



## УНИВЕРСИТЕТСКИЙ КУРС ОБЩЕЙ ФИЗИКИ

**В. А. Алешкевич**

# ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМ

*Допущено УМО по классическому университетскому образованию РФ  
в качестве учебника для студентов высших учебных заведений,  
обучающихся по направлению подготовки  
ВПО 011200 – Физика*



**МОСКВА  
ФИЗМАТЛИТ®  
2014**

УДК 530.1(075.8)

ББК 22.2

А 45

Алешкевич В. А. **Электромагнетизм.** — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2014. — 404 с. — ISBN 978-5-9221-1555-1.

Учебник является третьим учебником серии «Университетский курс общей физики» и предназначен студентам физических специальностей вузов. Главная особенность учебника — многоуровневая концепция изложения важнейших экспериментальных фактов и основ теории физических явлений с учетом современных научных достижений. Книга включает следующие основные разделы: заряды и электрическое поле, металлы и диэлектрики в электростатическом поле, постоянный электрический ток, магнитное взаимодействие токов и зарядов, магнетизм, электромагнитное поле и уравнения Максвелла, электромагнитные колебания и волны, зонная теория электропроводности, полупроводники, контактные явления, полупроводниковые устройства, низкоразмерные структуры. В заключении приведены санитарные нормы электромагнитной безопасности Минздрава Российской Федерации.

Для студентов высших учебных заведений, обучающихся по специальности «Физика».

Допущено УМО по классическому университетскому образованию РФ в качестве учебника для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлению подготовки ВПО 011200 — Физика.

Рецензенты:

кафедра общей и теоретической физики и МПФ  
Рязанского государственного университета им. С.А. Есенина  
(зав. кафедрой заслуженный деятель науки и техники РФ проф. В.А. Степанов);  
доктор физ.-мат. наук, проф. А.Н. Мансуров  
(Московский педагогический государственный университет)

---

Учебное издание

*АЛЕШКЕВИЧ Виктор Александрович*

## **ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМ**

Редактор *Е.С. Артоболевская*

Корректор *В.Р. Игнатова*

Оригинал-макет: *В.В. Затекин*

Оформление переплета: *А.В. Андросов*

Подписано в печать 01.04.2014. Формат 70×100/16. Бумага офсетная. Печать офсетная.

Усл. печ. л. 32,82. Уч.-изд. л. 35. Тираж 700 экз. Заказ №

Издательская фирма «Физико-математическая литература»

МАИК «Наука/Интерпериодика»

117997, Москва, ул. Профсоюзная, 90

E-mail: [fizmat@maik.ru](mailto:fizmat@maik.ru), [fmlsale@maik.ru](mailto:fmlsale@maik.ru);

<http://www.fml.ru>

Отпечатано с электронных носителей издательства

в ООО «Чебоксарская типография № 1»

428019, г. Чебоксары, пр. И. Яковлева, 15

Тел.: (8352) 28-77-98, 57-01-87

Сайт: [www.volga-print.ru](http://www.volga-print.ru)

ISBN 978-5-9221-1555-1



9 785922 115551

---

ISBN 978-5-9221-1555-1

© ФИЗМАТЛИТ, 2014

© В. А. Алешкевич, 2014



## ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие . . . . .	8
-----------------------	---

### Р А З Д Е Л 1. ЗАРЯДЫ И ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ

<b>ЛЕКЦИЯ 1</b> . . . . .	11
Электрический заряд (11). Элементарный электрический заряд (12). Опыт Милликена (13). Структура протона и нейтрона (13). Сохранение заряда (16). Электризация тел (16). Фундаментальные взаимодействия в природе (18). Стандартная модель (19).	
<b>ЛЕКЦИЯ 2</b> . . . . .	20
Закон Кулона (20). Принцип суперпозиции (21). Электроскоп (25). Электромагнитное поле (25). Напряженность электрического поля (26). Поле системы зарядов (26). Теорема Гаусса–Остроградского (29). Экспериментальные основания закона Кулона (34). Дифференциальная форма теоремы Гаусса (35). Электрическое поле Земли (35). Электростатический фильтр (36). Атомный силовой микроскоп (37).	
<b>ЛЕКЦИЯ 3</b> . . . . .	40
Электрическое напряжение (40). Разность потенциалов (40). Потенциал (42). Локальная связь между напряженностью поля и потенциалом (45). Уравнение Пуассона (45). Однородное поле внутри заряженного шара (47). Электрометр (48). Электростатический генератор Вимшурста (электрофорная машина) (50). Генератор Ван-де-Граафа (52). Статическое электричество (54). Энергия системы зарядов (55).	

### Р А З Д Е Л 2. МЕТАЛЛЫ И ДИЭЛЕКТРИКИ В ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОМ ПОЛЕ

<b>ЛЕКЦИЯ 4</b> . . . . .	57
Поле в веществе (57). Электростатическая индукция в металлах (57). Практическое применение электростатической индукции (63). Дипольный момент проводящего шара во внешнем поле (64). Время установления электростатического равновесия (65). Диэлектрик в электростатическом поле (66). Вектор поляризации (67). Диэлектрическая проницаемость (67). Вектор поляризации и связанные заряды (68). Однородно поляризованный шар (69). Фактор формы (69). Вектор индукции (70).	

<b>ЛЕКЦИЯ 5</b> .....	72
Граничные условия для векторов $\mathbf{E}$ и $\mathbf{D}$ (72). Преломление линий напряженности и индукции (73). Поле в однородном диэлектрике (75). Силы, действующие на диполь (76). Энергия диполя во внешнем поле (79). Энергия поля (79). Поверхностные силы (81). Общая задача электростатики (84). Метод зеркальных отображений (86).	
<b>ЛЕКЦИЯ 6</b> .....	89
Электронная теория поляризации диэлектриков (89). неполярные диэлектрики (89). Полярные диэлектрики (91). Кристаллы (94). Пирозлектрики (95). Сегнетоэлектрики (96). Пьезоэлектрический эффект (101). Электреты (104).	
<b>ЛЕКЦИЯ 7</b> .....	106
Электрострикция (106). Электрический пробой диэлектриков (106). Конденсатор (108). Лейденская банка (111). Классификация и параметры конденсаторов (113). Соединение конденсаторов в батареи (116). Потенциальные и емкостные коэффициенты (118). Ионистор (119). Литий-ионные конденсаторы (121).	

### Р А З Д Е Л 3. ПОСТОЯННЫЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК

<b>ЛЕКЦИЯ 8</b> .....	122
Плотность и сила тока (122). Источники тока (123). Химические источники тока (123). Гальванический элемент Даниэля (124). Электродвижущая сила (ЭДС) (126). Электрический ток в металлических проводниках (128). Закон Ома (128). Закон Ома в дифференциальной форме (131). Сторонние силы (132). Закон Джоуля–Ленца (133). Резисторы (134). RC-цепи (138).	
<b>ЛЕКЦИЯ 9</b> .....	141
Баланс энергии в электрической цепи (141). Разветвленные цепи (142). Первый закон Кирхгофа (143). Второй закон Кирхгофа (143). Метод контурных токов (144). Электрический ток в сплошной среде. Уравнение непрерывности (145). Преломление линий тока (146). Электрический ток в жидкостях (149). Электролиз (150). Первый закон Фарадея (150). Второй закон Фарадея (151). Применение электролиза (151). Электрический ток в газах (152). Газовый разряд (153). Плазма (158). Плазмотрон (159).	

### Р А З Д Е Л 4. МАГНИТНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ТОКОВ И ЗАРЯДОВ

<b>ЛЕКЦИЯ 10</b> .....	160
Основные этапы развития учения о магнетизме (160). Законы Ампера и Био–Савара–Лапласа (163). Магнитное напряжение (168). Теорема о циркуляции (169). Магнитное поле объемных токов (171). Вектор-потенциал магнитного поля (172). Опыты Роуланда, Рентгена и Эйхенвальда (174).	

**ЛЕКЦИЯ 11** ..... 176

Магнитное поле Земли (геомагнитное поле) (176). Природа геомагнитного поля (177). Сила Ампера (180). Магнитный диполь в магнитном поле (181). Гальванометр (182). Потенциальная функция тока во внешнем магнитном поле (185). Коэффициент взаимной индукции (186). Диполь-дипольное взаимодействие (187). Взаимодействие контуров и третий закон Ньютона (189). Рельсотрон (190).

**ЛЕКЦИЯ 12** ..... 192

Сила Лоренца (192). Электронно-лучевая трубка (ЭЛТ) (193). Циклотрон (194). Масс-спектрометр (195). Магнитные ловушки (196). Радиационные пояса Земли (197). Токамак (197). Пинч-эффект (199). Магнитогидродинамический (МГД) генератор (200). Плазмменный двигатель (202). Большой адронный коллайдер (БАК) (204).

**РАЗДЕЛ 5. МАГНЕТИКИ (НАМАГНИЧИВАЮЩИЕСЯ СРЕДЫ)****ЛЕКЦИЯ 13** ..... 206

Магнитное поле в веществе (206). Вектор намагниченности (207). Магнитная восприимчивость и магнитная проницаемость (208). Граничные условия для векторов  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{H}$  (209). Преломление линий индукции магнитного поля (210). Влияние формы магнетика на его намагничивание (210). Силы, действующие на магнетик в магнитном поле (213). Силы на границе раздела магнетиков (216). Магнитный потенциал (217). Физический смысл индукции и напряженности магнитного поля (219). Формализм магнитных зарядов (220).

**ЛЕКЦИЯ 14** ..... 222

Прецессия Лармора (222). Диамагнетизм (223). Парамагнетизм (224). Механомагнитный эффект (225). Магнитомеханический эффект (226). Опыт Штерна и Герлаха (227). Квантовомеханическое описание движения электрона в атоме (228). Электронный парамагнитный резонанс (ЭПР) (229). Ядерный магнитный резонанс (ЯМР) (231). Магниторезонансная томография (МРТ) (231).

**ЛЕКЦИЯ 15** ..... 234

Ферромагнетизм (234). Размагничивание тел (237). Поле постоянно-го магнита (238). Магнитная цепь (240). Магнитная левитация (241). Поезд на магнитной подушке (241). Магнитные носители информации (243). Антиферромагнетики, ферримагнетики, ферриты (244).

**РАЗДЕЛ 6. ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ. УРАВНЕНИЯ  
МАКСВЕЛЛА****ЛЕКЦИЯ 16** ..... 246

Электромагнитная индукция (247). Скалярный и векторный потенциалы электромагнитного поля (252). Измерение магнитного напряжения и индукции (253). Самоиндукция (254). Собственная потенциальная функция тока (256). Релятивистское преобразование сил (259). Преобразование полей (261).

<b>ЛЕКЦИЯ 17</b> .....	264
Энергия тока (264). Энергия магнитного поля (264). Взаимная индукция (265). Закон сохранения энергии для электрических цепей с магнитной связью (266). Вихревые токи (268). Металлодетекторы и металлоискатели (270). Токи смещения (271). Уравнения Максвелла (272). Материальные уравнения среды (273). Закон сохранения энергии электромагнитного поля (274). Скин-эффект (275).	

## Р А З Д Е Л 7. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

<b>ЛЕКЦИЯ 18</b> .....	279
Свободные колебания в электрическом колебательном контуре (279). Вынужденные колебания в контуре. Резонанс напряжений (281). Переменный ток. Закон Ома (283). Метод векторных диаграмм (284). Метод комплексных амплитуд (285). Резонанс токов (286). Работа и мощность переменного тока (287). Связанные колебательные контуры (289). Цепочка связанных контуров (290). Четырехполюсники (291).	
<b>ЛЕКЦИЯ 19</b> .....	293
Частотные фильтры (293). Трансформатор (295). Виды трансформаторов (298). Генераторы электрического тока (301). Синхронный генератор переменного тока (303). Трехфазный ток (304). Электродвигатели (306). Асинхронный двигатель (306). Генерация электроэнергии (308).	
<b>ЛЕКЦИЯ 20</b> .....	310
Колебания тока в двухпроводной линии (310). Телеграфные уравнения (310). Электромагнитная волна (313). Резонансы Шумана (313). Распространение возбуждений между нейронами (314). Условие квазистационарности (315). Излучение электромагнитных волн (316). Волновое уравнение (318). Принципы организации сотовой связи (322). Система глобального позиционирования (324).	

## Р А З Д Е Л 8. ЗОННАЯ ТЕОРИЯ ЭЛЕКТРОПРОВОДНОСТИ

<b>ЛЕКЦИЯ 21</b> .....	327
Классическая теория электропроводности (327). Закон Видемана–Франца (328). Волновые свойства частиц (329). Уравнение Шредингера (330). Электронный газ в металле. Энергия Ферми (331). Распределение Ферми–Дирака. Химический потенциал (334). Опыт Толмена и Стюарта (338).	
<b>ЛЕКЦИЯ 22</b> .....	339
Взаимодействие электронов с решеткой (339). Зоны Бриллюэна (340). Энергия электрона в кристалле (342). Движение электрона под действием внешнего электрического поля (344). Квазиклассическое описание электропроводности металлов (346). Взаимодействие электронов с тепловыми фононами. Температура Дебая (348). Сверхпроводимость (352). Эффект Мейснера и Оксенфельда (352). Природа сверхпроводимости (354).	

**РАЗДЕЛ 9. ПОЛУПРОВОДНИКИ. КОНТАКТНЫЕ ЯВЛЕНИЯ**

<b>ЛЕКЦИЯ 23</b> . . . . .	356
Электропроводность полупроводников (356). Эффективная масса электрона и дырки (357). Концентрация электронов и дырок (358). Полупроводники с примесями (360). Донорные примеси (361). Акцепторные примеси (363). Основные выводы (365). Подвижность собственных носителей заряда (366).	
<b>ЛЕКЦИЯ 24</b> . . . . .	367
Эффект Холла (367). Свойства $p$ – $n$ -перехода (369). Полупроводниковый диод (371). Транзистор (373). Полевой транзистор (375). Контактная разность потенциалов (377). Термоэлектричество (379). Эффект Пельтье (381). Термоэлектрический модуль (382).	

**РАЗДЕЛ 10. ПОЛУПРОВОДНИКОВЫЕ УСТРОЙСТВА.  
НИЗКОРАЗМЕРНЫЕ СТРУКТУРЫ**

<b>ЛЕКЦИЯ 25</b> . . . . .	384
Флэш-память (384). Фотопроводимость (386). Фотоэдс (387). Фотоэлементы (388). Экситон (390). Светодиод (391). Низкоразмерные структуры (393). Гетероструктуры (393). Молекулярно-лучевая эпитаксия (395).	
Заключение. . . . .	397
Предметный указатель . . . . .	401

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Классическая теория электромагнетизма была создана в XIX столетии и стала фундаментальным учением об устройстве окружающего нас мира. Представление об электромагнитных полях, полевой теории существования материи, взаимопревращениях различных форм энергии придает теории общеприкладное и мировоззренческое значения. Она сыграла выдающуюся роль в развитии и становлении теории относительности. И, наконец, невозможно переоценить ее практическое значение, обеспечившее бурный научно-технический прогресс за прошедшие полтора столетия.

Вместе с тем курсы «Электромагнетизм» (в классических университетах), «Электродинамика» и т. п. на протяжении вот уже многих лет остаются достаточно консервативными дисциплинами. Одна из объективных причин тому — упоминавшаяся выше завершенность теории в позапрошлом веке. Подавляющее большинство существующих в настоящее время учебников по этим курсам оперируют с одними и теми же или очень похожими экспериментальными фактами и примерами, подчас заимствованными из далекого прошлого. Это, безусловно, снижает как практическую пользу от преподавания курсов, так и интерес учащихся к их изучению.

За прошедшие несколько десятилетий мир кардинально изменился. Были развиты прорывные технологии, позволившие создать уникальные приборы и устройства, средства хранения, обработки и передачи информации. Среди них, например, атомно-силовой микроскоп (блестящая иллюстрация проявления электростатического взаимодействия), обеспечивающий реально атомное разрешение, сканеры и интравизоры, магниторезонансный томограф, высокочувствительные металлодетекторы и металлоискатели, накопители на флэш-памяти с объемом памяти, достигающим 1 Тб, современные ксерокопировальные устройства, разнообразные принтеры и аппараты факсимильной связи.

Поражают воображение возможности современных ускорителей заряженных частиц в сверхсильных магнитных полях, в том числе Большой адронный коллайдер с суммарной энергией протонов 14 ТэВ, поездов на магнитной подушке, достигающих скоростей свыше 500 км/ч, электромагнитных пушек, небольшой снаряд которых, вылетая со скоростью близкой к первой космической, превращает твердую мишень в плазменное облако и пр.

По-прежнему для человечества актуальны проблемы использования атмосферного электричества и передачи энергии беспроводным способом, проблемы земного магнетизма и защиты Земли от солнечного ветра, проблемы солнечной энергетики и постепенного замещения невозобновляемых источников энергии альтернативными источниками.

Фантастический прогресс удалось осуществить созданием Интернета, внедрением средств мобильной и космической связи, включая системы GPS

и ГЛОНАСС с пространственным разрешением порядка 1 м, без которых уже немислимо существование человечества.

Наконец, многообещающе выглядит появление низкоразмерных структур (наноструктур) и материалов на их основе, обладающих уникальными электрическими и магнитными свойствами. В сознании большинства людей прочно укрепился термин «нанотехнологии», с которыми связывают научно-технический прогресс человечества.

Несомненно, что содержание учебников и учебных программ, имеющих отношение к рассматриваемой тематике, должно быть скорректировано с учетом научно-технического прогресса за последние десятилетия. С приходом в повседневную жизнь результатов этих достижений изменились не только среда обитания, но также и менталитет и образ мысли *homo sapiens*. И это является главным аргументом в пользу необходимости обновления программ и учебной литературы.

Кроме того, остается широкое поле деятельности и для совершенствования методик и привнесения новых подходов в изложение таких традиционно трудных для понимания тем, как структура поля и распределение зарядов в проводнике с током, сторонние силы и ЭДС, напряженность и индукция магнитного поля, использование формализма молекулярных токов и магнитных зарядов, ферромагнетизм и обменное взаимодействие, электропроводность твердых тел и зонная теория, контактные явления, сверхпроводимость (включая высокотемпературную), магнитные и электрические свойства низкоразмерных структур и пр.

Эти и другие проблемы можно с успехом решать на основе простого математического аппарата без ущерба для «базового содержания», если, например, использовать многоуровневую концепцию изложения материала так, как нами это было сделано в курсах «Механика», «Физматлит», 2011 (авторы В. А. Алешкевич, Л. Г. Деденко, В. А. Караваев) и «Оптика», «Физматлит», 2010 (В. А. Алешкевич), входящих в серию «Университетский курс общей физики». При таком подходе учащемуся предоставляется возможность приобрести современные знания и значительно расширить свой кругозор без чтения специальной, подчас сложной, литературы.

Учебник является третьей книгой серии «Университетский курс общей физики» и предназначен для студентов физических специальностей вузов. Он соответствует новым программам, разработанным на физическом факультете Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова, и отражает современные тенденции и технологии физического образования.

Учебник написан в виде 25 тематических лекций. Каждая лекция содержит не только материал первого (базового) уровня, соответствующий программе курса, но и материал второго (продвинутого) уровня, отражающий современные достижения в области электромагнетизма.

Материал первого уровня излагается почти в полном объеме в лекционной аудитории и закрепляется на семинарских и лабораторных занятиях и при самостоятельной работе.

Студенты, усвоившие этот материал, имеют возможность получить дополнительные сведения, расширяющие их знания в данной области, прочитав материал второго уровня, адаптированный к потребностям излагаемого курса.

Конечно, перечень этих достижений является далеко не полным, а скорее иллюстративным и отражает субъективное мнение автора.

Лекции сгруппированы в 10 разделов: заряды и электрическое поле (лекции 1–3); металлы и диэлектрики в электростатическом поле (лекции 4–7); постоянный электрический ток (лекции 8–9); магнитное взаимодействие токов и зарядов (лекции 10–12); магнетики (лекции 13–15); электромагнитное поле, уравнения Максвелла (лекции 16–17); электромагнитные колебания и волны (лекции 18–20); зонная теория электропроводности (лекции 21–22); полупроводники, контактные явления (лекции 23–24); полупроводниковые устройства, низкоразмерные структуры (лекция 25).

В заключении приведены некоторые данные и Санитарные нормы, принятые в Российской Федерации и опубликованные Центром электромагнитной безопасности при Институте биофизики Министерства здравоохранения РФ.

Книга иллюстрирована, наряду с черно-белыми, большим числом цветных фотографий и рисунков, способствующих более наглядному восприятию изучаемых явлений.

С глубокой признательностью автор отмечает поддержку коллег при работе над рукописью учебника.

Весьма плодотворными оказались консультации и советы, которые автор имел возможность получить при общении с сотрудниками физического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова доцентом Захаровым В. И., профессором Звягиным И. П., профессором Капитоновым И. М., профессором Петруниным Г. И., профессором Струковым Б. А. а также профессором, заведующим кафедрой общей и теоретической физики Костромского государственного университета им. Н. А. Некрасова Белкиным П. Н. и доцентом Российского государственного университета нефти и газа Днепровской Т. С.

В книге использованы фотографии и даны описания многих лекционных экспериментов, которые были поставлены несколькими поколениями сотрудников кафедры общей физики физического факультета МГУ.

Написанию книги во многом способствовала техническая поддержка, оказанная Дзедрович А. Н., преподавателями кафедры общей физики доцентами Кокшаровым Ю. А., Нифановым А. С. и старшим преподавателем Трубицыным Б. В.

Считаю своим приятным долгом выразить благодарность коллективу кафедры общей и теоретической физики и МПФ Рязанского государственного университета им. С. А. Есенина и ее заведующему, заслуженному деятелю науки и техники РФ профессору Степанову В. А., и профессору Московского государственного педагогического университета А. Н. Мансурову, взявшими на себя труд рецензирования рукописи и давшими полезные советы по содержанию книги и методике изложения отдельных вопросов.

Автор с теплотой и непреходящей благодарностью вспоминает замечательного педагога, доцента физического факультета МГУ Петерсона В. К., при общении с которым невольно поражали как глубина его знания физики, и в особенности электромагнетизма, так и неизменная готовность, с которой этот доброжелательный человек готов был поделиться всеми тонкостями предмета со своими молодыми коллегами. Некоторые его мысли и подходы нашли отражение в этом учебнике.



## ЗАРЯДЫ И ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ

---

### ЛЕКЦИЯ 1

В этом разделе обсудим некоторые фундаментальные понятия теории электромагнетизма, такие, как заряд, электрическое поле, потенциал, энергия поля, электромагнитное взаимодействие и его место среди четырех известных фундаментальных взаимодействий и др., а также познакомимся с важнейшими экспериментальными фактами, на которых базируются эти понятия. Целью изложения будет получение важнейших уравнений для электрического поля в локальной (дифференциальной) форме.

**Электрический заряд.** Понятие электрического заряда является одним из самых фундаментальных понятий в современной науке. Вместе с тем подобно массе, силе, температуре и др., это понятие является одним из наиболее сложных и трудноопределимых. Попробуем ответить на вопрос — что же такое электрический заряд?

После открытия И. Ньютоном в 1666 г. закона всемирного тяготения стало очевидно, что заметные гравитационные силы возникают лишь при участии астрономических объектов. Гравитационное взаимодействие обычных тел на Земле ничтожно мало.

Между тем еще в античные времена древним грекам было известно явление электростатического притяжения и отталкивания. Они знали, например, что если потереть янтарь шерстью или стекло шелком, то в обоих случаях после разъединения трущихся поверхностей между телами возникают силы притяжения.

Возникновение этих сил приписывают появлению особого (наэлектризованного) состояния взаимодействующих предметов. Само это состояние характеризуется величиной *электрического заряда*, появившегося на наэлектризованных телах.

При помощи наэлектризованных предметов можно передать свойство воздействовать друг на друга и другим предметам, т. е. их зарядить. Если, например, прикоснуться наэлектризованным янтарем к подвешенным бумажным лепесткам, то легкие лепестки будут отталкиваться друг от друга. Аналогично будут отталкиваться и лепестки, к которым прикоснулись наэлектризованной стеклянной палочкой. А вот лепестки, один из которых заряжен янтарной, а другой стеклянной палочками, будут притягиваться друг к другу.

В 1749 г. американский государственный деятель и ученый Б. Франклин высказал гипотезу, что электричество представляет собой своеобразную материальную субстанцию. В работах Франклина впервые появляются термины: заряд, разряд, положительный заряд, отрицательный заряд, конденсатор, батарея, частицы электричества. Притяжение или отталкивание, наблюдавшиеся еще древними греками, являются следствием существования в природе двух видов электрических зарядов — положительных и отрицательных.

Заряды одного сорта (одноименные) отталкиваются, а заряды разных сортов (разноименные) — притягиваются. Какой сорт зарядов считать положительным, а какой отрицательным — дело соглашения.

Рассуждения Франклина сводились к тому, что если удалить часть отрицательно заряженных частиц (получивших название «электрон» от греч. «электрон» — янтарь) из вещества, то оно станет положительно заряженным, поскольку в нормальном состоянии вещество электрически нейтрально. Если

же к веществу в нормальном состоянии добавить дополнительные электроны, то оно приобретет отрицательный заряд.

Поэтому исторически сложилось так, что заряд электрона считают отрицательным, а заряд протона — положительным.

В 1785 г. Ш. Кулоном были проведены знаменитые опыты с крутильными весами, с помощью которых он исследовал взаимодействие заряженных металлических шариков (рис. 1.1). Угол закручивания кварцевой нити  $1$ , к которой подвешивалось коромысло с двумя шариками  $2$ , был

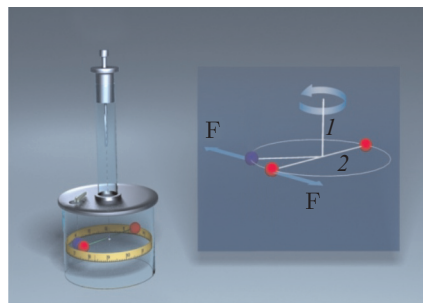


Рис. 1.1

пропорционален силе взаимодействия заряженных шариков. Им было установлено, что подобно закону всемирного тяготения, сила взаимодействия убывает обратно пропорционально квадрату расстояния между шариками.

Таким образом, если частицы взаимодействуют друг с другом с силами, которые уменьшаются с увеличением расстояния, но при этом эти силы во много раз превышают силы всемирного тяготения, то говорят, что эти частицы имеют электрический заряд. Сами частицы называются заряженными. Отсутствие заряда у частицы означает, что подобных взаимодействий она не обнаруживает.

Взаимодействие между заряженными частицами носят название *электромагнитного взаимодействия*. *Электрический заряд определяет интенсивность электромагнитных взаимодействий* подобно тому, как масса определяет интенсивность гравитационных взаимодействий.

**Элементарный электрический заряд.** В 1801 г. немецкий физик и химик И. Риттель выдвинул идею о дискретной структуре электричества. Дальнейшее развитие эта идея получила в работах его соотечественника В. Вебера, который также разрабатывал гипотезу о дискретности электрического заряда. В своих работах (1846 г.) он вводит понятие атома электричества.

На пути к пониманию дискретности электрического заряда важной вехой является открытие частицы — электрона, сделанное в 1897 г. английским физиком Дж. Томсоном. Он обнаружил, что катодные лучи отклонялись при действии отдельно электрического и магнитного полей. Проведя ряд измерений, Томсон выяснил, что эти лучи представляют собой поток частиц конечной массы, движущихся со скоростью, гораздо меньшей скорости света. За это выдающееся открытие Томсон в 1906 г. был удостоен Нобелевской премии по физике.

После открытия электрона пришло понимание, что эта частица является фундаментальной составляющей всего материального мира. Соответственно, встал вопрос об изучении ее свойств.

**Опыт Миллиkena.** В 1913 г. американским физиком Р. Милликеном был измерен заряд электрона. Им изучалось поведение заряженных капель масла в электрическом поле конденсатора.

На рис. 1.2 показана схема его установки. При распылении пульверизатором (как и при трении) капли масла заряжались. Эти капли через отверстие попадали в пространство между обкладками плоского конденсатора. На его обкладки подавалось постоянное напряжение от мощной батареи. Капли могли облучаться рентгеновскими лучами для ионизации молекул масла, т. е. дополнительного увеличения заряда капли.

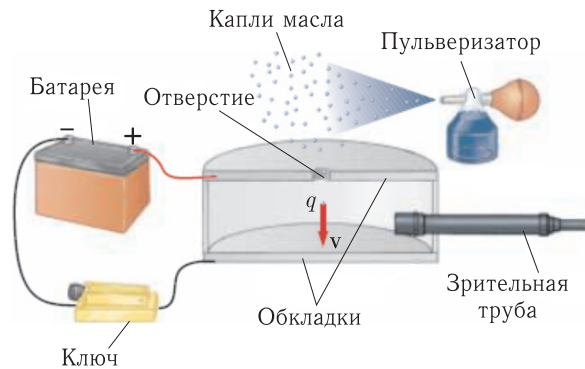


Рис. 1.2

Измеряя с помощью зрительной трубы скорость падения капель при разомкнутом ключе, он определял их размер и массу. Затем включалось электрическое поле, позволяющее уравновесить силу тяжести и удерживать часть капель в подвешенном состоянии. Из условия равновесия вычислялся заряд капли.

Повторяя многократно в течение пяти лет этот трудоемкий опыт, Милликен установил, что заряды капель кратны одной и той же величине  $|e|$ . Наградой за титанический труд стала Нобелевская премия по физике за 1923 г.

Согласно современным данным, заряд электрона неделим и равен  $e = -1,602176565(35) \cdot 10^{-19}$  Кл.

С тех пор *модуль заряда электрона считается элементарным электрическим зарядом*. Эта величина служит единицей измерения электрического заряда других элементарных частиц. Масса электрона равна  $m = 9,10938291(40) \cdot 10^{-31}$  кг. Электрон неделим и бесструктурен (как минимум до расстояний  $10^{-17}$  см). Он обладает собственным механическим моментом, или спином, равным  $s = \hbar/2$ .

**Структура протона и нейтрона.** Следующей важной вехой явилось открытие протона британским физиком Э. Резерфордом в 1919 г. При исследовании бомбардировки атомов азота высокоэнергетическими  $\alpha$ -частицами Резерфорд пришел к выводу, что ядро атома азота распадается вследствие громадных сил, развивающихся при столкновении с быстрой  $\alpha$ -частицей.

Освобождающиеся ядра атома водорода были названы Резерфордом протонами (от греч. «*πρωτον*» — первый, основной).

Отсутствие отклонений в электрическом поле пучков нейтральных атомов цезия и калия позволило сделать вывод, что заряд  $e_p$  протона по абсолютной величине совпадает с зарядом электрона с относительной точностью

$$\frac{|e| - e_p}{e_p} \leq 10^{-21}.$$

Протон — стабильная элементарная частица с массой  $m_p = 1836m$  и спином  $s_p = \hbar/2$ . Он участвует в термоядерных реакциях, являющихся основным источником энергии, генерируемой звездами, и в реакциях протон-протонного цикла, происходящих на Солнце.

Однако протон (и нейтрон) обладает сложной внутренней структурой. Исторически первым указанием на сложную внутреннюю структуру протона и нейтрона, называемых нуклонами, явились результаты измерения их магнитных моментов, которые отличались от предсказанных теорией значений для точечных частиц.

Структуру нуклона исследовали с помощью электронных пучков с энергией вплоть до 20 ГэВ. Для изучения распределения заряда и магнитного момента в протоне обычно используют мишени из жидкого водорода и измеряют сечение упругого рассеяния электронов. Поскольку не существует нейтронных мишеней, для исследования нейтронов используют мишени из дейтерия. При этом необходимо отделить вклад протонов в процесс рассеяния. Это увеличивает погрешность измерений.

Измерения, проведенные на самом длинном в мире (длина 3,2 км) линейном ускорителе SLAC (Stanford Linear Accelerator Center, США), показали, что объемная плотность заряда протона убывает при удалении от центра протона по экспоненциальному закону

$$\rho_p(r) = \rho_p(0) \exp(-r/r_0),$$

где

$$\rho_p(0) = 3|e|/\text{фм}^3, \quad r_0 = 0,23 \text{ фм},$$

$$1 \text{ фм (фемтометр)} = 10^{-15} \text{ м}.$$

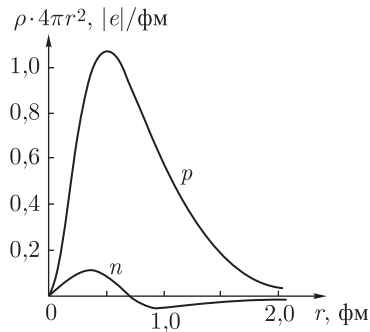


Рис. 1.3

На рис. 1.3 показано распределение величины  $\rho_p(r)4\pi r^2$ . Оно позволяет рассчитать средний квадрат радиуса протона по формуле

$$\langle r_p^2 \rangle = \int_0^\infty r^2 \rho_p(r) 4\pi r^2 dr / \left( \int_0^\infty \rho_p(r) 4\pi r^2 dr \right).$$

Расчет показывает, что радиус протона  $\sqrt{\langle r_p^2 \rangle} = 0,86 \text{ фм}$ .

Совсем другое распределение величины  $\rho_n(r)4\pi r^2$  для нейтрона. В нейтроне, имеющем такой же радиус, как и у протона, центральная область заряжена положительно, а периферийная — отрицательно.

Эти эксперименты показали, что в области больших энергий рассеяние электронов происходит на каких-то элементах внутренней структуры, имеющих значительно меньшие размеры, чем размер нуклона. Выдающийся американский физик Р. Фейнман (Нобелевский лауреат, 1965 г.) назвал эти элементы «партонами» (частями адронов). В дальнейшем партоны стали отождествлять с кварками (см. ниже).

По современным представлениям нуклон состоит из кварков, взаимодействующих посредством обмена квантами сильного взаимодействия — глюонами.

Протон состоит из трех кварков (один  $d$ -кварк с зарядом  $-1/3$  и два  $u$ -кварка с зарядом  $+2/3$ ), и его полный заряд равен  $+1$ . Нейтрон состоит из двух  $d$ -кварков и одного  $u$ -кварка, и его полный заряд равен нулю.

Нейтрон имеет массу на  $0,1378\%$  больше массы протона и спин, равный  $s_n = \hbar/2$ . Электрический заряд нейтрона равен нулю. Это подтверждается прямыми измерениями заряда по отклонению пучка нейтронов в сильных электрических полях, показавшими, что заряд нейтрона по крайней мере  $q_n < 10^{-20} |e|$ . Косвенные данные дают оценку  $q_n < 10^{-22} |e|$ .

Свободный нейтрон — нестабильная частица, распадающаяся на протон ( $p$ ), электрон ( $e$ ) и электронное антинейтрино ( $\bar{\nu}_e$ ):  $n \rightarrow p + e + \bar{\nu}_e$ . Время жизни нейтрона составляет  $(917 \pm 14)$  с, т. е. около 15 мин. В веществе в свободном виде нейтроны существуют еще меньше вследствие сильного поглощения их ядрами. Поэтому они возникают в природе или получают в лаборатории только в результате ядерных реакций.

Существование в ядре нейтральных частиц предсказали в 1930 г. советские физики В. Амбарцумян и Д. Иваненко, которые показали, что электроны, вылетающие из ядра при бета-распаде, рождаются в момент распада и что кроме протонов в ядре должны присутствовать некие нейтральные частицы. Позднее, в 1932 г., нейтрон был открыт английским физиком Дж. Чадвиком, за что ему была присуждена Нобелевская премия по физике в 1935 г. В том же 1932 г. Д. Иваненко и затем В. Гейзенберг предположили, что атомное ядро состоит из протонов и нейтронов.

Гипотеза о том, что подверженные сильному взаимодействию адроны (от греч. «*αδρος*» — крупный, массивный; термин предложен советским физиком Л. Окунем в 1962 г.) построены из специфических субъединиц (кварков), была впервые выдвинута М. Гелл-Манном и, независимо от него, Дж. Цвейгом в 1964 г. Эта гипотеза оказалась исключительно плодотворной.

В частности, по мере открытия новых частиц выяснилось, что каждый новый адрон удачно вписывался в кварковую конструкцию (если не считать добавления новых кварков). Попытки обойтись без кварков наталкиваются на трудности с описанием результатов многочисленных экспериментов, которые очень естественно описываются в кварковой модели.

Согласно современным представлениям кварк — фундаментальная частица, обладающая электрическим зарядом, кратным  $|e|/3$ , и не наблюдающаяся в свободном состоянии. Кварки являются точечными частицами вплоть до масштаба примерно  $0,5 \cdot 10^{-4}$  фм, что примерно в 20 тысяч раз меньше размера протона. Из кварков состоят адроны, в частности, протон и нейтрон.

В настоящее время известно 6 разных «сортов» (ароматов) кварков. Кроме того, кварки обладают и дополнительной внутренней характеристикой, называемой «цвет». Каждому кварку соответствует антикварк с противоположными квантовыми числами.

Кварки участвуют в сильных, слабых и электромагнитных взаимодействиях. Сильные взаимодействия (обмен глюонами) могут изменять цвет кварка, но не меняют его аромат. Слабые взаимодействия, наоборот, не меняют цвет, но могут менять аромат.

Кварки существуют только в связанном состоянии. Явление, ответственное за неразрывность кварковых связей, называется конфайнмент. Оно вызвано тем, что силы взаимодействия кварков, обусловленные обменом глюонами, возрастают при удалении кварков друг от друга. Поэтому разлететься могут лишь «бесцветные» комбинации кварков — адроны.

Кварковая теория предсказывает, что наличие субструктуры у адронов должно привести при столкновениях к появлению струй — элементарных частиц, летящих в одном направлении в узком конусе. Такие адронные струи действительно наблюдались в эксперименте.

Завершая обсуждение этой темы, отметим, что в настоящее время известно более 200 элементарных частиц. Большая часть из этих частиц нестабильна и распадается за короткое время на другие частицы. Стабильными являются протон, электрон и их античастицы — позитрон и антипротон. Первые две из них ответственны за все явления, изучаемые в этом курсе. Электрический заряд ионов или заряженных тел дискретен: их заряд составляет целое кратное от элементарного заряда, равного абсолютной величине заряда электрона.

**Сохранение заряда.** Это один из фундаментальных законов природы, состоящий в том, что *алгебраическая сумма электрических зарядов замкнутой (электрически изолированной) системы остается неизменной*.

При электризации тел происходит лишь перераспределение зарядов в пространстве, однако полный заряд не изменяется.

В физике элементарных частиц одни частицы исчезают, другие рождаются, однако полный заряд по-прежнему неизменен. Наиболее ярким подтверждением сказанному является обратный аннигиляции процесс, в котором возникают пары частица–античастица (реально или виртуально). Чтобы родилась пара частиц с массой  $m$  каждая, необходимо затратить энергию, равную или превышающую величину  $2mc^2$ .

Рождение электрон-позитронных пар гамма-квантами в камере Вильсона, помещенной в магнитное поле для разделения треков электрона и позитрона, впервые наблюдали знаменитые супруги Ирен и Фредерик Жолио Кюри в 1933 г. (Нобелевская премия по химии, 1935 г.) и П. Блэккет, получивший Нобелевскую премию по физике за 1948 г.

Важно отметить, что для рождения пары необходимо выполнение и закона сохранения импульса. Поскольку суммарный импульс пары равен нулю, а импульс гамма-кванта отличен от нуля, то в процессах образования пары принимает участие и электромагнитное поле ядер, находящихся в камере Вильсона, которое также обладает импульсом.

**Электризация тел.** Для демонстрации многочисленных электростатических явлений тела электризуют посредством трения. При электризации тел важен тесный контакт между ними, что достигается с помощью трения. Так как поверхности тел никогда не бывают идеально гладкими, то контакт между телами устанавливается только на небольших участках поверхностей. При трении тел друг о друга число участков с тесным контактом увеличивается и тем самым увеличивается общее число заряженных частиц, переходящих от одного тела к другому.

В результате имеет место пространственное разделение зарядов. После разведения трущихся тел на них появляются заряды противоположного знака. Опыт показывает, что наэлектризовать таким способом можно лишь тогда, когда хотя бы одним из контактирующих тел является диэлектрик. Металлы же после их разведения не обнаруживают какого-либо заряда. Почему же так происходит?

Основное отличие металлов от диэлектриков (более подробно об этом идет речь в лекциях 21 и 22) состоит в том, что в металлах имеется большое число электронов проводимости, свободно перемещающихся внутри кристаллической решетки. Эти электроны имеют дискретные значения энергии, которые составляют электронный энергетический спектр. Максимальное значение энергии электрона вблизи абсолютного нуля температуры называется энергией Ферми. Каждый металл имеет свое собственное значение энергии Ферми. Для выхода электрона за поверхность металла необходимо затратить энергию (совершить работу), называемую работой выхода. Эта работа равна разности энергии электрона, находящегося вблизи поверхности (вне металла), и энергии Ферми.

Контакт двух тел осуществляется при конечном расстоянии между крайними ионами обеих кристаллических решеток (порядка периода решетки). Этого оказывается достаточно, чтобы электроны перешли из металла с меньшей работой выхода в металл с большей работой выхода. Перемещения электронов при этом не превышают размеров межатомных расстояний ( $10^{-8}$  см). Равновесие наступает при некотором разделении зарядов, при котором появившееся контактное электрическое поле начнет возвращать электроны обратно и, тем самым уравновесит процесс перехода.

Таким образом, пока есть контакт, проводники будут разноименно заряжены, при этом их заряды располагаются в непосредственной близости к поверхностям контакта. Эти поверхности будут образовывать своеобразный конденсатор, между обкладками которого разность потенциалов приблизительно равна разности энергий Ферми, деленной на заряд электрона.

При разведении проводников нельзя разорвать одновременно контакт вдоль всей поверхности: площадь контакта можно только быстро уменьшать. Это значит, что уменьшается площадь пластин «контактного конденсатора». Электроны, которые могут свободно двигаться вдоль поверхности, станут возвращаться обратно в металл с меньшей работой выхода, и заряд конденсатора уменьшится. Когда площадь контакта уменьшится до нуля, металлы будут не заряжены.

При контакте металла с диэлектриком и последующем их разъединении тела становятся заряженными. Если, например, по металлическому стержню,

находящемуся на изолированной подставке, побить кусочком меха, то стержень приобретет положительный заряд. Это происходит вследствие того, что связь электронов с атомами диэлектрика (меха) сильнее, чем с атомами металла. В результате электроны покидают металл и удерживаются диэлектриком.

Еще сильнее выражена электризация при тесном контакте разных диэлектриков. Чем сильнее различаются связи электронов с атомами обоих веществ и чем больше площадь контакта, тем сильнее электризуются диэлектрики.

**Фундаментальные взаимодействия в природе.** В настоящее время известно 4 вида фундаментальных взаимодействий: *гравитационное, электромагнитное, сильное и слабое*. Первые два типа взаимодействий были известны к началу XX в.

Исторически первым следует считать гравитационное взаимодействие (XVII в.), когда был сформулирован закон всемирного тяготения.

После открытия атомной структуры вещества стало понятно, что самые разнообразные силы — упругости, трения и др. — обусловлены взаимодействием зарядов, входящих в состав атомов. Это взаимодействие получило название электромагнитного взаимодействия. Оно на много порядков превышает гравитационное взаимодействие. Например, сила электростатического отталкивания двух электронов приблизительно в  $10^{43}$  раз больше их силы гравитационного притяжения.

После того как были открыты протон и нейтрон, возник вопрос о силах, удерживающих нуклоны в ядре. Для объяснения этого феномена было постулировано существование сильного взаимодействия.

Однако в дальнейшем оказалось, что и этого недостаточно. В частности, было непонятно, что заставляет распадаться свободный нейтрон. Тогда было постулировано существование слабого взаимодействия.

Теория электромагнитного взаимодействия была создана к 1864 г. выдающимся английским физиком Дж. Максвеллом. *Изучение этой теории и составляет главную цель излагаемого раздела физики.*

В 1915 г. А. Эйнштейном была сформулирована общая теория относительности, описывающая гравитационное взаимодействие. Вскоре появилась идея объединить эти два вида взаимодействий в рамках единой теории. Однако попытки создания такой теории не увенчались успехом.

Во второй половине XX столетия задача построения единой теории осложнилась еще и необходимостью внесения в нее слабого и сильного взаимодействий. В конце 60-х гг. того же столетия С. Вайнбергом, Ш. Глэшоу, А. Саламом (Нобелевская премия по физике 1979 г.) была создана теория электрослабого взаимодействия кварков и лептонов, объединившая электромагнитное и слабое взаимодействия. В их теории электромагнитное взаимодействие осуществляется посредством обмена фотонами между взаимодействующими частицами, а слабое взаимодействие — тяжелыми промежуточными векторными Z-бозонами. Таким образом, механизм обоих взаимодействий одинаков.

В 80-е гг. прошлого столетия была сформулирована теория сильного взаимодействия, получившая название квантовой хромодинамики. Это квантовополевая теория сильного взаимодействия кварков и глюонов, построенная



по образу квантовой электродинамики на основе «цветовой» калибровочной симметрии. Термин хромодинамика обусловлен тем постулатом, что кварк обладает квантовым числом, условно называемым цветовым зарядом, или цветом.

На основе теории электрослабого взаимодействия и квантовой хромодинамики была построена так называемая *Стандартная модель* элементарных частиц, описывающая электромагнитное, слабое и сильное взаимодействия.

**Стандартная модель** состоит из следующих положений.

Все вещество состоит из 24 фундаментальных частиц-фермионов: 6 лептонов (электрон, мюон, тау-лептон, электронное нейтрино, мюонное нейтрино и тау-нейтрино), 6 кварков ( $u$ ,  $d$ ,  $s$ ,  $c$ ,  $b$ ,  $t$ ) и 12 соответствующих им античастиц.

Кварки участвуют в сильных, слабых и электромагнитных взаимодействиях; заряженные лептоны (электрон, мюон, тау-лептон) — в слабых и электромагнитных; нейтрино — только в слабых взаимодействиях.

Все три типа взаимодействий возникают как следствие постулата, что наш мир симметричен относительно трех типов калибровочных преобразований.

Частицами-переносчиками взаимодействий являются: 8 глюонов для сильного взаимодействия (группа симметрии  $SU(3)$ ); 3 тяжелых калибровочных бозона ( $W^+$ ,  $W^-$ ,  $Z^0$ ) для слабого взаимодействия (группа симметрии  $SU(2)$ ) и фотон для электромагнитного взаимодействия (группа симметрии  $U(1)$ ).

Экспериментальная проверка Стандартной модели заключается в обнаружении предсказанных ею частиц и их свойств. В настоящий момент открыты все элементарные частицы Стандартной модели, за исключением бозона Хиггса. Его поиски продолжаются в экспериментах на Большом адронном коллайдере<sup>1)</sup>. О нем речь пойдет в следующих лекциях.

Подытоживая, можно сказать, что четыре вида фундаментальных взаимодействий описываются общей теорией относительности и Стандартной моделью. Их объединения пока достичь не удалось из-за трудностей создания квантовой теории гравитации.

Ведутся поиски других типов фундаментальных взаимодействий, как в явлениях микромира, так и в космических масштабах, однако новых видов фундаментальных взаимодействий пока не обнаружено.

---

<sup>1)</sup> В 2012 г. на Большом адронном коллайдере обнаружена частица, которая по своим свойствам похожа на бозон Хиггса.

## ЛЕКЦИЯ 2

**Закон Кулона.** В результате своих опытов с крутильными весами Кулон установил, что два точечных неподвижных заряда  $q_1$  и  $q_2$ , находящиеся в вакууме на расстоянии  $r$  друг от друга, взаимодействуют с силой  $F$ , направленной вдоль прямой, соединяющей эти заряды, и равной

$$F = k \frac{|q_1| \cdot |q_2|}{r^2}, \quad (2.1)$$

где  $k$  — коэффициент пропорциональности, зависящий от выбранной системы единиц. При этом, одноименные заряды будут отталкиваться друг от друга, а разноименные — притягиваться.

Это утверждение (выделенное курсивом) получило название закона Кулона, являющегося основным законом электростатики. В нем под точечными зарядами понимают два заряженных тела, размеры которых малы по сравнению с расстоянием между ними.

В системе единиц СИ заряд является производной величиной от силы электрического тока  $I$ :  $q = It$ . За единицу заряда  $q = 1$  Кл принимается заряд, который переносится через поперечное сечение проводника электрическим током силой  $I = 1$  А за время  $t = 1$  с. Надо отметить, что ток силой 1 А это сравнительно небольшая величина, в то время как заряд 1 Кл с точки зрения электростатики — громадная величина. Достаточно упомянуть, что полный отрицательный заряд Земли оценивается в полмиллиона кулонов.

Если гипотетически представить, что на расстоянии  $r = 1$  м удалось бы расположить два заряда  $|q_1| = |q_2| = 1$  Кл, то сила взаимодействия между ними составила бы гигантскую величину,  $F = 9 \cdot 10^9$  Н. Поэтому коэффициент пропорциональности  $k = 9 \cdot 10^9$  Н · м<sup>2</sup>/Кл<sup>2</sup>. Для удобства, однако, этот коэффициент записывают в виде

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}, \quad (2.2)$$

где  $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$  Ф/м — электрическая постоянная, единица емкости  $1 \text{ Ф} = \frac{1 \text{ Кл}^2}{1 \text{ Н} \cdot \text{м}}$  (1 фарад).

Формула (2.1) представляет закон Кулона в скалярном виде. Для дальнейшего изложения потребуется выражение для закона Кулона в векторном виде. Это можно легко сделать, если задать положения зарядов соответствующими радиусами-векторами  $\mathbf{r}_1$  и  $\mathbf{r}_2$  (рис. 2.1). Тогда силы, действующие на каждый

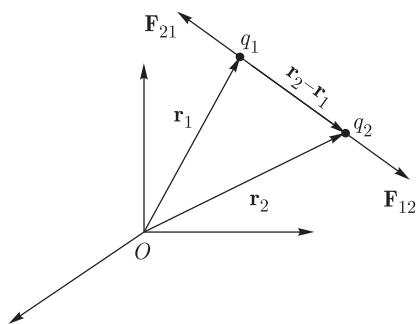


Рис. 2.1

из зарядов, будут равны

$$\mathbf{F}_{12} = k \frac{q_1 \cdot q_2}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) = -\mathbf{F}_{21}. \quad (2.3)$$

На рисунке для определенности изображены силы отталкивания.

**Принцип суперпозиции.** Опыт показывает, что *взаимодействие между двумя точечными зарядами не изменяется при внесении третьего точечного заряда, также взаимодействующего с первыми двумя.* Это утверждение получило название *принцип суперпозиции*.

Принцип суперпозиции позволяет рассчитать силу взаимодействия заряженных тел произвольных форм и размеров. В качестве иллюстрации рассмотрим несколько примеров.

**Пример 1.** Пусть имеется два одинаковых разноименных заряда  $+q$  и  $-q$ , расположенных на небольшом расстоянии  $l$  друг от друга, и положительный точечный заряд  $q_0$ , расположенный на расстоянии  $r \gg l$ , так, как это изображено на рис. 2.2 а. Требуется вычислить силу, с которой система двух близко-расположенных одинаковых разноименных зарядов (*электрический диполь*) будет действовать на заряд  $q_0$ .

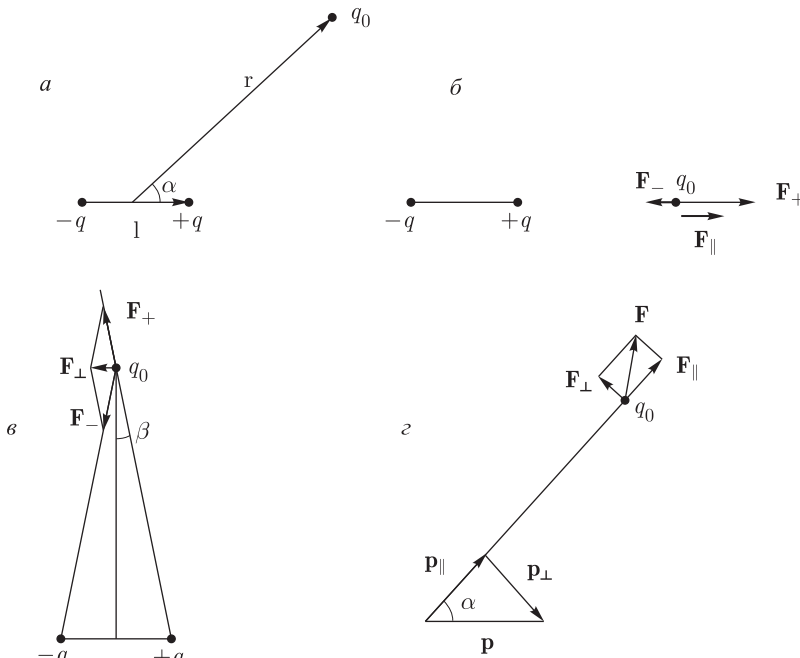


Рис. 2.2

Введем вектор  $\mathbf{l}$ , направленный от отрицательного заряда к положительному заряду, *вектор дипольного момента*  $\mathbf{p} = q\mathbf{l}$  и радиус-вектор  $\mathbf{r}$ , направленный из середины вектора  $\mathbf{l}$  в точку нахождения заряда  $q_0$ .

Рассмотрим вначале частный случай, когда  $\mathbf{r} \parallel \mathbf{p}$  (рис. 2.2 б). На заряд  $q_0$  со стороны положительного заряда будет действовать сила отталкивания  $F_+$ ,

а со стороны отрицательного заряда — сила притяжения  $F_-$ . Поэтому полная сила будет равна

$$F_{\parallel} = F_+ - F_- = kq q_0 \left[ \frac{1}{(r - l/2)^2} - \frac{1}{(r + l/2)^2} \right] \approx \frac{2kqlq_0}{r^3} = \frac{2kpq_0}{r^3},$$

а в векторном виде

$$\mathbf{F}_{\parallel} = \frac{2k\mathbf{p}q_0}{r^3}. \quad (2.4)$$

Теперь переместим заряд  $q_0$  так, чтобы  $\mathbf{r} \perp \mathbf{p}$  (рис. 2.2 в). Тогда  $F_+ = F_- \approx kq q_0 / r^2$ , полная сила с учетом малости угла  $\beta = l/2r$  будет равна

$$F_{\perp} = 2F_+ \cdot \beta = \frac{kqlq_0}{r^3} = \frac{kpq_0}{r^3},$$

а в векторном виде

$$\mathbf{F}_{\perp} = -\frac{k\mathbf{p}q_0}{r^3}. \quad (2.5)$$

В общем случае, когда векторы  $\mathbf{p}$  и  $\mathbf{r}$  составляют некоторый угол  $\alpha$  (ситуация з), вектор дипольного момента можно представить в виде суммы  $\mathbf{p} = \mathbf{p}_{\parallel} + \mathbf{p}_{\perp}$  и, используя (2.4) и (2.5), записать

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_{\parallel} + \mathbf{F}_{\perp} = \frac{2k\mathbf{p}_{\parallel}q_0}{r^3} - \frac{k\mathbf{p}_{\perp}q_0}{r^3}.$$

Принимая во внимание, что  $\mathbf{p}_{\perp} = \mathbf{p} - \mathbf{p}_{\parallel}$ ,  $\mathbf{p}_{\parallel} = p \cos \alpha \cdot \mathbf{r} / r = (\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}) \cdot \mathbf{r} / r^2$ , окончательно получим

$$\mathbf{F} = \left[ \frac{3k(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5} - \frac{k\mathbf{p}}{r^3} \right] q_0. \quad (2.6)$$

**Пример 2.** Пусть имеется кольцо радиусом  $R$ , по которому равномерно распределен положительный заряд  $q$ , и точечный положительный заряд  $q_0$ , расположенный на оси кольца на произвольном расстоянии  $r$  от его плоскости (рис. 2.3). Необходимо вычислить силу, действующую на заряд  $q_0$ . Для этого

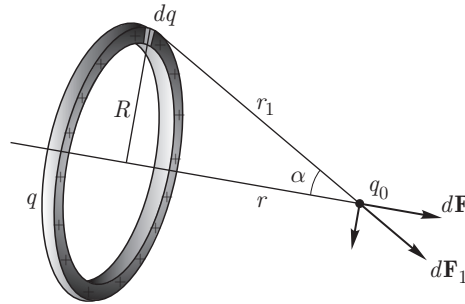


Рис. 2.3

мысленно разобьем кольцо на элементы длиной  $dl$ . Каждый такой элемент будет иметь заряд  $dq = \frac{q}{2\pi R} dl$ , который будет действовать на заряд  $q_0$  с силой  $dF_1 = k \frac{q_0 dq}{r_1^2}$ . Проекция этой силы на ось кольца  $dF = dF_1 \cos \alpha = dF_1 \cdot r / r_1$ .

Полная сила, как это следует из симметрии задачи, будет направлена вдоль оси кольца и равна

$$F = \int dF = \int_0^q k \frac{q_0 dq}{r_1^2} \frac{r}{r_1} = \frac{kqr}{r_1^3} q_0 = \frac{kqr}{(r^2 + R^2)^{3/2}} q_0. \quad (2.7)$$

График зависимости этой силы от расстояния до кольца изображен на рис. 2.4. По мере удаления от плоскости кольца сила отталкивания вначале монотонно возрастает, достигая максимального значения  $F_M$ , а затем монотонно убывает. На расстояниях  $r \gg R$  сила взаимодействия будет описываться законом Кулона, поскольку заряженное кольцо для таких расстояний можно рассматривать как точечный заряд.

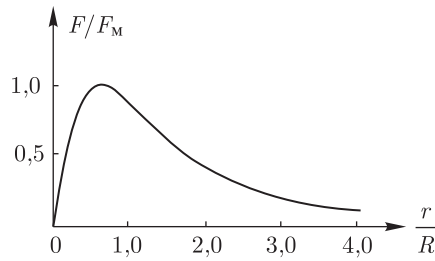


Рис. 2.4

**Пример 3.** Заменяем кольцо равномерно заряженным круглым диском с тем же зарядом и радиусом и вычислим силу, действующую на заряд  $q_0$ . Разобьем мысленно диск на кольца с радиусом  $R'$  и толщиной  $dR'$  (рис. 2.5 а).

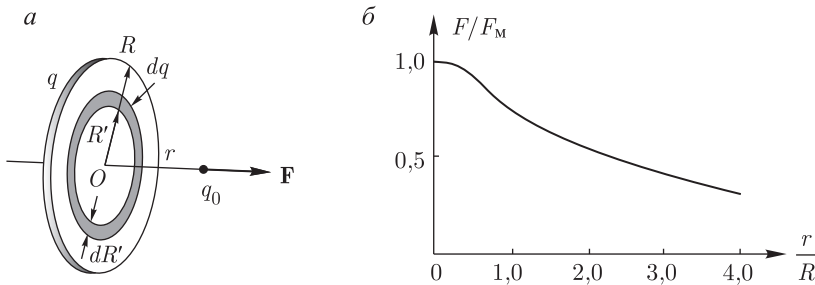


Рис. 2.5

Поскольку заряд кольца будет равен  $dq = \frac{q}{\pi R^2} 2\pi R' dR'$ , то в соответствии с (2.7) сила

$$F = \int \frac{k dq r}{(r^2 + R'^2)^{3/2}} q_0 = \frac{kq}{R^2} \int_0^R \frac{2R' \cdot r \cdot dR'}{(r^2 + R'^2)^{3/2}} q_0 = \frac{2kq}{R^2} \left[ 1 - \frac{r}{\sqrt{r^2 + R^2}} \right] q_0. \quad (2.8)$$

График зависимости (2.8) изображен на рис. 2.5 б. На расстояниях  $r \ll R$  сила практически не зависит от расстояния и равна

$$F_{\text{м}} = \frac{2kq}{R^2} q_0 = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} q_0, \quad (2.9)$$

где  $\sigma = q/(\pi R^2)$  — *поверхностная плотность заряда* (см. далее). Для таких расстояний диск может интерпретироваться как *бесконечно большая плоскость*, имеющая постоянную поверхностную плотность заряда.

На расстояниях  $r \gg R$  диск «превращается» в материальную точку, и сила взаимодействия будет такой же, как и для точечных зарядов, что следует из формулы (2.8).

**Пример 4.** Заменяем кольцо равномерно заряженной сферой с тем же зарядом и радиусом и рассчитаем, как и раньше, силу взаимодействия (рис. 2.6). Для этого мысленно разделим сферу на элементарные заряженные кольца.

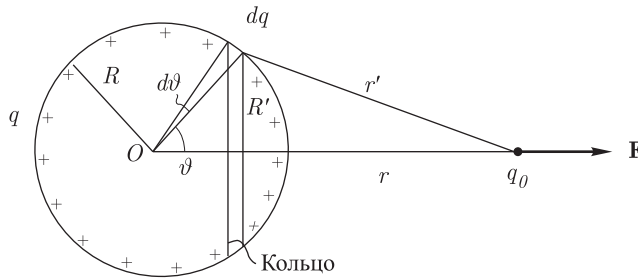


Рис. 2.6

Если ввести угол  $\vartheta$ , то радиус кольца будет равен  $R' = R \sin \vartheta$ , расстояние до кольца  $r' = r - R \cos \vartheta$ , площадь его поверхности  $dS = 2\pi R' \cdot R \cdot d\vartheta = 2\pi \times R^2 \cdot \sin \vartheta \cdot d\vartheta$ , а его заряд  $dq = \frac{q}{4\pi R^2} dS$ . Тогда, в соответствии с (2.7), сила, действующая на заряд со стороны элементарного кольца,

$$dF = \frac{k dq r'}{(r'^2 + R'^2)^{3/2}} q_0 = \frac{k \cdot q \cdot dS \cdot r'}{4\pi R^2 (r'^2 + R'^2)^{3/2}} q_0.$$

Полная сила вычисляется интегрированием и равна

$$F = \int \frac{k dq r'}{(r'^2 + R'^2)^{3/2}} q_0 = k \cdot q \int_0^\pi \frac{(r - R \cos \vartheta) \cdot \sin \vartheta \cdot d\vartheta}{2(r^2 - 2Rr \cos \vartheta + R^2)^{3/2}} q_0 = \frac{kq}{r^2} q_0. \quad (2.10)$$

Таким образом, *сила взаимодействия между равномерно заряженной сферой и точечным зарядом будет такой же, как и в случае, когда заряд сферы  $q$  помещен в ее центр.*

Совершенно иной результат будет, если заряд  $q_0$  поместить внутрь заряженной сферы. Это следует из того очевидного факта, что в центре сферы эта сила вовсе будет равна нулю. Подобно тому, как это было сделано выше, можно провести вычисления и придти к важному результату — *сила, действующая на точечный заряд, в любой точке внутри равномерно заряженной сферы будет равна нулю.*

В заключение отметим, что сила, действующая на заряд  $q_0$ , находящийся снаружи вблизи поверхности сферы, зависит от поверхностной плотности заряда  $\sigma = \frac{q}{4\pi R^2}$  и равна

$$F = \frac{kq}{R^2} q_0 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} q_0.$$

**Электроскоп.** Для обнаружения электрического заряда какого-либо предмета применяется электроскоп (от греч. «*skopeo*» — смотрю). Электроскоп как физический прибор сыграл важную роль на ранних этапах изучения электричества.

Первый электроскоп изобрел итальянский физик А. Вольта. Его прибор состоял из металлического стержня, пропущенного через каучуковую пробку, которая закрывала стеклянную бутылку. Верхний конец металлического стержня оканчивался металлическим шариком, а к нижнему концу, находящемуся внутри бутылки, привешивались 2 соломинки.

Современный электроскоп состоит из металлического стержня — электрода и подвешенных к нему двух листочков фольги. (рис. 2.7). Для обнаружения слабых зарядов на предметах к электроду иногда подвешиваются тонкие золотые листочки.

При прикосновении к электроду заряженным предметом заряды от предмета стекают через электрод на листочки фольги, листочки оказываются одноименно заряженными и поэтому отталкиваются друг от друга. Чем больше заряд, перешедший на электроскоп, тем больше сила отталкивания листочков и, соответственно, угол между ними.

Если к заряженному электроскопу поднести тело, имеющее заряд противоположного знака, то угол между его листочками начнет уменьшаться. Следовательно, электроскоп позволяет различать знак заряда на электризованного тела.

Для того чтобы листочки фольги не колебались от движения воздуха, их обычно помещают в стеклянный сосуд. Из сосуда при этом может быть откачан воздух для предотвращения быстрой утечки заряда с фольги.

**Электромагнитное поле.** Как отмечалось в предыдущей лекции, электромагнитное взаимодействие осуществляется посредством обмена фотонами между взаимодействующими частицами. Следовательно, в окружающем заряды пространстве существует особая форма материи, получившая название *электромагнитное поле* (ЭМП).

ЭМП — трудноопределимое первичное понятие. Это поле является переносчиком взаимодействия и оказывает на заряженные тела силовое воздействие.



Рис. 2.7

В вакууме оно задается во всех точках пространства парой векторных величин: векторами напряженности электрического поля  $\mathbf{E}$  и магнитной индукцией  $\mathbf{B}$ , которые определяют силы, действующие со стороны поля на неподвижные и движущиеся заряженные частицы. В среде ЭМП характеризуется дополнительно двумя величинами: вектором электрической индукции  $\mathbf{D}$  и вектором напряженности магнитного поля  $\mathbf{H}$ .

Эти названия так сложились исторически, хотя, с точки зрения физического смысла, названия «напряженность магнитного поля»  $\mathbf{H}$  и «индукция»  $\mathbf{B}$  следовало бы поменять местами. Боле подробно об этом будет сказано в последующих лекциях.

Таким образом, электромагнитное поле включает в себя две составляющие: электрическое и магнитное поля.

Электрическое поле — это составляющая ЭМП, которая характеризуется воздействием на электрически заряженную частицу с силой, пропорциональной заряду частицы и не зависящей от ее скорости.

Магнитное поле — это составляющая ЭМП, которая характеризуется воздействием на движущуюся заряженную частицу с силой, пропорциональной заряду частицы и ее скорости.

**Напряженность электрического поля.** Силовой характеристикой электрического поля является напряженность  $\mathbf{E}$ . Для ее измерения в поле помещают небольшой по величине (пробный) неподвижный положительный заряд  $q_0$  и определяют силу  $\mathbf{F}$ , действующую на него со стороны поля. Пробный заряд должен быть небольшим, чтобы он не оказывал заметного действия на заряды, создающие электрическое поле. Эта сила, как видно из разобранных выше четырех примеров, пропорциональна заряду. Поэтому напряженность поля в точке, где находится пробный заряд, определяется как

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{q_0}. \quad (2.11)$$

Размерность напряженности в системе СИ  $[E] = \frac{\text{Н}}{\text{Кл}} = \frac{\text{В}}{\text{м}}$  (В — вольт, единица электрического напряжения).

Для графического изображения электрического поля используют *линии электрического поля*, или *силовые линии* — кривые, касательные к которым в любой точке совпадают по направлению с вектором  $\mathbf{E}$ .

Неподвижные заряды взаимодействуют посредством ЭМП, которое называется *электростатическим*. Напряженность электростатического поля в рассмотренных выше четырех примерах получается путем деления силы в формулах (2.6), (2.7), (2.8) и (2.10) на величину пробного заряда. Линия электростатического поля направлена от положительного к отрицательному заряду.

**Поле системы зарядов.** Для вычисления поля одного точечного заряда  $q$  на расстоянии  $r$  от него воспользуемся формулой (2.3), в которой положим  $q_1 = q$ ,  $q_2 = q_0$ ,  $\mathbf{F}_{12} = \mathbf{F}$ ,  $\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 = \mathbf{r}$ . В результате получим

$$\mathbf{E} = k \frac{q}{|\mathbf{r}|^3} \mathbf{r} = k \frac{q}{r^3} \mathbf{r}. \quad (2.12)$$



На рис. 2.8 изображены линии поля положительного (а) и отрицательного (б) точечных зарядов. По мере удаления от зарядов напряженность поля убывает, а плотность линий уменьшается. Если взять небольшую площадку  $\Delta S$ , перпендикулярную к направлению поля, и расположить ее, например, сначала на расстоянии  $r$ , а затем поместить на расстоянии  $2r$ , то количество пересекающих ее силовых линий уменьшится в 4 раза. Именно во столько раз уменьшится и напряженность поля. Следовательно, *плотность линий (в относительных единицах) пропорциональна величине напряженности поля*.

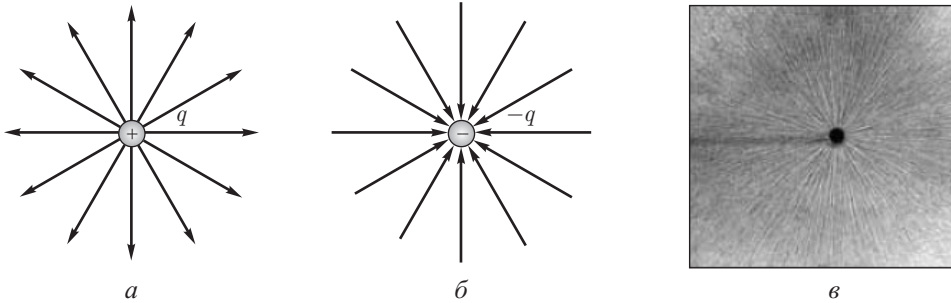


Рис. 2.8

Структуру силовых линий поля можно визуализировать, если в поле поместить жидкий изолятор (например, касторовое масло), в который подмешаны мельчайшие диэлектрические частички. Как будет показано далее, продолговатые частички будут ориентироваться длинной стороной вдоль вектора  $\mathbf{E}$ , образуя цепочки частиц вдоль силовых линий. На рис. 2.8в показаны результаты демонстрационного эксперимента по визуализации поля точечного заряда.

Пользуясь принципом суперпозиции, не составляет труда получить выражение для напряженности поля, создаваемого системой дискретных точечных зарядов. Если имеется  $N$  точечных зарядов  $q_i$ , расположенных в точках, задаваемых радиусами-векторами  $\mathbf{r}_i$ , то напряженность в точке  $\mathbf{r}$  будет равна

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = k \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^3} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_i). \quad (2.13)$$

На рис. 2.9 изображены силовые линии поля системы двух разноименных (а) и одноименных (б) зарядов, рассчитанные по формуле (2.13) и наблюдаемые экспериментально.

Получим выражение для напряженности поля, создаваемого зарядами, непрерывно распределенными по поверхности и объему заряженных тел. Для этого необходимо ввести поверхностную  $\sigma$  и объемную  $\rho$  плотности электрического заряда:

$$\sigma = \frac{\Delta q}{\Delta S}, \quad \rho = \frac{\Delta q}{\Delta V}. \quad (2.14)$$

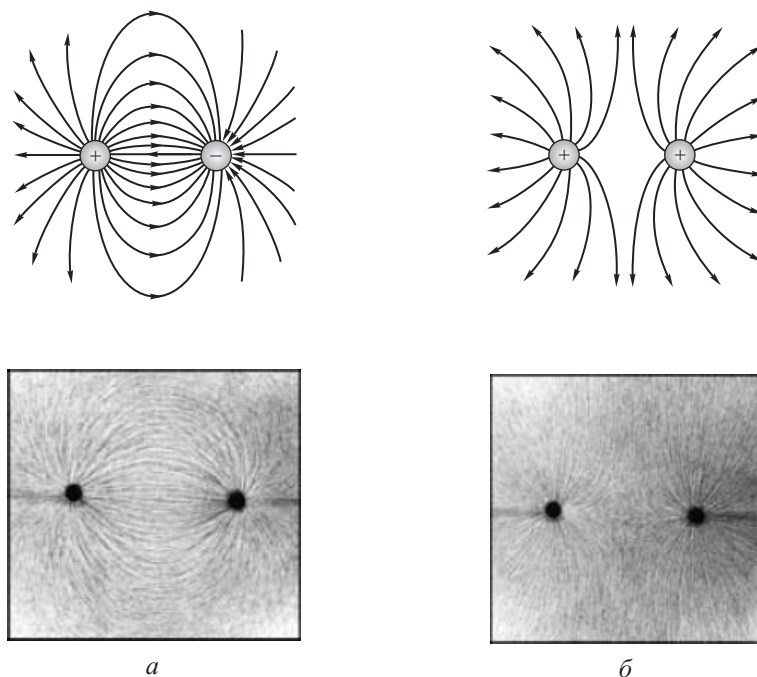


Рис. 2.9

Здесь  $\Delta q$  — заряд физически малых площадки  $\Delta S$  или объема  $\Delta V$  соответственно. Тогда поле в точке  $\mathbf{r}$  будет определяться выражением

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = k \iiint \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} (\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot dV + k \iint \frac{\sigma(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} (\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot dS, \quad (2.15)$$

где интегрирование осуществляется по координатам конца вектора  $\mathbf{r}'$ .

На рис. 2.10 изображены линии поля равномерно заряженного диска (а) и равномерно заряженной сферы (б). Отметим, что вблизи диска и вдали от его края линии параллельны, а электрическое поле однородно. На больших расстояниях линии расходятся так же, как и в случае точечного заряда.

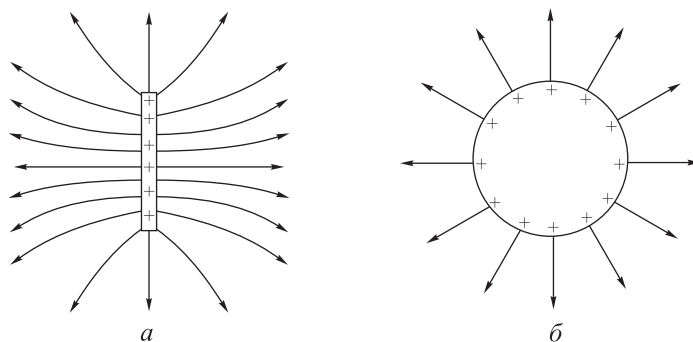


Рис. 2.10

*Справедливость принципа суперпозиции* подтверждается многочисленными экспериментами с высоковольтными разрядами, заряженными частицами в ускорителях, в электротехнике, где напряженность поля может достигать несколько миллионов вольт на метр. Соответствуют экспериментальным данным рассчитанные с использованием принципа суперпозиции энергетические уровни атомов, на орбитах электронов которых напряженность поля (внутриатомная напряженность) превышает величину  $10^{11}$  В/м. Вблизи поверхности тяжелых ядер  $E \sim 10^{22}$  В/м, однако и для таких гигантских значений напряженности выполняется принцип суперпозиции. Правда, при таких напряженностях возникают электронно-позитронные пары, влияющие на характер взаимодействия.

**Теорема Гаусса–Остроградского.** Поместим в электрическое поле с напряженностью  $\mathbf{E}$  бесконечно малую площадку  $dS$  так, как это изображено на рис. 2.11. Введем далее понятие потока вектора напряженности электрического через эту площадку, определяемого как

$$d\Phi_E = E \cdot dS \cdot \cos \alpha = \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} \cdot dS = \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}, \quad (2.16)$$

где  $\mathbf{n}$ —единичный вектор, перпендикулярный к площадке,  $d\mathbf{S} = \mathbf{n} \cdot dS$ .

Если принять, что *напряженность поля пропорциональна плотности линий* (числу линий, пересекающих площадку единичного сечения, ориентированную перпендикулярно полю), то *поток  $d\Phi_E$  пропорционален числу линий, пересекающих площадку  $dS$ , нормаль к которой составляет с вектором  $\mathbf{E}$  произвольный угол  $\alpha$ .*

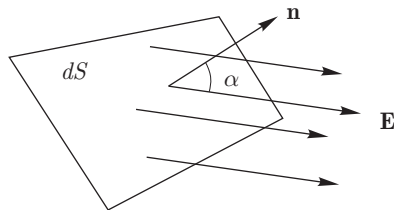


Рис. 2.11

Окружим далее точечный заряд  $q$  произвольной замкнутой поверхностью и вычислим поток  $\Phi_E$  поля этого заряда через замкнутую поверхность. Для этого необходимо вычислить интеграл

$$\Phi_E = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \oint k \frac{q}{r^3} \mathbf{r} \cdot d\mathbf{S}. \quad (2.17)$$

Если поверхностью является сфера радиуса  $r$ , в центре которой находится заряд (рис. 2.12 а), то поток, очевидно, равен

$$\Phi_E = \oint k \frac{q}{r^2} \cdot dS = k \frac{q}{r^2} \cdot 4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0}. \quad (2.18)$$

Если поверхность произвольна (рис. 2.12 б), то  $\mathbf{r} \cdot d\mathbf{S} = r \cdot dS_{\perp} = r \cdot r^2 \times \times d\Omega$  ( $dS_{\perp}$  — площадь перпендикулярной вектору  $\mathbf{r}$  площадки,  $d\Omega$  — элемент телесного угла). Поэтому

$$\Phi_E = \oint k \frac{q}{r^3} \mathbf{r} \cdot d\mathbf{S} = kq \int_0^{4\pi} d\Omega = kq \cdot 4\pi = \frac{q}{\varepsilon_0}.$$

Поскольку поток пропорционален числу линий, пересекающих поверхность, то ничего нет удивительного в том, что поток не зависит от формы поверхности.

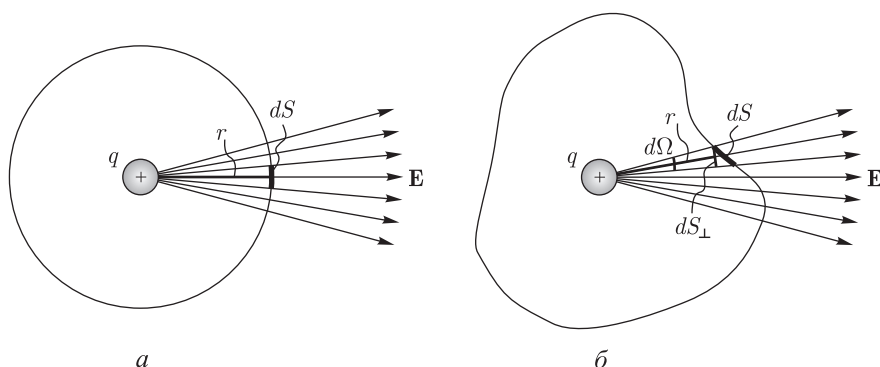


Рис. 2.12

Если имеется система  $N$  дискретных точечных зарядов, то в силу принципа суперпозиции полей *поток вектора напряженности суммарного электрического поля через произвольную замкнутую поверхность равен алгебраической сумме зарядов, находящихся внутри поверхности, деленной на постоянную  $\epsilon_0$* :

$$\Phi_E = \oiint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{i=1}^N q_i = \frac{q}{\epsilon_0}. \quad (2.19)$$

Здесь  $q = \sum_{i=1}^N q_i$  — полный заряд всей системы.

Утверждение, выделенное курсивом, составляет содержание теоремы Гаусса–Остроградского (далее для краткости теорема Гаусса).

**Замечание.** Как показывает опыт, *эта теорема справедлива не только для электростатических полей, но и для переменных электрических полей. Поэтому формула (2.19) имеет фундаментальное значение и является одним из уравнений Максвелла в интегральной форме применительно к вакууму.*

Она позволяет легко рассчитывать напряженность электрического поля, создаваемого заряженными телами, обладающими определенной симметрией.

**Пример 5.** Вычислим напряженность поля, создаваемого равномерно заряженным по объему плоским слоем толщиной  $b$ , считая заданной объемную плотность заряда,  $\rho > 0$ . Пользуясь теоремой Гаусса, можно вычислить напряженность в точках как внутри, так и снаружи слоя, если эти точки далеки от краев слоя, где поле имеет сложную структуру. Кроме того, расстояние от наружных точек до поверхности слоя должно быть значительно меньше его размеров — на малых расстояниях слой создает однородное электрическое поле.

Направим координатную ось  $Ox$  перпендикулярно слою, а начало координат поместим в середине слоя (рис. 2.13а). В силу симметрии задачи в области  $x > 0$  вектор  $\mathbf{E}$  будет направлен в положительном направлении координатной оси, а в области  $x < 0$  — в противоположном направлении. В качестве замкнутой поверхности  $\Sigma$  выберем цилиндр с площадью основания  $S$

и высотой  $2x$ . Тогда поток

$$\Phi_E = \oiint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = E \cdot 2S = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho \cdot S \cdot 2x, \quad |x| \leq b/2; \quad (2.20a)$$

$$\Phi_E = \oiint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = |E| \cdot 2S = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho \cdot S \cdot b, \quad |x| > b/2. \quad (2.20б)$$

Соответственно

$$E = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho \cdot x, \quad |x| \leq b/2; \quad (2.21a)$$

$$|E| = \frac{1}{2\varepsilon_0} \rho \cdot b, \quad |x| > b/2. \quad (2.21б)$$

Линии поля показаны на рис. 2.13б. Вблизи слоя поле однородно: силовые линии параллельны координатной оси. Внутри слоя линии нарисовать не представляется возможным — плотность линий должна увеличиваться по мере удаления от его середины. Распределение поля на оси  $Ox$  показано качественно на рис. 2.13в. Внутри слоя и на расстояниях, малых по сравнению с его линейными размерами, это распределение описывается формулами (2.21). Напротив, на больших расстояниях напряженность поля убывает обратно пропорционально квадрату расстояния, как это имеет место в случае точечного заряда.

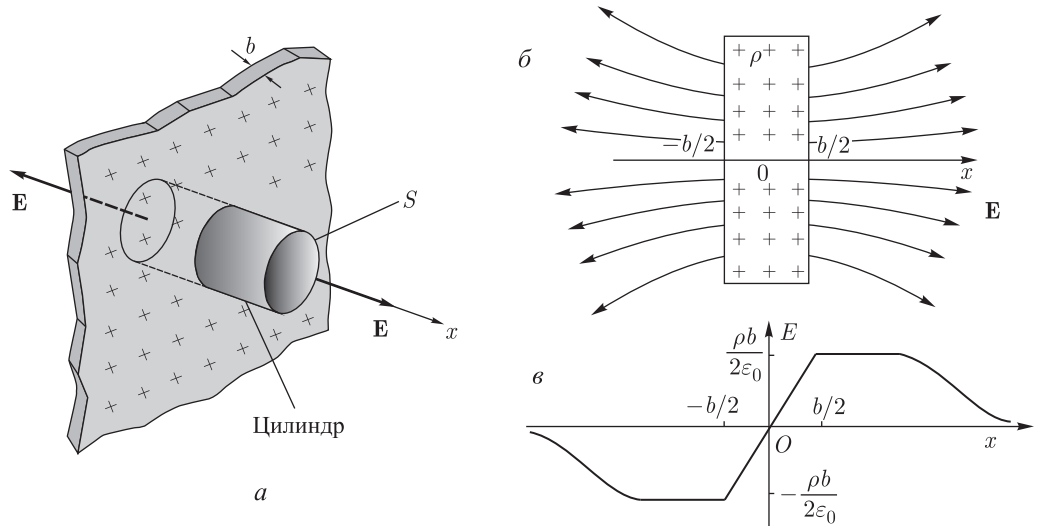


Рис. 2.13

Если толщина слоя мала, то можно ввести поверхностную плотность заряда  $\sigma = \rho \cdot b$ . Тогда слой можно рассматривать как заряженную плоскость, величина напряженности поля которой

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}. \quad (2.22a)$$

На расстояниях  $x$ , сравнимых с размерами слоя, формулы (2.21б) и (2.22) перестают быть справедливыми: поле начинает уменьшаться, а линии поля —

расходиться. На больших расстояниях поле слоя (плоскости) будет неотличимо от поля точечного заряда.

**Пример 6.** Рассмотрим структуру поля заряженного *плоского конденсатора*. Плоским конденсатором называются две параллельные проводящие пластины (обкладки) площадью  $S$ , расстояние  $l$  между которыми намного меньше линейных размеров пластин:  $l \ll \sqrt{S}$ . Когда на обкладках конденсатора находятся разноименные заряды с поверхностными плотностями  $\sigma$  и  $-\sigma$ , то напряженность поля в конденсаторе

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}. \quad (2.226)$$

Такое однородное поле при приближении к краям пластин постепенно искажается. Структура линий поля заряженного конденсатора показана на рис. 2.14а. Надо отметить, что вне конденсатора также существует слабое электрическое поле. Оно тем меньше, чем сильнее неравенство  $l \ll \sqrt{S}$ . На рис. 2.14б структура поля визуализирована.

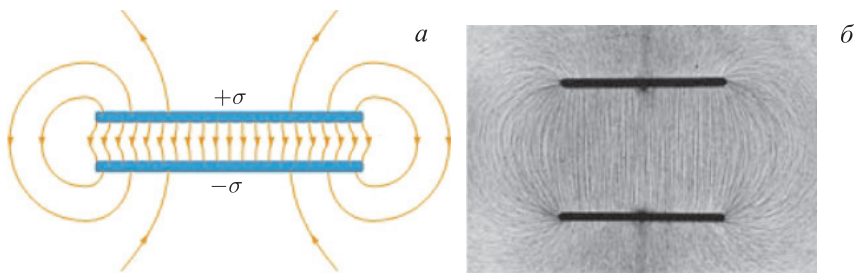


Рис. 2.14

**Пример 7.** Пусть имеется равномерно заряженный по всему объему шар радиусом  $R$ , заряд которого равен  $q$ . Пользуясь теоремой Гаусса, определим напряженность в точке, находящейся на произвольном расстоянии  $r$  от центра шара.

Поток через concentric с шаром сферическую поверхность  $\Sigma_1$  с радиусом  $r < R$  создается зарядом  $q(r^3/R^3)$ , находящимся внутри сферы (рис. 2.15а). Поэтому поток будет равен

$$\Phi_E = \oiint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = E \cdot 4\pi r^2 = \frac{1}{\varepsilon_0} q \frac{r^3}{R^3}. \quad (2.23a)$$

Через поверхность  $\Sigma_2$  с радиусом  $r > R$  поток

$$\Phi_E = \oiint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = E \cdot 4\pi r^2 = \frac{1}{\varepsilon_0} q. \quad (2.236)$$

Из этих выражений напряженность электрического поля получается равной

$$E = \frac{1}{4\pi r^2 \varepsilon_0} q \frac{r^3}{R^3} = \frac{q}{4\pi \varepsilon_0 R^2} \frac{r}{R}, \quad r \leq R, \quad (2.24a)$$

$$E = \frac{q}{4\pi \varepsilon_0 r^2}, \quad r > R. \quad (2.246)$$

Зависимости (2.24) изображены на рис. 2.15 б. Если весь заряд переместить на поверхность шара (случай сферы, равномерно заряженной по поверхности), то поле внутри шара будет равно нулю, а вне его останется прежним.

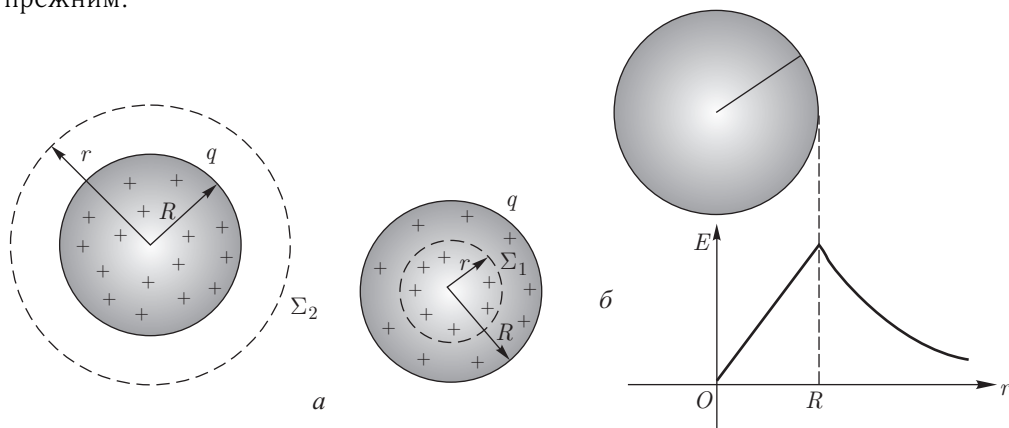


Рис. 2.15

Отсутствие поля внутри сферы, равномерно заряженной по поверхности ( $\sigma = \text{const}$ ), есть следствие того, что сила взаимодействия точечных зарядов обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними. Если бы эта сила зависела от расстояния по-другому, то поле было бы равно нулю лишь в центре сферы.

Чтобы убедиться в этом, вычислим напряженность поля в произвольной точке  $P$  внутри сферы (рис. 2.16), предполагая, что сила взаимодействия

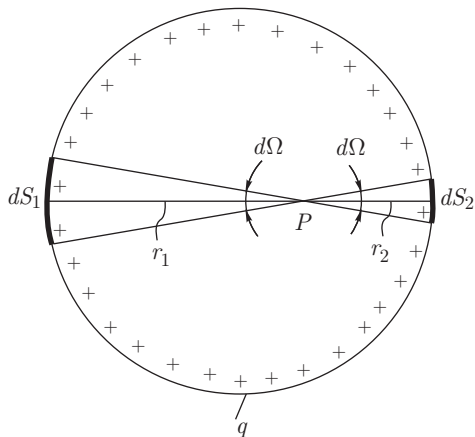


Рис. 2.16

$F \sim 1/r^{2+\alpha}$  ( $\alpha$  — некоторая величина). Проведем через эту точку диаметр сферы и построим вокруг него два одинаковых элементарных телесных угла  $d\Omega$ . Эти углы будут опираться на элементарные площадки  $dS_1 = d\Omega \cdot r_1^2$  и  $dS_2 = d\Omega \cdot r_2^2$ , удаленные от рассматриваемой точки на расстояния  $r_1$  и  $r_2$ .

Заряды площадок будут равны  $dq_1 = \sigma \cdot dS_1 = \sigma \cdot d\Omega \cdot r_1^2$  и  $dq_2 = \sigma \cdot dS_2 = \sigma \cdot d\Omega \cdot r_2^2$  соответственно. Создаваемая этими зарядами напряженность поля в рассматриваемой точке

$$dE = k \frac{dq_1}{r_1^{2+\alpha}} - k \frac{dq_2}{r_2^{2+\alpha}} = k \cdot d\Omega \left( \frac{1}{r_1^\alpha} - \frac{1}{r_2^\alpha} \right). \quad (2.25)$$

Эта напряженность будет равна нулю, если  $\alpha = 0$ . Аналогично можно рассмотреть попарно вклад в напряженность остальных заряженных фрагментов сферы и прийти к тому же выводу.

**Экспериментальные основания закона Кулона.** В 1772 г. (за 13 лет до открытия Кулоном его закона) британский физик и химик Г. Кавендиш экспериментально установил, что сила взаимодействия точечных зарядов обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними. В своих опытах он помещал заряженный металлический шар внутрь полый металлической сферы, образованной двумя полусферами. После приведения в контакт шара со сферой и последующего удаления полусфер выяснилось, что шар стал незаряженным.

Если бы в законе взаимодействия зарядов  $F \sim 1/r^{2+\alpha}$ ,  $\alpha \neq 0$ , то поле внутри проводящего шара равнялось бы нулю при наличии части заряда внутри шара. Тщательно измеряя потенциал шара (и, следовательно, заряд), Кавендиш установил, что, по крайней мере,  $|\alpha| \leq 0,02$ .

Таким образом, Кавендиш первым экспериментально установил закон взаимодействия электрических зарядов. Однако он не обнаружил своего открытия, и оно оставалось долгое время неизвестным. О нем узнали лишь в середине XIX столетия, после того как работу Кавендиша опубликовал Максвелл. Однако к этому времени она имела уже чисто исторический интерес.

Сам Максвелл с большей точностью повторил эксперимент Кавендиша и установил, что  $|\alpha| \leq 5 \cdot 10^{-5}$ .

В 1971 г. в усовершенствованных опытах с двумя концентрическими проводящими сферами было установлено, что  $|\alpha| \leq 10^{-16}$ .

Эти эксперименты позволили установить справедливость закона Кулона в лабораторных условиях ( $r \sim 1$  м).

Для больших расстояний используют косвенные методы. Поскольку электромагнитное взаимодействие осуществляется обменом фотонами, то можно показать, что  $\alpha \rightarrow 0$ , если масса фотона  $m_\phi \rightarrow 0$ . Эта масса связана с энергией фотона,  $\varepsilon_\phi = h\nu$ , частотой  $\nu$  и импульсом  $p_\phi$  соотношением  $m_\phi c^2 = \sqrt{\varepsilon_\phi^2 - (p_\phi c)^2}$ , где  $h = 6,28 \cdot 10^{-34}$  Дж · с — постоянная Планка. Поэтому справедливо неравенство

$$m_\phi \leq \frac{h\nu}{c^2}.$$

Из всех известных в настоящее время электромагнитных волн наименьшей частотой обладают стоячие волны, или резонансы Шумана, которые огибают земной шар (см. лекцию 20). Если принять наименьшую частоту равной  $\nu = 8$  Гц, то  $m_\phi \leq 0,6 \cdot 10^{-50}$  кг. Следовательно, если положить,



что  $m_\phi \leq 10^{-50}$  кг, то, как следует из теории,  $|\alpha| \leq 10^{-16}$ . Таким образом, закон Кулона выполняется с большой точностью для расстояний в десятки тысяч километров.

Упомянутые выше опыты Резерфорда и опыты по рассеянию высокоэнергетичных электронов на нуклонах позволили установить, что закон Кулона будет справедлив и на чрезвычайно малых расстояниях, вплоть до сотых долей фемтометра.

**Дифференциальная форма теоремы Гаусса.** Пусть имеется некое непрерывное распределение электрического заряда с объемной плотностью  $\rho(x, y, z)$ . Этот распределенный заряд создает электрическое поле с напряженностью  $E(x, y, z)$ . Установим связь между этими величинами в одной и той же точке пространства. Для этого рассмотрим малый объем в виде кубика со сторонами  $\Delta x, \Delta y, \Delta z$  и запишем для него уравнение (2.19):

$$\begin{aligned} \Phi_E = & E_x(x + \Delta x/2, y, z) \cdot \Delta y \cdot \Delta z - E_x(x - \Delta x/2, y, z) \cdot \Delta y \cdot \Delta z + \\ & + E_y(x, y + \Delta y/2, z) \cdot \Delta x \cdot \Delta z - E_y(x, y - \Delta y/2, z) \cdot \Delta x \cdot \Delta z + \\ & + E_z(x, y, z + \Delta z/2) \cdot \Delta x \cdot \Delta y - E_z(x, y, z - \Delta z/2) \cdot \Delta x \cdot \Delta y = \\ & = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho \cdot \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Разделим обе части равенства на объем  $\Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z$ . Устремляя его к нулю, получаем

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}. \quad (2.27)$$

Равенство (2.27) является дифференциальной формой теоремы Гаусса, или *уравнением Максвелла в дифференциальной форме применительно к вакууму*. Если это уравнение проинтегрировать, то можно установить искомую связь между полем и зарядами.

**Электрическое поле Земли.** Опыт показывает, что вблизи поверхности Земли существует электрическое поле. Возникновение этого поля связано в основном с процессами ионизации воздуха под действием космических лучей, ультрафиолетового излучения Солнца; излучения радиоактивных веществ, имеющих на поверхности Земли и в воздухе; электрических разрядов в атмосфере и т. д.

В результате происходит пространственное разделение зарядов: поверхность Земли становится заряженной отрицательно, а над ней находится положительно заряженная атмосфера, содержащая большое число ионизованных молекул.

Напряженность поля вблизи поверхности Земли в среднем составляет около 100 В/м. Если воспользоваться формулой (2.12), записав ее в виде  $E = k(q/R_3^2)$ , и принять радиус Земли  $R_3 = 64\,000$  км, то заряд Земли  $q = 0,46 \cdot 10^6$  Кл.

При осадках и особенно грозах, метелях, пылевых бурях и т. п. напряженность поля может резко менять направление и величину, достигая иногда 1000 В/м. Наибольшие значения  $\mathbf{E}$  имеет в средних широтах, а к полюсам и экватору убывает. Вблизи земной поверхности в слое перемешивания толщиной 300–3000 м, где скапливаются аэрозоли, напряженность поля может

даже с высотой возрастать. Выше слоя перемешивания она убывает с высотой по экспоненциальному закону и на высоте 10 км не превышает нескольких вольт на метр. Это убывание связано с тем, что в атмосфере содержатся положительные объемные заряды, плотность которых также быстро убывает с высотой.

**Электростатический фильтр.** Взаимодействие заряженных частиц используется в электростатическом фильтре для очистки воздуха от содержащихся в нем пыли и аэрозолей. Принцип очистки демонстрируется в лекционном эксперименте. В прямоугольной кювете, заполненной дымом, сверху и снизу находятся параллельные горизонтальные пластины (рис. 2.17 а). При подаче на пластины высокого напряжения от электрофорной машины частички ионизируются и начинают оседать на отрицательно заряженной нижней пластине (рис. 2.17 б). Через некоторое время воздух очищается от дыма (рис. 2.17 в).

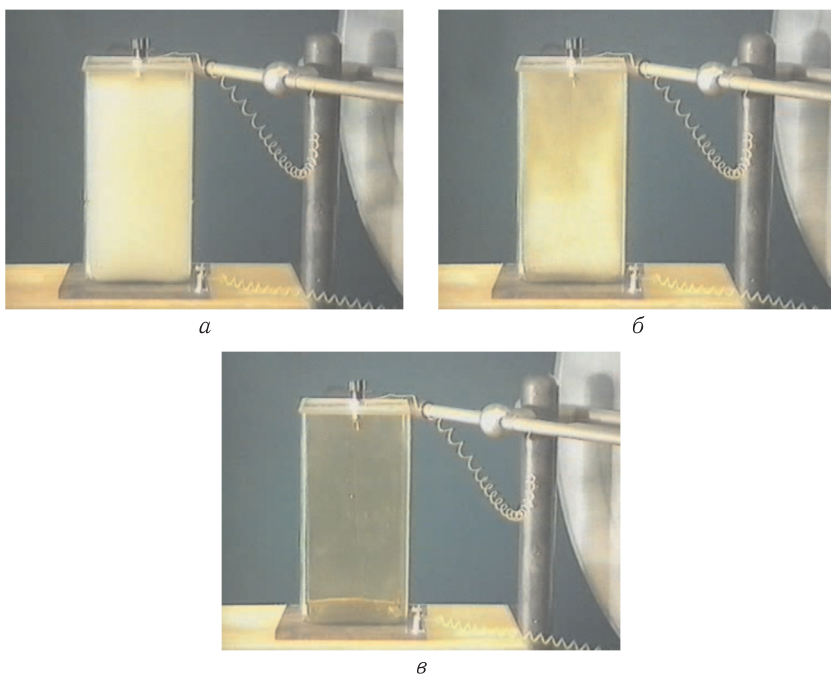


Рис. 2.17

Устройство промышленного фильтра показано на рис. 2.18. Частицы пыли или аэрозоля, пройдя через предварительный фильтр, попадают в ионизатор, который состоит из чередующихся металлических пластин и нитей. Между нитями и пластинами за счет высокого приложенного напряжения  $\sim 10$  кВ создается сильное электрическое поле и возникает коронный разряд, в котором частицы ионизируются (становятся положительно заряженными). Пройдя через разряд, они попадают в осадитель, представляющий собой систему пластин с чередующимся положительным и отрицательным значением потенциала. Разность потенциалов между соседними пластинами может достигать

нескольких киловольт. Положительные ионы примеси будут оседать на пластинах с отрицательным потенциалом. Затем воздух может проходить через дополнительные фильтры (постфильтр и химкассета), подвергаясь дальнейшей очистке.

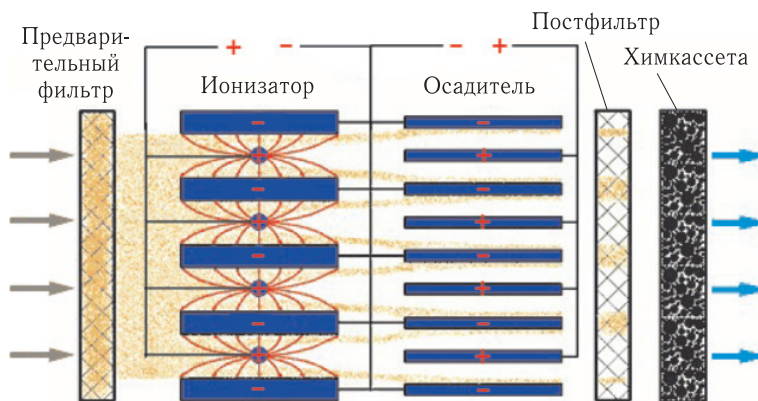


Рис. 2.18



Рис. 2.19

Электростатические фильтры способны эффективно очищать воздух от самой мелкой пыли (размером до  $0,01 \text{ мкм}$ ), в том числе копоти и табачного дыма. С начала XX в. они стали широко применяться в промышленности. На рис. 2.19 показаны фотографии дымящихся заводских труб с электростатической фильтрацией и без нее.

**Атомный силовой микроскоп.** Для определения рельефа поверхности с разрешением вплоть до атомных размеров используется атомно-силовой микроскоп (АСМ), созданный в 1982 г. Г. Биннигом, К. Куэйтом и К. Гербером (США). Схема АСМ показана на рис. 2.20. Принцип его работы основан на регистрации силового взаимодействия между поверхностью

исследуемого образца и зондом. В качестве зонда применяется наноразмерное острие (шип), располагающееся на конце упругой консоли (пластинки), называемой кантилевером.

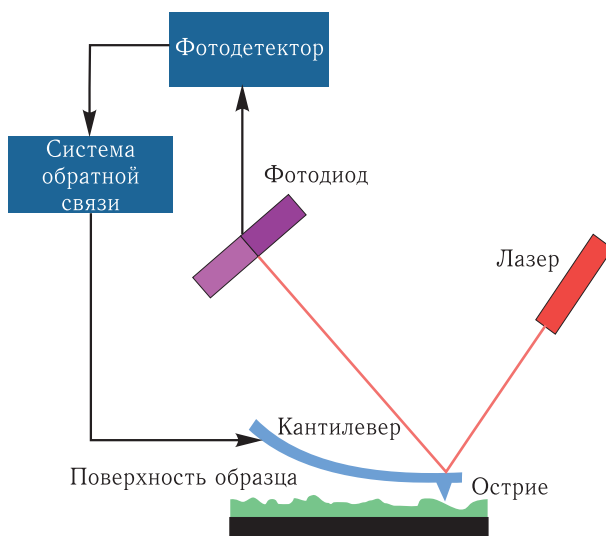


Рис. 2.20

Сила, действующая на зонд со стороны поверхности, приводит к изгибу консоли. Появление возвышенностей или впадин под острием влечет изменение силы, действующей на зонд, а значит, и изменение величины изгиба кантилевера. Таким образом, регистрируя величину изгиба, можно сделать вывод о рельефе поверхности.

Зонд и образец взаимодействуют посредством сил Ван-дер-Ваальса, которые на больших расстояниях являются силами притяжения, а при сближении переходят в силы отталкивания. Для того чтобы «почувствовать» взаимодействие атома с атомом, необходимо, чтобы зонд был атомных размеров. Поэтому реальные зонды имеют поперечные размеры от десятка нанометров до размера одного атома! Их длина составляет несколько микрометров.

Для зонда, имеющего радиус кривизны  $R$  ( $R > z$ , где  $z$  — расстояние от зонда до поверхности абсолютно плоского образца), сила притяжения  $F \propto R/z^2$  (формула Гамакера), а сила отталкивания  $F \propto 1/z^8$ .

При работе в так называемом контактном режиме острие кантилевера находится в непосредственном контакте с образцом, при этом на острие действуют силы отталкивания. Сканирование (перемещение в горизонтальной плоскости образца с исследуемой поверхностью) осуществляется, как правило, в режиме постоянной силы, когда система обратной связи, приподнимая или опуская консоль (или образец) с помощью пьезоэлектрического манипулятора, поддерживает постоянной величину изгиба кантилевера.

При исследовании образцов с перепадами высот порядка единиц ангстрем можно применять режим сканирования при постоянном среднем расстоянии

между зондом и поверхностью образца. В этом случае кантилевер движется на некоторой средней высоте над образцом.

Изгиб консоли контролируется высокоточными оптическими методами. Для этого на конце кантилевера расположена зеркальная площадка, от которой отражается луч лазера. Когда зонд опускается и поднимается на неровностях поверхности, отраженный луч отклоняется, и это отклонение регистрируется фотодиодом, сигнал с которого поступает в фотодетектор. Сила, с которой зонд взаимодействует с атомами поверхности, измеряется дополнительно пьезодатчиком (не показанном на рисунке). Данные фотодетектора и пьезодатчика используются в системе обратной связи, которая может обеспечивать, например, постоянную величину силы взаимодействия между зондом и поверхностью образца.

В результате можно строить объемный рельеф поверхности образца в режиме реального времени. Разрешающая способность данного метода составляет примерно 0,1–1 нм по горизонтали и 0,01 нм по вертикали.

На рис. 2.21 показано изображение поверхности тонкой пластинки из золота. Отчетливо видны области атомарных размеров, указывающие на местоположение отдельных атомов.

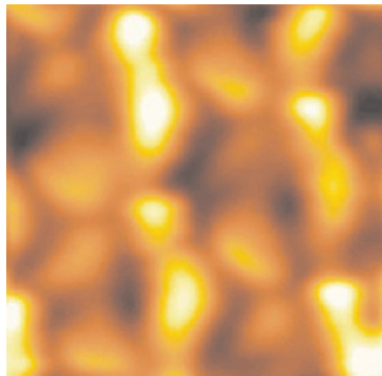


Рис. 2.21

## ЛЕКЦИЯ 3

**Электрическое напряжение.** При перемещении заряда  $q_0$  в электрическом поле с напряженностью  $\mathbf{E}$  по некоторому пути из точки 1 в точку 2, поле будет совершать работу, равную

$$A_{12} = q_0 \int_1^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}. \quad (3.1)$$

Энергетической характеристикой поля является *электрическое напряжение между этими точками*

$$U_{12} = \frac{A_{12}}{q_0} = \int_1^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}, \quad (3.2)$$

равное работе, совершаемой полем по перемещению единичного положительного пробного заряда. Единицей электрического напряжения является 1 вольт:  $1 \text{ В} = 1 \text{ Дж}/1 \text{ Кл}$ , а единицей напряженности электрического поля —  $1 \text{ В/м}$ .

**Разность потенциалов.** Если поле создается неподвижными зарядами, то электрическое напряжение не зависит от формы пути и может быть представлено в виде разности потенциалов:

$$U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2. \quad (3.3)$$

Чтобы убедиться в этом, воспользуемся формулой (2.12) и вычислим вначале электрическое напряжение между точками  $\mathbf{r}_1$  и  $\mathbf{r}_2$  в поле, создаваемом точечным зарядом  $q$  (рис. 3.1):

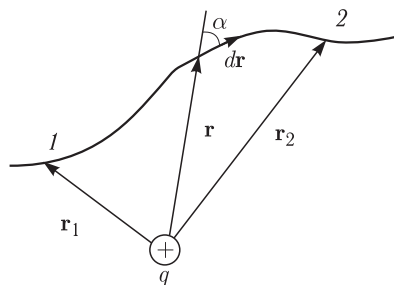


Рис. 3.1

$$U_{12} = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} k \frac{q}{r^3} \mathbf{r} \cdot d\mathbf{r}. \quad (3.4)$$

Из рисунка видно, что  $\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = |\mathbf{r}| \cdot |d\mathbf{r}| \cdot \cos \alpha = |\mathbf{r}| \cdot d|\mathbf{r}| = r \cdot dr$ . Поэтому

$$U_{12} = \int_{r_1}^{r_2} k \frac{q}{r^3} r \cdot dr = k \frac{q}{r_1} - k \frac{q}{r_2} = \varphi_1 - \varphi_2. \quad (3.5)$$

Если поле создается системой зарядов, то в силу принципа суперпозиции электрическое напряжение будет равно алгебраической сумме электрических напряжений вида (3.5) и, следовательно,  $U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2$ .

Поле, для которого электрическое напряжение между двумя точками зависит от положения этих точек и не зависит от формы пути, называется *потенциальным*. Таким образом, электростатическое поле потенциально.

Нетрудно видеть, что для потенциального поля интеграл (3.2) по замкнутому контуру

$$\oint \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = 0. \quad (3.6)$$

Интеграл в этом выражении называется *циркуляцией вектора напряженности электрического поля*.

Поэтому другим (эквивалентным) *определением потенциальности поля является равенство нулю циркуляции вектора напряженности*.

Если размеры контура стягивать в точку, то выражение (3.6) можно свести к дифференциальной форме, вводя ротор вектора напряженности электрического поля  $\text{rot } \mathbf{E}$  в соответствии с определением

$$(\text{rot } \mathbf{E})_n = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\oint \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}}{\Delta S}. \quad (3.7)$$

Здесь  $\Delta S$  — площадь маленького контура,  $\mathbf{n}$  — нормаль к площадке, направленная туда же, куда и острие буравчика, рукоятка которого вращается в положительном направлении обхода контура.

Вычислим проекции вектора  $\text{rot } \mathbf{E}$  на координатные оси. Вначале расположим малый контур в окрестности точки с координатами  $(x, y, z)$  параллельно плоскости  $yOz$ , а нормаль к нему — в положительном направлении оси  $Ox$  (рис. 3.2), и будем обходить контур в последовательности 1-2-3-4. Тогда, в соответствии с (3.7),

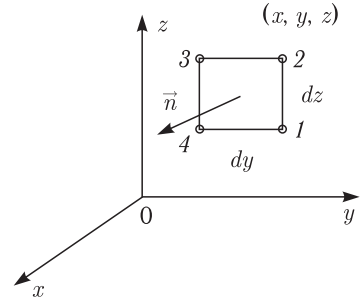


Рис. 3.2

$$\begin{aligned} (\text{rot } \mathbf{E})_x &= \frac{1}{dy \cdot dz} \left[ E_z(x, y + dy/2, z) \cdot dz - E_y(x, y, z + dz/2) \cdot dy - \right. \\ &\quad \left. E_z(x, y - dy/2, z) \cdot dz + E_y(x, y, z - dz/2) \cdot dy \right] = \\ &= \left( \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right). \end{aligned} \quad (3.8)$$

Вычисляя аналогично и две другие компоненты  $\text{rot } \mathbf{E}$ , условие потенциальности поля (3.6) можем записать в локальной форме:

$$\text{rot } \mathbf{E} = \left( \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left( \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left( \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) \mathbf{k} = 0. \quad (3.9)$$

В тех случаях, когда напряжение зависит от формы пути (вихревое электрическое поле и др.), употребляется также термин *электродвижущая сила* (ЭДС):

$$\mathcal{E}_{12} = \int_1^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}. \quad (3.10)$$

Этот термин чаще всего используется, когда в поле находится проводник, а его концы совпадают с точками 1 и 2. Тогда говорят, что к концам проводника приложена ЭДС.

**Потенциал.** Вместо разности потенциалов  $\varphi_1 - \varphi_2$  часто используют понятие потенциал, подобно тому, как в механике вводится потенциальная энергия, если оговорено, что принимается за уровень ее отсчета.

Если принять за уровень отсчета  $\varphi_0 = \varphi_2$  в точке  $\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_0$ , то потенциал в любой точке  $\mathbf{r}$  будет равен

$$\varphi(\mathbf{r}) = \int_{\mathbf{r}}^{\mathbf{r}_0} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} + \varphi_0. \quad (3.11)$$

Такая процедура называется нормировкой потенциала. Выбор точки  $\mathbf{r}_0$  диктуется соображениями удобства. Для системы точечных зарядов  $\mathbf{r}_0 \rightarrow \infty$  и полагают  $\varphi_0 = 0$ . Для бесконечно большой заряженной плоскости или слоя точка  $\mathbf{r}_0$  в рамках рассматриваемой модели заряженного тела должна находиться вблизи поверхности этих заряженных тел. В электротехнике точка отсчета потенциала находится на поверхности Земли, где  $\varphi_0 = 0$ , и т. д.

*Потенциал является непрерывной функцией координат.* Для изображения распределения потенциала служат поверхности одинакового потенциала  $\varphi(\mathbf{r}) = \text{const}$ , или *эквипотенциальные поверхности*. При перемещении заряда вдоль эквипотенциальной поверхности работа поля равна нулю. Поэтому *эквипотенциальные поверхности перпендикулярны силовым линиям*.

Потенциал поля точечного заряда при указанной выше нормировке получается из (3.5) равным

$$\varphi(r) = k \frac{q}{r}. \quad (3.12)$$

На рис. 3.3а показано распределение потенциала поля точечного заряда в относительных единицах. Рядом (б) изображена проекция этого распределения на плоскость. Разными цветами выделены области, соответствующие одинаковому изменению потенциала. По мере удаления от заряда ширина

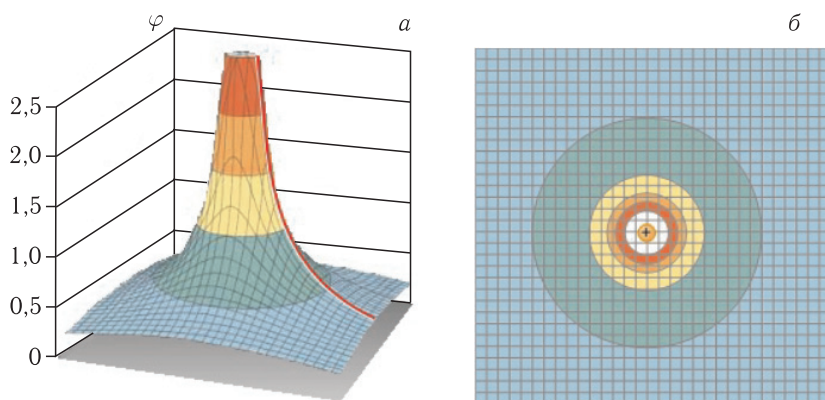


Рис. 3.3



цветных колец (в проекции на плоскость) увеличивается, а напряженность поля уменьшается.

Если имеется система  $N$  дискретных зарядов, то с учетом (2.13) и по аналогии с (3.12) потенциал создаваемого этими зарядами поля будет равен

$$\varphi(\mathbf{r}) = k \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|}. \quad (3.13a)$$

На рис. 3.4 изображено распределение потенциала поля двух одинаковых разноименных зарядов. Линия нулевого потенциала это бесконечная прямая, проходящая на равном удалении от обоих зарядов. На больших расстояниях

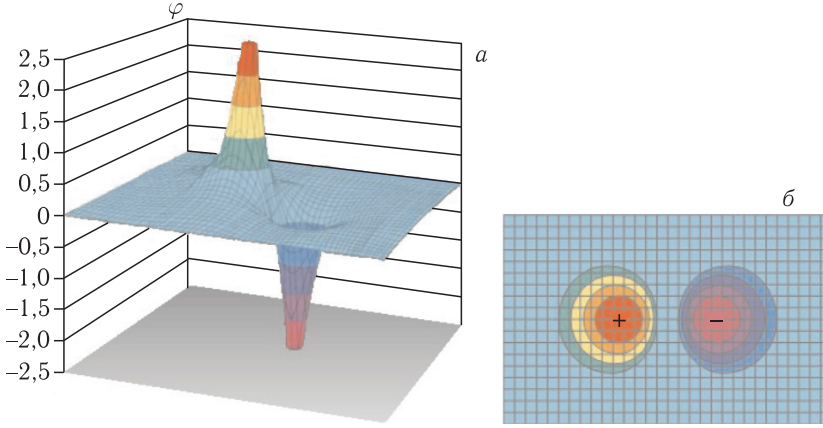


Рис. 3.4

эти заряды могут рассматриваться как диполь, обладающий дипольным моментом  $\mathbf{p} = ql$  (см. рис. 2.2 *a*). Тогда

$$\varphi = \varphi_+ + \varphi_- = kq \left[ \frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-} \right] = kq \left[ \frac{r_- - r_+}{r_+ r_-} \right] \approx k \frac{ql \cos \vartheta}{r^2} = k \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^3}. \quad (3.13b)$$

В случае непрерывного распределения заряда по аналогии с (2.15) для потенциала получаем

$$\varphi(\mathbf{r}) = k \iiint \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV + k \iint \frac{\sigma(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dS. \quad (3.14)$$

**Пример 1.** Вычислим потенциал поля, создаваемого равномерно заряженным по объему тонким плоским слоем толщиной  $b$ , считая заданной объемную плотность заряда  $\rho$ . Поскольку напряженность поля описывается формулами (2.21), то полагая, что при  $x_0 = 0$  потенциал  $\varphi_0 = 0$ , из (3.11) получаем

$$\varphi_1(x) = \int_x^0 \frac{1}{\varepsilon_0} \rho \cdot x \cdot dx = -\frac{1}{2\varepsilon_0} \rho \cdot x^2; \quad |x| \leq b/2, \quad (3.15a)$$

$$\varphi_2(x) = \int_{b/2}^0 \frac{1}{\varepsilon_0} \rho \cdot x \cdot dx + \int_x^{b/2} \frac{1}{2\varepsilon_0} \rho \cdot b \cdot dx = -\frac{1}{8\varepsilon_0} \rho \cdot b^2 + \frac{1}{2\varepsilon_0} \rho \cdot b \left( \frac{b}{2} - x \right);$$

$$|x| > b/2. \quad (3.156)$$

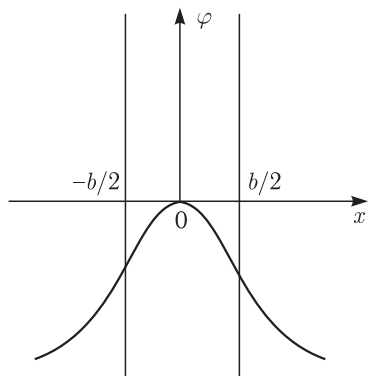


Рис. 3.5

Распределение потенциала изображено при  $\rho > 0$  на рис. 3.5. Как уже отмечалось, формулы (2.21), а следовательно, и (3.15) справедливы при небольших значениях координаты  $x$ . При  $x \rightarrow \infty$  поле начнет уменьшаться (как у точечного заряда), а потенциал будет стремиться к постоянной отрицательной величине.

**Пример 2.** Определим потенциал в точке, находящейся на произвольном расстоянии  $r$  от центра равномерно заряженного по всему объему шара радиуса  $R$ , заряд которого равен  $q$ . Для этого полагаем, что при  $r_0 \rightarrow \infty$  величина  $\varphi_0 \rightarrow 0$  и с использованием формул (2.24) получаем

$$\varphi_1(r) = \int_r^R \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2} \frac{r}{R} \cdot dr + \int_R^\infty \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \cdot dr = \frac{q}{8\pi\varepsilon_0 R^3} (R^2 - r^2) + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R};$$

$$r \leq R, \quad (3.16a)$$

$$\varphi_2(r) = \int_r^\infty \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \cdot dr = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}; \quad r > R. \quad (3.16б)$$

Распределение потенциала (3.16) показано на рис. 3.6. Важно отметить, что потенциал поля в центре шара больше, чем на его поверхности. Если заряд шара переместить на его поверхность (случай равномерно заряженной сферы), то поле внутри шара будет равно нулю, а потенциал всех его точек будет равен потенциалу поверхности

$$\varphi(R) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}. \quad (3.16в)$$

**Пример 3.** Вычислим потенциал поля, создаваемого равномерно заряженной по объему бесконечно длинной нитью радиуса  $R$ , считая заданной объемную плотность заряда  $\rho$ . Сначала с помощью теоремы Гаусса вычислим напряженность поля, для чего окружим нить цилиндрической поверхностью радиуса  $r$  и длиной  $l$ . Если  $r \geq R$ , то  $E \cdot 2\pi r l = \rho \pi R^2 l / \varepsilon_0$ . Полагая на поверхности нити потенциал равным  $\varphi_0$ , получаем

$$\varphi(r) = \int_r^R E \cdot dr + \varphi_0 = \int_r^R \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0 r} \cdot dr + \varphi_0 = \varphi_0 - \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0} \ln \frac{r}{R}; \quad (r > R). \quad (3.17a)$$

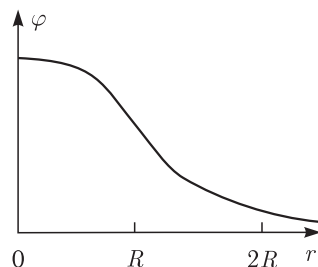


Рис. 3.6

Если  $r \leq R$ , то  $E \cdot 2\pi r l = \rho \pi r^2 l / \varepsilon_0$ , и

$$\varphi(r) = \int_R^r E \cdot dr + \varphi_0 = \int_r^R \frac{\rho r}{2\varepsilon_0} \cdot dr + \varphi_0 = \varphi_0 + \frac{\rho(R^2 - r^2)}{4\varepsilon_0}, \quad (r \leq R). \quad (3.176)$$

**Локальная связь между напряженностью поля и потенциалом.** Если в выражении (3.11) начальная и конечная точки интегрирования настолько близки, что  $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r} + d\mathbf{r}$ , то можно записать

$$\varphi(\mathbf{r}) - \varphi_0 = \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = E_x(\mathbf{r}) \cdot dx + E_y(\mathbf{r}) \cdot dy + E_z(\mathbf{r}) \cdot dz. \quad (3.18a)$$

С другой стороны,

$$\varphi(\mathbf{r}) - \varphi_0 = \varphi(\mathbf{r}) - \varphi(\mathbf{r} + d\mathbf{r}) = -d\varphi = - \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz \right]. \quad (3.18b)$$

Следовательно,

$$E_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad E_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z}, \quad (3.19a)$$

или

$$\mathbf{E} = - \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \mathbf{k} \right) = -\text{grad } \varphi = -\nabla \varphi. \quad (3.19b)$$

Здесь оператор  $\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k}$ .

Выражения (3.19) устанавливает локальную связь (в одной точке пространства) между напряженностью электростатического поля и потенциалом. Из него следует, что вектор  $\mathbf{E}$  ориентирован в направлении наиболее быстрого убывания потенциала.

В рассмотренных выше двух примерах распределение потенциала находилось путем интегрирования известного выражения для напряженности электростатического поля. Однако при заданном распределении зарядов можно было, минуя вычисление поля, воспользоваться выражением (3.14) и прийти к тем же результатам. Тем более что вычисление интеграла (3.14) от скалярной функции намного проще, чем вычисление интеграла (2.15) от векторной функции. После вычисления потенциала, применив операцию (3.19), можно затем и вычислить три компоненты вектора  $\mathbf{E}$ .

**Уравнение Пуассона.** Связь между объемной плотностью заряда и потенциалом можно получить также в локальном виде. Для этого в уравнение (2.27)

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

подставим значения компонент поля из (3.19a). В результате получим уравнение Пуассона

$$\Delta \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}. \quad (3.20)$$

Здесь  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$  — оператор Лапласа. Уравнение

$$\Delta \varphi = 0 \quad (3.21)$$

называется уравнением Лапласа и может рассматриваться как частный случай уравнения Пуассона.

В ряде случаев с помощью этих уравнений можно значительно проще рассчитать распределение потенциала, чем вычислять интеграл в (3.14), хотя, конечно, это интегральное выражение является решением уравнения (3.20). В качестве иллюстрации рассчитаем распределение потенциала поля заряженного слоя и шара.

**Пример 4.** В случае заряженного слоя, рассмотренного в примере 1, внутри слоя распределение потенциала  $\varphi_1(x)$  подчиняется уравнению Пуассона

$$\Delta\varphi_1 = \frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}, \quad |x| \leq b/2.$$

Его решение имеет вид

$$\varphi_1(x) = -\frac{\rho}{2\varepsilon_0}x^2 + A_1x + B_1, \quad (3.22a)$$

где  $A_1$  и  $B_1$  — некоторые константы, подлежащие определению.

Вне слоя распределение потенциала  $\varphi_2(x)$  подчиняется уравнению Лапласа

$$\Delta\varphi_2 = \frac{\partial^2\varphi_2}{\partial x^2} = 0, \quad |x| > b/2,$$

решение которого может быть записано в виде

$$\varphi_2(x) = A_2x + B_2. \quad (3.22б)$$

Из условия нормировки  $\varphi_1(0) = 0$  получаем  $B_1 = 0$ , а из четности функции  $\varphi_1(x)$  следует, что  $A_1 = 0$ . Непрерывность потенциала на границе слоя ( $x = b/2$ ) позволяет записать

$$\varphi_1(x) = \varphi_2(x) \quad \text{или} \quad -\frac{\rho}{2\varepsilon_0}\left(\frac{b}{2}\right)^2 = A_2\frac{b}{2} + B_2. \quad (3.23a)$$

При объемном распределении заряда напряженность поля будет также непрерывной функцией на границе слоя

$$E_1 = -\frac{\partial\varphi_1}{\partial x} = E_2 = -\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}, \quad \text{или} \quad \frac{\rho}{\varepsilon_0}\frac{b}{2} = -A_2. \quad (3.23б)$$

Из (3.23a) получаем  $B_2 = \frac{\rho \cdot b^2}{8\varepsilon_0}$ . Поэтому

$$\varphi_1(x) = -\frac{\rho}{2\varepsilon_0}x^2, \quad \varphi_2(x) = -\frac{\rho}{2\varepsilon_0}b \cdot x + \frac{\rho \cdot b^2}{8\varepsilon_0}, \quad (3.24)$$

что совпадает с (3.15).

**Пример 5.** Для шара, рассмотренного в примере 2, удобно использовать сферические координаты. Уравнение Пуассона, с учетом сферической симметрии задачи, имеет вид

$$\Delta\varphi_1 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial\varphi_1}{\partial r} \right) = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}, \quad r \leq R.$$

Его решение содержит две константы:

$$\varphi_1(r) = -\frac{\rho}{6\varepsilon_0}r^2 + \frac{A_1}{r} + B_1. \quad (3.25a)$$

Соответственно уравнение Лапласа

$$\Delta\varphi_2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial r} \right) = 0, \quad r > R,$$

имеет решение также с двумя константами:

$$\varphi_2(r) = \frac{A_2}{r} + B_2. \quad (3.25b)$$

Из условия нормировки,  $\varphi_2(r) \rightarrow 0$  при  $r \rightarrow \infty$ , получаем  $B_2 = 0$ . Из конечности значения потенциала в центре шара следует, что  $A_1 = 0$ . Записывая далее условие непрерывности потенциала на поверхности шара ( $r = R$ )

$$\varphi_1(r) = \varphi_2(r), \quad \text{или} \quad -\frac{\rho}{6\varepsilon_0}R^2 + B_1 = \frac{A_2}{R} \quad (3.26a)$$

и условие непрерывности напряженности поля

$$E_1 = -\frac{d\varphi_1}{dr} = E_2 = -\frac{d\varphi_2}{dr}, \quad \text{или} \quad -\frac{\rho}{3\varepsilon_0}R = -\frac{A_2}{R^2}, \quad (3.26b)$$

находим  $A_2 = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0}$ ,  $B_1 = \frac{\rho}{2\varepsilon_0}R^2$ .

Поэтому

$$\varphi_1(r) = -\frac{\rho}{6\varepsilon_0}r^2 + \frac{\rho}{2\varepsilon_0}R^2, \quad \varphi_2(r) = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r}, \quad (3.27)$$

что совпадает с (3.16).

**Однородное поле внутри заряженного шара.** Зададимся вопросом: как следует зарядить шар, чтобы создать внутри него однородное электрическое поле. Как следует из (3.27) и (3.19), поле внутри равномерно заряженного по объему шара

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi_1 = -\frac{d}{dr} \left( -\frac{\rho}{6\varepsilon_0}r^2 + \frac{\rho}{2\varepsilon_0}R^2 \right) \cdot \frac{\mathbf{r}}{r} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} \mathbf{r}. \quad (3.28)$$

Здесь  $\mathbf{r}/r$  — единичный вектор. Это поле обладает сферической симметрией и нарастает от нуля в центре шара до максимального значения на его поверхности, равного  $\mathbf{E} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} \mathbf{R}$ .

Чтобы создать однородное поле, возьмем два одинаковых шара, заряженных равномерно по объему с объемной плотностью заряда, равной по величине и противоположной по знаку. Тогда напряженность поля внутри положительно ( $\mathbf{E}_+$ ) и отрицательно ( $\mathbf{E}_-$ ) заряженных шаров, как следует из (3.28), будут равны

$$\mathbf{E}_+ = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} \mathbf{r}_+, \quad \mathbf{E}_- = -\frac{\rho}{3\varepsilon_0} \mathbf{r}_-, \quad (3.29)$$

где  $\mathbf{r}_+$  и  $\mathbf{r}_-$  — радиусы-векторы, проведенные из центров соответствующих шаров.

Далее мысленно совместим оба шара так, чтобы между центрами шаров было небольшое расстояние  $l_0 \ll R$ , как это изображено на рис. 3.7 а. В результате совмещения получится сфера, заряженная неравномерно по поверхности разноименными зарядами. Поле внутри такой сферы получается из (3.29) равным

$$\mathbf{E} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} \mathbf{r}_+ - \frac{\rho}{3\varepsilon_0} \mathbf{r}_- = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} (\mathbf{r}_+ - \mathbf{r}_-) = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} \mathbf{l}_0. \quad (3.30)$$

Здесь вектор  $\mathbf{l}_0 = \mathbf{r}_+ - \mathbf{r}_-$  направлен из центра положительно заряженного шара к центру отрицательно заряженного шара. Следовательно, поле внутри такой заряженной сферы постоянно по величине и направлено вдоль вектора  $\mathbf{l}_0$ .

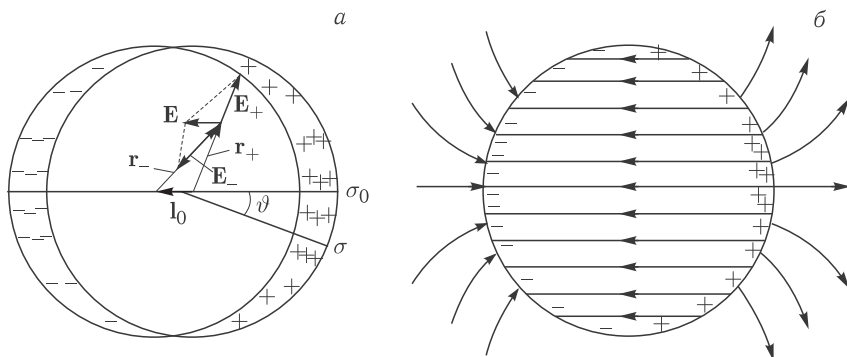


Рис. 3.7

Как уже отмечалось, для сферы можно ввести поверхностную плотность заряда, равную произведению объемной плотности на толщину заряженного слоя. В рассматриваемом случае толщина слоя  $l = l_0 \cdot \cos \vartheta$ , поэтому поверхностная плотность заряда

$$\sigma(\vartheta) = \rho l_0 \cdot \cos \vartheta = \sigma_0 \cdot \cos \vartheta, \quad (3.31)$$

где  $\sigma_0 = \rho \cdot l_0$  — максимальная по абсолютной величине поверхностная плотность заряда (формула (3.31) учитывает и смену знака поверхностного заряда).

Подводя итог, можно сказать, что если сфера (или шар) заряжена по поверхности с поверхностной плотностью  $\sigma(\vartheta) = \sigma_0 \cdot \cos \vartheta$  (рис. 3.7 б), то внутри нее существует однородное электрическое поле с напряженностью

$$E = \frac{\sigma_0}{3\varepsilon_0}. \quad (3.32)$$

Это однородное поле называют *полем Лоренца* (в честь нидерландского физика-теоретика Х. Лоренца, создателя классической электронной теории свойств вещества). Снаружи электрическое поле по своей структуре подобно полю электрического диполя.

**Электрометр.** Для измерения разности потенциалов используются электрометры. Электрометр имеет металлический цилиндрический корпус, передняя и задняя стенки которого стеклянные (рис. 3.8). На конце стержня могут

находиться как легкие листки, так и вращающаяся вокруг горизонтальной оси стрелка, отклонение которых определяется величиной заряда. Внутри корпуса установлена шкала электрометра.

Для измерения разности потенциалов между проводниками один проводник соединяют со стержнем, другой проводник — с корпусом электрометра. Жесткий металлический корпус является принципиально необходимой частью электрометра, отличающей его от электроскопа. Электрометр всегда измеряет разность потенциалов между его листками и корпусом.



Рис. 3.8

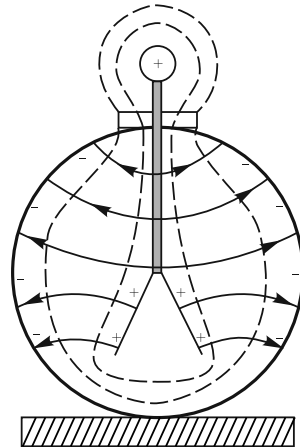


Рис. 3.9

При зарядке листков внутри прибора возникает электрическое поле. Линии этого поля показаны на рис. 3.9 сплошными линиями, а его эквипотенциальные поверхности — штриховыми линиями. Поверхность металлического корпуса есть эквипотенциальная поверхность.

Отклонение листков зависит от действующей на них силы, т. е. в конечном счете от напряженности электрического поля возле них. Чем больше разность потенциалов, тем больше напряженность поля возле листков, тем больше и их отклонение.

Для измерения электрического потенциала в точке пространства достаточно вывести в эту точку один контакт электрометра, а другой соединить с землей (заземлить). В воздухе при обычных условиях нет свободных зарядов, которые перемещались бы под действием поля. Поэтому воздух необходимо ионизировать (создать плазму). Для этого используют плазменный зонд-контакт электрометра, помещенный, например, в пламя свечи, ионизирующее воздух в области, потенциал которой измеряется (рис. 3.10).

В лекционном эксперименте с помощью плазменного зонда, соединенного с заземленным электрометром, демонстрируют распределение в пространстве потенциала поля, создаваемого заряженным металлическим шаром (рис. 3.11). Для этого шар заряжают от источника высокого напряжения: электрофорной машины, генератора Ван-де-Граафа и др. При перемещении зонда вокруг шара на неизменном расстоянии от его поверхности показания

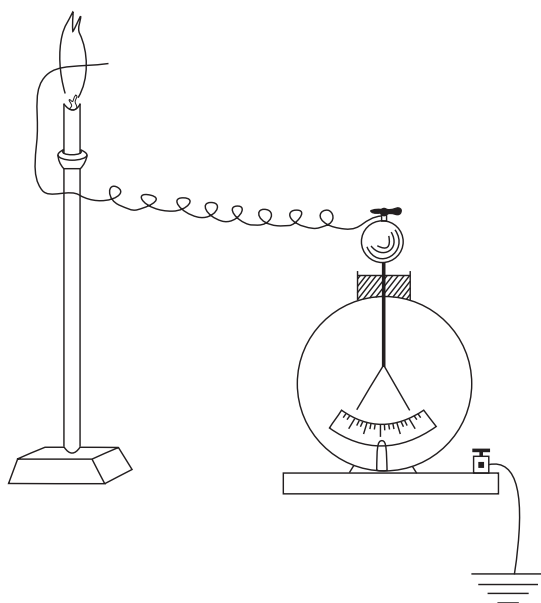


Рис. 3.10

электромметра не меняются, а при удалении от поверхности шара отклонение стрелки электромметра уменьшается.



Рис. 3.11

**Электростатический генератор Вимшурста (электрофорная машина).** Устройство, в котором высокое постоянное напряжение (до нескольких миллионов вольт) создается при помощи механического переноса электростатических зарядов, называется электростатическим генератором. Перенос зарядов может осуществляться при помощи вращающихся цилиндров или дисков, гибкой транспортной ленты, при помощи жидкостного транспортера и пр.

Первый электростатический генератор был сооружен в 1831 г. итальянцем Белли. Затем в 1865 г. немецкими физиками А. Теплером и В. Гольцем была



создана электрофорная машина. В период 1880–1883 гг. ее усовершенствовал английский изобретатель Дж. Вимшурст.

Электрофорная машина Вимшурста состоит из двух непроводящих дисков с медными секторами (рис. 3.12).

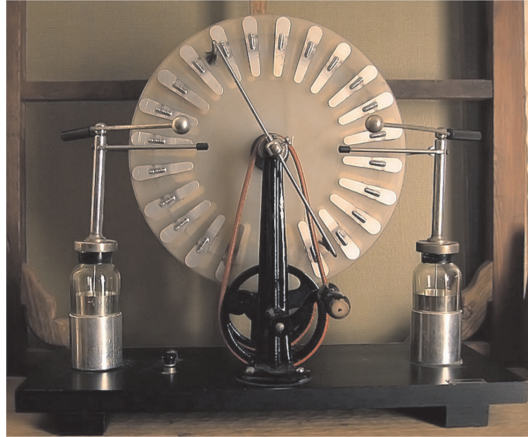


Рис. 3.12

По обе стороны от дисков расположены вдоль диаметра проводники, на концах которых расположены щетки, касающиеся противоположных секторов. Диски приводятся во встречное вращение с равной угловой скоростью. Разделение зарядов происходит в проводниках, после чего заряды попадают на секторы и затем накапливаются в лейденских банках (см. далее). В результате совершаемой работы по преодолению сил электростатического притяжения между разноименно заряженными секторами, движущимися в противоположных направлениях, увеличивается разность потенциалов и заряд лейденских банок. Такая машина позволяет достичь на полюсах машины (лейденских банках) разности потенциалов в несколько сотен киловольт.

Для того чтобы понять принцип ее работы, обратимся к рис. 3.13. На нем для простоты вместо дисков изображены два непроводящих кольца с проводящими участками (контактами) и проводники  $a-b$  и  $c-d$ , соединяющие противоположные контакты каждого из колец.

Предположим теперь, что на одном контакте  $1$  внешнего кольца появился небольшой положительный заряд (ситуация  $a$ ). Тогда из-за электростатической индукции (см. далее) в проводнике  $a-b$  произойдет разделение зарядов и появится слабое электрическое поле в зазорах между двумя парами контактов (в областях, примыкающих к точкам  $a$  и  $b$ ). Это поле схематически изображено силовыми линиями.

Повернем внутренне кольцо против часовой стрелки на «три контакта» (ситуация  $b$ ). Теперь индукция будет происходить в проводнике  $c-d$  под действием поля трех заряженных контактов внутреннего кольца. Поле вблизи точек  $c$  и  $d$  будет больше (густота силовых линий возросла), чем вблизи  $a$  и  $b$ , поэтому внешний контакт  $3$  (и противоположный) будет иметь больший заряд, чем контакт  $1$ .

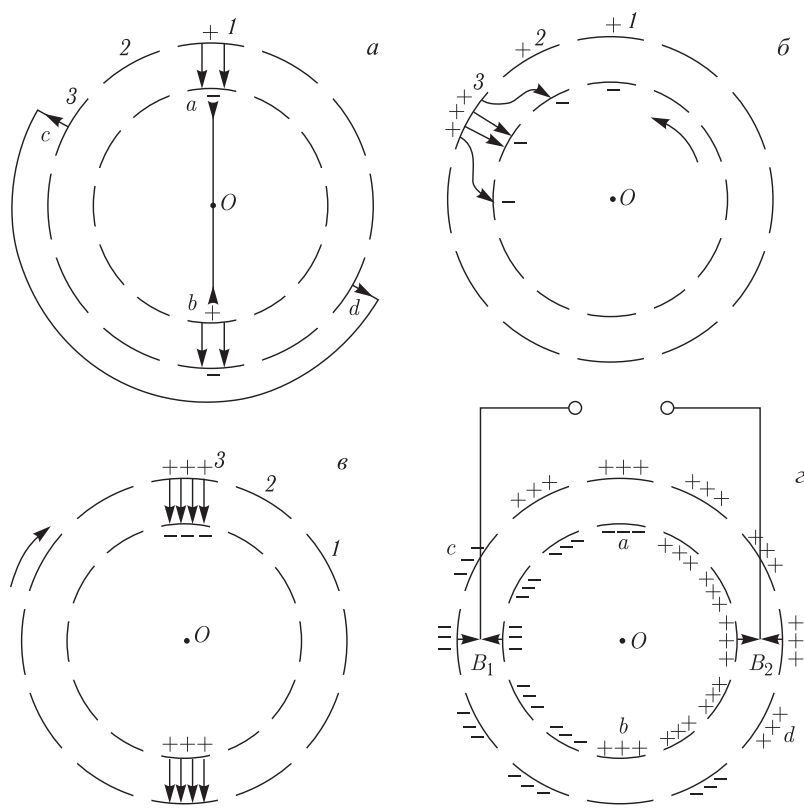


Рис. 3.13

Теперь повернем внешнее кольцо по часовой стрелке на «три контакта» (ситуация *в*). Это приведет к еще более сильной индукции в проводнике  $a-b$  и, соответственно, к появлению еще большего заряда на примыкающих контактах внутреннего кольца.

Разумеется, что практически вместо поочередных поворотов то одного, то другого кольца используют непрерывное вращение обоих колец (дисков) в противоположные стороны (ситуация *г*). В результате в области тупого угла  $aOd$  контакты обоих колец заряжены положительно, а в области  $cOb$  — отрицательно. В этих областях и помещают скользящие щетки  $B_1$  и  $B_2$ , служащие клеммами для дальнейшего использования генератора.

Исследование электрического разряда в разреженных газах дало первый толчок совершенствованию электростатических генераторов. Изучение атомного ядра, потребовавшее еще больших напряжений, привело к появлению новых конструкций.

**Генератор Ван-де-Граафа.** В 1929 г. американский физик Р. Ван-де-Грааф создал генератор, позволивший достичь напряжения в 80 киловольт, а несколько лет спустя это напряжение уже достигло величины 7 миллионов вольт. Основной деталью этого генератора был огромный полый металлический шар, надежно изолированный от земли, на внутреннюю поверхность которого непрерывно подводился электрический заряд.

Принцип получения высокого напряжения показан на рис. 3.14. При внесении (а) заряженного шарика через малое отверстие внутрь проводящей сферы (б) происходит разделение зарядов (явление электростатической индукции, см. далее). При касании шариком сферы электроны с ее внутренней поверхности переходят на шарик, нейтрализуя его положительный заряд (в). В результате (г) сфера приобретает заряд, равный заряду шарика. Повторяя этот процесс многократно, можно накопить на сфере большой заряд.

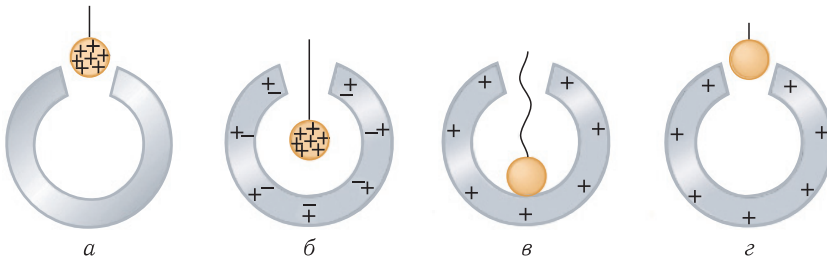


Рис. 3.14

Максимальный заряд  $q_{\max}$  определяется из условия равенства напряженности вблизи поверхности сферы величине  $E_{\text{пр}} = 3 \cdot 10^6 \text{ В/м}$ , при которой происходит электрический пробой воздуха (рис. 3.15) и она разряжается. При радиусе шара  $R = 1 \text{ м}$   $q_{\max} = 4\pi\epsilon_0 R^2 E_{\text{пр}} = 0,3 \cdot 10^{-3} \text{ Кл}$ , а потенциал вблизи поверхности  $\varphi = \frac{q_{\max}}{4\pi\epsilon_0 R} = 3 \cdot 10^6 \text{ В}$ .

Устройство генератора Ван-де-Граафа изображено на рис. 3.16. Заряд переносится снизу вверх с помощью движущейся наэлектризованной непроводящей ленты и доставляется к электроду, находящемуся внутри проводящей сферы. Лента заряжается в области А за счет коронного разряда при разности потенциалов около 10000 В между металлическими иглами и заземленной сеткой.



Рис. 3.15

Лента приводится во вращение электродвигателем. Переносимый транспортером ток  $I = \sigma bV$  ( $\sigma$ ,  $b$ ,  $V$  — поверхностная плотность заряда, ширина ленты и ее скорость соответственно) не превышает долей миллиампера. Поэтому мощность генератора порядка нескольких киловатт. Кроме того, из-за больших аэродинамических потерь КПД не превышает 15–20 %.

Современные генераторы Ван-де-Граафа вместо лент используют цепи, состоящие из чередующихся металлических и пластиковых звеньев, и называются пеллетронами. Помещая сферу в газообразную среду при высоком

давлении (смесь азота и углекислоты под давлением 30 атмосфер), удается достичь разности потенциалов 20 миллионов вольт.

Исторически генераторы Ван-де-Граафа применялись для ускорения заряженных частиц в линейных ускорителях. В настоящее время их роль в ядерных исследованиях уменьшилась с развитием иных способов ускорения частиц. Однако они продолжают использоваться для моделирования процессов, происходящих при ультравысоких напряжениях (удары молнии, грозовые разряды и пр.).

**Статическое электричество.** Как отмечалось ранее, электризация тел трением может возникать вследствие того, что при тесном контакте электроны из одного вещества переходят в другое. В результате перераспределения электронов эти вещества заряжаются разноименно. В жидкостях и газах при их контакте может также происходить перераспределение ионов.

На трущихся поверхностях тел могут накапливаться электрические заряды. Если тело является проводником и заземлено, то заряды легко стекают с него в землю до тех пор, пока не выровняются потенциалы тела и земли. В диэлектриках электрические заряды могут удерживаться продолжительное время. Таким образом, возникает статическое электричество (СЭ).

