - \omega^2 + 3\gamma_1 A^2/(2m)]/(4\omega^2) = 0. \quad (9.18)$$

В зависимости от знака второго слагаемого этого уравнения характеристические показатели могут быть либо сопряженными комплексными с отрицательной действительной частью  $s = -n \pm i \sqrt{D}$  (при  $D = (\omega_*^2 - \omega^2) [\omega_*^2 - \omega^2 + 3\gamma_1 A^2/(2m)]/(4\omega^2) > 0$ ), либо действительными  $s = -n \pm \sqrt{-D}$  (при  $D < 0$ ).

В последнем случае один из показателей положителен, если  $-D > n^2$ . Но при положительном показателе  $s$  соответствующее решение уравнений (9.17)  $e^{st}$  неограниченно растет со временем и, следовательно, стационарный режим движения неустойчив. Итак, условием неустойчивости является неравенство

$$n^2 + D < 0 \text{ или } n^2 + (\omega_*^2 - \omega^2) [\omega_*^2 - \omega^2 + 3\gamma_1 A^2/(2m)]/(4\omega^2) < 0.$$

Нетрудно установить, что это условие совпадает с полученным ранее условием (8.34). Интересно, однако, отметить, что при использовании метода осреднения анализ устойчивости стационарного режима приводит к линейным уравнениям с постоянными коэффициентами, в то время как в § 8 нужно было исследовать уравнение с периодическими коэффициентами.

## ГЛАВА II

### КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМ С КОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ СТЕПЕНЕЙ СВОБОДЫ

Движение системы с  $n$  степенями свободы описывается  $n$  дифференциальными уравнениями второго порядка. При большом  $n$  уравнения становятся громоздкими. Для линейной системы существенное упрощение записи уравнений, их исследования и решения достигается при использовании матричной символики.

Последовательный вывод основных соотношений теории колебаний систем с конечным числом степеней свободы в матричной форме дан в § 12 этой главы. Однако для облегчения усвоения эти соотношения выведены ниже также и в координатной форме.

#### § 10. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ

Рассмотрим колебания системы, положение всех масс которой определяют  $n$  независимых координат  $x_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ). Предположим, что эти координаты представляют собой линейные или угловые перемещения элементов системы от равновесного положения, причем эти перемещения достаточно малы, так что систему можно считать линейной.

При колебаниях координаты  $x_i$  являются функциями времени. Перемещения  $x_i$ , которые имеют место в некоторый фиксированный момент времени, можно получить и при статическом воздействии на упругую систему сил  $F_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ;  $F_i$  — сила, соответствующая перемещению  $x_i$ ). Для линейной упругой системы силы  $F_i$ , которые нужно приложить, чтобы получить перемещения  $x_i$ , линейно связаны с этими перемещениями:

$$F_i = \sum_{j=1}^n r_{ij} x_j, \quad (10.1)$$

где  $r_{ij}$  — коэффициенты жесткости, аналогичные коэффициентам влияния метода перемещений в строительной механике.

Наряду с зависимостями (10.1), выражающими силы через перемещения, можно записать зависимости

$$x_i = \sum_{j=1}^n \delta_{ij} F_j, \quad (10.2)$$

в которых перемещения выражены через силы, а коэффициенты подат-

ливости  $\delta_{ij}$  аналогичны коэффициентам влияния метода сил в строительной механике.

Коэффициенты  $r_{ij}$  и  $\delta_{ij}$  образуют квадратные матрицы  $n \times n$ :

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \dots & r_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ r_{n1} & r_{n2} & \dots & r_{nn} \end{pmatrix}, \quad \delta = \begin{pmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \dots & \delta_{1n} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \dots & \delta_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \delta_{n1} & \delta_{n2} & \dots & \delta_{nn} \end{pmatrix}.$$

Матрица жесткости  $\mathbf{r}$  и матрица податливости  $\delta$  являются симметричными и взаимно-обратными  $\mathbf{r}\delta = \mathbf{E}$  ( $\mathbf{E}$  — единичная матрица).

Уравнения малых колебаний системы составим в форме уравнений Лагранжа II рода (см. § 1), для этого предварительно вычислим потенциальную и кинетическую энергии системы.

Потенциальную энергию упругой системы можно вычислить как сумму полупроизведений сил  $F_i$  на соответствующие им перемещения:

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n F_i x_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n r_{ij} x_i x_j. \quad (10.3)$$

Кинетическая энергия системы выражается распространенным на всю ее массу интегралом

$$T = \frac{1}{2} \int_m \dot{\mathbf{R}}^2 dm,$$

где  $\mathbf{R}$  — радиус-вектор, определяющий положение элементарной массы  $dm$ ;  $\dot{\mathbf{R}}$  — его производная по времени.

Так как конфигурация системы определяется координатами  $x_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), то

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad \dot{\mathbf{R}} = \frac{d\mathbf{R}}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial x_i} \dot{x}_i,$$

$$\dot{\mathbf{R}}^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left( \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial x_i} \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial x_j} \right) \dot{x}_i \dot{x}_j,$$

где в скобки заключено скалярное произведение векторов.

Таким образом, для кинетической энергии получаем выражение

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{ij} \dot{x}_i \dot{x}_j \quad \left[ m_{ij} = \int_m \left( \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial x_i} \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial x_j} \right) dm \right]. \quad (10.4)$$

Входящие в это выражение инерционные коэффициенты  $m_{ij}$  образуют симметричную  $n \times n$  матрицу  $\mathbf{m}$  (матрицу масс). При малых колебаниях производные  $\partial \mathbf{R} / \partial x_i$  остаются в процессе движения постоянными и  $\mathbf{m}$  — постоянная матрица.

Вид матрицы масс зависит от выбора системы координат  $x_i$ . В простейшем случае эти координаты представляют собой перемещения

центров массы, входящих в систему жестких тел, в трех взаимно перпендикулярных направлениях и повороты этих тел относительно главных центральных осей инерции. Тогда кинетическая энергия выражается формулой

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \dot{x}_i^2, \quad (10.5)$$

где множителями при квадратах линейных скоростей являются массы тел, а при квадратах угловых скоростей — соответствующие моменты инерции. В этом случае матрица масс является диагональной

$$m = \begin{pmatrix} m_1 & & 0 \\ & m_2 & \\ 0 & & m_n \end{pmatrix}.$$

При другом выборе координат матрица масс не диагональная.

Так, например, если в качестве координат, определяющих смещения жесткого тела (рис. 10.1), которое может перемещаться в плоскости чертежа, принять горизонтальное ( $x_1$ ), вертикальное ( $x_2$ ) перемещения точки  $O$  и угол поворота  $x_3$  то, так как точка  $O$  не совпадает с центром массы  $C$ , кинетическая энергия тела составит

$$T = \frac{1}{2} m [(\dot{x}_1 - b \dot{x}_3)^2 + (\dot{x}_2 + a \dot{x}_3)^2] + \frac{1}{2} I_C \dot{x}_3^2.$$

Здесь первое слагаемое соответствует энергии поступательного движения тела вместе с центром его массы, а второе — энергии вращения ( $I_C$  — момент инерции массы тела относительно центральной оси, перпендикулярной плоскости чертежа). Нетрудно видеть, что в данном случае матрица масс имеет вид

$$m = \begin{pmatrix} m & 0 & -mb \\ 0 & m & ma \\ -mb & ma & I_0 \end{pmatrix},$$

где  $I_0 = I_C + m(a^2 + b^2)$  — момент инерции массы тела относительно оси, проходящей через точку  $O$ .

Уравнение Лагранжа II рода, соответствующее варьированию координаты  $x_i$ , имеет вид (см. § 1)

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} \right) - \left( \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) + \frac{\partial U}{\partial x_i} = Q_i.$$

Пусть на систему действуют внешние возмущающие силы  $P_i$ , соответствующие перемещениям  $x_i$ . Тогда  $Q_i = P_i$ . Основываясь на формулах (10.3) и (10.4), вычислим:

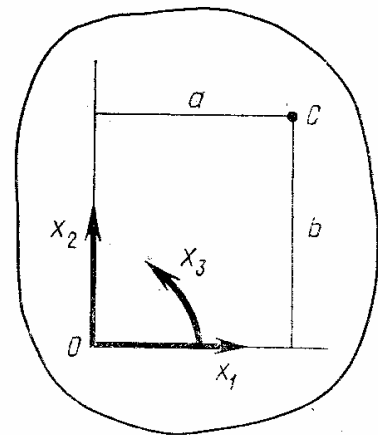


Рис. 10.1

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \dot{x}_i} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{ij} \dot{x}_i \dot{x}_j = \sum_{j=1}^n m_{ij} \dot{x}_j;$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} \right) = \sum_{j=1}^n m_{ij} \ddot{x}_j; \quad \frac{\partial T}{\partial x_i} = 0;$$

$$\frac{\partial U}{\partial x_i} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_i} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n r_{ij} x_i x_j = \sum_{j=1}^n r_{ij} x_j.$$

В результате подстановки этих значений уравнения движения получают вид

$$\sum_{j=1}^n m_{ij} \ddot{x}_j + \sum_{j=1}^n r_{ij} x_j = P_i \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (10.6)$$

Чаще всего координаты  $x_i$  выбираются так, что матрица  $m$  — диагональная. В этом случае

$$m_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{при } j \neq i, \\ m_i & \text{при } j = i. \end{cases}$$

Тогда в первой сумме в уравнении (10.6) остается лишь одно слагаемое и уравнение упрощается:

$$m_i \ddot{x}_i + \sum_{j=1}^n r_{ij} x_j = P_i \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (10.7)$$

Физический смысл уравнения (10.7) очевиден — это уравнение движения массы  $m_i$ , к которой приложена возмущающая сила  $P_i$ , и реакция упругой системы  $-F_i$ , выраженная через перемещения по формулам (10.1).

Систему уравнений (10.7) можно обратить, разрешив ее относительно перемещений  $x_i$ . Воспользовавшись тем, что матрицы жесткости и податливости являются взаимно-обратными, можно полученные соотношения записать в виде

$$x_i = \sum_{j=1}^n (P_j - m_j \ddot{x}_j) \delta_{ij}. \quad (10.8)$$

Физический смысл уравнения (10.8) состоит в том, что перемещение  $x_i$  рассматривается как результат воздействия на упругую систему внешних возмущающих сил  $P_j$  и сил инерции масс  $(-m_j \ddot{x}_j)$ , причем перемещения определяются в зависимости от сил по равенствам (10.2).

Форма (10.7) записи уравнений движения, в которой силы выражаются через перемещения, называется прямой, а форма (10.8), в которой перемещения выражаются через силы, — обратной. Следует отметить, что уравнения (10.7) и (10.8) справедливы только при диагональной матрице масс; в противном случае следует пользоваться более общими



Рассмотрим примеры систем, для которых та или иная форма записи уравнений движения имеет определенные преимущества.

Figure 1 consists of two parts. Part (a) shows a horizontal chain of masses  $m_i$  connected by springs with stiffness  $c_{i,i+1}$ . The chain is fixed to a wall on the left. Part (b) is a free-body diagram of a mass  $m_i$ , showing forces  $c_{i-1,i}(x_i - x_{i-1})$  and  $c_{i,i+1}(x_{i+1} - x_i)$  acting on it, and a pressure  $P_i(t)$  acting on its right face. The coordinate  $x$  is indicated.

Рис. 10.2

Для первого груза уравнение будет отличаться отсутствием  $x_0$  (так как левый конец пружины  $c_{0,1}$  закреплен неподвижно), а для  $n$ -го груза — отсутствием последнего слагаемого в левой части. Таким образом получаем цепочку уравнений:

Уравнения (10.10) являются уравнениями движения в прямой форме, причем отличны от нуля только коэффициенты влияния, связывающие силы и перемещения соседних грузов:

Поэтому уравнения оказались чрезвычайно простыми по структуре: в каждое из них входят не более трех неизвестных, а в первое и последнее — по два.

55

ния промежуточного  $i$ -го диска (рис. 10.3, б), на который действуют крутящие моменты прилежащих участков вала

$$M_{i-1,i} = c_{i-1,i}(x_i - x_{i-1}); \quad M_{i,i+1} = c_{i,i+1}(x_{i+1} - x_i)$$

и внешний возмущающий момент  $M_i(t)$ .

Записывая уравнение движения диска в форме Даламбера, получаем

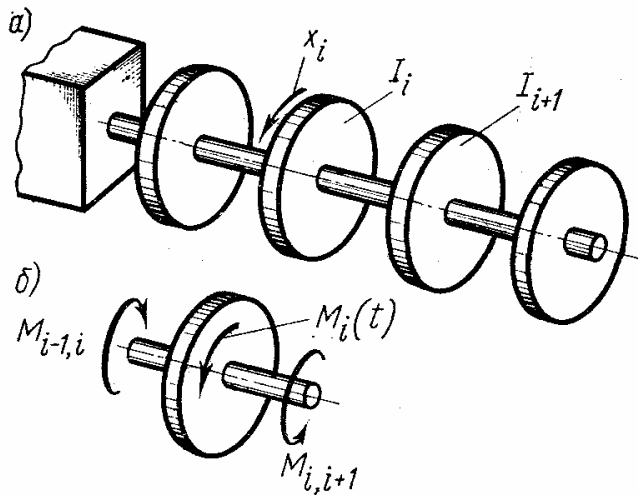


Рис. 10.3

$$-I_i \ddot{x}_i + M_{i,i+1} - M_{i-1,i} + M_i(t) = 0,$$

где  $I_i$  — момент инерции массы диска. Подстановка выражений упругих моментов приводит к уравнению

$$I_i \ddot{x}_i - c_{i-1,i} x_{i-1} + (c_{i-1,i} + c_{i,i+1}) x_i - c_{i,i+1} x_{i+1} = M_i(t). \quad (10.11)$$

Уравнение (10.11) имеет точно такой же вид, как уравнение (10.9) для поступательного перемещения грузов.

Если в рассмотренных выше задачах использовать обратную форму уравнений движения, то в каждое из уравнений войдут все без исключения неизвестные перемещения. В самом деле, для систем рис. 10.2 и 10.3 ни один из коэффициентов  $\delta_{ij}$ , представляющих собой перемещение  $x_i$  под действием единичной силы, направленной по  $x_j$ , не обращается в нуль. Системы, показанные на рис. 10.2 и 10.3, — это так называемые цепные системы, в которых упругие силы зависят только от разности смещений соседних масс. Таким образом, для цепных систем прямая форма уравнений движения является предпочтительной.

Для систем, не относящихся к цепным, как правило, не равны нулю ни коэффициенты  $\delta_{ij}$ , ни  $r_{ij}$ , поэтому уравнения движения в прямой и обратной формах имеют примерно одинаковую сложность. Здесь выбор той или иной формы зависит от того, какие коэффициенты влияния,  $\delta_{ij}$  или  $r_{ij}$  проще определить. Большей частью проще вычисляются коэффициенты матрицы податливости  $\delta$ , и поэтому применяется обратная форма уравнений движения.

В качестве примера рассмотрим колебания балки с тремя сосредоточенными грузами (рис. 10.4, а). Система уравнений в обратной форме при отсутствии возмущающих сил имеет вид

$$x_1 + m_1 \ddot{x}_1 \delta_{11} + m_2 \ddot{x}_2 \delta_{12} + m_3 \ddot{x}_3 \delta_{13} = 0,$$

$$x_2 + m_1 \ddot{x}_1 \delta_{21} + m_2 \ddot{x}_2 \delta_{22} + m_3 \ddot{x}_3 \delta_{23} = 0,$$

$$x_3 + m_1 \ddot{x}_1 \delta_{31} + m_2 \ddot{x}_2 \delta_{32} + m_3 \ddot{x}_3 \delta_{33} = 0$$

Для определения коэффициентов влияния  $\delta_{ij}$  следует рассмотреть нагружение балки единичными силами в направлениях  $x_1, x_2, x_3$  (рис. 10.4, б), что выполняется методами сопротивления материалов (интеграл Мора, правило Верещагина).

Коэффициенты влияния  $r_{ij}$  представляют собой реакции фиктивных опор, расположенных под каждой из масс  $m_j$  при прогибе под массой  $m_i$ , равном единице; коэффициент  $r_{ii}$  равен силе, которая приложена при этом к массе  $m_i$  (рис. 10.5, а). Таким образом, для непосредственного подсчета коэффициентов  $r_{ij}$  для балки с тремя массами необходимо трижды решить статически неопределимую задачу типа изображенной на рис. 10.5, б.

Конечно, практически проще определить сначала матрицу коэффициентов  $\delta$ , а затем, обратив ее, найти матрицу  $r$ . Однако в этой операции нет необходимости; для балочных систем следует пользоваться обратной формой записи уравнений движения.

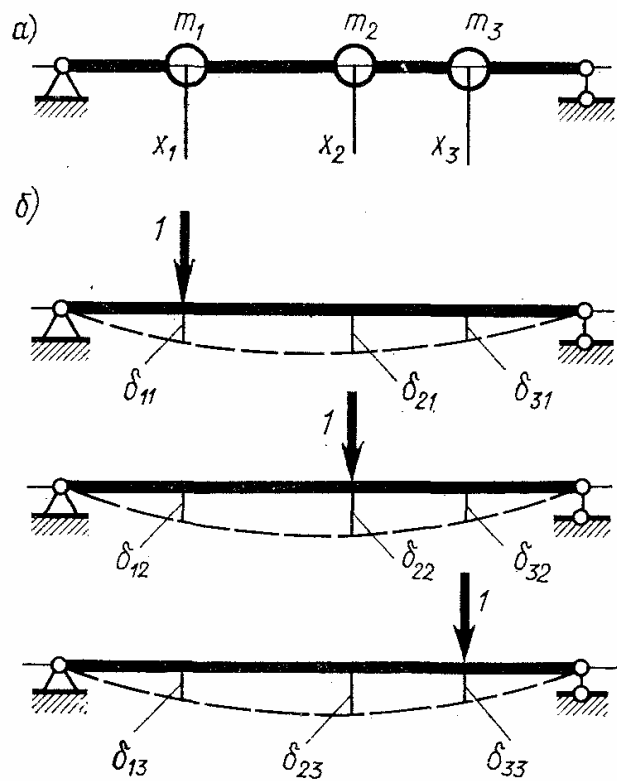


Рис. 10.4

## § 11. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЧАСТОТ И ФОРМ СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ

При свободных колебаниях возмущающие силы отсутствуют и уравнения движения (10.6) являются однородными:

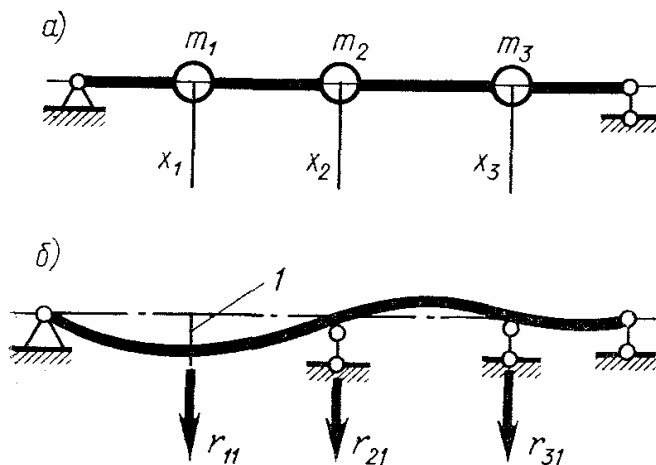


Рис. 10.5

$$\sum_{j=1}^n m_{ij} \ddot{x}_j + \sum_{j=1}^n r_{ij} x_j = 0. \quad (11.1)$$

Решение этой системы, соответствующее гармоническим колебаниям, можно представить в виде

$$x_i = u_i \sin(pt + \varphi), \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (11.2)$$

где  $u_i$  — постоянные;  $p$  — угловая частота;  $\varphi$  — фаза

колебаний. Подставив значения  $x_i$  в уравнения (11.1) и сократив общий множитель  $\sin(pt + \varphi)$ , получим систему линейных однородных алгебраических уравнений относительно постоянных  $u_i$

$$\sum_{j=1}^n (r_{ij} - p^2 m_{ij}) u_j = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (11.3)$$

В эту систему в качестве параметра входит квадрат угловой частоты колебаний.

В случае диагональной матрицы масс система уравнений относительно амплитудных перемещений  $u_i$  может быть записана в виде

$$\sum_{j=1}^n r_{ij} u_j - p^2 m_i u_i = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (11.4)$$

или в виде

$$u_i - p^2 \sum_{j=1}^n m_j u_j \delta_{ij} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (11.5)$$

в зависимости от того, исходим ли мы из уравнений движения в прямой или обратной формах.

Уравнения (11.4) представляют собой уравнения динамического равновесия масс  $m_i$  в положении амплитудных отклонений, когда на них действуют силы упругости  $(-\sum_{j=1}^n r_{ij} u_j)$  и силы инерции  $p^2 m_i u_i$ .

Уравнения (11.5) можно рассматривать как уравнения, связывающие амплитудные перемещения с вызывающими их инерционными силами в соответствии с формулами (10.2). Поэтому для составления уравнений, определяющих формы свободных колебаний  $u_i$ , нет необходимости обязательно составлять уравнения движения; можно ограничиться рассмотрением системы при амплитудных отклонениях.

Система линейных однородных алгебраических уравнений (11.3) может иметь ненулевые решения только при ее определителе, равном нулю:

$$\Delta(p^2) = \begin{vmatrix} r_{11} - p^2 m_{11} & r_{12} - p^2 m_{12} & \dots & r_{1n} - p^2 m_{1n} \\ r_{21} - p^2 m_{21} & r_{22} - p^2 m_{22} & \dots & r_{2n} - p^2 m_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{n1} - p^2 m_{n1} & r_{n2} - p^2 m_{n2} & \dots & r_{nn} - p^2 m_{nn} \end{vmatrix} = 0. \quad (11.6)$$

Уравнение (11.6) — алгебраическое  $n$ -й степени относительно  $p^2$ . Оно называется *частотным* или *весовым уравнением*.

Если положение системы, от которого отсчитываются перемещения  $x_i$ , является положением устойчивого статического равновесия, то все  $n$  корней уравнения (11.6) действительны и положительны. Таким образом, система с  $n$  степенями свободы имеет  $n$  частот собственных колебаний.

В общем случае все корни уравнения (11.6), а значит и все собст-

венные частоты, различны. Некоторые особенности расчета в случае кратных корней рассмотрены в § 13.

При диагональной матрице масс на основе зависимостей (11.4) или (11.5) частотное уравнение может быть записано в виде

$$\begin{vmatrix} r_{11} - p^2 m_1 & r_{12} & \dots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} - p^2 m_2 & \dots & r_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{n1} & r_{n2} & \dots & r_{nn} - p^2 m_n \end{vmatrix} = 0 \quad (11.7)$$

или в виде

$$\begin{vmatrix} p^2 m_1 \delta_{11} - 1 & p^2 m_2 \delta_{12} & \dots & p^2 m_n \delta_{1n} \\ p^2 m_1 \delta_{21} & p^2 m_2 \delta_{22} - 1 & \dots & p^2 m_n \delta_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p^2 m_1 \delta_{n1} & p^2 m_2 \delta_{n2} & \dots & p^2 m_n \delta_{nn} - 1 \end{vmatrix} = 0. \quad (11.8)$$

Каждой собственной частоте  $p_k$  соответствует определенная форма колебания, т. е. определенное соотношение между всеми амплитудными перемещениями  $u_i$ . В самом деле, если  $p^2 = p_k^2$ , то определитель уравнений (11.3) равен нулю. В этом случае одно из уравнений является следствием остальных и имеется лишь  $n - 1$  линейных однородных уравнений для определения  $n$  неизвестных амплитуд. Произвольно задав одно из амплитудных перемещений (например, положив  $u_1 = 1$ ), из этих уравнений можно найти все остальные. Таким образом, для каждой собственной частоты  $p_k$  определяем соответствующую форму колебаний (собственную форму), характеризуемую амплитудами\*  $u_{1k}, u_{2k}, \dots, u_{nk}$ . Здесь первый индекс означает номер перемещения, второй — номер формы колебания.

Обычно частоты и формы собственных колебаний нумеруют в порядке возрастания частот, так что  $k = 1$  соответствует низшей, а  $k = n$  — высшей собственной частоте. Каждому номеру  $k$  отвечает решение уравнений движения в форме

$$x_i = (C_{1k} \cos p_k t + C_{2k} \sin p_k t) u_{ik}. \quad (11.9)$$

Движения в соответствии с уравнением (11.9) называются *главными колебаниями* системы.

Так как уравнения движения являются линейными, то линейная комбинация решений вида (11.9)

$$x_i = \sum_{k=1}^n (C_{1k} \cos p_k t + C_{2k} \sin p_k t) u_{ik} \quad (11.10)$$

также является их решением.

В формулу (11.10) входят  $2n$  постоянных  $C_{1k}$  и  $C_{2k}$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ), и, следовательно, она выражает общее решение системы уравнений

---

\* Эти амплитуды определены с точностью до произвольного множителя, одинакового для всех  $u_{ik}$  при данном  $k$ .

(11.1). Постоянные могут быть определены из начальных условий движения (см. § 12); при  $t = 0$  должны быть заданы перемещения и скорости всех масс.

Рассмотрим простейший случай системы с двумя степенями свободы, например, балки с двумя массами (рис. 11.1). При свободных колебаниях уравнения движения в форме (10.8) имеют такой вид:

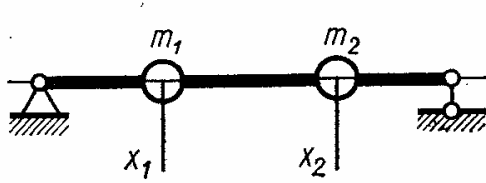


Рис. 11.1

$$\ddot{x}_1 = -m_1 \delta_{11} \ddot{x}_1 - m_2 \delta_{12} \ddot{x}_2,$$

$$\ddot{x}_2 = -m_1 \delta_{21} \ddot{x}_1 - m_2 \delta_{22} \ddot{x}_2.$$

После подстановки  $x_1 = u_1 \sin(pt + \varphi)$ ,  $x_2 = u_2 \sin(pt + \varphi)$  получаем

$$u_1 = p^2 (m_1 \delta_{11} u_1 + m_2 \delta_{12} u_2), \quad (11.11)$$

$$u_2 = p^2 (m_1 \delta_{21} u_1 + m_2 \delta_{22} u_2).$$

Приравняем нулю определитель этих уравнений:

$$\begin{vmatrix} p^2 m_1 \delta_{11} - 1 & p^2 m_2 \delta_{12} \\ p^2 m_1 \delta_{21} & p^2 m_2 \delta_{22} - 1 \end{vmatrix} = 0. \quad (11.12)$$

Уравнение (11.12) является квадратным относительно  $p^2$ :

$$m_1 m_2 (\delta_{11} \delta_{22} - \delta_{12}^2) p^4 - (m_1 \delta_{11} + m_2 \delta_{22}) p^2 + 1 = 0$$

(при записи этого уравнения учтено, что  $\delta_{21} = \delta_{12}$ ).

Находим два значения квадрата собственной частоты:

$$p_1^2 = \frac{m_1 \delta_{11} + m_2 \delta_{22} - \sqrt{(m_1 \delta_{11} - m_2 \delta_{22})^2 + 4 m_1 m_2 \delta_{12}^2}}{2 m_1 m_2 (\delta_{11} \delta_{22} - \delta_{12}^2)}, \quad (11.13)$$

$$p_2^2 = \frac{m_1 \delta_{11} + m_2 \delta_{22} + \sqrt{(m_1 \delta_{11} - m_2 \delta_{22})^2 + 4 m_1 m_2 \delta_{12}^2}}{2 m_1 m_2 (\delta_{11} \delta_{22} - \delta_{12}^2)}.$$

Соотношение между амплитудными отклонениями грузов можно найти из любого из уравнений (11.11). Из первого уравнения

$$u_{2k}/u_{1k} = (1 - p_k^2 m_1 \delta_{11}) / (p_k^2 m_2 \delta_{12}).$$

Амплитуду одной из масс можно задать произвольно. Примем  $u_{11} = u_{12} = 1$ . Тогда первая форма собственных колебаний будет характеризоваться величинами

$$u_{11} = 1, \quad u_{21} = (1 - p_1^2 m_1 \delta_{11}) / (p_1^2 m_2 \delta_{12}),$$

а вторая —

$$u_{12} = 1, \quad u_{22} = (1 - p_2^2 m_1 \delta_{11}) / (p_2^2 m_2 \delta_{12}),$$

где  $p_1$  и  $p_2$  определены формулами (11.13).

## § 12. ГЛАВНЫЕ КООРДИНАТЫ. МАТРИЧНАЯ ФОРМА УРАВНЕНИЙ

**Ортогональность форм собственных колебаний.** Пусть двум разным главным колебаниям с собственными частотами  $p_k$  и  $p_l$  соответствуют формы  $u_{ik}$  и  $u_{il}$ . Докажем, что при  $p_k \neq p_l$  эти формы связаны соотношениями ортогональности, которые могут быть записаны в виде

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{ij} u_{ik} u_{jl} = 0 \quad (12.1)$$

или

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n r_{ij} u_{ik} u_{jl} = 0. \quad (12.2)$$

Пусть координаты системы соответствуют  $k$ -й форме собственных колебаний  $x_i = u_{ik}$ . Для того чтобы вызвать статически такие перемещения, к системе нужно приложить силы  $F_{ik}$ , которые связаны с перемещениями формулой (10.1)

$$F_{ik} = \sum_{j=1}^n r_{ij} u_{jk} \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Но величины  $u_{jk}$  тождественно удовлетворяют уравнениям (11.3) при  $p = p_k$  и, следовательно,

$$F_{ik} = p_k^2 \sum_{j=1}^n m_{ij} u_{jk} \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Точно так же перемещения  $u_{il}$ , соответствующие  $l$ -й форме, можно рассматривать как результат воздействия статически приложенных сил

$$F_{il} = p_l^2 \sum_{j=1}^n m_{ij} u_{jl}.$$

Теперь к двум состояниям статического нагружения системы: 1) перемещения  $u_{ik}$ , силы  $F_{ik}$ , 2) перемещения  $u_{il}$ , силы  $F_{il}$  — применим теорему о взаимности работ

$$\sum_{i=1}^n F_{ik} u_{il} = \sum_{i=1}^n F_{il} u_{ik}.$$

После подстановки выражений сил  $F_{ik}$ ,  $F_{il}$  получим

$$p_k^2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{ij} u_{jk} u_{il} = p_l^2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{ij} u_{jl} u_{ik}.$$

В связи с симметрией матрицы масс двойные суммы в левой и пра-

вой частях равенства совпадают и мы приходим к равенству

$$(p_k^2 - p_l^2) \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{ij} u_{ik} u_{jl} = 0,$$

из которого при  $p_l \neq p_k$  следует соотношение ортогональности (12.1).

Второе соотношение ортогональности является следствием первого. Представим двойную сумму в виде

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{ij} u_{jk} u_{il} = \sum_{i=1}^n \left( u_{ik} \sum_{j=1}^n m_{ij} u_{jl} \right) = 0. \quad (12.3)$$

Но так как  $u_{jl}$  удовлетворяют уравнениям (11.3) при  $p = p_l$ , внутренняя сумма

$$\sum_{j=1}^n m_{ij} u_{jl} = \frac{1}{p_l^2} \sum_{j=1}^n r_{ij} u_{jl}$$

и после подстановки этого выражения в (12.3) приходим к соотношению ортогональности (12.2).

Для частного случая системы с диагональной матрицей масс первое из соотношений ортогональности выглядит следующим образом:

$$\sum_{i=1}^n m_i u_{ik} u_{il} = 0. \quad (12.4)$$

Соотношение ортогональности форм колебаний распространяется и на системы с распределенной массой. В этом случае следует рассматривать бесконечно малые элементы массы  $dm$  и условие ортогональности примет вид

$$\int_m u_k u_l dm = 0,$$

где под интегралом стоит скалярное произведение перемещений элементарной массы  $dm$  при двух формах собственных колебаний, а интегрирование выполняется по всей массе системы.

**Разложение движения системы по формам ее собственных колебаний.** Движение всех масс системы независимо от причин, его вызвавших, можно описать формулами

$$x_i = x_i(t) \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (12.5)$$

Введем новые координаты  $q_k(t)$  так, чтобы

$$x_i(t) = \sum_{k=1}^n q_k(t) u_{ik}, \quad (12.6)$$

где  $u_{ik}$  — амплитуда перемещения  $x_i$  при  $k$ -й форме собственных колебаний.



Можно обратить соотношение (12.6), выразив обобщенные координаты  $q_k$  через физические  $x_i$ . Используем для этого соотношения ортогональности. Запишем систему (12.6) в развернутом виде:

$$\begin{aligned} x_1 &= q_1 u_{11} + q_2 u_{12} + \dots + q_k u_{1k} + \dots + q_n u_{1n}, \\ x_2 &= q_1 u_{21} + q_2 u_{22} + \dots + q_k u_{2k} + \dots + q_n u_{2n}, \\ &\vdots \\ x_n &= q_1 u_{n1} + q_2 u_{n2} + \dots + q_k u_{nk} + \dots + q_n u_{nn}. \end{aligned}$$

Для определения координаты  $q_k$  умножим первое из уравнений (12.6) на  $\sum_{j=1}^n m_{1j} u_{jk}$ , второе — на  $\sum_{j=1}^n m_{2j} u_{jk}$ , ..., последнее — на  $\sum_{j=1}^n m_{nj} u_{jk}$  и сложим уравнения почленно. Таким образом получим

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{ij} u_{jk} x_i = q_1 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{ij} u_{jk} u_{i1} + \\ & + q_2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{ij} u_{jk} u_{i2} + \cdots + q_k \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{ij} u_{jk} u_{ik} + \\ & + \cdots + q_n \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{ij} u_{jk} u_{in}. \end{aligned}$$

В соответствии с соотношением ортогональности (12.1) все суммы в правой части полученного равенства, кроме суммы, имеющей множителем  $q_k$ , равны нулю, поэтому

$$q_k = \left( \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{ij} u_{jk} x_i \right) / \mathcal{M}_k, \quad (12.7)$$

$$\mathcal{M}_k = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{ij} u_{jk} u_{ik}.$$

Величину  $M_k$  можно назвать *обобщенной массой* системы при  $k$ -й форме собственных колебаний.

Координаты  $q_k$ , связанные с физическими координатами  $x_i$  формулами (12.6) и (12.7), называются *главными координатами*.

Для системы с диагональной матрицей масс формулы (12.7) упрощаются. В этом случае

$$q_k = \left( \sum_{i=1}^n m_i u_{ik} x_i \right) / \mathcal{M}_k, \quad \mathcal{M}_k = \sum_{i=1}^n m_i u_{ik}^2. \quad (12.8)$$

**Выражение кинетической и потенциальной энергии через главные координаты.** Кинетическая энергия выражается через физические координаты формулой (10.4)

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{ij} \dot{x}_i \dot{x}_j.$$

Подставляя сюда выражения  $\dot{x}_i$  через главные координаты

$$\dot{x}_i = \sum_{k=1}^n \dot{q}_k u_{ik},$$

получаем

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left( m_{ij} \sum_{k=1}^n \sum_{r=1}^n \dot{q}_k \dot{q}_r u_{ik} u_{jr} \right).$$

Изменим порядок суммирования:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sum_{r=1}^n \left( \dot{q}_k \dot{q}_r \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{ij} u_{ik} u_{jr} \right).$$

В соответствии с соотношением ортогональности (12.1) все слагаемые этого выражения при  $r \neq k$  обращаются в нули и в результате

$$T = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \mathcal{M}_k \dot{q}_k^2, \quad (12.9)$$

где  $\mathcal{M}_k$  — обобщенная масса системы при  $k$ -й форме колебаний, определяемая формулой (12.7).

Аналогичным образом, заменяя в выражении потенциальной энергии (10.3) физические координаты разложениями (12.6) и учитывая соотношения ортогональности (12.2), получаем

$$U = \sum_{k=1}^n U_k q_k^2, \quad (12.10)$$

где

$U_k = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n r_{ij} u_{ik} u_{jk}$  — потенциальная энергия системы при ее деформациях, соответствующих  $k$ -й собственной форме.

Так как согласно уравнениям (11.3)

$$\sum_{j=1}^n r_{ij} u_{jk} = p_k^2 \sum_{j=1}^n m_{ij} u_{jk},$$

справедлива и формула

$$U_k = \frac{1}{2} p_k^2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{ij} u_{ik} u_{jk} = \frac{1}{2} p_k^2 \mathcal{M}_k. \quad (12.11)$$

Эта формула позволяет установить связь между  $k$ -й собственной частотой, потенциальной энергией деформации и обобщенной массой, соответствующими  $k$ -й форме колебаний:

$$p_k^2 = 2U_k/M_k. \quad (12.12)$$

Если форма колебаний известна, то  $U_k$  и  $M_k$  нетрудно вычислить и определить частоту  $p_k$ . В этом случае формула является точной. Чаще, однако, формулу (12.12) используют для приближенного подсчета низшей частоты собственных колебаний при приближенном задании их формы (см. гл. IV). В этом варианте формула (12.12) называется *формулой Рэлея*.

Как следует из зависимостей (12.9) и (12.10), благодаря ортогональности собственных форм кинетическая и потенциальная энергии системы выражаются суммами энергий, соответствующих каждой из главных координат. В формулу для кинетической энергии не входят произведения  $\dot{q}_k \dot{q}_l$ , а в формулу для потенциальной энергии — произведения  $q_k q_l$ .

Так как потенциальная энергия упругой системы выражается через внутренние силовые факторы, соотношения ортогональности распространяются и на эти величины.

Рассмотрим, например, стержневую систему, работающую в условиях плоского изгиба. Потенциальная энергия деформации такой системы определяется интегралом

$$U = \int \frac{M^2}{2EJ} dz,$$

вычисляемым по длинам всех стержней.

Так как прогибы представлены через главные координаты формулой (12.6), которая для любого сечения  $z$  имеет вид

$$x(z, t) = \sum_{k=1}^n q_k(t) u_k(z),$$

то изгибающий момент

$$M = EJ \frac{\partial^2 x}{\partial z^2} = \sum_{k=1}^n q_k(t) M_k,$$

где  $M_k = EJ d^2 u_k / dz^2$  — момент в сечении при  $k$ -й собственной форме.

С учетом этой зависимости потенциальная энергия деформации составит

$$U = \int \frac{M^2}{2EJ} dz = \sum_{k=1}^n q_k^2 \int \frac{M_k^2}{2EJ} dz + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n q_k q_l \int \frac{M_k M_l}{EJ} dz.$$

Так как в выражение потенциальной энергии произведения  $q_k q_l$  не входят, должны выполняться равенства

$$\int \frac{M_k M_l}{EJ} dz = 0.$$

Таким образом, соотношение ортогональности заключается в том, что интеграл Мора от произведения силовых факторов при двух разных собственных формах равен нулю.

**Уравнения движения в главных координатах.** Установленные выше свойства главных координат приводят к тому, что в этих координатах уравнения движения приобретают особенно простой вид.

Из зависимостей (12.9), (12.10) и (12.11) находим:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} = \mathcal{M}_k \dot{q}_k; \quad \frac{\partial T}{\partial q_k} = 0; \quad \frac{\partial U}{\partial q_k} = p_k^2 \mathcal{M}_k q_k.$$

Следовательно, уравнения движения в форме Лагранжа таковы:

$$\mathcal{M}_k \ddot{q}_k + p_k^2 \mathcal{M}_k q_k = Q_k$$

или

$$\ddot{q}_k + p_k^2 q_k = Q_k / \mathcal{M}_k \quad (k = 1, 2, \dots, n). \quad (12.13)$$

Здесь обобщенные силы  $Q_k$  представляют собой виртуальную работу всех внешних сил на единичной вариации  $q_k$ . Если сами эти силы не зависят от  $q_l$  или  $\dot{q}_l$ , то уравнения (12.13) для различных координат  $q_k$  не связаны между собой. В этом случае каждая из главных координат определяется независимым уравнением вида (12.13), которое не отличается от уравнения колебаний линейной системы с одной степенью свободы.

**Определение свободного движения системы по начальным условиям.** В § 11 было показано, что уравнения, определяющие свободные колебания системы с  $n$  степенями свободы, содержат  $2n$  постоянных, подлежащих определению из начальных условий. Использование главных координат позволяет упростить определение этих постоянных.

При свободных колебаниях все обобщенные силы  $Q_k$  равны нулю, уравнения (12.13) — однородные и их решениями являются выражения

$$q_k = C_{1k} \cos p_k t + C_{2k} \sin p_k t. \quad (12.14)$$

Физические координаты  $x_i$  определяются при этом зависимостями  $x_i = \sum_{k=1}^n q_k u_{ik}$ , совпадающими в данном случае с полученными ранее формулами (11.10). Постоянные  $C_{1k}$  и  $C_{2k}$  связаны со значениями  $q_k$  и  $\dot{q}_k$  при  $t = 0$ . С другой стороны, эти величины можно выразить через начальные условия для физических координат  $x_i$ , воспользовавшись зависимостями (12.7). Таким образом получаем:

$$\begin{aligned} C_{1k} = q_k(0) &= \left[ \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{ij} u_{ik} x_j(0) \right] / \mathcal{M}_k, \\ p_k C_{2k} = \dot{q}_k(0) &= \left[ \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{ij} u_{ik} \dot{x}_j(0) \right] / \mathcal{M}_k \end{aligned} \quad (12.15)$$

или при диагональной матрице масс:

$$C_{1k} = q_k(0) = \left[ \sum_{i=1}^n m_i u_{ik} x_i(0) \right] / \mathcal{M}_k, \quad (12.16)$$

$$p_k C_{2k} = \dot{q}_k(0) = \left[ \sum_{i=1}^n m_i u_{ik} \dot{x}_i(0) \right] / \mathcal{M}_k.$$

Таким образом, по уравнениям (12.15) или (12.16) определяются постоянные  $C_{1k} C_{2k}$  в формулах (11.10).

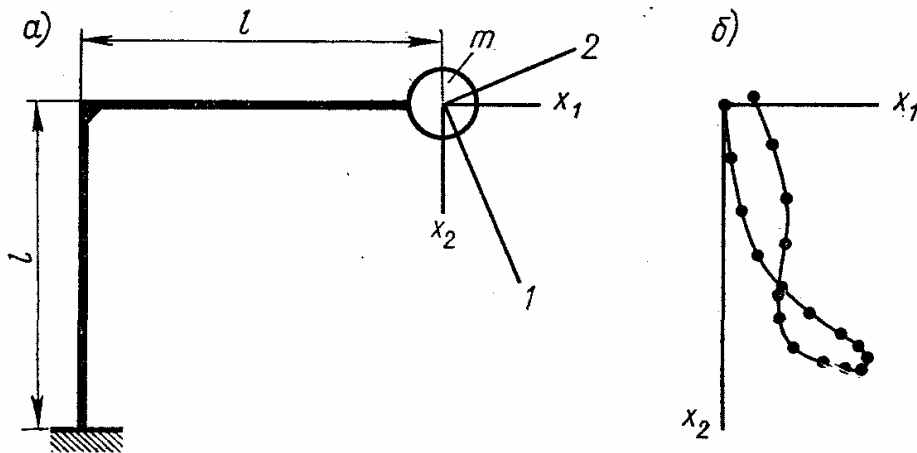


Рис. 12.1

Рассмотрим пример. Определить закон движения и максимальный изгибающий момент в заделке для системы, изображенной на рис. 12.1, а. В начальный момент грузу  $m$  сообщается вертикальная скорость  $\dot{x}_2(0) = v$ . Смещения груза в начальный момент отсутствуют. Собственной массой стержней пренебречь. Жесткость обоих стержней  $EJ$  постоянна по длине.

Вначале определим частоты и формы собственных колебаний.

Приложив единичные силы в направлениях  $x_1, x_2$ , вычислим коэффициенты влияния:

$$\delta_{11} = l^3/(3EJ), \quad \gamma_{12} = \delta_{21} = l^3/(2EJ), \quad \delta_{22} = 4l^3/(3EJ).$$

Обозначим амплитудные перемещения в тех же направлениях  $u_1, u_2$ . Имеем:

$$u_1 = mp^2 u_1 \delta_{11} + mp^2 u_2 \delta_{12},$$

$$u_2 = mp^2 u_1 \delta_{21} + mp^2 u_2 \delta_{22}.$$

Здесь амплитудные перемещения рассматриваются как результат воздействия на упругую систему амплитудных сил инерции.

После подстановки значений  $\delta_{ij}$

$$zu_1 = 2u_1 + 3u_2, \quad zu_2 = 3u_1 + 8u_2,$$

где  $z = 6EJ/(ml^3 p^2)$ .

Уравнение частот

$$\begin{vmatrix} 2-z & 3 \\ 3 & 8-z \end{vmatrix} = 0,$$

откуда  $z_1 = 9,242$ ;  $z_2 = 0,7574$ .

Собственные частоты:

$$p_1 = \sqrt{6EJ/(ml^3z_1)} = 0,807 \sqrt{EJ/(ml^3)},$$

$$p_2 = \sqrt{6EJ/(ml^3z_2)} = 2,82 \sqrt{EJ/(ml^3)}.$$

Формы колебаний характеризуются соотношениями

$$u_{21} = u_{11} (z_1 - 2)/3 = 2,414u_{11},$$

$$u_{22} = u_{12} (z_2 - 2)/3 = -0,4142u_{12}.$$

Эти соотношения показывают, что при каждом из главных колебаний груз движется прямолинейно. Условие ортогональности

$$mu_{11}u_{12} + mu_{21}u_{22} = m(1 - 2,414 \cdot 0,4142) = 0$$

свидетельствует о том, что направления движений при двух формах колебаний взаимно перпендикулярны.

На рис. 12.1,а направления колебаний обозначены 1 и 2. Свободные колебания груза описываются уравнениями

$$x_1(t) = q_1(t) u_{11} + q_2(t) u_{12},$$

$$x_2(t) = q_1(t) u_{21} + q_2(t) u_{22},$$

где

$$q_1 = C_{11} \cos p_1 t + C_{21} \sin p_1 t, \quad q_2(t) = C_{12} \cos p_2 t + C_{22} \sin p_2 t.$$

Учитывая, что по условиям задачи  $x_1(0) = 0$ ;  $x_2(0) = 0$ ;  $\dot{x}_1(0) = 0$ ;  $\dot{x}_2(0) = v$ , из уравнений (12.16) находим:

$$C_{11} = q_1(0) = 0; \quad C_{12} = q_2(0) = 0;$$

$$p_1 C_{21} = \dot{q}_1(0) = [mu_{11}\dot{x}_1(0) + mu_{21}\dot{x}_2(0)]/\mathcal{M}_1 = m \cdot 2,414v/(6,828m) = 0,354v,$$

$$p_2 C_{22} = \dot{q}_2(0) = [mu_{12}\dot{x}_1(0) + mu_{22}\dot{x}_2(0)]/\mathcal{M}_2 =$$

$$= m(-0,4142)v/(1,172m) = -0,354v.$$

Здесь обобщенные массы:

$$\mathcal{M}_1 = m(u_{11}^2 + u_{21}^2) = m(1 + 2,414^2) = 6,828 m,$$

$$\mathcal{M}_2 = m(u_{12}^2 + u_{22}^2) = m(1 + 0,4142^2) = 1,172 m.$$

Постоянные  $C_{21}$ ,  $C_{22}$  равны:

$$C_{21} = 0,354v/p_1; \quad C_{22} = -0,354v/p_2 = -0,101v/p_1.$$

С учетом вычисленных значений постоянных уравнения движения можно придать такой вид:

$$x_1 = (v/p_1)(0,354 \sin p_1 t - 0,101 \sin p_2 t),$$

$$x_2 = (v/p_1)(0,853 \sin p_1 t + 0,042 \sin p_2 t).$$

Траектория движения груза в течение половины периода основного (т. е. имеющего частоту  $p_1$ ) колебания показана на рис. 12.1,б. Точки на кривой отмечают положение груза через одинаковые промежутки времени  $\Delta t = \pi/(18p_1)$ .

Переходим к определению изгибающих моментов. Сначала строим эпюры моментов, соответствующие формам собственных колебаний. Для первой формы определяем силы инерции при амплитудных отклонениях:

$$F_1 = mp_1^2 u_{11} = m \cdot 0,807^2 EJ/(ml^3) \cdot 1 = 0,65EJ/l^3,$$

$$F_2 = mp_1^2 u_{21} = m \cdot 0,807^2 EJ/(ml^3) \cdot 2,414 = 1,57EJ/l^3.$$

Эпюра моментов показана на рис. 12.2,а. Аналогично строим эпюру при второй форме колебаний (рис. 12.2,б). Легко проверить, что эпюры  $M_1$  и  $M_2$  ортогональны. Теперь момент в любом сечении подсчитываем по формуле

$$M_{изг} = q_1(t)M_1 + q_2(t)M_2.$$

В частности, в заделке

$$\begin{aligned} M_{изг} &= 0,354 (v/p_1) \sin p_1 t \cdot 2,22 EJ/l^2 - 0,101 (v/p_1) \sin p_2 t \cdot 4,64 EJ/l^2 = \\ &= v EJ/(p_1 l^2) (0,785 \sin p_1 t - 0,469 \sin p_2 t). \end{aligned}$$

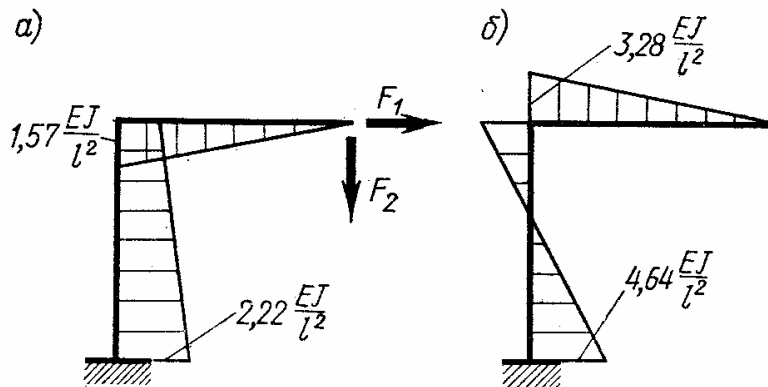


Рис. 12.2

Так как частоты  $p_1$  и  $p_2$  несоизмеримы, возможно совпадение максимальных значений первого и второго слагаемых в скобках. Тогда

$$M_{\max} = 1,254 v EJ/(p_1 l^2).$$

**Матричная форма основных уравнений.** Для линейной системы с произвольным числом степеней свободы весьма удобной и компактной является матричная запись основных уравнений. Составим матрицы-столбцы (векторы):

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \dots \\ F_n \end{pmatrix}. \quad (12.17)$$

Здесь  $x_i$  — перемещения, определяющие положения всех масс системы,  $F_i$  — силы, которые при статическом действии на систему вызывают перемещения  $x_i$  (сила  $F_i$  соответствует перемещению  $x_i$ ).

В линейной системе векторы  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{F}$  связаны зависимостями

$$\mathbf{F} = \mathbf{r}\mathbf{x}, \quad \mathbf{x} = \mathbf{\delta}\mathbf{F}, \quad (12.18)$$

где  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{\delta}$  — квадратные  $(n \times n)$  матрицы жесткости и податливости.

Потенциальная энергия системы определяется половиной скалярного произведения векторов  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{F}$ , что можно записать в виде

$$U = 1/2 \mathbf{x}^T \mathbf{F},$$

где  $\mathbf{x}^T = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  — матрица-строка (транспонированный век-

тор  $\mathbf{x}$ ). Подставляя сюда выражение  $\mathbf{F}$  через  $\mathbf{x}$ , получаем

$$U = 1/2 \mathbf{x}^T \mathbf{r} \mathbf{x}. \quad (12.19)$$

Формула (12.19) представляет собой матричную форму зависимости (10.3).

Кинетическая энергия системы выражается аналогичной зависимостью от скоростей

$$T = 1/2 \dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{m} \dot{\mathbf{x}}, \quad (12.20)$$

где  $\mathbf{m}$  — матрица массы системы.

Формула (12.20) соответствует зависимости (10.4).

Уравнения движения (10.6) в матричной форме записываются так:

$$\mathbf{m} \ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{r} \mathbf{x} = \mathbf{P}, \quad (12.21)$$

где  $\mathbf{P}$  — матрица-столбец возмущающих сил,

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \dots \\ P_n \end{pmatrix}. \quad (12.22)$$

Умножая матричное уравнение (12.21) слева на матрицу податливости  $\delta$  и учитывая, что  $\delta \mathbf{r} = \mathbf{E}$  (единичная матрица), приведем его к виду

$$\delta \mathbf{m} \ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{x} = \delta \mathbf{P}. \quad (12.23)$$

Уравнение (12.23) соответствует записи уравнений движения в обратной форме.

Свободные колебания системы определяются однородными уравнениями

$$\mathbf{m} \ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{r} \mathbf{x} = 0 \quad (12.24)$$

или

$$\delta \mathbf{m} \ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{x} = 0. \quad (12.25)$$

Решение этих уравнений отыскивается в виде

$$\mathbf{x} = \mathbf{u} \cos(pt + \varphi), \quad (12.26)$$

где  $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \dots \\ u_n \end{pmatrix}$  — вектор амплитудных перемещений.

После подстановки в уравнения (12.24) или (12.25) получаем матричные уравнения, которым должен удовлетворять вектор  $\mathbf{u}$ :

$$(\mathbf{r} - p^2 \mathbf{m}) \mathbf{u} = 0 \quad (12.27)$$

$$[\delta \mathbf{m} - (1/p^2) \mathbf{E}] \mathbf{u} = 0. \quad (12.28)$$



Так как эти уравнения линейные и однородные, они могут иметь нетривиальные решения только в том случае, если их определители равны нулю. Отсюда получаем две равноправные формы записи частотного уравнения:

$$\det(r - [p^2 m]) = 0, \quad \det[\delta m - (1/p^2) E] = 0. \quad (12.29)$$

Последнее уравнение показывает, что обратные квадраты частот являются собственными числами квадратной  $(n \times n)$  матрицы  $A = \delta m$ .

Алгебраические уравнения (12.29) имеют  $n$  корней  $p_k^2$ . Каждому значению  $p_k$  соответствует собственный вектор  $u_k$ , определяющий  $k$ -ю форму колебаний.

Можно указать следующий общий способ определения векторов  $u_k$  (форм собственных колебаний). Обозначим символом  $A_1(p^2)$  матрицу коэффициентов уравнений (12.27) или (12.28):

$$A_1(p^2) = r - p^2 m \text{ или } A_1(p^2) = \delta m - (1/p^2) E \quad (12.30)$$

и рассмотрим тождество

$$A_1(p^2) A_1^{-1}(p^2) = E, \quad (12.31)$$

где  $A_1^{-1}(p^2)$  — матрица, обратная  $A_1(p^2)$ .

Как известно, обратная матрица определяется формулой

$$A_1^{-1}(p^2) = C(p^2) / \Delta(p^2), \quad (12.32)$$

где  $\Delta(p^2)$  — определитель, составленный из элементов матрицы  $A_1(p^2)$ ;  $C(p^2)$  — присоединенная матрица, получаемая из матрицы  $A_1(p^2)$  заменой каждого элемента его алгебраическим дополнением в определителе  $\Delta(p^2)$  и последующим транспонированием. Так, например, если

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

то

$$C = \begin{pmatrix} (a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) & * & * \\ (a_{31}a_{23} - a_{21}a_{33}) & * & * \\ (a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}) & * & * \end{pmatrix},$$

где показаны только элементы первого столбца.

Подставив значение  $A_1^{-1}(p^2)$  из равенства (12.32) в (12.31), получим

$$A_1(p^2) C(p^2) = \Delta(p^2) E.$$

Если принять в полученном равенстве частоту равной собственной частоте  $p_k$ , получим

$$A_1(p_k^2) C(p_k^2) = 0, \quad (12.33)$$

так как собственные частоты являются корнями уравнения  $\Delta(p^2) = 0$ .

Справа в равенстве (12.33) стоит нулевая матрица, т. е. матрица, все элементы которой равны нулю. Поэтому произведение матрицы  $A_1(p_k^2)$  на каждый из столбцов матрицы  $C(p_k^2)$  равно нулю и, значит, любой из этих столбцов удовлетворяет уравнениям (12.27), (12.28) при  $p = p_k$  и может быть принят за столбец  $u_k$ .

Таким образом, для определения формы собственных колебаний, соответствующей частоте  $p_k$ , следует подставить эту частоту в элементы матрицы  $A_1(p^2)$  [см. формулы (12.30)] и вычислить один из столбцов присоединенной к  $A_1(p^2)$  матрицы. Этот столбец (если он не нулевой) и может быть принят за  $u_k$ .

Подстановка  $p = p_k$ ,  $u = u_k$  обращает уравнения (12.27) и (12.28) в тождества:

$$ru_k - p_k^2 mu_k \equiv 0, \quad (12.34)$$

$$\delta mu_k - (1/p_k^2) u_k \equiv 0.$$

Соотношения ортогональности следуют из симметрии матриц жесткости и массы. На этом основании для двух собственных векторов  $u_k$  и  $u_l$  выполняется равенство

$$u_k^T ru_l = u_l^T ru_k.$$

Заменяя здесь в соответствии с первым тождеством (12.34)  $ru_l = p_l^2 mu_l$  и  $ru_k = p_k^2 mu_k$ , приводим равенство к виду

$$p_l^2 u_k^T mu_l = p_k^2 u_l^T mu_k.$$

Но в связи с симметрией матрицы масс  $u_k^T mu_l = u_l^T mu_k$  и при  $p_l \neq p_k$  получаем условие ортогональности в виде

$$u_k^T mu_l = 0, \quad (12.35)$$

что является матричной формулировкой условия (12.1).

Заменяя здесь  $mu_l = p_l^{-2} ru_l$ , приходим к формулировке условия ортогональности

$$u_k^T ru_l = 0 \quad (p_l \neq p_k), \quad (12.36)$$

совпадающей с условием (12.2).

Главные координаты вводятся зависимостью

$$x = \sum_{k=1}^n q_k(t) u_k. \quad (12.37)$$

Обращение этой зависимости достигается умножением левой и правой частей на матрицу-строку  $u_k^T m$  слева. Тогда в правой части остается [в связи с условием ортогональности (12.35)] лишь одно слагаемое и, следовательно,

$$u_k^T mx = q_k \mathcal{M}_k, \quad \mathcal{M}_k = u_k^T mu_k. \quad (12.38)$$

Эти зависимости не отличаются от зависимостей  $\gamma_k$  (12.7).

Выражения (12.9) и (12.10) кинетической и потенциальной энергии получаются непосредственно в результате подстановки разложения (12.37) в формулы (12.19) и (12.20) с учетом соотношений ортогональности (12.35) и (12.36).

### § 13. НЕКОТОРЫЕ ОСОБЫЕ СЛУЧАИ РАСЧЕТА СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ

**Учет симметрии.** Для систем, имеющих плоскость симметрии, формы свободных колебаний делятся на симметричные и кососимметричные относительно этой плоскости. Для сокращения вычислений и понижения степени характеристического уравнения целесообразно рассматривать эти виды колебаний отдельно. Покажем это на числовом примере.

Найти частоты и формы собственных колебаний балки рис. 13.1, а с тремя одинаковыми грузами ( $m_1 = m_2 = m_3 = m$ ).

В связи с тем что система является симметричной, следует отдельно рассмотреть симметричные и кососимметричные формы ее колебаний.

При симметричных колебаниях (рис. 13.1, б) амплитудные смещения левой и правой масс одинаковы — назовем их  $u_1$ , смещение средней массы  $u_2$ . Составим уравнения динамического равновесия системы в положении амплитудных отклонений (в обратной форме):

$$\begin{aligned} u_1 &= mp^2 u_1 \delta_{11} + mp^2 u_2 \delta_{12} + mp^2 u_1 \delta_{13}, \\ u_2 &= mp^2 u_1 \delta_{21} + mp^2 u_2 \delta_{22} + mp^2 u_1 \delta_{23}. \end{aligned} \quad (13.1)$$

Определяя коэффициенты влияния, находим:

$$\begin{aligned} \delta_{11} = \delta_{33} &= \frac{25}{3888} \frac{l^3}{EJ}; \quad \delta_{12} = \delta_{21} = \delta_{23} = \frac{39}{3888} \frac{l^3}{EJ}; \\ \delta_{13} &= \frac{17}{3888} \frac{l^3}{EJ}; \quad \delta_{22} = \frac{1}{48} \frac{l^3}{EJ}. \end{aligned}$$

Обозначим для сокращения

$$3888 \frac{EJ}{ml^3 p^2} = z.$$

Тогда уравнения (13.1) можно записать в виде

$$\begin{aligned} zu_1 &= 42 u_1 + 39 u_2, \\ zu_2 &= 78 u_1 + 81 u_2. \end{aligned} \quad (13.2)$$

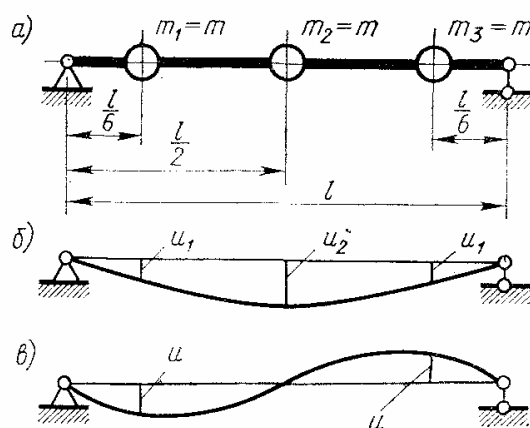


Рис. 13.1

Приравняв нулю определитель этой системы, получим частотное уравнение

$$z^2 - 123z + 360 = 0,$$

корни которого  $z_* = 120$ ;  $z_{**} = 3$ .

Этим значениям  $z$  соответствуют частоты:

$$p_* = \sqrt{3888EJ/(z_* m l^3)} = 5,693 \sqrt{EJ/(m l^3)},$$

$$p_{**} = \sqrt{3888EJ/(z_{**} m l^3)} = 36 \sqrt{EJ/(m l^3)}.$$

Отношения амплитуд находим из первого уравнения (13.2):

$$(u_2/u_1)_* = (z_* - 42)/39 = 2, \quad (u_2/u_1)_{**} = (z_{**} - 42)/39 = -1.$$

Кососимметричная форма колебаний показана на рис. 13.1, в. В этом случае средняя масса неподвижна и мы имеем только одно уравнение

$$u_1 = m p^3 u_1 \delta_{11} - m p^3 u_1 \delta_{13},$$

или после подстановок  $z u_1 = 8 u_1$ , откуда  $z_{***} = 8$  и частота кососимметричных колебаний

$$p_{***} = \sqrt{3888EJ/(8 m l^3)} = 22,045 \sqrt{EJ/(m l^3)}.$$

Располагая частоты в порядке возрастания, находим:

$$p_1 = p_* = 5,693 \sqrt{EJ/(m l^3)},$$

$$p_2 = p_{***} = 22,045 \sqrt{EJ/(m l^3)},$$

$$p_3 = p_{**} = 36 \sqrt{EJ/(m l^3)}.$$

Соответствующие формы колебаний (1, 2, 3) показаны на рис. 13.2, а, б, в.

Если бы мы решали эту задачу, не выделяя симметричные и косо-

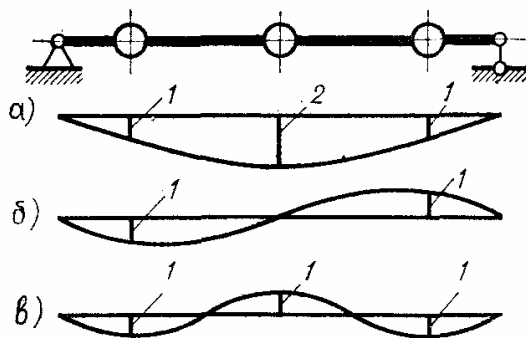


Рис. 13.2

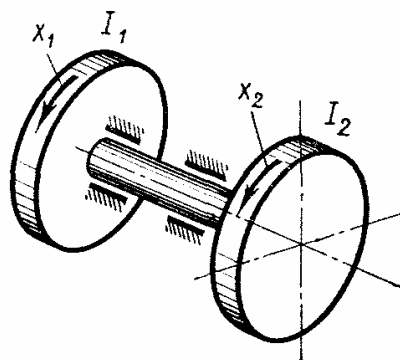


Рис. 13.3

симметричные формы колебаний, то пришлось бы решать кубическое уравнение частот.

**Особенности расчета систем с нулевыми собственными частотами.** Если система не имеет достаточного количества связей и может перемещаться без деформаций, то при определении ее частот получаются нулевые корни. Эти нулевые частоты как раз и соответствуют движению системы без деформации. Простейшим примером такой системы является вал с двумя дисками рис. 13.3. Обозначив углы поворота дисков

$x_1, x_2$ , получим уравнения их движения:

$$I_1 \ddot{x}_1 + c(x_1 - x_2) = 0,$$

$$I_2 \ddot{x}_2 - c(x_1 - x_2) = 0,$$

где  $c$  — жесткость вала на кручение.

Отыскивая решение в форме

$$x_1 = u_1 \cos pt, \quad x_2 = u_2 \cos pt,$$

приходим к системе

$$(c - I_1 p^2) u_1 - c u_2 = 0,$$

$$-c u_1 + (c - I_2 p^2) u_2 = 0.$$

Частотное уравнение

$$\begin{vmatrix} c - I_1 p^2 & -c \\ -c & c - I_2 p^2 \end{vmatrix} = 0.$$

или

$$p^2 [I_1 I_2 p^2 - c(I_1 + I_2)] = 0.$$

Отсюда

$$p_0 = 0, \quad p_1 = \sqrt{c(I_1 + I_2)/(I_1 I_2)}.$$

Будем формально подходить к нулевой частоте так же, как и к ненулевой.

Тогда нулевой частоте соответствует «форма колебаний»  $u_{10} = u_{20}$ , т. е. поворот вала без его деформаций, а частоте  $p_1$  — форма

$$u_{21} = u_{11} (1 - I_1 p^2 / c) = -(I_1 / I_2) u_{11}.$$

Формы колебаний показаны на рис. 13.4 (принято  $u_1 = 1$ ). Легко видеть, что выполняется условие ортогональности

$$I_1 u_{10} u_{11} + I_2 u_{20} u_{21} = I_1 u_1 + I_2 u_2 = 0.$$

Смысл ортогональности колебательной формы ( $u_{11}, u_{21}$ ) и формы движения системы как жесткой ( $u_{10} = u_{20}$ ) состоит в том, что инерционные моменты дисков при колебаниях уравновешены:

$$p_1^2 I_1 u_{11} + p_1^2 I_2 u_{21} = 0.$$

Свободные колебания системы при заданных начальных условиях удобно и в этом случае рассчитать, используя метод главных координат. В соответствии с этим методом полагаем:

$$x_1 = q_0(t) u_{10} + q_1(t) u_{11} = q_0(t) + q_1(t) u_{11},$$

$$x_2 = q_0(t) u_{20} + q_1(t) u_{21} = q_0(t) - q_1(t) \frac{I_1}{I_2} u_{11}.$$

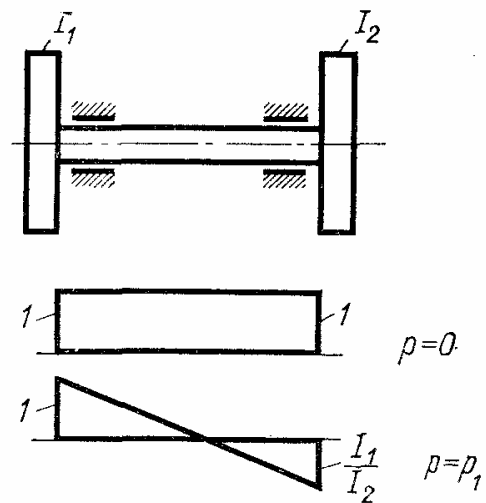


Рис. 13.4

Для главной координаты  $q_0$  в связи с равенством нулю частоты  $p_0$  уравнение (12.13) принимает вид

$$\ddot{q}_0 = 0$$

с решением

$$q_0(t) = A + Bt,$$

соответствующим равномерному вращению вала с угловой скоростью  $B$ . Постоянные  $A$  и  $B$  рассчитываем на основе общих формул (12.15):

$$A = q_0(0) = \frac{1}{\mathcal{M}_0} \sum_{i=1}^2 I_i u_{i0} x_i(0), \quad B = \dot{q}_0(0) = \frac{1}{\mathcal{M}_0} \sum_{i=1}^2 I_i u_{i0} \dot{x}_i(0).$$

В данном случае  $u_{i0} = 1$  ( $i = 1, 2$ ),  $\mathcal{M}_0 = I_1 + I_2$ .

Координата  $q_1$  определяется, как и обычно, выражением (12.14) с постоянными по формулам (12.15).

Таким образом, наличие подвижности системы как жесткой не вносит существенных изменений в расчет ее свободных колебаний. Трудности возникают только при попытке определить формы и частоты собственных колебаний с использованием уравнений движения в обратной форме. Дело в том, что к подвижной системе нельзя приложить единичные силы для определения коэффициентов влияния. Один из путей преодоления трудностей показан на следующем примере.

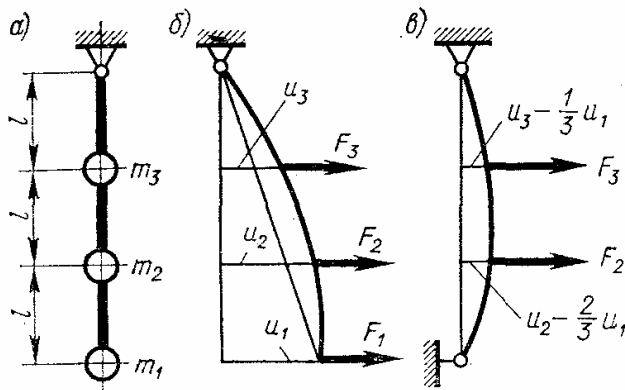


Рис. 13.5

**Пример.** Определить частоты и формы собственных поперечных колебаний стержня с тремя одинаковыми массами  $m_1 = m_2 = m_3 = m$ , шарнирно закрепленного на одном конце (рис. 13.5, а). Силы тяжести не учитывать.

Система имеет три степени свободы, одна из которых соответствует вращению балки как жесткой вокруг шарнира. Для нахождения двух остальных колебательных форм рассмотрим систему в положении амплитудных отклонений (рис. 13.5, б).

В этом положении к балке приложены силы инерции масс:

$$F_1 = mp^2 u_1, \quad F_2 = mp^2 u_2, \quad F_3 = mp^2 u_3.$$

Сумма моментов этих сил относительно шарнира должна равняться нулю:

$$p^2 ml (3u_1 + 2u_2 + u_3) = 0. \quad (13.3)$$

Теперь надо связать перемещения  $u_i$  с силами  $F_i$ . Для этого соединим прямой линией концы стержня. Тогда прогибы стержня под силами  $F_2$  и  $F_3$  ( $u_2 = 2/3 u_1$  и  $u_3 = 1/3 u_1$ ) можно рассматривать как прогибы двухопорной балки на рис. 13.5, в. (Реакция нижней опоры равна  $F_1$ .)

Имеем:

$$\begin{aligned} u_2 - 2/3 u_1 &= F_2 \delta_{22} + F_3 \delta_{23}, \\ u_3 - 1/3 u_1 &= F_2 \delta_{32} + F_3 \delta_{33}. \end{aligned} \quad (13.4)$$

Коэффициенты влияния находим, прикладывая единичные силы по направлению  $F_2$  и  $F_3$  (к балке с дополнительной опорой):

$$\delta_{22} = \delta_{33} = 4/9 l^3/(EJ), \quad \delta_{23} = \delta_{32} = 7/18 l^3/(EJ).$$

Уравнения (13.4) приведем к такому виду:

$$\begin{aligned} 3u_2 - 2u_1 &= z(8u_2 + 7u_3), \\ 3u_3 - u_1 &= z(7u_2 + 8u_3), \quad |z = mp^2 l^3/(6EJ)|. \end{aligned} \quad (13.5)$$

Сюда следует присоединить уравнение (13.3). Приравняв нулю определитель системы, получаем

$$\begin{vmatrix} 2 & 8z-3 & 7z \\ 1 & 7z & 8z-3 \\ 3z & 2z & z \end{vmatrix} = 0,$$

или

$$z(15z^2 - 52z + 14) = 0.$$

Отсюда  $z_0 = 0$ ,  $z_1 = 0,2941$ ,  $z_2 = 3,172$ .

Соответствующие частоты собственных колебаний:

$$p_0 = 0, \quad p_1 = 1,33 \sqrt{EJ/(ml^3)}, \quad p_2 = 4,36 \sqrt{EJ/(ml^3)}.$$

Определим формы колебаний. Решая уравнения (13.5) относительно  $u_2$ ,  $u_3$ , получаем:

$$u_2 = \frac{2-3z}{(3-z)(1-5z)} u_1, \quad u_3 = \frac{1+2z}{(3-z)(1-5z)} u_1.$$

При  $z = 0$   $u_{20} = 2/3 u_{10}$ ,  $u_{30} = 1/3 u_{10}$ , что, конечно, соответствует движению жесткого стержня.

$$\text{При } z = z_1 \quad u_{21} = -0,874 u_{11}, \quad u_{31} = -1,24 u_{11}.$$

$$\text{При } z = z_2 \quad u_{22} = -2,94 u_{12}, \quad u_{32} = 2,87 u_{12}.$$

Формы движения системы показаны на рис. 13.6. Легко убедиться, что условия ортогональности этих форм выполняются.

Рассмотрим более общий прием расчета системы, обладающей подвижностью, с использованием уравнений в обратной форме. Сконструируем модифицированную колебательную систему, отличающуюся от заданной наличием дополнительных жесткостей. Введем эти жесткости таким образом, чтобы формы собственных колебаний модифицированной и заданной систем совпадали, а квадраты собственных частот отличались на заданную величину. Для достижения этой цели матрица дополнительных жесткостей должна быть пропорциональна матрице масс системы.

Собственные частоты  $p_k$  и собственные векторы  $u_k$  заданной системы

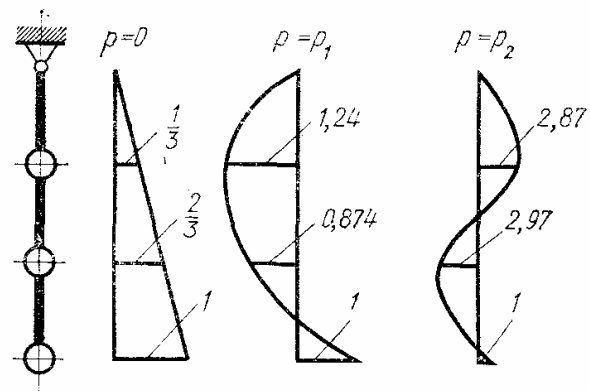


Рис. 13.6

тождественно удовлетворяют уравнению (12.27)

$$(p_k^2 m - r) u_k = 0,$$

где  $r$  — матрица жесткости заданной системы.

Пусть модифицированная система имеет матрицу жесткости

$$r_* = r + \lambda^2 m,$$

где  $\lambda^2$  — заданная величина.

Тогда собственные частоты  $p_*$  и собственные векторы  $u_*$  модифицированной системы определяются уравнением

$$(p_*^2 m - r_*) u_* = 0. \quad (13.6)$$

Уравнение (13.6) удовлетворяется тождественно при

$$u_* = u_k, \quad p_*^2 = p_k^2 + \lambda^2. \quad (13.7)$$

Таким образом, при присоединении к системе дополнительных жесткостей, пропорциональных массам (коэффициент пропорциональности  $\lambda$ ), формы ее колебаний остаются неизменными, а квадраты частот изменяются на величину  $\lambda^2$ . Этот прием называется *сдвигом спектра частот системы*.

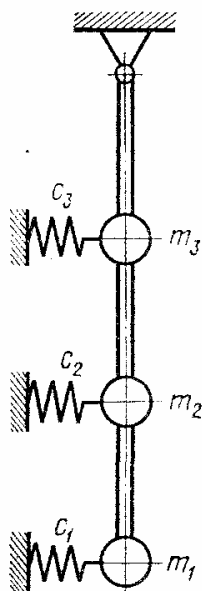


Рис. 13.7

Применим изложенный прием для расчета системы, показанной на рис. 13.5. Модифицированную систему получим, присоединив к каждому из грузов пружину с жесткостью  $c_i$  ( $i=1, 2, 3$ ), пропорциональной его массе (рис. 13.7):

$$c_i = \lambda^2 m_i.$$

В данном случае все массы одинаковы и принято  $c_i = c = EJ/l^3$ , что соответствует  $\lambda^2 = EJ/(ml^3)$ .

Теперь можно обычным способом найти коэффициенты влияния для модифицированной системы (которая является дважды статически неопределимой):

$$\delta_{11} = 209l^3/(277EJ); \quad \delta_{12} = \delta_{21} = 90l^3/(277EJ);$$

$$\delta_{13} = \delta_{31} = 24l^3/(277EJ); \quad \delta_{22} = 109l^3/(277EJ);$$

$$\delta_{23} = \delta_{32} = 66l^3/(277EJ); \quad \delta_{33} = 73l^3/(277EJ).$$

Далее, составляя характеристическое уравнение в форме (11.8), приведем его к виду

$$0,01805z^3 - 0,4296z^2 + 1,4115z - 1 = 0,$$

где  $z = p_*^2 ml^3/(EJ)$ .

Решая это уравнение, находим квадраты частот модифицированной системы:

$$p_{1*}^2 = EJ/(ml^3), \quad p_{2*}^2 = 2,765EJ/(ml^3), \quad p_{3*}^2 = 20,35EJ/(ml^3)$$

и затем квадраты частот заданной системы:

$$p_k^2 = p_{k*}^2 - \lambda^2,$$

которые совпадают с найденными ранее. Совпадают и формы колебаний.

**Случай кратных частот.** Если частотное уравнение

$$\Delta(p^2) = 0$$



имеет кратный корень

$$p_k = p_{k+1},$$

то после подстановки этого значения  $p$  в систему исходных уравнений (11.3) относительно амплитуд  $u_i$  эта система содержит лишь  $n - 2$  независимых уравнений.

Таким образом, если задать одну из амплитуд (например,  $u_1$ ), то для других  $n - 1$  амплитуд, характеризующих форму колебаний, получается неопределенная система. Поэтому, чтобы определить форму колебаний, соответствующую частоте  $p_k$ , следует задать произвольно две амплитуды (например,  $u_1$  и  $u_2$ ).

Задавая две разные формы комбинаций:  $u_{1k}, u_{2k}$  и  $u_{1(k+1)}, u_{2(k+1)}$  получаем две разные формы колебаний ( $u_{ik}, u_{1(k+1)}$ ), соответствующие кратной частоте. Полученные формы колебаний не будут, вообще говоря, ортогональными.

Так как ортогональность форм собственных колебаний позволяет существенно упростить расчеты, целесообразно добиться ее искусственно. С этой целью одну из форм (например,  $u_{ik}$ ) определяют при произвольном задании двух амплитуд ( $u_{1k}$  и  $u_{2k}$ ), а вторую  $u_{1(k+1)}$  находят из  $n - 2$  уравнений (11.3) и уравнения

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{ij} u_{ik} u_{j(k+1)} = 0, \quad (13.8)$$

обеспечивающего ортогональность  $k$ -й и  $(k + 1)$ -й форм. При этом, конечно, задают какое-либо численное значение одной из амплитуд (например,  $u_{1(k+1)}$ ), определяющее масштаб рассчитываемой формы. В процессе свободных колебаний системы две формы ее колебаний, соответствующие данной частоте, возникают одновременно.

Простейшим примером системы с двумя одинаковыми частотами является круглый стержень с грузом на конце (рис. 13.8). За формы собственных колебаний могут быть приняты смещения груза в двух любых перпендикулярных оси стержня направлениях.

Для того чтобы принятые формы колебаний были ортогональными, целесообразно выбрать направления  $x_1, x_2$  взаимно перпендикулярными (см. рис. 13.8). Тогда  $x_1$  и  $x_2$  будут главными координатами и при свободных колебаниях будут определяться независимыми уравнениями

$$x_1 = x_1(0) \cos pt + [\dot{x}_1(0)/p] \sin pt,$$

$$x_2 = x_2(0) \cos pt + [\dot{x}_2(0)/p] \sin pt.$$

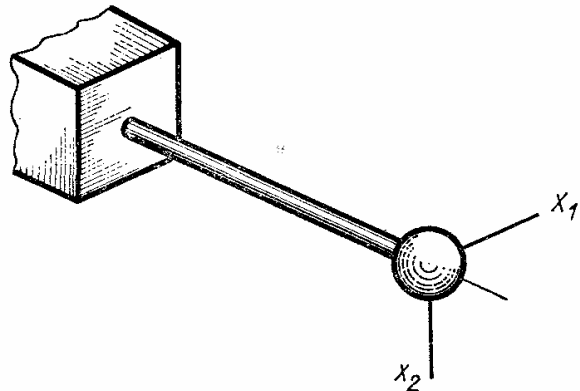


Рис. 13.8

Как видно из этих формул, центр груза описывает в процессе свободных колебаний эллипс.

Следует отметить, что кратные корни частотного уравнения встречаются практически редко. Значительно чаще приходится сталкиваться с ситуацией, когда две частоты близки друг к другу. В этом случае возникают трудности, связанные с тем, что система  $n - 1$  уравнений для определения форм колебаний оказывается плохо обусловленной (т. е. ее определитель близок к нулю). При этом не удастся с достаточной точностью определить формы колебаний, соответствующие близким частотам  $p_k$  и  $p_{k+1}$ .

Для преодоления этих трудностей следует из  $n - 1$  уравнений (11.3) определить лишь одну форму колебаний  $u_{ik}$ . Для определения  $u_{i(k+1)}$  следует воспользоваться лишь  $n - 2$  уравнениями системы (11.3) и дополнительно привлечь условие ортогональности форм  $u_{ik}$  и  $u_{i(k+1)}$ .

#### § 14. ПРИМЕРЫ РАСЧЕТА ЧАСТОТ И ФОРМ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ

**Пример 1.** Определить частоты и формы собственных крутильных колебаний вала с двумя одинаковыми дисками, имеющими одинаковые моменты инерции  $I_1 = I_2 = I$  (рис. 14.1, а). Также одинаковы и жесткости  $c$  двух участков вала.

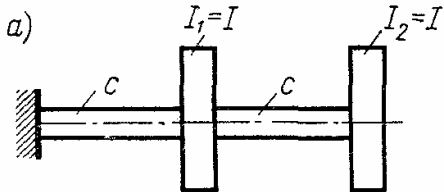


Рис. 14.1

Решение. Обозначая углы поворотов дисков соответственно  $x_1$  и  $x_2$  и записывая уравнения движения в прямой форме, получаем:

$$I_1 \ddot{x}_1 = -cx_1 - c(x_1 - x_2),$$

$$I_2 \ddot{x}_2 = c(x_1 - x_2).$$

Предположим, что

$$x_1 = u_1 \cos(pt + \varphi), \quad x_2 = u_2 \cos(pt + \varphi).$$

После подстановки этих значений найдем (с учетом  $I_1 = I_2 = I$ ):

$$(Ip^2 - 2c)u_1 + cu_2 = 0, \quad (14.1)$$

$$cu_1 + (Ip^2 - c)u_2 = 0.$$

Приравняв нулю определитель этой системы, приходим к уравнению

$$z^2 - 3z + 1 = 0 \quad (z = Ip^2/c).$$

Отсюда

$$z_1 = (3 - \sqrt{5})/2 = 0,382, \quad z_2 = (3 + \sqrt{5})/2 = 2,618.$$

Соответственно собственные частоты

$$p_1 = \sqrt{z_1} \sqrt{c/I} = 0,618 \sqrt{c/I}, \quad p_2 = \sqrt{z_2} \sqrt{c/I} = 1,618 \sqrt{c/I}.$$

Соотношение между отклонениями  $u_1, u_2$  находим из любого уравнения (14.1). Из первого уравнения

$$u_2 = [(2c - Ip^2)/c] u_1 = (2 - z) u_1.$$

Подставляя сюда поочередно  $z_1$  и  $z_2$ , находим:

$$u_{21} = 1,618u_{11}, \quad u_{22} = -0,618u_{12}.$$

Приняв  $u_{11} = 1$ ,  $u_{12} = 1$ , получим формы колебаний, изображенные на рис. 14.1, б, в.

Проверим ортогональность этих форм:

$$I_1 u_{11} u_{12} + I_2 u_{21} u_{22} = I [1 \cdot 1 + 1,618(-0,618)] = 0.$$

(Несоблюдение условия ортогональности свидетельствовало бы об ошибке в расчете.)

**Пример 2.** Определить частоты и формы собственных колебаний балки постоянного сечения с двумя массами:  $m_1 = m$ ,  $m_2 = 2m$ , (рис. 14.2, а).

**Решение.** Перемножая эпюры моментов методом Верещагина (рис. 14.2, б, в), получаем значения коэффициентов влияния:

$$\delta_{11} = \delta_{22} = 3l^3 / (256EJ),$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = 7l^3 / (768EJ).$$

Уравнения (11.5) для амплитудных прогибов  $u_1$ ,  $u_2$  под массами имеют следующий вид:

$$u_1 = mp^2 l^3 (9u_1 + 2 \cdot 7u_2) / (768EJ), \quad (14.2)$$

$$u_2 = mp^2 l^3 (7u_1 + 2 \cdot 9u_2) / (768EJ).$$

Приравняв нулю определитель этих уравнений, находим

$$\begin{vmatrix} 9z - 1 & 14z \\ 7z & 18z - 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \left( z = p^2 \frac{ml^3}{768EJ} \right).$$

Отсюда  $z_1 = 41,031 \cdot 10^{-3}$ ,  $z_2 = 380,78 \cdot 10^{-3}$  и соответствующие собственные частоты:

$$p_1 = \sqrt{768z_1 EJ / (ml^3)} = 5,6117 \sqrt{EJ / (ml^3)},$$

$$p_2 = \sqrt{768z_2 EJ / (ml^3)} = 17,101 \sqrt{EJ / (ml^3)}.$$

Находим соотношение между амплитудами из первого равенства (14.2)

$$u_2 / u_1 = (1 - 9z) / (14z).$$

Принимая  $u_{11} = u_{12} = 1$ , находим

$$u_{21} = \frac{1 - 9 \cdot 41,031 \cdot 10^{-3}}{14 \cdot 41,031 \cdot 10^{-3}} = 1,098,$$

$$u_{22} = \frac{1 - 9 \cdot 380,78 \cdot 10^{-3}}{14 \cdot 380,78 \cdot 10^{-3}} = -0,4553.$$

Формы колебаний показаны на рис. 14.3.

Проверяем их ортогональность:

$$m u_{11} u_{12} + 2m u_{21} u_{22} = m [1 \cdot 1 + 2 \cdot 1,098(-0,4553)] = 0.$$

**Пример 3.** На упругой балке длины  $l$  закреплен жесткий груз массой

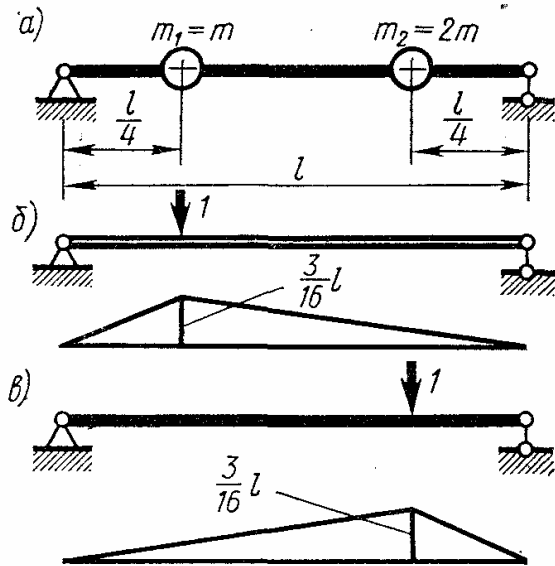


Рис. 14.2

$m$ , центр тяжести которого расположен в точке  $C$  (рис. 14.4, а). Момент инерции груза относительно перпендикулярной плоскости чертежа оси, проходящей через точку  $C$ , равен  $I$  (для определенности примем  $I = ml^2/8$ ). Определить частоты и формы собственных колебаний.

Решение. Система имеет две степени свободы, соответствующие верти-

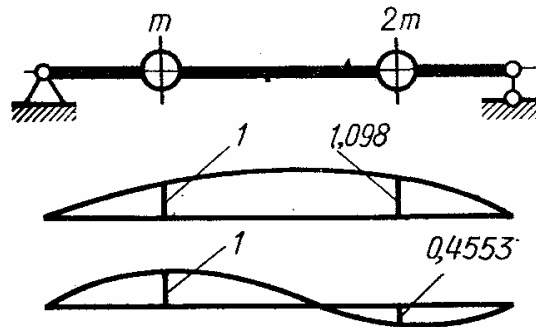


Рис. 14.3

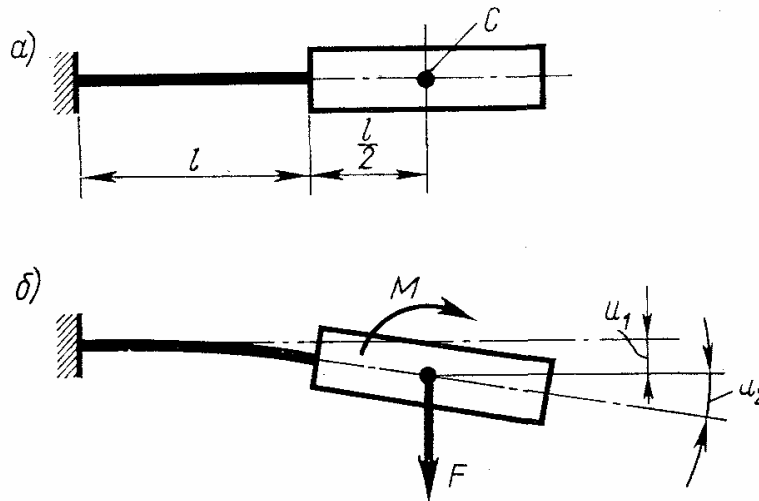


Рис. 14.4

кальному перемещению точки  $C$  и повороту груза. Обозначим  $u_1$  и  $u_2$  — амплитудные значения перемещений (рис. 14.4, б).

Инерционная сила и момент сил инерции составляют:

$$F = p^2 m u_1, \quad M = p^2 I u_2.$$

Уравнения динамического равновесия (в обратной форме) имеют такой вид:

$$u_1 = F \delta_{11} + M \delta_{12}, \quad u_2 = F \delta_{21} + M \delta_{22}. \quad (14.3)$$

Коэффициенты влияния находим, перемножая эпюры, соответствующие единичным нагрузкам (рис. 14.5):

$$\delta_{11} = 13l^3/(12EJ), \quad \delta_{12} = \delta_{21} = l^2/(EJ), \quad \delta_{22} = l/(EJ).$$

Подстановка этих значений в равенства (14.3) приводит к уравнениям

$$zu_1 = 13u_1 + 12\vartheta u_2, \quad zu_2 = 12u_1/l + 12\vartheta u_2, \quad (14.4)$$

где для сокращения обозначено

$$z = 12EJ/(ml^3 p^2); \quad \vartheta = I/(ml^2)$$

(по условиям задачи  $\phi = 1/8$ ).

Частотное уравнение [равенство нулю определителя системы (14.4)] получает вид

$$z^2 - z(13 + 12\theta) + 12\theta = 0,$$

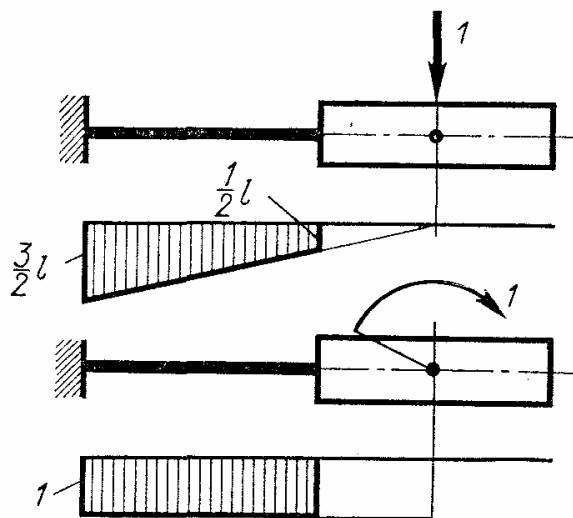


Рис. 14.5

или при  $\phi = 1/8$

$$z^2 - (29/2)z + 3/2 = 0,$$

откуда

$$z_1 = 14,395, \quad z_2 = 0,1042.$$

Соответствующие собственные частоты:

$$p_1 = \sqrt{12EJ/(ml^3z_1)} = 0,914 \sqrt{EJ/(ml^3)},$$

$$p_2 = \sqrt{12EJ/(ml^3z_2)} = 10,72 \sqrt{EJ/(ml^3)}.$$

Формы колебаний характеризуются соотношением

$$u_2 = u_1(z - 13)/(12\theta l).$$

При  $z = z_1$   $u_{21} = 0,93u_{11}/l$ ,  
при  $z = z_2$   $u_{22} = -8,60u_{12}/l$ .

Формы колебаний показаны на рис. 14.6.

Условие ортогональности в данном случае имеет вид

$$mu_{11}u_{12} + Iu_{21}u_{22} = m \cdot 1 \cdot 1 + \\ + (ml^2/8)(0,93/l)(-8,60/l) = 0.$$

**Пример 4.** Определить частоты и формы собственных колебаний жесткого груза на упругой балке рис. 14.7,а. Масса груза  $m$ , момент инерции относительно центральной оси, перпендикулярной плоскости чертежа,  $I(I = ml^2/8)$ .

**Решение.** В качестве координат, определяющих положение системы, примем вертикальное перемещение  $x_1$  точки  $A$  и угол поворота  $x_2$  груза относительно этой точки (рис. 14.7,б). Так как точка  $A$  не совпадает с центром массы груза, матрица масс системы в данном случае не диагональная.

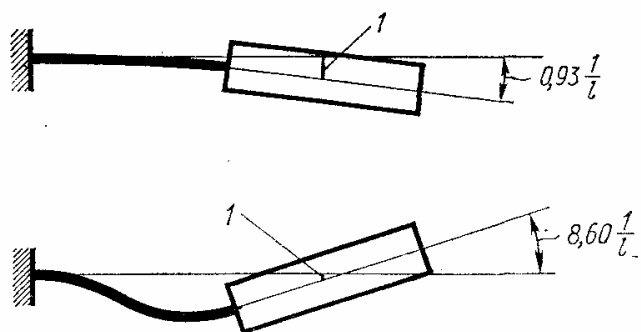


Рис. 14.6

Кинетическая энергия груза составляет

$$T = \frac{1}{2} m [(\dot{x}_1 + \dot{x}_2 l/8)^2 + (\dot{x}_2 l/2)^2] + \frac{1}{2} I \dot{x}_2^2 =$$

$$= \frac{1}{2} \left[ m \dot{x}_1^2 + 2(m l/8) \dot{x}_1 \dot{x}_2 + (I + 17 m l^2/64) \dot{x}_2^2 \right].$$

Отсюда следует, что матрица массы имеет вид

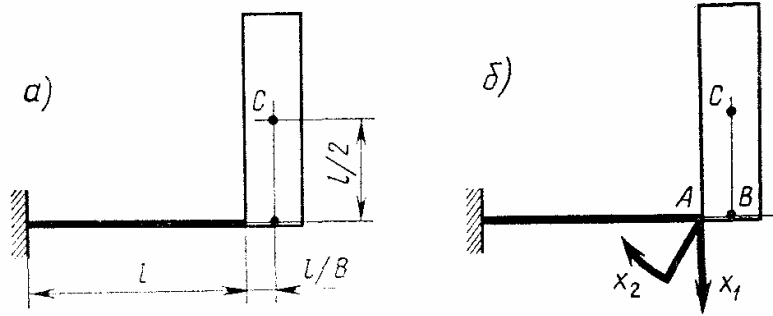


Рис. 14.7

$$m = \begin{pmatrix} m & ml/8 \\ ml/8 & I_A \end{pmatrix},$$

где  $I_A = I + 17 m l^2/64 = 25 m l^2/64$ .

Коэффициенты податливости найдем, приложив в точке A единичную силу по направлению  $x_1$  и единичный момент по направлению  $x_2$ :

$$\delta_{11} = l^3/(3EJ), \quad \delta_{12} = \delta_{21} = l^2/(2EJ), \quad \delta_{22} = l/(EJ).$$

Следовательно, матрица податливости имеет вид

$$\delta = \frac{l}{6EJ} \begin{pmatrix} 2l^2 & 3l \\ 3l & 6 \end{pmatrix}.$$

Запишем уравнения, определяющие амплитуды, в матричной форме (12.28). Вычислим

$$\delta m = \frac{ml}{384EJ} \begin{pmatrix} 2l^2 & 3l \\ 3l & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 64 & 8l \\ 8l & 25l^2 \end{pmatrix} = \frac{ml^3}{384EJ} \begin{pmatrix} 152 & 91l \\ 240/l & 174 \end{pmatrix}.$$

Уравнения (12.28) получают вид

$$(152 - z) u_1 + 91 l u_2 = 0,$$

$$240 u_1/l + (174 - z) u_2 = 0,$$

$$\text{где } z = 384EJ/(\rho^2 m l^3).$$

Приравняем нулю определитель этих уравнений:

$$z^2 - 326z + 4608 = 0.$$

Отсюда  $z_1 = 311,2$ ;  $z_2 = 14,81$  и соответствующие частоты:

$$p_1 = \sqrt{\frac{384EJ}{z_1 m l^3}} = 1,11 \sqrt{\frac{EJ}{m l^3}}, \quad p_2 = \sqrt{\frac{384EJ}{z_2 m l^3}} = 5,09 \sqrt{\frac{EJ}{m l^3}}.$$

Находим формы колебаний. При первой форме

$$u_{21} = u_{11} (z_1 - 152)/(91l) = 1,749 u_{11}/l,$$

при второй форме

$$u_{22} = u_{12}(z_2 - 152)/(91l) = -1,508u_{12}/l.$$

Принимая  $u_{11} = u_{12} = 1$ , получаем  $u_{21} = 1,749/l$ ,  $u_{22} = -1,508/l$ .  
Для проверки их ортогональности следует вычислить

$$u_1^T m u_2 = \frac{m}{64} \begin{pmatrix} 1 & 1,749/l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 64 & 8l \\ 8l & 25l^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1,508/l \end{pmatrix} = 0.$$

**З а м е ч а н и е.** В данной задаче, как и в предыдущих, можно было бы получить диагональную матрицу массы. Для этого следовало бы выбрать в качестве координат вертикальное перемещение точки  $B$  (рис. 14.7,б) и поворот груза относительно этой точки.

## § 15. ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМЫ БЕЗ ТРЕНИЯ

**Метод главных координат.** При возмущающих силах, произвольным образом зависящих от времени, непосредственное аналитическое решение неоднородных дифференциальных уравнений движения системы становится затруднительным. Существенное упрощение расчета достигается путем введения главных координат. При этом физические координаты  $x_i(t)$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) связаны с главными  $q_k(t)$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) зависимостями (12.6)

$$x_i = \sum_{k=1}^n q_k u_{ik}, \quad (15.1)$$

где  $u_{ik}$  — амплитуда смещения  $x_i$  при  $k$ -й собственной форме.

Обратная зависимость имеет вид (12.7)

$$q_k = \left[ \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{ij} u_{jk} x_i \right] / \mathcal{M}_k, \quad (15.2)$$

$$\mathcal{M}_k = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{ij} u_{jk} u_{ik},$$

или в частном случае диагональной матрицы масс

$$q_k = \left[ \sum_{i=1}^n m_i u_{ik} x_i \right] / \mathcal{M}_k, \quad \mathcal{M}_k = \sum_{i=1}^n m_i u_{ik}^2. \quad (15.3)$$

При этом каждая из главных координат определяется независимым дифференциальным уравнением

$$\ddot{q}_k + p_k^2 q_k = Q_k / \mathcal{M}_k, \quad (15.4)$$

где  $Q_k = \sum_{i=1}^n P_i u_{ik}$  — обобщенная сила, соответствующая координате  $q_k$ .

Так как уравнение (15.4) не отличается по форме от уравнения вынужденных колебаний линейной системы с одной степенью свободы, при его решении можно использовать методы, изложенные в гл. I. При этом следует иметь в виду, что начальные условия для главных координат  $q_k$  выражаются через начальные условия для физических координат с помощью зависимостей (15.2) или (15.3).

**Пример.** К грузу  $m_1$  балки, изображенной на рис. 15.1, внезапно приложена сила  $P(t) = P_0$ , сохраняющая в дальнейшем постоянную величину. Определить законы движения грузов и изгибающие моменты в балке.

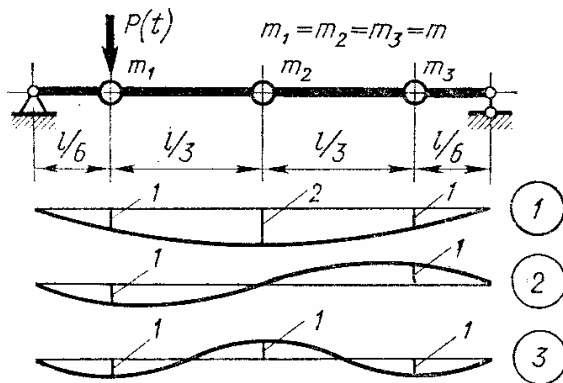


Рис. 15.1

Решение. Выше (см. с. 104) определены частоты и формы собственных колебаний системы:

$$p_1 = 5,693 \sqrt{EJ/(ml^3)},$$

$$p_2 = 22,045 \sqrt{EJ/(ml^3)},$$

$$p_3 = 36 \sqrt{EJ/(ml^3)}.$$

Формы колебаний воспроизведены на рис. 15.1.

Определяем обобщенные массы, соответствующие собственным формам:

$$\mathcal{M}_k = \sum_{i=1}^3 m_i u_{ik}^2, \quad \mathcal{M}_1 = m(1^2 + 2^2 + 1^2) = 6m,$$

$$\mathcal{M}_2 = m(1^2 + 0 + 1^2) = 2m, \quad \mathcal{M}_3 = m(1^2 + 1^2 + 1^2) = 3m.$$

Обобщенные силы для всех форм колебаний одинаковы и равны  $P_0$  (так как прогиб в точке приложения силы для всех форм равен единице).

Таким образом, уравнения для главных координат таковы:

$$\ddot{q}_1 + p_1^2 q_1 = P_0/(6m), \quad \ddot{q}_2 + p_2^2 q_2 = P_0/(2m), \quad \ddot{q}_3 + p_3^2 q_3 = P_0/(3m).$$

Решения этих уравнений, соответствующие нулевым начальным условиям\*:

$$q_1 = \frac{P_0}{6mp_1^2} (1 - \cos p_1 t), \quad q_2 = \frac{P_0}{2mp_2^2} (1 - \cos p_2 t), \quad q_3 = \frac{P_0}{3mp_3^2} (1 - \cos p_3 t).$$

Теперь можно подсчитать и перемещения грузов:

$$x_i = \sum_{k=1}^3 q_k u_{ik}.$$

\* Из формул (15.2) видно, что если при  $t = 0$  все физические координаты  $x_i$  и скорости  $\dot{x}_i$  равны нулю, то также равны нулю и главные координаты  $q_k$  и скорости  $\dot{q}_k$ .



Производя подстановки, получаем:

$$x_1 = q_1 + q_2 + q_3 = [P_0 l^3 / (3888 EJ)] (25 - 20 \cos p_1 t - 4 \cos p_2 t - \cos p_3 t),$$

$$x_2 = 2q_1 - q_3 = [P_0 l^3 / (3888 EJ)] (39 - 40 \cos p_1 t + \cos p_3 t),$$

$$x_3 = q_1 - q_2 + q_3 = [P_0 l^3 / (3888 EJ)] (17 - 20 \cos p_1 t + 4 \cos p_2 t - \cos p_3 t).$$

Для вычисления изгибающих моментов построим сначала эпюры моментов, соответствующие формам собственных колебаний. Эти эпюры строятся как эпюры моментов от амплитудных инерционных сил  $F_{ik} = p_k^2 m_i u_{ik}$ :

$$F_{11} = F_{31} = 32,4 EJ / l^3, \quad F_{21} = 64,8 EJ / l^3,$$

$$F_{12} = -F_{32} = 486 EJ / l^3, \quad F_{22} = 0,$$

$$F_{13} = -F_{23} = F_{33} = 1296 EJ / l^3.$$

Эпюры показаны на рис. 15.2. Легко проверить их ортогональность. Теперь изгибающий момент в любом сечении можно найти, суммируя моменты, соответствующие главным координатам:

$$M(z, t) = \sum_{k=1}^3 M_k(z) q_k(t).$$

В частности, в точке приложения силы  $P_0$

$$\begin{aligned} M &= (10,8 q_1 + 54 q_2 + 108 q_3) EJ / l^2 = \\ &= (P_0 l / 36) (5 - 2 \cos p_1 t - \\ &\quad - 2 \cos p_2 t - \cos p_3 t). \end{aligned}$$

В сечении под средним грузом

$$M = (P_0 l / 36) (3 - 4 \cos p_1 t + \cos p_3 t).$$

Аналогично, в сечении под третьим грузом

$$M = (P_0 l / 36) (1 - 2 \cos p_1 t + 2 \cos p_2 t - \cos p_3 t).$$

Как видно из сравнения формул для прогибов и изгибающих моментов, колебания с высшими частотами  $p_2$  и  $p_3$  сравнительно мало сказываются на изменении перемещений; в изменении моментов роль высокочастотных колебаний больше.

**Случай приложения возмущающей силы в безмассовой точке.** В результате схематизации реальной механической системы, как имеющей  $n$  степеней свободы, может оказаться, что в схематизированной системе точка приложения возмущающей силы не совпадает с точкой размещения масс. Простейший пример такой системы показан на рис. 15.3,а. Конечно, непосредственный расчет этой системы не вызывает никаких затруднений. Но возникает вопрос о применимости для расчета метода главных координат. Единственная форма собственных колебаний системы, показанная на рис. 15.3,б, соответствует нагружению балки силой инерции груза. Если прогиб под грузом принять равным единице, то прогиб в точке приложения силы  $u_P = \delta_{1P} / \delta_{11}$ . Главная

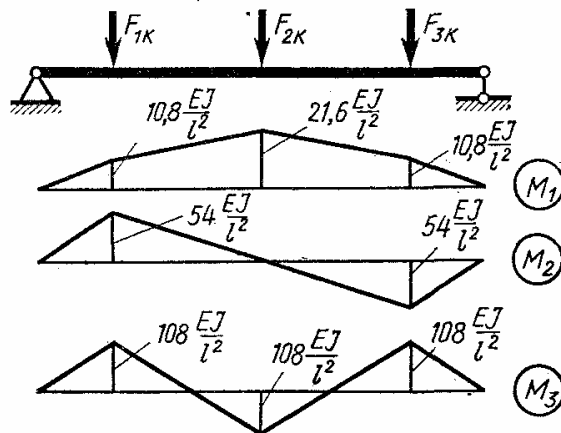


Рис. 15.2

координата  $q$  (равная в данном случае перемещению  $x$  груза) определяется уравнением

$$\ddot{q} + p^2 q = P(t) u_p / m, \quad (15.5)$$

где

$$p^2 = 1/(m\delta_{11}).$$

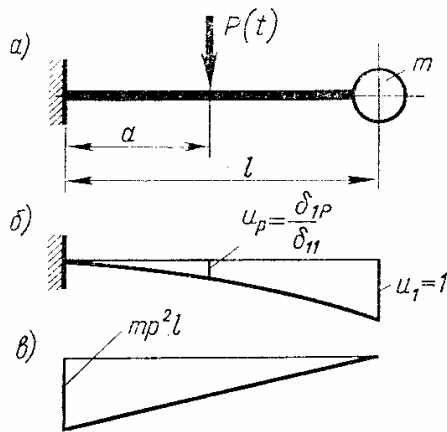


Рис. 15.3

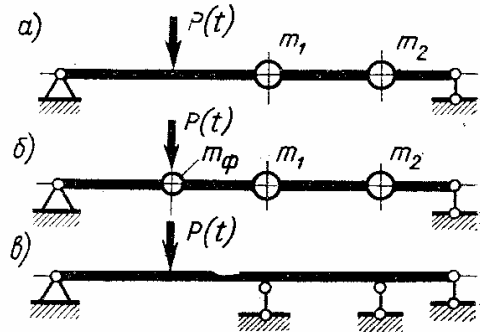


Рис. 15.4

Если бы мы непосредственно составляли уравнение движения груза  $m$ , то получили бы точно такой же результат:

$$m\ddot{x} + (1/\delta_{11}) x = P(t) \delta_{1P}.$$

Таким образом, при определении перемещений груза метод главных координат приводит к правильному решению.

Однако эпюра изгибающих моментов при вынужденных колебаниях, имеющая излом в точке приложения силы  $P$ , не может быть получена умножением треугольной эпюры (рис. 15.3, в), соответствующей форме собственных колебаний, на координату  $q$ .

Рассмотрим этот вопрос в более общей форме. Пусть сила приложена к безмассовой точке системы с  $n$  степенями свободы (на рис. 15.4, а с двумя). Введем фиктивную массу  $m_\phi$  в точку приложения силы (рис. 15.4, б). Теперь система имеет  $n + 1$  степень свободы и к ее расчету можно полностью применить метод главных координат. Таких координат, конечно, тоже  $n + 1$ , и они соответствуют  $n + 1$  формам собственных колебаний. Все эти формы взаимно ортогональны.

Пусть масса  $m_\phi$  стремится к нулю. При этом  $n$  форм собственных колебаний будут приближаться к формам заданной  $n$ -массовой системы. Остается выяснить, что будет с  $(n + 1)$ -й формой. Так как она остается при  $m_\phi \rightarrow 0$  ортогональной ко всем без исключения формам собственных колебаний заданной системы, то смещения всех масс при этой форме должны стремиться к нулю. Соответствующая этой форме собственная частота стремится к бесконечности, и поэтому прогибы в точке, где размещена масса  $m_\phi$ , остаются конечными. Итак,  $(n + 1)$ -я форма колебаний при  $m_\phi \rightarrow 0$  вырождается в форму статического равновесия системы, все массы которой закреплены, под действием силы  $P(t)$  (рис. 15.4, в).

Таким образом, чтобы найти внутренние силовые факторы в системе, нагрузка на которую приложена в безмассовой точке, нужно к силовым факторам, найденным методом главных координат, добавить силовые факторы, вызываемые статическим действием силы на систему с закрепленными массами. То же относится и к перемещениям точек, не совпадающих с местами крепления масс.

Проверим правильность вывода на примере задачи (см. рис. 15.3).

Согласно указанному выше правилу, эпюра моментов балки складывается из умноженной на  $q$  эпюры, соответствующей форме собственных колебаний (см. рис. 15.3, в), и эпюры, соответствующей нагружению силой  $P(t)$  балки с закрепленной массой (рис. 15.5).

Таким образом, например, суммарный момент в заделке составит  $M_0 = qmp^2l + P(t)(a - l\delta_{1P}/\delta_{11})$  (сжатое волокно внизу).

Заменим в соответствии с уравнением (15.5)

$$mp^2q = P(t)\delta_{1P}/\delta_{11} - m\ddot{q}.$$

Тогда

$$M_0 = P(t)a - m\ddot{q}l. \quad (15.6)$$

Так как  $\ddot{q} = \ddot{x}$ , то второе слагаемое в формуле (15.6) представляет собой момент силы инерции груза и справедливость равенства (15.6) очевидна.

Можно проверить, что и для момента в точке приложения силы  $P(t)$  таким способом получается правильное значение

$$M_1 = -m\ddot{q}(l - a).$$

Конечно, использование указанного приема не является обязательным. Можно, определив методом главных координат движение масс системы, приложить их силы инерции и затем определять внутренние силовые факторы, вызванные действием сил инерции и возмущающих сил.

**Гармонические возмущающие силы.** Если на систему действуют гармонические возмущающие силы частотой  $\omega$  с различными фазами

$$P_i(t) = P_i \cos(\omega t - \varphi_i), \quad (15.7)$$

то их можно представить как суммы:

$$\begin{aligned} P_i(t) &= P_{ic} \cos \omega t + P_{is} \sin \omega t, \\ P_{ic} &= P_i \cos \varphi_i, \quad P_{is} = P_i \sin \varphi_i. \end{aligned} \quad (15.8)$$

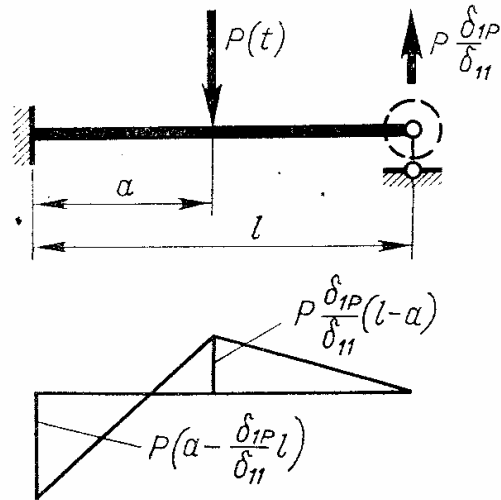


Рис. 15.5

Ввиду линейности системы ее движение представляет собой сумму движений, вызываемых силами, пропорциональными  $\cos \omega t$  и  $\sin \omega t$  в отдельности. Рассмотрим движение, вызываемое силами, пропорциональными  $\cos \omega t$ . В этом случае обобщенная сила, соответствующая координате  $q_k$ , также пропорциональна  $\cos \omega t$ :

$$Q_k^{(c)} = \sum_{i=1}^n P_{ic} u_{ik} \cos \omega t.$$

Уравнение

$$\ddot{q}_k + p_k^2 q_k = \left[ \sum_{i=1}^n P_{ic} u_{ik} / \mathcal{M}_k \right] \cos \omega t$$

имеет стационарное решение

$$q_k = \frac{\sum_{i=1}^n P_{ic} u_{ik}}{\mathcal{M}_k p_k^2} \frac{1}{1 - \omega^2 / p_k^2} \cos \omega t. \quad (15.9)$$

Соответственно движение любой точки системы под действием сил, пропорциональных  $\cos \omega t$ , определяется выражением

$$x_i^{(c)} = \sum_{k=1}^n q_k u_{ik} = \cos \omega t \sum_{k=1}^n \frac{\sum_{j=1}^n P_{jc} u_{jk}}{(1 - \omega^2 / p_k^2) \mathcal{M}_k p_k^2} u_{ik} \quad (i=1, 2, \dots, n). \quad (15.10)$$

Аналогично, силы, пропорциональные  $\sin \omega t$ , вызовут перемещения

$$x_i^{(s)} = \sin \omega t \sum_{k=1}^n \frac{\sum_{j=1}^n P_{js} u_{jk}}{(1 - \omega^2 / p_k^2) \mathcal{M}_k p_k^2} u_{ik}, \quad (15.11)$$

и полное движение выражается суммой

$$x_i = x_i^{(c)} + x_i^{(s)}. \quad (15.12)$$

Полученные выражения показывают, что при гармоническом возмущении система колеблется с частотой возмущающей силы, а форма ее меняется в зависимости от частоты. Если частота возбуждения приближается к одной из собственных частот системы, величина соответствующих членов в выражениях (15.10), (15.11) неограниченно возрастает. Таким образом, резонанс возникает при совпадении частоты возмущения с любой из собственных частот системы\*. При резонансе на

---

\* Исключением являются те собственные частоты, при которых и числитель формул (15.10) и (15.11) обращается в нуль:  $\sum P_{ic} u_{ik} = 0$ , т. е. резонанс на частоте  $p_k$  не возникает, если возмущающие силы ортогональны к  $k$ -й форме колебаний.

частоте  $p_k$  форма вынужденных колебаний системы совпадает с  $k$ -й собственной формой [поскольку остальные слагаемые в рядах (15.10), (15.11) становятся пренебрежимо малыми по сравнению с резонирующими].

*Непосредственное решение.* При гармоническом возмущении метод главных координат не является наиболее экономичным способом решения задачи. Им целесообразно пользоваться только в том случае, если собственные частоты и формы колебаний уже известны. В противном случае быстрее ведет к цели непосредственное решение задачи. При действии гармонических возмущающих сил, пропорциональных, например,  $\cos \omega t$ , следует искать решение уравнений движения в форме

$$x_i = A_i \cos \omega t. \quad (15.13)$$

Подставляя эти значения  $x_i$  в уравнения движения (записанные в прямой или обратной форме), получают систему линейных неоднородных уравнений относительно  $A_i$ . Решение этой системы имеет вид

$$A_i = \Delta_i(\omega) / \Delta(\omega). \quad (15.14)$$

В знаменателе формулы (15.14) стоит определитель системы уравнений, в числителе — определитель,  $i$ -й столбец которого заменен столбцом свободных членов.

Так как частотное уравнение системы имеет вид  $\Delta(p) = 0$ , то корни знаменателя формулы (15.14) совпадают с собственными частотами системы.

**Динамическая податливость. Антирезонанс.** Рассмотрим случай, когда на систему с  $n$  степенями свободы действует одна гармоническая сила, приложенная в направлении перемещения  $x_i$ :

$$P = P_0 \cos \omega t.$$

Используем метод главных координат. Обобщенная сила, соответствующая  $k$ -й главной координате, составит

$$Q_k = P_0 u_{ik} \cos \omega t.$$

И соответствующее стационарное решение уравнения (15.4) таково:

$$q_k = P_0 \frac{u_{ik}}{\mathcal{M}_k(p_k^2 - \omega^2)} \cos \omega t.$$

Перемещение в точке приложения возмущающей силы

$$x_i = \sum_{k=1}^n q_k u_{ik} = P_0 \cos \omega t \sum_{k=1}^n \frac{u_{ik}^2}{\mathcal{M}_k(p_k^2 - \omega^2)}.$$

Отношение этого перемещения к действующей силе  $P_0 \cos \omega t$  называется *динамической податливостью системы*:

$$D_{ii}(\omega) = \frac{x_i}{P_0 \cos \omega t} = \sum_{k=1}^n \frac{u_{ik}^2}{\mathcal{M}_k(p_k^2 - \omega^2)}. \quad (15.15)$$

Рассмотрим характер зависимости динамической податливости  $D_{ii}$  от частоты возбуждения  $\omega$ . Как видно из формулы (15.15), функция  $D_{ii}(\omega)$  имеет конечное число разрывов при  $\omega = p_k$ , т. е. при частотах собственных колебаний системы. При этом, если

$$\omega = p_k - |\varepsilon|, \quad \varepsilon \rightarrow 0,$$

$$D_{ii} \rightarrow +\infty;$$

если

$$\omega = p_k + |\varepsilon|, \quad \varepsilon \rightarrow 0, \text{ то } D_{ii} \rightarrow -\infty.$$

Следовательно, зависимость  $D_{ii}(\omega)$  имеет вид, показанный на рис. 15.6, где она приведена для системы с тремя степенями свободы.

