



УНИВЕРСИТЕТСКИЙ КУРС  
ОБЩЕЙ ФИЗИКИ

**В. А. Алешкевич**

# ОПТИКА

*Допущено  
Министерством образования и науки  
Российской Федерации  
в качестве учебника  
для студентов высших учебных заведений,  
обучающихся по направлению подготовки  
и специальности "Физика"*



**МОСКВА  
ФИЗМАТЛИТ®  
2011**

УДК 535(075.8)

ББК 22.34я73

А 45

Алешкевич В. А. **Курс общей физики. Оптика.** — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2011. — 320 с. — ISBN 978-5-9221-1245-1.

Главная особенность учебника — многоуровневая концепция изложения важнейших экспериментальных фактов и основ теории физических явлений с учетом современных научных достижений.

Книга включает следующие основные разделы: электромагнитная теория света, излучение света, интерференция, дифракция, дисперсия, оптические явления на границе раздела сред, геометрическая оптика, волны в анизотропных средах, рассеяние света, нелинейно-оптические явления, приемники света.

Для студентов высших учебных заведений, обучающихся по специальности «Физика».

Допущено Министерством образования и науки Российской Федерации в качестве учебника для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлению подготовки и специальности «Физика».

#### Рецензенты:

кафедра общей физики Костромского государственного университета им. Н. А. Некрасова (зав. кафедрой проф. П. Н. Белкин);

д-р физ.-мат. наук, проф. А. Н. Мансуров (Московский государственный педагогический университет)

Учебное издание

*АЛЕШКЕВИЧ Виктор Александрович*

**КУРС ОБЩЕЙ ФИЗИКИ. ОПТИКА**

Редактор *Е.С. Артоболевская*

Оригинал-макет: *Е.В. Осипов*

Оформление переплета: *А.В. Андросов*

Подписано в печать 1.10.2010. Формат 70×100/16. Бумага офсетная.  
Печать офсетная. Усл. печ. л. 26. Уч.-изд. л. 27,3. Тираж 700 экз. Заказ №

Издательская фирма «Физико-математическая литература»

МАИК «Наука/Интерпериодика»

117997, Москва, ул. Профсоюзная, 90

E-mail: [fizmat@maik.ru](mailto:fizmat@maik.ru), [fmlsale@maik.ru](mailto:fmlsale@maik.ru);

<http://www.fml.ru>

Отпечатано в ООО «Чебоксарская типография № 1»  
428019, г. Чебоксары, пр. И. Яковлева, 15

ISBN 978-5-9221-1245-1



9 785922 112451

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Учебник является второй книгой серии «Университетский курс общей физики» и предназначен для студентов физических специальностей вузов. Он соответствует новым программам, разработанным на физическом факультете МГУ им. М. В. Ломоносова, и отражает современные тенденции и технологии физического образования.

Учебник состоит из 25 тематических лекций. Каждая лекция содержит материал как первого (базового) уровня, так и второго (продвинутого) уровня, отражающий достижения современной оптики.

Изложение материала первого уровня начинается, как правило, с ознакомления с экспериментальными фактами, которые затем обобщаются в виде физических законов и соотношений. Для более глубокого понимания возможностей оптических методов исследования и их многочисленных практических приложений приводится большое число количественных оценок характеристик (спектральных, энергетических, статистических и др.) излучения различных световых источников и оптических элементов (линз, призм, решеток, многослойных диэлектрических зеркал, абсорбционных светофильтров и пр.), оптических приборов и приемников света.

При описании оптических свойств сред также приведены многочисленные количественные параметры и характеристики: частоты излучения и поглощения, частотные зависимости показателя преломления и силы осцилляторов, дисперсия фазовой и групповой скорости, коэффициенты поглощения и рассеяния, плазменные длины волн, константы для оптической активности, электрооптического и керр-эффекта, времена релаксации, линейные и нелинейно-оптические восприимчивости и пр.

Материал второго уровня отражает современные научные достижения и знакомит читателя с высокотехнологичными оптическими методами исследований. В частности, изложено современное состояние проблем по осуществлению лазерного термоядерного синтеза, обнаружению гравитационных волн с использованием интерферометрических методов, достижения сверхнизких температур на основе лазерного охлаждения, созданию сред с отрицательным показателем преломления, обсуждаются предельные возможности получения сверхсильных световых полей и принципиально новые оптические явления, протекающие в таких полях.

В связи с новейшими достижениями в области генерации сверхкоротких световых импульсов и широкого их применения на практике в книге уделяется внимание методам генерации световых импульсов, компрессии и измерению длительностей сверхкоротких импульсов.

Кроме того, путем обобщения дифракционного интеграла Френеля — Кирхгофа для импульсного излучения получен более простой (чем исходный) дифракционный интеграл, описывающий дифракцию света с произвольным час-

тотным спектром. Проиллюстрированы принципиальные отличия нестационарной интерференции и дифракции коротких световых импульсов от аналогичных явлений в случае монохроматического излучения.

Широкое использование волоконно-оптических линий связи стимулировало обсуждение вопросов дисперсионного расплывания импульсов, механизмов формирования фазово-модулированных (чирпированных) импульсов и возможностей распространения оптических солитонов в одномодовых волоконных световодах.

Длительный опыт преподавания общего курса физики показывает, что студенты предпочитают иметь учебник, в котором в полной мере освещены все обсуждаемые проблемы. Ссылки на монографии и оригинальные научные статьи малоэффективны: студенты их, как правило, не читают. Поэтому учебник содержит достаточно большое количество материала, заимствованного из последних научных публикаций, переработанного и адаптированного к потребностям излагаемого курса.

Лекции сгруппированы в 10 разделов: электромагнитная теория света (лекции 1, 2); излучение света (лекции 3—7); интерференция (лекции 8—10); дифракция (лекции 11—14); дисперсия (лекции 15, 16); оптические явления на границе раздела сред, геометрическая оптика (лекции 17, 18); волны в анизотропных средах (лекции 19, 20); рассеяние света (лекции 21, 22); нелинейно-оптические явления (лекции 23, 24); приемники света (лекция 25).

Книга иллюстрирована, наряду с черно-белыми, цветными фотографиями и рисунками, способствующими более наглядному восприятию оптических явлений в случае квазимонохроматических и полихроматических источников света. Приведены также результаты выполненного на кафедре общей физики физического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова компьютерного моделирования интерференции света с различными спектральными характеристиками, пространственной фильтрации при наблюдении фазовых объектов и др.

С глубокой признательностью автор отмечает поддержку многих коллег при работе над рукописью учебника, предоставивших ряд интересных иллюстративных материалов и оказавших помощь при подготовке рукописи. Фотографии лазерных систем, используемых в учебном процессе на кафедре общей физики и волновых процессов физического факультета МГУ, выполнены заведующим практикумом кафедры доцентом И. В. Головинным и представлены с разрешения заведующего кафедрой профессора В. А. Макарова; фотография эксперимента по генерации суперконтинуума в микроструктурированном волоконном световоде, осуществленного на той же кафедре в лаборатории фотоники и нелинейной спектроскопии, предоставлена профессором А. М. Желтиковым; эксперименты по дифракции светового пучка He-Ne-лазера на акустической волне в парателлурите выполнены в лаборатории акустооптики кафедры физики колебаний физического факультета МГУ; дебаеграмма при дифракции рентгеновского излучения в порошке титана получена на кафедре физики твердого тела физического факультета МГУ старшим преподавателем И. В. Телегиной; функция автокорреляции интенсивности рассеянного света в воде с полистироловыми шариками записана и исследована в лаборатории спектроскопии молекулярного рассеяния света кафедры физики полимеров и кристаллов физического факультета МГУ; фотонный кристалл, фотография которого приведена в разделе «Рассеяние света», был изготовлен в лаборато-

рии факультета наук о материалах МГУ аспирантом А. С. Синицким; результаты компьютерного моделирования и ряд цветных фотографий интерферог-  
рамм, дифракционных картин, двулучепреломления и других явлений, демонстрируемых в лекционном эксперименте, подготовлены старшим преподавателем кафедры общей физики физического факультета МГУ А. В. Селиверстовым, в этой работе приняли участие студенты И. А. Гажур, С. С. Полевич и А. Д. Шалагин; фотографии заходящего Солнца сделаны старшим преподавателем кафедры общей физики Ю. А. Кокшаровым; фотографии тепловизора и термокарта предоставлены ОАО «ПЕРГАМ-инжиниринг».

Автор выражает благодарность сотрудникам физического факультета МГУ старшему научному сотруднику А. И. Акимову, профессору В. И. Балакшию, профессору В. М. Гордиенко, профессору В. С. Днепровскому, профессору А. В. Козарю, доценту Т. В. Лаптинской, доктору физико-математических наук В. В. Лебедевой, профессору А. Н. Пенину, профессору А. П. Сухорукову, профессору Ф. Я. Халили за плодотворные консультации по вопросам, входящим в область их профессиональных интересов, а также коллегам А. В. Григорьеву, И. В. Ефимову, Н. Г. Уварову и П. В. Якунину за большую помощь в подготовке рукописи к изданию.

Искреннюю признательность автор выражает коллеге, доценту А. С. Жукареву за внимательное прочтение рукописи и полезные замечания. Также автор благодарит коллектив кафедры общей физики Костромского государственного университета им. Н. А. Некрасова и ее заведующего профессора П. Н. Белкина, профессора Московского педагогического государственного университета А. Н. Мансурова, взявших на себя труд рецензирования рукописи и давших полезные советы по содержанию книги и методике изложения отдельных вопросов.

## РАЗДЕЛ I

### ЭЛЕКТРОМАГНИТНАЯ ТЕОРИЯ СВЕТА

---

#### ЛЕКЦИЯ 1

**Свет — электромагнитные волны.** Оптика (от греч. *οπτική* — учение о зрительных восприятиях) — наука, изучающая природу оптического излучения (света), его распространение и взаимодействие с веществом. Вопрос о природе света возник еще в древние века, когда античные мыслители пытались понять сущность оптических явлений. Человечеству понадобилось более двух тысячелетий, чтобы установить электромагнитную природу световых волн.

Сейчас неоспоримо утверждение, что оптическое излучение представляет собой электромагнитные волны. Поэтому оптика является частью общего учения об электромагнитном поле.

**Оптический диапазон длин волн.** Электромагнитные волны излучаются атомами, молекулами, элементарными частицами и конденсированным веществом и охватывают огромный диапазон длин волн (или частот): от радиоволн до гамма-лучей (рис. 1.1 цв. вкл.).

К оптическим волнам с большой степенью условности относят более узкий диапазон: от *микроволнового радиоизлучения* до *рентгеновского излучения*. Такое ограничение определяется общностью методов и средств, используемых в оптическом диапазоне. Эта общность прежде всего базируется на возможности создания *направленных пучков электромагнитных волн*, с помощью которых можно формировать изображение.

Далее будет показано, что пучок электромагнитных волн вследствие дифракции распространяется с угловой расходимостью  $\vartheta \sim \lambda/d \ll 1$  ( $\lambda$  — длина волны;  $d$  — поперечный размер пучка). Современные технологии позволяют формировать остронаправленные пучки волн в диапазоне длин волн  $0,1 \text{ \AA} < \lambda < 1 \text{ мм}$ , поэтому этот диапазон и относят к оптическому.

Видимая глазом область спектра чрезвычайно узка ( $400 \text{ нм} < \lambda < 700 \text{ нм}$ ). Причины этой узости могут быть объяснены лишь с использованием квантового представления о природе света. Волны длинами  $700 \text{ нм} < \lambda < 1 \text{ мм}$  относят к инфракрасному (ИК) диапазону, а волны длинами  $10 \text{ нм} < \lambda < 400 \text{ нм}$  — к ультрафиолетовому (УФ) диапазону. Более короткие волны принадлежат рентгеновскому диапазону.

Важно отметить, что большое число оптических задач может быть решено как с использованием электромагнитного (классического), так и квантового представления о природе света. Квантовое представление «мирно уживается» с классическим, и это трактуется как корпускулярно-волновой дуализм.

Вместе с тем в ряде задач, относящихся прежде всего к излучению света и его взаимодействию с веществом, единственно возможным является лишь квантовое представление, позволяющее связать макроскопические

характеристики оптических процессов со строением вещества и дать адекватное описание этих процессов.

**Уравнения Максвелла.** Электромагнитная теория света базируется на уравнениях Максвелла:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{j}; \quad (1.1)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}; \quad (1.2)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho; \quad (1.3)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad (1.4)$$

где  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{D}$  — напряженность и индукция электрического поля;  $\mathbf{H}$  и  $\mathbf{B}$  — напряженность и индукция магнитного поля;  $\rho$  — объемная плотность заряда;  $\mathbf{j}$  — плотность тока. В силу закона сохранения заряда  $\rho$  и  $\mathbf{j}$  связаны уравнением непрерывности:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0, \quad (1.5)$$

которое имеет такой же вид, что и уравнение неразрывности для сжимаемой жидкости, описывающее закон сохранения массы.

Зададимся вопросом: «Позволяют ли уравнения Максвелла однозначно рассчитать электромагнитное поле?» Формально нам необходимо определить пять векторных величин:  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{j}$ , и одну скалярную величину  $\rho$ . Подчеркнем, что речь идет о токах и зарядах в среде, которые должны быть согласованы с электромагнитным полем. Их не следует путать с заданными распределениями  $\rho_{\text{и}}(x, y, z, t)$  и  $\mathbf{j}_{\text{и}}(x, y, z, t)$ , описывающими источники электромагнитных волн.

Для этого необходимо иметь пять векторных уравнений и одно скалярное, а уравнения (1.1)–(1.5) представляют собой лишь два векторных и три скалярных уравнения. Более того, уравнения (1.3) и (1.1) связаны между собой, поскольку имеют одинаковые дифференциальные следствия. В этом можно убедиться, применив операцию  $\operatorname{div}$  к обеим частям (1.1), и затем использовать (1.5). Тогда получим уравнение (дифференциальное следствие)  $\frac{\partial}{\partial t}(\operatorname{div} \mathbf{D} - \rho) = 0$ , которое также можно получить дифференцированием по времени уравнения (1.3).

Аналогично можно показать, что (1.4) связано с (1.2). Применив операцию  $\operatorname{div}$  к уравнению (1.2), можно вывести второе дифференциальное следствие, которое получается и дифференцированием по времени уравнения (1.4).

**Материальные уравнения среды.** Три недостающие векторные уравнения устанавливают связь между векторами и называются материальными уравнениями среды. В общем виде они записываются в виде известных функций:

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}(\mathbf{E}); \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{H}); \quad \mathbf{j} = \mathbf{j}(\mathbf{E}). \quad (1.6)$$

Вид этих функций зависит от свойств материальной среды, в которой распространяется волна, и может быть весьма разнообразен, а иногда и достаточно сложен. Например, в одной ситуации значения векторов  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{j}$  в какой-либо точке  $\mathbf{r}$  пространства и момент времени  $t$  могут зависеть от значений векторов  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  в этот же момент времени, но в других точках пространства.



Такая ситуация реализуется в среде с пространственной структурой и характеризуется как проявление *пространственной дисперсии среды*. Существует и *временная (частотная)* дисперсия, когда  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{j}$  определяются значениями  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  в той же точке пространства, но в предшествующие моменты времени. В этом случае среда обладает «памятью» на воздействия. Явление частотной дисперсии изучают в средней школе и описывают феноменологически в виде зависимости показателя преломления среды от частоты (или длины волны).

Кроме того, в общем случае связь между векторами в материальных уравнениях является нелинейной. Поэтому эти уравнения представляют в виде разложения в ряд по степеням  $E$  (или  $H$ ) и анализируют влияние каждого из членов разложения на характер распространения волны в среде. В заключительной части курса будут рассмотрены некоторые нелинейные оптические явления (см. разд. 9).

В данной лекции проанализируем распространение электромагнитных волн в вакууме и рассмотрим основные модели волн, излучаемых реальными источниками света. Для вакуума ( $\mathbf{j} = 0$ ,  $\rho = 0$ ) материальные уравнения принимают простейший вид:

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}; \quad \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}, \quad (1.7)$$

где  $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$  Ф/м,  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  Гн/м — электрическая и магнитная постоянные в СИ.

**Волновое уравнение.** Возможность распространения волн в вакууме легко доказывается выводом волнового уравнения как для вектора  $\mathbf{E}$ , так и для вектора  $\mathbf{H}$ . Применим операцию  $\text{rot}$  к обеим частям уравнения (1.2) и учтем тождество для произвольного вектора  $\mathbf{A}$ :  $\text{rot rot } \mathbf{A} = \text{grad div } \mathbf{A} - \Delta \mathbf{A}$ . Тогда можем записать

$$\text{rot rot } \mathbf{E} = \text{grad div } \mathbf{E} - \Delta \mathbf{E} = -\mu_0 \text{rot} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}. \quad (1.8)$$

Изменим в правой части (1.8) порядок дифференцирования по времени и координатам. Наконец, учтем, что согласно (1.1)  $\text{rot } \mathbf{H} = \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$ , а уравнение (1.3) можно записать как  $\epsilon_0 \text{div } \mathbf{E} = 0$ . В итоге уравнение (1.8) сведется к виду

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} \Delta \mathbf{E}. \quad (1.9)$$

Это известное *волновое уравнение*, подобное уравнению, описывающему в механике распространение акустических волн. Скорость электромагнитной волны определяется постоянными  $\epsilon_0$  и  $\mu_0$  и равна, м/с,

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \approx 3 \cdot 10^8. \quad (1.10)$$

Аналогичное волновое уравнение можно получить и для вектора  $\mathbf{H}$  при использовании другой пары уравнений Максвелла.

Если записать оба векторных волновых уравнения в скалярном виде, то получим шесть одинаковых волновых уравнений вида

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = c^2 \Delta f, \quad (1.11)$$

где под  $f$  подразумевается любая из шести компонент  $E_x, E_y, E_z, H_x, H_y, H_z$  электромагнитного поля. Поэтому далее рассмотрим важнейшие модели скалярных волн, описываемых функцией  $f$ , называемой *уравнением волны*.

**Сферические волны.** Пусть функция  $f$  зависит лишь от сферической координаты  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ , тогда  $f(x, y, z) = f(r, t)$ . Подставим эту функцию в (1.11). При вычислении лапласиана в правой части (1.11) учтем, что

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r} \frac{\partial}{\partial r}; \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{x}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{x}{r} \left( \frac{x}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{x}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \right).$$

Поэтому уравнение (1.11) может быть записано следующим образом:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = c^2 \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (rf). \quad (1.12)$$

Если ввести новую функцию  $\psi = rf$ , то для нее волновое уравнение будет иметь вид

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2}. \quad (1.13)$$

Решение этого волнового уравнения представляет собой суперпозицию волновых возмущений, движущихся навстречу друг другу,

$$\psi(r, t) = \psi_1 \left( t - \frac{r}{c} \right) + \psi_2 \left( t + \frac{r}{c} \right), \quad (1.14)$$

где  $\psi_1$  и  $\psi_2$  — произвольные функции.

Окончательно уравнение сферической волны примет вид

$$f(r, t) = \frac{\psi_1 \left( t - \frac{r}{c} \right)}{r} + \frac{\psi_2 \left( t + \frac{r}{c} \right)}{r}. \quad (1.15)$$

Первое слагаемое в правой части (1.15) представляет собой сферическую волну, расходящуюся от начала координат, а второе — сходящуюся к началу координат.

Важно отметить, что у расходящейся волны возмущение ослабевает обратно пропорционально пройденному волной расстоянию, а у сходящейся, наоборот, нарастает. Геометрическое место точек пространства, где возмущение  $f$  одинаково, представляет собой сферу с центром в начале координат.

**Плоские волны.** На больших расстояниях от начала координат фрагмент сферической волны может быть представлен в виде плоской волны (рис. 1.1) (часть сферы аппроксимируется плоскостью с заданным в пространстве направлением нормали к ней).

Если ввести единичный нормальный вектор  $\mathbf{e}$ , то функция  $f$  постоянна на плоскости  $\mathbf{r} \cdot \mathbf{e} = \text{const}$  и зависит только от координаты  $\xi = \mathbf{r} \cdot \mathbf{e}$ , отсчитываемой вдоль направления нормали к плоскости. Поэтому уравнение такой волны должно зависеть от координаты и времени следующим образом:

$$f(\mathbf{r}, t) = f[(\mathbf{r} \cdot \mathbf{e}), t]. \quad (1.16)$$

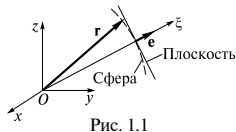


Рис. 1.1

Подставляя (1.16) в (1.11) и переходя к одной координате  $\xi = \mathbf{r} \cdot \mathbf{e}$ , приводим волновое уравнение к простейшему виду

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2}. \quad (1.17)$$

Его решение есть суперпозиция двух плоских волн, движущихся навстречу друг другу:

$$f(\xi, t) = f_1\left(t - \frac{\xi}{c}\right) + f_2\left(t + \frac{\xi}{c}\right), \quad (1.18)$$

где  $f_1$  и  $f_2$  — произвольные функции.

Возвращаясь от  $\xi$  к радиусу-вектору, окончательно получаем

$$f(\mathbf{r}, t) = f_1\left(t - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{e}}{c}\right) + f_2\left(t + \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{e}}{c}\right). \quad (1.19)$$

В отличие от сферической волны возмущение в плоской волне не изменяется с пройденным волной расстоянием.

Отметим, что сферическая и плоская волны являются абстракциями, поскольку не существуют в природе. Вместе с тем эти модели волн играют очень важную роль. Дело в том, что волны реальных источников могут быть представлены в виде суперпозиции либо сферических, либо плоских волн. Поэтому изучим свойства этих волн.

**Свойства плоских волн.** В плоской волне векторы  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  зависят от координат и времени следующим образом:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}\left(t \mp \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{e}}{c}\right); \quad \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{H}\left(t \mp \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{e}}{c}\right). \quad (1.20)$$

Установим связь и ориентацию векторов  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$ . Выбирая для определенности в (1.20) знак «—», будем тем самым рассматривать плоскую электромагнитную волну, распространяющуюся вдоль вектора  $\mathbf{e}$ . Подставим (1.20) в первые два уравнения Максвелла. Для удобства дифференцирования введем новую переменную  $t' = t - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{e}}{c}$ . Тогда

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \mathbf{e} \times \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t'} = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t'}; \quad (1.21)$$

$$\text{rot } \mathbf{H} = -\frac{1}{c} \mathbf{e} \times \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t'} = \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t'}. \quad (1.22)$$

При записи уравнений (1.21) и (1.22) использовались следующие выкладки:

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t'};$$

$$(\text{rot } \mathbf{E})_x = \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = \frac{\partial E_z}{\partial t'} \left(-\frac{e_y}{c}\right) - \frac{\partial E_y}{\partial t'} \left(-\frac{e_z}{c}\right) = -\frac{1}{c} \left[ \frac{\partial E_z}{\partial t'} e_y - \frac{\partial E_y}{\partial t'} e_z \right] = -\frac{1}{c} \left( \mathbf{e} \times \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t'} \right)_x$$

и т.д.

Интегрируя (переходя от производных к самим функциям) уравнения (1.21) и (1.22) и отбрасывая константы интегрирования, описывающие возможно присутствующие статические поля, получаем

$$\frac{1}{c} \mathbf{e} \times \mathbf{E} = \mu_0 \mathbf{H}; \quad (1.23)$$

$$-\frac{1}{c} \mathbf{e} \times \mathbf{H} = \varepsilon_0 \mathbf{E}. \quad (1.24)$$

Подставив сюда выражение для скорости света (1.10), получим очень удобные для запоминания соотношения

$$\sqrt{\varepsilon_0} \mathbf{e} \times \mathbf{E} = \sqrt{\mu_0} \mathbf{H}; \quad (1.25)$$

$$\sqrt{\mu_0} \mathbf{e} \times \mathbf{H} = \sqrt{\varepsilon_0} \mathbf{E}. \quad (1.26)$$

Из них следуют несколько важнейших выводов. В плоской бегущей волне:

- векторы  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$  и  $\mathbf{e}$  взаимно перпендикулярны, поэтому волна является поперечной;
- эти векторы образуют правую тройку векторов (рис. 1.2);
- величины напряженностей электрического и магнитного полей изменяются во времени синхронно, достигая одновременно максимальных и минимальных значений.

Действительно, согласно (1.25) или (1.26) величины  $E$  и  $H$  связаны соотношением

$$\sqrt{\varepsilon_0} E = \sqrt{\mu_0} H, \quad (1.27)$$

которое выполняется и для сферической волны. Векторы  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  лежат в касательной к сфере плоскости, поэтому сферическая волна также является поперечной.

**Монохроматические волны.** Ранее обсуждалась пространственная геометрия волн. Сейчас обратимся к временной зависимости функции  $f(\mathbf{r}, t)$ . Фундаментальной моделью волны является монохроматическая волна, у которой напряженности полей изменяются по гармоническому закону с некоторой *круговой частотой*  $\omega$ . Тогда выражение (1.19) для плоской волны может быть записано в виде

$$f(\mathbf{r}, t) = a \cos \left[ \omega \left( t \mp \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{e}}{c} \right) + \varphi_0 \right], \quad (1.28)$$

где  $a$  и  $\varphi_0$  — амплитуда и начальная фаза колебаний соответственно.

Монохроматическая волна, как известно из курса механики, характеризуется *периодом*  $T = 2\pi/\omega$ , *частотой*  $\nu = 1/T = \omega/(2\pi)$ , *длиной волны*  $\lambda = cT$  и *волновым числом*  $k = 2\pi/\lambda = \omega/c$ . Если ввести *волновой вектор*  $\mathbf{k} = k\mathbf{e} = \frac{\omega}{c}\mathbf{e}$ , то (1.28) запишется в часто употребляемом виде

$$f(\mathbf{r}, t) = a \cos[\omega t \mp \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \varphi_0]. \quad (1.29)$$

Подобным образом записывается и уравнение сферической монохроматической волны:

$$f(r, t) = \frac{a}{r} \cos[\omega t \mp kr + \varphi_0]. \quad (1.30)$$

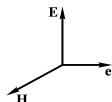


Рис. 1.2

Амплитуда сферической волны есть величина  $A = a/r$ . Фаза  $\varphi$  у обеих волн определяется выражением в квадратных скобках (1.29) и (1.30):

$\varphi = \omega t \mp \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \varphi_0$  — для плоской волны;

$\varphi = \omega t \mp kr + \varphi_0$  — для сферической волны.

Поверхность равной фазы называется *фазовой поверхностью*, или *волновым фронтом*. Нетрудно понять, что у волны за время  $dt$  эта поверхность смещается на величину  $\pm dr$ , определяемую из условия  $d\varphi = \omega dt \mp kdr = 0$ . Поэтому *фазовая скорость* (скорость движения волнового фронта) равна

$$v = \left| \frac{dr}{dt} \right| = \frac{\omega}{k} = c. \quad (1.31)$$

В среде волновое число  $k$  зависит также от свойств среды, и фазовая скорость может быть как меньше, так и больше скорости света.

**Комплексная запись уравнения волны.** Выражения (1.29) и (1.30) можно объединить, если их записать в виде

$$f(x, y, z, t) = A(x, y, z) \cos[\omega t - \varphi(x, y, z)], \quad (1.32)$$

где

$$\begin{aligned} A(x, y, z) &= a, \quad \varphi(x, y, z) = \pm \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \varphi_0 \text{ или} \\ A(x, y, z) &= a/r, \quad \varphi(x, y, z) = \pm kr - \varphi_0. \end{aligned} \quad (1.33)$$

В оптике широко используется комплексное представление уравнения волны (1.32):

$$f = \frac{1}{2} [Ae^{i(\omega t - \varphi)} + Ae^{-i(\omega t - \varphi)}]. \quad (1.34)$$

Если ввести *комплексную амплитуду*

$$\hat{A} = Ae^{-i\varphi}, \quad (1.35)$$

то (1.34) запишется в комплексном виде:

$$f = \frac{1}{2} [\hat{A}e^{i\omega t} + \hat{A}^* e^{-i\omega t}], \quad (1.36)$$

где знак «\*» означает комплексно-сопряженную величину.

**Световые пучки.** Как отмечалось в начале лекции, в оптическом диапазоне могут формироваться направленные пучки света, которые распространяются преимущественно вдоль одной координатной оси. В поперечном же направлении амплитуда быстро спадает от середины пучка к его периферии. Такие пучки создаются достаточно просто с использованием лазеров, генерирующих монохроматическое и направленное излучение. Например, если пучок распространяется вдоль оси  $Oz$ , то уравнение волны может быть записано в виде

$$f(x, y, z, t) = A(x, y, z) \cos[\omega t - kz + \varphi_0(x, y, z)]. \quad (1.37)$$

В этом выражении предполагается, что амплитуда  $A(x, y, z)$  быстро убывает в плоскости  $Oxy$  при удалении от оси  $Oz$ . Кроме того, предполагается, что  $\varphi_0(x, y, z)$  незначительно (по сравнению с  $2\pi$ ) изменяется в плоскости  $Oxy$ , поэтому фазовая поверхность незначительно отличается от плоскости  $z = \text{const}$ . Волна в виде направленного пучка является примером неоднород-

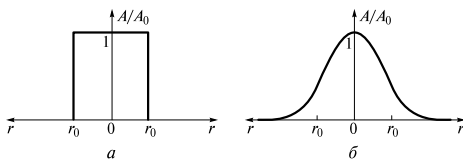


Рис. 1.3

ной волны, у которой поверхности равной фазы и равной амплитуды не совпадают.

Важнейшими моделями реальных световых пучков являются пучки с *прямоугольным* и *гауссовым* распределением амплитуды (рис. 1.3, *а*, *б*).

На рис. 1.3, *а* амплитуда  $A$  пучка равна  $A_0$  в пределах круглого сечения радиуса  $r_0$ , который называется радиусом пучка. Вне этого сечения волна отсутствует. На рис. 1.3, *б* амплитуда спадает к периферии по закону  $A = A_0 \exp(-r^2/r_0^2)$  и при  $r = r_0$  уменьшается лишь в  $e = 2,7$  раза. Радиус  $r_0$  называется *характерным радиусом гауссова пучка* по уровню  $e^{-1}$  для амплитуды.

**Световые импульсы.** Многие источники света (в том числе и большое число лазеров) излучают световые вспышки. Эти вспышки длятся ограниченное время  $\tau_0$  и представляют собой электромагнитные импульсы. Амплитуда волны  $A$  и фаза  $\phi_0$  в таких импульсах зависят не только от координат, но и от времени. Уравнение волны для импульсного, но по-прежнему направленного вдоль оси  $Oz$  излучения может быть записано в виде

$$f(x, y, z, t) = A\left(x, y, z, t - \frac{z}{c}\right) \cos\left[\omega t - kz + \phi_0\left(x, y, z, t - \frac{z}{c}\right)\right]. \quad (1.38)$$

Это выражение отличается от (1.37) тем, что, во-первых, в  $A$  и  $\phi_0$  входит явная зависимость от времени и, во-вторых, изменение амплитуды и фазы во времени в разных сечениях  $z = \text{const}$  происходит с временной задержкой  $\Delta t = z/c$ , необходимой для прохождения импульсом расстояния  $Oz$  со скоростью  $c$ .

Наиболее важными моделями, как и для пучков, являются модели *прямоугольного* и *гауссова* импульсов, изображенных, например, для точки  $x = y = z = 0$  на рис. 1.4, *а*, *б*. На рис. 1.4, *а* амплитуда волны постоянна в течение промежутка времени  $\tau_0$ , равного длительности импульса, а на рис. 1.4, *б* амплитуда изменяется по закону  $A = A_0 \exp(-t^2/\tau_0^2)$ . Поэтому  $\tau_0$  является *характерной длительностью гауссова импульса*.

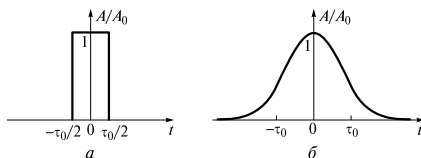


Рис. 1.4

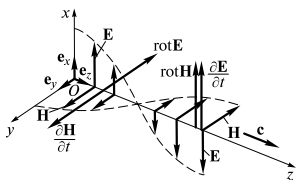


Рис. 1.5

Отметим, что хотя в выражение (1.38) и входит фиксированная частота  $\omega$ , импульсное излучение является квазимонохроматическим, т. е. состоящим из суммы большого числа монохроматических волн, частоты которых сгруппированы вблизи основной частоты, а ширина этого диапазона частот обратно пропорциональна длительности импульса и зависит от скорости изменения во времени фазы  $\varphi_0$ . Более подробно речь об этом пойдет в последующих лекциях.

**Графическая интерпретация плоской волны.** Для хорошего усвоения изложенного материала удобно представить фрагмент плоской волны, распространяющейся в положительном направлении оси  $Oz$  (рис. 1.5).

Здесь изображено распределение напряженностей электромагнитного поля в точках оси  $Oz$  в фиксированный момент времени. Поскольку волна плоская, то такое же распределение будет и на любой прямой, параллельной оси  $Oz$ . С течением времени эта картина должна перемещаться вдоль оси  $Oz$  со скоростью  $c$ .

Также показано направление вектора  $\text{rot } \mathbf{E}$ , который достигает максимального значения, когда напряженность  $E = 0$ , и наоборот,  $\text{rot } \mathbf{E} = 0$  при максимальной напряженности. Вектор  $\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$  по отношению к вектору  $\text{rot } \mathbf{E}$  всегда направлен в противоположную сторону. Оба эти вектора изменяются во времени синхронно. Векторы  $\text{rot } \mathbf{H}$  и  $\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$  всегда сонаправлены.

**Поляризация волны.** На рис. 1.5 изображена ситуация, когда вектор  $\mathbf{E}$  колеблется вдоль оси  $Ox$ , а вектор  $\mathbf{H}$  — вдоль оси  $Oy$ . В этом случае говорят, что волна является *плоскополяризованной*, или *линейно поляризованной*, а плоскость поляризации есть плоскость, в которой лежит вектор  $\mathbf{E}$  (в данном случае плоскость  $Oxz$ ). Возможна и другая ситуация, когда вектор  $\mathbf{E}$  колеблется вдоль оси  $Oy$ , а вектор  $\mathbf{H}$  — вдоль оси  $Ox$ , при этом  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$  и  $\mathbf{e}$  должны по-прежнему образовывать правую тройку векторов. Суперпозиция обеих ситуаций приводит к электромагнитной волне, у которой векторы  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$ , оставаясь взаимно перпендикулярными, могут менять направление в плоскости  $Oxy$ . В этом случае волна будет *эллиптически поляризованной*.

Действительно, пусть в некоторой плоскости  $z = \text{const}$  электрическое поле представляет собой суперпозицию гармонических полей, колеблющихся с одинаковой частотой вдоль осей  $Ox$  и  $Oy$ :

$$\mathbf{E}(t) = \mathbf{E}_x(t) + \mathbf{E}_y(t) = \mathbf{e}_x A_x \cos(\omega t + \varphi_1) + \mathbf{e}_y A_y \cos(\omega t + \varphi_2), \quad (1.39)$$

где  $\mathbf{e}_x$  и  $\mathbf{e}_y$  — единичные векторы.

Конец вектора  $\mathbf{E}$  будет, в общем случае, двигаться по эллиптической траектории. Уравнение для этой траектории было получено в курсе «Механика», когда рассматривалось сложение двух взаимно перпендикулярных колебаний с одинаковой частотой. Применительно к электрическому полю (1.39) оно запишется в виде

$$\left(\frac{E_x}{A_x}\right)^2 + \left(\frac{E_y}{A_y}\right)^2 - 2 \frac{E_x}{A_x} \frac{E_y}{A_y} \cos(\varphi_2 - \varphi_1) = \sin^2(\varphi_2 - \varphi_1). \quad (1.40)$$

Направление движения конца вектора **Е** вдоль траектории и ориентация эллипса относительно осей  $Ox$  и  $Oy$  зависят от разности фаз  $\Delta\varphi = (\varphi_2 - \varphi_1)$ . На рис. 1.6 изображены траектории при различных значениях  $\Delta\varphi$ . Все траектории в пространстве  $E_x, E_y$  заключены в прямоугольнике  $2A_x \times 2A_y$ .

Принято определять направление вращения конца вектора **Е** с точки зрения наблюдателя, который смотрит навстречу волне, как это изображено на рисунке. При разности фаз  $0 < \Delta\varphi < \pi$  конец вектора движется по часовой стрелке, и поляризация называется *правой*. При  $\pi < \Delta\varphi < 2\pi$  она становится *левой*. При  $\Delta\varphi = 0, \pi, 2\pi$  эллиптическая поляризация превращается в линейную. При  $\Delta\varphi = \pi/2, 3\pi/2$  и  $A_x = A_y$  поляризация волны становится круговой. Волна в этом случае называется *циркулярно поляризованной*.

**Пространственно-временные характеристики световых волн.** Приведем некоторые оценки пространственно-временных параметров световых волн.

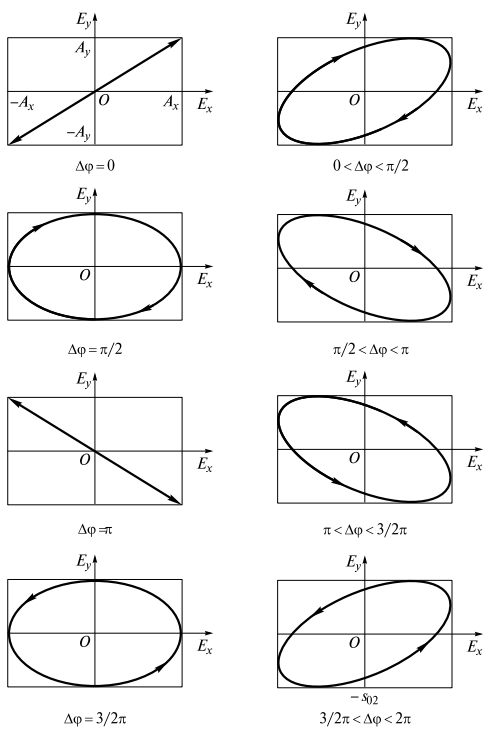


Рис. 1.6



В видимом диапазоне длина волны, соответствующая центральной желто-зеленой части спектра, равна  $\lambda = 500 \text{ нм} = 0,5 \text{ мкм}$ .

Частота электромагнитных колебаний  $\nu = c/\lambda = 0,6 \cdot 10^{15} \text{ Гц}$ , а период  $T = 1/\nu = 1,6 \cdot 10^{-15} \text{ с} = 1,6 \text{ фс}$  (1 фс = 1 фемтосекунда =  $10^{-15} \text{ с}$ ). Поскольку частота оптических колебаний громадна, более удобно вычислять частоту в  $\text{см}^{-1}$  в соответствии с формулой:

$$\tilde{\nu} (\text{см}^{-1}) = \frac{\nu}{c} = \frac{1}{\lambda} (\text{см}), \quad (1.41)$$

т. е. частота  $\tilde{\nu}$  обратна длине волны, взятой в сантиметрах. Например, для длины волны  $\lambda = 500 \text{ нм} = 0,5 \cdot 10^{-4} \text{ см}$  частота  $\tilde{\nu} = 2 \cdot 10^4 \text{ см}^{-1}$ .

Ширина пучка  $r_0$  сверху ограничена апертурой (поперечным размером) излучателей, достигающей порядка  $10 \text{ м}$ . При фокусировке пучка его ширина в фокусе линзы становится минимальной, однако дифракция не позволяет сжать пучок до размеров, меньше длины волны.

Длительность импульса  $\tau_0$ , в принципе не имеющая ограничений сверху, может быть уменьшена до величины порядка периода оптических колебаний  $T$ . Импульс длительностью порядка нескольких фемтосекунд содержит один-два периода оптических колебаний. Длительность импульса  $\tau_0 < T$  принципиально недостижима, поскольку импульс с отсутствием осцилляций поля (видеоимпульс) распространяться не может.

## ЛЕКЦИЯ 2

**Поток энергии волны.** Из повседневного опыта известно, что световая волна переносит энергию. Количественной характеристикой переноса энергии является *поток энергии*, характеризуемый *вектором Пойнтинга*.

Подсчитаем поток энергии, переносимой плоской волной через сечение, ориентированное перпендикулярно направлению распространения волны (оси  $Oz$ ). Объемная плотность энергии электромагнитного поля равна

$$u = \frac{1}{2}(\epsilon_0 E^2 + \mu_0 H^2). \quad (2.1)$$

Если для определенности принять, что волна плоскополяризована ( $\mathbf{E} = \mathbf{e}_x E_x$ ,  $\mathbf{H} = \mathbf{e}_y H_y$ ), как это изображено на рис. 2.1, то через заштрихованную поверхность площади  $\sigma$  за время  $\Delta t$  будет перенесена энергия, заключенная в параллелепипеде длиной  $c\Delta t$ :

$$\Delta W = u \sigma c \Delta t = \frac{1}{2}(\epsilon_0 E_x^2 + \mu_0 H_y^2) \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \sigma \Delta t. \quad (2.2)$$

Поскольку в плоской волне  $\sqrt{\epsilon_0} E_x = \sqrt{\mu_0} H_y$ , последнее выражение легко преобразовать к виду

$$\Delta W = \epsilon_0 E_x^2 \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \sigma \Delta t = E_x H_y \sigma \Delta t. \quad (2.3)$$

*Количество энергии, переносимой волной за единицу времени через площадку единичного сечения, ориентированную перпендикулярно распространяющейся волне, определяется вектором Пойнтинга.* В рассматриваемом нами случае этот вектор имеет лишь одну компоненту вдоль оси  $Oz$ , которая равна

$$S_z = \frac{\Delta W}{\sigma \Delta t} = E_x H_y. \quad (2.4)$$

Обобщая изложенное, в общем случае выражение для вектора Пойнтинга можем записать в виде

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}. \quad (2.5)$$

Если волна гармоническая, то

$$E_x = A \cos[\omega t - kz], \quad H_y = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E_x = c \epsilon_0 E_x.$$

Тогда

$$S_z = c \epsilon_0 A^2 \cos^2(\omega t - kz). \quad (2.6)$$

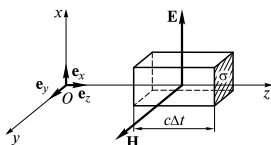


Рис. 2.1

**Интенсивность волны.** Поток энергии «пульсирует» с течением времени. Поэтому на практике пользуются усредненной за период величиной плотности потока энергии. Эта величина называется *интенсивностью волны* и равна

$$I = \langle S_z \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T S_z dt = \frac{1}{2} c \epsilon_0 A^2. \quad (2.7)$$

Интенсивность измеряется в ваттах на квадратный метр (Вт/м<sup>2</sup>), а напряженность электрического поля (амплитуда) в вольтах на метр (В/м). В научной литературе интенсивность измеряют также в (Вт/см<sup>2</sup>), а напряженность поля в (В/см). Если в (2.7) подставить значения  $\epsilon_0$  и  $c$ , то связь между  $I$  и  $A$  примет вид:

$$I \text{ (Вт/м}^2\text{)} = 1,32 \cdot 10^{-3} (A \text{ (В/м)})^2. \quad (2.8)$$

Например, интенсивность света Солнца вблизи Земли (солнечная постоянная)  $I_C = 1350 \text{ Вт/м}^2$ , а амплитуда электрического поля волны  $A \approx 10^3 \text{ В/м}$ . Поскольку согласно (2.7)  $I \propto A^2$ , то в оптике часто интенсивность определяют как

$$I = A^2. \quad (2.9)$$

Такая запись позволяет опустить размерный коэффициент  $\frac{1}{2} c \epsilon_0$  и оперировать с более удобными выражениями, в которых интенсивность определяется в «нестандартных» единицах.

**Мощность светового пучка.** В световом пучке интенсивность, вообще говоря, изменяется (вместе с амплитудой) в поперечном сечении. Через все поперечное сечение пучок переносит в единицу времени конечную энергию. Поэтому вводят понятие *мощности светового пучка*, которая связана с интенсивностью следующим образом:

$$P = \iint I(x, y) dx dy, \quad (2.10)$$

где интегрирование производится по всему поперечному сечению  $z = \text{const}$ . Естественно, что мощность измеряется в ваттах (Вт), а интенсивность можно трактовать как плотность мощности.

Для пучка с прямоугольным распределением амплитуды ( $A = A_0$  при  $r \leq r_0$ ) интенсивность внутри круглого сечения радиуса  $r_0$  постоянна ( $I = I_0$ ), поэтому, согласно (2.10), мощность такого пучка равна:

$$P = I_0 \pi r_0^2. \quad (2.11)$$

Для гауссова пучка ( $A = A_0 e^{-r^2/r_0^2}$ ) интенсивность распределена по закону

$$I = I_0 e^{-2r^2/r_0^2}, \quad (2.12)$$

где  $I_0 = \frac{1}{2} c \epsilon_0 A_0^2$  — интенсивность на оси пучка. Мощность такого пучка будет равна

$$P = \int_0^\infty I(r) e^{-2r^2/r_0^2} 2\pi r dr = \frac{1}{2} I_0 \pi r_0^2. \quad (2.13)$$

Здесь элемент площади  $dxdy = d\sigma = 2\pi r dr$  выбран в виде кольцевого слоя радиусом  $r$  и шириной  $dr$ .

Сравнивая (2.11) и (2.13), можно считать, что с точностью до коэффициента, зависящего от конкретного вида распределения интенсивности в поперечном сечении, справедлива оценка

$$P \sim I_0 \pi r_0^2, \quad (2.14)$$

которую будем использовать в дальнейшем.

**Энергия светового импульса.** Если излучение переносится световым импульсом, то интенсивность, а следовательно, и мощность изменяются во времени. Импульс переносит через поперечное сечение конечную *энергию*

$$W = \int P(t) dt = \iiint I(x, y, t) dxdydt. \quad (2.15)$$

Энергия, естественно, измеряется в Джоулях (Дж). Для импульса с прямоугольным профилем и длительностью  $\tau_0$  мощность  $P(t) = P_0$ , поэтому

$$W = P_0 \tau_0, \quad (2.16)$$

где  $P_0$  — постоянная во времени мощность, определяемая интегралом (2.10).

Для гауссова импульса мощность изменяется во времени:

$$P(t) = P_0 e^{-2t^2/\tau_0^2}, \quad (2.17)$$

где  $P_0$  — максимальная мощность при  $t = 0$ . Энергия такого импульса

$$W = \int_{-\infty}^{\infty} P_0 e^{-2t^2/\tau_0^2} dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}} P_0 \tau_0. \quad (2.18)$$

Сравнивая (2.16) и (2.17), видим, что с точностью до коэффициента, зависящего от формы импульса,

$$W \sim P_0 \tau_0. \quad (2.19)$$

Наконец, объединяя (2.14) и (2.19), для оценок получаем соотношение

$$W \sim I_0 \pi r_0^2 \tau_0. \quad (2.20)$$

■ **Пример 1.** Излучение гелий-неонового лазера (He-Ne-лазера), широко используемого в учебных оптических экспериментах, имеет мощность  $P \sim 10^{-2}$  Вт. Если характерный радиус пучка принять равным  $r_0 = 1$  мм  $= 10^{-3}$  м, то согласно оценке (2.14), интенсивность  $I_0 \sim 3 \cdot 10^3$  Вт/м<sup>2</sup>, что более чем в два раза превышает интенсивность солнечного света.

■ **Пример 2.** Весьма эффектен опыт по пробою воздуха с возникновением искры сфокусированным ИК-излучением импульсного неодимового лазера ( $\lambda = 1,06$  мкм). Этот лазер генерирует импульс с энергией  $W \sim 1$  Дж и длительностью  $\tau_0 \sim 10$  нс  $= 10^{-8}$  с. Если радиус пучка  $r_0 \sim 1$  мм  $= 10^{-3}$  м, то согласно оценке (2.20),

$$I \sim \frac{W}{\pi r_0^2 \tau_0} = 3 \cdot 10^{13} \text{ Вт/м}^2,$$

а амплитуда электрического поля  $A \sim 10^8$  В/м. Фокусируя излучение и уменьшая радиус пучка в десять раз, мы увеличиваем амплитуду на порядок, а интенсивность — на два порядка. Такого поля с лихвой хватает для электрическо-

го пробоя воздуха (в статическом электрическом поле воздух пробивается при напряженности  $E \approx 3 \cdot 10^6$  В/м).

■ **Пример 3.** Если в фокальную плоскость линзы поместить лезвие бритвы, то импульс с энергией  $W \sim 1$  Дж прожигает малое отверстие в лезвии. Здесь фокусировка используется для того, чтобы уменьшить объем (а значит, и массу) разогреваемого фрагмента лезвия. Если принять, что радиус пучка в фокальной плоскости линзы сжат до величины  $r_F = 0,1 r_0 = 10^{-4}$  м, то при толщине лезвия  $d = 0,1$  мм  $= 10^{-4}$  м энергия импульса поглощается очень маленьким цилиндрическим фрагментом лезвия. За короткое время действия импульса тепло не успевает распространиться по лезвию. Если плотность стали  $\rho = 7,8 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>, а теплоемкость при постоянном давлении  $C_p \sim 10^3$  Дж  $\cdot$  кг<sup>-1</sup>  $\cdot$  К<sup>-1</sup>, то в результате полного поглощения световой энергии температура этого фрагмента выросла бы на величину

$$\Delta T = \frac{W}{C_p \rho \pi r_F^2 d} \sim 10^4 \text{ К.} \quad (2.21)$$

Таким образом, величина  $\Delta T$  намного превысит температуру плавления стали.

**Поток энергии в квантовом представлении.** В этом представлении полагают, что световая энергия переносится *фотонами*, или *квантами света*. В соответствии с *формулой Планка* связь между энергией  $\mathcal{E}$  фотона и частотой колебаний  $\nu$  электромагнитной волны задается равенством  $\mathcal{E} = h\nu$ , где  $h = 6,62 \cdot 10^{-34}$  Дж  $\cdot$  с — постоянная Планка.

Если основываться на принципе соответствия классической и квантовой теорий света, то можно утверждать, что законы квантовой теории должны переходить в классические, когда энергия системы значительно превосходит энергию отдельных квантов при элементарных процессах в системе.

В квантовом представлении интенсивность волны может быть выражена в виде

$$I = n c \mathcal{E} = n c h \nu, \quad (2.22)$$

где  $n$  — среднее число фотонов в единице объема.

Сравнивая (2.7) и (2.22), запишем

$$n c h \nu = \frac{1}{2} c \epsilon_0 A^2, \quad (2.23)$$

откуда амплитуда волны

$$A = \sqrt{\frac{2 n h \nu}{\epsilon_0}}. \quad (2.24)$$

Это выражение устанавливает связь амплитуды и частоты колебаний с числом фотонов в единице объема. По существу, амплитуда может принимать для фиксированной частоты дискретные (квантовые) значения. Если число фотонов велико, то амплитуда практически может иметь любое значение, и применимо классическое описание электромагнитной волны. Если же интенсивность волны мала, то единственно возможным становится лишь квантовое представление.

**Световое давление.** Вместе с энергией волна переносит импульс. При падении света на материальное тело этот импульс (целиком или частично) пере-

дается телу. В соответствии со вторым законом Ньютона свет действует на тело с некоторой силой, оказывая тем самым *световое давление*.

Гипотеза о существовании светового давления впервые была высказана И. Кеплером для объяснения отклонения хвостов комет в сторону от Солнца. Это отклонение возникает в результате воздействия солнечного света на частицы, составляющие хвост кометы. На рис. 2.1 цв. вкл. показана одна из таких комет.

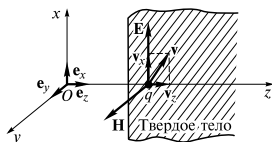


Рис. 2.2

Теория светового давления была построена Дж. Максвеллом (1873). По этой теории световое давление это результат действия пондеромоторных сил со стороны электромагнитного поля на движущиеся заряды в материальном теле.

Для расчета светового давления рассмотрим нормальное падение линейно поляризованной плоской волны на поверхность твердого тела (рис. 2.2).

При воздействии электрического поля на частицу с зарядом  $q$ , входящую в состав атома, она приобретет скорость  $v_x \mathbf{e}_x$ . Магнитное поле, действуя на движущуюся частицу, начнет ее «заталкивать» внутрь тела. У частицы появится и вторая компонента скорости  $v_z \mathbf{e}_z$ . Через полпериода изменятся направления векторов  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$  и  $v_x \mathbf{e}_x$  на противоположные, но магнитное поле по-прежнему будет «заталкивать» частицу вдоль оси  $Oz$  внутрь тела. Это и является причиной светового давления.

Подсчитаем среднюю за период силу, силу Лоренца, действующую на этот заряд. Мгновенное значение силы равно

$$\mathbf{f} = q\mathbf{E} + q\mathbf{v} \times \mathbf{B} = qE_x \mathbf{e}_x + q(v_x \mathbf{e}_x + v_y \mathbf{e}_y + v_z \mathbf{e}_z) \times B_y \mathbf{e}_y. \quad (2.25)$$

Вычисляя векторное произведение и усредняя значение силы по времени, получаем

$$\langle \mathbf{f} \rangle = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \mathbf{f}(t) dt = q \langle E_x \rangle \mathbf{e}_x - q \langle v_z B_y \rangle \mathbf{e}_x + q \langle v_x B_y \rangle \mathbf{e}_z. \quad (2.26)$$

Очевидно, что  $\langle E_x \rangle = 0$ . Можно также положить  $\langle v_z B_y \rangle \approx v_z \langle B_y \rangle = 0$ , поскольку за период колебаний скорость  $v_z$ , направленная всегда вдоль положительно-го направления оси  $Oz$ , изменяется незначительно, в то время как  $B_y$  является быстро осциллирующей функцией.

Таким образом, вектор средней силы направлен вдоль оси  $Oz$  и равен

$$\langle \mathbf{f} \rangle = q \langle v_x B_y \rangle \mathbf{e}_z. \quad (2.27)$$

С другой стороны, электрическое поле совершает работу над зарядом. Мощность силы  $\mathbf{f}$  равна энергии  $W$ , передаваемой от волны к заряду в единицу времени. Поэтому можно записать

$$\frac{dW}{dt} = \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} = qE_x v_x = cq v_x B_y. \quad (2.28)$$

Здесь учтено, что  $E_x = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} H_y = c B_y$ .

Усредняя (2.28) по времени и сравнивая это выражение с (2.27), можно записать

$$\langle \mathbf{f} \rangle = \frac{1}{c} \left\langle \frac{dW}{dt} \right\rangle \mathbf{e}_z. \quad (2.29)$$

При переходе к единице площади среднее значение силы можно заменить давлением, а среднее значение энергии в единицу времени — интенсивностью. Поэтому

$$p = \frac{I}{c}. \quad (2.30)$$

Но давление численно равно среднему импульсу, передаваемому волной единице площади за единицу времени:

$$p = \frac{d}{dt} K, \quad (2.31)$$

поэтому импульс  $\mathbf{K}$ , переносимый волной за конечное время, равен

$$\mathbf{K} = \frac{1}{c} \int I(t) dt. \quad (2.32)$$

Отметим, что формула (2.30) получена в предположении, что импульс волны полностью передается материальному телу. При падении на частично отражающую поверхность давление увеличивается, поскольку часть импульса волны уносится в обратном направлении. Поэтому давление света будет зависеть от коэффициента отражения  $R$  для интенсивности:

$$p = \frac{I}{c} (1 + R). \quad (2.33)$$

При падении на идеальную зеркальную поверхность ( $R = 1$ ) давление увеличится вдвое по сравнению с (2.30).

**Импульс фотона.** Если в (2.32) подставить выражение для интенсивности (2.22) в квантовом представлении, то при  $I = \text{const}$

$$\mathbf{K} = \frac{1}{c} nchv t. \quad (2.34)$$

Разумно предположить, что этот импульс равен сумме импульсов отдельных фотонов, число которых равно  $nc t$ . Тогда на долю каждого фотона приходится импульс

$$p_{\Phi} = \frac{h\nu}{c}. \quad (2.35)$$

*Импульс фотона равен его энергии, деленной на скорость света, и сонаправлен с вектором скорости фотона.*

**Момент импульса волны.** Эллиптически поляризованная волна обладает моментом импульса. Его можно определить, используя следующие рассуждения. У частицы массой  $m$ , вращающейся вокруг оси  $Oz$  со скоростью  $v$  по окружности радиусом  $r_0$ , момент импульса равен

$$\mathbf{L} = mvr_0 \mathbf{e}_z = \frac{mv^2}{\omega} \mathbf{e}_z, \quad (2.36)$$

где  $\omega = v/r_0$  — угловая скорость вращения частицы. В оптике будем считать, что  $\omega$  — частота волны, или угловая скорость вращения векторов **E** и **H**.

Момент импульса волны в единице объема получается из (2.36), если  $mv^2$  заменить объемной плотностью энергии электромагнитного поля  $u$ . Тогда момент импульса, переносимый волной через единичную площадку в единицу времени, равен

$$\mathbf{L} = \frac{cu}{\omega} \mathbf{e}_z. \quad (2.37)$$

Если считать, что **L** равен сумме моментов импульсов фотонов, число которых равно  $nc$ ,  $u = nh\nu$ , то момент импульса одного фотона вычисляют по формуле

$$I_\phi = \frac{L}{nc} = \frac{cnh\nu}{nc\omega} = \frac{h}{2\pi} \mathbf{e}_z \quad (2.38)$$

Момент импульса фотона называют *спином*. Спин фотона не зависит от частоты света и является его фундаментальной квантовой характеристикой. Экспериментальное подтверждение существования момента импульса у волны с круговой поляризацией было получено при прохождении такой волны через полуволновую пластинку, принцип работы которой описан в разделе 7 «Волны в анизотропных средах».

Сейчас лишь отметим, что после прохождения такой пластинки направление вращения векторов **E** и **H** изменится на противоположное. Соответственно изменит свое направление и момент импульса волны. Согласно закону сохранения момента импульса системы «волна — пластинка», последняя должна прийти во вращение вокруг оси, совпадающей с направлением распространения волны.

Если продолжить сопоставление классических и квантовых характеристик света, то можно сделать следующие выводы. У волны с левой эллиптической поляризацией спины фотонов ориентированы преимущественно вдоль направления распространения. У волны с правой эллиптической поляризацией преимущественная ориентация спинов становится противоположной. У волны с левой круговой поляризацией все спины направлены вдоль направления распространения, а с правой — в противоположном направлении. Если спины с равной вероятностью ориентируются в обоих направлениях, то волна плоскополяризована.

Таким образом, *фотон обладает энергией, импульсом и моментом импульса. Он не имеет массы, электрического заряда, электрического дипольного и магнитного моментов. Его время жизни в вакууме не ограничено, поэтому фотон устойчив и самопроизвольно не распадается.*

**Давление равновесного теплового излучения.** Пользуясь квантовым представлением об импульсе фотона, рассмотрим задачу о давлении света на стенки *черного* нагретого ящика, внутри которого имеется излучаемое этими стенками электромагнитное поле. Если поле находится в равновесии со стенками, то число фотонов, излучаемых фрагментами стенки в любом направлении, будет в точности равно числу фотонов, летящих к стенке со встречного направления и поглощаемых этим фрагментом. Термин «черный ящик» используется в том смысле, что все подлетающие к его стенкам фотоны полностью ими поглощаются.



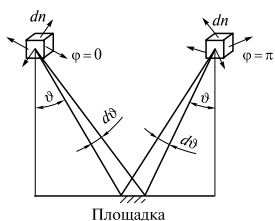


Рис. 2.3

Если фотон, имеющий частоту  $\nu$ , падает (и излучается) под углом  $\vartheta$  к нормали к стенке, то нормальная составляющая получаемого стенкой импульса при каждом акте «поглощение — излучение» равна  $2 \frac{h\nu}{c} \cos \vartheta$  (рис. 2.3).

Однако фотоны летят под разными углами и имеют различные частоты (см. раздел 2 «Излучение света»). Если число фотонов в единице объема равно  $n$ , то только их часть  $dn$  обладает частотами, заключенными в интервале  $\nu \div \nu + d\nu$ :

$$dn = n f(\nu) d\nu, \quad (2.39)$$

где  $f(\nu)$  — функция распределения фотонов по частотам. Эти  $dn$  фотонов (см. рис. 2.3) летят изотропно по всем направлениям внутри телесного угла  $4\pi$ , поэтому к единичной площадке полетит лишь часть из них

$$dn' = dn \frac{d\Omega}{4\pi} = dn \frac{1}{4\pi} d\varphi \sin \vartheta d\vartheta, \quad (2.40)$$

где  $d\Omega = d\varphi \sin \vartheta d\vartheta$  — элемент телесного угла, под которым фотоны «видят» площадку. На рисунке изображены лишь два единичных объема с координатами  $(\vartheta, \varphi = 0)$  и  $(\vartheta, \varphi = \pi)$ , из которых фотоны летят к площадке. Наконец, за единицу времени с площадкой «встретятся» фотоны, заключенные в объеме  $c \cos \vartheta$ , число которых будет равно

$$dn'' = dn' c \cos \vartheta. \quad (2.41)$$

Передаваемый ими импульс будет равен элементарному давлению

$$dp = 2 \frac{h\nu}{c} dn'' \cos \vartheta. \quad (2.42)$$

С учетом (2.40) и (2.41) заменим в (2.42)  $dn''$  величиной  $dn$  и проведем интегрирование (2.42) по углам  $\varphi$  и  $\vartheta$ , а также по частотам  $\nu$ :

$$p = \int dp = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} \cos^2 \vartheta \sin \vartheta d\vartheta \int_0^{\infty} h\nu dn = \frac{1}{3} u. \quad (2.43)$$

Здесь  $u = \int_0^{\infty} h\nu dn = n \langle h\nu \rangle$  — объемная плотность энергии электромагнитного поля, величина которой (а, следовательно, и функция  $f(\nu)$ ) зависит от температуры стенок. Она равна произведению концентрации фотонов на величину средней энергии фотонов  $\langle h\nu \rangle$ . Формула (2.43) будет использована в следующем разделе при изучении законов теплового излучения.

**Оптическая левитация.** Давление света Солнца, согласно (2.30), равно  $p = I_C/c \approx 0,45 \cdot 10^{-5}$  Па ( $I_C$  — солнечная постоянная), оно на десять порядков меньше атмосферного давления.

В 1899 г. П.Н.Лебедевым были выполнены прецизионные эксперименты по обнаружению и исследованию давления света электрической дуги. В его опытах на тонкой серебряной нити подвешивалось коромысло, на концах которого были

установлены тонкие диски-крылышки. Фотографии используемых в опытах ко-ромысел представлены на рис. 2.4.

Таким образом, измерительное устройство представляло собой крутильные весы, по углу закручивания которых измерялось световое давление. Весы находились в вакууме ( $p \approx 10^{-4}$  мм рт. ст.). Воздух откачивался для уменьшения так называемых *радиометрических сил*, маскирующих световое давление. Радиометрические силы обусловлены бомбардировкой крылышек молекулами воздуха, имеющего разные температуры вблизи освещенной и теневой поверхностей крылышек. Произведенные измерения

показали, что в земных условиях световое давление не играет никакой роли.

Во Вселенной ситуация иная. Например, в недрах раскаленных звезд огромная плотность энергии электромагнитного поля. Тогда, согласно (2.43), возникают громадные силы давления, которые уравнивают огромные силы гравитации, предотвращая тем самым коллапс звезд.

В земных условиях только после изобретения лазеров (1961) световое давление стали использовать для практических целей. Одним из таких его применений является воздействие на малые частицы луча лазера. Если, например, излучение лазера сфокусировать на частицу радиусом  $r_0$ , то согласно (2.30) сила светового давления будет равна

$$F = p\pi r_0^2 = \frac{I}{c} \pi r_0^2 \sim \frac{P}{c}, \quad (2.44)$$

где  $P$  — мощность светового пучка.

При использовании лазера мощностью  $P = 1$  Вт сила  $F = 3 \cdot 10^{-9}$  Н. Если радиус частицы  $r_0 = 10$  мкм  $= 10^{-5}$  м, то ее объем  $V \sim 4 \cdot 10^{-15}$  м<sup>3</sup>. При плотности  $\rho \sim 10^3$  кг/м<sup>3</sup> масса частицы  $m = \rho V \sim 4 \cdot 10^{-12}$  кг. Очевидно, что сила  $F \sim 10^2 mg$ . Такая сила придаст частице громадное ускорение  $a \sim 10^2 g$ , а более мелким частицам с  $r_0 \sim 1$  мкм —  $a \sim 10^5 g$ . Следовательно, воздействуя излучением лазера на частицы различной массы (вирусы, макромолекулы и т.д.), можно произвести их пространственное разделение.

Если подсветить частицу лучом лазера снизу вверх, то можно при определенной мощности излучения скомпенсировать силу тяжести и тем самым удерживать частицу в «подвешенном» состоянии. Такая «невесомость» называется *оптической левитацией*. Она применяется для манипуляций над микрочастицами.

Можно вообще воздействовать на отдельный атом. В этом случае пондеромоторные силы действуют на осциллирующий электрон в атоме (см. разд. 2). При совпадении частоты поля с собственной частотой колебаний электрона в атоме возникает резонанс скорости колебаний. Это приводит к резкому возрастанию пондеромоторных сил (см. формулу (2.25)). Такое резонансное воздействие на атом используется для изменения скорости теплового движения атомов газа.

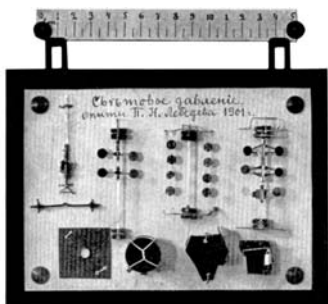


Рис. 2.4

**Лазерное охлаждение.** В конце 70-х годов XX в. в СССР В.С.Летоховым, В.Г.Миногиным и Б.Д.Павликом была высказана идея и предложен метод охлаждения и пленения атомов и молекул резонансным световым полем. В таком поле на частицы действуют силы двух типов: сила *спонтанного светового давления* и сила *индуцированного светового давления* (о спонтанном и вынужденном излучении речь пойдет в лекции 5).

Первая сила обусловлена отдачей при многократном спонтанном излучении возбужденным атомом в случайных направлениях световых квантов частоты  $\nu_0$  (частоты, соответствующей середине спектральной линии при атомном переходе). В соответствии с законом сохранения импульса, при излучении фотона с импульсом, равным  $h\nu_0/c$ , атом в противоположном направлении приобретает такой же импульс отдачи.

Возбуждение осуществляется при поглощении квантов света частоты  $\nu < \nu_0$ . Поскольку энергия излученного фотона превосходит энергию поглощенного, часть энергии должна заимствоваться из поступательного движения атома.

В практическом плане было предложено направить атомный пучок в пространство, в котором создается стоячая световая волна частоты  $\nu$ . Те из атомов, проекция скорости  $v$  которых на направление стоячей волны удовлетворяет условию Доплера

$$\nu_0 = \nu \left( 1 + \frac{v}{c} \right), \quad (2.45)$$

будут наиболее эффективно возбуждаться и, соответственно, замедляться вдоль этого направления. Если создать стоячие волны вдоль трех координат, то можно уменьшить полную скорость атома.

Сила индуцированного светового давления, действуя только в направлении стоячей волны (фотоны при вынужденном излучении движутся в направлении падающих), может привести к эффекту пленения замедленных атомов — их локализации вблизи пучностей стоячей волны.

Изменяя плавно частоту  $\nu$  стоячей волны, можно последовательно замедлять частицы, имеющие различные скорости. Анализ показывает, что при сканировании частоты стоячей волны от начальной величины  $\nu_0 - \Delta\nu_D/2$  до конечной величины  $\nu_0 + \Delta\nu_D/2$  ( $\Delta\nu_D$  и  $\Delta\nu$  — доплеровская и естественная ширины линии, при этом  $\Delta\nu_D > \Delta\nu$  (см. лекцию 4)), нормальное распределение для компоненты скорости с течением времени будет сужаться. Дальнейшее приближение частоты  $\nu$  волны к частоте  $\nu_0$  не имеет смысла, так как эффективность торможения значительно уменьшается.

К окончанию сканирования среднее значение квадрата компоненты скорости будет уменьшено до величины

$$\langle v^2 \rangle = \frac{\hbar \Delta\nu}{2M}. \quad (2.46)$$

Здесь  $M$  — масса атома,  $\hbar = h/2\pi$ . Используя соотношение  $M\langle v^2 \rangle/2 = kT/2$ , для конечной температуры  $T$  получаем выражение

$$T = \frac{\hbar \Delta\nu}{2k}, \quad (2.47)$$

где  $k$  — постоянная Больцмана. Если принять  $\Delta\nu/2 = 10^8$  Гц, то температура при лазерном охлаждении достигает величины  $T \approx 0,7 \cdot 10^{-3}$  К. Время охлаждения составляет доли миллисекунды.

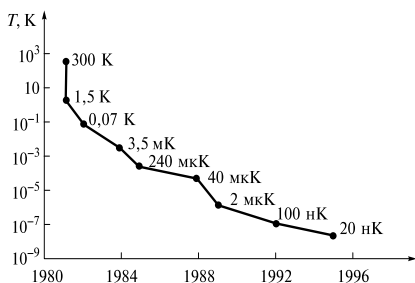


Рис. 2.5

Рассмотренный механизм охлаждения называется доплеровским охлаждением. Соответственно выражение (2.47) определяет так называемый *доплеровский предел*.

На рис. 2.5 показана динамика достижений по лазерному охлаждению, осуществленному в ведущих лабораториях мира.

Первые эксперименты по доплеровскому охлаждению до температуры  $T = 1,5$  K были проведены в СССР в начале 80-х годов XX в. Охлаждение осуществлялось в одномерной стоячей волне.

В последующих экспериментах (в СССР и за рубежом) использовались двухмерные и трехмерные стоячие волны, что позволило за несколько лет достичь доплеровского предела.

На рис. 2.2 цв. вкл. показана схема установки, в которой осуществлено магнитооптическое пленение атомов. Облако атомов (желтое пятно в центре) удерживается в области пересечения трех стоячих волн, образуемых шестью лазерными пучками. Для более эффективного удержания облака в этой области катушками с током создается также неоднородное магнитное поле.

В конце 80-х и в первой половине 90-х годов, применяя другие подходы, удалось превзойти доплеровский предел и постепенно довести температуру атомов до  $T = 2 \cdot 10^{-8}$  K!

**Лазерный термоядерный синтез.** В реакциях синтеза ядер легких элементов, расположенных в таблице Менделеева до наиболее плотно упакованных ядер (железо, никель и др.), энергия покоя переходит в кинетическую энергию продуктов реакции. Примером является протон-протонный цикл на Солнце, в результате которого высвобождается громадная энергия.

В земных условиях легче всего осуществить слияние изотопов водорода — дейтерия D и трития T. Дейтерий содержится в воде в соотношении 1/6 500, а тритий, имеющий период полураспада 12,4 года, можно получить в ядерных реакциях. В результате реакции



высвобождается энергия  $Q = 17,6$  эВ. Для осуществления такой реакции необходимо сблизить ядра, преодолевая кулоновские силы отталкивания между протонами. Этого можно добиться, нагрев вещество до высокой температуры

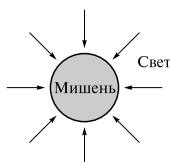


Рис. 2.6

$T \sim 10^8$  К. Для того чтобы выделявшаяся энергия сравнялась с энергетическими затратами на нагрев плазмы, необходимо выполнение критерия Лоусона:

$$n\tau \geq 10^{14} \text{ с/см}^3,$$

где  $n$  — количество частиц в  $1 \text{ см}^3$ ;  $\tau$  — время эффективного протекания реакции синтеза.

В настоящее время существуют два подхода к осуществлению управляемого термоядерного синтеза. При первом подходе магнитным полем специальной конфигурации в течение времени  $\tau \approx 1 - 10$  с удерживается высокотемпературная плазма с концентрацией  $n \approx 10^{14} - 10^{15} \text{ см}^{-3}$ . В установках «Токамак» (СССР) водородная плазма изолируется от стенок установки магнитным полем и нагревается электрическим током до очень высоких температур, при которых возможны реакции синтеза.

При втором подходе, предложенном также в СССР Н. Г. Басовым и О. Н. Крохиным в начале 60-х годов XX в., микросфера (мишень) с ядерным топливом облучается многоканальным лазером. Его излучение по нескольким каналам (направлениям) с разных сторон падает на мишень (рис. 2.6). Такой метод получил название *лазерный термоядерный синтез* (ЛТС).

Оценки показывают, что для сжатия вещества до плотностей  $\rho \approx 10^2 - 10^3 \text{ г/см}^3$  и нагревания до температур  $T \approx 10^8$  К необходимо создать давление  $p \approx 5 \cdot 10^9$  атм. Для этого интенсивность света, падающего на поверхность мишени (плотность мощности), должна быть равна  $I \approx 10^{15} \text{ Вт/см}^2$ . Поэтому для осуществления ЛТС необходимо использовать мощные лазерные системы.

Внешний вид установки «Шива» в Ливерморской лаборатории (США) показан на рис. 2.3 цв. вкл. Импульс задающего лазера на неодимовом стекле ( $\lambda = 1,064 \text{ мкм}$ ) с энергией 10 Дж после утроения частоты по световодам поступает в 20 усилителей света. На выходе каждого усилителя энергия импульса возрастает до 20 кДж. Световые пучки, имеющие после усилителя диаметр 40 см, с разных сторон фокусируются на мишень.

При взаимодействии излучения с мишенью радиусом несколько миллиметров ее внешняя часть превращается в разлетающуюся в разные стороны со скоростью  $v \sim 10^7 - 10^8 \text{ см/с}$  плазменную корону. Внутренние (неиспаренные) части мишени, куда излучение не проникает, приобретают гидродинамические скорости, направленные к центру мишени. Последние возникают главным образом из-за светореактивного давления, обусловленного импульсом отдачи при вылете частиц с поверхности внутренней плотной части мишени. В результате часть вещества мишени сжимается и нагревается.

На рис. 2.7 показано радиальное распределение плотности  $\rho$  и температуры  $T$  на стадии сжатия. Фактически к центру мишени со скоростью  $u$  движется ударная волна.

При прямом падении света на поверхность мишени весьма сложно обеспечить сферическую симметрию процесса сжатия. Отклонения движения внутренних частей от сферически-симметричного ограничивает сильное

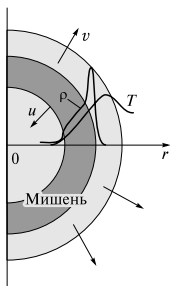


Рис. 2.7

сжатие. По этой причине используется и непрямое сжатие. В этом случае излучение лазера (рис.2.8) с разных направлений попадает на внутренние стенки полости, выполненные из вещества с большим атомным номером, например золота. Эта полость называется хольраум.

Около 80 % световой энергии преобразуется в мягкое рентгеновское излучение, которое с разных сторон падает на мишень, находящуюся в середине полости.

На рис. 2.4 цв. вкл. показана фотография хольраума, используемого в схеме непрямого сжатия. Красные пятна на его стенках свидетельствуют о возникновении рентгеновского излучения.

В настоящее время в ряде стран проводятся эксперименты по сжатию и нагреву вещества мишеней. Достигнуты давления  $p \sim 10^8$  атм и скорости сжатия микросфер  $u \geq 200$  км/с, получены плотности  $\rho \sim 10^2$  г/см<sup>3</sup>. Для реактора на основе ЛТС необходимы лазеры с энергией импульса  $W \sim 10^6$  Дж и частотой повторения несколько герц. Над созданием таких систем и работают ученые в ведущих лабораториях мира.



Рис. 2.8

## РАЗДЕЛ 2

### ИЗЛУЧЕНИЕ СВЕТА

---

#### ЛЕКЦИЯ 3

**Излучение электрического диполя.** Как известно, источниками электромагнитного поля являются ускоренно движущиеся заряды и переменные токи.

На рис. 3.1 схематически изображен процесс излучения электромагнитной волны антенной, называемой *электрическим диполем*. Эта антенна представляет собой два отрезка прямого провода, подключенных к источнику переменного тока частоты  $\omega$ . По отрезкам в любой момент времени текут неквазистационарные токи (длина волны тока сравнима с длиной антенны).

В моменты времени  $t = 0, T/2, T$  ток в антенне максимален, а заряды на концах проводника отсутствуют. При  $t = T/4, 3T/4$  ток равен нулю, а разноименные заряды, накапливающиеся на концах проводников, достигают максимальных значений.

Уравнения Максвелла позволяют записать выражения для электрического и магнитного полей, излучаемых диполем, в виде:

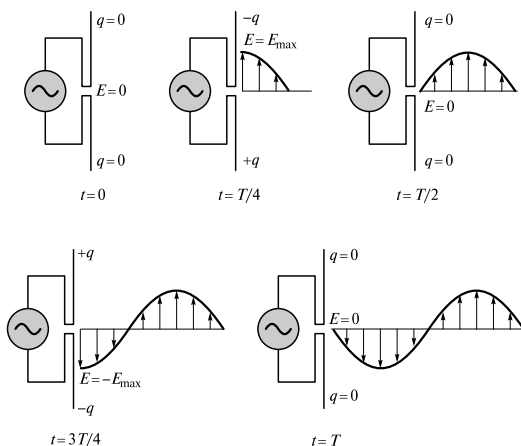


Рис. 3.1

$$\mathbf{H}(t, \mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi c r} \mathbf{e} \times \ddot{\mathbf{p}} \left( t - \frac{r}{c} \right), \quad (3.1a)$$

$$\mathbf{E}(t, \mathbf{r}) = -\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \mathbf{e} \times \mathbf{H} = -\frac{1}{c \epsilon_0} \mathbf{e} \times \mathbf{H}. \quad (3.1b)$$

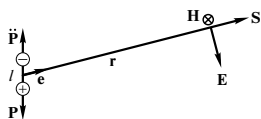


Рис. 3.2

Здесь  $\mathbf{p} = q\mathbf{l}$  — вектор дипольного момента, направленный от отрицательного заряда к положительному;  $l$  — расстояние между зарядами;  $\ddot{\mathbf{p}} = \frac{d^2\mathbf{p}}{dt^2}$ ;  $\mathbf{e}$  — единичный вектор, направленный в точку, удаленную от диполя на расстояние  $r$  (рис. 3.2).

Формулы (3.1) справедливы для расстояний  $r \gg \lambda$  ( $\lambda$  — длина волны излучения). Если  $\mathbf{p} = \mathbf{p}_0 \cos \omega t$ , то  $\ddot{\mathbf{p}} = -\omega^2 \mathbf{p}$ , что и изображено на рисунке.

Распределение электромагнитного поля в пространстве показано на рис. 3.3. Здесь изображены силовые линии электрического поля, а точками и крестиками отмечены «следы» силовых линий магнитного поля.

Величина вектора Пойнтинга  $\mathbf{S}$  с учетом (3.1) получается равной

$$S(\mathbf{r}, t) = EH = \frac{1}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3 r^2} \left[ \ddot{\mathbf{p}} \left( t - \frac{r}{c} \right) \sin \vartheta \right]^2. \quad (3.2)$$

Сразу сделаем важный вывод о том, что  $S \propto \omega^4$ , поскольку  $\ddot{p}^2 = \omega^4 p^2$ . Наиболее сильно диполь излучает в направлении  $\mathbf{e} \perp \mathbf{p}$  и не излучает, если  $\mathbf{e} \parallel \mathbf{p}$ . Зависимость интенсивности от угла  $\vartheta$  получается из (3.2) в виде

$$I = \langle S \rangle = I_0 \sin^2 \vartheta, \quad (3.3)$$

где  $I_0$  — интенсивность излучения по направлению  $\mathbf{e} \perp \mathbf{p}$ .

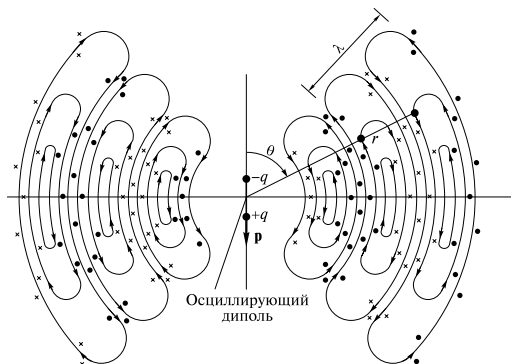


Рис. 3.3



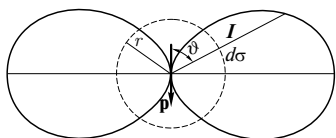


Рис. 3.4

Эту зависимость можно проиллюстрировать с помощью диаграммы (рис. 3.4), которая представляет собой фигуру вращения и называется *диаграммой направленности* излучения диполя **p**.

Рассчитаем мощность, излучаемую диполем. Она равна потоку энергии через любую замкнутую поверхность с произвольным радиусом  $r \gg \lambda$ . В сфе-

рических координатах элемент ее площади  $d\sigma = r^2 \sin \vartheta d\vartheta d\varphi$ . Проводя интегрирование по поверхности сферы, изображенной на рис. 3.4 штриховой линией, получим

$$P = \int \langle S \rangle d\sigma = \frac{\langle \ddot{p}^2 \rangle}{6\pi\epsilon_0 c^3}. \quad (3.4)$$

Здесь скобки означают усреднение по времени. При вычислении интеграла учтено, что

$$\int_0^\pi \sin^3 \vartheta d\vartheta = \frac{4}{3}.$$

**Излучение классического осциллятора (атома).** Из школьного курса известно, что хотя электрон и движется по орбите с центростремительным ускорением, атом в невозбужденном состоянии не излучает электромагнитные волны. Это свидетельствует о том, что классическая теория излучения, построенная на уравнениях Максвелла, не применима к атому.

Однако можно все же использовать классическое описание и для атома, если интерпретировать акт излучения фотона частоты  $\omega_0$  как кратковременный процесс излучения атомом, обладающим осциллирующим дипольным моментом

$$p(t) = ex(t) = ex_0 \cos \omega_0 t. \quad (3.5)$$

В этой модели атома предполагается, что внешний (оптический) электрон с зарядом  $e$  колеблется вблизи ядра по гармоническому закону, и расстояние между ядром и электроном меняется с амплитудой  $x_0$  и частотой  $\omega_0$ . Такая модель атома как элементарного осциллятора чрезвычайно широко используется в оптике.

При излучении атом будет терять энергию, и в конце концов излучение уединенного атома прекратится. Происходит это вследствие торможения электрона излучаемым электромагнитным полем. Поэтому говорят о *радиационном затухании* осцилляций. Тогда модель осциллятора следует несколько усложнить, включив в (3.5) затухание.

Рассчитаем характерное время затухания  $\tau$ , записав закон движения электрона в виде

$$x(t) = x_0 e^{-t/\tau} \cos \omega_0 t. \quad (3.6)$$

Полная механическая энергия  $W$  осциллятора массой  $m$  ( $m$  — масса электрона), равная сумме кинетической  $W_k$  и потенциальной  $W_n$  энергий, будет убывать по закону

$$W(t) = W_{\kappa}(t) + W_{\pi}(t) = \frac{m\omega_0^2 x_0^2}{2} e^{-2t/\tau}. \quad (3.7)$$

Скорость изменения этой энергии во времени связана с излучаемой мощностью законом сохранения энергии:

$$\frac{dW}{dt} = -P. \quad (3.8)$$

Вычисляя производную (3.7) и подставляя сюда выражение для мощности (3.4) с учетом затухания (3.6), получим

$$-\frac{2}{\tau} \frac{m\omega_0^2 x_0^2}{2} e^{-2t/\tau} = -\frac{e^2 \omega_0^4 x_0^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} e^{-2t/\tau}. \quad (3.9)$$

После сокращения имеем

$$\tau = \frac{6\pi m\epsilon_0 c^3}{e^2 \omega_0^2}. \quad (3.10)$$

Если в (3.10) подставить значения фундаментальных констант и принять частоту в видимом диапазоне равной  $\omega_0 = 2\pi\nu_0 \sim 10^{16} \text{ с}^{-1}$ , то

$$\tau \sim 10^{-8} \text{ с}. \quad (3.11)$$

Мы получили фундаментальный результат, состоящий в том, что *любой уединенный атом после возбуждения излучает электромагнитную волну в течение времени порядка  $10^{-8}$  с.*

В соответствии с формулой (3.1) атом излучает *световой цуг*, в котором амплитуда напряженности электрического и магнитного полей убывает по экспоненциальному закону

$$\mathbf{E} = \mathbf{a}e^{-t/\tau} \cos(\omega_0 t + \varphi), \quad (3.12)$$

где амплитуда  $\mathbf{a}$  и начальная фаза  $\varphi$  являются случайными величинами.

На рис. 3.5 изображена зависимость величины  $E$  от времени. Очевидно, что излучение атома не является монохроматическим, хотя в цуге содержится  $\tau/T \sim 10^7$  осцилляций ( $T \sim 10^{-15} \text{ с}$  — период колебаний).

В квантовой электродинамике аналогом времени радиационного затухания является *время жизни* атома в возбужденном состоянии, соответствующем пребыванию оптического электрона на некотором энергетическом уровне. В соответствии с *принципом неопределенности*, если время жизни в возбужденном состоянии ограничено, то энергия электрона на этом уровне определена с точностью  $\Delta W$ :

$$\Delta W \tau \approx h. \quad (3.13)$$

Согласно одному из постулатов Бора, частота излучаемого фотона удовлетворяет условию  $h\nu = W_2 - W_1$ . Если, например, уровень  $W_2$  «размыт»

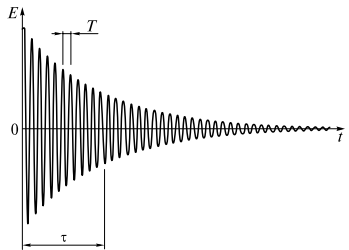


Рис. 3.5

(его ширина равна  $\Delta W$ ), то частоты испускаемых фотонов при переходе с этого уровня будут занимать интервал частот  $\Delta\nu$ :

$$\Delta W\tau = h\Delta\nu\tau \approx h. \quad (3.14)$$

Отсюда

$$\Delta\nu \approx \frac{1}{\tau}. \quad (3.15)$$

Последняя формула устанавливает фундаментальную связь между временем жизни возбужденного состояния и шириной спектрального интервала излучения при квантовых переходах из этого состояния. В следующей лекции будет получена эта связь при анализе спектрального состава электромагнитного цуга, изображенного на рис. 3.5.

**Излучение ансамбля атомов.** Реальный световой источник представляет собой ансамбль излучающих атомов. Например, для газоразрядной лампы в объеме  $V = \lambda^3$  ( $\lambda \sim 10^{-4}$  см — длина волны) содержится  $N = Vn_L \sim 10^7$  атомов ( $n_L = 2,7 \cdot 10^{19}$  см $^{-3}$  — число Лошмидта). Поэтому электрическое поле волны, излучаемой этим малым объемом, будет равно сумме полей отдельных цугов:

$$\mathbf{E}(t) = \sum_{i=1}^N \mathbf{E}_i(t) = \sum_{i=1}^N \mathbf{a}_i \cos(\omega_0 t + \varphi_i) = \mathbf{E}_0 \cos(\omega_0 t + \varphi). \quad (3.16)$$

Поскольку  $\mathbf{a}_i$  и  $\varphi_i$  — случайные величины, амплитуда (огигающая)  $\mathbf{E}_0$  и фаза  $\varphi$  также случайные величины.

Определим статистические закономерности огигающей  $E_0$  и фазы  $\varphi$ . Предположим, что волна распространяется вдоль оси  $Oz$ . Тогда в силу ее поперечности поле (3.16) представим в виде

$$\mathbf{E}(t) = \mathbf{e}_x E_x(t) + \mathbf{e}_y E_y(t). \quad (3.17)$$

Пусть  $\mathbf{a}_i = a_i \cos \alpha_i \mathbf{e}_x + a_i \sin \alpha_i \mathbf{e}_y$ , где  $\alpha_i$  — случайный угол между  $\mathbf{a}_i$  и осью  $Ox$ . Тогда

$$E_x = \left( \sum_{i=1}^N a_i \cos \alpha_i \cos \varphi_i \right) \cos \omega_0 t - \left( \sum_{i=1}^N a_i \cos \alpha_i \sin \varphi_i \right) \sin \omega_0 t; \quad (3.18a)$$

$$E_y = \left( \sum_{i=1}^N a_i \sin \alpha_i \cos \varphi_i \right) \cos \omega_0 t - \left( \sum_{i=1}^N a_i \sin \alpha_i \sin \varphi_i \right) \sin \omega_0 t. \quad (3.18b)$$

Исследуем статистические свойства компоненты  $E_x$ , для чего представим ее в виде

$$E_x = A_1 \cos \omega_0 t - A_2 \sin \omega_0 t. \quad (3.19)$$

Здесь

$$A_1 = \sum_{i=1}^N a_i \cos \alpha_i \cos \varphi_i; \quad A_2 = \sum_{i=1}^N a_i \cos \alpha_i \sin \varphi_i \quad (3.20)$$

— случайные величины, которые принято называть *квадратурными компонентами* поля  $E_x$ .

Если атомы излучают независимо друг от друга, что типично для нелазерных источников, то квадратуры являются суммой большого числа статистиче-

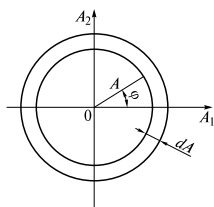


Рис. 3.6

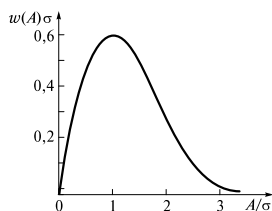


Рис. 3.7

ски независимых случайных величин. В соответствии с центральной предельной теоремой при  $N \rightarrow \infty$  распределение плотности вероятности суммы независимых случайных величин, имеющих произвольную статистику, стремится к *нормальному (гауссову) распределению*.

Поскольку  $N \sim 10^7$ , применительно к квадратурам можно записать выражения для плотности вероятности случайных величин  $A_1$  и  $A_2$  с дисперсией  $\sigma^2$  в виде

$$w(A_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{A_1^2}{2\sigma^2}\right); \quad w(A_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{A_2^2}{2\sigma^2}\right). \quad (3.21)$$

Теперь легко определить статистические свойства огибающей  $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}$  и фазы  $\varphi = \operatorname{arctg}\left(\frac{A_2}{A_1}\right)$  компоненты  $E_x$ . Для этого на плоскости переменных  $A_1$  и  $A_2$  вычислим вероятность того, что огибающая будет заключена в интервале  $(A + A + dA)$ . С одной стороны, вероятность можно записать в виде

$$dp_A = w(A)dA, \quad (3.22)$$

где  $w(A)$  — плотность вероятности огибающей. С другой стороны, обращаясь к рис. 3.6, видим, что это есть вероятность «попадания» квадратур в кольцо радиусом  $A$  и шириной  $dA$ .

Если учесть, что квадратуры  $A_1$  и  $A_2$  статистически независимы, то

$$dp_A = w(A_1)w(A_2)2\pi AdA. \quad (3.23)$$

Здесь  $w(A_1)w(A_2) = w(A_1A_2)$  — двумерная плотность вероятности;  $2\pi AdA$  — площадь кольца. Приравнявая (3.22) и (3.23), получаем

$$w(A) = \frac{A}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{A^2}{2\sigma^2}\right). \quad (3.24)$$

Это распределение называют *распределением Рэлея* в честь английского физика Дж.Рэлея, впервые решившего статистическую задачу об излучении ансамбля осцилляторов (рис. 3.7).

Отметим, что в отличие от нормального закона распределения квадратур, где  $\langle A_1 \rangle = \langle A_2 \rangle = 0$ , среднее значение огибающей отлично от нуля:

$$\langle A \rangle = \int_0^\infty w(A)AdA = \sqrt{\pi}\sigma. \quad (3.25)$$

Если формулу (3.24) подставить в (3.22), то легко получить закон распределения квадрата огибающей  $A^2$ , или интенсивности  $I \sim A^2$ . С учетом сказанного выражение (3.22) примет вид

$$dp_A = \frac{A}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{A^2}{2\sigma^2}\right) dA = \frac{1}{2\sigma^2} \exp\left(-\frac{A^2}{2\sigma^2}\right) dA^2. \quad (3.26)$$

Таким образом,

$$w(A^2) = \frac{dp_A}{dA^2} = \frac{1}{2\sigma^2} \exp\left(-\frac{A^2}{2\sigma^2}\right). \quad (3.27)$$

Это распределение изображено на рис. 3.8.

Среднее значение квадрата огибающей равно:

$$\langle A^2 \rangle = \int_0^\infty A^2 w(A^2) dA^2 = 2\sigma^2. \quad (3.28)$$

Поэтому распределение (3.27) можно переписать в ином виде:

$$w(A^2) = \frac{1}{\langle A^2 \rangle} \exp\left(-\frac{A^2}{\langle A^2 \rangle}\right). \quad (3.29)$$

Аналогичное распределение получается и для интенсивности  $I$ :

$$w(I) = \frac{1}{\langle I \rangle} \exp\left(-\frac{I}{\langle I \rangle}\right). \quad (3.30)$$

Последнее выражение более удобно для практических применений.

Перейдем теперь к закону распределения фазы  $\varphi$ . Интуитивно понятно, что вероятность «попадания» квадратур в любой фрагмент кольца одинакова (для любого угла  $\varphi$  на рис. 3.6). Это значит, что плотность вероятности  $w(\varphi) = \text{const}$  на интервале  $-\pi \leq \varphi \leq \pi$ . С учетом нормировки она равна

$$w(\varphi) = \frac{1}{2\pi}. \quad (3.31)$$

Очевидно, что  $\langle \varphi \rangle = 0$ .

Установим теперь связь между  $\langle A^2 \rangle$  и параметрами осцилляторов. Если принять, следуя Рэлею, что  $a_i = a = \text{const}$ , а случайны лишь фазы  $\varphi_i$  и углы  $\alpha_i$ , то из (3.20) получаем

$$\langle A_1^2 \rangle = \langle A_2^2 \rangle = N \frac{a^2}{2}. \quad (3.32)$$

Следовательно,

$$\langle A^2 \rangle = \langle A_1^2 \rangle + \langle A_2^2 \rangle = Na^2. \quad (3.33)$$

Как и следовало ожидать, интенсивность излучения ансамбля статистически независимых атомов равна сумме интенсивностей излучения отдельных атомов.

Диаграмма направленности такого излучения не имеет выделенного направления из-

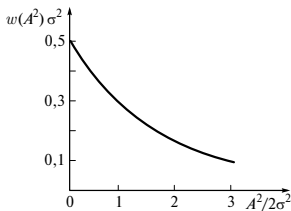


Рис. 3.8

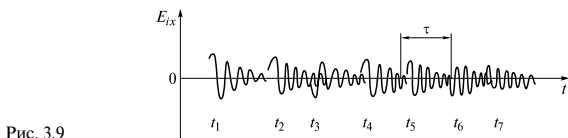


Рис. 3.9

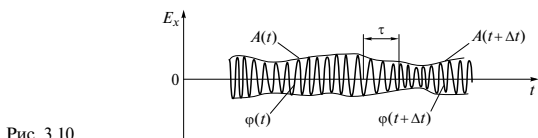


Рис. 3.10

за хаотического расположения элементарных диполей и представляет собой сферическую поверхность. Поляризация излучения определяется фазовыми соотношениями между  $E_x$  и  $E_y$  в (3.17). Если учесть, что каждый атом в среднем излучает в течение времени  $\tau \sim 10^{-8}$  с, то вектор  $\mathbf{E}_0$  будет хаотически менять свое значение и направление заметным образом лишь на этом же масштабе времени. Можно сказать, что *поляризация волны остается неизменной лишь в течение промежутков времени  $\Delta t \ll \tau$* .

**Время корреляции.** В заключение этой лекции обратимся к временной зависимости огибающей  $A$  от фазы  $\varphi$ . Для этого перепишем выражение (3.16) в виде

$$\mathbf{E}(t) = \sum \mathbf{E}_i = \sum_{i=1}^N \mathbf{a}_i e^{-\frac{t-t_i}{\tau}} \cos[\omega_0(t-t_i) + \varphi_i] = \mathbf{E}_0(t) \cos[\omega_0 t + \varphi(t)]. \quad (3.34)$$

Здесь учтено радиационное затухание излучения, которое для каждого атома начинается в случайный момент времени  $t_i$ .

На рис. 3.9 изображена структура  $x$ -компоненты излучения ансамбля, представляющего собой хаотическую последовательность цугов с различными напряженностями  $E_{ix}$  (различными амплитудами  $a_{ix}$  и фазами  $\varphi_i$ ). Цуги могут «налезать» друг на друга. В среднем их длительность равна времени радиационного затухания  $\tau$ .

Компонента суммарного поля (3.34) изменяется во времени так, как это изображено на рис. 3.10. Огибающая  $A$  и фаза  $\varphi$  флуктуируют во времени около своих средних значений.

Если попытаться установить путем многократных измерений *статистическую связь* случайных значений  $A(t)$  и  $A(t + \Delta t)$  [либо  $\varphi(t)$  и  $\varphi(t + \Delta t)$ ] (в молекулярной физике уже использовалось понятие условной вероятности), то можно сделать следующий вывод. По мере увеличения  $\Delta t$  от нуля эта статистическая связь постепенно убывает, и при  $\Delta t \sim \tau$  она становится существенно ослабленной. Это и понятно, поскольку в моменты времени, разделенные промежутком  $\Delta t = \tau$ , мы имеем дело уже с практически разными цугами. При  $\Delta t \gg \tau$  эта связь (корреляция) полностью исчезает. Поэтому время  $\tau$  играет роль *времени корреляции излучения*. Более строгое его определение будет приведено в следующих лекциях.

## ЛЕКЦИЯ 4

Еще в XVII в. И. Ньютоном были выполнены знаменитые опыты по разложению белого света в цветной спектр. В результате было доказано, что белый свет является суперпозицией большого числа волн, которые в те времена представляли в виде потока частиц, скорости которых и определяют цвет каждой спектральной компоненты. После признания волновой природы света утвердилась точка зрения, что цвет *спектральной компоненты определяется исключительно ее частотой*.

Выполненные впоследствии многочисленные опыты по изучению спектрального состава разнообразных источников света показали, что любой источник испускает световые волны, частоты которых занимают конечный интервал частот, или *спектральный интервал*.

Обратимся к спектральному составу излучения ансамбля атомов. Спектральный состав света связан с поведением во времени напряженности электромагнитного поля, и эта связь задается интегралом Фурье.

**Интеграл Фурье.** Из курса математики известно, что любую абсолютно интегрируемую на интервале  $-\infty < t < \infty$  функцию  $f(t)$  можно представить в виде интеграла Фурье:

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} [a(\omega) \cos \omega t + b(\omega) \sin \omega t] d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} f_0(\omega) \cos[\omega t - \varphi(\omega)] d\omega. \quad (4.1)$$

Функции  $a(\omega)$  и  $b(\omega)$  находятся из обратного преобразования Фурье:

$$a(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \omega t dt; \quad b(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin \omega t dt. \quad (4.2)$$

Если  $f(t)$  — четная функция, то  $b = 0$ , а если нечетная, то  $a = 0$ . Функции  $a(\omega)$ ,  $b(\omega)$  и  $f_0 = \sqrt{a^2 + b^2}$  называются *спектральными амплитудами*, или *фурье-амплитудами*. Обратим внимание, что  $f_0$  является четной функцией частоты:  $f_0(\omega) = f_0(-\omega)$ . Фаза  $\varphi$  является нечетной функцией частоты:  $\varphi(\omega) = -\varphi(-\omega)$ . Последнее связано с тем, что  $a(\omega) = a(-\omega)$ ,  $b(\omega) = -b(-\omega)$ .

Более удобным для вычислений является комплексное представление интеграла (4.1). Свойства четности  $f_0(\omega)$  и  $\varphi(\omega)$  позволяют расширить формально область интегрирования в область отрицательных частот (физического смысла они не имеют):

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f_0(\omega) \cos[\omega t - \varphi(\omega)] d\omega. \quad (4.3)$$

Введем комплексную спектральную амплитуду (комплексную фурье-амплитуду)  $\hat{f}_0(\omega) = f_0(\omega)e^{-i\varphi(\omega)}$ . Тогда интеграл (4.3) запишется в виде

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}_0(\omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad (4.4)$$

где

$$\hat{f}_0(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt. \quad (4.5)$$

Формулы (4.4) и (4.5) представляют прямое и обратное преобразования Фурье в комплексном виде, которые будем использовать в дальнейшем. Обратим внимание, что комплексная спектральная амплитуда  $\hat{f}_0(\omega) = a(\omega) - ib(\omega)$ , поэтому  $\hat{f}_0^*(\omega) = \hat{f}_0(-\omega)$  (звездочка означает знак комплексного сопряжения).

Для практических целей вычисляют *спектральную плотность*  $|\hat{f}_0(\omega)|^2$ , поскольку именно эту величину можно экспериментально измерить. Рассмотрим несколько примеров.

■ **Пример 1.** Пусть  $f(t) = a_0 \cos \omega_0 t$ . Воспользуемся действительным представлением (4.2). Поскольку  $f(t)$  — четная функция, то  $b = 0$ . Следовательно,

$$f_0(\omega) = a(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} a_0 \cos \omega_0 t \cos \omega t d\omega = \pi a_0 \delta(\omega - \omega_0). \quad (4.6)$$

Здесь  $\delta(\omega - \omega_0)$  — *дельта-функция Дирака*: если  $\omega \neq \omega_0$ , то  $\delta = 0$ , а если  $\omega = \omega_0$ , то  $\delta \rightarrow \infty$ , при этом  $\int_{-\infty}^{\infty} \delta d\omega = 1$ . Прямое преобразование (4.1) позволяет восстановить исходную функцию

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} a(\omega) \cos \omega t d\omega = a_0 \int_0^{\infty} \delta(\omega - \omega_0) \cos \omega t d\omega = a_0 \cos \omega_0 t. \quad (4.7)$$

В (4.7) использовано свойство дельта-функции, согласно которому интеграл от произведения любой функции на дельта-функцию равен значению подынтегральной функции при том значении аргумента, при котором дельта-функция обращается в бесконечность (в нашем случае аргумент  $\omega = \omega_0$ ).

Функцию  $f(t)$  можно представить в виде ее временной зависимости либо указать значение ее спектральной амплитуды  $f_0(\omega)$ , позволяющей, согласно (4.3), восстановить функцию. В первом случае используется ее *временное представление*, во втором — *спектральное* (рис. 4.1).

Отметим, что в спектральном представлении по оси ординат отложена величина  $f_0^2(\omega)$ , поскольку с ней связана измеряемая в эксперименте интенсивность сигнала, описываемого функцией  $f(t)$ . Кроме того, при  $\omega = \omega_0$   $f_0^2 \rightarrow \infty$ ,

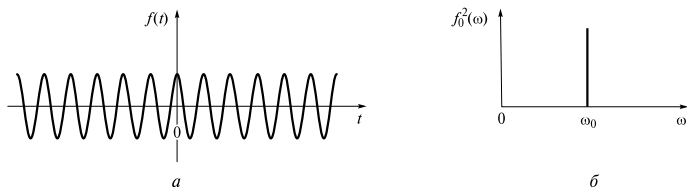


Рис. 4.1



поэтому высота «палочки» должна быть бесконечно большой. В действительности все спектральные амплитуды конечны, поскольку в природе не существует сигналов, длящихся бесконечное время.

■ **Пример 2.** Рассмотрим теперь функцию  $f(t) = ae^{-t/\tau} \cos \omega_0 t$ . Такая функция описывает напряженность электрического поля ( $E = f$ ) в отдельном цуге излучения. Определим  $|\hat{f}_0(\omega)|^2$ , пользуясь комплексным представлением (4.5):

$$\hat{f}_0(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt = a \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t/\tau} \frac{e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t}}{2} e^{-i\omega t} dt. \quad (4.8)$$

Опуская промежуточные выкладки, получим спектральную плотность

$$|\hat{f}_0(\omega)|^2 = \hat{f}_0(\omega) \hat{f}_0^*(\omega) = a^2 \frac{\omega^2 + 1/\tau^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4 \frac{\omega^2}{\tau^2}}. \quad (4.9)$$

Для слабого затухания ( $\omega_0 \gg 1/\tau$ ) и при  $\omega \approx \omega_0$  выражение (4.9) можно значительно упростить, полагая  $(\omega_0^2 - \omega^2)^2 \approx 4\omega_0^2(\omega_0 - \omega)^2$ . Тогда

$$|\hat{f}_0(\omega)|^2 \approx \frac{a^2}{4} \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2(\omega_0 - \omega)^2 + \frac{\omega_0^2}{\tau^2}} = \frac{a^2}{4} \tau^2 L(\omega), \quad (4.10)$$

где

$$L(\omega) = \frac{1}{\tau^2(\omega_0 - \omega)^2 + 1} \quad (4.11)$$

— лоренцева функция.

График этой функции, называемый *лоренцевым контуром*, представлен на рис. 4.2.

Ширину  $\Delta\omega$  этого контура находят из условия убывания функции  $L$  вдвое:

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{\left(\tau \frac{\Delta\omega}{2}\right)^2 + 1}. \quad (4.12)$$

Отсюда  $\Delta\omega = 2/\tau$ . Чем больше время затухания, тем уже контур. В пределе, при  $\tau \rightarrow \infty$   $\Delta\omega \rightarrow 0$ , как это имело место в предыдущем примере.

**Спектральная плотность интенсивности.** Применим интеграл Фурье к описанию спектральных характеристик света. Под функцией  $f(t)$  будем подразумевать одну из компонент  $E(t)$  напряженности поля световой волны. Но тогда  $f(t)$  является случайной функцией. Случайными будут и фурье-амплитуды  $a$ ,  $b$ ,  $f_0$  и фаза  $\varphi$ . Кроме того, в реальном эксперименте время наблюдения ограничено, поэтому на практике можно анализировать сигнал  $f_{\epsilon}(t)$ , такой, что

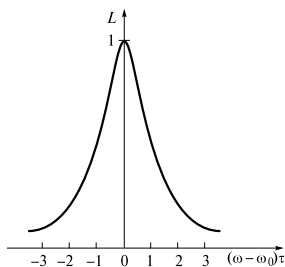


Рис. 4.2

$$\begin{aligned} f_{\tau}(t) &= f(t) \text{ при } 0 < t < \tau_{\text{н}}; \\ f_{\tau}(t) &= 0 \text{ при } \tau_{\text{н}} < t < \infty, \quad t < 0, \end{aligned} \quad (4.13)$$

где  $\tau_{\text{н}}$  — время наблюдения.

Возникает вопрос о выборе этого времени. Воспользуемся равенством Парсеваля, которое получается из (4.4) и (4.5):

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}_0(\omega)|^2 d\omega. \quad (4.14)$$

В этом равенстве, в левой части во временном, в правой — в спектральном представлении, стоит величина, связанная с плотностью энергии волны.

Если применить это равенство к случайной и усеченной во времени функции  $f_{\tau}(t)$ , то можно сократить пределы интегрирования по времени и записать

$$\frac{1}{\tau_{\text{н}}} \int_0^{\tau_{\text{н}}} f_{\tau}^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\hat{f}_{0\tau}(\omega)|^2}{\tau_{\text{н}}} d\omega. \quad (4.15)$$

Заметим, что в правой части равенства спектральная плотность также зависит от времени наблюдения и является, кроме того, случайной величиной.

Если устремить время наблюдения к бесконечности, то интеграл слева будет стремиться к пределу, равному  $\langle f^2 \rangle$ , поэтому

$$\langle f^2 \rangle = \lim_{\tau_{\text{н}} \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau_{\text{н}}} \int_0^{\tau_{\text{н}}} f_{\tau}^2(t) dt = \int_0^{\infty} \lim_{\tau_{\text{н}} \rightarrow \infty} \frac{|\hat{f}_{0\tau}(\omega)|^2}{\pi \tau_{\text{н}}} d\omega. \quad (4.16)$$

Следовательно, должен существовать предел у подынтегрального выражения в правой части (4.15):

$$S(\omega) = \lim_{\tau_{\text{н}} \rightarrow \infty} \frac{|\hat{f}_{0\tau}(\omega)|^2}{\pi \tau_{\text{н}}}. \quad (4.17)$$

Функция  $S(\omega)$  называется *спектральной плотностью интенсивности*, если речь идет о световой волне.

Действительно, применительно к оптике перепишем (4.16) в виде

$$I = \langle E^2 \rangle = \int_0^{\infty} S(\omega) d\omega. \quad (4.18)$$

В узком спектральном диапазоне  $d\omega$  волна имеет интенсивность

$$dI = S(\omega) d\omega, \quad (4.19)$$

поэтому  $S(\omega)$  и называется спектральной плотностью интенсивности.

Обсудим вопрос о выборе времени наблюдения. Для того чтобы вычислить с хорошей точностью  $\langle f^2 \rangle$ , необходимо проводить измерения так долго, чтобы набрать статистику случайных изменений огибающей и фазы. Как уже отмечалось,  $A$  и  $\phi$  хаотически меняются на масштабе времени  $\tau$ . В течение времени  $\tau_{\text{н}}$  число таких случайных значений будет порядка  $\tau_{\text{н}}/\tau$ . Если  $\tau_{\text{н}} \sim (10^3 - 10^6)\tau$ , то такого времени вполне достаточно для нахождения средних значений.

Обращает на себя внимание тот факт, что существование предела (4.16) связано с тем, что при  $\tau_{\text{н}} \rightarrow \infty$  спектральная плотность  $|\hat{f}_{0\tau}|^2 \propto \tau_{\text{н}}$ , при этом ее флуктуации монотонно уменьшаются.

**Спектральная плотность, ее контур и ширина.** Пусть имеется излучение в виде случайной последовательности одинаковых цугов  $f(t - t_l)$ , где  $t_l$  — случайное время появления цуга. Рассчитаем спектральную плотность случайного сигнала

$$F(t) = \sum_{l=1}^N f(t - t_l),$$

где число  $N$  членов суммы зависит от времени наблюдения. Согласно (4.5) спектральная амплитуда

$$\hat{F}_0(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} F(t)e^{-i\omega t} dt = \sum_{l=1}^N \int_{-\infty}^{\infty} f(t - t_l)e^{-i\omega t} dt = \sum_{l=1}^N \hat{f}_0(\omega)e^{-i\omega t_l}. \quad (4.20)$$

Тогда

$$|\hat{F}_0(\omega)|^2 = \hat{F}_0(\omega) \hat{F}_0^*(\omega) = |\hat{f}_0(\omega)|^2 \sum_{l=1}^N \sum_{m=1}^N e^{i\omega(t_l - t_m)}. \quad (4.21)$$

Если длительность цуга равна  $\tau$ , то их число за время наблюдения  $\tau_n$  в среднем равно  $N = \tau_n/\tau$ . Если  $N$  велико, то двойная сумма будет равна сумме членов при  $l = m$ . Остальные слагаемые скомпенсируют друг друга. Поэтому при  $N \rightarrow \infty$  спектральная плотность

$$|\hat{F}_0(\omega)|^2 = |\hat{f}_0(\omega)|^2 N = |\hat{f}_0(\omega)|^2 \frac{\tau_n}{\tau}. \quad (4.22)$$

Тогда спектральная плотность интенсивности сигнала  $F(t)$  будет равна

$$S(\omega) = \frac{|\hat{F}_0(\omega)|^2}{\pi\tau_n} = \frac{|\hat{f}_0(\omega)|^2}{\pi\tau}. \quad (4.23)$$

Она совпадает со спектральной плотностью интенсивности для одного цуга.

Если обратиться к примеру 2 и выражениям (4.10) и (4.11), то можно сделать вывод о том, что *спектральная плотность излучения невзаимодействующих атомов описывается лоренцевой функцией, а спектральная линия их излучения имеет лоренцевый контур, ширина которого обратно пропорциональна времени радиационного затухания:  $\Delta\omega = 2/\tau$ .*

Если  $\tau \sim 10^{-8}$  с, то  $\Delta\omega = 2 \cdot 10^8$  с<sup>-1</sup>,  $\Delta\nu = \Delta\omega/2\pi \sim 3 \cdot 10^7$  Гц. Ширина линии, связанная с радиационным затуханием, называется *естественной шириной*. До появления лазеров было принципиально невозможно получить более узкую линию (шириной, меньше естественной).

**Ударное уширение спектральной линии.** Самой узкой спектральной линией обладает пучок летящих и слабовзаимодействующих возбужденных атомов. С такими пучками в конце XIX — начале XX в. были проведены прецизионные эксперименты для создания эталона времени, длины и других целей.

Если же атомы находятся в замкнутом объеме, то они сталкиваются с нейтральными атомами, ионами и электронами, со стенками сосуда, а в твердом теле — с кристаллической решеткой. При таких столкновениях в самом цуге почти скачкообразно изменяется фаза испускаемого излучения. Иными словами, каждый цуг приобретает случайную *фазовую модуляцию*.

В квантовой электродинамике показывается, что *столкновение атомов приводит к уменьшению времени жизни возбужденного состояния*. Уменьшение времени жизни влечет увеличение ширины спектральной линии излучения как отдельного атома, так и всего ансамбля.

Такое уширение называется *столкновительным*, или *ударным*. Оно относится к однородному уширению, поскольку в одинаковой степени уширяются контуры спектральных линий излучения каждого атома.

Определим ширину и форму спектральной линии излучения ансамбля при учете столкновений. В газе при нормальных условиях излучение атома «получает» случайный скачок фазы в среднем через время  $\tau_c \sim 10^{-10}$  с. Тогда отдельный цуг длительностью  $\tau \sim 10^{-8}$  с представляет собой как бы последовательность  $\tau/\tau_c \sim 10^2$  цугов. Длительность каждого из этих маленьких цугов является случайной величиной. Это означает, что ширина спектральной линии увеличивается приблизительно на два порядка.

Для вычисления спектральной плотности излучения будем считать, что

$$F(t) = \sum_{l=1}^N f_l(t - t_l), \quad (4.24)$$

где

$$f_l(t - t_l) = \begin{cases} a \cos \omega_0 t, & \text{если } t_l < t < t_l + \tau_l; \\ 0, & \text{если } t < t_l \text{ и } t > t_l + \tau_l, \end{cases} \quad (4.25)$$

— «обрывок» гармонического излучения, возникающий случайно в момент времени  $t_l$  и прекращающийся также случайно спустя время  $\tau_l$  ( $\tau_l$  — случайная длительность «обрывка»). Радиационное затухание в силу условия  $\tau_l < \tau$  не учитывается.

Применяя к (4.24) преобразования (4.21), получаем выражение

$$|\hat{F}_0(\omega)|^2 = \sum_l N_l |\hat{f}_{0l}(\omega)|^2. \quad (4.26)$$

Здесь, в отличие от (4.23),  $N_l$  — число цугов длительностью  $\tau_l$ , зарегистрированных за время наблюдения;  $\hat{f}_{0l}(\omega)$  — фурье-амплитуда для таких цугов, суммирование проводится по всем длительностям  $\tau_l$ .

Если время наблюдения велико, то (4.26) можно записать в виде

$$|\hat{F}_0(\omega)|^2 = \sum_l N_l \langle |f_0(\omega)|^2 \rangle, \quad (4.27)$$

где

$$\langle |f_0(\omega)|^2 \rangle = \frac{\sum_l N_l |\hat{f}_{0l}(\omega)|^2}{\sum_l N_l} \quad (4.28)$$

— среднее значение квадрата модуля спектральной амплитуды.

Из курса молекулярной физики известно: вероятность того, что между двумя столкновениями пройдет время, соответствующее интервалу  $(\tau_l, \tau_l + d\tau_l)$ , равна

$$dp_\tau = \frac{1}{\tau_c} \exp\left(-\frac{\tau_l}{\tau_c}\right) d\tau_l = w(\tau_l) d\tau_l. \quad (4.29)$$

Здесь  $\tau_c$  — среднее время между двумя столкновениями. Тогда

$$\langle |\hat{f}_0(\omega)|^2 \rangle = \int_0^\infty |\hat{f}_{0l}(\omega)|^2 w(\tau_l) d\tau_l. \quad (4.30)$$

Вначале вычислим фурье-амплитуду «обрывка» (4.25) длительностью  $\tau_l$ :

$$\begin{aligned} \hat{f}_{0l}(\omega) &= \int_{t_l}^{t_l+\tau_l} \frac{1}{2} (e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t}) e^{-i\omega t} dt = \\ &= ae^{i\Phi_1} \frac{\sin(\omega_0 - \omega)\tau_l/2}{\omega_0 - \omega} + ae^{i\Phi_2} \frac{\sin(\omega_0 + \omega)\tau_l/2}{\omega_0 + \omega}. \end{aligned} \quad (4.31)$$

Здесь  $\Phi_1 = (\omega_0 - \omega)(t_l + \tau_l/2)$ ;  $\Phi_2 = (\omega_0 + \omega)(t_l + \tau_l/2)$ .

Для вычисления спектральной плотности используем лишь положительные частоты. Тогда вторым слагаемым в (4.31) можно пренебречь и записать

$$|\hat{f}_{0l}(\omega)|^2 = \frac{1}{4} a^2 \tau_l^2 \left[ \frac{\sin(\omega_0 - \omega)\tau_l/2}{(\omega_0 - \omega)\tau_l/2} \right]^2 = \frac{1}{4} a^2 \tau_l^2 \text{sinc}^2((\omega_0 - \omega)\tau_l/2), \quad (4.32)$$

где  $\text{sinc}(x) = \frac{\sin x}{x}$  — функция, широко используемая в физике. Квадрат этой функции описывает контур спектральной линии излучения, представляющего собой прямоугольный импульс амплитудой  $a$ , частотой  $\omega_0$  и длительностью  $\tau_l$ , и изображен на рис. 4.3.

