

**Федеральное агентство по образованию РФ
ГОУ ВПО “Глазовский государственный педагогический
институт имени В.Г.Короленко”**

Майер Р.В.

**КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
ФИЗИЧЕСКИХ ЯВЛЕНИЙ**

Глазов 2009

УДК 53.072
ББК 22.3 + 22.193
М14

Рецензенты:

доктор физико–математических наук В.А.Саранин,
кандидат технических наук А.Г.Русских.

Майер Р.В. Компьютерное моделирование физических явлений: Монография. — Глазов: ГГПИ, 2009. — 112 с.

ISBN 978–5–93008–115–2

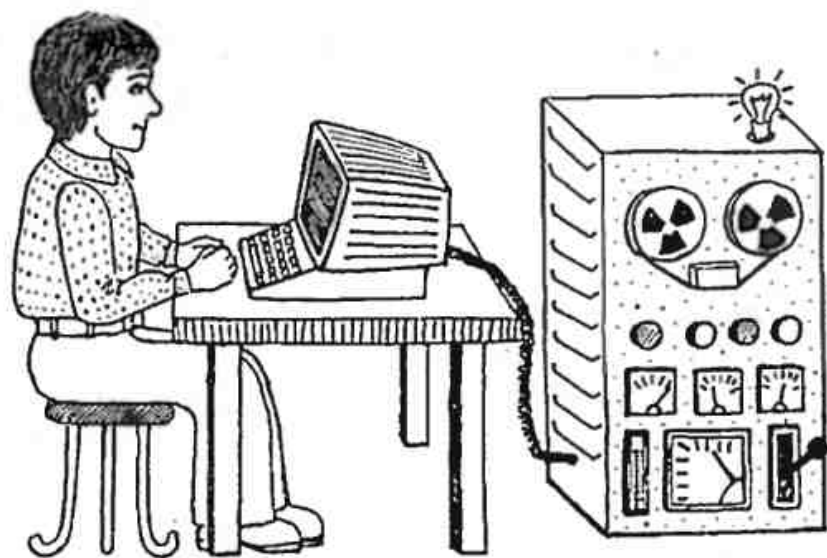
Рассмотрены основные подходы к моделированию физических явлений на персональной ЭВМ путем решения дифференциальных уравнений численным методом. Предложены компьютерные программы на языках Borland Pascal 7.0 и MS–DOS QBasic 1.0, проанализированы результаты вычислительных экспериментов.

Для читателей, интересующихся проблемами вычислительной физики.

Посети Web–сайт
"Информационные технологии
и физическое образование"
<http://maier-rv.glazov.net>
<http://komp-model.narod.ru>

© Майер Р.В.
© ГГПИ

ISBN 978–5–93008–115–2



ВВЕДЕНИЕ

Развитие человеческой цивилизации непосредственно связано с познанием и преобразованием окружающего мира. Процесс познания представляет собой бесконечное приближение к истине. Узнавая больше, мы как бы расширяем границу соприкосновения наших знаний с непознанным, тем самым увеличивая число вопросов, на которые хотелось бы получить ответы. Основная цель естественных наук — познание окружающих нас явлений и построение научной картины мира.

Научная картина мира включает в себя эмпирический базис и теоретическую модель физических явлений. Та часть объективной реальности, взаимодействующая с субъектом познания (человеком) и противостоящая ему в его предметно-практической и познавательной деятельности называется объектом познания. В силу раздвоения мира на внешнюю (открытую) и внутреннюю (сокрытую) стороны, в теории познания выделяют два аспекта объекта познания: явление, то есть внешний аспект, и сущность — внутренний аспект. Эмпирическими называются знания об объектах и происходящих с ними явлениях, полученные как результат чувственных ощущений. Теоретические знания — это знания сущности объектов и явлений, получающиеся в результате конкретизации общих положений науки. Критерием правильности научных знаний об окружающем мире является практика: многочисленные эксперименты, а также проявления научно-технического прогресса.

Итак, основная задача науки — построение теоретической модели изучаемого объекта (системы), которая бы объясняла известные (объяснительная функция) и предсказывала неизвестные явления (прогностическая функция теории). Теоретическая модель может быть качественной или количественной (математической). Состояние системы однозначно определяется набором переменных: координатой частицы, ее скоростью (зарядом, силой тока и т.д.), которые могут быть измерены с некоторой погрешностью. Отклик системы зависит от ее параметров, начального состояния и внешнего воздействия.

Важным шагом на пути познания является переход от качественно-описательных методов к математическим абстракциям. Решение проблем механики, да и физики в целом, потребовало оцифровки пространства и времени,

введения понятий системы отсчета. Совершенствовались методы измерений, что позволило оперировать с численными значениями физических величин, развивалась теория погрешностей. Физические системы наиболее просты по сравнению с биологическими, экологическими, социальными и другими системами. Это привело к созданию достаточно сложных математических моделей, представляющих систему алгебраических и дифференциальных уравнений. Исследование физических явлений теперь не ограничивалось качественными рассуждениями, а предусматривало построение математической теории.

Например, рассмотрим объяснение электромагнитных колебаний в колебательном контуре, состоящем из конденсатора и катушки индуктивности, на качественном уровне. При подключении заряженного конденсатора к катушке индуктивности он начинает разряжаться, через катушку индуктивности течет ток, энергия электрического поля переходит в энергию магнитного поля. Когда конденсатор полностью разрядился, ток через катушку индуктивности максимален. За счет инерционности катушки индуктивности, обусловленной явлением самоиндукции, происходит перезарядка конденсатора, он заряжается в обратном направлении и т.д. Эта качественная модель явления позволяет проанализировать поведение системы и предсказать, например, что при уменьшении емкости конденсатора частота собственных колебаний контура возрастет.

Следующий шаг на пути познания явления требует перехода от качественных рассуждений к количественным и предполагает введение точных и однозначных способов определения и измерения таких величин, как сила тока i , заряд q , напряжение u , емкость C , индуктивность L , сопротивление R . Не зная, как измерить силу тока в цепи или емкость конденсатора, бессмысленно говорить о каких-то количественных соотношениях. Имея однозначные определения перечисленных величин и установив процедуру их измерения, можно приступить к построению количественной или математической модели, которая, как правило, представляет собой систему алгебраических или дифференциальных уравнений. Например, электромагнитные колебания в колебательном контуре описываются обыкновенным неоднородным дифференциальным уравнением второго порядка $L\ddot{q} + R\dot{q} + q/C = U(\tau)$. Это позволяет, зная заряд конденсатора и ток через катушку индуктивности в начальный момент, определить состояние системы в последующие моменты времени.

Все существующие способы исследования математической модели можно разделить на две группы: аналитические и численные. Аналитическое решение уравнения часто предусматривает проведение громоздких математических рассуждений и в результате приводит к уравнению, выражающему функциональную связь между искомой величиной, параметрами системы, внешним воздействием и временем. Результаты такого решения нуждаются в интерпретации, предполагающей анализ полученных функций, построение графиков.

Численные методы исследования математической модели предполагают создание компьютерной программы, моделирующей изучаемое явление. Чтобы создать математическую модель, необходимо определить совокупность состояний системы, множество внешних воздействий (входных сигналов) и откликов

(выходных сигналов), а также задать соотношения, связывающие отклик системы с воздействием и ее внутренним состоянием. Они позволяют исследовать огромное количество различных ситуаций, задавая иные параметры системы, начальные условия и внешние воздействия. Искомая функция, характеризующая отклик системы, получается в табличном или графическом виде.

Развитие физической теории предполагает выдвижение основных принципов, построение математической модели объекта познания, получение из нее следствий, которые могут быть сопоставлены с результатами эксперимента. Использование ЭВМ как раз позволяет, исходя из математических уравнений, рассчитать поведение исследуемой системы в тех или иных условиях. Часто это единственный способ получения следствий из математической модели. В качестве примера рассмотрим задачу о движении трех взаимодействующих материальных точек. В общем случае она не имеет аналитического решения, использование метода компьютерного моделирования позволяет рассчитать траектории движения частиц.

Совершенствование вычислительной техники, появление ЭВМ, позволяющей быстро и достаточно точно осуществлять вычисления по заданной программе, ознаменовало качественный скачок на пути познания. На первый взгляд кажется, что быстрота счета не может непосредственно влиять на ход познания. Однако это не так: решение современных задач вычислительной физики требует проведения огромного количества вычислений, что стало возможным лишь после появления электронно-вычислительных машин, способных выполнять миллионы операций в секунду. Существенным так же является и то, что вычисления производятся автоматически, в соответствии с алгоритмом (программой) и не требуют вмешательства человека. Если ЭВМ относится к технической базе проведения вычислительного эксперимента, то ее теоретическую основу составляют прикладная математика, численные методы решения систем уравнений.

История развития численных методов восходит к фундаментальным работам Исаака Ньютона, который еще в 17 веке предложил использовать численные методы для приближенного решения алгебраических уравнений. Леонард Эйлер разработал метод решения обыкновенных дифференциальных уравнений. Из современных ученых весомый вклад в развитие компьютерного моделирования сделал академик А.А.Самарский, основоположник методологии вычислительного эксперимента. Именно им была предложена знаменитая триада "модель – алгоритм – программа" и разработана технология компьютерного моделирования, успешно используемая для изучения физических явлений. Одним из первых выдающихся результатов компьютерного эксперимента является открытие в 1968 году температурного токового слоя в плазме, создаваемой в МГД-генераторах (эффект Т-слоя). Оно было выполнено на ЭВМ и позволило предсказать исход реального эксперимента, проведенного через несколько лет.

Рассмотрим, например, типичную задачу вычислительной физики: по известному начальному состоянию системы в момент τ_0 и закону ее эволюции $x = f(x, \dot{x}, \tau)$ необходимо определить состояние системы $x(\tau)$ в последующие

моменты времени τ . Задача решается методом конечных разностей: сначала определяется состояние системы $x_1 = x(\tau_0 + \Delta\tau)$ в момент времени $\tau_0 + \Delta\tau$, затем это состояние рассматривается как начальное и устанавливается состояние системы $x_2 = x(\tau_0 + 2\Delta\tau)$ в момент $\tau_0 + 2\Delta\tau$ и т.д.

Или другой пример: методом последовательных приближений необходимо рассчитать распределение некоторой величины, например, потенциала $\varphi(x, y)$ в заданной области при известных его значениях на границе области. Алгоритм решения задачи — в следующем: сначала задается нулевое приближение $\varphi_0(x, y)$. С его помощью осуществляется первое приближение $\varphi_1(x, y)$, затем, исходя из найденных значений $\varphi_1(x, y)$, рассчитывается второе приближение $\varphi_2(x, y)$, потом третье и т.д. В результате нескольких сотен итераций распределение $\varphi_n(x, y)$ оказывается достаточно близко к истинному.

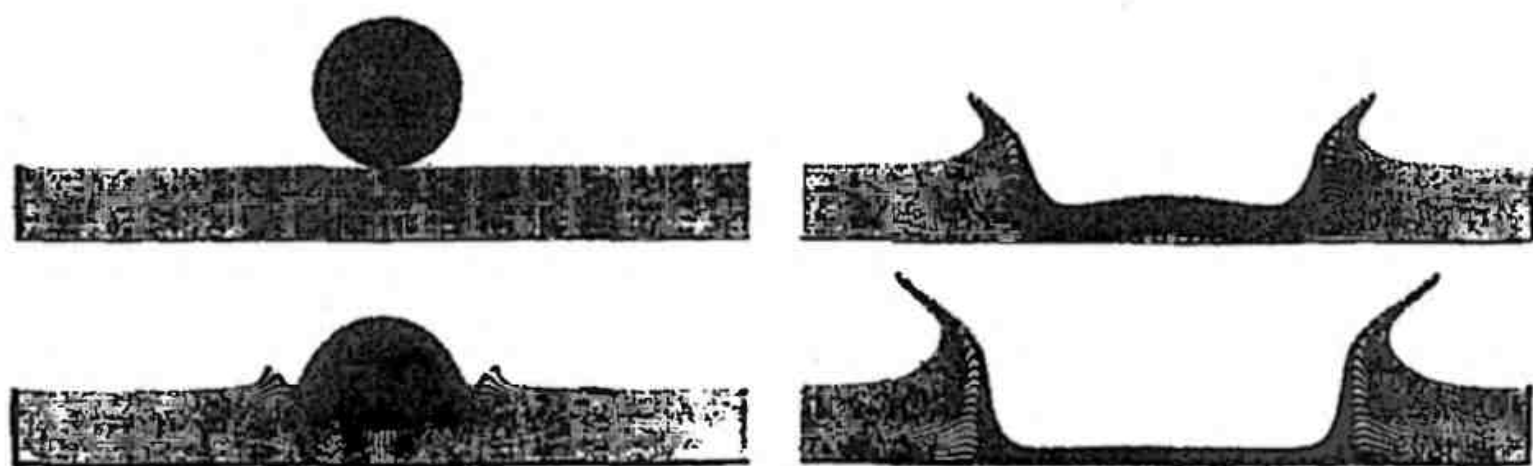


Рис. 0.1.

Используются и более сложные методы. Рассмотрим задачу определения положения движущейся поверхности плотной среды, состоящая в моделировании всплеска от падения капли в мелкий бассейн (рис. 0.1 из книги Поттера Д., с. 304). Ее решение осуществляется методом маркеров на двумерной сетке. По всему объему жидкости как-бы распределяются гипотетические частицы — маркеры. Их скорость в каждой ячейке эйлеровой сетки вычисляют путем интерполирования значений локальной скорости среды в соседних ячейках.

Вычислительный эксперимент фактически является экспериментом над математической моделью исследуемого объекта, проводимого с помощью ЭВМ. Часто он значительно дешевле и доступнее натурного эксперимента, его выполнение требует меньшего времени, он дает более подробную информацию. К наиболее важным направлениям вычислительного эксперимента относятся: 1) расчет ядерных реакций; 2) решение задач небесной механики, астрономии и космонавтики; 3) изучение глобальных явлений на Земле, моделирование климата, исследование экологических проблем, глобального потепления, последствий ядерного конфликта и т.д.; 4) решение задач механики сплошных сред, в частности, гидродинамики; 5) компьютерное моделирование различных технологических процессов; 6) расчет химических реакций и биологических процессов, развитие химической и биологической технологии.

В монографии приводятся тексты программ на языках Borland Pascal 7.0 и MS-DOS QBasic 1.0.

1. ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Производная функции $y = f(x)$ — это предел отношения приращения функции $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ к приращению аргумента Δx в случае, когда приращение аргумента стремится к 0:

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}.$$

При этом дифференциал dx — бесконечно малое приращение аргумента, а dy — соответствующая ему линейная часть приращения функции. Производная характеризует быстроту изменения функции и крутизну графика в данной точке x . Она равна тангенсу угла между касательной и положительным направлением оси абсцисс. Частная производная $\partial f / \partial x$ функции многих переменных $f(x_1, \dots, x_n)$ по переменной x_1 в точке (x_1, \dots, x_n) есть предел приращения функции $f(x_1 + \Delta x_1, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_n)$ к приращению аргумента Δx_1 при фиксированных значениях остальных независимых переменных.

Для численного дифференцирования используется метод сеток: области непрерывного изменения аргументов функции $y = f(x_1, \dots, x_n, \tau)$ заменяют конечным множеством узлов, образующих одномерную или многомерную пространственно-временную сетку. От функции непрерывного аргумента переходят к функции дискретного аргумента, приближенно вычисляют ее значения на различных временных слоях, находят производные и интегралы. При этом бесконечно малые приращения функции $y = f(x_1, \dots, x_n, \tau)$ и приращения ее аргументов заменяются малыми, но конечными разностями.

Пусть задана функция $y = y(x)$. Разобьем интервал от a до b на элементарные отрезки длиной $h = \Delta x$, получив конечное множество узлов сетки $x_i = a + i\Delta x$, где $i = 1, 2, \dots, N$, а N — число узлов. При этом мы переходим от непрерывной области Ω к сетке $\Omega_{\Delta x}$, от функции непрерывного аргумента к функции дискретного аргумента $y_i = y(x_i)$. Запишем для нее ряд Тейлора:

$$y(x) = y(x_i) + y'_i \frac{(x - x_i)}{1!} + y''_i \frac{(x - x_i)^2}{2!} + \dots + y_i^{(k)} \frac{(\hat{x} - x_i)^k}{k!},$$

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + y'(x_i) \frac{h}{1!} + y''(x_i) \frac{h^2}{2!} + \dots + y^{(k)}(x_i) \frac{h^k}{k!},$$

где $h = \Delta x = x - x_i$. Ограничиваясь первыми двумя слагаемыми в правой части, получаем приближенное равенство: $y(x_{i+1}) = y(x_i) + y'(x_i)\Delta x$. Оно же следует из определения производной:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \approx \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_{i+1} - y_i}{\Delta x}, \quad y_{i+1} = y_i + y'(x_i)\Delta x.$$

Левая, правая и центральная разностные производные первого порядка в точке с координатой x_i соответственно равны:

$$y'(x_i)_- = \frac{y(x_i) - y(x_{i-1})}{\Delta x}, \quad y'(x_i)_+ = \frac{y(x_{i+1}) - y(x_i)}{\Delta x}, \quad y'(x_i) = \frac{y(x_{i+1}) - y(x_{i-1}))}{2\Delta x}.$$

Для второй производной получим:

$$y''(x_i) = \frac{y'(x_{i+1}) - y'(x_i)}{\Delta x} = \frac{y(x_{i+1}) - y(x_i)}{\Delta x^2} - \frac{y(x_i) - y(x_{i-1}))}{\Delta x^2},$$

$$y''(x_i) = \frac{y(x_{i+1}) - 2y(x_i) + y(x_{i-1}))}{\Delta x^2}.$$

Чем меньше шаг сетки Δx , тем выше точность найденных производных.

Интеграл — сумма бесконечно большого числа бесконечно малых. Он численно равен площади криволинейной трапеции, ограниченной графиком интегрируемой функции $y = f(x)$ и пределами интегрирования a и b . Эту криволинейную трапецию разобьем на N прямоугольных полосок шириной $\Delta x = h = (b - a) / N$, длина каждой из которых равна $y_i = y(a + i\Delta x)$. Элементарная площадь полоски $\Delta S_i = y(x_i)\Delta x$. Искомая площадь S равна сумме:

$$S = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N y(x_i)\Delta x = \int_a^b y(x)dx.$$

Для численного нахождения интеграла достаточно определить сумму:

$$S = \sum_{i=1}^N y(x_i)\Delta x.$$

Чем меньше шаг $h = \Delta x$ и больше N , тем точнее найденное значение интеграла. Этот метод называется методом прямоугольников.

Более точный метод трапеций заключается в том, что каждая i -ая полоска заменяется трапецией высотой $h = \Delta x$ с длинами оснований $y_i = y(a + i\Delta x)$ и $y_{i+1} = y(a + (i + 1)\Delta x)$, поэтому ее площадь равна $\Delta S_i = (y_i + y_{i+1})\Delta x / 2$. Интеграл равен сумме элементарных площадей этих трапецевидных полосок:

$$S = \sum_{i=1}^N \frac{y(x_i) + y(x_{i+1}))}{2} \Delta x.$$

Метод Монте-Карло нахождения площади криволинейной трапеции под кривой $y = y(x)$ состоит в следующем. Представим себе прямоугольник, ограниченный пределами интегрирования a и b , осью Ox и горизонталью $y = c$, внутри которого находится эта криволинейная трапеция. Площадь прямоугольника равна $(b - a)c$. Задавая случайным образом координаты (x_i, y_i) , поместим внутрь прямоугольника N точек. Подсчитаем число n точек, оказавшихся внутри криволинейной трапеции, то есть удовлетворяющих условию $y_i < y(x_i)$. Площадь криволинейной трапеции будет во столько раз меньше площади выбранного прямоугольника, во сколько раз n меньше N . Поэтому при $N \rightarrow \infty$ дробь $n(b - a)c / N$ стремится к искомому интегралу:

$$S = \int_a^b y(x)dx = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{n(b - a)c}{N}.$$

Многие физические задачи сводятся к обыкновенному дифференциальному уравнению первого порядка: $\dot{x}(\tau) - f(x(\tau), \tau) = 0$. Оно решается путем приведения к конечно-разностному уравнению:

$$(x^{l+1} - x^l) / \Delta \tau = f(x^l, t), \quad x^{l+1} = x^l + f(x^l, t) \Delta \tau.$$

Диффуравнение второго порядка $a\ddot{x}(\tau) + b\dot{x}(\tau) + kx(\tau) - f(t) = 0$ приводится к системе из двух дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\dot{x}(\tau) - v(\tau) = 0, \quad a\dot{v}(\tau) + b v(\tau) + kx(\tau) - f(\tau) = 0.$$

Линейным дифференциальным уравнением с частными производными называются соотношения вида:

$$a_{11} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + a_{22} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \dots + b_{12} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + b_{13} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} + \dots + c_1 \frac{\partial f}{\partial x} + \dots + cf + \varphi(x, y, \dots) = 0.$$

В случае, когда коэффициенты $a_{11}, a_{22}, \dots, b_{12}, b_{23}, \dots, c_1, c_2, \dots$, зависят от аргументов x, y, \dots или значений функции $f(x, y, z, \dots)$, уравнение является нелинейным. Если $\varphi(x, y, z, \dots) = 0$, то уравнение называют однородным.

1. К уравнениям гиперболического типа относятся уравнения колебаний упругой одномерной (струны), двумерной (мембраны) и трехмерной среды:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial \tau^2}, \quad \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial \tau^2} + \beta \frac{\partial \xi}{\partial \tau} - F(x, \tau),$$

телеграфные уравнения:

$$\frac{\partial i}{\partial x} + C \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{R} u = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x} + L \frac{\partial i}{\partial t} + Ri = 0.$$

Граничные условия для струны (мембраны): 1) задан режим колебания одной или нескольких точек струны: $\xi(0, \tau) = \mu(\tau)$; 2) задана скорость одной или нескольких точек: $d\xi(0, \tau)/d\tau = v(\tau)$; 3) задана сила, действующая на одну или несколько точек $d^2\xi/d\tau^2 = F(\tau)$.

2. Примеры уравнений параболического типа: уравнение теплопроводности (диффузии, вязкости):

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k_x \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) + q(x, y, \tau).$$

3. К уравнениям эллиптического типа относятся уравнение для потенциала стационарного электрического поля:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\epsilon_x \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\epsilon_y \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) = -\rho(x, y),$$

уравнение, описывающее стационарное распределение температуры неравномерно нагретой пластины

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k_x \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) = 0,$$

уравнение для потенциального течения несжимаемой жидкости без источников

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0.$$

Многие физические ситуации сводятся к задаче Дирихле: требуется решить дифференциальное уравнение в частных производных в замкнутой области Ω при известном распределении искомой функции на границе области $\varphi(\Omega_0)$. Рассмотрим нестационарную задачу, состоящую в решении уравнения теплопроводности:

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + b \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{q(x, y)}{c\rho}.$$

Введем сетку $\Omega_{\Delta x, \Delta y, \Delta \tau}$ и перейдем к конечным разностям:

$$\frac{T_{i,j}^{t+1} - T_{i,j}^t}{\Delta \tau} = a \frac{T_{i-1,j}^t - 2T_{i,j}^t + T_{i+1,j}^t}{\Delta x^2} + b \frac{T_{i,j-1}^t - 2T_{i,j}^t + T_{i,j+1}^t}{\Delta y^2} + \frac{q_{i,j}}{c\rho},$$

$$T_{i,j}^{t+1} = T_{i,j}^t + \left(a \frac{T_{i-1,j}^t - 2T_{i,j}^t + T_{i+1,j}^t}{\Delta x^2} + b \frac{T_{i,j-1}^t - 2T_{i,j}^t + T_{i,j+1}^t}{\Delta y^2} + \frac{q_{i,j}}{c\rho} \right) \Delta \tau.$$

Зная значения функции $T_{i,j}^t$ на временном слое t , можно рассчитать ее значения $T_{i,j}^{t+1}$ на следующем временном слое $t+1$.

В качестве примера стационарной задачи проанализируем решение уравнения Пуассона:

$$\Delta \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = f(x, y).$$

Запишем его в конечных разностях:

$$\frac{\varphi_{i-1,j} - 2\varphi_{i,j} + \varphi_{i+1,j}}{\Delta x^2} + \frac{\varphi_{i,j-1} - 2\varphi_{i,j} + \varphi_{i,j+1}}{\Delta y^2} = f(x_i, y_j), \quad \Delta x = \Delta y = h.$$

Отсюда: $\varphi_{i,j} = (\varphi_{i+1,j} + \varphi_{i-1,j} + \varphi_{i,j+1} + \varphi_{i,j-1} - f(x_i, y_j)h^2)/4$.

Для решения задачи используется метод последовательных приближений: во всех внутренних узлах сетки задаются произвольные исходные значения искомой функции $\varphi_0(x_i, y_j)$ (нулевое приближение); значения функции во внешних узлах должны соответствовать граничным условиям. Осуществляется первая итерация, в ходе которой перебираются все внутренние узлы сетки и, исходя из начальных значений, определяют новые уточненные значения функции $\varphi_1(x_i, y_j)$. Затем осуществляется вторая, третья, ... и т.д. итерации, причем результаты k -ой итерации используются в качестве исходных для $(k+1)$ -ой итерации.

2. МОДЕЛИРОВАНИЕ СИСТЕМ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ

Сложность физической системы определяется числом независимых переменных, однозначно характеризующих ее положение в пространстве конфигураций. Эти независимые переменные можно назвать обобщенными координатами q_k , $k = 1, 2, \dots, s$, а их количество s — числом степеней свободы.

Рассмотрим физическую систему с одной степенью свободы, состоящую из инерционного элемента массой m , упругого элемента жесткостью k и диссипативного элемента с коэффициентом сопротивления r (рис. 2.1.1). Примером такой системы является груз, подвешенный на пружине в вязкой среде, или колебательный контур, состоящий из последовательно соединенных резистора, конденсатора и катушки индуктивности. Определим отклик системы $x(\tau)$, а также ее первую и вторую производные $\dot{x}(\tau)$, $\ddot{x}(\tau)$ на внешнее воздействие $F_x(\tau)$, если известны начальные условия x_0 , $v_0 = \dot{x}_0$.

Для пружинного маятника в вязкой среде из второго закона Ньютона следует линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка: $m\ddot{x} + r\dot{x} + kx = F_x(\tau)$. Это уравнение описывает широкий класс физических явлений различной природы. Например, процессы, происходящие в колебательном контуре, состоящем из последовательно соединенных резистора R , конденсатора C и катушки индуктивности L , на который подано напряжение $U(\tau)$, характеризуются диффуравнением: $L\ddot{q} + R\dot{q} + q/C = U(\tau)$, где q — заряд, проходящий по цепи, $i = \dot{q}$ — сила тока. При этом реализуется электро-механическая аналогия "сила-напряжение".

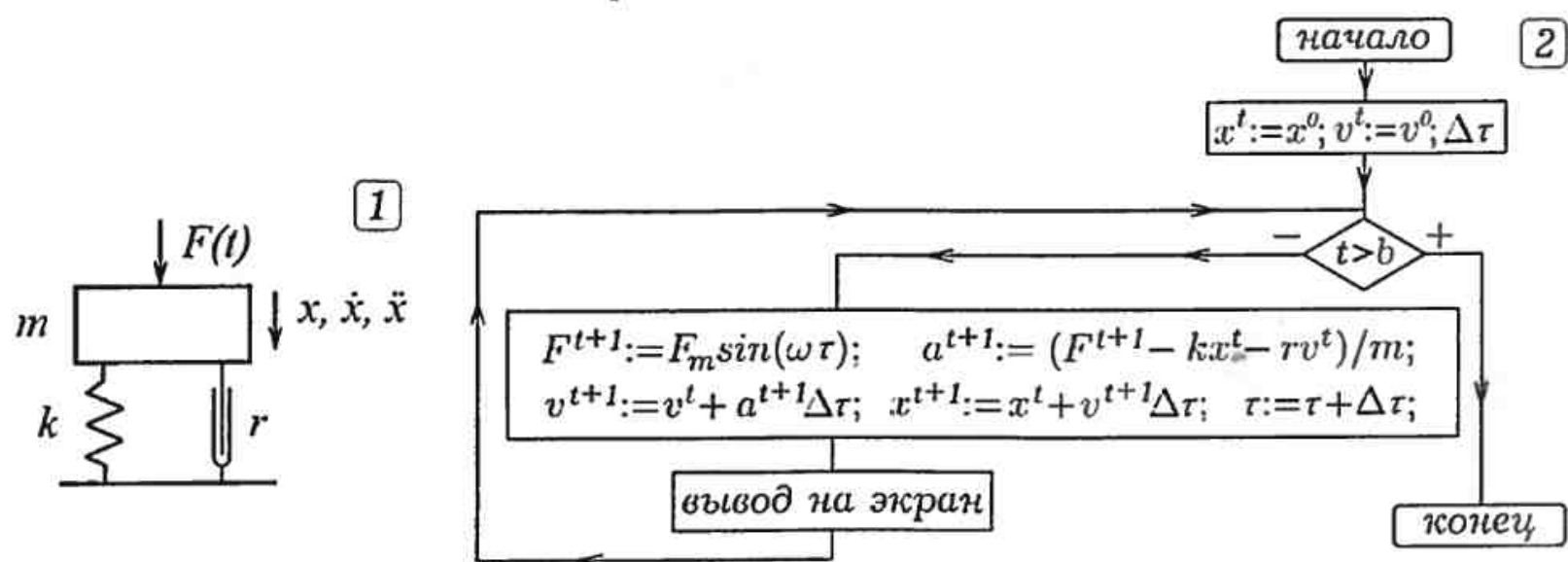


Рис. 2.1.