При последующем разделении этих тел каждое из них сохраняет свой электрический заряд, а с увеличением расстояния между ними, за счет совершаемой работы по разделению зарядов, разность потенциалов возрастает и может достигнуть десятков и сотен киловольт. Она зависит от диэлектрических

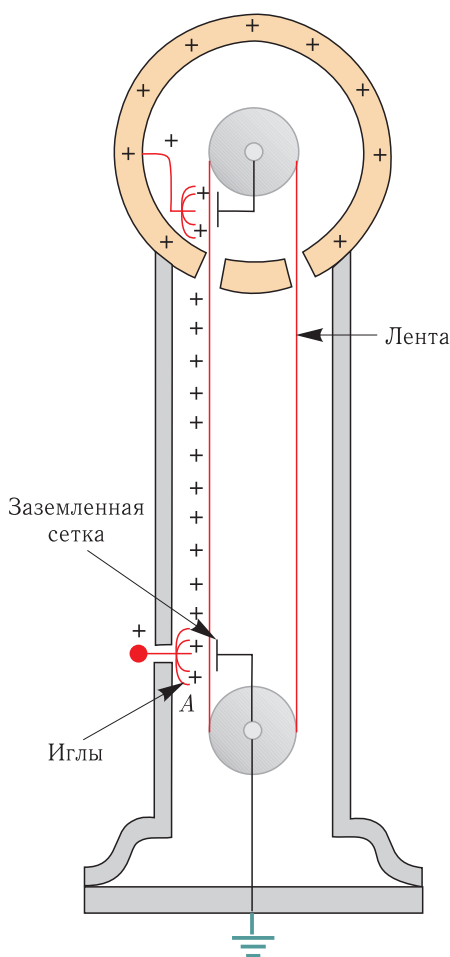


Рис. 3.16

свойств материалов, давления при соприкосновении, влажности и температуры поверхностей этих тел, климатических условий и пр. Электрические заряды могут взаимно нейтрализоваться вследствие некоторой электропроводности влажного воздуха, и при влажности воздуха более 85 % СЭ практически не возникает.

Статическое электричество играет немаловажную роль в жизнедеятельности человека. На бытовом уровне часто приходится иметь дело с наэлектризованными предметами — расческами, полиэтиленовыми пакетами и пр. Когда человек, тело которого наэлектризовано, дотрагивается до металлического

предмета, например трубы отопления или холодильника, по его телу будет протекать кратковременный электрический ток, вызывающий неприятные ощущения (удар током).

Большую опасность СЭ представляет в технике и производстве. Так, при трении приводных ремней о шкивы или транспортерных лент о валы, перекачке огнеопасных жидкостей по трубопроводам и перевозке нефтепродуктов в цистернах, прокачке пыльного воздуха в системах вентиляции, транспортировке сжиженного газа и пр. могут возникать высокие напряжения, при которых появляется искровой разряд. Он способен вызвать взрыв бензина в бензобаке автомобиля, нефти в танкере, угольной пыли в шахте и даже мучной пыли на мукомольном комбинате! Для предотвращения возникновения СЭ трущиеся детали машин и механизмов заземляют.

В июне 2007 г. на международной космической станции (МКС) из-за статического электричества вышли из строя шесть компьютеров, что сильно усложнило жизнеобеспечение станции.

В природных условиях в результате движения воздушных потоков, насыщенных водяными парами, образуются грозовые облака, являющиеся носителями статического электричества. Электрические разряды образуются иногда между разноименными заряженными облаками, но чаще всего между заряженным облаком и землей (рис. 3.17). При достижении определенной разности потенциалов происходит разряд молнии между облаками или облаком и землей. Для защиты от молний устанавливаются молниеотводы (громоотводы, см. далее), проводящие разряд напрямую в землю.

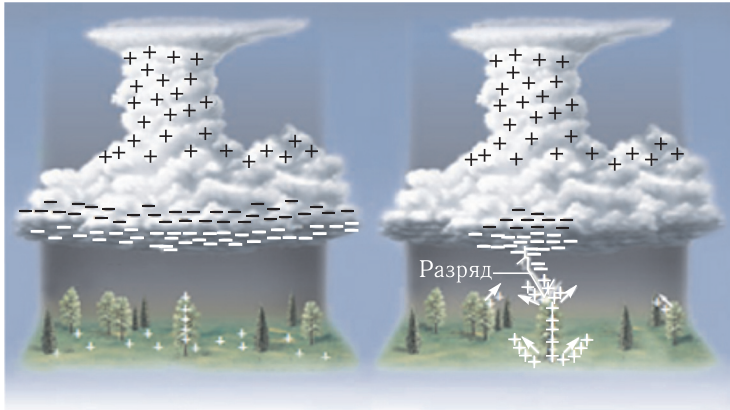


Рис. 3.17

Грозовые облака, создающие сильные электрические поля, могут вызвать электростатическую индукцию в изолированных металлических предметах и проводниках, что может повлиять на работу различных электронных устройств.

**Энергия системы зарядов.** Для изменения расстояния между зарядами необходимо совершить работу против сил электростатического взаимодействия. Эта работа затрачивается на изменение энергии взаимодействия зарядов. Рассмотрим возможные способы вычисления энергии взаимодействия.

Начнем с простой ситуации, когда система состоит из двух точечных зарядов  $q_1$  и  $q_2$ , находящихся друг от друга на расстоянии  $r_{12}$ . Энергия их взаимодействия  $W_{вз}$  равна работе, которую необходимо совершить, сблизив бесконечно удаленные друг от друга заряды на это расстояние. Если принять, что заряд  $q_1$  неподвижен, а заряд  $q_2$  перемещается в поле первого заряда из бесконечности  $r_2 \rightarrow \infty$  в эту точку, то согласно (3.2) и (3.5)

$$W_{вз} = q_2 U = q_2 \left( k \frac{q_1}{r_{12}} - k \frac{q_1}{\infty} \right) = k \frac{q_1 q_2}{r_{12}} = \frac{1}{2} \left( k \frac{q_1}{r_{12}} q_2 + k \frac{q_2}{r_{21}} q_1 \right) = \frac{1}{2} (\varphi_2 q_2 + \varphi_1 q_1). \quad (3.33)$$

Здесь  $\varphi_2 = k q_1 / r_{12}$  — потенциал поля первого заряда в точке нахождения второго заряда,  $\varphi_1 = k q_2 / r_{21}$  — потенциал поля второго заряда в точке нахождения первого заряда.

Для системы из  $N$  точечных зарядов, обобщая (3.33), получим

$$W_{вз} = \frac{1}{2} k \sum_{i \neq j} \frac{q_i q_j}{r_{ij}} = \frac{1}{2} \sum_i \varphi_i q_i. \quad (3.34)$$

Если имеется заряженное тело объема  $V$  и известна объемная плотность его заряда  $\rho$ , то энергия взаимодействия называется *собственной энергией этого тела* и равна

$$W_{сб} = \frac{1}{2} \int_V \varphi \cdot \rho \cdot dV. \quad (3.35)$$

Если имеется  $N$  заряженных тел, то полная энергия такой системы

$$W = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} \int_{V_i} \varphi_i \cdot \rho_i \cdot dV_i = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} \int_{V_i} (\varphi_i^{вз} + \varphi_i^{сб}) \cdot \rho_i \cdot dV_i = W_{вз} + W_{сб}.$$

Здесь  $\varphi_i^{вз}$  — потенциал поля в объеме  $V_i$ , создаваемого внешними телами,  $\varphi_i^{сб}$  — потенциал поля, создаваемого зарядами этого тела. Поэтому полная энергия системы  $W$  определяется суммой энергии взаимодействия  $W_{вз}$  и всех собственных энергий заряженных тел  $W_{сб}$ .

Рассмотрим два примера.

**Пример 6.** Пусть шар радиуса  $R$  равномерно заряжен по поверхности зарядом  $q$ . Интеграл по объему сведется к интегралу по поверхности. Поскольку потенциал поверхности  $\varphi = k q / R$ , то

$$W_{сб} = \frac{1}{2} k \frac{q}{R} \sigma \cdot S = \frac{1}{2} k \frac{q^2}{R}. \quad (3.36)$$

**Пример 7.** Если имеются две разноименно заряженные параллельные пластины (заряженный плоский конденсатор), потенциалы которых равны  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ , а заряды  $q$  и  $-q$  соответственно, то полная энергия

$$W = \frac{1}{2} (\varphi_1 - \varphi_2) \cdot q. \quad (3.37)$$

## МЕТАЛЛЫ И ДИЭЛЕКТРИКИ В ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОМ ПОЛЕ

---

### ЛЕКЦИЯ 4

**Поле в веществе.** При внесении во внешнее электрическое поле металла или диэлектрика заряженные частицы в них (ионы в узлах кристаллической решетки и электроны), испытывая воздействие этого поля, смещаются из состояния равновесия, в котором они пребывали в отсутствие внешнего поля. В результате новой конфигурации зарядов появляется дополнительное электрическое поле.

Поэтому поле в веществе будет суперпозицией внешнего поля и поля, создаваемого зарядами вещества. Микроскопическая объемная плотность  $\rho_{\text{микро}}$  этих зарядов очень сильно будет изменяться на масштабе межатомных расстояний. Поэтому и так называемое микроскопическое поле с напряженностью  $\mathbf{E}_{\text{микро}}$  также будет резко изменяться на масштабах межатомных расстояний.

Экспериментально можно измерить лишь усредненные по физически малому объему  $\Delta V$  значения объемной плотности и напряженности поля, которые являются макроскопическими величинами  $\rho$  и  $\mathbf{E}$ :

$$\rho = \rho_{\text{макро}} = \langle \rho_{\text{микро}} \rangle = \frac{1}{\Delta V} \int_V \rho_{\text{микро}} \cdot dV,$$

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_{\text{макро}} = \langle \mathbf{E}_{\text{микро}} \rangle = \frac{1}{\Delta V} \int_V \mathbf{E}_{\text{микро}} \cdot dV.$$

Величины  $\rho$  и  $\mathbf{E}$  изменяются плавно от точки к точке внутри вещества и поддаются измерению. Поэтому в дальнейшем они будут рассматриваться как объемная плотность заряда и напряженность поля в веществе.

Если тело помещено во внешнее поле, то в нем происходит либо перемещение свободных электронов (металлы), либо небольшие смещения (на величину порядка размера атома) ионов и электронов (диэлектрики). В результате возникает наведенное (индуцированное) поле, которое накладывается на внешнее поле. *Разделение зарядов, приводящее к появлению наведенного поля, называется электростатической индукцией, а нескомпенсированные в малом объеме  $\Delta V$  заряды называются индукционными.*

**Электростатическая индукция в металлах.** Опыт показывает, что при внесении металлического предмета в электростатическое поле на противоположных сторонах его поверхности появляются заряды разного знака.

Если, например, положительно заряженную стеклянную палочку поднести к металлическому телу, состоящему из двух половинок, то свободные

электроны под действием внешнего поля переместятся на ближнюю к палочке половинку. В результате индукции на этой половинке появится некомпенсированный отрицательный заряд, а на дальней — положительный (рис. 4.1).

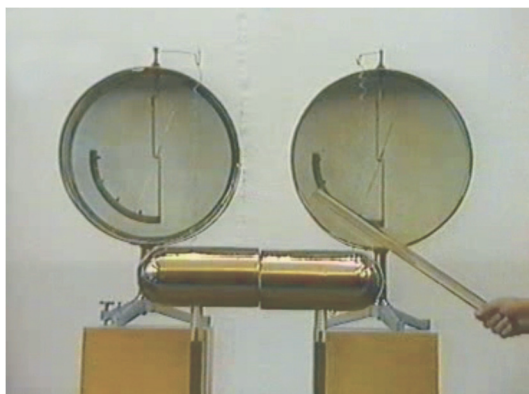


Рис. 4.1

Если теперь в присутствии палочки разъединить обе половинки, то они останутся заряженными. Об этом будет свидетельствовать отклонение стрелок электрометров (см. далее), соединенных с заряженными половинками. Такой способ зарядки металлического тела называется *электризация через влияние*.

Если поднести палочку к дальней половинке, то отклонение стрелки соединенного с ней электрометра увеличится, а при поднесении к ближней половинке отклонение стрелки другого электрометра уменьшится. Это подтверждает вывод о разных знаках индуцированных зарядов.

При индукции перемещение электронов в металле прекратится тогда, когда индукционное поле в каждой точке внутри металла скомпенсирует внешнее поле. Следовательно, *электростатическое поле внутри металлического тела отсутствует*. Поскольку разность потенциалов между двумя любыми точками в металле равна нулю, то *поверхность металлического тела является эквипотенциальной поверхностью*.

В описанном выше лекционном эксперименте можно легко продемонстрировать, что поверхность металлического тела в присутствии заряженной стеклянной палочки будет эквипотенциальной поверхностью. Для этого небольшой металлический шарик, укрепленный на изолирующем стержне и соединенный с одним контактом заземленного электрометра, перемещают по поверхности заостренного тела (рис. 4.2). Поскольку показания электрометра не меняются, то это свидетельствует об одинаковом (относительно земли) потенциале всех точек поверхности металлического тела.

Следовательно, *силовые линии поля перпендикулярны поверхности и внутрь тела не проникают*. Этот вывод хорошо подтверждает рис. 4.3, на котором показана фотография структуры силовых линий поля, создаваемого равномерно заряженной нитью (справа) в присутствии незаряженного проводящего кольца, в котором происходит электростатическая индукция.



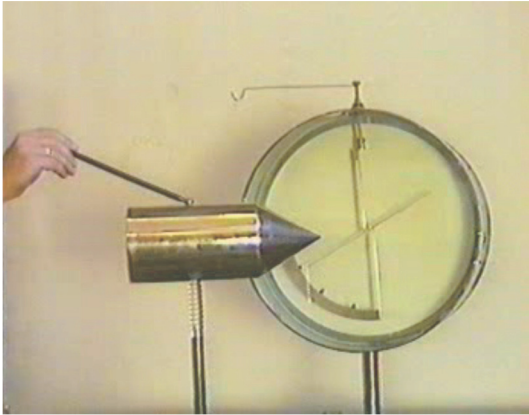


Рис. 4.2

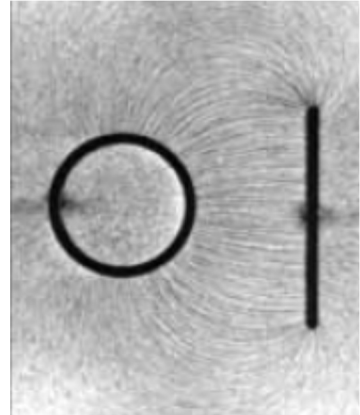


Рис. 4.3

Так как напряженность поля внутри металла  $E = 0$ , то из уравнения  $\operatorname{div} E = \rho = 0$  следует, что *индукционные заряды располагаются на поверхности тела*.

Экспериментально это можно подтвердить, если взять гибкую металлическую сетку с прикрепленными к ней с обеих сторон бумажными листочками (рис. 4.4). Впервые подобную сетку в демонстрационных опытах использовал русский физик Б. Кольбе, поэтому этот демонстрационный прибор называется сеткой Кольбе. Если сетку зарядить и затем свернуть в цилиндр, то зарядятся лишь листочки на внешней поверхности, которые будут отталкиваться от сетки.

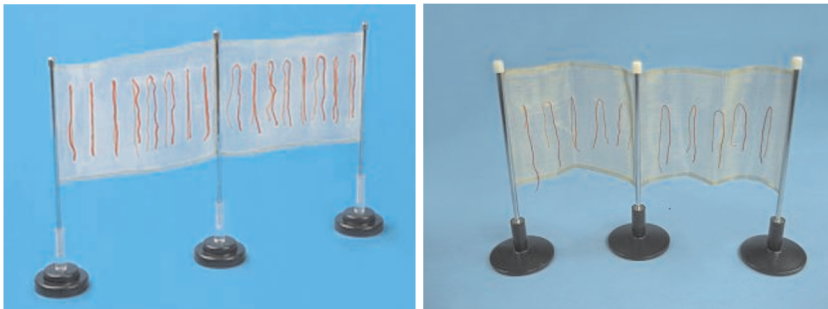


Рис. 4.4

Рис. 4.5 иллюстрирует лекционный эксперимент, в котором в пространстве между обкладками заряженного конденсатора помещаются бумажные султаны. Во внешнем поле они электризуются и отталкиваются друг от друга. Если же на султаны надеть металлическую клетку, то она будет экранировать внешнее поле. В технике с помощью металлических клеток осуществляют электростатическую защиту.

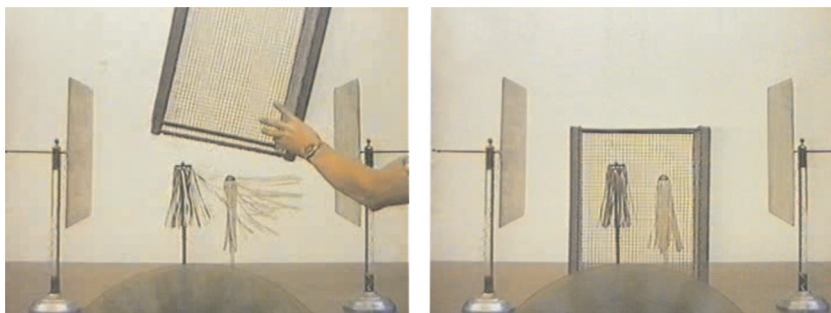


Рис. 4.5

Если поверхностная плотность заряда в некоторой точке поверхности равна  $\sigma$ , то напряженность электрического поля вблизи этой точки

$$\mathbf{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \mathbf{n}, \quad (4.1)$$

где  $\mathbf{n}$  — внешняя нормаль к поверхности (рис. 4.6). Формула (4.1) легко получается с использованием теоремы Гаусса, так же как и (2.20б), с той лишь разницей, что поток через одно из оснований цилиндра (внутри металла) отсутствует:

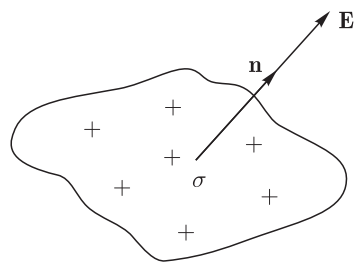


Рис. 4.6

$$\Phi_E = \oiint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = E \cdot S = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho \cdot b \cdot S = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} S. \quad (4.2)$$

Как показывает опыт, поверхностная плотность заряда особенно велика на заостренных участках поверхности (выпуклых участках с малым радиусом кривизны). Соответственно вблизи этих участков велика и напряженность электрического поля. Это можно продемонстрировать, зарядив металлический цилиндр, у которого вместо оснований находятся две конические поверхности (одна из них заглублена внутрь тела и не видна) (рис. 4.7). Касаясь металлическим шариком разных участков заряженной поверхности и затем после каждого касания перенося заряд шарика на электроскоп, убеждаемся, что наибольший заряд переносится после касания острия, а наименьший заряд — после касания заглубленной части поверхности тела.

Возникновение большой напряженности вблизи заостренных заряженных тел сопровождается характерным потрескиванием, обусловленным пробоем воздуха. В результате образуются положительные ионы и электроны, которые начинают взаимодействовать с зарядами на острие.

Если острие заряжено положительно, то ионы, отталкиваясь от острия, создадут электрический ветер. На острие со стороны ионов будет действовать сила отталкивания. Электроны будут осаждаться на острие, уменьшая его заряд. В этом случае говорят, что заряды стекают с острия.

Электрический ветер можно продемонстрировать, если металлический предмет с острием непрерывно заряжать от электрофорной машины, а рядом

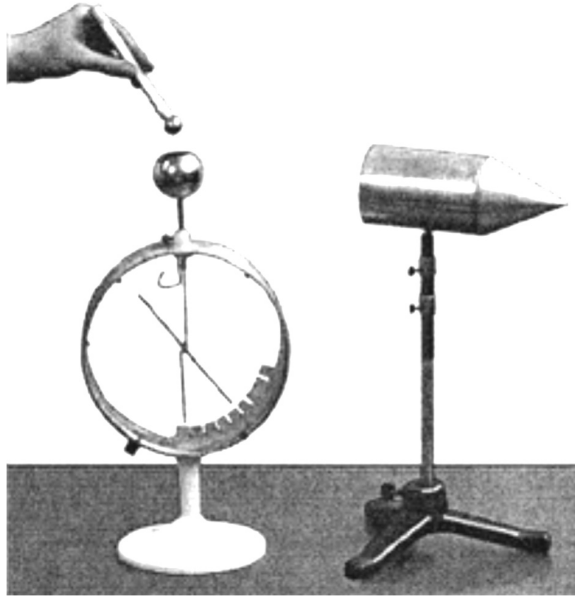


Рис. 4.7

с острием расположить пламя свечи (рис. 4.8). Когда диски машины начинают вращаться, то ветер от острия «задувает» пламя свечи.

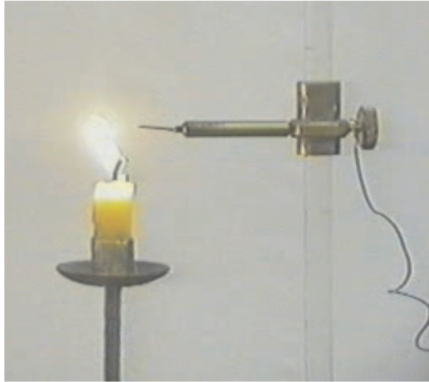


Рис. 4.8



Рис. 4.9

Если подключить к машине колесо Франклина, состоящее из четырех изогнутых спиц с заостренными концами (рис. 4.9), то оно под действием силы отталкивания начнет вращаться.

Рассмотрим теперь два важных примера электростатической индукции.

**Пример 1.** Если в однородное поле с напряженностью  $E_0$  помещена перпендикулярно его силовым линиям плоскопараллельная бесконечно большая металлическая пластина, то в результате индукции на ее поверхностях появятся заряды противоположного знака с постоянной поверхностной плотностью  $+\sigma$  и  $-\sigma$ , как это изображено на рис. 4.10. Напряженность

индукционного поля  $E_{\text{инд}}$  внутри пластины равна сумме напряженностей полей, создаваемых тонкими заряженными поверхностными слоями (см. (2.20)):

$E_{\text{инд}} = \sigma/\varepsilon_0$ , а вне пластины индукционное поле отсутствует. Поэтому внутри пластины напряженность поля

$$E = E_0 - E_{\text{инд}} = E_0 - \sigma/\varepsilon_0. \quad (4.3)$$

Поскольку внутри пластины  $E = 0$ , то  $E_0 = E_{\text{инд}}$  и  $\sigma = \varepsilon_0 \cdot E_0$ . Вне пластины  $E = E_0$ . Линии равного потенциала, изображенные штриховыми линиями, параллельны друг другу.

**Пример 2.** Поместим в однородное поле с напряженностью  $E_0$  металлический шар радиуса  $R$ . Поскольку индукционное поле внутри

шара должно скомпенсировать внешнее поле, то это, как следует из (3.32), может быть осуществимо, если индукционное поле будет однородным полем Лоренца:  $E_{\text{инд}} = \sigma_0/(3\varepsilon_0) = E_0$ , а поверхностная плотность зарядов распределена неравномерно по поверхности в соответствии с (3.31):

$$\sigma(\vartheta) = \sigma_0 \cdot \cos \vartheta = \sigma = 3\varepsilon_0 E_0 \cos \vartheta. \quad (4.4)$$

На рис. 4.11 изображены структура линий поля и линий равного потенциала (штриховые линии). Первоначально однородное поле значительно видоизменяется из-за появления индуцированных поверхностных зарядов (4.4).

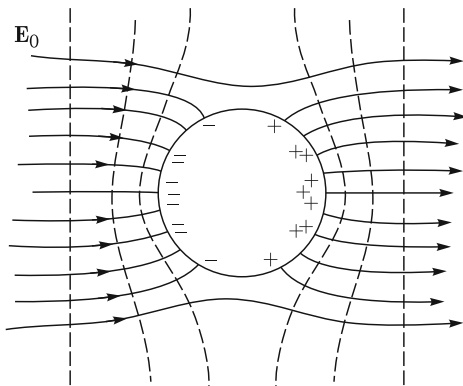


Рис. 4.11

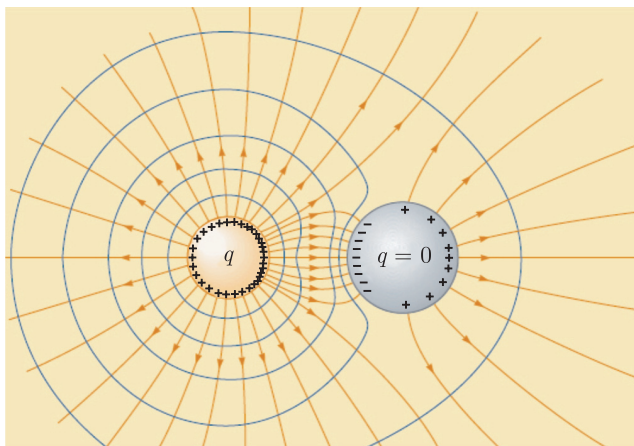


Рис. 4.12

Еще более сложную структуру приобретает поле, когда незаряженный шар попадает в неоднородное поле положительно заряженного шара (рис. 4.12). Здесь желтым цветом изображены линии поля, а голубым цветом — линии равного потенциала. Индукционное поле незаряженного шара приводит к перераспределению зарядов по поверхности заряженного шара.

**Практическое применение электростатической индукции.** С незапамятных времен для предотвращения поражающего действия молнии устанавливались громоотводы (молниеотводы). Как правило, стационарный громоотвод представляет собой закопанную в землю на глубину нескольких метров высокую мачту, на верхнем конце которой находится тонкий заостренный стержень. Когда во время грозы напряженность поля, создаваемого атмосферными зарядами вблизи острия, превышает  $E_{\text{пр}} \approx 3 \cdot 10^6$  В/м, возникает пробой воздуха и электрический разряд. В результате «удара молнии в громоотвод» атмосферные заряды уходят в землю.

Отсутствие поля в металлах позволяет осуществить электростатическое экранирование приборов, помещений и пр. Оно сводится к замыканию электростатического поля на поверхность металлического экрана и отводу электрических зарядов в землю или на корпус прибора. Поэтому необходимо заземлять электростатический экран.

В 1836 г. английский физик, один из создателей теории электромагнетизма М. Фарадей использовал заземленную клетку из хорошо проводящего материала для экранирования аппаратуры от внешних электромагнитных полей. Хотя клетка Фарадея хорошо защищает лишь от электростатического поля, тем не менее, как будет показано далее, в области высоких частот сетка частично отражает электромагнитные волны, а частично их поглощает.

Реактивное действие струи электронного ветра используется в ионных двигателях. Первый такой двигатель был построен в США в 1960 г. Принцип его работы основан на ионизации газа (аргона или водорода) и последующего разгона ионов в электростатическом поле до скоростей около 200 км/с.

Вначале газ подается в ионизатор, в котором он при бомбардировке высокоэнергетическими электронами ионизируется, и образуется смесь из положительных ионов и отрицательных электронов. Для удаления электронов в камеру помещается трубка с катодными сетками, которая притягивает к себе электроны.

Положительные ионы притягиваются к системе извлечения, состоящей из 2 или 3 сеток, между которыми поддерживается высокая разность потенциалов порядка тысячи вольт. Здесь они ускоряются и выбрасываются в окружающее пространство. На рис. 4.13 показана фотография ионного двигателя. Струя ионов, прошедших сквозь последнюю сетку, из-за высокой температуры плазмы светится.

Поскольку скорость движения ионов более чем в пятьдесят раз больше скорости истечения струи газа ракетных двигателей, то для достижения той же тяги можно в пятьдесят раз уменьшить расход выбрасываемой массы в единицу времени.

Однако для ионизации газа требуется энергия. В современных летательных аппаратах она получается за счет солнечных батарей (см. далее).

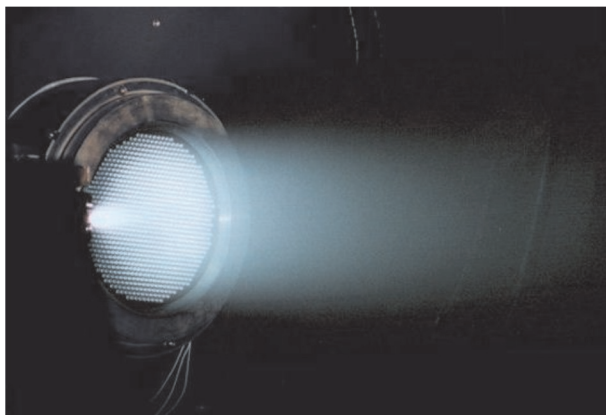


Рис. 4.13

Недостаток созданных в настоящее время двигателей — очень слабая тяга (порядка 50–100 миллиньютонов).

Поэтому ионный двигатель не может быть использован для космического старта. Однако после разгона ракеты до третьей космической скорости при достаточно долгой работе двигателя, наличия газа и электроэнергии (от ядерных источников) можно разогнать космический аппарат до скоростей, недостижимых с помощью ракетных двигателей.

В настоящее время с помощью ионных двигателей осуществляют коррекцию скорости и параметров орбиты космического корабля.

**Дипольный момент проводящего шара во внешнем поле.** Рассчитаем дипольный момент небольшого проводящего шара, помещенного во внешнее однородное поле с напряженностью  $E_0$  (рис. 4.14). Направим внешнее поле вдоль оси  $Oz$  и воспользуемся сферической системой координат ( $r = R, \varphi, \vartheta$ ).

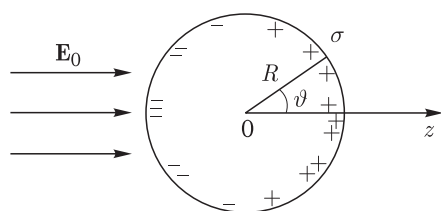


Рис. 4.14

Элементарный дипольный момент, образующий угол  $\vartheta$  с внешним полем, по величине будет равен

$$dp(\vartheta) = \sigma(\vartheta) \cdot dS \cdot 2R, \quad (4.5)$$

где  $\sigma(\vartheta)$  задается формулой (4.4), элемент площади  $dS = R^2 \cdot d\varphi \cdot \sin \vartheta \cdot d\vartheta$ .

В силу симметрии задачи суммирование всех элементарных дипольных моментов сведется к суммированию проекции дипольных моментов на ось  $Oz$ , поэтому дипольный момент шара

$$p = \int dp(\vartheta) \cdot \cos \vartheta = 2\sigma_0 R^3 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} \cos^2 \vartheta \cdot \sin \vartheta \cdot d\vartheta = \frac{4}{3} \pi R^3 \sigma_0. \quad (4.6)$$

Учитывая, что  $\sigma_0 = 3\varepsilon_0 E_0$ , окончательно получим

$$p = \varepsilon_0 4\pi R^3 E_0. \quad (4.7)$$

Этой формулой мы еще воспользуемся для оценки поляризуемости молекул диэлектрика.

**Время установления электростатического равновесия.** Обсудим вопрос о времени установления электростатического равновесия в металлах. При включении внешнего поля с напряженностью  $E_0$  в момент времени  $t = 0$  свободные электроны металла начинают двигаться с ускорением  $a = |e| E_0 / m^*$  в течение времени  $\tau$ , пока не произойдет столкновения с атомами решетки (см. лекцию 21). К этому моменту времени электрон приобретает максимальную скорость  $v_{\max} = |e| E_0 \tau / m^*$ . При столкновении электроны передают свой импульс решетке, после чего начинают вновь двигаться ускоренно. Такое движение называется дрейфом. Скорость дрейфа  $v_{\text{др}} = (1/2) v_{\max}$ , поэтому за время  $t \gg \tau$  электрон переместится на расстояние

$$L = v_{\text{др}} \cdot t = \frac{|e| E_0 \tau}{2m^*} t. \quad (4.8)$$

Здесь  $m^*$  — эффективная масса электрона. Эта масса, как будет показано в лекции 22, учитывает действие на электрон ионов кристаллической решетки и может отличаться от массы  $m$  свободного электрона.

На рис. 4.15 схематично изображены неподвижные ионы и смещенные электроны в первоначально электрически нейтральном слое металла. Два разноименно заряженных слоя создают встречное индукционное поле с напряженностью

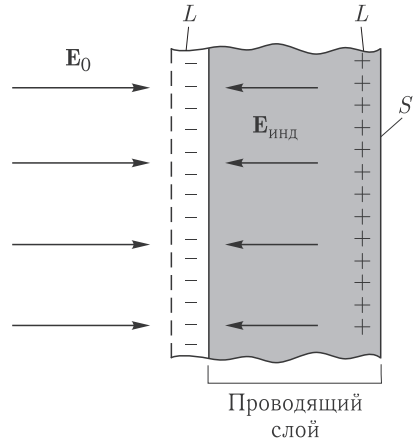


Рис. 4.15

$$E_{\text{инд}} = \frac{q}{S \varepsilon_0} = \frac{|e| n L}{\varepsilon_0} = \frac{|e|^2 n E_0 \tau}{2m^* \varepsilon_0} t = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} E_0 t, \quad (4.9)$$

где  $n$  — концентрация электронов,  $S$  — площадь поверхности слоя, перпендикулярного внешнему полю,

$$\sigma = \frac{|e|^2 n \cdot \tau}{m^*} \quad (4.10)$$

— удельная электропроводность металла (см. лекцию 21).

Индукционное поле компенсирует внешнее поле в момент времени  $t_0$ , для которого из (4.9) получаем

$$t_0 = \frac{2\varepsilon_0}{\sigma}. \quad (4.11)$$

Соотношение (4.11) позволяет грубо оценить время  $t_0$ , поскольку не учитывалось, что в процессе смещения на электроны будет действовать уменьшающееся со временем суммарное поле  $E_0 - E_{\text{инд}}$ , и их движение не будет равноускоренным.

Полагая  $\sigma \sim 10^7 \text{ Ом}^{-1} \cdot \text{м}^{-1}$ , получаем  $t_0 \sim 10^{-18} \text{ с}$ .



**Диэлектрик в электростатическом поле.** К диэлектрикам относятся все газы, некоторые жидкости (дистиллированная вода, масла, бензол и др.) и твердые тела (стекло, фарфор, слюда и др.). Термин «диэлектрик» был введен в 1837 г. М. Фарадеем.

В диэлектрике нет свободных электронов, поэтому под действием внешнего поля происходит небольшое смещение ионов и электронов. Это смещение будет происходить по-разному в зависимости от того, обладает или нет (в отсутствие поля) молекула диэлектрика собственным дипольным моментом  $\mathbf{p}_0$ .

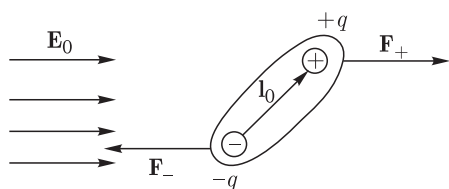


Рис. 4.16

1) У ряда молекул ( $\text{H}_2\text{O}$ ,  $\text{CO}$ ,  $\text{N}_2\text{O}$ ,  $\text{S}_2\text{O}$ ,  $\text{NH}$ ,  $\text{HCl}$ , ...) «центры» положительных и отрицательных зарядов смещены относительно друг друга, поэтому в отсутствие внешнего поля они имеют собственный дипольный момент. Молекулы, обладающие электрическим дипольным моментом, называют *полярными*, или *дипольными*.

По порядку величины этот момент равен произведению модуля заряда электрона на размер атома:  $p_0 \sim 10^{-19} \cdot 10^{-10} = 10^{-29}$  Кл · м. Полярные молекулы под действием сил  $\mathbf{F}_+$  и  $\mathbf{F}_-$  будут стремиться развернуться так, чтобы дипольный момент  $\mathbf{p}_0 = q \cdot \mathbf{l}_0$  стал параллелен вектору  $\mathbf{E}_0$  (рис. 4.16). Строгому выстраиванию дипольных моментов молекул препятствует их тепловое движение. На рис. 4.17 схематично показаны ориентации дипольных молекул в отсутствие (а) и при наложении (б) внешнего поля.

2) Молекулы ( $\text{H}_2$ ,  $\text{N}_2$ ,  $\text{O}_2$ ,  $\text{CO}_2$  ...) не обладают дипольным моментом, поэтому называются *неполярными*, или *бездипольными*. Под действием внешнего поля положительные и отрицательные заряды будут смещаться в разные стороны на расстояние порядка размера атома. В результате неполярная молекула приобретет дипольный момент

$$\mathbf{p} = \varepsilon_0 \cdot \alpha \cdot \mathbf{E}_0, \quad (4.12)$$

где  $\alpha$  — поляризуемость молекулы. Если воспользоваться формулой (4.7) и положить в ней  $R \sim 10^{-10}$  м, то  $\alpha = 4\pi R^3 \sim 10^{-29}$  м<sup>3</sup>. В поле с  $E_0 \sim 10^3$  В/м дипольный момент  $p \sim 10^{-37}$  Кл · м, что намного меньше величины  $p_0$ .

В обоих случаях во внешнем поле диэлектрик поляризуется. Совершенно понятно, что если поместить диэлектрик во внешнее поле, то для удержания

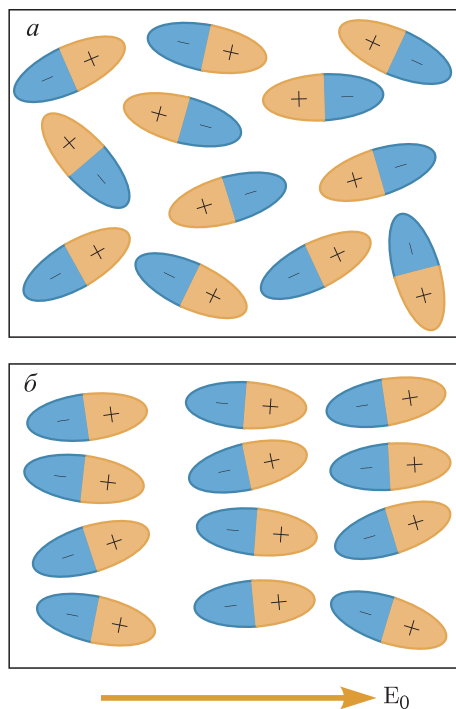


Рис. 4.17



диэлектрика в поляризованном состоянии внутри него должно существовать электрическое поле, действующее на молекулы. Это поле является суперпозицией внешнего и индукционного полей.

**Вектор поляризации.** Количественно поляризация диэлектрика описывается дипольным моментом единицы объема, или вектором поляризации  $\mathbf{P}$ . Хотя механизмы поляризации в ситуациях 1 (механизм ориентационной поляризации) и 2 (механизм поляризации электронного смещения) различны, опыт показывает, что при напряженности поля в диэлектрике  $E \ll E_{\text{ат}} \approx 10^{11}$  В/м ( $E_{\text{ат}}$  — напряженность внутриатомного поля, удерживающего электрон в атоме на первой боровской орбите) дипольный момент  $P$  пропорционален  $E$ .

Для изотропных диэлектриков эта пропорциональная связь записывается в виде

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0 \chi \mathbf{E}, \quad (4.13)$$

где  $\chi$  — диэлектрическая восприимчивость диэлектрика.

Еще раз подчеркнем, что в (4.13) стоит напряженность поля в диэлектрике, являющегося суммой внешнего и индуцированного полей.

**Диэлектрическая проницаемость.** Рассмотрим простейший случай, когда в однородное поле с напряженностью  $E_0$  помещена перпендикулярно его силовым линиям плоскопараллельная большая диэлектрическая пластина. В результате поляризации на ее поверхностях появятся нескомпенсированные связанные заряды противоположного знака с постоянной поверхностной плотностью  $+\sigma'$  и  $-\sigma'$ , как это изображено на рис. 4.18. Напряженность

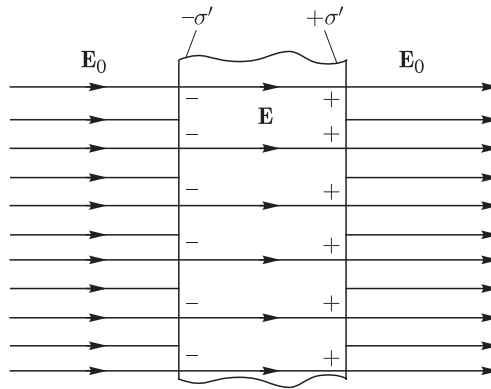


Рис. 4.18

индукционного поля  $E_{\text{инд}}$  внутри диэлектрика равна сумме напряженностей полей, создаваемых тонкими заряженными поверхностными слоями (см. 2.20):  $E_{\text{инд}} = \sigma'/\varepsilon_0$ , а вне диэлектрика индукционное поле отсутствует. Поэтому внутри пластины напряженность поля (по аналогии с (4.3))

$$E = E_0 - E_{\text{инд}} = E_0 - \frac{\sigma'}{\varepsilon_0}. \quad (4.14)$$

Если толщина пластины равна  $l$ , а ее площадь  $S$ , то дипольный момент всей пластины  $p_{\text{пл}} = \sigma' Sl$ , а дипольный момент единицы объема

$$P = \sigma'. \quad (4.15)$$

Поэтому в векторном виде поле в диэлектрической пластине

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_{\text{инд}} = \mathbf{E}_0 - \frac{\mathbf{P}}{\varepsilon_0}. \quad (4.16)$$

Подставляя (4.13) в (4.16), получаем

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{E}_0}{1 + \chi} = \frac{\mathbf{E}_0}{\varepsilon}. \quad (4.17)$$

Здесь

$$\varepsilon = 1 + \chi \quad (4.18)$$

— диэлектрическая проницаемость.

Отметим, что связь (4.18) между двумя константами носит универсальный характер, в то время как формулы (4.16) и (4.17) справедливы лишь в рассматриваемом случае. В частности, *поле в диэлектрике в общем случае неоднородно и зависит не только от величины  $\varepsilon$  (как в (4.17)), но и от формы диэлектрика* (см. далее).

**Вектор поляризации и связанные заряды.** Обобщим формулу (4.15) на случай поляризации диэлектрика произвольной формы. Пусть имеется поляризованный диэлектрик произвольной формы и известен вектор поляризации  $\mathbf{P}$  в каждой его точке (рис. 4.19).

Вблизи поверхности  $S$  диэлектрика мысленно выделим малый объем в виде косоугольного параллелепипеда, так, как показано на фрагменте рисунка

и введем единичный вектор  $\mathbf{n}$ , перпендикулярный к поверхности. Вектор поляризации этого объема связан с поверхностной плотностью связанных зарядов соотношением  $p_{\square} = \sigma' \cdot \Delta S \cdot l$ , а объем  $\Delta V = \Delta S \cdot l \cdot \cos \alpha$ . Поэтому

$$P = \frac{p_{\square}}{\Delta V} = \frac{\sigma' \cdot \Delta S \cdot l}{S \cdot l \cdot \cos \alpha} = \frac{\sigma'}{\cos \alpha},$$

или

$$\sigma' = P \cdot \cos \alpha = \mathbf{P} \cdot \mathbf{n}. \quad (4.19)$$

Таким образом, *поверхностная плотность связанного заряда в некоторой точке равна нормальной составляющей вектора поляризации в этой точке.*

Вычислим далее поток вектора поляризации через замкнутую поверхность. Этот поток, как следует из (4.19), будет равен всему поверхностному заряду. Но так как диэлектрик электронейтрален, то в его объеме останется заряд  $q'$  противоположного знака:

$$\Phi_P = \oint_S \mathbf{P} \cdot d\mathbf{S} = \oint_S \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} \cdot dS = -q'. \quad (4.20)$$

Заряд  $q'$  называется объемным связанным зарядом.

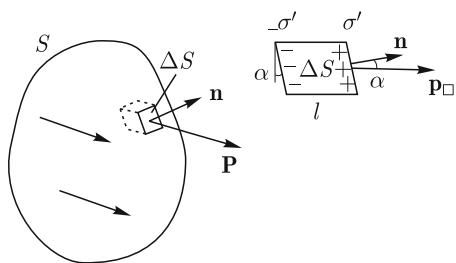


Рис. 4.19

Установим связь между вектором поляризации и объемными связанными зарядами в одной и той же точке пространства. Для этого рассмотрим малый объем в виде кубика со сторонами  $\Delta x, \Delta y, \Delta z$  и (по аналогии с (2.26)) запишем для него уравнение (4.20):

$$\begin{aligned}\Phi_P = & P_x(x + \Delta x/2, y, z) \cdot \Delta y \cdot \Delta z - P_x(x - \Delta x/2, y, z) \cdot \Delta y \cdot \Delta z + \\ & P_y(x, y + \Delta y/2, z) \cdot \Delta x \cdot \Delta z - P_y(x, y - \Delta y/2, z) \cdot \Delta x \cdot \Delta z + \\ & P_z(x, y, z + \Delta z/2) \cdot \Delta x \cdot \Delta y - P_z(x, y, z - \Delta z/2) \cdot \Delta x \cdot \Delta y = \\ & = -\rho' \cdot \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z. \quad (4.21)\end{aligned}$$

Разделим обе части равенства на объем  $\Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z$  и, устремляя его к нулю, получаем

$$\operatorname{div} \mathbf{P} = \frac{\partial P_x}{\partial x} + \frac{\partial P_y}{\partial y} + \frac{\partial P_z}{\partial z} = -\rho'. \quad (4.22)$$

Если поляризация однородна ( $\mathbf{P} = \text{const}$ ), то объемных зарядов нет, а есть лишь поверхностные заряды.

**Однородно поляризованный шар.** Рассмотрим однородно поляризованный диэлектрический шар (рис. 4.20). Если вектор поляризации  $\mathbf{P} = \text{const}$ , то поверхностная плотность связанных зарядов  $\sigma' = P_n = P \cdot \cos \vartheta$ . Тогда создаваемое ими однородное индукционное поле направлено в противоположном направлении относительно вектора  $\mathbf{P}$  и, в соответствии с (3.32), равно

$$\mathbf{E}_{\text{инд}} = -\frac{\mathbf{P}}{3\varepsilon_0}. \quad (4.23)$$

Нетрудно показать, что такая поляризация шара достигается, если шар помещен во внешнее однородное электрическое поле с напряженностью  $\mathbf{E}_0$ . При однородной поляризации поле внутри шара будет также однородным и равным

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_{\text{инд}} = \mathbf{E}_0 - \frac{1}{3} \frac{\mathbf{P}}{\varepsilon_0}. \quad (4.24)$$

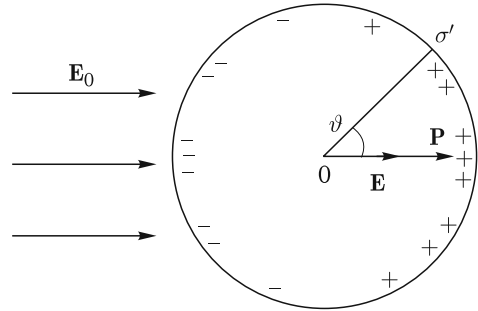


Рис. 4.20

Но в однородном поле поляризация будет также однородной:  $\mathbf{P} = \varepsilon_0 \chi \mathbf{E}$  (4.13). Следовательно, замкнув логический круг, мы доказали справедливость нашего предположения.

Решая совместно (4.24) и (4.13), находим поле внутри шара:

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{E}_0}{1 + \chi/3} = \frac{3\mathbf{E}_0}{2 + \varepsilon}. \quad (4.25)$$

**Фактор формы.** Выражения (4.16) и (4.24) можно объединить, записав их в виде

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_{\text{инд}} = \mathbf{E}_0 - \beta \frac{\mathbf{P}}{\varepsilon_0}. \quad (4.26)$$

Здесь  $\beta$  безразмерный коэффициент, который называется *фактор формы*. Для пластины  $\beta = 1$ , а для шара  $\beta = 1/3$ . Поскольку  $\mathbf{P} = \varepsilon_0 \chi \mathbf{E}$ , то, подставляя это соотношение в (4.26), получаем

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{E}_0}{1 + \beta \chi}. \quad (4.27)$$

Расчеты показывают, что во внешнем однородном поле однородно поляризуется лишь диэлектрик в форме эллипсоида. Плоскость, шар и цилиндр являются его предельными формами. Поле внутри длинного цилиндрического диэлектрика, расположенного поперек внешнего однородного поля, определяется формулой (4.26), при этом  $\beta = 1/2$ , а если цилиндр ориентировать вдоль внешнего поля, то  $\beta = 0$ .

На рис. 4.21 изображен диэлектрик в форме эллипсоида, который помещен во внешнее однородное поле  $\mathbf{E}_0$ . Для расчета поля в диэлектрике нужно расписать соотношения (4.26) и (4.27) в проекциях на координатные оси, которые направим вдоль полуосей эллипсоида. Разложим внешнее поле на три компоненты относительно этой системы координат. Тогда компоненты поля в диэлектрике будут равны

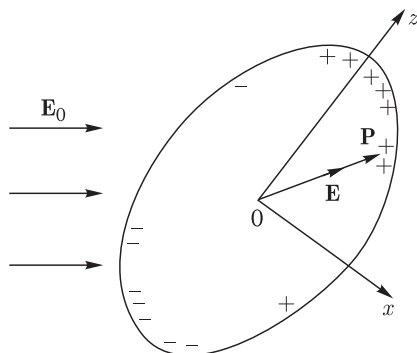


Рис. 4.21

$$\begin{aligned} E_x &= E_{0x} - \beta_x \frac{P_x}{\varepsilon_0} = \frac{E_{0x}}{1 + \beta_x \cdot \chi}; \\ E_y &= E_{0y} - \beta_y \frac{P_y}{\varepsilon_0} = \frac{E_{0y}}{1 + \beta_y \cdot \chi}; \\ E_z &= E_{0z} - \beta_z \frac{P_z}{\varepsilon_0} = \frac{E_{0z}}{1 + \beta_z \cdot \chi}. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Здесь  $\beta_x, \beta_y, \beta_z$  — факторы формы эллипсоида, значения которых определяются соотношением длин его полуосей. Можно показать, что они связаны соотношением

$$\beta_x + \beta_y + \beta_z = 1. \quad (4.29)$$

Если эллипсоид вытянут вдоль оси  $Oz$ , как это изображено на рисунке, то  $\beta_z < \beta_x, \beta_y$ . Векторы  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{P}$  при произвольной ориентации эллипсоида составляют некоторый угол с вектором  $\mathbf{E}_0$ . Как будет показано ниже, это приводит к возникновению момента сил, действующего на диэлектрический эллипсоид.

Из (4.29) сразу следует, что у шара  $\beta_x = \beta_y = \beta_z = 1/3$ , а у длинного цилиндра  $\beta_x = \beta_y = 1/2, \beta_z = 0$ .

**Вектор индукции.** Связанные заряды  $q'$  (или  $\rho'$ ) вместе со свободными зарядами  $q$  (или  $\rho$ ) являются источниками поля. Поэтому формула (2.19) при наличии диэлектрика примет вид

$$\Phi_E = \oiint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{q}{\varepsilon_0} + \frac{q'}{\varepsilon_0} = \frac{q}{\varepsilon_0} - \frac{1}{\varepsilon_0} \oiint_S \mathbf{P} \cdot d\mathbf{S}, \quad (4.30)$$

где учтено, что  $q' = -\Phi_P = -\oiint_S \mathbf{P} \cdot d\mathbf{S}$  (формула (4.20)).

Введем вектор индукции

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \cdot \mathbf{E} + \mathbf{P}. \quad (4.31)$$

Удобство его использования состоит в том, что *поток вектора индукции через замкнутую поверхность равен сумме свободных зарядов в объеме, ограниченном этой поверхностью*:

$$\Phi_D = \oint_S \varepsilon_0 \cdot \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} + \oint_S \mathbf{P} \cdot d\mathbf{S} = \oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = q. \quad (4.32)$$

Как и (2.19), эта формула имеет фундаментальное значение и является одним из уравнений Максвелла в интегральной форме при наличии среды.

Соответственно формула (2.27) примет вид

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} + \frac{\rho'}{\varepsilon_0} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} - \frac{1}{\varepsilon_0} \operatorname{div} \mathbf{P}, \quad (4.33)$$

где учтено, что  $\rho' = -\operatorname{div} \mathbf{P}$  (формула (4.22)).

Следовательно, уравнение Максвелла в дифференциальной форме получается в виде

$$\operatorname{div} \varepsilon_0 \mathbf{E} + \operatorname{div} \mathbf{P} = \operatorname{div} \mathbf{D} = \rho. \quad (4.34)$$

Уравнения (4.32) и (4.34) имеют фундаментальное значение в теории электромагнетизма, т.к. справедливы для любого электрического поля. Они являются уравнениями Максвелла в среде и показывают, что источниками поля индукции являются свободные заряды. Поэтому в ряде случаев бывает значительно проще рассчитать индукцию, нежели чем напряженность поля, поскольку свободные заряды бывают заданными.

Связь между индукцией и напряженностью получается из (4.13) и (4.31):

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \cdot \mathbf{E} + \mathbf{P} = \varepsilon_0 \cdot \mathbf{E} + \varepsilon_0 \chi \mathbf{E} = \varepsilon_0 (1 + \chi) \mathbf{E} = \varepsilon_0 \varepsilon \mathbf{E}, \quad (4.35)$$

где  $\varepsilon = 1 + \chi$  — диэлектрическая проницаемость (см. (4.18)).

Индукция электрического поля является суммой разных по физическому смыслу слагаемых, поэтому не имеет глубокого физического смысла. Однако использование векторного поля  $\mathbf{D}$  во многих случаях упрощает расчеты электрического поля в диэлектриках.

## ЛЕКЦИЯ 5

**Граничные условия для векторов  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{D}$ .** Получим соотношения, связывающие векторы напряженности и индукции на границе раздела двух диэлектриков с диэлектрическими проницаемостями  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$ . Для простоты возьмем диэлектрическую пластину, состоящую из двух клиновидных половинок разных диэлектриков, и поместим ее в однородное поле с напряженностью  $\mathbf{E}_0$  так, как показано на рис. 5.1. При поляризации диэлектриков на внешних границах появятся связанные заряды разного знака с поверхностными плотностями  $\sigma'_1 < 0$  и  $\sigma'_2 > 0$ , а на границе их раздела появятся связанные заряды разного знака с поверхностными плотностями

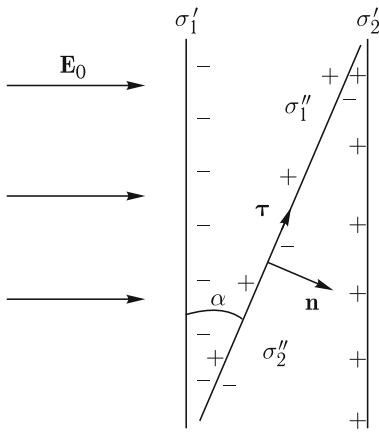


Рис. 5.1

$$\sigma''_1 = P_{1n} > 0 \quad \text{и} \quad \sigma''_2 = P_{2n} < 0, \quad (5.1)$$

где  $P_{1n}$  и  $P_{2n}$  — проекции векторов поляризации на нормаль  $\mathbf{n}$  к границе раздела, направленной из первой среды во вторую.

Введем единичный вектор  $\boldsymbol{\tau}$  (тангенциальный вектор), направленный вдоль границы раздела, которая наклонена под углом  $\alpha$  к внешней поверхности пластины. Поле в каждом из диэлектриков будет равно сумме внешнего и индукционного полей, а последнее поле создается четырьмя заряженными слоями поверхностных зарядов.

Поэтому нормальные составляющие поля в каждом из диэлектриков будут равны

$$\begin{aligned} E_{1n} &= E_0 \cos \alpha + \frac{\sigma'_1 - \sigma'_2}{2\varepsilon_0} \cos \alpha - \frac{\sigma''_1 - \sigma''_2}{2\varepsilon_0}, \\ E_{2n} &= E_0 \cos \alpha + \frac{\sigma'_1 - \sigma'_2}{2\varepsilon_0} \cos \alpha + \frac{\sigma''_1 - \sigma''_2}{2\varepsilon_0}. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Тогда

$$E_{1n} - E_{2n} = -\frac{\sigma''_1 - \sigma''_2}{\varepsilon_0} = -\frac{P_{1n} - P_{2n}}{\varepsilon_0}.$$

Следовательно,

$$\varepsilon_0 E_{1n} + P_{1n} = \varepsilon_0 E_{2n} + P_{2n}, \quad \text{или} \quad D_{1n} = D_{2n}. \quad (5.3)$$

Это равенство означает, что *нормальная компонента вектора индукции на границе раздела двух диэлектриков непрерывна.*

Тангенциальные компоненты поля в каждом из диэлектриков будут одинаковы:

$$E_{1\tau} = E_{2\tau} = E_0 \sin \alpha + \frac{\sigma'_1 - \sigma'_2}{2\varepsilon_0} \sin \alpha, \quad (5.4)$$

поскольку граница раздела не вносит вклада в тангенциальную составляющую индукционного поля. Таким образом, *тангенциальная компонента вектора напряженности на границе раздела двух диэлектриков непрерывна.*

В самом общем случае непрерывность тангенциальной компоненты следует из условия потенциальности электростатического поля:  $\oint \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = 0$  (см. (3.6)). Действительно, если взять контур интегрирования в виде небольшого прямоугольника  $l \times h$ , вытянутого вдоль границы раздела (рис. 5.2), то при  $h \ll l$  условие (3.6) примет вид

$$E_{1\tau}l - E_{2\tau}l = 0, \text{ или } E_{1\tau} = E_{2\tau}. \quad (5.5)$$

Так как  $D_{1\tau} = \varepsilon_0 \varepsilon_1 E_{1\tau}$ ,  $D_{2\tau} = \varepsilon_0 \varepsilon_2 E_{2\tau}$ , то *тангенциальная компонента вектора индукции при  $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2$  претерпевает разрыв.*

Граничное условие для нормальной компоненты вектора индукции при наличии свободных зарядов на границе раздела получается из теоремы Гаусса  $\Phi_D = \oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = q$  (см. (4.32)), если интегрирование проводить по поверхности

небольшого цилиндра с площадью основания  $S$  и высотой  $h \ll \sqrt{S}$  (рис. 5.3). Тогда

$$\Phi_D = -D_{1n}S + D_{2n}S = \sigma \cdot S \quad \text{или} \quad D_{2n} - D_{1n} = \sigma. \quad (5.6)$$

Здесь знак минус перед  $D_{1n}S$  возникает из-за того, что внешняя нормаль к нижнему основанию цилиндра направлена противоположно нормали  $\mathbf{n}$ .

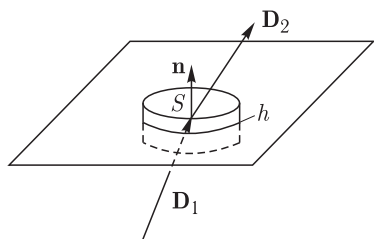


Рис. 5.3

*Разрыв нормальной компоненты вектора индукции происходит лишь при наличии свободных зарядов на границе раздела. В отсутствие свободных зарядов нормальная компонента вектора индукции непрерывна.*

Так как  $D_{1n} = \varepsilon_0 \varepsilon_1 E_{1n}$ ,  $D_{2n} = \varepsilon_0 \varepsilon_2 E_{2n}$ , то *нормальная компонента вектора напряженности при  $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2$  претерпевает разрыв.*

Соотношения (5.5) и (5.6) называются граничными условиями для векторов  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{D}$ .

**Преломление линий напряженности и индукции.** Из граничных условий легко получить закон преломления линий вектора напряженности электрического поля (вектора индукции) на границе раздела двух диэлектриков.

На рис. 5.4а изображены линии однородного электрического поля, а на рис. 5.4б — линии индукции для случая  $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$ . Из-за появления связанных зарядов  $\sigma''_1 = P_{1n} > 0$  и  $\sigma''_2 = P_{2n} < 0$  возникает индукционное поле  $\mathbf{E}_{\text{инд}}$ , и линии испытывают излом. Как отмечалось в предыдущей лекции,

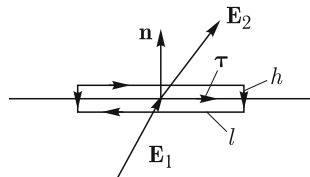


Рис. 5.2

источниками поля индукции  $\mathbf{D}$  являются свободные заряды (см. (4.32) или (4.34)). Поэтому линии вектора  $\mathbf{D}$  неразрывны, в то время как линии вектора  $\mathbf{E}$  претерпевают разрыв: густота линий во второй среде (а значит и напряженность поля) больше, чем в первой.

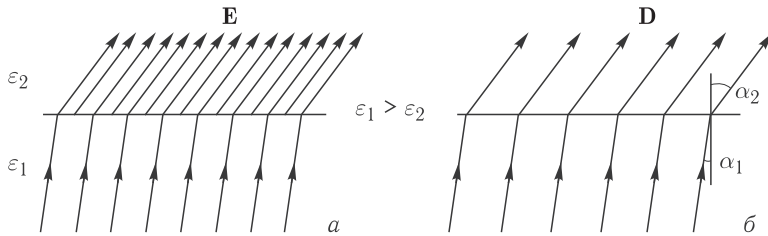


Рис. 5.4

Найдем соотношения между углом «падения»  $\alpha_1$  и углом «преломления»  $\alpha_2$  линий. Граничное условие (5.5) примет вид  $E_1 \sin \alpha_1 = E_2 \sin \alpha_2$ , а граничное условие (5.6) в отсутствие свободных зарядов с учетом (4.35) запишем как  $\varepsilon_0 \varepsilon_1 E_1 \cos \alpha_1 = \varepsilon_0 \varepsilon_2 E_2 \cos \alpha_1$ . Деля первое равенство на второе, получаем закон преломления линий:

$$\varepsilon_1 \operatorname{tg} \alpha_1 = \varepsilon_2 \operatorname{tg} \alpha_2. \quad (5.7)$$

Рассмотрим несколько важных примеров.

**Пример 1.** Поместим в однородное поле  $\mathbf{E}_0$  диэлектрическую пластину, нормаль к которой совпадает с вектором напряженности поля (рис. 5.5). Поскольку диэлектрическая проницаемость пластины  $\varepsilon_2$  заметно больше диэлектрической проницаемости окружающего ее воздуха ( $\varepsilon_1 \approx 1$ ), то линии полного поля (внешнего + индукционного) претерпевают разрывы на поверхностях пластины, где находятся связанные заряды  $\sigma'$  и  $-\sigma'$  (а).

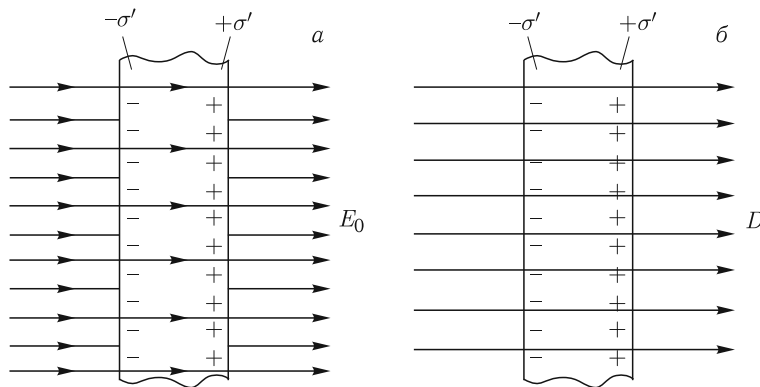


Рис. 5.5

Так как в изотропной среде  $\mathbf{D} \parallel \mathbf{E}$ , то ход линий индукции будет таким же, однако они будут неразрывны (б). Поле вне пластины  $E_1 = E_0$ , а в пластине  $E_2 = E_0 - \sigma'/\varepsilon_0 = E_0 - P_2/\varepsilon_0$ , т.к.  $\sigma' = P_2$ . Тогда индукция  $D_2 = \varepsilon_0 E_2 + P_2 = \varepsilon_0 E_0 = D_1$ .



**Пример 2.** Погрузим диэлектрический шар с диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon_2$  в жидкий диэлектрик с диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon_1$ , в котором до погружения существовало однородное электростатическое поле. В результате поляризации шара поле изменится (рис. 5.6). Ситуация (а) соответствует случаю  $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$ , а ситуация (б) — случаю  $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$ . Силовые

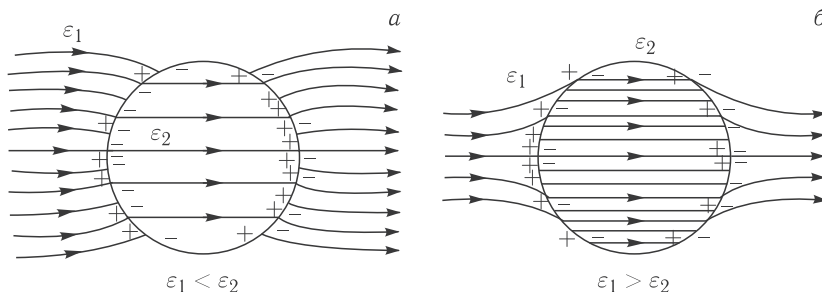


Рис. 5.6

линии не перпендикулярны поверхности шара, а их излом подчиняется соотношению (5.7). В обоих случаях поле внутри шара однородно, а поверхностный заряд, равный сумме поверхностных зарядов соприкасающихся сред, распределен по закону  $\sigma'(\vartheta) = \sigma'_0 \cdot \cos \vartheta$  (см. (3.31)). В ситуации (а) справа будет положительный ( $\sigma'_0 > 0$ ), а слева отрицательный поверхностный связанный заряд, а в ситуации (б) — наоборот. Это следует из соотношений  $\sigma'_0 = \sigma'_{01} + \sigma'_{02} = -P_{1n} + P_{2n} = -\varepsilon_0(\varepsilon_1 - 1)E_{1n} + \varepsilon_0(\varepsilon_2 - 1)E_{2n}$  и  $D_{1n} = \varepsilon_0\varepsilon_1 E_{1n} = D_{2n} = \varepsilon_0\varepsilon_2 E_{2n}$ . Тогда

$$\sigma'_0 = \varepsilon_0 \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_2} E_{1n}. \quad (5.8)$$

**Пример 3.** Поместим в однородное поле диэлектрический эллипсоид, снаружи которого находится воздух (рис. 5.7). В результате поляризации поле вне его исказится, а внутри поле будет однородным в соответствии с (4.28). На поверхности эллипсоида происходит излом силовых линий и их разрыв. Если эллипсоид ориентирован так, что любая из трех его полуосей становится направленной вдоль внешнего поля, то поле внутри эллипсоида будет также направлено вдоль внешнего поля.

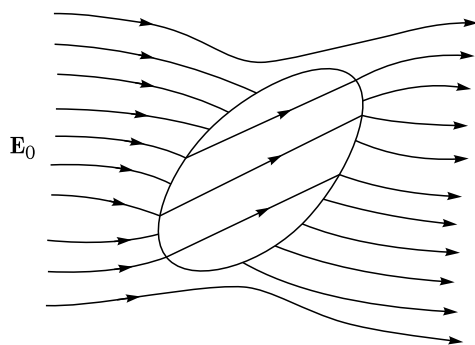


Рис. 5.7

**Поле в однородном диэлектрике.** Уравнение (4.34) может быть представлено в виде  $\operatorname{div} \mathbf{D} = \operatorname{div}(\varepsilon_0 \varepsilon \mathbf{E}) = \rho$ . Если во всем пространстве диэлектрическая проницаемость не зависит от координат (однородный диэлектрик, отсутствуют границы, включая границы раздела разных диэлектриков), то мы вправе записать

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0 \varepsilon}. \quad (5.9)$$

Поскольку  $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$ , то уравнение Пуассона примет вид

$$\Delta\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0\varepsilon}. \quad (5.10)$$

Эти соотношения позволяют сделать вывод: *поле в безграничном однородном диэлектрике ( $\varepsilon = \text{const}$ ) уменьшается в  $\varepsilon$  раз по сравнению с полем в вакууме*. На практике это означает, что влияние связанных зарядов на удаленных границах исчезающее мало.

В частности, напряженность поля точечного заряда в безграничном диэлектрике, в отличие от (2.12), будет равна

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\varepsilon} k \frac{q}{|\mathbf{r}|^3} \mathbf{r} = \frac{1}{\varepsilon} k \frac{q}{r^3} \mathbf{r}. \quad (5.11)$$

Действительно, если маленький заряженный шарик радиусом  $R$  (например, имеющий положительный заряд  $q$ ) погрузить в жидкий диэлектрик с проницаемостью  $\varepsilon$ , то на границе диэлектрика, примыкающей к шарiku, образуется отрицательный поверхностный заряд  $\sigma'_0 = -P_n = -\varepsilon_0(\varepsilon - 1)E(R)$ . Поскольку внешние границы далеки, то напряженность поля  $E(R) = k \frac{q + \sigma'_0 4\pi R^2}{R^2}$ . Исключая поверхностный заряд, из этих соотношений получаем  $E(R) = k \frac{q}{\varepsilon R^2}$ .

**Силы, действующие на диполь.** Для описания механизмов поляризации диэлектрика и действующих на него сил со стороны внешнего поля изучим вначале воздействие внешнего поля на элементарный диполь. Предположим вначале, что диполь находится в однородном поле с напряженностью  $\mathbf{E}_0$  (рис. 5.8 а). Сумма сил, действующих на диполь  $\mathbf{F} = \mathbf{F}_+ + \mathbf{F}_- = 0$ , а момент сил

$$\mathbf{M} = \mathbf{l} \times \mathbf{F}_+ = \mathbf{l} \times q\mathbf{E}_0 = \mathbf{p} \times \mathbf{E}_0, \quad (5.12)$$

где  $\mathbf{p} = q \cdot \mathbf{l}$  — дипольный момент. Момент сил стремится повернуть диполь в направлении внешнего поля.

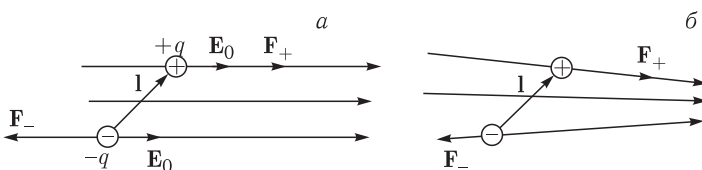


Рис. 5.8

Это вывод подтверждается экспериментом, в котором диэлектрик сигарообразной формы (например, изготовленный из парафина) подвешивается за середину на нити и вносится в пространство между двумя параллельными металлическими пластинами (в плоский конденсатор). Одна пластина заземлена, а вторая соединена с одним из полюсов заземленной электрофорной машины. Когда диски машины начинают вращаться, то «сигара» устанавливается перпендикулярно плоскостям пластин.

Если поле неоднородно ( $\mathbf{E}_0(x, y, z)$ ), то на диполь продолжает действовать как момент сил, так и сила  $\mathbf{F} = \mathbf{F}_+ + \mathbf{F}_- \neq 0$  (рис. 5.8 б). Чтобы вычислить

эту силу, будем считать что отрицательный заряд имеет координаты  $(x, y, z)$ , а положительный заряд  $-(x + l_x, y + l_y, z + l_z)$ . Тогда

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= q\mathbf{E}_0(x + l_x, y + l_y, z + l_z) - q\mathbf{E}_0(x, y, z) = \\ &= q \left( \frac{\partial \mathbf{E}_0}{\partial x} l_x + \frac{\partial \mathbf{E}_0}{\partial y} l_y + \frac{\partial \mathbf{E}_0}{\partial z} l_z \right) = (\mathbf{p} \cdot \nabla) \mathbf{E}_0. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Здесь  $\nabla$  — оператор градиента (см. (3.19))

*В неоднородном поле диполь ориентируется вдоль поля и затягивается в область с большей напряженностью поля.*

Вычислим теперь силу, действующую на малый объем  $\Delta V$  диэлектрика. Очевидно, что она равна сумме сил, действующих на дипольные моменты отдельных атомов или молекул, поэтому

$$\Delta \mathbf{F} = \sum_{\Delta V} (\mathbf{p}_i \cdot \nabla) \cdot \mathbf{E} = \Delta V (\mathbf{P} \cdot \nabla) \mathbf{E}, \quad (5.14)$$

где напряженность поля  $\mathbf{E}$  внутри диэлектрика, вообще говоря, отличается от напряженности  $\mathbf{E}_0$  внешнего поля. Используя соотношение  $\mathbf{P} = \epsilon_0(\epsilon - 1)\mathbf{E}$ , математическое тождество  $(\mathbf{E} \cdot \nabla)\mathbf{E} = (1/2)\nabla E^2 - (\mathbf{E} \cdot \text{rot } \mathbf{E})$  и условие потенциальности  $\text{rot } \mathbf{E} = 0$ , для силы  $\mathbf{f}$ , действующей на единицу объема диэлектрика, получаем

$$\mathbf{f} = \frac{\Delta \mathbf{F}}{\Delta V} = \epsilon_0(\epsilon - 1)\nabla E^2. \quad (5.15)$$

Эта сила не зависит от направления поля и направлена вдоль градиента квадрата напряженности поля. Этим объясняется тот факт, что бумажные листки притягиваются к заряженному шарiku вне зависимости от знака его заряда.

Формула (5.15) позволяет рассчитать лишь объемную силу. Между тем на границе раздела диэлектриков могут возникать и поверхностные силы. Например, интересно ведет себя диэлектрический шар, погруженный в жидкий диэлектрик. При  $\epsilon_1 < \epsilon_2$  в однородном поле он будет растягиваться, поскольку, как следует из рис. 5.6 а, на правой границе раздела суммарный поверхностный заряд будет положительным, а на левой — отрицательным. Следовательно, в неоднородном поле, увеличивающемся слева направо, шар (подобно листкам) будет затягиваться в область с большей напряженностью поля (рис. 5.9 а). Если  $\epsilon_1 > \epsilon_2$ , то в однородном поле шар будет сдавливаться, поскольку теперь на правой границе раздела суммарный поверхностный заряд

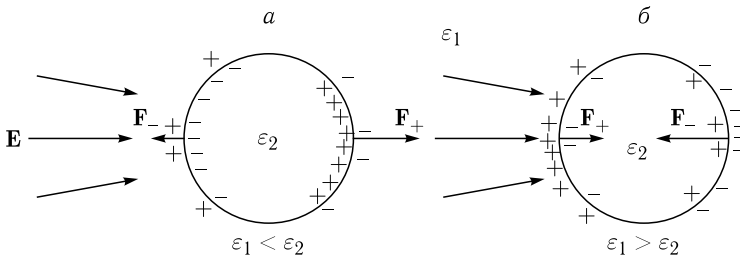


Рис. 5.9

будет отрицательным, а на левой — положительным (рис. 5.5 б). Соответственно в неоднородном поле он будет выталкиваться из области с большей напряженностью (рис. 5.9 б).

Последний вывод эффектно демонстрируется в опыте, схема которого изображена на рис. 5.10. В стеклянный сосуд, заполненный керосином, опускают электрод с шариком на конце и погружают трубку (пульверизатор), создающую с помощью резиновой груши цепочку воздушных пузырьков, всплывающих вблизи шарика. Когда на электрод подается некоторый потенциал от электрофорной машины, то воздушные пузырьки отталкиваются от шарика.

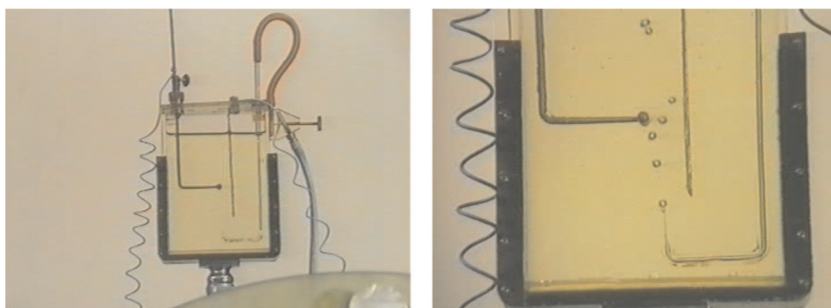


Рис. 5.10

В другом опыте диэлектрический шарик подвешивается на нити и помещается в неоднородное электрическое поле, создаваемое разноименно заряженными шариком и плоскостью (рис. 5.11). В воздухе шарик притягивается к маленькому электроду, где напряженность поля велика. При погружении шарика в керосин он, наоборот, будет отталкиваться.

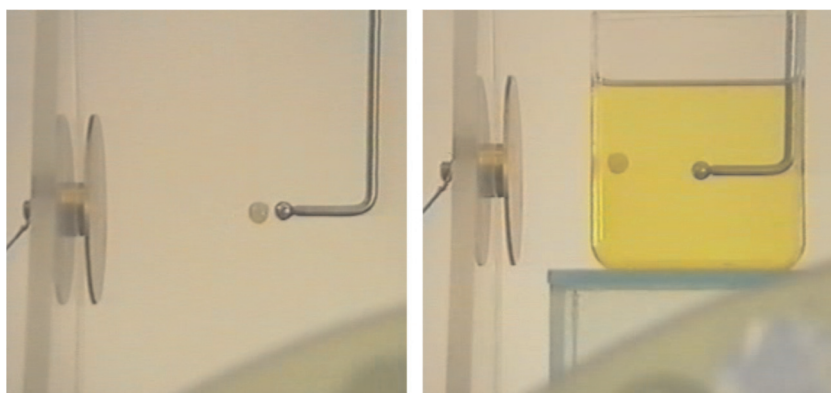


Рис. 5.11

В воздухе, как отмечалось выше, парафиновый эллипсоид выстраивается вдоль поля. Это происходит потому, что диэлектрическая проницаемость парафина  $\epsilon_2$  больше диэлектрической проницаемости воздуха  $\epsilon_1$ . В этом случае на него действует пара сил так, как изображено на рис. 5.12 а, поэтому

момент сил стремится развернуть эллипсоид вдоль поля. Момент сил при этом обратится в нуль, а эллипсоид будет подвержен растяжению вдоль поля.

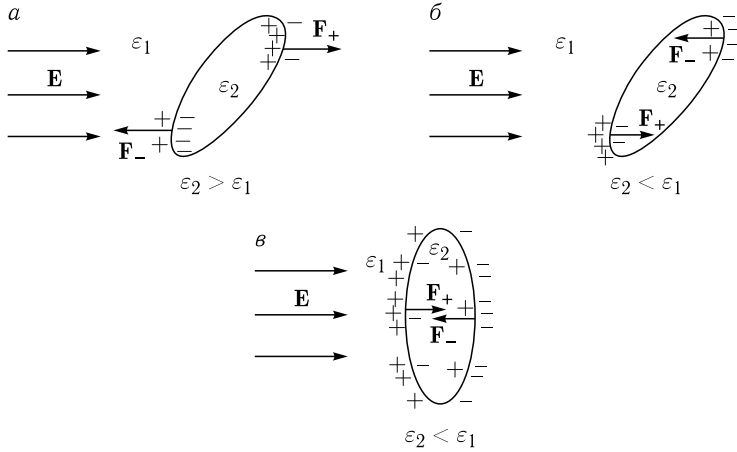


Рис. 5.12

При погружении парафинового эллипсоида в кювету с дистиллированной водой он будет устанавливаться поперек поля, так как диэлектрическая проницаемость парафина  $\varepsilon_2$  меньше диэлектрической проницаемости дистиллированной воды  $\varepsilon_1$ . Поскольку пара сил приложена так, как показано на рис. 5.12 б, то момент сил развернет эллипсоид поперек поля (ситуация в). В этом положении момент сил будет равен нулю, а эллипсоид будет сдавлен с обеих сторон.

Отметим, что знак суммарного поверхностного заряда на границе раздела, показанного на рис. 5.12, определяется знаком заряда диэлектрика с большей диэлектрической проницаемостью.

Рассмотренные опыты показывают, что *на границе раздела двух диэлектриков, помещенных во внешнее поле, возникает сила, направленная в сторону диэлектрика с меньшей диэлектрической проницаемостью.* Более подробно об этой силе речь пойдет ниже.

**Энергия диполя во внешнем поле.** Поскольку на элементарный диполь  $\mathbf{p}$  во внешнем поле  $\mathbf{E}_0$  действует момент сил (5.12), то при повороте диполя на угол  $d\alpha$  ( $\alpha$  — угол между векторами  $\mathbf{p}$  и  $\mathbf{E}_0$ ) его потенциальная энергия увеличится на величину  $dW = M \cdot d\alpha = p \cdot E_0 \cdot \sin \alpha \cdot d\alpha$ . Если принять, что  $W_0 = 0$  при  $\alpha = 0$ , то потенциальная энергия диполя

$$W = \int_0^\alpha M \cdot d\alpha = p \cdot E_0 \int_0^\alpha \sin \alpha \cdot d\alpha = W_0 - p \cdot E_0 \cdot \cos \alpha = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}_0. \quad (5.16)$$

**Энергия поля.** Как отмечалось в лекции 3, собственная энергия заряженного тела  $W_{сб} = \frac{1}{2} \int_V \varphi \cdot \rho \cdot dV$  (см. 3.35). Предположим, что в диэлектрике большого объема  $V$  распределен свободный заряд с плотностью  $\rho$ .

Эта плотность связана с индукцией диэлектрика соотношением (4.34):  $\rho = \operatorname{div} \mathbf{D}$ . Поэтому

$$W_{\text{сб}} = \frac{1}{2} \int_V \varphi \cdot \operatorname{div} \mathbf{D} \cdot dV. \quad (5.17)$$

Используем далее математическое тождество  $\varphi \cdot \operatorname{div} \mathbf{D} = -\mathbf{D} \cdot \nabla \varphi + \operatorname{div}(\varphi \cdot \mathbf{D})$ , равенство  $\mathbf{E} = -\nabla \varphi$  и перепишем (5.17) в виде

$$W_{\text{сб}} = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} \cdot dV + \frac{1}{2} \int_V \operatorname{div}(\varphi \cdot \mathbf{D}) \cdot dV. \quad (5.18)$$

Второй интеграл по объему по теореме Гаусса может быть заменен интегралом по поверхности  $S$ , ограничивающей этот объем:

$$\int_V \operatorname{div}(\varphi \cdot \mathbf{D}) \cdot dV = \int_S \varphi \cdot \mathbf{D} \cdot dS. \quad (5.19)$$

Если свободные заряды с суммарным зарядом  $q$  расположены в середине диэлектрика, а линейный размер диэлектрика равен  $L$ , то на его поверхности  $S \sim L^2$  потенциал  $\varphi \sim kq/L$ , а индукция  $D \sim kq/L^2$ . Поэтому  $\int_S \varphi \cdot \mathbf{D} \cdot dS \sim \sim k^2 \cdot q^2/L$ . При  $L \rightarrow \infty$  интеграл (5.19) будет стремиться к нулю и

$$W_{\text{сб}} = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} \cdot dV = W. \quad (5.20)$$

В эту формулу не входят свободные заряды и потенциалы создаваемых ими полей. Из нее следует, что для создания в объеме  $V$  диэлектрика электрического поля и вызываемой им индукции необходимо затратить энергию, которая аккумулируется в этом объеме. Поэтому эта энергия является энергией  $W$  электрического поля.

В единице объема диэлектрика запасается энергия

$$w = \frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D}, \quad (5.21)$$

которая называется *объемной плотностью энергии электрического поля*.

Термин «электрическое поле» употреблен не случайно. Как будет показано ниже, формулы (5.20) и (5.21) носят универсальный характер и справедливы не только для электростатического, но и для переменного электрического поля.

Следует подчеркнуть, что в (5.21) вектор индукции может не совпадать по направлению с вектором напряженности, как это имеет место в анизотропном диэлектрике (см. далее). В изотропном диэлектрике  $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \mathbf{E}$ , поэтому объемная плотность энергии

$$w = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \varepsilon E^2. \quad (5.22)$$

В качестве иллюстрации рассмотрим примеры.

**Пример 4.** Вычислим энергию электрического поля, создаваемого шаром радиуса  $R$ , который равномерно заряжен по поверхности зарядом  $q$ . Поскольку поле существует во всем окружающем пространстве и напряженность

поля  $E = kq/r^2$ , то

$$W = \int w \cdot dV = \int \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 \cdot dV = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \int_R^\infty k \frac{q}{r^2} 4\pi r^2 dr = \frac{1}{2} k \frac{q^2}{R},$$

что совпадает с (3.36).

**Пример 5.** Определим энергию электрического поля, создаваемого плоским конденсатором, пространство между обкладками которого заполнено диэлектриком с диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon$ . Если поверхностные плотности зарядов пластин, находящихся на расстоянии  $l$  друг от друга, равны  $\sigma$  и  $-\sigma$ , а площадь пластины  $S$ , то напряженность поля в диэлектрике, согласно (2.226) и (4.17), равна

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon \varepsilon_0}, \quad (5.23)$$

а индукция

$$D = \varepsilon_0 \varepsilon E = \sigma. \quad (5.24)$$

Поскольку объемная плотность энергии  $w = \frac{1}{2} E \cdot D = \frac{1}{2} \frac{\sigma^2}{\varepsilon \varepsilon_0}$ , то энергия поля

$$W = w \cdot S \cdot l = \frac{1}{2} \frac{\sigma^2}{\varepsilon \varepsilon_0} S \cdot l = \frac{1}{2} \sigma \cdot S \cdot E \cdot l = \frac{1}{2} q(\varphi_1 - \varphi_2), \quad (5.25)$$

что совпадает с (3.37).

**Поверхностные силы.** Если удалить диэлектрик из заряженного конденсатора, то разность потенциалов и энергия поля, как следует из (5.25), возрастет в  $\varepsilon$  раз (рис. 5.13). Из энергетических соображений следует, что для удаления диэлектрика необходимо совершить работу против электрических сил, затягивающих диэлектрик в конденсатор. Эта работа равна изменению энергии электрического поля:  $A = (\varepsilon - 1)W$ .

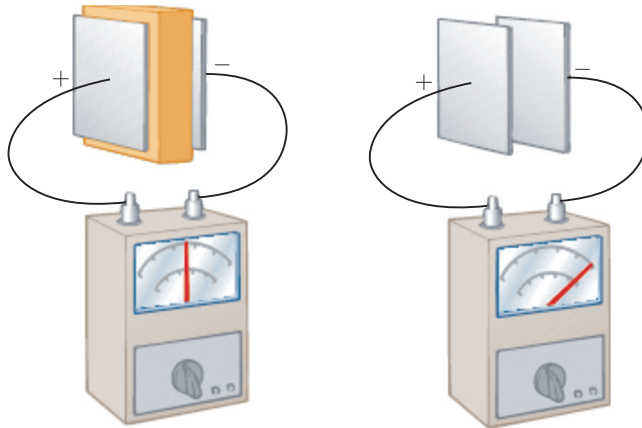


Рис. 5.13

Причина возникновения этих сил кроется в неоднородности поля вблизи краев пластин. На рис. 5.14 изображена диэлектрическая пластина, частично

заполняющая пространство между обкладками. Слева от обкладок поле действует на связанные поляризационные заряды, и результирующая сила направлена слева направо.

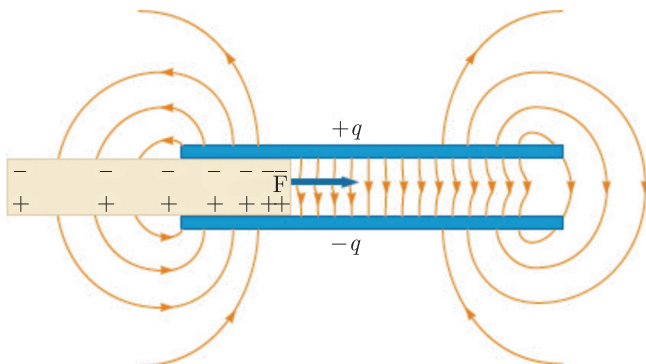


Рис. 5.14

Втягивание жидкого диэлектрика можно продемонстрировать, опустив в сосуд с керосином две плоскопараллельные проводящие полоски, расстояние между которыми 2–3 мм (рис. 5.15). Если  $\varphi_1 - \varphi_2 \sim 1000\text{В}$ , то керосин поднимается на небольшую высоту в пространстве между полосками.

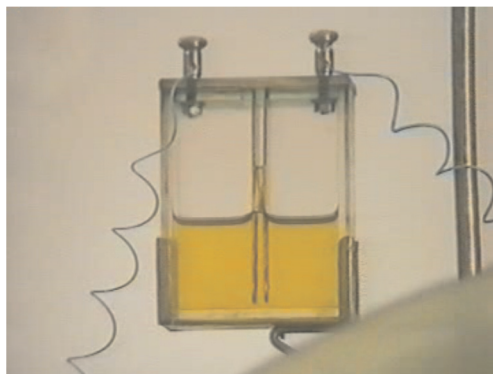


Рис. 5.15

Чтобы вычислить эту силу, рассмотрим заряженный плоский конденсатор, между обкладками которого находятся два диэлектрика с проницаемостями  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$  (рис. 5.16). Граница раздела между ними имеет

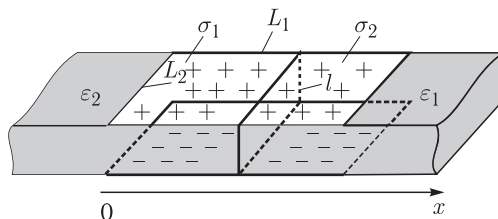


Рис. 5.16



прямоугольное сечение  $l \times L_2$  ( $l$  — расстояние между обкладками,  $L_2$  — ширина обкладки). Если координата сечения равна  $x$ , то заряд конденсатора  $q = L_2 [\sigma_1 x + \sigma_2 (L_1 - x)]$  ( $L_1$  — длина пластин). Тангенциальная составляющая вектора напряженности поля непрерывна:  $E = \sigma_1 / \varepsilon_0 \varepsilon_1 = \sigma_2 / \varepsilon_0 \varepsilon_2$ , а индукции различны: ( $D_1 = \sigma_1$ ,  $D_2 = \sigma_2$ ). Поверхностные плотности  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  зависят от координаты сечения, а полный заряд сохраняется.

Энергия поля в первом диэлектрике  $W_1 = (1/2) E \cdot D_1 \cdot l \cdot L_2 \cdot x$ , во втором  $W_2 = (1/2) E \cdot D_2 \cdot l \cdot L_2 \cdot (L_1 - x)$ , полная энергия  $W = W_1 + W_2$ .

Сместим мысленно (виртуально) сечение на малую величину  $\delta x$ . Соответствующее изменение полной энергии будет равно

$$\delta W = \delta W_1 + \delta W_2 = \left( \frac{1}{2} E \cdot D_1 - \frac{1}{2} E \cdot D_2 \right) \cdot l \cdot L_2 \cdot \delta x. \quad (5.26)$$

Это изменение энергии равно с обратным знаком работе, совершаемой электрической силой  $F$ :

$$\delta W = -F \cdot \delta x. \quad (5.27)$$

Из последних двух выражений получается выражения для силы  $f$ , действующей на единицу площади границы раздела диэлектриков:

$$f = \frac{F}{l \cdot L_2} = \left( \frac{1}{2} E \cdot D_2 - \frac{1}{2} E \cdot D_1 \right). \quad (5.28)$$

Таким образом, на границе раздела со стороны обоих диэлектриков действуют силы давления  $f_1 = (1/2) E \cdot D_1$  и  $f_2 = (1/2) E \cdot D_2$ . Сила давления численно равна объемной плотности энергии, приходящейся на тангенциальную компоненту поля, и перпендикулярна силовой линии поля.

Если  $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$ , то  $f_1 > f_2$  и суммарная сила направлена в сторону диэлектрика с меньшей диэлектрической проницаемостью.

Если граница раздела диэлектриков параллельна обкладкам плоского конденсатора (рис. 5.17), то  $E_1 = \sigma / \varepsilon_0 \varepsilon_1$ ,  $E_2 = \sigma / \varepsilon_0 \varepsilon_2$ ,  $D_1 = D_2 = \sigma$ ,  $W_1 = (1/2) E_1 \cdot D \cdot L_1 \cdot L_2 \cdot x$ ,  $W_2 = (1/2) E_2 \cdot D \cdot L_1 \times \times L_2 \cdot (l - x)$ ,  $\delta W = \delta W_1 + \delta W_2 = [(1/2) E_1 \cdot D - (1/2) E_2 \cdot D] \cdot L_1 \cdot L_2 \times \times \delta x = -F \cdot \delta x$ . Поэтому

$$f = \frac{F}{L_1 \cdot L_2} = \left( \frac{1}{2} E_2 \cdot D - \frac{1}{2} E_1 \cdot D \right). \quad (5.29)$$

В этом случае на границе раздела со стороны обоих диэлектриков действуют силы притяжения (натяжения) границы:  $f_1 = (1/2) E_1 \cdot D$  и  $f_2 = (1/2) E_2 \cdot D$ . Сила натяжения численно равна объемной плотности энергии, приходящейся на нормальную компоненту поля, и направлена вдоль силовой линии поля.

Если  $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$ , то  $f > 0$ . Поэтому диэлектрик с меньшей проницаемостью «тянет на себя» границу сильнее, чем диэлектрик с большей проницаемостью.

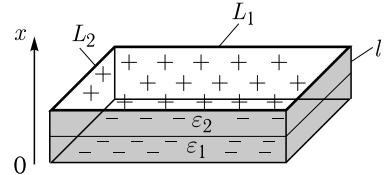


Рис. 5.17

Величины  $f_1$  и  $f_2$  получили название максвелловских давлений и натяжений. Дело в том, что в те времена Фарадей говорил о силовых линиях как об упругих трубках, переносящих натяжение и давление. Следуя Фарадею, Максвелл считал причиной электрических и магнитных явлений упругие деформации гипотетической среды — эфира. Характерной особенностью сил упругости является возможность сведения их к натяжениям (напряжениям), возникающим в деформированных средах.

Исходя из таких представлений, Максвелл ввел тензор натяжений электромагнитного поля в среде. С помощью такого тензора система объемных сил может быть заменена системой натяжений. Более подробно с тензором натяжений можно познакомиться в курсе теоретической физики.

**Общая задача электростатики.** В самом общем виде решение электростатической задачи при наличии заряженных проводников и диэлектриков сводится к следующему. Считается известной в каждой точке пространства диэлектрическая проницаемость среды  $\varepsilon(x, y, z)$ . Кроме того, может быть задана либо объемная плотность свободных зарядов  $\rho(x, y, z)$  на проводниках, либо их потенциалы  $\varphi_{\text{пр}}(x, y, z)$  или их асимптотики, либо возникает смешанная ситуация, когда для одной части проводников заданы заряды, а для другой части — потенциалы. Требуется рассчитать  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  и  $\varphi(\mathbf{r})$ .

Поскольку  $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$ , а  $\mathbf{D} = -\varepsilon_0\varepsilon \cdot \nabla\varphi$ , то уравнение (4.34) можно представить в виде

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = -\operatorname{div}(\varepsilon_0\varepsilon \cdot \nabla\varphi) = -\varepsilon_0 \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \varepsilon \frac{\partial\varphi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \varepsilon \frac{\partial\varphi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \varepsilon \frac{\partial\varphi}{\partial z} \right) \right] = \rho. \quad (5.30)$$

В однородном диэлектрике  $\varepsilon = \text{const}$ , поэтому (5.30) переходит в уравнение Пуассона

$$\Delta\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0\varepsilon}, \quad (5.31)$$

которое с перечисленными выше граничными условиями имеет единственное решение.

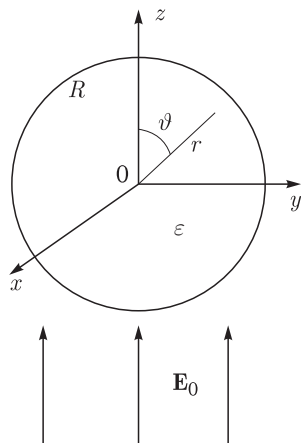


Рис. 5.18

Подчеркнем, что *только в однородном диэлектрике (при отсутствии близкорасположенных границ) потенциал и напряженность поля проводников уменьшаются в  $\varepsilon$  раз по сравнению с вакуумом.*

В качестве примера рассчитаем потенциал и напряженность поля в случае диэлектрического шара радиусом  $R$  и диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon$ , помещенного в однородное внешнее электростатическое поле с напряженностью  $\mathbf{E}_0$ . Воспользуемся сферической системой координат и направим ось  $Oz$  вдоль вектора  $\mathbf{E}_0$  (рис. 5.18). Поскольку  $\rho = 0$ , то с учетом осевой симметрии задачи уравнение Лапласа (3.21) примет вид

$$\Delta\varphi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial\varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin\vartheta} \frac{\partial}{\partial\vartheta} \left( \sin\vartheta \frac{\partial\varphi}{\partial\vartheta} \right) = 0. \quad (5.32)$$

Его решение внутри шара  $\varphi_1 = A_1 r \cos \vartheta + B_1 \cos \vartheta / r^2$ , а вне шара  $\varphi_2 = A_2 r \cos \vartheta + B_2 \cos \vartheta / r^2$ , где четыре константы подлежат определению. Так как при  $r \rightarrow 0$  потенциал должен быть конечен, то  $B_1 = 0$ .

Поскольку  $r \cos \vartheta = z$ , то слагаемые с коэффициентами  $A_1$  и  $A_2$  описывают однородное поле.  $\varphi_1 = A_1 r \cos \vartheta = A_1 z$ , и вектор напряженности однородного поля внутри шара имеет лишь одну компоненту  $E_{1z} = -A_1 > 0$ .

Слагаемое с коэффициентом  $B_2$  описывает поле диполя (см. (3.136)), убывающее с расстоянием  $r$ . При  $r \rightarrow \infty$  поле  $E_2$  должно совпадать с внешним однородным полем, поэтому  $\varphi_2 \rightarrow -E_0 z = -E_0 r \cos \vartheta$ . Следовательно,  $A_2 = -E_0$ .

На поверхности шара непрерывны потенциал:  $\varphi_1 = \varphi_2$ , или

$$A_1 R \cos \vartheta = -E_0 R \cos \vartheta + B_2 \frac{\cos \vartheta}{R^2}, \quad (5.33)$$

и нормальные компоненты индукции поля:  $-\varepsilon_0 \varepsilon \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} \Big|_{r=R} = -\varepsilon_0 \frac{\partial \varphi_2}{\partial r} \Big|_{r=R}$ , или

$$-\varepsilon A_1 \cos \vartheta = E_0 \cos \vartheta + 2B_2 \frac{\cos \vartheta}{R^3}. \quad (5.34)$$

Из (5.33) и (5.34) получаем

$$A_1 = -\frac{3E_0}{\varepsilon + 2} = -E_{1z}; \quad B_2 = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} R^3 E_0. \quad (5.35)$$

Таким образом

$$\varphi_1 = -\frac{3E_0}{\varepsilon + 2} z, \quad \varphi_2 = -E_0 z + \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} R^3 E_0 \frac{\cos \vartheta}{r^2} = -E_0 z + k \frac{p_{\text{ш}} \cos \vartheta}{r^2}, \quad (5.36)$$

где дипольный момент шара

$$p_{\text{ш}} = \varepsilon_0 \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} 4\pi R^3 E_0 = \varepsilon_0 \cdot a_{\text{ш}} \cdot E_0. \quad (5.37)$$

Поляризуемость диэлектрического шара  $a_{\text{ш}} = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} \cdot 4\pi R^3$  (так же как и проводящего шара) по порядку величины равна его объему. Поэтому поляризуемость атома (молекулы) диэлектрика при  $R \sim 10^{-10}$  м имеет величину  $a \sim 10^{-29}$  м<sup>3</sup>. Эта оценка понадобится нам в следующей лекции при изучении электронной теории поляризации диэлектриков.

Напряженность поля из (5.36) получается равной

$$\mathbf{E}_1 = -\nabla \varphi_1 = \frac{3\mathbf{E}_0}{\varepsilon + 2}, \quad \mathbf{E}_2 = -\nabla \varphi_2 = \mathbf{E}_0 + \frac{3k(\mathbf{p}_{\text{ш}} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5} - \frac{k\mathbf{p}_{\text{ш}}}{r^3}. \quad (5.38)$$

Таким образом, внутри шара поле однородно, как это раньше было отмечено в предыдущей лекции (формула (4.25)). Вне шара поле является суперпозицией внешнего поля и индукционного поля диполя (см. 2.6).

Вектор поляризации диэлектрика

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0(\varepsilon - 1)\mathbf{E}_1 = 3\varepsilon_0 \frac{(\varepsilon - 1)}{\varepsilon + 2} \mathbf{E}_0. \quad (5.39)$$

Как и следовало ожидать, дипольный момент шара (5.37) равен произведению вектора поляризации (5.39) на объем шара.

Наконец, поверхностная плотность связанных зарядов

$$\sigma' = P_n = \varepsilon_0(\varepsilon - 1)E_{1n} = 3\varepsilon_0 \frac{(\varepsilon - 1)}{\varepsilon + 2} E_0 \cos \vartheta. \quad (5.40)$$

**Метод зеркальных отображений.** Единственность решения уравнения Пуассона при наличии соответствующих граничных условий позволяет свести некоторые задачи электростатики к эквивалентным, но более простым задачам. Если, например, имеется некоторая система точечных зарядов  $q_i$  ( $i = 1, 2, 3, \dots, N$ ), которые находятся по одну сторону от заданной эквипотенциальной поверхности или границы раздела сред, то поле в этом полупространстве  $\Pi_1$  иногда можно довольно просто рассчитать, поступив следующим образом. В полупространство  $\Pi_2$  вносится такое же число зарядов  $q'_i$ , а в полупространство  $\Pi_1$  — заряды  $q''_i$ . Расположение каждого из этих зарядов соответствует положению мнимого изображения точечного предмета в зеркале, поверхность которого совпадает с данной поверхностью или границей раздела. Подбором величин зарядов  $q'_i$  и  $q''_i$  можно добиться нужной величины потенциала этой поверхности или выполнения граничных условий. В качестве иллюстрации рассмотрим два примера.

**Пример 6.** Пусть положительный точечный заряд  $q$  находится на высоте  $h$  над бесконечной плоской проводящей поверхностью (протяженной металлической пластиной). Требуется найти напряженность электрического поля и поверхностную плотность индуцированных свободных зарядов.

В результате индукции положительные заряды уйдут на удаленные края пластины, на ее поверхности будет каким-то образом распределен отрицательный заряд (рис. 5.19 а). Поскольку потенциал пластины равен нулю, то можно рассмотреть эквивалентную задачу для нахождения поля над пластиной,

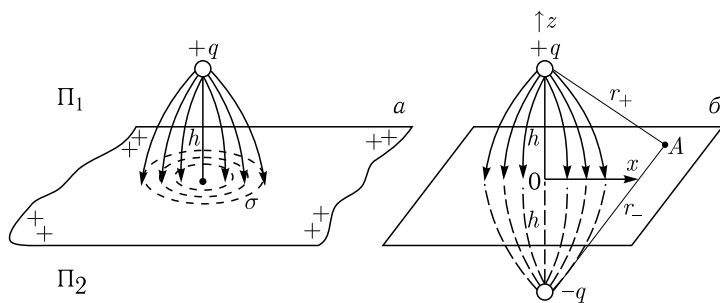


Рис. 5.19

убрав пластину, а вместо нее поместить под пластиной на расстоянии  $h$  заряд  $-q$ , являющийся электрическим изображением заряда  $q$  (рис. 5.19 б). Потенциал поля в точке  $A$

$$\varphi_A = kq \left( \frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-} \right) \quad (5.41)$$

при выборе соответствующей системы координат позволяет рассчитать напряженность поля в каждой точке полупространства над плоскостью:  $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$ . В частности, вблизи поверхности пластины напряженность поля на расстоянии  $x$  от линии, соединяющей заряды (см. (2.5)),

$$E_z(x) = -2kq \frac{h}{(h^2 + x^2)^{3/2}}. \quad (5.42)$$

Поэтому поверхностная плотность индуцированного заряда, согласно (4.1), равна

$$\sigma(x) = \varepsilon_0 E_n(x) = \varepsilon_0 E_z(x) = -\frac{qh}{2\pi(h^2 + x^2)^{3/2}}. \quad (5.43)$$

Интегрируя (5.43) по поверхности пластины, вычисляем полный индуцированный отрицательный заряд:

$$\int \sigma dS = - \int_0^\infty \frac{qh}{2\pi(h^2 + x^2)^{3/2}} \cdot 2\pi x \cdot dx = -q. \quad (5.44)$$

Здесь учтена осевая симметрия задачи, поэтому  $dS = 2\pi x \cdot dx$ . Этот заряд полностью экранирует поле заряда  $q$  в полупространстве под пластиной, где напряженность поля равна нулю.

**Пример 7.** Пусть два полупространства с плоской границей между ними заполнены диэлектриками с диэлектрическими проницаемостями  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$ . В первом диэлектрике на расстоянии  $h$  от границы находится положительный точечный заряд  $q$ . Требуется рассчитать напряженность поля в обоих диэлектриках и поверхностную плотность связанного заряда  $\sigma'$  на границе раздела.

Как отмечалось ранее, поле точечного заряда в безграничной однородной диэлектрической среде ( $\varepsilon = \text{const}$ ) уменьшается в  $\varepsilon$  раз по сравнению с полем в вакууме. В рассматриваемом случае необходим учет поля, создаваемого поверхностными зарядами на границе раздела.

Для этого предположим, что в первой среде поле поверхностных зарядов эквивалентно полю некоторого точечного заряда  $q'$ , помещенного «зеркально» во вторую среду, поэтому, следуя (5.11), имеем

$$\mathbf{E}_1 = \frac{1}{\varepsilon_1} k \frac{q}{r^3} \mathbf{r} + \frac{1}{\varepsilon_1} k \frac{q'}{r'^3} \mathbf{r}'. \quad (5.45)$$

где  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{r}'$  — радиусы-векторы, проведенные из местоположения зарядов  $q$  и  $q'$  в рассматриваемую точку.

Предположим далее, что поле во втором диэлектрике создается некоторым зарядом  $q''$ , находящимся там же, где и заряд  $q$ :

$$\mathbf{E}_2 = \frac{1}{\varepsilon_2} k \frac{q''}{r^3} \mathbf{r}. \quad (5.46)$$

На границе раздела должны выполняться граничные условия:  $E_{1\tau} = E_{2\tau}$  (5.5) и  $D_{1n} = D_{2n}$  (5.6). Поэтому

$$\begin{aligned} \frac{q}{\varepsilon_1} \sin \vartheta + \frac{q'}{\varepsilon_1} \sin \vartheta &= \frac{q''}{\varepsilon_2} \sin \vartheta, \\ q \cos \vartheta - q' \cos \vartheta &= q'' \cos \vartheta. \end{aligned} \quad (5.47)$$

Здесь  $\vartheta$  — угол между радиусом-вектором  $\mathbf{r}$  и нормалью к границе раздела.

Из этих уравнений вычисляем фиктивные заряды  $q'$  и  $q''$  и, подставляя в (5.45) и (5.46), находим

$$\mathbf{E}_1 = \frac{1}{\varepsilon_1} k \frac{q}{r^3} \mathbf{r} + \frac{1}{\varepsilon_1} \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} k \frac{q}{r'^3} \mathbf{r}', \quad \mathbf{E}_2 = \frac{2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} k \frac{q}{r^3} \mathbf{r}. \quad (5.48)$$

Поскольку с помощью двух фиктивных зарядов удалось выполнить граничные условия на всей границе раздела (при любых углах  $\vartheta$ ), то сделанные раньше предположения оправданы.

Если второй диэлектрик заменить проводящей плоскостью, то можно положить  $\varepsilon_2 \rightarrow \infty$ . Тогда  $\mathbf{E}_2 = 0$ , а напряженность поля  $\mathbf{E}_1 = \frac{1}{\varepsilon_1} k \frac{q}{r^3} \mathbf{r} - \frac{1}{\varepsilon_1} k \frac{q}{r'^3} \mathbf{r}'$ .

## ЛЕКЦИЯ 6

**Электронная теория поляризации диэлектриков.** Рассмотрим теперь, как связаны поляризуемость  $\chi$  или диэлектрическая проницаемость  $\varepsilon = 1 + \chi$  с микроскопическими характеристиками диэлектриков. Вначале обратимся к поляризации изотропных неполярных диэлектриков.

**Неполярные диэлектрики.** Под действием электрического поля молекула (атом) приобретает индуцированный дипольный момент

$$p_i = \varepsilon_0 \sum_{j=1}^3 a_{ij} E_{\text{эф.}j}. \quad (6.1)$$

Здесь  $a_{ij}$  — компонента тензора *диэлектрической восприимчивости*, или *поляризуемости* молекулы, являющейся, в общем случае, анизотропной,  $E_{\text{эф}}$  — эффективное поле (локальное поле, действующее на молекулу), отличающееся, вообще говоря, от среднего макроскопического поля  $E$  в среде (см. ниже).

Тензор  $a_{ij}$  может быть комплексным. Это означает, что диэлектрик будет поглощать электромагнитное поле (см. ниже). Величину  $|a_{ij}|$  можно оценить, воспользовавшись моделью молекулы в виде проводящего шара радиуса  $R = 10^{-10}$  м. Такая оценка была сделана в предыдущей лекции, поэтому  $|a_{ij}| \sim \sim 4\pi R^3 \sim 10^{-29} \text{ м}^3$ .

Дипольный момент  $\mathbf{P}$  единицы объема (вектор поляризации) будет равен

$$P_i = \sum_{l=1}^N p_{il} = N \langle p_i \rangle, \quad (6.2)$$

где  $N$  — число молекул в единице объема,  $\langle p_i \rangle$  — среднее значение проекции индуцированного дипольного момента молекулы (усреднение проводится по всем ориентациям молекул в единице объема). Результат усреднения зависит от агрегатного состояния вещества.

В газе все ориентации молекул равновероятны. Поэтому

$$\langle p_i \rangle = \varepsilon_0 \sum_{j=1}^3 \langle a_{ij} \rangle E_{\text{эф.}j} = \varepsilon_0 \frac{a_{11} + a_{22} + a_{33}}{3} E_{\text{эф.}i}. \quad (6.3)$$

Для компоненты вектора поляризации получаем

$$P_i = \varepsilon_0 N a E_{\text{эф.}i}, \quad (6.4)$$

где  $a = \frac{a_{11} + a_{22} + a_{33}}{3}$  — средняя поляризуемость молекулы. Таким образом, газ, состоящий из анизотропных молекул, является изотропным веществом.

В жидкостях существует ближний порядок, поэтому задача усреднения сложнее, чем в газах. Однако жидкость также является изотропной средой,

и для нее справедливо выражение (6.4), в котором  $a$  — среднее значение поляризуемости молекулы жидкости.

В кристаллах атомы ориентированы одинаково, поэтому

$$P_i = \varepsilon_0 N \sum_{j=1}^3 a_{ij} E_{\text{эф.}j}. \quad (6.5)$$

Определим теперь макроскопические характеристики изотропной среды: поляризуемость  $\chi$  и диэлектрическую проницаемость  $\varepsilon$ . Для этого воспользуемся соотношениями (4.13) и (4.35):

$$P = \varepsilon_0 \chi E, \\ D = \varepsilon_0 E + P = \varepsilon_0 (1 + \chi) E = \varepsilon_0 \varepsilon E.$$

В этих соотношениях  $E$  — величина напряженности среднего макроскопического поля в диэлектрике, которая, как отмечалось выше, может не совпадать с величиной  $E_{\text{эф.}}$ .

Для разреженных газов  $E_{\text{эф.}} = E$ . Тогда из сравнения (6.4) и (4.13) получаем

$$\chi = Na, \quad \varepsilon - 1 = Na. \quad (6.6)$$

При нормальных условиях  $N \sim 10^{25} \text{ м}^{-3}$ . Поскольку  $a \sim 10^{-29} \text{ м}^3$ , то  $\chi = \varepsilon - 1 \sim 10^{-4}$ . Диэлектрическая проницаемость разреженных газов отличается от единицы лишь в четвертом знаке после запятой.

Для плотных газов, жидкостей, некоторых кристаллов необходимо учитывать воздействие на молекулу ее окружения. Представим, что молекула находится в центре физически малого сферического объема, отделенного от остальной части диэлектрика воображаемой сферической поверхностью. Иными словами, микроскопический диэлектрический шарик находится внутри сферической полости однородно поляризованного диэлектрика.

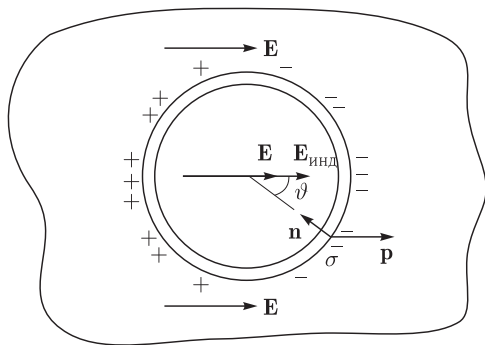


Рис. 6.1

На поверхности полости находится связанный заряд с поверхностной плотностью  $\sigma' = P_n = -P \cos \vartheta$  (рис. 6.1). Этот заряд, согласно (4.23), будет создавать индукционное поле (поле Лоренца)  $E_{\text{инд}} = (P/3\varepsilon_0)$ , которое направлено в ту же сторону, что и макроскопическое поле в диэлектрике. Поле, создаваемое диполями микроскопического шарика для газов, жидкостей и кристаллов с кубической симметрией, будет равно нулю. Поэтому

$$E_{\text{эф.}} = E + \frac{P}{3\varepsilon_0}, \quad (6.7)$$

т.е. поле, действующее на молекулу, больше среднего макроскопического поля  $E$  на величину  $(P/3\varepsilon_0)$ , определяющую вклад в напряженность поля поляризованных молекул вне шарика. Подставляя (6.7) в (6.5) и опуская



индекс  $i$ , получаем для изотропной среды

$$P = \varepsilon_0 N a \left( E + \frac{P}{3\varepsilon_0} \right). \quad (6.8)$$

Отсюда

$$P = \varepsilon_0 \frac{N a}{1 - \frac{N a}{3}} E = \varepsilon_0 \chi E = \varepsilon_0 (\varepsilon - 1) E. \quad (6.9)$$

Следовательно

$$\varepsilon - 1 = \frac{N a}{1 - \frac{N a}{3}}. \quad (6.10)$$

Эту формулу чаще используют в виде

$$\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} = \frac{N a}{3}. \quad (6.11)$$

Последняя формула называется *формулой Клаузиуса–Моссотти*, названной в честь итальянского ученого О. Моссотти, который совместно с немецким физиком Р. Клаузиусом в 1864 г. разработал теорию поляризации диэлектриков.

Формула (6.11) находится в удовлетворительном согласии с опытом для жидких и газообразных диэлектриков с неполярными молекулами. Так как  $N = \rho_m / m_0$  ( $\rho_m$  — плотность вещества,  $m_0$  — масса молекулы), то из нее, в частности, следует, что величина

$$\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} \frac{1}{\rho} = \frac{a}{3m_0} \quad (6.12)$$

и не зависит от давления и температуры.

**Полярные диэлектрики.** При помещении полярного диэлектрика в электрическое поле на каждую молекулу, обладающую собственным дипольным моментом  $\mathbf{p}_0$ , согласно (5.12), будет действовать момент сил  $\mathbf{M} = \mathbf{p}_0 \times \mathbf{E}$ . Здесь предполагается, что  $\mathbf{E}_{\text{эф}} = \mathbf{E}$ , как это имеет место в разреженных газах. Момент сил будет стремиться повернуть молекулу так, чтобы вектор  $\mathbf{p}_0$  был направлен вдоль вектора  $\mathbf{E}$ . Этому будет препятствовать тепловое движение молекул, оказывающее дезориентирующее воздействие. В результате двух разнонаправленных тенденций между векторами  $\mathbf{p}_0$  и  $\mathbf{E}$  будет существовать некоторый угол  $\alpha$ . Следовательно, согласно (5.16), молекула будет обладать потенциальной энергией  $W = -\mathbf{p}_0 \cdot \mathbf{E} = -p_0 \cdot E \cos \alpha$ .

В состоянии термодинамического равновесия распределение молекул по энергиям подчиняется распределению Больцмана. Если  $N$  — число молекул в единице объема, то число молекул  $dN$ , дипольные моменты которых составляют с вектором  $\mathbf{E}$  угол, лежащий в диапазоне  $(\alpha, \alpha + d\alpha)$ , будет равно

$$dN = A \exp \left( -\frac{W}{k_B T} \right) d\Omega = A \exp \left( \frac{p_0 E \cos \alpha}{k_B T} \right) 2\pi \sin \alpha \cdot d\alpha. \quad (6.13)$$

Здесь  $k_B$  — постоянная Больцмана,  $d\Omega = 2\pi \sin \alpha \cdot d\alpha$  — элемент телесного угла,  $A$  — константа, определяемая из условия нормировки  $N = \int dN$ :

$$A = \frac{N}{\int_0^\pi \exp(p_0 E \cos \alpha / (k_B T)) 2\pi \sin \alpha \cdot d\alpha}. \quad (6.14)$$

Пользуясь последними двумя выражениями, можно вычислить среднее значение проекции дипольного момента на направление поля:

$$\langle p \rangle = \frac{1}{N} \int_0^\pi p_0 \cos \alpha \cdot dN = p_0 \frac{\int_0^\pi \cos \alpha \cdot \exp(p_0 E \cos \alpha / (k_B T)) \sin \alpha \cdot d\alpha}{\int_0^\pi \exp(p_0 E \cos \alpha / (k_B T)) \sin \alpha \cdot d\alpha}. \quad (6.15)$$

Из симметрии задачи ясно, что средние значения двух других проекций равны нулю.

Для удобства введем параметр  $\beta = (p_0 E / k_B T)$  и вычислим интеграл в знаменателе (6.15):

$$J(\beta) = \int_0^\pi \exp(\beta \cos \alpha) \sin \alpha \cdot d\alpha = -\frac{1}{\beta} \exp(\beta \cos \alpha) \Big|_0^\pi = \frac{2}{\beta} \operatorname{sh} \beta, \quad (6.16)$$

где  $\operatorname{sh} \beta = (e^\beta - e^{-\beta})/2$  — функция гиперболический синус.

Нетрудно видеть, что интеграл в числителе (6.15) равен производной (6.16) по параметру  $\beta$ :

$$J'(\beta) = \left[ \frac{2}{\beta} \operatorname{sh} \beta \right]' = \frac{2}{\beta} \operatorname{ch} \beta - \frac{2}{\beta^2} \operatorname{sh} \beta, \quad (6.17)$$

где  $\operatorname{ch} \beta = (e^\beta + e^{-\beta})/2$  — функция гиперболический косинус.

Поэтому

$$\langle p \rangle = p_0 \frac{J'(\beta)}{J(\beta)} = p_0 \left( \operatorname{cth} \beta - \frac{1}{\beta} \right) = p_0 L(\beta). \quad (6.18)$$

Здесь  $\operatorname{cth} \beta = \operatorname{ch} \beta / \operatorname{sh} \beta$  — функция гиперболический котангенс,

$$L(\beta) = \operatorname{cth} \beta - \frac{1}{\beta} \quad (6.19)$$

— функция Ланжевена, названная по имени французского физика П. Ланжевена, который в 1903–1905 гг. развил статистическую теорию диа- и парамагнитных явлений, где эта функция была получена (см. далее).

График функции (6.19) изображен на рис. 6.2. При увеличении напряженности электрического поля функция Ланжевена стремится к единице, а среднее значение  $\langle p \rangle \rightarrow p_0$ . Это означает, что в конечном итоге может произойти насыщение поляризации: все дипольные моменты молекул будут выстроены

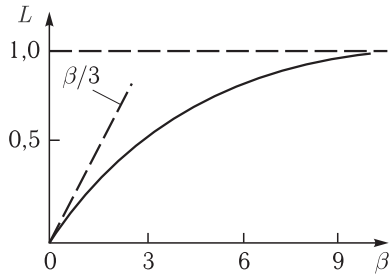


Рис. 6.2

вдоль поля. Оценку величины напряженности поля  $E_{\text{нас}}$ , при которой происходит насыщение, можно сделать из условия  $\beta_{\text{нас}} = (p_0 E_{\text{нас}} / k_B T) = 1$ . Полагая  $p_0 = 10^{-29}$  Кл · м,  $T = 300$  К, получаем  $E_{\text{нас}} = 4 \cdot 10^8$  В/м. Эта очень большая величина, которая близка к пределу электрической прочности диэлектрика (см. далее). При  $\beta = E / E_{\text{нас}} \ll 1$  функция Ланжевена  $L(\beta) \approx \beta/3$  и

$$\langle p \rangle = p_0 L(\beta) \approx \frac{1}{3} p_0 \beta = \frac{p_0^2}{3k_B T} E = \varepsilon_0 a_{\text{пол}} E, \quad (6.20)$$

где

$$a_{\text{пол}} = \frac{p_0^2}{3\varepsilon_0 k_B T} \quad (6.21)$$

— средняя поляризуемость полярной молекулы. Она уменьшается с ростом температуры. При комнатной температуре  $a_{\text{пол}} \sim 10^{-27}$  Кл · м, что приблизительно на два порядка больше поляризуемости бездипольной молекулы  $a \sim 10^{-29}$  Кл · м, обусловленной механизмом электронного смещения. У полярных молекул также имеет место поляризация электронного смещения, поэтому суммарная поляризуемость дипольных молекул равна

$$a_{\Sigma} = a + a_{\text{пол}} = a + \frac{p_0^2}{3\varepsilon_0 k_B T}. \quad (6.22)$$

Для разреженных газов аналогом (6.6) является формула

$$\varepsilon - 1 = N a_{\Sigma} = N \left( a + \frac{p_0^2}{3\varepsilon_0 k_B T} \right). \quad (6.23)$$

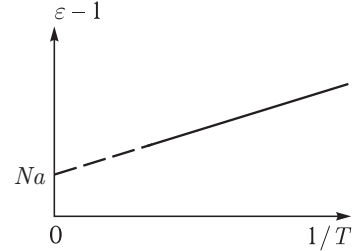


Рис. 6.3

При нормальных условиях  $N \sim 10^{25}$  м<sup>-3</sup>,  $a_{\Sigma} \sim 10^{-27}$  Кл · м, поэтому  $\varepsilon - 1 \sim 10^{-2}$ .

Поскольку для разреженных газов зависимость диэлектрической проницаемости  $\varepsilon$  от величины  $1/T$  является линейной (формула (6.23)), то, экспериментально получив такую зависимость, можно определить величины  $a$  и  $p_0$  (рис. 6.3). Экстраполяция прямой в область высоких температур позволяет вычислить  $Na$ , а угловой коэффициент наклона прямой равен  $(p_0^2 / 3\varepsilon_0 k_B)$ .

Такие измерения дают значения  $p_0 = 0,36 \cdot 10^{-30}$  Кл · м (СО);  $5,3 \times 10^{-30}$  Кл · м (SO<sub>2</sub>);  $3,5 \cdot 10^{-29}$  Кл · м (KCl) и т. д.

Для плотных газообразных и жидких полярных диэлектриков формула (6.7) для эффективного (локального) поля является несправедливой. Следовательно, и уравнение Клаузиуса–Моссотти также неприменимо. Поэтому используются другие модели для нахождения поляризуемости таких диэлектриков.

В модели, предложенной норвежско-американским физхимиком Л. Онзагером (Нобелевская премия по химии 1968 г.), предполагается, что каждый диполь  $\mathbf{p}_0$  находится в центре реальной сферической полости, в которой отсутствуют другие диполи. Диаметр этой полости имеет порядок межатомного расстояния. Окружающие диполи, согласно (2.6), создают в центре полости дополнительное поле, которое вызывает как ориентацию рассматриваемого диполя  $\mathbf{p}_0$ , так и появление у этого атома индуцированного дипольного

момента. В результате учета такого сложного взаимодействия между диполями Онзагером была получена формула

$$\frac{(\epsilon - \epsilon_{\text{инд}})(2\epsilon + \epsilon_{\text{инд}})}{\epsilon(\epsilon_{\text{инд}} + 2)^2} = \frac{Np_0^2}{9\epsilon_0 k_B T}. \quad (6.24)$$

Здесь  $\epsilon_{\text{инд}}$  — часть диэлектрической проницаемости, обусловленная индуцированными дипольными моментами.

Формула Онзагера неплохо согласуется с экспериментом. Например, для воды  $\epsilon_{\text{инд}} = 4,9$ ,  $p_0 = 2,16 \cdot 10^{-29}$  Кл · м, и при  $T = 273\text{К}$  из (6.24) получается  $\epsilon = 105$ , в то время как в эксперименте  $\epsilon = 88$ .

**Кристаллы.** Механизмы поляризации кристаллов зависят от характера химической связи, т. е. от распределения электронных плотностей. Например, в ионных кристаллах (каменная соль NaCl и др.), где электроны локализованы в окрестности отдельных ионов, поляризация является результатом сдвига ионов друг относительно друга (ионная поляризация), а также деформации электронных оболочек отдельных ионов (электронная поляризация). Поэтому поляризация есть сумма ионной и электронной поляризаций.

В кристаллах с ковалентной связью (например, в алмазе), где электроны равномерно распределены между атомами, поляризация обусловлена главным образом смещением электронов, осуществляющих химическую связь.

В полярных кристаллах (например, твердый сероводород), атомы которых имеют собственный дипольный момент, происходит ориентационная (дипольная) поляризация, как для полярных жидкостей и газов. Сходный механизм поляризации связан с перескоком под действием электрического поля отдельных ионов из одних возможных положений равновесия в решетке в другие. Особенно часто такой механизм поляризации наблюдается в веществах с водородной связью (например, у льда), где ионы водорода имеют несколько положений равновесия.

В общем случае направление вектора поляризации  $\mathbf{P}$  в кристалле не совпадает с направлением поля  $\mathbf{E}$ , и вектор  $\mathbf{P}$  будет составлять различные углы с вектором  $\mathbf{E}$  в зависимости от ориентации  $\mathbf{E}$  по отношению к осям симметрии. Поэтому кристаллы в общем случае являются анизотропными диэлектриками.

В кристалле атомы ориентированы определенным образом, поэтому компоненту дипольного момента единицы объема можно представить выражением (6.5)

$$P_i = \epsilon_0 N \sum_{j=1}^3 a_{ij} E_{\text{эф.}j},$$

в правой части которого фигурируют две характеристики вещества: компонента тензора поляризуемости молекулы и число атомов в единице объема.

В отличие от (4.13) и (4.35), связь векторов поляризации  $\mathbf{P}$  и индукции  $\mathbf{D}$  с порождающим их электрическим полем  $\mathbf{E}$  в кристалле приобретает вид:

$$P_i = \epsilon_0 \sum_{j=1}^3 \chi_{ij} E_j, \quad (6.25)$$

$$D_i = \varepsilon_0 E_i + P_i = \varepsilon_0 \sum_{j=1}^3 \varepsilon_{ij} E_j. \quad (6.26)$$

Здесь  $\chi_{ij}$  и  $\varepsilon_{ij} = \delta_{ij} + \chi_{ij}$  — компоненты *тензоров восприимчивости и диэлектрической проницаемости*,  $\delta_{ij}$  — символ Кронекера.

Если не учитывать поглощение электромагнитного поля в диэлектрике, то можно считать, что компоненты  $\varepsilon_{ij}$  действительны. Тогда  $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$ , и тензор содержит 6 независимых компонент. Соответствующим выбором координатных осей тензор  $\varepsilon_{ij}$  можно привести к диагональному виду:

$$\varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33} \end{pmatrix}. \quad (6.27)$$

Характерное значение диэлектрической проницаемости  $\varepsilon$  существенно зависит от структуры вещества и от внешних условий (например, от температуры), обычно меняясь в пределах от 1 до 100—200 (у сегнетоэлектриков до  $10^4$ – $10^5$ ). Например,  $\varepsilon = 4,3$  (кварц), 5,7 (алмаз), 6,3 (каменная и поваренная соли), 12 (кремний), 73 (лед при 5 °C), 170 ( $\text{TiO}_2$ ), 4000 ( $\text{BaTiO}_3$ ).

Такой разброс значений  $\varepsilon$  объясняется тем, что в разных веществах основной вклад в  $\varepsilon$  дают различные механизмы поляризации. Как отмечалось, в ионных кристаллах (каменная и поваренная соли) наиболее существенна ионная поляризация, в ковалентных кристаллах (алмаз, углерод, кварц) — перераспределение валентных электронов. Большой вклад в  $\varepsilon$  дает ориентационная поляризация. Поэтому диэлектрическая проницаемость льда сравнительно велика ( $\varepsilon = 73$ ).

**Пироэлектрики.** В ряде твердых диэлектриков поляризация существует и без электрического поля. Такие диэлектрики называются *пироэлектриками*. Каждая элементарная ячейка в таком кристалле обладает собственным дипольным моментом. Диполи ориентированы одинаково, поэтому кристалл оказывается спонтанно (самопроизвольно) электрически поляризованным. На противоположных его поверхностях, перпендикулярных вектору спонтанной поляризации, образуются связанные поверхностные заряды разного знака.

Если кристалл достаточно долго находится при постоянной температуре, то избыточные заряды на его поверхности компенсируются из-за собственной проводимости кристалла и из-за взаимодействия с заряженными ионами воздуха, и кристалл в целом не обнаруживает электрической поляризации.

При однородном нагревании кристалла изменяются расстояния и углы между частицами, а следовательно, и спонтанная поляризация. В результате возникают нескомпенсированная поляризация, характеризующаяся вектором  $\Delta \mathbf{P}$ , и электрическое поле  $\mathbf{E}$ . Такое явление называется *пироэлектрическим эффектом*.

Уравнение пироэлектрического эффекта имеет вид

$$\Delta \mathbf{P} = \boldsymbol{\gamma} \cdot \Delta T, \quad (6.28)$$

где вектор  $\gamma$  характеризует величину пирозлектрического эффекта,  $\Delta T$  — приращение температуры. Электрическое поле существует до тех пор, пока не будет скомпенсировано свободными зарядами.

Пирозлектрический эффект наблюдается у кристаллов с низкой симметрией (турмалин, титанаты бария и свинца, триглицинсульфат и др.). У таких кристаллов есть полярное направление, не изменяющееся при всех преобразованиях симметрии (полярные диэлектрики): вдоль этого направления ориентирован вектор  $\gamma$ .

Например, у турмалина при изменении температуры на один градус возникает поле  $E \approx 400$  В/см.

Пирозлектрики используют в качестве датчиков, регистрирующих изменение температуры с высокой точностью, а также для изготовления чувствительных приемников инфракрасного излучения, датчиков ударных волн, измерителей напряжения. На основе пирозлектриков созданы преобразователи тепловой энергии в электрическую.

Существует эффект, обратный пирозлектрическому. Если пирозлектрик поместить в электрическое поле  $E$ , то его поляризация изменяется, что сопровождается нагреванием или охлаждением кристалла. Изменение температуры  $\Delta T$  при этом прямо пропорционально напряженности электрического поля:  $\Delta T \sim \pm E$ . Это явление называется *линейным электрокалорическим эффектом*. Существует и *квадратичный электрокалорический эффект*, когда изменение температуры  $\Delta T \sim E^2$ .

**Сегнетоэлектрики.** Особой разновидностью пирозлектриков являются *сегнетоэлектрики*. Они характеризуются очень большими значениями  $\epsilon$ , сильной нелинейной зависимостью  $P$  от  $E$ , доменной структурой и наличием спонтанной поляризации лишь в определенном интервале температур. В этом смысле диэлектрические свойства сегнетоэлектриков аналогичны магнитным свойствам ферромагнетиков (см. далее), поэтому явление сегнетоэлектричества носит также название ферроэлектричества.

Типичный представитель сегнетоэлектриков — сегнетова соль (двойная соль винной кислоты  $\text{KNaC}_4\text{H}_4\text{O}_6 \cdot 4\text{H}_2\text{O}$ ), обусловившая появление термина «сегнетоэлектрик». К сегнетоэлектрикам с более простой структурой относятся кристаллы титаната бария  $\text{BaTiO}_3$ , титаната свинца  $\text{PbTiO}_3$ , ниобата лития  $\text{LiNbO}_3$  и др.

Если нагревать сегнетоэлектрик, то при определенной температуре спонтанная поляризация в нем исчезнет, и кристалл переходит в обычный диэлектрик (фазовый переход). В области температур, близких к температуре фазового перехода, величина спонтанной поляризации резко меняется с изменением температуры, так что пирозлектрический эффект в этой области особенно велик.

Кристаллическая модификация, в которой существует спонтанная поляризация, называется *полярной фазой*, а в которой отсутствует — *неполярной фазой*.

Температура  $T_C$ , при которой исчезает спонтанная поляризация и происходит перестройка кристаллической структуры, носит название температуры (точки) Кюри (в честь французского физика Пьера Кюри). При переходе через точку Кюри происходит фазовый переход.

Вблизи точки Кюри  $T_C$  в неполярной фазе выполняется закон Кюри–Вейсса, связывающий поляризуемость  $\chi$  и температуру  $T$  сегнетоэлектрика:

$$\chi = \frac{C}{T - T_C}, \quad (6.29a)$$

где константа  $C$  определяется видом сегнетоэлектрика,  $T > T_C$ .

Обычно сегнетоэлектрики обладают только одной точкой Кюри; исключения составляют лишь сегнетова соль ( $T'_C = -18$  и  $T_C = +24$  °С) и изоморфные с нею соединения. Для них, помимо (6.29a), в неполярной фазе также имеет место зависимость

$$\chi = \frac{C'}{T'_C - T}. \quad (6.29б)$$

Здесь  $T < T'_C$ .

Отметим, что превращение сегнетоэлектриков в обычный диэлектрик может происходить также при температуре Кюри–Вейсса  $T_0 > T_C$ , которая несколько больше температуры Кюри (фазовый переход 1 рода). Например, у сегнетоэлектрика ВаTiO<sub>3</sub> температура  $T_C$  133 °С, а фазовый переход происходит при температуре 142 °С.

В отсутствие внешнего электрического поля сегнетоэлектрик состоит из  $N \gg 1$  доменов — областей субмикронных размеров, обладающих спонтанным электрическим дипольным моментом  $d\mathbf{p}_i = \mathbf{P}_{si} \cdot dV_i$  ( $\mathbf{P}_{si}$  — дипольный момент единицы объема домена, который по абсолютной величине одинаков для всех доменов:  $|\mathbf{P}_{si}| = P_s$ ,  $dV_i$  — объем домена). При этом средний дипольный момент единицы объема, или вектор поляризации сегнетоэлектрика,

$$\mathbf{P} = \frac{\sum_{i=1}^N d\mathbf{p}_i}{\sum_{i=1}^N dV_i} = \frac{\sum_{i=1}^N \mathbf{P}_{si} \cdot dV_i}{\sum_{i=1}^N dV_i} = 0. \quad (6.30)$$

Рис. 6.4а поясняет причину образования доменов в идеальном кристалле. Если бы сегнетоэлектрик был спонтанно однородно поляризован по всему объему (представлял бы собой один домен), как это изображено на рис. 6.4а, то в окружающем пространстве существовало бы электростатическое поле, посредством которого этот кристалл мог взаимодействовать с подобным другим кристаллом.

Если кристалл состоит из двух доменов, как это изображено на рис. 6.4б, то одна спонтанно поляризованная часть образца взаимодействует с другой

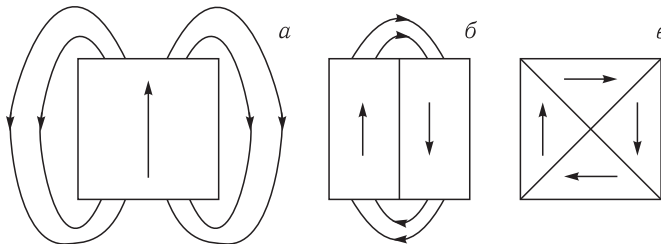


Рис. 6.4

спонтанно поляризованной частью так, что энергия их взаимодействия будет минимальной для противоположных поляризаций этих двух частей. При этом в окружающем пространстве поле будет значительно слабее, чем в предыдущем случае.

Увеличение числа доменов, с одной стороны, ведет к уменьшению энергии их электростатического взаимодействия, а с другой стороны, возрастает энергия, обусловленная ростом числа доменных границ. Поэтому равновесное состояние сегнетоэлектрика определяется балансом между уменьшением энергии электростатического взаимодействия доменов при разбиении кристалла на домены и увеличением энергии от образования новых доменных границ, обладающих избыточной энергией (рис. 6.4 в).

Число доменов и взаимная ориентация векторов  $\mathbf{P}_{si}$  спонтанной поляризации в них определяются симметрией кристалла. Конфигурация доменов зависит от размеров и формы образца, на нее влияет характер распределения по образцу дефектов, внутренних напряжений и неоднородностей, неизбежно присутствующих в реальных кристаллах.

При наложении внешнего электрического поля доменные границы смещаются так, что объемы доменов, поляризованных по полю, увеличиваются за счет объемов доменов, поляризованных против поля (рис. 6.5 а). Доменные границы обычно «закреплены» на дефектах и неоднородностях в кристалле, и необходимы электрические поля достаточной величины, чтобы их перемещать по образцу. При постепенном увеличении поля кристалл становится однодоменным (рис. 6.5 б). При дальнейшем увеличении прикладываемого поля происходит поворот дипольных моментов в направлении поля и поляризация кристалла достигает насыщения (рис. 6.5 в).

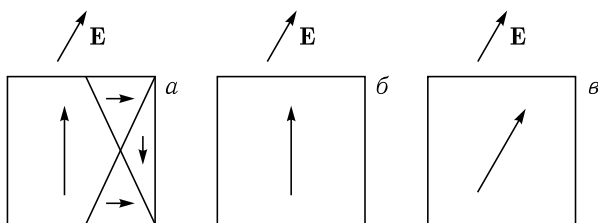


Рис. 6.5

На рис. 6.6 показана нелинейная зависимость величины  $P$  вектора поляризации  $\mathbf{P}$  от величины  $E$  напряженности электрического поля  $\mathbf{E}$ . В сильном поле, когда сегнетоэлектрик становится однодоменным. Затем  $\mathbf{P} \propto \mathbf{E}$ .

Поскольку  $D = \epsilon_0 E + P = \epsilon_0 \epsilon E$ , то диэлектрическая проницаемость сегнетоэлектрика

$$\epsilon = 1 + \frac{P}{\epsilon_0 E} \quad (6.31)$$

немонотонно зависит от напряженности поля (рис. 6.7). Вначале она увеличивается и достигает максимума  $\epsilon_{\max} \sim 10^3 - 10^4$ , а затем при  $E \rightarrow \infty$  величина  $\epsilon \approx 1 + \frac{P_s}{\epsilon_0 E}$  стремится к постоянной величине.



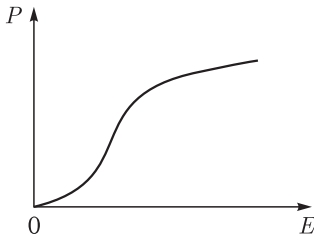


Рис. 6.6

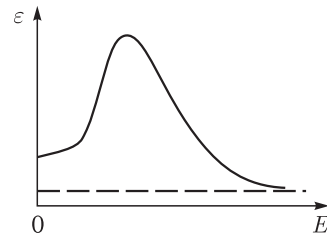


Рис. 6.7

При последующем уменьшении поля деполяризация сегнетоэлектрика будет происходить так, как показано на рис. 6.8. Когда внешнее поле исчезает, образец в течение длительного времени остается поляризованным. Чтобы убрать эту остаточную поляризацию  $P_{\text{ост}}$ , необходимо приложить достаточно сильное электрическое поле противоположного направления с напряженностью  $E_k$ , которое называется *коэрцитивным полем*. Далее увеличивая напряженность поля, можно достичь полной переполяризации образца. В результате зависимость поляризации  $P$  образца от напряженности электрического поля  $E$  при полном цикле имеет вид петли гистерезиса.

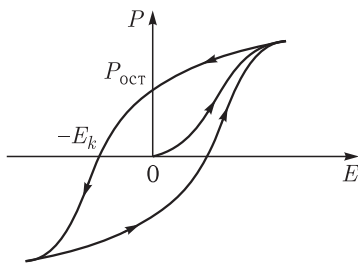


Рис. 6.8

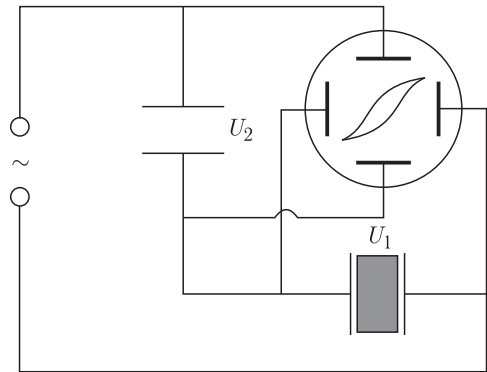


Рис. 6.9

Гистерезис можно наблюдать, собрав цепь из двух последовательных одинаковых плоских конденсаторов, подключив ее к источнику переменного тока (рис. 6.9). Пространство между обкладками одного конденсатора заполняется сегнетоэлектриком, например, титанатом бария, имеющим высокую температуру Кюри. В любой момент времени конденсаторы имеют одинаковый заряд  $Q$ . Напряжение на первом конденсаторе с сегнетоэлектриком  $U_1 = E \cdot d$  ( $E$  — напряженность поля в сегнетоэлектрике,  $d$  — расстояние между пластинами конденсатора), а напряжение на втором конденсаторе с воздушным зазором  $U_2 = \frac{Q}{S\epsilon_0} d = \frac{D}{\epsilon_0} d$  ( $S$  — площадь пластины), поскольку из теоремы Гаусса следует, что  $D \cdot S = Q$ . Если обкладки первого конденсатора соединить с горизонтально отклоняющими пластинами осциллографа, а обкладки второго конденсатора — с вертикально отклоняющими пластинами, то на экране будет наблюдаться петля гистерезиса.

Энергия, запасенная в единице объема сегнетоэлектрика, в отличие от (5.21), будет равна

$$w = \int_0^{\mathbf{D}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{D}. \quad (6.32)$$

Если индукция и напряженность поля связаны линейной зависимостью, то (6.32) переходит в (5.21).

Поэтому за один цикл переполяризации единицы объема сегнетоэлектрика будут происходить потери энергии (диэлектрические потери). Эти потери идут на нагревание кристалла и равны количеству тепла

$$q_{\text{тепл}} = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{D} = \oint \mathbf{E} \cdot \varepsilon_0 d\mathbf{E} + \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{P} = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{P}. \quad (6.33)$$

Следовательно, *потери численно равны площади петли гистерезиса в координатах ( $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{E}$ ) или ( $\mathbf{P}$ ,  $\mathbf{E}$ )*.

В таблице представлены характеристики некоторых сегнетоэлектриков.

Кристалл	Формула	$T_C$ , °C	$P_s$ , мкКл · см <sup>-2</sup>
Титанат бария	BaTiO <sub>3</sub>	133	25
Сегнетова соль	KNaC <sub>4</sub> H <sub>4</sub> O <sub>6</sub> · 4H <sub>2</sub> O	−18; 24	0,25
Дигидрофосфат калия	KH <sub>2</sub> PO <sub>4</sub>	−150	5,1
Дидейтерофосфат калия	KD <sub>2</sub> PO <sub>4</sub>	−51	6,1
Ниобат лития	LiNbO <sub>3</sub>	1210	50
Титанат висмута	Bi <sub>4</sub> Ti <sub>3</sub> O <sub>12</sub>	675	—

Существование сегнетоэлектрических доменов можно фиксировать с помощью атомно-силовой акустической микроскопии (АСАМ). Основу установки составляет атомно-силовой микроскоп, в котором сегнетоэлектрик закрепляется сверху на пьезоэлектрическом преобразователе. Последний возбуждает акустические колебания в сегнетоэлектрике на некоторой частоте  $f$ , близкой к резонансной частоте  $f_0$  колебаний кантилевера. Колебания поверхности сегнетоэлектрика передаются кантилеверу через кончик зонда, регистрируются с помощью фотодетектора и затем подаются на синхронный усилитель для последующей компьютерной обработки.

Резонансная частота  $f_0$  кантилевера зависит от жесткости контакта зонд–образец и радиуса области контакта, которые, в свою очередь, зависят от модулей Юнга материалов образца и зонда. Поэтому амплитуда вынужденных колебаний будет зависеть от модуля Юнга сегнетоэлектрика в области его контакта с иглой кантилевера. Этот метод позволяет определять пространственное распределение модуля Юнга с разрешением несколько в десятков нанометров.

Поскольку домены с различной поляризацией имеют и различные значения модуля Юнга, то после компьютерной обработки получается акустическое изображение распределения спонтанной поляризации. На рис. 6.10 показано

полученное таким способом изображение ЦТС-керамики (цирконат титанат свинца ( $\text{Pb}[\text{Zr}_{(x)}\text{Ti}_{(1-x)}]\text{O}_3$ )), являющейся одним из наиболее широко используемых в мире пьезоэлектрических керамических материалов, на котором хорошо видна полосовая сегнетоэлектрическая доменная структура. Размер снимка равен  $2,5 \times 2,5$  мкм.

**Пьезоэлектрический эффект** (от греч. «piezo» — давлению) — эффект возникновения поляризации диэлектрика под действием механических напряжений (*прямой пьезоэлектрический эффект*). Этот эффект можно легко наблюдать, собрав установку, показанную на рис. 6.11. На кристалл кварца нанесены две проводящие обкладки, которые с помощью проводов соединены с люминесцентной лампой дневного света. Груз с отверстием, направляемый вертикальным стержнем, может падать на пьезокристалл, закрепленный у основания стержня. В момент удара груза о кристалл лампа вспыхивает, что свидетельствует о появлении электрического напряжения между проводящими обкладками.

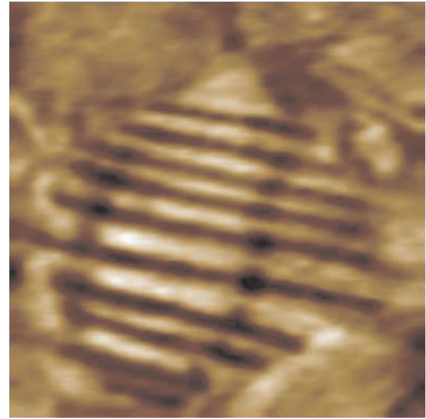


Рис. 6.10

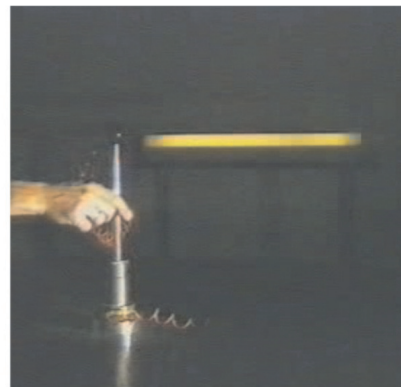
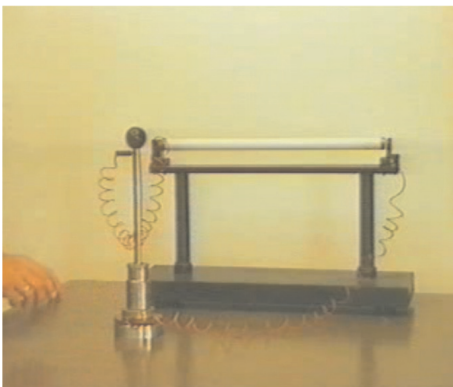


Рис. 6.11

Существует и *обратный пьезоэлектрический эффект* — возникновение механических деформаций под действием электрического поля.