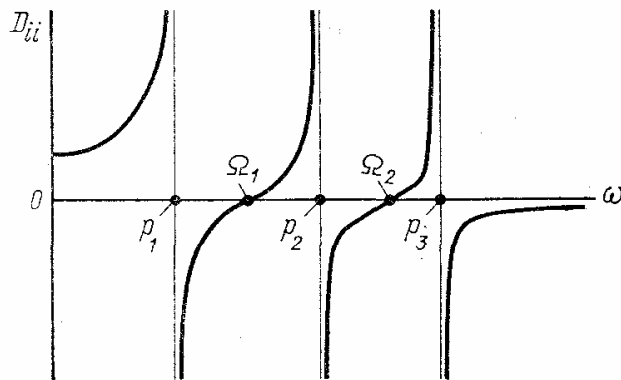


Рис. 15.6

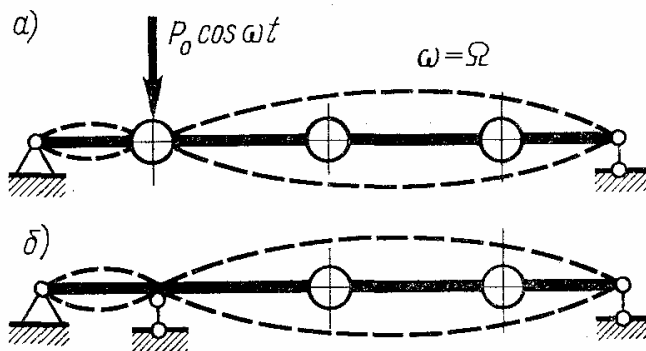


Рис. 15.7

Как видно из графика, имеются частоты ( $\Omega_1, \Omega_2$ ), при которых  $D_{ii}(\omega) = 0$  и, следовательно, точка приложения возмущающей силы неподвижна. (Конечно, все другие точки системы при этом колеблются с частотой  $\omega = \Omega$ .) Указанное явление называется *антирезонансом*, а частоты  $\Omega$  — *антирезонансными*. Для системы с  $n$  степенями свободы число антирезонансных частот равно  $n - 1$ .

Поясним физический смысл антирезонанса. Поскольку при антирезонансе точка приложения силы неподвижна (рис. 15.7, а), можно ее закрепить (рис. 15.7, б). Таким образом, мы обнаруживаем, что антирезонансные колебания — это свободные колебания системы с дополнительным

закреплением (в направлении  $x_i$ ). При этом возмущающая сила  $P_0 \cos \omega t$  оказывается равной реакции дополнительного закрепления. Следовательно, и антирезонансные частоты  $\Omega$  можно определять как частоты собственных колебаний системы с дополнительной связью.

Преобразуем формулу (15.15). Заметим, что после приведения к общему знаменателю слагаемых выражения (15.15) получим значение  $D_{ii}(\omega)$  как частное от деления многочлена  $(n - 1)$ -й степени относительно  $\omega^2$  на многочлен  $n$ -й степени. Корни числителя равны квадратам частот антирезонансов, а корни знаменателя — квадратам резонансных частот системы. Разлагая затем числитель и знаменатель на множители

ли, находим

$$D_{ii}(\omega) = \delta_{ii} \frac{\prod_{k=1}^{n-1} \left(1 - \frac{\omega^2}{\Omega_k^2}\right)}{\prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{\omega^2}{p_k^2}\right)}. \quad (15.16)$$

Здесь  $\Pi$  означает произведение, а  $\delta_{ii}$  равно отношению свободных членов полиномов.

С другой стороны,  $\delta_{ii}$  представляет собой значение динамической податливости системы при  $\omega = 0$ , т. е. ее статическую податливость.

Формула (15.16) позволяет вычислять динамическую податливость системы, если известны ее статическая податливость, а также резонансные и антирезонансные частоты.

Перемещения других точек системы  $x_j (j \neq i)$  определяются равенствами

$$x_j = \sum_{k=1}^n q_k u_{jk} = P_0 \cos \omega t \sum_{k=1}^n \frac{u_{ik} u_{jk}}{p_k^2 - \omega^2}.$$

Отношение этих перемещений к возмущающей силе

$$D_{ij}(\omega) = \frac{x_j}{P_0 \cos \omega t} = \sum_{k=1}^n \frac{u_{ik} u_{jk}}{p_k^2 - \omega^2} \quad (15.17)$$

также может быть названо *коэффициентом динамической податливости*:  $D_{ii}$  — *главный*,  $D_{ij}$  — *побочный* коэффициент. По аналогии с коэффициентами влияния метода сил  $D_{ii}$ ,  $D_{ij}$  иногда называют *гармоническими коэффициентами влияния*.

При  $\omega \rightarrow 0$   $D_{ij}(\omega) \rightarrow \delta_{ij}$ .

Коэффициенты динамической податливости находят применение при расчете колебаний сложных систем методом динамических податливостей (или жесткостей) (см. гл. IV).

**Динамический гаситель колебаний.** В динамическом гасителе для гашения колебаний используется явление антирезонанса.

Пусть имеется простейшая система с одной степенью свободы, совершающая вынужденные гармонические колебания с частотой  $\omega$ . На рис. 15.8 эта система представлена в виде диска с моментом инерции  $I$  на упругом валу с жесткостью на кручение  $c$ .

Если дополнительно присоединить к системе гаситель, состоящий из диска (момент инерции  $I_d$ ), и вал жесткостью  $c_d$ , причем настроить гаситель так, чтобы его собственная частота при закрепленном диске  $I$  равнялась  $\omega$ :

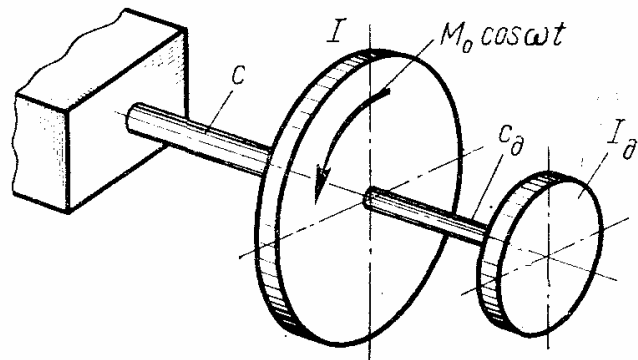


Рис. 15.8

$$\sqrt{c_d/I_d} = \omega,$$

то частота  $\omega$  станет для двухмассовой системы антирезонансной и движение основного диска прекратится.

Амплитуда  $A_d$  колебаний диска гасителя может быть найдена из условия, что крутящий момент на валу гасителя уравнивает возмущающий момент  $M_0$ :

$$A_d = M_0/c_d.$$

Проследим поведение системы с динамическим гасителем при изменении частоты возбуждения  $\omega$ . Если гаситель отключить, то амплитуда  $A$  основной системы будет определяться формулой

$$A = A_0 \frac{1}{1 - \omega^2/p_0^2},$$

где

$$A_0 = M_0/c, \quad p_0^2 = c/m.$$

Уравнения движения системы при включенном гасителе:

$$I\ddot{x}_1 + cx_1 + c_d(x_1 - x_2) = M_0 \cos \omega t, \quad (15.18)$$

$$I_d\ddot{x}_2 - c_d(x_1 - x_2) = 0.$$

Задавая углы поворота основного диска и гасителя в форме  $x_1 = A \cos \omega t$ ,  $x_2 = A_d \cos \omega t$ , подставляя эти значения в уравнения (15.18) и решая полученную систему уравнений относительно  $A$ ,  $A_d$ , находим:

$$A = A_0 \frac{1 - \omega^2/p_d^2}{(1 - \omega^2/p_1^2)(1 - \omega^2/p_2^2)}, \quad (15.19)$$

$$A_d = A_0 \frac{1}{(1 - \omega^2/p_1^2)(1 - \omega^2/p_2^2)}.$$

Здесь  $p_d = \sqrt{c_d/I_d}$  — частота настройки поглотителя;  $p_1, p_2$  — собственные частоты двухмассовой системы,

$$p_{1,2}^2 = \frac{1}{2} \left[ p_0^2 + p_d^2(1 + I_d/I) \pm \sqrt{p_0^4 - 2p_0^2 p_d^2(1 - I_d/I) + p_d^4(1 + I_d/I)^2} \right]$$

$$(p_0 = \sqrt{c/I}).$$

На рис. 15.9 показаны кривые зависимости  $A/A_0$  от  $\omega$ , вычисленные при  $p_d = p_0$ ;  $I_d/I = 1/20$ . На тот же график штриховыми линиями нанесена резонансная кривая для системы без гасителя.

Как и следовало ожидать, благодаря установке гасителя устраняются колебания основной системы при частоте  $\omega = p_d$ . Однако возникают резонансные колебания при  $\omega = p_1$  и  $\omega = p_2$ .

Таким образом, динамический гаситель колебаний эффективен, только если частота возбуждения  $\omega$  является строго постоянной. Уст-



ранить резонансные колебания с большими амплитудами при частотах  $p_1, p_2$  оказывается возможным, если ввести в конструкцию динамического гасителя трение. Этот вопрос рассмотрен далее в § 16.

В двигателях внутреннего сгорания используются также динамические гасители, частота настройки которых меняется автоматически с частотой возбуждения. Устройство этих гасителей основано на том, что собственная частота маятника в поле центробежных сил пропорциональна скорости вращения.

Поэтому, подвесив маятник к диску, закрепленному на коленчатом валу двигателя, и выбрав соответствующим образом радиус качания, можно добиться, чтобы собственная частота колебаний маятника была в 2, 3, ...,  $n$  раз больше, чем угловая скорость диска. Такой виброгаситель устраняет крутильные колебания, вызываемые 2-й, 3-й, ...,  $n$ -й гармониками возмущающих моментов. На рис. 15.10 изображена конструкция виброгасителя, в которой в качестве маятника используется противовес 1, укрепленный с помощью роликов 2 на щеке 3 коленчатого вала. Диаметр  $d$  роликов меньше, чем диаметр  $D$  сверлений в щеке. Благодаря этому масса гасителя может перемещаться относительно коленчатого вала, причем все ее точки движутся по дугам равных радиусов  $l = D - d$ .

Частота собственных колебаний гасителя

$$p_d = \omega \sqrt{R/(D-d) - 1},$$

где  $R$  — расстояние центра массы гасителя от оси вала;  $\omega$  — угловая скорость вала.

Для того чтобы гаситель был настроен на  $\nu$ -ю гармонику возмущающих моментов, необходимо так выбрать его размеры, чтобы

$$\sqrt{R/(D-d) - 1} = \nu.$$

Массу гасителя выбирают из условия, чтобы при допустимых амплитудах качания создаваемый им момент равнялся  $\nu$ -й гармонике возмущающего момента. Другие конструкции динамических гасителей

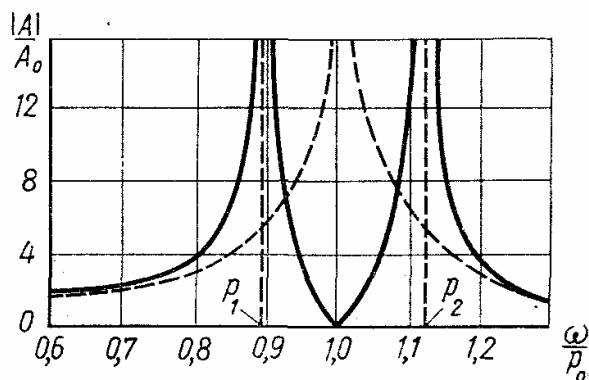


Рис. 15.9

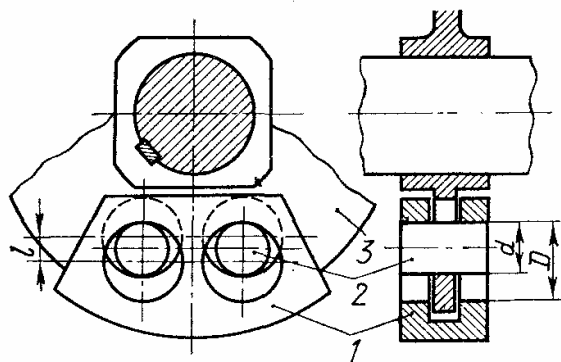


Рис. 15.10

крутильных колебаний двигателей и их расчет рассмотрены, например, в работах [21, 50].

**Кинематическое возбуждение.** Если колебания системы вызываются не заданными силами, а возникают благодаря приведению в движение по заданному закону одной или нескольких точек системы, то возбуждение называется *кинематическим*.

Задачу о кинематическом возбуждении нетрудно свести к задаче о силовом возбуждении. Пусть задано перемещение какой-либо  $j$ -й точки системы

$$x_j = f(t). \quad (15.20)$$

Если бы система была безмассовой (т. е. при ее движении не возникали силы инерции), то для смещения точки  $j$  к ней следовало бы приложить силу  $P_j^{(1)} = f(t)/\delta_{jj}$ , а все остальные точки системы получили бы перемещения

$$x_i^{(1)} = f(t)\delta_{ij}/\delta_{jj}. \quad (15.21)$$

Представим теперь перемещения в реальной системе в виде

$$x_i = x_i^{(1)} + x_i^{(2)}, \quad (15.22)$$

где  $x_i^{(2)}$  — искомые дополнительные перемещения.

Для того чтобы это выражение удовлетворяло условию (15.20), должно быть

$$x_j^{(2)} = 0. \quad (15.23)$$

Рассмотрим в соответствии с принципом Даламбера динамическое равновесие системы. Силы, действующие на систему, состоят из силы  $P_j^{(1)} + P_j^{(2)}$ , приложенной в точке  $j$ , движение которой задано ( $P_j^{(2)}$  — изменение этой силы в связи с инерцией системы), и сил инерции масс

$$-m_i \ddot{x}_i = -m_i \ddot{x}_i^{(1)} - m_i \ddot{x}_i^{(2)}.$$

Эти силы вызывают перемещения  $x_i^{(1)} + x_i^{(2)}$ .

Так как перемещения  $x_i^{(1)}$  вызываются силой  $P_j^{(1)}$ , то система перемещений  $x_i^{(2)}$  вызывается силами инерции  $(-m_i \ddot{x}_i^{(1)})$ ,  $(-m_i \ddot{x}_i^{(2)})$  и силой  $P_j^{(2)}$ , которую можно определить из условия (15.23).

Это позволяет рассматривать движение, характеризующее перемещениями  $x^{(2)}$ , как вынужденные колебания системы с закрепленной точкой  $j$ , вызываемые возмущающими силами  $(-m_i \ddot{x}_i^{(1)})$ . При этих колебаниях в дополнительной опоре в точке  $j$  возникает реакция  $P_j^{(2)}$ .

Итак, при кинематическом возбуждении движение системы может быть разложено на два: 1) движение ( $x^{(1)}$ ) безмассовой системы; 2) вынужденное колебание системы с дополнительным закреплением в точке  $j$ , вызванное силами инерции  $(-m_i \ddot{x}_i^{(1)})$  первого движения.

Рассмотрим два примера расчета колебаний, возбуждаемых кинематически.

**Пример 1.** Система на рис. 15.11 состоит из трех грузов одинаковой массы  $m_1 = m_2 = m_3 = m$  и трех пружин жесткостью  $c$  каждая. В начальный момент система неподвижна и недеформирована. С помощью кулачка грузу  $m_1$  сообщается перемещение:

$$x_1 = a(1 - \cos \omega t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi/\omega; \quad x_1 = 0, \quad t > 2\pi/\omega.$$

Требуется определить закон движения грузов.

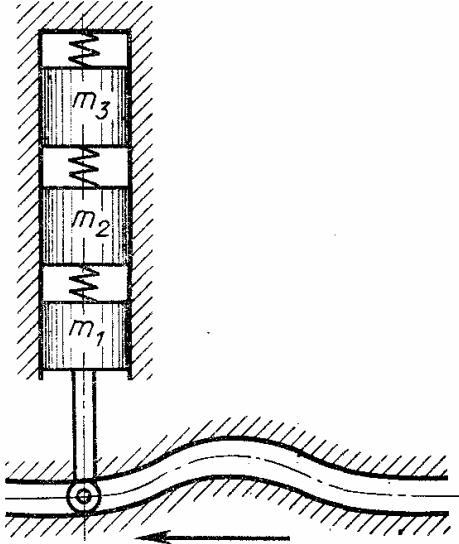


Рис. 15.11

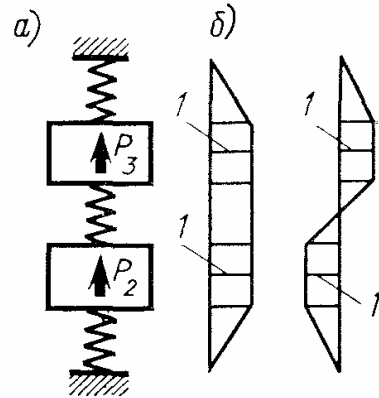


Рис. 15.12

**Решение.** При движении системы как безмассовой

$$x_2^{(1)} = \frac{2}{3}x_1, \quad x_3^{(1)} = \frac{1}{3}x_1.$$

Рассматриваем движение системы с закрепленным грузом  $m_1$  (рис. 15.12,а) под действием сил:

$$P_2 = -m\ddot{x}_2^{(1)}, \quad P_3 = -m\ddot{x}_3^{(1)},$$

$$0 \leq t \leq 2\pi/\omega, \quad P_2 = -\frac{2}{3}m\omega^2 a \cos \omega t, \quad P_3 = -\frac{1}{3}m\omega^2 a \cos \omega t, \\ t > 2\pi/\omega, \quad P_2 = P_3 = 0.$$

Собственные формы колебаний легко определить, учитывая симметрию системы (рис. 15.12,б). Соответствующие собственные частоты:

$$p_1 = \sqrt{c/m}, \quad p_2 = \sqrt{3c/m},$$

Находим обобщенные силы, соответствующие главным координатам:

$$Q_1 = P_2 \cdot 1 + P_3 \cdot 1; \quad 0 \leq t \leq 2\pi/\omega \quad Q_1 = -m\omega^2 a \cos \omega t; \quad t > 2\pi/\omega \quad Q_1 = 0; \\ Q_2 = P_2(-1) + P_3 \cdot 1; \quad 0 \leq t \leq 2\pi/\omega \quad Q_2 = \frac{1}{3}m\omega^2 a \cos \omega t; \quad t > 2\pi/\omega \quad Q_2 = 0.$$

Обобщенные массы

$$\mathcal{M}_1 = \mathcal{M}_2 = m \cdot 1^2 + m \cdot 1^2 = 2m.$$

Уравнения для обобщенных координат

$$\ddot{q}_k + p_k^2 q_k = Q_k/\mathcal{M}_k, \quad k = 1, 2.$$

Так как нам нужно найти решения, удовлетворяющие нулевым начальным условиям, имеем [см. формулу (3.6)]

$$q_k = \int_0^t \frac{1}{\mathcal{M}_k p_k} Q_k(\vartheta) \sin p_k (t - \vartheta) d\vartheta.$$

При  $0 \leq t \leq 2\pi/\omega$

$$\begin{aligned} q_1 &= -\frac{\omega^2 a}{2p_1} \int_0^t \cos \omega \vartheta \sin p_1 (t - \vartheta) d\vartheta = \\ &= -\frac{\omega^2 a}{4p_1} \left[ \frac{\cos [p_1 t - (\omega + p_1) \vartheta]}{\omega + p_1} - \frac{\cos [p_1 t + (\omega - p_1) \vartheta]}{\omega - p_1} \right]_0^t = \\ &= \frac{\omega^2 a}{2(\omega^2 - p_1^2)} (\cos \omega t - \cos p_1 t). \end{aligned}$$

При  $t \geq 2\pi/\omega$ , учитывая, что при  $\vartheta > 2\pi/\omega$   $Q_1 = 0$ , имеем

$$\begin{aligned} q_1 &= -\frac{\omega^2 a}{2p_1} \int_0^{2\pi/\omega} \cos \omega \vartheta \sin p_1 (t - \vartheta) d\vartheta = \frac{\omega^2 a}{2(\omega^2 - p_1^2)} [\cos (p_1 t - \lambda_1) - \cos p_1 t] = \\ &= \frac{\omega^2 a}{\omega^2 - p_1^2} \sin (\lambda_1/2) \sin (p_1 t - \lambda_1/2), \end{aligned}$$

$$(\lambda_1 = 2\pi p_1/\omega).$$

Аналогично, при  $t \leq 2\pi/\omega$

$$q_2 = -\frac{\omega^2 a}{6(\omega^2 - p_2^2)} (\cos \omega t - \cos p_2 t),$$

при  $t > 2\pi/\omega$

$$q_2 = -\frac{\omega^2 a}{3(\omega^2 - p_2^2)} \sin \frac{\lambda_2}{2} \sin (p_2 t - \lambda_2/2),$$

$$(\lambda_2 = 2\pi p_2/\omega).$$

Полные перемещения грузов определяются формулами

$$x_2 = x_2^{(1)} + q_1 u_{21} + q_2 u_{22},$$

$$x_3 = x_3^{(1)} + q_1 u_{31} + q_2 u_{32}.$$

При  $0 \leq t \leq 2\pi/\omega$

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{2}{3} a (1 - \cos \omega t) + \frac{\omega^2 a}{2(\omega^2 - p_1^2)} (\cos \omega t - \cos p_1 t) + \frac{\omega^2 a}{6(\omega^2 - p_2^2)} (\cos \omega t - \\ &\quad - \cos p_2 t), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_3 &= \frac{1}{3} a (1 - \cos \omega t) + \frac{\omega^2 a}{2(\omega^2 - p_1^2)} (\cos \omega t - \cos p_1 t) - \\ &\quad - \frac{\omega^2 a}{6(\omega^2 - p_2^2)} (\cos \omega t - \cos p_2 t). \end{aligned}$$

При  $t \geq 2\pi/\omega$

$$x_2 = \frac{\omega^2 a}{\omega^2 - p_1^2} \sin \frac{\lambda_1}{2} \sin \left( p_1 t - \frac{\lambda_1}{2} \right) + \frac{\omega^2 a}{3(\omega^2 - p_2^2)} \sin \frac{\lambda_2}{2} \sin \left( p_2 t - \frac{\lambda_2}{2} \right),$$

$$x_3 = \frac{\omega^2 a}{\omega^2 - p_1^2} \sin \frac{\lambda_1}{2} \sin \left( p_1 t - \frac{\lambda_1}{2} \right) - \frac{\omega^2 a}{3(\omega^2 - p_2^2)} \sin \frac{\lambda_2}{2} \sin \left( p_2 t - \frac{\lambda_2}{2} \right).$$

**Пример 2.** Средняя масса системы на рис. 15.13 приводится в движение по закону  $x = a \cos \omega t$ . Определить движения крайних масс и изгибающий момент в середине балки при стационарном режиме движения.

**Решение.** Определяем закон движения точек закрепления грузов при колебаниях безмассовой системы. По симметрии,

$$x_1^{(1)} = x_3^{(1)} = x_2 \delta_{12} / \delta_{22} = (13/27) a \cos \omega t.$$

(Значения коэффициентов влияния  $\delta_{12}$ ,  $\delta_{22}$  см. на с. 103.)

При этом к середине балки прикладывается сила

$$P_1 = x_2 / \delta_{22} = (48EJ/l^3) a \cos \omega t.$$

Изгибающий момент в середине балки, вызываемый этой силой,

$$M_1 = P_1 l/4 = (12EJ/l^2) a \cos \omega t.$$

Вычисляем силы инерции, возникающие при движении системы как безмассовой:

$$F_1 = F_3 = -m \ddot{x}_1^{(1)} = 13/27 m a \omega^2 \cos \omega t.$$

Изучаем колебания системы с дополнительным закреплением (рис. 15.14, а), вызываемые этими силами. Так как система и нагрузка симметричны, возникает только симметричная форма колебания. Симметричная форма собственных колебаний показана на рис. 15.14, б.

Принимая смещения грузов  $u = 1$ , находим соответствующие амплитудные силы инерции и строим эпюру изгибающих моментов (рис. 15.14, в), для чего приходится решить статически неопределимую задачу. Прикладываем единичную силу (рис. 15.14, г) и по правилу Верещагина вычисляем прогиб под силой  $mp^2$ ; этот прогиб приравниваем единице:

$$\frac{5}{4374} [mp^2 l^3 / (EJ)] = 1.$$

Отсюда находим собственную частоту системы рис. 15.14 при симметричной форме колебания:

$$p_*^2 = 874,8 EJ / (m l^3).$$

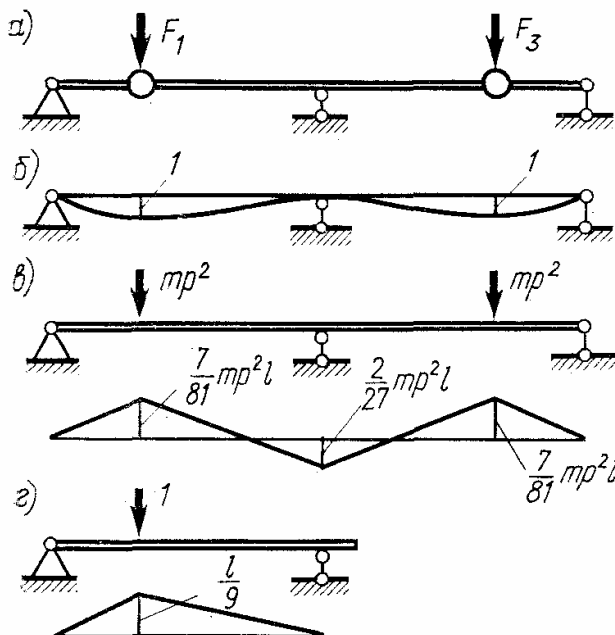


Рис. 15.14

Главная координата  $q$  (в данном случае  $q = x_1^{(2)} = x_3^{(2)}$ , так как  $u_1 = u_3 = 1$ ) определяется уравнением

$$\ddot{q} + p_*^2 q = \frac{F_1 u_1 + F_2 u_3}{m u_1^2 + m u_3^2} = \frac{13}{27} a \omega^2 \cos \omega t,$$

отсюда

$$q = x_1^{(2)} = x_3^{(2)} = \frac{13}{27} \frac{\omega^2}{p_*^2 - \omega^2} a \cos \omega t.$$

Следовательно, полные перемещения грузов  $x_1$  и  $x_3$  составят

$$x_1 = x_3 = x_1^{(1)} + x_1^{(2)} = \frac{13}{27} \left( 1 + \frac{\omega^2}{p_*^2 - \omega^2} \right) a \cos \omega t.$$

При вычислении изгибающего момента в сечении под средней массой учтем, что моменты в движении 1 и в движении 2 имеют разные знаки (рис. 15.14,б). Следовательно,

$$M = M_1 + M_2 = \frac{12EJ}{l^2} a \cos \omega t - \frac{13}{27} \frac{\omega^2}{p_*^2 - \omega^2} a \cos \omega t \cdot \frac{2}{27} m p_*^2 l;$$

$$M = \frac{EJ}{l^2} a \cos \omega t \left[ 12 - 31,2 \frac{\omega^2}{p_*^2 - \omega^2} \right].$$

Как видно из приведенного примера, при кинематическом возбуждении резонанс возникает при частоте возбуждения, равной собственной частоте системы с дополнительным закреплением. Собственные частоты свободной системы не являются опасными.

Заметим, что если частота кинематического возбуждения совпадает с собственной частотой свободной системы, то усилие, необходимое для возбуждения, уменьшается до нуля (при отсутствии потерь).

При расчете гармонических колебаний, возбуждаемых кинематически, применение метода главных координат отнюдь не является обязательным. Часто быстрее ведет к цели непосредственное решение. Так как в этом случае одна из координат ( $x_j$ ) является заданной функцией времени  $x_j = a \cos \omega t$ , то остальные координаты естественно искать в виде

$$x_i = A_i \cos \omega t.$$

Если уравнения движения составлены в прямой форме, то для определения всех  $A_i$  используют  $n - 1$  уравнение. Уравнение движения в направлении заданного перемещения  $x_j$  может быть затем использовано для вычисления силы, необходимой для движения системы.

Если уравнения составлены в обратной форме, то решаются все  $n$  уравнений, но в них кроме  $(n - 1)$ -й неизвестной амплитуды  $A_i$  входит и неизвестная внешняя сила, приложенная в направлении  $x_j$  (эта сила также пропорциональна  $\cos \omega t$ ).

Рассмотрим в качестве примера непосредственное решение той же задачи (см. рис. 15.13), которая выше решалась методом главных координат.

При амплитудных перемещениях (рис. 15.15,а) к грузам приложены силы инерции, а к грузу  $m_2$  — также и амплитудное усилие  $F$  привода (рис. 15.15,б). Выражая теперь перемещения через действующие силы, получаем:

$$\begin{aligned} A_1 &= m\omega^2 A_1 \delta_{11} + m\omega^2 A_3 \delta_{13} + \\ &\quad + (m\omega^2 a + F) \delta_{12}, \\ a &= m\omega^2 A_1 \delta_{21} + m\omega^2 A_3 \delta_{23} + \\ &\quad + (m\omega^2 a + F) \delta_{22}, \\ A_3 &= m\omega^2 A_1 \delta_{31} + m\omega^2 A_3 \delta_{33} + \\ &\quad + (m\omega^2 a + F) \delta_{32}. \end{aligned}$$

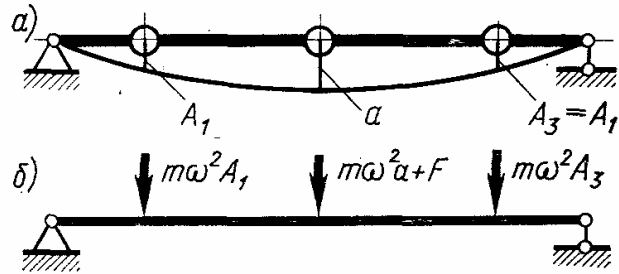


Рис. 15.15

(Значения коэффициентов влияния см. на с. 103.)

Учитывая симметрию системы, приходим к двум уравнениям с двумя неизвестными ( $A_1 = A_3$  и  $F$ ):

$$\begin{aligned} A_1 [m\omega^2 (\delta_{11} + \delta_{13}) - 1] + F \delta_{12} &= -m\omega^2 a \delta_{12}, \\ A_1 m\omega^2 (\delta_{21} + \delta_{23}) + F \delta_{22} &= (1 - m\omega^2 \delta_{22}) a. \end{aligned}$$

Из этих уравнений определяются амплитуды перемещений и возмущающей силы  $F$ . Затем в соответствии со схемой нагружения на рис. 15.15,б можно построить эпюру изгибающих моментов при амплитудных перемещениях. Нетрудно убедиться, что получаемые таким образом результаты совпадают с результатами расчета методом главных координат.

## § 16. ВЛИЯНИЕ ТРЕНИЯ НА КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМ С КОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ СТЕПЕНЕЙ СВОБОДЫ

Так же как и для систем с одной степенью свободы, различные по своей физической природе силы трения в большинстве случаев можно без большой погрешности заменять энергетически эквивалентными силами вязкого трения. Поэтому ограничимся рассмотрением вязкого трения. В случае необходимости учета нелинейного (например, сухого) трения расчет выполняется численно, как указано в конце параграфа.

**Внешнее и внутреннее вязкое трение. Диссипативная функция Рэлея.** Силы вязкого трения могут быть пропорциональными либо абсолютным скоростям движения масс (внешнее трение), либо скоростям их относительного перемещения (внутреннее трение). Схемы соответствующего размещения элементов вязкого трения применительно к цепной системе показаны на рис. 16.1 и 16.2. В первом случае на массу  $m_i$  действует сила трения

$$R_i = -\alpha_i \dot{x}_i,$$

во втором

$$R_i = - \sum_{j=1}^n \beta_{ij} (\dot{x}_i - \dot{x}_j).$$

В общем случае при наличии как внешнего, так и внутреннего трения силу вязкого трения, соответствующую координате  $x_i$ , можно представить в виде

$$R_i = - \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} \dot{x}_j, \quad (16.1)$$

причем  $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$ .

Удобным является описание вязкого трения с помощью введенной Рэлеем диссипативной функции

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} \dot{x}_i \dot{x}_j.$$

Тогда сила трения, соответствующая координате  $x_i$ , выражается формулой

$$R_i = - \partial W / \partial \dot{x}_i,$$

Запишем уравнения (10.6) движения системы с учетом сил трения, определяемых выражением (16.1):

$$\sum_{j=1}^n m_{ij} \ddot{x}_j + \sum_{j=1}^n r_{ij} \dot{x}_j + \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} \dot{x}_j = P_i(t) \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Перейдя к матрично-векторной записи, получим

$$m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + rx = P. \quad (16.2)$$

Это уравнение отличается от уравнения (12.21) только наличием произведения матрицы диссипативных коэффициентов

$$\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ . & . & . & . \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

на вектор скоростей  $\dot{x}$ .

**Пропорциональное демпфирование.** В общем случае вязкого трения введение главных координат не приводит к независимым дифференциальным уравнениям относительно каждой из них. Лишь в случае так называемого пропорционального демпфирования главные координаты оказываются не связанными между собой и при наличии трения. При пропорциональном демпфировании в цепной системе коэффи-

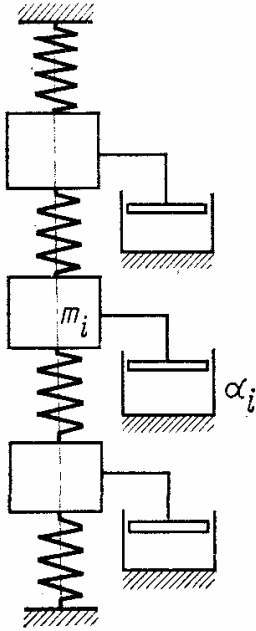


Рис. 16.1

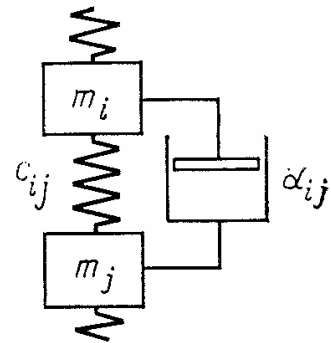


Рис. 16.2



коэффициенты внешнего трения  $\alpha_i$  (рис. 16.1) пропорциональны соответствующим массам  $m_i$ , а коэффициенты внутреннего трения  $\beta_{ij}$  (рис. 16.2) пропорциональны соответствующим жесткостям. В этом случае матрица диссипативных коэффициентов может быть представлена в виде суммы двух матриц, одна из которых пропорциональна матрице масс  $\mathbf{m}$ , а другая — матрице жесткости  $\mathbf{r}$ :

$$\mathbf{a} = 2n_0\mathbf{m} + 2\lambda\mathbf{r} \quad (16.3)$$

( $n_0$  и  $\lambda$  — коэффициенты пропорциональности).

Уравнение движения (16.2) при этом получает форму

$$\mathbf{m}(\ddot{\mathbf{x}} + 2n_0\dot{\mathbf{x}}) + \mathbf{r}(\mathbf{x} + 2\lambda\dot{\mathbf{x}}) = \mathbf{P}.$$

Представим физические перемещения в виде разложения по главным координатам:

$$\mathbf{x} = \sum_{k=1}^n q_k(t) \mathbf{u}_k.$$

Тогда получим

$$\mathbf{m} \sum_{k=1}^n \mathbf{u}_k (\ddot{q}_k + 2n_0\dot{q}_k) + \mathbf{r} \sum_{k=1}^n \mathbf{u}_k (q_k + 2\lambda\dot{q}_k) = \mathbf{P}.$$

Умножим это уравнение слева на матрицу-строку  $\mathbf{u}_l^T$  и учтем, что в соответствии с соотношениями ортогональности (12.35), (12.36) при  $l \neq k$

$$\mathbf{u}_l^T \mathbf{m} \mathbf{u}_k = 0, \quad \mathbf{u}_l^T \mathbf{r} \mathbf{u}_k = 0,$$

а при  $l = k$

$$\mathbf{u}_k^T \mathbf{m} \mathbf{u}_k = \mathcal{M}_k, \quad \mathbf{u}_k^T \mathbf{r} \mathbf{u}_k = p_k^2 \mathcal{M}_k.$$

Таким образом, после умножения на  $\mathbf{u}_l^T$  в уравнении сохраняются только те слагаемые, для которых  $k = l$ :

$$\mathcal{M}_k (\ddot{q}_k + 2n_0\dot{q}_k) + p_k^2 \mathcal{M}_k (q_k + 2\lambda\dot{q}_k) = \mathbf{u}_k^T \mathbf{P} \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

Учитывая, что  $\mathbf{u}_k^T \mathbf{P} = \sum_{i=1}^n P_i u_{ik} = Q_k$  — обобщенная сила, соответ-

ствующая  $k$ -й собственной форме, приведем полученное уравнение к виду

$$\ddot{q}_k + 2n_k \dot{q}_k + p_k^2 q_k = Q_k / \mathcal{M}_k \quad (k = 1, 2, \dots, n), \quad (16.4)$$

где

$$n_k = n_0 + \lambda p_k^2.$$

Следовательно, при пропорциональном демпфировании каждая из главных координат определяется независимым уравнением (16.4). Это уравнение имеет точно такой же вид, как и уравнение колебаний системы с одной степенью свободы при вязком трении.

Из формулы для коэффициента затухания  $n_k$  следует, что при внешнем вязком пропорциональном трении ( $\alpha = 2n_0 m$ ) этот коэффициент для всех главных координат одинаков, а при внутреннем вязком трении ( $\alpha = 2\lambda r$ ) коэффициент затухания пропорционален квадрату собственной частоты.

В первом случае колебания высших форм затухают за то же время (но за большее число циклов), что и низкочастотные. Во втором случае высокочастотные колебания затухают существенно быстрее, чем низкочастотные.

Если условие (16.3) пропорционального демпфирования не выполняется, то все уравнения для  $q_k$  оказываются связанными и переход к координатам  $q_k$  вместо  $x_i$  не упрощает задачи.

Следует, однако, отметить, что в большинстве случаев инженер не располагает надежной информацией о распределении сил трения в системе (внутреннее трение в материале, конструкционный гистерезис см. § 4). На основе экспериментов удастся оценить лишь интегральные эффекты сил трения (например, логарифмический декремент затухания или коэффициент поглощения  $\psi$ ). В этих условиях любая разумная гипотеза о распределении сил трения является одинаково приемлемой. Естественно поэтому для простоты предположить, что силы трения распределены таким образом, что главные координаты для консервативной системы являются главными и для системы с трением и что при вынужденных колебаниях они определяются уравнениями (16.4).

Коэффициент  $n_k$  в зависимости от принятой гипотезы о распределении сил трения может быть задан в форме

$$n_k = n_0 + \lambda p_k^2$$

либо принят тем или иным на основе использования данных эксперимента.

Изложенный простой способ учета трения сводит задачу о колебаниях системы с  $n$  степенями свободы к  $n$  задачам о колебаниях систем с одной степенью свободы при наличии трения. Однако этот метод не всегда применим, если в систему специально введены элементы трения (демпферы колебаний). Большие силы трения, развивающиеся в таких демпферах при режимах, близких к резонансным, могут заметно исказить формы колебаний системы. В этих случаях целесообразно проводить точное решение задачи.

**Свободные колебания (точное решение).** Дифференциальные уравнения колебаний системы с вязким как внешним, так и внутренним трением имеют вид\*

$$\sum_{j=1}^n m_{lj} \ddot{x}_j + \sum_{j=1}^n \alpha_{lj} \dot{x}_j + \sum_{j=1}^n r_{lj} x_j = 0 \quad (l = 1, 2, \dots, n). \quad (16.5)$$

Здесь  $\alpha_{lj}$  — коэффициенты вязкого трения.

---

\* Далее для обозначения номеров координат использованы индексы  $l, j$ ; буква  $i$  означает мнимую единицу.

Представим решение системы уравнений (16.5) в комплексной форме:

$$x_i = \bar{u}_i e^{i\omega t}, \quad i = \sqrt{-1}. \quad (16.6)$$

Здесь  $\bar{u}_i = u_i e^{i\varphi_i}$  — комплексные амплитуды;  $\bar{\omega} = p' + in'$  — комплексная частота;  $u_i, \varphi_i, p', n'$  — действительные величины.

Таким образом, принятая форма решения

$$x_i = u_i e^{i\varphi_i} e^{i(p' + in')t} = u_i e^{-n't} e^{i(p't + \varphi_i)}$$

соответствует затухающим по экспоненциальному закону колебаниям. Подставив выражение (16.6) в уравнения (16.5), получим систему линейных уравнений с комплексными коэффициентами относительно амплитуд:

$$-\sum_{j=1}^n m_{ij} \bar{u}_j \bar{\omega}^2 + i\bar{\omega} \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} \bar{u}_j + \sum_{j=1}^n r_{ij} \bar{u}_j = 0. \quad (16.7)$$

Приравняв нулю определитель системы (16.7), получим алгебраическое уравнение степени  $2n$

$$\Phi(\bar{\omega}) = 0.$$

Корни этого уравнения ( $2n$  корней) определяют комплексные частоты. Имеется  $n$  пар корней вида

$$\bar{\omega}_{\pm k} = \pm p'_k + in'_k \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

Каждому корню соответствуют свои соотношения между комплексными амплитудами грузов  $\bar{u}_i$ . В общем случае эти соотношения комплексны и, следовательно, при данной частоте  $\bar{\omega}_k$  каждая масса колеблется со своей фазой  $\varphi_i$ . Только при пропорциональном демпфировании отношения  $\bar{u}_{ik}/\bar{u}_{jk}$  действительны, а форма колебания с частотой  $\bar{\omega}_k$  со временем не меняется. В этом случае она совпадает с формой колебаний консервативной системы.

**Вынужденные гармонические колебания. Метод комплексных амплитуд.** Пусть на упругую систему действуют гармонические возмущающие силы частотой  $\omega$ . Уравнения движения можно записать в форме [см. уравнение (16.5)]

$$\sum_{j=1}^n m_{ij} \ddot{x}_j + \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} \dot{x}_j + \sum_{j=1}^n r_{ij} x_j = P_i(t), \quad (16.8)$$

где  $P_i(t)$  — возмущающая сила, соответствующая перемещению  $x_i$ . Запишем эти силы в виде

$$\bar{P}_i(t) = \bar{P}_i e^{i\omega t}. \quad (16.9)$$

Здесь

$$\bar{P}_i = P_i^0 e^{i\varphi_i},$$

где  $P_l^0$  — амплитуда силы, приложенной к  $l$ -й массе;  $\varphi_l$  — ее фаза.

Введение фазовых углов  $\varphi_l$  имеет смысл только в том случае, если имеется разница в фазах сил, приложенных к разным точкам.

Перемещения  $x_l$  при стационарном режиме также будем искать в виде

$$\bar{x}_l = \bar{u}_l e^{i\omega t}, \quad (16.10)$$

где комплексная амплитуда

$$\bar{u}_l = u_l e^{i\psi_l}$$

определяет как действительную амплитуду  $u_l$ , так и фазу  $\psi_l$  колебаний.

Подставляя значения  $\bar{P}_l(t)$ ,  $\bar{x}_l$  в уравнение (16.8), приходим к системе алгебраических уравнений с комплексными коэффициентами. Эти уравнения получаются из исходных дифференциальных путем замены оператора дифференцирования множителем  $i\omega$ :

$$-\sum_{j=1}^n m_{lj} \omega^2 \bar{u}_j + i\omega \sum_{j=1}^n \alpha_{lj} \bar{u}_j + \sum_{j=1}^n r_{lj} \bar{u}_j = \bar{P}_l, \quad (l = 1, 2, \dots, n). \quad (16.11)$$

Решив эту систему, получим значения  $u_l$  ( $l = 1, 2, \dots, n$ ), т. е. значения амплитуд и фаз колебаний всех грузов.

**З а м е ч а н и е.** Может создаться впечатление, что применение метода комплексных амплитуд неправомерно, так как в этом случае дифференциальные уравнения (16.5), справедливые для действительных переменных  $x_l$ , применяются для комплексных  $\bar{x}_l$ . В самом деле система уравнений порядка  $2n$  для комплексных переменных представляет собой систему порядка  $4n$  для их действительных и мнимых частей.

В данном случае такой прием вполне допустим. Решающим является то обстоятельство, что коэффициенты уравнения (16.5) действительные. Поэтому при всех операциях действительные части остаются действительными, а мнимые — мнимыми.

Поэтому при замене  $x$  и  $P$  на  $\bar{x}$  и  $\bar{P}$  уравнение (16.5) полностью сохраняет свою силу отдельно для действительных, отдельно для мнимых частей  $\bar{x}$  и  $\bar{P}$ . Таким образом, если расшифровать записи (16.9) и (16.10), то можно сказать, что нагрузкам  $P_l(t) = P_l \cos(\omega t + \varphi_l)$  соответствуют перемещения  $x_l(t) = u_l \cos(\omega t + \psi_l)$ , а нагрузкам  $P_l(t) = P_l \sin(\omega t + \varphi_l)$  — перемещения  $x_l(t) = u_l \sin(\omega t + \psi_l)$ .

Отметим важный частный случай — действие на систему единичной гармонической силы. Представляя эту силу в форме

$$\bar{P}(t) = e^{i\omega t},$$

обнаружим, что любое комплексное перемещение

$$\bar{x}_l = \bar{u}_l e^{i\omega t}.$$

Таким образом, отношение комплексного перемещения к комплексной силе представляет собой комплексное число, зависящее от  $\omega$ .

Обозначим

$$\bar{x}_l / \bar{P}(t) = F_l(i\omega). \quad (16.12)$$

Очевидно, что модуль этого числа  $|F_l(i\omega)|$  представляет собой отношение амплитуды перемещения к амплитуде силы, а аргумент  $\arg F_l(i\omega)$  составляет разницу фаз силы и перемещения.

Функция  $F_l(i\omega)$  называется (комплексной) *частотной характеристикой системы* или *комплексной передаточной функцией*. Функция  $F_l(i\omega)$  определяется решением системы уравнений (16.11) и представляет собой дробь, знаменатель которой равен определителю системы (16.11), а числитель — тому же определителю с заменой  $l$ -го столбца столбцом правых частей, где лишь одна возмущающая сила равна единице, а остальные — нулю.

**Динамический гаситель колебаний с затуханием.** В качестве примера точного решения рассмотрим задачу о динамическом гасителе колебаний с затуханием. Выше (см. § 15) было установлено, что динамический гаситель колебаний без затухания устраняет колебания основной системы при частоте настройки. Однако при этом возникают новые резонансные частоты. Поэтому, если частота возмущения не является строго определенной, установка гасителя не достигает цели. Этого недостатка лишен динамический гаситель с затуханием.

Пусть основная система состоит из груза массой  $m_1$  и пружины жесткостью  $c_1$ . На груз действует гармоническая возмущающая сила  $P(t) = P_0 \cos \omega t$ . Динамический гаситель с затуханием представляет собой дополнительный груз  $m_2$ , соединяемый с основным пружиной жесткостью  $c_2$  и демпфером с коэффициентом вязкого трения  $\alpha$  (рис. 16.3).

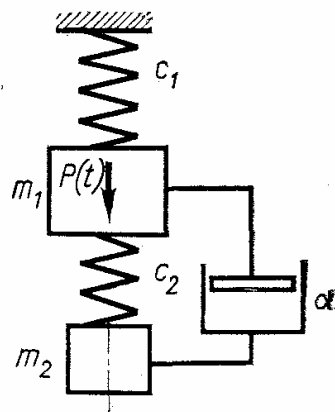


Рис. 16.3

Целью расчета является выбор оптимальных параметров гасителя.

Приближенное решение этой задачи методом главных координат (в предположении о пропорциональном демпфировании) привело бы к выводу, что увеличение коэффициента трения всегда полезно и что при  $\alpha \rightarrow \infty$  колебания в системе не возникают. Ясно, что на самом деле это не так. При большом трении грузы  $m_1$  и  $m_2$  движутся совместно, демпфер не работает и система имеет неограниченные амплитуды при резонансной частоте возмущения

$$\omega_* = \sqrt{c_1 / (m_1 + m_2)}. \quad (16.13)$$

Для того чтобы получить решение задачи, справедливое при любых значениях  $\alpha$ , следует использовать точный метод. Составим уравнения движения системы:

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 + \alpha (\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + c_1 x_1 + c_2 (x_1 - x_2) &= P(t), \\ m_2 \ddot{x}_2 + \alpha (\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + c_2 (x_2 - x_1) &= 0. \end{aligned} \quad (16.14)$$

Для решения уравнений (16.14) применим метод комплексных амплитуд.

литуд. Предположим, что

$$\bar{P}(t) = P_0 e^{i\omega t}, \quad \bar{x}_1 = \bar{u}_1 e^{i\omega t}, \quad \bar{x}_2 = \bar{u}_2 e^{i\omega t}.$$

После подстановки этих значений в уравнения (16.14) приходим к системе линейных уравнений относительно комплексных амплитуд  $\bar{u}_1$  и  $\bar{u}_2$ :

$$\begin{aligned} (c_1 + c_2 - m_1 \omega^2 + \alpha i \omega) \bar{u}_1 - (c_2 + \alpha i \omega) \bar{u}_2 &= P_0, \\ -(c_2 + \alpha i \omega) \bar{u}_1 + (c_2 - m_2 \omega^2 + \alpha i \omega) \bar{u}_2 &= 0. \end{aligned} \quad (16.15)$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \bar{u}_1 &= (P_0 / \Delta) (c_2 - m_2 \omega^2 + \alpha i \omega), \\ \bar{u}_2 &= (P_0 / \Delta) (c_2 + \alpha i \omega); \\ \Delta &= m_1 m_2 \omega^4 - [(m_1 + m_2) c_1 + m_1 c_2] \omega^2 + \\ &+ c_1 c_2 + i \alpha \omega [c_1 - (m_1 + m_2) \omega^2]. \end{aligned}$$

Комплексные величины  $\bar{u}_1$  и  $\bar{u}_2$  запишем в форме  $\bar{u}_1 = u_1 e^{-i\psi_1}$ ,  $\bar{u}_2 = u_2 e^{-i\psi_2}$ , где  $u_1$  и  $u_2$  — действительные амплитуды колебаний грузов;  $\psi_1, \psi_2$  — фазы.

Формулы для амплитуд можно привести к такому виду:

$$\begin{aligned} u_1 &= u_0 \sqrt{\frac{(\delta^2 - \gamma^2)^2 + 4\mu^2 \gamma^2}{[(1 - \gamma^2)(\delta^2 - \gamma^2) - \beta \delta^2 \gamma^2]^2 + 4\mu^2 \gamma^2 (1 - \gamma^2 - \gamma^2)^2}}, \\ u_2 &= u_0 \sqrt{\frac{\delta^4 + 4\mu^2 \gamma^2}{[(1 - \gamma^2)(\delta^2 - \gamma^2) - \beta \delta^2 \gamma^2]^2 + 4\mu^2 \gamma^2 (1 - \gamma^2 - \beta \gamma^2)^2}}. \end{aligned} \quad (16.16)$$

Здесь  $P_0/c = u_0$  и введены безразмерные параметры:  $\gamma = \omega \sqrt{m_1/c}$  — отношение частоты возбуждения к собственной частоте основной системы;  $\delta = \sqrt{(c_2/m_2)(m_1/c_1)}$  — отношение частоты настройки гасителя к собственной частоте основной системы;  $\beta = m_2/m_1$  — отношение массы гасителя к массе основной системы.

Интенсивность вязкого трения характеризуется безразмерным параметром

$$\mu = (\alpha/2m_1) \sqrt{m_1/c_1}.$$

Эффективность работы виброгасителя зависит от рационального выбора параметров  $\beta, \delta, \mu$ . Этот вопрос детально рассмотрен в книге [50].

Наибольший интерес представляет исследование зависимости амплитуды  $u_1$  основной массы от параметров системы. Прежде всего рассмотрим зависимость отношения  $u_1/u_0$  от величины вязкого трения  $\mu$ . При отсутствии трения  $\mu = 0$  получаем

$$\frac{u_1}{u_0} = \left| \frac{\delta^2 - \gamma^2}{(1 - \gamma^2)(\delta^2 - \gamma^2) - \beta \delta^2 \gamma^2} \right|.$$

Это равенство (с учетом обозначений) совпадает с полученным ранее для системы без трения. Зависимость  $u_1/u_0$  от безразмерной частоты возбуждения  $\gamma$  имеет вид кривых 1 на рис. 16.4\*. Резонансные пики соответствуют двум собственным частотам системы.

При  $\mu \rightarrow \infty$  из формулы (16.16) получаем

$$u_1/u_0 = 1/[1 - (1 + \beta)\gamma^2].$$

Это уравнение резонансной кривой для системы с одной степенью свободы.

Безразмерная резонансная частота  $\gamma = \sqrt{1/(1 + \beta)}$ , откуда  $\omega_{\text{рез}} = \sqrt{c_1/(m_1 + m_2)}$ , что соответствует совместному движению грузов

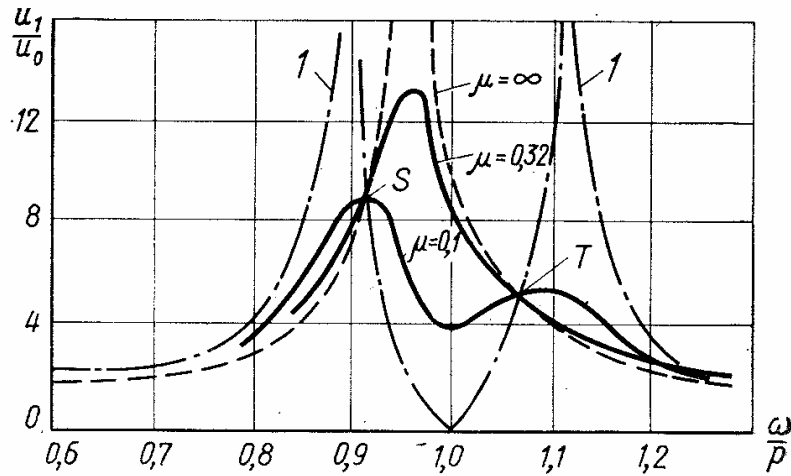


Рис. 16.4

$m_1$  и  $m_2$  на пружине  $c_1$ . Кривая для  $\mu \rightarrow \infty$  нанесена на рис. 16.4 штриховой линией. На рис. 16.4 по уравнению (16.16) построены кривые для других значений  $\mu$ . (Расчеты выполнены для случая  $\delta = 1$ ,  $\beta = 1/20$ .)

Все эти кривые пересекаются в двух точках  $S$  и  $T$ . Эти точки отвечают таким значениям  $\gamma$ , при которых первые и вторые слагаемые в числителе и знаменателе формулы (16.16) пропорциональны:

$$\frac{(\delta^2 - \gamma^2)^2}{1} = \frac{[(1 - \gamma^2)(\delta^2 - \gamma^2) - \beta\delta^2\gamma^2]^2}{(1 - \gamma^2 - \beta\gamma^2)^2}.$$

При этом отношение  $u_1/u_0$  не зависит от  $\mu$ .

Оптимальная работа гасителя при данной его массе  $m_2$  достигается, если точки  $S$  и  $T$  лежат на одной высоте, и коэффициент демпфирования выбран так, чтобы в одной из этих точек амплитудно-частотная кривая имела максимум (при этом второй максимум кривой также лишь весьма незначительно превышает ординаты точек  $S$ ,  $T$ ).

\* Рисунок заимствован из книги [50].

Чтобы выполнить первое из этих условий, необходимо настройку демпфера выбирать так, чтобы

$$\delta = 1/(1 + \beta).$$

При этом ординаты точек  $S$  и  $T$  составляют

$$u_1/u_0 = \sqrt{(2 + \beta)/\beta}.$$

Определение оптимального значения  $\mu$  более сложно. При его выборе можно руководствоваться рис. 16.5. Здесь по оси абсцисс

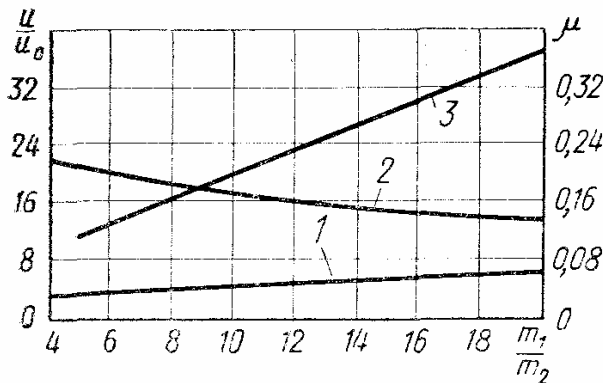


Рис. 16.5

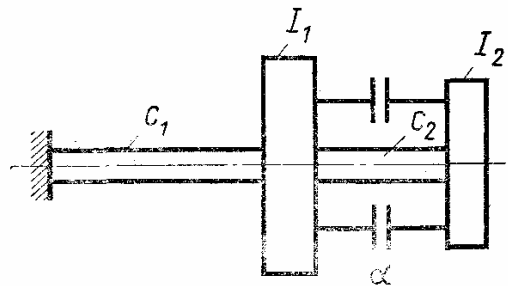


Рис. 16.6

отложено отношение масс  $m_1/m_2 = 1/\beta$ , кривая 2 определяет необходимое вязкое сопротивление  $\mu$ , кривая 1 — максимальное значение  $u_1/u_0$ , а кривая 3 — отношение  $u/u_0$ , где  $u$  — максимальное перемещение груза  $m_2$  относительно  $m_1$  (максимальное растяжение пружины  $c_2$ ).

Данные проведенного анализа могут быть полностью перенесены и на динамический гаситель крутильных колебаний с вязким трением (рис. 16.6).

В приведенном расчете окончательные значения амплитуд удалось представить в формульном виде вследствие простоты рассчитываемой системы (две степени свободы). При применении точного метода к расчету систем с вязким трением, имеющих большее число степеней свободы, основная трудность заключается в решении уравнений типа (16.15) с комплексными коэффициентами. Применение вычислительных машин позволяет реализовать вычисления и при большом числе степеней свободы.

Другим способом решения задачи с использованием вычислительной техники является численное интегрирование дифференциальных уравнений движения [типа уравнений (16.14)] при произвольных начальных условиях.

Так как в уравнениях учтено демпфирование, свободные колебания системы, зависящие от начальных условий, через некоторое число циклов затухают и получаются стационарные решения. Преимуществом этого метода является возможность учета и невязкого трения (например, сухого), а также и других нелинейностей в системе.

Вычисления могут быть реализованы как на цифровых, так и на аналоговых машинах.



## ГЛАВА III

### КОЛЕБАНИЯ СТЕРЖНЕЙ С РАСПРЕДЕЛЕННОЙ МАССОЙ

Общие закономерности упругих колебаний, установленные для систем с конечным числом степеней свободы, остаются справедливыми и для систем с распределенной массой. Однако так как системы с распределенной массой обладают бесконечным числом степеней свободы, бесконечно и число форм и частот их собственных колебаний. Если все эти формы и частоты определены, то решение задачи о вынужденных колебаниях может быть получено методом главных координат. При этом, однако, перемещения отдельных точек представляются уже не конечными суммами, а бесконечными рядами вида

$$x_i = \sum_{k=1}^{\infty} q_k(t) u_{ik}.$$

Соответствующие ряды большей частью обладают хорошей сходимостью и могут быть успешно использованы для расчетов. Поэтому основное внимание в настоящей главе уделяется методам определения форм и частот собственных колебаний стержней. При этом рассматриваются в основном сравнительно простые системы, для которых решения могут быть получены элементарными методами.

Методы расчета более сложных стержневых систем рассмотрены в гл. IV.

В настоящей главе рассмотрены также явления, возникающие в системах с распределенной массой, которые не имеют аналога в системах с конечным числом степеней свободы. К ним относятся распространение волн деформации и возбуждение стационарных колебаний движущейся нагрузкой.

#### § 17. ПРОДОЛЬНЫЕ И КРУТИЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ СТЕРЖНЕЙ, ПОПЕРЕЧНЫЕ КОЛЕБАНИЯ СТРУН

**Дифференциальные уравнения движения.** Рассматриваемые в этом параграфе различные по своей физической природе явления описываются одним и тем же дифференциальным уравнением, потому одинаковы и методы их исследования. Приведем краткий вывод основных уравнений для трех указанных в заголовке параграфа задач.

**Продольные колебания стержня постоянного сечения.** При выводе уравнения движения основываемся на гипотезе плоских сечений. Кроме того, пренебрегаем силами инер-

ции, связанными с поперечными движениями частиц стержня при его растяжении — сжатии. Тогда положение каждого поперечного сечения в процессе движения полностью характеризуется его продольным смещением  $x$ , а нормальная сила в сечении  $N$  оказывается связанной с продольной деформацией  $\varepsilon = \partial x / \partial z$  законом Гука для одноосного напряженного состояния

$$N = EF \partial x / \partial z, \quad (17.1)$$

где  $F$  — площадь сечения стержня.

Составим уравнение движения элемента  $dz$  стержня (рис. 17.1):

$$m_0 dz \partial^2 x / \partial t^2 = (\partial N / \partial z) dz,$$

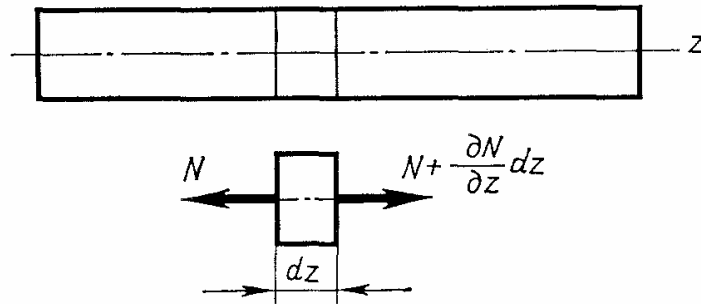


Рис. 17.1

где  $m_0$  — масса единицы длины стержня, или после подстановки значения  $N$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial z^2} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = 0 \quad (a = \sqrt{EF/m_0}). \quad (17.2)$$

Для однородного стержня  $m_0 = \rho F$ , где  $\rho$  — плотность материала,

$$a = \sqrt{E/\rho}. \quad (17.3)$$

Как видно из вывода, уравнение продольных колебаний (17.2) является приближенным. Однако его погрешности становятся заметными только при исследовании весьма высокочастотных колебаний, когда длины волн, распространяющихся в стержне, имеют размеры порядка размеров поперечного сечения.

**Крутильные колебания круглого стержня.** При выводе уравнения движения предположим, что при колебаниях стержень деформируется так же, как и при статическом кручении: поперечные сечения его остаются плоскими и поворачиваются вокруг оси стержня, как жесткие диски.

Обозначив угол поворота сечения стержня  $x$ , найдем крутящий момент в сечении:

$$M = GJ_p \partial x / \partial z. \quad (17.4)$$

Уравнение движения элемента  $dz$  стержня (рис. 17.2) имеет вид

$$\theta_0 dz \partial^2 x / \partial t^2 = (\partial M / \partial z) dz,$$

где  $\theta_0$  — момент инерции массы единицы длины стержня.

После подстановки значения момента получим уравнение, совпадающее по форме с уравнением продольных колебаний:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial z^2} - \frac{1}{a_\gamma^2} \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = 0, \quad a_\gamma = \sqrt{GJ_p/\theta_0}. \quad (17.5)$$

Для однородного стержня  $\theta_0 = \rho J_p$  и

$$a_\gamma = \sqrt{G/\rho}. \quad (17.6)$$

Заметим, что уравнение (17.5), выведенное для круглого стержня, приближенно может быть использовано и для исследования крутиль-

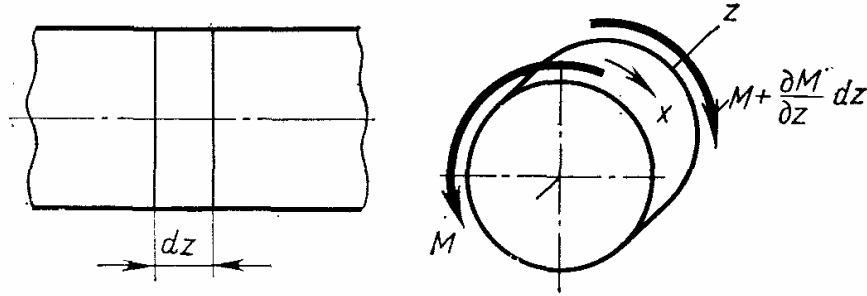


Рис. 17.2

ных колебаний стержней сплошного некруглого сечения. (Конечно, в этом случае жесткость на кручение  $GJ_p$  должна быть заменена величиной  $GJ_h$  в соответствии с формой поперечного сечения). Приближенность такого подхода состоит в том, что не учитываются силы инерции, связанные с деформацией плоскости поперечного сечения стержня.

Для тонкостенных стержней открытого профиля пренебрежение продольными смещениями недопустимо и к расчету колебаний таких стержней уравнение (17.5) неприменимо.

Поперечные колебания натянутой струны. Струну (рис. 17.3, а) считаем абсолютно гибкой, так что в каждом ее поперечном сечении имеется только продольная сила. Предположим также, что поперечные перемещения точек струны весьма малы и поэтому натяжение  $T_0$  можно считать не изменяющимся в процессе движения.

Обозначив поперечные перемещения  $x$ , составим уравнение движения элемента струны  $dz$  (рис. 17.3, б). К концам этого элемента приложены продольные усилия  $T_0$ , составляющие между собой малый угол  $d\varphi = dz/R$ , где  $R$  — радиус кривизны изогнутой струны. Проектируя силы на нормаль к элементу и приравнявая их проекцию произведению его массы на ускорение, находим

$$m_0 dz \partial^2 x / \partial t^2 = T_0 dz / R.$$

Здесь  $m_0$  — масса единицы длины струны.

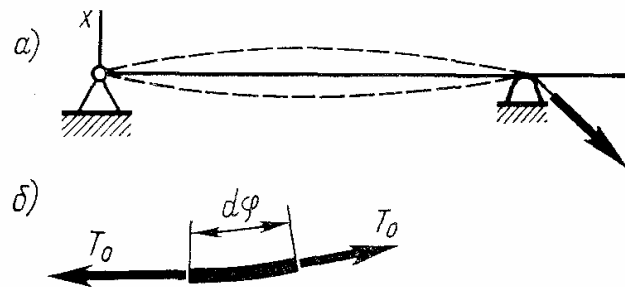


Рис. 17.3

Полагая в связи с малостью перемещений  $1/R = \partial^2 x / \partial z^2$ , приводим уравнение движения к виду

$$\frac{\partial^2 x}{\partial z^2} - \frac{1}{a_T^2} \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = 0, \quad a_T = \sqrt{T_0/m_0}. \quad (17.7)$$

**Определение частот и форм собственных продольных колебаний стержней постоянного сечения.** Как было показано в предыдущем параграфе, исследование продольных и крутильных колебаний стержня постоянного поперечного сечения и колебаний струны приводит к одному и тому же дифференциальному уравнению (17.2) в частных производных, так называемому *волновому уравнению*. Для этих задач различны лишь смысл перемещения  $x$  и числовые значения  $a$ . Поэтому далее рассматриваются решения уравнения только применительно к продольным колебаниям стержней. Полученные здесь результаты могут быть полностью приложены к расчету крутильных колебаний и колебаний струн.

Решение волнового уравнения, соответствующее собственным колебаниям стержня, может быть представлено в виде

$$x(z, t) = u(z) \cos(pt + \varphi), \quad (17.8)$$

где  $p$  — угловая частота колебаний;  $u(z)$  — амплитудная функция, определяющая форму колебания.

Подставив это выражение в уравнение (17.2), получим обыкновенное дифференциальное уравнение для амплитудной функции

$$d^2u/dz^2 + \alpha^2 u = 0, \quad \alpha^2 = p^2/a^2. \quad (17.9)$$

Общее решение уравнения (17.9) имеет вид

$$u(z) = C_1 \cos \alpha z + C_2 \sin \alpha z. \quad (17.10)$$

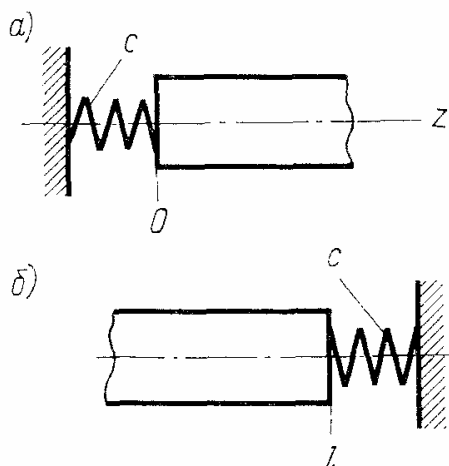


Рис. 17.4

Амплитудная функция должна удовлетворять граничным условиям на концах стержня. Эти условия таковы: при заделанных торцах  $x = 0$  и, следовательно,  $u = 0$ ; при свободных торцах  $N = 0$  и, следовательно,  $du/dz = 0$ .

Если левый торец стержня ( $z = 0$ ) упруго закреплен (рис. 17.4,а), причем жесткость закрепления  $c$ , то  $N = cx$ , следовательно,  $EF(du/dz) = cu$ . Если упруго закреплен правый торец (рис. 17.4,б), граничное условие имеет вид  $EF(du/dz) = -cu$ .

Рассмотрим случай, когда конец стержня связан с жестким грузом массой  $m$  (рис. 17.5,а). Граничное условие для функции  $u(z)$  можно получить, составляя уравнение движения груза  $m$ :

$$m(\partial^2 x / \partial t^2) = N = EF(\partial x / \partial z)$$

и заменяя в нем  $x$  выражением (17.8):

$$-mp^2u = EF(du/dz).$$

Аналогично, если груз закреплен на правом конце стержня (рис. 17.5, б), имеем

$$-mp^2u = -EF(du/dz).$$

При любом способе закрепления концов стержня, подставив в граничные условия общее выражение (17.10) функции  $u(z)$ , придем к сис-

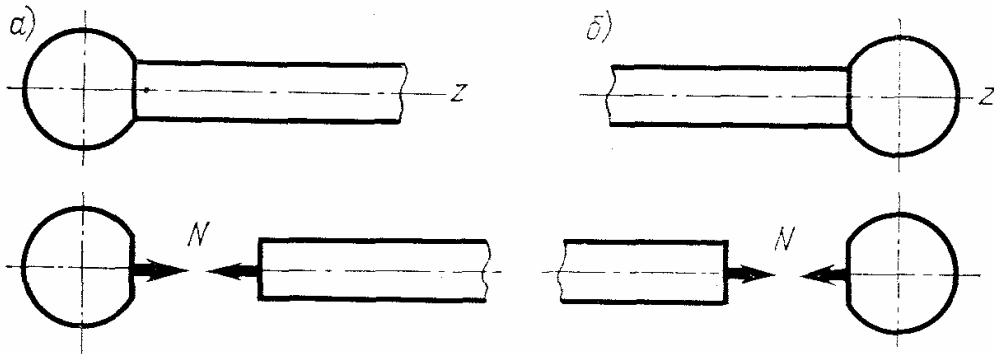


Рис. 17.5

теме двух линейных алгебраических уравнений относительно  $C_1$  и  $C_2$ . Равенство нулю определителя системы позволяет найти собственные частоты стержня. Рассмотрим некоторые примеры.

**Стержень, закрепленный по концам.** Условия  $u(0) = 0$ ,  $u(l) = 0$  приводят к уравнениям

$$C_1 = 0; \quad C_2 \sin \lambda = 0 \quad (\lambda = \alpha l = pl/a).$$

При  $C_2 \neq 0$  необходимо, чтобы  $\sin \lambda = 0$ . Отсюда  $\lambda_k = k\pi$  ( $k = 1, 2, 3, \dots$ ).

Частоты собственных колебаний

$$p_k = \lambda_k a/l = k\pi \sqrt{E/(\rho l^2)} \quad (k = 1, 2, 3, \dots).$$

Каждой собственной частоте соответствует форма собственных колебаний (*собственная функция*)

$$u_k = \sin(k\pi z/l).$$

(Так как существенна лишь форма зависимости  $u(z)$ , а не ее масштаб, принято  $C_2 = 1$ ).

Формы колебаний, соответствующие разным значениям  $k$ , показаны на рис. 17.6.

**Стержень со свободными концами.** Граничные условия

$$(du/dz)_{z=0} = 0; \quad (du/dz)_{z=l} = 0 \quad \text{дают} \quad C_2 \alpha = 0; \quad -C_1 \alpha \sin \alpha l = 0,$$

откуда  $\lambda \sin \lambda = 0; \quad (\lambda = \alpha l = pl/a).$

Это условие удовлетворяется при  $\lambda_0 = 0$  и при  $\lambda_k = k\pi$ . Собственные частоты:

$$p_0 = 0, \quad p_k = \lambda_k a / l = k\pi \sqrt{E / (\rho l^2)}.$$

Нулевой частоте соответствует  $u = \text{const}$ , т. е. движение стержня как жесткого, а ненулевым частотам —

$$u_k = \cos(k\pi z / l).$$

Формы колебаний показаны на рис. 17.7.

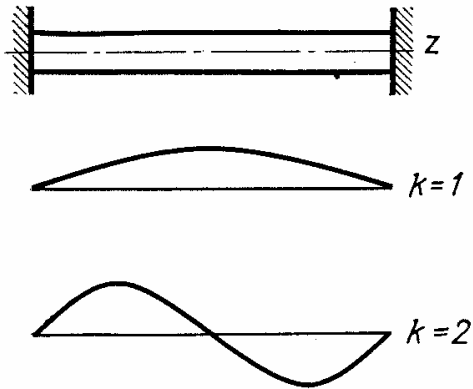


Рис. 17.6

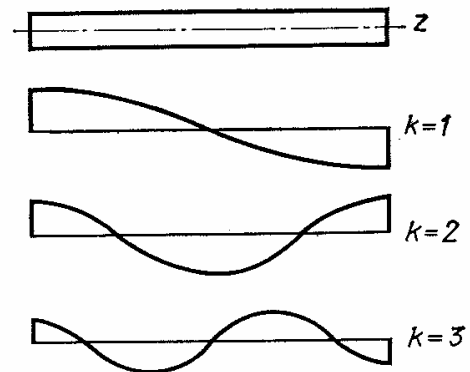


Рис. 17.7

**Стержень, заделанный одним концом.** Из граничных условий  $u_{z=0} = 0$ ,  $(du/dz)_{z=l} = 0$  следует уравнение частот  $\cos \lambda = 0$  ( $\lambda = pl/a$ ), откуда

$$\lambda_k = (k - 1/2) \pi \quad (k = 1, 2, 3, \dots),$$

$$u_k(z) = \sin[(k - 1/2)(\pi z / l)].$$

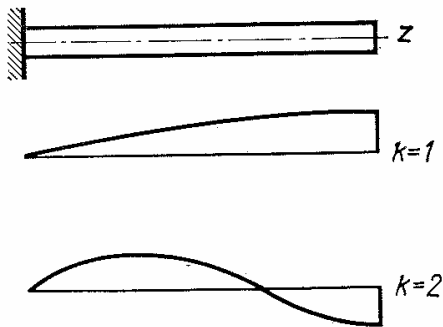


Рис. 17.8

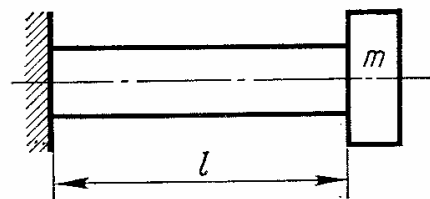


Рис. 17.9

Формы колебаний, соответствующие  $k = 1, 2$ , показаны на рис. 17.8

**Стержень с грузом на конце** (рис. 17.9). Граничные условия  $u_{z=0} = 0$ ;  $EF (du/dz)_{z=l} = mp^2 u_{z=l}$  приводят к уравнениям

$$C_1 = 0; \quad EFC_2 \alpha \cos \lambda = mp^2 C_2 \sin \lambda \quad (\lambda = pl/a).$$

Это уравнение нетрудно привести к виду

$$\operatorname{tg} \lambda = \alpha / \lambda, \quad (17.11)$$

где  $\kappa = \rho Fl/m$  — отношение массы стержня к массе груза.

Графическое решение уравнения (17.11) при  $\kappa = 1/2$  представлено на рис. 17.10.

Если масса стержня мала по сравнению с массой груза, то приближенно решение можно получить, раскладывая  $\operatorname{tg} \lambda$  в ряд:

$$\operatorname{tg} \lambda = \lambda + \frac{1}{3} \lambda^3 + \frac{1}{5} \lambda^5 + \dots$$

и удерживая только первые члены ряда.

С учетом одного члена имеем  $\lambda = \sqrt{\kappa}$ .

Учитывая два члена, находим  $\lambda \cong \sqrt{\frac{\kappa}{1 + \frac{1}{3}\kappa}}$  и приближенное значение частоты

$$\rho = \sqrt{EF/[l(m + \frac{1}{3}\rho Fl)]} \quad (17.12)$$

Формы собственных колебаний определяются равенством

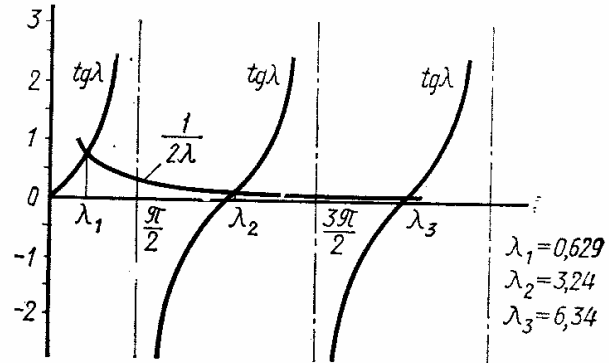


Рис. 17.10

$$u_k = \sin(\lambda_k z/l). \quad (17.13)$$

Легко проверить, что во всех рассмотренных выше случаях собственные функции удовлетворяют условиям ортогональности

$$\int_m u_k u_r dm = 0 \quad (k \neq r). \quad (17.14)$$

Для стержней без присоединенных масс выполнение этого соотношения очевидно. Для стержня с массой на конце получаем

$$\int_m u_k u_r dm = \int_0^l \sin(\lambda_k z/l) \sin(\lambda_r z/l) m_c dz + m \sin \lambda_k \sin \lambda_r.$$

Вычисляя это выражение, в первом слагаемом которого учтена распределенная, а во втором — сосредоточенная масса, находим

$$\begin{aligned} \int_m u_k u_r dm &= \frac{1}{2} m_0 l \left[ \frac{\sin(\lambda_k - \lambda_r)}{\lambda_k - \lambda_r} - \frac{\sin(\lambda_k + \lambda_r)}{\lambda_k + \lambda_r} \right] + m \sin \lambda_k \sin \lambda_r = \\ &= m \sin \lambda_k \sin \lambda_r \left[ \kappa \frac{\lambda_k \operatorname{ctg} \lambda_k - \lambda_r \operatorname{ctg} \lambda_r}{\lambda_r^2 - \lambda_k^2} + 1 \right]. \end{aligned}$$

В соответствии с уравнением (17.11)  $\operatorname{ctg} \lambda_k = \lambda_k/\kappa$ ;  $\operatorname{ctg} \lambda_r = \lambda_r/\kappa$ , откуда ясно, что соотношение ортогональности (17.14) выполняется.

**Колебания ступенчатого стержня.** Для стержня, состоящего из нескольких участков различного сечения, можно составить выражения (17.10) амплитудной функции на каждом участке. Эти выражения содержат  $2k$  постоянных  $C_{i1}$ ,  $C_{i2}$  ( $k$  — число участков). Имеется также  $2k$  граничных условий, выражающих  $2k - 2$  условия сопряжения участков и два условия закрепления концов стержня. Граничные усло-

вия приводят к системе  $2k$  линейных однородных уравнений относительно  $C_{i1}, C_{i2}$ . Приравняв нулю определитель этих уравнений, получают частотное уравнение.

В качестве примера составим уравнение частот для стержня, состоящего из двух участков разного сечения (рис. 7.11). Запишем выражения амплитудной функции на каждом из участков:

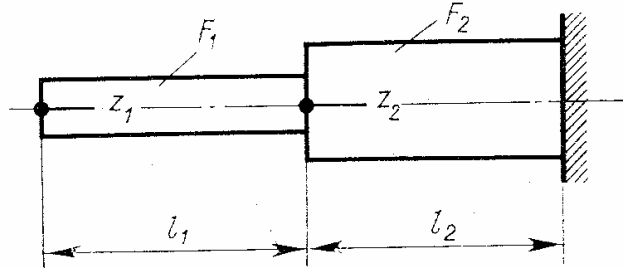


Рис. 7.11

$$u_1 = C_{11} \cos \alpha z_1 + C_{12} \sin \alpha z_1,$$

$$u_2 = C_{21} \cos \alpha z_2 + C_{22} \sin \alpha z_2.$$

(Значение  $\alpha = p\sqrt{Q/E}$  одинаково для обоих участков в связи с тем, что материал их одинаков.)

Для определения постоянных  $C$  имеем следующие граничные условия:

- 1)  $(du_1/dz_1)_{z_1=0} = 0$ ,  
 2)  $(u_2)_{z_2=l_2} = 0$ ,  
 3)  $(u_1)_{z_1=l_1} = (u_2)_{z_2=0}$ ,  
 4)  $EF_1(du_1/dz_1)_{z_1=l_1} = EF_2(du_2/dz_2)_{z_2=0}$ .

Равенства 1 и 2 выражают условия закрепления концов стержня, равенства 3 и 4 — условия сопряжения участков (одинаковость перемещений и продольных сил в точке сопряжения).

Из граничных условий находим:

$$C_{12} = 0, \quad C_{21} \cos \lambda_2 + C_{22} \sin \lambda_2 = 0,$$

$$C_{11} \cos \lambda_1 + C_{12} \sin \lambda_1 = C_{21},$$

$$EF_1(-\alpha C_{11} \sin \lambda_1 + \alpha C_{12} \cos \lambda_1) = EF_2 \alpha C_{22},$$

$$(\lambda_1 = \alpha l_1; \quad \lambda_2 = \alpha l_2).$$

Равенство нулю определителя этих уравнений приводит к выражению

$$\begin{vmatrix} 0 & \cos \lambda_2 & \sin \lambda_2 \\ \cos \lambda_1 & -1 & 0 \\ -F_1 \sin \lambda_1 & 0 & -F_2 \end{vmatrix} = 0,$$

или

$$F_2 \cos \lambda_1 \cos \lambda_2 - F_1 \sin \lambda_1 \sin \lambda_2 = 0.$$

Обозначив  $\alpha l = pl/a = \lambda$ , представим полученное уравнение в форме

$$\frac{F_1}{F_2} \operatorname{tg} \left( \frac{l_1}{l} \lambda \right) = \operatorname{ctg} \left( \frac{l_2}{l} \lambda \right).$$

Это трансцендентное уравнение легко в каждом частном случае решить одним из известных методов приближенного решения уравнений — итерацией, методом линейных приближений или графически, подобно тому, как с помощью рис. 7.10 решалось уравнение (7.11).

Изложенный выше способ решения, заключающийся в разворачи-



нии частотного уравнения и последующем его численном решении, при большом числе участков становится весьма громоздким. В этом случае для расчета целесообразно использовать численный вариант метода начальных параметров, изложенный в гл. IV.

## § 18. ИЗГИБНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ПРЯМЫХ СТЕРЖНЕЙ

### Дифференциальное уравнение движения и его общее решение.

Примем справедливость гипотезы Бернулли и пренебрежем силами инерции частиц стержня в их движении вдоль оси (в связи с поворотом поперечных сечений).

Тогда дифференциальное уравнение свободного движения можно получить, заменяя интенсивность нагрузки  $q$  в уравнении статического изгиба (рис. 18.1)

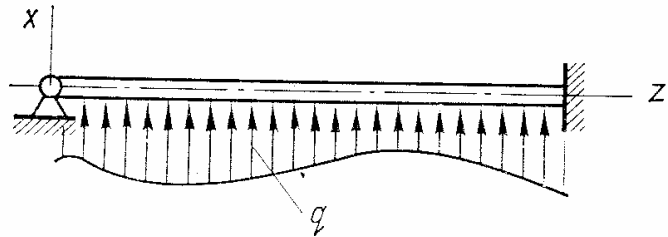


Рис. 18.1

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \left( EJ \frac{\partial^2 x}{\partial z^2} \right) = q$$

интенсивностью сил инерции  $-m_0 (\partial^2 x / \partial t^2)$ :

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \left( EJ \frac{\partial^2 x}{\partial z^2} \right) + m_0 \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = 0. \quad (18.1)$$

Здесь  $x(z, t)$  — поперечное перемещение;  $EJ$  — жесткость при изгибе в плоскости колебаний;  $m_0$  — масса единицы длины стержня.

Соответствующее собственным колебаниям решение уравнения движения (18.1) представим в форме

$$x(z, t) = u(z) \cos(pt + \varphi), \quad (18.2)$$

где  $u(z)$  — амплитудная функция;  $p$  — угловая частота колебаний.

Подставляя выражение (18.2) в уравнение (18.1), получаем обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2}{dz^2} \left( EJ \frac{d^2 u}{dz^2} \right) - m_0 p^2 u = 0. \quad (18.3)$$

Для балки постоянного сечения  $EJ$  можно вынести за знак дифференцирования.

Тогда уравнение (18.3) получает вид

$$d^4 u / dz^4 - \alpha^4 u = 0 \quad [\alpha^4 = p^2 m_0 / (EJ)]. \quad (18.4)$$

Корни характеристического уравнения, соответствующего уравнению (18.4), равны  $\pm \alpha$  и  $\pm \alpha \sqrt{-1}$ . В соответствии с этим решения однородного уравнения (18.4) выражаются через тригонометрические и

показательные функции аргумента  $\alpha z$ . Значительное удобство, однако, представляет использование введенных А. Н. Крыловым комбинаций этих функций. Обозначая функции Крылова символами  $K_1, K_2, K_3, K_4$ , можем представить решение уравнения (18.4) в форме

$$u = C_1 K_1(\alpha z) + C_2 K_2(\alpha z) + C_3 K_3(\alpha z) + C_4 K_4(\alpha z). \quad (18.5)$$

Здесь  $C_1, \dots, C_4$  — постоянные;

$$\begin{aligned} K_1(\alpha z) &= 1/2 (\operatorname{ch} \alpha z + \cos \alpha z); \\ K_2(\alpha z) &= 1/2 (\operatorname{sh} \alpha z + \sin \alpha z); \\ K_3(\alpha z) &= 1/2 (\operatorname{ch} \alpha z - \cos \alpha z); \\ K_4(\alpha z) &= 1/2 (\operatorname{sh} \alpha z - \sin \alpha z). \end{aligned} \quad (18.6)$$

Заметим, что в литературе\* функции Крылова часто обозначаются символами  $S, T, U, V$ , однако введенные здесь обозначения представляют определенное удобство.

Последовательные производные функции Крылова связаны зависимостями

$$\frac{d}{dz} K_1(\alpha z) = \alpha K_4(\alpha z); \quad \frac{d}{dz} K_2(\alpha z) = \alpha K_1(\alpha z); \quad (18.7)$$

$$\frac{d}{dz} K_3(\alpha z) = \alpha K_2(\alpha z); \quad \frac{d}{dz} K_4(\alpha z) = \alpha K_3(\alpha z).$$

Таким образом, при каждом дифференцировании номер функции понижается на единицу.

При аргументе, равном нулю,  $K_1(0) = 1$ , а все остальные функции равны нулю.

Указанные выше свойства функций Крылова существенно упрощают выполнение граничных условий для балок. Так, можно установить, что постоянные  $C_1, \dots, C_4$  в выражении (18.5) связаны с амплитудными значениями прогиба  $u$ , угла поворота  $du/dz$ , изгибающего момента  $M = EJ(d^2u/dz^2)$  и поперечной силы  $Q = EJ(d^3u/dz^3)$  в начальном сечении ( $z = 0$ ) равенствами

$$C_1 = u_{z=0}; \quad C_2 = \frac{1}{\alpha} \left( \frac{du}{dz} \right)_{z=0}; \quad C_3 = \frac{1}{EJ\alpha^2} M_{z=0}; \quad C_4 = \frac{1}{EJ\alpha^3} Q_{z=0}. \quad (18.8)$$

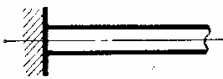
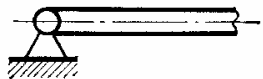
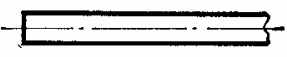
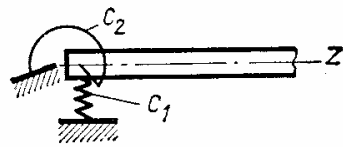
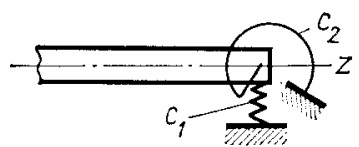

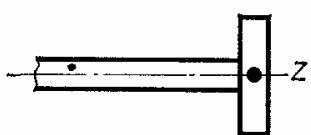
На каждом конце балки имеются два граничных условия, зависящие от способа закрепления.

Некоторые возможные варианты граничных условий приведены в табл. 18.1. Следует обратить внимание на то, что при упругих опорах

---

\* Таблицы функций Крылова приведены в кн.: А н а н ь е в И. В., Е г о р ш е в а Н. И. Табулированные значения комбинаций круговых и гиперболических функций. М., Машиностроение, 1974, а также в работе [1].

Таблица 18.1

Название закрепления	Схема	Граничные условия
Заделка		$u = 0; \quad \frac{du}{dz} = 0$
Шарнирная опора		$u = 0; \quad \frac{d^2u}{dz^2} = 0$
Свободный конец		$\frac{d^2u}{dz^2} = 0; \quad \frac{d^3u}{dz^3} = 0$
Упругая в отношении поперечных смещений и поворотов опора ( $c_1, c_2$ — коэффициенты жесткости)		$c_1 u = -EJ \frac{d^3u}{dz^3};$ $c_2 \frac{du}{dz} = EJ \frac{d^2u}{dz^2}$
		$c_1 u = EJ \frac{d^3u}{dz^3};$ $c_2 \frac{du}{dz} = -EJ \frac{d^2u}{dz^2}$
Конец балки связан с жестким грузом. Масса груза $m$ , момент инерции $I$ массы относительно центральной оси, перпендикулярной плоскости чертежа		$mp^2 u = EJ \frac{d^3u}{dz^3};$ $I p^2 \frac{du}{dz} = -EJ \frac{d^2u}{dz^2}$
		$mp^2 u = -EJ \frac{d^3u}{dz^3};$ $I p^2 \frac{du}{dz} = EJ \frac{d^2u}{dz^2}$

и прикреплении жесткого груза знаки в граничных условиях зависят от того, совпадает ли внешняя нормаль к сечению с осью  $z$  или их направления противоположны.

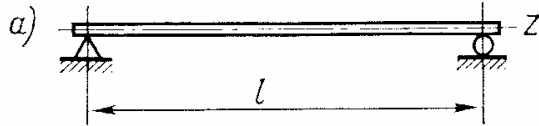
При любом способе закрепления концов граничные условия приводят к системе четырех линейных однородных алгебраических уравнений относительно констант  $C_1, \dots, C_4$ . Частоты собственных колебаний определяются из условия равенства нулю определителя этих уравнений.

Рассмотрим некоторые примеры определения частот однопролетных балок.

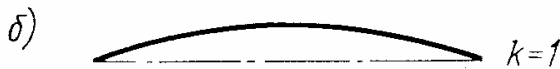
**Балка, шарнирно опертая по концам** (рис. 18.2,а). Расположим начало координат на левом конце балки. Тогда имеют место следующие граничные условия:

$$u_{z=0} = 0, \quad \left( \frac{d^2 u}{dz^2} \right)_{z=0} = 0; \quad u_{z=l} = 0, \quad \left( \frac{d^2 u}{dz^2} \right)_{z=l} = 0.$$

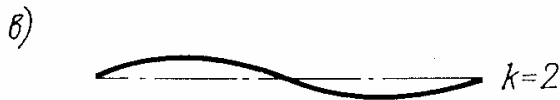
Из условий на левом конце ( $z = 0$ ) вытекает, что постоянные  $C_1$  и  $C_3$  в формуле (18.5) равны нулю. Тогда форма колебаний определяется зависимостью



$$u(z) = C_2 K_2(\alpha z) + C_4 K_4(\alpha z). \quad (18.9)$$



Условия при  $z = l$  приводят к равенствам



$$C_2 K_2(\lambda) + C_4 K_4(\lambda) = 0, \quad (18.10)$$

$$C_2 K_4(\lambda) + C_4 K_2(\lambda) = 0 \quad (\lambda = \alpha l).$$

Рис. 18.2

При дифференцировании используются соотношения (18.7).

Приравняв нулю определитель системы (18.10), приходим к частотному уравнению

$$K_2^2(\lambda) - K_4^2(\lambda) = 0.$$

Подставляя сюда выражения функций  $K_2$ ,  $K_4$ , получаем

$$\operatorname{sh} \lambda \sin \lambda = 0.$$

Так как  $\operatorname{sh} \lambda \neq 0$ , то  $\sin \lambda = 0$  и  $\lambda_k = k\pi$  ( $k = 1, 2, 3, \dots$ ). Отсюда частоты собственных колебаний

$$p_k = \frac{\lambda_k^2}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{m_0}} = k^2 \pi^2 \sqrt{\frac{EJ}{m_0 l^4}} \quad (k = 1, 2, 3, \dots). \quad (18.11)$$

Таким образом, имеется бесчисленное множество форм собственных колебаний, частоты которых пропорциональны квадратам натурального ряда чисел.

Определим вид упругой линии при этих колебаниях. Из первого уравнения (18.10)

$$C_4 = - \frac{K_2(\lambda)}{K_4(\lambda)} C_2.$$

Но так как  $\lambda_k = k\pi$ , то  $K_2(\lambda_k) = K_4(\lambda_k) = \frac{1}{2} \operatorname{sh} \lambda_k$  и, значит  $C_4 = -C_2$ . Следовательно,

$$u(z) = C_2 K_2(\alpha z) + C_4 K_4(\alpha z) = C_2 [K_2(\alpha z) - K_4(\alpha z)] = C_2 \sin \alpha z.$$

Наконец, полагая  $C_2 = 1$  и учитывая, что  $\alpha_k = \lambda_k/l = k\pi/l$ , получаем, что  $k$ -я форма собственных колебаний представляет собой синусоиду с  $k$  полуволнами (рис. 18.2, б, в):

$$u_k = \sin(k\pi z/l).$$

**Консольная балка** (рис. 18.3). Граничные условия таковы:

$$u_{z=0} = 0, \quad \left(\frac{du}{dz}\right)_{z=0} = 0, \quad \left(\frac{d^2u}{dz^2}\right)_{z=l} = 0, \quad \left(\frac{d^3u}{dz^3}\right)_{z=l} = 0.$$

Из условий при  $z = 0$  устанавливаем, что равны нулю постоянные  $C_1$  и  $C_2$ , а условия при  $z = l$  приводят к уравнениям

$$C_3 K_1(\lambda) + C_4 K_2(\lambda) = 0,$$

$$C_3 K_4(\lambda) + C_4 K_1(\lambda) = 0 \quad (\lambda = \alpha l).$$

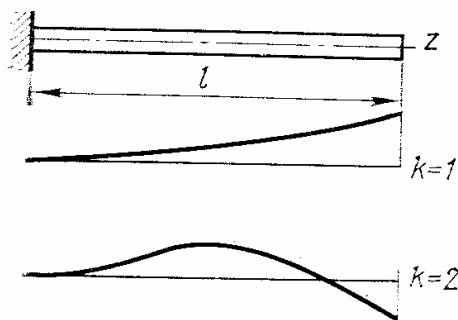


Рис. 18.3

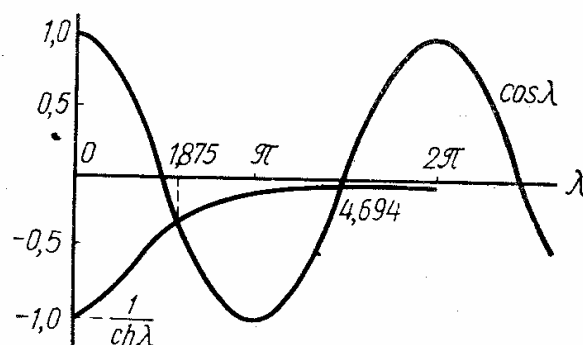


Рис. 18.4

Частотное уравнение

$$K_1^2(\lambda) - K_2(\lambda) K_4(\lambda) = 0$$

можно привести к виду

$$\cos \lambda = -1/\operatorname{ch} \lambda.$$

Графическое решение этого уравнения показано на рис. 18.4. Корни уравнения  $\lambda_1 = 1,875$ ;  $\lambda_2 = 4,694$ , при  $k > 2$

$$\lambda_k = \frac{2k-1}{2} \pi.$$

Частоты колебаний определяются по формуле

$$p_k = \lambda_k^2 \sqrt{EJ/(m_0 l^4)}.$$

Амплитудные функции определяются уравнением

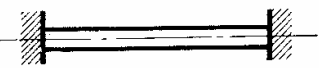
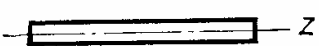
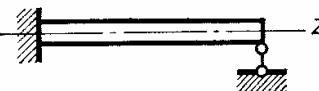
$$u_k(z) = K_2(\lambda_k) K_3(\lambda_k z/l) - K_1(\lambda_k) K_4(\lambda_k z/l). \quad (18.12)$$

В табл. 18.2 приведены формы колебаний и их частоты еще для трех видов закрепления концов однопролетных балок.

Заметим, что балка с незакрепленными концами кроме частот собственных колебаний\*, приведенных в табл. 18.2, имеет также две нулевые частоты, соответствующие поступательному и вращательному движениям балки как жесткого тела.

\* Эти частоты совпадают с собственными частотами балки, концы которой заделаны.

Таблица 18.2

Схема балки	Граничные условия		Значение $\lambda$ в формуле $p_k = \lambda_k^2 \sqrt{\frac{EJ}{m_0 l^4}}$	Амплитудная функция
	$z=0$	$z=l$		
	$u = 0;$ $\frac{du}{dz} = 0$	$u = 0;$ $\frac{du}{dz} = 0$	$\lambda_1 = 4,730;$ $[\lambda_2 = 7,853$	$u_k = K_4(\lambda_k) \times$ $\times K_3\left(\lambda_k \frac{z}{l}\right) -$ $- K_3(\lambda_k) K_4\left(\lambda_k \frac{z}{l}\right)$
	$\frac{d^2u}{dz^2} = 0;$ $\frac{d^3u}{dz^3} = 0$	$\frac{d^2u}{dz^2} = 0;$ $\frac{d^3u}{dz^3} = 0$	$\lambda_k = \frac{2k+1}{2} \pi$ $(k > 2)$	$u_k = K_4(\lambda_k) \times$ $\times K_1\left(\lambda_k \frac{z}{l}\right) -$ $- K_3(\lambda_k) K_2\left(\lambda_k \frac{z}{l}\right)$
	$u = 0;$ $\frac{du}{dz} = 0$	$u = 0;$ $\frac{d^2u}{dz^2} = 0$	$\lambda_1 = 3,927;$ $\lambda_2 = 7,069;$ $\lambda_k = \frac{4k+1}{4} \pi$	$u_k = K_2(\lambda_k) \times$ $\times K_3\left(\lambda_k \frac{z}{l}\right) -$ $- K_1(\lambda_k) K_4\left(\lambda_k \frac{z}{l}\right)$

**Расчет балок с несколькими участками.** Для расчета колебаний балки постоянного сечения с несколькими участками удобно использовать метод А. Н. Крылова, позволяющий автоматически выполнять условия сопряжения участков.

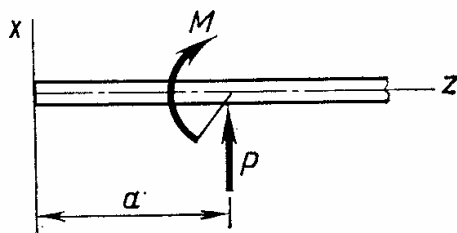


Рис. 18.5

Рассмотрим балку (рис. 18.5), совершающую гармонические колебания по закону

$$x(z, t) = u(z) \cos(\omega t + \varphi).$$

Пусть в сечении  $z = a$  к балке приложены сила и момент, также меняющиеся по гармоническому закону:

$$P = P_0 \cos(\omega t + \varphi), \quad M = M_0 \cos(\omega t + \varphi).$$

Сечение  $z = a$  делит балку на два участка — левый ( $z < a$ ) и правый ( $z > a$ ). На этих участках функция  $u(z)$  выражается разными формулами:  $u_-(z)$  и  $u_+(z)$ .

В сечении  $z = a$  эти значения функции должны удовлетворять условиям сопряжения

$$u_+(a) = u_-(a), \quad u'_+(a) = u'_-(a), \quad (18.13)$$

$$u''_+(a) = u''_-(a) + M_0/(EJ), \quad u'''_+(a) = u'''_-(a) + P_0/(EJ).$$

(Штрихами обозначены производные.)

Все эти условия удовлетворяются, если принять при общем для обоих участков начале отсчета, что

$$u_+(z) = u_-(z) + \frac{M_0}{EJ\alpha^2} K_3[\alpha(z-a)] + \frac{P_0}{EJ\alpha^3} K_4[\alpha(z-a)]. \quad (18.14)$$

Выполнение условий (18.13) легко проверить, воспользовавшись правилами дифференцирования (18.7) функций Крылова и учитывая, что  $K_1(0) = 1$ , а  $K_2(0) = K_3(0) = K_4(0) = 0$ .

В качестве примера рассмотрим определение частот собственных колебаний балки с опорой, расположенной в пролете (рис. 18.6).

Так как левый конец балки оперт, то в выражении  $u(z)$  для левого участка ( $z < a$ )  $C_1 = C_3 = 0$  и

$$u_-(z) = C_2 K_2(\alpha z) + C_4 K_4(\alpha z).$$

В сечении  $z = a$  приложена опорная реакция, которая при свободных колебаниях меняется, конечно, по гармоническому закону. Поэтому в соответствии с формулой (18.14) для правого участка ( $z > a$ ) имеем

$$u_+(z) = C_2 K_2(\alpha z) + C_4 K_4(\alpha z) + H K_4[\alpha(z-a)],$$

где  $H = R/(\alpha^3 EJ)$ , причем  $R$  — амплитудное значение реакции.

Для определения трех констант  $C_2$ ,  $C_4$ ,  $H$  имеются три граничных условия — равенство нулю прогиба на опоре ( $z = a$ ) и равенства нулю момента и поперечной силы в сечении  $z = l$ .

Таким образом, получаем такие уравнения:

$$C_2 K_2(\alpha a) + C_4 K_4(\alpha a) = 0,$$

$$C_2 K_4(\alpha l) + C_4 K_2(\alpha l) + H K_2(\alpha b) = 0,$$

$$C_2 K_3(\alpha l) + C_4 K_1(\alpha l) + H K_1(\alpha b) = 0 \quad (b = l - a).$$

Уравнение частот имеет вид

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} K_2(\lambda a/l) & K_4(\lambda a/l) & 0 \\ K_4(\lambda) & K_2(\lambda) & K_2(\lambda b/l) \\ K_3(\lambda) & K_1(\lambda) & K_1(\lambda b/l) \end{vmatrix} = 0. \quad (18.15)$$

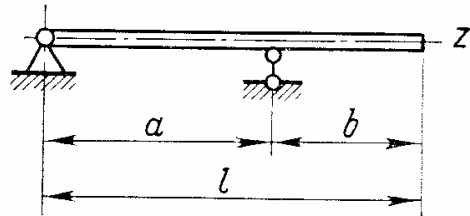


Рис. 18.6

Решение уравнения (18.15) и ему подобных удобно проводить подбором\*.

Задавшись величиной  $\lambda = \lambda_1$ , вычисляют  $\Delta(\lambda)$ . Затем повторяют вычисления при новом значении  $\lambda = \lambda_2$ . Следующее приближение выбирают, пользуясь линейной интерполяцией:

$$\lambda_3 = \frac{\lambda_1 \Delta(\lambda_2) - \lambda_2 \Delta(\lambda_1)}{\Delta(\lambda_2) - \Delta(\lambda_1)}. \quad (18.16)$$

Вычисление проводят до тех пор, пока разница между двумя последовательными приближениями не будет достаточно малой.

Если требуется найти несколько частот собственных колебаний, то целесообразно построить график зависимости  $\Delta(\lambda)$  и определить точки его пересечения с осью абсцисс.

Проведем определение низшей частоты колебаний балки (рис. 18.6) для случая  $a = b = l/2$ . Уравнение (18.15) получает вид

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} K_2(\lambda/2) & K_1(\lambda/2) & 0 \\ K_4(\lambda) & K_2(\lambda) & K_2(\lambda/2) \\ K_3(\lambda) & K_1(\lambda) & K_1(\lambda/2) \end{vmatrix} = 0. \quad (18.15a)$$

При выборе значения  $\lambda$  для первого приближения учтем, что если опоры расположены по концам балки ( $a = l$ ), то  $\lambda = \pi$ ; если обе опоры расположены у левого конца ( $a = 0$ ), то балка превращается в консольную и  $\lambda = 1,875$ . В нашем случае, очевидно,  $\lambda$  будет иметь промежуточное значение. Принимаем  $\lambda_1 = 2,5$ . По таблицам находим:

$$\begin{aligned} K_1(2,5) &= 2,66557, & K_2(2,5) &= 3,32433, \\ K_3(2,5) &= 3,96671, & K_4(2,5) &= 2,72586; \\ K_1(1,25) &= 1,10187, & K_2(1,25) &= 1,27545, \\ & & K_4(1,25) &= 0,32647. \end{aligned}$$

Подставляем эти данные в уравнение (18.15a) и вычисляем определитель:

$$\Delta(2,5) = 0,7383.$$

Теперь примем  $\lambda_2 = 3,0$ . Повторяя вычисления, находим

$$\Delta(3,0) = 0,0332.$$

Следующее приближение принимаем по формуле (18.16):

$$\lambda_3 = \frac{3 \cdot 0,7383 - 2,5 \cdot 0,0332}{0,7383 - 0,0332} = 3,02.$$

Снова вычисляем определитель:

$$\Delta(3,02) = -0,0276.$$

Таким образом, низший корень уравнения (18.15a) заключен между  $\lambda = 3,0$  и  $\lambda = 3,02$ . По формуле (18.16) определяем

$$\lambda = \frac{3,0(-0,0276) - 3,02 \cdot 0,0332}{-0,0276 - 0,0332} = 3,011.$$

---

\* При расчете на ЦВМ используются стандартные программы решения трансцендентных уравнений.



Полученное таким образом значение  $\lambda$  можно считать достаточно точным. Следовательно, низшая частота колебаний балки составляет

$$p = \lambda^2 \sqrt{EJ/(m_0 l^4)} = 9,066 \sqrt{EJ/(m_0 l^4)}.$$

Используя формулу (18.14), легко составить единое выражение функции  $u(z)$ , например для балки постоянного сечения с закрепленным на ней жестким грузом (рис. 18.7). Для левого участка ( $z < a$ ) имеем

$$u_-(z) = C_2 K_2(\alpha z) + C_4 K_4(\alpha z).$$

[Постоянные  $C_1$  и  $C_3$  в общем выражении (18.5) обращаются в нуль в связи с шарнирным закреплением конца балки  $z = 0$ .] В точке  $z = a$  к балке приложены сила инерции груза и момент сил его инерции.

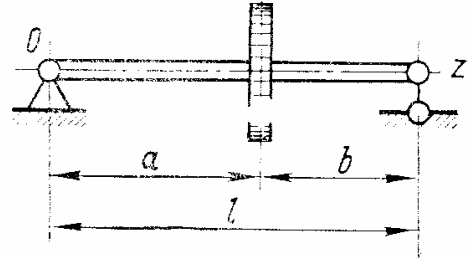


Рис. 18.7

Амплитудные значения силы и момента составляют:

$$P_0 = mp^2 u(a); \quad M_0 = -Ip^2 u'(a).$$

Знак минус в формуле для  $M_0$  связан с тем, что при положительном значении  $u'$  инерционный момент направлен против положительного направления, принятого на рис. 18.5.

В соответствии с формулой (18.14) получаем при  $z > a$

$$u_+(z) = C_2 K_2(\alpha z) + C_4 K_4(\alpha z) - \frac{Ip^2}{\alpha^2 EJ} u'(a) K_3[\alpha(z-a)] + \\ + \frac{mp^2}{\alpha^3 EJ} u(a) K_1[\alpha(z-a)].$$

Здесь

$$u(a) = C_2 K_2(\alpha a) + C_4 K_4(\alpha a),$$

$$u'(a) = \alpha C_2 K_1(\alpha a) + \alpha C_4 K_3(\alpha a).$$

Таким образом, на правом участке амплитудные прогибы выражаются через те же постоянные  $C_2, C_4$ , что и на левом.

Граничные условия на правом конце  $u_+(l) = 0, u'_+(l) = 0$  приводят к двум уравнениям относительно  $C_1$  и  $C_2$ :

$$C_2 \left[ K_2(\alpha l) - \frac{Ip^2}{\alpha EJ} K_1(\alpha a) K_3(\alpha b) + \frac{mp^2}{\alpha^3 EJ} K_2(\alpha a) K_4(\alpha b) \right] + \\ + C_4 \left[ K_4(\alpha l) - \frac{Ip^2}{\alpha EJ} K_3(\alpha a) K_3(\alpha b) + \frac{mp^2}{\alpha^3 EJ} K_4(\alpha a) K_4(\alpha b) \right] = 0, \\ C_2 \left[ K_4(\alpha l) - \frac{Ip^2}{\alpha EJ} K_1(\alpha a) K_1(\alpha b) + \frac{mp^2}{\alpha^3 EJ} K_2(\alpha a) K_2(\alpha b) \right] + \\ + C_4 \left[ K_2(\alpha l) - \frac{Ip^2}{\alpha EJ} K_3(\alpha a) K_1(\alpha b) + \frac{mp^2}{\alpha^3 EJ} K_4(\alpha a) K_2(\alpha b) \right] = 0.$$

Собственные частоты балки определяются из условия равенства нулю определителя этих уравнений. Так как искомая частота  $p$  входит в уравнения как в явной форме, так и в выражении коэффициента  $\alpha$ , целесообразно заменить  $p^2$  на  $\alpha^4 EJ/m_0$  и ввести обозначения для безразмерных величин:

$$I/(m_0 l^3) = \vartheta, \quad m/(m_0 l) = \mu, \quad \lambda = \alpha l.$$

Тогда уравнение частот можно привести к следующему виду:

$$AB - CD = 0,$$

$$A = K_2(\lambda) - \vartheta \lambda^3 K_1(\lambda a/l) K_3(\lambda b/l) + \mu \lambda K_2(\lambda a/l) K_4(\lambda b/l),$$

$$B = K_2(\lambda) - \vartheta \lambda^3 K_3(\lambda a/l) K_1(\lambda b/l) + \mu \lambda K_4(\lambda a/l) K_2(\lambda b/l),$$

$$C = K_4(\lambda) - \vartheta \lambda^3 K_3(\lambda a/l) K_3(\lambda b/l) + \mu \lambda K_4(\lambda a/l) K_4(\lambda b/l),$$

$$D = K_4(\lambda) - \vartheta \lambda^3 K_1(\lambda a/l) K_1(\lambda b/l) + \mu \lambda K_2(\lambda a/l) K_2(\lambda b/l).$$

Решить это трансцендентное уравнение можно подбором, так же как и в предыдущем примере.

Использованный в приведенных примерах метод начальных параметров, приводящий к трансцендентному частотному уравнению, це-

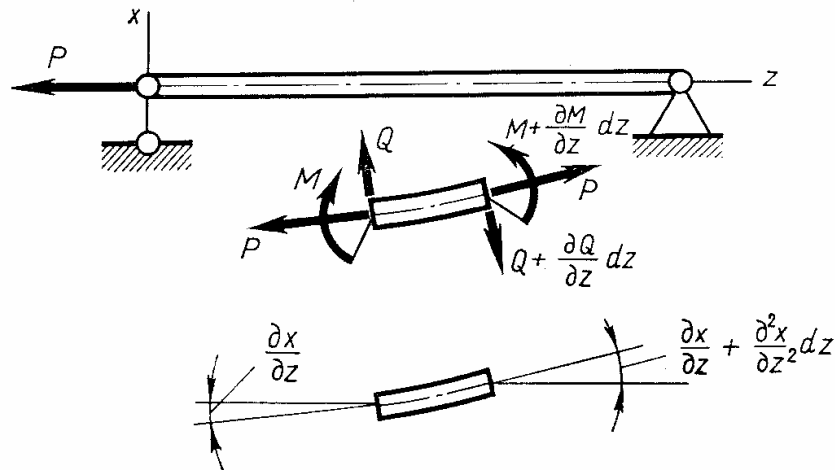


Рис. 18.8

лесообразно применять только при небольшом числе участков. В более сложных случаях вычисления, связанные с получением трансцендентного уравнения и его численным решением, становятся слишком громоздкими. В этих случаях рационально применять либо метод начальных параметров в численном варианте, либо другие численные методы расчета, рассмотренные в гл. IV.

**Влияние продольных сил на частоту изгибных колебаний.** Продольные силы, нагружающие колеблющуюся балку, изменяют частоту ее собственных колебаний. При растяжении собственная частота повышается, при сжатии — понижается.

Выведем дифференциальное уравнение движения растянутой балки постоянного сечения (рис. 18.8). Приравняв сумму проекций на верти-

каль всех сил, приложенных к элементу  $dz$  балки, произведению массы  $m_0 dz$  этого элемента на его ускорение  $\partial^2 x / \partial t^2$ , получим

$$-\frac{\partial Q}{\partial z} dz + P \frac{\partial^2 x}{\partial z^2} dz = m_0 \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} dz,$$

или

$$\frac{\partial Q}{\partial z} = P \frac{\partial^2 x}{\partial z^2} - m_0 \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}.$$

С другой стороны, используя уравнение моментов, получаем

$$\partial M / \partial z = Q.$$

Как известно, изгибающий момент  $M$  и приближенное значение кривизны  $\partial^2 x / \partial z^2$  связаны зависимостью

$$EJ \partial^2 x / \partial z^2 = M.$$

Исключив из полученных уравнений  $M$  и  $Q$ , найдем следующее уравнение движения:

$$\frac{\partial^4 x}{\partial z^4} - \frac{P}{EJ} \frac{\partial^2 x}{\partial z^2} + \frac{m_0}{EJ} \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = 0. \quad (18.17)$$

Отыскивая соответствующее гармоническим колебаниям решение уравнения (18.17) в форме

$$x = u(z) \cos(pt + \varphi),$$

получаем для амплитудной функции  $u(z)$  обыкновенное дифференциальное уравнение

$$[u]^{IV} - \frac{P}{EJ} u'' - \frac{p^2 m_0}{EJ} u = 0, \quad (18.18)$$

где штрихами обозначено дифференцирование по  $z$ .

Нетрудно написать общее решение уравнения (18.18), включающее четыре произвольные постоянные. Граничные условия доставляют уравнения для определения постоянных, а равенство нулю определителя этих уравнений представляет собой уравнение частот. Ограничимся только случаем балки, шарнирно опертой по концам (рис. 18.8). В этом случае уравнение (18.18) можно выполнить, если принять для амплитудной функции выражение

$$u = \sin(k\pi z/l) \quad (k = 1, 2, 3, \dots), \quad (18.19)$$

которое удовлетворяет также граничным условиям.

Подставляя это выражение в уравнение (18.18), получаем

$$\frac{k^4 \pi^4}{l^4} + \frac{P}{EJ} \frac{k^2 \pi^2}{l^2} - \frac{p^2 m_0}{EJ} = 0,$$

откуда угловая частота собственных колебаний, соответствующая  $k$ -й форме,

$$p_k = k^2 \pi^2 \sqrt{EJ/(m_0 l^4)} \sqrt{1 + Pl^2/(k^2 \pi^2 EJ)}.$$

Низшая частота соответствует изгибу балки по одной полуволне синусоиды ( $k = 1$ )

$$p = \pi^2 \sqrt{EJ/(m_0 l^4)} \sqrt{1 + P/P_3}, \quad (18.20)$$

где  $P_3 = \pi^2 EJ/l^2$  — критическая сжимающая сила для балки, соответствующая продольному изгибу ее в плоскости колебания.

Сопоставляя формулы (18.20) и (18.11), видим, что влияние растягивающей силы отражается дополнительным множителем  $\sqrt{1 + P/P_3}$ .

Если продольная сила  $P$  — сжимающая, то ее вносят в формулу (18.20) со знаком минус.

Можно показать (см. [40]), что если на балке имеются присоединенные грузы, то частота ее колебаний также может приближенно определяться по формулам:

при растяжении

$$p = p_0 \sqrt{1 + P/P_3},$$

при сжатии

$$p = p_0 \sqrt{1 - P/P_3},$$

где  $p_0$  — частота, вычисленная без учета продольных сил.

При достижении продольной сжимающей силой критического значения балка перестает сопротивляться действию поперечной нагрузки, и частота изгибных колебаний ее обращается в нуль.

**Влияние сдвигов и инерции осевого движения элементов балки.** Рассмотренная выше техническая теория колебаний изгиба, базирующаяся на гипотезе Бернулли и игнорирующая инерцию продольного движения частиц балки, имеет ограниченные пределы применения. При высокочастотных колебаниях, когда длина волны изгиба не очень велика по сравнению с размерами поперечного сечения, погрешности технической теории могут быть большими. Они также существенны для конструкций, выполненных из слоистых материалов, оказывающих малое сопротивление сдвигу.

Пределы применимости технической теории можно существенно расширить, если усовершенствовать расчетную схему балки и предположить, что сечения ее, бывшие до деформации нормальными к оси балки, остаются при деформации плоскими, но перестают быть перпендикулярными изогнутой оси балки. При этом угол между нормалью к изогнутой оси балки и плоскостью сечения (угол сдвига) считается пропорциональным поперечной силе\*. Такая расчетная схема балки получила в литературе название балки Тимошенко.

Выведем уравнения движения балки Тимошенко. Для этой балки положение каждого сечения в процессе движения определяется двумя координатами — поперечным смещением  $x$  центра тяжести и поворотом плоскости сечения  $\phi$  (рис. 18.9). Внутренние силовые факторы  $M$ ,

---

\* Несколько иные гипотезы, приводящие, однако, к тем же окончательным результатам, приняты в книге [40].

$Q$  в сечении связаны с перемещениями зависимостями

$$M = EJ \frac{\partial \vartheta}{\partial z}, \quad Q = \frac{GF}{\alpha} \left( \vartheta - \frac{\partial x}{\partial z} \right). \quad (18.21)$$

Здесь  $(\vartheta - \partial x / \partial z)$  — угол сдвига,  $\alpha$  — коэффициент, учитывающий неравномерность распределения касательных напряжений по сечению и зависящий от его формы. Для прямоугольного сечения  $\alpha = 1,2$ .

Составим уравнения движения элемента  $dz$  стержня (рис. 18.10).