Характер движения физической системы зависит от ее параметров, начальных условий и действующей на нее внешней силы. При этом возможны следующие ситуации: 1) внешняя сила отсутствует; 2) внешняя сила постоянна; 3) внешняя сила изменяется по гармоническому закону; 4) внешняя сила изменяется по произвольному периодическому закону; 5) внешняя сила изменяется по произвольному непериодическому закону.

Используя метод сеток, разобьем одномерную область Ω изменения аргумента τ на множество узлов, отстоящих друг от друга на $\Delta\tau$. Получим сетку

$\Omega_{\Delta\tau} = \{\tau = t \cdot \Delta\tau, t = 0, 1, 2, \dots, M\}$. Метод Эйлера состоит в замене производных их конечно-разностными аппроксимациями. При этом бесконечно малые приращения функции $x(\tau)$ и ее первые две производные $v_x = \dot{x}(\tau)$, $a_x = \ddot{x}(\tau)$ заменяются конечными разностями, а бесконечно малые приращения $d\tau$ — малыми, но конечными приращениями $\Delta\tau$. Сначала, исходя из параметров системы m, r, k , ее координаты $x(\tau)$ и скорости $v_x(\tau)$ в момент времени τ , рассчитывается ее координата и скорость в следующий момент $\tau + \Delta\tau$ (дискретный момент $t + 1$):

$$a_x^{t+1} = (F_x^t - r v_x^t - k x^t) / m, \quad v_x^{t+1} = v_x^t + a_x^{t+1} \Delta\tau, \quad x^{t+1} = x^t + v_x^{t+1} \Delta\tau.$$

Это состояние рассматривается как исходное и процедура расчета повторяется для момента времени $\tau + 2\Delta\tau$ и так далее (рис. 2.1.2). В одном цикле с вычислениями строятся графики $x(\tau)$, $v_x(\tau)$, $a_x(\tau)$. Используемая программа Пр-2.1 представлена ниже.

Пр-2.1.

```
uses dos, crt, graph;
Const Fm=10; w=5; m=2; r=0; k=0; Mx=20; Mv=40; Ma=8;
Mf=2; Mt=100; dt=0.00006;
Var x, v, a, F, t : Real; j, xx, vv, aa, FF, tt, Gd, Gm : Integer;
BEGIN Gd:= Detect; InitGraph(Gd, Gm, 'c:\bp\bgi'); t:=0; v:=0; x:=-3;
line(30,300,650,300); line(31,500,31,10); OutTextXY(50,20,'X, V, A');
Repeat t:=t+dt; { F:=Fm*sin(w*t); }
{ If sin(w*t)<0 then F:=0; If sin(w*t)>0 then F:=Fm; }
F:=0; If t<1 then F:= Fm; If t>3 then F:=-Fm;
a:=(F-r*v-k*x)/m; x:=x+v*dt; v:=v+a*dt; tt:=round(t*Mt);
xx:=round(x*Mx); vv:=round(v*Mv); aa:=round(a*Ma); FF:=round(F*Mf);
circle(30+tt,300-xx,1); circle(30+tt,300-vv,1); circle(30+tt,300-aa,2);
until KeyPressed; CloseGraph;
END.
```

Задача 2.1. Первые $\tau_1 = 8$ с точка двигалась с ускорением $a_{1x}(\tau) = 1 \cdot \tau$ м/с², до момента $\tau_2 = 30$ с — с ускорением $a_{2x} = 0,2$ м/с², затем движение происходило с ускорением $a_{3x} = -4$ м/с². Постройте графики зависимостей координаты, скорости и ускорения от времени, если начальные координата и скорость точки равны -200 м и -15 м/с.

Для вычисления координаты и скорости точки организуем цикл по времени, в котором определяется скорость и координата. Результат решения задачи представлен на рис. 2.2.1. Так как $v = \dot{x}$ и $a = \dot{v}$, то в моменты времени, когда скорость (ускорение) обращается в нуль, координата (скорость) достигает экстремума. При $\tau < \tau_1$ с точка движется с ускорением, увеличивающимся пропорционально времени, скорость возрастает пропорционально квадрату τ . На втором этапе движение равноускоренное (скорость растет пропорционально τ). При $\tau > \tau_2$ движение равноускоренное, скорость уменьшается до 0, после чего точка начинает двигаться в противоположном направлении.

Задача 2.2. На точку массы m действует скачкообразно изменяющаяся сила: $F_x(\tau) = F$, при $0 < \tau \leq \tau_1$; $F_x = 0$, при $\tau_1 < \tau \leq \tau_2$; $F_x(\tau) = -F$, при $\tau_2 < \tau$. Исследуйте движение точки, проанализируйте получившиеся графики зависимостей $x(\tau)$, $v_x(\tau)$, $a_x(\tau)$ (рис. 2.2.2).

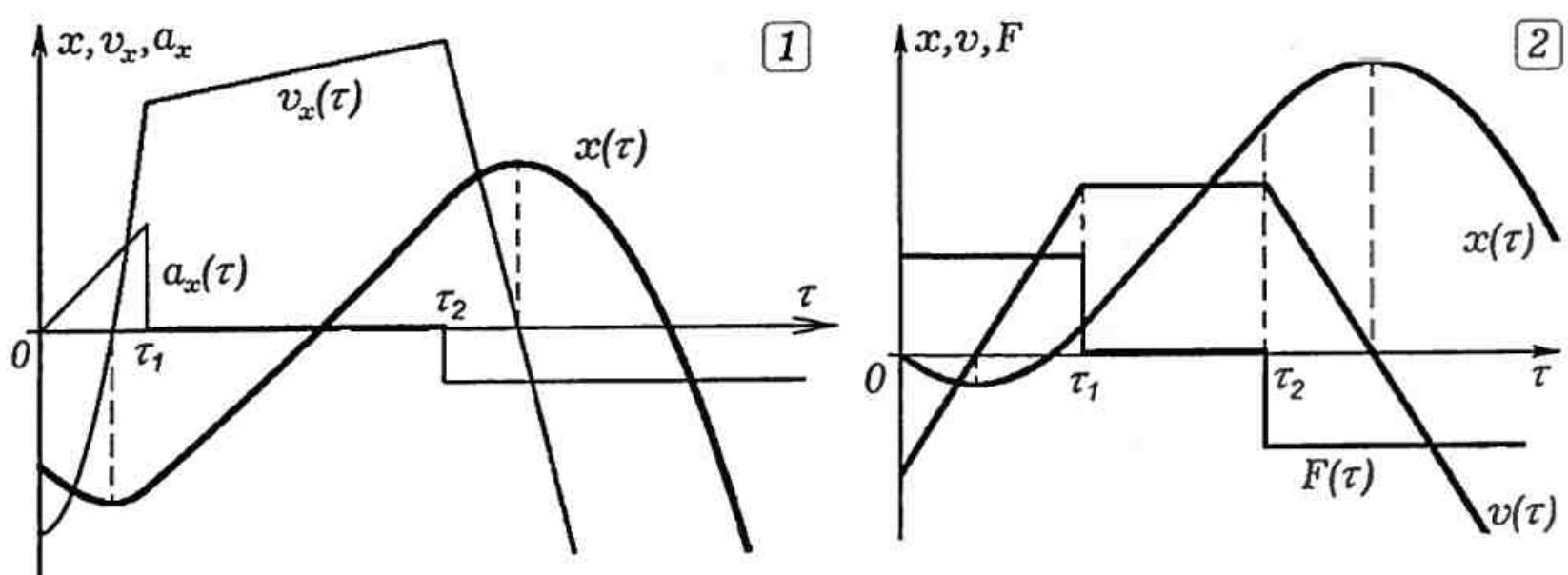


Рис. 2.2.

Задача 2.3. Изучите движение материальной точки, движущейся в вязкой среде под действием постоянной силы, сонаправленной с осью x ($F_x > 0$) при начальных условиях $x_0 = 0$, $v_{0x} < 0$. Проанализируйте графики $x(\tau)$, $v_x(\tau)$, $a_x(\tau)$ (рис. 2.3.1). Докажите, что время подъема камня, брошенного в вязкой среде вертикально вверх, меньше времени спуска. Повторите вычислительный эксперимент при другом значении коэффициента сопротивления среды.

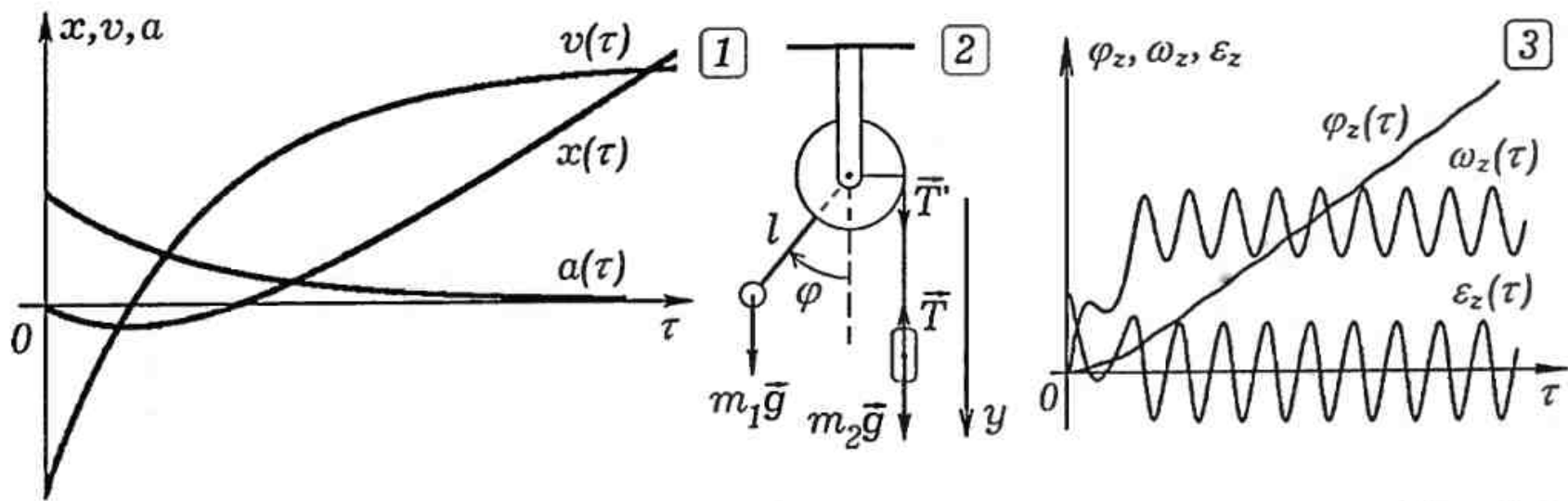


Рис. 2.3.

Задача 2.4. К шкиву массой m радиуса R , установленному на горизонтальной оси, с помощью невесомого стержня длиной l прикреплен груз массы m_1 (рис. 2.3.2). На шкив намотана нить, к концу которой привязано тело массы m_2 . При $\tau = 0$ система покоилась. Рассчитайте угловое ускорение, скорость и перемещение шкива в последующие моменты времени, если тормозящий момент пропорционален скорости.

Из законов динамики: $I\varepsilon = TR - m_1gl \sin \varphi$, $T = m_2g - m_2a$, где $I = mR^2/2 + m_1l^2$ — момент инерции шкива с грузом, $a = R\varepsilon$ — ускорение тела m_2 . Отсюда: $I\varepsilon = m_2gR - m_2R^2\varepsilon - m_1gl \sin \varphi$. Угловое ускорение равно:

$$\varepsilon = \frac{m_2gR - m_1gl \sin \varphi}{I + m_2R^2}.$$

Для моделирования рассматриваемого движения на ПЭВМ необходимо создать цикл по времени τ , в котором рассчитывались бы угловое ускорение ε , скорость ω и перемещение φ . Из графиков (рис. 2.3.3) видно, что движение не равноускоренное, ускорение ε и скорость ω колеблются относительно некоторых значений, угловое перемещение φ шкива возрастает. Если масса тела m_2 мала, то шкив не совершит ни одного оборота, в системе возникнут колебания.

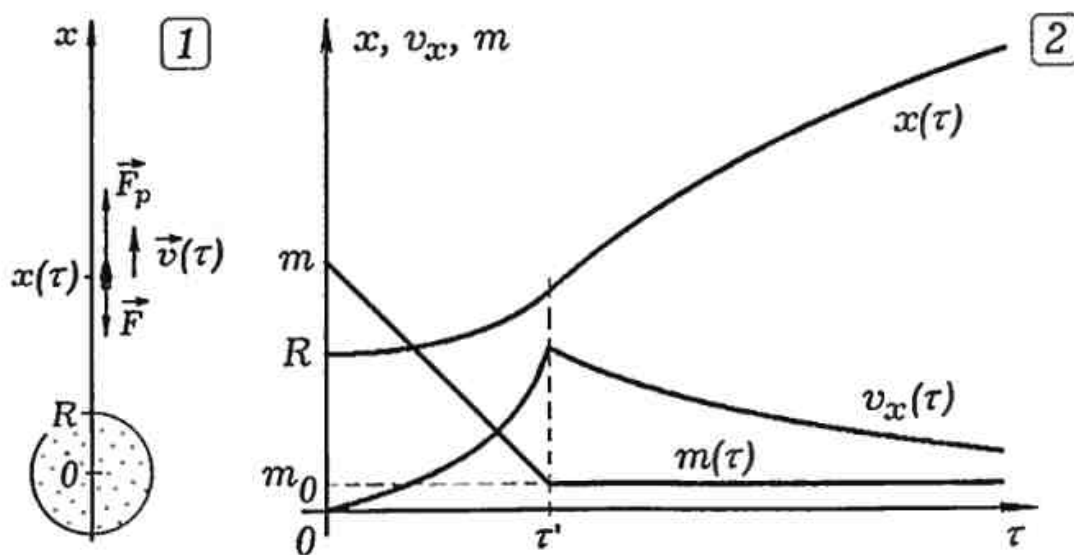


Рис. 2.4.

Задача 2.5. Рассчитайте движение ракеты, удаляющейся по прямой от Земли (рис. 2.4.1), если масса горючего уменьшается со скоростью $b = \text{const}$. Масса корпуса равна m_0 , масса заправленной ракеты $m > m_0$. Относительная скорость вытекания газов равна $v_{\text{отн}}$. Постройте графики $x(\tau)$, $v_x(\tau)$, $m(\tau)$.

Используемая программа содержит цикл по времени, в котором вычисляются масса ракеты m , реактивная сила $F_p = v_{\text{отн}} \Delta m / \Delta \tau$, сила притяжения к Земле F , ускорение a_x , скорость v_x , координата x :

$$\begin{aligned} m^{t+1} &= m^t - b\Delta\tau, & F_p^{t+1} &= v_{\text{отн}}(m^t - m^{t+1})/\Delta\tau, \\ F^{t+1} &= GMm_1^{t+1}/(x^{t+1})^2, & a_x^{t+1} &= (F_p^{t+1} - F^{t+1})/m_1^{t+1}, \\ v_x^{t+1} &= v_x^t + a_x^{t+1}\Delta\tau, & x^{t+1} &= x^t + v_x^{t+1}\Delta\tau. \end{aligned}$$

В цикле должен быть предусмотрен вывод результатов вычислений на экран. Получающиеся графики приведены на рис. 2.4.2. Видно, что по мере вытекания газов масса ракеты с топливом уменьшается до значения m_0 , скорость сначала возрастает, а после остановки двигателя в момент τ' начинает убывать вследствие притяжения Земли.

3. МОДЕЛИРОВАНИЕ КОЛЕБАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

В предыдущем параграфе рассматривалось движение системы, состоящей из инерционного, упругого и диссипативного элементов. Такой системой является тело, подвешенное на пружине в вязкой среде. Если вязкость мала, то система совершает колебания. Свободные затухающие колебания в линейной системе описываются однородным дифференциальным уравнением второго порядка: $m\ddot{x} + r\dot{x} + kx = 0$. Если $r = 0$, то колебания незатухающие, уравнение приобретает вид: $m\ddot{x} + kx = 0$. Частота линейных колебаний не зависит от амплитуды. Дифференциальное уравнение вынужденных колебаний является неоднородным и имеет вид: $m\ddot{x} + r\dot{x} + kx = F \sin \omega \tau$.

Примером нелинейной колебательной системы является математический маятник — материальная точка, подвешенная на невесомом нерастяжимом стержне. Сила тяжести создает возвращающий момент $-mgl \sin \varphi$, который равен произведению момента инерции $I = ml^2$ на угловое ускорение $\varepsilon = \ddot{\varphi}$. Имеем: $ml^2 \ddot{\varphi} = -mgl \sin \varphi$, $\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \sin \varphi = 0$, где $\omega_0 = \sqrt{g/l}$ — собственная частота колебаний. При малых смещениях $\sin \varphi \approx \varphi$, уравнение колебаний становится линейным, маятник совершает гармонические колебания.

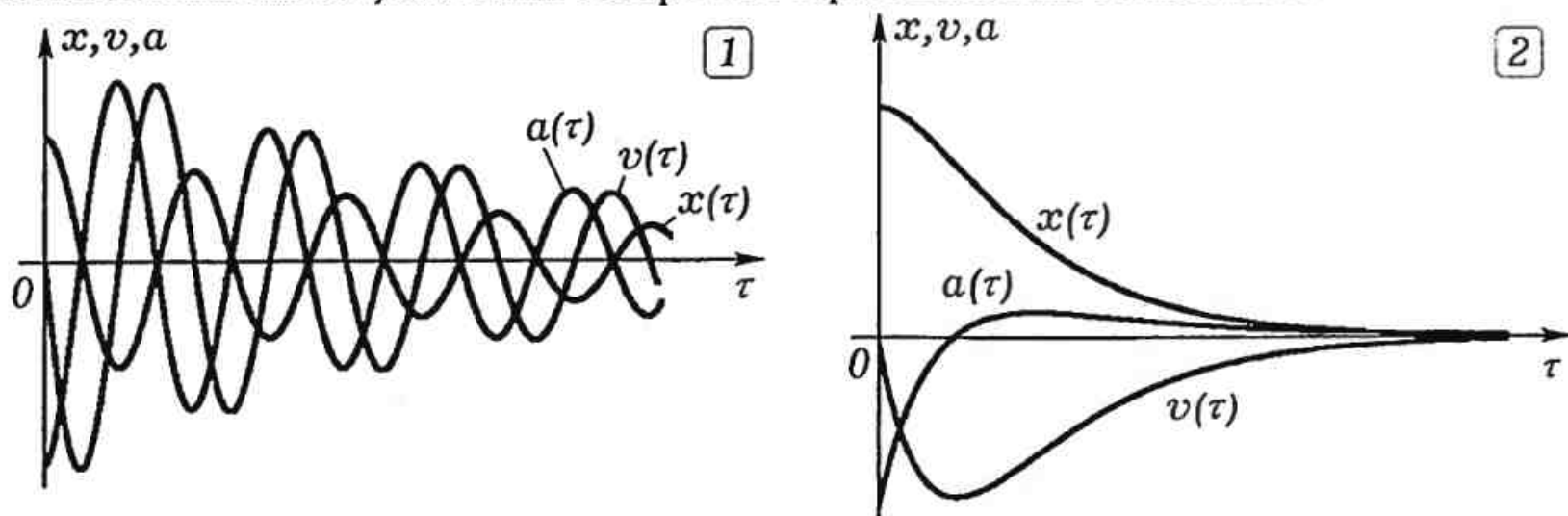


Рис. 3.1.

Задача 3.1. Колебательная система состоит из тела массой m , находящегося на пружине с жесткостью k в вязкой среде с коэффициентом сопротивления r . Промоделируйте свободные незатухающие и затухающие колебания. Проведите серию вычислительных экспериментов при различных параметрах системы и начальных условиях.

По второму закону Ньютона $ma_x = -kx - r v_x$. Отсюда следует $a_x = (-kx - r v_x) / m$. Для координаты и скорости в конечных разностях получаем: $v_x^{i+1} = v_x^i + a_x^{i+1} \Delta \tau$, $x^{i+1} = x^i + v_x^{i+1} \Delta \tau$. Создадим цикл по t , в котором будут вычисляться координата, скорость и ускорение в дискретные моменты t и строиться графики $x(\tau)$, $v_x(\tau)$, $a_x(\tau)$, а также фазовая кривая.

В случае слабого затухания $r / 2m < \omega_0 = \sqrt{k/m}$ система совершает почти гармонические колебания, амплитуда которых уменьшается по экспоненци-

альному закону (рис. 3.1.1, 3.3.1). В случае сильного затухания, когда $r/2m > \omega_0 = \sqrt{k/m}$, движение системы аperiодическое (рис. 3.1.2).

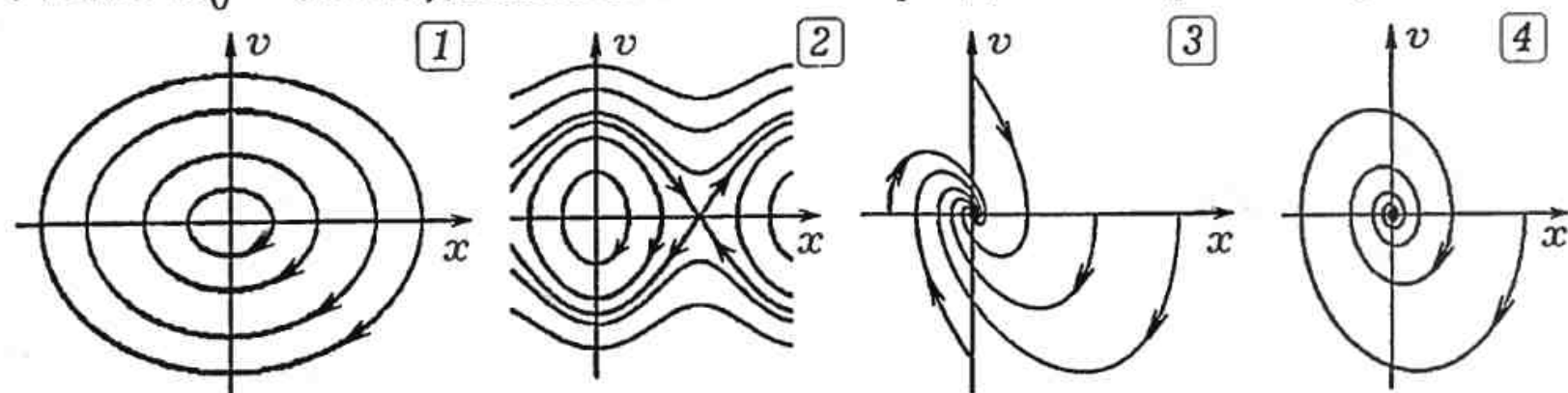


Рис. 3.2.

Задача 3.2. Получите фазовые кривые для случаев: 1) незатухающие колебания (рис. 3.2.1); 2) линейные и нелинейные колебания математического маятника (рис. 3.2.2); 3) затухающие колебания с сильным затуханием (рис. 3.2.3); 4) затухающие колебания со слабым затуханием (рис. 3.2.4).

Задача решается аналогичным образом, отличие лишь в том, что на основе вычислений необходимо строить фазовый портрет в системе координат x и v (или p). Получающиеся фазовые кривые изображены на рис. 3.2.

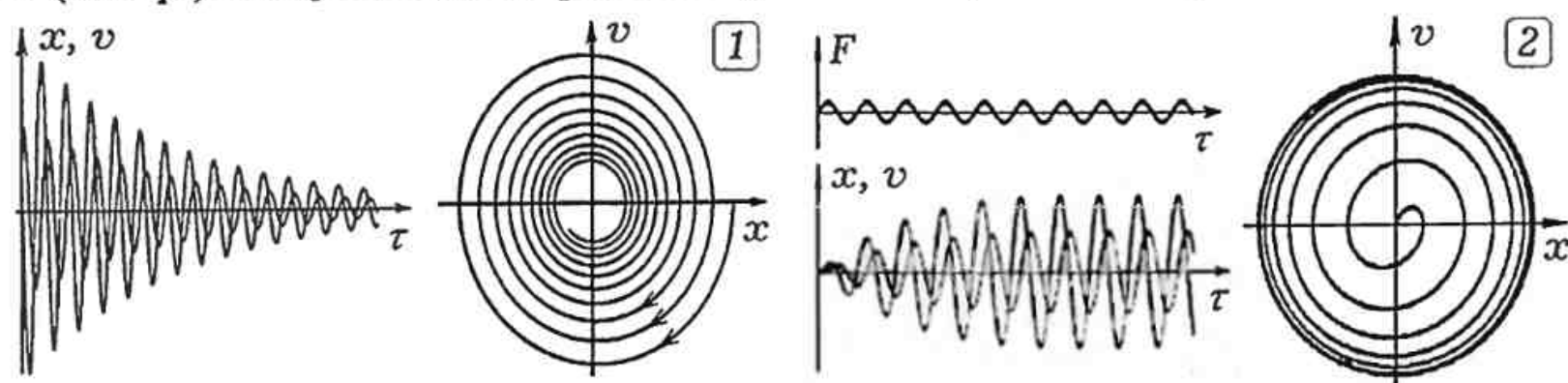


Рис. 3.3.

Задача 3.3. На пружинный маятник, состоящий из тела на пружине, действует внешняя гармоническая сила. Получите графики зависимостей координаты и скорости от времени.

Уравнение вынужденных колебаний: $ma_x = -kx - rv_x + F_m \sin \omega \tau$. Ускорение равно $a_x = (-kx - rv_x + F_m \sin \omega \tau) / m$. Во всем остальном задача решается аналогично. Выполните серию вычислительных экспериментов, изменяя частоту вынуждающей силы и параметры колебательной системы. Результаты моделирования — на рис. 3.3.2.

Задача 3.4. С помощью предыдущей программы исследуйте зависимость амплитуды вынужденных колебаний от частоты при различных коэффициентах затухания, постройте резонансные кривые.

Необходимо с некоторым шагом изменять частоту ω вынуждающей силы вблизи собственной частоты колебательной системы $\omega_0 = \sqrt{k/m}$, и определять соответствующие ей значения амплитуды установившихся колебаний. Это позволит получить амплитудно-частотную характеристику колебательной системы. Если до начала действия вынуждающей силы система покоилась, то какое-то время будет происходить релаксационный процесс, в ходе которого система

из состояния покоя перейдет в установившийся колебательный режим с некоторой постоянной амплитудой. Например, когда параметры системы $k = 100 \text{ Н/м}$, $m = 1 \text{ кг}$ (резонансная частота $\omega_0 = 10 \text{ рад/с}$) и коэффициент сопротивления $r = 0,20 \text{ Н·с/м}$ (или $r = 0,15 \text{ Н·с/м}$), при частоте вынуждающей силы $\omega = 11 \text{ рад/с}$ графики вынужденных колебаний $x(\tau)$ изображены на рис. 3.4.1. Видно, что в процессе перехода системы в установившийся режим, амплитуда периодически изменяется, причем ее колебания затухают.

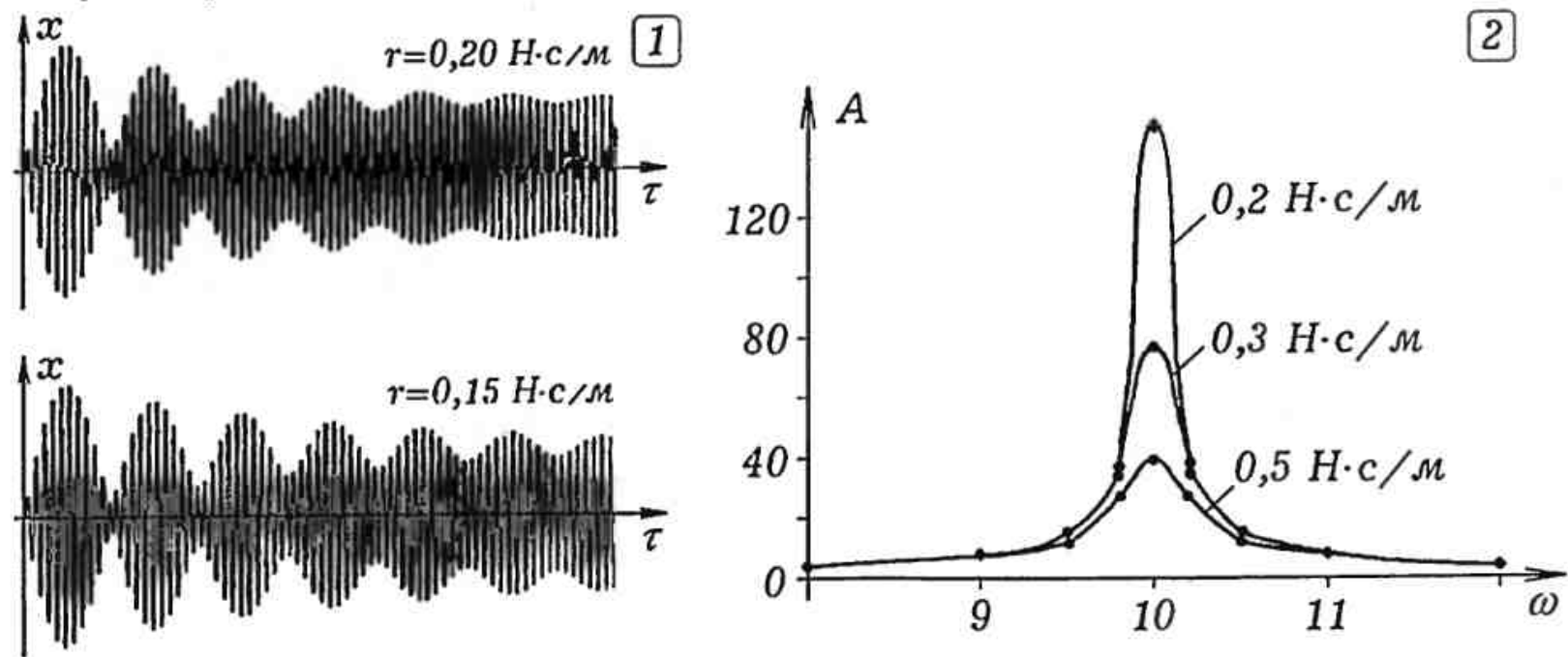


Рис. 3.4.