Прямой и обратный пьезоэлектрические эффекты наблюдаются в одних и тех же кристаллах — пьезоэлектриках. Прямой эффект открыт братьями Жаком и Пьером Кюри в 1880 г. Обратный эффект был предсказан в 1881 г. французским физиком Г. Липпманом (Нобелевская премия по физике 1908 г. «За создание метода фотографического воспроизведения цветов на основе явления интерференции»). Ему удалось наблюдать образование разности электрических потенциалов при механической деформации ртутной поверхности. Это привело к важнейшему открытию — сформулированной

и опубликованной в 1881 году *теореме об обратимости физических явлений*. Эта теорема утверждает: «Зная о существовании некоторого физического явления, можно предсказать существование и величину обратного эффекта».

Следуя этому выводу, Липпман высказал гипотезу, что если к кристаллу приложить электрическое поле, то произойдет изменение его размеров. Вскоре гипотеза была экспериментально подтверждена братьями Кюри.

Пьезоэлектрические свойства кристаллов связаны с их структурой. Ими обладают все пирозлектрики. При механической деформации пирозлектрика меняется величина его спонтанной поляризации, что и наблюдается как прямой пьезоэлектрический эффект. Пьезоэлектрические эффекты наблюдаются также в некоторых непирозлектриках (например, в кварце).

Опытным путем было установлено, что при однородных деформациях сжатия или растяжения вдоль определенных направлений, называемых *полярными осями*, на противоположных гранях кристалла, перпендикулярных полярной оси, возникают заряды противоположного знака. При этом знаки зарядов граней при замене сжатия растяжением изменяются на противоположные. Такой эффект называется продольным пьезоэффектом. Вместе с тем на этих гранях могут возникнуть заряды при деформациях и в направлении, перпендикулярном полярной оси (поперечный пьезоэффект).

Встречные направления вдоль полярной оси не эквивалентны: при повороте кристалла на  $180^\circ$  вокруг оси, перпендикулярной полярной, кристалл не совмещается сам с собой. А это означает, что пьезоэлектрическими свойствами обладают кристаллы, не имеющие центра симметрии.

Количественными характеристиками пьезоэффекта является совокупность пьезоконстант  $d$  (пьезомодулей) — коэффициентов пропорциональности между поляризациями  $P$  и механическими напряжениями  $\sigma$ :  $P = d \cdot \sigma$ .

Механические напряжения описываются 6-ю независимыми компонентами тензора напряжений  $\sigma_{ik}$  (сжатия или растяжения вдоль 3 осей, а также сдвигов в плоскостях, перпендикулярных осям), а поляризация — тремя компонентами вектора поляризации  $\mathbf{P}$ . Поэтому, на первый взгляд, для описания пьезоэффекта необходимо 18 пьезомодулей. Однако из-за симметрии кристалла число отличных от нуля независимых пьезоконстант меньше.

Например, при сжатии (или растяжении) пластинки кварца вдоль пьезооси, перпендикулярной поверхности пластинки,  $d = 2,33 \cdot 10^{-12}$  Кл/Н. Полагая  $\sigma_{11} = 10^5$  Н/м<sup>2</sup>, получаем  $P = 2,33 \cdot 10^{-7}$  Кл/м<sup>2</sup>. Поверхностные заряды  $\sigma' = P$  создают в пластинке поле с напряженностью  $E = P/\varepsilon_0 = 2,4 \cdot 10^4$  В/м, и при толщине пластинки  $l = 5$  мм электрическое напряжение между ее поверхностями  $U = E \cdot l = 120$  В.

У сегнетоэлектриков пьезоэлектрические модули существенно больше: например, у ниобата лития  $d = 45 \cdot 10^{-12}$  Кл/Н, а у сегнетовой соли  $d = 275 \times 10^{-12}$  Кл/Н.

Несмотря на это, кристаллы кварца широко применяются, особенно в тех случаях, когда требуются высокая механическая прочность и стабильность по отношению к изменению температуры.

Пьезоэлектрики являются обратимыми электромеханическими преобразователями. При помещении пьезоэлектрика в электрическое поле с напряженностью  $E$  он деформируется, при этом относительные деформации  $\Delta l/l = d \cdot E$ . Например, кварцевая пластина толщиной  $l = 1$  мм под действием напряжения  $U = 100$  В изменяет свою толщину на  $\Delta l = d \cdot E \cdot l = d \cdot U = 2,33 \cdot 10^{-10}$  м. Незначительность величин деформаций пьезоэлектриков объясняется их очень высокой жесткостью.

Пьезоэлектрики способны преобразовывать механическую энергию в электрическую и, наоборот, электрическую энергию в механическую. Преобразователи, в которых используется прямой пьезоэффект, называют преобразователями-генераторами; они имеют механический вход и электрический выход. Преобразователи, в которых используется обратный пьезоэффект, называют преобразователями-двигателями; они имеют электрический вход и механический выход. Известно множество пьезоэлектрических устройств, работающих на основе как прямого, так и обратного эффектов.

Прямой пьезоэффект используется, например, в микрофонах, звукоинструментах, датчиках механических сил, перемещений и ускорений, бытовых зажигалках для газа и др.

Первый пьезоэлектрический микрофон был создан в 1925 г. советскими учеными С. Ржевкиным и А. Яковлевым. Впоследствии были созданы пьезоэлектрические датчики давления и гидрофоны, позволяющие записать сверхнизкочастотные звуки, характерные для морских обитателей.

Важной деталью любого оборудования для усиления звука акустического музыкального инструмента является пьезодатчик (transducer). Он преобразует механические колебания струн и деки в электрический сигнал. Пьезодатчик, например, помещают под косточку струнного инструмента (пластинку, на которую опираются струны). Это UST (Under-Saddle Transducer) датчик. Если датчик приклеивают изнутри на деку инструмента, то он выдает больше информации о свойствах корпуса инструмента. Этот датчик называется AST (Acoustic Soundboard Transducer). Совмещение сигналов от UST и AST дает очень сложную и интересную картину и позволяет озвучить инструменты самого высокого класса.

Установка на реактивных самолетах пьезопреобразователей сулит экономию почти трети топлива, которое расходуется на выработку электроэнергии, следовательно, позволяет увеличить дальность полета. Здесь электроэнергия вырабатывается непосредственно за счет колебаний крыльев и вибрации фюзеляжа.

Успешно разрабатывается идея автономного пьезоэлектрического электропитания устройств малой мощности. В частности, создан светофор, батареи которого заряжаются от шума автомобилей на перекрестке. Ведутся исследования по созданию высокоэффективных преобразователей, с помощью которых механическая энергия низкочастотных вибраций, возникающих при движении поездов, автотранспорта и пр., может быть преобразована в электрическую. Это поможет осуществить контроль путей, дорог, мостов и даже леса с помощью не требующих вмешательства человека датчиков, питающихся от пьезогенераторов.

Обратный пьезоэлектрический эффект используется в пьезоизлучателях звука, в системах сверхточного позиционирования, например, в системе позиционирования иглы в сканирующем туннельном микроскопе или перемещения головки жесткого диска в винчестере, в адаптивной оптике для изгиба отражающей поверхности деформируемого зеркала.

Пластина кварца с нанесенными на нее электродами представляет собой электромеханический преобразователь (резонатор). Если на резонатор подать переменное напряжение, совпадающее с одной из нормальных частот кварца, в пластине возникают значительные механические колебания (стоячая волна). Такие кварцевые пластины являются мощным излучателем волн сверхвысокой частоты.

Пьезокварцевые пластинки применяются для стабилизации частот от 1 кГц до 200 МГц, для генерации и приема ультразвука, для резонаторов высокой добротности, для фильтров высокой избирательности, для измерения механического давления.

В семидесятых годах были разработаны пьезоэлектрические струйные головки для принтеров. В большинстве таких принтеров избыточное давление в камере с чернилами создается с помощью диска из пьезоэлектрика, который изменяет свою форму (выгибается) при подведении к нему электрического

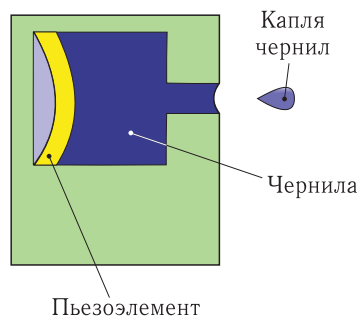


Рис. 6.12

напряжения (рис. 6.12). Выгнувшись, диск, который служит одной из стенок камеры с чернилами, уменьшает ее объем. Под действием избыточного давления жидкие чернила вылетают из сопла в виде капли. Благодаря такой технологии разрешение струйных принтеров достигло более 1000 точек на дюйм.

На фоне многочисленных применений прямого и обратного пьезоэффектов несомненно особую роль играет использование пьезоэффекта в прецизионных кварцевых генераторах, позволяющих получать электрические колебания фиксированной частоты в диапазоне от несколь-

ких кГц до сотен МГц. Основным элементом этого генератора является упоминавшийся выше кварцевый резонатор. Внешнее напряжение, прикладываемое к резонатору, вызывает деформацию пластинки, а деформация влечет появление заряда на поверхностях кварца. Таким образом, электрические колебания поддерживаются слабо затухающими механическими колебаниями.

Частота этих колебаний (частота низшей моды) определяется размерами пластины и скоростью звука в ней. Кварц используется потому, что он, помимо хороших пьезоэлектрических свойств, обладает еще и одним из самых низких температурных коэффициентов расширения. Для получения высокой добротности и стабильности резонатор помещают в вакуум и поддерживают постоянной его температуру.

Кварцевые генераторы являются основным элементом кварцевых часов, используются как стандарты частоты, широко применяются в цифровой технике в качестве тактовых генераторов.

**Электреты.** Поляризация в отсутствие электрического поля может наблюдаться также в некоторых веществах типа смол и стекол, называемых *электретами*. Поляризованные при высоких температурах, а затем охлажденные, электреты сохраняют достаточно долгое время поляризацию и создают в окружающем пространстве электрическое поле.

Необычные свойства электретов были известны еще в далекой древности. Лечебные свойства янтаря, являющегося природным электретом, широко использовались в лечебной практике. Считалось, что янтарь помогает при многих заболеваниях и охраняет от злых духов. Из янтаря делали не только украшения, но и различные амулеты и обереги, а многие врачеватели добавляли толченый янтарь в лекарственные препараты.

Впервые электреты были исследованы японским физиком Егути в 1919 г. К настоящему времени они хорошо изучены и нашли широкое применение в технике. Все электреты имеют стабильный поверхностный заряд. Со временем происходит уменьшение заряда, обычно более быстрое в первое время после изготовления. В дальнейшем заряды меняются незначительно в течение длительного времени. При комнатной температуре время жизни электретов очень велико (от нескольких лет до десятков и более лет). С ростом температуры время жизни экспоненциально уменьшается.

Электреты используются не только как изоляционные материалы, но и для изготовления высококачественных профессиональных микрофонов и телефонов, измерительных приборов, средств контроля, диагностики и т. д. Широкое применение в технике нашли полимерные электреты, представляющие собой тонкие электризованные полимерные пленки толщиной 3–50 микрометров. Так, например, большинство микрофонов в современной аудиотехнике и телефонных аппаратах изготовлено на основе полимерных электретов.

## ЛЕКЦИЯ 7

**Электрострикция** (от лат. «*strictio*» — стягивание) — деформация диэлектрика под действием внешнего электрического поля, пропорциональная квадрату напряженности поля и не зависящая от изменения его направления на обратное (в отличие от обратного пьезоэффекта).

Явление электрострикции наблюдается в той или иной степени у большинства диэлектриков. Электрическое поле взаимодействует с диполями молекул или ионов диэлектрика и создает деформирующие силы. Под действием поля атомы и молекулы смещаются, и в результате происходит электрострикция, которая присуща всем твердым и жидким диэлектрикам независимо от их симметрии и структуры.

Электрострикционные деформации диэлектриков чрезвычайно малы. Однако в некоторых сегнетокерамических материалах при переориентации доменов деформация может достигать больших значений, соизмеримых с пьезоэлектрической деформацией.

Сегнетокерамика, например, на основе магнониобата свинца, является одним из лучших электрострикционных материалов. В области фазового перехода структура такой керамики неоднородная, и деформация керамических материалов в результате электрострикции на 2–3 порядка больше, чем электрострикция диэлектриков.

Эффект электрострикции широко используется в электрострикционных преобразователях, предназначенных для измерения колебаний поверхностей твердых тел. Электрострикционная сегнетокерамика применяется в исполнительных механизмах для создания точных перемещений.

Поскольку деформации при электрострикции пропорциональны квадрату напряженности приложенного поля, то в переменном поле  $E(t) = E_0 \cos \omega t$  кристалл деформируется с частотой  $2\omega$  ( $E^2 = (1/2) E_0^2 (1 + \cos 2\omega t)$ ), а в случае пьезоэлектрического эффекта частоты поля и деформации совпадают.

**Электрический пробой диэлектриков** — резкое уменьшение электрического сопротивления (увеличение плотности тока  $j$ ) диэлектрика, наступающее при достижении определенной величины напряженности приложенного электрического поля  $E_{пр}$ , называемого электрической прочностью. Обычно значения  $E_{пр} \sim 10^5 - 10^6$  В/см. В случае пробоя образуется проводящий канал, в котором возникает большая плотность тока. Выделяющееся в канале джоулево тепло ведет к разрушению материала (проплавлению, появлению воздушного канала в результате испарения, массовому образованию дефектов в кристаллах, раскалыванию образца и пр.).

Электрический пробой — лавинообразный процесс, обусловленный тем, что носители заряда на длине свободного пробега приобретают энергию, достаточную для ионизации молекул газа или кристаллической решетки. В результате создаются новые свободные носители заряда и т.д. Поэтому



генерация носителей происходит лавинообразно. Различают поверхностный пробой и объемный пробой диэлектриков.

Ниже в таблице представлены удельное сопротивление  $\rho$  и электрическая прочность  $E_{\text{пр}}$  некоторых твердых диэлектриков, являющихся хорошими изоляторами.

Диэлектрический материал	$\rho$ , Ом · см	$E_{\text{пр}}$ , В/см
Кварцевое стекло	$10^{16} - 10^{18}$	$(2-3) \cdot 10^5$
Полиэтилен	$10^{15} - 10^{16}$	$4 \cdot 10^5$
Слюда	$10^{14} - 10^{16}$	$(1-2) \cdot 10^6$
Электрофарфор	$10^{13} - 10^{14}$	$3 \cdot 10^5$
Мрамор	$10^8 - 10^9$	$(2-3) \cdot 10^5$

Зависимость плотности тока  $j$  от напряженности электрического поля  $E$ , рассчитанная в предположении, что ток однороден по сечению образца, определяется законом Ома (см. след. лекцию)

$$j = \frac{1}{\rho} E,$$

где удельное сопротивление  $\rho$  при  $E \leq E_{\text{пр}}$  не постоянная величина, а зависит от плотности тока  $j$ . Дифференцируя это соотношение по  $j$ , получим

$$\frac{dE}{dj} = \rho + j \frac{d\rho}{dj}.$$

Если величина  $d\rho/dj < 0$ , то с ростом  $j$  дифференциальное сопротивление  $\rho_d = dE/dj$  может стать отрицательным. Состояние с отрицательным дифференциальным сопротивлением является неустойчивым и приводит к образованию канала тока при  $E = E_{\text{пр}}$ .

В твердых диэлектриках может происходить как тепловой, так и электрический пробой. При тепловом пробое с ростом  $j$  растет выделение джоулева тепла и, следовательно, температура диэлектрика, что приводит к увеличению числа носителей тока. При электрическом пробое с ростом  $j$  вследствие ионизации ударом также возрастает число носителей.

Присутствующие неоднородности способствуют пробое, поскольку в области нахождения неоднородности локальное поле может заметно увеличиться.

Пробой твердых диэлектриков заканчивается разрушением материала изоляции. Могут, например, образовываться сквозные отверстия, проплавляются каналы, образуются трещины и т. д.

Электрическая прочность жидких диэлектриков в сильной степени зависит от чистоты жидкости. Для чистых, однородных жидких диэлектриков электрическая прочность близка к прочности соответствующих твердых диэлектриков. Наличие примесей и загрязнений существенно понижает  $E_{\text{пр}}$ .

Пробой в газах связан с механизмом ударной ионизации и проявляется в виде электрического разряда в газах (см. далее). Если пробой произошел в газообразном диэлектрике, то благодаря высокой подвижности молекул

пробитый участок после снятия напряжения восстанавливает свои электрические свойства.

Пробой бывает и полезным, и вредным. К примеру, пробой изолятора на линии высокого напряжения является серьезной аварией, а пробой атмосферы во время грозы между облаком и громоотводом позволяет защитить объекты, находящиеся вблизи громоотвода.

**Конденсатор** (от лат. «*condensare*» — уплотнять) — устройство для накопления заряда и энергии электрического поля. Обычно он состоит из двух электродов в форме пластин (называемых *обкладками*), разделенных диэлектриком, толщина которого мала по сравнению с размерами обкладок. У заряженного конденсатора на обкладках находятся одинаковые по величине разноименные заряды  $q$  и  $-q$ . Поэтому электрическое поле, возникающее при подключении обкладок к источнику напряжения, практически полностью сосредоточено между обкладками.

Основной характеристикой конденсатора является его *емкость*  $C$ , характеризующая способность конденсатора накапливать электрический заряд:

$$C = \frac{q}{U}, \quad (7.1)$$

где  $U$  — напряжение на конденсаторе (разность потенциалов между обкладками  $\varphi_1 - \varphi_2$ ),  $q$  — абсолютная величина заряда на обкладках. Единицей емкости является фарад — 1 Ф. *Емкостью, равной одному фараду, обладает такой конденсатор, между пластинами которого возникает разность потенциалов, равная одному вольту, если заряд каждой из пластин равен одному кулону.* Типичные значения емкости конденсаторов составляют от единиц пикофарад до тысяч микрофарад. Однако существуют конденсаторы (ионисторы) с емкостью до десятков фарад.

По форме обкладок различают *плоские, цилиндрические, сферические* конденсаторы. Рассмотрим несколько примеров.

**Пример 1.** Плоский конденсатор представляет собой две плоские пластины с площадью  $S$  каждой, расстояние между которыми  $l$  мало по сравнению с их линейными размерами. Это позволяет при расчетах пренебречь неоднородностью электрического поля у краев пластин и считать, что все поле однородно и сосредоточено между пластинами. На рис. 7.1 а изображена структура силовых линий поля конденсатора, а на рис. 7.1 б показана фотография структуры визуализированных силовых линий в демонстрационном эксперименте.

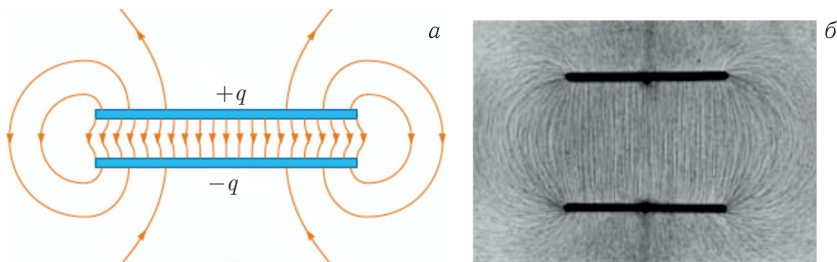


Рис. 7.1

Емкость плоского конденсатора, пространство между обкладками которого заполнено диэлектриком с диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon$ , легко вычислить, воспользовавшись формулой (5.23). Если поверхностные плотности зарядов пластин, находящихся на расстоянии  $l$  друг от друга, равны  $\sigma$  и  $-\sigma$ , а площадь пластины  $S$ , то напряженность поля в диэлектрике равна

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon \varepsilon_0} = \frac{q}{S \varepsilon \varepsilon_0},$$

а напряжение

$$U = E \cdot l = \frac{ql}{S \varepsilon \varepsilon_0}.$$

Поэтому емкость плоского конденсатора

$$C = \frac{S \varepsilon \varepsilon_0}{l}. \quad (7.2)$$

**Пример 2.** У цилиндрического конденсатора обкладки представляют собой два коаксиальных полых цилиндра с радиусами  $R_1$  и  $R_2 > R_1$  и высотой  $h$ , вставленных друг в друга и разделенных диэлектриком (рис. 7.2).

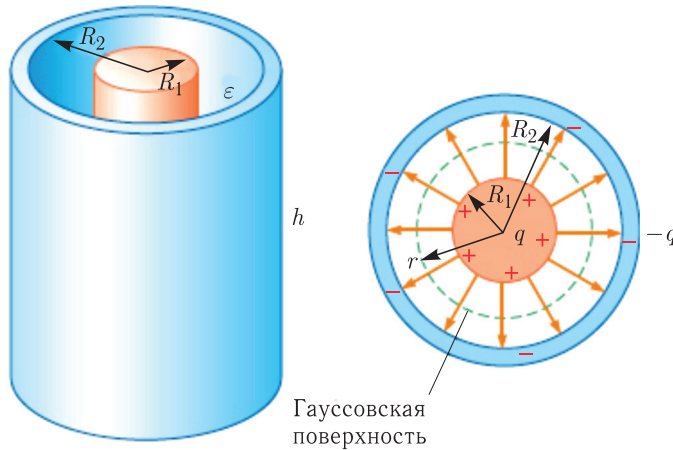


Рис. 7.2

В пренебрежении искажениями поля у концов цилиндров напряженность поля на расстоянии  $r$  от оси цилиндров легко вычисляется с помощью теоремы Гаусса:  $\varepsilon_0 \varepsilon E(r) 2\pi r h = q$ . Разность потенциалов между обкладками, или электрическое напряжение на конденсаторе равно

$$U = \int_{R_1}^{R_2} E(r) \cdot dr = \int_{R_1}^{R_2} \frac{q}{\varepsilon_0 \varepsilon 2\pi r h} \cdot dr = \frac{q}{2\pi \varepsilon_0 \varepsilon h} \ln \frac{R_2}{R_1}.$$

Поэтому емкость цилиндрического конденсатора получается равной

$$C = \frac{2\pi \varepsilon_0 \varepsilon h}{\ln \frac{R_2}{R_1}}. \quad (7.3)$$

Если расстояние между обкладками  $l = R_2 - R_1 \ll R_1$ , то  $\ln \frac{R_2}{R_1} = \ln \left(1 + \frac{l}{R_1}\right) \approx \frac{l}{R_1}$ , и

$$C \approx \frac{2\pi\epsilon_0\epsilon h R_1}{l} = \frac{\epsilon_0\epsilon S}{l},$$

что совпадает с формулой (7.2) для плоского конденсатора.

**Пример 3.** Емкость сферического конденсатора, представляющего собой концентрические сферы с радиусами  $R_1$  и  $R_2 > R_1$ , рассчитывается аналогично: записав теорему Гаусса в виде  $\epsilon_0\epsilon E(r)4\pi r^2 = q$  и вычисляя электрическое напряжение

$$U = \int_{R_1}^{R_2} E(r) \cdot dr = \int_{R_1}^{R_2} \frac{q}{\epsilon_0\epsilon 4\pi r^2} \cdot dr = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right),$$

для емкости получаем выражение

$$C = \frac{4\pi\epsilon_0\epsilon}{\left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)}. \quad (7.4)$$

Нетрудно убедиться, что при  $l = R_2 - R_1 \ll R_1$  эта формула переходит в формулу (7.2).

В рассмотренных первых двух примерах не учитываются искажения однородности электрического поля у краев обкладок (краевой эффект), поэтому расчеты дают несколько заниженные значения емкости.

Иногда говорят о емкости уединенного проводника, подразумевая при этом, что если на этом проводнике находится, например, положительный заряд, то заряд противоположного знака распределен на одном или нескольких удаленных проводниках. Так, емкость проводящего шара радиуса  $R$  получается из формулы (7.4), полагая в ней  $R_1 = R$ , а  $R_2 \rightarrow \infty$ :

$$C = 4\pi\epsilon_0\epsilon R.$$

Емкостью  $1 \text{ Ф}$  обладал бы уединенный шар, находящийся в вакууме и имеющий радиус  $R = C/(4\pi\epsilon_0\epsilon) \approx 9 \cdot 10^6 \text{ км}$ , что примерно в 1400 раз больше радиуса Земли (электроемкость Земли  $C \approx 0,7 \text{ мФ}$ ). Следовательно, фарад — довольно большая величина, поэтому на практике применяются дольные единицы — миллифарад (мФ), микрофарад (мкФ), нанофарад (нФ), пикофарад (пФ).

Из последней формулы следует также, что единица электрической постоянной  $\epsilon_0$  — фарад на метр (Ф/м).

**Пример 4.** Рассчитаем емкость двухпроводной линии длины  $l$ , состоящей из двух параллельных круглых проводов радиуса  $R$ , с межосевым расстоянием между проводами, равным  $b \gg R$ . В этом случае можно приближенно считать, что свободный заряд на каждом проводе распределен равномерно и потенциал поля одного провода описывается формулой  $\varphi(r) = \varphi_0 - \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0} \ln \frac{r}{R}$  (см. (3.17a)). Поэтому электрическое напряжение

между проводами  $U = 2(\varphi_0 - \varphi(b - R)) = \frac{\rho R^2}{\varepsilon_0} \ln \frac{b - R}{R} \approx \frac{\rho R^2}{\varepsilon_0} \ln \frac{b}{R}$ . Поскольку заряд линии  $q = \rho \pi R^2 l$ , то искомая емкость

$$C = \frac{q}{U} = \frac{\pi \varepsilon_0 l}{\ln \frac{b}{R}}. \quad (7.5)$$

Электрическое поле в конденсаторе обладает энергией  $W$ , которая, согласно (5.25), равна

$$W = \frac{1}{2} q(\varphi_1 - \varphi_2) = \frac{1}{2} qU = \frac{1}{2} CU^2 = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C}. \quad (7.6)$$

Обратимся к некоторым важным деталям, связанным с накоплением энергии в конденсаторе. Для этого рассмотрим сначала плоский конденсатор с воздушным зазором ( $\varepsilon = 1$ ), у которого одна подвижная пластина может удаляться от неподвижной пластины. Вначале пластины находятся в контакте, и достаточно поднести заряженное тело, чтобы вследствие индукции на них появились заряды противоположного знака. После этого контакт разрывается, заряженное тело убирается, и, прикладывая внешнюю силу, одну пластину медленно отодвигают на расстояние  $l$ . На подвижную пластину с зарядом  $q$  будет действовать сила притяжения  $F = \frac{q}{2S\varepsilon_0} q = \frac{1}{2} Eq$  (поле неподвижной пластины вдвое меньше поля в конденсаторе), поэтому необходимо совершить работу  $A = F \cdot l = (1/2) Eq l = (1/2) Uq = W$ .

Погрузим теперь раздвижной конденсатор в жидкий диэлектрик (например, керосин) и сделаем ту же самую процедуру. Напряженность поля  $E'$  и сила притяжения  $F'$  со стороны неподвижной пластины уменьшатся в  $\varepsilon$  раз. Поэтому работа внешней силы  $A' = F' \cdot l = (1/2) E' q l = (1/2) U' q = W' = W/\varepsilon$  и энергия  $W'$  уменьшатся в  $\varepsilon$ . Уменьшение силы обусловлено электрострикционным давлением керосина на обкладки.

Видоизменим опыт, для чего сохраним тонкий воздушный зазор между керосином и подвижной пластиной. В этом случае сила, действующая на подвижную пластину, будет такая, как и в отсутствие керосина  $F'' = \frac{q}{2S\varepsilon_0} q = F$  (электрострикционное давление отсутствует), а напряженность поля в конденсаторе (за исключением маленького воздушного зазора)  $E'' = E/\varepsilon$ . Соответственно работа  $A'' = F'' l = \frac{q}{2S\varepsilon_0} q l = \frac{1}{2} \varepsilon E'' q l = \frac{1}{2} \varepsilon U'' q = \varepsilon W'' = W$ . Она такая же, как и в отсутствие керосина, а энергия конденсатора  $W''$  меньше работы в  $\varepsilon$  раз. В рассматриваемой ситуации часть работы  $\Delta A'' = (\varepsilon - 1)W''$  затрачивается на «затягивание» диэлектрика в конденсатор.

**Лейденская банка** — первый электрический конденсатор, изобретенный голландскими учеными П. Мушенбруком и его учеником Кюнеусом в 1745 г. в г. Лейден. Параллельно и независимо от них сходный аппарат, под названием «медицинская банка», изобрел немецкий ученый Э. Клейст.

Этот конденсатор представлял собой стеклянную банку с широким горлом, обклеенную снаружи и внутри листовым оловом (наружная и внутренняя

обкладки) примерно до  $\frac{2}{3}$  высоты и закрытую деревянной пробкой, сквозь которую проходит проволока с цепочкой, касающейся у дна внутренней обкладки (рис. 7.3). Лейденская банка позволяла накапливать и хранить сравнительно большие заряды, порядка микрокулона.

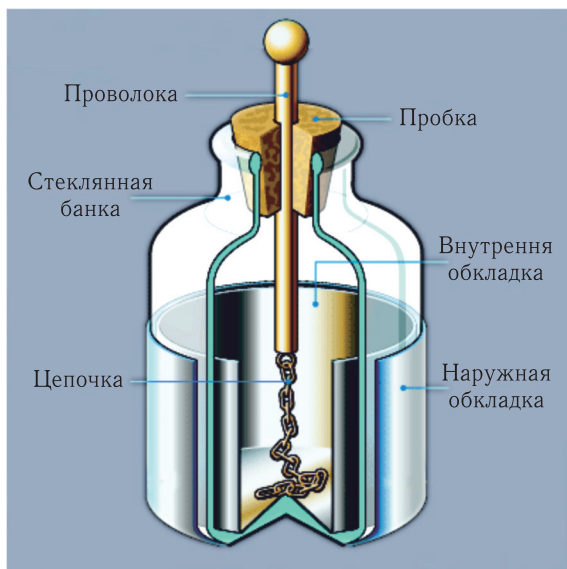


Рис. 7.3

Ее изобретение стимулировало изучение электричества, в частности, скорости его распространения и электропроводящих свойств некоторых материалов. Выяснилось, что металлы и вода лучшие проводники электричества. Благодаря лейденской банке удалось впервые искусственным путем получить электрическую искру.

Большая емкость лейденской банки эффектно демонстрируется в следующем эксперименте (рис. 7.4 а, б). Вблизи заряженной от электрофорной машины лейденской банки на изолированной нити подвешивается легкий проводящий шарик. Этот шарик может совершать колебания, касаясь попеременно стержня банки и заземленной пластины (а).

В первый момент времени в незаряженном шарике происходит разделение зарядов в поле лейденской банки (электростатическая индукция). В результате шарик притягивается к стержню, на него переходит часть заряда банки, после чего он уже будет отталкиваться от стержня. Достигнув заземленной пластины, он передаст ей свой заряд и вновь начнет притягиваться к стержню.

Такие колебания будут продолжаться до тех пор, пока шарик не перенесет весь заряд банки на пластину. В описываемом опыте колебания длятся несколько десятков секунд. Если вместо лейденской банки зарядить проводящий шар радиусом 10 см, то колебания прекращаются за несколько секунд (б).

С помощью разборной лейденской банки можно продемонстрировать уникальное физическое явление — сохранение поляризации и заряда диэлектрика

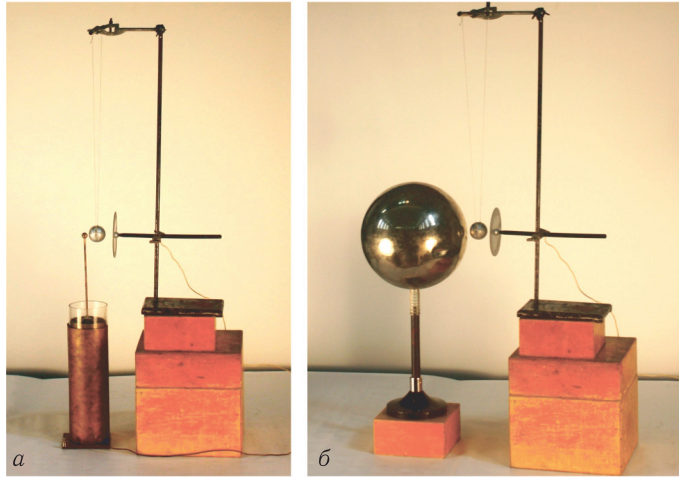


Рис. 7.4

в отсутствие внешнего электрического поля. Конструкция такой банки показана на рис. 7.5. Она состоит из двух цилиндрических медных стаканов разных диаметров, между которыми плотно помещается стеклянный стакан.

Вначале банка заряжается от электрофорной машины до высокого напряжения порядка двадцати киловольт. Затем с помощью специальных захватов из изоляционных материалов она разбирается, стеклянный стакан удаляется и банка собирается. При соединении ее обкладок проводящей перемычкой проскакивает искра и банка разряжается.

Однако если теперь вновь собрать банку, вставив в нее стеклянный стакан, и коснуться перемычкой, то опять проскочит искра, хотя и более слабая по сравнению с предыдущей. Это означает, что на стеклянном стакане сохранились заряды противоположного знака, которые после сборки перетекли на обкладки банки.

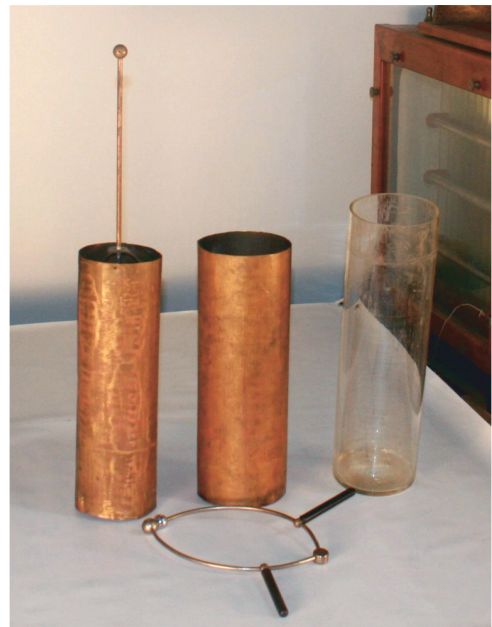


Рис. 7.5

**Классификация и параметры конденсаторов** определяются диэлектриком, разделяющим его обкладки, поэтому основная классификация электрических конденсаторов проводится по типу диэлектрика. В зависимости от типа используемого диэлектрика конденсаторы могут быть воздушные, бумажные, слюдяные, керамические, электролитические, масляные и др.

На рис. 7.6 показано устройство бумажного (а), масляного (б) и электролитического (в) конденсаторов. В бумажном конденсаторе две длинные ленты из проводящей фольги, между которыми находится тонкий слой бумаги, сворачиваются в катушку и помещаются в жесткий корпус. Этим обеспечивается большая площадь обкладок и малое расстояние между ними. В масляном конденсаторе системы пластины погружаются в емкость, заполненную маслом.

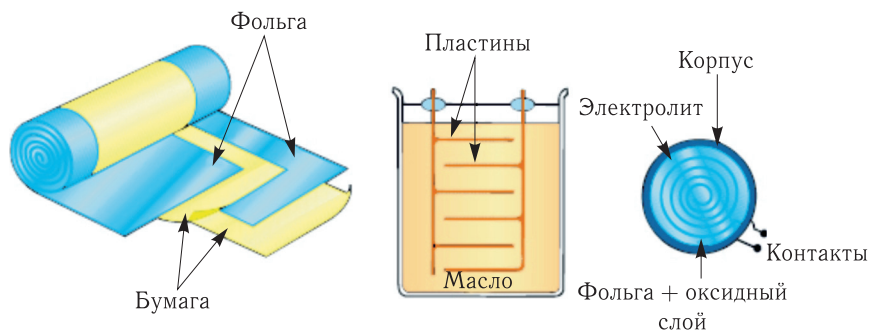


Рис. 7.6

В электролитическом конденсаторе поверхность алюминиевой фольги, являющейся одной обкладкой конденсатора, подвергается окислению для образования изолирующей пленки, выполняющей роль диэлектрика. В качестве второй обкладки применяется пропитанная электролитом бумага, либо проводящий гель, что обеспечивает прекрасный контакт с окисленной поверхностью первой обкладки. Для получения низкоомного контакта используется вторая алюминиевая фольга, расположенная поверх бумаги или геля. Конструктивно фольга сворачивается в цилиндр.

Поскольку зазор между обкладками конденсатора сведен к минимуму, поверхность пластин велика, а значение относительной диэлектрической проницаемости оксида алюминия  $\epsilon = 8,5$ , то электролитический конденсатор характеризуется очень большой емкостью единицы объема.

Такие конденсаторы, как правило, требуют соблюдения полярности прикладываемого напряжения: при обратной полярности они обычно выходят из строя из-за химического разрушения диэлектрика с последующим увеличением тока, вскипанием электролита внутри и, как следствие, с вероятностью взрыва корпуса.

Различают конденсаторы постоянной и переменной емкости. Конденсаторы переменной емкости изменяют свои параметры в результате как механического, так и электрического управления. Изменение емкости конденсатора с механическим управлением достигается чаще всего изменением площади его обкладок или изменением зазора между обкладками.

Простейший воздушный конденсатор переменной емкости показан на рис. 7.7. Он состоит из двух изолированных систем металлических пластин полукруглой формы, которые входят друг в друга при вращении рукоятки: одна группа (ротор) может перемещаться так, что ее пластины заходят в зазоры между пластинами другой группы (статора). Вдвигая и выдвигая одну систему пластин в другую, можно изменить угол  $\theta$  и емкость конденсатора.



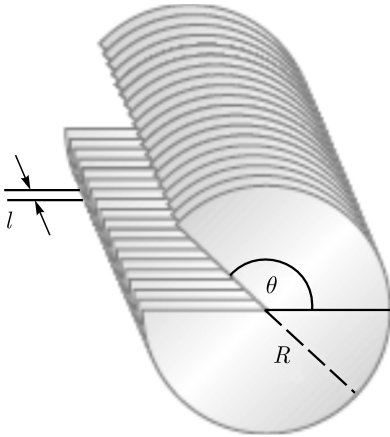


Рис. 7.7

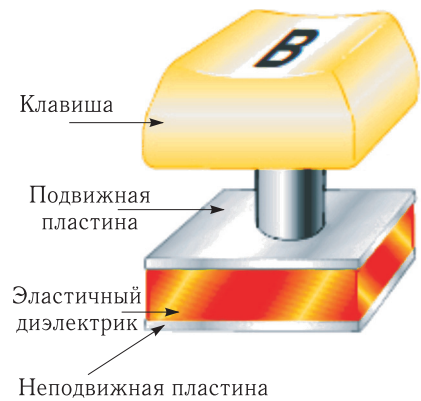


Рис. 7.8

Электрические конденсаторы переменной емкости с твердым диэлектриком (керамические, слюдяные, стеклянные, пленочные) в основном используются как подстроечные с относительно небольшим изменением емкости. На рис. 7.8 показана клавиша компьютера, при нажатии на которую изменяется расстояние между обкладками микроконденсатора, совмещенного с клавишей.

Широко используются электрически управляемые конденсаторы переменной емкости — *вариконды* и *варикапы*.

Вариконд (от англ. «*vari(able)*» — переменный и «*cond(enser)*» — конденсатор) — это сегнетокерамический конденсатор с резко выраженной нелинейной зависимостью емкости от приложенного к его обкладкам управляющего электрического напряжения. С увеличением напряжения диэлектрическая проницаемость сегнетоэлектрика, а следовательно, и электрическая емкость возрастают, достигают максимума (при напряженности электрического поля внутри вариконда 500—2500 В/см) и затем снижаются.

Степень нелинейности и емкость вариконда сильно зависят от температуры. С повышением температуры до точки Кюри (для применяемых сегнетоэлектриков  $T_C = 25\text{--}200\text{ }^\circ\text{C}$ ) они возрастают, достигая своего максимального значения; при дальнейшем повышении температуры емкость резко снижается, так как сегнетоэлектрик превращается в обычный диэлектрик.

Вариконды имеют номинальные значения емкостей от 10 пФ до 1 мкФ и отношение максимальной емкости к начальной от 2 до 20 при изменении напряжения на десятки вольт. Поэтому их широко применяют в усилителях переменного и постоянного токов, умножителях частоты, стабилизаторах напряжения и других устройствах.

Вариконды характеризуются высокой механической прочностью, устойчивостью к вибрациям, тряске, влаге; срок службы их практически неограничен. К недостаткам можно отнести временную и температурную нестабильности емкости, ограниченный диапазон рабочих частот и температур, высокие значения диэлектрических потерь, характеризуемых площадью петли гистерезиса сегнетоэлектрика (6.33).

Варикап (от англ. «*capacity*» — емкость) — это полупроводниковый диод, у которого барьерная емкость  $p$ – $n$ -перехода зависит от приложенного запирающего напряжения (см. далее). Варикапы применяются в схемах перестройки частоты колебательного контура, деления и умножения частоты, частотной модуляции, управляемых фазовращателей и др.

Электрический конденсатор обладает активным сопротивлением  $R$ , сопротивлением изоляции  $r$  и индуктивностью  $L$ , которой при используемых частотах, как правило, пренебрегают. Активное сопротивление конденсатора зависит от удельного сопротивления диэлектрика, материала обкладок и выводов, формы и размера конденсатора, частоты и температуры.

Эквивалентная схема реального конденсатора показана на рис. 7.9. При подключении обкладок к источнику постоянного напряжения конденсатор заряжается до напряжения источника. Время зарядки (и разрядки) зависит от емкости  $C$  и сопротивления  $R$  (см. далее). Ток, продолжающий течь через конденсатор (через сопротивление  $r$ ) после его зарядки, называется *током утечки*.

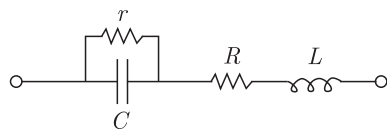


Рис. 7.9

Конденсаторы характеризуются *номинальным* и *пробивным напряжением*. Номинальное напряжение — это напряжение, обо-

значенное на конденсаторе, при котором он может работать в заданных условиях в течение срока службы с сохранением параметров в допустимых пределах. При достижении пробивного напряжения происходит пробой диэлектрика между обкладками. Пробивное напряжение зависит от формы обкладок, свойств диэлектрика и его толщины.

Конденсаторы также характеризуются удельной емкостью — отношением емкости к объему (или массе) диэлектрика. Максимальное значение удельной емкости достигается при минимальной толщине диэлектрика, однако при этом уменьшается его напряжение пробоя.

Во многих технических приложениях конденсаторы используются как накопители энергии, как, например, в пушке Гаусса (см. далее). Поэтому важное значение имеет величина плотности запасенной энергии (энергии, приходящейся на единицу массы). Максимальная плотность у больших электролитических конденсаторов может превышать 1 кДж/кг.

**Соединение конденсаторов в батареи.** Для получения нужной емкости конденсаторы соединяют в батареи. Для этого используются последовательное, параллельное и смешанное (состоящее из комбинации последовательного и параллельного) соединения.

При приложении напряжения  $U$  к параллельно соединенным конденсаторам с емкостями  $C_1$  и  $C_2$  конденсаторы приобретут заряды  $q_1 = C_1 U$  и  $q_2 = C_2 U$  (рис. 7.10 а). Заряд батареи, который она способна при разрядке отдать во внешнюю цепь, равен

$$q = q_1 + q_2 = C_1 U + C_2 U = (C_1 + C_2) U.$$

Поэтому емкость батареи из двух параллельных конденсаторов

$$C_{\text{пар}} = \frac{q}{U} = C_1 + C_2. \quad (7.7)$$

Увеличение емкости происходит из-за того, что площадь обкладок батареи больше площади обкладок каждого конденсатора.

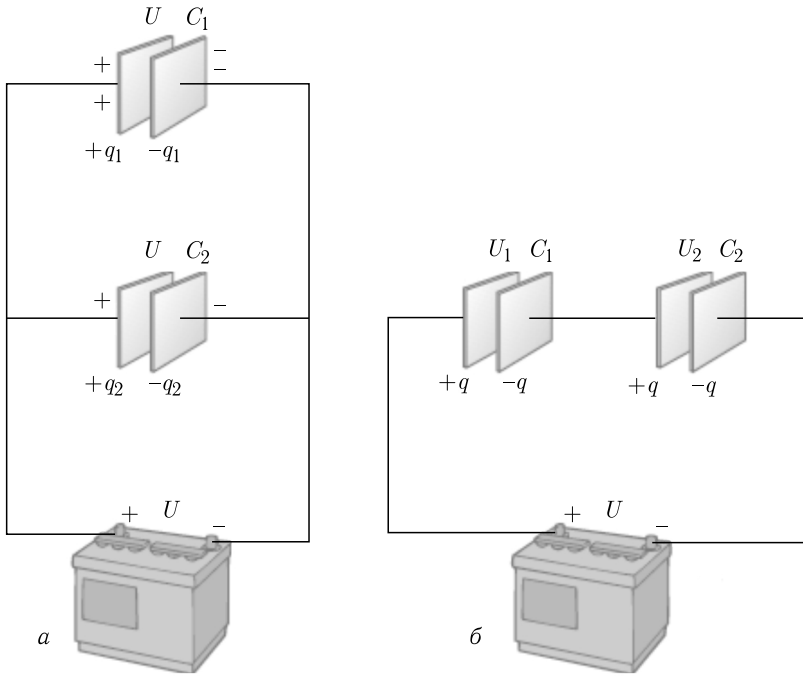


Рис. 7.10

Для батареи  $N$  параллельных конденсаторов емкость

$$C_{\text{пар}} = \sum_{i=1}^N C_i. \quad (7.8)$$

Если у всех параллельно соединенных конденсаторов расстояние между обкладками и свойства диэлектрика одинаковы, то эти конденсаторы можно представить как один большой конденсатор, разделенный на фрагменты меньшей площади.

При приложении напряжения  $U$  к последовательно соединенным конденсаторам с емкостями  $C_1$  и  $C_2$  конденсаторы приобретут одинаковый заряд  $q = C_1 U_1 = C_2 U_2$  (рис. 7.10 б), поскольку процесс зарядки сводится к переносу электронов с внешней обкладки одного конденсатора на внешнюю обкладку другого конденсатора. На внутренних обкладках, соединенных проводником, вследствие электростатической индукции появятся одинаковые заряды противоположного знака. Поэтому во внешнюю цепь батарея может отдать заряд  $q$ . В силу того, что напряжение  $U = U_1 + U_2$ , выражение для емкости батареи двух последовательно соединенных конденсаторов удобно представить в виде

$$\frac{1}{C_{\text{посл}}} = \frac{U}{q} = \frac{U_1 + U_2}{q} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}. \quad (7.9)$$

Поскольку складываются величины, обратные емкостям, то емкость  $C_{\text{посл}}$  меньше емкости любого из конденсаторов. Уменьшение емкости происходит из-за того, что суммарная толщина диэлектрика батареи больше толщины диэлектрика в каждом конденсаторе.

Для батареи  $N$  последовательных конденсаторов

$$\frac{1}{C_{\text{посл}}} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{C_i}. \quad (7.10)$$

Если у всех последовательно соединенных конденсаторов площади обкладок одинаковы, то эти конденсаторы можно представить как один большой конденсатор, заполненный чередующимися диэлектрическими слоями отдельных конденсаторов.

Уместно отметить, что при последовательном соединении снижается возможность пробоя конденсатора, поскольку на каждый конденсатор приходится лишь часть приложенной разности потенциалов.

**Потенциальные и емкостные коэффициенты.** Если имеется система  $N$  проводников произвольной формы, то потенциал  $\varphi_i$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ), приобретаемый каким-либо проводником при сообщении ему заряда  $q_i$ , существенно зависит от формы и расположения других проводников. Поле этого заряженного проводника вызывает перераспределение зарядов на всех незаряженных проводниках (электрическая индукция). Таким образом, потенциал заряженного проводника складывается из потенциала поля, создаваемого собственным перераспределившимся зарядом, и потенциалов полей, создаваемых индуцированными им зарядами.

Применяя подобные рассуждения к каждому заряженному проводнику с зарядом  $q_i$ , можем записать линейные соотношения, которые называются *формулами Максвелла*:

$$\varphi_i = \sum_{j=1}^N \alpha_{ij} q_j, \quad (7.11)$$

в которых  $\alpha_{ij}$  — *потенциальные коэффициенты*. Если известны заряды проводников, то их потенциалы могут быть найдены путем решения задачи Неймана. Если же известны их потенциалы, то, решив задачу Дирихле, можно найти заряды проводников, записав формулы Максвелла с *емкостными коэффициентами*  $\beta_{ij}$ :

$$q_i = \sum_{j=1}^N \beta_{ij} \varphi_j. \quad (7.12)$$

Вместо линейных соотношений (7.12) более удобно применять формулы с *частичными емкостями*  $C'_{ij}$ , которые связывают заряды проводников и разность потенциалов между ними:

$$\begin{aligned} q_1 &= C_{11}(\varphi_1 - \varphi_0) + C_{12}(\varphi_1 - \varphi_2) + C_{13}(\varphi_1 - \varphi_3) + \dots, \\ q_2 &= C_{22}(\varphi_2 - \varphi_0) + C_{12}(\varphi_2 - \varphi_1) + C_{23}(\varphi_2 - \varphi_3) + \dots, \\ &\dots\dots\dots \\ q_N &= C_{NN}(\varphi_N - \varphi_0) + C_{N1}(\varphi_N - \varphi_1) + C_{N3}(\varphi_N - \varphi_2) + \dots \end{aligned} \quad (7.13)$$

Здесь  $\varphi_0$  — потенциал либо бесконечно удаленной точки (если линейные размеры проводников ограничены), либо какой-либо другой удобной точки (например, точки, находящейся на оси симметрии бесконечной проводящей пластины),  $C_{ii}$  — собственная частичная емкость,  $C_{ij}$  — взаимная частичная емкость.

В качестве простейшего примера можно рассмотреть две концентрические сферы с радиусами  $R_1$  и  $R_2 > R_1$ , на которых находятся заряды  $q_1$  и  $q_2$  соответственно. Если положить на бесконечности  $\varphi_0 = 0$ , то  $\varphi_2 = kq_2/R_2 + kq_1/R_2$ ,  $\varphi_1 = kq_1/R_1 + kq_2/R_2$ . Отсюда,  $q_1 = (\varphi_1 - \varphi_2)R_1R_2/[k(R_2 - R_1)]$ ,  $q_2 = \varphi_2R_2/k + (\varphi_2 - \varphi_1)R_1R_2/(k(R_2 - R_1))$ . Следовательно,  $C_{11} = 0$ ,  $C_{12} = C_{21} = R_1R_2/[k(R_2 - R_1)]$  — емкость сферического конденсатора,  $C_{22} = R_2/k$  — емкость внешней сферы.

**Ионистор.** Как отмечалось выше, большой емкостью обладает ионистор. Его еще называют конденсатором двойного слоя DLC (от англ. «*double layer capacitor*»). Первый конденсатор с двойным слоем на пористых угольных электродах был запатентован в 1957 г. фирмой General Electric.

Принцип работы ионистора основан на накоплении заряда двойным электрическим слоем, состоящим из электронов и ионов, разделенных очень тонким промежутком. Для достижения больших емкостей используются пористые материалы, имеющие большую поверхность пор при малых внешних размерах. Оказалось, что для этой цели лучше всего подходит обычный активированный уголь (древесный уголь, который после специальной обработки становится пористым). Площадь поверхности пор  $1 \text{ см}^3$  такого угля достигает тысячи квадратных метров, а емкость двойного электрического слоя — десятка фарад!

Конструкция ионистора показана на рис. 7.11. Он состоит из двух пластин, плотно прижатых к пропитанной электролитом «начинке» из активированного пористого угля. Уголь уложен двумя слоями, между которыми проложен тонкий разделительный слой вещества, не проводящего электроны.

При зарядке ионистора в правой его половине образуется двойной электрический слой с электронами на поверхности пор и положительными ионами на примыкающем электролите, в левой — с положительными ионами на поверхности пор и электронами на примыкающем электролите. Разделительный слой препятствует соединению электронов с ионами в начинке после отключения от источника питания.

По существу, ионистор — это комбинация конденсатора с электрохимической батареей (см. далее). В таком электрохимическом конденсаторе применяются специальные материалы для обкладок и электролит.

Для обкладок используются активированный уголь, оксиды металлов и проводящие полимеры. Применение высокопористых угольных материалов позволяет достичь плотности емкости порядка  $10 \text{ Ф/см}^3$  и более.

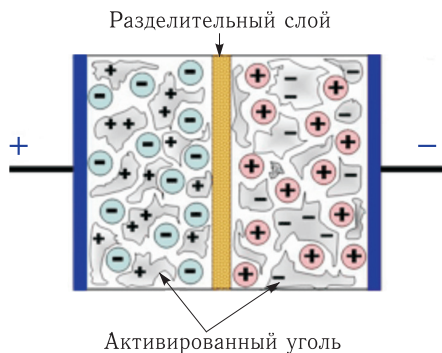


Рис. 7.11

Энергетическая плотность ионистора достигает величины  $10 \text{ Вт} \cdot \text{ч/кг}$ . Она больше, чем у типичных конденсаторов, но меньше, чем у лучших аккумуляторов (см. ниже). Поэтому ионисторы называют также суперконденсаторами.

Электролит ионисторов может быть водным, либо органическим. Ионисторы на основе водного электролита обладают небольшим внутренним сопротивлением, напряжение зарядки для них ограничено величиной порядка 1 В. А ионисторы на основе органических электролитов обладают более высоким внутренним сопротивлением, но обеспечивают напряжение зарядки несколько вольт. Для получения более высоких напряжений их включают последовательно.

Хотя ионисторы появились сравнительно недавно, однако они нашли разнообразные применения: для питания микросхем памяти (в качестве резервного источника тока, рис. 7.12), в цепях фильтрации и сглаживающих фильтрах, для временного питания оборудования при замене батарей. Ионисторы могут работать в паре с батареями в целях защиты последних от резких скачков тока нагрузки: при низком токе нагрузки батарея подзаряжает суперконденсатор, и если ток резко возрастет, суперконденсатор отдаст запасенную энергию, чем уменьшит нагрузку на батарею.

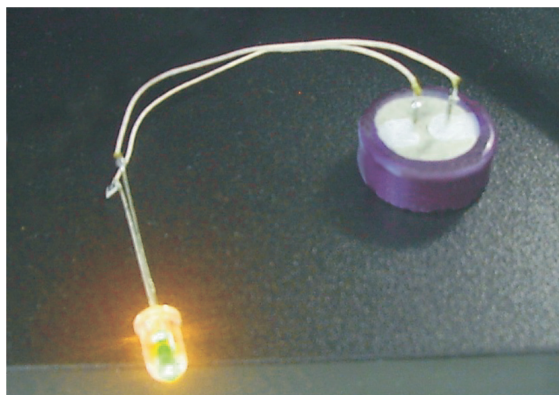


Рис. 7.12

Ионисторы могут заряжаться и разряжаться большими токами, чем батареи, что делает их ценными для гибридных автомобилей. В сочетании с бензиновым генератором ионистор позволяет создавать автомобили с электроприводом колес и расходом топлива 1–2 л на 100 км. Однако полностью они не способны заменить аккумуляторы: ионистор массой в 1 кг способен накопить около 30000 Дж энергии, а самый плохой свинцовый аккумулятор — около  $10^5$  Дж. Тем не менее, при отдаче большой мощности за короткое время аккумулятор быстро портится, да и разряжается только наполовину. Ионистор же многократно и без всякого вреда для себя отдает любые мощности. Кроме того, ионистор можно зарядить за считанные секунды, а аккумулятору на это обычно нужны часы.

Поэтому он хорош в качестве источника питания устройств, многократно кратковременно потребляющих большую мощность: электронной аппаратуры,

автономных фонарей, автомобильных стартеров (с помощью устройств, называемых бустерами), электрических отбойных молотков, электромагнитных орудий и др.

**Литий-ионные конденсаторы** (LIC — *lithium-ion capacitor*) нового поколения, сочетающие в себе свойства литий-ионных аккумуляторов (см. далее) и обычных ионисторов. По плотности энергии такие конденсаторы превосходят ионисторы до 10 раз, а емкость достигает 200 Ф. По сравнению с ионисторами они имеют большее рабочее напряжение. Хотя удельная мощность у них сравнима, но плотность энергии у литий-ионных конденсаторов гораздо выше.

Такой результат достигается предварительным легированием (насыщением) обкладки-анода ионами лития, благодаря чему энергия используется более эффективно, а ресурс конденсатора увеличивается. Кроме того, по сравнению с ионисторами повышается максимальное напряжение в 1,5–2,0 раза.

Эти конденсаторы обладают большей энергоемкостью, сравнимой с батареями, безопаснее в сравнении с литий-ионными батареями, в которых начинается бурная химическая реакция при высокой температуре.

### ЛЕКЦИЯ 8

Предыдущие лекции были посвящены рассмотрению взаимодействия покоящихся электрических зарядов. Однако если в проводниках создается и постоянно поддерживается электрическое поле, то под его воздействием начинается *упорядоченное перемещение заряженных частиц*, или *дрейф*, называемый *электрическим током*. Проводники электрического тока делятся на *электронные* (проводники первого рода) и *ионные* (проводники второго рода).

*Проводники первого рода* — металлы в твердом и расплавленном состоянии. В них электрический ток осуществляется движением свободных электронов (см. далее).

*Проводники второго рода* — некоторые растворы солей, кислот, оснований, а также некоторые вещества, главным образом соли, в расплавленном состоянии. Электрический ток в них осуществляется движением ионов.

**Плотность и сила тока** — важнейшие характеристики электрического тока. Вектор плотности тока  $\mathbf{j}$  определяется соотношением

$$\mathbf{j} = qn\mathbf{v}_{\text{ср}}, \quad (8.1)$$

в котором  $q$  — заряд частицы,  $\mathbf{v}_{\text{ср}}$  — вектор средней скорости дрейфа,  $n$  — концентрация частиц. Таким образом, *вектор плотности тока численно равен величине заряда, протекающего за единицу времени через единичное сечение проводника, ориентированное перпендикулярно скорости частицы*. Он сонаправлен с вектором скорости положительного заряда (например, положительного иона). В металлах, где  $q = e < 0$ , вектор  $\mathbf{j}$  противоположен вектору  $\mathbf{v}_{\text{ср}}$ . Поток вектора  $\mathbf{j}$  через произвольно ориентированное сечение  $\Delta S$  равен силе электрического тока, определяемой как

$$\Delta I = \mathbf{j} \cdot \Delta \mathbf{S} = j \cdot \Delta S \cdot \cos \alpha, \quad (8.2)$$

где  $\alpha$  — угол между вектором плотности тока и нормалью к площадке  $\Delta S$ .

Следовательно, *сила электрического тока в проводнике равна количеству заряда, протекающего в единицу времени через сечение проводника*. Единицей силы тока в системе СИ является ампер (1 А). Он — одна из основных физических величин этой системы единиц и вводится при рассмотрении магнитного взаимодействия проводников с токами (см. далее). Единица заряда 1 Кл является производной единицей: 1 Кл = 1 А · 1 с.

Если сила тока не зависит от времени, то электрический ток называется *постоянным*. В технике широкое применение получили токи, сила которых изменяется во времени по гармоническому закону с частотой 50 Гц (герц). Такие токи исторически получили название *переменных токов*.



Хотя, конечно, переменным током можно считать любой изменяющийся во времени электрический ток.

**Источники тока.** Для создания и поддержания электрического тока необходимы источники тока — устройства, преобразующие различные виды энергии в электрическую энергию. По виду преобразуемой энергии их условно можно разделить на химические и физические источники тока. Первые химические источники (гальванические элементы и аккумуляторы) были созданы в XIX в. (столбик Вольта, элемент Лекланше и др.).

Физические источники получили свое развитие после открытия в 1831 г. английским физиком М. Фарадеем явления электромагнитной индукции. Принято относить к физическим источникам устройства, преобразующие тепловую, механическую, электромагнитную энергию, а также энергию радиационного излучения и ядерного распада, в электрическую. Это, прежде всего, электромашины и термоэлектрические генераторы, термоэмиссионные преобразователи, МГД-генераторы, а также генераторы, преобразующие энергию солнечного излучения и атомного распада.

В настоящей лекции ограничимся рассмотрением принципа действия химических источников постоянного тока. Это рассмотрение потребует привлечения незначительного материала предшествующих лекций и простейших знаний об окислительно-восстановительных химических реакциях.

Введение таких понятий, как электродвижущая сила источника и его внутреннее сопротивление позволит в полном объеме изложить феноменологически основные законы постоянного тока и рассмотреть многочисленные практические приложения.

**Химическими источниками тока** принято называть устройства, вырабатывающие электрический ток за счет энергии окислительно-восстановительных реакций химических реагентов. Они подразделяются на первичные, вторичные и резервные, а также электрохимические генераторы.

Первичные источники (гальванические элементы и батареи) допускают, как правило, однократное использование энергии химических реагентов. Некоторые гальванические элементы и батареи допускают кратковременное повторное использование после электрической подзарядки. Положительный (катод) и отрицательный (анод) электроды, разделенные электролитом в жидком или пастообразном состоянии или же пористой мембраной-сепаратором с поглощенным в ней электролитом, гальванически связаны в течение всего срока службы. В быту первичные химические источники тока часто называют «батарейками». Среди батареек наиболее распространены солевые, щелочные (они же алкалиновые) и литиевые.

Вторичные источники (аккумуляторы и аккумуляторные батареи) допускают многократное (сотни и тысячи заряд-разрядных циклов) использование энергии составляющих химических реагентов. Электроды и электролит весь срок службы аккумуляторов находятся в электрическом контакте друг с другом. Для увеличения ресурса используют сухозаряженное хранение аккумуляторов. Такие аккумуляторы перед включением предварительно заливают электролитом. Наиболее распространены литий-ионные (Li-ion), литий-полимерные (Li-pol), литиевые, никель-металлгидридные (Ni-MH), никель-кадмиевые (Ni-Cd) и свинцово-кислотные аккумуляторы.

Резервные источники допускают только однократное использование энергии химических реагентов. В отличие от гальванических элементов и аккумуляторов, электролит хранится отдельно в жидком состоянии (в отдельных емкостях) либо в твердом (но неэлектропроводящем) состоянии в межэлектродных зазорах. Срок хранения таких резервных источников превышает 10–15 лет.

Электрохимические генераторы способны длительное время непрерывно генерировать электрический ток в результате преобразования энергии химических реагентов (газообразных или жидких), поступающих в генератор извне. К 1970 г. в СССР и США были созданы промышленные образцы электрохимических генераторов. В настоящее время ведутся интенсивные работы по созданию электрохимических генераторов для космических аппаратов, электромобилей, стационарных установок и т. д. Наиболее перспективны генераторы, непосредственно преобразующие энергию природного топлива в электрическую.

Первый химический источник тока был изобретен итальянским ученым А. Вольта в 1800 г. Это был элемент Вольта — сосуд с соленой водой и опущенными в него цинковой и медной пластинками, соединенными проволокой. Затем ученый собрал батарею из этих элементов, укладывая друг на друга поочередно вертикально медный и цинковый диски, разделенные картонными или суконными кружками, смоченными водой или раствором едкого кали. Эта батарея впоследствии была названа «вольтовым столбом».

В 1802 г. русский ученый В. Петров сконструировал вольтов столб из 2100 элементов для получения электрической дуги. В 1836 г. английский химик Д. Даниэль усовершенствовал элемент Вольта, поместив цинковый и медный электроды в раствор серной кислоты. Эта конструкция стала называться «элементом Даниэля» и стала прообразом современного химического источника.

Первый свинцово-кислотный аккумулятор, который применяется широко в настоящее время, изобрел в 1859 г. французский физик Г. Планта. А уже в 1865 г. французский химик Ж. Лекланше предложил свой гальванический элемент (элемент Лекланше), состоявший из цинкового стаканчика, заполненного водным раствором хлористого аммония или другой хлористой соли, в который был помещен агломерат из оксида марганца с угольным токоотводом (см. далее).

**Гальванический элемент Даниэля.** В гальваническом элементе (названном в честь итальянского физиолога и физика, одного из основателей электрофизиологии и учения об электричестве Л. Гальвани) химическая энергия преобразуется в электрическую. Простейший гальванический элемент (элемент Даниэля) представляет собой два объема с растворами  $\text{CuSO}_4$  и  $\text{ZnSO}_4$ , в которые погружены, соответственно, медная и цинковая пластинки (рис. 8.1). Чтобы предохранить растворы от быстрого смешивания, они разделены пористой перегородкой из необожженной глины. Такая система называется *медно-цинковым гальваническим элементом*.

На аноде протекает процесс окисления цинка:  $\text{Zn} - 2\text{e}^- = \text{Zn}^{2+}$ . В результате этого атомы цинка превращаются в ионы, которые переходят в раствор. Цинковый анод растворяется, и его масса уменьшается. Анод в гальваническом элементе, как отмечалось ранее, является отрицательным электродом

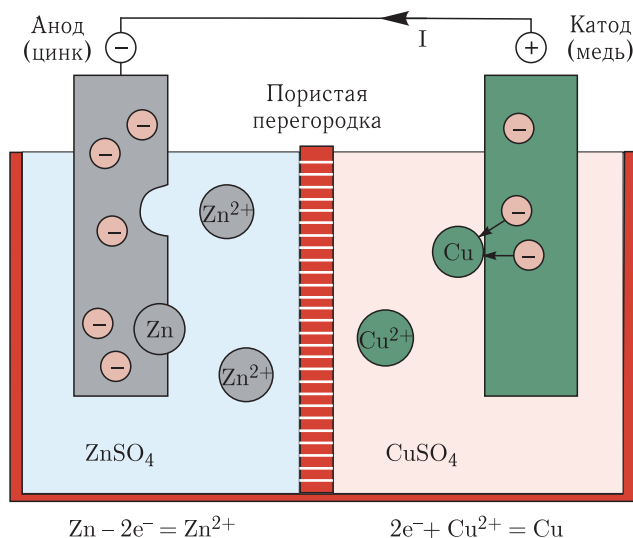


Рис. 8.1

(за счет электронов, полученных от атомов цинка). Электроны от атомов цинка по внешней электрической цепи (например, металлическому проводнику) движутся к катоду, где протекает процесс восстановления ионов меди из раствора ее соли:  $Cu^{2+} + 2e^- = Cu$ . В результате этого образуются атомы меди, которые осаждаются на поверхности катода, и его масса увеличивается. Катодом в гальваническом элементе является положительно заряженный электрод.

Фактически протекает реакция замещения меди цинком в ее соли. Важно подчеркнуть, что процессы отдачи (окисление) и присоединения (восстановление) электронов происходят не при непосредственном контакте атома  $Zn$  с ионом  $Cu^{2+}$ , а в разных местах системы: на аноде и на катоде, которые соединены металлическим проводником. *Цинк (отдает электроны) является восстановителем, а медь (присоединяет электроны) окислителем.* Если исходить из определения: *окислитель — это вещество, которое в ходе реакции принимает электроны, т.е. восстанавливается; восстановитель — отдает электроны, т.е. окисляется*, то в рассмотренной реакции цинк является восстановителем, а медь — окислителем.

При таком способе проведения этой реакции электроны перемещаются от анода к катоду по внешней цепи, в которой и выделяется большая часть химической энергии, которая превращается в электрическую энергию (энергию движущихся зарядов). Ионы  $Zn^{2+}$  и  $SO_4^{2-}$  движутся через пористую перегородку в разных направлениях по электролиту.

Эту же реакцию можно осуществить и иным способом — просто погрузить цинковую пластинку в раствор  $CuSO_4$ . При этом образуются те же самые продукты — медь и ионы цинка. Процессы отдачи (окисление) и присоединения (восстановление) электронов происходят в одном месте при непосредственном контакте атома  $Zn$  с ионом  $Cu^{2+}$ . Выделяемая в этом простом процессе энергия будет расходоваться на нагревание электролита.

**Замечание.** В химических источниках тока анод является отрицательным электродом, на нем происходят процессы окисления. Катод в них положителен — на нем протекают процессы восстановления. В электролитических ваннах (электролизерах, см. далее) процесс окисления происходит по-прежнему на аноде, однако он имеет положительный потенциал, а катод, на котором протекают процессы восстановления, — отрицательный потенциал.

**В элементе Вольта** медная и цинковая пластины погружены в водный раствор серной кислоты  $\text{H}_2\text{SO}_4$ , в котором молекула кислоты распадается на отрицательный ион кислотного остатка  $\text{SO}_4^{2-}$  и положительный ион водорода  $\text{H}_2^+$ . В результате химической реакции между цинком и серной кислотой положительные ионы цинка притягиваются к отрицательным ионам кислотного остатка. Поэтому между отрицательно заряженной цинковой пластиной и электролитом возникает разность потенциалов, или электрохимический потенциал  $\Delta\varphi_{\text{окисл}} = -0,5 \text{ В}$ , которая будет препятствовать дальнейшему переходу ионов цинка в электролит. Если бы второй электрод был бы также цинковым, то между электродами разность потенциалов была бы равна нулю. В случае же медного электрода на нем будут осаждаться положительные ионы  $\text{H}_2^+$ , в результате чего между ним и электролитом образуется положительная разность потенциалов (электрохимический потенциал)  $\Delta\varphi_{\text{восст}} = +0,6 \text{ В}$ .

Если теперь соединить электроды элемента Вольта проводником, то по нему начнут двигаться электроны в направлении от цинковой к медной пластине. Так как они уходят с цинкового электрода, то его отрицательный потенциал начнет уменьшаться по абсолютной величине, и электрическое поле между ним и раствором ослабевает. Это вызовет переход ионов цинка в раствор, поэтому электрохимический потенциал цинковой пластины останется неизменным.

Положительные ионы цинка, переходящие все время в электролит, притягивают к себе отрицательные ионы кислотного остатка, которые движутся в электролите в направлении от медной пластины к цинковой. Положительные ионы водорода движутся в противоположном направлении. Достигая медной пластины, они отнимают у нее электроны, превращаясь в нейтральные атомы.

Негативным эффектом является то, что медная пластина постепенно покрывается слоем водорода. Между этим слоем и электролитом возникает разность потенциалов, действующая навстречу основной разности потенциалов, имеющейся между электродами. Это явление называется поляризацией элемента. Для устранения поляризации в элемент вводят вещества, способные поглощать водород и называемые деполяризаторами. Поглощая водород, деполяризатор постепенно приходит в негодность. Но обычно раньше этого портится электролит, и под действием электролита разъедается цинк. Электрическая энергия получается в элементе за счет расхода цинка, электролита и деполяризатора. Поэтому каждый элемент обладает определенным запасом энергии и может работать лишь ограниченное время.

**Электродвижущая сила (ЭДС).** При соприкосновении металла и раствора соли этого металла возникает двойной электрический слой (ДЭС). Этот слой является результатом упорядоченного распределения противоположно

заряженных частиц на границе раздела фаз: на поверхности металла появляются заряды одного знака, а на примыкающей к нему поверхности электролита — противоположного.

Образование ДЭС приводит к скачку потенциала, равного  $\Delta\varphi$ , который в условиях равновесия называется *гальвани-потенциалом*. Система «металл–водный раствор соли металла» называется *электродом*, а для  $\Delta\varphi$  вводится термин «электродный потенциал».

Таким образом, гальвани-потенциал  $\Delta\varphi$  — это равновесная разность потенциалов между металлом и раствором соли, содержащим ионы этого металла. *Величина  $\Delta\varphi$  численно равна работе, которая совершается в результате химической реакции по переносу иона единичного заряда из одной фазы в другую*, т. е. из металла в электролит.

Принято считать, что электродный потенциал  $\Delta\varphi_{\text{восст}} > 0$ , если на электроде (катоде) протекает реакция восстановления, и  $\Delta\varphi_{\text{окисл}} < 0$ , если на электроде (аноде) протекает реакция окисления. Тогда ЭДС гальванического элемента определяется как

$$\mathcal{E} = \Delta\varphi_{\text{восст}} - \Delta\varphi_{\text{окисл}}. \quad (8.3)$$

Исходя из определения потенциала, можно сказать, что *ЭДС численно равна работе, которую совершают электрохимические силы по переносу единичного положительно заряда (положительного иона) по электролиту от отрицательного анода к положительному катоду*.

На рис. 8.2 изображен гальванический элемент (а), показано распределение потенциала в нем при разомкнутых электродах (б) и дано схематическое изображение источника (в). Величина  $\mathcal{E}$  равна разности потенциалов между положительным и отрицательным электродами элемента.

Она зависит от свойств материалов, концентрации электролита, температуры электродов и электролита и не зависит от размеров и формы электродов и количества электролита.

В наиболее распространенных марганцево-цинковых элементах (элементах Лекланше) окислителем является двуокись марганца  $\text{MnO}_2$ , представляющая собой пасту, смешанную с графитом, а восстановителем — цинк  $\text{Zn}$ .

Первые элементы заполнялись жидким электролитом (солевым ( $\text{NH}_4\text{Cl}$  и др.) или щелочным ( $\text{KOH}$  и др.)). В дальнейшем электролит стали загущать с помощью крахмалистых веществ. В этих элементах, называемых сухими, предотвращено вытекание электролита. На рис. 8.3 показано устройство такого элемента. Окислитель, находящийся в контакте с угольным стержнем, и сухой электролит, обволакивающий окислитель, находятся в цинковом стакане, который

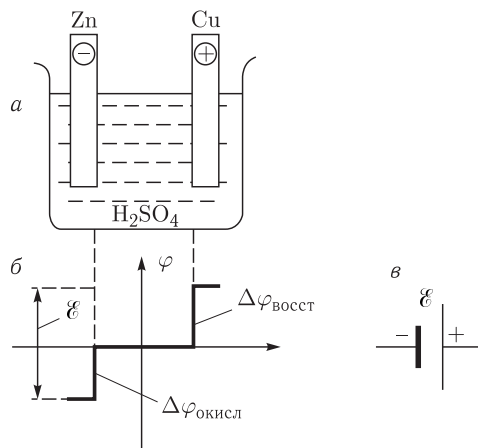


Рис. 8.2

помещается в металлический корпус. Выходными электродами являются центральный стержень и дно цинкового стакана. Для марганцево-цинковых элементов  $\mathcal{E} = 1,5\text{--}1,8\text{ В}$ , удельная энергия  $10\text{--}100\text{ Вт} \cdot \text{ч/кг}$ .

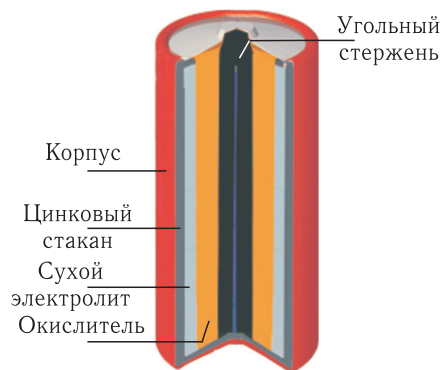


Рис. 8.3

Ртутно-цинковые элементы (окислитель —  $\text{HgO}$ ) со щелочным электролитом имеют  $\mathcal{E} = 1,35\text{ В}$ , удельную энергию до  $400\text{ Вт} \cdot \text{ч/л}$ . Их изготавливают в виде малогабаритных («пуговичных») герметичных устройств и применяют для питания радиоприемников, портативных электронных устройств, кино- и фотоаппаратуры и т. п.

В литиевых элементах восстановителем служит тонкий лист  $\text{Li}$ , напессованный на пластину или сетку из  $\text{Ni}$  или  $\text{Cu}$ . Окислители — главным образом твер-

дые  $\text{MnO}_2$  или фторированный графит. Благодаря высокому отрицательному потенциалу  $\text{Li}$  и его малому расходу литиевые элементы имеют высокие ЭДС ( $2,5\text{--}3,5\text{ В}$ ) и удельную энергию ( $250\text{--}600\text{ Вт} \cdot \text{ч/кг}$ ). Литиевые элементы применяют преимущественно для питания кардиостимуляторов, микрокалькуляторов и других миниустройств.

Побочные химические или электрохимические реакции приводят к саморазряду гальванических элементов, ограничивающему длительность их хранения, которая для лучших образцов может достигать 10 лет. Поэтому в резервных гальванических элементах электролит разобщен с электродами или находится в твердом непроводящем состоянии. Непосредственно перед их использованием электроды приводят в контакт с электролитом или расплавляют электролит.

Например, в водоактивируемых элементах, используемых широко в спасательных плавсредствах, безводная щелочь или соль находится в мешочках в межэлектродном пространстве. Перед эксплуатацией в элемент заливают воду, образуется электролит требуемой концентрации, и гальванический элемент готов к работе.

**Электрический ток в металлических проводниках.** Как отмечалось ранее, если электроды гальванического элемента соединить металлическим проводом, то по нему потечет постоянный электрический ток. Он подчиняется двум важнейшим законам постоянного тока: закону Ома и закону Джоуля–Ленца.

**Закон Ома.** В 1826 г. немецкий физик Г. Ом, изучая процесс протекания тока в электрической цепи, соединенной с источником, установил, что показания  $X$  гальванометра в цепи подчиняются соотношению

$$X = \frac{a}{b + l}, \quad (8.4)$$

в котором  $a$  — постоянная величина, характеризующая свойства источника тока, не зависящая от величины тока  $X$ ,  $l$  — величина, пропорциональная

длине проводов цепи,  $b$  — некоторая величина, характеризующая всю электрическую схему.

В современной интерпретации  $a = \mathcal{E}$  — электродвижущая сила,  $l = R$  — сопротивление проводов (внешнее сопротивление),  $b = r$  — внутреннее сопротивление источника (электролита и электродов),  $X = I$  — сила тока в проводе, поэтому закон Ома для замкнутой цепи записывается в виде

$$I = \frac{\mathcal{E}}{r + R}. \quad (8.5)$$

Для понимания причины возникновения тока в проводнике на рис. 8.4 изображен проводник перед его подключением к источнику (а) и затем после подключения (б).

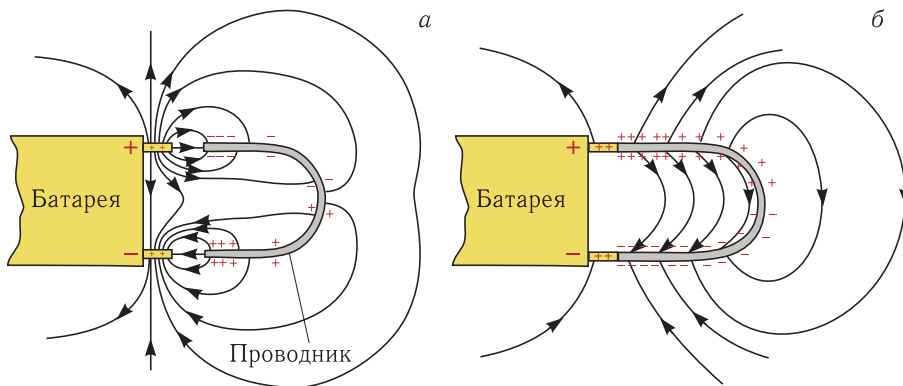


Рис. 8.4

Заряженные разноименно электроды источника в окружающем пространстве создают электростатическое поле. При приближении проводника к источнику в проводнике вследствие индукции происходит разделение зарядов так, чтобы скомпенсировать поле источника. Поле внутри проводника отсутствует, электрического тока нет, а поверхность проводника является эквипотенциальной поверхностью. Силовые линии поля поверхностных зарядов и зарядов на электродах источника перпендикулярны поверхности проводника. Они, как обычно, начинаются на положительных и заканчиваются на отрицательных зарядах.

При контакте проводника с электродами ситуация кардинально изменится: заряды по-прежнему останутся на поверхности проводника, однако перераспределятся таким образом, чтобы внутри проводника появилось электрическое поле. Силовые линии наклонятся по отношению к поверхности. Это свидетельствует о том, что поверхность проводника не является эквипотенциальной: каждому сечению проводника будет соответствовать свое значение потенциала.

Между двумя произвольными сечениями (1) и (2) проводника будет существовать разность потенциалов  $\varphi_1 - \varphi_2$ , или электрическое напряжение  $U_{12}$ . Опыт показывает, что ток в проводнике может быть выражен через

эту разность потенциалов (электрическое напряжение) и сопротивление  $R_{12}$  части провода, заключенного между этими сечениями:

$$I = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{R_{12}} = \frac{U_{12}}{R_{12}}. \quad (8.6)$$

Таким образом, сила тока, протекающего по участку цепи, прямо пропорциональна приложенной разности потенциалов (электрическому напряжению) и обратно пропорциональна сопротивлению этого участка. Это утверждение называется законом Ома для участка цепи.

Соотношение (8.6), записанное в виде

$$U_{12} = I R_{12}, \quad (8.7)$$

удобно использовать для вычисления напряжения (падения напряжения) на участке цепи.

Если сечения выбрать на концах проводника, подключенного к источнику, и сравнить (8.6) с (8.5), то разность потенциалов между электродами нагруженного элемента (напряжение на элементе)

$$\varphi_1 - \varphi_2 = IR = \mathcal{E} - Ir, \quad (8.8)$$

и оно меньше ЭДС на величину падения напряжения на внутреннем сопротивлении. Величина ЭДС равна сумме падений напряжения во внешней и внутренней цепях.

Последний вывод удобно проиллюстрировать с помощью схематичного распределения потенциала по всей замкнутой цепи, состоящей из источника с электродвижущей силой  $\mathcal{E}$  и внутренним сопротивлением  $r$  и внешнего сопротивления  $R$  (сопротивление проводов мало.) (рис. 8.5). Значению потенциала соответствует высота ломаной штриховой линии над плоскостью,

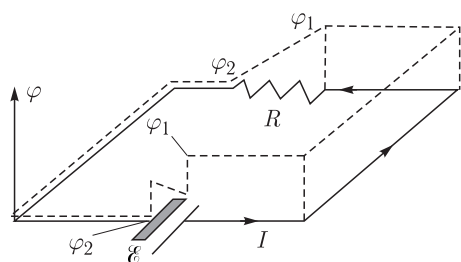


Рис. 8.5

в которой лежит электрический контур. Потенциал  $\varphi_2$  отрицательного электрода источника принят равным нулю.

Если сопротивление нагрузки становится равным нулю, то возникает ток короткого замыкания  $I_k = \mathcal{E}/r$ , при котором напряжение на электродах становится равным нулю. Поскольку внутреннее сопротивление мало, то большой ток короткого замыкания приводит к разрушению элемента.

**Замечание.** При введении понятия потенциала предполагалось, что заряды неподвижны. Возникает вопрос о справедливости применения этого термина в случае постоянного электрического тока. Утвердительный ответ на этот вопрос основан на том, что конфигурация зарядов в неподвижном проводнике не изменяется, хотя, конечно, поверхностные заряды будут постоянно обновляться через малые промежутки времени. Если «рассматривать» усредненное по времени распределение зарядов, то заряды будут казаться неподвижными, поэтому создаваемое ими усредненное электрическое поле ничем не будет отличаться от потенциального поля неподвижных зарядов.



**Закон Ома в дифференциальной форме.** В тонком (линейном) проводнике электрическое поле направлено вдоль оси провода, поэтому разность потенциалов, или напряжение между двумя сечениями провода, можно записать в виде

$$\varphi_1 - \varphi_2 = U_{12} = \int_1^2 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_1^2 E_l \cdot dl, \quad (8.9)$$

где криволинейная координата  $l$  отсчитывается вдоль оси провода. Для фрагмента провода длиной  $\Delta l$  и сечением  $\Delta S$  можно (8.9) записать в виде  $\varphi_1 - \varphi_2 = U_{12} = E \cdot \Delta l$ , а сила тока  $I = j \cdot \Delta S$ . Тогда (8.6) может быть переписано в виде

$$j = \frac{E}{R_{12} \cdot \Delta S / (\Delta l)} = \frac{1}{\rho} E = \sigma E, \quad (8.10)$$

где  $\rho = R_{12} \cdot \Delta S / (\Delta l)$  — удельное сопротивление (сопротивление единицы объема) проводника,  $\sigma = 1/\rho$  — удельная проводимость. Соотношение (8.10), записанное в векторной форме,

$$\mathbf{j} = \frac{1}{\rho} \mathbf{E} = \sigma \mathbf{E}, \quad (8.11)$$

является математическим выражением *закона Ома в дифференциальной форме*.

Плотность тока не является постоянной величиной в сечении проводника и изменяется при изгибе провода. На рис. 8.6 показан фрагмент изогнутого провода и отмечены два непараллельных сечения, имеющие потенциалы  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ . Поскольку расстояние между сечениями на внутреннем изгибе меньше, чем на наружном, то напряженность поля и плотность тока увеличиваются при перемещении по сечению к внутренней изогнутой части провода.

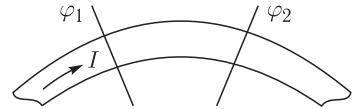


Рис. 8.6

Соответственно на изгибах преимущественно накапливаются и поверхностные заряды. Когда ток течет по проводу, то изгиб провода не меняет силы тока, что обеспечивается соответствующим перераспределением поверхностных зарядов.

В последних лекциях курса излагаются основы классической и квантовой теорий электропроводности твердых тел, устанавливается связь величины удельной электропроводности со строением вещества. Здесь же мы ограничимся констатацией того факта, что удельная проводимость металлов  $\sigma \sim 10^6 - 10^8 \text{ Ом}^{-1} \cdot \text{м}^{-1}$ . Причина такой высокой проводимости кроется в наличии большого числа валентных электронов, потерявших связь со своими атомами и совершающих хаотическое движение внутри проводника. Эти электроны называются электронами проводимости.

Под действием приложенного поля они начинают двигаться с переменной скоростью (дрейфовать) в направлении, противоположном полю, продолжая при этом совершать хаотические движения. Скорость дрейфа электронов на много порядков меньше скорости их хаотического движения, сохраняющегося даже при абсолютном нуле температуры!

**Сторонние силы.** К сторонним силам относят силы неэлектростатического происхождения, действующие на заряды со стороны источников тока и вызывающие перемещение электрических зарядов внутри источника постоянного тока против сил электростатического поля.

В рассмотренном элементе Даниэля сторонние силы действуют в двойном электрическом слое каждого электрода. Под действием этих сил заряженные ионы движутся внутри источника тока против сил электростатического поля, создаваемого положительно заряженным медным и отрицательно заряженным цинковым электродами, благодаря чему на концах цепи поддерживается разность потенциалов и в цепи течет постоянный электрический ток. Если бы сторонние силы отсутствовали, то силы электростатического поля, как известно, не смогли бы совершать работу по перемещению заряда по замкнутой цепи.

На рис. 8.7 показана аналогия между протеканием тока по замкнутой цепи и течением воды в гравитационном (потенциальном) поле Земли по замкнутому контуру. Падение воды с одной высоты на другую происходит в поле силы тяжести (аналог падения напряжения на внешнем сопротивлении). Сторонние силы обеспечиваются человеком, который поднимает ведро против силы тяжести.



Рис. 8.7

Сторонняя сила  $\mathbf{F}$ , действующая на частицу, может быть вовсе не электрического происхождения и никак не связана с зарядом частицы (например, сила инерции в НИСО, пропорциональная массе частицы). Эта сила, отнесенная к величине заряда  $q$  этой частицы, формально называется «напряженностью поля сторонних сил»

$$\mathbf{E}_{\text{ст}} = \frac{\mathbf{F}}{q}. \quad (8.12)$$

Еще раз подчеркнем условность этого названия, помещенного в кавычки. Тогда ЭДС сторонних сил запишется как

$$\mathcal{E}_{12} = \int_1^2 \mathbf{E}_{\text{ст}} \cdot d\mathbf{l} = \int_1^2 E_{\text{ст}l} \cdot dl. \quad (8.13)$$

Если на участке цепи действует сторонняя сила, то падение напряжения на нем отличается от разности потенциалов, что отмечалось в лекции 3 (формулы (3.2) и (3.3)), поэтому:

$$IR_{12} = U_{12} = \int_1^2 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} + \int_1^2 \mathbf{E}_{\text{ст}} \cdot d\mathbf{l} = \varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}_{12}. \quad (8.14)$$

Последняя формула выражает *закон Ома для участка цепи, содержащего ЭДС*. Она аналогична формуле (8.8), записанной для падения напряжения на участке внутренней цепи в виде  $Ir = \mathcal{E} + \varphi_2 - \varphi_1$ .

В *дифференциальной форме закон Ома при наличии сторонних сил* примет вид

$$\mathbf{j} = \frac{1}{\rho} (\mathbf{E} + \mathbf{E}_{\text{ст}}) = \sigma (\mathbf{E} + \mathbf{E}_{\text{ст}}). \quad (8.15)$$

В заключение рассмотрим пример, являющийся хорошей иллюстрацией к сказанному выше. В электрической цепи, состоящей из двух параллельных проводов (шин), разнесенных на расстояние  $H$ , и подключенного к ним сопротивления  $R$  (сопротивление шин учитывать не будем), может с постоянным ускорением  $\mathbf{a}$  скользить проводящая перемычка, находящаяся с шинами в гальваническом контакте (рис. 8.8). Если перемычка составляет с шинами угол  $\alpha$ , то в связанной с ней неинерциальной системе отсчета проекция силы инерции, действующей на свободный электрон массы  $m$ , на ось перемычки и будет сторонней силой  $F = ma \cdot \cos \alpha$ . Тогда  $E_{\text{ст}} = F/|e| = ma \cdot \cos \alpha/|e|$ . Поскольку сторонняя сила действует на длине  $l = H/\sin \alpha$ , то электродвижущая сила  $\mathcal{E} = E_{\text{ст}}l = (ma \cdot H/|e|) \operatorname{ctg} \alpha$ , а ток в цепи  $I = \mathcal{E}/R$ .

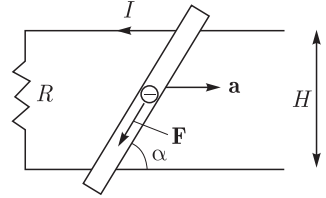


Рис. 8.8

**Закон Джоуля–Ленца.** При протекании тока в неподвижном проводнике в отсутствие химических реакции (см. далее электролиз) энергия движущихся зарядов (электрическая энергия) может превращаться только в теплоту. Количество выделившейся теплоты  $Q$  определяется законом Джоуля–Ленца, который независимо был установлен в 1841 г. английским физиком Дж. Джоулем и годом спустя российским физиком Э. Ленцем.

Количество теплоты  $Q$ , выделяющееся на участке цепи с сопротивлением  $R_{12}$  за время  $t$ , если по нему протекает электрический ток силой  $I$ , равно работе  $A_{12}$ , совершаемой электростатическим полем:

$$Q = A_{12} = (\varphi_1 - \varphi_2)It = U_{12}It = I^2 R_{12}t = \frac{U_{12}^2}{R_{12}}t. \quad (8.16)$$

Работа, совершаемая током в единицу времени, называется электрической мощностью:

$$P_{12} = \frac{A_{12}}{t} = (\varphi_1 - \varphi_2)I = U_{12}I = I^2 R_{12} = \frac{U_{12}^2}{R_{12}}. \quad (8.17)$$

Для практического использования формулы (8.16) и (8.17) используются при трех различных парных комбинациях тока  $I$ , напряжения  $U_{12}$  и сопротивления  $R_{12}$ .

В дифференциальной форме этот закон получается из (8.17), если рассмотреть фрагмент провода длиной  $\Delta l$  и сечением  $\Delta S$  и записать, как и раньше,  $\varphi_1 - \varphi_2 = U_{12} = E \cdot \Delta l$ ,  $I = j \cdot \Delta S$ . Тогда  $\Delta P = j \cdot E \cdot \Delta l \cdot \Delta S$ . Количество теплоты  $g$ , выделяющейся в единицу времени в единичном объеме проводника (удельная мощность), с учетом закона Ома в дифференциальной форме будет равно

$$g = \frac{\Delta P}{\Delta l \cdot \Delta S} = j \cdot E = \frac{1}{\rho} E^2 = \rho \cdot j^2. \quad (8.18)$$

Эта формула является математическим выражением закона Джоуля–Ленца в дифференциальной форме.

Если будут присутствовать сторонние силы, то

$$g = j \cdot (E + E_{\text{ст}}) = \frac{1}{\rho} \cdot (E + E_{\text{ст}})^2 = \rho \cdot j^2. \quad (8.19)$$

Сравнивая последние три записи (8.19), видим, что формула

$$g = \rho \cdot j^2 \quad (8.20)$$

является наиболее общей записью рассматриваемого закона.

**Резисторы.** Резистор (от лат. «*resisto*» — сопротивляюсь) — пассивный элемент электрической цепи, обладающий омическим сопротивлением  $R$ . Эквивалентным для резистора является старый термин «сопротивление  $R$ ».

Реальные резисторы (сопротивления) в той или иной степени обладают также паразитными емкостью и индуктивностью, а также нелинейной зависимостью падения напряжения на них от величины протекающего тока (нелинейной вольт-амперной характеристикой). Это прежде всего варисторы, сопротивление которых зависит от приложенного напряжения.

Сопротивление может также зависеть от температуры (терморезисторы), от освещенности (фоторезисторы), от механических напряжений (тензорезисторы) и от величины внешнего магнитного поля (магниторезисторы).

Резисторы либо изготавливаются как дискретные элементы, либо могут являться частями микросхем. Для достижения нужного омического сопротивления учитывается, что сопротивление  $R_{12}$  (далее индексы у сопротивления писать не будем) фрагмента проводника, согласно (8.10), равно

$$R = \frac{\rho \cdot \Delta l}{\Delta S}, \quad (8.21)$$

поэтому для увеличения сопротивления используются материалы с высоким удельным сопротивлением. Существует множество разнообразных технологий изготовления резисторов.

В проволочных резисторах кусок проволоки с высоким удельным сопротивлением наматывается на каркас. Это позволяет использовать проволоки с большой длиной  $l$  и малым поперечным сечением  $S$ . Сопротивление такой проволоки будет равно

$$R = \frac{\rho \cdot l}{S}. \quad (8.22)$$

Поскольку при этом образуется катушка, то такой резистор может иметь заметную паразитную индуктивность. На рис. 8.9 показан потенциометр, представляющий собой проволочный резистор со скользящим контактом. При перемещении контакта вдоль резистора изменяется рабочая длина проволоки и, тем самым, сопротивление.

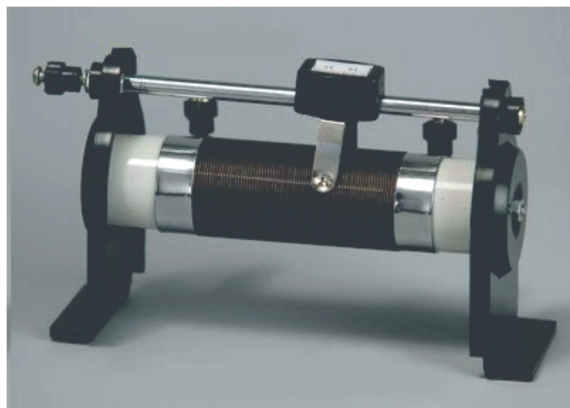


Рис. 8.9

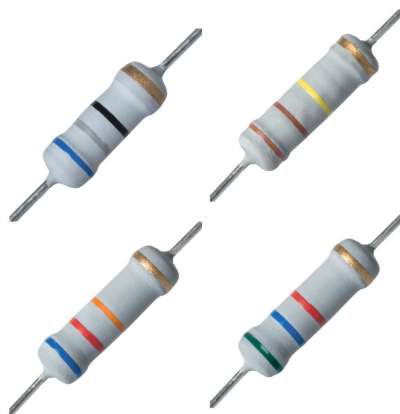


Рис. 8.10

Наиболее распространены пленочные металлические резисторы (рис. 8.10), в которых на керамический сердечник напыляют тонкую пленку металла с большим удельным сопротивлением. На концы сердечника надеваются металлические колпачки с проволочными выводами.

Применяются также угольные резисторы (объемные и пленочные), поскольку уголь, хотя и проводит ток, но обладает высоким удельным сопротивлением.

В интегральных схемах для создания резисторов путем напыления используются слаболегированные полупроводники (см. далее).

Выпускаемые промышленностью резисторы характеризуются номинальным значением сопротивления, разброс которого у лучших стабильных образцов не превышает 0,01 %. Второй характеристикой является максимальная рассеиваемая мощность, при которой резистор не повреждается. Например, в СССР, согласно ГОСТ, выпускались резисторы следующих номиналов мощностей (в ваттах): 0,01, 0,025, 0,05, 0,062, 0,125, 0,5, 1, 2, 3, 4, 5, 8, 10, 16, 25, 40, 63, 100, 160, 250, 500.

Резисторы, в особенности малой мощности, весьма миниатюрны: их длина составляет всего несколько миллиметров, а диаметр в несколько раз меньше. Поскольку прочитать на такой детали значение номинала невозможно, то применяют маркировку в виде цветных полос.

Производство стабильных резисторов дорого, и поэтому они используются в высокоточной аппаратуре. В резисторах общего назначения сопротивление может изменяться в пределах 10% вследствие зависимости удельного сопротивления  $\rho$  от температуры  $t$ .

Феноменологически установлено, что эта зависимость (в ограниченном интервале температур) является линейной:

$$\rho(t) = \rho_0 [1 + \alpha(t - t_0)], \quad (8.23)$$

где  $\alpha$  — температурный коэффициент сопротивления,  $\rho_0$  — удельное сопротивление при температуре  $t_0$  (например, комнатной температуре).

Для большинства металлов температурный коэффициент сопротивления положительный: их сопротивление растет с ростом температуры вследствие рассеяния электронов на фононах (тепловых колебаниях кристаллической решетки). Об этом речь пойдет в последних лекциях.

Для них характерное значение  $\alpha(10^{-3}\text{K}^{-1}) = 0,05$  (константан, Ni-Cu+Mn); 0,1(Ni); 0,25 (никелин, Cu+Ni); 1,0 (Hg); 3,7 (Pb); 4,0 (Sn); 4,1(Ag); 4,2 (Al); 4,3 (Cu); 5,0 (W); 6,0 (Fe).

Поскольку при протекании тока резистор нагревается, то его сопротивление будет увеличиваться. У углерода, наоборот, коэффициент  $\alpha$  отрицателен, и сопротивление угольного резистора по мере его нагревания будет уменьшаться.

На практике для достижения нужного сопротивления участка цепи используют сразу два или более резисторов, подключая их последовательно или параллельно. Возможна также смешанная схем подключения.

Напряжение  $U$ , приложенное к участку цепи из  $N$  последовательных резисторов  $R_i$ , будет равно сумме падений напряжения на всех резисторах, через которые течет одинаковый ток силой  $I$ :

$$U = \sum_{i=1}^N I \cdot R_i = I \sum_{i=1}^N R_i = I \cdot R_{\text{посл}}. \quad (8.24)$$

Следовательно, при последовательном соединении сопротивление участка цепи равно сумме сопротивлений последовательно соединенных резисторов:

$$R_{\text{посл}} = \sum_{i=1}^N R_i. \quad (8.25)$$

При параллельном соединении суммируются токи  $I_i$ , протекающие через резисторы, Поскольку напряжение на них одинаково и равно приложенному напряжению  $U$ , то

$$I = \sum_{i=1}^N I_i = \sum_{i=1}^N \frac{U}{R_i} = U \sum_{i=1}^N \frac{1}{R_i} = \frac{U}{R_{\text{пар}}}. \quad (8.26)$$

Поэтому при параллельном соединении величина, обратная сопротивлению участка цепи, равна сумме обратных величины сопротивлений параллельно соединенных резисторов:

$$\frac{1}{R_{\text{пар}}} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{R_i}. \quad (8.27)$$

Полезно запомнить, что ситуация с резисторами отличается от ситуации с емкостями (совпадает с точностью «до наоборот»).

Картинки, изображенные на рис. 8.11, являются забавной иллюстрацией протекания тока при последовательном (а) и параллельном (б) подключении двух резисторов. Здесь изображено течение воды в поле силы тяжести при последовательном и параллельном расположении маленьких водосбросов. Высота падения воды эквивалентна падению напряжения на резисторе, а поток воды — электрическому току.

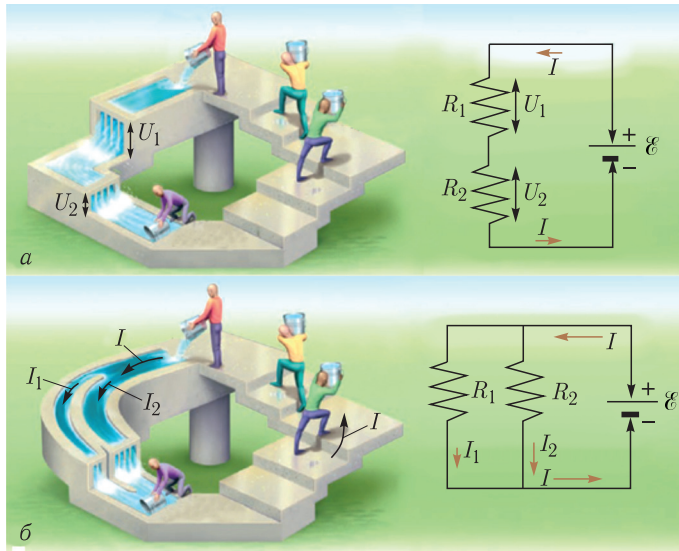


Рис. 8.11

Все нагревательные и осветительные приборы имеют омическое сопротивление  $R$ . Они характеризуются значениями номинального напряжения  $U_{\text{ном}}$  и номинальной мощности, которая, согласно (8.17), равна  $P_{\text{ном}} = U_{\text{ном}}^2 / R$ . Например, лампочка с мощностью  $P_{1\text{ном}} = 100$  Вт и  $U_{\text{ном}} = 220$  В имеет сопротивление  $R_1 = 484$  Ом, а лампочка с  $P_{2\text{ном}} = 25$  Вт и тем же самым номинальным напряжением имеет сопротивление  $R_2 = 4 \times 484$  Ом.

При их параллельном включении в сеть с напряжением  $U = U_{\text{ном}}$  на каждой из них будет выделяться номинальная мощность, поэтому общая мощность  $P_{\text{ном}} = P_{1\text{ном}} + P_{2\text{ном}} = 125$  Вт.

Если же их включить последовательно в ту же сеть, то напряжения на лампочках будут отличаться от номинального. Напряжение на маломощной лампе будет в 4 раза выше напряжения на более мощной:  $U_2 = 4U_1$ . Поскольку  $U_2 + U_1 = 220$  В, то  $U_1 = 44$  В, а  $U_2 = 4 \times 44$  В.

Из-за пятикратно уменьшения напряжения (по отношению к номинальному) мощность 100-ваттной лампы уменьшится в 25 раз ( $P_1 = U_1^2 / R_1 = 4$  Вт), и она будет едва светиться. Напряжение же на 25-ваттной лампе уменьшится только на 1/5 часть от номинального, поэтому ее мощность  $P_2 = U_2^2 / R_2 = 16$  Вт, и она будет светиться намного ярче 100-ваттной. Уменьшится и полная мощность, потребляемая лампами:  $P = P_1 + P_2 = 20$  Вт.

Термоэлектронагреватель (ТЭН), применяемый в электроплитах, водонагревательных приборах и т. д. содержит несколько проволочных резисторов, которые могут комбинированно включаться различным образом в цепь с помощью переключателя. Это позволяет изменять мощность ТЭНа в широких пределах.

**РС-цепи.** Рассмотрим электрическую цепь, содержащую последовательно включенные емкость  $C$  и резистор  $R$  (рис. 8.12). Такая цепь называется РС-цепью. Она обладает дифференцирующим и интегрирующим свойством.

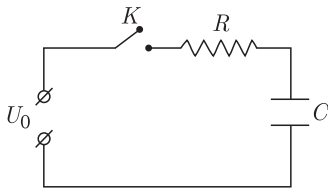


Рис. 8.12

Если в момент времени  $t = 0$  с помощью ключа  $K$  ее подключить к источнику постоянного напряжения  $U_0$ , то по цепи пойдет электрический ток  $I$ , и конденсатор начнет заряжаться (увеличиваться его заряд  $q$ ). Рост напряжения  $U_C = q/C$  на конденсаторе компенсируется уменьшением падения напряжения  $U_R = RI$  на резисторе, поскольку сумма напряжений на обоих элементах в любой момент должна быть равна напряжению

источника. Это означает, что в процессе зарядки ток будет ослабевать, и когда напряжение на емкости достигнет величины приложенного напряжения, ток прекратится, и зарядка окончится.

Рассчитаем этот процесс, для чего запишем вытекающее из только что проведенных рассуждений уравнение

$$U_0 = U_C(t) + U_R(t) = \frac{q(t)}{C} + R \cdot I(t). \quad (8.28)$$

Поскольку величина заряда и сила тока связаны соотношением

$$I = \frac{dq}{dt}, \quad (8.29)$$

то, подставляя его в (8.28), получим дифференциальное уравнение для заряда

$$\frac{dq}{dt} + \frac{q}{\tau} = \frac{U_0}{R}, \quad (8.30)$$

в котором  $\tau = RC$  — постоянная времени цепи, характеризующая время зарядки конденсатора.

Для решения уравнения (8.30) введем новую переменную  $\zeta = \frac{U_0}{R} - \frac{q}{\tau}$ . В силу того, что  $\frac{dq}{dt} = -\tau \frac{d\zeta}{dt}$ , получаем уравнение

$$-\tau \frac{d\zeta}{dt} = \zeta. \quad (8.31)$$

Разделим в нем переменные и проинтегрируем:

$$\int_{\zeta_0}^{\zeta} \frac{d\zeta}{\zeta} = - \int_0^t \frac{dt}{\tau}, \quad (8.32)$$



где  $\zeta_0 = \zeta(0) = U_0/R$ , так как  $q(0) = 0$ . В результате интегрирования получаем

$$\ln \frac{\zeta}{\zeta_0} = \ln \left[ 1 - \frac{q(t)R}{\tau U_0} \right] = -\frac{t}{\tau},$$

или

$$q(t) = CU_0 \left[ 1 - \exp \left( -\frac{t}{\tau} \right) \right]. \quad (8.33)$$

Ток в цепи

$$I(t) = \frac{dq}{dt} = \frac{U_0}{R} \exp \left( -\frac{t}{\tau} \right). \quad (8.34)$$

Зависимости заряда и тока от времени показаны на рис. 8.13. Заряд увеличивается и асимптотически приближается к максимальной величине  $q_0 = CU_0$ , когда напряжение на конденсаторе будет равно напряжению источника. На практике время зарядки конденсатора оценивается величиной  $(3-5)\tau$ . Через это время ток в цепи прекращается, *поэтому постоянный ток в цепи с конденсатором течь не может!*

За такое же время конденсатор разрядится, если отсоединить источник и перемкнуть свободные концы цепи. Заряд (и напряжение), как нетрудно убедиться, будет убывать по закону

$$q(t) = q_0 \exp \left( -\frac{t}{\tau} \right). \quad (8.35)$$

С помощью такой цепочки можно проинтегрировать в течение времени  $t \ll \tau$  зависящее от времени входное напряжение  $U_0(t)$ . За это время напряжение на емкости много меньше напряжения на резисторе. Тогда уравнение (8.30) может быть записано в приближенном виде,  $dq/dt = U_0/R$  и напряжение (хоть и малое) на емкости

$$U_C(t) = \frac{q(t)}{C} = \frac{1}{\tau} \int_0^t U_0(t) \cdot dt. \quad (8.36)$$

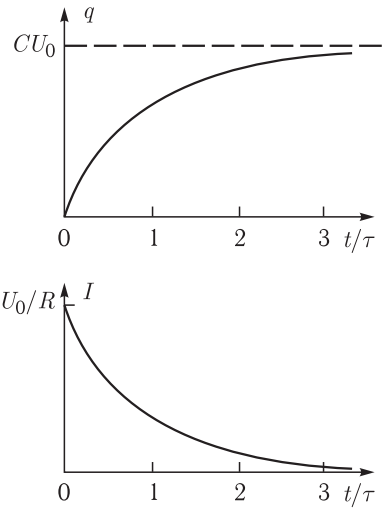


Рис. 8.13

В радиоэлектронике применяются интегрирующие RC-цепочки с большой постоянной времени, на вход которой подается переменное напряжения, а выходное напряжение снимается с емкости. Качество интегрирования будет тем выше, чем больше постоянная времени по сравнению с характерным временем изменения входного напряжения.

Если постоянная времени цепочки мала, то напряжение на резисторе будет много меньше напряжения на почти зарядившемся конденсаторе. Тогда уравнение (8.30) записывается в другом приближенном виде:  $q(t)/\tau = U_0(t)/R$ . Ток в цепи  $I(t) = dq/dt = (\tau/R)dU_0(t)/dt$ , а напряжение (хоть и малое) на резисторе

$$U_R(t) = \tau \frac{dU_0(t)}{dt}. \quad (8.37)$$

Поэтому цепочка с малой постоянной времени по сравнению с характерным временем изменения входного напряжения будет дифференцирующей, если выходное напряжение снимать с резистора. Такие цепочки также имеют широкое применение.

На рис. 8.14. изображены временные зависимости напряжения на емкости  $U_C(t)$  и резисторе  $U_R(t)$ , если на вход цепи подано напряжение  $U_0(t)$  прямоугольной формы переменной полярности с периодом  $T$ , называемое *меандр* (от греч. «*μαλινδρος*» — известный еще со времен неолита и распространенный тип прямоугольного орнамента). Видно, что при  $T \ll \tau$  напряжение на емкости повторяет первообразную функции  $U_0(t)$ , а при  $T \gg \tau$  напряжение на резисторе повторяет производную этой функции.

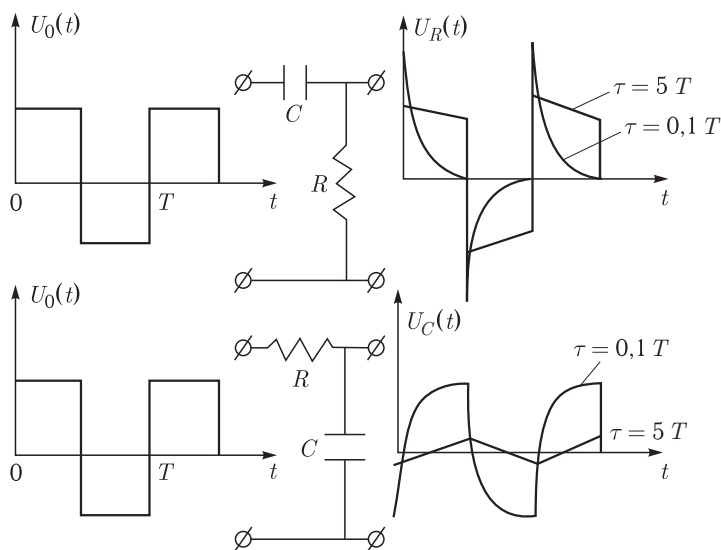


Рис. 8.14

**Замечание.** Рассмотренный пример показывает, что *при знакопеременном приложенном напряжении через емкость будет протекать знакопеременный ток*. Известно, что меандр с периодом  $T$  может быть представлен в виде суммы гармоник с частотами  $\omega_N = 2\pi N/T$ ,  $N = 1, 2, 3, \dots$ . Каждое переменное гармоническое напряжение с частотой  $\omega_N$  будет вызывать в цепи гармонический (переменный) ток той же частоты.

Как показывает верхний рисунок, при изменении периода  $T$  (а значит, и набора частот  $\omega_N$ ) существенно изменяется зависимость  $U_R(t) = R \cdot I(t)$ . Это означает, в свою очередь, что *амплитуды и фазы гармонических колебаний отдельных токов зависят от частоты*. Если бы такой зависимости не было, то  $U_R(t) = R \cdot I(t)$  было бы также меандром.

В полном объеме это будет изложено в разделе, посвященном переменному току.

## ЛЕКЦИЯ 9

**Баланс энергии в электрической цепи.** В замкнутой электрической цепи, изображенной на рис. 9.1, при протекании тока  $I$  за время  $dt$  протекает заряд  $dq = I \cdot dt$ . Источник с электродвижущей силой  $\mathcal{E}$  совершает работу  $\mathcal{E} \cdot dq$ , которая превращается в теплоту  $I^2 R \cdot dt$ , выделяемую на нагрузке  $R$ , и теплоту  $I^2 r \cdot dt$ , выделяемую на внутреннем сопротивлении  $r$  источника. Уравнение баланса энергии может быть записано в виде:

$$\mathcal{E} \cdot I \cdot dt = I^2 R \cdot dt + I^2 r \cdot dt. \quad (9.1)$$

После сокращения на величину  $dq = I \cdot dt$  уравнение (9.1), применительно к единице заряда, превращается в закон Ома для замкнутой цепи (см. (8.5)).

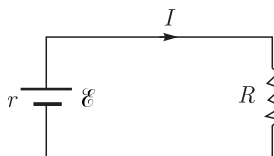


Рис. 9.1

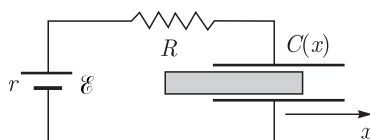


Рис. 9.2

Поскольку энергия, выделяемая на нагрузке, является полезной, то коэффициент полезного действия  $\eta$  электрической цепи

$$\eta = \frac{I^2 R \cdot dt}{I^2 R \cdot dt + I^2 r \cdot dt} = \frac{R}{R + r}. \quad (9.2)$$

Мощность, выделяемая на нагрузке, равна

$$P = I^2 R = \left( \frac{\mathcal{E}}{R + r} \right)^2 R$$

и при  $R = r$  становится максимальной:  $P_{\text{м}} = \mathcal{E}^2 / 4R$ .

Добавим в цепь конденсатор емкостью  $C$ , в который может втягиваться в диэлектрик с проницаемостью  $\epsilon$  (рис. 9.2). Если диэлектрик неподвижен, ток в цепи отсутствует. Как отмечалось ранее, на диэлектрик со стороны поля будет действовать втягивающая сила  $F$ . Величину этой силы можно рассчитать с помощью уравнения для баланса энергии.

Для этого виртуально (мысленно) сдвинем диэлектрик на расстояние  $\delta x$  ( $x$  — координата границы диэлектрика). Это приведет к изменению емкости на величину  $\delta C$  и появлению на конденсаторе дополнительного заряда  $\delta q = \delta I \cdot dt$  за счет протекшего за время  $dt$  виртуального тока  $\delta I$ .

Тогда уравнение для баланса энергии можно записать в виде:

$$\mathcal{E} \cdot \delta I \cdot dt = (\delta I)^2 R \cdot dt + (\delta I)^2 r \cdot dt + \delta W + \delta A, \quad (9.3)$$

где  $W = (1/2) CU^2 = (1/2) (q^2/C)$  — энергия поля в конденсаторе (см. формулу (7.6)), которая виртуально изменяется на величину  $\delta W$ , виртуальная работа сил поля равна  $\delta A = F \cdot \delta x$ . Для нахождения силы  $F$  необходимо знать зависимость емкости от положения диэлектрика —  $C(x)$ . Тогда  $\delta C = (dC/dx) \cdot \delta x$ .

Наиболее просто сила вычисляется, если цепь отключена от внешнего источника. Заряд конденсатора не изменяется, поэтому удобно для его энергии использовать запись  $W = (1/2) (q^2/C)$ . Тогда уравнение баланса (9.3) примет вид

$$0 = \delta A + \delta W = F \cdot \delta x + \delta \left[ \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} \right] = F \cdot \delta x - \frac{1}{2} \frac{q^2}{C^2} \left( \frac{dC}{dx} \right) \cdot \delta x, \quad (9.4)$$

а сила получается равной

$$F = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C^2} \left( \frac{dC}{dx} \right). \quad (9.5)$$

Если цепь подключена к источнику, то (9.3) запишем в виде

$$(\mathcal{E} - \delta I \cdot R - \delta I \cdot r) \cdot \delta I \cdot dt = \delta W + \delta A. \quad (9.6)$$

Напряжение на конденсаторе равно  $U = \mathcal{E} - \delta I \cdot R - \delta I \cdot r$ , поэтому, выбрав формулу  $W = (1/2) CU^2$ , получаем

$$U \cdot \delta I \cdot dt = \delta W + \delta A = \delta \left[ \frac{1}{2} CU^2 \right] + F \cdot \delta x. \quad (9.7)$$

Выполним преобразование:

$$\delta \left[ \frac{1}{2} CU^2 \right] = \frac{1}{2} U^2 \delta C + CU \delta U = U \delta(CU) - \frac{1}{2} U^2 \delta C.$$

Тогда

$$U \cdot \delta I \cdot dt = U \delta(CU) - \frac{1}{2} U^2 \delta C + F \cdot \delta x. \quad (9.8)$$

С учетом того, что  $\delta q = \delta I \cdot dt = \delta(CU)$ , из (9.8) находим

$$F = \frac{1}{2} U^2 \left( \frac{dC}{dx} \right). \quad (9.9)$$

Ввиду того, что  $q^2/C^2 = U^2$ , на первый взгляд может показаться, что формулы (9.5) и (9.9) полностью совпадают. Однако это неверно, поскольку зависимость силы от координаты в первой формуле определяется зависимостями от координаты величины емкости и ее производной, а во второй формуле — только производной. Величина напряжения на конденсаторе при реальном движении диэлектрика зависит от скорости его движения: чем выше эта скорость, тем больше сила тока и тем меньше напряжение. При бесконечно медленном (квазистатическом) движении величину  $U$  можно принять равной величине ЭДС.

**Разветвленные цепи.** Зачастую реальные электрические цепи представляют собой несколько связанных электрических контуров. Такие цепи называются разветвленными. На рис. 9.3 в качестве примера изображены три связанных контура. Цифрами отмечены концы участков контуров. Эти участки обладают сопротивлениями  $R_{ij}$  ( $i, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ ). Из-за наличия

узлов (точек разветвления, в рассматриваемом случае это точки 3, 4, 5) токи в участках цепи, примыкающих к узлам, будут разными. Поэтому в общем случае (во всех участках) токи удобно обозначить символом  $I_{ij}$ . Направление каждого тока неизвестно, поэтому его можно задать произвольно, нарисовав на схеме соответствующую стрелку. Наконец, в каждом участке может действовать электродвижущая сила  $\mathcal{E}_{ij}$ .

Чтобы рассчитать величину и направление тока в каждом участке разветвленных цепей, используют два закона Кирхгофа.

**Первый закон Кирхгофа** утверждает, что алгебраическая сумма токов в участках цепи, примыкающих к узлу, равна нулю:

$$\sum_i I_{ij} = 0. \quad (9.10)$$

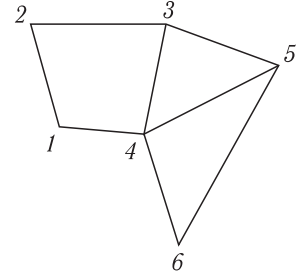


Рис. 9.3

Здесь важно, чтобы токам, притекающим и вытекающим из узла, были приписаны разные знаки.

Этот закон является следствием закона сохранения заряда и того факта, что для постоянных токов заряд в точке разветвления накапливаться не может. В противном случае потенциал узла изменялся бы во времени, и ток перестал бы быть постоянным (см. далее).

**Второй закон Кирхгофа.** Для участка разветвленной цепи уравнение (8.14) запишется в виде

$$I_{ij} R_{ij} = \varphi_i - \varphi_j + \mathcal{E}_{ij}. \quad (9.11)$$

При его записи существенное значение приобретает правило знаков. Для каждого контура вводят положительное направление его обхода (аналог системы координат в механике). ЭДС  $\mathcal{E}_{ij}$  пишется со знаком (+), если она создает ток в положительном направлении обхода, и знаком (−) в противоположном случае (аналог силы в механике). Падение напряжения  $I_{ij} R_{ij}$  выбирается со знаком (+), если ток (при сделанном ранее выборе направления тока) течет в положительном направлении обхода, и со знаком (−) в противном случае.

После этого просуммируем равенства (9.11) в пределах одного замкнутого контура. Поскольку сумма разностей потенциалов будет равна нулю, то

$$\sum_{ij} I_{ij} R_{ij} = \sum_{ij} (\varphi_i - \varphi_j) + \sum_{ij} \mathcal{E}_{ij} = \sum_{ij} \mathcal{E}_{ij}. \quad (9.12)$$

Таким образом, в любом замкнутом контуре алгебраическая сумма падений напряжения на его участках равна алгебраической сумме ЭДС, действующих в этом контуре. Это утверждение и определяет содержание второго закона Кирхгофа.

Решая совместно систему уравнений (9.12) и (9.10), можно определить все токи. Если в результате решения значение какого-либо тока получится положительным, то это означает, что выбранное направление тока соответствует

действительности. Отрицательный знак указывает, что ток течет в другом направлении.

**Пример 1.** Рассмотрим простейшую электрическую цепь, изображенную на рис. 9.4, и вычислим токи в участках цепи. Внутреннее сопротивление источника считаем пренебрежимо малым. В рассматриваемой разветвленной цепи независимы два контура. Выберем самый большой и самый маленький контуры. Примем за положительное направление обход по часовой стрелке, произвольно «нарисуем» токи и запишем

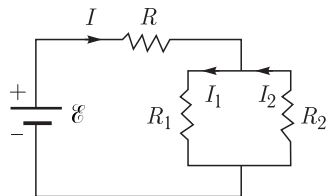


Рис. 9.4

$$\begin{aligned} I - I_1 + I_2 &= 0; \\ IR - I_2 R_2 &= \varepsilon; \\ -I_1 R_1 - I_2 R_2 &= 0. \end{aligned} \quad (9.13)$$

В результате получим

$$I = \frac{\varepsilon}{R + R_{\text{пар}}}, \quad I_2 = -\frac{\varepsilon R_{\text{пар}}}{R(R + R_{\text{пар}})}, \quad I_1 = \frac{\varepsilon R_{\text{пар}} R_2}{R R_1 (R + R_{\text{пар}})},$$

где  $R_{\text{пар}} = R_1 R_2 / (R_1 + R_2)$ .

Поскольку  $I_2 < 0$ , то направление тока было выбрано неверно, что было понятно до решения задачи. Нетрудно видеть, что если во втором уравнении перейти от  $I_2$  к  $I_1$  с помощью третьего уравнения, то получится уравнение для среднего (по величине) контура.

**Метод контурных токов.** Можно уменьшить число уравнений для токов, если оперировать контурными токами, суперпозиция которых будет равна реальным токам. Другими словами, для каждого замкнутого контура вводится одинаковый по всей его длине контурный ток, который будет совпадать с реальным током за исключением участков, принадлежащих сразу двум контурам.

На рис. 9.5 показаны 4 контура (помеченные римскими цифрами), примыкающие к точке разветвления 0, и нарисованы произвольно контурные токи  $i_1, \dots, i_4$ . Тогда реальные токи в пограничных участках равны

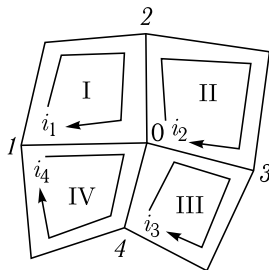


Рис. 9.5

$$\begin{aligned} I_{01} &= i_1 - i_4, & I_{02} &= i_2 - i_1, \\ I_{03} &= i_3 - i_2, & I_{04} &= i_4 - i_3. \end{aligned} \quad (9.14)$$

Поскольку  $I_{01} + I_{02} + I_{03} + I_{04} = 0$ , то первый закон Кирхгофа выполняется автоматически. Это и позволяет решать меньшее число уравнений, не используя первый закон Кирхгофа.

**Пример 2.** Рассмотрим схему, в которой в качестве нагрузки используется измерительный мост, названный по имени своего изобретателя Ч. Уитстона (рис. 9.6). Он состоит из четырех резисторов  $R_1, \dots, R_4$ , или плеч моста. К одной паре выводов (полюсов) моста подключается источник питания, а к другой — гальванометр  $G$  (нуль-детектор), имеющий сопротивление  $R_5$ .

Рассчитаем ток  $I_G$ , текущий через гальванометр, используя метод контурных токов. Выбрав произвольно их направления в трех независимых контурах, как показано на рисунке, можем записать систему уравнений

$$\begin{aligned} R_1 i_1 + R_5(i_1 - i_2) + R_3(i_1 - i_3) &= 0, \\ R_2 i_2 + R_4(i_2 - i_3) + R_5(i_2 - i_1) &= 0, \\ R i_3 + R_3(i_3 - i_1) + R_4(i_3 - i_2) &= \mathcal{E}. \end{aligned} \quad (9.15)$$

Решая систему линейных уравнений (9.15), находим

$$I_G = i_1 - i_2 = \mathcal{E} \frac{R_2 R_3 - R_1 R_4}{\Delta}, \quad (9.16)$$

где  $\Delta$  — определитель системы. Если подобрать сопротивления плеч моста так, чтобы  $R_2 R_3 = R_1 R_4$ , то ток через гальванометр течь не будет. В этом случае говорят, что мост уравновешен.

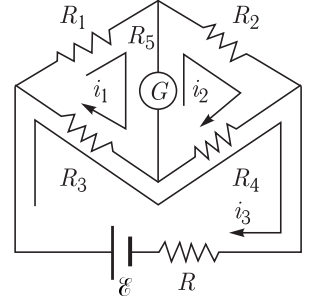


Рис. 9.6

Мост Уитстона применяется для измерения неизвестного сопротивления  $R_X$  резистора, который является одним из плеч моста. Изменяя сопротивление других плеч, уравновешивают мост и из условия равновесия  $R_2 R_3 = R_X R_4$  определяют величину неизвестного сопротивления. Измерительные мосты применяются только в тех случаях, когда требуется наивысшая точность измерения.

### Электрический ток в сплошной среде. Уравнение непрерывности.

В отличие от линейного проводника, в сплошной проводящей среде вектор плотности тока может изменяться от точки к точке как по величине, так и по направлению. На границе раздела двух сред с различной электропроводностью могут иметь место разрывы (скачки компонент этого вектора), накапливаться свободные заряды и т. д.

Чтобы описать закономерности протекания электрического тока в сплошной среде, получим уравнение непрерывности. Выделим мысленно произвольный объем  $V$  в проводящей среде с объемной плотностью заряда  $\rho$ , окруженный поверхностью с площадью  $S$ , и запишем закон сохранения заряда в виде:

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{d}{dt} \iiint_V \rho \cdot dV = \iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t} \cdot dV = - \iint_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S}. \quad (9.17)$$

Здесь учтено, что изменение в единицу времени заряда  $Q = \iiint_V \rho \cdot dV$  в выделенном объеме равно с противоположным знаком полному току, вытекающему через поверхность. Подобным образом записывалось в курсе «Механика» уравнение баланса массы.

Устремляя затем  $V \rightarrow 0$ , получаем *уравнение непрерывности*

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = - \operatorname{div} \mathbf{j}. \quad (9.18)$$

Плотность тока можно выразить через объемную плотность свободного заряда  $\rho$  и скорость заряда  $\mathbf{v}$ :  $\mathbf{j} = \rho \cdot \mathbf{v}$ . Тогда уравнение непрерывности примет вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (9.19)$$

в котором оно неотличимо от уравнения неразрывности для плотности массы, являющегося одним из фундаментальных уравнений гидродинамики.

В данном разделе курса мы рассматриваем только *стационарные токи*, когда плотность тока может зависеть от координат и не зависит от времени. Из закона Ома  $\mathbf{j} = \sigma \cdot \mathbf{E}$  следует, что и напряженность поля  $\mathbf{E}$  также не зависит от времени. Из уравнения  $\operatorname{div}(\varepsilon_0 \varepsilon \mathbf{E}) = \rho$  следует независимость от времени и объемной плотности заряда, т.е.  $\partial \rho / \partial t = 0$ .

Следовательно (9.18) превратится в уравнение

$$\operatorname{div} \mathbf{j} = 0, \quad (9.20)$$

которое называется *условием стационарности электрического тока*.

В однородном проводнике ( $\sigma = \text{const}$ ,  $\varepsilon = \text{const}$ ) условие стационарности можно привести к виду

$$\operatorname{div} \mathbf{j} = \operatorname{div}(\sigma \cdot \mathbf{E}) = \sigma \cdot \operatorname{div} \mathbf{E} = \sigma \frac{\rho}{\varepsilon_0 \varepsilon} = 0. \quad (9.21)$$

Отсюда следует, что  $\rho = 0$ . В однородном проводнике, по которому текут стационарные токи, объемные заряды отсутствуют, а имеются лишь поверхностные заряды. На это указывалось и ранее при обсуждении протекания тока в линейном проводнике.

Для удобства рассмотрения удобно ввести линии и трубки тока. *Под линией тока понимается воображаемая линия, касательная к которой совпадает с направлением вектора плотности тока*. По смыслу она определяется так же, как и силовая линия электрического поля или линия тока в гидродинамике.

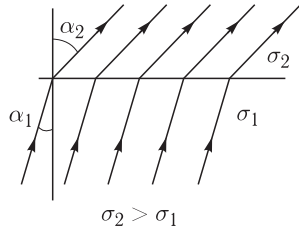


Рис. 9.7

*Линии тока образуют трубку тока*. Удобство ее использования состоит в том, что во всех сечениях трубки сила тока одна и та же.

**Преломление линий тока.** На границе раздела двух проводящих сред вектор  $\mathbf{j}$  может претерпевать разрыв, в результате чего возникает преломление линий тока, как это изображено на рис. 9.7. Установим закон преломления этих линий, если известны проводимости  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  обеих сред.

Из условия стационарности (9.20) следует, что нормальная компонента вектора  $\mathbf{j}$  непрерывна:

$$j_{1n} = j_{2n}. \quad (9.22)$$

Тангенциальные компоненты связаны равенством тангенциальных компонент потенциального электрического поля в проводнике:

$$\frac{j_{1\tau}}{\sigma_1} = \frac{j_{2\tau}}{\sigma_2}. \quad (9.23)$$

Найдем соотношение между углом «падения»  $\alpha_1$  и углом «преломления»  $\alpha_2$  линий. Граничное условие (9.22) примет вид  $j_1 \cos \alpha_1 = j_2 \cos \alpha_2$ , а граничное условие (9.23) запишем как  $j_1 \sin \alpha_1 / \sigma_1 = j_2 \sin \alpha_2 / \sigma_2$ . Деля второе равенство на первое, получаем закон преломления линий тока:

$$\sigma_2 \operatorname{tg} \alpha_1 = \sigma_1 \operatorname{tg} \alpha_2. \quad (9.24)$$



**Замечание.** Силовые линии поля вблизи поверхности провода с током всегда будут наклонены в сторону протекающего тока, Это следует из того, что поле в проводе  $\mathbf{E} = \mathbf{j}/\sigma$  направлено вдоль поверхности, а поле снаружи должно иметь точно такую же тангенциальную компоненту. Поэтому чем больше ток в проводе, тем сильнее наклон линий поля вблизи его поверхности.

**Пример 3.** Пусть пространство между пластинами плоского конденсатора заполнено двумя проводящими средами толщиной  $l_1$  и  $l_2$ , между которыми имеется плоская граница раздела, параллельная пластинам конденсатора. Если среды имеют различные значения проводимости  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ , то в первый момент после приложения к конденсатору внешнего напряжения  $U$  напряженность поля в проводниках будет одинаковой, а плотности токов разные:  $j_1 = \sigma_1 E$ ,  $j_2 = \sigma_2 E$  ( $\operatorname{div} \mathbf{j} \neq 0$ ). Это будут нестационарные токи. В результате в тонком пограничном слое начнет накапливаться заряд ( $\partial \rho / \partial t \neq 0$ ), который будет создавать свое собственное поле, накладывающееся на первоначальное однородное поле. Если, например, ток течет из первой среды во вторую и  $j_1 > j_2$  ( $\sigma_1 > \sigma_2$ ), то на границе раздела будет накапливаться положительный заряд. В результате поле в первом проводнике будет уменьшаться, а во втором — увеличиваться и стационарное течение наступит, когда  $j = \sigma_1 E_1 = \sigma_2 E_2$  ( $\operatorname{div} \mathbf{j} = 0$ ).

Проведем вычисление величины объемной плотности  $\rho_0$  свободного накопленного заряда с учетом различной диэлектрической проницаемости сред. Для этого запишем три уравнения:

$$\sigma_1 E_1 = \sigma_2 E_2, \quad E_1 l_1 + E_2 l_2 = U, \quad \varepsilon_0(\varepsilon_2 E_2 - \varepsilon_1 E_1) = \rho_0.$$

Последнее уравнение является граничным условием для вектора индукции при наличии свободных зарядов на границе раздела. Из этих уравнений получаем

$$\rho_0 = \varepsilon_0 \left( \frac{\varepsilon_2 \sigma_1 - \varepsilon_1 \sigma_2}{l_1 \sigma_2 + l_2 \sigma_1} \right) U.$$

Отсюда видно, что  $\rho_0 = 0$  при  $\varepsilon_2 \sigma_1 = \varepsilon_1 \sigma_2$ .

**Замечание.** Проведенные вычисления с помощью формул электростатики предполагают, что пластины являются эквипотенциальными поверхностями. Однако по пластине от точки ее контакта с внешним проводом будет растекаться в разных направлениях электрический ток. Растекающийся ток приведет к появлению падения напряжения на пластине (разности потенциалов между двумя точками пластины), и поверхность пластины не будет эквипотенциальной. Разность потенциалов будет небольшой при малом токе (низкой проводимости сред) и большой проводимости материала пластины  $\sigma_{\text{пласт}}$  (малого удельного сопротивления). Поэтому проведенные вычисления будут тем точнее, чем сильнее выполняется неравенство  $\sigma_{\text{пласт}} > \sigma_1, \sigma_2$ .

Сделанное замечание позволяет использовать электростатический подход к вычислению сопротивления заземления. В качестве примера рассмотрим ситуацию, когда два одинаковых проводника (заземлителя) произвольной формы погружены в землю, обладающую низкой проводимостью  $\sigma$ . Если между заземлителями поддерживать разность потенциалов  $\varphi_1 - \varphi_2$ , то по земле потечет электрический ток. Поскольку проводимость заземлителей намного

выше, чем проводимость земли, то линии тока будут мало отличаться от силовых линий электростатического поля, создаваемого разноименно заряженными проводниками с потенциалами  $\varphi_1$  и  $-\varphi_2$ .

Таким образом, ток от первого заземлителя растекается на большие пространства, а затем стекается ко второму заземлителю. Силу тока можно определить, интегрируя плотность тока по поверхности, например, первого проводника. Тогда, используя закон Ома и теорему Гаусса, можем записать

$$I = \int \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = \int \int \sigma \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon} \int \int \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \frac{\sigma q_1}{\varepsilon_0 \varepsilon}. \quad (9.25)$$

Согласно теореме Гаусса, заряды проводников равны по величине и противоположны по знаку:  $q_1 = -q_2$ , а из (7.13)

$$q_1 = C_{11}(\varphi_1 - \varphi_0) + C_{12}(\varphi_1 - \varphi_2), \quad q_2 = C_{22}(\varphi_2 - \varphi_0) + C_{12}(\varphi_2 - \varphi_1).$$

Для одинаковых проводников собственные емкости равны:  $C_{11} = C_{22} = C$ , а поскольку они удалены друг от друга, то можно положить  $C_{12} = C_{21} = 0$ . Поэтому

$$q_1 = \frac{1}{2}(q_1 - q_2) = \frac{1}{2}[C(\varphi_1 - \varphi_0) - C(\varphi_2 - \varphi_0)] = \frac{1}{2}C(\varphi_1 - \varphi_2),$$

а сопротивление заземления

$$R_{\text{земли}} = \frac{(\varphi_1 - \varphi_2)}{I} = \frac{2\varepsilon_0 \varepsilon}{\sigma C}. \quad (9.26)$$

Если в качестве заземлителей использовать проводящие шары радиуса  $R$ , то емкость шара  $C = 4\pi\varepsilon_0 \varepsilon R$  (лекция 7), поэтому сопротивление заземления

$$R_{\text{земли}} = \frac{1}{2\pi R \sigma}. \quad (9.27)$$

На первый взгляд может показаться странным, что сопротивление заземления не зависит от расстояния между заземлителями, а определяется лишь радиусом шара и проводимостью земли. Это происходит вследствие того, что при увеличении расстояния между заземлителями растет пропорционально и суммарная площадь трубок тока в плоскости, находящейся посередине между проводниками. Поэтому отношение характерной длины трубок тока к площади их суммарного поперечного сечения остается постоянным, а его сопротивление даже при низкой проводимости земли может составлять единицы Ом.

На практике для предотвращения поражения электрическим током применяют заземляющее устройство, состоящее из заземлителя (стального или медного стержня или более сложного элемента) и заземляющего проводника. Проводник подключается к корпусу заземляемого прибора. Роль второго электрода играют удаленные предметы с нулевым потенциалом.

Сопротивление заземления должно быть как можно меньше (единицы Ом), что достигается увеличением площади заземляющих электродов (или их количества) и глубиной их погружения, а также повышением концентрации солей в грунте вблизи заземлителя. Здесь сечение трубок тока не велико, и вклад этой области в сопротивление заземления значителен.

Если на заземляющем проводнике, соединенном с прибором, появится электрическое напряжение, то в земле возникнет радиальное электрическое поле, под действием которого будет растекаться электрический ток во всех направлениях, уносящий заряд с заземляемого прибора.

Во время аварии высоковольтной линии конец провода может упасть на землю, и появится радиальное электрическое поле. Линии равного потенциала этого поля на поверхности Земли будут концентрическими окружностями с центром в точке падения конца провода.

Может возникнуть опасное *шаговое напряжение*, равное разности потенциалов между двумя точками поверхности земли, находящимися на расстоянии одного шага человека. Оно зависит от тока и проводимости грунта. Шаговое напряжение по мере удаления от конца провода будет уменьшаться, поскольку уменьшается напряженность электрического поля.

Во избежание поражения током, из опасной зоны, где есть шаговое напряжение, следует уходить «гусиным» шагом или прыжками, держа ноги вместе.

**Электрический ток в жидкостях.** Как и твердые тела, жидкости могут быть диэлектриками и проводниками. Дистиллированная вода, например, — диэлектрик, а небольшое количество поваренной соли  $\text{NaCl}$  (тоже диэлектрик), добавленной в дистиллированную воду, делает ее проводником. Проводимость соленой воды связана с распадом молекулы соли на ионы  $\text{Na}^+$  и  $\text{Cl}^-$ .

Распад молекул вещества на ионы при растворении его в жидкости называется *электролитической диссоциацией*. Теория электролитической диссоциации была разработана в 1887 г. немецким ученым Р. Клаузиусом и шведским химиком С. Аррениусом.

При отсутствии внешнего электрического поля ионы находятся в тепловом хаотическом движении. При встрече ионов противоположного знака может образоваться нейтральная молекула — произойти *рекомбинация*. В состоянии динамического равновесия оба процесса уравнивают друг друга (число молекул, распадающихся за секунду на ионы, равно числу пар ионов, объединяющихся в нейтральные молекулы).

Раствор (или расплав), обладающий ионной проводимостью, называется *электролитом*. Электролиты — вещества, которые в растворе (или расплаве) состоят полностью или частично из ионов. Примерами электролитов могут служить растворы кислот, солей и оснований. Они относятся к проводникам второго рода, и для них справедливы закон Ома и закон Джоуля–Ленца.

Если в сосуд с электролитом опустить два электрода, подключенные к источнику ЭДС, то в сосуде возникнет электрическое поле, и пойдет ток. Электрод, подключенный к положительной клемме источника, называется *анод*, к отрицательной клемме — *катод*. Отрицательные ионы (анионы) начнут двигаться к аноду, а положительные (катионы) — к катоду.

На аноде отрицательно заряженные ионы отдают свои лишние электроны (окислительная реакция), а на катоде положительные ионы получают недостающие электроны (восстановительная реакция). Отдав или получив электроны, ионы превращаются в нейтральные атомы. Эти атомы (или образованные из них молекулы) выделяются на электродах.

Таким образом, при ионной проводимости прохождение тока связано с переносом веществ, входящих в состав электролита, которые выделяются на электродах. С подобной ситуацией мы сталкивались при обсуждении принципов действия химических источников тока.

На рис. 9.8 показано оседание ионов меди и хлора на электродах при прохождении тока в растворе хлористой меди.

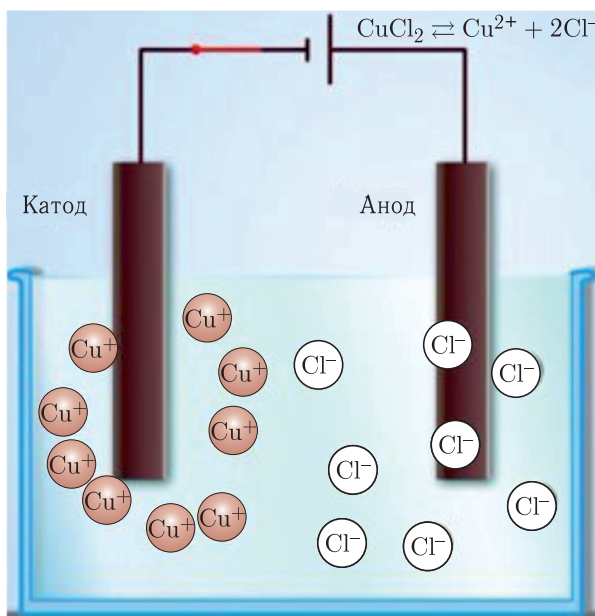


Рис. 9.8

**Электролиз.** Явление выделения на электродах веществ при прохождении электрического тока через электролит называют *электролизом* (от греч. «*lysis*» — разложение, растворение, распад). Электролиз впервые наблюдался в 1800 г. У. Никольсоном и А. Карлейлем, разложившими воду постоянным током. Через 7 лет Г. Дэви при помощи электролиза выделил и открыл натрий.

Электролиз описывается двумя основными законами, экспериментально установленными Фарадеем в 1832–1834 гг.

**Первый закон Фарадея** утверждает, что масса  $m$  выделившегося на одном из электродов вещества прямо пропорциональна прошедшему через электролит заряду  $q$ :

$$m = K \cdot q = K \cdot I \cdot t, \quad (9.28)$$

где  $K$  — электрохимический эквивалент вещества,  $I$  — сила тока в электролите,  $t$  — время протекания тока. *Электрохимический эквивалент* численно равен массе вещества  $m$ , выделившегося на электроде при прохождении через раствор электролита заряда  $q = 1$  Кл. Единицей электрохимического эквивалента является 1 кг/Кл.

В табл. 9.1 приведены значения  $K$  для некоторых веществ.

Таблица 9.1

Вещество (анионы)	$K, 10^{-6}$ кг/Кл	Вещество (катионы)	$K, 10^{-6}$ кг/Кл
Гидроксил ( $\text{OH}^-$ )	0,177	Алюминий ( $\text{Al}^{3+}$ )	0,0932
Кислород ( $\text{O}^{2-}$ )	0,0829	Водород ( $\text{H}^+$ )	0,1045
Кислотный остаток ( $\text{SO}_4^{2-}$ )	0,499	Железо ( $\text{Fe}^{3+}$ )	0,193
Сера ( $\text{S}^{2-}$ )	0,167	Золото ( $\text{Au}^{3+}$ )	0,681
Хлор ( $\text{Cl}^-$ )	0,367	Медь ( $\text{Cu}^{2+}$ )	0,329
		Натрий ( $\text{Na}^+$ )	0,238
		Никель ( $\text{Ni}^{2+}$ )	0,30
		Серебро ( $\text{Ag}^+$ )	1,11
		Ртуть ( $\text{Hg}^+$ )	2,079
		Цинк ( $\text{Zn}^{2+}$ )	0,339

**Второй закон Фарадея** дает связь между электрохимическим и химическим эквивалентом:

$$K = \frac{1}{F} \frac{\mu}{Z}. \quad (9.29)$$

Здесь  $F = |e| N_A = 9,65 \cdot 10^4$  Кл/моль — число Фарадея, равное произведению величины элементарного заряда на число Авогадро  $N_A$ ,  $\mu/Z$  — химический эквивалент, равный отношению молярной массы  $\mu$  к валентности вещества  $Z$ .

Во втором законе Фарадея заложено понятие элементарного заряда. Поэтому законы электролиза дали основания для выдвижения гипотезы о существовании элементарного электрического заряда и позволили определить его значение.

**Применение электролиза.** Явление электролиза широко применяется в современном промышленном производстве. С помощью электролиза из солей, оксидов и расплавленной руды получают многие металлы, например, медь, никель, алюминий, выделяемые на катоде. Электролитический способ дает возможность получать вещества с малым количеством примесей. Поэтому его применяют для получения многих химически чистых веществ.

Широко развит электролитический способ покрытия металлических изделий слоем благородного или другого металла (золота, платины), не поддающегося окислению. Такой способ называется *гальваностегия*. Например, при никелировании предмета он сам служит катодом, кусок никеля — анодом. Пропуская через электролитическую ванну в течение некоторого времени электрический ток, покрывают предмет слоем никеля нужной толщины.

До настоящего времени применяется *гальванопластика*, изобретенная русским ученым Б. Якоби в 1837 г. Она представляет способ получения металлических отпечатков рельефных предметов (медалей, монет и др.). С предмета снимают слепок из воска, покрывают его проводящим графитом и опускают в электролитическую ванну в качестве катода. Анодом служит кусок металла, осаждаемого на графитовой поверхности. Этим способом изготавливают, например, типографские клише. С помощью гальванопластики

получают копии изделий сложной формы, копии скульптур и других произведений искусства.