Этот контур не является лоренцевым. Его ширина  $\Delta x_l = \pi$ , а спектральная ширина

$$\Delta\omega_l = \frac{4\pi}{\tau_l}, \quad (4.33)$$

т. е. обратно пропорциональна длительности  $\tau_l$  прямоугольного импульса. Проводя усреднения по длительностям  $\tau_l$  в соответствии с (4.29) и (4.30), находим

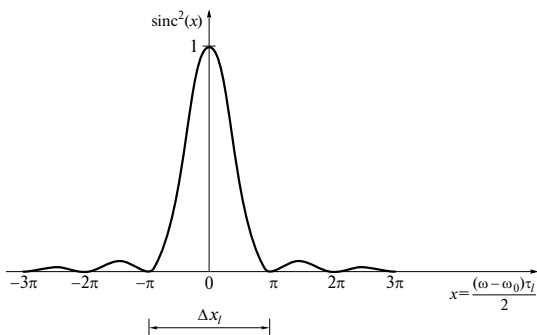


Рис. 4.3

$$\begin{aligned}
|\hat{f}_0(\omega)|^2 &= \frac{1}{4} \int_0^\infty a^2 \tau_c^2 \operatorname{sinc}^2((\omega_0 - \omega)\tau_l/2) \frac{1}{\tau_c} \exp\left(-\frac{\tau_l}{\tau_c}\right) d\tau_l = \\
&= \frac{1}{2} a^2 \tau_c^2 \frac{1}{\tau_c^2 (\omega_0 - \omega)^2 + 1} = \frac{1}{2} a^2 \tau_c^2 L(\omega),
\end{aligned} \tag{4.34}$$

где

$$L(\omega) = \frac{1}{\tau_c^2 (\omega_0 - \omega)^2 + 1} \tag{4.35}$$

— лоренцева функция.

Для ансамбля атомов, согласно (4.27), имеем

$$|\hat{F}_0(\omega)|^2 = \frac{1}{2} a^2 \tau_c^2 L(\omega) \sum_l N_l. \tag{4.36}$$

За большое время наблюдения  $\tau_n \gg \tau_c$  сумма  $\sum_l N_l = \frac{\tau_n}{\tau_c}$ , поэтому для иско-  
мой спектральной плотности интенсивности получаем

$$S(\omega) = \frac{|\hat{F}_{0l}(\omega)|^2}{\pi \tau_n} = \frac{1}{2} a^2 \tau_c L(\omega). \tag{4.37}$$

Таким образом, контур спектральной линии излучения ансамбля сталкива-  
ющихся атомов является лоренцевым. Однако этот контур значительно уширен.  
Его ширина, оцененная по уровню 0,5 (на половине этой ширины функция  $L$   
убывает вдвое), из (4.35) получается равной

$$\Delta\omega_c = \frac{2}{\tau_c}. \tag{4.38}$$

Выражения для спектральной плотности интенсивности (4.37) можно  
с учетом (4.38) и равенства  $I_0 = a^2/2$  ( $I_0$  — интенсивность излучения всей  
спектральной линии) записать в виде

$$S(\omega) = I_0 \frac{2L(\omega)}{\pi \Delta\omega_c} = I_0 g_L(\omega), \tag{4.39}$$

где

$$g_L(\omega) = \frac{2}{\pi} \frac{\Delta\omega_c}{4(\omega_0 - \omega)^2 + (\Delta\omega_c)^2} \tag{4.40}$$

— нормированная функция ( $\int g_L(\omega) d\omega = 1$ ), которая описывает в оптике *лорен-  
цевый контур спектральной линии*.

Оценим характерные времена при столкновениях. Атомы движутся хаоти-  
чески со средней тепловой скоростью

$$v_t = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}, \tag{4.41}$$

где  $m$  — масса атома или молекулы.

Сам процесс столкновения происходит не мгновенно, как это предполагалось ранее для простоты, а в течение интервала  $\Delta\tau_c$ . Атомы, сближаясь, начинают оказывать влияние друг на друга при расстояниях  $d$  между ними, которое по порядку равно диаметру атома или молекулы ( $d \sim 1 \text{ \AA} = 10^{-10} \text{ м}$ ). Тогда время столкновения

$$\Delta\tau_c \sim \frac{d}{v_T} \quad (4.42)$$

Например, для атома неона при комнатной температуре  $\Delta\tau_c \sim 10^{-13} \text{ с}$ . В процессе столкновения атом, как элементарный диполь, успевает совершить несколько осцилляций.

Среднее время между двумя столкновениями равно отношению средней длины свободного пробега  $L$  к скорости  $v_T$

$$\tau_c \sim \frac{L}{v_T} = \frac{1}{4} \cdot \frac{\sqrt{mkT}}{\sqrt{nd^2p}}, \quad (4.43)$$

где  $p$  — давление газа.

Например, давление в газоразрядной трубке He-Ne-лазера  $p = 0,5 \text{ мм рт. ст.}$ . При комнатной температуре время между двумя столкновениями излучающих свет атомов неона

$$\tau_c = 0,5 \cdot 10^{-6} \text{ с}. \quad (4.44)$$

Соответствующая ширина лоренцевой линии излучения

$$\Delta\nu_c = \frac{\Delta\omega_c}{2\pi} = \frac{1}{\pi\tau_c} = 0,64 \text{ МГц}. \quad (4.45)$$

С увеличением давления ширина линии возрастает.

**Доплеровское уширение спектральной линии.** Поскольку атомы находятся в тепловом движении, то наблюдатель вследствие эффекта Доплера будет регистрировать цуги волн с разными частотами  $\omega$ . Разумеется, в системе координат, жестко связанной с атомом, частота его излучения неизменна и равна  $\omega_0$  (радиационное уширение линии не учитываем). Если атом приближается к наблюдателю со скоростью  $v_z$  (рис. 4.4), то наблюдатель воспринимает излучение с частотой

$$\omega = \omega_0 \left( 1 + \frac{v_z}{c} \right). \quad (4.46)$$

Компонента скорости  $v_z$  имеет нормальный закон распределения, поэтому

$$dn = n \sqrt{\frac{m}{2\pi kT}} \exp\left(-\frac{mv_z^2}{2kT}\right) dv_z, \quad (4.47)$$

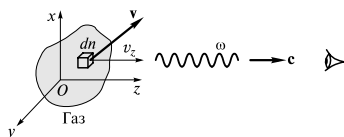


Рис. 4.4

где  $n$  — число излучающих атомов в единице объема;  $dn$  — часть атомов с компонентой скорости  $v_z$  в интервале  $(v_z, v_z + dv_z)$ .

Если интенсивность излучения всех  $n$  атомов равна  $I_0$ , то интенсивность излучения  $dI$  части  $dn$  атомов удовлетворяет пропорции

$$\frac{dI}{I_0} = \frac{dn}{n}. \quad (4.48)$$

Исключим в (4.47)  $v_z^2$  и  $dv_z$ , выразив их с помощью (4.46) через  $\omega$  и  $d\omega$ . Учитывая, что  $dI = S(\omega)d\omega$ , из (4.48) получаем

$$\frac{S(\omega)d\omega}{I_0} = \sqrt{\frac{m}{2\pi kT}} \frac{c}{\omega_0} \exp\left(-\frac{mc^2(\omega - \omega_0)^2}{2kT\omega_0^2}\right) d\omega. \quad (4.49)$$

Если ввести обозначение

$$\Delta\omega = \omega_0 \sqrt{\frac{2kT}{mc^2}}, \quad (4.50)$$

то (4.49) можно записать в компактном виде:

$$S(\omega) = \frac{I_0}{\sqrt{\pi}\Delta\omega} \exp\left(-\frac{(\omega - \omega_0)^2}{\Delta\omega^2}\right) = I_0 g_D(\omega). \quad (4.51)$$

Здесь

$$g_D(\omega) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\Delta\omega} \exp\left(-\frac{(\omega - \omega_0)^2}{\Delta\omega^2}\right) \quad (4.52)$$

— нормированная функция ( $\int g_D(\omega)d\omega = 1$ ), которая описывает в оптике *гауссов контур спектральной линии*.

*Доплеровское уширение относится к неоднородному уширению*, поскольку разные атомы вносят вклад в суммарное излучение с разными частотами. *Ширину доплеровской линии* также определяют на уровне 0,5 (на половине этой ширины функция  $g_D$  убывает вдвое) по формуле

$$\Delta\omega_D = 2\sqrt{\ln 2}\Delta\omega = 2\sqrt{\ln 2}\sqrt{\frac{2kT}{mc^2}}. \quad (4.53)$$

Эта ширина зависит от температуры. Для излучения неона при  $T = 300$  К

$$\Delta\nu_D = \frac{\Delta\omega_D}{2\pi} = 1,7 \cdot 10^9 \text{ Гц} = 1,7 \text{ ГГц}. \quad (4.54)$$

Сравнение обоих механизмов уширения для линии излучения неона ( $\lambda = 6328 \text{ \AA}$ ) показывает, что доплеровское уширение значительно превышает ударное. Однако при высоких давлениях ударное уширение может преобладать над доплеровским. Это имеет место, например, для светящегося углекислого газа ( $\lambda = 10,6 \text{ мкм}$ ), находящегося при атмосферном давлении в газоразрядной трубке  $\text{CO}_2$ -лазера.

Для наглядности на рис. 4.5 приведено сравнение лоренцева и гауссова контуров при одинаковой их ширине:  $\Delta\omega = \Delta\omega_c = \Delta\omega_D$ . Видно, что в средней части доминирует гауссова функция  $g_D$ , а на периферии — лоренцева функция  $g_L$ .

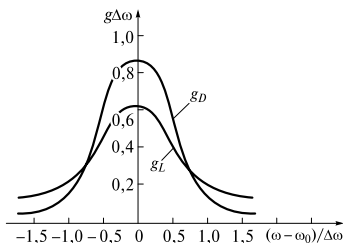


Рис. 4.5



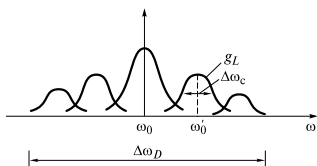


Рис. 4.6

### Полное уширение спектральной линии.

На практике часто реализуются оба случая одновременно. Поэтому уширение не бывает полностью однородным или неоднородным.

На рис. 4.6 схематично изображено несколько лоренцевых линий со сдвигом частоты  $\omega'_0$  вследствие эффекта Доплера. Эти линии взаимно перекрываются. Интенсивность линий распределена по нормально-

му закону, поскольку на рисунке изображена ситуация, когда  $\Delta\omega_D > \Delta\omega_c$ .

Интенсивность полного излучения всех атомов в узком частотном диапазоне  $\omega \div \omega + d\omega$  равна сумме интенсивностей всех лоренцевых линий со смещенными центральными частотами  $\omega'_0$ :

$$dI(\omega, \omega + d\omega) = I_0 d\omega \int_{-\infty}^{\infty} g_L(\omega - \omega'_0) g_D(\omega'_0) d\omega'_0 = I_0 g(\omega) d\omega, \quad (4.55)$$

где функция

$$g(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g_L(\omega - \omega'_0) g_D(\omega'_0) d\omega'_0 \quad (4.56)$$

описывает контур спектральной линии, уширенной за счет одновременного действия обоих механизмов. Она определяется так называемой *сверткой* функций  $g_L$  и  $g_D$ .

Если, например, однородное уширение очень мало ( $\Delta\omega_L \ll \Delta\omega_D$ ), то в (4.56) можно положить  $g_L(\omega - \omega'_0) = \delta(\omega - \omega'_0)$  ( $\delta$  — дельта-функция Дирака). Тогда интеграл (4.56) в соответствии со свойствами  $\delta$ -функции будет равен

$$g(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \omega'_0) g_D(\omega'_0) d\omega'_0 = g_D(\omega), \quad (4.57)$$

и вклад однородного уширения пренебрежимо мал.

**Фазовая модуляция и уширение спектра.** Рассмотрим вопрос о ширине спектра, пользуясь временным представлением. Если имеется импульс с длительностью  $\tau$ , в котором фазовая модуляция отсутствует (например, световой пучок (3.12), изображенный на рис. 3.5), то ширина его спектра обратно пропорциональна этой длительности, как это и выражается оценкой (3.15)  $\Delta\nu \sim 1/\tau$ .

Импульс без фазовой модуляции называется *спектрально ограниченным*. Если имеется фазовая модуляция с характерным временем  $\tau_\phi < \tau$ , то спектр такого импульса расширяется. На рис. 4.7 изображен пучок, у которого фаза в результате столкновений хаотично меняется в среднем через время  $\tau_\phi = \tau_c$ .

Ширина спектра в соответствии с (4.38) равна

$$\Delta\nu_\phi = \frac{\Delta\omega_c}{2\pi} = \frac{1}{\pi\tau_c} = \frac{1}{\pi\tau_\phi}. \quad (4.58)$$

Импульс с изменяющейся во времени фазой называется *фазово-модулированным*. Ширина его спектра больше, чем у спектрально ограниченного импульса той же длительности.

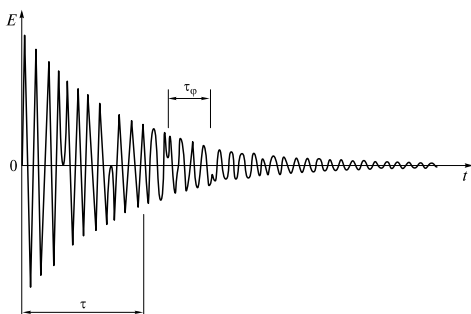


Рис. 4.7

На соотношениях (3.15) и (4.58) построена идея сжатия во времени (компрессии) световых импульсов. Так, если длительность спектрально ограниченного импульса равна  $\tau_1$ , то ширина его спектра  $\Delta\nu \sim 1/\tau_1$ . При создании фазовой модуляции со временем  $\tau_\phi < \tau_1$  спектр импульса расширится до величины  $\Delta\nu_\phi \sim 1/\tau_\phi$ . Такую быструю модуляцию можно создать лишь методами нелинейной оптики. Если затем эту модуляцию снять в линейной диспергирующей среде, то спектральная плотность не изменится, а длительность  $\tau_2$  нового спектрально ограниченного импульса уменьшится:

$$\tau_2 \sim \frac{1}{\Delta\nu_\phi} \sim \tau_\phi < \tau_1. \quad (4.59)$$

Более подробно об этом пойдет речь в разделе «Нелинейно-оптические явления».

## ЛЕКЦИЯ 5

**Квантовая природа излучения.** Классическая теория излучения, основанная на уравнениях Максвелла, не дает адекватного описания процессов излучения света атомами и молекулами. Это следует хотя бы из того, что по классической теории электрон в атоме, двигаясь по орбите с центростремительным ускорением, должен постоянно излучать электромагнитную волну. Но тогда, теряя энергию на излучение, он должен упасть на ядро.

Еще в XIX в. были измерены длины волн излучения простейшего атома — водорода, имеющего один электрон. По классической теории один осциллятор (электрон) должен излучать одну спектральную линию. На самом деле, как показали измерения, спектр излучения атома водорода состоит из большого числа спектральных линий, длины волн которых (частоты) определяются *комбинационным принципом*, сформулированным Ритцем:

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{\nu}{c} = R \left( \frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right), \quad (5.1)$$

где  $R = 109\,667,6 \text{ см}^{-1}$  — постоянная Ридберга;  $m$  и  $n$  — целые числа. Величина  $R/n^2$  называется *термом* атома водорода.

Поскольку спектр излучения простирается от инфракрасной до ультрафиолетовой области, линии были сгруппированы в четыре серии:

- *серия Лаймана* находится в дальней (наиболее удаленной от видимой) ультрафиолетовой части спектра. Длины волн этой серии определяются из (5.1) при  $m = 1$ ,  $n = 2, 3, 4, \dots$ ;

- *серия Бальмера* охватывает видимую и примыкающую к ней (ближнюю) ультрафиолетовую области. Для этой серии  $m = 2$ ,  $n = 3, 4, 5, \dots$  Эту серию можно наблюдать при газовом разряде в водороде. Она содержит более 40 линий. Часть линий этой серии изображена на рис. 5.1 цв. вкл.;

- *серия Пашена* занимает примыкающую к видимой (ближнюю) инфракрасную область. Для нее  $m = 3$ ,  $n = 4, 5, 6, \dots$ ;

- *серия Брэккета* расположена в дальней инфракрасной области. Для нее  $m = 4$ ,  $n = 5, 6, 7, \dots$

**Квантовые состояния атомов.** Для объяснения спектров излучения атомов датский физик Н. Бор выдвинул гипотезу о существовании у любого атома стационарных состояний. Каждое такое состояние характеризуется определенной энергией. Значения этих энергий (уровни энергии) отличаются на конечные величины (уровни разделены конечными интервалами). Испускание света атомом сопровождается его переходом из одного состояния с энергией  $W_2$  в состояние с энергией  $W_1$ , при этом излучается фотон частотой  $\nu_{21}$ , удовлетворяющей *комбинационному принципу Бора*:

$$h\nu_{21} = W_2 - W_1. \quad (5.2)$$

Сравнивая (5.2) и (5.1), можно записать выражение для энергии стационарного состояния:

$$W_n = -\frac{Rhc}{n^2}, \quad (5.3)$$

в котором целое число  $n$  называется *главным квантовым числом*.

Н. Бор также сделал допущение, предположив, что орбитальный момент количества движения электрона должен принимать дискретные значения:

$$L_n = n \frac{h}{2\pi}. \quad (5.4)$$

Полная энергия электрона, вращающегося по орбите радиуса  $a$ , равна

$$W = \frac{mv^2}{2} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a}. \quad (5.5)$$

Поскольку момент количества движения, согласно (5.4), составит величину

$$mav = n \frac{h}{2\pi}, \quad (5.6)$$

то, подставляя (5.6) в (5.5), с учетом уравнения движения Ньютона

$$\frac{mv^2}{a} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a^2}, \quad (5.7)$$

получаем выражение для энергии стационарного состояния атома водорода. В нем постоянная Ридберга получается равной

$$R = \frac{me^4}{8\epsilon_0^2 h^2}. \quad (5.8)$$

При подстановке в (5.8) значений констант получается значение постоянной Ридберга, совпадающее с ее экспериментальным значением, что является доказательством справедливости сделанных предположений.

Идея квантования энергии атомов получила свое дальнейшее развитие в квантовой механике. С помощью квантово-механических подходов удается рассчитать уровни энергии атомов и многих молекул, содержащих большое количество электронов. Такие задачи рассматриваются в курсе квантовой механики. Мы же будем считать энергетические уровни известными и обратимся к основным закономерностям оптических процессов при квантовых переходах в атомах вещества.

**Спонтанное излучение.** В светящемся электрическом разряде атомы постоянно сталкиваются с движущимися электронами. Получая энергию при столкновениях, они переходят на более высокие энергетические уровни. Однако затем *самопроизвольно (спонтанно)* начинается переход на более низкие уровни, сопровождающийся излучением квантов света. Каждый переход носит случайный характер. На рис. 5.1 схематично изображены энергетические уровни.

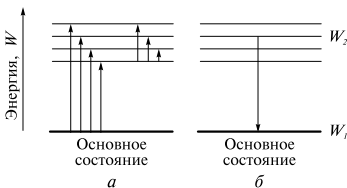


Рис. 5.1

На рис. 5.1, *а* показан процесс возбуждения атома, а на рис. 5.1, *б* — один из спонтанных переходов, сопровождающийся излучением фотона. Такое излучение называется *спонтанным излучением*.

Поскольку момент испускания фотона указать точно невозможно, то можно говорить лишь о вероятности перехода с уровня  $W_2$  на уровень  $W_1$ . Для этого вводят время жизни  $\tau$  возбужденного состояния  $W_2$ . Тогда за малый промежуток времени  $dt \ll \tau$  из общего числа  $N_2$  атомов, находящихся на уровне  $W_2$ , малая часть, равная  $-dN_2$ , его покинет:

$$-\frac{dN_2}{N_2} = \frac{dt}{\tau} = dp_N, \quad (5.9)$$

где  $dp_N = \frac{dt}{\tau}$  — вероятность акта спонтанного испускания; знак « $-$ » учитывает, что  $dN_2 < 0$ .

Если в результате кратковременного возбуждения  $N_{20}$  атомов оказались на уровне  $W_2$ , то со временем их число начнет, как следует из (5.9), убывать по экспоненциальному закону:

$$N_2(t) = N_{20} \exp\left(\frac{-t}{\tau}\right). \quad (5.10)$$

Вероятность перехода в единицу времени, как следует из (5.9), можно записать в виде:

$$\frac{dp_N}{dt} = \frac{1}{\tau} = A_{21}. \quad (5.11)$$

Эта вероятность (а точнее, плотность вероятности) равна постоянной величине  $A_{21}$ , получившей название *коэффициента Эйнштейна для спонтанного излучения* (в честь автора излагаемой теории).

Согласно принципу неопределенности ограниченность времени жизни «требует» неопределенности  $\Delta W_2$  значения энергии  $W_2$ :

$$\tau \Delta W_2 \approx h. \quad (5.12)$$

Но тогда и частота испускаемого фотона будет, согласно (5.2), находиться в пределах интервала

$$\Delta \nu_{21} = \frac{\Delta W_2}{h} \approx \frac{1}{\tau} = A_{21}. \quad (5.13)$$

Таким образом, атомом излучается спектральная линия, ширина которой пропорциональна коэффициенту  $A_{21}$ , или обратно пропорциональна времени жизни  $\tau$ . Если умножить обе части (5.10) на энергию фотона  $h\nu$ , то получим экспоненциальный закон убывания энергии, а следовательно, и интенсивности излучения:

$$I(t) = I_0 \exp(-A_{21}t). \quad (5.14)$$

По такому же закону убывает интенсивность излучения классического осциллятора с радиационным затуханием. Поэтому контур линии излучения будет лоренцевым с шириной  $\Delta \nu_{21} \sim A_{21}$ . По аналогии с формулой (4.40) можно записать

$$g(\nu) = \frac{2}{\pi} \frac{A_{21}}{4(\nu - \nu_{21})^2 + A_{21}^2}. \quad (5.15)$$

Следует отметить, что здесь не учитывается взаимодействие возбужденного атома с другими атомами.

Коэффициент  $A_{21}$  можно вычислить, если использовать квантово-механическое представление атома, а электрическое поле при этом считать классическим. В квантовой механике считается, что при переходах меняется конфигурация электронного облака вокруг ядра атома. Заряд этого облака постоянен и равен заряду электрона. Далее вводится квантовый осциллятор, обладающий электрическим дипольным моментом перехода

$$p_{21}(t) = er_{21} \cos\left(2\pi \frac{W_2 - W_1}{h} t\right) = p_{21} \cos 2\pi \nu_{21} t. \quad (5.16)$$

Здесь  $p_{21} = er_{21}$  — амплитуда дипольного момента, равная произведению заряда электрона на расстояние  $r_{21}$  между «центрами зарядов» двух облаков, соответствующих энергиям  $W_2$  и  $W_1$  атома. Величина  $p_{21}$  рассчитывается с помощью волновых функций, являющихся решениями уравнения Шредингера.

Используя затем классическую формулу (3.4) для мощности излучения квантового осциллятора, получаем

$$P = \frac{8\pi^3 e^2 r_{21}^2 \nu_{21}^4}{3\epsilon_0 c^3}. \quad (5.17)$$

Если эту мощность разделить на энергию фотона  $h\nu_{21}$ , то отношение будет равно числу спонтанных квантовых переходов в единицу времени, а это число обратно пропорционально времени жизни. Поэтому

$$A_{21} = \frac{1}{\tau} = \frac{P}{h\nu_{21}} = \frac{8\pi^3 e^2 r_{21}^2 \nu_{21}^3}{3\epsilon_0 c^3 h}. \quad (5.18)$$

Коэффициент  $A_{21}$  зависит от частоты  $\nu_{21}$  и амплитуды дипольного момента перехода. Если для видимого диапазона ( $\lambda = 0,5 \cdot 10^{-4}$  см) положить  $\nu_{21} = 0,6 \cdot 10^{15}$  Гц,  $r_{21} \sim 10^{-8}$  см, то  $A_{21} \sim 10^8$  с<sup>-1</sup>.

В качестве примера приведем коэффициенты  $A_{mn}$  для некоторых линий атомарного водорода (серия Лаймана  $L$  и Бальмера  $H$ ):

|  |            |           |            |            |           |            |            |
|--|------------|-----------|------------|------------|-----------|------------|------------|
| Символ линии .....                               | $L_\alpha$ | $L_\beta$ | $L_\gamma$ | $H_\alpha$ | $H_\beta$ | $H_\gamma$ | $H_\delta$ |
| $\lambda$ , нм .....                             | 121,6      | 102,6     | 97,3       | 653,6      | 486,1     | 434,0      | 410,2      |
| $A_{mn}$ , 10 <sup>8</sup> с <sup>-1</sup> ..... | 4,68       | 0,55      | 0,13       | 0,44       | 0,084     | 0,025      | 0,0097     |

Отметим, что функция  $g(\nu)$ , описывающая контур линии, получает новую статистическую интерпретацию:  $g(\nu)d\nu$  — это *вероятность испускания фотона с частотой в интервале  $\nu + \nu + d\nu$  за единицу времени*. Эта вероятность может быть представлена в виде

$$g(\nu)d\nu = \frac{A_\nu d\nu}{A_{21}}, \quad (5.19)$$

где  $A_\nu$  — спектральная плотность коэффициента Эйнштейна  $A_{21}$ . Она связана с контуром линии следующей формулой:

$$A_\nu = A_{21}g(\nu). \quad (5.20)$$

Спонтанное излучение является основным механизмом излучения многих источников света: газоразрядных ламп, электрических дуг, пламени и др.

Спонтанному излучению обязано существование одного из красивейших природных явлений — полярного сияния. Во время полярного сияния на широтах  $60—70^\circ$  ночное небо светится в результате проникновения ускоренных частиц высоких энергий из хвоста магнитосферы в верхние слои ( $100—400$  км) атмосферы. Эти частицы возбуждают атомы кислорода и азота, которые начинают излучать свет. В видимой области полярное сияние обусловлено свечением атомарного кислорода на длинах волн  $557,7$ ;  $630$  и  $636,4$  нм и ионизированного молекулярного азота на длинах волн  $391,4$ ;  $427,8$  и  $522,8$  нм. На рис. 5.2 цв. вкл. показано свечение ночного неба в северных широтах, иллюстрирующее описанное явление.

В редких случаях сияние возникает и на низких широтах. Одно из них наблюдалось 24 октября 1870 г. в Париже и показано на рис. 5.3 цв. вкл. (из книги К. Фламариона «Атмосфера», изданной в Санкт-Петербурге в 1900 г.)

**Вынужденное поглощение.** Атомы вещества, переходя в возбужденное состояние, поглощают энергию, поставляемую веществу различными способами. В частности, при падении света на вещество атом может поглощать световые кванты. Скорость их поглощения тем больше, чем выше интенсивность падающего света. Поэтому поглощение называется *вынужденным*.

Вероятность перехода с уровня  $W_1$  на какой-либо верхний уровень  $W_2$  запишем в виде

$$dp_N = B_{12}u_\nu dt = -\frac{dN_1}{N_1}, \quad (5.21)$$

где  $u_\nu$  — спектральная плотность объемной энергии  $u$  электромагнитного поля (см. формулу (2.1)). Коэффициент  $B_{12}$  называется *коэффициентом Эйнштейна для вынужденного поглощения*. Как будет показано далее,  $B_{12}$  связан с  $A_{21}$ . Вынужденное поглощение в классической электродинамике связано с потерей энергии световой волны при совершении ею работы над осциллятором — электроном.

**Вынужденное излучение.** При вынужденном излучении атом переходит (как и при спонтанном излучении) с уровня  $W_2$  на уровень  $W_1$  с вероятностью

$$dp_N = B_{21}u_\nu dt = -\frac{dN_2}{N_2}, \quad (5.22)$$

где  $B_{21}$  — коэффициент Эйнштейна для вынужденного излучения. Он также связан с коэффициентом  $A_{21}$ .

При вынужденном излучении рождаются фотоны, неотличимые от тех, которые находятся в падающем излучении. С классической точки зрения это можно интерпретировать так, что фаза, частота, состояние поляризации и направление распространения излучаемой волны такие же, как и у падающей.

**Излучение молекул.** У одноатомных газов (например, благородных газов, паров металлов) спектры излучения представляют собой (как и у атомарного водорода) ряд линий. Такой спектр называется *линейчатым*. Если же газ состоит из молекул, содержащих два и более атома, то спектральные линии группируются в полосы, и спектр называют *линейчато-полосатым*. Возбудить молекулярные спектры можно в пламени горелки, электрической дуге, избегая при этом распада (диссоциации) молекул.

Молекулярные спектры значительно сложнее атомных. Их можно истолковать, если корректно рассчитать энергию молекулы. Эта энергия в большей степени связана с электронной конфигурацией. Однако при заданной конфигурации молекулы могут иметь разные энергетические состояния, обусловленные относительно колебаниями атомов и их вращением относительно центра масс.

Энергию молекулы можно в первом приближении представить в виде

$$W = W_e + W_v + W_r, \quad (5.23)$$

где  $W_e$  — энергия, обусловленная энергией электронов (*электронная энергия*);  $W_v$  — энергия, обусловленная колебаниями ядер (*вибрационная энергия*);  $W_r$  — энергия, обусловленная вращением ядер (*ротационная энергия*). Все эти величины могут принимать только дискретные (квантованные) значения.

У двухатомной молекулы имеется одна колебательная степень свободы. Колебательная энергия — это энергия гармонического квантового осциллятора

$$W_v = h\nu_v \left( v + \frac{1}{2} \right), \quad (5.24)$$

где  $v = 0, 1, 2, \dots$  — *колебательное квантовое число*.

При вращении молекулы ее момент количества движения равен  $L = \frac{h}{2\pi} \sqrt{r(r+1)}$ , где  $r = 0, 1, 2, \dots$  — *вращательное квантовое число*. Энергия при этом вращении

$$W_r = \frac{L^2}{2J_0} = \frac{h^2}{8\pi^2 J_0} r(r+1), \quad (5.25)$$

где  $J_0$  — момент инерции молекулы.

Испускание света происходит с частотой, удовлетворяющей условию

$$h\nu_{21} = W_2 - W_1 = W_{e2} - W_{e1} + W_{v2} - W_{v1} + W_{r2} - W_{r1} = h\nu_e + h\nu_v + h\nu_r. \quad (5.26)$$

Частоты электронных переходов  $\nu_e$  соответствуют близкой ИК-, видимой и УФ-областям спектра, длины волн  $\lambda_e \sim 0,1 - 1,0$  мкм. Частоты  $\nu_v$  соответствуют близкой ИК-области и  $\lambda_v \sim 1,0 - 50$  мкм.

Частоты  $\nu_r$  принадлежат миллиметровому и даже сантиметровому диапазону:  $\lambda_r \sim 50 - 1\,000$  мкм.

В силу этого структура энергетических уровней представляет собой системы уровней (рис. 5.2).

Ситуация выглядит так, как если бы каждый из электронных уровней «расщепился» на колебательные уровни с квантовым числом  $v$ , а они в свою очередь «расщепляются» на еще более тесно расположенные вращательные уровни.

При падении света на вещество может быть поглощен квант света. Этот процесс изображен стрелками, направленными вверх, а длина стрелок отображает энергию кванта. Разрешенными будут лишь те переходы, для которых  $\Delta r = \pm 1$ . Эти ограничения называются *правилами отбора*.

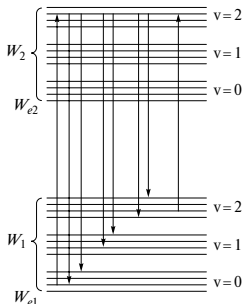


Рис. 5.2



После поглощения может возникнуть ряд спонтанных переходов (изображены стрелками, направленными вниз), при которых и будет возникать излучение с полосатым спектром. Естественно, что возбуждать молекулярные спектры, как и атомные, можно и другими способами: электрическим разрядом, в пламени горелки, в электрической дуге и т.д.

На рис. 5.4 цв. вкл. показаны некоторые спектральные линии атомарного натрия, паров меди, полосатые спектры молекул CN и C<sub>2</sub> в угольной дуге и паров молекулы йода.

**Люминесценция.** При возбуждении светом газы, жидкости и твердые тела могут испускать излучение (в виде спектральных линий, полос и сплошного спектра). Как правило, длины волн излучаемого света превышают длину волны возбуждающего света. Это явление носит название *люминесценция*.

На рис. 5.5 цв. вкл. красным цветом светится кристалл рубина, который возбуждается зеленым светом Ag-лазера, падающим слева. Опыт показывает, что при прекращении облучения люминесценция будет продолжаться некоторое время (время послесвечения), которое намного превышает период оптических колебаний. Длительность послесвечения  $\tau_{\text{л}}$  занимает большой временной диапазон:  $10^{-9} \text{ с} < \tau_{\text{л}} < 10^6 \text{ с}$ .

Если люминесценция исчезает быстро ( $\tau_{\text{л}} \sim 10^{-9} - 10^{-8} \text{ с}$ ), то она называется *флюоресценцией*. Если же процесс послесвечения длителен, то имеет место *фосфоресценция*. Такое деление люминесценции весьма условно, и временная граница для  $\tau_{\text{л}}$  отсутствует. Однако механизмы флюоресценции и фосфоресценции принципиально разные.

Изменение частоты испускаемого света по отношению к частоте возбуждаемого света было обнаружено Дж. Стоксом и носит название *правила Стокса*. Согласно этому правилу спектр флюоресценции сдвинут в сторону длинных волн по сравнению со спектром поглощения. Компоненты спектра люминесценции получили название *стоксовых компонент*. Однако были обнаружены и *антистоксовые компоненты*, сдвинутые в противоположную, коротковолновую, область.

С энергетической точки зрения оба явления описываются соотношением

$$h\nu = h\nu_0 - W, \quad (5.27)$$

где  $h\nu_0$  — энергия фотона, возбуждающего атом;  $h\nu$  — энергия излученного при люминесценции фотона.

Для стоксовых компонент часть  $W$  энергии возбуждающего фотона расходуется на внутримолекулярные процессы. Для антистоксовых компонент  $W < 0$ . В этом случае излучаемый фотон заимствует энергию тепловых колебаний атомов или молекул. Этот вывод подтверждается повышением интенсивности антистоксовых компонент при нагревании вещества.

Появление стоксовых и антистоксовых компонент иллюстрируется на рис. 5.2. Здесь частота спектральных линий меньше частоты возбуждающего кванта, когда процесс возбуждения показан стрелкой вверх слева. Однако если предварительно возбудить атом каким-либо способом, то эти линии люминесценции возникнут при облучении квантом меньшей энергии (стрелка справа).

Спектры излучения двухатомных молекул достаточно хорошо расшифровываются. Их анализ позволяет оценить момент инерции молекулы, частоты молекулярных колебаний и т.д. Гораздо сложнее связать спектры излучения

со структурой многоатомных молекул. Расчет энергий их стационарных состояний зачастую представляет собой весьма трудную задачу. Кроме того, интенсивность спектральных линий невелика, а различие в частотах бывает весьма незначительным. Все это затрудняет изучение многоатомных молекул.

Линейчато-полосатые спектры излучают сравнительно разреженные молекулярные газы и пары веществ. С повышением их плотности возникает взаимодействие молекул, приводящее к изменению энергетических состояний. В плотных газах, жидкостях и твердых телах уровни расширяются и сливаются в энергетические зоны. При переходах атомов и молекул одной зоны в другую излучается сплошной спектр в пределах ограниченной спектральной области.

Люминесцирующие вещества называются *люминофорами*. Чтобы вещество было способно люминесцировать, необходимо, чтобы энергетические зоны не перекрывались, т.е. они должны быть разделены запрещенными зонами. Металлы, находясь в твердой и жидкой фазах, не люминесцируют, поскольку не имеют запрещенных зон. Энергия возбуждающего света в них полностью переходит в тепловую энергию.

Помимо этого, в веществе возбужденный атом может совершать и безызлучательный переход в более низкие энергетические состояния, отдавая энергию другим молекулам или кристаллической решетке. Это приводит к так называемому *тушению люминесценции*.

Вероятность безызлучательных переходов возрастает с повышением температуры (температурное тушение), концентрации (концентрационное тушение) и примесей (примесное тушение). Поэтому еще одним необходимым условием возникновения люминесценции является превышение вероятности излучательных переходов над вероятностью безызлучательных.

## ЛЕКЦИЯ 6

**Тепловое излучение.** Тела, нагретые до температуры выше  $500^{\circ}\text{C}$ , начинают светиться т.е. излучать видимый свет. Хорошо известно, что по мере повышения температуры уголь в костре или раскаленные металлы красную окраску сменяют на белую. Это свидетельствует о том, что спектр их излучения обогащается более короткими волнами.

Опыт показывает, что если в некотором объеме, окруженном оболочкой, находятся нагретые тела, то там существует и электромагнитное излучение. Например, при открытии дверцы топки дровяной печи ощущается жар, обусловленный выходящим из топки электромагнитным излучением. Если оболочка будет адиабатической (теплонепроницаемой), то по истечении некоторого времени установится *термодинамическое равновесие: тела будут иметь одинаковую температуру, а излучение — объемную плотность энергии, распределение которой по длинам волн не зависит от природы тел и стенок, а определяется лишь их температурой.*

Такое излучение находится в равновесии с нагретыми телами и называется *равновесным тепловым излучением*. Фундаментальной характеристикой этого излучения является спектральная плотность  $u_{\nu T}$  объемной плотности энергии  $u_T$  электромагнитного поля:

$$u_T = \frac{1}{2}(\epsilon_0 E^2 + \mu_0 H^2) = \int_0^{\infty} u_{\nu T} d\nu, \quad (6.1)$$

где  $u_{\nu T}$  — универсальная функция частоты  $\nu$ , зависящая от температуры  $T$  как от параметра.

**Правило Прево.** Пусть внутри адиабатической оболочки находятся два тела, обладающие различной способностью поглощать свет (например, хорошо поглощающий уголь и мало поглощающий, но сильно отражающий свет мел, рис. 6.1).

Из факта существования термодинамического равновесия следует утверждение: *если два тела поглощают разные количества энергии, то и их испускание различно.* Это утверждение было сформулировано в 1809 г. швейцарским физиком П. Прево и получило название *правила Прево*. Следуя этому правилу, можно утверждать, что уголь лучше излучает, чем мел. Действительно, если уголь

и мел нагреть в печи до одинаковой температуры порядка  $1000^{\circ}$  и затем их извлечь из печи, то в затемненной аудитории уголь будет белым, а мел — темным.

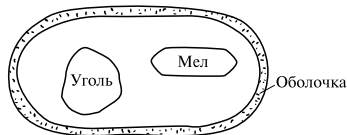


Рис. 6.1

**Закон Кирхгофа.** Количественную интерпретацию правила Прево можно сформулировать следующим образом:

способность тела к излучению определяется потоком энергии, испускаемой единицей площади поверхности в единицу времени в телесном угле  $2\pi$ . На рис. 6.2 схематично изображен процесс излучения единичной площадкой поверхности тела, испускающей электромагнитные волны, изображенные волнистыми стрелками. Такими стрелками принято обозначать кванты света (фотоны).



Рис. 6.2

Этот поток  $E_T$  называется *излучательной способностью* тела. Излучательная способность распределена по частотам или длинам волн:

$$E_T = \int_0^{\infty} E_{\nu T} d\nu = \int_0^{\infty} E_{\lambda T} d\lambda. \quad (6.2)$$

Она зависит от природы нагретого тела и его температуры. Спектральные плотности  $E_{\nu T}$  и  $E_{\lambda T}$  описывают спектр теплового излучения. Они связаны очевидным условием:

$$E_{\nu T} d\nu = E_{\lambda T} d\lambda. \quad (6.3)$$

Поскольку  $\nu = \frac{c}{\lambda}$ , то  $d\nu = \left| \frac{-c}{\lambda^2} \right| d\lambda$ , поэтому

$$E_{\nu T} = \frac{\lambda^2}{c} E_{\lambda T}. \quad (6.4)$$

При термодинамическом равновесии на единицу поверхности падает поток  $\epsilon_T$ , имеющий распределение по частотам  $\epsilon_{\nu T}$ . Способность тела к поглощению характеризуется *поглощательной способностью*

$$A_{\nu T} = \frac{E_{\nu T}}{\epsilon_{\nu T}}, \quad (6.5)$$

равной отношению спектральной плотности поглощенной энергии (при равновесии она равна плотности излученной энергии  $E_{\nu T}$ ) к спектральной плотности упавшего потока. Поглощательная способность зависит от частоты и температуры.

Опыт показывает, что при *термодинамическом равновесии спектральная плотность  $\epsilon_{\nu T}$  падающего потока является универсальной функцией частоты  $\nu$  и температуры  $T$  и не зависит от природы нагретых тел.*

Формула (6.5), записанная в виде

$$\frac{E_{\nu T}}{A_{\nu T}} = \epsilon_{\nu T}, \quad (6.6)$$

позволяет утверждать, что *для тела любой природы отношение излучательной и поглощательной способностей является универсальной функцией частоты и температуры. Это утверждение и является законом Кирхгофа.*

Таким образом, во главу угла ставится фундаментальная характеристика равновесного теплового излучения  $\epsilon_{\nu T}$ . Она связана со спектральной плотностью  $u_{\nu T}$  соотношением

$$\epsilon_{\nu T} = \frac{c}{4} u_{\nu T}. \quad (6.7)$$

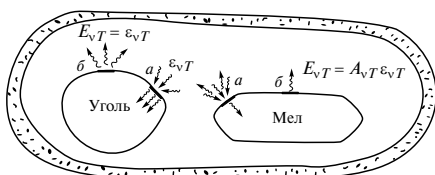


Рис. 6.3

Подобное соотношение связывает (в молекулярной физике) поток частиц на единицу площади с их концентрацией, когда средняя скорость частиц равна  $c$ .

Поглощательная способность может сильно различаться (лучше всего поглощают свет оксиды металлов, сажа, уголь). Если  $A_{vT} = 1$ , то такое тело называется *абсолютно черным*. Естественно, что это физическая абстракция, как и абсолютно твердое тело в механике.

Хорошей иллюстрацией закона Кирхгофа является опыт, суть которого изображена на рис. 6.3.

Если в печь поместить уголь и мел и при достижении теплового равновесия наблюдать их через малое отверстие в печи, то они будут практически неразличимыми. Уголь поглощает весь поток  $\epsilon_{vT}$  и этот же поток излучает. Мел поглощает только часть этого потока  $A_{vT}\epsilon_{vT}$ , а часть, равную  $(1 - A_{vT})\epsilon_{vT}$ , отражает. Мел излучает  $E_{vT} = A_{vT}\epsilon_{vT}$ , что вместе с отраженной энергией составит величину  $\epsilon_{vT}$ . На рисунке падающие, поглощенные, отраженные фотоны вблизи единичных площадок ( $a$ ) изображены волнистыми стрелками. Чтобы не перегружать рисунок, излученные фотоны изображены у других площадок ( $б$ ).

Если оба тела извлечь из печи, то, как отмечалось ранее, в темноте уголь будет белым, а мел — черным. Излучение последнего мало, а отражать практически нечего: плотность энергии электромагнитного поля в открытом пространстве значительно меньше равновесной.

Дальнейшее развитие учения о тепловом излучении было связано с увлекательным поиском универсальной функции  $\epsilon_{vT}$ , которая является излучательной способностью черного тела (далее термин «абсолютное» употреблять не будем).

**Закон Стефана — Больцмана.** Первый шаг в этом направлении был сделан австрийским физиком Н. Стефаном, который ошибочно полагал (1879), что излучательная способность любого тела  $E_T \sim T^4$ . Позднее его соотечественник Л. Больцман, используя термодинамику, доказал (1884), что лишь *излучательная способность черного тела пропорциональна четвертой степени его температуры*:

$$\epsilon_T = \int_0^{\infty} \epsilon_{vT} dv = \sigma T^4, \quad (6.8)$$

где  $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-18} \text{ Вт} \cdot \text{м}^{-2} \text{К}^{-4}$ .

Утверждение (6.8) составляет суть закона *Стефана — Больцмана*. Его можно доказать следующим образом.

Пусть равновесное тепловое излучение находится внутри цилиндра, стенки которого имеют температуру  $T$ . Цилиндр закрыт черным поршнем, полностью поглощающим излучение. Световое давление на поршень  $p = u_T/3$ . Внутренняя энергия термодинамической системы — излучения  $U = u_T V$  ( $V$  — объем цилиндра под поршнем). Воспользуемся термодинамическим тождеством  $\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = T \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V - p$ . Подставляя в данное тождество значения  $p$  и  $U$ , запишем

$$u_T = \frac{1}{3} T \frac{du_T}{dT} - \frac{1}{3} u_T. \quad (6.9)$$

После разделения переменных имеем

$$4 \frac{dT}{T} = \frac{du_T}{u_T}. \quad (6.10)$$

Интегрируя (6.10), окончательно получим

$$u_T = [\text{const}] T^4. \quad (6.11)$$

Рассчитать константу можно лишь используя квантовое представление излучения. Переходя от  $u_T$  к  $\epsilon_T$ , получаем закон Стефана — Больцмана.

**Закон смещения Вина.** Предыдущий закон устанавливает весьма сильную зависимость объемной плотности  $u_T$  от температуры  $T$ , что имеет большое практическое значение. Однако он не дает ответа на вопрос о спектральной плотности  $u_{\nu T}$ . Следующая попытка ее нахождения была предпринята немецким исследователем М. Вином (1893). Рассматривая адиабатическое сжатие излучения в зеркальном цилиндре с учетом доплеровского смещения частоты при отражении от движущегося поршня, он пришел к выводу, что

$$\epsilon_{\nu T} = c\nu^3 f\left(\frac{\nu}{T}\right), \quad (6.12)$$

где  $f$  — функция, вид которой определить не удалось. Однако важная информация заключена в зависимости этой функции от отношения  $\frac{\nu}{T}$ . Если, согласно (6.4), записать (6.12) в виде

$$\epsilon_{\lambda T} = \frac{c^5}{\lambda^5} f\left(\frac{c}{\lambda T}\right) \quad (6.13)$$

и найти положение максимума этой функции  $\lambda = \lambda_{\text{max}}$  из условия  $\frac{d\epsilon_{\lambda T}}{d\lambda} = 0$ , то получится соотношение

$$T\lambda_{\text{max}} = b, \quad (6.14)$$

где  $b = 2,898 \cdot 10^7 \text{ Å K}$  — постоянная, не зависящая от температуры. Она рассчитывается методами квантовой механики.

Формула (6.14) является математическим выражением *закона смещения Вина*: с повышением температуры положение максимума функции  $\epsilon_{\lambda T}$  смещается в область более коротких длин волн. Это легко наблюдать при повышении температуры нагретых тел, которые вначале испускают ИК-излучение и поэтому не светятся, затем становятся красными, а при высоких температурах — практически белыми.

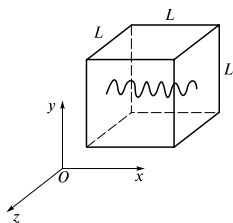


Рис. 6.4

**Формула Планка.** Неудачные попытки рассчитать спектральную плотность  $u_{\nu T}$  или  $\epsilon_{\nu T}$  были связаны с тем, что законы классической электродинамики не позволяют адекватно описать процесс излучения тел.

Ранее было отмечено, что квантовый осциллятор имеет дискретный набор значений энергии. Подобным образом ведет себя и электромагнитное поле. Оно обладает дискретным набором состояний с определенной энергией (электромагнитное поле квантуется).

Если равновесное тепловое излучение находится в объеме в виде куба  $L \times L \times L$ , то электромагнитное поле можно представить в виде набора стоячих волн, или *мод* (рис. 6.4).

Волновые числа таких волн должны удовлетворять граничным условиям

$$k_x L = m_x \pi; \quad k_y L = m_y \pi; \quad k_z L = m_z \pi, \quad (6.15)$$

где  $m_x, m_y, m_z = 1, 2, 3, \dots$

Число волн, у которых волновые числа заключены в «объем»  $dk_x dk_y dk_z$ , согласно (6.15) равно

$$dN = dm_x dm_y dm_z = \frac{L^3}{\pi^3} dk_x dk_y dk_z. \quad (6.16)$$

Если принять, что у каждой волны возможны две взаимно перпендикулярные поляризации, то число волн (мод) в единице объема куба, у которых волновые числа  $k = 2\pi\nu/c$  заключены в интервале  $k, k + dk$ , очевидно, равно

$$dn = \frac{2dN}{L^3} \frac{4\pi k^2 dk}{8}. \quad (6.17)$$

При подсчете (6.17) «объем» в пространстве волновых чисел выбран в виде  $1/8$  сферического слоя радиуса  $k$  и толщиной  $dk$ , поскольку  $k_x, k_y, k_z > 0$  (рис. 6.5).

Если предположить, что средняя энергия моды, как и у классического осциллятора, при термодинамическом равновесии  $\langle \epsilon \rangle = kT$ , то спектральная плотность будет равна

$$u_{\nu T} = \frac{dn}{d\nu} \langle \epsilon \rangle = n_\nu \langle \epsilon \rangle = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} kT. \quad (6.18)$$

Эту формулу получил Дж.Рэлей (1900), а затем обосновал Д.Джинс. Она называется *формулой Рэля—Джинса*.

Тогда излучательная способность черного тела была бы равна

$$\epsilon_{\nu T} = \frac{c}{4} u_{\nu T} = \frac{2\pi\nu^2}{c^2} kT. \quad (6.19)$$

Эта формула дает согласие с экспериментом лишь при малых частотах. При  $\nu \rightarrow \infty$  функция  $\epsilon_{\nu T}$  неограниченно возрастает, что, естественно, противоре-

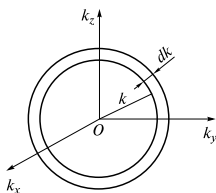


Рис. 6.5

чит действительности. Неограниченное возрастание излучательной способности получило название *ультрафиолетовой катастрофы*.

Чтобы устранить этот принципиальный недостаток, Вин предположил, что моды с разными частотами возбуждены по-разному, а энергия каждой моды  $\epsilon_v = h\nu$ . Если воспользоваться распределением Больцмана, то в (6.18)  $n_v$  следует заменить величиной  $n_v \exp\left(-\frac{h\nu}{kT}\right)$ , а среднюю энергию положить равной  $\langle\epsilon_{vT}\rangle = h\nu$ . Тогда вместо (6.19) получится

$$\epsilon_{vT} = \frac{c}{4} n_v \exp\left(-\frac{h\nu}{kT}\right) h\nu = \frac{2\pi h\nu^3}{c^2} \exp\left(-\frac{h\nu}{kT}\right). \quad (6.20)$$

Однако эта формула дает согласие с экспериментом лишь в области больших частот, когда  $h\nu \gg kT$ .

В 1900 г. М. Планк эмпирически записал свою знаменитую формулу

$$\epsilon_{vT} = \frac{2\pi h\nu^3}{c^2} \frac{1}{\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1}, \quad (6.21)$$

получившую название *формулы Планка*. Эта формула удивительно хорошо описывает излучение черного тела. При малых частотах  $h\nu \ll kT$  она совпадает с (6.18), а при  $h\nu \gg kT$  — с (6.20).

Методами классической физики эту формулу получить не удалось. Это доказывает, что излучение вещества подчинено законам квантовой физики.

Формулу Планка можно получить, если допустить, что мода с частотой  $\nu$  может иметь дискретные значения энергии  $\epsilon_v = nh\nu$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ). Все моды возбуждены в равной мере (как и при выводе формулы Рэлея — Джинса). *Среднюю энергию моды* можно подсчитать по формуле

$$\langle\epsilon_v\rangle = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} nh\nu \exp\left(-\frac{nh\nu}{kT}\right)}{\sum_{n=0}^{\infty} \exp\left(-\frac{nh\nu}{kT}\right)} = \frac{h\nu}{\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1} = n_\phi h\nu. \quad (6.22)$$

Здесь использовано распределение Больцмана для каждой моды. Величина

$n_\phi = \left[\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1\right]^{-1}$  равна *среднему числу фотонов в моде*. Подставив (6.22)

в (6.18) и переходя к (6.19), получаем формулу Планка.

Тепловое излучение является суммой спонтанного и вынужденного излучений при квантовых переходах атомов вещества в нагретом состоянии. Энергетические уровни атомов черного тела должны представлять собой сплошную энергетическую зону. Это следует из того, что черное тело должно поглощать кванты любой энергии. Если рассмотреть любую пару энергетических уровней атомов нагретого вещества, то при переходах атомов будет излучаться или поглощаться квант света с энергией  $h\nu = W_2 - W_1$ . Если число атомов с энергией  $W_1$  равно  $N_1$ , а с энергией  $W_2 = N_2$ , то в состоянии равновесия эти числа со временем не должны изменяться при спонтанных и вынужденных переходах, поэтому



$$\frac{dN_2}{dt} = -N_2 A_{21} - B_{21} u_{\nu T} N_1 = 0. \quad (6.23)$$

В состоянии термодинамического равновесия

$$\frac{N_2}{N_1} = \frac{g_2}{g_1} \exp\left(-\frac{W_2 - W_1}{kT}\right) = \frac{g_2}{g_1} \exp\left(-\frac{h\nu}{kT}\right). \quad (6.24)$$

Здесь  $g_1, g_2$  — кратность вырождения энергетического уровня, равная числу уровней с одной и той же энергией (главным квантовым числом), но с отличающимися другими квантовыми числами.

Выразив из (6.23) и (6.24) величину  $u_{\nu T}$  и перейдя к  $\epsilon_{\nu T}$ , получим

$$\epsilon_{\nu T} = \frac{c}{4} \frac{A_{21} / B_{21}}{\frac{B_{12} g_1}{B_{21} g_2} \exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1}. \quad (6.25)$$

Сравнивая (6.25) с (6.21), находим

$$A_{21} = B_{21} \frac{8\pi h \nu^3}{c^3}; \quad B_{12} g_1 = B_{21} g_2. \quad (6.26)$$

Таким образом, все коэффициенты Эйнштейна связаны между собой. Эта связь носит универсальный характер, и она справедлива для любого вещества вне зависимости от его агрегатного состояния. Этот важный вывод будет неоднократно применен в дальнейшем.

**Применение законов теплового излучения.** Для практических целей используют излучательную способность как функцию длины волны. Для черного тела, согласно (6.4), она равна

$$\epsilon_{\lambda T} = \frac{c}{\lambda^2} \epsilon_{\nu T} = \frac{2\pi h c^2}{\lambda^5} \frac{1}{\exp\left(\frac{hc}{\lambda kT}\right) - 1}. \quad (6.27)$$

Зависимости  $\epsilon_{\lambda T}$  (в относительных единицах) от длины волны при разных температурах показаны на рис. 6.6.

По мере увеличения температуры возрастает площадь под кривой ( $\sim T^4$ ), и максимум смещается в область коротких длин волн. Тело начинает светиться, когда кривая «накрывает» видимый диапазон длин волн.

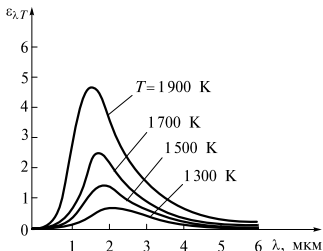


Рис. 6.6

На рис. 6.1 цв. вкл. представлены результаты компьютерного моделирования свечения черного тела при трех различных температурах. При каждой температуре показан фрагмент кривой (6.27) и под ней видимая часть спектра, воспринимаемая нашим глазом. Рядом в квадрате изображена светящаяся поверхность черного тела. Видно, что с повышением температуры черное тело «раскаляется добела».

Как отмечалось ранее, абсолютно черное тело является абстракцией. Наиболее близко к нему излучение нагретой сферической полости с малым отверстием в ней. Действительно, при попадании луча света любой частоты через отверстие внутрь сферы он будет испытывать многократное отражение, теряя при каждом из них часть энергии (рис. 6.7). Следовательно, поглощающая способность для всех частот равна  $A_v = 1$ .

При нагревании полости в ней будет находиться равновесное излучение, которое будет выходить через отверстие. Согласно закону Кирхгофа, спектр излучения будет одинаков со спектром черного тела. Особо следует подчеркнуть, что спектр излучения не зависит от материала, из которого изготовлена сфера: его поглощение, отражение и излучение не имеют никакого значения.

Несколько в меньшей степени похожи на черное тело сажа, уголь, оксиды металлов. Еще больше отличаются от черного тела металлы. На рис. 6.8 приведены распределения энергии излучения черного тела и «серого» вольфрама. Видно, что светоотдача у вольфрама существенно меньше. Для ее оценки используют отношение  $\theta_T = E_T / \epsilon_T$ . У металлов  $\theta_T$  лежит в диапазоне 0,1—0,3, а у более черных тел доходит до 0,9. Чтобы усилить светоотдачу лампы накаливания, увеличивают температуру ее нити. Для того чтобы нить не разрушалась, колбу лампы заполняют инертным газом (галогенные лампы). Повышение температуры нити на 10 %, согласно закону Стефана—Больцмана, приводит к увеличению  $E_T = \theta_T \sigma T^4$  почти на 50 %.

Законы теплового излучения применяют для дистанционного измерения температуры раскаленных тел. Поскольку светящиеся объекты отличаются от черного тела, то определяют не истинную, а так называемые *радиационную* и *цветовую* температуры.

Радиационная температура  $T_r$  вводится для тела с помощью закона Стефана—Больцмана

$$E_T = \theta_T \sigma T^4 = \sigma T_r^4. \quad (6.28)$$

Истинная температура

$$T = \frac{T_r}{\sqrt[4]{\theta_T}} \quad (6.29)$$

всегда больше радиационной, поскольку  $\theta_T < 1$ .

Для измерения радиационной температуры используются радиационные пирометры, представляющие собой оптическую систему, направляющую собираемый ею световой поток от исследуемого объекта на тепловой приемник

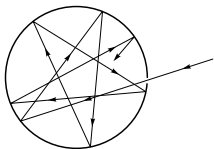


Рис. 6.7

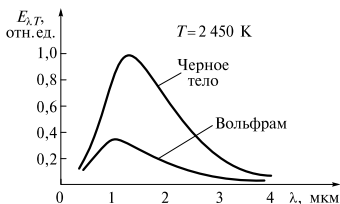


Рис. 6.8

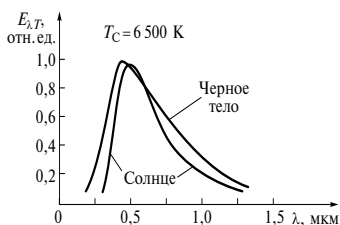


Рис. 6.9

(см. лекцию 25). Пирометром измеряется попадающий в него световой поток. Он предварительно градуируется по черному телу с известной температурой.

Цветовая температура  $T_C$  используется для тел, близких к черному телу. Она определяется как температура черного тела, имеющего такой же цвет, как и исследуемое тело. Поскольку цвет определяется распределением энергии в спектре, то для определения цветовой температуры измеряют  $E_{λ,T}$  и затем под-

бирают функцию  $\epsilon_{λ,T}$ , наиболее близко совпадающую с измеряемой.

На рис. 6.9 приведено сравнение спектров излучения Солнца и черного тела при  $T_C = 6500$  К. Поскольку Солнце похоже на черное тело, можно использовать закон смещения Вина для определения его температуры. С учетом поправок на поглощение в атмосфере  $\lambda_{\text{max}} = 470$  нм, что соответствует  $T = 6150$  К. Эта величина меньше цветовой температуры, так как Солнце не является черным телом.

**Ширина видимого диапазона.** Видимая область спектра чрезвычайно узка — от 0,4 до 0,7 мкм. Причин тому несколько. Прежде всего, середина диапазона приходится на длину волны  $\lambda \sim 0,5$  мкм, что близко к максимуму  $E_{λ,T}$  излучения Солнца. При прохождении света через атмосферу Земли волны с  $\lambda < 0,3$  мкм поглощаются озоном  $O_3$  в верхних ее слоях. Поэтому доля энергии УФ-части спектра сильно ослаблена. В прошедшем сквозь атмосферу свете около половины энергии приходится на микроволновую часть спектра, однако микроволновая часть непригодна для зрения. Это связано с корпускулярными свойствами света. Видение осуществляется за счет отраженного от предметов солнечного света. У поверхности Земли существуют фотоны «двух видов»: вследствие теплового излучения Солнца с температурой  $T_C \approx 6000$  К и излучения Земли при  $T_3 \approx 300$  К. «Солнечные» фотоны при отражении от предметов несут о них зрительную информацию, а «земные» фотоны создают оптический шум, мешающий зрению.

Для равновесного излучения число фотонов моде (6.22):

$$n_{\Phi} = \frac{1}{\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1}. \quad (6.30)$$

Число «солнечных» фотонов у поверхности Земли равно

$$n'_{\Phi C} = \frac{1}{\exp\left(\frac{h\nu}{kT_C}\right) - 1} \left(\frac{R_C}{R}\right)^2. \quad (6.31)$$

Здесь учтено, что фотоны с поверхности Солнца ( $R_C$  — радиус Солнца) летят во все стороны, поэтому у Земли ( $R$  — радиус земной орбиты) их концентрация уменьшается в  $\left(\frac{R_C}{R}\right)^2$  раз. При отражении от предмета «солнечные»

фотоны разлетаются в телесном угле  $2\pi$ , а в глаз попадают те из них, которые летят в телесном угле  $\Delta\Omega = S/l^2$  ( $S$  — площадь зрачка;  $l$  — расстояние до рассматриваемого предмета). Поэтому зрительную информацию переносит лишь небольшая доля:

$$n_{\Phi,C} = \frac{\Delta\Omega}{2\pi} n'_{\Phi,C}. \quad (6.32)$$

Число шумовых фотонов равно

$$n_{\Phi 3} = \frac{1}{\exp\left(\frac{h\nu}{kT_3}\right) - 1}. \quad (6.33)$$

Если посчитать отношение  $n_{\Phi 3}/n_{\Phi,C}$ , то оно радикально зависит от частоты (длины волны). В видимом диапазоне ( $\lambda \sim 0,5$  мкм) при  $S = 5$  мм<sup>2</sup>,  $l = 1$  м отношение  $n_{\Phi 3}/n_{\Phi,C} \sim 10^{-29}$ , и шумы ничтожно малы. Однако в ИК-диапазоне при  $\lambda \sim 2$  мкм  $n_{\Phi 3}/n_{\Phi,C} \sim 1$ , и зрительная информация подавлена шумами.

**Ночное видение.** В ночное время, в отсутствие солнечного света, доминирующим является инфракрасное излучение вблизи длины волны  $\lambda \sim 10$  мкм, возникающее от Земли и тел на ее поверхности, излучающих при температуре  $T_3 \sim 300$  К. Глаз человека имеет такую же температуру и, следовательно, является источником шумового ИК-излучения. Чтобы ослабить этот шум, нужно охлаждать глаз, а это сделать невозможно.

Для уменьшения собственных шумов приемники инфракрасного излучения охлаждают до десятков Кельвина. В этих приемниках инфракрасное изображение преобразуют в видимое, которое и наблюдают при обычных температурах.

В астрономии приемные устройства телескопов охлаждают до низких (гелиевых) температур с целью зафиксировать очень слабый поток фотонов от звезд, удаленных на громадные расстояния. Наблюдения проводятся в ночное время, чтобы солнечный свет не «забивал» слабые излучения звезд и галактик.

## ЛЕКЦИЯ 7

**Поглощение и усиление света.** Хорошо известно, что при распространении света в прозрачных средах его интенсивность уменьшается вместе с пройденным волной расстоянием. Наглядным подтверждением этого утверждения является убывание освещенности под водой с увеличением глубины погружения. Интенсивность солнечного света, прошедшего через толщу воды, уменьшается вследствие поглощения и рассеяния света.

В верхних слоях атмосферы поглощение озоном ультрафиолетового солнечного излучения предохраняет нашу планету от негативного воздействия этого излучения.

В этих и многих других примерах при поглощении часть энергии световой волны передается среде, в которой волна распространяется. Возникает естественный вопрос: «А нельзя ли создать такие условия, при которых волна будет заимствовать энергию у среды?» В этом случае интенсивность волны при распространении увеличивалась бы, т.е. происходило бы усиление световой волны.

Чтобы ответить на этот вопрос, рассмотрим распространение световой волны частоты  $\nu$  через среду. Предположим, что в этой среде среди множества энергетических уровней ее атомов существует пара уровней, разность энергий которых  $W_2 - W_1 = h\nu$ . Пусть в единице объема вещества имеется  $n$  атомов, при этом  $n_1$  атомов с энергией  $W_1$ , а  $n_2$  атомов с энергией  $W_2$ . Величины  $n_1$  и  $n_2$  называются *заселенностями* соответствующих *энергетических уровней*.

При распространении волны в среде будут происходить одновременно три процесса: спонтанное и вынужденное излучения, а также вынужденное поглощение. Эти процессы схематично изображены на рис. 7.1, *a—в*.

При спонтанном излучении (см. рис. 7.1, *a*) (излучательной релаксации) появляются фотоны, частоты которых занимают интервал частот, определяющий ширину линии люминесценции  $\Delta\nu \sim 1/\tau$  ( $\tau$  — время жизни атома в возбужденном состоянии). При взаимодействии возбужденного атома с другими атомами энергия возбуждения  $W_2$  может передаваться этим атомам без излучения фотона. В этом случае происходит безызлучательная релаксация.

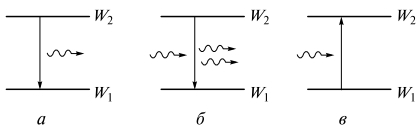


Рис. 7.1

При одновременном действии обоих механизмов релаксации время жизни определяется равенством:

$$\frac{1}{\tau} = \frac{1}{\tau_{\text{СП}}} + \frac{1}{\tau_{\text{БИ}}}, \quad (7.1)$$

где  $\tau_{\text{СП}}$  — время излучательной релаксации атома при спонтанных переходах;  $\tau_{\text{БИ}}$  — характерное время безызлучательной релаксации.

При распространении фотона в веществе вследствие вынужденного излучения рождается точно такой же фотон (см. рис. 7.1, б), и свет усиливается. Одновременно будет происходить и вынужденное поглощение фотона (см. рис. 7.1, в). Оба последних процесса конкурируют между собой, и результат конкуренции зависит от разности  $n_2 - n_1$ .

Рассмотрим распространение плоской волны в веществе, вытянутом вдоль оси  $Oz$  (рис. 7.2). Заселенности энергетических уровней равны  $n_1$  и  $n_2$ . Пусть в сечении  $z = \text{const}$  интенсивность волны равна  $I(z)$ , а в сечении  $z + dz$  интенсивность  $I(z + dz) = I + dI$ .

Если учесть, что объемная плотность энергии электромагнитного поля  $u = \frac{I}{c}$ , то из единицы объема за единицу времени при вынужденном излучении высвобождается энергия  $\frac{I}{c} B_{21} g_2 n_2 h\nu$ . Одновременно поглощенная за это время энергия будет равна  $\frac{I}{c} B_{12} g_1 n_1 h\nu$ . Энергетический баланс для слоя толщиной  $dz$  позволяет записать соотношение

$$dI = \frac{I}{c} h\nu (n_2 g_2 B_{21} - n_1 g_1 B_{12}) dz. \quad (7.2)$$

Положим для простоты, что кратности вырождения этих уровней  $g_1 = g_2 = 1$ . Тогда в силу (6.26)  $B_{21} = B_{12}$ . Уравнение (7.2) перепишем в виде

$$\frac{dI}{dz} = GI, \quad (7.3)$$

где

$$G = \frac{h\nu}{c} B_{21} (n_2 - n_1). \quad (7.4)$$

Интегрируя (7.3), получаем

$$I(z) = I(0) \exp(Gz). \quad (7.5)$$

Знак величины  $G$ , называемой *коэффициентом усиления*, зависит от разности  $n_2 - n_1$ . При  $G < 0$  интенсивность света будет убывать, а при  $G > 0$  — возрастать (рис. 7.3).

В обычных (равновесных) условиях  $n_2$  и  $n_1$  связаны распределением Больцмана:

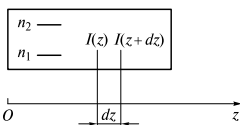


Рис. 7.2

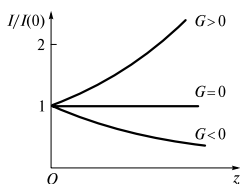


Рис. 7.3

$$\frac{n_2}{n_1} = \exp \left[ -\frac{(W_2 - W_1)}{kT} \right] < 1. \quad (7.6)$$

В этом случае  $G < 0$ , и происходит экспоненциальное уменьшение интенсивности, подчиняющееся закону Бугера—Ламберта—Бера:  $I(z) = I_0 e^{-\alpha z}$ , где  $\alpha = -G$  — коэффициент поглощения.

Если вывести среду из термодинамического равновесия путем внешнего воздействия, то можно либо устранить поглощение ( $G = 0$  при  $n_2 = n_1$ ), либо усиливать свет при  $n_2 > n_1$ . Ситуация, при которой  $n_2 > n_1$ , называется *инверсией заселенности* энергетических уровней атомов, а среда — *активной* (усиливающей) средой.

Оценим диапазон поглощаемых или усиливаемых частот (*полосу поглощения или усиления*). Согласно (6.26), с учетом (5.17)

$$B_{21} = \frac{c^3}{8\pi h \nu^3} A_{21} = \frac{\pi^2 e^2 r_{21}^2}{3\epsilon_0 h} \quad (7.7)$$

и, в отличие от  $A_{21}$ , не зависит от частоты  $\nu$ . Однако в пределах ширины спектральной линии можно ввести, подобно (5.19), *спектральную плотность*  $B_\nu$  коэффициента Эйнштейна  $B_{21}$ . Она связана с контуром линии люминесценции соотношением

$$B_\nu = B_{21} g(\nu). \quad (7.8)$$

Следовательно, коэффициенты поглощения  $\alpha_\nu$  и усиления  $G_\nu$  имеют контур, повторяющий контур линии люминесценции:

$$-\alpha_\nu = G_\nu = \frac{h\nu}{c} (n_2 - n_1) B_{21} g(\nu). \quad (7.9)$$

На рис. 7.4 схематично изображены частотные зависимости  $G_\nu$  и  $\alpha_\nu$ .

Инверсия заселенности создается *накачкой*. Чаще всего накачка бывает оптической или электрической. При оптической накачке излучение мощного светового источника поглощается активной средой. Этот способ хорош для твердых и жидких сред. Светом возбуждаются не отдельные уровни, а энергетические полосы или энергетические зоны, поэтому большая доля света идет на возбуждение активной среды. Электрическая накачка осуществляется в газах путем создания в них электрического разряда. Оптическая накачка здесь не эффективна из-за узости энергетических уровней.

Иногда накачку осуществляют с помощью пучков свободных электронов, химических реакций или при использовании сверхзвукового расширения газа (газодинамическая накачка).

**Генерация света.** Если активную среду поместить между двумя зеркалами (рис. 7.5), то получится автоколебательная система, в которой обратную связь будет выполнять *оптический резонатор*, состоящий из этих зеркал. Такая система представляет собой *оптический квантовый генератор (лазер)*.

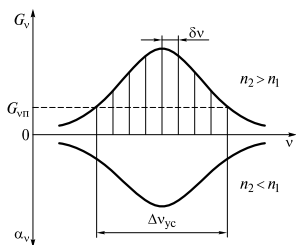


Рис. 7.4

В лазере генерация света возникает в результате усиления излучения люминесценции, которое вначале является спонтанным излучением. Свет усиливается, проходя многократно через активную среду при отражении от зеркал. В некоторых лазерах генерация осуществляется путем усиления света за один проход активной среды.

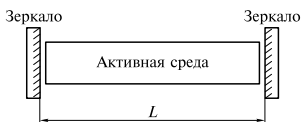


Рис. 7.5

Обычно лазерный резонатор имеет длину, на несколько порядков превышающую длину волны  $\lambda$ . Если резонатор состоит из двух плоских параллельных зеркал, находящихся на расстоянии  $L$ , то в нем могут существовать стоячие волны (моды), частоты которых равны

$$\nu_q = q \frac{c}{2L}, \quad (7.10)$$

где  $q = 1, 2, 3, \dots$

Те из мод, которые попадут в полосу усиления (окажутся внутри контура  $g(\nu)$  линии), будут усиливаться. На рис. 7.4 эти моды изображены вертикальными линиями. Их число будет зависеть от соотношения ширины  $\Delta\nu_{\text{ус}}$  полосы коэффициента усиления  $G_\nu$  и *межмодовой частоты* резонатора:

$$\delta\nu = \nu_{q+1} - \nu_q = \frac{c}{2L}. \quad (7.11)$$

Обычно межмодовая частота  $\delta\nu$  меньше  $\Delta\nu_{\text{ус}}$ . Поэтому одновременно могут генерироваться моды, число которых

$$N_{\text{мод}} = \frac{\Delta\nu_{\text{ус}}}{\delta\nu}. \quad (7.12)$$

Такой режим генерации называется *многочастотным*. Ширина полосы усиления  $\Delta\nu_{\text{ус}}$  (см. рис. 7.4) меньше ширины линии люминесценции. Причина этого кроется в потерях энергии световой волны при отражении от зеркал, в дифракции световой волны, частично покидающей резонатор через его открытую боковую поверхность, в рассеянии света активной средой и т.д. Поэтому существует пороговое значение  $G_{\text{вп}}$ , отмеченное на рис. 7.4 горизонтальной штриховой линией. Усиление возможно лишь при  $G_\nu > G_{\text{вп}}$ .

Величина  $G_{\text{вп}}$  определяется из условия баланса амплитуд. Будем считать для простоты, что потери связаны только с отражением от зеркал, коэффициенты отражения которых (по интенсивности) равны  $R_1$  и  $R_2$ .

Рассмотрим изменение интенсивности волны за один проход резонатора (туда и обратно). Будем считать, что активная среда также имеет длину  $L$  (рис. 7.6).

Пусть интенсивность волны, распространяющейся вправо, у левого торца активной среды равна  $I_1$ . Ее значение отмечено точкой 1. При падении на правое зеркало интенсивность возросла и стала равной  $I_2 = I_1 \exp(GL)$  — точка 2. При отражении от зеркала с коэффициентом отражения  $R_2 < 1$  интенсивность упала до величины

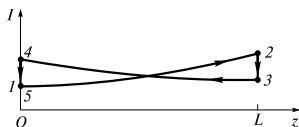


Рис. 7.6



$I_3 = R_2 I_1 \exp(GL)$  — точка 3. Перед падением на левое зеркало она опять возросла до величины  $I_4 = R_2 I_1 \exp(2GL)$  — точка 4, а после отражения от него стала равной  $I_5 = R_1 R_2 I_1 \exp(2GL)$  — точка 5.

Необходимым условием генерации является выполнение неравенства  $I_5 \geq I_1$ . Следовательно, минимальное (пороговое) значение коэффициента усиления должно удовлетворять условию, называемому *балансом амплитуд*:

$$R_1 R_2 \exp(2G_n L) = 1. \quad (7.13)$$

Если коэффициенты отражения близки к единице, то  $2G_n L \ll 1$ . Тогда (7.13) можно записать в приближенном виде

$$R_1 R_2 = \exp(-2G_n L) \approx 1 - 2G_n L. \quad (7.14)$$

Если, например, одно зеркало полностью отражает свет ( $R_1 = 1$ ), а второе зеркало имеет коэффициент отражения  $R_2 = 0,95$ , то

$$2G_n L \approx 1 - R_1 R_2 = 0,05.$$

Таким образом, за один проход резонатора усиление составляет около 5%.

Порог спектральной плотности коэффициента усиления приближенно можно оценить из очевидного равенства  $G_{\text{нп}} \approx G_n / \Delta\nu$ , где  $\Delta\nu$  — ширина спектральной линии.

**З а м е ч а н и е.** Если длина резонатора  $L \geq \lambda$  (как, например, в полупроводниковом лазере), то может генерироваться лишь одна мода.

**Насыщение усиления.** Если создать такую инверсию заселенности, что  $G > G_n$ , то интенсивность в резонаторе будет возрастать при каждом его проходе. С ростом интенсивности инверсная заселенность, а с ней и коэффициент усиления, будет уменьшаться, пока не достигнет величины  $G_n$ , при которой усиление компенсирует потери. Это явление носит название *насыщения усиления*. Дальнейший рост интенсивности прекратится, и система выйдет на стационарный режим генерации.

Рассмотрим этот вопрос подробнее. Будем считать, что накачка постоянно осуществляет возбуждение обоих энергетических уровней, увеличивая заселенность каждого из уровней в единицу времени с постоянной скоростью  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  соответственно.

При одновременном действии накачки и трех квантовых процессов (спонтанного излучения, вынужденного излучения и вынужденного поглощения) скорость изменения заселенности каждого из уровней описывается уравнениями:

$$\frac{dn_2}{dt} = B_{21} \frac{I}{c} (n_1 - n_2) - \frac{n_2}{\tau_2} + \alpha_2; \quad (7.15 \text{ а})$$

$$\frac{dn_1}{dt} = B_{21} \frac{I}{c} (n_2 - n_1) - \frac{n_1}{\tau_1} + \alpha_1. \quad (7.15 \text{ б})$$

Здесь  $\tau_1$  и  $\tau_2$  — времена жизни уровней. Назовем разность заселенностей  $\Delta n = n_2 - n_1$  инверсной заселенностью.

В стационарном режиме  $\frac{dn_1}{dt} = \frac{dn_2}{dt} = 0$ . Вычитая из второго уравнения первое, получаем стационарное уравнение для инверсной заселенности

$$\Delta n B_{21} \frac{I}{c} (\tau_1 + \tau_2) + \Delta n = \alpha_2 \tau_2 - \alpha_1 \tau_1. \quad (7.16)$$

Величина, стоящая в правой части, очевидно, равна инверсной заселенности  $\Delta n_0 = \alpha_2 \tau_2 - \alpha_1 \tau_1$ , которую постоянно поддерживает накачка, компенсируя релаксационные процессы (излучательные и безызлучательные). Если ввести характерную *интенсивность насыщения*

$$I_{\text{нас}} = \frac{c}{B_{21}(\tau_1 + \tau_2)}, \quad (7.17)$$

то (7.16) перепишется в виде

$$\Delta n = \frac{\Delta n_0}{1 + \frac{I}{I_{\text{нас}}}}. \quad (7.18)$$

При  $I = I_{\text{нас}}$  инверсия заселенности уменьшается вдвое.

Согласно (7.4) с ростом интенсивности будет также уменьшаться и коэффициент усиления

$$G = \frac{h\nu B_{21}}{c} \cdot \frac{\Delta n_0}{1 + \frac{I}{I_{\text{нас}}}} = \frac{G_0}{1 + \frac{I}{I_{\text{нас}}}}, \quad (7.19)$$

где  $G_0$  — ненасыщенный коэффициент усиления.

На рис. 7.7 показаны контуры коэффициента усиления  $G_v$  в режиме насыщенного усиления.

Если контур линии определяется доплеровским механизмом уширения, при этом  $\delta\nu_D \gg \delta\nu_L$  (рис. 7.7, а), то контур  $G_{0v}$ , соответствующий ненасыщенному усилению, приобретает изрезанный вид (контур  $G_v$ ). Ширина «вырезов» в контуре определяется шириной  $\delta\nu_p$  резонансной кривой оптического резонатора. Это режим неоднородного насыщения усиления. Ситуация на рис. 7.7, б соответствует условию  $\delta\nu_D \ll \delta\nu_L$ . Контур линии усиления при насыщении, оставаясь лоренцевым, «касается» штриховой линии, соответствующей величине  $G_{\text{вп}}$ . Это режим однородного насыщения усиления.

Ширину области усиления  $\Delta\nu_{\text{ус}}$  можно изменять либо усиливая или ослабляя накачку (меняя  $G_0$ ), либо варьируя потери в резонаторе (меняя  $G_{\text{п}}$ ). В режи-

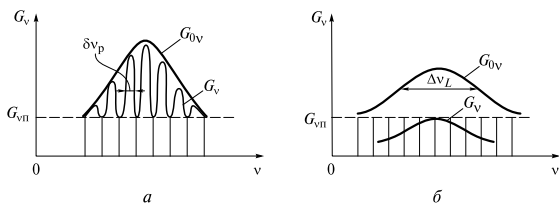


Рис. 7.7

ме однородного насыщения можно сделать область усиления такой, что будет усиливаться лишь одна мода. Однако усиление будет незначительным.

Чтобы эффективно усилить одну моду, резонатор делают селективным: увеличивают потери для всех мод, кроме выделенной. Это, в частности, достигается заменой одного зеркала резонатором с небольшим расстоянием между зеркалами. От такого двойного зеркала будут отражаться волны тех частот, которые совпадают с модами короткого резонатора. А так как межмодовая частота короткого резонатора большая, то можно реализовать условия, когда от двойного зеркала будет отражаться лишь одна усиливаемая мода лазера.

**Монохроматичность лазерного излучения.** При выделении одной моды излучение лазера будет наиболее близко к монохроматическому. Однако ширина генерируемой спектральной линии все-таки будет конечна. Она обусловлена, во-первых, конечной шириной  $\delta\nu_p$  резонансной кривой оптического резонатора («частотной шириной» моды), которая, как и у механического осциллятора, нарастает с потерями. Во-вторых, она связана с неустраняемыми тепловыми шумами лазера и спонтанным излучением в его активной среде.

Для оценки величины  $\delta\nu_p$  запишем известное из механики выражение для добротности на частоте одной моды:

$$Q = \frac{\nu}{\delta\nu_p} = 2\pi \frac{W}{\Delta W_T}, \quad (7.20)$$

где  $\nu$  — резонансная частота (частота моды);  $W$  — энергия, запасенная в резонаторе (моды);  $\Delta W_T$  — потери энергии за период колебаний.

Если площадь каждого зеркала равна  $S$ , расстояние между ними  $L$ , то  $W = uLS$  ( $u$  — объемная плотность энергии моды).

Энергия, теряемая за период, равна  $\Delta W_T = \beta u c S / \nu$  ( $P = u c S$  — мощность волны, падающей на зеркало;  $\beta$  — коэффициент, описывающий потери мощности). Тогда добротность резонатора будет равна

$$Q = 2\pi\nu \frac{SLu}{\beta Suc} = 2\pi \frac{L}{\beta\lambda}. \quad (7.21)$$

Потери резонатора в He-Ne-лазере  $\beta = 0,02$ . Если  $L = 1$  м, а  $\lambda = 6328$  Å, то  $Q = 5 \cdot 10^8$ . Тогда  $\delta\nu_p = \nu/Q = 10^6$  Гц = 1 МГц. Эта величина на два порядка меньше межмодовой частоты  $\delta\nu = c/2L = 1,5 \cdot 10^8$  Гц = 150 МГц.

Анализ работы лазера показал, что вблизи порога генерации ширина линии излучения одночастотного лазера, или *естественная ширина линии лазерного излучения*, определяется формулой

$$\delta\nu_c = \frac{\pi(\delta\nu_p)^2 h\nu}{P} \left[ n_\Phi + \frac{1}{1 - \frac{g_2 n_1}{g_1 n_2}} \right], \quad (7.22)$$

где  $n_\Phi = \frac{1}{\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1}$  — среднее число тепловых фотонов в моде частоты  $\nu$ ;

$n_1$  и  $n_2$  — заселенности рабочих уровней;  $g_1$  и  $g_2$  — соответствующие кратности их вырождения;  $P$  — мощность, включающая мощность генерируемой волны и потери мощности в лазере.

Формула (7.22) впервые была получена американскими учеными А. Шавловым и Ч. Таунсом и носит их имя. В ней можно выделить выражение

$$h\nu \left[ n_{\Phi} + \frac{1}{1 - g_2 n_1 / (g_1 n_2)} \right], \quad (7.23)$$

содержащее два слагаемых. Первое слагаемое, как следует из формулы (6.22), определяет среднюю энергию моды  $\langle \epsilon_v \rangle = n_{\Phi} h\nu$  при равновесном тепловом излучении, а второе слагаемое  $h\nu \left[ \frac{1}{1 - g_2 n_1 / (g_1 n_2)} \right]$  — энергию, обусловленную спонтанным излучением.

Используя формулу (7.22), оценим естественную ширину излучения He-Ne лазера. Будем считать, что  $n_{\Phi} \ll 1$ ,  $\left[ \frac{1}{1 - g_2 n_1 / (g_1 n_2)} \right] = 1,5$ . Полагая  $h\nu = 3,2 \cdot 10^{-19}$  Дж,  $\delta\nu_p = 10^6$  Гц,  $P = 1$  мВт, получаем  $\delta\nu_e \approx 1,5 \cdot 10^{-4}$  Гц. Эта величина на много порядков меньше естественной ширины линии излучения атомов неона.

Отметим, что с ростом мощности естественная ширина линии излучения лазера вначале уменьшается, однако затем стремится к постоянной величине. Это связано с нарастанием шумов при увеличении мощности  $P$ , что, безусловно, формула (7.22) не описывает.

Формула Шавлова—Таунса определяет предельно достижимую монохроматичность излучения. Она не учитывает механические вибрации зеркал резонатора, нестабильность накачки лазера и т. д. Вследствие этих причин частота моды «плавает» в некотором диапазоне.

Если длина резонатора случайно изменится на  $\lambda/2$ , то частота моды сместится на величину, равную межмодовой частоте  $\delta\nu = c/2L$ . При длине резонатора  $L = 1$  м частота моды будет «плавать» в диапазоне  $\delta\nu = 150$  МГц. Эта величина уже сравнима с естественной шириной линии излучения атома неона, однако она значительно меньше ширины линии люминесценции.

Для устранения «плавания» частоты резонатор автоматически подстраивают к какой-либо фиксированной частоте. Устранение многих технических факторов позволили сузить ширину спектра излучения лазера до рекордной величины  $\delta\nu_{\text{лаз}} \sim 1$  Гц.

**Мощность излучения.** В начале генерации интенсивность  $I$  волны в резонаторе будет увеличиваться, а коэффициент усиления, согласно (7.19), падать. Когда он уменьшится до величины  $G_n$ , генерация выйдет на стационарный режим. На рис. 7.8 качественно изображена зависимость интенсивности волны от времени.

В стационарном режиме интенсивность  $I$  можно определить из равенства

$$\frac{G_0}{1 + \frac{I}{I_{\text{нас}}}} = G_n. \quad (7.24)$$

Отсюда

$$I = \left( \frac{G_0}{G_n} - 1 \right) I_{\text{нас}}. \quad (7.25)$$

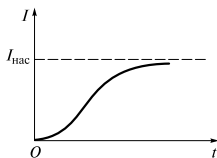


Рис. 7.8

Поскольку согласно (7.13)  $2G_0 L = \ln \frac{1}{R_1 R_2}$ , подставляя этот результат в (7.25) и переходя к мощности  $P = IS$  ( $S$  — поперечное сечение активной среды), получаем для мощности волны в резонаторе выражение

$$P = P_{\text{нас}} \left[ \frac{2G_0 L}{\ln \frac{1}{R_1 R_2}} - 1 \right], \quad (7.26)$$

где  $P_{\text{нас}} = I_{\text{нас}} S$  — мощность насыщения.

Однако только часть этой мощности в виде излучения проходит через зеркала резонатора. Если для простоты считать одно зеркало полностью отражающим ( $R_1 = 1$ ), а у второго зеркала  $0 < R_2 \leq 1$ , то мощность генерируемого лазерного пучка

$$P_{\text{лаз}} = (1 - R_2)P = P_{\text{нас}} \left[ \frac{2G_0 L}{\ln \frac{1}{R_2}} - 1 \right] (1 - R_2). \quad (7.27)$$

Эта мощность зависит от эффективности накачки и объема активной среды. Если учесть, что величина  $G_0$  пропорциональна концентрации возбуждаемых атомов, то мощность излучения пропорциональна полному числу «накачиваемых» атомов. По этой причине мощность лазеров, работающих при давлениях  $\sim 1$  мм рт. ст., значительно меньше, чем у лазеров, работающих при атмосферном и более высоких давлениях.

Мощность излучения зависит от коэффициента отражения  $R_2$ . При  $R_2 \approx 1$  мощность уменьшается из-за малой прозрачности зеркала. При  $R_2 < R_{\text{п}} = \exp(-2G_0 L)$  велики потери в резонаторе и генерация невозможна. Следовательно, существует оптимальное значение  $R_{\text{опт}}$  для получения максимальной мощности излучения.

**Пространственная структура лазерного излучения.** Резонатор выполняет еще одну (наиболее важную) функцию — позволяет получить направленное излучение, распространяющееся узким световым пучком. Ось этого пучка перпендикулярна плоскости зеркал. Если бы зеркала были неограниченно большими, то генерировалась бы плоская волна. Поскольку она поперечная, ее классифицируют как ТЕМ-волну (Transversal ElectroMagnetic wave).

Если же зеркала имеют конечные размеры, то можно приближенно считать, что волна остается поперечной, однако амплитуда поля будет изменяться в ограниченном поперечном сечении резонатора. В этом сечении у стоячей волны будут находиться узлы и пучности напряженности электрического и магнитного полей. Из-за открытости резонатора происходит дифракция света, и амплитуда волны к краям монотонно убывает.

Каждую стоячую волну, или *моду резонатора*, обозначают  $\text{ТЕМ}_{mq}$ . Смысл индекса  $q$  тот же, что и в (7.10). Индексы  $m = 1, 2, \dots$ ;  $n = 0, 1, 2, \dots$  равны числу узлов вдоль осей  $Ox$  и  $Oy$ , перпендикулярных оси пучка (оси  $Oz$ ).

Моды колебаний, отличающиеся индексами  $m$  и  $n$ , составляют семейство *поперечных мод*. Наоборот, моды, отличающиеся лишь индексом  $q$ , составляют семейство *продольных мод*. Иногда поперечные моды обозначают лишь двумя индексами  $m$  и  $n$ .

На рис. 7.9 изображены три поперечные моды резонатора с прямоугольными плоскими зеркалами.

Сверху показано распределение поля  $E$  у разных мод в тот момент, когда  $E$  достигает амплитудных значений. Внизу контуры соответствуют линиям равной амплитуды по уровню  $A_{\max}/e$  ( $A_{\max}$  — амплитуда в пучности стоячей волны). Стрелками показано направление вектора  $\mathbf{E}$  в этот момент времени. Поскольку  $q \gg 1$ , то этот индекс обычно не указывается.

У низшей моды отсутствует расслоение поля, поэтому она чаще всего используется для практических целей. Чтобы отсеять другие моды, в резонатор устанавливают диафрагму, пропускающую излучение, распространяющееся вблизи оси резонатора. Остальные моды испытывают большие потери и не усиливаются. Такой режим генерации называется *одномодовым*. Естественно, что установка диафрагмы снижает мощность излучения. Одномодовый пучок  $TEM_{00}$  обладает минимальной (дифракционной) расходимостью.

Если одновременно генерируется несколько поперечных мод, то мощность пучка возрастает по сравнению с одномодовым режимом генерации. Распределение интенсивности в сечении пучка приобретает пятнистую структуру, которую называют *спекл-структурой*. Как будет показано далее, угловая расходимость многомодового пучка больше, чем у одномодового.

На рис. 7.1 цв. вкл. показаны различные структуры светового пучка (поперечные моды) гелий-неонового лазера (He-Ne-лазера), работающего в многомодовом режиме.

В современных лазерах, в целях уменьшения дифракционных потерь, используются резонаторы с вогнутыми круглыми зеркалами. Если расстояние между зеркалами равно радиусу кривизны зеркал, то резонатор называется *конфокальным*. Если оно вдвое меньше, то резонатор называется *сферическим*. Возможна комбинация плоского и сферического зеркал.

Низшая мода резонатора с вогнутыми зеркалами соответствует гауссовому пучку, свойства которого описаны в начале курса. Поэтому гауссовы пучки генерируются одномодовыми лазерами.

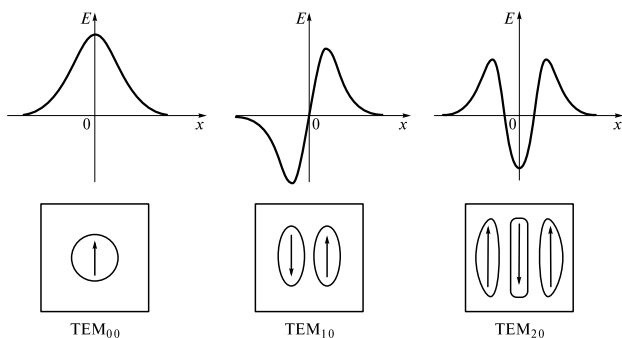


Рис. 7.9

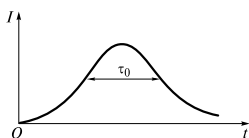


Рис. 7.10

**Генерация световых импульсов.** Стационарная генерация возможна, если накачкой поддерживается постоянный коэффициент усиления  $G = G_n$ . Для этого накачка должна осуществляться непрерывно. Если накачка действует кратковременно, то интенсивность излучения ведет себя во времени так, как это изображено на рис. 7.10.

Это означает, что лазер генерирует импульс длительностью  $\tau_0$ . Для импульсного излучения ширина  $\delta\nu_{\text{лаз}} \sim 1/\tau_0$ . Сравним эту величину с межмодовой частотой  $\delta\nu = c/(2L) = 1/\tau_p$  ( $\tau_p = 2L/c$  — время пробега резонатора в обоих направлениях). Для резонаторов длиной  $L = 0,5$  м время пробега  $\tau_p = 2L/c = 3$  нс.

Для импульсов длительностью  $\tau_0 \sim 10$  нс ширина спектра меньше межмодовой частоты. За время генерации происходит лишь несколько проходов в резонаторе усиливаемой (практически одной) моды.

Ширина спектра импульсов пикосекундной длительности уже превышает межмодовую частоту на два-три порядка. Здесь имеет место усиление большого числа синхронизованных мод резонатора.

Еще более широкий спектр у предельно коротких импульсов длительностью несколько фемтосекунд.

**Газовые лазеры.** В этих лазерах активной средой являются газы, возбуждаемые проходящим по ним электрическим током (газовым разрядом). Одним из наиболее распространенных газовых лазеров является гелий-неоновый лазер. Схематически его устройство изображено на рис. 7.11.

В газоразрядной стеклянной трубке 1 находятся гелий при парциальном давлении  $\sim 1$  мм рт. ст. и неон при давлении  $\sim 0,1$  мм рт. ст. Торцы трубки заканчиваются плоскопараллельными стеклянными пластинками, наклоненными к оси трубки под углом Брюстера (см. лекцию 17). Свет, поляризованный в плоскости рисунка, не отражается от этих пластин. Между катодом 2 и анодом 3 прикладывается высокое напряжение 1—2 кВ, в результате чего возникает разрядный ток  $\sim 10$  мА. Трубка находится между сферическими зеркалами с высокими коэффициентами отражения ( $R_2 \sim 0,98$ ,  $R_1 > 0,99$ ). Поэтому усиление света за один проход составляет лишь несколько процентов ( $2G_n L \sim 0,01$ ). Направленный луч света выходит преимущественно через зеркало  $R_2$ .

Спектральный состав излучения определяется квантовыми переходами атомов неона. На рис. 7.12 показаны некоторые энергетические уровни атомов He и Ne, переходы с которых и определяют процесс генерации излучения лазера.

При протекании электрического тока атомы неона возбуждаются. Процесс возбуждения показан вертикальными штриховыми стрелками. В результате возникает спонтанное излучение, длины волн которого  $\lambda = 1\,150$ ,  $632,8$  и  $3\,390$  нм. При электронном возбуждении возможно создать лишь инверсию заселеннос-

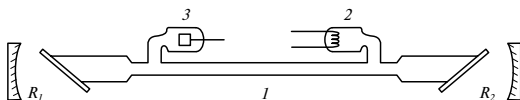


Рис. 7.11

ти между уровнями  $W_2$  и  $W_1$  и осуществить генерацию на длине волны  $\lambda = 1\,150$  нм.

Инверсную заселенность между двумя парами уровней можно создать в присутствии гелия. Гелий обладает двумя долгоживущими уровнями  $W'_2$  и  $W'_3$  (метастабильными уровнями). При возбуждении гелия электронным ударом (процесс возбуждения показан вертикальными штриховыми стрелками) достигается высокая заселенность этих уровней. Так как энергии  $W'_2$  и  $W'_3$  очень близки к энергиям  $W_2$  и  $W_3$ , то при столкновении атомов He и Ne энергия первых эффективно переходит ко вторым (процесс показан горизонтальными штриховыми стрелками).

Уровень  $W_1$  обладает небольшим временем жизни. При спонтанном переходе с  $W_1$  на  $W^*$  возникает ярко-оранжевое свечение. С уровня  $W^*$  атом неона переходит в основное состояние  $W_0$  безызлучательно, сталкиваясь со стенками трубки.

Поскольку коэффициент Эйнштейна  $A_{21} \sim \nu^3$ , вероятность спонтанного излучения с длиной волны 632,8 нм почти в 150 раз выше, чем излучения с длиной волны 3 390 нм. Это означает, что инверсия заселенности пары уровней  $W_3, W_4$  больше, чем пары  $W_3, W_1$ . Поэтому генерация ИК-излучения с  $\lambda = 3\,390$  нм возможна и при малоотражающих зеркалах, и даже без них.

Для эффективной генерации красной линии ( $\lambda = 6328 \text{ \AA}$ ) используют высокоотражающие зеркала, а в резонатор помещают кювету с веществом, поглощающим ИК-излучение. Температура атомов в разряде  $T \approx 400$  К. Поскольку давление невелико, основным является доплеровское уширение спектральной линии:  $\Delta\nu_D \approx 1,5 \cdot 10^9$  Гц. При длине резонатора  $L = 1$  м межмодовая частота  $\delta\nu = c/(2L) = 1,5 \cdot 10^8$  Гц. Поэтому He-Ne-лазер может генерировать несколько продольных мод, число которых зависит от режима его работы. Мощность генерации на этой длине волны при длине трубки  $\sim 1,0$  м достигает 30—50 мВт.

На рис. 7.2 цв. вкл. показана фотография работающего демонстрационного гелий-неонового лазера, на которой хорошо видны все основные элементы его конструкции.

Более мощным является аргоновый ионный лазер (рис. 7.13).

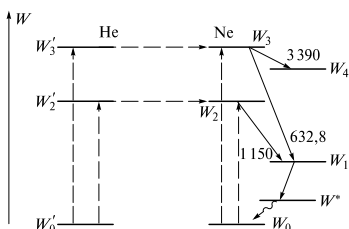


Рис. 7.12

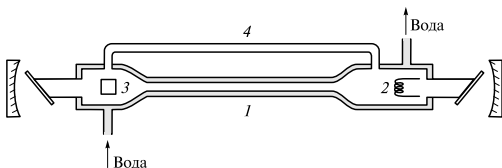


Рис. 7.13



Инверсия в аргоне, заключенном в газоразрядную трубку 1, создается при больших плотностях разрядного тока  $\sim 150\text{--}400\text{ А/см}^2$ . Для увеличения плотности тока на трубку одевают катушку-соленоид (на рисунке не показана), создающую осевое магнитное поле, стягивающее движущиеся электроны к оси трубки. Поскольку выделяется много тепла, трубку изготавливают из термостойких материалов (кварца, керамики и др.) и охлаждают протекающей водой.

Из-за большой концентрации ионов  $\text{Ar}^{3+}$ , движущихся в электрическом поле разряда, создается перепад давления между катодом 2 и анодом 3. Для выравнивания давления катодную и анодную области соединяют трубкой 4.

При энергетических переходах ионов  $\text{Ar}^{3+}$  происходит генерация непрерывного излучения с несколькими длинами волн от 454,5 до 514,5 нм. Наиболее интенсивными являются спектральные линии с  $\lambda_1 = 488\text{ нм}$  (синяя) и  $\lambda_2 = 514,5\text{ нм}$  (зеленая). Мощность генерации может превышать 100 Вт.

Такая мощность достигается за счет большой начальной (ненасыщенной) инверсии  $\Delta n_0 = \alpha_2 \tau_2 - \alpha_1 \tau_1$  и, следовательно, коэффициента усиления  $G_0$ . В аргоне верхние уровни имеют существенно большее время жизни ( $\tau_2 \sim 10^{-8}\text{ с}$ ), чем нижние ( $\tau_1 \approx 3 \cdot 10^{-10}\text{ с}$ ).

Каждая из спектральных линий имеет доплеровский контур, ширина которого  $\Delta \nu_D \approx 6 \cdot 10^9\text{ Гц}$ . Это в несколько раз больше, чем у He-Ne-лазера. Поэтому аргоновый лазер может генерировать спектральную линию с большим числом продольных мод.

Фотография работающего аргонового лазера представлена на рис. 7.3 цв. вкл.

Еще большую мощность удается получить у  $\text{CO}_2$ -лазера. Углекислый газ имеет ряд линий люминесценции с длинами волн вблизи  $\lambda \approx 10,6\text{ мкм}$ . Это инфракрасное излучение, которое возникает при переходах между колебательно-вращательными уровнями молекулы  $\text{CO}_2$ . Газоразрядная трубка заполняется смесью азота, углекислого газа и гелия при давлении  $\sim 1\text{ мм рт. ст.}$

Возбуждение молекул  $\text{CO}_2$  происходит как электронным ударом, так и при столкновении с возбужденными током атомами азота. Нижние уровни  $\text{CO}_2$  опустошаются при столкновении с атомами гелия и стенками трубки.

$\text{CO}_2$ -лазер обладает высоким коэффициентом полезного действия, превышающим 10 %. Выходная мощность в непрерывном режиме может достигать 10 кВт.

Излучение этого лазера ( $\lambda \approx 10,6\text{ мкм}$ ) очень слабо поглощается атмосферой, поэтому такие мощные лазеры нашли широкое применение во многих задачах атмосферной оптики. Широкое распространение получили технологические  $\text{CO}_2$ -лазеры, работающие при атмосферном давлении и генерирующие мощные световые пучки.

Следует отметить, что в конструкции лазера используются материалы, которые должны быть прозрачны в этом диапазоне и обладать большой прочностью. Ведь даже небольшое поглощение при таких мощностях может привести к локальному нагреву оптических элементов, и они могут разрушиться.

Самыми мощными являются газодинамические лазеры, в которых рабочим веществом служит газ при атмосферном и более высоком давлении. Поскольку плотность газа велика, то и мощность генерации может быть очень высокой.

Инверсия заселенности создается при быстром вытекании газа из сопла. Расширяясь, газ охлаждается, при этом безызлучательная релаксация верхних уровней не так интенсивна, как нижних. Следовательно, при охлаждении

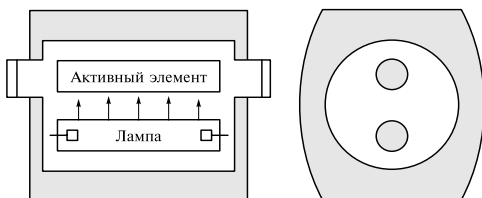


Рис. 7.14

создается инверсная заселенность. Если такой поток направить перпендикулярно оси резонатора, то возникает генерация. Мощность излучения газодинамического  $\text{CO}_2$ -лазера превышает 50 кВт.

В заключение следует отметить, что некоторые газовые лазеры могут работать только в импульсном режиме. К ним относятся водородный лазер ( $\lambda = 1800 \text{ \AA}$ ), лазер на парах меди ( $\lambda_1 = 5106 \text{ \AA}$ ,  $\lambda_2 = 5782 \text{ \AA}$ ) и др. У активных сред этих лазеров  $\tau_2 < \tau_1$ , поэтому лишь в течение интервала времени  $\Delta t < \tau_2$  удается поддерживать инверсную заселенность. Для этого необходимо, чтобы скорость заселения  $\alpha_2$  верхнего уровня превышала скорость заселения  $\alpha_1$  нижнего уровня. Верхний уровень хорошо возбуждается электронным ударом (большое значение  $\alpha_2$ ). Это приводит к увеличению инверсии и усилению  $G_0 L \sim 10^6$ . Длительность импульса излучения составляет величину  $\sim 10 \text{ нс}$ , а пиковая мощность  $P \sim 10 - 100 \text{ МВт}$ .

**Твердотельные лазеры.** В этих лазерах активной средой является твердое тело, накачиваемое мощным потоком света от лампы накачки. Устройство такого лазера схематично изображено на рис. 7.14. Для увеличения эффективности накачки активный элемент и лампу помещают в цилиндрическую полость с хорошей отражающей поверхностью.

Активный элемент представляет собой кристаллический или стеклянный стержень, в котором находятся ионы примеси. На квантовых переходах этих ионов между уровнями  $W_2$  и  $W_1$  и осуществляется генерация, а стержень выполняет функцию матрицы, удерживающей ионы.

При световой накачке ионы примеси поглощают кванты различных частот, поскольку в твердом теле уровни очень широкие. Для наглядности на рис. 7.15 показаны квантовые переходы при наличии четырех уровней, из которых один уровень широкий.

Поскольку уровень 3 широкий, его время жизни невелико. При безызлучательной релаксации (показанной волнистой стрелкой вниз) ион переходит на долгоживущий ( $\tau_2 \sim 10^{-3} \text{ с}$ ) метастабильный уровень 2. Заселенность нижнего уровня 1 будет, согласно распределению Больцмана, меньше основного уровня  $W_0$ :  $\frac{n_1}{n_0} = \exp\left[-\frac{(W_1 - W_0)}{kT}\right]$ . Для создания большей инверсной заселенности между уровнями 2 и 1 желательно, чтобы уровень 1 был высоко расположен над основным. При безызлучательной релаксации часть

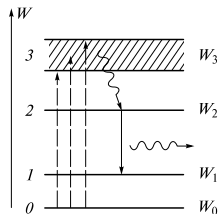


Рис. 7.15

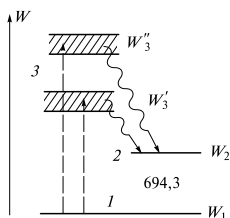


Рис. 7.16

энергии накачки превращается в тепловую, поэтому активный элемент необходимо интенсивно охлаждать.

Существует большое количество матриц, и энергетические уровни ионов зависят от свойств этих матриц. Соответственно при создании лазеров применяется большое число активных сред.

Самым первым в мире был создан рубиновый лазер (1961), активный элемент которого представлял кристалл сапфира  $\text{Al}_2\text{O}_3$ , содержащий 0,05 % ионов  $\text{Cr}^{3+}$ . Как отмечалось ранее, при освещении рубин люминесцирует розовым светом. На рис. 7.16

показана схема трех энергетических уровней иона  $\text{Cr}^{3+}$ .

При световой накачке (уровень 3) возбуждаются широкие, но короткоживущие уровни с энергиями  $W_3'$  и  $W_3''$ . За время  $\tau_3 \sim 10^{-8}$  с происходит безызлучательная релаксация на уровень 2, время жизни которого весьма велико:  $\tau_2 \sim 10^{-3}$  с. При переходе с уровня 2 на уровень 1 излучаются световые кванты с длиной волны 694,3 нм.

Для накачки применяются импульсные газоразрядные лампы, дающие вспышку белого света длительностью  $\tau_b \sim 10^{-3}$  с. За это время через лампу разряжается батарея конденсаторов емкостью  $C \sim 10^{-3}$  Ф, заряженная до напряжения  $U \sim 1$  кВ. При разряде батареи электрическая мощность составляет величину  $P_{эл} \sim CU^2/\tau_b \sim 10^6$  Вт. Часть этой мощности (около 15 %) идет на возбуждение рубина: для 1 см<sup>3</sup> световая мощность должна быть  $\sim 2$  кВт. Усиление за один проход значительно больше, чем у газовых лазеров ( $G_0L \gg 1$ ). Поэтому выходное зеркало резонатора достаточно прозрачное ( $R_2 \approx 0,3 - 0,4$ ).

Через некоторое время после начала вспышки, когда накопится достаточная инверсия заселенности, начнет генерироваться импульс длительностью  $\tau_0 \sim 10^{-6}$  с. Его энергия  $W \sim 1$  Дж, поэтому средняя мощность импульса  $P \sim W/\tau_0 \sim 10^6$  Вт.

В действительности этот импульс состоит из следующих друг за другом импульсов (пичков) длительностью каждого  $\sim 10^{-8} - 10^{-9}$  с. Каждый пичок — результат кратковременного опустошения верхнего уровня при нарастании интенсивности в резонаторе. Такой режим работы лазера называют *режимом свободной генерации*, или *пичковым режимом*.

Поскольку при безызлучательной релаксации активный элемент нагревается, время жизни  $\tau_2$  уменьшается, и условия генерации ухудшаются. Поэтому активный элемент необходимо охлаждать. При воздушном охлаждении интервал между импульсами должен быть не менее нескольких минут. При более сильном теплоотводе (например, водяном охлаждении) частота повторения импульсов может быть увеличена до нескольких импульсов в секунду.

Мощность импульса можно увеличить, если удлинить кристалл (до определенного предела, обусловленного насыщением усиления), повысить его качество, усилить накачку. Этим методом удастся повысить энергию  $W$  (а следовательно, и мощность  $P$ ) на порядок.

Однако мощность можно увеличить на несколько порядков, если радикально сократить длительность импульса. Для этого используют *метод модуляции добротности резонатора* лазера. Идея метода состоит в задержке начала генера-

ции, чтобы накопить значительную инверсную заселенность. В противном случае она растрачивается на генерацию пичков.

Для этого в начале вспышки лампы накачки добротность резонатора искусственно снижают, а затем быстро повышают. Такой режим работы лазера называют режимом с модулированной добротностью. Это можно осуществить разными способами.

На заре создания импульсных лазеров одно зеркало резонатора вращали с большой угловой скоростью ( $\sim 500$  об/с) вокруг оси, перпендикулярной оси резонатора. В тот момент когда зеркало становилось перпендикулярно оптической оси резонатора, добротность достигала своего максимума. Практически в этот момент начиналась генерация, которая продолжалась в течение  $\tau_0 \sim 10^{-8}$  с. За это время заселенность верхнего уровня, накопленная от накачки, истощалась, и генерация прекращалась.

В настоящее время для модуляции добротности используются *электрооптические* и *акустооптические модуляторы света*, принципы работы которых будут рассмотрены в последующих лекциях.

При модуляции добротности энергия импульса несколько снижается (по сравнению с режимом свободной генерации), но сильно сокращается длительность импульса (до десятка наносекунд). А это позволяет достичь максимальной (пиковой) мощности  $P \sim 100$  МВт.

Широкое распространение получили неодимовые лазеры. В таком лазере ионы неодима  $\text{Nd}^{3+}$  имплантированы в стекло. Квантовые переходы ионов осуществляются по четырехуровневой схеме, изображенной на рис. 7.15. Длина волн излучения ( $\lambda = 1,06$  мкм) находится в ИК-диапазоне, поэтому луч лазера глазом не виден.

Этот лазер также может работать как в пиковом режиме, так и в режиме с модулированной добротностью. Используя длинные активные стеклянные элементы ( $L \sim 1$  м), в последнем случае удастся достичь энергии импульса  $W \sim 50$  Дж при длительности  $\tau_0 \sim 30$  нс. Пиковая мощность импульса  $P \sim W/\tau_0 \sim 10^9$  Вт.

Большой энергией импульса обладает лазер, активный элемент которого представляет стержень из иттрий-алюминиевого граната (YAG) с имплантированными ионами  $\text{Nd}^{3+}$ . Это связано с тем, что время жизни в возбужденном состоянии у ионов в этой матрице увеличивается, что позволяет достичь большей инверсной заселенности и, следовательно, коэффициента усиления.

YAG  $\text{Nd}^{3+}$ -лазер может работать как в импульсном, так и квазинепрерывном режимах. В последнем случае используется непрерывная накачка. Лазер генерирует последовательность импульсов с частотой следования, достигающей величины  $\sim 10$  кГц. Она определяется частотой модуляции добротности резонатора, которая может осуществляться с помощью электрооптических и акустооптических модуляторов света.

Внешний вид YAG  $\text{Nd}^{3+}$ -лазера (ИЛТИ-205), используемого в учебном процессе на кафедре общей физики и волновых процессов, представлен на рис. 7.4 цв. вкл. В резонаторе этого лазера у правого зеркала находится акустооптический модулятор. Он представляет собой кристалл кварца со скошенной нижней гранью. В этом кристалле поперек пучка сверху вниз может распространяться бегущая акустическая волна с частотой 50 МГц. Она возбуждается пьезоэлементом, прикрепленным к верхней грани кристалла и питаемым от генератора высокой частоты.

При распространении этой волны в кристалле возникают колебания плотности и, следовательно, показателя преломления. Скошенность грани позволяет предотвратить образование стоячей акустической волны. Из-за дифракции на бегущих вниз неоднородностях показателя преломления свет усиливаться не будет. Это означает, что добротность резонатора невелика. Если внезапно отключить пьезоэлемент от генератора, то добротность резонатора резко возрастает.

В описываемом лазере осуществляется импульсная накачка от лампы. Модуляция добротности осуществляется синхронно с накачкой частотой 2,5 Гц. Ровно с такой же частотой лазер генерирует импульсы, длительность каждого из которых равна 10 нс, а максимальная мощность около 10 кВт.

**Полупроводниковые лазеры.** В этих лазерах в качестве активной среды используются полупроводниковые кристаллы. Квантовые переходы происходят между разрешенными энергетическими зонами кристалла.

При рекомбинации электронов проводимости и дырок в полупроводниках высвобождается энергия, которая может испускаться в виде квантов излучения (люминесценции) или передаваться колебаниям кристаллической решетки (переходить в тепло). Длина волны  $\lambda$  излучения определяется шириной  $\Delta W_3$  запрещенной зоны полупроводника:  $\lambda \approx hc/\Delta W_3$ .

Для возникновения люминесценции необходимо возбуждать (накачивать) кристалл, чтобы образовывались избыточные электронно-дырочные пары. При малой скорости образования избыточных пар излучательная рекомбинация носит спонтанный характер, что имеет место в светоизлучающих диодах, получивших широкое применение в качестве компактных и экономичных источников света.

Для усиления света в полупроводнике необходимо создать инверсную заселенность: зона проводимости вблизи ее дна должна быть заполнена электронами в большей степени, чем валентная зона вблизи ее потолка.

В полупроводниковом лазере применяют различные способы накачки: инжекция носителей тока через  $p$ — $n$ -переход или гетеропереход, накачка пучком быстрых электронов, оптическая накачка, накачка при пробое в электрическом поле.

Наиболее широкое распространение получил первый способ накачки. Лазеры с такой накачкой называются инжекционными лазерами.

На рис. 7.17 показано устройство инжекционного лазера на  $p$ — $n$ -переходе.

Он представляет собой полупроводниковый диод, через который в прямом направлении (от  $p$  к  $n$ ) течет электрический ток  $i$ . Заштриховано сечение области вблизи  $p$ — $n$ -перехода, в которой происходит генерация света. У кристалла имеются две плоскопараллельные поверхности (образованные сколом кристалла), выполняющие роль зеркал резонатора. Поэтому он еще называется лазерным диодом.

Из-за большого значения показателя преломления кристалла коэффициент отражения

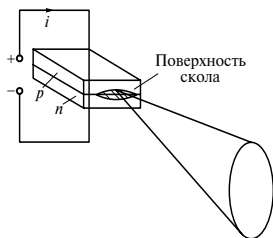


Рис. 7.17

поверхностей может достигать величин  $\sim 20\text{--}40\%$ . Инверсия заселенности возникает при плотности тока  $\sim 1\text{ кА/см}^2$ .

Инжекционные лазеры работают в импульсном режиме с выходной мощностью до 100 Вт и в непрерывном режиме с мощностью более 10 Вт (GaAs) в ближней ИК-области ( $\lambda = 850\text{ нм}$ ) и около 10 мВт ( $\text{Pb}_x\text{Sn}_{1-x}\text{Te}$ ) в средней ИК-области ( $\lambda = 10\text{ мкм}$ ).

К достоинствам полупроводниковых лазеров следует отнести высокую эффективность (до 50 %) преобразования электрической энергии в световую, простоту конструкции, возможность быстрой (до частот 10 ГГц) модуляции интенсивности излучения, наличие большого числа полупроводников (активных сред), непрерывно перекрывающих диапазон длин волн от 0,32 до 32 мкм.

Недостаток состоит в большой ширине линии излучения, поскольку велика частотная ширина  $\delta\nu_p$  моды такого сверхкороткого, а потому низкодобротного резонатора (см. формулы (7.20) и (7.21)). Ширина линии излучения составляет десятки нанометров. Кроме того, велика угловая расходимость генерируемого светового пучка (десятки миллирадиан), имеющего малые поперечные размеры в направлении, перпендикулярном  $p$ – $n$ -переходу. На рис. 7.17 показана диаграмма направленности излучения полупроводникового лазера, имеющая разные угловые размеры в двух взаимно перпендикулярных плоскостях.

Лазерные диоды находят широкое применение как источники света для накачки волоконных лазеров и в волоконно-оптических линиях связи, измерительных устройствах (например, в дальномерах), в лазерных указках, используются для считывания штрих-кодов. Красные и зеленые лазерные диоды применяются для светофоров, световых табло и указателей, инфракрасные и красные — в проигрывателях CD- и DVD-дисков, синие — в устройствах HD-DVD и Blu-Ray.

На рис. 7.5 цв. вкл. представлена фотография работающего синего лазерного диода. При своих миниатюрных размерах он генерирует световой пучок мощностью  $\sim 5\text{ мВт}$ .

**Волоконные лазеры.** Появление современных высокоэффективных и компактных волоконных лазеров стало возможным благодаря созданию световодов с низкими оптическими потерями и было стимулировано прежде всего последующим бурным развитием волоконно-оптической связи. Активной средой такого лазера является оптическое волокно с добавками редкоземельных элементов, таких как неодим (Nd), иттербий (Yb), эрбий (Er), гольмий (Ho), тулий (Tm). Принципиальное преимущество оптического волокна как активной среды по сравнению с описанными ранее объемными активными средами, наряду с малыми потерями, состоит также в большой длине усиления и малом поперечном сечении. Это позволяет использовать для эффективной накачки компактные лазерные диоды.

Большое отношение площади поверхности световода (диаметром  $\sim 100\text{ мкм}$ ) к его объему дает возможность получать большие выходные мощности  $\sim 1\text{ кВт}$  при воздушном охлаждении, при этом обеспечивается высокое качество одномодового выходного пучка.

В настоящее время разработаны мощные непрерывные и импульсные пикосекундные лазеры.

Принципиальная схема волоконного лазера приведена на рис. 7.18, а.

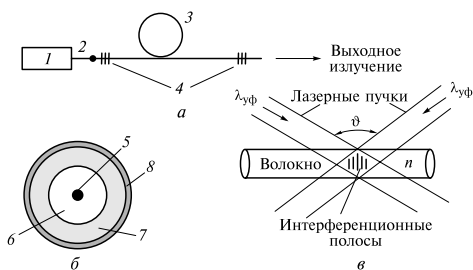


Рис. 7.18

Источником накачки является диодный лазер 1. Излучение накачки через выходной волоконный световод 2 диаметром сердцевинки  $\sim 200$  мкм поступает в активный световод 3. Жирной точкой отмечено место спая двух волноводов. Сечение волновода изображено на рис. 7.18, б. Он состоит из тонкой сердцевинки 5 диаметром 6—8 мкм, содержащей ионы редкоземельных элементов. Сердцевина окружена первой оболочкой 6 из чистого кварцевого стекла с диаметром в несколько сотен микрон. В свою очередь эта оболочка окружена второй оболочкой 7 из полимерного материала с показателем преломления значительно более низким, чем у кварцевого стекла. Снаружи находится защитная оболочка 8.