Результаты изучения зависимости амплитуды вынужденных колебаний от частоты вынуждающей силы приведены в табл. 3.1, соответствующие им резонансные кривые изображены на рис. 3.4.2. Видно, что на резонансной частоте амплитуда колебаний достигает максимального значения, а по мере удаления от резонанса она довольно быстро уменьшается. Если коэффициент сопротивления мал, то добротность велика, резонансная кривая имеет ярко выраженный максимум. При низкой добротности резонанс выражен слабо.

Таблица 3.1.

$\omega, \text{ рад/с}$	6,0	8,0	9,0	9,5	9,8	10,0	10,2	10,5	11,0	12,0	14,0
$r = 0,2 \text{ Н·с/м}$	3	4	8	15	37	151	39	15	8	4	3
$r = 0,3 \text{ Н·с/м}$	3	4	8	15	34	76	36	15	8	4	3
$r = 0,5 \text{ Н·с/м}$	2	4	8	12	28	40	29	12	8	4	3

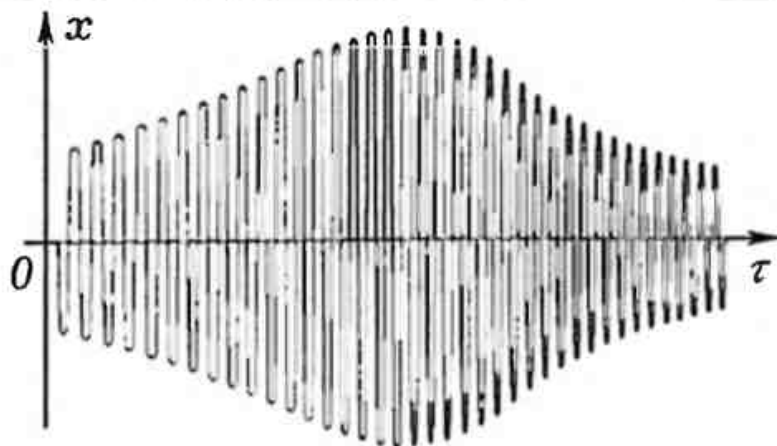


Рис. 3.5.

Задача 3.5. Создайте программу, моделирующую процессы, происходящие в колебательной системе в случае, если на нее действует периодически из-

меняющаяся сила, частота которой растет пропорционально времени: $F_x(\tau) = F_m \sin(\omega(1 + \alpha\tau)\tau)$, где $\alpha > 0$. Значения ω и α подберите так, чтобы резонансная частота системы находилась в середине рабочего диапазона частот.

Задача решается аналогично. На рис. 3.5 показан получающийся график зависимости $x(\tau)$. Так как частота колебаний прямо пропорциональна времени, то огибающая графика является амплитудно-частотной характеристикой колебательной системы (то есть ее резонансной кривой).

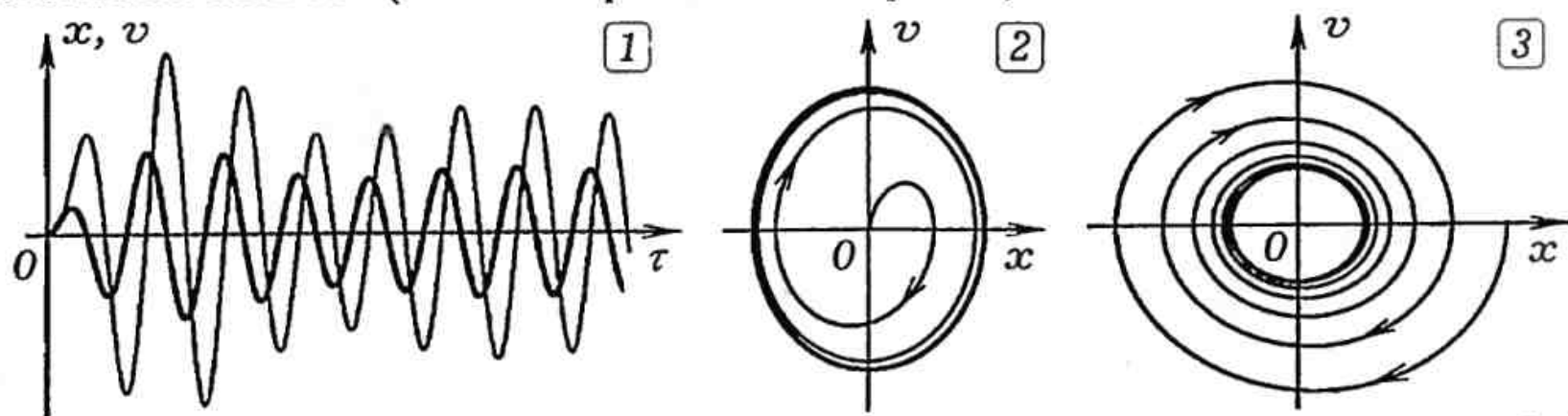


Рис. 3.6.

Задача 3.6. Убедитесь в том, что независимо от начальных условий (координаты и скорости) фазовая кривая вынужденных колебаний при $\tau \rightarrow \infty$ стремится к некоторому предельному циклу.

Для вынужденных колебаний и автоколебаний характерно, что амплитуда установившихся колебаний не зависит от начальных условий. Чтобы убедиться в этом, достаточно построить фазовую кривую вынужденных колебаний при различных начальных координате и скорости. В результате видно, что фазовая кривая системы стремится к аттрактору, — некоторому предельному циклу, соответствующему колебаниям с установившейся амплитудой (рис.3.6). При этом энергия, поступающая в колебательную систему за период, равна энергии потерь за то же время.

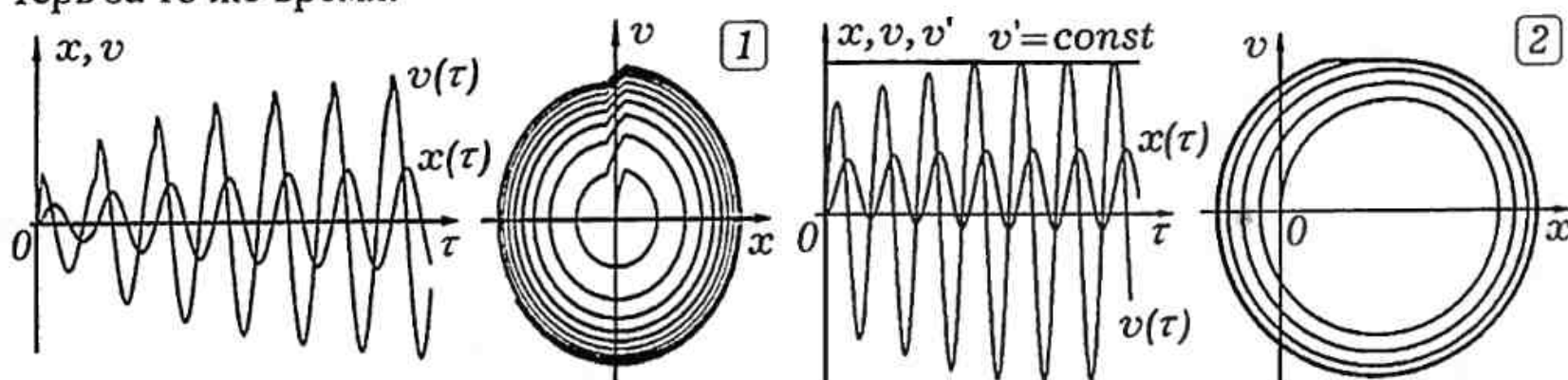


Рис. 3.7.

Задача 3.7. Исследуйте автоколебательную систему, которая посредством положительной обратной связи сама регулирует поступление энергии от источника. Пусть вблизи положения равновесия, когда $-b < x < b$ и тело движется в направлении оси Ox , на него действует постоянная сила F_m . Постройте графики $x(\tau)$, $v_x(\tau)$, и фазовый портрет системы.

Используемая программа содержит цикл по времени, в котором рассчитываются $a_x = (F - kx - r v_x)/m$, v_x и x . Цикл также содержит условный оператор, присваивающий переменной F некоторое значение F_m , когда

$|x| < b$ и $v_x > 0$. На графиках (рис. 3.7.1) хорошо видно, как один раз за период система получает порцию энергии и скорость тела увеличивается.

Задача 3.8. Создайте модель автоколебаний фрикционного маятника Фроуда, состоящего из физического маятника, расположенного на вращающемся валу. Сила трения между валом и маятником убывает по экспоненциальному закону $F_{mp} = F_0 e^{-\beta|v-\dot{x}|}$. Постройте графики $\varphi(\tau)$, $\omega(\tau)$ и фазовую кривую.

Автоколебания объясняются тем, что при движении в направлении вращения на маятник со стороны вала действует сила трения, превышающая силу трения, действующую при обратном движении. Средний подталкивающий момент сил трения превышает тормозящий, в систему периодически поступает энергия. Графики и фазовый портрет показаны на рис. 3.7.2. Программа отличается тем, что содержит условный оператор: если скорость вала v' больше скорости маятника v , тогда $F_{mp} = F_0 e^{-\beta|v-\dot{x}|}$, а иначе $F_{mp} = -F_0 e^{-\beta|v-\dot{x}|}$.

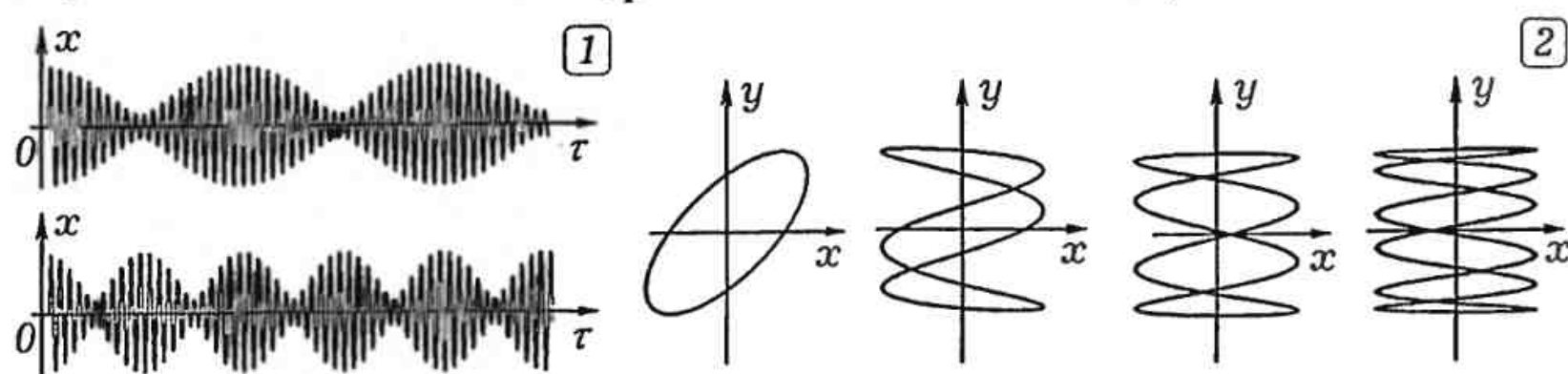


Рис. 3.8.

Задача 3.9. Про моделируйте сложение двух колебаний, происходящих с частотами ω_1 и ω_2 в одном направлении. Убедитесь в том, что когда частоты ω_1 и ω_2 близки, возникают биения с частотой $|\omega_1 - \omega_2|$ (рис. 3.8.1).

Результат моделирования приведен на рис. 3.8.1. Изменяя частоты складываемых колебаний, можно убедиться в том, что чем они ближе друг к другу, тем меньше частота получающихся биений.

Задача 3.10. Исследуйте сложение двух колебаний, происходящих во взаимно перпендикулярных направлениях. Убедитесь в том, что при кратных частотах складываемых колебаний точка выписывает замкнутую кривую Лиссажу, форма которой зависит от сдвига фаз между колебаниями (рис. 3.8.2).

Задача 3.11. Про моделируйте работу сглаживающего RL -фильтра, на который подается пульсирующее напряжение, получающееся в результате однополупериодного выпрямления.

Задача 3.12. Изучите работу интегрирующей цепи, состоящей из последовательно соединенных резистора и конденсатора, с которого снимается выходное напряжение. На вход цепи подаются прямоугольные импульсы.

Задача 3.13. Исследуйте колебания тока, возникающие в последовательном колебательном контуре, на который подаются: 1) прямоугольные импульсы напряжения; 2) пилообразные импульсы напряжения. Проведите вычислительные эксперименты на различных частотах.

4. ДВУМЕРНОЕ ДВИЖЕНИЕ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Большое количество физических задач сводится к анализу движения систем, имеющих две степени свободы, в частности к двумерному движению материальной точки. Например, задача о качении шарика по искривленной поверхности, задача о движении тела, брошенного под углом к горизонту, задача о движении частицы в поле центральных сил и т.д.

Рассмотрим материальную точку массой m , движущуюся в силовом поле $\vec{F} = \vec{F}(x, y)$, на которую действует сила вязкого трения $\vec{F}_{mp} = -r\vec{v}$, направленная противоположно скорости. Необходимо, зная начальные условия x_0, y_0, v_{0x}, v_{0y} , построить траекторию движения точки.

Пусть материальная точка движется в однородном поле, например, в поле тяжести (рис. 4.1.1), тогда во всех точках пространства вектор силы имеет постоянные проекции на оси координат: $F_x = 0, F_y = -mg$. При отсутствии силы трения точка движется по параболе, а при ее наличии — по более сложной кривой. По второму закону Ньютона: $m\vec{g} + \vec{F}_{mp} = m\vec{a}$. Получаем:

$$\begin{aligned} F_{mpx} &= -rv_x, \quad F_{mpy} = -rv_y, \quad a_x^{t+1} = -rv_x^t / m, \quad a_y^{t+1} = (-mg - rv_y^t) / m, \\ v_x^{t+1} &= v_x^t + a_x^{t+1} \Delta\tau, \quad v_y^{t+1} = v_y^t + a_y^{t+1} \Delta\tau, \\ x^{t+1} &= x^t + v_x^{t+1} \Delta\tau, \quad y^{t+1} = y^t + v_y^{t+1} \Delta\tau. \end{aligned}$$

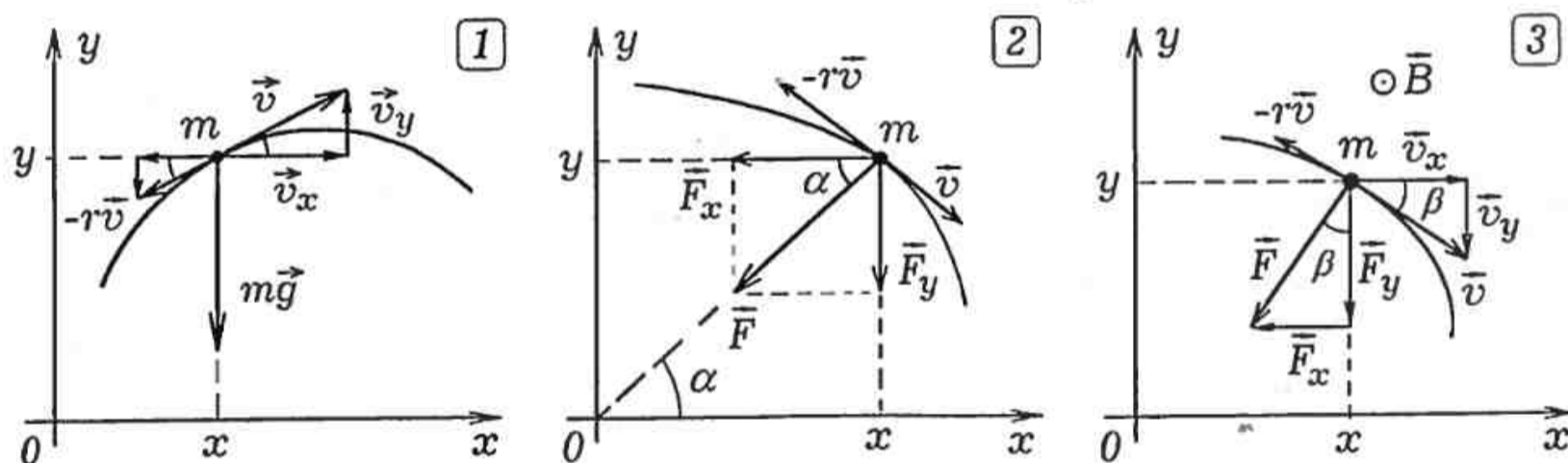


Рис. 4.1.

Проанализируем более сложный случай, когда материальная точка движется в центрально-симметричном поле. На точку с координатами x, y действует сила притяжения или отталкивания $F = F(r)$ (рис. 4.1.2). Найдем ее проекции на оси координат:

$$\vec{F} = F \left(-\frac{x}{r} \vec{i} - \frac{y}{r} \vec{j} \right), \quad F_x = -F \cos \alpha = -F \frac{x}{r}, \quad F_y = -F \sin \alpha = -F \frac{y}{r}.$$

В поле притяжения в зависимости от начальных координат и скоростей точка движется по гиперболе, параболе или эллипсу. В поле отталкивания траекторией движения точки является гипербола.

Теперь рассмотрим движение заряженной частицы в магнитном поле, причем ограничимся случаем, когда скорость частицы все время остается пер-

пендикулярной силовым линиям магнитного поля. При этом со стороны поля действует сила Лоренца $F = qvB$, лежащая в плоскости экрана и направленная перпендикулярно вектору скорости (рис. 4.1.3). Введем угол β , который образует вектор \vec{v} с осью x . Проекции силы Лоренца на координатные оси:

$$F_x = -F \sin \beta = F \frac{v_y}{v}, \quad F_y = -F \cos \beta = -F \frac{v_x}{v}.$$

Заряженная частица описывает окружность. При наличии тормозящей силы скорость частицы и радиус кривизны траектории уменьшается, частица движется по спирали.

Определенный интерес представляет случай, когда заряженная частица движется в скрещенных электрическом и магнитном полях. Пусть силовые линии электрического поля \vec{E} лежат в плоскости экрана и направлены вверх, а силовые линии магнитного поля \vec{B} направлены к нам перпендикулярно плоскости экрана. Если заряд частицы положительный, то на него со стороны электрического поля действует постоянная сила, направленная вверх. Чтобы учесть ее влияние необходимо к вертикальной проекции силы Лоренца прибавить постоянное слагаемое qE :

$$F_x = -F \sin \beta = F \frac{v_y}{v}, \quad F_y = qE - F \cos \beta = qE - F \frac{v_x}{v}.$$

Создадим алгоритм решения задачи в общем случае. Пусть в момент времени t материальная точка имеет координаты x^t, y^t и проекции скорости v_x^t, v_y^t . Запишем второй закон Ньютона: $\vec{F}(x, y) - r\vec{v} = m\vec{a}$. Проекции ускорения точки в момент времени $t+1$ равны:

$$a_x^{t+1} = (F_x^t - r v_x^t) / m, \quad a_y^{t+1} = (F_y^t - r v_y^t) / m.$$

Проекции скорости и координаты точки равны:

$$v_x^{t+1} = v_x^t + a_x^{t+1} \Delta \tau, \quad v_y^{t+1} = v_y^t + a_y^{t+1} \Delta \tau,$$

$$x^{t+1} = x^t + v_x^{t+1} \Delta \tau, \quad y^{t+1} = y^t + v_y^{t+1} \Delta \tau.$$

Определив координаты и проекции скорости точки в момент времени $t+1$, можно повторить процедуру вычисления требуемое количество раз и построить траекторию движения точки.

Итак, в начале программы необходимо задать массу материальной точки m , коэффициент вязкости r , начальные координаты x_0, y_0 и проекции скорости v_{0x}, v_{0y} , силовое поле $F_x = F_x(x, y), F_y = F_y(x, y)$, а также шаг по времени $\Delta \tau$. Затем следует организовать цикл по времени t , в котором будут рассчитываться ускорение, скорость и координата точки в следующий момент времени $t+1$, и результаты вычислений выводиться на экран в текстовом или графическом виде. Программа Пр-4.1 для расчета движения точки m_2 в гравитационном поле тела m_1 с учетом силы вязкого трения представлена ниже.

Uses crt, graph;

Var v, B, q, F, Fx, Fy : real; r, x, y, vx,vy,ax,ay : real; Gd, Gm, i: integer;

Const M=1500; mm=200; dt=0.005; rr=0.001; k=2;

BEGIN Gd:= Detect; InitGraph(Gd, Gm, 'c:\bp\bgi');

line(320,240,640,240); line(320,240,320,0); circle(320,240,5);

x:=100; y:=120; vx:=1; vy:=-2;

Repeat { Fy:=3; Fx:=0; }

{ Fx:=-k*x; Fy:=-k*y; }

r:=sqrt(x*x+y*y); F:=M*mm/(r*r); Fx:=-F*x/r; Fy:=-F*y/r;

{ B:=2; q:=1; F:=B*v*q; v:=sqrt(vx*vx+vy*vy); Fx:=F*vy/v; Fy:=-F*v/v; }

{ B:=2; q:=1; F:=B*v*q; v:=sqrt(vx*vx+vy*vy); Fx:=F*vy/v; Fy:=-0.5-F*v/v; }

ax:=(Fx-rr*vx)/mm; ay:=(Fy-rr*vy)/mm; vx:=vx+ax*dt; vy:=vy+ay*dt;

x:=x+vx*dt; y:=y+vy*dt;

circle(round(x)+320,240-round(y),2); setcolor(12);

circle(round(x)+320,240-round(y),1); setcolor(15);

until KeyPressed; CloseGraph;

END.

Задача 4.1. Материальная точка массы m брошена под углом к горизонту в однородном поле тяжести. Изучите траекторию ее движения при различных начальных условиях (координатах и проекциях скорости) и значениях коэффициента вязкого трения воздуха (рис. 4.2.1).

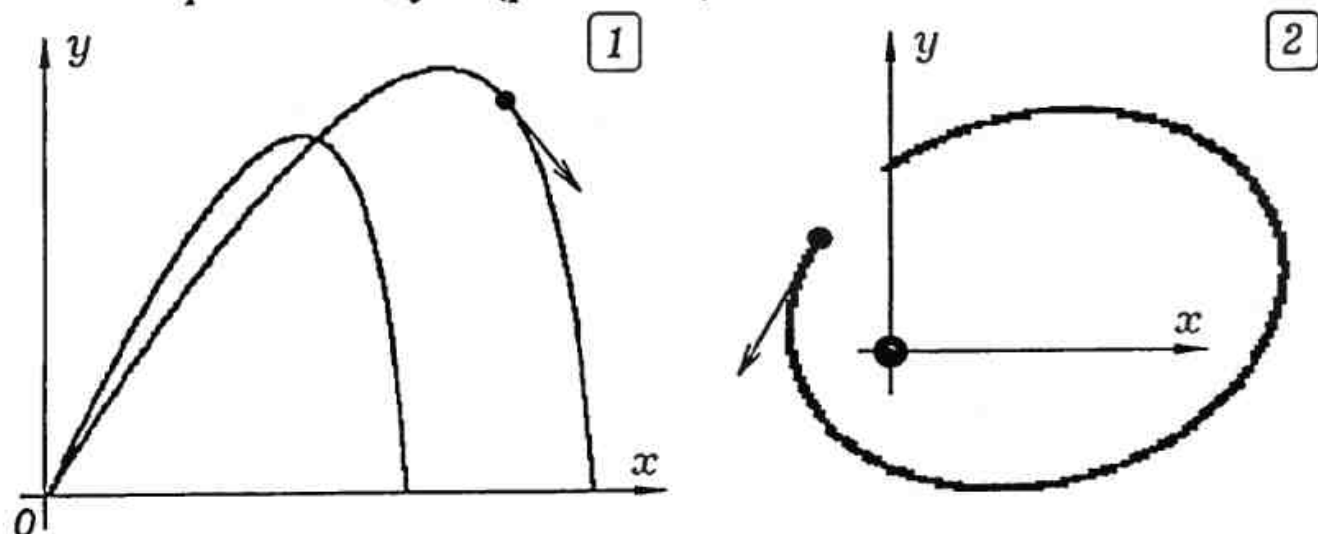


Рис. 4.2.

Задача 4.2. Убедитесь в том, что время подъема материальной точки, движущейся в поле силы тяжести в вязкой среде, меньше времени спуска.

Используется рассмотренный выше алгоритм, с той лишь разницей, что результаты вычислений координат и времени выводятся в текстовом формате. Чтобы найти время подъема следует воспользоваться тем, что в наивысшей точке траектории проекция скорости на ось y меняет свой знак на противоположный. При вычислении времени полета программа должна вращаться в цикле до тех пор, пока y не станет меньше нуля.

Задача 4.3. Исследуйте движение точки в поле сил притяжения, действующих по закону обратных квадратов $F = GmM / r^2$. Промоделируйте ситуации, в которых точка движется по гиперболе, параболе, эллипсу. Изучите ха-

ракет движения искусственного спутника Земли, входящего в верхние слои атмосферы, на который действует сила вязкого трения.

При небольших скоростях частица движется по замкнутой эллиптической траектории (рис. 4.2.2). Из того факта, что траектория получается замкнутой следует, что моделирование осуществлено правильно. В случае действия силы вязкого трения точка движется по спирали, приближаясь к началу координат. При достаточно больших скоростях частица движется по параболической или гиперболической траектории.

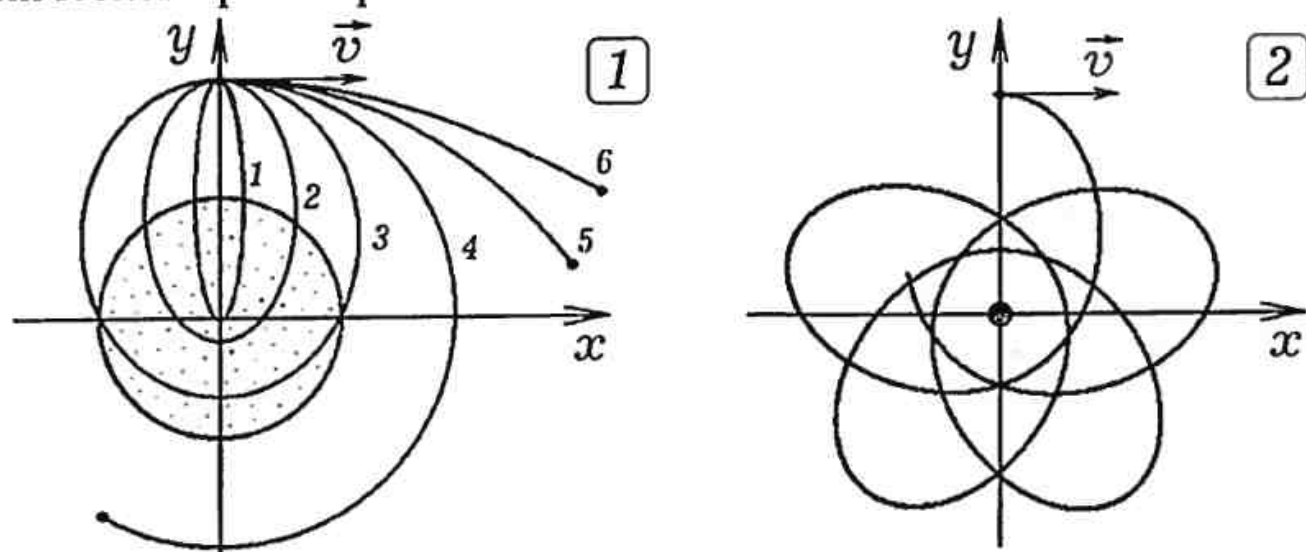


Рис. 4.3.

Задача 4.4. Рассчитайте траекторию движения материальной точки в гравитационном поле Земли при различных значениях начальной скорости.