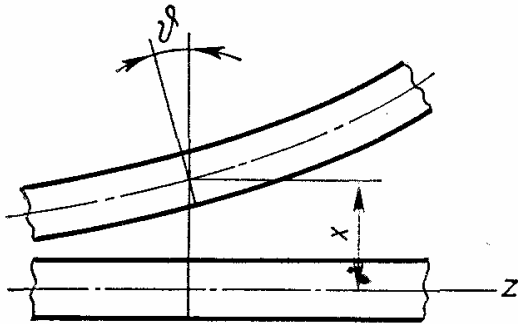


Рис. 18.9

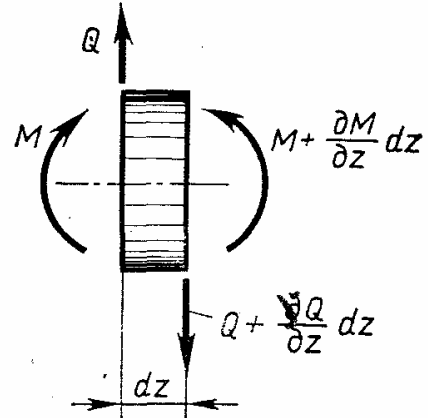


Рис. 18.10

Приравнивая нулю сумму проекций на вертикаль приложенных к элементу сил (включая силу инерции  $-\rho F dz \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}$ ), получаем

$$-\frac{\partial Q}{\partial z} dz - \rho F dz \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = 0.$$

Сумма приложенных к элементу моментов (включая момент сил инерции при повороте элемента)

$$\frac{\partial M}{\partial z} dz - Q dz - \rho J dz \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial t^2} = 0.$$

Заменим в полученных уравнениях поперечную силу и изгибающий момент их значениями по формулам (18.21). Тогда, производя простые преобразования, получаем следующую систему уравнений:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial z^2} - \frac{\alpha \rho}{G} \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = \frac{\partial \vartheta}{\partial z}, \quad (18.22)$$

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial z^2} - \frac{\rho}{E} \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial t^2} = \frac{GF}{\alpha EJ} \left( \vartheta - \frac{\partial x}{\partial z} \right).$$

Общее решение уравнений (18.22) является довольно громоздким. Ограничимся поэтому исследованием колебаний балки Тимошенко, шарнирно закрепленной на концах. Граничные условия для этого случая будут выполнены, если принять:

$$\begin{aligned} x &= A \sin(k\pi z/l) \cos(pt + \varphi), \\ \vartheta &= B \cos(k\pi z/l) \cos(pt + \varphi). \end{aligned} \quad (18.23)$$

Подставив выражения (18.23) в уравнения (18.22) и сократив общие множители, получим:

$$A(-k^2\pi^2/l^2 + p^2\alpha\rho/G) + Bk\pi/l = 0,$$

$$A(k\pi/l)GF/(\alpha EJ) + B[-k^2\pi^2/l^2 + p^2\rho/E - GF/(\alpha EJ)] = 0. \quad (18.24)$$

Эта система может иметь отличные от нуля решения только в том случае, если ее определитель равен нулю. Таким образом, получаем следующее уравнение частот:

$$\begin{vmatrix} \left(-\frac{k^2\pi^2}{l^2} + p^2 \frac{\alpha\rho}{G}\right) & \frac{k\pi}{l} \\ \frac{k\pi}{l} \cdot \frac{GF}{\alpha EJ} & \left(-\frac{k^2\pi^2}{l^2} + p^2 \frac{\rho}{E} - \frac{GF}{\alpha EJ}\right) \end{vmatrix} = 0. \quad (18.25)$$

Введем обозначения:  $\Delta = l\sqrt{F/J}$  — гибкость балки;  $p_0 = \pi^2 \times \sqrt{EJ/(\rho Fl^4)}$  — частота основного тона колебаний, вычисленная без учета сдвигов и инерции вращения;  $\beta^2 = G/(\alpha E)$ , с учетом которых уравнение (18.25) примет вид

$$\left(\frac{p}{p_0}\right)^4 - \left(\frac{p}{p_0}\right)^2 \frac{k^2\Delta^2}{\pi^2} \left(1 + \beta^2 + \frac{\beta^2\Delta^2}{k^2\pi^2}\right) + \frac{\beta^2k^2\Delta^4}{\pi^4} = 0.$$

Решая это уравнение, получаем две частоты  $p_{k1}$  и  $p_{k2}$ , соответствующие одному и тому же числу полуволи упругой линии

$$p_k = p_0 \frac{k\Delta}{\pi} \sqrt{\frac{1}{2} \left[ 1 + \beta^2 + \frac{\beta^2\Delta^2}{k^2\pi^2} \mp \sqrt{\left(1 + \beta^2 + \frac{\beta^2\Delta^2}{k^2\pi^2}\right)^2 - 4\beta^2} \right]}. \quad (18.26)$$

Низшая из этих частот соответствует такой форме колебаний, при которой поперечные сечения поворачиваются в ту же сторону, что и касательные к изогнутой оси (рис. 18.11,а). Высшая частота соответствует повороту сечений и касательных к изогнутой оси в противоположные стороны (рис. 18.11,б).

Рассмотрим в качестве примера колебания балки прямоугольного сечения с отношением длины к высоте поперечного сечения  $l/h = 10$ . В этом случае

$$\Delta = l\sqrt{F/J} = \sqrt{12l^3/h^2} = 34,6.$$

Принимая  $E/G = 2(1 + \mu) = 2,6$ ,  $\alpha = 1, 2$ , получаем

$$\beta^2 = G/(\alpha E) = 0,32.$$

Используя эти данные, можно по формуле (18.26) вычислить частоты  $p_{k1}$  и  $p_{k2}$ , соответствующие различному числу полуволи  $k$ .

Полученные таким способом отношения  $(p_{k1}/p_0)$  и  $(p_{k2}/p_0)$  приведены ниже:

$k$	1	2	3	4	5
$p_{k1}/p_0$	0,98	3,74	7,92	13,08	18,77
$p_{k2}/p_0$	70,0	73,6	78,2	84,0	91,6

Приведенные числа показывают, что частота  $p_{k1}$  всегда оказывается ниже, чем частота, вычисленная без учета сдвигов (напомним, что теория, не учитывающая сдвигов, дает для частоты колебания, имеющего  $k$  полуволин, значение  $p_k = k^2 p_0$ ). Снижение частоты собственных колебаний за счет влияния сдвигов тем больше, чем короче волны изгиба. Для основного тона колебания снижения составляет всего около 2%, в то время как для пятой гармоники, для которой длина полуволин равна удвоенной высоте сечения, это снижение составляет уже

$$[(25 - 18,77)/25] 100 = 25 \%$$

Частота колебаний второго типа  $p_{k2}$  оказывается очень высокой и только для весьма коротких волн сравнимой с частотой колебаний первого типа.

## § 19. ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ СТЕРЖНЕЙ

Если частоты и формы нормальных колебаний системы с распределенной массой определены, то расчет вынужденных колебаний может быть произведен по методу, изложенному в § 15 предыдущей главы. Полученное таким образом решение представляет собой разложение вынужденного движения по собственным функциям системы и выражается бесконечным рядом. Преимуществом указанного метода является его общность; однако в ряде случаев более удобными являются другие методы, позволяющие получить решение в замкнутой форме. Так, например, при расчете продольных колебаний, если действие возмущающих сил является кратковременным, значительное преимущество имеют методы разрывных функций и характеристик, подробно рассмотренные в § 22.

При расчете стационарных колебаний, вызванных гармоническим возбуждением, наиболее целесообразно записывать решение в виде гармонической функции времени того же периода, что и возмущающая сила. Такой прием позволяет получить результат в замкнутой форме.

Для сравнения двух способов расчета рассмотрим пример. К средней точке балки, лежащей на двух опорах (рис. 19.1), приложена возмущающая сила

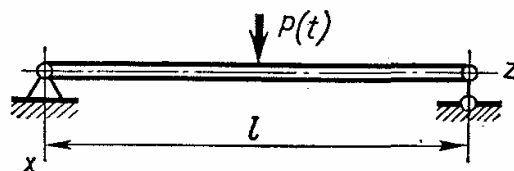


Рис. 19.1

$$P(t) = P_0 \cos \omega t.$$

Сначала применим метод главных координат, изложенный в § 15.

Согласно этому методу [см. формулу (15.1)], смещение любой точки балки может быть представлено в виде

$$x(z, t) = \sum_{k=1}^{\infty} q_k(t) u_k(z),$$

где  $u_k(z)$  — прогиб при  $k$ -м нормальном колебании (амплитудная функция);  $q_k(t)$  — функция времени (главная координата), определяемая из уравнения (15.4):  $\ddot{q}_k + p_k^2 q_k = Q_k(t)/\mathcal{M}_k$ .

Здесь  $p_k$  —  $k$ -я собственная частота,  $Q_k$  — обобщенная сила, равная сумме произведений возмущающих сил на перемещения точек их приложения при  $k$ -м нормальном колебании,  $\mathcal{M}_k$  — обобщенная масса.

Для балки постоянного сечения на двух опорах (см. § 18) упругая линия при  $k$ -м колебании представляет собой синусоиду с  $k$  полуволнами:

$$u_k = \sin(k\pi z/l),$$

а частоты собственных колебаний определяются формулой

$$p_k = k^2 p_1,$$

где  $p_1 = \pi^2 \sqrt{EJ/(m_0 l^4)}$ .

Таким образом,

$$\mathcal{M}_k = \int_0^l u_k^2 m_0 dz = m_0 \int_0^l \sin^2(k\pi z/l) dz = 1/2 m_0 l,$$

$$Q_k = P(t) u_k(l/2) = P_0 \cos \omega t \sin(k\pi/2).$$

Уравнение, определяющее функции  $q_k(t)$ , принимает форму

$$\ddot{q}_k + p_k^2 q_k = \frac{2P_0 \sin(k\pi/2)}{m_0 l} \cos \omega t.$$

Стационарное решение этого уравнения имеет вид

$$q_k(t) = \frac{2P_0 \sin(k\pi/2)}{m_0 l (p_k^2 - \omega^2)} \cos \omega t.$$

Следовательно, смещения в любом сечении балки при вынужденных колебаниях определяются формулой

$$\begin{aligned} x(z, t) &= \sum_{k=1}^{\infty} q_k(t) u_k(z) = \\ &= \frac{2P_0}{m_0 l} \cos \omega t \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(k\pi/2)}{p_k^2 - \omega^2} \sin(k\pi z/l). \end{aligned}$$

В этом выражении присутствуют только слагаемые, соответствующие симметричным формам колебаний балки (т. е. нечетным  $k$ ). Про-



гибы обращаются в бесконечность, если частота возмущения  $\omega$  совпадает с одной из частот собственных симметричных колебаний балки. Полученный ряд для прогибов сходится очень быстро и удобен для вычислений. Так, например, прогиб в средней точке балки ( $z = l/2$ )

$$x_{z=l/2} = \frac{2P_0}{m_0 l} \cos \omega t \sum_{k=1, 3, 5, \dots}^{\infty} \frac{1}{k^3 p_1^2 - \omega^2}.$$

Вычислим сумму ряда при частоте возмущения в два раза меньшей, чем низшая частота собственных колебаний балки:

$$\begin{aligned} x_{z=l/2} &= \frac{2P_0}{m_0 l p_1^2} \cos \omega t \sum_{k=1, 3, 5, \dots}^{\infty} \frac{4}{4k^4 - 1} = \\ &= \frac{8}{\pi^4} \cdot \frac{P_0 l^3}{EJ} \cos \omega t \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{323} + \frac{1}{2499} + \dots \right). \end{aligned}$$

Вполне достаточную точность дает учет одного только первого члена ряда.

Сходимость ряда для изгибающих моментов

$$M = EJ \frac{\partial^2 x}{\partial z^2} = - \frac{2\pi^2 EJ P_0}{m_0 l^3} \cos \omega t \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2 \sin(k\pi/2)}{p_k^2 - \omega^2} \sin(k\pi z/l)$$

оказывается более медленной. При  $\omega = p_1/2$  для вычисления изгибающего момента в среднем сечении балки с достаточной точностью необходимо учитывать три—пять членов ряда.

Теперь рассмотрим второй метод решения задачи. Решение уравнения (18.1) колебаний балки

$$EJ \frac{\partial^4 x}{\partial z^4} + m_0 \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = 0,$$

где  $EJ = \text{const}$  записываем в форме, соответствующей характеру изменения возмущающей силы:

$$x(z, t) = u(z) \cos \omega t.$$

При этом для функции  $u(z)$  получается уравнение

$$\frac{d^4 u}{dz^4} - \alpha^4 u = 0,$$

тождественное уравнению (18.4) при значении  $\alpha^4 = \omega^2 m_0 / (EJ)$ .

Решение этого уравнения на участках балки, свободных от нагрузки, можно представить в виде зависимости (18.5), причем постоянные интегрирования определяются из граничных условий.

В данном случае вследствие симметрии достаточно рассмотреть левую половину балки. Имеем следующие граничные условия:

$$\begin{aligned} z = 0; \quad u = 0; \quad \frac{d^2 u}{dz^2} = 0; \\ z = \frac{l}{2}; \quad \frac{du}{dz} = 0; \quad \frac{d^2 u}{dz^2} = - \frac{P_0}{2EJ}. \end{aligned} \tag{19.1}$$

Последнее из записанных условий означает, что слева от точки приложения силы  $P(t)$  амплитуда поперечной силы равна  $P_0/2$ .

Условия (19.1) позволяют определить постоянные в общем выражении (18.5) функции  $u(z)$ :

$$u(z) = C_1 K_1(\alpha z) + C_2 K_2(\alpha z) + C_3 K_3(\alpha z) + C_4 K_4(\alpha z).$$

Имеем:

$$C_1 = C_3 = 0, \quad C_2 \alpha K_1(\lambda) + C_4 \alpha K_3(\lambda) = 0,$$

$$C_2 \alpha^3 K_3(\lambda) + C_4 \alpha^3 K_1(\lambda) = -P_0/(2EJ) \quad (\lambda = \alpha l/2).$$

Отсюда

$$C_2 = \frac{P_0}{2\alpha^3 EJ} \frac{K_3(\lambda)}{K_1^2(\lambda) - K_3^2(\lambda)}, \quad C_4 = -\frac{P_0}{2\alpha^3 EJ} \frac{K_1(\lambda)}{K_1^2(\lambda) - K_3^2(\lambda)}.$$

Следовательно, амплитудные перемещения при  $0 \leq z \leq l/2$  определяются уравнением

$$u(z) = \frac{P_0 l^3}{16EJ} \frac{1}{\lambda^3} \frac{K_3(\lambda) K_2(\alpha z) - K_1(\lambda) K_4(\alpha z)}{K_1^2(\lambda) - K_3^2(\lambda)}. \quad (19.2)$$

В частности, в точке приложения силы ( $z = l/2$ ) имеем

$$u\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{P_0 l^3}{16EJ} \frac{1}{\lambda^3} \frac{K_3(\lambda) K_2(\lambda) - K_1(\lambda) K_4(\lambda)}{K_1^2(\lambda) - K_3^2(\lambda)}.$$

После подстановки выражений (18.6) функций Крылова приведем эту формулу к виду

$$\left[ u\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{P_0 l^3}{32EJ} \frac{1}{\lambda^3} (\operatorname{tg} \lambda - \operatorname{th} \lambda), \quad (19.3) \right]$$

где

$$\lambda = \alpha l/2 = 1/2 \sqrt[4]{m_0 \omega^2 l^4 / (EJ)}.$$

Формулы (19.2), (19.3) представляют прогибы в замкнутой форме, что является их большим преимуществом.

Не вызывает трудностей и вычисление амплитудных изгибающих моментов:

$$M(z) = \left| EJ \frac{d^2 u}{dz^2} \right| = \frac{P_0 l}{4} \frac{1}{\lambda} \frac{K_1(\lambda) K_2(\alpha z) - K_3(\lambda) K_4(\alpha z)}{K_1^2(\lambda) - K_3^2(\lambda)}.$$

В частности, в точке приложения силы

$$M(l/2) = P_0 l (\operatorname{tg} \lambda + \operatorname{th} \lambda) / (8\lambda).$$

Изложенный выше метод может быть с успехом использован также для расчета вынужденных колебаний при кинематическом возбуждении.

Рассмотрим, например, балку (рис. 19.2), один конец которой шарнирно закреплен, а другой совершает заданное движение по гармоническому закону

$$x_{z=l} = f \cos \omega t.$$

Решение уравнения свободных колебаний балки записываем в форме

$$x(z, t) = u(z) \cos \omega t.$$

Для функции  $u(z)$  получаем граничные условия:

при  $z = 0$   $u = 0$ ;  $u'' = 0$ ;

при  $z = l$   $u = f$ ;  $u'' = 0$ .

Из условий при  $z = 0$  следует, что постоянные  $C_1$  и  $C_3$  в общем решении (18.5) равны нулю. Условия при  $z = l$  приводят к уравнениям

$$C_2 K_2(\lambda) + C_4 K_4(\lambda) = f,$$

$$C_2 K_4(\lambda) + C_4 K_2(\lambda) = 0 \quad (\lambda = \alpha l),$$

откуда

$$C_2 = \frac{K_2(\lambda)}{K_2^2(\lambda) - K_4^2(\lambda)} f, \quad C_4 = -\frac{K_4(\lambda)}{K_2^2(\lambda) - K_4^2(\lambda)} f.$$

Таким образом, амплитудные прогибы в любом сечении определяются равенством

$$u(z) = C_2 K_2(\alpha z) + C_4 K_4(\alpha z) = \frac{K_2(\lambda) K_2(\alpha z) - K_4(\lambda) K_4(\alpha z)}{K_2^2(\lambda) - K_4^2(\lambda)} f.$$

Резонанс имеет место, когда знаменатель этого выражения обращается в ноль, т. е. когда

$$K_2^2(\lambda) - K_4^2(\lambda) = \operatorname{sh} \lambda \sin \lambda = 0 \text{ и } \lambda = k\pi.$$

Таким образом, в данном случае резонансными являются частоты

$$\omega_* = \lambda_k^2 \sqrt{EJ / (m_0 l^4)} = k^2 \pi^2 \sqrt{EJ / (m_0 l^4)},$$

соответствующие частотам собственных колебаний балки на двух опорах.

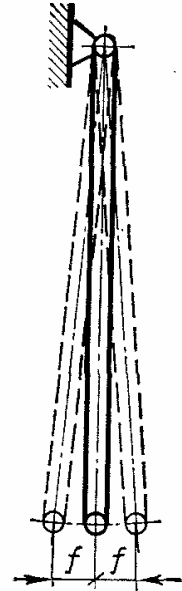


Рис. 19.2

## § 20. КОЛЕБАНИЯ СТЕРЖНЕЙ ПРИ НАЛИЧИИ ВЯЗКОГО ТРЕНИЯ

В § 16 было установлено, что метод главных координат можно использовать и при наличии вязкого трения, если коэффициенты вязкого трения пропорциональны массам или жесткостям элементов системы. Это утверждение справедливо и для систем с распределенной массой.

Покажем это на примере изгибных колебаний балки постоянного сечения. Поскольку масса балки равномерно распределена по длине, то и внешнее вязкое трение будем считать равномерно распределенным по длине, т. е. предположим, что на элемент балки действует сила трения  $\alpha_1 m_0 dz (\partial x / \partial t)$ , пропорциональная скорости его движения.

Внутреннее трение введем, заменив закон Гука  $\sigma = E\varepsilon$  зависимостью

$$\sigma_* = E \left( \varepsilon + \alpha_2 \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \right).$$

Принимая этот закон и основываясь на гипотезе плоских сечений, легко установить, что изгибающий момент в сечении зависит не только

от кривизны оси бруса  $\kappa$ , но и от скорости изменения кривизны  $\partial\kappa/\partial t$ :

$$M = EJ \left( \kappa + \alpha_2 \frac{\partial \kappa}{\partial t} \right).$$

Заменяя кривизну ее приближенным значением  $\kappa = \partial^2 x / \partial z^2$ , получаем

$$M = EJ \left( \frac{\partial^2 x}{\partial z^2} + \alpha_2 \frac{\partial^3 x}{\partial z^2 \partial t} \right). \quad (20.1)$$

Уравнения движения элемента  $dz$  бруса имеют вид (рис. 20.1)

$$m_0 \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + \alpha_1 m_0 \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial M}{\partial z} = Q.$$

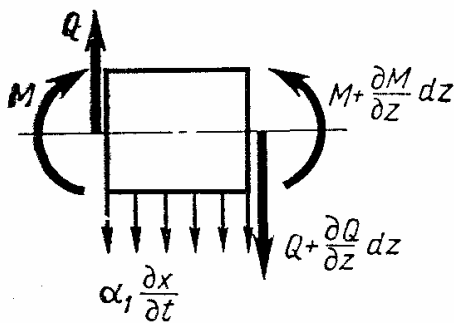


Рис. 20.1

Из этих уравнений, принимая во внимание зависимость (20.1), получаем дифференциальное уравнение движения бруса с учетом внешнего и внутреннего трения:

$$EJ \left( \frac{\partial^4 x}{\partial z^4} + \alpha_2 \frac{\partial^5 x}{\partial z^4 \partial t} \right) + m_0 \left( \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + \alpha_1 \frac{\partial x}{\partial t} \right) = 0. \quad (20.2)$$

Проверим, что это уравнение имеет решение вида

$$x(z, t) = q_k(t) u_k(z), \quad (20.3)$$

где  $u_k(z)$  —  $k$ -я форма собственных колебаний бруса без трения.

Подставив выражение (20.3) в уравнение (20.2), получим

$$EJ \frac{d^4 u_k}{dz^4} (q_k + \alpha_2 \dot{q}_k) + m_0 u_k (\ddot{q}_k + \alpha_1 \dot{q}_k) = 0.$$

Учитывая, что функция  $u_k(z)$  удовлетворяет дифференциальному уравнению (18.4)

$$\frac{d^4 u_k}{dz^4} - \frac{p_k^2 m_0}{EJ} u_k = 0,$$

где  $p_k$  —  $k$ -я собственная частота консервативной системы, устанавливаем, что решение в форме (20.3) удовлетворяет уравнению (20.2) и что координата  $q_k(t)$  определяется уравнением

$$\ddot{q}_k + (\alpha_1 + p_k^2 \alpha_2) \dot{q}_k + p_k^2 q_k = 0.$$

В этом случае, так же как и для системы с конечным числом степеней свободы, логарифмический декремент

$$\delta \approx 2\pi n_k / p_k = \pi (\alpha_1 / p_k + \alpha_2 p_k).$$

При внешнем трении ( $\alpha_1$ ) этот коэффициент с увеличением номера колебаний уменьшается, при внутреннем ( $\alpha_2$ ) — возрастает.

То обстоятельство, что при некоторых законах распределения сил трения метод главных координат является точным, позволяет приближенно применять его и при других законах трения. При этом полагают, что перемещения определяются формулой (20.3), а каждая из главных координат определяется независимым уравнением

$$\ddot{q}_k + 2n_k \dot{q}_k + p_k^2 q_k = Q_k / m_k.$$

Значения коэффициента  $n_k$  принимают на основе экспериментальных данных. Так, например, при гармоническом возмущении частоты  $\omega$ , учитывая, что ни потери на внутреннее трение для большинства материалов, ни конструкционный гистерезис от частоты не зависят, полагают  $n_k$  обратно пропорциональным частоте возмущения.

## § 21. КОЛЕБАНИЯ, ВЫЗЫВАЕМЫЕ ПОДВИЖНОЙ НАГРУЗКОЙ

Постоянная по величине нагрузка, если точка ее приложения перемещается, также вызывает колебания упругой системы; такова, например, причина колебания мостов при прохождении по ним железнодорожных составов. В настоящем параграфе мы не останавливаемся на хорошо изученном вопросе о колебаниях балок, лежащих на жестких опорах, при движении по ним нагрузки (см. [37, 50, 52]). Эти колебания являются нестационарными; они возбуждаются в то время, пока нагрузка движется вдоль балки, а затем постепенно затухают.

Более важное практическое значение в машиностроительной практике имеют стационарные колебания, возникающие при непрерывном перемещении нагрузки с постоянной скоростью. Для того чтобы такого рода движение нагрузки было возможным, либо упругая система должна быть безграничной (бесконечно длинная балка на упругом основании), либо движение нагрузки должно происходить по кругу. Именно последний случай возбуждения колебаний подвижной нагрузкой обычно и имеет место, причем, как правило, приходится иметь дело с неподвижно ориентированной в пространстве нагрузкой и с вращающейся упругой системой. Таковы, например, нагрузка, обуславливаемая давлением пара на турбинный диск при парциальном подводе, нагрузка, воздействующая на катящуюся шину автомобиля, и т. д.

Во всех этих случаях колебания с большими амплитудами возникают тогда, когда скорость относительного движения нагрузки близка к скорости распространения бегущей волны при свободных колебаниях системы.

Рассмотрим это явление на примере бесконечной балки на упругом основании, по которой с постоянной скоростью движется сосредоточенная сила. Дифференциальное уравнение упругой линии статически нагруженной балки постоянного сечения, лежащей на упругом основании, имеет вид

$$EJ (\partial^4 x / \partial z^4) + kx = f(z), \quad (21.1)$$

где  $x$  — прогиб балки;  $EJ$  — жесткость поперечного сечения балки при изгибе;  $k$  — так называемый коэффициент постели;  $f(z)$  — интенсивность распределенной нагрузки.

При выводе уравнения (21.1) принято, что интенсивность сил взаимодействия между балкой и упругим основанием пропорциональна прогибу балки в данной точке.

Уравнение движения балки можно получить, добавляя к внешней нагрузке силы инерции собственной массы балки, интенсивность которых равна  $-m_0(\partial^2 x / \partial t^2)$  ( $m_0$  — масса единицы длины балки). Таким образом, имеем

$$EJ \frac{\partial^4 x}{\partial z^4} + m_0 \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + kx = f(z, t). \quad (21.2)$$

Обозначим  $m_0/(EJ) = 4\nu^2$ ,  $k/(EJ) = 4\mu^4$ . Тогда уравнение движения примет вид

$$\frac{\partial^4 x}{\partial z^4} + 4\nu^2 \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + 4\mu^4 x = \frac{1}{EJ} f(z, t). \quad (21.3)$$

Определение с помощью уравнения (21.3) частот собственных колебаний балок на упругом основании не представляет затруднений. Метод решения здесь совершенно такой же, как и для свободной балки (см. § 18).

Если нагрузка, сохраняя свою величину, движется вдоль оси балки со скоростью  $v$ , то

$$f(z, t) = f(z - vt). \quad (21.4)$$

При стационарном движении прогибы перемещаются вдоль оси балки с той же скоростью, что и нагрузка, т. е.

$$x = x(z - vt). \quad (21.5)$$

Обозначая  $z - vt = \zeta$  и подставляя выражения (21.4) и (21.5) в дифференциальное уравнение (21.3), получаем обыкновенное дифференциальное уравнение для функции  $x(\zeta)$ :

$$\frac{d^4 x}{d\zeta^4} + 4\nu^2 v^2 \frac{d^2 x}{d\zeta^2} + 4\mu^4 x = \frac{1}{EJ} f(\zeta). \quad (21.6)$$

При  $v < \mu/\nu = \sqrt[4]{4kJ/m_0^2}$  корни характеристического уравнения

$$s^4 + 4\nu^2 v^2 s^2 + 4\mu^4 = 0$$

являются комплексными и имеют вид

$$s_{1-4} = \pm \alpha \pm \beta \sqrt{-1},$$

где  $\alpha = \sqrt{\mu^2 - v^2 \nu^2}$ ,  $\beta = \sqrt{\mu^2 + v^2 \nu^2}$ .

Общее решение уравнения (21.6) при  $v < \mu/\nu$  можно представить в виде

$$x = e^{\alpha \zeta} (C_1 \cos \beta \zeta + C_2 \sin \beta \zeta) + e^{-\alpha \zeta} (C_3 \cos \beta \zeta + C_4 \sin \beta \zeta) + \Phi(\zeta),$$

где  $\Phi(\zeta)$  — частное решение неоднородного уравнения.

Рассмотрим частный случай, когда по балке движется сосредоточенная сила, положение которой соответствует  $\zeta = 0$  или  $z = vt$ . В этом случае как при  $\zeta > 0$ , так и при  $\zeta < 0$  внешняя нагрузка отсутствует и выражение для  $x(\zeta)$  дается решением однородного дифференциального уравнения. Отбрасывая в этом решении слагаемые, неограниченно возрастающие с удалением от начала координат, получаем при  $\zeta < 0$  (слева от точки приложения силы)

$$x_- = e^{\alpha\zeta} (C_1 \cos \beta\zeta + C_2 \sin \beta\zeta)$$

и при  $\zeta > 0$  (справа от точки приложения силы)

$$x_+ = e^{-\alpha\zeta} (C_3 \cos \beta\zeta + C_4 \sin \beta\zeta).$$

При  $\zeta = 0$  должны выполняться условия

$$x_- = x_+; \quad x'_- = x'_+; \quad x''_- = x''_+; \quad x'''_- = x'''_+ + P/(EJ).$$

Определив из этих условий постоянные  $C_1 - C_4$ , получим окончательно:

при  $\zeta > 0$

$$x_+ = -\frac{P}{8EJ\mu^2\alpha} e^{-\alpha\zeta} \left( \cos \beta\zeta + \frac{\alpha}{\beta} \sin \beta\zeta \right),$$

при  $\zeta < 0$

$$x_- = -\frac{P}{8EJ\mu^2\alpha} e^{\alpha\zeta} \left( \cos \beta\zeta - \frac{\alpha}{\beta} \sin \beta\zeta \right).$$

Прогиб под силой ( $\zeta = 0$ )

$$|x|_{\zeta=0} = \frac{P}{8EJ\mu^2\alpha} = \frac{P}{\sqrt[4]{4k^3EJ}} \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/v_{кр}^2}},$$

где

$$v_{кр} = \sqrt[4]{4kEJ/m_0^2}. \quad (21.7)$$

Из этого выражения видно, что при возрастании скорости движения нагрузки прогиб увеличивается и стремится к бесконечности при приближении этой скорости к критическому значению. Одновременно меняется и вид упругой линии. Формы упругой линии, соответствующие различным скоростям движения нагрузки, представлены на рис. 21.1.

При скоростях движения, близких к критической, прогибы с удалением от точки приложения силы затухают медленнее, чем при статической нагрузке.

Физический смысл критической скорости  $v_{кр}$  состоит в том, что она представляет собой наименьшую фазовую скорость бегущей волны в балке.

Действительно, выражение для бегущей волны синусоидальной формы имеет вид

$$x = C \sin[\pi(z - ct)/\lambda], \quad (21.8)$$

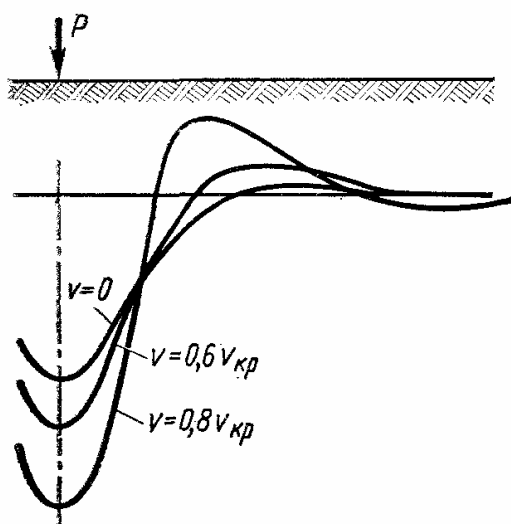


Рис. 21.1

где  $\lambda$  — длина полуволны,  $c$  — фазовая скорость распространения волны.

Подставляя выражение (21.8) в уравнение свободных колебаний балки:

$$\frac{\partial^4 x}{\partial z^4} + 4v^2 \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + 4\mu^4 x = 0,$$

получаем для скорости распространения волны выражение

$$c = \sqrt{\frac{1}{4v^2} \left( \frac{\pi^2}{\lambda^2} + 4\mu^4 \frac{\lambda^2}{\pi^2} \right)}.$$

Таким образом, скорость распространения волны зависит от ее длины (рис. 21.2) и при длине  $\lambda = \pi/(\mu\sqrt{2})$  достигает минимума, равного  $v_{кр}$ .

Следовательно, значительное возрастание прогибов имеет место тогда, когда скорость движения нагрузки приближается к скорости распространения бегущей волны.

Полученный вывод о безграничном возрастании прогибов явился следствием того, что мы пренебрегли затуханием. В действительности при приближении скорости движения нагрузки к критической прогибы балки резко возрастают, но сохраняют конечное значение. Энергия, необходимая для того, чтобы поддерживать колебания при наличии затухания, сообщается системе самой движущейся нагрузкой. Объясняется это тем, что при наличии затухания касательная к упругой линии балки в месте приложения силы уже не является горизонтальной и сила получает составляющую, направленную по движению (рис. 21.3).

Следует отметить, что в балках на упругом основании, например в железнодорожных рельсах, величина критической скорости оказывается обычно очень большой. Надо также иметь в виду условность рассмотренной расчетной схемы, в которой полностью игнорируются инерционные и демпфирующие свойства основания.

В других случаях, однако, колебания, возникающие вследствие совпадения скорости движения нагрузки со скоростью распространения бегущей волны, представляют реальную опасность. Это относится прежде всего к дискам паровых и газовых турбин, в которых опасные вибрации возникают при совпадении скорости вращения со скоростью распространения волн изгиба по окружности диска. Эти вибрации являются следствием того, что аксиальное давление газа, неравномерно распределенное по окружности, представляет

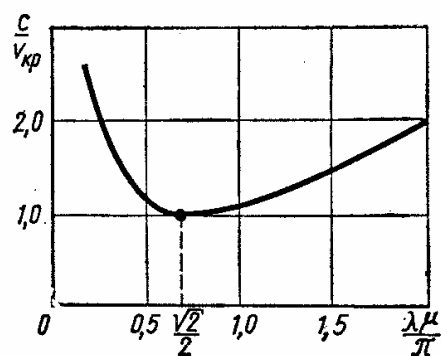


Рис. 21.2



собой по отношению к вращающемуся диску подвижную нагрузку.

Основы расчета на вибрацию дисков турбин изложены в § 49.

Другим важным примером возникновения колебаний при совпадении скорости движения нагрузки со скоростью распространения бегущей волны является так называемая критическая скорость качения пневматической шины.

Сущность явления состоит в том, что при увеличении скорости качения шины до определенной величины резко меняется характер ее деформации. В то время как при малых скоростях качения деформации локализуются в непосредственной близости от площадки контакта шины с дорогой, при критической скорости на боковой поверхности шин образуются волны (рис. 21.4).

В связи с расширением области деформации при приближении скорости качения к критической резко возрастает сопротивление движению. Как правило, при работе на скоростях, близких к критической, шины очень быстро выходят из строя\*.

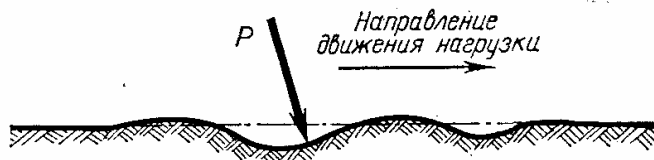


Рис. 21.3

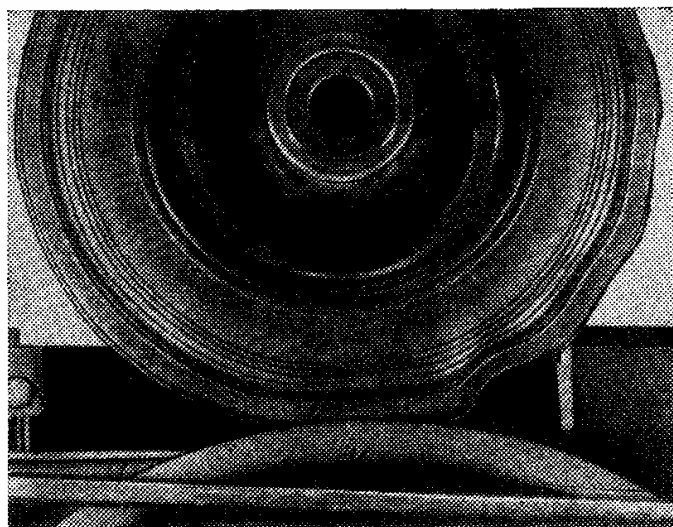


Рис. 21.4

## § 22. РАСПРОСТРАНЕНИЕ УПРУГИХ ВОЛН В СТЕРЖНЯХ

Из теории упругости известно, что имеются две характерные скорости, с которыми деформации распространяются в упругом теле, — это скорость распространения объемной деформации

$$c_v = \sqrt{\frac{1-\mu}{(1+\mu)(1-2\mu)} \frac{E}{\rho}} \quad (22.1)$$

и скорость распространения деформации сдвига

$$c_\tau = \sqrt{G/\rho}. \quad (22.2)$$

\* См.: Бидерман В. Л., Бухин Б. Л. Расчет критической скорости пневматической шины. — Изв. АН СССР, ОТН. Механика и машиностроение, 1961, № 1.

Волны обоих этих типов возникают при динамическом воздействии на стержень. Однако в процессе распространения эти волны многократно отражаются от боковых поверхностей стержня и интерферируют. В результате на некотором расстоянии от источника возмущения формируются новые волны, распространяющиеся по специфическим стержневым законам.

Законы распространения этих волн при крутильных и продольных колебаниях стержней с удовлетворительной точностью описываются теорией, основанной на сравнительно грубых гипотезах.

**Распространение волн продольных деформаций.** При рассмотрении продольных колебаний стержней на основе гипотезы Бернулли путем пренебрежения поперечными движениями частиц стержня мы получили уравнение движения (см. §17).

$$\frac{\partial^2 x}{\partial z^2} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = 0, \quad (22.3)$$

где  $x$  — перемещение поперечного сечения, начальное положение которого характеризуется координатой  $z$ . Было рассмотрено решение уравнения (22.3) в форме Фурье. Однако эта форма решения не является единственной. Можно указать и другие способы решения волнового уравнения, которые более приспособлены для исследования нестационарных процессов, — волновой метод Даламбера и метод характеристик.

Рассмотрим решение уравнения (22.3) по методу Даламбера. Легко видеть, что выражение

$$x = f(at - z) + \varphi(at + z) \quad (22.4)$$

всегда является решением уравнения (22.3), каковы бы ни были функции  $f$  и  $\varphi$ . Вычисляя производные от выражения (22.4), находим:

$$\partial^2 x / \partial z^2 = f''(at - z) + \varphi''(at + z), \quad (22.5)$$

$$\partial^2 x / \partial t^2 = a^2 f''(at - z) + a^2 \varphi''(at + z),$$

где штрихи означают дифференцирование функций  $f$  и  $\varphi$  по аргументам.

Подставляя выражения (22.5) в уравнение (22.3), видим, что оно удовлетворяется тождественно. Таким образом, выражение (22.4) действительно является решением уравнения (22.3) и притом решением общим, так как оно содержит две произвольные функции.

Физический смысл выражения (22.4) очевиден. Первое слагаемое  $f(at - z) = x_1$  представляет волну деформации, движущуюся вдоль стержня в направлении оси  $z$  со скоростью  $a$ . Действительно, при  $z = at + C$   $x_1 = \text{const}$ , т. е. для наблюдателя, движущегося вдоль стержня со скоростью  $a$ , картина деформаций, соответствующих функции  $x_1$ , остается неизменной. Точно так же второе слагаемое представляет волну деформации, движущуюся с той же скоростью в противоположном направлении. Движение стержня можно рассматривать как результат сложения двух волн деформации, движущихся в противоположных направлениях. Задача заключается в выборе вида функций  $f$

и  $\varphi$  так, чтобы выполнялись начальные и граничные условия. Эта задача может быть решена в каждом частном случае.

Рассмотрим сначала случай приложения заданной нагрузки  $P(t)$  к торцу полубесконечного стержня (рис. 22.1), причем предположим, что при  $t = 0$  стержень неподвижен и ненапряжен. Очевидно, что в этом случае волны деформации распространяются только слева направо от нагруженного конца стержня. Поэтому функция  $\varphi(at + z)$ , соответствующая волне, распространяющейся справа налево, равна нулю. Итак, для рассматриваемой задачи решение уравнения движения (22.3) имеет вид



Рис. 22.1

$$x = f(at - z). \quad (22.6)$$

Вид функции  $f$  определим из того условия, что на левом конце стержня ( $z = 0$ ) нормальная сила равна внешней нагрузке:

$$N = EF \partial x / \partial z, \quad (22.7)$$

$$N_{z=0} = P(t). \quad (22.8)$$

Частная производная функции (22.6)

$$\partial x / \partial z = -f'(at - z), \quad (22.9)$$

где штрих означает производную функции по ее аргументу.

Следовательно,

$$N(z, t) = EF \partial x / \partial z = -EF f'(at - z). \quad (22.10)$$

Из равенств (22.8) и (22.10) следует

$$f'(at) = -P(t)/(EF). \quad (22.11)$$

В выражении (22.11) аргумент  $at$ , который может принимать любые значения, обозначим  $\xi$ . Тогда

$$f'(\xi) = -\frac{1}{EF} P\left(\frac{\xi}{a}\right). \quad (22.12)$$

Интегрируя это выражение и учитывая, что  $f(0) = 0$ , так как в момент  $t = 0$  сечение  $z = 0$  еще не двигалось, находим

$$f(\xi) = -\frac{1}{EF} \int_0^{\xi} P\left(\frac{\xi}{a}\right) d\xi. \quad (22.13)$$

Формулы (22.12) и (22.13) определяют функцию  $f(\xi)$ , через которую выражаются перемещения.

Теперь вычислим нормальную силу в произвольном сечении стержня. Для этого в общем выражении (22.10) заменим  $f'$  ее значением из выражения (22.12):

$$N(z, t) = P(t - z/a). \quad (22.14)$$

Из формулы (22.14) следует, что нормальная сила в сечении  $z$  в момент  $t$  равна нагрузке, которая прикладывалась к концу стержня в момент  $t - z/a$ . Это пояснено схематически на рис. 22.2.

Итак, сила, а значит, и напряжение и деформация распространяются вдоль оси стержня со скоростью  $a = \sqrt{E/\rho}$ .

Для стали, полагая  $E = 1,96 \cdot 10^{11}$  Па,  $\rho = 7,85 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>, находим скорость распространения деформации:

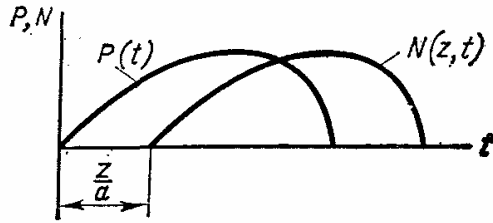


Рис. 22.2

$$a = \sqrt{\frac{1,96 \cdot 10^{11}}{7,85 \cdot 10^3}} = 5000 \text{ м/с.}$$

Скорость движения сечения  $z$  определяется формулой

$$v(z, t) = \frac{\partial x}{\partial t} = af'(at - z) = -\frac{a}{EF} P\left(t - \frac{z}{a}\right). \quad (21.15)$$

Из сопоставления формул (22.15) и (22.14) видно, что внутренняя сила и скорость движения сечения связаны зависимостью

$$v(z, t) = -[a/(EF)] N(z, t). \quad (22.16)$$

Зависимость (22.16) справедлива и для нагруженного конца стержня ( $z = 0$ ):

$$v_{z=0} = -[a/(EF)] P(t). \quad (22.17)$$

Конечно, растягивающей силе (см. рис. 22.1) соответствует движение стержня влево, поэтому в формулах (22.16) и (22.17) стоит знак минус].

В рассмотренном выше полубесконечном стержне распространялась только прямая волна деформации, движущаяся слева направо. Если стержень конечный, то волны отражаются от второго его конца и в общем решении уравнения (22.4) отличны от нуля обе функции  $f$  и  $\varphi$ .

В качестве примера того, как конструируются функции  $f$  и  $\varphi$  в этом случае, рассмотрим классическую задачу об ударе жесткого груза по стержню, конец которого заделан (рис. 22.3). Предполагается, что после соприкосновения груз и стержень представляют собой одно целое до тех пор, пока усилие их взаимодействия остается сжимающим. Поместим начало координат в точку удара. Тогда для закрепленного конца стержня ( $z = l$ ) получим граничное условие  $x_{z=l} = 0$ . Подставив сюда вместо  $x$  выражение (22.4), найдем

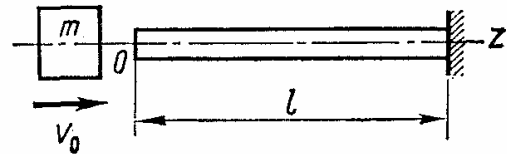


Рис. 22.3

$$f(at - l) + \varphi(at + l) = 0.$$

Так как в этом равенстве  $t$  может принимать любое значение, то

$$\varphi(\zeta) = -f(\zeta - 2l),$$

где аргумент  $\zeta$  может принимать произвольные значения. Если произвести соответствующую замену в выражении (22.4), то

$$x(z, t) = f(at - z) - f(at + z - 2l). \quad (22.18)$$

Вид функции  $f$  можно определить, рассматривая взаимодействие стержня с грузом.

Считая, что груз движется вместе с концом стержня ( $z = 0$ ), находим его силу инерции:  $-m(\partial^2 x / \partial t^2)_{z=0}$ . Эта сила уравнивается продольной силой на конце стержня, равной  $EF(\partial x / \partial z)_{z=0}$ . Таким образом, уравнение движения груза имеет вид

$$\left[ -m \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + EF \frac{\partial x}{\partial z} \right]_{z=0} = 0,$$

или, поскольку  $E = a^2 \rho$ ,

$$\left[ \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} - \kappa \frac{a^2}{l} \frac{\partial x}{\partial z} \right]_{z=0} = 0, \quad (22.19)$$

где  $\kappa$  — отношение массы стержня к массе груза,  $\kappa = \rho Fl / m$ .

Подставляя в уравнение (22.19) вместо  $x$  его значение из выражения (22.18) и заменяя буквой  $\zeta$  величину  $at$ , получаем

$$f''(\zeta) - f''(\zeta - 2l) + \frac{\kappa}{l} [f'(\zeta) + f'(\zeta - 2l)] = 0,$$

где штрихи обозначают дифференцирование по аргументу.

Отсюда

$$f''(\zeta) + \frac{\kappa}{l} f'(\zeta) = f''(\zeta - 2l) - \frac{\kappa}{l} f'(\zeta - 2l). \quad (22.20)$$

Дифференциальное уравнение (22.20) связывает значения функции  $f(\zeta)$  со значением этой функции для аргумента, меньшего на  $2l$ . Используя формулу (22.20) и начальные условия, можно шаг за шагом построить функцию  $f(\zeta)$ .

До соприкосновения груза  $m$  со стержнем (т. е. при  $t < 0$ ) для всех точек стержня смещение равно нулю. Следовательно, при  $\zeta < 0$   $f(\zeta) = 0$ . Поэтому для интервала  $0 < \zeta < 2l$  правая часть уравнения (22.20) равна нулю:

$$f''(\zeta) + \frac{\kappa}{l} f'(\zeta) = 0.$$

Интегрируя это уравнение, находим, что при  $0 < \zeta < 2l$

$$f'(\zeta) = C e^{-\kappa \zeta / l}.$$

Так как в начальный момент  $t = 0$  скорость конца стержня  $z = 0$  равна скорости груза  $v_0$ , то  $(\partial x / \partial t)_{t=0, z=0} = v_0$ . Подставляя сюда выражение (22.18), получаем  $a[f'(0) - f'(-2l)] = v_0$ , или, так как  $f'(-2l) = 0$ ,  $C = f'(0) = v_0 / a$ .

Таким образом, при  $0 < \zeta < 2l$  функция  $f'(\zeta)$  определяется выражением

$$f'(\zeta) = \frac{v_0}{a} e^{-\kappa \zeta / l}. \quad (22.21)$$

Зная функцию  $f'(\xi)$  для значений  $\xi < 2l$ , можно исследовать изменение усилий и скоростей в любом сечении стержня, начиная с первого момента удара и до тех пор, пока  $at < 2l - z$ , т. е. пока до данного сечения не дойдет отраженная от опоры волна деформации.

При  $at < 2l - z$  функция  $f(at + z - 2l) = 0$  и выражение (22.18) для перемещения имеет вид

$$x = f(at - z);$$

соответственно скорости и деформации в любом сечении равны:

$$v = \frac{\partial x}{\partial t} = af'(at - z), \quad \varepsilon = \frac{\partial x}{\partial z} = -f'(at - z).$$

Подставляя сюда значение  $f$  по формуле (22.21), найдем, что при  $z < at < 2l - z$

$$v = v_0 e^{-z(at-z)/l}, \quad \varepsilon = -(v_0/a) e^{-z(at-z)/l}. \quad (22.22)$$

На рис. 22.4 представлены построенные по формулам (22.22) эпюры скоростей и деформаций по длине стержня для момента, когда волна деформации не дошла еще до закрепленного конца стержня. Эти эпюры являются разрывными; на фронте волны скорость скачкообразно изменяется от нуля до  $v_0$ , а деформация — от нуля до  $-v_0/a$ .

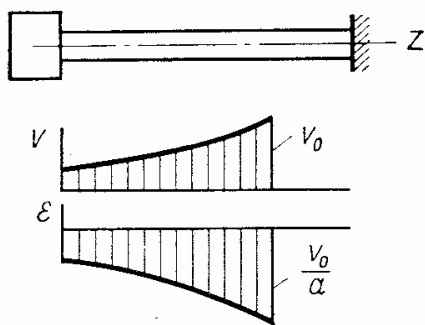


Рис. 22.4

Пока волна деформации не дошла до опоры, скорости и деформации в любом сечении оказываются связанными простым соотношением

$$v = -a\varepsilon.$$

Таким образом, деформация сжатия, возникающая в стержне в первый момент удара, полностью определяется скоростью удара и не зависит от массы ударяющего груза. Можно оценить порядок той максимальной скорости удара  $v_*$ , при которой уже в первый момент удара в стержне возникают пластические деформации:

$$v_* = a\varepsilon_{\text{пл}},$$

где  $\varepsilon_{\text{пл}}$  — деформация, соответствующая пределу пропорциональности.

Для стали, принимая скорость распространения деформации  $a = 5000$  м/с, а деформацию — соответствующей пределу пропорциональности, например 0,001, находим предельную скорость удара, при которой может еще не быть пластических деформаций:

$$v_* = a\varepsilon_{\text{пл}} = 5000 \cdot 0,001 = 5 \text{ м/с.}$$

Для легированных сталей, имеющих более высокий предел упругости, соответственно увеличивается и предельная скорость.

Выше рассмотрен лишь первый этап удара, когда имеется только прямая волна деформации, идущая по стержню слева направо.

Уравнение (22.20) позволяет построить функцию  $f(\xi)$  для следующего интервала изменения аргумента:  $2l < \xi < 4l$ . Подставив в правую часть этого уравнения найденное выше значение функции  $f(\xi)$  для  $0 < \xi < 2l$ , получим для интервала  $2l < \xi < 4l$

$$f''(\xi) + \frac{\kappa}{l} f'(\xi) = -2 \frac{v_0}{a} \frac{\kappa}{l} e^{-\kappa(\xi-2l)/l}. \quad (22.23)$$

Произвольная постоянная при интегрировании этого уравнения определяется из условия, что скорость груза, а значит, и скорость конца стержня ( $z = 0$ ) не могут изменяться скачкообразно, т. е. что

$$(\partial x / \partial t)_{z=0} = a [f'(at) - f'(at - 2l)]$$

представляет собой непрерывную функцию. Это условие удовлетворяется, если разрывы функции  $f'(\xi)$  будут в точности повторяться при изменении аргумента на  $2l$ . Так как при  $\xi = 0$  функция  $f'(\xi)$  скачком увеличивается на величину  $v_0/a$ , то этот же скачок повторяется и при  $\xi = 2l$ ,  $\xi = 4l$ ,  $\xi = 6l$  и т. д. В частности, при  $\xi = 2l$  функция  $f'(\xi)$  со значения, определяемого формулой (22.21),

$$f'_-(2l) = (v_0/a) e^{-2\kappa}$$

должна увеличиться до

$$f'_+(2l) = (v_0/a) (e^{-2\kappa} + 1).$$

Последнее значение  $f'(\xi)$  и является начальным условием для интегрирования уравнения (22.23). Интегрируя это уравнение, получаем для интервала  $2l < \xi < 4l$

$$f'(\xi) = \frac{v_0}{a} e^{-\kappa\xi/l} + \frac{v_0}{a} \left(1 - 2\kappa \frac{\xi - 2l}{l}\right) e^{-\kappa(\xi-2l)/l}.$$

Аналогично находим при  $4l < \xi < 6l$

$$f'(\xi) = \frac{v_0}{a} e^{-\kappa\xi/l} + \frac{v_0}{a} \left(1 - 2\kappa \frac{\xi - 2l}{l}\right) e^{-\kappa(\xi-2l)/l} + \\ + \frac{v_0}{a} \left[1 - 2\kappa \frac{\xi - 4l}{l} \left(2 - \kappa \frac{\xi - 4l}{l}\right)\right] e^{-\kappa(\xi-4l)/l}.$$

Таким образом, шаг за шагом можно сконструировать функцию  $f'(\xi)$  для любых значений аргумента.

Далее, можно интегрированием получить функцию  $f(\xi)$ , которая является непрерывной:

при  $0 < \xi < 2l$

$$f(\xi) = \frac{v_0 l}{a} \frac{1}{\kappa} (1 - e^{-\kappa\xi/l});$$

при  $2l < \xi < 4l$

$$f(\xi) = \frac{v_0 l}{a} \frac{1}{\kappa} \left[ -e^{-\kappa \xi / l} + \left( 1 + 2\kappa \frac{\xi - 2l}{l} \right) e^{-\kappa (\xi - 2l) / l} \right];$$

при  $4l < \xi < 6l$

$$f(\xi) = \frac{v_0 l}{a} \frac{1}{\kappa} \left\{ 1 - e^{-\kappa \xi / l} + \left( 1 + 2\kappa \frac{\xi - 2l}{l} \right) e^{-\kappa (\xi - 2l) / l} - \left[ 1 + 2\kappa^2 \left( \frac{\xi - 4l}{l} \right)^2 \right] e^{-\kappa (\xi - 4l) / l} \right\}$$

и т. д.

Зная функцию  $f(\xi)$ , можно по формуле (22.18) найти перемещение  $x$ . Продифференцировав по  $z$  выражение (22.18), находим деформацию  $\varepsilon$ :

$$\varepsilon = \partial x / \partial z = -[f'(at - z) + f'(at + z - 2l)].$$

На рис. 22.5, а в качестве примера приведены графики функции  $f(\xi)$  и ее производной для случая, когда отношение собственной массы стержня к массе груза  $\kappa = 0,5$ .

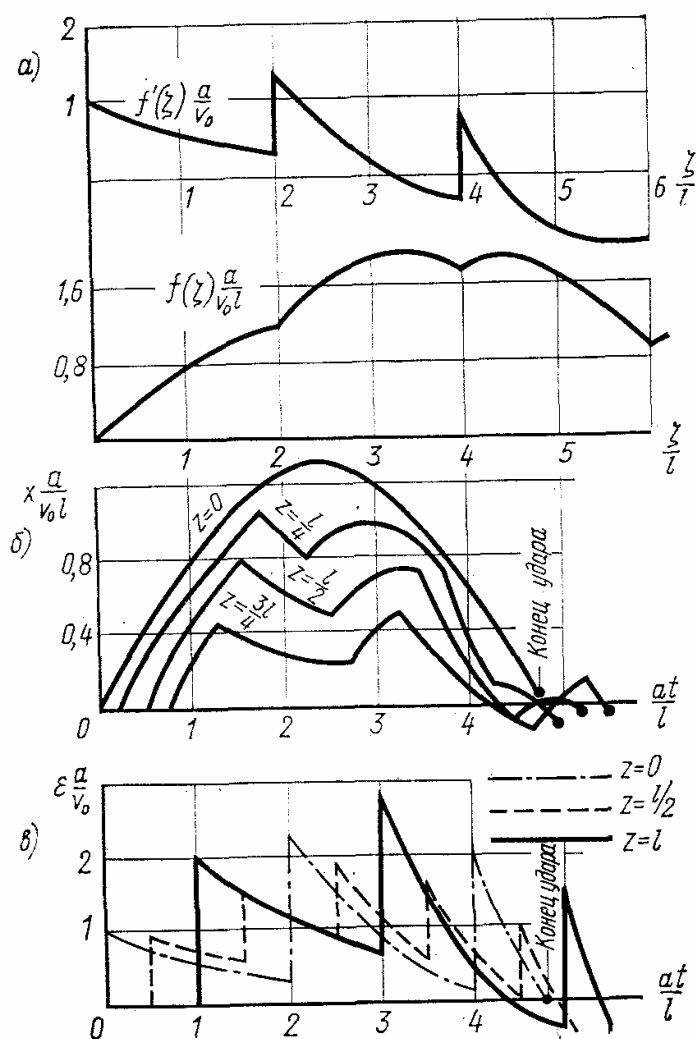


Рис. 22.5



На рис. 22.5, б приведены графики зависимости от времени перемещений различных сечений стержня, а на рис. 22.5, в — деформации в тех же сечениях. По абсциссам рис. 22.5, б, в отложена безразмерная величина  $at/l$ , пропорциональная времени. Из графика на рис. 22.5, в видно, что в момент  $t = 4,8l/a$  деформации, а следовательно, и усилие на конце стержня  $z = 0$  падают до нуля. В этот момент груз отделяется от стержня и процесс удара заканчивается.

Как видно из рассмотренного примера, расчет процесса удара по методу Даламбера связан с довольно сложными выкладками. Особенно усложняется расчет, если масса груза значительно больше собственной массы стержня, так как в этом случае необходимо рассматривать большое число интервалов изменения переменной  $\xi$ .

Более наглядным является расчет распространения упругих волн с помощью метода характеристик. Здесь мы рассмотрим лишь основы этого метода. Применение метода к задачам продольного удара рассмотрено в [40]\*.

Обозначим:  $v$  — скорость движения произвольной точки стержня и  $\varepsilon$  — относительная деформация в этой точке;

$$v = \partial x / \partial t, \quad \varepsilon = \partial x / \partial z.$$

Определяя эти величины из общего выражения (22.4) для  $x$ , получаем:

$$v = af'(at - z) + a\varphi'(at + z),$$

$$\varepsilon = -f'(at - z) + \varphi'(at + z).$$

Исключив из этих уравнений сначала  $\varphi'$ , а затем  $f'$ , найдем:

$$v - a\varepsilon = 2af'(at - z),$$

$$v + a\varepsilon = 2a\varphi'(at + z). \quad (22.24)$$

Из уравнений (22.24) следует, что разность  $(v - a\varepsilon)$  зависит только от разности  $(at - z)$ , а сумма  $(v + a\varepsilon)$  зависит только от суммы  $(at + z)$ .

Если изобразить две системы координат:  $zt$  (рис. 22.6, а) и  $v\varepsilon$

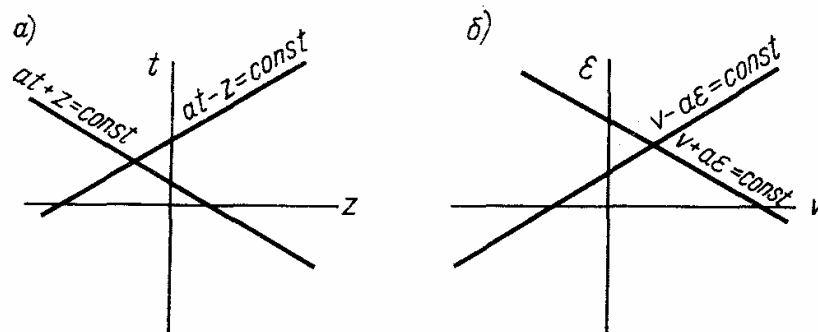


Рис. 22.6

\* См. также: Б и д е р м а н В. Л., М а л ю к о в а Р. П. Усилия и деформации при продольном ударе. — В кн.: Расчеты на прочность. Вып. 10. М., Машгиз, 1959.

(рис. 22.6, б), то прямым  $at - z = \text{const}$  в первой системе соответствуют прямые  $v - a\varepsilon = \text{const}$  во второй системе. Точно так же прямым  $at + z = \text{const}$  соответствуют прямые  $v + a\varepsilon = \text{const}$ .

Таким образом, при  $at - z = \text{const}$

$$v - a\varepsilon = \text{const} \quad (22.25)$$

и при  $at + z = \text{const}$

$$v + a\varepsilon = \text{const}. \quad (22.26)$$

Семейства прямых линий (характеристик) служат для нахождения соответствия точек в координатных системах  $zt$  и  $v\varepsilon$ .

Если такое соответствие найдено, то задача решена, так как известны значения скорости  $v$  и деформации  $\varepsilon$  в любом сечении  $z$  в любой момент времени  $t$ .

Чтобы пояснить излагаемый метод, рассмотрим частный пример (рис. 22.7).

Правый конец стержня ( $z = l$ ) закреплен неподвижно, а к левому концу ( $z = 0$ ) в момент  $t = 0$  прикладывается усилие  $P$ , которое в дальнейшем не изменяет своей величины.

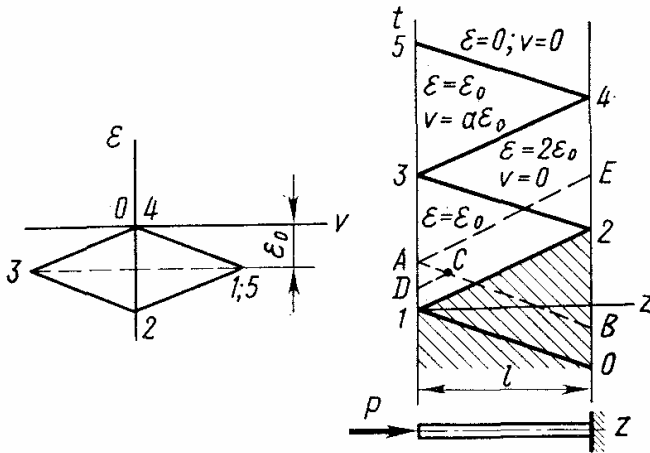


Рис. 22.7

Все точки плоскости  $zt$ , лежащие ниже оси  $z$ , отображаются на плоскости  $v\varepsilon$  в точку 0 ( $\varepsilon = 0, v = 0$ ), так как при  $t < 0$  усилия и скорости во всех сечениях стержня отсутствуют. Для того чтобы найти отображение точки 1 ( $z = 0, t = 0$ ), которая соответствует начальному моменту приложения силы, проведем на плоскости  $zt$  характеристику  $0-1$ , уравнение которой  $at + z = 0$ .

Этой характеристике в плоскости  $v\varepsilon$  соответствует линия  $v + a\varepsilon = C$ , которую легко построить, так как известно, что точка 0 плоскости  $zt$  отображается в точку 0 плоскости  $v\varepsilon$ .

Отображение точки 1 лежит на линии  $v + a\varepsilon = 0$ . Так как деформация, соответствующая точке 1, известна:  $\varepsilon_0 = -P/(EF)$ , то легко отыскать эту точку на плоскости  $v\varepsilon$ .

Из построения видно, что точка 1 соответствует скорости

$$v = v_0 = -a\varepsilon_0 = aP/(EF).$$

Таким образом, при приложении силы  $P$  конец стержня мгновенно приобретает скорость  $v_0$ .

Теперь проведем на плоскости  $zt$  характеристику положительного направления  $1-2$ . Этой характеристике на плоскости  $v\varepsilon$  соответствует прямая  $v - a\varepsilon = C$ , проходящая через точку 1. Отображение точки 2 лежит на этой прямой и в то же время, так как точка 2 соответствует закреплённому концу стержня, скорость в ней равна нулю и, следовательно, ее отображение лежит на оси  $\varepsilon$ .

Точка 3 лежит на той же характеристике отрицательного направления, что и точка 2, и вместе с тем она соответствует концу стержня, на котором  $\varepsilon = \varepsilon_0$ . Отображение точки 4 совпадает с началом координат, отображение точки 5 — с точкой 1 и т. д.

После того как деформации и скорости в характерных точках найдены, можно определить их значения и при любых значениях  $z$  и  $t$ .

Прежде всего устанавливаем, что участок вертикальной линии  $z = l$ , лежащий ниже точки 2, соответствует нулевым скоростям и усилиям. Действительно, отображения точек этого участка лежат на оси  $v = 0$  и, кроме того, любая точка этого участка может быть соединена характеристикой положительного направления с точками оси  $t$ , лежащими ниже точки 1 ( $t < 0$ ), отображающимися, следовательно, в начало координат. Таким образом, отображение точек участка  $z = l$ ,  $t < l/a$  должно лежать одновременно и на линии  $v - a\varepsilon = 0$ , и на линии  $v = 0$ . Следовательно, весь этот участок отображается в точку 0 ( $\varepsilon = 0$ ,  $v = 0$ ).

В ту же точку отображается и вся заштрихованная площадь, лежащая ниже характеристики 1—2. Действительно, каждая точка этой площади может быть соединена характеристиками положительного и отрицательного направлений с точками, в которых, как мы уже установили,  $\varepsilon = 0$  и  $v = 0$ , значит, и сама эта точка отображается в точку 0.

Отрезок линии  $z = 0$  между точками 1 и 3 отображается на плоскости  $v\varepsilon$  в точку 1, так как произвольную точку этого участка  $A$  можно соединить характеристикой отрицательного направления  $AB$  с точкой  $B$  нулевых скоростей и деформаций.

Отображением этой характеристики на плоскости  $v\varepsilon$  является прямая 0—1. Вместе с тем усилие в точке  $A$  задано, следовательно, задана и деформация  $\varepsilon = \varepsilon_0$ . Значит, отображение точки  $A$  лежит одновременно на линии 0—1 и на линии  $\varepsilon = \varepsilon_0$ , следовательно, оно совпадает с точкой 1.

Теперь можно установить, что вся внутренность треугольника 123 отображается на плоскости  $v\varepsilon$  в точку 1. Произвольная точка этого треугольника  $C$  находится на пересечении характеристики отрицательного направления  $AB$ , проходящей через нулевую точку, и характеристики положительного направления  $DC$ , проходящей через точку  $D$ . Так как на плоскости  $v\varepsilon$  точка  $D$  отображается в точку 1, то этим двум характеристикам соответствуют линии 0—1 и 0—2. Точка  $C$  отображается в точку пересечения этих двух линий, т. е. тоже в точку 1.

Далее, с помощью характеристики  $AE$ , отображением которой является линия 1—2, можно обнаружить, что произвольная точка отрезка 2—4 отображается в точку 2.

Затем таким же образом устанавливаем, что вся внутренность треугольника 2, 3, 4 отображается в точку 2, а вся внутренность треугольника 3, 4, 5 — в точку 3. Внутренность треугольника 4, 5, 6 отображается в точку 0 и т. д.

Характеристики 1—2, 2—3, 3—4, 4—5 являются линиями раз-

рыва: при переходе через них скорости и усилия изменяются скачкообразно.

После того как найдены значения  $v$  и  $\varepsilon$  для точек плоскости  $zt$ , задача, в сущности, решена.

Для большей наглядности можно построить графики изменения усилий и скоростей в различных сечениях стержня по времени (рис. 22.8). Из построенных графиков видно, что максимальная динамическая деформация в стержне вдвое превышает величину  $\varepsilon_0$ , соответствующую статическому действию силы.

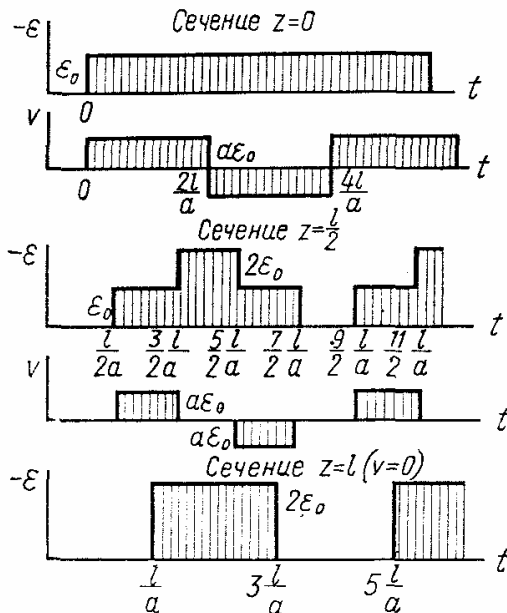


Рис. 22.8

Рассмотренная выше теория распространения продольных колебаний полностью пригодна и для изучения крутильных колебаний стержней, которые также описываются волновым уравнением. При этом следует иметь в виду, что при крутильных колебаниях скорость распространения волн  $a_T = \sqrt{G/\rho}$ , а место поступательной скорости сечения  $v$  и относительной деформации  $\varepsilon$  занимают угловая скорость сечения и угол закручивания на единицу длины стержня.

#### Распространение волн при изгибе.

Дифференциальное уравнение (18.1) движения стержня при изгибе, основанное на гипотезе Бернулли,

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \left( EJ \frac{\partial^2 x}{\partial z^2} \right) + m_0 \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = 0$$

не является волновым. Поэтому оно непригодно для изучения распространения волновых фронтов по длине стержня. Это положение связано с самой расчетной схемой бруса, лежащей в основе технической теории изгиба.

В самом деле, в этой теории предполагается, что деформация бруса при изгибе обусловлена только растяжением и сжатием продольных волокон. Расчетную схему бруса можно представить в виде шарнирной цепи из жестких звеньев, связанных по верхнему и нижнему поясам упругими пружинами (рис. 22.9).

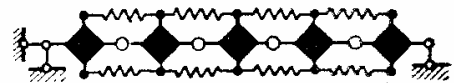


Рис. 22.9

В этой схеме движение одного звена при неподвижных соседних невозможно, а значит невозможно и разрывное распределение скоростей, характерное для волновых процессов.

В отличие от уравнения (18.1) уравнения (18.22)

$$\frac{\partial^2 x}{\partial z^2} - \frac{\alpha p}{G} \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = \frac{\partial^3}{\partial z^3},$$

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial z^2} - \frac{\rho}{E} \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial t^2} = \frac{GF}{\alpha EJ} \left( \vartheta - \frac{\partial x}{\partial z} \right)$$

для балки Тимошенко являются волновыми. В этом можно убедиться, если принять во внимание, что вблизи фронта распространяющейся волны все переменные (перемещения, повороты) меняются очень быстро, поэтому их производные велики по сравнению с самими переменными. Поэтому при изучении законов распространения волновых фронтов в уравнениях (18.22) можно в первом приближении пренебречь правыми частями. При этом уравнения относительно  $x$  и  $\vartheta$  становятся независимыми обычными волновыми уравнениями с характерными скоростями, соответственно  $a_Q = \sqrt{G/(\alpha\rho)}$ ;  $a = \sqrt{E/\rho}$ .

Следовательно, в балке Тимошенко имеются две характерные скорости распространения волн: разрывы поперечной силы распространяются со скоростью  $a_Q$ , а разрывы изгибающего момента — со скоростью  $a$ . Таким образом, наибольшая скорость распространения возмущений в балке Тимошенко совпадает со скоростью распространения продольных волн в стержнях. [Заметим, что точное значение максимальной скорости распространения упругих волн можно получить, пользуясь формулой (22.1).]

Решения ряда задач распространения волн в балках на основе схемы Тимошенко приведены в работах [17, 40].

Следует, однако, иметь в виду, что хотя простое дифференциальное уравнение (18.1) и непригодно для анализа распространения волновых фронтов, оно дает надежные результаты при исследовании общих деформаций бруса даже при сравнительно резких (но не мгновенных) ударных нагрузках. Так, при расчете удара груза о балку (с учетом местных деформаций) величины прогибов и изгибающих моментов, вычисленные на основе уравнения (18.1), как правило, не более чем на 10—15% отличаются от величины, вычисленных на основе более точной модели балки Тимошенко.

### § 23. КОЛЕБАНИЯ КРУГОВЫХ КОЛЕЦ

**Колебания в плоскости кольца.** Рассмотрим круговой брус малой кривизны постоянного сечения с радиусом  $R$  осевой линии

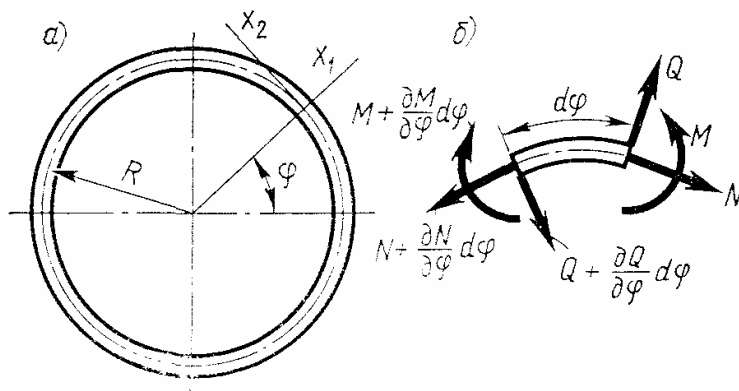


Рис. 23.1

(рис. 23.1, а). Брус считаем нерастяжимым. Перемещение центра тяжести поперечного сечения, зафиксированного угловой координатой  $\varphi$ , можно разложить на радиальный ( $x_1$ ) и окружной ( $x_2$ ) компоненты.

Из условия нерастяжимости оси бруса следует, что перемещения  $x_1$  и  $x_2$  связаны зависимостью

$$\frac{\partial x_2}{R \partial \varphi} + \frac{x_1}{R} = 0. \quad (23.1)$$

Угол поворота поперечного сечения бруса в процессе движения определяется формулой

$$\vartheta = \frac{x_2}{R} - \frac{\partial x_1}{R \partial \varphi} \quad (23.2)$$

(положительный знак  $\vartheta$  соответствует на рис. 23.1 повороту против часовой стрелки).

Изменение кривизны бруса  $\kappa$  равно производной от  $\vartheta$  по дуге

$$\kappa = \frac{\partial \vartheta}{R \partial \varphi} = \frac{1}{R^2} \left( \frac{\partial x_2}{\partial \varphi} - \frac{\partial^2 x_1}{\partial \varphi^2} \right). \quad (23.3)$$

Изгибающий момент в сечении кольца

$$M = -EJ\kappa = -\frac{EJ}{R^2} \left( \frac{\partial x_2}{\partial \varphi} - \frac{\partial^2 x_1}{\partial \varphi^2} \right). \quad (23.4)$$

Теперь составим уравнение движения элемента  $Rd\varphi$  бруса (рис. 23.1, б).

Проектируя приложенные к элементу силы (с учетом силы инерции  $-m_0 R d\varphi \frac{\partial^2 x_1}{\partial t^2}$ , где  $m_0$  — масса единицы длины бруса) на радиус, получаем

$$m_0 R \frac{\partial^2 x_1}{\partial t^2} + \frac{\partial Q}{\partial \varphi} + N = 0. \quad (23.5)$$

Равенство нулю суммы проекции сил на направление касательной приводит к уравнению

$$m_0 R \frac{\partial^2 x_2}{\partial t^2} + Q - \frac{\partial N}{\partial \varphi} = 0. \quad (23.6)$$

Наконец, уравнение моментов

$$\partial M / \partial \varphi = QR. \quad (23.7)$$

Исключим из уравнений (23.5) и (23.6) нормальную силу  $N$ , а поперечную силу  $Q$  заменим ее значением из уравнения (23.7):

$$m_0 R^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( \frac{\partial x_1}{\partial \varphi} + x_2 \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{\partial^2 M}{\partial \varphi^2} + M \right) = 0. \quad (23.8)$$

Подставив сюда значение  $M$  из уравнения (23.4), получим уравнение движения в перемещениях  $x_1$ ,  $x_2$ , и, наконец, исключив один из

компонентов перемещения, с помощью условия нерастяжимости (23.1), придем к уравнению, в которое входит единственная переменная  $x_2$ :

$$\frac{\partial^6 x_2}{\partial \varphi^6} + 2 \frac{\partial^4 x_2}{\partial \varphi^4} + \frac{\partial^2 x_2}{\partial \varphi^2} + \frac{m_0 R^4}{EJ} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( \frac{\partial^2 x_2}{\partial \varphi^2} - x_2 \right) = 0. \quad (23.9)$$

Решение уравнения движения, как обычно, представляем в виде

$$x_1 = u_1(\varphi) \cos pt, \quad x_2 = u_2(\varphi) \sin pt.$$

При этом для  $u_2$  получается обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{d^6 u_2}{d\varphi^6} + 2 \frac{d^4 u_2}{d\varphi^4} + \frac{d^2 u_2}{d\varphi^2} - \frac{m_0 R^4 p^2}{EJ} \left( \frac{d^2 u_2}{d\varphi^2} - u_2 \right) = 0, \quad (23.10)$$

$$u_1 = -du_2/d\varphi.$$

Согласно общим правилам следует найти общее (включающее шесть постоянных) решение уравнения (23.10) и подчинить его граничным условиям. На каждом конце бруса должны быть равны нулю либо компоненты перемещений ( $x_1$ ,  $x_2$ ,  $\vartheta$ ), либо соответствующие им внутренние силы. Равенство нулю определителя системы, выражающей граничные условия, является уравнением частот.

Для замкнутого кольца граничные условия заменяются условиями периодичности, которые выполняются, если принять:

$$u_2 = \cos k\varphi, \quad u_1 = k \sin k\varphi. \quad (23.11)$$

Подставляя выражение (23.11) в уравнение (23.10), устанавливаем, что последнее удовлетворяется тождественно, если

$$p_k = p_k = \frac{k(k^2 - 1)}{\sqrt{k^2 + 1}} \sqrt{\frac{EJ}{m_0 R^4}}. \quad (23.12)$$

Формула (23.12) определяет частоты собственных колебаний кольца в своей плоскости. Значению  $k = 1$  соответствует нулевая частота, так как при  $k = 1$  формулы (23.11) описывают смещение кольца как жесткого тела. Формы движения при  $k = 1, 2, 3$  показаны на рис. 23.2.

**Колебания, перпендикулярные плоскости кольца.** В данном случае положение поперечного сечения кольца в процессе движения характеризуется смещением  $x_3$  его центра тяжести из плоскости кольца

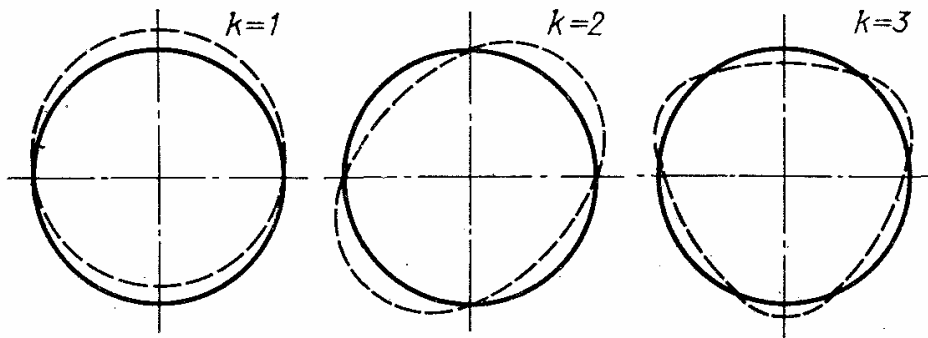


Рис. 23.2

и углом поворота сечения  $x_4$  (рис. 23.3, а). В поперечном сечении кольца возникают изгибающие и крутящие моменты (рис. 23.3, б) и поперечная сила, перпендикулярная плоскости кольца.

Установим зависимость моментов от перемещений. Пользуясь линейностью задачи, рассмотрим сначала силовые факторы, связанные со смещением  $x_3$ , а затем — с  $x_4$ .

Если  $x_3$  постоянно по длине окружности, то кольцо смещается как жесткое и внутренние силы не возникают. Если  $x_3$  меняется в зависимости от центрального угла по линейному закону ( $\partial x_3 / \partial \varphi = \text{const}$ ), то ось бруса превращается в винтовую линию, т. е. брус деформируется подобно витку пружины растяжения. Известно, что в этом случае в поперечных сечениях возникает крутящий момент

$$M_K = -GJ_K R^{-2} \partial x_3 / \partial \varphi,$$

где  $GJ_K$  — крутильная жесткость сечения бруса.

Наконец, если отлична от нуля и вторая производная  $\frac{d^2 x_3}{d\varphi^2}$ , то меняется кривизна бруса и возникает изгибающий момент

$$M_{\text{изг}} = EJ_1 R^{-2} \partial^2 x_3 / \partial \varphi^2,$$

где  $J_1$  — момент инерции сечения относительно центральной оси, лежащей в плоскости кривизны.

Найдем силовые факторы, связанные с поворотом  $x_4$ . Если  $x_4$  постоянно, то происходит осесимметричный изгиб кольца, причем в его сечениях возникает изгибающий момент

$$M_{\text{изг}}'' = (EJ_1 / R) x_4.$$

При переменном по длине повороте  $x_4$  соседние сечения поворачиваются друг относительно друга и возникает крутящий момент,

$$M_K'' = GJ_K R^{-1} \partial x_4 / \partial \varphi.$$

Суммируя силовые факторы, связанные с перемещениями  $x_3$  и  $x_4$ , получаем:

$$\begin{aligned} M_{\text{изг}} &= EJ_1 \left( \frac{\partial^2 x_3}{R^2 \partial \varphi^2} + \frac{x_4}{R} \right), \\ M_K &= GJ_K \left( -\frac{\partial x_3}{R^2 \partial \varphi} + \frac{\partial x_4}{R \partial \varphi} \right). \end{aligned} \quad (23.13)$$

Составим уравнения движения элемента  $Rd\varphi$  бруса (рис. 23.4).



При этом пренебрежем инерцией поворота элемента вокруг своей оси.

Условие динамического равновесия в направлении нормали к плоскости кольца приводит к уравнению

$$m_0 R \frac{\partial^2 x_3}{\partial t^2} + \frac{\partial Q}{\partial \varphi} = 0. \quad (23.14)$$

Сумма моментов относительно нормали  $n$  к оси элемента

$$\frac{\partial M_{\text{изг}}}{\partial \varphi} + M_K - QR = 0. \quad (23.15)$$

Сумма моментов относительно касательной к оси элемента

$$\frac{\partial M_K}{\partial \varphi} - M_{\text{изг}} = 0. \quad (23.16)$$

Исключив поперечную силу из уравнений (23.14) и (23.15) и заменив моменты в полученном уравнении и уравнении (23.16) их значениями из (23.13), придем к системе, в которую входят только перемещения  $x_3, x_4$ :

$$\begin{aligned} \frac{m_0 R^3}{EJ} \frac{\partial^2 x_3}{\partial t^2} + \frac{\partial^4 x_3}{R \partial \varphi^4} - \frac{GJ_K}{EJ_1} \frac{\partial^2 x_3}{R \partial \varphi^2} + \left(1 + \frac{GJ_K}{EJ_1}\right) \frac{\partial^2 x_4}{\partial \varphi^2} &= 0, \\ \left(1 + \frac{GJ_K}{EJ_1}\right) \frac{\partial^2 x_3}{R \partial \varphi^2} - \left(\frac{GJ_K}{EJ_1} \frac{\partial^2 x_4}{\partial \varphi^2} - x_4\right) &= 0. \end{aligned} \quad (23.17)$$

Ограничимся исследованием собственных колебаний замкнутого кольца. В этом случае решение уравнений (23.17) можно представить в таком виде:

$$x_3 = A \cos k\varphi \cos pt, \quad x_4 = B \cos k\varphi \cos pt. \quad (23.18)$$

Подстановка значений (23.18) в уравнения движения дает

$$\begin{aligned} A \frac{1}{R} \left( k^4 + k^2 \frac{GJ_K}{EJ_1} - \frac{m_0 R^4}{EJ_1} p^2 \right) - B k^2 \left( 1 + \frac{GJ_K}{EJ_1} \right) &= 0, \\ -A \frac{k^2}{R} \left( 1 + \frac{GJ_K}{EJ_1} \right) + B \left( 1 + k^2 \frac{GJ_K}{EJ_1} \right) &= 0. \end{aligned}$$

Из равенства нулю определителя этой системы находим собственные частоты:

$$p_k = \frac{k(k^2 - 1)}{\sqrt{k^2 GJ_K / (EJ_1) + 1}} \sqrt{\frac{GJ_K}{m_0 R^4}}. \quad (23.19)$$

Наименьшая отличная от нуля частота соответствует  $k = 2$ .

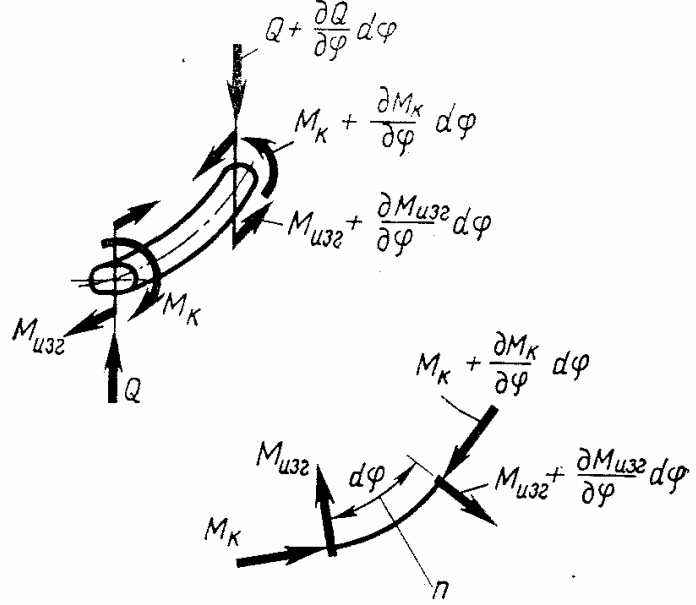


Рис. 23.4

## ГЛАВА IV

### ПРИБЛИЖЕННЫЕ И ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТА КОЛЕБАНИЙ

Методы расчета, рассмотренные в гл. II, III, становятся тем более громоздкими, чем сложнее структура рассчитываемой системы. Поэтому возникает необходимость в способах, позволяющих успешно рассчитывать и сложные системы.

Один из возможных путей состоит в применении простых приближенных формул (например, формулы Рэлея). В этом случае задают форму колебаний системы, сводя ее таким образом к системе с одной степенью свободы. При удачной аппроксимации получают достаточно точное значение низшей собственной частоты системы, однако другие ее динамические характеристики остаются не раскрытыми.

Схематизация реальной системы, как имеющей несколько степеней свободы, достигается в методе Рэлея—Ритца, при использовании которого форма колебаний системы задается в виде выражения, включающего несколько параметров.

Другим приемом, позволяющим свести реальную систему к системе с конечным числом степеней свободы, является метод прямой дискретизации. Чем больше число элементов, на которые разбита система при применении этого метода, тем ближе расчетная схема к исходной системе. Вместе с тем, если элементы выбраны однотипными, даже при большом их числе оказывается возможным реализовать расчет колебаний, используя матричные методы с применением ЦВМ. Два таких метода — метод начальных параметров в форме матриц перехода и метод прогонки — рассмотрены в настоящей главе.

Применяя матрицы перехода к регулярным системам (т. е. к цепным системам, составленным из одинаковых элементов), удастся получить замкнутые расчетные формулы при произвольном числе элементов.

При динамических расчетах конструкций сложной конфигурации в последнее время широко используется метод конечных элементов. Для реализации этого метода необходимы достаточно мощные вычислительные машины.

В том случае, когда сложную колебательную систему можно разделить на несколько подсистем, динамические характеристики которых определяются сравнительно просто, полезными являются методы динамических податливостей и жесткостей. Эти методы представляют собой обобщение на динамические задачи метода сил и метода перемещений строительной механики.

В методе последовательных приближений задача об определении собственных частот и форм колебаний сводится к многократному

расчету деформаций системы под действием известной статической нагрузки.

Выбор того или иного метода для динамического расчета сложной механической системы зависит от структуры этой системы, задач расчета и вычислительной техники, имеющейся в распоряжении расчетчика.

## § 24. ПРОСТЕЙШИЕ ПРИБЛИЖЕННЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ ОЦЕНКИ НИЗШЕЙ СОБСТВЕННОЙ ЧАСТОТЫ

**Вывод формулы Рэлея.** Пусть упругая система совершает свободные колебания с частотой  $p$ , причем смещения  $x_i$ , отсчитываемые от положения равновесия, изменяются по закону

$$x_i = u_i \sin pt.$$

Кинетическая энергия системы меняется пропорционально квадратам скоростей:

$$T = \frac{1}{2} p^2 \mathcal{M} \cos^2 pt, \quad (24.1)$$

где при диагональной матрице масс обобщенная масса

$$\mathcal{M} = \sum_{i=1}^n m_i u_i^2,$$

а в общем случае

$$\mathcal{M} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{ij} u_i u_j.$$

Потенциальная энергия системы изменяется пропорционально квадратам перемещений и может быть записана в форме

$$U = U_0 \sin^2 pt, \quad (24.2)$$

где  $U_0$  — энергия системы при амплитудных перемещениях  $x_i = u_i$ .

Из закона сохранения энергии следует

$$T + U = \text{const}.$$

Поэтому должно быть

$$\frac{1}{2} p^2 \mathcal{M} = U_0.$$

Таким образом, частота колебаний может быть определена по формуле

$$p^2 = 2U_0/\mathcal{M}. \quad (24.3)$$

Как было показано выше (см. § 12), если при вычислении  $U_0$  и  $T$  задаваться формой  $k$ -го собственного колебания системы  $u_i = u_{ik}$ , по формуле (24.3) будет рассчитана  $k$ -я собственная частота:

$$p_k^2 = 2U_{0k}/\mathcal{M}_k. \quad (24.4)$$

Однако если задать форму колебаний, не слишком сильно отличающуюся от первой собственной формы, то формула Рэлея (24.3) поз-

воляет определить приближенное значение первой частоты собственных колебаний системы.

Докажем это. Пусть мы задались приближенно формой колебания системы, т. е. совокупностью амплитуд ее точек  $u_i$ . Эта форма может быть разложена по собственным формам системы:

$$u_i = c_1 u_{i1} + c_2 u_{i2} + c_3 u_{i3} + \dots$$

Если форма близка к первой собственной форме, то коэффициенты  $c_2, c_3, \dots$  малы по сравнению с  $c_1$ .

Потенциальная энергия системы  $U_0$  и ее обобщенная масса  $\mathcal{M}$ , как показано в § 12, также могут быть разложены по собственным формам:

$$U_0 = c_1^2 U_{01} + c_2^2 U_{02} + \dots, \quad \mathcal{M} = c_1^2 \mathcal{M}_1 + c_2^2 \mathcal{M}_2 + \dots,$$

где  $U_{0k}$  и  $\mathcal{M}_k$  — потенциальная энергия и обобщенная масса, соответствующие  $k$ -й форме собственных колебаний.

Подставляя значения  $U_0$  и  $\mathcal{M}$  в формулу Рэлея, получаем

$$p^2 = 2 \frac{c_1^2 U_{01} + c_2^2 U_{02} + \dots}{c_1^2 \mathcal{M}_1 + c_2^2 \mathcal{M}_2 + \dots}.$$

Вынося за скобку в числителе и знаменателе полученного выражения первые слагаемые и учитывая тождества (24.4), получим

$$p^2 = p_1^2 \frac{1 + (p_2/p_1)^2 (c_2/c_1)^2 \mathcal{M}_2/\mathcal{M}_1 + (p_3/p_1)^2 (c_3/c_1)^2 \mathcal{M}_3/\mathcal{M}_1 + \dots}{1 + (c_2/c_1)^2 \mathcal{M}_2/\mathcal{M}_1 + (c_3/c_1)^2 \mathcal{M}_3/\mathcal{M}_1 + \dots}. \quad (24.5)$$

Если принятая для расчета форма колебаний мало отличается от первой собственной формы, отношения  $c_2/c_1, c_3/c_1, \dots$  малы. Формула (24.5) показывает, что в этом случае отличие частоты, рассчитанной по формуле Рэлея, от первой собственной частоты имеет второй порядок малости.

Так как все слагаемые в числителе и знаменателе формулы (24.5) положительные и каждое слагаемое в числителе больше, чем соответствующее слагаемое в знаменателе (так как  $p_k/p_1 > 1$ ), то формула Рэлея дает преувеличенное значение первой собственной частоты, если только принятая форма колебания не совпадает с первой собственной формой.

Рассмотрим пример применения формулы Рэлея. Требуется рассчитать частоту собственных колебаний консольной балки постоянного сечения. Обозначая амплитудные прогибы балки  $u(z)$ , будем иметь

$$U_0 = \frac{1}{2} \int_0^l EJ \left( \frac{d^2 u}{dz^2} \right)^2 dz, \quad \mathcal{M} = \int_0^l m_0 u^2 dz,$$

где  $EJ$  — жесткость;  $m_0$  — масса единицы длины балки.

Таким образом, формула Рэлея получает вид

$$p^2 = \frac{\int_0^l EJ \left( \frac{d^2 u}{dz^2} \right)^2 dz}{\int_0^l m_0 u^2 dz}.$$

Зададимся параболической формой прогибов  $u = (z/l)^2$ . Тогда

$$\int_0^l EJ \left( \frac{d^2 u}{dz^2} \right)^2 dz = \int_0^l EJ \left( \frac{2}{l^2} \right)^2 dz = \frac{4EJ}{l^3},$$

$$\int_0^l m_0 u^2 dz = \int_0^l m_0 (z/l)^4 dz = m_0 l/5.$$

Получаем

$$p^2 = 20EJ/(m_0 l^4), \quad p = 4,47 \sqrt{EJ/(m_0 l^4)}.$$

Точное значение первой частоты  $p_1 = 3,516 \sqrt{EJ/(m_0 l^4)}$ . Таким образом, в данном случае формула Рэлея дает весьма большую ошибку, превышающую 20%. Нетрудно установить причины этой ошибки. Функция  $u(z) = (z/l)^2$ , которой мы задались, неплохо представляет общий вид упругой линии балки; однако при вычислении потенциальной энергии нам понадобилась вторая производная  $d^2 u/dz^2 = 2/l^2$ , а эта функция весьма далека от действительной.

Поэтому желательно использовать формулу Рэлея, так, чтобы избежать дифференцирования. Для этого можно принять форму колебаний подобной форме статической деформации системы какой-либо подходящей системой сил  $P_r$ . Вычислив перемещения, вызываемые этими силами, можно подсчитать потенциальную энергию деформации системы как работу этих сил:

$$U_0 = \frac{1}{2} \sum_r P_r u_r.$$



Рис. 24.1

Так, например, для консольной балки можно принять за форму колебаний прогибы ее под действием силы  $P$ , приложенной на конце (рис. 24.1).

Тогда

$$u = (Plz^2/2 - Pz^3/6)/(EJ).$$

Имеем

$$U_0 = 1/2 P u_{z=l} = P^2 l^3 / (6EJ),$$

$$\mathcal{M} = m_0 \int_0^l u^2 dz = \frac{m_0 P^2}{(EJ)^2} \int_0^l \left( \frac{lz^2}{2} - \frac{z^3}{6} \right)^2 dz = \frac{33}{1260} \frac{P^2 m_0 l^7}{(EJ)^2}.$$

Вычислив теперь частоту по формуле Рэлея (24.3), получим  $p = \sqrt{2U_0/\mathcal{M}} = 3,55 \sqrt{EJ/(m_0 l^4)}$ , что только на 1% отличается от точного значения.

**Приведение массы.** Если форма колебаний системы уподобляется, как в рассмотренном выше примере, форме статических ее перемещений под действием сосредоточенной силы  $P$ , приложенной в какой-либо точке  $A$  системы, формуле Рэлея можно дать следующее истолкование.

Определим энергию деформации как

$$U_0 = cu_A^2/2,$$

где  $c$  — статическая жесткость системы по отношению к силе  $P$  (предполагается, что перемещение  $u_A$  совпадает по направлению с направлением силы). Тогда по формуле Рэлея

$$p = \sqrt{2U_0 / \sum_i m_i u_i^2} = \sqrt{c/m_{\text{пр}}}, \quad (24.6)$$

где

$$m_{\text{пр}} = \sum_{i=1}^n m_i (u_i/u_A)^2. \quad (24.7)$$

Формула (24.7) совпадает с формулой для частоты колебаний одно-массовой системы с массой  $m_{\text{пр}}$ , сосредоточенной в точке  $A$ .

Следовательно, для приведения массы системы в какой-либо ее точке следует каждую массу  $m_i$  умножить на квадрат отношения ее перемещения к перемещению точки приведения.

**Метод Граммеля.** Выше мы видели, что, принимая форму колебаний подобной статическим прогибам системы от некоторой подходящей нагрузки, можно существенно увеличить точность расчета за счет исключения операции дифференцирования. Еще бо́льшая точность достигается в методе Граммеля, в котором дифференцирование заменяется интегрированием. Последовательность операций здесь такова\*.

1. Задают форму колебаний и подсчитывают максимальную кинетическую энергию движения

$$T_{\text{max}} = \frac{1}{2} p^2 \sum_{i=1}^n m_i u_i^2.$$

2. Определяют максимальные силы инерции масс  $F_i = p^2 m_i u_i$ .

3. Определяют внутренние силы в элементах системы, вызываемые нагрузками  $F_i$ .

4. По внутренним силам вычисляют максимальную потенциальную энергию деформации  $U_0$ .

5. Из равенства  $T_{\text{max}} = U_0$  определяют частоту колебаний.

Применим метод Граммеля для расчета частоты колебаний консольной балки. Приняв  $u = (z/l)^2$ , найдем

$$T_{\text{max}} = \frac{1}{2} p^2 \int_0^l m_0 u^2 dz = p^2 m_0 l / 10.$$

Интенсивность сил инерции

$$q = p^2 m_0 (z/l)^2.$$

Поперечная сила в сечении

$$Q = - \int_z^l q dz = - \frac{p^2 m_0}{3l^2} (l^3 - z^3).$$

---

\* Предполагается, что матрица масс — диагональная.

Изгибающий момент

$$M = - \int_z^l Q dz = \frac{p^2 m_0}{12 l^2} (3l^4 - 4l^3 z + z^4).$$

Потенциальная энергия деформации

$$U_0 = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M^2}{EJ} dz = \frac{13}{1620} \frac{p^4 m_0^2 l^5}{EJ}.$$

Приравнявая  $T_{\max} = U_0$ , находим

$$p = \sqrt{\frac{1620}{130} \frac{EJ}{m_0 l^4}} = 3,5301 \sqrt{\frac{EJ}{m_0 l^4}}$$

с ошибкой всего 0,42% в сравнении с точным решением.

Таким образом, метод Граммеля путем некоторого усложнения расчета позволяет существенно повысить точность результатов.

**Учет начальных напряжений.**

При использовании формулы Рэлея нетрудно учесть влияние на частоту колебаний начальных напряжений, имеющих в конструкции.

Пусть, например, требуется определить частоту собственных колебаний балки на двух опорах, растянутой силой  $P$  (рис. 24.2). Если считать балку нерастяжимой, то при прогибе балки  $u(z)$  точка приложения силы  $P$  получит перемещение\*

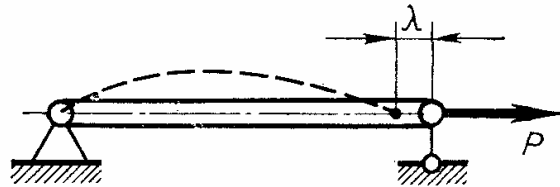


Рис. 24.2

$$\lambda = \frac{1}{2} \int_0^l \left( \frac{du}{dz} \right)^2 dz.$$

Соответствующее увеличение потенциала силы  $P$

$$U_P = P\lambda \quad (24.8)$$

следует добавить к потенциальной энергии деформации балки, и формула Рэлея получает вид

$$p^2 = 2(U_0 + U_P)/\mathcal{M}. \quad (24.9)$$

Сделанное предположение о нерастяжимости стержня в процессе колебаний отнюдь не является обязательным. К тому же результату

\* Величину  $\lambda$  можно найти как интеграл от разности между элементом  $dz$  изогнутой оси балки и его проекцией  $dz \cos \varphi$  на направление оси:

$$\lambda = \int_0^l (1 - \cos \varphi) dz \approx \frac{1}{2} \int_0^l \left( \frac{du}{dz} \right)^2 dz.$$

мы придем, предположив, например, что каждая точка оси стержня движется строго по нормали к оси  $z$ . Необходимо учесть, что в этом случае возникает дополнительная деформация растяжения

$$\varepsilon' = \frac{1}{dz} \left( \frac{dz}{\cos \varphi} - dz \right) \approx \frac{1}{2} \left( \frac{du}{dz} \right)^2$$

и соответственно изменяется потенциальная энергия растяжения стержня.

В прямолинейном состоянии стержня эта энергия равнялась

$$U_N = \int_0^l \frac{N^2}{2EF} dz,$$

где  $N$  — начальная продольная сила в сечении. В изогнутом стержне

$$U'_N = \int_0^l \frac{(N + EF\varepsilon')^2}{2EF} dz.$$

Раскрывая это выражение и пренебрегая членом с  $(\varepsilon')^2$ , находим увеличение потенциальной энергии растяжения:

$$U_P = U'_N - U_N = \int_0^l N\varepsilon' dz,$$

откуда

$$U_P = \frac{1}{2} \int_0^l N \left( \frac{du}{dz} \right)^2 dz. \quad (24.10)$$

В случае постоянной по длине продольной силы эта формула совпадает с формулой (24.8).

Нетрудно показать, что при расчете изгибных колебаний стержня может быть принята произвольная зависимость для продольных перемещений  $v(z)$ , сопровождающих изгиб стержня. В этом случае энергия  $U_P$  должна подсчитываться по формуле

$$U_P = -Pv_P + \int_0^l N\varepsilon' dz,$$

где  $v_P$  — перемещение точки приложения силы  $P$ ;

$$\varepsilon' = \frac{dv}{dz} + \frac{1}{2} \left( \frac{du}{dz} \right)^2$$

— продольная деформация оси стержня.

Определим частоту собственных колебаний балки постоянного сечения, лежащей на двух опорах и растянутой силой  $P$ . Примем

$$u(z) = \sin(\pi z/l).$$



Тогда

$$U_0 = \frac{1}{2} \int_0^l EJ \left( \frac{d^2 u}{dz^2} \right)^2 dz = \frac{\pi^4 EJ}{4l^3}, \quad U_P = P \cdot \frac{1}{2} \int_0^l \left( \frac{du}{dz} \right)^2 dz = \frac{\pi^2 P}{4l},$$

$$\mathcal{M} = m_0 \int_0^l u^2 dz = \frac{1}{2} m_0 l, \quad p^2 = \frac{2(U_0 + U_P)}{\mathcal{M}} = \frac{\pi^4 EJ}{m_0 l^4} \left( 1 + \frac{Pl^2}{\pi^2 EJ} \right).$$

Полученный результат совпадает с точным (см. § 18).

**Формула Донкерлея.** Так как метод Рэля приводит к завышенному значению частоты колебаний, весьма полезным является применение формулы, дающей заниженную частоту. Простейшей из такого рода формул является формула Донкерлея.

Рассмотрим какую-нибудь многомассовую систему, например балку (рис. 24.3). Пусть на рис. 24.3, а изображена точная форма собственных колебаний этой системы. Тогда точное значение собственной частоты системы выразится формулой

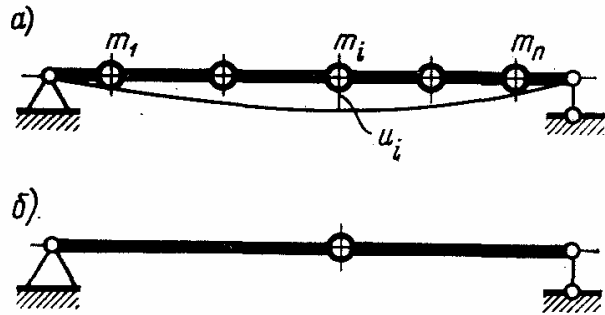


Рис. 24.3

$$p^2 = 2U_0 \left/ \sum_{i=1}^n m_i u_i^2 \right. . \quad (24.11)$$

Теперь рассмотрим ту же балку, но только с одной массой  $m_i$ , (рис. 24.3, б). Частота колебаний в этом случае будет определяться по формуле

$$p_i^2 = 1/(m_i \delta_{ii}),$$

где  $\delta_{ii}$  — податливость балки при приложении силы в точке закрепления массы  $m_i$ .

С другой стороны, приближенное значение  $p_i$  той же частоты можно определить по формуле Рэля, считая, что форма колебания совпадает с изображенной на рис. 24.3, а:

$$\tilde{p}_i^2 = 2U_0 / (m_i u_i^2). \quad (24.12)$$

Здесь  $U_0$  и  $u_i$  имеют те же значения, что и в формуле (24.11).

Так как форма, изображенная на рис. 24.3, а, не является точной формой колебаний одномассовой системы, выполняется неравенство

$$\tilde{p}_i > p_i. \quad (24.13)$$

Сравнивая формулы (24.11) и (24.12), находим

$$p^2 = 1 / \sum_{i=1}^n \frac{1}{\tilde{p}_i^2}. \quad (24.14)$$

Если в правой части полученного равенства заменить  $p_i$  меньшими значениями  $p_i$ , равенство превратится в неравенство

$$p^2 > 1 \left/ \sum_{i=1}^n \frac{1}{p_i^2} \right.$$

Таким образом, приближенная формула Донкерлея

$$p^2 = 1 \left/ \sum_{i=1}^n \frac{1}{p_i^2} \right. = 1 \left/ \sum_{i=1}^n m_i \delta_{ii} \right. \quad (24.15)$$

всегда дает преуменьшенное значение частоты.

Рассчитав частоту одной и той же системы по методу Рэля и по формуле Донкерлея, мы получим вилку, в которой заключена истинная частота колебаний.

## § 25. МЕТОД РЭЛЕЯ—РИТЦА

Метод Рэля—Ритца основан на вариационном принципе Гамильтона. Согласно этому принципу, для консервативной системы «действие», т. е.

$$\int_{t_1}^{t_2} (T - U) dt,$$

имеет стационарное значение. Здесь  $T$  — кинетическая,  $U$  — потенциальная энергия системы. Следовательно, вариация

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T - U) dt = 0. \quad (25.1)$$

При этом на границах интервала интегрирования координаты не варьируются.

Снова записывая движение при собственных колебаниях в форме  $x_i = u_i \sin pt$  и подставляя соответствующие значения  $T$  и  $U$  [см. формулы (24.1) и (24.2)], представляем выражение (25.1) в виде

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{1}{2} p^2 \mathcal{M} \cos^2 pt - U_0 \sin^2 pt \right) dt = 0.$$

В качестве интервала интегрирования возьмем один период ( $t_1 = 0$ ,  $t_2 = 2\pi/p$ ). Эти значения  $t_1$  и  $t_2$  отвечают условиям применения принципа Гамильтона, так как  $x_i(t_1) = x_i(t_2) = 0$ . Учитывая, что

$$\int_0^{2\pi/p} \cos^2 ptdt = \int_0^{2\pi/p} \sin^2 ptdt = \pi/p,$$

приходим к уравнению

$$\delta \left( \frac{1}{2} p^2 \mathcal{M} - U_0 \right) = 0. \quad (25.2)$$

В этом выражении частота  $p$  не варьируется. Зададим форму колебаний в виде ряда

$$u_i = a_1 u_i^{(1)} + a_2 u_i^{(2)} + \dots + a_r u_i^{(r)} + \dots + a_k u_i^{(k)}, \quad (25.3)$$

где  $a_r$  — неопределенные параметры;  $u^r$  — известные линейно независимые функции координат (*координатные функции*), удовлетворяющие условиям закрепления системы. Количество слагаемых, учитываемых в выражении (25.3), определяется необходимой точностью расчета\*.

Зная форму колебания, можно теперь подсчитать значения  $\mathcal{M}$  и  $U_0$ ; эти величины будут квадратичными формами относительно параметров  $a_r$ . Тогда условие стационарности (25.2) приводит к системе уравнений

$$\frac{1}{2} p^2 \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial a_r} - \frac{\partial U_0}{\partial a_r} = 0 \quad (r = 1, 2, \dots, k). \quad (25.4)$$

Уравнения (25.4) являются линейными и однородными относительно параметров  $a_r$ . Условие равенства нулю определителя системы (25.4) представляет собой уравнение частот

$$\Delta(p^2) = 0.$$

Это уравнение  $k$ -й степени относительно  $p^2$ .

Заметим, что если в выражении (25.3) для формы колебаний сохранить только одно слагаемое, то единственное уравнение системы (25.4) будет тождественно с формулой Рэлея.

В качестве примера рассмотрим определение собственной частоты балки переменного сечения на двух опорах (рис. 25.1).

Располагая начало координат на левой опоре, можем записать закон изменения массы единицы длины балки  $m_0$  и момента инерции поперечного сечения  $J$  в виде

$$m_0 = m_* [1 - z/(2l)], \quad J = J_* [1 - z/(2l)],$$

где  $m_* = \rho 2bh$ ;  $J_* = 2bh^3/12$ .

Зададимся формой колебания, включающей два параметра:

$$u(z) = a_1 \sin(\pi z/l) + a_2 \sin(2\pi z/l).$$

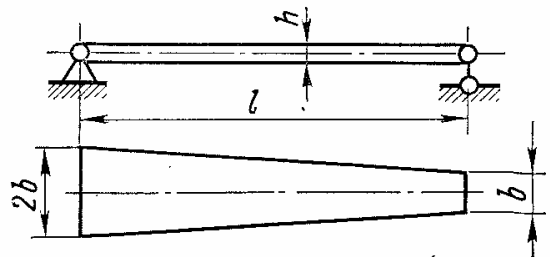


Рис. 25.1

\* Для того чтобы при  $k \rightarrow \infty$  решение задачи стремилось к точному, система координатных функций должна быть полной.

Вычисляем:

$$\mathcal{M} = \int_0^l m_0 u^2(z) dz = m_* l \left( \frac{3}{8} a_1^2 + \frac{8}{9\pi^2} a_1 a_2 + \frac{3}{8} a_2^2 \right),$$

$$U_0 = \frac{1}{2} \int_0^l EJ \left( \frac{d^2 u}{dz^2} \right)^2 dz = \pi^4 \frac{EJ_*}{2l^3} \left( \frac{3}{8} a_1^2 + \frac{32}{9\pi^2} a_1 a_2 + 6a_2^2 \right).$$

Система уравнений (25.4) получает такой вид:

$$\frac{1}{2} p^2 m_* l \left( \frac{3}{4} a_1 + \frac{8}{9\pi^2} a_2 \right) - \pi^4 \frac{EJ_*}{2l^3} \left( \frac{3}{4} a_1 + \frac{32}{9\pi^2} a_2 \right) = 0,$$

$$\frac{1}{2} p^2 m_* l \left( \frac{8}{9\pi^2} a_1 + \frac{3}{4} a_2 \right) - \pi^4 \frac{EJ_*}{2l^3} \left( \frac{32}{9\pi^2} a_1 + 12a_2 \right) = 0.$$

Приравнявая нулю определитель этих уравнений, получим частотное уравнение

$$\begin{vmatrix} \frac{3}{4}(\alpha^2 - 1) & \frac{8}{9\pi^2}(\alpha^2 - 4) \\ \frac{8}{9\pi^2}(\alpha^2 - 4) & \frac{3}{4}(\alpha^2 - 16) \end{vmatrix} = 0 \quad \left( \alpha^2 = \frac{p^2 m_* l^4}{\pi^4 EJ_*} \right).$$

Корни полученного квадратного уравнения составят  $\alpha_1^2 = 0,9913$ ,  $\alpha_2^2 = 16,14$ . Следовательно, собственные частоты балки:

$$p_1 = \alpha_1 \pi^2 \sqrt{EJ_*/(m_* l^4)} = 0,9957 \pi^2 \sqrt{EJ_*/(m_* l^4)},$$

$$p_2 = \alpha_2 \pi^2 \sqrt{EJ_*/(m_* l^4)} = 4,017 \pi^2 \sqrt{EJ_*/(m_* l^4)}.$$

## § 26. ПРЯМАЯ ДИСКРЕТИЗАЦИЯ СИСТЕМ С РАСПРЕДЕЛЕННОЙ МАССОЙ. МЕТОД КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Рассмотренный в предыдущем параграфе метод Рэлея—Ритца позволяет свести расчет системы с распределенной массой к расчету более простой системы с конечным числом степеней свободы. Часто, особенно при численном расчете, такой переход к системе с конечным числом степеней свободы выполняется заранее — до проведения расчетов.

Имеются различные приемы перехода от систем с распределенной массой к системам, обладающим конечным числом степеней свободы. Простейшим является прием замены распределенной массы системы тем или иным количеством сосредоточенных масс, участвующих лишь в поступательном движении соответствующих точек, т. е. не обладающих инерцией поворота. Так, например, при расчете балок и рам длину отдельных элементов разделяют на участки, причем массу каждого участка длины  $l$  либо сосредоточивают в его середине, либо разносят по концам, как это схематично показано на рис. 26.1 для участка постоянного сечения.

На первый взгляд может показаться, что схема рис. 26.1, в сложнее, чем схема рис. 26.1, б, так как масса участка заменяется двумя точечными массами, а не одной. Однако это не так. При объединении участков массы, соответствующие концу одного и началу соседнего участков, суммируются, так что при разбиении балки на  $n$  участков на ней будет всего  $n + 1$  точечных масс. С уве-

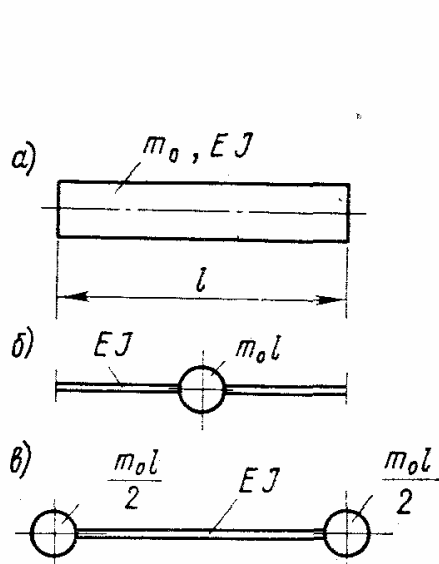


Рис. 26.1

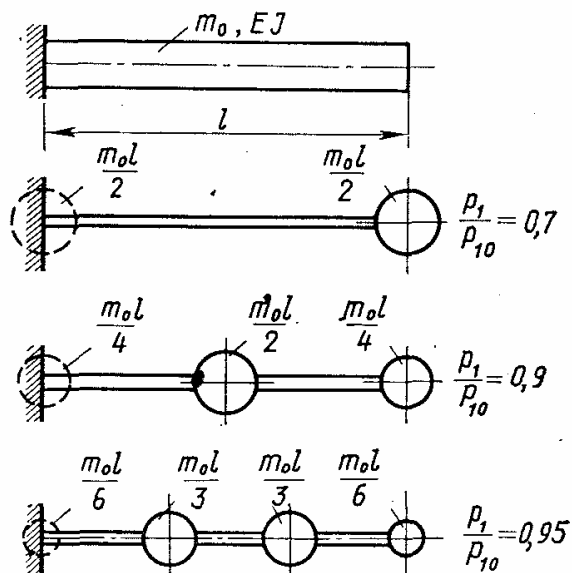


Рис. 26.2

личением числа точечных масс, которыми заменяется распределенная масса системы, растет точность расчета низшей частоты системы и увеличивается число высших форм и частот колебаний, которые могут быть изучены.

В качестве иллюстрации на рис. 26.2 приведены расчетные схемы, которые получаются путем схематизации консольной балки постоянного сечения в виде одного, двух и трех участков с массами, размещенными по концам. Справа на рисунке даны значения отношения низшей собственной частоты данной схемы к низшей собственной частоте балки с распределенной массой.

Наиболее общим приемом дискретизации системы с распределенными параметрами является метод конечных элементов (МКЭ), при использовании которого дискретизируются не только инерционные, но и жесткостные характеристики системы. Описанию метода конечных элементов и способам реализации расчетов на ЭВМ с его помощью посвящена обширная литература (см., например, [24, 38]). Поэтому ниже приводятся лишь простейшие сведения, позволяющие понять основные идеи МКЭ применительно к исследованию свободных и вынужденных гармонических колебаний систем.

Суть МКЭ состоит в том, что конструкция разбивается на элементы, связанные между собой в отдельных точках (узлах). Перемещения узлов (каждый узел может иметь несколько степеней свободы) принимаются за обобщенные координаты системы. Предполагается, что перемещение любой точки, лежащей внутри  $s$ -го элемента, полностью

определяется перемещениями узлов, с которыми связан этот элемент:

$$\xi^{(s)} = \sum_i x_{si} f_i^{(s)}. \quad (26.1)$$

Здесь  $\xi^{(s)}$  — какая-либо проекция перемещения точки;  $x_{si}$  — перемещения узлов, с которыми связан элемент;  $f_i^{(s)}$  — аппроксимирующие функции, зависящие от координат точки в элементе. Аппроксимирующие функции должны быть выбраны так, чтобы перемещения изменялись непрерывно как внутри элемента, так и на границах соседних элементов.

Далее вычисляются потенциальная и кинетическая энергии элемента; они выражаются соответственно через перемещения и скорости узлов, вычисляется также виртуальная работа внешних сил. Полная энергия системы получается суммированием энергии всех ее элементов. Так как рассматривается линейная система, то кинетическая энергия представляется квадратичной формой в зависимости от скоростей, а потенциальная — квадратичной формой в зависимости от смещений.

Если ввести в рассмотрение вектор перемещений узлов  $\mathbf{x}$ , содержащий столько компонентов, сколькими степенями свободы обладают все узлы конструкции, то потенциальная и кинетическая энергии могут быть записаны в виде (см. § 12)

$$U = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{r} \mathbf{x}; \quad T = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{m} \dot{\mathbf{x}}, \quad (26.2)$$

причем как матрица жесткости  $\mathbf{r}$ , так и матрица массы  $\mathbf{m}$  — симметричные квадратные матрицы. Размер этих матриц равен числу  $n$  степеней свободы всех узлов системы.

С другой стороны, как потенциальная, так и кинетическая энергия всей системы представляются суммами соответствующих энергий всех входящих в нее элементов. Энергия же каждого  $s$ -го элемента выражается по формулам, аналогичным (26.2):

$$U_s = \frac{1}{2} \mathbf{x}_s^T \mathbf{r}^{(s)} \mathbf{x}_s; \quad T_s = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{x}}_s^T \mathbf{m}^{(s)} \dot{\mathbf{x}}_s, \quad (26.3)$$

где  $\mathbf{x}_s$  — вектор, составленный из перемещений узлов, к которым примыкает  $s$ -й элемент,  $\mathbf{r}^{(s)}$ ,  $\mathbf{m}^{(s)}$  — матрицы жесткости и массы элемента.