Излучение лазерного диода распространяется по кварцевой оболочке активного волокна, имеющего длину несколько десятков метров. Это излучение по всей длине проникает через границу раздела оболочки и сердцевинки, в результате чего создается инверсная заселенность ионов редкоземельных элементов. Более подробно распространение света вдоль оптического волокна будет обсуждено в лекции 17.

На концах активного волокна создаются *брэгговские решетки* показателя преломления 4, выполняющие функции зеркал резонатора. Каждая из них представляет собой созданную искусственно небольшую область, в которой вдоль оси волновода периодически изменяется показатель преломления сердцевинки. Метод ее создания показан на рис. 7.18, в.

На волновод под углом  $\vartheta$  друг к другу направляются два одинаковых лазерных ультрафиолетовых пучка с длиной волны  $\lambda_{\text{уф}}$ . В области их пересечения будут формироваться интерференционные полосы, расстояние между которыми  $\Delta x = \lambda_{\text{уф}}/n\vartheta$  ( $n$  — показатель преломления необлученной сердцевинки; см. формулу (9.1) в лекции 9). Из-за фоточувствительности волокна в местах нахождения интерференционных максимумов показатель преломления необратимо увеличивается.

Брэгговская решетка, как и многослойное диэлектрическое зеркало (см. лекцию 17), хорошо отражает излучение с длиной волны (в волноводе)  $\lambda = \lambda_0/n = 2\Delta x$  ( $\lambda_0$  — длина волны в вакууме). Последнее условие селективного отражения называется условием Брэгга. Это условие будет неоднократно использовано в последующих лекциях.

В настоящее время для создания мощных лазеров наибольшее распространение получили волоконные световоды с Yb, позволяющие генерировать излучение с длиной волны  $\lambda_0 \approx 1,1$  мкм. При совместном использовании Er и Yb длина волны может занимать диапазон 1,5—1,6 мкм, а в случае Tm и Ho  $\lambda_0 \sim 2$  мкм.

Достигнутые мощности  $\sim 1$  кВт в спектральном диапазоне 1,06—1,1 мкм являются далеко не предельными. Современные технологии дают возможность создать новые структуры световодов, позволяющие увеличить мощность до 10 кВт!

Высокая стабильность и эффективность в сочетании с компактностью, большой мощностью и хорошим качеством одномодового светового пучка делают волоконные лазеры более предпочтительными по сравнению с многими другими лазерами, в том числе и с мощными технологическими лазерами, например CO<sub>2</sub>-лазером. Ведь в технологическом процессе важна гибкость при доставке лазерного излучения к обрабатываемому объекту. Наконец, волоконные лазеры могут иметь и более низкую стоимость.

**Жидкостные лазеры на красителях.** В этих лазерах активной средой являются сложные органические соединения, энергетическая схема уровней молекул которых качественно изображена на рис. 7.19. Накачка осуществляется светом. Из-за большой ширины уровня 2 (представляющего систему колебательно-вращательных уровней) полоса поглощения имеет ширину 100—200 нм и находится в видимой области.

За время  $\approx 10^{-11}$  с. молекулы безызлучательно переходят на самый нижний подуровень состояния 2, время жизни которого  $\tau_2 \sim 10^{-9}$  с. Далее вещество люминесцирует, переходя в состояние 1. Полоса люминесценции сдвинута в область более длинных волн по отношению к полосе поглощения. Одновременно с люминесценцией молекула может перейти в метастабильное состояние 3, а затем поглотить квант света люминесценции и перейти в состояние 4. Чтобы это предотвратить, необходимо за время  $10^{-7}$  с накачать уровень 2.

Лазеры на красителях могут накачиваться наносекундными импульсами других лазеров (рубинового, неодимового) и их гармониками. Длительность генерации составляет 10 нс, а мощность  $10^4$ — $10^6$  Вт. Можно накачивать и импульсными лампами, обеспечив нарастание вспышки за время  $< 10^{-7}$  с.

При поглощении широкого спектра излучения лампы краситель нагревается, и молекулы могут диссоциировать. Чтобы этого не произошло, краситель прокачивают через кювету, находящуюся в резонаторе. При быстрой прокачке можно добиться непрерывной генерации. Разумеется, накачка также должна быть непрерывной.

На рис. 7.20 изображена схема непрерывного лазера, накачиваемого излучением аргонового лазера.

Пройдя через линзу  $L_2$ , его излучение фокусируется в кювету  $K$ , через которую со скоростью  $v$  протекает краситель. При размере пучка аргонового лазера в фокальной плоскости  $d \sim 10$  мкм и скорости  $v \sim 10$  м/с молекула накачивается в течение  $\tau \sim d/v \sim 10^{-6}$  с, затем излучает и уходит из резонатора.

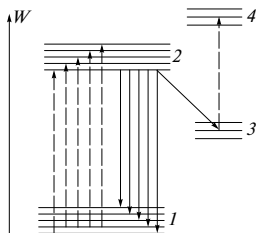


Рис. 7.19



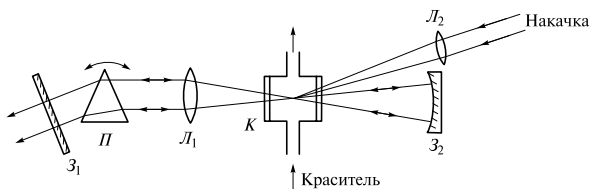


Рис. 7.20

Резонатор состоит из сферического  $Z_2$  и плоского  $Z_1$  зеркал. Если зеркала отражают все компоненты широкой линии люми-несценции красителя, то полоса генерации дос-тигает 30—50 нм.

Если внутрь резонатора поместить призму  $P$  или дифракционную решетку (на рисунке не показана), на которую падает параллельный пучок усилива-емого света (после прохождения линзы  $L_1$ ), то полоса генерации сузится до 0,1—0,2 нм. Усилиться будут те волны, которые падают перпендикулярно на зеркало  $Z_1$ . Поворачивая призму (или решетку), можно плавно перестраивать длину волны излучения лазера.

На рис. 7.6 цв. вкл. показан фрагмент такого лазера. Краситель оранжевого цвета прокачивается через кювету, которая освещается световым пучком арго-нового лазера.

Широко распространенным красителем является родамин 6G. Его линия люминесценции занимает диапазон  $520 \text{ нм} < \lambda < 620 \text{ нм}$ . В качестве активной среды используются различные его растворы. Высокая эффективность преоб-разования энергии волны накачки в энергию генерируемой волны получается при использовании в качестве растворителя этанола. При повороте призмы цвет светового пучка лазера с такой активной средой изменяется от зеленого до красного.

Если использовать краситель оксазин, то можно перестраивать длину волны излучения в диапазоне 660—760 нм. Помещая в резонатор различные растворы красителей, можно осуществить генерацию на любой длине волны видимого и ближнего ИК-диапазона.

## РАЗДЕЛ 3

### ИНТЕРФЕРЕНЦИЯ СВЕТА

---

#### ЛЕКЦИЯ 8

Одним из наиболее важных явлений, подтверждающих волновую природу света, является интерференция. Под интерференцией понимают явление наложения волн, приводящего к перераспределению в пространстве плотности энергии электромагнитного поля.

В солнечную погоду нередко можно видеть причудливую окраску тонких масляных пятен на мокром асфальте или на поверхности луж. Различными цветами радуги переливаются пузыри на водной поверхности. Многим хорошо известен классический опыт Ньютона, в котором наблюдались концентрические кольца при освещении выпуклой линзы через прижатую к ней стеклянную пластинку.

В домашних условиях можно наблюдать интерференцию света, если, например, луч от лазерной указки направить на лист плотной бумаги, в котором проколоты два близко расположенных отверстия. Тогда позади листа на светлой стене или экране можно наблюдать семейство чередующихся светлых и темных полос.

Во всех перечисленных случаях имеет место наложение в пространстве световых волн.

Рассмотрим более подробно основные закономерности интерференции, обратившись сначала к рассмотрению интерференции двух волн. На рис. 8.1 схематично изображены два волновых цуга, пересекающиеся в точке  $P$ .

Если векторы  $\mathbf{E}_1$  и  $\mathbf{E}_2$  ориентированы перпендикулярно плоскости рисунка, то напряженность суммарного поля в этой точке

$$E_{1+2}(t) = E_1(t) + E_2(t). \quad (8.1)$$

Любой приемник излучения, находящийся в точке  $P$ , будет реагировать на среднюю величину

$$\overline{E^2} = \frac{1}{\tau_{\text{пр}}} \int_0^{\tau_{\text{пр}}} E^2(t) dt, \quad (8.2)$$

где  $\tau_{\text{пр}}$  — время быстрогодействия приемника. Для всех приемников света время  $\tau_{\text{пр}} \geq 10^{-12}$  с и, следовательно, значительно превосходит период оптических колебаний.

Подставив (8.1) в (8.2), получим

$$\overline{E_{1+2}^2} = \overline{E_1^2} + \overline{E_2^2} + 2\overline{E_1 E_2}. \quad (8.3)$$

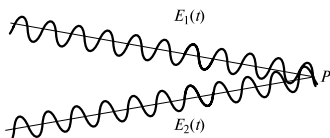


Рис. 8.1

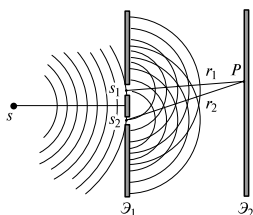


Рис. 8.2

Последнее слагаемое в правой части (8.3) называется *интерференционным членом*. Таким образом, необходимым условием интерференции является отличие от нуля интерференционного члена.

### Интерференция квазимонохроматических волн.

Рассмотрим основные закономерности интерференции, используя классический опыт, выполненный английским физиком Т. Юнгом (1801). Свет от точечного источника  $s$  попадает на экран  $\mathcal{E}_1$  с двумя малыми близкорасположенными отверстиями, а на втором экране  $\mathcal{E}_2$  формируется интерференционная картина (рис. 8.2).

Волновые возмущения в плоскости отверстий эквивалентны точечным источникам  $s_1$  и  $s_2$ , посылающим в точку  $P$  волны

$$\begin{aligned} E_1(t) &= a_1(t) \sin[\omega_0 t - k_0 r_1 + \varphi_1(t)]; \\ E_2(t) &= a_2(t) \sin[\omega_0 t - k_0 r_2 + \varphi_2(t)]. \end{aligned} \quad (8.4)$$

Выражения (8.4) описывают квазимонохроматические волны, у которых амплитуды  $a_1$ ,  $a_2$  и фазы  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$  являются медленно меняющимися функциями времени. Временной масштаб их изменения  $\tau_k \sim 1/\Delta\nu$  ( $\Delta\nu$  — ширина спектральной линии излучения источника  $s$ ). Из предыдущего рассмотрения статистических свойств света следует, что время  $\tau_k$  излучения различных некогерентных источников света (дуги, газоразрядной лампы и др.) по порядку величины совпадает либо с длительностью цуга  $\tau$  (со временем радиационного затухания), либо со средним временем  $\tau_c < \tau$  между двумя столкновениями.

Поле в точке  $P$  будет равно

$$E_{1+2}(t) = A \sin(\omega_0 t + \Phi), \quad (8.5)$$

где

$$A^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 a_2 \cos[(\varphi_1 - \varphi_2) + k_0(r_2 - r_1)]; \quad (8.6)$$

$$\operatorname{tg} \Phi = \frac{a_1 \sin(\varphi_1 - k_0 r_1) + a_2 \sin(\varphi_2 - k_0 r_2)}{a_1 \cos(\varphi_1 - k_0 r_1) + a_2 \cos(\varphi_2 - k_0 r_2)}. \quad (8.7)$$

Интенсивность волны, в соответствии с (8.6), равна

$$I = \frac{A^2}{2} = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos[(\varphi_1 - \varphi_2) + k_0(r_2 - r_1)], \quad (8.8)$$

где  $I_1 = a_1^2/2$ ;  $I_2 = a_2^2/2$ . Величина  $r_2 - r_1$  называется *разностью хода*.

Это распределение интенсивности в пространстве и описывает *интерференционную картину*, или *интерферограмму*, наблюдаемую на экране  $\mathcal{E}_2$ .

Если бы разность фаз  $\varphi_1 - \varphi_2$  не менялась со временем, то картина была бы неподвижной. На самом деле эта разность меняется случайным образом, поэтому интерференционная картина будет хаотически двигаться в разные стороны по экрану  $\mathcal{E}_2$ . Приемник может зафиксировать такую динамическую интерференционную картину, если  $\tau_k > \tau_{\text{пр}}$ .

Если источник света тепловой, газоразрядный и пр., то ширина линии его излучения  $\Delta\nu \geq 10^{10} - 10^{11}$  Гц, а время  $\tau_k \leq 10^{-11} - 10^{-10}$  с. Если  $\tau_k \leq \tau_{\text{пр}}$ , то приемник регистрирует усредненную за время  $\tau_{\text{пр}}$  «размазанную» картину.

Качество картины будет тем выше, чем лучше выполняется неравенство  $|\varphi_1 - \varphi_2| < 2\pi$ . Если, например, разность фаз изменится на величину  $\pm\pi$ , то картина сдвинется на половину расстояния между интерференционными полосами, а усредненная картина будет сильно смазана. Чтобы устранить это смазывание, в интерференционных опытах с тепловыми, газоразрядными и другими источниками используется интерференция двух волн от одного источника.

Ширина линии лазерного излучения существенно меньше, и условие  $\tau_k > \tau_{пр}$  может быть выполнено. Вскоре после появления лазеров были проведены опыты по интерференции света от двух независимых He-Ne-лазеров.

**Интерференционные полосы Юнга.** Проанализируем распределение интенсивности в интерференционной картине. Вначале будем считать, что  $a_1 = a_2 = a = \text{const}$ ,  $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi = \text{const}$ . Эти два условия соответствуют интерференции монохроматических волн. Тогда (8.8) запишется в виде

$$I = 2I_0[1 + \cos(k_0(r_2 - r_1))]. \quad (8.9)$$

Здесь  $I_0 = a^2/2$ . В интерференционных максимумах интенсивность  $I = 4I_0$ . Их положение определяется условием  $k_0(r_2 - r_1) = 2\pi m$ , или  $r_2 - r_1 = m\lambda_0$ , где  $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  Целое число  $m$  определяет порядок интерференционного максимума, или порядок интерференции. Если же  $k_0(r_2 - r_1) = 2\pi m + \pi$ , или  $r_2 - r_1 = m\lambda_0 + \lambda_0/2$ , то будут интерференционные минимумы, в которых  $I = 0$ .

Интерференционные максимумы  $m$ -го порядка расположены на параболоиде вращения  $r_2 - r_1 = m\lambda$  с осью  $s_1s_2$ . На экране  $\mathcal{E}_2$  будут видны практически параллельные полосы, называемые *полосами Юнга*. Они перпендикулярны плоскости рисунка. Распределение интенсивности  $I(x)$  вдоль оси  $Ox$  показано на рис. 8.3.

Координаты  $x_m$  этих полос можно легко вычислить, если экран  $\mathcal{E}_2$  расположить в *дальней зоне*. Понятие дальней зоны является чрезвычайно важным в теории волн.

Совместим начало отсчета координаты  $x$  с интерференционным максимумом нулевого порядка. Туда же поместим точку  $P$  (рис. 8.4).

Если увеличивать расстояние  $L$ , то отрезки  $s_1P$  и  $s_2P$  будут становиться все более похожими на параллельные, а их длина  $r$  приближаться к расстоянию  $L$ . Определим область расстояний  $L$ , при которых  $r - L \ll \lambda_0$ . При расстоянии  $d$  между отверстиями можем записать

$$\frac{d^2}{4} = r^2 - L^2 = (r - L)(r + L) \approx 2L(r - L), \quad (8.10)$$

где  $r + L \approx 2L$ .

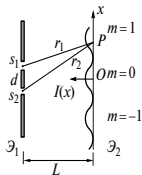


Рис. 8.3

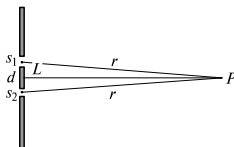


Рис. 8.4

Тогда искомое расстояние удовлетворяет неравенству

$$r - L = \frac{d^2}{8L} \ll \lambda_0. \quad (8.11)$$

Отсюда находим

$$L \gg L_0 = \frac{d^2}{8\lambda_0}. \quad (8.12)$$

Величина  $L_0$  имеет размерность длины. С ее помощью выделяют так называемые ближнюю ( $L \ll L_0$ ) и дальнюю ( $L \gg L_0$ ) зоны. Если  $d \sim 2$  мм,  $\lambda_0 = 500$  нм, то  $L_0 = 1$  м. Когда точка  $P$  находится в дальней зоне, можно приближенно считать, что все отрезки, идущие из области размером  $d$  к точке  $P$ , имеют одинаковую длину, равную  $L$ . Это приближение позволяет существенно упростить решение многих интерференционных (и дифракционных) задач. Если в рассматриваемой интерференционной схеме экран  $\mathcal{E}_2$  поместить в дальнюю зону (рис. 8.5), то для точки  $P$  с координатой  $x$ , в силу параллельности  $s_1P$  и  $s_2P$ , можно приближенно записать

$$\frac{x}{L} = \frac{r_2 - r_1}{d}. \quad (8.13)$$

Тогда (8.9) можно представить в виде

$$I(x) = 2I_0 \left[ 1 + \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_0} \frac{d}{L} x\right) \right]. \quad (8.14)$$

График зависимости (8.14) представлен на рис. 8.6.

Координата  $m$ -го максимума равна

$$x_m = \frac{m\lambda L}{d}, \quad (8.15)$$

а ширина интерференционной полосы, или расстояние между максимумами,

$$\Delta x = x_{m+1} - x_m = \frac{\lambda L}{d}. \quad (8.16)$$

Ширина полос увеличивается с уменьшением расстояния  $d$  между отверстиями и удалением экрана  $\mathcal{E}_2$ . Подобное распределение интенсивности будет и при использовании экрана  $\mathcal{E}_1$  с двумя параллельными щелями.

**Размывание интерференционной картины.** Полосы Юнга, изображенные на рис. 8.6, соответствуют идеальной ситуации, когда излучение источника про-

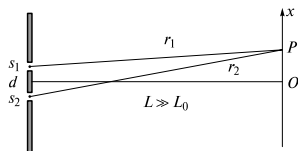


Рис. 8.5

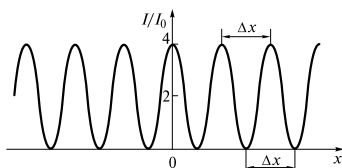


Рис. 8.6

исходит на одной длине волны  $\lambda_0$  (или частоте  $\omega_0$ ). Как уже отмечалось, реальные источники в лучшем случае являются квазимонохроматическими, поэтому интерференционная картина размывается. Размывание можно описать, пользуясь временным и спектральным представлениями квазимонохроматического излучения. Спектральное описание сводится к суперпозиции интерференционных полос Юнга для разных длин волн. В методическом плане оно более наглядно, поэтому целесообразно с него и начать.

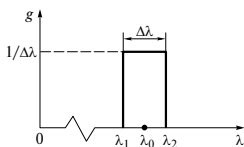


Рис. 8.7

**Спектральное описание.** Для простоты будем считать, что линия излучения имеет прямоугольный контур с центральной длиной волны  $\lambda_0$  и шириной  $\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1$  (рис. 8.7).

Напомним, что спектральная плотность интенсивности связана с контуром линии зависимостью

$$S(\lambda) = I_0 g(\lambda). \quad (8.17)$$

Если выделить узкий спектральный интервал  $d\lambda$ , то интенсивность для этого интервала  $dI_0 = S(\lambda)d\lambda$ . Каждый монохроматический источник света с такой интенсивностью и длиной волны  $\lambda$  сформирует свою элементарную интерференционную картину, симметричную относительно начала координат. Полная картина будет являться суперпозицией элементарных картин. Однако эти картины, согласно (8.16), будут иметь разные расстояния  $\Delta x$  между полосами. Поэтому при удалении от начала координат интерференционные полосы суммарной картины будут расширяться и в некотором интерференционном порядке  $m_{\max}$  сольются. При  $m > m_{\max}$  картина будет полностью смазана.

Оценим  $m_{\max}$ . Для этого будем считать, что в точке  $P$  реализуется  $m$ -й максимум для длины волны  $\lambda_2$  и  $(m+1)$ -й — для длины волны  $\lambda_1$ :

$$(r_2 - r_1)_{\max} = m_{\max} \lambda_2 = (m_{\max} + 1) \lambda_1. \quad (8.18)$$

Вначале оценим *максимальный порядок интерференции*:

$$m_{\max} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} \approx \frac{\lambda_0}{\Delta\lambda}. \quad (8.19)$$

Этому порядку соответствует *максимальная разность хода*

$$(r_2 - r_1)_{\max} = m_{\max} \lambda_2 \approx \frac{\lambda_0^2}{\Delta\lambda}. \quad (8.20)$$

Формулы (8.19) и (8.20) имеют фундаментальное значение — *они связывают максимальные порядки интерференции и предельные разности хода лучей с шириной спектральной линии источника света.*

Не составляет труда получить распределение интенсивности при заданной спектральной плотности. Здесь удобнее воспользоваться спектральной плотностью  $S(\omega)$ . Вначале перепишем (8.9) для монохроматического излучения в виде

$$I(\tau) = 2I_0[1 + \cos(\omega_0\tau)], \quad (8.21)$$

где  $\tau = (r_2 - r_1)/c$  — время задержки, пропорциональное разности хода.

Для квазимонохроматического излучения заменим  $I_0$  на  $dI_0(\tau) = S(\omega)d\omega$ . Тогда

$$dI(\tau) = 2S(\omega)d\omega[1 + \cos(\omega\tau)]. \quad (8.22)$$

Интегрируя (8.22) по всем частотам, получаем

$$I(\tau) = \int dI(\tau) = 2I_0 + 2 \int_0^{\infty} S(\omega) \cos(\omega\tau) d\omega. \quad (8.23)$$

В качестве примера рассчитаем  $I(\tau)$  для излучения с прямоугольным контуром линии, изображенном на рис. 8.7. Полагая, что при  $\omega_1 < \omega < \omega_2$   $S(\omega) = I_0/\Delta\omega$  ( $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$ ), после подстановки в (8.23) и интегрирования имеем:

$$I(\tau) = 2I_0 + \frac{I_0}{\Delta\omega} 2 \int_{\omega_1}^{\omega_2} \cos(\omega\tau) d\omega = 2I_0 + 2I_0 \text{sinc}\left(\frac{\Delta\omega\tau}{2}\right) \cos(\omega_0\tau). \quad (8.24)$$

На рис. 8.8 представлено распределение интенсивности (8.24).

При увеличении  $\tau$  качество картины (контраст) снижается, и при задержке  $\tau_k = 2\pi/\Delta\omega = 1/\Delta\nu$  картина смазывается. Отметим, что при дальнейшем увеличении  $\tau$  качество несколько повысится, но незначительно. Назовем время  $\tau_k$  *временем когерентности излучения*. Оно связано с шириной прямоугольного спектра соотношением

$$\tau_k = \frac{1}{\Delta\nu}. \quad (8.25)$$

Время когерентности определяет масштаб времени, на котором существенно изменяются амплитуда и фаза квазимонохроматического излучения. Этому времени соответствует разность хода, называемая *длиной когерентности*

$$l_k = c\tau_k = \frac{c}{\Delta\nu}. \quad (8.26)$$

Очевидно, что  $l_k = (r_2 - r_1)_{\max}$ . Действительно, поскольку  $\lambda_0 = \frac{c}{\nu_0}$ , то  $\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} = \left| \frac{\Delta\nu}{\nu_0} \right|$ . Поэтому  $l_k = \frac{c}{\Delta\nu} = \frac{c}{\nu_0} \frac{\lambda_0}{\Delta\lambda} = \frac{\lambda_0^2}{\Delta\lambda}$ .

Оценим возможности получения интерференционной картины с применением различных источников:

• *белый свет*:  $\lambda_0 = 550$  нм,  $\Delta\lambda = 700 - 400 = 300$  нм,  $m_{\max} \approx 2$ , длина когерентности  $l_k = m_{\max}\lambda \approx 2\lambda \approx 1$  мкм. Таким образом, в опытах с белым светом можно получить несколько полос самых низших порядков;

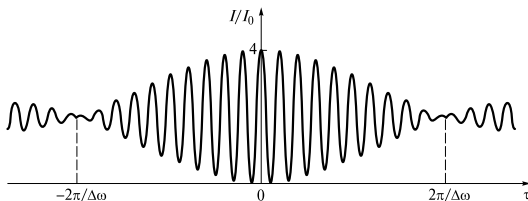


Рис. 8.8

- *белый свет + светофильтр*. Обычный фильтр (цветное стекло) пропускает интервал длин волн  $\Delta\lambda \approx 50$  нм. Поэтому  $m_{\max} \approx 10$ ,  $l_k \approx 10\lambda$ . Число полос с применением фильтра увеличивается в несколько раз;

- *газоразрядная лампа*. Ширина спектральной линии зависит от температуры и давления газа. Полагая  $\Delta\nu \approx 10^{11}$  Гц, получаем  $\tau_k = 1/\Delta\nu \approx 10^{-11}$  с, длина когерентности  $l_k \approx 3$  мм, а  $m_{\max} = l_k/\lambda \approx 6 \cdot 10^3$ ;

- *пучок светящихся атомов (атомный пучок)*. Естественная ширина линии их излучения  $\Delta\nu \approx 10^9$  Гц, время когерентности  $\tau_k \approx 10^{-9}$  с, длина когерентности  $l_k \approx 30$  см,  $m_{\max} \approx 10^5$ ;

- *He-Ne-лазер*. Ширину линии обычного (без автоподстройки резонатора) лазера примем равной  $\Delta\nu \approx 10^7$  Гц,  $\tau_k = 1/\Delta\nu \approx 10^{-7}$  с,  $l_k = c\tau_k \approx 30$  м,  $m_{\max} \approx 10^7$ . Если лазер с автоподстройкой и стабилизацией, то  $\Delta\nu \approx 1$  Гц,  $\tau_k \approx 1$  с,  $l_k \approx 3 \cdot 10^8$  м.

Для описания качества картины А. Майкельсон ввел *функцию видности*, определяемую как

$$V(\tau) = \frac{I_{\max}(\tau) - I_{\min}(\tau)}{I_{\max}(\tau) + I_{\min}(\tau)}, \quad (8.27)$$

где  $I_{\max}$  и  $I_{\min}$  — интенсивности в интерференционном максимуме и ближайшем к нему минимуме. Для распределения интенсивности (8.24) функция видности получается равной

$$V(\tau) = \left| \operatorname{sinc} \left( \frac{\Delta\omega\tau}{2} \right) \right|. \quad (8.28)$$

График функции изображен на рис. 8.9.

На рис. 8.1 цв. вкл. показаны полученные с помощью компьютерного моделирования распределения интенсивности  $I(\tau)$  и интерференционные полосы для спектра, состоящего из двух линий (рис. 8.1, а), а также прямоугольного (рис. 8.1, б) и гауссова (рис. 8.1, в) спектров. При этом во всех трех ситуациях середине спектра соответствует длина волны  $\lambda_0 = 525$  нм, а ширина спектра  $\Delta\lambda = 50$  нм.

В первом случае с увеличением времени задержки функция видности периодически изменяется от единицы до нуля. Для прямоугольного и гауссового спектров видность картины ухудшается. Отметим, что в последнем случае функция видности является также гауссовой.

**Временное описание.** В опыте Юнга излучение квазимонохроматического источника поступает на два отверстия, после чего собирается в точке  $P$ . Если напряженность поля источника меняется во времени по закону  $E(t)$ , то  $E_1$  и  $E_2$  с разной временной задержкой повторяют это поле:  $E_1(t) = E(t - \Delta t)$ ;  $E_2(t) = E(t - \Delta t + \tau)$ , где  $\Delta t$  — время прохождения волны от  $s$  через  $s_1$  к точке  $P$ ;  $\tau = (r_2 - r_1)/c$  — время задержки, определяемое разностью хода. Подставляя  $E_1$  и  $E_2$  в (8.3) и учитывая, что результат усреднения от  $\Delta t$  не зависит, получаем

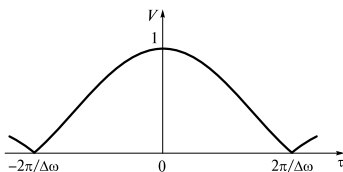


Рис. 8.9



$$I(\tau) = \overline{E_{1+2}^2} = I_0 + I_0 + 2\overline{E(t)E(t+\tau)}. \quad (8.29)$$

Функция

$$B(\tau) = \overline{E(t)E(t+\tau)} \quad (8.30)$$

называется *функцией автокорреляции поля*  $E(t)$ . Очевидны ее свойства:  $B(0) = I_0$ ;  $B(-\tau) = B(\tau)$ ;  $B \rightarrow 0$  при  $\tau \rightarrow \infty$ .

Сравнивая (8.29) и (8.23), находим

$$B(\tau) = \int_0^\infty S(\omega) \cos(\omega\tau) d\omega. \quad (8.31)$$

Для монохроматического излучения  $S(\omega) = I_0\delta(\omega - \omega_0)$ , поэтому

$$B(\tau) = I_0 \int_0^\infty \delta(\omega - \omega_0) \cos(\omega\tau) d\omega = I_0 \cos(\omega_0\tau). \quad (8.32)$$

Для прямоугольного спектра, как это сразу следует из (8.24),

$$B(\tau) = I_0 \operatorname{sinc}\left(\frac{\Delta\omega\tau}{2}\right) \cos(\omega_0\tau). \quad (8.33)$$

Обобщая (8.33), отметим, что для квазимонохроматического излучения с центральной частотой  $\omega_0$  и шириной  $\Delta\omega \ll \omega_0$  функция автокорреляции имеет следующий вид:

$$B(\tau) = I_0 \gamma(\tau) \cos[\omega_0\tau + \Psi(\tau)] \quad (8.34)$$

(вывод этого выражения приведен в приложении в конце этой лекции). Медленно изменяющаяся функция  $\gamma(\tau)$  на масштабе  $\tau_k \sim 1/\Delta\nu$  называется *степенью корреляции*. Степень корреляции изменяется в диапазоне  $0 < |\gamma| < 1$ . В опыте Юнга  $|\gamma| = V$ .

С помощью  $\gamma$  можно выработать критерий когерентности интерферирующих волн. В природе нет абсолютно когерентных волн, а существуют лишь *частично когерентные волны*. Степень их когерентности характеризуется величиной  $|\gamma|$ : чем ближе  $|\gamma|$  к единице, тем более когерентны волны.

Если задержка  $\tau < \tau_k$ , то поля  $E_1$  и  $E_2$  в точке  $P$  содержат большое число одних и тех же цугов. В этом случае имеется большая корреляция (статистическая связь) этих полей, и  $\overline{E_1 E_2} \neq 0$ .

Наоборот, при  $\tau > \tau_k$  число интерферирующих одинаковых цугов в точке  $P$  незначительно, а преобладают разные цуги, статистически независимые. В этом случае корреляция полей  $E_1$  и  $E_2$  отсутствует и  $\overline{E_1 E_2} = \overline{E_2} \overline{E_1} = 0$ .

**Фурье-спектроскопия.** Интеграл (8.31) может быть истолкован как разложение четной функции  $B(\tau)$  по частотам, в котором фурье-амплитудой является  $S(\omega)$ . Следовательно, она определяется обратным преобразованием Фурье:

$$S(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty B(\tau) \cos(\omega\tau) d\tau. \quad (8.35)$$

На этом преобразовании основана *фурье-спектроскопия*. Для экспериментального определения спектральной плотности интенсивности  $S(\omega)$  какого-либо

источника света используют интерференционную схему. Измеряют интерферограмму  $I(\tau)$ , определяют функцию автокорреляции по формуле (8.29)

$$B(\tau) = \frac{I(\tau)}{2} - I_0$$

и затем рассчитывают  $S(\omega)$ .

Основным элементом фурье-спектрометра является интерферометр Майкельсона, сыгравший большую роль в опытах по определению эфирного ветра (рис. 8.10).

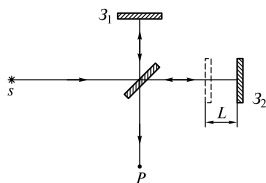


Рис. 8.10

Свет от исследуемого источника  $s$  направляется в интерферометр, в одном из плеч которого находится движущееся с постоянной скоростью зеркало  $3_2$ . Штриховой линией показано его начальное положение, при котором оптические пути обоих лучей одинаковы. Смещению зеркала на расстояние  $L$  соответствует временная задержка  $\tau = 2L/c$ . Приемник, находясь в точке  $P$ , будет измерять интерферограмму  $I(\tau)$ , поскольку при движении зеркала полосы будут также перемещаться. Сигнал обрабатывается компьютером, который вычисляет  $S(\omega)$ .

Однако рассчитанная функция будет отличаться от истинной. Дело в том, что спектрометр неизбежно вносит аппаратные искажения. Главное из них связано с ограниченностью перемещения подвижного зеркала.

Чтобы проанализировать искажения, рассчитаем *аппаратную функцию спектрометра*. Она определяется как отклик прибора на монохроматическое излучение. Предположим, что источник излучает свет на одной частоте  $\omega_0$ . Тогда спектральная плотность этого излучения  $S(\omega) = I_0 \delta(\omega - \omega_0)$ . Корреляционная функция в этом случае, согласно (8.32), равна  $B(\tau) = I_0 \cos(\omega_0 \tau)$ . Однако спектрометр запишет лишь «усеченную» функцию

$$B_A(\tau) = \begin{cases} B(\tau), & \text{при } |\tau| \leq \tau_A = \frac{2L_A}{c}; \\ 0, & \text{при } |\tau| > \tau_A, \end{cases} \quad (8.36)$$

где  $L_A$  — максимальное смещение подвижного зеркала.

Подставляя (8.36) в (8.35), находим

$$S_A(\omega) = I_0 \frac{\tau_A}{\pi} \left[ \text{sinc}[\tau_A(\omega_0 - \omega)] + \text{sinc}[\tau_A(\omega_0 + \omega)] \right]. \quad (8.37)$$

При  $\omega \sim \omega_0$  можно пренебречь вторым слагаемым:

$$S_A(\omega) = I_0 g_A(\omega_0 - \omega) \approx I_0 \frac{\tau_A}{\pi} |\text{sinc}[\tau_A(\omega_0 - \omega)]|, \quad (8.38)$$

где  $g_A(\omega - \omega_0) = \frac{\tau_A}{\pi} |\text{sinc}[\tau_A(\omega_0 - \omega)]|$  — искомая аппаратная функция.

Нетрудно видеть, что  $\int g_A(\omega - \omega_0) d\omega = 1$ . График функции показан на рис. 8.11.

Ширина аппаратной функции получается из (8.38) равной

$$\Delta\omega_A = \frac{2\pi}{\tau_A}. \quad (8.39)$$

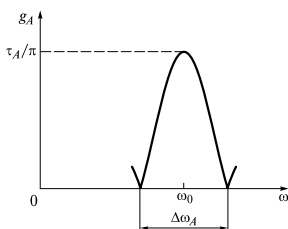


Рис. 8.11

Эта ширина определяет разрешающую способность фурье-спектрометра, или разрешающую силу.

В спектроскопии *разрешающая способность спектрального прибора* определяется как отношение частоты  $\omega_0$  (или длины волны  $\lambda_0$ ) к минимальной разности частот  $\Delta\omega_{\min}$  (или разности длин волн  $\Delta\lambda_{\min}$ ) двух спектральных линий, которые прибор может разрешить (различить):

$$R = \frac{\omega_0}{\Delta\omega_{\min}} = \frac{\lambda_0}{\Delta\lambda_{\min}}. \quad (8.40)$$

Из-за конечной ширины аппаратной функции  $\Delta\omega_{\min} = \Delta\omega_A$ , поэтому

$$R = \frac{\omega_0}{\Delta\omega_A} = \frac{\omega_0 \tau_A}{2\pi} = \frac{2L}{\lambda_0}. \quad (8.41)$$

Если  $L_A = 0,5$  м,  $\lambda_0 = 1$  мкм, то  $R = 10^6$ . Таким образом, этот прибор обладает высокой разрешающей силой.

Если квазимонохроматический источник излучает спектральную линию, контур которой  $g(\omega)$ , то на выходе фурье-спектрометра с учетом аппаратных искажений, задаваемых аппаратной функцией  $g_A(\omega - \omega_0)$ , будет получаться искаженный контур

$$g'(\omega) = \int_0^{\infty} g_A(\omega - \omega_0) g(\omega_0) d\omega_0. \quad (8.42)$$

Следовательно, если известна аппаратная функция, то можно восстановить истинный контур спектральной линии.

Фурье-спектрометр является многоканальным прибором. Если ширину  $\Delta\nu$  спектральной плотности  $S(\nu)$  излучения источника разбить на отдельные бесконечно малые интервалы  $d\nu \ll \Delta\nu$ , то спектрометр одновременно обрабатывает  $N = \Delta\nu/d\nu \gg 1$  таких интервалов. По сравнению с одноканальными приборами, которые последовательно анализируют интервалы  $d\nu$  (см. далее, например, сканируемый интерферометр Фабри — Перо), фурье-спектрометр имеет большую чувствительность. Если принять, что время измерения на обоих приборах одинаково и равно  $\Delta t$ , то в сканируемом одноканальном приборе на измерение интервала  $d\nu$  тратится меньшее время  $\Delta t/N$ . При наличии шумов это снижает чувствительность одноканальных приборов по сравнению с рассматриваемым многоканальным спектрометром.

Особенно успешно используются фурье-спектрометры в ИК-области, где фотонные шумы невелики. В современных конструкциях при  $L = 1$  м приемник может регистрировать до  $10^6$  точек интерферограммы. Такой большой объем информации превосходит информацию, полученную с применением других спектроскопических методов.

**Приложение.** Вывод выражения  $B(\tau)$  для квазимонохроматического излучения.

Пусть  $E(t) = a(t) \cos[\omega_0 t + \varphi(t)]$ . Тогда

$$\begin{aligned}
E_{1+2} &= E_1(t) + E_2(t + \tau) = \\
&= a_1(t) \cos[\omega_0 t + \varphi_1(t)] + a_2(t + \tau) \cos[\omega_0(t + \tau) + \varphi_2(t + \tau)] = \\
&= A(t) \cos[\omega_0 t + \Phi(t)].
\end{aligned} \tag{8.1п}$$

Переходя к интенсивности, по аналогии с (8.8) получаем

$$I = \overline{E_{1+2}^2} = \frac{A^2}{2} = \frac{\overline{a_1^2}}{2} + \frac{\overline{a_2^2}}{2} + \overline{a_1(t)a_2(t + \tau) \cos[\omega_0 \tau + \Delta\varphi(t, \tau)]}, \tag{8.2п}$$

где  $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ .

Интерференционный член преобразуется к виду

$$\begin{aligned}
\overline{a_1 a_2 \cos[\omega_0 \tau + \Delta\varphi]} &= \overline{a_1 a_2 \cos \Delta\varphi \cos \omega_0 \tau - a_1 a_2 \sin \Delta\varphi \sin \omega_0 \tau} = \\
&= \sqrt{\overline{a_1^2} \overline{a_2^2}} [C(\tau) \cos \omega_0 \tau - S(\tau) \sin \omega_0 \tau] = \sqrt{\overline{a_1^2} \overline{a_2^2}} \gamma(\tau) \cos[\omega_0 \tau + \psi(\tau)].
\end{aligned} \tag{8.3п}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
C(\tau) &= \frac{\overline{a_1(t)a_2(t + \tau) \cos \Delta\varphi(t, \tau)}}{\sqrt{\overline{a_1^2} \overline{a_2^2}}}; \quad S(\tau) = \frac{\overline{a_1(t)a_2(t + \tau) \sin \Delta\varphi(t, \tau)}}{\sqrt{\overline{a_1^2} \overline{a_2^2}}}; \\
\gamma(\tau) &= \sqrt{C^2(\tau) + S^2(\tau)}; \quad \operatorname{tg} \psi = \frac{S(\tau)}{C(\tau)}.
\end{aligned} \tag{8.4п}$$

Интерферограмма (8.2п) запишется в виде

$$I(\tau) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \gamma(\tau) \cos[\omega_0 \tau + \psi(\tau)]. \tag{8.5п}$$

Видность картины

$$V(\tau) = 2 \frac{\sqrt{I_1 I_2}}{I_1 + I_2} \gamma(\tau). \tag{8.6п}$$

Функция корреляции

$$B(\tau) = \sqrt{I_1 I_2} \gamma(\tau) \cos[\omega_0 \tau + \psi(\tau)]. \tag{8.7п}$$

При  $I_1 = I_2 = I_0$  она совпадает с (8.34).

## ЛЕКЦИЯ 9

Для практических целей применяют интерференционные схемы, в которых происходит либо деление волнового фронта, либо деление амплитуды.

**Схемы с делением волнового фронта.** В рассмотренной ранее схеме Юнга с двумя отверстиями выделяются фрагменты волнового фронта сферической волны от источника  $s$ . Такая же идея заложена в интерференционных схемах, в которых делителями волнового фронта являются бипризма, билинза и бизеркало. Ход лучей в интерференционной схеме с бипризмой показан на рис. 9.1.

Бипризма — это двойная призма, формирующая две волны, исходящие из мнимых изображений  $s_1$  и  $s_2$  источника  $s$ . Координаты интерференционных максимумов  $x_m$ , согласно (8.15), выражаются через расстояние  $d$  между  $s_1$  и  $s_2$  и расстояние  $L$  до экрана. Предоставляя читателю возможность самостоятельно вычислить эти две величины, укажем только, что при малом преломляющем угле  $\alpha$  ( $\alpha \sim 1^\circ$ ) угол  $\vartheta = 2\alpha(n-1)$ , где  $n$  — показатель преломления материала призмы.

Подобным образом формируются интерферирующие волны с помощью билинзы и бизеркала.

**Интерференция плоских волн.** Если в опыте Юнга увеличивать расстояние  $L$ , сохраняя неизменным  $d$ , то интерферировать, по существу, будут две плоские волны, распространяющиеся под углом  $\vartheta = d/L$  (рис. 9.2).

Ширина интерференционных полос, согласно (8.16), равна

$$\Delta x = \frac{\lambda}{\vartheta}. \quad (9.1)$$

С увеличением угла  $\vartheta$  интерферограмма становится все более мелкой.

**Интерферометр Рэлея.** Этот интерферометр предназначен для измерения показателя преломления газов, поэтому его называют рефрактометром. Схема интерферометра Рэлея представлена на рис. 9.3.

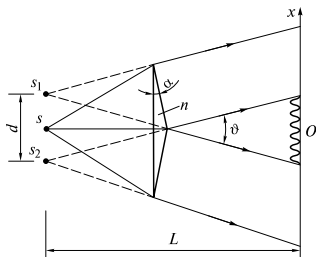


Рис. 9.1

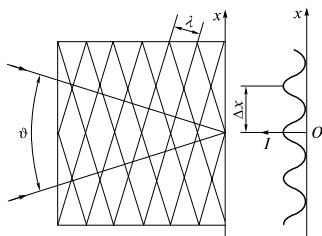


Рис. 9.2

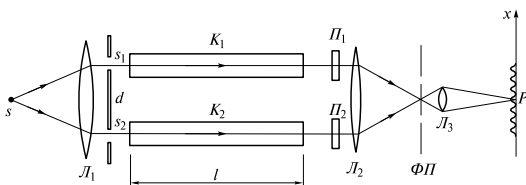


Рис. 9.3

Параллельный пучок света от источника  $s$ , формируемый линзой  $L_1$ , проходит экран с двумя щелями  $s_1$  и  $s_2$ , перпендикулярными плоскости рисунка. Затем два световых пучка распространяются вдоль вытянутых кювет  $K_1$  и  $K_2$ , имеющих одинаковую длину  $l$ . Далее обе волны проходят через плоскопараллельные стеклянные пластинки  $P_1$  и  $P_2$ , и в фокальной плоскости  $\Phi\P$  линзы  $L_2$  образуются интерференционные полосы, параллельные щелям.

Из-за необходимости использования кювет расстояние  $d$  между щелями велико, поэтому интерференционная картина мелкая. Для ее увеличения устанавливают цилиндрическую линзу  $L_3$  (похожую на круглую стеклянную палочку) и получают увеличенную интерферограмму.

Если одну из кювет (например,  $K_1$ ) наполнить газом с неизвестным показателем преломления  $n$ , то возникнет дополнительная оптическая разность хода и картина сместится. Если исходная разность хода в точке  $P$ , совпадающей с интерференционным максимумом  $m$ -го порядка, была равна  $m\lambda_0$  ( $\lambda_0$  — длина волны в вакууме), то после заполнения кюветы газом она изменится на величину

$$l(n - 1) = \delta m \lambda_0. \quad (9.2)$$

При  $\delta m = 1$  картина сдвигается на расстояние, равное ширине полосы.

Если зафиксировать малое смещение, при котором  $\delta m = 1/40$ , то при  $l = 1$  м и  $\lambda_0 = 500$  нм получаем

$$n - 1 = \frac{\delta m \lambda_0}{l} = 10^{-8}. \quad (9.3)$$

Таким образом, показатель преломления газов может быть измерен с точностью до восьмого знака после запятой.

Для удобства измерений столь малых смещений пластина  $P_2$  может поворачиваться вокруг оси, параллельной щелям, компенсируя смещение интерферограммы. При соответствующей градуировке величина  $\delta m$  определяется по углу поворота пластины.

### Звездный интерферометр Майкельсона.

Если объектив телескопа закрыть диафрагмой с двумя отверстиями, находящимися на расстоянии  $l$ , то изображение далекой звезды в его фокальной плоскости будет представлять собой пятно конечных размеров, изрезанное интерференционными полосами (рис. 9.4). На рисунке размеры пятна и полос сильно преувеличены.

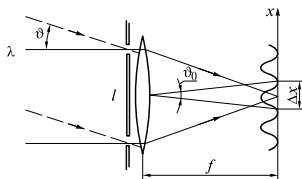


Рис. 9.4

Ширина полосы, согласно (8.16), равна

$$\Delta x = \frac{\lambda f}{l}, \quad (9.4)$$

где  $f$  — фокусное расстояние объектива.

Угловой размер полосы (угол, под которым она видна с места нахождения объектива)

$$\vartheta_0 = \frac{\Delta x}{f} = \frac{\lambda}{l}. \quad (9.5)$$

Если на объектив падает свет от второй звезды (лучи помечены штриховой линией), то из-за некогерентности света независимых источников (звезд) в фокальной плоскости будет происходить наложение двух интерферограмм.

При углах  $\vartheta < \vartheta_0$  суммарная интерферограмма не будет размыта. При увеличении угла  $\vartheta$  интерферограмма смажется, когда интерференционные максимумы интерферограммы от одной звезды совпадут с интерференционными минимумами интерферограммы от другой. Это произойдет при

$$\vartheta = \frac{\vartheta_0}{2} = \frac{\lambda}{2l}. \quad (9.6)$$

Эта формула и является ключевой при использовании звездного интерферометра для определения угловых размеров двойных и малых звезд.

Пусть  $\vartheta$  — угловой размер двойной звезды. Для его измерения постепенно увеличивается расстояние  $l$  и фиксируется качество интерферограммы. Первое смазывание интерферограммы произойдет при расстоянии  $l = l_k$ , определяемом из условия

$$\vartheta = \frac{\lambda}{2l_k}. \quad (9.7)$$

Отсюда и рассчитывается угловой размер звезды  $\vartheta$ .

Чтобы измерять малые угловые размеры, необходимо увеличивать  $l$  до десятка метров. Поэтому вместо экрана с двумя отверстиями перед объективом телескопа устанавливают систему зеркал (рис. 9.5). В 1920 г. А. Майкельсон измерил угловой размер звезды Двойной Капеллы:  $\vartheta = 0,042'$ .

Если требуется определить угловой размер одной звезды, то эту звезду можно мысленно разбить на пары двойных звезд, симметричных относительно центра звезды. Отличие от предыдущего рассмотрения

заключается в том, что при увеличении  $l$  будет однократное смазывание интерферограммы. Естественно, что угловой размер звезды рассчитывается по-прежнему по формуле (9.7). Доведя с помощью зеркал расстояние  $l$  до 6 м, Майкельсон определил угловой размер звезды Бетельгейзе:  $\vartheta = 0,047'$ .

В настоящее время база интерферометров достигает величины  $l \sim 20$  м. Это позволяет измерять угловые размеры  $\vartheta \sim 10^{-3''}$ .

**Пространственная когерентность.** Посмотрим на результаты опытов Майкельсона иным образом. Свет

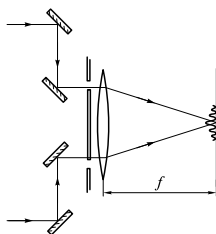


Рис. 9.5

звезды или пары звезд падает на диафрагму с отверстиями, разнесенными на расстояние  $l$ . При увеличении расстояния  $l$  интерферограмма ухудшается и исчезает при

$$l_k = \frac{\lambda}{2\vartheta}. \quad (9.8)$$

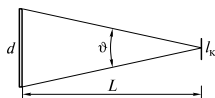


Рис. 9.6

Это происходит потому, что с ростом  $l$  ухудшается взаимная когерентность колебаний электромагнитного поля звезд в областях, где расположены отверстия. В этом случае говорят о *пространственной когерентности*, характеризуемой величиной  $l_k$ . Эта величина называется *радиусом пространственной когерентности*. Чем меньше угловой размер  $\vartheta$  светящейся звезды, тем больше радиус пространственной когерентности ее излучения у поверхности Земли.

Этот вывод справедлив для любого теплового или газоразрядного источника. На рис. 9.6 изображен светящийся диск диаметра  $d$ , удаленный на расстояние  $L$  от некоторой плоскости, в которой радиус пространственной когерентности  $l_k$ , согласно (9.8), равен

$$l_k = \frac{\lambda L}{2d}. \quad (9.9)$$

Чем меньше размер источника, тем больше радиус пространственной когерентности. При удалении от источника он возрастает, а источник приближается по своим свойствам к точечному источнику. При приближении к источнику на расстояние  $L \leq d$  формула (9.9) становится несправедливой. Отметим, что радиус  $l_k$  с уменьшением  $L$  сокращается и достигает минимального значения  $l_k \sim \lambda$  у поверхности источника.

Оценим радиус пространственной когерентности солнечного света у поверхности Земли. Полагая  $d = 1,5 \cdot 10^6$  км,  $L = 150 \cdot 10^6$  км,  $\lambda = 500$  нм, получаем  $l_k = 25$  мкм. Это означает, что опыт Юнга с солнечным светом можно осуществить, если расстояние между щелями не превышает 25 мкм. Интерферограмма будет состоять лишь из нескольких цветных полос. С увеличением расстояния между щелями качество всех полос будет ухудшаться.

Совсем иначе обстоит дело с лазерными источниками. Если лазер генерирует гауссов пучок (генерируется низшая  $TEM_{00}$  — мода), то на выходе из резонатора радиус пространственной когерентности  $l_k$  практически совпадает с радиусом пучка  $r_0$ . Если лазер работает в многомодовом режиме, то можно положить  $\pi l_k^2 N \approx \pi r_0^2$  (суммарная площадь  $N$  пятен размером  $\sim l_k$  равна площади сечения пучка), или  $l_k \approx r_0 / \sqrt{N}$ , где  $N$  — число поперечных мод.

Более строго пространственная когерентность и способ ее описания будут обсуждаться далее.

**Схемы с делением амплитуды.** В таких схемах две интерферирующие волны создаются при отражении падающей волны от двух поверхностей. Амплитуда каждой из интерферирующих волн меньше амплитуды исходной волны.

На рис. 9.7 свет от точечного источника  $s$  отражается от двух поверхностей прозрачной пластинки. В точке  $P$  отраженные волны складываются.

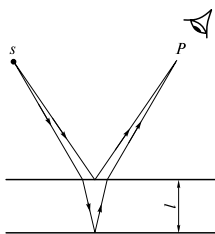


Рис. 9.7



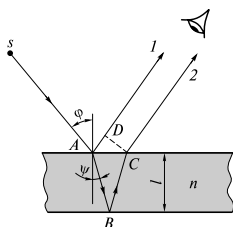


Рис. 9.8

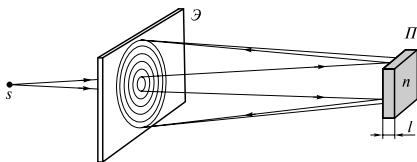


Рис. 9.9

Поскольку разность хода интерферирующих волн порядка толщины пластинки  $l$ , длина когерентности света  $l_k$  должна быть больше этой толщины.

При произвольном положении источника  $s$  и точки  $P$  расчет разности хода (и интерферограммы) является довольно громоздкой процедурой. В практическом отношении наиболее важны два предельных случая.

**Линии равного наклона.** При удалении точки  $P$  от поверхности пластины интерферирующие лучи становятся все более параллельными. На рис. 9.8 показана одна из многочисленных пар интерферирующих волн в виде параллельных лучей  $1$  и  $2$ .

Оптическая разность хода между ними равна

$$\Delta = (AB + BC)n - AD \pm \frac{\lambda_0}{2}, \quad (9.10)$$

где  $n$  — показатель преломления материала пластинки, слагаемое  $\pm \frac{\lambda_0}{2}$  учитывает набег фазы  $\pm \pi$  при отражении (см. Лекцию 17).

Если толщина пластинки в месте падения равна  $l$ , а угол падения  $\varphi$ , то

$$\Delta = \frac{2l}{\cos \psi} n - 2l \operatorname{tg} \psi \sin \varphi \pm \frac{\lambda_0}{2} = 2ln \cos \psi \pm \frac{\lambda_0}{2}. \quad (9.11)$$

В (9.11) использован закон преломления  $\sin \varphi = n \sin \psi$ . Таким образом, разность хода зависит от толщины пластинки  $l$ , показателя преломления  $n$  и наклона интерферирующих лучей, задаваемого углом преломления  $\psi$ .

Если пластинка плоскопараллельная, то на удаленном экране будет интерферограмма, представляющая собой семейство линий, для которых  $\cos \psi = \text{const}$ . Поэтому эти линии называются *линиями равного наклона*.

Для их наблюдения экран отодвигают как можно дальше от пластинки. Поэтому иногда говорят, что *линии равного наклона локализованы в бесконечности*.

В схеме, изображенной на рис. 9.9, линии равного наклона имеют вид концентрических окружностей.

Здесь расходящийся пучок света от источника  $s$  проходит сквозь экран  $\mathcal{E}$  с отверстием. После отражения от плоскопараллельной пластинки  $\Pi$  на экране наблюдаются интерференционные кольца. Их положение определяется условием

$$\Delta = 2ln \cos \psi \pm \frac{\lambda_0}{2} = m\lambda_0. \quad (9.12)$$

Самое меньшее кольцо имеет максимальный порядок интерференции, а с увеличением радиуса кольца порядок интерференции убывает.

Если источник света излучает несколько спектральных линий, то для каждой из них формируется система колец. Практически эта простейшая оптическая система представляет собой спектральный прибор, который разлагает спектр в пространстве. Однако разрешающая способность прибора, в котором интерferируют лишь два луча, очень невысока.

Отметим, что поперечные размеры источника  $s$  практически не влияют на качество интерферограммы, поскольку экран находится далеко от пластинки.

Линии равного наклона можно получить и вблизи пластинки, если на пути параллельных интерферирующих лучей поставить собирающую линзу. Тогда эти линии будут наблюдаться в ее фокальной плоскости.

**Линии равной толщины.** Если точка  $P$  находится вблизи поверхности пластинки, то интерферограмма будет состоять из линий равной толщины. В схеме, изображенной на рис. 9.10, два луча от источника  $s$  после отражения пересекаются вблизи поверхности в точке  $P$ .

Если источник протяженный (от  $s$  до  $s'$ ), то другие пары лучей отсекаются диафрагмой  $D$ , фиксируя тем самым угол падения исходной волны.

Разность хода приближенно описывается выражением (9.11). Следовательно, для образования интерференционных максимумов необходимо выполнение условия

$$\Delta = 2ln \cos \psi \pm \frac{\lambda_0}{2} = m\lambda_0. \quad (9.13)$$

В отличие от (9.12) здесь угол  $\psi = \text{const}$ , а толщина  $l$  может изменяться. Поэтому интерференционные максимумы будут иметь вид линий, проходящих через те участки поверхности, где толщина пластины одинакова и удовлетворяет условию (9.13). Поэтому эти линии называют *линиями равной толщины*, они локализованы на поверхности пластинки.

Обычно для наблюдения используют линзу  $L$ , позволяющую получить увеличенное изображение интерферограммы в точке  $P_1$ .

В естественных условиях при падении солнечного света на тонкие масляные пленки ( $l < l_k \sim 1$  мкм) на поверхности последних наблюдаются причудливые разноцветные линии равной толщины, изображенные на рис. 9.1 вк. вкл.

Полосы равной толщины можно наблюдать на поверхности стеклянного клина при нормальном падении света (рис. 9.11). Обычно преломляющий угол  $\alpha$  очень мал. Толщина клина  $l = \alpha x$  ( $x$  — координата, отсчитываемая от вершины клина). При нормальном падении угол  $\psi = 0$ . Поэтому положение максимумов определяется из условия

$$2\alpha x_m n - \frac{\lambda_0}{2} = m\lambda_0, \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (9.14)$$

Слагаемое  $\left(-\frac{\lambda_0}{2}\right)$  учитывает скачок фазы на  $\pi$  при отражении от верхней поверхности клина. Координаты полос из (9.14) получаются равными

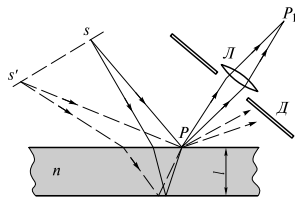


Рис. 9.10

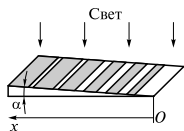


Рис. 9.11

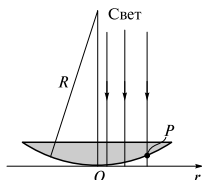


Рис. 9.12

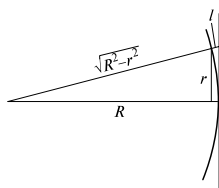


Рис. 9.13

$$x_m = \left(m + \frac{1}{2}\right) \frac{\lambda_0}{2\alpha n}. \quad (9.15)$$

При освещении клина квазимонохроматическим светом с увеличением порядка  $m$  полосы расширяются и при  $m_{\max} = \lambda_0/\Delta\lambda$  перекрываются. В этом месте толщина клина  $l = \alpha x_m \approx l_k/2n$ .

Искривление интерференционных полос свидетельствует о неровностях поверхности клина. На этом основан метод оптического контроля качества поверхности, суть которого в следующем: к поверхности под небольшим углом сверху прикладывают плоскопараллельную стеклянную пластинку высокого качества. Между пластинкой и поверхностью образуется воздушный клин. При падении света на пластинку на ее нижней стороне наблюдаются интерференционные полосы, форма которых свидетельствует о качестве поверхности. Таким методом можно контролировать неровности порядка десятых долей длинны волны.

Показателен в этом смысле опыт, выполненный И. Ньютоном. К плоской поверхности он приложил плоско-выпуклую линзу с радиусом кривизны  $R$  (рис. 9.12).

В точке  $P$  волны, отраженные от обеих поверхностей, складываются. В результате появляются кольца равной толщины, получившие название колец Ньютона.

На рис. 9.2 цв. вкл. показаны фотографии колец Ньютона при освещении системы «линза — пластинка» белым светом (рис. 9.2, а). Видно, что число колец невелико. Когда свет проходит предварительно через зеленый (рис. 9.2, б) или желтый (рис. 9.2, в) светофильтры, число колец увеличивается, поскольку возрастает монохроматичность света. В случае освещения светом ртутной лампы (рис. 9.2, г) возникает большое число «несмазанных» колец Ньютона.

Если радиальную координату отсчитывать от точки соприкосновения линзы с поверхностью, то воздушный зазор  $l$  при условии  $r \ll R$  (рис. 9.13) равен

$$l = R - \sqrt{R^2 - r^2} \approx R - R \left(1 - \frac{1}{2} \frac{r^2}{R^2}\right) = \frac{r^2}{2R}. \quad (9.16)$$

Тогда с учетом скачка фазы на  $\pi$  при отражении от плоской поверхности разность хода

$$\Delta = 2l + \frac{\lambda_0}{2} = \frac{r^2}{R} + \frac{\lambda_0}{2}. \quad (9.17)$$

Выражение (9.17) удобно использовать для определения радиусов темных колец (интерференционных минимумов). В этом случае радиус  $r_m$  темных колец определяется из условия

$$\frac{r_m^2}{R} + \frac{\lambda_0}{2} = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda_0, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (9.18)$$

Следовательно,

$$r_m = \sqrt{m\lambda R}. \quad (9.19)$$

Из-за скачка фазы в центре интерферограммы будет темное пятно. Концентричность колец свидетельствует о высоком качестве выпуклой поверхности линзы.

На рис. 9.14 приведена фотография колец Ньютона, полученных при контакте тестируемой выпуклой линзы с плоской поверхностью.

Искажение колец на интерферограмме свидетельствует об отличии поверхности линзы от сферической.

**Интерферометр Майкельсона.** С его помощью можно формировать линии равной толщины или кольца равного наклона. Это зависит от юстировки интерферометра и настройки зрительной трубы  $T$ , через которую наблюдают интерферограмму (рис. 9.15).

На рисунке штриховой линией изображена плоскость  $З$ , сопряженная зеркалу  $З_2$ . Это означает, что при мысленном повороте интерферометра относительно оси, проходящей через точку  $O$ , зеркало  $З_2$  совпадает с плоскостью  $З$ . Для компенсации разности хода, вносимой разделительной пластинкой  $\Pi$ , в одно из плеч интерферометра устанавливается компенсационная пластинка  $КП$ .

Если  $З_1$  и  $З$  параллельны, а труба настроена на наблюдение далеких предметов, то в плоскости изображения ее окуляра будут интерференционные кольца.

Если  $З_1$  и  $З$  образуют клин, а труба настроена на наблюдение предметов, находящихся вблизи плоскости  $З$ , то будут наблюдаться полосы. В этом случае изображение мнимое, поскольку вблизи плоскости  $З$  полосы отсутствуют.

Как уже отмечалось при описании фурье-спектрометра, одно из плеч интерферометра может удлиняться на величину  $\sim 1$  м. Это позволило создать оптический эталон, который более удобен и точнее воспроизводим, чем вещественный эталон длины 1 м. Перемещая зеркало от начала до конца вещественного эталона, было установлено, что  $1 \text{ м} = 1\,650\,763,73\lambda_{\text{эрт}}$ , где  $\lambda_{\text{эрт}} = 6\,056 \text{ \AA}$  — эталонная длина волны, соответствующая излучению атома криптона 86

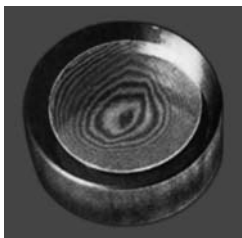


Рис. 9.14

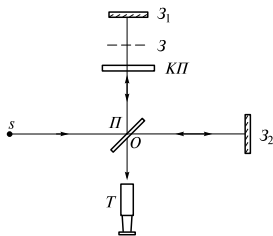


Рис. 9.15

при его переходе между уровнями  $2p_{10}$  и  $5d_5$ . Относительная точность воспроизведения метра с помощью криптонового эталона составляет  $3 \cdot 10^{-8}$  (1960 г.). Впоследствии точность была повышена до  $10^{-10}$ , после того как скорость света в вакууме была постулирована равной  $c = 299\,792\,458$  м/с, а  $1 \text{ м} = ct$ , где  $t = 1/299\,792\,458$  с (1983 г.).

На базе интерферометра Майкельсона во многих странах мира построены гравитационные антенны. Эти антенны служат для регистрации гравитационных импульсов, возникающих при взаимодействии черных дыр с нейтронными звездами. Согласно теоретическим расчетам, длительность гравитационного импульса достигает десятка секунд, частота колебаний гравитационного поля лежит в диапазоне 50—150 Гц.

Из общей теории относительности следует, что в тот момент, когда импульсы достигают поверхности Земли, расстояние  $L$  между любыми объектами изменится на величину  $\Delta L/L \sim 10^{-21}$ . Это изменение и должны зафиксировать гравитационные антенны.

Схема антенны LIGO (Laser Interferometer Gravitational Wave Observer), расположенной в США, приведена на рис. 9.16. Луч YAG-Nd-лазера (мощность  $P = 10$  Вт, длина волны  $\lambda = 1,064$  мкм), работающего в непрерывном режиме, направляется в интерферометр Майкельсона и после отражения от зеркал  $Z_1$  и  $Z_2$  попадает в фотодетектор  $\Phi Д$ , регистрирующий интерферограмму. Длина каждого плеча  $L = 4$  км. Для ее увеличения дополнительно размещают зеркала  $Z'_1$  и  $Z'_2$ , которые с зеркалами  $Z_1$  и  $Z_2$  соответственно образуют два интерферометра (резонатора) Фабри—Перо. Число проходов светом каждого из резонаторов может достигать нескольких десятков, поэтому эффективная длина плеча  $L_{\text{эф}} \sim 10^2$  км.

Для повышения чувствительности массивные зеркала и делительная пластинка  $\Pi$  (масса каждого из элементов около 20 кг) подвешиваются на кварцевых нитях, обеспечивающих высокую добротность маятников качания (зеркал на нитях). Кроме того, оба луча распространяются внутри длинных труб, в которых поддерживается высокий вакуум (давление  $\sim 10^{-7}$  мм рт. ст.).

Вид на интерферометр VIRGO, расположенный в Италии (длина каждой трубы около 3 км), с высоты птичьего полета показан на рис. 9.3 цв. вкл. При попадании в интерферометр гравитационного импульса зеркала будут раскачиваться с амплитудой  $\Delta L \sim 10^{-21} L_{\text{эф}} \sim 10^{-14}$  см. Так как  $\lambda \sim 10^{-4}$  см, то  $\Delta L/\lambda \sim 10^{-10}$ . Современные методы позволяют зафиксировать столь ничтожно малое смещение интерферограммы. Отметим, что смещение зеркал на шесть

порядков меньше размеров атома!

Пока гравитационные волны не обнаружены, поскольку чувствительность антенн такова, что возможна лишь регистрация относительно мощных импульсов, которые крайне редко достигают поверхности Земли. В ближайшем будущем чувствительность антенн будет увеличена на порядок, и вероятность обнаружения гравитационных волн резко возрастет.

**Интерферометр Маха—Цендера.** Его схема показана на рис. 9.17.

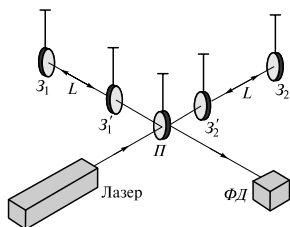


Рис. 9.16

Свет от точечного источника  $s$  проходит через коллимирующую линзу  $L$  и падает на полупрозрачную делительную пластинку  $\Pi_1$ . Образующиеся два пучка с плоскими фазовыми фронтами (отмечены штриховыми линиями) после отражения от зеркал  $З_1$  и  $З_2$  попадают на вторую полупрозрачную пластинку  $\Pi_2$ . Если между зеркалами  $З_1$  и  $З_2$  имеется небольшой угол  $\vartheta$ , то такой же угол будет между волновыми фронтами двух пучков, попадающих на экран  $\mathcal{E}$ . Согласно (9.1), интерферограмма будет представлять собой семейство параллельных полос шириной  $\Delta x = \lambda/\vartheta$ . Если показатель преломления среды на пути одного из лучей изменится, то это приведет к соответствующему изменению картины.

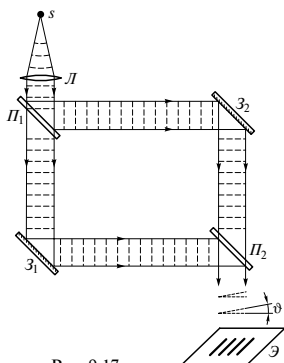


Рис. 9.17

Поскольку расстояние между интерферирующими пучками велико, можно измерять распределение плотности в потоке сжимаемого газа. В техническом варианте в одном из плеч интерферометра может помещаться рабочая секция аэродинамической трубы, или трубы, в которой возбуждают ударные волны. На рис. 9.18 показана интерферограмма, возникающая при сверхзвуковом обтекании шара потоком воздуха, число Маха равно 5,7 (из книги М. Ван-Дайка «Альбом течений жидкости и газа»). Отчетливо видна структура потока, в том числе и фронт ударной волны.

**Лазерный гироскоп.** На платформе, способной поворачиваться с некоторой угловой скоростью, расположен лазер, резонатор которого представляет собой четыре зеркала и устройство  $\Pi$  (например, призма) для вывода интерферирующих волн (рис. 9.19).

Такой резонатор называется кольцевым. Он, вообще говоря, может быть образован тремя или более отражающими элементами. При соответствующих условиях в пределах ширины линии усиления  $\Delta\nu_{\text{ус}}$  лазер будет генерировать одну продольную моду с частотой  $\nu_0 = c/(4l)$ , так как длина кольцевого резона-

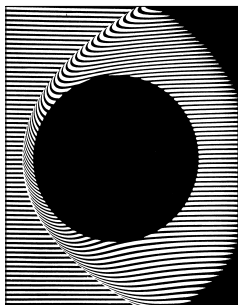


Рис. 9.18

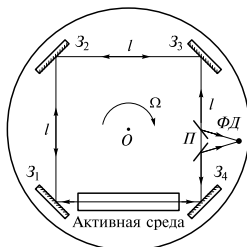


Рис. 9.19

тора  $L = 4l$ , причем генерируемые волны могут распространяться в противоположных направлениях.

Однако если у платформы появится угловая скорость  $\Omega$ , то активная среда приобретет линейную скорость  $v = \Omega \frac{l}{2}$ . В соответствии с эффектом Доплера для наблюдателя, движущегося вместе со средой, частоты волн станут различными:

$$v_1 = v_0 \left(1 - \frac{v}{c}\right); \quad v_2 = v_0 \left(1 + \frac{v}{c}\right). \quad (9.20)$$

Это означает, что будут генерироваться две продольные моды со смещенными частотами, так как  $\Delta v_{yc} > 2v_0 \frac{v}{c}$ . Тогда фотодетектор будет фиксировать интенсивность суммарного поля, которая изменяется с частотой биений

$$\Delta v = v_2 - v_1 = 2v_0 \frac{v}{c}. \quad (9.21)$$

Если вектор угловой скорости  $\vec{\Omega}$  составляет угол  $\vartheta$  с нормалью к платформе, то скорость  $v$  заменяется в (9.21) на  $v \cos \vartheta$ . С учетом ее величины  $v = \Omega \frac{l}{2}$  (9.21) запишется в виде

$$\Delta v = 2v_0 \frac{\Omega l}{2c} \cos \vartheta = 4v_0 \Omega \frac{S}{L} \cos \vartheta, \quad (9.22)$$

где  $S = l^2$  — площадь контура, охватываемого лучами;  $L = 4l$  — его периметр. Нетрудно показать, что формула (9.22) справедлива для любого кольцевого резонатора. Для практических целей ее записывают в виде

$$\Delta v = \frac{8\pi S}{\lambda_0 L} \frac{\Omega}{2\pi} \cos \vartheta = \Gamma \frac{\Omega}{2\pi} \cos \vartheta, \quad (9.23)$$

где  $\Gamma = \frac{8\pi S}{\lambda_0 L}$ .

При использовании He-Ne-лазера ( $\lambda_0 \approx 0,6 \cdot 10^{-4}$  см) при длине  $L = 0,25$  м получаем  $\Gamma = 2,6 \cdot 10^6$ . Если суточное вращение Земли происходит с угловой скоростью  $\Omega_3 = 15$  град/ч, то на широте  $\vartheta = 60^\circ$  частота  $\Delta v = 15$  Гц. Поэтому если ось гироскопа направить на Солнце, то, измеряя  $\Delta v$ , можно с точностью до долей градуса определить широту  $\vartheta$  места, где расположен гироскоп. Можно рассчитать также угол  $\varphi = \int \Omega(t) dt$  поворота гироскопа за конечное время, проводя интегрирование по времени сигнала фотодетектора.

Предел чувствительности гироскопов определяется шириной линии излучения.

Практически ширину линии можно довести до величины порядка 1 Гц. Следовательно, и минимальная частота биений, которая может быть измерена,  $\Delta v_{\min} \sim 1$  Гц. Этой частоте соответствует  $\Omega_{\min} \sim 1$  град/ч. Специальными методами обработки сигнала можно повысить точность до  $10^{-3}$  град/ч.

Точность оптических гироскопов уступает лучшим образцам механических гироскопов, но у них имеется ряд преимуществ: отсутствие движущихся частей, безынерционность, быстрота запуска, надежность и стабильность при высоких ускорениях и колебаниях температуры.

Оптические гироскопы применяются не только как индикаторы поворота, но и как гироскопы и секстанты.

## ЛЕКЦИЯ 10

Рассматривая физические принципы интерференции и условия формирования интерферограмм, мы ввели понятия сначала времени когерентности  $\tau_k$ , а затем и радиуса пространственной когерентности  $l_k$ . Обе эти величины являются важнейшими характеристиками *пространственно-временной когерентности светового поля*.

**Пространственно-временная функция когерентности поля.** Пусть в пространстве имеется электромагнитное поле, напряженность которого  $E(\mathbf{r}, t)$  является некоторой функцией координат и времени. Какова когерентность этого поля в разных точках пространства  $\mathbf{r}_1$  и  $\mathbf{r}_2$  и в различные моменты времени  $t_1$  и  $t_2$ ? Ответ на этот вопрос можно получить, воспользовавшись интерференционной схемой Юнга (рис. 10.1).

Отверстия в экране  $\mathcal{E}_1$  совмещают с точками  $\mathbf{r}_1$  и  $\mathbf{r}_2$ , а моменты времени определяются положением точки  $P$  и моментом времени  $t$  регистрации в ней интерферограммы. Обозначим  $E_1 = E(\mathbf{r}_1, t_1)$  и  $E_2 = E(\mathbf{r}_2, t_2)$  и рассчитаем интерферограмму.

Для удобства расчета перейдем к комплексным величинам  $\hat{E}_1$  и  $\hat{E}_2$ . Тогда

$$E_1 = \frac{1}{2}(\hat{E}_1 + \hat{E}_1^*); \quad E_2 = \frac{1}{2}(\hat{E}_2 + \hat{E}_2^*), \quad (10.1)$$

где значок  $*$  означает комплексное сопряжение.

Если  $\hat{E}_1 = a_1 e^{i(\omega_0 t_1 + \varphi_1)}$ ,  $\hat{E}_2 = a_2 e^{i(\omega_0 t_2 + \varphi_2)}$ , где  $a$  и  $\varphi$  — медленно меняющиеся функции времени, то

$$I_1 = \frac{\overline{a_1^2}}{2} = \frac{1}{2} \overline{|\hat{E}_1|^2}; \quad I_2 = \frac{\overline{a_2^2}}{2} = \frac{1}{2} \overline{|\hat{E}_2|^2}. \quad (10.2)$$

Поскольку суммарное поле

$$\hat{E} = \hat{E}_1 + \hat{E}_2, \quad (10.3)$$

интенсивность

$$I = \frac{1}{2} \overline{|\hat{E}|^2} = \frac{1}{2} \overline{(\hat{E}_1 + \hat{E}_2)(\hat{E}_1^* + \hat{E}_2^*)} = I_1 + I_2 + \frac{1}{2} \overline{(\hat{E}_1 \hat{E}_2^*)} + \frac{1}{2} \overline{(\hat{E}_1^* \hat{E}_2)}. \quad (10.4)$$

Введем *комплексную функцию взаимной когерентности поля*

$$\Gamma_{12} = \frac{1}{2} \overline{(\hat{E}_1 \hat{E}_2^*)}. \quad (10.5)$$

Тогда выражение (10.4) примет вид

$$I = I_1 + I_2 + 2 \operatorname{Re} \Gamma_{12}. \quad (10.6)$$



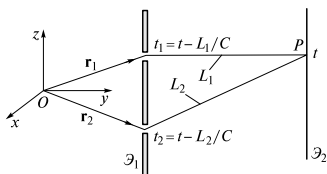


Рис. 10.1

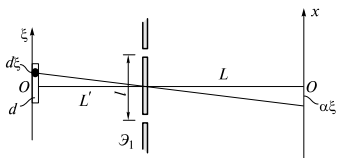


Рис. 10.2

Для квазимонохроматического излучения общий вид функции  $\Gamma_{12}$  можно получить, выполняя процедуру усреднения (см. прил. к лекции 8). Вводя обозначения  $\tau = (L_2 - L_1)/c$ ,  $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ , получаем

$$\begin{aligned}\Gamma_{12} &= \frac{1}{2} \overline{a_1 a_2 e^{-i\Delta\varphi}} e^{i\omega_0 \tau} = \frac{1}{2} \sqrt{\overline{a_1^2} \overline{a_2^2}} \frac{a_1 a_2 e^{-i\Delta\varphi}}{\sqrt{\overline{a_1^2} \overline{a_2^2}}} e^{i\omega_0 \tau} = \\ &= I_1 I_2 [c_{12}(\tau) - i s_{12}(\tau)] e^{i\omega_0 \tau} = I_1 I_2 \gamma_{12}(\tau) e^{i\omega_0 \tau}.\end{aligned}\quad (10.7)$$

Здесь  $\gamma_{12}(\tau)$  — *комплексная степень когерентности*. Она зависит как от времени задержки  $\tau$ , так и от расположения точек  $\mathbf{r}_1$  и  $\mathbf{r}_2$ . Модуль  $|\gamma_{12}|$  изменяется в диапазоне  $0 < |\gamma_{12}| < 1$ . Его величина характеризует пространственно-временную когерентность полей  $E_1$  и  $E_2$ .

Распределение интенсивности (10.6) примет вид

$$I = I_1 + I_2 + 2|\gamma_{12}| \cos[\omega_0 \tau + \psi(\tau)]. \quad (10.8)$$

Видность интерферограммы

$$V_{12}(\tau) = 2 \frac{\sqrt{I_1 I_2}}{I_1 + I_2} |\gamma_{12}(\tau)|. \quad (10.9)$$

Таким образом, модуль степени когерентности можно рассчитать, измеряя видность интерференционной картины.

В качестве примера проанализируем когерентность поля на экране  $\mathcal{E}_1$ , излучаемого одномерным тепловым источником, излучательная способность которого  $E_{vT}$  зависит от координаты  $\xi$  (рис. 10.2).

В экране проделаны два небольших отверстия, расстояние между которыми равно  $l$ . Пусть светящаяся полоска  $d\xi$  излучает поток  $\sim E_{vT}(\xi) d\xi$ , а интенсивность этой волны вблизи каждого из отверстий  $dI_0 = I_0 g(\xi) d\xi$ . Здесь  $g(\xi) = \text{const} \cdot E_{vT}/I_0$  — нормированная функция, описывающая пространственное распределение излучательной способности ( $\int g(\xi) d\xi = 1$ ), константа определяется удалением экрана от источника. Ее величина в наших рассуждениях не имеет значения.

Элементарная интерферограмма от светящейся полоски в соответствии с (8.14) описывается выражением

$$dI(x) = 2I_0 g(\xi) d\xi \left[ 1 + \cos 2\pi \left( \frac{x - \alpha \xi}{\Delta x} \right) \right], \quad (10.10)$$

где  $\Delta x = \lambda_0 L/l$  — ширина интерференционной полосы;  $\alpha = L/L'$ ;  $\alpha \xi$  — смещение полос вдоль координаты  $x$ .

Интегрируя по  $\xi$ , получаем

$$I(x) = \int dI(x) = 2I_0 + 2I_0 \int g(\xi) \left[ 1 + \cos 2\pi \left( \frac{x - \alpha\xi}{\Delta x} \right) \right] d\xi. \quad (10.11)$$

Если источник представляет собой однородно светящуюся полосу шириной  $d$ , то  $g(\xi) = 1/d$ . Поэтому

$$I(x) = 2I_0 + 2I_0 \int_{-d/2}^{d/2} \frac{1}{d} \left[ 1 + \cos 2\pi \left( \frac{x - \alpha\xi}{\Delta x} \right) \right] d\xi = 2I_0 + 2I_0 \operatorname{sinc} \left( \frac{\pi \alpha d}{\Delta x} \right) \cos 2\pi \frac{x}{\Delta x}. \quad (10.12)$$

Подставляя в (10.12) выражения для  $\alpha$  и  $\Delta x$  и учитывая, что  $2\pi x/\Delta x = \omega_0 \tau$ , получим

$$I(l, \tau) = 2I_0 + 2I_0 \operatorname{sinc} \left( \frac{\pi l}{l_k} \right) \cos \omega_0 \tau. \quad (10.13)$$

Здесь

$$l_k = \frac{\lambda_0 L'}{d}$$

— радиус пространственной когерентности поля на экране  $\mathcal{E}_1$ .

Сравнивая (10.13) и (10.8), получаем

$$|\gamma_{12}(l)| = \left| \operatorname{sinc} \left( \frac{\pi l}{l_k} \right) \right| = V_{12}(l). \quad (10.14)$$

Таким образом, степень когерентности  $\gamma_{12}$  не зависит от  $\tau$ , поскольку источник монохроматический. С увеличением  $l$  модуль степени когерентности  $|\gamma_{12}(l)|$  убывает и становится равным нулю при  $l = l_k$ .

Если теперь учесть, что источник имеет конечную ширину спектра, то видность картины при фиксированном расстоянии  $l$  будет ухудшаться с увеличением времени задержки. В этом случае функция  $|\gamma_{12}(l, \tau)|$  будет убывать как при увеличении  $l$ , так и при увеличении  $\tau$ . Масштабами ее изменения, очевидно, будут радиус пространственной когерентности  $l_k$  и время когерентности  $\tau_k$ . На рис. 10.3 изображены качественно функции видности для источника с гауссовым спектром излучения при двух различных расстояниях  $l$ .

Таким образом, при произвольных  $l$  и  $\tau$  функции  $V_{12}(l, \tau)$  и  $|\gamma_{12}(l, \tau)|$ , связанные соотношением (10.9), характеризуют пространственно-временную когерентность. Чрезвычайно важными являются два предельных случая.

Если  $l \ll l_k$ , как, например, в схемах с делением амплитуды, то можно положить  $l = 0$ . Тогда  $V_{12}(0, \tau)$  и  $|\gamma_{12}(0, \tau)|$  характеризуют *временную когерентность*. Эти величины позволяют рассчитать спектральную плотность интенсивности  $S(\omega)$  (или контур  $g(\omega)$  спектральной линии излучения).

Если  $\tau \ll \tau_k$ , как в рассмотренном выше случае, то можно положить  $\tau = 0$ . Тогда  $V_{12}(l, 0)$  и  $|\gamma_{12}(l, 0)|$  характеризуют *пространственную когерентность*. Эти величины позволяют, согласно (10.11), рассчитать функцию  $g(\xi)$ , характеризующую распределение излучательной способности вдоль поверхности теплового источника.

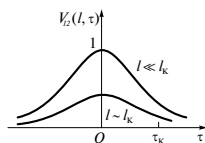


Рис. 10.3

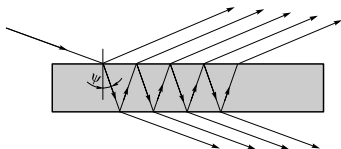


Рис. 10.4

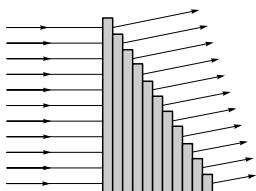


Рис. 10.5

**Многолучевая интерференция.** В рассмотренных ранее схемах интерферировали две волны (или два луча). Ширина максимумов в интерферограммах была практически такой же, как и расстояние между ними.

Для практических целей часто необходимо получить узкие и яркие интерференционные максимумы, отстоящие друг от друга на расстояния, значительно превышающие ширину самих максимумов. Это достигается при интерференции большого числа волн.

Одна из возможных схем основана на многократном отражении и преломлении падающей наклонно волны на плоскопараллельную прозрачную пластину (рис. 10.4).

При соответствующем подборе коэффициентов отражения от ее поверхностей можно получить большое число ( $\sim 10^2$ ) интерферирующих лучей. Интерференционные полосы или кольца обычно наблюдаются в дальнем поле, поэтому они являются линиями равного наклона. Эти линии можно наблюдать как в отраженном, так и проходящем свете.

Другой возможной схемой является схема, в которой плоская волна падает на стопу плоскопараллельных стеклянных пластин (рис. 10.5).

Число пластин в стопе  $\sim 20 - 30$ , поэтому число интерферирующих лучей несколько меньше, чем в схеме с многократным отражением.

**Интерферометр Фабри — Перо.** В этом интерферометре реализован принцип многократного отражения. Конструктивно он выполнен в виде двух пластин  $P_1$  и  $P_2$ , внутренние поверхности которых установлены параллельно (рис. 10.6).

На поверхности наносят отражающие покрытия, обеспечивающие высокий коэффициент отражения света. Фактически интерферометр является плоским оптическим резонатором.

Пластины делают слегка клиновидными, чтобы не образовывался второй резонатор при отражении света от внешних поверхностей. Между пластинами устанавливают сменные кольца различной толщины, с помощью которых фиксируют параллельность поверхностей и расстояние между ними.

При падении на интерферометр расходящегося пучка лучей в прошедшем и отраженном свете наблюдают кольца равного наклона. Их положение зависит от длины волны  $\lambda$ , показателя преломления  $n$  среды внутри интерферометра и расстоя-

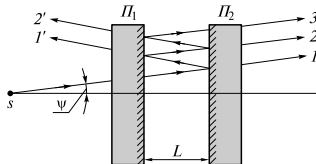


Рис. 10.6

ния  $L$  между пластинами, а яркость и ширина — от коэффициента отражения поверхностей.

Рассчитаем интерферограмму для прошедшего света. Пусть под углом  $\psi$  к оси резонатора падает монохроматическая плоская волна с длиной волны  $\lambda_0$  (или частотой  $\omega_0 = 2\pi c/\lambda_0$ ). Предположим, что напряженность ее электрического поля при падении на левое зеркало интерферометра

равна  $E_0 = a_0 e^{i\omega_0 t}$ . Если заданы коэффициенты отражения  $r$  и пропускания  $t$ , то напряженности поля волны при однократном отражении от зеркала и прохождении через него будут равны соответственно

$$E_{\text{отр}} = rE_{\text{пад}}, \quad E_{\text{прош}} = tE_{\text{пад}}, \quad (10.15)$$

где  $E_{\text{пад}}$  — напряженность поля падающей на зеркало волны.

Тогда поле первой волны, дважды прошедшей через зеркала, равно  $E_1 = t^2 E_0$ . Вторая волна, которая испытывает еще и отражение от обоих зеркал, на выходе приобретет дополнительный набег фазы

$$\Phi = \frac{2\pi}{\lambda_0} 2Ln \cos \psi, \quad (10.16)$$

поэтому напряженность ее поля  $E_2 = t^2 r^2 e^{i\Phi} E_0$ . Следовательно, для  $p$ -й волны

$$E_p = t^2 r^{2p-2} e^{i(p-1)\Phi} E_0. \quad (10.17)$$

Тогда суммарное поле

$$E = E_1 + E_2 + E_3 + \dots = E_0 t^2 (1 + r^2 e^{i\Phi} + r^4 e^{2i\Phi} + \dots) = \frac{t^2}{1 - r^2 e^{i\Phi}} a_0 e^{i\omega_0 t} = \hat{a} e^{i\omega_0 t}. \quad (10.18)$$

Переходя к интенсивности, получаем

$$I = \frac{1}{2} |\hat{a}|^2 = \frac{a_0^2}{2} \frac{t^4}{(1 - r^2)^2 + 4r^2 \sin^2(\Phi/2)}. \quad (10.19)$$

**Формула Эйри.** Вводя  $R = r^2$ ,  $T = t^2$  — коэффициенты отражения и пропускания по интенсивности, или *энергетические коэффициенты*, для которых  $T + R = 1$ , и интенсивность  $I_0 = a_0^2/2$ , получаем выражение

$$I(\Phi) = \frac{I_0}{1 + \frac{4R}{(1-R)^2} \sin^2(\Phi/2)}, \quad (10.20)$$

называемое *формулой Эйри*.

На рис. 10.7 представлена зависимость (10.20).

Внизу указана радиальная координата  $r$ , отсчитываемая от центра колец, и указаны радиусы  $r_1$  и  $r_2$  двух колец.

Проанализируем полученный результат. Введем *фактор резкости*, или *резкость*,

$$F = \frac{4R}{(1-R)^2}. \quad (10.21)$$

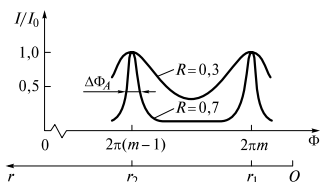


Рис. 10.7

Он определяет ширину интерференционной полосы  $\Delta\Phi_A$  в единицах  $\Phi$  (см. рис. 10.7). По уровню 0,5 она определяется из (10.19):

$$\frac{1}{1 + F \sin^2(\Delta\Phi_A/4)} = \frac{1}{2}. \quad (10.22)$$

При  $\Delta\Phi_A \ll 1$   $\sin^2(\Delta\Phi_A/4) \approx (\Delta\Phi_A/4)^2$ , поэтому  $\Delta\Phi_A = 4/\sqrt{F}$ . Если принять  $R = 0,98$ , то  $F \approx 10^4$ . Ширина кольца  $\Delta\Phi_A = 4 \cdot 10^{-2}$  и на два порядка меньше расстояния между кольцами. Максимальная интенсивность в кольце  $I_{\max} = I_0$ , а между кольцами  $I_{\min} = I_0/F \sim 10^{-4}I_0$ . Таким образом, интерферограмма представляет собой семейство ярких и очень узких колец.

Такой интерферометр широко используется для спектрального анализа. Если в спектре падающего света присутствуют две длины волны  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ , то возникнут две системы колец. Из-за конечной ширины  $\Delta\Phi_A = 4/\sqrt{F}$  интерферометр разрешит (разделит) эти две волны, если  $\lambda_2 - \lambda_1 \geq \Delta\lambda_{\min}$ . Величина интервала  $\Delta\lambda_{\min}$  определяется шириной кольца  $\Delta\Phi_A$ . По существу  $\Delta\Phi_A$  — ширина аппаратной функции интерферометра, а сама функция

$$g_A(\Phi) \sim \frac{1}{1 + F \sin^2(\Phi/2)}. \quad (10.23)$$

Определим величину  $\Delta\lambda_{\min}$ . Из (10.16) получаем  $\Delta\Phi = -\frac{2\pi}{\lambda_0^2} \Delta\lambda \cdot 2Ln \cos \psi$ . Запишем условие разрешения (разделения) в виде

$$|\Delta\Phi| = \frac{2\pi}{\lambda_0^2} \Delta\lambda_{\min} \cdot 2Ln \cos \psi = \Delta\Phi_A = \frac{4}{\sqrt{F}}. \quad (10.24)$$

Переходя к разрешающей силе, получаем

$$R = \frac{\lambda_0}{\Delta\lambda_{\min}} = \frac{2Ln \cos \psi}{\lambda_0} \pi \sqrt{F} = \frac{2Ln\pi}{\lambda_0} \frac{\sqrt{R}}{1-R}. \quad (10.25)$$

Здесь разрешающая сила вычислена в самом большом порядке интерференции вблизи оси колец, где  $\psi \approx 0$ . При  $L = 1$  см,  $\lambda_0 = 500$  нм,  $F \approx 10^4$ ,  $n \approx 1$   $R \sim 5 \cdot 10^6$ . Разрешающую способность можно увеличить, раздвигая пластины интерферометра.

**З а м е ч а н и е 1.** В формуле (10.25) отношение  $2Ln/\lambda_0 = m$  — порядок интерференции,  $1 - R = T$  — доля энергии, уходящей с каждой интерферирующей волной. Число  $N$  таких волн приблизительно равно

$$N \approx \frac{1}{T} = \frac{1}{1-R}. \quad (10.26)$$

Следовательно,

$$R \approx mN. \quad (10.27)$$

Таким образом, *разрешающая сила равна произведению порядка интерференции и числа интерферирующих лучей*. При  $R = 0,98$  получим  $N \approx 50$ . Если  $L = 1$  см,  $\lambda_0 = 0,5 \cdot 10^{-4}$  см, то  $m \approx 4 \cdot 10^4$  и  $R \approx 2 \cdot 10^6$ .

**З а м е ч а н и е 2.** Если обратиться к добротности резонатора (см. лекцию 7), в котором потери обусловлены только отражением, то в (7.21) коэффициент потерь  $\beta = 1 - R$ . Учитывая, что  $\lambda = \lambda_0/n$ , получаем для добротности выражение

$$Q = \frac{2\pi Ln}{\lambda_0(1-R)} = \frac{\nu}{\delta\nu_p}. \quad (10.28)$$

Сравнивая (10.28) и (10.25), можем сделать вывод, что  $R \approx Q$ . Ширина  $\delta\nu_p$  резонансной кривой близка к ширине аппаратной функции ( $\delta\nu_p \approx \delta\nu_A$ ).

Поскольку интерферометр обладает большой разрешающей способностью, он применяется для изучения тонкой структуры спектральных линий. Сама ширина линии  $\Delta\lambda$  должна быть такой, чтобы кольца разных порядков не перекрывались. Согласно (8.20), перекрытие колец наступает при  $m > m_{\max}$ , где

$$m_{\max} = \frac{\lambda_0}{\Delta\lambda}. \quad (10.29)$$

Поэтому

$$\Delta\lambda < \Delta\lambda_{\max} = \frac{\lambda_0}{m_{\max}}. \quad (10.30)$$

Величина  $\Delta\lambda_{\max}$  называется *областью свободной дисперсии*. Поскольку  $m_{\max} = 2Ln/\lambda_0 \sim 10^4$ , область свободной дисперсии мала:  $\Delta\lambda_{\max} \sim 10^{-4}\lambda_0 \sim 1 \text{ \AA}$ .

На рис. 10.8 изображена тонкая структура излучения He-Ne-лазера.

Каждое интерференционное кольцо состоит из двух тесно примыкающих колец. Их появление связано с генерацией лазером нескольких продольных мод. При длине  $L \sim 0,5 \text{ м}$  межмодовая частота, согласно (7.11),  $\delta\nu = 3 \cdot 10^8 \text{ Гц}$ . Для длины волны  $\lambda_0 = 6328 \text{ \AA}$  частота  $\nu_0 = 5 \cdot 10^{14} \text{ Гц}$ , поэтому для наблюдения этих примыкающих колец разрешающая способность интерферометра должна быть  $R > \nu_0/(\delta\nu) \sim 2 \cdot 10^6$ .

Для удобства спектрального анализа применяют сканируемые интерферометры, в которых монотонно изменяется оптическая разность хода  $2Ln$ . Тогда радиус интерференционных колец либо увеличивается, либо уменьшается, и с помощью неподвижного фотодетектора можно записать часть интерферограммы, соответствующую какому-либо порядку интерференции.

Если длина  $L > 1 \text{ см}$ , то сканирование осуществляется за счет изменения  $n$ . В этом случае воздух между зеркалами помещается в кювету и изменяется его давление в пределах  $1 \text{ мм рт. ст.} < p < 100 \text{ мм рт. ст.}$

Если  $L < 1 \text{ см}$ , то изменение  $n$  не приводит к заметному сдвигу интерферограммы. Поэтому одно из зеркал прикрепляют к пьезоэлектрической пластинке, изменяя с ее помощью расстояние  $L$  в пределах нескольких длин волн.

В некоторых интерферометрах величина  $L$  фиксирована и изменяться не может. Такие интерферометры называются эталонами Фабри — Перо.

**Интерференция светового импульса.** При падении на интерферометр светового импульса интерференционная картина может отличаться от рассмотренной выше. Режим интерференции зависит от соотношения

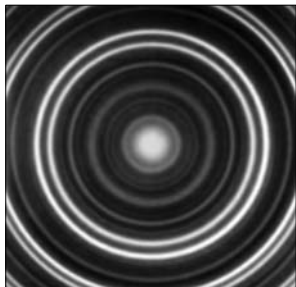


Рис. 10.8

длительности импульса  $\tau_0$  и времени  $\Delta t = 2Ln/c$ , необходимого для пробега резонатора световым импульсом. Выделим три режима:

- *стационарный* ( $\tau_0 \gg \Delta t$ ). Распределение интенсивностей в течение времени  $\tau_0$  будет описываться формулой Эйри, в которой  $I_0(t)$  — функция времени, описывающая огибающую импульса;

- *квазистационарный* ( $\tau_0 > \Delta t$ ). В этом режиме в течение времени  $\tau_0$  в резонаторе сформируется меньше интерферирующих волн. Их число  $N_{\tau} \approx \frac{\tau_0}{\Delta t} = \frac{c\tau_0}{2Ln}$ . Согласно (10.26), ситуация эквивалентна предыдущему случаю с уменьшенным коэффициентом отражения  $R$ . Следовательно, резкость интерферограммы уменьшится;

- *импульсный* ( $\tau_0 < \Delta t$ ). В этом режиме интерференция невозможна. Из интерферометра будут «вылетать»  $N \sim \frac{1}{1-R}$  импульсов, следующих друг за другом с интервалом времени  $\Delta t$ .

## РАЗДЕЛ 4

### ДИФРАКЦИЯ СВЕТА

---

#### ЛЕКЦИЯ 11

Для описания интерференции были использованы две важнейшие модели волн — плоские и сферические. В некоторых интерференционных схемах (интерферометры Рэлея и Маха — Цендера) из сферической волны формировался направленный коллимированный световой пучок, поперечный размер которого  $d$  значительно превосходил длину волны  $\lambda$ . Этот пучок представляет собой плоскую неоднородную волну, поскольку амплитуда волны отлична от нуля лишь в пределах его поперечного сечения, но затем быстро убывает вне этого сечения.

Опыт показывает, что плоская волна с ограниченным размером  $d$  ее волнового фронта (например, прошедшая через круглое отверстие диаметром  $d$ ) по мере распространения будет постепенно трансформироваться в сферическую. При прохождении плоской волны через щель ее фазовый фронт из плоского постепенно трансформируется в цилиндрический. В этом легко убедиться, направив коллимированный луч лазера (лазерной указки), имеющий плоский фазовый фронт, на непрозрачный экран с раздвижной щелью. Если ширина  $d$  щели будет монотонно уменьшаться от начального значения, равного приблизительно ширине лазерного луча, то на светлом экране позади щели освещенная область будет расширяться в направлении, перпендикулярном щели.

Теперь видоизменим этот опыт. Зафиксируем ширину  $d$  щели, сделав ее в несколько раз меньше ширины светового пучка. Будем увеличивать расстояние  $L$  между щелью и светлым экраном. При малых расстояниях  $L$  размер освещенной области в направлении, перпендикулярном щели, будет приблизительно равен ширине щели и с увеличением расстояния  $L$  практически не изменяется. Заметное расширение освещенной области в указанном направлении развивается лишь на расстоянии

$$L > L_0 \approx \frac{d^2}{\lambda}, \quad (11.1)$$

где  $L_0$  — характерная длина. Эта длина уже была использована в лекции 8 (см. формулу (8.12)), поэтому неравенство (11.1) относится к дальней зоне. Описанный опыт свидетельствует о том, что на небольших расстояниях  $L < L_0$  фронт волны остается плоским, а на расстояниях  $L > L_0$  фронт значительно искривляется и волна становится расходящейся.

Рассмотрим еще один опыт. При освещении коллимированным пучком маленького шарика диаметром  $d$ , меньшим в несколько раз ширины пучка, свет непосредственно за шарик не проникает. Это происходит потому, что фазовый



фронт прошедшей мимо шарика части светового пучка вначале остается практически плоским и свет не заходит в область геометрической тени, создаваемой шариком. Однако на расстоянии  $L \sim d^2/\lambda$  фазовый фронт заметно искривляется и свет проникает в область тени. В частности, на оси пучка появляется светлое пятно, получившее, по иронии судьбы, название *пятна Пуассона*. Дело в том, что с помощью подобного опыта одному из основателей концепции волновой природы света французскому физiku Ж.О. Френелю удалось доказать своему не менее именитому соотечественнику С.Д. Пуассону справедливость волновой теории света. Продемонстрированное Френелем огибание волной препятствия невозможно объяснить в рамках корпускулярной теории, которой вначале придерживался Пуассон.

Размеры волновых фронтов определяются поперечными размерами линз, зеркал, диафрагм, активных сред лазеров, щелей, отверстий и т.д. Они могут изменяться от десятка микрометров до десятка метров. Соответственно длина  $L_0$  изменяется от сотен микрометров до  $10^8$  м.

Обобщая результаты описанных экспериментов, можно сделать следующий вывод. Если пучок проходит расстояние  $L \ll L_0$ , то можно приближенно считать, что волновой фронт остается плоским, а пучок распространяется прямолинейно вдоль своей оси. В этом случае пучок можно заменить его *геометрическим образом* — *лучом*, совпадающим с его осью. Далее можно сформулировать законы его отражения и преломления и построить тем самым *геометрическую оптику*. На расстояниях  $L \geq L_0$  геометрическое описание становится несправедливым и необходимо использовать волновую теорию для описания распространения света.

Геометрическая оптика является исключительно плодотворным инструментом, используемым для описания распространения света в оптических системах, за исключением областей вблизи фокальных точек, где поперечный размер пучка может быть соизмерим с длиной волны.

Исторически все произошло с точностью до наоборот. Законы отражения света были известны еще грекам в античные времена, а закон преломления света был экспериментально установлен в 1621 г. голландским ученым В. Снелиусом. Отступление от прямолинейного распространения было открыто позднее итальянским философом и физиком Ф.Гримальди. Результаты его исследований были опубликованы после его смерти в 1665 г.

Это отступление и было названо *дифракцией* (от лат. diffractus — разломанный). На самом деле, дифракция — неотъемлемое свойство волн любой природы стремиться распространяться во всех направлениях, заходя в область геометрической тени, огибая препятствия и т.д.

Еще более ярко дифракция проявляется при распространении плоской волны (коллимированного пучка) через прозрачные объекты, модулирующие амплитуду или фазу волны в плоскости, перпендикулярной направлению распространения. При распространении таких пространственно модулированных волн происходит перераспределение объемной плотности энергии электромагнитного поля в пространстве подобно тому, как это происходило при интерференции.

Идея свести задачу о распространении волны к интерференции волн фиктивных вторичных источников, распределенных на поверхности волнового фронта, принадлежит Френелю (1815). Он наполнил известный кинематиче-

ский принцип голландского физика Х. Гюйгенса новым содержанием. Это позволило количественно объяснить ряд дифракционных явлений, что в свою очередь сыграло выдающуюся роль в окончательном становлении концепции волновой природы света.

**Принцип Гюйгенса—Френеля.** Рассмотрим распространение сферической волны от точечного монохроматического источника в точке  $P_0$  (рис. 11.1).

В точке  $P$  напряженность электрического поля будет равна

$$E(P) = \frac{C}{r} e^{i(\omega t - kr)} = A e^{i\omega t}, \quad (11.2)$$

где  $A = \frac{C}{r} e^{-ikr}$  — скалярная комплексная амплитуда;  $C$  — константа, зависящая от мощности источника.

Процесс распространения волны в точку  $P$  можно представить также в два этапа.

На первом этапе сферическая волна достигает некоторой произвольной сферической поверхности  $\Sigma$ , охватывающей источник. На этой поверхности как бы появляются *вторичные источники*.

На втором этапе вторичные источники испускают свои сферические волны, которые интерферируют в точке  $P$ . Однако, кроме частоты света, параметры этих источников неизвестны. Френель предположил, что возмущение, посылаемое элементарной площадкой, пропорционально ее площади  $d\sigma$  и зависит от угла наклона  $\varphi$  между нормалью к площадке и направлением в точку наблюдения.

Поскольку в точке  $P$  регистрируется интенсивность  $I = \frac{1}{2}|A|^2$ , в дальнейшем множитель  $e^{i\omega t}$  опускаем. В соответствии с двухэтапным рассмотрением

$$A(P) = \iint_{\Sigma} \frac{C}{\rho_1} e^{-ik\rho_1} \frac{e^{-ik\rho}}{\rho} K(\varphi) d\sigma = \frac{C}{r} e^{-ikr}, \quad (11.3)$$

где  $K(\varphi)$  — неизвестный коэффициент, зависящий от угла наклона  $\varphi$ . Его иногда называют *коэффициентом наклона*. Для выполнения равенства (11.3) необходимо, чтобы  $K(\varphi)$  был убывающей функцией  $\varphi$ . Френель предположил, что при  $\varphi = \pi/2$   $K(\pi/2) = 0$ . Кроме того, этот коэффициент должен быть размерным:  $[K] = \text{м}^{-1}$ . Поскольку единственным параметром с размерностью длины является длина волны  $\lambda$ , то  $K \sim 1/\lambda$ .

Рассмотрим теперь дифракцию сферической волны на экране  $\mathcal{E}$  с отверстием площадью  $\Sigma$  (рис. 11.2).

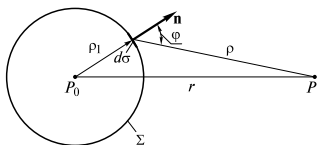


Рис. 11.1

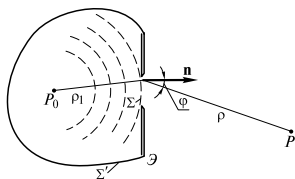


Рис. 11.2

Для этого окружим источник замкнутой поверхностью площадью  $\Sigma'$  таким образом, чтобы она проходила через экран. Если предположить, что материал экрана полностью поглощает свет и сам не излучает, то вторичные источники на отверстии такие же, как и в отсутствие экрана. Поэтому

$$A(P) = \iint_{\Sigma} \frac{C}{\rho_1 \rho} e^{-ik(\rho_1 + \rho)} K(\varphi) d\sigma. \quad (11.4)$$

Интеграл (11.4) называется *дифракционным интегралом*. Для его вычисления воспользуемся методом векторных диаграмм.

**Зоны Френеля.** Вначале рассчитаем зоны Френеля. Для этого окружим точку  $P_0$  сферой радиусом  $\rho_1 = a$  (рис. 11.3).

Пусть точка  $P$  расположена на расстоянии  $b$  от поверхности сферы. Мысленно циркулем, одна ножка которого находится в точке  $P$ , проведем по поверхности сферы окружности. Соответствующие расстояния между ножками циркуля равны  $b + \frac{\lambda}{2}, b + 2\frac{\lambda}{2}, \dots, b + m\frac{\lambda}{2}$ . Тогда сфера будет разделена на кольцевые области, называемые *зонами Френеля*.

При интегрировании по поверхности  $k\rho_1 = ka = \text{const}$ , произведение  $k\rho$  будет изменяться на величину  $\pi$  при переходе от центра первой зоны (точки  $O$ ) к ее краю (точке  $I$ ), затем при переходе от точки  $I$  к точке  $2$  и т.д.

Рассчитаем радиус  $r_m$  и площадь  $\sigma_m$   $m$ -й зоны. Радиус  $r_1$  первой зоны определяется, как следует из рис. 11.3, из уравнений

$$a^2 - (a - \delta)^2 = r_1^2 = \left(b + \frac{\lambda}{2}\right)^2 - (b + \delta)^2. \quad (11.5)$$

Поскольку  $b \gg \lambda$ , можно пренебречь величиной  $\lambda^2/4 \ll \lambda b$  в правой части (11.5). В результате получаем

$$r_1 = \sqrt{\frac{ab}{a+b}} \lambda. \quad (11.6)$$

Площадь первой зоны

$$\sigma_1 = \pi r_1^2 = \frac{\pi ab}{a+b} \lambda. \quad (11.7)$$

Заменив в (11.6)  $\lambda$  на  $m\lambda$ , получим выражение для внешнего радиуса  $m$ -й зоны

$$r_m = \sqrt{\frac{ab}{a+b}} m\lambda. \quad (11.8)$$

Площадь  $m$ -й зоны равна площади кольца

$$\sigma_m = \pi(r_m^2 - r_{m-1}^2) = \pi r_1^2 = \sigma_1. \quad (11.9)$$

Таким образом, радиусы зон увеличиваются  $\sim \sqrt{m}$ , а площади всех зон одинаковы. Последнее означает, что различие вкладов зон в дифракционный интеграл (11.4) обусловлено только разными расстояниями  $\rho_m = b + m\frac{\lambda}{2}$  и углами наклона  $\varphi_m$ .

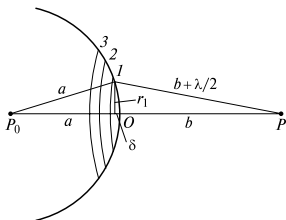


Рис. 11.3

При интегрировании в качестве элемента поверхности выберем бесконечно узкие кольца площадью  $d\sigma$ , concentричные с зонами Френеля. Если комплексной амплитуде  $A$  поставить в соответствие вектор  $\mathbf{A}$ , то интегрирование сведется к векторному суммированию:

$$\mathbf{A} = \int_{\Sigma} d\mathbf{A}, \tag{11.10}$$

где вектор  $d\mathbf{A}$  под интегралом определен своей абсолютной величиной  $dA = \frac{C}{\rho r} K(\varphi) d\sigma$  и углом  $\psi = k(a + \rho)$ , задающим его направление на диаграмме (рис. 11.4).

Для простоты анализа фазовых соотношений примем за начало отсчета величину  $\psi_0 = ka$ , положив ее равной нулю. Кроме того, предположим, что расстояние  $b$  равно целому числу длин волн, поэтому колебания поля на сферической поверхности и в точке наблюдения  $P$  происходят в фазе. Это предположение используется лишь для удобства определения фазовых соотношений и не накладывает каких-либо ограничений на полученные далее результаты.

Вклад первой зоны определяется вектором

$$\mathbf{A}_1 = \int_{\sigma_1} d\mathbf{A}. \tag{11.11}$$

Этот вектор изображен на векторной диаграмме (рис. 11.5).

Вклад первых двух зон определяется вектором

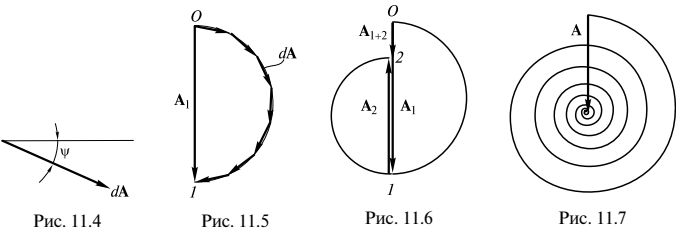
$$\mathbf{A}_{1+2} = \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 = \int_{\sigma_1} d\mathbf{A} + \int_{\sigma_2} d\mathbf{A}. \tag{11.12}$$

Соответствующая векторная диаграмма изображена на рис. 11.6.

Вклад второй зоны меньше по абсолютной величине:  $A_2 < A_1$  (увеличился угол  $\varphi$  и расстояние  $\rho$ ) и сдвинут по фазе на  $\pi$ . Если провести интегрирование по всем зонам Френеля, то вектор  $\mathbf{A}$  определится из диаграммы, называемой спиралью Френеля (рис. 11.7).

Заметим, что отношение  $\sigma_m/\rho_m$  не зависит от расстояния  $b$ . Это означает, что величины  $A_1, A_2$  и т.д. также не зависят от  $b$ .

Векторная диаграмма позволяет лишь в относительных единицах определить амплитуду возмущения в точке  $P$ . Абсолютная величина  $A$  определяется из (11.3) и равна



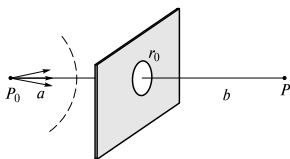


Рис. 11.8

$$A = \frac{C}{a+b}. \quad (11.13)$$

Диаграмма, кроме того, неверно определяет фазу возмущения в точке  $P$ . Эта фаза, как отмечалось ранее, должна совпадать с фазой колебаний на сферической поверхности, которая равна нулю (при выбранном начале отсчета  $\varphi_0 = ka = 0$ ).

Чтобы устранить отставание вектора  $\mathbf{A}$  по фазе на  $\pi/2$ , вторичные источники наделяются фазовым сдвигом «вперед» на  $(+\pi/2)$  введением в дифракционный интеграл множителя  $e^{i(\pi/2)} = i$ . Этот множитель присоединяют к коэффициенту наклона, и последний становится комплексным:

$$K(\varphi) = \frac{i}{\lambda} f(\varphi). \quad (11.14)$$

Для решения задачи осталось лишь определить вид функции  $f$ . Однако это возможно сделать лишь в теории дифракции, основанной на решении уравнений Максвелла.

В следующей лекции будут рассмотрены основы скалярной теории дифракции. Здесь ограничимся анализом простейших дифракционных задач с использованием зонной теории Френеля и графического расчета амплитуды дифрагировавшей волны.

**Дифракция на круглом отверстии.** Если сферическая волна падает на экран с круглым отверстием  $r_0$ , то амплитуда волны в точке  $P$  на оси отверстия зависит от числа открытых зон Френеля (рис. 11.8).

При фиксированном положении источника число открытых зон изменяется с расстоянием  $b$ . Оно определяется из условия

$$r_m = \sqrt{\frac{ab}{a+b}} m\lambda = r_0. \quad (11.15)$$

Следовательно,

$$m = \frac{r_0^2}{\lambda} \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right). \quad (11.16)$$

При перемещении точки  $P$  вдоль оси амплитуда возмущения будет периодически изменяться, достигая максимума при нечетном  $m$  и минимума — при четном  $m$ . Абсолютный максимум достигается на расстоянии  $b$ , когда  $m = 1$ . В этом случае (см. рис. 11.7)

$$A_{\max} = A_1 = 2A = 2 \frac{C}{a+b}. \quad (11.17)$$

Соответственно интенсивность волны повышается в четыре раза по сравнению с интенсивностью волны в отсутствие экрана.

Можно считать, что экран с отверстием подобен линзе. Он формирует изображение источника в точке  $P$ , для которой  $m = 1$ . Если формулу (11.16) переписать в виде

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{\lambda}{r_0^2}, \quad (11.18)$$

то это выражение аналогично формуле линзы, у которой фокусное расстояние  $f = r_0^2/\lambda$ . При  $r_0 = 0,5$  мм и  $\lambda = 500$  нм  $f = 50$  см.

Экран с отверстием вместо объектива использовался в *фотокамере обскура* (от лат. *obscurans* — затемняющий). На фотопластинке или матовой пластинке получалось изображение предмета, однако качество этого изображения было хуже, чем при использовании объектива. Это связано с тем, что изображение каждой точки фотографируемого предмета на обработанной фотопластинке представляет собой семейство концентрических колец со светлым пятном в центре при четном  $m$  (рис. 11.9, *а*) и темным пятном при нечетном  $m$  (рис. 11.9, *б*).

**Зонная пластинка.** Если на стеклянную пластинку нанести концентрические темные кольца, закрывающие либо только четные, либо только нечетные зоны Френеля, то получится зонная пластинка (рис. 11.10, *а, б*).

Амплитуда возмущения, например, для зонной пластинки (см. рис. 11.10, *а*), как видно из векторной диаграммы на рис. 11.11, будет значительно больше величины  $A = \frac{C}{a+b}$ . С помощью таких пластинок можно также формировать изображение, качество которого будет значительно выше, чем у камеры обскура. Аналогично можно формировать изображение и с помощью зонной пластинки (см. рис. 11.10, *б*).

Заметим, что помимо самого яркого изображения источника будут более слабые изображения на тех расстояниях  $b$ , для которых на каждом прозрачном кольце зонной пластинки будет укладываться 3, 5 и более зон Френеля.

**Линза.** Пусть плоская волна ( $a \rightarrow \infty$ ) падает на тонкую собирающую линзу, имеющую поперечный радиус  $r_0$  и фокусное расстояние  $f$  (рис. 11.12). Амплитуда плоской волны  $A_0 = \frac{C}{a}$ , длина волны  $\lambda$ . Если точка  $P$  находится в фокусе  $F$  линзы, то число открытых зон, согласно (11.16), равно

$$m = \frac{r_0^2}{\lambda f}. \quad (11.19)$$

Однако по сравнению с зонной пластинкой линза вносит существенную коррекцию в фазовые соотношения. Из-за разности оптических путей между плоскостями  $P_1$  и  $P_2$ , набег фазы у периферийной части волны будет меньше, чем у приосевой, причем это отставание по фазе будет нарастать при удалении от оси пучка. Если выпуклая поверхность линзы параболическая, то все векто-

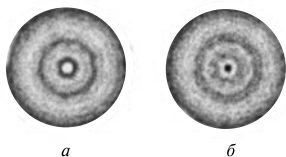


Рис. 11.9

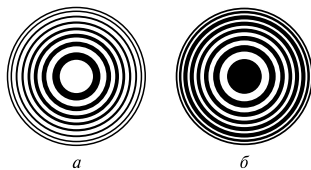


Рис. 11.10

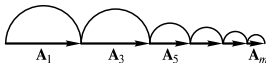


Рис. 11.11

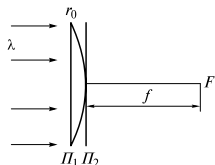


Рис. 11.12

ры  $d\mathbf{A}$  в (11.11) будут иметь одинаковое направление. Поэтому векторная диаграмма получается вытягиванием  $m$  полуколец спирали, и амплитуда поля в фокусе линзы получится равной

$$A_F = \frac{\pi}{2} (A_1 + A_2 + \dots + A_m). \quad (11.20)$$

Множитель  $\frac{\pi}{2}$  как раз и равен отношению длины половины витка к его диаметру. Полагая, что при небольшом числе витков  $A_1 + A_2 + \dots + A_m = mA_1$ , и принимая во внимание, что  $A_1 = 2A_0$ , с учетом (11.19) получаем

$$A_F = A_0 \frac{\pi r_0^2}{\lambda f}. \quad (11.21)$$

Если  $r_0 = 2$  см,  $f = 20$  см,  $\lambda = 0,5 \cdot 10^{-4}$  см = 500 нм, то  $A_F/A_0 = 1,2 \cdot 10^4$ . Таким образом, поле в фокусе увеличивается на четыре порядка.