Совместим начало координат с центром Земли, тогда на частицу с координатами x, y действует сила притяжения (рис. 4.3.1)

$$\vec{F} = G \frac{m_1 m_2}{r^2} \left(-\frac{x}{r} \vec{i} - \frac{y}{r} \vec{j} \right).$$

где $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ — расстояние от точки до центра Земли O . Программа для расчета движения частицы содержит цикл, в котором пересчитываются проекции ее ускорения, скорости и координаты в последовательные моменты времени t и строится траектория. Из рис. 4.3.1 видно, при малых скоростях точка движется по эллиптической орбите (траектории 1, 2, 3, 4), а при больших — по гиперболической (траектории 5, 6). Критическому случаю соответствует параболическая траектория.

Задача 4.5. Про моделируйте движение тела в центрально симметричном поле, напряженность которого обратно пропорциональна $r^{2/3}$. Убедитесь в том, что траекторией является незамкнутая кривая (рис. 4.3.2).

Задача 4.6. Про моделируйте движение точки в поле центральных сил упругости $\vec{F} = -k\vec{r}$ в случае, когда на точку действует сила вязкого трения и когда она равна нулю. По какой траектории движется точка?

При отсутствии силы вязкого трения точка движется по эллиптической траектории, которая может вырождаться в отрезок. Если сила вязкого трения действует, то точка будет двигаться по эллипсу, размер которого с течением времени уменьшается (незамкнутая кривая, похожая на спираль).

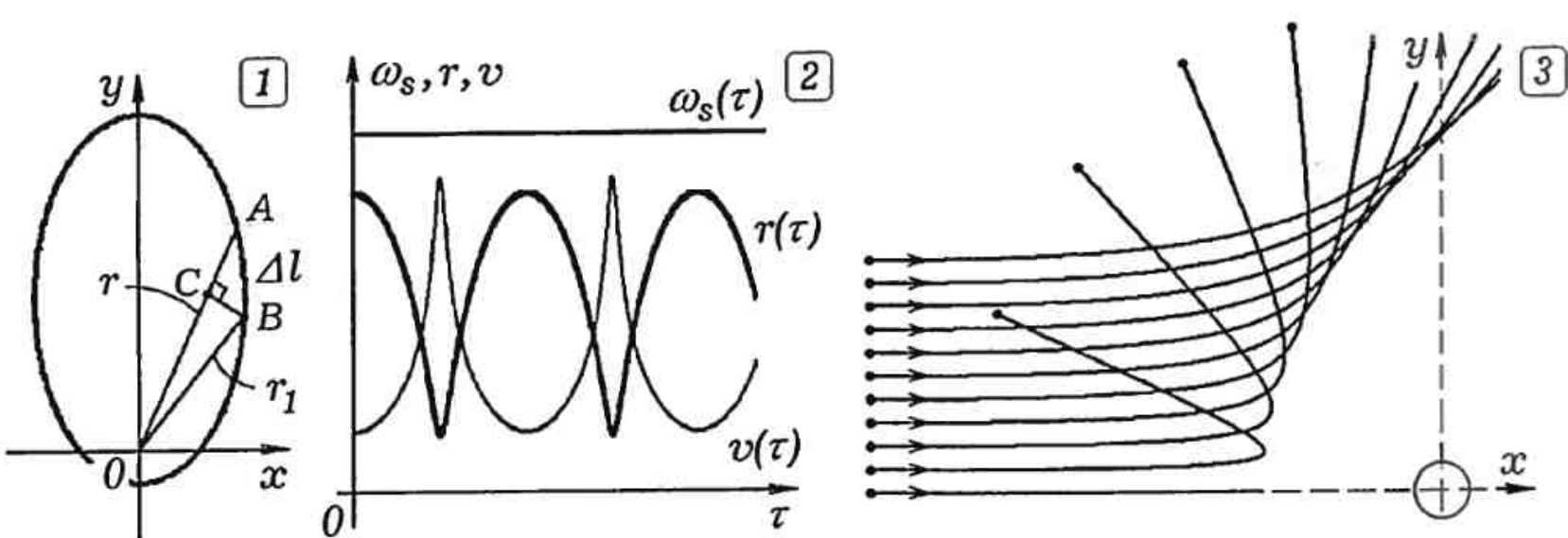


Рис. 4.4.

Задача 4.7. Планета вращается вокруг Солнца по эллиптической орбите. Постройте графики зависимости расстояния, линейной скорости и секториальной скорости планеты от времени. Подтвердите второй закон Кеплера, согласно которому секториальная скорость планеты остается постоянной.

Пусть за время $\Delta\tau$ планета перемещается из $A(x, y)$ в $B(x_1, y_1)$ (рис. 4.4.1). Длины сторон AC и BC прямоугольного треугольника ABC равны:

$$|AC| = r - r_1, \quad |BC| = \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 - (r - r_1)^2}.$$

Площадь, заметаемая радиус-вектором планеты составляет $\Delta S = r |BC| / 2$, а секториальная скорость $\omega_s = \Delta S / \Delta t$.

Кроме расчета секториальной скорости в используемой программе осуществляются вычисления модуля линейной скорости и расстояния от планеты до Солнца. Результаты моделирования показаны на рис. 4.4.2. Видно, что секториальная скорость действительно остается постоянной, это и подтверждает второй закон Кеплера.

Задача 4.8. По направлению к массивному положительно заряженному ядру движутся альфа-частицы (опыт Резерфорда). Постройте траектории движения частиц при различных значениях прицельного параметра ρ .

Альфа-частицы отталкиваются от ядра, поэтому в программе Пр-4.1 следует изменить знак в выражении для силы F . Чтобы получить несколько траекторий при различных ρ , необходимо организовать цикл, в котором изменяется прицельный параметр. Траекториями частиц в центрально симметричном поле сил отталкивания являются гиперболы (рис. 4.4.3).

Задача 4.9. Про моделируйте движение одного атома в силовом поле другого атома, считая, что оно задается уравнением: $F(r) = k_1 / r^4 - k_2 / r^2$. Учтите, что при больших r преобладают силы притяжения, а при малых — силы отталкивания.

Задача 4.10. Изучите движение материальной точки в гравитационном поле Земли и Луны, считая их неподвижными. Проведите компьютерные эксперименты при различных начальных значениях координаты и скорости точки.

На материальную точку массой m в гравитационном поле Земли и Луны (рис. 4.5.1) действует сила

$$\vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} = (-F_1 \cos \alpha + F_2 \cos \beta) \vec{i} + (-F_1 \sin \alpha - F_2 \sin \beta) \vec{j}, \text{ где}$$

$$F_x = -F_1 \cos \alpha + F_2 \cos \beta, \quad F_y = -F_1 \sin \alpha - F_2 \sin \beta,$$

$$F_1 = G \frac{M_1 m}{x^2 + y^2}, \quad F_2 = G \frac{M_2 m}{(L-x)^2 + y^2}, \quad \cos \alpha = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad \sin \alpha = \frac{y}{x^2 + y^2},$$

$$\cos \beta = \frac{L-x}{(L-x)^2 + y^2}, \quad \sin \beta = \frac{y}{(L-x)^2 + y^2}.$$

Необходимо написать программу, содержащую цикл, в котором вычисляются проекции действующих на точку сил и сообщаемых ими ускорений. В нем же должны определяться проекции скоростей точки и ее координаты в последующие моменты времени. Результат решения задачи — на рис. 4.5.2.

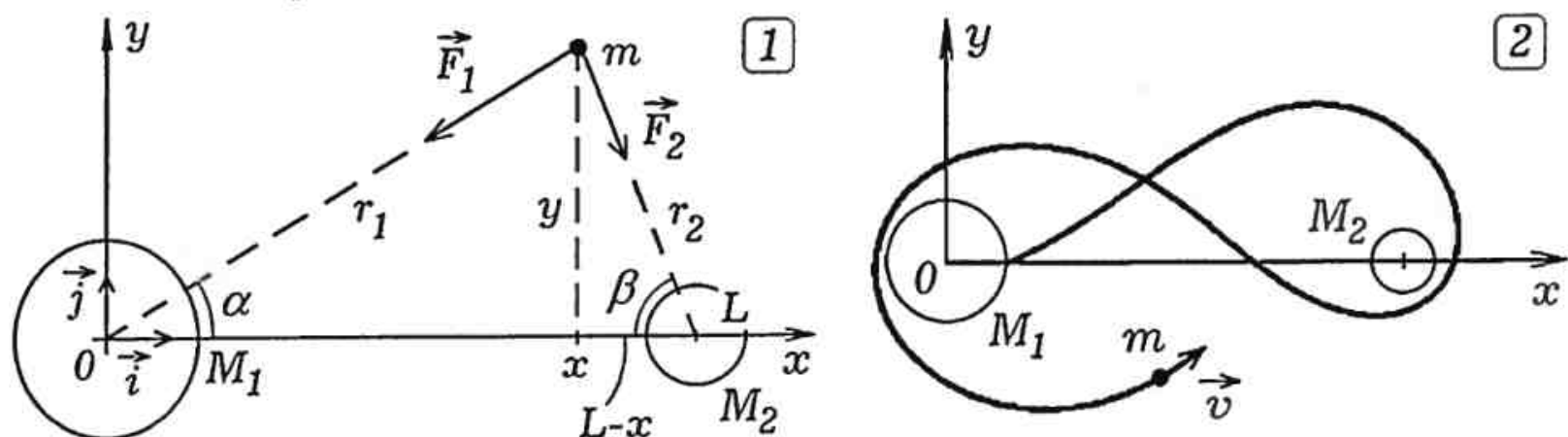


Рис. 4.5.

Задача 4.11. Пучок заряженных частиц проходит между двух шаров, имеющих заряд того же знака. Рассчитайте траекторию движения электронов.

Задача решается аналогично задаче 4.10, с той лишь разницей, что между заряженными частицами и шарами действует сила отталкивания. Как видно из рис. 4.6.1, это приводит к фокусировке пучка частиц.

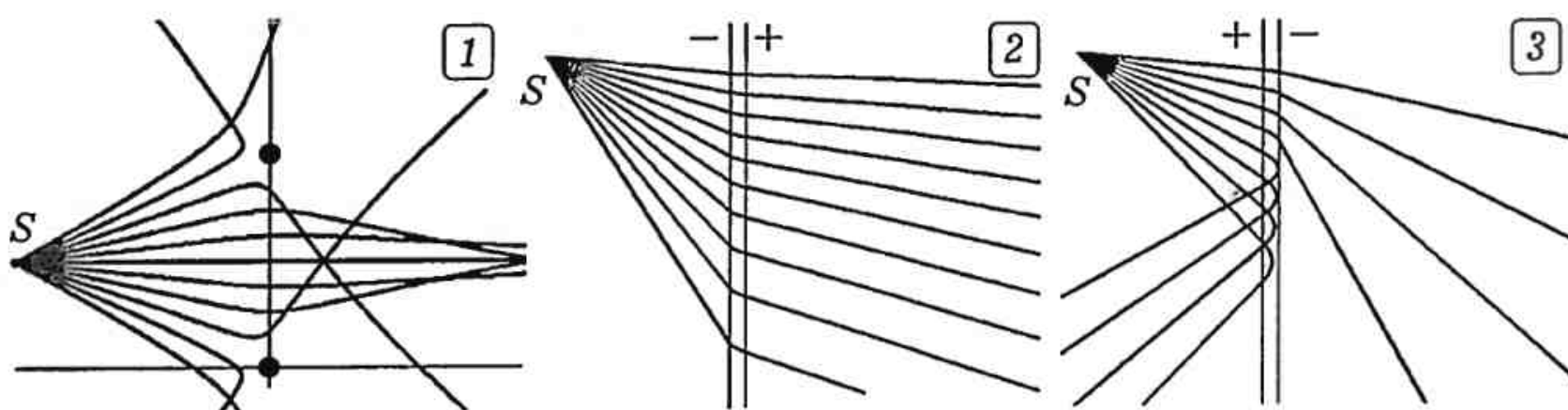


Рис. 4.6.

Задача 4.12. В электронном микроскопе для фокусировки электронного пучка используются электростатические линзы. Преломляющая поверхность такой линзы представляет собой две параллельные металлические сетки, на которые поданы различные потенциалы. Изучите преломление и отражение электронного пучка в поле двух плоских сеток.

Пусть электронный пучок падает на двойную сетку, расположенную вертикально, причем левая сетка имеет отрицательный потенциал, а правая — положительный. Вдали от нее электрические поля обеих сеток компенсируют друг друга. Между сетками на электрон действует сила, направленная вправо.

Таким образом, необходимо в промежутке между сетками задать однородное поле, силовые линии которого горизонтальны. При этом происходит преломление и отражение пучка электронов (рис. 4.6.2 и 4.6.3).

Задача 4.13. Промоделируйте движение заряженной частицы в камере Вильсона, помещенной в однородное магнитное поле. Учтите, что по мере своего движения частица теряет кинетическую энергию. Магнитное поле направлено перпендикулярно плоскости рисунка.

Из рис. 4.7.1. видно, что заряженная частица движется по спирали так, что радиус кривизны траектории с течением времени уменьшается. Это объясняется уменьшением скорости частицы из-за силы сопротивления. Убедитесь в том, что при отсутствии силы сопротивления частица движется по окружности. Как зависит радиус кривизны траектории от скорости частицы, ее массы, заряда и индукции магнитного поля?

Задача 4.14. Исследуйте движение заряженной частицы в скрещенных электрическом и магнитном полях, направленных параллельно и перпендикулярно плоскости экрана соответственно.

Как видно из рис. 4.7.2, частица движется по циклоидальной траектории. В случае, когда начальная скорость частицы близка к нулю, траектория получается без петель.

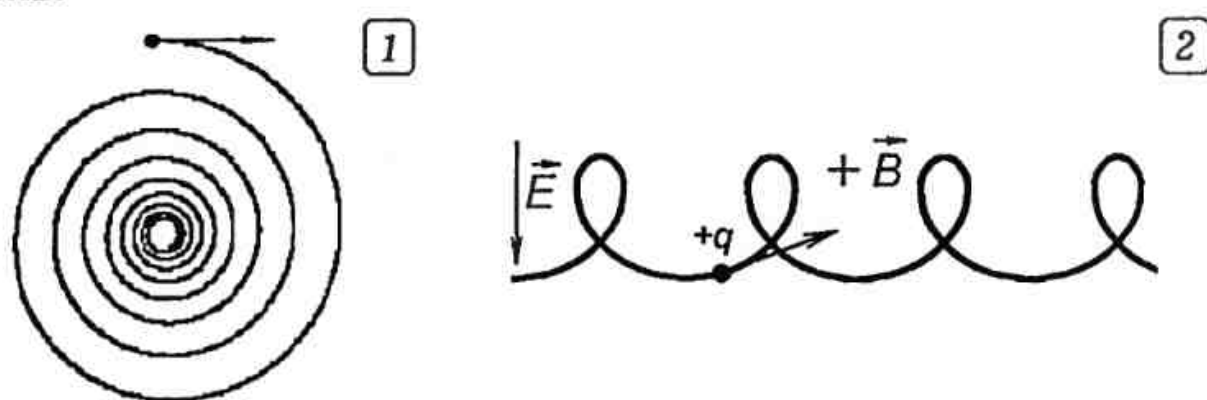


Рис. 4.7.

Задача 4.15. Изучите движение шарика по поверхности

$$z = 0,25(x^2 + y^2)^2 - 0,5(x^2 + y^2),$$

представляющей замкнутую канавку, огибающую ось Oz . Постройте траекторию шарика.

Потенциальная энергия шарика массой m , движущегося по заданной поверхности равна: $U(x, y) = mg(0,25(x^2 + y^2)^2 - 0,5(x^2 + y^2))$. При этом горизонтальные проекции силы реакции, действующей на шарик:

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} = -mg(x^3 + y^2x - x), \quad F_y = -\frac{\partial U}{\partial y} = -mg(y^3 + x^2y - y).$$

Это позволяет рассчитать траекторию шарика.

Задача 4.16. Задайте произвольное силовое поле $\vec{F}(x, y)$ (например, $\vec{F} = Ax\vec{i} + B(x + 2y)\vec{j}$) и промоделируйте движение частицы в нем при различных значениях начальных координат и скорости.

5. МОДЕЛЬ ДВУМЕРНОГО ДВИЖЕНИЯ СИСТЕМЫ ЧАСТИЦ

Механическая система — это совокупность материальных точек, взаимодействующих друг с другом и окружающими телами. Рассмотрим систему из N частиц с массами m_i , $i = 1, 2, \dots, N$, взаимодействующих друг с другом с внутренними силами $\vec{F}'_{i,j}$. Пусть на каждую точку действует внешняя сила \vec{F}_i . Исходя из начальных координат x_{i0} , y_{i0} и скоростей \vec{v}_{i0} , необходимо определить координаты и скорости материальных точек в последующие моменты времени.

Из основного закона динамики следует:

$$m_i \frac{d^2 \vec{r}_i}{d\tau^2} = \vec{F}_i + \sum_{j=1}^N \vec{F}'_{i,j}, \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

где \vec{F}_i — равнодействующая внешних сил, действующих на i -ую материальную точку со стороны тел, не входящих в систему, $\vec{F}'_{i,j}$ — внутренняя сила, действующая на i -ую точку со стороны j -ой точки.

Дифференциальное уравнение второго порядка может быть заменено двумя дифференциальными уравнениями первого порядка. Имеем:

$$\frac{d\vec{v}_i}{d\tau} = \vec{a}_i = \frac{1}{m} \left(\vec{F}_i + \sum_{j=1}^N \vec{F}'_{i,j} \right), \quad \frac{d\vec{r}_i}{d\tau} = \vec{v}_i, \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

Зная внешние и внутренние силы, действующие на каждую материальную точку, можно определить их ускорения. Исходя из координат и скоростей точки в момент времени τ , можно рассчитать координаты и скорости точки в следующий момент времени $\tau + \Delta\tau$.

Рассматриваемая модель охватывает большое число механических систем. Помимо моделирования одномерного и двумерного движения материальной точки, данный метод позволяет изучить движение двух притягивающихся или отталкивающихся частиц, абсолютно упругий и неупругий центральные удары, абсолютно упругий и неупругий нецентральный удары, движение частицы в центрально-симметричном поле другой частицы, движение молекул газа, диффузию, движение планет вокруг Солнца, движение взаимодействующих частиц в силовом поле и т. д.

Алгоритм, используемый для моделирования двумерного движения системы частиц, состоит в следующем. Задают число материальных точек N , их массы m_i , начальные координаты x_{i0} , y_{i0} и проекции скоростей v_{i0x} , v_{i0y} , силовое поле $F_x = F_x(x, y, z)$, $F_y = F_y(x, y, z)$, а также шаг по времени $\Delta\tau$. Организуют цикл по целочисленной переменной t . Определяют проекции $R_{ix} = F_{ix} + F'_{ix}$, $R_{iy} = F_{iy} + F'_{iy}$ равнодействующей всех внешних и внутренних сил, действующих на каждую i -ую материальную точку в момент $t+1$, и записывают их в массивы.

После этого переобозначают координаты всех материальных точек, записывая их в массивы $xx[i]$, $yy[i]$. В цикле перебирают все материальные точки и определяют проекции ускорения, скорости и координаты для каждой из них в момент $t + 1$ по формулам:

$$a_{ix}^{t+1} = R_{ix} / m_i, \quad v_{ix}^{t+1} = v_{ix}^t + a_{ix}^{t+1} \Delta \tau, \quad x_i^{t+1} = x_i^t + v_{ix}^{t+1} \Delta \tau$$

$$a_{iy}^{t+1} = R_{iy} / m_i, \quad v_{iy}^{t+1} = v_{iy}^t + a_{iy}^{t+1} \Delta \tau, \quad y_i^{t+1} = y_i^t + v_{iy}^{t+1} \Delta \tau$$

Результаты записывают в массивы $x[i]$, $y[i]$, $vx[i]$, $vy[i]$. Стирают изображения материальных точек в предыдущий момент времени t , координаты которых сохранены в массивах $xx[i]$, $yy[i]$. На экране строят точки в следующий момент $t + 1$, рисуют графики или выводят результат в числовом виде. После этого все повторяется снова. Программа Пр-5.1, моделирующая движение молекул газа в квадратном сосуде, находящемся в поле тяжести, представлена ниже.

Uses dos, crt, graph; Const N=50; dt=0.0001; Пр-5.1.

Var m,Fx,Fy,x,y,vx,vy,xx,yy : array[1..N] of real;

Gd, Gm, i, j : integer; ax, ay, F, l : real;

Procedure Sila;

label Metka;

begin For i:=1 to N do begin Fx[i]:=0; Fy[i]:=0; end;

For i:=1 to N do For j:=1 to N do begin

If j=i then goto Metka; l:=sqrt(sqr(x[i]-x[j])+sqr(y[i]-y[j])); If l<1 then l:=1;

F:=-500000*m[i]*m[j]/sqr(l)+500000000*m[i]*m[j]/sqr(l*l);

Fx[i]:=Fx[i]+F*(x[i]-x[j])/l;

Fy[i]:=Fy[i]+F*(y[i]-y[j])/l+m[i]*10; Metka: end; end;

Procedure Nach_uslov;

begin Randomize;

For i:=1 to N do begin m[i]:=2;

x[i]:=random(280)+60; y[i]:=random(280)+60;

vy[i]:=random(30)-15; vx[i]:=random(30)-15; end; end;

BEGIN Gd:=Detect; InitGraph(Gd, Gm, 'c:\bp\bgi');

Nach_uslov; Repeat Sila;

For i:=1 to N do begin

xx[i]:=x[i]; yy[i]:=y[i]; ax:=Fx[i]/m[i]; ay:=Fy[i]/m[i];

vx[i]:=vx[i]+ax*dt; vy[i]:=vy[i]+ay*dt;

x[i]:=x[i]+vx[i]*dt; y[i]:=y[i]+vy[i]*dt;

If (x[i]<50)or(x[i]>350) then vx[i]:=-vx[i];

If (y[i]<50)or(y[i]>350) then vy[i]:=-vy[i]; end;

setcolor(8); For i:=1 to N do circle(round(xx[i]),round(yy[i]),2);

setcolor(15); For i:=1 to N do circle(round(x[i]),round(y[i]),2);

until KeyPressed; Repeat until keypressed; CloseGraph;

END.

Задача 5.1. Две частицы движутся на встречу друг к другу с некоторыми скоростями. Промоделируйте абсолютно упругое взаимодействие этих частиц, если между ними действуют: а) силы отталкивания; б) силы притяжения.

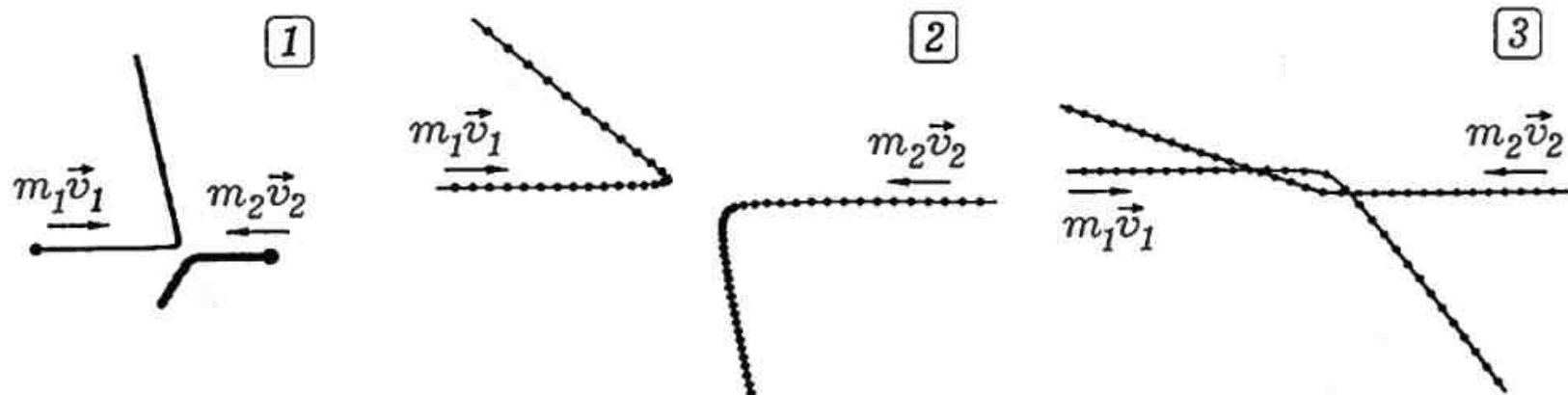


Рис. 5.1.

Расстояние между материальными точками $l = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$.

Проекции силы взаимодействия равны:

$$F_x = -F \cos \alpha, \quad F_y = -F \sin \alpha, \quad \text{где}$$

$$F = k/l^2, \quad \cos \alpha = (x_2 - x_1)/l, \quad \sin \alpha = (y_2 - y_1)/l.$$

Проекции ускорений, скоростей и координаты точек рассчитываются так:

$$a_{ix}^{t+1} = R_{ix} / m_i, \quad v_{ix}^{t+1} = v_{ix}^t + a_{ix}^{t+1} \Delta \tau, \quad x_i^{t+1} = x_i^t + v_{ix}^{t+1} \Delta \tau,$$

$$a_{iy}^{t+1} = R_{iy} / m_i, \quad v_{iy}^{t+1} = v_{iy}^t + a_{iy}^{t+1} \Delta \tau, \quad y_i^{t+1} = y_i^t + v_{iy}^{t+1} \Delta \tau,$$

где $i=1,2$. Результаты моделирования представлены на рис. 5.1. Видно, что при нецентральной упругом взаимодействии двух частиц, между которыми действуют силы отталкивания, частицы движутся по гиперболам (рис. 5.1.1 и 5.1.2). На рис. 5.1.3 изображены траектории частиц в случае, когда между ними действуют силы притяжения (отношение масс $m_1 / m_2 = 1/3$). Компьютерная модель также позволяет изучить центральный удар.

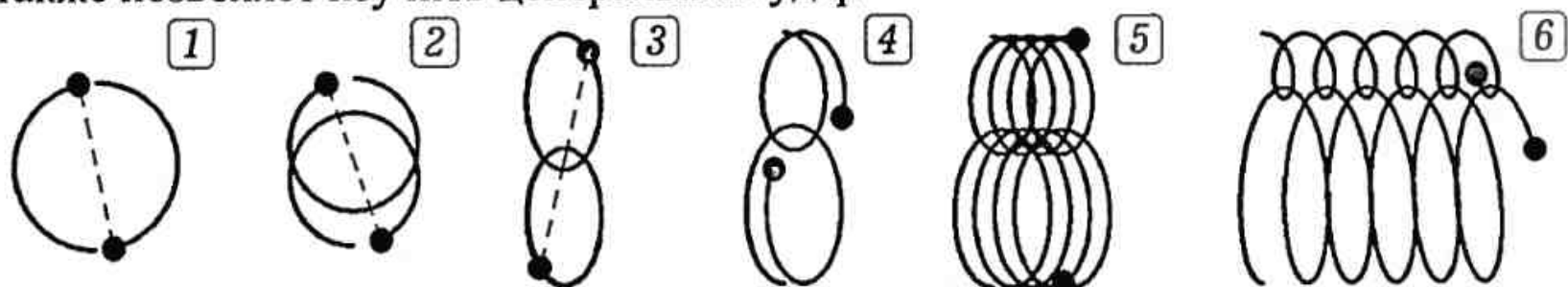


Рис. 5.2.

Задача 5.2. Промоделируйте движение двух материальных точек m_1 и m_2 , притягивающихся друг к другу, вокруг общего центра масс.

Задача решается аналогично рассмотренной выше. Чтобы получить силу притяжения вместо силы отталкивания необходимо изменить знак в выражении для силы либо закомментировать соответствующее слагаемое. Результаты моделирования представлены на рис. 5.2. На рис. 5.2.1, 5.2.2, 5.2.3 показано движение частиц с равными массами ($m_1 = m_2$), на рис. 5.2.4 и 5.2.5 — отношение масс $m_1 / m_2 = 3$, рис. 5.2.6 — массы соотносятся так: $m_1 / m_2 = 4/3$. Решение задачи двух тел приведено также на рис. 5.3.1 и 5.3.2.

Задача 5.3. На основе компьютерной модели изучите движение двух или трех частиц, между которыми действуют силы притяжения. Промоделируйте ситуацию, когда вокруг массивной планеты вращаются два спутника.