Явление электролиза лежит в основе принципа действия кислотных и щелочных аккумуляторов, где используется важное свойство процесса электролиза — его обратимость.

**Электрический ток в газах.** В естественном состоянии газы не проводят электрический ток. Показателен следующий опыт. Зарядим от электрофорной машины большой плоский конденсатор, состоящий из двух пластин, между которыми находится воздух. Подключим к обкладкам электромметр, который длительно время будет показывать наличие разности потенциалов между обкладками.

Если внести в пространство между обкладками пламя, то конденсатор быстро разрядится.

Следовательно, под действием пламени в воздухе появились свободные носители заряда. Они возникли за счет *ионизации* воздуха — отделения от нейтрального атома одного или нескольких электронов. В результате образуется электронный газ и положительные ионы. Часть образовавшихся электронов может быть при этом захвачена другими нейтральными атомами, и тогда появятся еще и отрицательные ионы.

Ионизация газа может происходить при бомбардировке нейтральных атомов электронами и ионами (как это происходит в разряде), при падении рентгеновских и гамма лучей, света (фотоионизация) и космических лучей (ионизация атмосферы Земли) и т.д. Частично или полностью ионизированный газ, в котором плотности положительных и отрицательных зарядов одинаковы, называется *плазмой*.

Факторы, вызывающие ионизацию газа, называются *ионизаторами*. Количественной характеристикой процесса ионизации служит интенсивность ионизации, измеряемая числом пар противоположных по знаку заряженных частиц, возникающих в единице объема газа за единицу времени. Ионизация атома требует затраты определенной энергии — энергии ионизации, зависящей от химической природы газа и энергетического состояния вырываемого электрона в атоме или молекуле. Значения энергии ионизации некоторых газов даны в табл. 9.2.

Таблица 9.2

Элемент	He	Ne	Ar	Hg	Na	K	Rb
Энергия ионизации, эВ	24,5	21,5	13,9	10,4	5,12	4,32	4,68

После прекращения действия ионизатора происходит рекомбинация, и газ возвращается в естественное состояние.

Механизм проводимости газов похож на механизм проводимости растворов и расплавов электролитов. При отсутствии внешнего поля заряженные частицы, как и нейтральные молекулы, движутся хаотически. Если ионы и свободные электроны оказываются во внешнем электрическом поле, то они приходят в направленное движение и создают электрический ток в газах.

Электрический ток в газе представляет собой суперпозицию направленного движения положительных ионов к катоду, а отрицательных ионов

и электронов к аноду. В потоке отрицательно заряженных частиц доминирующую роль играют электроны. На электродах происходит нейтрализация заряженных частиц, как и при прохождении электрического тока через электролит. Однако в газах отсутствует выделение веществ на электродах: ионы, подойдя к электродам, отдают им свои заряды, превращаются в нейтральные молекулы и диффундируют обратно в газ.

**Газовый разряд.** Протекание тока через ионизированный газ называется газовым разрядом. Если ионизация поддерживается внешним ионизатором, то разряд называется *несамостоятельным*: после выключения ионизатора разрядный ток прекращается. Несамостоятельный газовый разряд не сопровождается свечением газа.

Если собрать электрическую схему, изображенную на рис. 9.9, и между анодом  $A$  и катодом  $K$  газоразрядной трубки ГТ создать напряжение  $U$ , то в присутствии внешнего ионизатора (например, рентгеновского излучения) в цепи пойдет электрический ток  $I$  (от анода к катоду). Если измерить вольт-амперную характеристику  $I(U)$ , то она будет иметь вид, изображенный на рис. 9.10.

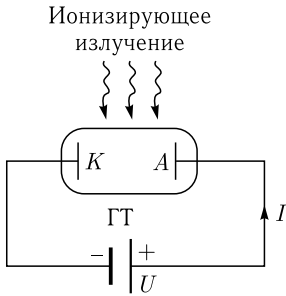


Рис. 9.9

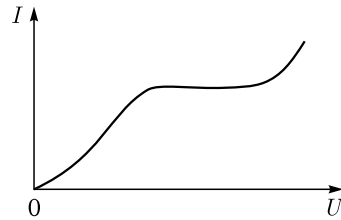


Рис. 9.10

Вначале с ростом напряжения ток будет увеличиваться, а затем достигнет насыщения. Это происходит вследствие того, что при фиксированной интенсивности ионизации все электроны и ионы достигают своих электродов. Если ионизатор убрать, то ток прекратится. Это означает, что этот участок вольт-амперной характеристики соответствует *несамостоятельному* разряду.

Однако если, достигнув насыщения тока, продолжать увеличивать напряжение  $U$ , сила тока опять начнет увеличиваться и может возрасти в сотни и тысячи раз. Это свидетельствует о появлении большого числа заряженных частиц. Если теперь убрать внешний ионизатор, то разряд не прекратится. Поэтому такой разряд называется *самостоятельным*. Причины его возникновения следующие.

При больших напряжениях электроны приобретают кинетическую энергию, превышающую энергию ионизации. Поэтому «включается» еще один механизм ионизации — ионизация электронным ударом. Появившиеся свободные электроны, в свою очередь, сами становятся ионизаторами, процесс носит лавинообразный характер (возникает электронная лавина).

Ионизация лишь электронным ударом не может поддерживать самостоятельный заряд, поскольку лавина электронов, достигая анода, «выбывает

из игры». Для поддержания самостоятельного разряда необходима еще эмиссия электронов с катода. Она возникает при ударе массивных положительных ионов о катод, выбивая электроны с его поверхности.

В газоразрядных приборах или устройствах для поддержания самостоятельного разряда при невысоких напряжениях катод нагревают до большой температуры. При такой температуре происходит испускание электронов, называемое *термоэлектронной эмиссией*. Во многих твердых веществах термоэлектронная эмиссия происходит при температурах, при которых испарение самого вещества еще мало. Такие вещества и используются для изготовления катодов.

К основным видам самостоятельных разрядов в газе относят искровой, коронный, дуговой и тлеющий разряды.

**Искровой разряд** имеет вид ярких зигзагообразных разветвляющихся нитей-каналов, которые пронизывают разрядный промежуток и исчезают, сменяясь новыми нитями. Исследования показали, что каналы искрового разряда начинают расти иногда от положительного электрода, иногда от отрицательного, а иногда от какой-нибудь точки между электродами. Это объясняется тем, что ионизация ударом в случае искрового разряда происходит не по всему объему газа, а по отдельным каналам, проходящим в тех местах, где концентрация ионов случайно оказалась наибольшей.

Искровой разряд сопровождается выделением большого количества теплоты, ярким свечением газа, треском или громом. Все эти явления вызываются электронными и ионными лавинами, которые возникают в искровых каналах и приводят к огромному увеличению давления, достигающему  $\sim 10^7 - 10^8$  Па и повышению температуры до  $10^4$  К.

Характерным примером искрового разряда является молния (рис. 9.11). Главный канал молнии имеет диаметр от 10 до 25 см, а длина молнии может достигать нескольких километров. Максимальная сила тока импульса молнии достигает десятков и сотен тысяч ампер.



Рис. 9.11



При малой длине разрядного промежутка искровой разряд вызывает специфическое разрушение анода, называемое эрозией. Это явление было использовано в электроискровом методе резки, сверления и других видах точной обработки металла.

С помощью искрового разряда с точностью до нескольких процентов можно измерить разности потенциалов порядка десятков тысяч вольт. Для этого на удаленные друг от друга шары подается разность потенциалов. Затем шары сдвигают до появления искры. Зная расстояние между шарами и электрическую прочность воздуха, с помощью простых формул электростатики вычисляют разность потенциалов.

В сильно неоднородных электрических полях, образующихся, например, между острием и плоскостью, между проводом высоковольтной линии электропередачи и поверхностью Земли, заряженным облаком и громоотводом и пр., возникает **коронный разряд (корона)**.

Коронный разряд возникает при нормальном давлении в газе. В нем ионизация газа и его свечение происходят лишь вблизи коронирующих электродов (рис. 9.12). Если корона возникает у катода (коронирование катода) то это означает, что электроны, вызывающие ударную ионизацию молекул газа, выбиваются из катода при бомбардировке его положительными ионами. Если коронирует анод, то рождение электронов происходит вследствие ионизации газа вблизи анода.

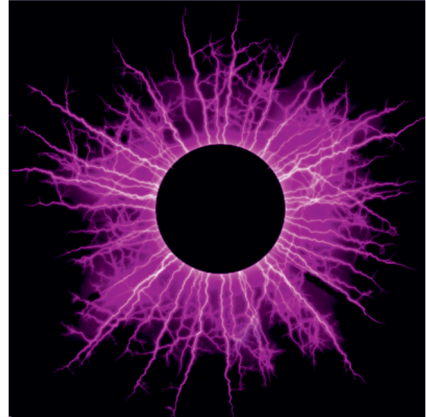


Рис. 9.12

При повышенном напряжении корона на острие приобретает вид исходящих из острия и перемежающихся во времени светлых линий (рис. 9.13). Эти линии, имеющие ряд изломов и изгибов, образуют подобие кисти, вследствие чего такой разряд называют кистевым.



Рис. 9.13

Заряженное грозовое облако индуцирует на поверхности Земли под собой электрические заряды противоположного знака, при этом особенно большой заряд скапливается на остриях. Поэтому перед грозой или во время грозы нередко на остриях и острых углах высоко поднятых предметов вспыхивают похожие на кисточки конусы света (рис. 9.14). С давних времен это свечение называют огнями святого Эльма. Его свидетелями часто становятся альпинисты.



Рис. 9.14

Корона сопровождается утечкой тока и потерей электрической энергии. Для ее уменьшения увеличивают радиус кривизны проводников, а их поверхность делают возможно более гладкой. Чем выше напряжение высоковольтной линии, тем толще должны быть ее провода.

**Тлеющий разряд** возникает, как правило, при пониженном давлении газа (порядка нескольких миллиметров ртутного столба и меньше). В этом случае увеличивается длина свободного пробега электрона, и за время между столкновениями он успевает приобрести достаточную для ионизации энергию



Рис. 9.15

в электрическом поле с относительно небольшой напряженностью. Испускание электронов холодным катодом происходит вследствие ударов положительных ионов и быстрых атомов о катод.

Если рассмотреть длинную трубку с тлеющим разрядом (рис. 9.15), то можно увидеть, что около катода располагается небольшая темная область — первое темное пространство, в котором свечение газа не происходит, так как энергия электронов еще недостаточна для возбуждения молекул газа. Далее идут области тлеющего свечения и второго (фарадеева) темного пространства. Эти три области образуют катодную часть разряда, за которой следует основная светящаяся часть разряда, определяющая его оптические свойства и называемая положительным столбом.

Тлеющий разряд используется в газосветных трубках, лампах дневного света, стабилизаторах напряжения, для получения электронных и ионных пучков. На рис. 9.16 показаны разрядные трубки, заполненные различными газами. Комбинации трубок, заполненных различными газами, применяются в рекламных целях (рис. 9.17).

Тлеющий разряд используется в газосветных трубках, лампах дневного света, стабилизаторах напряжения, для получения электронных и ионных пучков. На рис. 9.16 показаны разрядные трубки, заполненные различными газами. Комбинации трубок, заполненных различными газами, применяются в рекламных целях (рис. 9.17).

Если в катоде сделать щель, то сквозь нее в пространство за катодом проходят узкие ионные пучки, часто называемые каналовыми лучами. В современных технологиях широко используется явление катодного распыления.

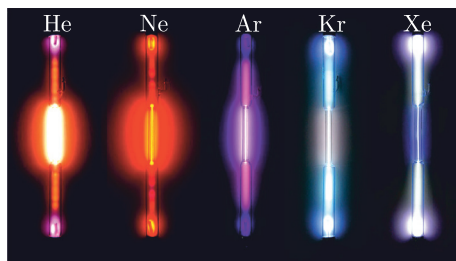


Рис. 9.16

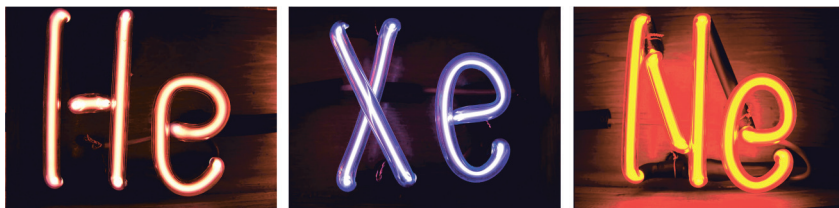


Рис. 9.17

Здесь катод изготавливают из того материала, который нужно нанести на поверхность тела. Под действием удара положительных ионов ультрамикроскопические осколки материала катода летят во все стороны и оседают на поверхности, образуя тончайшие слои нужной толщины. Так, в частности, изготавливают металлические зеркала, наносят тонкий слой металла на полупроводниковые элементы и др.

**Дуговой разряд** был открыт русским ученым В. Петровым в 1802 г. Он происходит при большой плотности тока и сравнительно небольшом напряжении между электродами (порядка нескольких десятков вольт). На рис. 9.18 показана фотография дугового разряда.

Если уменьшить сопротивление внешней цепи и увеличить силу тока дугового разряда, то вследствие ударной ионизации проводимость газового промежутка столь сильно возрастет, что напряжение между электродами уменьшается. Поэтому говорят, что дуговой разряд имеет падающую вольт-амперную характеристику.

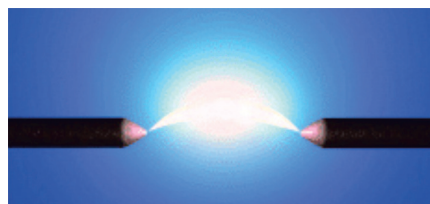


Рис. 9.18

При атмосферном давлении температура катода (вследствие его бомбардировки потоком положительных ионов) достигает  $3000\text{ }^{\circ}\text{C}$ . Электроны, бомбардируя анод, образуют в нем кратер и нагревают анод до температуры около  $7000\text{ }^{\circ}\text{C}$ . В разрядном канале температура несколько ниже, однако ее с лихвой достаточно для поддержания термоионизации.

В 1876 г. русский изобретатель П. Яблочков впервые использовал электрическую дугу как источник света (рис. 9.19). В «свече Яблочкова» угли были расположены параллельно и разделены изогнутой прослойкой, а их концы соединены проводящим «запальным мостиком». Когда ток включался, запальный мостик сгорал и между углями образовывалась электрическая дуга.



Рис. 9.19

По мере сгорания углей изолирующая прослойка испарялась.

Подлинной технической революцией следует признать использование дугового разряда Н. Бенардосом в 1882 г. для резки и сварки металла. Он создавал разряд между угольным электродом и двумя прижатыми друг к другу металлическими листами, которые сваривались при высокой температуре. Таким же образом Бенардос разрезал лист и делал в нем отверстия.

В 1888 г. Н. Славянов усовершенствовал этот метод сварки, заменив угольный электрод металлическим. В таком виде электросварка и дошла до наших дней.

Помимо сварки, дуговой разряд используется в многочисленных осветителях (прожекторах и проекционных аппаратах). Дуговые печи, питаемые током большой силы, служат для выплавки стали, чугуна, ферросплавов, бронзы, получения карбида кальция, окиси азота и т. д.

**Плазма.** Под плазмой понимают частично или полностью ионизованный газ, в котором плотности положительных и отрицательных зарядов практически одинаковы. Поэтому плазма электронейтральна. Она характеризуется степенью ионизации — отношением объемной концентрации заряженных частиц к общей объемной концентрации частиц.

Если степень ионизации невелика (порядка нескольких процентов), то плазма называется слабоионизованной, а если близка к 100 процентам — то сильноионизованной. Примером слабоионизованной плазмы в естественных условиях являются верхние слои атмосферы, называемые ионосферой. Солнце и горячие звезды — это полностью ионизованная плазма, которая образуется при высокой температуре.

Средние энергии различных типов частиц, составляющих плазму, могут значительно отличаться одна от другой. Поэтому плазму нельзя охарактеризовать одним значением температуры  $T$ . Для нее вводят электронную  $T_e$  и ионную  $T_i$  температуры.

Если  $T_i < 10^5$  К, то плазма считается низкотемпературной. Высокотемпературной называется плазма, если  $T_i > 10^6$  К.

Специфические свойства плазмы позволяют ее рассматривать как *четвертое состояние вещества*. Из-за большой подвижности частицы плазмы легко перемещаются под действием электрических и магнитных полей. Поэтому любое нарушение электрической нейтральности отдельных областей плазмы, вызванное скоплением частиц одного знака заряда, быстро ликвидируется. Возникающие электрические поля перемещают заряженные частицы до тех пор, пока электрическая нейтральность не восстановится, и электрическое поле не станет равным нулю.

В отличие от нейтрального газа, между молекулами которого существуют короткодействующие силы, между заряженными частицами плазмы действуют кулоновские силы, сравнительно медленно убывающие с расстоянием. Каждая частица взаимодействует сразу с большим количеством окружающих частиц.

Благодаря этому, наряду с хаотическим тепловым движением, частицы плазмы могут участвовать в разнообразных упорядоченных коллективных движениях. В плазме легко возбуждаются разного рода колебания и волны.

Проводимость плазмы увеличивается по мере роста степени ионизации. При высокой температуре полностью ионизованная плазма по своей проводимости приближается к сверхпроводникам.

Низкотемпературная плазма применяется в газоразрядных источниках света — в светящихся трубках рекламных надписей, в лампах дневного света. Газоразрядная трубка является основной деталью газовых лазеров. Экран плазменного телевизора состоит из тысяч крошечных газоразрядных ячеек, заполненных, как правило, смесью неона и ксенона и покрытых люминофорами. При разряде возникает ультрафиолетовое излучение, приводящее, в свою очередь, к свечению разноцветных люминофоров. Поскольку источники света в плазменных телевизорах располагаются рядом с поверхностью экрана, то изображение на экране практически не ухудшается при больших углах обзора.

**Плазмотрон.** В середине XX в. появились генераторы плазмы (плазмотроны). Плазмотрон — техническое устройство, в котором при протекании электрического тока через разрядный промежуток образуется плазма, используемая для обработки материалов или как источник света и тепла. На рис. 9.20 показан плазмотрон, создающий мощную струю низкотемпературной плазмы, температура в которой достигает десятков тысяч градусов. Поэтому плазменную струю можно использовать для резки и сварки металлов, бурения скважин в твердых породах и т. д.



Рис. 9.20

Высокотемпературная плазма применяется в магнитогидродинамических генераторах — энергетических установках, в которых энергия плазмы, движущейся в магнитном поле, преобразуется непосредственно в электрическую энергию (см. далее).

### **ЛЕКЦИЯ 10**

**Основные этапы развития учения о магнетизме.** Считается, что термины магнит, магнетизм, магнитные явления и т. п. происходят от названия горы Магнезия, находящейся в Турции. С незапамятных времен было известно, что природный материал *магнетит*, находящийся в горе, способен притягивать небольшие кусочки железа. Эти кусочки, после контакта с магнетитом, также приобретают способность притягивать другие кусочки железа, то есть намагничиваются.

Магнитные явления были известны еще в древнем мире. Более 2000 лет тому назад в древнем Китае был изобретен компас, намагниченная стрелка которого всегда указывала на север. В Европе компас появился гораздо позднее — лишь в XII в.

Компас позволил совершать дальние путешествия и во многом способствовал великим географическим открытиям, послужившим могучим толчком к развитию современной цивилизации. Однако природа магнетизма оставалась неразгаданной до начала XIX в.

Первое научное описание свойств магнитов и магнитных взаимодействий принадлежит придворному врачу английской королевы Елизаветы У. Гильберту, который в 1600 г. опубликовал книгу *«О магнитах и большом магните Земля»*. В этой книге были описаны электрические и магнитные явления, появились термины «северный и южный полюса».

На основании наблюдений и экспериментов он доказал, что намагниченные тела могут как притягиваться, так и отталкиваться. По аналогии с электрическими зарядами Гильберт считал, что разноименные полюса магнита притягиваются, одноименные — отталкиваются.

В дальнейшем были предприняты многочисленные попытки обнаружить магнитные заряды (вплоть до наших дней) и установить закон их взаимодействия, но все они оказались тщетными. В отличие от положительных и отрицательных электрических зарядов, которые достаточно легко разделить, магнитные полюса неразделимы. Если намагниченный стержень распилить на две части, то вместо «изолированных» полюсов получится два магнита, каждый из которых имеет два собственных полюса.

В первой половине XX в. английский физик П. Дирак предложил мысленный эксперимент — развести полюса на большое расстояние, используя очень длинный магнит с двумя полюсами. Каждый из полюсов может рассматриваться как гипотетическая изолированная частица, получившая название монополю Дирака. Однако поиски такой частицы, с использованием даже современных ускорителей, не дали результата.



Таким образом, *в природе отсутствуют магнитные заряды*. Их отсутствие не позволяет построить теорию магнитных взаимодействий, как это было сделано для электрических и гравитационных взаимодействий.

Однако неожиданно проблема разрешилась достаточно просто после открытия, сделанного в 1820 г. датским физиком Г. Эрстедом. Он обнаружил, что магнитная стрелка, находясь рядом с проводом, поворачивается, когда по проводу протекает электрический ток. Это открытие привело к неожиданному выводу о том, что магнитные явления тесно связаны с электрическими явлениями. Самое существенное в этом открытии было то, что магнит реагировал на движущийся электрический заряд! Возникло представление о магнитном поле, создаваемом движущимся зарядом.

Анализируя результаты опытов Эрстеда, знаменитый французский физик А. Ампер предположил, что магнетизм Земли вызван токами, обтекающими Землю в направлении с запада на восток. Обобщив этот вывод, он пришел к заключению: *магнитные свойства любого тела определяются замкнутыми электрическими токами внутри него*. Ампер также выдвинул гипотезу о том, что магнитное поле постоянных магнитов также создается электрическими микротоками, циркулирующими внутри молекул вещества.

В обычном состоянии эти токи ориентированы хаотически по отношению друг к другу и их действие взаимно компенсируется: тело не проявляет магнитных свойств. В намагниченном состоянии микротоки в теле ориентированы строго определенным образом и тело обнаруживает магнитные свойства.

В том же году Ампер наблюдал силовое взаимодействие двух проводников с токами. Он установил, что два параллельных проводника, по которым протекают электрические токи, будут притягиваться друг к другу, если токи текут в одном направлении, и отталкиваться в противном случае (рис. 10.1). В лекционном эксперименте электрический ток пропускается по двум параллельным проводящим лентам. При коммутации тока в одной из лент их притяжение сменяется отталкиванием (рис. 10.2).

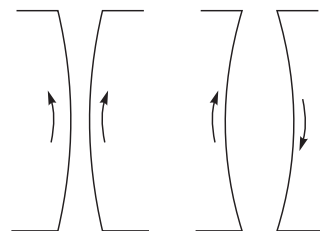


Рис. 10.1

Ампер показал, что свободно подвешенная катушка с током (и даже один ее виток) ведет себя так же, как магнитная стрелка. При пропускании электрического тока через катушку ее ось ориентируется в направлении «север-юг», а при изменении направления тока на противоположное катушка поворачивается вокруг вертикальной оси на  $180^\circ$ . Из этого можно сделать вывод, что у катушки имеются северный и южный полюса. Взаимодействие двух витков с током полностью аналогично взаимодействию двух магнитных стрелок.

В результате проведенных опытов с проводниками разной формы он установил *закон взаимодействия токов* (закон Ампера), о котором речь пойдет ниже.

По современным представлениям проводники с током оказывают силовое действие друг на друга не непосредственно, а через окружающие их магнитные поля. Источниками магнитного поля являются движущиеся электрические заряды или токи, вокруг которых и возникает магнитное поле.

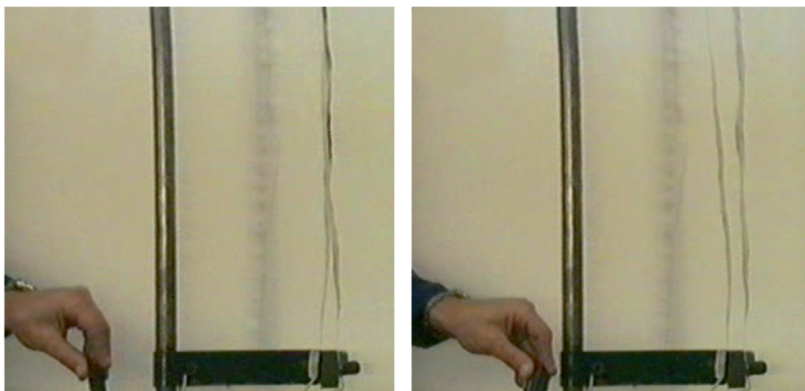


Рис. 10.2

Эта точка зрения, на первый взгляд, весьма уязвима. Ведь утверждение о том, что только движущийся заряд создает магнитное поле, справедливо только в той системе отсчета, относительно которой заряд движется!

Следовательно, и наличие магнитного поля также зависит от выбора системы отсчета! А если двигаться рядом с зарядом параллельным курсом со скоростью заряда, то магнитное поле исчезнет? Как же может существование поля, являющегося материальной субстанцией, зависеть от выбора системы отсчета?

Ответ на этот вопрос состоит в том, что в общем случае нельзя по отдельности рассматривать только электрическое или только магнитное поле, а необходимо оперировать с реально существующим *электромагнитным полем*. При движении заряженных частиц между ними действуют как электрические, так и магнитные силы, поэтому имеет смысл говорить о *единых электромагнитных взаимодействиях*. Разделение этого единого поля на «только электрическое» или на «только магнитное» возможно лишь в некоторых простейших ситуациях.

Если, например, в некоторой системе отсчета все заряды покоятся, то их взаимодействие можно описывать посредством только электростатического поля. Описание взаимодействий этих же зарядов в движущейся системе отсчета, наряду с электрическими, потребует привлечения еще и магнитных взаимодействий. Термин «электрическими» (а не электростатическими) в последней фразе использован не случайно: электрическое поле движущегося заряда будет отличаться от электростатического поля неподвижного заряда.

*Характеристики электромагнитного поля зависят от выбора системы отсчета!*

Пусть в одной системе отсчета  $K$  два точечных покоящихся заряда взаимодействуют посредством только электростатического поля с некоторой электростатической силой  $\mathbf{F}_Э$ , подчиняющейся закону Кулона. В другой инерциальной системе отсчета  $K'$  эти заряды будут двигаться равномерно и взаимодействовать с другой силой электрической силой  $\mathbf{F}'_Э$  и вновь появившейся магнитной силой  $\mathbf{F}'_М$ . В релятивистском случае  $\mathbf{F}_Э \neq \mathbf{F}'_Э + \mathbf{F}'_М$ .



При переходе из одной в другую систему отсчета изменится импульс заряженной частицы ( $\mathbf{P} \neq \mathbf{P}'$ ) и интервал собственного времени ( $dt \neq dt'$ ). Однако релятивистское уравнение движения частицы сохранит свой вид:  $d\mathbf{P}/dt = \mathbf{F}_Э$  и  $d\mathbf{P}'/dt' = \mathbf{F}'_Э + \mathbf{F}'_М$ . Попутно отметим, что заряд частицы в обеих системах одинаков. Об этом более подробно речь пойдет ниже.

Поэтому никаких трудностей с выбором инерциальной системы отсчета для описания движения и взаимодействия частиц нет.

Что касается измерения характеристик электромагнитного поля, то важно подчеркнуть следующее. Все измерительные приборы, связанные с некоторой системой отсчета, не каким-то абстрактным образом измеряют напрямую характеристики поля (фигурально выражаясь, «по запаху»), а детектируют наличие поля по силовому воздействию на неподвижные или движущиеся (относительно приборов) заряженные частицы. Часть силы, пропорциональную скорости заряда, «объявляют» магнитной силой, а часть, не зависящую от скорости — электрической.

Завершая вводную часть, еще раз подчеркнем, что обе силы находятся в неразрывном единстве, которое обеспечивается существованием электромагнитного поля.

В лекциях этого раздела будет далее рассмотрено только магнитное взаимодействие зарядов, постоянных токов и магнитов. Такой раздел магнетизма называется *магнитостатикой*.

**Законы Ампера и Био–Савара–Лапласа.** Опытным путем Ампером было доказано, что сила взаимодействия двух контуров пропорциональна силе тока в каждом контуре и убывает при удалении контуров друг от друга. Для вычисления этой силы в каждом контуре необходимо ввести элементы тока  $I_1 d\mathbf{l}_1$  и  $I_2 d\mathbf{l}_2$ , изображенные на рис. 10.3. Эти элементы являются векторными величинами: направление вектора  $d\mathbf{l}$  в каждом контуре совпадает с направлением электрического тока.

При произвольной относительной ориентации элементов тока, сила  $d\mathbf{F}_{12}$ , с которой первый элемент действует на второй, определяется двойным векторным произведением и равна

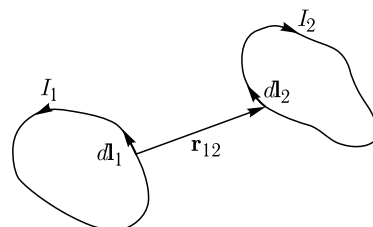


Рис. 10.3

$$d\mathbf{F}_{12} = k \frac{I_1 I_2 (d\mathbf{l}_2 \times (d\mathbf{l}_1 \times \mathbf{r}_{12}))}{r_{12}^3}, \quad (10.1)$$

где  $k$  — коэффициент пропорциональности, зависящий от выбора единицы силы тока. В системе СИ коэффициент  $k = \frac{\mu_0}{4\pi} = 10^{-7} \text{ Н/А}^2$ . Величина  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Н/А}^2$  называется магнитной постоянной. Как будет показано позднее, магнитная постоянная используется с другой (эквивалентной) размерностью:  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Гн/м}$  (1 Гн (генри) — единица индуктивности). Выражение (10.1) и отображает *закон Ампера*.

На рис. 10.4 сделаны соответствующие пояснения. Через элемент  $I_1 d\mathbf{l}_1$  (источник силы) и вектор  $\mathbf{r}_{12}$ , направленный от первого элемента ко второму

(объекту действующей силы), можно провести плоскость. Если ввести вектор

$$d\mathbf{B}_{12} = k \frac{I_1 (d\mathbf{l}_1 \times \mathbf{r}_{12})}{r_{12}^3}, \quad (10.2)$$

то он будет перпендикулярен этой плоскости. Согласно концепции, что проводники с током оказывают силовое действие друг на друга не непосредственно, а через окружающие их магнитные поля, векторную величину  $d\mathbf{B}_{12}$

можно считать характеристикой поля, создаваемого первым элементом тока в точке нахождения второго элемента. Эта величина называется *индукцией магнитного поля*. По величине она равна

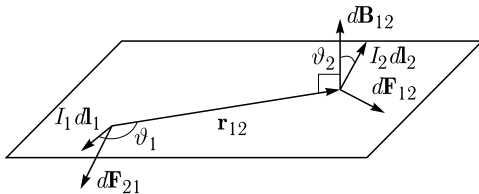


Рис. 10.4

$$dB_{12} = k \frac{I_1 dl_1}{r_{12}^2} \sin \vartheta_1. \quad (10.3)$$

Как и поле точечного заряда, индукция  $dB_{12}$  обратно пропорциональна квадрату расстояния, однако она еще зависит от угла  $\vartheta_1$  между векторами  $d\mathbf{l}_1$  и  $\mathbf{r}_{12}$ , а вектор  $d\mathbf{B}_{12}$  перпендикулярен этим векторам.

Для определения направления вектора  $d\mathbf{B}_{12}$  на практике часто используют mnemonic *правило буравчика*: если буравчик заворачивается в направлении  $I_1 d\mathbf{l}_1$ , то вектор  $d\mathbf{B}_{12}$  в каждой точке параллелен вектору бесконечно малого перемещения конца рукоятки буравчика (рис. 10.5).

Вектор  $d\mathbf{F}_{12}$  лежит в выделенной плоскости. Его величина зависит от  $\vartheta_2$ , а направление определяется по *правилу левой руки*, о котором речь пойдет ниже.

Опыт показывает, что для магнитного поля также справедлив принцип суперпозиции, что дает возможность вычислить индукцию поля создаваемого замкнутым контуром.

Формула (10.3) для индукции поля, создаваемого элементом тока, является математическим выражением *закона Био–Савара–Лапласа*, названного по имени французских ученых Ж. Био, Ф. Савара и С. Лапласа, установивших его экспериментально в 1820 г.

Законы Ампера и Био–Савара–Лапласа в магнитостатике играют такую же важную роль, что и закон Кулона в электростатике.

**Замечание 1.** Обратим внимание, что в вакууме электрическое поле характеризуется напряженностью, а магнитное поле — индукцией. Забегая вперед, скажем, что при наличии магнитных (намагничивающихся сред) используется и напряженность магнитного поля. Такая «асимметрия» в названиях сложилась исторически, и при первом изучении электромагнетизма вносит определенную путаницу.

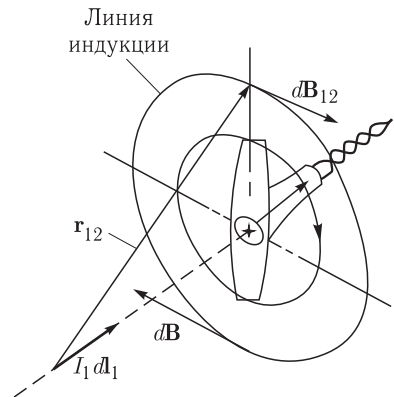


Рис. 10.5

**Замечание 2.** Если в (10.1) поменять местами индексы и вычислить силу  $d\mathbf{F}_{21}$ , действующую на первый элемент тока со стороны второго (показанную на рис. 10.4), то легко убедиться, что вектор  $d\mathbf{F}_{21}$  не лежит в выделенной плоскости. Следовательно, при взаимодействии элементов тока третий закон Ньютона не выполняется. Нарушение принципа равенства действия и противодействия для элементов тока отмечалось во многих фундаментальных работах по теории электромагнетизма. Это нарушение является своеобразной платой за использование в (10.1) несуществующих элементов проводников с постоянными токами. Как будет показано ниже, при взаимодействии замкнутых контуров с постоянными токами принцип действия и противодействия выполняется.

Лаплас также показал, что с помощью (10.3) можно вычислить индукцию поля  $\mathbf{b}_{12}$  движущегося заряда. Для элемента провода сечением  $S$  и длиной  $dl$  можно записать

$$I d\mathbf{l} = \mathbf{j} S dl = q \mathbf{v} n S dl, \quad (10.4)$$

поскольку вектор плотности тока  $\mathbf{j} = q \cdot n \cdot \mathbf{v}$  ( $\mathbf{v}$  — скорость движения заряда  $q$ ,  $n$  — концентрация зарядов). Подставляя (10.4) в (10.3) и деля на число движущихся зарядов в элементе провода, получаем

$$\mathbf{b}_{12} = \frac{d\mathbf{B}_{12}}{n S dl} = k q \frac{(\mathbf{v} \times \mathbf{r}_{12})}{r_{12}^3}. \quad (10.5)$$

Для графического отображения магнитного поля используют линии индукции. *Линией индукции магнитного поля называется линия, касательная к которой в каждой точке совпадает с направлением вектора индукции магнитного поля.*

Поскольку магнитная стрелка устанавливается вдоль линии индукции (это следует из опыта), то для визуализации магнитного поля поступают следующим образом. Вблизи проводника с током на горизонтальную поверхность насыпают металлические опилки, которые намагнитятся и уподобятся магнитным стрелкам. Если слегка встряхивать опилки, то они выстроятся вдоль линий, как это показано на рис. 10.6а.

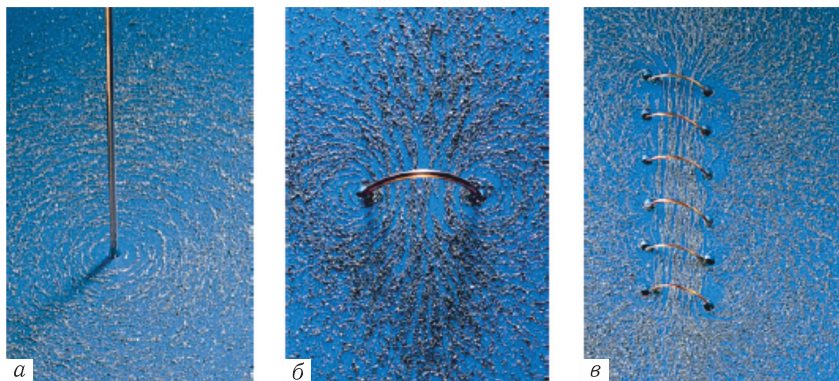


Рис. 10.6

Обращает на себя внимание тот факт, что во всех случаях линии индукции замкнуты и охватывают проводники! Поэтому магнитное поле называют *вихревым*. По своему строению (морфологии) магнитное поле принципиально отличается от электростатического поля.

Однородное магнитное поле получается лишь внутри длиной катушки с плотно намотанными витками. Такая катушка называется *соленоидом* и в этом смысле является аналогом плоского конденсатора, в котором создается однородное электрическое поле.

Пользуясь законом (10.3), рассчитаем индукцию поля в некоторых важных практических случаях.

**Пример 1.** Вычислим индукцию магнитного поля, создаваемого бесконечно длинным прямым проводом с током  $I$  в точке, находящейся на расстоянии  $r$  от провода (рис. 10.7). Для этого воспользуемся формулой (10.3) и принципом суперпозиции. Опуская индексы и учитывая одинаковое на-

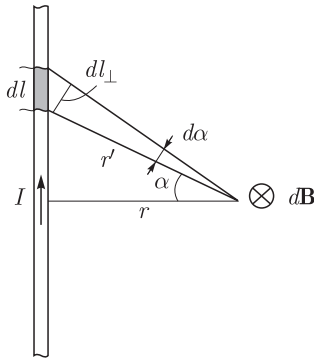


Рис. 10.7

правление всех векторов  $d\mathbf{B}$  (для удобства рассматриваемая точка находится в плоскости чертежа, а  $d\mathbf{B}$  перпендикулярен этой плоскости), для величины индукции  $B$  получаем:

$$B = \int dB = k \cdot I \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dl \sin \vartheta}{r'^2} = k \cdot I \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dl \cos \alpha}{r'^2}.$$

Учтем далее, что  $dl \cos \alpha = dl_{\perp} = r' \cdot d\alpha$ ,  $r' = r / \cos \alpha$ . Тогда

$$B = k \cdot \frac{I}{r} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \cos \alpha \cdot d\alpha = k \cdot \frac{2I}{r} = \mu_0 \frac{I}{2\pi r}. \quad (10.6)$$

Индукция поля убывает обратно пропорционально расстоянию до провода, а линии индукции составляют семейство окружностей, через центры которых проходит провод. Это соответствует распределению опилок, показанному на рис. 10.6 а.

**Пример 2.** Определим индукцию поля, создаваемого кольцом с радиусом  $R$  и током  $I$  в точке на оси кольца, удаленной от него на расстояние  $r$  (рис. 10.8). В силу осевой симметрии задачи каждый  $i$ -й элемент тока дает

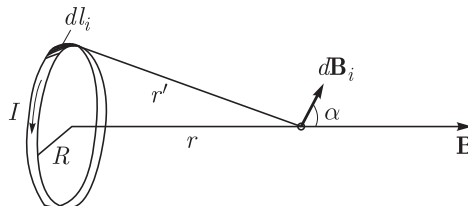


Рис. 10.8

вклад  $d\mathbf{B}_i$ , одинаковый по величине:

$$|d\mathbf{B}_i| = dB_i = k \frac{I dl_i}{r'^2} \sin(\pi/2) = \mu_0 \frac{I dl_i}{4\pi r'^2}.$$

При суммировании векторов  $d\mathbf{B}_i$  получится вектор  $\mathbf{B}$ , который будет направлен по оси симметрии системы и равен

$$B = \sum_{i=1}^N dB_i \cos \alpha = \mu_0 \frac{IR}{4\pi r'^3} \sum_{i=1}^N dl_i = \mu_0 \frac{I\pi R^2}{2\pi r'^3} = \mu_0 \frac{I\pi R^2}{2\pi(R^2 + r^2)^{3/2}}. \quad (10.7)$$

Введем *магнитный момент плоского контура* площадью  $S$  с током  $I$ , определив его как вектор

$$\mathbf{p}_m = I \cdot S \cdot \mathbf{n}, \quad (10.8)$$

где  $\mathbf{n}$  — единичный вектор, нормальный к плоскости контура. Его направление определяется правилом правого буравчика: *если вращать ручку буравчика в направлении тока, то направление вектора  $\mathbf{n}$  (и магнитного момента) будет совпадать с направлением поступательного движения буравчика.*

Тогда с использованием магнитного момента формулу (10.7) можно записать в векторном виде

$$\mathbf{B} = \mu_0 \frac{\mathbf{p}_m}{2\pi(R^2 + r^2)^{3/2}}. \quad (10.9)$$

Если  $R \ll r$ , то электрический ток называется *элементарным*. Тогда для такого тока

$$\mathbf{B} = \mu_0 \frac{\mathbf{p}_m}{2\pi r^3}. \quad (10.10)$$

Сравнивая это выражение с формулой (2.4), обнаруживаем внешнее сходство обеих формул: магнитный момент  $\mathbf{p}_m$  элементарного тока эквивалентен электрическому дипольному моменту  $\mathbf{p}$ . Поэтому используют также термин *магнитный диполь*.

Продолжая аналогию, формально можно записать  $\mathbf{p}_m = q_m \mathbf{l}$ , где  $+q_m$  и  $-q_m$  являются магнитными зарядами, вектор  $\mathbf{l}$  направлен от отрицательного заряда к положительному заряду. Однако отделить один заряд от другого невозможно!

Индукция поля магнитного диполя в произвольной точке, по аналогии с (2.6), равна

$$\mathbf{B} = \frac{3k(\mathbf{p}_m \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5} - \frac{k\mathbf{p}_m}{r^3}. \quad (10.11)$$

Эта формула хорошо описывает приведенную на рис. 10.6 б структуру ориентированных опилок вдали от кольца с током.

Магнитный момент — фундаментальная величина в теории магнетизма. В классической теории источником магнетизма являются замкнутые микроскопические токи. Магнитным моментом обладают элементарные частицы, атомные ядра, электронные оболочки атомов и молекул. Магнитный момент элементарных частиц (электронов, протонов, нейтронов и других), как показала квантовая механика, обусловлен существованием у них собственного механического момента — спина.

Он измеряется в  $\text{А} \cdot \text{м}^2$  или Дж/Тл (1 Тл (тесла) — единица индукции). Специфической единицей элементарного магнитного момента является магнетон Бора (см. далее).

**Пример 3.** Вычислим индукцию поля на оси катушки цилиндрической формы (соленоида) в произвольной точке  $O$  (рис. 10.9). Будем считать, что витки плотно намотаны друг к другу, радиус витка катушки равен  $R$ , число витков —  $N$ , длина катушки —  $l$ , а по катушке течет ток силой  $I$ . Направим координатную ось  $Ox$  вдоль оси катушки, а начало отсчета совместим с рассматриваемой точкой. В элементе катушки длиной  $dx$  будет протекать ток  $dI = I(N/l) dx$ , и создаваемая им индукция, согласно (10.7), равна 
$$dB = \mu_0 \frac{dI \pi R^2}{2\pi r'^3} = \mu_0 \frac{IN R^2}{2l r'^3} dx.$$
 Поэтому полная индукция

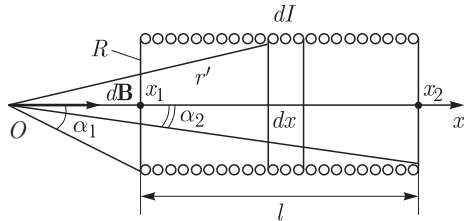


Рис. 10.9

$$B = \int dB = \mu_0 \int_{x_1}^{x_2} \frac{NI R^2}{2l r'^3} dx,$$

где  $r' = \sqrt{x^2 + R^2}$ , пределы интегрирования определяются координатами концов соленоида.

Для вычисления интеграла удобно воспользоваться угловой переменной  $\alpha$ , равной углу, под которым виден элемент катушки из точки  $O$ . Тогда

$$\sin \alpha = \frac{R}{r'}, \quad d\alpha = -dx \frac{\sin \alpha}{r'}, \quad \frac{dx}{r'^3} = -\frac{\sin \alpha \cdot d\alpha}{R^2},$$

поэтому

$$B = -\mu_0 \frac{NI}{2l} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \sin \alpha \cdot d\alpha = \mu_0 \frac{NI}{2l} (\cos \alpha_2 - \cos \alpha_1). \quad (10.12)$$

В середине соленоида  $B = \mu_0 (NI/l)$ , а к краям постепенно убывает. Если  $l \gg R$ , то  $\cos \alpha_2 - \cos \alpha_1 = 2$ , и внутри такой длинной катушки существует практически однородное поле, такое же, как и в ее середине. Индукция пропорциональна силе тока и числу витков на единицу длины.

Структура линий индукции поля, создаваемого катушкой, состоящей из нескольких витков, показана на рис. 10.6 в. Если бы витки были намотаны вплотную друг к другу, как это имеет место у соленоида, то поле внутри катушки было бы практически однородным.

**Магнитное напряжение.** Подобно электрическому напряжению (3.2), магнитным напряжением между двумя точками пространства называется величина

$$U_{M12} = \int_1^2 \mathbf{B}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}. \quad (10.13)$$

Магнитное напряжение зависит от формы пути и не может быть представлено в виде разности магнитных потенциалов! Оно не равно работе, совершаемой магнитным полем, поскольку магнитное поле не может совершать работы над зарядом!

Наиболее просто показать зависимость магнитного напряжения от формы пути в поле, создаваемом прямым проводом с током. Выберем для интегрирования плоский круглый контур радиуса  $r$ , concentричный и перпендикулярный проводу, как показано на рис. 10.10. Этот контур совпадает с линией индукции, поэтому  $\mathbf{B}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = B \cdot dl$ . Используя (10.6), запишем

$$U_{M12} = \int_1^2 \mu_0 \frac{I}{2\pi r} \cdot dl. \quad (10.14)$$

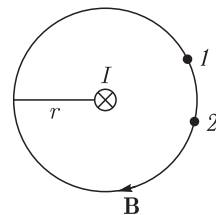


Рис. 10.10

Если при интегрировании «двигаться» по часовой стрелке (короткому пути), то магнитное напряжение будет меньше, чем при «движении» против часовой стрелки. Магнитное напряжение при обходе по замкнутому контуру совпадает с циркуляцией вектора индукции. В рассматриваемом случае

$$\oint \mathbf{B}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \oint B \cdot dl = \oint \mu_0 \frac{I}{2\pi r} dl = \mu_0 I. \quad (10.15)$$

Таким образом, магнитное поле не удовлетворяет условию (3.6) и не является потенциальным.

**Теорема о циркуляции.** С точки зрения удобства при решении задач, обладающих симметрией, некоторым аналогом теоремы Гаусса является теорема о циркуляции вектора индукции магнитного поля. Она утверждает, что циркуляция вектора индукции магнитного поля по любому замкнутому контуру равна произведению магнитной постоянной на алгебраическую сумму токов, пересекающих произвольную поверхность, опирающуюся на этот контур.

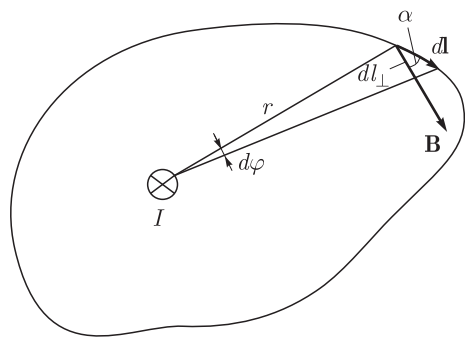


Рис. 10.11

не круглого контура (рис. 10.11). Теперь контур не совпадает с линией индукции, поэтому  $\mathbf{B}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = B \cdot dl \cdot \cos \alpha$ . Учитывая, что  $dl \cdot \cos \alpha = dl_{\perp} = r \cdot d\varphi$ , получаем

$$\oint \mathbf{B}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \oint B \cdot dl \cdot \cos \alpha = \oint B \cdot dl_{\perp} = \oint \mu_0 \frac{I}{2\pi r} r d\varphi = \mu_0 I. \quad (10.16)$$

Весьма важно условиться о выборе «системы координат» применительно к контурам. Для этого используется единичный нормальный вектор  $\mathbf{n}$  и задается положительное направление обхода, связанное правилом правого

буравчика: если вращать ручку буравчика в положительном направлении обхода контура, то направление вектора  $\mathbf{n}$  будет совпадать с направлением поступательного движения буравчика. Такая правовинтовая «система координат» будет использована в последующих лекциях.

Циркуляция вычисляется при обходе контура в положительном направлении и может быть любого знака. Если ток течет в направлении нормального вектора, то  $I > 0$ , и циркуляция положительна. При смене направления тока на противоположное она становится отрицательной.

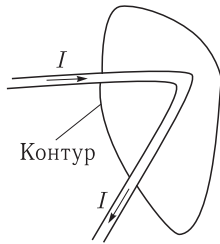


Рис. 10.12

Можно показать, что формула (10.15) остается справедливой для провода и контура любой формы, однако это выходит за рамки данной книги.

При наличии  $N$  проводников с текущими в них токами  $I_i$ , используя принцип суперпозиции для магнитных полей, можем записать

$$\oint \mathbf{B}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \oint \sum_{i=1}^N \mathbf{B}_i(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \mu_0 \sum_{i=1}^N I_i. \quad (10.17)$$

На рис. 10.12 изображен изогнутый провод с текущим в нем электрическим током, и контур, по которому необходимо вычислить циркуляцию. Какая бы поверхность ни опиралась на контур, сумма текущих через нее токов равна нулю. Поэтому и циркуляция также равна нулю.

Рассмотрим несколько примеров применения теоремы о циркуляции.

**Пример 4.** Теорема о циркуляции применительно к прямому проводу с током  $I$  и радиусом  $R$  позволяет при  $r > R$  записать  $\oint \mathbf{B}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = B \oint dl = B \cdot 2\pi r = \mu_0 I$ , откуда сразу получаем (10.6).

Внутри провода контур радиуса  $r < R$  охватывает ток  $I' = I \cdot r^2 / R^2$ , поэтому  $B \cdot 2\pi r = \mu_0 I' = \mu_0 I \times r^2 / R^2$ , или

$$B = \mu_0 \frac{I \cdot r}{2\pi R^2} = \mu_0 \frac{j \cdot r}{2}. \quad (10.18)$$

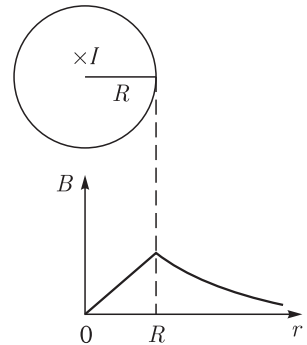


Рис. 10.13

Таким образом, индукция поля внутри провода зависит от плотности тока. Она линейно возрастает от оси к поверхности провода, а вне его убывает, как это изображено на рис. 10.13.

**Пример 5.** Рассчитаем индукцию поля внутри тороидальной катушки круглого поперечного сечения, состоящую из  $N$  витков, по которой течет ток силой  $I$  (рис. 10.14). Если радиус катушки равен  $R$ , то используя круглый контур, проходящий вдоль оси катушки, запишем  $B \cdot 2\pi R = \mu_0 I N$ . Отсюда

$$B = \mu_0 I \frac{N}{2\pi R}. \quad (10.19)$$

Если поперечные размеры витков катушки будут много меньше ее длины  $l = 2\pi R$ , то поле внутри такой тонкой катушки будет однородным



и приблизительно равным

$$B = \mu_0 \frac{N}{l} I.$$

Заметим, что поле полностью локализовано внутри тороидальной катушки. Индукция поля такая же, как и в длинном соленоиде.

Если размеры контура стягивать в точку, то выражение (10.15) по аналогии с (3.6) можно свести к дифференциальной форме, вводя ротор вектора индукции поля  $\text{rot } \mathbf{B}$  в соответствии с определением

$$(\text{rot } \mathbf{B})_n = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\oint \mathbf{B}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}}{\Delta S}. \quad (10.20)$$

Здесь  $\Delta S$  — площадь этого маленького контура,  $\mathbf{n}$  — нормаль к площадке, направленная туда же, куда и острие буравчика, ручка которого вращается в положительном направлении обхода контура. Ток через эту площадку  $\Delta I = \mathbf{j} \cdot \Delta \mathbf{S} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} \cdot \Delta S = j_n \cdot \Delta S$ . Поэтому  $(\text{rot } \mathbf{B})_n = \mu_0 j_n$ . Поскольку выбор нормали произволен, то

$$\text{rot } \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}. \quad (10.21)$$

Уравнения (10.16) и (10.21) — важнейшие уравнения магнитостатики в вакууме. Они являются интегральной и дифференциальной формами одного из уравнений Максвелла применительно к стационарным магнитным полям!

**Магнитное поле объемных токов.** Пусть в объеме  $V$  текут распределенные токи, характеризующиеся плотностью тока  $\mathbf{j}$ . Получим выражение для индукции поля, создаваемого этими токами. Для этого представим элемент тока в виде (см. (10.4))

$$I d\mathbf{l} = \mathbf{j} S d\mathbf{l} = \mathbf{j} \cdot dV, \quad (10.22)$$

где  $dV = S \cdot dl$  — элемент объема. Индукция поля в точке  $\mathbf{r}$ , создаваемого элементом (10.22), находящимся в точке  $\mathbf{r}'$ , согласно (10.2), будет определяться выражением

$$d\mathbf{B}(\mathbf{r}) = k \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV, \quad (10.23)$$

а полная индукция получается равной

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = k \int_V \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV. \quad (10.24)$$

В отличие от (2.15) для электрического поля, здесь стоит векторное произведение, поэтому  $\mathbf{B} \perp \mathbf{r}$ . По этой причине для индукции вводится *векторный потенциал*, или *вектор-потенциал*.

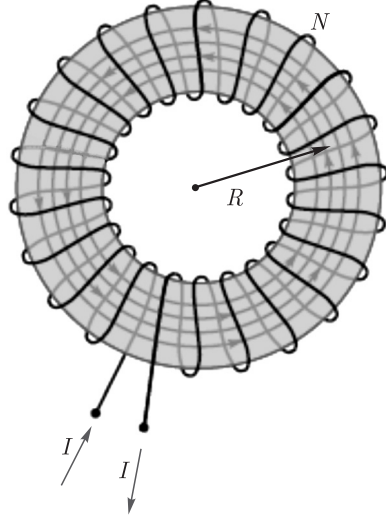


Рис. 10.14

**Вектор-потенциал магнитного поля** для объемных токов определяется следующим образом:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = k \int_V \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV. \quad (10.25)$$

Докажем, что

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \text{rot } \mathbf{A}(\mathbf{r}). \quad (10.26)$$

Рассмотрим поле элемента тока, который, не умаляя общности, поместим в начало координат ( $\mathbf{r}' = 0$ ) и запишем (10.23) и (10.25) в виде

$$B(\mathbf{r}) = k \frac{\mathbf{j} \times \mathbf{r}}{r^3} dV, \quad (10.27)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = k \frac{\mathbf{j}}{r} dV. \quad (10.28)$$

Тогда

$$\text{rot} \left( \frac{\mathbf{j}}{r} \right) = \begin{pmatrix} \mathbf{i}_x & \mathbf{i}_y & \mathbf{i}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{j_x}{r} & \frac{j_y}{r} & \frac{j_z}{r} \end{pmatrix} = \frac{1}{r} \text{rot } \mathbf{j} + \begin{pmatrix} \mathbf{i}_x & \mathbf{i}_y & \mathbf{i}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{r} \right) & \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{r} \right) & \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{r} \right) \\ j_x & j_y & j_z \end{pmatrix} = \nabla \left( \frac{1}{r} \right) \times \mathbf{j},$$

так как  $\text{rot } \mathbf{j} = 0$ . С другой стороны,  $\frac{\mathbf{j} \times \mathbf{r}}{r^3} = \nabla \left( \frac{1}{r} \right) \times \mathbf{j}$ , поэтому  $\text{rot} \left( \frac{\mathbf{j}}{r} \right) \equiv \frac{\mathbf{j} \times \mathbf{r}}{r^3}$ , и равенство (10.26) доказано.

**Замечание.** Равенство (10.26) носит универсальный характер и применимо к любым (не только постоянным) магнитным полям!

Сравнивая векторный и скалярный потенциалы, определяемые по формулам (10.25) и (3.14), видим, что любая компонента  $A_{x,y,z}$  определяется соответствующей компонентой плотности тока  $j_{x,y,z}$ , точно так же, как потенциал  $\varphi$  определяется объемной плотностью заряда  $\rho$ . Это означает, что для любой компоненты вектор-потенциала можно записать уравнение Пуассона, аналогично (3.20):

$$\Delta A_{x,y,z} = \frac{\partial^2 A_{x,y,z}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_{x,y,z}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_{x,y,z}}{\partial z^2} = -\mu_0 j_{x,y,z}. \quad (10.29)$$

В векторном виде вместо трех уравнений (10.29) можно записать одно уравнение

$$\Delta \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{j}. \quad (10.30)$$

Поэтому при расчете магнитного поля можно воспользоваться аналогией с электростатикой.

**Пример 5.** Вычислим потенциал и индукцию поля прямого провода с током  $I$  в точке, удаленной на расстояние  $r$ . По причинам, о которых пойдет речь ниже, будем считать, что длина провода конечна и равна  $2l$ .

Поместим начало декартовой системы координат в середине провода, ось  $Oz$  направим вдоль провода и вычислим векторные величины  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$  в плоскости  $xOy$  (рис. 10.15). Вектор-потенциал будет иметь только одну

компоненту:

$$A_z(r) = k \int_V \frac{j_z}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV = k \int_{-l}^l \frac{I \cdot dz}{\sqrt{r^2 + z^2}} = kI \ln \left[ \frac{\sqrt{r^2 + l^2} + l}{\sqrt{r^2 + l^2} - l} \right]. \quad (10.31)$$

Для длинного провода  $l \gg r$ , поэтому  $\sqrt{r^2 + l^2} + l \approx 2l$ ,  $\sqrt{r^2 + l^2} - l = l\sqrt{1 + (r/l)^2} - l \approx r/2$ .

Следовательно,

$$A_z(r) = kI \ln \left[ \frac{4l}{r} \right]. \quad (10.32)$$

Если  $l \rightarrow \infty$ , то и  $A_z \rightarrow \infty$ , что противоречит физическому смыслу. Причина этого в том, что не существует бесконечно длинных прямых проводов.

Учтем, что  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ . Тогда вектор индукции будет иметь две компоненты  $B_x$  и  $B_y$ , которые равны

$$\begin{aligned} B_x &= (\text{rot } \mathbf{A})_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} = -k \frac{2I}{r} \cdot \frac{y}{r} = k \frac{2I}{r} \sin \varphi, \\ B_y &= (\text{rot } \mathbf{A})_y = -\frac{\partial A_z}{\partial x} = k \frac{2I}{r} \cdot \frac{x}{r} = k \frac{2I}{r} \cos \varphi. \end{aligned} \quad (10.33)$$

Величина индукции из (10.33) получается равной

$$B = \sqrt{B_x^2 + B_y^2} = k \frac{2I}{r} \quad (10.34)$$

и совпадающей с (10.6).

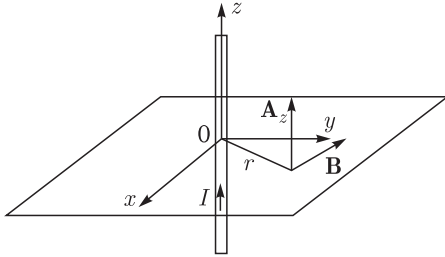


Рис. 10.15

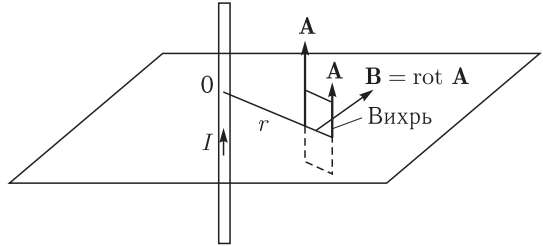


Рис. 10.16

**Замечание.** Смысл соотношения  $\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \text{rot } \mathbf{A}(\mathbf{r})$  понятен из рис. 10.16: индукция поля  $\mathbf{B}$  пропорциональна циркуляции вектора  $\mathbf{A}$  по бесконечно малому контуру, так как по определению ротора

$$(\text{rot } \mathbf{A})_n = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\oint \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}}{\Delta S}.$$

В гидродинамике циркуляция вектора скорости ассоциируется с вихрем, а направление ротора перпендикулярно плоскости вихря (совпадает с осью пропеллера при его самом быстром вращении). Пользуясь аналогией, можно сказать, что вектор  $\mathbf{B}$  перпендикулярен «вихрю» вектор-потенциала.

В рассмотренном примере такие «вихри» лежат в плоскостях, проходящих через прямой провод, а векторы индукции перпендикулярны этим плоскостям.

Циркуляция вектора индукции отлична от нуля. Это значит, что его линии замкнуты (подобны вихрям). Поэтому магнитное поле и называют вихревым полем.

Совершенно очевидно, что в таком случае поток вектора магнитной индукции через замкнутую поверхность должен быть равен нулю:

$$\Phi_B = \oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0. \quad (10.35)$$

В дифференциальной форме (по аналогии перехода от (2.19 к (2.27)) получаем

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0. \quad (10.36)$$

Доказательство справедливости (10.36), а следовательно, и (10.35) состоит в существовании математического тождества для любого векторного поля, в т.ч. и для поля вектор-потенциала  $\mathbf{A}$ :  $\operatorname{div}(\operatorname{rot} \mathbf{A}) \equiv 0$ . Поэтому  $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$ .

Уравнения (10.35) и (10.36) являются двумя формами еще одного уравнения Максвелла для вакуума, играющего фундаментальную роль в электродинамике. Забегая вперед, подчеркнем, что эти уравнения сохраняют свой вид и при наличии среды.

**Опыты Роуланда, Рентгена и Эйхенвальда.** Утверждение о том, что магнитное поле создается движущимися зарядами, получило экспериментальное подтверждение в нескольких опытах. Смысл этих опытов состоит в проверке равенства (10.4):  $I d\mathbf{l} = \mathbf{j} S d\mathbf{l} = q \mathbf{v} n S d\mathbf{l} = dQ \cdot \mathbf{v}$ , которое означает, что *конвекционный ток* свободных зарядов при движении заряженного проводника зарядом  $dQ$  со скоростью  $\mathbf{v}$  по своему магнитному действию тождествен с элементом  $I d\mathbf{l}$  *тока проводимости* в покоем проводнике.

В 1876 г. американский физик Г. Роуланд проделал опыт, взяв два позолоченных стеклянных диска, между которыми вращался оклеенный золотой фольгой эбонитовый диск. Обкладки на диске заряжались зарядом одного знака, а обкладки на стекле заземлялись. Магнитная стрелка подвешивалась над дисками, и при вращении эбонитового диска наблюдалось ее отклонение.

В 1888 г. выдающийся немецкий физик В. Рентген (первый лауреат Нобелевской премии 1901 г. по физике «в знак признания необычайно важных заслуг перед наукой, выразившихся в открытии замечательных лучей, названных впоследствии в его честь») провел опыт, в котором диэлектрик помещался между обкладками заряженного конденсатора и приводился во вращение. Отклонение магнитной стрелки показывало, что и в этом случае возникает магнитное поле. Однако он не смог получить необходимой точности и получить количественные результаты.

Количественные результаты были получены русским физиком А. Эйхенвальдом в 1903 г. Он доказал точными количественными измерениями, что конвекционный ток свободных зарядов при движении проводника и ток связанных зарядов при движении поляризованного диэлектрика приводят к появлению магнитного поля точно так же, как ток проводимости в покоем проводнике.

Для этого в качестве вращающих обкладок он использовал разрезные плоские кольца  $K$  (рис. 10.17). Вначале обкладки (кольца) заряжались

зарядом  $Q$  от внешнего источника, и затем одно или оба кольца приводились в быстрое вращение. Фиксировался поворот подвешенной стрелки МС, указывающей на наличие магнитного поля. После этого кольца останавливались, и к концам разрезанного кольца подключался источник тока. Сила тока  $I$  подбиралась такой, чтобы обеспечить прежний поворот стрелки.

Затем опыт повторялся при внесенном неподвижном диэлектрике  $D$  с известной диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon$ . Поскольку заряд на конденсаторе  $Q_1 = \varepsilon Q$  увеличивался в  $\varepsilon$  раз, то во столько же раз необходимо было увеличить силу тока в кольце:  $I_1 = \varepsilon I$ .

Если, наконец, обкладки вращались вместе с диэлектриком как единое целое, то отклонение стрелки было таким, как и в отсутствие диэлектрика. В этом случае в конвективном движении участвуют свободные заряды пластин и связанные заряды диэлектрика. Их алгебраическая сумма со стороны каждой пластины такая же, как и отсутствие диэлектрика:  $Q_2 = \varepsilon Q - (\varepsilon - 1)Q = Q$ . Во всех ситуациях была подтверждена справедливость соотношения  $I d\mathbf{l} = dQ \cdot \mathbf{v}$ .

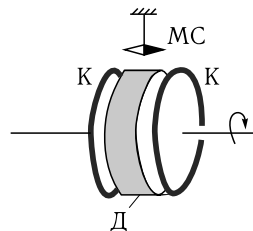


Рис. 10.17

## ЛЕКЦИЯ 11

**Магнитное поле Земли (геомагнитное поле).** Предположение о существовании магнитного поля Земли впервые высказал уже упоминавшийся в предыдущей лекции английский врач Гильберт. Анализируя взаимодействие шара из магнитной руды и магнитной стрелки, он пришел к выводу, что Земля является большим магнитом.

На рис. 11.1 показана структура линий индукции магнитного поля Земли. Точки Земли, в которых индукция магнитного поля перпендикулярна поверхности Земли, называют магнитными полюсами: северным и южным. Область пространства, простирающаяся от земной поверхности на 70–80 тысяч километров, называется *магнитосфера*.

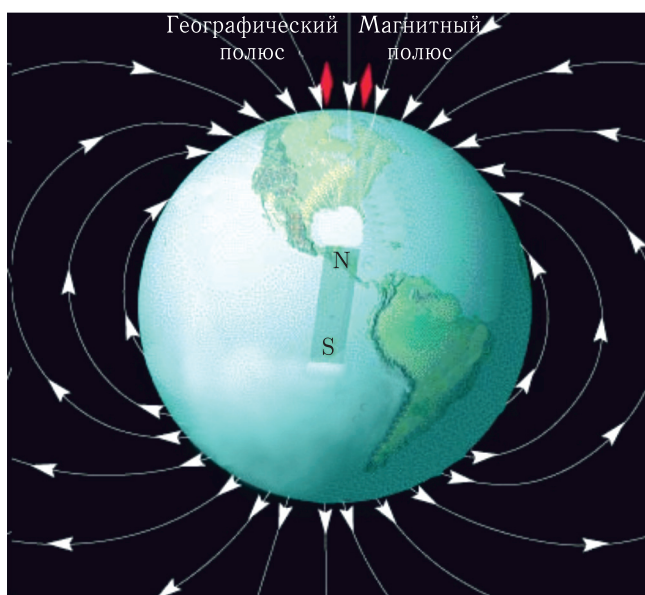


Рис. 11.1

Исторически сложилось так, что северным полюсом магнитной стрелки называется тот, который указывает на географический Северный полюс Земли. А поскольку северный полюс стрелки (по определению) притягивается к южному полюсу магнита, то южный магнитный полюс находится в Северном полушарии рядом с одноименным географическим полюсом. Северный магнитный полюс расположен вблизи Южного географического полюса.

Южный магнитный полюс был открыт в 1831 г. в Канадском архипелаге английским полярным исследователем Джоном Россом, северный магнитный

полюс — в 1841 г. в Антарктиде — Джеймсом Россом (племянником Джона Росса).

При удалении от поверхности Земли на расстояние нескольких земных радиусов Земля может рассматриваться как точечный магнитный диполь, а поле описывается формулой (10.10).

По последним измерениям дипольный момент Земли  $P_3 = 7,182 \cdot 10^{22} \text{ А} \cdot \text{м}^2$  и уменьшается за последние десятилетия в среднем на 1/40 % в год. Средняя индукция у земной поверхности  $B = 5 \cdot 10^{-5} \text{ Тл}$ . В геофизике используется величина средней напряженности поля  $H = 40 \text{ А/м} = 0,5 \text{ Э}$  (эрстед). К полюсам эта величина возрастает до величины 0,66 Э, а у магнитного экватора уменьшается до величины 0,34 Э. Вблизи магнитных аномалий напряженность может увеличиваться в несколько раз.

Наблюдения показывают, что геомагнитное поле медленно изменяется. Индукция постепенно убывает: за последние 22 года она уменьшилась в среднем на 1,7 %, а в некоторых регионах — например, в южной части Атлантического океана — на 10 %. В некоторых местах индукция магнитного поля, вопреки общей тенденции, даже возросла.

В течение последних 100 лет северный магнитный полюс в Южном полушарии сместился на 900 км и вышел в Индийский океан. Дрейфует также и южный магнитный полюс. По последним данным он движется через Ледовитый океан по направлению к Восточно-Сибирской мировой магнитной аномалии со скоростью 10 км/год в 1970-х гг. и 60 км/год в 2004 г.

Ускоренное перемещение полюсов связывают с очередной инверсией геомагнитного поля. Исследования остаточной намагниченности застывших изверженных горных пород свидетельствуют о неоднократных инверсиях магнитного поля Земли, зафиксированных в полосовых магнитных аномалиях океанической коры (огромных природных полосовых доменах), параллельных осям срединных океанических хребтов.

Так как возраст океанической коры превышает 180 млн. лет, то можно проследить динамику изменения геомагнитного поля за такой огромный промежуток времени.

За последние 160 млн. лет северный и южный магнитные полюсы «менялись местами» 100 раз, причем последняя инверсия поля Земли произошла около 720 тыс. лет тому назад.

Поскольку во время инверсии магнитное поле практически отсутствует, на Землю обрушится ливень заряженных частиц, основная доля которых приходится на поток, испускаемый Солнцем (солнечный ветер). Каким образом это влияет на биосферу Земли (и влияет ли вообще) в настоящее время неизвестно.

**Природа геомагнитного поля.** Еще в 1839 г. выдающийся немецкий математик К. Гаусс выдвинул теорию о происхождении магнитного поля Земли, согласно которой основная часть поля «выходит из Земли» и только его небольшая часть формируется внешней средой.

В настоящее время наиболее распространена гипотеза, по которой геомагнитное поле в основном создается электрическими токами, протекающими в жидком металлическом ядре Земли. Такая модель генерации поля получила название «гидромагнитное динамо», или МГД-динамо. Гидромагнитное

динамо (динамо-эффект) заключается в самовозбуждении магнитного поля вследствие движения проводящей жидкости или газовой плазмы.

Теория динамо была предложена английским физиком Дж. Лармором в 1919 г. Эта теория получила развитие в работах американского геофизика В. Эльзассера, который в 1939 г. предложил идею генерации геомагнитного поля термоэлектрическими токами в Земле.

Позже, в 1947 г. Эльзассером и независимо от него советским физиком Я. Френкелем было сделано предположение, что магнитное поле возбуждается медленными движениями проводящего жидкого ядра (расплава), находящегося в первоначально слабом внешнем магнитном поле. Под действием силы Лоренца и кориолисовых сил эти движения устанавливаются таким образом, что создаваемое движущейся средой (по существу, электрическим током) магнитное поле может усиливать исходное (затравочное) магнитное поле. Процесс происходит так, как и в динамо-машине. После этого потребность во внешнем поле отпадает.

Идея магнитного динамо получила развитие в работах Е. Булларда (1949 г.) и других исследователей, и в настоящее время является доминирующей теорией.

Буллард предположил, что в жидком ядре присутствуют параллельные экватору  $\mathcal{E}$  течения с запада на восток, обусловленные вращением Земли, и конвективные течения электропроводящей массы от центра горячего ядра к его поверхности и затем, после остывания, обратно к центру.

В присутствии начального магнитного поля  $\mathbf{B}_0$  под действием силы Ампера жидкая проводящая среда начинает вначале движение вдоль радиуса к поверхности Земли, которое затем, вследствие конечных размеров Земли, переходит во вращательное движение в меридиональной плоскости. В результате расплав начинает двигаться по поверхности тороида. В Северном и Южном полушариях образуются гигантские тороидальные катушки с током, вдоль оси которых появляется тороидальное магнитное поле  $\mathbf{B}_T$  (рис. 11.2). В Северном полушарии это поле ориентировано в направлении вращения Земли, а в Южном полушарии — в противоположном направлении.

Появление тороидального поля можно объяснить и по-другому. Если бы все слои жидкого ядра Земли вращались с одинаковой угловой скоростью, линии магнитного поля были бы направлены строго по меридианам от одного географического полюса к другому (такое поле называется полоидальным полем).

Поскольку на разных глубинах в ядре угловые скорости будут различны (чем глубже, тем больше угловая скорость), то линия внешнего поля  $\mathbf{B}_0$ , проходящая внутри Земли через разные слои, будет искривляться: в Северном полушарии к востоку, а в Южном полушарии — к западу. Линии оказываются как бы «вморожены» в каждый вращающийся слой. В результате появится составляющая поля вдоль параллелей.

Энергия тороидального поля заимствуется у вращающихся слоев ядра, поэтому относительное вращение слоев должно тормозиться.

Появление тороидального поля, в свою очередь, приводит к усилению полоидального поля. Это происходит вследствие тепловой конвекции:



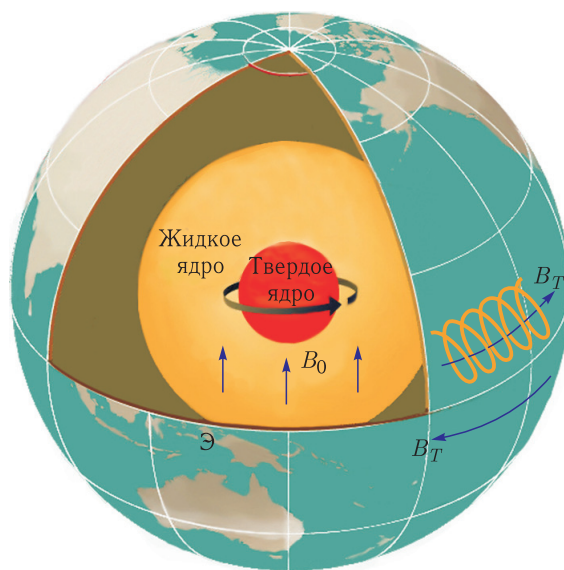


Рис. 11.2

всплытием железно-никелевого расплава в направлении к мантии под действием архимедовой силы и последующим его погружением (после остывания) вглубь. Конвективные потоки отклоняются торроидальным полем, и у создаваемого ими магнитного поля появляется компонента, направленная от одного полюса к другому.

Так устанавливается положительная обратная связь между полоидальным и тороидальным полями. Анализ показывает, что работа гидродинамо возможна, если конвективные потоки не обладают осевой симметрией. Для Земли, у которой ось вращения и магнитная ось не совпадают, это условие выполняется.

Для описания происходящих процессов используется сложный математический аппарат — уравнения магнитной гидродинамики вместе с уравнениями тепломассопереноса. Возможности современных суперкомпьютеров позволяют проводить расчеты лишь упростив постановку задачи (пренебечь вязкостью, турбулентностью и пр).

Вычисления показывают, что работа геодинamo связана с хаотическими изменениями потоков железо-никелевого расплава, которые приводят к флуктуациям магнитных полей. Инверсии земного магнетизма — это наиболее сильная флуктуация, и предсказать ее в настоящее время невозможно. Механизм магнитного динамо удовлетворительно описывает дрейф и инверсию полюсов Земли, объясняет отсутствие магнитного поля Венеры и пр.

Дополнительный вклад в магнитное поле на поверхности Земли дают токи в ионосфере — верхней атмосфере, простирающейся до высот 400–500 км. Ионосфера содержит большое количество ионов за счет ионизации солнечным ветром. Она электрически нейтральна и может считаться низкотемпературной плазмой.

Плазма удерживается магнитным полем Земли. Ее состояние определяется взаимодействием магнитного поля Земли с солнечным ветром, чем и объясняется связь магнитных бурь на Земле с солнечными вспышками.

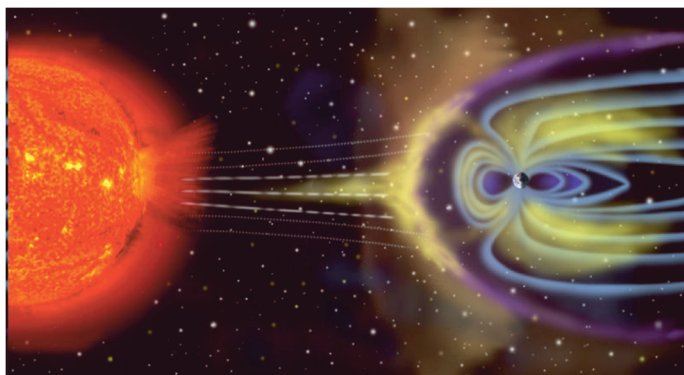


Рис. 11.3

По мере удаления от поверхности Земли усиливается воздействие солнечного ветра: со стороны Солнца геомагнитное поле сжимается, а с противоположной (ночной стороны) оно вытягивается в длинный «хвост» (рис. 11.3).

**Сила Ампера.** В соответствии с законом Ампера (10.1) и определением индукции (10.2) на элемент тока  $I d\mathbf{l}$ , находящийся в поле с индукцией  $\mathbf{B}$ , будет действовать сила

$$d\mathbf{F} = I (d\mathbf{l} \times \mathbf{B}), \quad (11.1)$$

называемая *силой Ампера*. Это сила является суммой сил, действующих на движущие в проводе заряды. Направление силы удобно определять с помощью *правила левой руки*: если ладонь левой руки расположить так, чтобы вытянутые пальцы были направлены по току, а линии магнитного поля входили в ладонь, то отставленный большой палец укажет направление силы, действующей на проводник (рис. 11.4)

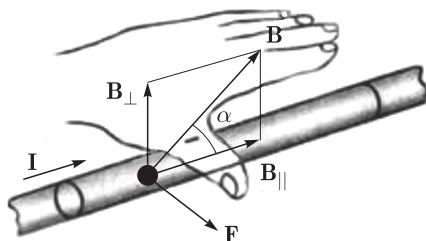


Рис. 11.4

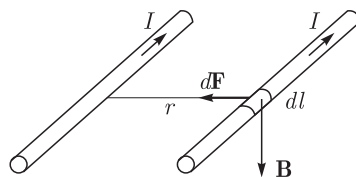


Рис. 11.5

С помощью (11.1) легко рассчитать силу взаимодействия двух параллельных проводов с током  $I$  в каждом проводе, находящихся на расстоянии  $r$  друг от друга (рис. 11.5). Если токи текут в одном направлении, то между проводами будет действовать сила притяжения, а если в противоположных направлениях — сила отталкивания.

Учитывая, что индукция поля определяется формулой (10.6), для величины силы получаем

$$dF = Idl \cdot B = \mu_0 \frac{I \cdot I}{2\pi r} dl. \quad (11.2)$$

Эта сила удовлетворяет третьему закону Ньютона и может рассматриваться как сила взаимодействия

Формула (11.2) используется для введения единицы силы тока в системе СИ: *электрический ток силой  $I = 1$  А (ампер) — это такой неизменяющийся ток, протекающий по двум тонким параллельным прямолинейным проводникам бесконечной длины, расположенным в вакууме на расстоянии  $r = 1$  м один от другого, при котором на элемент провода длиной  $dl = 1$  м действует сила взаимодействия  $dF = 2 \cdot 10^{-7}$  Н.* Поэтому магнитная постоянная  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  (Н/А<sup>2</sup> = Гн/м).

Формула (11.1) лежит в основе определения единицы индукции магнитного поля. За единицу магнитной индукции в системе СИ принята 1 Тл (тесла — в честь выдающегося сербского изобретателя Н. Тесла), *равная индукции однородного магнитного поля, действующего с силой 1 Н на каждый метр длины прямолинейного проводника с током 1 А, если проводник расположен перпендикулярно направлению поля.*

**Магнитный диполь в магнитном поле.** Рассмотрим маленький плоский прямоугольный контур с током  $I$  и размером  $dl \times dl$ , находящийся, вообще говоря, в неоднородном магнитном поле с индукцией  $\mathbf{B}$ , зависящей от координат (рис. 11.6 а). На каждую из четырех его сторон будет действовать сила Ампера  $d\mathbf{F}_i = I (d\mathbf{l}_i \times \mathbf{B}_i)$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ). Для простоты будем предполагать, что линии поля лежат в плоскостях, параллельных плоскости рисунка. В этой же плоскости и лежит нормальный к плоскости контура вектор  $\mathbf{n}$  рис. 11.6 б, в.

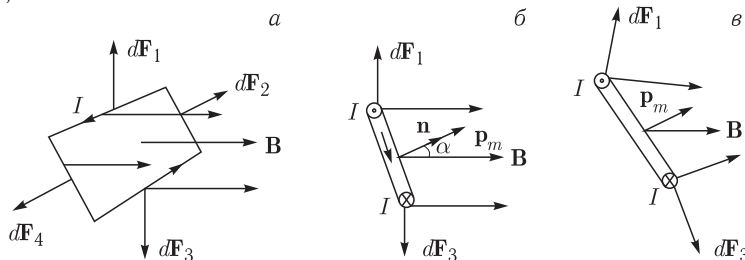


Рис. 11.6

Если поле однородно, то сумма всех четырех сил будет равна нулю, однако будет действовать момент сил (рис. 11.6 б), который по абсолютной величине будет равен

$$M = dF \cdot dl \cdot \sin \alpha = I \cdot dl \cdot dl \cdot B \cdot \sin \alpha = p_m \cdot B \cdot \sin \alpha, \quad (11.3)$$

где  $p_m = I \cdot dl \cdot dl$  — *магнитный дипольный момент контура*, вектор  $\mathbf{p}_m = I \cdot dl \cdot dl \cdot \mathbf{n}$  составляет с вектором индукции  $\mathbf{B}$  угол  $\alpha$ ,  $\mathbf{n}$  — единичный нормальный вектор. Направление действующего момента сил определяется векторным выражением

$$\mathbf{M} = \mathbf{p}_m \times \mathbf{B}. \quad (11.4)$$

Таким образом, магнитное поле стремится установить магнитный диполь вдоль поля, что и происходит с магнитной стрелкой.

В *неоднородном поле* продолжает действовать момент сил, однако появится результирующая сила, которая будет затягивать диполь в область с большей величиной индукции (рис. 11.6 в).

Для большого контура с током, помещенного в однородное поле, формула (11.4) по-прежнему справедлива, так как контур можно представить в виде суперпозиции  $N$  маленьких плоских контуров, в которых токи текут в том же направлении, что и в большом контуре. Эти контуры обладают своими магнитными дипольными моментами  $\mathbf{p}_{mi}$ . Их векторная сумма будет равна магнитному дипольному моменту контура  $\mathbf{p}_m$ , поэтому

$$\mathbf{M} = \sum_{i=1}^N \mathbf{p}_{mi} \times \mathbf{B} = \mathbf{p}_m \times \mathbf{B}. \quad (11.5)$$

**Гальванометр.** Вскоре после открытия Эрстеда появились гальванометры — высокочувствительные приборы для измерения силы тока весьма малой величины. Наиболее часто гальванометры используют в качестве нуль-индикаторов, т. е. устройств для индикации отсутствия тока в электрической цепи (например, в рассмотренном ранее мосте Уитстона).

В первых гальванометрах магнитная стрелка подвешивалась внутри катушки. При прохождении тока по катушке стрелка поворачивалась на некоторый угол, зависящий от силы тока. В 1881 г. французским ученым Ж. Д'Арсонвалем был создан первый гальванометр с подвижной катушкой в постоянном магнитном поле.

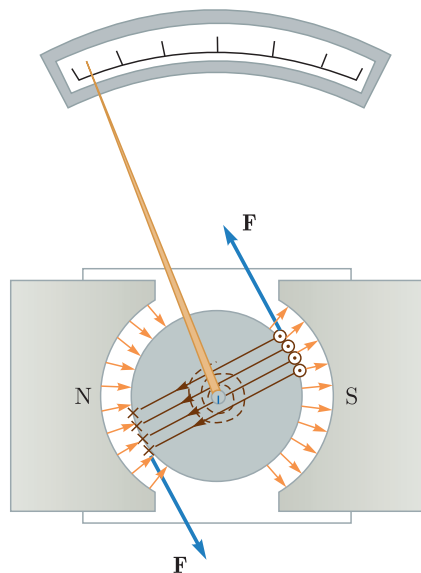


Рис. 11.7

В зависимости от конструкции подвижного проводника гальванометры подразделяются на рамочные, петлевые или струнные. Если поле создается постоянным магнитом, то гальванометр является магнитоэлектрическим, а если электромагнитом — электродинамическим.

На рис. 11.7 показано устройство рамочного магнитоэлектрического гальванометра. Подвижная часть — рамка с несколькими витками проволоки — находится во внешнем магнитном поле, создаваемом постоянным магнитом. С неподвижной частью она соединена спиральными пружинами, удерживающими рамку в «нулевом положении», при котором  $\alpha = \pi/2$ . При протекании по рамке электрического тока на нее действует момент сил. Рамка

поворачивается, а конец соединенной с ней стрелки перемещается вдоль измерительной шкалы.

Шкала гальванометра может быть проградуирована не только в единицах силы тока  $I$ , но и в единицах напряжения  $U$ , которые связаны законом Ома через сопротивление  $R_G$  витков рамки гальванометра (сопротивление гальванометра). В первом случае прибор называется амперметром, а во втором — вольтметром.

В электрическую цепь амперметр включается последовательно с тем участком электрической цепи, силу тока  $I$  в котором измеряют. Для увеличения предела измерений параллельно амперметру подключают шунт — резистор с сопротивлением  $R_{Ш} < R_G$ , ток в котором  $I_{Ш}$  превосходит ток в амперметре  $I_A$ . Поскольку можем записать  $I = I_{Ш} + I_A$ ,  $I_{Ш} R_{Ш} = I_A R_G$ , то  $I_A = I / (1 + R_G / R_{Ш})$ , и ток в амперметре может быть во много раз меньше измеряемого тока в цепи.

Вольтметр подключается параллельно участку цепи (нагрузке) или источнику ЭДС, напряжение  $U$  на котором необходимо измерить. Для увеличения предела измерений последовательно с вольтметром подключают добавочный резистор с сопротивлением  $R_D > R_G$ , на котором падает большая часть измеряемого напряжения. Записывая  $U = U_D + U_V$ ,  $U_D / R_D = U_V / R_G$ , получаем  $U_V = U / (1 + R_D / R_G)$ , и напряжение на вольтметре может быть во много раз меньше измеряемого напряжения.

В современных приборах цена деления измерительной шкалы с использованием шунтов и добавочных резисторов может изменяться на много порядков. Широкое распространение получили мультиметры, или тестеры (от англ. «test» — испытание). Это электроизмерительные аналоговые комбинированные приборы, объединяющие в себе функции амперметра, вольтметра и омметра (рис. 11.8). Поэтому они имеют также название авометр.

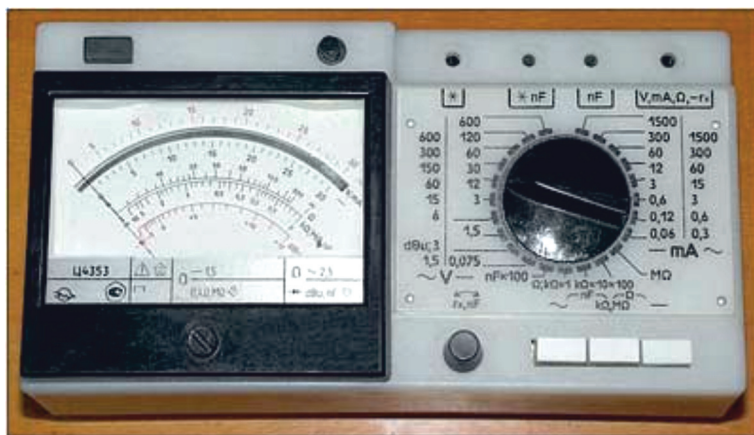


Рис. 11.8

Наряду с аналоговыми, широко используются цифровые электроизмерительные приборы, в которых измеряемые величины в виде цифр высвечиваются на экране (рис. 11.9). Основным узлом электронного устройства является АЦП — аналогово-цифровой преобразователь, который преобразует аналоговый сигнал (электрический ток) в цифровой, представляемый цифровым

кодом. Величина аналогового сигнала определяется путем ее сравнения с прецизионным сигналом, вырабатываемым электронной схемой. Процесс аналого-цифрового преобразования составляет сущность любого цифрового прибора.

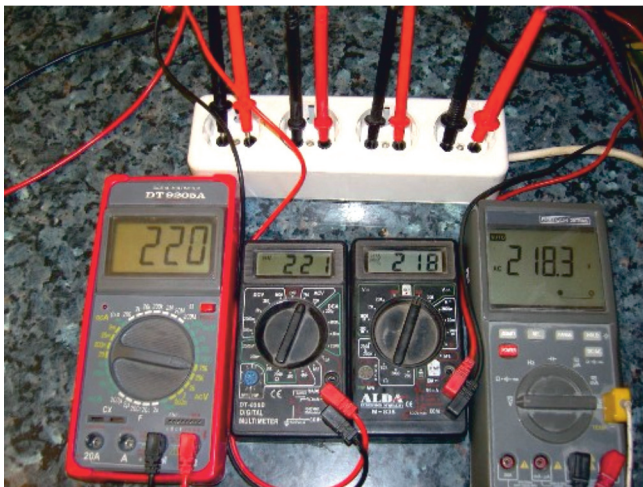


Рис. 11.9

Однако первоначальная калибровка прецизионного сигнала в своей основе невозможна без аналоговых измерительных приборов, в основе работы которых лежит действие магнитного поля на проводник с током.

Если на подвижную часть магнитоэлектрического гальванометра поместить небольшое зеркальце, на которое падает узкий луч света, то при протекании ничтожно малого тока отраженный зайчик на удаленной шкале будет смещаться на заметное расстояние. Такой гальванометр называется зеркальным. Его чувствительность значительно больше, чем у стрелочного гальванометра.

Для определения количества электричества, переносимого импульсами тока  $I(t)$  длительностью  $\Delta t$ , применяют баллистические гальванометры. У такого гальванометра искусственно увеличивают момент инерции вращающейся рамки.

При кратковременном протекании за время  $\Delta t$  тока  $I(t)$  рамка не успевает повернуться, однако приобретет угловую скорость. Далее, подобно крутильному маятнику, она будет совершать затухающие колебания. Нетрудно показать, что если период собственных колебаний рамки  $T \gg \Delta t$  (см. курс «Механика»), то амплитуда первого колебания  $\Delta\alpha$  будет связана с величиной протекшего заряда  $\Delta q$  соотношением

$$\Delta\alpha = \text{const} \cdot \int_0^{\Delta t} I(t) dt = \text{const} \cdot \Delta q,$$

в котором константа определяется конструкцией гальванометра.



**Потенциальная функция тока во внешнем магнитном поле.** Познакомимся с эффективным методом вычисления сил и моментов сил, действующих на контур с током в магнитном поле. Вначале предположим, что магнитное поле однородно, и на плоский контур площадью  $S$  действует только момент сил (11.5). Если попытаться мысленно с помощью внешних сил увеличить угол  $\alpha$  на небольшую величину  $d\alpha > 0$ , то работа  $dA$  сил поля будет отрицательна и равна:

$$\begin{aligned} dA &= M \cdot d\alpha = -p_m \cdot B \cdot \sin \alpha \cdot d\alpha = -I \cdot S \cdot B \cdot \sin \alpha \cdot d\alpha = \\ &= Id(SB \cos \alpha) = Id\Phi_B, \end{aligned} \quad (11.6)$$

где  $\Phi_B = ISB \cos \alpha$  — поток вектора индукции через контур.

*Единицей потока магнитной индукции в СИ служит 1 Вб (вебер — в честь немецкого физика В. Вебера), который представляет собой поток через поверхность  $S = 1 \text{ м}^2$ , пересекаемую нормальными к ней линиями магнитного поля с индукцией  $B = 1 \text{ Тл}$ .*

Поэтому элементарная работа сил поля равна произведению силы тока в контуре на приращение магнитного потока.

Назовем скалярную функцию

$$U = -I \cdot \Phi_B \quad (11.7)$$

*потенциальной (силовой) функцией тока в магнитном поле.* Знак этой функции определяется относительно упоминавшейся ранее правовинтовой «системы координат»: ток  $I > 0$ , если он течет в положительном направлении обхода контура,  $\Phi_B > 0$ , если вектор индукции  $\mathbf{B}$  и нормальный к контуру вектор  $\mathbf{n}$  образуют острый угол ( $\cos \alpha > 0$ ).

С ее использованием (11.6) запишется в виде

$$M \cdot d\alpha = -d(-I\Phi_B)_I = -d(U)_I. \quad (11.8)$$

Таким образом, *элементарная работа сил поля равна взятому с обратным знаком приращению потенциальной функции тока, при условии, что сила тока остается неизменной.* Последнее условие при реальном повороте может не выполняться, т.к. при изменении потока появится ЭДС индукции, и ток в контуре может измениться.

Тогда момент сил магнитного поля

$$M = - \left( \frac{dU}{d\alpha} \right)_I. \quad (11.9)$$

Контур будет стремиться достичь такого положения, при котором поток станет максимальным ( $\cos \alpha = 1$ ), потенциальная функция достигнет минимума, и момент сил будет равен нулю. Следует особо подчеркнуть, что *потенциальная функция не является энергией контура в магнитном поле, хотя и имеет одинаковую с энергией размерность!*

Можно также показать, что в общем случае, когда потенциальная функция зависит от линейных ( $x_i$ ) и угловых ( $\alpha_i$ ) координат ( $i = 1, 2, 3$ ),

компоненты силы и момента сил определяются производными по соответствующим координатам:

$$F_i = - \left( \frac{dU}{dx_i} \right)_I, \quad M_i = - \left( \frac{dU}{d\alpha_i} \right)_I. \quad (11.10)$$

**Коэффициент взаимной индукции.** Рассмотрим два произвольных контура с токами  $I_1$  и  $I_2$ , создающими в окружающем пространстве магнитные поля с индукцией  $\mathbf{B}_1$  и  $\mathbf{B}_2$  соответственно. Поток вектора  $\mathbf{B}_1$  через второй контур площадью  $S_2$  можно представить в виде

$$\Phi_{12} = \iint \mathbf{B}_1 d\mathbf{S}_2 = L_{12}I_1, \quad (11.11a)$$

а поток вектора  $\mathbf{B}_2$  через первый контур площадью  $S_1$  в виде

$$\Phi_{21} = \iint \mathbf{B}_2 d\mathbf{S}_1 = L_{21}I_2. \quad (11.11б)$$

Коэффициенты  $L_{12}$  и  $L_{21}$  называются *коэффициентами взаимной индукции*. Они характеризуют магнитную связь между контурами. В вакууме коэффициенты зависят от формы контуров и их взаимного расположения. Далее будет показано, что  $L_{12} = L_{21}$ .

Символ  $L$ , используемый для обозначения коэффициентов взаимной и самоиндукции (см. далее), был взят в честь знаменитого русского физика Э. Ленца. *Единицей измерения этих коэффициентов является 1 Гн = 1 Вб/1 А* (генри — в честь американского физика Дж. Генри). Она вводится с использованием явления электромагнитной индукции (см. далее).

Тогда силовая функция второго тока в магнитном поле первого тока будет равна

$$U_{12} = -I_2\Phi_{12} = -L_{12}I_1I_2, \quad (11.12a)$$

а для первого тока в поле второго

$$U_{21} = -I_1\Phi_{21} = -L_{21}I_2I_1. \quad (11.12б)$$

Силы и моменты сил при взаимодействии контуров с токами, согласно (11.10), определяются через производные коэффициентов взаимной индукции по соответствующим координатам:

$$F_{12i} = - \left( \frac{dU_{12}}{dx_{2i}} \right)_{I_2} = \frac{dL_{12}}{dx_{2i}} I_1 I_2, \quad F_{21i} = - \left( \frac{dU_{21}}{dx_{1i}} \right)_{I_1} = \frac{dL_{21}}{dx_{1i}} I_1 I_2, \quad (11.13a)$$

$$M_{12i} = - \left( \frac{dU_{12}}{d\alpha_{2i}} \right)_{I_2} = \frac{dL_{12}}{d\alpha_{2i}} I_1 I_2, \quad M_{21i} = - \left( \frac{dU_{21}}{d\alpha_{1i}} \right)_{I_1} = \frac{dL_{21}}{d\alpha_{1i}} I_1 I_2. \quad (11.13б)$$

Здесь  $x_{1i}, x_{2i}$  — линейные координаты,  $\alpha_{1i}, \alpha_{2i}$  — угловые координаты первого и второго контуров соответственно. С учетом равенства коэффициентов взаимной индукции следует *равенство действия и противодействия!*

**Пример 1.** Вычислим коэффициент взаимной индукции тороидальных катушек, одна из которых намотана поверх другой (см. рис. 10.14). Будем считать, как и в предыдущей лекции, что радиус катушек равен  $R$ , а их поперечные размеры много меньше длины  $l = 2\pi R$ . Катушки имеют одинаковую площадь витка  $S$ , но отличаются разным числом витков:  $N_1$  и  $N_2$ .



При протекании в первой катушке тока силой  $I_1$  индукция поля, согласно (10.19), равна  $B_1 = \mu_0 N_1 I_1 / l$ , а поток через витки второй катушки  $\Phi_{12} = B_1 S N_2 = \mu_0 (N_1 N_2 S / l) I_1$ . Поменяв индексы местами, получим выражение для потока  $\Phi_{21}$ . Из них находим

$$L_{12} = L_{21} = \mu_0 \frac{N_1 N_2 S}{l}. \quad (11.14)$$

**Диполь-дипольное взаимодействие.** Рассмотрим два плоских контура с площадью  $S_1$  и  $S_2$ , по которым текут токи  $I_1$  и  $I_2$ , как показано на (рис. 11.10). Плоскости контуров параллельны, а расстояние между ними много больше линейных размеров контуров. Таким образом, каждый контур с током представляет собой магнитный диполь. Дипольный момент первого контура  $\mathbf{p}_{1m} = I_1 S_1 \mathbf{n}_1$ , второго  $\mathbf{p}_{2m} = I_2 S_2 \mathbf{n}_2$ , при этом  $\mathbf{p}_{1m} \parallel \mathbf{p}_{2m}$ .



Рис. 11.10

Вычислим силу взаимодействия двух контуров (магнитных диполей). Для этого начало координат поместим в середине первого контура, а ось  $Ox$  направим в сторону второго контура. Согласно (10.10), индукция  $B_1$  поля тока  $I_1$  на оси  $Ox$   $B_1 = \mu_0 \frac{p_{1m}}{2\pi x^3} = \mu_0 \frac{I_1 S_1}{2\pi x^3}$ . Если второй контур имеет координату  $x$ , то поток этого поля через его поверхность

$$\Phi_{12} = \iint B_1 dS_2 = \mu_0 \frac{I_1 S_1 S_2}{2\pi x^3} = L_{12}(x) I_1,$$

где коэффициент взаимной индукции  $L_{12} = \mu_0 \frac{S_1 S_2}{2\pi x^3}$ .

Силовая функция  $U_{12}(x) = -I_2 \Phi_{12} = -L_{12}(x) I_1 I_2$ . Следовательно, сила, действующая на второй контур, имеет одну  $x$ -компоненту, равную

$$F_{12} = - \left( \frac{dU_{12}}{dx} \right)_{I_2} = \frac{dL_{12}}{dx} I_1 I_2 = -\mu_0 \frac{3S_1 S_2}{2\pi x^4} I_1 I_2 = -\mu_0 \frac{3p_{1m} p_{2m}}{2\pi x^4}. \quad (11.15)$$

Эта сила отрицательна и является силой притяжения: контур затягивается в область с большей индукцией.

Направив ось  $Ox'$  от второго контура к первому, запишем выражение для потенциальной функции  $U_{21}(x') = -I_1 \Phi_{21} = -L_{21}(x') I_2 I_1$ , при этом

$$L_{12} = L_{21}. \quad (11.16)$$

Следовательно,

$$F_{21} = - \left( \frac{dU_{21}}{d(x')} \right)_{I_1} = - \left( \frac{dU_{21}}{d(-x)} \right)_{I_1} = - \frac{dL_{21}}{dx} I_1 I_2 = -F_{12}. \quad (11.17)$$

Таким образом, взаимодействие контуров с токами подчиняется третьему закону Ньютона!

В рассмотренном примере дипольные магнитные моменты параллельны друг другу. Энергия их взаимодействия равна работе сил притяжения

при перемещении одного диполя (например, второго) из бесконечности в рассмотренное положение. Эта работа, с учетом (11.15), равна

$$W_{\text{вз}}(x) = \int_{\infty}^x F_{12} \cdot dx = - \int_x^{\infty} \mu_0 \frac{3p_{1m}p_{2m}}{2\pi x^4} \cdot dx = - \mu_0 \frac{p_{1m}p_{2m}}{2\pi x^3} = U_{12}(x). \quad (11.18)$$

Если дипольные моменты не параллельны, то появится момент сил (11.3), равный

$$M_{12} = -p_{2m} \cdot B_1 \cdot \sin \alpha = -\mu_0 \frac{p_{1m}p_{2m}}{2\pi x^3} \sin \alpha$$

и стремящийся сделать дипольные моменты параллельными. Знак минус указывает, что вектор  $\mathbf{M}_{12}$  направлен противоположно вектору углового перемещения  $d\alpha$ . При увеличении угла между диполями ( $d\alpha > 0$ ) этот момент силы совершает отрицательную работу

$$A = \int_0^{\alpha} M_{12} \cdot d\alpha = - \int_0^{\alpha} \mu_0 \frac{p_{1m}p_{2m}}{2\pi x^3} \sin \alpha \cdot d\alpha = \mu_0 \frac{p_{1m}p_{2m}}{2\pi x^3} (\cos \alpha - 1).$$

Эта работа равна (с обратным знаком) появившейся дополнительной энергии взаимодействия:

$$W_{\text{вз}}(\alpha) = -A = \mu_0 \frac{p_{1m}p_{2m}}{2\pi x^3} (1 - \cos \alpha). \quad (11.19)$$

Следовательно, энергия взаимодействия зависит не только от расстояния между диполями, но и от их взаимной ориентации:

$$W_{\text{вз}}(x, \alpha) = W_{\text{вз}}(x) + W_{\text{вз}}(\alpha) = -\mu_0 \frac{p_{1m}p_{2m}}{2\pi x^3} + \mu_0 \frac{p_{1m}p_{2m}}{2\pi x^3} (1 - \cos \alpha). \quad (11.20)$$

При параллельной ориентации ( $\alpha = 0$ ) она минимальна, при взаимно перпендикулярной ориентации ( $\alpha = \pi/2$ ) — равна нулю, при антипараллельной ориентации ( $\alpha = \pi$ ) она становится максимальной.

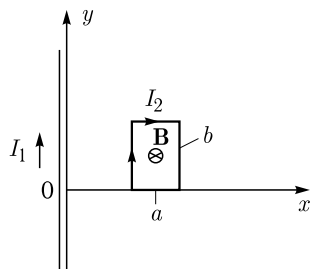


Рис. 11.11

Диполь-дипольное магнитное взаимодействие играет важную роль при возникновении в твердых телах некоторых видов магнитной атомной и магнитной доменной структур. Хотя оно значительно меньше обменного взаимодействия (см. далее), однако может существенно влиять на магнитные свойства кристаллов.

**Пример 2.** Вычислим силу, которая действует на прямоугольный контур с током  $I_2$  со стороны поля, создаваемого током  $I_1$  в прямом длинном проводе, используя потенциальную функцию тока (рис. 11.11). Если провод и контур лежат в одной плоскости, то в двумерной декартовой системе координат  $xOy$  индукция поля тока  $I_1$  равна  $B_1 = I_1/(2\pi x)$ , а создаваемый поток в прямоугольном (втором) контуре

размером  $a \times b$ :

$$\Phi_{12} = \iint B_1 dS_2 = \mu_0 \frac{I_1}{2\pi} b \int_x^{x+a} \frac{dx'}{x'} = \mu_0 \frac{I_1}{2\pi} b \ln \frac{x+a}{x} = L_{12}(x) I_1. \quad (11.21)$$

Силовая функция второго контура в поле первого тока равна

$$U_{12}(x) = -I_2 \Phi_{12} = -L_{12}(x) I_1 I_2. \quad (11.22)$$

Следовательно, сила, действующая на второй контур, имеет одну  $x$ -компоненту, равную

$$F_{12} = - \left( \frac{dU_{12}}{dx} \right)_{I_2} = \frac{dL_{12}}{dx} I_1 I_2 = \mu_0 \frac{I_1 I_2}{2\pi} b \left( \frac{1}{x+a} - \frac{1}{x} \right) = -\mu_0 \frac{I_1 I_2}{2\pi} b \frac{a}{x(x+a)}. \quad (11.23)$$

Эта сила отрицательна и является силой притяжения: контур затягивается в область с большей индукцией. Ее можно было вычислить «в лоб», складывая силы (11.2). Поэтому расчет носил скорее демонстрационный характер. А вот если повернуть прямоугольный контур на некоторый угол, то появившийся момент сил проще вычислять с использованием силовой функции тока.

Отметим, что модель длинного проводника, являющегося на самом деле частью некоторого неведомого контура с большим прямолинейным участком, «работает в одну сторону» и не дает возможность вычислить поток  $\Phi_{21}$ , а вместе с ним и коэффициент взаимной индукции  $L_{21}$ .

**Взаимодействие контуров и третий закон Ньютона.** Докажем что при взаимодействии произвольных контуров с токами выполняется третий закон Ньютона. Для этой цели используем вектор-потенциал  $\mathbf{A}$  магнитного поля. Учитывая, что  $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$ ,

$$(\text{rot } \mathbf{A})_n = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\oint \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}}{\Delta S}, \quad (11.24)$$

поток вектора индукции через контур (поверхность, опирающуюся на контур)

$$\Phi_B = \iint_S B_n dS = \iint_S (\text{rot } \mathbf{A})_n dS = \oint_l \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \oint_l \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{l}. \quad (11.25)$$

Таким образом, *поток вектора индукции через контур равен циркуляции вектор-потенциала по этому контуру*. Замена  $d\mathbf{r}$  на  $d\mathbf{l}$  сделана для удобства представления.

Применим этот результат и запишем для первого и второго контуров

$$U_{12} = -I_2 \oint_{l_2} \mathbf{A}_1(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{l}_2, \quad U_{21} = -I_1 \oint_{l_1} \mathbf{A}_2(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{l}_1. \quad (11.26)$$

Вектор-потенциал поля, создаваемого элементом тока, согласно (10.28), представим в виде

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = k \frac{\mathbf{j}}{|\mathbf{r}|} dV = k \frac{I}{r} d\mathbf{l}. \quad (11.27)$$

Поэтому

$$U_{12} = -I_2 \oint_{l_2} k \oint_{l_1} \frac{I_1 \cdot d\mathbf{l}_1}{r} d\mathbf{l}_2 = -I_1 I_2 k \oint_{l_2} \oint_{l_1} \frac{d\mathbf{l}_1 d\mathbf{l}_2}{r} = -L_{12} I_1 I_2, \quad (11.28a)$$

$$U_{21} = -I_1 \oint_{l_1} k \oint_{l_2} \frac{I_2 \cdot d\mathbf{l}_2}{r} d\mathbf{l}_1 = -I_2 I_1 k \oint_{l_2} \oint_{l_1} \frac{d\mathbf{l}_2 d\mathbf{l}_1}{r} = -L_{21} I_2 I_1. \quad (11.28б)$$

Из этих соотношения следует

$$L_{12} = k \oint_{l_2} \oint_{l_1} \frac{d\mathbf{l}_1 d\mathbf{l}_2}{r} = L_{21}. \quad (11.29)$$

Поясним, что в числителе дроби под интегралом стоит скалярное произведение двух векторных элементов контуров, а в знаменателе — расстояние между этими элементами. Это говорит о том, что коэффициент взаимной индукции зависит как от ориентации контуров, так и от расстояния между ними.

Равенство (11.29) с учетом (11.13a) автоматически обеспечивает выполнение третьего закона Ньютона.

**Рельсотрон.** В последние годы проводятся эксперименты по созданию высокоэффективного электродинамического оружия. Одним из таких устройств является рельсовый ускоритель масс, или рельсовая пушка, называемая рельсотрон. Принцип действия рельсотрона показан на (рис. 11.12).

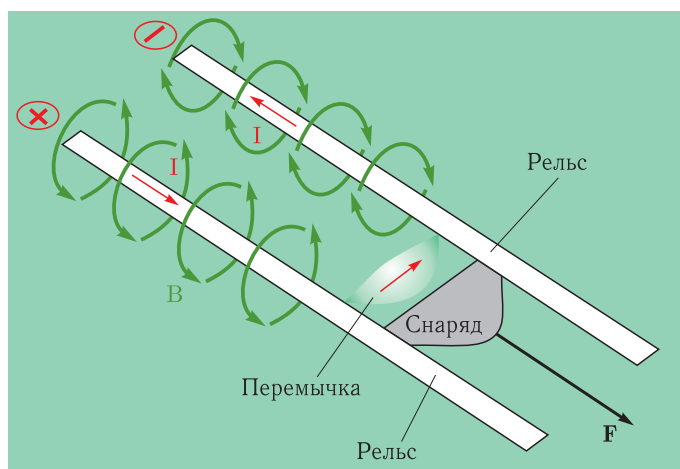


Рис. 11.12

Он состоит из двух параллельных проводящих рельсов, подключенных к мощному источнику тока. Плавкая перемычка располагается между рельсами, замыкая электрическую цепь.

В момент подачи на рельсы импульса высокого напряжения перемычка моментально сгорает, превращаясь в облако плазмы, называемое плазменным поршнем. Ток, протекающий в рельсах и поршне, образует между рельсами

сильное магнитное поле. В этом поле под действием силы Ампера плазменный поршень разгоняется, достигая скоростей несколько километров в секунду. Таким образом, рельсотрон может стрелять плазмой.

При использовании в рельсотронных пушках непроводящих снарядов снаряд помещается перед плазменным поршнем. Дуговой разряд, ускоряемый силой Ампера, постоянно прижимается к задней части снаряда, которая, интенсивно испаряясь, образует реактивную струю, под действием которой снаряд и ускоряется.

Рельсотроны позволяют ускорять небольшие тела (до 100 г) до скоростей 6–10 км/с, а плазменный поршень — до 50 км/с. Кинетическая энергия такого снаряда достигает величин порядка нескольких мегаджоулей.

Прототипы проходящих испытания образцов рельсовых пушек сообщают снаряду кинетическую энергию свыше 30 МДж, что позволяет достичь дальности стрельбы свыше 200 км. Ожидается, что в ближайшие 10 лет эти показатели удвоятся.

## ЛЕКЦИЯ 12

**Сила Лоренца.** Сила Ампера (11.1), действующая на элемент провода с током, является макроскопической силой. Она равна сумме микроскопических сил, действующих на отдельные движущиеся заряды. С учетом соотношения  $I d\mathbf{l} = \mathbf{j} S d\mathbf{l} = q \mathbf{v} n S d\mathbf{l}$  (см. (10.4)) сила  $d\mathbf{F} = I (d\mathbf{l} \times \mathbf{B}) = q(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) n S d\mathbf{l}$ . Поэтому сила, действующая на движущийся заряд, равна

$$\mathbf{f} = \frac{d\mathbf{F}}{n S d\mathbf{l}} = q(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (12.1)$$

и называется силой Лоренца по имени голландского физика Х. Лоренца, который вывел выражение для силы в 1892 г. (Нобелевская премия 1902 г. по физике совместно с соотечественником П. Зееманом за объяснение феномена, известного как эффект Зеемана).

Направление этой силы (как и силы Ампера) определяется *правилом левой руки*: если ладонь левой руки расположить так, чтобы вытянутые пальцы были направлены по скорости положительного заряда, а линии магнитного поля входили в ладонь, то отставленный большой палец укажет направление силы, действующей на заряд. Сила Лоренца перпендикулярна скорости заряда, поэтому она не совершает работы.

**Замечание.** В настоящее время под силой Лоренца подразумевают сумму электрической и магнитной сил:

$$\mathbf{f} = q\mathbf{E} + q(\mathbf{v} \times \mathbf{B}). \quad (12.2)$$

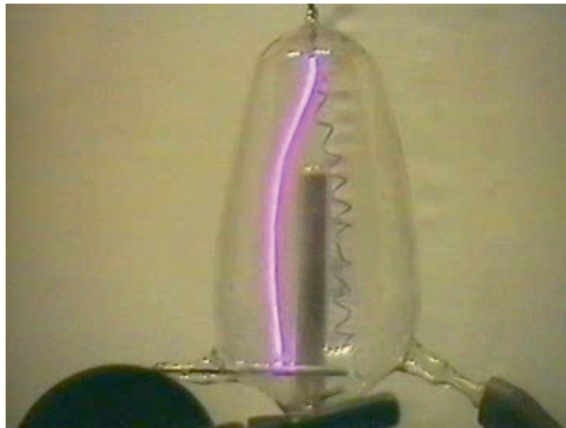


Рис. 12.1

На рис. 12.1 показана вертикальная колба с дуговым разрядом, представляющим собой потоки ионов и электронов. Нижний электрод выполнен в виде горизонтального кольца. На оси колбы расположен вертикальный сердечник

мощного электромагнита, вокруг которого существует полоидальное магнитное поле. Под действием силы Лоренца дуговой разряд равномерно вращается вокруг вертикального сердечника. При изменении направления тока в катушке электромагнита изменяется также направление вращения разряда.

В однородном магнитном поле  $\mathbf{B}$ , направленном перпендикулярно вектору скорости  $\mathbf{v}$ , под действием силы Лоренца нерелятивистская частица с зарядом  $q$  и массой  $m$  будет равномерно двигаться по окружности радиуса  $R$  в соответствии с уравнением движения:

$$\frac{mv^2}{R} = qvB. \quad (12.3)$$

Период обращения

$$T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi m}{qB} \quad (12.4)$$

не зависит от скорости частицы. Угловая скорость частицы называется циклотронной частотой:

$$\Omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{qB}{m}. \quad (12.5)$$

Радиус окружности

$$R = \frac{mv}{qB} \quad (12.6)$$

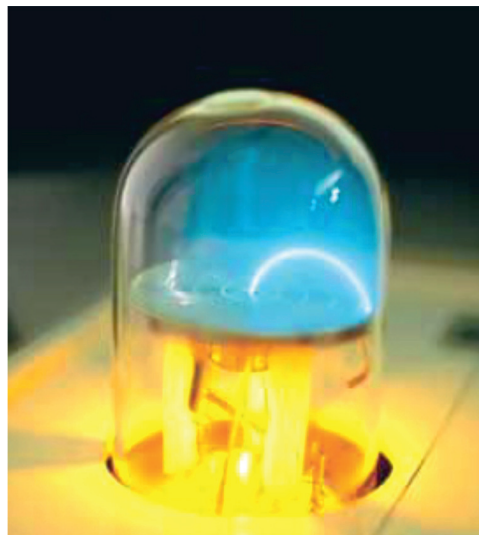


Рис. 12.2

пропорционален скорости частицы. На рис. 12.2 показано искривление траектории электронного пучка в магнитном поле. Электронный пучок направляется снизу вверх в стеклянную колбу, заполненную газом при низком давлении. Колба находится в горизонтальном магнитном поле. При столкновении электрона с атомом газа последний возбуждается и затем испускает свет в видимой области. Это дает возможность визуализировать траекторию электронного пучка. Если известна скорость  $v$  электрона и индукция  $B$  магнитного поля, то измеряя радиус  $R$  круговой траектории, можно с помощью (12.6) определить отношение заряда электрона к его массе.

**Электронно-лучевая трубка (ЭЛТ)** — электровакуумный прибор, преобразующий электрические сигналы в световые. Она является основной деталью осциллографа, телевизора и других подобных устройств. Принципиальное устройство ЭЛТ показано на рис. 12.3.

Основной деталью трубки является стеклянная колба, в которой создается вакуум. Электронный луч формируется электронной пушкой, в состав которой входит подогреваемый нитью накала  $H$  катод  $K$ , испускающий электроны, управляющий электрод  $M$  (модулятор) и аноды  $A_1$  и  $A_2$ . На доннышко катода цилиндрической формы наносится оксидный слой — смесь окислов щелочных металлов, который снижает работу выхода электрона из металла и улучшает его эмиссионную способность. Модулятор выполнен в виде стаканчика с отверстием в доннышке. На модулятор подается небольшой отрицательный

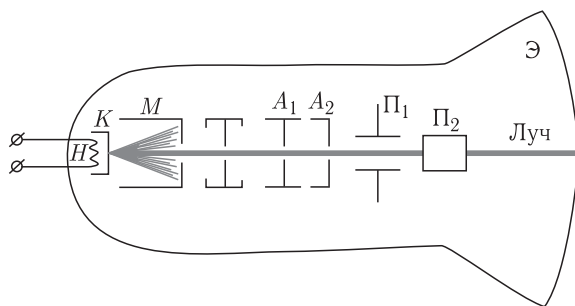


Рис. 12.3

потенциал относительно катода. Изменением этого потенциала электрическим сигналом можно варьировать интенсивность электронного луча и, соответственно, яркость изображения. На аноды цилиндрической формы подается высокий положительный потенциал, позволяющий ускорять электроны. Внутри анодов обычно устанавливают перегородки с отверстиями (диафрагмы). Пролетая сквозь диафрагмы с отверстиями, электроны подвергаются действию электрических полей этих диафрагм, которые играют роль электронных линз, обеспечивающих окончательную фокусировку электронного луча.

Далее электронный луч проходит сквозь отклоняющую систему. В телевизионных ЭЛТ применяется магнитная отклоняющая система, обеспечивающая большие углы отклонения. В осциллографических ЭЛТ применяется электростатическая отклоняющая система, обеспечивающая большее быстроедействие. В первом случае двумя парами катушек с токами создается двумерное поперечное магнитное поле, отклоняющее луч в двух взаимно-перпендикулярных направлениях. Во втором случае используются две пары пластин  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$ , создающие двумерное поперечное электрическое поле.

Затем электронный луч попадает в экран Э, покрытый люминофором. От бомбардировки электронами люминофор светится и быстро перемещающееся пятно переменной яркости создает на экране изображение.

**Циклотрон.** Независимость циклотронной частоты от скорости (энергии) частицы используется в циклотронах — ускорителях тяжелых частиц (протонов, ионов) (рис. 12.4).

Между полюсами сильного электромагнита помещается вакуумная камера (на рисунке не показана), в которой находятся два электрода в виде полых металлических полуцилиндров (дуантов). К дуантам приложено переменное электрическое напряжение, частота которого равна циклотронной частоте. Заряженные частицы инжектируются в центре вакуумной камеры.

Частицы ускоряются электрическим полем в промежутке между дуантами. Внутри дуантов частицы движутся под действием силы Лоренца по полукругам, радиус которых растет по мере увеличения энергии частиц. Каждый раз, когда частица пролетает через зазор между дуантами, она ускоряется электрическим полем. Таким образом, в циклотроне, как и во всех других ускорителях, заряженная частица ускоряется электрическим полем,



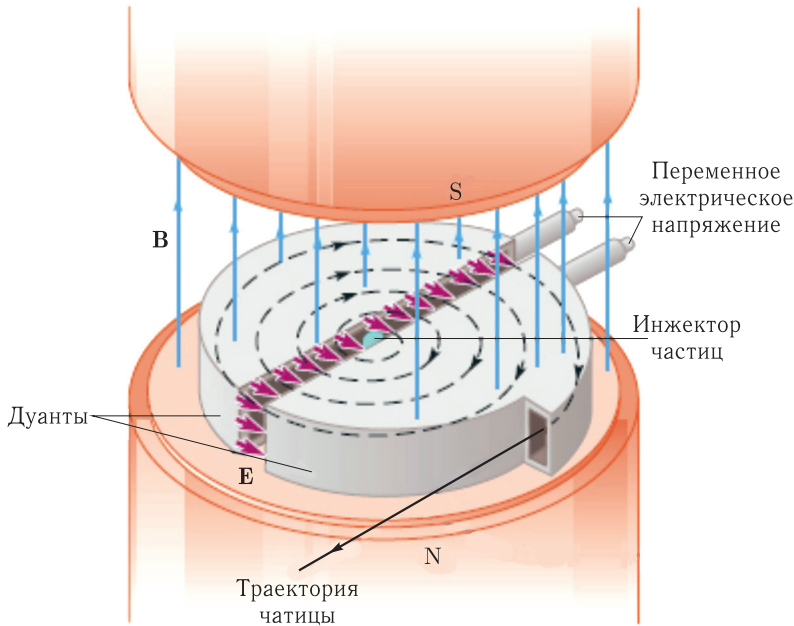


Рис. 12.4

а удерживается на траектории магнитным полем. Циклотроны позволяют ускорять протоны до энергии порядка 20 МэВ.

**Масс-спектрометр** — устройство для измерения с большой точностью массы заряженных частиц: ионов или различных ядер. С его помощью можно разделять изотопы — ядра атомов с одинаковым зарядом и различными массами.

Принцип действия масс-спектрометра показан на рис. 12.5. Исследуемые заряженные частицы, вылетающие из источника S, проходят через несколько небольших отверстий, формирующих узкий направленный пучок частиц. Затем они попадают в селектор скоростей, в котором частицы движутся в скрещенных однородных электрическом и магнитном полях. Электрическое поле создается между пластинами плоского конденсатора, магнитное поле — в зазоре между полюсами электромагнита.

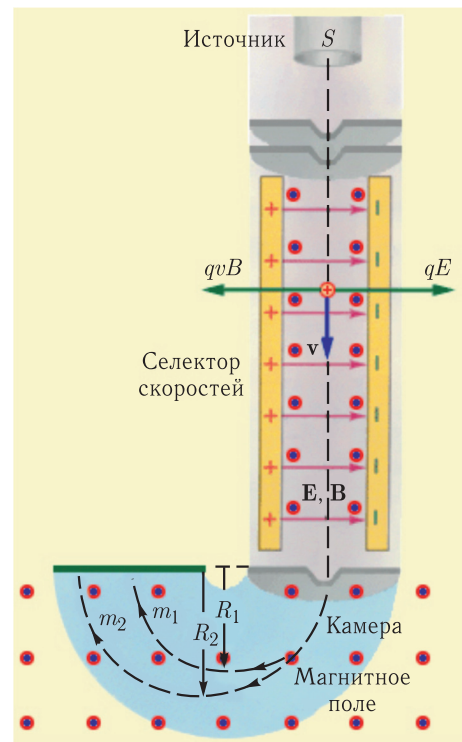


Рис. 12.5

В этом случае электрическая и магнитная составляющие силы (12.2) направлены поперек скорости в противоположные стороны:  $f = qE - qvB$ . Частицы, скорость которых  $v = E/B$ , будут двигаться прямолинейно и пройдут через отверстие на выходе селектора.

Попадая затем в камеру с магнитным полем, они начнут двигаться по окружности радиуса  $R = mv/(qB)$  (см. (12.6)). Измеряя радиусы частиц, считая известными величины скорости частицы и индукции поля, определяют отношение заряда к массе. Современные масс-спектрометры позволяют измерять массы заряженных частиц с точностью выше  $10^{-4}$ .

**Магнитные ловушки.** Если вектор скорости  $\mathbf{v}$  частицы составляет с вектором  $\mathbf{B}$  некоторый угол, то частица в однородном поле будет двигаться по спирали так, как это изображено на рис. 12.6.

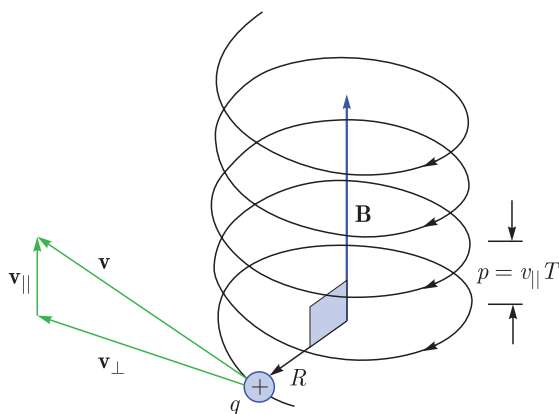


Рис. 12.6

Это легко понять, представив вектор скорости в виде сумму перпендикулярной и параллельной компонент:  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_\perp + \mathbf{v}_\parallel$ . Тогда движение частицы будет суперпозицией равномерного вращения с периодом  $T = 2\pi m/(qB)$  в перпендикулярной полю плоскости с радиусом  $R = mv_\perp/(qB)$  и равномерного прямолинейного движения вдоль поля со скоростью  $v_\parallel$ . Шаг спирали будет равен  $p = v_\parallel T$ .

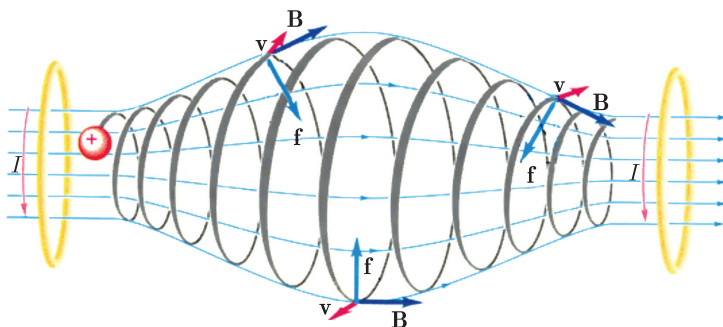


Рис. 12.7

Таким образом, траектория заряженной частицы как бы навивается на линии магнитной индукции. Это явление используется для удержания заряженных частиц в ограниченном объеме (в магнитных ловушках). Примером такой ловушки является «магнитная бутылка», показанная на рис. 12.7. Неоднородное магнитное поле в «бутылке» создается двумя катушками с током. Попавший в «бутылку» заряд движется по спирали попеременно от одной катушки к другой в ограниченном пространстве.

**Радиационные пояса Земли.** Гигантской магнитной ловушкой является геомагнитное поле Земли. Быстрые заряженные частицы из космоса (главным образом от Солнца) захватываются магнитным полем Земли. Они перемещаются по спиралеобразным траекториям туда и обратно между магнитными полюсами за доли секунды.

Область магнитосферы, в которой накапливаются и удерживаются высокоэнергичные заряженные частицы (в основном протоны и электроны) называется *радиационным поясом*.

У Земли есть два радиационных пояса — внутренний и внешний (рис. 12.8). Внутренний пояс (на высоте около 4000 км) был открыт американским ученым Дж. Ван Алленом в 1958 г. после полета спутника «Эксплорер-1». Этот пояс состоит в основном из протонов с энергиями в десятки МэВ.

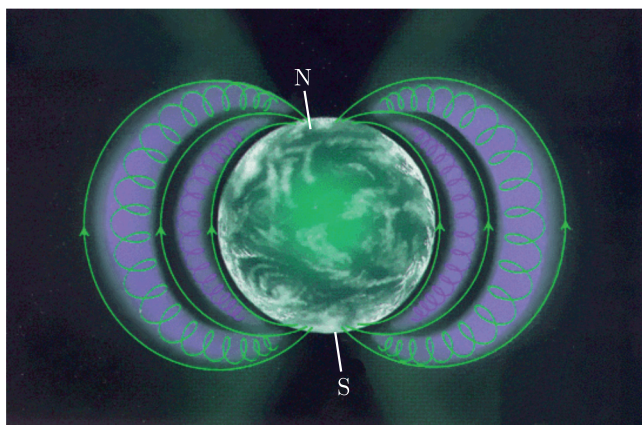


Рис. 12.8

Внешний пояс (на высоте около 17 000 км) был открыт советскими физиками С. Верновым и А. Чудаковым после полета спутника «Спутник-3». Он состоит преимущественно из электронов с энергиями в десятки кэВ.

Положение нижней границы пояса Ван Аллена зависит от широты (например, над Атлантикой — 500 км, а над Индонезией — 1300 км), а следовательно, и от магнитной индукции геополя. Это является доказательством того, что пояс образуется описанным выше способом.

**Токамак** (тороидальная камера с магнитными катушками; термин придумал советский физик И. Головин) — установка для магнитного удержания плазмы с целью достижения условий, необходимых для протекания управляемого термоядерного синтеза (рис. 12.9). Плазма в токамаке удерживается

не стенками камеры, которые не способны выдержать необходимую для термоядерных реакций температуру, а специально создаваемым комбинированным магнитным полем — сильным тороидальным  $B_T$  и более слабым полоидальным  $B_\perp$  внешними полями, а также полем  $B_I$  тока  $I$ , протекающего по плазменному шнуру.

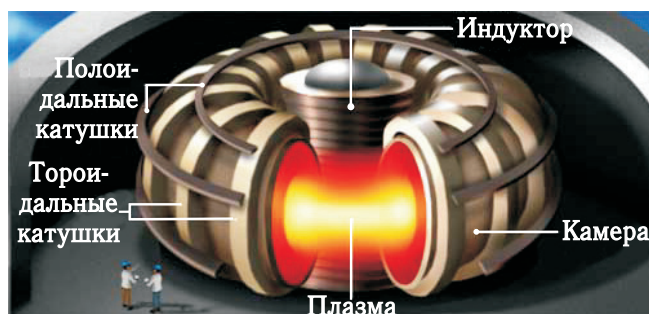


Рис. 12.9

Предложение о применении управляемого термоядерного синтеза для промышленных целей и конкретная схема термоизоляции высокотемпературной плазмы электрическим полем были впервые сформулированы советским физиком О. Лаврентьевым в 1950 г. Годом спустя А. Сахаров и И. Тамм выдвинули идею создания термоядерного реактора, в котором плазма имела бы форму тора и удерживалась магнитным полем. Одновременно эта же идея была предложена американскими учеными.

Токамак представляет собой тороидальную камеру со смесью дейтерия и трития, на которую намотаны катушки для создания тороидального магнитного поля. Кольцевые витки вокруг вертикальной оси камеры токамака создают полоидальное поле.

С помощью индуктора в камере создают вихревое электрическое поле (см. далее), силовые линии которого направлены вдоль оси тороидальной камеры. Это поле вызывает протекание тока и зажигание в камере плазмы. Ток создает магнитное поле и, кроме того, нагревает плазму.

Линии суммарного магнитного поля имеют вид спиралей, которые, многократно обвивая тор, образуют систему замкнутых вложенных друг в друга тороидальных магнитных поверхностей.

Анализ показал, что плазма в токамаке магнитогидродинамически устойчива, если выполняется критерий Шафранова–Крускала (в честь советского физика В. Шафранова и его американского коллеги М. Крускала, независимо сформулировавших критерий):

$$\frac{B_T}{B_I} > \frac{R}{a},$$

где:  $R$  — радиус окружности плазменного кольца,  $a$  — радиус поперечного сечения плазменного шнура. Наличие поля  $B_I$  необходимо для стабильного удержания плазмы в такой системе.

Вихревое электрическое поле, а, следовательно, и ток  $I$  существует ограниченное время, поскольку создаются нарастающим электрическим током в обмотке индуктора, а это нарастание конечно. Поэтому время стабильного существования плазмы в классическом токамаке ограничено. Для преодоления этого ограничения разработаны дополнительные способы поддержания тока: инжекция в плазму ускоренных нейтральных атомов дейтерия или трития, микроволновое излучение и пр.

Первый токамак был построен в СССР в 1956 г. и долгое время нигде в мире токамаки не строились. Лишь после 1968 г., когда на токамаке Т-3, построенном в Институте атомной энергии им. И. В. Курчатова под руководством академика Л. Арцимовича, была достигнута температура плазмы 10 млн градусов, в мире начался настоящий бум токамаков. К 1982 г. на установках Т-10 в СССР и РЛТ в США было достигнуто время жизни плазменного шнура около 0,1 с с температурой ионов на его оси  $T = 8 \cdot 10^7$  К.

В настоящее время токамак считается наиболее перспективным устройством для осуществления управляемого термоядерного синтеза.

**Пинч-эффект** (от англ. «*pinch*» — сужение, сжатие) — эффект сжатия, стягивания сильноточного газового разряда (плазменного образования) в результате взаимодействия тока разряда с магнитным полем, собственным или внешним.

Впервые это явление описано в 1934 г. американским ученым У. Беннетом применительно к потокам быстрых заряженных частиц в газоразрядной плазме. Термин «пинч-эффект» введен в 1937 г. английским физиком Л. Тонксом при исследовании дугового разряда.

В зависимости от направления тока в плазменном столбе различают  $Z$ - и  $\theta$ -пинч. Если ток  $I$  течет вдоль оси  $Oz$  цилиндрического плазменного столба и столб сжимается при взаимодействии с магнитным полем тока, то это  $Z$ -пинч.

Если к цилиндрической разрядной камере приложено внешнее продольное магнитное поле, то в плазме индуцируется азимутальный ток  $I_\theta$ . При взаимодействии этого тока с внешним полем также происходит стягивание плазмы к оси —  $\theta$ -пинч. Сжатие плазменного шнура при  $Z$ -пинче является следствием закона Ампера и обусловлено притяжением параллельных трубок с одинаково направленными в них токами. Взаимодействием трубок тока с внешним полем объясняется и  $\theta$ -пинч.

Важно подчеркнуть, что пинч-эффект может наблюдаться только в проводящих электрически нейтральных средах, где подвижные носители заряда (электроны и ионы в газоразрядной плазме, электроны и дырки — в полупроводниках) присутствуют приблизительно в одинаковом количестве. В этом случае электрическая сила, действующая на физически малый объем среды, будет равна нулю.

Если же имеется только один тип носителей тока, то электрическое поле пространственного заряда эффективно препятствует сжатию тока к оси. В частности, электронный пучок по мере движения электронов из-за отталкивания одноименных зарядов (магнитная сила их притяжения невелика) будет расширяться. Чтобы этого не случилось, в электронно-лучевой трубке используются фокусирующие системы (электрические или магнитные).

Прохождение больших токов ( $I > 10^6$  А) через газ, находящийся в газоразрядной трубке, сопровождается его ионизацией, нагревом и переходом в состояние плазмы. Дальнейший нагрев плазмы происходит при выделении джоулева тепла на омическом сопротивлении плазменного канала и при адиабатическом сжатии канала.

Плазменный канал отходит от стенок газоразрядной трубки. Тем самым создаются условия для магнитной термоизоляции высокотемпературной плазмы. Вылетающие из канала частицы будут заворачиваться магнитным полем, и только малая их часть будет достигать стенок трубки.

**Магнитогидродинамический (МГД) генератор** — энергетическая установка, в которой энергия рабочего тела (жидкой или газообразной электропроводящей среды), движущегося в магнитном поле, преобразуется непосредственно в электрическую энергию.

Эта идея своими корнями уходит в 1832 г., когда М. Фарадей со своими помощниками вблизи моста Ватерлоо в Лондоне погрузил в воду реки Темзы два медных листа, соединенным с гальванометром, установленным на мосту. Схема его опыта показана на рис. 12.10.

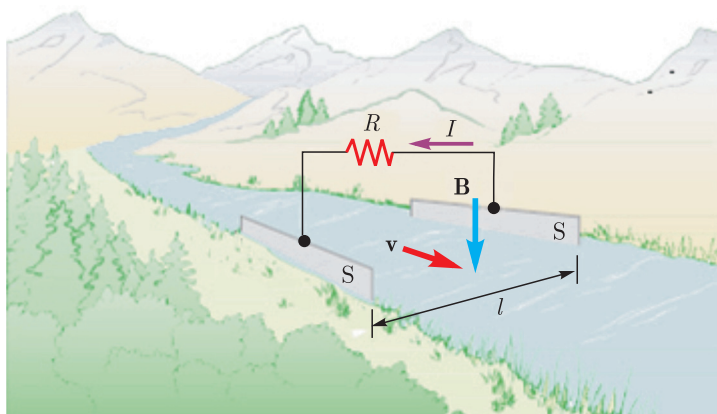


Рис. 12.10

Фарадей считал, что если воды реки, текущей с запада на восток, пересекают, хотя бы частично, магнитное поле Земли, то они подобны проводникам, пересекающим магнитное поле магнита. Действительно, заряды (ионы растворенных солей) вместе с водой движутся (течет конвекционный ток), поэтому они должны под действием магнитной силы Лоренца отклоняться и достигать пластин. Следовательно, гальванометр должен обнаружить электрический ток.

Оценим силу  $I$  ожидаемого тока в цепи. Пусть площадь пластин равна  $S$ , а расстояние между ними равно  $l$ . Если удельное сопротивление воды равно  $\rho$ , то сопротивление воды между пластинами  $R_B = \rho l / S$ . Сила Лоренца, действующая на заряд,  $f = qvB \sin \alpha = qvB_n$ , где  $B_n$  — нормальная к поверхности реки составляющая поля Земли. Работа силы  $f$  (выполняющей роль сторонней силы) по переносу заряда от одной к другой пластине  $A = f \cdot l$ , а ЭДС равна  $\mathcal{E} = A/q = B_n v l$ . Если сопротивление гальванометра

с подводящими проводами равно  $R$ , то в соответствии с законом Ома для замкнутой цепи получаем

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R + R_B} = \frac{B_n v l}{R + \rho l / S}. \quad (12.7)$$

Если положить  $v = 3 \text{ м/с}$ ,  $B_n = 5 \cdot 10^{-5} \text{ Тл}$ ,  $S = 10 \text{ м}^2$ ,  $\rho = 50 \text{ Ом} \cdot \text{м}$  (характерное значение для равнинных рек) и пренебречь сопротивлением  $R$ , то  $I = B_n v S / \rho = 3 \cdot 10^{-5} \text{ А}$ .

Опыт, однако, не удался. По всей вероятности, не хватило чувствительности гальванометра. Однако Фарадея по праву можно считать основателем идеи магнитогидродинамического генератора, ибо в своем опыте он задействовал магнит (магнитное поле Земли), гидро (воду) и динамику (движение).

В 1907–1910 гг. были выданы первые патенты на применение метода МГД-генерирования электричества с использованием вместо жидкости ионизированного газа. Поскольку газ ионизируется при температурах 2–3 тысячи градусов, то ученые в то время не представляли себе происходящие процессы. Да и материалов, способных выдержать такие температуры, практически не было. Поэтому все идеи остались на бумаге.

Так продолжалось до тех пор, пока не была создана новая наука — *магнитная гидродинамика*. Она возникла на стыке гидродинамики и электродинамики сплошной среды. Предметом ее изучения является динамика проводящей жидкости (газа) в магнитном поле. Примерами таких сред являются плазма, жидкие металлы, соленая вода.

Создателем теории магнитогидродинамики признан шведский ученый Х. Альфен (Нобелевская премия 1970 г. по физике). Основные законы магнитогидродинамики он получил, изучая в 1944 г. поведение космической плазмы в магнитном поле. Это дало толчок к созданию действующих МГД-генераторов. В 1971 г. в Москве введен в строй первый в мире МГД-генератор У-25 мощностью 25 МВт, пригодный для промышленного получения электроэнергии.

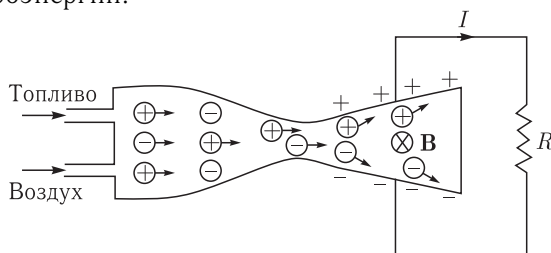


Рис. 12.11

Принципиальная схема МГД-генератора показана на рис. 12.11. Основная его деталь — топочный агрегат, похожий на камеру сгорания ракетного двигателя. В него подается нагретый воздух и впрыскивается топливо. Оно мгновенно сгорает, и температура в камере поднимается до  $2500^\circ$ . Чтобы повысить проводимость, в плазму добавляются присадки щелочных металлов. Раскаленные газы с ревом устремляются сквозь расширяющееся сопло (сопло Лаваля) со сверхзвуковой скоростью.



Затем струя электронно-ионной плазмы пролетает между полюсами магнита, создающими поле с индукцией порядка десятой доли тесла. Частицы противоположных знаков под действием силы Лоренца разделяются. Электроны, достигнув одного электрода, движутся затем во внешней цепи с резисторной нагрузкой к другому электроду, где нейтрализуют положительные ионы, достигшие электрода. Таким образом, во внешней цепи выделяется электрическая энергия, в которую была преобразована энергия плазменной струи.

Мощность генератора пропорциональна проводимости плазмы, квадрату скорости струи и квадрату индукции магнитного поля и может достигать нескольких мегаватт. Расчеты показывают, что коэффициент полезного действия у МГД-генератора может достигать 60 %, что в полтора раза больше, чем у лучших современных тепловых электростанций. Значит, только одна станция мощностью миллион киловатт, переведенная на новейшую технику, смогла бы ежегодно экономить 500 тыс. т топлива. Однако этот генератор может вырабатывать лишь постоянный ток.

Для построения МГД-генераторов потребовалось решить многочисленные технические проблемы, прежде всего подобрать жаропрочные материалы для футеровки внутренней поверхности канала генератора, создать электроды для вывода тока из струи плазмы во внешнюю электрическую цепь и др. Надежность и продолжительность работы электродов — общая проблема всех генераторов. При температуре плазмы в несколько тысяч градусов электроды весьма недолговечны. Как во всяком сравнительно новом деле, имеется целый ряд проблем, который еще необходимо преодолеть. Поэтому МГД-генераторы пока не получили широкого распространения.

**Плазменный двигатель.** В настоящее время широкое распространение получили плазменные ракетные двигатели. Принцип их действия основан на выбрасывании через сопло плазменной струи, в результате чего создается реактивная сила тяги.

Заряды можно ускорить электростатическим полем. Однако электроны и ионы будут двигаться в противоположных направлениях и тяга будет отсутствовать. Поэтому необходимо «изъять» более легкие электроны из процесса ускорения, что представляет собой сложную техническую задачу — электроны притягиваются к ионам.

Устройство плазменного ионного двигателя показано на рис. 12.12. Нейтральный газ ксенон из бака подается через металлический кольцевой анод с отверстиями в двустенную (кольцевую) керамическую газоразрядную камеру, в которой он при бомбардировке высокоэнергетическими электронами ионизируется. Для этого электроны разгоняются электрическим полем, существующим между анодом и катодом-компенсатором, между которыми существует разность потенциалов в несколько сотен вольт. В керамической газоразрядной камере электромагниты создают радиальное магнитное поле  $B \leq 0,1$  Тл, улучшающее формирование ионной струи.

Тяжелые ионы ксенона ускоряются электрическим полем, создаваемым вдоль оси двигателя с помощью сеток. Между сетками поддерживается большая разность потенциалов  $\sim 1000$  В. Тяжелые ионы почти не отклоняются магнитным полем, а электроны навиваются на линии индукции магнитного



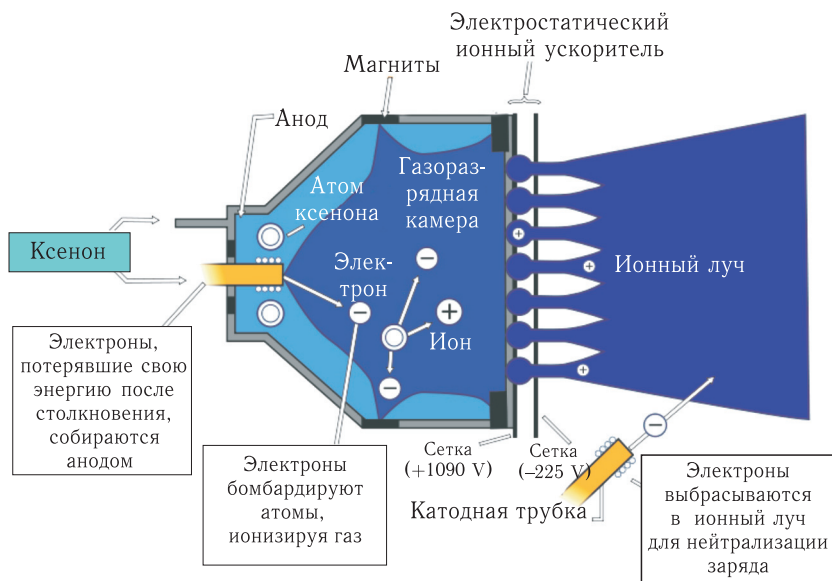


Рис. 12.12

поля подобно тому, как это происходит в магнитной ловушке. Пойманные затем в катодную трубку, они выбрасываются из двигателя под небольшим углом к соплу и потоку ионов. Это позволяет сохранять электрическую нейтральность корпуса корабля и избежать нежелательного притяжения ионов к двигателю.

На рис. 12.13 представлены фотографии российских ионных двигателей. У всех двигателей катодные трубки направлены под углом к потоку ионов.

Таким образом, для их работы необходим только газ (желательно с большой атомной массой) и источник электроэнергии. Таким источником на космических аппаратах являются панели солнечных батарей.