Оценим радиус  $r_F$  фокального пятна. Для этого воспользуемся условием сохранения мощности пучка:

$$A_0^2 \pi r_0^2 = A_F^2 \pi r_F^2, \quad (11.22)$$

откуда получаем

$$r_F = \frac{\lambda f}{\pi r_0}. \quad (11.23)$$

Подставив в (11.23) значения  $\lambda$ ,  $f$  и  $r_0$ , находим  $r_F \approx 1,6$  мкм, что только в три раза больше длины волны.

Дифракция ограничивает сжатие пучка в фокальной плоскости линзы. Уменьшение  $r_F$  достигается использованием либо короткофокусных линз, либо линз с большим поперечным размером. Однако в любом случае  $r_F$  можно уменьшить лишь до величины порядка длины световой волны.

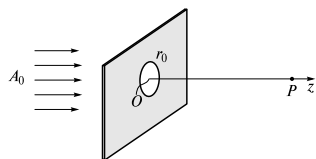


Рис. 11.13

**Дифракция светового пучка с прямоугольным профилем интенсивности.** Такой пучок образуется при нормальном падении плоской волны на экран с круглым отверстием радиуса  $r_0$  (рис. 11.13).

Для точки  $P$ , находящейся на оси пучка на расстоянии  $z$  от экрана, амплитуда волны  $A$  определяется из векторной диаграммы на рис. 11.7. Вблизи экрана число

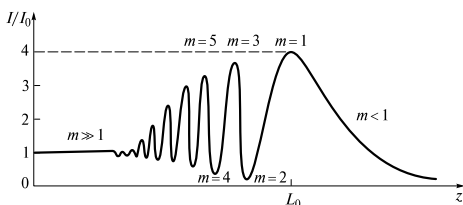


Рис. 11.14

открытых зон  $m = \frac{r_0^2}{\lambda z} \gg 1$ . Поэтому  $A = A_0$  ( $A_0$  — амплитуда падающей плоской волны). С увеличением  $z$  радиусы зон возрастают, и на отверстии остается все меньше зон. При расстоянии  $z = L_0 = r_0^2/\lambda$  на отверстии остается лишь первая зона и  $A = 2A_0$ . При  $z > L_0$  амплитуда в точке  $P$  определяется вкладом центральной части первой зоны, поэтому  $A < A_0$ .

На рис. 11.14 представлено распределение интенсивности на оси пучка, нормированное на интенсивность  $I_0 = \frac{1}{2} A_0^2$  падающей плоской волны.

Расстояние  $L_0 = r_0^2/\lambda$  называют *дифракционной длиной пучка*. Как и при интерференции, оно дает возможность выделить ближнюю  $z < L_0$  и дальнюю  $z > L_0$  зоны. Поведение интенсивности на оси пучка с учетом сохранения его мощности вдоль оси  $Oz$  позволяет сделать выводы о характере дифракции пучка.

При  $z \ll L_0$  ( $m \gg 1$ ) профиль пучка остается прямоугольным, фазовый фронт плоским, а его ширина равна  $r_0$ . В этой области дифракция незначительна. Здесь справедливо приближение геометрической оптики. Область расстояний  $z \ll L_0$  называется *прожекторной зоной*.

В *ближней зоне*  $z < L_0$  ( $m > 1$ ) наблюдается кольцеобразная дифракционная картина с темным или светлым пятном в середине (см. рис. 11.9). Размеры наружных колец имеют тот же порядок величины, что и исходный радиус пучка  $r_0$ .

В *дальней зоне*  $z > L_0$  ( $m < 1$ ) интенсивность на оси с ростом  $z$  монотонно уменьшается. Это свидетельствует о том, что радиус пучка стал увеличиваться по мере его распространения. Далее будет показано, что пучок приобретает *дифракционную расходимость*, задаваемую углом  $\theta \sim \lambda/r_0$ .

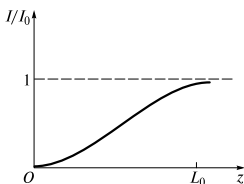


Рис. 11.15

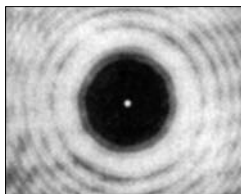


Рис. 11.16



**Дифракция на непрозрачном диске.** Если на пути плоской волны поставить непрозрачный диск радиуса  $r_0$ , то при  $z \ll L_0 = r_0^2/\lambda$  этот диск закроет практически все зоны и интенсивность  $I \approx 0$ . Наоборот, в дальней зоне при  $z > L_0$  диск закрывает лишь небольшую центральную часть первой зоны, поэтому  $I \approx I_0$ .

График распределения интенсивности на оси  $Oz$ , совпадающей с осью диска, изображен на рис. 11.15.

Проникновение света за диск в дальней зоне иногда трактуется как огибание светом диска. Дифракционная картина за диском изображена на рис. 11.16.

В центре темного поля имеется *светлое пятно*, существование которого предсказал Пуассон на основе теории Френеля.

**Дифракция на крае экрана.** Пусть сферическая волна падает на непрозрачный экран  $\mathcal{E}$  с прямолинейным краем, закрывающим часть волнового фронта (рис. 11.17). Край экрана перпендикулярен плоскости чертежа.

Разобьем сферический фронт радиуса  $a$  на зоны. Для этого из точки  $P$  проведем в плоскости чертежа отрезки длиной  $b + \frac{\lambda}{2}$  до пересечения со сферическим фронтом в точках  $1$  и  $1'$ , затем отрезки длиной  $b + 2\frac{\lambda}{2}$  до пересечения в точках  $2$  и  $2'$  и т.д. Через точку  $P_0$  и точки  $1$  и  $1'$ ,  $2$  и  $2'$  и т.д. проводим меридиональные плоскости, параллельные краю экрана. Эти плоскости разбивают фронт на зоны-дольки неравной площади: чем больше номер зоны, тем меньше ее площадь. Расчет показывает, что отношение  $\sigma_1 : \sigma_2 : \sigma_3 : \dots = 1 : 0,41 : 0,32 : 0,27 : 0,23 : 0,22 : 0,20 : 0,18 : 0,17$ . Это означает, что при суммировании в пределах какой-либо зоны величина  $dA$  в (11.10) будет уменьшаться в такой же пропорции, поскольку приращение угла  $\psi$  для всех  $dA$  выбирается одинаковым.

Векторная диаграмма для первой зоны изображена на рис. 11.18.

Подобным образом рассчитывается вклад любой зоны.

Для расчета амплитуды в точке  $P$  строится векторная диаграмма, называемая *спиралью Корню* (рис. 11.19).

Она состоит из двух ветвей, позволяющих учитывать вклад как зон  $\sigma_1, \sigma_2, \dots$ , так и зон  $\sigma'_1, \sigma'_2, \dots$ . Длина вектора  $A$ , соединяющего полюсы спирали, равна

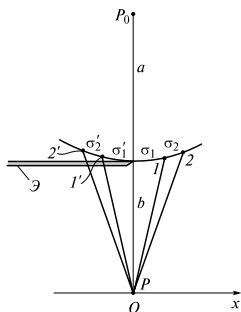


Рис. 11.17

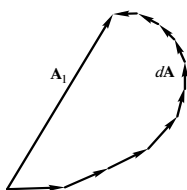


Рис. 11.18

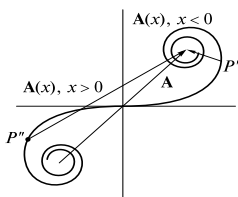


Рис. 11.19

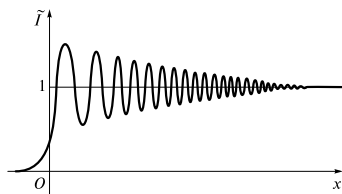


Рис. 11.20

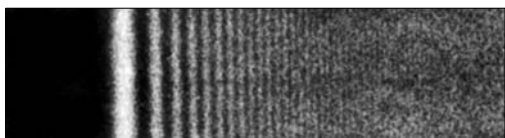


Рис. 11.21

амплитуде падающей волны  $A = \frac{C}{a+b}$ , а длина вектора  $\mathbf{A}(x)$ , соединяющего правый полюс с текущей точкой спирали, равна амплитуде дифрагированной волны.

Проанализируем распределение амплитуды  $A(x)$  вдоль оси  $Ox$ , перпендикулярной краю экрана. При  $x = 0$   $A(0) = A/2$ , поскольку открыта лишь половина фронта (открыты зоны  $\sigma_1, \sigma_2, \dots$ ). По мере смещения  $P$  влево ( $x < 0$ ) эти зоны будут последовательно закрываться, и при  $x \rightarrow -\infty$   $A(x) \rightarrow 0$  (точка  $P'$  находится на правой ветви спирали). При движении вправо последовательно открываются зоны  $\sigma'_1, \sigma'_2, \dots$ . Амплитуда  $A(x)$  осциллирует, однако эти осцилляции затем уменьшаются, и при  $x \rightarrow \infty$   $A(x) \rightarrow A$  (точка  $P''$  находится на левой ветви спирали).

На рис. 11.20 представлен график зависимости нормированной интенсивности  $\tilde{I} = A^2(x)/A^2$  от координаты  $x$ , а на рис. 11.21 изображена экспериментально наблюдаемая дифракционная картина.

Аналитически эта задача была решена Френелем. Распределение поля описывается с помощью табличных интегралов Френеля. Значения интегралов в графическом представлении и являются собой спираль Корню.

## ЛЕКЦИЯ 12

В этой лекции рассмотрим основы скалярной теории дифракции, созданной немецким физиком Г. Кирхгофом. По существу подход Кирхгофа является обобщением принципа Гюйгенса—Френеля.

**Интегральная теорема Кирхгофа.** Пусть распространяется монохроматическая скалярная волна

$$U(x, y, z, t) = U(x, y, z)e^{i\omega t}, \quad (12.1)$$

где  $U$  — комплексная амплитуда волны. Отметим, что  $U$  может быть любой из компонент поля  $\mathbf{E}$  или  $\mathbf{H}$ , волной давлений, плотности в акустике и др. Если (12.1) подставить в волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = c^2 \Delta U, \quad (12.2)$$

то после сокращения на  $e^{i\omega t}$  получается уравнение Гельмгольца

$$\Delta U + k^2 U = 0, \quad (12.3)$$

где  $k^2 = \omega^2/c^2$ .

Из курса математики известно, что его решение может быть получено с помощью функции Грина  $G$  в виде

$$U(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma} \left( U \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial U}{\partial n} \right) d\sigma. \quad (12.4)$$

Смысл решения (12.4) поясняется на рис. 12.1.

Возмущение  $U$  в точке  $P$ , задаваемой радиусом-вектором  $\mathbf{r}$ , выражается через это возмущение и функцию Грина на произвольной поверхности  $\Sigma$ , охватывающей эту точку. Кроме того, в (12.4) входят производные по внутренней нормали  $\mathbf{n}$  (обращенной к точке  $P$ ).

Функция Грина является решением уравнения Гельмгольца с правой частью:

$$\Delta G + k^2 G = -4\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \quad (12.5)$$

Это уравнение описывает волновое возмущение  $G(\mathbf{r})$ , испускаемое из точки, задаваемой радиусом-вектором  $\mathbf{r}'$ . Одним из его решений является функция

$$G = \frac{1}{\rho} e^{-ik\rho}, \quad (12.6)$$

описывающая расходящуюся из точки  $\mathbf{r}'$  сферическую волну. Здесь  $\rho = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ .

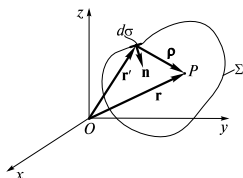


Рис. 12.1

Подставив функцию Грина в (12.4), получим

$$U(P) = \frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma} \left[ U \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{e^{-ik\rho}}{\rho} \right) - \left( \frac{e^{-ik\rho}}{\rho} \right) \frac{\partial U}{\partial n} \right] d\sigma. \quad (12.7)$$

Решение (12.7) по своей структуре весьма сходно с дифракционным интегралом Френеля (11.4). Наличие производных по нормали отражает зависимость от угла наклона амплитуды вторичной волны, испускаемой элементом  $d\sigma$  поверхности  $\Sigma$ .

**Дифракционная формула Френеля — Кирхгофа.** Применим (12.7) для решения дифракционной задачи. Пусть сферическая волна от источника в точке  $P_0$  падает на плоский экран  $\mathcal{E}$  с отверстием площадью  $\Sigma$ . Для вычисления возмущения за экраном в точке  $P$  окружим последнюю замкнутой поверхностью, состоящей из плоского (площадь  $\Sigma + \Sigma'$ ) и сферического (площадь  $\Sigma''$ ) участков (рис. 12.2).

Если радиус  $R$  сферической поверхности устремить к бесконечности, то интеграл по этой поверхности должен давать малый вклад. Вычислим этот вклад. На поверхности  $\Sigma''$  величина  $\rho = R$ , поэтому

$$\frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{e^{-ik\rho}}{\rho} \right)_{\rho=R} = - \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \frac{e^{-ik\rho}}{\rho} \right)_{\rho=R} = \left( ik + \frac{1}{R} \right) \frac{e^{-ikR}}{R} \approx ik \frac{e^{-ikR}}{R}, \quad (12.8)$$

поскольку  $k = 2\pi/\lambda \gg R$ . Учитывая, что  $d\sigma = R^2 d\Omega$  ( $d\Omega$  — элемент телесного угла) и  $\frac{\partial U}{\partial n} = - \frac{\partial U}{\partial R}$ , и подставляя (12.8) в (12.7), получим

$$\frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma''} \left[ U \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{e^{-ik\rho}}{\rho} \right) - \left( \frac{e^{-ik\rho}}{\rho} \right) \frac{\partial U}{\partial n} \right] d\sigma = \frac{1}{4\pi} \iint_{4\pi} \left( \frac{\partial U}{\partial R} + ikU \right) \frac{e^{-ikR}}{R} R^2 d\Omega. \quad (12.9)$$

Чтобы при  $R \rightarrow \infty$  интеграл стремился к нулю, необходимо выполнить условие

$$\lim_{R \rightarrow \infty} R \left( \frac{\partial U}{\partial R} + ikU \right) = 0, \quad (12.10)$$

называемое *условием излучения Зоммерфельда*. Ему удовлетворяет сферическая волна  $U = \frac{e^{-ikR}}{R}$ , идущая в точку  $P$  с любого элемента замкнутой поверхности, в том числе и от отверстия площадью  $\Sigma$ .

Для определения значений  $U$  и  $\frac{\partial U}{\partial n}$  на плоской поверхности Кирхгофом были сформулированы *приближенные граничные условия*:

- на непрозрачной части экрана  $U = 0$  и  $\frac{\partial U}{\partial n} = 0$ ;

- $U$  и  $\frac{\partial U}{\partial n}$  внутри дифракционного отверстия

такие же, как и в отсутствие экрана. Последнее утверждение справедливо, если размер отверстия заметно превосходит длину волны.

Чтобы избежать одновременного задания на отверстии величин  $U$  и  $\frac{\partial U}{\partial n}$ , А. Зоммерфельд

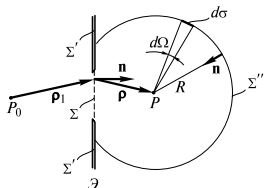


Рис. 12.2

предложил выбрать иную функцию Грина, чем (12.6). Ее можно выбрать такой, чтобы на отверстии  $G_1|_{\Sigma} = 0$ . Тогда в (12.4) исчезает слагаемое, содержащее  $\frac{\partial U}{\partial n}$ . Если же  $G = G_2$ , для которой  $\frac{\partial G_2}{\partial n}|_{\Sigma} = 0$ , то в (12.4) останется слагаемое, содержащее  $\frac{\partial U}{\partial n}$ . Функция  $G_1$  будет использована в дальнейшем при анализе дифракции световых импульсов.

Возмущение на экране от точечного источника, расположенного в точке  $P_0$ , равно  $U = \frac{C e^{-ik\rho_1}}{\rho_1}$ . Вычислим в (12.4) производные по нормали:

$$\begin{aligned}\frac{\partial G}{\partial n} &= \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{e^{-ik\rho}}{\rho} \right) = -\frac{\partial}{\partial \rho} \left( \frac{e^{-ik\rho}}{\rho} \right) \cos \varphi = \left( ik + \frac{1}{\rho} \right) \frac{e^{-ik\rho}}{\rho} \cos \varphi; \\ \frac{\partial U}{\partial n} &= \frac{\partial}{\partial n} \left( C \frac{e^{-ik\rho_1}}{\rho_1} \right) = \frac{\partial}{\partial \rho_1} \left( C \frac{e^{-ik\rho_1}}{\rho_1} \right) \cos \varphi_1 = -C \left( ik + \frac{1}{\rho_1} \right) \frac{e^{-ik\rho_1}}{\rho_1} \cos \varphi_1,\end{aligned}\quad (12.11)$$

где  $\varphi, \varphi_1$  — углы между векторами  $\mathbf{p}$  и  $\mathbf{n}$  и  $\mathbf{p}_1$  и  $\mathbf{n}$  соответственно.

Как и в (12.8),  $k \gg 1/\rho, 1/\rho_1$ , поэтому величинами  $1/\rho$  и  $1/\rho_1$  в правых частях (12.11) можно пренебречь. В результате (12.7) приобретает вид

$$U(P) = \iint_{\Sigma} \frac{C e^{-ik(\rho_1 + \rho)}}{\rho_1 \rho} \frac{i}{2\lambda} [\cos \varphi_1 + \cos \varphi] d\sigma. \quad (12.12)$$

Это выражение называется *дифракционной формулой Френеля—Кирхгофа*. Она совпадает с дифракционным интегралом Френеля (11.3), если в нем коэффициент наклона положить равным

$$K(\varphi) = \frac{i}{2\lambda} [1 + \cos \varphi], \quad (12.13)$$

поскольку для сферической поверхности угол  $\varphi_1 = 0$ .

**З а м е ч а н и е 1.** Формула (12.12) симметрична относительно точек  $P_0$  и  $P$ : если источник и приемник поменять местами, то величина  $U$  останется прежней.

**З а м е ч а н и е 2.** Если сделать экран полностью прозрачным, то

$$U_0(P) = \int_{\Sigma} + \int_{\Sigma'} = U(P) + U_1(P), \quad (12.14)$$

где  $U_0(P)$  — возмущение в отсутствие экрана;  $U_1(P)$  — возмущение в присутствии непрозрачного препятствия, заменяющего отверстие. Такое препятствие является дополнительным экраном по отношению к экрану с отверстием, формирующему возмущение  $U(P)$ . Формула (12.14) — математическое выражение *принципа Бабине*, который будет использован в дальнейшем.

**Приближения Френеля и Фраунгофера.** При решении задачи дифракции на основе дифракционной формулы Френеля — Кирхгофа можно выделить два предельных случая. Для этого рассмотрим дифракцию волны точечного источника на экране с круглым отверстием радиуса  $r_0$ . Точки  $P_0$  и  $P$  лежат на оси отверстия на расстояниях  $a > r_0$  и  $b > r_0$  (рис. 12.3). При интегрировании  $\rho_1$  и  $\rho$  в (12.12) изменяются в следующих пределах:

$$\begin{aligned} a \leq \rho_1 \leq \rho_{10} &= a + \frac{r_0^2}{2a}; \\ b \leq \rho \leq \rho_0 &= b + \frac{r_0^2}{2b}, \end{aligned} \quad (12.15)$$

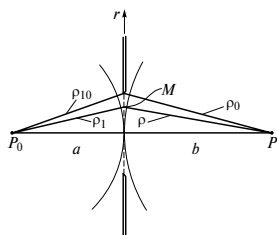


Рис. 12.3

где  $\frac{r_0^2}{2a}$  и  $\frac{r_0^2}{2b}$  — малые зазоры между сферами радиусами  $a$  и  $b$  и плоскостью экрана (см. (9.16)), когда точка интегрирования  $M$  находится на краю отверстия (см. рис. 12.3).

Знаменатель подынтегрального выражения в (12.12) изменяется незначительно, поэтому в нем можно положить  $\rho_1 = a$ ,  $\rho = b$ . Однако в числителе (из-за большого значения  $k$ ) экспоненциальные функции  $e^{-ik\rho_1}$  и  $e^{-ik\rho}$  могут изменяться весьма значительно. Если

$$\frac{r_0^2}{2a} \gg \lambda; \quad \frac{r_0^2}{2b} \gg \lambda, \quad (12.16)$$

то при интегрировании экспоненциальные функции будут многократно осциллировать. Условия (12.16) реализуются, если

$$a \ll \frac{r_0^2}{\lambda} = L_0; \quad b \ll \frac{r_0^2}{\lambda} = L_0, \quad (12.17)$$

где  $L_0$  — дифракционная длина, введенная ранее при рассмотрении дифракции плоской волны на круглом отверстии.

Согласно (11.15), на отверстии в этом случае помещается большое число зон Френеля. Такое приближение называется *приближением Френеля*, или *дифракцией Френеля*. Таким образом, это приближение реализуется, если  $P_0$  и  $P$  находятся в ближней зоне.

При увеличении расстояний  $a$  и  $b$  зазоры уменьшаются. При

$$a \gg L_0; \quad b \gg L_0 \quad (12.18)$$

сферы достаточно хорошо могут аппроксимироваться плоскостями, поскольку зазоры становятся много меньше длины волны. Радиус первой зоны значительно превышает радиус отверстия.

Это приближение называется *приближением Фраунгофера*, или *дифракцией Фраунгофера*. Иногда оно называется дифракцией в параллельных лучах, что отражает одинаковую удаленность элементов  $d\sigma$  отверстия от точек  $P_0$  и  $P$ , расположенных на его оси. Таким образом, это приближение используется, если  $P_0$  и  $P$  находятся в дальней зоне. Отметим, что во многих оптических приборах и устройствах реализуется ситуация, соответствующая приближению Фраунгофера.

**Дифракция на круглом отверстии.** Используя дифракционную формулу Френеля — Кирхгофа, рассчитаем интенсивность в дифракционной картине при падении сферической и плоской волн на экран с круглым отверстием.

**Сферическая волна.** Предположим вначале, что точки  $P_0$  и  $P$  находятся на оси отверстия, как это изображено на рис. 12.3, при этом  $a$  и  $b$  могут иметь произвольные значения. Для удобства интегрирования (12.12) введем новую переменную

$$\psi = k[(\rho_1 + \rho) - (a + b)], \quad (12.19)$$

представляющую собой разность фаз между лучами, проходящими через центр отверстия  $O$  и точку интегрирования  $M$ . Тогда

$$d\psi = k(d\rho_1 + d\rho) = k\left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho}\right)rdr, \quad (12.20)$$

поскольку  $\rho_1 d\rho_1 = \rho d\rho = rdr$ . При интегрировании по радиальной координате  $r$  элемент площади  $d\sigma = 2\pi r dr$ , поэтому

$$U(P) = i \frac{C}{a+b} e^{-ik(a+b)} \int_0^{\psi_0} \frac{a+b}{\rho_1 + \rho} \left[ \frac{\cos \varphi_1 + \cos \varphi}{2} \right] e^{-i\psi} d\psi, \quad (12.21)$$

где

$$\psi_0 = k[(\rho_{10} + \rho_0) - (a+b)] \quad (12.22)$$

— максимальная разность фаз, когда точка  $M$  находится на краю отверстия.

Множитель под знаком интеграла

$$F(\psi) = \frac{a+b}{\rho_1 + \rho} \frac{\cos \varphi_1 + \cos \varphi}{2} \quad (12.23)$$

является медленно меняющейся, по сравнению с  $e^{-i\psi}$ , неявной функцией  $\psi$ . Ее качественный вид показан на рис. 12.4.

При  $\psi = 0$   $F = 1$ , а при  $\psi \rightarrow \infty$   $F \rightarrow F_{\min} < 1$ .

Интеграл в (12.21) вычислим по частям:

$$i \int_0^{\psi_0} F(\psi) e^{-i\psi} d\psi = -F(\psi) e^{-i\psi} \Big|_0^{\psi_0} + \int_0^{\psi_0} \frac{dF(\psi)}{d\psi} e^{-i\psi} d\psi.$$

В силу малости  $dF/d\psi$  вторым слагаемым можно пренебречь. Тогда

$$U(P) = \frac{C}{a+b} e^{-ik(a+b)} [1 - F(\psi_0) e^{-i\psi_0}]. \quad (12.24)$$

Переходя к интенсивности, получаем

$$I(P) = \frac{1}{2} |U(P)|^2 = I_0 \left[ (1 - F(\psi_0))^2 + 4F(\psi_0) \sin^2 \frac{\psi_0}{2} \right], \quad (12.25)$$

где  $I_0 = \frac{C^2}{2(a+b)^2}$  — интенсивность в отсутствие экрана.

Проанализируем полученный результат. Пусть положение источника фиксировано, а изменяется лишь расстояние  $b$ . Если  $b < r_0$ , то  $\psi_0 \gg 1$ . Тогда  $F \approx 0$  и  $I \approx I_0$ . Экран с отверстием не оказывает никакого влияния — на отверстии находится большое число открытых зон Френеля ( $m \gg 1$ ). Если  $r_0 < b < L_0 = r_0^2/\lambda$ , то

$$\psi_0 = \frac{2\pi}{\lambda} \left( \frac{r_0^2}{2a} + \frac{r_0^2}{2b} \right) = \pi L_0 \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right). \quad (12.26)$$

На тех расстояниях  $b$ , где  $\psi_0 = \pi m$  ( $m = 2, 4, 6, \dots$ ),  $\sin^2 \frac{\pi m}{2} = 0$ . Учитывая, что  $F \approx 1$ , получаем  $I = 0$ . На других расстояниях  $b$ , где  $\psi_0 = \pi m$  ( $m = 1, 3, 5, \dots$ ),  $\sin^2 \frac{\pi m}{2} = 1$ ,  $I \approx$

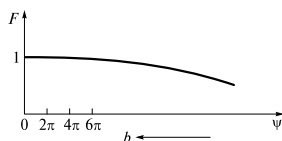


Рис. 12.4

$\approx 4F(\psi_0)I_0 = 4I_0$ . В первом случае на отверстии помещается четное число зон Френеля, а во втором — нечетное.

Если  $b > L_0$ , то, согласно (12.26),  $\psi_0 = \psi_a + \varepsilon$ , где  $\psi_a = \pi L_0/a$ ,  $\varepsilon = \pi L_0/b < 1$ . Тогда  $\sin^2 \frac{\psi_a + \varepsilon}{2} \approx \frac{\varepsilon}{2} \sin \psi_a$ . Следовательно,

$$I(P) = I_0 \left[ (1 - F(\psi_a))^2 + 4F(\psi_a) \frac{\pi L_0}{2b} \sin^2 \psi_a \right]. \quad (12.27)$$

При удалении от экрана интенсивность монотонно уменьшается:  $I \rightarrow 0$ .

**Плоская волна.** В случае плоской волны в полученных выражениях можно сделать предельный переход при  $a \rightarrow \infty$ . Тогда  $I_0 = c^2/2a^2$  и не зависит от  $b$ ,  $\psi_0 = \pi L_0/b$ . Распределение интенсивности на оси отверстия получается из (12.24) равным

$$I(P) = I_0 \left[ \left( 1 - F\left(\frac{\pi L_0}{b}\right) \right)^2 + 4F\left(\frac{\pi L_0}{b}\right) \sin^2 \left(\frac{\pi L_0}{b}\right) \right]. \quad (12.28)$$

График этой функции уже был построен на основе зонной теории Френеля (см. рис. 11.14). В дальнем поле при  $b \rightarrow \infty F \rightarrow 1$ , а  $I(P) \sim 1/b^2 \rightarrow 0$ . Для падающей плоской волны это означает, что поперечный размер дифракционной картины возрастает пропорционально расстоянию  $b$ .

Для точки  $P$ , не лежащей на оси отверстия, интеграл может быть вычислен на ЭВМ. На рис. 12.5 показаны распределения интенсивности в плоскости, перпендикулярной оси отверстия при различных расстояниях  $b$ . Здесь  $m = L_0/b$ . Фактически речь идет о дифракционном распространении круглого пучка с прямоугольным профилем интенсивности.

В прожекторной зоне ( $m \gg 1$ ) профиль интенсивности пучка остается прямоугольным, а фазовый фронт (на рисунке не показан) — плоским. В ближней

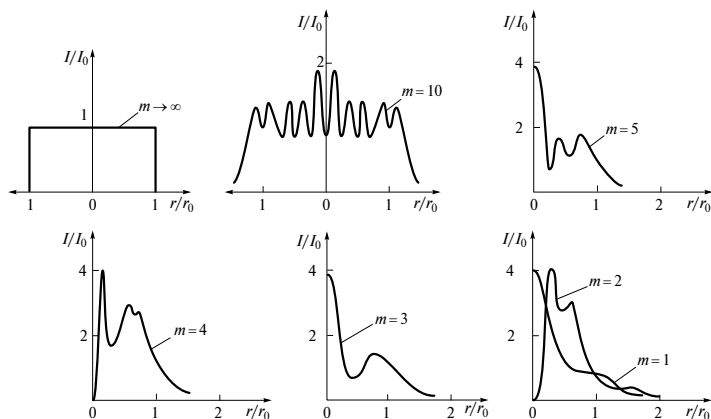


Рис. 12.5



зоне ( $m > 1$ ) профиль начинает «изрезаться», при четном  $m$  на оси пучка  $I \approx 0$ . Появляются дифракционные кольца, которые плотно «упакованы» практически в пределах круга радиуса  $r_0$ . При  $m \leq 1$  профиль пучка начинает заметно расплываться. Вместе с ним расплываются и дифракционные кольца. Интенсивность на оси пучка по мере его распространения уменьшается. В дальней зоне ( $m \ll 1$ ) распределение интенсивности несложно рассчитать и аналитически. Это и будет сделано далее.

**Дифракция на круглом диске.** Если волна падает на круглый диск радиуса  $r_0$ , то можно, не проводя интегрирования в пределах  $\psi_0 \leq \psi < \infty$ , воспользоваться принципом Бабине. Тогда из (12.24) получаем

$$U_1(P) = \frac{C}{a+b} e^{-ik(a+b)} - U(P) = \frac{C}{a+b} e^{-ik(a+b)} F(\psi_0) e^{-i\psi_0}. \quad (12.29)$$

Интенсивность на оси диска

$$I_1(P) = I_0 F^2(\psi_0). \quad (12.30)$$

По мере удаления от диска интенсивность  $I_1$  монотонно увеличивается (см. рис. 11.15). В случае плоской волны  $\psi_0 = \pi L_0/b$ . При  $b = L_0$  функция  $F(\pi) \approx 1$  и  $I \approx I_0$ . На этом расстоянии плоская волна огибает непрозрачный диск. Это объясняет появление пятна Пуассона (см. рис. 11.16).

**Дифракционная картина Фраунгофера как фурье-образ светового поля на дифракционном экране.** Дифракционная формула Френеля—Кирхгофа может быть значительно упрощена, если  $P_0$  и  $P$  находятся в дальнем поле, причем необязательно на оси отверстия (рис. 12.6).

В этом случае две сферические поверхности хорошо аппроксимируются плоскостями  $\Pi_0$  и  $\Pi$ .

Совместим плоскость  $Oxy$  декартовой системы координат  $Oxyz$  с плоскостью экрана  $\mathcal{E}$ , начало координат поместим в некоторую точку отверстия произвольной формы, имеющего площадь  $\Sigma$ . Для задания направлений  $P_0O$  и  $OP$  введем единичные векторы  $\mathbf{e}_0$  и  $\mathbf{e}$  соответственно. Эти векторы, вообще говоря, не лежат в плоскости рисунка.

Зададим их направления с помощью направляющих косинусов:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_0 &= \{e_{0x}, e_{0y}, e_{0z}\} = \{\cos \alpha_0, \cos \beta_0, \cos \gamma_0\}; \\ \mathbf{e} &= \{e_x, e_y, e_z\} = \{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\}. \end{aligned}$$

Будем считать углы  $\gamma_0$  и  $\gamma$  малыми. Как уже отмечалось, можно считать, что  $P_0M \parallel P_0O$ , а  $MP \parallel OP$  ( $M$  — точка, принадлежащая элементу площади  $dx dy$ ).

Тогда

$$\begin{aligned} \rho_1(x, y) &= a + e_{0x}x + e_{0y}y; \\ \rho(x, y) &= b - e_x x - e_y y. \end{aligned} \quad (12.31)$$

Далее учтем, что

$$\frac{C e^{-ik\rho_1}}{\rho_1} = \frac{C}{a} e^{-ik(a+e_{0x}x+e_{0y}y)} = U_{\Sigma}(x, y) \quad (12.32)$$

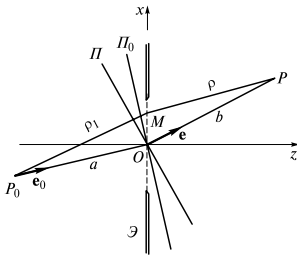


Рис. 12.6

является комплексной амплитудой плоской волны, падающей наклонно на экран. Подставив (12.31) в (12.12), с учетом (12.32) получим

$$U(P) = \frac{i}{\lambda} \frac{e^{-ikb}}{b} \iint_{\Sigma} U_{\Sigma}(x, y) e^{ik_x x + ik_y y} dx dy, \quad (12.33)$$

где  $k_x = ke_x$ ,  $k_y = ke_y$ , в знаменателе (12.12) полагаем  $\rho = b$ ,  $(\cos \varphi_1 + \cos \varphi)/2 = 1$ .

Введем фурье-амплитуду функции  $U_{\Sigma}(x, y)$ :

$$U_{\Sigma}(k_x, k_y) = \iint_{\Sigma} U_{\Sigma}(x, y) e^{ik_x x + ik_y y} dx dy. \quad (12.34)$$

Следовательно,

$$U(P) = \frac{i}{\lambda} \frac{e^{-ikb}}{b} U_{\Sigma}(k_x, k_y). \quad (12.35)$$

Сама функция  $U_{\Sigma}(x, y)$  может быть представлена в виде двухмерного интеграла Фурье:

$$U_{\Sigma}(x, y) = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint U_{\Sigma}(k_x, k_y) e^{-ik_x x - ik_y y} dk_x dk_y. \quad (12.36)$$

Заметим, что выражение (12.35) справедливо и для произвольного возмущения  $U_{\Sigma}(x, y)$ , возникающего при падении набора плоских волн под небольшими углами к оси  $Oz$ .

Интенсивность в дифракционной картине в дальнем поле получается равной

$$I(P) = \frac{1}{2} |U(P)|^2 = \frac{1}{\lambda^2 b^2} \frac{|U_{\Sigma}(k_x, k_y)|^2}{2}. \quad (12.37)$$

Выражение (12.37) показывает, что *интенсивность пропорциональна пространственной спектральной плотности возмущения в плоскости дифракционного отверстия*. Величины  $k_x = k \cos \alpha$  и  $k_y = k \cos \beta$  называются *пространственными частотами*, а спектральная плотность  $|U_{\Sigma}(k_x, k_y)|^2$  описывает *угловой спектр*.

Таким образом, *дифракция Фраунгофера является волновым процессом, приводящим к формированию углового спектра на экране, на котором наблюдается дифракционная картина*.

Чрезвычайно важно отметить, что во многих оптических схемах дифракционную картину Фраунгофера получают в фокальной плоскости собирающей линзы, помещаемой позади дифракционного экрана. Линза собирает параллельные лучи, идущие от вторичных источников, в своей фокальной плоскости. В этом случае в (12.37) расстояние  $b$  равно фокусному расстоянию линзы. Следовательно, отпадает необходимость далеко отодвигать экран для наблюдения картины Фраунгофера, тем более что в ряде задач  $L_0$  может достигать десятков и более метров.

**Дифракция Фраунгофера на прямоугольном отверстии.** Пусть плоская волна падает нормально на экран с прямоугольным отверстием размером  $d_1 \times d_2$ . Тогда

$$U_{\Sigma}(x, y) = \begin{cases} U_0, & |x| \leq d_1/2, |y| \leq d_2/2; \\ 0, & |x| > d_1/2 \text{ или } |y| > d_2/2. \end{cases} \quad (12.38)$$

Подставляя (12.38) в (12.34), производя интегрирование и переходя к интенсивности, получаем

$$I(P) = I(k_x, k_y) = \frac{I_0(d_1 d_2)^2}{\lambda^2 b^2} \operatorname{sinc}^2\left(\frac{k_x d_1}{2}\right) \operatorname{sinc}^2\left(\frac{k_y d_2}{2}\right). \quad (12.39)$$

Двухмерное распределение интенсивности (12.39) хорошо описывает экспериментально наблюдаемую дифракционную картину (рис. 12.7).

Сделаем акцент на трех важных моментах.

1. Отметим пространственно-временную аналогию спектральной плотности  $|U_\Sigma(k_x, k_y)|^2$  и спектральной плотности  $|U(\omega)|^2$  импульса  $U(t)$  длительностью  $\tau$

$$U(t) = \begin{cases} U_0, & |t| \leq \tau/2; \\ 0, & |t| > \tau/2, \end{cases} \quad (12.40)$$

для которого

$$|U(\omega)|^2 = U_0^2 \tau^2 \operatorname{sinc}^2\left(\frac{\omega \tau}{2}\right). \quad (12.41)$$

В (12.39) пространственные частоты  $k_x$  и  $k_y$  аналогичны частоте  $\omega$  в (12.41), величины  $d_1$  и  $d_2$  аналогичны  $\tau$ .

2. Положения минимумов интенсивности определяются направлениями, для которых  $k_{xm} d_1/2 = \lambda m_1$ ,  $k_{ym} d_2/2 = \lambda m_2$ , или

$$\cos \alpha_m = \frac{k_{xm}}{k} = \frac{m_1 \lambda}{d_1}; \quad \cos \beta_m = \frac{k_{ym}}{k} = \frac{m_2 \lambda}{d_2}, \quad m_1, m_2 = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \quad (12.42)$$

Основная мощность волны сконцентрирована в пределах центрального дифракционного пятна-прямоугольника, угловые размеры которого определяются из (12.42) при  $m_1 = \pm 1$ ,  $m_2 = \pm 1$ . Чем меньше размеры отверстия, тем больше угловые размеры этого пятна (и всей дифракционной картины). Условия (12.42) означают, что в спектре возмущения (12.38) пространственные частоты, кратные низшим частотам  $2\pi/d_1$  и  $2\pi/d_2$ , отсутствуют.

3. Интенсивность  $I(0, 0)$  в центре картины меньше  $I_0$ . Величину  $I(0, 0)$  можно оценить, исходя из сохранения полной мощности  $I_0 d_1 d_2$  волны, прошедшей через прямоугольное отверстие. Линейные размеры центрального пятна на расстоянии  $b$  равны  $d'_1 = 2b \cos \alpha_m = 2b\lambda/d_1$ ;  $d'_2 = 2b \cos \beta_m = 2b\lambda/d_2$ . Если принять, что мощность сконцентрирована в пределах прямоугольника  $d'_1/2 \times d'_2/2$ , то

$$I_0 d_1 d_2 = I(0, 0) \frac{d'_1}{2} \frac{d'_2}{2}. \quad (12.43)$$

Поэтому

$$I(0, 0) = \frac{I_0 (d_1 d_2)^2}{\lambda^2 b^2} \quad (12.44)$$

и совпадает с аналогичной величиной в (12.39).

Если прямоугольное отверстие сильно вытянуто ( $d_2 \gg d_1$ ), то говорят о щели шириной  $d_1$ . Максимумы вдоль направления, параллельно-



Рис. 12.7

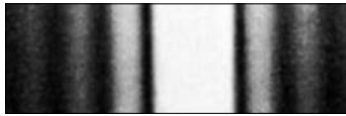


Рис. 12.8

го оси  $Oy$ , располагаются настолько близко, что дифракционная картина становится одномерной (рис. 12.8).

**Дифракция Фраунгофера на круглом отверстии.** Пусть в экране имеется круглое отверстие радиуса  $r_0$ . Проводя интегрирование с использованием полярных координат, можно получить распределение интенсивности в виде

$$I(P) = I(k_{\perp}) = \frac{I_0(\pi r_0^2)^2}{\lambda^2 b^2} \left[ \frac{2J_1(k_{\perp} r_0)}{k_{\perp} r_0} \right]^2. \quad (12.45)$$

Здесь  $k_{\perp} = \sqrt{k_x^2 + k_y^2} = k \sin \vartheta$ ,  $\vartheta$  — угол между осью  $Oz$  и направлением в точку  $P$ . По своей структуре выражение (12.45) очень похоже на (12.39). Функция  $J_1(\xi)$  называется функцией Бесселя первого порядка. На рис. 12.9 представлен график зависимости  $\left[ \frac{2J_1(\xi)}{\xi} \right]^2$  от величины  $\xi$ .

Дифракционная картина в дальнем поле представляет собой дифракционные кольца, окружающие яркое круглое пятно.

На рис. 12.10 показана экспериментально наблюдаемая дифракционная картина.

Дифракционные кольца называются *кольцами Эйри*. Угловой размер центрального пятна определяется из условия

$$\xi = k_{\perp} r_0 = k r_0 \sin \vartheta_0 = 1,22\pi. \quad (12.46)$$

Отсюда

$$\sin \vartheta_0 = \frac{0,61\lambda}{r_0}. \quad (12.47)$$

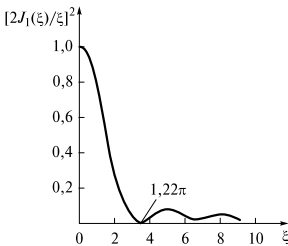


Рис. 12.9

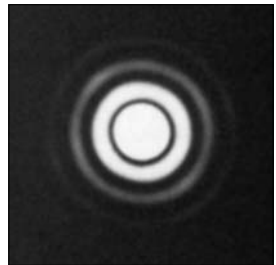


Рис. 12.10

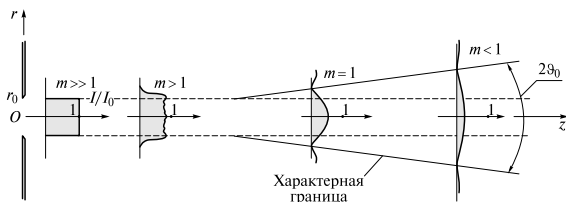


Рис. 12.11

Обычно  $r_0 > \lambda$ , поэтому

$$\sin \vartheta_0 \approx \vartheta_0 = \frac{0,61\lambda}{r_0}. \quad (12.48)$$

Радиус центрального пятна  $r_{0b}$  (и других колец) линейно нарастает с расстоянием  $b$ :  $r_{0b} = \vartheta_0 b$ . За экраном с отверстием распространяется расходящийся световой пучок, основная мощность которого заключена внутри конуса с углом  $2\vartheta_0$  при его вершине. Эту угловую расходимость называют *дифракционной*; она характеризуется углом  $\vartheta_0$ , или *углом дифракционной расходимости*.

На рис. 12.11 схематично изображено распространение вдоль оси  $Oz$  пучка с прямоугольным профилем интенсивности. Для большей наглядности штриховой линией выделена цилиндрическая область с радиусом, равным начальному радиусу  $r_0$  светового пучка, и оттенена область на графиках  $I(r)$ , в которой заключена основная мощность пучка.

Видно, что основная мощность заключена внутри пространства, характерные границы которого изображены двумя изгибающимися линиями, стремящимися в дальнем поле ( $z > L_0 = r_0^2/\lambda$ ) к асимптотам с углом  $2\vartheta_0$  между ними.

**Поле в фокальной плоскости линзы.** При падении плоской волны на собирающую линзу с радиусом  $r_0$  и фокусным расстоянием  $f$  в ее фокальной плоскости формируется дифракционная картина Фраунгофера.

Действительно, линза, с одной стороны, выполняет роль круглого отверстия радиуса  $r_0$ , а с другой — собирает в фокальной плоскости параллельные лучи от вторичных источников. Поэтому в ее фокальной плоскости будет расположено центральное пятно, окруженное кольцами Эйри. Радиус этого пятна получается при  $b = f$  равным:

$$r_F = \vartheta_0 f = \frac{0,61\lambda}{r_0} f. \quad (12.49)$$

На рис. 12.12 показана схема фокусировки коллимированного пучка собирающей линзой.

Кривыми линиями отмечена граница области, в которой сосредоточена основная мощность волны. После фокальной плоскости пучок приобретает большую расходимость

$$\vartheta_F \approx \frac{\lambda}{r_F}. \quad (12.50)$$

Если бы линзы не было, то пучок в дальнем поле приобрел бы меньшую расходимость  $\vartheta_0 \sim \lambda/r_0 < \vartheta_F$ , поскольку  $r_F < r_0$ .

Оценим радиус пятна в фокальной плоскости линзы, используя свойство обратимости распространения волны, заложенное в уравнениях Максвелла. Это означает, что пучок, испущенный из фокальной плоскости

в направлении линзы (справа налево), может превратиться после линзы в исходный пучок с прямоугольным профилем интенсивности и плоским фронтом. Для этого распределение напряженности светового поля (амплитуды и фазы) в фокальной плоскости должно быть таким же, как и в дифракционной картине Фраунгофера, образующейся позади круглого отверстия.

Вблизи линзы дифракционная расходимость пучка, с одной стороны, определяется формулой (12.50), а с другой, как это следует из рис. 12.12, равна

$$\vartheta_F \approx \frac{r_0}{f}. \quad (12.51)$$

Приравняв (12.50) и (12.51), получим

$$r_F \approx \frac{\lambda f}{r_0}. \quad (12.52)$$

Эта оценка совпадает с проведенными ранее оценками с использованием зонной теории и дифракционного интеграла Френеля — Кирхгофа.

**Дифракция гауссова пучка.** Пусть в плоскости  $Oxy$  возмущение

$$U_{\Sigma}(x, y) = U_0 \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{r_0^2}\right). \quad (12.53)$$

Это возмущение соответствует начальному распределению поля в гауссовом пучке. Его фурье-амплитуда

$$U_{\Sigma}(k_x, k_y) = U_0 \pi r_0^2 \exp\left(\frac{-k_x r_0^2}{2}\right) \exp\left(\frac{-k_y r_0^2}{2}\right). \quad (12.54)$$

Как и следовало ожидать, фурье-амплитуда от гауссовой функции также является гауссовой функцией. Согласно (12.37) интенсивность в дальнем поле

$$I(P) = I(k_x, k_y) = \frac{I_0 (\pi r_0^2)^2}{\lambda^2 b^2} \exp\left[-r_0^2 (k_x^2 + k_y^2)\right]. \quad (12.55)$$

Для точки  $P$  с координатами  $x, y, z$  имеем  $b \approx z$ ,  $k_x = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{x}{z}$ ;  $k_y = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{y}{z}$ . Поэтому

$$I(P) = I(x, y, z) = \frac{I_0}{z^2/z_0^2} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{r_0^2 z^2/z_0^2}\right), \quad (12.56)$$

где  $z_0 = \pi r_0^2/\lambda$  — *дифракционная длина гауссова пучка*. Естественно, что (12.56) справедливо при  $z \gg z_0$ .

Таким образом, в дальнем поле гауссов пучок остается гауссовым. Его ширина  $r_{0z} = r_0 z/z_0$  (см. рис.) возрастает пропорционально пройденному волной

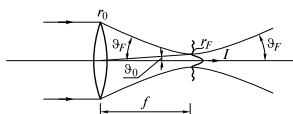


Рис. 12.12

расстоянию, а интенсивность на оси убывает обратно пропорционально квадрату этого расстояния.

**Квазиоптическое приближение.** Для описания распространения направленных пучков света применяется квазиоптическое приближение. Вследствие малой дифракционной расходимости такие пучки представляют собой квазиплоские (почти плоские) неоднородные волны.

Пусть вдоль оси  $Oz$  распространяется монохроматический пучок света:

$$U(x, y, z, t) = A(x, y, z, t) \exp[i(\omega t - kz)]. \quad (12.57)$$

Амплитуда волны в плоскости  $Oxy$  изменяется на масштабе ширины пучка  $r_0$ , а вдоль оси  $Oz$  — на масштабе дифракционной длины  $L_0 \sim r_0^2/\lambda \gg r_0$ . Это позволяет получить из волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = c^2 \left( \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right) \quad (12.58)$$

более простое приближенное уравнение для комплексной амплитуды  $A$ .

Для этого вычислим производные:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} &= (i\omega)U; \quad \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} \exp[i(\omega t - kz)]; \quad \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} \exp[i(\omega t - kz)]; \\ \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} &= \left( \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} - 2ik \frac{\partial A}{\partial z} - k^2 A \right) \exp[i(\omega t - kz)]. \end{aligned} \quad (12.59)$$

Оценим значения производных:

$$\left| \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} \right| \sim \left| \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} \right| \sim \frac{A}{r_0^2}; \quad \left| \frac{\partial A}{\partial z} \right| \sim \frac{A}{L_0}; \quad \left| \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} \right| \sim \frac{A}{L_0^2}.$$

Поэтому в (12.59) можно пренебречь членом  $\frac{\partial^2 A}{\partial z^2}$ . После подстановки (12.59) в (12.58) и сокращения на экспоненциальный множитель получаем искомое уравнение

$$\frac{\partial A}{\partial z} = \frac{1}{2ik} \left( \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} \right). \quad (12.60)$$

Это уравнение называется *параболическим уравнением для комплексной амплитуды*.

Процесс дифракции, описываемый этим уравнением, имеет наглядную аналогию с распространением тепла на плоскости  $Oxy$  с течением времени  $t$ . Уравнение теплопроводности в этом случае имеет вид

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \chi \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right), \quad (12.61)$$

где  $T$  — температура;  $\chi$  — коэффициент температуропроводности (диффузии температуры). Если в момент  $t = 0$  вблизи начала координат осуществить локальный нагрев, создав профиль температуры  $T(x, y, 0)$ , то с течением времени этот профиль  $T(x, y, t)$  будет расплываться.

Аналогично, начальное распределение  $A(x, y, 0)$  при  $z = 0$  по мере распространения будет расплываться вследствие дифракции. Аналогом  $\chi$  здесь является мнимый коэффициент  $1/(2ik)$  диффузии амплитуды. Рассмотрим два важных примера.

**Дифракция гауссова пучка.** Для гауссова коллимированного пучка с начальным распределением амплитуды

$$A(r, 0) = A_0 \exp\left(-\frac{r^2}{r_0^2}\right) \quad (12.62)$$

решение уравнения (12.60) имеет вид

$$A(r, z) = \frac{A_0}{1 - iz/z_0} \exp\left(-\frac{r^2}{r_0^2} \frac{1}{1 - iz/z_0}\right) = |A| \exp(-i\Phi). \quad (12.63)$$

Здесь  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ,  $z_0 = \pi r_0^2 / \lambda$ . Профиль интенсивности

$$I(r, z) = \frac{1}{2} |A|^2 = \frac{I_0}{1 + z^2/z_0^2} \exp\left(-\frac{r^2}{r_0^2(1 + z^2/z_0^2)}\right), \quad (12.64)$$

а фаза

$$\Phi = \frac{r^2}{r_0^2} \frac{z/z_0}{1 + z^2/z_0^2} - \arctg(z/z_0). \quad (12.65)$$

Из (12.64) следует, что при *распространении пучок сохраняет свой гауссов профиль при любом  $z$* . Из-за дифракции его ширина  $r_{0z}$  увеличивается:

$$r_{0z} = r_0 \sqrt{1 + z^2/z_0^2}, \quad (12.66)$$

а интенсивность падает. В дальнем поле ( $z \gg z_0$ ) (12.64) совпадает с (12.56).

*Дифракционная расходимость* из (12.66) получается равной

$$\operatorname{tg} \vartheta_0 \approx \vartheta_0 \left. \frac{dr_{0z}}{dz} \right|_{z \gg L_0} = \frac{\lambda}{\pi r_0}. \quad (12.67)$$

Согласно (12.49) при фокусировке пучка линзой в ее фокальной плоскости ширина гауссова пучка равна

$$r_F = \vartheta_0 f = \frac{\lambda f}{\pi r_0}. \quad (12.68)$$

Эта величина с точностью до коэффициента совпадает с приближенной оценкой (12.52) и обнаруживает полное совпадение с (11.23). Иногда наиболее узкую часть пучка в фокальной плоскости линзы называют *перетяжкой*, а величину  $r_F$  — *радиусом перетяжки*.

Фазовый фронт, как следует из (12.65), из плоского постепенно превращается в параболический, хотя в соответствии с теорией дифракции он должен быть сферическим. В приосевой области пучка, где сконцентрирована его основная мощность, параболический и сферический фазовые фронты совпадают, что свидетельствует о справедливости квазиоптического описания. В дальнем поле

$$\Phi = \frac{r^2}{r_0^2} \frac{z_0}{z} = \frac{1}{2} \frac{r^2}{z} k. \quad (12.69)$$



Следовательно, радиус кривизны фронта  $R = z$  и увеличивается с пройденным волной расстоянием.

**Дифракция частично когерентного пучка.** Если лазер работает в режиме генерации большого числа поперечных мод (многомодовом режиме), то поперечное распределение поля в пучке может изменяться случайным образом. Предположим, что на выходе лазера при  $z = 0$

$$A(\mathbf{r}, 0) = A_0 e^{-r^2/r_0^2} \eta(\mathbf{r}), \quad (12.70)$$

где  $\eta(\mathbf{r})$  — случайная функция координат. Ее среднее значение  $\bar{\eta} = 0$ , а дисперсия  $\sigma^2 = 1$ .

Пусть степень пространственной когерентности (см. лекцию 10) имеет вид

$$\gamma_{12}(l, 0) = \overline{\eta(\mathbf{r}_1)\eta(\mathbf{r}_2)} = \exp(-l^2/r_{k0}^2), \quad (12.71)$$

где  $r_{k0}$  — *начальный радиус пространственной когерентности*.

Решая уравнение (12.66) с начальным условием (12.70), получаем решение  $A(\mathbf{r}, z)$ , являющееся случайной функцией координат. С учетом (12.71) для *пространственной корреляционной функции амплитуды*  $A(\mathbf{r}, z)$  получаем выражение

$$G_{12} = \frac{\overline{A(\mathbf{r}_1, z)A^*(\mathbf{r}_2, z)}}{2} = I_0 \exp \left[ -\frac{r_1^2 + r_2^2}{r_{0z}^2} - \frac{(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)^2}{r_{kz}^2} \right]. \quad (12.72)$$

Ширина пучка  $r_{0z}$  и радиус его пространственной когерентности  $r_{kz}$  возрастают с пройденным волной расстоянием по одинаковому закону

$$\begin{aligned} r_{0z} &= r_0 \sqrt{1 + z^2/z_1^2}; \\ r_{kz} &= r_{k0} \sqrt{1 + z^2/z_1^2}. \end{aligned} \quad (12.73)$$

Здесь

$$z_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\pi r_0 r_{\text{эф}}}{\lambda} \quad (12.74)$$

— *дифракционная длина частично когерентного пучка*; эффективная ширина  $r_{\text{эф}}$  определяется соотношением

$$\frac{1}{r_{\text{эф}}^2} = \frac{1}{r_{k0}^2} + \frac{1}{2r_0^2}. \quad (12.75)$$

У пространственно когерентного (одномодового) гауссова пучка  $r_{k0} \gg r_0$ . Тогда  $r_{\text{эф}} = \sqrt{2}r_0$  и  $z_1 = z_0$ , как это было получено ранее. Для многомодового пучка ( $N$  — число поперечных мод)  $r_{k0} = r_0/\sqrt{N} < r_0$ ,  $r_{\text{эф}} \approx r_{k0}$  и  $z_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\pi r_0 r_{k0}}{\lambda} < z_0$ .

*Расходимость частично когерентного (многомодового) пучка в дальнем поле ( $z \gg z_0$ ) превышает расходимость  $\vartheta_0$  когерентного пучка того же радиуса:*

$$\vartheta_1 = \frac{dr_{0z}}{dz} = \frac{r_0}{z_1} = \frac{\lambda}{\sqrt{2}\pi r_{k0}} > \vartheta_0 = \frac{\lambda}{\pi r_0}. \quad (12.76)$$

Таким образом, *дифракционная расходимость  $\vartheta_0$  одномодового пучка является минимальной расходимостью*. Реальные пучки обладают ограниченной пространственной когерентностью ( $r_{k0} < r_0$ ), поэтому их расходимость превышает дифракционную.

## ЛЕКЦИЯ 13

**Дифракция Фраунгофера на периодических структурах.** Среди многочисленных дифракционных явлений особое место занимает дифракция на периодических структурах. При распространении (отражении) плоской волны через одно- или двумерные структуры возмущение в (12.33) приобретает периодическую модуляцию амплитуды и фазы в плоскости  $Oxy$ . В результате в угловом спектре  $|U_{\Sigma}(k_x, k_y)|^2$  появляются ярко выраженные пространственные частоты. Дифракционные максимумы, соответствующие этим частотам, будут узкими и интенсивными.

В этом легко убедиться, направив луч лазерной указки наклонно на поверхность CD-диска. От его поверхности будут отражаться в разных направлениях несколько световых лучей. Эти направления будут совпадать с направлениями на дифракционные максимумы.

Поскольку положение дифракционных максимумов зависит от длины волны, дифракция может быть использована для спектрального анализа света. Кроме того, при известной длине волны по положению максимумов можно сделать заключение о периодах пространственной модуляции и тем самым исследовать саму периодическую структуру.

**Дифракционные решетки.** Дифракционной решеткой является любое устройство, обеспечивающее периодическую модуляцию вдоль одного направления амплитуды и фазы падающей волны. На рис. 13.1 решетка схематично изображена в виде прозрачной пластинки с периодически меняющейся толщиной вдоль оси  $Ox$ .

При падении на решетку плоской волны возмущение на ее поверхности

$$U(x, y) = U_0 e^{-ike_{0x}x - ike_{0y}y}. \quad (13.1)$$

Модуляционные свойства решетки задаются комплексной функцией

$$t(x) = \frac{U_{\Sigma}(x, y)}{U(x, y)} = |t(x)| e^{-i\Phi(x)}, \quad (13.2)$$

где  $U_{\Sigma}(x, y)$  — возмущение, проходящее через решетку.

Функция (13.2) периодическая:

$$t(x) = t(x + d). \quad (13.3)$$

Величина  $d$  называется *периодом решетки*. Число  $N$  таких периодов (штрихов) обычно велико:  $10^2 < N < 10^4$ . Многие решетки отражают свет. В этом случае функция  $t(x)$  будет описывать модуляцию волны при отражении.

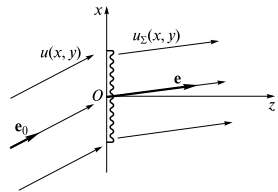


Рис. 13.1

По характеру модуляции решетки подразделяются на *амплитудные* и *фазовые*. Для амплитудных решеток  $\Phi(x) = 0$ , для фазовых  $|t(x)| = 1$ .

В результате дифракции возмущение в дальнем поле, согласно (12.33), равно

$$U(P) = \frac{i}{\lambda} \frac{e^{ikb}}{b} U_0 \int_0^{L_2} e^{ik(e_y - e_{0y})y} dy \int_0^{L_1} t(x) e^{ik(e_x - e_{0x})x} dx, \quad (13.4)$$

где пределы интегрирования  $L_1$  и  $L_2$  определяются размерами решетки, выполненной в форме прямоугольника. Если для простоты положить, что векторы  $\mathbf{e}_0$  и  $\mathbf{e}$  лежат в плоскости рисунка, то  $e_y = e_{0y} = 0$  и  $\int_0^{L_2} dy = L_2$ .

Другой интеграл представим в виде

$$\begin{aligned} \int_0^{L_1} t(x) e^{ikpx} dx &= \int_0^d t(x) e^{ikpx} dx + \int_d^{2d} t(x) e^{ikpx} dx + \dots + \int_{(N-1)d}^{Nd} t(x) e^{ikpx} dx = \\ &= \int_0^d t(x) e^{ikpx} dx [1 + e^{ikpd} + \dots + e^{ikpd(N-1)}] = \int_0^d t(x) e^{ikpx} dx \frac{1 - e^{ikpdN}}{1 - e^{ikpd}}. \end{aligned} \quad (13.5)$$

Здесь  $p = e_x - e_{0x} = \sin \varphi - \sin \varphi_0$ ;  $\varphi$  и  $\varphi_0$  — углы, образуемые векторами  $\mathbf{e}$  и  $\mathbf{e}_0$  с осью  $Oz$  соответственно,  $L_1 = Nd$ . Если бы решетка состояла из одного периода, то возмущение было бы равно

$$U_1(P) = \frac{i}{\lambda} U_0 L_2 \frac{e^{-ikb}}{b} \int_0^d t(x) e^{ikpx} dx. \quad (13.6)$$

При наличии  $N$  штрихов

$$U(P) = U_1(P) \frac{1 - e^{ikpdN}}{1 - e^{ikpd}}. \quad (13.7)$$

Возмущение  $U$  определяется произведением  $U_1(P)$  на комплексную функцию, описывающую интерференцию волн от цепочки  $N$  вторичных точечных источников, расположенных на одинаковом расстоянии  $d$  друг от друга.

Переходя в (13.7) к интенсивности, получим

$$I(P) = \frac{1}{2} |U(P)|^2 = I_1(P) \left( \frac{\sin \frac{kpdN}{2}}{\sin \frac{kpd}{2}} \right)^2 = I_1(P) H \left( N, \frac{kpd}{2} \right). \quad (13.8)$$

Здесь

$$I_1(P) = \frac{I_0 L_2^2}{\lambda^2 b^2} \left| \int_0^d t(x) e^{ikpx} dx \right|^2 \quad (13.9)$$

— интенсивность при дифракции на одном штрихе решетки,

$$H \left( N, \frac{kpd}{2} \right) = \left( \frac{\sin \frac{kpdN}{2}}{\sin \frac{kpd}{2}} \right)^2 \quad (13.10)$$

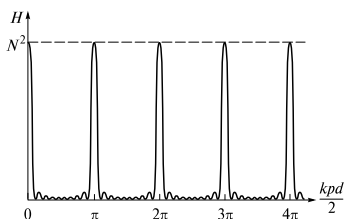


Рис. 13.2

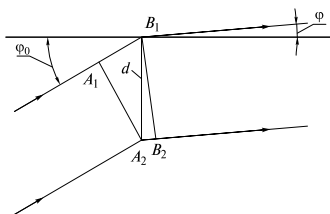


Рис. 13.3

— функция взаимодействия, описывающая интерференцию  $N$  волн, дифрагировавших на всех штрихах решетки. Ее график при  $N = 10$  представлен на рис. 13.2.

Главные максимумы этой функции ( $H_{\max} = N^2$ ) реализуются при

$$\frac{kpd}{2} = m\pi, \quad \text{или} \quad d(\sin \varphi - \sin \varphi_0) = m\lambda, \quad (13.11)$$

где  $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  — порядок дифракции.

Условие (13.11) означает, что разность хода  $A_1B_1 - A_2B_2$  между парой лучей, разнесенных на расстояние  $d$  в плоскости решетки, равна целому числу длин волн (рис. 13.3).

В этом случае волны, дифрагировавшие от разных штрихов, складываются в фазе, и суммарное возмущение возрастает в  $N$  раз, а интенсивность — в  $N^2$  раз.

Минимумы образуются при

$$\frac{kpdN}{2} = n\pi, \quad \text{или} \quad Nd(\sin \varphi - \sin \varphi_0) = n\lambda, \quad (13.12)$$

где  $n = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm(N-1), \pm(N+1), \pm(N+2), \dots$

Между двумя соседними максимумами находятся  $(N-1)$  минимумов. Чем больше число периодов, тем больше минимумов, и тем уже и выше главные максимумы.

Условие (13.12) означает, что разность хода между лучами, разнесенными на расстояние  $Nd$ , равна целому числу длин волн, за исключением  $n = \pm N, \pm 2N, \dots$ , когда появляются главные максимумы. Интерферирующие волны от цепочки источников в направлениях, определяемых из (13.12), гасят друг друга.

**Спектральные характеристики решеток.** Поскольку главные максимумы узкие, при небольшом изменении длины волны можно зафиксировать их смещение. Поэтому решетке широко используются для спектрального анализа. Рассмотрим важнейшие спектральные характеристики решеток.

**Аппаратная функция.** Как отмечалось ранее, аппаратная функция характеризует отклик прибора на монохроматическое возмущение. При спектральном анализе каждой длине волны, в соответствии с (13.11), приписывается угловая (или линейная) координата.

Пусть для спектрального анализа используется  $m$ -й порядок дифракции. При освещении монохроматическим светом с длиной волны  $\lambda_0$  на экране, где фиксируется дифракционная картина, будет «размазанная» полоса, ширина кото-

рой пропорциональна угловой ширине  $m$ -го максимума функции  $H$ . Положение середины этой полосы определяется условием

$$p_m d = d(\sin \varphi_m - \sin \varphi_0) = m \lambda_0. \quad (13.13)$$

Вблизи координаты  $k p_m d/2$  функцию  $H$  можно представить в виде

$$H_m = N^2 \left[ \frac{\sin \frac{N k_0 (p - p_m) d}{2}}{\frac{N k_0 (p - p_m) d}{2}} \frac{\frac{k_0 (p - p_m) d}{2}}{\sin \frac{k_0 (p - p_m) d}{2}} \right]^2 \approx N^2 \text{sinc}^2 \left[ \frac{N k_0 (p - p_m) d}{2} \right], \quad (13.14)$$

где  $k_0 = 2\pi/\lambda_0$ ;  $\text{sinc} \left[ \frac{k_0 (p - p_m) d}{2} \right] \approx 1$ .

Используя (13.11) и (13.13), можно записать

$$H_m = N^2 \text{sinc}^2 \left[ \pi m N \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0} \right]. \quad (13.15)$$

Введем дифракционную аппаратную функцию

$$g_A(\lambda - \lambda_0) = \frac{1}{\Delta \lambda_A} \text{sinc}^2 \left( \pi \frac{\lambda - \lambda_0}{\Delta \lambda_A} \right). \quad (13.16)$$

Здесь

$$\Delta \lambda_A = \frac{\lambda_0}{mN} \quad (13.17)$$

— ширина аппаратной функции. Тогда

$$H_m = N^2 \Delta \lambda_A g_A(\lambda - \lambda_0). \quad (13.18)$$

**Разрешающая способность.** Если спектр анализируемого света состоит из двух спектральных линий одинаковой интенсивности, но с разными длинами волн  $\lambda_{01}$  и  $\lambda_{02}$ , то

$$H_m = N^2 \Delta \lambda_A [g_A(\lambda - \lambda_{01}) + g_A(\lambda - \lambda_{02})]. \quad (13.19)$$

При  $\lambda_{02} - \lambda_{01} = \Delta \lambda_A$  максимум функции  $g_A(\lambda - \lambda_{02})$  совпадает с первым минимумом функции  $g_A(\lambda - \lambda_{01})$ , как это показано на рис. 13.4.

В этом случае «проседание» функции  $H_m$  в середине достигает 20 %. Наличие двух максимумов при таком контрасте вполне уверенно фиксируется как визуально, так и с использованием фотодетекторов. На этом основан *критерий Рэлея*, согласно которому минимальная разность длин волн, которую можно измерить с помощью решетки, равна

$$\Delta \lambda_{\min} = \Delta \lambda_A = \frac{\lambda_0}{mN}. \quad (13.20)$$

Если  $\lambda_{02} - \lambda_{01} \geq \Delta \lambda_{\min}$ , то решетка разделяет линии. В соответствии с определением разрешающая способность (см. также (8.40))

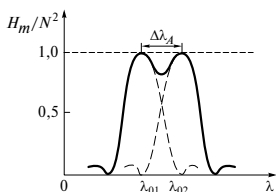


Рис. 13.4

$$R = \frac{\lambda_0}{\Delta\lambda_{\min}} = mN. \quad (13.21)$$

Как и у интерферометра Фабри — Перо (см. (10.26)), разрешающая способность равна произведению порядка  $m$  на число интерферирующих лучей (число периодов).

Нужно отметить условность критерия Рэлея, поскольку в современном эксперименте возможно разрешение значительно более близких спектральных линий, когда провал функции  $H_m$  менее 5 %.

Этот критерий можно сформулировать в общем виде, удобном для оценки разрешающей способности различных спектральных приборов. Пусть в направлении, задаваемом углом  $\varphi$ , для длины волны  $\lambda_1$  формируется дифракционный максимум  $m$ -го порядка:

$$Nd(\sin \varphi - \sin \varphi_0) = Nm\lambda_1, \quad (13.22)$$

а для длины волны  $\lambda_2$  ближайший минимум:

$$Nd(\sin \varphi - \sin \varphi_0) = Nm\lambda_2 + \lambda_2. \quad (13.23)$$

Полагая  $\Delta\lambda_{\min} = \lambda_2 - \lambda_1$ ,  $\lambda_2 \approx \lambda_0$ , получаем для разрешающей силы выражение (13.21).

Таким образом, критерий Рэлея можно сформулировать следующим образом: *изменение разности хода между крайними лучами дифрагировавшей волны при изменении длины волны на величину  $\Delta\lambda_{\min}$  должно быть равно целой длине волны  $\lambda_0$ .*

Если падающий свет характеризуется некоторой спектральной плотностью  $S(\lambda) = I_0 g(\lambda)$  ( $g(\lambda)$  — контур спектральной линии), то вместо (13.19) имеем

$$H_m = N^2 \Delta\lambda_A \int g_A(\lambda - \lambda_0) g(\lambda_0) d\lambda_0 = N^2 \Delta\lambda_A g'(\lambda), \quad (13.24)$$

где

$$g'(\lambda) = \int g_A(\lambda - \lambda_0) g(\lambda_0) d\lambda_0 \quad (13.25)$$

— искаженный контур спектральной линии (см. также (8.42)). Измеряя  $g'(\lambda)$ , можно восстановить истинный контур  $g(\lambda)$ .

**Угловая и линейная дисперсия.** Угловая дисперсия  $D_\varphi$  характеризуется изменением углового положения дифракционного максимума при изменении длины волны. Она получается из (13.11):

$$D_\varphi = \frac{\delta\varphi}{\delta\lambda} = \frac{m}{d \cos \varphi}. \quad (13.26)$$

В спектральных приборах с пространственным разложением спектра дифракционная картина регистрируется в фокальной плоскости собирающей линзы (*камерного объектива*), устанавливаемой позади решетки. Каждой длине волны  $\lambda$  ставится в соответствие линейная координата  $l$ . Изменение этой координаты при изменении длины волны характеризуется *линейной дисперсией*

$$D_l = \frac{\delta l}{\delta \lambda} = D_\varphi f_2, \quad (13.27)$$

где  $f_2$  — фокусное расстояние камерного объектива. Поскольку  $D_\varphi$  и  $D_l$  зависят от  $\varphi$ , зависимость координаты от длины волны  $l(\lambda)$  является нелинейной функцией.

**Область свободной дисперсии.** Дифракционные максимумы, принадлежащие к разным длинам волн, могут перекрываться в некотором  $m$ -м порядке. Если спектр излучения занимает диапазон длин волн  $\lambda_1 \leq \lambda \leq \lambda_2$ , то условие перекрытия запишется в виде

$$d(\sin \varphi - \sin \varphi_0) = (m+1)\lambda_1 = m\lambda_2. \quad (13.28)$$

Здесь  $(m+1)$ -й максимум для  $\lambda_1$  «наезжает» на  $m$ -й максимум для  $\lambda_2$ . Величина

$$\Delta\lambda_{\max} = (\lambda_2 - \lambda_1)_{\max} = \frac{\lambda_1}{m} \approx \frac{\lambda_0}{m} \quad (13.29)$$

называется *областью свободной дисперсии*. Здесь  $\lambda_0$  — средняя длина волны. С этой величиной мы уже встречались при изучении интерферометра Фабри — Перо. На практике максимумы мешающих порядков устраняются либо предварительным сужением ширины спектра (например, светофильтром), либо применением фотодетекторов, нечувствительных к ненужной области спектра.

**Амплитудные дифракционные решетки.** Первые решетки, изготовленные немецким физиком И. Фраунгофером во второй половине XIX в., были выполнены из очень тонкой проволоки, навитой на два параллельных винта. Позднее ученый с помощью делительной машины прочерчивал штрихи на золотой пленке, нанесенной на стеклянную пластинку. При прохождении света эти решетки модулировали амплитуду волны. Если  $d_1$  — ширина прозрачного штриха (щели), то в пределах штриха  $t(x) = 1$  и

$$U_1(P) = \frac{i}{\lambda} U_0 L_2 \frac{e^{-ikb}}{b} \int_0^{d_1} 1 \cdot e^{ikpx} dx = \frac{i}{\lambda} U_0 L_2 \frac{e^{-ikb}}{b} d_1 e^{\frac{ikpd_1}{2}} \operatorname{sinc}\left(\frac{kpd_1}{2}\right). \quad (13.30)$$

Тогда

$$I_1(P) = \frac{I_0(L_2 d_1)^2}{\lambda^2 b^2} \operatorname{sinc}^2\left(\frac{kpd_1}{2}\right) = I(0) \operatorname{sinc}^2\left(\frac{kpd_1}{2}\right). \quad (13.31)$$

С учетом (13.31) на рис. 13.5 показано распределение интенсивности (13.8) для решетки с шириной штриха  $d_1 = d/5$  и числом штрихов  $N = 10$ .

В дифракционной картине появились *главные минимумы*, определяемые из условия

$$\frac{kpd_1}{2} = q\pi, \text{ или } d_1(\sin \varphi - \sin \varphi_0) = q\lambda, \quad (13.32)$$

где  $q = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$

В этих направлениях разность хода между крайними лучами в пределах одной щели равна целому числу длин волн, поэтому все волны, идущие от одной щели, гасят друг друга.

Наиболее яркие дифракционные максимумы соответствуют низшим порядкам. Это позволяет наблюдать дифракционную картину даже от источника белого света. На рис. 13.1 цв. вкл. показана дифракционная картина от источника белого света. В центре расположена белая (ахроматическая) полоса, поскольку положение нулевого максимума для всех длин волн одинаковое.

**Фазовые решетки.** Пользуясь алмазным резцом, Фраунгофер наносил параллельные штрихи и на поверхность стекла. При прохождении света такая решетка уже модулировала преимущественно фазу волны.

Значительных успехов в изготовлении решеток достиг американский физик Г. Роуланд. С помощью гравировальной машины он изготовил решетку шири-

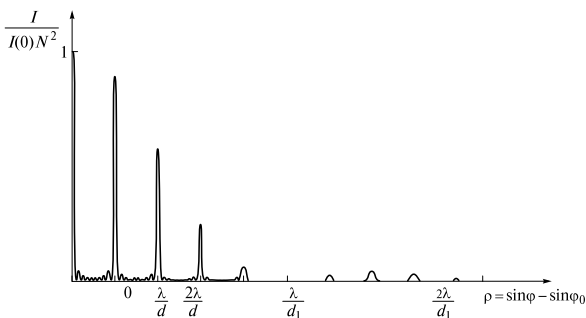


Рис. 13.5

ной  $L_2 = 15$  см, на которой прорезал штрихи длиной  $L_1 = 10$  см с периодичностью  $1/d = 800$  штрих/мм. В 1882 г. он изобрел вогнутую дифракционную решетку, что позволило отказаться от двух линз в спектральных приборах (см. далее).

Если первые решетки гравировались на стекле или отполированном металле, то позднее появились решетки со штрихами, нанесенными на слой напыленного алюминия. Современные отражательные решетки имеют штрихи определенного профиля, позволяющего направить большую часть света в один или два порядка. На рис. 13.6 показан профиль решетки, при отражении от которой максимальное значение  $I_1(P)$  соответствует направлению зеркального отражения  $\varphi = \varphi_0 + 2\alpha$ , для которого порядок интерференции  $m > 1$ .

На рис. 13.2 цв. вкл. представлена фотография дифракции луча аргонового лазера. Луч падает слева направо на поверхность наклоненного CD-диска, представляющего собой по сути отражательную фазовую дифракционную решетку с расстоянием между дорожками в несколько длин световой волны. При дифракции формируется ряд световых пучков, распространяющихся в направлениях главных дифракционных максимумов. При увеличении порядка дифракции (против часовой стрелки) возрастает угол между спектральными компонентами (соответствующими разным продольным модам) лазерного излучения.

Для видимой части спектра нарезают алюминиевые покрытия на полированной стеклянной поверхности с периодичностью 600 или 1 200 штрих/мм. Для УФ-диапазона используют дюралюминий, медь, нержавеющую сталь и др. Для ИК-диапазона, где длина волны большая,  $1/d = 1 - 10$  штрих/мм. Решетки, работающие в один-два порядка, называются *эшелеттами*.

Разрешающая сила решетки достигает величины  $R \sim 10^5$ . Еще большую силу имеют *эшели*. Эшели подобны изображенной на рис. 13.6 решетке, однако свет падает под большими углами  $\varphi_0$  нормально к узкой ступеньке. Этим достигаются высокие порядки дифракции ( $m \sim 10^3$ ). Эшель с длиной  $L_2 = 25$  см и  $d = 0,25$  мм имеет  $N = 10^3$  штрихов и  $R = 10^6$ . Эшели используются в различных

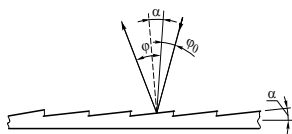


Рис. 13.6



диапазонах для исследования сверхтонкой структуры спектров, где требуется высокая разрешающая способность.

Любопытно отметить, что процесс изготовления решеток занимает много времени. Например, для типичной решетки с  $L_1 = 10$  см,  $L_2 = 15$  см при  $1/d = 10^3$  штрих/мм, резец должен нарезать  $N = 1,5 \cdot 10^5$  штрихов, проходя при этом путь  $L_1 N = 15$  км! Если время нарезания одного штриха принять равным 5 с, то процедура займет 9 сут!

Обычно при нарезке штрихи слегка различаются по профилю и не строго параллельны. Это приводит к затуманиванию (снижению контраста) картины. Если же имеется систематическая ошибка в периоде следования штрихов, то в картине появляются дополнительные линии, называемые духами. Эти линии иногда трудно отличить от настоящих спектральных линий.

**Дифракция на ультразвуковой волне.** Пусть плоская волна распространяется в прозрачной упругой среде, где в поперечном направлении возбуждена предварительно стоячая ультразвуковая волна с возмущением плотности  $\delta\rho$  в виде

$$\delta\rho(x, t) = (\delta\rho)_0 \sin \frac{2\pi}{\Lambda} x \sin \Omega t. \quad (13.33)$$

Здесь длина волны  $\Lambda$  и частота  $\Omega$  акустической волны связаны через скорость звука  $v_{\text{зв}}$ :  $\Lambda = 2\pi v_{\text{зв}}/\Omega = v_{\text{зв}}/f_{\text{зв}}$ ,  $f_{\text{зв}}$  — частота ультразвука.

На рис. 13.7 световая волна падает на упругую среду толщиной  $l$ . К одному из ее торцов прикреплена пьезоэлектрическая пластинка, соединенная с генератором ультразвуковых частот  $f_{\text{зв}}$ . Для наглядности затенены области в пластинке вблизи пучностей возмущения плотности, которое изображено справа от пластинки.

Возмущение плотности приводит к периодическому изменению показателя преломления  $n = n_0 + \delta n$ , где

$$\delta n = \frac{dn}{d\rho} \delta\rho; \quad (13.34)$$

$n_0$  — показатель преломления упругой среды.

Каждый фрагмент падающей волны, проходя между плоскостями, стремится дифрагировать, при этом дифракционная длина будет  $\sim \Lambda^2/\lambda$ . Если толщина среды  $l < \Lambda^2/\lambda$ , то дифракция незначительна. У прошедшей волны появляется лишь модуляция фазы  $\Phi = \Phi_0 + \delta\Phi = k_0 l (n_0 + \delta n)$ , при этом

$$\delta\Phi = k_0 l \delta n = (\delta\Phi)_0 \sin \frac{2\pi}{\Lambda} x \sin \Omega t. \quad (13.35)$$

Таким образом, упругая среда выполняет роль тонкой фазовой решетки с периодом  $d = \Lambda$ . При нормальном падении плоской волны  $U(x, y) = U_0 = \text{const}$  волновое возмущение после прохождения среды будет равно

$$U_{\Sigma}(x, y) = U_0 e^{-i(\delta\Phi + \Phi_0)}. \quad (13.36)$$

Если  $(\delta\Phi)_0 < 1$ , то

$$U_{\Sigma}(x, y) = U_0 e^{-i\Phi_0} [1 - i\delta\Phi]. \quad (13.37)$$

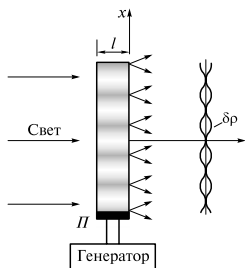


Рис. 13.7

Подставляя (13.37) с учетом (13.35) в (12.34), получаем

$$U_z(k_x) = U_0 e^{-i\Phi} \left\{ \delta(k_x) + \frac{(\delta\Phi)_0}{2} \sin 2\pi f_{3B} t \left[ \delta\left(k_x - \frac{2\pi}{\Lambda}\right) - \delta\left(k_x + \frac{2\pi}{\Lambda}\right) \right] \right\}, \quad (13.38)$$

где  $\delta$  — дельта-функция Дирака.

Таким образом, угловой спектр содержит три пространственные частоты:  $k_x = 0, \frac{2\pi}{\Lambda}, -\frac{2\pi}{\Lambda}$ . Это означает, что волна будет дифрагировать по трем направлениям. В дальнейшем поле помимо центрального пятна будет лишь два дифракционных максимума при

$$k_x = \frac{2\pi}{\Lambda} \sin \varphi = \pm \frac{2\pi}{\Lambda}, \quad \text{или} \quad \sin \varphi = \pm \frac{\lambda}{\Lambda}. \quad (13.39)$$

Следует подчеркнуть, что в отличие от статической решетки, наведенная акустической волной решетка показателя преломления является *динамической*. Она «дышит» во времени с частотой  $2f_{3B}$ . Поэтому и интенсивность в дифракционных максимумах, определяемых условием (13.39), также будет изменяться с частотой  $2f_{3B}$ .

Если средой является кварц, то  $v_{3B} = 5 \cdot 10^3$  м/с. При частоте ультразвука  $f_{3B} = 100$  МГц  $\Lambda = 50$  мкм. Тогда при  $\lambda = 0,5$  мкм углы дифракции  $\sin \varphi \approx \varphi = \pm 10^{-2} \approx \pm 0,5^\circ$ . Допустимая толщина среды  $l < \Lambda^2/\lambda = 5$  мм.

По мере увеличения интенсивности акустической волны появляются максимумы более высоких порядков (хотя и менее яркие), направление на которые определяется условием

$$\sin \varphi = m \frac{\lambda}{\Lambda}, \quad (13.40)$$

где  $m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$  Как показывает опыт, в порядках с  $m = \pm 2$  интенсивность будет изменяться с частотой  $4f_{3B}$ , в порядках с  $m = \pm 3$  — с частотой  $6f_{3B}$  и т.д. Это свидетельствует о том, что дифракционные максимумы с  $m = \pm 2$  образуются при повторной дифракции волны, интенсивность которой уже внутри среды вследствие «первичной» дифракции изменяется с частотой  $2f_{3B}$ , и т.д. По существу, происходит *каскадный процесс* формирования дифрагированных волн различных порядков. Поэтому чем выше интенсивность звуковой волны, тем больше появляется дифракционных максимумов.

На рис. 13.3 цв. вкл. показана дифракционная картина Шеффера-Бергмана, возникающая при распространении пучка гелий-неонового лазера через кристалл парателлурита ( $\text{TeO}_2$ ), в котором возбуждена стоячая акустическая волна. В центре — нулевой порядок дифракции. Яркие точки справа и слева — максимумы  $+1$ -го и  $-1$ -го порядков. Розетка в виде четырехлопастного пропеллера представляет собой семейство пар вторичных дифракционных максимумов, возникающих из-за многократных отражений акустических волн от поверхности кристалла в различных направлениях.

Интересно отметить, что длина отрезка, связывающего дифракционный максимум нулевого порядка и вторичный максимум, обратно пропорциональна длине звуковой волны и, следовательно, скорости звука вдоль направления отрезка (см. формулу (13.39)). Видно, что в парателлурите имеются два взаимно перпендикулярных направления (вдоль лепестков розетки), в которых скорость звука минимальна и составляет величину порядка 600 м/с.

При увеличении мощности акустической волны, как и следовало ожидать, появляются максимумы более высоких порядков.

Таким образом, синусоидальная фазовая решетка формирует дифракционную картину, состоящую из цепочки дифракционных максимумов в направлениях (13.40). Синусоидальная решетка, у которой  $t(x) = \sin \frac{2\pi}{\Lambda} x$ , как это видно из (13.38), формирует лишь два дифракционных максимума.

Рассмотренное приближение при  $l < \Lambda^2/\lambda$  соответствует *дифракции Рамана-Ната*. Если  $l > \Lambda^2/\lambda$ , то необходимо учитывать искривление фазового фронта внутри среды и появление амплитудной модуляции. В этом случае говорят о *дифракции Брэгга*.

Переход от дифракции Рамана-Ната к дифракции Брэгга можно осуществить, плавно увеличивая частоту  $f_{\text{зв}}$  звука (уменьшая  $\Lambda$ ). По мере роста звуковой частоты дифракционные максимумы разбегаются, при этом постепенно ослабевают вначале максимумы высоких, а затем и более низких порядков. При  $l \gg \Lambda^2/\lambda$  останется максимум нулевого порядка, интенсивность которого не меняется во времени. Это происходит потому, что при  $\Lambda \ll \lambda$  среда становится практически оптически однородной.

Рассмотрим теперь дифракцию света на бегущей акустической волне. Такой режим можно осуществить, если, например, торец кристалла, удаленный от пьезопластинки, сделать скошенным. Это позволяет направить в сторону отраженную от торца волну (рис. 13.8).

При дифракции Рамана-Ната также возникнет семейство дифракционных максимумов, положение которых определяется условием (13.40). Из-за эффекта Доплера, возникающего при дифракции света на движущейся звуковой волне, и каскадного механизма образования дифракционных порядков, частота световой волны в максимумах будет равна  $\nu_m = \nu + m f_{\text{зв}}$ . В максимумах, для которых  $m > 0$ , частота  $\nu_m$  больше частоты падающей волны, а в максимумах ( $m < 0$ ) — меньше.

Это легко понять с помощью принципа суперпозиции. Поле световой волны при дифракции на стоячей волне является суперпозицией полей двух дифрагировавших световых волн на бегущих во встречных направлениях звуковых волнах. При наложении двух дифрагировавших волн со смещенными частотами дифракционные максимумы совпадут, а интенсивность в каждом максимуме будет промодулирована с частотой биений, равной  $2m f_{\text{зв}}$ .

При увеличении частоты звука будут последовательно ослабляться максимумы, начиная с высших порядков. При дифракции Брэгга практически останутся лишь два максимума  $\pm 1$  порядков и ослабленный максимум нулевого порядка.

Это обстоятельство используется в брэгговских акустооптических модуляторах света. Если, например, кристалл, в котором возбуждена бегущая звуковая волна, поместить внутрь резонатора лазера, то добротность резонатора будет низкой и генерация невозможна. При быстром выключении генератора звуковых волн кристалл становится оптически однородным и добротность резко возрастает. Такие модуляторы нашли широкое применение в импульсных лазерах с модулируемой добротностью.

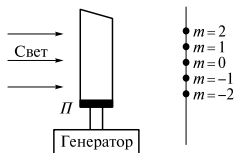


Рис. 13.8

При наклонном падении света на кристалл с бегущей в нем акустической волной нарушается симметрия задачи. При дифракции Брэгга интенсивность в максимумах  $\pm 1$  порядков будет существенно разной. Практически можно считать, что останется один дифракционный максимум, направление на который задается условием Брэгга. Более подробно речь об этом пойдет далее при изучении рассеяния света на бегущих акустических волнах.

**Дифракция рентгеновских волн.** В 1912 г. немецкий физик М.Лауэ предложил использовать кристаллы как трехмерные дифракционные решетки для рентгеновских лучей, длина волн которых меньше периода кристаллической решетки. Вскоре его теория получила экспериментальное подтверждение в опытах соотечественников В.Фридриха и П.Книппига. Это открытие привело к созданию метода исследования кристаллической структуры кристаллов — рентгеноструктурного анализа. Кроме того, при известной структуре кристаллической решетки можно определять длину волны рентгеновского излучения. За это открытие М.Лауэ в 1914 г. удостоен Нобелевской премии.

На рис. 13.4 цв. вкл. схематично показана дифракция рентгеновского пучка, излучаемого рентгеновской трубкой, в кристалле. Для создания направленного пучка применяется свинцовый экран с небольшим отверстием. Дифракционная картина, формируемая при распространении в кристалле параллельного рентгеновского пучка, изображена рис. 13.9.

Она представляет собой семейство точечных дифракционных максимумов и называется *лауэграммой*. Происхождение лауэграммы можно объяснить, если принять во внимание интерференцию волн, переизлучаемых атомами решетки. Атомы в этом случае являются реальными вторичными источниками рентгеновских волн.

Пусть рентгеновский луч падает на кристаллическую структуру (рис. 13.10).

Ее атомы поглощают энергию падающей волны, а затем переизлучают сферические волны. В кристалле можно определить кристаллографические плоскости  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$  таким образом, чтобы волны, испущенные двумя атомами, находящимися на разных плоскостях, имели разность хода, равную целому числу длин волн.

Как следует из (9.11), разность хода равна

$$\Delta = 2d \cos \varphi = m\lambda, \quad (13.41)$$

поскольку  $n = 1$ ,  $\psi = \varphi$ , а набег фаз отсутствует. Условие (13.41) называют *условием Брэгга*.

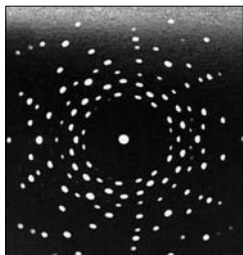


Рис. 13.9

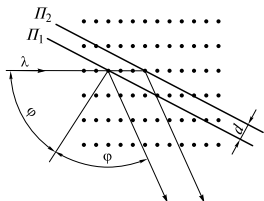


Рис. 13.10

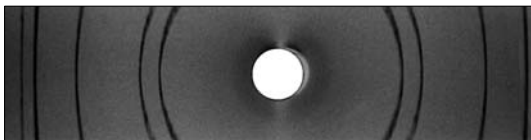


Рис. 13.11

Дифракционный максимум  $m$ -го порядка формируется интерферирующими волнами, излучаемыми многими атомами, принадлежащими семейству плоскостей, параллельных двум выделенным. Для этого необходимо, чтобы расстояние  $d$  между соседними плоскостями и наклон плоскостей удовлетворяли условию Брэгга. В монокристалле таких семейств, удовлетворяющих условию (13.41), может быть достаточно много, поэтому лауэграмма содержит много дифракционных максимумов.

При дифракции рентгеновских лучей в поликристалле дифракционная картина называется *дебаеграммой* в честь немецкого физика и химика П. Дебая, разработавшего метод исследования поликристаллических материалов с помощью рентгеновских лучей. Дебаеграмма получается в результате дифракции на маленьких монокристаллах, повернутых на разные углы относительно направления падающего луча.

На рис. 13.11 представлена дебаеграмма, полученная при дифракции в порошке титана, нанесенного тонким слоем на подложку.

Вследствие хаотичной ориентации мельчайших монокристаллов титана дифракционная картина представляет собой семейство дуг, являющихся частями концентрических окружностей.

**Нестационарная дифракция.** До сих пор мы рассматривали дифракцию монохроматических волн. Между тем, в современных экспериментах используется импульсное излучение, спектр которого тем шире, чем меньше длительность импульса. При дифракции такого импульса дифракционная картина будет меняться во времени, поэтому дифракция называется нестационарной.

Для описания нестационарной дифракции функцию Грина в (12.4) выберем такой, чтобы  $G_1|_z = 0$ . Тогда под интегралом исчезает слагаемое, содержащее  $\frac{\partial U}{\partial n}$ . Вместо (12.6) запишем функцию  $G_1$  в виде

$$G_1 = \frac{e^{-ik\rho}}{\rho} - \frac{e^{-ik\rho^*}}{\rho^*}. \quad (13.42)$$

Здесь  $\rho = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ ,  $\rho^* = |\mathbf{r}^* - \mathbf{r}'|$ ; радиус-вектор  $\mathbf{r}^*$  проведем в точку  $P^*$ , являющуюся зеркальным отражением точки  $P$  в плоскости  $Oxy$ :  $\mathbf{r}^* = \{x, y, -z\}$ . Следовательно,

$$\begin{aligned} \frac{\partial G_1}{\partial n} &= \frac{d}{d\rho} \left( \frac{e^{-ik\rho}}{\rho} \right) \frac{\partial \rho}{\partial z'} \Big|_{z'=0} - \frac{d}{d\rho^*} \left( \frac{e^{-ik\rho^*}}{\rho^*} \right) \frac{\partial \rho^*}{\partial z'} \Big|_{z'=0} = \\ &= \left( ik + \frac{1}{\rho} \right) \frac{e^{-ik\rho}}{\rho} \frac{2(z - z')}{2\rho} \Big|_{z'=0} - \left( ik + \frac{1}{\rho^*} \right) \frac{e^{-ik\rho^*}}{\rho^*} \frac{2(z - z')}{2\rho^*} \Big|_{z'=0} = 2ik\rho \frac{e^{-ik\rho}}{\rho} \frac{z}{\rho}. \end{aligned} \quad (13.43)$$

Здесь при  $z' = 0$   $\rho^* = \rho$ . Учтено также, что  $k \gg 1/\rho$ ,  $1/\rho^*$ . Формула (12.4) примет вид:

$$U(P) = \frac{ik}{2\pi} \iint_{\Sigma} U(x, y) \frac{z}{\rho} \frac{e^{-ik\rho}}{\rho} d\sigma. \quad (13.44)$$

Функция  $U(x, y)$ , по существу, может рассматриваться как фурье-амплитуда волны частоты  $\omega = kc$ :

$$U(x, y, t) = U(x, y, \omega) e^{i\omega t}, \quad (13.45)$$

где  $U(x, y, \omega) = U(x, y)$ .

Умножим интеграл (13.44) на  $e^{i\omega t}$  и проинтегрируем по всем частотам, присутствующим в спектре импульса. Тогда поле дифрагированной волны

$$\begin{aligned} U(P, t) &= \iint_{\Sigma} \int_{\omega} \frac{i\omega}{2\pi c} U(x, y, \omega) \frac{e^{i\omega(t-\rho/c)}}{\rho} \frac{z}{\rho} d\sigma d\omega = \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \iint_{\Sigma} \int_{\omega} \frac{1}{2\pi c} U(x, y, \omega) \frac{e^{i\omega(t-\rho/c)}}{\rho} \frac{z}{\rho} d\sigma d\omega. \end{aligned} \quad (13.46)$$

Проводя интегрирование по частоте, окончательно получаем

$$U(P, t) = \iint_{\Sigma} \frac{\partial}{\partial t} U(x, y, t - \rho/c) \frac{z}{\rho^2} d\sigma. \quad (13.47)$$

Этот интеграл является обобщенным интегралом Френеля — Кирхгофа (12.12) и применим для произвольного электромагнитного возмущения, претерпевающего дифракцию на плоском экране.

**Дифракция импульса на круглом отверстии.** Пусть световой импульс длительностью  $\tau_0$  падает нормально на экран с круглым отверстием радиуса  $r_0$ . Если поле в импульсе не зависит от поперечных координат  $x$  и  $y$ , то  $U(x, y, t) = U_0(t)$ , и для точки  $P$ , находящейся на оси  $Oz$ , интеграл (13.47) легко вычисляется. Если учесть, что  $d\sigma = 2\pi r dr$ , то

$$U(z, t) = \frac{1}{2\pi c} \int_z^{\sqrt{z^2 + r_0^2}} \frac{\partial}{\partial t} U_0(t - \rho/c) \frac{z}{\rho^2} 2\pi \rho d\rho. \quad (13.48)$$

Полагая  $\frac{z}{\rho} \approx 1$  и замечая, что  $\frac{\partial}{\partial t} = -c \frac{\partial}{\partial \rho}$ , получаем

$$U(z, t) = - \int_z^{\sqrt{z^2 + r_0^2}} \frac{\partial}{\partial \rho} U_0(t - \rho/c) d\rho = U_0(t - z/c) - U_0(t - \sqrt{z^2 + r_0^2}/c). \quad (13.49)$$

Таким образом, на оси появляются два разнополярных импульса, тождественных падающему, однако разделенных промежутком времени, величина которого при  $z \gg r_0$

$$\Delta t = \frac{\sqrt{z^2 + r_0^2}}{c} - \frac{z}{c} \approx \frac{r_0^2}{2zc} \quad (13.50)$$

уменьшается с пройденным импульсом расстоянием.

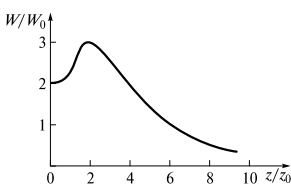


Рис. 13.12

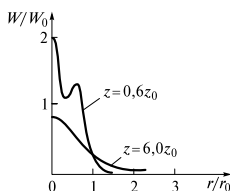


Рис. 13.13

Если  $\Delta t > \tau_0$ , то импульсы не перекрываются в ближнем поле, где  $z < z_0 = \frac{r_0^2}{2c\tau_0}$ . Величина  $z_0$  является аналогом дифракционной длины, в которой  $c\tau_0 = l_0$  — длина импульса в пространстве. Плотность энергии, переносимой вблизи оси  $Oz$ , вдвое превышает плотность энергии падающего импульса.

По мере увеличения  $z$  импульсы начинают перекрываться, и при  $z \rightarrow \infty$  импульсы «наезжают» друг на друга, а  $U(z, t) \rightarrow 0$ .

Если падающий импульс состоит из одного периода колебаний

$$U_0(t) = \begin{cases} U_0 \sin \frac{2\pi t}{\tau_0}, & 0 \leq t \leq \tau_0; \\ 0, & t < 0 \text{ и } t > \tau_0, \end{cases} \quad (13.51)$$

то нормированная плотность энергии

$$\frac{W(z)}{W_0} = \frac{\int U^2(z, t) dt}{\int U_0^2(t) dt} \quad (13.52)$$

имеет вид, изображенный на рис. 13.12.

Зависимость плотности энергии от поперечной координаты  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  изображена на рис. 13.13.

Если в ближней зоне формируется кольцо, то при  $z \rightarrow z_0$  оно исчезает. При  $z \gg z_0$   $W(r)$  имеет форму, близкую к гауссовой, причем ширина этого распределения (по уровню  $e^{-1}$ ) увеличивается с пройденным расстоянием по закону

$$r_{0z} = r_0 \sqrt{1 + \left( \frac{z}{5z_0} \right)^2}. \quad (13.53)$$

Эффективная длина дифракционного расплывания (по аналогии с (12.66)) будет равна  $5z_0$ . С уменьшением длительности импульса эта длина увеличивается.

## ЛЕКЦИЯ 14

**Спектральные приборы с пространственным разложением спектра.** Спектральные приборы предназначены для выделения узкой спектральной области излучения. Наиболее распространены спектральные приборы с пространственным разделением волн с разной длиной волны. Основной деталью в них является *диспергирующий элемент* (решетка, призма и другие устройства, обладающие угловой дисперсией).

На рис. 14.1 показана схема такого прибора.

Параллельный световой пучок, падающий на дифракционную решетку  $ДР$  или другой диспергирующий элемент, формируется *коллиматором*. Он представляет собой освещаемую внешним источником щель  $S$  и коллиматорный объектив  $O_1$  с фокусным расстоянием  $f_1$ . Щель расположена в фокальной плоскости объектива.

Волны с различными длинами  $\lambda$ , дифрагируя под разными углами  $\varphi$ , проходят через камерный объектив  $O_2$  и фокусируются в плоскости  $\Pi$ , наклоненной под небольшим углом  $\epsilon$  к плоскости, перпендикулярной оптической оси объектива  $O_2$ . Наклон связан с зависимостью фокусного расстояния  $f_2$  камерного объектива от длины волны.

Конструкция прибора такова, что в плоскости  $\Pi$  формируется картина, соответствующая какому-либо дифракционному порядку  $m$ . Каждой длине волны  $\lambda$  приписывается координата  $l$ , отсчитываемая в этой плоскости. Функция  $l(\lambda)$  определяется конструкцией прибора.

Если бы щель была бесконечно узкой, то для всех  $\lambda$  угол падения был бы равен  $\varphi_0$ , а в плоскости  $\Pi$  наблюдались бы дифракционные полосы  $m$ -го порядка, спектральная ширина которых, согласно (13.7), равнялась  $\Delta\lambda_A = \frac{\lambda_0}{mN}$ . Однако интенсивность в этих полосах будет исчезающе малой, что, безусловно, является крайне негативным фактором.

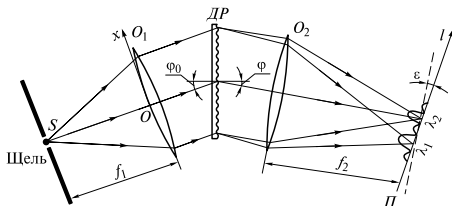


Рис. 14.1



При увеличении ширины  $S$  щели интенсивность будет увеличиваться, а полосы — расширяться. Уширение полос зависит от пространственной когерентности поля на щели.

**Некогерентное освещение.** При таком освещении радиус пространственной когерентности поля на щели значительно меньше ее ширины  $S$ . Это означает, что на решетку падают некогерентные плоские волны под разными углами, порождаемые каждым фрагментом щели. Диапазон углов падения ограничен интервалом  $\Delta\varphi_0 = S/f_1$ .

Для фиксированной длины волны  $\lambda_0$  это приведет к уширению аппаратной функции (13.16). Рассчитаем уширенную аппаратную функцию. Для этого сначала в (13.16) заменим  $\lambda$  координатой  $l$ , используя (13.27):

$$D_l \delta\lambda = \delta l \quad \text{и} \quad D_l(\lambda - \lambda_0) = (l - l_0). \quad (14.1)$$

Из равенства

$$g_A(\lambda - \lambda_0)\delta\lambda = g_A(l - l_0)\delta l \quad (14.2)$$

с учетом (14.1) получаем

$$g_A(l - l_0) = D_l^{-1} g_A(\lambda - \lambda_0) = \frac{1}{\Delta l_A} \operatorname{sinc}^2 \left( \pi \frac{l - l_0}{\Delta l_A} \right), \quad (14.3)$$

где

$$\Delta l_A = D_l \Delta \lambda_A. \quad (14.4)$$

Поскольку  $D_l = D_\varphi f_2 = \frac{mf_2}{d \cos \varphi}$ ,  $\Delta \lambda_A = \frac{\lambda_0}{mN}$ , то

$$\Delta l_A = \frac{\lambda_0 f_2}{Nd \cos \varphi} \approx \frac{\lambda_0 f_2}{Nd}. \quad (14.5)$$

Здесь  $\cos \varphi \approx 1$ , так как угол  $\varphi$  мал.

Дифракционная аппаратная функция (14.3) соответствует фиксированному углу падения  $\varphi_0$ . При изменении этого угла на величину  $\Delta\varphi_0 = S/f_1$  настолько же изменится и угол  $\varphi$  в направлении дифракционного максимума ( $\Delta\varphi_0 = \Delta\varphi$ ). Следовательно, координата  $l_0$  сместится вдоль  $l$  на величину

$$S' = \Delta\varphi f_2 = \Delta\varphi_0 f_2 = S \frac{f_2}{f_1}. \quad (14.6)$$

Величина  $S'$  есть ширина изображения щели в плоскости наблюдения.

Введем *нормальную ширину*  $S_n$  щели. Она определяется из условия  $S' = \Delta l_A$ :

$$S_n \frac{f_2}{f_1} = \frac{f_2 \lambda_0}{Nd}, \quad \text{или} \quad S_n = \frac{f_1 \lambda_0}{Nd}. \quad (14.7)$$

При произвольной ширине  $S$  аппаратная функция  $g_S(l - l_0)$  будет определяться суммой функций (14.3), поскольку при некогерентном сложении волн суммируются их интенсивности. В этой сумме (интеграле) изменяется координата  $l_0$  в пределах

$$l_0 - \frac{S'}{2} \leq l_0 \leq l_0 + \frac{S'}{2}.$$

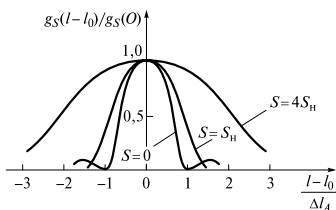


Рис. 14.2

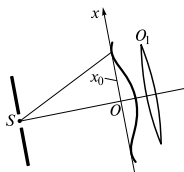


Рис. 14.3

На рис. 14.2 изображены нормированные аппаратные функции при разных значениях ширины щели.

При  $0 < S < S_H$  ширина изображения щели  $0 < S' < \Delta l_A$ , поэтому при изменении  $S$  ширина аппаратной функции изменяется незначительно. Если ввести ширину  $\Delta l_{1/2}$  на уровне  $1/2$ , то при  $S = 0$   $\Delta l_{1/2} = 0,86\Delta l_A$ , а при  $S = S_H$   $\Delta l_{1/2} = 1,12\Delta l_A$ .

Заметное расширение происходит при  $S > S_H$ , когда  $S' > \Delta l_A$ . Например, при  $S = 4S_H$  ширина  $\Delta l_{1/2} = S' = 4\Delta l_A$ . Увеличение  $S$  приводит к снижению разрешающей способности спектрального прибора. Однако при этом увеличивается интенсивность (или освещенность) картины. Если принять за единицу интенсивность при  $S \rightarrow \infty$ , то при  $S = S_H$  она равна  $0,77$ , а при  $S = 4S_H$  равна  $0,96$ .

Поэтому в эксперименте исходят из компромисса между высокой разрешающей способностью и достаточной освещенностью. На практике  $S = (1,5 - 2,0)S_H$ .

**З а м е ч а н и е.** При нормальной ширине щели радиус пространственной когерентности поля вблизи поверхности объектива  $O_1$ , согласно (9.9), равен

$$x_k = \frac{\lambda_0 f_1}{2S_H} = \frac{\lambda_0 f_1}{2F_1} Nd = \frac{Nd}{2}. \quad (14.8)$$

Следовательно, дифракционная решетка освещается практически пространственно когерентной световой волной.

**Когерентное освещение.** В этом случае вначале происходит дифракция на щели, и у объектива  $O_1$  будет формироваться дифракционная картина Фраунгофера (рис. 14.3).

Полуширина  $x_0$  центральной светлой полосы, как это следует из (13.32), при  $q = 1$ ,  $d_1 = S$ ,  $\varphi_0 = 0$ ,  $\varphi = x_0/f_1$ , равна

$$x_0 = \frac{\lambda_0}{S} f_1. \quad (14.9)$$

С увеличением  $S$  картина сжимается и возрастает световой поток, проходящий через линзу  $O_1$ . При  $S = S_H$   $x_0 = Nd/2$ , а при  $S > S_H$  световой поток близок к максимальному.

Чтобы рассчитать аппаратную функцию  $g_S$ , надо вначале сложить волновые возмущения от разных когерентных плоских волн, падающих на решетку под разными углами, а затем вычислить квадрат модуля этой суммы. Каждое возмущение описывается формулой (13.7).

Аппаратная функция будет иметь вид, показанный на рис. 14.4.

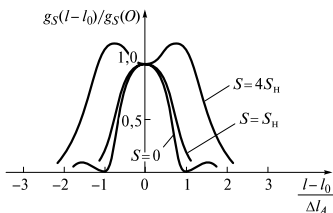


Рис. 14.4

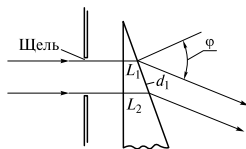


Рис. 14.5

При  $S = S_H$   $\Delta l_{1/2} = 0,87\Delta l_A$ , а при  $S = 4S_H$   $\Delta l_{1/2} = 3,38\Delta l_A$ . Интенсивность будет равна 0,75 и 0,87 соответственно.

Таким образом, при  $S = S_H$  можно добиться практически предельной разрешающей силы  $R = mN$ , имея при этом 75 % от максимальной возможной освещенности.

**Разрешающая способность призмы.** Из опыта известно, что призма разлагает белый свет на его составляющие. На рис. 14.1 цв. вкл. показано прохождение пучка белого света через призму. Выходящие пучки с более короткими длинами  $\lambda$  отклоняются к основанию призмы сильнее. Поэтому призма также широко используется в спектральных приборах в качестве диспергирующего элемента.

Рассчитаем ее разрешающую способность. Пусть плоская монохроматическая волна, пройдя через щель, падает нормально на одну из граней призмы (рис. 14.5).

В дальнем поле, или фокальной плоскости камерного объектива, будет сформирована дифракционная картина от щели шириной  $d_1$ , равной ширине освещенной области на выходной грани призмы.

Положение центрального максимума определяется из условия равенства нулю оптической разности хода между крайними лучами, прошедшими через призму:

$$d_1 \sin \varphi_{\max} - n(\lambda)(L_2 - L_1) = 0. \quad (14.10)$$

Положение ближайшего минимума, согласно (13.32), при  $q = 1$  определится из условия

$$d_1 \sin \varphi_{\min} - n(\lambda)(L_2 - L_1) = \lambda. \quad (14.11)$$

Если на призму падают две волны с длинами  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  ( $\lambda_2 > \lambda_1$ ), то они будут разрешены призмой, если  $\varphi_{\max}$  для  $\lambda_1$  будет равен  $\varphi_{\min}$  для  $\lambda_2$ . Тогда из (14.10) и (14.11) получаем

$$[n(\lambda_1) - n(\lambda_2)](L_2 - L_1) = \lambda_2. \quad (14.12)$$

Разность показателей преломления можно представить в виде

$$n(\lambda_1) - n(\lambda_2) = \left| \frac{dn}{d\lambda} \right| (\lambda_2 - \lambda_1). \quad (14.13)$$

Тогда разрешающая сила призмы

$$R = \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} = (L_2 - L_1) \left| \frac{dn}{d\lambda} \right|. \quad (14.14)$$

Чтобы получить максимальную разрешающую силу, надо призму полностью заполнить светом. Тогда  $L_2 - L_1 = L$ , где  $L$  — длина основания призмы.

Зависимость показателя преломления  $n$  от длины волны  $\lambda$  для некоторых прозрачных материалов в видимой области показана на рис. 14.1 цв. вкл. Если

положить  $\left| \frac{dn}{d\lambda} \right| \sim 10^3 \text{ см}^{-1}$ , а  $L = 5 \text{ см}$ , то  $R \sim 5 \cdot 10^3$ . Таким образом, разрешающая сила призмы на несколько порядков меньше разрешающей силы дифракционной решетки.

**З а м е ч а н и е.** При заполнении призмы светом величина  $d_1$  достигает нескольких сантиметров, поэтому дифракционная картина настолько сжата, что становится неразличимой. Наблюдается лишь центральный максимум нулевого порядка.

Обычно в эксперименте призма освещается пучком света, формируемым коллиматором. Из-за конечной ширины его щели на призму падают плоские волны под разными углами. Поэтому ширина дифракционного максимума может быть намного больше его дифракционной ширины. При освещении пучком белого света дифракционная картина представляет собой множество примыкающих друг к другу цветных полос (цветной спектр).

**Типы спектральных приборов.** Спектральные приборы можно разделить на несколько типов:

- *спектроскопы*, которые используются для визуального наблюдения спектра с помощью окуляра, устанавливаемого за фокальной плоскостью камерного объектива. Примером такого прибора является стилоскоп, предназначенный для быстрого анализа марки стали и других сплавов. Анализируя визуально положение спектральных линий и сравнивая их яркость, можно сделать заключение о наличии присадок (Mn, Ni, C и др.) и их относительном количестве и тем самым определить марку стали или сплавов;

- *спектрографы*, в фокальной плоскости которых помещается фотопластинка. Спектр фотографируется и затем обрабатывается. Положение полос и их почернение на пластинке дают возможность рассчитать длину волны и интенсивность спектральных линий. Спектрографы позволяют дать заключение о количественном составе исследуемого вещества;

- *монохроматоры и спектрометры*. Эти приборы получили широкое распространение, поэтому несколько подробнее остановимся на их устройстве.

Монохроматоры предназначены для выделения узкого спектрального диапазона. Для этого в фокальной плоскости камерного объектива устанавливается неподвижная щель. Объектив и щель формируют выходной коллиматор.

Диспергирующий элемент может поворачиваться. При повороте изменяется угол падения  $\varphi_0$  и спектр перемещается через щель выходного коллиматора. Если поворачивается, например, решетка, то из условия (13.13) можно рассчитать  $\lambda(\varphi_0)$  и по углу поворота определить длину волны излучения на выходной щели. Такую зависимость можно рассчитать и при использовании других диспергирующих элементов.

Выходной коллиматор может иметь несколько щелей. Тогда прибор называется *полихроматором*. Если у выходной щели установлен фотодетектор, то монохроматор становится спектрометром. В этом случае можно измерять как длины волн, так и интенсивность спектральных линий.

Некоторые спектрометры имеют встроенный источник света с известным спектром. Помещая после диспергирующего элемента различные вещества, можно исследовать спектры их поглощения. Такой прибор называется *спектрофотометром*.

**Оптические приборы, формирующие изображение.** Основными элементами в таких приборах являются линзы (собирающие и рассеивающие) и зеркала (вогнутые и выпуклые).

При падении плоской волны на линзу в ее фокальной плоскости формируется дифракционная картина Эйри. Угловой размер центрального пятна (диска Эйри) определяется формулой (12.48)

$$\vartheta_0 = \frac{0,61\lambda}{r_0}.$$

Аналогичная картина будет и в фокальной плоскости сферического вогнутого зеркала радиуса  $r_0$ . Напомним, что его фокусное расстояние  $f = R/2$  ( $R$  — радиус кривизны зеркала).

Дифракция позволяет сфокусировать параллельный пучок лишь в пятно конечных размеров, при этом минимальный размер пятна практически равен длине волны. Это обстоятельно накладывает ограничение на предельные возможности оптических приборов. Под этим углом зрения рассмотрим два важнейших прибора: телескоп и микроскоп.

**Телескоп.** Первые телескопы состояли из двух линз: объектива и окуляра. Ход лучей от двух удаленных объектов 1 и 2 через объектив показан на рис. 14.6. В его фокальной плоскости формируются две картины Эйри, которые перекрываются.

Для того чтобы разделить (разрешить) два объекта (например, две удаленные звезды), необходимо, чтобы угол  $\vartheta$  удовлетворял условию

$$\vartheta \geq \vartheta_0 = \frac{0,61\lambda}{r_0}. \quad (14.15)$$

Окуляр телескопа не вносит существенных дифракционных искажений. *Разрешающей способностью телескопа* называется величина

$$R = \frac{1}{\vartheta_0} = \frac{r_0}{0,61\lambda}. \quad (14.16)$$

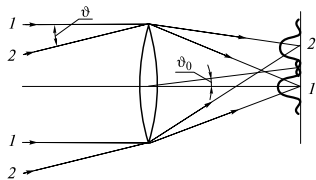


Рис. 14.6

Чем больше радиус объектива, тем выше разрешающая сила. На рис. 14.7,  $a$  —  $b$  показаны изображения трех удаленных светящихся объектов при разных радиусах круглых диафрагм, расположенных перед объективом.

Хорошо видно, как при увеличении радиуса диафрагмы постепенно улучшается разрешающая сила объектива.

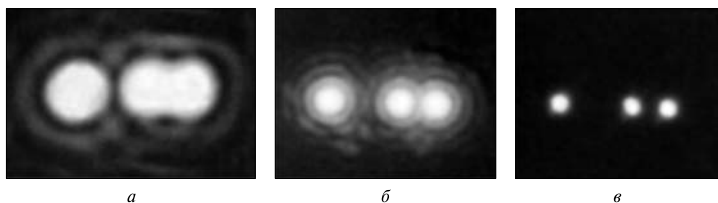


Рис. 14.7

В настоящее время для научных исследований широкое распространение получили телескопы-рефлекторы. Такой телескоп имеет первичное  $Z_1$  и вторичное  $Z_2$  зеркала. Его схема показана на рис. 14.2 цв. вкл. Пучок света, последовательно отражаясь от этих зеркал, с помощью вспомогательного зеркала  $Z_3$  попадает на фотодетектор  $\Phi Д$ .

Для увеличения диаметра первичное зеркало может состоять из множества сегментов. Эти сегменты могут слегка перемещаться, чтобы компенсировать искажения фазового фронта пучка света при его распространении через турбулентную атмосферу. Такое зеркало называется адаптивным.

Турбулентные искажения отсутствуют для телескопов, установленных на космических летательных аппаратах, например для телескопа «Хаббл», имеющего диаметр первичного зеркала 2,4 м.

В 1973 г. в СССР был построен самый крупный в мире телескоп с диаметром вогнутого зеркала 6 м, который был установлен на Северном Кавказе. Недавно введены в действие два телескопа с диаметром зеркала 10 м (Гавайские острова) и несколько 8-метровых телескопов.

На рис. 14.3 цв. вкл. приведена фотография Европейской южной обсерватории, расположенной на вершине горы Параналь (Чили). В обсерватории имеются четыре 8-метровых телескопа и несколько меньших вспомогательных телескопов. При совместной фокусировке телескопов угловое разрешение системы телескопов становится таким же, как и у громадного (виртуального) телескопа с диаметром зеркала около 200 м.

Поскольку из космоса постоянно приходит радиоизлучение, то для его приема и анализа используются радиотелескопы. Первый радиотелескоп-рефлектор с диаметром зеркала 9,5 м был построен в США (1937). После этого в разных странах мира были построены разнообразные телескопы. В частности, в СССР на территории Армении был установлен рефлекторный радиотелескоп РАТАН-600 с отражающей поверхностью в виде кольца диаметром 600 м и шириной 7,5 м для приема радиоизлучения с длинами волн 0,8—30 см.