Разумеется, количество компонентов вектора  $\mathbf{x}_s$  меньше, чем полное число степеней свободы системы  $n$ . Можно считать, что недостающие компоненты заменены нулями и матрицы  $\mathbf{r}^{(s)}$ ,  $\mathbf{m}^{(s)}$  также дополнены нулями до квадратных размера  $n \times n$ . Тогда из формул суммирования энергии

$$U = \sum_s U_s; \quad T = \sum_s T_s$$

следует, что матрицы жесткости и массы всей системы равны суммам соответствующих матриц для составляющих ее конечных элементов:

$$\mathbf{r} = \sum_s \mathbf{r}^{(s)}; \quad \mathbf{m} = \sum_s \mathbf{m}^{(s)}. \quad (26.4)$$

Формулы (26.2), выражающие потенциальную и кинетическую энергии системы через узловые перемещения, не отличаются от соответствующих зависимостей гл. II. Поэтому и уравнения движения имеют обычный для системы с  $n$  степенями свободы вид (10.6) или (12.23):

$$m\ddot{x} + rx = P, \quad (26.5)$$

где  $P$  — вектор приведенных узловых нагрузок.

Системы уравнений движения, полученные методом конечных элементов, имеют высокий порядок, однако их решение облегчается благодаря тому, что матрицы  $m$ ,  $r$  содержат много нулей, так как в каждой их строке имеется лишь столько ненулевых элементов, сколько степеней свободы имеют все узлы элементов, примыкающих к данному узлу.

При рациональной нумерации узлов матрицы  $m$ ,  $r$  часто могут быть сделаны ленточными, т. е. такими, в которых ненулевые элементы содержатся лишь в нескольких диагоналях, примыкающих к главной.

Из приведенного выше описания видно, что метод конечных элементов применительно к расчету свободных колебаний представляет собой разновидность метода Рэлея—Ритца. В самом деле, в этом методе как и в методе Рэлея—Ритца, форма колебания задается в виде, включающем ряд параметров — такими параметрами являются здесь перемещения узлов. Разница состоит лишь в том, что в методе Рэлея—Ритца координатные функции задаются едиными для всей системы выражениями, а в МКЭ — внутри каждого элемента принимаются свои аппроксимирующие функции.

В качестве примера, поясняющего суть метода, рассмотрим расчет с помощью МКЭ поперечных колебаний балки. За конечный элемент примем участок балки длиной  $l$  (рис. 26.3, а), причем будем считать его нерастяжимым. Предположим, что перемещения элемента полностью определяются поперечными перемещениями и углами поворота его концевых сечений. Тогда элемент будет иметь четыре степени свободы.

Как видно из рис. 26.3, смещения здесь считаются положительными, если они направлены вверх, а углы поворота — если они направлены против часовой стрелки.

Зададимся видами деформации элемента, соответствующими единичным значениям узловых смещений (рис. 26.3, б):  $f_1(z)$ ,  $f_2(z)$ ,  $f_3(z)$ ,  $f_4(z)$ . При произвольных значениях  $x_1, \dots, x_4$  поперечное перемещение точки элемента составит

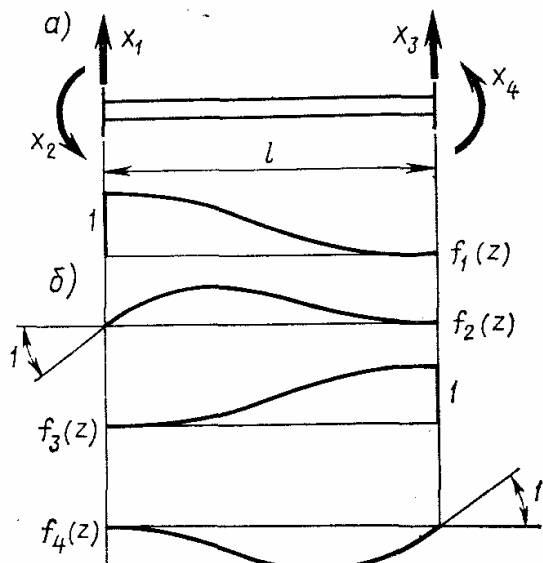


Рис. 26.3

$$\xi = x_1 f_1(z) + x_2 f_2(z) + x_3 f_3(z) + x_4 f_4(z); \quad (26.6)$$

потенциальная энергия деформации элемента

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l EJ \left( \frac{d^2 \xi}{dz^2} \right)^2 dz = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^4 \sum_{i=1}^4 r_{ij} x_i x_j, \quad (26.7)$$

где

$$r_{ij} = \int_0^l EJ f_i'' f_j'' dz. \quad (26.8)$$

Нетрудно видеть, что  $r_{ij}$  являются элементами матрицы жесткости, так как выражение (26.7) можно представить в виде

$$U = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{r} \mathbf{x}, \quad (26.9)$$

где

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{r} = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & r_{14} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & r_{24} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & r_{34} \\ r_{41} & r_{42} & r_{43} & r_{44} \end{pmatrix}. \quad (26.10)$$

Кинетическая энергия элемента составляет

$$T = \frac{1}{2} \int_0^l m_0 (\dot{\xi})^2 dz = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^4 \sum_{i=1}^4 m_{ij} \dot{x}_i \dot{x}_j, \quad (26.11)$$

где

$$m_{ij} = \int_0^l m_0 f_i f_j dz, \quad (26.12)$$

$m_0$  — масса единицы длины элемента. Сопоставляя формулы (26.11) и (26.3), видим, что величины  $m_{ij}$  представляют собой элементы матрицы масс.

Если в качестве аппроксимирующих функций  $f_i(z)$  принять формы прогибов балки постоянного сечения при соответствующих концевых нагрузках, получим:

$$f_1(z) = 1 - 3(z/l)^2 + 2(z/l)^3, \quad f_2(z) = l[z/l - 2(z/l)^2 + (z/l)^3],$$

$$f_3(z) = 3(z/l)^2 - 2(z/l)^3, \quad f_4(z) = l[(z/l)^3 - (z/l)^2].$$

Для элемента постоянного сечения по формулам (26.8) и (26.12) получаем следующие значения матриц жесткости и массы:

$$\mathbf{r} = \frac{2EJ}{l^3} \begin{pmatrix} 6 & 3l - 6 & 3l \\ 3l & 2l^2 - 3l & l^2 \\ -6 & -3l & 6 - 3l \\ 3l & l^2 - 3l & 2l^2 \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{m} = \frac{m_0 l}{420} \begin{pmatrix} 156 & 22l & 54 & -13l \\ 22l & 4l^2 & 13l & -3l^2 \\ 54 & 13l & 156 & -22l \\ -13l & -3l^2 & -22l & 4l^2 \end{pmatrix} \quad (26.13)$$



После того как матрицы жесткости и массы для отдельных конечных элементов составлены, формируются матрицы для всей системы. В соответствии с формулами (26.4) общие матрицы получаются суммированием матриц для конечных элементов. При этом суммируются коэффициенты жесткости, соответствующие одной и той же паре перемещений. Та же процедура используется и при составлении общей матрицы массы.

Поясним это на примере соединения балочных элементов (рис. 26.4). Пусть в узле, номер которого  $j$ , соединяются два элемента:  $s$ -й и  $(s +$

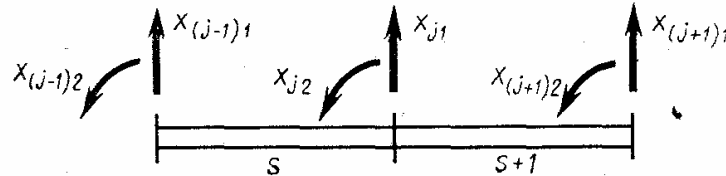


Рис. 26.4

$+ 1)$ -й. Узел имеет две степени свободы. Перемещения узла обозначим  $x_{j1}$ ,  $x_{j2}$  (смещение и поворот). Тогда коэффициенты жесткости, соответствующие строкам  $j1$ ,  $j2$  матрицы  $r$ , будут:

$$\begin{aligned} r_{j1, (j-1)1} &= r_{31}^{(s)}, & r_{j1, (j-1)2} &= r_{32}^{(s)}, & r_{j1, j1} &= r_{33}^{(s)} + r_{11}^{(s+1)}, \\ r_{j1, j2} &= r_{34}^{(s)} + r_{12}^{(s+1)}, & r_{j1, (j+1)1} &= r_{13}^{(s+1)}, & r_{j1, (j+1)2} &= r_{14}^{(s+1)}, \\ r_{j2, (j-1)1} &= r_{41}^{(s)}, & r_{j2, (j-1)2} &= r_{42}^{(s)}, & r_{j2, j1} &= r_{34}^{(s)} + r_{12}^{(s+1)}, \\ r_{j2, j2} &= r_{44}^{(s)} + r_{22}^{(s+1)}, & r_{j2, (j+1)1} &= r_{23}^{(s+1)}, & r_{j2, (j+1)2} &= r_{24}^{(s+1)}. \end{aligned}$$

Здесь в правых частях равенств верхний индекс показывает номер конечного элемента, для которого вычислен коэффициент жесткости, а нижние индексы соответствуют формулам (26.10). Элементы общей матрицы масс вычисляются по таким же формулам.

Рассмотрим простейший пример определения частот и форм собственных колебаний ступенчатой балки (рис. 26.5, а). Каждый из участков постоянного сечения будем считать конечным элементом. Так как концы балки заделаны, в схематизированной системе сохраняются лишь четыре степени свободы, соответствующие поступательным перемещениям и поворотам сечений А и В. Нумерация и положительные направления узловых перемещений показаны на рис. 26.5, б. Матрицы жесткости и масс каждого из участков  $I$ ,  $II$ ,  $III$  определяются формулами (26.13), причем для участка  $II$  должно быть заменено на  $4J$ , а  $m_0$  — на  $2m_0$ . Элементы объединенной матрицы жесткости определяются следующим образом:

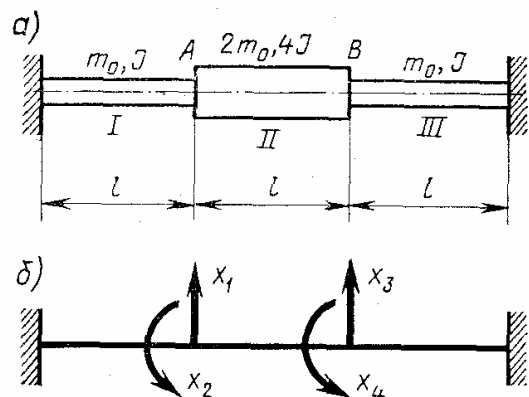


Рис. 26.5

$$\begin{aligned}
r_{11} &= r_{33}^I + r_{11}^{II} = \frac{2EJ}{l^3} (6 + 4 \cdot 6), \quad r_{12} = r_{34}^I + r_{12}^{II} = \frac{2EJ}{l^3} (-3l + 4 \cdot 3l), \\
r_{13} &= r_{13}^{II} = \frac{2 \cdot 4EJ}{l^3} (-6), \quad r_{14} = r_{14}^{II} = \frac{2 \cdot 4EJ}{l^3} 3l, \\
r_{22} &= r_{44}^I + r_{22}^{II} = \frac{2EJ}{l^3} (2l^2 + 4 \cdot 2l^2), \quad r_{23} = r_{23}^{II} = \frac{2 \cdot 4EJ}{l^3} (-3l), \\
r_{24} &= r_{24}^{II} = \frac{2 \cdot 4EJ}{l^3} l^2, \quad r_{33} = r_{33}^{II} + r_{11}^{III} = \frac{2EJ}{l^3} (4 \cdot 6 + 6), \\
r_{34} &= r_{34}^{II} + r_{12}^{III} = \frac{2EJ}{l^3} [4(-3l) + 3l], \quad r_{44} = r_{44}^{II} + r_{22}^{III} = \frac{2EJ}{l^3} (4 \cdot 2l^2 + 2l^2).
\end{aligned}$$

Здесь нижние индексы в обозначениях коэффициентов жесткости для отдельных участков соответствуют нумерации перемещений на рис. 26.3,а. Остальные коэффициенты жесткости определяются условиями симметрии матрицы  $r$ . Полная матрица жесткости получает вид

$$r = \frac{2EJ}{l^3} \begin{pmatrix} 30 & 9l & -24 & 12l \\ 9l & 10l^2 & -12l & 4l^2 \\ -24 & -12l & 30 & -9l \\ 12l & 4l^2 & -9l & 10l^2 \end{pmatrix}.$$

Точно так же вычисляется и суммарная матрица массы:

$$m = \frac{m_0 l}{210} \begin{pmatrix} 234 & 11l & 54 & -13l \\ 11l & 6l^2 & 13l & -3l^2 \\ 54 & 13l & 234 & -11l \\ -13l & -3l^2 & -11l & 6l^2 \end{pmatrix}.$$

Здесь, например, первый элемент вычисляется так:

$$m_{11} = m_{33}^I + m_{11}^{II} = \frac{m_0 l}{420} (156 + 2 \cdot 156).$$

Для свободных колебаний уравнение (26.5) принимает вид

$$m\ddot{x} + rx = 0.$$

Отыскивая решение в форме

$$x = u \cos pt,$$

где  $u$  — вектор амплитудных перемещений, приходим к уравнению

$$(r - p^2 m) u = 0,$$

которое может быть выполнено в случае  $\det(r - p^2 m) = 0$ . Таким образом, получим следующее частотное уравнение:

$$\begin{vmatrix} (30 - 234s) & (9 - 11s)l & -(24 + 54s) & (12 + 13s)l \\ (9 - 11s)l & (10 - 6s)l^2 & -(12 + 13s)l & (4 + 3s)l^2 \\ -(24 + 54s) & -(12 + 13s)l & (30 - 234s) & -(9 - 11s)l \\ (12 + 13s)l & (4 + 3s)l^2 & -(9 - 11s)l & (10 - 6s)l^2 \end{vmatrix} = 0,$$

где  $s = p^2 m_0 l^4 / (420EJ)$ .

Это уравнение имеет следующие корни:

$$s_1 = 0,014231; \quad s_2 = 0,116514; \quad s_3 = 0,941126; \quad s_4 = 5,0439.$$

Соответствующие частоты колебаний  $p_k = \sqrt{420s_k} \sqrt{EJ/(m_0 l^4)}$  составляют:

$$p_1 = 2,4448 \sqrt{\frac{EJ}{m_0 l^4}}; \quad p_2 = 6,9954 \sqrt{\frac{EJ}{m_0 l^4}}; \quad p_3 = 19,881 \sqrt{\frac{EJ}{m_0 l^4}};$$

$$p_4 = 46,027 \sqrt{\frac{EJ}{m_0 l^4}}.$$

Первая и третья частоты соответствуют симметричным, а вторая и четвертая — кососимметричным формам колебаний балки (рис. 26.6).

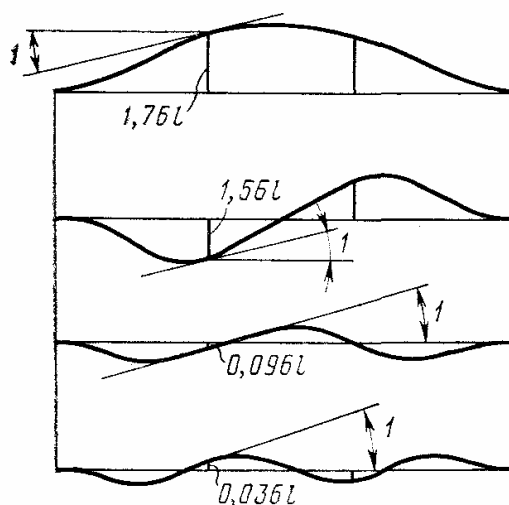


Рис. 26.6

Рассмотренный пример имеет чисто иллюстративный характер, так как при реальных расчетах с помощью МКЭ количество конечных элементов значительно, а все вычисления, включая формирование матриц  $r$  и  $m$ , предусматриваются программой машинного счета. При

- ①
- ②
- ③
- ④



Рис. 26.7

большом числе сравнительно малых конечных элементов можно пренебречь различием скоростей в пределах одного элемента при подсчете кинетической энергии системы. В этом случае распределенную массу элемента заменяют сосредоточенными массами в узлах, подобно тому, как это сделано для балочного элемента на рис. 26.1. В результате получают матрицу масс диагональной структуры, причем ненулевые элементы стоят только в строках, соответствующих поступательным перемещениям.

Таким образом, для рассмотренной выше балки переменного сечения приходим к схеме распределения массы, показанной на рис. 26.7. Система теперь имеет лишь две динамические степени свободы, связанные с изменением координат  $x_1, x_3$ , координаты же  $x_2, x_4$  (углы поворота узлов) являются безмассовыми. Для того чтобы уравнения движения были записаны в обычной форме, следует исключить координаты  $x_2, x_4$  и из выражения потенциальной энергии, преобразовав соответствующим образом матрицу жесткости. Рассмотрим это преобразование в общей форме.

Разделим вектор  $x$  на два вектора:  $x_l$  и  $x_\varphi$ , в первый включены линейные перемещения масс, а во второй — безмассовые координаты (углы поворота). Соответствующим образом перестроим и разобьем на блоки матрицу жесткости:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_l \\ \mathbf{x}_\varphi \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r} = \begin{pmatrix} \mathbf{r}_{ll} & \vdots & \mathbf{r}_{l\varphi} \\ \dots & \ddots & \dots \\ \mathbf{r}_{\varphi l} & \vdots & \mathbf{r}_{\varphi\varphi} \end{pmatrix}.$$

Тогда уравнение, связывающее упругие усилия, действующие на узлы и перемещения, будет иметь вид

$$\mathbf{r}\mathbf{x} = \mathbf{q}, \text{ или } \begin{pmatrix} \mathbf{r}_{ll} & \vdots & \mathbf{r}_{l\varphi} \\ \dots & \ddots & \dots \\ \mathbf{r}_{\varphi l} & \vdots & \mathbf{r}_{\varphi\varphi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_l \\ \mathbf{x}_\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{q}_l \\ \mathbf{q}_\varphi \end{pmatrix},$$

где  $\mathbf{q}_l$  — вектор узловых сил,  $\mathbf{q}_\varphi$  — вектор узловых моментов. При наличии лишь сосредоточенных в узлах масс вектор  $\mathbf{q}_\varphi$  равен нулю и потому

$$\mathbf{r}_{\varphi l} \mathbf{x}_l + \mathbf{r}_{\varphi\varphi} \mathbf{x}_\varphi = 0,$$

отсюда

$$\mathbf{x}_\varphi = -\mathbf{r}_{\varphi\varphi}^{-1} \mathbf{r}_{\varphi l} \mathbf{x}_l;$$

и для вектора узловых сил получаем выражение

$$\mathbf{q}_l = \mathbf{r}_{ll} \mathbf{x}_l + \mathbf{r}_{l\varphi} \mathbf{x}_\varphi = (\mathbf{r}_{ll} - \mathbf{r}_{l\varphi} \mathbf{r}_{\varphi\varphi}^{-1} \mathbf{r}_{\varphi l}) \mathbf{x}_l.$$

Матрица  $\mathbf{r}^* = \mathbf{r}_{ll} - \mathbf{r}_{l\varphi} \mathbf{r}_{\varphi\varphi}^{-1} \mathbf{r}_{\varphi l}$  позволяет связать упругие силы только с линейными перемещениями. Уравнения движения, включающие только линейные перемещения, получают вид

$$m^* \ddot{\mathbf{x}}_l + \mathbf{r}^* \mathbf{x}_l = \mathbf{Q}_l,$$

где  $\mathbf{Q}_l$  — вектор внешних узловых сил.

Произведем перестроение матрицы жесткости для рассмотренного выше примера. Здесь

$$\mathbf{x}_l = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_\varphi = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_4 \end{pmatrix}.$$

После соответствующей перенумерации строк и столбцов матрицы  $\mathbf{r}$  получим

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} \mathbf{r}_{ll} & \vdots & \mathbf{r}_{l\varphi} \\ \dots & \ddots & \dots \\ \mathbf{r}_{\varphi l} & \vdots & \mathbf{r}_{\varphi\varphi} \end{pmatrix} = \frac{2EJ}{l^3} \begin{pmatrix} 30 & -24 & \vdots & 9l & 12l \\ -24 & 30 & \vdots & -12l & -9l \\ \dots & \dots & \ddots & \dots & \dots \\ 9l & -12l & \vdots & 10l^2 & 4l^2 \\ 12l & -9l & \vdots & 4l^2 & 10l^2 \end{pmatrix}.$$

Обратим матрицу:

$$\mathbf{r}_{\varphi\varphi}^{-1} = \frac{2EJ}{l^3} \begin{pmatrix} 10l^2 & 4l^2 \\ 4l^2 & 10l^2 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{r}_{\varphi\varphi}^{-1} = \frac{l}{84EJ} \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$$

и вычислим матрицу  $\mathbf{r}^*$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{r}^* &= \mathbf{r}_{ll} - \mathbf{r}_{l\varphi} \mathbf{r}_{\varphi\varphi}^{-1} \mathbf{r}_{\varphi l} = \\ &= \frac{2EJ}{l^3} \left[ \begin{pmatrix} 30 & -24 \\ -24 & 30 \end{pmatrix} - \frac{1}{42} \begin{pmatrix} 9 & 12 \\ -12 & -9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 & -12 \\ 12 & -9 \end{pmatrix} \right] = \\ &= \frac{9EJ}{l^3} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Соответствующая диагональная матрица масс

$$m^* = \frac{3}{2} m_0 l \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Из условия  $\det(r^* - p^2 m^*) = 0$  получаем уравнение частот

$$\begin{vmatrix} 3 - \alpha & -2 \\ -2 & 3 - \alpha \end{vmatrix} = 0 \quad \left( \alpha = p^2 \frac{m_0 l^4}{6EJ} \right).$$

Корни этого уравнения  $\alpha_1 = 1$ ,  $\alpha_2 = 5$  и соответствующие частоты

$$p_1 = \sqrt{\alpha_1 \frac{6EJ}{m_0 l^4}} = 2,449 \sqrt{\frac{EJ}{m_0 l^4}}, \quad p_2 = 5,477 \sqrt{\frac{EJ}{m_0 l^4}}.$$

Сопоставляя эти результаты с полученными выше, видим, что при диагональной матрице масс первая частота определяется с высокой точностью. Существенное преуменьшение второй частоты связано с тем, что при двухмассовой схеме переоценивается инерционность среднего участка балки (см. рис. 26.6).

## § 27. МЕТОД ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ

Метод последовательных приближений позволяет определять формы и частоты собственных колебаний с любой степенью точности. Особенно эффективен этот метод при определении низшей частоты колебаний.

Рассмотрим порядок расчета на примере системы с диагональной матрицей масс.

1. Задают приближенно форму колебания  $u_i^{(0)}$  (нулевое приближение).

2. Определяют силы инерции при амплитудных отклонениях системы:

$$F_i = [p^{(0)}]^2 m_i u_i^{(0)}$$

(значение частоты  $p^{(0)}$  может быть произвольным).

3. Методами строительной механики определяют перемещения  $u_i^{(1)}$ , вызванные силами  $F_i$ . Значения  $u_i^{(1)}$  представляют собой первое приближение к форме собственных колебаний.

4. Находят первое приближение для частоты собственных колебаний, например, по формуле Рэлея:

$$p^{(1)} = \sqrt{\sum F_i u_i / \sum m_i u_i^2} = p^{(0)} \sqrt{\sum m_i u_i^{(0)} u_i^{(1)} / \sum m_i (u_i^{(1)})^2}. \quad (27.1)$$

Далее за исходную принимают форму первого приближения и проводят повторный расчет, в результате которого определяют второе приближение, и т. д. Частоты при последующих приближениях определяют по формуле

$$p^{(r+1)} = p^{(r)} \sqrt{\sum m_i u_i^{(r)} u_i^{(r+1)} / \sum m_i (u_i^{(r+1)})^2}. \quad (27.2)$$

Свидетельством того, что процесс последовательных приближений

сошелся, является пропорциональность смещений при  $r$ -м и  $(r + 1)$ -м приближениях, т. е. независимость отношения  $u_i^{(r)}/u_i^{(r+1)}$  от номера массы  $i$ .

Заметим, что если это условие соблюдается, то формула (27.2) для расчета частоты может быть упрощена:

$$p^{(r+1)} = p^{(r)} \sqrt{u_i^{(r)}/u_i^{(r+1)}}, \quad (27.3)$$

причем отношение  $u^{(r)}/u^{(r+1)}$  берется в одной из точек системы.

Формулой (27.2) следует пользоваться при расчете частоты, когда форма  $u^{(r+1)}$  существенно отличается от формы  $u^{(r)}$  (например, при первом приближении), формулой (27.3) — при последующих этапах приближений.

Докажем, что метод последовательных приближений сходится к первой форме собственных колебаний. В матричной форме процесс последовательных приближений записывается в виде\*

$$u^{(r+1)} = [p^{(r)}]^2 \delta m u^{(r)}, \quad (27.4)$$

где  $u^{(r)}$ ,  $u^{(r+1)}$  — столбцы перемещений  $r$ -го и  $(r + 1)$ -го приближений;  $\delta$  — матрица податливостей;  $m$  — матрица масс.

Заметим, что если  $u^{(r)} = u_k$  — собственная форма колебаний, то [см. уравнение (12.34)]

$$u_k = p_k^2 \delta m u_k. \quad (27.5)$$

Разложим форму нулевого приближения по собственным формам:

$$u^{(0)} = c_1 u_1 + c_2 u_2 + \dots \quad (27.6)$$

Подставим это разложение в уравнение (27.4) для формы первого приближения:

$$u^{(1)} = [p^{(0)}]^2 \delta m (c_1 u_1 + c_2 u_2 + \dots). \quad (27.7)$$

Воспользовавшись тождествами (27.5), приведем уравнение (27.7) к виду

$$u^{(1)} = (p^{(0)}/p_1)^2 [c_1 u_1 + c_2 (p_1/p_2)^2 u_2 + c_3 (p_1/p_3)^2 u_3 + \dots]. \quad (27.8)$$

Сравнивая формулы (27.6) и (27.8), можно установить, что так как  $p_1 < p_2 < p_3 < \dots$ , то форма  $u^{(1)}$  ближе к первой собственной форме, чем  $u^{(0)}$ .

При каждом следующем приближении доля высших форм колебания продолжает уменьшаться в отношениях  $(p_1/p_k)^2$  и таким образом последовательность столбцов  $u^{(r)}$  быстро сходится к первой форме собственных колебаний  $u_1$ .

---

\* Запись уравнения (27.4) отнюдь не означает, что последовательные приближения в самом деле вычисляются по этому уравнению. Результат расчета, конечно, не зависит от того, каким образом фактически подсчитываются перемещения  $u^{(r+1)}$ , вызванные силами  $p^2 m u^{(r)}$ .

Соответственно и частота, подсчитываемая по формуле (27.4) быстро приближается к первой собственной частоте.

Очевидно, что если при выборе формы нулевого приближения  $u$  обеспечить ее ортогональность к первой форме собственных колебаний, то коэффициент  $c_1$  в разложении (27.6) будет равен нулю и расчет будет сходиться ко второй собственной форме.

При определении второй формы и частоты собственных колебаний методом последовательных приближений поступают следующим образом (предполагается, что матрица масс — диагональная):

1. Путем последовательных приближений определяют с достаточной точностью первую форму колебаний  $u_1$ .

2. Задают нулевое приближение для второй формы в виде

$$u^{(0)} = u_*^{(0)} + au_1,$$

где  $u_*^{(0)}$  — подходящая форма, а коэффициент  $a$  определяется из условия ортогональности

$$\sum_{i=1}^n m_i u_i^{(0)} u_{i1} = 0,$$

откуда

$$a = - \frac{\sum_{i=1}^n m_i u_{i*}^{(0)} u_{i1}}{\sum_{i=1}^n m_i u_{i1}^2}.$$

Дальнейшие вычисления не отличаются от вычислений при определении первой формы колебаний. В результате этих вычислений находят форму первого приближения  $u_*^{(1)}$  и соответствующую частоту колебаний. Следует отметить, что вследствие неточности расчета формы  $u_*^{(1)}$  может оказаться не ортогональной к первой собственной форме  $u_1$ . Поэтому, прежде чем переходить к расчету второго приближения, необходимо ортогонализировать  $u_*^{(1)}$  и в качестве исходной для второго приближения принять форму

$$u^{(1)} = u_*^{(1)} + a_1 u_1,$$

где

$$a_1 = - \frac{\sum_{i=1}^n m_i u_{i*}^{(1)} u_{i1}}{\sum_{i=1}^n m_i u_{i1}^2}.$$

Метод последовательных приближений пригоден для вычисления третьей и высших форм и частот собственных колебаний. Нужно лишь каждый раз задаваться формой колебаний, ортогональной ко всем предыдущим собственным формам. Однако для частот выше второй этот метод в таком виде применяется редко вследствие сложности вычислений и медленной сходимости.

С помощью метода последовательных приближений можно вычислить любую собственную частоту и собственную форму системы, воспользовавшись приемом сдвига спектра частот, изложенным в § 18 (см. с. 107). В самом деле, из формулы (27.8) следует, что метод схо-

дится к той форме колебаний, которой соответствует минимальная по модулю частота. Поэтому если с помощью сдвига спектра сделать квадрат частоты, соответствующей искомой собственной форме, минимальным, то расчет будет сходиться именно к этой форме.

Пусть нас интересует форма колебаний, квадрат частоты которых близок к  $\omega^2$ . Тогда следует вместо заданной рассмотреть модифицированную систему, матрица жесткости которой

$$r_* = r - \omega^2 m,$$

где  $r$  и  $m$  — матрицы жесткости и массы заданной системы. (В данном случае в отличие от § 13 к системе присоединяются отрицательные жесткости.)

Как показано в § 13, собственные формы модифицированной и заданной систем одинаковы, а квадраты частот отличаются на  $\omega^2$ :

$$p_{*k}^2 = p_k^2 - \omega^2.$$

Следовательно, наименьшая по модулю частота модифицированной системы отвечает той форме колебаний, квадрат частоты которых (в заданной системе) ближе всего к  $\omega^2$ . К этой форме и будет сходиться расчет модифицированной системы методом последовательных приближений.

Сам расчет модифицированной системы выполняется обычным способом в соответствии с формулой (27.4)  $u^{(r+1)} = [p_*^{(r)}]^2 \delta m u^{(r)}$ , причем матрица податливости модифицированной системы

$$\delta_* = r_*^{-1} = (r - \omega^2 m)^{-1} = (\delta^{-1} - \omega^2 m)^{-1}, \quad (27.9)$$

где  $\delta$  — матрица податливости заданной системы.

Последовательные приближения для квадрата частоты можно определять по формуле Рэлея:

$$[p_*^{(r+1)}]^2 = [p_*^{(r)}]^2 [u^{(r+1)}]^T m u^{(r)} / \{ [u^{(r+1)}]^T m u^{(r+1)} \},$$

или проще:

$$[p_*^{(r+1)}]^2 = [p_*^{(r)}]^2 u_i^{(r)} / u_i^{(r+1)},$$

где  $u_i$  — перемещение в характерной точке.

Заметим, что модифицированная система неустойчива. Поэтому  $p_*^2$  может быть как положительным, так и отрицательным. Соответствующая найденной форме колебаний частота заданной системы составляет

$$p = \sqrt{\omega^2 + p_*^2}. \quad (27.10)$$

Большой частью для определения перемещений на каждом этапе последовательных приближений используют численные методы интегрирования уравнений деформации, реализуемые на ЭВМ или с помощью ручного счета. Ниже рассмотрен пример расчета частоты собственных колебаний консольной балки переменного сечения (рис. 27.1).



Последовательность вычислений при ручном счете такова:

1. Задают исходную форму колебаний.
2. Вычисляют интенсивность сил инерции в каждом сечении:

$$q = [p^{(0)}]^2 m_0 u^{(0)},$$

где  $p^{(0)}$  — произвольно заданная частота;  $m_0$  — масса единицы длины балки.

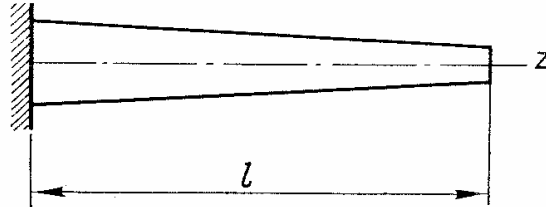


Рис. 27.1

3. Подсчитывают поперечную силу в каждом сечении:

$$Q(z) = - \int_z^l q dz. \quad (27.11)$$

Пределы интегрирования выбраны так, чтобы обеспечить выполнение граничного условия  $Q(l) = 0$ .

4. Интегрированием находят изгибающий момент в сечении:

$$M(z) = - \int_z^l Q dz. \quad (27.12)$$

Пределы интегрирования здесь также обеспечивают выполнение условия  $M(l) = 0$ .

5. Определяют кривизну упругой линии балки в каждой точке:

$$\kappa(z) = M(z)/[EJ(z)]. \quad (27.13)$$

6. Определяют угол поворота касательной:

$$\theta = \int_0^z \kappa dz. \quad (27.14)$$

Это выражение также удовлетворяет граничному условию  $\theta(0) = 0$ .

7. Вычисляют прогиб первого приближения:

$$u^{(1)} = \int_0^z \theta dz.$$

8. По формуле (27.1) вычисляют частоту собственных колебаний.

На этом заканчивается расчет первого приближения. Второе и последующие приближения рассчитывают в той же последовательности. Подробности вычислений видны из числового примера.

Таблица 27.1

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$z, \text{м} \cdot 10^{-3}$	$EJ, \text{Н} \cdot \text{м}^2 \cdot 10$	$p^F, \text{кН} \cdot \text{м}^{-1} \cdot 10^{-1}$	$u^{(0)}, \text{м} \cdot 10^{-2}$	$b^{(0)} = [p^{(0)}]_2^{pFu^{(0)}}, \text{Н} \cdot \text{м}^{-1} \cdot 10^3$	$-Q = \int_1^z q^{(0)} dz, \text{Н} \cdot 1,02 \cdot 10$	$M = - \int_1^z Q dz, \text{Н} \cdot \text{м} \cdot 1,02 \cdot 10^{-1}$	$\frac{M}{EJ}, \text{м}^{-1} \cdot 1,02 \cdot 10^{-2}$	$\frac{du^{(1)}}{dz} = \int_0^z \frac{EJ}{M} dz, 1 \cdot 1,02 \cdot 10^{-4}$	$u^{(1)} = \int_0^z \frac{du^{(1)}}{dz} dz, \text{м} \cdot 1,02 \cdot 10^{-6}$	$u^{Fu(0)}(1), \text{кН} \cdot \text{м} \cdot 1,02 \cdot 10^{-5}$	$p^F [u^{(1)}]_2, \text{кН} \cdot \text{м} \cdot 1,02 \cdot 10^{-5}$
0	5,33	12,80	0	0	8,636	123,784	23,2	0	0	0	0
2,04	4,43	12,24	0,01	0,020	8,616	106,532	24,1	47,3	47,3	0,001	0,000
4,08	3,69	11,60	0,04	0,074	8,522	89,394	24,2	95,6	190,2	0,009	0,005
6,12	3,07	10,96	0,09	0,158	8,290	72,582	23,6	143,4	429,2	0,042	0,020
8,16	2,54	10,32	0,16	0,265	7,867	56,425	22,2	189,2	761,8	0,126	0,060
10,20	2,07	9,68	0,25	0,387	7,215	41,343	19,9	231,3	1182,3	0,286	0,135
12,24	1,66	9,04	0,36	0,521	6,307	27,821	16,8	268,0	1681,6	0,548	0,256
14,28	1,31	8,40	0,49	0,659	5,127	16,387	12,5	297,3	2246,9	0,925	0,425
16,32	1,00	7,76	0,64	0,795	3,673	7,587	7,6	318,4	2862,6	1,420	0,637
18,36	0,78	7,12	0,81	0,921	1,957	1,956	2,5	328,5	3509,6	2,020	0,878
20,40	0,57	6,48	1,00	1,036	0	0	0	331,0	4169,0	2,700	1,125

**Пример.** Требуется определить низшую частоту колебаний бруса, представленного на рис. 27.1 (лопатки газовой турбины).

**Решение.** Разделив брус на 10 участков равной длины по  $\Delta = l/10 = 2,04$  см, для каждой точки деления определим момент инерции  $J$  и площадь  $F$  поперечного сечения. Соответствующие значения жесткости  $EJ$  и массы единицы длины  $m_0$  выписаны в графах 2 и 3 табл. 27.1, причем принято

$$\rho = 7,8 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3, E = 2 \cdot 10^{11} \text{ Па}.$$

В качестве нулевого приближения формы колебаний, удовлетворяющего геометрическим граничным условиям, принята парабола

$$u^{(0)}(z) = (z/l)^2.$$

Значения  $u^{(0)}$  приведены в графе 4 табл. 27.1.

Исходя из произвольно заданной частоты  $p^{(0)} = 400 \text{ с}^{-1}$ , в графе 5 табл. 27.1 подсчитана интенсивность нагрузки

$$q = [p^{(0)}]^2 m_0 u^{(0)}.$$

Графа 6 таблицы служит для вычисления поперечной силы:

$$-Q(z) = \int_z^l q dz.$$

Интегрирование выполняем по формуле трапеций, так что значение  $-Q$  для сечения  $z_i$  определяется как

$$-Q_i = \frac{\Delta}{2} (q_k + 2q_{k-1} + 2q_{k-2} + \dots + 2q_{i+1} + q_i),$$

где  $k$  — последняя точка деления, соответствующая свободному концу бруса.

Вынося  $\Delta/2 = 1,02 \cdot 10^{-2} \text{ м}$  в общий множитель графы 6, можно определять цифры этой графы простым суммированием по схеме кольца. Так, например, чтобы получить число 3,673, стоящее в девятой строке графы 6, нужно к ниже стоящему числу 1,957 добавить числа 0,921 и 0,795, как это схематически показано стрелками в табл. 27.1.

Далее, точно таким же образом по формуле (27.12) подсчитываем изгибающий момент, значения которого приведены в графе 7 таблицы. Изгибающий момент в каждом сечении делим на жесткость (графа 8) и полученную величину интегрируем для определения угла поворота касательной к упругой линии [см. формулу (27.14)].

Вычисление  $\theta = du/dz$  (графа 9) снова производим суммированием по схеме кольца, но теперь уже сверху вниз. Интегрируя таким же образом еще раз, находим первое приближение  $u^{(1)}$  (графа 10). В графах 11 и 12 вычислены произведения  $m_0 u^{(0)} u^{(1)}$  и  $m_0 [u^{(1)}]^2$ . По правилу трапеций определены интегралы:

$$\int_0^l m_0 u^{(0)} u^{(1)} dz = 14,9 \cdot 10^{-7} \text{ кг} \cdot \text{м}^2,$$

$$\int_0^l m_0 [u^{(1)}]^2 dz = 7,13 \cdot 10^{-7} \text{ кг} \cdot \text{м}^2.$$

Первое приближение для угловой частоты собственных колебаний вычисляется по формуле (27.1):

$$p^{(1)} = p^{(0)} \sqrt{\frac{\int_0^l m_0 u^{(0)} u^{(1)} dz}{\int_0^l m_0 [u^{(1)}]^2 dz}} = 400 \sqrt{\frac{14,9}{7,13}} = 579 \text{ с}^{-1}.$$

Для следующего приближения следует повторить вычисления, используя в качестве исходной полученную форму  $u^{(1)}$ .

Второе приближение приводит к значению угловой частоты  $p^{(2)} = 575 \text{ с}^{-1}$

Если для расчета пользоваться не формулой (27.2), а формулой (27.3), то для первого приближения получим  $p = 594 \text{ с}^{-1}$  (вместо  $597 \text{ с}^{-1}$ ), а для второго приближения  $p = 576 \text{ с}^{-1}$  (вместо  $575 \text{ с}^{-1}$ ). В формулу (27.3) внесены прогибы при  $z = l$ . Таким образом, если ограничиваться одним приближением, целесообразно пользоваться формулой (27.1), а при нескольких приближениях можно пользоваться более простой формулой (27.3), так как при этом отпадает необходимость в вычислении граф 11 и 12 расчетной таблицы.

В рассмотренном примере при определении прогибов удалось благодаря соответствующему выбору пределов интегрирования сделать равными нулю все постоянные интегрирования. При других граничных условиях этого сделать не удастся.

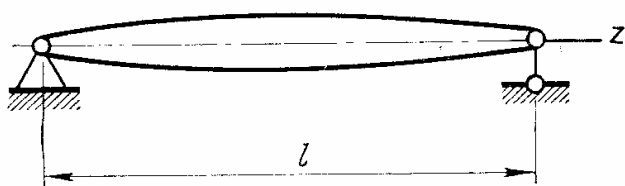


Рис. 27.2

Рассмотрим, например, порядок ручного расчета балки переменного сечения на двух шарнирных опорах (рис. 27.2).

В этом случае после определения интенсивности нагрузки (графа 5 расчетной таблицы) вычисляют поперечную силу с точностью до неизвестной постоянной, равной опорной реакции:

$$Q(z) - C_1 = \int_0^z q dz.$$

Интегрирование выполняют численно сверху вниз. Затем повторным интегрированием вычисляют величину

$$I_1(z) = \int_0^z [Q(z) - C_1] dz = M(z) - C_1 z.$$

Доведя интегрирование до крайнего правого сечения и учитывая, что момент в этом сечении равен нулю, находят величину

$$C_1 = -I_1(l)/l,$$

после чего в соответствующую графу таблицы заносят значение момента

$$M = I_1(z) - I_1(l)z/l.$$

Затем определяют кривизну:  $\kappa = M/(EJ)$ .

Вычисление прогибов ведут таким же образом: сначала интегрированием находят

$$\frac{du}{dz} - C_2 = \int_0^z \kappa dz,$$

затем после повторного интегрирования определяют

$$I_2(z) = \int_0^z \left[ \frac{du}{dz} - C_2 \right] dz = u(z) - C_2 z.$$

Константу  $C_2$  находят из условия закрепления правого конца стержня:

$$C_2 = -I_2(l)/l,$$

после чего вычисляют прогибы в любом сечении:

$$u(z) = I_2(z) - I_2(l)z/l.$$

В остальном расчет не отличается от расчета консольного стержня.

Приведем расчет собственной частоты рассмотренной выше консольной балки с применением ЦВМ. В этом случае вместо последовательного вычисления интегралов целесообразно определять прогибы интегрированием системы дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\frac{du}{dz} = \theta; \quad \frac{d\theta}{dz} = \frac{M}{EJ}; \quad \frac{dM}{dz} = Q; \quad \frac{dQ}{dz} = q. \quad (27.15)$$

Для расчета прогибов при заданной нагрузке нужно выполнить всего четыре интегрирования системы (27.15). Сначала дважды интегрируется однородная (т. е. при  $q = 0$ ) система уравнений при следующих начальных условиях в заделке:

- 1)  $u_1(0) = 0; \quad \theta_1(0) = 0; \quad M_1(0) = 1; \quad Q_1(0) = 0;$
- 2)  $u_2(0) = 0; \quad \theta_2(0) = 0; \quad M_2(0) = 0; \quad Q_2(0) = 1.$

В результате этих расчетов вычисляются и запоминаются значения  $M$  и  $Q$  в сечении  $z = l$ :  $M_1(l)$ ,  $Q_1(l)$ ,  $M_2(l)$ ,  $Q_2(l)$ , где индекс означает номер интегрирования.

Далее интегрируется уже неоднородная (т. е. с учетом  $q$ ) система (27.15) при нулевых начальных условиях  $u_3(0) = 0; \quad \theta_3(0) = 0; \quad M_3(0) = 0; \quad Q_3(0) = 0$  и вычисляются значения  $M_3(l)$  и  $Q_3(l)$ .

Так как общее решение системы (27.15), удовлетворяющее граничным условиям при  $z = 0$ , можно представить в виде

$$u = C_1 u_1(z) + C_2 u_2(z) + u_3(z),$$

где  $C_1$  и  $C_2$  — постоянные, то условия равенства нулю момента и поперечной силы на свободном конце стержня имеют такой вид:

$$C_1 M_1(l) + C_2 M_2(l) + M_3(l) = 0,$$

$$C_1 Q_1(l) + C_2 Q_2(l) + Q_3(l) = 0.$$

Отсюда находят значения  $C_1$ ,  $C_2$ , равные соответственно изгибающему моменту и поперечной силе при  $z = 0$ :

$$C_1 = [M_2(l) Q_3(l) - Q_2(l) M_3(l)] / \Delta;$$

$$C_2 = [Q_1(l) M_3(l) - M_1(l) Q_3(l)] / \Delta;$$

$$[\Delta = M_1(l) Q_2(l) - M_2(l) Q_1(l)].$$

Теперь значения всех переменных при  $z = 0$  определены, и окончательное их значение в любом сечении находят с помощью еще одного интегрирования системы (27.15) при начальных условиях

$$u(0) = 0; \quad \theta(0) = 0; \quad M(0) = C_1; \quad Q(0) = C_2.$$

Обратим внимание на то, что интегрирование однородных уравнений надо выполнить только при расчете первого приближения. Найденные значения  $M_1(l)$ ,  $Q_1(l)$ ,  $M_2(l)$ ,  $Q_2(l)$ ,  $\Delta$  используются затем при расчете всех последующих приближений. Поэтому при каждом приближении, кроме первого, выполняются всего два интегрирования.

Ниже приведена простейшая программа решения рассматриваемой задачи на ЦВМ типа «МИР-1». Интегрирование выполнено методом Эйлера с постоянным шагом, равным  $\frac{1}{100}$  пролета. Значения прогиба при окончательном интегрировании запоминаются в тех же узловых точках, в которых проводились вычисления в табл. 27.1. По этим значениям, приведенным к прогибу на конце, равному единице, рассчитываются интенсивности нагрузки для следующего приближения.

В промежуточных точках нагрузка и жесткость  $EJ$  определяются линейной интерполяцией. Для организации вычислений использованы три символа:  $\Pi$ ,  $J$ ,  $K$ .  $\Pi$  — номер интегрирования. При  $\Pi = 1$  и  $\Pi = 2$  интегрируются однородные уравнения, при больших  $\Pi$  — неоднородные. При этом нечетным значениям  $\Pi$   $[F(\frac{\Pi+1}{2}) = 0$ ,

где  $F$  — целая часть числа] соответствуют частные интегралы неоднородного уравнения, а четным — интегралы, удовлетворяющие граничным условиям. При  $\Pi = 4, 6, 8, \dots$  машина выдает значения частоты, подсчитанные по формуле (27.3), и значения прогибов в узловых точках. Счет прекращается после выполнения  $N3$  интегрирований.  $J$  — номер узловой точки и следующего за ней участка ( $J = 1, 2, \dots, N1$ ),  $K$  — номер шага интегрирования в пределах участка между узлами ( $K = 1, 2, \dots, N2$ ).

Массив  $U[I](I = 1, \dots, 4)$  используется для записи компонентов вектора состояния ( $u, \theta, M, Q$ ). Массивы  $EJ[J]$ ,  $P[J]$ ,  $Q[J]$ ,  $V[J]$  служат для записи значений жесткости, погонной массы  $\rho F$ , интенсивности инерционной нагрузки и прогиба в узловых точках.

Значения числа узловых точек  $N1$ , числа шагов на каждом участке  $N2$ , абсциссы начальной  $T0$  и конечной  $TК$  точек интервала интегрирования, значения жесткости и интенсивности массы в узловых точках указываются в описательной части программы.

В текст программы длина балки внесена увеличенной в 100 раз ( $TК = 20.4$ ). Поэтому частота колебаний выдается уменьшенной в  $10^4$  раз. Частота обозначена идентификатором  $\Pi = p \cdot 10^{-4}$ .

В программе предусмотрены четыре последовательных приближения. Они дают следующие значения частоты:  $p^{(1)} = 594,1 \text{ с}^{-1}$ ,  $p^{(2)} = 578,6 \text{ с}^{-1}$ ,  $p^{(3)} = 578,2 \text{ с}^{-1}$ ,  $p^{(4)} = 578,2 \text{ с}^{-1}$ . Как видно, расхождение между результатами ручного и машинного счета невелико.

*Программа расчета частоты собственных колебаний  
консольной балки на машине «МИР-1»*

«РАЗР» 6.

$H = (TK - TO)((N1 - 1) \times N2)$ ;  $\Psi = 0$ ;  $U[3] = 1$ ;  $U[4] = 0$ ;  
 «ДЛЯ»  $J = 1$  «Ш»1«ДО»  $N1$  «ВЫП»  $V[J] = ((J - 1)/(N1 - 1)) \uparrow 2$ ;  
 1. «ДЛЯ»  $J = 1$  «Ш»1«ДО»  $N1$  «ВЫП»  $Q[J] = P[J] \times V[J] \times \Pi \times \Pi$ ;  
 2.  $\Psi = \Psi + 1$ ;  $T = TO$ ;  $U[1] = 0$ ;  $U[2] = 0$ ;  $K = 0$ ;  $J = 1$ ;  
 3.  $C = K/N2$ ;  $EJ = EJ[J] \times (1 - C) + EJ [J + 1] \times C$ ;  
 $Q = (E)\Psi < 3\langle TO \rangle (0)\langle ИНА \rangle (Q[J] \times (1 - C) + Q[J + 1] \times C)$ ;  
 $R[1] = U[2]$ ;  $R[2] = U[3]/EJ$ ;  $R[3] = U[4]$ ;  $R[4] = 0$ ;  
 «ДЛЯ»  $I = 1$  «Ш»1«ДО»4«ВЫП»  $U[I] = U[I] + H \times R[I]$ ;  $K = K + 1$ ;  
 «E» $K < N2\langle TO \rangle (\langle НА \rangle 3)$ ;  $J = J + 1$ ;  
 «E» $\Psi > 3\langle TO \rangle (E)F(\Psi/2) = 0\langle TO \rangle (V[J] = U[1])$ ;  
 «E»  $J < N1\langle TO \rangle (K = 0; \langle НА \rangle 3)$ ;  
 «E» $\Psi = 1\langle TO \rangle (A1 = U[3]; B1 = U[4]; U[3] = 0; U[4] = 1; \langle НА \rangle 2)$ ;  
 «E» $\Psi = 2\langle TO \rangle (A2 = U[3]; B2 = U[4]; ОПР = A1 \times B2 - A2 \times B1$ ;  
 $U[3] = 0; U[4] = 0; \langle НА \rangle 2)$ ;  
 «E» $F((\Psi + 1)/2) = 0\langle TO \rangle (A3 = U[3]$ ;  
 $U[3] = (A2 \times U[4] - B2 \times U[3])/ОПР$ ;  
 $U[4] = (B1 \times A3 - A1 \times U[4])/ОПР; \langle НА \rangle 2)$ ;  
 «E» $F(\Psi/2) = 0\langle TO \rangle (\Pi = \Pi/V(U[1])$ ;  
 «ДЛЯ»  $J = 1$  «Ш»1«ДО»  $N1$  «ВЫП»  $V[J] = V[J]/V[N1]$ ;  
 «ВЫВ» $\Psi$ , «ПР»2,  $\Pi$ ; «ВЫВ»«МАСС» $V$ ;  
 «E» $\Psi = N3\langle TO \rangle (\langle СТОП \rangle)$ ; «НА»1)  
 «ГДЕ»  $N1 = 11$ ;  $N2 = 10$ ;  $N3 = 10$ ;  $TO = 0$ ;  $TK = 20.4$ ;  $\Pi = 5_{ю} - 2$ ;  
 $EJ[11] = 53.3, 44.3, 36.9, 30.7, 25.4, 20.7, 16.6, 13.1, 10.0, 7.8, 5.7$ ;  
 $P[11] = 1.28, 1.224, 1.160, 1.096, 1.032, 0.968, 0.904, 0.840, 0.776, 0.712, 0.648$ ;  
 $V[11]; Q[11]; U[4]; F[4] \langle КО \rangle$

## § 28. РАСЧЕТ СОБСТВЕННЫХ ЧАСТОТ СИСТЕМЫ БЕЗ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ФОРМ ЕЕ КОЛЕБАНИЙ

В настоящем параграфе дан вывод формул, позволяющих вычислять собственные частоты системы, не составляя и не решая векового уравнения. В основу расчета положим матричное уравнение (12.28) для столбцов амплитудных перемещений

$$(\delta m - p^{-2}E)u = 0. \quad (28.1)$$

Собственные частоты определяются из векового уравнения

$$\Delta(1/p^2) = \det(\delta m - p^{-2}E) = 0.$$

В развернутом виде это уравнение можно записать так:

$$\Delta(1/p^2) = (1/p^2)^n - B_1(1/p^2)^{n-1} + \dots + B_0 = 0. \quad (28.2)$$

Как нетрудно видеть, коэффициент  $B_1$  представляет собой сумму элементов главной диагонали матрицы:

$$A = \delta m. \quad (28.3)$$

Эта сумма называется следом (Sp) матрицы  $A$ :

$$B_1 = \text{Sp}A. \quad (28.4)$$

В случае диагональной матрицы масс

$$\begin{aligned}
 A = \delta m &= \begin{pmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \dots & \delta_{1n} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \dots & \delta_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \delta_{n1} & \delta_{n2} & \dots & \delta_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & m_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & m_n \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} m_1 \delta_{11} & m_2 \delta_{12} & \dots & m_n \delta_{1n} \\ m_1 \delta_{21} & m_2 \delta_{22} & \dots & m_n \delta_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ m_1 \delta_{n1} & m_2 \delta_{n2} & \dots & m_n \delta_{nn} \end{pmatrix}; \\
 B_1 = \text{Sp } A &= m_1 \delta_{11} + m_2 \delta_{22} + \dots + m_n \delta_{nn}. \quad (28.5)
 \end{aligned}$$

На основании теоремы Безу характеристический полином (28.2) может быть выражен через свои корни (т. е. обратные квадраты собственных частот):

$$\Delta(1/p^2) = (1/p^2 - 1/p_1^2)(1/p^2 - 1/p_2^2) \dots (1/p^2 - 1/p_n^2).$$

Отсюда видно, что коэффициент при  $(1/p^2)^{n-1}$

$$B_1 = 1/p_1^2 + 1/p_2^2 + \dots + 1/p_n^2.$$

Приравнявая различные выражения  $B_1$ , найдем

$$B_1 = \text{Sp } A = 1/p_1^2 + 1/p_2^2 + \dots + 1/p_n^2. \quad (28.6)$$

Правая часть равенства представляет собой убывающую последовательность существенно положительных чисел. Поэтому, пренебрегая всеми слагаемыми, кроме первого, получим оценку низшей собственной частоты:

$$1/p_1^2 < B_1; \quad p_1 > 1/\sqrt{B_1}.$$

В случае диагональной матрицы масс эта оценка

$$p_1 > 1/\sqrt{B_1} = 1 \left/ \sqrt{\sum_{i=1}^n m_i \delta_{ii}} \right.$$

совпадает с оценкой по формуле Донкерлея.

Для получения более точных оценок найдем предварительно выражение матрицы  $A = \delta m$  через собственные ее векторы и собственные числа.

Для каждого собственного вектора  $u_r$  справедливо тождество

$$\delta m u_r = u_r / p_r^2. \quad (28.7)$$

Составим матрицу  $U$ , столбцами которой являются собственные векторы:



$$U = (u_1, u_2, \dots, u_n) = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1n} \\ u_{21} & u_{22} & \dots & u_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_{n1} & u_{n2} & \dots & u_{nn} \end{pmatrix}.$$

Так как для каждого столбца матрицы  $U$  справедливо уравнение (28.7), то для матрицы в целом справедливо аналогичное уравнение, которое можно записать в следующей форме:

$$\delta m U = U D, \quad (28.8)$$

где

$$D = \begin{pmatrix} 1/p_1^2 & & 0 \\ & 1/p_2^2 & \\ 0 & & 1/p_n^2 \end{pmatrix}$$

— диагональная матрица, составленная из обратных квадратов собственных частот.

Умножив обе части равенства (28.8) на обратную матрицу  $U^{-1}$ , выразим матрицу  $\delta m = A$  через ее собственные числа и собственные векторы:

$$A = \delta m = U D U^{-1}. \quad (28.9)$$

(Матрица  $U$  — не особенная в связи с тем, что ее столбцы удовлетворяют условиям ортогональности.)

Возведем матрицу  $A$  в квадрат:

$$A^2 = U D U^{-1} U D U^{-1} = U D^2 U^{-1}. \quad (28.10)$$

Заметим, что

$$D^2 = \begin{pmatrix} 1/p_1^2 & & 0 \\ & 1/p_2^2 & \\ 0 & & 1/p_n^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/p_1^2 & & 0 \\ & 1/p_2^2 & \\ 0 & & 1/p_n^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/p_1^4 & & 0 \\ & 1/p_2^4 & \\ 0 & & 1/p_n^4 \end{pmatrix}.$$

Сопоставляя формулы (28.9) и (28.10), видим, что собственные векторы матрицы  $A^2$  совпадают с собственными векторами матрицы  $A$ , а собственными ее числами являются величины  $1/p_r^4$ .

Точно так же, возведя матрицу  $A$  в любую степень  $\nu$ , установим, что собственными числами матрицы  $A^\nu$  являются величины  $1/p_r^{2\nu}$  ( $r = 1, 2, \dots, n$ ).

Для матрицы  $A^\nu$  также справедливо уравнение типа (28.6), связывающее ее след с собственными числами:

$$\text{Sp } A^\nu = \sum_{r=1}^n \frac{1}{p_r^{2\nu}}. \quad (28.11)$$

Ряд в правой части равенства (28.11) сходится тем быстрее, чем больше  $\nu$ , и при  $\nu \rightarrow \infty$

$$\text{Sp } A^\nu \rightarrow 1/p_1^{2\nu}. \quad (28.12)$$

Вычисление следа матрицы  $A^\nu$  не представляет значительных трудностей. Обозначая  $\text{Sp} A^\nu = B_\nu$ , будем иметь, например, при диагональной матрице масс:

$$B_1 = \text{Sp} A = \sum_{i=1}^n m_i \delta_{ii}, \quad (28.13)$$

$$B_2 = \text{Sp} A^2 = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n m_i m_j \delta_{ij}^2,$$

$$B_3 = \text{Sp} A^3 = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n m_i m_j m_k \delta_{ij} \delta_{jk} \delta_{ki}$$

и т. д. При числовом расчете проще не пользоваться готовыми формулами для следов  $B_\nu$ , а фактически возводить матрицу  $A$  в степень  $\nu$ , после чего вычислять сумму элементов главной диагонали.

Соотношение (28.12) позволяет получить следующую приближенную формулу для низшей собственной частоты:

$$p_1 = \sqrt[2\nu]{1/B_\nu}, \quad (28.14)$$

причем эта формула определяет нижнюю границу частоты, так что в действительности  $p_1 > \sqrt[2\nu]{1/B_\nu}$ .

Формула (28.14) тем точнее, чем больше  $\nu$ : при  $\nu = 1$  она совпадает с формулой Донкерлея.

Для двусторонней оценки частоты рассмотрим следы матриц  $A^\nu$  и  $A^{2\nu}$  (вторая из матриц получается возведением в квадрат первой) —  $B_\nu$  и  $B_{2\nu}$ :

$$\begin{aligned} B_\nu &= 1/p_1^{2\nu} + 1/p_2^{2\nu} + 1/p_3^{2\nu} + \dots, \\ B_{2\nu} &= 1/p_1^{4\nu} + 1/p_2^{4\nu} + 1/p_3^{4\nu} + \dots \end{aligned} \quad (28.15)$$

Возведя  $B_\nu$  в квадрат и вычитая  $B_{2\nu}$ , получим

$$B_\nu^2 - B_{2\nu} = \frac{2}{p_1^{2\nu}} \left( \frac{1}{p_2^{2\nu}} + \frac{1}{p_3^{2\nu}} + \dots \right) + \frac{2}{p_2^{2\nu} p_3^{2\nu}} + \dots,$$

отсюда

$$B_\nu^2 - B_{2\nu} = \frac{2}{p_1^{2\nu}} \left( B_\nu - \frac{1}{p_1^{2\nu}} \right) + \epsilon,$$

где  $\epsilon$  — положительная величина порядка  $2/(p_2^{2\nu} p_3^{2\nu})$ .

Решим полученное квадратное уравнение относительно  $1/p_1^{2\nu}$ :

$$1/p_1^{2\nu} = 1/2 \left[ B_\nu + \sqrt{2B_{2\nu} - B_\nu^2 + 2\epsilon} \right].$$

Отбрасывая здесь  $\epsilon$ , получаем верхнюю оценку для низшей собственной частоты:

$$p_1 < \sqrt[2\nu]{2 / (B_\nu + \sqrt{2B_{2\nu} - B_\nu^2})}.$$

Таким образом, вычислив  $B_\nu$ ,  $B_{2\nu}$ , можно определить следующие границы первой частоты:

$$\sqrt[4\nu]{1/B_{2\nu}} < p_1 < \sqrt[2\nu]{2 / (B_\nu + \sqrt{2B_{2\nu} - B_\nu^2})}. \quad (28.16)$$

При этом нижняя граница определена с неточностью порядка  $(p_1/p_2)^{4\nu}/(4\nu)$ , а верхняя — с неточностью порядка  $[p_1^2/(p_2 p_3)]^{2\nu}/(2\nu)$  по сравнению с единицей.

После того как первая частота собственных колебаний определена с достаточно высокой точностью, можно перейти к вычислению второй частоты.

Путем анализа зависимостей (28.15) можно убедиться, что для оценки второй частоты ( $p_2$ ) в формулы (28.16) следует вместо  $B_\nu$  и  $B_{2\nu}$  внести величины  $B_\nu^* = B_\nu - 1/p_1^{2\nu}$ ,  $B_{2\nu}^* = B_{2\nu} - 1/p_1^{4\nu}$ . Если  $p_1$  определено абсолютно точно, то после такой замены формула (28.16) даст границы второй частоты. Если имеются лишь приближенные значения  $p_1$ , то в левую часть неравенств (28.16) следует подставлять верхнюю оценку  $p_1$ , а в правую — нижнюю.

Аналогичным образом можно далее определить и границы последующих частот. Для получения границ частоты  $p_k$  следует в формулы (28.16) вместо  $B_\nu$  и  $B_{2\nu}$  вносить

$$B_\nu^* = B_\nu - \sum_{r=1}^{k-1} \frac{1}{p_r^{2\nu}}, \quad B_{2\nu}^* = B_{2\nu} - \sum_{r=1}^{k-1} \frac{1}{p_r^{4\nu}}.$$

Однако границы для высших частот получаются широкими, а вычисления затруднительны в связи с необходимостью подсчета малых разностей. Для получения надежных оценок высших частот предыдущие частоты должны быть вычислены с существенно большей точностью (за счет больших значений  $\nu$ ).

Если ограничиться только вычислением следов  $B_1$  и  $B_2$ , то по формуле (28.16) получим следующие границы первой частоты:

$$\sqrt[4\nu]{1/B_2} < p_1 < \sqrt[2\nu]{2 / (B_1 + \sqrt{2B_2 - B_1^2})}. \quad (28.17)$$

Для второй собственной частоты, зная  $B_1$  и  $B_2$ , можно установить только нижнюю границу:

$$p_2 > \sqrt[2\nu]{1 / (B_1 - \sqrt{2B_2 - B_1^2})}. \quad (28.18)$$

Рассмотрим пример для балки с тремя грузами, рассчитанной выше (см. с. 103):

$$B_1 = m_1 \delta_{11} + m_2 \delta_{22} + m_3 \delta_{33} = \frac{131}{3888} \cdot \frac{ml^3}{EJ},$$

$$B_2 = m_1^2 \delta_{11}^2 + m_2^2 \delta_{22}^2 + m_3^2 \delta_{33}^2 + 2(m_1 m_2 \delta_{12}^2 + m_2 m_3 \delta_{23}^2 + m_3 m_1 \delta_{31}^2) = \\ = \frac{14473}{(3888)^2} \frac{m^2 l^6}{(EJ)^2}.$$

Подставляя эти значения в неравенства (28.17), находим

$$5,685 \sqrt{EJ/(ml^3)} < p_1 < 5,698 \sqrt{EJ/(ml^3)}.$$

Точное значение частоты, вычисленное выше, составляет

$$p_1 = \sqrt{(3888/120)[EJ/(ml^3)]} = 5,692 \sqrt{EJ/(ml^3)}.$$

По формуле (28.18) определяем нижнюю границу второй частоты:

$$p_2 > 19,07 \sqrt{EJ/(ml^3)}.$$

Точное значение:

$$p_2 = 22,045 \sqrt{EJ/(ml^3)}.$$

Приведенные формулы для частот собственных колебаний могут быть использованы и для систем с распределенной массой. В этом случае системы алгебраических уравнений типа (28.1) переходят в интегральные уравнения. Формулы (28.16)...(28.18) можно полностью применить и в этом случае, если при подсчете следов  $B_i$  в формулах (28.13) заменить суммирование интегрированием. Так, например, для балки переменного сечения

$$B_1 = \int_0^l m_0(z) \delta_{zz} dz, \\ B_2 = \int_0^l \int_0^l m_0(z_1) m_0(z_2) \delta_{z_1 z_2}^2 dz_1 dz_2, \\ B_3 = \int_0^l \int_0^l \int_0^l m_0(z_1) m_0(z_2) m_0(z_3) \delta_{z_1 z_2} \delta_{z_2 z_3} \delta_{z_3 z_1} dz_1 dz_2 dz_3$$

и т. д., где  $m_0(z)$  — интенсивность массы балки в соответствующем сечении;  $\delta_{z_i z_j}$  — перемещение в сечении  $z_i$  от единичной силы, приложенной в сечении  $z_j$ .

В качестве примера рассмотрим определение частоты собственных колебаний консольной балки постоянного сечения с присоединенной к ее концу массой  $m$ , учитывая распределенную массу балки интенсивностью  $m_0$ . Так как здесь имеются как распределенная, так и сосредоточенная массы,  $B_1$  и  $B_2$  определяются формулами

$$B_1 = m \delta_{11} + \int_0^l m_0 \delta_{zz} dz, \\ B_2 = m^2 \delta_{11}^2 + 2m \int_0^l m_0 \delta_{1z}^2 dz + \int_0^l \int_0^l m_0^2 \delta_{z_1 z_2}^2 dz dz_1.$$

Подынтегральная функция в последнем интеграле является симметричной, поэтому интегрирование по квадрату  $0 \leq z \leq l$ ;  $0 \leq z_1 \leq l$  можно заменить интегрированием по треугольнику  $0 \leq z \leq z_1$ ;  $0 \leq z_1 \leq l$ :

$$\int_0^l \int_0^l m_0^2 \delta_{z_1 z}^2 dz dz_1 = 2 \int_0^l \int_0^{z_1} m_0^2 \delta_{z_1 z}^2 dz dz_1.$$

Коэффициенты влияния имеют значения:

$$\delta_{11} = l^3/(3EJ), \quad \delta_{zz} = z^3/(3EJ), \quad \delta_{1z} = [1/(6EJ)] z^2 (3l - z), \\ \delta_{z_1 z} = [1/(6EJ)] z^2 (3z_1 - z) \quad (\text{при } z \leq z_1).$$

После интегрирования получаем:

$$B_1 = \frac{ml^3}{3EJ} + \frac{m_0}{3EJ} \int_0^l z^3 dz = \frac{m_0 l^4}{12EJ} \left( 1 + \frac{4m}{m_0 l} \right), \\ B_2 = \frac{m^2 l^6}{9(EJ)^2} + \frac{2mm_0}{36(EJ)^2} \int_0^l z^4 (3l - z)^2 dz + \\ + \frac{2m_0^2}{36(EJ)^2} \int_0^l \int_0^{z_1} z^4 (3z_1 - z)^2 dz dz_1 = \frac{m_0^2 l^8}{5040(EJ)^2} \left[ 33 + 264 \frac{m}{m_0 l} + \right. \\ \left. + 560 \left( \frac{m}{m_0 l} \right)^2 \right].$$

Теперь можно по формуле (28.17) определить границы первой частоты при любом отношении  $m/(m_0 l)$ . В частности, если груза на конце балки нет ( $m = 0$ ), получим:

$$B_1 = m_0 l^4/(12EJ), \quad B_2 = (33/5040) [m_0^2 l^8/(EJ)^2],$$

откуда, согласно неравенствам (28.17),

$$3,5154 \sqrt{EJ/(m_0 l^4)} < p_1 < 3,5162 \sqrt{EJ/(m_0 l^4)}.$$

Для второй частоты по формуле (28.18) получаем

$$p_2 > 20,3 \sqrt{EJ/(m_0 l^4)}.$$

Точное значение:

$$p_2 = 22,0 \sqrt{EJ/(m_0 l^4)}.$$

## § 29. МЕТОДЫ ДИНАМИЧЕСКИХ ПОДАТЛИВОСТЕЙ И ДИНАМИЧЕСКИХ ЖЕСТКОСТЕЙ

При исследовании гармонических (свободных или вынужденных) колебаний сложных систем их часто удобно разделять на более простые подсистемы. Отделение (изоляция) подсистем друг от друга может быть достигнуто либо устранением связей между ними (метод динамических податливостей), либо, наоборот, введением дополнительных связей, запрещающих перемещения общих точек (узлов) подсистем (метод динамических жесткостей).

В первом случае по направлению отброшенных связей прикладывают их реакции, которые затем определяют из условий совместности деформаций подсистем. Эти искомые реакции также меняются по гармоническому закону. Во втором случае закрепленным узлам сообщают гармонические перемещения, величины которых определяют затем из условия равенства нулю суммарных воздействий на узлы.

Таким образом, имеется полная аналогия между методом динамических

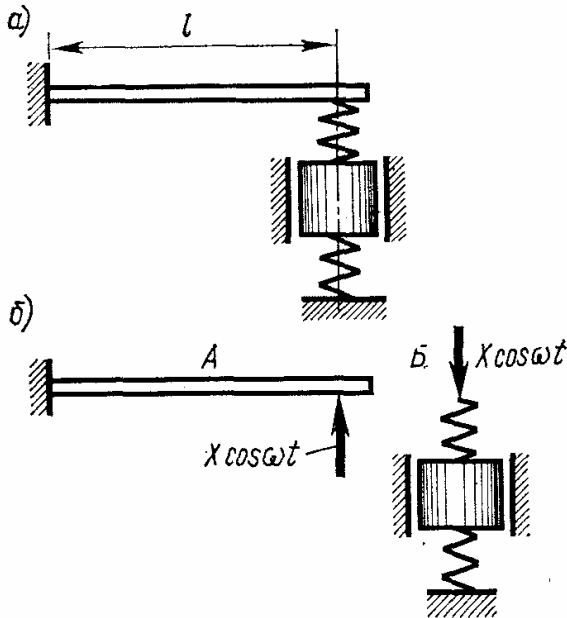


Рис. 29.1

ических податливостей (жесткостей) и методом сил (перемещений) в строительной механике. Разница состоит в том, что в строительной механике рассматриваются статические, а здесь гармонические воздействия на систему. Поэтому рассматриваемые в настоящем параграфе методы часто называют методами гармонических коэффициентов влияния.

Наиболее просто удастся использовать эти методы, если система разделяется на две подсистемы путем устранения одной связи или внесения одной дополнительной связи. Рассмотрим несложный пример. Требуется

определить собственные частоты и формы колебаний системы, состоящей из консольной балки с равномерно распределенной массой и груза  $m$ , связанного с балкой и основанием пружинами, массой которых можно пренебречь (рис. 29.1, а). Для определенности обозначим: масса единицы длины балки  $m_0$ , жесткость сечения  $EJ$ , масса груза  $m = m_0 l$ , жесткость каждой из пружин  $c = 3EJ/l^3$ .

Расчленим систему на две подсистемы: А — балку и В — груз с пружинами (рис. 29.1, б). Взаимодействие между подсистемами осуществляется вертикальной силой, изменяющейся при собственных колебаниях системы по гармоническому закону  $X \cos \omega t$ .

Условие совместности деформаций в связи с линейностью системы имеет вид

$$XD^{(1)}(\omega) + XD^{(2)}(\omega) = 0,$$

где  $D^{(1)}(\omega)$  и  $D^{(2)}(\omega)$  — динамические податливости балки и подсистемы, состоящей из груза и пружин, т. е. амплитудные перемещения точек приложения силы  $X$  при действии единичной гармонической силы.

Таким образом, частотное уравнение системы можно записать в виде

$$D^{(1)}(\omega) + D^{(2)}(\omega) = 0$$

Следовательно, частоты собственных колебаний заданной системы можно найти, если известны динамические податливости подсистем.

Рассматривая нагружение балки силой  $1 \cdot \cos \omega t$  (рис. 29.2, а) и представляя перемещения ее в виде

$$x(z, t) = u(z) \cos \omega t,$$

получаем для амплитудной функции  $u(z)$  выражение

$$\begin{aligned} u(z) = & C_1 K_1(\alpha z) + \\ & + C_2 K_2(\alpha z) + C_3 K_3(\alpha z) + \\ & + C_4 K_4(\alpha z) \quad (29.1) \\ (\alpha = & \sqrt[4]{m_0 \omega^2 / (EJ)}). \end{aligned}$$

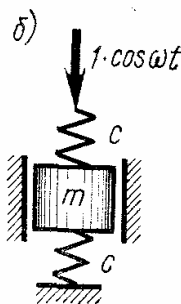
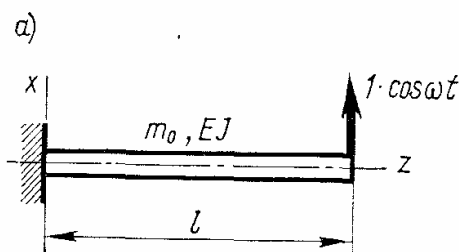


Рис. 29.2

Постоянные определяем из граничных условий:

$$z = 0: \quad u = 0; \quad du/dz = 0,$$

$$z = l: \quad d^2 u/dz^2 = 0; \quad d^3 u/dz^3 = -1/(EJ).$$

Отсюда  $C_1 = 0$ ;  $C_2 = 0$ ;

$$C_3 = [1/(\alpha^3 EJ \Delta)] K_2(\lambda); \quad C_4 = -[1/(\alpha^3 EJ \Delta)] K_1(\lambda);$$

$$\Delta = K_1^2(\lambda) - K_2(\lambda) K_4(\lambda) = 1/2 (1 + \operatorname{ch} \lambda \cos \lambda)$$

$$\left[ \lambda = \alpha l = \sqrt[4]{m_0 l^4 \omega^2 / (EJ)} \right].$$

Таким образом, амплитудные перемещения определяются выражением

$$u = [1/(\alpha^3 EJ \Delta)] [K_2(\lambda) K_3(\alpha z) - K_1(\lambda) K_4(\alpha z)].$$

Перемещение при  $z = l$  равно динамической податливости  $D^{(1)}(\omega)$ :

$$D^{(1)}(\omega) = [1/(\alpha^3 EJ \Delta)] [K_2(\lambda) K_3(\lambda) - K_1(\lambda) K_4(\lambda)].$$

После упрощений получаем

$$D^{(1)}(\omega) = \frac{l^3}{EJ} \frac{1}{\lambda^3} \frac{\operatorname{ch} \lambda \sin \lambda - \operatorname{sh} \lambda \cos \lambda}{1 + \operatorname{ch} \lambda \cos \lambda}, \quad (29.2)$$

где зависимость податливости от частоты входит только через безразмерный параметр  $\lambda$ . Теперь рассмотрим груз с пружинами (рис. 29.2, б). Для этой системы с одной степенью свободы находим амплитудное перемещение конца верхней пружины (податливость):

$$D^{(2)}(\omega) = \frac{2}{c} \frac{1 - m \omega^2 / (2c)}{1 - m \omega^2 / c}. \quad (29.3)$$

При этом амплитудное перемещение груза составляет

$$u_r = \frac{1}{c} \frac{1}{1 - m\omega^2/c}.$$

Учитывая выражения жесткости пружин и массы груза через жесткость и массу балки, указанные в условии задачи, можем выразить  $D^2(\omega)$  также через параметр  $\lambda$ :

$$D^{(2)}(\omega) = \frac{2}{3} \frac{l^3}{EJ} \frac{1 - \lambda^4/6}{1 - \lambda^4/3}.$$

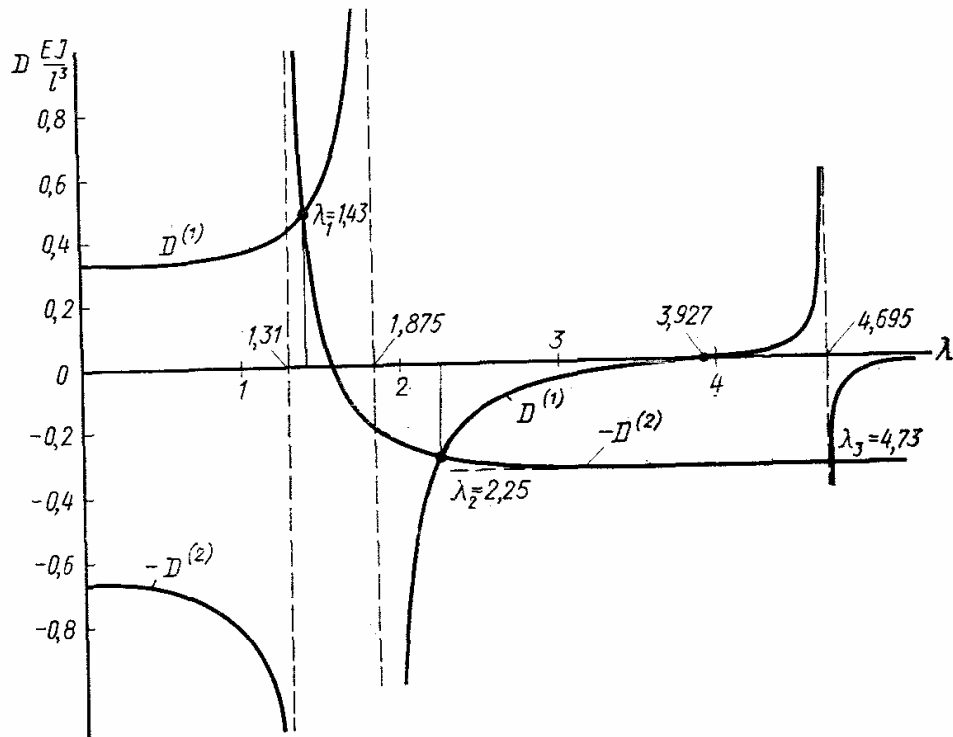


Рис. 29.3

Для определения собственных частот системы из уравнения

$$D^{(1)}(\omega) + D^{(2)}(\omega) = 0$$

используем графический метод.

В координатах  $y, \lambda$  (рис. 29.3) строятся кривые  $y = D^{(1)}(\lambda)$  и  $y = -D^{(2)}(\lambda)$ . Точки пересечения этих кривых соответствуют собственным частотам системы:

$$p_1 = \lambda_1^2 \sqrt{EJ/(m_0 l^4)} = 2,05 \sqrt{EJ/(m_0 l^4)},$$

$$p_2 = 5,07 \sqrt{EJ/(m_0 l^4)}, \quad p_3 = 22,4 \sqrt{EJ/(m_0 l^4)}.$$

Последующие корни с достаточной точностью определяются значениями

$$p_k = (k\pi/2)^2 \sqrt{EJ/(m_0 l^4)} \quad (k = 4, 5, 6, \dots).$$



Из графика рис. 29.3 видно, что движение груза  $m$  существенно только при первой и второй формах собственных колебаний. Все последующие корни частотного уравнения соответствуют значению  $D^{(2)} \approx c^{-1}$ , т. е. неподвижному грузу  $m$ .

Построение на рис. 29.3 позволяет установить границы низшей частоты колебаний системы, а именно эта частота всегда заключена между собственными частотами подсистем.

Для подсчета динамических податливостей можно использовать формулу (15.16), выражающую динамическую податливость через статическую, резонансные  $p$  и антирезонансные  $\Omega$  частоты системы:

$$D(\omega) = \delta \frac{\Pi(1 - \omega^2/\Omega_k^2)}{\Pi(1 - \omega^2/p_k^2)}.$$

Для груза с пружинами это выражение сразу приводит к точной формуле (29.3), так как здесь  $\delta = 2/c$ , имеется одна резонансная частота  $p = \sqrt{c/m}$  и одна антирезонансная, соответствующая частоте собственных колебаний системы с закрепленным верхним концом пружины  $\Omega = \sqrt{2c/m}$ .

Для балки, статическая податливость которой  $\delta = l^3/(3EJ)$ , имеется бесчисленное множество собственных частот и частот антирезонанса. Резонансные частоты — это собственные частоты консольной балки, антирезонансные — балки, заделанной на одном и опертой на другом конце. Таким образом, пользуясь результатами, полученными в § 18, находим резонансные частоты:

$$p_k = \lambda_{kp}^2 \sqrt{EJ/(m_0 l^4)}; \quad \lambda_{1p} = 1,875; \quad \lambda_{2p} = 4,695 \text{ и т. д.};$$

антирезонансные частоты:

$$\Omega_k = \lambda_{ka}^2 \sqrt{EJ/(m_0 l^4)}; \quad \lambda_{1a} = 3,927; \quad \lambda_{2a} = 7,069 \text{ и т. д.}$$

Так как значения  $p_k^2$  и  $\Omega_k^2$  быстро возрастают с номером, то для представления динамической податливости  $D^{(1)}(\omega)$  в области не слишком больших частот  $\omega$  достаточно удерживать в бесконечных произведениях лишь несколько первых сомножителей. Так, сохраняя в числителе один, а в знаменателе — два сомножителя, получаем приближенно

$$D^{(1)}(\omega) = \frac{l^3}{3EJ} \frac{1 - (\lambda/3,927)^4}{[1 - (\lambda/1,875)^4][1 - (\lambda/4,695)^4]}.$$

В пределах изменения  $\lambda$  на рис. 29.3 приближенные значения динамической податливости практически не отличаются от точных и приводят к тем же значениям трех первых собственных частот системы.

Поэтому, если целью расчета является определение только низшей или нескольких низших частот собственных колебаний системы, вполне допустимо использовать приближенные выражения динамической податливости подсистем.

В качестве второго примера рассмотрим определение частот соб-

ственных колебаний Г-образной рамы с распределенной массой (рис. 29.4, а). Расчленим систему, врезав шарнир в угловой точке\* (рис. 29.4, б), и приложим гармонический момент  $1 \cdot \cos \omega t$ . Частотное уравнение снова имеет вид

$$D^{(1)}(\omega) + D^{(2)}(\omega) = 0,$$

где  $D^{(1)}(\omega)$  и  $D^{(2)}(\omega)$  — динамические податливости, соответствующие действию каждого из единичных гармонических моментов.

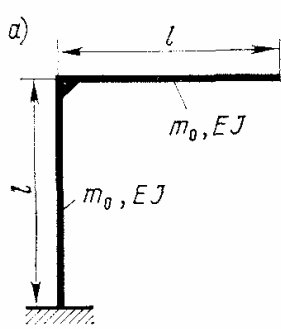


Рис. 29.4

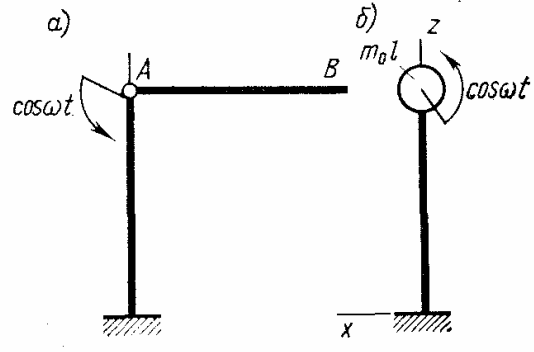
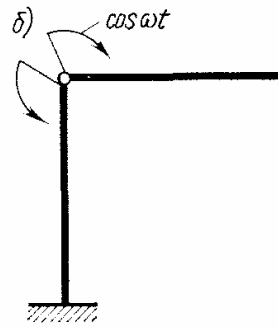


Рис. 29.5

$D^{(1)}(\omega)$  найдем, рассмотрев рис. 29.5, а. В этом случае стержень  $AB$  движется как жесткий по горизонтали. Поэтому его можно заменить сосредоточенной массой  $m_0 l$  (рис. 29.5, б). Располагая начало координат на заделанном конце стержня, имеем следующие граничные условия для амплитудной функции  $u(z)$ :

$$z = 0: \quad u = 0; \quad du/dz = 0;$$

$$z = l: \quad d^2 u/dz^2 = 1/(EJ);$$

$$EJ d^3 u/dz^3 = -m\omega^2 u \quad (m = m_0 l).$$

Из этих условий определяют постоянные, входящие в общее выражение (29.1) для амплитудной функции  $u(z)$ . Затем определяют величину динамической податливости:

$$D^{(1)}(\omega) = (du/dz)_{z=l}.$$

После несложных преобразований находим

$$D^{(1)}(\omega) = \frac{l}{EJ} \frac{1}{\lambda} \frac{K_3 K_4 - K_1 K_2 + \lambda (K_3^2 - K_2 K_4)}{K_2 K_4 - K_1^2 + \lambda (K_2 K_3 - K_1 K_4)},$$

где в выражениях функций Крылова опущен для сокращения аргумент

$$\lambda = \alpha l = \sqrt[4]{\omega^2 m_0 l^4 / (EJ)}.$$

\* Такая изменяемая система является недопустимой в статике, однако колебания изменяемых систем мы имеем полное право рассматривать (см. § 15).

Используя соотношения (18.6), можно выражение  $D^{(1)}(\omega)$  привести к виду

$$D^{(1)}(\omega) = \frac{l}{EJ} \frac{1}{\lambda} \frac{\operatorname{ch} \lambda \sin \lambda + \operatorname{sh} \lambda \cos \lambda + \lambda (\operatorname{ch} \lambda \cos \lambda - 1)}{\operatorname{ch} \lambda \cos \lambda + 1 - \lambda (\operatorname{ch} \lambda \sin \lambda - \operatorname{sh} \lambda \cos \lambda)}.$$

Для второго единичного момента схема нагружения показана на рис. 29.6, а. В этом случае вертикальный стержень не деформируется и схема нагружения равноправна с изображенной на рис. 29.6, б. Располагая начало координат на левом конце, имеем граничные условия:

при  $z = 0$   $u = 0$ ;  $d^2u/dz^2 = 1/(EJ)$ ;  
при  $z = l$   $d^2u/dz^2 = 0$ ;  $d^3u/dz^3 = 0$ .

После определения из этих уравнений постоянных  $C_1, \dots, C_4$  находим динамическую податливость:

$$D^{(2)}(\omega) = - \left( \frac{du}{dz} \right)_{z=0} =$$

$$= \frac{l}{EJ} \frac{1}{\lambda} \frac{K_1^2 - K_2 K_4}{K_1 K_4 - K_2 K_3},$$

где аргументом функций Крылова является

$$\lambda = \sqrt[4]{\omega^2 m_0 l^4 / (EJ)}.$$

Используя снова зависимости (18.6), находим

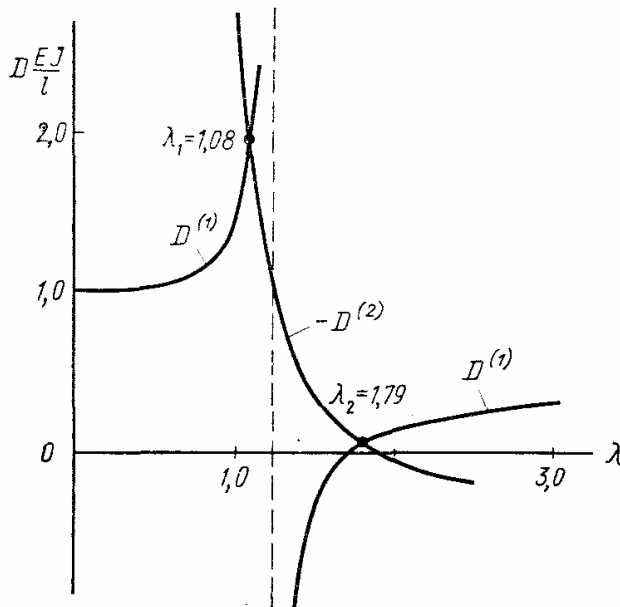


Рис. 29.7

$$D^{(2)}(\omega) =$$

$$= - \frac{l}{EJ} \frac{1}{\lambda} \frac{\operatorname{ch} \lambda \cos \lambda + 1}{\operatorname{ch} \lambda \sin \lambda - \operatorname{sh} \lambda \cos \lambda}.$$

Графическое определение двух первых корней уравнения  $D^{(1)}(\omega) + D^{(2)}(\omega) = 0$  показано на рис. 29.7.

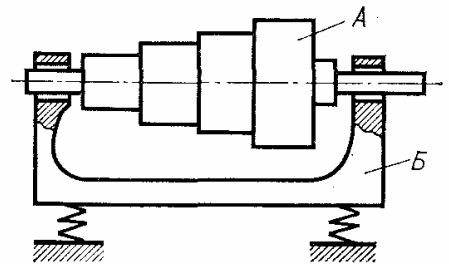


Рис. 29.8

В рассмотренных выше примерах для расчленения системы достаточно было устранить одну связь. Несколько более сложно применение метода податливостей в случае, если расчленение системы достигается устранением нескольких связей.

На рис. 29.8 схематически изображена конструкция, состоящая из ротора *A*, подшипники которого закреплены на упругом корпусе

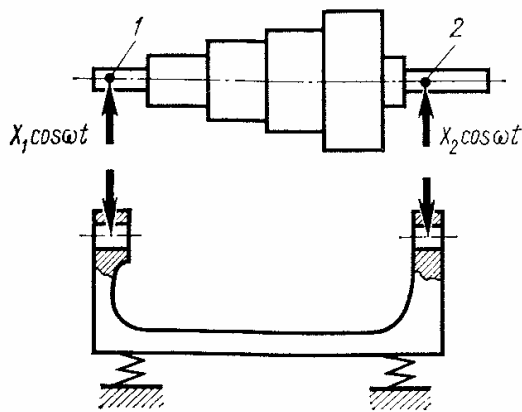


Рис. 29.9

*Б*. Корпус в свою очередь связан с основанием пружинами. Рассматривать колебания вала, считая его неподвижно закрепленным в подшипниках, можно только в том случае, если корпус очень массивный и жесткий. В противном случае необходимо учесть совместные колебания обеих деталей.

Расчленим систему и приложим гармонические силы взаимодействия (рис. 29.9). Условия равенства перемещений в точках 1, 2 могут быть записаны в таком виде:

$$X_1 D_{11}(\omega) + X_2 D_{12}(\omega) = 0,$$

$$X_1 D_{21}(\omega) + X_2 D_{22}(\omega) = 0.$$

Коэффициенты динамической податливости *D* определяем суммированием коэффициентов, относящихся к подсистемам *A* и *B*:

$$D_{ij} = D_{ij}^A + D_{ij}^B.$$

Собственные частоты системы определяем из уравнения

$$\Delta(\omega) = \begin{vmatrix} D_{11}(\omega) & D_{12}(\omega) \\ D_{21}(\omega) & D_{22}(\omega) \end{vmatrix} = 0. \quad (29.4)$$

Таким образом, для того чтобы определить частоты собственных колебаний, следует рассмотреть нагружение подсистем *A* и *B* единичными гармоническими силами, приложенными в точках 1 и 2. Значения динамических податливостей  $D_{ij}$  вычисляем при ряде значений частоты  $\omega$  и строим график зависимости  $\Delta(\omega)$ . Корни уравнения (29.4) являются собственными частотами системы.

Метод динамических податливостей чрезвычайно эффективен, если требуется подобрать те или иные элементы системы так, чтобы собственная частота последней имела заданное значение.

Пусть, например, в схеме рис. 29.8 требуется подобрать жесткости подшипников, так, чтобы частота собственных колебаний равнялась  $p_0$ . Используя значения динамических податливостей вала *A* и основания *B*, имеем для системы с податливыми опорами:

$$D_{11}(\omega) = D_{11}^A(\omega) + D_{11}^B(\omega) + 1/c_1,$$

$$D_{21}(\omega) = D_{12}(\omega) = D_{12}^A(\omega) + D_{12}^B(\omega),$$

$$D_{22}(\omega) = D_{22}^A(\omega) + D_{22}^B(\omega) + 1/c_2,$$

где  $c_1$  и  $c_2$  — жесткости левого и правого подшипников. Подставляя эти значения в уравнение частот (29.4) и полагая  $\omega = p_0$ , получаем простое уравнение, позволяющее подобрать  $c_1$  и  $c_2$ .

Примеры такого рода расчетов приведены в [20].

Метод динамической податливости может быть использован также и для расчета вынужденных колебаний системы под действием гармонических сил. Пусть, например, на вал системы, изображенной на рис. 29.8, действует нагрузка, пропорциональная  $\cos \omega t$ . Тогда кроме определения динамических податливостей  $D_{11}(\omega)$ ,  $D_{12}(\omega)$ ,  $D_{22}(\omega)$  необходимо определить амплитудные смещения  $D_{1P}$ ,  $D_{2P}$  по направлениям  $X_1$ ,  $X_2$  при воздействии возмущающих сил на изолированный вал. Система уравнений, определяющая амплитудные значения реакций  $X_1$ ,  $X_2$ , получит вид

$$X_1 D_{11}(\omega) + X_2 D_{12}(\omega) + D_{1P} = 0,$$

$$X_1 D_{21}(\omega) + X_2 D_{22}(\omega) + D_{2P} = 0.$$

Определив отсюда  $X_1$  и  $X_2$ , нетрудно затем получить полную картину движения подсистем А и Б. Рассматривая в качестве нагрузки единичную гармоническую силу  $1 \cdot \cos \omega t$ , можно определить динамическую податливость сложной системы.

Последовательное применение этого приема позволяет изучить динамические свойства системы, состоящей из большого числа подсистем. Если разделение системы на подсистемы достигается устранением одной связи, то методы динамических жесткостей и податливостей совпадают. Рассмотрим, например, двухпролетную балку (рис. 29.10).

Дав сечению балки на средней опоре угловое перемещение  $\varphi = X \cos \omega t$ , найдем амплитудные моменты в сечениях левой и правой балок над этой опорой:

$$M_A = X R_{11}^A(\omega), \quad M_B = X R_{11}^B(\omega),$$

где  $R_{11}^A(\omega)$  и  $R_{11}^B(\omega)$  — динамические жесткости балок.

Суммарный момент фиктивной опоры

$$M_A + M_B = X [R_{11}^A(\omega) + R_{11}^B(\omega)] = 0.$$

Частотное уравнение имеет вид

$$R_{11}^A(\omega) + R_{11}^B(\omega) = 0.$$

Так как

$$R_{11}^A(\omega) = 1/D_{11}^A(\omega), \quad R_{11}^B(\omega) = 1/D_{11}^B(\omega),$$

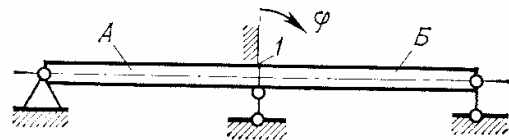


Рис. 29.10

то вычисления не отличаются от вычислений при решении этой задачи по методу динамических податливостей.

При расчете вынужденных колебаний той же системы, вызываемых нагрузкой, пропорциональной  $\cos \omega t$ , придется кроме определения динамических жесткостей  $R_{11}^A$ ,  $R_{11}^B$  рассмотреть вынужденные колебания левой и правой балок с заделанным сечением  $I$  и определить амплитудные реактивные моменты  $R_{1P}^A$ ,  $R_{1P}^B$  в этом сечении (положительное их направление совпадает с направлением отсчета  $\varphi$ ).

Уравнение, определяющее амплитуды  $X$  угла поворота в сечении  $I$ , имеет вид

$$X(R_{11}^A + R_{11}^B) + R_{1P}^A + R_{1P}^B = 0.$$

Вслед за определением  $X$  находим перемещения и внутренние силовые факторы в системах  $A$  и  $B$ . При этом поворот сечения  $I$  рассматриваем как кинематическое возмущение. (Заметим, что соответствующая задача уже была решена при определении жесткостей  $R_{11}^A$  и  $R_{11}^B$ .)

Метод динамических жесткостей можно успешно использовать для расчета разветвленных систем. В качестве примера рассмотрим раму, представленную на рис. 29.11. Основная система отличается от заданной введением дополнительной угловой связи в узле. Уравнение, определяющее амплитудный угол поворота  $X$  в узле, имеет вид

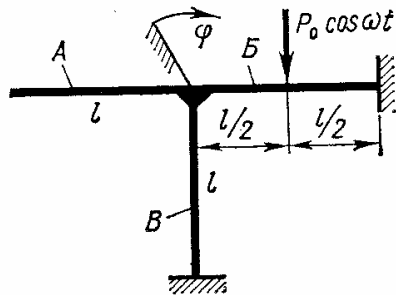


Рис. 29.11

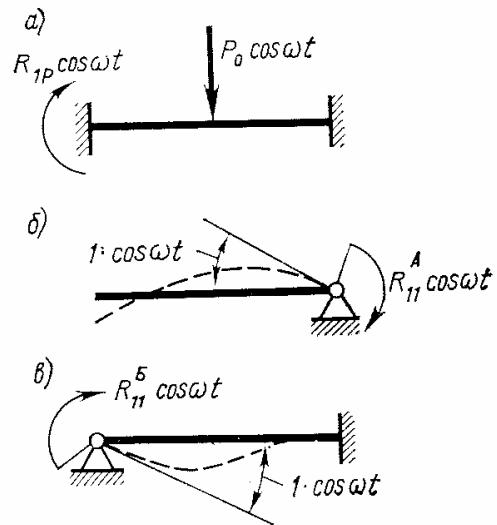


Рис. 29.12

$$X(R_{11}^A + R_{11}^B + R_{11}^B) + R_{1P} = 0. \quad (29.5)$$

Чтобы найти  $R_{1P}$ , следует рассмотреть балку  $B$  (рис. 29.12, а). Решение этой задачи дает

$$R_{1P} = -P_0 l \frac{\operatorname{ch}(\lambda/2) - \cos(\lambda/2)}{2\lambda [\operatorname{ch}(\lambda/2) \sin(\lambda/2) + \operatorname{sh}(\lambda/2) \cos(\lambda/2)]}$$

$$\left[ \lambda = \sqrt[4]{m_0 l^4 \omega^2 / (EJ)} \right].$$

Для стержня  $A$  задача определения  $R_{11}^A$  сводится к нахождению

гармонического момента, необходимого для получения единичного угла поворота (рис. 29.12, б). Выше (см. с. 231) решалась обратная задача. Используя полученное там решение, находим

$$R_{11}^A = \frac{1}{D_{11}^A} = -\frac{EJ}{l} \lambda \frac{\operatorname{ch} \lambda \sin \lambda - \operatorname{sh} \lambda \cos \lambda}{\operatorname{ch} \lambda \cos \lambda + 1}.$$

Для определения жесткости  $R_{11}^B$  следует рассмотреть задачу (рис. 29.12, в), что приводит к выражению

$$R_{11}^B = \frac{4EJ}{l} \frac{\lambda}{4} \frac{\operatorname{ch} \lambda \sin \lambda - \operatorname{sh} \lambda \cos \lambda}{1 - \operatorname{ch} \lambda \cos \lambda}.$$

Очевидно, что  $R_{11}^B = R_{11}^A$ .

При известной частоте изменения силы  $\omega$ ,  $R_{11}$  и  $R_{1P}$  — известные величины и определение амплитудного угла поворота  $X$  из уравнения (29.5) не вызывает затруднений.

Для определения собственных частот системы нужно положить  $P = 0$  и найти частоты, при которых удовлетворяется уравнение

$$R_{11}^A + R_{11}^B + R_{11}^P = 0. \quad (29.6)$$

Заметим, что если уравнение (29.6) решать в виде

$$R_{11}^A = -2R_{11}^B,$$

то оказываются утраченными корни уравнения (29.6), соответствующие  $R_{11}^B = \pm\infty$ ;  $R_{11}^A = \mp\infty$ . При этих значениях стержень  $A$  не участвует в движении, а стержни  $B$  и  $B$  колеблются в противофазах (рис. 29.13). Частоты этих видов собственных колебаний системы совпадают с собственными частотами балки с заделанными концами.

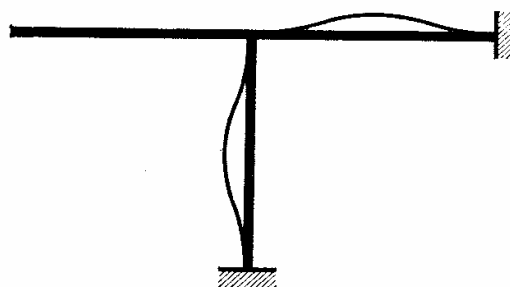


Рис. 29.13

### § 30. МЕТОД НАЧАЛЬНЫХ ПАРАМЕТРОВ

**Общие положения.** Метод начальных параметров представляет собой алгоритм, позволяющий при данной частоте колебаний по известным значениям перемещений и внутренних сил в начале участка определять значения тех же переменных в конце участка. Переходя таким образом от участка к участку, можно дойти до границы рассматриваемой системы, где перемещения или силы связаны условиями закрепления.

Метод этот для линейных систем является универсальным; он применяется для расчета колебаний стержней, состоящих из ряда участков с различными жесткостью, массой, сосредоточенными грузами, и т. п. Метод может быть использован также для расчета колебаний

пластин и оболочек, если соответствующие задачи удастся описать обыкновенными дифференциальными уравнениями.

Для того чтобы применение метода начальных параметров давало существенную выгоду, расчет следует проводить полностью в числовой форме. Проведение вычислений существенно упрощается при при-

менении матричной символики (матрицы перехода).

В настоящем параграфе сущность метода излагается сначала на примере простейшей задачи о крутильных колебаниях вала с дисками (метод Толле). Затем дается матричная формулировка метода начальных параметров и рассматривается его применение к расчету колебаний изгиба прямолинейных стержней. Дальнейшие подробности содержатся в [3, 23, 25].

**Расчет крутильных и продольных колебаний цепных систем с сосредоточенными**

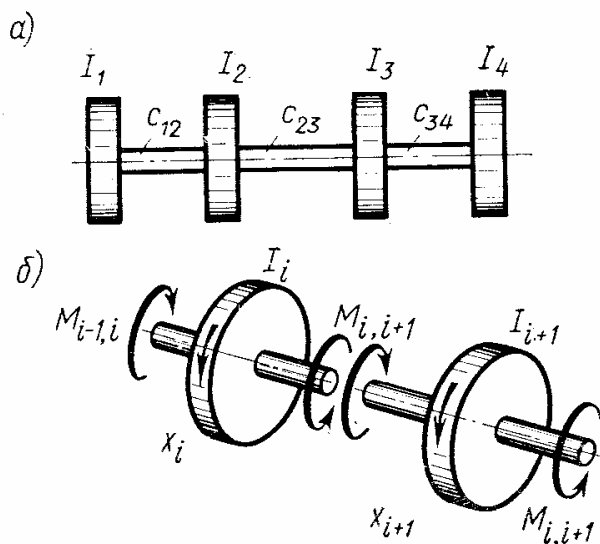


Рис. 30.1

**параметрами.** Рассмотрим свободные крутильные колебания вала с рядом дисков (рис. 30.1, а), причем собственную массу вала учитывать не будем\*. Движение  $i$ -го диска, момент инерции которого  $I_i$ , определяется уравнением

$$x_i = u_i \cos pt,$$

где  $p$  — частота собственных колебаний.

Момент сил инерции этого диска

$$-I_i \ddot{x}_i = p^2 I_i x_i$$

направлен в сторону положительных углов  $x$ .

Амплитудное значение этого момента равно  $p^2 I_i u_i$ . Поэтому (рис. 30.1, б) амплитудные крутящие моменты в сечениях до и после  $i$ -го диска связаны соотношением

$$M_{i,i+1} = M_{i-1,i} - p^2 I_i u_i. \quad (30.1)$$

С другой стороны, амплитудные углы поворота двух соседних дисков различаются на величину угла закручивания участка между ними

$$u_{i+1} = u_i + M_{i,i+1}/c_{i,i+1}, \quad (30.2)$$

где  $c_{i,i+1}$  — крутильная жесткость участка вала  $c_{i,i+1} = (GJ_p/l)_{i,i+1}$ .

\* В виде валов с рядом дисков обычно схематизируются коленчатые валы двигателей. В применении к таким валам метод начальных параметров называют методом Толле.



Задаваясь углом поворота первого диска, например  $u_1 = 1$ , и учитывая, что левее первого диска крутящий момент отсутствует ( $M_{0,1} = 0$ ), можно, последовательно применяя формулы (30.1) и (30.2) к каждому диску, дойти до крайнего правого  $n$ -го диска и вычислить крутящий момент за ним  $M_{n,n+1}$  в функции частоты  $p$ . Так как этот момент в действительности равен нулю, то таким образом мы получим уравнение частот.

Однако такой путь является довольно сложным и приводит к уравнению  $n$ -й степени относительно  $p^2$ , решение которого также затруднительно. Значительно удобнее решать подбором непосредственно систему уравнений (30.1), (30.2). Задаваясь числовым значением  $p^2$  и  $u_1 = 1$  и переходя по формулам (30.1) и (30.2) от диска к диску, вычисляют  $M_{n,n+1}$ . Повторяя такой расчет при нескольких значениях  $p^2$ , строят график зависимости момента  $M_{n,n+1}$  от  $p^2$ . Точки пересечения этого графика с осью абсцисс определяют собственные частоты системы. Для такого расчета разработаны удобные таблицы (таблицы Толле).

Заметим, что после определения собственной частоты легко определяется и соответствующая форма собственных колебаний, т. е. величины  $u_i$ ,  $M_{i,i+1}$  во всех характерных сечениях системы.

Метод начальных параметров можно использовать и для расчета вынужденных колебаний системы под действием гармонических моментов. Пусть на диски действуют синфазные возмущающие моменты  $\mu_i \cos \omega t$ . Тогда, представив перемещения в виде

$$x_i = u_i \cos \omega t,$$

получим связь между амплитудными крутящими моментами до и после  $i$ -го диска:

$$M_{i,i+1} = M_{i-1,i} - \omega^2 I_i u_i - \mu_i. \quad (30.3)$$

Уравнение (30.2) справедливо, конечно, и в этом случае.

В отличие от задачи расчета собственных колебаний при расчете вынужденных колебаний частота  $\omega$  известна и искомой является форма колебаний. Таким образом, если левый конец вала свободен, следует выбрать такое значение  $u_1$ , чтобы удовлетворялось граничное условие, на правом конце. Так как уравнения линейны относительно амплитуд, здесь нет необходимости пользоваться методом подбора. Чаще всего применяют так называемый метод двух расчетов. Метод состоит в том, что сначала задают произвольно амплитуду колебаний первого диска (например, можно принять  $u_1^* = 0$ ), после чего осуществляют переход от сечения к сечению по формулам (30.2) и (30.3) и находят значения  $u^*$  и  $M^*$  на правом конце вала. Таким образом получают частное решение неоднородной системы уравнений, соответствующее действию возмущающих моментов  $\mu_i$ . Это решение не удовлетворяет граничному условию на правом конце вала.

Затем конструируют решение однородной системы уравнений. Для этого задают отличное от нуля значение амплитуды первого диска (например,  $u_1 = 1$ ) и осуществляют переход от сечения к сечению по формулам (30.1) и (30.2), полагая в них  $p = \omega$ . В результате

расчета получают значения  $u^{**}$  и  $M^{**}$  на правом конце вала. Общее решение состоит из частного решения неоднородной задачи и общего решения однородной:

$$u_i = u_i^* + Cu_i^{**},$$

$$M_{i, i+1} = M_{i, i+1}^* + CM_{i, i+1}^{**}.$$

Постоянную  $C$  определяют так, чтобы решение удовлетворяло граничному условию на правом конце системы. Так, если этот конец свободен, то

$$C = -M^*/M^{**}.$$

В случае заделки

$$C = -u^*/u^{**}.$$

Если возмущающие моменты, действующие на диски, имеют разные фазы, то их всегда можно представить в виде

$$\mu_i \cos(\omega t + \varphi_i) = \mu_i^C \cos \omega t + \mu_i^S \sin \omega t,$$

где  $\mu_i^C = \mu_i \cos \varphi_i$ ,  $\mu_i^S = -\mu_i \sin \varphi_i$ .

Затем по приведенной выше схеме отдельно решается задача о действии моментов  $\mu^C$  и о действии моментов  $\mu^S$ . Таким образом, в этом

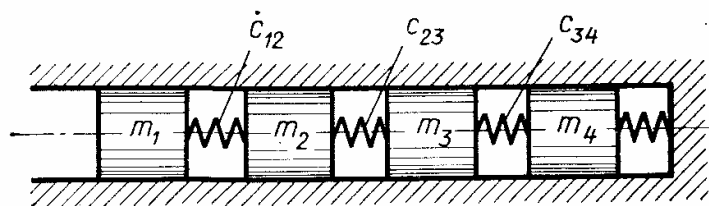


Рис. 30.2

случае придется выполнить всего три расчета: расчеты неоднородной задачи при возмущающих моментах  $\mu^C$  и  $\mu^S$  и один расчет однородной задачи.

Ввиду полного тождества уравнений крутильных и продольных колебаний метод начальных параметров в рассмотренной форме может быть применен и к цепным системам типа показанной на рис. 30.2. При этом угловые смещения заменяются линейными, моменты — силами и моменты инерции — массами.

**Матрицы перехода.** Формулы перехода от сечения к сечению, характерные для метода начальных параметров, можно представить в матричной форме. Амплитудные значения перемещений и внутренних сил в каком-либо сечении ( $i$ ) системы можно характеризовать матрицей-столбцом (или вектором)  $X_i$ . В рассмотренном выше случае крутильных колебаний вектор  $X_i$  (вектор состояния) — двумерный:

$$X_i = \begin{pmatrix} u_i \\ M_i \end{pmatrix}.$$

Значение этого вектора для сечения,  $+$  расположенного левее  $i$ -го диска, будем называть  $X_i^-$ , правее —  $X_i^+$ :

$$X_i^- = \begin{pmatrix} u_i \\ M_{i-1, i} \end{pmatrix}; \quad X_i^+ = \begin{pmatrix} u_i \\ M_{i, i+1} \end{pmatrix}.$$

Тогда формулы (30.1) и (30.2) можно трактовать как формулы матричного умножения:

$$X_i^+ = M_i X_i^-; \quad X_{i+1}^- = M_{i, i+1} X_i^+,$$

где

$$M_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -p^2 I_i & 1 \end{pmatrix}; \quad M_{i, i+1} = \begin{pmatrix} 1 & c_{i, i+1}^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

— квадратные матрицы.

Следовательно, переход от сечения к сечению осуществляется путем умножения вектора состояния  $X$  на матрицу перехода  $M$ . Весь переход от крайнего левого к крайнему правому сечению вала можно представить в виде

$$X_n^+ = M(p^2) X_1^-, \quad (30.4)$$

где  $M(p^2) = M_n M_{n-1, n} M_{n-1} \dots M_{12} M_1$  — матрица перехода, являющаяся произведением всех промежуточных матриц.

Заметим, что при заданном значении частоты  $p$  все матрицы являются числовыми и их вычисление не представляет труда.

Если левый конец вала свободен, то вектор  $X_1^-$  известен с точностью до множителя. Можно принять, что

$$X_1^- = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(Это значит, что мы принимаем  $u_1 = 1$ ,  $M_1 = 0$ .)

Если и правый конец свободен, то вектор  $X_n^+$  должен иметь вид

$$X_n^+ = \begin{pmatrix} u_n \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (30.5)$$

Следовательно, определение собственной частоты сводится к подыскиванию величины  $p^2$ , при которой матрица  $M(p^2)$  осуществляет преобразование заданного вектора  $X_1^-$  (30.4) к вектору  $X_n^+$  [см. формулу (30.5)], один из компонентов которого известен. Практически эта задача решается подбором.

Конечно, для рассмотренной простой задачи матричная запись алгоритма метода начальных параметров ничуть не проще, чем запись в форме уравнений (30.1) и (30.2). Однако матричная форма имеет более общий характер, а ее вид сохраняется для различных по своей структуре систем.

Рассмотрим, например, крутильные колебания стержня ступенчатого переменного сечения с распределенной массой. Для одного участка постоянного сечения длиной  $l$  амплитудная функция выражается формулой (см. с. 144)

$$u = C_1 \cos \alpha z + C_2 \sin \alpha z \quad (\alpha = \sqrt{p^2 \theta_0 / (GJ_p)}).$$

Амплитудный крутящий момент в сечении

$$M = GJ_p (du/dz) = GJ_p \alpha (-C_1 \sin \alpha z + C_2 \cos \alpha z).$$

Если известны значения  $u_1$  и  $M_1$  в сечении 1 ( $z = 0$ ), то можно найти  $C_1 = u_1$ ,  $C_2 = M_1/(\alpha GJ_p)$ , а затем  $u$  и  $M$  в сечении 2 ( $z = l$ ):

$$u_2 = u_1 \cos \lambda + M_1 \frac{l}{GJ_p} \frac{1}{\lambda} \sin \lambda,$$

$$M_2 = -u_1 \frac{GJ_p}{l} \lambda \sin \lambda + M_1 \cos \lambda,$$

$$\left( \lambda = \alpha l = \sqrt{\frac{p^2 \theta_0 l^2}{GJ_p}} \right).$$

Таким образом, и в этом случае вектор  $X_2 = \begin{pmatrix} u_2 \\ M_2 \end{pmatrix}$  для сечения 2 получается линейным преобразованием такого же вектора для сечения 1:

$$X_2 = M_{12} X_1,$$

$$M_{12} = \begin{pmatrix} \cos \lambda & \frac{l}{GJ_p} \frac{1}{\lambda} \sin \lambda \\ -\frac{GJ_p}{l} \lambda \sin \lambda & \cos \lambda \end{pmatrix}. \quad (30.6)$$

При переходе через сечение, в котором закреплен диск с моментом инерции  $I_i$ , изменяется лишь величина крутящего момента на  $-p^2 I_i u_i$ , что учитывается умножением вектора состояния на матрицу:

$$M_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -p^2 I_i & 1 \end{pmatrix}.$$

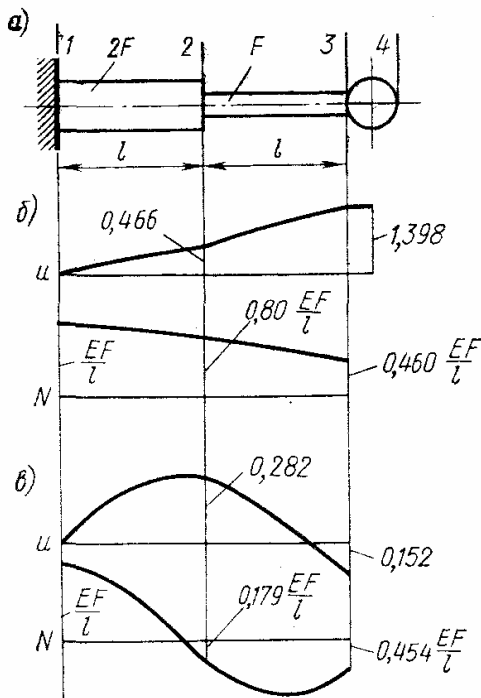


Рис. 30.3

Метод, изложенный выше на примере крутильных колебаний, полностью применим и для продольных колебаний. В качестве простого примера рассмотрим расчет частот и форм собственных продольных колебаний ступенчатого стержня (рис. 30.3, а) с грузом на конце, причем масса груза равна массе прилегающего участка стержня:

$$m = \rho Fl.$$

Введем характерные сечения стержня 1, 2, 3, 4, в которых будем вычислять вектор состояния

$$X = \begin{pmatrix} u \\ N \end{pmatrix},$$

где  $u$  — амплитудное смещение;  $N$  — амплитудная нормальная сила.

В сечении 1  $u = 0$ , а для  $N$  можно принять любое значение. Примем  $N_1 = EF/l$  (тогда перемещения будут безразмерными).

Итак,

$$X_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ EF/l \end{pmatrix}. \quad (30.7)$$

В сечениях 2, 3 и 4 будем иметь:

$$X_2 = M_{12}X_1; \quad X_3 = M_{23}X_2; \quad X_4 = M_3X_3, \quad (30.8)$$

где [см. формулу (30.6)]

$$M_{12} = \begin{pmatrix} \cos \lambda & \frac{l}{2EF} \frac{1}{\lambda} \sin \lambda \\ -\frac{2EF}{l} \lambda \sin \lambda & \cos \lambda \end{pmatrix};$$

$$M_{23} = \begin{pmatrix} \cos \lambda & \frac{1}{EF} \frac{1}{\lambda} \sin \lambda \\ -\frac{EF}{l} \lambda \sin \lambda & \cos \lambda \end{pmatrix};$$

$$M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -p^2 m & 1 \end{pmatrix}; \quad \lambda = pl/a; \quad a = \sqrt{E/\rho}.$$

Так как сечение 4 взято за массой, нормальная сила в нем должна быть равна нулю:

$$X_4 = \begin{pmatrix} u_4 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (30.9)$$

Следовательно, собственная частота  $p$  должна быть определена так, чтобы вектор  $X_4$ , вычисляемый по формулам (30.8), имел вид (30.9).

Ведем расчет подбором.

При  $p = 0$   $\lambda = 0$ ;

$$M_{12}(0) = \begin{pmatrix} 1 & l/(2EF) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad M_{23} = \begin{pmatrix} 1 & l/(EF) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Получаем:

$$X_2 = M_{12}X_1 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ EF/l \end{pmatrix}; \quad X_3 = M_{23}X_2 = \begin{pmatrix} 3/2 \\ EF/l \end{pmatrix}; \quad X_4 = X_3.$$

Таким образом,  $N_4(0) = EF/l$ .

Задаем  $p^2 = EF/(ml) = 2/3 E/(\rho l)^2$  (это значение соответствует частоте колебаний массы  $m$  на невесомом стержне);  $p = 0,816 a/l$ ,  $\lambda = 0,816$ ,  $\cos \lambda = 0,685$ ,  $\sin \lambda = 0,728$ ;

$$M_{12} = \begin{pmatrix} 0,685 & 0,445 \frac{l}{EF} \\ -1,19 \frac{EF}{l} & 0,685 \end{pmatrix}, \quad M_{23} = \begin{pmatrix} 0,685 & \frac{l}{EF} 0,890 \\ -0,595 \frac{EF}{l} & 0,685 \end{pmatrix};$$

$$M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2}{3} & \frac{EF}{l} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$X_2 = \begin{pmatrix} 0,685 & 0,445l/(EF) \\ -1,19EF/l & 0,685 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ EF/l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,445 \\ 0,685EF/l \end{pmatrix};$$

$$X_3 = M_{23}X_2 = \begin{pmatrix} 0,915 \\ 0,205EF/l \end{pmatrix}; \quad X_4 = M_3X_3 = \begin{pmatrix} 0,915 \\ -0,405EF/l \end{pmatrix}.$$

Итак,

$$N_4(0,816) = -0,405EF/l.$$

Так как между  $p=0$  и  $p=0,816$   $a/l$  усилие  $N_4$  меняет знак, то собственная частота лежит между этими значениями.