Ионные двигатели имеют очень небольшую тягу, порядка 50–100 миллиньютонов, поэтому это абсолютно недостаточно при перемещении в атмосфере Земли. Но в космосе, где нет практически никаких сопротивлений, ионный двигатель при длительной работе может разогнать космический аппарат до значительных скоростей. Двигателю американского корабля с межпланетной станцией «Dawn» для изучения двух крупнейших астероидов

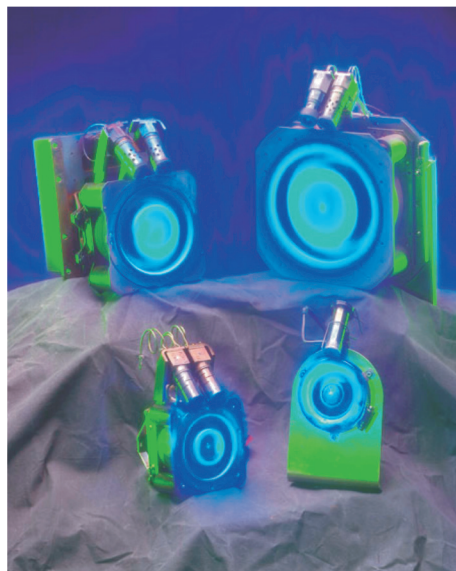


Рис. 12.13

основного пояса — Весты и Цереры, стартовавшего в 2007 г., для полета в течении почти 6 лет потребуется всего 425 кг ксенона.

Для сравнения, для корректировки орбиты МКС с помощью обычных ракетных двигателей каждый год затрачивается 7,5 т горючего.

**Большой адронный коллайдер (БАК).** (от англ. «collide» — сталкиваться; международное название — Large Hadron Collider, LHC) — ускоритель заряженных частиц на встречных пучках, предназначенный для разгона протонов и тяжелых ионов (ионов свинца) и изучения продуктов их соударений. Коллайдер построен в научно-исследовательском центре Европейского совета ядерных исследований (ЦЕРН) на границе Швейцарии и Франции, недалеко от Женевы.

Ускоритель построен на том же месте, где раньше находился Большой электрон-позитронный коллайдер. Длина туннеля составляет 26 659 м, а глубина его залегания — от 50 до 175 м.

БАК является самой крупной экспериментальной установкой в мире. В строительстве и исследованиях участвовали и участвуют более 10 тыс.

ученых и инженеров из более чем 100 стран.

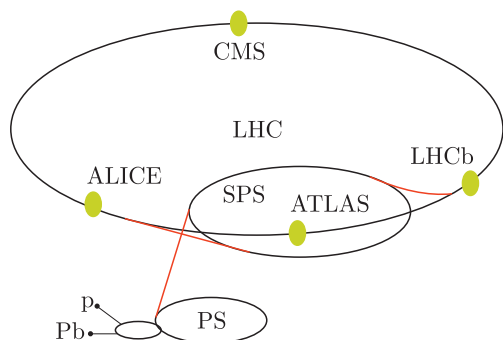


Рис. 12.14

На рис.12.14 показана схема ускорителя, представляющего собой по-существу каскад ускорителей. Траектория протонов  $p$  и тяжелых ионов свинца  $Pb$  начинается в линейных ускорителях (в точках  $p$  и  $Pb$  соответственно). Затем частицы попадают в бустер (ускоритель) протонного синхротрона (PS), через него — в протонный суперсинхротрон (SPS) и, наконец, непосредственно в туннель LHC.

В нем построены два транспортных канала, по которым в противоположных направлениях движутся сталкивающиеся частицы. Каналы пересекаются в четырех местах, в которых находятся детекторы ALICE, CMS, LHCb и ATLAS для регистрации «продуктов» столкновения. Фотография фрагмента канала и детектора ATLAS показана на рис. 12.15. Находящиеся внутри детектора чувствительные датчики содержат около 10 млрд транзисторов, почти так же много, как звезд в Млечном Пути.

В каналах формируются сгустки, содержащие порядка  $10^8$  протонов в каждом, разгоняемых до скоростей  $v = 0,999999991 c$ . Длина сгустка составляет от 3-х до 5-ти сантиметров, а поперечный размер около 16 мкм. Одновременно в кольце коллайдера находится около 3000 сгустков, претерпевающих  $6 \cdot 10^8$  столкновений в секунду. Если принять длину канала равной 27 км, то среднее расстояние между сгустками будет около 9 м.

Поскольку релятивистский фактор  $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2} \approx 7 \cdot 10^3$ , то для движения протонов с массой  $m_p = 1,67 \cdot 10^{-27}$  кг по окружности радиуса



Рис. 12.15

$R = 4,25$  км индукция магнитного должна быть равна

$$B = \frac{\gamma m_p V}{|e| R} \approx 5 \text{ Тл.} \quad (12.8)$$

Поэтому для удержания, коррекции и фокусировки протонных сгустков используются 1624 сверхпроводящих магнита, общая длина которых превышает 22 км! Магниты работают при температуре 1,9 К ( $-271^\circ\text{C}$ ), что немного ниже температуры перехода гелия в сверхтекучее состояние.

Одной из основных целей проекта является экспериментальная проверка Стандартной модели и доказательство существования бозона Хиггса — частицы, предсказанной шотландским физиком П. Хиггсом в 1960 г. Бозон Хиггса является квантом так называемого поля Хиггса, при прохождении через которое частицы обретают массу. Сам бозон нестабилен, и по расчетам, должен иметь массу более  $120 \text{ ГэВ}/c^2$ . Поэтому суммарная энергия сталкивающихся протонов намного превосходит энергию покоя бозона и достигает 14 ТэВ.

**ЛЕКЦИЯ 13**

**Магнитное поле в веществе.** При внесении некоторых тел во внешнее магнитное поле они намагничиваются и становятся сами источниками магнитного поля. В результате, магнитное поле будет являться суперпозицией внешнего и индуцированного полей.

Вещества, способные намагничиваться, называются магнетиками. Большинство веществ намагничиваются слабо. Сильными магнитными свойствами обладают только *ферромагнетики*: железо, никель, кобальт, множество их сплавов и редкоземельные элементы.

По современным представлениям источниками индуцированного магнитного поля являются: орбитальное движение электронов вокруг ядер (микротоки Ампера), собственное вращение электронов (спин) и собственное вращение ядер. Эти движения зарядов называют молекулярными токами.

В отсутствие внешнего поля магнитные дипольные моменты, соответствующие этим движениям, ориентированы хаотично, и индуцированное ими среднее поле будет равно нулю. При наложении внешнего поля происходит ориентация магнитных диполей и появляется индуцированное поле.

Индукция магнитного поля в веществе (подобно электрическому полю, см. лекцию 4) определяется усреднением по физически малому объему резко изменяющейся на масштабах межатомных расстояний индукции  $\mathbf{B}_{\text{микро}}$  микроскопического поля:

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_{\text{макро}} = \langle \mathbf{B}_{\text{микро}} \rangle = \frac{1}{\Delta V} \int_V \mathbf{B}_{\text{микро}} \cdot dV.$$

Если формально принять, что источниками магнитного поля являются токи проводимости  $I$  в проводниках и молекулярные токи  $I_{\text{мол}}$  (также усредненные по малому объему), то уравнения Максвелла для постоянного магнитного поля в интегральной ((10.16), (10.35)) и дифференциальной ((10.21), (10.36)) формах, с учетом вещества, примут вид:

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I + \mu_0 I_{\text{мол}}, \quad (13.1)$$

$$\text{rot } \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \mu_0 \mathbf{j}_{\text{мол}}, \quad (13.2)$$

$$\iint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0, \quad (13.3)$$

$$\text{div } \mathbf{B} = 0. \quad (13.4)$$

Сразу обращает на себя внимание тот факт, что в верхние два уравнения входит сила молекулярного тока  $I_{\text{мол}}$  и объемная плотность  $\mathbf{j}_{\text{мол}}$  этого тока, которые нам пока неизвестны. Ситуация напоминает вычисление поля в диэлектрике, связанные заряды которого необходимо определить. В магнетизме молекулярные токи выражаются через намагниченность магнетика.

**Вектор намагненности.** Количественно намагненность магнетика описывается магнитным дипольным моментом единицы объема, или вектором намагненности  $\mathbf{J}$ . Через него можно выразить молекулярные токи.

Рассмотрим элемент магнетика в виде скошенного цилиндра с длиной боковой стороны  $dl$  и площадью основания  $S$  (рис. 13.1). Если в намагненном состоянии все дипольные магнитные моменты  $\mathbf{p}_{mi}$  атомов выстроились вдоль единичного вектора  $\mathbf{n}_0$ , перпендикулярного основаниям цилиндра, то сумма всех микротоков атомов будет эквивалентна поверхностному молекулярному току  $dI_{\text{мол}}$ , протекающему по боковой поверхности цилиндра. Тогда магнитный дипольный момент  $d\mathbf{p}_m$  этого фрагмента будет равен

$$d\mathbf{p}_m = \mathbf{J} \cdot dV = \mathbf{J} \cdot S \cdot dl \cdot \cos \alpha = dI_{\text{мол}} \cdot S \cdot \mathbf{n}_0. \quad (13.5)$$

Отсюда получаем

$$dI_{\text{мол}} = \mathbf{J} \cdot d\mathbf{l}. \quad (13.6)$$

Это выражение можно записать в векторном виде для поверхностной плотности молекулярных токов

$$\mathbf{i}_{\text{мол}} = \mathbf{J} \times \mathbf{n}, \quad (13.7)$$

где  $i_{\text{мол}} = dI_{\text{мол}}/dl$ ,  $\mathbf{n}$  — внешняя нормаль к поверхности магнетика.

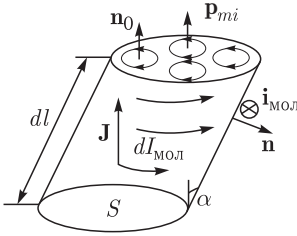


Рис. 13.1

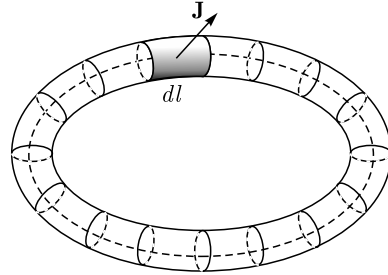


Рис. 13.2

Если выстроить из этих скошенных цилиндров магнетик в форме тора (рис. 13.2), то проинтегрировав (13.6) по замкнутому контуру внутри тора, получим выражение для молекулярного тока, протекающего внутри контура

$$I_{\text{мол}} = \oint dI_{\text{мол}} = \oint \mathbf{J} \cdot d\mathbf{l}. \quad (13.8)$$

Подставляя это выражение в (13.1), получаем

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I + \mu_0 \oint \mathbf{J} \cdot d\mathbf{l}. \quad (13.9)$$

Введем вектор напряженности магнитного поля, определив его как

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{J}. \quad (13.10)$$

Тогда (13.9) превратится в уравнение, содержащее лишь известные токи проводимости:

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I. \quad (13.11)$$

Если устремить радиус тора к нулю, то от (13.8) переходим к объемной плотности молекулярного тока

$$\mathbf{j}_{\text{мол}} = \text{rot } \mathbf{J}. \quad (13.12)$$

Это позволяет уравнение (13.2) записать в виде

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{j}. \quad (13.13)$$

Итак, *напряженность магнитного поля определяется токами проводимости*. Единицей ее измерения является 1 А/м.

При наличии магнетика вектор-потенциал будет определяться плотностью токов проводимости и молекулярных токов (объемных и поверхностных):

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = k \int_V \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV + k \int_V \frac{\text{rot } \mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV + k \int_S \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}') \times \mathbf{n}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dS, \quad (13.14)$$

а индукция поля по-прежнему равна ротору вектор-потенциала:  $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$ . Поэтому  $\text{div } \mathbf{B} = 0$ .

Отметим, что объемные молекулярные токи возникают при неоднородной намагниченности, а поверхностные — на границах раздела областей с разной намагниченностью.

В вакууме  $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$ , и индукция и напряженность отличаются лишь величиной и размерностью.

В слабых магнетиках индукция, намагниченность и напряженность связаны линейными соотношениями. Поэтому знание любой из трех векторных величин позволяет без труда определять две другие.

В ферромагнетиках ситуация может быть гораздо сложнее. Как будет показано далее, *внутри постоянного магнита*  $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}$ , а *напряженность магнитного поля, в соответствии с (13.10),*  $\mathbf{H} = 0$ !

Завершая обсуждение этой темы, проведем аналогию между электрическим и магнитными полями с помощью таблицы.

Электричество		Магнетизм
Потенциальное поле $\mathbf{E}$	$\Leftrightarrow$	Вихревое поле $\mathbf{B}$
Вектор поляризации $\mathbf{P}$	$\Leftrightarrow$	Вектор намагниченности $\mathbf{J}$
Индукция $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$	$\Leftrightarrow$	Напряженность $\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{J}$
Плотность связанного заряда $\rho' = -\text{div } \mathbf{P}$	$\Leftrightarrow$	Плотность молекулярного тока $\mathbf{j}_{\text{мол}} = \text{rot } \mathbf{J}$
$\text{div } \mathbf{E} \neq 0$ (линии напряженности имеют начало и конец)	$\Leftrightarrow$	$\text{div } \mathbf{B} = 0$ (линии индукции замкнуты)
$\text{div } \mathbf{D} = \rho \neq 0$ (линии индукции имеют начало и конец)	$\Leftrightarrow$	$\text{div } \mathbf{H} = -\text{div } \mathbf{J} \neq 0$ (линии напряженности имеют начало и конец)

**Магнитная восприимчивость и магнитная проницаемость.** Как показывает опыт, в слабых магнетиках намагниченность пропорциональна индукции магнитного поля:  $\mathbf{J} = \frac{\text{const}}{\mu_0} \cdot \mathbf{B}$ .

Однако исторически так сложилось, что принято описывать связь между намагниченностью вещества и напряженностью магнитного поля в нем. Для этого с помощью этого соотношения можно в (13.10) исключить индукцию поля и записать

$$\mathbf{J} = \left( \frac{1 - \text{const}}{\text{const}} \right) \mathbf{H} = \chi \cdot \mathbf{H}, \quad (13.15)$$

где  $\chi$  — магнитная восприимчивость вещества. Подставляя (13.15) в (13.10), получаем

$$\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{J}) = \mu_0(1 + \chi)\mathbf{H} = \mu_0\mu\mathbf{H}. \quad (13.16)$$

Величина

$$\mu = (1 + \chi) \quad (13.17)$$

называется *магнитной проницаемостью* вещества.

Слабые магнетики подразделяются на пара- и диамагнетики.

У парамагнетиков магнитная восприимчивость положительна, и ее значение лежит в диапазоне  $\chi = (1-10^3) \cdot 10^{-6}$ . К парамагнетикам относятся  $\text{O}_2$ ,  $\text{Al}$ ,  $\text{Pt}$ ,  $\text{FeCl}_3$  и др.

У диамагнетиков магнитная восприимчивость отрицательна и, как правило, по абсолютной величине она значительно меньше, чем у парамагнетиков:  $\chi = -(1-10) \cdot 10^{-6}$ . К диамагнетикам относятся  $\text{N}_2$ ,  $\text{CO}_2$ ,  $\text{H}_2\text{O}$ ,  $\text{Ag}$ ,  $\text{Bi}$  и др.

У сильных магнетиков ( $\text{Fe}$ ,  $\text{Ni}$ ,  $\text{Co}$ ,  $\text{W}$  и др., а также сплавы), положительная магнитная восприимчивость и проницаемость зависят от величины поля нелинейным образом. Такие вещества называются ферромагнетиками. Их магнитная восприимчивость в максимуме может достигать величин  $\chi \leq 10^6$ .

**Граничные условия для векторов  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{H}$ .** На границе раздела двух магнетиков магнитное поле скачкообразно изменяется.

Граничное условие для нормальной компоненты вектора индукции получается из уравнения (13.3), если интегрирование проводить по поверхности небольшого цилиндра с площадью основания  $S$  и высотой  $h \ll \sqrt{S}$ . Тогда

$$\Phi_B = -B_{1n}S + B_{2n}S = 0, \quad \text{или} \quad B_{2n} - B_{1n} = 0. \quad (13.18)$$

Таким образом, *нормальная компонента вектора индукции на границе раздела двух магнетиков непрерывна.*

Так как  $B_{1n} = \mu_0\mu_1 H_{1n}$ ,  $B_{2n} = \mu_0\mu_2 H_{2n}$ , то *нормальная компонента вектора напряженности при  $\mu_1 \neq \mu_2$  претерпевает разрыв.*

Если взять контур интегрирования в виде небольшого прямоугольника  $l \times h$ , вытянутого вдоль границы раздела, то при  $h \ll l$  уравнение (13.11) примет вид  $H_{1\tau}l - H_{2\tau}l = i \cdot l$ , где  $i$  — поверхностная плотность тока проводимости. Если ввести вектор  $\mathbf{i}$  для поверхностной плотности тока, то в векторном виде это граничное условие с использованием нормального  $\mathbf{n}$  и тангенциального  $\boldsymbol{\tau}$  векторов (рис. 13.3) примет вид

$$(\mathbf{n} \times \mathbf{H}_2) - (\mathbf{n} \times \mathbf{H}_1) = \mathbf{i}. \quad (13.19)$$

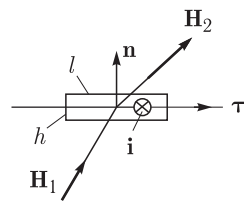


Рис. 13.3

Разрыв тангенциальной компоненты вектора напряженности происходит лишь при наличии токов проводимости на границе раздела. В отсутствие токов тангенциальная компонента вектора напряженности непрерывна.

Так как  $B_{1\tau} = \mu_0 \mu_1 H_{1\tau}$ ,  $B_{2\tau} = \mu_0 \mu_2 H_{2\tau}$ , то тангенциальная компонента вектора индукции при  $\mu_1 \neq \mu_2$  даже в отсутствие токов претерпевает разрыв.

Соотношения (13.18) и (13.19) называются граничными условиями для векторов **B** и **H**.

**Преломление линий индукции магнитного поля.** Из граничных условий легко получить закон преломления линий вектора индукции магнитного поля (вектора напряженности) на границе раздела двух магнетиков.

На рис. 13.4а изображены линии индукции однородного магнитного поля, а на рис. 13.4б — линии напряженности для случая  $\mu_2 > \mu_1$ . Найдем соотношения между углом «падения»  $\alpha_1$  и углом «преломления»  $\alpha_2$  линий.

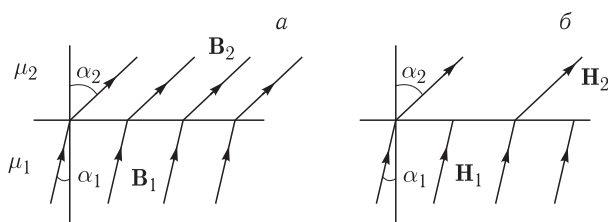


Рис. 13.4

Граничное условие (13.18) примет вид  $B_1 \cos \alpha_1 = B_2 \cos \alpha_2$ , а граничное условие (13.19)  $B_1 \sin \alpha_1 / \mu_1 = B_2 \sin \alpha_2 / \mu_2$ . Деля второе равенство на первое, получаем закон преломления линий:

$$\mu_2 \operatorname{tg} \alpha_1 = \mu_1 \operatorname{tg} \alpha_2. \quad (13.20)$$

**Влияние формы магнетика на его намагничивание.** Опыт показывает, что намагничивание магнетика, как и поляризация диэлектрика, зависит от его формы. На рис. 13.5 показана фотография втягивания ферромагнитных проволочек внутрь катушки, создающей магнитное поле. Если проволоки связать в пучок, то они образуют фактически стержень, радиус которого

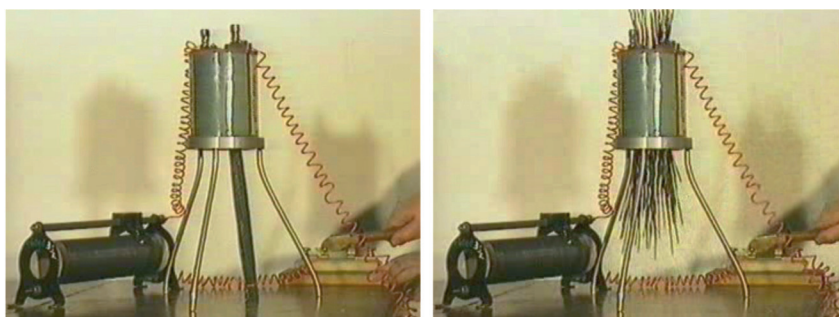


Рис. 13.5



намного больше радиуса одной проволоки. При включении электрического тока в катушке этот стержень не затягивается в катушку. По отдельности (враспынную) проволоочки затягиваются. Это свидетельствует о том, что единица объема стержня намагнитилась хуже, чем единица объема отдельной проволоки той же длины. Другими словами, чем больше отношение длины цилиндрического магнетика к его диаметру, тем сильнее он намагничивается.

Рассчитаем связь намагниченности тела с его формой. Возьмем длинную катушку (соленоид) длины  $l$  и числом витков  $N$  и пропустим по ней электрический ток  $I$ . Внутри нее будет однородное поле с индукцией  $B_0 = \mu_0 NI/l = \mu_0 i$  ( $i$  — поверхностная плотность тока проводимости). Напряженность однородного поля  $H_0 = B_0/\mu_0 = i$ .

Вставим в катушку круглый стержень из парамагнетика (рис. 13.6). По его поверхности потечет молекулярный ток с плотностью  $i_{\text{мол}}$ , который, согласно (13.6), равен  $i_{\text{мол}} = dI_{\text{мол}}/dl = J$ . Его величина (как и величина  $J$ ) будет зависеть от длины стержня. Этот молекулярный ток создаст поле с индукцией  $B_{\text{мол}}$ , поэтому индукция поля  $B = B_0 + B_{\text{мол}}$ . Напряженность поля в стержне

$$H = \frac{B}{\mu_0} - J = \frac{B_0 + B_{\text{мол}}}{\mu_0} - J = H_0 + \frac{B_{\text{мол}}}{\mu_0} - J.$$

Если стержень очень короткий (подобен монете), то  $B_{\text{мол}} = 0$ ,  $B = B_0$ ,

$$H = H_0 - J. \quad (13.21)$$

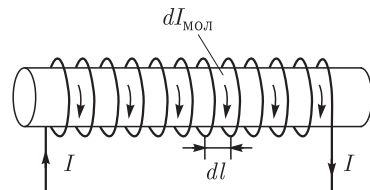


Рис. 13.6

Если стержень очень длинный, то он однородно намагнитится и уподобится соленоиду с поверхностным молекулярным током. Поэтому  $B_{\text{мол}} = \mu_0 \cdot i_{\text{мол}} = \mu_0 \cdot J$ ,  $B = B_0 + B_{\text{мол}} = B_0 + \mu_0 \cdot J$ ,

$$H = H_0. \quad (13.22)$$

Отсюда следует, что намагниченность (13.15) длинного стержня будет больше намагниченности короткого.

При произвольной длине стержня напряженность поля внутри него получается равной

$$H = H_0 - \beta \cdot J. \quad (13.23)$$

Поскольку  $J = \chi \cdot H$ , то

$$H = \frac{H_0}{1 + \beta\chi}, \quad B = \mu_0 \mu H = \frac{(1 + \chi)B_0}{1 + \beta\chi}. \quad (13.24)$$

Здесь  $\beta$  — фактор формы, зависящий от длины стержня: для диска он равен единице, а для длинного стержня — нулю.

Расчеты показывает, что во внешнем однородном поле лишь магнетики в форме эллипсоида однородно намагничиваются. На рис. 13.7 изображен магнетик в форме эллипсоида, который помещен во внешнее однородное поле  $H_0$ . Для расчета поля в магнетике нужно записать соотношения (13.23) и (13.24) в проекциях на координатные оси, которые направим вдоль полуосей

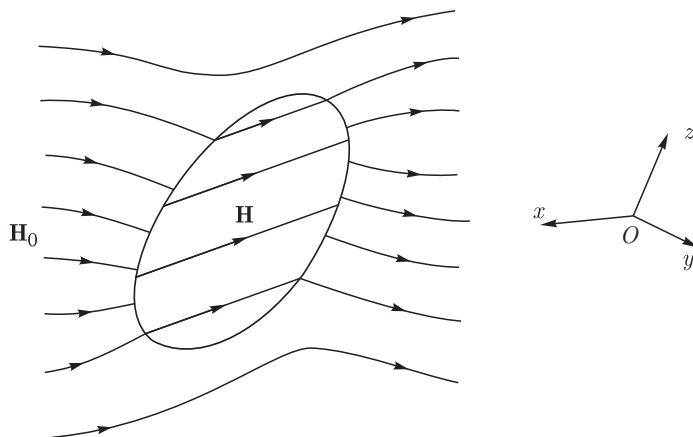


Рис. 13.7

эллипсоида. Разложим внешнее поле на три компоненты относительно этой системы координат. Тогда компоненты поля в магнетике будут равны

$$\begin{aligned} H_x &= H_{0x} - \beta_x J_x = \frac{H_{0x}}{1 + \beta_x \chi}; & H_y &= H_{0y} - \beta_y J_y = \frac{H_{0y}}{1 + \beta_y \chi}; \\ H_z &= H_{0z} - \beta_z J_z = \frac{H_{0z}}{1 + \beta_z \chi}. \end{aligned} \quad (13.25)$$

$$B_x = \frac{(1 + \chi)B_{0x}}{1 + \beta_x \cdot \chi}; \quad B_y = \frac{(1 + \chi)B_{0y}}{1 + \beta_y \cdot \chi}; \quad B_z = \frac{(1 + \chi)B_{0z}}{1 + \beta_z \cdot \chi}. \quad (13.26)$$

Здесь  $\beta_x, \beta_y, \beta_z$  — факторы формы эллипсоида, значения которых определяются соотношением длин его полуосей. Можно показать, что они связаны соотношением

$$\beta_x + \beta_y + \beta_z = 1. \quad (13.27)$$

Если эллипсоид вытянут вдоль оси  $Oz$ , как это изображено на рисунке, то  $\beta_z < \beta_x, \beta_y$ . Векторы  $\mathbf{H}$  и  $\mathbf{J}$  при произвольной ориентации эллипсоида составляют некоторый угол с вектором  $\mathbf{H}_0$ . Как будет показано ниже, это приводит к возникновению момента сил, действующего на эллипсоид.

Диск, шар и цилиндр являются его предельными формами. Очевидно, что у шара  $\beta_x = \beta_y = \beta_z = 1/3$ , а у длинного цилиндра, вытянутого вдоль оси  $Oz$ ,  $\beta_x = \beta_y = 1/2$ ,  $\beta_z = 0$ .

В заключение отметим: у *слабых магнетиков*  $\beta\chi \ll 1$ , поэтому  $\mathbf{B} = (1 + \chi)\mathbf{B}_0$ ,  $\mathbf{J} = \chi\mathbf{B}_0/\mu_0$ , и *форма не играет существенной роли!*

У *сильных магнетиков*  $\beta\chi \gg 1$ , поэтому  $\mathbf{B} = \mathbf{B}_0/\beta$ ,  $\mathbf{J} = \mathbf{B}_0/(\mu_0\beta)$ , и *определяющую роль в намагничивании играет именно форма!* От магнитной восприимчивости намагничивание зависит слабо.

В безграничной среде ( $\mu = \text{const}$ ), в которой есть токи проводимости с плотностью  $\mathbf{j}$ , можно уравнение (13.4) записать в виде

$$\text{div } \mathbf{B} = \mu_0 \mu \text{div } \mathbf{H} = 0. \quad (13.28)$$

Это означает, линии поля  $\mathbf{H}$  замкнуты. При наличии границ раздела они (в отличие от всегда замкнутых линий индукции) претерпевают разрыв.

Уравнение (13.13) примет вид

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0 \mu} \operatorname{rot} \mathbf{B} = \mathbf{j}, \text{ или } \operatorname{rot} \mathbf{B} = \mu_0 \mu \mathbf{j}. \quad (13.29)$$

Если напряженность электрического поля в безграничном диэлектрике уменьшается в  $\epsilon$  раз, то индукция магнитного поля в безграничном магнетике увеличивается в  $\mu$  раз!

**Силы, действующие на магнетик в магнитном поле.** Проведем эксперимент с жидким кислородом, являющимся парамагнетиком (рис. 13.8). Если между полюсами электромагнита, создающего сильное горизонтальное осесимметричное поле, осторожно лить жидкий кислород, то капли (шарики) кислорода будут задерживаться между полюсами. Это происходит из-за того, что капли затягиваются в приосевую область, где максимальна индукция внешнего поля.



Рис. 13.8

Наоборот, шарик из висмута (диамагнетика), подвешенный на нити, будет выталкиваться из области сильного магнитного поля.

Поскольку векторы намагниченности направлены в разные стороны, то в рассматриваемой нами модели по поверхности магнетиков (шариков) текут молекулярные токи в разных направлениях (рис. 13.9). В неоднородном поле сила Ампера будет затягивать в область сильного поля каплю кислорода (а) и выталкивать шарик из висмута (б). Если изменить направление внешнего поля на противоположное, то развернутся векторы намагниченности, однако силы останутся прежними.

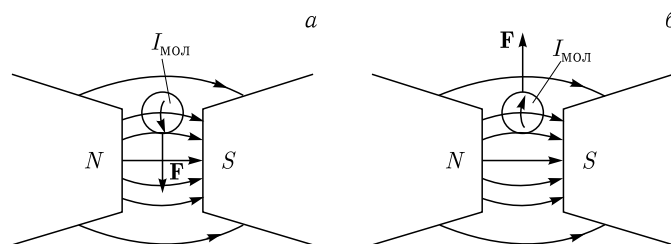


Рис. 13.9

Чтобы вычислить силы, введем силовую функцию магнетика во внешнем магнитном поле по аналогии с силовой функцией тока. Рассмотрим модель магнетика, состоящего из молекул с молекулярными токами. Дипольный магнитный его элементарного объема  $dV = S \cdot dl$  будет равен

$$d\mathbf{p}_m = \mathbf{J} \cdot dV = \mathbf{J} \cdot S \cdot dl = dI_{\text{мол}} S. \quad (13.30)$$

Если мысленно (виртуально) сместить магнетик как целое на величину  $\delta \mathbf{r}$  или повернуть на угол  $\delta \alpha$  во внешнем поле, то поле совершит виртуальную работу  $\delta A = \mathbf{F} \cdot \delta \mathbf{r}$  или  $\delta A = M \cdot \delta \alpha$ . При этом индукция поля  $\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_{\text{мол}}$  изменится на величину  $\delta \mathbf{B} = \delta \mathbf{B}_0$ , так как при неизменной форме ферромагнетика  $\delta \mathbf{B}_{\text{мол}} = 0$ . Силовая функция магнетика этого объема  $dU = -dI_{\text{мол}} \cdot \Phi$  изменится на величину

$$\delta(dU) = -dI_{\text{мол}} \cdot \delta \Phi = -dI_{\text{мол}} \cdot \mathbf{S} \cdot \delta \mathbf{B}_0 = (-\mathbf{J} \cdot \delta \mathbf{B}_0 \cdot dV). \quad (13.31)$$

Если учесть, что  $\mathbf{J} = \frac{\text{const}}{\mu_0} \cdot \mathbf{B}$ , то  $\mathbf{J} \cdot \delta \mathbf{B}_0 = \frac{1}{2} \delta(\mathbf{J} \cdot \mathbf{B}_0)$ .

Поэтому силовая функция магнетика во внешнем поле равна

$$U = -\frac{1}{2} \int_V \mathbf{J} \cdot \mathbf{B}_0 \cdot dV. \quad (13.32)$$

Поскольку  $\delta A = -\delta(U)$ , то, дифференцируя силовую функцию по линейной или угловой координате, можно определить соответствующую силу или момент сил.

Применим (13.32) для расчета сил, действующих на шарики. Направим координатную ось  $Ox$  перпендикулярно магнитному полю, ось  $Oz$  вдоль поля, как это изображено на рис. 13.10. Будем считать, что поле зависит

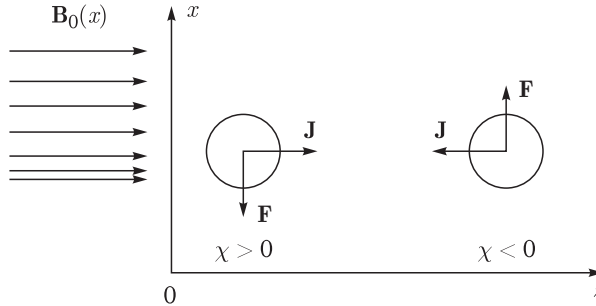


Рис. 13.10

лишь от одной координаты, и эта зависимость  $B_{0z}(x)$  известна. Кроме того, предполагается, что размер шарика мал по сравнению с характерным масштабом изменения поля. Тогда с учетом (13.25)  $J_z(x) = \frac{\chi H_{0z}(x)}{1 + \beta \chi} = \frac{\chi B_{0z}(x)}{\mu_0(1 + \beta \chi)}$ , силовая функция равна

$$U(x) = -\frac{1}{2} \frac{\chi B_{0z}^2(x)}{\mu_0(1 + \beta \chi)} V, \quad (13.33)$$

а сила

$$F_x = -\frac{dU(x)}{dx} = \frac{1}{2} \frac{dB_{0z}^2(x)}{dx} \frac{\chi V}{\mu_0(1 + \beta \chi)}. \quad (13.34)$$

Обобщая последнюю формулу для силы, действующей на единицу объема магнетика, получаем

$$\mathbf{f} = \frac{\mathbf{F}}{V} = \frac{1}{2} \frac{\chi}{\mu_0(1 + \beta \chi)} \nabla B_0^2. \quad (13.35)$$

Отсюда видно что для парамагнетика ( $\chi > 0$ ) сила направлена в сторону возрастания поля, а для диамагнетика ( $\chi < 0$ ) — в противоположном направлении.

Проведем теперь эксперимент с вытянутым вдоль одного направления магнетиком. Для этого используем небольшие алюминиевый (парамагнетик) и висмутовый (диамагнетик) стержни. Длина обоих магнетиков около 2 см. Подвесим за середину оба магнетика на тонкой нити и поместим (по очереди) между полюсами магнита (рис. 13.11). Если расстояние между полюсами не намного превышает длину магнетиков, то парамагнетик установится вдоль

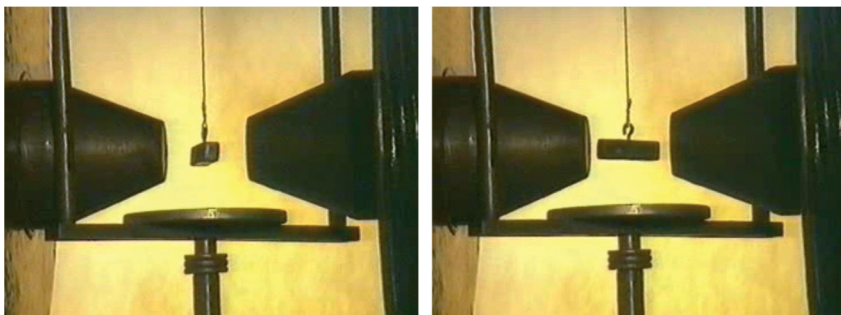


Рис. 13.11

поля, а диамагнетик — поперек поля. Однако если раздвинуть полюсы так, чтобы расстояние между ними было в несколько раз больше длины магнетиков, то они оба выстроятся вдоль поля.

Такое, на первый взгляд странное поведение объясняется тем, что наряду с силой, на вытянутые магнетики будет действовать и момент силы. Его можно вычислить также с помощью силовой функции (13.32). Для стержня, составляющего с направлением внешнего поля некоторый угол  $\alpha$  (рис. 13.12),  $B_{0x} = B_0 \sin \alpha$ ,  $B_{0z} = B_0 \cos \alpha$ . С учетом (13.33) силовая функция запишется в виде

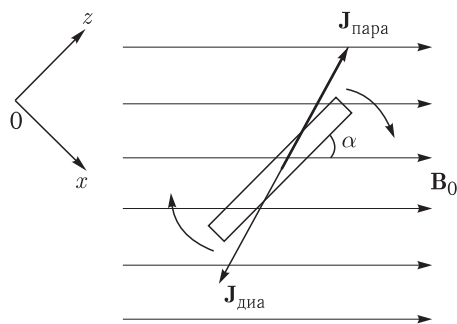


Рис. 13.12

$$U(\alpha) = -\frac{1}{2} \frac{\chi B_0^2 \sin^2 \alpha}{\mu_0(1 + \beta_x \chi)} V - \frac{1}{2} \frac{\chi B_0^2 \cos^2 \alpha}{\mu_0(1 + \beta_z \chi)} V. \quad (13.36)$$

Поэтому момент силы

$$M = -\frac{dU}{d\alpha} = \frac{\chi^2 B_0^2 V}{2\mu_0} \left[ \frac{\beta_z - \beta_x}{(1 + \beta_x \chi)(1 + \beta_z \chi)} \right] \sin 2\alpha. \quad (13.37)$$

Момент силы возникает из-за несовпадения векторов намагниченности  $\mathbf{J}$  как пара-, так и диамагнетика с вектором индукции внешнего поля. Поэтому момент силы обращается в ноль при  $\alpha = 0$  и  $\alpha = \pi/2$ . Однако второе положение неустойчиво. Если стержень слегка развернуть от положения равновесия

$\alpha = 0$ , то возникнет отрицательный момент сил ( $\beta_z < \beta_x$ ), стремящийся вернуть стержень в положение равновесия вне зависимости от знака поляризуемости.

Так и происходит в эксперименте в однородном поле, когда полюсы разведены на большое расстояние (линии индукции почти параллельны). При сближении полюсов поле становится неоднородным в направлении оси  $Ox$ . Появляются силы, по разному действующие на пара- и диамагнетик. На рис. 13.13

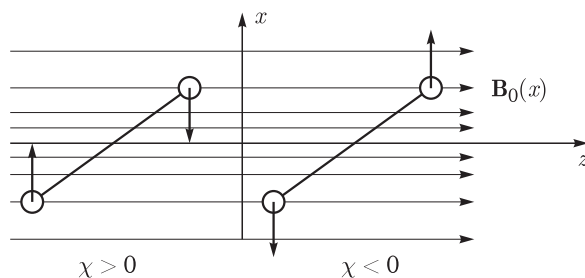


Рис. 13.13

магнетики представлены в виде гантелей и показаны силы, действующие на магнетики, находящиеся на концах гантелей. Действие этих сил перекрывает более слабое действие ориентирующего момента сил.

**Силы на границе раздела магнетиков.** Как и в случае жидких диэлектриков, на границе раздела двух магнетиков действуют силы давления. На рис. 13.14 показана U-образная трубка, заполненная раствором хлористого

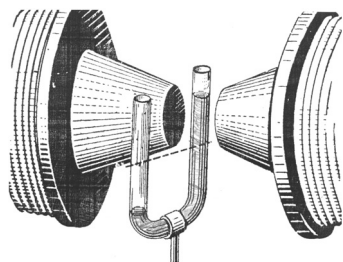


Рис. 13.14

железа. Одно из ее колен помещается между полюсами магнита, при этом уровень жидкости в нем находится около нижнего края полюсов, где особенно велика неоднородность поля. При включении магнитного поля уровень жидкости в этом колене повышается. Это свидетельствует о втягивании парамагнетика в область с большей индукцией магнитного поля.

Проведем расчет втягивающей поверхностной силы. Будем считать, что с одной стороны от границы находится магнетик с магнитной проницаемостью  $\mu$ , а с другой стороны — воздух. Видоизменим силовую функцию (13.32), записав подынтегральное выражение в симметричном виде

$$U = -\frac{1}{2} \int_V \mathbf{J} \cdot \mathbf{B}_0 \cdot dV = -\frac{1}{2} \int_V (\mathbf{B}\mathbf{H}_0 - \mathbf{B}_0\mathbf{H}) \cdot dV. \quad (13.38)$$

Здесь индексом ноль отмечено поле и индукция в воздухе, учтено, что  $\mathbf{J} = \mathbf{B}/\mu_0 - \mathbf{H}$ ,  $\mathbf{H}_0 = \mathbf{B}_0/\mu_0$ . При виртуальном смещении границы вверх работа сил давления со стороны магнетика

$$\delta A = f \cdot \delta V = -\delta U, \quad (13.39)$$

где  $f$  — сила, действующая на единицу площади поверхности,  $\delta V$  — приращение объема, занятого магнетиком в колене. Используя нормальные и тангенциальные компоненты напряженности и индукции вблизи границ раздела, запишем

$$-\delta U = \frac{1}{2} \delta V [(B_n H_{0n} + B_\tau H_{0\tau}) - (B_{0n} H_n + B_{0\tau} H_\tau)]. \quad (13.40)$$

Граничные условия дают:  $B_n = B_{0n}$ ,  $H_\tau = H_{0\tau}$ . Подставляя (13.40) в (13.39), с учетом граничных условий получаем

$$f = \frac{1}{2\mu_0} \left( \frac{\mu - 1}{\mu} \right) B_n^2 + \frac{\mu_0}{2} (\mu - 1) H_\tau^2. \quad (13.41)$$

В рассматриваемом эксперименте нормальная компонента вектора индукции практически отсутствует, поэтому в (13.41) можно пренебречь первым слагаемым. Полагая  $\mu - 1 = 2,5 \cdot 10^{-3}$ ,  $H_\tau = 10^5$  А/м, получаем  $f = 15$  Па. Этой силы достаточно, чтобы уровень жидкости (воды) поднялся вверх на высоту  $h = f/(\rho g) = 1,5$  мм.

**Магнитный потенциал.** Из многочисленных примеров, рассмотренных выше, видно, что линии магнитной индукции обвивают проводники с токами, поэтому магнитное поле является вихревым, а не потенциальным. Из уравнения (13.11) следует, что при наличии магнетиков циркуляция вектора напряженности по замкнутому контуру, охватывающему ток, равна силе этого тока:  $\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I$ .

А если контур не охватывает ток, то циркуляция равна нулю! Это значит, что в ограниченной области пространства, где нет токов проводимости, магнитное напряжение между двумя точками с использованием вектора  $\mathbf{H}$  формально может быть записано

$$U_{M12} = \int_1^2 \mathbf{H}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \psi_1 - \psi_2, \quad (13.42)$$

где  $\psi$  называется магнитным потенциалом. Тогда по аналогии с электростатикой можем записать

$$\mathbf{H} = -\nabla\psi, \quad (13.43)$$

$$\Delta\psi = 0. \quad (13.44)$$

Поскольку решение уравнения Лапласа хорошо известно во многих практически важных случаях, то налицо то преимущество, которое получается при оперировании с напряженностью, а не с индукцией магнитного поля.

**Пример 1.** В качестве примера рассчитаем потенциал и напряженность поля в случае магнетика в виде шара радиуса  $R$  и магнитной проницаемостью  $\mu$ , помещенного в однородное внешнее поле с напряженностью  $\mathbf{H}_0$ . Повторим выкладки, сделанные в лекции 5 при решении уравнения Лапласа.

Воспользуемся сферической системой координат и направим ось  $Oz$  вдоль вектора  $\mathbf{H}_0$ . С учетом осевой симметрии задачи уравнение Лапласа (5.32)

примет вид

$$\psi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \sin \vartheta \frac{\partial \psi}{\partial \vartheta} \right) = 0. \quad (13.45)$$

Его решение внутри шара  $\psi_1 = A_1 r \cos \vartheta + D_1 \cos \vartheta / r^2$ , а вне шара  $\psi_2 = A_2 r \cos \vartheta + D_2 \cos \vartheta / r^2$ , где четыре константы подлежат определению. Так как при  $r \rightarrow 0$  потенциал должен быть конечен, то  $D_1 = 0$ .

Поскольку  $r \cos \vartheta = z$ , то слагаемые с коэффициентами  $A_1$  и  $A_2$  описывают однородное поле.  $\psi_1 = A_1 r \cos \vartheta = A_1 z$ , и вектор напряженности однородного поля внутри шара имеет лишь одну компоненту  $H_{1z} = -A_1 > 0$ .

Слагаемое с коэффициентом  $D_2$  описывает поле магнитного диполя, убывающее с расстоянием  $r$ . При  $r \rightarrow \infty$  поле  $H_2$  должно совпадать с внешним однородным полем, поэтому  $\psi_2 \rightarrow -H_0 z = -H_0 r \cos \vartheta$ . Следовательно,  $A_2 = -H_0$ .

На поверхности шара непрерывны потенциал:  $\psi_1 = \psi_2$ , или

$$A_1 R \cos \vartheta = -H_0 R \cos \vartheta + D_2 \frac{\cos \vartheta}{R^2}, \quad (13.46)$$

и нормальные компоненты индукции поля:  $-\mu_0 \mu \frac{\partial \psi_1}{\partial r} \Big|_{r=R} = -\mu_0 \frac{\partial \psi_2}{\partial r} \Big|_{r=R}$ , или

$$-\mu A_1 \cos \vartheta = H_0 \cos \vartheta + 2D_2 \frac{\cos \vartheta}{R^3}. \quad (13.47)$$

Из (13.46) и (13.47) получаем

$$A_1 = -\frac{3H_0}{\mu + 2} = -H_{1z}; \quad D_2 = \frac{\mu - 1}{\mu + 2} R^3 H_0. \quad (13.48)$$

Таким образом,

$$\psi_1 = -\frac{3H_0}{\mu + 2} z, \quad \psi_2 = -H_0 z + \frac{\mu - 1}{\mu + 2} R^3 H_0 \frac{\cos \vartheta}{r^2} = -H_0 z + \frac{1}{4\pi} \frac{p_{\text{ш}} \cos \vartheta}{r^2}, \quad (13.49)$$

где дипольный магнитный момент шара

$$p_{\text{ш}} = \frac{\mu - 1}{\mu + 2} 4\pi R^3 H_0 = a_{\text{ш}} \cdot H_0, \quad a_{\text{ш}} = \frac{\mu - 1}{\mu + 2} 4\pi R^3. \quad (13.50)$$

Напряженность поля из (13.49) получается равной

$$\mathbf{H}_1 = -\nabla \psi_1 = \frac{3\mathbf{H}_0}{\mu + 2}, \quad \mathbf{H}_2 = -\nabla \psi_2 = \mathbf{H}_0 + \frac{1}{4\pi} \left[ \frac{3(\mathbf{p}_{\text{ш}} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5} - \frac{\mathbf{p}_{\text{ш}}}{r^3} \right]. \quad (13.51)$$

Таким образом, внутри шара поле однородно, вне шара поле является суперпозицией внешнего поля и индукционного поля магнитного диполя (см. (10.11)).

Сравнивая решение (13.51) с выражением (13.24) убеждаемся, что для шара  $\beta = 1/3$ . Индукция внутри шара  $\mathbf{B}_1 = \mu_0 \mu \mathbf{H}_1 = \frac{3\mu_0 \mu \mathbf{H}_0}{\mu + 2}$ , вне шара  $\mathbf{B}_2 = \mu_0 \mathbf{H}_2 = \mu_0 \mathbf{H}_0 + \frac{\mu_0}{4\pi} \left[ \frac{3(\mathbf{p}_{\text{ш}} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5} - \frac{\mathbf{p}_{\text{ш}}}{r^3} \right]$ .



На рис. 13.15 показаны линии напряженности и индукции магнитного поля внутри и вне шара. Линии индукции непрерывны:  $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$ , а линии напряженности претерпевают разрыв на поверхности шара:  $\operatorname{div} \mathbf{H} \neq 0$ .

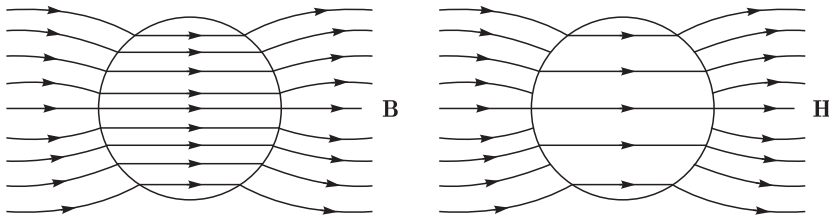


Рис. 13.15

**Физический смысл индукции и напряженности магнитного поля.** Напряженность магнитного поля была введена соотношением (13.10)

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{J}.$$

Она является суммой разных по физическому смыслу слагаемых, поэтому не имеет глубокого физического смысла. Однако использование векторного поля  $\mathbf{H}$  во многих случаях упрощает расчеты магнитных полей в магнетиках. Это было продемонстрировано выше при расчете поля в шаре.

Поле  $\mathbf{B}$  определяет силовое воздействие поля на токи и движущиеся заряды. Оно создается токами проводимости и молекулярными токами и по структуре всегда является вихревым ( $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$ ).

Поле  $\mathbf{H}$ , имеющее, вообще говоря, разрывы, можно представить в виде суперпозиции двух полей: вихревого  $\mathbf{H}_{\text{вихр}}$  ( $\operatorname{div} \mathbf{H}_{\text{вихр}} = 0$ ) и потенциального  $\mathbf{H}_{\text{пот}}$  ( $\operatorname{div} \mathbf{H}_{\text{пот}} \neq 0$ ):  $\mathbf{H} = \mathbf{H}_{\text{вихр}} + \mathbf{H}_{\text{пот}}$ .

В слабых однородных магнетиках ( $\mu = \text{const}$ ), где существует линейная связь между тремя векторными величинами, входящими в (13.10), поле  $\mathbf{H}$  является чисто вихревым ( $\mathbf{H}_{\text{пот}} = 0$ ), и по структуре оно такое же, как и поле индукции:  $\mathbf{H} = \mathbf{B}/(\mu_0\mu)$ . Оно определяется только токами проводимости, подобно тому, как индукция определяется этими токами в вакууме.

Поэтому расчет напряженности  $\mathbf{H}$  в таком магнетике при наличии токов проводимости можно осуществлять по тем же формулам, что индукцию  $\mathbf{B}$  в вакууме с учетом, разумеется, множителя  $\mu_0\mu$ . В вакууме, где  $\mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu_0$ , напряженность и индукция отличаются только множителем  $\mu_0$ .

При наличии границ раздела ( $\mu \neq \text{const}$ ) появляется и потенциальная компонента  $\mathbf{H}_{\text{пот}}$ . В отсутствие токов проводимости  $\mathbf{H}_{\text{вихр}} = 0$ , поэтому  $\mathbf{H} = \mathbf{H}_{\text{пот}}$ . В такой ситуации можно ввести магнитный потенциал  $\psi$ , при этом  $\mathbf{H} = \mathbf{H}_{\text{пот}} = -\nabla\psi$ . С помощью уравнения Лапласа для потенциала при заданных граничных условиях можно последовательно найти потенциал, затем напряженность и индукцию магнитного поля.

В сильных магнетиках, где может происходить самопроизвольная (спонтанная) намагниченность  $\mathbf{J}$ , структура поля  $\mathbf{H}$  будет отличаться от структуры вихревого поля  $\mathbf{B}$  (см. далее).

**Формализм магнитных зарядов.** В отсутствие токов проводимости сохранился лишь потенциальная компонента:  $\mathbf{H} = \mathbf{H}_{\text{пот}}$ . Тогда, по аналогии с электростатикой ( $\rho' = -\operatorname{div} \mathbf{P}$  (4.22)), можно формально ввести объемную плотность «магнитных зарядов»

$$\rho_m = -\operatorname{div} \mathbf{J}. \quad (13.52)$$

Поскольку  $\operatorname{div} \mathbf{B} = \mu_0 \operatorname{div}(\mathbf{H} + \mathbf{J}) = 0$ , а токи проводимости отсутствуют, то

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = \rho_m, \quad (13.53)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = 0. \quad (13.54)$$

В однородно намагниченной среде объемные магнитные заряды отсутствуют, а на границах сред могут быть «магнитные поверхностные заряды»

$$\sigma_m = -(J_{2n} - J_{1n}) = -\mathbf{n}(\mathbf{J}_2 - \mathbf{J}_1), \quad (13.55)$$

где нормальный вектор  $\mathbf{n}$  направлен от первой среды ко второй.

Поскольку уравнения (13.53) и (13.54) аналогичны уравнениям  $\operatorname{div} \mathbf{E} = \rho/(\varepsilon_0 \varepsilon)$  (см. (5.9)) и  $\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0$  (3.9), то методы расчета напряженности электрического поля в однородном диэлектрике можно применить для расчета напряженности магнитного поля в в однородном магнетике. В частности, можно по аналогии с (3.14) записать выражение для магнитного потенциала

$$\psi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\rho_m(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV + \frac{1}{4\pi} \int \frac{\sigma_m(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dS, \quad (13.56)$$

которое является решением уравнения Пуассона

$$\Delta \psi = -\rho_m. \quad (13.57)$$

Напряженность поля определяется соотношением (13.43):  $\mathbf{H} = -\nabla \psi$ , а индукция  $\mathbf{B} = \mu_0 \mu \mathbf{H}$ .

Таким образом, если известно решение электростатической задачи, то путем формальной замены

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{H}, \quad \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{B}, \quad \frac{\mathbf{P}}{\varepsilon_0} \rightarrow \mathbf{J}, \quad \frac{\rho}{\varepsilon_0 \varepsilon} \rightarrow \rho_m, \\ \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon} \rightarrow \sigma_m, \quad \varepsilon \rightarrow \mu, \quad k = \frac{1}{4\pi \varepsilon_0} \rightarrow \frac{1}{4\pi}, \end{aligned} \quad (13.58)$$

с помощью формализма магнитных зарядов можно получить решение магнитостатической задачи.

Поэтому не удивительно, что потенциал магнитного поля (13.49) аналогичен потенциалу электростатического поля (5.36).

**Пример 2.** Рассчитаем напряженность и индукцию магнитного поля на расстоянии  $r$  от бесконечно длинного прямого провода с током  $I$ , лежащего в плоскости раздела двух непроводящих магнитных сред с проницаемостями  $\mu_1$  и  $\mu_2$ . Вблизи границы раздела  $\operatorname{div} \mathbf{H} \neq 0$ , поэтому напряженности по обе стороны от границы раздела будут различными. Полагая, что линии являются

окружностями, охватывающими провод, запишем  $H_1 \pi r + H_2 \pi r = I$  (теорема о циркуляции),  $\mu_0 \mu_1 H_1 = \mu_0 \mu_2 H_2$  (граничное условие) и получаем

$$\begin{aligned} H_1 &= \frac{I}{\pi r} \frac{\mu_2}{\mu_1 + \mu_2}, \quad H_2 = \frac{I}{\pi r} \frac{\mu_1}{\mu_1 + \mu_2}, \\ B &= \mu_0 \mu_1 H_1 = \mu_0 \mu_2 H_2 = \mu_0 \frac{I}{\pi r} \frac{\mu_1}{\mu_1 + \mu_2}. \end{aligned} \quad (13.59)$$

Линии напряженности и индукции изображены на рис. 13.16. Поле  $\mathbf{B}$  является чисто вихревым ( $\text{div } \mathbf{B} = 0$ ). Поле  $\mathbf{H}$  на границе раздела претерпевает разрыв. С использованием формализма магнитных зарядов можно сказать, что

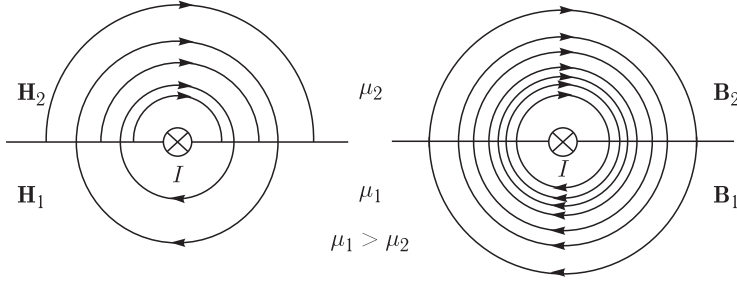


Рис. 13.16

на границе раздела находится поверхностный магнитный заряд  $\sigma_m$ , который, согласно (13.55), равен

$$\begin{aligned} \sigma_m &= -(J_{2n} - J_{1n}) = \chi_1 H_1 - \chi_2 H_2 = \frac{I}{\pi r} \frac{(\mu_1 - 1)\mu_2}{\mu_1 + \mu_2} - \frac{(\mu_2 - 1)\mu_1}{\mu_1 + \mu_2} = \\ &= \frac{I}{\pi r} \frac{(\mu_1 - \mu_2)}{\mu_1 + \mu_2}. \end{aligned} \quad (13.60)$$

По аналогии с электростатикой этот неравномерно распределенный по поверхности заряд создает потенциальное магнитное поле, которое вблизи границы равно

$$H_{\text{пот}} = \frac{\sigma_m}{2} = \frac{I}{2\pi r} \frac{(\mu_1 - \mu_2)}{\mu_1 + \mu_2}. \quad (13.61)$$

Электрический ток создает вихревое поле  $H_{\text{вихр}} = I/(2\pi r)$ . В результате вблизи границы

$$H_1 = H_{\text{вихр}} - H_{\text{пот}} \quad H_2 = H_{\text{вихр}} + H_{\text{пот}},$$

что совпадает с (13.59).

## ЛЕКЦИЯ 14

Рассмотрим механизмы намагничивания различных магнетиков и установим связь между магнитной восприимчивостью и атомным строением вещества. Это можно сделать, строго говоря, лишь с использованием квантовомеханического описания.

В случае диа- и парамагнетиков можно использовать полуклассическое–полуквантовое представление атома на основе боровской теории. Такой подход позволяет удовлетворительно описать основные закономерности намагничивания вещества.

Описание свойств ферромагнетиков требует привлечения таких понятий, как спин электрона, обменные силы, условия квантования и пр., поэтому классическое описание становится неприемлемым.

**Прецессия Лармора.** Рассмотрим атом, находящийся во внешнем поле с индукцией  $\mathbf{B}$ . В отсутствии поля, согласно классическому представлению, электрон движется вокруг ядра атома по круговой орбите радиуса  $r$

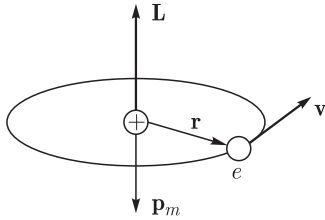


Рис. 14.1

со скоростью  $v$  (рис. 14.1). Период его вращения  $T = 2\pi r/v$ . С одной стороны, он обладает моментом количества движения  $L = m \cdot v \cdot r$ , а с другой стороны — магнитным моментом  $p_m = I \times \pi r^2 = (e/T)\pi r^2 = evr/2$ . Поскольку  $e < 0$ , то векторы  $\mathbf{p}_m$  и  $\mathbf{L}$  направлены в противоположные стороны. Отношение

$$\Gamma = \frac{p_m}{L} = \frac{e}{2m} < 0 \quad (14.1)$$

называется *гиромагнитным отношением*. При квантовом описании заряд электрона представляется в виде заряженного облака вокруг ядра атома. Плотность заряда  $\rho$  в этом облаке описывается волновой функцией (см. последние лекции). Поскольку  $e = \int \rho dV$ , плотность тока  $\mathbf{j} = \rho \mathbf{v}$ , то магнитный момент

$$\mathbf{p}_m = \frac{1}{2} \int (\mathbf{r} \times \mathbf{j}) \cdot dV = \frac{1}{2} (\mathbf{r} \times \mathbf{v}) \int \rho \cdot dV = \frac{1}{2} (\mathbf{r} \times \mathbf{v}) e. \quad (14.2)$$

Записывая вектор момента импульса в виде

$$\mathbf{L} = m(\mathbf{r} \times \mathbf{v}), \quad (14.3)$$

получаем гиромагнитное отношение

$$\Gamma = \frac{p_m}{L} = \frac{e}{2m} < 0. \quad (14.4)$$

Можно показать, что эта формула справедлива и для эллиптической орбиты электрона.

При наложении внешнего поля с индукцией  $\mathbf{B}$  на магнитный момент будет действовать момент силы  $\mathbf{M} = \mathbf{p}_m \times \mathbf{B}$ . В результате орбитальный момент  $\mathbf{L}$  начнет изменяться в соответствии с уравнением

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{M} = \mathbf{p}_m \times \mathbf{B} = \Gamma \cdot \mathbf{L} \times \mathbf{B} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{L}. \quad (14.5)$$

Конец вектора  $\mathbf{L}$  начнет вращаться (прецессировать) по окружности с угловой скоростью

$$\boldsymbol{\Omega} = -\Gamma \cdot \mathbf{B}. \quad (14.6)$$

Таким образом, действие магнитного поля на движущийся электрон заключается в наложении на первоначальное движение прецессии электронной орбиты (рис. 14.2). Это утверждение является содержанием *теоремы Лармора*, а прецессия называется *ларморовой прецессией*.

Рассмотренное явление количественно хорошо описывает поведение слабо взаимодействующих атомов газообразных магнетиков. Однако качественно это рассмотрение применимо и для жидких и твердых диэлектриков, у которых электронная оболочка обладает сферической симметрией и может относительно свободно вращаться вокруг атомного ядра.

**Диамagnetизм.** Из-за прецессии электрон приобретает дополнительную скорость  $\Delta \mathbf{v} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}$  и возникает дополнительный магнитный момент

$$\Delta \mathbf{p}_m = \frac{1}{2} \int (\mathbf{r} \times \Delta \mathbf{v}) \rho dV = \frac{1}{2} \int (\mathbf{r} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})) \rho dV, \quad (14.7)$$

направленный против поля (рис. 14.2).

Для вычисления интеграла будем считать, что магнитное поле направлено вдоль оси  $Oz$ . Двойное векторное произведение  $(\mathbf{r} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})) = \boldsymbol{\Omega} \cdot r^2 - \mathbf{r}(\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{r})$  в проекциях на координатные оси можно написать:

$$(\mathbf{r} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}))_x = -x \cdot \Omega \cdot z,$$

$$(\mathbf{r} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}))_y = -y \cdot \Omega \cdot z,$$

$$(\mathbf{r} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}))_z = \Omega \cdot r^2 - z(\Omega \cdot z) = \Omega(x^2 + y^2).$$

Если усреднить вектор  $\Delta \mathbf{p}_m$  по времени, значительно большему периода вращения электрона вокруг ядра, то из трех его проекций останется лишь одна:

$$\langle \Delta p_m \rangle_z = \frac{1}{2} \int \Omega \langle (x^2 + y^2) \rangle \rho dV = \frac{1}{3} \langle r^2 \rangle \Omega Z e. \quad (14.8)$$

Здесь  $Z$  — число электронов в атоме,  $\langle x^2 \rangle = \langle y^2 \rangle = \langle r^2 \rangle / 3$ . Если число атомов в единице объема принять равным  $N$ , то дипольный магнитный момент, с учетом (14.6), будет равен

$$\mathbf{J} = N \langle \Delta \mathbf{p}_m \rangle_z = -\frac{\mu_0 Z e^2 N}{6m} \langle r^2 \rangle \mathbf{H} = \chi \mathbf{H}. \quad (14.9)$$

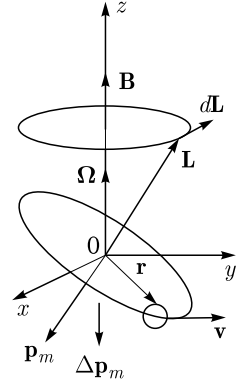


Рис. 14.2

Поэтому магнитная восприимчивость диамагнетика равна

$$\chi = -\frac{\mu_0 Z e^2 N}{6m} \langle r^2 \rangle. \quad (14.10)$$

Если положить  $\langle r^2 \rangle = 10^{-20} \text{ м}^2$ ,  $Z = 1$ , то  $\chi \sim -10^{-6}$ .

**Парамагнетизм.** Атомы парамагнетиков обладают собственным магнитным моментом  $\mathbf{p}_{m0}$ . В отсутствие внешнего поля все моменты компенсируют друг друга. При помещении парамагнетика во внешнее магнитное поле на атом будет действовать момент сил  $\mathbf{M} = \mathbf{p}_{m0} \times \mathbf{B}$ . Он будет стремиться повернуть атом так, чтобы вектор  $\mathbf{p}_{m0}$  был направлен вдоль вектора  $\mathbf{B}$ . Этому будет препятствовать тепловое движение атомов, оказывающее дезориентирующее воздействие. В результате двух разнонаправленных тенденций между векторами  $\mathbf{p}_{m0}$  и  $\mathbf{B}$  будет существовать некоторый угол  $\alpha$ , и атом будет обладать потенциальной энергией  $W = -\mathbf{p}_{m0} \cdot \mathbf{B} = -p_{m0} \cdot B \cos \alpha$ .

Теория парамагнетизма, как отмечалось в лекции 6, была создана Ланжевеном, и на ее базе была описана поляризация полярных диэлектриков. Поэтому, аналогично (6.18), имеем

$$\langle p_m \rangle = p_{m0} \left( \text{cth } \beta - \frac{1}{\beta} \right) = p_{m0} L(\beta), \quad (14.11)$$

где  $\beta = p_{m0} B / (k_B T) = B / B_{\text{нас}}$ .

Соответственно вектор намагниченности по величине будет равен

$$\mathbf{J} = N \langle \mathbf{p}_m \rangle = N p_{m0} \left( \text{cth } \beta - \frac{1}{\beta} \right) = N p_{m0} L(\beta). \quad (14.12)$$

При  $\beta = B / B_{\text{нас}} \ll 1$  функция Ланжевена  $L(\beta) \approx \beta/3$  и

$$\mathbf{J} = \frac{\mu_0 p_{m0}^2 N}{3k_B T} \mathbf{H} = \chi \cdot \mathbf{H}, \quad (14.13)$$

где

$$\chi = \frac{\mu_0 p_{m0}^2 N}{3k_B T} \quad (14.14)$$

— магнитная восприимчивость парамагнетика. Если принять  $p_{m0} \sim 10^{-23} \text{ А} \cdot \text{м}^2$ , то  $\chi \sim 10^{-3}$ . Поэтому хотя парамагнетики и обладают диамагнетизмом, однако он несущественен.

Формула (14.14), записанная в виде

$$\chi = \frac{C}{T}, \quad (14.15)$$

выражает *закон Кюри*, установленный экспериментально П. Кюри в начале своей научной карьеры в 1895 г. Здесь  $C$  — постоянная Кюри данного вещества. Кюри обнаружил, что при нагревании парамагнитные свойства веществ ослабевают обратно пропорционально температуре.

Этому закону подчиняются газы (кислород  $\text{O}_2$ , окись азота  $\text{NO}$ ), пары щелочных металлов, разбавленные жидкие растворы парамагнитных солей редкоземельных элементов и некоторые парамагнитные соли в кристаллическом состоянии (у таких солей между ионами — носителями магнитного момента расположены препятствующие их взаимодействию группы атомов, лишенные момента, например, молекулы кристаллизованной воды, аммиака и др.).

Квантовомеханический расчет магнитной восприимчивости парамагнетиков, выполненный Дж. Ван Флеком в 1932 г., подтверждает справедливость формулы (14.15). В сильных магнитных полях и при низких температурах тепловое движение не нарушает ориентацию магнитных моментов, намагниченность стремится к насыщению:  $J \rightarrow p_{m0} N$ . В таких полях закон Кюри не выполняется.

У ряда парамагнетиков при заметном взаимодействии парамагнитных ионов между собой и с полем кристаллической решетки магнитная восприимчивость парамагнитных веществ подчиняется закону Кюри–Вейса:

$$\chi = \frac{C'}{T - T_0}, \quad (14.16)$$

где  $T_0$  — температура Кюри (точка Кюри).

Эта формула достаточно хорошо описывает экспериментальную зависимость восприимчивости от температуры при  $T > T_0$  для большинства случаев парамагнетизма ионов в кристаллах. Во многих случаях постоянная  $C'$  практически совпадает с постоянной  $C$  в законе Кюри (14.15) для свободных магнитных ионов.

При  $T \rightarrow T_0$  магнитная восприимчивость стремится к бесконечности. При охлаждении парамагнетика до температуры Кюри и ниже возникает спонтанная намагниченность вещества, и он может стать ферромагнетиком. Таким образом, при температуре Кюри происходит фазовый переход второго рода.

Надо отметить, что для многих веществ в окрестности точки Кюри ( $T \geq T_0$ ) закон Кюри в виде (14.16) не выполняется, и температурная зависимость магнитной восприимчивости с использованием критического индекса  $\gamma$  имеет вид

$$\chi \sim \frac{C'}{(T - T_0)^\gamma}. \quad (14.17)$$

В физике критические индексы (величины) используют для описания аномалий различных термодинамических характеристик систем вблизи точки фазового перехода, где наиболее сильны флуктуации.

**Механомагнитный эффект.** Из механики известно правило Н. Жуковского: *гироскопические силы стремятся совместить момент импульса гироскопа с направлением угловой скорости вынужденного поворота*. На рис. 14.3 показан волчок на вращающемся столике. Если столик привести в быстрое вращение вокруг вертикальной оси с угловой скоростью  $\Omega$ , то ось волчка и вектор момента импульса  $\mathbf{L}$  будут стремиться занять вертикальное положение.

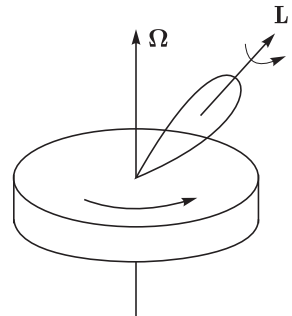


Рис. 14.3

Применительно к магнетикам это означает, что если, например, стержень привести во вращение вокруг оси, то он намагнитится. Такое явление получило название *механомагнитного эффекта*.

Этот эффект был открыт американским физиком С. Барнеттом в 1909 г. Из его опыта следовало, что  $\Gamma < 0$ . Тем самым было установлено, что намагничивание тел обусловлено движущимися электронами.

**Магнитомеханический эффект.** При намагничивании вещества возникает отличный от нуля момент количества движения электронов, который для единицы объема будет равен

$$L_e = N \langle L \rangle = \frac{N \langle p_m \rangle}{\Gamma} = \frac{J}{\Gamma}.$$

В векторном виде это соотношение примет вид

$$\mathbf{L}_e = \frac{\mathbf{J}}{\Gamma}. \quad (14.18)$$

В соответствии с законом сохранения момента импульса единица объема кристаллической решетки приобретает момент импульса

$$\mathbf{L}_{\text{реш}} = -\mathbf{L}_e = -\frac{\mathbf{J}}{\Gamma}, \quad (14.19)$$

и магнетик может начать вращаться вокруг оси, совпадающей с направлением приложенного магнитного поля. Такое явление получило название *магнитомеханического эффекта*.

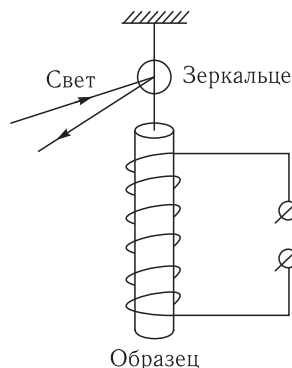


Рис. 14.4

Этот эффект был открыт А. Эйнштейном и голландским физиком В. де Гаазом в 1915 г.

Схема опыта Эйнштейна-де Гааза изображена на рис. 14.4. Внутри соленоида, создававшего переменное магнитное поле на тонкой стеклянной нити был подвешен железный стержень толщиной в 2 мм.

При периоде колебаний тока в катушке, равном периоду собственных крутильных колебаний стержня, наблюдали резонансное усиление амплитуды колебаний, которое детектировали с помощью луча, отраженного от легкого зеркальца, прикрепленного на нити. Если  $\Gamma < 0$ , то вектор угловой скорости вращения решетки направлен туда же, куда и магнитное поле. Опыт показал, что  $\Gamma < 0$ , т. е. что намагничивание тел обусловлено движущимися электронами.

Однако абсолютная величина гиромангнетного отношения в обоих опытах отличалась от (14.4). Для металлов и сплавов элементов группы железа значение  $\Gamma \approx e/m < 0$ , что по абсолютной величине почти вдвое больше величины (14.4).

Это отличие показало: природа элементарных токов более сложна, нежели просто орбитальное движение электронов.

Помимо этих экспериментов, требовало своего объяснения появление тонкой структуры в спектре излучения атома водорода, расщепление спектральных линий излучения веществами, находящимися в магнитном поле и др.

Спектроскопия высокого разрешения показала, что многие спектральные линии представляют собой дублеты, которые не удастся объяснить исходя



из орбитального движения электронов. Типичный пример — дублет желтых линий натрия с длинами волн 589,0 и 589,6 нм, который легко наблюдается с помощью простых спектральных приборов.

**Опыт Штерна и Герлаха.** В 1922 г. немецкими физиками О. Штерном (Нобелевская премия по физике в 1943 г.) и В. Герлахом было исследовано расщепление атомного пучка при его пролете через неоднородное магнитное поле.

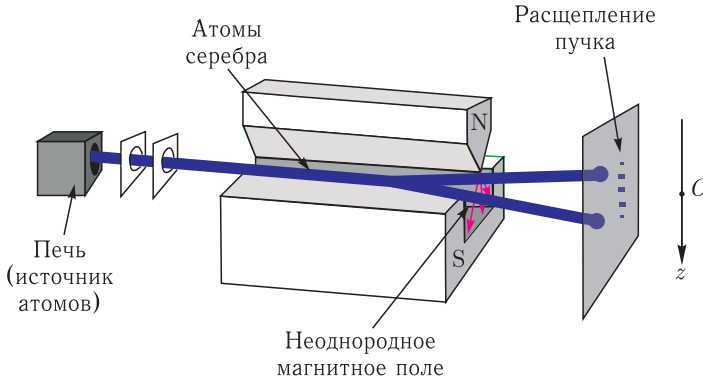


Рис. 14.5

Схема их опыта изображена на рис. 14.5. Пучок диамагнитных атомов серебра, формируемый несколькими диафрагмами, пролетал через магнитное поле, создаваемое полюсами постоянного магнита. Поскольку поле было неоднородным в направлении от одного полюса к другому (вдоль оси  $Oz$ ), то на атомы вдоль этой оси будет действовать сила. Если представить силовую функцию (11.7) для атома в виде

$$U(z) = -I \cdot \Phi = -I \Delta S \cdot \mathbf{B}(z) = -\mathbf{p}_m \cdot \mathbf{B}(z),$$

то сила, согласно (11.10), будет равна

$$F_z = - \left( \frac{dU}{dz} \right)_I = p_{mz} \cdot \frac{dB_z}{dz}. \quad (14.20)$$

В эксперименте пучок расщеплялся на нечетное число компонент. Это свидетельствовало о том, что проекция магнитного момента атома на направление поля может принимать лишь дискретные значения (см. ниже). По отклонению можно было рассчитать магнитный момент атома  $\mathbf{p}_m$ .

В некоторых экспериментах число компонент было четным. В опытах с пучком невозбужденных атомов водорода вообще не должно было быть никакого расщепления, поскольку у таких атомов электронное облако сферически симметричное, и  $p_m = 0$ . Однако и в этом случае пучок расщеплялся на две компоненты.

Для объяснения экспериментальных результатов американские физики голландского происхождения С. Гаудсмит и Дж. Уленбек в 1925 г. выдвинули два постулата:

- а) электрон обладает внутренним моментом импульса;
- б) электрон обладает магнитным моментом.

Таким образом, электрон уподоблялся заряженному телу, вращающемуся вокруг своей оси. Поэтому механический момент электрона получил название спин (от англ. «*spin*» — вращать). Магнитный момент электрона называется *спиновым магнитным моментом*.

Отношение этих моментов (гиромагнитное отношение)

$$\Gamma_e \approx \frac{e}{m} < 0. \quad (14.21)$$

Таким образом, 1925 год оказался годом рождения квантовой механики Гейзенберга и Дирака, годом рождения новой квантовой статистики Бозе–Эйнштейна, годом рождения принципа Паули и гипотезы спина.

В 1928 г. один из создателей квантовой механики английский физик-теоретик П. Дирак (Нобелевская премия по физике 1933 г. совместно с Э. Шредингером) показал, что эти два постулата являются следствием релятивистски инвариантной квантовой механики.

В настоящее время электрон рассматривается как бесструктурная элементарная частица, обладающая зарядом, массой, магнитным и механическим моментами.

**Квантовомеханическое описание движения электрона в атоме.** Как отмечалось выше, поведение электрона в атоме можно описать с помощью квантовой механики. Приведем простейшие результаты, вытекающие из такого рассмотрения.

Из школьного курса физики известно, что электрон, вращаясь по орбите вокруг атома, может иметь дискретные значения энергии  $\varepsilon_n$ , характеризующиеся главным квантовым числом  $n$ . В этом энергетическом состоянии момент импульса электрона может иметь лишь дискретные значения

$$L = \hbar \sqrt{l(l+1)}, \quad (14.22)$$

где орбитальное квантовое число  $l$  принимает значения  $l = 0, 1, 2, 3, \dots, n-1$ ,  $\hbar = h/(2\pi)$ ,  $h = 6,62 \cdot 10^{-34}$  Дж·с — постоянная Планка. Кроме того, для каждого числа  $l$  вектор  $\mathbf{L}$  может иметь  $2l+1$  ориентаций в пространстве. Каждая ориентация характеризуется проекцией вектора  $\mathbf{L}$  на какую-либо одну координатную ось, например, ось  $Oz$ , и равна

$$L_z = \hbar \cdot m_l, \quad (14.23)$$

где магнитное квантовое число  $m_l$  принимает значения  $m_l = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots, \pm l$ . Тогда, согласно (14.4), проекция магнитного момента на эту ось будет равна

$$p_{mz} = \frac{e}{2m} L_z = \frac{e\hbar}{2m} m_l. \quad (14.24)$$

Величина  $\mu_B = |e| \hbar / (2m) = 9,27 \cdot 10^{-24}$  Дж/Тл определяет характерное значение магнитного момента и называется *магнетон Бора*.

По аналогии собственный механический момент электрона (спин) принимает дискретные значения и равен

$$S = \hbar \sqrt{s(s+1)}, \quad (14.25)$$

а его проекция

$$S_z = \hbar \cdot m_s. \quad (14.26)$$

Здесь  $s$  — спиновое квантовое число. Из опыта с расщеплением, например, пучка атомов водорода на две компоненты следует, что  $s = 1/2$ , а

$$S_z = \pm \frac{\hbar}{2}. \quad (14.27)$$

Именно в этом смысле говорят, что спин электрона равен одной второй. Также опытным путем было установлено, что проекция спинового магнитного момента

$$p_{sz} = \frac{e}{m} S_z, \quad (14.28)$$

поэтому гиромагнитное отношение  $\Gamma_e \approx e/m$ .

С учетом орбитального и спинового вкладов магнитный момент электрона можно записать в виде суммы

$$\mathbf{p}_m + \mathbf{p}_s = g \frac{e}{2m} (\mathbf{L} + \mathbf{S}), \quad (14.29)$$

где  $g$  — фактор, который, в зависимости от величины  $L$  и взаимного расположения векторов  $\mathbf{L}$  и  $\mathbf{S}$ , может принимать значения  $1 < g < 2$ . В частности, при  $L = 0$  фактор  $g = 2$ . Без учета спина  $g = 1$ .

**Электронный парамагнитный резонанс (ЭПР)** — физическое явление, открытое советским физиком Е. Завойским в 1944 г. Суть явления состоит в резонансном поглощении электромагнитной энергии в сантиметровом или миллиметровом диапазоне длин волн веществами, содержащими парамагнитные частицы.

Парамагнитными частицами могут быть атомы и молекулы, как правило, с нечетным числом электронов (например, атомы азота и водорода, молекулы NO); свободные радикалы (например,  $\text{CH}_3$ ); ионы с частично заполненными внутренними электронными оболочками (например, ионы переходных элементов), примесные атомы (например, доноры в полупроводниках) и пр. Такие частицы обладают ненулевым электронным спиновым магнитным моментом  $\mathbf{p}_s$ .

В рамках классической физики принимается, что парамагнитный атом, обладающий спиновым магнитным моментом  $\mathbf{p}_s$ , во внешнем постоянном магнитном поле будет прецессировать с угловой скоростью  $\boldsymbol{\Omega} = -\Gamma_e \cdot \mathbf{B}$  вокруг направления вектора  $\mathbf{B}$ . Скорость прецессии зависит как от индукции поля, так и гиромагнитного отношения электрона. Этот атом будет обладать в магнитном поле потенциальной энергией, равной  $W = -\mathbf{p}_s \cdot \mathbf{B} = -p_s \cdot B \cos \alpha$ .

Если в направлении вектора  $\mathbf{B}$  будет падать электромагнитная волна частоты  $\Omega$ , то произойдет ее поглощение. Это можно понять, если учесть, что в волне существует колеблющееся магнитное поле  $\mathbf{B}_\perp = \mathbf{B}_\perp \sin \Omega t$ , перпендикулярное полю  $\mathbf{B}$ .

Вектор  $\mathbf{B}_\perp$  можно представить как сумму двух векторов  $(1/2)\mathbf{B}_\perp$ , вращающихся в разные стороны с угловой скоростью  $\Omega$ . Поскольку один из этих векторов будет синхронно вращаться с вектором  $\mathbf{p}_s$ , то момент силы  $\mathbf{M}_\perp = (1/2)\mathbf{p}_s \times \mathbf{B}_\perp$  будет стремиться увеличить угол  $\alpha$ . Потенциальная энергия атома при этом увеличится за счет поглощенной энергии волны.

Затем произойдет его столкновение с другими атомами, поглощенная энергия перейдет в тепло, и процесс повторится вновь.

Количественно ЭПР описывается в рамках квантовой теории. С учетом спина электрона потенциальная энергия атома будет равна

$$W_l = -(\mathbf{p}_m + \mathbf{p}_s) \cdot \mathbf{B} = -(p_{mz} + p_{sz}) B_z = -\frac{e\hbar}{2m} (m_l \pm 1) B_z. \quad (14.30)$$

Поскольку  $m_l = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3 \dots \pm l$ , то в магнитном поле энергетические уровни  $\mathcal{E}_n$  расщепятся на  $2l + 1$  близко расположенных уровней, а каждый из этих уровней распадется еще на два уровня, обусловленных наличием спина. Если атом находится в основном состоянии, то главное квантовое число  $n = 1$ , орбитальное число  $l = 0$  и магнитное число  $m_l = 0$ . Это означает, что уровень  $\mathcal{E}_1$  расщепится на два уровня  $\mathcal{E}_1 \mp (e\hbar/2m) B_z$ .

Электромагнитная волна частоты  $\omega$  представляет собой поток световых квантов, каждый из которых имеет энергию  $\hbar\omega$ . Поглощение квантов будет происходить в том случае, если энергия кванта равна разности энергии двух уровней

$$\hbar\omega = \frac{e\hbar}{m} B_z. \quad (14.31)$$

Отсюда следует, что

$$\omega = \frac{e}{m} B_z = -\Gamma_e B_z = \Omega. \quad (14.32)$$

При поглощении энергии волны электрон переходит с нижнего уровня на верхний уровень. Одновременно будет происходить и релаксация: обратный самопроизвольный (спонтанный) переход с верхнего уровня на нижний. Высвобождающаяся при этом энергия будет переходить в тепло. Такой процесс называется спин-решеточная релаксация. Кроме того, возможна и спин-спиновая релаксация, при которой высвобождаемая энергия перераспределяется между электронами.

Поскольку, согласно распределению Больцмана, число электронов на нижнем уровне больше, чем на верхнем, то резонансное поглощение будет превалировать над релаксацией.

ЭПР применяют для исследования веществ, содержащих атомы с некомпенсированным спиновым магнитным моментом электронов (атомы с неспаренными электронами). На практике вещество помещают в магнитное поле  $\mathbf{B}$ , которое равномерно увеличивается во времени, тем самым увеличивается и резонансная частота  $\Omega$ . Электромагнитная волна фиксированной частоты  $\omega$  поглощается, когда  $\Omega = \omega$ . Поэтому записывают зависимость коэффициента поглощения от индукции внешнего поля (спектр поглощения), который несет обширную информацию о строении вещества. Если внешнее поле изменяется в диапазоне  $0 < B < 1 \text{ Тл}$ , то  $0 < \Omega < 1,75 \cdot 10^{11} \text{ с}^{-1}$ . Поэтому используют электромагнитные волны гигагерцевого диапазона.

Метод ЭПР дает уникальную информацию о парамагнитных центрах. Он однозначно определяет, например, примесные ионы и их валентность, дает информацию о распределении электронной плотности, кристаллическом поле. Метод позволяет провести диагностику минерала, так как каждый ион в каждом минерале имеет свои уникальные параметры. В этом случае

парамагнитный центр является своеобразным зондом, дающим спектроскопические и структурные характеристики своего микроокружения и пр.

**Ядерный магнитный резонанс (ЯМР)** — резонансное поглощение или излучение электромагнитной волны веществом, содержащим ядра с ненулевым спином, находящимся во внешнем магнитном поле. Это явление было открыто в 1938 г. американским физиком И. Раби в молекулярных пучках (Нобелевская премия по физике 1944 г.). В 1946 г. его соотечественники Ф. Блох и Э. Парселл наблюдали ЯМР в жидкостях и твердых телах (Нобелевская премия по физике 1952 г.).

Квантовое описание явления ЯМР схоже с приведенным выше описанием явления ЭПР с той лишь разницей, что в формулах необходимо использовать гиромагнитное отношение ядер, которое более чем на три порядка меньше гиромагнитного отношения электрона. Поэтому используют электромагнитные волны меггерцевого диапазона.

К ядрам с ненулевым спином относятся  $^1\text{H}$ ,  $^{13}\text{C}$ ,  $^{15}\text{N}$ ,  $^{35}\text{P}$  и другие. Спектроскопия ЯМР на ядрах  $^1\text{H}$  в настоящее время наиболее развита и получила название протонный магнитный резонанс (ПМР). У протона спиновое квантовое число  $s = 1/2$ , поэтому  $S_z = \pm\hbar/2$ . Это означает, что энергетический уровень протона в магнитном поле расщепляется на два уровня.

Как показывает практика, расстояние между этими уровнями определяется не только внешним магнитным полем  $B$ , но и зависит от природы ядра, его электронного окружения, различных внутри- и межмолекулярных взаимодействий.

Влияние электронной оболочки на ЯМР проявляется, в частности, в том, что внешним полем  $B$  в ней индуцируются токи, которые создают вторичное магнитное поле  $B' = \sigma B$ , пропорциональное исходному полю и ослабляющее его действие. Поэтому индукция эффективного поля, действующего на ядро, будет равна  $B_{\text{эф}} = B(1 - \sigma)$ , а резонансная частота

$$\Omega = -\Gamma_p B(1 - \sigma), \quad (14.33)$$

где  $\Gamma_p$  — гиромагнитное отношение протона,  $\sigma$  — безразмерная величина, называемая константой экранирования.

В общем случае константа экранирования включает в себя также: вклад в экранирование от соседних примесных атомов, вклад молекулы в целом или отдельных ее составляющих, межмолекулярный вклад, зависящий от температуры, растворителя и других внешних факторов.

Поэтому одни и те же ядра атомов в различных окружениях в молекуле дают различные спектры (сигналы) ЯМР. Отличие такого сигнала ЯМР от сигнала стандартного вещества позволяет определить так называемый химический сдвиг, который обусловлен химическим строением изучаемого вещества. В методиках ЯМР есть много возможностей определять химическое строение веществ, конформации молекул, эффекты взаимного влияния, внутримолекулярные превращения и пр.

**Магнито-резонансная томография (МРТ).** На основе ЯМР в медицине получил распространение метод диагностики, названный магнито-резонансная томография. Метод МРТ позволяет изучать организм человека за счет насыщенности тканей организма водородом, атомы которого находятся

в окружении различных атомов и молекул. Резонансные частоты протонов в разных частях человеческого тела будут различными, что позволяет судить об экранировании, химическом сдвиге и, в конечном итоге, о состоянии пациента.

Впервые эта идея была высказана советским физиком В. Ивановым в 1960 г. Однако практическая реализация такого метода диагностики была осуществлена в 1973 г. американским химиком П. Лотербургом и английским физиком П. Мэнсфилдом (Нобелевская премия в области медицины 2003 г.), которые обосновали метод магниторезонансной томографии.

Схема магниторезонансного томографа показана на рис. 14.6. Большой тоннелеобразный электромагнит в виде соленоида создает вдоль оси  $Oz$  сильное магнитное поле с индукцией  $B \geq 1$  Тл. Кроме этого, имеются три пары катушек, которые создают дополнительное градиентное магнитное поле  $B_{гр}(x, y, z)$ , параллельное основному. Это поле меняется вдоль координатных осей таким образом, что оно локализовано в небольшом объеме  $\Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z$ , а вне его быстро убывает. При сканировании этот объем может перемещаться в плоскости  $xOy$ .

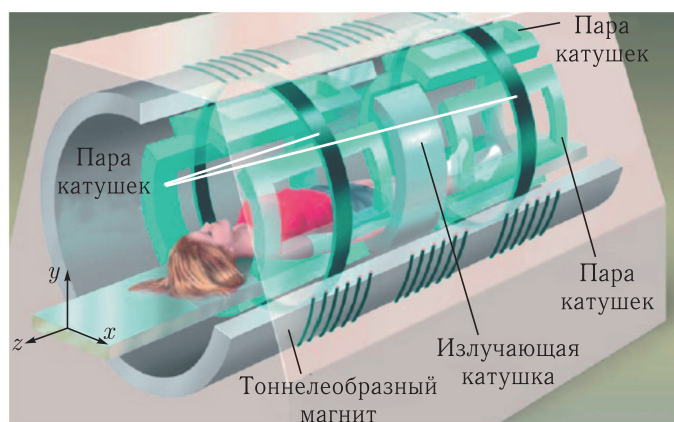


Рис. 14.6

В малом объеме, где есть градиентное магнитное поле, резонансная частота  $\Omega = -\Gamma_p(B + B_{гр})(1 - \sigma)$ . Из-за различного окружения протонов (различной константы экранирования  $\sigma$ ) частота может меняться от одного объема к другому.

Электромагнитная волна с частотой  $\omega \approx \Omega$ , генерируемая излучающей катушкой, вызывает резонансное возбуждение атомов водорода в том малом объеме, где создано градиентное магнитное поле.

При релаксации возбужденных атомов водорода, содержащих по одному протону, переизлучается электромагнитная волна с частотой  $\Omega$ , а ее интенсивность, как при всяком резонансе, будет сильно зависеть от разности частот  $\omega$  и  $\Omega$ . Поэтому интенсивность переизлученной волны (сигнала), принимаемого той же катушкой, будет нести информацию об окружении резонирующих атомов.

В тоннеле вдоль оси  $Oz$  перемещается стол с лежащим на нем пациентом, градиентное поле перемещается в поперечной плоскости. Это дает возможность получать информацию «послойно». Собранные сигналы обрабатываются с помощью компьютера для создания трехмерного изображения тела. Задав какой-либо код для градаций амплитуды ЯМР-сигналов (яркость или цвет на экране монитора), можно получить условное изображение (томограмму) срезов внутренней структуры объекта.

В самых современных томографах индукция магнитного поля превышает величину 10 Тл. Для этого используются мощные сверхпроводящие электромагниты, охлаждаемые жидким гелием, объем которого может достигать нескольких сотен литров.

## ЛЕКЦИЯ 15

**Ферромагнетизм.** Как отмечалось, существуют вещества (ферромагнетики), у которых относительная магнитная проницаемость может достигать десятков и даже сотен тысяч. Из химически чистых элементов ферромагнитными свойствами обладают только девять: железо, никель, кобальт, гадолиний и при температурах значительно ниже  $0^\circ\text{C}$  пять редкоземельных элементов (эрбий, диспрозий, тулий, гольмий и тербий). Однако число ферромагнитных материалов очень велико, потому что к ферромагнитным материалам относятся сплавы самих ферромагнитных элементов и их сплавы с неферромагнитными элементами. Кроме того, известны ферромагнитные сплавы из неферромагнитных элементов.

Механомагнитные и магнитомеханические опыты показали, что в сильно намагничивающихся веществах фактор  $g \approx 2$ . В свете только что изложенного представления о магнетизме атомов это означает, что *ферромагнитные свойства определяются нескомпенсированными спинами* электронов.

У таких веществ не все внутренние оболочки атома полностью заполнены электронами, поэтому и появляются нескомпенсированные спины. Например, атом железа имеет четыре нескомпенсированных спина.

Наличие нескомпенсированных спинов во внутренних оболочках является необходимым, но недостаточным условием ферромагнетизма: изолированные друг от друга атомы таких веществ не проявляют ферромагнитных свойств.

Эти свойства наблюдаются только в кристаллическом состоянии при так называемом обменном взаимодействии атомов в кристалле, когда электроны внутренних незаполненных оболочек принадлежат одновременно и своим и соседним атомам. Такое взаимодействие описывается квантовой механикой и характеризуется интегралом обмена, величина и знак которого в значительной степени зависят от относительного расстояния между атомами в кристаллической решетке.

При положительном значении этого интеграла обменное взаимодействие атомов приводит к *параллельной* ориентации нескомпенсированных спинов соседних атомов, обуславливающей спонтанную (то есть самопроизвольную) намагниченность вещества  $J_S$ , которая присутствует у ферромагнетиков.

При отрицательном значении интеграла обмена нескомпенсированные спины внутренних электронов соседних атомов самопроизвольно устанавливаются *антипараллельно*. Такие вещества называются антиферромагнетиками. У них спонтанная намагниченность отсутствует:  $J_S = 0$ .

На рис. 15.1 показана зависимость интеграла обмена от отношения расстояния между атомами  $d$  к диаметру  $D$  незаполненной оболочки. Для железа, кобальта, никеля и гадолиния интеграл обмена положителен, а для марганца (имеющего пять нескомпенсированных спинов) — отрицателен. При значении



отношения  $d/D \gg 1$  интеграл обмена стремится к нулю и вещество является парамагнетиком.

В отсутствие внешнего магнитного поля ферромагнетик состоит из  $N \gg 1$  доменов — областей субмикронных размеров, обладающих спонтанным магнитным моментом  $d\mathbf{p}_{mi} = \mathbf{J}_{si} \cdot dV_i$  ( $\mathbf{J}_{si}$  — магнитный момент единицы объема домена, который по абсолютной величине одинаков для всех доменов:  $|\mathbf{J}_{si}| = J_s$ ,  $dV_i$  — объем домена). Вектор  $\mathbf{J}_{si}$  в каждом домене направлен вдоль оси легкого намагничивания — направления, вдоль которого можно достичь насыщения намагниченности при минимально затраченной энергии. В ферромагнитных монокристаллах эта ось совпадает с главными кристаллографическими осями.

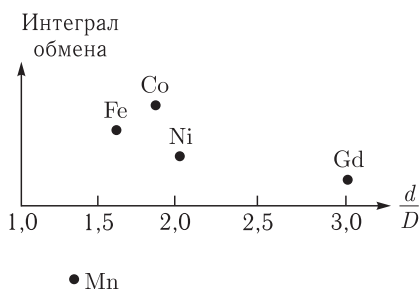


Рис. 15.1

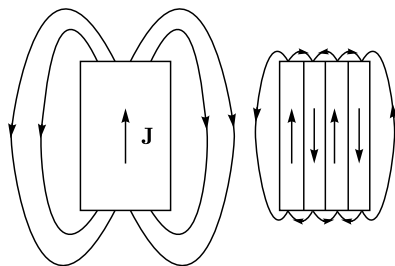


Рис. 15.2

При этом средний магнитный момент единицы объема, или вектор намагниченности

$$\mathbf{J} = \frac{\sum_{i=1}^N d\mathbf{p}_{mi}}{\sum_{i=1}^N dV_i} = \frac{\sum_{i=1}^N \mathbf{J}_{si} \cdot dV_i}{\sum_{i=1}^N dV_i} = 0. \quad (15.1)$$

Представление о магнитных доменах было введено французским физиком П. Вейсом в 1907 г. В честь него же и назван закон Кюри–Вейса.

Равновесная магнитная доменная структура соответствует минимуму полной энергии магнетика, включающей энергию обменного взаимодействия, энергию магнитной анизотропии, магнитостатическую и магнитоупругую энергии. В общем случае доменная структура определяется числом осей легкого намагничивания, ориентацией ограничивающих кристалл поверхностей относительно кристаллографических осей, формой и размером образца и различными дефектами.

На рис. 15.2 в качестве иллюстрации нарисованы два ферромагнетика и создаваемое ими внешнее магнитное поле: один состоит из одного большого домена, а другой — из чередующихся полосовых доменов с противоположно направленными векторами намагниченности. Нетрудно понять, что по мере дробления образца на все большее число доменов уменьшается внешнее магнитное поле (а с ним и энергия этого поля, см. далее).

С другой стороны, увеличивается число доменных границ, в единице площади которых запасается энергия. Поэтому равновесное состояние ферромагнетика определяется балансом между уменьшением энергии магнито-

статического взаимодействия доменов при разбиении кристалла на домены и увеличением энергии от образования новых доменных границ, обладающих избыточной энергией.

На рис. 15.3 (кривая *a*) показана нелинейная зависимость намагниченности  $J$  от напряженности магнитного поля  $H$ , которая называется кривой намагничивания. На ней можно выделить пять участков. Участок 1 соответствует обратимым (упругим) смещениям доменных границ: здесь  $J = \chi_0 H$ . В области 2 (области Рэлея) начинают играть роль необратимые смещения границ:  $J \sim H^2$ . Наиболее крутой участок 3 соответствует максимальной восприимчивости и связан с полностью необратимыми смещениями доменных границ. В области 4 возрастание намагничивания связано с поворотом вектора  $\mathbf{J}_s$ . Слабое возрастание намагниченности на участке 5 обусловлено парамагнитными процессами.

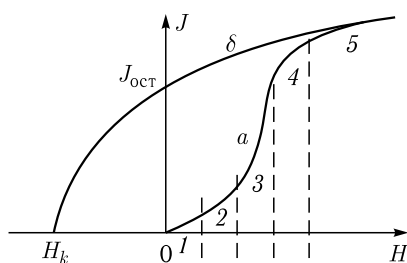


Рис. 15.3

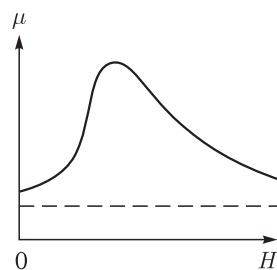


Рис. 15.4

Поскольку  $B = \mu_0 H + \mu_0 J = \mu_0 \mu H$ , то магнитная проницаемость ферромагнетика

$$\mu = 1 + \frac{J}{H} \quad (15.2)$$

немонотонно зависит от напряженности поля (рис. 15.4). Вначале она увеличивается и достигает максимальной величины  $\mu_{\max} \sim 10^4 - 10^5$ , а затем при  $H \rightarrow \infty$  величина  $\mu \approx 1 + J/H$  стремится к постоянной величине.

При уменьшении поля размагничивание ферромагнетика будет происходить вдоль кривой *b* на рис. 15.3. Когда внешнее поле исчезает, образец в течение длительного времени остается намагниченным. Чтобы убрать остаточную намагниченность  $J_{\text{ост}}$  необходимо приложить достаточно сильное магнитное поле противоположного направления с напряженностью  $H_k$ , которое называется *коэрцитивным полем*. Продолжая увеличивать напряженность этого поля, можно достичь полного перемагничивания образца. В результате зависимость намагниченности  $J$  образца от напряженности магнитного поля  $H$  при полном цикле имеет вид петли гистерезиса (см. лекцию 6).

Гистерезис в лекционном эксперименте можно наблюдать на экране электронно-лучевой трубки, если в катушки, отклоняющие луч вверх, вставить проволоочки из ферромагнитного материала (рис. 15.5 *a*). При протекании через отклоняющие катушки переменного тока частоты 50 Гц на экране появится петля гистерезиса, поскольку отклонение луча по горизонтали будет пропорционально индукции поля (а значит и напряженности) в верхней

и нижней катушках, а по вертикали — пропорционально индукции поля при наличии ферромагнетиков (рис. 15.5 б).

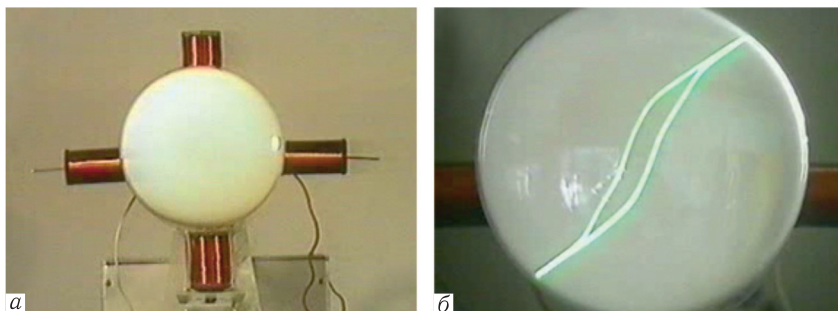


Рис. 15.5

При повышении температуры магнетика усиливающееся тепловое движение стремится разрушить состояние спонтанной намагниченности. При температуре  $T_0$ , называемой точкой Кюри, энергия теплового движения становится достаточной для преодоления ориентирующего действия магнитного поля. Вещество утрачивает ферромагнитные свойства и превращается в парамагнетик. Чем больше интеграл обмена ферромагнетика, тем выше точка Кюри. Для железа, кобальта, никеля и гадолиния точка Кюри равна соответственно 1043, 1400, 631 и 289 К.

Если коэрцитивное поле  $H_k \leq 1 \text{ кА/м}$ , то ферромагнетики называются магнитомягкими. Они обладают высокой магнитной проницаемостью и малой площадью петли гистерезиса. Последнее означает, что потери энергии при перемагничивании невелики. К ним относятся железо, сплав железа с кремнием, супермаллой (сплав железа с никелем и молибденом) и др.

Магнитомягкие материалы используются в качестве сердечников трансформаторов, электромагнитов, в измерительных приборах и в других устройствах, где необходимо при наименьшей затрате энергии достигнуть наибольшей индукции.

Материалы с большим коэрцитивным полем называются магнитожесткими. Они намагничиваются до насыщения и перемагничиваются в сравнительно сильных полях порядка  $10^4 \text{ А/м}$ . В качестве магнитожестких материалов используются, например, сталь, сплавы типа магнико (сплав никель–алюминий–кобальт–железо), ални, викаллой, некоторые ферриты, соединения редкоземельных элементов с кобальтом и др. Из магнитожестких материалов изготовляют постоянные магниты. Индукция поля таких магнитов может достигать величин порядка 1 Тл.

**Размагничивание тел.** Хорошо известно, что механические часы, побывав в магнитном поле, начинают спешить. Это происходит из-за слипания намагниченных витков спиральной пружинки, в результате чего ее жесткость увеличивается, а период крутильных колебаний маятника часов уменьшается.

Во многих важных практических ситуациях необходимо размагничивать приборы, самолеты, военные корабли и другую технику. Для этого объект помещается в переменное магнитное поле с постепенно уменьшающейся до нуля

амплитудой. Такому процессу будет соответствовать петля гистерезиса, постепенно стягивающаяся к началу координат. Чем толще образец — тем ниже должна быть частота размагничивающего поля, а чем выше магнитная проницаемость вещества — тем медленнее должна убывать амплитуда магнитного поля (необходимо большое число циклов перемагничивания). Например, образец из пластин листовой электротехнической стали толщиной 0,35–0,5 мм размагничивают в течение 1 мин плавным уменьшением магнитного поля частотой 50 Гц от максимальной напряженности поля 2000–2500 А/м до нуля. Поэтому магнитные носители информации следует предохранять от воздействия электромагнитного поля.

**Поле постоянного магнита.** Рассмотрим структуру магнитного поля, создаваемого постоянным магнитом в форме однородно намагниченного цилиндра с намагниченностью  $\mathbf{J}_{\text{ост}}$ . Это можно сделать, используя формализм молекулярных токов или магнитных зарядов.

В первом приближении можно считать, что по поверхности магнита течет молекулярный ток с поверхностной плотностью (см. (13.7))  $\mathbf{i}_{\text{мол}} = \mathbf{J}_{\text{ост}} \times \mathbf{n}$ . Магнит можно рассматривать как катушку с молекулярным током. Тогда, согласно (10.12), индукция поля на оси магнита будет равна

$$B = \mu_0 \frac{N I_{\text{мол}}}{2l} (\cos \alpha_2 - \cos \alpha_1) = \mu_0 \frac{J_{\text{ост}}}{2} (\cos \alpha_2 - \cos \alpha_1). \quad (15.3)$$

Следует подчеркнуть, что *индукция поля не зависит от магнитной проницаемости вещества магнита!*

Напряженность поля, в соответствии с определением (13.10), будет равна

$$H = \frac{B}{\mu_0} - J_{\text{ост}} = \frac{J_{\text{ост}}}{2} (\cos \alpha_2 - \cos \alpha_1) - J_{\text{ост}}. \quad (15.4)$$

На рис. 15.6 показано распределение индукции, намагниченности и напряженности поля на оси магнита. Линии индукции и напряженности изображены на рис. 15.7. Линии индукции непрерывны, а линии напряженности начинаются на положительных «магнитных зарядах» и заканчиваются на отрицательных «магнитных зарядах». На рис. 15.8 представлена фотография

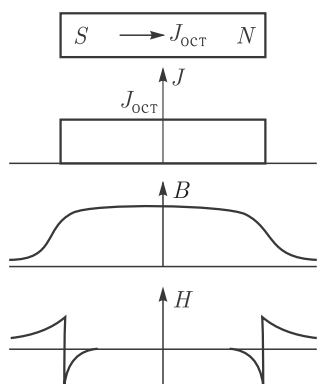


Рис. 15.6

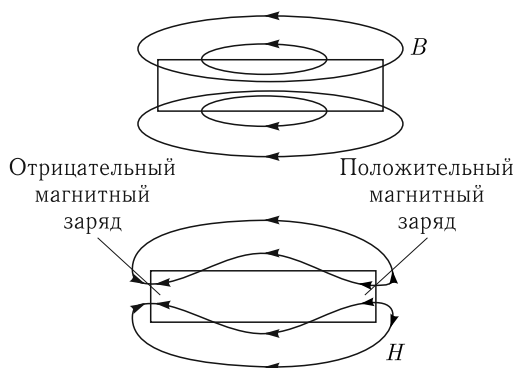


Рис. 15.7

постоянного магнита, в окружающем пространстве которого железные опилки выстроились вдоль линий индукции поля

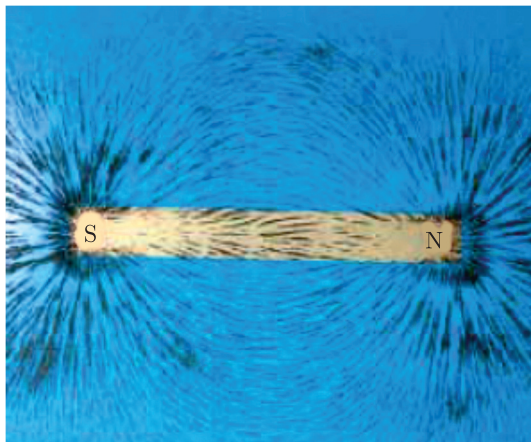


Рис. 15.8

Если использовать формализм магнитных зарядов, то на торцах магнита поверхностная их плотность (см. (13.55))  $\sigma_m = -(J_{2n} - J_{1n}) = -J_{\text{ост}}$  (на правом торце — положительный, а на левом — отрицательный). В соответствии с договоренностью справа будет северный магнитный полюс, а слева южный. Далее, воспользовавшись аналогией с электростатикой (13.58), сделаем замены:

$$\mathbf{E} \rightarrow \mathbf{H}, \quad \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \rightarrow \sigma_m, \quad k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \rightarrow \frac{1}{4\pi}.$$

Напряженность электростатического поля на оси равномерно заряженного диска определяется из (2.8) и равна

$$\begin{aligned} E &= \frac{F}{q_0} = \frac{2kq}{R^2} \left[ 1 - \frac{r}{\sqrt{r^2 + R^2}} \right] = \\ &= 2\pi k\sigma \left[ 1 - \frac{r}{\sqrt{r^2 + R^2}} \right] = 2\pi k\sigma(1 - \cos \alpha). \end{aligned} \quad (15.5)$$

Складывая напряженности полей двух разноименно заряженных дисков, с учетом замен, приходим к формуле (15.4). Чем длиннее магнит, тем больше расстояние между магнитными зарядами, и тем меньше напряженность поля в средней части магнита.

Как и в электростатике, одноименные магнитные заряды разных магнитов (одноименные полюса) отталкиваются, а разноименные — притягиваются. На рис. 15.9 верхний кольцевой магнит за счет сил отталкивания парит над нижним.



Рис. 15.9

**Пример 1.** Рассмотрим однородно намагниченный постоянный кольцевой магнит длины  $l$  с узким зазором  $\Delta$  между его полюсами (рис. 15.10). По теореме о циркуляции напряженности поля  $H$  в магните и поля  $H'$  в зазоре связаны соотношением  $Hl + H'\Delta = 0$ , а индукции полей — граничным условием  $B = \mu_0 H + J_{\text{ост}} = \mu_0 H'$ . Из этих уравнений находим

$$B = \frac{J_{\text{ост}}}{\gamma + 1}, \quad H = -\frac{1}{\mu_0} \frac{\gamma}{\gamma + 1} J_{\text{ост}}. \quad (15.6)$$

Величина  $\gamma = \Delta/l$  называется размагничивающим фактором. Чем он меньше, тем сильнее индукция поля (в магните и зазоре). Поле  $H$  внутри магнита при уменьшении зазора будет стремиться к нулю.

На практике во многих устройствах стремятся уменьшить зазоры между намагниченными телами, чтобы увеличить индукцию и, соответственно, магнитный поток.

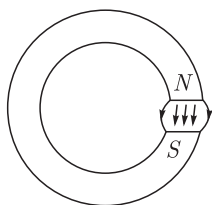


Рис. 15.10

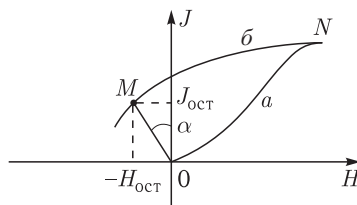


Рис. 15.11

**Пример 2.** Рассмотрим намагничивание ферромагнитного шара на предмет изготовления из него постоянного магнита. Если поместить его в однородное внешнее поле с напряженностью  $H_0$ , то он приобретет некоторую намагниченность  $J$ . Для ферромагнетика нелинейная зависимость  $J = f_a(H)$  изображена на рис. 15.11, кривая  $a$ . Поле внутри шара, согласно (13.25), будет равно  $H = H_0 - \beta \cdot J$ , где  $\beta = 1/3$ . Этому состоянию соответствует точка  $N$  на кривой  $a$ .

Если внешнее поле  $H_0$  постепенно уменьшить до нуля, то из-за наличия гистерезиса намагниченность будет уменьшаться в соответствии с зависимостью  $J = f_b(H)$  (кривая  $б$ ). В результате у шара сохранится остаточная намагниченность  $J_{\text{ост}}$ , а напряженность поля  $H_{\text{ост}} = -\beta \cdot J_{\text{ост}}$ . Этому состоянию соответствует точка  $M$  на кривой  $б$ . Величина остаточного намагничивания определится из трансцендентного уравнения

$$J_{\text{ост}} = f_b(H_{\text{ост}}) = f_b(-\beta \cdot J_{\text{ост}}). \quad (15.7)$$

На кривой  $б$  положение точки  $M$  определяется углом  $\alpha = \arctg \beta$ .

Индукция внутри шара будет равна  $B_{\text{ост}} = \mu_0 H_{\text{ост}} + \mu_0 J_{\text{ост}} = \mu_0(1 - \beta)J_{\text{ост}}$ . Если магнит является длинным цилиндром ( $\beta \ll 1$ ), то его намагниченность и остаточная индукция поля существенно больше, чем у шара.

**Магнитная цепь.** Для передачи магнитного потока от одной части устройства к другой применяется последовательность взаимосвязанных магнетиков, образующих магнитную цепь. В зависимости от источника магнитного потока, магнитные цепи подразделяют на поляризованные (содержащие

постоянные магниты) и нейтральные. При расчетах магнитных цепей используется почти полная формальная аналогия с электрическими цепями.

В качестве иллюстрации рассмотрим нейтральную цепь в виде тороида площадью поперечного сечения  $S$ , состоящего из двух магнетиков. Один из магнетиков имеет длину  $l_1$  и магнитную проницаемость  $\mu_1$ , а второй —  $l_2$  и  $\mu_2$  соответственно. На часть тора намотана катушка с числом витков  $N$ , по которой течет ток силой  $I$  (рис. 15.12). Рассчитаем поток магнитной индукции в такой магнитной цепи. Запишем теорему о циркуляции:  $H_1 l_1 + H_2 l_2 = NI$ , и условие постоянства потока (индукции):  $\Phi_B = \mu_0 \mu_1 H_1 S = \mu_0 \mu_2 H_2 S$ . Из этих двух соотношений получаем формулу Гопкинса:

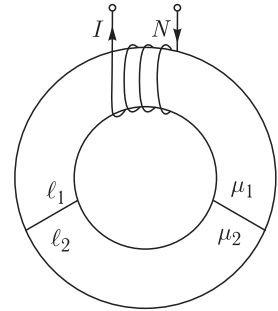


Рис. 15.12

$$\Phi_B = \frac{NI}{\frac{l_1}{\mu_0 \mu_1 S} + \frac{l_2}{\mu_0 \mu_2 S}} = \frac{\mathcal{E}_m}{R_{m1} + R_{m2}}. \quad (15.8)$$

Величина  $\mathcal{E}_m = NI$  называется магнитодвижущей силой,  $R_m = l/(\mu_0 \mu S)$  — магнитным сопротивлением. По внешнему виду она эквивалентна закону Ома для замкнутой цепи с двумя последовательно соединенными резисторами. Из нее следует, что для создания большого потока надо увеличивать число так называемых *ампер-витков*  $NI$  намагничивающей катушки и применять материалы с большой величиной магнитной проницаемости.

Для разветвленных магнитных цепей по аналогии с (9.10) и (9.12) можно записать «законы Кирхгофа»:  $\sum_i \Phi_{Bij} = 0$  и  $\sum_{ij} \Phi_{Bij} R_{mij} = \sum_{ij} \mathcal{E}_{mij}$ .

**Магнитная левитация.** Левитация — явление, при котором тело без видимой опоры «висит» над поверхностью. Это может быть мяч для игры в пинг-понг в потоке вертикальной струи воздуха (аэродинамическая левитация), микрочастица в вертикальном лазерном луче (оптическая левитация), капля жидкого диамагнитного кислорода, висящая между полюсами магнита в создаваемом ими неоднородном поле (магнитная левитация).

Магнитную левитацию можно легко наблюдать, надев на вертикальный карандаш два одинаковых ферромагнитных намагниченных кольца. Если кольца будут обращены друг к другу разноименными полюсами, то верхнее кольцо будет парить в воздухе (рис 15.9).

**Поезд на магнитной подушке.** Практическое воплощение в жизнь эта идея получила при создании поездов на магнитной подушке, построенных по разработанной в Германии технологии MAGLEV (от англ. «*magnetic levitation*»). Отсутствие контакта с рельсами позволяет резко уменьшить сопротивление движению поезда.

Первая дорога (M-Bahn) длиной 1,6 км построена в Берлине и введена в эксплуатацию в 1989 г. Однако она просуществовала менее двух лет: после разрушения берлинской стены она была демонтирована и включена в систему метро Берлина. Небезынтересно отметить, что экспериментальный поезд



TGV во Франции на колесах в 1991 г. разогнался по рельсам до скорости 515,3 км/ч!

В 2002 г. в Китае при участии немецкой компании Transrapid была построена 30 километровая MAGLEV — дорога, связывающая Шанхай с аэропортом Пудун, скорость движения поезда на которой достигает 450 км/ч.

В 2003 г. в Японии во время испытания поезд на магнитной подушке достиг скорости 581 км/ч!

Технология MAGLEV потребовала решить огромное число технических проблем, поэтому стоимость дороги чрезвычайно высока. На данный момент существует 3 типа магнитного подвеса поездов: электродинамическая подвеска EDS, электромагнитная подвеска EMS и подвеска на постоянных магнитах.

В технологии EDS используются электромагниты, обмотка которых находится в сверхпроводящем состоянии при гелиевой температуре (см. далее). Магнитные материалы должны обладать высокими критическими значениями температур и магнитного поля. Однажды созданный в сверхпроводнике ток может существовать неограниченно долго при условии, что поддерживается сверхнизкая температура.

В технологии EMS применяются электромагниты, в обмотках которых необходимо поддерживать электрический ток. Потенциально самой экономичной считается технология с использованием постоянных магнитов. В любом варианте серьезной проблемой является большой вес достаточно мощных магнитов для поддержания в воздухе массивного состава.

Поезд левитирует за счет отталкивания одинаковых полюсов магнитов, расположенных под днищем вагонов и на направляющих пути. Датчики постоянно измеряют расстояние от поезда до пути и подают управляющий сигнал на систему питания обмоток электромагнитов. Тем самым обеспечивается стабилизация расстояния.

Тяга и торможение осуществляются линейным двигателем. Он состоит из расположенных вдоль дороги обмоток, которые при последовательном их питании (друг за другом) создают бегущее магнитное поле. На составе находится другая часть двигателя, ток в магнитах которой взаимодействует с бегущим полем. На рис. 15.13 схематично изображены магниты, расположенные вдоль пути и на самом поезде, и показаны силы, обеспечивающие тягу и торможение. На рис. 15.14 дан внешний вид поезда и элементы его конструкции.

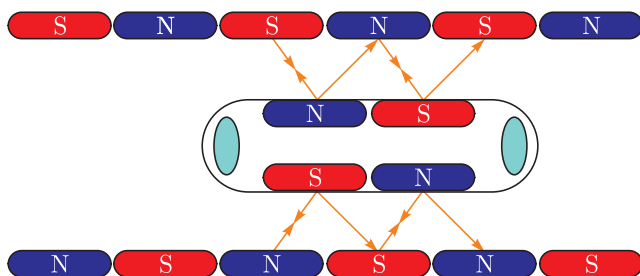


Рис. 15.13



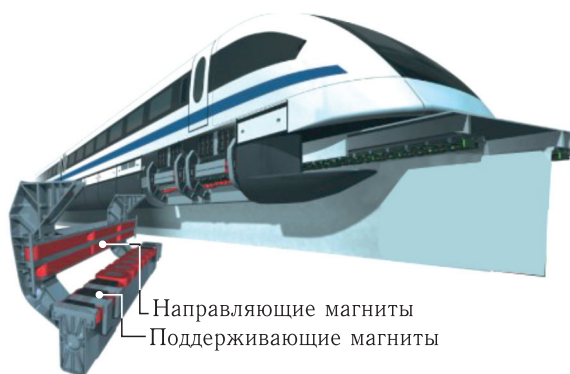


Рис. 15.14

Сейчас разработано множество проектов линейных двигателей, но всех их можно разделить на две категории — двигатели низкого ускорения и двигатели высокого ускорения.

Двигатели низкого ускорения используются в общественном транспорте (маглев, монорельс, метрополитен). Двигатели высокого ускорения весьма небольшие по длине и обычно применяются, чтобы разогнать объект до высокой скорости, а затем выпустить его. Они часто используются для исследований гиперскоростных столкновений, как оружие или пусковые установки космических кораблей (см. далее).

**Магнитные носители информации.** С помощью магнито жестких материалов можно создать носители информации, которая может сохраняться на них многие годы.

Для этого небольшой электромагнит (записывающая головка) создает намагничивающее поле за счет электрического тока, являющегося записываемым сигналом (рис. 15.15). На магнитной ленте, диске и пр.,двигающихся относительно головки, создаются области с разным остаточным намагничиванием. Так образуется магнитная сигналограмма.

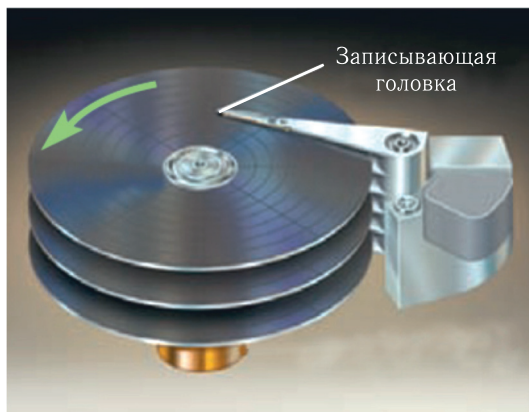


Рис. 15.15

При воспроизведении магнитная сигналограмма равномерно протягивается мимо электромагнита, который называют воспроизводящей головкой. Каждый участок намагниченного носителя создает в сердечнике воспроизводящей головки магнитный поток. При движении носителя магнитный поток изменяется и возникает ЭДС индукции (см. далее), которая воспроизводит закон изменения записанного на носитель сигнала.

Первый аппарат — телеграфон — для магнитной записи и воспроизведения звука был создан датским инженером В. Поульсеном в 1898 г. В качестве носителя в аппарате была использована стальная проволока диаметром 0,5–1,0 мм, движущаяся со скоростью около 2 м/с. Такая большая скорость привела к тому, что для записи докладов конференции в Копенгагене (1908 г.) в течение 14 часов было потрачено около 100 кг проволоки!

В 1925 г. И. Крейчману (СССР) и в 1928 г. Ф. Пфлеймеру (Германия) были выданы патенты на носитель в виде гибкой немагнитной ленты, на которую нанесен рабочий слой из ферромагнитного порошка.

После того как в 1934 г. немецкая фирма «IG Farben» выпустила первую промышленную партию магнитной ленты, появились магнитофоны. Профессиональная аппаратура магнитной записи начала использоваться в радиовещании с 40-х годов, а с 1956 г. она появилась и на телевидении.

С 1952 г. магнитную запись начинают применять для хранения информации в ЭВМ: сначала на ленте, а затем и на магнитном диске (1962 г.).

В 1984 г. появился новый носитель — магнитный диск, который обеспечил высокую плотность записи информации.

Появившиеся в это же время компакт-диски (CD), а позднее и диски DVD, в которых использована оптическая запись информации, стали вытеснять магнитные носители. Широкое распространение для хранения информации получила технология «флэш-память», о которой речь пойдет в конце книги.

**Антиферромагнетики, ферримагнетики, ферриты.** Как отмечалось ранее, у антиферромагнетиков некомпенсированные спины внутренних электронов соседних атомов самопроизвольно устанавливаются антипараллельно. Поэтому кристаллическую решетку антиферромагнетика можно рассматривать как сложную решетку, состоящую из двух подрешеток, намагниченных противоположно и компенсирующих друг друга.

У некоторых веществ, называемых *ферримагнетиками*, эта компенсация может оказаться неполной. Поэтому в них хотя и существует некоторая спонтанная намагниченность, однако она значительно меньше, чем у ферромагнетика.

Термин «ферримагнетизм» ввел в 1948 г. французский физик Л. Неель (Нобелевская премия по физике 1970 г.), который разработал основы теории ферримагнетиков. Ферримагнетик имеет доменную структуру, намагничивается во внешнем поле, при температуре выше точки Нееля переходит в парамагнитное состояние.

Значительная часть ферримагнетиков — это диэлектрические или полупроводниковые ионные кристаллы. Среди них наиболее обширную группу составляют ферриты (шпинели, фанаты, гексаферриты). К ферримагнетикам относятся двойные фториды, например,  $\text{RbNiF}_3$ ,  $\text{CsFeF}_3$ , некоторые сульфиды, селениды, а также ряд сплавов.

Ферриты представляют собой химические соединения, в общем случае имеющие формулу  $MeFe_2O_4$ , где  $Me$  — чаще всего двухвалентный ион металла, например,  $Cu$ ,  $Zn$ ,  $Mg$ ,  $Ni$ ,  $Fe$ ,  $Co$  и  $Mn$ .

Ферриты имеют высокое удельное электрическое сопротивление порядка  $10^9 \text{ Ом} \cdot \text{см}$  и низкие потери на вихревые токи (см. далее).

Благодаря этому ферриты имеют очень широкий диапазон применения: в производстве реле, трансформаторов, дросселей, электромеханических преобразователей и резонаторов и т. п. Однако наибольшее распространение ферриты получили в качестве сердечников для катушек колебательных контуров (феррокатушек), фазовращателей, линий задержки и пр.

### ЛЕКЦИЯ 16

Источниками магнитного поля являются движущиеся электрические заряды или токи, поэтому наличие или отсутствие магнитного поля зависит от выбора системы отсчета. Весьма показательны следующие два примера.

**Пример 1.** Рассчитаем силу взаимодействия равномерно заряженной по объему (объемная плотность заряда  $\rho > 0$ ) бесконечно длинной нити радиуса  $R$  и заряда  $q_0 > 0$ .

Вначале рассмотрим взаимодействие в системе отсчета  $K'$ , в которой нить и заряд неподвижны (рис. 16.1). Напряженность электростатического поля, создаваемого нитью на расстоянии  $O'y'$ , как следует из (3.17), равна  $E'_y = \rho' R'^2 / (2\epsilon_0 y')$ , а электрическая сила, действующая на заряд,  $F'_{Эy} = q_0 E'_y$ . Под действием этой силы будет происходить изменение импульса заряда:  $dP'_y / dt' = F'_{Эy}$ .

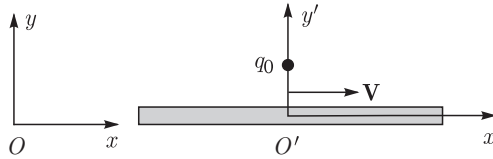


Рис. 16.1

Рассмотрим теперь это взаимодействие в системе  $K$ , относительно которой  $K'$  – система вместе с зарядом и нитью движется в положительном направлении оси  $Ox$  со скоростью  $V$ . Сила, действующая на движущийся заряд, определяет его изменение импульса:  $dP_y / dt = F_y$ . Из преобразований Лоренца следует, что  $P_y = P'_y$ ,  $dt' = dt \sqrt{1 - V^2/c^2}$ ,  $q_0$  – инвариантная величина, поэтому

$$F_y = \frac{dP_y}{dt} = \frac{dP'_y}{dt'} \frac{dt'}{dt} = F'_{Эy} \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} = q_0 E'_y \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}. \quad (16.1)$$

Таким образом, в системе  $K$  сила, действующая на заряд, уменьшилась.

Из-за лоренцева сокращения длины нити ее объемная плотность увеличилась:  $\rho = \rho' / \sqrt{1 - V^2/c^2}$ , а радиус нити и расстояние до заряда не изменяются ( $R = R'$ ,  $y = y'$ ). Поэтому

$$F_y = q_0 E'_y \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} = q_0 \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0 y} \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right) = F_{Эy} + F_{My}. \quad (16.2)$$

Эта сила является суперпозицией электрической  $F_{Эy}$  (не зависящей от скорости движения зарядов) и магнитной  $F_{My}$  (возникающей при движении зарядов) сил. Поскольку напряженность поля  $E_y = \rho R^2 / (2\epsilon_0 y)$ ,

$I = \rho \pi R^2 V$  — сила конвективного электрического тока,  $B_z = \mu_0(I/2\pi y)$ , то, с учетом соотношения  $c^2 = 1/(\varepsilon_0 \mu_0)$  (см. далее), получаем

$$F_y = q_0 \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0 y} \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right) = q_0(E_y - V B_z). \quad (16.3)$$

Подводя итог, можно сказать, что в  $K$ -системе напряженность электрического поля увеличилась и появилось магнитное поле, притягивающее движущийся заряд:

$$E_y = \frac{E'_y}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \quad B_z = \frac{V}{c^2} E_y = \frac{V}{c^2} \frac{E'_y}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}. \quad (16.4)$$

Величина магнитной силы меньше электрической силы: их отношение определяется множителем  $(V/c)^2$ , поэтому при нерелятивистских скоростях магнитная сила по сравнению с электрической исчезающе мала. Тем не менее, при взаимодействии двух проводников с токами, возникновении пинч-эффекта в разряде и т.п. магнитная сила играет определяющую роль, поскольку электрические силы скомпенсированы.

**Пример 2.** Пусть в  $K'$ -системе, движущейся относительно  $K$ -системы со скоростью  $V$  вдоль оси  $Ox$ , существует магнитное поле с индукцией  $B'_z$ , а в системе  $K$  на оси  $Oy$  покоится заряд  $q_0$ . С точки зрения наблюдателя, находящегося в  $K'$ -системе, на движущийся в отрицательном направлении оси  $O'x'$  заряд будет действовать магнитная сила  $F'_{My} = q_0 V B'_z = dP'_y/dt'$ , направленная в положительном направлении оси  $O'y'$ . В системе  $K$  на неподвижный заряд вдоль оси  $Oy$  будет действовать сила  $F_y = dP_y/dt = (dP'_y/dt')(dt'/dt) = q_0 V B'_z / \sqrt{1 - V^2/c^2}$ , поскольку теперь  $dt = dt' \sqrt{1 - V^2/c^2}$ . Следовательно, в этой системе появилось электрическое поле с напряженностью

$$E_y = \frac{F_y}{q_0} = \frac{V B'_z}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}. \quad (16.5)$$

При нерелятивистских скоростях  $E_y = V B'_z$  и электрическое поле является причиной возникновения тока в проводниках, движущихся в магнитном поле.

**Электромагнитная индукция.** Фундаментальная взаимосвязь между электрическим и магнитным полями является следствием релятивистских свойств пространства–времени. Однако еще задолго до создания специальной теории относительности было понятно, что действие электрического тока на магнитную стрелку является проявлением этой связи. Наиболее отчетливо она проявилась в открытом Фарадеем в 1831 г. явлении электромагнитной индукции.

Он обнаружил, что электродвижущая сила, возникающая в замкнутом проводящем контуре, равна скорости изменения магнитного потока через поверхность, опирающуюся на этот контур:

$$\mathcal{E} = \left| \frac{d\Phi_B}{dt} \right|. \quad (16.6)$$

Величина ЭДС не зависит от того, что является причиной изменения потока — изменение самого магнитного поля или движение контура (или его части) в магнитном поле.

Схема опыта Фарадея показана на рис. 16.2. Если контур подключить к гальванометру, то при приближении постоянного магнита (или электромагнита) в цепи будет протекать индукционный электрический ток, а при удалении магнита направление тока изменится на противоположное. Можно оставить магнит неподвижным, а приближать или удалять контур — результат будет тем же самым.

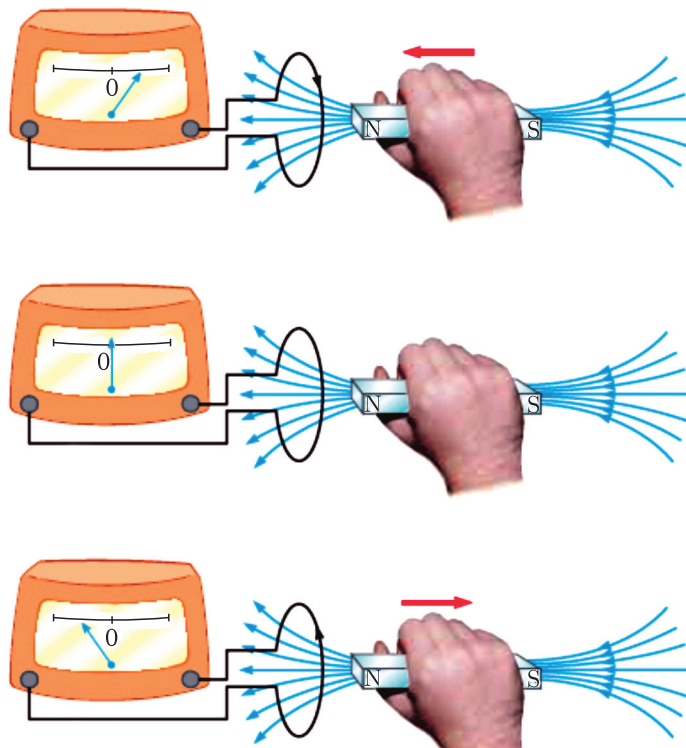


Рис. 16.2

Направление тока подчиняется правилу, сформулированному русским физиком Э. Ленцем: *индукционный ток, возникающий в замкнутом проводящем контуре, имеет такое направление, что создаваемое им магнитное поле противодействует тому изменению магнитного потока, которым был вызван данный ток.*

На рис. 16.3 дано пояснение правила Ленца. При приближении северного полюса постоянного магнита к проводящему кольцу индукционный ток порождает магнитное поле, направленное навстречу полю магнита. Кольцо будет отталкиваться от магнита. При удалении магнита изменится направление индукционного тока и порожденного им поля и кольцо станет притягиваться к магниту.

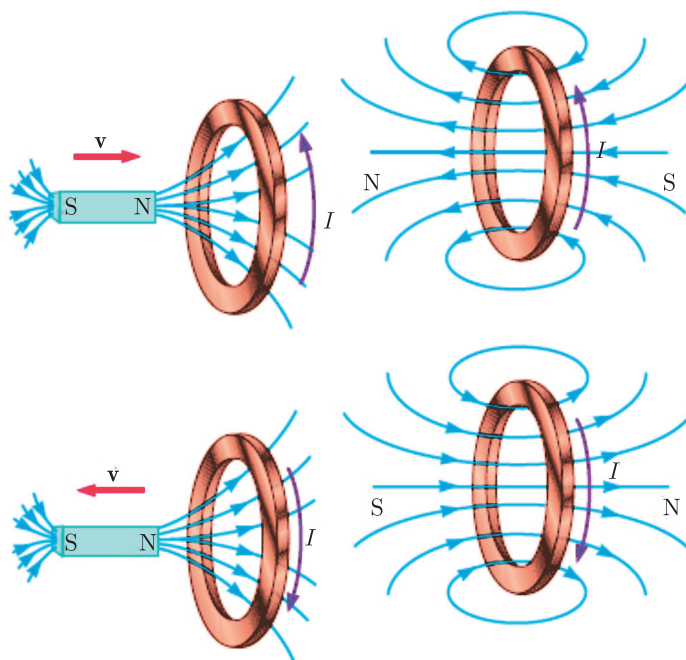


Рис. 16.3

Таким образом, поле индукционного тока будет всегда препятствовать движению магнита или контура, поэтому для поддержания тока необходимо совершать положительную механическую работу. Поэтому правило Ленца находится в полном согласии с законом сохранения энергии.

На рис. 16.4 показана схема опыта, подтверждающего правило Ленца. Постоянный магнит подвешен на нити, перекинутой через легкий блок. К другому концу нити привязан уравнивающий груз. Если толкнуть магнит вниз в направлении катушки, концы которой соединены с гальванометром, то он покажет наличие индукционного тока (а). Если затем подключить катушку к источнику постоянного тока так, чтобы ток в ней протекал в том же направлении, что и ранее индукционный, то магнит будет выталкиваться из катушки (б).

Если использовать для контура введенную ранее правовинтовую систему координат, то закон электромагнитной индукции с учетом правила Ленца может быть записан в виде

$$\mathcal{E} = - \frac{d\Phi_B}{dt}. \quad (16.7)$$

Обсудим теперь причины возникновения ЭДС индукции. Свяжем с магнитом систему отсчета  $K'$ , а с контуром — систему  $K$ .

В системе отсчета  $K'$  электроны движутся вместе с проводником со скоростью  $\mathbf{V}$  в магнитном поле с индукцией  $\mathbf{B}$ , поэтому магнитная составляющая силы Лоренца  $\mathbf{F}_M = e\mathbf{V} \times \mathbf{B}$  будет сторонней силой, обеспечивающей

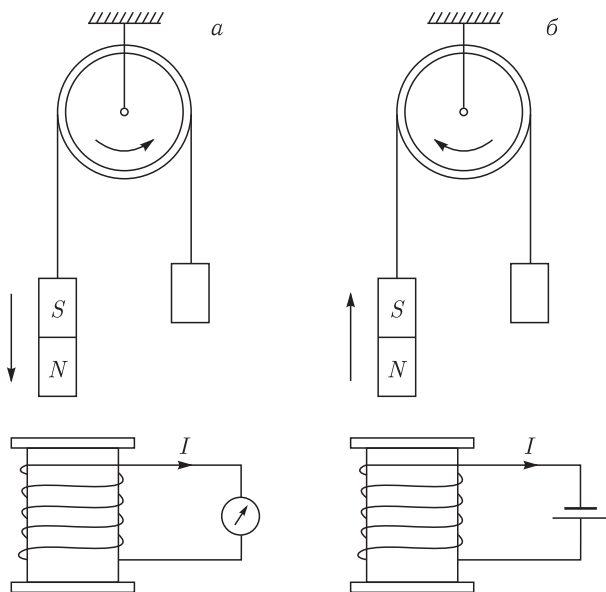


Рис. 16.4

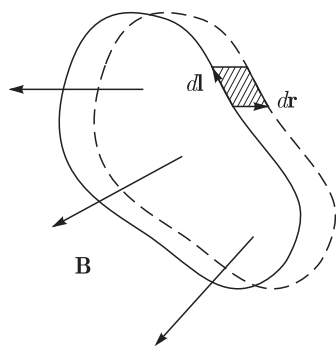


Рис. 16.5

протекание тока в контуре. ЭДС в контуре будет равна

$$\mathcal{E} = \oint \frac{\mathbf{F}_M}{e} d\mathbf{l} = \oint (\mathbf{V} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l}. \quad (16.8)$$

Рассчитаем изменение потока магнитного поля, воспользовавшись рис. 16.5. За время  $dt$  фрагмент контура  $d\mathbf{l}$  сместится на величину  $d\mathbf{r} = \mathbf{V} dt$ , поэтому поток через контур изменится на величину

$$\begin{aligned} d\Phi_B &= \oint (d\mathbf{r} \times d\mathbf{l}) \mathbf{B} = \oint (\mathbf{V} \times d\mathbf{l}) \mathbf{B} \cdot dt = \\ &= - \oint d\mathbf{l} (\mathbf{V} \times \mathbf{B}) \cdot dt. \end{aligned} \quad (16.9)$$

Здесь  $d\mathbf{r} \times d\mathbf{l}$  — площадь, заметаемая движущимся элементом контура (заштрихована на рисунке). Из последних двух выражений следует формула (16.7).

В  $K$ -системе, согласно (16.5), возникнет электрическое поле с напряженностью  $\mathbf{E} = \mathbf{V} \times \mathbf{B}$ , а величина ЭДС будет равна

$$\mathcal{E} = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \frac{d\Phi_B}{dt} = - \frac{d}{dt} \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = - \int \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}. \quad (16.10)$$

В обеих ситуациях ЭДС индукции возникает при пересечении контуром линий магнитного поля.

Можно вообще отказаться от движения магнита и контура, если, например, изменять ток в катушке электромагнита. Тогда, в соответствии с (16.10),



в контуре возникнет индукционный ток в направлении, подчиняющемся правилу Ленца.

Это эффектно можно продемонстрировать следующим образом. В вертикальную катушку вставляют железный сердечник, а на выступающую его часть надевают легкое алюминиевое кольцо (рис. 16.6). Если с помощью ключа  $K$  пустить через обмотку электромагнита электрический ток, то нарастающее магнитное поле вытолкнет кольцо вверх.

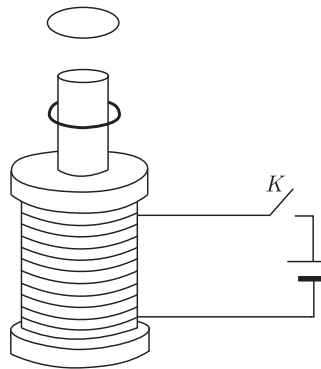


Рис. 16.6

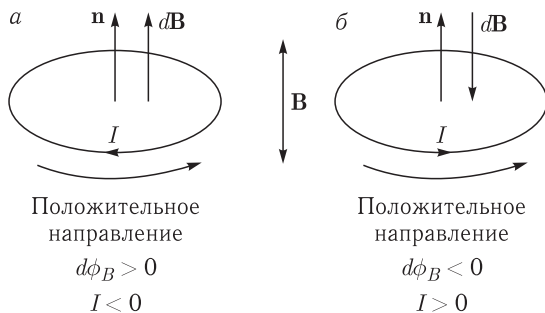


Рис. 16.7

На рис. 16.7 изображен проводящий контур, находящийся в изменяющемся во времени магнитном поле. Указано положительное направление обхода и нормаль к контуру. В ситуации (а) изменение потока  $d\Phi_B > 0$ , а индукционный ток  $I < 0$ , а в ситуации (б) поток уменьшается, и ток течет в противоположном направлении. При этом направление магнитного поля не имеет никакого значения, что изображено двойной стрелкой в середине рисунка.

Источником индукционного тока является электрическое поле, которое будет существовать и в отсутствие проводника. Поэтому смысл уравнения (16.10) состоит в том, что электрическое поле является вихревым (его линии замкнуты) и порождается оно изменяющимся во времени магнитным полем. Частная производная по времени и отражает скорость изменения во времени магнитной индукции, которая может также зависеть и от координат. Это уравнение было получено выдающимся английским физиком Дж. Максвеллом и входит в систему фундаментальных уравнений электродинамики.

Если размеры контура интегрирования стягивать в точку, то уравнение (16.10) можно свести к дифференциальной форме, вводя ротор вектора напряженности электрического поля  $\text{rot } \mathbf{E}$  (см. (3.7)). В результате получаем

$$\text{rot } \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (16.11)$$

**Пример 3.** Рассмотрим электрическую цепь, изображенную на рис. 16.8. По двум параллельным неподвижным проводникам, находящимся на расстоянии  $l$  друг от друга, может скользить без трения перемычка. С другого конца цепь (контур) замыкается резистором  $R$ . Перпендикулярно контуру направлено однородное магнитное поле с индукцией  $B$ . Если скорость перемычки

равна  $V$ , то на электроны будет действовать магнитная сила  $\mathbf{F}_M = e\mathbf{V} \times \mathbf{B}$ , направленная вдоль перемычки. Следовательно, в перемычке возникнет ЭДС индукции, величина которой

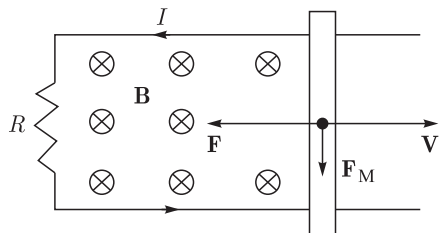


Рис. 16.8

$$\mathcal{E} = BVl = B \frac{dr}{dt} l = B \frac{dS}{dt} = \frac{d\Phi_B}{dt},$$

и в цепи потечет индукционный ток  $I = \mathcal{E}/R = BVl/R$  в направлении, подчиняющемся либо правилу левой руки, либо правилу Ленца. На перемычку с током в магнитном поле будет действовать сила Ампера  $F = IBl = B^2 V l^2 / R$ , направленная против скорости движения перемычки

(тоже подчиняющаяся правилу левой руки). Для поддержания равномерного движения перемычки эту силу необходимо скомпенсировать внешней силой, при этом будет затрачиваться мощность  $P = FV = B^2 V^2 l^2 / R = I^2 R$ . В конечном счете работа внешней силы превращается в джоулево тепло, выделяющееся на резисторе (сопротивлением проводников можно пренебречь).

**Пример 4.** Если имеется только движущаяся перемычка в магнитном поле, то вначале под действием магнитной силы потечет кратковременный ток. Он прекратится после того, как на концах перемычки накопятся разноименные заряды, однородное электростатическое поле  $E_{ст}$  которых не уравновесит магнитную силу:  $eE_{ст} = eV \cdot B$ , или  $E_{ст} = VB$ . Между концами перемычки будет существовать разность потенциалов  $\varphi_1 - \varphi_2 = E_{ст} \cdot l = V \cdot B \cdot l = \mathcal{E}$ , которая будет равна ЭДС индукции, действующей в перемычке.

**Скалярный и векторный потенциалы электромагнитного поля.** В случае одновременного наличия переменных электрического и магнитного полей индукция магнитного поля по-прежнему выражается через векторный потенциал

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}. \quad (16.12)$$

Подставляя это выражение в (16.11), запишем:  $\text{rot } \mathbf{E} = -\partial \text{rot } \mathbf{A} / \partial t = -\text{rot}(\partial \mathbf{A} / \partial t)$ . Поэтому напряженность электрического поля, являющегося в общем случае суперпозицией вихревого и потенциального (как в примере 4), будет равна

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \varphi. \quad (16.13)$$

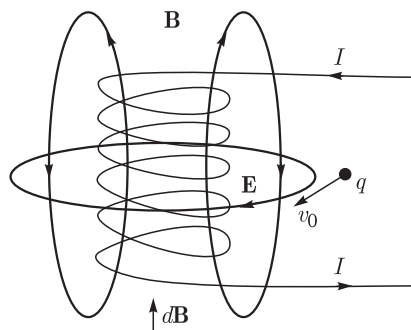


Рис. 16.9

Смысл векторного потенциала становится более наглядным, если рассмотреть движение заряженной частицы в вихревом электрическом поле. Пусть частица массой  $m$  и зарядом  $q$  движется со скоростью  $\mathbf{v}_0$  вне соленоида и в момент времени  $t = 0$  в нем включается электрический ток (рис. 16.9). Поскольку вне катушки на заряд будет действовать вихревое электрическое

поле (действие магнитного поля пренебрежимо мало), то импульс частицы  $\mathbf{p} = m \cdot \mathbf{v}$  к моменту времени  $t$  станет равным

$$\mathbf{p} = m \cdot \mathbf{v}_0 + \int_0^t q \cdot \mathbf{E} \cdot dt = m \cdot \mathbf{v}_0 - q \int_0^t \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \cdot dt = m \cdot \mathbf{v}_0 - q \cdot \mathbf{A}. \quad (16.14)$$

Отсюда следует, что величина  $\mathbf{p} + q \cdot \mathbf{A} = m \cdot \mathbf{v}_0 = \text{const}$  при любых изменениях во времени векторного потенциала. Эта сохраняющаяся векторная величина называется *каноническим, или обобщенным импульсом заряда*. Поэтому векторный потенциал со знаком минус равен импульсу частицы с единичным положительным зарядом, приобретаемому в электромагнитном поле, а скалярный потенциал — энергии частицы в электростатическом поле.