На рис. 14.4 цв. вкл. представлена фотография радиотелескопа (диаметр зеркала — 300 м) с неподвижной чашей, сооруженного в кратере вулкана в Аресибо на острове Пуэрто-Рико. На высоте 150 м над чашей на стальных тросах укреплена платформа массой 600 т, по рельсам которой может перемещаться управляемая компьютером кабина с излучателями и приемником. Этим осуществляется наведение телескопа на исследуемый объект. Длина волны излучения 10 см.

В режиме приема телескоп используется как локатор при картографировании планет. Из-за неподвижности антенны наблюдения выделенного объекта не могут продолжаться более 2 ч. В режиме радиоизлучения с его помощью выполнены уникальные эксперименты по радиолокации Солнца, Луны и планет Солнечной системы.

**Микроскоп.** Этот оптический прибор служит для наблюдения весьма малых объектов. Микроскоп состоит из объектива и окуляра, однако основное увеличение достигается за счет объектива. Из-за дифракции света на объективе существует ограничение снизу на минимальный размер объектов, которые можно наблюдать в микроскоп. Этот размер зависит от условий освещения объекта.

**Некогерентное освещение.** Ход лучей от двух точечных фрагментов 1 и 2 объекта через объектив микроскопа показан на рис. 14.8.

Объект находится на расстоянии  $a$  вблизи фокальной точки  $F$ , а его увеличенное и перевернутое изображение — на расстоянии  $b \gg f$ . Если объект освещается светом, падающим с разных направлений, то фрагменты 1 и 2 испускают (отражают) световые некогерентные волны. Тогда изображение этих фрагментов будет представлять наложение дифракционных картин Эйри, соответствующих дифракции света на круглом отверстии с радиусом, равным радиусу объектива. При малом расстоянии  $d$  между фрагментами диска Эйри перекроются и фрагменты будут неразличимы.

Рассчитаем минимальное расстояние  $d$ , воспользовавшись критерием Рэлея. Два изображения будут различимы, если расстояние между ними

$$d' = \vartheta_0 b = \frac{0,61\lambda_0}{n'r_0} b, \quad (14.17)$$

где  $\vartheta_0$  — угловой размер диска Эйри;  $n'$  — показатель преломления среды справа от объектива;  $r_0$  — радиус объектива.

Размеры объекта  $d$  и его изображения  $d'$  связаны условием синусов

$$dn \sin \vartheta = d'n' \sin \vartheta'. \quad (14.18)$$

Полагая в (14.17)  $r_0/b \approx \sin \vartheta'$ , с учетом (14.18) получаем

$$d = \frac{0,61\lambda_0}{n \sin \vartheta}. \quad (14.19)$$

Величина  $n \sin \vartheta$  называется *числовой апертурой*. Поскольку ее величина порядка единицы, то  $d \sim \lambda$ . Таким образом, минимальное расстояние между различными фрагментами равно долям длины световой волны. В видимом диапазоне  $d \sim 1$  мкм.

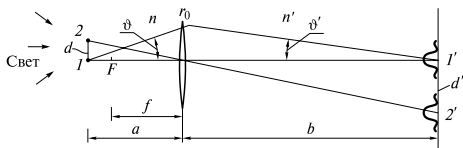


Рис. 14.8

**Когерентное освещение.** Такое освещение можно осуществить, например, пространственно когерентной волной. Иногда объекты бывают самосветящимися, при этом радиус пространственной когерентности волны может быть больше микронных размеров объекта. В этом случае в плоскости изображения складываются поля дифрагировавших волн. Критерий Рэлея приводит к минимальному размеру  $d$ , определяемому как

$$d = \frac{0,77\lambda_0}{n \sin \vartheta}. \quad (14.20)$$

Таким образом, когерентное освещение не повышает пространственное разрешение микроскопа.

Уменьшения  $d$  в несколько раз можно достичь увеличением числовой апертуры, заполняя пространство слева от объектива иммерсионной жидкостью с большим показателем преломления.

**Теория Аббе.** При когерентном освещении задачу формирования изображения в микроскопе оригинально решил немецкий оптик Э. Аббе. Суть предложенной им теории сводится к следующему.

Пусть наблюдаемым объектом будет дифракционная решетка, освещаемая плоской волной так, как это изображено на рис. 14.9.

Если амплитуда падающей волны  $U_0 = \text{const}$ , а функция пропускания решетки  $t(x)$ , то сразу после решетки амплитуда  $U_x(x) = U_0 t(x)$ . В плоскости изображений  $\Pi$  сформируется возмущение  $U'_0 t'(x')$ , при этом  $x' = xb/a$ . При отсутствии искажений функция  $t'(x')$  в увеличенном масштабе повторяет функцию  $t(x)$ .

Э. Аббе назвал изображение, описываемое возмущением  $U'_0 t'(x')$ , *вторичным*, а цепочку дифракционных максимумов в фокальной плоскости  $\Phi\Pi$  — *первичным изображением*.

Элемент фокальной плоскости, где расположен максимум, может рассматриваться как точечный источник. Амплитуда поля в этих максимумах, как следует из (13.4), пропорциональна фурье-амплитуде функции  $t(x)$ :

$$t_m = t(k_{xm}) = t\left(\frac{2\pi}{d} m\right), \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (14.21)$$

где  $d$  — период решетки.

Интерференция волн «источников»  $t_m$  приводит к образованию увеличенного изображения решетки в плоскости  $\Pi$ . Чтобы  $t'(x')$  была подобна  $t(x)$ , необходимо обеспечить интерференцию волн от всех источников. Однако из-за предельного угла  $\vartheta$  максимумы высших порядков будут «отрезаться». Чем меньше

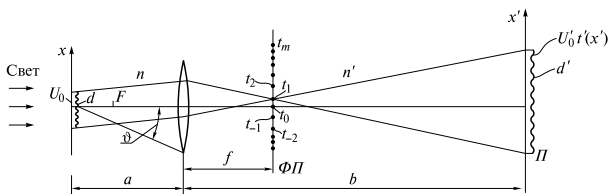


Рис. 14.9



период решетки, тем больше углы дифракции и тем больше число «отрезаемых» максимумов.

Если  $d$  настолько мало, что останется только один максимум  $t_0$ , то  $U'_0 t'(x') = \text{const}$ . Следовательно, информация о периодичности  $t(x)$  будет утеряна. При сохранении вместе с  $t_0$  еще и  $t_1$  и  $t_{-1}$ , в плоскости изображения получится интерференционная картина в виде полос Юнга с периодом  $d' = db/a$ . Она будет смазанным изображением решетки, в котором отсутствуют мелкие детали. Чтобы они появились, надо «захватывать» максимумы более высоких порядков, увеличивая радиус объектива.

Минимальное значение периода  $d$  решетки, при котором формируется изображение в виде полос Юнга, получается из условия «захвата» объективом максимумов  $t_1$  и  $t_{-1}$ :

$$d \sin \vartheta = \frac{\lambda_0}{n}, \text{ или } d = \frac{\lambda_0}{n \sin \vartheta}. \quad (14.22)$$

Эта оценка для  $d$  практически совпадает с (14.20).

На рис. 14.10 показаны фотографии, иллюстрирующие изложенное.

В эксперименте в качестве объекта использовалась проволочная сетка с квадратными ячейками (рис. 14.10, а), освещаемая пучком He-Ne-лазера. Первичное изображение Аббе (рис. 14.10, б) фильтруют с помощью специальных масок. Если маска пропускает лишь вертикальную цепочку максимумов  $t_m$  (рис. 14.10, в), то вторичное изображение имеет одномерную структуру в виде семейства горизонтальных линий (рис. 14.10, з). При использовании более сложной маски (рис. 14.10, д) получается изображение (рис. 14.10, е), которое несет информацию о структуре сетки.

Теория Аббе имеет многочисленные применения. Можно искусственно манипулировать дифракционными максимумами в фокальной плоскости (осуществлять *пространственную фильтрацию углового спектра*) с целью изменить изображение. Это актуально, когда наблюдаемый объект является преимущественно фазовым, т.е. слабо модулирующим амплитуду падающей волны и сильно модулирующим фазу. Такой объект практически неразличим при наблюдении в микроскоп. Поэтому для фазовых объектов применяют специальные методы наблюдения.

**Метод фазового контраста.** Пусть функция пропускания

$$t(x) = 1 - i\Phi(x) = \sqrt{1 + \Phi^2(x)} e^{-i\Phi(x)}, \quad (14.23)$$

где  $\Phi(x) = \Phi(x+d)$  — вещественная периодическая функция. Если  $|\Phi| \ll 1$ , то амплитудная модуляция невелика по сравнению с фазовой и  $|t| = \sqrt{1 + \Phi^2} \approx 1$ . Это означает, что в плоскости изображения будет лишь однородный светлый фон, поскольку интенсивность  $I' \propto |t'|^2 \propto |t|^2 \approx 1$ .

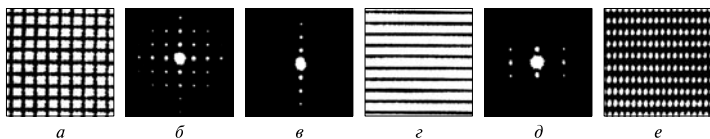


Рис. 14.10

Периодическую функцию  $t(x)$  разложим по пространственным частотам  $k_{xm} = \frac{2}{d}m$ , кратным основной частоте, в ряд Фурье:

$$t(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} t_m \exp\left(i \frac{2\pi m}{d} x\right). \quad (14.24)$$

Очевидно, что  $t_0 = 1$ ,  $t_{-m} = t_m^*$ , поскольку  $\Phi$  — вещественная функция. Звездочка означает комплексное сопряжение.

Если в фокальной плоскости поместить тонкую прозрачную пластинку, вызывающую у источника  $t_0$  отставание или опережение фазы на  $\pm\pi/2$ , то первичное изображение будет соответствовать модифицированной (измененной) функции пропускания

$$t_{\text{мод}}(x) = 1 \cdot e^{\pm i\pi/2} - i\Phi(x) = \pm i - i\Phi(x). \quad (14.25)$$

Такая функция описывает объект уже с амплитудной модуляцией, поскольку

$$|t_{\text{мод}}(x)|^2 = (1 \pm \Phi(x))^2 \approx 1 \pm 2\Phi(x). \quad (14.26)$$

В плоскости изображения интенсивность

$$I'(x') \sim |t'_{\text{мод}}(x')|^2 \sim |t_{\text{мод}}(x)|^2 = 1 \pm 2\Phi(x). \quad (14.27)$$

Отсюда следует, что *изменение фазы в плоскости наблюдаемого объекта превращается в изменение интенсивности в плоскости изображения*. При отставании фазы в нулевом порядке (знак «+» в (14.27)) области с большей оптической толщиной кажутся ярче на фоне средней освещенности, а при опережении — темнее. Поэтому этот метод получил название *метода фазового контраста*.

Необходимо отметить, что в отсутствие фазовой коррекции, как это следует из (14.23), все же есть небольшие изменения интенсивности

$$I(x') \sim |t(x)|^2 = 1 + \Phi^2(x). \quad (14.28)$$

Однако в силу малости  $\Phi$  изменения  $I$  в (14.28) значительно меньше, чем в (14.27).

**Метод темного поля.** Если поместить в фокальной плоскости непрозрачную маленькую пластинку, закрывающую максимум  $t_0$ , то

$$t_{\text{мод}}(x) = -i\Phi(x). \quad (14.29)$$

Поэтому

$$I'(x') \sim |t_{\text{мод}}(x)|^2 = \Phi^2(x).$$

Изменения интенсивности будут такими же малыми, как и в (14.28), однако более заметными, поскольку средняя освещенность отсутствует. Поэтому такой метод фильтрации получил название *метода темного поля*.

На рис. 14.11 представлены результаты численного моделирования, иллюстрирующие оба описанных метода.

В качестве освещаемого объекта использовалась прозрачная квадратная пластинка (рис. 14.11, а) переменной оптической толщины. При прохождении через пластинку плоской волны ее фронт искривлялся вследствие появляющейся фазовой модуляции (рис. 14.11, б). Однако эта модуляция не может быть обнаружена во вторичном изображении пластин.

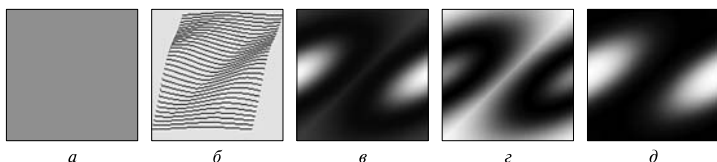


Рис. 14.11

Если же устранить максимум нулевого порядка  $I_0$ , то изображение примет вид, показанный на рис. 14.11, в. При сдвиге фазы в этом максимуме на  $\pm\pi/2$  получаются изображения пластинки, показанные на рис. 14.11, г, д. В первом случае говорят о *темном фазовом контрасте*, а во втором — о *светлом*.

**Голография** (от греч. *holos* — весь, полный) представляет собой метод получения объемного изображения объекта. Идея этого метода была высказана в 1948 г. английским физиком Д. Габором. Однако метод получил практическое применение лишь после изобретения лазеров, излучение которых обладает хорошей пространственно-временной когерентностью. За свое изобретение Габор в 1971 г. был удостоен Нобелевской премии.

До изобретения голографии единственную возможность запечатлеть изображение предмета предоставлял фотографический метод. Здесь каждая точка объекта посылает отраженную сферическую волну, которая после прохождения через оптическую систему попадает на фотопластинку. Почернение пластинки пропорционально логарифму интенсивности света, поэтому почернение изображений разноудаленных точек будет практически одинаковым.

Информация о расстоянии до любой точки объекта заложена в кривизне и наклоне волнового фронта отраженной волны. Эта информация полностью утеряна в фотографическом методе. Таким образом, трехмерные объекты на фото будут регистрироваться как двухмерные.

Информацию о фазе волны можно записать лишь с применением интерференции. Поэтому в основе голографии лежат запись интерферограмм и последующее восстановление с их помощью действительного или мнимого изображения трехмерного объекта. Такая процедура называется *голографированием*. Рассмотрим вначале голографирование плоской и сферической волн.

**Голографирование плоской волны.** Пусть плоская волна, несущая информацию об объекте (назовем ее сигнальной волной), распространяется под углом  $\vartheta$  к оси  $Oz$  (рис. 14.12, а).

Чтобы записать информацию о ней на фотопластинке, используем вторую (опорную) волну с той же длиной волны, которую направим перпендикулярно пластинке. Тогда на пластинке будут интерференционные полосы, расстояние между которыми (или ширина), согласно (9.1), равно  $\Delta x = \lambda/\vartheta$ .

После проявления и закрепления фотопластинка будет представлять собой дифракционную решетку, функция пропускания которой, как следует из свойств фотопластинки,  $t(x) \propto |I(x)|^{-\gamma/2}$ , где  $I(x)$  — интенсивность суммарной волны;  $\gamma$  — коэффициент контрастности фотопластинки. Обработанная фотопластинка называется *голограммой*.

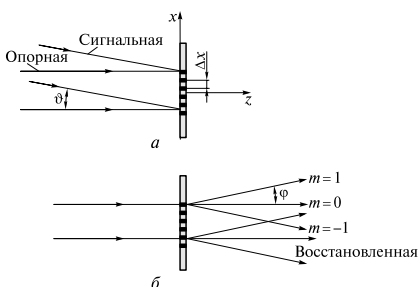


Рис. 14.12

Если на голограмму падает нормально плоская волна, то она будет дифрагировать по трем направлениям (рис. 14.12, б):

$$d \sin \varphi \approx \Delta x \varphi = m\lambda, \quad m = 0, +1, -1. \quad (14.30)$$

Это связано с тем, что голограмма является амплитудной «гармонической» решеткой, подобно той, которая формировалась в среде со стоячей ультразвуковой волной при  $|\Phi| < 1$ . Одна из волн, для которой  $m = -1$ ,  $\varphi = -\vartheta$ , и будет восстановленной сигнальной волной.

**Голографирование сферической волны.** При интерференции сферической сигнальной волны и плоской опорной (рис. 14.13, а) образуется интерферограмма в виде концентрических колец, интенсивность которых вдоль радиуса будет изменяться по гармоническому закону.

Если в центре картины волны гасят друг друга ( $I = 0$ ), то радиусы темных колец, согласно (9.16), должны удовлетворять равенству:

$$\frac{r_m^2}{2R} = (2m-1) \frac{\lambda}{2}, \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (14.31)$$

После проявки на месте темных колец почернение будет минимальным, а прозрачность — максимальной. Голограмма будет представлять зонную гармоническую решетку (рис. 14.13, б). При ее освещении плоской волной из трех дифрагировавших волн (рис. 14.13, в) расходящаяся и будет соответствовать сигнальной волне.

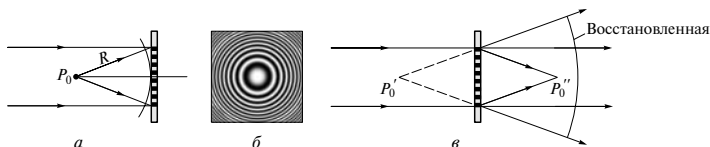


Рис. 14.13

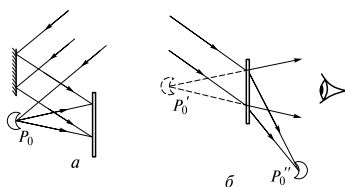


Рис. 14.14

**Голограммы Френеля.** В эксперименте широкий параллельный лазерный пучок разделяется на опорный и освещающий объекты методом деления волнового фронта (рис. 14.14, *а*).

От каждой точки  $P_0$  объекта на фотопластинку падает сигнальная сферическая волна. Голограмма будет представлять наложение зонных гармонических решеток. Кроме того, на голограмме будет слабый фон, обусловленный интерференцией сферических волн между собой.

При освещении голограммы опорной волной (рис. 14.14, *б*) формируются два изображения. Мнимое изображение можно наблюдать сквозь голограмму, а действительное — на экране. При перемещении глаза ракурс мнимого изображения изменяется, как и должно быть в случае трехмерного объекта.

**Голограммы Фурье.** На рис. 14.15, *а* показана схема записи голограммы плоского прозрачного объекта, в которой используется опорная сферическая волна, формируемая собирающей линзой.

Если радиусы кривизны волновых фронтов опорной и сигнальной волн одинаковы, то каждой точке  $P_0$  объекта будет соответствовать интерферограмма в виде полос Юнга. Можно показать, что распределение интенсивности на фотопластинке пропорционально  $U_z(k_x)$  на объекте. Поэтому голограмма называется голограммой Фурье.

Если бы на голограмме было записано изображение одной точки  $P_0$ , то при ее освещении нормально падающей волной были бы три дифрагировавшие

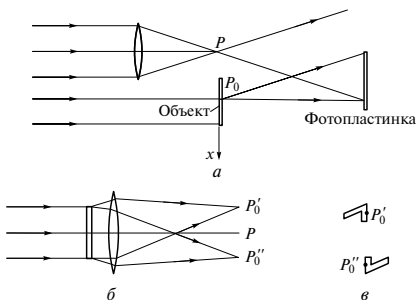


Рис. 14.15

плоские волны с  $m = 0, +1, -1$ . Чтобы получить два действительных изображения точки  $P_0$ , после голограммы устанавливают собирающую линзу.

В общем случае восстановление изображения произвольного плоского объекта осуществляется с помощью схемы, показанной на рис. 14.15, б. Здесь представлены изображения цифры 7, получаемые в фокальной плоскости собирающей линзы. Они расположены зеркально-симметрично относительно точки  $P$ , в которую фокусируется волна с  $m = 0$ .

**Голограмма Денисюка.** Если голограмму записывать на толстослойную эмульсию, то после ее обработки будет сформирована трехмерная решетка. Восстановить сигнальную волну можно, освещая решетку волной, подобной опорной (той же длины и падающей под тем же углом). Это позволяет для освещения использовать солнечный свет: решетка «сама выбирает» из него нужную монохроматическую компоненту. Остальные компоненты солнечного спектра в формировании изображения участвовать не могут. Эта идея была впервые сформулирована в СССР Ю. Н. Денисюком (1962). Поэтому трехмерная голограмма названа его именем.

Голограмма Денисюка, сфотографированная при различных ракурсах, представлена на рис. 14.5 вкл. Отчетливо видно изменение взаимного расположения деталей объекта при изменении ракурса.

**Разрешающая способность голографии.** Оценим минимальное расстояние  $d$  между точками 1 и 2 объекта, которые можно разрешить в восстановленном изображении. Для этого интерференционные картины в плоскости фотопластины должны быть сдвинуты не меньше чем на половину ширины полосы. Для точки  $M$  на краю голограммы (рис. 14.16) этот сдвиг самый большой.

Здесь  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$  — сферические фазовые фронты сигнальных волн от точек 1 и 2 — наиболее удалены друг от друга на расстояние  $\Delta = d \sin \vartheta$ , равное разности хода волн в точке  $M$ . Сдвиг на половину полосы эквивалентен условию

$$\Delta = d \sin \vartheta = \frac{\lambda}{2}. \quad (14.32)$$

Отсюда минимальное расстояние

$$d = \frac{\lambda}{2 \sin \vartheta}. \quad (14.33)$$

Величина  $d$  по порядку величины та же, что и для микроскопа. Естественно, что часть голограммы также будет восстанавливать изображение, однако его качество будет хуже, чем при использовании целой голограммы.

Еще одним фактором, ограничивающим разрешающую способность голографии, является качество фотоматериалов, характеризующихся числом  $N$  разрешаемых линий на 1 мм. Для голографии применяют фотоэмульсии с  $N = 10^3 - 5 \cdot 10^3 \text{ мм}^{-1}$ . Следовательно, минимальное расстояние между линиями  $\epsilon = N^{-1} \sim 2 - 10 \text{ мкм}$ . Как следует из (14.31), расстояние  $\delta r = r_{m+1} - r_m$  между кольцами зонной решетки определяется из равенства

$$r_{m+1}^2 - r_m^2 \approx 2r_m \delta r = 2\lambda R. \quad (14.34)$$

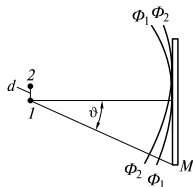


Рис. 14.16

При увеличении  $r_m$  величина  $\delta r \rightarrow 0$ . Это означает, что при  $\delta r = \epsilon$  кольца радиусами

$$r > r_m = \frac{\lambda R}{\epsilon} \quad (14.35)$$

на голограмме сольются. Угловой размер  $\vartheta_m$  кольца радиусом  $r_m$  определяется равенством

$$\sin \vartheta_m = \frac{r_m}{R} = \frac{\lambda}{\epsilon}. \quad (14.36)$$

Если  $\vartheta_m < \vartheta$ , то в формировании изображения будет участвовать лишь центральная часть голограммы. Тогда качество разрешения снижается (см. формулу (14.33)):

$$d = \frac{\lambda}{2 \sin \vartheta_m} = \frac{\epsilon}{2} = \frac{1}{2N}. \quad (14.37)$$

При  $N = 10^3 \text{ мм}^{-1}$   $d = 5 \text{ мкм}$ . Это на порядок выше, чем минимальное расстояние  $d$  в (14.33), где  $d \sim \lambda = 0,5 \text{ мкм}$ .

### ЛЕКЦИЯ 15

Процесс распространения света в материальной среде обусловлен воздействием поля волны на атомы и молекулы вещества. Поглощая световую энергию, они потом ее переизлучают, становясь источниками вторичных волн. Таким образом, в веществе электромагнитная волна является суперпозицией претерпевающей частичное поглощение падающей волны и множества вторичных когерентных волн. Поэтому распространение света в среде отличается от его распространения в вакууме.

Это отличие проявляется в таких явлениях, как зависимость скорости распространения волны от ее частоты (*дисперсия волны*), поглощение и рассеяние, вращение плоскости поляризации, появление двойного лучепреломления и др.

Многие из этих явлений можно наблюдать в повседневной жизни. Например, красный цвет Солнца на восходе и закате связан с тем, что молекулы воздуха (под действием света) представляют собой осциллирующие диполи. Эти диполи переизлучают свет в разных направлениях, причем, согласно (3.2), величина вектора Пойнтинга  $S \propto \omega^4$ . Это и есть рассеяние света, причем рассеиваются сильнее более высокочастотные компоненты солнечного спектра. Когда Солнце находится низко над горизонтом, его лучи проходят в атмосфере большие расстояния, при рассеянии «теряют» коротковолновые компоненты, и Солнце кажется красным. На рис. 15.1 цв. вкл. представлены последовательные стадии захода Солнца. Чем оно ниже над горизонтом, тем больший путь проходит солнечный луч в атмосфере и тем Солнце краснее.

Когда Солнце высоко, рассеяние волн, падающих на поверхность Земли, происходит лишь в слое атмосферы толщиной 10 км. Поскольку «потеря» коротковолновых компонент меньше, Солнце выглядит белым.

При рассеянии же волн, скользящих вдоль земной поверхности, глаза человека достигают преимущественно рассеянные коротковолновые компоненты, и небо кажется голубым (рис. 15.2 цв. вкл.).

Не менее красочно и другое явление: радуга на небе в солнечную погоду после дождя. Происхождение радуги, как будет более подробно показано далее, связано с преломлением и отражением света в дождевых каплях, причем различные спектральные компоненты солнечного света преломляются под разными углами. Это связано с зависимостью скорости распространения света в воде от его частоты.

В качестве еще одного примера можно привести упоминавшееся ранее уменьшение освещенности под водой при увеличении глубины погружения. В водоемах, где перемешивание воды невелико, нетрудно обнаружить, что в жаркую



погоду температура верхних слоев воды выше, чем нижних. Это свидетельствует о том, что большая часть световой энергии поглощается верхними слоями воды.

После изобретения лазеров были обнаружены новые оптические явления, возникающие при распространении интенсивных волн в среде. Из-за воздействия поля интенсивной волны на атомы и молекулы распространение лазерных пучков и импульсов может кардинально отличаться от распространения слабоинтенсивного света. Например, в активных средах можно усиливать свет, в то время как в обычной среде интенсивность света всегда уменьшается (см. лекцию 7).

Последующие лекции посвящены изложению основных закономерностей распространения и взаимодействия света с веществом, описанию многочисленных оптических явлений и их практическому применению.

Как отмечалось в лекции 1, многие из обсуждаемых далее проблем могут быть исследованы в рамках классического представления. Для этого необходимо решать систему уравнений Максвелла совместно с материальными уравнениями (1.6).

**Материальные уравнения среды.** В оптическом диапазоне магнитная проницаемость среды  $\mu = 1$ . Это связано с тем, что характерный размер  $d$  структуры вещества (расстояние между атомами или молекулами) на несколько порядков меньше длины волны  $\lambda$ . Поэтому обычно материальное уравнение для магнитного поля записывается в виде

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}. \quad (15.1)$$

Если напряженность  $E$  световой волны значительно меньше *напряженности*  $E_a$  *характерного внутриатомного поля* ( $E_a = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 a^2} \sim 10^{11}$  В/м — напряженность поля, создаваемая ядром атома водорода на расстоянии  $a \sim 10^{-10}$  м, равном радиусу первой боровской орбиты электрона), то два других материальных уравнения записываются в виде:

$$D_i(t, \mathbf{r}) = \epsilon_0 \sum_{j=1}^3 \int_0^\infty dt' \int_{-\infty}^\infty \epsilon_{ij}(t', \mathbf{r}') E_j(t-t', \mathbf{r}-\mathbf{r}') d\mathbf{r}'; \quad (15.2)$$

$$J_i(t, \mathbf{r}) = \sum_{j=1}^3 \int_0^\infty dt' \int_{-\infty}^\infty \sigma_{ij}(t', \mathbf{r}') E_j(t-t', \mathbf{r}-\mathbf{r}') d\mathbf{r}', \quad (15.3)$$

где  $\epsilon_{ij}$  и  $\sigma_{ij}$  — комплексные компоненты тензора *диэлектрической проницаемости* и *электрической проводимости* среды, соответственно;  $\epsilon_0$  — электрическая постоянная. Выражения (15.2) и (15.3) отражают следующие свойства среды:

- в общем случае среда анизотропна. Поэтому векторы  $\mathbf{D}$  и  $\mathbf{J}$ , не совпадающие по направлению с вектором  $\mathbf{E}$ , связаны с электрическим полем через компоненты соответствующих тензоров;

- индукция  $\mathbf{D}$  и плотность тока  $\mathbf{J}$  в момент времени  $t$  определяются суммой воздействий электрического поля  $\mathbf{E}$  в предшествующие моменты времени  $t-t'$ . Иначе, среда «обладает памятью» в течение времени  $\sim \tau$  ( $\tau$  — характерное время затухания или установления колебаний оптического электрона в атоме). При  $t' \rightarrow \infty$   $|\epsilon_{ij}| \rightarrow 0$  и  $|\sigma_{ij}| \rightarrow 0$ ;

• **D** и **J** в точке **r** определяются суммарным воздействием на среду поля **E** в других точках **r** — **r'**.

**Частотная и пространственная дисперсия среды.** Смысл материальных уравнений (15.2) и (15.3) станет более понятным, если рассмотреть распространение в среде плоской монохроматической волны напряженностью

$$\mathbf{E}(t, \mathbf{r}) = \mathbf{E}_0 \exp[i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})]. \quad (15.4)$$

Подставив (15.4) в (15.2) и (15.3), получим

$$D_i(\mathbf{r}, t) = \varepsilon_0 \sum_{j=1}^3 \varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) E_{0j} \exp[i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})]; \quad (15.5)$$

$$J_i(\mathbf{r}, t) = \sum_{j=1}^3 \sigma_{ij}(\omega, \mathbf{k}) E_{0j} \exp[i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})]. \quad (15.6)$$

В этих выражениях

$$\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = \int_0^\infty dt' \int_{-\infty}^\infty \varepsilon_{ij}(t', \mathbf{r}') \exp[-i(\omega t' - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}')] d\mathbf{r}'; \quad (15.7)$$

$$\sigma_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = \int_0^\infty dt' \int_{-\infty}^\infty \sigma_{ij}(t', \mathbf{r}') \exp[-i(\omega t' - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}')] d\mathbf{r}' \quad (15.8)$$

— фурье-амплитуды компонент тензоров  $\varepsilon_{ij}$  и  $\sigma_{ij}$ , зависящие как от частоты  $\omega$ , так и от волнового вектора  $\mathbf{k}$ . Эти зависимости отражают наличие *временной (частотной)* и *пространственной дисперсий* среды соответственно.

Частотная дисперсия становится существенной, когда частота волны близка к собственным частотам колебаний атомных осцилляторов (электронов в атоме). Пространственная дисперсия проявляется, когда волновое число  $k = 2\pi/\lambda$  ( $\lambda$  — длина волны в среде) близко к величине  $2\pi/d$  ( $d$  — размер пространственной структуры, например размер молекулы). Обычно  $\lambda \gg d$ , и пространственная дисперсия мала.

Пространственная дисперсия будет учтена в лекции 20 при объяснении оптической активности среды, в которой поворачивается плоскость поляризации световой волны. Далее рассмотрим лишь частотную дисперсию.

**Распространение монохроматической волны в изотропной среде с частотной дисперсией.** Получим волновое уравнение, описывающее распространение монохроматической волны в изотропной однородной среде. Если частота волны равна  $\omega$ , то диэлектрическая проницаемость  $\varepsilon = \varepsilon(\omega)$  и проводимость  $\sigma = \sigma(\omega)$  являются известными постоянными (для этой частоты) величинами.

Уравнения Максвелла (1.1)–(1.4) запишутся в виде

$$\text{rot } \mathbf{H} = \varepsilon_0 \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \sigma \mathbf{E}; \quad (15.9)$$

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}; \quad (15.10)$$

$$\text{div}(\varepsilon_0 \varepsilon \mathbf{E}) = \rho; \quad (15.11)$$

$$\text{div}(\mu_0 \mathbf{H}) = 0. \quad (15.12)$$

Поскольку в однородной среде  $\epsilon$  и  $\sigma$  не зависят от координат, плотность свободных зарядов  $\rho = 0$ , а уравнение (15.11) примет вид  $\operatorname{div} \mathbf{E} = 0$ . Применяв операцию  $\operatorname{rot}$  к обеим частям (15.10), получим

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{E} - \Delta \mathbf{E} = -\mu_0 \operatorname{rot} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}. \quad (15.13)$$

Подставив в правую часть (15.13) уравнение (15.9), с учетом равенства  $\operatorname{div} \mathbf{E} = 0$  получим

$$\Delta \mathbf{E} - \frac{\epsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - \frac{\sigma}{\epsilon_0 c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0, \quad (15.14)$$

где  $c^2 = (\epsilon_0 \mu_0)^{-1}$ .

Это уравнение отличается от волнового уравнения (1.9) наличием  $\epsilon$  во втором слагаемом и появлением третьего слагаемого, обусловленного электрической проводимостью. Решением уравнения, в частности, будет выражение

$$\mathbf{E}(z, t) = \mathbf{E}_0 \exp[i(\omega t - kz)], \quad (15.15)$$

описывающее плоскую волну, распространяющуюся в положительном направлении оси  $Oz$ .

Подставив (15.15) в (15.14), находим связь между волновым числом  $k$  и частотой  $\omega$ , называемую *дисперсионным соотношением*:

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \left( \epsilon - i \frac{\sigma}{\epsilon_0 \omega} \right). \quad (15.16)$$

Как отмечалось ранее, величины  $\epsilon$  и  $\sigma$  комплексные:  $\epsilon = \epsilon' + i\epsilon''$ ,  $\sigma = \sigma' + i\sigma''$ . Величины  $\epsilon'$  и  $\sigma'$  называют *активными* составляющими диэлектрической проницаемости и проводимости, а  $\epsilon''$  и  $\sigma''$  — *реактивными*. Из-за наличия последних колебания индукции  $D$  и плотности тока  $J$  сдвинуты по фазе относительно колебаний  $E$ . Тогда

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \left[ \left( \epsilon' + \frac{\sigma'}{\epsilon_0 \omega} \right) - i \left( \frac{\sigma'}{\epsilon_0 \omega} - \epsilon'' \right) \right] = \frac{\omega^2}{c^2} \left[ \tilde{\epsilon} - i \frac{\tilde{\sigma}}{\epsilon_0 \omega} \right] = \frac{\omega^2}{c^2} \tilde{\epsilon}_k, \quad (15.17)$$

где

$$\tilde{\epsilon} = \epsilon' + \frac{\sigma'}{\epsilon_0 \omega}; \quad \tilde{\sigma} = \sigma' - \epsilon'' \epsilon_0 \omega; \quad \tilde{\epsilon}_k = \tilde{\epsilon} - i \frac{\tilde{\sigma}}{\epsilon_0 \omega} \quad (15.18)$$

— *комплексная эффективная диэлектрическая проницаемость*, объединяющая собственную диэлектрическую проницаемость и проводимость. Из (15.16) волновое число получается равным

$$k = \frac{\omega}{c} \sqrt{\tilde{\epsilon}_k} = \frac{\omega}{c} n_k = \frac{\omega}{c} (n - i\chi). \quad (15.19)$$

Здесь  $n_k = \sqrt{\tilde{\epsilon}_k}$  — *комплексный показатель преломления*. Его действительная и мнимая части определяются выражениями:

$$n^2 = \frac{1}{2} \left( \sqrt{\tilde{\epsilon}^2 + \frac{\tilde{\sigma}^2}{\epsilon_0 \omega^2}} + \tilde{\epsilon} \right); \quad \chi^2 = \frac{1}{2} \left( \sqrt{\tilde{\epsilon}^2 + \frac{\tilde{\sigma}^2}{\epsilon_0 \omega^2}} - \tilde{\epsilon} \right). \quad (15.20)$$

Подставив (15.19) в (15.15), получим

$$E(z, t) = E_0 \exp\left(-\frac{\chi\omega}{c} z\right) \exp\left[i\omega\left(t - \frac{zn}{c}\right)\right]. \quad (15.21)$$

Величина  $n$  называется *показателем преломления*. Она определяет фазовую скорость волны:

$$v = \frac{c}{n}. \quad (15.22)$$

Величина  $\chi$  описывает уменьшение амплитуды волны вдоль оси  $Oz$  и называется *показателем поглощения*. Из (15.21) следует, что интенсивность волны убывает по закону

$$I(z) = I_0 e^{-\alpha z}, \quad (15.23)$$

получившему название закона *Бугера-Ламберта-Бера*. Здесь  $\alpha = 2 \frac{\omega}{c} \chi$  — коэффициент поглощения.

**Поляризуемость и диэлектрическая проницаемость среды.** В диэлектриках электрическая проводимость мала, поэтому можно положить  $\sigma = 0$ . Диэлектрическая проницаемость  $\epsilon(\omega)$  описывает феноменологически поляризуемость среды в поле световой волны. Выразим вначале  $\epsilon$  через микроскопические параметры среды.

**Поляризуемость молекулы.** В установившемся режиме молекула под действием светового поля частоты  $\omega$  приобретает осциллирующий дипольный момент

$$p_i = \epsilon_0 \sum_{j=1}^3 a_{ij} E_{\text{эф}j}, \quad (15.24)$$

где  $a_{ij}(\omega)$  — компонента тензора *диэлектрической восприимчивости*, или *поляризуемости* молекулы, являющейся в общем случае анизотропной. Эта компонента зависит от частоты  $\omega$  световой волны;  $E_{\text{эф}}$  — эффективное (действующее на молекулу) поле, вообще говоря, отличающееся от среднего макроскопического поля  $E$  в среде (см. далее).

Поскольку частота волны  $\omega \sim 10^{15} \text{ с}^{-1}$ , то поляризация молекул осуществляется в результате смещения электронов в атоме (поляризация электронного смещения). Если молекула обладает собственным дипольным моментом  $p_0$ , то из-за большой частоты света она не успевает ориентироваться (характерное время ориентации  $\sim 10^{-12} \text{ с}$ ).

Тензор  $a_{ij}$  может быть комплексным. Это означает наличие затухания (смещение электрона по фазе не совпадает с колебаниями поля  $E_{\text{эф}}$ ). Величину  $|a_{ij}|$  можно оценить, воспользовавшись моделью молекулы в виде проводящего шара радиуса  $r_0 = 10^{-10} \text{ м}$ . Такой шар в электрическом поле напряженностью  $E$  приобретает дипольный момент

$$p = \epsilon_0 4\pi r_0^3 E. \quad (15.25)$$

Тогда  $|a_{ij}| \approx 4\pi r_0^3 \sim 10^{-29} \text{ м}^3$ .

**Диэлектрическая проницаемость среды.** Поляризуемость диэлектрика определяется дипольным моментом  $\mathbf{P}$  единицы его объема (вектором поляризации). Если  $N$  — число молекул в единице объема, то

$$P_i = \sum_{l=1}^N p_{il} = N \langle p_i \rangle, \quad (15.26)$$

где  $\langle p_i \rangle$  — среднее значение проекции дипольного момента молекулы (усреднение проводится по всем ориентациям молекул в единице объема). Результат усреднения зависит от агрегатного состояния вещества.

В газе все ориентации молекул равновероятны. Поэтому

$$\langle p_i \rangle = \epsilon_0 \sum_{j=1}^3 \langle a_{ij} \rangle E_{\text{эф}j} = \epsilon_0 \frac{a_{11} + a_{22} + a_{33}}{3} E_{\text{эф}i}. \quad (15.27)$$

Для компоненты вектора поляризации (15.26) получаем

$$P_i = \epsilon_0 N a E_{\text{эф}i}, \quad (15.28)$$

где  $a = \frac{a_{11} + a_{22} + a_{33}}{3}$  — средняя поляризуемость молекулы. Таким образом, газ, состоящий из анизотропных молекул, является изотропным веществом.

В жидкостях существует ближний порядок, поэтому задача усреднения сложнее, чем в газах. Однако жидкость также является изотропной средой и для нее справедливо выражение (15.28), в котором  $a$  — среднее значение поляризуемости молекулы жидкости.

В кристаллах атомы ориентированы одинаково, поэтому

$$P_i = \epsilon_0 N \sum_{j=1}^3 a_{ij} E_{\text{эф}j}. \quad (15.29)$$

Определим теперь макроскопические характеристики среды: поляризуемость  $\alpha$  и диэлектрическую проницаемость  $\epsilon$ . Для этого воспользуемся известными соотношениями

$$P = \epsilon_0 \alpha E; \quad D = \epsilon_0 E + P = \epsilon_0 (1 + \alpha) E = \epsilon_0 \epsilon E. \quad (15.30)$$

В этих соотношениях  $E$  — напряженность среднего макроскопического поля в диэлектрике, которая, как отмечалось ранее, может не совпадать с величиной  $E_{\text{эф}}$ .

Для разреженных газов  $E_{\text{эф}} = E$ . Тогда из сравнения (15.28) и (15.30) получаем

$$\alpha = Na; \quad \epsilon - 1 = Na. \quad (15.31)$$

При нормальных условиях  $N \sim 10^{25} \text{ м}^{-3}$ . Поскольку  $a \sim 10^{-29} \text{ м}^3$ , то  $\alpha = \epsilon - 1 \sim 10^{-4}$ . Диэлектрическая проницаемость газов отличается от единицы лишь в четвертом знаке после запятой.

Для плотных газов, жидкостей, некоторых кристаллов (кубической симметрии)

$$E_{\text{эф}} = E + \frac{P}{3\epsilon_0}, \quad (15.32)$$

т. е. поле, действующее на молекулу, больше поля  $E$  на величину  $\frac{P}{3\epsilon_0}$ , определяющую напряженность поля соседних поляризованных молекул. Это поле на-

зывается *полем Лоренца* (в честь нидерландского физика-теоретика Х. Лоренца, создателя классической электронной теории свойств вещества).

Подставляя (15.32) в (15.28) и опуская индекс  $i$ , получаем для изотропной среды

$$P = \varepsilon_0 Na \left( E + \frac{P}{3\varepsilon_0} \right). \quad (15.33)$$

Отсюда

$$P = \varepsilon_0 \frac{Na}{1 - \frac{Na}{3}} E = \varepsilon_0 \varepsilon E = \varepsilon_0 (\varepsilon - 1) E. \quad (15.34)$$

Следовательно,

$$\varepsilon - 1 = \frac{Na}{1 - \frac{Na}{3}}. \quad (15.35)$$

Эту формулу чаще используют в виде

$$\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} = \frac{Na}{3}. \quad (15.36)$$

Последняя формула называется *формулой Лоренц — Лоренца*. Она была предложена в 1869 г. датским физиком Л. Лоренцом. Напомним, что  $\varepsilon$  является функцией частоты, так как  $a = a(\omega)$ .

В статическом поле ( $\omega = 0$ ) (15.36) совпадает с *формулой Клаузиуса — Моссоти*, названной в честь итальянского ученого О. Моссоти, который совместно с немецким физиком Р. Клаузиусом в 1864 г. разработал теорию поляризации диэлектриков.

**З а м е ч а н и е.** Если молекула обладает собственным дипольным моментом  $p_0$ , то в ИК-области, где частоты  $\omega \sim 10^{12} - 10^{13} \text{ с}^{-1}$ , молекула может совершать вращательные качания. Тогда поляризуемость  $a$  молекулы определяется двумя механизмами — электронным смещением и поворотом молекулы. Например, в газе, находящемся в равновесии при температуре  $T$ , полная поляризуемость

$$a_\Sigma = a + \frac{p_0^2}{3kT}, \quad (15.37)$$

где последнее слагаемое рассчитывается из распределения Больцмана.

**Молекулярная рефракция.** Величина  $N$  в (15.33) зависит от плотности вещества  $\rho$ :

$$N = \frac{N_A \rho}{\mu}, \quad (15.38)$$

где  $N_A$  — число Авогадро;  $\mu$  — молекулярная масса.

Если частота волны находится вдали от собственных частот  $\omega_i$  атомных осцилляторов (см. далее), то поглощение мало. Тогда  $a$  и  $\varepsilon$  — действительные величины. Как следует из (15.20), при  $\sigma = 0$

$$n = \sqrt{\varepsilon}. \quad (15.39)$$

С учетом (15.38) и (15.39), формула Лоренц — Лоренца может быть записана в виде

$$\frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} \frac{\mu}{\rho} = \frac{N_A a}{3} = R_{\text{мол}}, \quad (15.40)$$

где величина  $R_{\text{мол}}$  не зависит от давления. Она называется *молекулярной рефракцией*. Если, согласно (15.25), положить  $a = 4\pi r_0^3$ , то молекулярная рефракция равна объему всех молекул, содержащихся в одном моле вещества.

Порядок величины  $R_{\text{мол}}$  совпадает с поправкой  $b$  на объем в уравнении Ван-дер-Ваальса:

|  |                |                 |                  |                 |
|--|----------------|-----------------|------------------|-----------------|
| Вещество .....                                 | H <sub>2</sub> | CS <sub>2</sub> | H <sub>2</sub> O | NH <sub>3</sub> |
| $R_{\text{мол}}$ , см <sup>3</sup> /моль ..... | 2,0            | 21,7            | 2,37             | 5,6             |
| $b/4$ , см <sup>3</sup> /моль .....            | 6,5            | 19,5            | 7,70             | 9,5             |

Если вещество состоит из смеси нескольких компонент, то

$$N = N' + N'' + \dots = N(\alpha' + \alpha'' + \dots), \quad (15.41)$$

где  $\alpha' = \frac{N'}{N}$ ,  $\alpha'' = \frac{N''}{N}$  и т.д. — концентрации компонент. Плотность этой смеси

$$\rho = \frac{N'\mu' + N''\mu'' + \dots}{N_A} = \frac{N\mu}{N_A}. \quad (15.42)$$

Здесь

$$\mu = \mu'\alpha' + \mu''\alpha'' + \dots \quad (15.43)$$

— молекулярная масса смеси. Тогда уравнение (15.40) может быть записано в виде

$$\frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} \frac{\mu}{\rho} = \frac{N_A}{3} (a'\alpha' + a''\alpha'' + \dots) = R'_{\text{мол}}\alpha' + R''_{\text{мол}}\alpha'' + \dots \quad (15.44)$$

Таким образом, молекулярная рефракция смеси аддитивна:

$$R_{\text{мол}} = R'_{\text{мол}}\alpha' + R''_{\text{мол}}\alpha'' + \dots \quad (15.45)$$

В случае систем, состоящих из двух веществ (бинарных систем), измеряя  $n$ , можно определять с высокой точностью концентрации  $\alpha'$  и  $\alpha''$  ( $\Delta\alpha/\alpha \sim 10^{-3}$ ).

**Основы электронной теории дисперсии.** Классическая теория дисперсии базируется на рассмотрении воздействия светового поля на оптический электрон в атоме (атомный осциллятор), обладающий осциллирующим дипольным моментом  $p(t) = ex(t)$  (см. (13.5)). В электромагнитном поле  $E_{\text{эф}}(t) = E_0 e^{i\omega t}$  он совершает вынужденные колебания, которые описываются уравнением

$$m\ddot{x} + \Gamma\dot{x} + kx = eE_0 e^{i\omega t}, \quad (15.46)$$

где  $m$  и  $e$  — масса и заряд электрона;  $k$  — коэффициент «упругой» силы;  $\Gamma$  — коэффициент, описывающий силу «радиационного трения».

Переходя к дипольному моменту, перепишем (15.46) в виде

$$\ddot{p} + 2\delta\dot{p} + \omega_0^2 p = \frac{e^2}{m} E_0 e^{i\omega t}. \quad (15.47)$$

Здесь  $\delta = \Gamma/2m$  — показатель затухания;  $\omega_0 = \sqrt{k/m}$  — собственная частота колебаний электрона.

Решение (15.47) имеет вид

$$p(t) = \frac{e^2}{m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\delta\omega} E_0 e^{i\omega t}. \quad (15.48)$$

Тогда средняя поляризуемость, согласно (15.27), равна

$$a(\omega) = \frac{e^2}{m\epsilon_0} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\delta\omega}. \quad (15.49)$$

Наконец, формула Лоренц — Лоренца приобретает вид

$$\frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2} = \frac{Ne^2}{3m\epsilon_0} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\delta\omega}. \quad (15.50)$$

Диэлектрическая проницаемость комплексна, что обусловлено поглощением. Она сильно изменяется с частотой, когда  $\omega$  приближается к собственной частоте  $\omega_0$ . Если ввести комплексный показатель преломления  $n_k = \sqrt{\epsilon}$ , то последняя формула запишется в виде

$$\frac{n_k^2 - 1}{n_k^2 + 2} = \frac{Ne^2}{3m\epsilon_0} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\delta\omega}. \quad (15.51)$$

**Дисперсия газов.** В разреженных газах напряженность  $E_{\text{эф}} = E$ , а  $|\epsilon| \sim 1$ . Поэтому в (15.51) можно положить  $n_k^2 + 2 \approx 3$ ,  $(n_k^2 - 1) = (n_k - 1)(n_k + 1) \approx 2(n_k - 1)$ . В результате (15.51) упростится:

$$n_k - 1 = \frac{Ne^2}{2m\epsilon_0} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\delta\omega}. \quad (15.52)$$

Представив комплексный показатель преломления в виде  $n_k = n - i\chi$  (см. (15.19)), для показателя преломления и показателя поглощения находим

$$n = 1 + \frac{Ne^2}{2m\epsilon_0} \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2}; \quad \chi = \frac{Ne^2}{2m\epsilon_0} \frac{2\delta\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2}. \quad (15.53)$$

Величины  $n$  и  $\chi$  изменяются наиболее сильно, когда  $\omega$  приближается к  $\omega_0$ . В этой области частот выражения (15.53) можно сильно упростить, положив

$$\begin{aligned} \omega_0^2 - \omega^2 &= (\omega_0 - \omega)(\omega_0 + \omega) \approx 2\omega_0(\omega_0 - \omega); \\ 2\delta\omega &\approx 2\delta\omega_0; \\ (\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2 &= (\omega_0 - \omega)^2(\omega_0 + \omega)^2 + 4\delta^2\omega^2 \approx \\ &\approx 4\omega_0^2[(\omega_0 - \omega)^2 + \delta^2]. \end{aligned} \quad (15.54)$$

Поскольку величина  $\frac{Ne^2}{m\epsilon_0}$  имеет размерность  $[\text{с}^{-2}]$ , введем так называемую *плазменную частоту*  $\omega_p$ :

$$\omega_p^2 = \frac{Ne^2}{m\epsilon_0}. \quad (15.55)$$



Выражения (15.53) с учетом упрощений (15.54) и (15.55) примут вид

$$n = 1 + \frac{\omega_p^2}{4\omega_0\delta} \frac{(\omega_0 - \omega)}{\frac{(\omega_0 - \omega)^2}{\delta^2} + 1}; \quad \chi = \frac{\omega_p^2}{4\omega_0\delta} \frac{1}{\frac{(\omega_0 - \omega)^2}{\delta^2} + 1}. \quad (15.56)$$

Построим зависимости  $n(\omega)$  и  $\chi(\omega)$ , используя типичные (реалистические) параметры газообразной среды. Положим  $\omega_0 = 10^{16} \text{ с}^{-1}$  (это соответствует УФ-диапазону). При времени затухания  $\tau = 10^{-11} \text{ с}$  величина  $\delta = 1/\tau = 10^{11} \text{ с}^{-1}$ . Если принять  $N = 10^{23} \text{ м}^{-3}$  (при нормальных условиях  $N = 2,7 \cdot 10^{25} \text{ м}^{-3}$ ), то  $\omega_p^2 = (2,93 \cdot 10^{13})^2 \text{ с}^{-2}$ . Следовательно,  $\frac{\omega_p^2}{4\omega_0\delta} = 0,08$ . Для этих значений параметров соответствующие графики зависимостей (15.56) представлены на рис. 15.1.

Область частот, где показатель преломления  $n$  увеличивается с частотой  $\omega$ , называется *областью нормальной дисперсии*. В этой области показатель поглощения  $\chi$  (и коэффициент поглощения  $\alpha$ ) мал. Область частот, где  $n$  уменьшается с частотой  $\omega$ , называется *областью аномальной дисперсии*. Здесь показатель поглощения сильно возрастает; вещество обладает линией поглощения, контур которой описывается зависимостью  $\chi(\omega)$  (или  $\alpha(\omega) = \frac{2\omega\chi(\omega)}{c}$ ).

Зависимость  $n(\omega)$  эффектно демонстрируется в опыте, схема которого изображена на рис. 15.3 цв. вкл. Здесь используется метод скрещенных призм, предложенный Ньютоном. Пучок белого света вначале разлагается первой призмой  $P_1$  в семейство пучков с разной длиной волны. После прохождения этих пучков через вторую призму  $P_2$  на экране формируется искривленная разноцветная полоса, несущая информацию о зависимости  $n(\omega)$  материала, из которого изготовлены призмы.

Дисперсия вблизи линии поглощения демонстрируется в видоизмененном опыте, схема которого показана на рис. 15.4 цв. вкл. Здесь роль призмы  $P_1$  выполняет пламя натриевой горелки, в которой концентрация паров натрия увеличивается сверху вниз. При этом пары натрия имеют интенсивные линии поглощения, соответствующие желтой части спектра. Поэтому на экране появляются две загнутые в разные стороны полоски, соответствующие нормальной дисперсии. В области аномальной дисперсии происходит сильное поглощение света.

Изложенная выше классическая теория дисперсии правильно описывает поведение  $n$  и  $\chi$  вблизи одной линии поглощения. Однако реальные вещества

обладают несколькими линиями поглощения, обусловленными разнообразными квантовыми переходами в атомах и молекулах. Поэтому адекватную теорию дисперсии можно построить лишь на основе квантовых представлений о строении вещества.

Однако можно попытаться «исправить» классическую теорию, если допустить, что из  $N$  молекул среды в единице объема часть из них  $f_1 N$  ( $f_1 < 1$ ) имеют

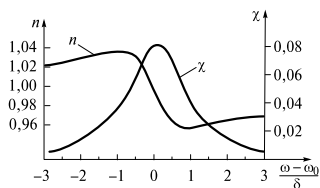


Рис. 15.1

собственную частоту  $\omega_{01}$  и коэффициент затухания  $\delta_1$ , другая часть  $f_2 N$  — частоту  $\omega_{02}$  и  $\delta_2$  и т.д. Тогда формулу (15.50) можно обобщить, записав ее в виде

$$\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} = \frac{Ne^2}{3m\varepsilon_0} \sum_I \frac{f_I}{\omega_{0I}^2 - \omega^2 + 2i\delta_I \omega}. \quad (15.57)$$

Величина  $f_I$  называется *силой осциллятора*. Она изменяется в диапазоне  $0 < f_I < 1$ . Ее расчет может быть выполнен методами квантовой механики. Если частоте  $\omega_{0I}$  поставить в соответствие частоту  $\omega_{21}$  квантового перехода, то сила осциллятора  $f_{21}$  при таком переходе связана с дипольным моментом  $p_{21} = er_{21}$  перехода (см. (5.16)):

$$f_{21} = \frac{2m}{\hbar e^2} \omega_{21} p_{21}^2. \quad (15.58)$$

Сила осциллятора, так же как коэффициенты Эйнштейна  $A_{21}$ ,  $B_{21}$ ,  $B_{12}$ , пропорциональна  $p_{21}^2$ . Поэтому коэффициенты Эйнштейна пропорциональны силе осциллятора. Квантовомеханический расчет показывает, что  $\sum_I f_I = Z$  ( $Z$  — заряд ядра атома).

На рис. 15.2 качественно изображен фрагмент зависимости  $n(\omega)$  в области, охватывающей две собственные частоты  $\omega_{01}$  и  $\omega_{02}$ .

Для практического применения зависимости  $n(\omega)$  и  $\chi(\omega)$  вблизи одной из собственных частот записывают в виде

$$n = n_0 + \frac{\omega_p^2 f_I}{4\omega_{0I} \delta_I} \frac{\frac{(\omega_{0I} - \omega)}{\delta_I}}{\frac{(\omega_{0I} - \omega)^2}{\delta_I^2} + 1}; \quad \chi = \frac{\omega_p^2}{4\omega_{0I} \delta_I} \frac{f_I}{\frac{(\omega_{0I} - \omega)^2}{\delta_I^2} + 1}. \quad (15.59)$$

Здесь  $n_0$  — показатель преломления среды, обусловленный вкладом остальных осцилляторов. В показатель поглощения  $\chi$  их вклад ничтожно мал.

В заключение сделаем два важных комментария к описанной теории.

1. Для получения реалистических значений  $n$  в газах на основе (15.56) мы полагали  $N = 10^{23} \text{ м}^{-3}$ . Если бы мы использовали величину  $N = 2,7 \cdot 10^{25} \text{ м}^{-3}$ , что соответствует нормальным условиям, то без использования силы осциллятора  $f < 1$  получили бы существенно завышенную оценку величины  $n$ . Наличие  $f_I$  в формулах (15.57) и (15.59) устраняет эту трудность.

2. Максимальное поглощение достигается в середине линии при  $\omega = \omega_{0I}$  и равно

$$\alpha_{\max} = \alpha(\omega_{0I}) = \frac{\omega_p^2}{2\delta_I c} f_I. \quad (15.60)$$

Такое поглощение называется *резонансным*. Если положить  $\omega_p^2 f_I = 10^{27} \text{ с}^{-2}$ ,  $\delta_I \sim 10^{11} \text{ с}^{-1}$ , то  $\alpha_{\max} \sim 10^5 \text{ см}^{-1}$ . Это значит, что глубина проникновения волны в среду  $z = \alpha_{\max}^{-1} \sim 10^{-5} \text{ см}$ , что имеет порядок длины световой волны.

Связь коэффициентов Эйнштейна с силой соответствующего осциллятора по-

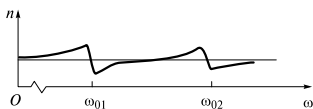


Рис. 15.2

звolyет сделать вывод: *чем выше интенсивность линии в спектрах испускания, тем сильнее эти линии излучения вещество поглощает*. В эксперименте силы осцилляторов определяют путем измерения интегрального коэффициента поглощения всей линии:

$$\alpha_{\text{инт}} = \int_0^{\infty} \alpha(\omega) d\omega = \frac{\pi \omega_p^2}{2c} f_l. \quad (15.61)$$

Этот коэффициент не зависит от ширины линии поглощения. Если линия уширена вследствие эффекта Доплера, то  $f_l$  очень слабо зависит от давления. При уширении вследствие столкновений величина  $f_l$  зависит от давления. Поэтому для определения истинного значения  $f_l$  измеряют  $\alpha_{\text{инт}}$  при все уменьшающихся давлениях  $p$  и затем экстраполируют зависимость  $f_l(p)$  при  $p \rightarrow 0$ .

**Спектры поглощения газов.** В 1802 г. английский физик У. Волластон, анализируя спектр излучения Солнца, обнаружил на этом спектре темные линии. Они явились результатом селективного поглощения света газами, входящими в состав земной атмосферы. Позднее, в 1814 г. эти линии были исследованы и описаны немецким ученым Й. Фраунгофером и впоследствии названы его именем. Число таких линий превышает 20 000.

Наиболее интенсивные фраунгоферовы линии в видимой части спектра показаны на рис. 15.5 цв. вкл. Линия с  $\lambda = 687$  нм соответствует поглощению атомарным кислородом, линия с  $\lambda = 653,6$  нм — это линия  $H_\alpha$  серии Бальмера атома водорода, дублет линий в желтой части спектра ( $\lambda' = 589$  нм,  $\lambda'' = 589,6$  нм) связан с поглощением натрием, а линия с  $\lambda = 486$  нм — линия водорода  $H_\beta$  и т.д.

По спектрам поглощения можно судить о химическом составе вещества. Такой метод исследования называется спектроскопией поглощения. На практике измеряют *пропускание*  $T$ , равное отношению интенсивности волны, прошедшей через среду к интенсивности падающего света. В соответствии с законом Бугера-Ламберта-Бера (15.23)

$$T = e^{-\alpha l}, \quad (15.62)$$

где  $l$  — толщина среды. Величина  $D = \alpha l$  называется *оптической плотностью* среды.

В качестве примера можно упомянуть, что для поисков следов жизни на планетах, вращающихся вокруг звезд, необходимо зарегистрировать линии поглощения воды, кислорода, углекислого газа и озона, присутствие которых может свидетельствовать о наличии условий для появления жизни.

Чтобы отсеять свет звезд, мешающих наблюдению, исследования проводят в ИК-диапазоне ( $\lambda = 7 - 20$  мкм). В этой области находятся полосы поглощения  $H_2O$  вблизи  $\lambda = 8$  мкм, линия поглощения  $O_3$  с  $\lambda = 9,6$  мкм и  $CO_2$  с  $\lambda = 15$  мкм.

Например, спектрометр, установленный на борту летательного космического аппарата, регистрирует в спектре поглощения атмосферы Земли сильную полосу поглощения паров воды, линию озона (свидетельство большого количества кислорода) и углекислого газа.

Хорошо известно, что в Солнечной системе атмосфера, помимо Земли, сохранилась у Марса и Венеры. В спектрах поглощения атмосфер этих планет первые две линии поглощения отсутствуют.

**Среды с отрицательным показателем преломления.** В 1968 г. в СССР В. Г. Веселаго была выдвинута идея о возможности создания сред с отрицательным показателем преломления. Она сводилась к следующему. Если материальное уравнение (15.1) записать в виде  $\mathbf{B} = \mu\mu_0\mathbf{H}$  ( $\mu \neq 1$ ), то для показателя преломления вместо (15.39) получается выражение

$$n = \sqrt{\mu\epsilon}. \quad (15.63)$$

Если формально положить  $\mu < 0$  и  $\epsilon < 0$ , то

$$n = \pm\sqrt{\mu\epsilon}. \quad (15.64)$$

Таким образом, среда с отрицательным показателем преломления должна иметь отрицательные значения величин диэлектрической и магнитной проницаемостей.

Остановимся несколько подробнее на тех условиях, при которых возможна реализация подобных сред.

В естественных диспергирующих средах межатомное расстояние  $d$  в тысячи раз меньше длины световой волны  $\lambda$ . Поэтому магнитная проницаемость  $\mu = 1$ .

В диспергирующих искусственно структурированных средах, у которых отношение  $d/\lambda \geq 10^{-1}$  ( $d$  — период структуры), не только  $\epsilon$ , но и  $\mu$  зависит от частоты. Зависимость  $\mu(\omega)$  вытекает из материального уравнения для векторов  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{H}$ , которое в этом случае имеет вид, аналогичный (15.2):

$$B_i(t, \mathbf{r}) = \mu_0 \sum_{j=1}^3 \int_0^\infty dt' \int_{-\infty}^\infty \mu_{ij}(t', \mathbf{r}') H_j(t - t', \mathbf{r} - \mathbf{r}') d\mathbf{r}'. \quad (15.65)$$

Необходимо особо подчеркнуть, что *индукция  $B$  обусловлена не магнитными свойствами атомов или молекул, а элементарными микроскопическими электрическими токами*, возникающими в отдельных элементах структурированной среды. Аналогично в материальном уравнении (15.2) *индукция  $D$  обусловлена поляризацией элементов среды*.

Эти элементы выполнены из проводников специальной формы (например, разрезанных прямоугольников или колец). По своим электромагнитным свойствам они эквивалентны элементарным колебательным контурам. Среда в целом может рассматриваться как система связанных контуров. Она будет обладать набором резонансных частот  $\omega_{0i}$ , вблизи которых и велика дисперсия. Такая среда получила название *метаматериала*.

Объемная плотность энергии электромагнитного поля (средняя за период) в изотропной диспергирующей среде (как можно показать из уравнений Максвелла и материальных уравнений) равна:

$$u(t) = \frac{1}{2} \left[ \epsilon_0 \frac{d(\omega\epsilon)}{d\omega} E_0^2(t) + \mu_0 \frac{d(\omega\mu)}{d\omega} H_0^2(t) \right]. \quad (15.66)$$

Здесь  $E_0(t)$  и  $H_0(t)$  — амплитуды колебаний напряженностей электрического и магнитного полей, которые у реальных квазимонохроматических волн являются медленно меняющимися функциями времени.

Если дисперсия  $\epsilon$  и  $\mu$  мала, то

$$u(t) = \frac{1}{2} [(\epsilon_0 \epsilon E_0^2(t) + \mu_0 \mu H_0^2(t))]. \quad (15.67)$$

Последнее выражение хорошо известно из курса электромагнетизма.

Поскольку  $u > 0$ , то в средах с дисперсией  $\epsilon$  и  $\mu$  должны выполняться условия:

$$\frac{d(\omega\epsilon)}{d\omega} = \omega \frac{d\epsilon}{d\omega} + \epsilon > 0; \quad \frac{d(\omega\mu)}{d\omega} = \omega \frac{d\mu}{d\omega} + \mu > 0. \quad (15.68)$$

Следовательно, отрицательный показатель преломления ( $\epsilon < 0$ ,  $\mu < 0$ ) можно реализовать в ограниченном частотном интервале, в котором

$$\omega \frac{d\epsilon}{d\omega} > -\epsilon > 0; \quad \omega \frac{d\mu}{d\omega} > -\mu > 0. \quad (15.69)$$

Частоты в этом интервале должны несколько превышать одну из собственных резонансных частот  $\omega_{0l}$  метаматериала, вблизи которой  $\frac{d\epsilon}{d\omega} > 0$  и  $\frac{d\mu}{d\omega} > 0$ . Негативным фактором в этом частотном интервале является большое поглощение световой волны, оказывающей резонансное воздействие на среду.

В 2000 г. высказанная ранее идея была реализована в миллиметровом диапазоне длин волн. Методами микроэлектроники были изготовлены периодические структуры, в которых отношение  $d/\lambda \sim 10^{-1}$ . В последующем метаматериалы были созданы и для длин волн  $\lambda \sim 1$  мкм.

На рис. 15.6 цв. вкл. показана фотография метаматериала, изготовленного в университете в Сан-Диего (США). Он представляет собой семейство плат. На одну сторону каждой из плат нанесена тонкая медная полоска, а на другую — несколько медных квадратных контуров с разрезами.

Если из этого материала изготовить призму, то падающая на нее электромагнитная волна будет отклоняться не к основанию призмы, а к ее вершине. Это свидетельствует о том, что показатель преломления метаматериала отрицателен.

В настоящее время фундаментальной задачей является создание материалов с отрицательным показателем преломления в видимом и ультрафиолетовом диапазонах. Их появление откроет новые возможности создания уникальных оптических приборов и устройств. Достаточно, например, отметить, что, согласно (15.22), при  $n < 0$  фазовая скорость  $v < 0$ . Это означает, что фазовая скорость направлена противоположно направлению движения энергии световой волны.

## ЛЕКЦИЯ 16

**Практические формулы дисперсии.** Для практических целей вместо (15.57) используют более удобные формулы для дисперсии показателя преломления. Одна из таких формул была получена Зелмейером и носит его имя. Она выводится из формулы (15.35), которую при подстановке в нее поляризуемости (15.49) можно записать в виде

$$\epsilon - 1 = \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \frac{\omega_p^2}{3} - \omega^2 + 2i\delta\omega}. \quad (16.1)$$

После введения силы осцилляторов  $f_l$  и суммирования по различным осцилляторам для показателя преломления  $n_k = \sqrt{\epsilon}$  получим

$$n_k^2 - 1 = \omega_p^2 \sum_l \frac{f_l}{\omega_{0l}^2 - \omega^2 + 2i\delta_l \omega}, \quad (16.2)$$

где

$$\omega_{0l}^2 = \omega_0^2 - \frac{\omega_p^2 f_l}{3}. \quad (16.3)$$

В области, где  $|\omega_{0l}^2 - \omega^2| > \delta_l \omega$ , поглощением можно пренебречь ( $\delta_l = 0$ ). Переходя от частот  $\omega_{0l}$  и  $\omega$  к соответствующим длинам волн  $\lambda'_l$  и  $\lambda$ , получаем искомую *формулу Зелмейера*:

$$n^2 = 1 + \sum_l \frac{\gamma_l}{\lambda^2 - \lambda_l'^2}. \quad (16.4)$$

Здесь  $n$  — действительная часть  $n_k$ ,

$$\gamma_l = \frac{\omega_p^2 \lambda_l'^2 f_l}{4\pi c^2}. \quad (16.5)$$

В ряде случаев дисперсия показателя преломления описывается эмпирической формулой вида

$$n = A + \frac{B}{\lambda^2 - \lambda_0^2} + \frac{C}{(\lambda^2 - \lambda_0^2)^2} + D\lambda^2 + E\lambda^4, \quad (16.6)$$

где  $A, B, C, D, E$  и  $\lambda_0$  — константы вещества.

Формула (16.6) адекватно описывает дисперсию в диапазоне длин волн, не очень близко расположенных к длине  $\lambda_0$ , где поглощение среды значительно возрастает.

В качестве иллюстрации на рис. 16.1 показана зависимость показателя преломления кремния от длины волн. Эта зависимость может быть описана фор-

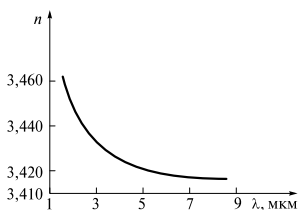


Рис. 16.1

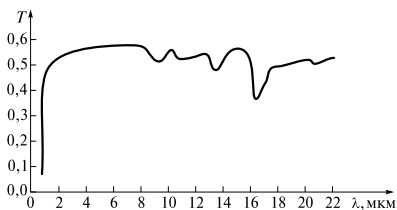


Рис. 16.2

мулой (16.6), в которой  $A = 3,41696$ ;  $B = 0,138497$ ;  $C = 0,13924$ ;  $D = -0,0000209$ ;  $E = 0,000000148$ ;  $\lambda_0 = 0,167$  мкм.

При приближении  $\lambda$  к видимому диапазону показатель преломления увеличивается. Одновременно будет возрастать и поглощение кремния.

На рис. 16.2 показано *спектральное пропускание*  $T(\lambda)$  для кремниевой пластинки толщиной  $l = 0,5$  мм (см. формулу (15.62)). Хорошо видно, что с уменьшением  $\lambda$  в области  $\lambda < 1$  мкм пропускание резко уменьшается. Для видимого света кремний непрозрачен.

**Абсорбционные светофильтры.** В жидкостях и твердых телах, как отмечалось ранее, линии излучения могут сливаться в полосы. Следовательно, и линии поглощения (*абсорбции*) будут также сливаться в полосы. Между полосами поглощения будут расположены полосы пропускания, для которых  $T(\lambda)$  достаточно велико.

На этом принципе работают *абсорбционные светофильтры*, предназначенные для пропускания части света в узком спектральном диапазоне. Такие светофильтры изготавливают из стекол, содержащих присадки (как правило, оксиды металлов). Обычно они представляют собой цветные плоскопараллельные отполированные пластинки. В качестве светофильтров используются также кюветы с поглощающим раствором.

Узкополосные фильтры характеризуются длиной волны  $\lambda_{\max}$ , при которой  $T(\lambda_{\max}) = T_{\max}$  (пропускание максимально), и полушириной пропускания  $\Delta\lambda_{1/2}$ . Она определяется из условия, что при  $\lambda = \lambda_{\max} \pm \Delta\lambda_{1/2}$  пропускание  $T = T_{\max}/2$ . Для характеристик фильтров, отсекающих длинноволновую или коротковолновую части спектра, используют длину  $\lambda_{\text{пр}}$ , при которой  $T = T_{\max}/2$ .

Наиболее распространены стеклянные светофильтры, выполненные из цветных стекол размером  $80 \times 80$  мм<sup>2</sup> или  $40 \times 40$  мм<sup>2</sup>, входящие в состав 117 паспортизованных образцов. В качестве примера на рис. 16.3 представлены спектральные коэффициенты пропускания  $T(\lambda)$  для сине-зеленого СЗС21 ( $\lambda_{\max} = 440$  нм,  $\Delta\lambda_{1/2} = 30$  нм), желто-зеленого ЖЗС9 ( $\lambda_{\max} = 540$  нм,  $\Delta\lambda_{1/2} = 50$  нм) и красного КС11 ( $\lambda_{\text{пр}} = 608$  нм) фильтров, имеющих толщину  $l = 3$  мм.

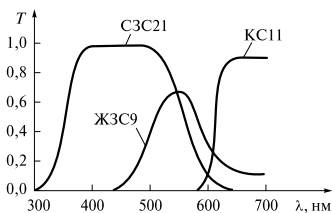


Рис. 16.3

Цветные фотографии этих светофильтров представлены на рис. 16.1 цв. вкл. Отметим, что через область их перекрытия свет практически не проходит, и эта область выглядит темной.

В большинстве случаев величина  $\Delta\lambda_{1/2}$  составляет десятки нанометров, поэтому светофильтры используются для грубой монохроматизации излучения. В тех случаях, когда надо уменьшить в одинаковой мере интенсивность каждой спектральной компоненты, применяют нейтральные стеклянные светофильтры. Спектральный коэффициент пропускания для нейтрального фильтра НС1 показан на рис. 16.4.

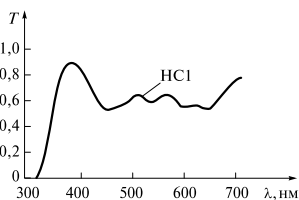


Рис. 16.4

**Распространение света в изотропных диэлектриках.** Будем считать, что проводимость  $\sigma = 0$ . Комплексная диэлектрическая проницаемость  $\epsilon = \epsilon' + i\epsilon''$  является скалярной функцией частоты:  $\epsilon = \epsilon(\omega)$ . Как следует из дисперсионного соотношения (15.16) и выражения (15.19), такая среда характеризуется комплексным показателем преломления

$$n_k = \sqrt{\epsilon} = n - i\chi, \quad (16.7)$$

при этом его действительная  $n$  и мнимая  $\chi$  части определяются выражениями (15.20). Применительно к рассматриваемой ситуации они запишутся в виде

$$n^2 = \frac{1}{2} \left( \sqrt{\epsilon'^2 + \frac{\epsilon''^2}{\epsilon_0^2 \omega^2}} + \epsilon' \right); \quad \chi^2 = \frac{1}{2} \left( \sqrt{\epsilon'^2 + \frac{\epsilon''^2}{\epsilon_0^2 \omega^2}} - \epsilon' \right), \quad (16.8)$$

поскольку  $\tilde{\epsilon} = \epsilon'$ ,  $\tilde{\sigma} = \epsilon''$ .

**Фазовая и групповая скорости.** Если вдоль оси  $Oz$  в такой среде распространяется плоская монохроматическая волна, то напряженность ее электрического поля описывается выражением (15.21):

$$E(z, t) = E_0 \exp\left(-\frac{\chi\omega}{c} z\right) \exp\left[i\omega\left(t - \frac{zn}{c}\right)\right].$$

Поскольку  $n = n(\omega)$ , фазовая скорость  $v(\omega) = c/n(\omega)$  также является функцией частоты. Ее частотная зависимость называется *дисперсией фазовой скорости*.

В области нормальной дисперсии показателя преломления, где  $\frac{dn}{d\omega} > 0$ , фазовая скорость уменьшается с ростом частоты:  $\frac{dv}{d\omega} < 0$ . В области аномальной дисперсии, где  $\frac{dn}{d\omega} < 0$ ,  $\frac{dv}{d\omega} > 0$ . В этой области сильно возрастает коэффициент

поглощения  $\alpha = 2\frac{\omega}{c}\chi(\omega)$ , являющийся также функцией частоты волны.

**Групповая скорость.** Монохроматическая волна является физической абстракцией (моделью), которая достаточно хорошо описывает волну с очень узким частотным спектром. Реальные квазимонохроматические волны можно представить в виде суперпозиции (группы) волн, частоты которых занимают конечный интервал  $\Delta\omega$  вблизи основной частоты  $\omega_0$ . Ширина интервала  $\Delta\omega$  обратно пропорциональна времени когерентности излучения  $\tau_k$ . В случае им-



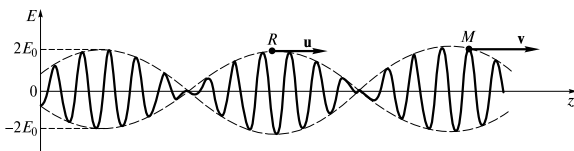


Рис. 16.5

пульсного излучения этот интервал может быть еще шире, если длительность импульса  $\tau_0 < \tau_k$ .

В диспергирующей среде каждая из волн группы имеет свою фазовую скорость, поэтому квазимонохроматическая волна или импульс движутся с некоторой скоростью, получившей название групповой.

Чтобы ее вычислить, рассмотрим простейшую ситуацию, когда группа состоит из двух плоских волн с близкими частотами  $\omega_1$  и  $\omega_2$ , распространяющихся в попутном направлении (вдоль оси  $Oz$ ). В области нормальной дисперсии показателя преломления пренебрежем поглощением волн ( $\chi = 0$ ). Будем для простоты считать их амплитуды одинаковыми. Согласно (5.19), волновые числа этих волн равны

$$k_1 = \frac{\omega_1}{c} n(\omega_1); \quad k_2 = \frac{\omega_2}{c} n(\omega_2). \quad (16.9)$$

Тогда поле рассматриваемой группы волн можно записать в виде

$$\begin{aligned} E(z, t) &= E_0 \sin(\omega_1 t - k_1 z) + E_0 \sin(\omega_2 t - k_2 z) = \\ &= 2E_0 \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2} t - \frac{\Delta k}{2} z\right) \sin(\omega_0 t - k_0 z) = A(z, t) \sin(\omega_0 t - k_0 z). \end{aligned} \quad (16.10)$$

Здесь  $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$ ;  $\Delta k = k_2 - k_1$ ;  $\omega_0 = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$ ;  $k_0 = \frac{k_1 + k_2}{2}$ . Функция  $A(z, t)$  называется *огибающей* группы волн. На рис. 16.5 изображена эта группа в фиксированный момент времени.

Точка  $M$  соответствует значению фазы  $\varphi_M = \omega_0 t - k_0 z_M = \text{const}$ , при которой  $\sin \varphi_M = 1$ . Скорость этой точки, или фазовая скорость, определяется из условия  $d\varphi_M = \omega_0 dt - k_0 dz_M = 0$  и равна

$$v = \frac{dz_M}{dt} = \frac{\omega_0}{k_0}. \quad (16.11)$$

Таким образом, фазовая скорость группы равна отношению средней частоты  $\omega_0$  к соответствующему ей волновому числу  $k_0 \approx \frac{\omega_0}{c} n(\omega_0)$ .

Точка  $R$  находится на вершине огибающей, показанной штриховыми линиями. Для нее постоянным является аргумент функции  $A$ :

$$\frac{\Delta\omega}{2} t - \frac{\Delta k}{2} z_R = \text{const}. \quad (16.12)$$

Следовательно, скорость вершины огибающей можно получить, дифференцируя (16.12):

$$\frac{\Delta\omega}{2}dt - \frac{\Delta k}{2}dz_R = 0. \quad (16.13)$$

Скорость вершины огибающей равна

$$u = \frac{dz_R}{dt} = \frac{\Delta\omega}{\Delta k}. \quad (16.14)$$

Эта скорость и называется *групповой*. С групповой скоростью переносятся энергия и информация электромагнитной волны.

На рис. 16.6 представлен фрагмент графика зависимости волнового числа от частоты.

Групповая скорость численно равна угловому коэффициенту касательной в точке  $P$ , характеризующему наклон касательной к оси  $Ok$ . Фазовая скорость численно равна угловому коэффициенту отрезка  $OP$ , наклоненного к оси  $Ok$ . Очевидно, что в области нормальной дисперсии  $u < v$ .

В области аномальной дисперсии  $u > v$ . Однако здесь некорректно говорить о какой-либо скорости группы волн. Во-первых, вследствие сильной зависимости  $n(\omega)$  огибающая в процессе распространения сильно изменяется. Во-вторых, поглощение столь велико, что о распространении группы говорить не приходится.

Обобщим проведенные рассуждения для произвольной группы волн, характеризующейся центральной частотой  $\omega_0$  и интервалом частот  $\Delta\omega \ll \omega_0$ . Вместо суммы (16.10) представим поле группы в виде интеграла Фурье:

$$\begin{aligned} E(z, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} E_0(\omega) \exp[i(\omega t - kz)] d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} E_0(\omega) \exp[i(\omega - \omega_0)t - (k - k_0)z] d\omega \exp[i(\omega_0 t - k_0 z)] = \\ &= A(z, t) \exp[i(\omega_0 t - k_0 z)]. \end{aligned} \quad (16.15)$$

Волновое число является функцией частоты:

$$k(\omega) = \frac{\omega}{c} n(\omega). \quad (16.16)$$

Дисперсионное соотношение (16.16) представим в виде ряда Тейлора:

$$\begin{aligned} k(\omega) &= k_0 + \left( \frac{dk}{d\omega} \right)_{\omega_0} (\omega - \omega_0) + \frac{1}{2} \left( \frac{d^2k}{d\omega^2} \right)_{\omega_0} (\omega - \omega_0)^2 + \dots = \\ &= k_0 + \frac{1}{u} (\omega - \omega_0) + \frac{k_2}{2} (\omega - \omega_0)^2 + \dots \end{aligned} \quad (16.17)$$

Здесь

$$u = \left( \frac{dk}{d\omega} \right)_{\omega_0}^{-1} = \left( \frac{d\omega}{dk} \right)_{k_0} \quad (16.18)$$

— групповая скорость;

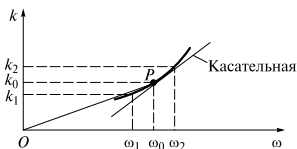


Рис. 16.6

$$k_2 = \left( \frac{d^2 k}{d\omega^2} \right)_{\omega_0} \quad (16.19)$$

— коэффициент, характеризующий *дисперсию групповой скорости* (ее зависимость от частоты). Действительно,

$$k_2 = \frac{d}{d\omega} (u^{-1})_{\omega_0} = -\frac{1}{u_0^2} \left( \frac{du}{d\omega} \right)_{\omega_0}, \quad (16.20)$$

где  $u_0 = u(\omega_0)$ .

Если вначале пренебречь дисперсией групповой скорости ( $k_2 = 0$ ), то при подстановке (16.17) в (16.15) для огибающей  $A(z, t)$  получаем

$$A(z, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} E_0(\omega) \exp \left[ i(\omega - \omega_0) \left( t - \frac{z}{u} \right) \right] d\omega = A_0 \left( t - \frac{z}{u} \right), \quad (16.21)$$

где  $A_0(t)$  — огибающая на входе в среду (при  $z = 0$ ). Следовательно, *в отсутствие дисперсии групповой скорости огибающая произвольной группы движется с групповой скоростью, при этом ее форма сохраняется*. Чем меньше отношение  $\Delta\omega/\omega_0$ , тем более справедливым является сделанное допущение.

**Дисперсионное расплывание импульсов.** Дисперсия групповой скорости становится существенной при распространении импульсов пикосекундной и фемтосекундной длительности. Для таких импульсов ширина частотного интервала  $\Delta\omega$  столь велика, что необходим учет более высоких членов в разложении (16.17). Здесь же ограничимся слагаемым с  $k_2$ , позволяющим учесть дисперсию групповой скорости в первом приближении.

Чтобы избежать сложных математических выкладок, возникающих при подстановке (16.17) в (16.15), воспользуемся простыми рассуждениями. Пусть в среде распространяется короткий световой импульс с несущей частотой  $\omega_0$  и длительностью  $\tau_0$ . Ширина его частотного спектра

$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 \sim \frac{1}{\tau_0}. \quad (16.22)$$

На этом интервале частот  $\omega_1 < \omega < \omega_2$  групповая скорость изменяется от величины  $u_2 = \left( \frac{d\omega}{dk} \right)_{k_2}$  до величины  $u_1 = \left( \frac{d\omega}{dk} \right)_{k_1}$  (см. рис. 16.6).

Если этот импульс представить в виде суммы двух импульсов с различными несущими частотами  $\omega_1$  и  $\omega_2$ , то эти импульсы будут двигаться со скоростями  $u_1$  и  $u_2$ , причем  $u_1 > u_2$ . Эти импульсы достигнут сечения  $z = \text{const}$  не одновременно, а с временным запаздыванием

$$\Delta t = \frac{z}{u_2} - \frac{z}{u_1}. \quad (16.23)$$

Чем больше координата  $z$ , тем больше время запаздывания  $\Delta t$ . На некотором расстоянии  $L_0$ , получившем название *дисперсионной длины*, время  $\Delta t$  достигнет начальной длительности импульса  $\tau_0$ :

$$\Delta t = \frac{L_0}{u_2} - \frac{L_0}{u_1} = \tau_0. \quad (16.24)$$

Следовательно, на этом расстоянии длительность импульса станет приблизительно вдвое больше начальной. Увеличение длительности импульса с пройденным расстоянием называется *дисперсионным расплыванием импульса*. Помимо этого импульс из спектрально ограниченного превращается в частотно-модулированный (фазово-модулированный). В самом деле, частота головной части будет близка к  $\omega_1$ , а хвостовой — к  $\omega_2$ .

Оценим из (16.24) дисперсионную длину. Для этого используем очевидное приближенное равенство

$$\frac{1}{u_2} - \frac{1}{u_1} = \left( \frac{dk}{d\omega} \right)_{\omega_2} - \left( \frac{dk}{d\omega} \right)_{\omega_1} = \left( \frac{d^2k}{d\omega^2} \right)_{\omega_0} \Delta\omega = \frac{k_2}{\tau_0}. \quad (16.25)$$

Подставив (16.25) в (16.24), получим

$$L_0 \sim \frac{\tau_0^2}{k_2}. \quad (16.26)$$

Следует отметить, что в области нормальной дисперсии показателя преломления, в которой и происходит дисперсионное расплывание, величина  $k_2$  может быть как положительной, так и отрицательной. В современной литературе принята следующая терминология: если  $k_2 > 0$  (см. рис. 16.6), то, согласно (16.20),  $\frac{du}{d\omega} < 0$ . В этом случае *дисперсия групповой скорости* называется *нормальной*. Если  $k_2 < 0$ , то  $\frac{du}{d\omega} > 0$ , и *дисперсия групповой скорости* *аномальная*.

В обоих случаях происходит дисперсионное расплывание на характерной длине

$$L_0 \sim \frac{\tau_0^2}{|k_2|}. \quad (16.27)$$

Фазовая модуляция различна: при  $k_2 > 0$  частота возрастает от начала к концу импульса, а при  $k_2 < 0$  она, наоборот, уменьшается.

**Пространственно-временная аналогия.** Дисперсионное расплывание импульсов подобно дифракционному расплыванию волновых пучков, где характерным расстоянием является дифракционная длина  $L_0 \sim r_0^2/\lambda$ . Длительность импульса  $\tau_0$  аналогична ширине пучка  $r_0$ , а  $|k_2|$  — длине волны  $\lambda$ .

Аналог уравнения (12.60), описывающего дифракцию пучков, — уравнение для огибающей импульса, которое приводим без вывода:

$$\frac{\partial A}{\partial z} = -\frac{k_2}{2i} \frac{\partial^2 A}{\partial t'^2}, \quad (16.28)$$

где  $t' = t - z/u$  — время, аналогичное поперечной координате в уравнении (12.60). Уравнение (16.28) по виду совпадает с (12.60), если в последнем  $A$  зависит лишь от одной поперечной координаты ( $x$  или  $y$ ).

Теперь несложно описать дисперсионное расплывание импульса, профиль которого на входе в среду является гауссовым:

$$A(z, t) = A_0 \exp(-t^2/\tau_0^2). \quad (16.29)$$

Решение уравнения (16.28) будет иметь вид, аналогичный (12.63), отличающийся лишь знаком перед мнимой единицей:

$$A(z, t') = \frac{A_0}{1 + iz/z_0} \exp\left(-\frac{t'^2}{t_0^2} \frac{1}{1 + iz/z_0}\right) = |A| \exp(i\Phi), \quad (16.30)$$

где

$$z_0 = \frac{\tau_0^2}{k_2}. \quad (16.31)$$

Профиль интенсивности

$$I(z, t') = \frac{1}{2} |A|^2 = \frac{I_0}{1 + z^2/z_0^2} \exp\left(-\frac{t'^2}{\tau_0^2 (1 + z^2/z_0^2)}\right) \quad (16.32)$$

остается гауссовым, однако длительность импульса увеличивается с пройденным расстоянием:

$$\tau_{0z} = \tau_0 \sqrt{1 + z^2/z_0^2}, \quad (16.33)$$

и, как следствие, уменьшается интенсивность.

Фаза зависит от времени по закону, аналогичному (12.65):

$$\Phi(z, t') = \frac{t'^2}{\tau_0^2} \frac{z/z_0}{1 + z^2/z_0^2} - \arctg(z/z_0). \quad (16.34)$$

Однако физический смысл этой зависимости иной, чем при дифракции, где зависимость фазы от поперечной координаты означает искривление фазового фронта.

Зависимость фазы от времени означает, что огибающая  $A = |A|e^{i\Phi}$  изменяется с мгновенной частотой

$$\Omega(t') = \frac{\partial \Phi}{\partial t'} = \frac{2t'}{\tau_0^2} \frac{z/z_0}{1 + z^2/z_0^2} = \beta t', \quad (16.35)$$

где  $\beta = \frac{2z}{\tau_0^2 z_0 (1 + z^2/z_0^2)}$  — параметр, характеризующий линейное изменение частоты в течение длительности импульса.

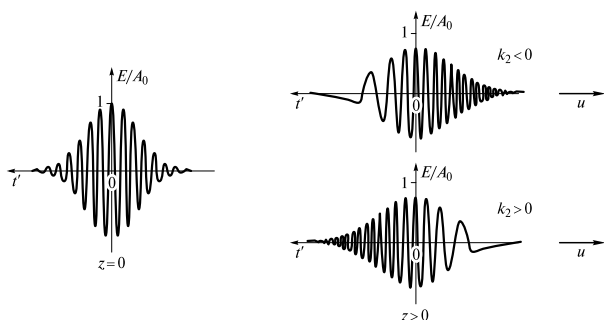


Рис. 16.7

Если  $k_2 > 0$ , то  $\beta > 0$ , и частота  $\Omega$  нарастает со временем  $t'$  (от начала к концу импульса). При  $k_2 < 0$ ,  $\beta < 0$ , и  $\Omega$  убывает.

Поле светового импульса будет осциллировать с частотой

$$\omega(t') = \omega_0 + \beta t'. \quad (16.36)$$

**Фазово-модулированный импульс с линейным законом изменения частоты** называется *чирпированным* (от англ. chirp — чирикать). Подобные акустические частотно-модулированные импульсы формируют птицы при чирикании. Если  $\beta > 0$ , то чирп считается положительным, а при  $\beta < 0$ , соответственно, отрицательным.

На рис. 16.7 показан начальный гауссов импульс при  $z = 0$  и чирпированные импульсы в среде ( $z > 0$ ) при различных знаках дисперсии групповой скорости.

**Оценки характерных величин.** Для полноты изложения оценим возможности распространения импульсов в плавленом кварце, являющимся основным материалом для волоконных световодов. Эти световоды используются в волоконно-оптических линиях связи, способных передавать импульсы на огромные расстояния.

Дисперсия фазовой и групповой скоростей в плавленом кварце показана на рис. 16.8.

На длине волны  $\lambda = 1,5$  мкм  $k_2 = -0,03$  пс<sup>2</sup>/м. Поэтому при длительности импульса  $\tau_0 = 10^{-12}$  с = 1 пс дисперсионная длина  $L_0 = \tau_0^2/|k_2| \approx 30$  м. На длине волны  $\lambda = 1,06$  мкм  $k_2 = +0,06$  пс<sup>2</sup>/м и  $L_0 \approx 15$  м.

При длине волны  $\lambda_d = 1,27$  мкм  $k_2 = 0$  и необходим учет следующего приближения дисперсии групповой скорости. Для этого в разложении (16.25) надо использовать член, содержащий  $\left(\frac{d^3k}{d\omega^3}\right)_{\omega_0}$ . Анализ показывает, что хотя дисперсионное расплывание значительно уменьшается, однако форма импульса изменяется, у огибающей появляются осцилляции и т. д.

Распространению импульса препятствуют потери, связанные с поглощением и рассеянием света в волокне. Рассеяние будет обсуждаться в разделе «Рассеяние света». Сейчас же ограничимся замечанием, что минимальное ослабление света достигается на длине волны 1,55 мкм.

Важно подчеркнуть, что в оптическом волноводе, состоящем из сердцевины и оболочки, дисперсионное соотношение  $\omega(k)$  описывается выражением, отличным от (16.16). Оно определяется не только материальной дисперсией среды (зависимостью  $n(\omega)$ ), но и так называемой волноводной дисперсией, связанной с параметрами волновода. Это позволяет изменять значение длины волны  $\lambda_d$  (при которой  $k_2 = 0$ ) путем соответствующего изменения конструкции волновода. Поэтому оптические волокна изготавливают таким образом, чтобы значение  $\lambda_d$  стало также равным 1,55 мкм. Тогда и потери, и дисперсионное расплывание будут минимальны. Более того, дисперсионное расплывание можно подавить за счет нелинейных оптических свойств плавленого кварца. Описание этих эффектов будет дано в разделе 9 «Нелинейно-оптические явления».

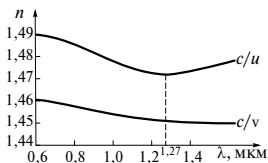


Рис. 16.8

**Волоконно-оптические системы связи.** В настоящее время между всеми континентами проложены подводные волоконно-оптические кабели, по которым осуществляется передача информации с большой скоростью.

Первый подводный кабель через пролив Ла-Манш, позволивший осуществить телеграфную связь Англии с Европой, был проложен в 1851 г. Через семь лет телеграфный кабель по дну Атлантического океана связал Европу с Северной Америкой. С 1866 г. между континентами была налажена устойчивая телеграфная связь с помощью азбуки Морзе. Скорость передачи информации, осуществляемой посредством электрических импульсов, составляла всего 17 слов в минуту.

В 1956 г. проведен первый телефонный кабель. Затем вследствие растущих потребностей обмена информацией между этими континентами было проложено еще несколько телефонных кабелей.

Помимо широчайшего практического применения телеграфных и телефонных линий связи их прокладка по дну океана продемонстрировала техническую возможность осуществления глобальной связи между различными континентами. В 1988—1989 гг. введены в строй первые трансатлантическая и транстихо-океанская волоконно-оптические системы связи. Скорость передачи информации посредством световых импульсов в каждой линии превышала 100 Мбит/с.

В 90-годы XX в. было проложено более 350 тыс. км волоконно-оптического кабеля, соединившего более 70 стран. Все материки связаны подводными волоконно-оптическими кабелями, общая протяженность которых в несколько раз превосходит длину экватора.

Практически все современные системы связи работают на длинах волн 1,3 и 1,55 мкм. В них осуществлено спектральное уплотнение каналов. Принципиальная схема линии связи показана на рис. 16.9.

Излучение разных длин волн (как правило, от различных источников света) с помощью устройства, называемого мультиплексором, вводится через усилитель в волоконный световод. Каждой длине волны соответствует свой канал связи. Разность длин волн соседних каналов составляет около 0,2 нм. В конце линии излучение вновь усиливается, затем с помощью демультиплексора разделяется по длинам волн, и далее информация обрабатывается.

По одному каналу с помощью сверхкоротких импульсов света в настоящее время удалось достичь скорости передачи информации порядка 200 Гбит/с. Количество каналов ограничено главным образом полосой усиления усилителя и в современных системах достигает нескольких десятков.

Французские исследователи (С. Биго и др., Alcatel Corporate Research Center) объединили в одном световоде 150 каналов, пропуская по световоду излучение от 150 полупроводниковых лазеров. Для этого использовался эрбиевый опти-

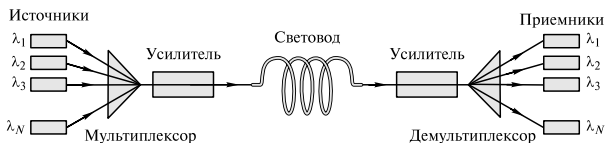


Рис. 16.9

ческий усилитель (см. лекцию 24), имеющий полосу усиления 80 нм. Скорость передачи информации по одному каналу достигала 10 Гбит/с, а по всем каналам — 1,5 Тбит/с.

Следует отметить, что длина волны излучения полупроводниковых лазеров, зависящая от температуры полупроводника, не должна в процессе работы изменяться более чем на 0,05 нм. С этой целью приходится их термостабилизировать, что, безусловно, приводит к повышению стоимости системы. Этого недостатка лишены компактные волоконные лазеры, которые накачиваются лазерными диодами (см. лекцию 24).

Быстрый прогресс в развитии волоконно-оптической связи позволяет свети к минимуму потери в кварцевом волокне в спектральной области 1 200—1 700 нм (см. лекцию 22). Это означает, что число спектральных каналов может достигать 2 500! При скорости передачи информации по каждому каналу около 200 Гбит/с суммарная скорость достигнет огромной величины  $\sim 0,5 \cdot 10^{15}$  бит/с = 0,5 Пбит/с.

**Распространение волн в металлах и плазме.** В таких средах имеется большое число свободных электронов, обеспечивающих хорошую электрическую проводимость. В дисперсионном соотношении (15.17) можно пренебречь  $\epsilon''$  по сравнению с  $\sigma' / (\epsilon_0 \omega)$ , а также реактивной составляющей электрической проводимости  $\sigma''$ . Тогда (15.18) примет вид

$$\tilde{\epsilon}_k = \epsilon' - i \frac{\sigma'}{\epsilon_0 \omega}, \quad (16.37)$$

где мнимая часть  $\tilde{\epsilon}_k$  обусловлена электрической проводимостью. Действительная и мнимая части показателя преломления, согласно (15.20), равны

$$n^2 = \frac{1}{2} \left( \sqrt{\epsilon'^2 + \frac{\sigma'^2}{\epsilon_0^2 \omega^2}} + \epsilon' \right); \quad \chi^2 = \frac{1}{2} \left( \sqrt{\epsilon'^2 + \frac{\sigma'^2}{\epsilon_0^2 \omega^2}} - \epsilon' \right). \quad (16.38)$$

Величины  $\epsilon'$  и  $\sigma'$  можно выразить через микроскопические характеристики среды, воспользовавшись формулой Лоренца — Лоренца (15.50), положив в ней  $\omega_0 = 0$  (поскольку электроны свободны) и  $\epsilon + 2 \approx 3$ , поскольку  $\epsilon \sim 1$ . В результате получим

$$\epsilon = 1 + \frac{\omega_p^2}{-\omega^2 + 2i\delta\omega}, \quad (16.39)$$

где  $\omega_p = \sqrt{\frac{Ne^2}{m\epsilon_0}}$  — плазменная частота (см. (15.55)). Выделив в (16.39) действительную и мнимую части и сравнив с (16.37), имеем:

$$\epsilon' = 1 - \frac{\omega_p^2 \omega^2}{\omega^4 + 4\delta^2 \omega^2}; \quad \frac{\sigma'}{\epsilon_0 \omega} = \frac{2\delta \omega \omega_p^2}{\omega^4 + 4\delta^2 \omega^2}. \quad (16.40)$$

Если учесть, что  $\omega \gg \delta$ , то окончательно получаем

$$\epsilon' = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}; \quad \sigma' = 2\epsilon_0 \delta \frac{\omega_p^2}{\omega^2}. \quad (16.41)$$

Проанализируем полученный результат. Если частота волны  $\omega_0 < \omega_p$ , то  $\epsilon' < 0$ . Это означает, что поле, создаваемое малоподвижными ионами и колеблющимися электронами, направлено противоположно полю падающей волны.



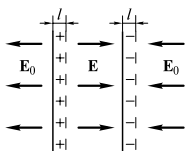


Рис. 16.10

Это легко понять, если рассмотреть простейшую ситуацию, когда к ограниченному объему среды в виде параллелепипеда в момент времени  $t = 0$  приложено статическое электрическое поле напряженностью  $E_0$ . Под действием этого поля электроны, двигаясь ускоренно, сместятся на расстояние

$$l = \frac{at^2}{2} = \frac{eE_0}{2m} t^2. \quad (16.42)$$

На рис. 16.10 схематично изображены неподвижные ионы и смещенные электроны.

Система зарядов создает свое поле  $E$ , которое подобно полю конденсатора, заряд пластин которого равен

$$Q = eNIS, \quad (16.43)$$

где  $N$  — концентрация электронов;  $S$  — площадь сечения среды, перпендикулярного внешнему полю.

Напряженность  $E$  созданного поля, направленного противоположно внешнему полю, равна

$$E = \frac{Q}{S\epsilon_0} = \frac{eNI}{\epsilon_0} = \frac{1}{2} \omega_p^2 t^2 E_0. \quad (16.44)$$

В некоторый момент времени  $t_0$  это поле компенсирует внешнее:  $E = E_0$ , что произойдет в момент времени

$$t_0 = \frac{\sqrt{2}}{\omega_p}. \quad (16.45)$$

Соотношение (16.45) позволяет грубо оценить время  $t_0$ , поскольку не учитывалось, что в процессе смещения на электроны будет действовать уменьшающееся со временем суммарное поле  $E_0 - E$ , и их движение не будет равноускоренным.

Если теперь внешнее поле будет изменяться с периодом  $T = 2\pi/\omega$ , то при частоте  $\omega < \omega_p$  период  $T > t_0$ , и плазма «успевает» компенсировать внешнее поле. Поэтому волна в среде не может распространяться. Для ее распространения необходимо, чтобы  $\epsilon' > 0$ . В этом случае  $\omega > \omega_p$  и заряды «не успевают» скомпенсировать внешнее поле.

**Некоторые оценки.** Для большинства металлов проводимость  $\sigma'$  изменяется от  $\sigma' \sim 10^5 \text{ Ом}^{-1} \cdot \text{м}^{-1}$  (в видимом диапазоне) до  $\sigma' \sim 10^7 \text{ Ом}^{-1} \cdot \text{м}^{-1}$  (в ИК-диапазоне и более низких частотах вплоть до статических полей). Например, для длины волны  $\lambda = 10 \text{ мкм}$  (ИК-диапазон) проводимость серебра  $\sigma' \sim 6,8 \cdot 10^7 \text{ Ом}^{-1} \cdot \text{м}^{-1}$ . Поэтому, полагая в (16.38)  $\sigma'/(\epsilon_0\omega) \gg \epsilon'$ , получаем

$$n \approx \chi \approx \sqrt{\frac{\sigma'}{2\epsilon_0\omega}} = \sqrt{\frac{\sigma'\lambda}{4\pi\epsilon_0 c}} \approx 1,4 \cdot 10^2.$$

Коэффициент поглощения

$$\alpha = 2 \frac{\omega}{c} \chi = \frac{4\pi}{\lambda} \chi \approx 175 \text{ мкм}^{-1}.$$

Глубина проникновения  $\Delta$  волны в серебро оценивается как расстояние, при котором ее интенсивность убывает в  $e$  раз. Используя закон Бугера—Ламберта-Бера, получаем  $e^{-\alpha\Delta} = e^{-1}$ . Тогда  $\Delta = \alpha^{-1} = 5,7 \cdot 10^{-3} \text{ мкм} = 57 \text{ \AA}$ . Эта величина на несколько порядков меньше длины волны.

Диэлектрическую проницаемость  $\epsilon'$  металлов непосредственно измерить невозможно, но можно рассчитать, если учесть, что из (16.38) она равна

$$\epsilon' = n^2 - \chi^2. \quad (16.46)$$

Немецкий физик-экспериментатор А. Кундт во второй половине XIX в. выполнил оптические эксперименты с металлическими призмами и по углу преломления света измерил  $n$  и  $\chi$  и затем рассчитал  $\epsilon'$ . Другая возможность определения  $\epsilon'$  — измерить коэффициент отражения света от металла, который, как будет показано далее, связан с  $n$  и  $\chi$ .

В качестве иллюстрации в таблице приведены значения  $n$ ,  $\chi$  и  $\epsilon'$  для длины волны света  $\lambda = 5893 \text{ \AA}$ , соответствующей  $D$ -линии излучения натрия. Видно, что во всех случаях  $\chi > n$ , поэтому  $\epsilon' < 0$ .

|                   |       |      |      |
|-------------------|-------|------|------|
| Вещество .....    | Na    | Al   | Au   |
| $n$ .....         | 0,044 | 1,44 | 0,47 |
| $\chi$ .....      | 2,42  | 5,23 | 2,83 |
| $\epsilon'$ ..... | -2,4  | -5,0 | -2,8 |

Вместо плазменной частоты воспользуемся плазменной длиной волны:

$$\lambda_p = \frac{2\pi c}{\omega_p}. \quad (16.47)$$

Если положить для металлов  $N \approx 10^{31} \text{ м}^{-3}$ , то  $\omega_p \approx 1,8 \cdot 10^{17} \text{ с}^{-1}$ , а  $\lambda_p \approx 100 \text{ \AA}$ . Таким образом, металлы прозрачны лишь для очень коротких волн. Самыми большими плазменными длинами волн обладают щелочные металлы, у которых низка концентрация свободных электронов. Так,  $\lambda_p = 2050 \text{ \AA}$  (Li);  $2100 \text{ \AA}$  (Na);  $3150 \text{ \AA}$  (K);  $3600 \text{ \AA}$  (Rb);  $4400 \text{ \AA}$  (Cs).

Подводя итог, отметим, что при  $\lambda > \lambda_p$  волна проникает на незначительную глубину, порядка толщины *скин-слоя*. Поглощение энергии в этом слое невелико, и практически вся падающая энергия волны отражается назад. Поэтому из металлических пластинок изготовляют зеркала, обладающие высокими отражательными свойствами.

В заключение приведем два примера, иллюстрирующих изложенное, обратившись к распространению радиоволн в проводящих средах. Выводы, сделанные ранее, применимы и к рассматриваемой ситуации.

■ **Пример 1.** При  $\lambda < \lambda_p$  радиоволна практически не отражается, а вся ее энергия поглощается в проводящей среде. Это используется в современных технологиях, позволяющих сделать невидимыми для радиолокационных станций (РЛС) летательные аппараты и корабли.

Еще во время Второй мировой войны немцы покрывали рубки подводных лодок и другие части, выступающие над водой, специальными материалами на основе проводящего графита, поглощающими излучение РЛС.

В 1966 г. советский математик П. Уфимцев опубликовал работу, в которой показал, что аппараты, изготовленные из плоских панелей, наклоненных под определенными углами, не будут отражать излучение в направлении на РЛС.



Рис. 16.11

Эта работа легла в основу американской технологии стелс (от англ. *stealth* — скрытность), и в 1977 г. были созданы самолеты-невидимки F-117. Однако эти самолеты из-за своей формы обладают малой скоростью и маневренностью и управляются лишь с помощью мощных

бортовых компьютеров, просчитывающих поведение машины в воздухе.

В России разработаны технологии, основанные на принципиально иных идеях. Вблизи летательного аппарата создается экран из плазмы, хорошо поглощающей излучение РЛС. Плазма образуется в результате ионизации воздуха мощным пучком электронов, создаваемым бортовым генератором. Конструкция получилась небольшой и легкой. В начале работ плазменное облако препятствовало качественной радиосвязи с Землей, но позднее эта проблема была успешно решена.

■ **Пример 2.** Отражение от ионосферы позволяет осуществить дальнюю радиосвязь на огромных расстояниях в тысячи километров. Это объясняется тем, что на высотах  $50 \text{ км} < H < 6000 \text{ км}$  происходит интенсивная ионизация атмосферного азота солнечным излучением. В результате образуется ионосфера (плазма), имеющая слоистую структуру. В самом нижнем *D*-слое ( $50 \text{ км} < H < 90 \text{ км}$ ) концентрация электронов  $N \sim 10^8 - 10^9 \text{ м}^{-3}$ , в *E*-слое ( $90 \text{ км} < H < 140 \text{ км}$ )  $N \sim 10^{11} \text{ м}^{-3}$ , в *F*-слое ( $H > 140 \text{ км}$ )  $N \sim 2 \cdot 10^{11} - 10^{12} \text{ м}^{-3}$ . В ночное время эти концентрации уменьшаются. Плазменная длина волны, например для *E*-слоя,  $\lambda_p \sim 10^2 \text{ м}$ . Следовательно, радиоволны с  $\lambda > 100 \text{ м}$  будут отражаться от этого слоя. Более короткие волны будут отражаться от нижнего *D*-слоя.

Если радиолуч от радиостанции РС, установленной на поверхности земли, направить под углом к вертикали, то он будет многократно отражаться последовательно от ионосферы и от поверхности земли (рис. 16.11). В результате он может достичь приемника Пр волны, находящегося далеко за линией горизонта. Длинные радиоволны ( $\lambda \sim 1 \text{ км}$ ), вследствие значительной дифракции, просто огибают поверхность Земли и могут также передаваться на тысячи километров.

## РАЗДЕЛ 6

### ОПТИЧЕСКИЕ ЯВЛЕНИЯ НА ГРАНИЦЕ РАЗДЕЛА СРЕД. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ОПТИКА

#### ЛЕКЦИЯ 17

Из многочисленных опытов известно, что при падении световой волны на границу раздела двух сред возникают, в общем случае, две волны — отраженная и проходящая через эту границу. Направления распространения этих двух волн и их интенсивности зависят как от направления падающей волны и ее интенсивности, так и от оптических характеристик двух сред.

Наиболее просто это можно продемонстрировать, направив луч лазерной указки на поверхность воды в стакане. На потолке можно зарегистрировать отраженный луч, а на дне стакана — преломленный. Изменяя угол падения луча на поверхность воды, можно обнаружить не только смещение пятен на потолке и дне стакана, но также и изменение их яркости. В частности, при наклонном падении луча яркость отраженного луча будет намного больше, чем при вертикальном падении. Это свидетельствует о том, что коэффициент отражения при наклонном падении больше, чем при падении, нормальном к поверхности. Этим объясняется тот факт, что пассажир в вагоне метро, находясь вблизи окна, видит в нем более яркие изображения удаленных от него других пассажиров по сравнению со своим собственным.

Решение задачи о прохождении волны через границу раздела можно осуществить, используя *граничные условия* для векторов электрического  $\mathbf{E}$  и магнитного  $\mathbf{H}$  полей, вытекающие из уравнений Максвелла.

**Граничные условия.** Пусть коллимированный монохроматический световой пучок падает наклонно на плоскую границу раздела двух сред. Дифракцией, в силу малости расстояний от границы раздела, можно пренебречь. Если амплитуда волны в сечении пучка постоянна, то такому пучку можно поставить в соответствие *луч света* — *отрезок прямой, направленный вдоль оси пучка в сторону его распространения*. Такими лучами будем описывать и направления распространения проходящей и отраженной волн.

Вначале рассмотрим ситуацию, когда обе среды являются прозрачными диэлектриками с известными значениями действительной части показателя преломления  $n_1$  и  $n_2$ . Поглощение можно не учитывать, поскольку будем рассматривать поля трех волн непосредственно вблизи границы раздела.

Пусть граница раздела сред 1 и 2 находится в плоскости  $z = 0$  (рис. 17.1).

Падающий луч, лежащий в плоскости  $Oxz$  (*плоскости падения*), составляет угол  $\vartheta_i$  с нормалью к границе раздела. Его направление задается единичным век-

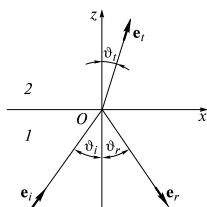


Рис. 17.1

тором  $\mathbf{e}_r$ . Отраженный луч ориентирован в направлении единичного вектора  $\mathbf{e}_r$ , составляющего угол  $\vartheta_r$  с нормалью, а преломленный — в направлении  $\mathbf{e}_t$  под углом  $\vartheta_t$  к нормали.

Будем считать падающую волну плоско поляризованной. Напряженность ее электрического поля имеет вид

$$\mathbf{E}_i = \mathbf{A}_i \exp \left[ i\omega \left( t - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{e}_i}{v_1} \right) \right]. \quad (17.1)$$

Вектор  $\mathbf{A}_i$  составляет некоторый угол  $\alpha_i$  с плоскостью падения. Соответственно для отраженной и преломленной волн можем записать

$$\mathbf{E}_r = \mathbf{A}_r \exp \left[ i\omega \left( t - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{e}_r}{v_1} \right) \right], \quad \mathbf{E}_t = \mathbf{A}_t \exp \left[ i\omega \left( t - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{e}_t}{v_2} \right) \right]. \quad (17.2)$$

В выражениях (17.1) и (17.2)  $v_1 = c/n_1$ ,  $v_2 = c/n_2$  — фазовые скорости волны в первой и второй средах. Поле в первой среде есть сумма полей падающей и отраженной волн, а во второй среде определяется полем лишь одной преломленной волны:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_1 &= \mathbf{E}_i + \mathbf{E}_r; & \mathbf{E}_2 &= \mathbf{E}_t; \\ \mathbf{H}_1 &= \mathbf{H}_i + \mathbf{H}_r; & \mathbf{H}_2 &= \mathbf{H}_t. \end{aligned} \quad (17.3)$$

Граничные условия требуют непрерывности тангенциальных (лежащих в плоскости  $Oxy$ ) компонент:

$$E_{1\tau} = E_{2\tau}; \quad H_{1\tau} = H_{2\tau}. \quad (17.4)$$

**Законы геометрической оптики.** Установим связь между углами  $\vartheta_r$ ,  $\vartheta_t$  и заданным углом падения  $\vartheta_i$ . Соотношения (17.4) будут выполняться, если аргументы функций (17.1) и (17.2) одинаковы в любой момент времени:

$$t - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{e}_i}{v_1} = t - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{e}_r}{v_1} = t - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{e}_t}{v_2}, \quad (17.5)$$

где  $\mathbf{r}$  лежит в плоскости  $Oxy$ . Тогда  $\mathbf{e} \cdot \mathbf{r} = e_\tau$  и (17.5) запишется в виде

$$\frac{e_{i\tau}}{v_1} = \frac{e_{r\tau}}{v_1} = \frac{e_{t\tau}}{v_2}. \quad (17.6)$$

Очевидно, что все *три единичных вектора лежат в одной плоскости падения*  $Oxz$ . Поскольку  $e_{i\tau} = \sin \vartheta_i$ ;  $e_{r\tau} = \sin \vartheta_r$ ;  $e_{t\tau} = \sin \vartheta_t$ , можно записать два соотношения между углами, определяющие содержание двух законов геометрической оптики: *закона отражения*

$$\vartheta_i = \vartheta_r \quad (17.7)$$

и *закона преломления*

$$\frac{\sin \vartheta_i}{\sin \vartheta_t} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{n_2}{n_1}, \quad (17.8)$$

получившего название *закона Снеллиуса* в честь голландского ученого В. Снеллиуса, открывшего этот закон экспериментально в 1621 г. Закон отражения света был известен еще древним грекам, которые успешно его применяли на практике.

Ярким экспериментальным подтверждением закона Снеллиуса является выполненный И. Ньютоном эксперимент по разложению белого света на цвета с помощью стеклянной призмы. Разложение белого света в спектр показано на рис. 17.1 цв. вкл.

Если свет падает из оптически более плотной среды в менее плотную ( $n_1 > n_2$ ), то угол  $\vartheta_i < \vartheta_r$ . При  $\vartheta_i = \pi/2$  преломленный луч скользит вдоль границы раздела. Это происходит при угле падения  $\vartheta_i = \vartheta_{\text{отр}}$ , при этом

$$\sin \vartheta_{\text{отр}} = \frac{n_2}{n_1} < 1. \quad (17.9)$$

Угол  $\vartheta_{\text{отр}}$  называется *углом полного внутреннего отражения*. При углах падения  $\vartheta_i \geq \vartheta_{\text{отр}}$ , как будет показано далее, интенсивность отраженной волны равна интенсивности падающей. Преломленная волна проникает в менее плотную среду на небольшую глубину порядка длины световой волны.

С преломлением и полным внутренним отражением связано появление на небосклоне цветной радуги после дождя. Луч белого солнечного света, попадая внутрь дождевой капли, ведет себя двояко, как это изображено на рис. 17.2 цв. вкл. Если он испытывает два преломления и одно отражение внутри капли, то человек, находясь спиной к солнцу, увидит радугу, красную сверху и синюю снизу. Эта радуга называется первичной. Если свет отражается внутри капли два раза, то над первичной появится менее яркая вторичная радуга. Она несколько больше первичной и отличается противоположным порядком следования цветов.

При падении света в среду с  $n_2 < 0$  угол  $\vartheta_t < 0$ . Это означает, что преломленный луч будет находиться по одну сторону от нормали с падающим. На рис. 17.3 цв. вкл. схематично показан ход лучей от точечного источника через плоскопараллельную пластинку (рис. 17.3, а цв. вкл.) и слой метаматериала (рис. 17.3, б цв. вкл.) с отрицательным показателем преломления. В последнем случае слой формирует изображение точечного источника. Простейший расчет показывает, что для этого необходимо, чтобы  $n = -1$ . Расстояние между источником и его изображением равно удвоенной толщине слоя. Важно отметить, что в этом случае все прошедшие лучи, какой бы угол не образовывали падающие лучи с нормалью к поверхности метаматериала, пересекутся в одной точке. Поэтому такой слой называют суперлинзой. Однако в отличие от обычной линзы он не фокусирует коллимированный пучок электромагнитных волн.

**Формулы Френеля.** Соотношения между амплитудами  $\mathbf{A}_i$ ,  $\mathbf{A}_r$  и  $\mathbf{A}_t$  получают из граничных условий (17.4). Каждое из полей можно представить в виде векторной суммы параллельной (лежащей в плоскости падения  $Oxz$ ) и перпендикулярной компонент:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_{\parallel} + \mathbf{E}_{\perp}; \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}_{\parallel} + \mathbf{H}_{\perp}.$$

Вначале положим, что электрическое поле  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_{\parallel}$  (рис. 17.2).