Для следующего расчета принимаем:  $p=0,6a/l$ ,  $\lambda=0,6$ ,  $\cos \lambda=0,825$ ,  $\sin \lambda=0,565$ ,  $mp^2=0,36EF/l$ ,

$$M_{12} = \begin{pmatrix} 0,825 & 0,470l/EF \\ -0,677EF/l & 0,825 \end{pmatrix}, \quad M_{23} = \begin{pmatrix} 0,825 & 0,940l/(EF) \\ -0,339EF/l & 0,825 \end{pmatrix},$$

$$M_3 = \mathbf{I} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -0,36EF/l & 1 \end{pmatrix}.$$

Действуя так же, как и выше, получаем

$$X_4 = (0,100EF/l).$$

Отсюда следует, что собственная частота лежит между

$$p=0,6 \frac{a}{l} \left( N_4 = 0,1 \frac{EF}{l} \right) \text{ и } p=0,816 \frac{a}{l} \left( N_4 = -0,405 \frac{EF}{l} \right).$$

Для ориентировочного подсчета можно использовать формулу линейной интерполяции

$$p = \frac{p_1 N(p_2) - p_2 N(p_1)}{N(p_2) - N(p_1)} = \frac{0,816 \cdot 0,100 - 0,6(-0,405)}{0,100 - (-0,405)} \frac{a}{l} = 0,643 \frac{a}{l}.$$

Повторяя расчет при этом значении  $p$ , находим:

$$X_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{EF}{l} \end{pmatrix}; \quad X_2 = \begin{pmatrix} 0,466 \\ 0,80 \frac{EF}{l} \end{pmatrix}; \quad X_3 = \begin{pmatrix} 1,398 \\ 0,460 \frac{EF}{l} \end{pmatrix};$$

$$X_4 = \begin{pmatrix} 1,398 \\ -0,003 \frac{EF}{l} \end{pmatrix}.$$

Ошибка достаточно мала ( $N_4$  близко к нулю), и первая частота собственных колебаний системы равна  $0,643$   $a/l$ . При этом найденные значения векторов  $X$  позволяют построить форму колебаний и соответствующую ей эпюру нормальных сил (см. рис. 30.3,б).

Чтобы найти более высокие собственные частоты, следует продолжить счет при больших значениях  $p$ . Давая значения  $p = 1,57$   $a/l$  и  $p = 2a/l$ , находим соответствующие значения усилия в сечении 4:

$$N_4(1,57) = -0,50EF/l, \quad N_4(2) = 0,90EF/l.$$

Следовательно, собственная частота лежит между этими значениями. По формуле линейной интерполяции находим

$$p = \frac{1,57 \cdot 0,90 - 2(-0,50)}{0,90 - (-0,50)} \frac{a}{l} = 1,72 \frac{a}{l}.$$

При этом значении  $p$  вычисляем  $N_4(1,72) = -0,096 EF/l$ . Снова, применяя линейную интерполяцию, находим

$$p = \frac{1,57(-0,096) - 1,72(-0,50)}{-0,096 - (-0,50)} \frac{a}{l} = 1,75 \frac{a}{l}.$$

Векторы  $X$  при этом значении  $p$  составляют:

$$X_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{EF}{l} \end{pmatrix}; \quad X_2 = \begin{pmatrix} 0,282 \\ -0,179 \frac{EF}{l} \end{pmatrix}; \quad X_3 = \begin{pmatrix} -0,152 \\ -0,454 \frac{EF}{l} \end{pmatrix};$$

$$X_4 = \begin{pmatrix} -0,152 \\ 0,005 \frac{EF}{l} \end{pmatrix}.$$

Так как остаточная сила за грузом равна нулю (в пределах точности вычисления), можно считать, что  $p_2 = 1,75 a/l = 1,75 \sqrt{E/(\rho l^2)}$  представляет собой вторую частоту собственных колебаний системы. На рис. 30.4 представлен общий характер зависимости остаточной силы от частоты, который показывает, что система не имеет собственных частот между  $p_1 = 0,643 a/l$  и  $p_2 = 1,75 a/l$ . Форма колебаний, соответствующая второй собственной частоте, показана на рис. 30.3,в.

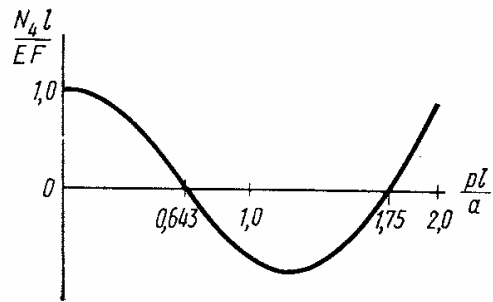


Рис. 30.4

Таким же способом выполняется расчет высших частот и форм собственных колебаний. Разумеется, для рассмотренного простого примера (два участка) метод начальных параметров не обладает заметными преимуществами по сравнению с методом непосредственного решения задачи путем составления уравнений движения по участкам и их стыковки. Однако при большем числе участков выгода весьма велика.

При изгибных колебаниях, так же как и при продольных или крутильных колебаниях, параметры, характеризующие состояние сечения стержня в конце участка, выражаются по линейным формулам через параметры сечения в начале участка. Поэтому и здесь можно использовать метод начальных параметров. Дело, однако, усложняется тем, что при поперечных колебаниях прямых стержней положение поперечного сечения и внутренние силовые факторы в нем характеризуются не двумя, а четырьмя величинами — прогибом, углом поворота, изгибающим моментом и поперечной силой. Поэтому в данном случае амплитудные значения этих величин составляют четырехмерный вектор

$$X = \begin{pmatrix} u \\ \varphi \\ M \\ Q \end{pmatrix}.$$

Формула перехода от вектора  $X_1$  в левом сечении участка к вектору  $X_2$  в правом сечении имеет вид

$$X_2 = M_{12} X_1, \quad (30.10)$$

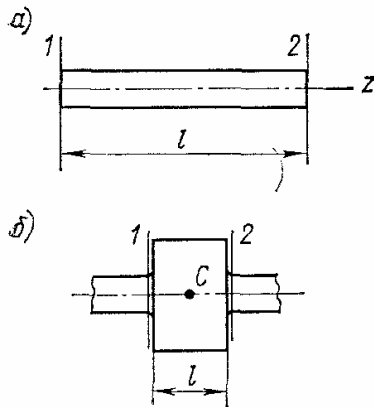


Рис. 30.5

где  $M_{12}$  — матрица перехода  $4 \times 4$ .

Для участка стержня длиной  $l$  постоянного сечения с распределенной массой (рис. 30.5, а) матрицу перехода легко сконструировать, используя функции Крылова. Общее выражение для амплитудного прогиба в любом сечении дается формулой (18.5), причем постоянные  $C_1, \dots, C_4$  выражаются через значения  $u, \varphi, M, Q$  при  $z = 0$  по формулам (18.8). Таким образом,

$$u(z) = u(0) K_1(\alpha z) + \frac{1}{\alpha} \varphi(0) K_2(\alpha z) + \\ + \frac{M(0)}{\alpha^2 EJ} K_3(\alpha z) + \frac{Q(0)}{\alpha^3 EJ} K_4(\alpha z). \quad (30.11)$$

Приняв здесь  $z = l$ , получим выражение  $u$  на правом конце стержня через начальные параметры. Вычисляя  $\varphi(l) = (du/dz)_{z=l}$ ,  $M(l) = EJ (d^2u/dz^2)_{z=l}$ ,  $Q(l) = EJ (d^3u/dz^3)_{z=l}$ , можно найти и выражения этих величин через начальные параметры. [При дифференцировании следует воспользоваться соотношениями (18.7).]

Таким образом, определяются все элементы матрицы перехода  $M_{12}$ :

$$M_{12} = \begin{pmatrix} K_1(\lambda) & \frac{l}{\lambda} K_2(\lambda) & \frac{l^2}{EJ\lambda^2} K_3(\lambda) & \frac{l^3}{EJ\lambda^3} K_4(\lambda) \\ \frac{\lambda}{l} K_4(\lambda) & K_1(\lambda) & \frac{l}{EJ\lambda} K_2(\lambda) & \frac{l^2}{EJ\lambda^2} K_3(\lambda) \\ \frac{EJ}{l^2} \lambda^2 K_3(\lambda) & \frac{EJ}{l} \lambda K_4(\lambda) & K_1(\lambda) & \frac{l}{\lambda} K_2(\lambda) \\ \frac{EJ\lambda^3}{l^3} K_2(\lambda) & \frac{EJ}{l^2} \lambda^2 K_3(\lambda) & \frac{\lambda}{l} K_4(\lambda) & K_1(\lambda) \end{pmatrix}. \quad (30.12)$$

$(\lambda = \alpha l)$

Если на участке 1—2 длиной  $l$  распределенной массой  $m_0$  стержня можно пренебречь, то для этого участка матрицу перехода можно получить либо из матрицы (30.12) предельным переходом при  $\lambda \rightarrow 0$ , либо непосредственно, рассматривая уравнение упругой линии безмассового стержня. В этом случае



$$M_{12} = \begin{pmatrix} 1 & l & l^2/(2EJ) & l^3/(6EJ) \\ 0 & 1 & l/(EJ) & l^2/(2EJ) \\ 0 & 0 & 1 & l \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (30.13)$$

Наконец, если участок представляет собой жесткий груз массой  $m$  с центром тяжести  $C$  на оси стержня и моментом инерции  $I$  относительно центральной оси, перпендикулярной плоскости чертежа (рис. 30.5, б), то

$$u_2 = u_1 + \varphi_1 l,$$

$$\varphi_2 = \varphi_1,$$

$$M_2 = M_1 + Q_1 l + mp^2(u_1 + \varphi_1 l/2) l/2 - Ip^2 \varphi_1,$$

$$Q_2 = Q_1 + mp^2(u_1 + \varphi_1 l/2).$$

Следовательно, в этом случае

$$M_{12} = \begin{pmatrix} 1 & l & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ mp^2 l/2 - p^2(I - ml^2/4) & 1 & l \\ mp^2 & mp^2 l/2 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (30.14)$$

Если груз точечный ( $l = 0$ ,  $I = 0$ ), то

$$M_{12} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ mp^2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (30.15)$$

Таким образом, имеются формулы перехода для типовых участков вала. Остается рассмотреть вопрос о граничных условиях.

Рассмотрим сначала свободные колебания. Как бы ни был закреплён левый конец стержня, на нем имеются два однородных граничных условия. Так, например, если конец заделан, то  $u(0) = 0$ ,  $\varphi(0) = 0$  и вектор состояния задан с точностью до двух констант:

$$X_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ M(0) \\ Q(0) \end{pmatrix}.$$

Чтобы исключить из числового расчета неизвестные  $M(0)$ ,  $Q(0)$ , вектор  $X_1$  представляют в форме

$$X_1 = C_1 X_1^* + C_2 X_1^{**}, \quad (30.16)$$

где  $X^*$  и  $X^{**}$  — произвольные линейно независимые векторы, удовлетворяющие граничным условиям. Например, при заделанном конце  $z = 0$  можно принять:

$$X_1^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X_1^{**} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда  $C_1 = M(0)$ ;  $C_2 = Q(0)$ .

Далее проводим два расчета, умножая векторы  $X_1^*$  и  $X_1^{**}$  на все матрицы перехода. Таким образом, получаем два вектора для крайнего правого ( $n$ -го) сечения стержня:

$$X_n^* = M_{1-n} X_1^*, \quad X_n^{**} = M_{1-n} X_1^{**},$$

где  $M_{1-n}$  — произведение матриц перехода для всех промежуточных участков.

(Заметим, что фактически выполнять перемножение матриц не следует. Значительно экономичнее по количеству арифметических операций вычислять векторы  $X_n^*$  и  $X_n^{**}$  путем последовательного умножения векторов  $X_1^*$ ,  $X_1^{**}$  на матрицы  $M_{12}$ ,  $M_{23}$  и т. д.)

В силу линейности преобразований вектору  $X_1$  [см. уравнение (30.16)] соответствует вектор состояния в  $n$ -м сечении

$$X_n = C_1 X_n^* + C_2 X_n^{**}. \quad (30.17)$$

Этот вектор должен удовлетворять граничным условиям на правом конце стержня. Например, если конец свободен, должны равняться нулю компоненты  $M_n$ ,  $Q_n$ .

Это приводит к двум однородным уравнениям:

$$\begin{aligned} C_1 M_n^* + C_2 M_n^{**} &= 0, \\ C_1 Q_n^* + C_2 Q_n^{**} &= 0, \end{aligned} \quad (30.18)$$

где  $M_n^*$ ,  $M_n^{**}$ ,  $Q_n^*$ ,  $Q_n^{**}$  — соответствующие компоненты векторов  $X_n^*$ ,  $X_n^{**}$ .

Частотное уравнение получается из условия наличия ненулевых решений уравнений (30.18)

$$\Delta(p^2) = M_n^* Q_n^{**} - M_n^{**} Q_n^* = 0. \quad (30.19)$$

Расчет проводят для ряда значений  $p^2$  и находят корни уравнения (30.19).

При расчете вынужденных гармонических изгибных колебаний оказывается необходимым проводить три расчета: два расчета однородной задачи, соответствующих двум линейно независимым векторам  $X_1^*$  и  $X_1^{**}$  для первого сечения\*, и один расчет неоднородной задачи. В неоднородном решении вектор  $X_1^H$  принимают произвольным, но

---

\* Эти расчеты не отличаются от рассмотренных выше для случая свободных колебаний при  $p = \omega$ .

удовлетворяющим граничным условиям. В частности, можно принять  $X_1^H$  нулевым. Переход от сечения к сечению осуществляют по формуле

$$X_2^H = M_{12} X_1^H + X_q,$$

где  $X_q$  — частное решение, соответствующее действующей на участке 1—2 нагрузке и удовлетворяющее нулевым граничным условиям в сечении 1.

Если на участке действует нагрузка интенсивностью  $q(z)\cos\omega t$ , то перемещения в любом сечении можно представить в виде

$$u_q(z) = \frac{1}{\alpha^3 EJ} \int_0^z q(\xi) K_4[\alpha(z - \xi)] d\xi.$$

Выполняя дифференцирование с учетом свойств функций Крылова, нетрудно проверить, что это выражение тождественно удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$u^{IV}(z) - \alpha^4 u(z) = q(z)/(EJ) \quad [\alpha^4 = m_0 \omega^2/(EJ)].$$

Следовательно,

$$\varphi_q(z) = \frac{d}{dz} u_q = \frac{1}{\alpha^2 EJ} \int_0^z q(\xi) K_3[\alpha(z - \xi)] d\xi,$$

$$M_q(z) = EJ \frac{d^2 u_q}{dz^2} = \frac{1}{\alpha} \int_0^z q(\xi) K_2[\alpha(z - \xi)] d\xi,$$

$$Q_q(z) = EJ \frac{d^3 u_q}{dz^3} = \int_0^z q(\xi) K_1[\alpha(z - \xi)] d\xi.$$

Подставляя в эти формулы  $l$  вместо  $z$ , получаем компоненты вектора  $X_q$ . В частных случаях распределения нагрузки формулы существенно упрощаются. Так, если нагрузка  $q(z)$  постоянна на участке 1—2, то

$$X_q = q \begin{pmatrix} [1/(\alpha^4 EJ)] [K_4(\lambda) - 1] \\ [1/(\alpha^3 EJ)] K_4(\lambda) \\ (1/\alpha^2) K_3(\lambda) \\ (1/\alpha) K_2(\lambda) \end{pmatrix}, \quad \lambda = \alpha l = \sqrt[4]{\omega^2 m_0 l^4 / (EJ)}.$$

Если на участке 1—2 приложена сосредоточенная сила  $P \cos \omega t$  в точке  $z = l - a$ , т. е. на расстоянии  $a$  от правого конца, то

$$X_q = P \begin{pmatrix} [1/(\alpha^3 EJ)] K_4(\lambda_1) \\ [1/(\alpha^2 EJ)] K_3(\lambda_1) \\ (1/\alpha) K_2(\lambda_1) \\ K_1(\lambda_1) \end{pmatrix}, \quad \lambda_1 = \alpha a.$$

Особенно прост переход, если сила приложена в конце участка. В этом случае

$$X_q = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ P \end{pmatrix}.$$

После вычисления векторов  $X_n^*$ ,  $X_n^{**}$ ,  $X_n^H$  вектор состояния  $n$ -го сечения представляют в виде

$$X_n = C_1 X_n^* + C_2 X_n^{**} + X_n^H$$

и определяют  $C_1$  и  $C_2$  из двух граничных условий, имеющих место в этом сечении. Затем можно найти вектор состояния в любом  $k$ -м сечении:

$$X_k = C_1 X_k^* + C_2 X_k^{**} + X_k^H.$$

Вектор  $X_k$  характеризует перемещения и внутренние силы в сечении  $k$ .

При применении матричного метода начальных параметров имеется определенный произвол в выборе размеров участков для каждого перехода. При ручном счете выгодно брать эти участки возможно более длинными, но такими, чтобы матрицы перехода выражались стандартными формулами. При машинном счете важно упростить вычисление самих матриц, перемножение же их выполняется по стандартной программе. Поэтому для расчета с помощью ЭВМ систему обычно дискретизируют, беря участки между расчетными сечениями достаточно малыми.

В ряде случаев (например, при расчете стержней переменного сечения) применяют метод начальных параметров в дифференциальной форме. Дифференциальное уравнение вынужденных гармонических колебаний стержня переменного сечения можно представить в матричной форме:

$$\frac{d}{dz} X = AX + B, \quad (30.20)$$

где

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{2n} \end{pmatrix}$$

— столбец  $2n$  искоемых параметров:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1, 2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{2n, 1} & \cdot & \cdot & a_{2n, 2n} \end{pmatrix}$$

— квадратная  $(2n \times 2n)$  матрица переменных коэффициентов;  $\mathbf{B}$  — столбец заданных нагрузок.

Рассмотрим два примера представления дифференциальных уравнений в форме (30.20).

При вынужденных продольных колебаниях стержня переменного сечения вектор состояния сечения состоит из амплитудного смещения и амплитудной нормальной силы:

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} u \\ N \end{pmatrix}.$$

Справедливо равенство

$$N = EF (du/dz) \quad (30.21)$$

и уравнение движения элемента

$$m_0 \omega^2 u + dN/dz + q(z) = 0, \quad (30.22)$$

где  $q(z)$  — амплитудная интенсивность внешней распределенной нагрузки, изменяющейся с частотой  $\omega$ .

Уравнения (30.21), (30.22), в сущности, совпадают с матричным уравнением (30.20), причем

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1/(EF) \\ -m_0 \omega^2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ -q(z) \end{pmatrix}. \quad (30.23)$$

В качестве второго примера рассмотрим колебания балки, лежащей на упругом основании, под действием распределенной по длине поперечной нагрузки, изменяющейся по гармоническому закону. Дифференциальные уравнения в обычной форме:

$$\begin{aligned} du/dz &= \varphi, \quad d\varphi/dz = M/(EJ), \quad dM/dz = Q, \\ dQ/dz &= -k(z)u + m_0 \omega^2 u + q(z). \end{aligned} \quad (30.24)$$

Здесь  $k(z)$  — коэффициент постели;  $m_0(z)$  — масса единицы длины;  $q(z)$  — амплитудная интенсивность нагрузки, меняющейся с частотой  $\omega$ .

В матричной форме система уравнений (30.24) имеет вид (30.20), причем

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} u \\ \varphi \\ M \\ Q \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{EJ} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ m_0 \omega^2 - k & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ q(z) \end{pmatrix}.$$

К форме (30.20) могут быть приведены дифференциальные уравнения и других задач.

Если рассматриваются свободные колебания, то  $\mathbf{B} = 0$  и матричное уравнение (30.20) является однородным.

Дифференциальное уравнение (30.20) можно численно проинтегрировать «вперед» вручную или на ЦВМ, если известны все начальные условия в сечении  $z = 0$ , т. е. в случае продольных колебаний  $u$  и  $N$ , в случае поперечных колебаний  $u$ ,  $\varphi$ ,  $M$ ,  $Q$ . Так как эти условия неизвестны, применяется тот же прием, что и при использовании матриц перехода. Полное решение задачи разбивается на решение неоднородного уравнения и линейно независимые решения однородного уравнения, причем каждое из этих решений удовлетворяет граничным условиям в сечении  $z = 0$ .

Так, например, для вынужденных продольных колебаний стержня, левый конец которого заделан (рис. 30.6), можно принять:

$$X^H(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad X^*(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(напомним, что первый компонент вектора  $X$  представляет собой амплитудное перемещение, а второй — продольную силу). Далее, интегрируя численно уравнения

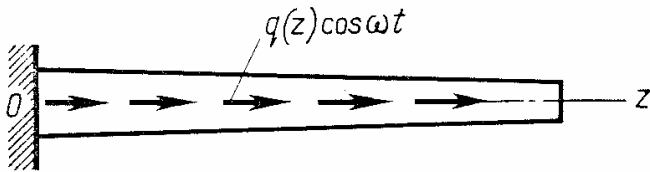


Рис. 30.6

$$\frac{d}{dz} X^H = A X^H + B;$$

$$\frac{d}{dz} X^* = A X^*$$

при указанных начальных условиях, находят  $X^H(l)$  и  $X^*(l)$ . Так как суммарный вектор

$$X(l) = X^H(l) + C X^*(l)$$

должен удовлетворять граничным условиям в сечении  $z = l$  [для стержня рис. 30.6  $N(l) = 0$ ], то находят постоянную  $C$ . При свободном конце  $z = l$  стержня

$$C = -N^H(l)/[N^*(l)].$$

Вслед за этим находят вектор состояния в любом сечении по формуле

$$X = C X^* + X^H.$$

Указанный метод называют обычно *методом двух расчетов*.

При расчете изгибных колебаний в сечении  $z = 0$  неизвестны два компонента вектора состояния. В этом случае необходимо выполнить всего три расчета — одно интегрирование неоднородного уравнения и два интегрирования однородного.

При решении задачи о собственных колебаниях интегрируют однородные уравнения. Интегрирование проводят при различных значениях  $\omega$  и выбирают те значения частоты, при которых определитель уравнений, выражающих граничные условия при  $z = l$ , обращается в нуль. В случае продольных колебаний при каждом значении частоты проводится одно интегрирование, а в случае поперечных — два в соответствии с числом линейно независимых векторов, удовлетворяющих условиям закрепления конца  $z = 0$ .

Заметим, что при расчете высших частот и форм собственных колебаний изгиба методом начальных параметров возникают вычислительные трудности. Дело в том, что элементы матриц перехода, в выражение которых входят функции Крылова, быстро возрастают с ростом аргумента  $\lambda$ . Поэтому определитель  $\Delta(p^2)$  представляется малой разностью больших чисел.

Трудности такого рода возникают не только в расчетах колебаний,

но и во многих других краевых задачах строительной механики (расчет балок на упругом основании, оболочек вращения и др.) (см. [31]). Причиной затруднений является наличие как быстро возрастающих, так и быстро убывающих решений соответствующей однородной задачи, вследствие чего система уравнений, выражающих граничные условия, оказывается плохо обусловленной.

Разработан ряд приемов получения хорошо обусловленных уравнений для такого рода задач. В частности, метод начальных параметров может быть видоизменен так, чтобы исключить плохую обусловленность. С этой целью векторы частных решений  $X^*$ ,  $X^{**}$ ,  $X^n$  в отдельных сечениях следует подвергать линейному преобразованию, чтобы сделать их ортогональными. Применительно к решению краевых задач для дифференциальных уравнений указанный прием ортогонализации (см. [31]) предложен С. К. Годуновым.

Другим приемом является разбиение системы на достаточно малые участки, вычисление матриц динамической жесткости для каждого участка и формирование матрицы динамической жесткости для системы в целом, подобно тому, как это делается в методе конечных элементов.

Значительную популярность при расчете колебаний механических систем получил изложенный в следующем параграфе метод прогонки.

### § 31. МЕТОД ПРОГОНКИ

**Сущность метода.** Метод прогонки, как и метод начальных параметров, применяют для расчета систем, представляющих собой последовательное соединение элементов. Зная динамические характеристики каждого элемента, можно рассчитать характеристики заданной системы. Этой цели служат рекуррентные формулы, позволяющие рассчитывать динамические характеристики системы, состоящей из  $i + 1$  элементов, если характеристики системы, состоящей из  $i$  элементов, известны. Могут рассчитываться динамические податливости, жесткости или другие, более сложные характеристики системы\*.

В качестве простейшего примера применения метода прогонки рассмотрим крутильные колебания безмассового вала с дисками, вызываемые гармоническими моментами  $M_i \cos \omega t$ . В предыдущем параграфе эта задача рассматривалась методом начальных параметров. Угол поворота каждого сечения вала и крутящий момент в нем меняются по закону

$$x_i = u_i \cos \omega t, \quad M_{кр} = M_i \cos \omega t.$$

Рассматривая часть вала, лежащую левее  $i$ -го сечения (рис. 31.1),

---

\* Впервые, по-видимому, вариант метода прогонки применительно к расчету крутильных колебаний валов (метод цепных дробей) был предложен еще в 1930 г. В. П. Терских. Для многосвязных систем этот метод в варианте динамических жесткостей и податливостей изложен в работе [23].

можно считать, что поворот сечения вызван моментом  $M_i$  и возмущающими моментами  $\mu$ , приложенными к выделенной части вала. Учитывая линейность системы, можно написать

$$u_i = D_i M_i + u_{i,0}. \quad (31.1)$$

Здесь  $D_i$  — динамическая податливость выделенной части вала;  $u_{i,0}$  — амплитуда колебаний сечения при  $M_i = 0$ .

В дальнейшем будем рассматривать сечения вала в непосредственной близости от диска. При этом величины, относящиеся к сечению

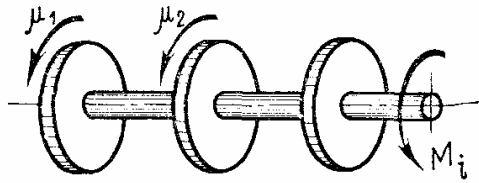


Рис. 31.1

левее  $i$ -го диска, пометим верхним индексом  $-$ , а величины, относящиеся к сечению правее диска, — верхним индексом  $+$ . Выясним, как меняются величины  $D_i$  и  $u_{i,0}$  при постепенном наращивании выделенной части вала. Очевидно, это наращивание может производиться двумя способами — либо присоединением

диска, либо присоединением участка вала.

Равенства (31.1) для сечений левее и правее диска имеют такой вид:

$$u_i^- = D_i^- M_{i-1,i} + u_{i,0}^-, \quad u_i^+ = D_i^+ M_{i,i+1} + u_{i,0}^+.$$

Учитывая, что  $u_i^+ = u_i^- = u_i$ ,  $M_{i,i+1} = M_{i-1,i} - \omega^2 u_i I_i - \mu_i$ , и исключив  $M_{i-1,i}$  и  $M_{i,i+1}$ , получим

$$u_i [1 - D_i^+ (1/D_i^- - \omega^2 I_i)] = u_{i,0}^+ - D_i^+ (u_{i,0}^- / D_i^- + \mu_i)$$

Так как это равенство должно выполняться при любых значениях возмущающих моментов, в частности при  $\mu = 0$  и, следовательно при  $u_0 = 0$ , то справедливы следующие равенства:

$$D_i^+ = \frac{1}{-I_i \omega^2 + 1/D_i^-}, \quad (31.2)$$

$$u_{i,0}^+ = D_i^+ (u_{i,0}^- / D_i^- + \mu_i). \quad (31.3)$$

Если присоединяется участок вала между  $i$ -м и  $(i+1)$ -м дисками, то

$$u_{i+1} = u_i + M_{i,i+1}/c_{i,i+1}; \quad M_{i+1}^- = M_i^+ = M_{i,i+1}.$$

Исключая с помощью этих соотношений  $u_i$ ,  $u_{i+1}$  из равенств

$$u_i = D_i^+ M_{i,i+1} + u_{i,0}^+,$$

$$u_{i+1} = D_{i+1}^- M_{i,i+1} + u_{i+1,0}^+,$$

получаем

$$(D_{i+1}^- - 1/c_{i,i+1} - D_i^+) M_{i,i+1} = u_{i,0}^+ - u_{i+1,0}^+.$$

Отсюда

$$D_{i+1}^- = D_i^+ + 1/c_{i,i+1}, \quad (31.4)$$

$$u_{i+1,0}^- = u_{i,0}^+. \quad (31.5)$$



Итак, преобразование динамической жесткости при присоединении к системе новых элементов осуществляется по рекуррентным формулам (31.2) и (31.4). Как и следовало ожидать, эти формулы не зависят от внешних нагрузок  $\mu$ , воздействующих на вал. Так, например, для показанного на рис. 31.2 вала с дисками, применяя последовательно формулы (31.2) и (31.4), находим:

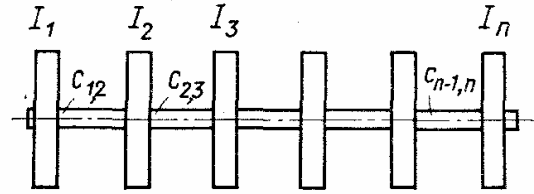


Рис. 31.2

$$\begin{aligned}
 D_1^- &= \infty, \quad D_1^+ = \frac{1}{-I_1 \omega^2}, \\
 D_2^- &= \frac{1}{c_{12}} + \frac{1}{-I_1 \omega^2}, \\
 D_2^+ &= \frac{1}{-I_2 \omega^2 + \frac{1}{\frac{1}{c_{12}} + \frac{1}{-I_1 \omega^2}}}, \quad D_3^- = \frac{1}{c_{23}} + \frac{1}{-I_2 \omega^2 + \frac{1}{\frac{1}{c_{12}} + \frac{1}{-I_1 \omega^2}}}, \\
 &\dots \dots \dots \\
 D_n^+ &= \frac{1}{-I_n \omega^2 + \frac{1}{\frac{1}{c_{n+1,n}} + \frac{1}{-I_{n-1} \omega^2 + \dots + \frac{1}{\frac{1}{c_{23}} + \frac{1}{-I_2 \omega^2 + \frac{1}{\frac{1}{c_{12}} + \frac{1}{-I_1 \omega^2}}}}}}} \quad (31.6)
 \end{aligned}$$

Таким образом, для данной системы величина динамической податливости представляется в виде непрерывной дроби (31.6).

Собственные частоты системы соответствуют  $D_n^+ \rightarrow \infty$  и, следовательно, определяются уравнением

$$-I_n \omega^2 + \frac{1}{\frac{1}{c_{n+1,n}} + \frac{1}{-I_{n-1} \omega^2 + \dots + \frac{1}{\frac{1}{c_{23}} + \frac{1}{-I_2 \omega^2 + \frac{1}{\frac{1}{c_{12}} + \frac{1}{-I_1 \omega^2}}}}} = 0.$$

Для расчета вынужденных колебаний следует при известной частоте  $\omega$  вычислить  $D_n^+$  и  $u_{n0}^+$  по рекуррентным формулам типа (31.3)... (31.5). Если правый конец свободен, то  $M_{n,n+1} = 0$  и  $u_{n0}^+$  представляет собой действительную амплитуду колебаний  $n$ -го диска [см. формулу (31.1)].

После того как амплитуда  $n$ -го диска определена, амплитуды остальных дисков и величины крутящих моментов могут быть вычислены различными способами.

Одним из способов является применение метода начальных параметров. С помощью этого метода теперь придется двигаться справа налево, поскольку на правом конце и  $u$  и  $M$  известны.

Другой прием состоит в расчете динамических податливостей  $\bar{D}$  и величин  $\bar{u}_0$  справа налево по тем же рекуррентным формулам (31.2)... (31.5). После выполнения этого расчета для каждого сечения будут получены два соотношения вида (31.1):

$$u = DM + u_0, \quad (31.7)$$

$$u = -\bar{D}M + \bar{u}_0.$$

(Знак минус во второй формуле связан с тем, что для правой части вала положительные направления крутящего момента и углов поворота противоположны.) Из двух уравнений (31.7) определяются  $u$  и  $M$  в отдельности.

При расчете крутильных колебаний применение метода прогонки имеет, пожалуй, единственное преимущество — удобство анализа влияния параметров системы (жесткостей, моментов инерции) на динамические свойства системы. Сам же расчет может быть успешно выполнен и методом начальных параметров.

В более сложных системах (рамы, балки, оболочки) метод начальных параметров часто оказывается несостоятельным в связи с наличием быстро возрастающих решений и метод прогонки оказывается одним из немногих способов преодоления вычислительных трудностей.

Рассмотрим метод прогонки в общей форме. Пусть задана система, состоящая из последовательно соединенных элементов (рис. 31.3).

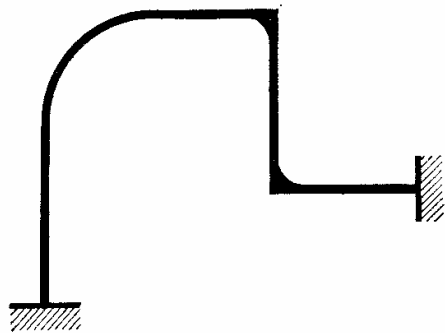


Рис. 31.3

Система совершает вынужденные гармонические колебания под действием синфазных возмущающих сил. Места соединения элементов будем называть сечениями. Для определения положения сечения в процессе движения нужно задать  $n$  перемещений.

Например, для плоской рамы, показанной на рис. 31.3, при плоских ее колебаниях  $n = 3$  (вертикальное и горизонтальное перемещения и угол поворота), для рассмотренной выше задачи о крутильных колебаниях  $n = 1$ . Число внутренних сил в сечении также равно  $n$ . Следовательно, состояние сечения, т. е. амплитудные значения его перемещений и сил в нем, характеризуется  $2n$  величинами, которые могут быть представлены в виде  $2n$ -мерного вектора состояния

$$X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_{2n} \end{pmatrix}.$$

Этот вектор можно разбить на два  $n$ -мерных:

$$X_1 = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} X_{n+1} \\ X_{n+2} \\ \vdots \\ X_{2n} \end{pmatrix}.$$

Так как порядок нумерации параметров произволен, то и физический смысл векторов  $X_1$ ,  $X_2$  может быть различным. Наиболее употребительны два варианта: 1)  $X_1$  — вектор, составленный из перемещений;  $X_2$  — вектор, составленный из внутренних сил; 2)  $X_1$  — вектор сил;  $X_2$  — вектор перемещений. Кроме этих вариантов возможны и любые другие комбинации параметров, входящих в  $X_1$  и  $X_2$ .

Часть системы, лежащая по одну сторону от сечения (например, левая), движется под действием приложенных к ней возмущающих сил и внутренних сил в сечении.

Поэтому можно написать

$$X_1 = LX_2 + S. \quad (31.8)$$

При первом варианте нумерации параметров матрица  $L$  представляет собой матрицу динамической податливости выделенной части системы,  $S$  — перемещения сечения под действием возмущающих сил, приложенных к выделенной части системы\*. При втором варианте  $L$  — матрица динамической жесткости,  $S$  — внутренние силы в сечении при условии его полной заделки.

При других вариантах нумерации параметров разные элементы матрицы  $L$  имеют различный физический смысл. Нашей задачей является выяснение того, как меняются матрица  $L$  и вектор  $S$  при переходе от сечения к сечению. При решении этого вопроса будем считать, что динамические характеристики участка между  $i$ -м и  $(i + 1)$ -м сечениями известны, т. е. известна зависимость между силами и перемещениями в  $i$ -м сечении, нагрузкой, приложенной к участку, силами и перемещениями в  $(i + 1)$ -м сечении. Эта связь выражается формулой

$$X^{(i+1)} = MX^{(i)} + N, \quad (31.9)$$

где  $M$  — матрица  $(2n \times 2n)$  перехода для рассматриваемого участка;  $N$  — решение неоднородного уравнения его колебаний, отвечающее нулевым условиям в сечении  $i$ .

---

\* Именно этот вариант был использован выше при рассмотрении крутильных колебаний [см. уравнение (31.1)].

Перепишем уравнение (31.9), разбив векторы  $X$ ,  $N$  и матрицу  $M$  на блоки:

$$\begin{pmatrix} X_1^{(i+1)} \\ \dots \\ X_2^{(i+1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ \dots & \dots \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1^{(i)} \\ \dots \\ X_2^{(i)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} N_1 \\ \dots \\ N_2 \end{pmatrix}, \quad (31.10)$$

где  $M_{ij}$  — квадратные  $(n \times n)$  матрицы.

Разворачивая выражение (31.10), получаем:

$$X_1^{(i+1)} = M_{11}X_1^{(i)} + M_{12}X_2^{(i)} + N_1; \quad (31.11)$$

$$X_2^{(i+1)} = M_{21}X_1^{(i)} + M_{22}X_2^{(i)} + N_2.$$

Напишем также выражение (31.8) для сечений  $i$  и  $i+1$ :

$$X_1^{(i)} = L_i X_2^{(i)} + S_i; \quad (31.12)$$

$$X_1^{(i+1)} = L_{i+1} X_2^{(i+1)} + S_{i+1}. \quad (31.13)$$

Исключим с помощью равенства (31.12)  $X_1^{(i)}$  из уравнений (31.11):

$$X_1^{(i+1)} = (M_{11}L_i + M_{12}) X_2^{(i)} + M_{11}S_i + N_1; \quad (31.14)$$

$$X_2^{(i+1)} = (M_{21}L_i + M_{22}) X_2^{(i)} + M_{21}S_i + N_2.$$

Исключим из этих равенств  $X_2^{(i)}$ :

$$\begin{aligned} & (M_{11}L_i + M_{12})^{-1} (X_1^{(i+1)} - M_{11}S_i - N_1) - \\ & - (M_{21}L_i + M_{22})^{-1} (X_2^{(i+1)} - M_{21}S_i - N_2) = 0. \end{aligned}$$

Решим это уравнение относительно  $X_1^{(i+1)}$ :

$$\begin{aligned} X_1^{(i+1)} = & (M_{11}L_i + M_{12}) (M_{21}L_i + M_{22})^{-1} X_2^{(i+1)} + \\ & + M_{11}S_i + N_1 - (M_{11}L_i + M_{12}) (M_{21}L_i + M_{22})^{-1} (M_{21}S_i + N_2). \end{aligned} \quad (31.15)$$

Сопоставляя равенства (31.15) и (31.13) и учитывая, что они должны выполняться при произвольных значениях вектора  $X_2^{(i+1)}$  и при произвольных нагрузках на выделенную часть системы, находим:

$$\begin{aligned} L_{i+1} &= (M_{11}L_i + M_{12}) (M_{21}L_i + M_{22})^{-1}; \\ S_{i+1} &= (M_{11} - L_{i+1}M_{21}) S_i + N_1 - L_{i+1}N_2. \end{aligned} \quad (31.16)$$

Формулы (31.16) являются рекуррентными. Они позволяют получить значения прогоночной матрицы  $L$  и вектора  $S$  в  $(i+1)$ -м сечении, если в  $i$ -м сечении эти значения известны. Переходя по формулам (31.16) от сечения к сечению, получают значения  $L_k$  и  $S_k$  для крайнего правого  $k$ -го сечения\*, и, следовательно, зависимость

$$X_1^{(k)} = L_k X_2^{(k)} + S_k. \quad (31.17)$$

---

\* Этим завершается процесс так называемой прямой прогонки, переводящий граничные условия, заданные на левом конце системы, к ее правому концу.

Матричное уравнение (31.17) эквивалентно  $n$  линейным уравнениям относительно  $2n$  параметров, определяющих состояние  $k$ -го сечения. Другие  $n$  уравнений доставляются граничными условиями в этом сечении. Таким образом, получается полная система  $2n$  уравнений для  $2n$  неизвестных. Определив эти неизвестные, получим вектор состояния для  $k$ -го сечения.

Далее задача заключается в определении вектора состояния для остальных сечений. Этот процесс называется *обратной прогонкой*.

Можно было бы определить  $X$  в каждом сечении, применяя соотношения метода начальных параметров, но двигаясь теперь справа налево. Однако если однородная система имеет быстро возрастающие решения (а именно в этом случае эффективен метод прогонки), при этом процессе снова произойдет потеря точности и граничные условия на левом конце не будут выполнены.

Разработаны различные методы обратной прогонки, лишенные этого недостатка.

Наиболее эффективен метод, который можно назвать методом *встречной прогонки*. Суть метода такова: сначала определяются путем прямой прогонки (слева направо) матрица  $L$  и вектор  $S$ . Значения  $L$  и  $S$  запоминаются только для тех сечений, где нужно вычислять  $X$ . Затем проводится такой же точно расчет, но справа налево. При движении справа налево следует в формулах прогонки (31.16) использовать блоки матрицы перехода  $\bar{M}$  от правого сечения к левому:

$$\bar{M} = M^{-1},$$

а под столбцом  $N$  понимать  $\bar{N} = -M^{-1}N$  [см. уравнение (31.9)]. При этом определяются  $\bar{L}$  и  $\bar{S}$ .

Так как значения  $X_1^{(k)}$  и  $X_2^{(k)}$  в крайнем правом сечении уже известны, при обратной прогонке могут быть приняты любые начальные значения матрицы  $\bar{L}_k$  и вектора  $\bar{S}_k$ , лишь бы они удовлетворяли уравнению

$$X_1^{(k)} = \bar{L}_k X_2^{(k)} + \bar{S}_k.$$

В результате встречной прогонки в каждом подлежащем расчету сечении получаются два матричных уравнения:

$$X_1 = LX_2 + S; \quad X_1 = \bar{L}X_2 + \bar{S}. \quad (31.18)$$

Из этих уравнений находят векторы  $X_1$  и  $X_2$ :

$$\begin{aligned} X_1 &= L(L - \bar{L})^{-1}(\bar{S} - S) + S; \\ X_2 &= (L - \bar{L})^{-1}(\bar{S} - S). \end{aligned} \quad (31.19)$$

**Применение метода прогонки к определению частот и форм собственных колебаний.** Если рассматриваются собственные колебания, то возмущающие силы отсутствуют и, следовательно,  $S = 0$ . Поэтому в процессе прямой прогонки при заданной частоте  $\omega$  определяется

только матрица  $L_k$  в крайнем правом сечении и соотношение (31.17) получает вид

$$X_1^{(k)} = L_k X_2^{(k)}.$$

Это матричное уравнение содержит  $n$  линейных алгебраических уравнений относительно компонентов векторов  $X_1^{(k)}$  и  $X_2^{(k)}$ . С другой стороны, имеется  $n$  линейных однородных граничных условий, связывающих компоненты тех же векторов.

Полученная система может иметь нетривиальные решения, только если ее определитель

$$\Delta(\omega) = 0. \quad (31.20)$$

Практически (как и в методе начальных параметров) расчет проводится при различных значениях  $\omega$  и собственные частоты определяются как значения  $\omega$ , удовлетворяющие уравнению (31.20). Поскольку при собственной частоте определитель системы уравнений равен нулю, вектор  $X^{(k)}$  определяется с точностью до постоянного множителя, которому, как и всегда при расчете свободных колебаний, можно дать произвольное значение. Таким образом, вектор  $X^{(k)}$  в крайнем правом сечении системы можно считать известным.

Для определения формы колебаний, т. е. значений  $X$  в остальных сечениях, можно пользоваться следующим приемом: один из векторов (например,  $X_2$ ) в предыдущем сечении  $i$  определять через векторы  $X_1$  и  $X_2$  в  $(i+1)$ -м сечении по формулам метода начальных параметров:

$$X_2^{(i)} = \bar{M}_{21} X_1^{(i+1)} + \bar{M}_{22} X_2^{(i+1)} \quad (31.21)$$

( $\bar{M}_{21}$ ,  $\bar{M}_{22}$  — блоки обратной матрицы перехода  $\bar{M} = M^{-1}$ ), а для определения второго вектора использовать соотношение  $X_1^{(i)} = L_i X_2^{(i)}$ .

Если требуется определить только один какой-либо вектор,  $X_1$  или  $X_2$ , то можно воспользоваться формулами (31.8) и (31.14). Из этих формул получаем в случае свободных колебаний:

$$\begin{aligned} X_1^{(i)} &= (M_{11} + M_{12} L_i^{-1})^{-1} X_1^{(i+1)}; \\ X_2^{(i)} &= (M_{21} L_i + M_{22})^{-1} X_2^{(i+1)}. \end{aligned} \quad (31.22)$$

**Применение метода прогонки для решения дифференциальных уравнений с краевыми условиями.** Изложенный выше алгоритм метода прогонки полностью применим и в том случае, когда элементы, присоединяемые к системе на каждом шаге, являются бесконечно малыми, т. е. когда рассматривается решение системы дифференциальных уравнений с краевыми условиями. В этом случае вычисления оказываются даже более простыми, так как отпадает операция обращения матриц.

Дифференциальное уравнение, определяющее перемещения и внутренние силы в сечении, может быть представлено в матричной форме [см. уравнение (30.20)]:

$$(d/dz) X = AX + B. \quad (31.23)$$

Здесь  $X$  — вектор состояния сечения, включающий  $2n$  искоемых параметров;  $A$  — квадратная  $(2n \times 2n)$  матрица переменных коэффициентов;  $B$  — вектор нагрузок.

Если взять два сечения:  $z$  и  $z + dz$ , то векторы для этих сечений связаны формулой

$$X(z + dz) = X(z) + (dX/dz) dz,$$

или, учитывая уравнение (31.23),

$$X(z + dz) = (E + Adz) X(z) + Bdz, \quad (31.24)$$

где  $E$  — единичная матрица.

Сопоставляя это выражение с общей формулой (31.9) перехода от одного сечения к другому, видим, что в данном случае матрица перехода  $M$  и вектор  $N$  определяются формулами

$$M = E + Adz, \quad N = Bdz. \quad (31.25)$$

С учетом этих соотношений можно далее использовать все формулы, выведенные выше для конечных участков. Так, деля все неизвестные параметры на две группы:

$$X_1 = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} X_{n+1} \\ X_{n+2} \\ \vdots \\ X_{2n} \end{pmatrix},$$

устанавливаем, что в любом сечении  $z$  векторы  $X_1$  и  $X_2$  связаны зависимостью

$$X_1 = L(z) X_2 + S(z).$$

Формула (31.16) для прогоночной матрицы  $L(z + dz)$  получит вид

$$L(z + dz) = [(E + A_{11}dz) L(z) + A_{12}dz] \{E + [A_{22} + A_{21}L(z)] dz\}^{-1}. \quad (31.26)$$

Здесь учтены зависимости

$$\begin{aligned} M_{11} &= E + A_{11}dz; & M_{12} &= A_{12}dz; \\ M_{21} &= A_{21}dz; & M_{22} &= E + A_{22}dz, \end{aligned}$$

являющиеся следствием первого из равенств (31.25). При этом  $A_{ij}$  обозначены квадратные  $(n \times n)$  блоки в матрице  $A$  уравнения (31.23).

Справедливо соотношение

$$(E + \alpha dz)^{-1} = E - \alpha dz.$$

В самом деле, умножая:

$$(E + \alpha dz)(E - \alpha dz) = E + O(dz^2),$$

получаем единичную матрицу с точностью до малых второго порядка. Поэтому формулу (31.26) можно переписать в виде

$$L(z + dz) = \{L(z) + [A_{11}L(z) + A_{12}]dz\} \{E - [A_{22} + A_{21}L(z)]dz\}.$$

Или, выполняя умножение и отбрасывая малые второго порядка,

$$L(z + dz) = L(z) + \{A_{11}L(z) + A_{12} - L(z)[A_{22} + A_{21}L(z)]\}dz.$$

Это уравнение представляет собой дифференциальное уравнение для матрицы  $L(z)$

$$(d/dz) L(z) = -L(z)[A_{21}L(z) + A_{22}] + A_{11}L(z) + A_{12}, \quad (31.27)$$

эквивалентное системе  $n^2$  уравнений для элементов матрицы.

Аналогично, второе уравнение (31.16) превращается в дифференциальное уравнение для столбца  $S$ :

$$(d/dz) S(z) = [A_{11} - L(z)A_{21}]S(z) + B_1 - L(z)B_2. \quad (31.28)$$

Уравнения (31.27) и (31.28) интегрируются численно «вперед» с учетом граничных условий на левом конце системы\*. Если этим граничным условиям придать форму

$$X_1(0) = L_0 X_2(0) + S_0,$$

где  $L_0$  и  $S_0$  известны, то при интегрировании уравнений (31.27) и (31.28) следует полагать:

$$L(0) = L_0, \quad S(0) = S_0.$$

Полученные в процессе интегрирования значения матрицы  $L(z)$  и вектора  $S(z)$  запоминаются для тех сечений, в которых требуется рассчитать векторы состояния. После того как вычислены значения  $L(l)$  и  $S(l)$ , уравнение

$$X_1(l) = L(l) X_2(l) + S(l)$$

совместно с граничными условиями на правом конце системы позволяет определить  $X_1(l)$  и  $X_2(l)$ .

Если требуется посчитать векторы  $X_1$  и  $X_2$  в промежуточных сечениях, то по формулам (31.27) и (31.28) проводится интегрирование справа налево при начальных значениях  $\bar{L}(l)$  и  $\bar{S}(l)$ , соответствующих граничным условиям на правом конце. Следует иметь в виду, что при этом интегрировании  $dz$  отрицателен. После этого в каждом сечении, подлежащем расчету,  $X_1$  и  $X_2$  определяются по формулам (31.19).

Другие методы численного решения краевых задач для систем линейных дифференциальных уравнений рассмотрены в гл. 11 работы [3].

---

\* Уравнения (31.27) и (31.28) другим методом получены в работе В. Л. Бидермана «Применение метода прогонки для численного решения задач строительной механики». — Инженерный журнал МТТ, АН СССР, 1967, № 5.



## § 32. РАСЧЕТ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ РЕГУЛЯРНЫХ СИСТЕМ

**Сущность расчетного метода.** Регулярными называются системы, полученные последовательным соединением многих одинаковых элементов. Классическим примером регулярной системы является натянутая нить с расположенными на ней на равных расстояниях одина-

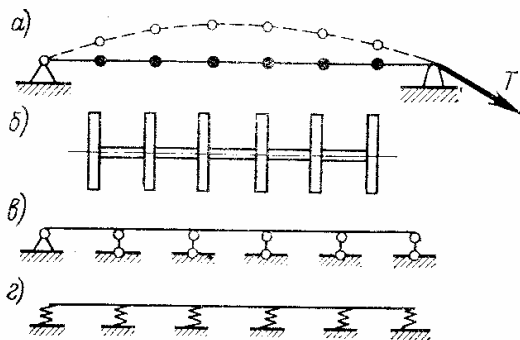


Рис. 32.1

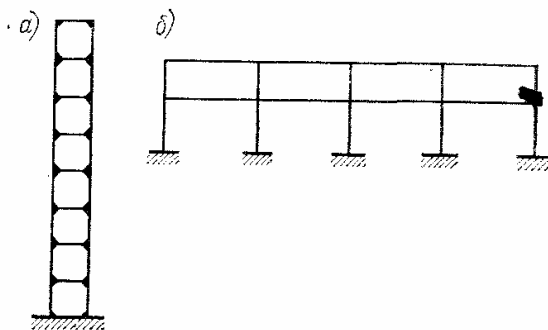


Рис. 32.2

ковыми бусинками (рис. 32.1, а) или вал с одинаковыми дисками (рис. 32.1, б). Можно указать и более важные практические примеры — многоопорные балки с одинаковыми пролетами на жестких или упругих (рис. 32.1, в, г) опорах, рамы и фермы регулярной конструкции (рис. 32.2, а, б).

Особое место занимают циклические регулярные системы — замкнутые рамы (см. [46]) (рис. 32.3), винт вертолета (рис. 32.4), лопаточный венец турбомашин и т. д.

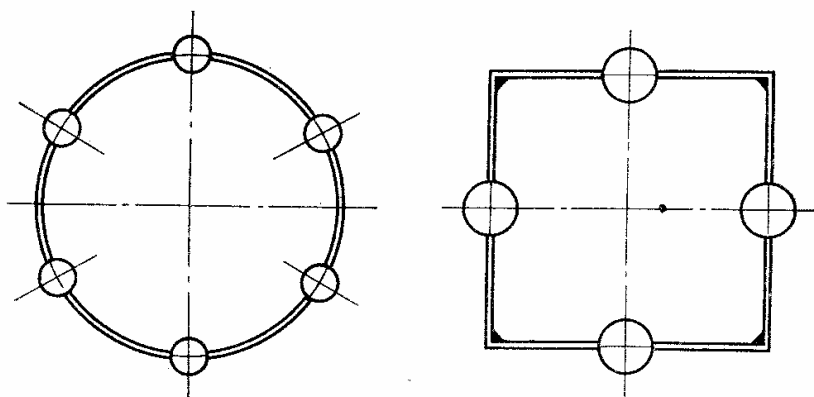


Рис. 32.3

При расчете регулярных систем используется то обстоятельство, что типовые элементы, составляющие систему, одинаковы и поэтому достаточно составить уравнения движения только для одного такого элемента.

Выделим из системы двумя сечениями типовой структурный элемент. Для системы, изображенной на рис. 32.2, а, этот элемент показан на рис. 32.5. Перемещения и внутренние силы в каждом из сечений составляют матрицу-столбец  $X$ , состоящую из  $2n$  элементов. Для

системы, изображенной на рис. 32.2, *a*, в общем случае плоских колебаний  $2n = 12$  (горизонтальное, вертикальное и угловое смещения для каждого из стержней и соответствующие внутренние силовые факторы). Если ограничиться случаем кососимметричных (изгибных) колебаний, то  $2n = 6$ .

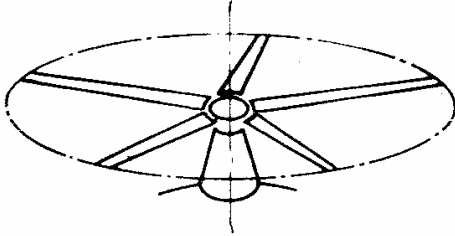


Рис. 32.4

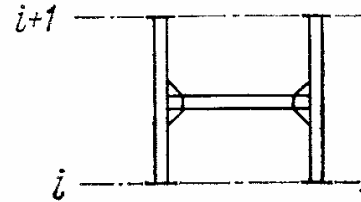


Рис. 32.5

Рассматривая движение выделенного элемента, можно установить связь между векторами состояния для сечений  $i$  и  $i + 1$

$$X_{i+1} = MX_i,$$

где  $M$  — квадратная  $(2n \times 2n)$  матрица перехода, элементы которой зависят от частоты  $\omega$ . Рассмотрим матричное уравнение

$$My = ky,$$

где  $k$  — параметр. Это уравнение можно представить в виде

$$(M - kE)y = 0.$$

Подобно уравнению (12.28) колебаний системы с  $n$  степенями свободы, это уравнение может быть выполнено только при равном нулю определителе

$$\det(M - kE) = 0, \quad (32.1)$$

откуда определяются  $2n$  собственных чисел  $k_j$  ( $j = 1, 2, \dots, 2n$ ) матрицы  $M$ .

Каждому собственному числу соответствует собственный вектор  $y_j$  (за который может быть принят один из столбцов матрицы, присоединенной к матрице  $M - k_j E$ ; см. § 12). Каждый из собственных векторов удовлетворяет уравнению

$$My_j = k_j y_j.$$

Вектор состояния  $X_i$  можно представить в виде разложения по собственным векторам матрицы  $M$ :

$$X_i = \sum_{j=1}^{2n} c_j y_j = Yc,$$

где  $Y$  — матрица, столбцами которой являются векторы  $y_j$ ;  $c$  — вектор, составленный из постоянных.

Тогда вектор состояния в  $(i + 1)$ -м сечении

$$X_{i+1} = MX_i = \sum_{j=1}^{2n} c_j M y_j = \sum_{j=1}^{2n} c_j k_j y_j = YKc,$$

где

$$K = \begin{pmatrix} k_1 & & 0 \\ & k_2 & \\ & \dots & \\ 0 & & k_n \end{pmatrix} -$$

диагональная матрица собственных чисел.

Так как, с другой стороны,  $X_{i+1} = MX_i = MYc$ ,

то

$$MYc = YKc.$$

Это равенство должно выполняться при любых значениях вектора состояния в  $i$ -м сечении, т. е. при любом векторе постоянных  $c$ .

Отсюда следует равенство матриц  $MY = YK$  и выражение матрицы перехода через ее собственные векторы и собственные числа [ср. с формулой (28.9)]

$$M = YKY^{-1}. \quad (32.2)$$

Представление матрицы перехода в виде (32.2) позволяет теперь связать вектор состояния в любом  $r$ -м характерном сечении с вектором состояния в сечении, принятом за нулевое:

$$X_r = \underbrace{MM \dots M}_{r \text{ сомножителей}} X_0 = M^r X_0.$$

Непосредственно легко убедиться, что

$$M^2 = MM = YKY^{-1}YKY^{-1} = YK^2Y^{-1}, \quad M^r = YK^r Y^{-1},$$

но  $r$ -я степень диагональной матрицы

$$K^r = \begin{pmatrix} k_1 & & 0 \\ & k_2 & \\ & \vdots & \\ 0 & & k_{2n} \end{pmatrix}^r = \begin{pmatrix} k_1^r & & 0 \\ & k_2^r & \\ & \vdots & \\ 0 & & k_{2n}^r \end{pmatrix}.$$

Если вектор состояния представить в виде разложения по собственным векторам:

$$X_0 = \sum_{j=1}^{2n} c_j y_j = Yc, \quad (32.3)$$

то

$$X_r = M^r X_0 = YK^r Y^{-1} Yc = YK^r c = \sum_{j=1}^{2n} c_j k_j^r y_j. \quad (32.4)$$

Таким образом, при переходе от нулевого к  $r$ -му сечению вектор постоянных умножается на диагональную матрицу  $K^r$ , или, иначе говоря, каждая из постоянных умножается на соответствующее характеристическое число в степени  $r$ .

Собственные числа матрицы  $M$  могут быть либо сопряженными комплексными, либо (некоторые) действительными. В первом случае соответствующие двум сопряженным числам собственные векторы также являются сопряженными комплексными. В случае, если характерные участки системы не меняют своих свойств при перемене нумерации сечений  $i \rightleftharpoons (i + 1)$  или составлены из элементов, обладающих этим свойством, то характеристическое уравнение является возвратным, т. е. каждому корню  $k_j$  соответствует другой корень  $k_{-j} = 1/k_j$ .

При расчете свободных колебаний участка конструкции, состоящего из  $r$  однородных элементов, векторы состояния в начальном (нулевом) и конечном ( $r$ -м) сечениях выражаются в соответствии с формулами (32.3), (32.4) через  $2n$  постоянных  $c_j$ .

Вместе с тем на каждый из этих векторов наложено по  $n$  линейных зависимостей — это либо граничные условия, если сечения  $i = 0$  и  $i = r$  являются границами системы, либо условия сопряжения с нерегулярными частями системы. Таким образом, всегда получается система  $2n$  линейных однородных уравнений относительно постоянных  $c_j$ .

Собственные частоты находят из условия равенства нулю определителя указанной системы. После определения частот вычисляют отношения между константами  $c_j$  и по формуле (32.3) рассчитывают форму колебаний.

Вычисления могут выполняться в общем виде (для простейших задач) или в числовой форме.

Рассмотрим некоторые простые примеры. Определим частоты и формы собственных крутильных колебаний вала, несущего  $m$  распо-

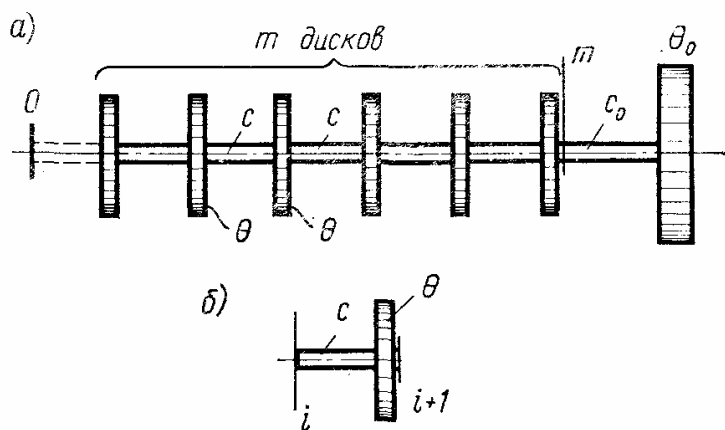


Рис. 32.6

ложенных на равных расстояниях дисков с моментом инерции  $I$  каждый (рис. 32.6, а). Крутильные жесткости участков вала между дисками —  $c$ . Левый диск свободен, правый соединен валом жесткости  $c_0$  с маховиком, момент инерции которого  $I_0$ . Схему такого рода часто используют при расчете крутильных колебаний колен-

чатых валов двигателей внутреннего сгорания.

На рис. 32.6, б показан типовой элемент системы, состоящий из участка вала и диска. Состояние каждого сечения характеризуется вектором

$$X = \begin{pmatrix} u \\ M \end{pmatrix},$$

где  $u$  — амплитудный угол поворота;  $M$  — амплитудный момент.  
Составим выражения для  $u$  и  $M$  в  $(i+1)$ -м сечении:

$$u_{i+1} = u_i + (1/c) M_i;$$

$$M_{i+1} = M_i - \omega^2 I u_{i+1} = -\omega^2 I u_i + (1 - \omega^2 I/c) M_i.$$

Таким образом,

$$X_{i+1} = M X_i; \quad M = \begin{pmatrix} 1 & 1/c \\ -\omega^2 I & 1 - \omega^2 I/c \end{pmatrix}.$$

Характеристическое уравнение (32.1) получает вид

$$\det(M - kE) = \begin{vmatrix} 1 - k & 1/c \\ -\omega^2 I & 1 - \omega^2 I/c - k \end{vmatrix} = 0,$$

или

$$k^2 - 2(1 - 2\lambda^2)k + 1 = 0, \quad \lambda^2 = \omega^2 I/(4c).$$

Отсюда получаем два значения:

$$k_1 = 1 - 2\lambda^2 + 2\lambda \sqrt{\lambda^2 - 1}, \quad k_2 = 1/k_1.$$

Практически все значение для определения собственных частот имеет случай  $\lambda^2 < 1$ , когда корни комплексные:

$$k_1 = e^{i\varphi}, \quad k_2 = e^{-i\varphi};$$

$$i = \sqrt{-1}; \quad \cos \varphi = 1 - 2\lambda^2; \quad \sin \varphi = 2\lambda \sqrt{1 - \lambda^2}. \quad (32.5)$$

Каждому значению  $k$  соответствует собственный вектор, для которого

$$M_0 = -c(1 - k)u_0.$$

Принимая  $u_0 = 1$ , находим, что характеристическому множителю  $e^{i\varphi}$  соответствует собственный вектор

$$y_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -c(1 - e^{i\varphi}) \end{pmatrix},$$

а второму множителю  $k_2 = e^{-i\varphi}$  — собственный вектор

$$y_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -c(1 - e^{-i\varphi}) \end{pmatrix}.$$

Таким образом, в соответствии с формулой (32.4) в любом  $r$ -м сечении амплитудные перемещения и момент определяются формулами

$$u_r = C_1 e^{ri\varphi} + C_2 e^{-ri\varphi};$$

$$M_r = -c[C_1(1 - e^{i\varphi}) e^{ri\varphi} + C_2(1 - e^{-i\varphi}) e^{-ri\varphi}].$$

Так как  $u_r$  и  $M_r$  — действительные, то очевидно, что величины  $C_1$  и  $C_2$  — сопряженные комплексные. Положим

$$C_1 = 1/2 C e^{i\psi}; \quad C_2 = 1/2 C e^{-i\psi},$$

где  $C$  и  $\psi$  — действительные.

Тогда получим следующие значения амплитудного поворота и крутящего момента в  $r$ -м характерном сечении:

$$\begin{aligned} u_r &= C \cos(\psi + r\varphi); \\ M_r &= cC \{\cos[\psi + (r+1)\varphi] - \cos(\psi + r\varphi)\} = \\ &= -C \cdot 2c \sin(\varphi/2) \sin[\psi + (r + 1/2)\varphi]. \end{aligned} \quad (32.6)$$

Для определения постоянных  $\psi$  и  $C$  рассмотрим граничные условия.

Добавив левее первого диска участок вала (штриховые линии на рис. 32.6, а), что не меняет условий работы конструкции, разместим там нулевое сечение. В этом сечении крутящий момент равен нулю. Полагая в формуле (32.6)  $r = 0$ , находим

$$\sin\left(\psi + \frac{1}{2}\varphi\right) = 0,$$

откуда

$$\psi = -\frac{\varphi}{2}.$$

Следовательно, для любого сечения

$$\begin{aligned} u_r &= C \cos[(r - 1/2)\varphi]; \\ M_r &= -2Cc \sin(\varphi/2) \sin r\varphi. \end{aligned} \quad (32.7)$$

Рассматривая участок вала правее  $m$ -го сечения, получаем:

$$u_{m+1} = u_m + M_m/c_0; \quad M_m = \omega^2 I_0 u_{m+1}.$$

Исключив отсюда  $u_{m+1}$ , получим граничное условие для  $m$ -го сечения:

$$M_m (1 - \omega^2 I_0/c_0) = \omega^2 I_0 u_m. \quad (32.8)$$

Примем в формулах (32.7)  $r = m$  и подставим в уравнение (32.8). Тогда после некоторых преобразований получим следующее трансцендентное уравнение:

$$\operatorname{ctg} m\varphi = (2c/c_0 - 1) \operatorname{tg}(\varphi/2) - I/(I_0 \sin \varphi). \quad (32.9)$$

$m$  значений  $\varphi$ , являющихся корнями этого уравнения\*, легко определить, после чего определяются соответствующие значения  $\lambda^2 = 1/2 (1 - \cos \varphi)$  и собственные частоты  $p = 2\lambda \sqrt{c/I}$ .

---

\* Соответственно точкам пересечения  $m$  ветвей графика левой части уравнения (32.9) на интервале  $0 \leq \varphi \leq \pi$  с графиком правой части.

**Расчет циклических систем.** Весьма любопытно применение изложенного метода к расчету циклических (замкнутых) систем, составленных из  $m$  одинаковых элементов. В этом случае, определив матрицу перехода  $M$  для типового элемента и назвав одно из характерных сечений нулевым, представим вектор состояния этого сечения в виде

$$X_0 = \sum_{j=1}^{2n} c_j y_j = Yc.$$

Для любого  $r$ -го сечения вектор состояния

$$X_r = \sum_{j=1}^{2n} c_j k_j^r y_j = YK^r c.$$

Но последнее,  $m$ -е, сечение в замкнутой системе совпадает с нулевым. Поэтому должно выполняться равенство

$$X_m = X_0, \quad Yc = YK^m c.$$

Так как матрица  $K^m = \begin{pmatrix} k_1^m & & 0 \\ & k_2^m & \\ & \vdots & \\ 0 & & k_{2n}^m \end{pmatrix}$  — диагональная, то указан-

ное равенство может быть выполнено только в том случае, если она единичная. Таким образом, устанавливаем, что в данном случае  $k_j^m = 1$  и все собственные числа представляют собой корни  $m$ -й степени из единицы:

$$k_j = \sqrt[m]{1} = e^{i(2\pi/m)j} = \cos(2\pi/m)j + i \sin(2\pi/m)j \quad (j=1, 2, \dots, m). \quad (32.10)$$

Эти числа являются сопряженными комплексными, за исключением  $k_m = 1$  и (при четном  $m$ )  $k_{m/2} = -1$ .

Собственные векторы и собственные частоты, соответствующие числу  $k_j$ , определяются из уравнений

$$(M - k_j E) y_j = 0, \quad \det(M - k_j E) = 0.$$

Каждому значению  $k_j$  соответствует столько частот, сколько степеней свободы имеет типовый элемент системы при закрепленных крайних его сечениях. При этом спектры частот, соответствующие сопряженным комплексным  $k_j, k_{m-j}$ , совпадают, а собственные векторы являются комплексными сопряженными.

Отделим действительную и мнимую части в собственном векторе, соответствующем  $k_j$  и одной из частот  $\omega_j$ :  $y_j = y_j^R + i y_j^I$ .

Тогда собственный вектор, соответствующий  $k_{m-j}$  и той же частоте,

$$y_{m-j} = y_j^R - i y_j^I.$$

Заметим, что  $y_j^R$  и  $y_j^I$  определены не единственным образом. Так как собственные векторы можно умножить на произвольный множитель, то вектор

$$e^{i\psi} y_j = (y_j^R \cos \psi - y_j^I \sin \psi) + i (y_j^R \sin \psi + y_j^I \cos \psi),$$

где  $\psi$  произвольно, также является собственным вектором. Поэтому за  $y_j^R$ ,  $y_j^I$  могут быть приняты также величины

$$y_{j*}^R = y_j^R \cos \psi - y_j^I \sin \psi, \quad y_{j*}^I = y_j^R \sin \psi + y_j^I \cos \psi, \quad (32.11)$$

где  $y_j^R$ ,  $y_j^I$  — действительная и мнимая части первоначально найденного собственного вектора.

При колебаниях с частотой  $\omega_j$  вектор состояния в начальном сечении составляет

$$X_{0j} = c_j y_j + c_{m-j} y_{m-j}.$$

Так как вектор  $X_{0j}$  — действительный, то постоянные  $c_j$ ,  $c_{m-j}$  — комплексные сопряженные. Обозначим

$$c_j = 1/2 (c_1 - ic_2), \quad c_{m-j} = 1/2 (c_1 + ic_2).$$

Тогда

$$\begin{aligned} X_{0j} &= 1/2 (c_1 - ic_2) (y_j^R + iy_j^I) + 1/2 (c_1 + ic_2) (y_j^R - iy_j^I) = \\ &= c_1 y_j^R + c_2 y_j^I. \end{aligned} \quad (32.12)$$

В произвольном сечении ( $s$ -м) вектор состояния

$$\begin{aligned} X_{sj} &= c_j k_{js}^s y_j + c_{m-j} k_{m-j}^s y_{m-j} = 1/2 (c_1 - ic_2) e^{i(2\pi/m)js} (y_j^R + iy_j^I) + \\ &+ 1/2 (c_1 + ic_2) e^{-i(2\pi/m)js} (y_j^R - iy_j^I) = \\ &= c_1 [y_j^R \cos(2\pi js/m) - y_j^I \sin(2\pi js/m)] + \\ &+ c_2 [y_j^R \sin(2\pi js/m) + y_j^I \cos(2\pi js/m)]. \end{aligned} \quad (32.13)$$

Если характерные сечения совпадают с осями симметрии конструкции, то формы колебания разделяются на симметричные и кососимметричные относительно нулевого сечения. В этом случае удобно выбрать с помощью преобразования (32.11) векторы  $y_j^R$  и  $y_j^I$  так, чтобы в один из них (например,  $y_j^R$ ) входили только компоненты, обладающие свойством симметрии, а в другой ( $y_j^I$ ) — косо́й симметрии. Тогда для симметричных относительно нулевого сечения форм колебаний в формулах (32.12), (32.13) следует принять  $c_2 = 0$ , а для кососимметричных —  $c_1 = 0$ .

С помощью приведенных зависимостей иногда удается определить формы и частоты колебаний циклических систем, не прибегая к фактическому построению матриц перехода. Пусть, например, имеется кольцо или правильная многоугольная рама, несущая  $m$  сосредоточенных масс. Требуется определить формы колебаний рамы в своей



плоскости. В качестве примера на рис. 32.7 показана рама с тремя массами.

Совместим характерные сечения с центрами масс и ограничимся рассмотрением лишь тех компонентов вектора состояния, которые соответствуют радиальному  $u$  и окружному  $v$  перемещениям. Тогда вектор состояния будет двухкомпонентным:

$$X = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.$$

Примем  $y_j^R = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $y_j^J = \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix}$ ,

где постоянные  $a, b$  пока не определены.

Тогда при симметричных относительно нулевого сечения колебаниях ( $c_1 = 1, c_2 = 0$ ) амплитуды колебаний  $s$ -й массы составят

$$u_{sj} = a \cos[(2\pi j/3)s], \quad v_{sj} = b \sin[(2\pi j/3)s] \\ (j = 0, 1; s = 0, 1, 2). \quad (32.14)$$

При кососимметричных колебаниях ( $c_1 = 0, c_2 = 1$ )

$$u_{sj} = a \sin[(2\pi j/3)s], \quad v_{sj} = b \cos[(2\pi j/3)s] \quad (j = 0, 1; s = 0, 1, 2). \quad (32.15)$$

При  $j = 0$  симметричная форма соответствует

$$u_{00} = u_{10} = u_{20} = a, \quad v_{00} = v_{10} = v_{20} = 0.$$

Соответствующая форма чисто радиальных колебаний изображена на рис. 32.8, а. При  $j = 1$  и симметричной форме имеем:

$$u_{01} = a; \quad u_{11} = a \cos(2\pi/3) = -a/2; \quad u_{21} = a \cos(4\pi/3) = -a/2; \\ v_{01} = 0; \quad v_{11} = b \sin(2\pi/3) = b\sqrt{3}/2; \quad v_{21} = b \sin(4\pi/3) = -b\sqrt{3}/2.$$

Имеются два соотношения  $b/a$ , которые отвечают этим формулам: приняв  $b = -a$ , получим:  $v_{01} = 0, v_{11} = -a\sqrt{3}/2, v_{21} = a\sqrt{3}/2$ . Эта форма соответствует вертикальному перемещению кольца как жесткого (рис. 32.8, в). Другая, ортогональная к этой, форма движения соответствует  $b = a$ . В этом случае  $v_{01} = 0, v_{11} = a\sqrt{3}/2, v_{21} = -a\sqrt{3}/2$  (рис. 32.8, б).

Кососимметричная форма при  $j = 0$  приводит к  $v_{00} = v_{01} = v_{02} = b, u_{00} = u_{10} = u_{20} = 0$ , что соответствует повороту кольца как жесткого.

$$\text{При } j = 1 \quad u_{01} = 0, \quad u_{11} = a \sin(2\pi/3) = a\sqrt{3}/2,$$

$$u_{21} = a \sin(4\pi/3) = -a\sqrt{3}/2;$$

$$v_{01} = b, \quad v_{11} = b \cos(2\pi/3) = -b/2, \quad v_{21} = b \cos(4\pi/3) = -b/2.$$

При  $b = a$  получаем горизонтальное смещение кольца как жесткого и при  $b = -a$  — форму колебания, показанную на рис. 32.8, г.

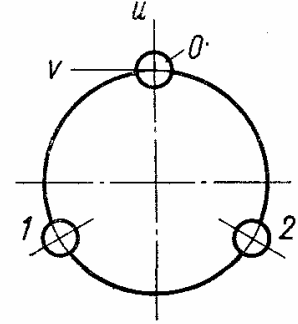


Рис. 32.7

Таким образом, рассмотренная рама имеет три формы собственных колебаний и три формы движения как жесткая. Зная формы колебания, нетрудно подсчитать и их частоты. Для этого надо, например, подсчитать потенциальную энергию при амплитудных силах инерции и приравнять ее работе этих сил (во всех случаях  $3/2 m p^2 a^2$ ).

Для рамы с четырьмя грузами (см. рис. 32.3) при симметричных формах колебания

$$\begin{aligned} u_{sj} &= a \cos(j\pi s/2); \\ v_{sj} &= b \sin(j\pi s/2) \\ (j &= 0, 1, 2; \\ s &= 0, 1, 2, 3). \end{aligned} \quad (32.16)$$

При кососимметричных формах

$$\begin{aligned} u_{sj} &= a \sin(j\pi s/2); \\ v_{sj} &= b \cos(j\pi s/2). \end{aligned} \quad (32.17)$$

Три возможных перемещения рамы как жесткой характеризуются величинами:

$$\left. \begin{aligned} u_0 &= -u_2 = -v_1 = v_3 \neq 0 \\ v_0 &= v_2 = u_1 = u_3 = 0 \end{aligned} \right\} \text{вертикальное перемещение,}$$

$$\left. \begin{aligned} v_0 &= u_1 = -v_2 = -u_3 \neq 0 \\ u_0 &= v_1 = u_2 = v_3 = 0 \end{aligned} \right\} \text{горизонтальное перемещение,}$$

$$\left. \begin{aligned} v_0 &= v_1 = v_2 = v_3 \neq 0 \\ u_0 &= u_1 = u_2 = u_3 = 0 \end{aligned} \right\} \text{поворот.}$$

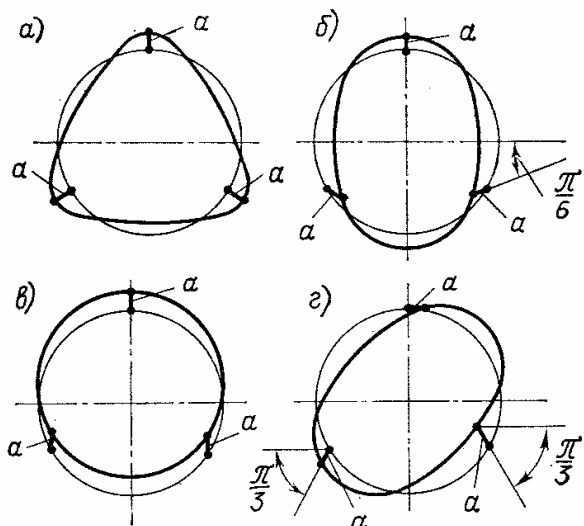


Рис. 32.8

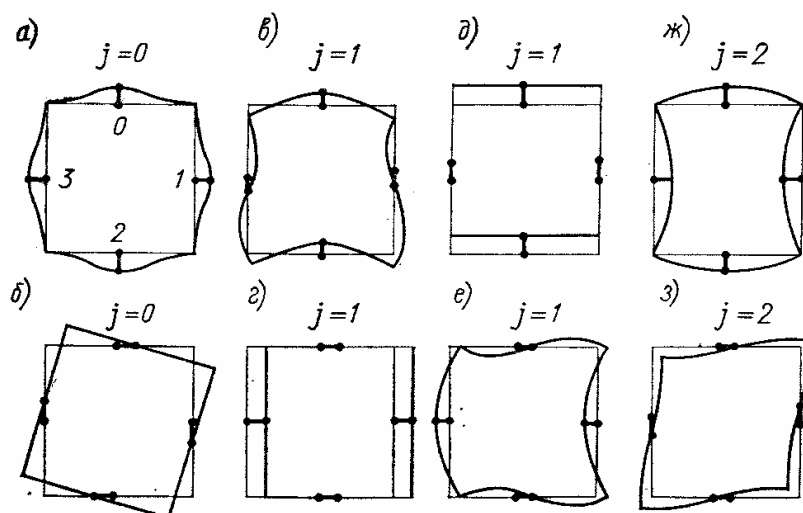


Рис. 32.9

Формы собственных колебаний ортогональны к формам движения рамы как жесткой, что позволяет определить соотношения между  $a$  и  $b$  в формулах (32.16) и (32.17).

Формы движения рамы, соответствующие различным значениям  $j$ , показаны на рис. 32.9. В этом случае в соответствии с числом степеней свободы системы имеется восемь форм движения. Три из них ( $b, g, d$ ) отвечают движению системы как жесткой, пять ( $a, в, e, ж, з$ ) — ее колебаниям. Количество разных собственных частот равно четырем, так как формам  $в$  и  $e$  соответствует одна и та же частота.

Задача об определении частот и форм собственных колебаний пластин и оболочек приводит к необходимости интегрирования дифференциальных уравнений в частных производных.

Наиболее хорошо изучены те случаи, когда оказывается возможным разделение переменных. К ним относятся, в частности, колебания прямоугольной пластины, шарнирно опертой по противоположащим сторонам, зонтичные и веерные колебания круглых осесимметричных пластин, колебания цилиндрических оболочек, замкнутых или шарнирно закрепленных вдоль образующих.

Если разделение переменных оказывается невозможным, большей частью для расчета используют приближенные и численные методы.

В настоящей главе рассмотрены лишь простейшие задачи. Дальнейшие подробности, относящиеся к колебаниям пластин и оболочек, а также подробная библиография приведены в [18, 39].

### § 33. УРАВНЕНИЕ ДВИЖЕНИЯ ПЛАСТИНЫ ПОСТОЯННОЙ ТОЛЩИНЫ

Расположим оси  $x, y$  в срединной плоскости пластины, ось  $z$  направим по нормали к этой плоскости. Дифференциальное уравнение статического изгиба пластины постоянной толщины  $h$  при малых перемещениях имеет вид

$$\nabla^2 \nabla^2 \zeta = q(x, y)/D.$$

Здесь  $\nabla^2 \nabla^2$  — бигармонический оператор:

$$\nabla^2 \nabla^2 \zeta = \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left( \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right);$$

$\zeta$  — прогиб;  $D = Eh^3/[12(1 - \mu^2)]$  — цилиндрическая жесткость;  $q(x, y)$  — интенсивность нормальной нагрузки.

Добавляя к внешней нагрузке интенсивность сил инерции

$$q_1 = -\rho h \partial^2 \zeta / \partial t^2,$$

где  $\rho$  — плотность материала, получаем уравнение движения

$$\nabla^2 \nabla^2 \zeta + \frac{12\rho(1 - \mu^2)}{Eh^2} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = \frac{1}{D} q(x, y, t). \quad (33.1)$$

При свободных колебаниях нагрузка  $q(x, y, t) = 0$  и решение уравнения (33.1) отыскивается в форме

$$\zeta = w(x, y) \cos pt. \quad (33.2)$$

Подставив выражение (33.2) в однородное уравнение, соответствующее уравнению (33.1), получим для амплитудной функции  $w(x, y)$  уравнение в частных производных:

$$\nabla^2 \nabla^2 w - \alpha^4 w = 0 \quad \left( \alpha^4 = p^2 \frac{12 \nu (1 - \mu^2)}{E h^2} \right). \quad (33.3)$$

Уравнение (33.3) может быть представлено в виде

$$(\nabla^2 - \alpha^2)(\nabla^2 + \alpha^2)w = 0,$$

откуда ясно, что решениями его являются, в частности, решения более простых уравнений:

$$(\nabla^2 - \alpha^2)w = 0; \quad (\nabla^2 + \alpha^2)w = 0, \quad (33.4)$$

или в развернутой записи:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \alpha^2 w = 0; \quad (33.5)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \alpha^2 w = 0. \quad (33.6)$$

Из бесчисленного множества решений уравнения (33.3) должны быть отобраны те, которые соответствуют условиям закрепления краев пластины. Эти условия такие же, как и при статическом изгибе, а именно:

на защемленном краю  $w = 0$ ;  $\partial w / \partial n = 0$ ;

на опертном краю  $w = 0$ ;  $M_n = 0$ ;

на свободном краю  $M_n = 0$ ,  $V_n = 0$ .

Здесь  $M_n$  и  $V_n$  — амплитудный изгибающий момент и приведенная поперечная сила на контуре.

Если пластина отнесена к декартовой системе координат  $x, y$ , то  $M_n$  и  $V_n$  определяются формулами

$$\begin{aligned} M_n = & -D \left[ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \cos^2 \theta + \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \sin^2 \theta + \right. \\ & \left. + (1 - \mu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \sin 2\theta \right], \\ V_n = & -D \left\{ \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} [1 + (1 - \mu) \sin^2 \theta] \cos \theta + \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} [2 - \mu - \right. \\ & - 3(1 - \mu) \cos^2 \theta] \sin \theta + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} [2 - \mu - 3(1 - \mu) \sin^2 \theta] \cos \theta + \\ & + \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} [1 + (1 - \mu) \cos^2 \theta] \sin \theta + \\ & \left. + \frac{1 - \mu}{\rho_0} \left[ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \cos 2\theta - 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \sin 2\theta \right] \right\}, \end{aligned}$$

где  $\theta$  — угол, образуемый внешней нормалью к контуру с осью  $x$ ;  $\rho_0$  — радиус кривизны контура.

### § 34. ПРЯМОУГОЛЬНАЯ ПЛАСТИНА ПОСТОЯННОЙ ТОЛЩИНЫ

Пластина, шарнирно опертая по противоположащим сторонам. Точное решение задачи об определении собственных частот и форм колебаний прямоугольной пластины может быть получено, если две противоположащие стороны пластины шарнирно оперты. Закрепление двух других сторон — произвольное.

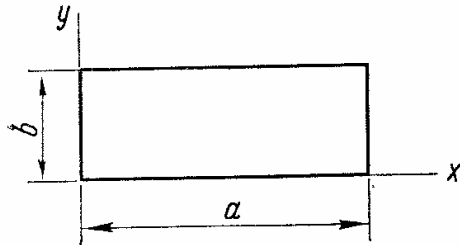


Рис. 34.1

Пусть (рис. 34.1) шарнирно оперты края  $y = 0$  и  $y = b$ . Тогда выражение для амплитудных прогибов, удовлетворяющее условиям шарнирного опирания на этих краях, можно представить в виде

$$w(x, y) = f(x) \sin(n\pi y/b) \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

Подставляя это выражение в уравнения (33.5), (33.6), устанавливаем, что функция  $f(x)$  должна удовлетворять одному из двух уравнений:

$$f''(x) - \alpha_1^2 f(x) = 0 \quad (\alpha_1^2 = \alpha^2 + n^2\pi^2/b^2)$$

или

$$f''(x) + \alpha_2^2 f(x) = 0 \quad (\alpha_2^2 = \alpha^2 - n^2\pi^2/b^2).$$

Решениями этих уравнений являются выражения  $\text{ch } \alpha_1 x$ ,  $\text{sh } \alpha_1 x$ ,  $\cos \alpha_2 x$ ,  $\sin \alpha_2 x$ . Следовательно, общее выражение для  $w(x, y)$  принимает вид

$$w(x, y) = (C_1 \text{ch } \alpha_1 x + C_2 \text{sh } \alpha_1 x + C_3 \cos \alpha_2 x + C_4 \sin \alpha_2 x) \sin n\pi y/b.$$

Это выражение должно удовлетворять граничным условиям при  $x = 0$ ,  $x = a$ . Если эти края пластины также шарнирно оперты, то должно быть:

$$w_{x=0} = 0; \quad \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_{x=0} = 0;$$

$$w_{x=a} = 0; \quad \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_{x=a} = 0.$$

Из условий при  $x = 0$  находим  $C_1 = C_3 = 0$ , а условия при  $x = a$  приводят к уравнениям

$$C_2 \text{sh } \alpha_1 a + C_4 \sin \alpha_2 a = 0;$$

$$C_2 \alpha_1^2 \text{sh } \alpha_1 a - C_4 \alpha_2^2 \sin \alpha_2 a = 0.$$

Приравнивая нулю определитель этих уравнений, получаем уравнение частот

$$\text{sh } \alpha_1 a \sin \alpha_2 a = 0,$$

которое выполняется при  $\alpha_2 a = m\pi$  ( $m = 1, 2, 3, \dots$ ).

Так как  $\alpha_2^2 = \alpha^2 - n^2\pi^2/b^2$ , находим

$$\alpha^2 = m^2\pi^2/a^2 + n^2\pi^2/b^2$$

и собственные частоты пластинки, опертой по контуру,

$$p_{m,n} = \alpha^2 \sqrt{\frac{Eh^2}{12\rho(1-\mu^2)}} = \pi^2 \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) \sqrt{\frac{Eh^2}{12\rho(1-\mu^2)}} \\ (m = 1, 2, 3, \dots; \quad n = 1, 2, 3, \dots). \quad (34.1)$$

Наименьшая частота  $p_1$  соответствует  $m = 1$ ;  $n = 1$ , т. е. колебаниям пластинки без узловых линий:

$$p_1 = \pi^2 \frac{a^2 + b^2}{a^2b^2} \sqrt{\frac{Eh^2}{12\rho(1-\mu^2)}}.$$

Форма колебания определяется выражением

$$w = \sin(\pi x/a) \sin(\pi y/b). \quad (34.2)$$

Подобным же образом приводится расчет и при других условиях закрепления границ:  $x = 0$ ,  $x = a$ .

**Асимптотический метод расчета пластин.** Для прямоугольной пластины с закреплением, отличным от опирания по противоположащим сторонам, применяют различные приближенные методы. Примеры расчетов рассмотрены в § 36. Здесь мы рассмотрим лишь асимптотический метод, предложенный в работах [12, 13].

В пластинках, так же как и в балках, имеет место динамический краевой эффект, который заключается в том, что закрепление влияет на форму колебания только вблизи границы, а вдали от нее форма колебания определяется произведением синусов типа уравнения (34.2). Благодаря этому форму колебания можно представить как сумму функции типа (34.2) и быстро затухающих с удалением от границ функций, которые позволяют выполнить граничные условия.

Рассмотрим применение этого метода на примере заделанной по контуру прямоугольной пластины (рис. 34.2). Ограничимся расчетом симметричных относительно осей  $x$ ,  $y$  форм колебаний. В средней части пластины примем

$$w = w_0 = C_0 \cos \gamma_1 x \cos \gamma_2 y.$$

Вблизи границ  $x = \pm a/2$

$$w = \cos \gamma_2 y [C_0 \cos \gamma_1 x + f(x)],$$

где  $f(x)$  — быстро изменяющаяся функция, позволяющая выполнить условия закрепления.

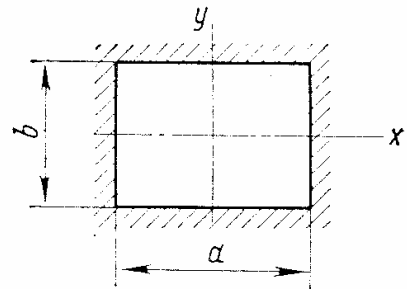


Рис. 34.2

Аналогично, вблизи границы  $y = \pm b/2$

$$w = \cos \gamma_1 x [C_0 \cos \gamma_2 y + \varphi(y)].$$

Таким образом, общее выражение для  $w(x, y)$  составляет

$$w = C_0 \cos \gamma_1 x \cos \gamma_2 y + f(x) \cos \gamma_2 y + \varphi(y) \cos \gamma_1 x. \quad (34.3)$$

В средней части пластинки функции  $f(x)$  и  $\varphi(y)$  пренебрежимо малы и потому первый член выражения (34.3) должен удовлетворять уравнению (33.3). Отсюда находим

$$\alpha^2 = \gamma_1^2 + \gamma_2^2.$$

Вблизи границ  $x = \pm a/2$  существенны первый и второй члены выражения (34.3). Учитывая, что первый член удовлетворяет уравнению (33.3), потребуем, чтобы и второй удовлетворял ему:

$$\nabla^2 \nabla^2 [f(x) \cos \gamma_2 y] - \alpha^4 f(x) \cos \gamma_2 y = 0.$$

Выполняя дифференцирование, приходим к уравнению

$$f^{IV} - 2\gamma_2^2 f'' + (\gamma_2^4 - \alpha^4) f = 0,$$

которое распадается на два:

$$f'' - (\gamma_2^2 + \alpha^2) f = 0; \quad f'' + (\alpha^2 - \gamma_2^2) f = 0.$$

Так как  $\alpha^2 > \gamma_2^2$ , затухающие решения имеет только первое из этих уравнений. Решение, затухающее с удалением от стороны  $x = -a/2$ , имеет вид

$$f(x) = C_1 e^{-\alpha_1 (x+a/2)} \quad (\alpha_1^2 = \alpha^2 + \gamma_2^2 = \gamma_1^2 + 2\gamma_2^2).$$

По симметрии, вблизи стороны  $x = a/2$

$$f(x) = C_1 e^{-\alpha_1 (a/2-x)}.$$

Аналогично, вблизи стороны  $y = -b/2$

$$\varphi(y) = C_2 e^{-\alpha_2 (y+b/2)} \quad (\alpha_2^2 = \alpha^2 + \gamma_1^2 = 2\gamma_1^2 + \gamma_2^2)$$

и вблизи стороны  $y = b/2$

$$\varphi(y) = C_2 e^{-\alpha_2 (b/2-y)}.$$

Рассмотрим граничные условия при  $x = -a/2$ :  $w = 0$ ;  $\partial w / \partial x = 0$

При вычислении  $w$  и  $\partial w / \partial x$  учтем, что практически вдоль всей стороны  $x = -a/2$ , за исключением окрестностей угловых точек, функция  $\varphi(y)$  равна нулю и потому  $w$  определяется первыми двумя слагаемыми выражения (34.3):

$$w_{x=-a/2} \approx [C_0 \cos(\gamma_1 a/2) + C_1] \cos \gamma_2 y = 0;$$

$$\left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)_{x=-a/2} = [C_1 \gamma_1 \sin(\gamma_1 a/2) - \alpha_1 C_1] \cos \gamma_2 y = 0.$$



Для одновременного выполнения этих уравнений необходимо, чтобы их определитель равнялся нулю:

$$\alpha_1 \cos(\gamma_1 a/2) + \gamma_1 \sin(\gamma_1 a/2) = 0. \quad (34.4)$$

Аналогично, условия при  $y = \pm b/2$  приводят к уравнению

$$\alpha_2 \cos(\gamma_2 b/2) + \gamma_2 \sin(\gamma_2 b/2) = 0. \quad (34.5)$$

Так как  $\alpha_1, \alpha_2$  связаны с  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  ( $\alpha_1^2 = \gamma_1^2 + 2\gamma_2^2$ ;  $\alpha_2^2 = 2\gamma_1^2 + \gamma_2^2$ ), трансцендентные уравнения (34.4) и (34.5) позволяют определить значения  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$ , а затем вычислить  $\alpha^2 = \gamma_1^2 + \gamma_2^2$  и частоты  $p = \alpha^2 \sqrt{Eh^2/[12\rho(1-\mu^2)]}$ .

Рассмотрим, например, колебания квадратной пластинки с одинаковым числом узловых линий в направлениях  $x, y$ . В этом случае  $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$ ;  $\alpha_1 = \alpha_2 = \gamma\sqrt{3}$  и уравнения (34.4) и (34.5) приводят к зависимости

$$\operatorname{tg}(\gamma a/2) = -\sqrt{3},$$

откуда

$$\gamma a/2 = 2\pi/3 + (k-1)\pi \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Частоты определяются формулой

$$p_k = 2\gamma^2 \sqrt{\frac{Eh^2}{12\rho(1-\mu^2)}} = 8\left(k - \frac{1}{3}\right)^2 \pi^2 \sqrt{\frac{Eh^2}{12\rho(1-\mu^2)a^4}}.$$

Хороший результат получается уже для низшей частоты:

$$p_1 = 35,6 \sqrt{Eh^2/[12\rho(1-\mu^2)a^4]}$$

(точное значение  $p_1 = 35,98 \sqrt{Eh^2/[12\rho(1-\mu^2)a^4]}$ ).

Как видно из вышеизложенного, при использовании асимптотического метода погрешность возникает вследствие приближенного выполнения граничных условий вблизи угловых точек.

## § 35. КРУГЛАЯ ПЛАСТИНА ПОСТОЯННОЙ ТОЛЩИНЫ

**Определение форм и частот колебаний.** Для круглой пластины следует в уравнениях (33.4) для амплитудной функции  $w$  перейти к полярным координатам  $r, \varphi$ . В этих координатах оператор Лапласа имеет вид

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{r^2 \partial \varphi^2}.$$

Таким образом, уравнения (33.4) в полярных координатах можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial^2 w}{r^2 \partial \varphi^2} - \alpha^2 w &= 0; \\ \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial^2 w}{r^2 \partial \varphi^2} + \alpha^2 w &= 0. \end{aligned} \quad (35.1)$$

Решения этих уравнений, соответствующие колебаниям пластины с  $n$  узловыми диаметрами, можно представить в форме

$$w(r, \varphi) = W(r) \cos n\varphi.$$

После подстановки этого выражения приходим к уравнениям

$$\frac{d^2 W}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dW}{dr} - \frac{n^2}{r^2} W - \alpha^2 W = 0; \quad (35.2)$$

$$\frac{d^2 W}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dW}{dr} - \frac{n^2}{r^2} W + \alpha^2 W = 0. \quad (35.3)$$

Решениями уравнения (35.3) являются бесселевы функции порядка  $n$  первого  $J_n(\alpha r)$  и второго  $Y_n(\alpha r)$  рода, решениями уравнения (35.2) — модифицированные бесселевы функции  $I_n(\alpha r)$ ,  $K_n(\alpha r)$ . Таким образом, общее выражение амплитудной функции с  $n$  узловыми диаметрами таково:

$$w = [C_1 J_n(\alpha r) + C_2 Y_n(\alpha r) + C_3 I_n(\alpha r) + C_4 K_n(\alpha r)] \cos n\varphi. \quad (35.4)$$

Для кольцевой пластинки имеются четыре граничных условия (по два на каждом краю), которые образуют однородную систему относительно констант  $C_1, \dots, C_4$ . Для сплошной пластинки в выражении (35.4) равны нулю коэффициенты  $C_2$  и  $C_4$  при функциях, стремящихся к бесконечности при  $r \rightarrow 0$ . Граничные условия на внешнем контуре пластины образуют в этом случае однородную систему относительно  $C_1$  и  $C_3$ . Уравнение частот получается путем приравнивания нулю определителя системы.

В качестве примера рассмотрим колебания свободной сплошной круглой пластины. В этом случае на контуре должны выполняться условия:

$$M_r = 0; \quad V_r = Q_r + \frac{\partial M_{r\varphi}}{r \partial \varphi} = 0.$$

Изгибающий момент определяется формулой\*

$$M_r = -D \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \mu \left( \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right) \right].$$

Поперечная сила

$$Q_r = -D \frac{\partial}{\partial r} (\nabla^2 w).$$

Крутящий момент

$$M_{r\varphi} = -(1 - \mu) D \left( \frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \varphi} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right).$$

Таким образом, граничные условия имеют такой вид:

$$\begin{aligned} \nabla^2 w - (1 - \mu) \left( \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right) &= 0; \\ \frac{\partial}{\partial r} (\nabla^2 w) + (1 - \mu) \frac{\partial^2}{\partial r \partial \varphi^2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{w}{r^2} \right) &= 0. \end{aligned} \quad (35.5)$$

\* Используемые здесь формулы можно найти, например, в книге [3].

Учитывая, что  $J_n \cos n\varphi$  является решением уравнения  $\nabla^2 w + \alpha^2 w = 0$ , а  $I_n \cos n\varphi$  — уравнения  $\nabla^2 w - \alpha^2 w = 0$ , находим

$$\nabla^2 w = \alpha^2 [-C_1 J_n(\alpha r) + C_3 I_n(\alpha r)].$$

При подстановке в уравнения (35.5) вместо  $w$  его выражения

$$w = [C_1 J_n(\alpha r) + C_3 I_n(\alpha r)] \cos n\varphi$$

учтем также правила дифференцирования функций Бесселя:

$$\frac{d}{dr} J_n(\alpha r) = \frac{\alpha}{2} [J_{n-1}(\alpha r) - J_{n+1}(\alpha r)];$$

$$\frac{d}{dr} I_n(\alpha r) = \frac{\alpha}{2} [I_{n-1}(\alpha r) + I_{n+1}(\alpha r)].$$

Таким образом, приходим к уравнениям

$$\begin{aligned} & C_1 \left\{ \left[ (1-\mu) \frac{n^2}{\lambda^2} - 1 \right] J_n - \frac{(1-\mu)}{2\lambda} (J_{n-1} - J_{n+1}) \right\} + \\ & + C_3 \left\{ \left[ (1-\mu) \frac{n^2}{\lambda^2} + 1 \right] I_n - \frac{1-\mu}{2\lambda} (I_{n-1} - I_{n+1}) \right\} = 0, \\ & C_1 \left\{ (J_{n-1} - J_{n+1}) \left[ (1-\mu) \frac{n^2}{\lambda^2} + 1 \right] - 2(1-\mu) \frac{n^2}{\lambda^3} J_n \right\} + \\ & + C_3 \left\{ (I_{n-1} + I_{n+1}) \left[ (1-\mu) \frac{n^2}{\lambda^2} - 1 \right] - 2(1-\mu) \frac{n^2}{\lambda^3} I_n \right\} = 0. \end{aligned}$$

Здесь аргументом всех бesselевых функций является величина  $\lambda = \alpha R$  ( $R$  — радиус пластинки).

Значения  $\lambda$ , обращающие в нуль определитель полученной системы, связаны с собственными частотами равенством

$$p = \lambda^2 \sqrt{D/(\rho h R^4)}.$$

Если ограничиться формами колебаний без узловых окружностей, то значениям  $n = 0$  и  $n = 1$  соответствуют смещения пластины как жесткой и нулевые частоты. При  $n = 2$  (два узловых диаметра) частотное уравнение можно привести к виду

$$\begin{aligned} & J_0(\lambda) I_0(\lambda) \frac{48(1-\mu)}{\lambda^3} + J_1(\lambda) I_1(\lambda) \left[ \frac{48(1-\mu)(3+\mu)}{\lambda^5} - \right. \\ & \left. - \frac{2(3-\mu)}{\lambda} \right] + J_0(\lambda) I_1(\lambda) \left[ 1 - \frac{12(1-\mu)}{\lambda^2} - \frac{12(1-\mu)(7+\mu)}{\lambda^4} \right] + \\ & + J_1(\lambda) I_0(\lambda) \left[ 1 + \frac{12(1-\mu)}{\lambda^2} - \frac{12(1-\mu)(7+\mu)}{\lambda^4} \right] = 0. \end{aligned}$$

При  $\mu = 0,3$  наименьший корень этого уравнения  $\lambda = 2,275$  и соответствующая частота собственных колебаний

$$p = \lambda^2 \sqrt{D/(\rho h R^4)} = 5,17 \sqrt{D/(\rho h R^4)}.$$

Для заделанной по контуру пластинки граничные условия  $w_{r=R} = 0$  ( $\partial w / \partial r)_{r=R} = 0$  приводят к частотному уравнению

$$\begin{vmatrix} J_n(\lambda) & I_n(\lambda) \\ J_{n-1}(\lambda) - J_{n+1}(\lambda) & I_{n-1}(\lambda) + I_{n+1}(\lambda) \end{vmatrix} = 0.$$

Корни этого уравнения приведены в табл. 35.1, а некоторые формы собственных колебаний представлены на рис. 35.1. Узловые окружности и диаметры показаны на чертеже стрелками.

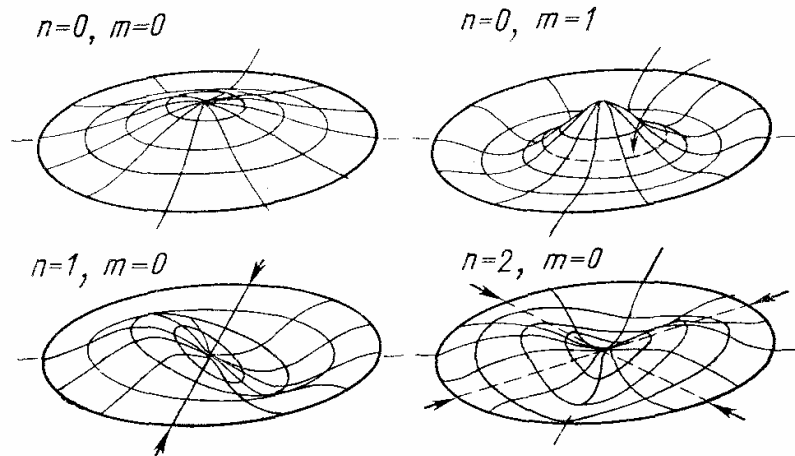


Рис. 35.1

Таблица 35.1

Число узловых окружностей	$\lambda$ в зависимости от числа узловых диаметров		
	$n = 0$	$n = 1$	$n = 2$
$m = 0$	3,19	4,61	5,90
$m = 1$	6,30	7,81	9,40
$m = 2$	9,43	10,98	12,60

**Бегущие волны в круглых пластинах.** Рассмотренные выше собственные колебания круглых пластин описываются уравнением

$$\zeta_1 = W(r) \cos n\varphi \cos pt. \quad (35.6)$$

Они соответствуют стоячим волнам на поверхности пластины, при которых узловые диаметры неподвижны.

Однако наряду с выражением (35.6) решением уравнения движения является выражение

$$\zeta_2 = W(r) \sin n\varphi \sin pt. \quad (35.7)$$

Но, поскольку уравнение движения линейно, сумма и разность выражений (35.6) и (35.7) также являются его решениями.

Выражения

$$\zeta = \zeta_1 + \zeta_2 = W(r) \cos n[\varphi - (p/n)t]$$

и

$$\zeta = \zeta_1 - \zeta_2 = W(r) \cos n[\varphi + (p/n)t]$$

представляют собой уравнения бегущих волн. Первое выражение соответствует вращению всей картины деформаций вокруг оси симмет-

рии пластины в направлении возрастания угла  $\varphi$  с угловой скоростью  $\omega = p/n$ .

Второе выражение соответствует движению волны с той же скоростью в противоположном направлении.

Если имеются внешние нагрузки, вращающиеся по периферии пластины со скоростью, близкой к скорости  $\omega$  распространения собственных колебаний, то такие нагрузки вызовут большие резонансные колебания пластины, так же как это имеет место при движении нагрузки по бесконечной балке (см. § 21).

Практически, движущаяся по круглой пластине нагрузка осуществляется в дисках турбомашин благодаря вращению диска при неподвижной в пространстве нагрузке, обусловленной неравномерностью давления рабочего тела по окружности.

Критические скорости вращения диска  $\omega_{кр}$  могут быть найдены, если известны частоты его собственных колебаний  $p_n$ , по формуле

$$\omega_{кр} = p_n/n, \quad (35.8)$$

где  $n$  — число узловых диаметров при свободном колебании с частотой  $p_n$ .

Методы расчета частот собственных колебаний и критических скоростей дисков рассмотрены в § 49.

### § 36. ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА РЭЛЕЯ—РИТЦА К ОПРЕДЕЛЕНИЮ ЧАСТОТ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ ПЛАСТИН

Метод Рэлея—Ритца (см. § 25) позволяет расчетным путем приближенно определять частоты собственных колебаний пластин переменной толщины и, в частности, дисков турбомашин. Преимуществом этого метода является также возможность легко учесть влияние на частоту различных побочных факторов, например, начальных напряжений в срединной поверхности пластины.

Потенциальная энергия деформации пластины при изгибе ее по форме, определяемой функцией  $w(x, y)$ , выражается интегралом

$$U_0 = \frac{1}{2} \iint D \left\{ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2(1 - \mu) \left[ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \right\} dx dy, \quad (36.1)$$

где  $D = Eh^3/[12(1 - \mu^2)]$ , а интеграл берется по всей поверхности пластины\*.

Обобщенная масса пластины выражается интегралом

$$M = \iint \rho h \dot{w}^2 dx dy. \quad (36.2)$$

---

\* Для пластины постоянной толщины, заделанной по контуру, интеграл от второго слагаемого выражения (36.1) обращается в нуль.

В соответствии с методом Рэлея—Ритца форма колебаний задается в виде ряда

$$\omega = c_1 \omega_1(x, y) + c_2 \omega_2(x, y) + \dots, \quad (36.3)$$

где каждая из координатных функций  $\omega_k(x, y)$  удовлетворяет геометрическим граничным условиям.

Равенство нулю определителя системы уравнений

$$\frac{\partial U_0}{\partial c_k} - \frac{1}{2} p^2 \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial c_k} = 0 \quad (k = 1, 2, \dots) \quad (36.4)$$

позволяет определить частоты собственных колебаний.

Если в выражении (36.3) ограничиваются одним слагаемым, то частота определяется по формуле Рэлея:

$$p^2 = 2U_0/\mathcal{M}. \quad (36.5)$$

Можно задаваться выражением для формы колебаний, в которое параметры  $c_1, c_2, \dots, c_n$  входят нелинейно:

$$\omega = \omega(c_1, c_2, \dots, c_n, x, y).$$

В этом случае уравнения метода Рэлея—Ритца (36.4) оказываются нелинейными и проще исходить не из них, а из условий экстремума выражения (36.5), причем значения параметров, при которых достигается этот экстремум, находятся численными методами.

Рассмотрим в качестве примера заделанную по контуру прямоугольную пластину постоянной толщины (см. рис. 34.2). Ограничиваясь одним слагаемым выражения (36.3), примем

$$\omega = c [1 + \cos(2\pi x/a)] [1 + \cos(2\pi y/b)].$$

Проводя вычисления по формулам (36.1) и (36.2), находим:

$$U_0 = c^2 D 2\pi^4 ab [3/a^4 + 2/(a^2 b^2) + 3/b^4]; \quad \mathcal{M} = 9/4 c^2 \rho h ab.$$

Для частоты колебаний получаем

$$p = \sqrt{2U_0/\mathcal{M}} = 4/3 \pi^2 \sqrt{3 + 2a^2/b^2 + 3a^4/b^4} \sqrt{D/(\rho h a^4)}.$$

В случае  $b = a$

$$p = 37,2 \sqrt{D/(\rho h a^4)},$$

что на 3,3% выше точного значения.

При расчете колебаний круглых пластин целесообразно использовать выражения энергии деформации и обобщенной массы в полярных координатах  $r, \varphi$ :

$$U_0 = \iint \frac{D}{2} \left\{ \left( \frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \omega}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial \varphi^2} \right)^2 + 2(1-\mu) \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \omega}{\partial \varphi} \right) \right]^2 - \right. \\ \left. - 2(1-\mu) \frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \omega}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial \varphi^2} \right) \right\} r dr d\varphi;$$

$$\mathcal{M} = \iint \rho h \omega^2 r dr d\varphi,$$

где интегрирование выполняется по всей срединной поверхности пластины.

При изучении колебаний осесимметричных пластин полагают

$$w(r, \varphi) = W(r) \cos n\varphi.$$

В этом случае интегрирование по  $\varphi$  можно выполнить в общем виде и выражения для  $U_0$  и  $\mathcal{M}$  представляются в форме

$$U_0 = \frac{\pi}{2} \int D \left\{ \left( W'' + \frac{1}{r} W' - \frac{n^2}{r^2} W \right)^2 + 2(1-\mu) n^2 \left[ \left( \frac{1}{r} W \right)' \right]^2 - \right. \\ \left. - 2(1-\mu) W'' \left( \frac{1}{r} W' - \frac{n^2}{r^2} W \right) \right\} r dr; \quad (36.6)$$

$$\mathcal{M} = \pi \int \rho h W^2 r dr. \quad (36.7)$$

Для сплошной свободной пластины вычисления упрощаются, если принять функцию  $W(r)$  в форме, предложенной А. Стодолой:  $W = r^s$ ,

где  $s$  — параметр, определяемый из условий минимума дроби Рэлея  $2U_0/\mathcal{M}$ .

Тогда

$$U_0 = \frac{\pi E}{24(1-\mu^2)} [(s^2 - n^2)^2 + 2(1-\mu)(s-1)(2n^2s - n^2 - s^2)] \int_r h^3 r^{2s-3} dr; \\ \mathcal{M} = \pi \rho \int_r h r^{2s+1} dr. \quad (36.8)$$

Чтобы оценить погрешность метода, применим его к расчету частоты колебаний диска постоянной толщины при двух узловых диаметрах. В этом случае

$$U_0 = \frac{\pi E h^3}{24(1-\mu^2)} R^{2(s-1)} \left[ \frac{(s^2-4)^2}{2(s-1)} + (1-\mu)(8s-4-s^2) \right];$$

$$\mathcal{M} = \pi \rho h R^{2(s+1)} / [2(s+1)].$$

Отсюда

$$p^2 = \frac{2U_0}{\mathcal{M}} = \frac{E h^2}{12\rho(1-\mu^2)R^4} \frac{s+1}{s-1} [(s^2-4)^2 + \\ + 2(1-\mu)(s-1)(8s-4-s^2)].$$

Изменение этой величины в зависимости от параметра  $s$  показано на рис. 36.1. При  $s = 1,742$  достигается минимум  $p^2 = 29,41D/(\rho h R^4)$ . Следовательно, частота составляет  $p = 5,43 \sqrt{D/(\rho h R^4)}$ .

Точное значение частоты, найденное выше, составляет  $5,17 \sqrt{D/(\rho h R^4)}$ .

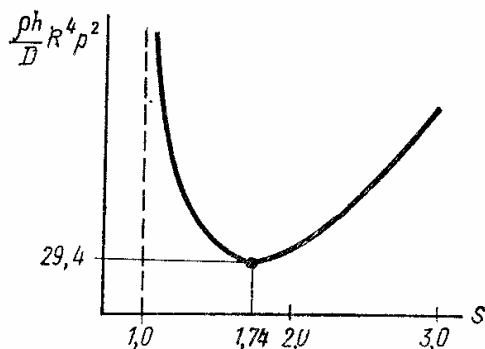


Рис. 36.1

Таким образом, метод Рэлея—Ритца в данном варианте дает ошибку порядка 5%.

### § 37. КОЛЕБАНИЯ ОБОЛОЧЕК

Колебания изгиба пластин можно рассматривать независимо от их колебаний в своей плоскости. В отличие от этого при колебаниях оболочек изгиб стенки связан, как правило, с растяжением срединной поверхности. Потенциальная энергия деформации оболочки выражается формулой

$$U = U_1 + U_2,$$

где

$$U_1 = \frac{1}{2} \iint_{\Omega} \frac{Eh}{1-\mu^2} [(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)^2 + 2(1-\mu)(\gamma_{12}^2/4 - \varepsilon_1\varepsilon_2)] d\Omega, \quad (37.1)$$

$$U_2 = \frac{1}{2} \iint_{\Omega} \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)} [(\kappa_1 + \kappa_2)^2 + 2(1-\mu)(\kappa_{12}^2 - \kappa_1\kappa_2)] d\Omega.$$

Величина  $U_1$  представляет собой энергию растяжения оболочки,  $U_2$  — энергию ее изгиба,  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$ ,  $\gamma_{12}$  — компоненты деформации срединной поверхности,  $\kappa_1$ ,  $\kappa_2$ ,  $\kappa_{12}$  — параметры изменения ее кривизны. Интегрирование в формулах (37.1) выполняется по всей срединной поверхности  $\Omega$  оболочки. Величины  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$ ,  $\gamma_{12}$ ,  $\kappa_1$ ,  $\kappa_2$ ,  $\kappa_{12}$  по известным формулам (см. [3]) выражаются через компоненты амплитудного перемещения  $u$ ,  $v$ ,  $w$  точек оболочки.

Амплитудное значение кинетической энергии движения оболочки, совершающей гармонические колебания с частотой  $\omega$ , составляет

$$T = \frac{1}{2} \omega^2 \mathcal{M}, \quad \mathcal{M} = \iint_{\Omega} \rho h (u^2 + v^2 + w^2) d\Omega.$$

Частота колебаний определяется формулой Рэлея

$$\omega^2 = 2(U_1 + U_2)/\mathcal{M}; \quad (37.2)$$

и числитель и знаменатель дроби (37.2) зависят от выбора функции перемещений  $u$ ,  $v$ ,  $w$ . При этом истинные формы собственных колебаний сообщают выражению (37.2) стационарные значения, а первая собственная форма — минимум.

Обозначим характерный размер оболочки  $R$ , характерную толщину  $h_0$ . Тогда формула (37.2) получает структуру

$$\omega^2 = \frac{E}{(1-\mu^2) \rho R^2} \left( \lambda_1 + \frac{h_0^2}{12R^2} \lambda_2 \right), \quad (37.3)$$

где

$$\lambda_1 = \frac{R^2 \iint_{\Omega} (h/h_0) [(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)^2 + 2(1-\mu)(\gamma_{12}^2/4 - \varepsilon_1\varepsilon_2)] d\Omega}{\iint_{\Omega} (h/h_0) (u^2 + v^2 + w^2) d\Omega},$$



$$\lambda_2 = \frac{R^4 \iint_{\Omega} (h/h_0)^3 \left[ (z_1 + z_2)^2 + 2(1-\mu) (z_{12}^2 - z_1 z_2) \right] d\Omega}{\iint_{\Omega} (h/h_0) (u^2 + v^2 + w^2) d\Omega}$$

— безразмерные величины, зависящие от вида амплитудных функций  $u, v, w$ . Заметим, что второе слагаемое в формуле (37.3), соответствующее энергии изгиба оболочки, имеет малый множитель  $h^2_0/(12R^2)$ . Поэтому при минимизации  $\omega^2$  наиболее существенно уменьшение  $\lambda_1$ , т. е. слагаемого, соответствующего энергии растяжения срединной поверхности.

Если геометрия оболочки и условия ее закрепления это допускают, то наименьшие значения частот отвечают такому выбору функций  $u, v, w$ , при котором  $\lambda_1 \approx 0$ .

Но требование  $\lambda_1 = 0$  может быть выполнено только при  $\varepsilon_1 = 0$ ,  $\varepsilon_2 = 0$ ,  $\gamma_{12} = 0$ , т. е. при отсутствии растяжения срединной поверхности. Такой вид деформации оболочек называется чистым изгибанием.

**Теория колебаний оболочек без растяжения срединной поверхности.** Рассмотрим на основе этой разработанной Рэлеем (см. [42]) теории колебания цилиндрической оболочки (рис. 37.1). Определим положение произвольной точки  $M$  на срединной поверхности оболочки координатами  $\alpha = x/R$ ,  $\beta$ . Компоненты перемещения точки в продольном, окружном и нормальном к поверхности направлениях обозначим соответственно  $u, v, w$ . Компоненты деформации срединной поверхности определяются формулами

$$\varepsilon_1 = \frac{\partial u}{R \partial \alpha}, \quad \varepsilon_2 = \frac{\partial v}{R \partial \beta} + \frac{w}{R}, \quad \gamma_{12} = \frac{\partial u}{R \partial \beta} + \frac{\partial v}{R \partial \alpha}. \quad (37.4)$$

Приравняв  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  и  $\gamma_{12}$  нулю и проинтегрировав полученные уравнения, выразим  $u, v, w$  через две произвольные функции угловой координаты  $\beta$ :

$$u = f_1(\beta), \quad v = -\alpha f'_1(\beta) + f_2(\beta), \quad w = \alpha f''_1(\beta) - f'_2(\beta), \quad (37.5)$$

где штрихи означают дифференцирование.

Из полученных формул видно, что при деформации цилиндрической оболочки без растяжения срединной поверхности образующие остаются прямыми, а осевые перемещения не зависят от продольной координаты.

Формулы показывают, что чистые изгибания замкнутой цилиндрической оболочки возможны: а) если ее торцы свободны (в этом случае отличны от нуля и  $f_1$  и  $f_2$ ); б) если на одном из торцов запрещены перемещения  $v, w$ , но разрешено перемещение  $u$ ; в) если на одном из

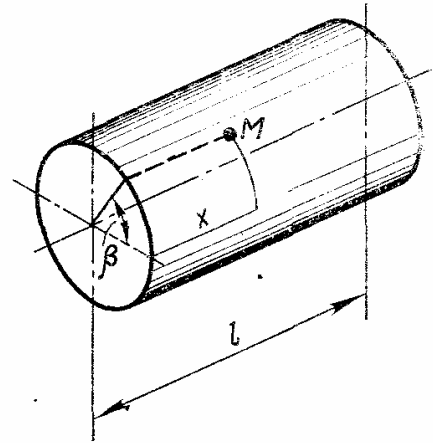


Рис. 37.1

торцов запрещено перемещение  $u$ . Если оболочка оперта на обоих торцах, чистое изгибание ее невозможно.