**Измерение магнитного напряжения и индукции.** С помощью явления электромагнитной индукции можно измерить магнитное напряжение. Рассмотрим длинную и тонкую гибкую катушку длиной  $l$  в магнитном поле, состоящую из почти замкнутых  $N$  витков с площадью каждого витка  $S$ , соединенных короткими отрезками провода (рис. 16.10). Эту катушку соединим с баллистическим гальванометром и разместим вдоль контура интегрирования,



Рис. 16.10

по которому требуется измерить магнитное напряжение  $U_{M12} = \int_1^2 \mathbf{H}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \int_1^2 \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l}$  (см. (13.42)). Поток вектора индукции через витки катушки будет пропорционален магнитному напряжению:

$$\Phi_B = \frac{NS\mu_0}{l} \int_1^2 \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \frac{NS\mu_0 U_{M12}}{l}. \quad (16.15)$$

Если магнитное поле начать уменьшать, то в катушке возникнет индукционный ток  $I = -(1/R) d\Phi_B/dt$ , где  $R$  — сопротивление цепи, включая гальванометр. Если за малый промежуток времени  $\Delta t$  магнитное поле исчезнет, то в цепи протечет заряд

$$Q = \int_0^{\Delta t} I dt = -\frac{1}{R} \int_0^{\Delta t} d\Phi_B = \frac{\Phi_B}{R} = \frac{NS\mu_0 U_{M12}}{lR}, \quad (16.16)$$

величина которого измеряется баллистическим гальванометром. Зная параметры катушки и сопротивлений цепи, можно рассчитать магнитное напряжение.

На практике навивают в одном направлении катушку вдоль кожного ремня в два слоя: можно сложить провод вдвое и оба конца провода окажутся у одного края ремня. Это позволяет исключить не учитываемый в расчетах вклад коротких отрезков, соединяющих витки.

Эта идея измерения магнитного напряжения была предложена немецким физиком В. Роговским, поэтому ремень с двухслойной обмоткой получил название «пояса Роговского».

Если, например, поясом Роговского охватить один раз прямой провод с током (рис. 16.11) и после выключения тока произвести измерение протекшего через гальванометр заряда  $Q_1$ , а затем охватить два раза, то магнитное напряжение и заряд удвоятся ( $Q_2 = 2Q_1$ ) и т. д.

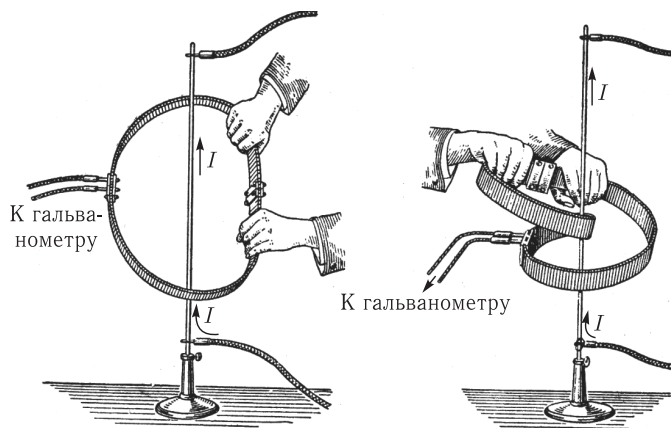


Рис. 16.11

Если в магнитное поле поместить один маленький виток проволоки, соединенный с баллистическим гальванометром и затем поток  $\Phi_B$  уменьшить до нуля (выключив поле или повернув виток на  $90^\circ$  градусов), то заряд, протекший через гальванометр, будет пропорционален индукции поля  $B$ :  $Q = \Phi_B / R = BS / R$ . На таком принципе работает флюксметр — прибор, предназначенный для измерения индукции магнитного поля.

**Самоиндукция.** Если электрический ток  $I$  от внешнего источника течет через контур, то в окружающем пространстве возникает магнитное поле. В свою очередь, это поле создает магнитный поток, величина которого пропорциональна силе тока:

$$\Phi_B = L \cdot I. \quad (16.17)$$

Коэффициент пропорциональности  $L$  называется *коэффициентом самоиндукции*, или *индуктивностью* контура. Он, подобно емкости конденсатора, зависит от формы контура и магнитной проницаемости окружающей среды. Для получения большой индуктивности применяют катушки с большим числом витков, внутрь которых помещаются ферромагнитные сердечники (см. далее). Единицей индуктивности является  $1 \text{ Гн} = 1 \text{ Вб/А}$  ( $1 \text{ Гн} = 1 \text{ генри}$ ).

Если попытаться изменить силу тока, то в цепи появится ЭДС самоиндукции,

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -L \frac{dI}{dt}, \quad (16.18)$$

пропорциональная скорости изменения силы тока. Под действием этой ЭДС в цепи возникнет экстраток самоиндукции  $\delta I$ , направленный таким образом, чтобы помешать изменению основного тока.

Это хорошо наблюдается с помощью электрической схемы, изображенной на рис. 16.12. Здесь две одинаковые лампочки  $L_1$  и  $L_2$  включены параллельно

в цепь, содержащую резистор  $R$  и катушку индуктивности  $L$ . Цепь питается от источника постоянного тока.

При замыкании ключа  $K$  сначала загорится лампочка  $\mathcal{L}_1$ , а затем с некоторым запозданием и лампочка  $\mathcal{L}_2$ . Это запаздывание связано с кратковременным появлением в цепи второй лампочки экстратока замыкания, направленного против основного тока от источника питания. Затем наступит стационарный режим, при котором через лампочки потекут постоянные токи, при этом вторая лампочка будет гореть ярче первой, поскольку на резисторе упадет часть приложенного напряжения.

При размыкании ключа наблюдается кратковременная вспышка первой лампы, и затем накал обеих ламп через некоторое время исчезнет. Это свидетельствует о том, что при размыкании ключа в катушке возникнул кратковременный экстраток размыкания, направленный туда же, куда и основной ток. Суммарный ток, протекая через первую лампу (уже в другом направлении по отношению к первоначальному току) приводит к ее кратковременной вспышке.

Важно подчеркнуть, что в рассмотренном опыте лампы продолжали кратковременно гореть и после отключения внешнего источника. Это свидетельствует о том, что в цепи была запасена некоторая энергия! На рис. 16.13 показана вспышка лампы в момент размыкания ключа в цепи, в которой находится большая катушка со вставленным в нее ферромагнитным сердечником. Сердечник позволяет значительно увеличить индуктивность катушки и запасенную в ней энергию.

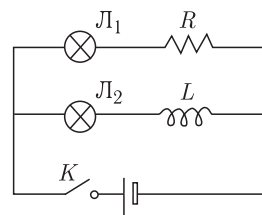


Рис. 16.12

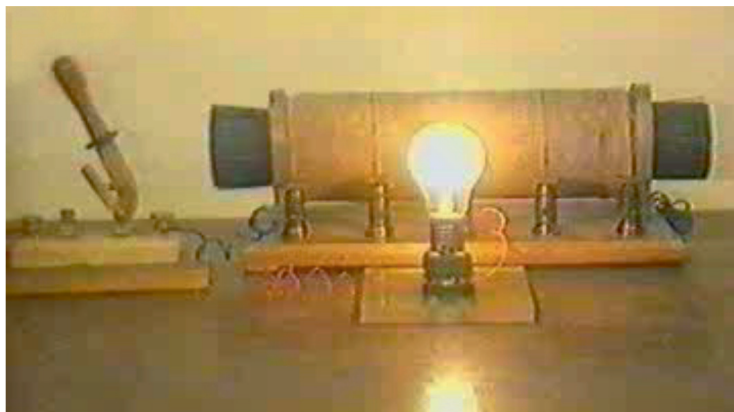


Рис. 16.13

Рассмотрим более подробно процесс установления тока после замыкания ключа. На рис. 16.14 показана электрическая цепь, содержащая последовательно соединенные катушку индуктивности  $L$  и резистор  $R$  ( $RL$ -цепь), которая в момент времени  $t = 0$  ключом  $K$  подключается к источнику постоянного

напряжения  $U_0$ . С учетом ЭДС самоиндукции, закон Ома для  $RL$ -цепи запишется в виде

$$I \cdot R = U_0 - L \frac{dI}{dt}. \quad (16.19)$$

Важно подчеркнуть, что здесь стоит полный ток в цепи, включая экстраток. В силу правила Ленца (знака минус в (16.18)) напряжение на индуктивности

$$U_L = -\mathcal{E} = L \frac{dI}{dt}, \quad (16.20)$$

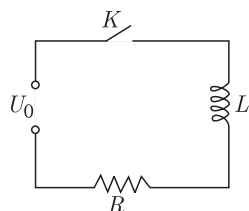


Рис. 16.14

поэтому закон Ома можно записать в виде

$$U_0 = U_L(t) + U_R(t) = L \frac{dI(t)}{dt} + R \cdot I(t). \quad (16.21)$$

Введем постоянную времени  $\tau = L/R$  цепи. Тогда (16.21) примет вид

$$\frac{dI}{dt} + \frac{I}{\tau} = \frac{U_0}{L}, \quad (16.22)$$

совпадающий с (8.30). Поэтому решение этого уравнения при начальном условии  $I(0) = 0$ , по аналогии с (8.33), запишется в виде

$$I(t) = \frac{U_0}{R} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right]. \quad (16.23)$$

Зависимость тока от времени показана на рис. 16.15 а. Ток увеличивается и асимптотически приближается к максимальной величине  $I_0 = U_0/R$ , при которой напряжение на резисторе будет равно напряжению источника. На практике время установления тока оценивается величиной  $(3-5)\tau$ .

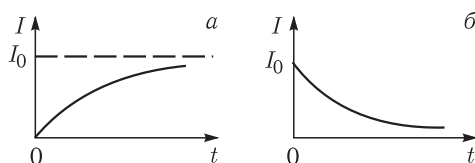


Рис. 16.15

За такое же время первоначальный ток  $I_0$  в цепи прекратится, если «выключить» источник. Ток, как нетрудно убедиться, будет убывать по закону (рис. 16.15 б)

$$I(t) = I_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right). \quad (16.24)$$

Этот ток можно рассматривать как затухающий экстраток размыкания, а ток (16.23) — как суперпозицию тока  $I_0$  и встречного экстраток замыкания.

**Собственная потенциальная функция тока.** Для контура с током  $I$ , создающим собственное магнитное поле, потенциальная (силовая) функция может быть введена следующим образом. Мысленно разобьем полный ток на трубки тока  $\delta I_i$ . Каждый такой виртуальный контур будет находиться в магнитном поле, создаваемом остальными трубками тока, и его

потенциальная функция  $U_i = -\delta I_i \cdot \Phi_{Bi}$ . Тогда собственная потенциальная функция тока

$$U = \frac{1}{2} \sum_i U_i = -\frac{1}{2} \sum_i \delta I_i \cdot \Phi_{Bi} = -\frac{1}{2} I \cdot \langle \Phi_B \rangle = -\frac{1}{2} LI^2, \quad (16.25)$$

где

$$\langle \Phi_B \rangle = L \cdot I \quad (16.26)$$

— среднее значение потока через контур, коэффициент  $1/2$  обусловлен тем, что взаимодействие каждой пары трубок тока в сумме учитывается дважды.

Функция (16.25) позволяет рассчитывать силы и моменты сил, действующие на фрагменты контура с током. Она также дает «рецепт» для вычисления коэффициента самоиндукции контура, проводник которого обладает конечной толщиной и объемом  $V$ .

Воспользуемся формулами (11.26)–(11.28) и с учетом равенства  $I \cdot d\mathbf{l} = \mathbf{j} \cdot dV$  запишем для собственной потенциальной функции выражение

$$U = -\frac{1}{2} I \oint_l \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{l} = -\frac{1}{2} \int_V \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{j} dV = -\frac{1}{2} k \int_V \int_{V'} \frac{\mathbf{j}' \cdot dV'}{R} \cdot \mathbf{j} dV = -\frac{1}{2} LI^2. \quad (16.27)$$

Отсюда следует, что коэффициент самоиндукции

$$L = \frac{k}{I^2} \int_V \int_{V'} \frac{\mathbf{j}' \cdot dV'}{R} \cdot \mathbf{j} dV. \quad (16.28)$$

В (16.28) производится двукратное интегрирование по объему проводника,  $R$  — расстояние между элементами объема  $dV$  и  $dV'$ , в которых текут токи  $\mathbf{j}$  и  $\mathbf{j}'$ . Таким образом, индуктивность контура в вакууме зависит не только от его формы и объема провода, но и от распределения вектора плотности тока по сечению проводника. Учет этого распределения становится существенным для токов высокой частоты (см. далее).

**Пример 5.** Рассчитаем индуктивность тороидальной катушки круглого поперечного сечения, состоящую из  $N$  витков. Если поперечные размеры катушки будут меньше ее длины  $l = 2\pi R$ , то поле внутри такой тонкой катушки будет однородным и приблизительно равным  $B = \mu_0(N/l)I$  (см. (10.19)). Тогда поток вектора магнитной индукции через витки с площадью  $S$  каждого будет равен  $\Phi_B = B \cdot N \cdot S = \mu_0(N^2 S/l)I$ , коэффициент самоиндукции

$$L = \mu_0 \frac{N^2 S}{l}. \quad (16.29)$$

Эта формула может быть использована для расчета индуктивности длинного соленоида. Здесь важно отметить, что толщиной провода можно пренебречь.

При пропускании по соленоиду электрического тока  $I$  между витками начнет действовать сила притяжения. Эту силу легко вычислить с помощью собственной потенциальной функции тока  $U = -(1/2) LI^2$ . Если ось  $Ox$

совместить с осью катушки, а начало координат — с ее левым торцом, то  $L(x) = \mu_0(N^2 S/x)$  ( $x$  — координата правого торца), а сила, согласно (11.10),

$$F_x = - \left( \frac{dU}{dx} \right)_I = \frac{1}{2} I^2 \frac{dL}{dx} \Big|_{x=l} = -\frac{1}{2} I^2 \mu_0 \frac{N^2 S}{l^2} = -\frac{1}{2\mu_0} B^2 S. \quad (16.30)$$

**Пример 6.** На рис. 16.16 показан фрагмент двухпроводной линии длиной  $l$ , состоящей из двух параллельных круглых проводов радиуса  $R$ , находящихся на расстоянии  $b$  друг от друга. Вычислим индуктивность этого фрагмента.

По этим проводам в противоположных направлениях текут одинаковые токи. Если ось  $Ox$  направить перпендикулярно обоим проводам, а начало координат совместить с осью одного из проводов, то индукция поля, создаваемая током в одном проводе, равна

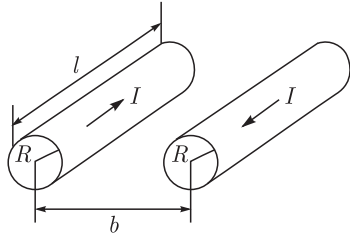


Рис. 16.16

$$B_1(x) = \frac{\mu_0 I}{2\pi R^2} x, \quad \text{если } x \leq R, \quad \text{и}$$

$$B_2(x) = \frac{\mu_0 I}{2\pi x}, \quad \text{если } x \geq R.$$

В этой задаче учет толщины провода имеет принципиальное значение. Чтобы рассчитать средний поток, а затем и индуктивность, предположим, что средний поток будет равен потоку через прямоугольный контур длиной  $l$  и шириной  $b$ . Тогда с учетом вклада обоих проводов

$$\langle \Phi_B \rangle = 2l \int_0^R B_1(x) \cdot dx + 2l \int_R^b B_2(x) \cdot dx = \frac{\mu_0 \cdot l}{\pi} \left[ \frac{1}{2} + \ln \frac{b}{R} \right] I.$$

Отсюда индуктивность фрагмента двухпроводной линии получилась равной

$$L = \frac{\mu_0 \cdot l}{\pi} \left[ \frac{1}{2} + \ln \frac{b}{R} \right]. \quad (16.31)$$

Воспользуемся для вычисления индуктивности собственной потенциальной функцией тока (16.27). Уравнение для векторного потенциала  $\Delta \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{j}$  (см. (10.30)) совпадает с уравнением Пуассона для скалярного потенциала  $\Delta \varphi = -\rho/\varepsilon_0$  (3.20), если сделать формальную замену  $\varphi \rightarrow A$ ,  $\rho/\varepsilon_0 \rightarrow \mu_0 \mathbf{j}$ . Тогда, используя выражения (3.17), получаем

$$A(r) = A_0 - \frac{\mu_0 j \cdot R^2}{2} \ln \frac{r}{R} \quad (r \geq R), \quad (16.32a)$$

$$A(r) = A_0 + \frac{\mu_0 j (R^2 - r^2)}{4} \quad (r \leq R). \quad (16.32б)$$

Здесь  $A$  — единственная компонента вектор-потенциала, направленного туда же, куда и ток в проводе. В силу принципа суперпозиции вектор-потенциал суммарного поля внутри одного провода будет равен (рис. 16.17)

$$A = A(r_1) - A(r_2) = \frac{\mu_0 j (R^2 - r_1^2)}{4} + \frac{\mu_0 j \cdot R^2}{2} \ln \frac{r_2}{R}. \quad (16.33)$$



Следовательно,

$$U = -\frac{1}{2} 2 \int_V A \cdot j dV = -\frac{\mu_0 \cdot l \cdot j^2}{2} 2 \int_S \left[ \frac{(R^2 - r_1^2)}{4} + \frac{R^2}{2} \ln \frac{r_2}{R} \right] \cdot dS = -\frac{1}{2} LI^2, \quad (16.34)$$

где множитель 2 перед интегралом позволяет произвести интегрирование по цилиндрическому сечению  $S$  одного провода.

Воспользуемся переменными  $r_1$  и  $\varphi$ . Тогда  $r_2^2 = r_1^2 + b^2 - 2r_1 b \cos \varphi$ ,  $dS = r_1 dr_1 d\varphi$ , и из (16.34) имеем

$$L = \frac{\mu_0 \cdot l}{\pi^2 R^2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \left[ \frac{(1 - r_1^2/R^2)}{2} + \ln \frac{r_2}{R} \right] r_1 dr_1 d\varphi.$$

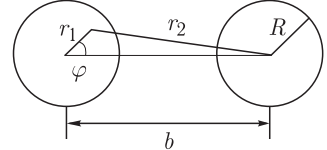


Рис. 16.17

С учетом табличного интеграла  $\int_0^{2\pi} \ln \frac{r_2}{R} d\varphi = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \ln \left( \frac{r_2}{R} \right)^2 d\varphi = 2\pi \ln \frac{b}{R}$ , окончательно получаем

$$L = \frac{\mu_0 \cdot l}{\pi} \left[ \frac{1}{4} + \ln \frac{b}{R} \right]. \quad (16.35)$$

Сравнивая с (16.31), отмечаем разницу в выражениях, которая становится весьма существенной при расстояниях  $b \geq R$ . При  $b \gg R$  можно рассчитывать индуктивность по упрощенной формуле (16.31).

Например, рассчитанная таким методом индуктивность единичного круглого витка радиуса  $b$ , выполненного из провода круглого сечения радиуса  $R \ll b$ , получается равной

$$L = \frac{\mu_0 \cdot l}{2\pi} \left[ \frac{1}{4} + \ln \frac{8b}{R} - 2 \right], \quad (16.36)$$

где  $l = 2\pi b$  — длина витка.

**Релятивистское преобразование сил.** В начале этой лекции отмечалось, что сила, действующая на точечный заряд со стороны заряженной нити, зависит от выбора системы отсчета. Сейчас рассмотрим этот вопрос более подробно в самой общей постановке задачи.

Вначале установим связь между компонентами силы  $F_x$ ,  $F_y$  и  $F_z$ , действующей на материальную точку в лабораторной системе координат  $K$ , и компонентами силы  $F'_x$ ,  $F'_y$  и  $F'_z$ , действующей в системе отсчета  $K'$ , движущейся вдоль оси  $Ox$  со скоростью  $V$ . Если материальная точка массы  $m$  движется относительно  $K'$ -системы со скоростью  $\mathbf{v}'$ , то изменение компонент ее релятивистского импульса  $\mathbf{p}'$  описывается уравнениями

$$\frac{dp'_x}{dt'} = F'_x, \quad \frac{dp'_y}{dt'} = F'_y, \quad \frac{dp'_z}{dt'} = F'_z. \quad (16.37)$$

Энергия частицы  $\mathcal{E}' = mc^2 / \sqrt{1 - v'^2/c^2}$  под действием силы  $\mathbf{F}'$  изменяется во времени в соответствии с уравнением

$$\frac{d\mathcal{E}'}{dt'} = \mathbf{F}' \cdot \mathbf{v}'. \quad (16.38)$$

В  $K$ -системе частица движется со скоростью  $\mathbf{v}$  и изменение компонент импульса  $\mathbf{p}$  описывается аналогичными уравнениями:

$$\frac{dp_x}{dt} = F_x, \quad \frac{dp_y}{dt} = F_y, \quad \frac{dp_z}{dt} = F_z. \quad (16.39)$$

Из преобразования Лоренца  $t = \gamma(t' + Vx'/c^2)$  следует, что

$$dt = \gamma dt' \left( 1 + \frac{Vv'_x}{c^2} \right). \quad (16.40)$$

Компоненты импульса связаны соотношениями

$$p_x = \gamma \left( p'_x + \frac{\mathcal{E}'V}{c^2} \right), \quad p'_y = p_y, \quad p'_z = p_z. \quad (16.41)$$

Следовательно, из уравнений (16.39) при учете (16.40) и (16.41) получаем соотношения:

$$\begin{aligned} F_x = \frac{dp_x}{dt} &= \frac{dp_x}{dt'} \frac{dt'}{dt} = \gamma \frac{d(p'_x + \mathcal{E}'V/c^2)}{dt'} \frac{1}{\gamma(1 + Vv'_x/c^2)} = \\ &= \frac{F'_x + (F'_x v'_x + F'_y v'_y + F'_z v'_z)(V/c^2)}{(1 + Vv'_x/c^2)}, \end{aligned} \quad (16.42)$$

$$F_y = \frac{dp_y}{dt} = \frac{dp_y}{dt'} \frac{dt'}{dt} = \frac{dp'_y}{dt'} \frac{1}{\gamma(1 + Vv'_x/c^2)} = \frac{F'_y}{\gamma(1 + Vv'_x/c^2)}, \quad (16.43)$$

$$F_z = \frac{dp_z}{dt} = \frac{dp_z}{dt'} \frac{dt'}{dt} = \frac{dp'_z}{dt'} \frac{1}{\gamma(1 + Vv'_x/c^2)} = \frac{F'_z}{\gamma(1 + Vv'_x/c^2)}. \quad (16.44)$$

В соотношениях (16.42)–(16.44) перейдем от компонент скорости  $\mathbf{v}'$  к компонентам скорости  $\mathbf{v}$ , воспользовавшись формулами для прямого и обратного преобразования компонент вектора скорости:

$$\frac{v'_y}{(1 + Vv'_x/c^2)} = \gamma v_y, \quad \frac{v'_z}{(1 + Vv'_x/c^2)} = \gamma v_z, \quad \frac{v_y}{(1 - Vv_x/c^2)} = \gamma v'_y. \quad (16.45)$$

Первые два преобразования позволяют записать (16.42) в виде

$$F_x = F'_x + \frac{v_y V}{c^2} F'_y + \frac{v_z V}{c^2} F'_z. \quad (16.46)$$

Перемножая левые и правые части первого и третьего преобразований (16.45), получаем

$$\frac{v'_y}{(1 + Vv'_x/c^2)} \frac{v_y}{(1 - Vv_x/c^2)} = \gamma v'_y \cdot \gamma v_y,$$

или

$$\frac{1}{\gamma(1 + Vv'_x/c^2)} = \gamma(1 - Vv_x/c^2).$$

Поэтому

$$F_y = \gamma(1 - Vv_x/c^2) F'_y, \quad (16.47)$$

$$F_z = \gamma(1 - Vv_x/c^2) F'_z. \quad (16.48)$$

Из преобразований (16.46)–(16.48) следует, что если в  $K'$ -системе сила  $\mathbf{F}'$ , например, не зависит от скорости  $\mathbf{v}'$ , то в системе  $K$  зависимость силы  $\mathbf{F}$  от скорости  $\mathbf{v}$  неизбежна. Эти преобразования удобно записать в векторном виде

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{v} \times \mathbf{G}, \quad (16.49)$$

где

$$\mathbf{F}_1 = \{F'_x, \gamma F'_y, \gamma F'_z\}, \quad (16.50)$$

$$\mathbf{G} = \{0, -(V/c^2)\gamma F'_z, (V/c^2)\gamma F'_y\}. \quad (16.51)$$

**Преобразование полей.** Пусть, например, в движущейся системе присутствует только электрическое поле с напряженностью  $\mathbf{E}'$ . Это поле действует на заряд  $q$  с силой  $\mathbf{F}' = \mathbf{F}'_{\mathcal{E}} = q\mathbf{E}'$ , не зависящей от скорости. В системе  $K$  сила  $\mathbf{F}_1$ , не зависящая от скорости, представляется как электрическая сила:  $\mathbf{F}_1 = \mathbf{F}_{\mathcal{E}} = q\mathbf{E}$ . Напряженность электрического поля равна

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}_1}{q} = \{E'_x, \gamma E'_y, \gamma E'_z\}. \quad (16.52)$$

Сила, зависящая от скорости, представляется как магнитная сила:  $\mathbf{F}_M = \mathbf{v} \times \mathbf{G} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ . Индукция возникшего магнитного поля получается равной

$$\mathbf{B} = \frac{\mathbf{G}}{q} = \{0, -(V/c^2)\gamma E'_z, (V/c^2)\gamma E'_y\} = \{0, -(V/c^2)E_z, (V/c^2)E_y\}. \quad (16.53)$$

Таким образом, в движущейся системе отсчета  $\mathbf{F}' = \mathbf{F}'_{\mathcal{E}} = q\mathbf{E}'$ , а в лабораторной системе отсчета сила может быть представлена в виде

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_{\mathcal{E}} + \mathbf{F}_M = q\mathbf{E} + q\mathbf{v} \times \mathbf{B}. \quad (16.54)$$

Отношение магнитной силы к электрической по порядку величины равно:

$$\frac{F_M}{F_{\mathcal{E}}} \sim \frac{qVB}{qE} \sim \frac{V^2}{c^2} < 1. \quad (16.55)$$

При переходе из одной системы отсчета в другую изменяются компоненты электрического и магнитного полей и сила, действующая на заряд. Однако выражение для силы Лоренца (16.54) остается неизменным (ковариантным).

Формулы (16.52) и (16.53) могут рассматриваться как формулы преобразования компонент электромагнитного поля в частном случае отсутствия магнитного поля в  $K'$ -системе.

**Пример 7.** Рассчитаем поле точечного заряда  $q$ , движущегося равномерно и прямолинейно с релятивистской скоростью  $\mathbf{V}$ . Свяжем с зарядом движущуюся систему координат  $K'$  и предположим, что заряд находится в начале координат этой системы. Координатные оси  $O'x'$  и  $Ox$  направим вдоль вектора  $\mathbf{V}$ . Положим также, что в момент времени  $t = 0$  начала координат обеих систем совпадают. Тогда

$$\mathbf{E}' = k \frac{q}{r'^3} \mathbf{r}', \quad \mathbf{B}' = 0. \quad (16.56)$$

С учетом (16.52) и преобразований Лоренца для координат:  $x' = \gamma(x - Vt)$ ,  $y' = y$ ,  $z' = z$  можно записать

$$\begin{aligned} E_x &= E'_x = kq \frac{x'}{r'^3} = kq \frac{\gamma(x - Vt)}{[\gamma^2(x - Vt)^2 + y^2 + z^2]^{3/2}}, \\ E_y &= \gamma E'_y = \gamma kq \frac{y'}{r'^3} = kq \frac{\gamma y}{[\gamma^2(x - Vt)^2 + y^2 + z^2]^{3/2}}, \\ E_z &= \gamma E'_z = \gamma kq \frac{z'}{r'^3} = kq \frac{\gamma z}{[\gamma^2(x - Vt)^2 + y^2 + z^2]^{3/2}}. \end{aligned} \quad (16.57)$$

Индукция магнитного поля, как следует из (16.53), имеет две компоненты и равна

$$\mathbf{B} = \frac{1}{c^2} \mathbf{V} \times \mathbf{E}. \quad (16.58)$$

Конфигурация поля движущегося с релятивистской скоростью заряда кардинально отличается от поля неподвижного заряда. Если положить  $t = 0$ , то, согласно (16.57), можно записать

$$\mathbf{E} = kq \frac{\gamma \mathbf{r}}{[\gamma^2 x^2 + y^2 + z^2]^{3/2}} = kq \frac{\gamma \mathbf{r}}{[(\gamma^2 - 1)x^2 + r^2]^{3/2}} = kq \frac{\gamma \mathbf{r}}{r^3 [(\gamma^2 - 1) \cos^2 \vartheta + 1]^{3/2}}, \quad (16.59)$$

где  $\cos \vartheta = x/r$  — косинус угла между радиусом-вектором  $\mathbf{r}$  и вектором  $\mathbf{V}$ , совпадающим с положительным направлением оси  $Ox$ . При неизменном расстоянии  $r$  до заряда напряженность поля будет зависеть от угла  $\vartheta$ . В частности, при  $\vartheta = 0$   $E_{\parallel} = kq(1/\gamma^2 r^2)$ , а при  $\vartheta = \pm \pi/2$   $E_{\perp} = kq(\gamma/r^2)$ . Если релятивистский фактор  $\gamma \gg 1$ , то  $E_{\perp} \gg E_{\parallel}$ .

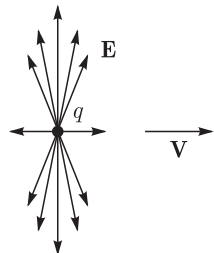


Рис. 16.18

На рис. 16.18 показаны линии электрического поля, которые сконцентрированы вблизи плоскости, перпендикулярной вектору скорости  $\mathbf{V}$ . Замкнутые линии индукции магнитного поля расположены в плоскостях, перпендикулярных вектору скорости заряда. С течением времени вся рассмотренная конфигурация поля движется вместе с зарядом равномерно и прямолинейно со скоростью  $\mathbf{V}$ .

В заключение получим формулы преобразования полей в самом общем случае. Будем считать, что в системе  $K'$  существует электрическое  $\mathbf{E}'$  и магнитное  $\mathbf{B}'$  поля. В системе  $K$  напряженность  $\mathbf{E}$  и индукция  $\mathbf{B}$  будут иметь совсем другие значения. Для того чтобы установить связь между ними, воспользуемся ковариантными выражениями для силы Лоренца в обеих системах:

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} + q\mathbf{v} \times \mathbf{B}, \quad (16.60)$$

$$\mathbf{F}' = q\mathbf{E}' + q\mathbf{v}' \times \mathbf{B}', \quad (16.61)$$

преобразованиями проекции скорости:

$$v'_x = \frac{v_x - V}{(1 - Vv_x/c^2)}, \quad v'_y = \frac{v_y}{\gamma(1 - Vv_x/c^2)}, \quad v'_z = \frac{v_z}{\gamma(1 - Vv_x/c^2)} \quad (16.62)$$

и преобразованиями (16.46)–(16.48) для компонент сил. Вначале подставим компоненты  $F_y$  и  $F'_y$  силы Лоренца в уравнение (16.47):

$$qE_y + q(v_z B_x - v_x B_z) = \gamma \left(1 - \frac{Vv_x}{c^2}\right) [qE'_y + q(v'_z B'_x - v'_x B'_z)]. \quad (16.63)$$

Исключая в (16.63) с помощью (16.62) компоненты вектора скорости  $\mathbf{v}'$ , сокращая на величину заряда  $q$  и группируя слагаемые, перепишем последнее равенство в виде

$$(E_y - \gamma E'_y - \gamma V B'_z) + \left(-B_z + \gamma \frac{V}{c^2} E'_y + \gamma B'_z\right) v_x + (B_x - B'_x) v_z = 0. \quad (16.64)$$

Поскольку это равенство должно выполняться при любой скорости  $\mathbf{v}$ , выражения в круглых скобках должны равняться нулю. Тогда

$$E_y = \gamma(E'_y + V B'_z), \quad B_x = B'_x, \quad B_z = \gamma\left(B'_z + \frac{V}{c^2} E'_y\right). \quad (16.65)$$

Проводя подобную процедуру с аналогичным уравнением (16.48), получаем

$$E_z = \gamma(E'_z - V B'_y), \quad B_x = B'_x, \quad B_y = \gamma\left(B'_y - \frac{V}{c^2} E'_z\right). \quad (16.66)$$

Подстановка  $F_x$  и  $F'_x$  в уравнение в (16.46) дает

$$qE_x + q(v_y B_z - v_z B_y) = qE'_x + q(v'_y B'_z - v'_z B'_y) + \\ + \frac{v_y V}{c^2} [qE'_y + q(v'_z B'_x - v'_x B'_z)] + \frac{v_z V}{c^2} [qE'_z + q(v'_x B'_y - v'_y B'_x)].$$

Избавляясь от компонент вектора  $\mathbf{v}'$ , группируя слагаемые в последнем равенстве и учитывая соотношения (16.65) и (16.66), получаем самый простой результат:

$$E_x = E'_x. \quad (16.67)$$

Формулы (16.65)–(16.67) являются искомыми формулами преобразования компонент электромагнитного поля. Их удобно записать в следующем порядке:

$\begin{aligned} E_x &= E'_x, & B_x &= B'_x, \\ E_y &= \gamma(E'_y + V B'_z), & B_y &= \gamma\left(B'_y - \frac{V}{c^2} E'_z\right), \\ E_z &= \gamma(E'_z - V B'_y), & B_z &= \gamma\left(B'_z + \frac{V}{c^2} E'_y\right). \end{aligned}$	(16.68)
---	---------

Нетрудно видеть, что в частном случае  $\mathbf{B}' = 0$  они совпадают с (16.52)–(16.53).

## ЛЕКЦИЯ 17

**Энергия тока.** Кратковременный экстраток размыкания является свидетельством существования запасенной энергии  $W$  в электрической цепи. Поскольку эта энергия превращается в теплоту, то ее легко можно вычислить с помощью закона Джоуля–Ленца, используя выражение для тока (16.24):

$$W = \int_0^{\infty} RI^2(t) \cdot dt = RI_0^2 \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{2t}{\tau}\right) \cdot dt = \frac{RI_0^2 \tau}{2} = \frac{LI_0^2}{2}. \quad (17.1)$$

Эта энергия заимствуется у источника постоянного тока. Действительно, после замыкания ключа по цепи пойдет нарастающий во времени ток  $I(t)$  (16.23). Уравнение (16.21) можно записать в виде закона сохранения энергии:

$$U_0 \cdot I \cdot dt = LI dI + R \cdot I^2 dt = d\left(\frac{LI^2}{2}\right) + R \cdot I^2 dt. \quad (17.2)$$

Здесь работа, совершаемая источником постоянного тока за время  $dt$ , затрачивается на нагревание резистора и на создание запаса энергии электрического тока. Таким образом, энергия тока силой  $I$ , протекающего по контуру с индуктивностью  $L$ , равна

$$W = \frac{LI^2}{2}. \quad (17.3)$$

Обратим внимание, что энергия тока равна собственной потенциальной функции (16.27) с противоположным знаком.

**Энергия магнитного поля.** Опыт показывает, что «носителем» запасенной энергии является не электрический ток, а создаваемое им магнитное поле. Это следует из того факта, что электромагнитное поле, порожденное переменным током в проводе (антенне), может переносить энергию в окружающем пространстве.

Проще всего связать энергию с магнитным полем можно, рассмотрев энергию, запасенную в длинном соленоиде, заполненном магнитной средой с проницаемостью  $\mu$ .

Напряженность поля  $H$  в длинном магнетике, согласно (13.22), равна напряженности поля катушки  $H_0$ , т. е.  $H = H_0 = NI/l$ , а индукция поля в магнетике  $B = \mu_0 \mu H = \mu_0 \mu NI/l$ . Поэтому индуктивность соленоида в присутствии магнетика, с учетом (16.29), равна  $L = \mu_0 \mu N^2 S/l$ , а запасенная энергия

$$W = \frac{1}{2} \frac{\mu_0 \mu N^2 S}{l} I^2 = \frac{1}{2} B \cdot H \cdot S \cdot l. \quad (17.4)$$

В единице объема пространства, занимаемого магнитным полем, запасена энергия

$$w = \frac{1}{2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} = \frac{1}{2} \mu_0 \mu H^2 = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0 \mu}, \quad (17.5)$$

которая называется *объемной плотностью энергии магнитного поля*.

Для ферромагнетика, у которого магнитная проницаемость зависит от напряженности поля, объемная плотность энергии, подобно (6.32), определяется интегралом

$$w = \int_0^B \mathbf{H} \cdot d\mathbf{B}. \quad (17.6)$$

Последнюю формулу можно получить с помощью закона сохранения энергии, применительно к  $RL$ -цепи, подключенной к источнику постоянного напряжения  $U_0$ , записав (17.2) в виде

$$U_0 \cdot (I - \delta I) \cdot dt = dW + R \cdot (I - \delta I)^2 dt, \quad (17.7)$$

где  $\delta I$  — экстраток замыкания,  $I$  — постоянный в течение интервала времени  $dt$  электрический ток.

Если бы катушка с ферромагнетиком отсутствовала, то  $\delta I = 0$ , и при таком же постоянном токе

$$U_0 \cdot I \cdot dt = R \cdot I^2 dt. \quad (17.8)$$

Раскрывая скобки в (17.7), пренебрегая слагаемым, содержащим  $(\delta I)^2$ , и вычитая (17.8), получаем  $dW = R \cdot I \cdot \delta I \cdot dt$ . Поскольку величина экстратока  $\delta I = \frac{1}{R} \frac{d\Phi_B}{dt} = \frac{1}{R} SN \frac{dB}{dt}$ , а ток связан с напряженностью поля соотношением  $H = NI/l$ , то  $dW = H \cdot dB \cdot S \cdot l$ , откуда следует (17.6). Если индукция и напряженность поля связаны линейной зависимостью, то (17.6) переходит в (17.5).

За один цикл перемагничивания единицы объема ферромагнетика будут происходить потери энергии. Эти потери идут на нагревание кристалла и равны количеству тепла

$$q_{\text{тепл}} = \oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{B} = \oint \mathbf{H} \cdot \mu_0 \cdot d\mathbf{H} + \oint \mathbf{H} \cdot \mu_0 \cdot d\mathbf{J} = \mu_0 \oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{J}. \quad (17.9)$$

Следовательно, *потери численно равны площади петли гистерезиса в координатах  $(\mathbf{B}, \mathbf{H})$  или  $(\mathbf{J}, \mathbf{H})$* .

**Взаимная индукция.** В лекции 11 были введены коэффициенты взаимной индукции  $L_{12}$  и  $L_{21}$ , которые характеризуют магнитную связь между контурами с токами, при этом  $\Phi_{12} = L_{12}I_1$ ,  $\Phi_{21} = L_{21}I_2$ ,  $L_{12} = L_{21}$ .

При изменении тока  $I_1$  во втором контуре возникнет ЭДС, равная

$$\mathcal{E}_{12} = -\frac{d\Phi_{12}}{dt} = -L_{12} \frac{dI_1}{dt}. \quad (17.10a)$$

Аналогично при изменении тока  $I_2$  в первом контуре возникнет ЭДС, равная

$$\mathcal{E}_{21} = -\frac{d\Phi_{21}}{dt} = -L_{21} \frac{dI_2}{dt}. \quad (17.10б)$$

Рассмотренное явление называется взаимной индукцией, а возникающие в контурах ЭДС называются электродвижущими силами взаимной индукции. Фактически работа пояса Роговского основана на явлении взаимной индукции.

Вычислим энергию, запасенную в двух связанных контурах, по которым текут токи  $I_1$  и  $I_2$ . Будем считать известными индуктивности контуров  $L_1$  и  $L_2$ , а также коэффициент взаимной индукции  $L_{12} = L_{21}$ .

Наиболее просто это можно сделать, рассмотрев два соленоида одинаковой длины  $l$  и приблизительно одинакового сечения витка  $S$ , однако у первого соленоида общее число витков равно  $N_1$ , а у второго соленоида оно равно  $N_2$ . Вставим соленоид с чуть меньшим сечением витка плотно во второй соленоид и пустим по катушкам электрические токи. Напряженность поля первого тока  $H_1 = N_1 I_1 / l$ , напряженность поля второго тока  $H_2 = N_2 I_2 / l$ , а напряженность суммарного поля  $H = H_1 + H_2$ .

Энергия магнитного поля, запасенного в объеме  $V = S \cdot l$ , заполненном магнетиком с магнитной проницаемостью  $\mu$ , с учетом (17.5), будет равна

$$W = w \cdot V = \frac{1}{2} \mu_0 \mu H^2 S \cdot l = \frac{1}{2} \mu_0 \mu \cdot (H_1^2 + 2H_1 H_2 + H_2^2) \cdot S \cdot l. \quad (17.11)$$

Если принять во внимание, что

$$L_1 = \frac{\mu_0 \mu N_1^2 S}{l}, \quad L_2 = \frac{\mu_0 \mu N_2^2 S}{l} \quad (\text{см. (16.29)}),$$

$$L_{12} = \frac{\mu_0 \mu N_1 N_2 S}{l} = L_{21} \quad (\text{см. (11.14)}),$$

то

$$W = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} L_{12} I_1 I_2 + \frac{1}{2} L_{21} I_2 I_1 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2. \quad (17.12)$$

Таким образом, при наличии магнитной связи энергия токов зависит от величины этой связи (коэффициентов взаимной индукции).

**Закон сохранения энергии для электрических цепей с магнитной связью.** Пусть имеется  $N$  электрических цепей, связанных магнитной связью. Потенциальная функция системы токов будет включать в себя как собственные потенциальные функции токов  $U_i = -(1/2) L_i I_i^2$ , так и потенциальные функции  $j$ -го тока в поле  $i$ -го тока  $U_{ij} = -L_{ij} I_i I_j$  ( $i, j = 1, 2, 3, \dots, N$ ). Ее можно записать в виде

$$U = \frac{1}{2} \sum_i \sum_j U_{ij} = -\frac{1}{2} \sum_i \sum_j L_{ij} I_i I_j. \quad (17.13)$$

Здесь  $L_{ii} = L_i$  и учтено, что  $L_{ij} = L_{ji}$ , а коэффициент  $1/2$  обусловлен тем, что взаимодействие каждой пары токов в сумме учитывается дважды. При относительном перемещении или деформации контуров будет совершаться механическая работа

$$dA = -(dU)_I = \frac{1}{2} \sum_i \sum_j I_i I_j dL_{ij}. \quad (17.14)$$



Энергия магнитного поля

$$W = \frac{1}{2} \sum_i \sum_j L_{ij} I_i I_j = -U. \quad (17.15)$$

Ее приращение  $dW$  может быть связано как с перемещением и деформацией контуров, так и с изменением токов в них. В этом и состоит принципиальная разница между энергией  $W$  и потенциальной функцией  $U$  системы токов, которая используется для определения сил и моментов сил при  $I = \text{const}$ .

Искомый закон сохранения энергии можно записать для отрезка времени  $dt$  в виде:

$$\sum_i \mathcal{E}_i I_i dt = \sum_i R_i I_i^2 dt + \frac{1}{2} d \left[ \sum_i \sum_j L_{ij} I_i I_j \right] + \frac{1}{2} \sum_i \sum_j I_i I_j dL_{ij}, \quad (17.16)$$

где  $R_i$  и  $\mathcal{E}_i$  — полное сопротивление  $i$ -го контура и действующая в нем ЭДС внешнего источника соответственно.

**Пример.** Вычислим подъемную силу электромагнита, воспользовавшись законом сохранения энергии. На рис. 17.1 изображен электромагнит, питающийся от внешнего источника с постоянной электродвижущей силой  $\mathcal{E}$ . Два сердечника в катушках вместе с переключателями образуют магнитную цепь. В соответствии с формулой Гопкинса (15.8) магнитный поток

$$\Phi_B = B \cdot S = \frac{NI}{R_m + 2l/(\mu_0 S)},$$

где  $N$  — число витков в катушках электромагнита,  $I$  — сила тока,  $S$  — площадь одного сердечника,  $B$  — индукция поля,  $R_m$  — магнитное сопротивление цепи,  $2l/(\mu_0 S)$  — магнитное сопротивление двух последовательных воздушных зазоров с величиной  $l$  каждого. При увеличении зазора на величину  $dl$  поток изменится (уменьшится) на величину

$$d\Phi_B = - \frac{NI}{(R_m + 2l/(\mu_0 S))^2} \frac{2dl}{\mu_0 S} = - \frac{2B^2 S}{\mu_0 NI} dl.$$

При неподвижном якоре работа источника равна джоулевым потерям:

$$\mathcal{E} I dt = R I^2 dt,$$

а во время смещения якоря возникает ток самоиндукции  $\delta I = -\frac{1}{R} \frac{d\Phi_B}{dt}$ , при этом поле будет совершать работу  $dA = F \cdot dl$ . Поскольку ток самоиндукции, согласно правилу Ленца, должен воспрепятствовать уменьшению потока, то он будет направлен туда же, что и основной ток.

Поэтому баланс энергии запишется в виде  $\mathcal{E}(I + \delta I)dt = R(I + \delta I)^2 dt + F \cdot dl$ . Вычитая из этого равенства предыдущее, получаем  $\mathcal{E} \cdot \delta I \cdot dt = 2RI \cdot \delta I \cdot dt + F \cdot dl = 0$ . Подставляя сюда выражение для тока  $\delta I$

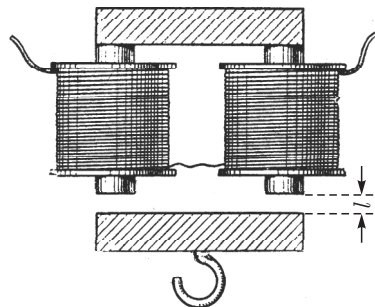


Рис. 17.1

и учитывая, что  $\mathcal{E} = RI$ , получаем  $dA = F \cdot dl = I \cdot d\Phi_B$ . Отсюда сила получается равной

$$F = -\frac{2}{\mu_0 S} \frac{NI^2}{(R_m + 2l/(\mu_0 S))^2} = -\frac{2B^2 S}{\mu_0 N}. \quad (17.17)$$

Знак минус в последнем выражении означает, что сила направлена против смещения якоря, т. е. является силой притяжения. Она пропорциональна квадрату силы тока и числу витков электромагнита. Ее максимальное значение достигается при отсутствии воздушного зазора. Это хорошо ощущается при открывании дверей с магнитным замком (например, дверей в подъездах): при не плотном прижме якоря к магниту эффективность замка резко снижается.

**Вихревые токи.** В сплошных проводящих телах при изменении магнитного поля во времени или при движении тел в неоднородном магнитном поле возникают вихревые индукционные токи, или токи Фуко, названные по имени французского исследователя Ж. Фуко. В 1855 г. он обнаружил нагревание ферромагнитных сердечников и других металлических тел в переменном магнитном поле и объяснил этот эффект возбуждением индукционных токов.

Токи Фуко замкнуты в кольца. Их направление подчиняется правилу Ленца, поэтому движущиеся проводники в магнитном поле будут испытывать торможение.

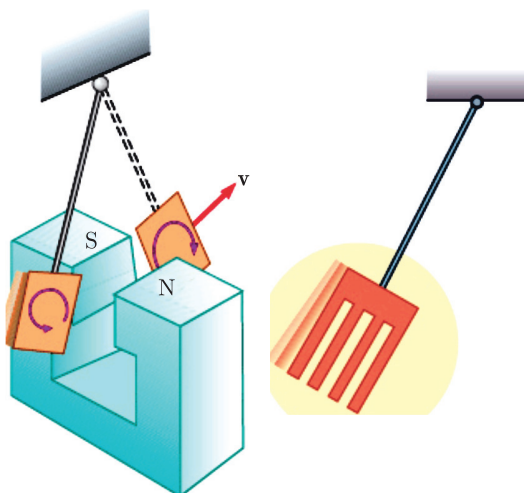


Рис. 17.2

На рис. 17.2 показана схема опыта, в котором физический маятник, на конце которого находится массивный плоский проводник, совершает колебания в между полюсами магнита. Если проводник сделан в виде гребенки, то затухание колебаний маятника будет значительно меньше, чем в случае сплошного тела. В обоих случаях вихревые токи протекают в плоскости проводника, однако в проводнике-гребенке они значительно меньше из-за наличия воздушных зазоров. На рис. 17.3 монета, находясь между полюсами электромагнита, «нехотя» медленно падает вниз из-за токов Фуко.

На рис. 17.4 показано устройство монетоприемника, широко распространенного во многих автоматических устройствах. После прохождения через

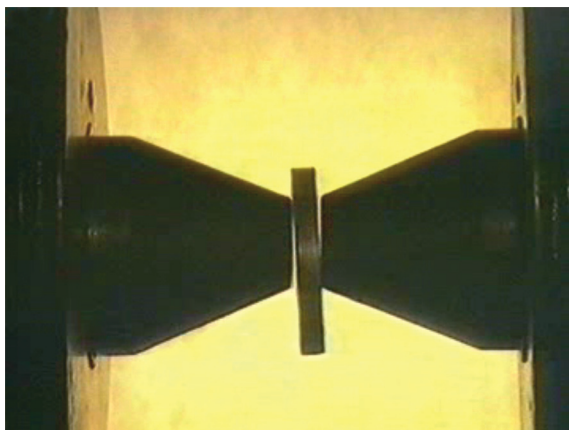


Рис. 17.3

щелевое отверстие монета попадает в держатель  $A$ , в котором через монету протекает электрический ток  $I$  и измеряется ее омическое сопротивление  $R$ . Если оно не соответствует требуемой величине, то держатель опускается, а монета падает вниз и возвращается ее хозяину. Стандартная монета катится по наклонной плоскости между полюсами магнита, испытывая торможение. Если скорость в конце пути (контролируемая датчиками) не соответствует требуемой величине, то выход  $B$  остается закрытым, а выход  $C$  — открытым. Монета падает вниз и возвращается на исходную позицию.

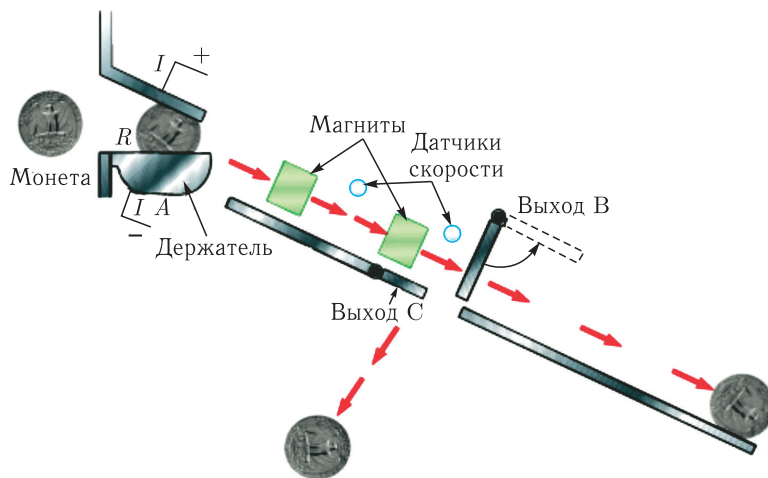


Рис. 17.4

С использованием токов Фуко работает пушка Гаусса. Стволом в ней является катушка, а снарядом — проводящий продолговатый предмет. При резком включении тока в катушке в снаряде возникают вихревые токи, и он выталкивается из катушки. На рис. 17.5 показаны две последовательные стадии стрельбы из демонстрационной пушки.

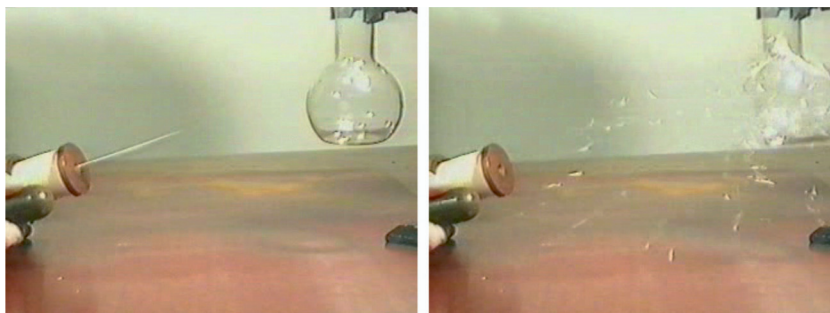


Рис. 17.5

Торможение проводящих тел при их движении в магнитном поле используется в электродинамических тормозных системах, применяется для демпфирования подвижных частей гальванометров, сейсмографов и др.

**Металлодетекторы и металлоискатели.** На «улавливании» токов Фуко в металлах основан принцип действия металлодетекторов и металлоискателей. Металлодетектор, изображенный на рис. 17.6, состоит из двух рамок с контурами (катушками) в них. Один контур, при протекании по нему переменного тока  $I_0$ , создает в пространстве между рамками переменное горизонтальное магнитное поле  $B_0$ . Это поле создает во втором контуре индукционный ток  $I'$ .

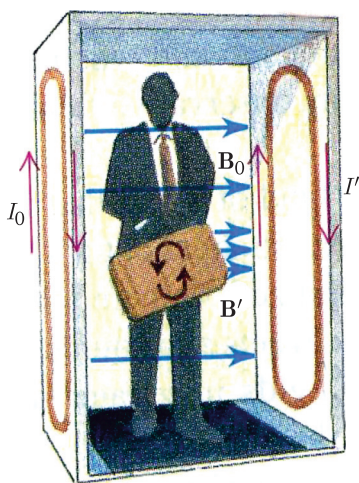


Рис. 17.6

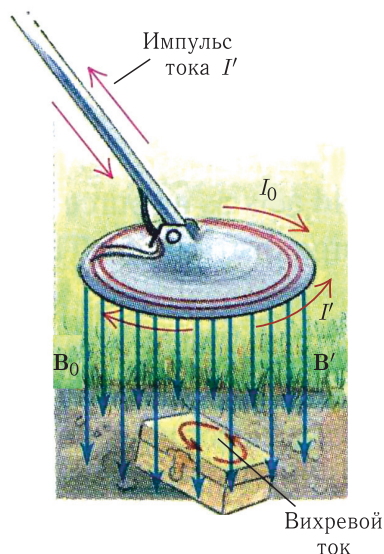


Рис. 17.7

При появлении между рамками металлического предмета магнитное поле изменяется, так как вихревые токи создают дополнительное магнитное поле  $B'$ . Это приводит к изменению индукционного тока, что фиксируется соответствующими измерительными приборами.

В металлоискателях (рис. 17.7) используется одна рамка с двумя катушками: излучающей и приемной. Взаимное расположение катушек должно быть

таким, чтобы магнитное поле излучающей катушки в отсутствие посторонних металлических предметов не наводило ЭДС в приемной катушке. Лишь появление вблизи катушек металлического предмета приведет к возникновению переменной ЭДС в приемной катушке.

Поскольку с помощью металлоискателей обычно проводят поиск предметов, находящихся в земле, то катушки необходимо по возможности приблизить к поверхности земли. Это достигается компланарным расположением витков катушек (в одной плоскости) в корпусе дискообразной формы.

Токи Фуко применяются в электрометаллургии для плавки металлов в индукционных тигельных печах. Металл помещают в плавильный тигель (объем цилиндрической формы, выполненный из огнеупорного непроводящего материала), находящийся внутри индуктора (большой катушки с переменным током частотой порядка 1 кГц). В результате индуктивного разогрева металл плавится, а тигель остается холодным. Например, для плавления тонны металла за 1 час необходимо подводить мощность порядка 1 МВт.

Во многих случаях токи Фуко могут приводить к нежелательным потерям электрической энергии. По этой причине сердечники трансформаторов набирают из тонких пластин, разделенных изолирующими прослойками (см. далее).

**Токи смещения.** Анализируя закон электромагнитной индукции (16.7), Максвелл пришел к заключению, что изменяющееся магнитное поле порождает вихревое электрическое поле, что нашло отражение в предположенном им уравнении  $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \int \partial \mathbf{B} / \partial t \cdot d\mathbf{S}$  (см. (16.10)), или  $\text{rot } \mathbf{E} = - \partial \mathbf{B} / \partial t$  (см. (16.11)). Вместе с тем он обратил внимание, что уравнение  $\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{j}$  (см. (13.13)) противоречиво. В самом деле, с одной стороны, в силу математического тождества  $\text{div rot } \mathbf{H} = 0$ , а с другой стороны  $\text{div } \mathbf{j} \neq 0$ . Чтобы устранить это противоречие, Максвелл в правую часть (13.13) добавил плотность тока смещения  $\mathbf{j}_{\text{см}}$ :  $\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{j} + \mathbf{j}_{\text{см}}$ , при этом должно выполняться условие  $\text{div}(\mathbf{j} + \mathbf{j}_{\text{см}}) = 0$ . Используя уравнение непрерывности  $\partial \rho / \partial t = - \text{div } \mathbf{j}$  (см. (9.18)) и уравнение Максвелла  $\text{div } \mathbf{D} = \rho$  (4.34), можем записать

$$\text{div } \mathbf{j}_{\text{см}} = - \text{div } \mathbf{j} = \frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(\text{div } \mathbf{D}) = \text{div } \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \quad (17.18)$$

Отсюда следует, что

$$\mathbf{j}_{\text{см}} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \quad (17.19)$$

С учетом тока смещения уравнение (13.13) приобретает вид

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad (17.20)$$

а уравнение (13.11) для циркуляции вектора напряженности магнитного поля —

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I + \int \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}. \quad (17.21)$$

Последние два уравнения Максвелла (в дифференциальной и интегральной формах) показывают, что *изменяющееся во времени электрическое поле порождает в окружающем пространстве вихревое магнитное поле.*

В качестве иллюстрации рассмотрим  $RC$ -цепь, подключенную к источнику постоянного напряжения (см. лекцию 8). После замыкания ключа потечет ток  $I(t) = dq/dt$  (см. (8.34)). Если используется плоский конденсатор с площадью каждой обкладки равной  $S$ , то заряд обкладки  $q = \sigma \cdot S$  ( $\sigma$  — поверхностная плотность заряда), а индукция поля, в силу (5.6),  $D = \sigma$ . Поэтому

$$I(t) = \frac{dq}{dt} = \frac{d\sigma}{dt} \cdot S = \frac{dD}{dt} \cdot S = j_{\text{см}} \cdot S. \quad (17.22)$$

Таким образом, ток проводимости в проводнике продолжается в виде тока смещения между обкладками конденсатора. Ток смещения создает такое же магнитное поле, как и ток проводимости. На рис. 17.8 изображена структура линий магнитного поля при зарядке (а) и разрядке (б) конденсатора. Магнитная стрелка будет ориентироваться, находясь как вблизи проводника, так и между обкладками конденсатора.

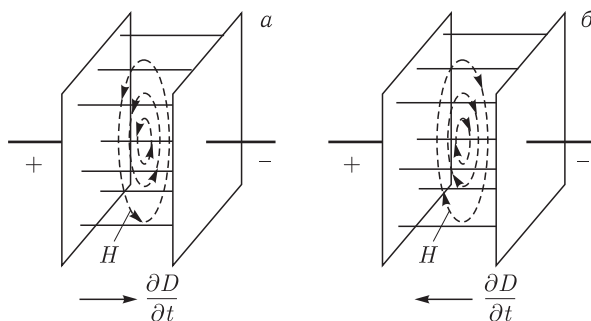


Рис. 17.8

Поскольку ток в проводнике изменяется, то в соответствии с законом Ома  $\mathbf{j} = (1/\rho)\mathbf{E} = \sigma\mathbf{E}$  (см. (8.11)) должно изменяться со временем и электрическое поле. А это означает, что в проводнике также должен существовать ток смещения:

$$\mathbf{j}_{\text{см}} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \varepsilon_0 \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon}{\sigma} \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t}. \quad (17.23)$$

В рассматриваемом процессе он ничтожно мал по сравнению с током проводимости. В тех процессах, где ток проводимости изменяется с высокой частотой, ток смещения в проводнике может быть сопоставим с током проводимости (см. далее).

Следует отметить, что термин «ток смещения» не является удачным и сохранился лишь в силу исторических причин. Можно с натяжкой говорить о смещении связанных зарядов диэлектрика, находящегося между обкладками конденсатора в момент его зарядки или разрядки. Однако если между обкладками вещество отсутствует, то никакого смещения зарядов нет, однако ток смещения, несомненно, существует.

**Уравнения Максвелла.** Математическим фундаментом классической электродинамики являются уравнения (16.11), (17.20), (4.34) и (10.36), поэтому они заслуживают того, чтобы записать их еще раз вместе в виде

системы уравнений Максвелла:

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (17.24)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad (17.25)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho, \quad (17.26)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0. \quad (17.27)$$

Здесь  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{D}$  — напряженность и индукция электрического поля,  $\mathbf{H}$  и  $\mathbf{B}$  — напряженность и индукция магнитного поля,  $\rho$  — объемная плотность заряда,  $\mathbf{j}$  — плотность тока. В силу закона сохранения заряда  $\rho$  и  $\mathbf{j}$  связаны уравнением непрерывности (9.18):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0, \quad (17.28)$$

которое имеет такой же вид, что и уравнение неразрывности для сжимаемой жидкости, описывающее сохранение массы.

Зададимся вопросом: позволяют ли уравнения Максвелла однозначно рассчитать электромагнитное поле? Формально нам необходимо определить пять векторных величин:  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{j}$ , и одну скалярную величину  $\rho$ . Подчеркнем, что речь идет о токах и зарядах в среде, поведение которых определяется электромагнитным полем. Их не следует путать с заданными распределениями  $\rho_{\text{и}}(x, y, z, t)$  и  $\mathbf{j}_{\text{и}}(x, y, z, t)$ , описывающими источники электромагнитных волн.

Для этого необходимо иметь пять векторных уравнений и одно скалярное, а уравнения (17.24)–(17.28) представляют собой лишь два векторных и три скалярных уравнения. Более того, уравнения (17.25) и (17.26) связаны между собой, поскольку имеют одинаковые дифференциальные следствия. В этом можно убедиться, применив операцию  $\operatorname{div}$  к обеим частям (17.25) и затем использовать (17.28). Тогда получим уравнение (дифференциальное следствие)  $\frac{\partial}{\partial t}(\operatorname{div} \mathbf{D} - \rho) = 0$ , которое также можно получить дифференцированием по времени уравнения (17.26).

Аналогично можно показать, что (17.24) связано с (17.27). Применяя операцию  $\operatorname{div}$  к уравнению (17.24), можем получить второе дифференциальное следствие, которое получается и дифференцированием по времени уравнения (17.27).

**Материальные уравнения среды.** Недостающие три векторных уравнения устанавливают связь между векторами и называются материальными уравнениями среды. В общем виде они записываются в виде известных функций:

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}(\mathbf{E}); \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{H}); \quad \mathbf{j} = \mathbf{j}(\mathbf{E}). \quad (17.29)$$

Для изотропного диэлектрика, поляризация которого пропорциональна напряженности электрического поля, материальным уравнением является (4.35). Аналогично для магнетика, намагниченность которого пропорциональна напряженности магнитного поля, можно использовать в качестве материального

уравнение (13.16). Наконец, для среды, подчиняющейся закону Ома, применимо уравнение (8.11). Таким образом:

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu_0 \mu \mathbf{H}, \quad \mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}. \quad (17.30)$$

Очевидно, что эти материальные уравнения неприменимы для сегнетоэлектриков, ферромагнетиков и постоянных магнитов.

Кроме того, они неприменимы в случае быстропеременных электромагнитных полей оптического диапазона (см. курс «Оптика»). Например, значения векторов  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{j}$  в какой-либо точке пространства  $\mathbf{r}$  и момент времени  $t$  могут зависеть от значений векторов  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  в этот же момент времени, но в других точках пространства. Такая ситуация реализуется в среде с пространственной структурой и проявляется как *пространственная дисперсия среды*. Существует и *временная (частотная) дисперсия*, когда  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{j}$  определяются значениями  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  в той же точке пространства, но в предшествующие моменты времени. В этом случае среда обладает «памятью» на воздействия.

Кроме того, в общем случае связь между векторами в материальных уравнениях является нелинейной. Поэтому эти уравнения представляют в виде разложения в ряд по степеням  $E$  (или  $H$ ) и анализируют влияние каждого из членов разложения на электромагнитное поле в среде.

**Закон сохранения энергии электромагнитного поля.** Пусть в пространстве, заполненной средой, для которой справедливы материальные уравнения (17.30), находится электромагнитное поле. Выделим мысленно область пространства объемом  $V$  и, воспользовавшись законом Джоуля–Ленца  $g = \mathbf{j} \cdot \mathbf{E}$  (8.18) и уравнением (17.25), запишем выражение для количества выделяемого тепла в этом объеме в единицу времени:

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = \int_V g \cdot dV = \int_V \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} \cdot dV = \int_V \operatorname{rot} \mathbf{H} \cdot \mathbf{E} \cdot dV - \int_V \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot \mathbf{E} \cdot dV. \quad (17.31)$$

Используем математическое тождество  $\operatorname{div}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \equiv \mathbf{H} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{E} - \mathbf{E} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{H}$  и первое уравнение Максвелла (17.24). Тогда

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = - \int_V \operatorname{div}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot dV - \int_V \left( \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \mathbf{H} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot \mathbf{E} \right) \cdot dV. \quad (17.32)$$

Учтем далее, что

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \mathbf{H} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\mathbf{B} \cdot \mathbf{H}}{2}, \quad \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot \mathbf{E} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\mathbf{D} \cdot \mathbf{E}}{2}.$$

Введем объемную плотность энергии электромагнитного поля

$$w = \frac{\mathbf{D} \cdot \mathbf{E}}{2} + \frac{\mathbf{B} \cdot \mathbf{H}}{2} \quad (17.33)$$

и вектор плотности потока энергии электромагнитного поля

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}. \quad (17.34)$$



Тогда (17.32) с использованием теоремы Гаусса преобразуется к виду

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = - \int_{\Sigma} \mathbf{S} \cdot d\boldsymbol{\sigma} - \frac{\partial}{\partial t} \int_V w \cdot dV, \quad (17.35)$$

где  $d\boldsymbol{\sigma}$  — векторный элемент замкнутой поверхности  $\Sigma$ , ограничивающей рассматриваемый объем  $V$ .

Таким образом, количество выделяемого тепла равно убыли энергии электромагнитного поля и ее притоку извне через поверхность  $\Sigma$ . Объемная плотность энергии электромагнитного поля равна сумме объемных плотностей электрического (5.21) и магнитного (17.5) полей.

Вектор  $\mathbf{S}$  получил название вектора Пойнтинга (по имени британского физика Дж. Пойнтинга, который в 1884 г. ввел его для плотности потока энергии электромагнитного поля). Надо отметить, что общее представление о потоке энергии в пространстве впервые было введено российским физиком Н. Умовым в 1874 г., который получил выражение для плотности потока энергии в упругих средах и вязких жидкостях. Поэтому вектор плотности потока энергии без конкретизации ее физической природы называется вектором Умова.

**Скин-эффект.** Опыт показывает, что переменный ток высокой частоты протекает преимущественно в поверхностном слое проводника. Эффект вытеснения тока в приповерхностную область проводника получил название «скин-эффект» (от англ. «skin» — кожа). Скин-эффектом также называют эффект уменьшения амплитуды электромагнитных волн по мере их проникновения в глубь проводящей среды.

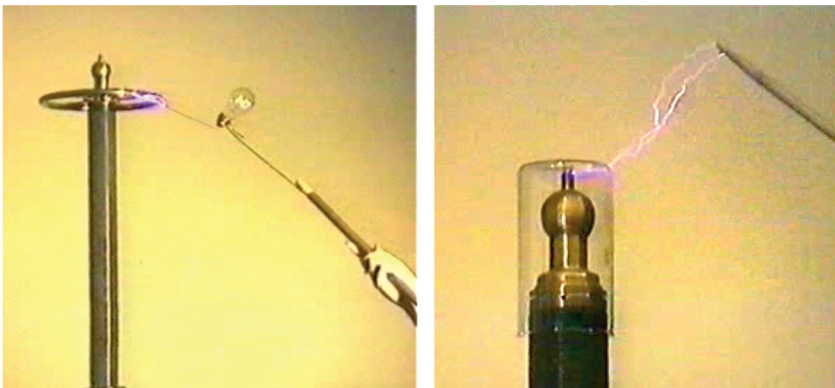


Рис. 17.9

В лекционном эксперименте, запечатленном на рис. 17.9, человек с проводом в руке безбоязненно касается этим проводом одного из выходов высокочастотного трансформатора Тесла (см. далее). Светящаяся лампочка свидетельствует, что по телу человека протекает быстропеременный ток. Поскольку он течет по кожному покрову, то ток не вызывает никаких нервных раздражений.

На рис. 17.10 показан фрагмент цилиндрического проводника, по которому течет электрический ток, и линии индукции  $B = \mu_0(j \cdot r/2)$  (см. (10.18))

магнитного поля, создаваемого током в проводнике. Если ток, например, начнет увеличиваться, то индукция магнитного поля в проводнике также начнет возрастать. Это приведет к возникновению вихревого электрического поля, которое в приосевой области будет направлено против исходного электрического поля, а в приповерхностном слое — вдоль исходного поля. Это, в соответствии с законом Ома (8.11), и приведет к вытеснению тока в приповерхностную область провода.

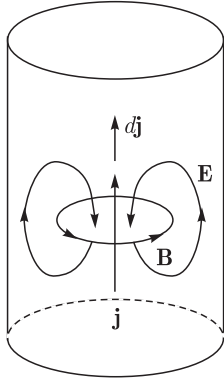


Рис. 17.10

Произведем расчет эффективной толщины приповерхностного слоя (толщины скин-слоя), в котором течет ток. Пренебрегая током смещения, продифференцируем по времени уравнение (17.25) и воспользуемся законом Ома (8.11):  $\text{rot} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} = \sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$ . С помощью (17.24) исключим в этом уравнении вектор  $\mathbf{H}$ :  $-(\mu_0 \mu)^{-1} \cdot \text{rot} \times \text{rot} \mathbf{E} = \sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$ . Учтем далее тождество  $\text{rot} \cdot \text{rot} \mathbf{E} = \text{grad} \times \text{div} \mathbf{E} - \Delta \mathbf{E}$  и тот факт, что в однородном проводнике  $\text{div} \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0 \epsilon} \mathbf{D} = \rho = 0$  (ток смещения отсутствует, поэтому  $\rho = 0$ ).

В результате электрическое поле в проводнике подчиняется уравнению

$$\Delta \mathbf{E} = \mu_0 \mu \sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (17.36)$$

Не решая уравнения, можно оценить толщину  $\delta$  скин-слоя. Если период колебания тока равен  $T$ , то  $\partial E / \partial t \sim E / T$ , а  $\Delta E \sim E / \delta^2$ , поэтому

$$\delta \sim \sqrt{\frac{T}{\mu_0 \mu \sigma}}. \quad (17.37)$$

Теперь решим уравнение (17.36) в простой ситуации, когда ток течет вдоль оси  $Oz$  по проводнику, занимающему полупространство  $y > 0$ , так, как это изображено на рис. 17.11. Тогда уравнение запишется в наиболее простом виде

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} = \mu_0 \mu \sigma \frac{\partial E_z}{\partial t}. \quad (17.38)$$

Будем искать решение в виде  $E_z(y, t) = E(y) \cdot \exp(i\omega t)$ . Подставляя его в (17.38), получаем

$$\frac{d^2 E}{dy^2} = i \mu_0 \mu \sigma \omega E. \quad (17.39)$$

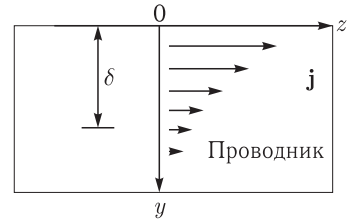


Рис. 17.11

Общее решение этого уравнения представляется в виде суммы двух слагаемых:  $E(y) = A_1 \exp(-\alpha y) + A_2 \exp(\alpha y)$ , где  $A_1$  и  $A_2$  — некоторые константы,

$$\alpha = \sqrt{i \mu_0 \mu \sigma \omega} = \sqrt{\frac{\mu_0 \mu \sigma \omega}{2}} (1 + i) = \frac{1}{\delta} (1 + i). \quad (17.40)$$

Поэтому

$$E(y) = A_1 \exp \left[ -\frac{1}{\delta}(1+i)y \right] + A_2 \exp \left[ \frac{1}{\delta}(1+i)y \right]. \quad (17.41)$$

Второе слагаемое в (17.41) необходимо отбросить как противоречащее физическому смыслу: при  $y \rightarrow \infty$  напряженность поля неограниченно возрастает.

Окончательно получаем, что напряженность поля в проводнике

$$E_z(y, t) = A_1 \exp \left( -\frac{y}{\delta} \right) \cdot \exp \left[ i \left( \omega t - \frac{y}{\delta} \right) \right], \quad (17.42)$$

а плотность тока

$$j_z(y, t) = \sigma E_z(y, t) = j_z(0) \exp \left( -\frac{y}{\delta} \right) \cdot \exp \left[ i \left( \omega t - \frac{y}{\delta} \right) \right], \quad (17.43)$$

где  $j_z(0)$  — плотность тока на поверхности проводника.

Таким образом, плотность тока убывает в глубь проводника по экспоненциальному закону. Величина

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \mu \sigma \omega}} \quad (17.44)$$

называется толщиной скин-слоя. Это толщина сильно зависит от частоты. Например, у медного проводника для тока частоты  $\nu = \omega/(2\pi) = 50$  Гц толщина  $\delta \approx 9$  мм, а при частоте 1 МГц она равна 66 мкм. Последнее означает, что можно убрать весь проводящий материал, оставив лишь тонкую проводящую трубку. Вследствие скин-эффекта сопротивление проводника возрастает с увеличением частоты тока, поскольку уменьшается рабочее сечение проводника.

Наоборот, индуктивность проводника уменьшается. Это следует из того, что энергия магнитного поля  $W = LI^2/2$  при вытеснении тока на поверхность уменьшается, поскольку поле внутри цилиндра с током практически равно нулю.

Скин-эффект позволяет раскалить проводник в тонком поверхностном слое без существенного изменения температуры внутренних областей. Это широко используется в промышленности для поверхностной закалки металлов.

При работе с токами высокой частоты для достижения малого сопротивления провод покрывают тонким слоем серебра или золота, обладающим высокой проводимостью. Основная часть тока протекает в таком тонком слое. В высоковольтных линиях электропередач применяют провод в медной либо алюминиевой оболочке со стальным сердечником.

На скин-эффекте основано действие электромагнитных экранов. Так, для защиты внешнего пространства от помех, создаваемых электромагнитным полем, применяют экран из сравнительно толстой ферромагнитной стали; для экранирования катушки индуктивности, работающей на высоких частотах, экраны делают из тонкого слоя алюминия и т. д.

Изложенная теория скин-эффекта предполагает, что толщина скин-слоя  $\delta$  намного превышает среднюю длину свободного пробега  $l$  электрона в металле ( $\delta \gg l$ ), с которой связана проводимость  $\sigma$  вещества, пропорциональная  $l$  (см. далее). Эта длина (и проводимость) возрастает при охлаждении металла.

Например, для меди при частоте  $\nu = 10$  ГГц и температуре  $T = 300$  К длина  $l \sim 0,01$  мкм, а толщина  $\delta \sim 1$  мкм. Однако при гелиевой температуре проводимость и длина свободного пробега увеличиваются в  $10^4$  раз, а толщина скин-слоя уменьшается в  $\sqrt{10^4} = 10^2$  раз, поэтому  $\delta \ll l$ .

В такой ситуации проявляется аномальный скин-эффект. Его суть состоит в том, что только часть электронов, которые движутся в скин-слое параллельно поверхности металла или под очень небольшими углами к ней, в течение свободного пробега продолжает двигаться вдоль поверхности проводника в слое толщиной  $\delta$ . Другие электроны покидают этот слой и уходят в глубь проводника. Как результат уменьшается эффективная проводимость материала  $\sigma_{\text{эф}} = \delta_{\text{эф}} \sigma / l < \sigma$ , где  $\delta_{\text{эф}}$  — эффективная (аномальная) толщина, которая определяется из соотношения, аналогичного (17.44):

$$\delta_{\text{эф}} = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \mu \sigma_{\text{эф}} \omega}} = \sqrt{\frac{2l}{\mu_0 \mu \sigma \delta_{\text{эф}} \omega}}.$$

Отсюда

$$\delta_{\text{эф}} = \left( \frac{2l}{\mu_0 \mu \sigma \omega} \right)^{1/3}. \quad (17.45)$$

Затухание электромагнитной волны в поверхностном слое по-прежнему имеет место, но количественные характеристики у аномального скин-эффекта несколько иные.

**ЛЕКЦИЯ 18**

Взаимосвязь электрических и магнитных явлений наиболее ярко проявляется в колебаниях зарядов, токов, напряжений и пр. в электрических цепях. Взаимопревращение электрических и магнитных полей является причиной существования электромагнитных волн, которые могут распространяться как вдоль направляющих поверхностей (проводников), так и в свободном пространстве.

При изучении подобных явлений можно широко использовать механические аналогии, поскольку в механике и электромагнетизме описание колебаний базируется на одинаковом математическом аппарате.

**Свободные колебания в электрическом колебательном контуре.** Простейшей колебательной системой является цепь, состоящая из катушки индуктивности  $L$  и емкости  $C$ , а омическое сопротивление цепи пренебрежимо мало. Такая цепь называется идеальным колебательным контуром (рис. 18.1). Если с помощью ключа  $K_1$  зарядить конденсатор зарядом от источника, а затем, отсоединив источник, замкнуть другой ключ  $K_2$ , то в контуре возникнут колебания заряда на обкладках конденсатора и тока в цепи.

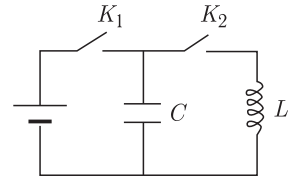


Рис. 18.1

Уравнение, описывающее эти процессы, определяется равенством нулю суммы падений напряжения на емкости и индуктивности в любой момент времени:

$U_C(t) + U_L(t) = 0$ , или  $\frac{q}{C} + L \frac{dI}{dt} = 0$ . Если учесть, что  $I = \frac{dq}{dt}$ , то можно записать уравнение для изменяющегося во времени заряда:

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{1}{C} q = 0. \quad (18.1)$$

Это уравнение незатухающих (собственных) гармонических колебаний, а его решение имеет вид

$$q(t) = q_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0), \quad (18.2)$$

где

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (18.3)$$

— угловая частота,  $q_0$  и  $\varphi_0$  — амплитуда и начальная фаза колебаний заряда, определяемые начальными условиями.

Наряду с угловой частотой, используется частота  $\nu_0 = \omega_0/(2\pi)$  и период колебаний  $T = 1/\nu_0$ .

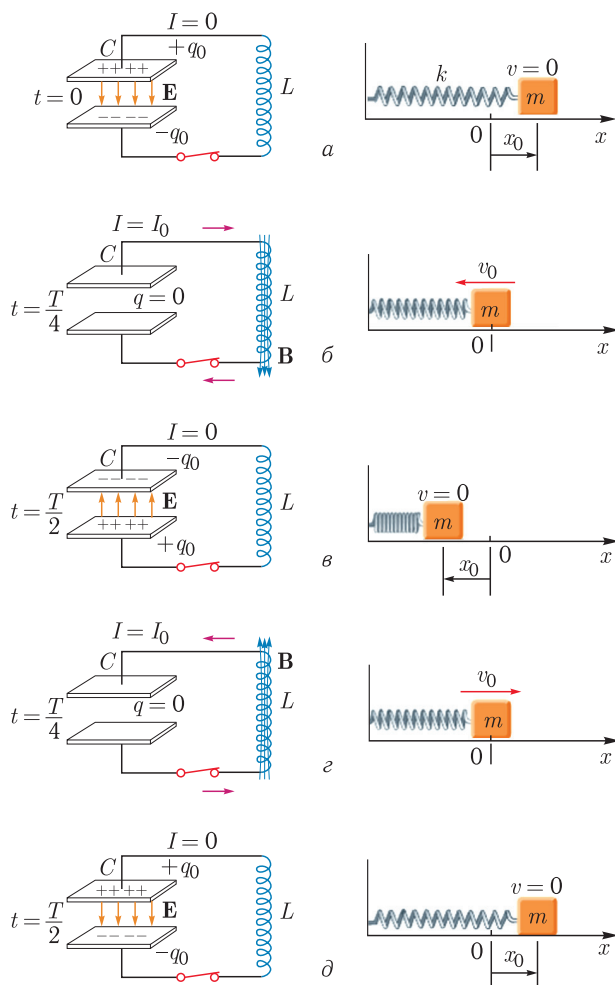


Рис. 18.2

На рис. 18.2 показаны фазы колебаний заряда и тока в контуре и координаты и скорости пружинного маятника. Аналогия между этими колебаниями представлена нижеследующей таблицей:

**Электромагнитные колебания**

заряд $q$	$\Leftrightarrow$
ток $I = \frac{dq}{dt}$	$\Leftrightarrow$
индуктивность $L$	$\Leftrightarrow$
обратная емкость $1/C$	$\Leftrightarrow$
энергия конденсатора $\frac{q^2}{2C}$	$\Leftrightarrow$
энергия катушки $\frac{LI^2}{2}$	$\Leftrightarrow$

**Механические колебания**

координата $x$
скорость $v = \frac{dx}{dt}$
масса $m$
жесткость $k$
энергия пружины $\frac{kx^2}{2}$
кинетическая энергия $\frac{mv^2}{2}$

Реальный контур обладает омическим сопротивлением  $R$ , обусловленным сопротивлением катушки и утечкой конденсатора. Поэтому в (18.1) следует добавить падение напряжения  $U_R = IR = R(dq/dt)$ , и оно примет вид

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C} q = 0. \quad (18.4)$$

Его решение описывает затухающие колебания:

$$q(t) = q_0 \exp(-\delta t) \sin(\omega^* t + \varphi_0), \quad (18.5)$$

где  $\delta = R/(2L)$  — коэффициент, или показатель, затухания,  $\omega^* = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$  — частота затухающих колебаний. Поскольку в контуре  $\delta \ll \omega_0$ , то аperiodический режим не рассматривается.

По аналогии с механикой, логарифмический декремент затухания  $\theta = \delta T$ , а добротность контура

$$Q = \frac{\pi}{\theta} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}. \quad (18.6)$$

Типичное значение собственной частоты распространенных колебательных контуров лежит в диапазоне  $\nu_0 \sim (10^5 \div 10^8)$  Гц. Добротность контура ограничена омическими потерями и составляет  $Q \sim 10^2$ . Эта величина на много порядков меньше добротности высокодобротных механических маятников.

**Вынужденные колебания в контуре. Резонанс напряжений.** Введем в контур источник с переменной ЭДС, меняющейся по гармоническому закону:  $\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 \sin \omega t$  (рис. 18.3). Тогда сумма падений напряжений на всех трех элементах контура в любой момент времени должна равняться внешней ЭДС:

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C} q = \mathcal{E}_0 \sin \omega t. \quad (18.7)$$

Если ЭДС начинает действовать в момент времени  $t = 0$ , то колебания величины заряда начнут устанавливаться в соответствии с соотношением

$$q(t) = q_0^* \exp(-\delta t) \sin(\omega^* t + \varphi_*) + q_0 \sin(\omega t + \varphi_q). \quad (18.8)$$

Это соотношение представляет собой суперпозицию собственных затухающих колебаний на частоте  $\omega^*$  и незатухающих вынужденных колебаний на частоте  $\omega$ . Таким образом, колебания установятся по истечении времени

$$t \geq \Delta t_{\text{уст}} = \tau = \frac{1}{\delta}. \quad (18.9)$$

В установившемся режиме амплитуда колебания напряжения на емкости  $U_{C0} = q_0/C$ , подобно амплитуде смещения в механике, зависит от частоты внешней ЭДС:

$$U_{C0} = \frac{\mathcal{E}_0}{LC \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2 \omega^2}}. \quad (18.10)$$

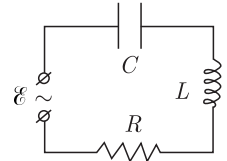


Рис. 18.3

График этой зависимости аналогичен амплитудной характеристике маятника и изображен на рис. 18.4а. Резонанс напряжения на емкости происходит на частоте  $\omega_C = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2} \approx \omega_0$ , практически совпадающей с собственной частотой  $\omega_0$  колебательного контура.

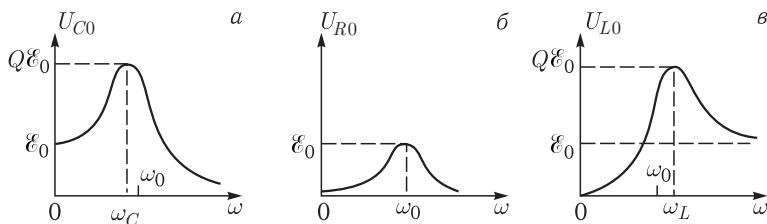


Рис. 18.4

Вблизи этой частоты выражение (18.10) можно упростить, если использовать приближенные равенства:

$$(\omega_0^2 - \omega^2)^2 = (\omega_0 - \omega)^2(\omega_0 + \omega)^2 \approx (\omega_0 - \omega)^2 \cdot 4\omega_0^2,$$

$$4\delta^2\omega^2 \approx 4\delta^2\omega_0^2.$$

С учетом этих приближенных равенств получаем

$$U_{C0} = Q \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{(\omega_0 - \omega)^2 / \delta^2 + 1}}. \quad (18.11)$$

При резонансе амплитуда напряжения на конденсаторе в  $Q$  раз превышает величину  $\mathcal{E}_0$ . Ширина  $\Delta\omega$  резонансной кривой, как и в механике, определяется с помощью (18.11) из условия убывания вдвое энергии конденсатора, пропорциональной квадрату напряжения на нем:

$$\frac{1}{\sqrt{(\Delta\omega/2\delta)^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0,7.$$

Отсюда ширина резонансной кривой, или *полоса пропускания контура*, получается равной

$$\Delta\omega = 2\delta = \frac{\omega_0}{Q}. \quad (18.12)$$

В радиоприемных устройствах при частоте радиопередатчика  $\nu_0 \sim 10^6$  Гц полоса пропускания контура, настроенного на эту частоту, при добротности  $Q \sim 10^2$  будет составлять большую величину  $\Delta\nu = \nu_0/Q \sim 10^4$  Гц. Если разность частот двух радиостанций меньше полосы пропускания, то контур не позволит выделить по отдельности эти радиосигналы. Поэтому чтобы уменьшить полосу пропускания, частоту высокочастотного радиосигнала вначале преобразуют до более низкой (промежуточной) частоты  $\nu_{\Pi} \sim 10^3$  Гц. Тогда и полоса пропускания уменьшится на три порядка.

Амплитуда напряжения на резисторе  $U_{R0} = I_0 R = q_0 \omega R$  зависит от частоты так же, как и амплитуда скорости (рис. 18.4б). При частоте  $\omega = \omega_0$



должно выполняться равенство  $L \frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{1}{C} q = 0$  (см. (18.1)). Это означает, что уравнение (18.7) примет вид

$$R \frac{dq}{dt} = \mathcal{E}_0 \sin \omega_0 t. \quad (18.13)$$

Таким образом, на *резонансной частоте сумма падений напряжений на емкости и индуктивности равна нулю, а напряжение на резисторе равно величине внешней ЭДС.*

Амплитуда напряжения на индуктивности (аналог амплитуды ускорения)  $U_{L0} = I_0 \omega L = q_0 \omega^2 L$  зависит от частоты так, как показано на рис. 18.4 в. При резонансе  $U_{L0} = Q \mathcal{E}_0$ .

Фазовая характеристика — зависимость  $\varphi_q(\omega)$  — задается формулой

$$\operatorname{tg} \varphi_q = \frac{2\delta\omega}{\omega^2 - \omega_0^2} \quad (18.14)$$

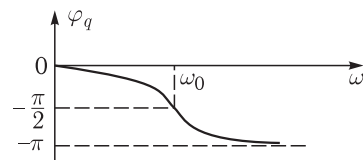


Рис. 18.5

и изображена на рис. 18.5. При резонансе колебания заряда (напряжение на емкости) отстают по фазе от колебаний внешней ЭДС на величину  $\pi/2$ :  $\varphi_q = \varphi_C = -\pi/2$ , а колебания напряжения на индуктивности, как нетрудно убедиться, опережают колебания ЭДС на такую же величину:  $\varphi_L = \pi/2$ .

Возрастание напряжения на емкости и индуктивности до величины  $U_{C0} = U_{L0} = Q \mathcal{E}_0$  носит название *резонанс напряжений*. Напряжение на резисторе (и ток в цепи) при резонансе колеблется в фазе с внешней ЭДС:  $\varphi_R = \varphi_I = 0$ .

**Переменный ток. Закон Ома.** Ток, протекающий в рассмотренном колебательном контуре, изменяется по гармоническому закону

$$I(t) = I_0 \sin(\omega t + \varphi_0). \quad (18.15)$$

Такой ток в электротехнике называется *переменным электрическим током*. Строго говоря, переменным током будет любой периодически изменяющийся во времени электрический ток. Далее под переменным током мы будем подразумевать ток, описываемый зависимостью (18.15).

Удобно связать силу тока в цепи с величиной внешней ЭДС с помощью простых правил с использованием понятий активного, емкостного и индуктивного сопротивлений.

Если переменный ток протекает через резистор, то падение напряжение на нем

$$U_R(t) = I(t) R = R I_0 \sin(\omega t + \varphi_0), \quad (18.16)$$

а амплитуды напряжения и тока связаны соотношением

$$U_{R0} = R I_0, \quad (18.17)$$

где  $R$  является *активным сопротивлением*, поскольку на нем выделяется джоулево тепло.

Напряжение на емкости будет связано с током соотношением:

$$U_C(t) = \frac{q(t)}{C} = \frac{\int I(t) \cdot dt}{C} = \frac{I_0 \int \sin(\omega t + \varphi_0) \cdot dt}{C} = \frac{I_0}{\omega C} \sin\left(\omega t + \varphi_0 - \frac{\pi}{2}\right). \quad (18.18)$$

Амплитуды напряжения и тока связаны соотношением

$$U_{C0} = \frac{1}{\omega C} \cdot I_0, \quad (18.19)$$

при этом колебания напряжения на емкости отстают по фазе от колебаний тока на величину  $\pi/2$ :  $\varphi_C = -\pi/2$ . Величина  $1/(\omega C)$  называется *емкостным сопротивлением*. С увеличением частоты это сопротивление падает, поскольку уменьшается время зарядки и перезарядки конденсатора и, как следствие, амплитуда заряда на нем.

При протекании тока через катушку индуктивности напряжение на ней

$$U_L(t) = L \frac{dI}{dt} = L \frac{d(I_0 \sin(\omega t + \varphi_0))}{dt} = \omega L \cdot I_0 \sin\left(\omega t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2}\right). \quad (18.20)$$

Амплитуды напряжения и тока связаны соотношением

$$U_{L0} = \omega L \cdot I_0, \quad (18.21)$$

при этом колебания напряжения на индуктивности опережают по фазе колебания тока на величину  $\pi/2$ :  $\varphi_L = \pi/2$ . Величина  $\omega L$  называется *индуктивным сопротивлением*. С увеличением частоты это сопротивление возрастает, так как увеличивается ЭДС самоиндукции. Поскольку сумма падений напряжений на трех элементах равна внешней ЭДС, то можно записать

$$\mathcal{E}(t) = RI_0 \sin(\omega t + \varphi_0) + \frac{I_0}{\omega C} \sin\left(\omega t + \varphi_0 - \frac{\pi}{2}\right) + \omega L \cdot I_0 \sin\left(\omega t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2}\right) = \mathcal{E}_0 \sin(\omega t + \varphi_0 + \varphi). \quad (18.22)$$

Здесь  $\mathcal{E}_0$  — амплитуда внешней ЭДС,  $\varphi$  — сдвиг фазы между колебаниями тока и внешней ЭДС (напряжения на входе цепи). Эти величины можно рассчитать с использованием тригонометрических преобразований, однако

на практике это предпочтительно сделать либо с использованием метода векторных диаграмм, либо с использованием метода комплексных амплитуд.

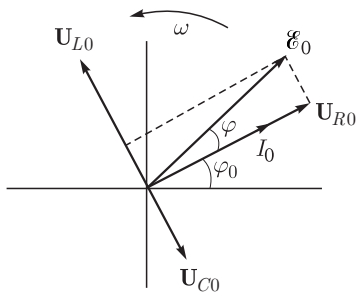


Рис. 18.6

**Метод векторных диаграмм.** В курсе «Механика» отмечалось, что каждому гармоническому колебанию с угловой частотой  $\omega$  можно поставить в соответствие вращающийся с угловой скоростью  $\omega$  вектор, длина которого равна амплитуде колебаний, а его начальное (стартовое) положение задается углом  $\varphi_0$ , совпадающим с начальной фазой.

На рис. 18.6 изображен в момент времени  $t = 0$  вектор тока  $I_0$ , вращающийся против часовой стрелки. Вращающийся вектор  $U_{R0}$  совпадает с ним по направлению, вектор  $U_{C0}$  повернут по часовой стрелки относительно вектора

тока на 90 градусов, а вектор  $\mathbf{U}_{L0}$  повернут против часовой стрелки на 90 градусов. Вертикальные проекции всех векторов изменяются во времени точно так же, как сила тока и соответствующие напряжения на элементах цепи.

Соответственно ЭДС в цепи будет изменяться как вертикальная проекция вектора  $\mathcal{E}_0 = \mathbf{U}_{R0} + \mathbf{U}_{C0} + \mathbf{U}_{L0}$ .

Векторная диаграмма, изображенная на рисунке, называется *диаграммой напряжений*. На ней векторы напряжений ориентированы относительно опорного вектора — вектора тока. Из диаграммы получаем

$$\mathcal{E}_0 = \sqrt{U_{R0}^2 + (U_{L0} - U_{C0})^2} = I_0 \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} = I_0 \cdot Z. \quad (18.23)$$

Величина

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \quad (18.24)$$

называется *полным сопротивлением* цепи. Равенство (18.23) является *законом Ома для цепи переменного тока*.

Для сдвига фазы получаем

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{U_{L0} - U_{C0}}{U_{R0}} = \frac{\omega L - 1/(\omega C)}{R}. \quad (18.25)$$

**Метод комплексных амплитуд.** Если в формуле Эйлера  $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$  под  $\varphi$  понимать фазу колебаний  $\varphi = \omega t + \varphi_0$ , то силу тока можно представить в виде мнимой части комплексного числа:  $I(t) = I_0 \sin(\omega t + \varphi_0) = \operatorname{Im} \hat{I}_0 e^{i\omega t}$ , где  $\hat{I}_0 = I_0 e^{i\varphi_0}$  — *комплексная амплитуда* тока, несущая информацию об амплитуде тока и начальной фазе его колебаний. Для напряжений можно записать

$$\begin{aligned} U_R(t) &= RI(t) = RI_0 \sin(\omega t + \varphi_0) = \operatorname{Im} Z_R \hat{I}_0 e^{i\omega t} = \operatorname{Im} \hat{U}_{R0} e^{i\omega t}, \\ U_C(t) &= \frac{1}{\omega C} I_0 \sin\left(\omega t + \varphi_0 - \frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{Im} \frac{1}{\omega C} e^{-i\pi/2} \hat{I}_0 e^{i\omega t} = \\ &= \operatorname{Im} Z_C \hat{I}_0 e^{i\omega t} = \operatorname{Im} \hat{U}_{C0} e^{i\omega t}, \quad (18.26) \\ U_L(t) &= \omega L \cdot I_0 \sin\left(\omega t + \varphi_0 - \frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{Im} \omega L \cdot e^{i\pi/2} \hat{I}_0 e^{i\omega t} = \\ &= \operatorname{Im} Z_L \hat{I}_0 e^{i\omega t} = \operatorname{Im} \hat{U}_{L0} e^{i\omega t}. \end{aligned}$$

В этих выражениях

$$Z_R = R, \quad Z_C = \frac{1}{\omega C} e^{-i\pi/2} = -i \frac{1}{\omega C}, \quad Z_L = \omega L \cdot e^{i\pi/2} = i \omega L \quad (18.27)$$

— *комплексные сопротивления резистора (действительное число), емкости и индуктивности (мнимые числа)*. Они связывают комплексную амплитуду тока и комплексные амплитуды напряжений на элементах цепи:

$$\hat{U}_{R0} = Z_R \hat{I}_0, \quad \hat{U}_{C0} = Z_C \hat{I}_0, \quad \hat{U}_{L0} = Z_L \hat{I}_0. \quad (18.28)$$

Комплексная амплитуда внешней ЭДС, очевидно, будет равна

$$\hat{\mathcal{E}}_0 = Z_R \hat{I}_0 + Z_C \hat{I}_0 + Z_L \hat{I}_0 = \hat{Z} \cdot \hat{I}_0, \quad (18.29)$$

где

$$\hat{Z} = Z_R + Z_L + Z_C = R + i \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \quad (18.30)$$

— комплексное сопротивление цепи, или *импеданс*.

Таким образом, использование комплексных сопротивлений, комплексных амплитуд токов, напряжений и ЭДС позволяет записывать законы Кирхгофа точно так же, как и в случае постоянных токов.

В частности, если на входе рассмотренной цепи действует электродвижущая сила  $\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 \sin(\omega t)$ , то комплексная амплитуда тока, согласно (18.29), будет равна

$$\hat{I}_0 = \frac{\hat{\mathcal{E}}_0}{\hat{Z}} = \frac{\hat{\mathcal{E}}_0}{R + i \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right)} = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{R^2 + \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}} \exp(-i\varphi) = I_0 \exp(-i\varphi). \quad (18.31)$$

Здесь  $\hat{\mathcal{E}}_0 = \mathcal{E}_0$  — действительное число, амплитуда тока  $I_0$  совпадает с таковой в (18.23), а сдвиг фазы задается выражением (18.25).

**Резонанс токов.** Рассмотрим протекание тока через элементы контура, подключенного параллельно к внешней переменной ЭДС:  $\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 \sin(\omega t)$  (рис. 18.7). Для расчета тока  $I_L$  в катушке, тока  $I_C$ , текущего через емкость, и тока  $I$ , втекающего в контур, построим векторную диаграмму токов, в которой в качестве опорного используем вектор  $\mathcal{E}_0$  (рис. 18.8а).

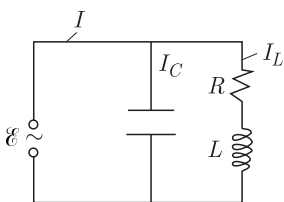


Рис. 18.7

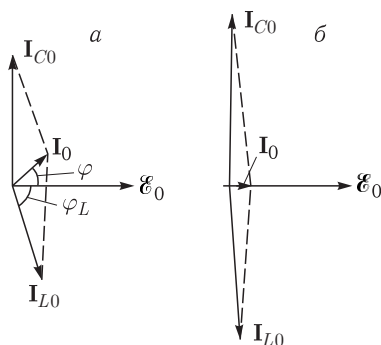


Рис. 18.8

Ток в последовательно соединенных резисторе и индуктивности отстает по фазе от напряжения на величину  $\varphi_L$ , которая определяется из (18.25) при нулевом емкостном сопротивлении:  $\operatorname{tg} \varphi_L = U_{L0}/U_{R0} = \omega L/R$ . Поэтому вектор  $I_{L0}$  повернут по часовой стрелке относительно вектора  $\mathcal{E}_0$  на угол  $\varphi_L$ . Вектор  $I_{C0}$  повернут против часовой стрелки на  $90^\circ$ , поскольку ток через емкость опережает на  $\pi/2$  приложенное напряжение. Вектор полного тока равен  $I_0 = I_{L0} + I_{C0}$  и составляет с вектором  $\mathcal{E}_0$  некоторый угол  $\varphi$ .

Если сопротивление  $R \rightarrow 0$ , то  $\varphi_L \rightarrow \pi/2$ , векторы  $I_{L0}$  и  $I_{C0}$  направлены практически в противоположные стороны, а полный ток (ток в подводящих проводах)  $I_0 \rightarrow 0$ . Токи  $I_L$  и  $I_C$  изменяются в противофазе и могут достигать при этом весьма больших значений.

В реальном контуре  $R \ll \omega L$ , поэтому  $\varphi_L \leq \pi/2$ . При некоторой частоте внешней ЭДС сдвиг фазы  $\varphi = 0$ , а токи  $I_L$  и  $I_C$ , находясь почти в противофазе, достигают максимальных значений (рис. 18.8 б). Это явление называется *резонансом токов*.

Частота, при которой наступает резонанс токов, определяется из соотношений

$$I_{C0} = I_{L0} \sin \varphi_L, \quad I_{C0} = \omega C \cdot \mathcal{E}_0, \quad I_{L0} = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{(\omega L)^2 + R^2}}, \quad \operatorname{tg} \varphi_L = \frac{\omega L}{R}. \quad (18.32)$$

Отсюда получаем

$$\sin \varphi_L = \omega C \sqrt{(\omega L)^2 + R^2} = \frac{\operatorname{tg} \varphi_L}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi_L}} = \frac{\omega L / R}{\sqrt{1 + (\omega L / R)^2}}.$$

Если учесть что  $R \ll \omega L$ , то резонансная частота

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \omega_0. \quad (18.33)$$

На этой частоте

$$I_{C0} = \omega_0 C \cdot \mathcal{E}_0, \quad I_{L0} = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{(\omega_0 L)^2 + R^2}} \approx \frac{\mathcal{E}_0}{\omega_0 L} = I_{C0}.$$

Ток в подводящих проводах

$$I_0 = I_{C0} \cos \varphi_L = \frac{\omega_0 C \cdot \mathcal{E}_0}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi_0}} = \frac{\omega_0 C \cdot \mathcal{E}_0}{\sqrt{1 + (\omega_0 L / R)^2}} \approx \frac{I_{C0}}{Q} = \frac{\mathcal{E}_0}{RQ^2}. \quad (18.34)$$

Таким образом, токи в контуре в  $Q$  (добротность) раз превышают ток в подводящих проводах, а сопротивление контура на этой частоте максимально и равно  $Z = RQ^2$ . Контур при этом ведет себя как активное сопротивление ( $\varphi = 0$ ).

Это позволяет использовать резонанс токов в приемных устройствах для выделения электромагнитного сигнала в узком спектральном интервале частот вблизи резонансной частоты.

В индукционных печах параллельно катушке, создающей переменное магнитное поле, подключают емкость. Если условия резонанса выполняются, то ток в катушке увеличивается во много раз, а разностный ток в подводящих проводах при этом относительно невелик.

**Работа и мощность переменного тока.** Работа переменного тока за интервал времени  $\Delta t$  на участке цепи определяется по аналогии с (8.16) выражением

$$\Delta A = \int_0^{\Delta t} U(t) I(t) dt. \quad (18.35)$$

Однако здесь есть существенное отличие, состоящее в том, что эта работа превращается в теплоту лишь при протекании тока через резистор.

Будем считать что ток  $I(t) = I_0 \sin \omega t$ , а напряжение  $U(t) = U_0 \sin(\omega t + \varphi)$ , и вычислим работу тока за период  $T = 2\pi/\omega$ . Тогда

$$\Delta A = \int_0^T U_0 \sin(\omega t + \varphi) I_0 \sin \omega t \cdot dt = \frac{1}{2} U_0 I_0 T \cos \varphi. \quad (18.36)$$

Средняя мощность тока равна

$$P = \frac{\Delta A}{T} = \frac{1}{2} U_0 I_0 \cos \varphi. \quad (18.37)$$

При протекании тока через индуктивность и емкость  $\varphi = \pm\pi/2$ , поэтому ток не совершает работы за период. Если период разбить на четыре четверти, то в течение двух из них работа тока положительна и энергия от источника «закачивается» в электрическую цепь. В течение двух других четвертей работа источника отрицательна. Это означает, что запасенная в цепи энергия вновь возвращается источнику. Поэтому средняя мощность равна нулю.

При протекании тока через резистор источник постоянно совершает положительную работу, отдавая энергию. Поскольку  $U_0 = RI_0$ ,  $\cos \varphi = 1$ , то средняя мощность равна

$$P = \frac{1}{2} U_0 I_0 = \frac{1}{2} R I_0^2 = \frac{1}{2} \frac{U_0^2}{R}. \quad (18.38)$$

По этой причине действительную часть комплексного сопротивления  $\hat{Z}$  (18.30) называют *активным сопротивлением*, а мнимую часть — *реактивным сопротивлением*.

Такая же мощность (как и в (18.38)) выделяется на резисторе в случае постоянного тока  $I_E = I_0/\sqrt{2}$  и постоянного напряжения  $U_E = U_0/\sqrt{2}$ . Поэтому принято характеризовать переменный ток и переменное напряжение соответствующими *эффективными*, или *действующими* значениями

$$I_E = \frac{I_0}{\sqrt{2}}, \quad U_E = \frac{U_0}{\sqrt{2}}. \quad (18.39)$$

Так, например, эффективное напряжение в жилых помещениях  $U_E = 220$  В, а амплитуда напряжения  $U_0 \approx 310$  В. В промышленности, где используется трехфазный ток (см. далее),  $U_E = 380$  В, а амплитуда напряжения  $U_0 \approx 537$  В.

На всех приборах и устройствах указываются в качестве номинальных именно действующие значения тока и напряжения.

При вычислении мощности, выделяемой в цепях, содержащих индуктивности, емкости и активные сопротивления, следует иметь в виду, что мощность выделяется только на активном сопротивлении. В ряде случаев это позволяет значительно уменьшить объем вычислений.

Например, в последовательном контуре, подключенном к внешнему источнику переменной ЭДС, выделяемая мощность равна  $P = (1/2) \mathcal{E}_0 I_0 \cos \varphi$ . Из векторной диаграммы напряжений на рис. 18.6 следует, что  $\mathcal{E}_0 \cos \varphi = U_{R0} = I_0 R$ , поэтому  $P = (1/2) I_0^2 R$ . При резонансе напряжений ток в цепи максимален, поэтому максимальна и выделяемая мощность.

В параллельном контуре при резонансе токов  $\cos \varphi = 1$ , поэтому мощность, с учетом (18.34), где  $\mathcal{E}_0 = I_0 R Q^2$  и  $\cos \varphi_L = 1/Q$ , и диаграммы токов (рис. 18.8 б), равна

$$P = \frac{1}{2} \mathcal{E}_0 I_0 = \frac{1}{2} R Q^2 I_0^2 = \frac{1}{2} R Q^2 I_{L0}^2 \cos^2 \varphi_L \approx \frac{1}{2} R I_{L0}^2.$$

Здесь она также равна мощности, выделяемой на активном сопротивлении.

**Связанные колебательные контуры.** На рис. 18.9 изображены два одинаковых контура с емкостью  $C$  и индуктивностью  $L$ , между которыми осуществляется индуктивная связь, характеризуемая коэффициентом взаимной индукции  $L_{12} = L_{21}$ .

С учетом ЭДС взаимной индукции  $\mathcal{E}_{12} = -L_{12}\ddot{q}_1$  и  $\mathcal{E}_{21} = -L_{12}\ddot{q}_2$  уравнения колебаний зарядов на емкостях можно записать в виде

$$\begin{aligned} L\ddot{q}_1 + \frac{q_1}{C} + L_{12}\ddot{q}_2 &= 0, \\ L\ddot{q}_2 + \frac{q_2}{C} + L_{12}\ddot{q}_1 &= 0. \end{aligned} \quad (18.40)$$

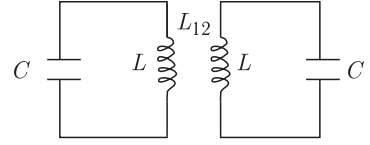


Рис. 18.9

Для решения системы уравнений введем так называемые «нормальные координаты»  $q_+ = q_1 + q_2$  и  $q_- = q_1 - q_2$ . Складывая, а затем вычитая второе уравнение из первого, получаем независимые уравнения для нормальных координат:

$$\begin{aligned} (L + L_{12})\ddot{q}_+ + \frac{q_+}{C} &= 0, \\ (L - L_{12})\ddot{q}_- + \frac{q_-}{C} &= 0. \end{aligned} \quad (18.41)$$

Решения этих уравнений имеют вид

$$\begin{aligned} q_+ &= q_{+0} \sin(\omega_I t + \varphi_I), \\ q_- &= q_{-0} \sin(\omega_{II} t + \varphi_{II}). \end{aligned} \quad (18.42)$$

Здесь

$$\omega_I = \frac{1}{\sqrt{(L + L_{12})C}}, \quad \omega_{II} = \frac{1}{\sqrt{(L - L_{12})C}} \quad (18.43)$$

— нормальные частоты колебаний, амплитуды  $q_0$  и начальные фазы  $\varphi$  определяются начальными условиями. Поскольку  $q_1 = (q_+ + q_-)/2$ ,  $q_2 = (q_+ - q_-)/2$ , то колебания зарядов (и токов в контурах) являются суперпозицией колебаний на нормальных частотах, как это обычно происходит в колебательных системах с двумя степенями свободы.

Два контура могут иметь также емкостную связь с помощью емкости  $C_0$  (рис. 18.10). Колебания зарядов в этом случае описываются точно так же, как и колебания двух одинаковых пружинных маятников, связанных пружиной жесткостью  $k_0$  (см. Механика). Пользуясь аналогией между механическими и электромагнитными колебаниями, приведенной в начале этой лекции, можем сразу записать выражения для нормальных частот:

$$\omega_I = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{1/C}{L}} = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad \omega_{II} = \sqrt{\frac{k + 2k_0}{m}} = \sqrt{\frac{1/C + 2/C_0}{L}}. \quad (18.44)$$

Нормальные колебания на частоте  $\omega_I$  происходят тогда, когда токи синфазны (текут в контурах в одном направлении). Если токи противофазны (текут в противоположных направлениях), то колебания происходят на второй нормальной частоте  $\omega_{II}$ .

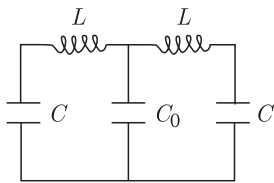


Рис. 18.10

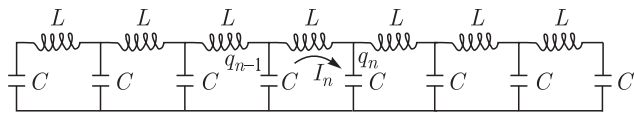


Рис. 18.11

**Цепочка связанных контуров.** Рассмотрим колебания зарядов на емкостях в длинной цепочке связанных  $N$  контуров, изображенных на рис. 18.11. Пронумеруем конденсаторы индексом  $n = 1, 2, 3, \dots, N+1$ . Для контура, образованного конденсаторами с индексами  $n$  и  $n-1$  и катушкой между ними, сумма падений напряжений на катушке и двух конденсаторах равна нулю, поэтому справедливо уравнение

$$L \frac{dI_n}{dt} + \frac{q_n - q_{n-1}}{C} = 0, \quad (18.45)$$

где  $I_n$  — ток в катушке этого контура,  $q_n$  и  $q_{n-1}$  — заряды на конденсаторах справа и слева от катушки. Продифференцируем это уравнение по времени:

$$L \ddot{I}_n + \frac{\dot{q}_n - \dot{q}_{n-1}}{C} = L \ddot{I}_n + \frac{(I_n - I_{n+1}) - (I_{n-1} - I_n)}{C} = 0, \quad (18.46)$$

где  $I_n = \dot{q}_n$

По аналогии с механикой, где рассматривалась цепочка связанных пружинных маятников, будем искать решение (18.45) в виде

$$q_n = q_0 \cos(\gamma \cdot n) \sin \omega t, \quad (18.47)$$

где  $\gamma$  — некоторое «волновое» число, подлежащее определению. Подставив (18.47) в (18.46) и выполнив несложные тригонометрические преобразования, получим «дисперсионное» соотношение:

$$\frac{2\omega_0^2 - \omega^2}{\omega_0^2} = 2 \cos \gamma, \quad (18.48)$$

где  $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ . Граничные условия требуют, чтобы  $\cos \gamma(N+1) = \pm 1$ . Поэтому  $\gamma_p(N+1) = p \cdot \pi$ , или  $\gamma_p = p \cdot \pi/(N+1)$ , где  $p = I, II, III, \dots, N$ . В результате частоты нормальных колебаний зарядов равны

$$\omega_p^2 = 2\omega_0^2(1 - \cos k_p a) = 2\omega_0^2 \left(1 - \cos \frac{\pi \cdot p}{N+1}\right). \quad (18.49)$$

В частности, при  $N = 1$  частота  $\omega_I = \sqrt{2}\omega_0$ , поскольку контур состоит из катушки и двух последовательно соединенных емкостей. При  $N = 2$  нормальные частоты  $\omega_I = \omega_0$ ,  $\omega_{II} = \sqrt{3}\omega_0$ . Эти частоты совпадают с частотами в (18.43), если положить  $C_0 = C$ .



**Четырехполюсники.** Электрическая цепь с двумя входными и двумя выходными клеммами (рис. 18.12) называется четырехполюсником. Примером четырехполюсника может служить рассмотренная выше цепочка колебательных контуров. Четырехполюсниками являются также трансформаторы, усилители, фильтры, стабилизаторы напряжения, телефонные линии, линии электропередачи и т. д.

На входные зажимы подается исходный сигнал  $U_1$  или  $I_1$ , а с выходов снимается преобразованный  $U_2$  или  $I_2$ . В результате происходит либо передача энергии, либо преобразование и обработка информации.



Рис. 18.12

Теория четырехполюсников не предполагает никаких определенных потоков энергии/информации в цепях, поэтому названия «входные» и «выходные» являются условными.

В общем случае четырехполюсники можно разделить на активные, в структуру которых входят источники энергии, и пассивные, в которых эти источники отсутствуют. Далее будут рассматриваться пассивные четырехполюсники.

Получим уравнения, связывающие напряжение  $U_1$  и ток  $I_1$  во входной цепи с напряжением  $U_2$  и током  $I_2$  выходной цепи, если они изменяются во времени по гармоническому закону с некоторой частотой. Если четырехполюсник состоит из  $N$  связанных контуров, то, используя метод комплексных амплитуд и контурные токи, можем записать:

$$\begin{aligned} \hat{U}_{10} = \sum_{k=1}^N Z_{1k} \hat{i}_k, \dots, \quad \sum_{k=1}^N Z_{nk} \hat{i}_k = 0, \quad (n = 3, 4, \dots, N), \\ -\hat{U}_{20} = \sum_{k=1}^N Z_{2k} \hat{i}_k. \end{aligned} \quad (18.50)$$

Здесь индекс  $n$  обозначает номер контура,  $Z_{nk}$  — комплексное сопротивление его участка, который может примыкать к  $k$ -му контуру,  $Z_{11}$  и  $Z_{22}$  — импедансы входного и выходного контуров,  $\hat{i}_k$  — комплексные амплитуды контурных токов, которые для входного и выходного контуров  $\hat{i}_1 = \hat{I}_{10}$ ,  $\hat{i}_2 = \hat{I}_{20}$ , знак минус во втором уравнении означает, что при обходе всех контуров в одном и том же направлении знаки входного и выходного напряжений (см. рисунок) различны.

Решая систему  $N$  линейных уравнений, получим

$$\hat{U}_{10} = D_{11} \hat{U}_{20} + D_{12} \hat{I}_{20}, \quad \hat{I}_{10} = D_{21} \hat{U}_{20} + D_{22} \hat{I}_{20}, \quad (18.51)$$

где постоянные  $D$  определяются параметрами контуров. Если при перемене местами входных и выходных клемм токи и напряжения не изменятся, то четырехполюсник называется продольно-симметричным ( $D_{11} = D_{22}$ ).

Четырехполюсник характеризуется входным и выходным сопротивлениями, определяемыми как

$$Z_{\text{вх}} = \frac{\hat{U}_{10}}{\hat{I}_{10}}, \quad Z_{\text{вых}} = \frac{\hat{U}_{20}}{\hat{I}_{20}}, \quad (18.52)$$

которые, в отличие от сопротивления участка цепи, не являются постоянными величинами. Например, при разомкнутом выходе  $\hat{I}_{20} = 0$ ,  $Z_{\text{вых}} = \infty$ , а  $Z_{\infty\text{вх}} = D_{11}/D_{21}$ . При замкнутом выходе  $\hat{U}_{20} = 0$ ,  $Z_{\text{вых}} = 0$ , а  $Z_{0\text{вх}} = D_{12}/D_{11}$ . Входное и выходное сопротивления связаны соотношением

$$Z_{\text{вх}} = \frac{Z_{\text{вых}} + D_{12}/D_{11}}{1 + Z_{\text{вых}}D_{21}/D_{11}}. \quad (18.53)$$

Если четырехполюсник работает в таком режиме, при котором входное и выходное сопротивления одинаковы, то он согласован с цепью, в которую он включен. Сопротивление

$$Z_{\text{хар}} = Z_{\text{вх}} = Z_{\text{вых}} = \sqrt{\frac{D_{12}}{D_{21}}} \quad (18.54)$$

называется характеристическим, или *волновым* сопротивлением.

Если к выходу четырехполюсника подключена нагрузка с сопротивлением  $Z_{\text{Н}} = \hat{U}_{02}/\hat{I}_{02} = Z_{\text{вых}}$ , то в *согласованном режиме входное сопротивление равно сопротивлению нагрузки*:  $Z_{\text{вх}} = \sqrt{D_{12}/D_{21}} = Z_{\text{Н}}$ .

Четырехполюсники используются для преобразования напряжений и токов. Эти процессы характеризуются соответствующими комплексными коэффициентами преобразования напряжения и тока

$$\hat{K}_U = \frac{\hat{U}_{20}}{\hat{U}_{10}} = \frac{Z_{\text{вых}}}{Z_{\text{вых}}D_{11} + D_{12}}, \quad \hat{K}_I = \frac{\hat{I}_{20}}{\hat{I}_{10}} = \frac{1}{Z_{\text{вых}}D_{21} + D_{11}}. \quad (18.55)$$

В согласованном режиме, когда выходное сопротивление определяется (18.54), оба коэффициента равны между собой:

$$\hat{K}_U = \hat{K}_I = \hat{K} = \frac{1}{D_{11} + \sqrt{D_{12}D_{21}}} = e^{-\gamma} = e^{-\alpha} e^{-i\beta}, \quad (18.56)$$

где комплексное число  $\gamma = \alpha + i\beta$  называется коэффициентом передачи. Его действительная часть  $\alpha = \ln \left| \hat{U}_{10}/\hat{U}_{20} \right| = \ln \left| \hat{I}_{10}/\hat{I}_{20} \right|$  характеризует отношение абсолютных величин токов и напряжений, а мнимая часть  $\beta$  определяет фазовый сдвиг.

## ЛЕКЦИЯ 19

**Частотные фильтры.** При наличии реактивных сопротивлений коэффициент передачи четырехполюсника зависит от частоты. Это позволяет его использовать в качестве частотного фильтра, пропускающего электромагнитный сигнал в ограниченном интервале частот.

Фильтр низких частот представляет собой Т-образный четырехполюсник, изображенный на рис. 19.1. Рассчитаем его коэффициент передачи.

Введем комплексные сопротивления  $Z_L = i\omega L$  и  $Z_C = -i/(\omega C)$ , выберем положительное направление обхода контуров по часовой стрелке и запишем

$$\begin{aligned}\hat{U}_{10} &= \frac{1}{2} Z_L \hat{I}_{10} + Z_C \hat{I}_{10} - Z_C \hat{I}_{20}, \\ -\hat{U}_{20} &= Z_C \hat{I}_{20} + \frac{1}{2} Z_L \hat{I}_{20} - Z_C \hat{I}_{10}.\end{aligned}$$

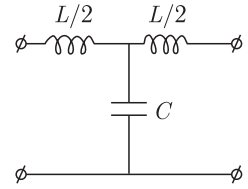


Рис. 19.1

Отсюда получаем

$$\hat{U}_{10} = \left(1 + \frac{Z_L}{2Z_C}\right) \hat{U}_{20} + Z_L \left(1 + \frac{Z_L}{4Z_C}\right) \hat{I}_{20}, \quad \hat{I}_{10} = \frac{1}{Z_C} \hat{U}_{20} + \left(1 + \frac{Z_L}{2Z_C}\right) \hat{I}_{20}. \quad (19.1)$$

Сравнивая эти уравнения с (18.51), определяем коэффициенты  $D$ :

$$D_{11} = D_{22} = \left(1 + \frac{Z_L}{2Z_C}\right), \quad D_{12} = Z_L \left(1 + \frac{Z_L}{4Z_C}\right), \quad D_{21} = \frac{1}{Z_C},$$

при этом

$$D_{11}^2 - D_{12}D_{21} = 1. \quad (19.2)$$

Характеристическое сопротивление из (18.54) получается равным

$$Z_{\text{хар}} = \sqrt{D_{12}/D_{21}} = \sqrt{\frac{L}{C} \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_\Gamma^2}\right)}, \quad (19.3)$$

где

$$\omega_\Gamma = \frac{2}{\sqrt{LC}} \quad (19.4)$$

— граничная частота. Ее смысл становится понятен, если рассчитать коэффициент передачи (18.56). Принимая во внимание равенство (19.2), можно формально записать  $D_{11} = \text{ch } \gamma$ ,  $\sqrt{D_{12}D_{21}} = \text{sh } \gamma$ . Тогда

$$\hat{K} = \frac{1}{D_{11} + \sqrt{D_{12}D_{21}}} = \frac{1}{\text{ch } \gamma + \text{sh } \gamma} = e^{-\gamma}.$$

Таким образом,  $\gamma = \alpha + i\beta$  и  $D_{11} = \text{ch } \gamma = \text{ch } \alpha + i\beta$ , или

$$D_{11} = \left(1 + \frac{Z_L}{2Z_C}\right) = \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_\Gamma^2}\right) = \text{ch}(\alpha + i\beta) = \text{ch } \alpha \cdot \cos \beta + i \cdot \text{sh } \alpha \cdot \sin \beta.$$

Отсюда следует

$$\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_\Gamma^2}\right) = \text{ch } \alpha \cdot \cos \beta, \quad \text{sh } \alpha \cdot \sin \beta = 0, \quad (19.5)$$

$$\text{ch } \alpha \geq 1, \quad \text{sh } \alpha \geq 0.$$

Если  $\omega > \omega_\Gamma$ , то  $\cos \beta < 0$ . Из уравнения  $\sin \beta = 0$  получается  $\beta = \pi$ . Тогда  $\cos \beta = -1$  и

$$\text{ch } \alpha = \left(\frac{\omega^2}{\omega_\Gamma^2} - 1\right). \quad (19.6)$$

При  $\omega < \omega_\Gamma$   $\cos \beta > 0$ . Из уравнения  $\text{sh } \alpha = 0$  следует  $\alpha = 0$ ,  $\text{ch } \alpha = 1$  и

$$\cos \beta = \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_\Gamma^2}\right). \quad (19.7)$$

На рис. 19.2 показана частотная зависимость модуля коэффициента преобразования  $|\hat{K}| = |\hat{U}_{20}/\hat{U}_{10}| = e^{-\alpha}$ .

В диапазоне частот  $0 < \omega < \omega_\Gamma$  согласованный четырехполюсник не оказывает влияния на амплитуды гармонических токов и напряжений, однако, как следует из (19.7), придает разным гармоническим составляющим различный фазовый сдвиг.

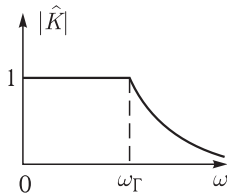


Рис. 19.2

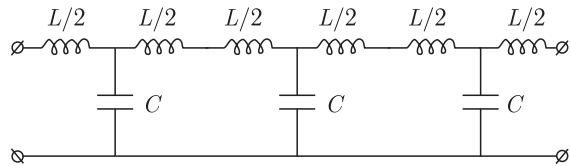


Рис. 19.3

При  $\omega > \omega_\Gamma$  происходит ослабление (затухание) составляющих с одновременным инвертированием (изменением на  $180^\circ$ ) их фазы ( $\beta = \pi$ ). Следовательно, такой четырехполюсник «отрезает» высокие частоты и работает как фильтр низких частот.

Цепочка  $N$  контуров, изображенная на рис. 19.3, будет более качественным фильтром с той же полосой пропускания  $0 < \omega < \omega_\Gamma$ , поскольку  $|\hat{K}| = |\hat{U}_{N0}| / |\hat{U}_{10}| = |\hat{U}_{N0}| / |\hat{U}_{(N-1)0}| \dots |\hat{U}_{20}| / |\hat{U}_{10}| = e^{-N\alpha}$  и очень быстро уменьшается до нуля в области частот  $\omega > \omega_\Gamma$ .

Четырехполюсник, изображенный на рис. 19.4, будет фильтром высоких частот с полосой пропускания  $\omega > \omega_\Gamma$  и частотной зависимостью  $|\hat{K}|$ , показанной на рис. 19.5. Расчет его коэффициента передачи производится аналогично предыдущему случаю.

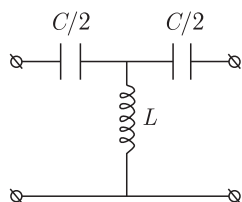


Рис. 19.4

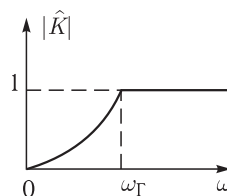


Рис. 19.5

Если полоса пропускания фильтра  $\omega_{Г1} < \omega < \omega_{Г2}$ , то фильтр называется полосовым. Схемы и расчеты таких фильтров можно найти в многочисленных учебниках по радиотехнике и теории электрических цепей.

**Трансформатор** (от лат. «*transformo*» — преобразовывать) — устройство, предназначенное для преобразования посредством электромагнитной индукции переменного тока или напряжения.

Прообразом современного трансформатора является катушка Румкорфа, названная по имени ее изобретателя немецкого физика Г. Румкорфа (рис. 19.6). На цилиндрический железный стержень намотана первичная обмотка из толстой проволоки с небольшим количеством витков, а поверх нее — вторичная обмотка из очень тонкой проволоки, имеющая несколько тысяч витков.

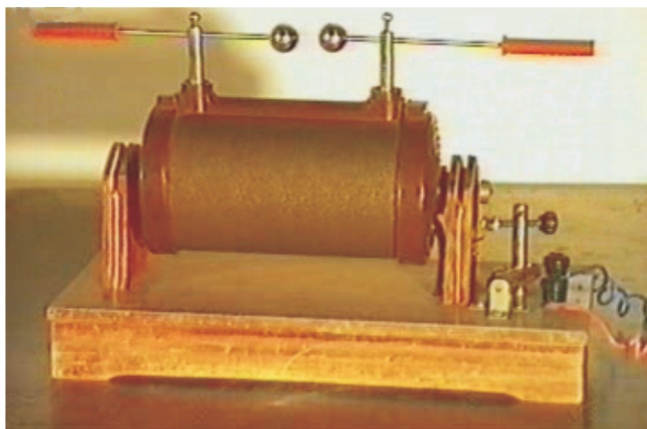


Рис. 19.6

Первичная обмотка соединялась через прерыватель с источником постоянной ЭДС. Когда ток в первичной обмотке достигал определенной величины, подвижный контакт прерывателя притягивался к стержню (электромагниту), контакт разрывался и ток прекращался. Этот процесс периодически повторялся. При протекании по первичной обмотке последовательности импульсов тока появляется периодически изменяющееся магнитное поле. Это поле приводит к появлению во вторичной обмотке ЭДС взаимной индукции, которая пропорциональна числу витков вторичной обмотки и может достигать величины порядка десятков киловольт. При небольшом расстоянии

между выходными контактами вторичной обмотки происходит пробой воздуха (рис. 19.7).

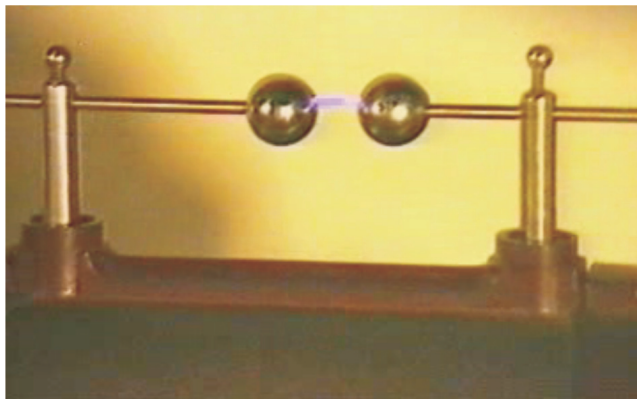


Рис. 19.7

Изобретателем трансформатора является русский физик П. Яблочков, получивший патент на изобретение в 1876 г.

Современный трансформатор состоит из замкнутого сердечника, на который намотаны первичная и вторичная обмотки. Замкнутый сердечник является магнитопроводом, по которому передается магнитный поток, связывающий обе обмотки.

Чтобы уменьшить потери на перемагничивание сердечник изготавливается из магнитомягкого ферромагнитного материала. Обычно используется трансформаторная сталь с добавками кремния, повышающими удельное сопротивление стали. Для устранения токов Фуко магнитопровод выполнен в виде набора пластин, изолированных друг от друга.

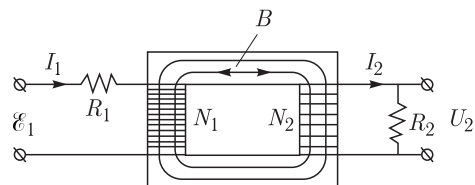


Рис. 19.8

Электрическая схема такого трансформатора изображена на рис. 19.8. Уравнения для токов в обмотках трансформатора, являющегося четырехполюсником, имеют вид

$$\hat{\mathcal{E}}_{10} = i\omega L_1 \hat{I}_{10} + R_1 \hat{I}_{10} + i\omega L_{21} \hat{I}_{20}, \quad 0 = i\omega L_2 \hat{I}_{20} + R_2 \hat{I}_{20} + i\omega L_{12} \hat{I}_{10}. \quad (19.8)$$

Здесь  $\hat{\mathcal{E}}_{10}$  — комплексная амплитуда внешней переменной ЭДС,  $L_1$  и  $L_2$  — индуктивности первичной и вторичной обмоток,  $R_1$  и  $R_2$  — омические сопротивления контуров,  $L_{21} = L_{12}$  — коэффициенты взаимной индукции,

Достаточно просто можно проанализировать работу идеального трансформатора, у которого ничтожны омические сопротивления обмоток и магнитное поле не выходит за пределы магнитопровода. Тогда  $R_1 \ll i\omega L_1$ ,  $R_2 = R_H$  — сопротивление нагрузки,  $\hat{U}_{20} = R_2 \hat{I}_{20}$  — напряжение на нагрузке.

Если вторичная обмотка разомкнута ( $R_H = \infty$ ), то  $\hat{I}_{20} = 0$ , а в первичной обмотке, как следует из первого уравнения, течет ток  $\hat{I}_{10}^X = \hat{\mathcal{E}}_{10} / (i\omega L_1)$ . Такой

режим работы трансформатора называется режимом холостого хода, а ток  $\hat{I}_{10}^X$  — током холостого хода.

При нагруженном трансформаторе второе уравнение можно записать в виде

$$\hat{I}_{10} = -\frac{i\omega L_2 + R_2}{i\omega L_{12}} \hat{I}_{20}. \quad (19.9)$$

Подставляя ток  $\hat{I}_{10}$  в первое уравнение, получаем

$$\hat{\mathcal{E}}_{10} = \left[ -\frac{L_1}{L_{21}}(i\omega L_2 + R_2) + i\omega L_{21} \right] \hat{I}_{20}. \quad (19.10)$$

Последнее уравнение можно упростить, если воспользоваться выражениями для индуктивности  $L = \mu_0 \mu N^2 S / l$  (см. (16.29)) и коэффициента взаимной индукции  $L_{12} = L_{21} = \mu_0 N_1 N_2 S / l$  (см. (11.24)) с учетом магнитной проницаемости  $\mu$  материала магнитопровода. Если принять, что площадь сечения  $S$  постоянна вдоль магнитопровода, а длины обмоток  $l$  одинаковы, то  $L_{12} = L_{21} = \sqrt{L_1 L_2}$ . Тогда

$$\hat{I}_{20} = \frac{\hat{\mathcal{E}}_{10}}{-\frac{L_1}{L_{21}}(i\omega L_2 + R_2) + i\omega L_{21}} = -\frac{\hat{\mathcal{E}}_{10}}{R_2} \sqrt{\frac{L_2}{L_1}} = -\frac{\hat{\mathcal{E}}_{10}}{R_2} \frac{N_2}{N_1}, \quad (19.11)$$

$$\hat{U}_{20} = R_2 \hat{I}_{20} = -\hat{\mathcal{E}}_{10} \frac{N_2}{N_1}. \quad (19.12)$$

Трансформатор характеризуется коэффициентом трансформации

$$K_T = \frac{U_{20}}{\mathcal{E}_{10}} = \frac{N_2}{N_1}, \quad (19.13)$$

равным отношению напряжений во вторичной и первичной цепях. Если  $K_T > 1$ , то трансформатор называется повышающим, если  $K_T < 1$ , — понижающим.

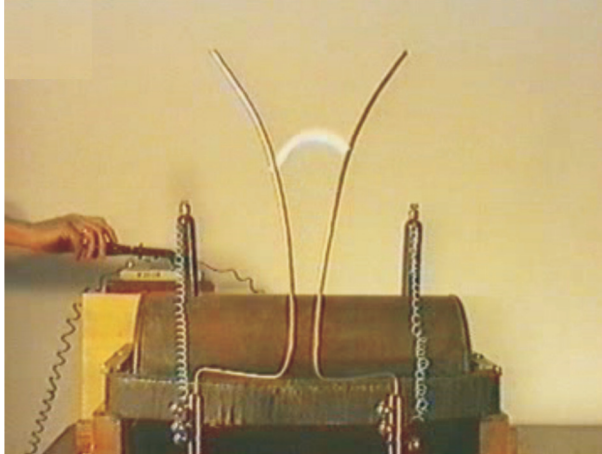


Рис. 19.9

В лекционном эксперименте на вход повышающего трансформатора подается переменное напряжение 220 В. Выходные клеммы выполнены в виде двух вертикальных изогнутых шин (рис. 19.9). Когда напряженность поля между шинами достигает пробойной величины для воздуха, появляется шнуровой разряд. Этот разряд зарождается в нижней части, где расстояние между шинами минимально, и затем перемещается вверх. Там разряд гаснет, и процесс повторяется вновь.

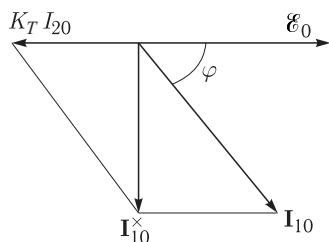


Рис. 19.10

Режимы работы трансформатора удобно анализировать с использованием векторной диаграммы токов, изображенной на рис. 19.10. При построении диаграммы учтено, что токи в обмотках связаны с током холостого хода:  $\hat{I}_{10}^X = \hat{I}_{10} + (L_{21}/L_1)\hat{I}_{20} = \hat{I}_{10} + K_T\hat{I}_{20}$  (следует из первого уравнения (19.8)). Мощность, потребляемая трансформатором,  $P = (1/2)\mathcal{E}_{10}I_{10}\cos\varphi$ , зависит от сопротивления нагрузки  $R_H = R_2$ : чем

меньше это сопротивление, тем больше токи в обмотках и меньше сдвиг фазы между током и напряжением в первичной обмотке. В режиме холостого хода  $\cos\varphi = 0$ , и идеальный трансформатор мощность не потребляет.

В реальном трансформаторе существуют потери электроэнергии, приводящие к его нагреванию. Однако коэффициент полезного действия хороших трансформаторов может достигать 99 %.

**Виды трансформаторов.** На практике используются разнообразные трансформаторы: силовые трансформаторы, автотрансформаторы, трансформаторы тока и напряжения, согласующие трансформаторы, импульсные трансформаторы, разделительные трансформаторы и др.

**Силовой трансформатор** применяется для преобразования электрической энергии в электрических сетях и в установках, предназначенных для приема и использования электрической энергии. Поскольку потери на нагревание провода пропорциональны квадрату тока через провод, при передаче электроэнергии на большое расстояние выгодно использовать очень большие напряжения и небольшие токи. Поэтому для транспортировки электроэнергии сначала повышают напряжения на электростанциях до нескольких сотен киловольт и затем транспортируют электроэнергию по высоковольтным линиям электропередач (ЛЭП). На трансформаторных подстанциях, находящихся вблизи потребителей электроэнергии, напряжение понижают до требуемых величин.

В очень мощных трансформаторах электросетей даже при высоком коэффициенте полезного действия выделяется большая мощность в виде тепла. Поэтому трансформатор помещается в емкость, заполненную маслом. Масляные трансформаторы применяются при передаче мощности в несколько мегаватт и более.

**Автотрансформатор** — электрический трансформатор, обмотки которого гальванически соединены друг с другом (рис. 19.11). Механически перемещающий выходной контакт от одной обмотки к другой, можно получать различные напряжения на выходе трансформатора.



Преимуществом автотрансформатора является более высокий КПД, меньший расход стали для сердечника, меди для обмоток, меньший вес и габариты и в итоге — меньшая стоимость.

К недостаткам относится отсутствие электрической изоляции (гальванической развязки) между первичной и вторичной цепями. Поэтому применение автотрансформаторов оправдано для соединения эффективно заземленных сетей при небольших коэффициентах трансформации.

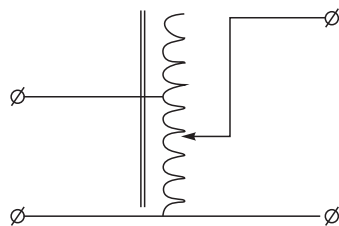


Рис. 19.11

**Трансформатор напряжения** применяется для преобразования высокого напряжения в низкое в измерительных цепях. Применение трансформатора напряжения позволяет изолировать логические цепи защиты и цепи измерения от цепи высокого напряжения.

**Трансформатор тока** применяется для снижения первичного тока до величины, используемой в цепях измерения, защиты, управления и сигнализации. Первичная обмотка трансформатора тока включается в цепь с измеряемым переменным током, а во вторичную цепь включаются измерительные приборы.

**Согласующий трансформатор.** При  $\omega L_2 \gg R_2$  из (19.9) получается  $\hat{I}_{10} = -K_T \cdot \hat{I}_{20}$ . Тогда с учетом (19.12) выходное сопротивление трансформатора связано с входным его сопротивлением равенством

$$Z_{\text{вых}} = \frac{\hat{U}_{20}}{\hat{I}_{20}} = (K_T)^2 \frac{\hat{\mathcal{E}}_{10}}{\hat{I}_{10}} = (K_T)^2 Z_{\text{вх}}. \quad (19.14)$$

Поскольку  $Z_{\text{вых}} > Z_{\text{вх}}$ , то вход трансформатора соединяют с высокоомной нагрузкой, а выход — с низкоомной нагрузкой (например, согласуют усилитель звуковых частот с низкоомными динамиками и пр.). Согласующие трансформаторы также используют в высокочастотных линиях (см. далее), где различие сопротивления линии и нагрузки привело бы к нежелательному отражению сигнала от концов линии.

**Разделительный трансформатор** позволяет отделить вторичную цепь от заземления. Дело в том, что нулевой провод электросети имеет контакт с «землей», и в отсутствие трансформатора возникает опасность поражения электрическим током при касании человеком прибора с плохой изоляцией.

**Импульсный трансформатор** используется для преобразования повторяющихся импульсных сигналов с длительностью импульса до десятков микросекунд с минимальным искажением формы импульса.

**Резонансный трансформатор Тесла.** В 1896 г. американский изобретатель сербского происхождения Н. Тесла запатентовал прибор, названный «Аппарат для производства электрических токов высокой частоты и потенциала». В настоящее время он называется трансформатором Тесла по имени своего изобретателя.

Электрическая схема трансформатора показана на рис. 19.12. Его основу составляют два связанных колебательных контура с небольшим коэффициентом взаимной индукции между катушками контуров. Первичная обмотка

(катушка первого контура) содержит несколько витков провода большого диаметра, а вторичная обмотка (катушка второго контура) содержит много витков тонкого провода. Один ее конец соединяют с заостренным штырем,

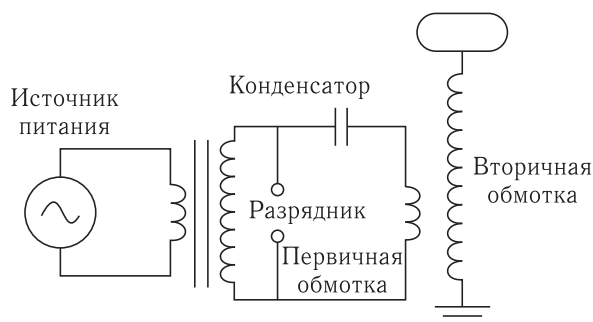


Рис. 19.12

сферой и т.п. Роль конденсатора второго контура выполняет межвитковая емкость самой катушки индуктивности. На рис. 19.13 показана фотография демонстрационного трансформатора Тесла.

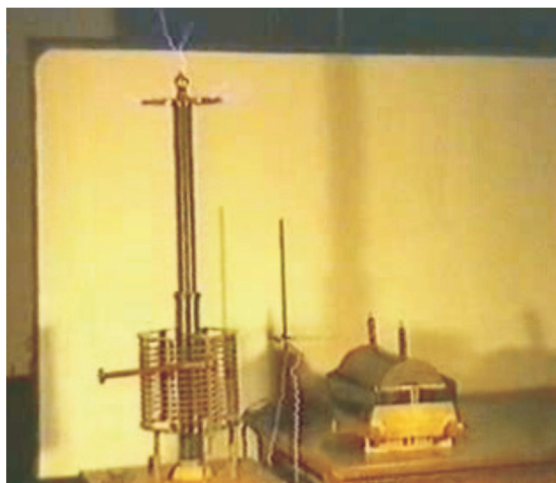


Рис. 19.13

Оба контура имеют одинаковую (весьма высокую) частоту собственных колебаний. Колебания в первом контуре начинаются при напряжении на конденсаторе, при котором происходит разряд (возникает дуга) между массивными электродами разрядника. Для этого первый контур подключен к выходной обмотке обычного повышающего трансформатора, питающегося от обычной сети переменного тока с частотой 50 Гц. Таким образом, в первом контуре периодически возникают затухающие собственные колебания напряжения несколько киловольт с частотой порядка сотни кГц.

Во втором контуре, настроенном в резонанс с первым, колебания напряжения будут многократно усилены. Напряжение на вторичной катушке может

достигать десятков миллионов вольт. Этого оказывается достаточно, чтобы в окружающем штырь или сферу пространстве появились заволашевающие разряды, как это показано на рис. 19.14, а газоразрядная трубка кольцевой формы начинала светиться (рис. 19.15).

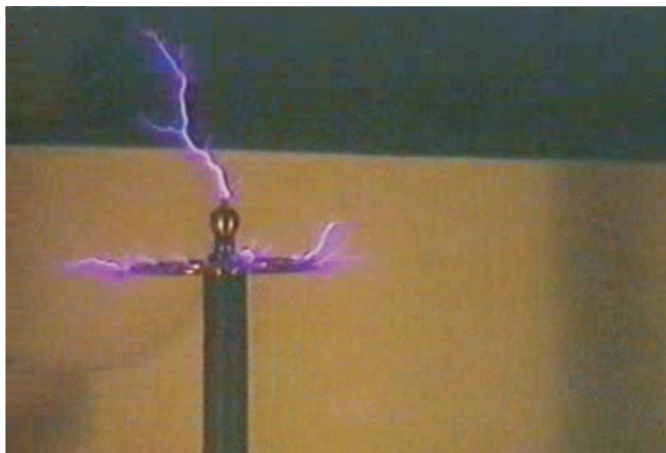


Рис. 19.14



Рис. 19.15

Трансформатор использовался самим изобретателем для беспроводной передачи энергии и информации с помощью возникающих при этом электромагнитных волн (см. лекцию 20).

На практике он применяется для поджига газоразрядных ламп, поиска течей в вакуумных системах и др.

**Генераторы электрического тока.** Для выработки электроэнергии применяются генераторы, превращающие механическую энергию в электрическую. Принцип работы генераторов основан на явлении электромагнитной индукции.

В первом генераторе, построенном во Франции И. Пикси в 1832 г., тяжелый постоянный подковообразный магнит вращался вблизи двух неподвижных катушек с железным сердечником, в которых возникал переменный ток. В дальнейшем конструкция генераторов претерпела принципиальные изменения.

Современный генератор состоит из индуктора — магнита или электромагнита, создающего магнитное поле, и якоря — обмотки, в которой при изменении магнитного потока возникает индуцированная ЭДС. Вращающаяся часть называется ротором генератора, а неподвижная его часть — статором. На роторе установлены контактные кольца, по которым скользят контактные пластинки (щетки). Через щетки к вращающемуся ротору подводится электрический ток.

Для понимания процесса генерации наиболее просто рассмотреть генератор, в котором якорем является вращающаяся рамка (ротор), а индуктором — статор (рис. 19.16). При равномерном вращении рамки в магнитном поле  $B$  с угловой скоростью  $\omega$  поток индукции однородного магнитного поля  $\Phi_B = BNS \cos(\omega t + \varphi_0)$  ( $S$  — площадь витка,  $N$  — число витков рамки,  $\varphi_0$  — начальный угол между вектором индукции и нормалью к плоскости рамки). Поэтому переменная электродвижущая сила в рамке  $\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = BNS\omega \sin(\omega t + \varphi_0)$ .