Очевидно  $\mathbf{H} = \mathbf{H}_{\perp}$ , поскольку векторы  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$  и  $\mathbf{e}$  образуют правую тройку векторов (см. (1.25) и (1.26)). Кроме того, они связаны соотношением (1.27), которое в диэлектрической среде может быть записано в виде

$$\sqrt{\epsilon_0 \epsilon} E = \sqrt{\mu_0} H \quad \text{или} \quad H = c \epsilon_0 n E. \quad (17.10)$$

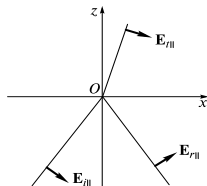


Рис. 17.2

Тогда условие  $E_{1\tau} = E_{2\tau}$  примет вид

$$E_{i\parallel} \cos \vartheta_i + E_{r\parallel} \cos \vartheta_r = E_{t\parallel} \cos \vartheta_t. \quad (17.11)$$

Второе условие  $H_{1\tau} = H_{2\tau}$  означает, что  $H_{i\perp} + H_{r\perp} = H_{t\perp}$ . С учетом (17.10) оно перепишется в виде

$$n_1 E_{i\parallel} - n_1 E_{r\parallel} = n_2 E_{t\parallel}. \quad (17.12)$$

Совместное решение (17.11) и (17.12) при учете закона Снеллиуса (17.8) позволяет получить следующие две формулы:

$$r_{\parallel} = \frac{E_{r\parallel}}{E_{i\parallel}} = \frac{A_{r\parallel}}{A_{i\parallel}} = -\frac{\operatorname{tg}(\vartheta_i - \vartheta_t)}{\operatorname{tg}(\vartheta_i + \vartheta_t)}; \quad (17.13)$$

$$t_{\parallel} = \frac{E_{t\parallel}}{E_{i\parallel}} = \frac{A_{t\parallel}}{A_{i\parallel}} = \frac{2 \sin \vartheta_t \cos \vartheta_i}{\sin(\vartheta_i + \vartheta_t) \cos(\vartheta_i - \vartheta_t)}. \quad (17.14)$$

Здесь  $r_{\parallel}$  и  $t_{\parallel}$  — амплитудные коэффициенты отражения и пропускания для параллельной компоненты электрического поля.

Если теперь электрическое поле имеет другую поляризацию ( $\mathbf{E} = \mathbf{E}_{\perp}$ ;  $\mathbf{H} = \mathbf{H}_{\parallel}$ ), то граничные условия будут отличаться от (17.11) и (17.12):

$$E_{i\perp} + E_{r\perp} = E_{t\perp}, \quad (17.15)$$

$$-n_1 E_{i\perp} \cos \vartheta_i + n_1 E_{r\perp} \cos \vartheta_r = -n_2 E_{t\perp} \cos \vartheta_t. \quad (17.16)$$

Из последних уравнений получаются две формулы для коэффициентов  $r_{\perp}$  и  $t_{\perp}$ :

$$r_{\perp} = \frac{E_{r\perp}}{E_{i\perp}} = \frac{A_{r\perp}}{A_{i\perp}} = -\frac{\sin(\vartheta_i - \vartheta_t)}{\sin(\vartheta_i + \vartheta_t)}; \quad (17.17)$$

$$t_{\perp} = \frac{E_{t\perp}}{E_{i\perp}} = \frac{A_{t\perp}}{A_{i\perp}} = \frac{2 \sin \vartheta_t \cos \vartheta_i}{\sin(\vartheta_i + \vartheta_t)}. \quad (17.18)$$

Формулы (17.13) — (17.14) и (17.17) — (17.18) называются *формулами Френеля*.

**Фазовые соотношения.** Обратим внимание на возможность смены знака у коэффициента  $r_{\parallel}$  при изменении угла падения. Если  $r_{\parallel} > 0$ , то отраженная волна находится в фазе с падающей (см. рис. 17.2). Если  $r_{\parallel} < 0$ , то вектор  $\mathbf{E}_{r\parallel}$  должен быть направлен в противоположную сторону. Следовательно, отраженная волна приобретает по отношению к падающей волне скачок фазы, равный  $\pi$ .

Проанализируем подробнее фазовые соотношения. Пусть вначале свет падает из оптически менее плотной среды в оптически более плотную:  $n_1 < n_2$ . Тогда  $\vartheta_i > \vartheta_r$ . При малых углах падения, когда  $\vartheta_i + \vartheta_t \leq \pi/2$ ,  $r_{\parallel} < 0$  и  $r_{\perp} < 0$ . Поэтому обе отраженные волны находятся в противофазе с падающей. Этот скачок фазы учитывался ранее при вычислении оптической разности хода в интерференционной схеме с кольцами Ньютона, когда происходило отражение от плоскопараллельной стеклянной пластинки.

При  $\vartheta_i + \vartheta_t = \pi/2$   $r_{\parallel} = 0$ , и одна из компонент не отражается. Соответствующий угол падения  $\vartheta_i = \vartheta_B$  называется *углом Брюстера* в честь шотландского физика Д. Брюстера, открывшего (1915) связь между этим углом и показателями преломления  $n_1$  и  $n_2$ . Она получается из закона Снеллиуса:

$$\frac{\sin \vartheta_B}{\sin \vartheta_t} = \frac{\sin \vartheta_B}{\sin(\pi/2 - \vartheta_B)} = \operatorname{tg} \vartheta_B = \frac{n_2}{n_1} < 1. \quad (17.19)$$

Таким образом, *при падении под углом Брюстера света, поляризованного в плоскости падения, его отражения не происходит*. На это ранее уже обращалось внимание при описании устройства газовых лазеров. Выходные торцы газоразрядных трубок для уменьшения потерь при отражении были наклонены под углом Брюстера. Генерируемая лазером волна получалась плоскополяризованной.

При  $\vartheta_i > \vartheta_B$  уже  $r_{\parallel} > 0$ , а  $r_{\perp} < 0$ .

Если свет падает из оптически более плотной в менее плотную среду ( $n_1 > n_2$ ), то каждая из компонент отраженной волны всегда будет в фазе с соответствующей компонентой падающей волны. Это следует из того, что коэффициенты  $r_{\parallel}$  и  $r_{\perp}$  положительны при всех углах падения.

Отметим, что поскольку  $r$  и  $t$  являются действительными величинами, то при падении плоскополяризованной волны отраженная и преломленная волны будут также плоскополяризованы. Разумеется, это утверждение справедливо, если не происходит полного внутреннего отражения.

**Амплитудные соотношения.** Проанализируем теперь амплитудные соотношения. Для практических целей используются *энергетические коэффициенты отражения  $R$  и пропускания  $T$* , которые были использованы в формуле Эйри при анализе интерференционной картины в интерферометре Фабри—Перо.

В среде с показателем преломления  $n$  интенсивность волны с учетом (2.5), (2.7), (17.10):

$$I = \langle EH \rangle = \frac{1}{2} c \varepsilon_0 n A^2. \quad (17.20)$$

Коэффициент  $R$  определим как отношение плотностей потоков энергии через единичную площадку на границе раздела:

$$R = \frac{I_r \cos \vartheta_r}{I_i \cos \vartheta_i} = \frac{A_r^2}{A_i^2} = r^2. \quad (17.21)$$

Коэффициент  $T$  определяется по смыслу аналогично:

$$T = \frac{I_t \cos \vartheta_t}{I_i \cos \vartheta_i} = \frac{A_t^2}{A_i^2} \frac{n_2 \cos \vartheta_t}{n_1 \cos \vartheta_i} = t^2 \frac{n_2 \cos \vartheta_t}{n_1 \cos \vartheta_i}. \quad (17.22)$$

С помощью формул Френеля нетрудно убедиться, что

$$R + T = 1. \quad (17.23)$$

При нормальном падении ( $\vartheta_i = 0$ )  $r_{\parallel} = r_{\perp} = r$ ,  $t_{\parallel} = t_{\perp} = t$  и

$$r = \lim_{\vartheta_i \rightarrow 0} \left[ -\frac{\sin(\vartheta_i - \vartheta_t)}{\sin(\vartheta_i + \vartheta_t)} \right] = -\frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1}; \quad (17.24a)$$

$$t = \lim_{\vartheta_i \rightarrow 0} \left[ \frac{2 \sin \vartheta_t \cos \vartheta_i}{\sin(\vartheta_i + \vartheta_t)} \right] = \frac{2n_1}{n_2 + n_1}. \quad (17.24b)$$

Поэтому

$$R = \left( \frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1} \right)^2; \quad T = \frac{n_2}{n_1} t^2 = \frac{4n_1 n_2}{(n_1 + n_2)^2}. \quad (17.25)$$



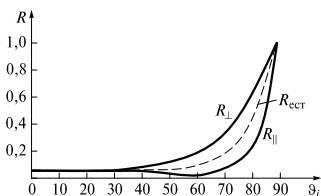


Рис. 17.3

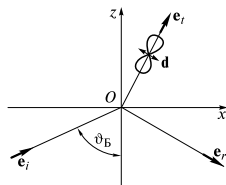


Рис. 17.4

На рис. 17.3 представлены зависимости  $R_{\parallel} = r_{\parallel}^2$  и  $R_{\perp} = r_{\perp}^2$  от угла падения при распространении волны из воздуха ( $n_1 = 1$ ) в стекло ( $n_2 = 1,5$ ).

При нормальном падении, как следует из (17.25),  $R = 0,04$  (соответственно  $T = 0,96$ ). При увеличении угла  $\vartheta$  коэффициент отражения  $R_{\perp}$  монотонно увеличивается до единицы, в то время как  $R_{\parallel}$  вначале убывает до нуля. Угол Брюстера  $\vartheta_B = \arctg(1,5/1) \approx 62^\circ$ . Затем при  $\vartheta_i > \vartheta_B$   $R_{\parallel}$  возрастает также до единицы.

**Угол Брюстера и его физический смысл.** Отсутствие параллельной компоненты в отраженном свете при падении под углом Брюстера нетрудно объяснить, если учесть, что отраженная волна (как и проходящая) возникает в результате переизлучения света элементарными осциллирующими диполями  $\mathbf{d}$ , имеющими диаграмму направленности своего излучения (см. диаграмму на рис. 3.4). Если в падающей волне присутствует лишь компонента  $E_{\parallel}$ , то и в проходящей волне будет одна компонента  $E_{\parallel}$ , которая вызовет вынужденные колебания дипольного момента в плоскости падения (рис. 17.4).

При  $\vartheta_i = \vartheta_B$  угол между  $\mathbf{e}_i$  и  $\mathbf{e}_r$  будет прямым. Поэтому диполь в направлении  $\mathbf{e}_r$  излучать не будет.

**Полное внутреннее отражение.** Рассмотрим падение света из оптически более плотной в менее плотную среду ( $n_1 > n_2$ ). Угол Брюстера  $\vartheta_B = \arctg\left(\frac{n_2}{n_1}\right)$ , а угол полного внутреннего отражения  $\vartheta_{\text{отр}} = \arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\right) > \vartheta_B$ . Например, при падении из стекла ( $n_1 = 1,5$ ) в воздух ( $n_2 = 1$ )  $\vartheta_B \approx 33^\circ$ , а  $\vartheta_{\text{отр}} \approx 42^\circ$ . Коэффициенты  $R_{\parallel}$  и  $R_{\perp}$  изменяются по-разному в зависимости от угла  $\vartheta_i$ :  $R_{\perp}$  монотонно возрастает, а  $R_{\parallel}$  вначале убывает, достигая нуля при  $\vartheta_i = \vartheta_B$ , а затем возрастает. Оба коэффициента, как следует из формул Френеля, при  $\vartheta_i = \vartheta_{\text{отр}}$  достигают максимальных значений, равных единице.

При углах падения  $\vartheta_i > \vartheta_{\text{отр}}$  закон Снеллиуса неприменим, поскольку угол  $\vartheta_t$  в (17.8) теряет смысл. Можно поступить формально, записав (17.8) в виде

$$\cos \vartheta_t = \sqrt{1 - \sin^2 \vartheta_t} = \sqrt{1 - \frac{n_1^2}{n_2^2} \sin^2 \vartheta_i} = i \sqrt{\frac{n_1^2}{n_2^2} \sin^2 \vartheta_i - 1}. \quad (17.26)$$

Величина  $\cos \vartheta_t$  становится мнимой. Если теперь преобразовать (17.13) и (17.17) с учетом (17.26), то величины  $r_{\parallel}$  и  $r_{\perp}$  становятся комплексными. Модули этих величин  $|r_{\parallel}| = |r_{\perp}| = 1$ . Если падающая волна плоскополяризована, то отраженная волна, в общем случае, становится эллиптически поляризованной. Это обусловлено появлением сдвига фаз у колеблющихся компонент  $E_{\parallel}$  и  $E_{\perp}$ .

Продолжая формальный подход, преобразуем выражение (17.2) для поля  $\mathbf{E}_r$ . Учитывая, что  $\mathbf{r} \cdot \mathbf{e}_t = x \sin \vartheta_t + z \cos \vartheta_t$ , где  $\cos \vartheta_t$  определяется из (17.26), получаем:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_t &= \mathbf{A}_t \exp \left\{ i \left[ \omega \left( t - \frac{x \sin \vartheta_t + z \cos \vartheta_t}{v_2} \right) \right] \right\} = \\ &= \mathbf{A}_t \exp \left( - \frac{2\pi}{\lambda} z \sqrt{\frac{n_1^2}{n_2^2} \sin^2 \vartheta_t - 1} \right) \exp \left[ i \left( \omega t - \frac{2\pi}{\lambda} \sin \vartheta_t x \right) \right], \end{aligned} \quad (17.27)$$

где  $\frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{v_2}$ ;  $\lambda$  — длина волны во второй среде.

Таким образом, преломленная волна распространяется вдоль оси  $Ox$  с фазовой скоростью  $v_2/\sin \vartheta_t$ , и ее амплитуда экспоненциально убывает вдоль оси  $Oz$  на масштабе расстояний порядка длины волны. Расчет показывает, что *поток энергии через границу раздела*, определяемый  $z$ -компонентой вектора Пойнтинга  $S_z = (\mathbf{E}_t \times \mathbf{H}_t)_z$ , *осциллирует во времени с изменением направления и средней его значение за период равно нулю.*

**Отражение естественного света.** Если в падающей плоскополяризованной волне вектор  $\mathbf{A}_i$  составляет угол  $\alpha_i$  с плоскостью падения, то  $A_{i\parallel} = A_i \cos \alpha_i$ ,  $A_{i\perp} = A_i \sin \alpha_i$ . Для отраженной волны  $A_{r\parallel} = r_{\parallel} A_i \cos \alpha_i$ ,  $A_{r\perp} = r_{\perp} A_i \sin \alpha_i$ . Интенсивность волны

$$I_r = \frac{1}{2} c \epsilon_0 n_1 |A_r|^2 = \frac{1}{2} c \epsilon_0 n_1 A_i^2 (r_{\parallel}^2 \cos^2 \alpha_i + r_{\perp}^2 \sin^2 \alpha_i) = I_i R_{\alpha}, \quad (17.28)$$

где

$$R_{\alpha} = r_{\parallel}^2 \cos^2 \alpha_i + r_{\perp}^2 \sin^2 \alpha_i. \quad (17.29)$$

Следовательно, коэффициент отражения зависит от угла поляризации  $\alpha_i$ . Для *естественного света* угол  $\alpha_i$  хаотически меняется на масштабе времени когерентности  $\tau_k$ . Коэффициент его отражения  $R_{\text{ест}}$  получается усреднением (17.29) за промежутки времени  $\Delta t \gg \tau_k$ :

$$R_{\text{ест}} = \langle R_{\alpha} \rangle = \frac{1}{2} (R_{\parallel} + R_{\perp}). \quad (17.30)$$

На рис. 17.3 поведение  $R_{\text{ест}}$  изображено штриховой линией.

**Волоконные световоды.** Явление полного внутреннего отражения реализуется в *волоконных световодах*, предназначенных для канализации и передачи информации и световой энергии на большие расстояния. Они представляют собой тонкие длинные кварцевые нити. Их изготавливают из газообразной фазы  $\text{SiO}_2$ . Вначале получают цилиндрическую заготовку из плавленого кварца диаметром  $\sim 1$  см и длиной  $\sim 1$  м. В ее сердцевину (приосевую часть) добавляют примеси ( $\text{GeO}_2$ ,  $\text{PO}_5$  и др.) с целью увеличить показатель преломления. В остальную часть (оболочку) добавляют фториды. Затем заготовку вытягивают в тонкую нить. В простейшем случае нить, сечение которой изображено на рис. 17.5, имеет ступенчатый профиль показателя преломления.

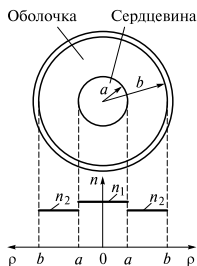


Рис. 17.5

Относительная разность показателей преломления невелика:

$$\Delta = \frac{n_1 - n_2}{n_1} \sim 3 \cdot 10^{-2}.$$

Однако этого оказывается достаточно, чтобы луч света, составляющий с осью волновода небольшой угол, испытывал полное внутреннее отражение. Волна распространяется главным образом в сердцевине, проникая незначительно в оболочку.

Радиальное распределение амплитуды волны определяется из уравнений Максвелла с соответствующими граничными условиями. Как и в резонаторе лазера, эти распределения связаны с соответствующими модами. Для самой нижней моды распределение поля в сердцевине будет близко к гауссову, для более высоких мод поля амплитуда более сложно зависит от полярного радиуса  $\rho$  и полярного угла  $\varphi$  (на рис. 17.5 не показан).

Чем больше длина волны, тем меньше мод может распространяться в волноводе. Поэтому существует длина волны  $\lambda_c$ , при которой в волноводе будет распространяться лишь низшая (основная) мода. Величина  $\lambda_c$  называется *длиной волны отсечки*, поскольку волны с  $\lambda > \lambda_c$  распространяться не могут.

Величину  $\lambda_c$  можно определить из следующих соображений. Для низшей моды, похожей на гауссов пучок, распределение амплитуды  $A(\rho) \propto J_0(k_\perp \rho)$ , где  $J_0$  — функция Бесселя нулевого порядка;  $k_\perp$  — поперечная проекция волнового вектора. На рис. 17.6 показан волновой вектор  $\mathbf{k}$  и его компонента  $\mathbf{k}_\perp$  при падении волны из сердцевины в оболочку под углом полного внутреннего отражения  $\vartheta_{\text{отр}}$ .

Чтобы поле было локализовано в сердцевине, необходимо, чтобы на границе ( $\rho = a$ )

$$A(\rho) \propto J_0(k_{\perp c} a) = 0.$$

$$\text{Здесь } k_{\perp c} = k_c \cos \vartheta_{\text{отр}} = \frac{2\pi}{\lambda_c} n_1 \sqrt{1 - \frac{n_2^2}{n_1^2}}.$$

Наименьший корень уравнения  $J_0(V_c) = 0$  известен:  $V_c = 2,44$ . Поэтому длина волны отсечки определяется условием

$$V_c = \frac{2\pi}{\lambda_c} \sqrt{n_1^2 - n_2^2} a = 2,44. \quad (17.31)$$

Для обычных волноводов  $n_1 - n_2 = 0,005$ ,  $a = 4$  мкм. Поэтому  $\lambda_c = 1,2$  мкм. В таком волокне будет без дифракции распространяться гауссов пучок, если его длина волны  $\lambda \approx \lambda_c = 1,2$  мкм. Для таких или близких длин волн волновод будет *одномодовым*. Одномодовые волокна в видимом диапазоне имеют меньший радиус сердцевины:  $a \approx 2$  мкм. Радиус оболочки обычно составляет гораздо большую величину:  $b = 50 - 60$  мкм.

Из-за поглощения и рассеяния света интенсивность волны при распространении убывает по экспоненциальному закону:

$$I(z) = I_0 e^{-\alpha z}.$$

Коэффициент ослабления, или коэффициент экстинкции,  $\alpha$  сильно зависит от длины волны.

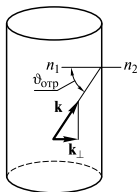


Рис. 17.6

Первые световоды имели очень большие потери:  $\alpha \sim 10^3$  дБ/км. Напомним, что

$$\alpha \text{ (дБ/км)} = \frac{10}{z} \lg \left( \frac{I_0}{I} \right) = 4,34\alpha \text{ (км}^{-1}\text{)}.$$

Современные кварцевые световоды имеют минимальное значение  $\alpha \sim 0,2$  дБ/км на длине волны  $\lambda = 1,55$  мкм. Это означает, что интенсивность убывает в  $e$  раз на расстоянии  $z = \alpha^{-1} = 4,34/0,2 \text{ км} \approx 22 \text{ км}$ . Если вдоль волоконной линии поставить усилители света, то по волокну можно передавать световые импульсы на огромные расстояния, превышающие земные масштабы. Однако для этого необходимо подавить дисперсионное расплывание импульсов, что достигается нелинейно-оптическими методами, которые будут рассмотрены в разд. 9.

**Микроструктурированные волокна.** Наряду с обычными волноводами в последние годы стали использоваться волноводы с кварцевой или стеклянной микроструктурой, которая представляет собой в поперечном сечении периодически или аperiodически расположенные воздушные отверстия. Подобная структура изготавливается вытягиванием полых волокон.

Такие световоды обладают хорошей отражательной способностью. Потери у этих волноводов существенно ниже, чем у обычных. Изменяя структуру оболочки, можно изменить зависимость  $\omega(k)$  для различных мод, что открывает новые возможности в области телекоммуникаций, позволяет существенно увеличить плотность энергии поля волны в сердцевине и тем самым значительно усилить нелинейно-оптические взаимодействия (более подробно см. лекции 22 и 24).

**Просветляющие покрытия.** Несмотря на то что энергетический коэффициент отражения от стеклянной поверхности составляет всего 4 %, отражательную способность можно заметно уменьшить, если на поверхность нанести тонкий слой диэлектрика, подобрав его показатель преломления и толщину. Такое покрытие называется *просветляющим*.

Пусть волна падает нормально на границу раздела, на которую нанесен тонкий слой толщиной  $L$  с показателем преломления  $n_3$  (рис. 17.7).

Падающая волна будет испытывать отражение от обеих границ слоя. На левой границе слоя, согласно (17.24а), коэффициент отражения

$$r_{13} = -\frac{n_3 - n_1}{n_3 + n_1}, \quad (17.32)$$

а на правой границе

$$r_{32} = -\frac{n_2 - n_3}{n_2 + n_3}. \quad (17.33)$$

Если показатель преломления слоя

$$n_3 = \sqrt{n_1 n_2}, \quad (17.34)$$

то

$$r_{13} = r_{32} = -\frac{\sqrt{n_2} - \sqrt{n_1}}{\sqrt{n_2} + \sqrt{n_1}}. \quad (17.35)$$

При  $n_1 = 1,0$ ,  $n_2 = 1,5$ ,  $n_3 = 1,22$  коэффициенты  $r_{13} = r_{32} \approx -0,1$ .

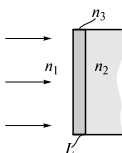


Рис. 17.7

В силу малости коэффициентов отражения можно учесть лишь однократные отражения падающей волны от границ слоя. Тогда две отраженные волны будут иметь приблизительно равные амплитуды, а их разность фаз будет зависеть от оптической толщины  $n_3L$  слоя. Если

$$n_3L = (2m - 1) \frac{\lambda_0}{4}, \quad m = 1, 2, 3, \dots, \quad (17.36)$$

то отраженные волны при интерференции взаимно компенсируются. Слой, удовлетворяющий условию (17.36), называют *четвертьволновым*. Следовательно, отраженная волна практически будет отсутствовать, и вся световая энергия проникнет через четвертьволновой слой во вторую среду.

Просветляющие покрытия наносятся, например, на поверхность оптических линз фотоаппаратов, теле- и видеокамер и др. Показатель преломления и толщину подбирают с тем расчетом, чтобы обеспечить наилучшее проникновение для длины волны  $\lambda$ , принадлежащей к наиболее интенсивной желто-зеленой части спектра солнечного света. Поскольку в отраженном свете эта часть спектра отсутствует, то поверхность линзы становится окрашенной в синий или фиолетовый цвета.

**Зеркальные покрытия.** Пусть четвертьволновой слой имеет показатель преломления  $n_3 > n_1, n_2$ . Тогда  $r_{13} < 0$ , а  $r_{32} > 0$ , при этом с увеличением  $n_3$  отражение от границ слоя увеличивается. Отраженные волны будут находиться в фазе. Поэтому такой слой способствует увеличению отражения и выполняет роль зеркального покрытия для света с длиной волны  $\lambda$ , удовлетворяющей (17.36).

**Учет многократных отражений от слоя.** Рассчитаем коэффициент отражения с учетом многократных проходов и отражений от границ слоя с произвольной оптической толщиной  $n_3L$ . Если амплитуда электрического поля нормально падающей на слой волны равна  $A_i$ , то амплитуда отраженной волны  $A_r$  может быть представлена в виде ряда:

$$A_r = A_i(r_{13} + t_{13}t_3^2r_{32}t_{31}e^{i\Phi} + t_{13}t_3^4r_{32}^2t_{31}e^{i2\Phi} + \dots) = A_i \left( r_{13} + \frac{t_3^2r_{32}t_{13}t_{31}e^{i\Phi}}{1 - t_3^2r_{32}^2t_{31}e^{i\Phi}} \right) = A_i r, \quad (17.37)$$

где  $\Phi = \frac{2\pi}{\lambda_0} 2n_3L$ ;  $t_3$  — коэффициент пропускания слоя;  $t_{13}$  и  $t_{31}$  — коэффициенты пропускания, определяемые по аналогии с (17.246). Коэффициент отражения  $r$  слоя определяется выражением в скобках.

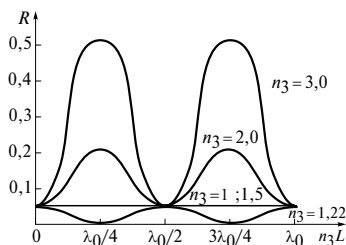


Рис. 17.8

На рис. 17.8 показана зависимость энергетического коэффициента отражения  $R = |r|^2$  от оптической толщины пленки, нанесенной на поверхность стекла с  $n_2 = 1,5$ .

При  $n_3 = 1$  и  $n_3 = 1,5$   $R = 0,04$ , как и должно быть в отсутствие покрытия. Если  $n_3 = \sqrt{n_1 n_2} = 1,22$ , то четвертьволновая пленка будет просветляющей, если  $n_3 = 2,0; 3,0$ , то — отражающей. Полуволновая пленка работает как светофильтр, пропускающий свет в ограниченной спектральной области.

Для покрытий применяют небольшой набор прозрачных диэлектриков, стойких к атмосферным воздействиям. В видимой области для просветления используют фтористый магний  $\text{MgF}_2$  ( $n_3 = 1,38$ ) или криолит  $3\text{NaF} \cdot \text{AlF}_3$  ( $n_3 = 1,35$ ). Естественно, что условие (17.34) точно не выполняется.

**Многослойные диэлектрические зеркала.** Из рис. 17.8 видно, что коэффициент

отражения от одного слоя не очень большой ( $R \sim 0,5$ ), при этом отражаются волны, для которых слой является четвертьволновым. Для получения хорошо отражающих поверхностей (зеркал) в широком спектральном диапазоне на поверхность стеклянной пластинки наносят напылением много чередующихся четвертьволновых слоев диэлектриков с показателями преломления  $n'_3$  и  $n''_3 < n'_3$ . При этом первым наносится слой с большим показателем преломления. В результате образуется **многослойное диэлектрическое зеркало** с высоким коэффициентом отражения.

Например, при напылении на стекло 14 четвертьволновых слоев  $\text{ZnS}$  ( $n'_3 = 2,30$ ) и криолита ( $n''_3 = 1,35$ ) получается зеркало, спектральная зависимость коэффициента отражения  $R$  которого показана на рис. 17.9.

Здесь  $\lambda_0$  — длина волны, для которой слои являются четвертьволновыми. В максимуме  $R = 0,98$ . Если  $\lambda_0 = 550$  нм, то  $\Delta\lambda \approx 0,3\lambda_0 = 165$  нм. Используя разнообразные покрытия и увеличивая число слоев, можно изготавливать зеркала, хорошо отражающие свет в разных спектральных диапазонах.

Расчет, который несложно провести, показывает, что при четном числе слоев  $2N$  в отсутствие потерь в слоях коэффициент отражения

$$r = \frac{n_1 \left( \frac{n''_3}{n'_3} \right)^N - n_2 \left( \frac{n'_3}{n''_3} \right)^N}{n_1 \left( \frac{n''_3}{n'_3} \right)^N + n_2 \left( \frac{n'_3}{n''_3} \right)^N}. \quad (17.38)$$

При  $N \rightarrow \infty$   $r \rightarrow -1$ . Однако при превышении некоторого числа слоев отражение начнет ухудшаться из-за возрастания поглощения и рассеяния.

По-видимому, в настоящее время предельно высоким коэффициентом отражения обладают диэлектрические зеркала, используемые в описанной ранее гравитационной антенне LIGO. При нанесении  $2N = 40$  слоев диэлектриков  $\text{SiO}_2$  ( $n''_3 = 1,41$ ) и  $\text{Ta}_2\text{O}_5$  ( $n'_3 = 2,10$ ) на длине волны  $\lambda_0 \approx 1$  мкм коэффициент отражения  $R \sim 1 - 10^{-6} = 0,999999\dots$

**Металлические зеркала.** Другой разновидностью зеркал являются гладкие металлические поверхности. Коэффициент отражения от такой поверхности получается из формулы (17.24а), в которую надо подставить комплексный показатель преломления  $n_{2k} = n_2 - i\chi_2$ :

$$r_{12} = - \frac{n_2 - n_1 - i\chi_2}{n_2 + n_1 - i\chi_2}. \quad (17.39)$$

Переходя к коэффициенту отражения по интенсивности, получаем

$$R = |r_{12}|^2 = \frac{(n_2 - n_1)^2 + \chi_2}{(n_2 + n_1)^2 + \chi_2}. \quad (17.40)$$

В ИК-диапазоне для серебра при  $\lambda = 10$  мкм (см. лекцию 16)  $n_2 \approx \chi_2 \approx 140$ , поэтому  $R \approx 1$ . С уменьшением длины волны коэффициент отражения металлов уменьшается.

Для длин волн  $\lambda < \lambda_p$  ( $\lambda_p$  — плазменная длина волны) действительная часть показателя преломления металлов  $n_2 < 1$ . Поэтому при наклонном падении волны из воздуха ( $n_1 = 1$ ) на металлическое зеркало происходит полное внутреннее отражение, и в коротковолновой части спектра коэффициент отражения увеличивается.

**Интерференционные светофильтры.** Простейший *интерференционный фильтр* представляет собой эталон Фабри—Перо с промежутком между зеркалами порядка длины волны. Интерференционные кольца становятся широкими, расстояние между ними увеличивается, однако отношение ширины полос к расстоянию между ними определяется лишь коэффициентом отражения зеркал и не зависит от расстояния между ними. Сами зеркала могут быть как многослойными диэлектрическими, так и металлическими.

При нормальном падении разность фаз, согласно (10.16),  $\Phi = \frac{2\pi}{\lambda_0} 2Ln$ . Для тех длин волн  $\lambda_m$ , для которых выполняется условие  $\Phi = 2\pi m$ , или

$$\lambda_m = \frac{2Ln}{m}, \quad m = 1, 2, 3, \dots, \quad (17.41)$$

интенсивность прошедшего света, как следует из формулы Эйри (10.20), будет максимальной и равной интенсивности падающей волны. Из (17.41) следует, что фильтр подобен полуволновому слою, помещенному между зеркалами.

При  $m = 1$  фильтр называется *фильтром 1-го порядка*, при  $m = 2, 3, \dots$  — фильтром 2-го, 3-го, ... порядков. Стекланный фильтр первого порядка, рассчитанный на длину волны  $\lambda_1 = 6000$  Å, не будет пропускать волны с длиной  $\lambda_m = \lambda_1/m$ , поскольку они будут поглощаться стеклом.

Низкие порядки интерференции обеспечивают сравнительно широкую полосу пропускания. Ширина спектрального интервала, на границах которого пропускание фильтра уменьшается на порядок, в случае серебряных зеркал  $\Delta\lambda \approx 100 - 300$  Å. У хороших фильтров с диэлектрическими зеркалами она значительно уже:  $\Delta\lambda \approx 10 - 20$  Å.

При наклонном падении света на фильтр величина  $\Phi$  уменьшается, что используется для небольшого смещения полосы пропускания в коротковолновую часть спектра.

На рис. 17.4, а—г вкл. представлен один и тот же интерференционный светофильтр при различных ориентациях по отношению к падающему белому свету. Отчетливо видно существенное смещение полосы его пропускания.

## ЛЕКЦИЯ 18

**Распространение света через сферическую границу раздела сред.** Если плоская волна пересекает такую границу, то ее волновой фронт приобретает кривизну. Таким образом, после пересечения границы формируются сходящиеся или расходящиеся пучки света. Этот вывод легко подтверждается в любом опыте, в котором коллимированный пучок света проходит через собирающую или рассеивающую линзу. Если в качестве границы раздела использовать сферическое (вогнутое или выпуклое) зеркало, то при отражении первоначально коллимированного пучка света сформируются сходящиеся или расходящиеся сферические волны.

Поскольку протяженность границы раздела ограничена (обусловлена конечными размерами линз, зеркал и пр.), радиус кривизны волны, сформированной при пересечении этой границы, в дальнейшем из-за дифракции будет изменяться.

На рис. 18.1 показана эволюция волнового фронта сходящейся сферической волны, отмеченного сплошными линиями. Штриховые линии определяют характерные области, занимаемые волной (световым пучком).

В точке  $P$  находится центр кривизны начального волнового фронта, имеющего радиус кривизны  $R_0$ . Затем при распространении сходящейся волны радиус кривизны вначале уменьшается, однако при приближении фронта к точке  $P$  из-за усиливающейся дифракции начинает неограниченно возрастать. В точке  $P$  фронт волны становится плоским; минимальный размер пучка и соответственно максимальная интенсивность ограничены дифракцией. Затем волна становится расходящейся. Радиус кривизны ее фронта вначале уменьшается, а затем увеличивается с пройденным волной расстоянием.

Таким образом, *сходящаяся волна фокусируется в пятно конечных размеров*, с центром в точке  $P$ . Эта точка находится на пересечении лучей — отрезков прямых, перпендикулярных начальному волновому фронту. Это позволяет использовать законы геометрической оптики, оперирующей со световыми лучами, для нахождения центров кривизны сходящейся и расходящейся сферических волн.

Применим *волновой и геометрооптический* подходы для нахождения точки фокусировки плоской волны, прошедшей через границу раздела двух диэлектриков с показателями преломления  $n_1$  и  $n_2 > n_1$  (рис. 18.2). Поверхность имеет радиус кривизны  $R = OC$  и центр кривизны в точке  $C$ . Определим положение точки  $P$ , в которой интенсивность максимальна.

Оптическая разность хода между лучами 2 и 1 в плоскости  $\Pi$

$$\Delta' = (n_1 - n_2) \frac{r^2}{2R} < 0. \quad (18.1)$$

Здесь предполагается, что  $r \ll R$ . В точке  $P$ , удаленной на расстояние  $f$  от поверхности, появляется дополнительная разность хода



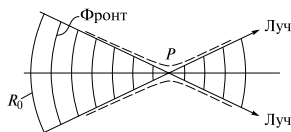


Рис. 18.1

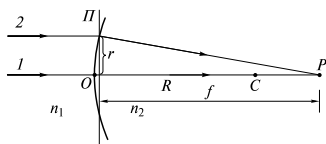


Рис. 18.2

$$\Delta'' = \frac{r^2}{2f} n_2. \quad (18.2)$$

Интенсивность в ней будет максимальна, если

$$\Delta' + \Delta'' = 0. \quad (18.3)$$

Подставив в (18.3) формулы (18.1) и (18.2), получим

$$\frac{1}{f} = \frac{n_2 - n_1}{n_2} \frac{1}{R}. \quad (18.4)$$

Таким образом, граница раздела обладает фокусирующим свойством. Фокусное расстояние  $f$  не зависит от величины  $r$  лишь для приосевых лучей, у которых  $r \ll R$ . Если же поверхность имеет форму параболоида вращения с радиусом кривизны  $R$ , то (18.4) справедливо для любых параллельных лучей.

Определим положение точки  $P$  теперь с помощью законов геометрической оптики, воспользовавшись ходом лучей, изображенных на рис. 18.3.

В геометрической оптике принято использовать правило знаков. Положительное направление вдоль оси оптической системы (параллельной  $OC$ ) совпадает с направлением падающего луча (слева направо). Радиус кривизны поверхности рассчитывается от ее вершины  $O$  к центру кривизны  $C$ . Поэтому для выпуклой поверхности (изображенной на рисунке)  $R > 0$ , а для вогнутой  $R < 0$ . Фокусное расстояние  $f$  отсчитывается от вершины поверхности  $O$  до фокальной точки  $P$ , в которой пересекаются либо сами лучи ( $f > 0$ ), либо их продолжение ( $f < 0$ ). В поперечном направлении положительное направление отсчитывается вверх. Это аналогично отсчету в декартовой системе координат  $Oxy$  на плоскости чертежа.

Для приосевых лучей углы  $\vartheta_i$  и  $\vartheta_t$  малы. Это позволяет записать очевидные соотношения

$$\frac{\vartheta_i}{\vartheta_t} = \frac{n_2}{n_1}; \quad \vartheta_i = \frac{r}{R}; \quad \vartheta_t = \vartheta_i - \alpha; \quad \alpha = \frac{r}{f}. \quad (18.5)$$

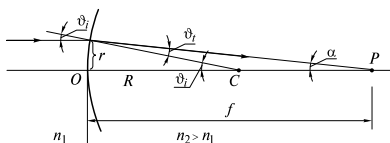


Рис. 18.3

Из них и получается формула (18.4).

Величина

$$D = \frac{n_2 - n_1}{R} \quad (18.6)$$

называется *оптической силой поверхности*. Как будет показано далее, при наличии нескольких поверхностей их оптические силы складываются алгебраически с некоторыми коэффициентами.

Если свет падает из оптически более плотной среды в оптически менее плотную (рис. 18.4), то

$$\frac{\vartheta_i}{\vartheta_t} = \frac{n_2}{n_1}; \quad \vartheta_i = \frac{r}{R}; \quad \vartheta_t = \vartheta_i + \alpha; \quad \alpha = \frac{r}{-f}. \quad (18.7)$$

Поэтому

$$\frac{1}{f} = \frac{n_2 - n_1}{n_2} \frac{1}{R} < 0. \quad (18.8)$$

Оптическая сила поверхности

$$D = \frac{n_2}{f} \quad (18.9)$$

также становится отрицательной.

**Оптическая сила системы поверхностей.** Рассмотрим систему поверхностей, центры которых лежат на одной прямой. Эта прямая является оптической осью системы, а сама система называется *коаксиальной*.

Пусть луч, составляющий малый угол с оптической осью коаксиальной системы, падает на сферическую границу раздела с радиусом кривизны  $R$  (рис. 18.5) в направлении точки  $P$ , а преломленный — точки  $P'$ .

Если показатели преломления сред по обе стороны от поверхности равны  $n$  и  $n'$ , то можно записать соотношения

$$\frac{\vartheta_i}{\vartheta_t} = \frac{n'}{n}; \quad \vartheta_i = \vartheta - \alpha; \quad \vartheta_t = \vartheta - \alpha'; \quad \vartheta = \frac{r}{R}, \quad (18.10)$$

откуда получаем

$$n'\alpha' - n\alpha = \frac{n' - n}{R} r = Dr, \quad (18.11)$$

где  $D$  — оптическая сила поверхности.

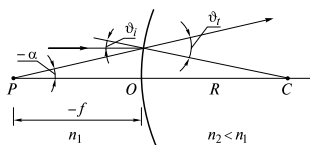


Рис. 18.4

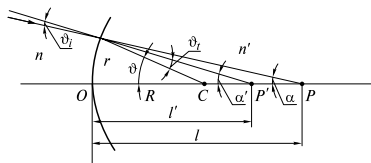


Рис. 18.5

Соотношение (18.11) можно также записать в виде

$$\frac{n'}{l'} - \frac{n}{l} = D, \quad (18.12)$$

в котором  $l$  и  $l'$  — расстояния от вершины  $O$  до точек  $P$  и  $P'$ , соответственно.

Пусть теперь имеется  $N$  преломляющих поверхностей с оптическими силами  $D_i$ , которые луч последовательно пересекает на расстояниях  $r_i$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ). Применяя последовательно уравнение (18.11) к каждой поверхности, получаем

$$n'\alpha' - n\alpha = \sum_{i=1}^N D_i r_i, \quad (18.13)$$

где  $n$  и  $\alpha$  соответствуют лучу на входе в систему, а  $n'$  и  $\alpha'$  — на выходе из системы. В частности, если падающий луч параллелен оси системы, то  $\alpha = 0$  и

$$\alpha' = \frac{1}{n'} \sum_{i=1}^N D_i r_i = \frac{1}{n'} D r_1, \quad (18.14)$$

где  $r_1$  — расстояние между падающим на систему лучом и оптической осью,

$$D = \frac{1}{r_1} \sum_{i=1}^N D_i r_i \quad (18.15)$$

— оптическая сила системы.

**Тонкая линза.** Она представляет собой *прозрачное тело, ограниченное двумя коаксиальными сферическими поверхностями, при этом толщина линзы много меньше абсолютных значений обоих радиусов кривизны*. На рис. 18.6, *а—в* показаны различные виды тонких линз и указаны знаки радиусов кривизны ограничивающих поверхностей в соответствии с правилом знаков.

В точке  $O$ , совпадающей с полюсами обеих поверхностей, находится оптический центр. Поскольку в тонкой линзе  $r_1 = r_2 = r$ , ее оптическая сила, согласно (18.6) и (18.15), равна

$$D = D_1 + D_2 = \frac{n_l - n_0}{R_1} - \frac{n_0 - n_l}{R_2} = (n_l - n_0) \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right). \quad (18.16)$$

Здесь  $n_l$  и  $n_0$  — показатели преломления материала линзы и окружающей среды. Обычно  $n_l > n_0$ , поэтому в ситуации, представленной на рис. 18.6, *а*,  $D > 0$  и линза *собирающая*, а на рис. 18.6, *б* и *в*  $D < 0$  и линза *рассеивающая*.

На оптической оси на равном удалении от оптического центра находятся две фокальные точки. Их положение определяется фокусным расстоянием  $f$ , которое с учетом (18.14) и (18.16) получаем из соотношения

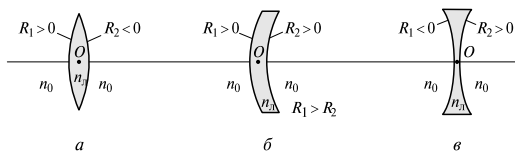


Рис. 18.6

$$\frac{1}{f} = \frac{\alpha'}{r} = \frac{D}{n_1} = \frac{n_1 - n_0}{n_1} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right), \quad (18.17)$$

называемого *формулой тонкой линзы*. Эта формула справедлива лишь для идеальной линзы, в которой отсутствуют *абберации*, или искажения.

Абберации обусловлены рядом причин. Во-первых, показатель преломления  $n_1$  зависит от длины волны света. Это означает, что различные спектральные компоненты будут фокусироваться на разных расстояниях от линзы. Такие абберации называются *хроматическими*.

Во-вторых, поверхности линз по технологическим соображениям выполняются сферическими. Тогда при падении на линзу параллельного монохроматического пучка света периферийные лучи будут фокусироваться на меньшем расстоянии, чем приосевые (рис. 18.7).

Поверхность, огибающая поверхность конусов, изображенная штриховой линией, называется *каустикой*. Такие абберации называются *сферическими*.

Если же имеются некоторые отступления формы поверхностей от сферической, то световое пятно в фокусе может принимать причудливую форму, называемую *комой* (наподобие кометы с хвостом или запятой).

Наконец, если лучи падают под большими углами наклона к оптической оси, то фокусировка в плоскости падения (меридиональной плоскости) отличается от фокусировки в перпендикулярной (сагиттальной) плоскости. Понятие фокальной плоскости (плоскости, перпендикулярной оптической оси и проходящей через фокус) теряет смысл: поверхности, на которых лежат фокусы, при меридиональной и сагиттальной фокусировке будут криволинейными и не совпадают между собой. Этот вид абберации называется *искривлением поверхности изображения*. Поэтому геометрическая оптика оперирует с *параксиальными лучами* — приосевыми лучами, составляющими малые углы с оптической осью системы.

**Условия Максвелла для коаксиальных систем.** Пусть некоторая оптическая система формирует в точке  $P$  изображение точки  $P_0$ , находящейся на оптической оси (рис. 18.8).

Дж. Максвелл сформулировал три условия, которым должна удовлетворять идеальная (безабберационная) оптическая система:

- все лучи, исходящие из точки  $P_0$ , должны проходить через точку  $P$ , где формируется изображение точки  $P_0$ . Для расфокусирующей системы в точке  $P$  должны пересекаться продолжения всех лучей;

- если плоский объект расположен в плоскости, перпендикулярной оптической оси, то его изображение должно находиться в параллельной плоскости. Такие плоскости называются *сопряженными плоскостями*;

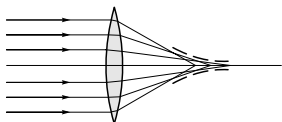


Рис. 18.7



Рис. 18.8

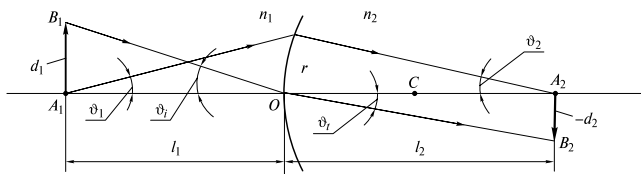


Рис. 18.9

• изображение должно быть подобно объекту. Это означает, что для любой пары сопряженных плоскостей увеличение объекта не зависит от размеров последнего.

В качестве иллюстрации последнего условия рассмотрим оптическую систему, формирующую изображение плоского предмета  $A_1B_1$ , показанного стрелкой длиной  $d_1$  (рис. 18.9).

Свяжем размер  $d_2$  изображения  $A_2B_2$  с размером  $d_1$  предмета. Для параксиальных лучей можно записать

$$\frac{\vartheta_i}{\vartheta_r} = \frac{n_2}{n_1}; \quad \vartheta_i = \frac{d_1}{-l_1}; \quad \vartheta_r = \frac{-d_2}{l_2}; \quad -l_1 = \frac{r}{\vartheta_1}; \quad l_2 = \frac{r}{\vartheta_2}. \quad (18.18)$$

Здесь все углы между лучами и оптической осью считаются положительными. Из (18.18) получаем

$$d_1 n_1 \vartheta_1 = -d_2 n_2 \vartheta_2. \quad (18.19)$$

Это условие совпадает с условием синусов (14.18) для малых углов. Оно означает, что увеличение

$$M = \frac{d_2}{d_1} = -\frac{n_1 \vartheta_1}{n_2 \vartheta_2} \quad (18.20)$$

и не зависит от расстояния  $d_1$  между точками  $A_1$  и  $B_1$ .

**Кардинальные элементы оптической системы.** Коаксиальные системы можно охарактеризовать четырьмя параметрами, которые позволяют рассчитать как положение изображения (сопряженной плоскости), так и увеличение. В большинстве случаев достаточно знать положение двух фокальных и двух главных точек.

Оптические системы подразделяют на три класса:

1) диоптрические системы — пропускающие свет системы. Падающий параллельный пучок света превращается в сходящийся или расходящийся;

2) катодиоптрические системы — отражающие свет системы. Наиболее простой системой этого вида является сферическое зеркало;

3) телескопические системы. При падении параллельного пучка света на выходе получается параллельный пучок с другим поперечным сечением.

Рассмотрим кардинальные элементы систем всех классов.

**Диоптрические системы.** Установим свойства сопряженных плоскостей, в которых находятся предмет (объект) и его изображение. *Первой фокальной плоскостью* называется плоскость, сопряженная с бесконечно удаленной в поло-

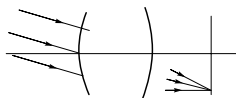


Рис. 18.10

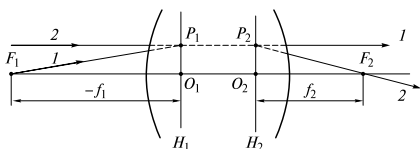


Рис. 18.11

жительном направлении плоскостью. Соответственно вторая фокальная плоскость сопряжена с бесконечно удаленной в отрицательном направлении плоскостью. Свет, идущий от бесконечно удаленного предмета (параллельный пучок), фокусируется в одной из фокальных плоскостей (рис. 18.10). Если на выходе получается расходящийся пучок, то продолжения лучей пересекаются в одной из этих плоскостей.

Среди бесконечного числа пар сопряженных плоскостей особое место занимают две *главные плоскости*, для нахождения которых рассмотрим ход лучей через систему, изображенный на рис. 18.11.

Луч 1, идущий из первого фокуса  $F_1$ , выходит параллельно главной оптической оси. Луч 2, идущий параллельно главной оптической оси на том же удалении от нее, что и выходящий луч 1, проходит через второй фокус  $F_2$ . Если через точки  $P_1$  и  $P_2$ , находящиеся на пересечениях продолжения лучей, провести две плоскости  $H_1$  и  $H_2$ , перпендикулярные оптической оси, то они и будут главными плоскостями. Точки  $O_1$  и  $O_2$  называются *главными точками*.

Два луча (1 и 2), проходящие через  $P_1$ , затем пересекаются в  $P_2$ . Следовательно,  $H_1$  и  $H_2$  — сопряженные плоскости. Если предмет расположен в плоскости  $H_1$ , то его изображение может находиться в плоскости  $H_2$ , при этом коэффициент увеличения  $M = 1$ . Последнее утверждение вытекает из равенства длин отрезков  $O_1P_1$  и  $O_2P_2$ .

Первым фокусным расстоянием называется величина  $f_1 = -O_1F_1$ , а вторым фокусным расстоянием величина  $f_2 = O_2F_2$ . В ситуации, изображенной на рис. 18.11,  $f_1 < 0$ ,  $f_2 > 0$ .

Если заданы положения фокальных и главных точек, то можно построить ход лучей в системе в отсутствие информации о других параметрах системы (радиусах кривизны элементов, их количестве, взаимном расположении, показателях преломления сред между ними и др.). На рис. 18.12 выполнено такое построение.

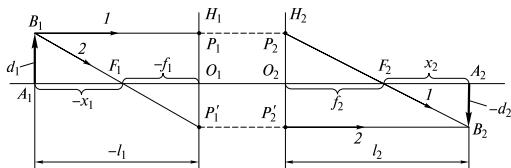


Рис. 18.12

Параллельный луч  $I$  от предмета  $A_1B_1$  проходит сначала через точку  $P_1$ , а затем через фокальную точку  $F_2$  так, чтобы падающий и преломленный лучи пересекались в точке  $P_2$  плоскости  $H_2$ . Луч 2, следующий через  $F_1$  и  $P'_1$ , выходит из системы параллельно оптической оси.

Важно подчеркнуть, что реальные лучи могут не проходить через вспомогательные точки на главных плоскостях  $H_1$  и  $H_2$ . Если точечный источник находится в  $P_1$ , то его изображение получится в  $P_2$  лишь в том случае, если все элементы системы находятся правее плоскости  $H_1$ .

Рассчитаем положение изображения и увеличение. Из подобных треугольников  $O_1P'_1F_1$  и  $P_1P'_1B_1$  имеем

$$\frac{-f_1}{-l_1} = \frac{-d_2}{-d_2 + d_1}. \quad (18.21)$$

Аналогично, из треугольников  $O_2P_2F_2$  и  $P'_2P_2B_2$  получаем

$$\frac{f_2}{l_2} = \frac{d_1}{d_1 - d_2}. \quad (18.22)$$

Из (18.21) и (18.22) находим

$$\frac{f_1}{l_1} + \frac{f_2}{l_2} = 1. \quad (18.23)$$

Коэффициент увеличения получается равным

$$M = \frac{d_2}{d_1} = -\frac{f_1 l_2}{f_2 l_1}. \quad (18.24)$$

В ситуации, изображенной на рис. 18.12,  $f_2 > 0$ ,  $l_2 > 0$ ,  $f_1 < 0$ ,  $l_1 < 0$ , поэтому  $M < 0$ . Последнее означает, что изображение получается перевернутым.

Формула (18.23) может быть преобразована в формулу Ньютона. Для этого введем величины  $x_1$  и  $x_2$ , модули которых равны расстояниям от предмета и изображения до ближайших фокальных точек. Полагая  $-l_1 = -x_1 - f_1$ ,  $l_2 = x_2 + f_2$  и подставляя в (18.23), приходим к формуле Ньютона

$$x_1 x_2 = f_1 f_2. \quad (18.25)$$

У диоптрической системы на оптической оси существуют две узловые точки. Если падающий наклонно к оси луч направлен на одну узловую точку, то выходящий луч будет параллелен падающему и направлен на вторую узловую точку. На рис. 18.13 луч  $I$  проходит через узловые точки  $N_1$  и  $N_2$ .

Узловые точки находятся на одинаковом расстоянии  $l_N$  от соответствующих главных плоскостей, так как  $O_1P_1 = O_2P_2$ , а выходящий луч параллелен падающему. Полагая в (18.23)  $l_1 = l_2 = l_N$ , получаем

$$l_N = f_1 + f_2. \quad (18.26)$$

Расстояния от узловых точек до соответствующих фокальных точек равны

$$x_{N_1} = l_N - f_1 = f_2, \quad x_{N_2} = l_N - f_2 = f_1. \quad (18.27)$$

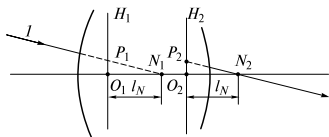


Рис. 18.13

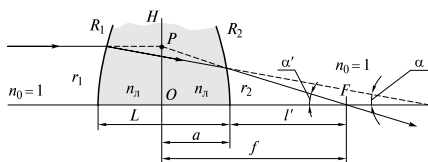


Рис. 18.14

В качестве примера рассмотрим две оптические системы: толстую линзу и систему из двух тонких линз.

**Толстая линза.** Луч, параллельный оптической оси, испытывает двухкратное преломление на каждой из поверхностей линзы (рис. 18.14), изготовленной из материала с показателем преломления  $n_{\text{л}}$  (линза находится в воздухе).

Оптические силы первой и второй поверхностей при  $n_0 = 1$ , согласно (18.9), равны

$$D_1 = \frac{n_{\text{л}} - 1}{R_1}; \quad D_2 = \frac{1 - n_{\text{л}}}{R_2}. \quad (18.28)$$

Здесь  $R_1 > 0$ ,  $R_2 < 0$ . Применив соотношение (18.11) к первой поверхности, получим

$$n_{\text{л}}\alpha = D_1 r_1. \quad (18.29)$$

Если  $L$  — расстояние между поверхностями, то

$$r_2 = r_1 - L\alpha = r_1 \left( 1 - \frac{D_1 L}{n_{\text{л}}} \right). \quad (18.30)$$

Из (18.15) следует, что оптическая сила толстой линзы с учетом (18.30)

$$D = \frac{1}{r_1} (D_1 r_1 + D_2 r_2) = D_1 + D_2 - \frac{D_1 D_2}{n_{\text{л}}} L. \quad (18.31)$$

В частности, для тонкой линзы  $L = 0$  и  $D = D_1 + D_2$ .

Расстояние  $l'$  между второй поверхностью и фокальной точкой  $F$ , с учетом (18.14) при  $n' = 1$  и (18.30), получается равным

$$l' = \frac{r_2}{\alpha'} = \frac{r_2}{D r_1} = \frac{1 - \frac{D_1 L}{n_{\text{л}}}}{D}. \quad (18.32)$$

Из треугольника  $OPF$  следует, что фокусное расстояние  $f = OF$  связано с оптической силой

$$f = \frac{r_1}{\alpha'} = \frac{1}{D}. \quad (18.33)$$

Наконец, расстояние  $a$  между главной плоскостью  $H$  и второй поверхностью

$$a = f - l' = \frac{1}{D} - \frac{1 - \frac{D_1 L}{n_{\text{л}}}}{D} = \frac{D_1 L}{D n_{\text{л}}}. \quad (18.34)$$



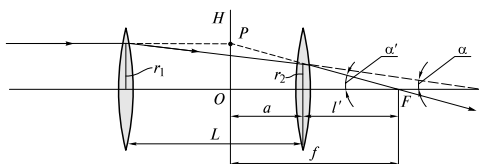


Рис. 18.15

**Две тонкие линзы.** Ход луча, параллельного оптической оси, через систему из двух собирающих линз показан на рис. 18.15.

Оптическая сила тонкой линзы в воздухе определяется по формуле (18.16):

$$D = (n_l - 1) \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right). \quad (18.35)$$

Если  $D_1$  и  $D_2$  — оптические силы каждой из линз, то оптическая сила системы двух линз

$$D = \frac{1}{r_1} (D_1 r_1 + D_2 r_2) = D_1 + D_2 - D_1 D_2 L, \quad (18.36)$$

поскольку  $r_2 = r_1 - \alpha L$ ,  $\alpha = D_1 / r_1$  (см. (18.14)). Фокальная точка удалена от второй линзы на расстояние

$$l' = \frac{r_2}{\alpha'} = \frac{r_2}{D r_1} = \frac{1 - D_1 L}{D}. \quad (18.37)$$

Расстояние между фокальной точкой и главной плоскостью  $H$  (фокусное расстояние)

$$f = \frac{r_1}{\alpha'} = \frac{1}{D}. \quad (18.38)$$

С учетом (18.36) можно записать формулу:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{L}{f_1 f_2}, \quad (18.39)$$

где  $f_1 = 1/D_1$ ,  $f_2 = 1/D_2$  — фокусные расстояния тонких линз.

Расстояние между главной плоскостью и второй линзой

$$a = f - l' = \frac{D_1 L}{D}. \quad (18.40)$$

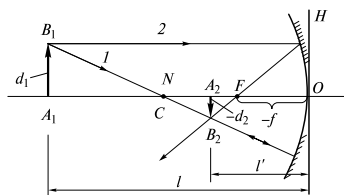


Рис. 18.16

**Отражательные (катодиоптрические) системы.** Простейшей системой такого типа является *вогнутое сферическое зеркало*. Ход лучей от объекта  $A_1 B_1$  показан на рис. 18.16. Зеркало обладает одним фокусом  $F$ . Обе главные точки  $O_1$  и  $O_2$  и, следовательно, главные плоскости  $H_1$  и  $H_2$  совпадают.

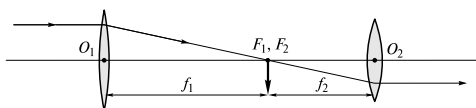


Рис. 18.17

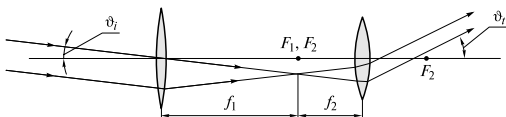


Рис. 18.18

Чтобы вычислить оптическую силу зеркала, воспользуемся формулой (18.6), в которой положим  $n_2 = -n_1 = -n$ . Это следует из того, что применительно к отражению можно формально в законе преломления  $\vartheta_t/\vartheta_i = n_2/n_1$  в (18.5) угол преломления положить равным  $\vartheta_t = -\vartheta_i$ , что автоматически влечет за собой смену знака показателя преломления. Следовательно,

$$D = \frac{-n - n}{R} = \frac{-2n}{R}, \quad (18.41)$$

где  $n$  — показатель преломления окружающей среды,  $R < 0$ . Если в (18.12) заменить  $n'$  величиной  $(-n)$ , то получим

$$\frac{1}{l'} + \frac{1}{l} = \frac{2}{R}. \quad (18.42)$$

Здесь  $l = OA_1$ ,  $l' = OA_2$  — удаление предмета и его изображения от зеркала соответственно. Если  $l \rightarrow \infty$ , то  $l' \rightarrow f = R/2 < 0$ .

С помощью выпуклого зеркала получают действительное перевернутое изображение, увеличение которого  $M = d_2/d_1 < 0$  и зависит от расстояния  $OA_1$ . Узловые точки  $N_1$  и  $N_2$  совпадают с центром кривизны  $C$  зеркала. При повороте зеркала вокруг оси, проходящей через точку  $C$ , изображение остается неподвижным.

**Телескопические системы.** Если фокальные точки  $F_1$  и  $F_2$  двух собирающих линз совпадают, то и параллельный оси луч, пройдя через такую систему, останется параллельным. Изменится лишь расстояние его от оптической оси (рис. 18.17). Такая система называется телескопической.

Поскольку  $L_0 = f_1 + f_2$ , из (18.39) следует, что  $f \rightarrow \infty$ . Оптическая сила такой системы  $D = 1/f = 0$ .

Если на телескопическую систему падает под углом  $\vartheta_i$  к оси параллельный пучок света, то выходящий из нее параллельный пучок будет составлять угол  $\vartheta_t \neq \vartheta_i$  (рис. 18.18).

Из рисунка следует, что угловое увеличение

$$M = \frac{\vartheta_t}{\vartheta_i} = \frac{f_1}{f_2}. \quad (18.43)$$

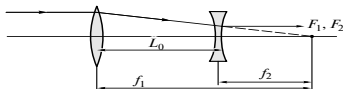


Рис. 18.19

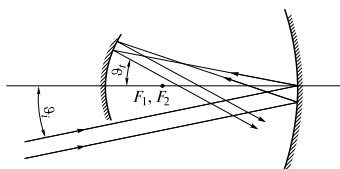


Рис. 18.20



Рис. 18.21

Для получения большого увеличения первую линзу (объектив) делают длиннофокусной, а вторую (окуляр) — короткофокусной. Телескопическая система может состоять из собирающего объектива и рассеивающего окуляра (рис. 18.19), при этом  $L_0 = f_1 - f_2$ .

В современных телескопах-рефракторах, как отмечалось ранее, используются два сферических зеркала с большим и малым радиусами кривизны, у которых совмещены фокальные точки (рис. 18.20).

Если расстояние  $L$  между линзами несколько отличается от величины  $L_0$ , то оптическая сила системы становится отличной от нуля. Система, изображенная на рис. 18.17, при  $L \leq L_0$  будет фокусирующей с большим фокусным расстоянием  $f \gg L_0$  (см. формулу (18.38)). Аналогичным свойством будет обладать при  $L \geq L_0$  и система, изображенная на рис. 18.19. Эти системы будут эквивалентны длиннофокусной собирающей линзе.

На этом принципе основано устройство телеобъективов, применяемых для фото- и киносъемки удаленных предметов, когда требуется хорошее увеличение. Телеобъектив состоит из двух (иногда и более) линз. Как следует из (18.31) и (18.32), у системы линз  $l' < f$ . Поскольку изображение удаленных предметов находится вблизи фокальной плоскости, то и расстояние между второй линзой и плоскостью изображения может быть существенно меньше фокусного расстояния системы. В этом состоит преимущество телеобъектива перед длиннофокусной линзой. Расстояние между линзами в телеобъективе можно изменять, варьируя тем самым и его фокусное расстояние.

Объективы современных фотоаппаратов и видеокамер состоят из системы линз, расстояние между которыми может изменяться (вручную или с помощью электропривода). Такие объективы называются *трансфокаторами*. Изменяя фокусное расстояние объектива с помощью функции «zoom» (от англ. zoom — наезд, приближение камеры к объекту), можно видоизменять панораму при съемке.

На рис. 18.21 схематично изображен разрез видеокамеры. Изображение формируется системой линз. С помощью двойной призмы получают два изображения: одно на экране для визуального наблюдения, а второе на CCD-матрице для его цифровой записи. Описание работы такой матрицы будет представлено в лекции 25.

## РАЗДЕЛ 7

### ВОЛНЫ В АНИЗОТРОПНЫХ СРЕДАХ

---

#### ЛЕКЦИЯ 19

Рассмотрим теперь распространение света в анизотропных средах. Такими средами являются прежде всего оптические кристаллы. В них характер распространения волны может изменяться в зависимости от направления этого распространения и поляризации волны.

Весьма показателен в этом смысле следующий опыт. Если пластинку, вырезанную из кристалла кальцита, определенным образом положить на поверхность рисунка, то возникнут два изображения этого рисунка (рис. 19.1 цв. вкл.). Это явление получило название *двойного лучепреломления*. Поворачивая пластинку в плоскости рисунка, с удивлением отмечаем, что одно изображение останется неподвижным, а второе будет двигаться поступательно вокруг неподвижного.

Во втором опыте возьмем две одинаковые прозрачные пластинки, вырезанные определенным образом из полудрагоценного минерала турмалина. Если теперь направить луч солнечного света на параллельные пластинки, установленные одна за другой, то интенсивность прошедшего света можно сильно изменять, поворачивая одну пластинку в ее плоскости относительно другой. При некоторой взаимной ориентации пластинок солнечный свет проходить не будет вовсе.

Этот опыт объясняется тем, что поглощение света в кристалле турмалина зависит от ориентации вектора напряженности электрического поля волны относительно кристаллографических осей, т. е. от поляризации света. Неполаризованный солнечный свет можно представить, согласно (1.39) и (1.40), в виде двух взаимно перпендикулярно поляризованных волн, у которых разность фаз  $\varphi_2 - \varphi_1$  хаотически меняется на масштабе времени корреляции, сравнимом с периодом световой волны.

Первая пластинка одну из этих волн «с нужной поляризацией» пропускает, а другую поглощает. Тогда на ее выходе сформируется плоскополяризованная волна. Попадая на вторую пластинку, эта волна, также в зависимости от взаимной ориентации вектора электрического поля и кристаллографических осей, претерпевает разное поглощение. При определенной ориентации она будет полностью поглощена. Зависимость поглощения от поляризации света получило название явления *дихроизма*.

Опытным путем в XIX в. было обнаружено появление анизотропии у ряда изотропных жидкостей и твердых тел при механических напряжениях, воздействиях электрического и магнитного полей. При этом появилась уникальная возможность «управлять» этой анизотропией. Как следует из описанных опытов, это открывает возможность управлять направлением распространения волн

ны и ее интенсивностью при прохождении через оптические системы, в которых используются среды с искусственной анизотропией.

Рассмотрим теперь распространение плоской монохроматической волны в слабо поглощающей анизотропной среде. Для волны определенной частоты будем считать известной фурье-амплитуду

$$\epsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = \int_0^{\infty} dt' \int_{-\infty}^{\infty} \epsilon_{ij}(t', \mathbf{r}') \exp[-i(\omega t' - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}')] d\mathbf{r}'$$

компоненты тензора диэлектрической проницаемости, введенного феноменологически в лекции 15. Пространственную дисперсию (зависимость  $\epsilon_{ij}$  от волнового вектора  $\mathbf{k}$ ) учитывать пока не будем. Это позволяет использовать обозначение  $\epsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = \epsilon_{ij}$  и записать материальные уравнения в наиболее простом виде.

**Материальные уравнения.** В анизотропной среде атомы ориентированы определенным образом, поэтому, следуя (15.24), компоненту дипольного момента единицы объема можно представить выражением (15.29)

$$P_i = \epsilon_o N \sum_{j=1}^3 a_{ij} E_{\Phi j},$$

в правой части которого фигурируют две характеристики вещества: компонента тензора поляризуемости молекулы и число молекул в единице объема.

Вместо соотношений (15.30) связь векторов поляризации  $\mathbf{P}$  и индукции  $\mathbf{D}$  с порождающим их электрическим полем волны в кристалле приобретает вид:

$$P_i = \epsilon_o \sum_{j=1}^3 \alpha_{ij} E_j; \quad D_i = \epsilon_o E_i + P_i = \epsilon_o \sum_{j=1}^3 \epsilon_{ij} E_j. \quad (19.1)$$

Здесь  $\alpha_{ij}$  и  $\epsilon_{ij} = \delta_{ij} + \alpha_{ij}$  — фурье-компоненты (далее — просто компоненты) тензоров восприимчивости и диэлектрической проницаемости.

Если не учитывать энергетические потери волны в среде, то можно считать, что компоненты  $\epsilon_{ij}$  действительны:  $\epsilon_{ij} = \epsilon'_{ij}$ . (Далее штрих для обозначения действительной части диэлектрической проницаемости использовать не будем.) Тогда  $\epsilon_{ij} = \epsilon_{ji}$ . Последнее равенство означает, что соответствующим выбором координатных осей тензор  $\epsilon_{ij}$  можно привести к диагональному виду:

$$\epsilon_{ij} = \begin{pmatrix} \epsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{33} \end{pmatrix}. \quad (19.2)$$

Далее примем обозначения:  $\epsilon_x = \epsilon_{11}$ ;  $\epsilon_y = \epsilon_{22}$ ;  $\epsilon_z = \epsilon_{33}$ .

**Главные показатели преломления и главные скорости волны.** Проведем предварительно качественный анализ распространения плоской волны в анизотропной среде. Пусть волновой вектор  $\mathbf{k}$  сначала направлен вдоль главной оси  $Oz$  (рис. 19.1).

Если волна поляризована в плоскости  $Oxz$  (рис. 19.1, *a*), то материальное уравнение (19.1) имеет вид  $D_x = \epsilon_o \epsilon_x E_x$ . Следовательно, для этой волны показатель преломления  $n_x = \sqrt{\epsilon_x}$ , а фазовая скорость равна  $v_x = c/n_x = c/\sqrt{\epsilon_x}$ . Если же волна поляризована в плоскости  $Oyz$  (рис. 19.1, *б*), то  $D_y = \epsilon_o \epsilon_y E_y$ . Поэтому для нее показатель преломления  $n_y = \sqrt{\epsilon_y}$ , а скорость  $v_y = c/n_y = c/\sqrt{\epsilon_y}$ . Таким

образом, волна, распространяющаяся вдоль оси  $Oz$ , может, в зависимости от поляризации, иметь две различные скорости распространения.

При распространении волны вдоль оси  $Ox$  (рис. 19.1, *в*)  $n_z = \sqrt{\epsilon_z}$ ,  $v_z = c/n_z = c/\sqrt{\epsilon_z}$ ;  $n_y = \sqrt{\epsilon_y}$ ,  $v_y = c/n_y = c/\sqrt{\epsilon_y}$  (рис. 19.1, *з*). Наконец, если волна распространяется вдоль оси  $Oy$ , то  $n_z = \sqrt{\epsilon_z}$ ,  $v_z = c/n_z = c/\sqrt{\epsilon_z}$  (рис. 19.1, *д*);  $n_y = \sqrt{\epsilon_y}$ ,  $v_y = c/n_y = c/\sqrt{\epsilon_y}$  (рис. 19.1, *е*).

Величины  $n_x$ ,  $n_y$ ,  $n_z$  называются *главными показателями преломления*, а скорости  $v_x$ ,  $v_y$ ,  $v_z$  — *главными скоростями волн*.

Отметим два важных обстоятельства:

- индексы  $x$ ,  $y$ ,  $z$  у главных скоростей никак не связаны с направлением распространения волны. Они описывают лишь направление векторов  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{D}$  вдоль соответствующей главной оси;

- в общем случае, когда волновой вектор  $\mathbf{k}$  имеет произвольное направление в кристалле, векторы  $\mathbf{D}$  и  $\mathbf{E}$  не совпадают между собой: вектор  $\mathbf{D}$  перпендикулярен  $\mathbf{k}$ , а между векторами  $\mathbf{D}$  и  $\mathbf{E}$  будет некоторый угол  $\vartheta$ , называемый *углом анизотропии* (см. далее).

Продолжая качественный анализ, рассмотрим два частных случая:

1)  $\epsilon_x = \epsilon_y = \epsilon_z = \epsilon$  (*изотропная среда*). Тогда  $n = \sqrt{\epsilon}$ ,  $v = c/n = c/\sqrt{\epsilon}$ . У такой среды один показатель преломления и одна фазовая скорость при всех направлениях распространения волны и любой ее поляризации;

2)  $\epsilon_x = \epsilon_y \neq \epsilon_z$ . Тогда  $v_x = v_y \neq v_z$ . Следовательно, обе волны, распространяющиеся вдоль оси  $Oz$  (см. рис. 19.1, *а*, *б*), имеют одинаковую скорость  $v_o = v_x = v_y$ . Сумма этих волн представляет собой в общем случае волну с эллиптической поляризацией, которая движется со скоростью  $v_o$ . У этой волны векторы  $\mathbf{D}$  и  $\mathbf{E}$  совпадают по направлению, поскольку в плоскости  $Oxz$  среда изотропна.

Независимость скорости  $v_o$  волны от ее состояния поляризации является основанием говорить о выделенном направлении  $Oz$  как об *оптической оси кристалла*. Такое направление единственное, поэтому кристалл называется *одноосным*. Далее будет показано, что в общем случае, когда  $\epsilon_x \neq \epsilon_y \neq \epsilon_z$ , таких направлений будет два, и кристалл называется *двуосным*.

При распространении света перпендикулярно оптической оси волны (см. рис. 19.1, *з*, *е*) распространяются по-прежнему со скоростью  $v_o$ , а волны на рис. 19.1, *в*, *д* — со скоростью  $v_e = v_z$ . Волна, скорость которой равна  $v_o$ , называется *обыкновенной*, поскольку ее скорость такая же, как и вдоль оптической оси. У второй волны скорость  $v_e \neq v_o$ , поэтому волна называется *необыкновенной*. С этими названиями и связаны индексы *о* (ordinary) и *е* (extraordinary) у скоростей волн.

Обыкновенная и необыкновенная волны отличаются поляризацией. Для удобства введем *главную плоскость*, проходящую через волновой вектор  $\mathbf{k}$  и оптическую ось. Тогда у обыкновенной волны (см. рис. 19.1, *з* и *е*) вектор  $\mathbf{E}$  перпендикулярен главной плоскости, а у необыкновенной — лежит в этой плоскости.

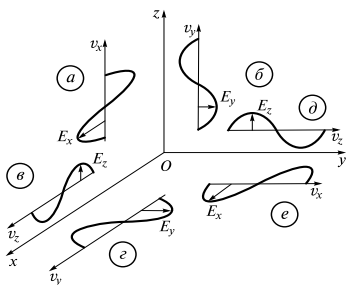


Рис. 19.1

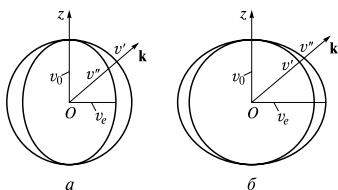


Рис. 19.2

**Скорость по нормали и поверхность нормалей.** Завершая качественный анализ, изобразим диаграмму зависимости скоростей распространения по нормали (в направлении вектора  $\mathbf{k}$ , перпендикулярного волновому фронту) обыкновенной и необыкновенной волн от направления волнового вектора в одноосном кристалле.

При произвольном направлении волнового вектора всегда  $\mathbf{D} \perp \mathbf{k}$ . У одной волны векторы  $\mathbf{D}'$  и  $\mathbf{E}'$  параллельны друг другу. Они перпендикулярны к главной плоскости и лежат в плоскости  $Oxy$ , в которой среда изотропна. У этой волны  $D' = \epsilon_o \epsilon_x E' = \epsilon_o \epsilon_y E'$ , поэтому ее скорость  $v' = v_o = c/\sqrt{\epsilon_x} = c/\sqrt{\epsilon_y}$  не зависит от направления вектора  $\mathbf{k}$ . У другой волны векторы  $\mathbf{D}''$  и  $\mathbf{E}''$  составляют между собой некоторый угол. Они лежат в главной плоскости. Скорость этой волны  $v''$  при увеличении угла между осью  $Oz$  и вектором  $\mathbf{k}$  монотонно изменяется от  $v_o$  до  $v_e$ . Кристалл, у которого  $v_o > v_e$ , называется *положительным*, а кристалл с  $v_o < v_e$  — *отрицательным*.

На рис. 19.2 показаны диаграммы зависимостей скоростей  $v'$  и  $v''$  от направления волнового вектора для положительного (рис. 19.2, а) и отрицательного (рис. 19.2, б) кристаллов.

Этим диаграммам соответствуют поверхности, называемые *поверхностями нормалей* (нормальных скоростей) *Френеля*. Одна из поверхностей (для обыкновенной волны) является *сферой*, а вторая (для необыкновенной) — фигурой вращения, называемой *овалоидом*. Далее они будут рассчитаны с помощью уравнений Максвелла.

**Распространение плоской монохроматической волны.** Пусть в анизотропной среде в направлении, задаваемом единичным вектором  $\mathbf{e}$  (нормалью), распространяется волна с напряженностью электрического поля

$$\mathbf{E}(t, \mathbf{r}) = \mathbf{A} \exp \left[ i \omega \left( t - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{e}}{c} n \right) \right]. \quad (19.3)$$

В направлении нормали скорость волны  $v = c/n$ ,  $n$  — показатель преломления по нормали, зависящий как от направления вектора  $\mathbf{e}$ , так и от поляризации волны. Соответственно волновой вектор  $\mathbf{k} = \omega n \mathbf{e}/c$ .

Как и в случае вакуума, воспользуемся уравнениями Максвелла и для удобства введем переменную  $t' = t - \mathbf{r} \cdot \mathbf{e} n/c$ . Тогда из уравнения (1.21) получаем соотношение

$$\frac{n}{c} \mathbf{e} \times \mathbf{E} = \mu_0 \mathbf{H}, \quad (19.4)$$

которое отличается от (1.23) наличием  $n$  в левой части. Во втором уравнении Максвелла (1.22) в правой части должна стоять производная  $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t'}$ , поэтому вместо (1.24) получаем

$$-\frac{n}{c} \mathbf{e} \times \mathbf{H} = \mathbf{D}. \quad (19.5)$$

Подставим  $\mathbf{H}$  из (19.4) в (19.5). Тогда

$$\mathbf{D} = -\frac{n^2}{c^2\mu_0}(\mathbf{e} \times (\mathbf{e} \times \mathbf{E})) = n^2\epsilon_0(\mathbf{E} - \mathbf{e}(\mathbf{E} \cdot \mathbf{e})). \quad (19.6)$$

Из последнего соотношения следует, что векторы  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{e}$  лежат в одной плоскости, заштрихованной на рис. 19.3.

Вектор  $\mathbf{H}$  перпендикулярен этой плоскости. Векторы  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{H}$  и  $\mathbf{e}$ , согласно (19.5), образуют правую тройку векторов. Вектор  $\mathbf{E}$ , в общем случае, образует с вектором  $\mathbf{D}$  угол анизотропии  $\vartheta$ .

Перенос энергии определяется вектором Пойнтинга  $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} = EH\mathbf{s}$ , направление которого задается единичным вектором  $\mathbf{s}$ . Направленный вдоль  $\mathbf{s}$  отрезок прямой называется *лучом*. *Вдоль луча и переносится световая энергия.*

**Лучевая скорость и лучевая поверхность.** Несовпадение нормали  $\mathbf{e}$  и луча  $\mathbf{s}$  требует дополнительного пояснения. Реальная плоская волна является световым пучком с плоским фазовым фронтом. В анизотропной среде пучок распространяется так, как это изображено на рис. 19.4.

Волновые поверхности плоской волны (поверхности равной фазы) изображены штриховыми линиями. Эти поверхности перемещаются в направлении вектора  $\mathbf{e}$  (нормали) с некоторой скоростью  $v$ . Вдоль луча скорость  $u$  переноса фазы называется *лучевой скоростью*. За время  $\Delta t$  фазовый фронт переместится на расстояние  $ab = v\Delta t$ , а по лучу — на расстояние  $ad = u\Delta t$ . Поскольку  $ab = ad \cos \vartheta$ , то

$$v = u \cos \vartheta. \quad (19.7)$$

Таким образом,  $u \geq v$ .

Как отмечалось ранее, скорость по нормали  $v = v(\mathbf{e})$  зависит как от направления нормали  $\mathbf{e}$ , так и поляризации волны. Аналогично, лучевая скорость  $u = u(\mathbf{s})$  зависит от направления луча  $\mathbf{s}$  и поляризации волны. Эту зависимость можно изобразить в виде поверхности, которая называется *лучевой поверхностью*. Если в некоторой точке  $O$  внутри анизотропной среды в момент времени  $t = 0$  начал излучать (произошла вспышка) точечный монохроматический источник, то через время  $t = 1/c$  волновой фронт совместится с лучевой поверхностью.

Вспышка точечного источника света эквивалентна прохождению в момент времени  $t = 0$  через точку  $O$  множества одинаковых плоских волн, распространяющихся во всевозможных направлениях. Через время  $t = 1$  с плоские фронты волн сместятся на расстояния, равные  $v$ .

На рис. 19.5 показано положение фронтов плоских волн в одноосном отрицательном кристалле: для обыкновенной (рис. 19.5, а) и необыкновенной (рис. 19.5, б) волн.

В случае точечного источника лучевой, или волновой, поверхностью будет поверхность, касательная к плоским фронтам. Для обыкновенной волны она совпадает с поверхностью нормалей, а для необыкновенной (ее часть изображена штриховой линией) несколько отличается от поверхности нормалей.

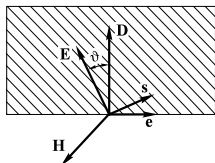


Рис. 19.3

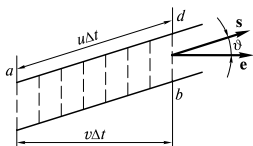


Рис. 19.4



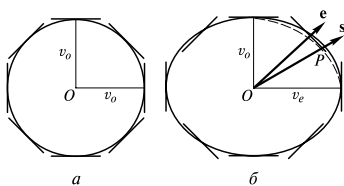


Рис. 19.5

У плоской волны, распространяющейся в направлении  $\mathbf{e}$ , луч должен проходить через такую точку волновой поверхности, фаза колебаний поля в которой совпадает с фазой колебаний на плоском фронте. Очевидно, это будет точка  $P$ , в которой плоский фронт касается волновой (лучевой) поверхности. Последнее обстоятельство позволяет использовать волновую поверхность в *принципе Гюйгенса для анизотропных сред* (см. далее).

В случае двуосного кристалла будут существовать как изменяющиеся с направлением  $\mathbf{e}$  две скорости  $v'$  и  $v''$ , так и изменяющиеся с направлением  $\mathbf{s}$  две скорости  $u'$  и  $u''$ . Они связаны соотношениями

$$v' = u' \cos \vartheta'; \quad v'' = u'' \cos \vartheta'', \quad (19.8)$$

где  $\vartheta'$  и  $\vartheta''$  — углы анизотропии: между  $\mathbf{D}'$  и  $\mathbf{E}'$  у одной волны и  $\mathbf{D}''$  и  $\mathbf{E}''$  у другой.

**Уравнение нормалей Френеля. Поверхность нормалей.** Получим уравнение, позволяющее установить зависимость  $v(\mathbf{e}) = c/n(\mathbf{e})$ . Для этого запишем (19.6) по компонентам:

$$D_{x,y,z} = n^2 \epsilon_0 (E_{x,y,z} - e_{x,y,z} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{e})). \quad (19.9)$$

Связь между компонентами векторов  $\mathbf{D}$  и  $\mathbf{E}$  определяется соотношением (19.1)

$$D_{x,y,z} = \epsilon_0 e_{x,y,z} E_{x,y,z}. \quad (19.10)$$

Подставляя  $E_{x,y,z}$  из (19.10) в (19.9), получаем

$$D_{x,y,z} = \frac{n^2 \epsilon_0 e_{x,y,z} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{e})}{\frac{1}{n^2} - \frac{1}{\epsilon_{x,y,z}}}. \quad (19.11)$$

Учитывая, что  $\mathbf{D} \perp \mathbf{e}$  и, следовательно,

$$\mathbf{D} \cdot \mathbf{e} = D_x e_x + D_y e_y + D_z e_z = 0, \quad (19.12)$$

из последних двух равенств получаем

$$\frac{e_x^2}{v^2 - v_x^2} + \frac{e_y^2}{v^2 - v_y^2} + \frac{e_z^2}{v^2 - v_z^2} = 0. \quad (19.13)$$

Здесь  $v = c/n$ ;  $v_x$ ,  $v_y$ ,  $v_z$  — главные скорости волны.

Уравнение (19.13) называется *уравнением нормалей Френеля*. Получим его решение, для чего преобразуем к виду

$$e_x^2(v^2 - v_y^2)(v^2 - v_z^2) + e_y^2(v^2 - v_x^2)(v^2 - v_z^2) + e_z^2(v^2 - v_y^2)(v^2 - v_x^2) = 0. \quad (19.14)$$

Рассмотрим три ситуации:

• *изотропная среда* ( $v_x = v_y = v_z = v_0$ ). Тогда (19.14) упрощается:

$$(v^2 - v_0^2)(v^2 - v_0^2)(e_x^2 + e_y^2 + e_z^2) = (v^2 - v_0^2)^2 = 0. \quad (19.15)$$

Его решение очевидно:  $v = v_o$ ;

• *одноосный кристалл* ( $v_x = v_y = v_o$ ;  $v_z = v_e$ ). Тогда

$$(v^2 - v_o^2)[(v^2 - v_e^2)(e_x^2 + e_y^2) + (v^2 - v_o^2)e_z^2] = 0. \quad (19.16)$$

Это уравнение имеет два решения. Если сначала положить  $v^2 - v_o^2 = 0$ , то первое решение  $v' = v_o$ . Если теперь выражение в квадратных скобках приравнять к нулю, то

$$v''^2 = v_e^2(e_x^2 + e_y^2) + v_o^2 e_z^2. \quad (19.17)$$

Удобно ввести угол  $\varphi$  между  $\mathbf{e}$  и  $Oz$ . Тогда

$$v''^2 = v_e^2 \sin^2 \varphi + v_o^2 \cos^2 \varphi. \quad (19.18)$$

Если  $\varphi = 0$ , то  $v'' = v_o$ , а при  $\varphi = \pi/2$  скорость  $v'' = v_e$ .

Поверхность нормалей (19.18) является оваломидом. Он похож на эллипсоид и изображен на рис. 19.2;

• *двуосный кристалл* ( $v_x \neq v_y \neq v_z$ ). Анализ уравнения (19.14) можно провести, если полагать последовательно сначала  $e_x = 0$ , затем  $e_y = 0$  и далее  $e_z = 0$ . Тогда можно получить распределение скоростей  $v'$  и  $v''$  в плоскостях, перпендикулярных сначала оси  $Ox$ , затем  $Oy$  и далее  $Oz$ . После этого можно получить представление о трехмерной поверхности нормалей. Такой анализ показывает, что в кристалле существуют два направления  $\mathbf{e}_1$  и  $\mathbf{e}_2$ , вдоль которых  $v' = v''$ . Эти направления называются *биноормальными*, или *оптическими осями второго порядка*.

**Эллипсоид нормалей.** Две волны, распространяющиеся с разными скоростями  $v'$  и  $v''$ , удобно анализировать с помощью *эллипсоида нормалей (индикатрисы)*, описываемого уравнением

$$\frac{x^2}{\epsilon_x} + \frac{y^2}{\epsilon_y} + \frac{z^2}{\epsilon_z} = 1. \quad (19.19)$$

Длины полуосей этого эллипсоида  $\sqrt{\epsilon_x} = c/v_x$ ,  $\sqrt{\epsilon_y} = c/v_y$ ,  $\sqrt{\epsilon_z} = c/v_z$  обратно пропорциональны главным скоростям. Проведем через начало координат плоскость, перпендикулярную нормали  $\mathbf{e}$  (рис. 19.6).

Линия пересечения (штриховая) плоскости и эллипсоида будет эллипсом с длинами полуосей  $OM'$  и  $OM''$ . Можно доказать (а это интуитивно и так угадывается), что  $OM' = c/v'$ ,  $OM'' = c/v''$ . Кроме того, вдоль полуосей будут направлены векторы  $\mathbf{D}'$  и  $\mathbf{D}''$  у обеих волн.

У одноосного кристалла поверхность нормалей будет эллипсоидом вращения вокруг оптической оси (оси  $Oz$ ).

Для одной волны (обыкновенной) длина полуоси  $OM'$  не будет изменяться при изменении направления нормали:  $OM' = c/v_o$ . У такой волны вектор  $\mathbf{E}' \parallel \mathbf{D}'$  ( $\vartheta' = 0$ ), поскольку в плоскости  $Oxy$  среда изотропна. Луч  $\mathbf{s}'$  и нормаль  $\mathbf{e}$  совпадают, лучевая скорость  $u' = v_o$ .

Для другой волны (необыкновенной) длина полуоси  $OM''$  изменяется между величинами  $c/v_o$  и  $c/v_e$ . Вектор  $\mathbf{D}''$  лежит в плоскости

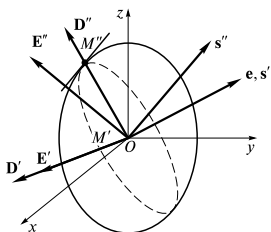


Рис. 19.6

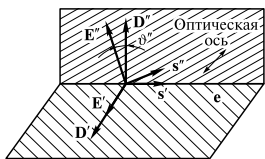


Рис. 19.7

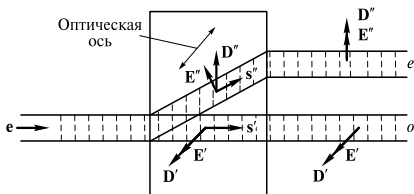


Рис. 19.8

падения. Вектор  $\mathbf{E}''$  составляет с ним угол  $\vartheta''$ . Чтобы найти направление этого вектора, достаточно провести через точку  $M''$  касательную плоскость и из начала координат опустить на эту плоскость перпендикуляр. Вдоль этого перпендикуляра и будет направлен вектор  $\mathbf{E}''$ . Луч  $s''$  образует с нормалью угол  $\vartheta''$ . Скорость по лучу  $u'' = v''/\cos \vartheta''$ .

На рис. 19.7 изображено положение всех векторов для обыкновенной и необыкновенной волн в одноосном кристалле.

Наличие двух лучей носит название двойного лучепреломления. Оно эффективно наблюдается в следующем опыте. Коллимированный узкий пучок неполяризованного света падает нормально на плоскопараллельную прозрачную пластинку, вырезанную из одноосного кристалла. Его оптическая ось наклонена к поверхности. После прохождения светом пластинки появляются два параллельных световых пучка, поляризованных во взаимно перпендикулярных плоскостях. При вращении кристалла вокруг оси, совпадающей с осью падающего пучка, один из выходящих пучков неподвижен, а второй вращается вместе с кристаллом.

На рис. 19.8 показан ход обоих пучков, рассчитанный с помощью эллипсоида нормалей и поясняющий описанный опыт.

Теперь становится понятным изложенное в начале лекции появление двух изображений рисунка, находящегося под двулучепреломляющим кристаллом кальцита. Пластика вырезана так, что ее оптическая ось наклонена под некоторым углом к поверхности. Поэтому при вращении пластинки в плоскости рисунка одно изображение будет перемещаться поступательно вокруг другого, неподвижного.

**Уравнение лучевых скоростей. Лучевая поверхность.** Для практических целей часто используют *лучевую (волновую) поверхность*, которая описывается зависимостью  $u(\mathbf{s})$ . Эта зависимость является решением уравнения лучевых скоростей.

Для его вывода преобразуем (19.6) таким образом, чтобы векторы  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{D}$  поменялись местами, а вместо  $\mathbf{e}$  фигурировал бы вектор  $\mathbf{s}$ . Для этого вначале умножим (19.6) скалярно на  $\mathbf{s}$ :

$$\mathbf{s} \cdot \mathbf{D} = n^2 \epsilon_0 (\mathbf{E} \cdot \mathbf{s} - (\mathbf{e} \cdot \mathbf{s})(\mathbf{E} \cdot \mathbf{e})) = -n^2 \epsilon_0 \cos \vartheta (\mathbf{E} \cdot \mathbf{e}), \quad (19.20)$$

где  $\mathbf{E} \cdot \mathbf{s} = 0$ ;  $\mathbf{e} \cdot \mathbf{s} = \cos \vartheta$ .

Так как векторы  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{s}$  лежат в одной плоскости, можно записать

$$\mathbf{s} = a\mathbf{E} + b\mathbf{D}, \quad (19.21)$$

где  $a$  и  $b$  — некоторые размерные скалярные величины.

Умножив это равенство скалярно сначала на  $\mathbf{s}$ , а затем на  $\mathbf{e}$ , получаем

$$\mathbf{s} \cdot \mathbf{s} = 1 = b\mathbf{s} \cdot \mathbf{D}; \quad \mathbf{e} \cdot \mathbf{s} = \cos \vartheta = a\mathbf{e} \cdot \mathbf{E}. \quad (19.22)$$

Подставим из (19.22) величины  $a$  и  $b$  в (19.21) и перепишем его в виде

$$\mathbf{E} = \frac{1}{a}(\mathbf{s} - b\mathbf{D}) = \frac{\mathbf{e} \cdot \mathbf{E}}{\cos \vartheta} \left( \mathbf{s} - \frac{\mathbf{D}}{\mathbf{s} \cdot \mathbf{D}} \right). \quad (19.23)$$

Подставляя в (19.23) произведение  $\mathbf{s} \cdot \mathbf{D}$  из (19.20), окончательно получим преобразованное соотношение

$$\mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_o n^2 \cos^2 \vartheta} (\mathbf{D} - \mathbf{s}(\mathbf{D} \cdot \mathbf{s})). \quad (19.24)$$

Поскольку лучевая скорость

$$u = \frac{v}{\cos \vartheta} = \frac{c}{n \cos \vartheta} = \frac{c}{n_{\parallel}}, \quad (19.25)$$

величину  $n_{\parallel} = n \cos \vartheta$  иногда называют *показателем преломления луча*.

Пользуясь (19.24), проведем простые выкладки, аналогичные тем, которые были сделаны при выводе уравнения нормалей (19.13). Записав (19.24) по компонентам и используя материальные уравнения (19.10), получаем

$$E_{x,y,z} = -\frac{s_{x,y,z}(\mathbf{D} \cdot \mathbf{s})}{\epsilon_o(n_{\parallel}^2 - \epsilon_{x,y,z})}. \quad (19.26)$$

Учитывая, что

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{s} = E_x s_x + E_y s_y + E_z s_z = 0, \quad (19.27)$$

получаем

$$\frac{s_x^2}{\frac{1}{u^2} - \frac{1}{v_x^2}} + \frac{s_y^2}{\frac{1}{u^2} - \frac{1}{v_y^2}} + \frac{s_z^2}{\frac{1}{u^2} - \frac{1}{v_z^2}} = 0. \quad (19.28)$$

Это и есть *уравнение лучевых скоростей*. Его решение  $u(\mathbf{s})$ , изображенное в виде диаграммы, представляет собой лучевую поверхность. Запишем (19.28) в виде

$$s_x^2 \left( \frac{1}{u^2} - \frac{1}{v_y^2} \right) \left( \frac{1}{u^2} - \frac{1}{v_z^2} \right) + s_y^2 \left( \frac{1}{u^2} - \frac{1}{v_x^2} \right) \left( \frac{1}{u^2} - \frac{1}{v_z^2} \right) + s_z^2 \left( \frac{1}{u^2} - \frac{1}{v_x^2} \right) \left( \frac{1}{u^2} - \frac{1}{v_y^2} \right) = 0; \quad (19.29)$$

Для изотропной среды  $v_x = v_y = v_z = v_o$ . Поэтому  $u = v_o$ . Лучевая поверхность является сферой.

Для одноосного кристалла  $v_x = v_y = v_o$ ;  $v_z = v_e$ . Тогда (19.29) сводится к виду

$$\left( \frac{1}{u^2} - \frac{1}{v_o^2} \right) \left[ (s_x^2 + s_y^2) \left( \frac{1}{u^2} - \frac{1}{v_e^2} \right) + s_z^2 \left( \frac{1}{u^2} - \frac{1}{v_o^2} \right) \right] = 0. \quad (19.30)$$

Решениями этого уравнения будут

$$u' = v_o; \quad \frac{1}{u''^2} = \frac{\sin^2 \varphi}{v_e^2} + \frac{\cos^2 \varphi}{v_o^2}. \quad (19.31)$$

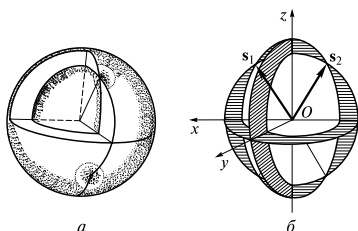


Рис. 19.9

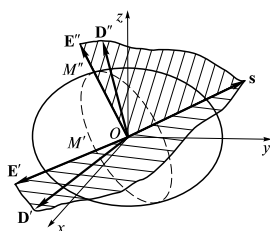


Рис. 19.10

Здесь  $\varphi$  — угол между вектором  $\mathbf{s}$  и оптической осью  $Oz$ .

Первому решению (19.31) соответствует *сферическая лучевая поверхность*, а второму — лучевая поверхность в виде *эллипсоида вращения* вокруг оптической оси. Из-за небольшой величины  $\left| \frac{v_e - v_o}{v_o} \right| \ll 1$  эллипсоид в (19.31) незначительно отличается от овалоида (19.18).

Наконец, для двусосного кристалла, не приводя громоздкие выкладки, обсудим форму лучевой поверхности, изображенной на рис. 19.9 в виде трехмерной поверхности (рис. 19.9, а) и ее разрезов (рис. 19.9, б) в трех взаимно перпендикулярных плоскостях. Рисунок соответствует случаю  $\epsilon_z > \epsilon_y > \epsilon_x$ .

Внешняя поверхность напоминает эллипсоид, но имеет четыре углубления, в которых касается внутренней поверхности. Точки касания  $M$  определяют направления векторов  $\mathbf{s}_1$  и  $\mathbf{s}_2$ , поэтому через точки касания проходят оптические оси кристалла, вдоль которых  $u' = u''$ . У разных кристаллов угол между осями может значительно различаться. Например, для нитрата калия  $\text{KNO}_3$  он равен  $7^\circ 12'$ , а для сульфата железа  $\text{FeSO}_4$  —  $85^\circ 27'$ .

**Эллипсоид Френеля.** Он задается уравнением

$$\epsilon_x x^2 + \epsilon_y y^2 + \epsilon_z z^2 = 1 \quad (19.32)$$

и позволяет рассчитать лучевые скорости  $u'$ ,  $u''$  и направления векторов  $\mathbf{E}'$ ,  $\mathbf{D}'$ ,  $\mathbf{E}''$ ,  $\mathbf{D}''$ , если задано направление луча  $\mathbf{s}$ . Длины полуосей эллипсоида  $1/\sqrt{\epsilon_x} = v_x/c$ ,  $1/\sqrt{\epsilon_y} = v_y/c$ ,  $1/\sqrt{\epsilon_z} = v_z/c$  пропорциональны главным скоростям.

Если провести через начало координат перпендикулярное вектору  $\mathbf{s}$  сечение, то длины полуосей эллипса сечения  $OM' = u'/c$ ,  $OM'' = u''/c$  (рис. 19.10).

Соответствующие этим полуосям векторы  $\mathbf{E}'$  и  $\mathbf{E}''$  направлены вдоль этих полуосей. Векторы  $\mathbf{D}'$  и  $\mathbf{D}''$  определяются направлениями перпендикуляров, опущенных из начала координат на соответствующие касательные плоскости, проведенные через точки  $M'$  и  $M''$ . У одной волны векторы  $\mathbf{D}''$ ,  $\mathbf{E}''$  и  $\mathbf{e}''$  лежат в плоскости падения, а векторы  $\mathbf{D}'$ ,  $\mathbf{E}'$ ,  $\mathbf{e}'$  — в перпендикулярной плоскости (на рисунке векторы  $\mathbf{e}'$  и  $\mathbf{e}''$  не показаны).

**Двойное лучепреломление. Принцип Гюйгенса.** Пусть плоская волна падает под углом  $\vartheta_i$  из вакуума в ани-

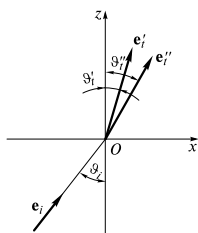


Рис. 19.11

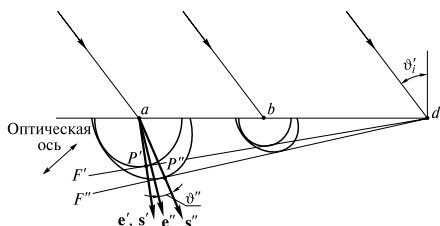


Рис. 19.12

зотропную среду (рис. 19.11). Из граничных условий следует, что волновые нормали трех волн лежат в одной плоскости (плоскости падения) и

$$\frac{\sin \vartheta_i}{\sin \vartheta_i'} = \frac{c}{v'}, \quad \frac{\sin \vartheta_i}{\sin \vartheta_i''} = \frac{c}{v''}. \quad (19.33)$$

Подчеркнем, что  $v' = v'(\mathbf{e}_i')$ ,  $v'' = v''(\mathbf{e}_i'')$ , поэтому для нахождения углов  $\vartheta_i'$  и  $\vartheta_i''$  необходим анализ (19.33) совместно с решением уравнения нормалей (19.13).

Для лучей со скоростями  $u'$  и  $u''$  соотношения (19.33) не выполняются. Расчет направлений их распространения можно провести, решая совместно (19.10), (19.11) и (19.24). Из них можно найти углы анизотропии  $\vartheta'$  и  $\vartheta''$ , которые образуют лучи с нормальными.

Для практических целей применяют принцип Гюйгенса для анизотропных сред, который базируется на трех положениях:

- каждая точка поверхности анизотропной среды, до которой доходит падающая плоская волна, может быть представлена как точечный источник, от которого распространяются в среде две волны, имеющие разные волновые поверхности;

- плоский фронт каждой из преломленных волн совпадает с огибающей соответствующих вторичных волн;

- лучи направлены от точечного источника в две точки касания  $P'$  и  $P''$  его волновых поверхностей и соответствующих огибающих.

Проиллюстрируем применение этого принципа в случае наклонного падения плоской волны на поверхность отрицательного одноосного кристалла, оптическая ось которого расположена в плоскости падения. Она составляет некоторый угол с плоской поверхностью кристалла (рис. 19.12).

В точках  $a$ ,  $b$ ,  $d$  и других находятся точечные источники. Волновые поверхности излучаемых ими волн будут сферами и эллипсоидами. Фазовые фронты  $F'$  и  $F''$  являются огибающими к волновым поверхностям. Нормали к ним  $\mathbf{e}'$  и  $\mathbf{e}''$  удовлетворяют закону (19.33). Один из лучей  $\mathbf{s}'$  совпадает с нормалью  $\mathbf{e}'$  (это обыкновенная волна), а другой  $\mathbf{s}''$  составляет с  $\mathbf{e}''$  угол  $\vartheta''$  (необыкновенная волна).

## ЛЕКЦИЯ 20

Двойное лучепреломление света в анизотропных средах широко применяется для практических приложений. При этом используются как среды, обладающие естественной анизотропией, так и ряд других сред (твердых тел, жидкостей), которые приобретают искусственную анизотропию при внешних воздействиях.

**Поляризаторы.** Наличие двух волн в анизотропном кристалле со взаимно перпендикулярными направлениями их плоскостей поляризации, имеющих различное поглощение и распространяющихся, в общем случае, по разным направлениям, открывает возможность для создания поляризационных приспособлений. Если одну из волн устранить, то свет становится плоскополяризованным. Устройство, работающее по этому принципу, называется поляризатором света. Наиболее распространены два их типа: двоякопреломляющие призмы и поляроидные пленки.

Первый поляризатор изобрел шотландский ученый У. Николь в 1828 году. Поляризатор представляет собой призму, разрезанную на две части по плоскости  $a-b$  (рис. 20.1).

Призма изготовлена из исландского шпата — одноосного отрицательного кристалла, у которого  $n_o = 1,658$ ;  $n_e = 1,486$ . Зазор между частями призмы заполняется изотропным канадским бальзамом с показателем преломления  $n = 1,550$ . Оптическая ось расположена в плоскости чертежа и наклонена к входной грани призмы под углом  $48^\circ 15'$ .

После преломления на этой грани нижний (обыкновенный) луч  $s_o$  испытывает полное отражение от границы  $a-b$  и затем выводится из призмы либо поглощается ее нижней зачерненной гранью. Необыкновенный луч  $s_e$ , проходя без преломления через границу  $a-b$ , затем выходит параллельно падающему лучу. Необыкновенная волна поляризована в главной плоскости призмы Николь. Угловая апертура (диапазон углов падения волны на переднюю грань), при которой достигается хорошая поляризация, составляет около  $29^\circ$ . Поскольку канадский бальзам не прозрачен в УФ-диапазоне, то призма в этом диапазоне не используется.

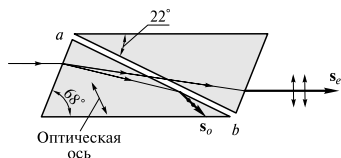


Рис. 20.1

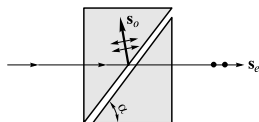


Рис. 20.2

Более широкое применение получила поляризационная призма Глана (рис. 20.2).

Здесь параллелепипед из исландского шпата разрезан по диагональной плоскости на две равные части, разделенные воздушным зазором. Угол  $\alpha = 50^\circ$ . Оптическая ось кристалла перпендикулярна плоскости чертежа. Обыкновенный луч претерпевает полное внутреннее отражение на диагональной плоскости, поэтому через призму проходит лишь необыкновенный луч.

Преимущество призмы Глана состоит в малой длине и удобстве использования, в том числе и в УФ-диапазоне. Однако угловая апертура составляет величину  $8'6''$  и заметно меньше, чем у призмы Николя. При заполнении зазора глицерином ( $n = 1,474$ ) угловая апертура увеличивается до  $32'6''$ , при этом угол  $\alpha = 17'20''$ .

Существует множество других поляризационных призм, пропускающих лишь один луч поляризованного света.

Очень удобны в использовании поляризационные пленки, принцип работы которых основан на явлении *дихроизма — зависимости поглощения света веществом от его поляризации*. Это явление было открыто в начале XIX в. на монокристаллах полудрагоценного минерала турмалина. Одноосный турмалин сильно поглощает обыкновенный луч.

Дихроизм кристаллов можно описать с помощью *индикатрисы поглощения* (19.19), если в ней использовать мнимые части диэлектрической проницаемости  $\epsilon''_x$ ,  $\epsilon''_y$  и  $\epsilon''_z$ . Тогда полуоси эллипса сечения будут пропорциональны коэффициентам поглощения  $\alpha'$  и  $\alpha''$ . Ясно, что в отношении дихроизма кристаллы могут быть одноосными и двуосными.

Дихроичные пластинки из турмалина не нашли широкого применения в качестве поляризаторов. Это связано как с их высокой стоимостью, так и узкой спектральной областью пропускания.

Более широкое распространение получили *пленочные поляроиды — пленки, «пропитанные» анизотропными молекулами*. Если полимерную пленку, состоящую из длинных макромолекул, в нагретом состоянии подвергнуть сильному растяжению в определенном направлении, то макромолекулы своими длинными осями выстроятся вдоль этого направления. Затем в размягченной нагретой пленке растворяют вещество-активатор, молекулы которого, обладающие дихроизмом, также будут ориентированы. В итоге остывшая пленка станет поляризатором света.

Для изготовления поляроидов чаще всего применяют поливиниловый спирт. Если в него добавить насыщенный водный раствор йода, то в пленке образуются длинные цепочки дихроичных молекул соединения «поливиниловый спирт — йод». Такой поляроид обладает хорошим поляризующим действием в области спектра  $5\,000 - 7\,000\text{ \AA}$ . Для другой области спектра подбирают иные активаторы. Иногда в качестве активаторов применяют дихроичные монокристаллы, которые также ориентируются при растяжении пленки.

**Управление состоянием поляризации света. Анализ состояния поляризации.** Рассмотрим оптическую схему, изображенную на рис. 20.3.

Луч естественного (неполяризованного) белого света падает нормально на плоскопараллельную прозрачную пластинку толщиной  $l$ . Пластика изготовлена из одноосного кристалла, оптическая ось которого направлена вдоль оси  $Oz$ . Пластика помещена между двумя поляризаторами  $P_1$  и  $P_2$ , схематически



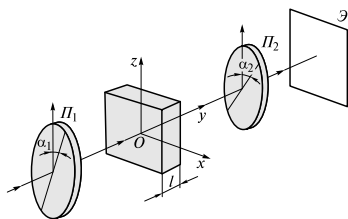


Рис. 20.3

изображенными на рисунке в виде круглых полимерных пленок. Первая пленка  $P_1$  называется *поляризатором*, а вторая  $P_2$  — *анализатором*. Естественно, что в качестве поляризатора и анализатора могут применяться и поляризационные призмы. Главные плоскости пленок (плоскости, в которых становится поляризованной волна, прошедшая через пленки) составляют углы  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  с оптической осью кристалла. Если главные плоскости взаим-

но перпендикулярны, то поляризатор и анализатор называют скрещенными. После прохождения поляризатора  $P_1$  линейно поляризованная волна падает на одноосный кристалл. В последнем возникают обыкновенная и необыкновенная волны, распространяющиеся вдоль  $Oy$  со скоростями  $v_o = c/n_o$  и  $v_e = c/n_e$  соответственно.

На выходе из кристалла обе волны приобретают разность фаз

$$\Delta\varphi = \varphi_z - \varphi_x = \frac{2\pi}{\lambda} (n_e - n_o)l. \quad (20.1)$$

Разность фаз зависит от длины волны, поэтому на анализатор будут падать волны с различными состояниями поляризации (линейной, круговой, эллиптической). Эти волны являются суперпозицией обыкновенной и необыкновенной волн, вышедших из кристалла.

Доля энергии для каждой из спектральных компонент света, прошедшего через анализатор, будет зависеть от взаимной ориентации главной плоскости анализатора  $P_2$  и полуосей эллипса, описываемого концом вектора  $\mathbf{E}$  падающей на анализатор волны. Поэтому на экране за анализатором будет окрашенное световое пятно.

Рассчитаем интенсивность спектральных компонент света, достигающего экрана. Предположим, что на входной поверхности кристалла напряженность поля волны  $\mathbf{E}_0 = \mathbf{A}_0 \cos \omega t$ . Это поле разложим на две компоненты  $E_z = E \cos \alpha_1$  и  $E_x = E \sin \alpha_1$ . На выходе из кристалла эти компоненты описываются выражениями

$$E_z = A_0 \cos \alpha_1 \cos \left( \omega t - \frac{\omega}{v_e} l \right); \quad E_x = A_0 \sin \alpha_1 \cos \left( \omega t - \frac{\omega}{v_o} l \right). \quad (20.2)$$

Напряженность поля волны, прошедшей через анализатор, составит величину

$$\begin{aligned} E &= E_z \cos \alpha_2 + E_x \sin \alpha_2 = \\ &= A_0 \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 \cos \left( \omega t - \frac{\omega}{v_o} l \right) + A_0 \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 \cos \left( \omega t - \frac{\omega}{v_e} l \right). \end{aligned} \quad (20.3)$$

По сути анализатор позволяет осуществить интерференцию поляризованных в двух взаимно перпендикулярных направлениях волн. Переходя к интенсивности, получаем

$$I = \overline{E^2} = I_0 \left[ \cos^2(\alpha_2 - \alpha_1) - \sin 2\alpha_1 \sin 2\alpha_2 \sin^2 \frac{\Delta\Phi}{2} \right], \quad (20.4)$$

где  $\Delta\Phi$  определяется выражением (20.1);  $I_0 = A_0^2/2$  — интенсивность падающего света.

Проанализируем полученное выражение. Пусть главные плоскости  $P_1$  и  $P_2$  параллельны:  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$ . Тогда

$$I = I_0 \left( 1 - \sin^2 2\alpha \sin^2 \frac{\Delta\Phi}{2} \right). \quad (20.5)$$

Если  $\alpha = 0, \pi/2, \pi$  и т.д., то  $I = I_0$ . Если  $\alpha = \pi/4, 3\pi/4$ , то интенсивность  $I = 0$  для тех спектральных компонент, для которых  $\Delta\Phi = (2m - 1)\pi$ , или

$$(n_e - n_o)l = (2m - 1) \frac{\lambda}{2}, \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (20.6)$$

Анизотропная пластинка, удовлетворяющая условию (20.6), называется *полуволновой пластинкой*, или пластинкой « $\lambda/2$ ». При падении плоскополяризованной волны на такую пластинку при угле  $\alpha = \pm 45^\circ$  прошедшая волна будет плоско поляризована, однако ее плоскость поляризации будет повернута на  $90^\circ$  относительно плоскости поляризации падающей волны. Поэтому она и не проходит через анализатор.

При  $\Delta\Phi = (2m - 1) \frac{\pi}{2}$ , или

$$(n_e - n_o)l = (2m - 1) \frac{\lambda}{4}, \quad (20.7)$$

интенсивность  $I = I_0$ . Пластинка, удовлетворяющая условию (20.7), называется *четвертьволновой пластинкой*, или пластинкой « $\lambda/4$ ». Она при угле  $\alpha = \pm 45^\circ$  превращает линейно поляризованный в циркулярно поляризованный свет.

Если теперь анализатор и поляризатор сделать *скрещенными* ( $\alpha_2 = \alpha_1 + \pi/2$ ), то

$$I = I_0 \sin^2 \alpha_1 \sin^2 \frac{\Delta\Phi}{2}. \quad (20.8)$$

Сравнение с (20.5) показывает, что ситуация стала диаметрально противоположной: те спектральные компоненты, которые раньше проходили, будут задерживаться оптической системой, и наоборот.

Изложенное иллюстрируется в опыте со слюдяными пластинками. Коллимированный пучок белого света попадает на оптическую систему, изображенную на рис. 20.3, в которой в качестве анизотропной среды используется слюдяная пластинка. Если подобрать ее толщину такой, что она будет полуволновой при  $\lambda = 7000 \text{ \AA}$ , то при угле  $\alpha_1 = \pm 45^\circ$  и параллельных главных плоскостях пятно на экране будет синим. При повороте анализатора на  $90^\circ$  пятно окажется красным. Принято считать, что красный свет является дополнительным к синему, поскольку соответствующие им длины волн лежат по разные стороны от длины волны  $\lambda_0 = 5500 \text{ \AA}$ , для которой в спектре дневного света достигается максимум.

На рис. 20.1 цв. вкл. показано изображение на экране бабочки, выполненной из мельчайших пластинок различной толщины, оптические оси которых ориентированы по-разному. Если освещать бабочку белым светом, то ее малоконтрастное изображение будет черно-белым. При помещении ее между поляроидами она становится окрашенной. При повороте анализатора на  $90^\circ$  ее цвета меняются на дополнительные.

Из приведенного рассмотрения становится понятно, что оптическая схема, изображенная на рис. 20.3, может быть использована как для создания пучков света с заданным состоянием поляризации, так и для решения обратной задачи — исследования состояния поляризации.

Для решения первой задачи достаточно использовать поляризатор и анизотропную пластинку. При падении света на такую систему на выходе пластинки можно получить свет с нужным состоянием поляризации. Для этого необходимо подобрать величины  $\alpha_1$  и  $(n_e - n_o)l$ .

Для решения обратной задачи можно использовать анизотропную пластинку и анализатор. Если исследуемый свет линейно поляризован, то достаточно одного анализатора. Интенсивность прошедшего света, согласно (20.4), при  $\Delta\varphi = 0$

$$I = I_0 \cos^2 \alpha, \quad (20.9)$$

где  $\alpha = \alpha_2 - \alpha_1$  — угол между плоскостью  $P_2$  анализатора и плоскостью  $P_1$  поляризации волны. Соотношение (20.9) является математическим выражением закона Малюса. Зависимость  $I(\alpha)$  удобно представлять в виде диаграммы, изображенной на рис. 20.4.

Однако с помощью лишь одного анализатора невозможно отличить частично поляризованный от эллиптически поляризованного света, неполяризованный — от циркулярно поляризованного. Соответствующие диаграммы изображены на рис. 20.5.

На рис. 20.5, а показана диаграмма для эллиптически поляризованного и частично поляризованного света, на рис. 20.5, б — для циркулярно поляризованного и неполяризованного света.

Примем во внимание, что в отличие от хаотически поляризованной, у волны с регулярной поляризацией существует определенная разность фаз  $\Delta\varphi_0$  колебаний между ее взаимно перпендикулярными компонентами электрического поля. Поэтому если перед анализатором поставить анизотропную пластинку, вносящую дополнительную разность фаз  $\Delta\varphi$ , такую, что

$$\Delta\varphi_0 + \Delta\varphi = \Delta\varphi_0 + \frac{2\pi}{\lambda}(n_e - n_o)l = m\pi, \quad m = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots, \quad (20.10)$$

то свет станет плоскополяризованным и может затем исследоваться анализатором. Определив направление его плоскости поляризации (величину  $m$ ) при известном  $\Delta\varphi$ , можно рассчитать  $\Delta\varphi_0$  и тем самым определить исходное состояние поляризации волны.

Устройства, изменяющие разность фаз взаимно перпендикулярных колебаний поля волны, называются компенсаторами. Первый компенсатор предложил (1839) французский физик и астроном Ж. Бабинь. Его компенсатор представлял собой скользящие относительно друг друга два кварцевых клина, образующих плоскопараллельную пластинку переменной толщины  $l$  (рис. 20.6).

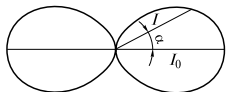


Рис. 20.4

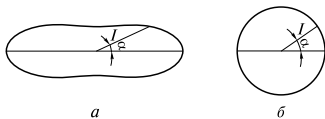


Рис. 20.5

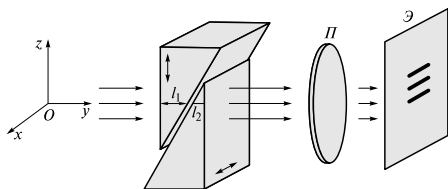


Рис. 20.6

Кварц является одноосным положительным кристаллом:  $n_o = 1,544$ ,  $n_e = 1,553$ . Если оптические оси клиньев взаимно перпендикулярны, то при распространении светового пучка его фрагмент приобретет разность фаз

$$\Delta\varphi = \varphi_z - \varphi_x = \frac{2\pi}{\lambda}[(n_e l_1 + n_o l_2) - (n_o l_1 + n_e l_2)] = \frac{2\pi}{\lambda}[(n_o - n_e)(l_2 - l_1)]. \quad (20.11)$$

На экране Э будут чередоваться полосы, причем видность этой картины будет тем выше, чем больше степень поляризации света, падающего на компенсатор.

**Искусственная анизотропия при внешних воздействиях.** Впервые появление искусственной анизотропии было обнаружено немецкими физиками Т. Зеебеком (1813) и Брюстером (1815). Они открыли двойное лучепреломление в кристаллах при их одностороннем сжатии и растяжении. Такое свойство кристаллов называется *фотоупругостью*. Схема этих опытов показана на рис. 20.7.

Прозрачный изотропный кристалл помещен между скрещенными поляризаторами. В соответствии с принятой практикой поляроиды изображают схематично в виде пластинок, напоминающих призмы Николя. Если их главные плоскости параллельны, то и диагональные линии рисуют параллельными, если плоскости взаимно перпендикулярны, то диагональные линии ориентированы в различных направлениях (см. рис. 20.7).