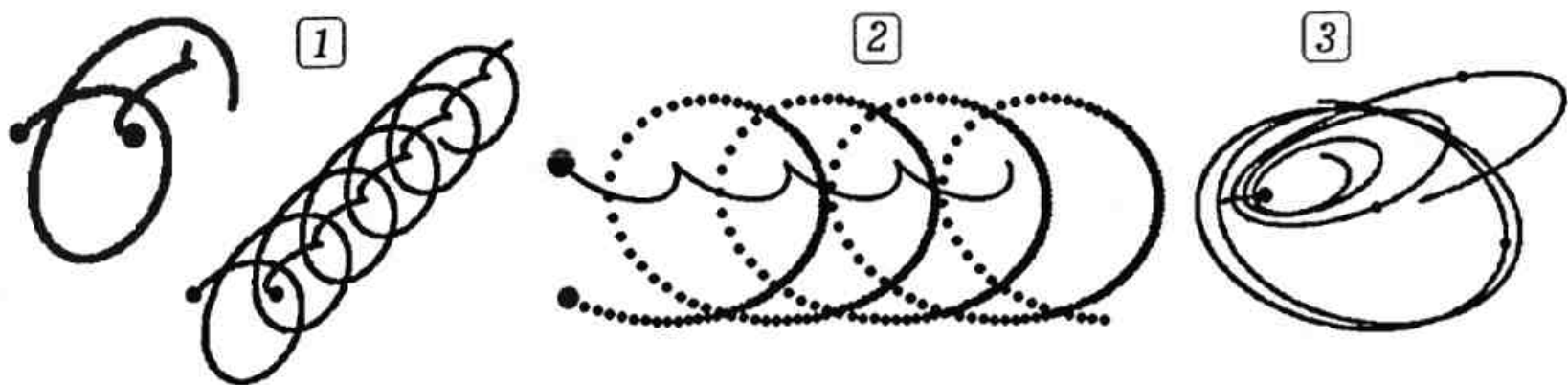


Рис. 5.3.

Результат моделирования представлен на рис. 5.3.3. Жирной линией показана траектория планеты. Вокруг нее вращаются два спутника, один — по сильно вытянутой траектории. Когда спутники приближаются друг к другу, между ними действуют достаточно большие силы притяжения, искривляющие их траектории. На рис. 5.4.1 — еще один пример решения задачи трех тел.

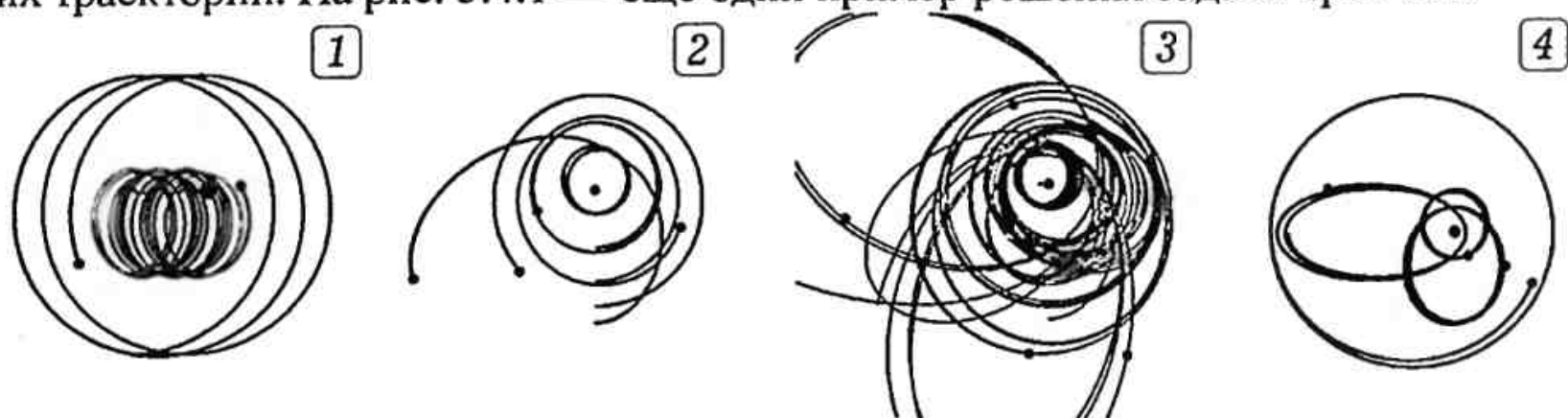


Рис. 5.4.

Задача 5.4. Промоделируйте движение нескольких планет и комет Солнечной системы, учитывая, что масса Солнца во много раз больше массы любой планеты.

Результат моделирования планетарной системы, состоящей из 3–5 планет, вращающихся вокруг некоторой звезды, представлен на рис. 5.4.2, 5.4.3, 5.4.4. Из-за того, что планеты взаимодействуют друг с другом силами гравитационного притяжения, они движутся по сложным незамкнутым траекториям.

Задача 5.5. Изучите движение материальной точки в гравитационном поле двух массивных тел. Проведите вычислительные эксперименты при различных начальных координатах и скоростях точки (рис. 5.5.1).

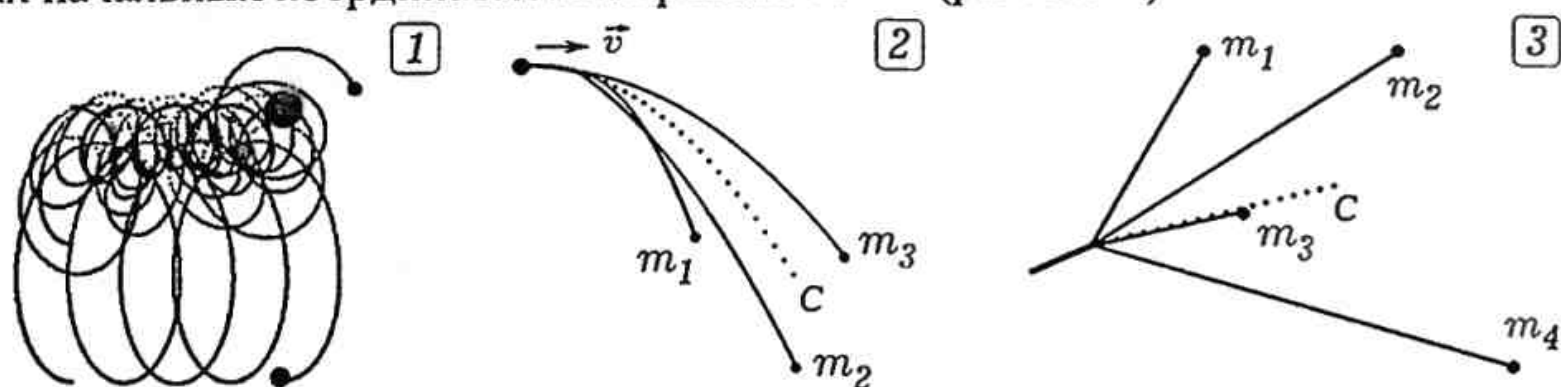


Рис. 5.5.

Задача 5.6. Изучите разрыв снаряда на несколько осколков различной массы в однородном поле тяжести и в невесомости.

При взрыве возникает сила отталкивания, быстро уменьшающаяся по мере удаления осколков. Снаряд должен моделироваться несколькими частицами,

имеющими равные начальные скорости и близкие начальные координаты. Через некоторое время после начала движения происходит “взрыв”, — частицы начинают отталкиваться (рис. 5.5.2 и 5.5.3). Центр масс системы продолжает двигаться по параболе (при отсутствии внешних сил — по прямой).

Задача 5.7. Промоделируйте движение молекул газа в прямоугольном замкнутом сосуде. Учтите, что при соударении молекулы с горизонтальной (вертикальной) стенкой сосуда вертикальная (горизонтальная) проекция ее скорости меняет свой знак на противоположный.

Задача 5.8. Промоделируйте движение молекул газа в узком высоком сосуде, находящемся в однородном поле тяжести. Подтвердите, что по мере увеличения высоты концентрация молекул газа уменьшается.

Задача 5.9. Создайте компьютерную модель движения броуновской частицы массой M , взаимодействующей с молекулами газа массами m . Получите на экране траекторию ее хаотического движения.

Необходимо промоделировать движение взаимодействующих частиц в закрытом сосуде, причем одна из частиц должна отличаться от других большими массой и размерами. Программа не должна стирать предыдущие положения броуновской частицы так, чтобы на экране осталась ее траектория.

Задача 5.10. Изучите диффузию двух газов (рис. 5.6). Пусть вначале молекулы с массами m заполняют левую половину сосуда, а молекулы с массами M — правую. Задайте случайные значения скоростей молекул. Как изменяются концентрации молекул газов в обеих половинах сосуда с течением времени?

Решая эту задачу, необходимо молекулы различных веществ изображать кружками разного радиуса или цвета. Изначально молекулы одного вещества должны заполнять левую половину сосуда, а молекулы второго вещества — правую. Вследствие хаотического движения происходит самопроизвольное перемешивание молекул, их концентрация во всех точках сосуда выравнивается (рис. 5.6).

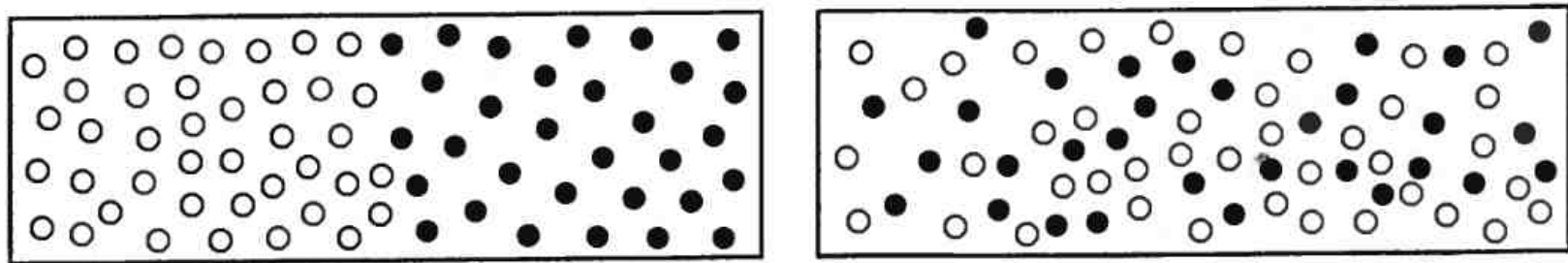


Рис. 5.6.

Задача 5.11. Промоделируйте движение молекул газа в гравитационном поле массивного шара небольшого размера.

Эта задача позволяет изучить движение молекул газа в гравитационном поле планеты. Если скорость молекул газа велика, что соответствует достаточно высокой температуре атмосферы, то гравитационные силы оказываются неспособными удержать молекулы газа вблизи планеты и они улетают в пространство. Этим и объясняется отсутствие атмосферы у Луны.

6. МОДЕЛЬ ОДНОМЕРНОЙ УПРУГОЙ СРЕДЫ

Рассмотрим модель одномерной упругой среды, представляющую собой совокупность осцилляторов, расположенных вдоль прямой и связанных между собой упругими связями. Эта модель, не смотря на свою простоту, позволяет исследовать целый ряд явлений: распространение возмущения в упругой среде, отражение и прохождение импульса через границу раздела двух сред, интерференцию и некоторые другие волновые процессы.

Пусть имеется система из N осцилляторов с массами m_i и жесткостью пружин k_i , связанных между собой упругими связями с жесткостью q_i (рис. 6.1). На каждый осциллятор действует сила вязкого трения $-r\eta_i$, где η_i — скорость i -ого осциллятора. Заданы начальные смещения ξ_{i0} и скорости η_{i0} всех осцилляторов. На отдельные осцилляторы действует вынуждающая сила $F_{i\xi}(\tau)$; некоторые осцилляторы колеблются по закону $\xi_i(\tau)$. Известно, что крайние осцилляторы закреплены (свободны). Необходимо построить компьютерную модель колебаний системы.

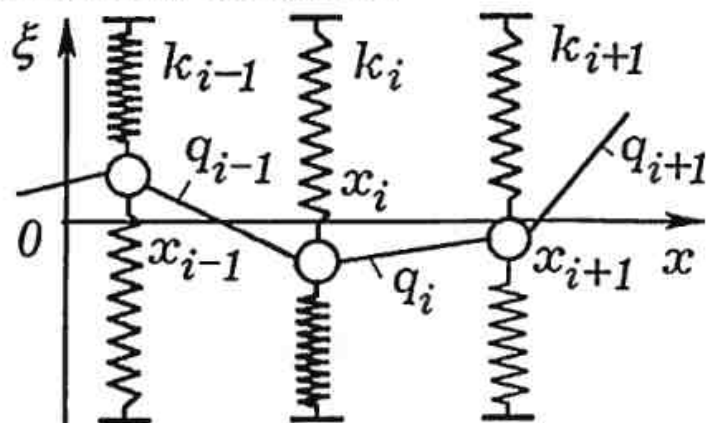


Рис. 6.1.

На каждый i -ый осциллятор со стороны соседних $(i-1)$ -ого и $(i+1)$ -ого осцилляторов действует сила: $F_{i\xi} = -q_{i-1}(\xi_i - \xi_{i-1}) - q_i(\xi_i - \xi_{i+1})$. Кроме нее действуют сила упругости $-k_i\xi_i$ и сила вязкого трения $-r\eta_i$, где η_i — скорость i -ого осциллятора. По второму закону Ньютона, ускорение i -ого осциллятора равно: $\theta_i^{t+1} = (F_{i\xi}^t - r\eta_i^t - k_i\xi_i^t) / m_i$.

Определив ускорение θ_i , можно найти скорость и смещение i -ого осциллятора в следующий момент времени $t+1$:

$$\eta_i^{t+1} = \eta_i^t + \theta_i^{t+1} \Delta \tau, \quad \xi_i^{t+1} = \xi_i^t + \eta_i^{t+1} \Delta \tau.$$

Задача о связанных осцилляторах является частным случаем задачи о моделировании движения системы взаимодействующих между собой частиц. Алгоритм ее решения состоит в следующем. Задают параметры системы и начальные условия: число осцилляторов N , их массы m_i , жесткость упругих связей q_i , жесткость пружины осциллятора k_i , шаг по времени $\Delta \tau$, начальные смещение ξ_{i0} и скорости η_{i0} , вынуждающие силы, действующие на различные осцилляторы. В цикле перебирают все N осцилляторов и для каждого из них определяют равнодействующую силу, ускорение, скорость и смещение в следую-

щий момент $t+1$ по записанным выше формулам. После этого стирают предыдущее изображение каждого осциллятора и рисуют новое. Затем все повторяется снова.

Программа Пр-6.1, представленная ниже, моделирует распространение импульса в одномерной упругой среде в случае, когда левый элемент среды совершает полколебания. Ее использование позволяет сформировать у студентов правильные динамические образы процессов, происходящих при распространении возмущения в упругой среде. Компьютерная модель ведет себя подобно реальному физическому объекту: мы только определенным образом смещаем крайний осциллятор и наблюдаем за тем, как по цепочке осцилляторов распространяется импульс, как он отражается от границы среды и т.д.

```

Uses dos, crt, graph;
Const m=0.5; r=0.1; k=0.01; dt=0.001; q=100; N=50;
Var teta, F, t, y : real; i, xx, vv, aa, FF, tt, Gd, Gm : integer;
eta, ksi : array [0..N] of real;
Procedure Oscillator;
begin F:=q*(ksi[i-1]-ksi[i])+q*(ksi[i+1]-ksi[i]);
teta:=(F-r*eta[i]-k*ksi[i])/m;
eta[i]:=eta[i]+teta*dt; ksi[i]:=ksi[i]+eta[i]*dt; end;
BEGIN Gd:= Detect; InitGraph(Gd, Gm, 'c:\bp\bgi');
Repeat t:=t+dt;
For i:=1 to N do begin y:=ksi[i]; Oscillator;
If 5*t<3.142 then ksi[1]:=20*sin(5*t) else ksi[1]:=0;
ksi[N]:=0; {ksi[N]:=ksi[N-1]; }
setcolor(8); circle(10*i,240-round(y*10),2);
setcolor(15); circle(10*i,240-round(ksi[i]*10),2); end;
until KeyPressed; CloseGraph;
END.

```

Пр-6.1.

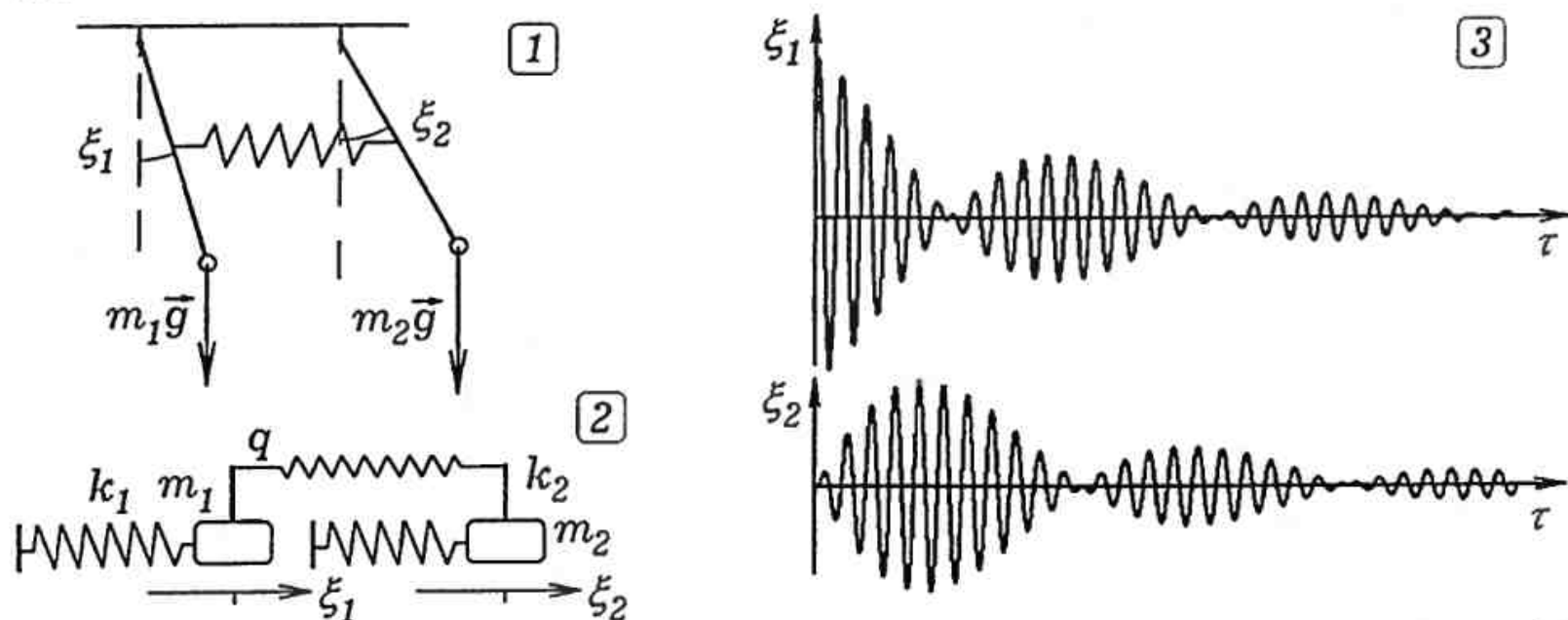


Рис. 6.2.

Задача 6.1. Промоделируйте колебания двух связанных осцилляторов (рис. 6.2.1 и 6.2.2). Рассмотрите случаи, когда один из осцилляторов: 1) подвержен действию вынуждающей силы $F_i(\tau)$; 2) задано его начальное смещение.

ние; 3) задана начальная скорость. Выполните компьютерные эксперименты при различных k_i и q_i .

Наиболее просто моделируется ситуация 2, когда задано смещение, допустим, левого осциллятора. При запуске программы левый осциллятор начинает совершать колебания, в процессе которых его энергия передается правому осциллятору. Наступает момент, когда колебания левого осциллятора практически прекращаются, а правый осциллятор колеблется с максимальной амплитудой. После этого энергия передается от правого осциллятора к левому и т.д.

Задача 6.2. Изучите затухающие колебания двух одинаковых маятников, каждый из которых состоит из тела массой m и пружины жесткостью k , связанных между собой упругой связью жесткостью q (рис. 6.2.2).

Рассматриваемая система описывается уравнениями:

$$m\ddot{\xi}_1 + r\dot{\xi}_1 + k\xi_1 + q(\xi_1 - \xi_2) = 0, \quad m\ddot{\xi}_2 + r\dot{\xi}_2 + k\xi_2 + q(\xi_2 - \xi_1) = 0.$$

Для их решения необходимо создать цикл по t , в котором вычисляются ускорения, скорости и координаты маятников по формулам:

$$\theta_1^{t+1} = (-F' - r\eta_1^t - k\xi_1^t) / m_1, \quad \eta_1^{t+1} = \eta_1^t + \theta_1^{t+1} \Delta\tau, \quad \xi_1^{t+1} = \xi_1^t + \eta_1^{t+1} \Delta\tau.$$

$$\theta_2^{t+1} = (F' - r\eta_2^t - k\xi_2^t) / m_2, \quad \eta_2^{t+1} = \eta_2^t + \theta_2^{t+1} \Delta\tau, \quad \xi_2^{t+1} = \xi_2^t + \eta_2^{t+1} \Delta\tau.$$

где $F = q(\xi_1 - \xi_2)$, и результаты выводятся на экран. Используется программа Пр-6.2. Получающиеся графики изображены на рис. 6.2.3.

Uses dos, crt, graph;

Пр-6.2.

Const m=1; r=0.2; k=100; q=8; dt=0.001;

Var x1, x2, v1, v2, a1, a2, t, F : real; Gd, Gm : integer;

BEGIN Gd:= Detect; InitGraph(Gd, Gm, 'c:\bp\bgi'); x1:=1;

Repeat

t:=t+dt; F:=-q*(x1-x2);

a1:=(-F-r*v1-k*x1)/m; v1:=v1+a1*dt; x1:=x1+v1*dt;

a2:=(F-r*v2-k*x2)/m; v2:=v2+a2*dt; x2:=x2+v2*dt;

circle(10+round(20*t), 150-round(100*x1), 1);

circle(10+round(20*t), 350-round(100*x2), 1);

until KeyPressed;

CloseGraph;

END.

Задача 6.3. Изучите колебания трех связанных осцилляторов, рассмотрев все перечисленные выше случаи. Выполните компьютерные эксперименты при различных k_i и q_i .

Задача 6.4. Про моделируйте движение 50 осцилляторов, связанных упругими связями, в случае, когда левый крайний осциллятор резко сместился из положения равновесия и не вернулся обратно. Рассмотрите случаи, когда правый крайний осциллятор закреплен и не закреплен.

Допустим, лежит длинный стержень. Мы резко ударим или дернем его за левый конец. Как скоро "почувствует" это правый конец стержня? Предположение, что правый конец сразу же придет в движение, является ошибочным. На

самом деле по стержню побежит импульс сжатия или разрежения, скорость которого равна скорости звука в данном материале. Дойдя до правого конца, он отразится. При отражении от закрепленного конца фаза импульса изменится на противоположную. Промоделируйте это явление на компьютере.

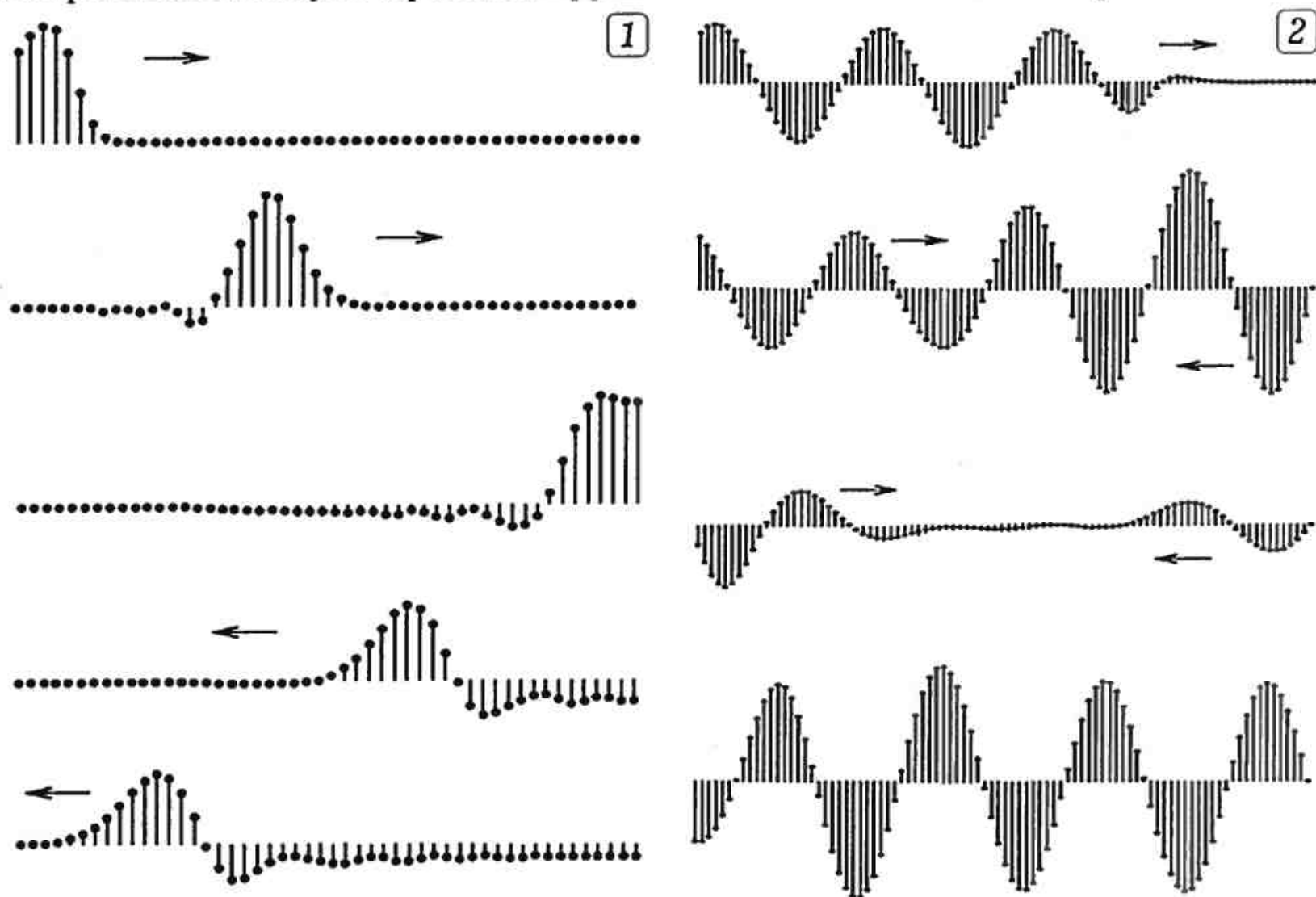


Рис. 6.3.

Задача 6.5. Изучите распространение импульса и его отражение от закрепленного и незакрепленного конца струны (одномерной упругой среды), которая моделируется 50 связанными осцилляторами.

Результат моделирования — на рис. 6.3.1. При отражении от незакрепленного конца упругой среды фаза импульса не изменяется: первые полуволны у падающего и отраженного импульсов положительные. При отражении от закрепленного конца происходит изменение фазы на противоположную.

Задача 6.6. Исследуйте интерференцию двух синусоидальных волн, распространяющихся навстречу друг другу.

Зададим гармонические колебания первого осциллятора упругой среды; для этого достаточно в цикл по времени вставить оператор $x_i[1] := 10 * \sin(5 * t)$. При запуске программы видно, как образовавшаяся волна распространяется вдоль упругой среды, отражается от ее правого конца и интерферирует с падающей (рис. 6.3.2). В узлах (минимумах) образующейся стоячей волны колебания практически отсутствуют, а в пучностях (максимумах) — происходят с максимальной амплитудой.

Промоделировать две когерентные волны можно иначе: для этого достаточно заставить колебаться левый и правый концы струны с равными частотами. Если частоты колебаний будут отличаться, то интерференции в области на-

ложения волн не получится: все точки одномерной упругой среды будут совершать сложные колебания, стоячей волны не возникнет.

Задача 6.7. Исследуйте интерференцию двух импульсов.

Для того, чтобы получить импульс достаточно заставить один из концов одномерной среды совершить одно или два колебания. Если оба конца совершат два колебания с равными частотами, то возникнут два одинаковых импульса (цуга), которые будут распространяться навстречу друг другу. В области наложения цуги, в зависимости от разности хода, будут частично или полностью усиливать либо ослаблять друг друга.