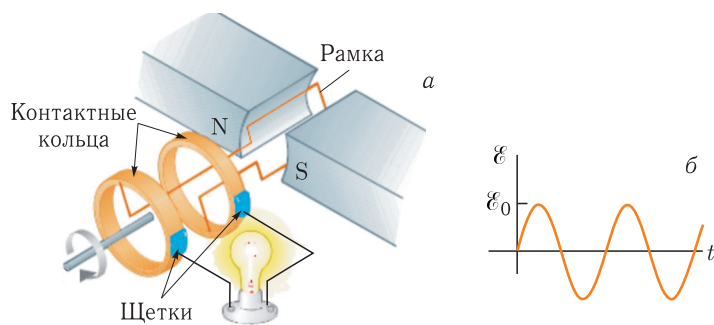


Рис. 19.16

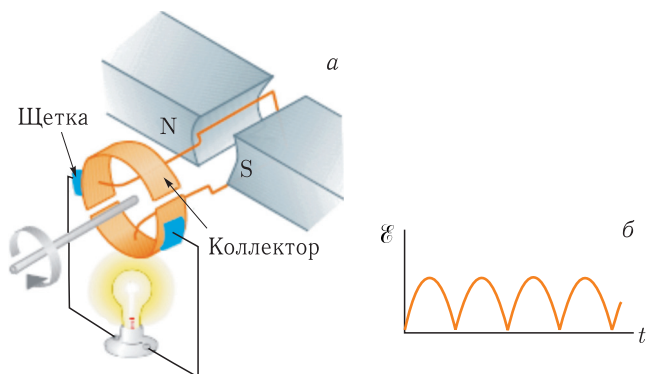


Рис. 19.17

Если сделать контактные кольца разрезными, то ток, периодически изменяя свое направление в рамке, через щетки будет течь в одном направлении. Разрезные кольца называются коллектором (рис. 19.17). Для того чтобы электрический ток был постоянным, ротор содержит много рамок, повернутых на небольшой угол друг относительно друга. В результате коллектор состоит из множества пар пластин, подключенных к концам соответствующих рамок.

Генераторы с вращающимся якорем используются при невысоких напряжениях (до 380/220 В) и небольших мощностях (до 15 кВт).

**Синхронный генератор переменного тока.** На рис. 19.18 показано устройство генератора, в которой якорем является статор, а индуктором — ротор. Скорость вращения индуктора и создаваемого им поля одинаковы, поэтому генератор называется *синхронным*. По такой схеме построены мощные генераторы, поскольку удобнее отводить большую электрическую мощность с неподвижного статора.

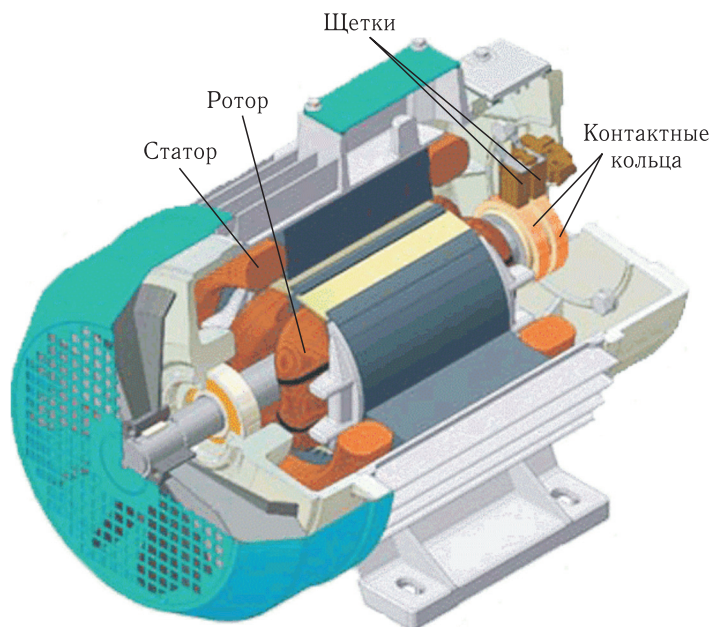


Рис. 19.18

Ротор выполнен в виде сердечника, в пазах которого уложены катушки. Он вращается внутри неподвижного статора, являющегося по существу вторым сердечником. В пазах статора также уложены обмотки, в которых возникает ЭДС.

Для изготовления ротора и статора применяют электротехническую сталь. Зазор между сердечниками (ротором и статором) стремятся сделать как можно меньше. Этим, согласно формуле Гопкинса, уменьшается магнитное сопротивление зазора и увеличивается магнитный поток.

Ток к ротору подводится через контактные кольца, по которым скользят контакты — щетки. Этот ток вырабатывается либо отдельным генератором

постоянного тока (возбудителем), расположенным на том же валу, либо создается генерируемой в статоре ЭДС. В последнем случае происходит процесс самовозбуждения генерации. Поскольку сердечники после остановки генератора еще длительное время сохраняют остаточное намагничивание, то при запуске генератора из состояния покоя возможно появление небольшой ЭДС в обмотке статора и без постоянного тока, питающего ротор. Если использовать эту ЭДС для питания ротора, то начнется процесс самовозбуждения генерации тока.

В маломощных генераторах ротором является постоянный магнит. В этом случае надобность в щетках отпадает.

Генерируемый ток снимается с обмоток статора. Частота тока равна числу оборотов ротора в единицу времени. Современные генераторы позволяют вырабатывать мощность в несколько сотен мегаватт.

**Трехфазный ток.** Трехфазная система переменного тока с шестью проводами была изобретена в 1888 г. Тесла. В 1889 г. русский изобретатель М. Доливо-Добровольский предложил трехфазную систему с тремя проводами. На электротехнической выставке во Франкфурте-на-Майне в 1891 г. он продемонстрировал опытную высоковольтную электропередачу трехфазного тока протяженностью 175 км. Для этого он использовал трехфазный генератор, имевший мощность 230 кВт при напряжении 95 В.

Устройство трехфазного синхронного генератора схематически показано на рис. 19.19. В пазах сердечника статора расположены три одинаковые обмотки I, II и III, сдвинутые относительно друг друга на  $120^\circ$ . При равномерной частоте вращения ротора в обмотках статора индуцируются гармонические ЭДС одинаковой частоты, сдвинутые по фазе относительно друг друга на угол  $2\pi/3$ . Каждая из ЭДС находится в своей фазе периодического процесса, поэтому часто называется просто «фазой». Также «фазами» называют обмотки генератора и приемника. Концы обмоток (фаз) подключены к трехфазной электрической цепи — совокупности трех однофазных электрических цепей. Фазы соединяют звездой или треугольником.

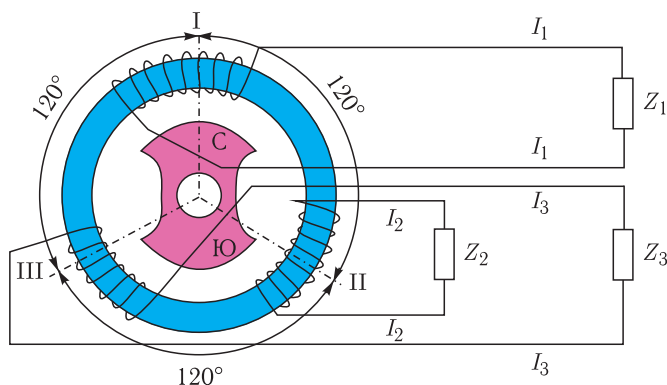


Рис. 19.19

Звездой называется такое соединение, при котором концы обмоток генератора соединяют в одну общую точку, называемую нейтральной точкой

или *нейтралью*. Концы обмоток трехфазного приемника (электродвигателя, трансформатора и др.) соединяют также в одну точку — нейтраль (рис. 19.20). Провод, соединяющий две нейтрали, называется *нейтральным*. Три провода, соединяющие обмотки генератора и приемника, называются *линейными проводами*.

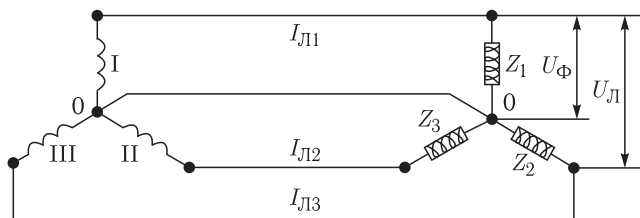


Рис. 19.20

Напряжение  $U_{\phi}$  между линейным проводом и нейтралью называется *фазным*. Напряжение  $U_{\text{Л}}$  между двумя линейными проводами называется *линейным*. На векторной диаграмме, изображенной на рис. 19.21, показаны три вектора  $U_{\phi}$ , повернутые относительно друг друга на угол  $120^{\circ}$ , и вектор  $U_{\text{Л}}$ . Из диаграммы видно, что  $U_{\text{Л}} = \sqrt{3} \cdot U_{\phi}$ . В частности, если эффективное напряжение  $U_{\phi} = 220 \text{ В}$ , то  $U_{\text{Л}} = 380 \text{ В}$ .

Аналогично ток  $I_{\phi}$ , текущий в обмотке генератора или приемника, называется фазным током, а ток  $I_{\text{Л}}$  в линейном проводе — линейным током. При соединении звездой  $I_{\text{Л}} = I_{\phi}$ , а вектор тока в нейтрали  $I_{\text{Н}} = I_{\text{Л1}} + I_{\text{Л2}} + I_{\text{Л3}}$ .

Если сопротивления  $Z_1, Z_2$  и  $Z_3$  приемника равны между собой, то такую нагрузку называют *симметричной*. В этом случае ток  $I_{\text{Н}}$  в нейтрали отсутствует, и нейтральный провод можно удалить.

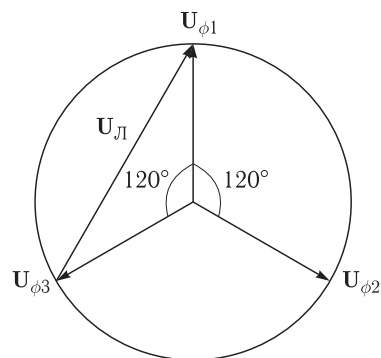


Рис. 19.21

При соединении генератора и приемника звездой (рис. 19.22) используется три провода. Фазное и линейное напряжения совпадают ( $U_{\phi} = U_{\text{Л}}$ ), а линейный ток больше фазного:  $I_{\text{Л}} = \sqrt{3} \cdot I_{\phi}$ .

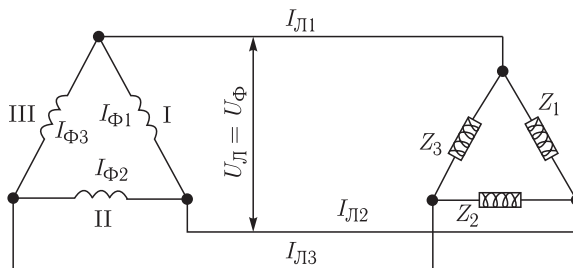


Рис. 19.22



Передача электрической энергии на дальние расстояния по трехфазным цепям более выгодна, чем передача энергии по однофазным цепям. Трехфазные синхронные генераторы, трехфазные синхронные и асинхронные двигатели и трансформаторы (см. далее) более просты в производстве, экономичны и надежны в эксплуатации. В трехфазных системах достаточно просто получить вращающееся магнитное поле, воздействие которого на проводники с током положено в основу принципа работы асинхронных и синхронных электродвигателей.

**Электродвигатели.** Синхронные генераторы обладают свойством обратимости, поэтому используются как электродвигатели переменного тока. В самом деле, если обмотку статора подключить к трехфазной сети переменного тока, то внутри статора возникнет вращающееся магнитное поле, частота вращения которого будет равна частоте переменного тока. Тогда на ротор, по обмоткам которого течет постоянный ток от внешнего источника, будет действовать момент сил, который стремится увлечь ротор во вращение. В результате ротор будет вращаться с той же частотой (синхронно), что и магнитное поле. Поэтому такой двигатель называется синхронным двигателем.

Важно отметить, что ток в обмотку ротора подается от постороннего источника, а не индуцируется в нем магнитным полем статора и, следовательно, не зависит от частоты вращения вала двигателя. Поэтому частота вращения ротора не зависит от нагрузки.

При ненагруженном роторе (холостом ходе электродвигателя) вектор магнитного момента  $\mathbf{P}_m$  вращающегося ротора практически совпадает с вектором индукции  $\mathbf{B}$  вращающегося магнитного поля статора, поэтому момент сил практически равен нулю.

При нагруженном двигателе ротор под действием приложенного к валу внешнего нагрузочного момента  $M_H$  смещается на некоторый угол  $\alpha$  против направления вращения. Этот угол определяется равенством  $M_H = P_m B \sin \alpha$ . Если  $M_H \geq P_m B$ , то синхронизм нарушится, и двигатель остановится. Этот режим считается аварийным, поскольку по обмоткам статора будут протекать недопустимо большие токи. Синхронные двигатели используются в установках большой мощности (свыше 50 кВт).

**Асинхронный двигатель.** Ротор может следовать за вращающимся полем статора и в отсутствие постоянного тока, протекающего по его обмоткам. Если ротор изготовлен из массивного проводника, то в нем возникают токи Фуко, взаимодействующие с вращающимся магнитным полем. Сила этих токов зависит от разности частот вращения поля и ротора. Поэтому развиваемый двигателем крутящий момент будет зависеть от скорости вращения ротора. Такой двигатель называется асинхронным двигателем.

В асинхронном двигателе в пазы сердечника ротора закладываются обмотки, которые бывают двух видов: фазная и короткозамкнутая. Соответственно этому асинхронные двигатели бывают с фазным и короткозамкнутым ротором.

Короткозамкнутая обмотка напоминает беличье колесо (рис. 19.23 а). Двигатель с такой обмоткой не имеет щеток, поэтому весьма надежен и долговечен. У фазного ротора обмотка выполняется трехфазной, аналогично обмотке статора (б).



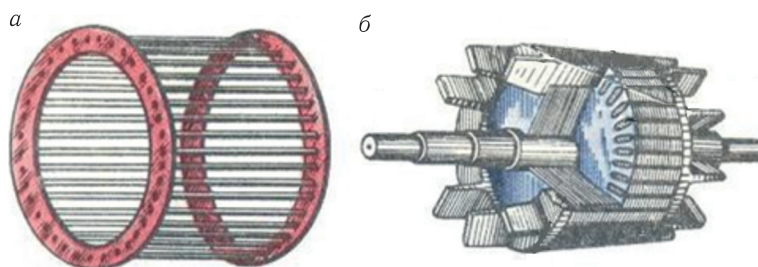


Рис. 19.23

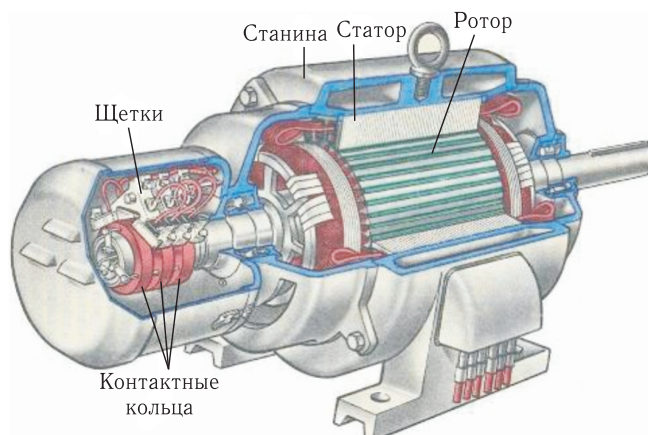


Рис. 19.24

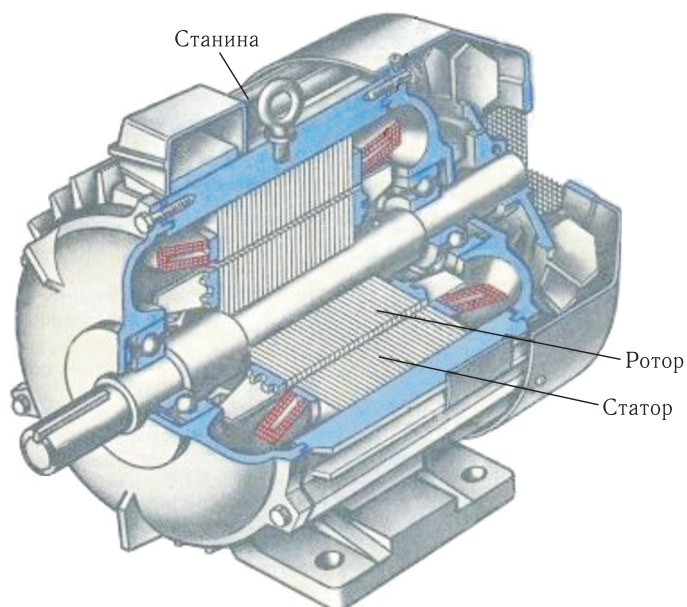


Рис. 19.25

На рис. 19.24 показан разрез асинхронного двигателя с фазным ротором. В станине располагаются обмотки статора. Обмотки ротора соединены с контактными кольцами, по которым скользят щетки, через которые ток поступает в обмотки ротора. Контактные кольца изготавливают из латуни или стали, а щетки — из металлографита.

Еще проще устроен двигатель с короткозамкнутым ротором, разрез которого показан на рис. 19.25. В нем отсутствуют контактные кольца и щетки.

На практике подавляющее число применяемых в промышленности электрических двигателей являются асинхронными.

**Генерация электроэнергии.** Сейчас около 50 % всей электроэнергии мира производится на тепловых электростанциях (ТЭС). Электродвигатель приводится во вращение паровой турбиной, пар для работы которой получается при сгорании органического топлива. ТЭС потребляет невозобновляемые природные ресурсы и кислород, загрязняет окружающую среду, выбрасывая в атмосферу миллионы тонн золы и сернистого ангидрида, и имеют коэффициент полезного действия не более 30–35%.

По количеству вырабатываемой энергии на втором месте находятся гидравлические электростанции (ГЭС), производящие наиболее дешевую энергию. В них поток падающей воды приводит во вращение турбину электродвигателя. Современная ГЭС может производить до 7 ГВт энергии, что вдвое превышает показатели действующих в настоящее время ТЭС. ГЭС являются весьма эффективными источниками энергии, поскольку используют возобновляемые ресурсы, они просты в управлении и имеют высокий КПД. Существенным недостатком ГЭС является дороговизна строительства, сезонность их работы, затопление больших площадей при перекрытии равнинных рек.

Разновидностью ГЭС являются приливные станции (ПЭС). Например, в Охотском и Беринговом морях во время прилива уровень воды поднимается на 13 метров. Напор приливной волны можно также использовать для производства электроэнергии. Недостаток ПЭС очевиден — энергия генерируется лишь во время прилива и отлива. Да и стоимость ПЭС весьма велика.

Весьма эффективны гидроаккумулирующие электростанции (ГАЭС). Их действие основано на циклическом перемещении одного и того же объема воды между двумя бассейнами: верхним и нижним.

В ночные часы, когда потребность электроэнергии мала, вода перекачивается из нижнего водохранилища в верхний бассейн, потребляя при этом излишки энергии, производимой ГАЭС ночью (остановки ТЭС в ночное время невозможны).

Днем, когда резко возрастает потребление электричества, вода сбрасывается из верхнего бассейна вниз, вращая турбины ГАЭС.

Во многих странах мира достаточно широкое распространение получила ветроэнергетика. Доля произведенной электроэнергии с помощью ветрогенераторов в мире в настоящее время достигает нескольких процентов.

Солнечная энергетика является также экологически безопасным способом производства электроэнергии, и поэтому получает все большее распространение. Это обусловлено созданием прорывных технологий, позволяющих производить фотоэлементы и фотопанели (см. лекцию 25) с высокой эффективностью преобразования солнечной энергии в электрическую.

Недостатком этого способа производства электроэнергии является прежде всего зависимость от погоды и времени суток и высокая стоимость фотоэлементов.

Наиболее перспективной в настоящее время считается атомная энергетика. На атомной электростанции (АЭС) пар, приводящий во вращение турбины, вырабатывается за счет энергии, высвобождающейся при атомной реакции.

Первая в мире АЭС была запущена в СССР в г. Обнинске в 1954 г. АЭС, работающие в штатном режиме, абсолютно не загрязняют окружающую среду, не требуют привязки к источнику сырья и, соответственно, могут быть размещены практически везде. Новые энергоблоки имеют мощность, практически равную мощности средней ГЭС, при этом эта мощность генерируется постоянно, в то время как полная мощность ГЭС вырабатывается только при необходимом напоре воды.

Недостаток АЭС также очевиден: возникновение опасности заражения местности при форс-мажорных обстоятельствах и при захоронении радиоактивных отходов.

## ЛЕКЦИЯ 20

**Колебания тока в двухпроводной линии.** Будем уменьшать линейные размеры колебательных контуров и одновременно увеличивать их число,  $N \rightarrow \infty$  (рис. 18.11), так, чтобы длина линии  $l$  оставалась постоянной. В пределе мы получим двухпроводную линию, характеризуемую емкостью (7.5) и индуктивностью (16.35) единицы длины линии:

$$C_1 = \frac{C}{l} = \pi \varepsilon_0 \left/ \left( \ln \frac{b}{R} \right) \right., \quad L_1 = \frac{L}{l} = \frac{\mu_0}{\pi} \ln \frac{b}{R}. \quad (20.1)$$

Эти формулы справедливы, если расстояние  $b$  между осями проводов значительно превышает радиус  $R$  провода. Если ось  $Ox$  направить вдоль линии, то уравнение (18.46) для элемента линии  $dx$  можно переписать в виде

$$L_1 dx \frac{\partial^2 I}{\partial t^2} + \frac{(I(x) - I(x + dx)) - (I(x - dx) - I(x))}{C_1} = 0. \quad (20.2)$$

Разделив на  $dx$  и переходя к пределу при  $dx \rightarrow 0$ , получаем волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 I}{\partial t^2} = \frac{1}{L_1 C_1} \frac{\partial^2 I}{\partial x^2}. \quad (20.3)$$

Скорость распространения волны тока вдоль линии

$$V = \sqrt{\frac{1}{L_1 C_1}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = c = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с} \quad (20.4)$$

и равна скорости света  $c$  в вакууме!

Длинная двухпроводная линия обладает бесконечно большим числом нормальных частот, поэтому колебания тока в ней можно возбудить на любой частоте  $\nu = \omega / (2\pi)$ .

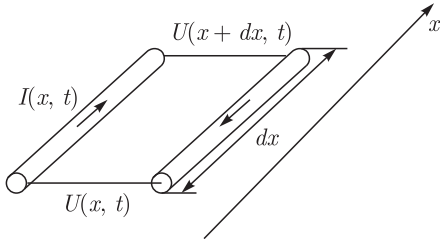


Рис. 20.1

**Телеграфные уравнения.** Получим уравнения, описывающие распределение тока  $I(x, t)$  и напряжения  $U(x, t)$  между проводами вдоль двухпроводной линии электропередачи, характеризующейся индуктивностью  $L_1$ , емкостью  $C_1$ , активным сопротивлением  $R_1$  и проводимостью  $G_1$  среды (изоляции) между проводами, приходящимися на единицу длины линии. На рис. 20.1 показан фрагмент

линии с током и изображены два сечения, в которых напряжение между проводами равны  $U(x, t)$  и  $U(x + dx, t)$  соответственно.

Изменение напряжения вдоль элемента  $dx$  линии равно сумме падений напряжений на активном сопротивлении и индуктивности, поэтому

$$-dU = U(x, t) - U(x + dx, t) = I(x, t) \cdot R_1 \cdot dx + L_1 \frac{dI(x, t)}{dt} dx. \quad (20.5)$$

Изменение силы тока вдоль элемента  $dx$  линии подчиняется закону сохранения заряда и составит величину

$$dI = I(x + dx, t) - I(x, t) = -C_1 \frac{dU(x, t)}{dt} dx - G_1 U(x, t) dx. \quad (20.6)$$

Разделив оба уравнения на  $dx$  и используя частные производные, получаем систему дифференциальных уравнений, называемых *телеграфными уравнениями*:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = -I \cdot R_1 - L_1 \frac{\partial I}{\partial t}, \quad (20.7)$$

$$\frac{\partial I}{\partial x} = -C_1 \frac{\partial U}{\partial t} - G_1 U. \quad (20.8)$$

Эти уравнения были получены в 1874 г. английским физиком О. Хевисайдом, разработавшим модель линии электропередачи.

**Линия без потерь ( $R_1 = 0$ ,  $G_1 = 0$ ).** В этом идеализированном случае волна тока или напряжения распространяется вдоль линии без затухания. Если линия подключена к источнику переменной ЭДС, то ток в ней

$$I(x, t) = I_0 \sin \left[ \omega \left( t - \frac{x}{V} \right) \right] = I_0 \sin(\omega t - kx), \quad (20.9)$$

где  $k = \omega/V$  — волновое число. Длина волны тока связана с  $\nu$  частотой соотношением

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{V}{\nu}. \quad (20.10)$$

Подставим (20.9) в уравнение (20.7) в отсутствие потерь. Тогда

$$\frac{\partial U}{\partial x} = -L_1 \frac{\partial I}{\partial t} = -L_1 I_0 \omega \cdot \cos(\omega t - kx).$$

Интегрируя это уравнение, находим

$$U(x, t) = \frac{U_0 L_1 I_0 \omega}{k} \cdot \sin(\omega t - kx) = \sqrt{\frac{L_1}{C_1}} I_0 \cdot \sin(\omega t - kx). \quad (20.11)$$

Отношение амплитуды напряжения к амплитуде тока называется *волновым сопротивлением* линии, которое равно

$$Z_{\text{волн}} = \sqrt{\frac{L_1}{C_1}}. \quad (20.12)$$

Если линия на конце нагружена на омическое сопротивление  $R_H = Z_{\text{волн}}$ , то в линии будет только бегущая волна (линия согласована с нагрузкой). Если согласования нет, то часть волны тока (напряжения) отразится. Если, например, на конце линия короткозамкнута или разомкнута, то в ней установится стоячая волна тока и напряжения.

Если пользоваться аналогией с механикой, то волна напряжения эквивалентна волне смещения, например, шнура, а волна тока — волне скорости.

Разомкнутой линии соответствует свободный конец шнура, а замкнутой — закрепленный конец. В первом случае на конце линии будет пучность напряжения и узел тока, а во втором случае — узел напряжения и пучность тока.

Если в бегущей волне колебания тока и напряжения находятся в фазе, то в стоячей волне между ними появляется сдвиг фаз, равный  $\pi/2$ .

В линии длиной  $l$  могут существовать нормальные колебания (моды) тока и напряжения. Нормальные частоты  $\nu_n$  этих мод определяются граничными условиями. Если граничные условия одинаковы, то  $l = n\lambda_n/2 = nc/(2\nu_n)$ , или  $\nu_n = nc/(2l)$ . При разных граничных условиях  $l = (2n - 1)\lambda_n/4 = (2n - 1)c/(4\nu_n)$ , поэтому  $\nu_n = (2n - 1)c/(4l)$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ).

**Затухание волны в линии.** При наличии потерь будем искать решение телеграфных уравнений в виде бегущих волн тока и напряжения:

$$I(x, t) = I_0 \exp(i\omega t + \gamma x), \quad U(x, t) = I_0 Z_{\text{волн}} \exp(i\omega t + \gamma x), \quad (20.13)$$

где  $\gamma$  — константа, описывающая изменение амплитуды и скорости волны,  $Z_{\text{волн}}$  — волновое сопротивление линии с потерями.

Подставляя (20.13) в телеграфные уравнения (20.7)–(20.8), находим

$$\gamma = \sqrt{(R_1 + i\omega L_1)(G_1 + i\omega C_1)} = \alpha + i\beta, \quad (20.14)$$

$$Z_{\text{волн}} = \sqrt{\frac{R_1 + i\omega L_1}{G_1 + i\omega C_1}}. \quad (20.15)$$

Смысл величин  $\alpha$  и  $\beta$  становится понятным, если подставить (20.14) в любое из уравнений (20.13). Тогда

$$I(x, t) = I_0 e^{-\alpha x} \exp[i(\omega t - \beta x)] = I_0 e^{-\alpha x} \exp\left[i\omega\left(t - \frac{\beta}{\omega}x\right)\right]. \quad (20.16)$$

Вследствие потерь волна затухает на характерной длине  $x_0(\omega) = \alpha^{-1}(\omega)$ , а ее фазовая скорость  $V(\omega) = \omega/\beta(\omega)$ . В общем случае длина затухания и фазовая скорость зависят от частоты. Если продолжать пользоваться аналогией с механикой, то это означает, что линия обладает дисперсией фазовой скорости и поглощения. Поэтому импульс тока (или напряжения) при распространении по линии будет не только затухать, но и искажаться.

Чем меньше потери, тем меньше искажение и затухание импульса в линии электропередачи. В предельном случае  $R_1 = 0$ ,  $G_1 = 0$  из (20.14) получаем  $\alpha = 0$ ,  $\beta = \omega\sqrt{L_1 C_1}$ ,  $V(\omega) = \omega/\beta = 1/\sqrt{L_1 C_1}$ , а волновое сопротивление становится равным (20.12). В связи с развитием компьютерных технологий и Интернета широкое применение получил кабель связи, называемый *витая пара*, изображенный на рис. 20.2. Этот кабель состоит из нескольких пар скрученных изолированных медных проводников.

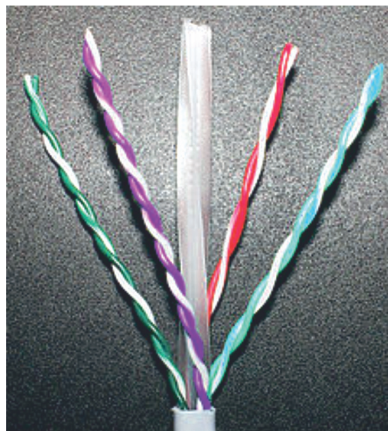


Рис. 20.2

Скручивание позволяет уменьшить влияние электромагнитных помех, возникающих от внешних источников. Каждая пара имеет свой шаг скручивания, что позволяет «развязать» пары друг от друга. По таким парам распространяются электрические импульсы, переносящие информацию в цифровом формате.

Волновое сопротивление пары составляет около 100 Ом. Частота следования импульсов у лучших кабелей может превосходить 1 ГГц, поэтому скорость передачи информации может достигать несколько десятков гигабит в секунду.

**Электромагнитная волна.** В окружающем линию пространстве присутствуют изменяющиеся во времени и в пространстве электрическое и магнитное поля. Совокупность этих полей представляет электромагнитную волну. Если в линии существует бегущая волна тока (или напряжения), то вдоль линии бежит электромагнитная волна. При отражении волны тока (или напряжения) происходит отражение электромагнитной волны.

На рис. 20.3 показаны линии электрического и магнитного полей для бегущей волны в некотором сечении двухпроводной линии в фиксированный момент времени. Линии магнитного поля охватывают проводники, а линии электрического поля направлены от проводника с большим потенциалом к проводнику с меньшим потенциалом. Электрическое и магнитное поля колеблются в фазе. Вектор Пойнтинга  $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$  (см. (17.34)) направлен вдоль проводов.

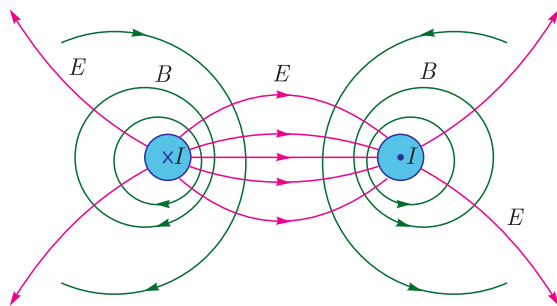


Рис. 20.3

Напряженность электрического поля в проводах очень небольшая вследствие их высокой проводимости. Поэтому и ток смещения, в соответствии с (17.23), значительно меньше тока проводимости.

Наоборот, в пространстве между проводниками ток проводимости мал по сравнению с током смещения. Для того чтобы не перегружать рисунок, линии магнитного поля, охватывающие ток смещения, не изображены.

В стоячей волне колебания электрического и магнитного полей сдвинуты по фазе на  $\pi/2$ . Положение узлов и пучностей полей  $E$  и  $H$  повторяют положения узлов и пучностей  $U$  и  $I$  соответственно.

**Резонансы Шумана.** Эксперименты, выполненные Тесла, привели к открытию стоячих электромагнитных волн сверхнизких частот в пространстве между Землей и окружающей ее ионосферой. Эти волны легко огибают

земной шар. По поводу их происхождения существует несколько гипотез. Самая распространенная из них — грозовая гипотеза, согласно которой эти волны вызваны разрядами молний в различных уголках нашей планеты.

Впоследствии, в 1952 г. немецким профессором В. Шуманом были рассчитаны частоты этих стоячих волн, которые получили название резонансов Шумана. Стоячая электромагнитная волна существует в ограниченном околоземном пространстве вплоть до высот порядка 100 км, поскольку выше находится хорошо проводящая ионосфера, куда волна из-за скин-эффекта проникнуть не может. Ее частота определяется из условия, чтобы на периметре Земли  $l_3$  укладывалось бы целое число длин волн:  $l_3 = n\lambda_n = nc/\nu_n$ , или  $\nu_n = nc/l_3$ . Полагая  $l_3 = 40\,000$  км, получаем  $\nu_n = n \cdot 7,5$  Гц. Экспериментально измеренные частоты оказались равными 7,83; 14,1; 20,3; 26,4; 32,4 Гц.

Различие с теорией обусловлено тем, что при теоретическом расчете не учитывалась проводимость Земли и проводимость ионосферы. Если же принять это во внимание, то скорость волны  $V(\omega) = \omega/\beta < c$  и резонансные частоты уменьшатся приблизительно на 20 %.

С резонансами Шумана и электромагнитными волнами, огибающими Землю, связано много историй, подчас невероятных. По недостоверным сведениям, Тесле якобы удалось транспортировать большую электромагнитную энергию из одного полушария в другое.

Достоверно установлено, что Тесла создавал многометровые разряды во круг медного метрового шара, установленного на вершине 60-метровой мачты в Колорадо-Спрингс (США, 1899 г.). Шар был соединен с резонансным трансформатором, частота колебаний контуров которого достигала сотен килогерц, а напряжение на вторичной катушке — миллионов вольт.

На основании эксперимента Тесла сделал вывод о том, что устройство позволило ему генерировать волны, которые распространялись от шара на мачте, могли огибать земной шар и затем сходиться (фокусироваться) на другом конце Земли. Существует мнение, что явление, известное как «Тунгусский метеорит» (1908 г.), является результатом этой фокусировки, а не падением метеорита.

Немецкий врач Г. Кениг обратил внимание на совпадение основной частоты резонанса Шумана с частотой альфа-ритма мозга человека. С тех пор высказываются разнообразные бездоказательные утверждения по поводу возможного влияния этих волн на психику человека: телекинез, ясновидение, получение информации и т. д.

**Распространение возбуждений между нейронами.** Телеграфные уравнения широко применяются для описания распространения электромагнитных сигналов в разнообразных линиях, кабелях, волноводах и т. п. В качестве иллюстрации рассмотрим механизм распространения возбуждения в нервных и мышечных волокнах.

Сложность и многообразие функций нервной системы определяются взаимодействием между нейронами, которое осуществляется с помощью сигналов, распространяющихся по длинным отросткам — аксонам (рис. 20.4).

Аксон, или нервное волокно, можно рассматривать как коаксиальный кабель с поперечным размером порядка десяти микрон. Внутренняя часть — цилиндрическая сердцевина, аксоплазма — обладает высоким сопротивлением  $R_1$ .



Она окружена оболочкой — клеточной мембраной с проводимостью  $G_1$ . Мембрана изолирует аксоплазму от хорошо проводящей окружающей жидкой среды.

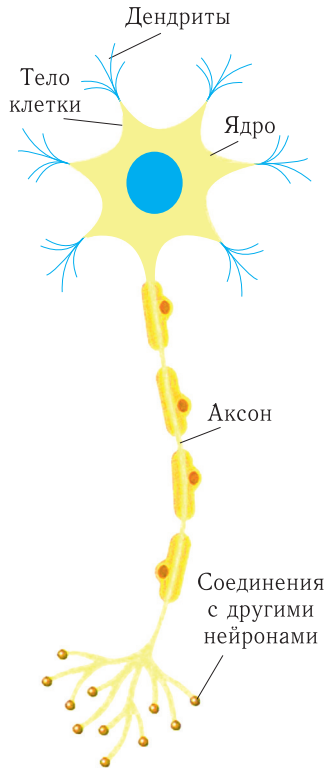


Рис. 20.4

В невозбужденном состоянии поверхность мембраны является эквипотенциальной (снаружи хороший проводник), при этом на внутренней поверхности распределены отрицательные ионы калия, а на внешней — положительные ионы натрия.

Появление нервного импульса означает, что в области его нахождения ионы натрия через мембрану проникают внутрь волокна, а ионы калия — наружу. Это, в свою очередь, означает, что по обе стороны от поверхности мембраны в разных направлениях протекают токи  $I$ , приводящие к переполяризации мембраны (появлению так называемого потенциала действия), как показано на рис. 20.5.

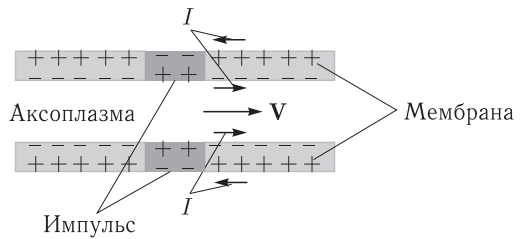


Рис. 20.5

Скорость распространения нервного импульса варьируется от величин порядка  $V = 1$  м/с (тонких волокнах) до 100 м/с (в толстых волокнах).

Нервное волокно является плохим волноводом из-за большого сопротивления аксоплазмы и относительно высокой проводимости мембраны. Тогда  $\gamma = \sqrt{(R_1 + i\omega L_1)(G_1 + i\omega C_1)} \approx \sqrt{R_1 G_1}$ , и длина затухания  $x_0 = 1/\sqrt{R_1 G_1} \sim (1-10)$  мм. Однако присутствующие в волокне молекулярные генераторы подпитывают бегущий импульс и он проходит существенно большие расстояния.

**Условие квазистационарности.** Длина волны тока в линии равна  $\lambda = V/\nu$ . При использовании законов Ома и Кирхгофа применительно к переменному току мы предполагали, что в любой момент времени ток во всех участках цепи одинаков. Такое предположение справедливо при выполнении двух условий:

1. Длина волны тока должна быть намного больше характерной длины  $l_0$  цепи:  $\lambda \gg l_0$ , или

$$\nu \ll \frac{V}{l_0}. \quad (20.17a)$$

**2.** Ток смещения должен быть мал по сравнению с током проводимости. Если плотность тока проводимости меняется во времени по закону  $j = j_0 \sin 2\pi\nu t$ , то, как следует из (17.23),  $j_{\text{см}} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon}{\sigma} \frac{\partial j}{\partial t} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon 2\pi\nu}{\sigma} j_0 \cos 2\pi\nu t$ . Током смещения можно пренебречь, если  $\varepsilon_0 \varepsilon 2\pi\nu / \sigma \ll 1$ , или

$$\nu \ll \frac{\sigma}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon}. \quad (20.176)$$

Неравенства (20.17) налагают ограничение на частоту тока и являются *условиями квазистационарности*.

Для переменного тока с частотой  $\nu = 50$  Гц первое условие выполняется для  $l_0 \leq 1000$  км. Второе условие выполняется в проводниках практически при любых частотах переменного тока.

**Излучение электромагнитных волн.** Электромагнитные волны могут «отрываться» от двухпроводной линии и излучаться в открытое пространство. На рис. 20.6а изображена открытая двухпроводная линия, подключенная к источнику переменной ЭДС частоты  $\nu$ . По проводам течет неквазистационарный переменный ток, имеющий длину волны  $\lambda = c/\nu$ . Если длина каждого провода  $l = \lambda/4$ , то в проводе установится стоячая волна тока и напряжения с пучностью тока на входе в линию и пучностью напряжения (заряда) между концами проводов. Распределение зарядов и электрическое поле показаны в разные моменты времени в течение периода колебаний  $T = 1/\nu$  на рис. 20.6б.

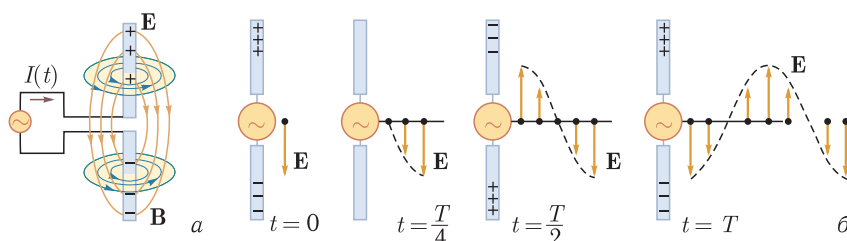


Рис. 20.6

По существу, открытая линия представляет собой диполь, величина дипольного момента которого изменяется по гармоническому закону. Возникшая электромагнитная волна вокруг проводов будет отрываться от них и уходить в открытое пространство. На рис. 20.7 показано распределение в пространстве электромагнитного поля, излучаемого диполем. Здесь изображены линии электрического поля, а магнитное поле перпендикулярно электрическому и колеблется с ним в фазе.

Существование электромагнитных волн впервые доказал немецкий физик Г. Герц в своих опытах, проведенных в период 1885–1889 гг. Источником электромагнитного излучения являлся искровой разряд, возникающий между двумя шариками, подключенными к концам вторичной обмотки катушки Румкорфа (рис. 20.8). Шарика находились на стержнях, на противоположных концах которых располагались пластины конденсатора ( $\Pi_1$  и  $\Pi_2$ ), накапливающие переменный заряд.

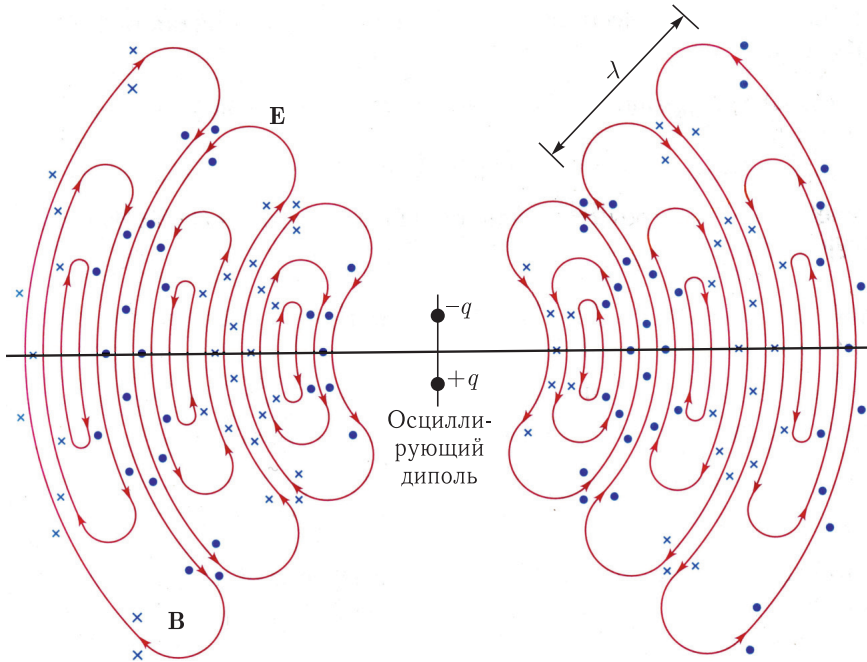


Рис. 20.7

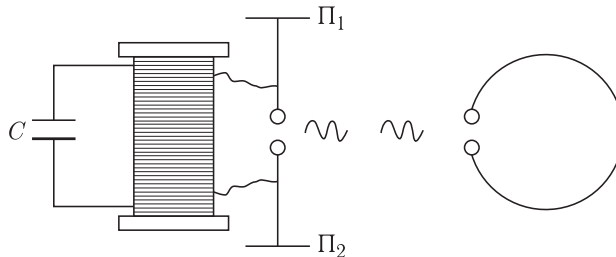


Рис. 20.8

Первичная обмотка вместе с конденсатором  $C$  образовывала колебательный контур, подключенный через прерыватель к источнику постоянного напряжения. Когда постоянный ток от источника, проходя через катушку, намагничивал ее железный сердечник, он притягивал подвижной контакт, и цепь разрывалась. В результате между шариками периодически возникали разряды, а в контуре — колебания тока. После затухания этих колебаний контакт замыкался и процесс повторялся снова.

Таким образом, в обмотках катушки возникали следующие друг за другом импульсы переменного тока, а в окружающем пространстве — цуги электромагнитных волн. Перемещением пластин вдоль стержней изменялась длина излучаемой волны.

Волны улавливались с помощью удаленного на несколько метров от излучателя разрезного кольца, между шариками которого с такой же периодической последовательностью проскакивали маленькие искры.

Герцу удалось не только обнаружить волны, но и исследовать скорость их распространения, отражение, преломление и даже поляризацию. После изучения свойств волн и измерения их скорости распространения он доказал их полную аналогию со световыми волнами. Результаты своих исследований он опубликовал в 1888 г. Этот год считается годом открытия электромагнитных волн и экспериментального подтверждения теории Максвелла.

**Волновое уравнение.** Возможность распространения волн в вакууме легко доказывается выводом волнового уравнения как для вектора  $\mathbf{E}$ , так и для вектора  $\mathbf{H}$ . Применим операцию  $\text{rot}$  к обеим частям уравнения (17.24) и учтем тождество для произвольного вектора  $\mathbf{A}$ :  $\text{rot rot } \mathbf{A} = \text{grad div } \mathbf{A} - \Delta \mathbf{A}$ . Тогда можем записать:

$$\text{rot rot } \mathbf{E} = \text{grad div } \mathbf{E} - \Delta \mathbf{E} = -\mu_0 \text{rot } \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}. \quad (20.18)$$

Изменим в правой части (20.18) порядок дифференцирования по времени и координатам. Наконец, учтем, что, согласно (17.25),  $\text{rot } \mathbf{H} = \varepsilon_0 (\partial \mathbf{E} / \partial t)$ , а уравнение (17.26) можно записать как  $\varepsilon_0 \text{div } \mathbf{E} = 0$ . Поэтому уравнение (20.18) сведется к виду

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0} \Delta \mathbf{E}. \quad (20.19)$$

Это известное *волновое уравнение*, подобное уравнению, описывающему в механике распространение акустических волн. Скорость электромагнитной волны определяется постоянными  $\varepsilon_0$  и  $\mu_0$  и равна

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \approx 3 \cdot 10^8 \text{ м/с}. \quad (20.20)$$

Аналогичное волновое уравнение можно получить и для вектора  $\mathbf{H}$ , если использовать другую пару уравнений Максвелла.

Если записать оба векторных волновых уравнения в скалярном виде, то получим шесть одинаковых волновых уравнений вида

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = c^2 \Delta f, \quad (20.21)$$

где под  $f$  подразумевается любая из шести компонент  $E_x, E_y, E_z, H_x, H_y, H_z$  электромагнитного поля. Поэтому далее мы рассмотрим важнейшие модели скалярных волн, описываемых функцией  $f$ , называемой *уравнением волны*.

**Сферические волны.** Пусть функция  $f$  зависит лишь от сферической координаты  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ :  $f(x, y, z) = f(r, t)$ . Подставим эту функцию в (20.21). При вычислении лапласиана в правой части (20.21) учтем, что

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r} \frac{\partial}{\partial r}; \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{x}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{x}{r} \left( \frac{x}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{x}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \right).$$

Поэтому уравнение (20.21) может быть записано следующим образом:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = c^2 \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r f). \quad (20.22)$$

Если ввести новую функцию  $\psi = r \cdot f$ , то для нее волновое уравнение будет иметь вид:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2}. \quad (20.23)$$

Решение этого волнового уравнения представляет собой суперпозицию волновых возмущений, движущихся навстречу друг другу:

$$\psi(r, t) = \psi_1 \left( t - \frac{r}{c} \right) + \psi_2 \left( t + \frac{r}{c} \right). \quad (20.24)$$

Здесь  $\psi_1$  и  $\psi_2$  — произвольные функции.

Окончательно уравнение сферической волны примет вид:

$$f(r, t) = \frac{\psi_1(t - r/c)}{r} + \frac{\psi_2(t + r/c)}{r}. \quad (20.25)$$

Первый член в правой части (20.25) представляет собой сферическую волну, расходящуюся от начала координат, а второй — сходящуюся к началу координат.

Важно отметить, что у расходящейся волны возмущение  $f$  ослабевает обратно пропорционально пройденному волной расстоянию, а у сходящейся, наоборот, нарастает. Геометрическое место точек пространства, где возмущение  $f$  одинаково, представляет собой сферу с центром в начале координат.

**Плоские волны.** На больших расстояниях от начала координат фрагмент сферической волны может быть представлен в виде плоской волны (рис. 20.9) (часть сферы аппроксимируется плоскостью с заданным в пространстве направлением нормали к ней).

Если ввести единичный нормальный вектор  $\mathbf{e}$ , то функция  $f$  постоянна на плоскости  $\mathbf{r} \cdot \mathbf{e} = \text{const}$  и зависит только лишь от координаты  $\xi = \mathbf{r} \cdot \mathbf{e}$ , отсчитываемой вдоль направления нормали к плоскости. Поэтому уравнение такой волны должно зависеть от координаты и времени следующим образом:

$$f(\mathbf{r}, t) = f[(\mathbf{r} \cdot \mathbf{e}), t]. \quad (20.26)$$

Подставляя (20.26) в (20.21) и переходя к одной координате  $\xi = \mathbf{r} \cdot \mathbf{e}$ , приводим волновое уравнение к простейшему виду

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2}. \quad (20.27)$$

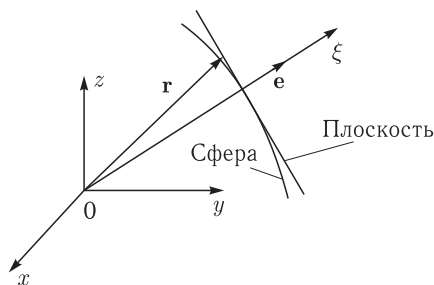


Рис. 20.9

Его решение есть суперпозиция двух плоских волн, движущихся навстречу друг другу:

$$f(\xi, t) = f_1 \left( t - \frac{\xi}{c} \right) + f_2 \left( t + \frac{\xi}{c} \right), \quad (20.28)$$

где  $f_1$  и  $f_2$  — произвольные функции. Возвращаясь от  $\xi$  к радиусу-вектору, окончательно получаем

$$f(\mathbf{r}, t) = f_1 \left( t - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{e}}{c} \right) + f_2 \left( t + \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{e}}{c} \right). \quad (20.29)$$

В отличие от сферической волны, возмущение в плоской волне не изменяется с пройденным волной расстоянием.

Отметим, что сферическая и плоская волны являются абстракциями, поскольку не существуют в природе. Вместе с тем эти модели волн играют очень важную роль. Дело в том, что волны реальных источников могут быть представлены в виде суперпозиции либо сферических, либо плоских волн. Поэтому обратимся к свойствам этих волн.

**Свойства плоских волн.** В плоской волне векторы  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  зависят от координат и времени следующим образом:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E} \left( t \mp \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{e}}{c} \right); \quad \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{H} \left( t \mp \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{e}}{c} \right). \quad (20.30)$$

Установим связь и ориентацию векторов  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$ . Выбирая для определенности в (20.30) знак минус, будем тем самым рассматривать плоскую электромагнитную волну, распространяющуюся вдоль вектора  $\mathbf{e}$ . Подставим (20.30) в первые два уравнения Максвелла. Для удобства дифференцирования введем новую переменную  $t' = t - \mathbf{r} \cdot \mathbf{e}/c$ . Тогда

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \mathbf{e} \times \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t'} = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t'}, \quad (20.31)$$

$$\text{rot } \mathbf{H} = -\frac{1}{c} \mathbf{e} \times \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t'} = \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t'}. \quad (20.32)$$

При записи (20.31) и (20.32) использовались следующие выкладки:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t'} \\ (\text{rot } \mathbf{E})_x &= \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = \frac{\partial E_z}{\partial t'} \left( -\frac{e_y}{c} \right) - \frac{\partial E_y}{\partial t'} \left( -\frac{e_z}{c} \right) = \\ &= -\frac{1}{c} \left[ \frac{\partial E_z}{\partial t'} e_y - \frac{\partial E_y}{\partial t'} e_z \right] = -\frac{1}{c} \left( \mathbf{e} \times \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t'} \right)_x \end{aligned}$$

и т. д.

Интегрируя (переходя от производных к самим функциям) уравнения (20.31) и (20.32) и отбрасывая константы интегрирования, описывающие возможно присутствующие статические поля, получаем

$$\frac{1}{c} \mathbf{e} \times \mathbf{E} = \mu_0 \mathbf{H}, \quad (20.33)$$

$$-\frac{1}{c} \mathbf{e} \times \mathbf{H} = \varepsilon_0 \mathbf{E}. \quad (20.34)$$

Подставив сюда выражение для скорости света (20.20), получим очень удобные для запоминания соотношения

$$\sqrt{\varepsilon_0} \mathbf{e} \times \mathbf{E} = \sqrt{\mu_0} \mathbf{H}, \quad (20.35)$$

$$-\sqrt{\mu_0} \mathbf{e} \times \mathbf{H} = \sqrt{\varepsilon_0} \mathbf{E}. \quad (20.36)$$

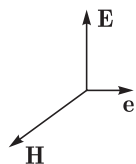


Рис. 20.10

Из них следуют несколько важнейших выводов. В плоской бегущей волне:

а) векторы  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$  и  $\mathbf{e}$  взаимно перпендикулярны, поэтому волна является поперечной;

б) эти векторы образуют правую тройку векторов (рис. 20.10);

в) величины напряженностей электрического и магнитного полей изменяются во времени синхронно, достигая одновременно максимальных и минимальных значений.

Действительно, согласно (20.35) или (20.36), величины  $E$  и  $H$  связаны соотношением

$$\sqrt{\varepsilon_0} E = \sqrt{\mu_0} H. \quad (20.37)$$

Соотношение (20.37) выполняется и для сферической волны. Векторы  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  лежат в касательной к сфере плоскости, поэтому сферическая волна также является поперечной.

**Монохроматические волны.** Обратимся к временной зависимости волновой функции  $f(\mathbf{r}, t)$ . Фундаментальной моделью волны является монохроматическая волна, у которой напряженности полей меняются по гармоническому закону с некоторой *круговой частотой*  $\omega$ . Тогда выражение (20.29) для плоской волны может быть записано в виде

$$f(\mathbf{r}, t) = A \cos \left[ \omega \left( t \mp \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{e}}{c} \right) + \varphi_0 \right], \quad (20.38)$$

где  $A$  и  $\varphi_0$  — амплитуда и начальная фаза колебаний соответственно.

Монохроматическая волна, как известно из курса механики, характеризуется *периодом*  $T = 2\pi/\omega$ , *частотой*  $\nu = 1/T = \omega/2\pi$ , *длиной волны*  $\lambda = cT$  и *волновым числом*  $k = 2\pi/\lambda = \omega/c$ . Если ввести *волновой вектор*  $\mathbf{k} = k\mathbf{e} = (\omega/c)\mathbf{e}$ , то (20.38) запишется в часто употребляемом виде

$$f(\mathbf{r}, t) = A \cos [\omega t \mp \mathbf{k} \mathbf{r} + \varphi_0]. \quad (20.39)$$

Подобным образом записывается и уравнение сферической монохроматической волны:

$$f(r, t) = \frac{a}{r} \cos [\omega t \mp kr + \varphi_0]. \quad (20.40)$$

*Амплитуда сферической волны* есть величина  $A = a/r$ . Фаза  $\varphi$  у обеих волн определяется выражением в квадратных скобках:

$$\varphi = \omega t \mp \mathbf{k} \mathbf{r} + \varphi_0 \quad \text{для плоской волны,}$$

$$\varphi = \omega t \mp kr + \varphi_0 \quad \text{для сферической волны.}$$

Поверхность равной фазы называется *фазовой поверхностью*, или *волновым фронтом*. Нетрудно понять, что у волны за время  $dt$  эта поверхность смещается на величину  $\pm dr$ , определяемую из условия  $d\varphi = \omega dt \mp k dr = 0$ . Поэтому *фазовая скорость* (скорость движения волнового фронта) равна

$$v = \left| \frac{dr}{dt} \right| = \frac{\omega}{k} = c. \quad (20.41)$$

В среде волновое число  $k$  еще зависит и от ее свойств, и фазовая скорость может быть как меньше, так и больше скорости света.

**Интенсивность волны.** Пусть плоская гармоническая волна распространяется вдоль оси  $Oz$  и  $E_x = E_0 \cos[\omega t - kz]$ . Тогда из (20.35) следует, что  $H_y = \sqrt{(\varepsilon_0/\mu_0)} E_x = c\varepsilon_0 E_x$ . На рис. 20.11 показано распределение векторов напряженности  $\mathbf{E}$  и индукции  $\mathbf{B}$  вдоль направления распространения в фиксированный момент времени.

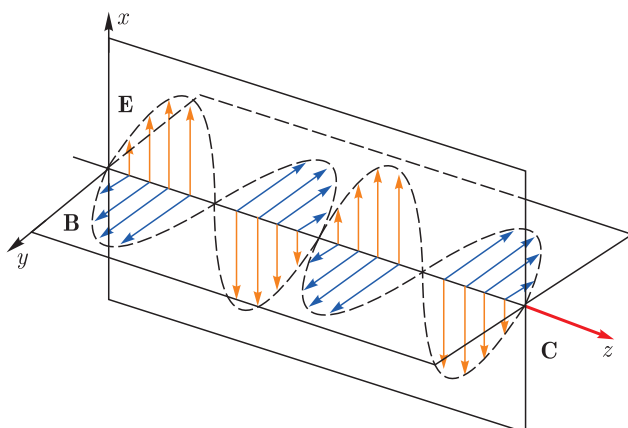


Рис. 20.11

Поэтому вектор Пойнтинга (17.34) имеет лишь одну компоненту:

$$S_z = E_x \cdot H_y = c\varepsilon_0 E_0^2 \cos^2(\omega t - kz). \quad (20.42)$$

Поток энергии «пульсирует» с течением времени. На практике пользуются усредненной за период величиной плотности потока энергии. Эта величина называется *интенсивностью волны* и равна

$$I = \langle S_z \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T S_z dt = \frac{1}{2} c\varepsilon_0 E_0^2. \quad (20.43)$$

*Интенсивность пропорциональна квадрату амплитуды напряженности электрического поля волны.* Она измеряется в ваттах на квадратный метр ( $\text{Вт/м}^2$ ). Если в (20.43) подставить значения  $\varepsilon_0$  и  $c$ , то связь между  $I$  и  $E_0$  примет вид:

$$I \text{ (Вт/м}^2\text{)} = 1,32 \cdot 10^{-3} (E_0 \text{ (В/м)})^2. \quad (20.44)$$

**Частотные диапазоны волн.** Электромагнитные волны делятся на частотные диапазоны. К *радиоволнам* относят сверхдлинные ( $\lambda > 10$  км), длинные ( $1 \text{ км} < \lambda < 10 \text{ км}$ ), средние ( $100 \text{ м} < \lambda < 1 \text{ км}$ ), короткие ( $10 \text{ м} < \lambda < 100 \text{ м}$ ) и ультракороткие ( $1 \text{ мм} < \lambda < 10 \text{ м}$ ). Радиоволны создаются, как правило, переменными токами и используются для радиосвязи. Кроме того, они возникают за счет атмосферных, магнитосферных и других явлений, как например, резонансы Шумана.

К *оптическим волнам* относят волны с длиной волны  $10 \text{ нм} < \lambda < 1 \text{ мм}$ . Такие волны излучаются атомами и молекулами, и будут подробно изучаться в курсе «Оптика». Существует также *рентгеновское излучение* ( $10 \text{ пм} < \lambda < 10 \text{ нм}$ ) и *гамма-излучение* ( $\lambda < 5 \text{ пм}$ ). Происхождение этих волн и их свойства подробно изучаются в курсах атомной и ядерной физики.

**Принципы организации сотовой связи.** С начала 90-х годов широкое распространение получила сотовая связь. Разбиение зоны покрытия радиосвязи на ячейки (соты) диктуется необходимостью обеспечить связью громадное



количество абонентов при наличии всего лишь порядка тысячи частотных каналов связи. При этом достигается и хорошее качество связи.

Например, в стандарте GSM 900 (Global System for Mobile Communications) прием осуществляется в диапазоне частот 890–915 МГц, а передача в диапазоне 935–960 МГц. Каналы связи должны быть разнесены друг от друга на 200 кГц, поэтому число приемо-передающих частотных каналов равно  $50 \text{ МГц} / 200 \text{ кГц} = 250$ . На одном частотном канале можно образовать 8 каналов связи, если разнести по времени передаваемую информацию от каждого из восьми каналов. Тогда общее число каналов связи будет всего лишь равно  $250 \times 8 = 2000$ .

Чтобы обеспечить связь большого числа абонентов, используется множество маломощных (100 Вт и ниже) передатчиков. Поскольку диапазон действия таких передатчиков довольно мал, зону покрытия передатчиков можно разбивать на ячейки, каждая из которых будет обслуживаться собственной антенной, устанавливаемой в середине ячейки на отдельных мачтах или крышах высоких зданий.

Равное расстояние между смежными антеннами достигается только при шестиугольной форме ячеек, как это изображено на рис. 20.12. Ячейка, которой выделяется своя полоса частот, обслуживается базовой станцией (БС), состоящей из передатчика, приемника и модуля управления. Смежные ячейки работают на разных частотах, чтобы избежать интерференции или перекрестных помех. В то же время ячейки, находящиеся на довольно большом расстоянии друг от друга, могут использовать одинаковые полосы частот. Размеры сот изменяются от нескольких сотен метров в городах до двух–трех десятков километров для открытой местности.

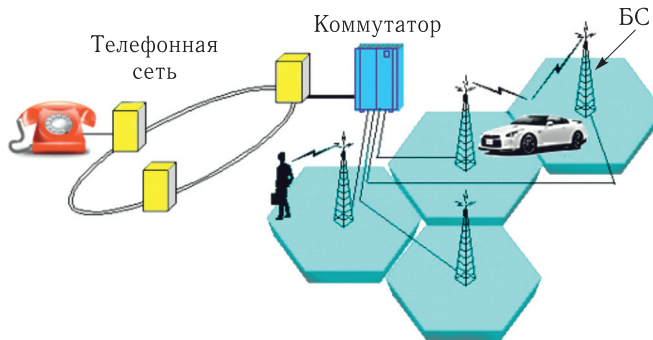


Рис. 20.12

Каждая базовая станция соединяется с помощью волоконно-оптических, радиорелейных, спутниковых и лазерных линий связи к контроллеру, который управляет работой БС, обрабатывает поступивший сигнал и др.

Контроллер подключен к коммутатору мобильных телекоммуникаций, причем один коммутатор может обслуживать несколько базовых станций.

Коммутатор соединен со стационарной телефонной или телекоммуникационной сетью, что позволяет абонентам одного оператора делать звонки абонентам другого оператора, а также на стационарные телефоны. Коммутатор

также соединен с автоматизированной системой расчета (биллинговой системой), следящей за текущим состоянием счетов абонентов, и с базой данных HLR (Home Location Register), в которой хранятся идентификационные коды абонентов, записанные на SIM-карте.

Сотовый телефон прослушивает эфир, находит сигнал базовой станции и посылает станции свой идентификационный код. Телефон и станция поддерживают постоянный радиоконтакт, периодически обмениваясь информацией. Если при перемещении абонента телефон выходит из поля действия одной БС, то он налаживает связь с другой.

**Система глобального позиционирования.** В 1973 г. в США была начата программа по созданию спутниковой навигации, получившая название GPS (Global Position System). Начиная со следующего года, на земную орбиту стали последовательно выводить искусственные спутники Земли, и к 1994 г. были выведены все необходимые 24 спутника.

На рис. 20.13 схематично изображены навигационные спутники, облетающие Землю. Спутники летят по орбите высотой  $H \approx 20\,000$  км. Период обращения спутников составляет около 12 часов и скорость около 3,8 км/с. Таким образом, за сутки каждый спутник совершает два полных оборота вокруг Земли.

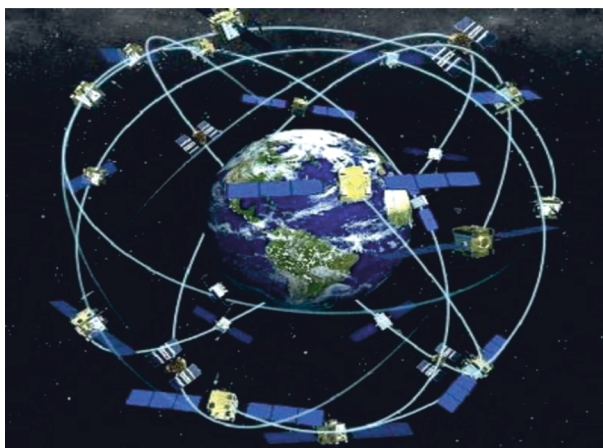


Рис. 20.13

Установленный на борту маломощный передатчик (мощность 5 Вт) на частоте  $\nu_1 = 1575,42$  МГц посылает информацию, содержащую номер, дату, время и местонахождение спутника. Этот «гражданский сигнал» доступен всем пользователям и обеспечивает точность позиционирования 3–10 метров.

Высокоточный «военный сигнал» передается на двух частотах:  $\nu_1$  и  $\nu_2 = 1227,60$  МГц. Использование сигнала на двух разных частотах позволяет уменьшить ионосферные искажения и повысить точность позиционирования в несколько раз.

Если известно местоположение любого  $i$ -го спутника, задаваемое радиусом-вектором  $\mathbf{r}_i$ , то положение GPS приемника на Земле, задаваемое

радиусом-вектором  $\mathbf{r}_0$ , может быть найдено путем решения системы четырех уравнений:

$$|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_i| = c(t_0 - t_i). \quad (20.45)$$

Здесь  $t_0$  — момент времени одновременного прихода сигналов от четырех спутников, представляющих собой последовательности радиоимпульсов,  $t_i$  — момент времени испускания сигнала  $i$ -м спутником ( $i = 1, 2, 3, 4$ ). Расчет показывает, что при наличии 24 спутников приемник сможет принимать сигналы одновременно от четырех спутников.

Из системы четырех уравнений можно определить три координаты приемника и момент времени  $t_0$ . Подчеркнем, что момент времени  $t_i$  определяется по показанию соответствующих бортовых атомных часов, которое отличается от показания атомных эталонных часов на поверхности Земли. Поскольку координаты спутников, определяемые наземными базовыми станциями слежения, известны, то можно это различие вычислить для каждого спутника. Информацию об этом различии базовая станция посылает в приемник в виде корректирующего сигнала. На рис. 20.14 даны соответствующие пояснения.

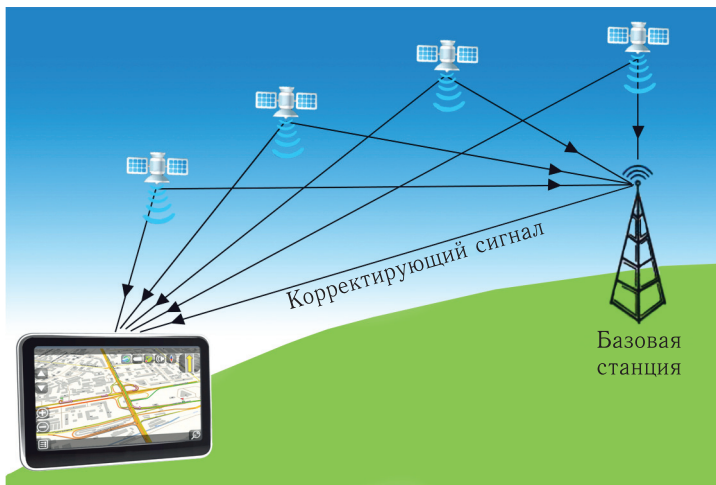


Рис. 20.14

Надо также учесть, что темп хода атомных часов, установленных на борту движущегося спутника, с учетом действия гравитационного поля будет отличаться от темпа хода таких часов на поверхности Земли.

Атомные часы спутника из-за наличия гравитации за сутки «убегут» на величину

$$\Delta t' = \Delta t \frac{gH}{c^2} = \Delta t \frac{\Delta U}{c^2}, \quad (20.46)$$

где  $\Delta U = -GM \left( \frac{1}{R+H} - \frac{1}{R} \right)$  — изменение гравитационного потенциала.

При  $H = 3R = 19200$  км и  $\Delta t = 8,64 \cdot 10^4$  с величина  $\Delta t' = 46$  мкс.

С другой стороны, при скорости движения спутника  $V = 3800$  м/с часы отстанут за сутки на величину

$$\Delta t'' = (1 - \sqrt{1 - \beta^2}) \Delta t \approx \frac{1}{2} \left( \frac{V}{c} \right)^2 \Delta t = \frac{1}{2} \left( \frac{3,8}{3} \right)^2 \cdot 10^{-10} \cdot 8,64 \cdot 10^4 \approx 7 \text{ (мкс)}. \quad (20.47)$$

Таким образом, разница в показаниях часов на спутнике и на Земле за сутки составит величину  $\Delta t = \Delta t' - \Delta t'' = 46 - 7 = 39$  мкс. Если не учитывать это различие, то ошибка в определении расстояния между спутником и приемником составила бы величину  $\Delta r = c \Delta t = 11,7$  км.

В настоящее время функционирует российская навигационная система ГЛОНАСС (Глобальная Навигационная Система), а в ближайшем будущем вступит в эксплуатацию и европейская система ГАЛИЛЕО.

### ЛЕКЦИЯ 21

**Классическая теория электропроводности.** При изучении закономерностей протекания постоянного тока в проводниках мы установили, что ток в них создается присутствующим электрическим полем, при этом плотность тока подчиняется закону Ома в дифференциальной форме

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}. \quad (21.1)$$

К хорошим проводникам относятся металлы: их удельная проводимость  $\sigma \sim 10^6 - 10^8 \text{ Ом}^{-1} \text{ м}^{-1}$ . Причина такой высокой проводимости кроется в наличии большого числа валентных электронов, потерявших связь со своими атомами и совершающих хаотическое движение внутри проводника. Эти электроны называются электронами проводимости.

При наложении электрического поля с напряженностью  $E$  электроны проводимости начинают двигаться в направлении, противоположном приложенному полю, или дрейфовать под действием этого поля.

В классической теории электропроводности электроны рассматриваются как классический электронный газ с концентрацией  $n$ . Поэтому при наложении электрического поля в момент времени  $t = 0$  скорость дрейфа электрона будет возрастать во времени:

$$\mathbf{v} = \frac{e\mathbf{E}}{m}t. \quad (21.2)$$

Однако из-за хаотического движения электрон, в среднем через время  $\tau$ , будет сталкиваться с атомами кристаллической решетки, теряя при этом полностью дрейфовую скорость, и начинать вновь двигаться с ускорением с начальной нулевой скоростью. Таким образом, скорость дрейфа будет изменяться во времени так, как это изображено на рис. 21.1. Если использовать среднюю скорость дрейфа

$$v_{\text{ср}} = \frac{eE}{2m} \tau, \quad (21.3)$$

то плотность тока

$$\mathbf{j} = env_{\text{ср}} = \frac{ne^2\tau}{2m} \mathbf{E}. \quad (21.4)$$

Следовательно, удельная электропроводность получается равной

$$\sigma = \frac{ne^2\tau}{2m}. \quad (21.5)$$

Модель проводящей среды в виде электронного газа, частицы которого дрейфуют по действием приложенного электрического поля и одновременно

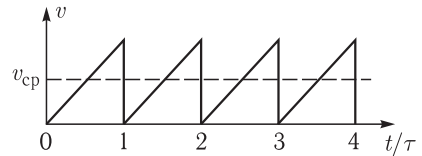


Рис. 21.1

совершают беспорядочные тепловые движения, называется *моделью Друде–Лоренца*.

Как будет показано ниже, подобное выражение получается и в квантовой теории электропроводности, с той лишь разницей, что в знаменателе (21.5) стоит эффективная масса электрона  $m^*$ , не равная массе электрона  $m$ . Последнее обстоятельство связано с тем, что электрон взаимодействует с ионами кристаллической решетки и разгоняется под действием электрического поля по-иному, чем свободный электрон.

Среднее время  $\tau$  между двумя столкновениями в модели классического электронного газа должно определяться отношением средней длины свободного пробега  $l_{\text{пр}}$  к средней скорости  $u$  беспорядочного теплового движения:  $\tau = l_{\text{пр}}/u$ . Тогда

$$\sigma = \frac{ne^2 l_{\text{пр}}}{2mu}. \quad (21.6)$$

Хотя классическая теория и позволила установить связь между током и электрическим полем, однако возникли непреодолимые трудности при сравнении результатов теории с экспериментом.

**Закон Видемана–Франца.** В 1853 г. немецкими физиками Г. Видеманом и Р. Францем экспериментально было установлено, что для металлов отношение коэффициента теплопроводности  $\theta$  к удельной электропроводности  $\sigma$  пропорционально температуре

$$\frac{\theta}{\sigma} = LT,$$

где коэффициент пропорциональности  $L$  — число Лоренца, а само соотношение получило название закона Видемана–Франца.

На первый взгляд может показаться, что этот закон является доказательством справедливости модели классического электронного газа, определяющего как теплопроводность, так и электропроводность металлов. В самом деле, если принять, что

$$\frac{mu^2}{2} = \frac{3}{2} k_B T,$$

а коэффициент теплопроводности

$$\theta = \frac{1}{3} n m c_V l_{\text{пр}} u = \frac{1}{3} n \frac{3}{2} k_B l_{\text{пр}} u,$$

то

$$\frac{\theta}{\sigma} = \frac{1}{3} n m c_V l_{\text{пр}} u \bigg/ \left( \frac{ne^2 l_{\text{пр}}}{2mu} \right) = \frac{2}{3} \frac{m^2 u^2 c_V}{e^2} = 3 \left( \frac{k_B}{e} \right)^2 T.$$

Число Лоренца  $L = 3 \left( \frac{k_B}{e} \right)^2 = 2,2 \cdot 10^{-8} \text{ Вт} \cdot \text{Ом} \cdot \text{К}^{-2}$  хорошо согласуется с экспериментом. Однако, приведя к правильному результату, классическая теория, тем не менее, оказалась неприемлемой.

Разнообразные эксперименты показывают, что длина свободного пробега электронов проводимости может превышать 1 см, что составляет  $10^8$ – $10^9$  межатомных расстояний. Классическая теория не дает ответа на вопрос, почему электроны проходят огромное число периодов решетки и не испытывают при этом столкновений ни с ионами, ни с другими электронами проводимости.

Если принять, что  $u \propto \sqrt{T}$ , как, например, для идеального газа, то удельное сопротивление  $\rho = 1/\sigma \propto \sqrt{T}$ . Однако эксперимент дает совершенно другой результат: в широкой области температур удельное сопротивление  $\rho = 1/\sigma \propto T$ , а при очень низких температурах ряд веществ переходят в сверхпроводящее состояние.

Закон Видемана–Франца оказался справедлив благодаря удачной взаимной компенсации двух ошибок: в действительности скорость теплового движения практически не зависит от температуры и близка к фермиевой скорости электрона:  $u \approx v_F$  (см. далее (21.32)), а средняя энергия  $\bar{\epsilon}$  электрона является линейной функцией  $T^2$  (см. (21.45)). Поэтому удельная теплоемкость электрона  $c_V = m^{-1}(d\bar{\epsilon}/dT) \propto T$  (пропорциональна температуре), и отношение  $\theta/\sigma \propto T$ . Попутно отметим, что и при расчетах теплопроводности проводников классическая модель также не приводит к правильным выводам.

Помимо проводников, существуют диэлектрики, являющиеся хорошими изоляторами: для них  $\sigma \leq 10^{-8} \text{ Ом}^{-1} \cdot \text{м}^{-1}$ . Промежуточное положение по своей электропроводности между проводниками и изоляторами занимают полупроводники.

Все это свидетельствует о том, что модель свободного электронного газа, подчиняющегося статистике Максвелла–Больцмана, непригодна для описания электропроводности проводников.

Объяснение этих и других свойств твердых тел может быть дано лишь на основе квантовой теории. В этой теории учитывается квантовый характер взаимодействия электронов как с кристаллической решеткой, так и друг с другом. Ниже излагаются основные подходы, лежащие в основе квантовой теории электропроводности твердых тел.

**Волновые свойства частиц.** В начале XX столетия в оптике появилась концепция корпускулярно-волнового дуализма, согласно которой свет, с одной стороны, представляет собой электромагнитную волну частоты  $\omega$ , характеризующуюся волновым числом  $k = \omega/c$  ( $c$  — скорость света). С другой стороны, световая волна интерпретировалась как поток фотонов, при этом энергия фотона

$$\epsilon = \hbar\omega,$$

а его импульс

$$p = \hbar k. \quad (21.7)$$

В 1924 г. Луи де Бройль выдвинул гипотезу, что частице с заданными значениями энергии  $\epsilon$  и импульса  $p$  можно поставить в соответствие волну с частотой  $\omega$  и волновым числом  $k$ .

Если частица, например, свободно движется в положительном направлении оси  $Ox$ , то соответствующая волна будет описываться волновой функцией (волной де Бройля)

$$\begin{aligned} \Psi(x, t) &= C \exp[-i(\omega t - kx)] = C \exp\left[-i\left(\frac{\epsilon}{\hbar}t - kx\right)\right] = \\ &= \exp\left[-i\left(\frac{\epsilon}{\hbar}t\right)\right] \psi(x), \end{aligned} \quad (21.8)$$

где

$$\psi(x) = C \exp(ikx) \quad (21.9)$$

— волновая функция стационарного состояния (состояния с определенной энергией), зависящая только от координаты.

По виду выражение (21.8) описывает некоторую плоскую волну. Физический смысл волны де Бройля состоит в том, что значение функции  $|\Psi(x, t)|^2 = \Psi(x, t) \cdot \Psi^*(x, t)$  равно плотности вероятности нахождения частицы в момент времени  $t$  в точке с координатой  $x$ . Для волновой функции вида (21.8) эта плотность вероятности является постоянной величиной. Смена знака волнового числа означает изменение направления движения электрона.

Проводя дальнейшую аналогию с светом, в соответствии с (21.7), введем дисперсионное соотношение

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}(p), \quad (21.10)$$

подобно дисперсионному соотношению  $\omega = \omega(k)$  для световой волны. Групповая скорость электрона определяется из дисперсионного соотношения

$$v_{\text{гр}} = \frac{d\mathcal{E}}{dp}, \quad (21.11)$$

подобно групповой скорости оптического импульса  $v_{\text{гр}} = d\omega/dk$ .

Для свободной частицы  $\mathcal{E} = mv^2/2$ ,  $p = mv$ , поэтому дисперсионное соотношение и групповая скорость будут равны:

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \frac{p^2}{2m} = \frac{(\hbar k)^2}{2m}, \\ v_{\text{гр}} &= \frac{d\mathcal{E}}{dp} = \frac{p}{m} = \frac{\hbar k}{m} = v. \end{aligned} \quad (21.12)$$

*Важно подчеркнуть, что свободный электрон может иметь любое значение импульса и соответствующей энергии и не ограничен в своем местоположении.*

**Уравнение Шредингера.** Завершая «оптико-механическую» аналогию, запишем волновое уравнение, решением которого была бы волновая функция (21.8). Если речь идет о гармонической электромагнитной волне

$$E(x, t) = E(x) \exp(-i\omega t), \quad (21.13)$$

то выражение (21.13) является решением волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 E(x, t)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 E(x, t)}{\partial x^2}. \quad (21.14)$$

Подставляя (21.13) в (21.14), получаем уравнение Гельмгольца

$$\frac{d^2 E(x)}{dx^2} + k^2 E(x) = 0, \quad (21.15)$$

где  $k = \omega/c$  — волновое число.

Поскольку в квантовой механике  $k^2 = p^2/\hbar^2$ , а полная энергия (сумма кинетической и потенциальной энергий) равна

$$\mathcal{E} = p^2/(2m) + U(x), \quad (21.16)$$



то уравнение Гельмгольца с учетом равенства  $k^2 = 2m(\varepsilon - U)/\hbar^2$  и перехода от  $E(x)$  к  $\psi(x)$  преобразуется к виду

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + U(x)\right) \psi = \varepsilon \psi. \quad (21.17)$$

Это уравнение называется *стационарным уравнением Шредингера*. Оно позволяет рассчитать волновые функции и полную энергию частицы, находящейся в потенциальном поле (например, в потенциальной яме), если известно пространственное распределение потенциальной энергии  $U(x)$ .

Если частица перемещается в потенциальном поле вдоль трех координатных осей, то уравнение Шредингера запишется в виде

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + U(x, y, z)\right) \psi = \varepsilon \psi, \quad (21.18)$$

где  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$  — оператор Лапласа. Оператор в круглых скобках называется оператором Гамильтона:

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + U(x, y, z).$$

Тогда стационарное уравнение Шредингера запишется в компактном виде:

$$\hat{H}\psi = \varepsilon\psi. \quad (21.19)$$

Блестящим подтверждением гипотезы де Бройля явились опыты по дифракции электронного пучка. Идея о наличии волновых свойств у электронов нашла свое экспериментально воплощение в создании электронных микроскопов, разрешение которых определяется длиной волны де Бройля и находится на уровне нескольких ангстрем.

**Электронный газ в металле. Энергия Ферми.** Металл можно рассматривать как совокупность колеблющихся в узлах кристаллической решетки  $N$  положительно заряженных ионов и  $N_e = ZN$  коллективизированных валентных электронов ( $Z$  — валентность), потерявших связь с атомами и перемещающимися по кристаллу. Электронная и ионная системы взаимодействуют между собой. Кроме того, электроны не могут покинуть объем кристалла. Для выхода на поверхность над электроном следует совершить работу, равную *работе выхода*  $A_{\text{вых}}$ .

Принято считать, что наличие работы выхода обусловлено двумя причинами. Одна из них связана с тем, что электрон, оказавшись вне кристалла в непосредственной близости, будет испытывать притяжение со стороны положительных индуцированных зарядов, подобно тому, как это имеет место при электростатической индукции. Вторая причина обусловлена наличием вблизи поверхности металла тонкого слоя вылетающих из металла электронов (электронной атмосферы). Этот отрицательно заряженный слой вместе с положительно заряженной поверхностью (подобно конденсатору) создают электрическое поле, препятствующее удалению электрона от поверхности металла. Для большинства металлов работа выхода порядка нескольких электронвольт.

Если принять потенциальную энергию электрона вне кристалла равной нулю, то внутри кристалла его потенциальная энергия отрицательна. Другими словами, электрон находится внутри кристалла в потенциальной яме.

Отвлечемся вначале от взаимодействия электрона с ионами решетки и рассмотрим, как повлияет на его движение наличие потенциальной ямы.

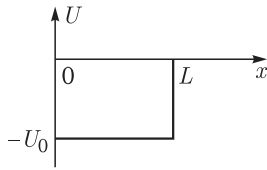


Рис. 21.2

Предположим, что кристалл имеет форму параллелепипеда с длинами сторон  $L_x$ ,  $L_y$  и  $L_z$ , ориентированных вдоль соответствующих координатных осей.

На рис. 21.2 изображена потенциальная яма глубиной  $U_0$  и длиной  $L$ . Если кинетическая энергия электрона  $p^2/(2m) \leq U_0$ , то, как следует из решения уравнения Шредингера, электрон не может выйти далеко за пределы этой ямы (вероятность нахождения электрона вне ямы стремительно убывает при его удалении от края ямы). При  $U_0 \rightarrow \infty$  вероятность нахождения электрона вне ямы стремится к нулю.

Пространственные ограничения, накладываемые на перемещение электрона, приводят к тому, что волновой вектор  $k$  и соответствующая ему энергия  $\mathcal{E}$  могут принимать лишь определенные дискретные значения

$$\mathcal{E} = \frac{(\hbar k)^2}{2m}. \quad (21.20)$$

С подобной ситуацией мы сталкивались в механике, рассматривая, например, образование стоячих волн в струне длиной  $L$  с закрепленными концами. Записывая нулевые граничные условия для смещения струны, мы находили дискретные значения частот нормальных колебаний (мод).

В рассматриваемом случае мы не можем поступить подобным образом, сначала представив волновую функцию электрона в виде суперпозиции двух волн де Бройля, движущихся навстречу друг другу, а затем из нулевых граничных условий определив дискретный набор значений волнового числа. При таком подходе электрон «лишается» своего права с равной вероятностью посещать все области ограниченного пространства.

Поэтому используют волновую функцию (21.8), соответствующую бегущей волне с постоянной амплитудой и «позволяющую» электрону с равной вероятностью находиться во всех точках доступного ему пространства.

Потребуем теперь, чтобы функция (21.9) была периодической с периодом  $L$ :

$$\psi(x) = \psi(x + L). \quad (21.21)$$

Это равенство является периодическим граничным условием Борна–Кармана. Оно означает, что разность фаз на границах ямы  $kL = 2\pi l$ ,  $l = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ . Отсюда получаются условия квантования волнового вектора

$$k = \frac{2\pi l}{L} \quad (21.22)$$

и энергии

$$\mathcal{E}(k) = \mathcal{E}_k = \frac{(\hbar k)^2}{2m}. \quad (21.23)$$

На рис. 21.3 изображена параболическая зависимость (21.23) энергии от волнового числа. Точки на этой кривой соответствуют квантованным значениям энергии и волнового числа.

Полученные выражения легко обобщаются на трехмерный случай. Проекции волнового вектора на оси координат будут иметь дискретные значения

$$k_x = \frac{2\pi l_x}{L_x}; \quad k_y = \frac{2\pi l_y}{L_y}; \quad k_z = \frac{2\pi l_z}{L_z}, \quad (21.24)$$

а энергия

$$\varepsilon(k) = \varepsilon_k = \frac{\hbar^2}{2m}(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2), \quad (21.25)$$

или

$$\varepsilon(p) = \varepsilon_p = \frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{2m}. \quad (21.26)$$

Если частица обладает некоторой энергией, то принято говорить, что частица находится на энергетическом уровне, характеризуемом этим значением энергии.

Зададимся теперь вопросом: каким образом  $ZN$  электронов проводимости, перемещающиеся в замкнутом объеме  $V = L^3$  (для удобства полагаем  $L_x = L_y = L_z = L$ ), будут «расселяться» по этим энергетическим уровням? Их число ничем не ограничено, а число частиц конечно.

Введем понятие квантового состояния электрона в импульсном пространстве. При изменении в (21.22) целого числа на  $\Delta l = 1$ , электрон переходит в другое состояние. При этом изменение волнового числа равно  $\Delta k = 2\pi/L$ , а импульса —  $\Delta p = \hbar \Delta k = 2\pi\hbar/L$ . Тогда «объем» квантового состояния (ячейки) в импульсном пространстве будет равен объему элементарного кубика

$$\Delta p_x \Delta p_y \Delta p_z = \left(\frac{2\pi\hbar}{L}\right)^3 = \frac{(2\pi\hbar)^3}{V}. \quad (21.27)$$

Согласно принципу запрета Паули, в каждом квантовом состоянии может находиться не более одного электрона. Это означает, что число занятых ячеек будет равно числу электронов проводимости. *Совокупность свободных невзаимодействующих электронов, подчиняющихся принципу Паули, называется электронным газом Ферми.*

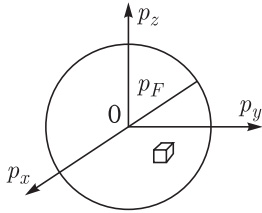


Рис. 21.4

При абсолютном нуле температуры «заселение» начинается на низших уровнях и заканчивается на некотором (или некоторых) самом верхнем уровне с энергией  $\varepsilon_F$ , получившей название *энергии Ферми*. Вычислим энергию Ферми, приравняв число занятых квантовых ячеек (в импульсном пространстве) числу электронов проводимости.

На рис. 21.4 в импульсном пространстве изображена одна ячейка, объем которой определяется формулой (21.27). Сфера с радиусом  $p_F$  (сфера Ферми) ограничивает объем, внутри которого в каждой ячейке находится по одному

электрону. Радиус этой сферы (импульс Ферми) можно найти из очевидного равенства:

$$ZN = 2 \frac{(4/3)\pi p_F^3}{\Delta p_x \Delta p_y \Delta p_z}. \quad (21.28)$$

Множитель 2 в правой части (21.28) «разрешает» двум электронам с противоположными направлениями спинов находиться в одной ячейке. Тогда энергия Ферми получается равной

$$\varepsilon_F = \frac{p_F^2}{2m} = \frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{3\pi^2 ZN}{V} \right)^{2/3}. \quad (21.29)$$

Таким образом, энергия Ферми зависит от концентрации электронов проводимости.

Скорость электронов на поверхности Ферми (скорость Ферми) будет равна

$$v_F = \frac{p_F}{m} = \frac{\hbar}{m} \left( \frac{3\pi^2 ZN}{V} \right)^{1/3}. \quad (21.30)$$

Электроны со скоростью, близкой к  $v_F$ , называют фермиевскими электронами. В металлах концентрация электронов проводимости  $N/V \sim 10^{22} - 10^{23} \text{ см}^{-3}$ , энергия Ферми  $\varepsilon_F \sim 1-10 \text{ эВ}$  ( $1 \text{ эВ} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Дж}$ ), скорость Ферми  $v_F \sim 10^8 \text{ см/с}$ .

Еще одной важной характеристикой является температура вырождения (температура Ферми)

$$T_F = \frac{\varepsilon_F}{k_B}. \quad (21.31)$$

Здесь  $k_B = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ Дж/К}$  — постоянная Больцмана. Характерные значения температуры Ферми для металлов  $T_F \sim 10^4 - 10^5 \text{ К}$ .

Последняя оценка наглядно показывает, что при всех температурах металла (вплоть до температуры плавления) энергия теплового движения электронов  $k_B T \ll \varepsilon_F$ . Следовательно, в столкновениях участвуют электроны, движущиеся главным образом со скоростью  $v_F$ , а длина свободного пробега  $l_{\text{пр}} = v_F \tau$ . Поэтому формулу (21.5) можно записать в виде

$$\sigma = \frac{ne^2\tau}{2m} = \frac{ne^2 l_{\text{пр}}}{2mv_F}. \quad (21.32)$$

Становится понятно, что экспериментально наблюдаемая зависимость проводимости от температуры связана с изменением длины свободного пробега. Установление этой зависимости может быть сделано на основе рассмотрения квантовых взаимодействий электронов проводимости прежде всего с кристаллической решеткой, образуемой положительно заряженными ионами.

**Распределение Ферми–Дирака. Химический потенциал.** При абсолютном нуле температуры все состояния с энергией  $0 < \varepsilon < \varepsilon_F$  заняты. Если ввести функцию распределения  $f(\varepsilon)$ , значение которой равно вероятности нахождения электрона в квантовом состоянии с энергией  $\varepsilon$ , то при абсолютном нуле температуры в области энергий  $0 < \varepsilon < \varepsilon_F$   $f(\varepsilon) = 1$ , а вне ее  $f = 0$ .

В статистической физике все частицы делятся на два класса в зависимости от величины их собственного механического момента количества

движения  $s$  (спина). Если к системе одинаковых частиц приложить магнитное поле (например, вдоль оси  $Oz$ ), то может возникнуть две ситуации.

В первой ситуации проекция спина на выделенную ось принимает полуцелые значения: (в единицах  $\hbar$ ),

$$s_z = \pm \frac{1}{2} \hbar, \pm \frac{3}{2} \hbar, \pm \frac{5}{2} \hbar \dots$$

Такие частицы (в частности, электроны) подчиняются принципу Паули. Они называются ферми-частицами, и для них справедлива статистика Ферми–Дирака.

Во второй ситуации проекция спина кратна целому числу постоянной  $\hbar$ . Частицы с целым спином называются бозе-частицами, или бозонами, и для них применима статистика Бозе–Эйнштейна. Примером последних являются световые фотоны, совокупность которых образует фотонный газ.

Получим функцию распределения Ферми–Дирака  $f(\varepsilon)$  при некоторой произвольной температуре  $T \neq 0$ .

Прежде всего обратим внимание (см. рис 21.4), что существует множество ячеек, в которых электрон имеет одинаковую энергию в интервале  $\varepsilon - \varepsilon + d\varepsilon$ . Это число ячеек называется степенью вырождения энергетического уровня и обозначается  $dg(\varepsilon)$ . Чтобы вычислить степень вырождения, рассмотрим в импульсном пространстве две близкие концентрические сферы с радиусами  $p$  и  $p + dp$ . Тогда искомая степень вырождения получится равной

$$dg(\varepsilon) = \frac{8\pi p^2 dp}{(2\pi \hbar/L)^3} = \frac{4\pi(2m)^{3/2}}{(2\pi \hbar)^3} V \sqrt{\varepsilon} d\varepsilon. \quad (21.33)$$

Степень вырождения, приходящаяся на единичный интервал энергии, называется плотностью состояний и определяется как

$$\rho(\varepsilon) = \frac{dg}{d\varepsilon} = \frac{4\pi(2m)^{3/2}}{(2\pi \hbar)^3} V \sqrt{\varepsilon}. \quad (21.34)$$

Плотность состояний монотонно увеличивается с возрастанием энергии. Число электронов, находящихся на вырожденном энергетическом уровне будет равно

$$dN_e(\varepsilon) = f(\varepsilon) \cdot \rho(\varepsilon) \cdot d\varepsilon. \quad (21.35)$$

Рассмотрим два произвольных энергетических уровня с энергиями  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2 = \varepsilon_1 + \Delta\varepsilon$ , разделенных малым энергетическим промежутком  $\Delta\varepsilon \ll \varepsilon_1, \varepsilon_2$ . Вероятности заполнения квантовых состояний (квантовых ячеек), соответствующих этим энергиям, будут равны  $f_1 = f(\varepsilon_1)$  и  $f_2 = f(\varepsilon_2)$ . Если известны степени вырождения  $g_1 = g(\varepsilon_1)$  и  $g_2 = g(\varepsilon_2)$ , то соответствующие числа электронов, согласно (21.35), будут равны  $N_1 = g_1 f_1$  и  $N_2 = g_2 \cdot f_2$ . Здесь для удобства записи вместо  $dN_e$  и  $dg$  используем  $N$  и  $g$  соответственно.

Рассчитаем термодинамическую вероятность  $\Gamma_1$  заполнения уровня энергии  $\varepsilon_1$ , равную числу способов «расселения»  $N_1$  электронов в  $g_1$  квантовых ячейках. Эта вероятность выражается через число сочетаний:

$$\Gamma_1 = C_{g_1}^{N_1} = \frac{g_1!}{(g_1 - N_1)! N_1!}.$$

Аналогично для второго уровня

$$\Gamma_2 = C_{g_2}^{N_2} = \frac{g_2!}{(g_2 - N_2)!N_2!}.$$

Термодинамическая вероятность заполнения двух уровней будет равна

$$\Gamma = \Gamma_1 \Gamma_2 = \frac{g_1!}{(g_1 - N_1)!N_1!} \frac{g_2!}{(g_2 - N_2)!N_2!}. \quad (21.36)$$

Полная энергия всех  $N_e$  электронов может быть представлена в виде:

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 + N_1 \mathcal{E}_1 + N_2 \mathcal{E}_2. \quad (21.37)$$

Здесь  $\mathcal{E}_0$  — энергия электронов, находящихся на всех остальных уровнях. Ее величина не имеет в данном расчете никакого значения. Если «переселить»  $\Delta N$  электронов с нижнего уровня  $\mathcal{E}_1$  на верхний уровень  $\mathcal{E}_2 = \mathcal{E}_1 + \Delta \mathcal{E}$ , то энергия ферми-газа возрастет на величину

$$\Delta \mathcal{E} = \Delta N \cdot \Delta \mathcal{E} = \Delta N (\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1). \quad (21.38)$$

Изменится также и термодинамическая вероятность на величину  $\Delta \Gamma$ , поскольку  $N_2$  увеличится на величину  $\Delta N$ , а  $N_1$  на такую же величину уменьшится. Удобно рассчитать приращение логарифма термодинамической вероятности:

$$\Delta(\ln \Gamma) = \Delta [\ln(g_1!) + \ln(g_2!) - \ln((g_1 - N_1)!) - \ln((g_2 - N_2)!) - \ln(N_1!) - \ln(N_2!)] . \quad (21.39)$$

Для больших чисел  $A \gg 1$  справедлива формула Стирлинга  $\ln A! = A \times \ln A - A$ . Воспользовавшись ею, находим

$$\Delta(\ln \Gamma) = \ln \left( \frac{N_2(g_1 - N_1)}{N_1(g_2 - N_2)} \right) \Delta N = \ln \left( \frac{f_2(1 - f_1)}{f_1(1 - f_2)} \right) \Delta N. \quad (21.40)$$

Из курса молекулярной физики известно, что при температуре  $T$

$$\frac{\Delta(\ln \Gamma)}{\Delta \mathcal{E}} = \frac{1}{k_B T}. \quad (21.41)$$

С учетом (21.41) из (21.38) и (21.40) получаем

$$\mathcal{E}_1 + k_B T \ln \left( \frac{f_1}{(1 - f_1)} \right) = \mathcal{E}_2 + k_B T \ln \left( \frac{f_2}{(1 - f_2)} \right).$$

Поскольку последнее равенство справедливо для произвольно выбранных уровней энергии, то мы вправе записать

$$\mathcal{E} + k_B T \ln \left( \frac{f(\mathcal{E})}{1 - f(\mathcal{E})} \right) = \mu = \text{const}. \quad (21.42)$$

Величина  $\mu$  называется *химическим потенциалом*. Из (21.42) получаем искомое распределение Ферми–Дирака

$$f(\mathcal{E}) = \frac{1}{\exp \left( \frac{\mathcal{E} - \mu}{k_B T} \right) + 1}. \quad (21.43)$$

Отсюда видно что при  $\varepsilon = \mu$   $f(\mu) = 1/2$ . Таким образом, химический потенциал равен энергии состояния, вероятность заполнения которого равна  $1/2$ .

Распределение Ферми–Дирака при различных температурах изображено на рис. 21.5. При абсолютном нуле температуры (как это отмечалось ранее) в металлах оно представляет собой ступеньку, ограниченную энергией Ферми  $\varepsilon_F$ . Как следует из определения химического потенциала, полагая в (21.43)  $f = 1/2$  и устремляя  $T \rightarrow 0$ , убеждаемся, что (21.43) превращается в ступеньку, если  $\mu \rightarrow \varepsilon_F$ . Вблизи абсолютного нуля температур электронный газ называется *вырожденным газом*.

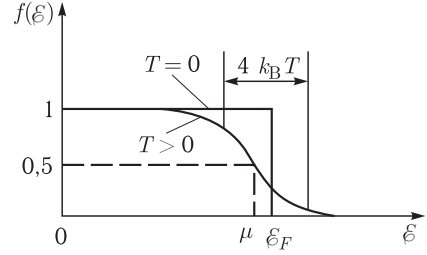


Рис. 21.5

С увеличением температуры ступенька размывается в окрестности энергии Ферми. Ширина области размыва при низких температурах ( $T \ll T_F$ ) приблизительно равна  $4k_B T$ . Таким образом, в тепловом движении участвуют *фермиевские* электроны (электроны с энергией близкой к энергии  $\varepsilon_F$ ). Как отмечалось ранее, приобретенная ими энергия в результате теплового движения  $k_B T \ll \varepsilon_F$ . В классической же теории предполагается, что все электроны проводимости участвуют в тепловом движении, и их энергия  $\varepsilon \sim k_B T$ !

Химический потенциал по мере размыва ступеньки уменьшается. Зависимость химического потенциала от температуры задается формулой

$$\mu = \varepsilon_F \left( 1 - \frac{\pi^2}{12} \left( \frac{k_B T}{\varepsilon_F} \right)^2 \right). \quad (21.44)$$

Вывод этой формулы можно найти в учебниках по физике твердого тела. Он основан на том, что при  $T = 0$  и  $T > 0$  число электронов не изменяется. Тогда в соответствии с формулой (21.35) мы вправе записать равенство:

$$\int_0^{\varepsilon_F} 1 \cdot \rho(\varepsilon) \cdot d\varepsilon = \int_0^{\infty} f(\varepsilon) \cdot \rho(\varepsilon) \cdot d\varepsilon.$$

Из этого равенства и получается формула (21.44).

Наконец, средняя энергия электрона с использованием распределения (21.43) получается равной

$$\bar{\varepsilon} = \left( \int_0^{\infty} \varepsilon \cdot f(\varepsilon) \cdot \rho(\varepsilon) \cdot d\varepsilon \right) / \left( \int_0^{\infty} f(\varepsilon) \cdot \rho(\varepsilon) \cdot d\varepsilon \right) = \frac{3}{5} \mu \left( 1 + 2 \frac{k_B^2 T^2}{\mu^2} \right). \quad (21.45)$$

Поэтому удельная теплоемкость электронного газа пропорциональна температуре:

$$c_V = \frac{1}{m} \frac{d\bar{\varepsilon}}{dT} = \frac{12k_B^2}{5m\mu} T. \quad (21.46)$$

Учтем, что перенос тепла осуществляется электронами вблизи уровня Ферми, имеющими кинетическую энергию

$$\frac{mu^2}{2} = \mu. \quad (21.47)$$

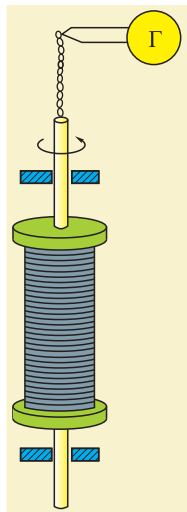
Тогда закон Видемана–Франца примет вид

$$\frac{\theta}{\sigma} = \frac{2}{3} \frac{m^2 u^2 c_V}{e^2} = \frac{2}{3} \frac{2\mu \cdot 12k_B^2}{5e^2 \mu} T = 3,2 \cdot \left(\frac{k_B}{e}\right)^2 T, \quad (21.48)$$

Здесь численный коэффициент незначительно отличается от коэффициента 3,0 в классической теории.

**Опыт Толмена и Стюарта.** После создания классической электронной теории проводимости были выполнены опыты, доказывающие электронную природу тока в металлах. Идея таких опытов и первые качественные результаты (1913 г.) принадлежат русским физикам Л. Мандельштаму и Н. Папалекси. В 1916 г. американский физик Р. Толмен и шотландский физик Б. Стюарт усовершенствовали методику этих опытов и выполнили количественные измерения, неопровержимо доказавшие, что ток в металлических проводниках обусловлен движением электронов.

Схема их опыта показана на рис. 21.6. Катушка с большим числом витков тонкой проволоки приводилась в быстрое вращение вокруг своей оси. Концы катушки с помощью гибких проводов были присоединены к чувствительному



баллистическому гальванометру Г. Затем катушка резко тормозилась, и в цепи возникал кратковременный ток, обусловленный инерцией носителей заряда. Полный заряд, протекающий по цепи, измерялся по отбросу стрелки гальванометра.

Сила инерции, отнесенная к единице заряда, по определению является напряженностью  $E_{\text{ст}}$  поля сторонних сил:

$$E_{\text{ст}} = \frac{F}{e} = -\frac{m}{e} \frac{dv}{dt}. \quad (21.49)$$

Следовательно, в цепи при торможении катушки с проводом длины  $l$  возникает электродвижущая сила, равная  $\mathcal{E} = E_{\text{ст}} \cdot l$ , ток  $I$  в цепи с сопротивлением  $R$  равен  $I = \mathcal{E}/R = E_{\text{ст}} \cdot l/R$ , а протекший через гальванометр заряд за время торможения катушки

$$q = \int_0^\infty I \cdot dt = -\frac{ml}{eR} \int_0^\infty \frac{dv}{dt} \cdot dt = \frac{mlv_0}{eR}, \quad (21.50)$$

Рис. 21.6

где  $v_0$  — начальная линейная скорость фрагмента вращающейся катушки.

Было установлено, что носители свободного заряда в металлах имеют отрицательный знак, а отношение  $e/m$  заряда носителя к его массе близко к удельному заряду электрона, полученному из других опытов.



## ЛЕКЦИЯ 22

**Взаимодействие электронов с решеткой.** Положительно заряженные ионы, находящиеся в узлах кристаллической решетки, создают периодическое в пространстве электростатическое поле. Рассмотрим вытянутую вдоль оси  $Ox$  цепочку ионов, расположенных на расстоянии  $a$  друг от друга. В этом периодическом поле потенциальная энергия свободного электрона  $U(x)$  будет также периодической функцией с периодом, равным периоду кристаллической решетки:  $U(x) = U(x + a)$ .

Для того чтобы найти разрешенные значения импульса  $p = \hbar k$  и энергии  $\mathcal{E}$  электрона, необходимо найти волновую функцию  $\psi(x)$  стационарного состояния электрона, являющуюся решением стационарного уравнения Шредингера (21.17). В этом уравнении  $U(x) = U(x + a)$ .

Не решая уравнения, попытаемся установить вид волновой функции на основе простых физических соображений. Прежде всего отметим, что вероятность нахождения электрона в точках  $x$  и  $x + a$  должна быть одинакова, поэтому  $|\psi(x)|^2 = |\psi(x + a)|^2$ . Следовательно, можно записать

$$\psi_k(x + a) = \exp(ika) \cdot \psi_k(x). \quad (22.1)$$

Здесь  $k$  — волновое число, характеризующее рассматриваемое состояние. Для каждого  $k$ -состояния будет своя волновая функция  $\psi_k(x)$ .

Для точек  $x$  и  $x + la$  ( $l$  — целое число) можем записать равенство

$$\psi_k(x + la) = \exp(ikla) \cdot \psi_k(x). \quad (22.2)$$

Этому условию удовлетворяет волновая функция

$$\psi_k(x) = \exp(ikx) \cdot u_k(x), \quad (22.3)$$

в которой  $u_k(x + a) = u_k(x)$ . Такая волновая функция называется *функцией Блоха*. Подставив функцию Блоха в уравнение Шредингера (21.17), получим уравнение для функции  $u_k(x)$

$$\left( -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + U(x) + \frac{\hbar^2 k^2}{2m} - \frac{i\hbar^2 k}{m} \frac{d}{dx} \right) u_k(x) = \mathcal{E}_k u_k(x). \quad (22.4)$$

Здесь  $\mathcal{E}_k = \mathcal{E}(k)$ .

Из этого уравнения видно, что для комплексно-сопряженной функции  $u_{-k}^*(x)$  с противоположным значением волнового числа уравнение сохранит свой вид (знак последнего слагаемого в левой части уравнения не изменится). А это означает, что

$$\mathcal{E}(k) = \mathcal{E}(-k), \quad (22.5)$$

т. е. дисперсионное соотношение является четной функцией волнового числа.

В равенстве (22.1) число  $k$  увеличим на величину  $\Delta k = lq = l(2\pi/a)$  ( $l$  — целое число). Тогда получим

$$\psi_{k+\Delta k}(x+a) = \exp(i(k+\Delta k)a) \cdot \psi_k(x) = \exp(ika) \cdot \psi_k(x). \quad (22.6)$$

Отсюда видим, что *волновые функции состояний с волновыми числами, различающимися на целое число величин*

$$q = \frac{2\pi}{a}, \quad (22.7)$$

*преобразуются одинаково, т. е. они тождественны.* Следовательно

$$\varepsilon(k+lq) = \varepsilon(k). \quad (22.8)$$

Величина  $q = 2\pi/a$  равна модулю так называемого *вектора обратной решетки*. Из соотношения (22.8) следует, что энергия частицы в импульсном пространстве является периодической функцией с периодом, кратным абсолютной величине вектора обратной решетки.

Анализ решений уравнения Шредингера показывает, что может существовать несколько зависимостей  $\varepsilon_n(k)$ , различающихся квантовыми числами  $n$ .

На рис. 22.1 *а* приведены лишь две такие зависимости. Разрешенные значения волнового числа по-прежнему задаются граничными условиями (21.21) и равны  $k = 2\pi l/L$ . На рисунке точками отмечены состояния с разрешенными значениями волновых чисел. Эти состояния характеризуются дискретным набором уровней энергии, образующим *энергетическую зону* (рис. 22.1 *б*).

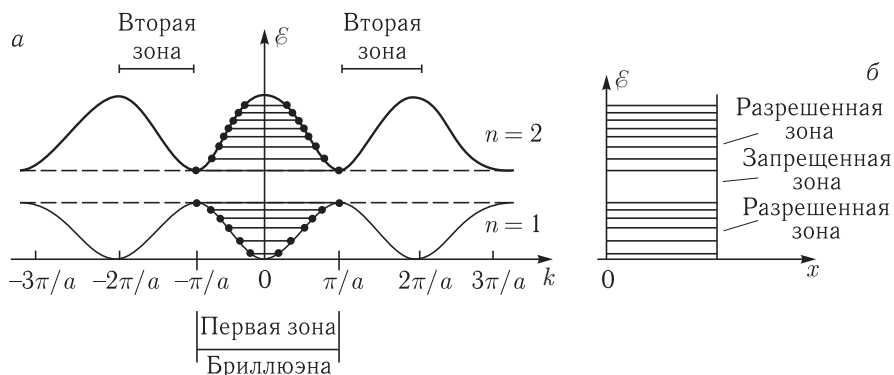


Рис. 22.1

Разным квантовым числам соответствует своя энергетическая зона. Поскольку в этих зонах электрон может «находиться», то эти зоны называются *разрешенными зонами*. Между разрешенными зонами находится область значений энергий, которые электрон не может иметь. Такие зоны называются *запрещенными зонами*. Иногда употребляют термин *энергетическая щель*.

**Зоны Бриллюэна.** На зоны разбивают и разрешенные значения волновых чисел. Эти зоны называются *зонами Бриллюэна*. На рисунке показана первая зона Бриллюэна, «протяженность» которой равна модулю вектора обратной решетки. Слева и справа от нее симметрично располагается вторая зона

той же протяженности и т. д. Вследствие периодической зависимости энергии от волнового числа энергетический спектр электронов можно анализировать, не выходя за пределы первой зоны Бриллюэна.

Нетрудно подсчитать, что число квантовых ячеек в зоне Бриллюэна будет равно числу ионов в цепочке длиной  $L \gg a$ :

$$N_{\text{яч}} = \frac{2\pi/a}{2\pi/L} = \frac{L}{a} = N. \quad (22.9)$$

В трехмерном кристалле с объемом  $V = L_x L_y L_z$  и периодами решетки  $a_x, a_y, a_z$  в зоне Бриллюэна (в  $k$ -пространстве она становится объемной)

$$N_{\text{яч}} = \frac{L_x}{a_x} \frac{L_y}{a_y} \frac{L_z}{a_z} = N.$$

Число энергетических уровней из-за возможного их вырождения может отличаться от числа квантовых ячеек.

Поскольку мы не учитываем взаимодействие электронов между собой, то энергия электронной системы будет равна сумме энергий отдельных электронов. Если теперь определить основное состояние системы как состояние с минимальной энергией, то в основном состоянии электроны будут заселять энергетические уровни «снизу вверх». Температура в основном состоянии близка к абсолютному нулю.

Число электронов, как отмечалось ранее,  $N_e = ZN$ . Если в каждой ячейке могут располагаться два электрона с противоположными спинами, то число заполненных энергетических зон будет равно

$$N_{\text{зон}} = \frac{N_e}{2N_{\text{яч}}} = \frac{Z}{2}. \quad (22.10)$$

Распределение электронов по квантовым ячейкам может привести к трем различным ситуациям:

**1.** Какая-то зона будет заполнена частично. Эта и расположенные выше пустые зоны образуют *зоны проводимости*. Зона, расположенная ниже и полностью заполненная, называется *валентной зоной*. Такие кристаллы называются проводниками. К их числу относятся, например, одновалентные ( $Z = 1$ ) щелочные металлы: литий, натрий, калий, рубидий, цезий.

**2.** Какая-то зона будет заполнена целиком, т. е. уровень Ферми совпадет с верхней границей целиком заполненной зоны. Назовем эту зону валентной. Следующую разрешенную зону назовем зоной проводимости. В рассматриваемой ситуации она будет абсолютно пустой. Такой кристалл называется *диэлектриком*.

Казалось бы, на первый взгляд, что согласно (22.10), диэлектриками будут все кристаллы с четной валентностью. На самом деле, это не всегда так, поскольку, как будет показано ниже, зоны могут перекрываться, и у электрона появляется возможность перебраться из валентной в зону проводимости. Такие кристаллы будут также проводниками. К их числу относятся благородные металлы: серебро, золото, медь, и двухвалентные кристаллы: бериллий, магний, кальций, цинк, стронций, ртуть (жидкая) и др.

**3.** В кристаллах кремния, германия и пр. при  $T = 0$  нет частично заполненных зон. Энергетическая щель между валентной (полностью заполненной) зоной и зоной проводимости (абсолютно пустой) составляет порядка 1 эВ. Эти кристаллы называются полупроводниками.

**Энергия электрона в кристалле.** Рассмотрим движение электрона в кристалле, используя оптико-механическую аналогию. Из школьного курса физики известно, что при нормальном падении световой волны с длиной волны  $\lambda$  на два атомных слоя с расстоянием  $a$  между ними от слоев будут отражаться (переизлучаться) волны, разность хода между которыми равна  $2a$ . Если разность хода будет равна целому числу длин волн, то отраженные волны, интерферируя, будут усиливать друг друга. Поэтому сильное отражение будет происходить для тех волн, для которых  $2a = l\lambda$  ( $l = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ ). Этому условию соответствуют волновые числа

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \pm \frac{\pi}{a}, \pm \frac{2\pi}{a}, \pm \frac{3\pi}{a}, \dots \quad (22.11)$$

В квантовой механике это условие означает, что волновая функция электрона при таком значении волнового числа должна представлять суперпозицию волновых функции вида (22.3) с разными знаками волновых чисел:

$$\psi_k(x) = \exp(ikx) \cdot u_k(x) \pm \exp(-ikx) \cdot u_{-k}(x). \quad (22.12)$$

Поскольку  $u_{-k}(x) = u_k^*(x)$  (см. уравнение Шредингера (22.4)), то волновая функция (22.12) становится «двуликой»: если взять знак «+», то

$$\psi_{\pi/a}^+(x) = 2 |u_{\pi/a}(x)| \cos\left(\frac{\pi}{a}x\right), \quad (22.13)$$

а если знак «−», то

$$\psi_{\pi/a}^-(x) = 2i |u_{\pi/a}(x)| \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right). \quad (22.14)$$

На рис. 22.2 изображены цепочка ионов, потенциальная энергия  $U(x)$  электрона как функция его местоположения и плотности вероятностей местоположения, задаваемые  $|\psi_{\pi/a}^+(x)|^2$  и  $|\psi_{\pi/a}^-(x)|^2$ . Видно что в состоянии (+) электроны с большей вероятностью находятся ближе к ионам, чем в состоянии (−). Это означает, что полная энергия (кинетическая + потенциальная)  $\mathcal{E}^- = \mathcal{E}^-(\pi/a) > \mathcal{E}^+ = \mathcal{E}^+(\pi/a)$ .

Таким образом, для тех состояний, у которых волновой вектор по величине приближается к величине вектора обратной решетки (к границе зоны Бриллюэна), имеет место сильное отражение, образуется стоячая волна, электрон становится малоподвижным. Возникает энергетическая щель с шириной  $\mathcal{E}_g = \mathcal{E}^- - \mathcal{E}^+$ , которая называется *шириной запрещенной зоны*.

На рис. 22.3 изображена зависимость полной энергии электрона в первой и второй зонах Бриллюэна с учетом возникающей энергетической щели. Скорость электрона (групповая скорость), как отмечалось в предыдущей лекции, определяется дисперсионным соотношением  $\mathcal{E}(p)$ , а так как  $p = \hbar k$ , то

$$v = \frac{d\mathcal{E}}{dp} = \frac{1}{\hbar} \frac{d\mathcal{E}}{dk}. \quad (22.15)$$

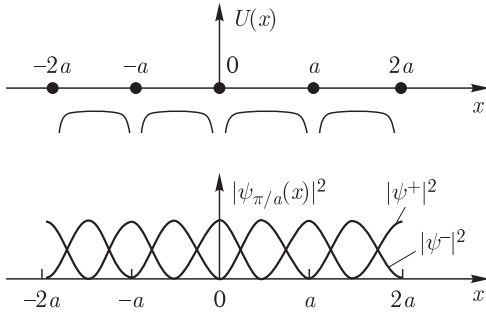


Рис. 22.2

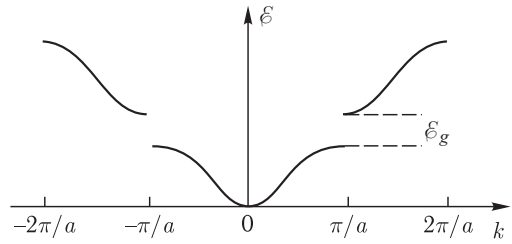


Рис. 22.3

Поэтому, как видно из рисунка, скорость электрона в состояниях с волновым числом вблизи границ зоны Бриллюэна близка к нулю.

Как отмечалось ранее, волновые функции состояний, отличающихся на вектор обратной решетки  $q = 2\pi/a$  (или целое число величин  $q$ ), тождественны. Поэтому удобно, например, вместо состояний с волновыми векторами  $\pi/a < |k'| < 2\pi/a$ , соответствующими второй зоне Бриллюэна, рассматривать состояния с волновым вектором  $k = k' \pm q$ , соответствующим первой зоне Бриллюэна. Это дает возможность осуществить процедуру *приведения энергетических зон* к первой зоне Бриллюэна. Для этого переместим влево на величину  $q$  фрагмент зависимости  $\varepsilon(k)$ , для которого (фрагмента)  $\pi/a < k < 2\pi/a$ . Подобным образом переместим вправо на величину  $q$  фрагмент зависимости  $\varepsilon(k)$ , для которого  $-2\pi/a < k < -\pi/a$ .

В результате таких перемещений в первой зоне Бриллюэна появятся две энергетические зоны. Если теперь принять во внимание, что  $\varepsilon(k + lq) = \varepsilon(k)$ , то система энергетических зон будет одинакова во всех зонах Бриллюэна, как это изображено на рис. 22.1.

Полная процедура приведения энергетических зон требует перемещения фрагментов зависимости  $\varepsilon(k)$  из третьей, четвертой и т.д. зон Бриллюэна в первую зону. Поэтому в первой зоне Бриллюэна (да и в остальных аналогично) окажется несколько энергетических зон.

Энергетические зоны могут перекрываться. Для объяснения такого перекрывания предположим, что период кристаллической решетки вдоль оси  $Ox$  равен  $a_x$ , вдоль оси  $Oy$  равен  $a_y$ . Это означает, что дисперсионные соотношения  $\varepsilon(k_x)$  и  $\varepsilon(k_y)$  будут разными (рис. 22.4). Здесь дно второй энергетической зоны в ситуации (а) лежит ниже потолка первой энергетической зоны в ситуации (б). Если две (из четырех) кривые перенести на один рисунок, то легко видеть, что энергетические зоны перекрываются.

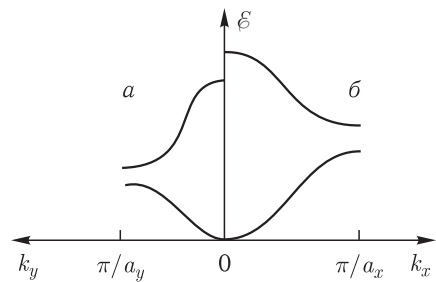


Рис. 22.4

В заключение этой темы отметим, что зоны будут по-разному заполняться электронами, поскольку вероятность заполнения квантовых ячеек задается распределением Ферми-Дирака.

**Движение электрона под действием внешнего электрического поля.**

Если кристалл поместить во внешнее электрическое поле с напряженностью  $E$ , то электрон будет испытывать действие силы со стороны ионов и внешней силы. В классической механике уравнение движения вдоль оси  $Ox$  имело бы вид:

$$m \frac{dv}{dt} = -\frac{dU}{dx} + eE. \quad (22.16)$$

В квантовой механике скорость электрона определяется соотношением (22.15) и определяется квантовым состоянием. Это квантовое состояние характеризуется волновым числом  $k$  или импульсом  $p = \hbar k$ . Важно подчеркнуть, что этот импульс не равен произведению массы электрона на его скорость! Поэтому этот импульс иногда называют квазиимпульсом.

Получим уравнение, описывающее изменение импульса в электрическом поле. Для этого воспользуемся законом сохранения энергии и соотношением (22.15), в котором дисперсионное соотношение  $\mathcal{E}(p)$  известно. За промежуток времени  $dt$  поле совершит работу, которая пойдет на увеличение энергии электрона:

$$d\mathcal{E} = eE v dt. \quad (22.17)$$

Поскольку  $\delta\mathcal{E} = \left(\frac{d\mathcal{E}}{dp}\right) dp = v dp$ , то искомое уравнение имеет вид:

$$\frac{dp}{dt} = \hbar \frac{dk}{dt} = eE. \quad (22.18)$$

Это уравнение является квазиклассическим уравнением движения электрона в твердом теле: справа сила задается классическим способом, а импульс слева является квазиимпульсом.

Таким образом, импульс может изменяться под действием электрического поля. В свою очередь, это означает, что электрон под действием электрического поля переходит последовательно с одного энергетического уровня на другой. Скорость его при этом также изменяется:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{d\mathcal{E}}{dp} \right) = \frac{d^2\mathcal{E}}{dp^2} \frac{dp}{dt} = \frac{eE}{m^*}. \quad (22.19)$$

Величина

$$m^* = \left( \frac{d^2\mathcal{E}}{dp^2} \right)^{-1} \quad (22.20)$$

называется *эффективной массой электрона*.

Сравнивая (22.18) и (22.19), находим

$$p = m^* v. \quad (22.21)$$

Эффективная масса не является постоянной величиной, поскольку, согласно (22.20), зависит от импульса (рис. 22.5). У дна и потолка энергетической зоны хорошим приближением является квадратичный закон дисперсии

$$\mathcal{E} = \frac{p^2}{2m^*}. \quad (22.22)$$

У дна самой нижней энергетической зоны, в которой и находится уровень Ферми, где  $(d^2\varepsilon/dp^2) > 0$ , эффективная масса положительна ( $m^* > 0$ ). Поскольку  $p = m^*v$ , то вектор скорости и вектор импульса сонаправлены. У потолка зоны эффективная масса отрицательна. Здесь векторы скорости и импульса направлены навстречу друг другу.

*Физический смысл эффективной массы состоит в том, что она учитывает взаимодействие электрона с кристаллической решеткой.*

Если электрическое поле будет приложено к кристаллу, то импульс (квазиимпульс) будет постоянно возрастать. Если обратиться к рис. 22.1а, то легко видеть, что электрон будет перемещаться по энергетическим уровням сначала от дна к потолку зоны, а затем в «обратном направлении». Поскольку скорость электрона равна  $v = \frac{d\varepsilon}{dp} = \frac{1}{\hbar} \frac{d\varepsilon}{dk}$ , то электрон по кристаллу вначале будет двигаться с положительной скоростью, а затем, когда его энергия достигнет максимальной величины, начнет двигаться с отрицательной скоростью и т. д.

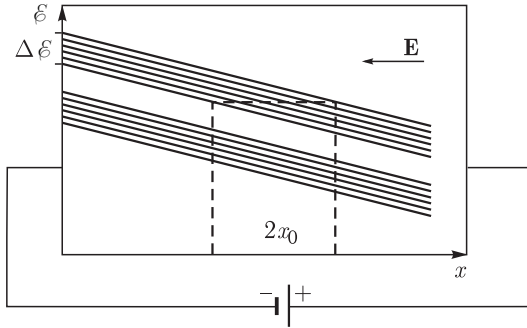


Рис. 22.6

В качестве примера рассмотрим следующую ситуацию. На рис. 22.6 показана электрическая цепь, изображены проводник прямоугольной формы и система энергетических уровней электрона. При подключении источника ЭДС в проводнике появляется электрическое поле напряженностью  $E$ .

В присутствии внешнего поля к дискретной энергии электрона добавляется потенциальная энергия

$\varepsilon_{\text{П}} = -|e|Ex$ . При его движении вдоль проводника (координаты  $x$ ) полная энергия не изменяется:

$$\varepsilon - |e|Ex = \text{const.} \quad (22.23)$$

Поэтому энергетические уровни «наклоняются», и электрон будет двигаться туда и обратно в пределах одной зоны шириной  $\Delta\varepsilon$ , отражаясь от границ зоны. Следовательно, *в идеальном кристалле электрический ток отсутствует.*

Амплитуда  $x_0$  колебаний электрона определяется из очевидного равенства:  $\Delta\varepsilon = |e|E2x_0$ . Если  $\Delta\varepsilon = 1$  эВ,  $E = 10$  В/м, то  $x_0 = 1/20$  м = 5 см. Период его колебаний  $T$  находится из уравнения (22.18):

$$\frac{\Delta p}{T} = \frac{2\pi\hbar/a}{T} = |e|E. \quad (22.24)$$

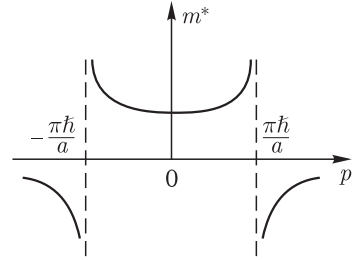


Рис. 22.5

Здесь  $\Delta p$  — изменение квазиимпульса при отражении от границы зоны,  $a$  — постоянная решетки. Отсюда  $T = 2 \cdot 10^{-7}$  с.

Чтобы электрон не изменял направление своей скорости и, следовательно, протекал электрический ток, он не должен достигать энергетического потолка зоны, в которой он находится. Для этого необходимо время от времени «отбрасывать» у него часть постоянно нарастающего квазиимпульса. Это и происходит в действительности: часть своего квазиимпульса электрон отдает при каждом акте рассеяния на тепловых колебаниях решетки, называемых *тепловыми фононами*, а также при взаимодействии с примесями.

Таким образом, задача тепловых фононов и примесей состоит в том, чтобы не дать «электрону-волне» достичь такой длины волны, при которой наступит сильное отражение.

**Квазиклассическое описание электропроводности металлов.** Поскольку под действием электрического поля скорость электрона, обладающего эффективной массой (полагаем  $m^* = \text{const}$ ), увеличивается по тому же закону, что и скорость свободного электрона:

$$v = \frac{eE}{m^*} t, \quad (22.25)$$

то в формуле для удельной электропроводности (21.5), полученной с использованием модели Друде–Лоренца, масса электрона  $m$  должна быть заменена его эффективной массой  $m^*$ . Однако остаются открытыми вопросы о длине свободного пробега, зависимости проводимости от температуры и пр.

Более совершенной является модель, предложенная советским физиком И. Лифшицем. В этой модели принимается, что в электропроводности участвуют главным образом фермиевские электроны, число которых, разумеется, меньше числа свободных электронов. Эти электроны движутся с известной скоростью Ферми  $\mathbf{v}_F$  в разных направлениях. Поскольку по величине скорость электрона  $v = \frac{d\mathcal{E}}{dp} = \frac{1}{\hbar} \frac{d\mathcal{E}}{dk}$ , то несложно сообразить, что вектор скорости в импульсном пространстве равен

$$\mathbf{v} = \left( \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial p_x} \right) \mathbf{e}_x + \left( \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial p_y} \right) \mathbf{e}_y + \left( \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial p_z} \right) \mathbf{e}_z = \text{grad}_p \mathcal{E}. \quad (22.26)$$

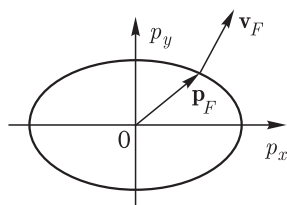


Рис. 22.7

Таким образом, вектор скорости электрона, находящегося в состоянии с некоторым значением энергии  $\mathcal{E}$  и имеющего импульс  $\mathbf{p}$ , перпендикулярен поверхности  $\mathcal{E} = \text{const}$  (изоэнергетической поверхности). В частности, векторы скорости фермиевских электронов перпендикулярны поверхности Ферми.

На рис. 22.7 в качестве иллюстрации изображено эллиптическое сечение поверхности Ферми и показаны векторы скорости и импульса фермиевских электронов в случае  $m^* > 0$ . Видно, что векторы не коллинеарны, за исключением небольшого числа направлений вектора импульса.

В силу сказанного выше, модель Лифшица применяется к наиболее простой ситуации — металлам со сферической поверхностью Ферми и квадратичным законом дисперсии (22.22), в котором  $m^* > 0$ . Последнее означает,



что уровень Ферми расположен вблизи дна энергетической зоны, а векторы импульса и скорости коллинеарны. Этим условиям хорошо удовлетворяют щелочные металлы.

В отсутствие внешнего электрического поля сумма скоростей фермиевских электронов равна нулю и электрический ток отсутствует. При наложении внешнего электрического поля вдоль оси  $Ox$  за время между столкновениями  $\tau$  все свободные электроны получают одинаковое приращение импульса  $\Delta p_x = eE\tau < 0$ . В результате сфера Ферми, как целое, сдвинется в импульсном пространстве влево на величину  $\Delta p = -\Delta p_x$ .

На рис. 22.8 изображены исходная (выделена штриховой линией) и смещенная (выделена сплошной линией) сферы радиуса  $p_F$ . Выделим четыре области. Суммарная скорость электронов, находящихся в заштрихованной области  $D$ , по-прежнему равна нулю. Следовательно, как и в отсутствие поля, вклад этих электронов в перенос зарядов (электрический ток) равен нулю. Из-за того, что электроны покинули область  $C$  и перешли в область  $A$ , в переносе заряда начинают принимать участие электроны из области  $B$ , которые вместе с электронами из области  $A$  и участвуют в образовании электрического тока.

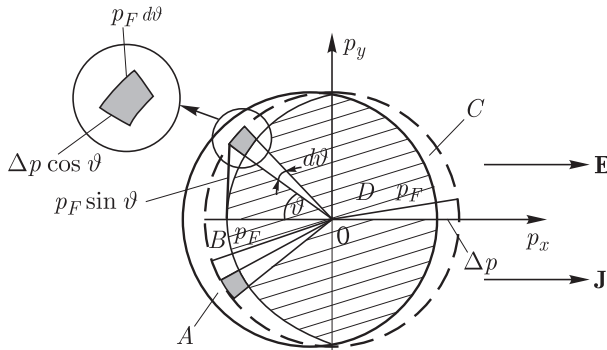


Рис. 22.8

Подсчитаем плотность электрического тока, создаваемого фермиевыми электронами, находящимися в областях  $A$  и  $B$ . Поскольку объемы этих областей приблизительно равны, то можно вычислить вклад от области  $B$  и затем результат удвоить. Возьмем кристалл единичного объема. Объем одного квантового состояния, согласно (21.27), равен  $\Delta p_x \Delta p_y \Delta p_z = (2\pi\hbar)^3$ . Разобьем область  $B$  на колечки с радиусом  $p_F \sin \vartheta$ . Площадь сечения (зачерненного на рисунке) кольца будет равна  $\Delta p \cos \vartheta \cdot p_F \cdot d\vartheta$ . Поэтому объем будет  $2\pi p_F \sin \vartheta \cdot \Delta p \cos \vartheta \cdot p_F \cdot d\vartheta$ . Число электронов, с учетом того, что в квантовой ячейке могут находиться два электрона с противоположно направленными спинами, в этом колечке будет равно:

$$dn = 2 \frac{2\pi p_F \sin \vartheta \cdot \Delta p \cos \vartheta \cdot p_F d\vartheta}{(2\pi\hbar)^3}. \quad (22.27)$$

Поскольку проекция их скорости на ось  $Ox$  равна  $v_F \cos \vartheta$ , то их вклад в плотность тока составит величину

$$dj = |e| \cdot dn \cdot v_F \cos \vartheta. \quad (22.28)$$

Плотность тока, создаваемого электронами обеих областей, задается интегралом

$$j = 2 \int_0^{\pi/2} dj = 2 \int_0^{\pi/2} |e| \cdot dn \cdot v_F \cos \vartheta = 2 \frac{|e| \frac{4}{3} \pi p_F^2 v_F}{(2\pi\hbar)^3} \Delta p. \quad (22.29)$$

Примем во внимание, что  $v_F = p_F/m^*$ ,  $n = 2 \frac{e(4/3)\pi p_F^3}{(2\pi\hbar)^3}$  — концентрация свободных электронов,  $\Delta p = |e| E \tau$ . Тогда для плотности тока окончательно получаем

$$j = \frac{n e^2 \tau}{m^*} E. \quad (22.30)$$

Последняя формула отличается от (21.4) коэффициентом и наличием эффективной массы электрона. Здесь время  $\tau = l_{\text{пр}}/v_F$ . Длина свободного пробега  $l_{\text{пр}}$  зависит от температуры и связана не с периодом кристаллической решетки, а с рассеянием электрона на тепловых фононах и примесях.

**Взаимодействие электронов с тепловыми фононами. Температура Дебая.** Время  $\tau$  в формуле (22.30) определяется вероятностью столкновения (рассеяния) электронов с тепловыми фононами и примесями.

Как известно из курса «Молекулярная физика», ионы кристалла совершают тепловые колебания с различными частотами вплоть до частоты Дебая  $\omega_D$ :

$$0 < \omega < \omega_D = V_{\text{зв}} K_{\text{max}} = V_{\text{зв}} \frac{2\pi}{2a} = \frac{V_{\text{зв}}}{2} q$$

(здесь  $V_{\text{зв}}$  — скорость звука). Если принять  $V_{\text{зв}} \sim 10^3$  м/с, то  $\omega_D \sim (10^{13} - 10^{14}) \text{ с}^{-1}$ .

В квантовой механике колебания ионов на произвольной частоте интерпретируются как *фонон* — квазичастица с волновым числом

$$K = \frac{\omega}{V_{\text{зв}}}. \quad (22.31)$$

Если электрон, обладающий волновым вектором  $\mathbf{k}$ , сталкивается с фононом, имеющим волновой вектор  $\mathbf{K}$ , то после столкновения волновой вектор электрона  $\mathbf{k}'$  определяется законом сохранения квазиимпульса, или правилом отбора:

$$\mathbf{k} + \mathbf{K} = \mathbf{k}' + l\mathbf{q}, \quad (22.32)$$

где  $l$  — произвольное целое число. Другими словами, имеет место рассеяние, при котором электрон переходит из  $\mathbf{k}$ -состояния в  $\mathbf{k}'$ -состояние, отдавая, в общем случае, часть своей энергии кристаллической решетке.

Физическая причина рассеяния заключается в том, что при колебаниях ионов в решетке образуются области сжатия и разрежения. Происходит «деформация» периодического потенциала  $U(x)$  с пространственным периодом  $\lambda_{\text{ф}} = 2\pi/K$ . Поэтому изменяется и квантовое состояние электрона.

Естественно, что эффективность рассеяния уменьшается при  $\lambda_\phi \rightarrow \infty$ , т.е. при  $\mathbf{K} \rightarrow 0$ .

При протекании электрического тока в металлах происходит упругое рассеяние ( $l = 0$ ). Векторная диаграмма при столкновении изображена на рис. 22.9. При каждом столкновении проекция импульса электрона на ось изменяется на величину:

$$\Delta k_x = K \cos \varphi > 0. \quad (22.33)$$

Если внешнее электрическое поле направлено так, как показано на рисунке, то оно, в соответствии с уравнением (22.18), стремится сообщить электрону отрицательное приращение  $\Delta k_x < 0$ .

В результате устанавливается динамическое равновесие, при котором воздействия поля и фононов компенсируются. Эта компенсация происходит по-разному, в зависимости от соотношения температуры кристалла  $T$  и температуры Дебая  $T_D = \hbar \omega_D / k_B$ . Рассмотрим более подробно процесс столкновения.

Энергия фонона равна  $\epsilon_\phi = \hbar \omega$ , а вероятность  $f_\phi(\omega)$  нахождения фонона в одном квантовом состоянии на этой частоте подчиняется распределению Бозе-Эйнштейна

$$f_\phi(\omega) = \frac{1}{\exp(\hbar \omega / k_B T) - 1}. \quad (22.34)$$

Найдем теперь число состояний  $dg(\omega)$ , в которых частота фонона находится в узком интервале частот  $\omega - \omega + d\omega$ . По существу, фонон частоты  $\omega$  является стоячей волной плотности вещества с волновым числом  $K = \omega / V_{зв}$ . Из механики известно, что если кристалл представить в виде куба размером  $L \times L \times L$ , то проекции волнового вектора  $\mathbf{K}$  на координатные оси, направленные вдоль ребер куба, могут иметь лишь дискретные значения:

$$K_x = l_x \frac{2\pi}{L}, \quad K_y = l_y \frac{2\pi}{L}, \quad K_z = l_z \frac{2\pi}{L} \quad (l_x, l_y, l_z = 1, 2, 3, \dots). \quad (22.35)$$

«Объем» одного состояния будет равен  $\Delta K_x \Delta K_y \Delta K_z = (2\pi/L)^3$ . Следовательно, в тонком шаровом слое с радиусом  $K$  и толщиной  $dK$  искомое число состояний будет равно

$$dg(\omega) = \frac{4\pi K^2 dK}{(2\pi/L)^3} = \frac{L^3}{2\pi^2 V_{зв}^3} \omega^2 d\omega. \quad (22.36)$$

Число фононов, частоты которых лежат в рассматриваемом интервале, равно

$$dN_\phi(\omega) = f_\phi(\omega) \cdot dg(\omega), \quad (22.37)$$

а полное число фононов определяется интегралом

$$N_\phi = \int_0^{\omega_D} f_\phi(\omega) \cdot dg(\omega) = \frac{L^3}{2\pi^2 V_{зв}^3} \int_0^{\omega_D} \frac{\omega^2}{\exp(\hbar \omega / k_B T) - 1} \cdot d\omega. \quad (22.38)$$

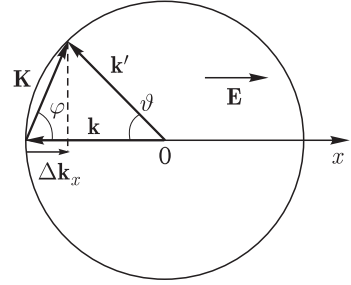


Рис. 22.9

Вводя температуру Дебая  $T_D = \hbar \omega_D / k_B$  и делая замену переменной  $\xi = \hbar \omega / k_B T$ , приводим (22.38) к удобному для анализа виду:

$$N_\phi = \frac{L^3}{2\pi^2 V_{3B}} \left( \frac{k_B T}{\hbar} \right)^3 \int_0^{T_D/T} \frac{\xi^2}{\exp(\xi) - 1} d\xi. \quad (22.39)$$

Если принять во внимание, что число атомов в кристалле  $N_{\text{атом}} = (L/a)^3$ , минимальная длина волны фонона  $\lambda_\phi = 2a$ , а максимальная частота  $\omega_D = V_{3B}(2\pi/2a) = V_{3B}(\pi/a)$ , то выражение (22.39) примет совсем простой вид:

$$N_\phi = \frac{N_{\text{атом}}}{2\pi} \left( \frac{T}{T_D} \right)^3 \int_0^{T_D/T} \frac{\xi^2}{\exp(\xi) - 1} d\xi. \quad (22.40)$$

Рассмотрим два предельных случая:

**А)**  $T \ll T_D$ . Верхний предел интегрирования можно положить равным бесконечности, и интеграл будет равен 2,4. В результате получаем

$$N_\phi = \frac{1,2 N_{\text{атом}}}{\pi} \left( \frac{T}{T_D} \right)^3 \ll N_{\text{атом}}. \quad (22.41)$$

**Б)**  $T \gg T_D$ . Используем разложение  $\exp(\xi) = 1 + \xi + \dots$ , вычисляем интеграл и получаем

$$\begin{aligned} N_\phi &= \frac{N_{\text{атом}}}{2\pi} \left( \frac{T}{T_D} \right)^3 \int_0^{T_D/T} \frac{\xi^2}{\exp(\xi) - 1} d\xi = \frac{N_{\text{атом}}}{2\pi} \left( \frac{T}{T_D} \right)^3 \int_0^{T_D/T} \xi d\xi = \\ &= \frac{N_{\text{атом}}}{4\pi} \left( \frac{T}{T_D} \right) \gg N_{\text{атом}}. \end{aligned} \quad (22.42)$$

Таким образом, при температурах ниже температуры Дебая число фоонов много меньше числа атомов. При нагревании оно быстро увеличивается пропорционально *третьей степени температуры*. При приближении к температуре Дебая это нарастание замедляется и затем становится *пропорциональным температуре*.

Фооны являются центрами рассеяния электронов, движущихся под действием внешнего электрического поля. Как уже отмечалось ранее, электрон, стартуя со дна энергетической зоны, под действием поля увеличивает свой импульс и энергию до тех пор, пока не достигнет границы зоны Бриллюэна:  $k = \pi/a = q$ . Его скорость  $v = \frac{d\varepsilon}{dp} = \frac{1}{\hbar} \frac{d\varepsilon}{dk}$  при приближении к границе будет уменьшаться до нуля, а затем электрон начнет двигаться в обратном направлении и т.д. Естественно, что в такой идеализированной ситуации электрический ток будет равен нулю.

Однако если произойдет столкновение с фооном, то электрон может «свалиться» опять на дно энергетической зоны. Поэтому он все время будет двигаться в одном направлении и в металле будет протекать электрический ток. Эффективность одного столкновения будет тем больше, чем больше импульс фонона.

При температурах выше температуры Дебая частоты большей части фононов можно положить равными максимальной частоте  $\omega_D$ , а волновой вектор  $K_D = \omega_D/V_{зв} = \pi/a = q$ , и по величине он такой же, как и у электрона. Поэтому достаточно одного столкновения, чтобы «сбросить» электрон на дно энергетической зоны.

Время свободного пробега будет обратно пропорционально числу таких «сбрасываний». Фононы в области температур  $T \gtrsim T_D$  при каждом столкновении осуществляют такое сбрасывание, поэтому  $\tau \propto 1/N_\phi \propto 1/T$ .

Таким образом, время  $\tau$  и проводимость обратно пропорциональны температуре. *Удельное же сопротивление металлов возрастает пропорционально температуре.*

При температурах ниже температуры Дебая у большей части фононов  $K \ll q$ , поэтому электрону потребуется много столкновений, чтобы свалиться на дно энергетической зоны. Пользуясь диаграммой, оценим это число столкновений. Поскольку  $K \ll k \approx q$ , то угол  $\vartheta$  мал, а два других угла  $\varphi$  равнобедренного треугольника близки к прямым углам. Поэтому справедливы приближенные равенства:

$$\Delta k_x = k \cos \varphi \approx K \frac{\vartheta}{2}; \quad \frac{\vartheta}{2} \approx \frac{K}{2k} \approx \frac{K}{2q}.$$

Тогда число столкновений электрона с фононом, необходимых для одного сбрасывания электрона на дно энергетической зоны, будет приблизительно равно

$$N_{ст} \approx \frac{q}{\Delta k_x} = \frac{2q^2}{K^2}. \quad (22.43)$$

Поскольку  $\omega = V_{зв} K$ ;  $\omega_D = V_{зв} q$ , то

$$N_{ст} \approx \frac{2\omega_D^2}{\omega^2} = \frac{2(\hbar\omega_D)^2}{(\hbar\omega)^2} = 2 \left( \frac{T_D}{T} \right)^2 \gg 1. \quad (22.44)$$

При наличии  $N_\phi$  фононов число сбрасываний электрона  $N_{сб} = N_\phi/N_{ст} \propto T^5$ , а время релаксации  $\tau \propto 1/N_{сб} \propto 1/T^5$ . Таким образом, время релаксации и проводимость

обратно пропорциональны пятой степени температуры. *Удельное же сопротивление металлов очень быстро возрастает пропорционально пятой степени температуры.* Это утверждение называется законом Блоха.

Для наглядности приведем значения температуры Дебая нескольких хороших проводников. Так, для алюминия  $T_D = 429$  К, меди  $T_D = 344$  К, серебра  $T_D = 225$  К, золота  $T_D = 165$  К.

Опыт показывает, что при  $T \rightarrow 0$  удельное сопротивление  $\rho = 1/\sigma$  как правило не уменьшается до нуля. На рис. 22.10 показана зависимость удельного сопротивления для большинства металлов (Au, Cu, Al, Na и др.) от его температуры. Эту зависимость можно описать формулой

$$\rho_\Sigma(T) = \rho(T) + \rho_{прим}, \quad (22.45)$$

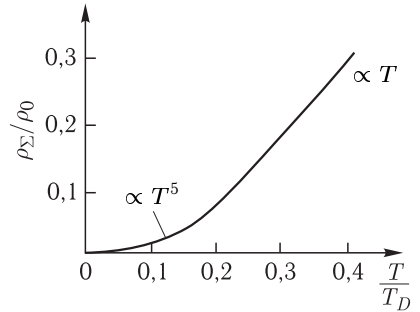


Рис. 22.10

в которой  $\rho(T)$  связано с рассеянием на фононах и зависит от температуры,  $\rho_0 = \rho(T = 273 \text{ К})$ , а  $\rho_{\text{прим}}$  обусловлено наличием примесей. Оно называется остаточным сопротивлением. Измерив в эксперименте зависимость  $\rho_{\Sigma}(T)$  и экстраполировав ее при  $T \rightarrow 0$ , можно определить остаточное сопротивление.

Температурные свойства сопротивления характеризуют отношением удельного сопротивления при комнатной температуре к удельному сопротивлению при температуре жидкого гелия. Это отношение для разных образцов изменяется от нескольких единиц (некоторые сплавы) до нескольких сот тысяч.

**Сверхпроводимость.** В 1911 г. при измерении температурной зависимости сопротивления ртути голландский физик Х. Камерлинг-Оннес обнаружил, что при температуре 4 К сопротивление ртути скачкообразно уменьшилось до неизмеримо малой величины. Это явление получило название *явления сверхпроводимости*, а температура  $T_c$ , при которой исчезает сопротивление, — *критической температуры*. За это открытие в 1913 г. ученый был удостоен Нобелевской премии.

К настоящему времени известно, что сверхпроводимостью обладают 27 элементов, 13 элементов переходят в сверхпроводящее состояние под давлением. Удивительно, что более тысячи сплавов несверхпроводящих элементов также обладают этим удивительным свойством.

Из элементарных сверхпроводников (состоящих из химических элементов одного типа) самой низкой критической температурой обладает вольфрам:  $T_c = 0,015 \text{ К}$ , а самой высокой — ниобий:  $T_c = 9,25 \text{ К}$ .