Свет через такую систему проходить не будет. Однако если, например, к верхней грани кристалла приложить сжимающую силу  $F$ , сориентировав кристалл так, чтобы нормаль к верхней грани составляла углы  $\alpha = 45^\circ$  с главными плоскостями, то свет начнет проходить сквозь систему. Это является свидетельством появления двойного лучепреломления. Кристалл становится одноосным, а его оптическая ось направлена вдоль действующей силы.

Анализ состояния поляризации прошедшего света показывает, что

$$\Delta n = n_e - n_o = \gamma \frac{F}{S} = \gamma \sigma, \quad (20.12)$$

где  $\gamma$  — константа вещества;  $\sigma = F/S$  — механическое напряжение, приложенное к верхней грани площадью  $S$ . Величина  $\gamma$  зависит от длины волны света и в разных веществах может различаться как значением, так и знаком.

Если в объеме кристалла внутренние напряжения (а по закону Гука и деформации)

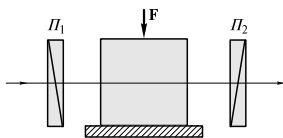


Рис. 20.7

изменяются от одной точки к другой, то это скажется на поперечном распределении интенсивности волны, прошедшей кристалл и поляроиды. Это позволяет изучать распределение деформации в разнообразных конструкциях, прозрачные малые модели которых помещают между скрещенными поляризаторами и затем к этим моделям прикладывается нагрузка.

Шотландский физик Д. Керр обнаружил (1875) двойное лучепреломление у ряда изотропных жидкостей и стекол, помещая их в сильное постоянное электрическое поле напряженностью  $E$  (вместо механического напряжения). Им было установлено, что вещество приобретает свойства одноосного кристалла, оптическая ось которого направлена вдоль внешнего электрического поля. Из экспериментов следовало, что

$$\Delta n = n_e - n_o = \gamma E^2. \quad (20.13)$$

Этот эффект получил название *квадратичного эффекта Керра*, поскольку  $\Delta n$  квадратично по полю. При смене направления поля знак величины  $\Delta n$  не изменяется. Константа вещества  $\gamma$  может иметь разный знак у различных веществ и, кроме того, зависит от длины волны. Приобретенная волнами оптическая разность хода, отнесенная к длине волны  $\lambda$ , будет равна

$$\frac{\Delta n l}{\lambda} = \frac{\gamma}{\lambda} I E^2 = K I E^2, \quad (20.14)$$

где  $K = \gamma/\lambda$  — постоянная Керра. Для большинства жидкостей  $K > 0$ .

Максимальным значением  $K = 2,2 \cdot 10^{-12}$  м/В<sup>2</sup> в видимом диапазоне обладает токсичная жидкость нитробензол. Если в кювету длиной  $l = 5$  см с нитробензолом опустить обкладки конденсатора с расстоянием  $d = 1$  мм между ними и приложить разность потенциалов  $U = 1500$  В, то слой нитробензола между обкладками будет подобен пластинке « $\lambda/4$ », поскольку  $KLE^2 = KLU^2/d^2 = 1/4$ . У других жидкостей постоянная Керра меньше на два порядка, а у газов — на четыре порядка.

Эффект Керра связан с ориентацией внешним полем хаотически расположенных молекул изотропной среды. Если молекула не обладает собственным дипольным моментом, то под действием поля она его приобретает. Согласно (15.24)

$$p_i = \epsilon_0 \sum_{j=1}^3 a_{ij} E_{\text{эф}j}, \quad (20.15)$$

где  $a_{ij}$  — компоненты тензора диэлектрической восприимчивости молекулы.

Чтобы понять, как происходит ориентация молекулы, нарисуем индикатрису тензора ее диэлектрической восприимчивости в соответствии с уравнением  $\frac{x^2}{a_x^2} + \frac{y^2}{a_y^2} + \frac{z^2}{a_z^2} = 1$ . Предположим, что  $a_z > a_x, a_y$ . Положение индикатрисы молекулы относительно внешнего поля показано на рис. 20.8.

Здесь главные координатные оси связаны с молекулой. Поскольку  $\mathbf{p}$  не совпадает по направлению с  $\mathbf{E}$ , то на молекулу будет действовать вращающий момент сил. Молекула будет стремиться повернуться так, чтобы направление ее наибольшей восприимчивости (ось  $Oz$ ) совпало с направлением  $\mathbf{E}$ . Это означает, что в результате поворота  $\epsilon_z > \epsilon_x, \epsilon_y$ . Следовательно,  $\Delta n > 0$  и  $K > 0$ .

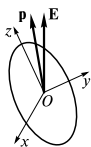


Рис. 20.8

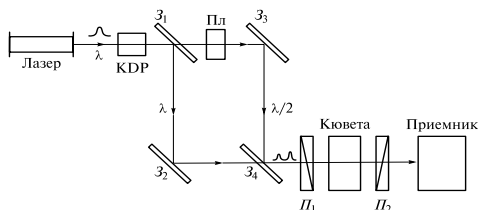


Рис. 20.9

Ориентациям молекул мешают их тепловые движения, поэтому их поляризацию необходимо описывать статистически. Такой подход был выполнен французским физиком П.Ланжевром, который создал (1905) теорию керр-эффекта для веществ с бездипольными молекулами.

Если молекула обладает собственным дипольным моментом  $\mathbf{p}_0$ , то на нее воздействует момент сил  $\mathbf{M}_0 = \mathbf{p}_0 \times \mathbf{E}$ , стремящийся повернуть молекулу так, чтобы установить вектор  $\mathbf{p}_0$  параллельно  $\mathbf{E}$ . У таких молекул вектор  $\mathbf{p}_0$  может образовывать некоторый угол с направлением наибольшей восприимчивости (осью  $Oz$ ). Если этот угол острый, то  $K > 0$ , тупой —  $K < 0$ , прямой —  $K = 0$ .

При изменении направления поля  $\mathbf{E}$  на противоположное, бездипольные молекулы быстро переполаризуются (изменяют направление дипольного момента на противоположное), не меняя своей ориентации. Дипольные молекулы начнут разворачиваться. Этот вывод подтверждается убыванием постоянной Керра у среды с дипольными молекулами при увеличении частоты внешнего поля и неизменностью постоянной Керра для среды с бездипольными молекулами.

Эффект Керра инерционен: при мгновенном включении внешнего поля  $\mathbf{E}$  анизотропия будет устанавливаться за короткое, но конечное время  $\tau_K \sim 10^{-12}$  с. При выключении поля она за такое же время исчезает. Такое малое время можно измерить лишь с помощью коротких лазерных импульсов пикосекундной длительности. Оптическая схема для таких измерений показана на рис. 20.9.

Короткий пикосекундный лазерный импульс с длиной волны  $\lambda = 1,06$  мкм (ИК-диапазон) попадает в кристалл KDP ( $\text{KH}_2\text{PO}_4$ ), обладающий нелинейными оптическими свойствами. Эти свойства будут обсуждаться далее в разделе 9. Из-за нелинейных свойств в кристалле, помимо основного, возникает менее мощный импульс с удвоенной частотой, или с длиной волны  $\lambda/2 = 0,53$  мкм (зеленая область спектра).

Вследствие различных спектральных характеристик зеркал мощный ИК-импульс отражается от зеркал  $Z_1$  и  $Z_2$  и попадает через поляризатор в кювету с исследуемой жидкостью, помещенную между скрещенными поляризаторами  $P_1$  и  $P_2$ . Напряженность  $\mathbf{E}$  его светового поля достаточна, чтобы вызвать значительный эффект Керра. Таким образом внешним полем является световое поле.

Более слабый импульс зеленого света проходит зеркало  $Z_1$ , затем через пластинку Пл переменной толщины, вносящую временную задержку, и далее, отражаясь от зеркал  $Z_3$  и  $Z_4$ , попадает в кювету с некоторой временной задержкой относительно инфракрасного. Если время задержки  $\Delta t < \tau_K$ , то этот им-

пульс «успеет» пройти сквозь поляроиды и кювету и попасть в настроенный на его длину волны приемник. Изменяя  $\Delta t$ , можно измерить величину  $\tau_k$ . Измерения показали, что, например, для нитробензола  $\tau_k \sim 5 \cdot 10^{-11}$  с, для сероуглерода  $\text{CS}_2$   $\tau_k \sim 2 \cdot 10^{-12}$  с.

В описанном эксперименте кювета с жидкостью и скрещенные поляроиды представляют собой оптический затвор, открываемый импульсом ИК-излучения. Его время срабатывания определяется величиной  $\tau_k$ , поэтому затвор является быстродействующим. Он находит многочисленные применения в оптике, в том числе для обсуждавшейся ранее модуляции добротности резонаторов лазеров, генерирующих импульсы наносекундной длительности.

Немецкий физик К. Поக்கельс обнаружил (1894) двойное лучепреломление в кристаллах при воздействии электрического поля, при этом

$$\Delta n = n_e - n_o = \gamma E. \quad (20.16)$$

Этот эффект называется *электрооптическим*, или *эффектом Поக்கельса*. Он обнаруживается у кристаллов, не обладающих центром симметрии, например в  $\text{LiNbO}_3$  и в упоминавшемся кристалле KDP. Эти кристаллы обладают также пьезоэлектрическими свойствами. Эффект Поக்கельса линеен по полю, и при изменении направления поля  $E$  величина  $\Delta n$  изменяет знак.

Возникновение анизотропии, линейной по полю  $E$ , можно объяснить, рассмотрев действие поля на оптический электрон в атоме. В лекции 3 было показано, что при классическом описании расстояние между ядром и электроном изменяется по гармоническому закону с частотой  $\omega_0$ . Электрон колеблется около положения равновесия  $O$ , в котором его потенциальная энергия  $U$  минимальна (рис. 20.10).

Если зависимость  $U(x)$  представить в виде

$$U(x) = \frac{1}{2} Fx^2 + \frac{1}{3} \Phi x^3 + \frac{1}{4} \Psi x^4 + \dots,$$

где  $x$  — смещение электрона от положения равновесия, то уравнение колебаний электрона имеет вид:

$$m\ddot{x} = -\frac{\partial U}{\partial x} = -Fx - \Phi x^2 - \Psi x^3 - \dots$$

При малых амплитудах колебаний

$$m\ddot{x} \approx -Fx, \quad \omega_0^2 = \frac{F}{m}.$$

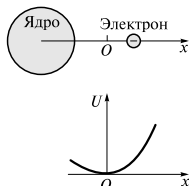


Рис. 20.10

Если направить внешнее поле в положительном направлении оси  $Ox$ , то положение равновесия сместится на рисунке влево,  $\left| \frac{\partial U}{\partial x} \right|$  уменьшится, а значит уменьшится и собственная частота  $\omega_0$ . Если поле  $E$  изменит направление, то  $\omega_0$  возрастет. Но при изменении  $\omega_0$  будет изменяться и показатель преломления вещества. Его изменение будет пропорционально полю, а знак  $\Delta n$  определяется его направлением.

На основе эффекта Поக்கельса работают разнообразные модуляторы света. Для этого пьезокристалл выреза-

ют таким образом, чтобы его входная и выходная грани были перпендикулярны оптической оси. На грани, параллельные оси, напылением наносят проводящие слои, которые образуют плоский конденсатор. Если кристалл поместить между скрещенными поляризаторами, то интенсивность света, прошедшего через такую оптическую систему, будет пропорциональна разности потенциалов, прикладываемой к проводящим слоям. Таким образом, изменяя электрическое напряжение, можно изменять (модулировать) интенсивность прошедшего света. Для этого требуемые напряжения составляют лишь десятки вольт. Эффект Погеляса малоинерционен ( $\tau_{II} \sim 10^{-13}$  с), поэтому частоты модуляции  $\nu \leq \tau_{II}^{-1} \sim 10^{12}$  Гц.

**Оптическая активность.** Ряд сред обладает двойным лучепреломлением для циркулярно поляризованных волн. В таких средах правоциркулярно и левоциркулярно поляризованные волны распространяются с разными скоростями  $v_n$  и  $v_l$  соответственно. Это означает, что если в среде распространяется плоскополяризованная волна, то плоскость ее поляризации будет постепенно поворачиваться.

Действительно, если «смотреть» навстречу волне, то колебания ее поля  $\mathbf{E}$  в плоскости поляризации эквивалентны вращению в разные стороны векторов  $\mathbf{E}_n$  и  $\mathbf{E}_l$ , соответствующим циркулярно поляризованным волнам (рис. 20.11, а).

После прохождения в среде расстояния  $l$  из-за различия скоростей  $v_n$  и  $v_l$  векторы  $\mathbf{E}_n$  и  $\mathbf{E}_l$  повернутся на разные углы  $\varphi_n$  и  $\varphi_l$  (рис. 20.11, б). Следовательно, вектор  $\mathbf{E}$  повернется на угол

$$\varphi = \frac{1}{2}(\varphi_n - \varphi_l) = \frac{\omega}{2} \left( \frac{1}{v_n} - \frac{1}{v_l} \right) l = \frac{\omega}{2c} (n_n - n_l) l, \quad (20.17)$$

где  $n_n$  и  $n_l$  — показатели преломления правоциркулярной и левоциркулярной волн.

Среды, обладающие свойством поворачивать плоскость поляризации световой волны, называют *оптически активными*, или *гиротропными*. Этим свойством обладают не только кристаллы, но и некоторые жидкости. Физические причины оптической активности последних лежат в особенностях строения их молекул.

Типичными представителями активных сред являются кристаллический кварц, жидкий скипидар, водный раствор сахара и др. Особенно много активных веществ среди органических соединений. Вещества, вращающие плоскость поляризации в растворах и аморфных средах, всегда сохраняют эту способность и в кристаллическом состоянии. Обратное верно не всегда, поскольку в ряде случаев активность кристалла определяется исключительно его коллективным свойством.

Величина угла поворота плоскости поляризации при прохождении вдоль оптической оси кварца при толщине пластины  $l = 1$  мм для красного света  $\varphi = 15^\circ$ , зеленого —  $\varphi = 27^\circ$ , фиолетового —  $\varphi = 51^\circ$ .

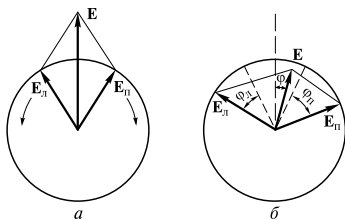


Рис. 20.11



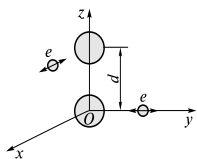


Рис. 20.12

Опыты с кварцем показали, что существует две его разновидности: правовращающий и левовращающий кварц. Затем было установлено существование двух разновидностей для всех активных сред. Причиной активности является дисимметрия кристаллов и молекул. Если составить среду, содержащую смесь молекул в равных количествах, то смесь не будет оптически активной.

Строгое рассмотрение явления показывает, что молекула может вращать плоскость поляризации в том случае, если она не имеет ни центра, ни плоскости симметрии. Такая молекула может «улавливать» различие фаз колебаний световых полей в разных точках молекулы. В подавляющем большинстве оптических явлений размерами  $d$  молекулы можно пренебречь, поскольку  $d/\lambda \sim 10^{-3}$ . Однако в случае оптической активности этим пренебрегать нельзя.

Очень наглядной моделью оптически активной молекулы является ее двух-осцилляторная модель, изображенная на рис. 20.12.

У такой молекулы два атома находятся на расстоянии  $d$  вдоль оси  $Oz$ , а оптические электроны могут колебаться вдоль других взаимно перпендикулярных направлений. Если, например, правоциркулярная волна, распространяясь вдоль  $Oz$ , будет последовательно воздействовать на оптические электроны вдоль отрицательных направлений осей  $Oy$  и  $Ox$ , то левоциркулярная — на один электрон в отрицательном, а на другой в положительном направлении. Из-за наличия связи между электронами (не показанной на рисунке) отклик молекулы на воздействие волн будет различным.

Происхождение оптической активности у кристаллов можно проиллюстрировать опытом, в котором свет проходит через стопу пластинок слюды, являющейся двухосным кристаллом. Пластины уложены в стопу таким образом, чтобы главная плоскость последующей была повернута на небольшой угол относительно главной плоскости предыдущей пластинки. Стопа может быть изготовлена двух типов: левовращающая и правовращающая.

**Оптическая активность и пространственная дисперсия.** Как отмечалось в лекции 15, оптическая активность — это проявление пространственной дисперсии среды, выражающейся в зависимости диэлектрической проницаемости от волнового числа. Если в формуле (15.7) воспользоваться разложением  $\exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}')$  в ряд Тейлора в точке  $\mathbf{r}' = 0$ , то

$$\exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}') \approx 1 + i \sum_{l=1}^3 k_l x'_l. \quad (20.18)$$

Подставив это разложение в (15.7), получим

$$\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = \varepsilon_{ij}(\omega, 0) + i \sum_{l=1}^3 \gamma_{ijl}(\omega, 0) k_l. \quad (20.19)$$

Здесь

$$\gamma_{ijl}(\omega, 0) = \int_0^{+\infty} dt' e^{-i\omega t'} \int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon_{ij}(t, \mathbf{r}') x'_l d\mathbf{r}' \quad (20.20)$$

— тензор третьего ранга, описывающий пространственную дисперсию.

Если принять во внимание, что в (15.7)  $\varepsilon_{ij}(t', \mathbf{r}')$  убывает от максимального значения  $\varepsilon_{\max}$  на масштабах времени затухания осциллятора, или времени когерентности  $\tau_k$ , и на пространственных масштабах  $\sim d$ , то

$$\begin{aligned}\varepsilon_{ij}(\omega, 0) &\sim \varepsilon_{\max} \tau_k d^3; \\ |\gamma_{ijl} k_l| &\sim \varepsilon_{\max} \tau_k d^3 \frac{d}{\lambda}.\end{aligned}\quad (20.21)$$

Следовательно,

$$\frac{|\gamma_{ijl} k_l|}{\varepsilon_{ij}} \sim \frac{d}{\lambda} \sim 10^{-3}. \quad (20.22)$$

Поэтому слагаемые, стоящие под знаком суммы в (20.19), ответственные за пространственную анизотропию, на три порядка меньше первого.

Используем разложение (20.19) для случая плоской волны, распространяющейся вдоль главной оси  $Oz$  ( $l=3$ ). Совпадающие по направлению векторы  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{D}$  лежат в плоскости  $Oxy$  ( $i, j=1, 2$ ). Тогда компоненты тензора диэлектрической проницаемости запишутся в виде

$$\begin{aligned}\varepsilon_{12} &= \varepsilon_{12}(\omega, 0) + i\gamma_{123}k; \\ \varepsilon_{21} &= \varepsilon_{21}(\omega, 0) + i\gamma_{213}k.\end{aligned}\quad (20.23)$$

При совместном решении (19.9), (19.10) и (20.23) приходим к системе уравнений

$$\begin{cases} [n^2 - \varepsilon(\omega)]E_x - i\gamma(\omega)nE_y = 0; \\ [n^2 - \varepsilon(\omega)]E_y - i\gamma(\omega)nE_x = 0. \end{cases} \quad (20.24)$$

Здесь  $\varepsilon(\omega) = \varepsilon_{12}(\omega) = \varepsilon_{21}(\omega)$ ;  $\gamma(\omega) = \frac{\omega}{c} \gamma_{123}(\omega) = -\frac{\omega}{c} \gamma_{213}(\omega)$ ;  $k = n \frac{\omega}{c}$ ,  $n$  — показатель преломления, определяющий фазовую скорость волны вдоль  $Oz$ .

Система уравнений (20.24) имеет нетривиальное решение, если ее определитель равен нулю:

$$[n^2 - \varepsilon(\omega)]^2 - \gamma^2(\omega)n^2 = 0. \quad (20.25)$$

Поскольку  $\gamma^2 \ll \varepsilon$ , получим

$$n_{1,2}^2 = \varepsilon(\omega) \pm \gamma(\omega)\sqrt{\varepsilon(\omega)}. \quad (20.26)$$

Подставив (20.26) в (20.24), находим

$$\left( \frac{E_y}{E_x} \right)_{1,2} = \mp i. \quad (20.27)$$

Таким образом, для волны, движущейся со скоростью  $v_1 = c/n_1$ ,  $(E_y/E_x) = -i$ , что соответствует правоциркулярной волне. У левоциркулярной волны  $(E_y/E_x) = +i$ , а скорость распространения  $v_2 = c/n_2$ .

**Эффект Фарадея.** В 1846 г. английский физик М. Фарадей обнаружил вращение плоскости поляризации в неактивных средах в магнитном поле. Если ве-

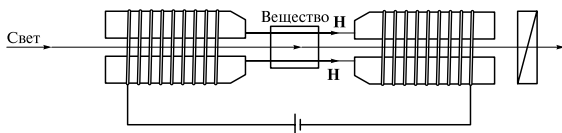


Рис. 20.13

вещество поместить в постоянное магнитное поле электромагнита (питаемого от источника постоянного тока), в полюсах которого высверлены отверстия (рис. 20.13), то при распространении поляризованного света вдоль поля  $\mathbf{H}$  плоскость поляризации поворачивается на угол

$$\varphi = \rho l H, \quad (20.28)$$

где  $l$  — длина пути света в веществе;  $\rho$  — постоянная Верде, характеризующая вещество.

Магнитное вращение плоскости поляризации в той или иной степени присутствует у разных веществ. Наиболее значителен эффект Фарадея в тонких (прозрачных) слоях ферромагнетиков (Fe, Ni, Co). При толщине слоя  $l = 0,1$  мкм в поле  $H = 10^4$  Э (1 Э  $\approx 80$  А/м)  $\varphi \approx 2^\circ$ . Большинство веществ вращают плоскость поляризации вправо (если смотреть навстречу магнитному полю). Такие вещества называются положительными. Если после электромагнита на пути луча поставить зеркало, то при повторном распространении света через вещество угол поворота  $\varphi$  удвоится.

Явление Фарадея обусловлено появлением, наряду с основной частотой  $\omega_0$ , двух новых собственных частот оптического осциллятора, находящегося в магнитном поле. На рис. 20.14 показано движение электрона по круговой орбите вокруг ядра.

В отсутствие поля угловая скорость его движения (она же собственная частота осциллятора) определяется из уравнения

$$m\omega_0^2 r = eE. \quad (20.29)$$

При наличии поля  $\mathbf{H}$  на электрон дополнительно будет действовать сила Лоренца, направленная от центра (рис. 20.14, а) и к центру (рис. 20.14, б). Поэтому соответствующие уравнения движения примут вид

$$\begin{aligned} m\omega_{01}^2 r &= eE - e\mu_0 H \omega_{01} r; \\ m\omega_{02}^2 r &= eE + e\mu_0 H \omega_{02} r. \end{aligned} \quad (20.30)$$

Из уравнений (20.29), (20.30) получаем

$$\begin{aligned} \omega_{01} &= -\frac{1}{2} \frac{e}{m} \mu_0 H \pm \sqrt{\omega_0^2 + \left(\frac{1}{2} \frac{e}{m} \mu_0 H\right)^2}; \\ \omega_{02} &= \frac{1}{2} \frac{e}{m} \mu_0 H \pm \sqrt{\omega_0^2 + \left(\frac{1}{2} \frac{e}{m} \mu_0 H\right)^2}. \end{aligned} \quad (20.31)$$

Учитывая, что  $\frac{e\mu_0 H}{m} \ll \omega_0$ , находим

$$\begin{aligned}\omega_{01} &= \omega_0 - \frac{1}{2} \frac{e}{m} \mu_0 H; \\ \omega_{02} &= \omega_0 + \frac{1}{2} \frac{e}{m} \mu_0 H.\end{aligned}\quad (20.32)$$

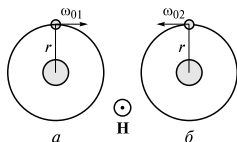


Рис. 20.14

Заметим, что вращение электрона по окружности эквивалентно наличию его двух взаимно-перпендикулярных колебаний в плоскости вращения, перпендикулярной направлению магнитного поля. Для колебаний вдоль поля частота не изменяется и остается равной  $\omega_0$ .

При изменении частоты осциллятора смещается дисперсионная кривая  $n(\omega)$ , изображенная на рис. 15.1. Для правоциркулярной волны, взаимодействующей с электроном, показатель преломления  $n_{\text{п}}$  увеличится, а для левоциркулярной  $n_{\text{л}}$  уменьшится. В первом приближении  $n_{\text{п}} - n_{\text{л}} = \sim (\omega_{02} - \omega_{01}) = \frac{e\mu_0}{m} H$ , поэтому и угол поворота, согласно (20.17),  $\varphi \propto H$ .

На основе эффекта Фарадея разработаны магнитооптические методы исследования тонких магнитных пленок, пропускающих свет. Такие пленки состоят из множества магнитных доменов микронных размеров. Домены являются сами источниками магнитного поля, поэтому при прохождении через домен плоскость поляризации света поворачивается. Угол поворота будет зависеть от ориентации домена. Поэтому амплитуда волны, прошедшей затем через анализатор, будет промодулирована в плоскости, параллельной пленке. Изучая распределение интенсивности света, можно делать выводы о магнитной структуре пленок.

Широкое распространение получили оптические изоляторы, пропускающие свет лишь в одном направлении. Основу их конструкции составляет магнитооптическая ячейка Фарадея, помещенная между двумя поляриоидами.

Ячейка, выполненная в виде модуля, содержит прозрачное вещество и источник продольного магнитного поля. Пусть при прохождении через эту ячейку плоскополяризованного света плоскость поляризации поворачивается на угол  $\varphi$ . Если теперь эту ячейку поместить между двумя поляриоидами, главные плоскости которых будут повернуты на тот же угол  $\varphi$ , то эта система будет пропускать плоскополяризованный свет преимущественно лишь в одном направлении.

Такой изолятор, в частности, используется в волоконных кольцевых лазерах, которые будут рассмотрены в лекции 24.

## РАЗДЕЛ 8

### РАССЕЯНИЕ СВЕТА

---

#### ЛЕКЦИЯ 21

В начале лекции 15 были затронуты причины, приводящие к покраснению Солнца, когда оно находится низко над горизонтом, и объяснено происхождение голубого цвета неба. Эти оптические явления возникают при рассеянии света даже в очень чистой атмосфере, например высоко в горах. В космосе, где нет атмосферы, рассеянный свет отсутствует, и небо кажется черным.

В ряде предыдущих лекций были описаны опыты с направленными пучками света, которые можно сбоку прекрасно наблюдать. Однако при распространении в вакууме лазерный луч, например, будет сбоку не виден. Все это свидетельствует о наличии рассеяния света в воздухе.

В лекционных экспериментах для лучшего наблюдения сбоку светового луча пространство, в котором он распространяется, заполняют дымом или впрыскивают мельчайшие капельки влаги. Это показывает, что рассеяние в замутненной атмосфере становится сильнее по сравнению с рассеянием в чистом воздухе.

В некоторых средах рассеяние бывает столь значительным, что свет вообще через эти среды не проходит. Типичным примером является рассеяние всех спектральных компонент дневного света в молоке, вследствие чего молоко непрозрачно и имеет белый цвет.

Во всех перечисленных примерах рассеяние возникает при нарушении оптической однородности среды. Неоднородность неизбежно присутствует в любой среде, поэтому рассеяние света принципиально неустранимо.

Представим вначале идеализированную ситуацию: оптически однородную среду. В такой среде, как и в вакууме, световой пучок в ближней зоне распространяется прямолинейно, а в дальней претерпевает дифракционное расплывание. Такое поведение является результатом интерференции вторичных когерентных волн, которые гасят друг друга в направлениях, отличных от направления падающего пучка. Эти волны, излучаемые равными элементарными объемами среды, когерентны, имеют одинаковые амплитуды и поляризацию.

Если же в среде присутствуют оптические неоднородности, то последнее утверждение становится неверным: вторичные волны имеют разные амплитуды, изменяются фазовые соотношения между ними. Поэтому при их интерференции в направлениях, составляющих большие углы с направлением падающей волны, взаимного гашения волн происходить не будет. Более того, оптические неоднородности могут иметь случайный характер, поэтому интерферирующие вторичные волны будут лишь частично когерентными. Порядок больших углов равен отношению длины волны к размеру неоднородности, т. е. эти

углы являются, по существу, дифракционными углами. *Дифракцию волны на малых оптических неоднородностях называют рассеянием света.*

В чистом воздухе, воде и других газообразных и жидких средах оптические неоднородности обусловлены неизбежно присутствующими флуктуациями плотности и, следовательно, флуктуациями показателя преломления. Происходящее в них рассеяние света получило название *молекулярного рассеяния света.*

Другим примером рассеивающей среды являются *мелкодисперсные* системы, содержащие частицы размерами  $d \sim \lambda$ . Во время тумана в воздухе находятся мельчайшие капельки воды субмикронных и микронных размеров, поэтому свет подвержен сильному рассеянию в тумане.

На рис. 21.1 цв. вкл. представлена фотография лунной короны, состоящей из яркого белого ореола, окруженного цветными кольцами. Такую картину можно наблюдать при наличии тонкой пелены облаков, слегка закрывающих Луну. Ее свет рассеивается на маленьких капельках воды и кристалликах льда. При этом различные спектральные компоненты света рассеиваются под разными углами. Этим объясняется наличие цветных колец вокруг ореола.

Если среда содержит частицы размерами  $d < \lambda$  с отличным от среды показателем преломления, то она называется *мутной*. Мутные среды, типичным представителем которых является молоко, наиболее сильно рассеивают свет.

На рис. 21.2 цв. вкл. показана фотография явления рассеяния пучка белого света при его распространении через кювету с водным раствором сахара. Отчетливо видно, что по мере распространения спектр обедняется коротковолновыми компонентами, рассеиваемыми под большими углами, и на выходе из кюветы пучок света становится красным.

Рассеяние света в твердых телах связано также с нарушением их однородности. Например, вследствие рассеяния можно видеть свет, распространяющийся по оптическому волокну.

Используя несложные физические рассуждения, основанные на концепции излучения элементарным диполем (атомом или молекулой), установим основные закономерности рассеяния света.

**Молекулярное рассеяние.** Первые фундаментальные работы по рассеянию света принадлежат Рэлею. В его модели рассеивающей среды хаотически движущиеся частицы излучают некогерентные волны, которые не могут интерферировать и, следовательно, гасить друг друга.

Однако, как позднее показал советский физик С. Мандельштам, это справедливо для малого числа частиц. Польский исследователь М. Смолуховский установил законы флуктуаций равновесных состояний молекулярных систем и показал, что однородная система — наиболее вероятное состояние системы, подверженной флуктуациям.

Исходя из этой идеи А. Эйнштейн установил (1910) статистику флуктуаций и получил формулу, связывающую интенсивность рассеянного света с константами вещества.

**Флуктуации диэлектрической проницаемости.** В общем случае анизотропной среды компоненты тензора диэлектрической проницаемости можно представить в виде сумм

$$\epsilon_{ij} = \bar{\epsilon}_{ij} + \Delta\epsilon_{ij}, \quad (21.1)$$

где  $\bar{\epsilon}_{ij}$  — среднее значение;  $\Delta\epsilon_{ij}$  — малые флуктуации.

Выясним причины этих флуктуаций.

Дипольный момент единицы объема с учетом (15.24) равен

$$P_i = \sum_{l=1}^N P_i^{(l)} = \epsilon_0 \sum_{j=1}^3 E_j \sum_{l=1}^N a_{ij}^{(l)} = \epsilon_0 \sum_{j=1}^3 \alpha_{ij} E_j. \quad (21.2)$$

Здесь компонента тензора диэлектрической восприимчивости

$$\alpha_{ij} = \sum_{l=1}^N a_{ij}^{(l)} \quad (21.3)$$

зависит как от числа  $N$  молекул в единице объема, так и от ориентации молекул, с которой связаны величины  $a_{ij}^{(l)}$ , определяемые относительно неподвижной лабораторной системы координат (индекс  $l$  определяет номер молекулы). Отметим, что в (21.2)  $E_j = E_{эф}$ , что хорошо выполняется для газов.

Поскольку для вектора индукции можно записать

$$D_i = \epsilon_0 E_i + P_i = \epsilon_0 \sum_{j=1}^3 (\delta_{ij} + \alpha_{ij}) E_j, \quad (21.4)$$

то

$$\epsilon_{ij} = \delta_{ij} + \sum_{l=1}^N a_{ij}^{(l)}. \quad (21.5)$$

Здесь  $\delta_{ij}$  — символ Кронекера.

Как видно из (21.5), флуктуации  $\Delta\epsilon_{ij}$  могут возникать как вследствие *флуктуаций плотности* среды (числа  $N$ ), так и флуктуаций  $a_{ij}$ , обусловленных случайными вращениями молекул. Последние называются *флуктуациями анизотропии*.

**Рассеяние на флуктуациях плотности.** Рассмотрим изотропную среду и учтем ее флуктуации диэлектрической проницаемости  $\Delta\epsilon$ , обусловленные лишь флуктуациями плотности. Тогда

$$\epsilon = \bar{\epsilon} + \Delta\epsilon = \bar{\epsilon} + \left( \frac{\partial \epsilon}{\partial \rho} \right) \Delta\rho. \quad (21.6)$$

Здесь  $\left( \frac{\partial \epsilon}{\partial \rho} \right)$  — материальная константа среды.

Пусть монохроматическая волна с частотой  $\omega$  распространяется вдоль оси  $Oz$ , проходя через объем  $V$  рассеивающей среды (рис. 21.1). Если волна поляризована в плоскости  $Oxz$ , то дипольный момент среды осциллирует с частотой волны  $\omega$  вдоль оси  $Ox$ .

Выделим малый рассеивающий объем  $v < \lambda^3$ . В нем все осцилляторы колеблются в фазе. Дипольный момент этого объема

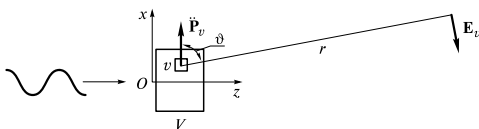


Рис. 21.1

$$P_v = P v, \quad (21.7)$$

а излучаемое им поле, согласно (3.1), имеет напряженность

$$E_v = \frac{1}{4\pi c^2 \epsilon_0 r} \ddot{P}_v \sin \vartheta. \quad (21.8)$$

Вектор  $\mathbf{E}_v$  изображен на рис. 21.1, аналогично рис. 3.2. Из-за флуктуаций  $\Delta \epsilon$  дипольный момент также флуктуирует, поэтому

$$P_v = (P + \Delta P) v = \epsilon_0 (\bar{\epsilon} - 1 + \Delta \epsilon) v E, \quad (21.9)$$

где  $E$  — напряженность поля падающей волны.

Следовательно,

$$E_v = \frac{1}{4\pi c^2 r} v (\bar{\epsilon} - 1 + \Delta \epsilon) \ddot{E} \sin \vartheta = \bar{E}_v + \Delta E_v. \quad (21.10)$$

Таким образом, поле  $E_v$  также флуктуирует около среднего значения  $\bar{E}_v$ . Его флуктуации равны

$$\Delta E_v = -\frac{\omega^2}{4\pi c^2 r} \left( \frac{\partial \epsilon}{\partial \rho} \right) \Delta \rho v E \sin \vartheta, \quad (21.11)$$

поскольку  $\ddot{E} = -\omega^2 E$ .

Рассчитаем напряженность поля рассеянной волны всем объемом, просуммировав (21.11). Нетрудно показать, что сумма средних величин  $\bar{E}_v$  должна равняться нулю, поскольку в отсутствие флуктуаций рассеянный свет отсутствует. Тогда для поля рассеянной волны можно записать

$$E_s = \sum \Delta E_v = -\frac{\omega^2}{4\pi c^2 r} \left( \frac{\partial \epsilon}{\partial \rho} \right) E \sum_m \Delta \rho_m v \sin \vartheta. \quad (21.12)$$

Здесь суммирование проводится по всем маленьким объемам. Переходя к интенсивности  $I_s = E_s^2$ , получаем

$$I_s = I_0 \left( \sum_m \Delta \rho_m v \right)^2 \frac{\omega^4}{(4\pi c^2 r)^2} \left( \frac{\partial \epsilon}{\partial \rho} \right)^2 \sin^2 \vartheta, \quad (21.13)$$

где  $I_0$  — интенсивность падающего света.

Из (21.13) следует, что  $I_s \sim \omega^4$ , т. е. *короткие волны рассеиваются сильнее, чем длинные*.

Для расчета величины  $I_s$  в (21.13) необходимо вычислить среднее значение квадрата суммы, являющейся случайной величиной. Это значение по-разному вычисляется для газов и жидкостей.

**Рассеяние в газах. Формула Рэлея.** В газах флуктуации плотности в соседних объемах статистически независимы, поэтому

$$\overline{\left( \sum_m \Delta \rho_m v \right)^2} = \sum_m v^2 \overline{\Delta \rho_m^2}. \quad (21.14)$$

Кроме того,

$$\frac{\overline{\Delta \rho_m^2}}{\bar{\rho}^2} = \frac{\overline{\Delta N_m^2}}{\bar{N}_m^2}, \quad (21.15)$$

где  $\Delta N_m$  — флуктуации числа частиц  $N_m$  в объеме  $v$ .



Применяя биномиальное распределение, запишем

$$\frac{\overline{\Delta N_m^2}}{\overline{N_m^2}} = \frac{Npq}{(Np)^2} \approx \frac{1}{N_0 p} = \frac{V}{N_0 v}. \quad (21.16)$$

Здесь  $N_0$  — полное число частиц; вероятность попадания в объем  $v$  равна  $p = v/V \ll 1$ , поэтому  $q = 1 - p \approx 1$ . С учетом (21.14) — (21.16) выражение (21.13) запишется в виде

$$I_s = I_0 \frac{\omega^4}{(4\pi c^2 r)^2} \left( \rho \frac{\partial \epsilon}{\partial \rho} \right)^2 \frac{V}{N} \sin^2 \vartheta, \quad (21.17)$$

где  $N = N_0/V$  — число частиц в единице объема.

Воспользуемся выражением (15.31) для диэлектрической проницаемости газа, записав его в виде

$$\epsilon - 1 = Na = a \frac{N_A}{\mu} \rho. \quad (21.18)$$

Тогда

$$\rho \frac{\partial \epsilon}{\partial \rho} = (\epsilon - 1) = (n^2 - 1) \approx 2(n - 1). \quad (21.19)$$

Подставив формулу (21.19) в (21.17) и переходя от частоты  $\omega$  к длине волн  $\lambda$ , получаем *формулу Рэлея*:

$$I_s = I_0 \frac{4\pi^2}{\lambda^4 r^2} (n - 1)^2 \frac{V}{N} \sin^2 \vartheta. \quad (21.20)$$

Из этой формулы следует несколько важных следствий:

- интенсивность рассеяния света *обратно пропорциональна четвертой степени длины волны*;
- рассеянный свет имеет *диаграмму направленности*, изображенную на рис. 21.2. Она представляет собой фигуру вращения вокруг оси  $Ox$ . Свет рассеивается по всем направлениям, за исключением направления, совпадающего с осью  $Ox$ ;
- поскольку показатель преломления  $n$  возрастает при приближении к линии поглощения, то будет усиливаться и рассеяние света;
- рассеянный свет плоско поляризован: вектор  $\mathbf{E}_s$  лежит в плоскости, проходящей через ось  $Ox$  и направление в точку наблюдения.

Если свет интенсивностью  $I_0$  не поляризован, то диаграмма изменится. В формуле (21.20) величину  $I_0 \sin^2 \vartheta$  необходимо заменить величиной

$$\frac{I_0}{2} \sin^2 \vartheta_x + \frac{I_0}{2} \sin^2 \vartheta_y = I_0 \frac{1 + \cos^2 \vartheta_z}{2}.$$

Здесь  $\vartheta_x, \vartheta_y, \vartheta_z$  — углы между направлением в точку наблюдения и осями координат. Следовательно,

$$I_s = \frac{4\pi^2}{\lambda^4 r^2} (n - 1)^2 \frac{V}{N} \frac{1 + \cos^2 \vartheta_z}{2} I_0. \quad (21.21)$$

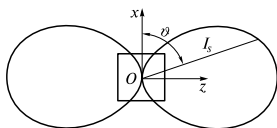


Рис. 21.2

Диаграмма направленности дана на рис. 21.3. Рассеянный свет распространяется по всем направлениям. Он не поляризован, за исключением направлений  $\vartheta_z = \pi/2$ .

Если проинтегрировать  $I_s$  по поверхности произвольной сферы радиуса  $r$  с центром в точке  $O$ , то получим мощность рассеянной волны

$$P_s = \int I_s d\sigma. \quad (21.22)$$

В сферических координатах

$$P_s = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi I_s r^2 \sin \vartheta d\vartheta = \frac{4\pi}{3\lambda^4} \frac{V}{N} (n-1)^2 I_0 = V\alpha_s I_0. \quad (21.23)$$

Величина

$$\alpha_s = \frac{4\pi}{3\lambda^4} \frac{(n-1)^2}{N} \quad (21.24)$$

называется *коэффициентом ослабления при рассеянии*, или *коэффициентом мутности*. Если в рассеивающей среде выделить слой толщиной  $dz$ , площадь поверхности которого равна  $\Sigma$ , то условие энергетического баланса можно записать в виде

$$I(z)\Sigma = dz\alpha_s I(z)\Sigma + I(z+dz)\Sigma. \quad (21.25)$$

Здесь слева стоит мощность падающей волны, которая равна сумме рассеянной мощности и мощности, вышедшей из слоя. Тогда уменьшение интенсивности

$$dI = I(z+dz) - I(z) = -\alpha_s I(z)dz. \quad (21.26)$$

Интегрируя (21.26), получаем экспоненциальный закон убывания интенсивности

$$I(z) = I_0 \exp(-\alpha_s z). \quad (21.27)$$

В чистом воздухе, при  $\lambda = 5000 \text{ \AA}$ ,  $\alpha_s \approx 2,6 \cdot 10^{-7} \text{ см}^{-1}$ . Это означает, что интенсивность света уменьшается в  $e$  раз на расстоянии  $z = \alpha_s^{-1} \approx 40 \text{ км}$ .

**Рассеяние в жидкостях. Формула Эйнштейна.** В жидкостях флуктуации плотности связаны с изотермической сжимаемостью  $\beta_T = -\frac{1}{V} \left( \frac{\partial V}{\partial p} \right)_T$  соотношением

$$\frac{\overline{\Delta \rho_m^2}}{\rho^2} = \frac{\beta_T k T}{v}. \quad (21.28)$$

Подставив формулу (21.28) в (21.14) и затем в (21.13), для неполяризованного света получим *формулу Эйнштейна*

$$I_s = \frac{4\pi^2}{\lambda^4 r^2} \left( \rho \frac{\partial \epsilon}{\partial \rho} \right)^2 V \beta_T k T \frac{1 + \cos^2 \vartheta_z}{2} I_0. \quad (21.29)$$

Мощность рассеянной волны вычисляется аналогично (21.23):

$$P_s = \frac{1}{3} \frac{\pi^2}{\lambda^4} \left( \rho \frac{\partial \epsilon}{\partial \rho} \right)^2 V \beta_T k T I_0 = V\alpha_s I_0. \quad (21.30)$$

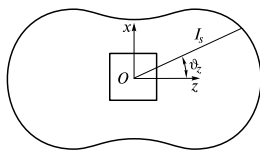


Рис. 21.3

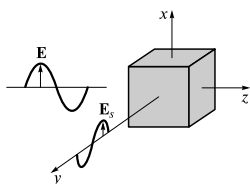


Рис. 21.4

Поэтому коэффициент мутности в жидкостях

$$\alpha_s = \frac{1}{3} \frac{\pi^2}{\lambda^4} \left( \rho \frac{\partial \epsilon}{\partial \rho} \right)^2 \beta_T kT. \quad (21.31)$$

Для чистой воды при  $\lambda = 5000 \text{ \AA}$  и нормальной температуре величина  $\alpha_s$  в 185 раз больше, чем для воздуха. При увеличении температуры и приближении ее к критической увеличивается сжимаемость  $\beta_T$ , усиливаются флуктуации плотности и растет рассеяние. Это явление, называемое

*критической опалесценцией*, иллюстрирует опыт с запаянной пробиркой, содержащей воду и насыщенный пар. При приближении температуры содержимого к критической теневое изображение пробирки внезапно становится темным из-за сильного рассеяния. По этой причине невозможно наблюдать момент исчезновения границы раздела воды и пара.

**Рассеяние на флуктуациях анизотропии.** Пусть плоскополяризованная волна падает на рассеивающий объем, а рассеянный свет регистрируется в направлении оси  $Oy$  (рис. 21.4).

Анализ состояния его поляризации показывает, что в рассеянном свете присутствуют две взаимно перпендикулярные компоненты  $E_{sx}$  и  $E_{sz}$ . Степень деполаризации определяется как

$$\Delta = \frac{\overline{E_{sz}^2}}{\overline{E_{sx}^2}} < 1. \quad (21.32)$$

В газах  $\Delta \sim 10^{-2}$ , в жидкостях  $\Delta \sim 0,1 - 1,0$ . Например, для водорода  $\Delta \approx 0,01$ , бензола  $\Delta \approx 0,44$  и сероуглерода  $CS_2$   $\Delta \approx 0,68$ . Причиной деполаризации рассеянного света являются хаотические вращения молекул вокруг их центра масс. Эти вращения приводят к флуктуации анизотропии.

Для  $l$ -й молекулы компоненты  $a_{ij}$  тензора ее поляризуемости относительно лабораторной системы координат могут быть представлены в виде

$$a_{ij}^{(l)} = \overline{a_{ij}} + \Delta a_{ij}^{(l)}, \quad (21.33)$$

где  $\overline{a_{ij}}$  — среднее значение;  $\Delta a_{ij}^{(l)}$  — случайная величина.

Тогда диэлектрическая восприимчивость среды в соответствии с (21.3) равна

$$\chi_{ij} = N \overline{a_{ij}} + \sum_{l=1}^N \Delta a_{ij}^{(l)}. \quad (21.34)$$

Для изотропной среды, как было показано ранее,

$$\overline{a_{ij}} = \frac{a_{11} + a_{22} + a_{33}}{3} = a. \quad (21.35)$$

Величина  $N$  также флуктуирует, поэтому  $N = \bar{N} + \Delta N$ , где  $\Delta N$  обусловлена рассмотренными флуктуациями плотности. Поэтому

$$\chi_{ij} = \bar{N} a \delta_{ij} + \Delta N a \delta_{ij} + \sum_{l=1}^{\bar{N}} \Delta a_{ij}^{(l)}. \quad (21.36)$$

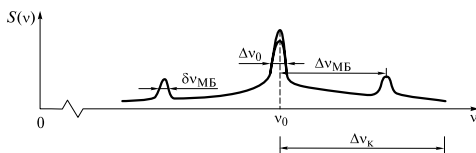


Рис. 21.5

Верхний предел суммы в (21.36) заменен средней величиной. Диэлектрическая проницаемость будет определяться тензором

$$\epsilon_{ij} = \delta_{ij}(1 + \bar{N}a) + \delta_{ij}\Delta Na + \sum_{l=1}^{\bar{N}} \Delta a_{ij}^{(l)} = \delta_{ij}\bar{\epsilon} + \delta_{ij}\Delta\epsilon + \Delta\epsilon_{ij}, \quad (21.37)$$

где добавка  $\Delta\epsilon$  связана с флуктуациями плотности, а  $\Delta\epsilon_{ij}$  — с флуктуациями анизотропии. Если обе добавки подставить в выражение (21.10), записав его по компонентам, то можно рассчитать  $E_{xx}$ ,  $E_{zz}$  и деполяризацию света.

Опуская выкладки, отметим, что степень деполяризации дает информацию о соотношении величин  $a_{11}$ ,  $a_{22}$  и  $a_{33}$ , показатель преломления — о средней величине  $a = \frac{1}{3}(a_{11} + a_{22} + a_{33})$ , а постоянная Керра — о разностях поляризуемостей молекул.

Поэтому из экспериментальных данных трех различных экспериментов можно рассчитать три компоненты тензора поляризуемости молекулы. Как отмечалось в лекции 15, поляризуемость молекулы  $a \sim 4\pi r_0^3$ , и при ее размере  $r_0 \sim 10^{-10}$  м  $a \sim 10^{-29}$  м<sup>3</sup> =  $10^{-23}$  см<sup>3</sup>. Например, для водорода  $H_2$   $a_{11} = a_{22} = 6,39 \cdot 10^{-25}$  см<sup>3</sup>,  $a_{33} = 19,62 \cdot 10^{-25}$  см<sup>3</sup>; кислорода  $O_2$   $a_{11} = a_{22} = 12,1 \cdot 10^{-25}$  см<sup>3</sup>,  $a_{33} = 23,5 \cdot 10^{-25}$  см<sup>3</sup>; диоксида углерода  $CO_2$   $a_{11} = a_{22} = 19,3 \cdot 10^{-25}$  см<sup>3</sup>,  $a_{33} = 41,0 \cdot 10^{-25}$  см<sup>3</sup>.

**Спектральный состав рассеянного света.** Эксперимент показывает, что если падающий свет монохроматический с частотой  $\nu_0$ , то рассеянный свет имеет спектральную плотность  $S(\nu)$ , схематично изображенную на рис. 21.5.

Таким образом, *спектральная линия рассеянного света имеет тонкую структуру*. В нее входят *центральная компонента* и *крылья*, на которых могут располагаться более слабые *спектральные компоненты*. На рисунке изображены лишь две такие компоненты.

Центральная компонента обусловлена флуктуациями плотности при постоянном давлении. Характерное время выравнивания плотности в малом рассеивающем объеме  $\nu \sim \lambda^3$  определяется временем выравнивания температуры

$$\tau_T \sim \frac{\lambda^2}{\chi_T}, \quad (21.38)$$

где  $\chi_T$  — коэффициент температуропроводности.

Для воздуха  $\chi_T = 0,56$  см<sup>2</sup>/с, поэтому при  $\lambda = 1$  мкм  $\tau_T \sim 10^{-8}$  с. В жидкостях  $\tau_T \sim 10^{-7}$  с. Амплитуда и фаза рассеянной волны будут случайным образом изменяться на этом масштабе времени. Следовательно, спектральная ширина центральной компоненты

$$\Delta\nu_0 \sim \tau_T^{-1} \sim (10^7 - 10^8) \text{ Гц.}$$

Флуктуации анизотропии происходят на масштабе времени, совпадающем со временем релаксации эффекта Керра  $\tau_K \sim 10^{-12}$  с. Этот масштаб будет присутствовать в быстрых случайных изменениях амплитуды и фазы рассеянной волны. Поэтому в спектре появятся менее интенсивные крылья. Их спектральная ширина

$$\Delta\nu_K \sim \tau_K^{-1} \sim 10^{12} \text{ Гц.}$$

Спектральные компоненты (спутники) смещены на величину  $\Delta\nu_{\text{МБ}} \sim (10^9 - 10^{10})$  Гц. Это смещение по порядку величины совпадает с частотой гиперзвуковых волн, неизменно присутствующих в среде. В малом рассеивающем объеме происходит адиабатическое изменение плотности

$$\Delta\rho = (\Delta\rho)_0 \cos \Omega t, \quad (21.39)$$

где  $\Omega$  — частота гиперзвуковой волны. Поле рассеянной волны одним элементарным объемом  $v$ , согласно (21.12), можно представить в виде

$$E_s(t) \sim E_0 \cos \omega t \cos \Omega t = \frac{E_0}{2} \cos(\omega_0 - \Omega)t + \frac{E_0}{2} \cos(\omega_0 + \Omega)t, \quad (21.40)$$

где  $\omega_0$  — частота падающей волны.

Поэтому в спектре рассеянного света появятся две компоненты: низкочастотная (*стоксова*) и высокочастотная (*антистоксова*) компоненты, смещенные на величину  $\Delta\nu_{\text{МБ}} = \pm f_{\text{зв}} = \pm \Omega/2\pi$  от центральной компоненты. Рассеяние на адиабатических флуктуациях плотности получило название *рассеяния Мандельштама — Бриллюэна*.

Спектральная ширина  $\delta\nu_{\text{МБ}}$  каждой из компонент определяется временем затухания гиперзвука  $\tau_{\text{зв}}$

$$\delta\nu_{\text{МБ}} \sim \tau_{\text{зв}}^{-1} \sim 10^{-1} \Delta\nu_{\text{МБ}}.$$

Следует отметить, что смещение  $\Delta\nu_{\text{МБ}}$  зависит от угла рассеяния  $\vartheta$ . Это трудно объяснить, если учесть, что рассеянная под углом  $\vartheta$  волна формируется в результате интерференции вторичных волн, отраженных от волновых поверхностей бегущей волны плотности (рис. 21.6, а):

$$\Delta\rho = (\Delta\rho)_0 \cos(\Omega t - \mathbf{q} \cdot \mathbf{r}), \quad (21.41)$$

где  $\mathbf{q}$  — волновой вектор акустической волны, или *вектор рассеяния*;  $q = \Omega/v_{\text{зв}}$ ,  $v_{\text{зв}}$  — скорость звука.

Длина волны  $\Lambda$ , на которой и происходит рассеяние в данном направлении, должна удовлетворять условию для интерференционного максимума первого порядка для двух лучей 1 и 2, показанных на рисунке:

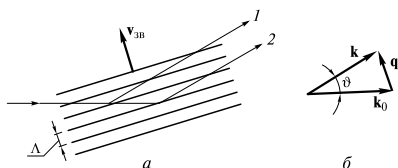


Рис. 21.6

$$2\Lambda \sin \frac{\vartheta}{2} = \lambda_0. \quad (21.42)$$

Так же как и (13.40), это условие называется *условием Брэгга*. В лекции 13 отмечалось, что при наклонном падении света на кристалл с бегущей в нем акустической волной нарушается симметрия задачи. При дифрак-

ции Брэгга интенсивность в максимумах  $\pm 1$  порядков будет существенно разной: практически останется один дифракционный максимум, направление на который задается условием Брэгга.

Условие Брэгга (21.42), используя волновые числа  $k_0 = 2\pi/\lambda_0$  и  $q = 2\pi/\Lambda$ , можно переписать в виде

$$q = 2k_0 \sin \frac{\vartheta}{2}. \quad (21.43)$$

Равенство (21.43) удобно отобразить с помощью векторной диаграммы (рис. 21.6, б) и записать его в векторном виде

$$\mathbf{k} = \mathbf{k}_0 + \mathbf{q}. \quad (21.44)$$

Здесь учтено, что  $k = \frac{\omega_0 \pm \Omega}{c} \approx k_0 = \frac{\omega_0}{c}$ .

Равенство (21.44) называется *условием векторного синхронизма* трех волн. При увеличении угла  $\vartheta$  частота гиперзвуковой волны, участвующей в рассеянии, должна возрастать. Поэтому наибольшее смещение  $\Delta\nu_{\text{МБ}}$  достигается при рассеянии назад.

Из проведенного рассмотрения становится понятно, что спектральный анализ рассеянного света дает обширную информацию о теплопроводности и теплоемкости среды, моментах инерции молекул, совершающих вращательные движения, скорости звука и времени его затухания и т.д.

Для центральной компоненты  $\nu_0/\Delta\nu_0 \sim 10^7 - 10^8$ . Для ее исследования даже интерферометр Фабри—Перо, обладающий высокой разрешающей способностью  $R \sim 10^6$ , не может быть использован. По этой причине применяют методы корреляционной спектроскопии. В них с помощью детектора записывают флуктуации интенсивности рассеянного света  $I_s(t)$  как функцию времени. Такая запись может длиться десятки минут: чем слабее рассеянный свет, тем дольше осуществляется запись. Далее с помощью электронных устройств, позволяющих изменять время задержки  $\tau$  и перемножать значения интенсивностей, рассчитывается *корреляционная функция интенсивности*

$$B_I(\tau) = \overline{I_s(t)I_s(t+\tau)}. \quad (21.45)$$

Поскольку случайное поле  $E_s(t)$ , формируемое большим числом статистически независимых элементарных диполей  $p_v$ , имеет нормальный закон распределения, то  $B_I(\tau)$  связана с корреляционной функцией поля соотношением

$$B_I(\tau) = 1 + B^2(\tau) = 1 + \overline{E_s(t)E_s(t+\tau)}. \quad (21.46)$$

Доказательство этого равенства можно найти в специальной литературе. Следовательно, спектральная плотность в соответствии с (8.34) равна

$$S(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \sqrt{B_I(\tau) - 1} \cos \omega \tau d\tau. \quad (21.47)$$

Анализ крыла линии Рэля и стоксовых и антистоксовых компонент может быть выполнен с использованием многолучевых интерферометров или различных спектральных приборов.

## ЛЕКЦИЯ 22

**Рассеяние в мутных средах.** В средах, содержащих частицы с отличающимся (от среды) показателем преломления, возникает сильное рассеяние, превосходящее по интенсивности молекулярное рассеяние. Иначе, световая волна претерпевает дифракцию на таких частицах под большими углами.

Если размеры частицы малы по сравнению с длиной волны, то дифрагировавшие волны будут аналогичны волнам, испускаемым осциллирующим диполем, находящимся на месте частицы. Вначале рассмотрим именно этот случай.

Пусть частица в форме шарика радиусом  $r_0$  имеет диэлектрическую проницаемость  $\epsilon_p$ . Такая частица при помещении в однородное внешнее электрическое поле напряженностью  $E$ , как следует из электростатики, приобретает дипольный момент

$$p_v = 3\epsilon_0\epsilon \frac{\epsilon_p - \epsilon}{(\epsilon_p + 2\epsilon)} vE, \quad (22.1)$$

где  $\epsilon$  — диэлектрическая проницаемость окружающей среды;  $v = \frac{4}{3}\pi r_0^3$ .

Интенсивность волны, рассеянной  $N$  такими шариками, из-за их хаотического положения будет равна сумме интенсивностей волн, рассеянных одним шариком.

Согласно (21.8) и с учетом (22.1) она равна

$$I_s = \frac{9\pi^2\epsilon^2}{\lambda^4 r^2} \left( \frac{\epsilon_p - \epsilon}{\epsilon_p + 2\epsilon} \right)^2 N v^2 \frac{1 + \cos 2\vartheta}{2} I_0. \quad (22.2)$$

Если же маленькие шарики находятся в жидкой или газообразной среде, то они совершают хаотическое броуновское движение. Интенсивность  $I_s(t)$  становится случайной функцией времени. Характерный масштаб ее изменения зависит от угла рассеяния  $\vartheta$ . Это можно понять, воспользовавшись аналогией с рассеянием на бегущих акустических волнах — рассеянием Мандельштама — Бриллюэна.

В формировании рассеянной волны под углом  $\vartheta$  примут участие частицы, движущиеся со случайной скоростью  $\mathbf{u}$  в направлении, показанном на рис. 22.1.

Вдоль этого направления броуновская частица смещается со временем на расстояние  $l$ , удовлетворяющее равенству

$$\overline{l^2} = \frac{2kT}{b} t = Dt, \quad (22.3)$$

где  $b = 6\pi\eta r_0$  — константа пропорциональности между силой вязкого трения, приложенной к частице радиусом  $r_0$ , и ее скоростью;  $\eta$  — вязкость среды;  $D = 2kT/b$  — коэффициент диффузии.

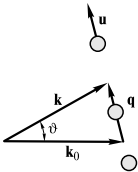


Рис. 22.1

Для движущихся частиц введем величину

$$q = \frac{1}{\sqrt{I^2}} = \frac{1}{\sqrt{D\tau_p}}, \quad (22.4)$$

где  $\tau_p$  — характерное время движения частицы.

Величина  $q$  называется *квазиволновым числом*. Тогда соответствующий *квази-волновой вектор*, или *вектор рассеяния*,  $\mathbf{q}$  должен удовлетворить условию векторного синхронизма

$$\mathbf{k} = \mathbf{k}_0 + \mathbf{q}, \quad (22.5)$$

или

$$q = 2k_0 \sin \frac{\vartheta}{2}. \quad (22.6)$$

Тогда из (22.4) и (22.6) получаем

$$\tau_p^{-1} = q^2 D = 4k_0^2 D \sin^2 \frac{\vartheta}{2}. \quad (22.7)$$

Величина  $\tau_p$  и будет являться тем масштабом времени, на котором хаотически изменяются поле  $E_s(t)$  и интенсивность  $I_s(t)$ . В растворах  $\tau_p \sim 10^{-3} - 10^{-5}$  с. Следовательно, ширина спектральной линии рассеянного света  $\Delta\nu = \tau_p^{-1} \sim 10^3 - 10^5$  Гц. Ее можно исследовать *методом корреляционной спектроскопии*.

Расчет показывает, что степень корреляции  $\gamma(\tau)$  (см. формулу (8.34)) для рассеянного поля на круглых частицах одинакового радиуса должна быть равна

$$\gamma(\tau) = e^{-Dq^2\tau} = e^{-\tau/\tau_p}. \quad (22.8)$$

Следовательно, степень корреляции для интенсивности

$$\gamma_I(\tau) = 1 + \gamma^2(\tau) = 1 + e^{-2\tau/\tau_p}. \quad (22.9)$$

Измеряя время  $\tau_p$ , можно оценить коэффициент диффузии  $D$ , радиус  $r_0$ , называемый гидродинамическим, исследовать динамику движения частиц и т.д.

На рис. 22.2, *a* показана степень корреляции  $\gamma_I(\tau)$ , измеренная в реальном эксперименте, выполненном в лаборатории спектроскопии молекулярного рассеяния света кафедры физики полимеров и кристаллов физического факультета МГУ им. М.В.Ломоносова. Здесь источником света являлся He-Ne-

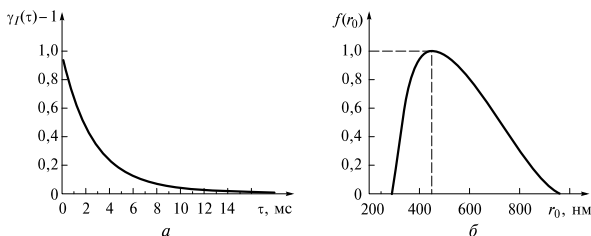


Рис. 22.2



лазер, а рассеивающими частицами — маленькие полистирольные шарики, совершающие броуновское движение в воде.

Для удобства по оси ординат отложена величина  $\gamma_I(\tau) - 1$ . Наблюдающееся отклонение от экспоненциальной зависимости (22.9) обусловлено различием радиусов полистирольных шариков. На рис. 22.2, б показана функция распределения  $f(r_0)$  шариков по радиусам  $r_0$ , полученная путем специальной математической обработки степени корреляции рассеянного поля. Она достигает максимального значения при  $r_0 = 460$  нм. Видно, что имеется разброс значений радиусов частиц.

**Рассеяние в мелкодисперсных средах.** Если размеры частиц соизмеримы с длиной волны (например, рассматриваемые в эксперименте полистирольные шарики), то представление частицы в виде одного диполя оказывается недостаточным. Поэтому формулы (22.1) и (22.2) становятся несправедливыми. Прежде всего кардинально изменяется диаграмма направленности рассеянного поля.

Из-за различия фаз колебаний волны в разных точках частицы последнюю нужно представить как совокупность осцилляторов, имеющих разные фазы колебаний. Это достигается добавлением к дипольному моменту так называемого квадрупольного момента, учитывающего разность фаз колебаний поля. По порядку величины отношение квадрупольного и дипольного моментов совпадает с отношением  $r_0/\lambda$ .

Теория рассеяния света на диэлектрических и проводящих сферах была разработана (1908) немецким физиком Г. Ми. Основное отличие рассеяния Ми от рассеяния в мутных средах состоит в существенном изменении диаграммы направленности рассеянного света. На рис. 22.3 показана типичная диаграмма направленности при рассеянии на сферических частицах радиусом  $r_0 \sim 10^{-1}\lambda$ .

При увеличении размера частиц диаграмма будет изменяться. В угловом распределении  $I_s(\vartheta_z)$  появляются дифракционные максимумы и минимумы.

На рис. 22.4 изображена диаграмма при рассеянии света на диэлектрических шариках с  $n = 1,3$  и  $r_0 = \lambda$ .

При  $r_0 > \lambda$  должна получиться диаграмма, соответствующая дифракции света на круглых непрозрачных дисках радиусом  $r_0$ . Таким образом, свет в мелкодисперсных средах рассеивается преимущественно в направлении своего распространения.

Поляризация рассеянного света на крупных частицах зависит от длины волны. Этим объясняется весьма разнообразная окраска поверхности моря.

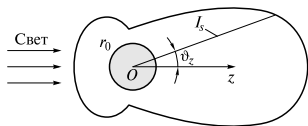


Рис. 22.3

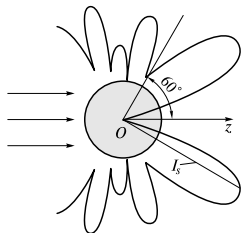


Рис. 22.4

Теория Ми нашла широкое применение при анализе распространения света через нижние слои атмосферы, содержащие пыль, антропогенные загрязнения и мельчайшие водяные капли во время тумана.

**Рассеяние света в твердых телах.** В твердых телах проявляются те же закономерности молекулярного рассеяния, что и в газах и жидкостях. Флуктуации плотности и анизотропии обусловлены случайными колебаниями атомов и молекул около положения равновесия. Изменения плотности во времени имеют два временных масштаба. Первый из них обусловлен изобарическими тепловыми флуктуациями плотности и определяется временем тепловой релаксации  $\tau_T \sim \lambda^2/\chi_T$ ,  $\chi_T$  — коэффициент температуропроводности. Ширина центральной спектральной компоненты в спектре рассеяния света  $\Delta\nu_0 \sim \tau_T^{-1}$ .

Второй масштаб определяется периодом  $T = 2\pi/\Omega$  акустических волн (21.38), в которых колебания плотности происходят изоэнтропически (без теплообмена элементарного объема  $v = \lambda^3$  с окружающей средой, поскольку  $T \ll \lambda^2/\chi_T$ ). Эти волны называются акустическими фононами. В курсе молекулярной физики было показано, что фононы являются носителями внутренней энергии твердого тела. Рассеяние на фононах и есть рассеяние Мандельштама — Бриллюэна.

Кроме того, в твердых телах имеются микронеоднородности и примеси. Рассеяние на этих неоднородностях, как правило, маскирует молекулярное рассеяние на флуктуациях плотности и анизотропии.

Коэффициент мутности  $\alpha_s$  (см. (21.26)) зависит от длины волны:  $\alpha_s = C/\lambda^4$ , а константа  $C$  — от оптической чистоты материала. Если принять во внимание и коэффициент поглощения  $\alpha$ , то в твердом теле интенсивность убывает по закону

$$I(z) = I(0) \exp[-(\alpha_s + \alpha)z] = I(0) \exp(-\tilde{\alpha}z), \quad (22.10)$$

где  $\tilde{\alpha} = \alpha + \alpha_s$  — коэффициент экстинкции (от лат. *extinctio* — гашение).

В качестве иллюстрации на рис. 22.5 показана экспериментально измеренная зависимость коэффициента экстинкции одномодового кварцевого оптического волокна от длины волны.

Штриховая линия соответствует оптически чистому кварцу. Чистый кварц обладает поглощением в УФ-области и далекой ИК-области ( $\lambda > 2$  мкм). При увеличении длины волны от  $\lambda = 1,0$  мкм мутность  $\alpha_s$  убывает ( $\alpha_s \sim 1/\lambda^4$ ), а поглощение  $\alpha$  невелико. При  $\lambda \rightarrow 2,0$  мкм  $\alpha_s$  мало, а поглощение  $\alpha$  увеличивается. Поэтому на длине волны  $\lambda = 1,55$  мкм потери в кварце минимальны.

Реальный кварц обладает на длине волны  $\lambda = 1,37$  мкм максимумом (пиком) потерь, обусловленным линией поглощения гидроксильных групп ОН, являющихся вредными примесями. Основная линия поглощения ОН соответствует  $\lambda_0 = 2,73$  мкм. Напомним, что  $1 \text{ дБ/км} = 4,34 \text{ км}^{-1}$  (см. лекцию 17).

На рис. 22.1 цв. вкл. показана фотография волоконного световода, по которому распространяется свет. Если бы не было рассеяния света, то световод не казался бы освещенным.

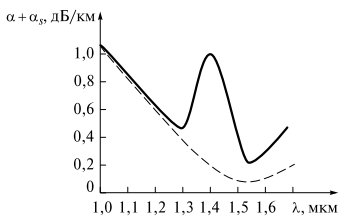


Рис. 22.5

**Фотонные кристаллы.** Концепция фотонного кристалла возникла из аналогии свойств электромагнитных волн в средах с периодически изменяющимся по трем направлениям показателем преломления и электронов в кристаллах, обладающих периодичностью структуры.

Поведение электронов зависит от отношения длины волны де Бройля  $\lambda = h/p$  ( $h$  — постоянная Планка;  $p$  — импульс электрона) и периода  $d$  кристаллической решетки. В свободном пространстве электрон, двигаясь со скоростью  $u$ , имеет импульс  $p = mu$  и кинетическую энергию

$$W = \frac{p^2}{2m} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}, \quad (22.11)$$

где  $k = 2\pi/\lambda$  — волновое число;  $\hbar = h/2\pi$ ;  $m$  — масса электрона.

Зависимость  $W(k)$  называется *дисперсионной кривой*. У свободного электрона эта кривая является параболой.

В кристалле электрон движется в периодическом электростатическом поле, создаваемом заряженными ионами, находящимися в узлах решетки. Поведение электронов может быть описано с помощью законов квантовой механики. Один из главных результатов при таком описании состоит в том, что дисперсионная кривая претерпевает разрывы при  $k = \pm n\pi/d$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) (рис. 22.6). Эти разрывы определяют *запрещенные зоны* — области значений энергии, которые электрон иметь не может.

Интервал  $\Delta W$ , соответствующий одной области, называется шириной запрещенной зоны. На рисунке показаны лишь две зоны. Штриховой линией изображена дисперсионная кривая свободного электрона.

Переносим аналогию на световую волну, нарисуем дисперсионную кривую для энергии фотона  $W = \hbar\omega$  как функции волнового числа  $k$ . В свободном пространстве  $k = \omega/c$ ,  $W = \hbar ck$  и дисперсионная кривая является прямой линией.

В однородной диспергирующей среде  $k = n(\omega)\omega/c$  и дисперсионная кривая постепенно отклоняется от прямой в области частот, в которой начинает возрастать показатель преломления. Если фотоны летят перпендикулярно слоистой среде с чередующимся значением показателя преломления, а толщина каждого слоя равна  $d$ , то дисперсионная кривая будет претерпевать разрывы. На рис. 22.7 показан лишь один разрыв. Штриховой линией отмечена дисперсионная кривая для свободного фотона.

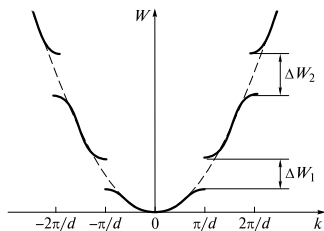


Рис. 22.6

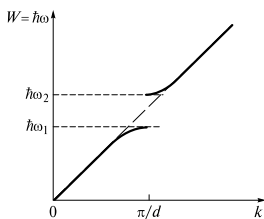


Рис. 22.7

Наличие запрещенной зоны означает, что волны с частотой  $\omega_1 < \omega < \omega_2$  в такой слоистой среде распространяться не могут. Этот результат не является неожиданным. В лекции 17 было показано, что многослойное покрытие хорошо отражает свет, не пропуская его внутрь среды.

Интервал частот  $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$  называется областью отражения. Между соседними областями отражения находятся области пропускания, или полосы пропускания. В полосе пропускания энергетический коэффициент пропускания  $T(\omega)$  зависит от частоты: он имеет ряд максимумов, число которых равно числу периодов (слоев) среды. Эти максимумы соответствуют минимумам для коэффициента отражения  $R = 1 - T$  и показаны на рис. 17.9.

Если теперь имеется трехмерная структура с периодическим изменением показателя преломления по трем направлениям, то она называется *фотонным кристаллом*. Он также имеет запрещенные зоны и соответственно полосы пропускания.

Например, рассчитаны полосы отражения и пропускания структур, состоящих из упакованных диэлектрических сфер. При одинаковой геометрии в относительном расположении шариков наибольшая ширина полосы отражения достигается, если отношение объема шариков к объему всей структуры имеет оптимальное значение  $f = 0,2 - 0,3$ . В этом случае происходит сильное когерентное рассеяние от неподвижных диэлектрических сфер. Относительная ширина  $\Delta\omega/\omega$  полосы отражения зависит как от отношения показателя преломления шаров  $n_1$  к показателю преломления  $n_2$  среды между ними, так и от коэффициента  $f$ , характеризующего объемную долю заполнения. При  $n_1 = 3,6$ ,  $n_2 = 1,0$  полоса отражения (запрещенная зона) возникает при  $f = 0,2$ . При увеличении  $f$  сначала  $\Delta\omega/\omega$  увеличивается и достигает максимума  $\Delta\omega/\omega = 0,15$  при  $f = 0,35$ . Затем  $\Delta\omega/\omega \rightarrow 0$ , и запрещенная зона исчезает при  $f = 0,7$ .

Периодические структуры нередко встречаются в живой и неживой природе. Слоистыми (одномерными) являются покрытия крыльев бабочек, перьев павлина и т.п. Двухмерная структура присутствует у натуральных жемчужин. Полудрагоценный минерал опал представляет собой трехмерный коллоидный кристалл, периодичность которого обусловлена входящими в его состав сферическими глобулами оксида кремния.

В отраженном свете периодические структуры ярко окрашены, при этом их цвет зависит как от углов падения света, так и угла наблюдения. На рис. 22.2 цв. вкл. представлена фотография бабочки, имеющей под определенным углом зрения синюю окраску.

В последнее время производство таких структур осуществляют в искусственных условиях. Наряду с напылением многослойных пленок, применяющимся при изготовлении зеркал, используют молекулярно-лучевую эпитаксию — осаждение вещества из газовой фазы на поверхность подложки. Применяют также и химическое травление поверхности вещества, создавая таким образом одномерные и двухмерные периодические структуры. Технологии травления хорошо отработаны для алюминия и кремния в связи с их широким применением в микроэлектронике. Период структур достигает малых величин  $d \approx 300$  нм.

Наиболее сложны в изготовлении трехмерные структуры. В настоящее время применяются два метода их производства. Первый метод заключается в следующем: взвесь диэлектрических частиц осаждается в растворе на дно кюветы. В результате образуется многослойный коллоидный кристалл, который можно

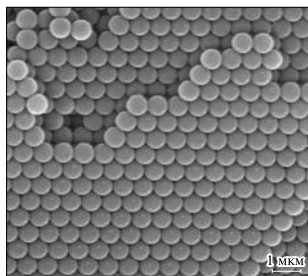


Рис. 22.8

исследовать непосредственно в растворе. Сложную структуру можно подвергнуть термообработке, при которой спекшиеся частицы образуют фотонный кристалл, который называется искусственным опалом. Для увеличения  $\Delta\omega/\omega$  пространство между частицами с показателем преломления  $n_1$  заполняют веществом с большим показателем преломления  $n_2$ . Фотография увеличенного изображения искусственного опала представлена на рис. 22.8.

Во втором методе наносят двухмерные диэлектрические слои, по-разному ориентированные, подобно тому как «крест-накрест» укладывается стопка поленьев.

Описанные выше структуры называют *наноструктурами*. Квантовые оптические процессы в наноструктурах имеют ряд особенностей, позволяющих разделить процессы на две группы.

К первой группе относят эффекты, связанные с пространственным ограничением движения электронов. Для этого период наноструктур должен быть соизмерим с длиной волны де Бройля:  $d \sim 1 - 10$  нм. В этом случае появляются *квантовые размерные эффекты*. Они характеризуются изменением дипольного момента  $d_{21}$  квантового перехода электрона между двумя энергетическими уровнями. В результате изменяется энергетический спектр электронов.

Другая группа объединяет процессы, связанные с изменением плотности фотонных состояний (см. (6.18))

$$\frac{dn}{dv} = \frac{8\pi v^2}{c^3}. \quad (22.12)$$

Эта плотность входит в формулу Планка (6.21) и определяет спектр излучения черного тела. От плотности фотонных состояний зависит и коэффициент Эйнштейна  $A_{21}$  (см. (6.26)).

В фотонных кристаллах  $\frac{dn}{dv}$  можно варьировать за счет изменения структуры и использовать это для изменения теплоотдачи нагретых фотонных кристаллов, каналирования тепловых потоков в микроэлектронике и т. д.

При рэлеевском рассеянии света в них будет нарушаться зависимость  $I_s \sim \omega^4$ , поскольку для частот в запрещенной зоне рассеяние будет подавлено. Наконец, спонтанное излучение вещества в области запрещенной зоны тоже может быть подавлено в структурах с всенаправленной запрещенной зоной (при любых направлениях  $\mathbf{k}$  существует полоса отражения  $\Delta\omega$ ). Введение в кристалл точечной активной среды позволит создать микролазеры с высокой когерентностью света.

Микроструктурированные оптические волноводы, о которых шла речь в лекции 17, представляют собой длинный двухмерный фотонный кристалл. На рис. 22.9 показано сечение «дырчатого» волокна.

Сердцевина волокна выполнена из кварцевого стекла, а кварцевая оболочка имеет множество воздушных полостей. Их наличие позволяет более чем на порядок увеличить отношение показателей преломления сердцевины и оболочки по сравнению с обычными волокнами.

Из-за возникновения запрещенных зон в таком волокне излучение может распространяться в определенных спектральных диапазонах, ширина которых зависит от размеров полостей и их количества. Это позволяет создавать волокна с необычными дисперсионными свойствами в широком спектральном диапазоне. В частности, можно расширить область аномальной дисперсии групповой скорости в коротковолновую часть спектра.

Микроструктурированные волокна находят применение в волоконно-оптических линиях связи, используются в волноведущих системах для передачи высокоинтенсивных световых потоков. Наличие широкой фотонной запрещенной зоны позволяет удерживать свет в волокне при больших углах его изгиба.

В таких волокнах из-за локальной концентрации поля световой волны снижаются пороги нелинейных эффектов (см. лекции 23 и 24). Это позволяет их применять для создания рамановских лазеров и усилителей, оптических переключателей, для генерации сплошного спектра излучения (суперконтинуума): от ультрафиолетового до инфракрасного ( $\lambda = 1,8$  мкм).

**Комбинационное рассеяние света.** В 1928 г. Г. Ландсбергом и Л. Мандельштамом (СССР) и независимо Ч. Раманом и К. Кришнаном (Индия) в спектре рассеянного света в жидкостях были обнаружены спектральные линии-спутники, сопровождающие линию рассеиваемого света. При частоте  $\omega_0$  падающего света частоты каждой пары спутников  $\omega_i = \omega_0 \pm \Omega_i$ .

Измерения показали, что частоты  $\Omega_i$  совпадают с частотами молекулярных колебаний (колебаний атомов в молекуле). Рассеянные волны с частотами  $\omega_i = \omega_0 - \Omega_i$  получили название стоксовых компонент, а волны с частотами  $\omega_i = \omega_0 + \Omega_i$  — антистоксовых. С повышением температуры среды интенсивность антистоксовых компонент быстро возрастает. Это рассеяние получило название *комбинационного рассеяния* (КР). Публикация с результатами работы индийских ученых вышла на несколько месяцев раньше. В 1930 г. Ч. Раман был удостоен Нобелевской премии, а в зарубежной литературе рассеяние называется рамановским.

С классической точки зрения молекулы в результате случайных воздействий совершают нормальные колебания на частотах, число которых определяется числом степеней свободы. Для соответствующей нормальной координаты  $\xi$  (например, расстояния между атомами в двухатомной молекуле) можно написать классическое уравнение

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} + 2\delta \frac{d\xi}{dt} + \Omega_0^2 \xi = \frac{f(t)}{M}, \quad (22.13)$$

где  $M$  — приведенная масса молекулы;  $\delta$  — коэффициент затухания;  $f(t)$  — случайная сила.

При кратковременном воздействии в момент времени  $t = 0$  нормальная координата будет изменяться во времени по закону

$$\xi = \xi_0 e^{-\delta t} \cos(\Omega t + \varphi_0), \quad (22.14)$$

где  $\Omega = \sqrt{\Omega_0^2 - \delta^2}$ ;  $\xi_0$  и  $\varphi_0$  — случайные амплитуда и начальная фаза колебаний.

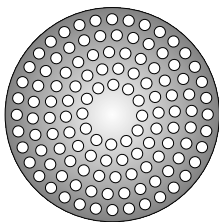


Рис. 22.9

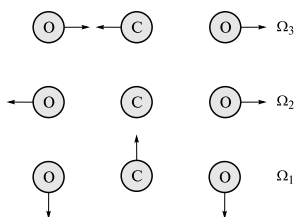


Рис. 22.10

Поляризуемость молекулы  $a_{ij}$  (см. (21.3)) определяется ее конфигурацией и, следовательно,  $a_{ij} = a_{ij}(\xi)$ . Для изотропной жидкости  $\bar{a}(\xi) = Na(\xi)$ . Тогда поляризация среды в поле  $E = E_0 \cos \omega_0 t$  световой волны будет равна

$$P = \epsilon_0 \bar{a} E = \epsilon_0 N \frac{da}{d\xi} \xi E = \\ = \epsilon_0 N \frac{da}{d\xi} \xi_0 E_0 e^{-\delta t} \cos \omega_0 t \cos(\Omega t + \varphi). \quad (22.15)$$

Из этого выражения следует, что поляризация  $P$  будет изменяться на частотах  $\omega_0 - \Omega$  и  $\omega_0 + \Omega$ . Соответственно будут возникать Stokes и анти-Stokes компоненты.

Частоты молекулярных колебаний  $\Omega \sim 10^{13} - 10^{14} \text{ c}^{-1}$ , а относительное изменение частоты  $\Omega/\omega_0 \sim 10^{-2} - 10^{-1}$ , поэтому для регистрации компонент не требуются приборы с высокой разрешающей силой. Поскольку амплитуды  $\xi_0$  колебания малы и волны, излученные элементарными объемами, из-за случайного характера возбуждения молекул некогерентны, интенсивность рассеянных компонент невелика. Такое рассеяние называется *спонтанным комбинационным рассеянием*.

С квантовой точки зрения энергия  $\hbar\omega_0$  падающего на среду фотона и энергия  $\hbar\omega$  фотона рассеянного света связаны условием энергетического баланса

$$\hbar\omega_0 = \hbar\omega \pm \hbar\Omega. \quad (22.16)$$

Для Stokesовой компоненты энергия  $\hbar\Omega$  поглощается средой, а для анти-Stokesовой — заимствуется у среды. Колебания среды с частотой  $\Omega$  ставится в соответствие квазичастица с энергией  $\hbar\Omega$ , называемая оптическим фононом. Поэтому *комбинационное рассеяние происходит на оптических фононах*.

Исследования рассеянных компонент (комбинационных линий) показали, что нет строгой корреляции интенсивности рассеянного света с величиной коэффициента поглощения на этих частотах (интенсивностью линий абсорбции). Интенсивность комбинационных линий зависит от величины  $\frac{da}{d\xi}$ , а интенсивность линий поглощения — от амплитуды осцилляций дипольного момента молекулы при нормальных колебаниях. Поглощение волны связано с работой пондеромоторных сил, возникающих при взаимодействии поля  $E$  с дипольным моментом.

На рис. 22.10 изображены колебания молекулы  $\text{CO}_2$ , частоты которых  $\Omega_1 = 1,26 \cdot 10^{14} \text{ c}^{-1}$ ,  $\Omega_2 = 2,52 \cdot 10^{14} \text{ c}^{-1}$ ,  $\Omega_3 = 4,43 \cdot 10^{14} \text{ c}^{-1}$ .

Для симметричной моды с частотой  $\Omega_2$  дипольный момент молекулы не изменяется и поглощения на этой частоте не происходит. Однако в спектре комбинационного рассеяния этой частоте соответствуют два спутника, поскольку поляризуемость молекулы изменяется с частотой  $\Omega_2$ .

Комбинационное рассеяние позволяет не только измерять собственные частоты колебаний молекул, но и исследовать их симметрию, получать информацию о молекулярной динамике, проводить анализ состава молекулярных смесей (например, бензина) и др.

## РАЗДЕЛ 9

### НЕЛИНЕЙНО-ОПТИЧЕСКИЕ ЯВЛЕНИЯ

---

#### ЛЕКЦИЯ 23

Как отмечалось ранее, при распространении высокоинтенсивных волн, генерируемых лазерами, могут возникать новые оптические явления, которые невозможно было наблюдать до изобретения лазеров.

Исторически первым из таких впечатляющих явлений было удвоение частоты излучения рубинового лазера. В первых опытах красный луч рубинового лазера ( $\lambda = 694,3$  нм) направлялся в кристалл кварца. На выходе из кристалла было зарегистрировано ультрафиолетовое излучение с длиной волны, ровно вдвое меньше длины волны излучения лазера. Наблюдение этого явления послужило началом интенсивных исследований широчайшего круга задач, связанных с распространением лазерного излучения и его взаимодействием с веществом. Это явление теперь легко демонстрируется на лекциях, и об этом пойдет речь несколько позднее.

Не менее впечатляющим является лекционный опыт, в котором луч аргонного лазера распространяется через кювету с жидкостью. При малой мощности луча последний после кюветы имеет расходимость, определяемую дифракцией. Однако если мощность увеличить в несколько раз, то световой пучок после кюветы приобретает большую угловую расходимость, намного превышающую дифракционную.

Эти и другие опыты показывают, что в рамках ранее используемых *линейных материальных уравнений* подобные явления объяснить невозможно. Здесь уместно вспомнить, что материальные уравнения (15.2) и (15.3) записаны в предположении, что напряженность  $E$  поля световой волны много меньше напряженности  $E_a$  характерного внутриатомного поля. Для высокоинтенсивных волн данное предположение может стать неоправданным.

В поле таких волн связь между векторами  $\mathbf{D}$  и  $\mathbf{E}$  становится *нелинейной*. Поскольку  $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$ , поляризуемость среды  $\mathbf{P}$  нелинейным образом зависит от напряженности  $\mathbf{E}$ . Феноменологически эту зависимость можно представить в виде ряда

$$P(E) = \epsilon_0 \varkappa E + \epsilon_0 \chi_2 E^2 + \epsilon_0 \chi_3 E^3 + \dots, \quad (23.1)$$

где  $\varkappa$  — *линейная восприимчивость*;  $\chi_2$  и  $\chi_3$  — *квадратичная* и *кубичная нелинейные восприимчивости* соответственно.

В лекции 15 была изложена классическая теория дисперсии, на основе которой рассчитана величина  $\varkappa$  и связанная с ней диэлектрическая проницаемость  $\epsilon = 1 + \varkappa$ . Подобным образом можно рассчитать и нелинейную поляризуемость, если воспользоваться нелинейной теорией дисперсии.



**Основы нелинейной теории дисперсии.** При описании электрооптического эффекта Поккельса в лекции 20 отмечалось, что колебания электрона в атоме будут гармоническими лишь при малых амплитудах. Это связано с тем, что потенциальная энергия электрона  $U(x)$  содержит слагаемые, пропорциональные  $x^3$ ,  $x^4$  и т.д. (см. формулу (20.17)), которыми мы ранее пренебрегали. В электрическом поле  $E = E_0 e^{i\omega t}$  высокоинтенсивной световой волны роль этих слагаемых может быть существенной. Осциллятор становится ангармоническим, а уравнение его вынужденных колебаний будет иметь вид

$$m\ddot{x} = -\frac{\partial U}{\partial x} + qE = -Fx - \Phi x^2 - \Psi x^3 + qE. \quad (23.2)$$

Переходя к дипольному моменту  $p = ex$ , получаем

$$\ddot{p} + \omega_0^2 p + \beta_2 p^2 + \beta_3 p^3 = \frac{e^2}{m} E. \quad (23.3)$$

Здесь  $\omega_0^2 = \frac{F}{m}$ ,  $\beta_2 = \frac{\Phi}{me}$ ,  $\beta_3 = \frac{\Psi}{me}$ . В уравнении (23.3), которое является нелинейным, мы для простоты пренебрегли затуханием.

Это уравнение не имеет точных аналитических решений, но можно получить приближенное решение, приняв во внимание, что  $|\omega_0^2 p| \gg |\beta_2 p^2| \gg |\beta_3 p^3|$ . Это позволяет искать решение (23.3) в виде

$$p(t) = p_{\text{л}}(t) + p_{\text{нл}}(t), \quad (23.4)$$

где  $p_{\text{л}}$  — решение линейного уравнения (15.47) или уравнения (23.3) при  $\beta_2 = \beta_3 = 0$ ;  $p_{\text{нл}}$  — малая нелинейная поправка:  $|p_{\text{нл}}| \ll |p_{\text{л}}|$ .

Рассчитаем вначале  $\chi_2$ . Для этого не будем учитывать слагаемое  $\beta_3 p^3$  в уравнении (23.3). Подставив формулу (23.4) в уравнение, получим

$$(\ddot{p}_{\text{л}} + \ddot{p}_{\text{нл}}) + \omega_0^2(p_{\text{л}} + p_{\text{нл}}) + \beta_2(p_{\text{л}} + p_{\text{нл}})^2 = \frac{e^2}{m} E. \quad (23.5)$$

Воспользуемся методом последовательных приближений, или методом возмущений.

**Первое приближение.** Вначале полагаем  $\beta_2 = 0$ . Уравнение (23.3), или (23.5), переходит в (15.47). Оно описывает линейную поляризацию:

$$\ddot{p}_{\text{л}} + \omega_0^2 p_{\text{л}} = \frac{e^2}{m} E. \quad (23.6)$$

Его решение совпадает с (15.48) при  $\delta = 0$ :

$$p_{\text{л}} = \frac{e^2}{m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2} E. \quad (23.7)$$

**Второе приближение.** Пусть теперь  $\beta_2 \neq 0$ . В уравнении (23.5) можно пренебречь малыми слагаемыми  $2\beta_2 p_{\text{л}} p_{\text{нл}}$  и  $\beta_2 p_{\text{нл}}^2$ . Тогда

$$\ddot{p}_{\text{нл}} + \omega_0^2 p_{\text{нл}} = -\beta_2 p_{\text{л}}^2. \quad (23.8)$$

Это уравнение вынужденных колебаний, в котором роль вынуждающей силы играет величина  $-\beta_2 p_{\text{л}}^2$ . Его решение, по аналогии с (23.7), запишется в виде

$$p_{\text{нл}} = -\frac{e^4}{m^2} \frac{\beta_2^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)(\omega_0^2 - 4\omega^2)} E^2. \quad (23.9)$$

Дипольный момент единицы объема среды, содержащей  $N$  осцилляторов, равен

$$P = (p_{\text{л}} + p_{\text{нл}})N = P_{\text{л}} + P_{\text{нл}}. \quad (23.10)$$

Сравнив (23.10) с (23.1), находим

$$\varkappa = \frac{Ne^2}{m\varepsilon_0} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2}; \quad (23.11)$$

$$\chi_2 = -\frac{Ne^4}{m^2\varepsilon_0} \frac{\beta_2}{(\omega_0^2 - \omega^2)(\omega_0^2 - 4\omega^2)}. \quad (23.12)$$

Оценим отношение  $\frac{P_{\text{нл}}}{P_{\text{л}}}$ :

$$\left| \frac{P_{\text{нл}}}{P_{\text{л}}} \right| = \left| \frac{\chi_2 E_0}{\varkappa} \right| = \frac{e^2}{m} \left| \frac{\beta_2}{(\omega_0^2 - \omega^2)(\omega_0^2 - 4\omega^2)} \right| E_0. \quad (23.13)$$

Вдали от резонансной частоты при  $\omega \ll \omega_0$

$$\left| \frac{P_{\text{нл}}}{P_{\text{л}}} \right| \approx \frac{e^2 \beta_2 E_0}{m\omega_0^4} = \frac{e\Phi E_0}{m^2\omega_0^4}. \quad (23.14)$$

Частоту  $\omega_0$  можно интерпретировать как угловую скорость вращения электрона по круговой боровской орбите радиуса  $a$  вокруг ядра атома. Поэтому

$$m\omega_0^2 a = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{ee}{a^2} = eE_{\text{ат}}, \quad (23.15)$$

где

$$E_{\text{ат}} = \frac{e}{4\pi r_0 a^2} \quad (23.16)$$

— так называемое внутриатомное поле, удерживающее электрон на орбите.

Следовательно,

$$\left| \frac{P_{\text{нл}}}{P_{\text{л}}} \right| \approx \frac{\Phi a^2 E_0}{eE_{\text{ат}}^2}. \quad (23.17)$$

Величина  $\Phi a^2/e \sim E_{\text{ат}}$ , поскольку при смещении электрона на величину  $x \sim a$  в уравнении (23.2)  $\Phi a^2 \sim Fa \sim eE_{\text{ат}}$ . Тогда окончательно получаем

$$\left| \frac{P_{\text{нл}}}{P_{\text{л}}} \right| = \left| \frac{\chi_2 E_0}{\varkappa} \right| \sim \frac{E_0}{E_{\text{ат}}}. \quad (23.18)$$

Аналогичным образом можно рассчитать и  $\chi_3$ , если в уравнении (23.3) положить  $\beta_2 = 0$  и учесть слагаемое  $\beta_3 p^3$ . Тогда

$$\left| \frac{\chi_3 E_0^3}{\chi_2 E_0^2} \right| = \left| \frac{\chi_3 E_0}{\chi_2} \right| \sim \frac{E_0}{E_{\text{ат}}}. \quad (23.19)$$

При  $a \sim 10^{-10}$  м  $E_{\text{ат}} \sim 10^{11}$  В/м. Из (23.18) получаем оценку:  $|\chi_2| \sim |\varkappa|/E_{\text{ат}} \sim \sim 10^{-11}$  м/В, так как  $|\varkappa| \sim 1$ . Следовательно, представление поляризации в виде (23.1) есть разложение по малому параметру  $E_0/E_{\text{ат}} \ll 1$ .

Для нелазерных источников света  $E_0/E_{\text{ат}} \ll 1$ , и среду можно считать линейной. Для лазерного излучения  $E_0/E_{\text{ат}} < 1$ , и нелинейный отклик среды может кардинально изменить характер взаимодействия и распространения в ней волны. В этом случае может возникать ряд совершенно новых оптических явлений. Более того, при приближении частоты  $\omega$  излучения лазера к резонансной частоте  $\omega_0$  среды могут возникать сильные *резонансные нелинейные эффекты*.

Широкое разнообразие нелинейных волновых эффектов является предметом исследования новой области знания — *нелинейной оптики*. Здесь ограничимся описанием некоторых важных эффектов в средах с квадратичной и кубической нелинейностями.

**Нелинейные эффекты в среде с квадратичной нелинейностью.** Квадратичной нелинейностью обладают кристаллы, у которых отсутствует центр симметрии (KDP,  $\text{LiNbO}_3$  и др.). Эти кристаллы, как отмечалось ранее, обладают электрооптическими свойствами и являются пьезоэлектриками. Проявление нелинейности кристалла KDP демонстрируется в следующем лекционном эксперименте.

На кристалл KDP направляется наносекундный импульс излучения неодаимового лазера ( $\lambda = 1,06$  мкм). При определенной ориентации кристалла на его выходе появляется импульс с длиной волны  $\lambda = 0,53$  мкм, который на экране дает вспышку зеленого света. Таким образом, в кристалле возникает (генерируется) волна удвоенной частоты, которая называется *второй гармоникой излучения лазера*. Напомним, что генерация второй гармоники (ГВГ) в этом кристалле использовалась в оптической схеме, изображенной на рис. 20.9, с помощью которой измерялось время релаксации  $\tau_K$  керр-эффекта.

На рис. 23.1 цв. вкл. представлено явление генерации второй гармоники, характеризующееся появлением излучения зеленого света. Генерация происходит в кристалле  $\text{LiNbO}_3$ , который расположен в правом нижнем углу фотографии.

Помимо явления ГВГ, в средах с квадратичной нелинейностью (квадратичных средах) возможно взаимодействие волн с частотами  $\omega_1$  и  $\omega_2$ . В результате могут генерироваться гармоники с частотами  $2\omega_1$  и  $2\omega_2$ , волны разностной  $\omega_1 - \omega_2$  и суммарной  $\omega_1 + \omega_2$  частот.

Сложение частот  $2\omega$  и  $\omega$  происходит в кристалле KDP, расположенном позади кристалла  $\text{LiNbO}_3$  (в середине фотографии, см. рис. 23.1 цв. вкл.). В результате появляется излучение частоты  $3\omega = 2\omega + \omega$  (третьей гармоники). Его появление фиксируется на люминесцентном экране, на котором видно голубое пятно.

Рассмотрим более подробно эти явления. Пусть в кристалле вдоль оси  $Oz$  распространяются две волны с частотами  $\omega_1$  и  $\omega_2$ . Тогда суммарное электрическое поле обеих волн

$$E(z, t) = A_1 \cos(\omega_1 t - k_1 z) + A_2 \cos(\omega_2 t - k_2 z), \quad (23.20)$$

где  $k_1 = n(\omega_1)\omega_1/c$ ;  $k_2 = n(\omega_2)\omega_2/c$ . Вместе с этим полем в среде будет распространяться *волна линейной поляризации*

$$P_d(z, t) = \varepsilon_0 \varkappa [A_1 \cos(\omega_1 t - k_1 z) + A_2 \cos(\omega_2 t - k_2 z)], \quad (23.21)$$

которая, в соответствии с классической теорией излучения, будет порождать волны с частотами  $\omega_1$  и  $\omega_2$ , как это и происходит в линейной среде.

Однако волна нелинейной поляризации

$$P_{\text{нл}}(z, t) = \epsilon_0 \chi_2 [A_1 \cos(\omega_1 t - k_1 z) + A_2 \cos(\omega_2 t - k_2 z)]^2 \quad (23.22)$$

будет порождать волны с частотами  $2\omega_1$ ,  $2\omega_2$ ,  $\omega_1 - \omega_2$  и  $\omega_1 + \omega_2$ .

В поле лишь одной волны (волны накачки)  $E = A \cos(\omega t - kz)$

$$P_{\text{нл}} = \epsilon_0 \chi_0 \frac{A^2}{2} [1 + \cos(2\omega t - 2kz)]. \quad (23.23)$$

Первое слагаемое описывает постоянную поляризацию среды, пропорциональную интенсивности волны,  $I \propto A^2/2$ . Появление поляризации называется *оптическим детектированием*. Его можно зарегистрировать, поместив кристалл между обкладками конденсатора, параллельными направлению распространения световой волны. В момент прохождения импульса между обкладками возникает разность потенциалов, которую можно измерить.

Второе слагаемое описывает волну поляризации частотой  $2\omega$ , движущуюся в среде со скоростью

$$v_p = \frac{2\omega}{2k} = \frac{c}{n(\omega)} = v, \quad (23.24)$$

равной скорости волны накачки  $v$ . Волна нелинейной поляризации будет генерировать волну второй гармоники

$$E_2(z, t) = A_2 \cos(\omega_2 t - k_2 z), \quad (23.25)$$

где  $\omega_2 = 2\omega$ ;  $k_2 = 2\omega n(2\omega)/c$ .

Скорость этой волны

$$v_2 = \frac{\omega_2}{k_2} = \frac{2\omega}{k_2} = \frac{c}{n(2\omega)}. \quad (23.26)$$

Если  $v_2 \neq v_p$ , то эффективной генерации второй гармоники не происходит, поскольку при разных скоростях движения источника (волны поляризации) и излучаемой им волны нарушаются оптимальные фазовые соотношения. Поэтому амплитуда  $A_2$  будет небольшой, а интенсивность  $I_2 \propto A_2^2/2$ , как показывает анализ, периодически будет нарастать и убывать вдоль оси  $Oz$ .

Для эффективной генерации второй гармоники (монотонного нарастания интенсивности вдоль  $Oz$ ) необходимо выполнение условия *волнового синхронизма*

$$v_2 = v, \text{ или } \omega_2 = 2\omega, \quad k_2 = 2k. \quad (23.27)$$

Для его выполнения необходимо, чтобы  $n(2\omega) = n(\omega)$ .

Этого можно добиться, используя явление двойного лучепреломления в кристалле. Например, кристалл KDP является одноосным отрицательным кристаллом ( $n_e < n_o$ ). Если изобразить поверхности нормалей для частот  $\omega$  и  $2\omega$ , то по направлению  $O_1 O_2$ , составляющему угол  $\vartheta_c$  с оптической осью, скорости  $v'(\omega) = v''(2\omega)$  (рис. 23.1).

Это направление называется *направлением синхронизма*. Если вырезать кристалл таким образом, чтобы входная и выходная его грани были перпендикулярны этому направлению, то можно добиться высокой

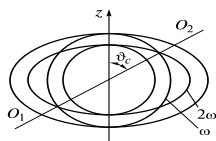


Рис. 23.1

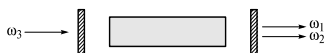


Рис. 23.2

интенсивности второй гармоники. Для этого волна накачки должна быть обыкновенной (поляризованной в плоскости, перпендикулярной главной плоскости), а необыкновенная волна

второй гармоники будет поляризована в главной плоскости. Такое взаимодействие осуществляется за счет соответствующей компоненты  $\chi_{2ijk}$  тензора поляризуемости кристалла, являющегося тензором третьего ранга.

В кристалле KDP для длины волны накачки  $\lambda = 1,06$  мкм,  $\vartheta_c = 40^\circ 30'$ . При интенсивности накачки  $I \sim 10^8$  Вт/см<sup>2</sup> и длине кристалла  $\sim 1$  см эффективность преобразования  $A_2^2/A^2 \sim 10^{-1}$ . Для повышения интенсивности лазерное излучение фокусируется внутрь кристалла фокусирующей линзой.

Если квадратично-нелинейный кристалл поместить в резонатор, как это изображено на рис. 23.2, и освещать его мощной волной накачки частотой  $\omega_3$ , то можно создать условия для генерации волны частотой  $\omega_1 = \omega_3 \pm \omega_2$ .

Волна частотой  $\omega_1$  называется *сигнальной*, а вспомогательная волна частотой  $\omega_2$  — *холостой*. Для эффективного взаимодействия волн необходимо выполнение условия фазового синхронизма:  $\mathbf{k}_3 = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2$ ,  $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$ .

Обычно холостая волна частотой  $\omega_2$  возникает из оптического шума. При ее взаимодействии с накачкой рождается и затем усиливается сигнальная волна частотой  $\omega_1 = \omega_3 \pm \omega_2$ , многократно отражаясь от зеркал резонатора. Поворачивая или нагревая кристалл, изменяют условия синхронизма. Поэтому должна изменяться частота генерируемой сигнальной (и холостой) волны.

Такой генератор получил название *параметрического генератора света*. Он позволяет плавно перестраивать частоту генерации. Генераторы суммарных частот  $\omega_1 = \omega_3 + \omega_2$  используются для получения перестраиваемого излучения в УФ-диапазоне, генераторы разностных частот  $\omega_1 = \omega_3 - \omega_2$  — в ИК-диапазоне.

На рис. 23.2 цв. вкл. показан параметрический генератор света разностной частоты, используемый в учебном поцессе на кафедре общей физики и волновых процессов физического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова. Между зеркалами резонатора помещен кристалл LiNbO<sub>3</sub>, который может поворачиваться вокруг вертикальной оси. Накачка осуществляется второй гармоникой ( $\lambda = 530$  нм) излучения YAG Nd<sup>3+</sup>-лазера. При повороте кристалла длина генерируемой (сигнальной) волны изменяется в ИК-диапазоне от 800 до 1 200 нм.

**Нелинейные эффекты в средах с кубичной нелинейностью.** Если в среде, для которой  $\chi_2 = 0$ , распространяется мощная световая волна, то поляризация среды

$$P = \epsilon_0 \mathcal{E} E + \epsilon_0 \chi_3 E^3. \quad (23.28)$$

Для удобства возведения в третью степень и дальнейшего анализа представим поле  $E$  в виде

$$E(z, t) = A \cos(\omega t - kz) = \frac{1}{2} \hat{A} e^{i\omega t} + \frac{1}{2} \hat{A}^* e^{-i\omega t}, \quad (23.29)$$

где  $A = A e^{-ikz}$  — комплексная амплитуда, звездочка означает комплексное сопряжение.

Подставим (23.29) в (23.28) и среди множества слагаемых учтем те, которые изменяются во времени с частотой  $\omega$  падающей волны. Таких слагаемых

будет три. Тогда поляризация среды на частоте  $\omega$  будет определяться выражением

$$P = \varepsilon_0 \varkappa E + \varepsilon_0 \frac{3}{8} \chi_3 A^2 E, \quad (23.30)$$

поскольку  $\hat{A} \cdot \hat{A}^* = A^2$ .

Из равенства  $D = \varepsilon_0 E + P = \varepsilon_0 \varepsilon E$  следует, что диэлектрическая проницаемость равна

$$\varepsilon = 1 + \varkappa + \frac{3}{8} \chi_3 A^2 \quad (23.31)$$

и зависит от интенсивности волны.

Вычислим показатель преломления среды:

$$n = \sqrt{\varepsilon} = \sqrt{n_0 + \frac{3}{8} \chi_3 A^2} \approx n_0 + \frac{3}{16} \frac{\chi_3}{n_0} A^2, \quad (23.32)$$

где  $n_0 = 1 + \varkappa$ .

Здесь учтено, что в подкоренном выражении второе слагаемое намного меньше первого. Если перейти к интенсивности  $I = \frac{1}{2} c \varepsilon_0 A^2$ , то (23.32) примет вид, используемый в научной литературе:

$$n = n_0 + \Delta n_{\text{нл}} = n_0 + n_2 I. \quad (23.33)$$

Здесь  $\Delta n_{\text{нл}} = n_2 I$  — *нелинейная добавка к показателю преломления*. Кубичная нелинейность характеризуется размерным коэффициентом

$$n_2 = \frac{3}{8} \frac{\chi_3}{c \varepsilon_0 n_0}. \quad (23.34)$$

Из (23.19) следует, что  $\chi_3 \sim \varkappa / E_{\text{ат}}^2 \sim 10^{-18} \text{ м}^2/\text{В}^2$ . Тогда  $n_2 \sim 10^{-20} \text{ м}^2/\text{Вт}$ . Например, для кварца  $n_2 \sim 3 \cdot 10^{-20} \text{ м}^2/\text{Вт}$ , для сероуглерода  $n_2 \sim 3 \cdot 10^{-18} \text{ м}^2/\text{Вт}$ .

Кубическая нелинейность чаще всего обусловлена эффектом Керра, для которого, согласно (20.13),  $\Delta n = \gamma E^2$ . Доказательством этому служит совпадение порядков величин  $\gamma$  в (20.13) и  $\frac{3}{16} \frac{\chi_3}{n_0}$  в (23.32) для многих веществ. Для нитробензола, как отмечалось ранее, постоянная Керра  $K = \gamma/\lambda = 2,2 \cdot 10^{-12} \text{ м}/\text{В}^2$ . При  $\lambda = 1,0 \text{ мкм}$   $\gamma = 2,2 \cdot 10^{-18} \text{ м}^2/\text{В}^2$  и по порядку величины совпадает с величиной  $\frac{3}{16} \frac{\chi_3}{n_0}$ . Эффект Керра в этом случае происходит под воздействием поля высокой частоты и называется высокочастотным. Кубическую нелинейность называют нелинейностью керровского типа.

Следует отметить, что другим механизмом, приводящим к подобной нелинейности, является электрострикция, при которой сжатие вещества, а следовательно, и изменение  $n$  пропорционально интенсивности света.

Среди множества нелинейно-оптических явлений в кубичных средах выделим несколько наиболее важных.

**Самофокусировка и самодефокусировка светового пучка.** Рассмотрим распространение светового пучка радиусом  $r_0$  с постоянной интенсивностью  $I_0$  в его сечении. Из-за зависимости (23.33) в среде появится область, заполненная

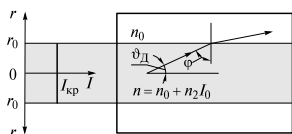


Рис. 23.3

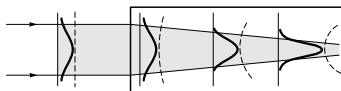


Рис. 23.4

пучком, в которой  $n = n_0 + n_2 I_0$ . Если  $n_2 > 0$ , то  $n > n_0$ . Такая среда называется *фокусирующей*. При  $n_2 < 0$   $n < n_0$ , и среда *дефокусирующая*.

Вначале рассмотрим случай  $n_2 > 0$ . Вследствие дифракции пучок стремится расширяться. Однако, находясь в оптически более плотной среде, он может распространяться в индуцируемом им волноводе.

Оценим величину интенсивности  $I_{кр}$  (критической интенсивности), которая необходима для самоудержания пучка в пределах начального сечения  $r_0$  (рис. 23.3).

Как известно, угол дифракции пучка  $\vartheta_D = 0,61\lambda/r_0\pi$ . Этому углу соответствует луч, падающий на искусственно созданную границу раздела под углом  $\varphi = \pi/2 - \vartheta_D$ . Угол полного внутреннего отражения  $\varphi_{отр}$  удовлетворяет условию

$$\sin \varphi_{отр} = \frac{n_0}{n_0 + n_2 I_{кр}}. \quad (23.35)$$

Для удержания пучка необходимо, чтобы  $\varphi = \varphi_{отр}$ , или

$$\sin \varphi = \sin(\pi/2 - \vartheta_D) = \frac{n_0}{n_0 + n_2 I_{кр}}. \quad (23.36)$$

Учитывая, что  $\vartheta_D \ll 1$ ,  $n_2 I_{кр} \ll n_0$ , получаем

$$1 - \frac{\vartheta_D^2}{2} \approx 1 - \frac{n_2}{n_0} I_{кр}. \quad (23.37)$$

Отсюда *критическая интенсивность*

$$I_{кр} = \frac{1}{2} \frac{n_0}{n_2} \vartheta_D^2 = \frac{1}{2} \frac{n_0}{n_2} \left( \frac{0,61\lambda}{\pi r_0} \right)^2. \quad (23.38)$$

Переходя к *критической мощности*, находим

$$P_{кр} = I_{кр} \pi r^2 = \frac{1}{2} \frac{n_0 (0,61\lambda)^2}{\pi n_2}. \quad (23.39)$$

Если мощность пучка  $P < P_{кр}$ , то он будет дифрагировать, а при  $P > P_{кр}$  начнет сжиматься, или *самофокусироваться*.

Последнее легче понять, если пучок имеет профиль, аналогичный гауссову (рис. 23.4).

Поскольку показатель преломления  $n = n_0 + n_2 I$  будет уменьшаться от оси пучка к периферии, периферийная область пучка будет двигаться с большими скоростями, чем приосевая. Первоначально плоский фазовый фронт, показанный штриховой линией, начнет искривляться, а пучок — *самофокусироваться*. Среда становится подобной протяженной собирающей линзе, наведенной световым пучком.

Величина  $P_{кр}$  называется *критической*, или *пороговой*, *мощностью самофокусировки*. Для кварца  $n_2 = 3 \cdot 10^{-20} \text{ м}^2/\text{Вт}$ ,  $n_0 = 1,5$  и при  $\lambda = 1,06 \text{ мкм}$   $P_{кр} \approx 3 \cdot 10^6 \text{ Вт}$ . Такая мощность легко достигается уже в импульсах наносекундной длительности  $\tau_0 \sim 10^{-8} \text{ с}$  при энергии  $W \sim 1 \text{ Дж}$ .

При самофокусировке пучок сжимается до поперечных размеров порядка длины волны. Поле в нелинейном фокусе может превысить критическое поле, при котором происходит электрический пробой среды. В мощных лазерных системах самофокусировка может приводить к разрушению оптических материалов.

Как показывает анализ, и это подтверждается экспериментально, в ряде случаев может происходить *мелкомасштабная самофокусировка*. Пучок фокусируется в малые области, вытянутые вдоль его оси. Эти области называются нитями. В нитях обычно и происходит разрушение вещества.

Образование нитей обусловлено неустойчивостью самофокусировки к малым возмущениям интенсивности в сечении пучка, которые неизбежно присутствуют у реальных пучков. Если в пучке радиусом  $r_0$  возникает неоднородность с линейным размером  $l < r_0$ , то при мощности пучка  $P > P_{кр}$  может сложиться такая ситуация, что мощность, заключенная в этой неоднородности, превысит величину  $P_{кр}$ . В результате отдельный фрагмент пучка начнет самостоятельно самофокусироваться в нить. При характерной величине средней интенсивности  $I$  это произойдет для тех неоднородностей, для которых будет выполнено условие  $Il^2 \geq P_{кр}$ . Чем больше интенсивность пучка, тем более мелкие возмущения будут фокусироваться в нити.

Существуют среды с  $n_2 < 0$ . Тогда происходит образование в среде дефокусирующей линзы, и пучок приобретает угловую расходимость, иногда во много раз превышающую дифракционную. Это явление называется *самодефокусировкой*. Как показывает расчет, нелинейная расходимость в дальнем поле

$$\vartheta_{нл} = \vartheta_{дл} \sqrt{\frac{P}{P_{кр}} + 1}. \quad (23.40)$$

**Самомодуляция и сжатие импульса.** Если световой импульс распространяется в среде с керровской нелинейностью, то при  $n_2 > 0$  его вершина движется медленнее, чем головная и хвостовая части (рис. 23.5, а). Для наглядности на рисунке стрелками изображены векторы групповых скоростей периферийных и центральной частей импульса. Это аналогично движению с большей скорос-

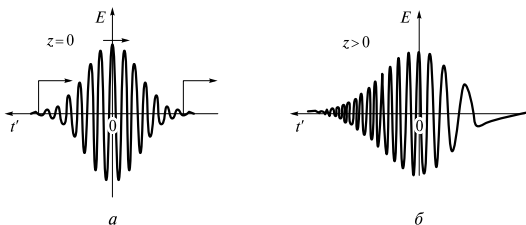


Рис. 23.5



тью периферийных областей пучка по сравнению с приосевой частью в фокусирующей среде.

На небольших расстояниях  $z$  можно пренебречь дифракцией и дисперсией. Поэтому форма импульса (огibaющая) мало изменится, однако из-за различия скоростей он станет фазово-модулированным, как показано на рис. 23.5, б. Это явление называется фазовой *само модуляцией*. Из-за само модуляции спектр импульса становится шире.

Как отмечалось ранее, модуляцию фазы импульс приобретает и в линейной диспергирующей среде. При этом увеличивается длительность импульса, однако его спектр остается неизменным. В диспергирующей среде с нормальной дисперсией групповых скоростей (см. рис. 16.7,  $k_2 > 0$ ) характер модуляции будет таким же, как и в нелинейной среде с  $n_2 > 0$ .

Если фазово-модулированный импульс, изображенный на рис. 23.5, б, направить в диспергирующую среду с  $k_2 > 0$ , то модуляция только усилится и импульс будет претерпевать дисперсионное распыливание.

Однако если после нелинейной среды импульс попадет в среду с аномальной дисперсией групповых скоростей ( $k_2 < 0$ ), то ситуация будет кардинально иной. В этой среде высокочастотная (хвостовая) часть импульса начнет догонять низкочастотную (головную) часть, и импульс начнет сжиматься. Эта идея реализована в оптических компрессорах — устройствах, предназначенных для сжатия импульса.

В видимой и ближней ИК-областях обычно используют *волоконно-решеточный компрессор*, изображенный на рис. 23.6.

Исходный импульс фокусируется линзой  $L_1$  на микрообъектив и вводится в волоконный световод  $BC$ . После прохождения спектрально-ограниченного импульса длительностью  $\tau_0$  через волоконный световод он превращается в фазово-модулированный практически той же длительности (см. рис. 23.5, б). Однако из-за нелинейного отклика волокна ширина его спектра увеличивается:  $\Delta\nu_\phi > \Delta\nu_0 \sim 1/\tau_0$ .

В качестве среды с аномальной дисперсией групповых скоростей используется пара дифракционных параллельных решеток  $P_1$  и  $P_2$ , на которые импульс попадает из световода, пройдя через другую линзу  $L_2$  и полупрозрачное зеркало  $З_1$ . Разные спектральные компоненты импульса дифрагируют под разными углами. В результате путь, проходимый коротковолновыми компонентами, меньше, чем длинноволновыми. Следовательно, длинноволновые компоненты за-

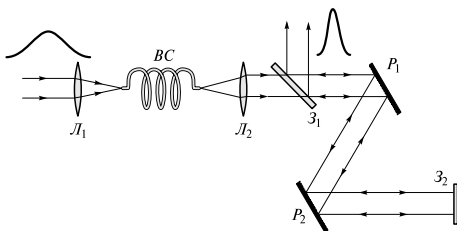


Рис. 23.6

паздывают, как в среде с  $k_2 < 0$ . После отражения от зеркала  $Z_2$  импульс повторно проходит между решетками и выводится через полупрозрачное зеркало  $Z_1$  из компрессора. При повторном проходе компенсируется угловая расходимость различных спектральных компонент.

Пара решеток (или система призм), являясь диспергирующей системой, превращает импульс вновь в спектрально-ограниченный, не изменяя при этом ширины его спектра. Поэтому длительность импульса должна уменьшиться:  $\tau \sim 1/\Delta\nu_\varphi < \tau_0$ .

Компрессоры используются для сжатия пикосекундных импульсов до длительностей  $\tau \sim 10$  фс. Необходимая длина волокна зависит от интенсивности сжимаемого импульса: чем больше интенсивность, тем короче волокно. В различных схемах компрессии длина волокна изменяется от десятков сантиметров до сотен метров.

**Оптические солитоны.** Если лазерный импульс распространяется в волокне, то возникающая самомодуляция может компенсировать фазовую модуляцию, связанную с дисперсионным распыливанием импульса, если  $k_2 < 0$ . Для кварцевого волокна длина волны, как видно из рис. 16.8, должна быть  $\lambda > \lambda_D = 1,27$  мкм. При определенных условиях импульс может распространяться по волокну без изменения формы огибающей. Такой импульс называется *оптическим солитоном*.