Составим выражения потенциальной и кинетической энергий оболочки, совершающей гармонические колебания с частотой  $\omega$ . В общем выражении потенциальной энергии деформации сохраняется только слагаемое  $U_2$  (37.1). Входящие в него параметры изменения кривизны определяются формулами

$$\begin{aligned} \kappa_1 &= -\frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} = 0 \\ \kappa_2 &= \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial \beta} \left( v - \frac{\partial w}{\partial \beta} \right) = \frac{1}{R^2} \left\{ -\alpha [f_1'(\beta) + f_1^{IV}(\beta)] + \right. \\ &\quad \left. + f_2'(\beta) + f_2'''(\beta) \right\}, \\ \kappa_{12} &= \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( v - \frac{\partial w}{\partial \beta} \right) = -\frac{1}{R^2} [f_1'(\beta) + f_1'''(\beta)]. \end{aligned}$$

После подстановки этих значений в выражение  $U_2$  (37.1) и интегрирования по  $\alpha$  с учетом того, что  $d\Omega = R^2 d\alpha d\beta$ , найдем

$$\begin{aligned} U = U_2 &= \frac{1}{2R^2} \frac{E}{12(1-\mu^2)} \int_{\beta} \{ A(f_1'' + f_1^{IV})^2 - 2B(f_1'' + f_1^{IV})(f_2' + f_2''') + \\ &\quad + C[(f_2' + f_2''')^2 + 2(1-\mu)(f_1' + f_1''')^2] d\beta, \quad (37.6) \\ \mathcal{M} &= \rho R^2 \int_{\beta} \{ A_1[(f_1')^2 + (f_1'')^2] - 2B_1(f_1'f_2' + f_1''f_2'') + \\ &\quad + C_1[f_1'^2 + f_2'^2 + (f_2'')^2] \} d\beta, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} A &= \int_{\alpha} h^3 \alpha^2 d\alpha, \quad B = \int_{\alpha} h^3 \alpha d\alpha, \quad C = \int_{\alpha} h^3 d\alpha, \\ A_1 &= \int_{\alpha} h \alpha^2 d\alpha, \quad B_1 = \int_{\alpha} h \alpha d\alpha, \quad C_1 = \int_{\alpha} h d\alpha. \end{aligned}$$

Интегралы в выражениях  $A, B, C, A_1, B_1, C_1$  вычисляются по всей длине оболочки.

Из основного уравнения (25.2) метода Рэлея—Ритца следует, что выражение  $\frac{1}{2} p^2 \mathcal{M} - U$ , где  $p$  — частота собственных колебаний, должно иметь стационарное значение

$$\delta \left( \frac{1}{2} p^2 \mathcal{M} - U \right) = 0.$$

Отсюда следует система обыкновенных дифференциальных уравнений для функций  $f_1(\beta), f_2(\beta)$ . В этом случае, если форма всех меридиональных сечений одинакова (толщина оболочки не зависит от  $\beta$ ), коэффициенты  $A, B, C, A_1, B_1, C_1$  постоянны и уравнения получают такой вид:

$$\begin{aligned}
& \left( \frac{d^2}{d\beta^2} + 1 \right)^2 \frac{d^2}{d\beta^2} \left[ A \frac{d^2 f_1}{d\beta^2} - B \frac{df_2}{d\beta} - 2(1-\mu) C f_1 \right] - \\
& - p^2 \frac{12(1-\mu^2) \rho R^4}{E} \left[ A_1 \left( \frac{d^2}{d\beta^2} - 1 \right) \frac{d^2 f_1}{d\beta^2} - \right. \\
& \left. - B_1 \left( \frac{d^2}{d\beta^2} - 1 \right) \frac{df_2}{d\beta} + C_1 f_1 \right] = 0, \\
& \left( \frac{d^2}{d\beta^2} + 1 \right)^2 \frac{d^2}{d\beta^2} \left[ B \frac{df_1}{d\beta} - C f_2 \right] - p^2 \frac{12(1-\mu^2) \rho R^4}{E} \left( \frac{d^2}{d\beta^2} - \right. \\
& \left. - 1 \right) \left[ B_1 \frac{df_1}{d\beta} - C_1 f_2 \right] = 0.
\end{aligned} \tag{37.7}$$

Решение этих дифференциальных уравнений для открытой оболочки должно быть подчинено граничным условиям на продольных кромках.

На этих кромках могут быть заданы перемещения  $u$  (постоянные вдоль каждой кромки), а также перемещения  $v$ ,  $w$  и угол поворота  $\vartheta_2 = \frac{1}{R} \left( v - \frac{\partial w}{\partial \beta} \right)$  в двух различных сечениях по длине оболочки. Итого имеется семь кинематических граничных условий на каждой продольной кромке, что соответствует 14-му порядку уравнений (37.7). Если закрепления отсутствуют, то кинематические граничные условия заменяются естественными граничными условиями.

Если оболочка симметрична относительно поперечного сечения  $\alpha = 0$  (см., например, рис. 37.2), то  $B = B_1 = 0$  и функции  $f_1(\beta)$  и  $f_2(\beta)$  определяются независимыми дифференциальными уравнениями

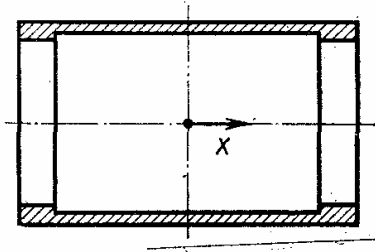


Рис. 37.2

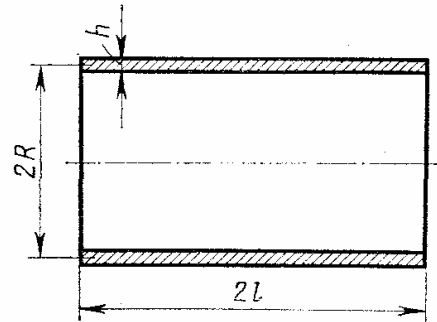


Рис. 37.3

$$\begin{aligned}
& \left( \frac{d^2}{d\beta^2} + 1 \right)^2 \frac{d^2}{d\beta^2} \left[ A \frac{d^2 f_1}{d\beta^2} - 2(1-\mu) C f_1 \right] - \\
& - p^2 \frac{12(1-\mu^2) \rho R^4}{E} \left[ A_1 \left( \frac{d^2}{d\beta^2} - 1 \right) \frac{d^2 f_1}{d\beta^2} + C_1 f_1 \right] = 0, \\
& \left( \frac{d^2}{d\beta^2} + 1 \right)^2 \frac{d^2 f_2}{d\beta^2} - p^2 \frac{12(1-\mu^2) \rho R^4}{E} \frac{C_1}{C} \left( \frac{d^2 f_2}{d\beta^2} - f_2 \right) = 0.
\end{aligned} \tag{37.8}$$

Функция  $f_1$  описывает в этом случае кососимметричные относительно сечения  $\alpha = 0$  формы колебаний, а функция  $f_2$  — симметричные. Уравнение, определяющее функцию  $f_2(\beta)$ , не отличается от уравнения колебаний кольца в своей плоскости.

Для замкнутой оболочки граничные условия заменяются условиями периодичности, которым удовлетворяют функции  $f_1 = M \cos k\beta$ ,  $f_2 = N \cos k\beta$ . В случае симметричной оболочки подстановка этих выражений в уравнения (37.8) приводит к следующим значениям частот:

$$p_{k1}^2 = \frac{1}{12(1-\mu^2)} \frac{E}{\rho R^4} \frac{k^2(k^2-1)^2 [k^2 A + 2(1-\mu)C]}{k^2(k^2+1)A_1 + C_1}$$

для кососимметричных колебаний и

$$p_{k2}^2 = \frac{1}{12(1-\mu^2)} \frac{E}{\rho R^4} \frac{C}{C_1} \frac{k^2(k^2-1)^2}{k^2+1}$$

для симметричных колебаний.

Для оболочки постоянной толщины  $h$  и длины  $2l$  (рис. 37.3)

$$A = 2h^3 \int_0^{l/R} \alpha^2 d\alpha = \frac{2}{3} h^3 \left( \frac{l}{R} \right)^3, \quad C = 2h^3 \int_0^{l/R} d\alpha = 2h^3 \left( \frac{l}{R} \right),$$

$$A_1 = 2h \int_0^{l/R} \alpha^2 d\alpha = \frac{2}{3} h \left( \frac{l}{R} \right)^3, \quad C_1 = 2h \int_0^{l/R} d\alpha = 2h \left( \frac{l}{R} \right).$$

В этом случае

$$p_{k1}^2 = \frac{Eh^2}{12(1-\mu^2)\rho R^4} \frac{k^2(k^2-1)^2 [k^2(l/R)^2 + 6(1-\mu)]}{k^2(k^2+1)(l/R)^2 + 6},$$

$$p_{k2}^2 = \frac{Eh^2}{12(1-\mu^2)\rho R^4} \frac{k^2(k^2-1)^2}{k^2+1}.$$

Как видно из полученных формул, при колебаниях оболочек без растяжения срединной поверхности частоты определяются зависимостями такого же типа, как и для пластин:

$$p = \lambda \sqrt{D/(\rho h R^4)},$$

где  $D$  — цилиндрическая жесткость,  $\lambda$  — числовой коэффициент. При стремлении толщины оболочки к нулю частота ее колебаний без растяжения срединной поверхности также стремится к нулю.

Применим изложенную теорию к расчету низших частот собственных колебаний конструкции, состоящей из круглой пластины и цилиндрической оболочки (гибкое колесо волновой передачи, рис. 37.4).

Считая пластину нерастяжимой, будем иметь в сечении  $A-A$  оболочки граничные условия  $v = 0$ ,  $w = 0$ . Располагая здесь начало отсчета координаты  $\alpha$ , установим [см. формулы (37.4)], что в этом случае функция  $f_2(\beta) \equiv 0$  и перемещения оболочки определяются формулами

$$u = f_1(\beta), \quad v = -\alpha f_1'(\beta), \quad w = \alpha f_1''(\beta).$$

Задавая  $f_1(\beta) = \cos k\beta$ , вычислим по формулам (37.6) энергию

деформации и обобщенную массу оболочки [с учетом того, что  $f_2(\beta) \equiv 0$ ]:

$$U_{об} = \frac{\pi}{2} \frac{E}{12(1-\mu^2)R^2} [k^4(k^2-1)^2 A + 2(1-\mu)k^2(k^2-1)^2 C],$$

$$\mathcal{M}_{об} = \pi \rho R^2 [k^2(k^2+1)A_1 + C_1].$$

Здесь при  $b \ll l$

$$A = \int_0^{l/R} h^3 \alpha^2 d\alpha = \frac{h^3 l^3}{3R^3} \left(1 + \frac{3H^3 b}{h^3 l}\right), \quad C = \int_0^{l/R} h^3 d\alpha = \frac{h^3 l}{R} \left(1 + \frac{H^3 b}{h^3 l}\right),$$

$$A_1 = \int_0^{l/R} h \alpha^2 d\alpha = \frac{h l^3}{3R^3} \left(1 + \frac{3Hb}{hl}\right), \quad C_1 = \int_0^{l/R} h d\alpha = \frac{hl}{R} \left(1 + \frac{Hb}{hl}\right).$$

В месте стыка цилиндрической оболочки и пластины осевое перемещение  $f_1(\beta) = \cos k\beta$ , а угол поворота образующей в своей плоскости

$$\vartheta_1 = -\frac{\partial w}{R \partial \alpha} = -\frac{1}{R} f_1'(\beta) = \frac{k^2}{R} \cos k\beta.$$

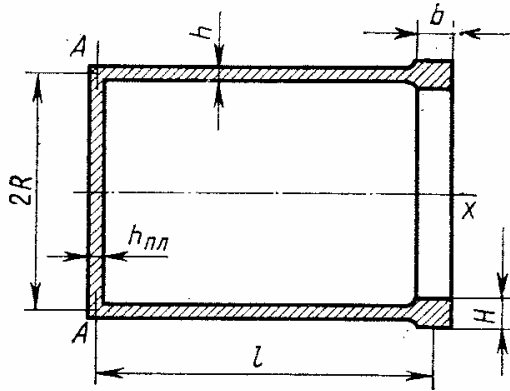


Рис. 37.4

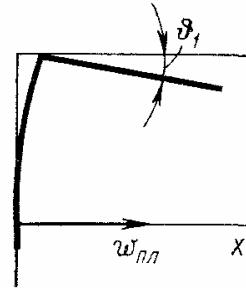


Рис. 37.5

Пластина деформируется также по  $k$  волн, причем на ее внешнем контуре задано (рис. 37.5):

$$w_{пл} = u_{об} = \cos k\beta, \quad \partial w_{пл} / \partial r = \vartheta_1 = (k^2/R) \cos k\beta.$$

Этим условиям можно удовлетворить, если принять упругую поверхность пластины в виде

$$w_{пл} = (r/R)^{k^2} \cos k\beta.$$

Потенциальную энергию и обобщенную массу пластины находим по формулам (36.6), (36.7):

$$U_{пл} = \frac{\pi}{4R^2} D_{пл} k^2 (k^2 - 1) [k^2 + 2(1 - \mu)],$$

$$\mathcal{M}_{пл} = \frac{\pi}{2} \rho h_{пл} R^2 / (k^2 + 1).$$

Суммируя  $U = U_{об} + U_{пл}$ ,  $\mathcal{M} = \mathcal{M}_{об} + \mathcal{M}_{пл}$ , далее находят частоты колебаний по формуле Рэлея:

$$\rho_k^2 = 2U/\mathcal{M}.$$

Конкретные вычисления не представляют затруднений.

Рэлеем (см. [42]) рассмотрены также колебания без растяжения срединной поверхности открытых сферических оболочек.

При закреплении оболочки, исключающем возможность чистого изгиба, расчет колебаний следует основывать на уравнениях, учитывающих растяжение срединной поверхности.

**Уравнения движения оболочек.** Если отнести оболочку к системе гауссовых координат  $\alpha, \beta$ , совпадающих с линиями кривизны срединной поверхности (см. [3]), то уравнения движения могут быть записаны в таком виде:

$$N_{11}u + N_{12}v + N_{13}w = \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad (37.9)$$

$$N_{21}u + N_{22}v + N_{23}w = \rho h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2},$$

$$N_{31}u + N_{32}v + N_{33}w = \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2},$$

где  $u, v, w$  — компоненты перемещения точки срединной поверхности в направлениях  $\alpha$  и  $\beta$ -линий и по нормали,  $\rho h$  — масса оболочки на единицу срединной поверхности,  $N_{ij}$  — дифференциальные операторы. Структура операторов  $N_{ij}$  для оболочек произвольной конфигурации весьма сложна. Поэтому уравнения движения в виде (37.9), т. е. в перемещениях, имеет смысл записывать только для простейшего случая цилиндрической оболочки постоянной толщины, для которой коэффициенты уравнений постоянны. В этом случае

$$\begin{aligned} N_{11} &= \frac{Eh}{(1-\mu^2)R^2} \left( \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \right), \\ N_{12} &= N_{21} = \frac{Eh}{(1-\mu^2)R^2} \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta}, \\ N_{13} &= -N_{31} = \frac{Eh}{(1-\mu^2)R^2} \mu \frac{\partial}{\partial \alpha}, \\ N_{22} &= \frac{Eh}{(1-\mu^2)R^2} \left\{ \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + a^2 \left[ 2(1-\mu) \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \right] \right\}, \\ & \quad (37.10) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N_{23} &= -N_{32} = \frac{Eh}{(1-\mu^2)R^2} \left\{ \frac{\partial}{\partial \beta} - a^2 \left[ (2-\mu) \frac{\partial^3}{\partial \alpha^2 \partial \beta} + \frac{\partial^3}{\partial \beta^3} \right] \right\}, \\ N_{33} &= -\frac{Eh}{(1-\mu^2)R^2} \left[ 1 + a^2 \left( \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \right)^2 \right]. \end{aligned}$$

Здесь  $\alpha = x/R$ ,  $\beta = s/R$  — безразмерные координаты точки на срединной поверхности (см. рис. 37.1),  $a^2 = h^2/(12R^2)$ .

Система уравнений (37.9) имеет восьмой порядок по координатам  $\alpha$ ,  $\beta$  и второй — по времени. Даже тогда, когда уравнения имеют постоянные коэффициенты (т. е. для цилиндрической оболочки) и при рассмотрении гармонических колебаний с частотой  $\omega$ , т. е. при  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\omega^2 u$ ,  $\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = -\omega^2 v$ ,  $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = -\omega^2 w$ , аналитическое решение этих уравнений может быть выполнено лишь при некоторых специально подобранных граничных условиях. В остальных случаях используют приближенные или численные методы расчета.

Особенностью уравнений движения оболочек является то, что, как это видно, в частности, из формул (37.10), в эти уравнения входит малый, пропорциональный квадрату толщины оболочки, параметр  $a^2$ , на который умножаются старшие производные перемещений по координатам. Поэтому, если рассматриваются такие формы колебаний, при которых перемещения медленно меняются по координатам  $\alpha$ ,  $\beta$ , соответствующими (моментными) членами в уравнениях (37.9) можно пренебречь. На основе безмоментной теории рассматривают низшие формы колебаний оболочек, закрепленных так, что обеспечивается возможность безмоментного состояния.

При высших формах собственных колебаний оболочка разбивается узловыми линиями на ряд достаточно пологих сегментов, на каждом из которых напряженное состояние быстро изменяется по координатам. В этом случае для расчета может быть использована так называемая теория пологих оболочек. Применительно к цилиндрической оболочке уравнения теории пологих оболочек получаются из уравнений (37.9), если в операторах  $N_{22}$ ,  $N_{23}$ ,  $N_{32}$  (37.10) опустить слагаемые с множителем  $a^2$ .

Аналитическое решение задачи о собственных колебаниях для замкнутой цилиндрической оболочки может быть получено при так называемых граничных условиях Навье. Согласно этим условиям на торцах оболочки отсутствуют нормальные  $w$  и окружные  $v$  перемещения, а также нормальная сила  $T_x$  в срединной поверхности и изгибающий момент  $M_x$ . Условиям Навье удовлетворяют следующие выражения компонентов перемещения:

$$u = A \cos(m\pi R\alpha/l) \sin n\beta \cos pt,$$

$$v = B \sin(m\pi R\alpha/l) \cos n\beta \cos pt,$$

$$w = C \sin(m\pi R\alpha/l) \sin n\beta \cos pt.$$

Подставив эти выражения в уравнения движения (37.9) с учетом выражений (37.10), приходим к системе трех линейных алгебраических уравнений относительно  $A$ ,  $B$ ,  $C$ .

Равенство нулю определителя этих уравнений приводит к кубическому уравнению относительно  $p^2$ . Три корня этого уравнения соответствуют трем различным формам колебаний с одинаковыми числами

узловых окружностей и образующих, но с различными соотношениями между  $A$ ,  $B$ ,  $C$ .

Вычисления частот и форм колебаний приведены в работах [18, 39]\*.

Следует отметить, что в отличие от пластин, где наименьшие собственные частоты соответствуют формам колебаний без узловых линий, в оболочках, закрепленных так, что деформация их без растяжения срединной поверхности невозможна, наименьшие частоты имеют колебания с узловыми линиями. Это объясняется тем, что формы колебаний без узловых линий связаны со значительными деформациями в срединной поверхности оболочки.

**Собственные колебания оболочек вращения.** Для расчета колебаний оболочек вращения с произвольной формой меридиана целесообразно использовать численные методы.

Перемещения и внутренние силы в оболочке вращения при колебаниях с  $2k$  узловыми меридианами представляют в форме

$$f_i(s, \beta, t) = x_i(s) \cos \omega t \frac{\cos k\beta}{\sin k\beta}, \quad (37.11)$$

где  $s$  — координата, отсчитываемая по дуге меридиана оболочки,  $\beta$  — центральный угол (рис. 37.6). Множитель  $\cos k\beta$  принимают для сим-

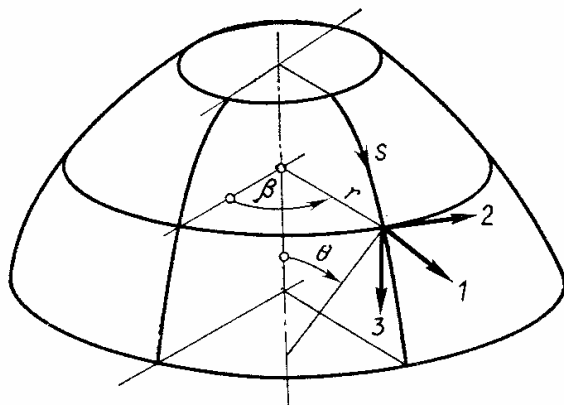


Рис. 37.6

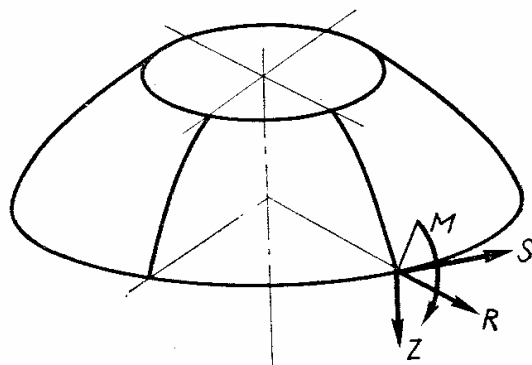


Рис. 37.7

метричных, а множитель  $\sin k\beta$  — для кососимметричных относительно начального меридиана величин.

В качестве основных неизвестных удобно ввести компоненты перемещений и внутренних сил, отнесенные к системе координат, показанной на рис. 37.6. Здесь ось 1 направлена по нормали к оси симметрии оболочки, ось 2 — по касательной к параллельному кругу, а ось 3 параллельна оси симметрии.

Компоненты перемещений точки срединной поверхности по осям 1, 2 и 3 обозначим соответственно  $u_1$ ,  $u_2$ ,  $u_3$ . Кроме того, введем в рас-

\* См. также: Baron L., Bleich H. Tables for frequencies and modes of free vibration of infinitely long thin cylindrical shells. Trans. ASME, Journ. Appl. Mech. vol. 21, № 2, 1954.



смотрение угол поворота нормали к оболочке вокруг оси 2 ( $\vartheta$ ). Внутренние силы, действующие в сечении оболочки, нормальном к меридиану, и отнесенные к единице длины сечения, также разложим по направлениям 1, 2, 3. Здесь учитываются составляющие сил  $R$ ,  $S$ ,  $Z$  и изгибающий момент  $M$  (рис. 37.7).

При колебаниях, симметричных относительно нулевого меридиана при  $2k$  узловых меридианов, перемещения и усилия изменяются в соответствии с равенствами (37.11):

$$\begin{aligned} u_1 &= u_1^k \cos k\beta \cos \omega t, & R &= R^k \cos k\beta \cos \omega t, \\ u_2 &= u_2^k \sin k\beta \cos \omega t, & S &= S^k \sin k\beta \cos \omega t, \\ u_3 &= u_3^k \cos k\beta \cos \omega t, & Z &= Z^k \cos k\beta \cos \omega t, \\ \vartheta &= \vartheta^k \cos k\beta \cos \omega t, & M &= M^k \cos k\beta \cos \omega t. \end{aligned}$$

Величины  $u_1^k$ ,  $u_2^k$ ,  $u_3^k$ ,  $\vartheta^k$  и соответствующие амплитуды усилий являются функциями дуги  $s$ .

Уравнения теории оболочек в переменных  $u_1$ ,  $u_2$ ,  $u_3$ ,  $\vartheta$ ,  $R$ ,  $S$ ,  $Z$ ,  $M$  выведены в работе [3]. Внося в эти уравнения вместо интенсивностей нагрузки интенсивности сил инерции по направлениям 1, 2, 3, приходим к системе обыкновенных дифференциальных уравнений относительно амплитуд перемещений и сил. В матричной форме эти уравнения можно записать так:

$$\frac{d}{ds} X = AX, \quad (37.12)$$

где  $X$  — вектор состояния с компонентами  $x_1 = u_1^k$ ,  $x_2 = u_2^k$ ,  $x_3 = u_3^k$ ,  $x_4 = \vartheta^k$ ,  $x_5 = R^k$ ,  $x_6 = S^k$ ,  $x_7 = Z^k$ ,  $x_8 = M^k$ ,  $A$  — матрица переменных коэффициентов. Элементы матрицы  $A$  см. в табл. 37.1.

Особенностями уравнений в форме (37.12), отличающими их от других аналогичных уравнений, приведенных в литературе, является непрерывность их решений при произвольной форме меридиана, в том числе и с угловыми точками, а также то, что в уравнения не входят кривизна меридиана и производная от толщины  $h$  оболочки.

Решения уравнений (37.12) должны быть подчинены граничным условиям в двух окружных сечениях, ограничивающих оболочку (по четыре условия на каждом краю). Граничные условия накладываются непосредственно на основные неизвестные — перемещения или соответствующие им усилия.

В случае оболочки, замкнутой в полюсе, можно (при  $k > 2$ ) считать, что она заделана на окружности малого радиуса  $r_0$ , и полагать там  $u_1 = u_2 = u_3 = \vartheta = 0$ .

Решить краевую задачу для уравнений (37.12) простейшим способом начальных параметров удастся только для весьма пологих оболочек и при небольших  $k$ . В противном случае численное решение затруднено благодаря наличию быстро возрастающих и быстро убывающих решений. Поэтому следует использовать либо метод диффе-

	$x_1 = u_1^k$	$x_2 = u_2^k$	$x_3 = u_3^k$
$\frac{dx_1}{ds}$	$-\mu \frac{\cos \theta}{r}$	$-k\mu \frac{\cos \theta}{r}$	0
$\frac{dx_2}{ds}$	$k \frac{\cos \theta}{r}$	$\frac{\cos \theta}{r}$	$k \frac{\sin \theta}{r}$
$\frac{dx_3}{ds}$	$-\mu \frac{\sin \theta}{r}$	$-k\mu \frac{\sin \theta}{r}$	0
$\frac{dx_4}{ds}$	$-k^2\mu \frac{\sin \theta}{r^2}$	$-k\mu \frac{\sin \theta}{r^2}$	$k^2\mu \frac{\cos \theta}{r^2}$
$\frac{dx_5}{ds}$	$\frac{Eh}{r^2} \left( 1 + \frac{k^4 h^2}{12r^2} \sin^2 \theta \right) - \rho h \omega^2$	$k \frac{Eh}{r^2} \left( 1 + \frac{k^2 h^2}{12r^2} \sin^2 \theta \right)$	$-\frac{k^4}{r^4} \frac{Eh^3}{12} \times \sin \theta \cos \theta$
$\frac{dx_6}{ds}$	$k \frac{Eh}{r^2} \left( 1 + \frac{k^2 h^2}{12r^2} \sin^2 \theta \right)$	$k^2 \frac{Eh}{r^2} - \rho h \omega^2$	$-\frac{k^3}{r^4} \frac{Eh^3}{12} \sin \theta \cos \theta$
$\frac{dx_7}{ds}$	$-\frac{k^4}{r^4} \frac{Eh^3}{12} \sin \theta \cos \theta$	$-\frac{k^3}{r^4} \frac{Eh^3}{12} \sin \theta \times \cos \theta$	$\frac{Eh^3}{12r^4} \left( \frac{2k^2}{1+\mu} + k^4 \cos^2 \theta \right) - \rho h \omega^2$
$\frac{dx_8}{ds}$	$\frac{k^2}{r^3} \frac{Eh^3}{12} \sin \theta \cos \theta$	$\frac{k}{r^3} \frac{Eh^3}{12} \sin \theta \cos \theta$	$-\frac{k^2 Eh^3}{12r^3} \left( \frac{2}{1+\mu} + \cos^2 \theta \right)$

ренциальной матричной прогонки, изложенный в гл. IV, либо метод ортогонализации С. К. Годунова (см. [3, 49]). При прогонке целесообразно применять метод жесткости. Согласно этому методу при свободных колебаниях векторы  $X_1$  и  $X_2$  перемещений и сил в сечении

$$X_1 = \begin{pmatrix} u_1^k \\ u_2^k \\ u_3^k \\ \vartheta^k \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} R^k \\ S^k \\ Z^k \\ M^k \end{pmatrix}$$

связывают зависимостью

$$X_2 = LX_1, \quad (37.13)$$

Таблица 37.1

$x_4 = \vartheta^k$	$x_5 = R^k$	$x_6 = S^k$	$x_7 = Z^k$	$x_8 = M^k$
$-\sin \theta$	$\frac{1-\mu^2}{Eh} \cos^2 \theta$	0	$\frac{1-\mu^2}{Eh} \sin \theta \times$ $\times \cos \theta$	0
0	0	$\frac{2(1+\mu)}{Eh}$	0	0
$\cos \theta$	$\frac{1-\mu^2}{Eh} \sin \theta \times$ $\times \cos \theta$	0	$\frac{1-\mu^2}{Eh} \sin^2 \theta$	0
$-\mu \frac{\cos \theta}{r}$	0	0	0	$\frac{12(1-\mu^2)}{Eh^3}$
$\frac{k^2}{r^3} \frac{Eh^3}{12} \times$ $\times \sin \theta \cos \theta$	$-(1-\mu) \frac{\cos \theta}{r}$	$-k \frac{\cos \theta}{r}$	$\mu \frac{\sin \theta}{r}$	$k^2 \mu \frac{\sin \theta}{r^2}$
$\frac{k}{r^3} \frac{Eh^3}{12} \sin \theta \times$ $\times \cos \theta$	$k\mu \frac{\cos \theta}{r}$	$-\frac{2 \cos \theta}{r}$	$k\mu \frac{\sin \theta}{r}$	$k\mu \frac{\sin \theta}{r^2}$
$-\frac{k^2 Eh^3}{12r^3} \times$ $\times \left( \frac{2}{1+\mu} + \cos^2 \theta \right)$	0	$-k \frac{\sin \theta}{r}$	$-\frac{\cos \theta}{r}$	$-k^2 \mu \frac{\cos \theta}{r^2}$
$\frac{Eh^3}{12r^2} \left( \frac{2k^2}{1+\mu} + \right.$ $\left. + \cos^2 \theta \right)$	$\sin \theta$	0	$-\cos \theta$	$-(1-\mu) \frac{\cos \theta}{r}$

причем матрица жесткости  $L(4 \times 4)$  определяется дифференциальным уравнением

$$\frac{d}{ds} L = (A_{22} - LA_{12})L - LA_{11} + A_{21}, \quad (37.14)$$

где  $A_{ij}$  — квадратные  $(4 \times 4)$  блоки матрицы  $A$  (см. табл. 37.1):

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ \dots & \dots \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}.$$

Следует обратить внимание на отличие формулы (37.14) от (31.27), что связано с другой нумерацией векторов  $X_1, X_2$ .

Если в начальном сечении оболочка связана со шпангоутом, то начальное значение матрицы динамической жесткости оболочки  $L$  принимается равным матрице динамической жесткости шпангоута. Для наиболее простого случая, когда центр тяжести сечения шпангоута лежит в срединной поверхности оболочки, а одна из главных осей сечения параллельна оси симметрии, матрица жесткости шпангоута имеет вид

$$L_{\text{ш}} = \begin{pmatrix} L_{11}^{\text{ш}} & \vdots & 0 \\ \cdots & \ddots & \cdots \\ 0 & \vdots & L_{22}^{\text{ш}} \end{pmatrix},$$

где

$$L_{11}^{\text{ш}} = \frac{EF}{R^2} \begin{pmatrix} 1 + k^2(k^2 - 1)i^2/R^2 - \omega^2 R^2/a^2 & k \\ k + k(k^2 - 1)i^2/R^2 & k - \omega^2 R^2/a^2 \end{pmatrix},$$

$$L_{22}^{\text{ш}} = \begin{pmatrix} k^2(k^2 EJ_1 + GJ_k)/R^4 - \omega^2 \rho F & -k(EJ_1 + GJ_k)/R^3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Здесь  $F$  — площадь поперечного сечения шпангоута,  $J_1, J_3$  — моменты инерции сечения относительно осей 1, 3;  $i^2 = J_3/F$ ,  $a^2 = E/\rho$ ,  $GJ_k$  — жесткость сечения шпангоута при кручении,  $\rho$  — плотность материала.

Инерция, связанная с поворотами сечения шпангоута, не учитывается.

В случае оболочки, подкрепленной шпангоутами, переход через шпангоут выполняется чрезвычайно просто. Для этого следует только к матрице жесткости отсеченной части оболочки прибавить матрицу жесткости шпангоута, после чего продолжать интегрирование.

После того как интегрирование уравнения (37.14) доведено до края оболочки  $s = l$ , выясняется, удовлетворяются ли одновременно уравнения прогонки

$$X_2(l) = L(l) X_1(l)$$

(четыре скалярных уравнения) и уравнения, выражающие граничные условия при  $s = l$ .

Равенство нулю определителя соответствующей системы свидетельствует о том, что частота  $\omega$ , при которой проводился расчет, является собственной частотой оболочки. В противном случае расчет повторяется при измененном значении  $\omega$ .

При расчете оболочек, замкнутых в полюсе, при  $s \rightarrow 0$  жесткости стремятся к бесконечности. В этом случае следует выделить малый участок радиуса  $r_0$  вблизи полюса и считать, что его жесткость не отличается от жесткости круглой пластины того же радиуса. Соответствующую матрицу жесткости нетрудно вычислить методами, рассмотренными в § 35. Она имеет вид (при  $k \geq 2$ )

$$L_0 = \begin{pmatrix} L_{11}^0 & \vdots & 0 \\ \cdots & \ddots & \cdots \\ 0 & \vdots & L_{22}^0 \end{pmatrix},$$

где

$$L_{11}^0 = \frac{1}{(3-\mu)(1+\mu)} \frac{Eh}{r_0} \begin{pmatrix} 2k - (1-\mu) & 2 - k(1-\mu) \\ 2 - k(1-\mu) & 2k - (1-\mu) \end{pmatrix},$$

$$L_{22}^0 = \frac{D}{r_0^3} \begin{pmatrix} k^2(2k+1+\mu) & -r_0k[k(1+\mu)+2] \\ -r_0k[k(1+\mu)+2] & r_0^2(2k+1+\mu) \end{pmatrix}.$$

Следует отметить, что при расчете высших частот, соответствующих данному числу узловых меридианов, могут возникнуть затруднения, связанные с неограниченным увеличением элементов матрицы жесткости, если расчетная частота является антирезонансной для выделенной части оболочки. В этом случае следует обратить матрицу  $L$ , продолжить расчет методом податливостей и затем вновь вернуться к методу жесткостей.

Другой возможностью является применение метода ортогонализации С. К. Годунова (см. [49]).

В отличие от вынужденных или параметрических колебаний автоколебания возникают в системах при отсутствии внешнего периодического воздействия. Для возникновения автоколебаний в системе необходимо наличие источника энергии и механизма, благодаря которому энергия этого источника превращается в колебательную энергию. Наконец, для того чтобы могли существовать стационарные колебания, система должна обладать нелинейностью.

Автоколебательные системы широко распространены в технике. Так, в частности, автоколебательными являются часовые механизмы. Здесь источником энергии служит заведенная пружина, а механизм хода (например, анкерный) регулирует поступление энергии таким образом, что поддерживает незатухающие колебания маятника. Автоколебательными являются также процессы работы паровой машины, отбойного молотка или электронного генератора.

Большое число автоколебательных систем рассмотрено с физической точки зрения в книге [53]. В пределах настоящей главы мы ограничимся кратким рассмотрением лишь двух примеров автоколебаний — фрикционных автоколебаний и флаттера крыла в дозвуковом потоке. Автоколебания вращающихся валов рассмотрены в § 47.

### § 38. ФРИКЦИОННЫЕ АВТОКОЛЕБАНИЯ

Фрикционные колебания представляют собой простейший пример автоколебаний, возникающих в системе с одной степенью свободы.

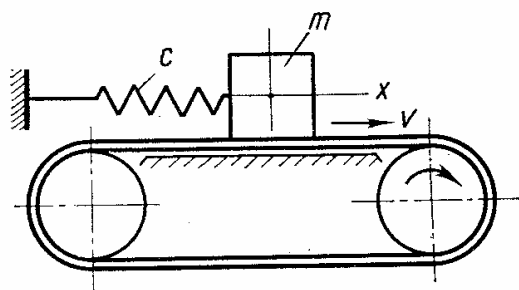


Рис. 38.1

Рассмотрим тело массой  $m$ , находящееся на движущейся с постоянной скоростью  $v$  ленте и удерживаемое пружиной жесткостью  $c$  (рис. 38.1).

На тело действует сила трения  $R(u)$ , зависящая от относительной скорости  $u$  движения тела по ленте. Если положение тела определить координатой  $x$ , то относительная скорость

$$u = v - \dot{x}.$$

Отсчитывая  $x$  от положения, в котором пружина не напряжена, можно записать уравнение движения в виде

$$m\ddot{x} + cx - R(u) = 0. \quad (38.1)$$

Очевидно, что уравнение равновесия будет выполнено при неподвижном грузе, если он получит статическое смещение

$$x_0 = R(v)/c. \quad (38.2)$$

Характер равновесия в этом положении зависит от вида зависимости  $R(u)$ . Для большинства материалов зависимость силы трения от скорости скольжения имеет вид, показанный на рис. 38.2. В некотором диапазоне изменения скорости  $u < u_0$  сила трения уменьшается, а затем начинает возрастать.

Рассмотрим устойчивость положения равновесия груза, определяемого координатой  $x_0$ . С этой целью допустим, что имеется бесконечно малое возмущение  $\xi(t)$ , так что

$$x(t) = x_0 + \xi(t).$$

При этом сила трения будет выражаться формулой

$$R(u) = R(v - \dot{x}) = R(v) - (dR/du)_{u=v} \dot{\xi}. \quad (38.3)$$

Подставляя значения  $x$  и  $R$  в уравнение движения (38.1) и учитывая равенство (38.2), приходим к уравнению

$$m\ddot{\xi} + (dR/du)_{u=v} \dot{\xi} + c\xi = 0. \quad (38.4)$$

Если  $(dR/du)_{u=v} > 0$ , т. е. характеристика трения при данной скорости возрастающая, то решения уравнения (38.4) затухают со временем и положение статического равновесия является устойчивым по отношению к малым возмущениям. В противном случае  $\xi$  возрастает и положение равновесия неустойчиво.

Таким образом, при характеристике трения, показанной на рис. 38.2, положение статического равновесия устойчиво, если скорость движения ленты больше  $u_0$ , и неустойчиво, если  $v < u_0$ .

Примененный прием линеаризации характеристики трения в соответствии с равенством (38.3) позволил определить устойчивость положения равновесия, но не дал никаких сведений об амплитудах развивающихся автоколебаний.

Для решения этого вопроса целесообразно использовать метод осреднения (см. § 9). Аналитический результат можно получить, аппроксимируя тем или иным способом зависимость  $R(u)$ . Представим  $R(u)$  в виде полинома третьей степени:

$$R(v - \dot{x}) = b_0 + b_1 \dot{x} + b_2 \dot{x}^2 + b_3 \dot{x}^3. \quad (38.5)$$

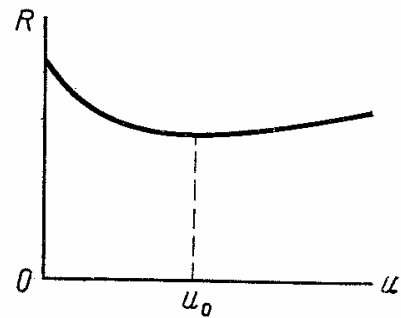


Рис. 38.2

Если рассматривать этот полином, как усеченный ряд Тейлора разложения функции  $R(u)$  около точки  $u = v$ , то

$$b_0 = R(v), \quad b_1 = -\left(\frac{dR}{du}\right)_{u=v},$$

$$b_2 = \frac{1}{2!} \left(\frac{d^2R}{du^2}\right)_{u=v}, \quad b_3 = -\frac{1}{3!} \left(\frac{d^3R}{du^3}\right)_{u=v}.$$

При аппроксимации силы трения выражением (38.5) дифференциальное уравнение движения относительно координаты  $\xi(t) = x(t) - x_0$ , где  $x_0 = b_0/c$ , получит вид

$$m\ddot{\xi} - (b_1\dot{\xi} + b_2\dot{\xi}^2 + b_3\dot{\xi}^3) + c\xi = 0.$$

Разделив это уравнение почленно на  $m$  и прибавив к левой и правой его частям  $\omega^2 \xi$ , где  $\omega$  — искомая частота колебаний, приведем его к виду

$$\ddot{\xi} + \omega^2 \xi = \Phi(\xi, \dot{\xi}), \quad (38.6)$$

где

$$\Phi(\xi, \dot{\xi}) = (\omega^2 - c/m)\xi + (b_1\dot{\xi} + b_2\dot{\xi}^2 + b_3\dot{\xi}^3)/m. \quad (38.7)$$

В соответствии с методом осреднения (см. § 9) представим решение уравнения (38.6) в виде

$$\xi = a \sin(\omega t + \varphi),$$

где  $a$  и  $\varphi$  — медленно меняющиеся функции времени. Скорости изменения амплитуды и фазы определяются формулами (9.12)

$$\dot{a} = \frac{1}{\omega} B(a), \quad \dot{\varphi} = -\frac{1}{\omega a} C(a),$$

где

$$B(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Phi(a \sin \vartheta, a\omega \cos \vartheta) \cos \vartheta d\vartheta,$$

$$C(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Phi(a \sin \vartheta, a\omega \cos \vartheta) \sin \vartheta d\vartheta,$$

а  $\Phi(a \sin \vartheta, a\omega \cos \vartheta)$  — выражение (38.7), в котором  $\xi$  заменено на  $a \sin \vartheta$  и  $\dot{\xi}$  на  $a\omega \cos \vartheta$ . Произведя такую подстановку, вычислим:

$$\Phi(a \sin \vartheta, a\omega \cos \vartheta) = (\omega^2 - c/m) a \sin \vartheta +$$

$$+ (b_1 \omega a \cos \vartheta + b_2 \omega^2 a^2 \cos^2 \vartheta + b_3 \omega^3 a^3 \cos^3 \vartheta)/m,$$

$$B(a) = [b_1 \omega a + 3/4 b_3 \omega^3 a^3]/(2m),$$

$$C(a) = a(\omega^2 - c/m)/2.$$



Дифференциальные уравнения (9.12) получают вид

$$\begin{aligned}\dot{a} &= a(b_1 + \frac{3}{4}b_3\omega^2 a^2)/(2m), \\ \dot{\varphi} &= -(\omega^2 - c/m)/(2\omega).\end{aligned}\tag{38.8}$$

При стационарном режиме движения должно быть  $\dot{a} = 0$ ,  $\dot{\varphi} = 0$ . Отсюда находим, что частота стационарных колебаний  $\omega = \sqrt{c/m}$  совпадает с частотой колебаний консервативной системы, а стационарная амплитуда  $a_*$  определяется равенством

$$\begin{aligned}b_1 + \frac{3}{4}b_3\omega^2 a_*^2 &= 0, \\ \text{откуда} \quad a_* &= \frac{1}{\omega} \sqrt{-\frac{4}{3}b_1/b_3}.\end{aligned}\tag{38.9}$$

Из полученного выражения видно, что стационарные колебания возможны только в том случае, если  $b_1$  и  $b_3$  в выражении (38.5), аппроксимирующем зависимость силы трения от скорости, имеют разные знаки.

Рассмотрим нестационарные колебания. Заметим, что первое из дифференциальных уравнений (38.8) — уравнение с разделяющимися переменными. Обозначив  $b_1/2m = \alpha$ ,  $\frac{3}{4}\omega^2 b_3/b_1 = \beta$ , приведем его к виду

$$da/[a(1 + \beta a^2)] = \alpha dt$$

и после интегрирования

$$\ln(a/\sqrt{|1 + \beta a^2|}) = \alpha t + C_1.$$

Определим постоянную  $C_1$  из условия  $a|_{t=0} = a_0$  и разрешим полученное выражение относительно  $a^2$ :

$$\begin{aligned}C_1 &= \ln(a_0/\sqrt{|1 + \beta a_0^2|}), \\ a^2 &= a_0^2/[(1 + \beta a_0^2)e^{-2\alpha t} - \beta a_0^2].\end{aligned}\tag{38.10}$$

Нетрудно видеть, что при  $\alpha > 0$ ,  $\beta < 0$  (т. е. при  $b_1 > 0$ ,  $b_3 < 0$ ) с увеличением времени амплитуда  $a$  стремится к величине

$$\lim_{t \rightarrow \infty} a = \frac{1}{\sqrt{-\beta}} = a_*,$$

каково бы ни было начальное значение амплитуды  $a_0$ . Характер изменения амплитуды при  $a_0 < a_*$  и  $a_0 > a_*$  показан на рис. 38.3, а.

Пусть теперь  $\alpha > 0$ ,  $\beta > 0$  (т. е.  $b_1 > 0$ ,  $b_3 > 0$ ). Тогда при  $t = t_* = \frac{1}{2\alpha} \ln[(1 + \beta a_0^2)/(\beta a_0^2)]$  знаменатель выражения (38.10) обращается в нуль и амплитуды колебаний неограниченно возрастают (рис. 38.3, б). При  $\alpha < 0$ ,  $\beta > 0$  (т. е.  $b_1 < 0$ ,  $b_3 < 0$ ) знаменатель

формулы (38.10) растет со временем и  $a \rightarrow 0$ . В этом случае положение статического равновесия устойчиво при любых возмущениях.

Остается рассмотреть только случай  $\alpha < 0$ ,  $\beta < 0$  ( $b_1 < 0$ ,  $b_3 > 0$ ). При этом характер движения существенно зависит от начальных условий. Если  $a_0 < a_*$ , то знаменатель формулы

$$\text{Если } a_0 > a_*, \text{ то при } t \rightarrow t_{**} = \frac{1}{2|\alpha|} \ln \frac{|\beta| a_0^2 - 1}{|\beta| a_*^2}$$

$a \rightarrow \infty$ . Характер изменения амплитуд в указанном случае представлен на рис. 38.3, в.

На рис. 38.4, а...г показаны фазовые портреты движения во всех рассмотренных случаях. При  $b_1 > 0$ ,  $b_3 < 0$  независимо от начальных условий фазовые траектории неограниченно приближаются к устойчивому предельному циклу, характеризуемому амплитудой  $a_*$ . Положение статического равновесия является в этом случае так же, как и на рис. 38.4, б, неустойчивым фокусом. При  $b_1 > 0$ ,  $b_3 > 0$  траектории уходят в бесконечность. При  $b_1 < 0$ ,  $b_3 < 0$  все траектории неограниченно приближаются к началу координат — устойчивому фокусу. Наконец, при  $b_1 < 0$ ,  $b_3 > 0$  все траектории, начинающиеся внутри замкнутой траектории  $a = a_*$  неустойчивого предельного цикла, стягиваются к положению статического равновесия, а все траектории, начинающиеся вне этого цикла, уходят в бесконечность. Таким образом, в данном случае положение статического равновесия

устойчиво в малом, но неустойчиво в большом.

Если сила трения сохраняет при скольжении постоянную величину, но меньшую, чем сила трения покоя, также возникают автоколебания. В этом случае легко получить точное решение задачи. Рассмотр-

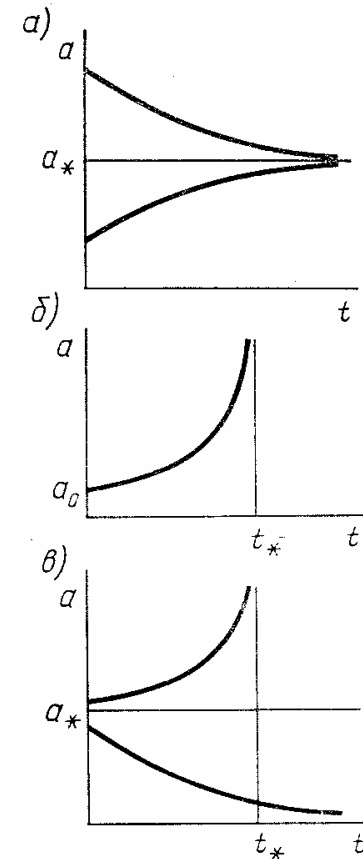


Рис. 38.3

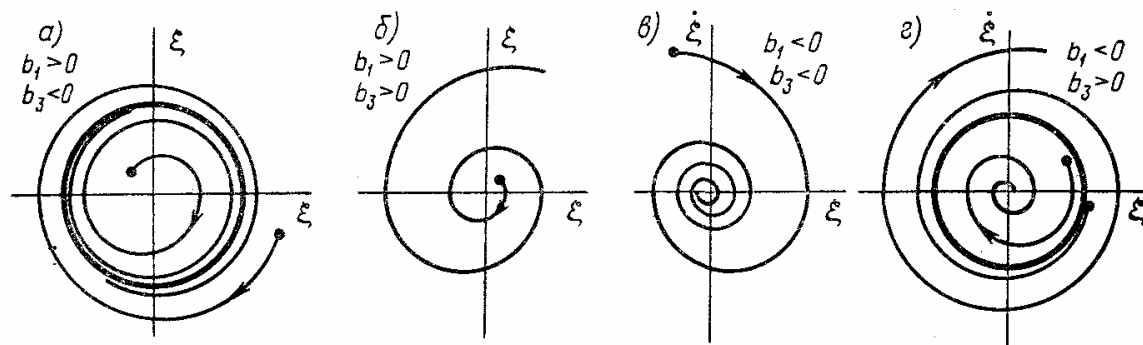


Рис. 38.4

рим снова систему, изображенную на рис. 38.1. Обозначим силу трения покоя  $R_1$ , силу трения движения  $R_2$ , причем  $R_1 > R_2$ .

Положение статического равновесия соответствует смещению груза на величину  $x_0 = R_2/c$ .

Нетрудно убедиться, что это положение равновесия является устойчивым по отношению к малым возмущениям. В самом деле, если грузу в равновесном положении сообщить скорость, по абсолютной величине меньшую скорости ленты  $v$ , то при его последующем движении сила трения о ленту сохранит величину и направление и никак не повлияет на свободные колебания груза.

Однако, если сообщить грузу скорость  $v$ , груз окажется движущимся вместе с лентой, пока сила натяжения пружины не достигнет значения силы трения покоя  $R_1$ . В этот момент (при смещении  $x = R_1/c$ ) произойдет срыв и начнется относительное движение груза. Уравнение движения

$$m\ddot{x} + cx - R_2 = 0 \quad (38.11)$$

проинтегрируем, совместив начало отсчета времени с моментом срыва. В этом случае будем иметь начальные условия:  $t = 0$ ;  $x = R_1/c$ ;  $\dot{x} = v$  и соответствующее этим условиям решение уравнения (38.11)

$$x = R_2/c + [(R_1 - R_2)/c] \cos pt + (v/p) \sin pt. \quad (38.12)$$

Выражение (38.12) справедливо до тех пор, пока скорость движения груза  $\dot{x}$  остается меньше скорости ленты  $v$ , т. е. до момента времени  $t_1$ , определяемого равенством

$$-[(R_1 - R_2)/c] p \sin pt_1 + v \cos pt_1 = v.$$

Это уравнение нетрудно преобразовать к виду

$$2 \sin \frac{pt_1}{2} \left[ \sin \frac{pt_1}{2} + \frac{R_1 - R_2}{cv} p \cos \frac{pt_1}{2} \right] = 0.$$

Наименьшее отличное от нуля значение  $t_1$ , удовлетворяющее этому уравнению, составляет

$$t_1 = \frac{2}{p} \left[ \pi - \operatorname{arctg} \frac{p(R_1 - R_2)}{cv} \right].$$

В момент  $t_1$  смещение

$$x = (2R_2 - R_1)/c.$$

Начиная с момента  $t_1$  груз движется совместно с лентой со скоростью  $v$  до тех пор, пока не произойдет новый срыв при  $x = R_1/c$ , после чего процесс повторяется. Время движения груза совместно с лентой

$$t_2 = 2(R_1 - R_2)/(cv).$$

Таким образом, полный период автоколебаний

$$\tau = t_1 + t_2 = 2 \left[ \frac{R_1 - R_2}{cv} + \frac{\pi}{p} - \frac{1}{p} \operatorname{arctg} \frac{p(R_1 - R_2)}{cv} \right].$$

В зависимости от скорости движения период колебаний меняется от периода собственных колебаний груза на пружине  $2\pi/p$  при  $v \rightarrow \infty$  до

$$\tau = \pi/p + 2(R_1 - R_2)/(cv)$$

при  $v \rightarrow 0$ .

Весьма наглядным является представление автоколебаний рассмотренной системы на фазовой плоскости (рис. 38.5). Здесь часть

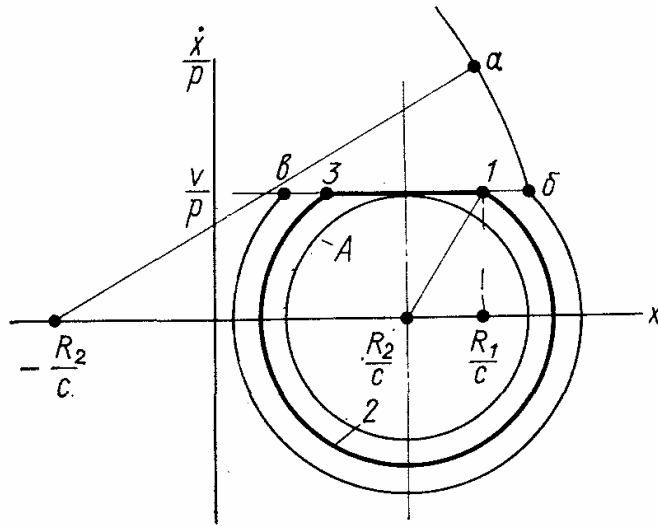


Рис. 38.5

окружности 123 и прямая 31 изображают исследованное выше автоколебательное движение. Если начальные условия системы изображаются точкой, лежащей внутри окружности  $A$ , система совершает свободные колебания, а автоколебания не возникают; в противном случае устанавливаются автоколебания, соответствующие циклу 1231.

Один из возможных путей установления автоколебаний показан тонкой линией  $abv3$ .

### § 39. ФЛАТТЕР КРЫЛА В ДОЗВУКОВОМ ПОТОКЕ

**Ф л а т т е р о м** называются автоколебания тел в потоке газа или жидкости.

При появлении скоростных самолетов в 30-х годах флаттер служил причиной многочисленных катастроф (см. [37]). Явление флаттера тесно связано с теми воздействиями, которые поток воздуха оказывает на колеблющееся крыло.

Поскольку здесь нет возможности рассматривать детально эти воздействия, ограничимся лишь принципиальной картиной явления; подробности и способы расчета реальных конструкций содержатся в специальной литературе (см., например, [6]).

При флаттере крыло самолета совершает изгибно-крутильные колебания. Поэтому для анализа этого явления необходимо учесть по крайней мере две степени свободы крыла. При практических расчетах достаточно учесть движения крыла по первым формам собственных изгибных и крутильных колебаний. Для еще большего упрощения рассмотрим жесткое крыло, имеющее две степени свободы, соответствующие его вертикальному перемещению и повороту (рис. 39.1).

Существенное значение имеет положение центра жесткости крыла, т. е. той точки его хорды, приложение вертикальной силы в которой вызывает только вертикальное перемещение крыла, но не его поворот. К этой точке ( $O$  на рис. 39.1) мы и будем приводить действующие на крыло силы.

Если обозначить вертикальное перемещение центра жесткости крыла  $w$ , а изменение угла атаки крыла в процессе движения  $\alpha$ , то упругие сила и момент, приложенные в точке  $O$ , будут равны соответственно  $c_w w$  и  $c_\alpha \alpha$ , где  $c_w$  и  $c_\alpha$  — коэффициенты жесткости.

Сила инерции и момент сил инерции относительно точки  $O$  составляют:

$$P_j = -m(\ddot{w} - \ddot{\alpha}b);$$

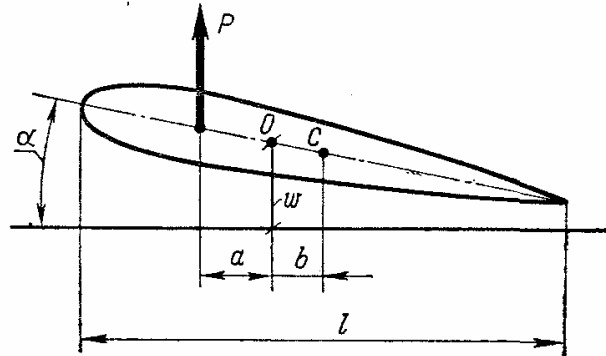


Рис. 39.1

$$M_j = P_j b + m r^2 \ddot{\alpha} = -m b \ddot{w} + m(r^2 + b^2) \ddot{\alpha}. \quad (39.1)$$

Здесь  $b$  — расстояние от центра жесткости до центра массы крыла;  $m$  — масса;  $r$  — радиус инерции массы крыла относительно центральной оси.

Наибольшие трудности представляет определение изменений аэродинамических сил, возникающих в связи с движением крыла. Простейшая гипотеза относительно этих сил состоит в том, что их можно вычислить так же, как и при неподвижном крыле, подставив лишь в соответствующие формулы значения мгновенного угла атаки. В этом предположении получаем увеличение подъемной силы и момента:

$$P = \pi \rho F v^2 (\alpha - \dot{w}/v); \quad M = -P a. \quad (39.2)$$

Здесь  $\rho$  — плотность воздуха;  $v$  — скорость потока;  $F$  — площадь крыла;  $\dot{w}/v$  — уменьшение эффективного угла атаки в связи с вертикальным движением крыла;  $a$  — расстояние от центра жесткости до центра давления (который расположен на одной четверти хорды крыла).

Формулы (39.2) представляют собой грубое приближение, так как в них полностью игнорируется влияние движения крыла на обтекание. Более точное решение задачи (см. [6]) показывает, что если крыло совершает, например, гармонические колебания с частотой  $\omega$ , то следует учитывать еще инерцию присоединенной массы воздуха и то обстоятельство, что изменение подъемной силы оказывается смещенным по фазе относительно изменения угла атаки.

Как величина присоединенной массы, так и фазовый сдвиг зависят от безразмерного параметра  $\omega l/v$ , характеризующего частоту колебаний.

Однако ради упрощения не будем учитывать всех этих обстоятельств и дополнительно в первой из формул (39.2) пренебрежем слагаемым  $\dot{w}/v$ , которое характеризует аэродинамическое демпфирование вертикальных колебаний крыла. Итак, получаем уравнения:

$$\begin{aligned} m(\ddot{w} - b\ddot{\alpha}) + c_w w &= P; \\ -mb\ddot{w} + m(r^2 + b^2)\ddot{\alpha} + c_\alpha \alpha &= Pa, \end{aligned} \quad (39.3)$$

где  $P = \pi \rho F v^2 \alpha$ .

Отыщем решение системы уравнений (39.3) в виде, соответствующем гармоническим колебаниям:

$$w = w_0 e^{i\omega t}; \quad \alpha = \alpha_0 e^{i\omega t}. \quad (39.4)$$

Подстановка этих выражений в уравнения (39.3) приводит к однородным алгебраическим уравнениям относительно  $w_0$  и  $\alpha_0$ :

$$w_0(c_w - m\omega^2) + \alpha_0(m\omega^2 b - \pi \rho F v^2) = 0; \quad (39.5)$$

$$w_0 m \omega^2 b + \alpha_0 [c_\alpha - m\omega^2(r^2 + b^2) - \pi \rho F v^2 a] = 0.$$

Приравняв нулю определитель системы (39.5), получим частотное уравнение. Для того чтобы привести это уравнение к более простому виду, введем следующие обозначения:  $\omega_w = \sqrt{c_w/m}$ ;  $\omega_\alpha = \sqrt{c_\alpha/[m(r^2 + b^2)]}$  — собственные частоты поступательных (изгибных) и крутильных колебаний крыла;  $\mu = 4m/(\rho \pi F l)$  — относительная плотность крыла.

Тогда частотное уравнение можно представить в виде

$$\begin{aligned} \left(\frac{\omega}{\omega_\alpha}\right)^4 - \left(\frac{\omega}{\omega_\alpha}\right)^2 \left[ \left(1 + \frac{\omega_w^2}{\omega_\alpha^2}\right) \left(1 + \frac{b^2}{r^2}\right) - \frac{4}{\mu} \left(\frac{v}{l\omega_\alpha}\right)^2 \times \right. \\ \left. \times \frac{l(a+b)}{r^2} \right] + \left(\frac{\omega_w}{\omega_\alpha}\right)^2 \left[ 1 + \frac{b^2}{r^2} - \frac{4}{\mu} \left(\frac{v}{l\omega_\alpha}\right)^2 \frac{al}{r^2} \right] = 0. \end{aligned} \quad (39.6)$$

При нулевой скорости потока  $v = 0$  это уравнение дает два положительных значения  $\omega^2$ , соответствующих двум собственным частотам системы.

С увеличением скорости потока возможно появление двух типов неустойчивости. Так, один из корней уравнения (39.6) может обратиться в нуль, что соответствует обращению в нуль свободного члена уравнения (39.6):

$$1 + \frac{b^2}{r^2} - \frac{4}{\mu} \left(\frac{v_d}{l\omega_\alpha}\right)^2 \frac{al}{r^2} = 0. \quad (39.7)$$

Обращение в нуль частоты собственных колебаний системы свидетельствует о статической ее неустойчивости. В самом деле, возвращаясь в формуле (39.7) к первоначальным обозначениям, приведем ее к виду

$$\rho \pi F v_d^2 a = c_\alpha.$$

Если это соотношение выполняется, то при повороте крыла на угол  $\alpha$  момент дополнительной подъемной силы

$$Pa = \rho \pi F v_d^2 \alpha x$$

уравновешивается упругим моментом  $c_\alpha \alpha$ .

Явление статической потери устойчивости крыла при достижении скоростью потока значения  $v_d$  называется *дивергенцией*.

Для крыльев самолетов, как правило, скорость дивергенции существенно превышает скорость полета и дивергенция не представляет реальной опасности.

Другой вид потери устойчивости — изгибно-крутильный флаттер — связан с тем, что частоты, определяемые из уравнения (39.6), становятся комплексными. В самом деле, если имеются сопряженные комплексные частоты  $\pm \beta \pm \gamma i$ , то соответствующие решения уравнений движения имеют множители

$$e^{i\omega t} = e^{\pm \gamma t} e^{\pm i\beta t}.$$

Экспоненциальные множители с действительными положительными показателями неограниченно возрастают. Таким образом, в этом случае движение представляет собой колебания с нарастающими амплитудами (колебательный характер движения определяется множителями  $e^{\pm i\beta t}$ ).

Итак, условием наступления флаттера является появление комплексных корней уравнения (39.6), что происходит при обращении в нуль его дискриминанта:

$$\left[ \left( 1 + \frac{\omega_w^2}{\omega_\alpha^2} \right) \left( 1 + \frac{b^2}{r^2} \right) - \frac{4}{\mu} \left( \frac{v_\Phi}{l\omega_\alpha} \right)^2 \frac{l(a+b)}{r^2} \right]^2 - 4 \left( \frac{\omega_w}{\omega_\alpha} \right)^2 \left[ 1 + \frac{b^2}{r^2} - \frac{4}{\mu} \left( \frac{v_\Phi}{l\omega_\alpha} \right)^2 \frac{al}{r^2} \right] = 0. \quad (39.8)$$

Из уравнения (39.8) нетрудно подсчитать скорость флаттера.

Не останавливаясь на дальнейшем анализе этого уравнения, проследим на числовом примере, как изменяются частоты свободных колебаний крыла по уравнению (39.6) при увеличении скорости потока. Допустим, что  $(\omega_w/\omega_\alpha)^2 = 1/10$ ;  $\mu = 10$ ;  $a = 0,1l$ ;  $b = 0,05l$ ;  $r^2/l^2 = 0,06$ .

Этим данным соответствуют скорость дивергенции [найденная по уравнению (39.7)]  $v_d = 1,25\omega_\alpha l$  и скорость флаттера\*  $v_\Phi = 0,836\omega_\alpha l$  [по уравнению (39.8)].

График изменения частот колебаний системы в зависимости от скорости потока, построенный в соответствии с уравнением (39.6), показан на рис. 39.2.

---

\* Отметим, что результат нашего грубого расчета не слишком далек от действительности. В книге [6] приведены графики (рис. 9.5, в), из которых можно установить, что при точном учете аэродинамических воздействий скорость флаттера для данного крыла составляет  $v_\Phi = 1,0 \omega_\alpha l$ .

При  $v = 0$  система имеет две частоты собственных колебаний, мало отличающиеся от частот чисто крутильных и чисто изгибных колебаний. С увеличением скорости потока частоты сближаются и при скорости флаттера оказываются равными друг другу.

Как указывалось в § 13, наличие кратных собственных частот для консервативной системы не связано с какими-либо особенностями

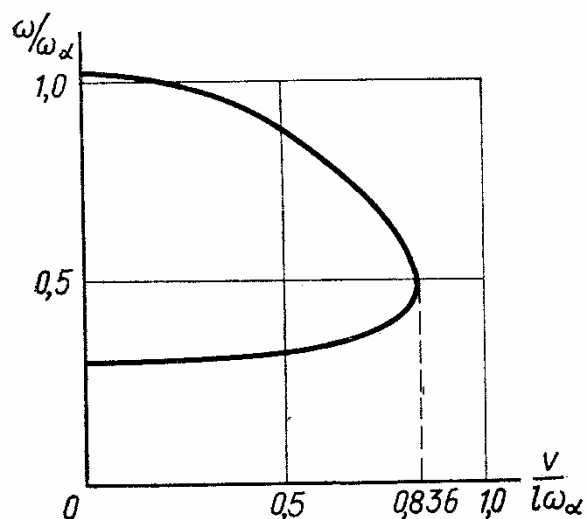


Рис. 39.2

ее поведения. Для неконсервативной системы, которую представляет собой крыло, находящееся в потоке воздуха, слияние двух частот ведет к потере устойчивости движения. В процессе колебаний система начинает интенсивно потреблять энергию потока и амплитуды колебания неограниченно нарастают. Механизм этого явления легко понять, если представить себе, что происходящие с одинаковой частотой крутильные и изгибные колебания крыла сдвинуты по фазе на  $\pi/2$ , так что, когда крыло движется вверх, его угол атаки (а значит, и подъемная сила)

больше, чем когда оно движется вниз. При этом за полный цикл подъемная сила будет совершать положительную работу и энергия колебания будет непрерывно нарастать.

Сделанный вывод о неограниченном росте амплитуд связан с тем, что рассматривалась линейная система уравнений.

Для определения установившихся амплитуд флаттера следует учесть нелинейности как механического, так и аэродинамического характера. Однако этот вопрос не имеет большого практического значения, так как в реальных самолетных конструкциях разрушение при флаттере происходит раньше, чем установится стационарный режим движения.



## ГЛАВА VII

### СЛУЧАЙНЫЕ КОЛЕБАНИЯ

Рассматривая вынужденные колебания, мы считали возмущающие силы детерминированными функциями времени, т. е. изменяющимися в зависимости от времени по известному закону. В большом числе технических задач колебания возбуждаются случайными воздействиями. Примером случайных колебаний являются колебания, вызываемые ветровой нагрузкой. Проектируя то или иное сооружение, мы располагаем лишь статистическими сведениями о ветрах в данной местности (силе и длительности порывов ветра и т. п.), но, конечно, не можем предсказать в точности закон изменения ветрового давления на сооружение во время его эксплуатации. Важными примерами случайных колебаний являются также колебания транспортных машин, вызываемые неровностями дороги, колебания конструкций, вызываемые давлением струи реактивного двигателя, и т. п.

Вопросы теории случайных процессов получили широкое развитие за последние 20 лет, главным образом применительно к задачам автоматического регулирования и связи. С основами теории можно ознакомиться по книгам [15, 44, 45, 47]. Книга [14] специально посвящена применению статистических методов в строительной механике, а книга [46] — расчету случайных колебаний транспортных машин. Некоторые методы расчета случайных колебаний нелинейных систем изложены в работе [29].

В настоящей главе рассмотрены лишь простейшие расчеты. Предполагается, что читатель знаком с теорией вероятностей в объеме общего курса математики для втузов\*.

Необходимые понятия из теории случайных функций приводятся с соответствующими пояснениями.

#### § 40. СЛУЧАЙНЫЕ ФУНКЦИИ

**Основные определения.** С л у ч а й н а я ф у н к ц и я — это функция, значение которой при данном значении независимой переменной является случайной величиной.

В качестве примера случайной функции рассмотрим продольный профиль дороги. Если речь идет об определенном продольном сечении участка дороги длиной  $l$ , то профиль дороги может быть из-

---

\* См.: например: А. Д. М ы ш к и н с. Лекции по высшей математике. М., Наука, 1969.

мерен и значения высоты неровностей в каждой точке над некоторым условным уровнем могут быть изображены графически.

Конечно, вид этой конкретной функции зависит и от выбора участка измерения, и от того, вдоль какой линии проводились замеры. Если повторить замеры вдоль другой линии, мы получим другой график

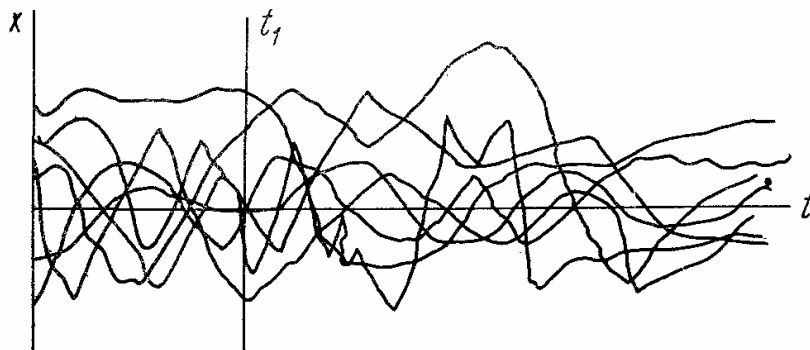


Рис. 40.1

Каждый из конкретных графиков зависимости высоты неровностей от пути можно рассматривать как одну из возможных реализаций случайной функции  $x(z)$ . Сама случайная функция задается множеством своих реализаций. Количество возможных различных реализаций, вообще говоря, бесконечно.

Случайная функция  $x(t)$ , независимой переменной в которой является время, называется также случайным процессом. Значение случайной функции при фиксированном значении аргумента  $t = t_1$  является случайной величиной, различной для различных реализаций (рис. 40.1). Эта случайная величина характеризуется определенным законом распределения  $f(x, t_1)$ , представляющим собой отношение к  $dx$  вероятности того, что  $x(t_1)$  заключена в пределах  $x, x + dx$ .

Одной из вероятностных характеристик случайной функции является математическое ожидание

$$m_x(t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{r=1}^N x_r(t) = M[x(t)]. \quad (40.1)$$

Здесь символ математического ожидания  $M[\ ]$  означает осреднение значения  $x$  в данный момент  $t$  по всем возможным реализациям  $x_r (r = 1, 2, \dots, \infty)$ . Если известен закон распределения  $f(x, t)$ , то математическое ожидание можно также вычислить по формуле

$$M[x(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x, t) dx. \quad (40.2)$$

Величина  $m_x(t)$ , представляющая собой среднее вероятное значение  $x$  в момент  $t$ , является неслучайной функцией времени. Разность случайной функции и ее математического ожидания

$$x(t) - m_x(t) \quad (40.3)$$

называется *центрированной случайной функцией*. Естественно, что

$$M \left[ x(t) \right] = 0.$$

В дальнейшем будем рассматривать колебания линейных систем. Для таких систем справедлив принцип суперпозиции и движение, вызванное случайной нагрузкой:

$$x(t) = m_x(t) + x(t),$$

складывается из движения, вызываемого детерминированной нагрузкой  $m_x(t)$ , и действительно случайных колебаний, обусловленных нагрузкой  $x(t)$ . Для расчета первого из этих движений используются обычные методы расчета вынужденных колебаний. Поэтому в дальнейшем рассматриваются в основном *центрированные случайные функции*.

Разброс случайной функции около своего среднего значения характеризуется дисперсией, т. е. средним (по возможным реализациям) квадратом отклонения:

$$D(t) = M \left[ x^2(t) \right]. \quad (40.4)$$

Наряду с дисперсией рассматривают и *среднеквадратическое отклонение* («стандарт»):

$$\sigma_x(t) = \sqrt{D(t)}. \quad (40.5)$$

Как дисперсия, так и *среднеквадратическое отклонение* являются *нелучайными функциями*.

Величина дисперсии, характеризующая разброс значений функции  $x(t)$  в данном сечении, никак не определяет характера изменения случайной функции в зависимости от аргумента  $t$ . Так, например, функции, некоторые реализации которых представлены на рис. 40.2, соответствуют примерно одинаковым значениям дисперсии, однако характер их изменения совершенно различен.

На рис. 40.2, а представлен график *случайной постоянной*, на рис. 40.2, б — *медленно*, а на рис. 40.2, в — *быстро* изменяющейся функции.

В значительной степени поведение случайного процесса во вре-

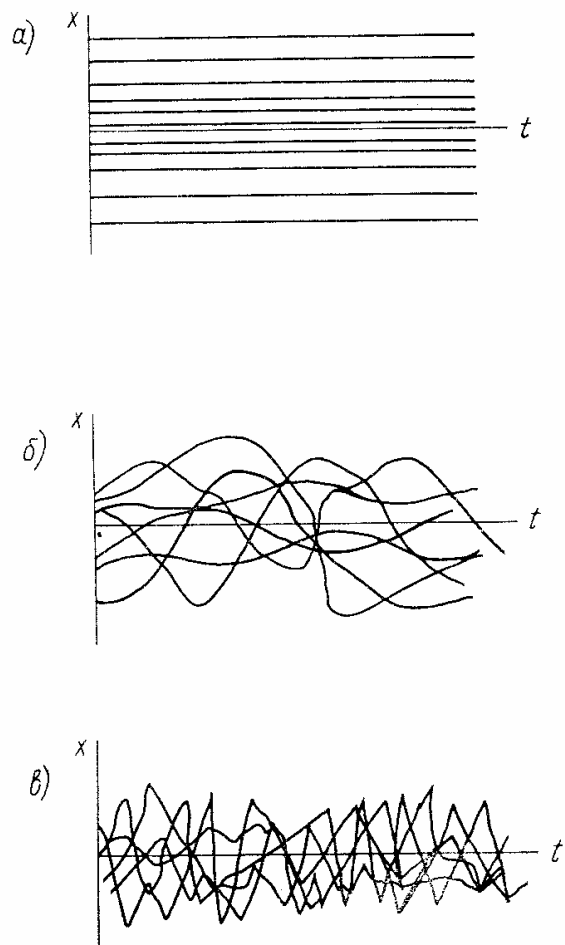


Рис. 40.2

мени характеризуется его корреляционной функцией

$$K_x(t_1, t_2) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{r=1}^N \overset{0}{x}_r(t_1) \overset{0}{x}_r(t_2) = M[\overset{0}{x}(t_1) \overset{0}{x}(t_2)]; \quad (40.6)$$

здесь осреднение выполняется по всем реализациям функции  $x(t)$ .

Корреляционная функция отражает связь между значениями случайной функции при двух разных значениях независимой переменной.  $K_x(t_1, t_2)$  является симметричной функцией своих аргументов:

$$K_x(t_1, t_2) = K_x(t_2, t_1).$$

При  $t_1 = t_2$  формула (40.6) совпадает с формулой (40.4) и корреляционная функция оказывается равной дисперсии:

$$K_x(t, t) = D_x(t). \quad (40.7)$$

Важным классом случайных функций являются стационарные случайные функции, т. е. такие функции, вероятностные характеристики которых одинаковы при всех значениях  $t$ . В частности, для стационарной случайной функции постоянны дисперсия и среднеквадратическое отклонение. Нетрудно показать, что для стационарной случайной функции  $x(t)$  корреляционная функция  $K_x(t_1, t_2)$  не зависит от  $t_1$  и  $t_2$  в отдельности, а зависит только от разности  $t_2 - t_1 = \tau$ . В самом деле,

$$K_x(t_1, t_2) = K_x(t_1, t_1 + \tau).$$

Но по определению стационарной случайной функции эта величина не зависит от  $t_1$ . В этом случае будем пользоваться обозначением

$$K_x(t, t + \tau) = k_x(\tau).$$

Из формулы (40.7) следует, что дисперсия стационарной случайной функции

$$D_x = k_x(0). \quad (40.7a)$$

Наряду с корреляционной функцией характеристикой стационарной случайной функции является ее спектральная функция  $S(\omega)$ . Как увидим далее, спектральная и корреляционная функции тесно связаны между собой.

**Спектральное разложение случайной функции.** Пусть центрированная случайная функция  $x(t)$  наблюдается в интервале  $0 \leq t \leq T$ . Тогда, если каждая реализация  $x_r(t)$  функции удовлетворяет условиям Дирихле, ее можно представить в виде ряда Фурье

$$x_r(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (a_{rk} \cos \omega_k t + b_{rk} \sin \omega_k t),$$

где  $\omega_k = k2\pi/T$ .

Очевидно, что для случайной функции справедливо то же разложение:

$$\overset{0}{x}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k \cos \omega_k t + b_k \sin \omega_k t), \quad (40.8)$$

где  $a_k, b_k$  — случайные величины, значения которых различны для каждой реализации.

Будем считать, что случайные величины  $a_k, b_k, a_j, b_j$  имеют нулевое математическое ожидание и независимы (корреляция между ними отсутствует). В этом случае, как известно, равны нулю корреляционные моменты этих величин\*:

$$M[a_k b_j] = 0$$

и при  $k \neq j$

$$M[a_k a_j] = 0; \quad M[b_k b_j] = 0. \quad (40.9)$$

При выполнении условий (40.9) разложение (40.8) случайной функции  $x(t)$  называется каноническим.

Вычислим корреляционную функцию для случайной функции, заданной каноническим разложением (40.8):

$$\begin{aligned} K_x(t_1, t_2) &= M\left[x(t_1) x(t_2)\right] = \\ &= M\left[\sum_{k, j} (a_k \cos \omega_k t_1 + b_k \sin \omega_k t_1) (a_j \cos \omega_j t_2 + b_j \sin \omega_j t_2)\right]. \end{aligned}$$

Изменяя порядок суммирования и вычисления математического ожидания и выполняя перемножение, находим

$$\begin{aligned} K_x(t_1, t_2) &= \sum_{k, j} \{M[a_k a_j] \cos \omega_k t_1 \cos \omega_j t_2 + M[b_k b_j] \sin \omega_k t_1 \sin \omega_j t_2 + \\ &+ M[a_k b_j] \cos \omega_k t_1 \sin \omega_j t_2 + M[b_k a_j] \sin \omega_k t_1 \cos \omega_j t_2\}. \end{aligned}$$

Учитывая равенства (40.9), устанавливаем, что в выражении в фигурных скобках сохраняются только слагаемые с множителями

$M[a_k a_j]$  и  $M[b_k b_j]$  при  $k = j$ . Следовательно,

$$K_x(t_1, t_2) = \sum_k [D_{ka} \cos \omega_k t_1 \cos \omega_k t_2 + D_{kb} \sin \omega_k t_1 \sin \omega_k t_2],$$

где  $D_{ka} = M[a_k^2]$ ,  $D_{kb} = M[b_k^2]$  — дисперсии коэффициентов  $a_k, b_k$ .

В случае стационарного случайного процесса корреляционная функция зависит только от разности  $t_2 - t_1 = \tau$ . Для этого необходимо, чтобы дисперсии  $D_{ka}$  и  $D_{kb}$  были одинаковыми:

$$D_{ka} = D_{kb} = \Delta_k D.$$

Тогда

$$K_x(t_1, t_2) = k_x(\tau) = \sum_k \Delta_k D \cos \omega_k \tau. \quad (40.10)$$

Как видим, корреляционная функция представляет собой четную функцию  $\tau$ , один период которой размещается в интервале  $-T/2 < \tau < T/2$  (рис. 40.3).

---

\* Корреляционным моментом случайных величин называется математическое ожидание их произведения.

Формула (40.10) устанавливает связь между корреляционной функцией  $k_x(\tau)$  стационарной случайной функции  $x(t)$ , заданной разложением (40.8) и дисперсиями коэффициентов этого разложения. Полагая в формуле (40.10)  $\tau = 0$ , находим дисперсию случайной функции:

$$D_x = k_x(0) = \sum_k \Delta_k D. \quad (40.11)$$

Она равна сумме дисперсий коэффициентов при гармониках всех частот в выражении (40.8).

Распределение дисперсии этих коэффициентов по частотам называется спектром (энергетическим) случайного процесса.

Для процесса, заданного в интервале  $T$ , спектр является линейчатым (рис. 40.4), причем расстояние по оси  $\omega$  между соседними гар-

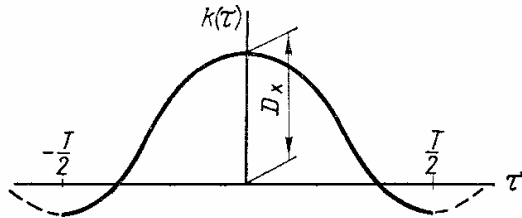


Рис. 40.3

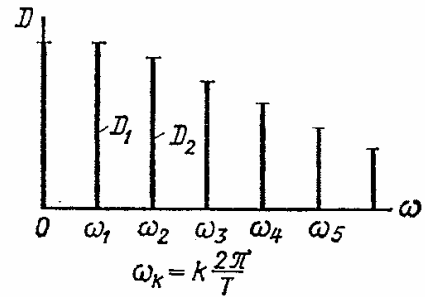


Рис. 40.4

мониками составляет  $2\pi/T$ . С увеличением времени  $T$  расстояние между гармониками уменьшается, уменьшаются и величины  $\Delta_k D$  (так как их сумма остается равной дисперсии случайной функции  $D_x$ ).

В пределе мы приходим к непрерывному спектру, в котором дисперсия гармоник с частотами, заключенными между  $\omega$  и  $\omega + d\omega$ , составляет

$$dD(\omega) = S(\omega) d\omega.$$

Функция  $S(\omega)$  называется спектральной функцией\* случайного процесса. Она представляет собой плотность распределения дисперсии по частоте.

Формула (40.10), связывающая корреляционную функцию с дисперсией, при непрерывном спектре переходит в формулу

$$k_x(\tau) = \int_0^{\infty} S(\omega) \cos \omega \tau d\omega. \quad (40.12)$$

Формула (40.12) представляет собой частный вид преобразования Фурье (косинус-преобразование). Выполняя обратное преобразова-

\* В некоторых работах за спектральную функцию принимают функцию, отличающуюся от  $S(\omega)$  постоянным множителем. Так, например, в книге [46] введена спектральная функция  $\Phi(\omega) = \pi S(\omega)$ .

ние, можно теперь выразить спектральную функцию через корреляционную:

$$S(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} k(\tau) \cos \omega \tau d\tau. \quad (40.13)$$

Формулы (40.12) и (40.13), связывающие между собой корреляционную и спектральную функции стационарного случайного процесса, называются соотношениями Хинчина — Винера. Дисперсия процесса выражается формулой

$$D_x = k_x(0) = \int_0^{\infty} S(\omega) d\omega. \quad (40.14)$$

Заметим, что спектральное разложение (40.8) на конечном интервале для стационарной случайной функции можно также записать в виде

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \cos(\omega_k t + \varphi_k),$$

где  $c_k$ ,  $\varphi_k$  — случайные величины.

Так как  $c_k^2 = a_k^2 + b_k^2$ , то  $D_{kc} = 2\Delta_k D$ . Отсюда следует, что вероятностные свойства такой стационарной случайной функции целиком определяются распределением дисперсии амплитуд  $c_k$ . Фаза  $\varphi_k$  здесь несущественна (так как в связи с независимостью  $a_k$  и  $b_k$   $\varphi_k$  равномерно распределено в интервале  $0 \dots 2\pi$ ). В частности, при непрерывном спектре спектральная функция  $S(\omega)$  равна половине плотности дисперсии амплитуды  $c(\omega)$ .

**Экспериментальное определение корреляционной и спектральной функций. Эргодическая гипотеза.** Вероятностные характеристики стационарной случайной функции никогда не бывают известны с полной точностью. О них можно судить лишь на основе статистического анализа некоторых доступных для наблюдения реализаций функции. При этом точность результата зависит от числа и длительности подвергнутых статистической обработке реализаций. Так, для того чтобы вычисление корреляционной функции по формуле с конечным числом слагаемых

$$k(\tau) = \frac{1}{N} \sum_{r=1}^N x_r(t_1) x_r(t_1 + \tau) \quad (40.15)$$

вместо формулы

$$k(\tau) = M[x(t_1) x(t_1 + \tau)]$$

было надежным, необходимо располагать достаточно большим числом реализаций  $N$ . Вместе с тем при недостаточном числе реализаций  $N$  величина  $\frac{1}{N} \sum_{r=1}^N x_r(t_1) x_r(t_1 + \tau)$  окажется зависящей от вы-

бора момента  $t_1$ , даже для заведомо стационарной случайной функции. Очевидно, в этом случае целесообразно осреднить получаемые значения по времени.

Таким образом, при продолжительности наблюдений  $T$  придем к формуле

$$k(\tau) = \frac{1}{T-\tau} \int_0^{T-\tau} \frac{1}{N} \sum_{r=1}^N x_r^0(t) x_r^0(t+\tau) dt,$$

или

$$k(\tau) = \frac{1}{N} \sum_{r=1}^N \frac{1}{T-\tau} \int_0^{T-\tau} x_r^0(t) x_r^0(t+\tau) dt.$$

Возникает вопрос о количестве  $N$  реализаций, необходимых для вычисления  $k(\tau)$ . Очевидно, что ответ на этот вопрос зависит от того, насколько типичны реализации, принимаемые в расчет, и в какой мере они определяют поведение случайной функции в целом. В благоприятном случае достаточно одной длительной реализации. Такие стационарные процессы, при которых одна достаточно длительная реализация обладает статистическими свойствами, характеризующими процесс в целом, называются э р г о д и ч е с к и м и.

Следует отметить, что при разумной классификации случайного процесса и разумном выборе расчетной его реализации гипотезу об эргодичности процесса удастся использовать в большинстве расчетов стационарных случайных процессов.

Рассмотрим, например, уже упомянутый случай дорожных неровностей. Можно считать, что высота дорожных неровностей представляет собой случайную функцию, реализациями которой являются, например, профили дороги, проходимой автомобилем в течение рабочего дня. В этом случае реализации будут различными по своим статистическим свойствам в зависимости от того, проходит ли маршрут автомобиля по асфальтобетонной дороге, булыжнику и т. п.

Очевидно, что целесообразно считать случайной функцией профиль дороги данного типа (например, асфальтобетонной). В этом случае различные реализации (например, профили мерных участков) будут статистически меньше различаться друг от друга. Однако и здесь возможно значительное различие, например за счет состояния дороги (новая, выбитая и т. п.).

Есть два пути использования эргодической гипотезы в этом случае. Один состоит в дальнейшем уточнении понятия случайной функции [например, профиль новой (выбитой) асфальтобетонной дороги]. Другой путь состоит в том, что расчетная реализация случайной функции (профиль асфальтобетонной дороги) составляется из профилей нескольких участков дорог, находящихся в различном техническом состоянии, причем они включаются в соотношениях, соответствующих распределению состояния дорог такого типа\*.

\* При использовании таких «составных» случайных функций нужна осторожность. Так, если окажется, что при движении автомобиля по расчетной дороге его комфортабельность достаточно высока, то это отнюдь не гарантирует его комфортабельности в других условиях. }



Если стационарный случайный процесс является эргодическим, то при вычислении его статистических характеристик осреднение по реализациям может быть заменено осреднением по времени:

$$m_x = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt;$$

$$k_x(\tau) = \frac{1}{T-\tau} \int_0^{T-\tau} \overset{0}{x}(t) \overset{0}{x}(t+\tau) dt \quad | \quad \overset{0}{x}(t) = x(t) - m_x|;$$

$$D_x = k_x(0) = \frac{1}{T} \int_0^T [\overset{0}{x}(t)]^2 dt.$$

Длительность реализации  $T$  выбирается достаточной для получения стабильных значений. Расчет может выполняться вручную (что весьма трудоемко) или с помощью специальных приборов.

По корреляционной функции в соответствии с формулой (40.13) рассчитывается спектральная функция. Для вычисления по формуле (40.13) корреляционную функцию аппроксимируют обычно каким-либо подходящим аналитическим выражением. Часто для аппроксимации опытной корреляционной функции используют выражение

$$k(\tau) = D e^{-\gamma |\tau|} \cos \beta \tau. \quad (40.16)$$

Это выражение содержит два параметра  $\gamma$  и  $\beta$ , которые можно подобрать из условия наилучшего приближения опытной кривой (например, методом наименьших квадратов).

Корреляционной функции (40.16) соответствует спектральная функция

$$S(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} k(\tau) \cos \omega \tau d\tau = \frac{1}{\pi} D \gamma \left[ \frac{1}{\gamma^2 + (\beta + \omega)^2} + \frac{1}{\gamma^2 + (\beta - \omega)^2} \right]. \quad (40.17)$$

Характер изменения функций  $k(\tau)$  и  $S(\omega)$  показан на рис. 40.5.

Полезной абстракцией является представление случайного процесса как «белого шума». Для белого шума характерно равномерное распределение дисперсии по частотам. Соответствующая корреляционная функция равна нулю везде, кроме  $\tau \rightarrow 0$ ; здесь она неограниченно возрастает. В этом случае

$$S(\omega) = S_0 = \text{const}; \quad k(\tau) = \frac{\pi}{2} \delta(0),$$

где  $\delta$  — импульсная дельта-функция.

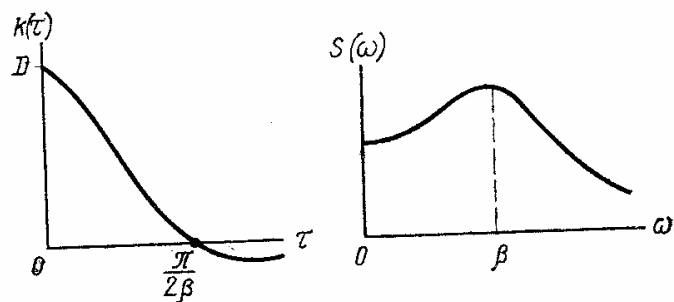


Рис. 40.5

Белый шум не может реально существовать, так как этот процесс имеет бесконечную дисперсию (и, следовательно, мощность).

Часто также рассматривают случайные функции, имеющие постоянную плотность распределения дисперсии в ограниченном диапазоне частот (ограниченный белый шум) (рис. 40.6, а). В этом случае при  $0 < \omega < \omega_0$   $S(\omega) = D/\omega_0$ , при  $\omega > \omega_0$   $S(\omega) = 0$ . [Заметим, что в соответствии с формулой (40.14) площадь графика спектральной

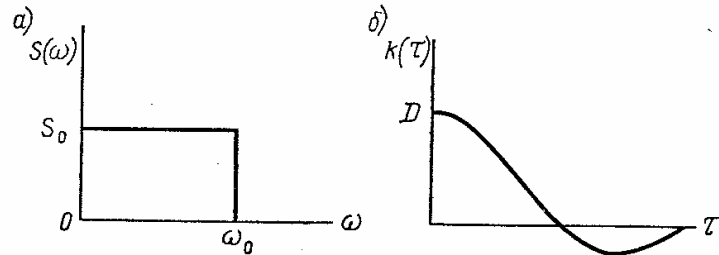


Рис. 40.6

функции равна дисперсии.] Вычисляя соответствующую корреляционную функцию по формуле (40.12), находим

$$k(\tau) = \int_0^{\infty} S(\omega) \cos \omega \tau d\omega = \frac{D}{\omega_0} \int_0^{\omega_0} \cos \omega \tau d\omega = D \frac{1}{\omega_0 \tau} \sin \omega_0 \tau.$$

График этой функции изображен на рис. 40.6, б.

В качестве еще одного примера рассмотрим случайную функцию заданной частоты  $\omega_0$ , но со случайными амплитудой и фазой. В этом случае вся дисперсия функции сосредоточена на одной частоте  $\omega_0$  и, следовательно, спектральная функция имеет форму

$$S(\omega) = D\delta(\omega - \omega_0),$$

где  $\delta$  — импульсная дельта-функция (рис. 40.7, а). Соответственно корреляционная функция (рис. 40.7, б)

$$k(\tau) = \int_0^{\infty} S(\omega) \cos \omega \tau d\omega = D \cos \omega_0 \tau.$$

Отсюда следует, что если полученная опытным путем корреляционная функция с увеличением  $\tau$  стремится к незатухающей синусоиде, то случайная функция содержит гармоническую составляющую фиксированной частоты  $\omega_0$ .

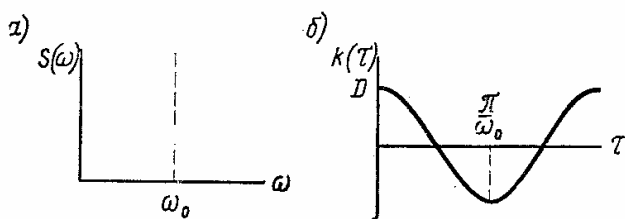


Рис. 40.7

Выше был рассмотрен способ определения по экспериментальным данным сначала корреляционной, а затем спектральной функций. Часто используют и другой прием, позволяющий по записям реализации случайной

функции, обладающей эргодическим свойством, непосредственно определить спектральную функцию. С этой целью электрический сигнал, соответствующий анализируемой функции, подается на серию узкополосных фильтров, каждый из которых выделяет составляющие сигнала, близкие к основной частоте настройки фильтра. Затем с помощью нелинейных блоков сигналы, прошедшие через фильтры, возводятся в квадрат и усредняются по времени. Выход с каждого из усредняющих устройств пропорционален значению спектральной функции анализируемого процесса на частоте настройки соответствующего фильтра (см. [47]).

#### **Оценка частоты выбросов стационарной случайной функции.**

Для практических целей не всегда достаточны такие оценки случайной стационарной функции, как ее дисперсия и вид спектральной функции. Пусть, например, речь идет о колебаниях кузова автомобиля. Для оценки комфортабельности величина дисперсии его ускорений является, пожалуй, достаточной. Но если речь идет о прочности элементов конструкции, то надо знать не только дисперсию напряжения в том или ином элементе конструкции, но и вероятность превышения этим напряжением предела выносливости. Точно так же, проектируя подвеску автомобиля, надо предвидеть, насколько существенна вероятность «пробоя» подвески, т. е. превышения ее ходом допустимой величины.

Таким образом, возникает задача определения среднего количества превышений в единицу времени случайным процессом  $x(t)$  заданного уровня  $x_0$ . Для эргодического стационарного случайного процесса с нормальным распределением эта задача решается с помощью формулы Райса.

Наряду с процессом  $x(t)$  рассмотрим производную  $\dot{x}(t)$ , причем учтем, что для стационарной случайной функции значения  $x(t)$  и  $\dot{x}(t)$  независимы. Предположим, что распределение случайных величин  $x$  и  $\dot{x}$  определяется плотностями вероятности  $f(x)$  и  $f(\dot{x})$ . Тогда вероятность того, что функция  $x(t)$  лежит в пределах

$$x_0 \leq x(t) \leq x_0 + dx_0 \quad (40.18)$$

и одновременно  $\dot{x}(t)$  заключено в пределах

$$\dot{x} \leq \dot{x}(t) \leq \dot{x} + d\dot{x}, \quad (40.19)$$

составит (вследствие независимости  $x$  и  $\dot{x}$ )

$$f(x_0) f(\dot{x}) dx_0 d\dot{x}.$$

Учитывая эргодичность процесса, эту вероятность можно трактовать как отношение времени  $\Delta t$ , в течение которого соблюдаются неравенства (40.18), (40.19), ко всему времени процесса  $T$ :

$$\Delta t/T = f(x_0) f(\dot{x}) dx_0 d\dot{x}.$$

С другой стороны, одно прохождение функции  $x(t)$  через полосу  $dx_0$  занимает время  $dt = dx_0/|\dot{x}|$ . Таким образом, вероятное количество проходов функцией  $x(t)$  со скоростями в диапазоне (40.19) уровня  $x_0$  за время  $T$  составит

$$dn = \Delta t/dt = T f(x_0) f(\dot{x}) |\dot{x}| d\dot{x}.$$

Полное число пересечений уровня  $x_0$  при всевозможных положительных скоростях (число превышений) получим интегрированием:

$$n = T f(x_0) \int_0^{\infty} f(\dot{x}) \dot{x} d\dot{x}.$$

Дальнейшее развитие полученной формулы требует принятия определенных законов распределения\*  $f(x)$ ,  $f(\dot{x})$ . Обычно исходят из нормального закона распределения. Для центрированной функции он определяется формулами

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_x} e^{-x^2/(2\sigma_x^2)}; \quad f(\dot{x}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_{\dot{x}}} e^{-\dot{x}^2/(2\sigma_{\dot{x}}^2)}.$$

Здесь  $\sigma_x$ ,  $\sigma_{\dot{x}}$  — среднеквадратическое отклонения  $x(t)$  и  $\dot{x}(t)$ .

Вычислим интеграл:

$$\int_0^{\infty} f(\dot{x}) \dot{x} d\dot{x} = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_{\dot{x}}} \int_0^{\infty} e^{-\dot{x}^2/(2\sigma_{\dot{x}}^2)} \dot{x} d\dot{x} = \frac{\sigma_{\dot{x}}}{\sqrt{2\pi}}.$$

Теперь число пересечений в единицу времени можно найти по формуле

$$N = \frac{n}{T} = \frac{1}{2\pi} \frac{\sigma_{\dot{x}}}{\sigma_x} e^{-x_0^2/(2\sigma_x^2)}. \quad (40.20)$$

Формула Райса (40.20) определяет число превышений функцией  $x(t)$  уровня  $x_0$  в единицу времени.

#### § 41. ВОЗДЕЙСТВИЕ СЛУЧАЙНОЙ СТАЦИОНАРНОЙ НАГРУЗКИ НА ЛИНЕЙНУЮ КОЛЕБАТЕЛЬНУЮ СИСТЕМУ

Как показано выше, с помощью спектрального разложения стационарная случайная функция может быть представлена как совокупность гармонических случайных функций заданных частот  $\omega_h$ . Поэтому

---

\* Все использованные ранее формулы справедливы при любом законе распределения.

рассмотрим сначала воздействие на линейную систему возмущающей силы, заданной выражением

$$P_k(t) = a_k \cos \omega_k t + b_k \sin \omega_k t, \quad (41.1)$$

где  $a_k$  и  $b_k$  — некоррелированные случайные величины с равным нулю математическим ожиданием и одинаковой дисперсией  $\Delta_k D_p$ .

Для линейной системы с  $n$  степенями свободы можно составить  $n$  дифференциальных уравнений второго порядка, в правые части которых входит возмущающая сила  $P_k(t)$ . Чтобы получить стационарное решение этих уравнений, используем метод комплексных амплитуд. (Этот метод применялся уже в § 16.) Силу  $P_k(t)$  запишем в виде

$$P_k(t) = c_k e^{i\omega_k t}, \quad (41.2)$$

где  $c_k$  — случайная комплексная величина, модуль которой равен случайной амплитуде:

$$|c_k| = \sqrt{a_k^2 + b_k^2},$$

а аргумент — случайной фазе:

$$\arg c_k = \varphi_k = \arcsin(a_k / |c_k|).$$

Впрочем, как мы видели выше, для описания стационарной случайной функции фаза не является существенной.

Перемещения колеблющихся масс также представим в виде

$$x_{mk} = u_{mk} e^{i\omega_k t}. \quad (41.3)$$

Подстановка выражений (41.2) и (41.3) в уравнения движения приводит к системе алгебраических уравнений относительно случайных комплексных амплитуд  $u_{mk}$  типа уравнений (16.11). Коэффициенты этих уравнений являются комплексными, так как

$$\dot{x}_{mk} = i\omega_k x_{mk}, \quad \ddot{x}_{mk} = (i\omega_k)^2 x_{mk}.$$

Решив систему алгебраических уравнений относительно интересующего нас перемещения (индекс  $m$ , определяющий номер этого перемещения, опускаем), найдем

$$x_k = F(i\omega_k) c_k e^{i\omega_k t}. \quad (41.4)$$

Здесь  $F(i\omega_k)$  — дробь, в знаменателе которой стоит определитель системы уравнений, а в числителе — тот же определитель, в котором столбец, соответствующий  $x_m$ , заменен коэффициентами при  $c_k$  в правых частях уравнений. Комплексная функция  $F(i\omega)$  называется комплексной частотной характеристикой или комплексной передаточной функцией системы.

Формула (41.4) показывает, что при случайном гармоническом возбуждении с частотой  $\omega_k$  искомая величина (перемещение) совер-

шает случайное колебание, с той же частотой и со случайной комплексной амплитудой. Действительная случайная амплитуда равна модулю этой величины, т. е.  $|F(i\omega_k)|/|c_k|$ .

Таким образом, случайная амплитуда колебания равна случайной амплитуде возмущения, умноженной на модуль частотной характеристики.

Соответственно дисперсия перемещения  $\Delta_k D_x$  равна дисперсии возмущения  $\Delta_k D_P$ , умноженной на квадрат модуля частотной характеристики:

$$\Delta_k D_x = |F(i\omega_k)|^2 \Delta_k D_P. \quad (41.5)$$

Вследствие линейности системы при воздействии на нее возмущающей силы, имеющей непрерывный спектр, характеризуемый спектральной функцией  $S_P(\omega)$ , элементарная дисперсия

$$dD_P = S_P(\omega) d\omega$$

преобразуется также в соответствии с формулой (41.5) и вызовет элементарную дисперсию перемещения

$$dD_x = |F(i\omega)|^2 S_P(\omega) d\omega.$$

Следовательно, спектральная функция  $S_x(\omega)$  для перемещения

$$S_x(\omega) = dD_x/d\omega = |F(i\omega)|^2 S_P(\omega) \quad (41.6)$$

может быть найдена путем умножения спектральной функции  $S_P(\omega)$  возмущения на  $|F(i\omega)|^2$ .

## § 42. ПРИМЕРЫ РАСЧЕТА СЛУЧАЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ

**Расчет виброзащитной системы.** Рассмотрим виброизоляционную систему с одной степенью свободы при случайном возмущении (рис. 42.1).

Объект массой  $m$  закреплен с помощью пружины жесткостью  $c$  и связан с демпфером вязкого трения (коэффициент вязкого трения  $\alpha$ ). Предположив, что случайная нагрузка  $P(t)$  соответствует ограниченному белому шуму в диапазоне частот  $0 \leq \omega \leq \omega_0$ , определим спектральные функции и дисперсии перемещения  $x$  и скорости  $\dot{x} = v$  объекта, а также дисперсию  $D_R$  динамического воздействия  $R$  на основание. Определим также (в случае  $\omega_0 \rightarrow \infty$ ) наивыгоднейшее значение демпфирования, при котором среднеквадратическое воздействие на основание минимально.

Итак, спектральная функция случайного воздействия задана следующими выражениями:

$$\begin{aligned} 0 \leq \omega \leq \omega_0, \quad S_P(\omega) &= S_0, \\ \omega > \omega_0, \quad S_P(\omega) &= 0. \end{aligned}$$

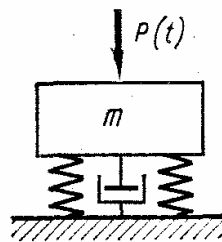


Рис. 42.1

Составим уравнение движения объекта:

$$m\ddot{x} + \alpha \dot{x} + cx = P(t).$$

Приняв

$$\bar{P} = P_0 e^{i\omega t}, \quad \bar{x} = x_0 e^{i\omega t},$$

получим соотношение

$$(-m\omega^2 + i\alpha\omega + c) x_0 e^{i\omega t} = P_0 e^{i\omega t}.$$

Отсюда находим частотную характеристику перемещения:

$$F_x(i\omega) = \bar{x}/\bar{P} = 1/(c - m\omega^2 + i\alpha\omega). \quad (42.1)$$

Обозначив собственную частоту консервативной системы и коэффициент затухания  $p = \sqrt{c/m}$ ,  $2n = \alpha/m$ , приведем выражение (42.1) к виду

$$F_x(i\omega) = \frac{1}{c} \frac{1}{1 - \omega^2/p^2 + i(2n/p)(\omega/p)}. \quad (42.2)$$

Спектральная функция перемещения определяется по формуле

$$S_x(\omega) = |F_x(i\omega)|^2 S_P(\omega).$$

При  $0 \leq \omega \leq \omega_0$

$$S_x(\omega) = \frac{S_0}{c^2} \frac{1}{(1 - \omega^2/p^2)^2 + (2n/p)^2 (\omega/p)^2}, \quad (42.3)$$

при  $\omega > \omega_0$

$$S_x(\omega) = 0.$$

Так как скорость  $v = dx/dt$ , то  $\bar{v} = d\bar{x}/dt = i\omega\bar{x}$ .

Поэтому частотная характеристика скорости

$$F_v(i\omega) = i\omega F_x(i\omega). \quad (42.4)$$

Для спектральной функции скорости получаем

$$S_v(\omega) = |i\omega F_x(i\omega)|^2 S_P(\omega) = \omega^2 S_x(\omega). \quad (42.5)$$

Аналогично, для спектральной функции ускорения можно получить  $S_j(\omega) = \omega^4 S_x(\omega)$ .

Так как передаваемая основанию сила  $R = cx + \alpha\dot{x}$ , то

$$\bar{R} = (c + i\alpha\omega) \bar{x}; \quad F_R(i\omega) = (c + i\alpha\omega) F_x(i\omega).$$

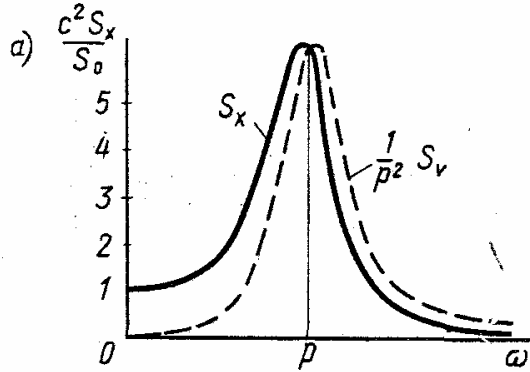
Следовательно,

$$S_R(\omega) = |F_R(i\omega)|^2 S_P(\omega) = c^2 S_x(\omega) + \alpha^2 S_v(\omega). \quad (42.6)$$

Графики спектральных функций  $S_x$ ,  $S_v$ ,  $S_R$  в предположении  $\omega_0 > p$  построены для значения коэффициента затухания  $n/p = 0,2$  на рис. 42.2, а, б.

Как видно из этих графиков, при постоянной плотности воздействия спектр колебаний неравномерен. Система усиливает колебания с частотами, близкими к собственной ее частоте, и ослабляет высокочастотные колебания.

Определение дисперсии  $x$ ,  $v$ ,  $R$  сводится к вычислению интегралов типа



$$\begin{aligned} D_x &= \int_0^{\infty} S_x(\omega) d\omega = \\ &= \int_0^{\infty} |F_x(i\omega)|^2 S_P(\omega) d\omega = \\ &= \frac{S_0}{c^2} \int_0^{\omega_0} \frac{d\omega}{(1 - \omega^2/p^2)^2 + (2n/p)^2 \omega^2/p^2} = \\ &= \frac{S_0 p}{c^2} \int_0^{\omega_0/p} \frac{dz}{(1 - z^2)^2 + (2n/p)^2 z^2}. \end{aligned}$$

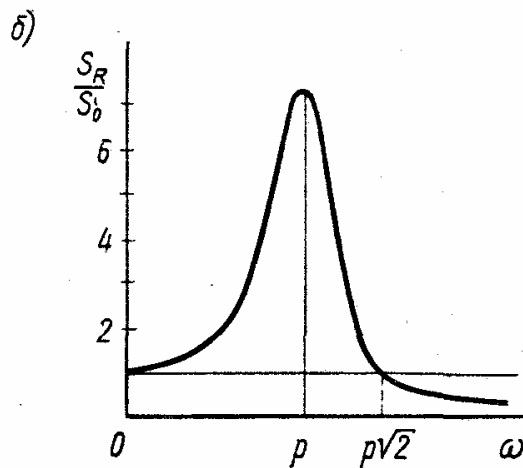


Рис. 42.2

Интеграл можно вычислить, разлагая подынтегральное выражение на простейшие дроби:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1 - z^2)^2 + 4\mu^2 z^2} &= \\ &= \frac{1}{4\sqrt{1 - \mu^2}} \left[ \frac{z + 2\sqrt{1 - \mu^2}}{z^2 + 2z\sqrt{1 - \mu^2} + 1} - \frac{z - 2\sqrt{1 - \mu^2}}{z^2 - 2z\sqrt{1 - \mu^2} + 1} \right] (\mu = n/p). \end{aligned}$$

Далее интегралы — табличные\* и окончательно получаем

$$\begin{aligned} D_x &= \frac{S_0 p}{c^2} \left\{ \frac{1}{8\sqrt{1 - \mu^2}} \ln \frac{z_1^2 + 2z_1\sqrt{1 - \mu^2} + 1}{z_1^2 - 2z_1\sqrt{1 - \mu^2} + 1} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{4\mu} \left[ \operatorname{arctg} \frac{z_1 + \sqrt{1 - \mu^2}}{\mu} + \operatorname{arctg} \frac{z_1 - \sqrt{1 - \mu^2}}{\mu} \right] \right\} (z_1 = \omega_0/p). \end{aligned}$$

На рис. 42.3 показана зависимость дисперсии перемещения  $D_x$  от отношения  $z_1 = \omega_0/p$  частоты среза спектра возмущения к собственной частоте системы при  $n/p = 0,2$ .

Как видно из графика,  $D_x$  возрастает главным образом за счет колебаний с частотами, близкими к собственной частоте системы.

\* См.: Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов сумм, рядов и произведений. 4-е изд. М., 1962, с. 82—83.



Интересно отметить, что в том случае, когда спектр нагрузки неограничен ( $\omega_0 \rightarrow \infty$ ), дисперсия перемещения остается конечной. При  $\omega_0 \rightarrow \infty$

$$D_x \rightarrow \frac{\pi}{4} \frac{S_0 p}{c^2 \mu} = \frac{\pi}{4} \frac{S_0 p^2}{c^2 n}.$$

Как и следовало ожидать, дисперсия (а значит, и среднеквадратическое перемещение  $\sigma_x = \sqrt{D_x}$ ) оказывается тем меньше, чем больше жесткость пружины  $c$ , демпфирование  $n$  и масса объекта, от которой зависит частота  $p$ .

Для дисперсии скорости после вычисления соответствующих интегралов находим

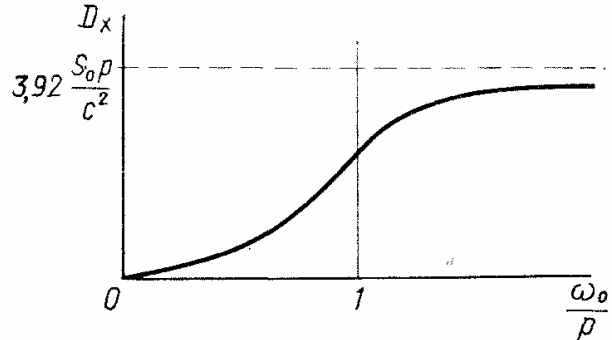


Рис. 42.3

$$D_v = \frac{S_0 p^3}{c^2} \left\{ \frac{1}{4\mu} \left[ \operatorname{arctg} \frac{z_1 + \sqrt{1-\mu^2}}{\mu} + \operatorname{arctg} \frac{z_1 - \sqrt{1-\mu^2}}{\mu} \right] - \right. \\ \left. - \frac{1}{8 \sqrt{1-\mu^2}} \ln \frac{z_1^2 + 2z_1 \sqrt{1-\mu^2} + 1}{z_1^2 - 2z_1 \sqrt{1-\mu^2} + 1} \right\}.$$

При  $\omega_0 \rightarrow \infty$   $D_v$  также остается ограниченной и стремится к величине

$$D_v = \frac{\pi}{4} \frac{S_0}{c^2} \frac{p^4}{n}.$$

Определим дисперсию силы  $R$  воздействия на основание. Согласно формуле (42.6),

$$D_R = c^2 D_x + \alpha^2 D_v.$$

Подставив сюда значения  $D_x$  и  $D_v$  при  $\omega_0 \rightarrow \infty$ , получим для этого случая

$$D_R = (\pi/4) S_0 p (p/n + 4n/p).$$

Из полученного выражения видно, что дисперсия  $D_R$  возрастает неограниченно как при  $n \rightarrow 0$  (при этом возрастает амплитуда колебаний вблизи резонансной частоты), так и при  $n \rightarrow \infty$  (т. е. при непосредственной передаче возмущающей силы на основание). Минимум  $D_R$  имеет место при  $n = p/2$  [ $\delta = (2/\sqrt{3})\pi = 3,64$ ], причем

$$D_{R_{\min}} = \pi S_0 p.$$

Таким образом, при случайном возбуждении типа белого шума наивыгоднейшим является весьма большое демпфирование системы ( $\delta = 3,64$ ). Так же как и при расчете системы виброизоляции на синусоидальное возбуждение, выясняется, что система тем более эффективна, чем ниже частота ее настройки  $p$ .

**Случайные колебания автомобиля.** Рассмотрим случайные колебания автомобиля в продольной плоскости при движении по дороге, характеризующейся заданной спектральной функцией неровностей.

Упрощенная расчетная схема автомобиля показана на рис. 42.4. Колебания в продольной плоскости возникают при одинаковом профиле дороги под левыми и правыми колесами.

Различие в этом профиле вызывает колебания в поперечной плоскости. Вследствие линейности системы и симметрии конструкции автомобиля эти виды колебаний можно рассматривать независимо.

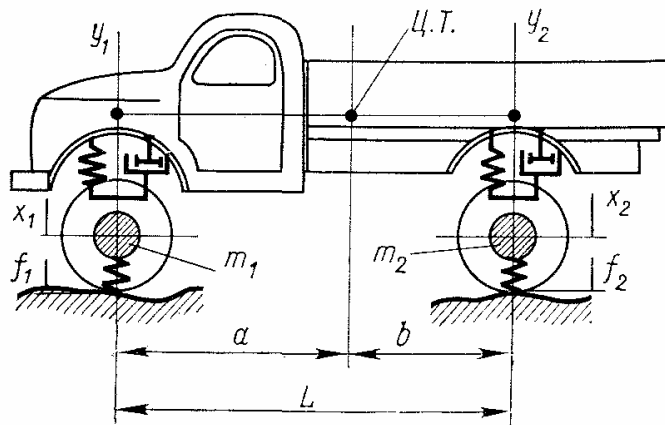


Рис. 42.4

Составим уравнения движения автомобиля, выбрав в качестве координат вертикальные перемещения переднего ( $x_1$ ) и заднего ( $x_2$ ) мостов и расположенных над ними точек кузова. Высоты неровностей под передними и задними колесами обозначим соответственно  $f_1$  и  $f_2$ .

Такой выбор координат позволяет получить уравнения движения для пе-

редней и задней осей в одинаковой форме. Обозначим также  $m_1, m_2$  — неподрессоренные массы переднего и заднего мостов;  $m_k, I$  — масса и момент инерции кузова относительно центральной оси, перпендикулярной плоскости чертежа;  $c_{ш}, c, \alpha$  — жесткости шин, подвесок и коэффициенты вязкого трения в амортизаторах (под  $c$  и  $\alpha$  понимаются суммарные величины для левых и правых элементов подвески).

Обозначив силы взаимодействия подвесок с кузовом  $P_1, P_2$ , получим следующие уравнения для подвесок:

$$c_{шi}(f_i - x_i) - P_i = m_i \ddot{x}_i;$$

$$c_i(y_i - x_i) + \alpha(\dot{y}_i - \dot{x}_i) = P_i \quad (i = 1, 2) \quad (42.7)$$

и уравнения движения кузова:

$$m_k(\ddot{y}_1 b/L + \ddot{y}_2 a/L) = P_1 + P_2;$$

$$I(\ddot{y}_1 - \ddot{y}_2)/L = P_1 a - P_2 b.$$

Решим последние два уравнения относительно  $P_1$  и  $P_2$ :

$$P_1 = \ddot{y}_1(m_k b^2 + I)/L^2 + \ddot{y}_2(m_k ab - I)/L^2;$$

$$P_2 = \ddot{y}_1(m_k ab - I)/L^2 + \ddot{y}_2(m_k a^2 + I)/L^2. \quad (42.8)$$

Для современных легковых и некоторых компоновок грузовых автомобилей отношение

$$\epsilon = I/(m_k ab) \approx 1. \quad (42.9)$$

В этом случае выражения (42.8) существенно упрощаются и принимают такой вид:

$$\begin{aligned} P_1 &= M_1 \ddot{y}_1, & P_2 &= M_2 \ddot{y}_2 \\ (M_1 &= m_k b/L, & M_2 &= m_k a/L). \end{aligned} \quad (42.10)$$

Таким образом, при условии (42.9) колебания передней и задней частей автомобиля независимы. Именно этот простейший случай мы здесь и рассмотрим.

Для каждой из частей автомобиля, подставив значения  $P$  из уравнения (42.10) в (42.7), получим независимые уравнения (индексы 1, 2 опускаем):

$$\begin{aligned} M_i \ddot{y} + m \ddot{x} + c_{ш} x &= c_{ш} f; \\ M_i \ddot{y} + c y + \alpha \dot{y} - c x - \alpha \dot{x} &= 0. \end{aligned}$$

Подставляя сюда  $\overline{f} = f_0 e^{i\omega t}$ ;  $\overline{x} = x_0 e^{i\omega t}$ ;  $\overline{y} = y_0 e^{i\omega t}$  и исключая  $\overline{x}$ , находим комплексную частотную характеристику для вертикального перемещения кузова:

$$\begin{aligned} F(i\omega) &= \frac{\overline{y}}{\overline{f}} = \\ &= \frac{c_{ш}(c + i\alpha\omega)}{M_i m \omega^4 - [M_i(c_{ш} + c) + mc]\omega^2 + c_{ш}c - i\alpha[\omega^3(M_i + m) - \omega c_{ш}]}. \end{aligned}$$

Далее, зная спектральную функцию неровностей  $S_f(\omega)$ , можно вычислить и спектральную функцию перемещений:

$$S_y(\omega) = |F(i\omega)|^2 S_f(\omega).$$

Разумеется, спектральная функция неровностей дороги, полученная по экспериментальной корреляционной функции  $k_f(z)$ , задается не в зависимости от  $\omega$ , а в функции пространственной частоты  $\Omega$  [1/м]:

$$S_0(\Omega) = \frac{1}{2\pi} \int_0^8 k(z) \cos \Omega z dz.$$

Как нетрудно установить, при движении со скоростью  $v$  (м/с)  $\Omega = \omega/v$ . Поэтому

$$S_f(\omega) = (1/v) S_0(\omega/v).$$

Таким образом, переход от пространственной спектральной функции к временной сводится к изменению масштабов по координатным

осям. С увеличением скорости движения график  $S_f(\omega)$  растягивается по горизонтали и сокращается по вертикали (при этом площадь под кривой  $S_f$ , равная дисперсии  $D_f$ , остается постоянной).