До 1986 г. максимальная критическая температура сплавов составляла 23,2 К и бытовало мнение, что сверхпроводников с более высокой критической температурой не существует. Однако в 1986 г. И. Беднорц и К. Мюллер открыли сверхпроводимость у керамических образцов  $\text{La}_2\text{Ba}_2\text{CuO}_4$  с критической температурой 32 К и  $\text{La}_2\text{Sr}_2\text{CuO}_4$  с критической температурой 40 К. Это явление получило название *высокотемпературной сверхпроводимости* (ВТСП). В следующем году Беднорц и Мюллер были также удостоены Нобелевской премии.

В последующие годы были найдены другие образцы, обладающие ВТСП. В настоящее время самая высокая критическая температура равна 135 К.

**Эффект Мейснера и Оксенфельда.** В 1933 г. немецкие физики В. Мейснер и Р. Оксенфельд обнаружили, что при охлаждении сверхпроводника, находящегося во внешнем постоянном магнитном поле, в момент перехода в сверхпроводящее состояние магнитное поле полностью вытесняется из его объема. На рис. 22.11 схематично изображен сверхпроводящий шар, находящийся во внешнем магнитном поле.

Отсутствие магнитного поля в объеме проводника позволяет заключить, что в нем существует только поверхностный электрический ток. Этот ток протекает в тонком слое толщиной  $\lambda_B \sim 10^{-2}$  мкм. Магнитное поле тока компенсирует внутри сверхпроводника внешнее магнитное поле. Поэтому внешнее магнитное поле проникает лишь на эту глубину  $\lambda_B$ , получившую название *лондонской глубины проникновения*. Такое название связано с тем, что природу эффекта впервые объяснили братья Фриц и Хайнц Лондон.

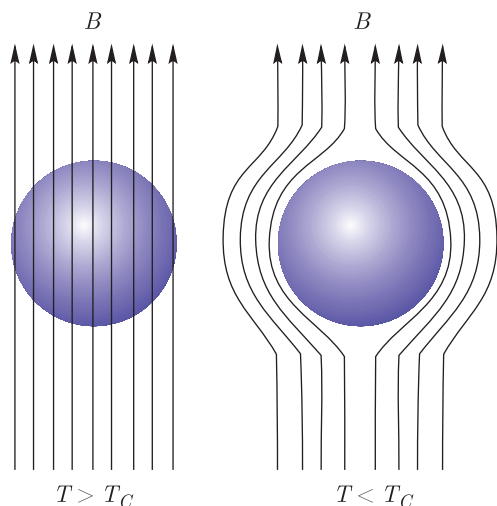


Рис. 22.11

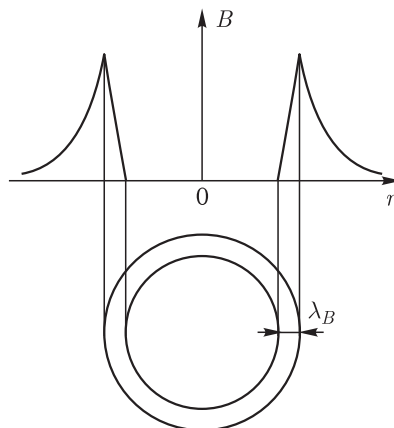


Рис. 22.12

На рис. 22.12 показано распределение магнитного поля в сечении цилиндрического проводника с током.

Если записать выражение для индукции магнитного поля  $B = \mu_0(1 + \chi)H$ , то из условия  $B = 0$  получаем  $\chi = -1$ . Поэтому сверхпроводник ведет себя формально как диамагнетик. Однако он не является диамагнетиком, так как внутри него намагниченность равна нулю.

Утверждение о том, что сопротивление в сверхпроводящем состоянии равно нулю, не является корректным. Можно, исходя из результатов эксперимента, утверждать, что сопротивление, по крайней мере, меньше величины точности измерения.

Такой эксперимент можно осуществить, если кольцо из сверхпроводника поместить между полюсами электромагнита и включить ток в его обмотках. В первое мгновение нарастающий магнитный поток приведет к возникновению индукционного тока. Этот ток, как уже было сказано, создаст собственное магнитное поле, которое вытеснит внешнее поле из объема колечка за исключением тонкого поверхностного слоя. На практике такой ток может существовать, не затухая, несколько лет, что позволяет оценить удельное сопротивление  $\rho < 10^{-24}$  Ом · м.

Весьма показателен следующий эксперимент, в котором кусочек сверхпроводящей керамики, охлажденный до температуры ниже критической, свободно парит над постоянным магнитом. Для этого на поверхность магнита устанавливают чашку Петри с налитым в нее жидким азотом как это изображено на рис. 22.13. Незатухающие вихревые токи в образце, согласно правилу Ленца, должны течь в таком направлении, чтобы сила, действующая на образец, препятствовала его приближению к постоянному магниту. Иногда такой опыт называют «Гроб Магомета», поскольку, по преданию, гроб основателя ислама Магомета парит в подземелье мавзолея в Медине, неподвластный силам земного притяжения.

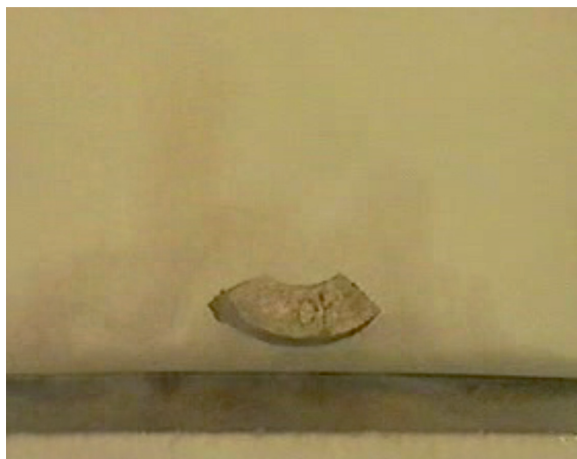


Рис. 22.13

Можно считать, что сопротивление сверхпроводников постоянному току практически равно нулю, а электрическое поле отсутствует во всем объеме проводника.

При переменном токе внешнее электрическое поле периодически ускоряет и замедляет электроны, на что, естественно, должна расходоваться энергия.

Поэтому для переменного тока сопротивление отлично от нуля. Однако это отличие становится заметным лишь при весьма высоких частотах  $\sim 10^{10}$  Гц. Само же электрическое поле существует в тонком слое толщиной  $\lambda_B \sim 10^{-2}$  мкм.

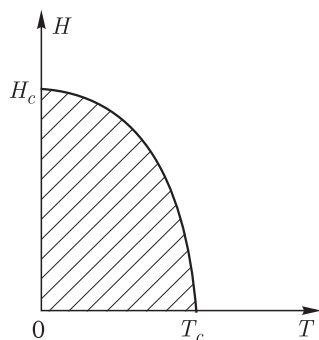


Рис. 22.14

Сверхпроводящее состояние, как было экспериментально установлено, может разрушаться как внешним полем с напряженностью  $H > H_c$ , так и электрическим током с плотностью  $j > j_c$ . На рис. 22.14 изображена зависимость величины критического магнитного поля  $H_c$  от температуры образца. Для наглядности заштрихована область сверхпроводящего состояния.

Для практического использования сверхпроводника необходимо принимать во внимание все три величины:  $T_c$ ,  $H_c$ ,  $j_c$ .

**Природа сверхпроводимости.** Явление сверхпроводимости не является свойством отдельных атомов: эксперимент показывает, что серое олово, например, является полупроводником, а белое — металлом с температурой перехода в сверхпроводящее состояние  $T_c = 3,72$  К. Разные кристаллические модификации лантана имеют разные значения критической температуры:  $T_c = 4,8$  К ( $\alpha$ -La),  $T_c = 5,95$  К ( $\beta$ -La). Налицо зависимость свойств сверхпроводимости от кристаллической структуры материала.

Хорошие проводники — медь, золото, серебро — не становятся сверхпроводниками ни при каких температурах. Это приводит к выводу, что сверхпроводимостью обладают такие вещества, у которых при обычных температурах



происходит сильное взаимодействие электронов с решеткой, результатом которого является их существенное омическое сопротивление.

Сверхпроводимость получила объяснение в микроскопической теории БКШ, названной по именам ее создателей (Дж. Бардин, Л. Купер и Дж. Шриффер, 1957 г., Нобелевская премия по физике 1972 г.).

В основе теории БКШ лежит представление о том, что между электронами проводимости кристалла могут действовать не только силы отталкивания, но и силы притяжения, возникающие вследствие деформации решетки. Когда электрон пролетает со скоростью Ферми между ближайшими к нему ионами, те, в свою очередь, приобретают импульс в направлении, перпендикулярном движению электрона. Под действием этого импульса ионы смещаются так, как показано на рис. 22.15, и в «кильваторе» электрона создается избыточный положительный заряд. Этот положительный заряд может притянуть другой электрон. В результате помимо кулоновского отталкивания между электронами может возникать сила притяжения. Если эта сила оказывается больше силы отталкивания, то энергетически выгодным становится объединение электронов в пары. Такая пара, получившая название *куперовской пары*, состоит из двух электронов с противоположно направленными спинами, движущихся в противоположных направлениях.

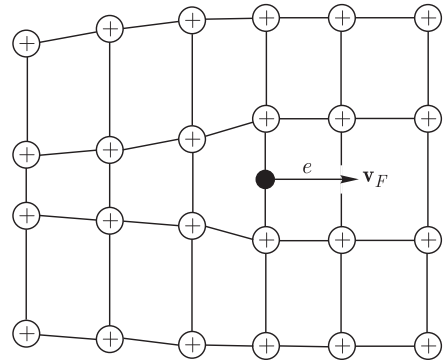


Рис. 22.15

Куперовская пара имеет заряд  $-2e$ , нулевое значение спина и может рассматриваться как квазичастица, подчиняющаяся статистике Бозе–Эйнштейна. Появление значительного числа электронных пар в состоянии с нулевым спином называется бозе-конденсацией (по аналогии с конденсацией молекул пара в жидкость при низких температурах).

Пространственное перекрытие огромного числа куперовских пар приводит к взаимной корреляции (согласованности) их движения под действием внешнего электрического поля. Все они приобретают один и тот же импульс и движутся как единый коллектив в одном и том же направлении с некоторой дрейфовой скоростью. Куперовские пары, пока они не разорваны, не могут рассеиваться на фононах и дефектах решетки, поэтому материал и не имеет омического сопротивления.

Чем больше куперовских пар, тем труднее разорвать отдельную пару: перекрытие волновых функций электронных пар усиливает квантовый эффект спаривания электронов.

При низких температурах энергии тепловых фононов недостаточно для разрушения пары. При нагревании материала энергия фононов увеличивается, пары разрушаются и вещество переходит из сверхпроводящего в обычное состояние.

ЛЕКЦИЯ 23

**Электропроводность полупроводников.** Как отмечалось в предыдущей лекции, у полупроводников энергетическая щель между валентной (полностью заполненной) зоной и зоной проводимости (абсолютно пустой) очень маленькая (порядка 1 эВ). Она значительно меньше энергетической щели диэлектрика. Это означает, что при нагревании полупроводника электроны за счет энергии теплового движения могут перейти из валентной в зону проводимости и электропроводность полупроводников будет увеличиваться по мере их нагревания. Рассмотрим подробнее механизм электропроводности полупроводника.

Пусть электрон, находящийся вблизи потолка валентной зоны, получает порцию энергии (например, вследствие теплового движения других электронов, колебаний ионов, поглощения кванта света и пр.), достаточную, чтобы перейти из состояния  $A$  в зону проводимости в состояние  $A''$  так, как показано на рис. 23.1.

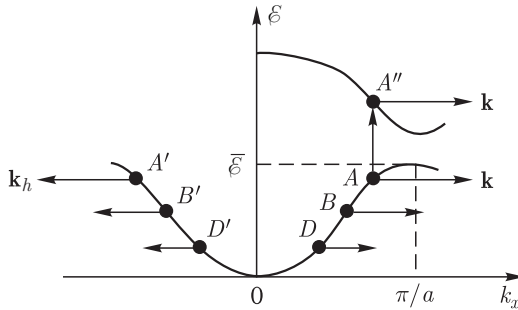


Рис. 23.1

В состоянии  $A$ , которое электрон покинул, образуется вакансия, которая называется *дыркой*. При приложении внешнего электрического поля в положительном направлении оси  $Ox$  электроны, в соответствии с квазиклассическим уравнением (22.18), будут получать отрицательное приращение волнового вектора, и на рисунке начнут «перемещаться» справа налево. В валентной зоне это приведет к «перемещению» дырки в этом же направлении, т.е. вакансия будет перемещаться по схеме  $A \rightarrow B \rightarrow D \dots$ . Подчеркнем особо, что речь идет о перемещении электрона и дырки в пространстве волновых векторов! В координатном же пространстве под действием электрического поля они будут двигаться в противоположных направлениях (см. далее)!

Проанализируем более детально свойства дырки. Прежде всего, отметим, что при переходе электрона в зону проводимости его волновой вектор  $\mathbf{k}$  (квазиимпульс) не изменился. Полный импульс всех электронов в валентной

зоне, который при ее полном заполнении равнялся нулю, теперь будет отличен от нуля и равен с обратным знаком импульсу электрона в состоянии  $A'$ . Этот импульс и приписывают дырке. Соответственно волновой вектор дырки равен с обратным знаком волновому вектору электрона, создавшего вакансию:

$$\mathbf{k}_h = -\mathbf{k}. \quad (23.1)$$

Здесь индекс  $h$  от англ. «hole» — дырка.

Используя определение волнового числа дырки, запишем квазиклассическое уравнение ее движения, поменяв знаки в обеих частях уравнения (22.18):

$$-\hbar \frac{dk_x}{dt} = \hbar \frac{dk_{hx}}{dt} = -eE = |e| E. \quad (23.2)$$

Следовательно, дырка ведет себя подобно положительно заряженной частице с зарядом  $|e|$ !

**Эффективная масса электрона и дырки.** Установим далее зависимость энергии дырки от ее волнового числа. Для этого запишем вначале зависимость энергии электрона вблизи потолка валентной зоны от волнового числа. Для удобства волновое число будем отсчитывать от границы зоны Бриллюэна, где и находится потолок валентной зоны. Тогда полная энергия электрона

$$\mathcal{E}(k_x) = \bar{\mathcal{E}} + \frac{1}{2} \left( \frac{d^2 \mathcal{E}}{dk_x^2} \right) \cdot k_x^2 = \bar{\mathcal{E}} + \frac{\hbar^2}{2m^*} \cdot k_x^2. \quad (23.3)$$

Эффективная масса электрона вблизи потолка валентной зоны  $m^* < 0$ , поэтому при «удалении» от границы зоны Бриллюэна энергия электрона уменьшается.

Когда электрон покидает состояние  $A$ , то энергия электронов в валентной зоне увеличивается, поскольку для удаления электрона требуется затратить энергию. При этом чем ближе дырка ко дну валентной зоны, тем больше затрачивается энергии для перевода электрона в зону проводимости и тем больше энергия дырки. Это означает, что энергия кристалла, а значит и энергия дырки  $\mathcal{E}_h$ , увеличивается при «удалении» от границы зоны Бриллюэна. Поэтому зависимость ее величины от волнового числа получается заменой знака в формуле (23.3) и учетом равенства (23.1):

$$\mathcal{E}_h(k_{hx}) = \bar{\mathcal{E}} - \frac{\hbar^2}{2m^*} \cdot k_x^2 = \bar{\mathcal{E}} + \frac{\hbar^2}{2m_h^*} \cdot k_x^2 = \bar{\mathcal{E}} + \frac{\hbar^2}{2m_h^*} \cdot k_{hx}^2. \quad (23.4)$$

Здесь *эффективная масса дырки*  $m_h^* = -m^*$  (равна с противоположным знаком эффективной массе электрона, покинувшего валентную зону). У потолка валентной зоны масса дырки положительна:  $m_h^* = -m^* > 0$ . Попад в зону проводимости, электрон уже будет характеризоваться вблизи ее дна другой эффективной массой  $m_e^* > 0$ , поскольку, как видно из рисунка, кривизна дисперсионной кривой различна для разных энергетических зон. При «удалении» от границы зоны Бриллюэна энергия электрона в зоне проводимости будет увеличиваться.

Если поле приложено в положительном направлении оси  $Ox$ , то дырка будет ускоряться вдоль кристалла в этом же направлении. В самом деле, в соответствии с (22.21), квазиимпульс дырки равен

$$p_{hx} = \hbar k_{hx} = m_h^* v_x. \quad (23.5)$$

Во внешнем поле, согласно (23.2), квазиимпульс (и скорость) получит приращение в направлении действующего поля. Это приведет к появлению дырочной электропроводности.

Используя модель Лифшица, по аналогии с (22.30), можем записать выражение для удельной дырочной электропроводности

$$\sigma_h = \frac{n_h e^2 \tau}{m_h^*}, \quad (23.6)$$

где  $n_h$  — концентрация дырок.

Естественно, что электроны, ушедшие в зону проводимости, также будут давать вклад в электропроводность полупроводника. Однако в этой зоне их эффективная масса  $m_e^* > 0$ , она меньше массы электрона ( $m_e^* < m$ ) и эффективной массы дырок  $m_h^*$  ( $m_e^*/m_h^* \leq 1$ ).

**Концентрация электронов и дырок.** По мере повышения температуры полупроводника количество дырок в валентной зоне и количество электронов в зоне проводимости будут увеличиваться. Следовательно, будет увеличиваться и электропроводность полупроводника.

Рассчитаем концентрацию электронов и дырок, пользуясь распределением Ферми–Дирака. На рис. 23.2 схематично изображены две энергетические зоны, разделенные запрещенной зоной шириной  $\epsilon_g$ , а справа от них функция распределения Ферми–Дирака. Будем отсчитывать энергию  $\epsilon$  и химический потенциал  $\mu$  от потолка валентной зоны. При таком «сдвиге» начала отсчета вид функции распределения Ферми–Дирака не изменится.

Рассмотрим случай  $k_B T \ll |\epsilon - \mu|$ , когда температура кристалла ниже температуры вырождения. Это оправдано, поскольку при комнатной температуре  $k_B T \sim 0,025$  эВ, а ширина запрещенной зоны  $\epsilon_g \sim 1$  эВ (кремний — 1,2 эВ, германий — 0,67 эВ).

При таком условии функция распределения допускает две аппроксимации (см. рис. 23.2):

$$f(\epsilon) \approx f_1(\epsilon) = \exp\left(-\frac{\epsilon - \mu}{k_B T}\right) \quad \text{при } \epsilon > \mu; \quad (23.7a)$$

$$f(\epsilon) \approx f_2(\epsilon) = 1 - \exp\left(-\frac{\mu - \epsilon}{k_B T}\right) \quad \text{при } \epsilon < \mu. \quad (23.7b)$$

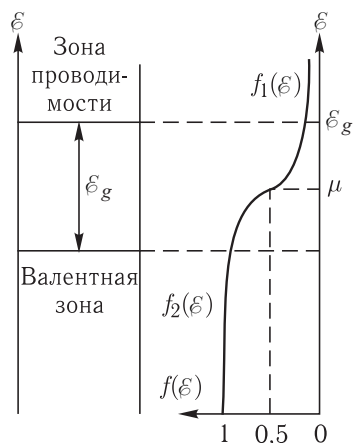


Рис. 23.2

Возьмем единичный объем кристалла и рассчитаем вначале концентрацию электронов в зоне проводимости. Плотность состояний в соответствии с (21.34) будет равна

$$\rho(\varepsilon) = \frac{dg}{d\varepsilon} = \frac{4\pi(2m_e^*)^{3/2}}{(2\pi\hbar)^3} \sqrt{\varepsilon - \varepsilon_g}, \quad (23.8)$$

где учтено, что объем  $V = 1$ , используется эффективная масса электрона  $m_e^*$  в зоне проводимости, а плотность состояний в зоне проводимости зависит от разности энергий  $\varepsilon - \varepsilon_g$ . Поэтому концентрация электронов в зоне проводимости, в соответствии с (21.35), будет равна

$$n_e = \int_{\varepsilon_g}^{\infty} \rho(\varepsilon) f_1(\varepsilon) d\varepsilon = \frac{1}{2\pi^2} \left( \frac{2m_e^* k_B T}{\hbar^2} \right)^{3/2} \exp \left( -\frac{\varepsilon_g - \mu}{k_B T} \right) \int_0^{\infty} \sqrt{x} \cdot e^{-x} dx, \quad (23.9)$$

где  $x = (\varepsilon - \mu)/(k_B T)$ ,  $f_1(\varepsilon)$  — аппроксимация (23.7а) функции распределения при  $\varepsilon > \mu$ .

Поскольку интеграл равен  $\sqrt{\pi}/2$ , то

$$n_e = 2 \left( \frac{m_e^* k_B T}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} \exp \left( -\frac{\varepsilon_g - \mu}{k_B T} \right) = N_e \exp \left( -\frac{\varepsilon_g - \mu}{k_B T} \right), \quad (23.10)$$

где

$$N_e = 2 \left( \frac{m_e^* k_B T}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} = 4,83 \cdot 10^{21} \left( \frac{m_e^*}{m} \right)^{3/2} T^{3/2} (\text{м}^{-3}). \quad (23.11)$$

Для определения концентрации дырок учтем, что при выбранном начале отсчета в валентной зоне  $\varepsilon < 0$ , поэтому плотность состояний электронов

$$\rho(\varepsilon) = \frac{dg}{d\varepsilon} = \frac{2\pi(2m_h^*)^{3/2}}{(2\pi\hbar)^3} \sqrt{-\varepsilon}. \quad (23.12)$$

Вероятность незаполнения электроном какого-либо состояния в валентной зоне равна  $1 - f_2(\varepsilon)$ , где  $f_2(\varepsilon)$  — аппроксимация (23.7б) функции распределения при  $\varepsilon < \mu$ .

С учетом (23.12) концентрация дырок равна

$$n_h = \int_0^{-\infty} \rho(\varepsilon)(1 - f_2(\varepsilon)) d\varepsilon = \frac{1}{2\pi^2} \left( \frac{2m_h^* k_B T}{\hbar^2} \right)^{3/2} \exp \left( -\frac{\mu}{k_B T} \right) \int_0^{\infty} \sqrt{x} \cdot e^{-x} dx, \quad (23.13)$$

или

$$n_h = 2 \left( \frac{m_h^* k_B T}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} \cdot \exp \left( -\frac{\mu}{k_B T} \right) = N_h \exp \left( -\frac{\mu}{k_B T} \right), \quad (23.14)$$

где

$$N_h = 2 \left( \frac{m_h^* k_B T}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2}. \quad (23.15)$$

Произведение концентраций электронов и дырок равно

$$n_e n_h = N_e N_h \exp \left( -\frac{\varepsilon_g}{k_B T} \right) = n_i^2 \quad (23.16)$$

и зависит от ширины  $\mathcal{E}_g$  запрещенной зоны. Это выражение иногда называют *законом действующих масс*. Оно будет использовано ниже при анализе примесных полупроводников.

Если кристалл не содержит примесей, то концентрации электронов и дырок равны:

$$n_e = n_h = \sqrt{n_e n_h} = \sqrt{N_e N_h} \exp\left(-\frac{\mathcal{E}_g}{2k_B T}\right) = n_i. \quad (23.17)$$

Здесь концентрация  $n_i$  называется *концентрацией собственных носителей*. Она увеличивается по мере нагревания кристалла полупроводника. Поэтому закон действующих масс утверждает, что *произведение концентрации электронов и дырок равно квадрату концентрации собственных (в отсутствие примесей) носителей*.

Если теперь написать равенство концентраций электронов и дырок в виде

$$n_e = N_e \exp\left(-\frac{\mathcal{E}_g - \mu}{k_B T}\right) = n_h = N_h \exp\left(-\frac{\mu}{k_B T}\right), \quad (23.18)$$

то из него получается выражение для химического потенциала

$$\mu = \frac{1}{2} \mathcal{E}_g + \frac{1}{2} k_B T \ln \frac{N_h}{N_e} = \frac{1}{2} \mathcal{E}_g + \frac{3}{4} k_B T \ln \frac{m_h^*}{m_e^*}. \quad (23.19)$$

Значение химического потенциала при нагревании также изменяется. При очень низких температурах, как было отмечено ранее, химический потенциал совпадает с энергией Ферми. Поэтому, согласно (23.19), при  $T \rightarrow 0$

$$\mu = \frac{1}{2} \mathcal{E}_g = \mathcal{E}_F, \quad (23.20)$$

т. е. уровень Ферми  $\mathcal{E}_F$  находится в середине запрещенной зоны.

Воспользуемся формулами (23.10) и (23.11) и оценим концентрацию электронов (собственных носителей) при комнатной температуре. Полагая  $T = 300 \text{ К}$ ,  $k_B T = 0,025 \text{ эВ}$ ,  $\mathcal{E}_g = 1 \text{ эВ}$ ,  $m_e^*/m = 1$ ,  $\mu = (1/2) \mathcal{E}_g$ , получаем

$$n_e = 4,83 \cdot 10^{21} \cdot (300)^{3/2} \exp\left(-\frac{1}{2 \cdot 0,025}\right) = 2,5 \cdot 10^{25} \exp(-20) \approx \\ \approx 10^{17} \text{ м}^{-3} = 10^{11} \text{ см}^{-3}.$$

Как отмечалось ранее, в металлах концентрация электронов проводимости  $n_e \sim 10^{22} - 10^{23} \text{ см}^{-3}$ , поэтому *собственная проводимость полупроводников при комнатной температуре ничтожно мала по сравнению с металлами*. Если увеличить абсолютную температуру вдвое, то концентрация собственных носителей в полупроводнике возрастет на 4–5 порядков. Однако проводимость полупроводников можно увеличить на много порядков даже при комнатной температуре, если в кристалл добавить примеси.

**Полупроводники с примесями.** Опыт показывает, что добавление в кремний (Si) небольшого количества бора (В) в пропорции 1 атом бора на  $10^5$  атомов кремния при комнатной температуре приводит к увеличению проводимости в тысячу раз по сравнению с чистым кремнием. Атомы бора являются примесью, а процесс добавления примесей называется *легированием* полупроводника.

Рассмотрим подробнее, к чему приводит легирование кремния и германия — полупроводников, имеющих широчайшее применение в современной электронике. Поскольку их атомы являются четырехвалентными, то каждый атом образует четыре ковалентные связи с четырьмя ближайшими соседними атомами. Если на месте четырехвалентного атома окажется пятивалентный атом (фосфор, мышьяк, сурьма и пр.), то останется один валентный электрон, не задействованный в химических связях (рис. 23.3а). Такая примесь называется донорной примесью.

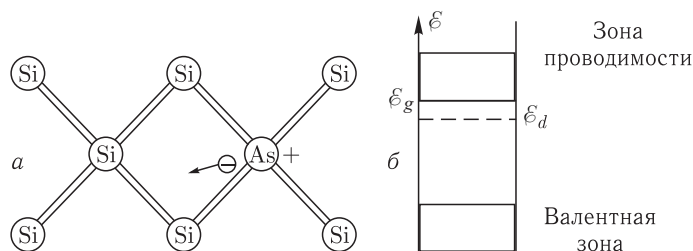


Рис. 23.3

**Донорные примеси.** Чтобы оторвать электрон от атома примеси и перевести его тем самым в зону проводимости, необходимо затратить энергию, равную энергии ионизации  $\epsilon_i$ . Следовательно, этот электрон имеет энергию  $\epsilon_d = \epsilon_g - \epsilon_i$ . Другими словами, в запрещенной зоне появляется донорный энергетический уровень (рис. 23.3б). У обозначенных выше пятивалентных примесей, находящихся в рассматриваемых полупроводниках, соответствующие энергии ионизации находятся в диапазоне  $0,01 < \epsilon_i < 0,05$  эВ, что по порядку величины совпадает с энергией теплового движения:  $\epsilon_i \sim k_B T$ . Поэтому энергетический донорный уровень находится вблизи дна зоны проводимости.

Рассчитаем количество электронов и дырок в полупроводнике при наличии донорной примеси. Если в единице объема полупроводника находится  $N_d$  атомов примеси, то количество электронов, «отпущенных» примесью в зону проводимости, равно числу ионизованных атомов примеси:

$$n_{id} = N_d (1 - f(\epsilon_d)), \quad (23.21)$$

где  $1 - f(\epsilon_d)$  — вероятность незаполнения электроном донорного уровня. Количество электронов  $n_e$  в зоне проводимости определяется формулой (23.10), а количество дырок  $n_h$  — формулой (23.14).

Функция распределения Ферми–Дирака в этих формулах содержит химический потенциал, величина которого зависит не только от температуры, но и от концентрации примесей. Для нахождения этой зависимости запишем условие электронейтральности кристалла, что означает равенство числа  $n_e$  всех электронов в зоне проводимости и всех положительных зарядов (примесных  $n_{id}$  и дырок  $n_h$ ) в валентной зоне:

$$n_e = n_{id} + n_h, \quad (23.22)$$

или

$$N_e \exp\left(-\frac{\varepsilon_g - \mu}{k_B T}\right) = N_d (1 - f(\varepsilon_d)) + N_h \exp\left(-\frac{\mu}{k_B T}\right).$$

При этом выполняется также закон действующих масс

$$n_e n_h = n_i^2. \quad (23.23)$$

При температурах  $k_B T \ll |\varepsilon_d - \mu|$ , в зависимости от положения химического потенциала, можно считать, что  $1 - f_2(\varepsilon_d) \approx \exp\left(-\frac{\mu - \varepsilon_d}{k_B T}\right)$ , если  $\mu > \varepsilon_d$ , и  $1 - f_1(\varepsilon_d) \approx 1 - \exp\left(-\frac{\varepsilon_d - \mu}{k_B T}\right)$ , если  $\mu < \varepsilon_d$ .

Рассмотрим эти две ситуации, переходящие одна в другую при изменении числа  $N_d$  донорных атомов и температуры  $T$ . От этого числа и температуры будет зависеть положение химического потенциала, а значит, и число электронов в зоне проводимости.

**А)**  $\mu > \varepsilon_d$ . Тогда (23.22) запишем в виде

$$N_e \exp\left(-\frac{\varepsilon_g - \mu}{k_B T}\right) = N_d \exp\left(-\frac{\mu - \varepsilon_d}{k_B T}\right) + N_h \exp\left(-\frac{\mu}{k_B T}\right). \quad (23.24)$$

При температурах ниже температуры вырождения можно пренебречь вторым слагаемым в правой части последнего равенства. Для химического потенциала полупроводника при наличии донорных примесей получается выражение

$$\mu = \mu_d = \frac{1}{2} (\varepsilon_d + \varepsilon_g) - \frac{1}{2} k_B T \ln \frac{N_e}{N_d}. \quad (23.25)$$

Чтобы условие  $\mu_d > \varepsilon_d$  выполнялось, необходимо, чтобы

$$k_B T \ln \frac{N_e}{N_d} < \varepsilon_g - \varepsilon_d \ll \varepsilon_g. \quad (23.26)$$

**Б)**  $\mu < \varepsilon_d$ .

$$N_e \exp\left(-\frac{\varepsilon_g - \mu}{k_B T}\right) = N_d \left[1 - \exp\left(-\frac{\varepsilon_d - \mu}{k_B T}\right)\right] + N_h \exp\left(-\frac{\mu}{k_B T}\right). \quad (23.27)$$

Левую часть равенства (23.27) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} N_e \exp\left(-\frac{\varepsilon_g - \mu}{k_B T}\right) &= N_e \exp\left(-\frac{\varepsilon_g/2}{k_B T}\right) \exp\left(-\frac{\varepsilon_g/2 - \mu}{k_B T}\right) = \\ &= n_i \sqrt{\frac{N_e}{N_h}} \exp\left(-\frac{\varepsilon_g/2 - \mu}{k_B T}\right), \end{aligned}$$

где  $n_i$  — концентрация собственных носителей в чистом полупроводнике (23.17). Значения экспонент в правой части (23.27) близки к нулю, поэтому

$$\mu = \mu_d = \frac{\varepsilon_g}{2} + k_B T \ln \frac{N_d}{n_i} \sqrt{\frac{N_h}{N_e}}. \quad (23.28)$$

Поскольку  $N_h/N_e = (m_h^*/m_e^*)^{3/2} \sim 1$ , то при  $N_d \rightarrow n_i$  химический потенциал  $\mu_d \rightarrow (1/2) \varepsilon_g$ .



На рис. 23.4 изображена качественная зависимость химического потенциала от температуры и концентрации донорной примеси. С увеличением количества примесных атомов ( $N_d$ ) величина  $k_B T \ln(N_e/N_d) \rightarrow 0$ , а химический потенциал  $\mu_d$  увеличивается, приближаясь к максимальному значению  $\mu_d = (1/2)(\epsilon_d + \epsilon_g)$ , которое немного меньше ширины запрещенной зоны:  $\mu_d \leq \epsilon_g$ . А это означает, что химический потенциал находится вблизи дна зоны проводимости и вероятность попадания электрона в зону проводимости становится достаточно большой даже при комнатных температурах. Полагая в распределении Ферми–Дирака  $\epsilon_g = 1$  эВ,  $k_B T = 0,025$  эВ,  $\epsilon_d = \epsilon_g - \epsilon_i$ ,  $\epsilon_i = 0,02$  эВ, получаем вероятность нахождения электрона на донорном уровне

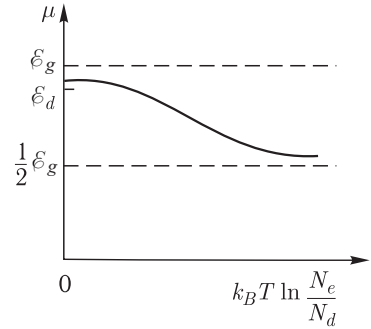


Рис. 23.4

$$f(\epsilon_d) = \frac{1}{\exp\left(\frac{\epsilon_d - (\epsilon_d + \epsilon_g)/2}{k_B T}\right) + 1} = \frac{1}{\exp\left(\frac{\epsilon_i}{2k_B T}\right) + 1} = \frac{1}{\exp\left(\frac{2}{5}\right) + 1} \approx 0,4,$$

а вероятность попасть в зону проводимости  $1 - f(\epsilon_d) = 0,6$ .

**Акцепторные примеси.** Если в кристаллы германия или кремния добавить трехвалентные атомы, то для обеспечения ковалентной связи заимствуется из валентной зоны один электрон. В результате, в окрестности примесного атома образуется подвижная дырка (рис. 23.5 а). Такие примеси называются акцепторами. Примерами акцепторных примесей являются химические элементы В, Al, Ga, In и др. Энергия ионизации этих атомов лежит в диапазоне  $0,01 < \epsilon_i < 0,065$  эВ и по порядку величины также совпадает с энергией теплового движения  $\epsilon_i \sim k_B T$ . Поэтому энергия валентного электрона после внедрения его в атом примеси увеличивается на эту величину. В результате появляется акцепторный уровень  $\epsilon_a = \epsilon_i$ , лежащий несколько выше потолка валентной зоны (рис. 23.5 б). Химический потенциал  $\mu$  будет зависеть от температуры  $T$  и количества  $N_a$  атомов акцептора. Рассчитаем эту зависимость.

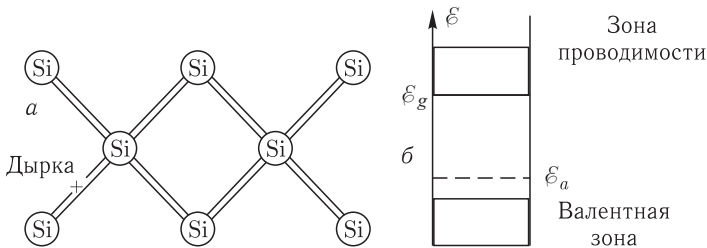


Рис. 23.5

Если в единице объема полупроводника находится  $N_a$  атомов примеси, то количество атомов, захвативших электрон (число ионизованных атомов акцептора),

$$n_{ia} = N_a f(\epsilon_a), \quad (23.29)$$

Условие электронейтральности кристалла означает, что число всех дырок  $n_h$  в валентной зоне (23.14) равно сумме отрицательных ионов примеси  $n_{ia}$  и электронов  $n_e$  (23.10) в зоне проводимости:

$$n_h = n_{ia} + n_e, \quad (23.30)$$

или

$$N_h \exp\left(-\frac{\mu}{k_B T}\right) = N_e \exp\left(-\frac{\varepsilon_g - \mu}{k_B T}\right) + N_a f(\varepsilon_a).$$

Будем, как и для случая донорных примесей, считать, что  $k_B T \ll |\varepsilon_a - \mu|$  и рассмотрим две ситуации

**А)**  $\mu < \varepsilon_a$ . Тогда  $f_1(\varepsilon_a) \approx \exp\left(-\frac{\varepsilon_a - \mu}{k_B T}\right)$  и

$$N_h \exp\left(-\frac{\mu}{k_B T}\right) = N_e \exp\left(-\frac{\varepsilon_g - \mu}{k_B T}\right) + N_a \left[\exp\left(-\frac{\varepsilon_a - \mu}{k_B T}\right)\right]. \quad (23.31)$$

При большой концентрации акцепторов можем пренебречь первым слагаемым в правой части (23.31). Тогда

$$\mu = \mu_a = \frac{\varepsilon_a}{2} + \frac{1}{2} k_B T \ln \frac{N_h}{N_a}. \quad (23.32)$$

Чтобы условие  $\mu_a < \varepsilon_a$  выполнялось, необходимо, чтобы

$$k_B T \ln \frac{N_h}{N_a} < \varepsilon_a. \quad (23.33)$$

**Б)**  $\mu > \varepsilon_a$ . Тогда  $f(\varepsilon_a) = f_2(\varepsilon_a) \approx 1 - \exp\left(-\frac{\mu - \varepsilon_a}{k_B T}\right)$  и

$$N_h \exp\left(-\frac{\mu}{k_B T}\right) = N_e \exp\left(-\frac{\varepsilon_g - \mu}{k_B T}\right) + N_a \left[1 - \exp\left(-\frac{\mu - \varepsilon_a}{k_B T}\right)\right]. \quad (23.34)$$

Представив левую часть (23.34) в виде

$$\begin{aligned} N_h \exp\left(-\frac{\varepsilon_g - \mu}{k_B T}\right) &= N_h \exp\left(-\frac{\varepsilon_g/2}{k_B T}\right) \exp\left(-\frac{\varepsilon_g/2 - \mu}{k_B T}\right) = \\ &= n_i \sqrt{\frac{N_h}{N_e}} \exp\left(-\frac{\varepsilon_g/2 - \mu}{k_B T}\right) \end{aligned}$$

и принимая значения экспонент в правой части уравнения (23.34) равными нулю, получаем

$$\mu = \mu_a = \frac{\varepsilon_g}{2} - k_B T \ln \frac{N_a}{n_i} \sqrt{\frac{N_e}{N_h}}. \quad (23.35)$$

Качественная зависимость химического потенциала от температуры и концентрации акцепторной примеси изображена на рис. 23.6. С увеличением концентрации примеси  $N_a$  величина  $k_B T \ln(N_h/N_a) \rightarrow 0$ , а химический потенциал стремится к минимальному значению  $\mu_a \rightarrow \varepsilon_a/2 \sim k_B T$ . А это означает, что уже

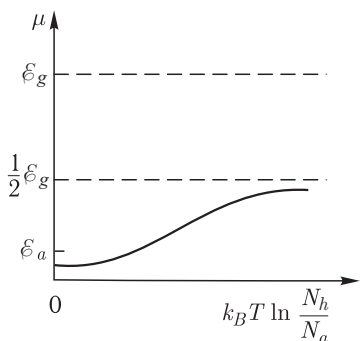


Рис. 23.6

при комнатных температурах вероятность заселения электроном акцепторного уровня (и следовательно, вероятность образования подвижной дырки) будет достаточно большой. Полагая в распределении Ферми–Дирака  $\mu = \varepsilon_a/2$ ,  $\varepsilon_a = \varepsilon_i = 0,02 \text{ эВ}$ ,  $k_B T = 0,025 \text{ эВ}$ , получаем

$$f(\varepsilon_a) = \frac{1}{\exp\left(\frac{\varepsilon_a - \varepsilon_a/2}{k_B T}\right) + 1} = \frac{1}{\exp\left(\frac{\varepsilon_i}{2k_B T}\right) + 1} = \frac{1}{\exp\left(\frac{2}{5}\right) + 1} \approx 0,4.$$

**Основные выводы.** В полупроводниках концентрация собственных носителей (электронов и дырок)  $n_i \sim (10^{10} - 10^{13}) \text{ см}^{-3}$ , что более чем на 10 порядков меньше, чем у проводников. Согласно формуле (23.19) химический потенциал в отсутствие примесей при комнатных температурах равен приблизительно половине ширины запрещенной зоны:  $\mu \approx (1/2) \varepsilon_g$ . Вероятность попасть электрону из валентной в зону проводимости ничтожно мала:

$$f(\varepsilon_g) = \frac{1}{\exp\left(\frac{\varepsilon_g - \varepsilon_g/2}{k_B T}\right) + 1} = \frac{1}{\exp\left(\frac{\varepsilon_g}{2k_B T}\right) + 1} = \frac{1}{\exp(20) + 1} \ll 1.$$

При легировании полупроводника донорной примесью вблизи дна зоны проводимости появляется примесный донорный уровень, отделенный от дна энергией ионизации, сравнимой с энергией теплового движения. Химический потенциал увеличивается, приближаясь к величине  $\varepsilon_g$ . Поэтому вероятность  $f(\varepsilon_d)$  попадания на донорный уровень становится очень большой, достигая десятых долей (оценка, сделанная выше, дала  $f(\varepsilon_d) = 0,4$ ). Следовательно, число ионизованных атомов  $n_{id} = N_d(1 - f(\varepsilon_d))$  составит значительную долю от числа атомов примеси в единице объема.

Электроны, оторвавшись от атомов донора за счет энергии  $k_B T$  теплового движения, теперь легко попадают в зону проводимости. Если принять характерное значение  $N_d \sim 10^{16} \text{ см}^{-3}$ , то по порядку величины такую же концентрацию будут иметь электроны, являющиеся *основными* носителями электрического заряда. Поскольку носители имеют отрицательный заряд, то полупроводник называется *полупроводником n-типа*. В легированном невырожденном полупроводнике выполняется закон действующих масс  $n_e n_h = n_i^2$ , и появление большого числа электронов в зоне проводимости сопровождается уменьшением и без того малого числа дырок.

При легировании полупроводника акцепторной примесью вблизи потолка валентной зоны появляется примесный акцепторный уровень, отделенный от валентной зоны энергией ионизации, сравнимой с энергией теплового движения. Химический потенциал становится очень малым. Поэтому вероятность попадания электрона на акцепторный уровень в результате его захвата акцептором становится очень большой, достигая десятых долей (оценка, сделанная выше дала  $f(\varepsilon_a) = 0,4$ ). Концентрация ионизованных атомов примеси составит значительную долю от числа атомов примеси в единице объема:  $n_{ia} = N_a f(\varepsilon_a)$ . Если принять характерное значение  $N_a \sim 10^{16} \text{ см}^{-3}$ , то по порядку величины такую же концентрацию  $n_h = n_{ia} + n_e$  будут иметь дырки, являющиеся *основными* носителями положительного электрического заряда. Поэтому такой полупроводник получил название *полупроводника*

*p-типа*. При увеличении числа дырок в валентной зоне, согласно закону действующих масс, уменьшается и без того малое количество электронов в зоне проводимости.

**Подвижность собственных носителей заряда.** Под действием электрического поля  $E$  носители (электроны и дырки) приобретают среднюю дрейфовую скорость  $v = v_{\text{ср}}$ , в результате чего плотность тока для электронов, будет согласно (22.30) равна

$$\mathbf{j} = en\mathbf{v} = \frac{ne^2\tau}{m^*} \mathbf{E}. \quad (23.36)$$

Для дырок можно записать аналогичное выражение

$$\mathbf{j}_h = |e| n_h \mathbf{v}_h = \frac{n_h e^2 \tau_h}{m_h^*} \mathbf{E}. \quad (23.37)$$

Электроны движутся против поля, а дырки в направлении поля, поэтому полный ток равен сумме токов обоих типов:  $\mathbf{j}_{\Sigma} = \mathbf{j}_h + \mathbf{j}$ .

Подвижность электронов и дырок вводится как отношение средней скорости к напряженности поля:

$$b = \frac{v}{E} \quad b_h = \frac{v_h}{E}. \quad (23.38)$$

С учетом (23.36) и (23.37) подвижности определяются выражениями

$$b = \frac{|e|\tau}{m^*}, \quad b_h = \frac{|e|\tau_h}{m_h^*}. \quad (23.39)$$

Тогда плотность полного тока может быть записана в виде:

$$\mathbf{j}_{\Sigma} = \sigma_{\Sigma} \mathbf{E} = (n |e| b + n_h |e| b_h) \mathbf{E}. \quad (23.40)$$

Отметим, что обычно подвижность дырок меньше подвижности электронов. Например, при комнатной температуре в кремнии  $b = 0,13 \text{ м}^2/(\text{В} \cdot \text{с})$ ,  $b_h = 0,05 \text{ м}^2/(\text{В} \cdot \text{с})$ , а в германии  $b = 0,45 \text{ м}^2/(\text{В} \cdot \text{с})$ ,  $b_h = 0,35 \text{ м}^2/(\text{В} \cdot \text{с})$ . При нагревании полупроводника подвижность как электронов, так и дырок уменьшается.

## ЛЕКЦИЯ 24

**Эффект Холла.** Пусть через проводник в виде прямоугольного бруска, находящегося в слабом магнитном поле  $B$ , течет электрический ток под действием приложенного электрического поля с напряженностью  $E$  (рис. 24.1). Магнитное поле будет отклонять носители заряда (электроны) от их движения к одной из граней проводника. При этом критерием малости магнитного поля будет служить условие, что электрон не начнет двигаться по циклоиде.

Таким образом, сила Лоренца приведет к накоплению отрицательного заряда на одной грани бруска и положительного на противоположной. Накопление заряда будет продолжаться до тех пор, пока возникшее поперечное электрическое поле зарядов с напряженностью  $E_{\perp}$  не скомпенсирует магнитную составляющую силы Лоренца:

$$evB = eE_{\perp}. \quad (24.1)$$

Если толщина бруска равна  $d$ , то между гранями возникнет разность потенциалов  $U = E_{\perp}d$ . Скорость движущихся электронов можно выразить через плотность тока:

$$v = \frac{j}{ne}, \quad (24.2)$$

и для возникшей разности потенциалов получается выражение

$$U = \frac{1}{ne}djB = RdjB. \quad (24.3)$$

Коэффициент  $R = 1/ne$  называется константой Холла в честь Э. Холла, открывшего этот эффект в 1879 г. в тонких пластинках золота. Измеряя константу  $R$ , можно найти концентрацию носителей заряда  $n$ . Если измерить удельную электропроводность  $\sigma$ , то можно рассчитать и подвижность электронов  $b = \sigma/ne$ . Для металлов характерное значение концентрации  $n \sim 10^{22} \text{ см}^{-3}$ , а подвижность  $b \sim 10 \text{ см}^2/(\text{с} \cdot \text{В})$ .

Эффект Холла также имеет место в полупроводниках  $n$ -и  $p$ -типа. Так как электроны и дырки будут отклоняться, то знак постоянной Холла зависит от знака носителей заряда. Это дает возможность определять на практике тип полупроводника.

Эффект Холла нашел широкое применение в разнообразных устройствах и приборах. Поскольку напряжение определяется, согласно (24.3), произведением плотности тока и индукции магнитного поля, то на основе эффекта Холла работают датчики, измеряющие как индукцию магнитного поля, так и силу тока в цепи. У промышленно выпускаемых датчиков при протекающем через датчик токе в несколько миллиампер в магнитном поле с индукцией

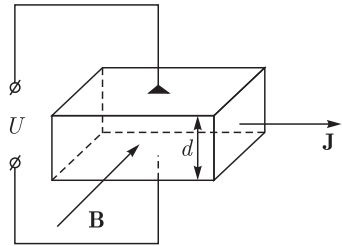


Рис. 24.1

десятичные доли тесла на датчике появляется напряжение несколько десятков милливольт.

Датчики Холла (ДХ) получили очень большое распространение для определения угла поворота ротора электродвигателя, коленчатого вала автомобиля и т.п. Датчики закрепляются на корпусе (статоре) двигателя, а на вращающийся вал (ротор) устанавливают небольшой постоянный магнит. При прохождении магнита вблизи датчика появляется импульс напряжения, который затем используется для управления работой электродвигателя или в системе зажигания автомобиля.

Широко применяются кристаллические датчики, изготавливаемые из германия, кремния, полупроводниковых соединений элементов третьей и пятой групп периодической системы Менделеева.

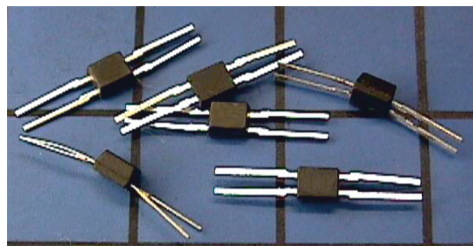


Рис. 24.2

Полупроводниковый материал, предназначенный для изготовления ДХ, должен обладать не только высокими, но и по возможности мало зависящими от температуры значениями постоянной Холла и подвижности носителей тока.

Как правило, используются полупроводники с электронной проводимостью, поскольку они имеют значительно большую подвижность носителей заряда, чем полупроводники с дырочной проводимостью. На рис. 24.2 показаны кристаллические ДХ, представляющие собой кристалл с напыленными контактами, к двум из которых прикладывается электрическое напряжение от внешнего источника, а с двух оставшихся снимается электрическое напряжение, пропорциональное произведению силы тока и индукции магнитного поля.

Для измерения токов в линиях электропередач применяются линейные датчики Холла (рис. 24.3). Они позволяют измерять силу тока в пределах

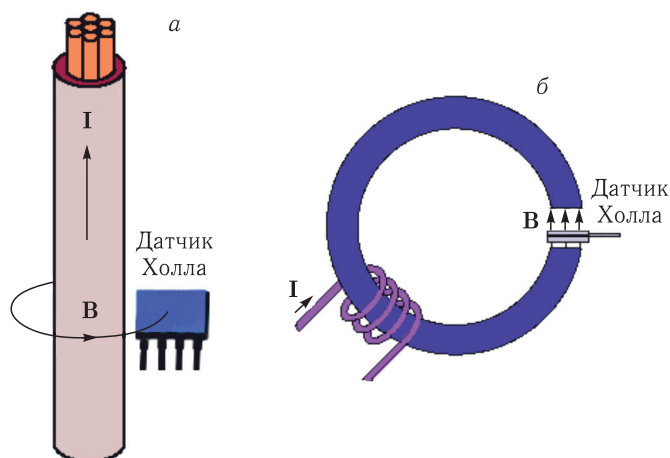


Рис. 24.3

от 250 мА до тысяч ампер. Важнейшим достоинством таких датчиков является полное отсутствие электрической связи с измеряемой цепью. Линейные датчики позволяют измерять постоянные и переменные токи, в том числе токи довольно высокой частоты.

Линейный датчик Холла помещается вблизи проводника с током (ситуация *а*). Выходное напряжение датчика будет пропорционально индукции магнитного поля, окружающего проводник, которая, в свою очередь, пропорциональна силе измеряемого тока.

Иногда датчик помещается в зазор магнитопровода (ситуация *б*), а измеряемый ток протекает через катушку, надетую на магнитопровод. Такая схема позволяет добиться большей чувствительности и точности измерений.

**Свойства *p-n*-перехода.** Интересные явления возникают при контакте полупроводников *n*-и *p*-типа. Технологически такой контакт достигается, если в одну часть чистого полупроводника добавить донорную примесь, а в другую часть — акцепторную. Как показано в предыдущей лекции, химический потенциал в полупроводнике *n*-типа (*электронном полупроводнике*) задается формулой

$$\mu_d = \frac{\varepsilon_g}{2} + k_B T \ln \frac{N_d}{n_i} \sqrt{\frac{N_h}{N_e}}. \quad (24.4)$$

Соответствующий ему энергетический уровень расположен вблизи дна зоны проводимости. Химический потенциал в полупроводнике *p*-типа (*дырочном полупроводнике*) задается формулой

$$\mu_a = \frac{\varepsilon_g}{2} - k_B T \ln \frac{N_a}{n_i} \sqrt{\frac{N_e}{N_h}}. \quad (24.5)$$

Соответствующий ему энергетический уровень расположен ближе к потолку валентной зоны.

На рис. 24.4 *а* изображены границы энергетических зон, примесные уровни и уровни, соответствующие химическим потенциалам полупроводников обоих типов. Различие химических потенциалов означает, что средняя энергия электрона в электронном полупроводнике больше, чем в дырочном.

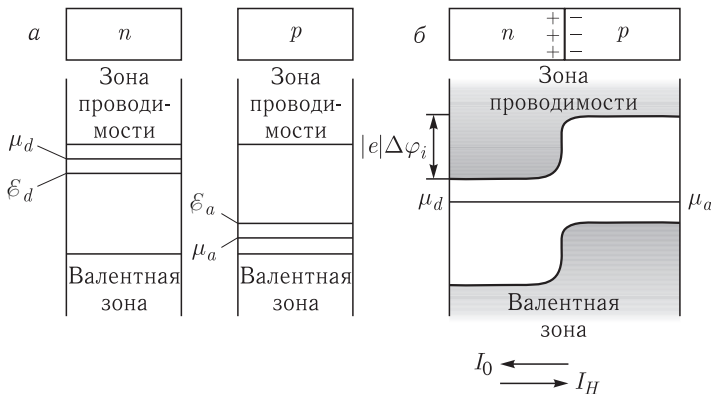


Рис. 24.4

Если полупроводники привести в контакт, то электроны (основные носители электронного полупроводника) начнут вследствие диффузии переходить из электронного в дырочный полупроводник, а дырки (основные носители дырочного полупроводника) — в обратном направлении. При переходе электронов в  $p$ -область они рекомбинируют с дырками вблизи границы раздела. Аналогично при переходе дырок в  $n$ -область они рекомбинируют с электронами. В результате вблизи границы создается отрицательный заряд ионизированных акцепторов со стороны  $p$ -области и положительный заряд ионизированных доноров со стороны  $n$ -области. Таким образом, появится диффузионный ток основных носителей  $I_0$ . В области контакта появится тонкий двойной слой (порядка долей микрона) из положительных доноров и отрицательных акцепторов. Внутри слоя концентрация дырок и электронов незначительна. В этом переходном обедненном носителями слое электрическое поле направлено от электронного к дырочному полупроводнику. Поле приведет к движению электронов и дырок в обратном направлении. Это движение можно трактовать как обратный ток уже неосновных носителей  $I_n$ .

По мере нарастания поля средняя энергия электронов в электронном полупроводнике начнет уменьшаться, а в дырочном — увеличиваться. Энергетические зоны для электронного полупроводника на рисунке начнут смещаться вниз, а для дырочного — вверх. Нарастание поля прекратится, когда сравняются химические потенциалы в обоих полупроводниках (рис. 24.4 б).

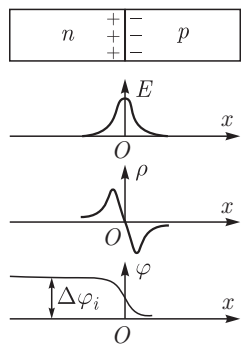


Рис. 24.5

На рис. 24.5 показаны распределения напряженности электрического поля  $E(x)$  в контактной области, объемной плотности заряда  $\rho(x)$  и потенциала  $\varphi(x)$  как функции координаты  $x$ , отсчитываемой от границы раздела двух полупроводников. Толщина контактного слоя, как отмечалось ранее, на несколько порядков может превосходить расстояние между атомами. По этой причине и можно говорить о диффузии электронов и дырок через контактный слой.

Разность потенциалов  $\Delta\varphi_i$ , называемая *внутренней контактной разностью потенциалов*, как видно из рис. 24.4, может быть найдена из условия

$$|e| \Delta\varphi_i = \mu_d - \mu_a. \quad (24.6)$$

С учетом выражений для химических потенциалов, записанных выше, получаем

$$\Delta\varphi_i(T) = \frac{1}{|e|} \left( k_B T \ln \frac{N_d}{n_i} \sqrt{\frac{N_h}{N_e}} + k_B T \ln \frac{N_a}{n_i} \sqrt{\frac{N_e}{N_h}} \right) = \frac{1}{|e|} k_B T \ln \frac{N_d N_a}{n_i^2}. \quad (24.7)$$

Если положить  $N_d = N_a = 10^{16} \text{ см}^{-3}$ ,  $n_i = 10^{13} \text{ см}^{-3}$ ,  $k_B T = 0,025 \text{ эВ}$ , то  $|e| \Delta\varphi_i = 0,35 \text{ эВ}$ , а разность потенциалов  $\Delta\varphi_i = 0,35 \text{ В}$ .

Внутренняя контактная разность потенциалов является *потенциальным барьером*, который преодолевают основные носители при их диффузионном движении. Она уменьшается с ростом температуры, так как  $n_i^2 \propto \exp(-\varepsilon_g/k_B T)$  (см. (23.16)).



Введем обозначения:  $n_n$  и  $p_n$  — концентрации электронов и дырок в электронном полупроводнике,  $n_p$  и  $p_p$  — концентрации электронов и дырок в дырочном полупроводнике соответственно. Полагая  $N_d = n_n$ ,  $N_a = p_p$  и записывая для электронного полупроводника  $N_d p_n = n_n p_n = n_i^2$ , а для дырочного полупроводника  $N_a n_p = p_p n_p = n_i^2$ , получаем оценку для концентраций неосновных носителей:

$$p_n = \frac{n_i^2}{n_n} = \frac{10^{26}}{10^{16}} = 10^{10} \text{ см}^{-3}, \quad n_p = \frac{n_i^2}{p_p} = \frac{10^{26}}{10^{16}} = 10^{10} \text{ см}^{-3}.$$

На рис. 24.6 показано распределение концентраций основных и неосновных носителей и схематично указано стрелками «направление» их движения, в результате которого возникают токи  $I_0$  и  $I_H$ .

В состоянии равновесия ток основных носителей будет скомпенсирован встречным током неосновных носителей, и полный ток через переход

$$I = I_0 - I_H = 0. \quad (24.8)$$

Наибольшее сопротивление в полупроводнике будет как раз в середине тонкого переходного слоя, где невысокая проводимость обусловлена низкой концентрацией собственных носителей  $n_i \sim 10^{13} \text{ см}^{-3}$ . Вне слоя концентрация основных носителей  $N_d \sim N_a \sim \sim 10^{16} \text{ см}^{-3}$ , и проводимость там значительно выше.

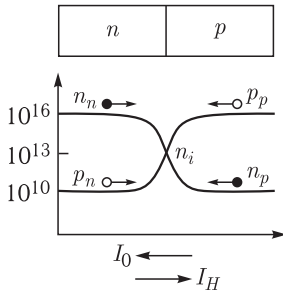


Рис. 24.6

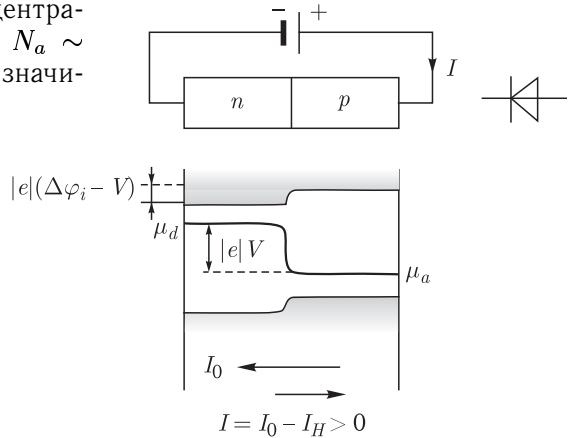


Рис. 24.7

**Полупроводниковый диод.** Приложим теперь внешнее напряжение  $V$  к полупроводнику с  $p$ - $n$ -переходом (рис. 24.7). Если внешний источник подключен в *прямом направлении*, как изображено на рисунке, то уровень химического потенциала и система энергетических зон электронного полупроводника сдвинется вверх на величину  $|e|V$  относительно аналогичных величин дырочного полупроводника. Первоначальный потенциальный барьер (см. (24.6)) понизится:

$$\Delta\varphi = \Delta\varphi_i - V = \frac{\mu_d - \mu_a}{|e|} - V, \quad (24.9)$$

диффузионный ток  $I_0$  основных носителей увеличится, ток  $I_H$  останется прежним, и в цепи появится электрический ток  $I = I_0 - I_H > 0$ .

Возрастание тока  $I$  можно рассчитать следующим образом. В зоне проводимости, где  $\mathcal{E} > \mu$ , функция распределения Ферми–Дирака может быть представлена в виде (23.7a):  $f(\mathcal{E}) \approx f_1(\mathcal{E}) = \exp\left(-\frac{\mathcal{E} - \mu}{k_B T}\right)$ . Следовательно, распределение электронов по энергиям в зоне проводимости по виду совпадает с экспоненциальным распределением Больцмана. При наличии потенциального барьера (24.9) отношение концентрации электронов  $n_p$  (неосновных носителей) в дырочном полупроводнике к концентрации электронов  $n_n$  (основных носителей) в электронном полупроводнике будет равно:

$$\frac{n_p}{n_n} = \exp\left(-\frac{|e|\Delta\varphi - \mu_a + \mu_d}{k_B T}\right) = \exp\left(-\frac{|e|V}{k_B T}\right). \quad (24.10)$$

Поскольку отношение токов  $I_o/I_n = n_n/n_p$ , то полный ток будет равен

$$I = I_o - I_n = I_n \left(\frac{I_o}{I_n} - 1\right) = I_n \left[\exp\left(\frac{|e|V}{k_B T}\right) - 1\right]. \quad (24.11)$$

Зависимость силы тока от величины приложенного напряжения называется *вольт-амперной характеристикой*.

Если источник подключить в *обратном направлении* ( $V < 0$ ), то потенциальный барьер  $\Delta\varphi = \Delta\varphi_i - V$  увеличится. По мере роста напряжения ток  $I_o$  будет быстро уменьшаться до нуля, и полный ток в цепи  $I = -I_n < 0$ . Это также следует из формулы (24.11).

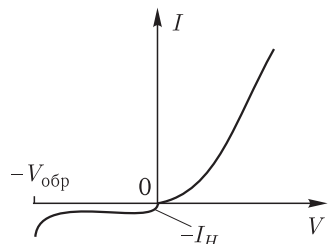


Рис. 24.8

На рис. 24.8 изображена вольт-амперная характеристика  $p$ - $n$ -перехода. Из нее видно, что такой переход обладает односторонней проводимостью. При напряжениях, превышающих  $V_{обр}$ , ток резко возрастает, и возникает пробой  $p$ - $n$ -перехода, который может приводить к выходу полупроводника из строя.

Свойство односторонней проводимости перехода лежит в основе работы полупроводникового устройства — *полупроводникового диода*.

Полупроводниковый диод (ПД) — полупроводниковый прибор с одним электрическим переходом и двумя выводами (электродами). Его схематическое изображение показано на рис. 24.7.

На резкой несимметричности вольт-амперной характеристики (ВАХ) основана работа выпрямительных диодов. Для выпрямительных устройств и др. силовых электрических цепей выпускаются выпрямительные (силовые) ПД, имеющие допустимый выпрямленный ток до 300 А и максимальное допустимое обратное напряжение  $V_{обр}$  от 20–30 В до 1–2 кВ. ПД могут применяться также для слаботочных цепей ( $I \leq 0,1$  А). Инерционность выпрямительных диодов, обусловленная тем, что время жизни инжектированных дырок  $\geq 10^{-5}$ – $10^{-4}$  с, ограничивает частотный предел их применения (50–2000 Гц). Использование специальных технологических приемов (главным образом легирование германия и кремния золотом) позволило снизить время переключения до  $10^{-7}$ – $10^{-10}$  с и создать быстродействующие импульсные ПД.

На рис. 24.9 изображены две электрические схемы, иллюстрирующие принцип работы выпрямительных устройств. С использованием одного диода можно осуществить лишь однополупериодное выпрямление (а). Если использовать так называемый диодный мостик, состоящий из четырех диодов, то можно осуществить двухполупериодное выпрямление (б).

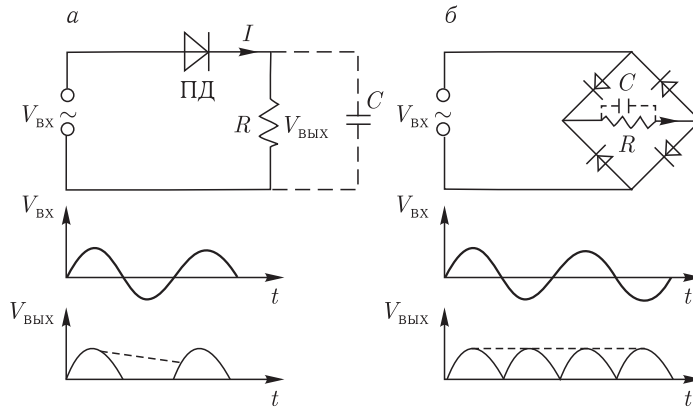


Рис. 24.9

Чтобы сгладить пульсации выходного (выпрямленного) напряжения, параллельно нагрузке (сопротивлению) подключают конденсатор  $C$ , который, периодически разряжаясь (изображено штриховой линией), не дает выходному напряжению уменьшаться до нуля.

При невысоких пробивных напряжениях обычно развивается не тепловой, а обратимый лавинный пробой  $p$ - $n$ -перехода — резкое нарастание тока при почти неизменном напряжении, которое называется напряжением стабилизации  $V_{ст}$ . На использовании такого пробоя основана работа полупроводниковых стабилитронов. Стабилитроны общего назначения с напряжением  $V_{ст}$  от единиц до сотен вольт применяют главным образом в стабилизаторах и ограничителях постоянного и импульсного напряжений.

Помимо вышеупомянутых, применяются также высокочастотные диоды (смесительные, параметрические, усилительные и генераторные, умножительные, переключательные), оптоэлектронные (видеодетекторы, фотодиоды, светоизлучающие диоды и светодиодные лазеры) и др. Первые из них служат для преобразования электрических сигналов высоких и сверхвысоких частот (СВЧ), а вторые — для преобразования электрической энергии в световую, или наоборот, световой в электрическую энергию. О некоторых из них пойдет речь ниже.

**Транзистор.** Еще большими возможностями обладает *транзистор* — полупроводниковый прибор с двумя электрическими переходами и тремя выводами (электродами).

На рис. 24.10а показан биполярный транзистор  $n$ - $p$ - $n$ -типа. Левая область называется эмиттером, правая — коллектором, а между ними находится тонкая область, называемая базой. В этом случае пришедшие из эмиттера носители не успевают рекомбинировать в базе и почти все доходят

до коллектора. Ниже показано схематическое изображение транзистора. Транзистор может быть и  $p-n-p$ -типа. Тогда эмиттером и коллектором являются дырочные полупроводники, а базой — тонкий электронный полупроводник. Его схематичное изображение отличается направлением стрелки, нарисованной на электроде эмиттера.

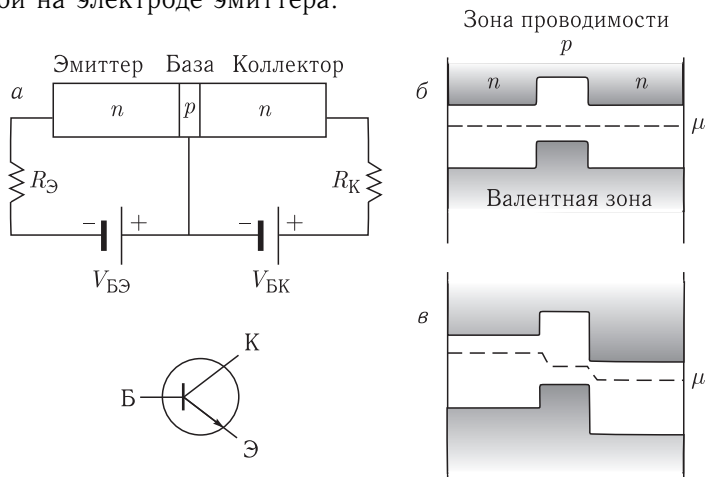


Рис. 24.10

Рассмотрим основные процессы, происходящие, например, в транзисторе  $n-p-n$ -типа. При равенстве химических потенциалов всех трех областей энергетическое положение валентных и зон проводимостей соответствует ситуации б.

Приложим теперь к переходу «база–эмиттер» в прямом направлении напряжение  $V_{бэ}$ , а к переходу «база–коллектор» — напряжение  $V_{бк}$ , но уже в обратном направлении. Второе напряжение обычно в несколько раз больше первого (например,  $V_{бэ} = 1,5 \text{ В}$ ,  $V_{бк} = 9 \text{ В}$ ), поэтому произойдет несимметричное смещение энергетических зон и изменение химических потенциалов (ситуация в).

Электроны из эмиттера будут диффундировать через низкий барьер в тонкую базу, и абсолютное большинство из них легко «скатятся с высокой энергетической горки» в коллектор. Следовательно, ток эмиттера  $I_э$  будет равен сумме тока  $I_к$ , текущего через коллектор, и небольшого тока  $I_б$ , ответвляющегося в базу.

Если в цепь эмиттера включить омическое сопротивление  $R_э$ , на которое дополнительно подать небольшое переменное напряжение  $V_{вх} \ll V_{бэ}$ , то будет изменяться ток эмиттера  $I_э$  и практически равный ему ток коллектора:  $I_к \approx \approx I_э$ . Если в цепь коллектора включить большое омическое сопротивление  $R_к \gg R_э$ , то напряжение на нем (выходное напряжение  $V_{вых}$ ) будет равно

$$V_{вых} = V_{вх} \frac{R_к}{R_э} \gg V_{вх}. \quad (24.12)$$

Таким способом осуществляется усиление малых входных напряжений. Если положить  $R_э = 100 \text{ Ом}$ ,  $R_к = 10 \text{ кОм}$ , то напряжение будет усилено в 100 раз.

Совершенно очевидно, что таким же способом можно осуществить и усиление слабого тока базы, если сделать последний переменным.

Рассмотренный транзистор называется *биполярным*. Его используют в аналоговой технике, где необходимо преобразовывать токи и электрические напряжения. В транзисторе маленький ток может управлять большим током. Но управление не обязательно подразумевает усиление. Можно управлять сигналами, несущими информацию — логические нули и единицы. А это значит, что можно целенаправленно изменять хранимую информацию — то есть обрабатывать ее, что и делает микропроцессор, работая на двоичной логике.

**Полевой транзистор.** В цифровой технике (логика, память, процессоры, компьютеры, цифровая связь и т.п.) широкое распространение получили *полевые* транзисторы, изготовленные по технологии МОПТ (металл–оксид–полупроводник–транзистор).

Полевой транзистор — это полупроводниковый прибор, в котором ток управляется действием перпендикулярного току электрического поля, создаваемого входным сигналом. Существуют транзисторы с управляемым  $p$ – $n$ -переходом или переходом металл–полупроводник и транзисторы с управлением посредством изолированного электрода (затвора), называемые транзисторы МДП (металл–диэлектрик–полупроводник).

На рис. 24.11 изображено устройство транзистора МДП с индуцированным (а) и встроенным (б) каналами, по которым течет ток. В кристалле полупроводника  $p$ -типа (кремния Si) с относительно высоким удельным сопротивлением, который называют подложкой, созданы две сильнолегированные области  $n$ -типа, расстояние между которыми может быть меньше одного микрона. На эти области нанесены металлические электроды — исток и сток. Поверхность кристалла полупроводника между истоком и стоком покрыта тонким слоем (порядка 0,1 мкм) двуокиси кремния  $\text{SiO}_2$ , являющегося диэлектриком. На слой диэлектрика нанесен электрод — затвор. Между истоком и стоком при подаче положительного напряжения на затвор образуется канал  $n$ -типа, по которому перемещаются носители заряда (течет ток стока). Если же аналогичные транзисторы созданы на подложке с электропроводностью  $n$ -типа, легированные области будут полупроводниками  $p$ -типа, то канал у них будет иметь электропроводность  $p$ -типа.

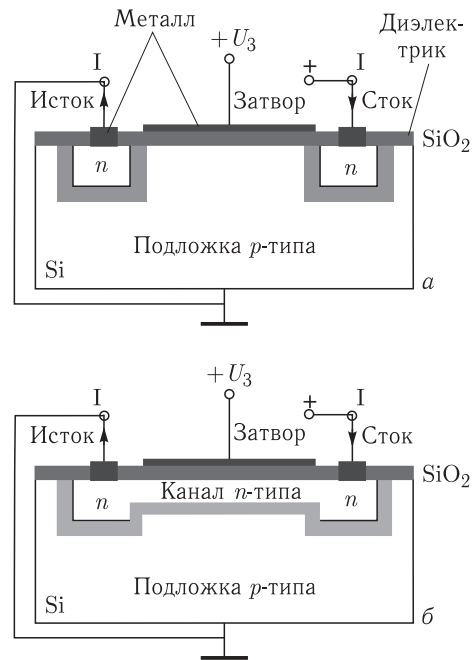


Рис. 24.11

В случае (а) проводящий канал, без напряжения  $U_z$  на управляющем затворе, отсутствует. Заметный ток стока  $I$  появляется только при определенном положительном значении напряжения на затворе относительно истока, которое называют пороговым напряжением.

При напряжениях на затворе, больших порогового, у поверхности полупроводника под затвором возникает обогащенный носителями слой, который и является каналом, соединяющим исток со стоком. Толщина и поперечное сечение канала будут изменяться вместе с напряжением на затворе. Поэтому будет изменяться ток стока и напряжение на нагрузке.

В случае (б) у поверхности полупроводника под затвором уже существует канал, который соединяет исток со стоком. Поперечное сечение и проводимость канала будут изменяться при изменении величины напряжения  $U_z$  и его полярности.

Обычно ток в цепи затвора, отделенного от основной цепи диэлектриком, ничтожно мал. Однако ток в цепи стока может быть значительным. Это позволяет осуществлять усиление входного сигнала и его мощности.

Транзисторы изготавливаются в рамках интегральной технологии на одном кремниевом кристалле (чипе) и составляют элементарный «кирпичик» для построения микросхем логики, памяти, процессора и т.п. С помощью современных технологий удалось разместить на одном кристалле площадью порядка  $1\text{ см}^2$  несколько миллиардов МОПТ. В качестве иллюстрации на рис. 24.12 показан внешний вид современного чипа, у которого размер МОПТ составляет  $30 \times 30\text{ нм}$ .

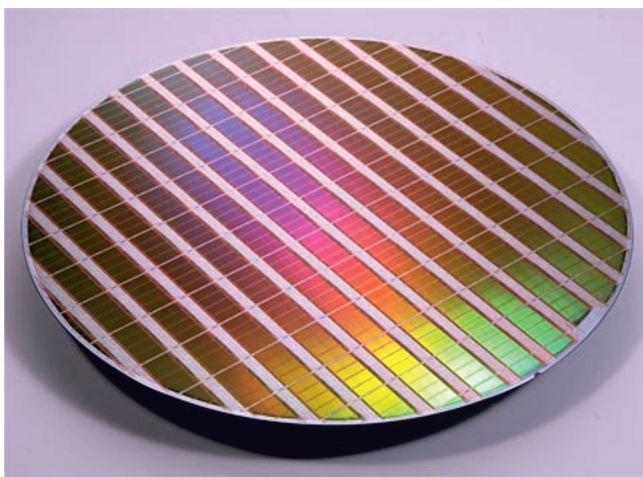


Рис. 24.12

Уменьшение размеров МОПТ приводит также к повышению быстродействия процессоров, снижению энергопотребления и тепловыделения. В настоящее время ведется внедрение 3-мерных (3D-транзисторов) в микропроцессоры. Эта революционная технология позволяет существенно повысить производительность процессоров на десятки процентов при одновременном (в разы) уменьшении энергопотребления.

**Контактная разность потенциалов.** Если два различных металла привести в соприкосновение, то между ними возникает разность потенциалов, называемая контактной разностью потенциалов. Контактная разность потенциалов для различных металлов составляет от десятых долей до единиц вольт.

Итальянский физик А. Вольта (1745—1827) установил, что если металлы Al, Zn, Sn, Pb, Sb, Bi, Hg, Fe, Cu, Ag, Au, Pt, Pd привести в контакт в указанной последовательности, то каждый предыдущий при соприкосновении с одним из следующих зарядится положительно. Этот ряд называется рядом Вольта. Вольта экспериментально установил два закона:

1. Контактная разность потенциалов зависит лишь от химического состава и температуры соприкасающихся металлов.

2. Контактная разность потенциалов последовательно соединенных различных проводников, находящихся при одинаковой температуре, не зависит от химического состава промежуточных проводников и равна контактной разности потенциалов, возникающей при непосредственном соединении крайних проводников.

При контакте двух металлов из-за различия их энергий Ферми  $\mathcal{E}_F$  и работ выхода  $A_{\text{вых}}$  возникает внутренняя и внешняя контактная разность потенциалов. На рис. 24.13 изображены два вначале разделенных металлических проводника, а под ними — соответствующие энергетические зоны проводимости и уровни Ферми. Длина вертикальной стрелки соответствует работе выхода  $A_{\text{вых}}$ : работе, необходимой для удаления электрона с уровня Ферми

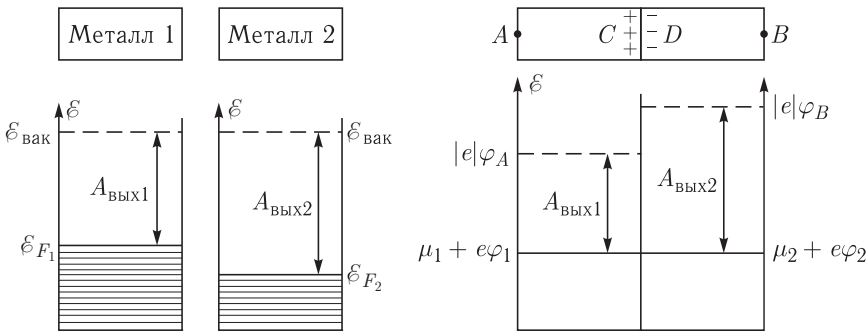


Рис. 24.13

в вакуум. При попадании в вакуум электрон приобретает энергию  $\mathcal{E}_{\text{вак}}$ . Напомним, что энергия Ферми металла определяется по формуле (21.29):

$$\mathcal{E}_F = \frac{p_F^2}{2m} = \frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{3\pi^2 Z N}{V} \right)^{2/3}. \quad (24.13)$$

Химические потенциалы проводников, согласно (21.44), будут также различаться:

$$\mu = \mathcal{E}_F \left( 1 - \frac{\pi^2}{12} \left( \frac{k_B T}{\mathcal{E}_F} \right)^2 \right). \quad (24.14)$$



У металлов, как отмечалось в лекции 21, вплоть до температур плавления выполняется сильное неравенство  $k_B T \ll \mathcal{E}_F$ , поэтому отличие химического потенциала от энергии Ферми незначительное.

Если два проводника привести в контакт, то электроны из проводника с большим химическим потенциалом (меньшей работой выхода) начнут перетекать в проводник с меньшим химическим потенциалом (большей работой выхода). Энергия электронов, заселяющих более низкие энергетические уровни второго проводника, начнет повышаться, а энергия электронов в первом проводнике — понижаться. Металл 2 получит отрицательный заряд, а металл 1 окажется заряженным положительно.

Между точками  $C$  и  $D$ , прилегающими к контакту, возникнет внутренняя контактная разность потенциалов  $\Delta\varphi_i = \varphi_C - \varphi_D$ , определяемая из равенства энергий  $\mu_1 + e\varphi_C = \mu_2 + e\varphi_D$ , или

$$e\Delta\varphi_i(T) = \mu_2 - \mu_1 = \mathcal{E}_{F2} - \mathcal{E}_{F1} + \frac{\pi^2(k_B T)^2}{12} \left( \frac{1}{\mathcal{E}_{F1}} - \frac{1}{\mathcal{E}_{F2}} \right). \quad (24.15)$$

Величина  $\Delta\varphi_i$  зависит от разности энергий Ферми соприкасающихся металлов и температуры контактного слоя и приблизительно равна разности энергий Ферми соприкасающихся металлов.

Внутренняя контактная разность потенциалов возникает в тонком контактном слое с толщиной порядка межатомного расстояния. По этой причине здесь некорректно говорить о диффузии электронов из одного металла в другой.

Число электронов, участвующих в переходе через контактный слой, составляет единицы процентов от общего числа электронов, находящихся на поверхности металла. Столь незначительное изменение концентрации электронов в контактном слое, с одной стороны, и малая по сравнению с длиной свободного пробега электрона его толщина — с другой, не могут привести к заметному изменению проводимости контактного слоя по сравнению с остальной частью металла. Поэтому электрический ток протекает через контакт в обоих направлениях. При комнатных температурах  $\Delta\varphi_i \sim 10^{-2} - 10^{-1}$  В.

Нетрудно видеть, что потенциальная энергия электронов в точках  $A$  и  $B$ , лежащих вне металлов в непосредственной близости к их поверхности, будет различной. Следовательно, между точками  $A$  и  $B$  также устанавливается

разность потенциалов, которая называется *внешней контактной разностью потенциалов*  $\Delta\varphi_e$ . Ее величина определяется равенством:

$$|e| \Delta\varphi_e = A_{\text{вых}2} - A_{\text{вых}1}. \quad (24.16)$$

Работа выхода  $A_{\text{вых}}$  у металлов составляет несколько электронвольт: 3,74 эВ (Zn); 4,25 эВ (Al); 4,30 эВ (Ag); 4,47 эВ (Cu); 4,54 эВ (W) и т. д. Поэтому внешняя контактная разность потенциалов  $\Delta\varphi_e \sim 0,1 - 1,0$  В.

Наличие этой разности потенциалов доказал Вольт в следующем опыте (рис. 24.14). Он прикрепил к электromетру цинковый диск, а сверху приложил к нему диск из меди. Поскольку энергия Ферми у цинка больше,

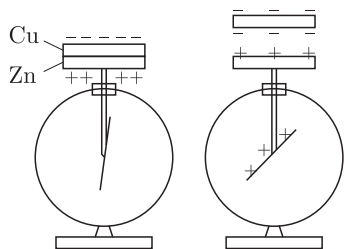


Рис. 24.14



чем у меди, то цинковый диск зарядится положительно, а медный — отрицательно. При удалении медной пластины часть зарядов с цинкового диска переместится на стрелку электрометра, и она заметно отклонится.

Приведем теперь в контакт последовательно несколько разнородных проводников, имеющих одинаковую температуру. Поскольку химические потенциалы всех проводников выравниваются, то *разность потенциалов между концами разомкнутой цепи равна разности работ выхода крайних металлов.*

**Термоэлектричество.** Термоэлектричество было открыто немецким ученым Т. Зеебеком в 1822 г. Зеебек обнаружил, что при замыкании концов цепи, состоящей из двух разнородных металлических материалов, контакты которых находились при разных температурах, магнитная стрелка, помещенная вблизи этой цепи, поворачивалась так же, как в присутствии магнита. Это свидетельствовало о наличии в цепи электрического тока. Угол поворота стрелки был связан с величиной разности температур на контактах исследуемой цепи. Данное явление получило название «эффект Зеебека».

Для объяснения этого явления рассмотрим замкнутую цепь, состоящую из двух металлов. Для этого можно сварить (спаять) концы двух проволок в точках А и В (рис. 24.15). В точках контактов возникнет, в соответствии с формулой (24.15), внутренняя контактная разность потенциалов. Если температуры спаев одинаковы, то и внутренние контактные разности также будут одинаковы. При обходе по замкнутой цепи суммарное изменение потенциала будет равно нулю.

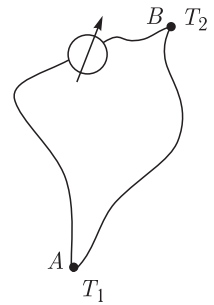


Рис. 24.15

Если теперь температуры контактов будут разными, то суммарное изменение потенциала будет равно

$$\zeta = \Delta\varphi_i(T_1) - \Delta\varphi_i(T_2) = \frac{\pi^2}{12|e|} \left( \frac{1}{\varepsilon_{F1}} - \frac{1}{\varepsilon_{F2}} \right) k_B^2 (T_1^2 - T_2^2). \quad (24.17)$$

Следовательно, в цепи появится электрический ток. Чтобы поддерживать этот ток, надо поддерживать разность температур обоих спаев. Величина  $\zeta$  называется *термоэлектродвижущей силой* (ТЭДС.). Цепь из двух спаянных проводников называется *термопарой*.

Поскольку формула (24.14) содержит лишь первый член разложения химического потенциала, то она, и выражение (24.15) справедливы при  $k_B T \ll \varepsilon_F$ . При произвольных температурах спаев ТЭДС будет некоторой нелинейной функцией разности их температур:

$$\zeta = f(T_1 - T_2). \quad (24.18)$$

Вид этой функции устанавливают экспериментально путем градуировки термопары. Один ее конец поддерживают при постоянной температуре  $T_2 = \text{const}$ , а температуру  $T_1$  другого спая пошагово изменяют контролируемым образом и для каждого шага фиксируют ТЭДС.

Проградуированная термопара служит простым, дешевым и надежным термометром для измерения температур в диапазоне от  $-200^\circ\text{C}$  до  $2500^\circ\text{C}$ .

При этом обеспечивается высокая точность измерения температуры (вплоть до  $\pm 0,01$  °C).

Если разность температур невелика, то (24.18) аппроксимируют линейной функцией

$$\zeta = \alpha \cdot (T_1 - T_2). \quad (24.19)$$

Величина  $\alpha$  равна термоэлектродвижущей силе при разности температур спаев в один градус и называется *дифференциальной термоЭДС*.

Измерения показывают, что если в качестве одного (опорного) проводника взять платину (Pt) и поддерживать холодный спай при постоянной температуре  $T_2 = 273$  К (ноль градусов Цельсия), а температура горячего спая равна  $T_1 > T_2$ , то дифференциальные термоЭДС у разных термопар будут равны:  $\alpha = -65,0$  мкВ/К (для термопары Bi-Pt);  $\alpha = -16,4$  мкВ/К (Ni-Pt);  $\alpha = +7,4$  мкВ/К (Cu-Pt);  $\alpha = +16,0$  мкВ/К (Fe-Pt);  $\alpha = +47,0$  мкВ/К (Sb-Pt). Здесь знак «минус» означает, что в горячем спае ток течет от металла к платине, а «плюс» — от платины в металл.

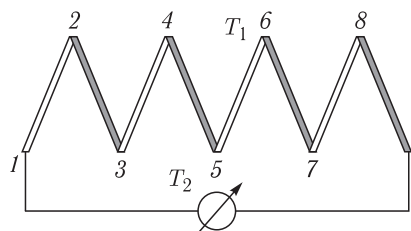


Рис. 24.16

Для того чтобы увеличить ТЭДС, термопары соединяют последовательно так, как изображено на рис. 24.16. В результате образуется термобатарея. Четные спаи батареи поддерживают при температуре  $T_1$ , а нечетные — при температуре  $T_2$ .

Миниатюрные термобатареи используют для измерения интенсивности света.

Для этого в устройстве, называемом термостолбиком, монтируется термобатарея таким образом, чтобы свет попадал на четные спаи. Из-за поглощения света эти спаи будут нагреваться. Чувствительный гальванометр отреагирует на появление ничтожной термоЭДС, поэтому этот метод измерения интенсивности света обладает уникальной чувствительностью.

В лекционном эксперименте при поднесении руки на расстояние нескольких метров от термостолбика последний отреагирует на наличие теплового излучения, хотя температура его спаев может повыситься лишь на миллионные доли градуса.

Большая термобатарея может использоваться как термогенератор — устройство для выработки электроэнергии.

В 30-х–50-х гг. XX в. было выпущено большое количество термоэлектрических генераторов, работавших от различного типа теплоносителей (керосиновой лампы, керогаса и даже костра). Термогенераторы были применены и на атомной электростанции. Постепенно интерес к их широкому использованию ослаб ввиду очень низкого КПД, в лучшем случае едва достигавшего 3%.

Значительно большая ТЭДС возникает при использовании пары полупроводников. Применяя формулу (24.7), для ТЭДС получаем выражение:

$$\zeta = \Delta \varphi_i(T_1) - \Delta \varphi_i(T_2) = \frac{1}{e} k_B \left[ T_1 \ln \frac{N_d N_a}{n_i^2(T_1)} - T_2 \ln \frac{N_d N_a}{n_i^2(T_2)} \right]. \quad (24.20)$$

Полагая  $T_1 - T_2 \sim 10^2 \text{ К}$ , получаем  $\zeta \sim 1,0 \text{ В}$ . Эта величина практически на два порядка больше термоЭДС металлической термопары, находящейся при той же разности температур. Кроме того, низкая теплопроводность полупроводников позволяет достичь большего КПД преобразования тепловой энергии в электрическую.

При хорошем тепловом контакте одной группы спаев термобатареи с каким-либо источником теплоты, например, небольшим количеством радиоактивного вещества, КПД преобразования тепловой энергии в электрическую в таких термоэлектрических генераторах может достигать более 15 %.

Термоэлектрические генераторы находят применение в удаленных точках на Земле (например, в Арктике) и на межпланетных станциях, где от источника питания требуются большая долговечность, малые размеры, отсутствие движущихся механических деталей и пониженная чувствительность к условиям окружающей среды.

**Эффект Пельтье.** В 1834 г. французский часовщик Ж. Пельтье наблюдал удивительное явление: при протекании электрического тока через контакт полоски висмута с медным проводником контакт может как нагреваться, так и остывать. Знак этого термоэлектрического явления зависит от направления электрического тока, текущего через соединение проводников.

Позднее, в 1838 г. русский физик Э. Ленц экспериментировал с каплей воды, помещенной на стыке двух проводников — висмута и сурьмы. При пропускании тока в направлении от Bi к Sb капля воды замерзала, а при изменении направления тока на противоположное — таяла. Тем самым было установлено, что при прохождении тока через контакт двух проводников в одном направлении тепло выделяется, в другом — поглощается. Данное явление было названо эффектом Пельтье.

Эффект Пельтье можно наблюдать, если температуру контакта измерять с помощью газового термометра, как это изображено на рис. 24.17. При нагревании контакта воздух в колбе термометра расширяется, что фиксируется с помощью капли жидкости в трубке. Если изменить направление тока, то изменится направление движения капли.

Опыт показал, что количество выделенного или поглощенного тепла

$$Q = \Pi \cdot I \cdot t, \quad (24.21)$$

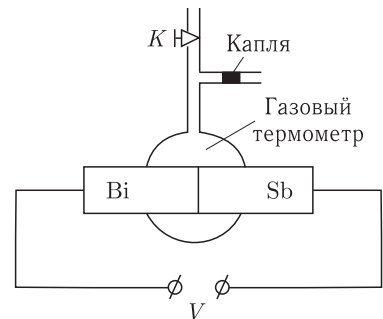


Рис. 24.17

где  $\Pi$  — коэффициент Пельтье, который зависит от природы контактирующих материалов и их температуры. В отличие от тепла Джоуля–Ленца, которое пропорционально квадрату силы тока, тепло Пельтье пропорционально силе тока в первой степени и может иметь разный знак.

Классическая теория объясняет явление Пельтье тем, что при движении электронов из одного металла в другой они ускоряются или замедляются внутренней контактной разностью потенциалов между металлами. В случае ускорения кинетическая энергия электронов увеличивается, а затем выделяется в виде тепла. В другом случае кинетическая энергия уменьшается

и затем пополняется за счет энергии тепловых колебаний атомов, что влечет за собой охлаждение. Поэтому коэффициент Пельтье по порядку величины совпадает с величиной внутренней контактной разности потенциалов.

Для металлов характерные значения  $\Pi \sim 10^{-3} - 10^{-2}$  В, и эффект от одного контакта невелик. Для практического применения можно использовать термобатарею, пропуская через ее термоэлементы ток. Одна группа спаев термобатареи будет нагреваться, а другая — охлаждаться. Таким образом, термобатарею можно использовать либо как термоэлектрический нагреватель, либо как термоэлектрический холодильник.

Поскольку внутренняя контактная разность потенциалов у полупроводников гораздо больше, чем у металлов, то и эффект Пельтье в полупроводниках намного сильнее.

**Термоэлектрический модуль.** В настоящее время объединение большого количества пар полупроводников  $p$ - и  $n$ -типа используется в охлаждающих элементах — термоэлектрических модулях Пельтье сравнительно большой мощности (рис. 24.18).

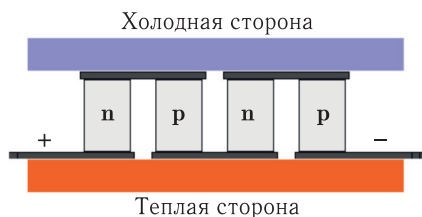


Рис. 24.18

Модуль Пельтье представляет собой термоэлектрический холодильник, состоящий из последовательно соединенных полупроводников  $p$ - и  $n$ -типа, образующих  $p$ - $n$ - и  $n$ - $p$ -переходы. Каждый из таких переходов имеет тепловой контакт с одним из двух радиаторов. В результате прохождения

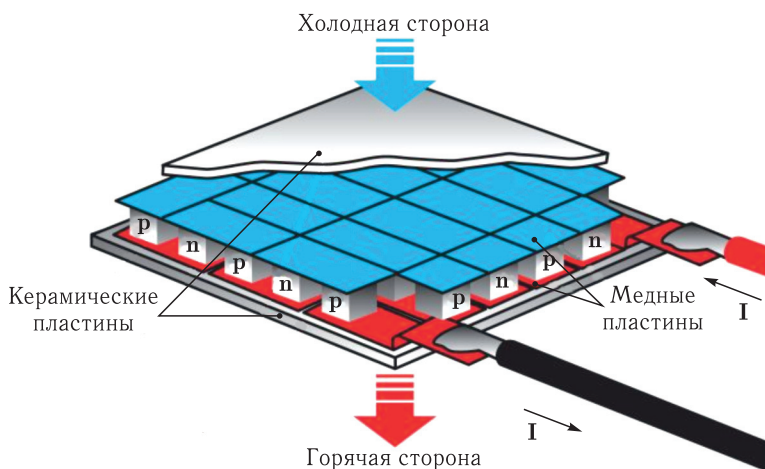


Рис. 24.19

электрического тока определенной полярности образуется перепад температур между радиаторами модуля Пельтье: один радиатор работает как холодильник, другой радиатор нагревается и служит для отвода тепла.

Устройство модуля Пельтье, обеспечивающего перепад температуры в несколько десятков градусов, показано на рис. 24.19. Полупроводники с разным типом проводимости находятся между двумя медными пластинами, прямоугольные проводящие области которых отделены друг от друга. Пластины обеспечивают хороший электрический контакт и имеют высокую теплопроводность. Поверх медных пластин расположены керамические пластины.

При принудительном охлаждении нагревающейся стороны (например, вентилятором) модуль позволяет достичь на другой стороне отрицательных значений температур. Устройства охлаждения на основе модулей Пельтье часто называют активными холодильниками, или кулерами Пельтье. При изменении направления тока  $I$  кулер становится нагревателем.

## ПОЛУПРОВОДНИКОВЫЕ УСТРОЙСТВА. НИЗКОРАЗМЕРНЫЕ СТРУКТУРЫ

### ЛЕКЦИЯ 25

**Флэш-память.** Флэш-память — это особый вид энергонезависимой перезаписываемой полупроводниковой памяти, изобретенной в компании Toshiba в 1984 г. В отличие от существующих к тому моменту запоминающих устройств, в этих устройствах удалось совместить высокую плотность хранения информации при одновременной компоновке электрических цепей стирания информации. Название «флэш» возникло потому, что процесс стирания содержимого памяти напоминает фотовспышку (от англ. «*flash*»).

Ячейка традиционной флэш-памяти представляет собой транзистор с двумя электродами (исток и сток) и двумя изолированными затворами (управляющим и плавающим) (рис. 25.1).

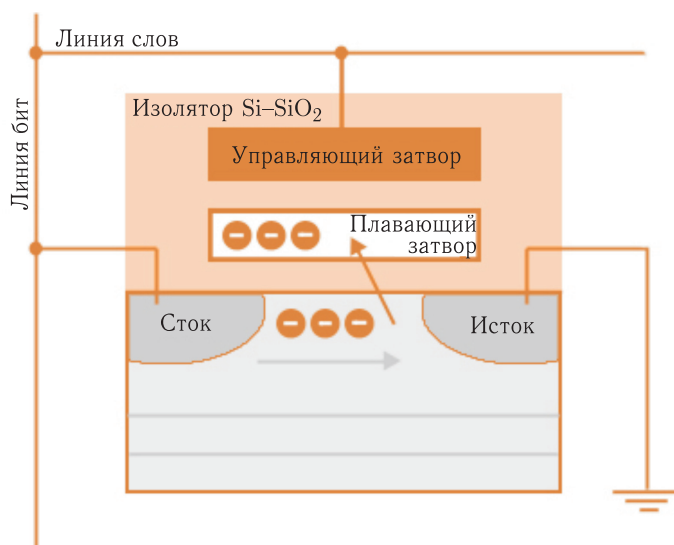


Рис. 25.1

При записи информации между электродами существует поток электронов, который управляется электрическим полем, создаваемым управляющим затвором. Некоторые из электронов преодолевают слой изолятора и попадают на плавающий затвор. На нем они могут храниться в течение нескольких лет. Определенное количество электронов (заряд) на плавающем затворе соответствует логической единице, а все, что больше его, — нулю. Заряд на плавающем затворе изменяет проводимость канала сток–исток, что используется при считывании информации.

Для стирания информации на управляющий затвор подается высокое отрицательное напряжение, и электроны с плавающего затвора переходят (туннелируют) на исток. В технологиях различных производителей этот принцип работы может отличаться по способу подачи тока и чтения данных из ячейки.

Запись и считывание информации сильно различаются в энергопотреблении: устройства флэш-памяти потребляют достаточно большой ток при записи, тогда как при считывании затраты энергии малы.

Информация, записанная на флэш-память, может храниться очень длительное время (от 20 до 100 лет), и способна выдерживать значительные механические нагрузки (в 5–10 раз превышающие предельно допустимые для обычных жестких дисков).

Технологически ячейки объединяются в массив (матрицу), представляющую собой интегральную схему. Современные технологии позволяют довести размер ячейки до нескольких десятков нанометров.

В настоящее время распространение получили два вида соединения ячеек в массив. Соответствующие названия массивов: NOR-память (логическая схема ИЛИ–НЕ) и NAND-память (логическая схема И–НЕ).

Конструкция NOR (рис. 25.2) использует классическую двумерную матрицу проводников («строки» и «столбцы»), в которой на пересечении установлено по одной ячейке. В NOR-архитектуре к каждому транзистору необходимо подвести индивидуальный контакт, что увеличивает размеры схемы. При этом проводник строк подключался к стоку транзистора, а проводник столбцов — ко второму затвору. Исток подключается к общей для всех подложке. В такой конструкции можно легко считывать состояние конкретного транзистора, подав положительное напряжение на один столбец и одну строку.

Технология NOR позволяет получить быстрый доступ индивидуально к каждой ячейке, однако площадь ячейки велика. NOR используется как непосредственная память программ микропроцессоров и для хранения небольших вспомогательных данных. Предельные значения объемов памяти микросхем NOR — 64 МБайт.

Конструкция NAND (рис. 25.3) — трехмерный массив, имеющий малую площадь ячейки, но относительно длительный доступ сразу к большой группе ячеек. От NOR-типа эта конструкция отличается только размещением ячеек и их контактами: вместо одного транзистора в каждом пересечении устанавливается столбец из последовательно включенных ячеек. В результате уже не требуется подводить индивидуальный контакт к каждой ячейке, так что размер и стоимость NAND чипа может быть существенно меньше. Также запись и стирание происходит быстрее. Плотность компоновки можно резко

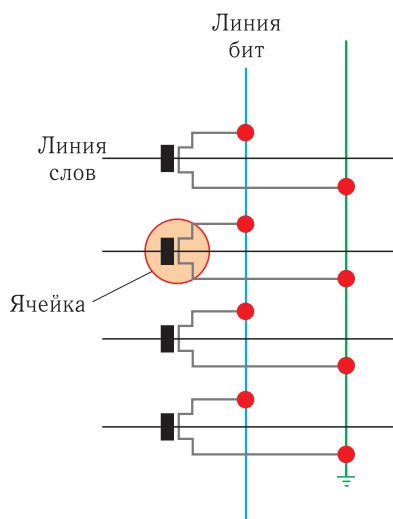


Рис. 25.2

увеличить (ведь к одной ячейке в столбце подходит только один проводник затвора), однако алгоритм доступа к ячейкам для чтения и записи заметно усложняется.

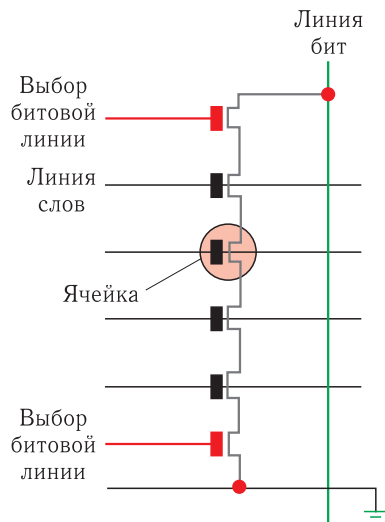


Рис. 25.3

Вследствие большой емкости и компактных размеров NAND-память активно вытесняет из обращения носители других типов (дискеты, дисководы гибких магнитных дисков, накопители на магнитной ленте и пр.).

Сейчас флэш-память все больше заменяет винчестеры в ноутбуках и уменьшает долю записываемых оптических дисков. Она широко используется в качестве накопителя в таких портативных устройствах, как: цифровые фото- и видеокамеры, сотовые телефоны, портативные компьютеры, MP3-плееры, цифровые диктофоны и т. п.

В 1988 г. компания Intel выпустила первый коммерческий флэш-чип NOR-типа. В следующем году компанией Toshiba был разработан NAND-тип флэш-памяти.

За 25 последующих лет технологии по созданию флэш-памяти достигли выдающихся достижений. В 2011 г. корпорации Intel и Micron Technology, Inc. анонсировали первую в мире NAND-флэш-память, выполненную по технологии 20 нм (с размером ячейки 20 нм) и объемом памяти 128 Гб. Для этого в устройстве использован массив из нескольких чипов с объемом памяти 16 Гб в каждом.

**Фотопроводимость.** Это явление связано с увеличением электропроводности полупроводника при поглощении им электромагнитного излучения. Впервые фотопроводимость наблюдалась в селене (Se) У. Смитом (США) в 1873 г. При поглощении фотона электрон «вырывается» из валентной зоны и переходит в зону проводимости. Как следствие образуется пара носителей заряда: электрон в зоне проводимости и дырка в валентной зоне. Такая фотопроводимость называется собственной.

При возбуждении фотопроводимости в собственном полупроводнике энергия фотона должна превышать ширину запрещенной зоны:  $h\nu = hc/\lambda \geq \epsilon_g$ . Следовательно, существует длинноволновая граница собственной фотопроводимости  $\lambda_g = hc/\epsilon_g$ : волны с большей длиной волны поглощаться не могут. В литературе эту границу называют *краем полосы поглощения*. Обычно эта граница находится в инфракрасной (ИК) части спектра. Например,  $\lambda_g = 1,8$  мкм для германия (Ge),  $\lambda_g = 1,1$  мкм для кремния (Si),  $\lambda_g = 0,92$  мкм для арсенида галлия (GaAs).

Фотопроводимостью обладают неметаллические твердые тела. Для практических целей используются полупроводники: Ge, Si, Se, CdS, CdSe, InSb, GaAs, PbS и др.

В полупроводнике с примесями электроны из валентной зоны забрасываются на свободные примесные уровни — возрастает число дырок (дырочная примесная фотопроводимость). Электроны могут также забрасываться



с примесных уровней в зону проводимости (электронная примесная фотопроводимость). Возможно и комбинированное возбуждение фотопроводимости. Все это позволяет увеличить длину волны света  $\lambda_g$ . Это обстоятельство важно для детектирования далекого инфракрасного излучения. Условием высокой фотопроводимости является также большой коэффициент поглощения света.

Явление фотопроводимости используется в фотоэлементах, важнейшей составной частью которых являются фоторезисторы. Фотопроводимость важна также для детектирования инфракрасного излучения и применяется, например, в приборах ночного видения. Увеличение проводимости при освещении используется также в ксерографии.

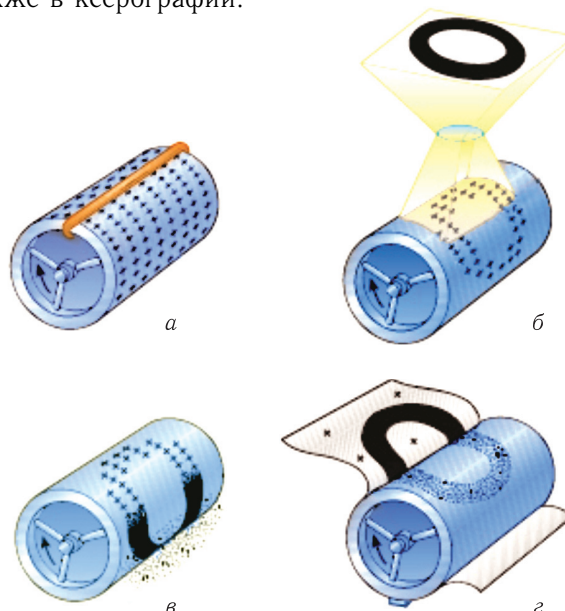


Рис. 25.4

На рис. 25.4 показан принцип работы ксерокопировального аппарата (ксерокса). Основной его деталью является полупроводниковый барабан. Поверхность барабана предварительно заряжается (а). При освещении барабана электрические заряды стекают с засвеченных мест предварительно наэлектризованной поверхности (б). Распределение поверхностной плотности заряда будет соответствовать тому изображению, которое спроектировано на поверхность барабана оптической системой. После прилипания к поверхности барабана (за счет электростатического взаимодействия) тонера (порошка) (в) лист бумаги прокатывается (г), и на нем получается изображение исходного документа. Технологический цикл копирования завершается закреплением тонера давлением и нагреванием.

**Фотоэдс.** При освещении светом ( $\lambda > \lambda_g$ )  $p$ - $n$ -перехода в каждом из полупроводников могут образовываться пары «электрон–дырка». Из-за наличия потенциального барьера электроны и дырки будут локализоваться в разных частях полупроводникового диода. Это и приведет к возникновению электродвижущей силы.

Рассмотрим этот вопрос подробнее. На рис. 25.5 изображена схема полупроводникового фотоэлемента. На металлической подложке находится полупроводник Se (селен) с  $p$ - $n$ -переходом. Сверху напылен тонкий слой золота, через который проходит падающая световая волна. К верхней и нижней пластинам приварены контакты, с которых снимается выходное напряжение  $V$ .

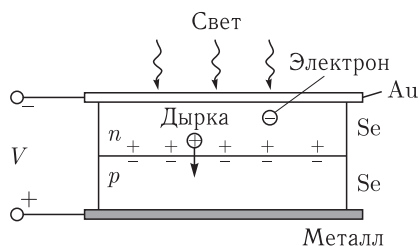


Рис. 25.5

При освещении полупроводника фотоны проникают в него и создают значительное количество дырок и электронов, причем большая часть фотонов поглощается над переходом. Поэтому создается неравновесная концентрация дырок и электронов. Из-за диффузии дырки сверху начинают двигаться к контактному слою, а достигнув его, проталкиваются контактным полем в дырочный полупроводник.

Возникшее объемное разделение зарядов (снизу дырки, сверху электроны) создает фотоЭДС (ФЭДС), препятствующую дальнейшему переходу носителей зарядов. Равновесное состояние, при освещении электронно-дырочного перехода, соответствует новому значению потенциального барьера, уменьшенного на значение ФЭДС. Полярность фотоЭДС противоположна полярности контактной разности потенциалов и всегда меньше ее. ФЭДС кремниевых и селеновых фотоэлементов достигает 0,6 В.

**Фотоэлементы** используются как фотодиоды и фототранзисторы. Фотодиоды могут работать в двух режимах: фотогальваническом (без внешнего источника питания) и фотодиодном (с подачей на  $p$ - $n$ -переход обратного смещения от внешнего источника).

Фототранзистор — это оптоэлектронный полупроводниковый прибор, который отличается от классического транзистора тем, что база освещается светом. Поэтому током в цепи коллектора можно управлять, изменяя интенсивность падающего света.

Для увеличения фотоЭДС элементы соединяют последовательно в батарею. В свою очередь, для увеличения мощности, эти батареи соединяются параллельно, образуя тем самым большие панели, или *солнечные батареи*. Эти батареи имеют срок службы более 25 лет, а КПД около 14 %. Их изготавливают на основе кремния, который является вторым по распространенности элементом во Вселенной.

Поскольку напряжение на кремниевом элементе не более 0,6 В (а под нагрузкой меньше), то солнечные батареи достигают внушительных размеров.

Интенсивность солнечного света у поверхности Земли (солнечная постоянная) в ясную погоду  $I_c = 1,36$  кВт/м<sup>2</sup>, но из-за облачности она в разы меньше (в Европе порядка 100 Вт/м<sup>2</sup>). С помощью наиболее распространенных промышленно производимых солнечных батарей (рис. 25.6) можно преобразовать эту энергию в электричество с эффективностью 9–24 %. В настоящее время созданы солнечные элементы с эффективностью более 40 %. Пока стоимость электроэнергии, получаемой таким способом, выше, чем при ее генерировании традиционными способами.



Рис. 25.6

Солнечные батареи используют для получения электрической энергии на космических аппаратах, так как они работают долгое время без расхода каких-либо материалов и являются экологически безопасными (в отличие от ядерных и радиоизотопных источников энергии).

Однако при полетах на большом удалении от Солнца (за орбитой Марса) их использование становится проблематичным, так как поток солнечной энергии обратно пропорционален квадрату расстояния от Солнца. При полетах же к Венере и Меркурию, напротив, мощность солнечных батарей значительно возрастает (в районе Венеры в 2 раза, в районе Меркурия в 6 раз).

На Международной космической станции (МКС) установлено 4 пары солнечных батарей длиной около 100 метров каждая (рис. 25.7). Мощность энергетической системы станции достигает 120 кВт. Эта энергия необходима



Рис. 25.7

для жизнеобеспечения, работы систем управления и научного оборудования. Естественно, что солнечные батареи постоянно ориентируются на Солнце. Однако при прохождении МКС в тени Земли солнечные батареи автоматически поворачиваются ребром к направлению движения, чтобы остатки атмосферы не тормозили движение станции.

**Экситон.** При освещении полупроводника светом с энергией фотонов, меньшей ширины запрещенной зоны, может возникнуть связанная возбужденная пара электрон–дырка. Связанная электрон–дырочная пара называется *экситоном*. Согласно идее, предложенной Я. Френкелем, эта пара, локализованная на атоме, может перемещаться от атома к атому вследствие связи между ними. Поэтому можно рассматривать экситон как элементарную квазичастицу, мигрирующую по кристаллу, однако не связанную с переносом электрического заряда и массы.

Можно показать, что экситон движется как свободная частица с массой  $M = m_h^* + m_e^*$ . Электрон и дырка взаимодействуют между собой и двигаются относительно друг друга. Это относительное движение можно свести к движению частицы с приведенной массой  $m_{\text{пр}} = \frac{m_h^* m_e^*}{m_h^* + m_e^*}$  в кулоновском потенциальном поле.

Экситон может обладать только дискретными значениями энергии, равной сумме энергии поступательного движения  $\epsilon_{\text{пост}} = \hbar^2 k^2 / (2M)$ , энергии относительного движения и потенциальной энергии при кулоновском взаимодействии. Последние два вклада рассчитываются таким же образом, как уровни энергии атома водорода, поскольку электрон и дырка вращаются вокруг центра масс. Если использовать приведенную массу, то по аналогии с атомом водорода для энергии получается выражение

$$\epsilon_n = -\frac{e^4 m_{\text{пр}}}{32\pi^2 \epsilon_0^2 \epsilon^2 \hbar^2 n^2} = -\frac{e^2}{8\pi \epsilon_0 \epsilon a_{\text{ex}} n^2}. \quad (25.1)$$

Здесь  $\epsilon_0$  — электрическая постоянная,  $\epsilon$  — диэлектрическая проницаемость полупроводника,

$$a_{\text{ex}} = \frac{4\pi \epsilon_0 \epsilon \hbar^2}{e^2 m_{\text{пр}}} \quad (25.2)$$

боровский (эффективный) радиус экситона,  $n = 1, 2, 3, \dots$  — квантовое число. Энергия отсчитывается от дна зоны проводимости (рис. 25.8).

Чтобы разорвать связанное состояние и перевести электрон с самого нижнего уровня ( $n = 1$ ) в зону проводимости, надо затратить энергию, превышающую *энергию связи*

$\epsilon_{\text{св}} = |\epsilon_1| = \frac{e^4 m_{\text{пр}}}{32\pi^2 \epsilon_0^2 \epsilon^2 \hbar^2}$ . У большинства полупроводников диэлектрическая проницаемость  $\epsilon > 10$ , а эффективная масса электрона меньше массы свободного электрона. Поэтому, в отличие от атома водорода, энергия связи невелика, а боровский радиус, наоборот, велик.

Например, для полупроводникового кристалла GaAs  $\epsilon_{\text{св}} \approx 4,2 \cdot 10^{-3}$  эВ,  $a_{\text{ex}} = 15$  нм. Это расстояние в десятки раз превышает расстояние между

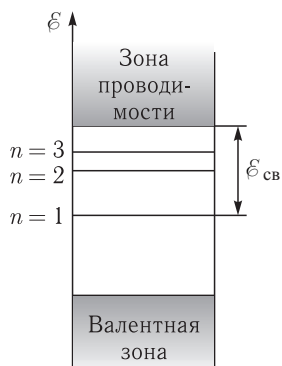


Рис. 25.8

атомами кристаллической решетки. Это значит, что дырка и связанный с ней электрон находятся в разных узлах кристаллической решетки. Такие «длинные» связанные пары называются экситонами Ванье–Мотта. Большая протяженность экситона обусловлена большой величиной диэлектрической проницаемости. В средах, где диэлектрическая проницаемость невелика (например, в молекулярных кристаллах), электрон и дырка могут находиться в одном узле (экситоны Френкеля).

Поскольку экситонные уровни находятся в запрещенной зоне вблизи дна зоны проводимости, то можно попытаться реализовать поглощение световых квантов с энергией меньшей ширины запрещенной зоны. Тем самым удалось бы создать приемники света, работающие в длинноволновом ИК-диапазоне. Такие спектры поглощения можно экспериментально наблюдать в полупроводниках без примесей при глубоком охлаждении, поскольку при комнатных температурах энергия теплового движения  $k_B T > \mathcal{E}_{\text{св}}$ , и экситон неустойчив. Кроме того, как показывают квантовомеханические расчеты, вероятность поглощения света на этих квантовых переходах будет также невелика.

Как будет показано ниже, преодолеть указанные трудности можно используя низкоразмерные структуры, в т. ч. наноструктуры.

**Светодиод.** При пропускании электрического тока через  $p$ - $n$ -переход в прямом направлении может возникать свечение полупроводника. Такой полупроводниковый диод получил название светодиода.

Впервые слабое свечение (электролюминесценцию) контакта на основе пары «карборунд–стальная проволока», наблюдал в 1923 г. в Нижнем Новгороде советский физик и изобретатель О. Лосев. Однако его открытие не было оценено по достоинству в то время.

Практическое применение оно получило лишь десятилетия спустя, когда в 1962 г. в Университете Иллинойса (США) группой, которой руководил Н. Холоньяк, был изготовлен первый светодиод, излучающий свет в видимом диапазоне.

Объяснение явления состоит в том, что при протекании прямого тока электроны, приобретая энергию, попадают в зону проводимости  $p$ -области. Затем электроны рекомбинируют с дырками, а энергия высвобождается в виде потока фотонов и частично передается кристаллической решетке (переходит в тепло). Длина волны  $\lambda$  излучения определяется шириной  $\mathcal{E}_g$  запрещенной зоны полупроводника:  $\lambda \approx hc/\mathcal{E}_g$ .

Не все полупроводниковые материалы эффективно испускают свет при рекомбинации. Лучшие излучатели относятся к прямозонным полупроводникам, то есть таким, в которых разрешены прямые оптические переходы зона–зона, например, GaAs, InP, ZnSe, CdTe и др. Варьируя состав полупроводников, можно создавать светодиоды для всевозможных длин волн от ультрафиолета (GaN) до среднего инфракрасного диапазона (PbS).

Чтобы получить излучение в видимом диапазоне, используются полупроводники с относительно большой шириной запрещенной зоны: ( $\mathcal{E}_g > 1,8$  эВ). Поэтому для изготовления таких светодиодов широко используются: фосфид галлия (GaP), карбид кремния (SiC), твердые растворы галлий–мышьяк–фосфор (GaAsP) и галлий–мышьяк–алюминий (GaAsAl), нитрид галлия (GaN), который имеет ширину запрещенной зоны  $\mathcal{E}_g \approx 3,4$  эВ, и т. д.



Путем добавления в полупроводниковый материал атомов веществ-активаторов можно изменять в некотором диапазоне цвет излучения светодиода. Например, на основе фосфида галлия, легированного определенным количеством цинка, кислорода или азота, получают светодиоды зеленого, желтого и красного цветов свечения. Тройные соединения  $\text{GaAsP}$  и  $\text{GaAsAl}$  используют, в основном, для получения светодиодов, светящихся красным цветом. На рис. 25.9 в качестве иллюстрации представлены фотографии различных светящихся светодиодов.



Рис. 25.9

Диоды, сделанные из непрямозонных полупроводников (например, кремния, германия или карбида кремния), свет практически не излучают. В связи с развитием кремниевой технологии активно ведутся работы по созданию светодиодов на основе кремния. В последнее время большие надежды связываются с технологией квантовых точек и фотонных кристаллов (кристаллов с периодически изменяющимся показателем преломления).



Рис. 25.10

По конструкции светодиоды подразделяются на приборы в металлических корпусах со стеклянной линзой (обладают весьма острой направленностью излучения) и в пластмассовых оптически прозрачных корпусах, создающих рассеянное излучение. Светодиоды находят широкое применение, постепенно вытесняя лампы накаливания (рис. 25.10). Это разнообразные осветительные приборы, автомобильная светотехника, информационные табло, реклама и пр.

По сравнению с традиционными лампами светодиоды обладают рядом очевидных преимуществ. Это, прежде всего, высокий КПД, долговечность, безынерционность, механическая прочность, миниатюрность, широкая цветовая гамма и др. Основной недостаток — относительная высокая стоимость их производства.

На базе светодиодов созданы многочисленные полупроводниковые лазеры (лазерные диоды), генерирующие направленное когерентное излучение. Лазерные диоды широко используются как источники света для накачки волоконных лазеров и в волоконно-оптических линиях связи, в измерительных устройствах (например, в дальномерах), в лазерных указках, используются для считывания штрих-кодов. Красные и зеленые лазерные диоды применяются для светофоров, световых табло и целеуказателей, инфракрасные и красные — в проигрывателях CD- и DVD-дисков, синие — в устройствах HD-DVD и Blu-Ray.

**Низкоразмерные структуры.** Под низкоразмерными структурами понимают кристаллы, в которых носители заряда при движении подвержены квантовым ограничениям в одном, двух или трех измерениях. Соответственно, говорят о двумерных (2D), одномерных (1D) и нульмерных (0D) объектах. Если квантовых ограничений нет, то кристалл относят к трехмерным (3D) объектам.

Квантовое ограничение имеет место тогда, когда длина волны де-Бройля, или характерная пространственная протяженность волновой функции квазичастицы (например, боровский радиус экситона), становится сравнимым или больше размера кристалла в соответствующем направлении.

Изменяя размерность и регулируя величину квантового ограничения, можно радикально изменить энергетический спектр электронов. Это открывает широкие возможности как для усовершенствования существующих, так и для создания абсолютно новых уникальных полупроводниковых приборов и устройств.

Если речь идет о тонкой кристаллической пленке, то электрон не ограничен при движении в плоскости пленки (в координатной плоскости  $xOy$ ), однако подвержен квантовому ограничению в перпендикулярном направлении (вдоль оси  $Oz$ ). В этом направлении он оказывается в *квантовой яме*.

При квантовом ограничении еще и вдоль оси  $Oy$  электрон свободен в своем движении вдоль оси  $Ox$ . Для такой структуры применяется термин *квантовая проволока*. При ограничениях вдоль трех координатных осей употребляется термин *квантовая точка*.

На рис. 25.11 схематически изображены квантовые ямы, проволоки и точки. Желтым цветом отмечен материал квантовых ям, проволок и точек, а синим — полупроводник, выполняющий роль потенциального барьера.

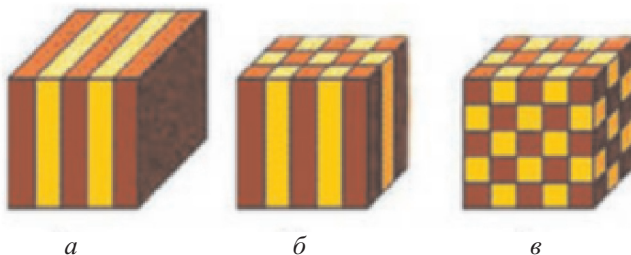


Рис. 25.11

**Гетероструктуры.** Квантовые ограничения проявляются в *гетероструктурах* — сложных слоистых структурах, состоящих из полупроводников с разной шириной запрещенной зоны.

На рис. 25.12 *а* изображены энергетические зоны двойной гетероструктуры, образованной двумя материалами: *А* и *В*. Электроны в среднем слое *В* находятся в потенциальной яме.

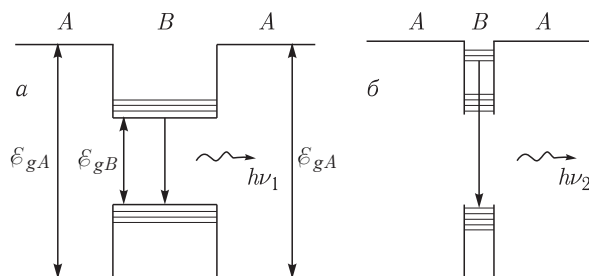


Рис. 25.12

Если толщина слоя *В* велика, как это изображено в ситуации (*а*), то система энергетических уровней электронов в среднем слое соответствует их трехмерному движению. Если же толщина слоя *В* мала (ситуация *б*), то энергетический спектр электронов изменяется: возникают далеко отстоящие друг от друга новые дискретные энергетические уровни, которые соответствуют ограниченному движению электронов поперек слоя (размерный эффект). В результате возникает набор подзон, «привязанных» к вновь появившимся энергетическим уровням (рис. 25.12 *б*).

Как отмечалось выше, толщина слоя, при которой начинают играть существенную роль низкоразмерные эффекты, должна быть сопоставима с длиной волны де Бройля электрона (дырки). Вблизи дна зоны проводимости эта длина волны составляет десятки постоянных решетки. Таким образом, при уменьшении толщины слоя до десятка нанометров образуется квантовая яма. Минимальная толщина квантовой ямы ограничена одним атомным слоем.

Введение тончайшего слоя полупроводника *В* в матрицу полупроводника *А* радикально меняет спектр излучения (люминесценции) структуры. Так, при рекомбинации электрона и дырки, изображенной схематически вертикальной стрелкой, энергия  $h\nu_2$  испускаемого фотона будет больше энергии  $h\nu_1$ .

Для изготовления гетероструктур важно согласование (близость по величине) параметров кристаллической решетки двух контактирующих веществ. Если два слоя веществ с сильно различающимися постоянными решетки выращиваются один на другом, то при увеличении их толщины на границе раздела появляются большие деформации, и возникают дислокации несоответствия. В связи с этим для изготовления гетероструктур часто используют твердые растворы системы  $\text{AlAs-GaAs}$ , так как арсениды алюминия и галлия имеют почти одинаковые параметры решетки. В этом случае монокристаллы  $\text{GaAs}$  являются идеальной подложкой для роста гетероструктур. Другой естественной подложкой является  $\text{InP}$ , который применяется в комбинации с твердыми растворами  $\text{GaAs-InAs}$ ,  $\text{AlAs-AlSb}$  и др.



Например, типичным примером квантовой ямы может служить двойная гетероструктура  $\text{AlGaAs}/\text{GaAs}/\text{AlGaAs}$  с двумерным электронным газом.

**Молекулярно-лучевая эпитаксия.** Современные технологии позволяют выращивать самые разнообразные гетероструктуры с помощью *молекулярно-лучевой эпитаксии* (МЛЭ) — метода наращивания на подложке монокристаллических слоев полупроводниковых веществ путем осаждения в условиях высокого вакуума испаренных компонентов на нагреваемую монокристаллическую подложку.

Технология МЛЭ была создана в конце 1960-х гг. Дж. Артуром. На рис. 25.13 представлено фото установки для МЛЭ.

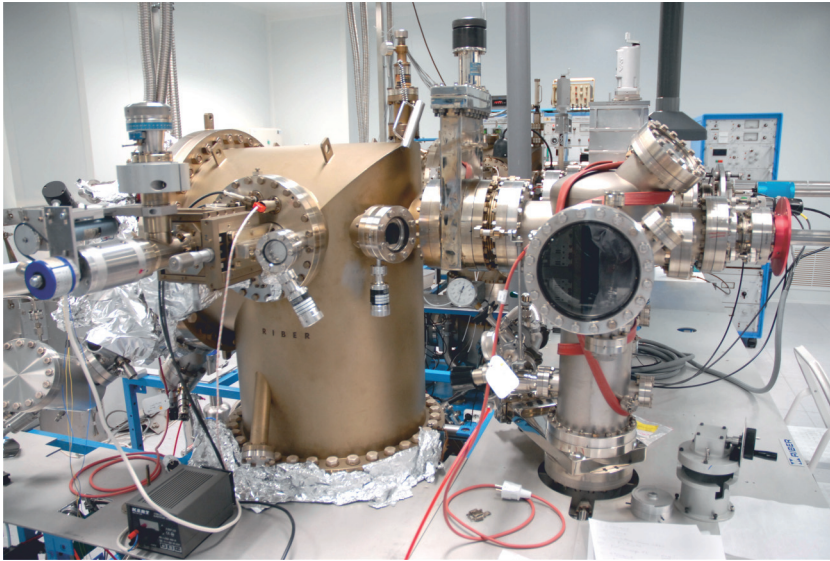


Рис. 25.13

В рабочей камере (слева) находятся молекулярные источники. Они состоят из тугоплавкого тигля (чистый нитрид бора или графит) с испаряемым материалом, нагревателя (намотанная вокруг тигля спираль) и заслонки перед тиглем, позволяющей резко выключать пучок для формирования четких гетерограниц в образце. Температура нагрева достигает 1900 К и контролируется термопарой.

Камера выполнена из нержавеющей стали высокой чистоты. Для обеспечения в камере высокого вакуума ( $\sim 10^{-8}$  Па) перед работой ее прогревают до высоких температур. При этом происходит дегазация поверхности.

Испаренное в тигле вещество в виде пучка попадает на подложку. Поскольку длина свободного пробега молекул больше размеров камеры, то молекулы испаренного вещества летят практически вдоль прямой. Чистота испаряемых материалов должна достигать 99,999999%.

Скорость роста определяется потоком вещества на поверхность. Особенностью эпитаксии является невысокая скорость роста пленки (обычно менее 1000 нм в час).

Появление эффекта размерного квантования в гетероструктурах позволяет создавать электронные устройства с повышенным быстродействием и информационной емкостью.

На основе гетероструктур созданы мощные высокоэффективные светоизлучающие диоды. В гетероструктурных солнечных батареях достигнуты рекордные эффективности преобразования солнечной энергии в электрическую. Гетеролазеры передают, а гетероприемники принимают информационные потоки по волоконно-оптическим линиям связи.

В 2000 г. российскому физику Ж. Алферову была присуждена Нобелевская премия по физике за разработку гетероструктур и создание быстрых опто- и микроэлектронных компонентов.

В низкоразмерных системах становятся устойчивыми и экситонные состояния, когда толщина пленки приближается к боровскому радиусу экситона. В результате открываются новые возможности в полупроводниковом приборостроении. Появились оптические модуляторы, переключатели, фазовращатели и бистабильные элементы, работа которых основана на свойствах экситонного газа.

Разработка новой технологии производства транзисторов и логических схем из углеродных наноматериалов может стать началом эры высококачественной, портативной и гибкой электронной продукции,

В настоящее время прочно утвердилось мнение, что низкоразмерные гетеросистемы станут основой для новейших разработок в области микро- и оптоэлектроники в нынешнем столетии.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Одним из негативных результатов научно-технического прогресса является появление (наряду с естественным) электромагнитного поля, создаваемого большим числом разнообразных источников. Одни источники (телерадиовещательные станции, физиотерапевтические аппараты, устройства сотовой и космической связи и пр.) создавались специально для излучения электромагнитной энергии. Другие устройства (линии электропередач, трансформаторные подстанции, научные и электробытовые приборы, электронные устройства, вычислительная техника и т.п.) являются источниками паразитного электромагнитного излучения. Поэтому человек находится в своеобразном «электромагнитном океане».

Электромагнитные поля биологически активны. Наиболее чувствительными к ним (наряду с органами зрения) являются центральная нервная система, сердечно-сосудистая, гормональная и репродуктивная системы. Изучение влияния электромагнитного поля на организм человека весьма далеко от своего завершения.

В Российской Федерации приняты Санитарные нормы, которые по ряду параметров являются одними из самых жестких в мире.

Автору представляется целесообразным познакомить читателя с некоторыми из них, используя данные, опубликованные Центром электромагнитной безопасности при Институте биофизики Министерства здравоохранения РФ.

**Предельно допустимый уровень (ПДУ)** — это величина напряженности переменного электрического поля с частотой 50 Гц, равная  $E = 500 \text{ В/м}$ . В ряде других стран введено ограничение и на величину индукции переменного магнитного поля:  $B \leq 0,2 \text{ мкТл}$ .

На рис. 1 представлено соотношение ПДУ для населения в различных странах мира. Из гистограммы видно, что в России самые жесткие требования к предельно допустимому уровню электромагнитного излучения.

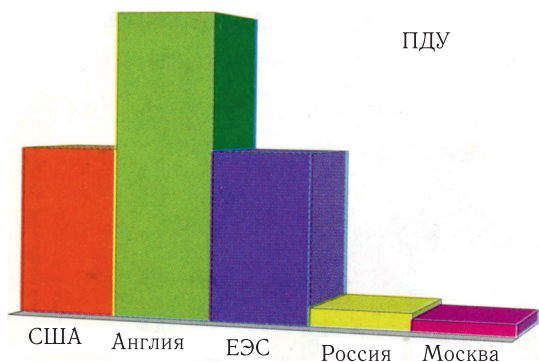


Рис. 1

Измерения показывают, что в квартире напряженность электрического поля не превосходит 100 В/м.

На рис. 2 показаны характерные значения индукции переменного магнитного поля (в единицах мкТл) частоты 50 Гц на расстоянии 0,3 м от различных бытовых приборов. Как видно, наибольшую неприятность создает микроволновая печь.

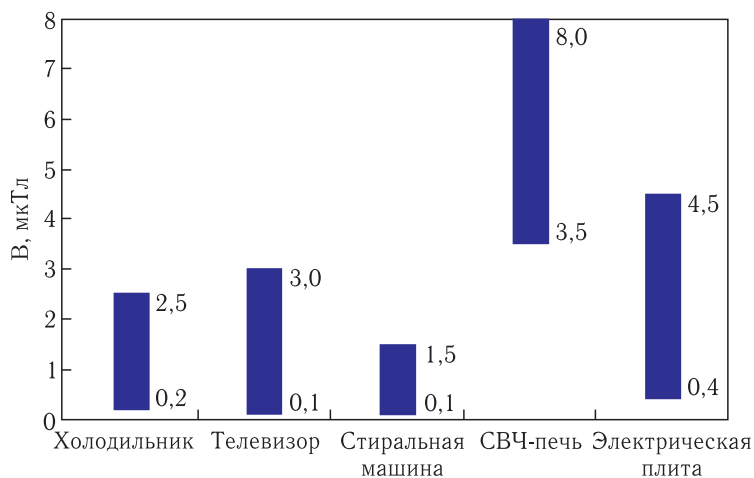


Рис. 2

Монитор компьютера излучает электромагнитное поле во всех направлениях. На рис. 3 разным цветом выделены области вокруг монитора компьютера, в которых индукция поля находится в соответствующем диапазоне величин.

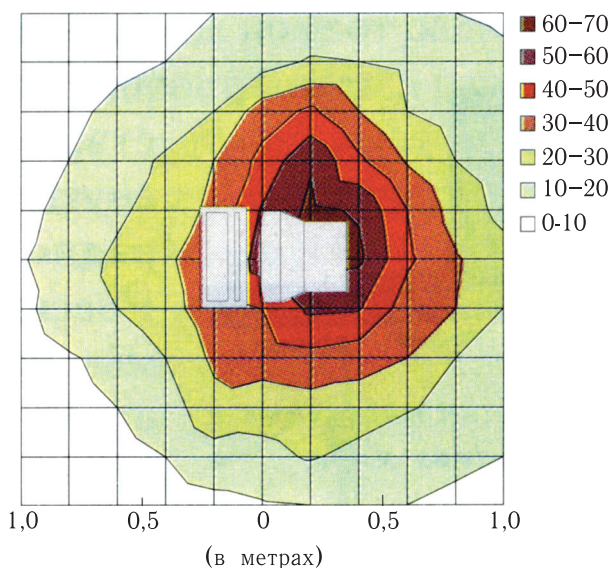


Рис. 3

Линии электропередач (ЛЭП) в окружающем пространстве также создают электромагнитное поле промышленной частоты 50 Гц. На рис. 4 показано распределение напряженности электрического поля в зависимости от расстояния от провода, а на рис. 5 — распределение индукции магнитного поля.

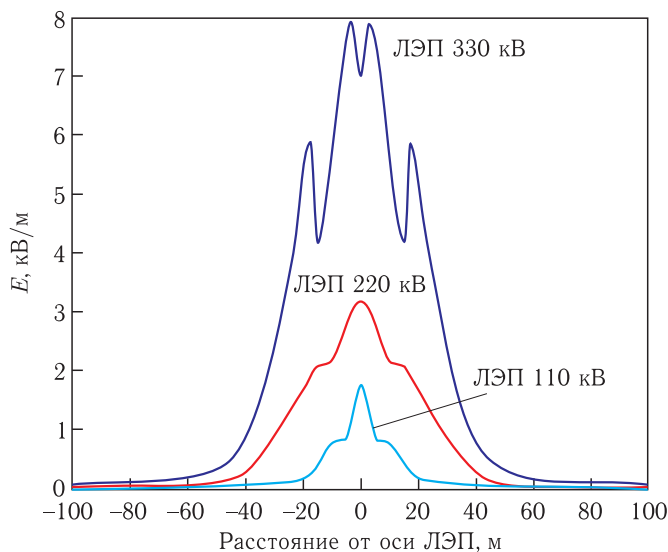


Рис. 4

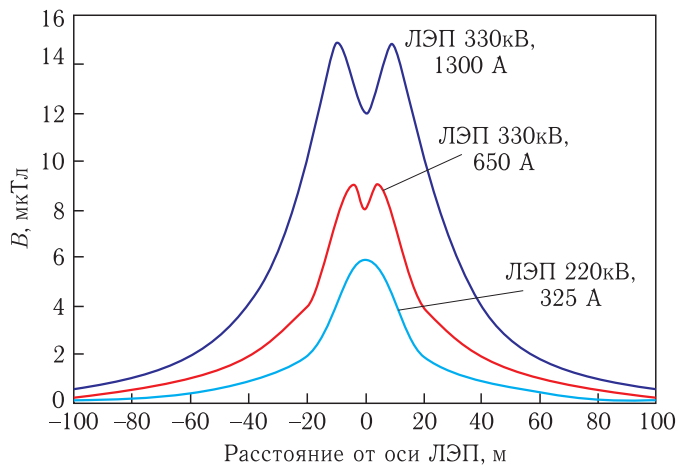


Рис. 5

В целях защиты населения вдоль ЛЭП устанавливается санитарно-защитная (охранная) зона. Как и следовало ожидать, чем выше напряжение в ЛЭП, тем больше ширина этой зоны. Границы охранных зон, используемые в России, показаны в табл. 1 и 2.

Радиовещательные и телевизионные станции являются источниками высокочастотного электромагнитного поля с частотой от десятка килогерц

до тысячи мегагерц. Размер охранной зоны вокруг антенны передатчика варьируется от нескольких десятков метров до одного километра (табл. 3).

Таблица 1

**Границы охранных зон по Российским нормам**

Напряжение ЛЭП	330 кВ	500 кВ	750 кВ	1150 кВ
Размер санитарно-защитной (охранной) зоны	20 м	30 м	40 м	50 м

Таблица 2

**Границы охранных зон по Московским нормам**

Напряжение ЛЭП	< 20 кВ	35 кВ	110 кВ	150–220 кВ	330–500 кВ	750 кВ	1150 кВ
Размер санитарно-защитной (охранной) зоны	10 м	15 м	20 м	25 м	30 м	40 м	55 м

Таблица 3

**Диапазон границ санитарно-защитных зон радиопередающих объектов**

Тип объекта	Диапазон частот	Размер санитарно-защитной зоны
Длинноволновые радиостанции (ДВ)	30–300 кГц	100–1000 м
Средневолновые радиостанции (СВ)	300–3000 кГц	200–1000 м
Коротковолновые радиостанции (КВ)	3–30 МГц	50–700 м
Телевизионные и УКВ радиостанции	30–1000 МГц	25–800 м

Антенны базовых станций сотовой связи, устанавливаемые на высоте нескольких десятков метров, излучают энергию от маломощных передатчиков. Мировой опыт показывает, что вблизи этих станции уровень электромагнитного излучения в несколько раз меньше ПДУ.

Неприятность доставляет излучающий мобильный телефонный аппарат, который во время разговора находится вблизи головного мозга. Несомненно, что электромагнитное поле аппарата оказывает негативное воздействие на организм человека. Однако этот вопрос требует дальнейшего исследования.

## Предметный указатель

Акцепторная примесь 363  
Антиферромагнетик 244  
Асинхронный двигатель 306  
Атомный силовой микроскоп 37

Большой адронный коллайдер 204

Взаимная индукция 265  
Взаимодействие контуров 189  
Вектор индукции 71  
— намагниченности 207  
— обратной решетки 340  
— Пойнтинга 274  
— поляризации 67  
— потенциал 172  
Вихревые токи 268  
Волна де-Бройля 329  
Волновое уравнение 318

Газовый разряд 13  
Гальванометр 182  
Геомagnetное поле 176  
Генератор Ван де-Графа 52  
— электрического тока 301  
Гетероструктуры 394  
Гидромагнитное динамо 177  
Гипотеза Луи де-Бройля 329  
Гиромagnetное отношение 222, 226, 228  
Гистерезис 99, 236  
Граничные условия 72, 209

Датчик Холла 368  
Двухпроводная линия 310  
Диамagnetизм 223  
Диполь электрический 21  
— магнитный 187  
Диполь-дипольное взаимодействие 187  
Дипольный момент 64  
Диод 371  
Диэлектрик 66  
Диэлектрическая проницаемость 67, 98  
Домен 97, 100, 235

Донорная примесь 361  
Дырка 356, 358

Емкость конденсатора 109  
— двухпроводной линии 110

Заземление 147  
Закон Ампера 163  
— Био-Савара-Лапласа 164  
— Видемана-Франца 328  
— Джоуля-Ленца 133  
— Кирхгофа 143  
— Кулона 20, 34  
— Кюри 224  
— Кюри-Вейса 97, 225  
— Ома 128, 131, 133, 285  
— Фарадея 150, 151  
— электромагнитной индукции 249  
Заряд 11 связанный 68  
— элементарный 12  
Зона Бриллюэна 340  
— валентная 341, 358, 369  
— запрещенная 340, 358, 369  
— проводимости 341, 358, 369  
— разрешенная 340  
— энергетическая 340

Индукция магнитного поля 164  
— электрического поля 71  
Импеданс 286  
Интенсивность волны 321  
Ионистор 119  
Ионный двигатель 63  
Источник тока 123

Квазиимпульс 344  
Квазиклассическое уравнение 344  
Квантовое состояние 333  
Кварк 15  
Колебательный контур 279  
Колесо Франклина 61

Конденсатор 32, 108, 114, 116, 121  
Контактная разность потенциалов,  
внешняя 378  
— — —, внутренняя 370, 378  
Коэффициент взаимной индукции 186  
— емкостной 118  
— самоиндукции 254  
Коэрцитивное поле 99, 236  
Ксерография 387

**Лейденская банка** 111

Линии индукции магнитного поля 165  
— тока 146  
— электрического поля 26

**Магнитная левитация** 241

— ловушка 196  
— проникаемость 208  
— цепь 220

Магнитное напряжение 168

Магнитный диполь 181

— заряд 220, 239  
— напряжение 168  
— носитель 243  
— потенциал 217

Магнитомеханический эффект 226

Магниторезонансная томография 231

Масс-спектрометр 195

Материальные уравнения 273

МГД-генератор 200

Металлодетектор 270

Метод векторных диаграмм 284

— зеркальных отображений 186  
— комплексных амплитуд 285  
— контурных токов 144

Механомагнитный эффект 225

Модель Друде–Лоренца 328

Мощность тока 133, 228

**Напряжение** 40, 129

Напряженность электрического поля 26  
— магнитного поля 207

Нейрон 314

Нейтрон 13

Неполярный диэлектрик 89

Низкоразмерная структура 393

**Объемная плотность энергии электри-**  
ческого поля 80

— — — магнитного поля 265

Объемная плотность энергии электро-  
магнитного поля 274

Опыт Герца 316

— Кулона 12

— Милликена 13

— Роуланда, Рентгена и Эйхенвальда  
174

— Толмена и Стюарта 338

— Фарадея 248

Основные носители 370

**Парамагнетизм** 224

Переход  $p$ – $n$  370

Плазма 152, 158

Плазменный двигатель 202

— зонд 49

Плазмотрон 159

Пинч-эффект 199

Пирозлектрик 95

Плотность заряда 27

— тока 123

Поверхностная сила 81

Подвижность 366

Поле Лоренца 48,90

Полярный диэлектрик 91

Полупроводник 356

Постоянный магнит 238

Потенциал 40, 42, 252

Потенциальная функция тока 185

Пояс Роговского 254

Правило Ленца 248

Предельно допустимый уровень 397

Преломление линий электрического по-  
ля 73

— — магнитного поля 210

Преобразование полей 261

— сил 259

Прецессия Лармора 222

Принцип Паули 333

— суперпозиции 21

Протон 13

Пьезоэффект 101

**Работа выхода** 331

Распределение Бозе–Эйнштейна 349

— Ферми–Дирака 334

Радиационный пояс Земли 197

Разветвленная цепь 142

Резистор 134

Резонанс напряжений 281

— токов 286



Резонанс Шумана 313

Рельсотрон 190

**Самоиндукция** 254

Сверхпроводимость 352, 354

Светодиод 391

Связанные контуры 289

Сегнетоэлектрик 96

Сетка Кольбе 59

Сила Ампера 180

— действующая на диэлектрик 76, 77, 83

— действующая на магнетик 213

— Лоренца 192

— сторонняя 132

— электродвижущая 41, 126

Сила тока 123

Силовая линия 26

Синхронный генератор 303

Система глобального позиционирования 324

Скорость Ферми 334, 346

Скин-эффект 275

Собственная функция тока 256

Сотовая связь 322

Сохранение заряда 16

Спин 228, 335

Спиновый магнитный момент 228

Стандартная Модель 19

Статическое электричество 54

**Температура Дебая** 350

— Ферми 334

Температурный коэффициент сопротивления 136

Теорема Гаусса 29, 35, 71

— о циркуляции 169, 207

Тензор диэлектрической проницаемости 95

Термоэлектричество 379

Термоэлектрический модуль 382

Ток смещения 271

Токамак 197

Транзистор биполярный 373

— полевой 375

Трансформатор 295

Трехфазный ток 304

**Уравнение Лапласа** 45

— Максвелла 272

Уравнение непрерывности 145

— Пуассона 45, 172

— Шредингера 330

Уравнения телеграфные 310

Условие квазистационарности 315

Установление электростатического равновесия 65

**Фактор формы** 69, 212

Формула Клаузиуса–Моссоти 91

— Онзагера 94

Ферримагнетик 244

Ферриты 245

Ферромагнетизм 234

Фильтр электростатический 36

Флэш-память 384

Фундаментальные взаимодействия 18

Фонон тепловой 348

Фото ЭДС 387

Фотопроводимость 386

Фотоэлемент 388

Функция Ланжевена 92

**Химический источник тока** 124

— потенциал 334, 337, 369

**Циклотрон** 194

Циркуляция вектора напряженности электрического поля 41

— — — магнитного поля 207

**Частотный фильтр** 293

Четырехполюсник 291

**Эквипотенциальная поверхность** 42

Экситон 390

Экстраток 255

Электрет 105

Электризация 17

Электрический пробой 106

Электрическое поле Земли 35

Электродвигатель 306

Электролиз 150

Электромагнитное поле 25

Электромагнитная волна 313, 316, 318

Электромагнитная индукция 247

Электрометр 48

Электронно-лучевая трубка 193

Электронный газ 331

Электронный парамагнитный резонанс 229

Электропроводность 327, 334

Электроскоп 17

Электростатическая защита 59

Электростатическая индукция 57, 63

Электрострикция 106

Электрофорная машина 50

Элемент Вольта 126

— Даниэля 124

Энергия диполя 79

Энергия системы зарядов 55

— поля 79, 264, 274

— тока 264

— Ферми 331

Эпитаксия 395

Эффект Мейснера и Оксенфельда 352

— Пельтье 381

— Холла 367

Эффективная масса 344, 357

**Я**дерный магнитный резонанс 231