Оценим параметры солитона. Предположим, что на входе в волновод ( $z = 0$ ) импульс имеет гауссову огибающую (см. (16.29))

$$A(0, t) = A_0 \exp\left(-\frac{t^2}{\tau_0^2}\right). \quad (23.41)$$

В средней части импульса ( $|t| < \tau_0$ ) его интенсивность

$$I(0, t) = I_0 \exp\left(-\frac{2t^2}{\tau_0^2}\right) \approx I_0 \left(1 - \frac{2t^2}{\tau_0^2}\right). \quad (23.42)$$

Из-за нелинейности импульс, изображенный на рис. 23.5, б, приобретает набег фазы  $\Phi_{\text{нл}}$ :

$$A(z, t') = A_0 \exp\left(-\frac{t'^2}{\tau_0^2}\right) \exp(i\Phi_{\text{нл}}), \quad (23.43)$$

где

$$\Phi_{\text{нл}}(z, t') = -\frac{2\pi}{\lambda} n_2 I z = \frac{2\pi}{\lambda} n_2 I_0 \left(\frac{2t'^2}{\tau_0^2} - 1\right) z, \quad t' = t - z/u. \quad (23.44)$$

Фазовый набег вследствие дисперсии, как следует из формулы (16.34), на расстоянии  $z < |z_0|$  равен

$$\Phi(z, t') = \frac{t'^2}{\tau_0^2} \frac{z}{z_0}, \quad (23.45)$$

где  $z_0 = \tau_0^2/k_2$  (см. (16.34)).

Таким образом, при одновременном действии нелинейности и дисперсии

$$A(z, t') = A_0 \exp\left(-\frac{t'^2}{\tau_0^2}\right) \exp[i(\Phi_{\text{нл}} + \Phi)]. \quad (23.46)$$

Наличие фазы в (23.46), зависящей от времени, означает, что огибающая импульса изменяется с мгновенной частотой

$$\Omega(t') = \frac{\partial \Phi_{\text{нл}}}{\partial t'} + \frac{\partial \Phi}{\partial t'}. \quad (23.47)$$

У солитона  $\Omega(t') = 0$ . Таким образом, условие компенсации состоит в том, чтобы

$$\frac{\partial \Phi_{\text{нл}}}{\partial t'} = -\frac{\partial \Phi}{\partial t'}. \quad (23.48)$$

Подставляя сюда (23.44) и (23.45), получаем

$$\frac{4\pi}{\lambda} n_2 I_0 = -\frac{1}{z_0}. \quad (23.49)$$

Компенсация возможна, если  $z_0 < 0$  ( $k_2 < 0$ ). Переходя к дисперсионной длине  $L_0 = \tau_0^2/|k_2|$ , окончательно находим

$$\frac{4\pi}{\lambda} n_2 L_0 I_0 = \frac{4\pi}{\lambda} \frac{\tau_0^2}{|k_2|} n_2 I_0 = 1. \quad (23.50)$$

При длительности импульса  $\tau_0 = 10^{-12}$  с = 1 пс и длине волны  $\lambda = 1,5$  мкм в кварце  $L_0 = 30$  м. Поскольку  $n_2 = 3 \cdot 10^{-20}$  м<sup>2</sup>/Вт, то  $I_0 \sim 10^{11}$  Вт/м<sup>2</sup>. Для одномерного волокна сечение сердцевинны  $\sim 50$  мкм<sup>2</sup> =  $5 \cdot 10^{-11}$  м<sup>2</sup>. Следовательно, мощность излучения в волокне  $P \sim 5$  Вт и энергия импульса  $W \sim P\tau_0 = 5 \cdot 10^{-12}$  Дж.

Поэтому условие компенсации (23.50) можно легко обеспечить для коротких импульсов с малой мощностью.

Точный анализ показывает, что огибающая солитона имеет вид

$$A(z, t') = A_0 \operatorname{sech} \left( \frac{t'}{\tau_0} \right) \quad (23.51)$$

и описывается функцией гиперболический секанс. Огибающая солитона несколько отличается от огибающей гауссова импульса. Величина  $A_0$ , определяющая максимальную (пиковую) интенсивность  $I_0 \sim A_0^2$ , и длительность импульса  $\tau_0$  связаны: эта связь вытекает из соотношения (23.50). *Чем больше пиковая интенсивность, тем меньше длительность солитона.*

Если в волокно введен импульс с произвольной формой огибающей, то при достаточной начальной интенсивности он постепенно трансформируется в солитон (23.51). Солитон уже является устойчивым образованием, не чувствительным к малым возмущениям.

Если длина волны  $\lambda = 1,55$  мкм, то ослабление импульса вследствие рассеяния в волокне минимально и он может распространяться по волокну на несколько десятков километров.

В волоконно-оптических линиях связи устанавливаются оптические усилители. Тогда импульсы могут распространяться на огромные расстояния. Пропускная способность каналов связи (объем передаваемой информации в единицу времени) обратно пропорциональна длительности импульса. Более подробно об этом речь пойдет в лекции 24.

## ЛЕКЦИЯ 24

**Тепловое самовоздействие излучения.** При распространении светового пучка в среде часть его энергии поглощается, и температура среды в канале пучка и в прилегающей области повышается. Из-за нагрева изменяется и показатель преломления среды, что в свою очередь влияет на распространение светового пучка. Это явление называется *тепловым самовоздействием*.

Показатель преломления зависит от плотности  $\rho$  и температуры  $T$  среды. Последняя зависимость связана с изменением поляризуемости молекулы вследствие смещения собственных частот оптических осцилляторов среды. Малые изменения показателя преломления можно представить в виде

$$\Delta n = \left( \frac{\partial n}{\partial \rho} \right)_T \Delta \rho + \left( \frac{\partial n}{\partial T} \right)_\rho \Delta T = \left( \frac{\partial n}{\partial \rho} \right)_T \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p \Delta T + \left( \frac{\partial n}{\partial T} \right)_\rho \Delta T = n_T \Delta T, \quad (24.1)$$

где

$$n_T = \left( \frac{\partial n}{\partial \rho} \right)_T \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p + \left( \frac{\partial n}{\partial T} \right)_\rho \quad (24.2)$$

— полная производная показателя преломления по температуре, являющаяся константой вещества. Первое слагаемое в (24.2) всегда отрицательно, поэтому эта константа может иметь различный знак у разных веществ. Среда, у которых  $n_T > 0$ , называются фокусирующими, а среды с  $n_T < 0$  — дефокусирующими.

Если световой пучок имеет наибольшую интенсивность на оси, то профиль температуры в его поперечном сечении имеет колоколообразную форму: температура убывает от оси пучка к его периферии.

В фокусирующих средах такой же профиль имеет и показатель преломления. Поэтому в среде создается протяженная тепловая собирающая линза, индуцируемая световым пучком. При распространении пучок будет сжиматься. Это явление называется *тепловой самофокусировкой*.

В дефокусирующих средах распределенная тепловая линза будет отрицательной, и пучок претерпевает *тепловую дефокусировку*.

Тепловую дефокусировку достаточно просто наблюдать в воде, спирте и других веществах. В лекционном опыте луч аргонового лазера мощностью  $P_0 \sim 1$  Вт направляется на кювету со спиртом, подкрашенным органическим красителем. Это делается для увеличения коэффициента поглощения раствора.

На рис. 24.1, а, б цв. вкл. показан дефокусированный пучок аргонового лазера при мощности  $P_0 = 0,5$  Вт (см. рис. 24.1, а) и максимальной мощности 1 Вт (см. рис. 24.1, б), наблюдаемый в зоне Фраунгофера.

В дальнем поле пучок приобретает нелинейную расходимость  $\vartheta_{\text{нл}}$ , в несколько раз превышающую дифракционную  $\vartheta_D$ . оценить эту расходимость можно, воспользовавшись простыми рассуждениями.

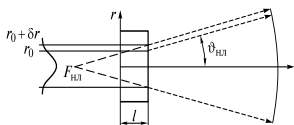


Рис. 24.1

Пусть гауссов пучок с профилем интенсивности  $I(r) = I_0 \exp(-2r^2/r_0^2)$  направляется в кювету, заполненную жидкостью с коэффициентом поглощения  $\alpha$  (рис. 24.1).

В стационарном режиме радиальное распределение температуры  $T(r)$  получается из уравнения теплового баланса для некоторого мысленно выделенного

цилиндрического объема среды произвольного радиуса  $r$  и длиной  $l > r$ :

$$-2\pi r l \alpha_{\tau} \frac{dT}{dr} = \alpha l \int_0^r I_0 \exp\left(-\frac{2r'^2}{r_0^2}\right) 2\pi r' dr'. \quad (24.3)$$

Выражение в левой части отражает поток тепла через боковую поверхность цилиндра площадью  $2\pi r l$ ,  $\alpha_{\tau}$  — коэффициент теплопроводности. Этот поток равен поглощенной цилиндрическим объемом части мощности пучка (поток тепла через основания узкого цилиндра можно пренебречь). В приосевой области  $\exp\left(-\frac{2r'^2}{r_0^2}\right) \approx 1 - \frac{2r'^2}{r_0^2}$ . Дважды интегрируя (24.3), получаем

$$T(r) = T(0) - \frac{\alpha I_0}{4\alpha_{\tau}} r^2. \quad (24.4)$$

Показатель преломления имеет параболический профиль

$$n(r) = n_0 - \frac{\alpha I_0 n_{\tau}}{4\alpha_{\tau}} r^2. \quad (24.5)$$

Два параллельных световых пучка, удаленных от оси на расстояния  $r_0$  и  $r_0 + \delta r$ , показанные на рис. 24.1, после прохождения кюветы приобретут разность хода

$$\Delta = -\frac{\alpha I_0 n_{\tau}}{4\alpha_{\tau}} [(r_0 + \delta r)^2 - r_0^2] \approx -\frac{\alpha I_0 n_{\tau}}{4\alpha_{\tau}} r_0 \delta r. \quad (24.6)$$

Здесь учтено, что  $\delta r \ll r_0$ .

При распространении лучей под углом  $\vartheta_{\text{нл}}$  эта разность хода должна быть скомпенсирована:

$$-\frac{\alpha I_0 n_{\tau}}{4\alpha_{\tau}} r_0 \delta r - \vartheta_{\text{нл}} \delta r = 0. \quad (24.7)$$

Отсюда

$$\vartheta_{\text{нл}} = \frac{\alpha I_0 |n_{\tau}| r_0}{2\alpha_{\tau}}. \quad (24.8)$$

Нелинейная расходимость увеличивается при возрастании интенсивности пучка. В точке  $F_{\text{нл}}$  будет находиться фокус отрицательной нелинейной тепловой линзы, который приближается к линзе с ростом интенсивности света.

Нелинейная расходимость становится равной дифракционной  $\vartheta_D = \lambda/(\pi r_0)$ , если интенсивность удовлетворяет условию

$$\frac{\alpha I_{\text{кр}} |n_{\tau}| r_0}{2\alpha_{\tau}} = \frac{\lambda}{\pi r_0}. \quad (24.9)$$

При этом мощность пучка равна

$$P_{\text{кр}} = \frac{I_{\text{кр}} \pi r_0^2}{2} = \frac{\lambda \mathfrak{x}_T}{|n_T| \alpha l}. \quad (24.10)$$

Величина  $P_{\text{кр}}$  называется *критической мощностью тепловой дефокусировки*. Таким образом, нелинейная расходимость определяется превышением мощности пучка над критической:

$$\vartheta_{\text{нл}} = \vartheta_D \frac{P_0}{P_{\text{кр}}}. \quad (24.11)$$

Если среда фокусирующая, то фокусировка пучка происходит при  $P_0 > P_{\text{кр}}$ .

Критическая мощность у описанных тепловых явлений значительно меньше, чем в средах с нелинейностями керровского типа. В ряде случаев ее величина может составлять десятки милливольт. Поэтому тепловые нелинейные эффекты сопровождают большое число различных оптических явлений даже при небольших мощностях.

Тепловая нелинейность обладает сравнительно большим временем релаксации  $\tau_T \sim r_0^2 / \chi_T$  ( $\chi_T = \mathfrak{x}_T / \rho c_p$  — коэффициент температуропроводности среды). Это время необходимо для установления температурного профиля в канале пучка. В описанном опыте с дефокусировкой аргонового лазера коэффициент температуропроводности спирта  $\chi_T = 7,2 \cdot 10^{-4} \text{ см}^2 \cdot \text{с}^{-1}$  и при  $r_0 = 0,1 \text{ см}$  время установления  $\tau_T = r_0^2 / (4\chi_T) \approx 3,5 \text{ с}$ .

Обращает на себя внимание возникновение с некоторым запаздыванием (после развившейся за время порядка 1 с дефокусировки) отклонения вниз и искажения горизонтального светового пучка (см. рис. 24.1, в цв. вкл.). При этом его профиль становится на экране серповидным: приосевая часть пучка отклонилась вниз больше, чем периферийные области. Это происходит из-за появления восходящих конвективных потоков жидкости, искажающих температурный профиль, а значит, и тепловую линзу. Подобным образом боковые ветры могут отклонять пучок в атмосфере в направлении «на ветер».

В протяженной среде дефокусировка происходит на фоне дифракции и полная расходимость  $\vartheta$  в дальнем поле оказывается равной

$$\vartheta = \vartheta_D \sqrt{\frac{P_0}{P_{\text{кр}}} + 1}. \quad (24.12)$$

При этом критическая мощность

$$P_{\text{кр}} = \frac{\lambda \mathfrak{x}_T}{|n_T| (1 - e^{-\alpha L_0})}, \quad (24.13)$$

где  $L_0 = \pi r_0^2 / \lambda$  — дифракционная длина гауссова пучка.

Например, в атмосфере, у которой  $n_T < 0$  ( $\sim -10^{-4} \text{ K}^{-1}$ ),  $P_{\text{кр}} \sim 1 \text{ кВт}$ , дефокусировка возможна лишь для мощных пучков. При наличии бокового ветра траектория распространения пучка искривляется в наветренную сторону, а его профиль принимает характерную серповидную форму.

Для импульсного излучения длительностью  $\tau_0 < \tau_T$  температура не успевает достичь стационарного распределения и тепловое самовоздействие становится нестационарным. *Критической величиной будет энергия импульса:  $W_{\text{кр}} = P_{\text{кр}} \tau_T$ .*

Она не зависит от теплопроводности среды, поскольку в течение действия импульса роль теплопроводности пренебрежимо мала.

**Вынужденное рассеяние Мандельштама — Бриллюэна.** При рассеянии мощной световой волны на гиперзвуковых волнах возможно появление обратного воздействия света на бегущую волну плотности (21.41), сопровождающееся увеличением ее амплитуды  $(\Delta\rho)_0$ . Это воздействие происходит из-за электрострикционной деформации диэлектриков, пропорциональной  $E^2$ . В изотропных газах и жидкостях относительное изменение плотности

$$\frac{\Delta\rho}{\rho} = \frac{\beta_T}{2\pi} \rho \left( \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} \right) E^2 = \gamma E^2. \quad (24.14)$$

Здесь  $\beta_T$  — изотермическая сжимаемость. Для органических жидкостей (нитробензол, толуол, ксилол)  $\gamma \sim 10^{-12} \text{ см}^2/\text{В}^2$ .

Поскольку в результате спонтанного рассеяния Мандельштама — Бриллюэна появляются стоксова на частоте  $\omega_0 - \Omega$  и антистоксова на частоте  $\omega_0 + \Omega$  компоненты (см. (21.40)), то  $E^2$  в правой части (24.14) будет иметь гармоническую составляющую с частотой  $\Omega$ . Эта составляющая и будет усиливать колебания плотности у будущей волны, участвующей в рассеянии. В результате усилятся рассеянные компоненты и т.д.

Такое рассеяние называется *вынужденным рассеянием Мандельштама — Бриллюэна* (ВРМБ). При вынужденном рассеянии появляются интенсивные компоненты рассеянного света и генерируются гиперзвуковые волны в рассеивающей среде. Естественно, что усиление происходит при выполнении условия векторного синхронизма (21.44). С помощью лазера удастся возбуждать звуковые волны с мощностью до 10 кВт в жидкостях и твердых телах.

**Вынужденное комбинационное рассеяние света.** На рис. 24.2 цв. вкл. показан эксперимент, в котором зеленый луч лазера направляется на кювету с жидкостью. На выходе из кюветы появляется луч красного цвета, который может легко фиксироваться визуально.

Это явление называется *вынужденным комбинационным рассеянием света* (ВКР). В отличие от спонтанного комбинационного рассеяния света оно характеризуется достаточно высокой интенсивностью рассеянных компонент.

При первоначально спонтанном комбинационном рассеянии высокоинтенсивной волны может происходить усиление молекулярных колебаний. Обобщенную силу  $f(t)$  в уравнении (22.13) можно рассчитать следующим образом. Дипольный момент молекулы  $p = \epsilon_0 a(\xi) E$  взаимодействует с полем  $E$ , и энергия этого взаимодействия  $W = -\frac{1}{2} p E$ . Следовательно,

$$f(t) = -\frac{\partial W}{\partial \xi} = \frac{1}{2} \epsilon_0 \frac{da}{d\xi} E^2(t). \quad (24.15)$$

Поле  $\mathbf{E}$  в среде является суперпозицией трех волн: падающей  $E_0$ , стоксовой  $E_c$  и антистоксовой  $E_{ac}$ :

$$E = E_0 \cos(\omega_0 t - \mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r}) + E_c \cos(\omega_c t - \mathbf{k}_c \cdot \mathbf{r} + \varphi_c) + E_{ac} \cos(\omega_{ac} t - \mathbf{k}_{ac} \cdot \mathbf{r} + \varphi_{ac}). \quad (24.16)$$

Подставим (24.16) в (24.15) и сохраним лишь фурье-составляющие силы  $f(t)$  с частотами  $\omega_{ac} - \omega_0$  и  $\omega_0 - \omega_c$ . Если эти частоты совпадают с резонансной

частотой молекулы  $\Omega_0$ , то раскачивание молекулы будет резонансным, а нормальная координата будет изменяться по закону

$$\xi = \frac{da/d\xi}{4\delta M \Omega_0} \{ E_0 E_c \sin[\Omega_0 t - (\mathbf{k}_0 - \mathbf{k}_c) \mathbf{r} + \varphi_c] + E_0 E_{ac} \sin[\Omega_0 t + (\mathbf{k}_0 - \mathbf{k}_{ac}) \mathbf{r} + \varphi_{ac}] \}. \quad (24.17)$$

По сути, это выражение описывает две волны молекулярных колебаний, возбужденных в среде.

Дипольный момент молекулы будет равен

$$p = \varepsilon_0 a(\xi) E_0 \cos(\omega_0 t - \mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r}) = \varepsilon_0 \frac{da}{d\xi} \xi E_0 \cos(\omega_0 t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}). \quad (24.18)$$

Если подставить сюда выражение для  $\xi$  из (24.17), то можно видеть, что дипольный момент осциллирует на частотах  $\omega_0 + \Omega_0$  и  $\omega_0 - \Omega_0$ , излучая соответствующие волны.

Воспользовавшись классической теорией излучения системы осциллирующих диполей в среде, можно рассчитать направления, по которым рассеянные волны будут распространяться с усилением. Эти направления удовлетворяют условию векторного синхронизма

$$2\mathbf{k}_0 = \mathbf{k}_c + \mathbf{k}_{ac}. \quad (24.19)$$

Соответствующая диаграмма изображена на рис. 24.2.

Стоксовы компоненты рассеиваются главным образом в направлении падающей волны. Это можно наблюдать в лекционном эксперименте. В нем излучение второй гармоники неодимового лазера генерируется в кристалле KDP и направляется на прозрачный сосуд Дьюара с жидким азотом. Рассеяние происходит на полносимметричном колебании молекулы  $N_2$  с частотой  $\Omega_0/2\pi = 7 \cdot 10^{13}$  Гц. При длине волны накачки  $\lambda_0 = 0,53$  мкм ее частота  $\nu_0 = c/\lambda = 5,6 \cdot 10^{14}$  Гц. Частота стоксовой компоненты  $\nu_c = \nu_0 - \Omega_0/2\pi = 4,9 \cdot 10^{14}$  Гц, длина волны  $\lambda_c = 0,61$  мкм соответствует оранжевой области спектра. Поэтому на экране, установленном позади сосуда, наблюдается яркое оранжевое пятно в момент лазерной вспышки. Интенсивность стоксовой компоненты соизмерима с интенсивностью волны второй гармоники.

Рассчитаем угол  $\vartheta$ , под которым рассеивается антистоксова компонента. Для этого представим волновые числа в виде

$$k_0 = \frac{\omega_0 n_0}{c}; \quad k_c = \frac{\omega_0 - \Omega_0}{c} (n_0 - \Delta n_c); \quad k_{ac} = \frac{\omega_0 + \Omega_0}{c} (n_0 + \Delta n_{ac}) \quad (24.20)$$

и запишем равенство

$$k_c^2 = 4k_0^2 + k_{ac}^2 - 4k_0 k_{ac} \cos \vartheta. \quad (24.21)$$

Подставляя (24.20) в (24.21) и учитывая, что при  $\vartheta \ll 1$

$$\cos^2 \vartheta \approx 1 - \frac{\vartheta^2}{2}; \quad \frac{\Omega_0}{\omega_0} \ll 1; \quad \frac{\Delta n_c}{n_0} \ll 1 \text{ и } \frac{\Delta n_{ac}}{n_0} \ll 1,$$

находим

$$\vartheta^2 \approx \frac{1}{n_0} \frac{\omega_0 - \Omega_0}{\omega_0 + \Omega_0} (\Delta n_{ac} - \Delta n_c). \quad (24.22)$$

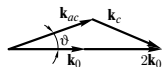


Рис. 24.2



Таким образом, антистоксова компонента рассеивается вдоль конуса с углом  $\vartheta$  при вершине. Чем выше частота рассеянного света, тем больше разность  $(\Delta n_{ac} - \Delta n_c)$  и угол  $\vartheta$ .

На рис. 24.3 цв. вкл. схематично показано вынужденное комбинационное рассеяние в жидкости излучения рубинового лазера ( $\lambda_0 = 6943 \text{ \AA}$ ). Для увеличения интенсивности световой пучок с помощью собирающей линзы фокусируется в середину кюветы с рассеивающей жидкостью. Стоксовы компоненты лежат в ИК-области спектра и глазом не видны. В момент вспышки рубинового лазера на экране будет наблюдаться окрашенное световое пятно, распределение окраски которого вдоль радиуса подтверждает справедливость (24.22).

Высокая интенсивность рассеянных компонент при ВКР позволяет создавать разнообразные преобразователи лазерного излучения. Широкое распространение получила спектроскопия когерентного антистоксова рассеяния света (КАРС). Ее цель — исследование спектров молекулярных колебаний. Молекулярные колебания на частоте  $\Omega_0$  возбуждают двумя волнами с частотами  $\omega_1$  и  $\omega_2 = \omega_1 + \Omega_0$ , а третья (пробная) волна претерпевает комбинационное рассеяние света на наведенной волне молекулярных колебаний. Изменяя время задержки между импульсами, возбуждающими колебания, и пробным импульсом, можно исследовать динамику затухания молекулярных колебаний.

**Генерация суперконтинуума.** Как отмечалось в лекции 22, в микроструктурированных волокнах можно получить генерацию сплошного спектра, или суперконтинуума.

В эксперименте, выполненном в лаборатории фотоники и нелинейной спектроскопии кафедры общей физики и волновых процессов физического факультета МГУ им. М.В.Ломоносова, импульс излучения титан-сапфирового лазера с длиной волны 800 нм (см. далее) направлялся в отрезок микроструктурированного кварцевого волоконного световода, на выходе которого наблюдался сплошной спектр (рис. 24.4 цв. вкл.).

Для объяснения этого явления примем во внимание, что кварцевое стекло обладает кубичной нелинейностью. Тогда будет возникать самомодуляция импульса, приводящая к расширению его спектра. Кроме того, будет происходить вынужденное комбинационное рассеяние света, при котором появляются стоксовы компоненты меньших частот. Из-за локальной концентрации энергии падающей волны, обусловленной как микроструктурой волокна, так и компенсацией дисперсионного расплывания импульса, интенсивность рассеянных компонент может быть достаточно высокой. Поэтому может происходить и повторное рассеяние стоксовых компонент, при котором появляются волны с еще более низкими частотами и т.д.

По существу оптическая система, изображенная на рис. 24.4 цв. вкл., представляет собой импульсный «лазер белого света». На выходе такого лазера появляется яркая вспышка белого света, интенсивность которого на много порядков превосходит интенсивность других источников белого света. Использование кавычек в названии лазера подчеркивает некоторую его условность: интенсивность импульса велика, а о монохроматичности света говорить не приходится.

**Генерация импульсов пикосекундной длительности.** Рассмотрим процесс генерации светового импульса лазером, в резонатор которого помещена кювета с жидкостью, коэффициент поглощения  $\alpha$  которой зависит от интенсивности. Он задается тем же выражением, что и коэффициент усиления (7.19)

$$\alpha = \frac{\alpha_0}{1 + I/I_{\text{нас}}}.$$
(24.23)

С увеличением интенсивности коэффициент поглощения уменьшается, поскольку разность заселенностей  $n_2 - n_1 \rightarrow 0$ . Кювета с нелинейным поглотителем называется *просветляющимся фильтром*. Обычно в качестве таких поглотителей используют растворы разнообразных красителей.

Электромагнитное поле в резонаторе лазера представляет собой суперпозицию  $N$  продольных мод, частоты которых попадают в полосу усиления шириной  $\Delta\nu_{\text{ус}}$ .

Эти моды, возникающие при спонтанном излучении, имеют случайные амплитуды и начальные фазы. Поле в любой точке резонатора можно записать в виде

$$E(t) = \sum_{m=1}^N A_m \cos[2\pi\nu t + (m-1)\delta\nu t + \varphi_m],$$
(24.24)

где  $\nu$  — частота низшей моды;  $\delta\nu = c/2L$  — межмодовая частота (см. (7.11));  $N = \Delta\nu_{\text{ус}}/\delta\nu$  — число усиливаемых мод.

Предположим, что в момент времени  $t = 0$  внутри кюветы произошел случайный всплеск интенсивности  $I = E^2$ . Этот случайный импульс при распространении через нелинейный фильтр испытывает меньшее поглощение, чем остальные фрагменты волны в резонаторе (рис. 24.3, а).

При каждом проходе резонатора (рис. 24.3, б, в) этот импульс будет усиливаться, и затем часть его энергии с интервалом  $t = 2L/c$  будет выходить из резонатора. Следовательно, лазер будет генерировать последовательность импульсов, длительность каждого из которых  $\tau_0 \sim 1/\Delta\nu_{\text{ус}}$ .

На спектральном языке формирование последовательности импульсов обусловлено синхронизацией мод лазера. Если положить в (24.24)  $A_m = A_0$ ,  $\varphi_m = \varphi_0$ , то

$$E(t) = A_0 \frac{\sin N\pi\delta\nu t}{\sin \pi\delta\nu t} \cos 2\pi\nu t.$$
(24.25)

Здесь для простоты принято  $\varphi_0 = 0$ . Тогда интенсивность

$$I(t) = I_0 \left[ \frac{\sin N\pi\delta\nu t}{\sin \pi\delta\nu t} \right]^2.$$
(24.26)

График зависимости  $I(t)$  показан на рис. 24.4.

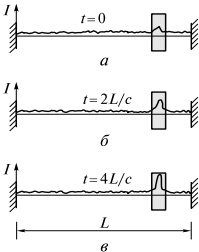


Рис. 24.3

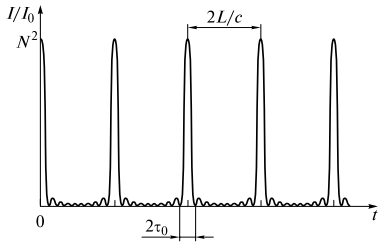


Рис. 24.4

Период следования импульсов  $t = 2L/c$ , а длительность импульса  $\tau_0$  определяется из условия  $N\pi\delta\nu\tau_0 = \pi$ . Отсюда

$$\tau_0 = \frac{1}{N\delta\nu} = \frac{1}{\Delta\nu_{yc}}. \quad (24.27)$$

Для твердотельных лазеров ширина полосы усиления  $\Delta\nu_{yc}/c \sim 10^2 \text{ см}^{-1}$ . Поэтому длительность импульса  $\tau_0 \sim 0,3 \cdot 10^{-12} \text{ с} = 0,3 \text{ пс}$ . Реальные длительности больше, поскольку не удается достичь полной синхронизации всех мод, попадающих в полосу усиления.

Рассмотренная синхронизация мод называется *пассивной*. В качестве примера уместно привести типичные технические характеристики распространенного YAG:ND<sup>3+</sup>-лазера с пассивной синхронизацией мод.

При непрерывной накачке он генерирует последовательность пикосекундных импульсов. Энергия единичного импульса  $W \leq 1 \text{ мДж}$ , длительность импульса  $\tau_0 \sim 10 \text{ пс}$ . Пиковая мощность импульса  $P \approx W/\tau_0 \sim 10^8 \text{ Вт}$ .

Для пассивной синхронизации мод в твердотельных лазерах применяется также керровская линза. Она представляет собой нелинейную самофокусирующую среду ( $n_2 > 0$ ), в которой происходит керровская самофокусировка. В волоконных лазерах (см. далее) используется также нелинейное (зависящее от интенсивности) вращение плоскости поляризации.

При импульсной накачке генерируются импульсы наносекундной длительности, каждый из которых состоит из последовательности пикосекундных импульсов (цугов), следующих с интервалом  $t = 2L/c$ .

Большей стабильности и увеличения частоты повторения цугов добиваются с использованием *активной синхронизации мод*. Для этого внутрь резонатора лазера вблизи одного из его зеркал помещают амплитудный или фазовый модулятор (рис. 24.5). Частота модуляции должна быть равна межмодовой частоте  $\delta\nu = c/2L$ .

*Амплитудная модуляция* осуществляется *электрооптическим* или *акустооптическим затвором*. Электрооптический затвор состоит из ячейки Керра или Погкельса, помещенной между двумя скрещенными поляризаторами. Акустооптический модулятор представляет собой кристалл, в котором возбуждается стоячая акустическая волна частотой  $f_{зв} = \delta\nu = c/2L$ .

Установление синхронизации при применении модуляторов происходит последовательно. Сначала генерируется мода в середине линии усиления (см. рис. 7.4). Если частота этой моды равна  $\nu_0$ , то при модуляции интенсивности с частотой  $\delta\nu$  возникают две составляющие с частотами  $\nu = \nu_0 \pm \delta\nu$  (см. лекцию 13). Эти составляющие, являясь продольными модами резонатора, лежат внутри полосы усиления шириной  $\Delta\nu_{yc}$  и, следовательно, будут усиливаться. Фазы этих мод будут связаны с фазой моды частоты  $\nu_0$ . Затем из-за модуляции ин-

тенсивности возникшей пары мод появятся еще две моды с частотами  $\nu = \nu_0 \pm 2\delta\nu$ , которые также будут усиливаться и т.д.

Подобным образом происходит синхронизация мод и при *фазовой модуляции*. Такую модуляцию осуществляют с помощью электрооптической ячейки без поляризаторов.



Рис. 24.5

Например,  $\text{YAG:Nd}^{3+}$ -лазер с акустооптическим модулятором при импульсной накачке генерирует цуг пикосекундных импульсов с частотой повторения до  $\sim 10$  кГц. В каждом цуге находится порядка двух-трех десятков импульсов с длительностью каждого десятков пикосекунд и пиковой мощностью несколько мегаватт.

На рис. 24.5 цв. вкл. представлена фотография пикосекундного импульса при его распространении в воде, сделанная в 1971 г. М. Дюге в лаборатории «Белл телефон» (США). Опыт был выполнен с использованием неодимового лазера, генерирующего инфракрасный импульс ( $\lambda = 1,06$  мкм) длительностью около 10 пс, который делительной пластинкой разделялся на два импульса.

Первый направлялся на высокоскоростной затвор фотоаппарата, представляющий собой ячейку Керра, помещенную между двумя скрещенными поляроидами (см. лекцию 20). Этот затвор открывался в течение действия импульса, т. е. в течение 10 пс.

Второй импульс направлялся в нелинейный кристалл, на выходе которого получалось излучение второй гармоники с  $\lambda = 0,53$  мкм. Затем этот уже «зеленый» импульс распространялся справа налево в кювете с водой со скоростью около 0,22 мм/пс. На кювете нанесен масштаб в миллиметрах. Для фиксации импульса (камерой сбоку) в воду добавлялась капля молока с целью усилить рассеяние света.

Протяженность импульса в воде, если бы он не двигался, составляет около 2,2 мм. За время экспозиции он проходит еще расстояние 2,2 мм. Поэтому его изображение размыто и тонкая структура не видна.

Красное пятно на фотографии — это изображение, оставленное инфракрасным импульсом на фотопленке. Этот импульс использовался для открывания затвора, поэтому оба импульса сфотографированы одновременно.

**Генерация фемтосекундных импульсов.** Получение таких *сверхкоротких импульсов* потребовало как привлечения новых физических идей, так и решения ряда инженерно-технических проблем. При длительности импульса  $\tau = 30$  фс ширина линии усиления  $\Delta\nu_{yc}/c \approx 10^3 \text{ см}^{-1}$ . В таком диапазоне частот необходимо обеспечить фазировку огромного числа продольных мод:  $N \sim \Delta\nu_{yc}/\delta\nu \sim 10^5$ .

При распространении в воздухе, вследствие дисперсии, длительность импульса увеличивается в полтора раза на расстоянии около 15 м. В оптически прозрачных конденсированных средах это расстояние сокращается до нескольких сантиметров. По этой причине необходимо использовать оптические элементы с контролируемыми дисперсионными свойствами.

Один из возможных путей получения сверхкоротких импульсов — генерация импульсов лазерами на красителях, накачиваемыми синхронно импульсными лазерами пикосекундной длительности. Период следования импульсов накачки равен или кратен времени прохождения генерируемым импульсом резонатора лазера на красителе. Выходное излучение этого лазера представляет собой последовательность импульсов, следующих синхронно с импульсами накачки.

В типичных схемах для накачки используется вторая гармоника ( $\lambda = 530$  нм) излучения  $\text{YAG:Nd}^{3+}$ -лазера с активной синхронизацией мод. Период следования импульсов накачки должен превышать время жизни возбужденного состояния красителя  $\tau_2 \sim 10^{-9}$  с (см. лекцию 7). Динамика формирования сверхкороткого импульса представлена на рис. 24.6.

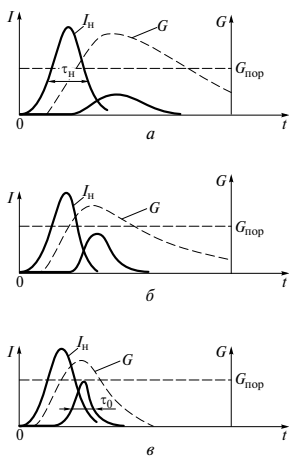


Рис. 24.6

Сплошной линией слева показан импульс накачки (рис. 24.6, а), а рядом с ним правее — усиливаемый импульс. Штриховой линией изображена зависимость от времени коэффициента усиления  $G$ . Горизонтальная штриховая линия соответствует пороговому усилению  $G_{\text{пор}}$ .

При первых проходах по резонатору (рис. 24.6, а), когда усиление превышает потери в течение длительного промежутка времени, усиливаемый импульс достаточно широкий. При увеличении его интенсивности (рис. 24.6, б) из-за появляющегося насыщения усиления этот промежуток сокращается. Длительность генерируемого импульса за счет преимущественно усиливающейся середины импульса уменьшается. Это сокращение заканчивается, и устанавливается стационарный режим (рис. 24.6, в).

Как показывают расчеты, длительность  $\tau_0$  импульса связана с длительностью  $\tau_n$  импульса накачки соотношением

$$\tau_0 \approx \sqrt{\tau_n t_2}, \quad (24.28)$$

где  $t_2$  — время затухания свободной поляризации; для красителя  $t_2 \sim 10$  фс.

Для усиления импульса длительность накачки  $\tau_n$  должна превышать время  $\tau_p$  колебательной релаксации, за которое молекула красителя переходит на нижний подуровень состояния 2 (см. рис. 7.19).

В реальных экспериментах удается сформировать импульсы длительностью  $\tau \geq 200$  фс. Теоретический предел, ограничивающий снизу длительность импульсов, генерируемых лазером на красителе при синхронной накачке, получается из (24.28), если  $\tau_n = \tau_p$ . Полагая  $\tau_p \approx 10^{-2}$  с, получаем

$$\tau_{0 \min} \approx \sqrt{\tau_p t_2} \approx 100 \text{ фс}. \quad (24.29)$$

Дальнейшее сжатие импульса до длительностей  $\tau_0 \sim 5-10$  фс осуществляется с помощью оптических компрессоров.

В середине 90-х годов XX в. были созданы новые кристаллы, обладающие рекордно широкой полосой усиления. В кристалле  $\text{Ti}^{3+}\text{Al}_2\text{O}_3$  (титанат сапфира) полоса усиления  $\Delta\nu_{\text{yc}}/c = 3500 \text{ см}^{-1}$ . Следовательно, при фазировке всех мод лазера можно достичь длительности  $\tau_0 = 1/\Delta\nu_{\text{yc}} \approx 10$  фс.

Титан-сапфировый лазер накачивается второй гармоникой лазера на гранате с неодимом либо излучением аргонового лазера. В накачиваемом лазере удалось осуществить внутрирезонаторную компрессию. Нелинейная фазовая модуляция возникает в кристалле  $\text{Ti}^{3+}\text{Al}_2\text{O}_3$ , обладающем кубичной нелинейностью, а ее компенсация, приводящая к сжатию, осуществляется с помощью пары стеклянных призм, помещенных в резонатор. Лазер генерирует импульсы на длине волны  $\lambda = 800$  нм, длительность импульсов составляет  $\tau_0 \sim 10$  фс, а энергия  $W \sim 10^{-9}$  Дж.

### Фемтосекундный волоконный лазер.

Как отмечалось в лекции 16, широкое распространение в качестве источников света в волоконно-оптических линиях связи получили волоконные лазеры, генерирующие импульсы фемтосекундной длительности.

Принципиальная схема импульсно-эрбиевого волоконного лазера, созданного в Институте общей физики им. А. М. Прохорова РАН, показана на рис. 24.7.

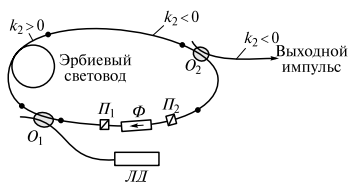


Рис. 24.7

Излучение накачки от лазерного диода ЛД по пассивному оптическому волокну вводится в оптический спектрально-селективный ответвитель  $O_1$ . Накачка осуществляется на длине волны 1480 нм, а усиление и генерация — на длине волны 1550 нм, для которой минимальны потери и дисперсия групповой скорости в волоконно-оптической линии связи. При этом эрбиевый световод имеет положительную дисперсию групповой скорости ( $k_2 = 0,0195 \text{ пс}^2/\text{м}$ ), поэтому импульс в активном волокне вследствие дисперсии будет расплываться и приобретать положительный чирп частоты. Дополнительный чирп того же знака импульс приобретет и вследствие описанной выше нелинейной фазовой самомодуляции. Чтобы уменьшить этот суммарный чирп, концы активного световода припаивают к концам пассивного световода, обладающего отрицательной дисперсией групповой скорости ( $k_2 = -0,022 \text{ пс}^2/\text{м}$ ). Общая длина  $L$  образовавшегося кольцевого резонатора составляет 8 м.

В резонаторе вмонтирован изолятор, состоящий из ячейки Фарадея  $\Phi$  и двух контроллеров поляризации (поляризаторов)  $P_1$  и  $P_2$ . Изолятор обеспечивает распространение импульсов в одном направлении, указанном стрелкой (см. лекцию 20).

В лазере осуществляется пассивная синхронизация мод за счет нелинейного (пропорционального интенсивности) поворота плоскости поляризации света в отрезке волновода между двумя контроллерами. Если всплеск интенсивности (импульс) в некоторой области кольцевого резонатора будет иметь значение, достаточное для поворота плоскости поляризации на угол, равный углу между главными плоскостями контроллеров, то этот импульс пройдет через изолятор и будет усилен.

Если мощность накачки превышает 150 мВт, то начинается самопроизвольная генерация импульсов, следующих с частотой 25 МГц, обратной времени  $t = 2L/u$  ( $u$  — групповая скорость в волокне) пробега импульсом кольцевого резонатора. Средняя мощность генерации  $P = W/t = 24 \text{ мВт}$ .

Из резонатора световой импульс выводится через другой ответвитель  $O_2$ . Для точной компенсации чирпа частоты и получения короткого спектрально-ограниченного импульса из ответвителя импульс поступает в отрезок волновода длиной 85 см, обладающего отрицательной дисперсией групповой скорости. В этом случае длительность импульса в конце отрезка равна 80 фс. Поскольку  $t = 4 \cdot 10^{-8} \text{ с}$ , энергия одного импульса  $W = Pt \approx 10^{-9} \text{ Дж}$ .

**Измерение длительности сверхкоротких импульсов.** Длительность импульса  $\tau_0$  определяют из корреляционной функции интенсивности  $B_I(\tau) = I(t)I(t + \tau)$ , где  $I(t)$  — распределение интенсивности в импульсе. Эту функцию измеряют

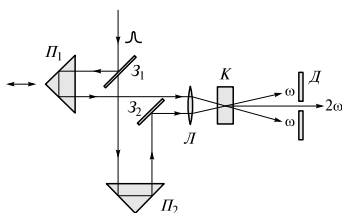


Рис. 24.8

с помощью *коррелятора*, одна из возможных оптических схем которого показана на рис. 24.8.

Световой пучок с помощью полупрозрачного зеркала  $Z_1$  разделяется на два пучка. При отражении от призмы  $P_1$  и  $P_2$  импульсы приобретают временную задержку  $\tau$ . Эта задержка может изменяться перемещением призмы  $P_1$ . Оба импульса с помощью линзы  $L$  попадают в кристалл, в котором генерируется вторая гармоника. Диафрагма  $D$  отсекает импульсы накачки. Энергия  $W_2(\tau)$  импульса второй гармоники зависит от времени задержки  $\tau$ :

Энергия  $W_2(\tau)$  импульса второй гармоники зависит от времени задержки  $\tau$ :

$$W_2(\tau) = [\text{const}] \int_{-\infty}^{\infty} I(t)I(t + \tau)dt = [\text{const}]B_I(\tau). \quad (24.30)$$

Здесь константа определяется параметрами коррелятора  $K$ .

При постепенном увеличении времени задержки будет монотонно уменьшаться энергия импульса второй гармоники. Если  $\tau > \tau_0$ , то перекрытия импульсов не происходит и генерация второй гармоники в указанном на рисунке направлении невозможна. Это и позволяет определить длительность  $\tau_0$ .

По этой же методике можно исследовать временную зависимость  $I(t)$  интенсивности пикосекундного импульса. Этот импульс направляют в коррелятор вместе с пробным фемтосекундным импульсом с огибающей  $I_{\text{пр}}(t)$ . Далее измеряется энергия импульса второй гармоники  $W_2(\tau)$ , пропорциональная *кросс-корреляционной функции*

$$B_K(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} I_{\text{пр}}(t)I(t + \tau)dt. \quad (24.31)$$

Поскольку длительность пробного импульса намного меньше длительности исследуемого, можно положить  $I_{\text{пр}}(t) = I_0\delta(t)$  ( $\delta(t)$  — дельта-функция). Тогда

$$W_2(\tau) = [\text{const}]B_K(\tau) = [\text{const}] \int_{-\infty}^{\infty} I_0\delta(t)I(t + \tau)dt = [\text{const}]I_0I(\tau). \quad (24.32)$$

Таким образом, измеряя при разных задержках  $\tau$  энергию  $W_2(\tau)$  импульса второй гармоники, можно определить распределение интенсивности  $I(\tau)$ .

**Сверхсильные световые поля.** Как отмечалось ранее, характерная напряженность внутриатомного поля, удерживающего электрон в атоме, равна  $E_{\text{ат}} = 10^{11}$  В/м. Таким полем будет обладать волна интенсивностью  $I_{\text{ат}} = \frac{1}{2}c\epsilon_0 A_{\text{ат}}^2 \approx 1,3 \cdot 10^{19}$  Вт/м<sup>2</sup> =  $1,3 \cdot 10^{15}$  Вт/см<sup>2</sup>, которую будем называть атомной интенсивностью.

Если интенсивность световой волны, падающей на твердое вещество (мишень), превосходит атомную интенсивность, то в поверхностном слое электрон может потерять связь со своим атомом. В результате образуется плазма, состоящая из свободных электронов и ионов.

Более того, в течение действия коротких световых импульсов электроны не успевают разлететься, и плотность плазмы, а следовательно, и критическая частота будут такими же, как и у конденсированной среды. Такую плазму принято называть *металлизированной*. Поэтому импульс в среде распространяться не может, а будет лишь проникать на небольшую глубину порядка толщины скин-слоя.

Для описания взаимодействия поля с веществом модель атомного осциллятора становится неприемлемой. Необходимо описывать поведение огромного числа заряженных частиц в электромагнитном поле волны, оказывающих при своем движении взаимное влияние друг на друга. Это удастся сделать с использованием современных суперкомпьютеров.

Плазменная среда представляется в виде модели, состоящей из нескольких миллионов *крупных заряженных частиц* (particles in cells). Каждая такая частица движется так, как и огромное количество реальных электронов или ионов в этой области пространства (ячейке).

Если интенсивность волны  $I \gg I_{\text{ат}}$ , то электроны приобретут в электромагнитном поле большие скорости, и их движение станет релятивистским. Оценим напряженность поля и интенсивность волны, при которой это происходит.

Если напряженность поля волны равна  $E = A \cos \omega t$ , то релятивистское уравнение движения электрона запишется в виде

$$\frac{dp}{dt} = eA \cos \omega t, \quad (24.33)$$

где  $p$  — релятивистский импульс электрона, величина которого равна

$$p = \frac{eA}{\omega} \sin \omega t. \quad (24.34)$$

Кинетическая энергия электрона, как следует из специальной теории относительности,

$$W_{\text{эл}} = \sqrt{m^2 c^4 + p^2 c^2} - mc^2. \quad (24.35)$$

Здесь  $mc^2$  — энергия покоя. Проявление релятивистских эффектов будет существенным, если  $W_{\text{эл}} \sim mc^2$ . Для удобства оценки положим  $W_{\text{эл}} = 0,4mc^2$  и определим амплитуду волны  $A_c$ , при которой последнее равенство выполняется. Из (24.35) получаем

$$pc = mc^2. \quad (24.36)$$

Полагая в (24.34)  $\sin \omega t = 1$  и подставляя в (24.36), приходим к равенству

$$eA_c \lambda = mc^2, \quad (24.37)$$

которое означает, что *работа, совершаемая полем на расстоянии, совпадающем с длиной волны, равна энергии покоя электрона*. Для длины волны  $\lambda = 1$  мкм такое поле достигается в волне, интенсивность которой  $I_c \sim 10^{18}$  Вт/см<sup>2</sup>.

Поля напряженностью

$$E \geq A_c = \frac{mc^2}{e\lambda} \quad (24.38)$$

или интенсивностью  $I \geq I_c$  называются *сверхсильными световыми полями*.



При взаимодействии этих полей с релятивистской плазмой появляются такие новые явления, как генерация рентгеновского излучения, возникновение  $\gamma$ -излучения, релятивистская самофокусировка, генерация высоких гармоник. Открывается возможность ускорять электроны и протоны до очень высоких скоростей, в результате чего могут возникнуть сильные магнитные поля и др.

**Современные достижения и предельные возможности генерации сверхсильных световых полей.** Как отмечалось в лекции 2 (см. формулу (2.20)), интенсивность светового импульса

$$I = \frac{W}{\pi r_0^2 \tau_0}. \quad (24.39)$$

Для повышения интенсивности можно его усилить, увеличивая тем самым его энергию  $W$ , и сокращать длительность импульса  $\tau_0$ . Кроме того, световой пучок необходимо сфокусировать для того, чтобы уменьшить его радиус  $r_0$ .

Минимальное значение площади поперечного сечения пучка ограничено дифракцией и составляет  $(\pi r_0^2)_{\min} \approx \lambda^2$ . Поэтому в фокальной плоскости собирающей короткофокусной линзы можно достичь интенсивности

$$I = \frac{W}{\lambda^2 \tau_0}. \quad (24.40)$$

На рис. 24.9 представлен график, показывающий важнейшие этапы повышения интенсивности при фокусировке пучков лазерных систем, начиная с момента создания рубинового лазера.

В 60-е годы XX в. быстрое увеличение интенсивности до значений порядка  $10^{14}$  Вт/см<sup>2</sup> было достигнуто благодаря использованию вначале модуляции добротности, а затем и синхронизации мод лазера, позволившим уменьшить длительность импульса до величин  $\tau_0 \sim 10^{-12}$  с. Справа на графике дана ось значений характеристической энергии связанного с ядром электрона (в электрон-вольтах).

В 70-е годы и в первой половине 80-х годов XX в. этот рост существенно замедлился, поскольку был связан с проблемой усиления пикосекундных импульсов. Дело в том, что активная среда усилителя позволяет извлечь с единицы площади ее поперечного сечения ограниченную энергию.

Любая активная среда усилителя характеризуется *насыщенной (предельной) плотностью потока энергии*, которую можно извлечь из среды:

$$J_{\text{нас}} = \frac{h\nu}{\sigma_a}, \quad (24.41)$$

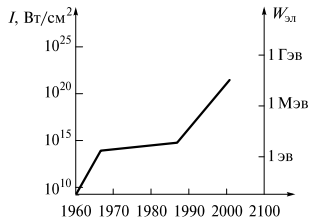


Рис. 24.9

где  $h\nu$  — энергия фотона;  $\sigma_a$  — площадь сечения (или сечение), характеризующего взаимодействие фотонов с активной средой. Подобная по смыслу характеристика, сечение рассеяния, используется в курсе молекулярной физики для описания взаимодействия потока частиц с рассеивающей средой.

Например, для неодимового стекла ( $\sigma_a = 10^{-21}$  см<sup>2</sup>)  $J_{\text{нас}} = 4$  Дж/см<sup>2</sup>, для титаната сапфира, сечение которого несколько

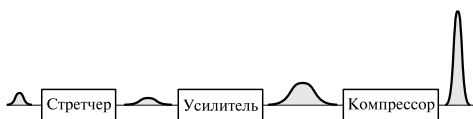


Рис. 24.10

больше,  $J_{\text{нас}} = 0,9 \text{ Дж/см}^2$ , для красителей, сечение которых выше на три порядка, плотность энергии насыщения будет намного меньше — порядка  $1 \text{ мДж/см}^2$ .

Если осуществлять усиление импульсов пикосекундной длительности в неодимовом стекле, то при  $\tau_0 = 10^{-12} \text{ с}$  плотность мощности (интенсивность) составит  $I = J_{\text{нас}}/\tau_p = 4 \cdot 10^{12} \text{ Вт/см}^2$ . Если поперечное сечение неодимового стержня  $\sigma$  положить равным  $2 \text{ см}^2$ , то на выходе усилителя будет достигнута мощность  $P \approx I\sigma \sim 10^{13} \text{ Вт}$ . Однако при такой мощности, во-первых, может произойти разрушение (электрический пробой) неодимового стекла и, во-вторых, развиться мелкомасштабная самофокусировка, способствующая этому разрушению.

Чтобы обойти эти трудности, во второй половине 80-х годов была предложена оригинальная методика усиления импульсов.

Перед тем как попасть в усилитель, импульс предварительно растягивается во времени от тысячи до сотни тысяч раз. Устройство, в котором это осуществляется, называется *стретчером* (от англ. stretch — растягивать). Величина  $J_{\text{нас}}$  при этом не изменится, однако на много порядков будет уменьшена мощность (и интенсивность) усиливаемой волны. Это позволит избежать описанных выше трудностей.

После усиления импульс направляется в компрессор, в котором сжимается до исходной длительности. На рис. 24.10 схематично изображено последовательное прохождение импульса через стретчер, усилитель и компрессор.

В первых экспериментах стретчером являлся оптический волновод с положительной дисперсией групповой скорости. Спектрально ограниченный импульс удлинялся во времени и становился фазово-модулированным, или чирпированным.

После усиления он направлялся на пару параллельных дифракционных решеток, выполнявших роль компрессора. На рис. 24.11 схематично изображено сжатие импульса таким компрессором. Пара параллельных решеток эквивалентна диспергирующей среде с отрицательной дисперсией групповой скорости. Следовательно, после компрессора фазовая модуляция исчезает и импульс вновь становится спектрально-ограниченным.

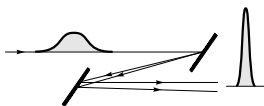


Рис. 24.11

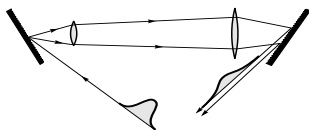


Рис. 24.12

Поскольку система, показанная на рис. 24.10, является линейной, то спектральная плотность излучения не изменяется. Поэтому длительности усиленного и усиливаемого импульсов будут равны.

Если решетки расположить так, как это изображено на рис. 24.12, то эта система будет работать как стретчер, растягивая импульс и превращая его в фазово-модулированный. Пара решеток в этой ситуации будет эквивалентна диспергирующей среде с положительной дисперсией групповой скорости.

В современных оптических системах слабые импульсы с энергией порядка 1 нДж могут усиливаться в  $10^6$ — $10^{12}$  раз, поэтому их энергия может достигать величин  $10^{-3}$ — $10^3$  Дж.

С помощью такой схемы усиления в 1987 г. были получены импульсы с пиковой мощностью  $P \sim 10^{12}$  Вт = 1 ТВт (тераватт). В 1999 г. были получены импульсы мощностью  $P \sim 10^{15}$  Вт = 1 ПВт (петаватт).

В настоящее время в мире построены лазерные системы, генерирующие импульсы мощностью в десятки и сотни тераватт. Уже функционируют или находятся в стадии создания около 20 петаваттных систем.

При фокусировке таких сверхмощных импульсов в пятно площадью  $\sim \lambda^2$  в настоящее время удалось достичь интенсивности  $\sim 10^{21}$  Вт/см<sup>2</sup>.

В заключение отметим, что существует теоретический предел достижения максимальных значений мощности и интенсивности, обусловленный наличием насыщенной плотности потока. При ширине  $\Delta\nu_{\text{yc}}$  линии усиления активной среды длительность импульса после компрессора будет не меньше величины  $\tau_{\text{min}} = 1/\Delta\nu_{\text{yc}}$ , поэтому максимальная (предельная) мощность будет равна

$$P_{\text{max}} = J_{\text{нас}} \sigma \Delta\nu_{\text{yc}}, \quad (24.42)$$

а максимальная интенсивность при фокусировке может достичь предельной величины

$$I_{\text{max}} = \frac{P_{\text{max}}}{\lambda^2} = \frac{J_{\text{нас}} \sigma \Delta\nu_{\text{yc}}}{\lambda^2}, \quad (24.43)$$

где  $\sigma$  — площадь поперечного сечения активной среды.

Например, для титаната сапфира, обладающего широкой полосой усиления, при  $\sigma = 1$  см<sup>2</sup> мощность  $P_{\text{max}} = 200$  ТВт, а интенсивность  $I_{\text{max}} = 0,3 \cdot 10^{23}$  Вт/см<sup>2</sup>. Для иттербиевого стекла (Yb-иттербий, принадлежащий к лантаноидам) эти величины будут соответственно равны 3 000 ТВт и  $3 \cdot 10^{23}$  Вт/см<sup>2</sup>.

Использование таких громадных интенсивностей расширяет горизонты современной оптики, позволяя проводить исследования в области физики высоких энергий, космологии, общей теории относительности и многих других областях знания.

## РАЗДЕЛ 10

### ПРИЕМНИКИ СВЕТА

---

#### ЛЕКЦИЯ 25

В заключительной лекции рассмотрим наиболее важные приемники света и принципы их работы.

**Глаз человека.** Человеческий глаз — уникальный высокочувствительный приемник света. Он схематично изображен на рис. 25.1 цв. вкл. Глаз имеет форму, близкую к сферической с диаметром около 2,5 см. Передняя часть защищена прозрачным покрытием, называемым роговицей. Под ней находится эластичная капсула, содержащая неоднородную желеобразную массу. Капсула имеет форму двояковыпуклой линзы и называется *хрусталиком*. Средний показатель преломления хрусталика равен 1,437. Пространство между роговицей и хрусталиком заполнено *камерной влагой глаза*, имеющей показатель преломления 1,336, близкий к показателю преломления воды. Позади хрусталика расположено стекловидное тело с таким же показателем преломления, как у влаги.

Непосредственно перед хрусталиком имеется диафрагма, диаметр отверстия которой (*зрачок*) может изменяться в зависимости от интенсивности падающего света. Оптическая сила эластичного хрусталика также варьируется за счет воздействия глазной мышцы, с которой хрусталик связан.

Лучи света, преломляясь на роговице и хрусталике, достигают задней поверхности глаза, на которой расположена *светочувствительная сетка*. Ее светочувствительными элементами являются *палочки* и *колбочки*, которые вырабатывают импульсы, распространяющиеся по нервной системе к головному мозгу.

Палочки, располагаясь в периферической части сетчатки глаза, обладают большой чувствительностью, но не реагируют на различия в цвете. Колбочки, находящиеся в центральной части сетчатки, менее чувствительны, зато позволяют различать цвета и мелкие детали рассматриваемого предмета. Благодаря всему этому человек обладает двумя зрением: *дневным* (связанным с раздражением колбочек) и *сумеречным* (связанным с раздражением палочек).

В обычных условиях задействованы оба зрения. Однако при малых освещенностях световое ощущение формируется за счет сумеречного зрения. При попадании в темноту в первое время человек ничего не видит, но через 30—40 мин начинает различать предметы — включается сумеречное зрение. Этот процесс называется *адаптацией*.

В 20-е годы XX в. выдающийся советский физик С. И. Вавилов с коллегами проводил визуальные исследования квантовых флуктуаций слабоинтенсивных световых потоков, воспользовавшись высокой чувствительностью адаптированного человеческого глаза. В результате исследований было установлено, что световое ощущение у человека возникает при попадании в глаз за время 0,1 с нескольких десятков световых квантов.

Исследования квантовых флуктуаций света привели ученого к важным выводам в области физиологической оптики. В частности, в зеленой области спектра пороговое значение зрительного ощущения у разных людей колеблется от 8 до 47 световых квантов, достигающих сетчатки глаза. При этом число падающих фотонов варьируется от 108 до 335, однако большая их часть поглощается хрусталиком глаза.

Помимо этого С. И. Вавилов установил новое свойство глаза. Он показал, что помимо известного максимума чувствительности вблизи  $\lambda = 500$  нм есть и второй максимум вблизи  $\lambda = 380$  нм. Однако в этой области малая чувствительность глаза связана с ослаблением света в хрусталике, предохраняющим сетчатку глаза от ультрафиолетового излучения.

Зрительное ощущение  $\beta$  (как и звуковое) усиливается с возрастанием интенсивности света по психофизическому закону Вебера — Фехнера:  $\beta = \lg I/I_{\text{пор}}$ , где  $I_{\text{пор}}$  — пороговое значение интенсивности.

Если принять, что в зеленой области спектра ( $\lambda = 500$  нм), в которой энергия кванта  $W = hc/\lambda = 4 \cdot 10^{-19}$  Дж, зрительное ощущение появляется у человека при падении в единицу времени  $N_{\phi} = 10^3$  фотонов, то при радиусе зрачка  $r_0 = 2$  мм плотность потока энергии, или пороговая интенсивность,  $I_{\text{пор}} = WN_{\phi}/(\pi r_0^2) = 3 \cdot 10^{-9}$  Вт/м<sup>2</sup>.

Разглядывая Солнце через затемненное стекло, ослабляющее световой поток в 100 раз, человек безболезненно воспринимает световой поток интенсивностью  $I \sim 10$  Вт/м<sup>2</sup>. Это означает, что глаз воспринимает громадный диапазон интенсивностей света — интенсивность изменяется на 10 порядков! Таким уникальным свойством не обладает никакой другой приемник света.

Для регистрации света и измерения его характеристик применяют *фотоэлектрические приемники*, преобразующие световой сигнал в электрический. Принцип действия большинства из них основан на фотоэффекте: внешнем и внутреннем. Поэтому вначале познакомимся с основными закономерностями фотоэффекта.

**Внешний фотоэффект.** В 1887 г. немецкий физик Г. Герц обнаружил, что электрический разряд между двумя электродами происходит при меньшем напряжении, если искровой промежуток (электроды) освещается ультрафиолетовым светом. Дальнейшие исследования, проведенные немецким ученым В. Гальваксом и русским физиком А. Г. Столетовым, показали, что под действием света освобождаются заряды из электродов, которые, ускоряясь в электрическом поле, способствуют ионизации газа между электродами. Явление, обнаруженное Герцем, получило название *внешнего фотоэффекта*.

В период с 1888 по 1890 г. А. Г. Столетов выполнил цикл работ, в которых осуществил количественные исследования фотоэффекта, установил его закономерности и предложил метод фотоэлектрического контроля интенсивности света. Схема его опытов изображена на рис. 25.1.

Свет от электрической дуги проходит через пластину конденсатора, выполненную в виде проволочной сетки, и попадает на другую пластину. Между пластинами поддерживается небольшая разность потенциалов с помощью батареи, при этом освеще-

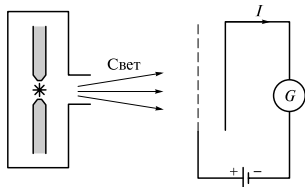


Рис. 25.1

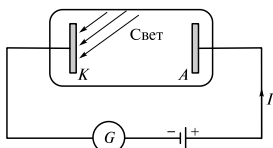


Рис. 25.2

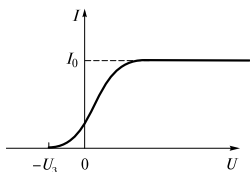


Рис. 25.3

щаемая пластина заряжена отрицательно. Возникающий фототок  $I$  регистрируется гальванометром  $G$ . В результате проведенных исследований были сделаны следующие выводы:

- наиболее эффективно действуют ультрафиолетовые лучи света;
- сила фототока пропорциональна освещенности пластины;
- под действием света высвобождаются отрицательные заряды.

Последний вывод эффектно демонстрируется в опыте с электроскопом, с которым соединена цинковая пластина. Если пластину зарядить отрицательным зарядом и затем осветить ультрафиолетовым светом, то электроскоп с пластиной быстро разрядится. Если же пластина заряжена положительным зарядом, то при освещении она заряд практически не теряет.

Для исследования количественных закономерностей фотоэффекта используются тщательно очищенные пластины, которые помещают в вакуум (рис. 25.2).

На рис. 25.3 показана зависимость силы фототока  $I$  от приложенной к пластинам разности потенциалов  $U$ . При  $U > 0$  выбитые светом электроны из пластины  $K$  (катода) ускоряются полем и движутся к пластине  $A$  (аноду), а при  $U < 0$  тормозятся этим полем.

При увеличении  $U$  фототок  $I$  возрастает и достигает величины  $I_0$ , характеризующей *фототок насыщения*. Это означает, что все электроны, выбитые из катода, достигают анода. Поэтому фототок насыщения является однозначной характеристикой фотоэффекта. Измерения показывают, что сила фототока насыщения пропорциональна падающему световому потоку.

Наоборот, при увеличении задерживающего поля фототок ослабевает, и при  $U = -U_3$  он прекращается. Исчезновение фототока при  $U = -U_3$  означает, что максимальная скорость  $v_{\max}$  выбитых из катода электронов определяется соотношением

$$\frac{mv_{\max}^2}{2} = eU_3, \quad (25.1)$$

отражающим равенство кинетической энергии электрона и работы сил тормозящего электрического поля.

При прохождении через поверхность катода электроны преодолевают сопротивление выхода, теряя часть кинетической энергии. Эта потеря равна так называемой *работе выхода*  $W_0$ . Следовательно, энергия электронов внутри катода будет равна

$$W = \frac{mv_{\max}^2}{2} + W_0 = eU_3 + W_0. \quad (25.2)$$

Эту энергию электрон заимствует у падающего света.

В 1905 г. А. Эйнштейн теоретически обосновал количественную связь между энергией  $W$  и частотой света  $\nu$ . Согласно теории Эйнштейна энергия  $W$ , полученная электроном, равна энергии фотона  $h\nu$ . Электрон не заимствует энергию у атомов вещества катода. Поэтому можно записать равенство

$$h\nu = \frac{mv_{\max}^2}{2} + W_0 = eU_3 + W_0. \quad (25.3)$$

Это соотношение называется *уравнением Эйнштейна для фотоэффекта*. С его помощью можно легко объяснить пропорциональность фототока насыщения  $I_0$  падающему световому потоку. Последний пропорционален числу квантов, падающих на поверхность катода за единицу времени.

Как показывает опыт, лишь малая часть фотонов передает энергию электронам. Энергия большей части фотонов расходуется на нагревание катода.

Из уравнения (25.3) следует, что существует минимальная частота света  $\nu_0$ , при которой фотоэффект исчезает. Полагая  $v_{\max} = 0$ , имеем

$$h\nu_0 = W_0. \quad (25.4)$$

Соответствующая длина волны

$$\lambda_0 = \frac{c}{\nu_0} = \frac{hc}{W_0} \quad (25.5)$$

называется *красной границей фотоэффекта*. Для щелочных металлов, у которых работа выхода относительно невелика, она находится в видимой области спектра, для большинства других металлов (Zn, Fe, Cu и т. д.) — в ультрафиолетовой области.

**Внутренний фотоэффект.** Еще раньше (до открытия Г. Герца) был известен *внутренний фотоэффект*, когда оптически возбужденные электроны остаются внутри твердого тела. В полупроводниках и диэлектриках изменяется концентрация носителей заряда или их подвижность. Возникает зависимость их проводимости от светового потока, получившая название фотопроводимости. На основе этого явления создана большая группа фоторезисторов, используемых в качестве приемников света.

В неоднородных полупроводниках при их освещении может возникать разность потенциалов (фотоЭДС). Оптически возбужденные электроны и их вакансии (дырки) концентрируются в разных частях полупроводника, вследствие чего и возникает фотоЭДС.

Преобразовывая световую энергию в электрическую, такие фотогальванические элементы обладают достаточно высоким КПД (~20 %) и поэтому нашли широкое применение как источники электропитания (солнечные элементы) космических аппаратов и других устройств.

**Фотоэлектрические приемники.** На основе внешнего и внутреннего фотоэффекта созданы многочисленные приемники света, преобразующие световой сигнал в электрический. Эти приемники называются *фотоэлектрическими*, или *фотоэлементами*.

Первый фотоэлемент, основанный на внутреннем фотоэффекте и использующий явление фотопроводимости, был создан в 1875 г., а фотоэлемент, использующий внешний фотоэффект, — в 1889 г.

**Вакуумный фотоэлемент.** Он является простейшим приемником света. Фотоэлемент состоит из стеклянной вакуумированной колбы, на внутреннюю поверхность которой нанесен фоточувствительный слой (фотокатод). В центре колбы расположен анод. Красная граница фотокатода зависит от чистоты его поверхности. Чтобы сместить  $\lambda_0$  в длинноволновую область спектра, изготавливают сложные фотокатоды, поверхность которых покрывают тонким слоем интерметаллических соединений, оксидов и др. Это позволяет варьировать  $\lambda_0$  от коротковолнового ультрафиолета ( $\lambda_0 \approx 2000 \text{ \AA}$ ) до близкой ИК-области ( $\lambda_0 \approx 15000 \text{ \AA}$ ).

Если  $N_\phi$  — число падающих фотонов в единицу времени, то число выбитых фотоэлектронов

$$N_e = \eta N_\phi, \quad (25.6)$$

где  $\eta$  — коэффициент пропорциональности, называемый *квантовым выходом*. Он характеризует чувствительность фотокатода и не зависит от его освещенности.

Поскольку фототок  $I = eN_e$ , а световой поток  $\Phi = h\nu N_\phi$ , то выражение (25.6) может быть записано в виде

$$I = \frac{\eta e \lambda \Phi}{hc}. \quad (25.7)$$

Квантовый выход зависит от длины волны света. Большим квантовым выходом ( $\eta \geq 0,3$ ) обладают сложные фотокатоды, которые применяются в фотоэлементах.

Важнейшей характеристикой фотоэлемента является *спектральная чувствительность*

$$S_\lambda = \frac{I}{\Phi} = \frac{\eta e \lambda}{hc}. \quad (25.8)$$

Фототок в цепи фотоэлемента обычно не превышает 0,1 мА, поэтому спектральная чувствительность измеряется в мА/Вт. На рис. 25.4 показана нормированная спектральная чувствительность Na-K-катода при различной поляризации ( $E_\parallel$  и  $E_\perp$ ) наклонно падающего на катод света. При  $\lambda > \lambda_0 \approx 5250 \text{ \AA}$  фототок отсутствует и  $S_\lambda = 0$ .

Иногда используется *интегральная чувствительность фотокатода к белому свету* от лампы накаливания с вольфрамовой нитью при температуре 2850 К. Она измеряется в микроамперах на люмен — мкА/лм (люмен — единица освещенности).

**Газонаполненные фотоэлементы и счетчики фотонов.** При малых световых потоках число фотоэлектронов невелико. В электрической цепи появляются слабые импульсы тока, которые трудно регистрировать. Если в колбе фотоэлемента находится газ, то фотоэлектроны будут вызывать его ионизацию. В результате импульсы тока будут усилены.

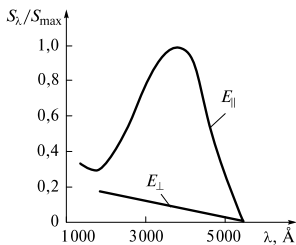


Рис. 25.4



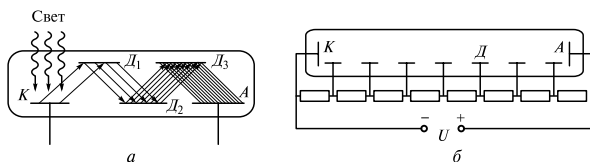


Рис. 25.5

На практике используются газонаполненные счетчики фотонов, представляющие собой счетчик Гейгера с фоточувствительным катодом. За фиксированное время измеряется количество импульсов, а затем рассчитывается световой поток. Счетчики позволяют измерять очень слабые свечения, когда  $N_e \leq 10^2 \text{ с}^{-1}$ .

**Фотоэлектронные умножители (ФЭУ).** В ФЭУ наряду с катодом и анодом имеется ряд вторичных эмиттеров электронов  $D$ , называемых динодами (рис. 25.5, а).

Фотоэлектроны катода при попадании на первый динод  $D_1$  выбивают вторичные фотоэлектроны, число которых превышает число падающих. Отношение числа выбитых к числу падающих электронов называется *коэффициентом вторичной эмиссии*  $\sigma$ . Значение  $\sigma$  может превышать 10 и зависит от энергии первичных электронов, угла их падения, материала динода и др. В ФЭУ эмиттеры изготавливают из материалов с большим коэффициентом  $\sigma$ .

Высокое напряжение  $U \sim 10^3 \text{ В}$  с помощью делителя прикладывают к каждому диноду так, чтобы потенциал последующего динода был больше потенциала предыдущего. Это позволяет ускорять вторичные электроны и последовательно увеличивать их число (рис. 25.5, б).

Коэффициент усиления одного каскада ФЭУ  $k_1 = \alpha\sigma$ , где  $\alpha$  — доля электронов, достигающих следующего динода. В современных умножителях  $\alpha = 0,7 - 0,9$ . Если ФЭУ содержит  $n$  одинаковых каскадов (динодов), то его коэффициент усиления

$$k = k_1^n = (\alpha\sigma)^n. \quad (25.9)$$

Полагая  $n = 10$ ,  $\alpha = 0,8$ , получаем  $k = 10^9$ . Реальный коэффициент усиления не превосходит  $10^7 - 10^8$ .

ФЭУ характеризуется чувствительностью, или *анодной чувствительностью*, определяемой как отношение фототока к световому потоку, падающему на фотокатод. Она равна произведению интегральной чувствительности фотокатода и коэффициента усиления и измеряется в амперах на люмен (А/лм).

Еще одна важная характеристика ФЭУ — *пороговая чувствительность*, определяемая как наименьший регистрируемый световой поток. Если световой поток меньше порогового, то величина фототока меньше случайных флуктуаций (шумов) тока в цепи фотоумножителя. Это объясняется тем, что в отсутствие света в цепи ФЭУ будет существовать случайный *темновой ток*, возникающий как вследствие термоэлектрической эмиссии электронов с катода, так и из-за утечки зарядов между электродами.

Термоэлектронную эмиссию можно понизить уменьшением площади фотокатода, а также понижением его температуры. Например, при охлаждении сурьмяно-цезиевого катода до температуры жидкого азота термоэмиссия уменьшается в  $10^4$  раз. Охлаждение применяется в случае слабого светового потока, когда темновой ток превышает фототок. При малых интенсивностях света уменьшается среднее число  $N_e$  фотоэлектронов, покидающих катод, и увеличиваются относительные флуктуации  $\delta N_e/N_e = 1/\sqrt{N_e}$ .

Полный ток с поверхности катода  $I_0 = I + I_t$ , являющийся суммой фототока  $I$  и темнового тока  $I_t$ , будет флуктуирующим. Флуктуации, связанные с дискретной природой света и электрического заряда, получили название *дробового эффекта*. Если нагрузкой фотоэлемента является омическое сопротивление  $R$ , то измеряемое на нем напряжение  $U = I_0 R$  будет также флуктуировать. Согласно *формуле Шоттки*, названной в честь шотландского физика В. Шоттки, теоретически предсказавшего эффект, среднее значение квадрата тока, протекающего через сопротивление, будет равно

$$\overline{I_{\text{др}}^2} = 2e\overline{I_0}\Delta f, \quad (25.10)$$

где  $\Delta f$  — ширина полосы пропускания усилителя тока, подключенного к выходу фотоэлемента;  $\overline{I_0}$  — среднее значение силы тока с катода.

Поскольку согласно (25.8) величина фототока  $I = S_\lambda \Phi$ , из равенства  $I_{\text{пор}} = \sqrt{\overline{I_{\text{др}}^2}}$  можно определить *пороговое значение светового потока*, регистрируемого ФЭУ на фоне шумов. Полагая в (25.10)  $\overline{I_0} \approx I_t \gg I$ , находим

$$\Phi_{\text{пор}} = \frac{\sqrt{2eI_t\Delta f}}{S_\lambda}. \quad (25.11)$$

Повышая квантовый выход  $\eta$  (увеличивая  $S_\lambda$ ) и уменьшая темновой ток, можно понизить пороговую величину светового потока. Минимально достижимым значением является  $\Phi_{\text{пор}} \approx 10^{-13}$  лм, что в области максимума  $S_\lambda$  соответствует потоку фотонов порядка нескольких сотен в секунду.

Более слабые световые потоки могут измеряться с помощью ФЭУ, работающих в *режиме счета фотонов*. Если уровень шумов ФЭУ мал, то каждый фотоэлектрон, испущенный катодом, после размножения создаст импульс тока, значение которого подвержено статистическому разбросу. Эти импульсы регистрируются хорошо разработанными в ядерной физике методами.

В малозумных фотоэлектронных умножителях с  $1 \text{ см}^2$  площади поверхности фотокатода за 1 с испускается в среднем пять-шесть термоэлектронов. Поскольку площадь поверхности фотокатода не превосходит нескольких квадратных миллиметров, среднее число испущенных катодом электронов за 1 с значительно меньше единицы. Это позволяет регистрировать даже единичные фотоны.

**Временное разрешение.** Весьма важной характеристикой фотоприемников является временное разрешение, определяемое постоянной времени  $\tau_{\text{пр}}$ . Эта величина характеризует инерционность протекающих в них процессов. Описанные выше приемники, работающие на основе внешнего фотоэффекта, являются быстродействующими. Их временное разрешение определяется прежде всего разбросом времени выхода электронов из катода и разбросом времени пролета от катода к аноду вследствие разных начальных скоростей электронов.

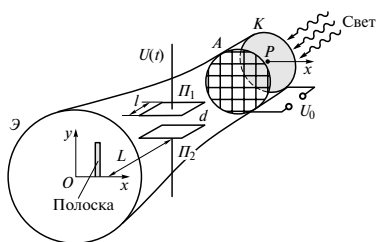


Рис. 25.6

Наилучшее разрешение современных фотоэлектрических приемников составляет величину  $\tau_{\text{пр}} \approx 50$  пс. У фотоумножителей из-за большой длины пробега электронов временное разрешение  $\tau_{\text{пр}} \geq 100$  пс.

#### **Электронно-оптическая камера.**

Этот приемник является высокочувствительным фоторегистратором с предельно низким временным разрешением  $\tau_{\text{пр}} \sim 1$  пс. Устройство камеры показано на рис. 25.6.

Она напоминает электронно-лучевую трубку и состоит из фотокатода  $K$ , анода  $A$ , фокусирующей системы (на рисунке не показана), отклоняющих пластин  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$  и люминесцирующего экрана. На пластины подается пропорциональное времени отклоняющее напряжение  $U(t)$ . Поэтому при освещении светом фотокатода изображение точки  $P$  его поверхности на экране будет выглядеть как тонкая полоска. Поэтому это устройство называют *стрик-камерой* (от англ. streak — полоска). Несложно показать, что смещение во времени вдоль оси  $Oy$  изображения точки  $P$  происходит по закону

$$y(t) = \frac{IL}{2U_0 d} U(t), \quad (25.12)$$

где  $U_0$  — ускоряющее напряжение между анодом и катодом;  $l$  — длина пластин в направлении полета электронов;  $d$  — расстояние между пластинами;  $L$  — расстояние от пластин до экрана (предполагается, что  $L \gg l$ ).

Если за время  $\Delta t = 10^{-9}$  с напряжение  $U$  возрастает до 1 кВ, то изображение точки  $P$  на экране будет смещаться за время  $\delta t = 10^{-12}$  с на  $\delta y = 0,1$  мм, в пределах которого можно анализировать распределение яркости. Яркость полученного изображения в виде полоски затем усиливается и далее либо фотографируется, либо записывается оптическим многоканальным анализатором. Из распределения освещенности вдоль полоски можно получить информацию об огибающей и длительности даже пикосекундных импульсов, поскольку временное разрешение  $\tau_{\text{пр}} = 10^{-12}$  с позволяет это сделать.

В таких экспериментах падающий пикосекундный импульс вначале разделяется на два импульса, один из которых запускает генератор отклоняющего напряжения, а другой после временной задержки порядка 60 пс попадает на фотокатод через щель, вытянутую вдоль оси  $Ox$ . Ее изображение разворачивается в перпендикулярном направлении и затем анализируется.

**Фоторезисторы.** Это приемники света, в которых происходит внутренний фотоэффект. Они представляют собой пластинки из полупроводникового материала либо тонкие пленки, которые последовательно с сопротивлением нагрузки включают в цепь постоянного или переменного тока. Напряжение питания находится в пределах от единиц до сотни вольт. Без света в электрической цепи течет слабый темновой ток.

При освещении из-за внутреннего фотоэффекта появляются свободные электроны. Последние путем ударной ионизации приводят к образованию новых

носителей заряда, и квантовый выход фоторезисторов может быть значительно больше единицы. Для возникновения свободных электронов в полупроводнике необходимо, чтобы энергия фотона  $W = hc/\lambda$  была больше ширины запрещенной зоны  $\Delta W$ . Тогда для длины волны, определяющей красную границу внутреннего фотоэффекта, получаем, мкм,

$$\lambda_0 (\text{мкм}) = \frac{1,24}{\Delta W (\text{эВ})}. \quad (25.13)$$

Для полупроводника CdS ширина запрещенной зоны равна 2,4 эВ, поэтому  $\lambda_0 \approx 0,5$  мкм; для PbS  $\Delta W = 0,37$  эВ и  $\lambda_0 = 3$  мкм.

Большое распространение получили фоторезисторы из указанных выше сульфидов кадмия и свинца, селенидов кадмия (CdSe) и свинца (PbSe) и др. Добавляя в полупроводники различные примеси (легируя полупроводники), можно создать фоторезисторы, применяемые в дальней ИК-области спектра.

Временное разрешение определяется скоростями процессов генерации и рекомбинации носителей зарядов и другими факторами и у ряда легированных полупроводников может достигать  $\tau_{\text{пр}} = 10^{-9}$  с. При очень слабых световых потоках  $\Phi$  сила тока  $I \propto \Phi$ . При увеличении освещенности связь между электрическим током и световым потоком становится нелинейной.

**Фотодиоды.** Фотодиод состоит из двух слоев одного и того же вещества. Обычно таким веществом является кремний (Si) или германий (Ge). Слои имплантированы разными примесями, обладающими электронной ( $n$ ) и дырочной ( $p$ ) проводимостями. Устройство кремниевого фотодиода показано на рис. 25.7.

На подложку (пластинку) напыляют два слоя кремния, затем наносят пленку  $\text{SiO}_2$ , которая играет роль просветляющего слоя. Свет падает перпендикулярно к поверхности пленки. При попадании на  $p$ — $n$ -переход фотонов, энергия которых достаточна для внутреннего фотоэффекта, происходит поглощение света с образованием пары электрон—дырка. Под действием электрического поля (контактной разности потенциалов), существующего в  $p$ — $n$ -переходе, электрон перемещается в положительно заряженную  $p$ -область, а дырка — в отрицательно заряженную  $n$ -область. В результате на контактах, соприкасающихся с этими областями, возникает фотоЭДС. В электрическую цепь фотодиода включаются двумя способами.

На рис. 25.8, а показана электрическая схема, когда фотоприемник работает в фотодиодном режиме.

Здесь от источника с постоянной ЭДС к фотодиоду приложено запирающее напряжение. В отсутствие света через диод протекает случайный темновой ток  $I_t$ . При освещении контактная разность потенциалов (потенциальный барьер) уменьшается и ток  $I$  в цепи возрастает пропорционально световому потоку (интенсивности света) и не зависит от приложенного напряжения.

Как показывает анализ,  $\overline{I_t} \propto T$  ( $T$  — температура диода). Поэтому, охлаждая диод, можно уменьшать темновой ток. При охлаждении фотодиода до температуры жидкого азота его можно использовать в режиме счета фотонов.

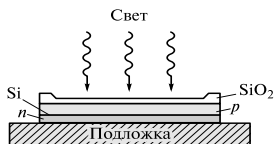


Рис. 25.7

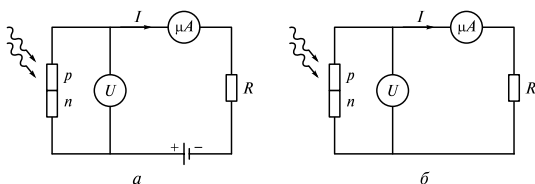


Рис. 25.8

На рис. 25.8, б показана другая электрическая схема, в которой источник с постоянной ЭДС отсутствует. В этом случае фотодиод работает в так называемом *фотовентильном* режиме. Здесь измерительными приборами измеряется либо фотоЭДС, либо фототок, которые также пропорциональны световому потоку. В этом режиме работают также кремниевые фотоэлементы, используемые в «солнечных» батареях.

Кремниевые фотодиоды обладают широкой областью спектральной чувствительности:  $0,4 \text{ мкм} < \lambda < 1,1 \text{ мкм}$ . При  $\lambda < 0,4 \text{ мкм}$  усиливается поглощение кремния, поэтому для этой области диод сочетают с флуоресцирующими покрытиями с большим квантовым выходом. У германиевого диода область спектральной чувствительности несколько сдвинута в область более длинных волн.

По сравнению с ФЭУ фотодиоды обладают значительно меньшей массой и габаритными размерами, противоударной устойчивостью и др. Кроме того, в фотодиодном режиме они работают при невысоких напряжениях  $\sim 10 - 15 \text{ В}$ . Постоянная времени зависит от длины волны света, конструкции фотодиода и может достигать величины  $\tau_{\text{пр}} \sim 10^{-9} \text{ с}$ .

**ССD-матрицы.** В современных цифровых фото-, видеокамерах, сканерах и других устройствах в качестве приемников света используются ССD-матрицы (Charged Coupled Device). Светочувствительными элементами такой матрицы являются фотодиоды, преобразующие свет в электрический заряд. Поэтому еще употребляется и другое название: ПЗС-матрица (преобразователь свет—сигнал).

Считываемый с матрицы аналоговый электрический сигнал затем преобразуется в цифровой с помощью аналого-цифрового преобразователя. Для воспроизведения изображения используется процессор, преобразующий цифровые последовательности импульсов в видеосигнал.

На рис. 25.2 цв. вкл. показан фрагмент матрицы, содержащий три элемента (пикселя). На каждый светодиод, изображенный желтым цветом, падающий свет попадает после предварительной фокусировки микролинзой и прохождения через абсорбционный светофильтр. Между фотодиодом и подложкой в микроячейках накапливаются электроны.

Одной из важнейших характеристик качества матрицы является максимальное число электронов, которое может аккумулировать каждый пиксел. Чем больше это число, тем меньше влияние шумов, связанных как с разбросом числа электронов, так и разбросом цифровых кодов одинаковых зарядов при аналого-цифровом преобразовании.

Разрешение матриц, применяемых в современных приемных устройствах, составляет от 11 млн до 22 млн пикселей.

**Тепловые приемники.** Принцип действия таких приемников основан на изменении свойств вещества, из которого сделан приемник, при его нагревании за счет поглощаемой световой энергии. Рассмотрим наиболее распространенные приемники этого типа.

**Болометры.** Их действие основано на зависимости электрического сопротивления от температуры. Поэтому болометр включают в электрическую цепь вместе с источником тока. Освещаемый светом элемент болометра (рабочий элемент) должен обладать хорошей поглощательной способностью и существенно изменять свое электрическое сопротивление при нагреве. Поскольку в одном веществе эти оба условия реализовать крайне сложно, рабочий элемент состоит из поглощающего и светочувствительного слоев, разделенных тонкой изолирующей пленкой. Светочувствительный слой может быть металлическим, полупроводниковым и сверхпроводящим и определяет соответствующий тип болометра.

В металлических болометрах на тонкую диэлектрическую пленку напыляют с одной стороны металлический проводящий слой толщиной в доли микрометра, а с другой — слой золотой черни толщиной десятки микрометров, состоящий из осажденных крупных частиц слипшихся атомов золота. Визуально этот слой представляет собой рыхлую черную поверхность. Размеры рабочего элемента в форме полоски немного превышают размеры изображения спектральных линий, формируемых спектральными приборами. Поэтому ширина полоски в видимой и ближней ИК-области составляет доли миллиметра, а в дальней ИК-области достигает величины 1—2 мм.

Электрическое сопротивление полоски, изготовленной, например, из висмута, колеблется в пределах 200—300 Ом. В рабочем режиме (в отсутствие света) через нее протекает электрический ток 2—5 мА и выделяется электрическая мощность в диапазоне 0,4—1,5 Вт. В результате полоска нагревается на 40—50 °С. Если поглощаемая световая мощность будет порядка 1 Вт, то полоска нагреется еще на такую же величину. В этом диапазоне температур сопротивление висмута возрастает пропорционально температуре. Оно может быть измерено с высокой точностью с помощью электрического моста, в одно из плеч которого помещают болометр. Затем по градуировочной кривой можно определить и мощность светового потока.

Быстродействие болометра характеризуется временем установления температуры в рабочем элементе, которое зависит от его размеров и коэффициента температуропроводности материалов элемента.

Для повышения чувствительности болометра рабочий элемент помещают в колбу, давление воздуха в которой  $10^{-2}$ —1 мм рт. ст. Это позволяет существенно уменьшить теплоотвод от рабочего элемента в окружающую среду, но при этом возрастает время установления температуры в рабочем элементе и быстродействие болометра снижается. Характерное значение постоянной времени  $\tau_{пр} \sim 0,1$ —1 с.

Полупроводниковые болометры, или термисторы, имеют полупроводниковый светочувствительный слой толщиной 20—30 мкм, который наносят на массивную диэлектрическую подложку с хорошей теплопроводностью. Чувствительность термисторов примерно на порядок выше чувствительности ме-

таллических болометров. Поскольку полупроводники обладают отрицательным температурным коэффициентом сопротивления, при излишнем нагреве ток может начать лавинообразно возрастать. Это может привести к разрушению болометра. Поэтому оптимальная рабочая температура термистора около 300 К.

Из-за массивности рабочего элемента термистора время установления температуры значительно больше, чем у металлического болометра. Поэтому термисторы выгодно применять для измерения модулированного во времени светового потока, когда происходит нестационарный нагрев рабочего элемента. Однако средняя температура элемента будет зависеть от частоты модуляции (чем выше частота, тем меньше температура), и нагрев элемента будет меньше, чем при падении немодулированного света той же мощности. Это, безусловно, снижает чувствительность термистора.

Сверхпроводящие болометры обладают очень высокой чувствительностью, поскольку в сверхпроводящем состоянии материалы имеют температурный коэффициент сопротивления  $1 - 10 \text{ K}^{-1}$ . Кроме того, при понижении температуры уменьшаются шумы. Временное разрешение может быть уменьшено до  $\tau_{\text{пр}} \sim 0,5 \text{ мс}$ .

**Термоэлементы.** В основе конструкции термоэлемента находится термопара, один из спаев которой освещается светом. При нагревании этого спаев светом возникает термоЭДС. Для ее увеличения и, следовательно, повышения чувствительности приемника термопары последовательно соединяют в термостолбик (рис. 25.9).

В качестве материалов для термопар используются, например, висмут и сурьма, висмут и теллур и другие с целью достичь как можно большей термоЭДС при минимальном электрическом сопротивлении и низкой теплопроводности.

Конструктивно термоэлемент состоит из поглощающего слоя 1, металлического слоя 2, соприкасающегося со стержнями 3, изготовленными из материалов термопары (рис. 25.10).

Оба слоя и соприкасающиеся с ними в двух точках стержни представляют собой один из спаев термопары. Стержни опираются на основание 4, обеспечивающее жесткость конструкции. От стержней отходят контакты, с помощью которых приемник включается в электрическую цепь. Термоэлемент помещается в баллон с высоким вакуумом. Это позволяет уменьшить отток тепла от нагретого спаев к холодному. Однако из-за массивности конструкции временное разрешение достаточно велико:  $\tau_{\text{пр}} \sim 10 - 50 \text{ мс}$ .

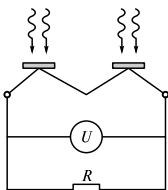


Рис. 25.9

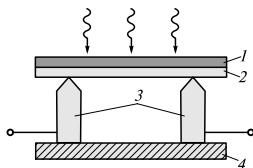


Рис. 25.10

**Пироэлектрические приемники.** Некоторые кристаллы, не обладающие центром симметрии, обладают постоянным дипольным моментом в направлении полярной оси. Поэтому при срезе кристалла перпендикулярно этой оси поверхность среза будет электрически заряжена с поверхностной плотностью, равной нормальной составляющей дипольного момента кристалла. Однако с течением времени (времени релаксации) этот заряд постепенно нейтрализуется за счет ионов и электронов, осаждающихся из воздуха, а также за счет микротоков, существующих в кристалле.

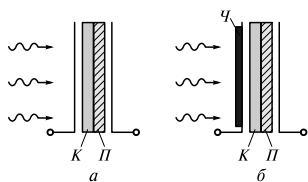


Рис. 25.11

При быстром нагревании можно нарушить ориентацию диполей в кристалле и тем самым изменить поверхностный заряд. За время, меньшее времени релаксации, этот заряд можно обнаружить и измерить его значение. Эффект, связанный с появлением поверхностного заряда при быстром нагревании кристалла, называется *пироэлектрическим эффектом*.

Для пироприемников выбирают материалы с наибольшим пироэлектрическим эффектом, хорошей поглощательной способностью, большим электрическим сопротивлением и малой теплопроводностью. Широкое применение получили танталат лития ( $\text{LiTaO}_3$ ) и триглицинсульфат  $(\text{NH}_2\text{CH}_2\text{OON})_3 \cdot \text{H}_2\text{SO}_4$ .

Устройство пироприемника показано на рис. 25.11.

Кристаллическая пластинка  $K$  пироэлектрика наклеивается на подложку  $P$  и помещается между двумя плоскими электродами, которые с помощью контактов подключают к электрической цепи. Площадь поверхности пластинки в разных приемниках лежит в пределах от долей до сотни квадратных миллиметров. Падающий на пластинку свет либо поглощается самим кристаллом (рис. 25.11,  $a$ ), либо поглощение происходит в черном слое  $Q$ , нанесенном на один из электродов (рис. 25.11,  $b$ ). При нагревании пластинки светом на электродах возникает пироЭДС, которая регистрируется измерительными приборами. Ее величина пропорциональна приращению температуры  $\Delta T$ .

Пироэлектрики применяют как для измерения параметров импульсов, длительность которых  $\tau_0 < \tau_T$  ( $\tau_T$  — время установления температуры в пироэлектрической пластинке), так и квазинепрерывного излучения.

Если  $\tau_0 < \tau_T$ , то по аналогии с уравнением (2.21) приращение температуры  $\Delta T \sim W$  ( $W$  — энергия импульса). Для таких измерений используется подложка с плохой теплопроводностью и время релаксации  $\tau_T \approx 0,01 - 1$  с.

При  $\tau_0 \gg \tau_T$  приращение  $\Delta T \sim P$  ( $P$  — мощность излучения). Для уменьшения времени релаксации до  $10^{-8}$  с светочувствительный пироэлектрик изготавливают в виде тонкой пленки, наклеиваемой непосредственно на металлический электрод, обладающий высокой теплопроводностью.

Широкое распространение получили многоэлементные пироприемники, производимые в виде линеек и матриц. Они выполнены из одной пластины пироэлектрика, на которой выделены отдельные приемные элементы размером  $30 \times 30$  мкм<sup>2</sup>. Считывание сигнала (поверхностного заряда) производится сканирующим электронным лучом или средствами микроэлектроники. Линей-



ки и матрицы используются в разнообразных многоканальных приемниках, в том числе в системах приема и обработки изображений.

**Пирометры и тепловизоры.** В лекции 6 отмечалось, что температуру удаленного тела можно измерить *радиационным пирометром*. Внешний вид пирометра «Салют» С-210 показан на рис. 25.3 цв. вкл. Он похож на портативную видеокамеру. Объектив пирометра направляет световой поток на кристалл пироэлектрика. После обработки сигнала на табло высвечивается цифра, соответствующая температуре объекта, на который направлен пирометр. Диапазон измеряемых температур:  $-20 - 600^{\circ}\text{C}$ .

В современных пирометрах применяют пироэлектрики InSb, HgCdTe и др. Диапазон принимаемых длин волн  $\sim 3 - 15$  мкм, а диапазон температур соответственно  $-20 - 1500^{\circ}\text{C}$ . Точность измерения температуры достигает  $\sim 0,1^{\circ}\text{C}$ . В ряде приборов для достижения высокой точности теплоприемник охлаждают с помощью элементов Пельтье.

Широкое распространение получили *тепловизоры*, которые могут «видеть» тепло. Здесь с помощью объектива формируется инфракрасное изображение предмета. Это изображение считывается матрицей, являющейся многоэлементным пироприемником. На жидкокристаллическом экране прибора формируется *термограмма*, которая в некоторой палитре цветов показывает распределение температуры в разных областях исследуемого объекта. Для удобства анализа исследуемого теплового поля на экране имеется цветовая шкала с обозначенными на ней значениями температур.

На рис. 25.4 цв. вкл. представлено фото тепловизора ThermoCAM P 640 компании FLIR Systems.

Термограмма, показывающая различный нагрев вращающихся деталей двигателя, представлена на рис. 25.5 цв. вкл. Справа расположена цветовая шкала температур.

Тепловизоры позволяют исследовать пространственное распределение температур объекта с точностью  $\sim 0,1^{\circ}\text{C}$  на расстояниях начиная с 50 см. Они получили широкое распространение в медицине, жилищном строительстве (нахождение дефектов), в энергетике (мониторинг электрокоммуникаций), промышленности (контроль тепловых режимов механизмов) и др.

## ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Аберрации 219  
 — кома 219  
 — сферические 219  
 — хроматические 219  
 Абсолютно черное тело 60  
 Активность оптическая 247  
 Акустооптический затвор 290  
 — модулятор 291  
 — фонон 290  
 Амплитуда 11, 12  
 Амплитудная модуляция 13  
 Анизотропия 229, 254  
 Анизотропная среда 229  
 Ансамбль атомов 34  
 Апертура числовая 166
- Баланс амплитуд 72  
 Бинормаль 233  
 Бипризма 100  
 Болومتر 309  
 Броуновская частица 262  
 Брюстера угол 206
- Вектор волновой** 31  
 — Пойнтинга 17  
 — рассеяния 260  
**Волна квазимонохроматическая** 11  
 — линейной поляризации 274  
 — монохроматическая 11  
 — нелинейной поляризации 275  
 — необыкновенная 229  
 — обыкновенная 229  
 — плоская 9, 135  
 — сферическая 133  
 — частично когерентная 96  
**Волновой вектор** 263  
 — синхронизм 275  
 — фронт 12  
**Волоконный световод** 198, 209  
**Восприимчивость линейная** 271  
 — квадратичная 271  
 — кубичная 271  
**Временные представления** 39  
**Временное разрешение** 305  
**Время жизни** 33  
 — когерентности 94  
 — корреляции 37
- Гауссов импульс** 13  
 — контур 47  
 — пучок 13  
**Гироскоп лазерный** 109  
**Голограмма Денисюка** 173  
 — Френеля 172  
 — Фурье 172  
**Голография** 170  
**Граничные условия** 131, 203
- Давление световое** 21  
**Дальняя зона** 91  
**Двойное лучепреломление** 227  
**Двуосный кристалл** 229  
**Дебаеграмма** 156  
**Дельта-функция** 153  
**Диаграмма направленности** 32  
**Диполь** 30  
**Диск Эйри** 164  
**Диспергирующий элемент** 159  
**Дисперсионная длина** 194  
 — кривая 266  
**Дисперсионное расплывание** 194  
 — соотношение 178  
**Дисперсия временнѳ** 8, 177  
 — групповой скорости 191  
 — линейная 149  
 — пространственная 8, 177  
 — угловая 149  
 — фазовой скорости 191  
**Дифракционная длина** 127  
 — расходимость 127  
 — решетка 145  
 — —, амплитудная 146  
 — —, фазовая 146  
**Дифракция** 120  
 — Брэгга 154  
 — нестационарная 156  
 — Рамана — Ната 154  
**Дихроизм** 227, 239  
**Диэлектрическая восприимчивость** 179  
 — проникаемость 176, 178  
**Длина волны** 11  
 — —, плазменная 201  
**Добротности модуляция** 82  
**Добротность** 74
- Естественная ширина линии излучения атома** 75
- Закон Бугера — Ламберта** — Бера 70, 179  
 — Кирхгофа 58  
 — отражения 204  
 — преломления 204  
 — смещения Вина 61  
 — Стефана — Больцмана 60  
**Заселенность энергетических уровней** 68  
 — инверсная 72  
**Зеркало многослойное** 213  
 — сферическое 224  
**Зеркальное покрытие** 212  
**Зона ближняя** 127  
 — дальняя 127  
 — запрещенная 266  
 — проекторная 127  
 — Френеля 122  
**Зонная пластинка** 125
- Изображение Аббе** 167  
 — вторичное 167  
 — первичное 167  
**Излучательная способность** 59  
**Излучение вынужденное** 54  
 — спонтанное 52  
 — тепловое 58  
**Импульс волны пикосекундный** 291  
 — спектрально ограниченный 48  
 — фазово-модулированный 48  
 — фемтосекундный 291  
**Инверсия заселенности** 70  
**Индикатриса** 233  
**Интеграл дифракционный** 122  
**Интенсивность критическая** 278  
 — насыщения 73  
**Интерференционная полоса** 91, 92  
**Интерференционный порядок** 91  
**Интерференция** 89  
 — многолучевая 114  
**Интерферометр Майкельсона** 107  
 — Маха — Цендера 108  
 — Рэлея 100  
 — Фабри — Перо 114  
**Ионосфера** 202

Источник вторичный 121

Каустика 219

Квадратурная компонента 34

Квантовый выход 303

Кирхгофа теорема 130

Когерентность времени 113

— пространственная 102  
пространственно-временная 111

Коллиматор 159

Коллимированный пучок 120

Кольца Ньютона 107

— Эйри 139

Комбинационное рассеяние 269

Комбинационный принцип 50

Компенсатор Бабиня 242

Компрессор оптический 280

Коэффициент вторичной эмиссии 304

— мутности 257

— отражения 115, 207

— поглощения 70, 179

— пропускания 115, 207

— усиления 69

— Эйнштейна 52

— экстинкции 265

Красная граница 302

Критерий Лоусона 28

— Рэлея 148, 149

Кубичная нелинейность 271, 276

Лазер аргонный 79

— волоконный 85

—, вторая гармоника 274

— гелий-неоновый 77

—, естественная ширина 42, 74

— на красителе 87

— неодимовый 83

— полупроводниковый 84

— рубиновый 82

—  $\text{CO}_2$  80

— титан-сапфировый 288, 292

— YAG  $\text{Nd}^{3+}$  83

Лазерный термоядерный синтез 27, 28

Лауэграмма 155

Левитация 25

Линза 125, 218, 223

Линии равного наклона 104

— равной толщины 105

— Фраунгоферовы 186

Лоренцева функция 42

Лоренцевой контур 42

Луч света 203

Люминесценция 56

Люминофоры 57

Микроскоп 166

Многомодовый пучок 77

— режим 77

Многочастотный режим 71

Мода поперечная 76

— продольная 76

— резонатора 76

Молекулярная рефракция 182

Момент импульса 22

— дипольный 31

Монохроматор 163

Мощность критическая 278

— лазера 76

— светового пучка 18

Накачка 70

Наноструктуры 268

Насыщение усиления 72

Нелинейная оптика 274

Область дисперсии аномальной 184

— нормальной 184

— свободной 150

Объектив камерный 149

Одноосный кристалл 229

Оптическая ось 229

— плотность 186

— сила 217

— система 220

Оптический диапазон 6

— фонон 270

Опыт Лебедева 24

— Юнга 95

Осциллятор квантовый 53

— классический 32

Охлаждение лазерное 26

Параметрический генератор света 276

Парсевала равенство 41

Перетяжка 143

Период 11

— решетки 145

Пирометр 311

Плоскость главная 221, 229

— падения 203

— сопряженная 219

— фокальная 220

Плотность фотонных состояний 268

Поверхность лучевая 234

— нормаль 230

Поглощательная способность 59

Поглощение вынужденное 54

Показатель преломления 178

— — главный 179

— — луча 235

Поле внутриатомное 176

— сверхсильное световое 295

Полоса усиления 70

— Юнга 91

Полное внутреннее отражение 208

Положительный кристалл 230

Полуволновая пластинка 241

Поляризатор 238

Поляризация 14

Поляриод пленочный 239

Постулат Бора 33

Правила отбора 55

Правило Прево 58

— Стокса 56

Приближение квазиоптическое 142

— Фраунгофера 133

— Френеля 133

Призма

— Глана 239

— Николь 238

Принцип Бабиня 132

— Бора 33

— Гюйгенса 120, 232, 237

— Гюйгенса—Френеля 121

— неопределенности 33

Просветляющее покрытие 211

Пятно Пуассона 120

Работа выхода 301

Радиационное затухание 32

Радиус пространственной когерентности 103, 144

— пучка 13

Радуга 175

Разность хода 93

Разрешающая способность 98, 148, 173

Распределение нормальное 35

— Рэлея 36

— фазы 36

Рассеяние света 253

— комбинационное 269

Мандельштама—Бриллюэна 260, 286

— Ми 264

— молекулярное 253

Резкость 115

Резонатор оптический 70

Ридберга постоянная 50

Самоефокусировка 279

Самоефокусировка мелкомасштабная 279

Свертка функций 48

Световой импульс 13, 279

— пучок 12

— суг 43

Серия Бальмера 50

— Брэггетта 50

— Лаймана 50

— Пашена 50

- Сила осциллятора 185
  - радиометрическая 25
  - разрешающая 116
- Синхронизация мод 290
- Скорость главная 229
  - групповая 193
  - лучевая 231
  - по нормали 230
  - фазовая 191
- Солитон 281
- Спектр линейчатый 54
  - линейчато-полосатый 54
  - угловой 137
- Спектральная амплитуда 38
  - компонента 39
  - плотность 38, 70
  - — интенсивности 41
- Спектральное представление 39
  - пропускание 190
- Спектральный интервал 38
- Спектрограф 163
- Спектрометр 163
- Спектроскоп 163
- Спектроскопия корреляцион-  
ная 263
  - Фурье 96
- Спираль Корню 128
- Среда активная мелкодиспер-  
сная 253, 264
  - мутная 252, 262
  - фокусирующая 278
- Степень деполаризации 258
  - когерентности 112
  - корреляции 96
- Стретчер 297
- Телеобъектив 226
- Телескоп 164
- Телескопическая система 225
- Темновой ток 304
- Температура радиационная 65
  - цветовая 65
- Тензор диэлектрической про-  
ницаемости 176
- Тепловая дефокусировка 293
  - самофокусировка 283
- Тепловизор 312
- Тепловое самовоздействие 283
- Терм атома 50
- Термоэлемент 310
- Трансфокатор 226
- Узловая точка 222
- Уравнение волновое 8
  - волны 9
  - Гельмгольца 130
  - лучевых скоростей 234
  - непрерывности 7
  - нормалей 232
  - параболическое 142
  - Эйнштейна 302
- Уравнения Максвелла 77
  - материальные 228
- Условие Брэгга 86, 155, 260
  - Максвелла 219
- Уширение доплеровское 47
  - неоднородное 47
  - столкновительное 43
- Фазовая модуляция 42, 290
- Фильтр интерференционный 214
  - просветляющий 289
- Филтрация пространственная 168
- Формула Зелмейера 189
  - Лоренц—Лоренца 181
  - Планка 20, 63
  - Рэлея 256
  - Рэлея—Джинса 62
  - Френеля—Кирхгофа 131, 157
  - Шавлова—Таунса 75
  - Шоттки 305
  - Эйнштейна 257
  - Эйри 115
- Фотодиод 307
- Фотон 20
- Фотона импульс 22
  - спин 23
  - энергия 21
- Фотонный кристалл 266, 267
- Фоторезистор 307
- Фотоумножитель 304
- Фотоэлемент 302
- Фотоэффект внешний 300
  - внутренний 302
- Функция аппаратная 97, 147
  - автокорреляции 96
  - взаимной когерентности 111
  - взаимодействия 147
  - видности 95
  - Грина 130
  - корреляционная 144, 261
  - кросс-корреляционная 294
- Фурье-амплитуда 96
- Фурье-спектрометр 97
- Фурье-спектроскопия 96
- Частично когерентный пучок 144
- Частота волны 11
  - межмодовая 71
  - плазменная 183
  - пространственная 137
- Четвертьволновая пластинка 241
- Четвертьволновой слой 212
- Число волновое 11
  - вращательное 55
  - квазиволновое 263
  - квантовое главное 51
  - — вращательное 55
  - — колебательное 55
- Чувствительность пороговая 304
  - спектральная 303
- Ширина доплеровской линии 47
  - естественная 74
  - моды 74
  - нормальная шели 160
- Электрическая проводимость 176
- Электронно-оптическая каме-  
ра 306
- Электрооптический модулятор  
света 83
- Эллипсоид нормалей 233
  - Френеля 236
- Энергетический уровень 50
- Энергии плотность 17
- Энергия вибрационная 55
  - импульса 19
  - моды 63
  - ротационная 55
  - электронная 55
- Эталон Фабри—Перо 117
- Эффект квантовый размерный 268
  - Керра 245
  - нелинейный 274
  - пьезоэлектрический 311
  - Поக்கельса 246
  - Фарадея 249
- Эшелетт 151
- Эшель 151

## ОГЛАВЛЕНИЕ

|                   |   |
|-------------------|---|
| Предисловие ..... | 3 |
|-------------------|---|

### РАЗДЕЛ 1. ЭЛЕКТРОМАГНИТНАЯ ТЕОРИЯ СВЕТА

|                |   |
|----------------|---|
| ЛЕКЦИЯ 1 ..... | 6 |
|----------------|---|

Свет — электромагнитные волны (6). Оптический диапазон длин волн (6). Уравнения Максвелла (7). Материальные уравнения среды (7). Волновое уравнение (8). Сферические волны (9). Плоские волны (9). Свойства плоских волн (10). Монохроматические волны (11). Комплексная запись уравнения волны (12). Световые пучки (12). Световые импульсы (13). Графическая интерпретация плоской волны (14). Поляризация волны (15). Пространственно-временные характеристики световых волн (15).

|                |    |
|----------------|----|
| ЛЕКЦИЯ 2 ..... | 17 |
|----------------|----|

Поток энергии волны (17). Интенсивность волны (18). Мощность светового пучка (18). Энергия светового импульса (19). Поток энергии в квантовом представлении (20). Световое давление (20). Импульс фотона (22). Момент импульса волны (22). Давление равновесного теплового излучения (23). Оптическая левитация (24). Лазерное охлаждение (26). Лазерный термоядерный синтез (27).

### РАЗДЕЛ 2. ИЗЛУЧЕНИЕ СВЕТА

|                |    |
|----------------|----|
| ЛЕКЦИЯ 3 ..... | 30 |
|----------------|----|

Излучение электрического диполя (30). Излучение классического осциллятора (атома). (32). Излучение ансамбля атомов (34). Время корреляции (37).

|                |    |
|----------------|----|
| ЛЕКЦИЯ 4 ..... | 38 |
|----------------|----|

Интеграл Фурье (38). Спектральная плотность интенсивности (40). Спектральная плотность, ее контур и ширина (42). Ударное уширение спектральной линии (42). Доплеровское уширение спектральной линии (46). Полное уширение спектральной линии. (48). Фазовая модуляция и уширение спектра (48).

|                |    |
|----------------|----|
| ЛЕКЦИЯ 5 ..... | 50 |
|----------------|----|

Квантовая природа излучения (50). Квантовые состояния атомов (50). Спонтанное излучение (51). Вынужденное поглощение (54). Вынужденное излучение (54). Излучение молекул (54). Люминесценция (56).

|                |    |
|----------------|----|
| ЛЕКЦИЯ 6 ..... | 58 |
|----------------|----|

Тепловое излучение (58). Правило Прево (58). Закон Кирхгофа (58). Закон Стефана — Больцмана (60). Закон смещения Вина (61). Формула Планка (62). Применение законов теплового излучения (64). Ширина видимого диапазона (66). Ночное видение (67).

**ЛЕКЦИЯ 7** ..... 68

Поглощение и усиление света (68). Генерация света (70). Насыщение усиления (72). Монохроматичность лазерного излучения (74). Мощность излучения (75). Пространственная структура лазерного излучения (76). Генерация световых импульсов (78). Газовые лазеры (78). Твердотельные лазеры (81). Полупроводниковые лазеры (84). Волоконные лазеры (85). Жидкостные лазеры на красителях (87).

**РАЗДЕЛ 3. ИНТЕРФЕРЕНЦИЯ СВЕТА**

**ЛЕКЦИЯ 8** ..... 89

Интерференция квазимонохроматических волн (90). Интерференционные полосы Юнга (91). Размывание интерференционной картины (92). Фурье-спектроскопия (96).

**ЛЕКЦИЯ 9** ..... 100

Схемы с делением волнового фронта (100). Интерференция плоских волн (100). Интерферометр Рэлея (100). Звездный интерферометр Майкельсона (101). Пространственная когерентность (102). Схемы с делением амплитуды (103). Интерферометр Майкельсона (107). Интерферометр Маха — Цендера (108). Лазерный гироскоп (109).

**ЛЕКЦИЯ 10** ..... 111

Пространственно-временная функция когерентности поля (111). Многолучевая интерференция (114). Интерферометр Фабри — Перо (114). Формула Эйри (115). Интерференция светового импульса (117).

**РАЗДЕЛ 4. ДИФРАКЦИЯ**

**ЛЕКЦИЯ 11** ..... 119

Принцип Гюйгенса — Френеля (121). Зоны Френеля (122). Дифракция на круглом отверстии (124). Зонная пластинка (125). Линза (125). Дифракция светового пучка с прямоугольным профилем интенсивности (126). Дифракция на непрозрачном диске (127). Дифракция на крае экрана (128).

**ЛЕКЦИЯ 12** ..... 130

Интегральная теорема Кирхгофа (130). Дифракционная формула Френеля — Кирхгофа (131). Приближения Френеля и Фраунгофера (132). Дифракция на круглом отверстии (133). Дифракция на круглом диске (136). Дифракционная картина Фраунгофера как фурье-образ светового поля на дифракционном экране (136). Дифракция Фраунгофера на прямоугольном отверстии (137). Дифракция Фраунгофера на круглом отверстии (139). Поле в фокальной плоскости линзы (140). Дифракция гауссова пучка (141). Дифракция частично когерентного пучка (144).

**ЛЕКЦИЯ 13** ..... 145

Дифракция Фраунгофера на периодических структурах (145). Дифракционные решетки (145). Спектральные характеристики решеток (147). Амплитудные дифракционные решетки (150). Фазовые решетки (151). Дифракция на ультразвуковой волне (152). Дифракция рентгеновских волн (155). Нестационарная дифракция (156). Дифракция импульса на круглом отверстии (157).

**ЛЕКЦИЯ 14** ..... 159

Спектральные приборы с пространственным разложением спектра (159). Разрешающая способность призмы (162). Типы спектральных приборов (163). Оптичес-

кие приборы, формирующие изображение (164). Теория Аббе (167). Метод фазового контраста (168). Метод темного поля (169).

## РАЗДЕЛ 5. ДИСПЕРСИЯ

### ЛЕКЦИЯ 15 ..... 175

Материальные уравнения среды (176). Частотная и пространственная дисперсия среды (177). Распространение монохроматической волны в изотропной среде с частотной дисперсией (177). Поляризуемость и диэлектрическая проницаемость среды (179). Молекулярная рефракция (181). Основы электронной теории дисперсии (182). Дисперсия газов (183). Спектры поглощения газов (186). Среда с отрицательным показателем преломления (187).

### ЛЕКЦИЯ 16 ..... 189

Практические формулы дисперсии (189). Абсорбционные светофильтры (190). Распространение света в изотропных диэлектриках (191). Фазовая и групповая скорости (191). Дисперсионное расщепление импульсов (194). Пространственно-временная аналогия (195). Оценки характерных величин (197). Волоконно-оптические системы связи (198). Распространение волн в металлах и плазме (199).

## РАЗДЕЛ 6. ОПТИЧЕСКИЕ ЯВЛЕНИЯ НА ГРАНИЦЕ РАЗДЕЛА СРЕД. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ОПТИКА

### ЛЕКЦИЯ 17 ..... 203

Граничные условия (203). Законы геометрической оптики (204). Формулы Френеля (205). Фазовые соотношения (206). Амплитудные соотношения (207). Угол Брюстера и его физический смысл (208). Полное внутреннее отражение (208). Отражение естественного света (209). Волоконные световоды (209). Просветляющие покрытия (211). Зеркальные покрытия (212). Интерференционные светофильтры (214).

### ЛЕКЦИЯ 18 ..... 215

Распространение света через сферическую границу раздела сред (215). Оптическая сила системы поверхностей (217). Тонкая линза (218). Условия Максвелла для коаксиальных систем (219). Кардинальные элементы оптической системы (220).

## РАЗДЕЛ 7. ВОЛНЫ В АНИЗОТРОПНЫХ СРЕДАХ

### ЛЕКЦИЯ 19 ..... 227

Материальные уравнения (228). Главные показатели преломления и главные скорости волны (228). Скорость по нормали и поверхность нормалей (230). Распространение плоской монохроматической волны (230). Лучевая скорость и лучевая поверхность (231). Уравнение нормалей Френеля. Поверхность нормалей (232). Эллипсоид нормалей (233). Уравнение лучевых скоростей. Лучевая поверхность (234). Эллипсоид Френеля (236). Двойное лучепреломление. Принцип Гюйгенса (236).

### ЛЕКЦИЯ 20 ..... 238

Поляризаторы (238). Управление состоянием поляризации света. Анализ состояния поляризации (239). Искусственная анизотропия при внешних воздействиях (243). Оптическая активность (247). Оптическая активность и пространственная дисперсия (248). Эффект Фарадея (249).

## РАЗДЕЛ 8. РАССЕЯНИЕ СВЕТА

|  |     |
|--|-----|
| <b>ЛЕКЦИЯ 21</b> .....   | 252 |
| Молекулярное рассеяние (253). Флуктуации диэлектрической проницаемости (253). Рассеяние на флуктуациях плотности (254). Рассеяние в газах. Формула Рэлея (255). Рассеяние в жидкостях. Формула Эйнштейна (257). Рассеяние на флуктуациях анизотропии (258). Спектральный состав рассеянного света (259). |     |
| <b>ЛЕКЦИЯ 22</b> .....   | 262 |
| Рассеяние в мутных средах (262). Рассеяние в мелкодисперсных средах (264). Рассеяние света в твердых телах (265). Фотонные кристаллы (266). Комбинационное рассеяние света (269).  |     |

## РАЗДЕЛ 9. НЕЛИНЕЙНО-ОПТИЧЕСКИЕ ЯВЛЕНИЯ

|   |     |
|---|-----|
| <b>ЛЕКЦИЯ 23</b> .....  | 271 |
| Основы нелинейной теории дисперсии (272). Нелинейные эффекты в среде с квадратичной нелинейностью (274). Нелинейные эффекты в средах с кубической нелинейностью (276). Самофокусировка и самодефокусировка светового пучка (277). Самомодуляция и сжатие импульса (279). Оптические солитоны (281).   |     |
| <b>ЛЕКЦИЯ 24</b> .....  | 283 |
| Тепловое самовоздействие излучения (283). Вынужденное рассеяние Мандельштама — Бриллюэна (286). Вынужденное комбинационное рассеяние света (286). Генерация суперконтинуума (288). Генерация импульсов пикосекундной длительности (288). Генерация фемтосекундных импульсов (291). Измерение длительности сверхкоротких импульсов (293). Сверхсильные световые поля (294). Современные достижения и предельные возможности генерации сверхсильных световых полей (296). |     |

## РАЗДЕЛ 10. ПРИЕМНИКИ СВЕТА

|  |     |
|--|-----|
| <b>ЛЕКЦИЯ 25</b> .....   | 299 |
| Глаз человека (299). Внешний фотоэффект (300). Внутренний фотоэффект (302). Фотоэлектрические приемники (302). Тепловые приемники (308). |     |
| Предметный указатель .....   | 313 |