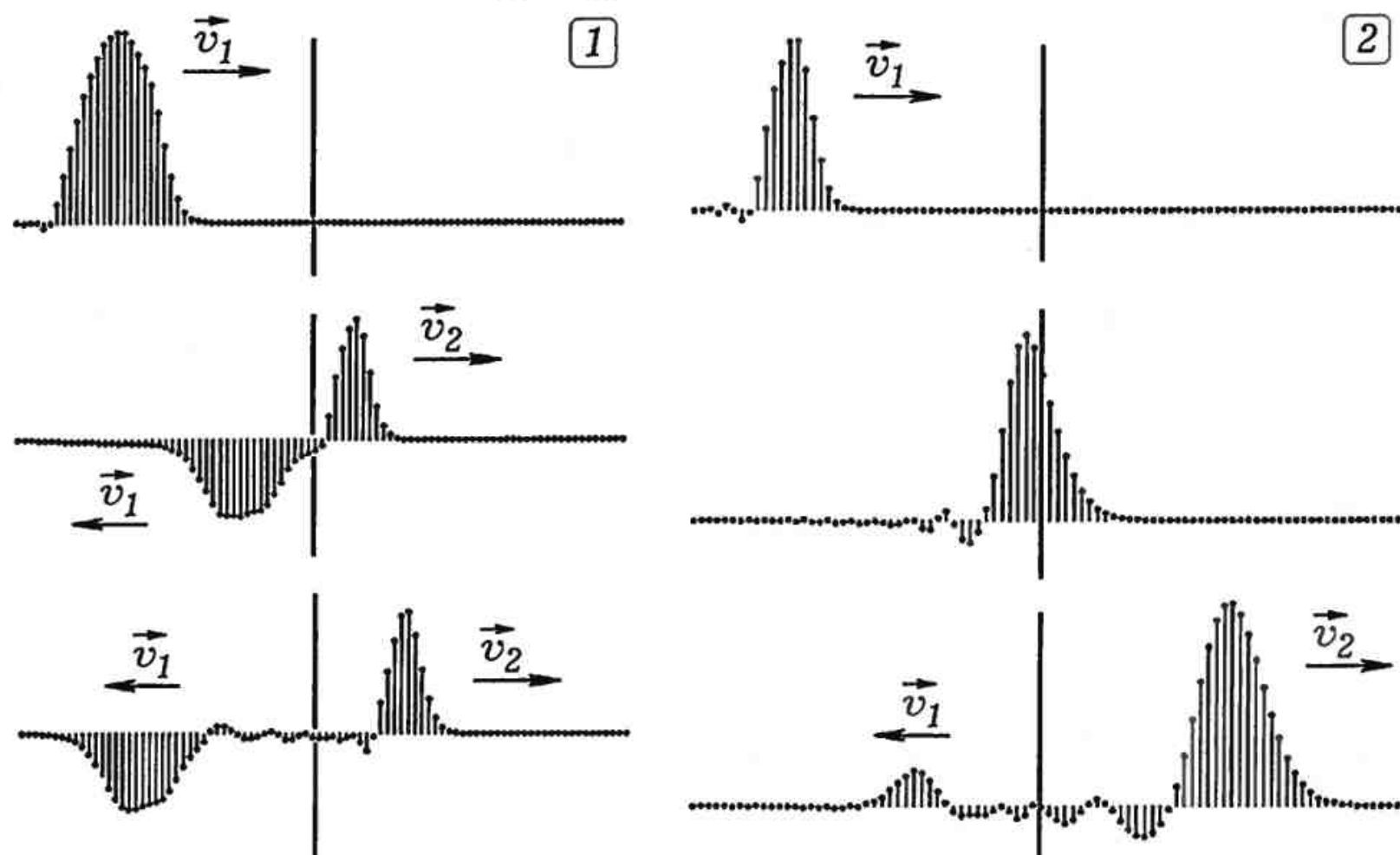


Рис. 6.4.

Задача 6.8. Про моделируйте распространение импульса вдоль цепочки осцилляторов, связанных упругими связями, в случае, когда их масса или жесткость пружин, начиная с некоторого осциллятора, изменяется скачком. Изучите изменение фазы импульса при его отражении от "более плотной" и "менее плотной" среды.

Типичные результаты моделирования отражения импульса от границы раздела двух сред представлены на рис. 6.4. Если вторая среда имеет большую плотность (массы осцилляторов больше), то скорость распространения импульса оказывается меньше ($v_1 > v_2$). Это проявляется в том, что во второй среде импульс имеет меньшую пространственную протяженность и за то же время проходит меньшее расстояние, чем отраженный импульс (рис. 6.4.1). При отражении от границы происходит потеря полуволны, то есть фаза изменяется на противоположную. Видно, что первая полуволна у падающего импульса положительная, а у отраженного — отрицательная. При отражении от менее плотной среды ($v_1 < v_2$) потери полуволны не происходит (рис. 6.4.2). Все это следует из теории волнового движения и подтверждается экспериментально.

7. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ АНАЛИТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

Известно, что движение механической системы определяется принципом экстремального действия Гамильтона. Пусть в моменты τ_1 и τ_2 система занимает определенные положения, характеризуемые двумя наборами значений координат q_{1k} и q_{2k} ($k = 1, 2, \dots, s$), что соответствует двум точкам в расширенном пространстве конфигураций. Тогда между этими положениями система движется так, что интеграл

$$S = \int_{\tau_1}^{\tau_2} L(q_k, \dot{q}_k, \tau) d\tau$$

принимает наименьшее значение. Величина S называется действием по Гамильтону. Принцип экстремального действия: действительное движение системы при переходе из точки $A(q_1^A, \dots, \tau_1)$ в точку $B(q_1^B, \dots, \tau_2)$ пространства конфигураций происходит так, что действие S по действительному пути имеет стационарное значение по сравнению со значениями S' при движении системы по окольным путям, близким к прямому и проходящими через те же точки A и B при фиксированных τ_1 и τ_2 .

Непосредственная проверка принципа Гамильтона предполагает сравнение значения действия S для действительного и окольных путей перемещения системы из начального положения в конечное за фиксированное время. Это невозможно сделать экспериментально по двум причинам: 1) система просто не будет двигаться по окольному пути: из бесконечного множества путей она выберет именно тот, для которого действие экстремально; 2) отсутствует прибор для измерения действия S , соответствующего тому или иному пути перехода системы из одного состояния в другое. Однако возможно выполнить вычислительный эксперимент, заставляющий систему двигаться по окольным путям и подтверждающий принцип экстремального действия.

Задача 7.1. Камень брошен вертикально вверх со скоростью $v = 10$ м/с так, что в момент $\tau_1 = 0$ его координата $y_1 = 0$, а в момент $\tau_2 = 1$ с она равна $y_2 = 5$ м. Численным методом найдите действие S для действительного пути. Варьируя коэффициенты в уравнении движения $y = C_1 \tau^2 / 2 + C_2 \tau + C_3$, определите действие S' при движении по окольным путям, и убедитесь в том, что оно всегда больше.

Пусть материальная точка массой $m = 1$ кг движется в однородном гравитационном поле с напряженностью $g = 10$ Н/кг. Ось y направим вверх. В начальный момент времени $\tau_1 = 0$ частица имеет направленную вверх скорость 10 м/с и координату $y(0) = 0$. Из основного закона динамики следует $\ddot{y} = -g = C_1$. Дважды интегрируя, получаем:

$$\dot{y} = C_1 \tau + C_2, \quad y = C_1 \tau^2 / 2 + C_2 \tau + C_3.$$

Постоянные интегрирования определяются из начальных условий: $\dot{y}(0) = 10$ м/с, $y(0) = 0$. Отсюда следует, что $C_1 = -10$ м/с², $C_2 = 10$ м/с, $C_3 = 0$.

Итак, скорость и координата точки определяются уравнениями: $\dot{y} = -10\tau + 10$, $y = -10\tau^2/2 + 10\tau$. Конечным будем считать момент $\tau_2 = 1$ с, когда точка имеет нулевую скорость, а ее координата $y(\tau_2) = 5$ м. Движению по действительному пути соответствует график $y = y(\tau)$, нарисованный жирной линией (рис. 7.1.1), а по окольному пути — тонкой.

Будем варьировать функцию $y = y(\tau)$ так, чтобы в моменты времени $\tau_1 = 0$ и $\tau_2 = 1$ с система находилась в положениях $y = 0$ и $y = 5$ м соответственно. То есть должны выполняться ограничения

$$C_1\tau_1^2/2 + C_2\tau_1 = 0, \quad C_1\tau_2^2/2 + C_2\tau_2 = 5.$$

Так как $\tau_1 = 0$, то первое уравнение приводит к тождеству. Подставляя во второе уравнение $\tau_2 = 1$ с, получаем уравнение, связывающее коэффициенты C_1 и C_2 : $C_2 = 5 - C_1/2$.

Если в цикле с некоторым шагом изменять C_2 , то можно, вычисляя C_1 , построить графики $y' = y'(\tau)$, соответствующие окольным путям движения системы при фиксированном времени $\tau_{12} = \tau_2 - \tau_1$ (рис. 7.1).

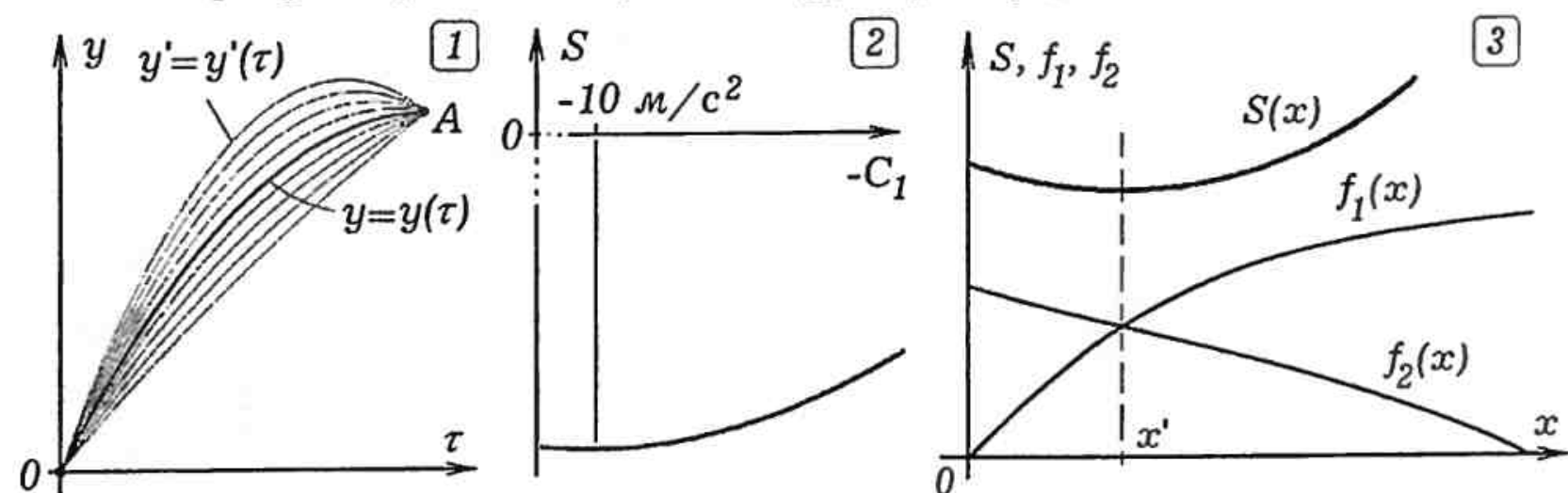


Рис. 7.1.

Представленная ниже программа Пр-7.1 позволяет, исходя из значения C_1 , определить C_2 и вычислить действие S , учитывая, что функция Лагранжа $L(y, \dot{y}, \tau) = m\dot{y}^2/2 - mgy$. График зависимости действия от вариации одного из коэффициентов уравнения движения системы $S = S(C_1)$ показан на рис. 7.1.2. Видно, что минимального значения $-16,667$ Дж·с действие достигает при $C_1 = -10$ м/с² и $C_2 = 10$ м/с, что соответствует движению по действительному пути. При движении системы по окольным путям значение S больше. Малые вариации действительного пути приводят к изменениям действия на величину более высокого порядка малости.

Uses crt, graph;

Const m=1; dt=0.00005; g=10;

Var y,vy,S,dS,t,C1,C2 : real; Gd,Gm,i : integer;

Пр-7.1.

BEGIN

Gd:= Detect; InitGraph(Gd, Gm, 'c:\bp\bgi');

line(0,0,640,0); line(0,0,0,480);

For i:=1 to 70 do

begin S:=0; t:=0; C1:=-13+i*0.2; C2:=5-C1/2;

Repeat y:=C2*t+C1*t*t/2; vy:=C2+C1*t;

dS:=m*(vy*vy/2-g*y)*dt; S:=S+dS; t:=t+dt;

until t>1; circle(round(C1*40)+500,round(-S*20),1);

end; Repeat until keypressed;

END.

Задача 7.2. Электрон движется из точки A области с потенциалом $\varphi_1 = U/q$ в точку B другой области с потенциалом $\varphi_2 = 0$. При переходе плоской границы раздела областей происходит "преломление" траектории в точке C . Задавшись скоростью v_1 в первой области, рассчитайте действие S при различных положениях точки C , если время движения из A в B фиксировано. Убедитесь в том, что при движении по действительному пути действие достигает экстремума.

Используемая программа приведена ниже. В ней, исходя из начальных условий, вычисляется время τ_{AB} движения частицы по действительному пути. Вторая часть программы содержит цикл, в котором с некоторым шагом изменяется координата x точки "преломления" траектории C , из скорости v_1 вычисляется время $\Delta\tau_1$ и $\Delta\tau_2 = \tau_{AB} - \Delta\tau_1$ движения частицы в первой и второй областях, определяется скорость v_2 , и рассчитывается действие по формуле $S = (mv_1^2/2 - U)\Delta\tau_1 + (mv_2^2/2)\Delta\tau_2$.

В программе Пр-7.2 предусмотрено построение графиков функций $S = S(x)$, $f_1(x) = v_1 \sin \alpha(x)$, $f_2(x) = v_2(x) \sin \beta(x)$. Результат работы программы представлен на рис. 7.1.3. Видно, что действие S достигает минимума при таком x , при котором графики функций $f_1(x)$, $f_2(x)$ пересекаются. Это означает, что выполняется соотношение $v_1 \sin \alpha = v_2 \sin \beta$, соответствующее движению частицы по действительному пути.

Uses crt, graph;

Пр-7.2.

Var h2,h1,pi,t,alpha,sinusA,sinusB,x,v1,v2,k,z,q,s,ds,t1,t2,dx : real;

i, Gd, Gm, x1,x2,y1,y2 : integer;

Const m=0.1; h=0.1; g=10; a=2;

BEGIN

Gd:= Detect; InitGraph(Gd, Gm, 'c:\bp\bgi');

pi:=3.1415; h1:=1; v1:=1; alpha:=0.5;

v2:=sqrt(v1*v1+2*g*h); sinusB:=v1*sin(alpha)/v2;

x:=h1*sin(alpha)/cos(alpha); h2:=(a-x)*sqrt(1-sinusB*sinusB)/sinusB;

t1:=sqrt(h1*h1+sqr(x))/v1; t2:=sqrt(h2*h2+sqr(a-x))/v2;

t:=t1+t2; line(round(x*230+35),150,round(x*230+35),380);

line(10,450,600,450); line(35,50,35,470); x:=0; dx:= 0.01;

```

For i:=0 to 200 do
begin x:=x+dx; t1:=sqrt(h1*h1+x*x)/v1; t2:=t-t1;
v2:=sqrt(h2*h2+(a-x)*(a-x))/t2; s:=(m*v1*v1/2-m*g*h)*t1+m*v2*v2/2*t2;
circle(round(x*230+35),round(-S*1500+800),2);
sinusA:=x/sqrt(h1*h1+x*x); sinusB:=(a-x)/sqrt(h2*h2+(a-x)*(a-x));
circle(round(x*230+35),round(-250*sinusA*v1+450),1);
circle(round(x*230+35),round(-250*sinusB*v2+450),1);
end; Repeat until keypressed; CloseGraph;
END.

```

Одной из теорем классической механики является теорема Лиувилля о сохранении фазового объема: фазовый объем консервативной системы (подчиняющейся уравнениям механики в форме Гамильтона), при движении остается постоянным (рис. 7.2.1). Если обозначить элемент фазового пространства через $dG = dq_1 dq_2 \dots dq_s dp_1 dp_2 \dots dp_s$, то по теореме Лиувилля:

$$\int_{G_0} dG = \int_{G_0} dq_1 dq_2 \dots dq_s dp_1 dp_2 \dots dp_s = \text{const}.$$

Отсюда следует, что движение точек, изображающих состояние системы в фазовом пространстве, подобно течению несжимаемой жидкости.

Так как из-за погрешности измерений определить точно начальное состояние невозможно, то макроскопическую систему можно представить ансамблем или облаком точек, соответствующих различным ее состояниям, в зависимости от имеющейся у нас информации. Рассмотрим непрерывное распределение точек в фазовом пространстве, характеризуемое плотностью распределения $\rho(q_1, q_2, \dots, q_s, p_1, p_2, \dots, p_s)$, где ρ — плотность вероятности нахождения динамической системы в окрестности некоторой точки фазового пространства. Итак, плотность ρ эволюционирует в фазовом пространстве как несжимаемая жидкость; форма области может изменяться произвольно, но ее объем при всех деформациях сохраняется.

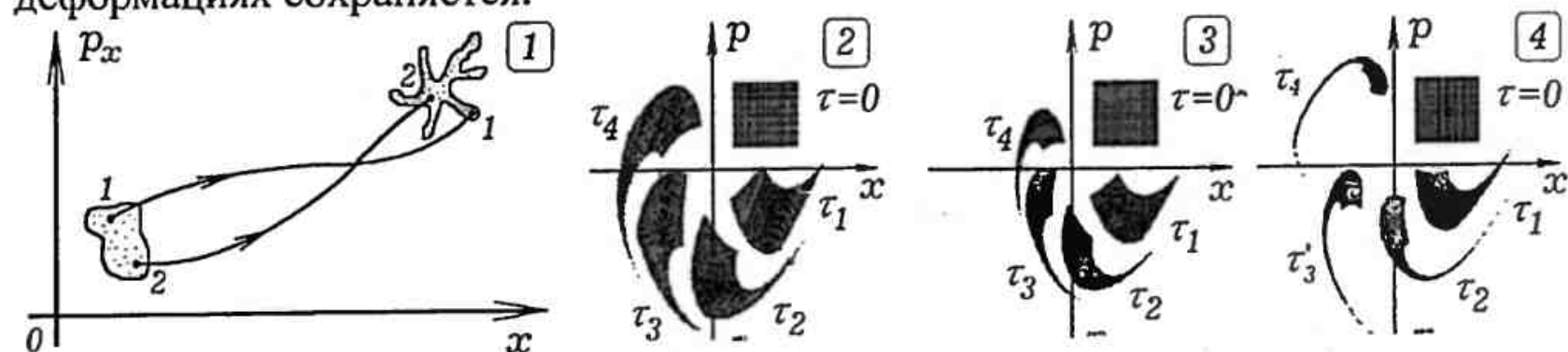


Рис. 7.2.

Задача 7.3. Про моделируйте расползание пятна в фазовом пространстве в случае свободных незатухающих, затухающих, а также вынужденных колебаний математического маятника.

Представим себе множество одинаковых математических маятников, диффуравнения колебаний которых имеет вид: $m\ddot{x} + r\dot{x} + k \sin x = F_m \sin \omega \tau$, а начальные координаты и скорости таковы, что соответствующие им точки за-

полняют прямоугольник в фазовом пространстве (рис. 7.2.2, 7.2.3, 7.2.4). В предлагаемой программе Пр-7.3 методом конечных разностей моделируется движение каждого маятника, определяется его состояние в момент τ и на фазовой плоскости ставится точка.

Uses crt, graph;

Пр-7.3.

Const m= 1; k =10; r = 0; dt = 0.002; pi = 3.1415926;

Var i,j,Gd,Gm: integer; x,y,z,v,a,f,zz,zzz,t,dx,dy,dz,vx,vy,vz: real;

BEGIN Gd := Detect; InitGraph(Gd, Gm, 'c:\bp\bgi');

line(180,0,180,480); line(0,280,640,280);

For i:=1 to 40 do For j:=1 to 40 do begin

x:=0.04*i; v:=0.04*j; t:=0;

Repeat t:= t + dt; a:=(f-k*sin(x)-r*v)/m; v:=v+a*dt; x:=x+v*dt;

until t>8;

putpixel(round(50*x)+180,280-round(50*v),15);

circle(round(50*x)+180,280-round(50*v),1);

end; Repeat until KeyPressed; CloseGraph;

END.

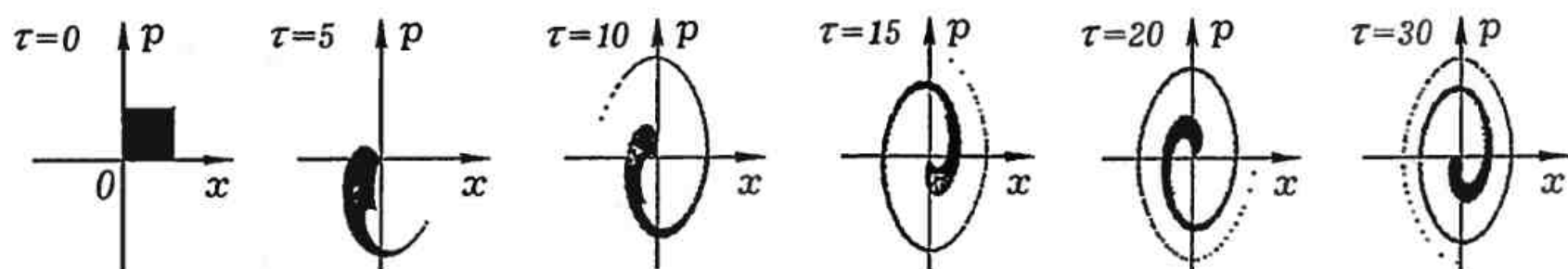


Рис. 7.3.

Из результатов моделирования видно, что в случае свободных незатухающих колебаний, когда действуют только консервативные силы, площадь пятна остается неизменной (рис. 7.2.2). Для затухающих колебаний (рис. 7.2.3) и автоколебаний (рис. 7.2.4), когда в системе действуют диссипативные силы, площадь пятна уменьшается. Эволюция фазового объема в случае незатухающих и затухающих колебаний математического маятника в последовательные моменты времени показана на рис. 7.3 и 7.4 соответственно. Из рисунков видно, что в случае незатухающих колебаний фазовый объем остается неизменным (рис. 7.3), а в случае затухающих колебаний его величина стремится к нулю (рис. 7.4).

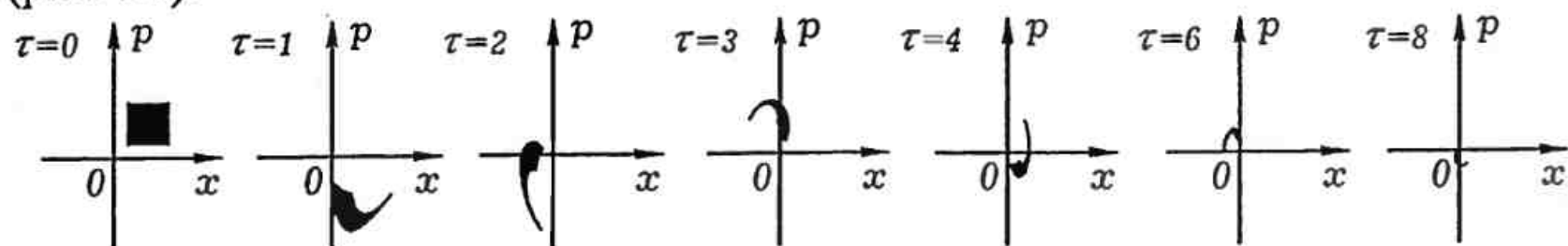


Рис. 7.4.

8. ХАОС В ДЕТЕРМИНИРОВАННЫХ СИСТЕМАХ

С точки зрения классической механики мир детерминирован: зная скорости и координаты всех частиц можно абсолютно точно рассчитать их значения в последующие моменты времени и предсказать эволюцию системы (механистический детерминизм). На самом деле это невозможно даже для нескольких молекул газа. Если начальные координаты и скорости частиц известны с небольшой погрешностью, то после каждого столкновения неопределенность возрастает. Как бы ни была высока точность измерения начальных координат и импульсов, можно указать интервал времени, по прошествии которого состояние системы будет полностью неопределенным.

При хаотическом движении происходят бифуркации, то есть качественные изменения характера движения динамической системы в результате небольших вариаций ее параметров. После точки бифуркации система может эволюционировать по двум различным путям. Значения параметров, при которых происходят подобные изменения, называются критическими или бифуркационными. Последовательность бифуркаций приводит к тому, что траектория движения системы в фазовом пространстве оказывается сильно чувствительной к изменению начальных условий.

Примером системы, обнаруживающей способность к хаотическому движению, является маятник Дафинга. Он представляет собой шарик внутри потенциальной ямы с двумя углублениями. Под действием внешней периодически изменяющейся силы шарик совершает хаотические колебания. Другим примером является бильярд Синная: горизонтально расположенный ящик с изогнутыми стенками и препятствиями внутри. По дну ящика движется шарик, который сталкиваясь с препятствиями и стенками, перемещается по сложной траектории.

Часто переход в хаотический режим происходит по сценарию Фейгенбаума: при монотонном изменении бифуркационного параметра происходит последовательность бифуркаций удвоения периода. Это приводит к появлению новых кратных гармоник в спектре периодически изменяющихся величин, спектр становится практически сплошным. Другой сценарий — переход к хаосу через перемежаемость: на колебательную систему периодически воздействуют короткие импульсы силы, выводящие ее из состояния равновесия. После каждого импульса система совершает сложное движение, стремясь вернуться в положение равновесия.

При движении системы с n степенями свободы точка в фазовом $2n$ -мерном пространстве выписывает сложную кривую. Рассмотрим сечение Пуанкаре — множество точек пересечения фазовой кривой с некоторой плоскостью α . Возможны следующие варианты: 1) периодическое движение: фазовая кривая последовательно проходит через конечное множество точек сечения: сначала через точку A , затем через B , через C , затем снова через точку A и т.д.; 2) квазипериодическое движение: фазовая кривая пересекает плоскость α в точках, образующих некоторую непрерывную линию, например окружность; 3) нерегулярное или хаотическое движение: множество точек на плоскости α

расположено случайно и имеет фрактальную структуру. В последнем случае траектория хаотически блуждает по фазовому пространству.

Необходимым и достаточным условием хаотичности движения является перемешивание — настолько сильное изменение формы ячейки фазового пространства, соответствующего движению ансамбля систем, что эта ячейка как бы однородно перемешивается во всем фазовом пространстве. Она превращается в тонкую паутинку, нити которой пронизывают все пространство, сохраняя при этом свой объем.

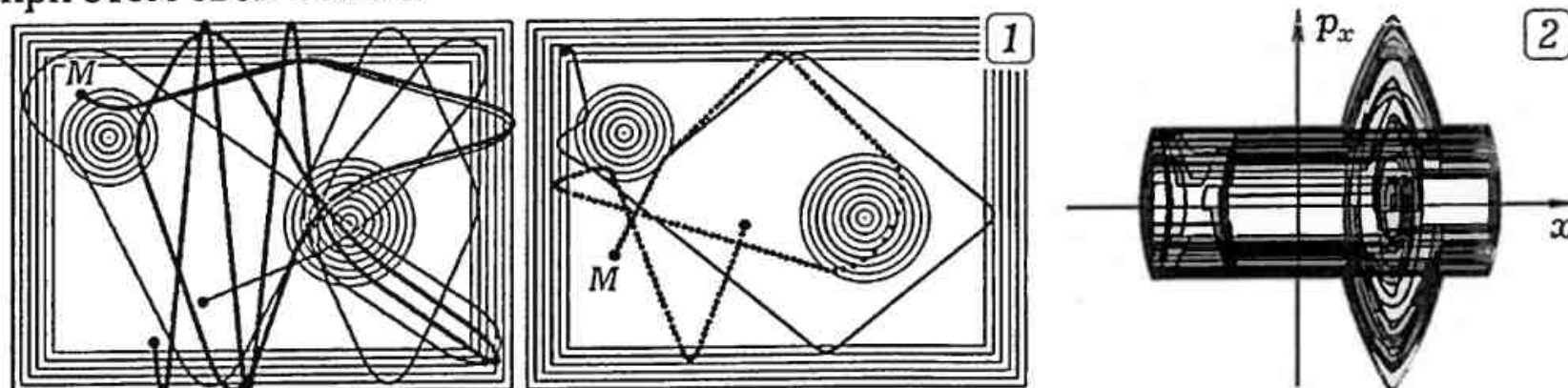


Рис. 8.1.

Задача 8.1. Исследуйте хаотическое движение шарика в бильярде Син-ная прямоугольной формы, имеющем наклонные стенки, конические выступ и углубление в центре. Что произойдет с траекторией шарика при изменении его скорости на 1–2 %?

При движении шарика по коническому выступу, вершина A которого имеет координаты (x_0, y_0) , на него действует постоянная по модулю сила, направленная от A . Ее проекции на оси равны: $F_x = F \cos \alpha = F(x - x_0)/l$, $F_y = F \sin \alpha = F(y - y_0)/l$, где $l = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$ — расстояние от шарика до вершины A . Если шарик движется по коническому углублению, то проекции силы вычисляются по аналогичным формулам, отличающимся знаком. При приближении к горизонтальной или вертикальной стенки на шарик действует постоянная сила, направленная соответственно вертикально или горизонтально внутрь бильярда. Для построения траектории (рис. 8.1.1) и фазовой кривой в осях x и p_x (рис. 8.1.2) используют программу Пр-8.1.