Статистические характеристики смещения кузова  $y$  не представляют существенного интереса. Комфортабельность автомобиля в значительной степени зависит от ускорений  $j = d^2y/dt^2$ . Легко видеть, что для этой величины комплексная передаточная функция определяется выражением

$$F_j(i\omega) = -\omega^2 F(i\omega).$$

Рассмотрим пример колебания передней части легкового автомобиля при движении по асфальтобетонной дороге. Подвеска характеризуется следующими данными:  $M = 800$  кг;  $m = 100$  кг;  $c = 51 \cdot 10^3$  Н/м;  $c_{ш} = 336 \cdot 10^3$  Н/м;  $\alpha = 3,26 \cdot 10^3$  Н·с/м.

Примем, что корреляционная функция дороги выражается формулой (см. [46])

$$k(z) = D_f e^{-\gamma |z|},$$

где  $D_f = 2,0$  см<sup>2</sup>;  $\gamma = 0,133$  1/м.

Этой функции соответствует пространственная спектральная функция

$$S_0(\Omega) = (2/\pi) D_f \gamma / (\gamma^2 + \Omega^2).$$

Соответственно при движении со скоростью  $v$  временная спектральная функция составит

$$S_f(\omega) = (1/v) S_0(\omega/v) = (2/\pi) D_f \gamma / (\gamma_1^2 + \omega^2),$$

где  $\gamma_1 = \gamma v$ .

Проведем расчет при скорости  $v = 15$  м/с (54 км/ч). В этом случае  $\gamma_1 = \gamma v = 2$  с<sup>-1</sup>.

Находим спектральную функцию ускорения кузова:

$$S_j(\omega) = S_f(\omega) |F_j(i\omega)|^2 = \omega^4 S_f(\omega) |F(i\omega)|^2.$$

Подстановка значений приводит к формуле

$$S_j(\omega) = \frac{2}{\pi} D_f \frac{\gamma_1}{\gamma_1^2 + \omega^2} \frac{c_{ш}^2}{M^2 m^2} \frac{(c^2 + \alpha^2 \omega^2) \omega^4}{|\Phi(\omega)|^2},$$

где

$$\Phi(\omega) = \omega^4 - \omega^2 \left( \frac{c_{ш}}{m} + \frac{c}{m} + \frac{c}{M} \right) + \frac{c_{ш}c}{mM} + i \frac{\alpha}{M} \left[ \omega^3 \left( 1 + \frac{M}{m} \right) - \omega \frac{c_{ш}}{m} \right].$$

При принятых значениях спектральная функция ускорения имеет вид, представленный на рис. 42.5.

Дисперсия ускорения  $D_j$  определяется интегралом

$$D_j = \int_0^\infty S_j(\omega) d\omega.$$

Интеграл такого типа может быть вычислен аналитически\*, но более быстро

---

\* См.: Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов сумм, рядов и произведений, с. 232—233.

ведет к цели численное интегрирование. Таким образом, в данной задаче получено значение

$$D_j = 1,05 \text{ (м/с}^2\text{)}^2.$$

Следовательно, среднеквадратическое ускорение составляет

$$\sigma_j = \sqrt{D_j} = 1,02 \text{ м/с}^2.$$

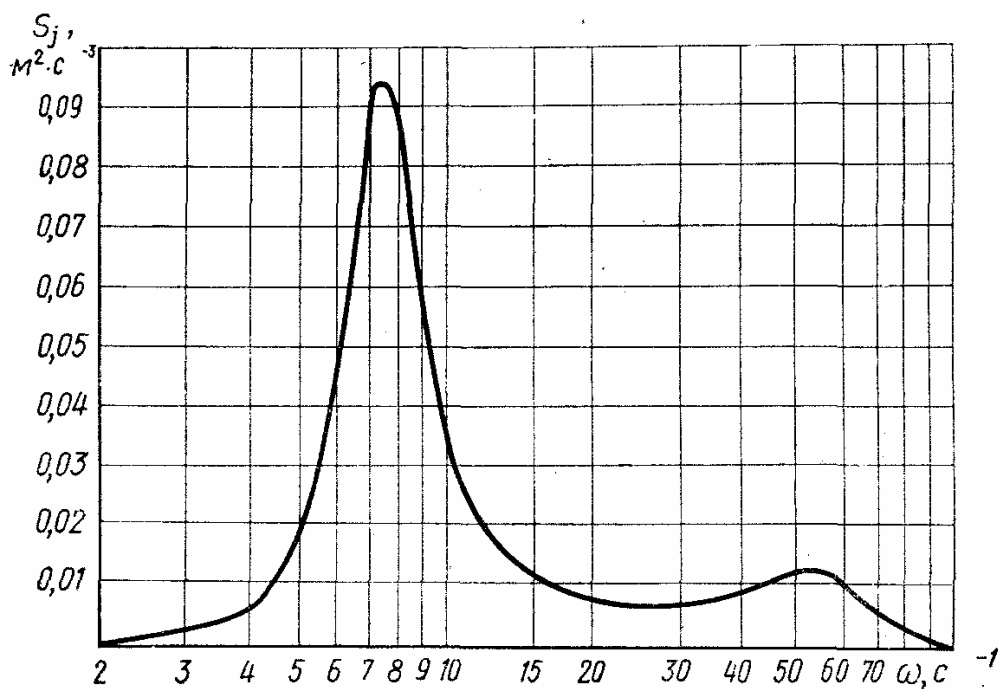


Рис. 42.5

Для оценки этой величины отметим, что максимальное ускорение туловища человека при нормальной ходьбе составляет \*  $\pm 2,5 \text{ м/с}^2$ .

---

\* См.: Ротенберг Р. В., Бурлаченко Н. И. О физиологических критериях плавности хода автомобиля. — Автомобильная промышленность, 1966, № 2.

## ГЛАВА VIII

### УДАРНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

При соударении механических объектов возникают их колебания. В предыдущих разделах книги возмущающие силы считались заданными. При ударе возмущающие силы возникают в результате взаимодействия соударяющихся объектов и могут быть найдены только в связи с изучением динамической деформации последних.

Существенной является возможность разделения деформаций при ударе на деформации, локализованные вблизи от места соударения, и общие, захватывающие весь объем соударяющихся объектов. При соударении массивных тел (в частности, шаров) их общей деформацией можно пренебречь по сравнению с местной. Основанная на этой гипотезе теория упругого удара была разработана Герцем.

С другой стороны, можно построить теорию удара, в которой игнорируются местные деформации и учитываются лишь общие. Применительно к продольному соударению стержней такая теория была построена Навье, а затем, в более удобной форме, Сен-Венаном и Буссинеском (см. § 22); аналогичная теория для изгибающего удара была также предложена Сен-Венаном.

Проведенные эксперименты показали, что пренебрежение местными деформациями, как правило, недопустимо.

Теория упругого продольного удара стержней, учитывающая как местные, так и общие их деформации, была предложена Сирсом, а теория изгибающего удара — С. П. Тимошенко. Следует отметить, что идея, лежащая в основе теории С. П. Тимошенко, — определение контактной силы из интегрального уравнения — является универсальной и может быть использована при решении всех задач ударного взаимодействия.

В настоящей главе рассмотрены классическая теория удара Герца и теория, основанная на идеях С. П. Тимошенко. Также излагаются приближенные приемы расчета на удар, позволяющие получить грубую оценку динамических перемещений и напряжений.

Более полное изложение вопросов расчета на удар содержится в гл. X книги [40], а также в работе [17]. Специально вопросам распространения ударных волн посвящены книги [30] и [41].

#### § 43. ТЕОРИЯ ГЕРЦА

Теория удара Герца основана на двух основных гипотезах. Во-первых, предполагается, что общие деформации соударяющихся тел малы по сравнению с их деформациями в окрестностях площадки

контакта. Во-вторых, предполагается, что контактная сила и контактные деформации связаны при ударе такой же зависимостью, как и при статическом сжатии тел, т. е. не учитываются силы инерции элементов тел, прилежащих к площадке контакта в их относительном движении.

В такой постановке задача удара сводится к исследованию относительного движения двух жестких тел, соединенных нелинейной пружиной.

В соответствии с теорией контактных деформаций Герца, если начальное касание тела осуществляется в одной точке, а расстояние между телами вблизи этой точки может быть аппроксимировано уравнением второго порядка, контактная сила  $P$  в зависимости от сближения тел  $\alpha$  определяется формулой

$$P = k\alpha^{3/2}. \quad (43.1)$$

Коэффициент  $k$  зависит от кривизны поверхностей тел в точке контакта и от свойств материала. В частности, если поверхности являются сферическими с радиусами кривизны  $R_1$  и  $R_2$ , то

$$k = \frac{2}{3(1-\mu^2)} E \sqrt{\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}},$$

где  $\mu$  — коэффициент Пуассона для материала обоих тел;  $E$  — модуль упругости.

Рассматривая два тела  $m_1$  и  $m_2$ , движущиеся до соударения со скоростями  $v_1$  и  $v_2$  по одной прямой (рис. 43.1), получаем следующие уравнения движения их центров инерции при ударе:

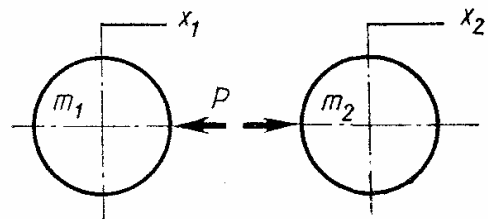


Рис. 43.1

$$m_1 \ddot{x}_1 = -P(\alpha); \quad m_2 \ddot{x}_2 = P(\alpha), \quad (43.2)$$

где  $x_1, x_2$  — координаты центров инерции тел;  $P$  — контактная сила;  $\alpha$  — сближение тел вследствие местного сжатия.

Отсчитывая  $x_1$  и  $x_2$  от положения начального контакта тел, устанавливаем, что

$$\alpha = x_1 - x_2. \quad (43.3)$$

Исключив из уравнений (43.2)  $x_1$  и  $x_2$  с помощью соотношения (43.3), приходим к уравнению

$$\ddot{\alpha} = -P(\alpha)/m, \quad (43.4)$$

где  $m = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$ .

Первый интеграл уравнения (43.4) легко вычислить:

$$(\dot{\alpha})^2/2 = -\frac{1}{m} \int_0^{\alpha} P(\alpha) d\alpha + C.$$

Постоянную интегрирования  $C$  найдем из условия, что при  $t = 0$   $\alpha = 0$  и  $\dot{\alpha}$  равно начальной относительной скорости соударяющихся тел  $v_0$ . Отсюда  $C = v_0^2/2$  и

$$(\dot{\alpha})^2 - v_0^2 = -\frac{2}{m} \int_0^{\alpha} P(\alpha) d\alpha. \quad (43.5)$$

Уравнение (43.5) позволяет определить максимальное сближение тел, обусловленное местной деформацией. Так как при максимальном сближении  $\dot{\alpha} = 0$ , то  $\alpha_{\max}$  определяется из равенства

$$\frac{2}{m} \int_0^{\alpha_{\max}} P(\alpha) d\alpha = v_0^2. \quad (43.6)$$

Если справедливо уравнение (43.1), то

$$\int_0^{\alpha} P(\alpha) d\alpha = \frac{2}{5} k \alpha^{5/2} \quad (43.7)$$

и максимальное сжатие

$$\alpha_{\max} = \left( \frac{5}{4} \frac{mv_0^2}{k} \right)^{2/5}. \quad (43.8)$$

Соответствующая контактная сила

$$P_{\max} = k \alpha_{\max}^{3/2} = k^{2/5} \left( \frac{5}{4} m v_0^2 \right)^{3/5}. \quad (43.9)$$

Определим время удара из уравнения (43.5):

$$\frac{d\alpha}{dt} = \sqrt{v_0^2 - \frac{2}{m} \int_0^{\alpha} P(\alpha) d\alpha}. \quad (43.10)$$

Разделяя переменные и интегрируя, находим продолжительность удара  $\tau$ :

$$\tau = 2 \int_0^{\alpha_{\max}} \left[ v_0^2 - \frac{2}{m} \int_0^{\alpha} P(\alpha) d\alpha \right]^{-1/2} d\alpha.$$

Подставляя сюда значение (43.7) и переходя к переменной интегрирования  $\zeta = \alpha/\alpha_{\max}$ , находим

$$\tau = 2 \frac{\alpha_{\max}}{v_0} \int_0^1 \frac{d\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^{5/2}}}.$$

Определенный интеграл равен 1,4716 и, таким образом,

$$\tau = 2,9432 \frac{\alpha_{\max}}{v_0} = 2,9432 \left( \frac{5m}{4k} \right)^{2/5} v_0^{-1/5}. \quad (43.11)$$



Следовательно, время соударения изменяется обратно пропорционально скорости соударения в степени 0,2.

Теория удара Герца неоднократно проверялась экспериментально, причем неизменно получалось близкое соответствие между расчетными и экспериментальными значениями контактных сил и времени соударения, если только при экспериментах выполнялись предпосылки теории (главным образом отсутствие пластических деформаций).

Теорию Герца нетрудно модифицировать, принимая вместо (43.1) другие зависимости между контактной силой и сближением тел. Так, в работе [28] получено решение задачи для произвольной степенной зависимости

$$P = k\alpha^n. \quad (43.12)$$

Такая зависимость получается при упругом сжатии тел, контакт между которыми является более плотным, чем в теории Герца (в этом случае, как показано И. Я. Штаерманом,  $1 \leq n \leq 3/2$ ). В форме (43.12) удастся также представить экспериментальные зависимости

( $\alpha$ ) при наличии развитых пластических деформаций (см. [26]). Можно также учесть различные законы изменения контактной силы в зависимости от  $\alpha$  при нагрузке и разгрузке (за счет пластических деформаций). Во всех случаях расчет выполняется по той же схеме, меняется лишь зависимость  $P(\alpha)$  в формулах (43.5), (43.6), (43.10).

Следует отметить, что результаты расчета не очень чувствительны к деталям формы зависимости  $P(\alpha)$ . Поэтому возникает возможность линеаризации этой зависимости. Так, в частности, нелинейную зависимость (43.1) можно заменить ломаной линией (рис. 43.2), выбрав ее так, чтобы значениям  $\alpha_{\max}$ ,  $P_{\max}$  по приближенной и точной зависимости соответствовала одинаковая энергия деформации. Из этих условий нетрудно вычислить  $\alpha_0$  и жесткость на линейном участке  $c$ :

$$P_{\max} = k\alpha_{\max}^{3/2} = c(\alpha_{\max} - \alpha_0);$$

$$\int_0^{\alpha_{\max}} P(\alpha) d\alpha = \frac{2}{5} k\alpha_{\max}^{5/2} = c \frac{(\alpha_{\max} - \alpha_0)^2}{2}.$$

Отсюда

$$\alpha_0 = \frac{1}{5} \alpha_{\max}; \quad c = \frac{5}{4} k^{2/3} P_{\max}^{1/3}.$$

Расчет линейной системы с этими значениями  $\alpha_0$  и  $c$  приведет, конечно, к тем же значениям  $\alpha_{\max}$  и  $P_{\max}$ , что и расчет нелинейной системы. Однако этого нельзя утверждать относительно продолжительности соударения.

При ударе по линейной системе продолжительность удара складывается из полупериода собственных колебаний системы  $\pi \sqrt{m/c}$  и времени прохождения грузами отрезка  $\alpha_0$  при сближении и расхождении:

$$\tau' = \pi \sqrt{m/c} + 2\alpha_0/v_0.$$

Подставив сюда значения  $\alpha_0$  и  $c$ , найдем

$$\tau' = 2,91\alpha_{\max}/v_0,$$

что всего на 1% отличается от точного значения. Графики изменения контактной силы согласно точному (1) и приближенному (2) решениям сопоставлены на рис. 43.3. Графики изменения перемещения практически совпадают.

Разумеется, в данной простой задаче линейзация зависимости  $P(\alpha)$  никакого смысла не имеет. Однако в более сложных случаях (см. § 44) этот прием позволяет существенно упростить расчет. За-

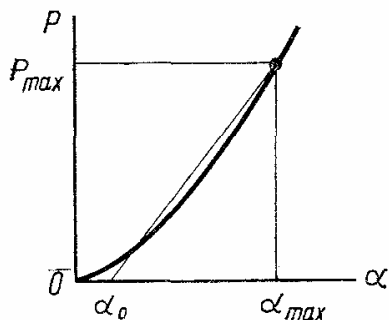


Рис. 43.2

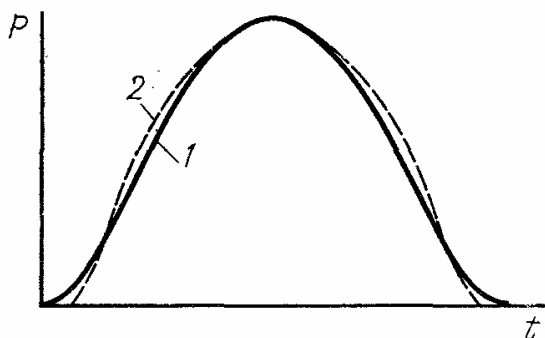


Рис. 43.3

метим при этом, что учитывать величину  $\alpha_0$  не обязательно, так как ее учет приводит лишь к смещению времени начала и конца удара, но не влияет на изменение контактной силы во времени. Поэтому можно считать, что контактная податливость по Герцу может быть заменена линейной податливостью, величина которой

$$\delta = 1/c = \frac{4}{5} k^{-2/3} P_{\max}^{-1/3} \quad (43.13)$$

зависит от величины максимальной контактной силы.

#### § 44. ТЕОРИЯ СОУДАРЕНИЯ УПРУГИХ СИСТЕМ, УЧИТЫВАЮЩАЯ МЕСТНЫЕ И ОБЩИЕ ИХ ДЕФОРМАЦИИ

Так же как и теория Герца, теория, излагаемая в настоящем параграфе, основана на гипотезе о том, что местные деформации, развивающиеся вблизи контакта соударяющихся тел, связаны с контактной силой статическими зависимостями. Однако в отличие от теории Герца наряду с местными деформациями принимают во внимание и общие деформации, которые рассчитывают методами теории колебаний. В этом случае задача существенно усложняется, и

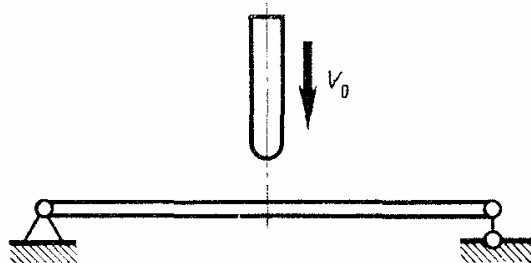


Рис. 44.1

лишь в редких случаях удастся получить решение в замкнутой форме. Нетрудно, однако, указать общий алгоритм, позволяющий провести числовой расчет соударения тел в том случае, если

решение задачи о вынужденных их колебаниях известно.

Рассмотрим соударение двух упругих тел, например стержня и балки (рис. 44.1). Пусть начальная скорость соударения равна  $v_0$  и действием постоянных сил (например, веса) за время удара можно пренебречь.

Условием контакта тел является совпадение координат точек их контакта:

$$z_1 - z_2 = 0.$$

Если за начало отсчета времени принять момент соприкосновения тел, то

$$z_1 - z_2 = v_0 t - \alpha - y_1 - y_2.$$

Здесь  $\alpha$  — сближение тел за счет контактных деформаций;  $y_1$  и  $y_2$  — перемещения точек контакта обоих тел, вызванные контактной силой  $P(t)$ , но подсчитанные без учета местных деформаций. Итак, при наличии контакта между телами

$$y_1 + y_2 + \alpha = v_0 t; \quad P(t) > 0. \quad (44.1)$$

При отсутствии контакта

$$y_1 + y_2 > v_0 t; \quad \alpha = 0; \quad P(t) = 0. \quad (44.2)$$

Если в уравнении (44.1) перемещения  $y_1$ ,  $y_2$  и  $\alpha$  выразить через силу  $P(t)$  взаимодействия тел, получим условие для определения этой силы.

В соответствии с принятыми гипотезами сближение тел в связи с контактной деформацией связано с силой  $P$  статической зависимостью

$$P = F(\alpha); \quad \alpha = \alpha(P) \quad (44.3)$$

[при начальном касании в точке эта зависимость имеет вид (43.1)].

Перемещения  $y_1$  и  $y_2$  удобнее всего связать с контактной силой, используя реакцию каждого из соударяющихся тел на единичный импульс (см. § 3):

$$\begin{aligned} y_1 &= \int_0^t P(\theta) Y^{(1)}(t - \theta) d\theta; \\ y_2 &= \int_0^t P(\theta) Y^{(2)}(t - \theta) d\theta. \end{aligned} \quad (44.4)$$

Здесь  $Y^{(1)}$  и  $Y^{(2)}$  — реакции на единичный импульс для двух соударяющихся тел.

Подставляя выражения (44.4) в условие контакта (44.1), получаем следующее интегральное уравнение, определяющее контактную силу:

$$\int_0^t P(\theta) Y(t - \theta) d\theta + \alpha[P(t)] = v_0 t. \quad (44.5)$$

Здесь

$$Y(t) = Y^{(1)}(t) + Y^{(2)}(t)$$

и уравнение (44.5) справедливо только при  $P(t) > 0$ .

Уравнение (44.5) является основным уравнением, определяющим закон изменения контактной силы; это уравнение впервые было получено в 1913 г. С. П. Тимошенко (см. [50]) для частного случая изгибающего удара жесткого груза по балке.

Структура уравнения (44.5) подсказывает способ его решения. Так как интегральный член зависит от значений контактной силы во все предшествующие рассматриваемому моменты времени, то при достаточно малом шаге интегрирования по времени  $\Delta t$  можно пренебречь в интегральной сумме изменением силы за интервал  $t - \Delta t \leq \theta \leq t$ .

Тогда сила будет определяться по формуле

$$P(t) = F \left[ v_0 t - \int_0^{t-\Delta t} P(\theta) Y(t-\theta) d\theta - P(t-\Delta t) \int_0^{\Delta t} Y(\theta) d\theta \right]. \quad (44.6)$$

В случае, если  $P(x) = kx^{3/2}$ ,

$$P(t) = k \left[ v_0 t - \int_0^{t-\Delta t} P(\theta) Y(t-\theta) d\theta - P(t-\Delta t) \int_0^{\Delta t} Y(\theta) d\theta \right]^{3/2}. \quad (44.7)$$

По формуле (44.6) можно шаг за шагом вычислить зависимость контактной силы от времени. Практические вычисления по этой формуле

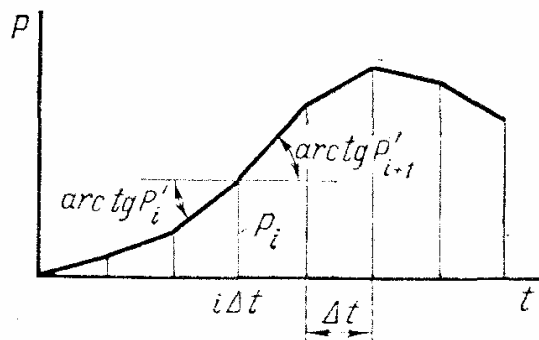


Рис. 44.2

затрудняются, в связи с тем что для получения необходимой точности следует выбирать весьма малый шаг  $\Delta t$  и на каждом шаге заново вычислять интеграл, входящий в выражение (44.6).

Существенно более удобный расчетный алгоритм предложен в книге [40].

Закон изменения контактной силы аппроксимируется ломаной линией с изломами, расположенными через равные промежутки

времени  $\Delta t$  (рис. 44.2). При этом требуется, чтобы условие контакта (44.1) выполнялось в моменты  $t = 0, t = \Delta t, 2\Delta t, 3\Delta t, \dots$

В произвольный момент  $t = i\Delta t$  график изменения контактной силы характеризуется величинами

$$P_i; \quad P'_i = \frac{P_i - P_{i-1}}{\Delta t}; \quad \vartheta_i = P'_{i+1} - P'_i = \frac{P_{i+1} - 2P_i + P_{i-1}}{\Delta t}.$$

Теперь перемещения  $y_1$  и  $y_2$  можно определить, используя реакцию каждого из соударяющихся тел  $Y_2$  на линейно возрастающую нагрузку:

$$y_{t=i\Delta t} = \sum_{k=0}^{i-1} \vartheta_k Y_2^{(1)} [(i-k)\Delta t];$$

$$y_{2t=i\Delta t} = \sum_{k=0}^{i-1} \vartheta_k Y_2^{(2)} [(i-k)\Delta t].$$

Подставляя эти выражения в условие контакта (44.1) для момента  $t = i\Delta t$ , находим

$$\sum_{k=0}^{i-1} \vartheta_k Y_2 [(i-k)\Delta t] + \alpha(P_i) = v_0 i \Delta t. \quad (44.8)$$

Здесь

$$Y_2 = Y_2^{(1)} + Y_2^{(2)}; \quad P_i = \sum_{k=0}^{i-1} \vartheta_k (i-k)\Delta t.$$

Уравнение (44.8) позволяет в явной форме определить  $\vartheta_{i-1}$ , если все предыдущие значения  $\vartheta$  известны.

С этой целью нелинейную зависимость  $\alpha(P)$  следует разложить в ряд и ограничиться двумя членами разложения:

$$\alpha(P_i) = \alpha(P_*) + \vartheta_{i-1} \Delta t = \alpha(P_*) + \vartheta_{i-1} \alpha' \Delta t. \quad (44.9)$$

Здесь

$$P_* = P_{i-1} + P'_{i-1} \Delta t = \sum_{k=0}^{i-2} \vartheta_k (i-k)\Delta t, \quad \alpha' = \left( \frac{d\alpha}{dP} \right)_{P=P_*}.$$

Тогда из формулы (44.8) получим

$$\vartheta_{i-1} = \frac{v_0 i \Delta t - \sum_{k=0}^{i-2} \vartheta_k Y_2 [(i-k)\Delta t] - \alpha(P_*)}{Y_2(\Delta t) + \alpha' \Delta t}. \quad (44.10)$$

При окончании контакта в момент  $t = r\Delta t$  оказывается  $P_r = 0$ . Следует учитывать, что в этот момент уклон графика  $P(t)$  становится равным нулю и поэтому

$$\vartheta_r = -P'_r = -\sum_{k=0}^{r-1} \vartheta_k.$$

Формула (44.10) непригодна в точках, где  $\alpha' \rightarrow \infty$  и, в частности, если справедлива формула Герца

$$\alpha = (P/k)^{2/3}$$

для первого момента соударения. Для этого момента следует отказаться от разложения (44.9) и определять  $\vartheta_0$  из нелинейного уравнения

$$\vartheta_0 Y_2(\Delta t) + (\vartheta_0 \Delta t/k)^{2/3} = v_0 \Delta t. \quad (44.11)$$

Расчеты существенно упрощаются, если линеаризовать, как это указывалось в предыдущем параграфе, зависимость местной деформации от контактной силы и принять

$$\alpha = \delta P, \quad (44.12)$$

где  $\delta$  — постоянный коэффициент податливости, зависящий в соответствии с формулой (43.13) от максимальной контактной силы,

$$\delta = \frac{4}{5} k^{-2/3} P_{\max}^{-1/3}.$$

Расчет податливости по этой формуле проводится методом последовательных приближений. Задавшись  $P_{\max}$ , определяют  $\delta$ , а затем, решая задачу удара, находят  $P_{\max}$  и уточняют значение  $\delta$ . Так как зависимость  $\delta$  от  $P_{\max}$  слабая, расчет сходится быстро.

При использовании линеаризованной зависимости (44.12)  $\alpha(P)$  формула (44.10) для определения изменения уклона кривой контактного давления упрощается и принимает вид

$$\vartheta_{i-1} = \frac{v_0 i \Delta t - \sum_{k=0}^{i-2} \vartheta_k Y_2[(i-k)\Delta t] - \delta P_*}{Y_2(\Delta t) + \delta \Delta t}, \quad (44.13)$$

причем знаменатель ее является постоянным. Для первого момента удара соответственно получаем

$$\vartheta_0 = \frac{v_0 \Delta t}{Y_2(\Delta t) + \delta \Delta t}. \quad (44.14)$$

В качестве примера приложения изложенного метода рассмотрим удар стального груза массой 1 кг, движущегося со скоростью  $v_0 = 1,5$  м/с по стальному стержню, размеры которого указаны на рис. 44.3. Конец стержня, по которому производится удар, — сферический, другой конец жестко заделан. Рассмотрим сначала нагружение стержня линейно возрастающей силой  $P(t) = \vartheta t$  (рис. 44.4, а). Используя методы, изложенные в § 22, можно установить, что скорость конца

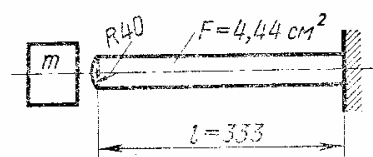


Рис. 44.3

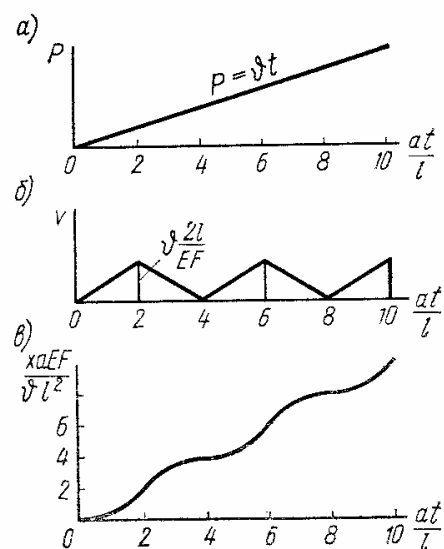


Рис. 44.4

стержня изменяется так, как показано на рис. 44.4, б. При  $0 < t < 2l/a$  ( $a = \sqrt{E/\rho}$  — скорость распространения волны) скорость растет пропорционально времени (и нагрузке):

$$v = (a/EF)\vartheta t.$$

В момент  $t = 2l/a$ , когда скорость достигает значения  $(2l/EF)\vartheta$ , приходит волна, отраженная от заделки, и скорость начинает уменьшаться по линейному закону, обращаясь в нуль при  $t = 4l/a$ . График смещений (рис. 44.4, в) может быть получен интегрирова-

нием скорости. Он состоит из отрезков квадратных парабол: при  $0 < t < 2l/a$   $x = \vartheta l^2 / (2EFa) (at/l)^2$ ; при  $2l/a < t < 4l/a$   $x = \vartheta l^2 / (2EFa) [8 - (4 - at/l)^2]$ ; при  $4l/a < t < 6l/a$   $x = \vartheta l^2 / (2EFa) [8 + (at/l - 4)^2]$  и т. д.

Соответственно реакция стержня на линейно возрастающую единичную нагрузку выражается следующими формулами:

$$\begin{aligned} \text{при } 0 < t < 2l/a \quad Y_2^{(1)}(t) &= x/\vartheta = l^2 / (2EFa) (at/l)^2; \\ \text{при } 2l/a < t < 4l/a \quad Y_2^{(1)}(t) &= l^2 / (2EFa) [8 - (4 - at/l)^2]; \\ \text{при } 4l/a < t < 6l/a \quad Y_2^{(1)}(t) &= l^2 / (2EFa) [8 + (at/l - 4)^2] \text{ и т. д.} \end{aligned} \quad (44.15)$$

Теперь найдем реакцию на линейно возрастающую силу  $P(t) = \vartheta t$  жесткого груза массой  $m$ . Сила  $P(t)$  вызывает ускорение груза  $\ddot{x} = \vartheta t/m$ . Интегрированием (при нулевых начальных условиях) находим  $x = (\vartheta/m)(t^3/6)$ .

Реакция на единичное воздействие определяется формулой

$$Y_2^{(2)}(t) = x/\vartheta = t^3 / (6m). \quad (44.16)$$

Итак,

$$Y_2(t) = Y_2^{(1)}(t) + Y_2^{(2)}(t),$$

где  $Y_2^{(1)}(t)$  и  $Y_2^{(2)}(t)$  вычисляются по формулам (44.15) и (44.16).

Для рассматриваемого случая коэффициент  $k$  в формуле Герца

$$\begin{aligned} k &= \frac{2}{3(1-\mu^2)} E \sqrt{R} = \frac{2}{3(1-0,3^2)} 2 \cdot 10^{11} \sqrt{4 \cdot 10^{-2}} = \\ &= 2,92 \cdot 10^{10} \text{ Н} \cdot \text{м}^{-3/2}. \end{aligned}$$

Оценивая максимальную контактную силу величиной  $P_{\max} = 15\,000 \text{ Н}$ , находим величину эквивалентной линейной податливости:

$$\delta = \frac{4}{5} k^{-2/3} P_{\max}^{-1/3} = 3,4 \cdot 10^{-9} \text{ м/Н}.$$

Подсчитываем время пробега волны по стержню:

$$\tau = \frac{l}{a} = \frac{0,333}{5 \cdot 10^{-3}} = 66,6 \cdot 10^{-6} \text{ с},$$

где  $a = \sqrt{E/\rho} = \sqrt{2 \cdot 10^{11} / (8 \cdot 10^3)} = 5 \cdot 10^3 \text{ м/с}$ .

В качестве интервала  $\Delta t$  при численном решении задачи принимаем

$$\Delta t = \frac{1}{2} \tau = 33,3 \cdot 10^{-6} \text{ с}.$$

Подсчитываем:

$$\begin{aligned} Y_2(\Delta t) &= \frac{l^2}{2EFa} \left( \frac{a\Delta t}{l} \right)^2 + \frac{(\Delta t)^3}{6m} = \frac{0,333^2 \cdot 0,5^2}{2 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 4,44 \cdot 10^{-4} \cdot 5 \cdot 10^3} + \\ &+ \frac{(33,3 \cdot 10^{-6})^3}{6 \cdot 1} = 37,3 \cdot 10^{-15} \text{ м} \cdot \text{с/Н}. \end{aligned}$$

Знаменатель формулы (44.13) получает значение

$$Y_2(\Delta t) + \delta \cdot \Delta t = 37,3 \cdot 10^{-15} + 3,4 \cdot 10^{-9} \cdot 33,3 \cdot 10^{-6} = \\ = 151 \cdot 10^{-15} \text{ м} \cdot \text{с} / \text{Н}.$$

Вычислим также значения функции  $Y_2(i\Delta t)$  для  $i = 1, 2, \dots$ . Эти значения приведены в табл. 44.1.

Таблица 44.1

$i = t/(\Delta t)$	$Y_2(t), \text{ м} \cdot \text{с} / (\text{Н} \cdot 10^{-15})$	$i = t/(\Delta t)$	$Y_2(t), \text{ м} \cdot \text{с} / (\text{Н} \cdot 10^{-15})$
1	37,3	6	2188,2
2	173,6	7	3045,4
3	445,0	8	4099,2
4	888,0	9	5443,3
5	1476,1	10	7176,8

Расчет изменения контактной силы во времени приведен в табл. 44.2 и 44.3. В первой из этих таблиц вычислены значения  $\vartheta_i$ ;

$P'_i = \sum_{k=0}^{i-1} \vartheta_k$ ;  $P_i = \Delta t \sum_{k=0}^i P'_k$ . Необходимая для этих вычислений величина

$\sum_{k=0}^{i-2} \vartheta_k Y_2[(i-k)\Delta t]$  подсчитывается одновременно в табл. 44.3.

Полученный в результате расчета график изменения контактной силы представлен на рис. 44.5 сплошной линией. Штриховой линией

Таблица 44.2

$i = \frac{t}{\Delta t}$	$v_0 t, \text{ м} \cdot 10^{-5}$	$a_i = \sum_{k=0}^{i-2} \vartheta_k Y_2[(i-k)\Delta t], \text{ м} \cdot 10^{-5}$	$v_0 t - a_i - P_i^* \delta, \text{ м} \cdot 10^{-5}$	$\vartheta_i, \text{ Н} \cdot \text{с}^{-1} \cdot 10^7$	$P'_i, \text{ Н} \cdot \text{с}^{-1} \cdot 10^7$	$P_i, \text{ Н} \cdot 333$	$P_i^*, \text{ Н} \cdot 333$	$P_i^* \delta, \text{ м} \cdot 10^{-5}$	$P_i, \text{ Н} \cdot 10$
0	0	0	0	33,1	0	0	0	0	0
1	5	0	5	-21,8	33,1	33,1	0	0	1100
2	10	5,75	-3,29	-15,2	11,3	44,4	66,2	7,54	1480
3	15	10,95	-2,29	-8,0	-3,9	40,5	55,7	6,34	1350
4	20	17,04	-1,20	11,8	-11,9	28,6	36,6	4,16	950
5	25	21,32	1,78	11,3	-0,1	28,5	16,7	1,90	950
6	30	25,06	1,71	-10,9	11,2	39,7	28,4	3,23	1320
7	35	30,87	-1,65	-9,5	0,3	40,0	50,9	5,78	1330
8	40	36,87	-1,43	-36,4	-9,2	30,8	40,3	4,58	1020
9	45	48,01	-5,49	-	-45,6	-14,8	21,6	2,48	-490



Таблица 44.3

k	$v \cdot 10^{-7},$ $\text{H} \cdot \text{c}^{-1}$	$\phi_k Y_2 [(l-k) \Delta t], \text{M} \cdot 10^{-6}$								
		$l=2$	$l=3$	$l=4$	$l=5$	$l=6$	$l=7$	$l=8$	$l=9$	$l=10$
0	33,1	5,75	14,73	29,39	48,83	72,26	100,80	135,68	180,17	237,55
1	-21,8	5,75	-3,78	-9,71	-19,36	-32,18	-47,60	-66,39	-89,36	-118,61
2	-15,2		10,95	-2,64	-6,76	-13,50	-22,44	-33,19	-46,29	-62,31
3	-8,0			17,04	-1,39	-3,56	-7,10	-11,82	-17,46	-24,36
4	11,8				21,32	+ 2,04	+ 5,25	+ 9,44	+ 17,42	+ 25,76
5	11,3					25,06	1,96	5,04	10,03	16,68
6	-10,9						30,87	-1,89	-4,85	-9,67
7	-9,5							36,87	-1,65	-4,23
									48,01	

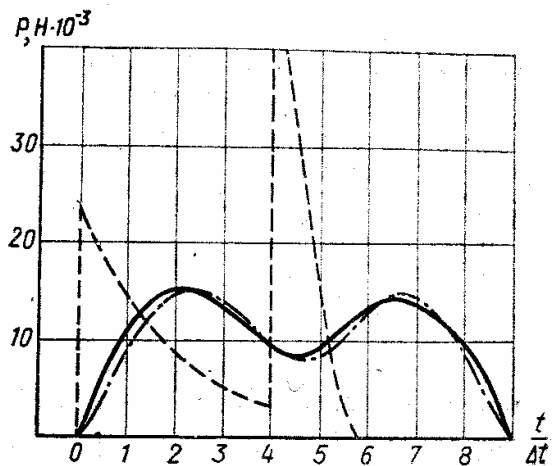


Рис. 44.5

на том же рисунке показано изменение контактных сил, вычисленное без учета местных деформаций (см. § 22), а штрихпунктирной линией — изменение контактных сил с учетом нелинейной зависимости  $P(\alpha)$  (см. [40]).

Сопоставление кривых показывает, что линеаризация контактных деформаций вполне допустима. Вместе с тем расчет без учета контактных деформаций приводит к более чем трехкратному преувеличению контактной силы.

Заметим, что в результате расчета мы получили значение максимальной контактной силы 15 500 Н, достаточно близкое к тому, которым задавались при линеаризации контактной силы (15 000 Н). Если бы разница в значениях  $P_{\max}$  превышала 30% (что отвечает 10%-ной разнице в величине  $\delta$ ), пришлось бы провести расчет с новым значением  $\delta$ .

В рассмотренном примере в связи с большой простотой функции  $Y_2$  все вычисления легко выполнить вручную. Более сложные задачи решают на ЭВМ, причем программа может быть составлена в соответствии с тем же алгоритмом.

Изменение типа упругой системы приводит лишь к изменению ее реакции  $Y_2(t)$  на линейно возрастающую нагрузку. Алгоритм же расчета сохраняется прежним.

Так, например, рассматривая воздействие линейно возрастающей силы на среднюю точку балки постоянного сечения на двух опорах, найдем реакцию балки на эту нагрузку:

$$Y_2^{(1)}(t) = \frac{2}{m_0 l} \sum_{n=1, 3, 5, \dots}^{\infty} \frac{1}{p_n^3} (p_n t - \sin p_n t),$$

где  $m_0 l$  — масса балки;  $p_n = n^2 \pi^2 \sqrt{EJ/(m_0 l^4)}$  — частота  $n$ -й формы собственных колебаний.

Следовательно, при ударе грузом массой  $m$  по балке функция  $Y_2(t)$  имеет вид

$$Y_2(t) = \frac{2}{m_0 l} \sum_{n=1, 3, 5, \dots}^{\infty} \frac{1}{p_n^3} (p_n t - \sin p_n t) + \frac{t^2}{6m}.$$

При малых значениях  $p_1 t$  ряд в выражении для  $Y_2(t)$  плохо сходится. Здесь может быть использована приближенная формула

$$\sum_{n=1, 3, 5, \dots}^{\infty} \frac{1}{p_n^3} (p_n t - \sin p_n t) \approx \frac{\sqrt{2\pi}}{15} \frac{1}{p_1^3} (p_1 t)^{5/2} [p_1 = \pi^2 \sqrt{EJ/(m_0 l^4)}],$$

которая получена из рассмотрения реакции на линейно возрастающую нагрузку бесконечной балки\*.

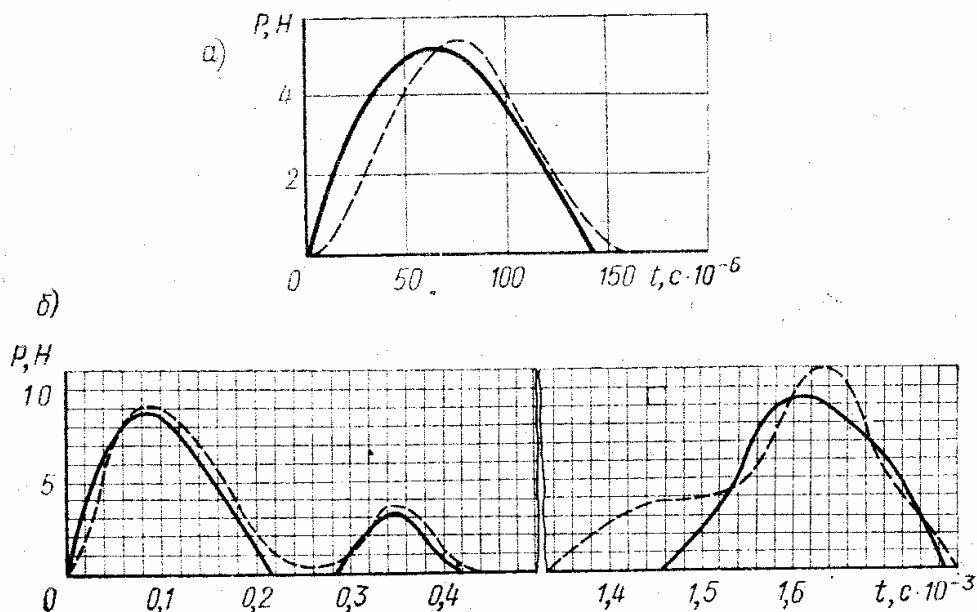


Рис. 44.6

\* См.: Л у р ь е А. И. Операционное исчисление. М., ГТТИ, 1948.

Эта формула справедлива, конечно, только при малых значениях  $p_1 t$ , когда влияние опор еще не сказывается существенно на движении средней части балки (при  $p_1 t = \pi/4$  ошибка составляет 3%).

На рис. 44.6, а приведены результаты расчета для случая удара стального шарика диаметром 2 см по балке квадратного сечения  $1 \times 1$  см, длиной 15,35 см. Скорость удара 0,01 м/с. Штриховая кривая получена для этого же случая С. П. Тимошенко при нелинейной зависимости местных деформаций от контактной силы.

На рис. 44.6, б приведены аналогичные кривые для удара шариком, имеющим диаметр 4 см, по балке сечением  $1 \times 1$  см, длиной 30,7 см. В этом случае в процессе удара имеют место три отдельных периода контакта между балкой и шариком.

Сопоставление кривых показывает, что и при изгибающем ударе линеаризация контактных деформаций вполне допустима.

После того как изменение контактной силы определено, нетрудно подсчитать и внутренние силовые факторы в каждой из соударяющихся систем, считая возмущающую силу  $P(t)$  заданной.

#### § 45. УПРОЩЕННЫЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТА УДАРНЫХ НАГРУЗОК

Точный расчет упругих систем и в особенности систем с распределенной массой на ударную нагрузку весьма сложен. Кроме того, часто сами соударяющиеся детали имеют настолько сложную конфигурацию, что схематизация их в виде бруса является чрезвычайно грубой. Поэтому в практике применяют упрощенные методы расчета на ударную нагрузку.

При точном расчете по заданным начальным условиям определяют движение упругой системы в процессе удара. В отличие от этого при упрощенном расчете закон движения системы задают на основе тех или иных соображений и вычисляют лишь примерную величину максимальных перемещений и напряжений.

Расчет выполняют либо путем рассмотрения движения упрощенной системы с одной степенью свободы, к которой приводится реальная упругая система, либо путем приравнивания энергии деформации системы кинетической энергии ударяющего груза. Собственную массу упругой системы или не учитывают вовсе, или учитывают как некоторую эквивалентную сосредоточенную массу, приведенную к точке удара.

Если игнорируют массу упругой системы и деформируемость груза, ударяющего по ней, то задача удара сводится к изучению совместных колебаний груза (который в данном случае характеризуется только своей массой  $m$ ) и упругой системы, которая характеризуется только своей податливостью  $\delta$ .

Во время совместного движения груз и упругая система представляют собой колебательную систему с одной степенью свободы, расчет которой не вызывает затруднений. Так, если имеет место горизон-

тальный удар (рис. 45.1), то, отсчитывая время от момента первоначального контакта, находим закон движения груза:

$$x = (v_0/p) \sin pt, \quad (45.1)$$

где  $v_0$  — скорость удара;  $p = \sqrt{1/(m\delta)}$  — собственная частота системы.

Продолжительность контакта равна полупериоду собственных колебаний системы:

$$t'' = \pi/p = \pi \sqrt{m\delta}, \quad (45.2)$$

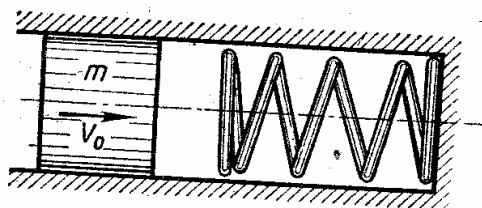


Рис. 45.1

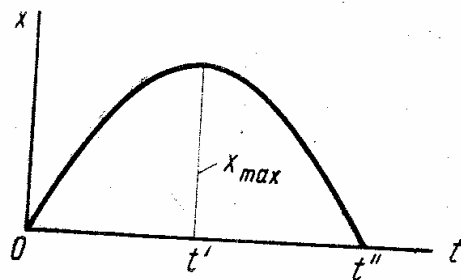


Рис. 45.2

а максимальное смещение  $x_{\max}$  достигается в момент  $t' = 1/2 t''$  (рис. 45.2):

$$x_{\max} = v_0/p = v_0 \sqrt{m\delta} = \sqrt{mv_0^2\delta} = \sqrt{2T_0\delta}. \quad (45.3)$$

Здесь  $T_0 = mv_0^2/2$  — кинетическая энергия ударяющего груза. Максимальная сила удара

$$P_{\max} = x_{\max}/\delta = \sqrt{2T_0/\delta}. \quad (45.4)$$

Как видим, в данной простой системе динамические перемещения и усилия полностью определяются энергией удара. Формулы (45.3) и (45.4) могут быть получены и на основе рассмотрения энергии системы. Для этого нужно приравнять кинетическую энергию груза  $T_0 = mv_0^2/2$  энергии деформации  $U_{\max}$  системы при максимальных перемещениях:

$$U_{\max} = x_{\max}^2/(2\delta) = P_{\max}^2 \delta/2.$$

В случае вертикального удара (рис. 45.3) закон изменения перемещений за время контакта (с учетом влияния силы тяжести) получим, отсчитывая смещения  $x$  от положения статического равновесия. Тогда начальными условиями движения будут условия

$$x(0) = -f_{\text{ст}}; \quad \dot{x}(0) = v_0,$$

где  $f_{\text{ст}} = mg\delta$  — прогиб системы под действием веса груза.

Соответственно перемещения определяются выражением

$$x = -f_{\text{ст}} \cos pt + (v_0/p) \sin pt.$$

График изменения  $x$  показан на рис. 45.4.  
Максимальное перемещение

$$x_{\max} = \sqrt{f_{\text{ст}}^2 + (v_0/p)^2}.$$

Полная деформация  $f_{\text{дин}}$ , отсчитанная от недеформированного положения, больше  $x_{\max}$  на величину статического прогиба:

$$f_{\text{дин}} = f_{\text{ст}} + \sqrt{f_{\text{ст}}^2 + (v_0/p)^2}. \quad (45.5)$$

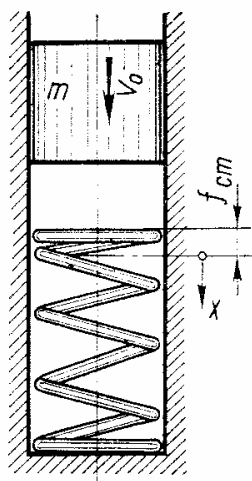


Рис. 45.3

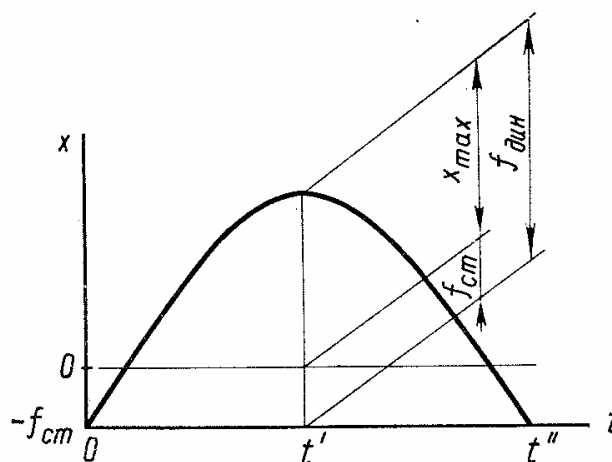


Рис. 45.4

Максимальная сила удара

$$P_{\max} = f_{\text{дин}}/\delta = Q + \sqrt{Q^2 + v_0^2/(p^2\delta^2)}, \quad (45.6)$$

где  $Q = mg$  — вес груза.

Продолжительность удара в данном случае

$$t'' = 2[\pi/2 + \arctg(pf_{\text{ст}}/v_0)]/p. \quad (45.7)$$

Формулы (45.5), (45.6) для  $f_{\text{дин}}$  и  $P_{\max}$  можно, как и при горизонтальном ударе, получить из рассмотрения энергии. Для этого нужно максимальную потенциальную энергию деформации системы  $f_{\text{дин}}^2/(2\delta)$  приравнять сумме кинетической энергии  $mv_0^2/2$  и работы силы тяжести  $Qf_{\text{дин}}$ .

При приближенном учете собственной массы системы путем приведения ее к точке удара принимают, что соотношения между перемещениями точек системы при ударе такие же, как при ее собственных колебаниях основного тона или при деформации системы статической нагрузкой, приложенной в точке удара.

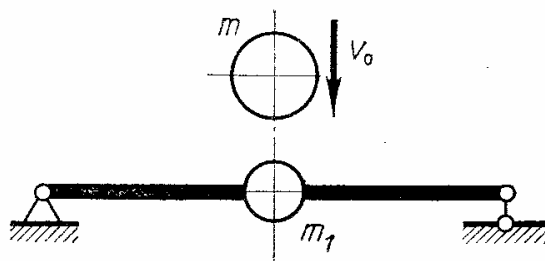


Рис. 45.5

В этом случае рассматривается задача об ударе груза по упругой системе с сосредоточенной в точке удара приведенной массой  $m_1$  (рис. 45.5). Величину приведенной массы определяют так, чтобы она обладала той же кинетической энергией, что и действительная система при заданной форме движения\*:

$$m_1 = \int (u/u_1)^2 dm, \quad (45.8)$$

где  $u/u_1$  — отношение перемещения элементарной массы  $dm$  к перемещению точки приведения.

Соударение груза  $m$  с приведенной массой  $m_1$  считают неупругим, так что после соударения они двигаются с общей скоростью  $v = \frac{m}{m+m_1} v_0$ , где  $v_0$  — скорость соударения. Далее рассматривают колебания системы, имеющей одну степень свободы (с массой  $m + m_1$ ).

Для максимального динамического перемещения вместо формулы (45.3) получают формулу

$$x_{\max} = \sqrt{2T_0 \delta m / (m + m_1)}. \quad (45.9)$$

Таким образом, приближенный учет собственной массы упругой системы приводит к некоторому уменьшению расчетных динамических перемещений, что соответствует и результатам более точных расчетов.

Расчет динамических напряжений с приближенным учетом собственной массы системы проводить нецелесообразно, так как получаемые при этом результаты оказываются менее точными, чем в том случае, когда эта масса не учитывается вовсе.

---

\* Рекомендуемый в некоторых книгах метод приведения массы, основанный на условии сохранения количества движения, ошибочен, так как, задавая форму движения, мы накладываем дополнительные связи, что приводит к изменению количества движения.

# НЕКОТОРЫЕ ТЕХНИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ТЕОРИИ КОЛЕБАНИЙ

## § 46. ОСНОВЫ РАСЧЕТА ВИБРОИЗОЛЯЦИИ

**Вводные замечания.** Колебания, возникающие при работе различного рода машин, передаются прилегающим конструкциям и нарушают нормальную работу других устройств, вредно влияют на здоровье людей. Поэтому возникает задача изоляции колеблющегося объекта от прилегающих конструкций. С другой стороны, часто приходится устанавливать различного рода приборы и другие объекты на колеблющемся основании. В этом случае требуется изолировать объект от основания так, чтобы ему не передавались колебания последнего. В обоих случаях задача виброизоляции решается одинаковыми средствами — между объектом и основанием устанавливают упругие элементы, а иногда и демпферы сухого или вязкого трения.

В настоящем параграфе рассматриваются линейная система виброизоляции при гармоническом возмущении, влияние нелинейностей, возникающих при установке ограничителей хода (упоров), а также поведение системы изоляции при кратковременных воздействиях. Вопросы расчета виброизоляции при случайных воздействиях освещены в гл. VII.

**Поведение системы изоляции при гармонических воздействиях.** Рассмотрим простейшую систему виброзащиты, представленную на рис. 46.1.

Здесь объект массой  $m$ , на который действует гармоническая возмущающая сила  $P(t) = P_0 \cos \omega t$ , соединен с основанием упругой связью жесткости  $c$  и элементом вязкого трения с коэффициентом трения  $\alpha$ .

Рассматривая колебания такой системы в § 5, мы установили, что перемещения груза меняются по закону

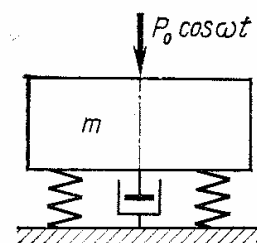


Рис. 46.1

$$x = A \cos (\omega t - \varphi),$$

$$A = \frac{P_0}{c \sqrt{(1 - \omega^2/p^2)^2 + 4n^2\omega^2/p^4}}; \quad \varphi = \arctg \frac{2n\omega}{p^2 - \omega^2}.$$

Здесь  $n = \alpha/(2m)$  — коэффициент затухания;  $p = \sqrt{c/m}$  — частота собственных колебаний консервативной системы.

В задаче виброизоляции существенны не столько перемещения объекта  $x$ , сколько динамическое усилие  $R$ , передаваемое основанию.

Это усилие складывается из силы в упругой связи  $cx$  и силы вязкого трения  $\alpha\dot{x}$ :

$$R = cx + \alpha\dot{x} = A[c \cos(\omega t - \varphi) - \alpha\omega \sin(\omega t - \varphi)].$$

Эту формулу представим в виде

$$R = R_0 \cos(\omega t - \varphi_1);$$

$$R_0 = A \sqrt{c^2 + (\alpha\omega)^2} = P_0 \frac{\sqrt{1 + 4n^2\omega^2/p^4}}{\sqrt{(1 - \omega^2/p^2)^2 + 4n^2\omega^2/p^4}};$$

$$\varphi_1 = \varphi - \operatorname{arctg}(2n\omega/p^2).$$

Отношение амплитуды  $R_0$  силы, передаваемой основанию, к амплитуде  $P_0$  возмущающей силы называется коэффициентом виброизоляции  $\gamma$ :

$$\gamma = \frac{R_0}{P_0} = \frac{\sqrt{1 + 4n^2\omega^2/p^4}}{\sqrt{(1 - \omega^2/p^2)^2 + 4n^2\omega^2/p^4}}. \quad (46.1)$$

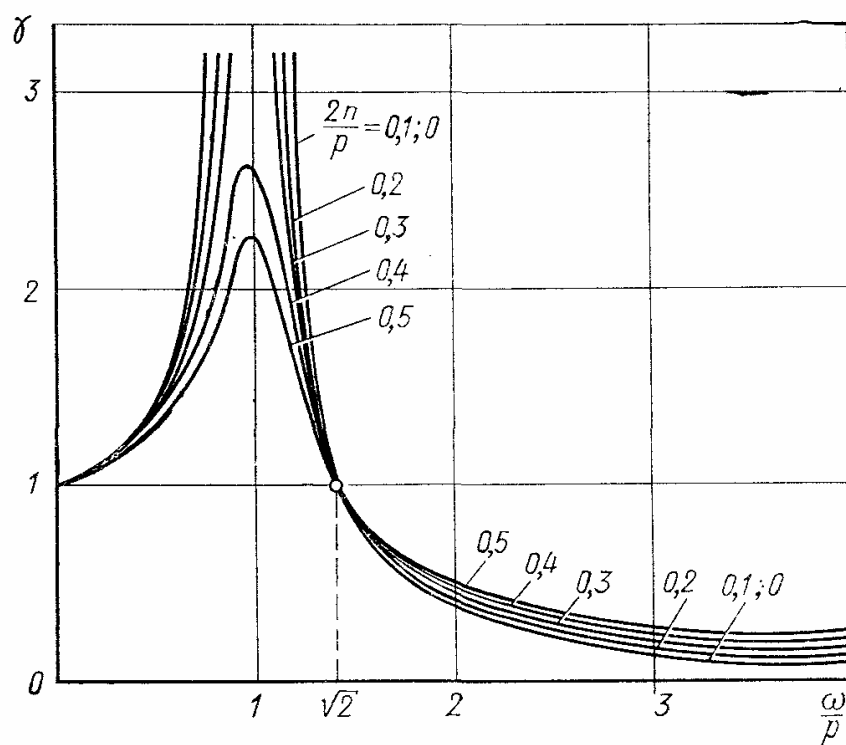


Рис. 46.2

На рис. 46.2 показаны графики зависимости коэффициента виброизоляции  $\gamma$  от отношения частоты возмущающей силы к собственной частоте системы.

В случае, если система виброизоляции служит для защиты объекта  $m$  от передачи ему колебаний основания (рис. 46.3), коэффициентом виброизоляции называется отношение ускорения объекта к уско-



рению основания. Этот коэффициент  $\gamma$  также выражается формулой (46.1).

В самом деле, уравнение движения объекта (рис. 46.3) имеет вид

$$m\ddot{x} + a(\dot{x} - \dot{\xi}) + c(x - \xi) = 0, \quad (46.2)$$

где  $x$  — смещение объекта;  $\xi$  — смещение основания.

При гармоническом возбуждении смещение основания определяется формулой

$$\xi = a \cos \omega t,$$

а смещение объекта —

$$x = A \cos(\omega t - \varphi).$$

Подстановка этих значений в уравнение (46.2) приводит к равенству

$$A = a \sqrt{(c^2 + a^2\omega^2)/[(c - m\omega^2)^2 + a^2\omega^2]}.$$

Коэффициент виброизоляции находится как

$$\gamma = \ddot{x}_{\max} / \ddot{\xi}_{\max} = A/a = \sqrt{(c^2 + a^2\omega^2)/[(c - m\omega^2)^2 + a^2\omega^2]}.$$

Это выражение в точности совпадает с формулой (46.1), и, следовательно, график на рис. 46.2 относится в равной мере к обоим случаям виброизоляции.

Легко видеть, что система виброизоляции эффективна только в том случае, если  $\omega/p$  велико, т. е. если собственная частота системы мала по сравнению с частотой возмущения. При  $p > \omega/\sqrt{2}$  упругая подвеска приносит не пользу, а вред, так как коэффициент виброизоляции оказывается большим единицы. Демпфирование ухудшает эффективность виброизоляции в области высоких частот, но снижает резонансные пики. Некоторое демпфирование полезно, так как позволяет

сократить продолжительность переходных процессов и ограничить амплитуды при пуске и остановке системы.

Для обеспечения низкой собственной частоты колебаний изолируемого объекта необходимо сделать систему виброизоляции достаточно податливой. Одна-

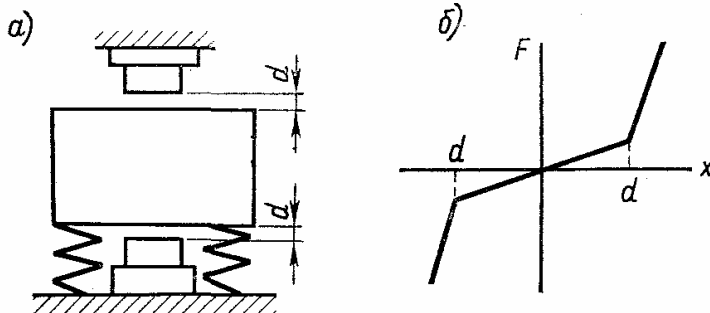


Рис. 46.4

ко при этом возможна излишняя подвижность объекта при действии медленно изменяющихся нагрузок. Так, например, приборы самолетного оборудования, система изоляции которых рассчитана на гашение вибраций, передаваемых от двигателя,

могут получать недопустимо большие перемещения при перегрузках, связанных с маневрами самолета. Для ограничения возможных перемещений в этом случае устанавливают упоры (рис. 46.4, а).

Следует иметь в виду, что при наличии упоров система амортизации становится нелинейной. Характеристика ее приобретает вид, показанный на рис. 46.4, б.

В такой нелинейной системе возможны режимы движения с ударами об ограничитель. Такие режимы конечно, недопустимы. Для их

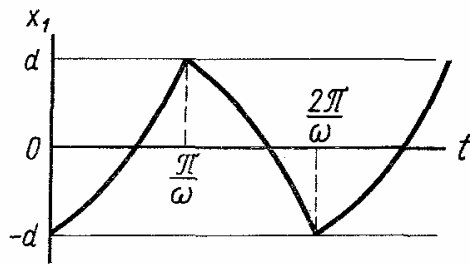


Рис. 46.5

исключения система виброизоляции должна быть рассчитана на основе нелинейной теории, изложенной в § 8.

Выведем формулу для определения наименьшего допустимого расстояния до упоров в случае, если упоры являются весьма жесткими, расположены симметрично и удар о них определяется коэффициентом восстановления скорости  $k$ . Другие виды демпфирования не учитываются.

Рассмотрим режим движения, при котором за один период возмущения имеют место удары о верхнюю и нижнюю опору. Соответствующий график относительного движения объекта показан на рис. 46.5. Уравнение движения при кинематическом возмущении получает вид

$$m\ddot{x}_1 + cx_1 = -m\omega^2 a \cos(\omega t + \varphi). \quad (46.3)$$

Здесь  $x_1 = x - \xi$  — смещение объекта относительно вибрирующего основания;  $x$ ,  $\xi = a \cos(\omega t + \varphi)$  — абсолютные смещения объекта и основания.

Общее решение уравнения (46.3) для периода движения объекта между упорами имеет вид

$$x_1 = C_1 \cos pt + C_2 \sin pt + \frac{a}{1 - p^2/\omega^2} \cos(\omega t + \varphi). \quad (46.4)$$

Совмещая начало отсчета времени с моментом отскока объекта от нижнего упора (что всегда можно сделать, выбрав надлежащим образом фазовый угол  $\varphi$ ), будем иметь: при  $t = 0$   $x_1 = -d$ ; при  $t = \pi/\omega$   $x_1 = d$ . Кроме того, следует учесть условие, связывающее скорость удара об ограничитель со скоростью отскока от него:  $(\dot{x}_1)_{t=0} = k(\dot{x}_1)_{t=\pi/\omega}$ .

Три записанных условия достаточны для определения трех постоянных ( $C_1$ ,  $C_2$ ,  $\varphi$ ), входящих в выражение (46.4). Эти условия приводят к следующим равенствам:

$$-d = C_1 + \frac{a}{1 - p^2/\omega^2} \cos \varphi;$$

$$d = C_1 \cos \lambda + C_2 \sin \lambda - \frac{a}{1 - p^2/\omega^2} \cos \varphi;$$

$$C_2 p - \frac{a}{1 - p^2/\omega^2} \omega \sin \varphi = k \left( -C_1 p \sin \lambda + C_2 p \cos \lambda + \frac{a\omega}{1 - p^2/\omega^2} \sin \varphi \right) \\ (\lambda = \pi p/\omega).$$

Из первых двух уравнений находим:

$$C_1 = -d - \frac{a}{1 - p^2/\omega^2} \cos \varphi; \quad C_2 = -C_1 \operatorname{ctg} (\lambda/2).$$

Подстановка этих значений в третье уравнение дает соотношение

$$d = \frac{a}{1 - p^2/\omega^2} \left[ \frac{1+k}{1-k} \frac{\omega}{p} \operatorname{tg} \frac{\lambda}{2} \sin \varphi - \cos \varphi \right]. \quad (46.5)$$

Очевидно, что стационарный режим движения с ударами об упоры возможен, если можно подобрать такое значение фазового угла  $\varphi$ , чтобы выполнялось равенство (46.5). Наоборот, удары об упоры невозможны, если зазор  $d$  больше, чем максимальное значение правой части равенства (46.5).

Таким образом, получаем следующее достаточное условие отсутствия ударов об упоры:  $d > d_0$ ;

$$d_0 = \frac{a}{|1 - p^2/\omega^2|} \sqrt{1 + \left( \frac{1+k}{1-k} \right)^2 \frac{\omega^2}{p^2} \operatorname{tg}^2 \frac{\pi p}{2\omega}}. \quad (46.6)$$

Из формулы (46.6) видно, что для предупреждения ударов зазор должен быть существенно больше, чем стационарная амплитуда колебания  $A = \frac{a}{|1 - p^2/\omega^2|}$ , рассчитанная по линейной теории.

На рис. 46.6 показана зависимость величины  $d_0/a$  от  $\omega/p$  при различных  $k$ .

Величина коэффициента восстановления  $k$  очень сильно влияет на размеры необходимого зазора. Поэтому в конструкциях упоров используют обычно материалы с большим поглощением энергии.

В выполненном выше расчете учтено только поглощение энергии при ударах. Если учесть также трение, связанное с движением объекта между упорами, то значение  $d_0$  будет меньшим. Приемы такого рода расчетов рассмотрены в книге [29].

Одним из методов снижения частоты собственных колебаний системы виброизоляции без уменьшения ее жесткости является искусственное увеличение массы объекта.

Разумеется, этот метод применим далеко не всегда, но в некоторых случаях вполне может быть использован. В качестве примера на

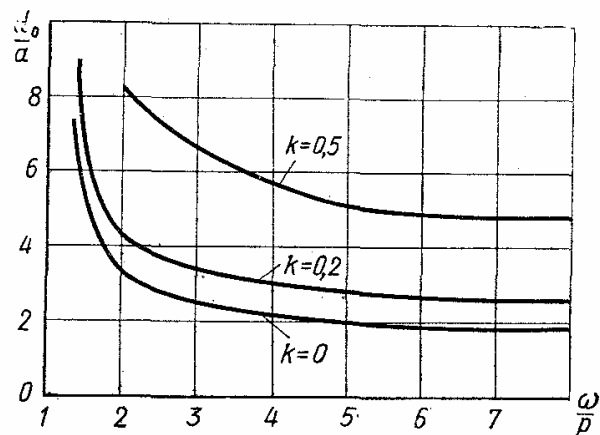


Рис. 46.6

рис. 46.7 показана схема виброизоляции силового агрегата. Здесь масса агрегата увеличена добавлением дополнительной железобетонной плиты. Агрегат вместе с плитой изолирован от фундамента с помощью упругих амортизаторов.

Выше была рассмотрена виброизоляция для системы с одной степенью свободы. Однако полученные общие соотношения справедливы

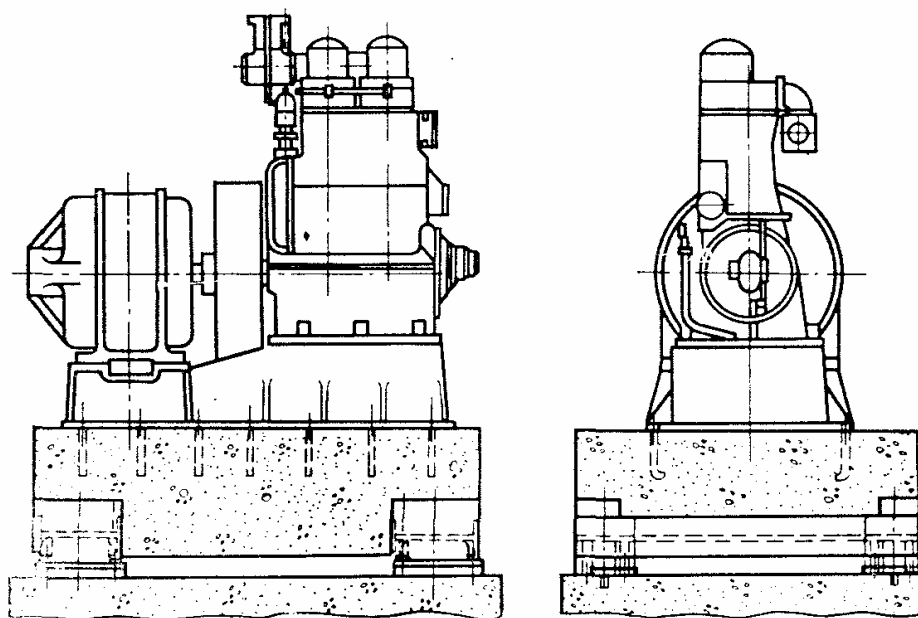


Рис. 46.7

и для более сложных систем. Так, для линейно-упругой системы можно ввести главные координаты, и тогда движение по каждой из координат будет определяться самостоятельным уравнением.

Наряду с рассмотренными выше системами, в которых защита от вибраций достигается с помощью пассивных элементов (упругостей, демпферов), в ответственных конструкциях используют также системы активной виброзащиты. В этих системах вибрации подавляются за счет энергии постороннего источника, управляемого системой автоматического регулирования.

**Поведение системы изоляции при ударных воздействиях.** В данном разделе под ударным будем понимать кратковременное воздействие на объект.

В качестве примера рассмотрим систему виброизоляции

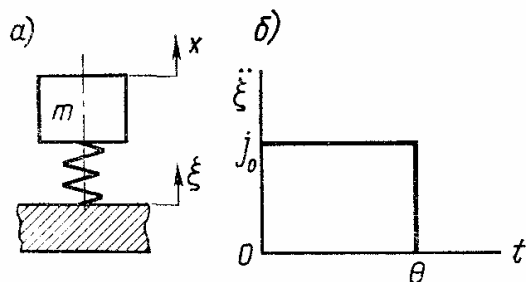


Рис. 46.8

(рис. 46.8, а), в которой «основание» получает ускорение в соответствии с рис. 46.8, б. В результате этого воздействия основание начинает двигаться со скоростью  $v = j_0 \theta$ . Объект массой  $m$  связан с основанием защитной системой, которая должна снизить максимальное ускорение объекта до величины  $j_1 < j_0$ . Отношение  $\gamma = j_1/j_0$

будем называть коэффициентом изоляции. В простейшем случае система изоляции представляет собой линейную пружину жесткостью  $c$ . Трение не оказывает существенного влияния на движение объекта в наиболее интересные первые моменты, и его можно не учитывать.

Уравнение движения объекта следующее:

$$m\ddot{x} + cx = c\xi, \quad (46.7)$$

где  $\xi$  — смещение основания.

При  $0 < t < \theta$   $\xi = j_0 t^2/2$ ,

при  $t > \theta$   $\xi = j_0 [t^2/2 - (t - \theta)^2/2]$ .

Соответствующие этому значению  $\xi$  решения уравнения (46.7), отвечающие нулевым начальным условиям и условиям непрерывности при  $t = \theta$ , таковы:

при  $0 \leq t \leq \theta$   $x = j_0 [t^2/2 - (1 - \cos pt)/p^2]$ ;

при  $t \geq \theta$   $x = j_0 \{t^2/2 - (t - \theta)^2/2 - [\cos p(t - \theta) - \cos pt]/p^2\}$ .

Ускорения объекта равны:

при  $0 \leq t \leq \theta$   $\ddot{x} = j_0 (1 - \cos pt)$ ;

при  $t \geq \theta$   $\ddot{x} = j_0 [\cos p(t - \theta) - \cos pt] = 2j_0 \sin(p\theta/2) \sin p(t - \theta/2)$ .

Так как максимальное значение  $\ddot{x}$  должно быть меньше  $j_0$ , то очевидно, что  $p\theta$  должно быть, во всяком случае, меньше  $\pi/2$  и максимум  $\ddot{x}$  имеет место при  $t > \theta$ :

$$j_1 = |\ddot{x}|_{\max} = 2j_0 \sin(p\theta/2).$$

Таким образом, коэффициент изоляции определяется формулой

$$\gamma = j_1/j_0 = 2 \sin(p\theta/2). \quad (46.8)$$

Подсчитаем еще максимальное смещение объекта относительно основания:

$$(\xi - x)_{\max} = j_0 \frac{1}{p^2} [\cos p(t - \theta) - \cos pt]_{\max} = j_0 \frac{2}{p^2} \sin \frac{p\theta}{2}.$$

Эту величину можно связать с коэффициентом изоляции  $\gamma$ :

$$(\xi - x)_{\max} = j_0 \theta^2 \gamma / [2 \arcsin(\gamma/2)]^2.$$

Полагая  $\arcsin(\gamma/2) \approx \gamma/2$ , находим

$$(\xi - x)_{\max} = j_0 \theta^2 / \gamma. \quad (46.9)$$

Таким образом, чем меньше  $\gamma$ , т. е. чем лучше изоляция, тем больше ход амортизатора. Во всяком случае, даже при  $\gamma = 1$  этот ход не может быть сделан меньше  $j_0 \theta^2$ , т. е. меньше удвоенного перемещения основания за время  $\theta$ .

Большой ход является основным недостатком линейной системы изоляции. Причины этого недостатка очевидны: в течение времени  $\theta$  основание движется с постоянным ускорением, а затем с постоянной скоростью; между тем ускорение объекта в начальный момент равно нулю и лишь постепенно возрастает до допустимой величины  $j_1 = \gamma j_0$ . Можно существенно уменьшить ход защитной системы, если

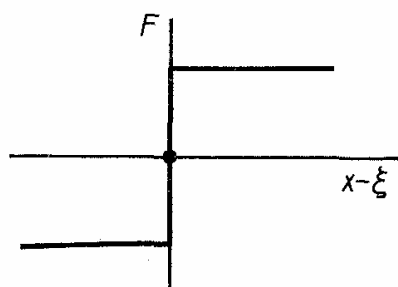


Рис. 46.9

с самого начала дать объекту допустимое по величине ускорение. Для этого к нему надо приложить постоянную по величине силу  $F = mj_1$ . Эта сила может быть реализована за счет упругого элемента с нелинейной характеристикой (рис. 46.9), элемента сухого трения или гидравлического демпфера с клапанами, открывающимися при заданном давлении.

Рассчитаем движение объекта при рассмотренной оптимальной системе защиты. Пока скорости объекта и основания не выравниваются, объект движется с постоянным ускорением

$$x = j_1 t^2 / 2.$$

Относительное перемещение (при  $t > \theta$ ) определяется равенством

$$\xi - x = j_0 [(1 - \gamma) t^2 / 2 - (t - \theta)^2 / 2].$$

В момент  $t = \theta / \gamma$  эта величина достигает максимума:

$$(\xi - x)_{\max} = j_0 \theta^2 (1 - \gamma) / (2\gamma).$$

Сравнивая эту формулу с формулой (46.9) для линейной системы защиты, устанавливаем, что отношение ходов составляет  $(1 - \gamma) / 2$ .

Таким образом, ход сокращается по крайней мере вдвое, и выгода тем больше, чем ближе к единице необходимое значение коэффициента  $\gamma$ .

## § 47. КОЛЕБАНИЯ ВРАЩАЮЩИХСЯ ВАЛОВ

**Вводные замечания.** Расчет колебаний вращающихся валов является весьма важной частью расчета турбомашин. Прежде всего расчет необходим для определения частот собственных колебаний вала в целях исключения явления резонанса.

Однако этого недостаточно. Вал, вращение которого поддерживается двигателем, обладает большим запасом кинетической энергии. При некоторых условиях эта энергия может переходить в энергию поперечных колебаний. Тогда движение прямолинейного вала становится неустойчивым. Таким образом, необходимо также выяснение условий устойчивости движения вала. В данном параграфе рассмотрены расчет частот собственных колебаний и совпадающих с ними критических скоростей вала, устойчивость движения вала, а также изложены особенности поведения анизотропно упругих валов.

Более подробное изложение вопроса содержится в монографии [22].

**Колебания безмассового вала с эксцентренно закрепленным диском.** Рассмотрим вал, вращающийся в двух подшипниках (рис. 47.1), в среднем сечении которого закреплен диск. Предположим, что центр массы  $m$  диска смещен относительно

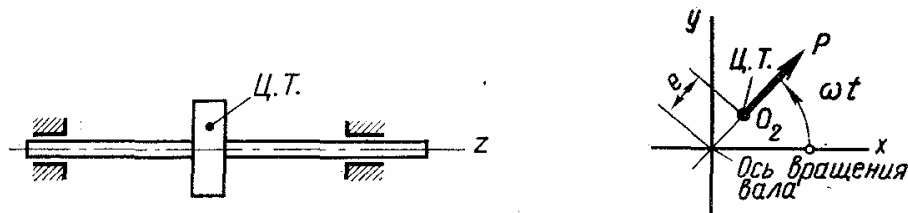


Рис. 47.1

но центра вала на величину  $e$ . Собственной массой вала можно пренебречь. Обозначая проекции прогиба вала на оси  $x, y$  буквами  $\xi, \eta$ , выразим координаты центра массы диска в таком виде:

$$x = \xi + e \cos \omega t; \quad y = \eta + e \sin \omega t. \quad (47.1)$$

Составим уравнение движения диска:

$$m\ddot{x} + c\xi = 0; \quad m\ddot{y} + c\eta = 0. \quad (47.2)$$

Здесь  $(-c\xi)$ ,  $(-c\eta)$  — проекции силы упругости вала на оси  $x, y$ . Подставив в уравнения (47.2) значения  $x, y$ , получим:

$$m\ddot{\xi} + c\xi = me\omega^2 \cos \omega t; \quad m\ddot{\eta} + c\eta = me\omega^2 \sin \omega t. \quad (47.3)$$

Стационарное решение уравнений (47.3) имеет такой вид:

$$\xi = \frac{e}{p^2/\omega^2 - 1} \cos \omega t; \quad \eta = \frac{e}{p^2/\omega^2 - 1} \sin \omega t, \quad (47.4)$$

здесь  $p = \sqrt{c/m}$  — собственная частота колебаний вала с диском.

Как видно из формул (47.4), при скорости вращения, приближающейся к частоте собственных колебаний, амплитуды колебаний стремятся к бесконечности. Эта скорость вращения называется критической. Формулы (47.4) показывают, что при стационарном режиме центр вала движется с угловой скоростью  $\omega$  по окружности радиусом

$$r = \frac{e}{p^2/\omega^2 - 1}. \quad (47.5)$$

При этом центр вращения  $O$ , центр вала  $O_1$  и центр массы диска  $O_2$  находятся на одной прямой.

В зависимости от соотношения  $\omega/p$  взаимное расположение этих точек различно. При  $\omega < p$  точки  $O$  и  $O_1$  лежат по одну сторону от центра массы  $O_2$  (рис. 47.2, а), а при  $\omega > p$  — по разные (рис. 47.2, б). Зависимость  $r$  от отношения  $\omega/p$  показана на рис. 47.3.

При стремлении скорости вращения к бесконечности  $r \rightarrow -e$  и центр массы диска  $O_2$  неограниченно приближается к центру враще-

ния  $O$ . Это явление называется **самоцентрированием**. Оно используется в конструкциях машин с так называемыми гибкими валами, т. е. с валами, собственная частота которых меньше угловой скорости вращения.

Преимуществом гибких валов является ограничение сил инерции и соответствующих им реакций в опорах величиной

$$ce = mr^2e \quad (47.6)$$

при увеличении скорости вращения. По этой причине гибкие валы обычно применяют в машинах, где не может быть обеспечена точная

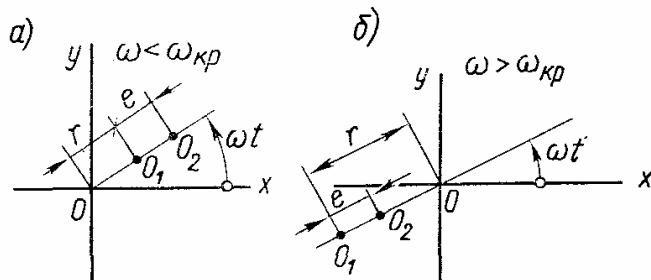


Рис. 47.2

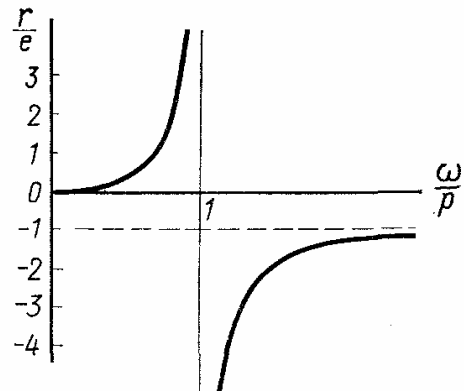


Рис. 47.3

балансировка ротора (центрифуги, стиральные машины и т. п.). В этих случаях используются также весьма податливые опоры подшипников, что позволяет снизить собственную частоту системы и, следовательно, величину динамических нагрузок [см. формулу (47.6)]. Гибкие валы используются также в конструкциях высокоскоростных турбомашин (газовые турбины, турбонасосные агрегаты и т. п.).

Недостатком турбомашин с гибким валом является возможность развития вибраций с большими амплитудами при проходе через резонанс в процессе разгона или торможения (см. § 5), а также возможность неустойчивости движения (см. ниже).

**Влияние гироскопических моментов на частоты собственных колебаний вала.** Если скорость вращения вала и моменты инерции насаженных на него дисков относительно невелики, частоту собственных колебаний вала можно определить по тем же формулам, что и частоту колебаний балки с грузами. В противном случае существенное влияние на характер колебания оказывают моменты сил инерции, возникающие вследствие угловых перемещений осей вращающихся масс.

Рассмотрим движение диска, насаженного на невесомый вал, вращающийся с угловой скоростью  $\omega$ . Предположим, что в результате упругих деформаций вала ось вращения диска  $z_1$  составляет с неподвижными координатными плоскостями  $zy$  и  $zx$  малые углы  $\vartheta_x$  и  $\vartheta_y$  (рис. 47.4). Моменты инерции диска относительно связанных с ним осей  $x_1, y_1, z_1$  обозначим:  $I_{z_1} = I_0$ ;  $I_{x_1} = I_{y_1} = I_1$ .

Для определения моментов, действующих на диск со стороны вала, применим теорему, согласно которой производная по времени



от момента количества движения равна моменту внешних сил. Угловая скорость вращения диска относительно оси  $z_1$  равна  $\omega$ , следовательно, момент количества движения относительно этой оси  $L_{z_1} = I_0 \omega$ .

Скорость вращения относительно связанной с диском оси  $x_1$  равна  $\dot{\vartheta}_x$ , и момент количества движения относительно оси  $x_1$   $L_{x_1} = I_1 \dot{\vartheta}_x$ .

Скорость вращения относительно оси  $y_1$  равна  $\dot{\vartheta}_y$  и соответственно  $L_{y_1} = I_1 \dot{\vartheta}_y$ .

Моменты количества движения относительно неподвижных осей  $x$  и  $y$  найдем, спроектировав на эти оси моменты  $L_{x_1}$ ,  $L_{y_1}$  и  $L_{z_1}$ :

$$L_x = L_{x_1} + L_{z_1} \vartheta_y =$$

$$= I_1 \dot{\vartheta}_x + I_0 \omega \vartheta_y;$$

$$L_y = L_{y_1} - L_{z_1} \vartheta_x =$$

$$= I_1 \dot{\vartheta}_y - I_0 \omega \vartheta_x.$$

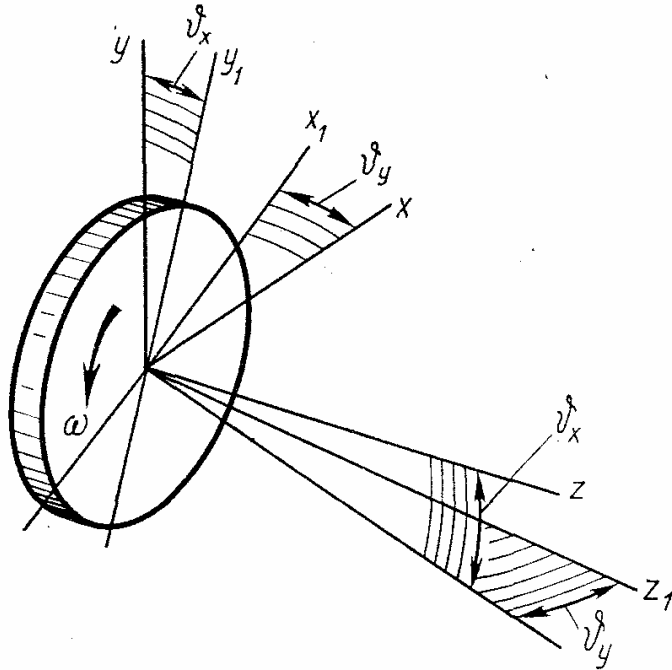


Рис. 47.4

Моменты приложенных к диску сил относительно осей  $x$  и  $y$  найдем по таким формулам:

$$M_x = \frac{d}{dt} L_x = I_1 \ddot{\vartheta}_x + I_0 \omega \dot{\vartheta}_y;$$

$$M_y = \frac{d}{dt} L_y = I_1 \ddot{\vartheta}_y - I_0 \omega \dot{\vartheta}_x. \quad (47.7)$$

Очевидно, что точно такие же, но противоположно направленные моменты передаются с диска на вал. Кроме того, на вал действуют силы инерции диска  $m\ddot{x}$  и  $m\ddot{y}$ , где  $x$  и  $y$  — проекции полного смещения диска на оси  $x$  и  $y$  (рис. 47.5).

Обозначим:  $\delta_{11}$  — смещение диска при действии единичной силы;  $\delta_{12}$  — поворот от действия той же силы;  $\delta_{22}$  — поворот от действия единичного момента (рис. 47.6).

Используя эти обозначения, можно выразить смещения диска  $x$  и  $y$  через действующие силы:

$$x = -m\ddot{x}\delta_{11} - (I_1 \ddot{\vartheta}_y - I_0 \omega \dot{\vartheta}_x) \delta_{12};$$

$$\vartheta_y = -m\ddot{x}\delta_{12} - (I_1 \ddot{\vartheta}_y - I_0 \omega \dot{\vartheta}_x) \delta_{22};$$

$$y = -m\ddot{y}\delta_{11} + (I_1\ddot{\vartheta}_x + I_0\omega\dot{\vartheta}_y)\delta_{12}; \quad (47.8)$$

$$-\dot{\vartheta}_x = -m\ddot{y}\delta_{12} + (I_1\ddot{\vartheta}_x + I_0\omega\dot{\vartheta}_y)\delta_{22}.$$

Таким образом, при наличии гироскопических моментов колебания в плоскостях  $xz$  и  $yz$  связаны и плоские колебания вала невозможны.

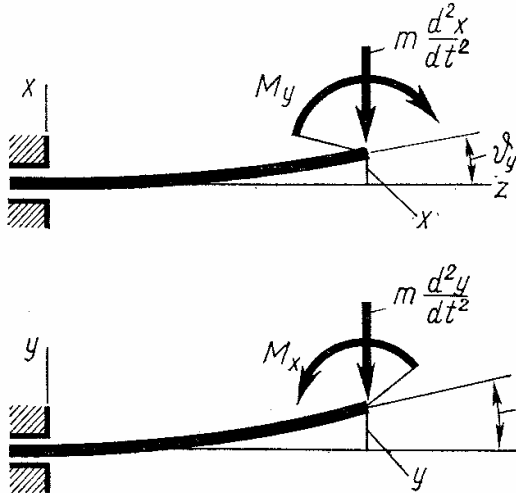


Рис. 47.5

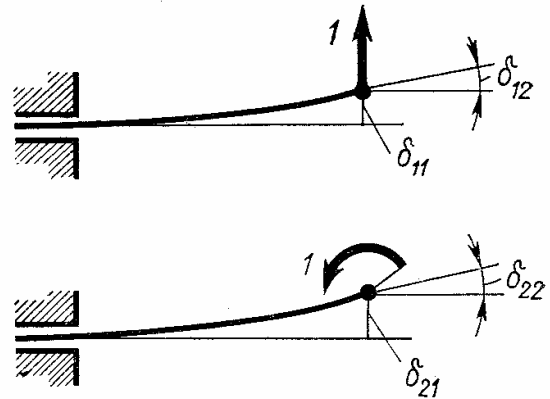


Рис. 47.6

Решения системы (47.8) можно представить в таком виде:

$$\begin{aligned} x &= A \cos pt; & y &= A \sin pt; \\ \vartheta_y &= \vartheta \cos pt; & \vartheta_x &= -\vartheta \sin pt \end{aligned} \quad (47.9)$$

или

$$\begin{aligned} x &= A \cos pt; & y &= -A \sin pt; \\ \vartheta_y &= \vartheta \cos pt; & \vartheta_x &= \vartheta \sin pt. \end{aligned} \quad (47.10)$$

Оба эти типа решения соответствуют вращательному движению изогнутой оси вала с угловой скоростью  $p$ , причем в первом случае изогнутая ось вращается в том же направлении, что и сам вал (прямое вращение изогнутой оси), а во втором случае — в сторону, противоположную вращению вала (обратное вращение изогнутой оси).

$A$  и  $\vartheta$  представляют собой прогиб и угол наклона касательной к изогнутой оси вала в точке закрепления диска.

Выясним значения моментов  $M_x$  и  $M_y$ , действующих на вал при прямом и обратном вращениях его изогнутой оси.

При прямом вращении, подставляя выражения (47.9) в формулы (47.7), получаем:

$$M_x = (I_0\omega/p - I_1)p^2\vartheta_x; \quad M_y = (I_0\omega/p - I_1)p^2\vartheta_y.$$

Сопоставляя полученные знаки моментов с принятыми их направлениями (см. рис. 47.5), видим, что в данном случае гироскопический момент

$$M = (I_0\omega/p - I_1)p^2\vartheta \quad (47.11)$$

направлен в сторону уменьшения угла поворота касательной (рис. 47.7, а).

Точно так же можно установить, что при обратном вращении изогнутой оси вала гироскопический момент

$$M = (I_0 \omega / p + I_1) p^2 \vartheta \quad (47.12)$$

направлен в сторону увеличения угла  $\vartheta$  (рис. 47.7, б).

Подставляя в уравнения (47.8) значения  $x$ ,  $y$ ,  $\vartheta_x$  и  $\vartheta_y$  из формул (47.9) и (47.10), видим, что в обоих случаях два последних уравнения оказываются тождественными с двумя первыми.

Для прямого вращения изогнутой оси имеем:

$$\begin{aligned} A(1 - p^2 m \delta_{11}) - \vartheta(p^2 I_1 - p \omega I_0) \delta_{12} &= 0; \\ -A p^2 m \delta_{12} + \vartheta[1 - (p^2 I_1 - p \omega I_0) \delta_{22}] &= 0. \end{aligned}$$

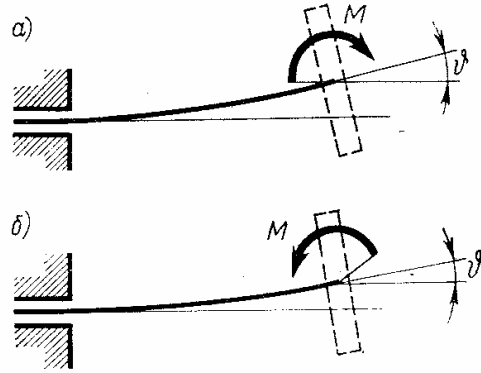


Рис. 47.7

Приравняв нулю определитель этой системы уравнений, получим уравнение частот при прямом вращении

$$\begin{vmatrix} 1 - p^2 m \delta_{11} & -(p^2 I_1 - p \omega I_0) \delta_{12} \\ -p^2 m \delta_{12} & 1 - (p^2 I_1 - p \omega I_0) \delta_{22} \end{vmatrix} = 0. \quad (47.13)$$

Точно так же для частот колебаний при обратном вращении изогнутой оси получаем уравнение

$$\begin{vmatrix} 1 - p^2 m \delta_{11} & -(p^2 I_1 + p \omega I_0) \delta_{12} \\ -p^2 m \delta_{12} & 1 - (p^2 I_1 + p \omega I_0) \delta_{22} \end{vmatrix} = 0. \quad (47.14)$$

Заметим, что уравнения (47.13) и (47.14) отличаются только знаком произведения  $p \omega$ . Поэтому можно ограничиться решениями только уравнения (47.13), имея в виду, что при одинаковых знаках  $p$  и  $\omega$  мы имеем прямое, а при разных — обратное вращение изогнутой оси вала. Так как уравнение (47.13) является полным уравнением четвертого порядка, оно имеет четыре корня. Следовательно, вращающийся вал с диском в отличие от покоящегося имеет не две, а четыре различные частоты собственных колебаний. Две из них соответствуют прямому и две — обратному вращению изогнутой оси вала.

Обозначив  $p/p_0 = z$ ;  $p_0 = \sqrt{1/(m \delta_{11})}$  — частота колебаний, вычисленная без учета инерционных моментов, приведем уравнение (47.13) к виду

$$\frac{\omega I_0}{p_0 I_1} = \frac{(z^2 - z_1^2)(z^2 - z_2^2)}{z(z^2 - 4)}, \quad (47.15)$$

где  $z_1$  и  $z_2$  — корни уравнения

$$z^4 - \frac{3}{4} \frac{I_1}{m l^2} z^2 - z^2 \left(1 + 3 \frac{I_1}{m l^2}\right) + 1 = 0,$$

определяющего собственные частоты невращающегося вала с диском.

Решение уравнения (47.15) может быть представлено в виде номограммы (рис. 47.8). Здесь по горизонтали отложена величина  $z = p/p_0$ , а по вертикали  $\frac{\omega}{p_0} \frac{I_0}{I_1}$ . Так как принято  $p > 0$ , то положительные значения  $\omega$  соответствуют прямому вращению изогнутой оси вала, а отрицательные — обратному. Построение на рис. 47.8 выполнено при  $I_1/(ml^2) = 1/4$ .

Как видно из графика, частоты колебаний, соответствующие прямому вращению изогнутой оси вала, выше, а частоты, соответствующие

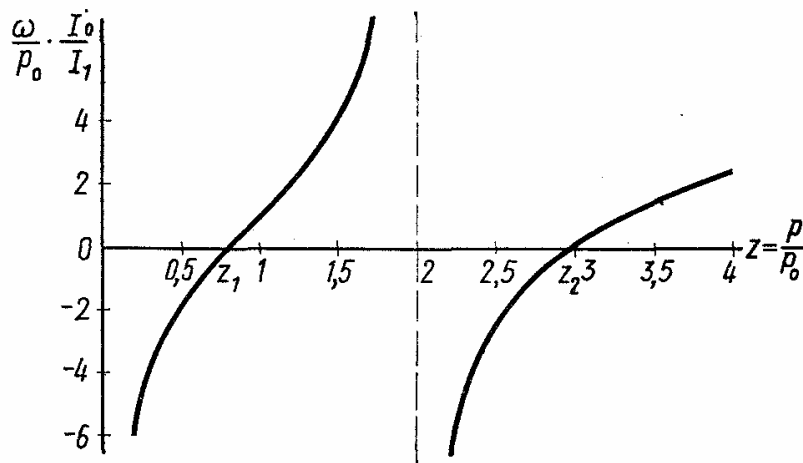


Рис. 47.8

щие обратному ее вращению, ниже, чем частоты невращающегося вала.

При заданной угловой скорости движения вал имеет четыре разных частоты собственных колебаний. Так, например, при  $(\omega/p_0)(I_0/I_1) = 2$  частоты колебаний вала составляют:  $p_1 = 0,48 p_0$ ;  $p_2 = 1,2 p_0$ ;

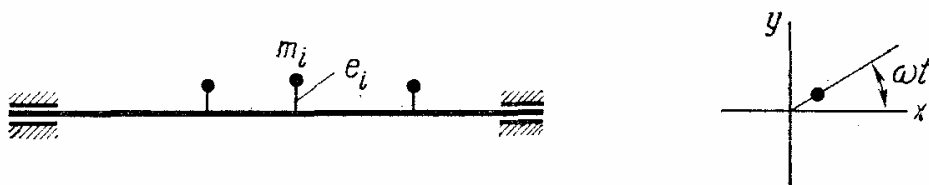


Рис. 47.9

$p_3 = 2,55 p_0$ ;  $p_4 = 3,25 p_0$ . Первая и третья частоты соответствуют обратному, вторая и четвертая — прямому вращению оси вала.

При наличии периодических возмущающих сил, изменяющихся с одной из собственных частот, имеет место резонанс.

**Колебания многомассового ротора, вызываемые дисбалансом. Балансировка гибких роторов.** Рассмотрим вал с несколькими эксцентренно закрепленными грузами (рис. 47.9).

Не уменьшая общности рассуждений, можно предположить, что центры масс всех грузов расположены в одной плоскости (в противном

случае следует рассматривать проекции эксцентриситетов на две взаимно перпендикулярные плоскости).

Тогда для колебаний, например, в вертикальной плоскости получим уравнения

$$\eta_i = \sum_{j=1}^n [-m_j \delta_{ij} \ddot{\eta}_i + m_j e_j \omega^2 \delta_{ij} \sin \omega t], \quad (47.16)$$

где  $\eta_i$  — вертикальная проекция прогиба вала в точке закрепления груза  $m_i$ ;  $e_i$  — его эксцентриситет.

Уравнения (47.16) представляют собой уравнения вынужденных колебаний системы с  $n$  степенями свободы, причем возмущающими силами являются проекции сил инерции несбалансированных грузов

$$P_j = m_j e_j \omega^2 \sin \omega t.$$

Используя метод главных координат (см. гл. II), стационарное решение системы (47.16) можно записать в виде

$$\eta_i = \sin \omega t \left\{ \frac{u_{i1} \sum_{j=1}^n m_j e_j u_{j1}}{\mathcal{M}_1(p_1^2/\omega^2 - 1)} + \frac{u_{i2} \sum_{j=1}^n m_j e_j u_{j2}}{\mathcal{M}_2(p_2^2/\omega^2 - 1)} + \dots \right\}.$$

Здесь  $u_{i1}$ ,  $u_{i2}$ , ... — формы собственных колебаний;  $p_1$ ,  $p_2$ , ... ,  $\mathcal{M}_1$ ,  $\mathcal{M}_2$ , ... — их частоты и обобщенные массы.

Аналогично, для колебаний в горизонтальной плоскости

$$\xi_i = \cos \omega t \left\{ \frac{u_{i1} \sum_{j=1}^n m_j e_j u_{j1}}{\mathcal{M}_1(p_1^2/\omega^2 - 1)} + \frac{u_{i2} \sum_{j=1}^n m_j e_j u_{j2}}{\mathcal{M}_2(p_2^2/\omega^2 - 1)} + \dots \right\}.$$

Таким образом, как и при одном грузе, изогнутая ось вала, сохраняя свою форму, вращается в пространстве с угловой скоростью  $\omega$ .

Полная сила инерции, с которой груз  $m_i$  воздействует на вал,

$$F_i = m_i \omega^2 (e_i + r_i), \quad (47.17)$$

где

$$r_i = \frac{u_{i1} \sum_{j=1}^n m_j e_j u_{j1}}{\mathcal{M}_1(p_1^2/\omega^2 - 1)} + \frac{u_{i2} \sum_{j=1}^n m_j e_j u_{j2}}{\mathcal{M}_2(p_2^2/\omega^2 - 1)} + \dots \quad (47.18)$$

Если угловая скорость вращения вала  $\omega$  значительно меньше, чем низшая частота его собственных колебаний  $p_1$  («жесткий» вал), то величины  $r_i$  малы (так как  $p_1^2/\omega^2 \gg 1$ ).

В этом случае, для того чтобы вал не воздействовал на опоры, достаточно, чтобы система сил  $F_{i0} = m_i \omega^2 e_i$  была самоуравновешенной. Для этого необходимо уравновесить ротор как жесткий, т. е.

совместить центр его массы с осью вращения (статическая балансировка) и добиться, чтобы ось вращения была главной осью инерции вала (динамическая балансировка).

Балансировка роторов как жестких производится путем установки дополнительных грузов или снятия части материала ротора в двух плоскостях.

Методы балансировки и устройство балансировочных станков рассматриваются в курсе теории машин и механизмов.

Как видно из формулы (47.17), балансировка ротора как жесткого не обеспечивает отсутствия воздействия его на опоры при больших скоростях вращения. Полная уравновешенность ротора при любых скоростях вращения может быть достигнута только в том случае, если ротор не только уравновешен как жесткий, но и выполнены условия

$$\sum_{j=1}^n m_j e_j u_{jk} = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n), \quad (47.19)$$

т. е. если распределение дисбалансов  $e_j$  ортогонально ко всем формам собственных колебаний.

Условия (47.19) выполняются только в том случае, если все эксцентриситеты равны нулю, т. е. ротор уравновешен в каждом сечении. Конечно, выполнить это требование невозможно, да и не необходимо. Так как слагаемые в выражении (47.18) быстро убывают, достаточно добиться обращения в нуль нескольких первых членов суммы. Так, если рабочая скорость вращения гибкого вала лежит между первой и второй собственными частотами, то достаточно достигнуть ортогональности эксцентриситетов к первой и второй собственным формам:

$$\sum_{j=1}^n m_j e_j u_{j1} = 0, \quad (47.20)$$

$$\sum_{j=1}^n m_j e_j u_{j2} = 0. \quad (47.21)$$

Выполнение этих условий позволяет устранить вибрации не только на рабочей скорости, но и при проходе через резонанс при разгоне и остановке (в связи с ортогональностью возмущающих сил к резонирующей форме колебаний).

Если для балансировки ротора как жесткого достаточно располагать балансирующие грузы в двух плоскостях уравновешивания, то для балансировки на первой критической скорости [т. е. при выполнении условия (47.20)] необходимо использовать уже три плоскости уравновешивания. Это нужно для того, чтобы при установке балансировочных грузов не испортить балансировки ротора как жесткого.

Часто вместо балансировки гибких роторов на резонансных оборотах выполняют балансировку их на рабочей скорости вращения. В этом случае обеспечивается устранение вибраций на рабочей скорости, но не ограничиваются амплитуды при проходе через резонанс.

**Расчет критической скорости вала с учетом гироскопических моментов.** Так как критические скорости вала совпадают с частотами его собственных колебаний, то для их расчета используются те же общие методы, что и для расчета изгибных колебаний балок. Единственную особенность составляет учет гироскопических моментов.

Как было установлено выше, центробежные силы неуравновешенных масс вызывают круговые колебания вала, причем изогнутая его ось вращается со скоростью  $\omega$  в ту же сторону, в которую вращается сам вал. Таким образом, имеет место прямая синхронная прецессия ( $\omega = p$ ). В этом случае [см. формулу (47.11)] гироскопический момент, с которым диск воздействует на вал,

$$M = (I_0 - I_1) p^2 \vartheta$$

и направлен против угла поворота  $\vartheta$ .

Сравнив эту величину момента с величиной инерционного момента  $M_0$  при отсутствии вращения вала ( $\omega = 0$ ), когда

$$M_0 = -I_1 p^2 \vartheta,$$

видим, что для определения критической скорости вала с учетом гироскопических моментов при прямом вращении можно применять те же формулы, что и для подсчета собственных частот балок, если подставлять в них вместо  $I_1$  величины  $-(I_0 - I_1)$ .

Некоторые трудности могут возникнуть только при использовании метода Рэлея или метода последовательных приближений. Так, с учетом гироскопических моментов в формуле Рэлея обобщенная масса  $\mathcal{M}$  выражается в виде

$$\mathcal{M} = \sum_i m_i u_i^2 - \sum_i (I_0 - I_1)_i \vartheta_i^2. \quad (47.22)$$

Знак минус перед вторым слагаемым в этой формуле связан с тем, что гироскопические моменты направлены против углов поворота. Пользоваться формулой Рэлея можно только в том случае, если второе слагаемое в формуле (47.22) мало по сравнению с первым (т. е. влияние гироскопических моментов невелико). Большой удельный вес второго слагаемого в формуле (47.22) или даже отрицательный знак  $\mathcal{M}$  свидетельствует о том, что форма колебаний задана неправильно, и в действительности благодаря влиянию гироскопических моментов углы поворота  $\vartheta_i$  под дисками меньше, чем это принято.

При проведении расчета методом последовательных приближений в некоторых случаях может быть получено отрицательное значение  $p^2$  (прогибы при нулевом и первом приближениях имеют разные знаки). Мнимое значение частоты, разумеется, не имеет физического смысла. В этом случае следует довести процесс приближения до конца, найти собственную форму, соответствующую мнимому значению частоты, и затем, используя ортогонализацию, определять форму колебаний и действительную критическую скорость так, как обычно определяются высшие формы собственных колебаний (см. § 27).

В некоторых случаях (см. [21]) наблюдались колебания вала при

обратном синхронном вращении его изогнутой оси ( $p = -\omega$ ). В этом случае гироскопический момент

$$M = (I_0 + I_1) p^2 \vartheta$$

направлен в сторону увеличения угла  $\vartheta$ , увеличивает деформации вала и, следовательно, снижает собственную частоту.

Относительно колебаний, происходящих при обратном вращении изогнутой оси вала, следует отметить два обстоятельства, снижающие их опасность: во-первых, эти колебания не могут возбуждаться

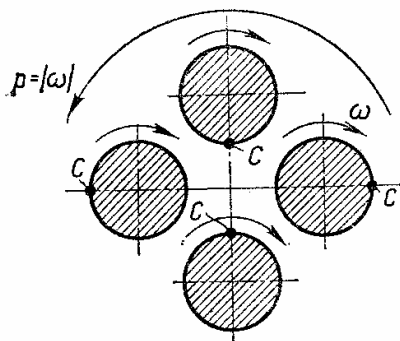


Рис. 47.10

инерционными силами, вызванными несбалансированностью вала (так как векторы этих сил вращаются в сторону вращения вала); таким образом, для возбуждения этих колебаний необходимо наличие внешних возмущающих сил; во-вторых, колебания при обратном вращении изогнутой оси вала связаны с весьма большими потерями на гистерезис. Действительно, при колебаниях такого рода каждая точка поперечного сечения вала дважды в течение одного оборота переходит из растянутой зоны в сжатую и обратно, что видно из

рис. 47.10, где схематически показаны четыре последовательных положения поперечного сечения вала (через четверть оборота). Поэтому в реальных конструкциях обратная прецессия наблюдается крайне редко. Однако она может возникнуть в случае, если имеется большая разница жесткости опор вала в двух направлениях (см. [22]).

**Устойчивость движения вала. Влияние трения.** Необходимость исследования устойчивости движения вала вызвана тем, что вращающийся вал, соединенный с двигателем, не является консервативной системой. При определенных условиях энергия двигателя может переходить в энергию колебаний.

Как показывает опыт эксплуатации турбомашин, явления неустойчивости движения в самом деле наблюдаются в практике, особенно для гибких (т. е. работающих при скоростях больших критической) роторов. Среди причин, вызывающих неустойчивость движения ротора, следует отметить внутреннее трение в материале вала, трение об окружающую среду, движение масляного слоя в подшипниках. Рассмотрим влияние внутреннего трения в материале вала.

Как известно, влияние внутреннего трения проявляется в том, что зависимость напряжений и деформаций не является однозначной. При циклической деформации в координатах  $\epsilon, \sigma$  описывается замкнутая петля гистерезиса, площадь которой соответствует энергии, рассеиваемой за цикл в единице объема материала.

Проще всего учесть в расчете вязкое трение, т. е. трение, пропорциональное скорости деформации. В этом случае связь между напряжением и деформацией (при одноосном напряженном состоянии) может быть записана в форме

$$\sigma = E(\epsilon + k\dot{\epsilon}).$$



При циклической деформации ( $\varepsilon = \varepsilon_* \cos \Omega t$ ) рассеянная в единице объема за цикл энергия

$$W = \int_0^{\frac{2\pi}{\Omega}} \sigma \dot{\varepsilon} dt = \pi k E \Omega \varepsilon_*^2,$$

а коэффициент поглощения

$$\psi = W/U = \pi k E \Omega \varepsilon_*^2 / (E \varepsilon_*^2 / 2) = 2\pi k \Omega.$$

Если имеется невращающийся невесомый круглый стержень и какая-либо точка его приводится в движение по заданному закону (на-

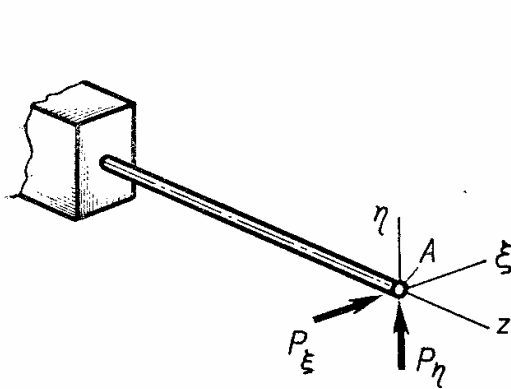


Рис. 47.11

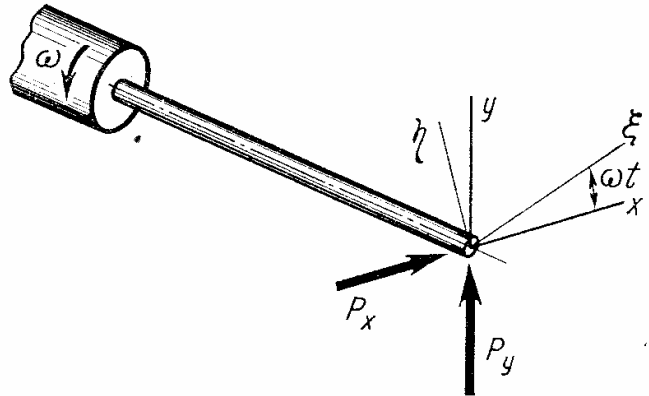


Рис. 47.12

пример, точка A на рис. 47.11), то усилия, которые для этого нужно приложить, легко найти, установив, что форма изогнутой оси при отсутствии и при наличии трения одинакова.

Отсюда следует, что

$$P_\xi = c(\xi + k\dot{\xi}); \quad P_\eta = c(\eta + k\dot{\eta}), \quad (47.23)$$

где  $c$  — жесткость стержня на изгиб.

Формулы (47.23) показывают, что для невращающегося стержня внутреннее вязкое трение играет такую же роль, как и внешнее трение; силы трения ( $ck\dot{\xi}$  и  $ck\dot{\eta}$ ) пропорциональны скорости перемещения нагруженной точки стержня.

Теперь рассмотрим стержень, вращающийся с постоянной скоростью  $\omega$  (рис. 47.12). Наряду с неподвижными координатными осями  $x, y$  введем оси  $\xi, \eta$ , вращающиеся вместе со стержнем. В этих осях стержень можно рассматривать как неподвижный, поэтому для проекций сил на эти оси справедливы формулы (47.23).

Перейдем от вращающихся координат  $\xi, \eta$  к неподвижным  $x, y$ :

$$\xi = x \cos \omega t + y \sin \omega t; \quad \eta = -x \sin \omega t + y \cos \omega t;$$

$$\dot{\xi} = \dot{x} \cos \omega t + \dot{y} \sin \omega t - \omega(x \sin \omega t - y \cos \omega t);$$

$$\dot{\eta} = -\dot{x} \sin \omega t + \dot{y} \cos \omega t - \omega(x \cos \omega t + y \sin \omega t).$$

Далее, учитывая, что

$$P_x = P_\xi \cos \omega t - P_\eta \sin \omega t; \quad P_y = P_\xi \sin \omega t + P_\eta \cos \omega t,$$

получаем окончательно:

$$P_x = cx + k\dot{c}x + k\omega y; \quad P_y = cy + k\dot{c}y - k\omega x. \quad (47.24)$$

Рассмотрим некоторые частные случаи формул (47.24).

*Статическое нагружение вращающегося вала вертикальной силой  $P$*  (рис. 47.13). В этом случае  $\dot{x} = 0$ ,  $\dot{y} = 0$ ,  $P_x = 0$ ,  $P_y = -P$ . Имеем:

$$y = -\frac{P}{c} \frac{1}{1 + k^2 \omega^2}; \quad x = \frac{P}{c} \frac{k\omega}{1 + k^2 \omega^2}. \quad (47.25)$$

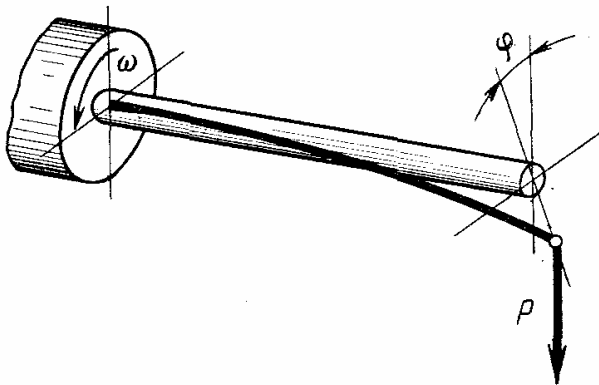


Рис. 47.13

Существенно отметить, что под влиянием внутреннего трения плоскость изгиба вала отклоняется от плоскости действия силы на угол  $\varphi$  [ $\operatorname{tg} \varphi = k\omega = \psi/(2\pi)$ ].

*Круговые колебания вала.* Пусть точка  $A$  вала движется по окружности радиусом  $r$  с угловой скоростью  $p$ :  $x = r \cos pt$ ;  $y = r \sin pt$ . Получаем:

$$P_x = cr [\cos pt - k(p - \omega) \sin pt];$$

$$P_y = cr [\sin pt + k(p - \omega) \cos pt].$$

Проектируя эти силы на направление радиус-вектора  $r$  и перпендикулярное ему (рис. 47.14), устанавливаем, что для поддержания такого движения надо приложить радиальную силу  $P_1 = cr$  и окружную  $P_2 = crk(p - \omega)$ .

Сила  $P_1$  — упругая, она в процессе движения не совершает работы; работа силы  $P_2$  затрачивается на преодоление внутреннего трения. Эта работа за цикл составляет

$$W = 2\pi r P_2 = 2\pi cr^2 k(p - \omega).$$

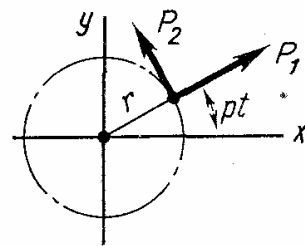


Рис. 47.14

Заметим, что знак работы  $W$  зависит от знака разности  $(p - \omega)$ . Если скорость вращения  $\omega$  меньше, чем частота круговых колебаний  $p$ , то  $W > 0$  и для преодоления сил внутреннего трения требуется расходовать работу. Если скорость вращения  $\omega$  больше, чем частота колебаний, то  $W < 0$  и не только не требуется расходовать работу на преодоление сил внутреннего трения, но, наоборот, эти силы создают работу. Разумеется, речь идет лишь о том, что силы внутреннего трения при  $\omega > p$  превращают энергию вращения вала в энергию его колебаний.

Таким образом, при  $\omega < p$  внутреннее трение способствует устойчивости движения, а при  $\omega > p$  — неустойчивости.

Заметим, что если скорость вращения  $\omega$  и частота круговых колебаний  $p$  совпадают (как это имеет место при колебаниях, вызываемых неуравновешенностью), то  $W = 0$  и внутреннее трение не оказывает влияния на движение. Причина этого очевидна: если  $\omega = p$ , то при вращении вала напряжения в его волокнах не меняются и внутреннее трение отсутствует (см. рис. 47.15, на котором схематически показаны четыре последовательных положения вала через четверть оборота).

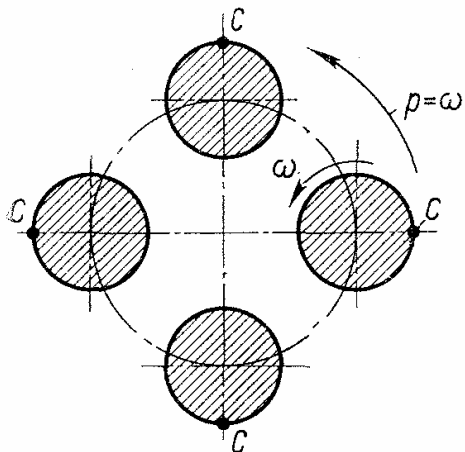


Рис. 47.15

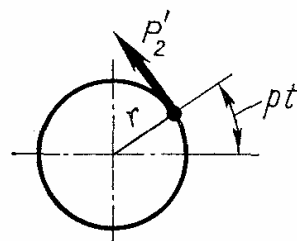


Рис. 47.16

Если имеется внешнее вязкое трение, то для приведения точки  $A$  вала в движение к ней надо приложить силу, равную произведению коэффициента вязкого трения  $\alpha$  на скорость точки  $A$  и направленную по этой скорости. При круговом колебании (рис. 47.16) эта сила составляет  $P_2' = \alpha r p$ .

При наличии как внутреннего, так и внешнего вязкого трения для поддержания движения нужно приложить окружную силу  $P$ , равную сумме:

$$P = P_2 + P_2' = r [\alpha p + ck(p - \omega)].$$

Очевидно, что условием устойчивости движения является неравенство  $P \geq 0$  или

$$\alpha \geq ck(\omega - p)/p. \quad (47.26)$$

В этом неравенстве под  $p$  следует понимать частоту собственных колебаний системы без трения, так как при граничном значении  $\alpha$  полная сила сопротивления  $P$  равна нулю и трение не влияет на движение системы.

Формула (47.26) показывает, что движение жесткого вала (т. е. вала, вращающегося со скоростью, меньшей критической) всегда устойчиво. Для гибкого вала ( $\omega > p$ ) устойчивость движения зависит от соотношения между внешним и внутренним трением.

Случай невязкого внутреннего трения рассмотрен в книге [11], там же приведена обширная библиография по этому вопросу.

Неустойчивость ротора в связи с трением в зазорах рассмотрена

впервые П. Л. Капицей\*. Сущность явления такова. При движении быстро вращающегося ротора в корпусе турбомашины среда (жидкость или газ), заполняющая зазоры, увлекается во вращение. При этом если сместить ротор из центрального положения (рис. 47.17), то в узкой части зазора скорость  $v_1$  движения среды будет больше, чем в ши-

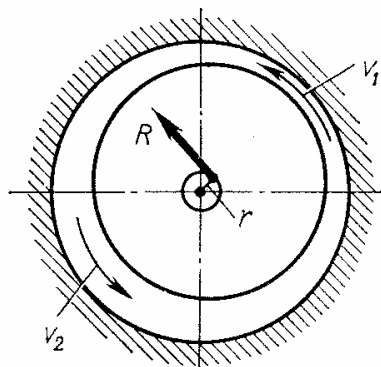


Рис. 47.17

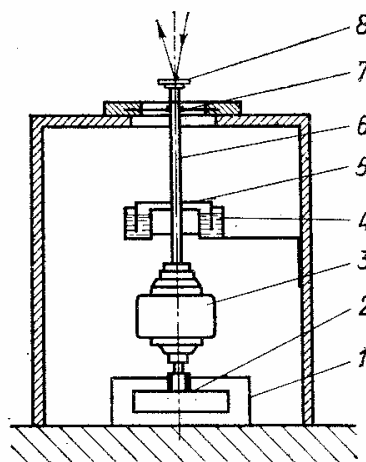


Рис. 47.18

рокой части ( $v_2$ ). В связи с этим и силы трения ротора о среду в этих частях окажутся различными, что приведет к возникновению составляющей силы трения  $R$ , перпендикулярной смещению  $r$ .

Как видим, здесь имеет место такое же явление, как и при внутреннем трении. Если сила  $R$  больше, чем сила внешнего вязкого трения при круговом колебании ротора, при котором его центр перемещается с угловой скоростью  $\omega$  по окружности радиусом  $r$ , движение ротора будет неустойчивым.

Неустойчивое движение такого рода действительно наблюдалось П. Л. Капицей на специальном приборе, который показан на рис. 47.18.

Полый алюминиевый диск 2 диаметром 120 мм и высотой 20 мм, расположенный в кольце 1, приводился во вращение двигателем 3. Зазор между диском и кольцом 9 мм, частота вращения диска 7000 об/мин. Диск с моторчиком подвешивался на стержне 6 к диафрагме 7. Частота собственных колебаний системы относительно точки подвеса  $\omega = 8 \text{ с}^{-1}$ .

Запись колебаний системы производилась фотографически с помощью светового пучка, отражающегося от зеркала 8, прикрепленного к стержню 6. Демпфирование в системе создавалось с помощью диска 5, который был прикреплен к стержню 6 и погружен в сосуд 4, наполненный маслом. Сосуд 4 мог опускаться вниз, и таким образом демпфер выключался. Полученные экспериментально траек-

\* См.: Капица П. Л. Устойчивость и переход через критические обороты быстро вращающихся роторов при наличии трения. — Техническая физика, 1939, т. IX, вып. 2.

тории движения диска при выключенном демпфере и при включении его представлены на рис. 47.19, а, б.

Из рис. 47.19, а видно, что при выключенном демпфере имело место спиральное движение, амплитуда которого увеличивалась до тех пор, пока ротор не начинал ударяться о кожух. При включении дем-

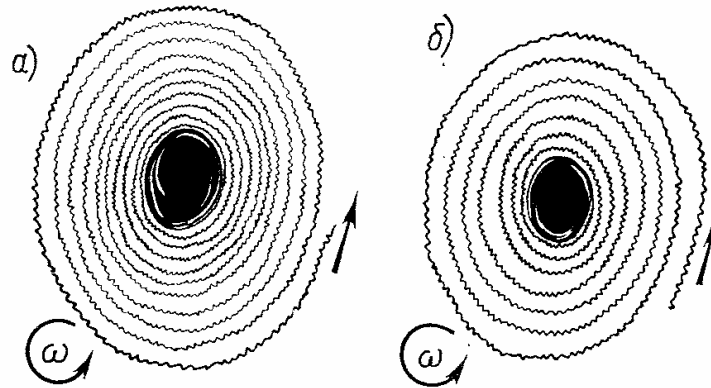


Рис. 47.19

пфера центр диска двигался по сходящейся спирали (рис. 47.19, б) и вскоре колебания прекращались.

Природа неустойчивости, связанной с трением масла в подшипниках скольжения, аналогична.

**Критические скорости анизотропно упругих роторов.** Рассмотрим колебания вала, жесткость которого различна в направлении главных осей поперечного сечения (вал со снятыми лысками, со шпоночной канавкой и т. п., рис. 47.20).

Предположим, что на валу имеется одна масса  $m$  (рис. 47.21, а). В этом случае податливость системы в некотором фиксированном в пространстве направлении является переменной, так как при вращении вала с этим направлением совпадает то ось наибольшей жесткости вала,

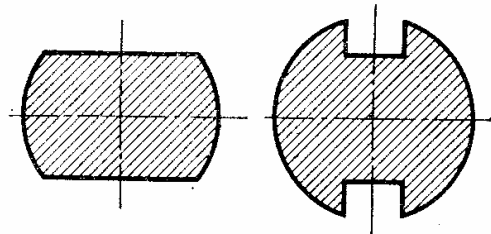


Рис. 47.20

то ось наименьшей его жесткости. Очевидно, что за один оборот вала податливость проходит полный цикл изменения дважды.

Для решения поставленной задачи удобнее всего рассматривать движение массы  $m$  в подвижной системе координат  $x_1, y_1$ , вращаю-

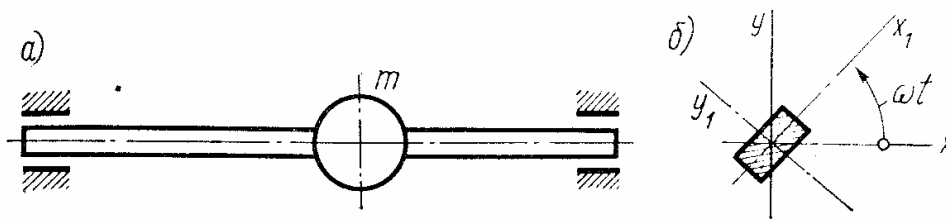


Рис. 47.21

щейся вместе с валом (рис. 47.21, б). Вращение вала будем считать равномерным.

Во вращающихся координатах полное ускорение массы  $m$  состоит из центростремительного ускорения, ускорения Кориолиса и ускорения в относительном движении. Проекции ускорения на оси  $x_1, y_1$  составляют:

$$\ddot{j}_x = \ddot{x}_1 - \omega^2 x_1 - 2\omega \dot{y}_1, \quad \ddot{j}_y = \ddot{y}_1 - \omega^2 y_1 + 2\omega \dot{x}_1.$$

Здесь  $x_1, y_1$  — перемещения центра массы в направлениях  $x_1, y_1$ .

Учитывая, что приложенные к массе силы упругости вала составляют  $-c_1 x_1$  и  $-c_2 y_1$ , где  $c_1$  и  $c_2$  — жесткости вала в направлениях  $x_1, y_1$ , можно записать уравнения движения в таком виде:

$$m\ddot{j}_x + c_1 x_1 = 0; \quad m\ddot{j}_y + c_2 y_1 = 0.$$

После подстановки значений  $\ddot{j}$  приведем уравнения к такому виду:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 + (p_1^2 - \omega^2)x_1 - 2\omega \dot{y}_1 &= 0; \\ \ddot{y}_1 + (p_2^2 - \omega^2)y_1 + 2\omega \dot{x}_1 &= 0, \end{aligned} \quad (47.27)$$

где  $p_1 = \sqrt{c_1/m}$ ,  $p_2 = \sqrt{c_2/m}$  — собственные частоты при колебании невращающегося вала в направлениях наименьшей и наибольшей его жесткости.

Решение уравнений (47.27) ищем в форме

$$x_1 = ae^{st}, \quad y_1 = be^{st}. \quad (47.28)$$

Подставим выражения (47.28) в дифференциальные уравнения (47.27) и сократим на  $e^{st}$ . Тогда получим следующую систему уравнений относительно  $a$  и  $b$ :

$$\begin{aligned} (s^2 + p_1^2 - \omega^2)a - 2\omega sb &= 0, \\ 2\omega sa + (s^2 + p_2^2 - \omega^2)b &= 0. \end{aligned}$$

Эти уравнения могут удовлетворяться при  $a$  и  $b$ , не равных нулю только в том случае, если их определитель равен нулю. Таким образом, получим следующее уравнение, определяющее характеристический показатель  $s$ :

$$s^4 + s^2(p_1^2 + p_2^2 + 2\omega^2) + (p_1^2 - \omega^2)(p_2^2 - \omega^2) = 0.$$

Отсюда находим значения

$$s^2 = \frac{1}{2} \left[ -(p_1^2 + p_2^2 + 2\omega^2) \pm \sqrt{(p_1^2 - p_2^2)^2 + 8\omega^2(p_1^2 + p_2^2)} \right].$$

Как видно из полученной формулы, оба значения  $s^2$  являются действительными. Положительные значения  $s^2$ , а значит и  $s$ , соответствующие неустойчивости движения вала, имеются, если

$$\sqrt{(p_1^2 - p_2^2)^2 + 8\omega^2(p_1^2 + p_2^2)} \geq p_1^2 + p_2^2 + 2\omega^2.$$

Упрощая это неравенство, получаем условие неустойчивости движения в форме

$$(p_1^2 - \omega)(p_2^2 - \omega^2) \leq 0.$$

Это условие выполняется, и движение вала неустойчиво, если скорость вращения вала  $\omega$  находится между двумя частотами собственных колебаний неподвижного вала:

$$p_1 \leq \omega \leq p_2. \quad (47.29)$$

Таким образом, для анизотропно-упругого вала имеется область скоростей, соответствующих неустойчивому движению.

Если вал расположен горизонтально, то в уравнениях движения (47.27) кроме сил инерции необходимо учесть силу тяжести  $mg$ . Проекция этой силы на подвижные оси  $x_1$ ,  $y_1$  составляют  $-mg \sin \omega t$  и  $-mg \cos \omega t$ . Уравнения (47.27) с учетом этих сил принимают такой вид:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 + (p_1^2 - \omega^2) x_1 - 2\omega \dot{y}_1 &= -g \sin \omega t; \\ \ddot{y}_1 + (p_2^2 - \omega^2) y_1 + 2\omega \dot{x}_1 &= -g \cos \omega t. \end{aligned} \quad (47.30)$$

Если  $\omega$  не лежит в области неустойчивости (47.29), то движение устойчиво и стационарное решение неоднородных уравнений (47.30) можно представить в форме

$$x_1 = A \sin \omega t, \quad y_1 = B \cos \omega t.$$

Подставив эти значения в уравнения (47.30), найдем из них:

$$A = -g \frac{p_2^2 - 4\omega^2}{p_1^2 p_2^2 - 2\omega^2(p_1^2 + p_2^2)}; \quad B = -g \frac{p_1^2 - 4\omega^2}{p_1^2 p_2^2 - 2\omega^2(p_1^2 + p_2^2)}. \quad (47.31)$$

Очевидно, что амплитуды колебаний возрастают, если знаменатель приближается к нулю, т. е. если  $\omega \rightarrow \omega_*$ , где

$$\omega_* = \sqrt{p_1^2 p_2^2 / [2(p_1^2 + p_2^2)]}, \quad (47.32)$$

а  $p_1$  и  $p_2$  — собственные частоты вала при колебаниях в направлении наименьшей и наибольшей жесткости. Если жесткости вала в двух направлениях различаются не очень сильно, то  $p_1 \approx p_2$  и  $\omega_* \approx p/2$ .

Таким образом, критическая скорость второго порядка, возникающая при вращении горизонтальных валов с различной жесткостью в главных направлениях, примерно вдвое меньше, чем собственная частота колебаний вала.

Критическая скорость второго порядка, примерно вдвое меньшая, чем обычная критическая скорость, неоднократно наблюдалась на практике при вращении горизонтальных валов с различными жесткостями, в частности при вращении роторов двухполюсных электрических машин, различная жесткость которых обуславливается наличием вырезов для обмотки.

Из формул (47.31) видно, что для вала с равными жесткостями критическая скорость второго порядка отсутствует, так как в этом случае при  $\omega = p/2$  одновременно со знаменателем обращается в нуль и числитель.

#### § 48. КОЛЕБАНИЯ ЛОПАТОК ТУРБОМАШИН

Колебания лопаток турбомашин возникают вследствие неравномерного по окружности потока рабочей среды, а также в связи с возмущениями, вносимыми в поток лопатками направляющего аппарата. Задачей проектировщика является расчет собственной частоты колебаний лопатки и выбор такой ее конструкции, чтобы исключить возможность резонанса.

Лопатка газовой турбины или компрессора представляет собой стержень переменного сечения, заделанный одним концом. Ось лопатки обычно является слабо изогнутой пространственной кривой, но при расчете частоты колебаний можно с достаточной точностью считать, что ось лопатки прямолинейна и перпендикулярна оси вращения ротора.

Трудности расчета частоты собственных колебаний лопаток связаны с необходимостью учитывать влияние центробежных сил и с тем, что лопатка представляет собой естественно закрученный стержень, главные оси различных поперечных сечений которого не параллельны друг другу.

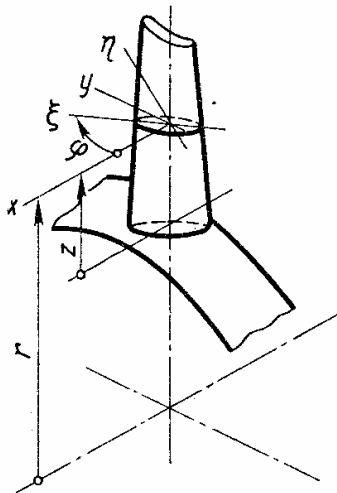


Рис. 48.1

Закрученная лопатка в процессе колебаний испытывает кривой изгиб. Установим соотношение между изгибающими моментами и кривизнами для этого случая. Поперечное сечение лопатки, расположенное на расстоянии  $r$  от оси вращения, отнесем к осям  $x, y$ , направленным соответственно параллельно оси вращения и по касательной к окружности (рис. 48.1).

Главные оси сечения  $\xi$  и  $\eta$  составляют некоторый угол  $\varphi$  с осями  $x$  и  $y$ . Площадь сечения, моменты инерции его, а также угол  $\varphi$  являются функциями радиуса  $r$  или расстояния  $z$  данного сечения от корневого сечения лопатки. Положительные направления изгибающих моментов, приложенных к внутренней части лопатки, свяжем с направлениями  $x, y, \xi, \eta$  правилом правого винта. Изгибающие моменты относительно осей  $x, y, \xi, \eta$  связаны следующими соотношениями\*:

$$\begin{aligned} M_{\xi}^* &= M_x^* \cos \varphi + M_y^* \sin \varphi; \\ M_{\eta}^* &= -M_x^* \sin \varphi + M_y^* \cos \varphi. \end{aligned} \quad (48.1)$$

\* Звездочками помечены текущие значения переменных; теми же буквами без звездочек обозначены их амплитудные значения.



Кривизны, отнесенные к главным осям сечения  $\xi, \eta$ , выражаются через изгибающие моменты относительно этих осей:

$$\kappa_{\xi} = M_{\xi}^* / (EJ_{\xi}), \quad \kappa_{\eta} = M_{\eta}^* / (EJ_{\eta}). \quad (48.2)$$

Кривизны, отнесенные к осям  $x, y$ , получим проектированием:

$$\kappa_x = \kappa_{\xi} \cos \varphi - \kappa_{\eta} \sin \varphi, \quad \kappa_y = \kappa_{\xi} \sin \varphi + \kappa_{\eta} \cos \varphi. \quad (48.3)$$

После подстановки значений  $\kappa_{\xi}, \kappa_{\eta}$  и выражений моментов  $M_{\xi}, M_{\eta}$  через  $M_x, M_y$  найдем:

$$\begin{aligned} \kappa_x &= M_x^* \left( \frac{\cos^2 \varphi}{EJ_{\xi}} + \frac{\sin^2 \varphi}{EJ_{\eta}} \right) + M_y^* \left( \frac{1}{EJ_{\xi}} - \frac{1}{EJ_{\eta}} \right) \sin \varphi \cos \varphi; \\ \kappa_y &= M_x^* \left( \frac{1}{EJ_{\xi}} - \frac{1}{EJ_{\eta}} \right) \sin \varphi \cos \varphi + M_y^* \left( \frac{\sin^2 \varphi}{EJ_{\xi}} + \frac{\cos^2 \varphi}{EJ_{\eta}} \right). \end{aligned} \quad (48.4)$$

В этих равенствах кривизны могут быть заменены их приближенными выражениями:

$$\kappa_x = \partial^2 v^* / \partial z^2; \quad \kappa_y = -\partial^2 u^* / \partial z^2, \quad (48.5)$$

где  $u^*, v^*$  — смещения центра тяжести лопатки в осевом и окружном направлениях.

Перейдем к составлению уравнений движения. На основе принципа Даламбера рассмотрим динамическое равновесие элемента  $dz$  лопатки в плоскости, перпендикулярной оси вращения.

На концах элемента возникают внутренние силы — продольная  $N$ , поперечная  $Q_y^*$  и изгибающий момент  $M_x^*$  (рис. 48.2, а). Кроме того, к элементу приложена центробежная сила, имеющая вертикальную  $\rho F \omega^2 r dz$  и горизонтальную  $\rho F \omega^2 v^* dz$  проекции (рис. 48.2, б), а также сила инерции в относительном движении, равная  $-\rho F dz (\partial^2 v^* / \partial t^2)$ .

Проектируя силы на вертикаль, имеем

$$dN/dz = -r \omega^2 \rho F. \quad (48.6)$$

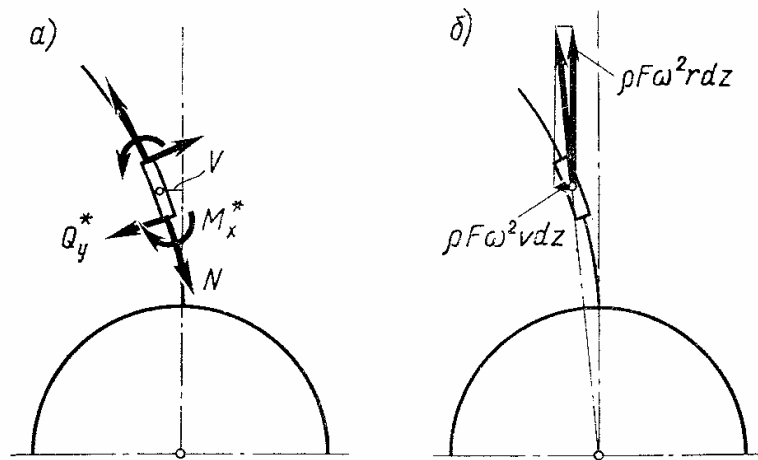


Рис. 48.2

Сумма проекций на горизонталь

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( N \frac{\partial v^*}{\partial z} \right) + \omega^2 \rho F v^* - \frac{\partial Q_y^*}{\partial z} - \rho F \frac{\partial^2 v^*}{\partial t^2} = 0. \quad (48.7)$$

Сумма моментов

$$\partial M_x^* / \partial z = Q_y^*. \quad (48.8)$$

Уравнение (48.6) позволяет вычислить нормальную силу в сечении:

$$N = \omega^2 \int_z^l \rho F r dz, \quad (48.9)$$

которую можно, таким образом, считать заданной. В формуле (48.9)  $l$  — длина лопатки, а интеграл вычисляется от рассматриваемого сечения до свободного конца лопатки.

Уравнения движения элемента в плоскости  $xz$  (рис. 48.3) имеют такой вид:

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( N \frac{\partial u^*}{\partial z} \right) + \frac{\partial Q_x^*}{\partial z} - \rho F \frac{\partial^2 u^*}{\partial t^2} = 0;$$

$$\frac{\partial M_y^*}{\partial z} = Q_x^*.$$

Выражения для смещений и силовых факторов, соответствующие свободным колебаниям лопатки, представим в следующем виде:

$$u^* = u \cos pt; \quad v^* = v \cos pt;$$

$$M_x^* = M_x \cos pt; \quad Q_x^* = Q_x \cos pt;$$

$$M_y^* = M_y \cos pt; \quad Q_y^* = Q_y \cos pt.$$

Тогда получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений, состоящую из уравнений динамического равновесия:

$$\frac{dQ_y}{dz} = (\omega^2 + p^2) \rho F v + N \frac{d^2 v}{dz^2} - r \omega^2 \rho F \frac{dv}{dz}; \quad (48.10)$$

$$\frac{dQ_x}{dz} = -p^2 \rho F u - N \frac{d^2 u}{dz^2} + r \omega^2 \rho F \frac{du}{dz};$$

$$dM_x/dz = Q_y; \quad dM_y/dz = Q_x$$

и уравнений упругости:

$$d^2 u / dz^2 = -a M_x - b M_y;$$

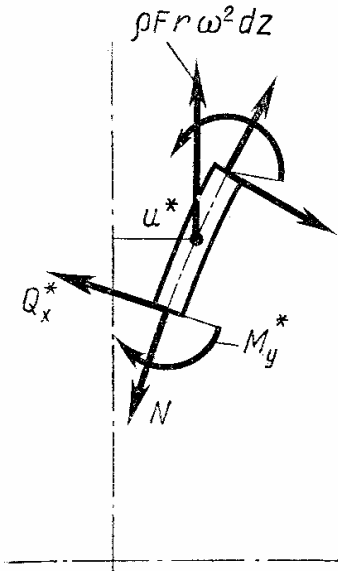


Рис. 48.3

Здесь 
$$d^2v/dz^2 = cM_x + aM_y.$$

$$a = [1/(EJ_\xi) - 1/(EJ_\eta)] \sin \varphi \cos \varphi;$$

$$b = \sin^2 \varphi / (EJ_\xi) + \cos^2 \varphi / (EJ_\eta);$$

$$c = \cos^2 \varphi / (EJ_\xi) + \sin^2 \varphi / (EJ_\eta).$$

Полученные уравнения можно записать в матричной форме:

$$\frac{d}{dz} X = AX. \quad (48.11)$$

Здесь  $X$  — матрица-столбец из восьми элементов:

$$x_1 = u; \quad x_2 = v; \quad x_3 = du/dz; \quad x_4 = dv/dz;$$

$$x_5 = M_x; \quad x_6 = M_y; \quad x_7 = Q_x; \quad x_8 = Q_y;$$

$A$  — матрица  $(8 \times 8)$  переменных коэффициентов.

Ненулевые элементы этой матрицы равны:

$$a_{13} = 1; \quad a_{24} = 1; \quad a_{35} = -a; \quad a_{36} = -b;$$

$$a_{45} = c; \quad a_{46} = a; \quad a_{58} = 1; \quad a_{67} = 1;$$

$$a_{71} = -p^2 \rho F; \quad a_{72} = r \omega^2 \rho F; \quad a_{75} = Na; \quad a_{76} = Nb;$$

$$a_{82} = (\omega^2 + p^2) \rho F; \quad a_{84} = -r \omega^2 \rho F; \quad a_{85} = Nc; \quad a_{86} = Na.$$

Остальные элементы — нулевые.

Для определения частот собственных колебаний по уравнению (48.11) может быть использован метод начальных параметров. С этой целью конструируются четыре линейно независимых решения уравнения (48.11), удовлетворяющие граничным условиям в сечении  $z = 0$ . Например, для заделанного сечения такие решения могут при  $z = 0$  иметь значения

$$X_1(0) = \{0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0\};$$

$$X_2(0) = \{0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0\};$$

$$X_3(0) = \{0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0\};$$

$$X_4(0) = \{0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1\}.$$

Интегрируя численно уравнение (48.11) при этих начальных условиях и при фиксированном значении частоты  $p$ , находят значения  $X_1, X_2, X_3, X_4$  при  $z = l$ .

Общее решение  $X$  в сечении  $z = l$  представляет собой линейную комбинацию частных решений:

$$X(l) = C_1 X_1(l) + C_2 X_2(l) + C_3 X_3(l) + C_4 X_4(l).$$

Граничные условия при  $z = l$  ( $M_x = M_y = 0$ ;  $Q_x = Q_y = 0$ ) приводят к системе однородных уравнений относительно  $C_1, \dots, C_4$ . Если при расчете принято истинное значение собственной частоты  $p$ ,

определитель этой системы равен нулю. Это условие позволяет, повторяя расчет при различных значениях  $p$ , определить собственные частоты. Расчет реализуется на ЭВМ. Можно также использовать для отыскания собственных частот метод прогонки, изложенный в § 31.

Для применяемых в практике профилей лопаток момент инерции поперечных сечений относительно одной из главных осей (ось  $\eta$ ) много больше, чем момент инерции относительно другой оси (ось  $\xi$ ). В этом наиболее важном практически случае расчет можно существенно упростить путем пренебрежения изгибом относительно оси  $\eta$ .

Упрощение достигается благодаря тому, что существенным становится только один изгибающий момент

$$M_{\xi} = M_x \cos \varphi + M_y \sin \varphi$$

и соответствующая кривизна  $\kappa_{\xi} = M_{\xi} / (EJ_{\xi})$ .

Для решения упрощенных уравнений эффективным является метод последовательных приближений (см. § 27). Применение этого метода к данной задаче подробно рассмотрено в книге [40].

Успешно может быть использован и метод Рэлея в варианте Грамеля. Зададимся изменением кривизны  $\kappa_{\xi}$  по длине лопатки. Тогда интегрированием уравнений

$$\kappa_x = \frac{d^2 v}{dz^2} = \kappa_{\xi} \cos \varphi; \quad -\kappa_y = \frac{d^2 u}{dz^2} = -\kappa_{\xi} \sin \varphi$$

можно найти соответствующие смещения:

$$v = \int_0^z \int_0^{z_1} \kappa_{\xi} \cos \varphi dz_2 dz_1; \quad u = - \int_0^z \int_0^{z_1} \kappa_{\xi} \sin \varphi dz_2 dz_1. \quad (48.12)$$

Потенциальная энергия деформации определяется по формуле

$$U_0 = \frac{1}{2} \int_0^l EJ_{\xi} \kappa_{\xi}^2 dz, \quad (48.13)$$

а обобщенная масса — по формуле

$$\mathcal{M} = \int_0^l \rho F (u^2 + v^2) dz. \quad (48.14)$$

Чтобы учесть центробежные силы, нужно дополнительно вычислить их потенциал. Предположим, что в процессе колебаний точки оси лопатки движутся по нормали к недеформированной оси\*. Тогда дополнительная деформация удлинения лопатки в связи с изгибом составит

$$\varepsilon' = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{du}{dz} \right)^2 + \left( \frac{dv}{dz} \right)^2 \right].$$

---

\* Как было показано в § 25, выбор той или иной зависимости для продольных перемещений, сопровождающих поперечные колебания, не является существенным. Мы получили бы те же результаты, допустив, что лопатка нерастяжима.

Работа начального усилия  $N$  растяжения лопатки на этой деформации равна

$$\int_0^l N \varepsilon' dz.$$

Следует также учесть, что при перемещении в плоскости вращения точки лопатки удаляются от оси вращения на расстояние  $v^2/(2r)$  (рис. 48.4), что приводит к уменьшению потенциала массы лопатки в поле центробежных сил на величину

$$\int_0^l \rho F r \omega^2 \frac{v^2}{2r} dz.$$

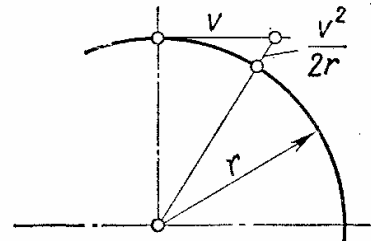


Рис. 48.4

Таким образом, общее увеличение энергии

$$U_\omega = \frac{1}{2} \int_0^l N \left[ \left( \frac{du}{dz} \right)^2 + \left( \frac{dv}{dz} \right)^2 \right] dz - \frac{\omega^2}{2} \int_0^l \rho F v^2 dz.$$

Так как продольная сила в лопатке пропорциональна  $\omega^2$  [см. формулу (48.9)], то получим окончательно

$$U_\omega = \frac{\omega^2}{2} \left\{ \int_0^l N_1 \left[ \left( \frac{du}{dz} \right)^2 + \left( \frac{dv}{dz} \right)^2 \right] dz - \int_0^l \rho F v^2 dz \right\}, \quad (48.15)$$

где

$$N_1 = \int_z^l \rho F r dz \quad (48.16)$$

— усилие в сечении лопатки при  $\omega = 1$ .

После определения  $U_0$ ,  $\mathcal{M}$  и  $U_\omega$  частота собственных колебаний лопатки вычисляется по формуле Рэлея:

$$p^2 = 2(U_0 + U_\omega)/\mathcal{M}. \quad (48.17)$$

В качестве примера в табл. 48.1 приведено вычисление частоты собственных колебаний лопатки газовой турбины изложенным методом. В графах 1...5 приведены исходные данные для расчета, причем лопатка разбита на 10 участков одинаковой длины по 2,04 см. В графах 6 и 7 вычисляется продольная сила  $N_1$ . Интегрирование здесь и в остальных случаях выполнено по кольцевой схеме формулы трапеций, которая пояснена в § 27. В графе 8 приведены принятые значения кривизны. Изменение кривизны было задано по формуле

$$\kappa_\xi = 1 - z^2/l^2. \quad (48.18)$$

Графы 9...14 отведены для вычисления углов поворота  $dv/dz$ ,  $du/dz$  и перемещений  $v$ ,  $u$ , а графы 15...19 служат для вычисления интегралов, входящих в выражения  $\mathcal{M}$ ,  $U_\omega$ ,  $U_0$ .

Таблица 48.1

$r, \text{м} \cdot 10^{-2}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
		$EJ, \text{Н} \cdot \text{м}^2 \cdot 10$	$\rho F, \text{кг} \cdot \text{м}^{-1} \cdot 10^{-1}$	$\cos \varphi$	$\sin \varphi$	$\rho Fr, \text{кг} \cdot 10^{-3}$	$N_1 = \int_0^l \rho Fr dz,$ $\text{Н} \cdot \text{с}^2 \cdot 1,02 \cdot 10^{-2}$	$x, \text{м}^{-1}$	$x \cos \varphi, \text{м}^{-1}$	$v' = \int_0^z x \cos \varphi dz,$ $1,1,02 \cdot 10^{-2}$	$v = \int_0^z v' dz,$ $\text{м} \cdot 1,02 \cdot 10^{-4}$	$x \sin \varphi, \text{м}^{-1}$	$u' = \int_0^z x \sin \varphi dz,$ $1,1,02 \cdot 10^{-2}$	$u = \int_0^z u' dz,$ $\text{м} \cdot 1,02 \cdot 10^{-4}$	$\rho Fvz,$ $\text{кг} \cdot \text{м} \cdot 1,02 \cdot 10^{-6}$	$\rho Fuz,$ $\text{кг} \cdot \text{м} \cdot 1,02 \cdot 10^{-6}$	$N_1(v'),$ $\text{Н} \cdot \text{с}^2 \cdot 1,02 \cdot 10^{-6}$	$N_1(u'),$ $\text{Н} \cdot \text{с}^2 \cdot 1,02 \cdot 10^{-6}$	$EJx^2, \text{Н} \cdot 10^{-1}$
17,26		5,33	12,80	0,976	0,213	221	5,09	1	0,976	0	0	0,213	0	0	0	0	0	0	53,3
19,30		4,43	12,24	0,963	0,271	236	4,63	0,99	0,952	1,928	1,9	0,268	0,481	0,5	0	0	17	1,0	43,4
21,34		3,69	11,60	0,944	0,327	247	4,15	0,96	0,905	3,785	7,6	0,314	1,063	2,0	0,7	0	59	4,7	34,0
23,38		3,07	10,96	0,925	0,379	256	3,65	0,91	0,842	5,532	16,9	0,345	1,722	4,8	3,1	0,3	112	10,8	25,5
25,42		2,54	10,32	0,900	0,434	263	3,13	0,84	0,755	7,129	29,5	0,364	2,431	8,9	9,0	0,8	158	18,5	17,9
27,46		2,07	9,68	0,875	0,484	266	2,60	0,75	0,656	8,540	45,1	0,362	3,157	14,5	19,6	2,0	189	25,9	11,6
29,50		1,66	9,04	0,848	0,530	266	2,07	0,64	0,542	9,738	63,3	0,339	3,858	21,6	36	4,2	196	30,8	6,8
31,54		1,31	8,40	0,816	0,576	265	1,54	0,51	0,415	10,695	83,7	0,294	4,491	30,0	59	7,5	176	31,0	3,4
33,58		1,00	7,76	0,785	0,621	260	1,01	0,36	0,283	11,393	105,8	0,224	5,009	39,5	87	12,1	131	25,2	1,3
35,62		0,78	7,12	0,749	0,663	254	0,50	0,19	0,142	11,818	129,0	0,126	5,359	49,9	119	17,6	70	14,4	0,3
37,66		0,57	6,48	0,710	0,704	244	0	0	0	11,960	152,8	0	5,485	60,8	151	24,0	0	0	0

В результате расчета получены следующие значения этих интегралов:

$$\begin{aligned}\int_0^l \rho F v^2 dz &= 409 \cdot 1,02^4 \cdot 2,04 \cdot 10^{-8} \text{ кг} \cdot \text{м}^2; \\ \int_0^l \rho F u^2 dz &= 56 \cdot 1,02^3 \cdot 2,04 \cdot 10^{-8} \text{ кг} \cdot \text{м}^2; \\ \int_0^l N_1 \left( \frac{dv}{dz} \right)^2 dz &= 1108 \cdot 1,02^3 \cdot 2,04 \cdot 10^{-8} \text{ Н} \cdot \text{с}^2 \cdot \text{м}; \\ \int_0^l N_1 \left( \frac{du}{dz} \right)^2 dz &= 162 \cdot 1,02^3 \cdot 2,04 \cdot 10^{-8} \text{ Н} \cdot \text{с}^2 \cdot \text{м}; \\ \int_0^l E J_{\xi} \kappa_{\xi}^2 dz &= 171 \cdot 2,04 \cdot 10^{-2} \text{ Н} \cdot \text{м}.\end{aligned}$$

По формуле (48.17) получаем

$$p = 582 \sqrt{1 + (\omega/434)^2} \text{ с}^{-1}.$$

Полученный результат в точности совпадает с вычисленным для этой же лопасти методом последовательных приближений (см. [40]), что объясняется удачным выбором формулы (48.18) для кривизны. В других случаях ошибка расчета частоты по формуле Рэлея может достигать 5...7%.

Заметим, что в § 27 был проведен расчет частоты собственных колебаний незакрученного стержня с такими же размерами сечений, как в рассмотренном выше примере, и получено значение частоты  $p = 578 \text{ с}^{-1}$ . Из сравнения видно, что закрутка лишь несущественно увеличивает основную частоту собственных колебаний. Поэтому в первом приближении низшую частоту собственных колебаний лопасти можно вычислять без учета закрутки.

#### § 49. ОСЕВЫЕ КОЛЕБАНИЯ ДИСКОВ ТУРБОМАШИН

Диски турбомашин представляют собой быстро вращающиеся круглые пластины переменной толщины. Как указывалось в § 35, интенсивные колебания диска возникают, когда скорость его вращения совпадает со скоростью распространения бегущей волны по окружности. Эти критические скорости вращения определяются по формуле (см. § 35)

$$\omega_{кр} = p_n / n,$$

где  $p_n$  — частота собственных колебаний диска при  $n$  узловых диаметрах.

Таким образом, задача сводится к определению частот собственных осевых колебаний диска. При этом практическое значение имеют колебания, происходящие без узловых окружностей при двух, трех и четырех узловых диаметрах. Расчет проводится либо с помощью интегрирования дифференциальных уравнений изогнутой срединной поверхности диска, либо по методу Рэлея—Ритца.

Составим уравнения движения элемента диска переменной толщины с учетом начальных напряжений в нем  $\sigma_r$ ,  $\sigma_\varphi$ , обусловленных влиянием центробежных сил.

Изгибающие и крутящие моменты в сечении диска связаны с его прогибом  $w^*$  уравнениями упругости:

$$\begin{aligned} M_r^* &= -D \left[ \frac{\partial^2 w^*}{\partial r^2} + \mu \left( \frac{1}{r} \frac{\partial w^*}{\partial r} + \frac{\partial^2 w^*}{r^2 \partial \varphi^2} \right) \right]; \\ M_\varphi^* &= -D \left[ \mu \frac{\partial^2 w^*}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w^*}{\partial r} + \frac{\partial^2 w^*}{r^2 \partial \varphi^2} \right]; \\ M_{r\varphi}^* &= -D (1 - \mu) \left[ \frac{\partial^2 w^*}{r \partial r \partial \varphi} - \frac{\partial w^*}{r^2 \partial \varphi} \right]. \end{aligned}$$

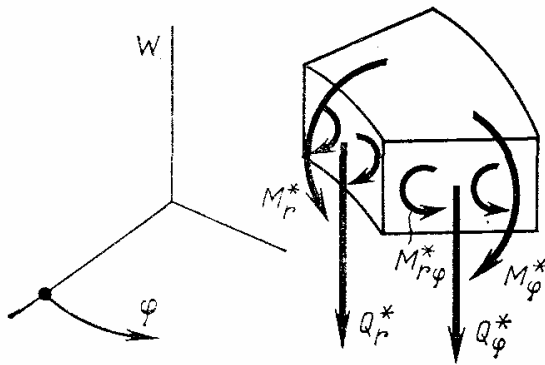


Рис. 49.1

Здесь  $D = Eh^3/[12(1 - \mu^2)]$  — цилиндрическая жесткость, зависящая от радиуса  $r$ .

Положительные направления моментов показаны на рис. 49.1.

Рассматривая динамическое равновесие элемента  $rdrd\varphi$ , получаем два уравнения моментов:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} (rM_{r\varphi}^*) + M_{r\varphi}^* + \\ + \frac{\partial M_\varphi^*}{\partial \varphi} - Q_\varphi^* r = 0; \\ \frac{\partial}{\partial r} (rM_r^*) - M_\varphi^* + \frac{\partial M_{r\varphi}^*}{\partial \varphi} - Q_r^* r = 0 \end{aligned}$$

и уравнение проекций

$$\frac{\partial (rQ_r^*)}{\partial r} + \frac{\partial Q_\varphi^*}{\partial \varphi} - \rho h \frac{\partial^2 w^*}{\partial t^2} + \sigma_r h r \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \sigma_\varphi h r \left( \frac{\partial^2 w}{r^2 \partial \varphi^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \right) = 0.$$

Здесь третье слагаемое соответствует силе инерции, а четвертое и пятое — проекциям начальных напряжений на нормаль к деформированному элементу.

Приведенная поперечная сила в кольцевом сечении определяется равенством

$$V_r^* = Q_r^* + \frac{\partial M_{r\varphi}^*}{r \partial \varphi}.$$



Рассматривая колебания диска с  $n$  узловыми диаметрами, представляем переменные в следующей форме:

$$w^* = W \cos n\varphi \cos pt; \quad M_{r\varphi}^* = M_{r\varphi} \sin n\varphi \cos pt; \quad (49.1)$$

$$\begin{aligned} M_r^* &= M_r \cos n\varphi \cos pt; \quad Q_r^* = Q_r \cos n\varphi \cos pt; \\ M_\varphi^* &= M_\varphi \cos n\varphi \cos pt; \quad Q_\varphi^* = Q_\varphi \sin n\varphi \cos pt; \\ V_r^* &= V_r \cos n\varphi \cos pt. \end{aligned}$$

Тогда получим следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений, состоящую из уравнений упругости:

$$\begin{aligned} M_r &= -D \left[ W'' + \mu \left( \frac{1}{r} W' - \frac{n^2}{r^2} W \right) \right]; \\ M_\varphi &= -D \left[ \mu W'' + \frac{1}{r} W' - \frac{n^2}{r^2} W \right]; \\ M_{r\varphi} &= nD (1 - \mu) \left( \frac{1}{r} W' - \frac{1}{r^2} W \right) \end{aligned} \quad (49.2)$$

и уравнений динамического равновесия

$$\begin{aligned} (rM_{r\varphi})' + M_{r\varphi} - nM_\varphi - rQ_\varphi &= 0; \\ (rM_r)' - M_\varphi + nM_{r\varphi} - rQ_r &= 0; \end{aligned} \quad (49.3)$$

$$(rQ_r)' + nQ_\varphi + p^2 \rho h r W + \sigma_r h r W'' + \sigma_\varphi h r \left( \frac{1}{r} W' - \frac{n^2}{r^2} W \right) = 0.$$

Исключим из уравнений (49.3)  $Q_\varphi$  и введем вместо  $Q_r$

$$V_r = Q_r + \frac{n}{r} M_{r\varphi}.$$

Тогда получим:

$$\begin{aligned} (rM_r)' &= M_\varphi + rV_r - 2nM_{r\varphi}; \\ (rV_r)' &= -2 \frac{n}{r} M_{r\varphi} + \frac{n^2}{r} M_\varphi - p^2 \rho h r W - \sigma_r h r W'' - \\ &\quad - \sigma_\varphi h r \left( \frac{1}{r} W' - \frac{n^2}{r^2} W \right). \end{aligned} \quad (49.4)$$

Полная система, состоящая из уравнений (49.2) и (49.4), имеет, так же как и в случае пластинки постоянной толщины, четвертый порядок. Поэтому для полного определения ее решения достаточно знать четыре независимые неизвестные при каждом значении радиуса.

В качестве таких основных неизвестных выберем:  $x_1 = W$ ;  $x_2 = W'$ ;  $x_3 = rM_r$ ;  $x_4 = rV_r$ . Остальные неизвестные, входящие в уравнения (49.2) и (49.4), выражаются через основные по формулам:

$$\begin{aligned} M_\varphi &= \mu M_r - D (1 - \mu^2) \left( \frac{1}{r} W' - \frac{n^2}{r^2} W \right); \\ M_{r\varphi} &= nD (1 - \mu) \left( \frac{1}{r} W' - \frac{1}{r^2} W \right). \end{aligned}$$

Получаемую в результате исключения из уравнений (49.2) и (49.4) величин  $M_r$ ,  $M_{r\varphi}$  систему удобно записать в матричной форме:

$$X' = AX. \quad (49.5)$$

Здесь  $X$  — матрица-столбец из четырех элементов:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \quad x_1 = W; \quad x_2 = W'; \quad x_3 = rM_r; \quad x_4 = rV_r;$$

$A$  — матрица  $(4 \times 4)$  переменных коэффициентов. Ненулевые элементы этой матрицы равны:

$$\begin{aligned} a_{12} &= 1; \quad a_{21} = \mu n^2 / r^2; \quad a_{22} = -\mu / r; \quad a_{23} = -1 / (rD); \\ a_{31} &= (3 + \mu)(1 - \mu)n^2 D / r^2; \quad a_{32} = -(1 - \mu)(1 + \mu + 2n^2)D / r; \\ a_{33} &= \mu / r; \quad a_{34} = 1, \\ a_{41} &= -p^2 \rho h r + (1 - \mu)(2 + n^2 + \mu n^2)n^2 D / r^3 + n^2(\sigma_r - \mu \sigma_\varphi)h / r; \\ a_{42} &= -(1 - \mu)(3 + \mu)n^2 D / r^2 - h(\sigma_r - \mu \sigma_\varphi); \\ a_{43} &= \mu n^2 / r^2 + h \sigma_r / D. \end{aligned}$$

Решение матричного дифференциального уравнения (49.5) должно удовлетворять следующим граничным условиям: на внутреннем контуре, считая посадку на вал или ступицу жесткими, следует принять равными нулю прогиб  $W$  и угол поворота  $W'$ ; на наружном контуре, если он свободен, должны равняться нулю изгибающий момент  $M_r$  и приведенная поперечная сила  $V_r$ .

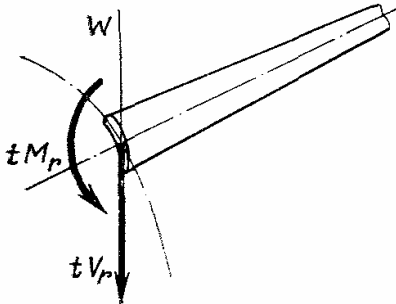


Рис. 49.2

Для того чтобы учесть взаимодействие диска с лопаточным венцом, следует использовать метод динамических податливостей. Если не учитывать кручение, то на лопатку в ее корневом сечении (рис. 49.2) действуют сила с амплитудой  $tV_r$  и момент с амплитудой  $tM_r$  ( $t$  — шаг лопаток).

Под действием этих сил сечение получает амплитудное осевое смещение  $W$  и угол поворота  $W'$ . Используя коэффициенты динамической податливости лопатки, можно записать:

$$W' = tM_r D_{11} + tV_r D_{12}; \quad -W = tM_r D_{21} + tV_r D_{22}, \quad (49.6)$$

где  $D_{ij}$  — ( $i, j = 1, 2$ ) — динамические податливости лопатки при частоте  $p$ , причем первое направление соответствует моменту  $tM_r$ , а второе — силе  $tV_r$  (рис. 49.2).

При определении податливостей следует полагать, что корневое сечение лопатки закреплено от окружных перемещений, и учитывать растяжение лопатки инерционными силами.

Равенства (49.6) представляют собой граничные условия для уравнения (49.5) на внешнем контуре диска. Решение может проводиться методом начальных параметров, подобным изложенному в § 48 применительно к расчету частот собственных колебаний лопаток. В этом случае расчет выполняется при ряде значений частоты  $p$ , причем устанавливается частота, при которой обращается в нуль определитель системы, выражающей граничные условия на внешнем контуре диска.

Весьма эффективным является применение метода последовательных приближений (см. § 27). Для его использования уравнение (49.5) записывается в виде

$$X' - A_1 X = p^2 A_2 X. \quad (49.7)$$

Здесь  $A_1$  — матрица, отличающаяся от матрицы  $A$  только отсутствием первого слагаемого в элементе  $a_{41}$ ;  $A_2$  — матрица с единственным ненулевым элементом  $a_{41}^{(2)} = -\rho h r$ .

Смысл уравнения (49.7) состоит в том, что прогибы и другие неизвестные определяются как результат действия сил инерции интенсивностью  $p^2 \rho h \omega$ .

При решении уравнения (49.7) по методу последовательных приближений каждое следующее приближение определяется как результат действия сил инерции, соответствующих предыдущему приближению:

$$X'_{k+1} - A_1 X_{k+1} = p_k^2 A_2 X_k. \quad (49.8)$$

На каждом этапе правая часть уравнения (49.8) задана. Также заданы и значения нагрузок на внешнем контуре диска:

$$\begin{aligned} (M_r)_{k+1} &= -\frac{1}{t} p_k^2 \int_0^l \rho F W_k z dz; \\ (V_r)_{k+1} &= \frac{1}{t} p_k^2 \int_0^l \rho F W_k dz. \end{aligned} \quad (49.9)$$

Здесь  $W_k$  — осевые перемещения лопатки при  $k$ -м приближении, а  $z$  — расстояние текущего сечения лопатки от корневого.

Процесс последовательных приближений начинается с того, что задаются какая-либо единая для диска и лопатки зависимость  $W(r)$  и произвольная частота  $p_0$ . Эти значения подставляют в правую часть уравнения (49.8) и численно (например, методом начальных параметров) находят его решение, удовлетворяющее условиям закрепления на ободе и условиям (49.9) на внешнем контуре. Затем расчет повторяют. Собственные частоты, соответствующие каждому этапу приближений, проще всего определить по формуле

$$p_{k+1} = p_k \sqrt{W_k(R)/W_{k+1}(R)},$$

где  $W(R)$  — значение амплитудного прогиба на внешнем контуре диска.

Для приближенного (с точностью 5...10%) определения частоты собственных колебаний диска используется метод Рэлея—Ритца (см. § 26). Применение этого метода к расчету колебаний круглых пластин переменной толщины подробно рассмотрено в § 36. Здесь мы дополнительно рассмотрим учет влияния лопаток и поля центробежных сил.

По Рэлею, частота определяется формулой

$$p^2 = 2(U_0 + U_\omega)/\mathcal{M}. \quad (49.10)$$

При вычислении энергии деформации диска  $U_0$  можно в большинстве случаев пренебрегать энергией деформации лопаток и определять энергию по формуле (36.6):

$$U_0 = \frac{\pi E}{24(1-\mu^2)} \int \left\{ \left( W'' + \frac{1}{r} W' - \frac{n^2}{r^2} W \right)^2 + \right. \\ \left. + 2(1-\mu)n^2 \left[ \left( \frac{1}{r} W' \right)' \right]^2 - 2(1-\mu)W'' \left( \frac{1}{r} W' - \frac{n^2}{r^2} W \right) \right\} h^3 r dr.$$

В этой формуле  $h$  — толщина диска на радиусе  $r$ , а интегрирование ведется от внутреннего до наружного контура диска. При заданном профиле диска и заданной зависимости  $W(r)$  величина  $U_0$  определяется численным интегрированием.

В выражении для обобщенной массы  $\mathcal{M}$  (36.7) должны быть учтены все части диска. Для удобства вычислений целесообразно массу лопаток равномерно распределить по окружности, производя расчет для эквивалентного диска (рис. 49.3), толщина которого в зоне расположения лопаток определяется равенством

$$h_{\text{экв}} = \nu \rho_{\text{л}} F / (2 \pi r \rho), \quad (49.11)$$

где  $\nu$  — количество лопаток;  $F$  — площадь сечения лопатки на радиусе  $r$ ;  $\rho_{\text{л}}$  и  $\rho$  — плотности материала лопаток и диска.

Тогда

$$\mathcal{M} = \pi \rho \int W^2 h r dr, \quad (49.12)$$

где интегрирование проводится от внутреннего до наружного радиуса эквивалентного диска.

Величина  $U_\omega$  в формуле (49.10) учитывает изменение потенциальной энергии массы диска в поле центробежных сил, а также работу, совершаемую при изгибе диска начальными напряжениями  $\sigma_r$ ,  $\sigma_\varphi$ , имеющими место в его срединной плоскости.

При изгибе диска точки его срединной поверхности получают осевые смещения  $w$ , а также дополнительные перемещения  $u$ ,  $v$  в радиальном и окружном направлениях. Перемещения  $u$ ,  $v$  имеют второй порядок малости по сравнению с  $w$ . Дополнительные деформации срединной поверхности с учетом членов второго порядка составят:

$$\epsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial r} \right)^2; \quad \epsilon_\varphi = \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{1}{2r^2} \left( \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right)^2.$$

Увеличение потенциальной энергии деформации диска при изгибе зависит от начальных напряжений

$$\Delta_1 U = \int_{\varphi} \int_r (\sigma_r \varepsilon_r + \sigma_{\varphi} \varepsilon_{\varphi}) h r dr d\varphi,$$

а увеличение потенциала массы диска в поле центробежных сил

$$\Delta_2 U = - \int_{\varphi} \int_r Z u r dr d\varphi,$$

где  $Z = \rho h r \omega^2$  — интенсивность центробежных сил.

Таким образом, суммарное увеличение энергии при изгибе диска составит

$$U_{\omega} = \int_{\varphi} \int_r \left[ \sigma_r h \frac{\partial u}{\partial r} + \sigma_{\varphi} h \left( \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} \right) - Z u \right] r dr d\varphi + \\ + \frac{1}{2} \int_{\varphi} \int_r \left[ \sigma_r \left( \frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 + \sigma_{\varphi} \left( \frac{\partial w}{r \partial \varphi} \right)^2 \right] h r dr d\varphi. \quad (49.13)$$

Отметим, что, пока диск не изогнут, напряжения  $\sigma_r$  и  $\sigma_{\varphi}$  уравнивают нагрузку  $Z$ . Поэтому работа системы сил  $\sigma_r$ ,  $\sigma_{\varphi}$ ,  $Z$  на любых возможных перемещениях в плоскости диска и, в частности, на перемещениях  $u$ ,  $v$  равна нулю.

Таким образом, первое слагаемое в формуле (49.13) отпадает и

$$U_{\omega} = \frac{1}{2} \int_{\varphi} \int_r \left[ \sigma_r \left( \frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 + \sigma_{\varphi} \left( \frac{\partial w}{r \partial \varphi} \right)^2 \right] h r dr d\varphi.$$

Учитывая зависимость  $w = W(r) \cos n\varphi$ , находим

$$U_{\omega} = \frac{\pi}{2} \int_r \sigma_r (W')^2 h r dr + n^2 \frac{\pi}{2} \int_r \sigma_{\varphi} W^2 \frac{h}{r} dr. \quad (49.14)$$

В выражение  $U_{\omega}$  должны быть также включены слагаемые, соответствующие изменению потенциала массы лопаток в поле центробежных сил. Формально их можно учесть, распространяя интегрирование в формуле (49.14) на весь эквивалентный диск (рис. 49.3), если считать, что в части его, соответствующей лопаткам,  $\sigma_{\varphi} = 0$ , а

$$\sigma_r = \nu N / (2\pi r h_{\text{экр}}).$$

Здесь  $\nu$  — число лопаток;  $N$  — продольная сила в лопатке, определяемая по формуле (48.9).

Так как напряжения  $\sigma_r$  и  $\sigma_{\varphi}$ , вызываемые центробежными силами, пропорциональны квадрату угловой скорости вращения, то можно представить  $U_{\omega}$  в форме

$$U_{\omega} = \omega^2 U_{\omega 1}, \quad (49.15)$$

где  $U_{\omega 1}$  подсчитывается по формуле (49.14), в кото-

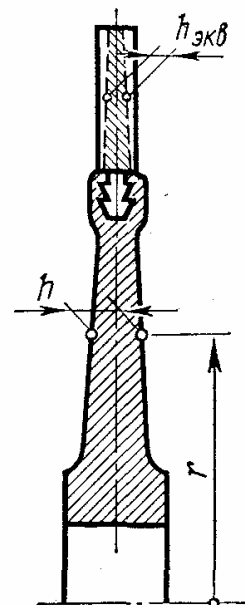


Рис. 49.3

рую подставляются значения напряжений  $\sigma_r$ ,  $\sigma_\varphi$ , соответствующие скорости  $\omega = 1$ .

Сложность вычислений  $U_0$ ,  $\mathcal{M}$  и  $U_\omega$  в значительной мере зависит от того, в какой форме задается координатная функция  $W(r)$ . Если отношение наружного диаметра диска к диаметру вала велико ( $D/d > 3$ ), то целесообразно использовать зависимость, предложенную Стодолой,

$$W = r^s, \quad (49.16)$$

где  $s$  — неопределенный параметр.

Функция (49.16) не удовлетворяет условию отсутствия смещений на радиусе сопряжения диска с валом, но при больших отношениях  $D/d$  это не приводит к заметным ошибкам.

Подставляя выражение (49.16) в соответствующие формулы, получаем:

$$U_0 = \frac{\pi E}{24(1-\mu^2)} [(s^2 - n^2)^2 + 2(1-\mu)(s-1)(2n^2s - n^2 - s^2)] \int_r h^3 r^{2s-3} dr;$$

$$\mathcal{M} = \pi \rho \int_r h r^{2s+1} dr; \quad (49.17)$$

$$U_{\omega 1} = \frac{\pi}{2} \left[ s^2 \int_r \sigma_{r1} h r^{2s-1} dr + n^2 \int_r \sigma_{\varphi 1} h r^{2s-1} dr \right].$$

Здесь  $\sigma_{r1}$ ,  $\sigma_{\varphi 1}$  — напряжения в диске, вызываемые центробежными силами при  $\omega = 1$ .

Для диска произвольного профиля интегралы, входящие в выражения (49.17), определяют численно. Вычисления производят при разных значениях  $s$ , и полученные величины подставляют в формулу Рэлея (49.10). Строят график зависимости  $p(s)$ . Минимум этого графика соответствует значению  $p$ , наиболее близкому к точному.

Укажем, что значения  $s$ , соответствующие минимуму частоты, растут с увеличением числа узловых диаметров и приблизительно  $n-1 < s < n+1$ .

Для дисков с отношением  $D/d < 3$  можно воспользоваться зависимостью\*  $W = r^s - r_0^s$ , где  $r_0$  — внутренний радиус диска.

После того как определена частота  $p$ , находят критическую скорость диска  $\omega_{кр} = p/n$  или после подстановки значения  $p$  в формулу (49.10):

$$p = \sqrt{2U_0/\mathcal{M} + \omega_{кр}^2 2U_{\omega 1}/\mathcal{M}}$$

получаем

$$\omega_{кр} = \sqrt{2U_0/\mathcal{M}} \sqrt{1/(n^2 - B)},$$

где

$$B = 2U_{\omega 1}/\mathcal{M}.$$

---

\* См.: Л е в и н А. В. Рабочие лопатки и диски паровых турбин. М., Госэнергоиздат, 1953.

Для ориентировки приводим значения коэффициента  $B$  для диска постоянной толщины без центрального отверстия:

$n \dots$	2	3	4
$B \dots$	2,36	4,13	6,16
$\omega_{кр} n/p_0 \dots$	1,56	1,37	1,21

Здесь коэффициент  $\omega_{кр} n/p_0$  отражает влияние поля центробежных сил на критическую скорость диска. Как видно из приведенных данных, это влияние является значительным.

## § 50. КОЛЕБАНИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ВИНТОВЫХ ПРУЖИН

**Вводные замечания.** Цилиндрическая пружина представляет собой пространственный (винтовой) кривой брус, и точный расчет ее колебаний сопряжен с большими трудностями, связанными главным образом с формулировкой граничных условий для системы дифференциальных уравнений движения. Эта система имеет 12-й порядок соответственно шести степеням свободы, которыми обладает каждое поперечное сечение проволоки. Закрепление же концов пружины обычно настолько неопределенно, что записать на каждом конце шесть граничных условий просто невозможно. Поэтому большей частью колебания пружины рассматриваются на основе приближенных теорий, в которых пружина уподобляется прямому брусу, обладающему теми или иными подходящими свойствами.

Как показывают эксперименты (см. [51]), теории, основанные на концепции эквивалентного бруса, удовлетворительно описывают те формы колебаний, при которых в пределах одной волны оказывается достаточно большое число витков пружины. Погрешности теории оказываются значительными при расчете коротковолновых колебаний.

Ниже на основе концепции эквивалентного стержня рассматриваются продольные и поперечные колебания пружин.

**Продольные колебания.** Предполагается, что при продольных колебаниях напряженное состояние витков пружины такое же, как и при статической нагрузке, т. е. что внутренние силовые факторы в сечении проволоки сводятся к одной силе, действующей по оси пружины и пропорциональной осадке данного ее витка. При этом предположении пружину можно рассматривать как эквивалентный прямой брус, имеющий массу и податливость, равные массе и податливости пружины.

Масса рабочих витков пружины с малым углом подъема

$$m = \rho F \pi D i,$$

где  $\rho$  — плотность материала пружины;  $F$  — площадь поперечного сечения проволоки;  $D$  — средний диаметр пружины;  $i$  — число ее рабочих витков.

Податливость пружины (т. е. осадка ее от единичной силы) определяется по формуле Рело:

$$\delta = \pi D^3 i / (4C),$$

где  $C = GJ_k$  — жесткость сечения проволоки при кручении.

Масса эквивалентного прямого бруса (рис. 50.1) составляет

$$m' = m_0 l,$$

а его податливость

$$\delta' = l/(EF)_{\text{экв}}.$$

Здесь  $l$  — длина бруса;  $m_0$  — масса единицы длины;  $(EF)_{\text{экв}}$  — жесткость сечения бруса при растяжении — сжатии. Приравняв  $m = m'$  и  $\delta = \delta'$ , придем к соотношениям

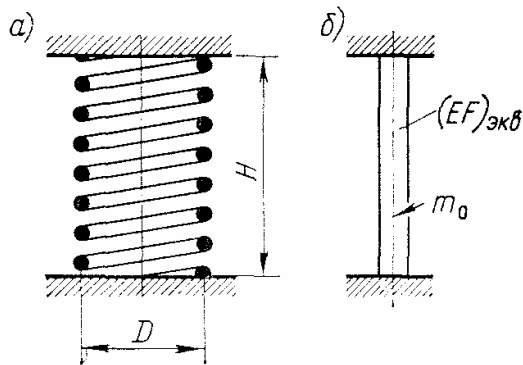


Рис. 50.1

$$m_0 l = \rho F \pi D i; \quad l/(EF)_{\text{экв}} = \pi D^3 i / (4C).$$

Таким образом, три характеристики эквивалентного бруса ( $m_0$ ,  $l$ ,  $EF_{\text{экв}}$ ) связаны всего двумя соотношениями. Поэтому одну из них можно задать произвольно.

Примем длину эквивалентного бруса  $l$  равной свободной длине пружины  $H$ . Тогда

$$m_0 = \rho F \pi D i / H,$$

$$(EF)_{\text{экв}} = 4CH / (\pi D^3 i). \quad (50.1)$$

После того как характеристики эквивалентного бруса определены, для расчета продольных колебаний пружины можно непосредственно воспользоваться формулами § 17. Так, например, если концы пружины закреплены (рис. 50.1), то частоты собственных колебаний определяются формулой

$$p_k = k\pi \sqrt{(EF)_{\text{экв}} / (m_0 l^2)} = k(2/i) \sqrt{C / (\rho F D^4)}, \quad (50.2)$$

где  $k = 1, 2, \dots$

Легко видеть, что длина  $H = l$  эквивалентного бруса в окончательную формулу не входит и ее выбор в самом деле произволен.

Для пружины из круглой проволоки

$$C = GJ_p = G\pi d^4 / 32; \quad F = \pi d^2 / 4$$

и

$$p_k = k/i \sqrt{G d^2 / (2\rho D^4)}. \quad (50.3)$$

Для стали, полагая  $G = 7,85 \cdot 10^{10}$  Па и  $\rho = 7,85 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>, находим низшую угловую частоту колебаний ( $k = 1$ ):

$$p_1 = 2,24 \cdot 10^3 d / (i D^2)$$

где  $d$  и  $D$  следует брать в метрах.

Нетрудно, пользуясь данными § 17, определить частоты собственных колебаний пружины и при других граничных условиях, в частности если пружина колеблется вместе с прикрепленным к ее концу грузом.



Вынужденные колебания пружины чаще всего возбуждаются кинематически, так, например, как показано на рис. 50.2. Здесь нижний конец пружины закреплен неподвижно, а верхний связан с кулачком и совершает заданное периодическое движение с периодом  $\tau$ . Перемещение  $x_n$  этого конца пружины можно представить в виде ряда Фурье:

$$x_n = c_0 + c_1 \sin(\omega t + \varphi_1) + c_2 \sin(2\omega t + \varphi_2) + \dots, \quad (50.4)$$

где  $\omega = 2\pi/\tau$ , а коэффициенты  $c$  известны.

Решение дифференциального уравнения (см. § 17) продольных колебаний эквивалентного пружине бруса

$$\frac{\partial^2 x}{\partial z^2} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = 0 \quad [a^2 = (EF)_{\text{экв}}/m_0] \quad (50.5)$$

ищем в форме

$$x(z, t) = u_0(z) + \sum_{j=1}^{\infty} u_j(z) \sin(j\omega t + \varphi_j). \quad (50.6)$$

Подставляя это выражение в уравнение (50.5), получаем для каждой из функций  $u_j(z)$  обыкновенное дифференциальное уравнение

$$u_j'' + (j^2\omega^2/a^2) u_j = 0,$$

откуда  $u_0 = b_0 z + e_0$ ;  $u_j = b_j \sin(j\omega z/a) + e_j \cos(j\omega z/a)$ .

Так как конец пружины  $z = 0$  закреплен, то  $e_j = 0$  ( $j = 0, 1, 2, \dots$ ) и перемещение любой точки пружины имеет вид

$$x(z, t) = b_0 z + \sum_{j=1}^{\infty} b_j \sin(j\omega z/a) \sin(j\omega t + \varphi_j).$$

В частности, для нагруженного конца пружины  $z = H$  получаем

$$x(H, t) = b_0 H + \sum_{j=1}^{\infty} b_j \sin(j\omega H/a) \sin(j\omega t + \varphi_j).$$

Сравнивая это выражение с формулой (50.4), находим:

$$b_0 = \frac{c_0}{H}; \quad b_j = \frac{c_j}{\sin(j\omega H/a)}.$$

Таким образом, перемещение любой точки пружины при заданном законе (50.4) движения ее конца определяется выражением

$$\begin{aligned} x(z, t) = & c_0 \frac{z}{H} + \frac{c_1}{\sin(\omega H/a)} \sin \frac{\omega z}{a} \sin(\omega t + \varphi_1) + \\ & + \frac{c_2}{\sin(2\omega H/a)} \sin \left( 2 \frac{\omega z}{a} \right) \sin(2\omega t + \varphi_2) + \dots \end{aligned} \quad (50.7)$$

Если  $\sin(j\omega H/a)$  обращается в нуль, то соответствующий член в

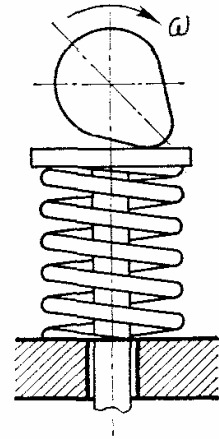


Рис. 50.2

формуле (50.7) неограниченно возрастает. Резонанс имеет место, если частота гармонической составляющей перемещения конца пружины

$$j\omega = k\pi a/H = k\pi \sqrt{(EF)_{\text{э.кв}}/(m_0 H^2)},$$

где  $k$  — целое число, т. е. если эта частота совпадает с одной из собственных частот пружины с закрепленными концами [см. формулу (50.2)].

При неперiodических продольных воздействиях на пружину (например, ударных) можно успешно использовать волновые методы расчета типа описанных в § 22 (см. также [40], гл. X).

**Поперечные колебания.** При рассмотрении поперечных колебаний цилиндрической пружины пружина также заменяется эквивалентным брусом. При конструировании модели эквивалентного бруса необходимо учесть, что в деформациях пружины существенную роль играют перпендикулярные ее оси (поперечные) силы, вызывающие изгиб витка в своей плоскости. Следует также иметь в виду, что продольная сила в пружине при повороте ее витков в процессе колебаний также получает составляющую, лежащую в плоскости витка. Кроме того, необходимо учитывать моменты инерционных сил при повороте витка.

Итак, схема эквивалентного бруса для расчета поперечных колебаний пружины должна учитывать деформацию бруса поперечными силами, инерцию поворота сечений и влияние продольной силы.

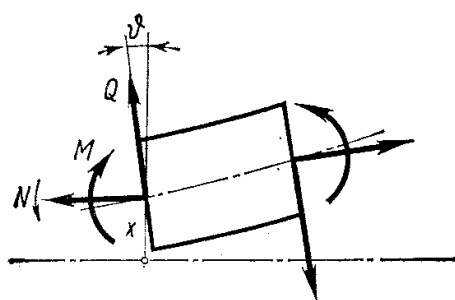


Рис. 50.3

В § 18 были получены уравнения поперечных колебаний прямого бруса с учетом деформаций сдвига и инерции поворота.

Теперь дополнительно следует учесть продольную силу.

Как и в § 18, положение каждого поперечного сечения эквивалентного бруса (соответствующего витку пружины) будем характеризовать смещением  $x$  и углом поворота  $\vartheta$ . В сечении действуют сила  $N$ , направленная по нормали к плоскости сечения, поперечная сила  $Q$ , лежащая в плоскости сечения, и изгибающий момент  $M$ . Рассматривая динамическое равновесие элемента  $dz$  бруса (рис. 50.3), получаем уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial N}{\partial z} + Q \frac{\partial \vartheta}{\partial z} &= 0; \quad -\frac{\partial Q}{\partial z} + N \frac{\partial \vartheta}{\partial z} - m_0 \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = 0; \\ \frac{\partial M}{\partial z} - Q - (\rho J)_{\text{э.кв}} \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial t^2} - N \left( \frac{\partial x}{\partial z} - \vartheta \right) &= 0. \end{aligned} \quad (50.8)$$

Здесь  $m_0$  — интенсивность массы эквивалентного бруса, а  $(\rho J)_{\text{э.кв}}$  — интенсивность ее момента инерции.

Следует пояснить происхождение слагаемого  $N(\partial x/\partial z - \vartheta)$  в последней формуле. Так как силы  $N$  приложены перпендикулярно пло-

скости сечения, они составляют с касательной к оси бруса углы  $(\partial x/\partial z - \vartheta)$ , поэтому сила  $N$ , приложенная к левому сечению, имеет (с точностью до малых второго порядка) плечо  $dz(\partial x/\partial z - \vartheta)$  относительно центра правого сечения элемента.

Изгибающий момент и поперечная сила связаны с перемещениями уравнениями [см. уравнение (18.21)]

$$M = A\partial\vartheta/\partial z; \quad Q = A_1(\vartheta - \partial x/\partial z). \quad (50.9)$$

Здесь  $A$  и  $A_1$  — жесткость эквивалентного бруса соответственно при изгибе и при сдвиге. Подставляя значение  $Q$  из уравнения (50.9) в первое из уравнений (50.8), находим

$$\frac{\partial N}{\partial z} = A_1 \left( \vartheta - \frac{\partial x}{\partial z} \right) \frac{\partial \vartheta}{\partial z}.$$

При малых перемещениях правая часть этого равенства представляет собой малую второго порядка и можно полагать  $N = \text{const} = P$ , где  $P$  — начальное натяжение пружины.

Система уравнений (50.8) и (50.9) после исключения  $M$  и  $Q$  приводится к виду

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 x}{\partial z^2} - \frac{m_0}{A_1} \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} &= \left( 1 - \frac{P}{A_1} \right) \frac{\partial \vartheta}{\partial z}; \\ \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial z^2} - \frac{(\rho J)_{\text{эКВ}}}{A} \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial t^2} &= \frac{A_1}{A} \left( 1 - \frac{P}{A_1} \right) \left( \vartheta - \frac{\partial x}{\partial z} \right). \end{aligned} \quad (50.10)$$

В эти уравнения входят четыре характеристики эквивалентного бруса:  $m_0$ ,  $(\rho J)_{\text{эКВ}}$ ,  $A$ ,  $A_1$ .

Массу единицы длины эквивалентного бруса  $m_0$  найдем, разделив массу одного витка пружины на ее шаг  $H/i$  (при расчете поперечных колебаний под  $H$  понимается длина пружины деформированной силой  $P$ ):

$$m_0 = \rho \pi D F i / H. \quad (50.11)$$

Здесь  $F$  — площадь поперечного сечения проволоки.

Точно так же определяем интенсивность момента инерции массы эквивалентного бруса:

$$(\rho J)_{\text{эКВ}} = \frac{\rho \pi D^3 F / 8}{H/i} = \rho \frac{\pi D^3 F i}{8H}. \quad (50.12)$$

Жесткость эквивалентного бруса при изгибе  $A$  найдем, рассмотрев чистый изгиб пружины моментом  $M$  (рис. 50.4). Под действием момента  $M$  в сечении любого витка, составляющем угол  $\varphi$  с плоскостью момента, возникают крутящий момент  $M_{\text{кр}} = M \cos \varphi$  и изгибающий момент  $M_n = M \sin \varphi$ . (Угол подъема пружины считается малым.)

Прикладывая теперь единичный момент по направлению  $M$ , определим вызываемые им единичные силовые факторы:

$$M'_{\text{кр}} = \cos \varphi; \quad M'_n = \sin \varphi.$$

Угол поворота нагруженного моментом торца пружины найдем с помощью интеграла Мора:

$$\vartheta = i \int_0^{2\pi} \left( \frac{M_{кр} M'_{кр}}{C} + \frac{M_n M'_n}{B_n} \right) \frac{D}{2} d\varphi = \frac{\pi}{2} i D M \left( \frac{1}{C} + \frac{1}{B_n} \right).$$

Здесь  $C = GJ_k$ ,  $B_n = EJ_n$  — крутильная жесткость сечения проволоки и жесткость его при изгибе относительно нормали к винтовой линии (рис. 50.5).

Приравнявая полученную величину угла поворота углу поворота торца эквивалентного бруса длиной  $H$  с жесткостью  $A$ :

$$\vartheta = MH/A,$$

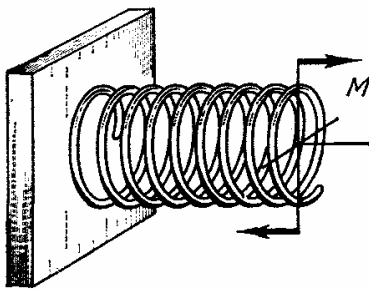


Рис. 50.4

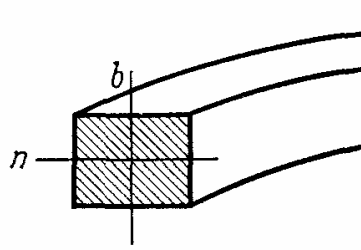


Рис. 50.5

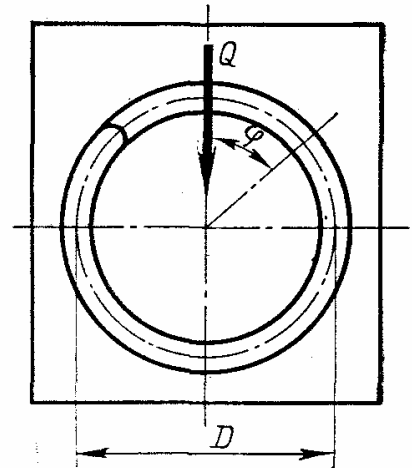


Рис. 50.6

находим

$$A = \frac{2H}{\pi D i} \frac{1}{1/C + 1/B_n}. \quad (50.13)$$

При нагружении витка пружины в своей плоскости поперечной силой  $Q$  (рис. 50.6) в сечениях витка возникает изгибающий момент

$$M_b = (QD/2) \sin \varphi$$

и прогиб пружины в связи с таким нагружением одного витка составит

$$\lambda = \frac{1}{B_b} \int_0^{2\pi} \frac{QD}{2} \sin \varphi \frac{D}{2} \sin \varphi \frac{D}{2} d\varphi = Q \frac{\pi D^3}{8 B_b},$$

где  $B_b = EJ_b$  — жесткость сечения проволоки при изгибе относительно бинормали  $b$  к винтовой линии (см. рис. 50.5).

В аналогичных условиях вызванная сдвигом деформация участка эквивалентного бруса, соответствующего одному витку, составит

$$\lambda = (Q/A_1) (H/i).$$

Приравнявая два значения  $\lambda$ , находим

$$A_1 = 8HB_b/(\pi D^3 i). \quad (50.14)$$

Формулы (50.11)...(50.14) дают возможность вычислить характеристики эквивалентного бруса, которые затем должны быть подставлены в уравнения (50.10).

Для нахождения частот и форм собственных колебаний пружины, как обычно, полагаем:

$$x(z, t) = u_1(z) \cos pt; \quad \vartheta(z, t) = u_2(z) \cos pt.$$

Подставляя эти зависимости в уравнения (50.10), получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений относительно  $u_1$  и  $u_2$ :

$$\begin{aligned} u_1'' + (m_0 p^2 / A_1) u_1 - (1 - P/A_1) u_2' &= 0; \\ (A_1/A) (1 - P/A_1) u_1' + u_2'' + [(p^2/A) (\rho J)_{\text{э.кв}} - (A_1/A) (1 - P/A_1)] u_2 &= 0. \end{aligned} \quad (50.15)$$

Этой системе соответствует характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} s^2 + p^2 m_0 / A_1 & -(1 - P/A_1) s \\ (A_1/A) (1 - P/A_1) s & s^2 + (p^2/A) (\rho J)_{\text{э.кв}} - (A_1/A) (1 - P/A_1) \end{vmatrix} = 0,$$

или в развернутом виде

$$s^4 + 2m^2 s^2 - n^4 = 0, \quad (50.16)$$

где

$$m^2 = \frac{1}{2} [p^2 m_0 / A_1 + p^2 (\rho J)_{\text{э.кв}} / A - (P/A) (1 - P/A_1)]; \quad (50.17)$$

$$n^4 = (p^2 m_0 / A) [1 - P/A_1 - p^2 (\rho J)_{\text{э.кв}} / A_1].$$

Четыре корня характеристического уравнения равны:

$$s_{1,2} = \pm \alpha \sqrt{-1}; \quad s_{3,4} = \pm \beta,$$

где

$$\alpha = \sqrt{\sqrt{m^4 + n^4} + m^2}; \quad \beta = \sqrt{\sqrt{m^4 + n^4} - m^2}. \quad (50.18)$$

Соответственно полученным значениям корней характеристического уравнения общие выражения для функций  $u_1$ ,  $u_2$  имеют такой вид:

$$\begin{aligned} u_1 &= C_1 \cos \alpha z + C_2 \sin \alpha z + C_3 \operatorname{ch} \beta z + C_4 \operatorname{sh} \beta z; \\ u_2 &= \frac{1}{1 - P/A_1} \left[ \frac{1}{\alpha} \left( \frac{p^2 m_0}{A_1} - \alpha^2 \right) (C_1 \sin \alpha z - C_2 \cos \alpha z) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\beta} \left( \frac{p^2 m_0}{A_1} + \beta^2 \right) (C_3 \operatorname{sh} \alpha z + C_4 \operatorname{ch} \beta z) \right], \end{aligned} \quad (50.19)$$

где  $C_1, \dots, C_4$  — постоянные, определяемые из граничных условий.

На шарнирно опертом конце пружины (например, крепление прицепа пружины растяжения) условие отсутствия прогиба и момента приводит к равенствам

$$u_1 = 0; \quad du_2/dz = 0. \quad (50.20)$$

На заделанном конце пружины (например, торец пружины сжатия) равны нулю прогиб и угол поворота:  $u_1 = 0$ ,  $u_2 = 0$ .

Наконец, на свободном конце пружины условия отсутствия изгибающего момента и поперечной силы приводят к требованиям

$$du_2/dz = 0; \quad du_1/dz - u_2 = 0.$$

Таким образом, при любом закреплении концов пружины граничные условия могут быть записаны в виде четырех однородных линейных уравнений относительно  $C_1, \dots, C_4$ .

Равенство нулю определителя этой системы позволяет найти собственные частоты.

Для пружины, шарнирно закрепленной по концам, граничные условия (50.20) могут быть выполнены, если в общем решении (50.19) удерживать единственную постоянную  $C_2$  и принять

$$\alpha H = k\pi \quad (k = 1, 2, \dots). \quad (50.21)$$

Тогда

$$u_1 = C_2 \sin(k\pi z/H);$$

$$u_2 = -\frac{1}{\alpha(1-P/A_1)} \left( \frac{p^2 m_0}{A_1} - \alpha^2 \right) C_2 \cos(k\pi z/H).$$

Для определения частот подставим значение  $\alpha$  из уравнения (50.18) в равенство (50.21). Тогда при  $k = 1$  получим

$$n^4 H^4 + 2\pi^2 m^2 H^2 - \pi^4 = 0$$

и далее с учетом значений  $m$  и  $n$  из уравнения (50.17) имеем

$$p^4 - p^2 \frac{A_1}{(\rho J)_{\text{эКВ}}} \left[ 1 - \frac{P}{A_1} + \frac{\pi^2}{H^2} \left( \frac{A}{A_1} - \frac{(\rho J)_{\text{эКВ}}}{m_0} \right) \right] +$$

$$+ \frac{\pi^4 A A_1}{m_0 (\rho J)_{\text{эКВ}} H^4} \left[ 1 + \frac{H^2 A_1}{\pi^2 A} \frac{P}{A_1} \left( 1 - \frac{P}{A_1} \right) \right] = 0. \quad (50.22)$$

Уравнение частот (50.22) можно, подставив в него значения  $A$ ,  $A_1$ ,  $m_0$ ,  $(\rho J)_{\text{эКВ}}$ , записать в виде

$$\left( \frac{p}{p_0} \right)^4 k_1 \frac{D^4}{H^4} - \left( \frac{p}{p_0} \right)^2 \left( 1 - \frac{P}{A_1} + k_2 \frac{D^2}{H^2} \right) + 1 + k_3 \frac{H^2}{D^2} \frac{P}{A_1} \left( 1 - \frac{P}{A_1} \right) = 0, \quad (50.23)$$

где  $p_0 = \pi^2 \sqrt{A/(m_0 H^4)}$  — частота колебаний, вычисленная без учета продольной силы, сдвигов и инерции поворота витков;

$$k_1 = \frac{\pi^4}{32} \frac{B_n C}{B_b (B_n + C)}; \quad k_2 = \frac{\pi^2}{8} \left[ 1 + \frac{2B_n C}{B_b (B_n + C)} \right];$$

$$k_3 = \frac{4}{\pi^2} \frac{B_b (B_n + C)}{B_n C}.$$

Определение частот из биквадратного уравнения (50.23) не представляет затруднений.

В случае пружины из круглой проволоки

$$B_n = B_b = EJ; \quad C = GJ_p; \quad B/C = EJ/(GJ_p) = 1 + \mu.$$

Приняв  $\mu = 0,3$ , найдем

$$\frac{B_n C}{B_b (B_n + C)} = \frac{1}{2 + \mu} = \frac{1}{2,3}.$$

В этом случае  $k_1 = 1,32$ ;  $k_2 = 2,31$ ;  $k_3 = 0,932$ .

На рис. 50.7 представлены полученные по уравнению (50.23) зависимости отношения  $p/p_0$  от величины продольной нагрузки. Эти зависимости соответствуют низшей частоте колебаний для пружин с отношением  $H/D = 1$ ; 2; 3 ( $H$  — высота пружины, деформированной силой  $P$ ).

Из графика видно, что при отсутствии продольной силы ( $P = 0$ ) частота собственных колебаний пружины значительно ниже, чем частота  $p_0$ , вычисляемая без учета сдвигов и инерции поворота витков.

При растяжении пружины ( $P > 0$ ) частота собственных колебаний увеличивается, а при сжатии ( $P < 0$ ) — уменьшается. Обращение частоты в нуль свидетельствует о неустойчивости пружины. Очевидно, что нулевая частота получается при значении  $P = -P_{кр}$ ,

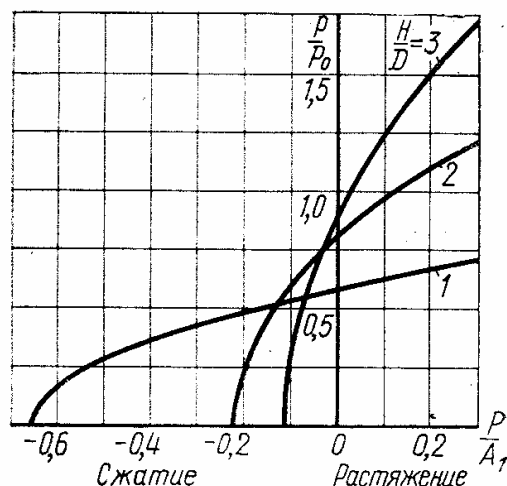


Рис. 50.7

обращающем в нуль свободный член уравнения (50.22):

$$1 - \frac{H^2 A_1}{\pi^2 A} \frac{P_{кр}}{A_1} \left( 1 + \frac{P_{кр}}{A_1} \right) = 0.$$

Определение частот собственных поперечных колебаний пружин при закреплении концов, отличном от шарнирного, приводит к необходимости решать трансцендентные уравнения [2].

## § 51. ПРИНЦИПЫ ВИБРАЦИОННОГО ПЕРЕМЕЩЕНИЯ

**Вводные замечания.** Рабочий орган вибротранспортной машины совершает циклическое движение, причем в конце цикла он оказывается в том же положении, что и в начале, транспортируемый же груз при каждом цикле продвигается вперед. Такой эффект возможен только в существенно нелинейной системе. Источником нелинейности в вибротранспортных системах является сухое трение.

Вопросы теории вибрационного перемещения детально рассмотрены в монографии [8]. Там же приведена подробная библиография. В настоящем параграфе излагаются лишь принципы работы вибротранспортных устройств при горизонтальной транспортировке. При этом совершенно не затрагиваются вопросы устойчивости стационарных режимов движения.

**Вибротранспортировка при постоянном давлении.** Имеются два основных типа вибротранспортировки — с постоянным нормальным давлением груза на рабочий орган и с переменным давлением (с подбрасыванием). Рассмотрим сначала первый тип транспортировки.

Груз (рис. 51.1) лежит на плоскости рабочего органа машины, который совершает горизонтальные колебания. Груз прижат к плоскости силой тяжести  $mg$ , а горизонтальное движение груза вызывается силой трения, которую будем считать подчиняющейся закону Кулона. В соответствии с этим законом сила трения по абсолютной величине не может превзойти  $\mu mg$ , где  $\mu$  — коэффициент трения (для простоты не будем различать трение покоя и трение движения).

Поэтому горизонтальное ускорение груза не может превзойти по абсолютной величине  $\mu g$ .

Если рабочий орган движется с большим ускорением, обязательно имеет место проскальзывание. Так как требуется передвигать груз вперед (на рис. 51.1 слева направо), то, очевидно, целесообразно, чтобы при отрицательных ускорениях рабочего органа имело место проскальзывание. Поэтому отрицательные ускорения рабочего органа (т. е. его замедление) должны по абсолютной величине превышать  $\mu g$ . Наоборот, при положительных ускорениях проскальзывание нежелательно, поэтому здесь ускорение должно быть меньше  $\mu g$ .

Простейший закон изменения скорости рабочего органа, удовлетворяющий этим условиям, показан на рис. 51.2, а сплошными линиями. Здесь рабочий орган движется с постоянным замедлением  $j_1 > \mu g$  в течение времени  $t_1$  и с ускорением  $j_2 < \mu g$  в течение времени  $t_2$ . Из условия периодичности движения следует:

$$j_1 t_1 = j_2 t_2; v_0 = \frac{1}{2} j_1 t_1.$$

Соответствующий закон изменения ускорения рабочего органа показан на рис. 51.2, б.

Так как  $j_1 > \mu g$ , в течение времени  $t_1$  имеет место проскальзывание и груз движется с замедлением  $\mu g$ , что показано штриховой линией  $AB$  на рис. 51.2, а. В точке  $B$  скорость груза оказывается больше, чем скорость рабочего органа, скольжение продолжается и груз движется с тем же замедлением, пока в точке  $C$  скорости груза и рабочего органа не выравниваются. Далее (линия  $CD$ ) груз движет-



Рис. 51.1

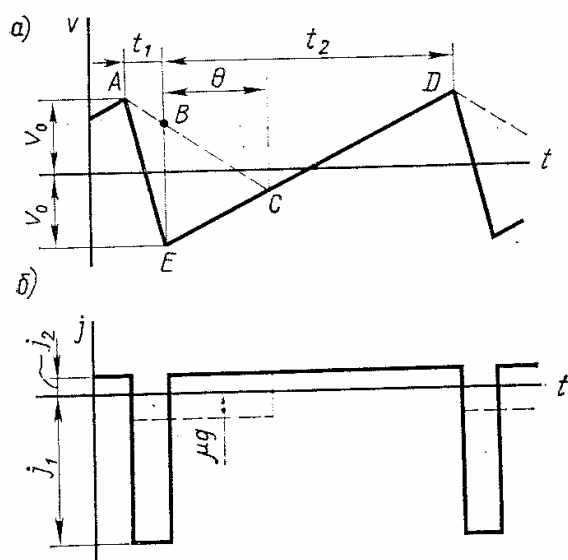


Рис. 51.2



ся вместе с рабочим органом с ускорением  $j_2$ . В точке  $D$  снова начинается скольжение, и процесс повторяется.

График изменения ускорений груза показан на рис. 51.2, б штриховой линией; вне этого участка он совпадает с графиком ускорений рабочего органа.

Перемещение груза за цикл определяется интегрированием скорости. Так как перемещение рабочего органа за цикл равно нулю, то существенно лишь относительное перемещение, которое выражается площадью  $S$  треугольника  $ACE$ . Определяя абсциссу точки  $C$ , находим

$$\theta = (j_1 t_1 - \mu g t_2) / (\mu g + j_2).$$

Площадь треугольника  $ACE$

$$S = \frac{1}{2} |EB| (t_1 + \theta) = \frac{1}{2} (j_1 + j_2) t_1^2 \frac{j_1 - \mu g}{j_2 + \mu g}.$$

Учитывая, что  $t_1 = \tau j_2 / (j_1 + j_2)$ , где  $\tau = t_1 + t_2$  — период колебаний рабочего органа, находим

$$S = \frac{1}{2} j_2 \tau^2 \frac{j_2}{j_2 + \mu g} \frac{j_1 - \mu g}{j_1 + j_2}.$$

Чтобы установить предельно возможное перемещение груза за цикл, заметим, что предельное значение  $j_2$  составляет  $\mu g$  (иначе будет проскальзывание). Поэтому

$$S_{\max} = 1/4 \mu g \tau^2$$

$$(\text{при } j_2 = \mu g \text{ и } j_1/j_2 \rightarrow \infty).$$

Среднюю скорость перемещения груза  $v$  найдем, поделив  $S$  на  $\tau$ :

$$v = 1/2 j_2 \tau j_2 / (j_2 + \mu g); v_{\max} = 1/4 \mu g \tau$$

$$(j_2 = \mu g, j_1 \rightarrow \infty). \quad (51.1)$$

Из полученных зависимостей видно, что скорость перемещения груза возрастает с увеличением периода качаний рабочего органа (т. е. со снижением их частоты). При этом, конечно, ход рабочего органа

$$s = j_1 t_1^2 / 8 + j_2 t_2^2 / 8 \approx \mu g \tau^2 / 8$$

быстро возрастает.

Поэтому качающиеся конвейеры, в которых используется рассмотренный способ перемещения груза, — машины с большим ходом и малым числом ходов в единицу времени. Они приводятся в движение с помощью кулисных или кулачковых механизмов, осуществляющих закон движения, близкий к рассмотренному выше.

Заметим, что условие  $j_2 \leq \mu g$ , использованное нами выше, не является обязательным. При наличии несимметричного закона движения ( $j_1 \neq j_2$ ) транспортировка будет осуществляться и в случае  $j_2 > \mu g$ , однако в этом случае расход энергии на транспортировку уве-

личится, так как груз будет проскальзывать по рабочему органу не только вперед, но и назад.

Для этого случая графики изменения скоростей и ускорений рабочего органа (сплошные линии) и груза (штриховые) показаны на рис. 51.3. Нетрудно установить, что время, определяющее момент изменения знака относительной скорости груза,

$$\theta = \frac{\tau}{2} \frac{j_0 - \mu g}{j_1 + j_2},$$

а средняя скорость транспортировки груза

$$v = \mu g \frac{\tau}{4} \frac{j_1 - j_2}{j_1 + j_2};$$

скорость максимальна при  $j_2/j_1 \rightarrow 0$ :

$$v_{\max} = \mu g \tau / 4. \quad (51.2)$$

Сравнение формул (51.2) и (51.1) показывает, что использование ускорений  $j_2$ , превышающих  $\mu g$ , нецелесообразно, так как скорость транспортировки не увеличивается, а расход энергии повышается.

**Вибротранспортировка с подбрасыванием.** Если в качающихся вибротранспортерах асимметрия движения, которая и дает эффект транспортирования, достигается за счет различия ускорений  $j_1$  и  $j_2$ , то в машинах с подбрасыванием асимметрия связана с тем, что направление вибраций рабочего органа составляет

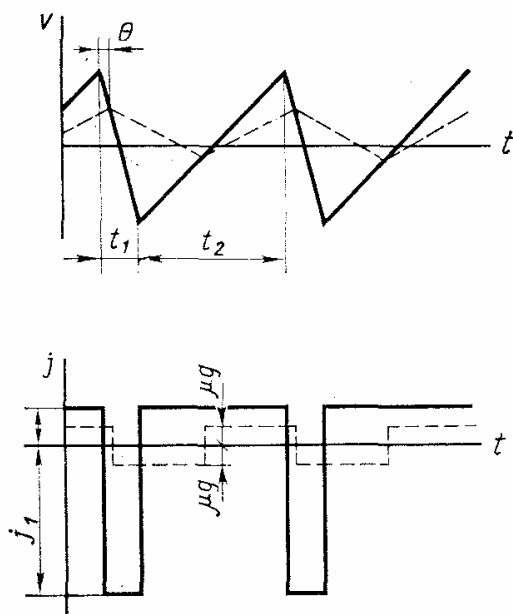


Рис. 51.3



Рис. 51.4

некоторый угол с горизонталью.

Рассмотрим основные зависимости, характерные для этого вида транспортировки.

Ограничимся наиболее важным практическим случаем, когда рабочий орган движется по гармоническому закону. В этом случае вертикальная и горизонтальная составляющие его движения определяются формулами

$$y = a_1 \sin \omega t; \quad x = a_2 \sin \omega t, \quad (51.3)$$

где  $a_1 = a \sin \alpha$ ;  $a_2 = a \cos \alpha$ ,  $a$  — амплитуда колебаний рабочего органа (рис. 51.4).

Закон вертикального движения транспортируемого груза можно

рассматривать независимо от закона его горизонтального движения.

Предположим, что удар груза о рабочий орган является неупругим, будем также считать, что в течение некоторого времени груз лежит на рабочем органе.

Тогда отрыв груза от рабочего органа будет иметь место в момент, когда вертикальное ускорение последнего по абсолютной величине станет равным ускорению силы тяжести:

$$-\ddot{y} = a_1 \omega^2 \sin \omega t_1 = g. \quad (51.4)$$

Из этого условия находим момент отрыва груза:

$$\omega t_1 = \arcsin[g/(a_1 \omega^2)]. \quad (51.5)$$

Далее рабочий орган продолжает двигаться по закону (51.3), а груз совершает свободный полет в соответствии с уравнением

$$\dot{y}_r = \dot{y}_0 + \dot{y}_0(t - t_1) - g(t - t_1)^2/2.$$

Здесь

$$y_0 = a_1 \sin \omega t_1 = g/\omega^2; \quad \dot{y}_0 = a_1 \omega \cos \omega t_1$$

— смещение и скорость груза в момент отрыва.

Момент  $t_2$  обратного падения груза на рабочий орган можно найти из уравнения  $y = y_r$  или

$$a_1 \sin \omega t_2 = g/\omega^2 + (t_2 - t_1) a_1 \omega \cos \omega t_1 - g(t_2 - t_1)^2/2. \quad (51.6)$$

Уравнение (51.6) можно упростить, введя безразмерный коэффициент режима вибрации

$$k = a_1 \omega^2 / g \quad (51.7)$$

и обозначая

$$\omega t_2 - \omega t_1 = 2\omega.$$

Тогда уравнение (51.6) получает вид

$$\sin(\omega t_1 + 2\omega) = \sin \omega t_1 + 2\omega \cos \omega t_1 - 2\omega^2 \sin \omega t_1.$$

Отсюда находим

$$\operatorname{tg} \omega t_1 = \frac{\omega - \frac{1}{2} \sin 2\omega}{\omega^2 - \sin^2 \omega}. \quad (51.8)$$

Уравнение (51.8) позволяет, задаваясь значениями  $\omega$ , вычислять соответствующие пары значений  $\omega t_1$  и  $\omega t_2$ .

На рис. 51.5 показаны полученные таким образом зависимости  $\omega t_1$  и  $\omega t_2$  от коэффициента  $k = a_1 \omega^2 / g = 1/(\sin \omega t_1)$ .

Очевидно, что принятая гипотеза о том, что груз в течение некоторого времени находится в контакте с рабочим органом, может выполняться только в том случае, если  $t_2 < t_1 + 2\pi/\omega$ . По формуле (51.8) вычисляем соответствующее значение  $\operatorname{tg} \omega t_1^* = 1/\pi$ . Отсюда следует, что режимы рассматриваемого типа возможны только при значениях коэффициента режима вибрации  $k$ , лежащих в пределах

$$1 < k < \sqrt{\pi^2 + 1}.$$

В осуществляемых конструкциях виброконвейеров обычно принимают  $2 < k < 2,8$ , так что сделанное предположение выполняется.

Заметим, что при  $k > 3,3$  реализуется режим движения груза с непрерывным подбрасыванием, детально рассмотренный в книге [8].

Графики вертикального движения рабочего органа (сплошная линия) и груза (штриховая) при сделанных предположениях имеют вид, показанный на рис. 51.6.

Рассмотрим теперь горизонтальное движение груза, пренебрегая сопротивлением среды. Прежде всего установим те интервалы времени, в течение которых возможно совместное горизонтальное движение груза и рабочего органа.

Если груз находится в контакте с рабочим органом, то величина нормального давления (отнесенного к единице массы) составляет

$$g + j = g - a_1 \omega^2 \sin \omega t$$

( $j$  — вертикальное ускорение рабочего органа).

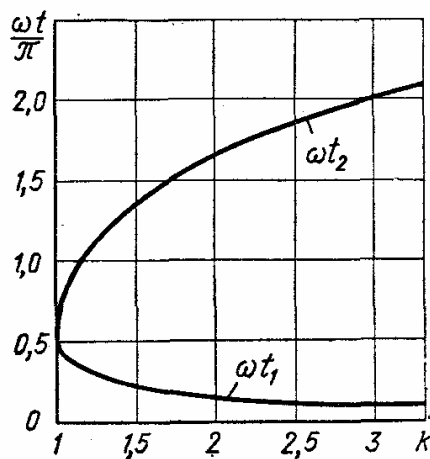


Рис. 51.5

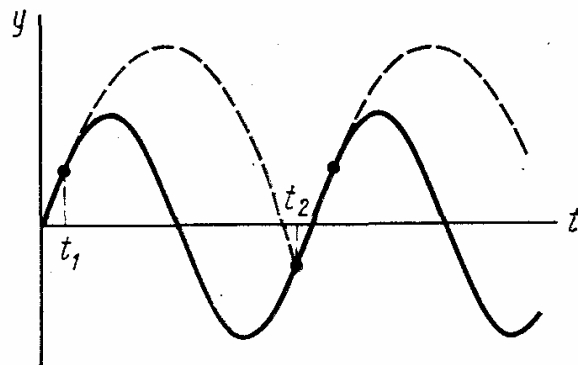


Рис. 51.6

Горизонтальное ускорение рабочего органа составляет  $-a_2 \omega^2 \sin \omega t$ .

Совместное горизонтальное движение груза и рабочего органа возможно только при условии

$$|a_2 \omega^2 \sin \omega t| \leq \mu (g - a_1 \omega^2 \sin \omega t),$$

т. е. если  $\sin \omega t$  лежит в пределах

$$-\frac{g/(a_1 \omega^2)}{a_2/(\mu a_1) - 1} < \sin \omega t < \frac{g/(a_1 \omega^2)}{a_2/(\mu a_1) + 1}. \quad (51.9)$$

Соответствующие границы можно нанести на график движения рабочего органа. На рис. 51.7, а, на котором изображен график горизонтального движения рабочего органа, область значений смещения, удовлетворяющих неравенствам (51.9), заштрихована.

В течение времени полета  $t_1 < t < t_2$  груз имеет постоянную горизонтальную скорость  $v_0$ . В момент  $t_2$  он ударяется о рабочий орган и находится в контакте с ним до нового отрыва при  $t = t_1 + 2\pi/\omega$ .

Так как при периодическом движении горизонтальная скорость груза в момент отрыва снова равна  $v_0$ , очевидно, что суммарный горизонтальный импульс, получаемый грузом за время контакта, равен нулю. Это условие вместе с гипотезами о характере горизонтальных сил взаимодействия между грузом и рабочим органом конвейера при ударе позволяет определить скорость  $v_0$ .

Предположим, что при ударе для сил трения справедлив закон Кулона, и тогда получаемый грузом горизонтальный импульс не превышает величины вертикального импульса, умноженного на коэффициент трения. Поэтому изменение горизонтальной скорости груза при ударе ограничено величиной

$$|v_0 - a_2 \omega \cos \omega t_2| < v_*; \quad (51.10)$$

$$v_* = \mu [a_1 \omega \cos \omega t_2 + g(t_2 - t_1) - a_1 \omega \cos \omega t_1].$$

Если  $v_*$  больше, чем разность горизонтальных скоростей груза и рабочего органа в момент соударения, то происходит выравнивание

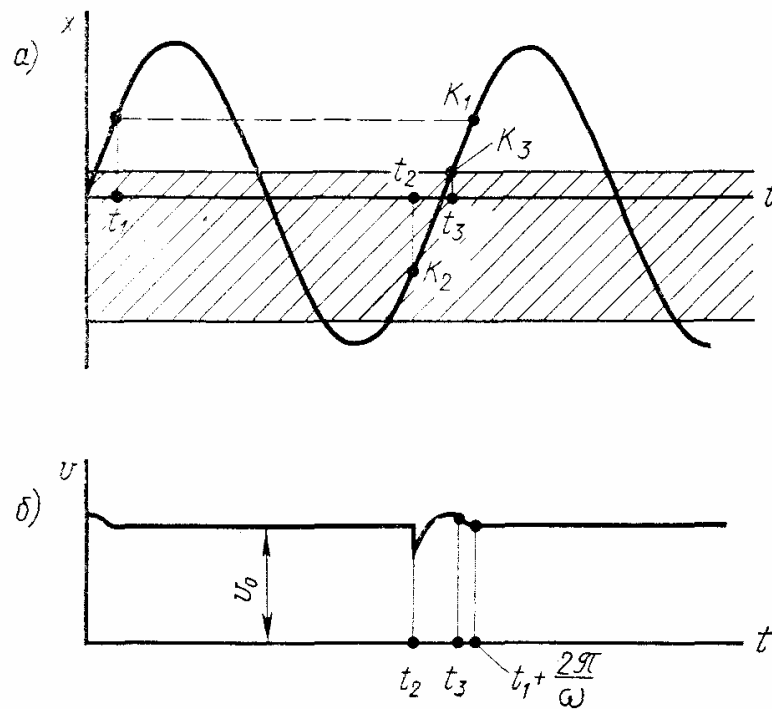


Рис. 51.7

скоростей. Если при этом точка удара  $K_2$  попадает в область, где возможно совместное движение, то груз и далее движется совместно с рабочим органом до начала относительного скольжения в точке  $K_3$ .

Начиная от этой точки груз замедляется силами трения, пока при  $t = t_1 + 2\pi/\omega$  не начнется снова полет с горизонтальной скоростью  $v_0$ . Эту скорость нетрудно подсчитать, исходя из следующих соображений.

В точке  $K_3$

$$\sin \omega t_3 = \frac{g/(\omega^2 a_1)}{a_2/(\mu a_1) + 1}; \quad \omega t_3 = 2\pi + \arcsin \frac{g/(\omega^2 a_1)}{a_2/(\mu a_1) + 1}.$$

Горизонтальная скорость груза в этот момент (равная скорости рабочего органа) составляет

$$v_k = \omega a_2 \cos \omega t_3.$$

Далее от точки  $K_3$  до точки  $K_1(t = t_1 + 2\pi/\omega)$  груз замедляется силой трения, пропорциональной нормальному давлению.

Поэтому

$$v_0 = v_k - \int_{t_3}^{t_1 + 2\pi/\omega} \mu (g - a_1 \omega^2 \sin \omega t) dt; \quad (51.11)$$

$$v_0 = \omega a_2 \cos \omega t_3 - \mu [g(t_1 + 2\pi/\omega - t_3) - a_1 \omega (\cos \omega t_3 - \cos \omega t_1)].$$

Определив по этой формуле  $v_0$ , нетрудно проверить, выполняется ли неравенство (51.10).

Итак, на интервале  $t_1 < t < t_2$  истинная скорость равна  $v_0$ , на интервале  $t_2 < t < t_3$  скорость груза совпадает со скоростью рабочего органа, а на интервале  $t_3 < t < t_1 + 2\pi/\omega$  скорость груза определяется выражением (51.11), но с переменным верхним пределом интегрирования.

Примерный график изменения скорости груза показан на рис. 51.7, б.

На основе этой зависимости можно рассчитать среднюю скорость груза (очевидно, она мало отличается от скорости его в момент  $t_1$ ). Подсчет средней скорости по указанной схеме является несложным, но довольно громоздким. Вместе с тем результаты его вряд ли могут претендовать на большую точность в связи с неопределенностью физических предпосылок (отсутствие сопротивления, справедливость закона Кулона при ударе, одинаковость коэффициентов трения покоя и движения).

Вместе с тем расчет позволяет установить основные параметры, от которых зависит средняя скорость перемещения, — это прежде всего горизонтальная скорость рабочего органа, величина  $k = a_1 \omega^2 / g$ , определяющая моменты  $t_1$  и  $t_2$ , коэффициент трения  $\mu$ , от которого зависит момент  $t_3$ ; кроме того, сопротивление перемещению груза зависит от его природы (дисперсность, плотность и т. п.).

Поэтому в практике используется следующая приближенная формула для скорости транспортирования:

$$v = k_1 a_2 \omega \sqrt{1 - [g/(a_1 \omega^2)]^2}.$$

Легко видеть, что величина  $a_2 \omega \sqrt{1 - [g/(a_1 \omega^2)]^2}$  представляет собой горизонтальную скорость рабочего органа в момент  $t_1$ . Поправочный коэффициент  $k_1$ , определяемый экспериментально, зависит от вида транспортируемого груза.

Для зернистых и кусковых материалов  $k_1 = 0,7—1$ , для порошкообразных и пылевидных материалов  $k_1 = 0,2—0,5$ .

## Литература

1. Бабаков И. М. Теория колебаний. 2-е изд. М., 1965.
2. Бидерман В. Л. Поперечные колебания пружин. — В кн.: Расчеты на прочность, вып. 8. М., 1962.
3. Бидерман В. Л. Механика тонкостенных конструкций. М., 1977.
4. Бидерман В. Л., Малюкова Р. П. Усилия и деформации при продольном ударе. — В кн.: Расчеты на прочность. 1959. Вып. 10.
5. Биргер И. А. Некоторые математические методы решения инженерных задач. М., 1956.
6. Бисплингхофф Р., Эшли Х., Халфман Р. Аэроупругость/Пер. с англ. М., 1958.
7. Бицено К., Граммель Р. Техническая динамика/Пер. с нем. Т. 2. — М.: ГТТИ, 1952.
8. Блехман И. И., Джанелидзе Г. Ю. Вибрационное перемещение. М., 1964.
9. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М., 1960.
10. Болотин В. В. Динамическая устойчивость упругих систем. М., 1956.
11. Болотин В. В. Неконсервативные задачи упругой устойчивости. М., 1961.
12. Болотин В. В. Динамический краевой эффект при колебаниях упругих оболочек. — Изв. АН СССР. ПММ, 1960, т. 24, № 5.
13. Болотин В. В. Динамический краевой эффект при упругих колебаниях пластинок: Инженерный сборник, т. 31. М., 1961.
14. Болотин В. В. Статистические методы в строительной механике. М., 1965.
15. Вентцель Е. С. Теория вероятностей. М., 1964.
16. Голоскоков Е. Г., Филиппов А. П. Нестационарные колебания механических систем. М., 1966.
17. Гольдсмит В. Удар/Пер. с англ. М., 1965.
18. Гонткевич В. С. Собственные колебания пластинок и оболочек. М., 1964.
19. Гродко Л. Н. О малых колебаниях механических систем, обладающих круговой симметрией. — Инженерный журнал. МТТ, 1967, № 1.
20. Гуров А. Ф. Расчеты на прочность и колебания в ракетных двигателях. М., 1966.
21. Ден-Гартог Дж. Механические колебания/Пер. с англ. М., 1960.
22. Диментберг Ф. М. Изгибные колебания вращающихся валов. М., 1959.
23. Дондошанский В. К. Расчет колебаний упругих систем на электронных вычислительных машинах. М.-Л., 1965.
24. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике/Пер. с англ. М., 1975.
25. Ивович В. А. Переходные матрицы в динамике упругих систем. М., 1969.
26. Инженерные методы исследования ударных процессов. /Батуев Г. С., Голубков Ю. В., Ефремов А. К., Федосов А. А. 2-е изд. М., 1977.
27. Йоршиш Ю. И. Виброметрия. М., 1964.
28. Кильчевский Н. А. Динамическое контактное сжатие твердых тел. Удар. Киев, 1976.
29. Коловский М. З. Нелинейная теория виброзащитных систем. М., 1967.
30. Кольский Г. Волны напряжений в твердых телах/Пер. с англ. М., 1953.
31. Кононенко В. О. Колебания систем с ограниченным возбуждением. М., 1964.

32. Лойцянский Л. Г., Лурье А. И. Курс теоретической механики, т. 2. М., 1955.
33. Мандельштам Л. И. Лекции по колебаниям. М., 1972.
34. Пановко Я. Г. Внутреннее трение при колебаниях упругих систем. М., 1960.
35. Пановко Я. Г. Основы прикладной теории упругих колебаний и удара. 3-е изд. М., 1976.
36. Пановко Я. Г. Введение в теорию механического удара. М., 1977.
37. Пановко Я. Г., Губанова И. И. Устойчивость и колебания упругих систем. 2-е изд. М., 1967.
38. Постнов В. А., Хархурим И. Я. Метод конечных элементов в расчетах судовых конструкций. Л., 1974.
39. Прочность, устойчивость, колебания: Справочное руководство: В 3-х т. Т. 3. М., 1968.
40. Расчеты на прочность в машиностроении / Пономарев С. Д., Бидерман В. Л., Лихарев К. К. и др.: В 3-х т. Т. 3. М., 1959.
41. Рахматулин Х. А., Демьянов Ю. А. Прочность при интенсивных кратковременных нагрузках. М., 1961.
42. Рэлей. Теория звука. В 2-х т. Т. 1. М., 1955.
43. Светлицкий В. А., Стасенко И. В. Сборник задач по теории колебаний. М., 1979.
44. Светлицкий В. А. Случайные колебания механических систем. М., 1976.
45. Свешников А. А. Прикладные методы теории случайных функций. М., 1968.
46. Силаев А. А. Спектральная теория поддресоривания транспортных машин. М., 1963.
47. Случайные колебания / Под ред. С. Кренделл; Пер. с англ. М., 1967.
48. Смольников Б. А. Расчет свободных колебаний замкнутой рамной системы с циклической симметрией. — В кн.: Динамика и прочность машин. — Труды ЛПИ, № 210. М. — Л., 1960.
49. Статика и динамика сборочных конструкций / Кармишин А. В., Лясковец В. Н., Мяченков В. Н., Фролов А. Н. М., 1975.
50. Тимошенко С. П. Колебания в инженерном деле. М., 1967.
51. Товстик П. Е. Поперечные колебания цилиндрической пружины с учетом продольного сжатия. — В кн.: Исследования по теории упругости и пластичности, вып. 1. Л., 1961.
52. Филиппов А. П. Колебания деформируемых систем. М., 1970.
53. Харкевич А. А. Автоколебания. М., 1954.
54. Хаяси Т. Нелинейные колебания в физических системах / Пер. с англ. М., 1968.
55. Хвингия М. В. Вибрации пружин. М., 1969.
56. Цзе Ф., Морзе И., Хинкл Р. Механические колебания. / Пер. с англ. М., 1966.



# ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

## А

автоколебания 298  
— фрикционные 298  
Айнса — Стретта диаграмма 54  
амплитуда 11  
— комплексная 40  
антирезонанс 121

## В

вал анизотропно-упругий 369  
— гибкий 356  
вектор перемещений 99  
— собственный 101  
— состояния 238  
виброизоляция 347  
вибротранспортировка 395  
возбуждение колебаний гармониче-  
ское 20  
— — кинематическое 126  
— — параметрическое 50  
— — периодическое 21  
волны упругие в стержнях 179  
— бегущие в круглых пластинах 280

## Г

Гамильтона принцип 7  
гаситель колебаний динамический 123  
— — — с затуханием 137  
Герца теория 330  
гипотеза эргодическая 315  
гистерезис 34  
— конструкционный 35  
Граммеля метод 194

## Д

декремент колебания 25  
демпфирование пропорциональное 132  
деформации контактные при ударе 330  
дискретизация 200  
дисперсия 311  
добротность 42  
Донкерлея формула 197

## Ж

жесткость динамическая 225

## З

затухание колебаний 24  
зона застоя 28

## К

колебания автомобиля 326  
колебания вынужденные 13  
— главные 89  
— дисков турбомашин 379  
— круговых колец 185  
— лопаток турбомашин 372  
— нелинейных систем 55  
— оболочек 284  
— — без растяжения срединной по-  
верхности 285  
— — вращения 292  
— — цилиндрических 292  
колебания пластин 272  
колебания пружин вынужденные 389  
— — продольные 387  
— — поперечные 390  
колебания регулярных систем 261  
колебания свободные 11  
— случайные 309  
колебания стержней 141  
— — вынужденные 163  
— — изгибные 149  
— — крутильные 142  
— — продольные 141  
колебания струн 143  
— циклических систем 261  
координаты главные 93  
коэффициент динамичности 40  
— поглощения 31  
кривая скелетная 61

## М

масса обобщенная 93  
масса приведения 193  
матрица жесткости 82  
— масс 82  
— — диагональная 83  
матрица перехода 238  
— податливости 82  
— прогоночная 256  
Матье уравнение 63

метод асимптотический расчета пластин 275

— гармонического баланса 64

— динамической жесткости 225

— — податливости 225

метод комплексных амплитуд 39, 135

— конечных элементов 200

— математического моделирования 50

— начальных параметров 235

— осреднения 75

— последовательных приближений 209

— припасовывания 59

— прогонки 251

— Рэлея — Ритца 198

момент гироскопический 356

## Н

неустойчивость динамическая 50

## П

петля гистерезиса 33

податливость динамическая 121

принцип Гамильтона 7

## Р

Райса формула 320

реакция системы на единичный импульс 14

— — на единичную нагрузку 16

— — на линейно возрастающую нагрузку 17

резонанс 20

— параметрический 50

— субгармонический 74

Рэлея формула 191

## С

сдвиг спектра частот 108, 211

скорость критическая вала 355

— — движения нагрузки 171

— — диска 379

## Т

трение внутреннее 34

— вязкое 24

— сухое 26

— пропорциональное смещению 29

## У

угол фазовый 40

уравнение вековое 88

— волновое 144

— Лагранжа II рода 8

— Матье 53

— Хилла 52

## Ф

форма собственная 89

флаттер 304

функция амплитудная 144

— диссипативная 131

— координатная 199

— корреляционная 312

— Крылова 150

— передаточная комплексная 137

— случайная 309

— спектральная 314

## Х

Хилла уравнение 52

## Ц

цикл предельный 302

## Ч

частота техническая 12

— угловая 11

частотная характеристика комплексная 137

## Э

энергия кинетическая 7, 12, 82

— потенциальная 7, 12, 82

# Оглавление

Предисловие . . . . .	3
<b>Глава I. Колебания систем с одной степенью свободы . . . . .</b>	<b>5</b>
§ 1. Расчетные схемы и уравнения движения . . . . .	5
§ 2. Свободные колебания линейной консервативной системы . . . . .	11
§ 3. Вынужденные колебания линейной системы без трения . . . . .	13
§ 4. Затухание свободных колебаний . . . . .	24
§ 5. Вынужденные колебания систем при вязком трении . . . . .	38
§ 6. Вынужденные колебания систем с трением, отличным от вязкого . . . . .	44
§ 7. Параметрическое возбуждение колебаний . . . . .	50
§ 8. Колебания нелинейных систем . . . . .	55
§ 9. Метод осреднения . . . . .	75
<b>Глава II. Колебания систем с конечным числом степеней свободы . . . . .</b>	<b>81</b>
§ 10. Уравнения движения . . . . .	81
§ 11. Определение частот и форм свободных колебаний . . . . .	87
§ 12. Главные координаты. Матричная форма уравнений . . . . .	91
§ 13. Некоторые особые случаи расчета собственных колебаний . . . . .	103
§ 14. Примеры расчета частот и форм собственных колебаний . . . . .	110
§ 15. Вынужденные колебания системы без трения . . . . .	115
§ 16. Влияние трения на колебания систем с конечным числом степеней свободы . . . . .	131
<b>Глава III. Колебания стержней с распределенной массой . . . . .</b>	<b>141</b>
§ 17. Продольные и крутильные колебания стержней, поперечные колебания струн . . . . .	141
§ 18. Изгибные колебания прямых стержней . . . . .	149
§ 19. Вынужденные колебания стержней . . . . .	163
§ 20. Колебания стержней при наличии вязкого трения . . . . .	167
§ 21. Колебания, вызываемые подвижной нагрузкой . . . . .	169
§ 22. Распространение упругих волн в стержнях . . . . .	173
§ 23. Колебания круговых колец . . . . .	185
<b>Глава IV. Приближенные и численные методы расчета колебаний . . . . .</b>	<b>190</b>
§ 24. Простейшие приближенные формулы для оценки низшей собственной частоты . . . . .	191
§ 25. Метод Рэлея — Ритца . . . . .	198
§ 26. Прямая дискретизация систем с распределенной массой. Метод конечных элементов . . . . .	200
§ 27. Метод последовательных приближений . . . . .	209
§ 28. Расчет собственных частот системы без определения форм ее колебаний . . . . .	219
§ 29. Методы динамических податливостей и динамических жесткостей . . . . .	225
	407

§ 30. Метод начальных параметров . . . . .	235
§ 31. Метод прогонки . . . . .	251
§ 32. Расчет собственных колебаний регулярных систем . . . . .	261
<b>Глава V. Колебания пластин и оболочек . . . . .</b>	<b>272</b>
§ 33. Уравнение движения пластины постоянной толщины . . . . .	272
§ 34. Прямоугольная пластина постоянной толщины . . . . .	274
§ 35. Круглая пластина постоянной толщины . . . . .	277
§ 36. Применение метода Рэлея — Ритца к определению частот собственных колебаний пластин . . . . .	281
§ 37. Колебания оболочек . . . . .	284
<b>Глава VI. Автоколебания . . . . .</b>	<b>291</b>
§ 38. Фрикционные автоколебания . . . . .	298
§ 39. Флаттер крыла в дозвуковом потоке . . . . .	304
<b>Глава VII. Случайные колебания. . . . .</b>	<b>309</b>
§ 40. Случайные функции . . . . .	309
§ 41. Воздействие случайной стационарной нагрузки на линейную колебательную систему . . . . .	320
§ 42. Примеры расчета случайных колебаний . . . . .	325
<b>Глава VIII. Ударное взаимодействие механических систем . . . . .</b>	<b>331</b>
§ 43. Теория Герца . . . . .	331
§ 44. Теория соударения упругих систем, учитывающая местные и общие их деформации . . . . .	334
§ 45. Упрощенные методы расчета ударных нагрузок . . . . .	343
<b>Глава IX. Некоторые технические приложения теории колебаний . . . . .</b>	<b>347</b>
§ 46. Основы расчета виброизоляции . . . . .	347
§ 47. Колебания вращающихся валов . . . . .	354
§ 48. Колебания лопаток турбомашин . . . . .	372
§ 49. Осевые колебания дисков турбомашин . . . . .	379
§ 50. Колебания цилиндрических винтовых пружин . . . . .	387
§ 51. Принципы вибрационного перемещения . . . . .	395
<b>Литература . . . . .</b>	<b>403</b>
<b>Предметный указатель . . . . .</b>	<b>405</b>