Небольшие изменения начальных условий приводят к тому, что шарик движется по совершенно иной траектории. На рис. 8.1.1 показан результат моделирования движения двух шариков в случае, они имеют одинаковые начальные координаты (точка M), а их скорости отличаются на 1 %.

```
Uses dos, crt, graph; Const dt=0.01; time=55000;
var m,Fx,Fy,x,y,vx,vy,xx,yy,x1,y1,x2,y2 : real;
Gd,Gm,i,j,t : integer; ax,ay,F,F1,F2,l1,l2 : real;
BEGIN Gd:=Detect; InitGraph(Gd, Gm, 'c:\bp\bgi');
x1:=130; y1:=150; x2:=430; y2:=260; rectangle(60,60,580,420);
circle(round(x1),round(y1),60); circle(round(x2),round(y2),80);
m:=0.1; x:=120; y:=300; vx:=20; vy:=-40;
Repeat t:=t+1; Fx:=0; Fy:=0; F1:=0; F2:=0;
l1:=sqrt(sqr(x1-x)+sqr(y1-y)); l2:=sqrt(sqr(x2-x)+sqr(y2-y));
```

Пр-8.1.

```

If l1<60 then F1:=-6; If l2<80 then F2:=8;
If x<60 then Fx:=6; If x>580 then Fx:=-6;
If y<60 then Fy:=6; If y>420 then Fy:=-6;
Fx:=Fx+F1*(x1-x)/l1+F2*(x2-x)/l2; Fy:=Fy+F1*(y1-y)/l1+F2*(y2-y)/l2;
ax:=Fx/m; ay:=Fy/m; xx:=x; yy:=y; vx:=vx+ax*dt; vy:=vy+ay*dt;
x:=x+vx*dt; y:=y+vy*dt; delay(50);
If round(t/20)*20=t then circle(round(x),round(y),3);
{circle(50+round(0.8*x),240-round(2*vx),1);}
until (t>time)or(KeyPressed);
Repeat until keypressed; CloseGraph;
END.

```

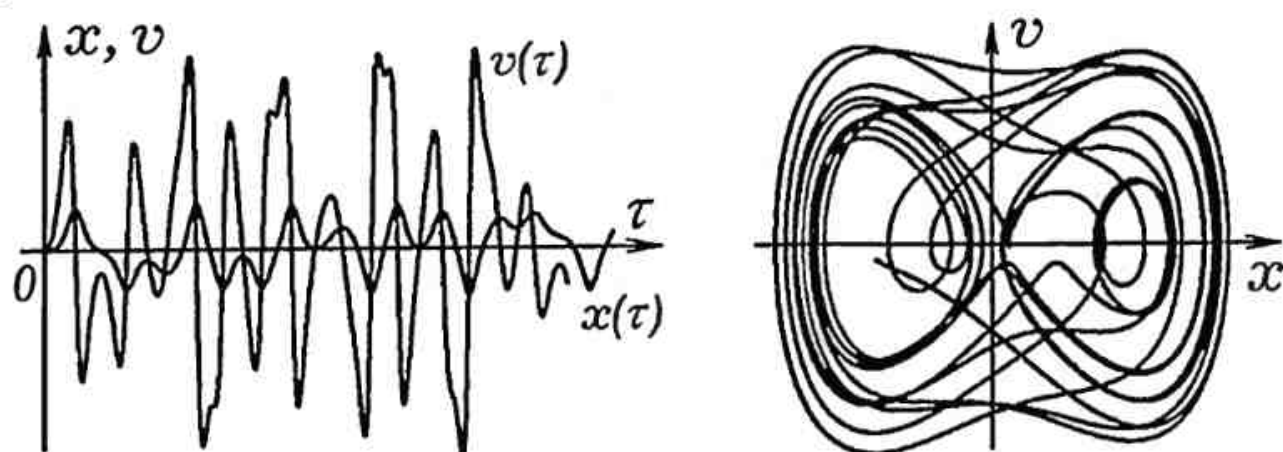


Рис. 8.2.

Задача 8.2. Промоделируйте вынужденные колебания маятника Дифинга, описываемые уравнением: $m\ddot{x} + r\dot{x} + k(x^3 - x) = F_m \cos \omega \tau$.

Рассмотрим колебания шарика внутри потенциальной ямы с двумя углублениями под действием внешней периодически изменяющейся силы $F(\tau) = F_m \cos(\omega \tau)$. Пусть потенциальная энергия внутри ямы задается функцией $U(x) = 0,25x^4 - 0,5x^2$. Потенциальное поле создает возвращающую силу $F = -\partial U / \partial x = -x^3 + x$. Получаем дифференциальное уравнение колебаний Дифинга: $m\ddot{x} + r\dot{x} + k(x^3 - x) = F_m \cos \omega \tau$. Вариант решения задачи приведен на рис. 8.2. Из графиков $x(\tau)$ и $v(\tau)$ и фазовой кривой видно, что система совершает нерегулярные стохастические колебания относительно двух положений равновесия. Движение шарика является трудно предсказуемым, бесконечно малые изменения параметров системы, начальных условий и внешней силы приводят к тому, что система эволюционирует по иному пути.

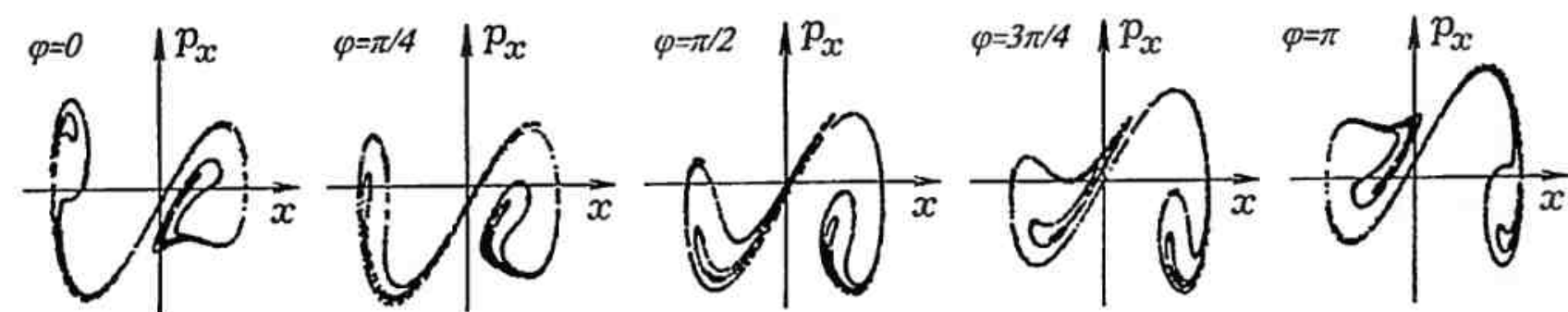


Рис. 8.3.

Задача 8.3. Получите сечения Пуанкаре для маятника Дифинга.

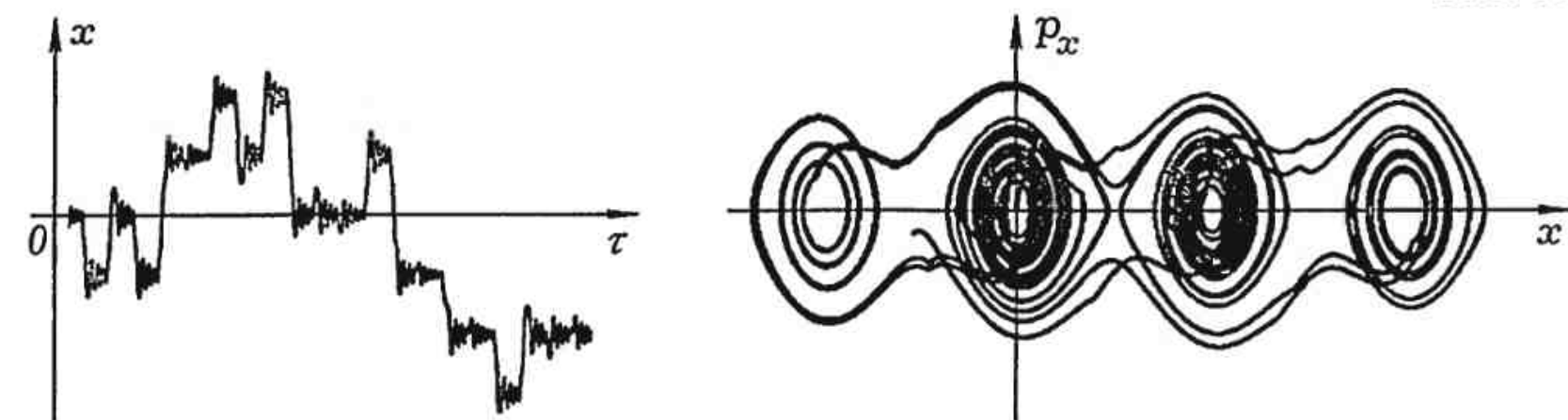
Результаты моделирования приведены на рис. 8.3. Сечения Пуанкаре для маятника Даффинга получены так: на ЭВМ моделируются колебания системы и определяются ее состояния в моменты времени, когда фаза вынуждающей силы α равна $0, \pi/4, \pi/2, 3\pi/4, \pi$. Так как режим хаотический, точки сечения имеют фрактальную структуру. Используется программа Пр-8.2.

```

Uses crt, graph;
Const m = 1; k = 4; r = 0.5; w = 2.3; dt = 0.002; pi = 3.1415926;
Var Gd, Gm : integer; f, t, x, v, a, z, zz : real;
BEGIN x:= 0; v:= 0;
      Gd := Detect; InitGraph(Gd, Gm, 'c:\bp\bgi');
      line(200,0,200,480); line(0,280,640,280);
      Repeat t:= t+dt; f:=1*sin(w*t);
      a:=(f-k*(x*x*x-x)-r*v)/m; v:=v+a*dt; x:=x+v*dt; z:=sin(w*t+3*pi/4);
      IF (z>0)and(z<0) then circle(round(100*x)+200, 280-round(100*v),1);
      zz:= z; until (t>10000); Repeat until KeyPressed; CloseGraph;
END.

```

Рис. 8.4.



Задача 8.4. Имеется совокупность одномерных потенциальных ям, профиль которых описывается функцией $U(x) = -a \cos(bx)$. Внутри одной из них лежит шарик, на который периодически действует кратковременная сила то в одну, то в другую сторону. На шарик также действует сила вязкого трения. Исследуйте возникающие хаотические колебания системы.

Со стороны силового поля с потенциальной энергией $U(x) = -a \cos(bx)$ на шарик действует сила $F_x = -\partial U / \partial x = -ab \sin(bx)$. Движение шарика описывается дифференциальным уравнением: $m\ddot{x} + r\dot{x} + ab \sin(bx) = F(t)$. Получающиеся график колебаний и фазовая кривая изображены на рис. 8.4. Видно, что при соответствующем подборе величины и длительности импульса силы шарик в случае совпадения направления движения с направлением силы перескакивает из одной потенциальной ямы в другую. Если скорость шарика и направление силы не совпадают, то шарик может не перескочить в другую яму.

Задача 8.5. Промоделируйте переход к хаосу через перемежаемость в случае, когда на маятник Даффинга периодически действует кратковременная сила. Постройте график колебаний и фазовую кривую.

Задача 8.6. Исследуйте странный аттрактор Реслера, задаваемый системой уравнений: $\dot{x} = -(y + z)$, $\dot{y} = x + y/5$, $\dot{z} = 1/5 + z(x - m)$.

Используемая программа состоит из цикла по времени, в котором рассчитываются значения x, y, z в следующий момент $\tau + \Delta\tau$:

$$\Delta x = -(y' + z')\Delta\tau, \quad \Delta y = (x' + y'/5)\Delta\tau, \quad \Delta z = (0,2 + z'(x' - m))\Delta\tau,$$

$$x^{t+1} = x' + \Delta x, \quad y^{t+1} = y' + \Delta y, \quad z^{t+1} = z' + \Delta z.$$

Получающиеся графики в системе координат xOy при различных значениях бифуркационного параметра m изображены на рис. 8.5. Видно, что происходят бифуркации удвоения периода, приводящие к хаотическим колебаниям, фазовая кривая которых имеет фрактальную структуру.

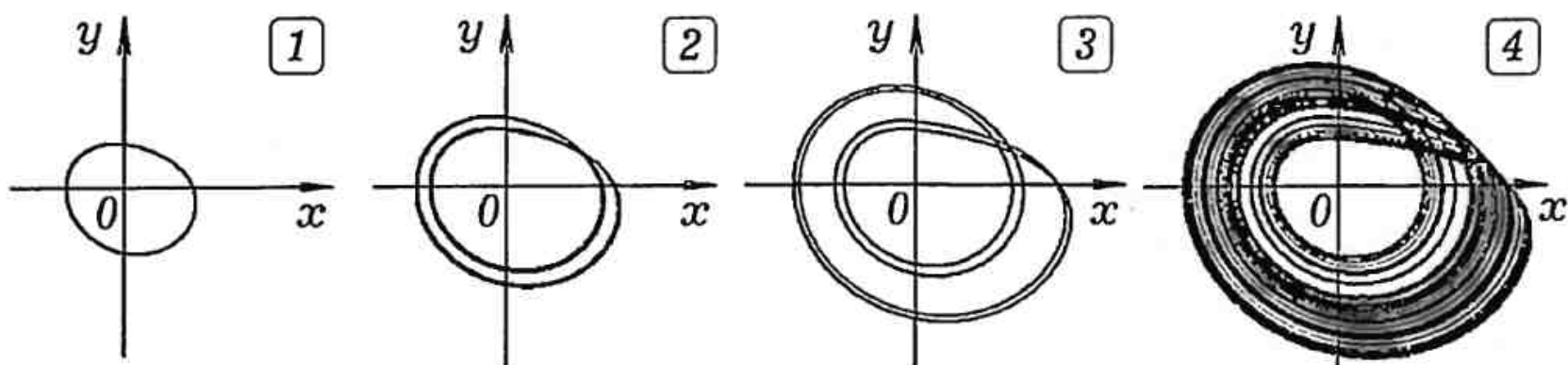


Рис. 8.5.

Задача 8.7. Промоделируйте странный аттрактор Лоренца, уравнения которого имеют вид: $\dot{x} = a(-x + y)$, $\dot{y} = bx - y - xz$, $\dot{z} = -cz + xy$.

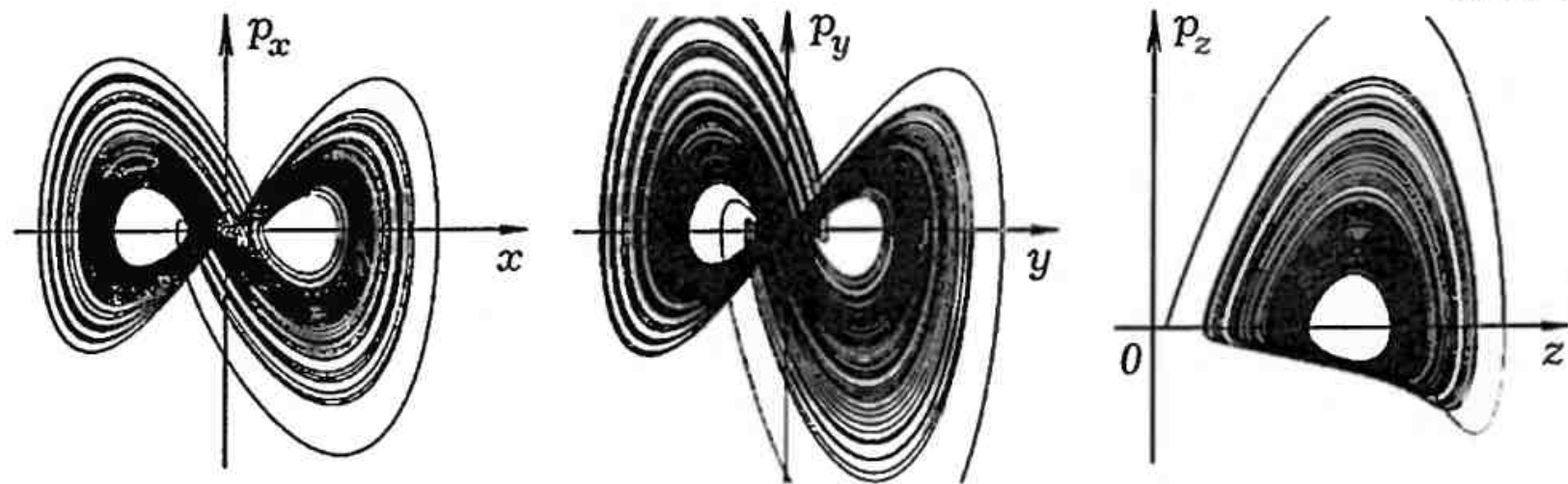
Конечно-разностные уравнения выглядят так:

$$\Delta x = a(-x' + y')\Delta\tau, \quad \Delta y = (bx' - y' - x'z')\Delta\tau, \quad \Delta z = (-cz' + x'y')\Delta\tau,$$

$$x^{t+1} = x' + \Delta x, \quad y^{t+1} = y' + \Delta y, \quad z^{t+1} = z' + \Delta z.$$

Используемая программа Пр-8.3 представлена ниже.

Рис. 8.6.



Получающиеся фазовые кривые изображены на рис. 8.6. Система эволюционирует так, что фазовая кривая описывает закрученную восьмерку, захватывая две большие области фазового пространства. В той части фазового пространства, где фазовые кривые проходят рядом друг с другом движение системы неустойчиво: малые изменения ее состояния приводят к тому, что она эволюционирует совершенно по другому пути. Эта чувствительность к начальным условиям называется эффектом бабочки: взмахнув крыльями в Австралии сегодня, бабочка, при определенных метеорологических условиях, может изменить погоду, например, вызвать торнадо в Америке завтра.

```

Uses crt, graph;
Const a=15; b=30; c=2.2; dt=0.0001;
Var Gd, Gm: integer;
zz,zzz,t, x,y,z,dx,dy,dz,vx,vy,vz: real;
BEGIN Gd:=Detect; InitGraph(Gd,Gm,'c:\bp\bgi');
  x:=20; y:=20; z:=5;
  Repeat t:=t+dt; dx:=a*(-x+y)*dt; x:=x+dx; vx:=dx/dt;
    dy:=(b*x-y-x*z)*dt; y:=y+dy; vy:=dy/dt;
    dz:=(-c*z+x*y)*dt; z:=z+dz; vz:=dz/dt;
    putpixel(220+round(10*x),220-round(1*vz),15);
    {putpixel(220+round(10*y),220-round(1*vy),15);}
    {putpixel(100+round(10*z),220-round(1*vz),15);}
  until KeyPressed; CloseGraph;
END.

```

Задача 8.8. Промоделируйте перемешивание фазового объема в случае свободных незатухающих колебаний маятника Давинга.

Представим себе совокупность одинаковых маятников Давинга, совершающих свободные незатухающие колебания, описываемые уравнением $m\ddot{x} + (x^3 - x) = 0$ и отличающиеся только начальными условиями x_0, p_0 . Пусть в момент $\tau = 0$ фазовые точки, характеризующие начальное состояние маятников, находятся внутри прямоугольника $[x, x + \Delta x, p_x, p_x + \Delta p_x]$. Необходимо рассчитать состояние каждого маятника в момент времени τ_1 , и поставить соответствующую точку на фазовой плоскости. Результаты вычислительного эксперимента представлены на рис. 8.7. Видно, что происходит расплывание фазового объема, его перемешивание в фазовом пространстве, что свидетельствует о хаотичности колебаний.

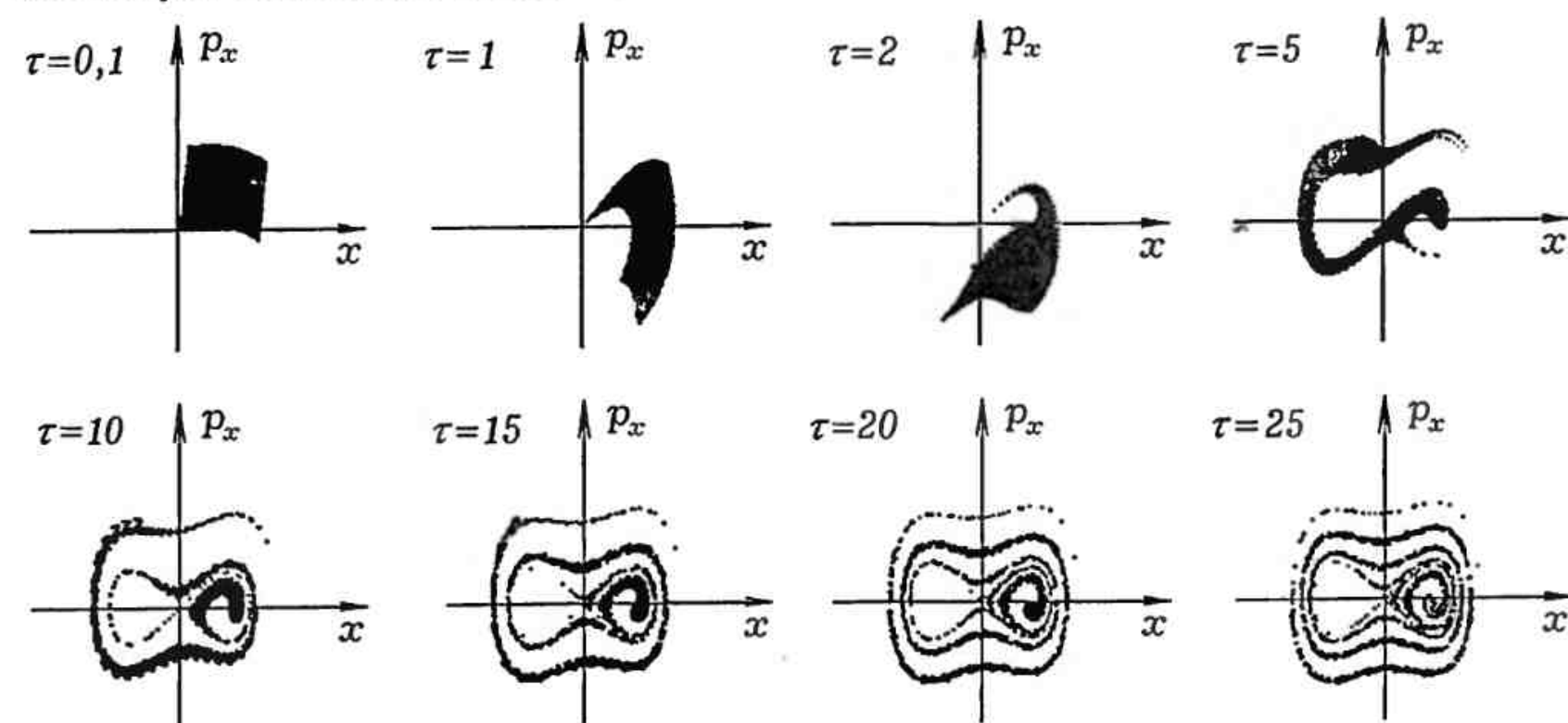


Рис. 8.7.

Задача 8.9. Изучите хаотическое движение шарика, подпрыгивающего на вибрирующей пластине в однородном поле тяжести. Постройте график колебаний и фазовую кривую. Получите сечение Пуанкаре.

9. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ СТАТИСТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Статистическая физика изучает макроскопические свойства систем, исходя из молекулярно-кинетических представлений и используя методы математической статистики. Вычислительный эксперимент позволяет промоделировать движение системы большого числа частиц и исследовать изменения таких характеристик, как энергия, энтропия, концентрация и т.д. с течением времени.

Задача 9.1. Газ находится в термодинамическом равновесии. Получите график распределения молекул газа по скоростям.

Когда газ находится в состоянии термодинамического равновесия, все направления скоростей молекул равновероятны и описываются законом нормального распределения Гаусса:

$$F(v_x) = A \exp(-v_x^2), \quad F(v_y) = A \exp(-v_y^2), \quad F(v_z) = A \exp(-v_z^2).$$

При этом скорость каждой молекулы $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$. Аналитически можно доказать, что распределение молекул по скоростям описывается уравнением Максвелла.

Вычислительный эксперимент, позволяющий получить распределение Максвелла, состоит в следующем. В цикле задаются значения проекций v_x , v_y , v_z так, чтобы их распределение подчинялось закону Гаусса, после этого вычисляется значение скорости молекулы v и определяется интервал, к которому принадлежит это значение. Через 10–20 тысяч испытаний строится график распределения молекул по скоростям.

Для задания случайной величины x , распределенной по закону Гаусса, используется специальная процедура. Генератор случайных чисел вырабатывает случайное число x в интервале от 0 до 5, причем все генерируемые числа равновероятны. По закону Гаусса определяется вероятность $p = \exp(-x^2)$ появления данного значения. Затем генерируется еще одно случайное число из интервала $[0,1]$. Если оно меньше p , то исходное число x поступает на выход, а в противном случае все повторяется снова.

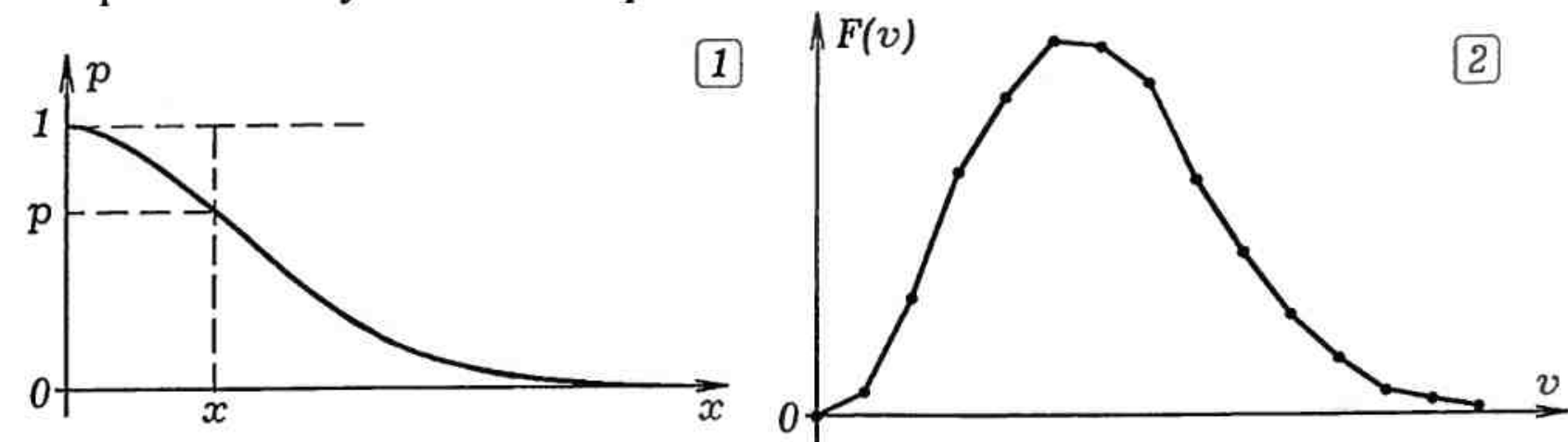


Рис. 9.1.

Задача 9.2. Напишите программу, которая моделирует движение молекул газа в сосуде и вычисляет энтропию. Исследуйте ситуацию, когда газ сначала заполняет часть сосуда, а затем открывается перегородка и он заполняет весь

сосуд. Убедитесь, что процесс расширения газа является необратимым, энтропия возрастает.

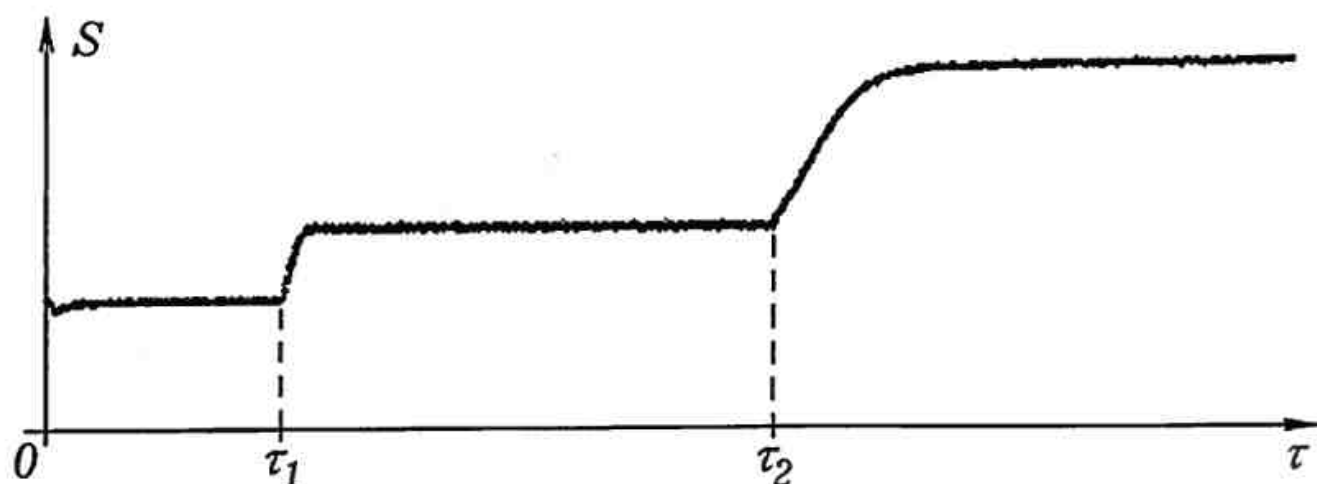
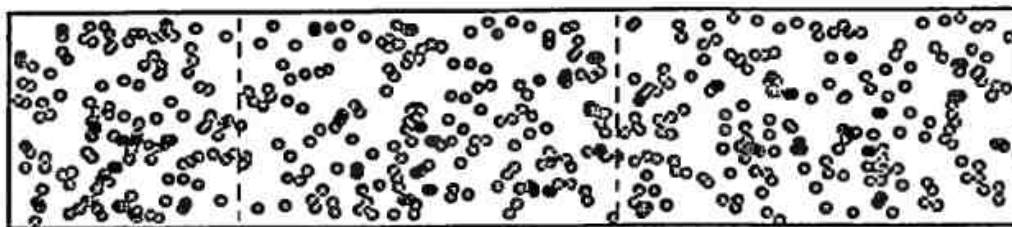


Рис. 9.2.

Представим длинный сосуд, разделенный перегородкой на две части. В левой части сосуда n молекул газа. Разобьем сосуд на r элементарных объемов, число молекул в j -ом объеме обозначим m_j . Энтропия системы

$$S = - \sum_{j=1}^r p_j \ln p_j = - \sum_{j=1}^r \frac{m_j}{n} \ln \frac{m_j}{n}.$$

Пусть сосуд имеет две перегородки, которые открываются одна за другой в моменты τ_1 и τ_2 . Ниже представлена программа Пр-9.1, вычисляющая энтропию газа в последовательные моменты времени и строящая график $S(\tau)$ в случае, когда открывается сначала одна, а потом другая перегородка (рис. 9.2). Из графика видно, что при заполнении газом всего сосуда энтропия возрастает.

Uses crt, graph;

Пр-9.1.

Const N=500; dt=0.01;

Var ErrorCode, Detect, DriverVar, ModeVar, i, j, a : integer;

x, y, vx, vy, xx, yy : array[1..N] of real;

m : array[1..N] of integer; ver, t: real; entrop: real;

BEGIN

DriverVar:=Detect; InitGraph(DriverVar, ModeVar, 'c:\bp\bgi');

setcolor(8); setbkcolor(15); Randomize;

For i:=1 to N do begin

x[i]:=random(50)+20; y[i]:=random(80)+20;

vx[i]:=random(i)/2; vy[i]:=random(i)/2; end;

line(10,400,640,400); line(10,100,10,400);

Repeat t:=t+1; a:=60;

For i:=1 to N do begin

xx[i]:=x[i]; yy[i]:=y[i];

x[i]:=x[i]+vx[i]*dt; y[i]:=y[i]+vy[i]*dt;

If t>500 then a:=120; If t>1500 then a:=420;

```

If (x[ i ]<20)or(x[ i ]>a) then vx[ i ]:=-vx[ i ];
If (y[ i ]<20)or(y[ i ]>100) then vy[ i ]:=-vy[ i ]; end;
setcolor(15); For i:=1 to N do circle(round(xx[ i ]),round(yy[ i ]),1);
setcolor(8); For i:=1 to N do circle(round(x[ i ]),round(y[ i ]),1);
entrop:=0; For j:=1 to 20 do begin m[j]:=0;
For i:=1 to N do if (x[ i ]>20*j)and(x[ i ]<20+20*j) then m[j]:=m[j]+1;
entrop:=entrop-(m[j]+0.1)/(N+0.1)*ln((m[j]+0.1)/(N+0.1)); end;
circle(round(10+t*0.2),400-round(entrop*50),1);
until Keypressed; CloseGraph;
END.

```

Задача 9.3. Имеется система частиц, взаимодействующих друг с другом квазиупругими силами, находящаяся в однородном силовом поле. Покажите, что их распределение подчинено закону Больцмана: $F(E) = A \exp(-aE)$.

Рассмотрим одномерную модель газа, представляющую собой систему N частиц, способных перемещаться вдоль оси Oy и связанных между собой пружинами. Для нахождения устойчивого состояния системы с N степенями свободы, соответствующего минимуму потенциальной энергии, воспользуемся следующим методом. Будем последовательно перебирать частицы системы и изменять их координату на небольшую случайную величину, каждый раз вычисляя новое значение потенциальной энергии. Если потенциальная энергия системы в результате смещения i -ой частицы на Δx_i уменьшается, то данное состояние признается энергетически более выгодным и такое изменение конфигурации принимается. После этого программа переходит к $i+1$ частице. Одновременно с этим должен строиться график зависимости числа частиц от их энергии. Он получается похожим на экспоненту.

10. МОДЕЛЬ МАГНЕТИКА ИЗИНГА

Вещества, способные намагничиваться в магнитном поле, называются магнетиками. Магнетики подразделяются на парамагнетики, диамагнетики и ферромагнетики. Рассмотрим двумерную модель магнетика. Представим себе сетку из N горизонтальных и M вертикальных линий. В каждом узле с номерами i и j находится атом. Пусть спин каждого атома может быть сонаправлен с осью Oz , и тогда $s_{i,j} = 1$, либо противоположно направлен, что соответствует $s_{i,j} = -1$. Энергия взаимодействия соседних атомов друг с другом равна $-Js_{i,j}s_{i+1,j}$, атомы, расположенные далеко, не взаимодействуют. Кроме того, магнетик может находиться в магнитном поле, направленном вдоль оси Oz . Энергия взаимодействия атома, находящегося в узле (i,j) , с внешним магнитным полем равна $hs_{i,j}$. Энергия всей системы определяется по формуле:

$$E = -J \sum_{i,j}^{N,M} (s_{i,j}s_{i+1,j} + s_{i,j}s_{i-1,j} + s_{i,j}s_{i,j+1} + s_{i,j}s_{i,j-1}) + h \sum_{i,j}^{N,M} s_{i,j}.$$

Как известно, система стремится перейти в состояние с минимальной потенциальной энергией. При $J > 0$ одинаковая ориентация спинов соседних атомов энергетически выгоднее состояний, при которых спины соседних атомов противоположно направлены. Энергия взаимодействия двух атомов с сонаправленными спинами составляет $-J$, а если спины противоположно направлены, то $+J$. Поэтому состояние с минимальной потенциальной энергией взаимодействия спинов является ферромагнитным, атомы объединяются в домены — области, в которых магнитный момент (спин) всех атомов ориентирован в одном направлении. В случае, когда $J < 0$ система обладает наименьшей энергией в состоянии с антипараллельными спинами. Внешнее магнитное поле способствует повороту спина атома и изменяет энергию системы на h или $-h$.

Изингом предложена одномерная и двумерная модель ферромагнетика, в которой: 1) кинетическая энергия атомов, находящихся в узлах сетки (кристаллической решетки), считается равной 0; 2) предусмотрены только 2 дискретных состояния для спинов атома; 3) учитывается только взаимодействие четырех ближайших соседей. Процесс моделирования заключается в следующем: 1) задается начальная ориентация всех спинов атомов случайным образом; 2) определяется энергия системы; 3) случайным образом выбирается один атом и его спин изменяется на противоположный, определяется энергия системы для новой конфигурации; 4) если в результате переориентации спина энергия уменьшилась, то такое изменение конфигурации системы принимается, в противном случае — отклоняется; 5) возврат к операции 2; если перебраны все атомы, то на экран выводится состояние системы, затем снова повторяется операция 2.

Задача 10.1. Исследуйте компьютерную модель ферромагнетика, аналогичную модели Изинга, отличающуюся: 1) наличием трех состояний у каждого атома ($s_{i,j} = -1, 0, 1$); 2) учетом влияния восьми соседних атомов.

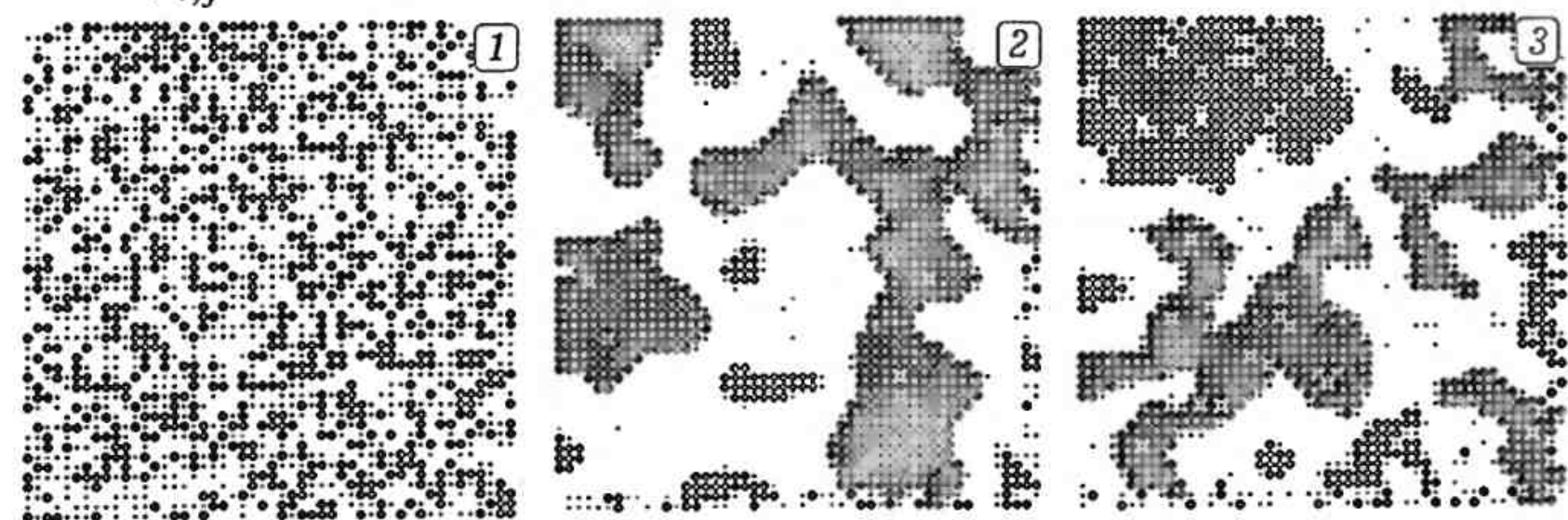


Рис. 9.4.

Исходное случайное распределение атомов показано на рис. 9.4.1. Жирные кружки изображают атомы, у которых собственный магнитный момент $s_{i,j} = 1$; точки соответствуют атомам с $s_{i,j} = 0$; если $s_{i,j} = -1$, то атом не изображается. В расчетах учитывается взаимодействие данного атома с восемью

ближайшими соседями. Для решения задачи используется программа Пр-10.1. Результаты моделирования приведены на рис. 9.4.2 и 9.4.3. Видно, что атомы группируются в домены — области спонтанной намагниченности.

Пр-10.1.

```

Uses crt, graph;
Const N=50; M=50; jj=1;
Var i,j,k,l,u, Gd, Gm : integer; p: real; h,E,EE,dE,x,a,fi,fi1,fi2 : real;
s : array [1..N,1..M] of real; Label metka;
Procedure Energy;
Var i,j : integer;
begin E:=0; dE:=0;
  For i:=2 to N-1 do For j:=2 to M-1 do begin
    E:=E-jj*(s[i,j]*s[i+1,j]+s[i,j]*s[i-1,j]+s[i,j]*s[i,j+1]+s[i,j]*s[i,j-1]
    +0.7*(s[i,j]*s[i+1,j+1]+s[i,j]*s[i-1,j-1]+s[i,j]*s[i-1,j+1]+s[i,j]*s[i+1,j-1])); end;
  for i:=2 to N-1 do For j:=2 to M-1 do begin
    h:=0; If (i>0.6*N)and(j>0.6*M) then h:=-0.05;
    If (i<0.4*N)and(j<0.4*M) then h:=0.05;
    dE:=dE-h*s[i,j]; end; E:=E+dE;
  end;
Procedure Draw;
Var i,j : integer;
begin cleardevice; For i:=1 to N do begin
  For j:=1 to M do begin If s[i,j]=1 then begin
    circle(7*i,7*j,1); circle(7*i,7*j,2); circle(7*i,7*j,3); end;
    If s[i,j]=0 then circle(7*i,7*j,1); end; end; end;
BEGIN
  Gd:= Detect; InitGraph(Gd, Gm, 'c:\bp\bgi');
  If GraphResult <> grOk then Halt(1);
  Randomize; for i:=1 to N do for j:=1 to M do
  begin p:=Random(100)/100; s[i,j]:=0;
  If p<0.33 then s[i,j]:=-1; If p>0.66 then s[i,j]:=1;
  end; Draw;
  Repeat For k:=1 to round(N*M/10) do begin Energy; EE:=E;
  i:=1+round(random(N-2)); j:=1+round(random(M-2));
  If s[i,j]=1 then begin u:=1; s[i,j]:=0; goto metka; end;
  If s[i,j]=-1 then begin u:=-1; s[i,j]:=0; goto metka; end;
  If (s[i,j]=0)and(random(100)>50) then s[i,j]:=-1 else s[i,j]:=1;
  u:=0; metka: Energy; If (E>EE) then s[i,j]:=u;
  end;
  Energy; Draw; until KeyPressed;
  Repeat until KeyPressed; CloseGraph;
END.

```

Можно в программе учесть хаотическое изменение ориентации магнитного момента, обусловленное тепловым движением частиц. Для этого достаточно случайным образом инвертировать направление спина некоторых атомов.

11. РАСЧЕТ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ

Основная задача электростатики состоит в нахождении поля, создаваемого системой зарядов в окружающем пространстве. Электростатическое поле имеет две характеристики: скалярную — потенциал φ и векторную — напряженность \vec{E} . В соответствии с принципом суперпозиции при наложении полей нескольких зарядов

$$\varphi = \sum_{i=1}^n \varphi_i = \sum_{i=1}^n k \frac{q_i}{r_i}, \quad \vec{E} = \sum_{i=1}^n \vec{E}_i = \sum_{i=1}^n k \frac{q_i}{r_i^3} \vec{r}_i,$$

где \vec{r}_i — вектор, соединяющий i -ый заряд с точкой, в котором определяется потенциал (напряженность), r_i — его длина. Напряженность поля направлена в сторону убывания потенциала: $\vec{E} = -\text{grad} \varphi$. Поэтому для построения силовой линии, проходящей через данную точку A , может быть использован метод градиентного спуска (подъема). От точки A делается шаг в направлении наибоыстрейшего убывания (возрастания) потенциала φ , и ставится точка B . Эта процедура многократно повторяется, в результате чего определяются остальные точки $C, D, E \dots$ силовой линии.

Электростатическое поле одноименных зарядов очень похоже на гравитационное поле массивных тел, которое также характеризуется потенциалом и напряженностью. Закон Кулона и закон всемирного тяготения аналогичны друг другу. Отличие в том, что электрические заряды бывают двух знаков, и одноименные заряды отталкиваются, а гравитационная масса всегда положительна, и массивные тела всегда притягиваются. Это не мешает распространить некоторые рассуждения, проводимые в этом параграфе, и на гравитационное поле.

Рис. 11.1.



Задача 11.1. Три точечных заряда q_1, q_2, q_3 имеют координаты $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$. Рассчитайте потенциал электростатического поля во всех точках плоскости, содержащей эти заряды.

Алгоритм вычисления потенциала состоит в следующем. В цикле перебираются все точки плоскости (пиксели экрана), задаваемые целочисленными параметрами i и j . При этом вычисляются расстояния от данной точки до каждого заряда и находится алгебраическая сумма потенциалов:

$$\varphi_{i,j} = \sum_{s=1}^3 k \frac{q_s}{r_{s,i,j}}, \quad r_{s,i,j} = \sqrt{(x_s - x_{i,j})^2 + (y_s - y_{i,j})^2}.$$

В зависимости от величины $\varphi_{i,j}$ ставится точка соответствующего цвета (рис. 11.1 и 11.2.1). Используется программа Пр-11.1.

Uses crt, graph; Пр-11.1.
 Var r1,r2,r3,x1,x2,x3,y1,y2,y3,fi,q1,q2,q3 :real; Gd,Gm,i,j :integer;
 BEGIN Gd:= Detect; InitGraph(Gd, Gm, 'c:\bp\bgi\');
 q1:=15; q2:=-23; q3:=8; { q1:=8; q2:=46; }
 x1:=180.5; y1:=180.5; x2:=400.5; y2:=220.5; x3:=240.5; y3:=340.5;
 circle(round(x1),round(y1),3); circle(round(x2),round(y2),3);
 For i:=0 to 640 do For j:=0 to 480 do
 begin r1:=sqrt(sqr(x1-i)+sqr(y1-j)); r2:=sqrt(sqr(x2-i)+sqr(y2-j));
 r3:=sqrt(sqr(x3-i)+sqr(y3-j)); fi:=q1/r1+q2/r2+q3/r3;
 {putpixel(i,j,round((fi+1)*20));}
 If round(fi/0.05)-fi/0.05<0.002 then putpixel(i,j,15);
 end; Repeat until Keypressed; CloseGraph;
 END.

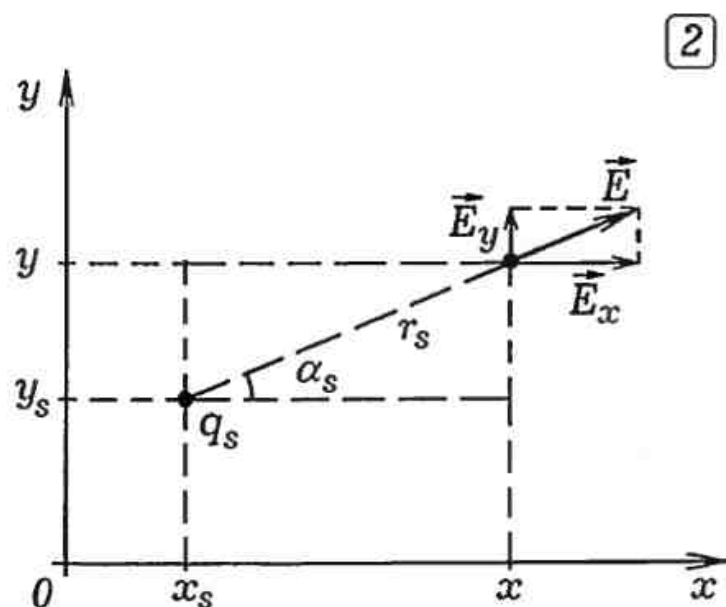


Рис.11.2.

Задача 11.2. Три точечных заряда q_1, q_2, q_3 имеют координаты $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$. Рассчитайте напряженность электростатического поля во всех точках плоскости, содержащей эти заряды.

На плоскости, содержащей заряды, построим сетку с некоторым шагом h по вертикали и горизонтали. Напряженность поля, создаваемого зарядом q_s в точке с координатами x, y (рис. 11.2.2), вычисляется по формулам:

$$\cos \alpha_s = (x - x_s) / r_s, \quad \sin \alpha_s = (y - y_s) / r_s, \quad s = 1, 2, 3.$$

$$r_s = \sqrt{(x - x_s)^2 + (y - y_s)^2}, \quad E_{sx} = k \frac{q_s \cos \alpha_s}{r_s^2}, \quad E_{sy} = k \frac{q_s \sin \alpha_s}{r_s^2},$$

$$E_x = E_{1x} + E_{2x} + E_{3x}, \quad E_y = E_{1y} + E_{2y} + E_{3y}.$$

Перебирая все узлы сетки, определяют проекции напряженности E_x, E_y и записывают их в два массива (программа Пр-11.2). После этого, исходя из

значений E_x , E_y , в узлах сетки строятся отрезки, визуализирующие направление \vec{E} . Результат моделирования приведен на рис. 11.3.

Uses crt, graph;

Пр-11.2.

Var EC,D,DrV,MV,i,j,q1,q2,q3,x1,y1,x2,y2,x3,y3 : integer;

cosa1,cosa2,cosa3,sina1,sina2,sina3,a,a1,a2,r1,r2,r3,x,y,Ex,Ey,pi: real;

Label metka;

BEGIN DrV:=Detect; InitGraph(DrV,MV,'c:\bp\bgi');

pi:=arctan(1)*4; x1:=150; y1:=240; q1:=15;

x2:=300; y2:=100; q2:=-20; x3:=450; y3:=400; q3:=10;

circle(x1,y1,2);circle(x2,y2,2);circle(x3,y3,2);

circle(x1,y1,4);circle(x2,y2,4);circle(x3,y3,4);

circle(x1,y1,6);circle(x2,y2,6);circle(x3,y3,6);

For i:=1 to 100 do For j:=1 to 100 do begin x:=35*i; y:=35*j;

r1:=sqrt((x-x1)*(x-x1)+(y-y1)*(y-y1)); r2:=sqrt((x-x2)*(x-x2)+(y-y2)*(y-y2));

r3:=sqrt((x-x3)*(x-x3)+(y-y3)*(y-y3));

If (r1=0)or(r2=0)or(r3=0) then goto metka;

cosa1:=(x-x1)/r1; sina1:=(y-y1)/r1; cosa2:=(x-x2)/r2; sina2:=(y-y2)/r2;

cosa3:=(x-x3)/r3; sina3:=(y-y3)/r3;

Ex:=q1*cosa1/(r1*r1)+q2*cosa2/(r2*r2)+q3*cosa3/(r3*r3);

Ey:=q1*sina1/(r1*r1)+q2*sina2/(r2*r2)+q3*sina3/(r3*r3);

If Ex<>0 then a:=arctan(Ey/Ex) else a:=pi/2;

line(35*i-round(12*cos(a)),35*j-round(12*sin(a)),
35*i+round(12*cos(a)),35*j+round(12*sin(a)));

line(35*i-round(12*cos(a))+1,35*j-round(12*sin(a)),
35*i+round(12*cos(a))+1,35*j+round(12*sin(a)));

metka: end; Repeat until Keypressed; CloseGraph;

END.

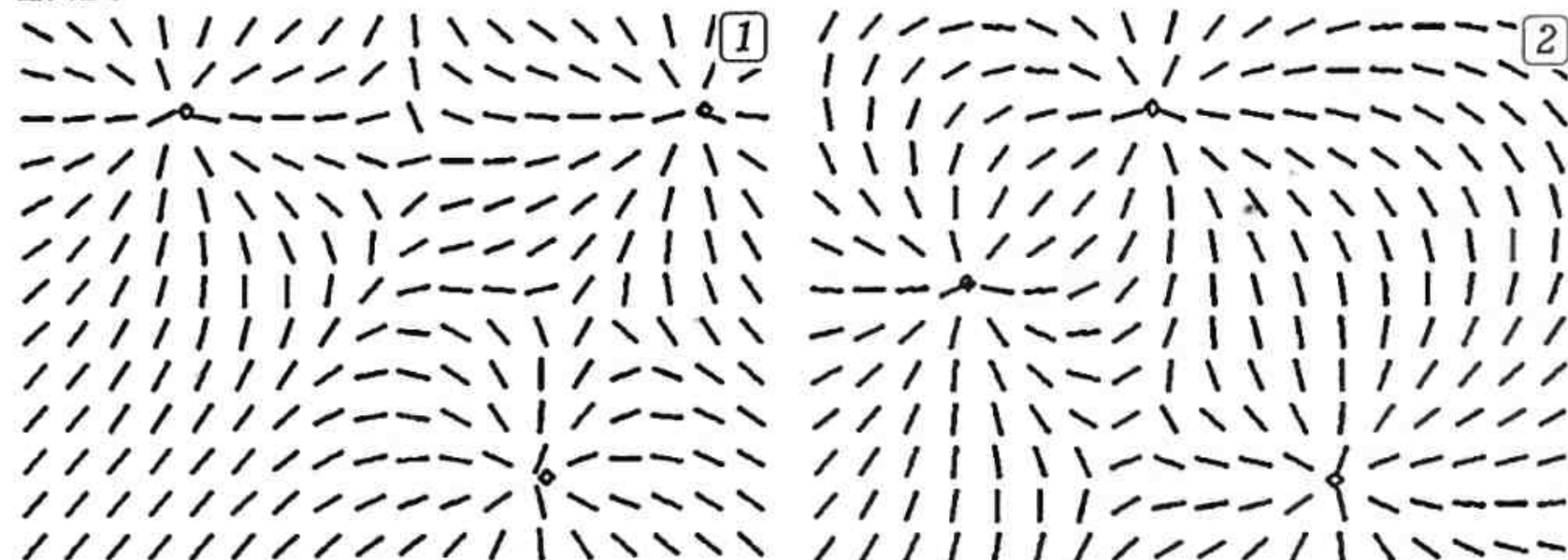


Рис. 11.3.

Задача 11.3. Рассчитайте силовые линии электростатического поля, созданного несколькими точечными зарядами в безграничной среде.

Задача решается методом градиентного спуска. Рассмотрим алгоритм построения одной силовой линии напряженности поля \vec{E} , проходящей через точку A с координатами (x_0, y_0) , имеющую низкий потенциал (программа ПР-

11.3). Так как $\vec{E} = -\text{grad}\varphi$, то вектор напряженности поля направлен в сторону наибыстрейшего убывания потенциала. В процедуре Raschet сначала вычисляется потенциал φ в точке A . В цикле по i , перебираются все точки B_i , равноудаленные от A на малое расстояние d . Они лежат на окружности с центром A и радиусом d и имеют координаты $(x_0 + d \cos(i\Delta\alpha), y_0 + d \sin(i\Delta\alpha))$, где $\Delta\alpha$ — шаг изменения угла. В том же цикле рассчитываются расстояния от B_i до точечных зарядов, вычисляются потенциалы φ_{1i} точек B_i и находятся разности $\varphi_{1i} - \varphi$. Это позволяет определить угол α_m , соответствующий наибыстрейшему возрастанию потенциала. На экране ставится точка B с координатами $(x_0 + d \cos \alpha_m, y_0 + d \sin \alpha_m)$, после чего все начинается снова: в цикле перебираются все точки C_i равноудаленные от B на расстояние d и т.д. Программа совершает заданное число шагов (около 500), после чего построение данной силовой линии прекращается. Основная часть программы содержит цикл по j , в нем задаются координаты точки A , расположенной вблизи отрицательного заряда, от которой начинает строиться новая силовая линия. Результаты расчетов показаны на рис. 11.4.

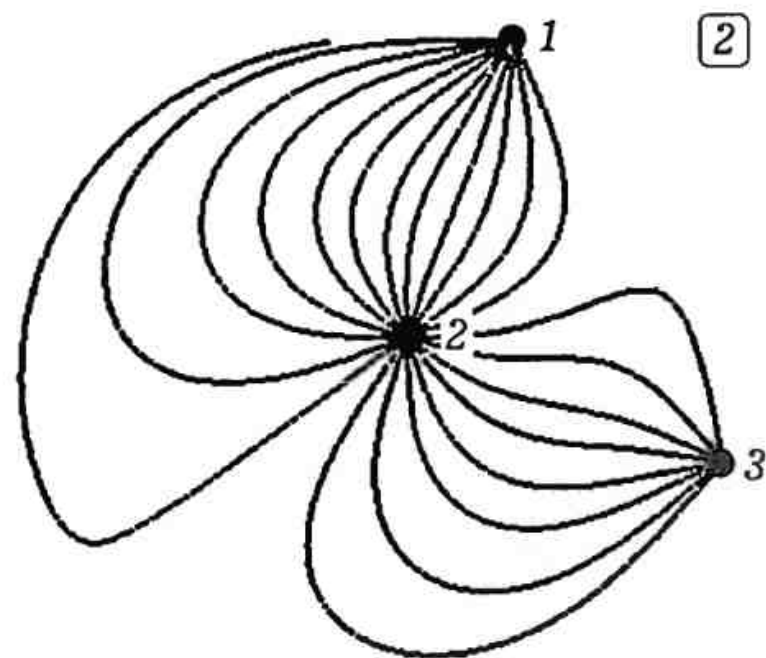
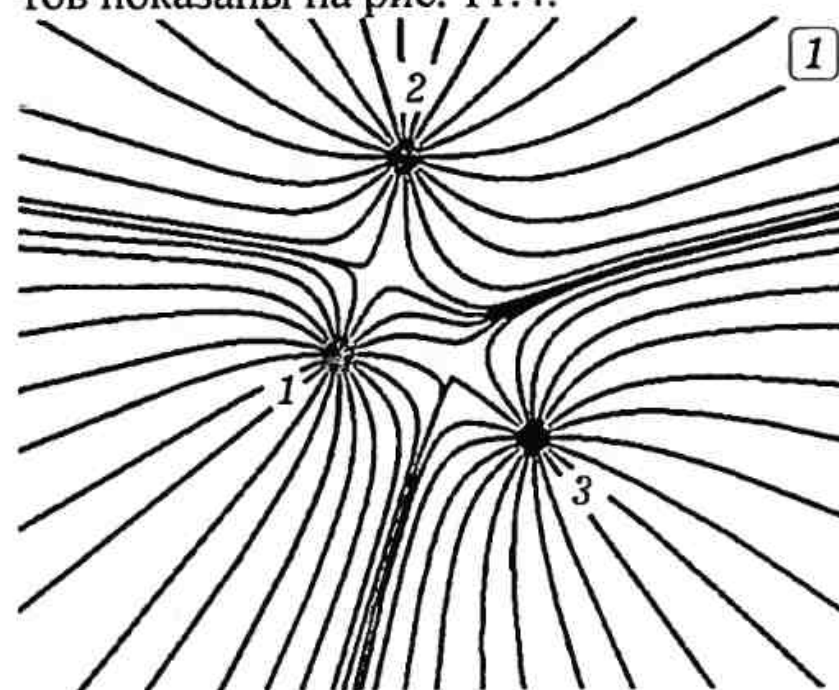


Рис. 11.4.

Пр-11.3.

```

Uses crt, graph;
Var EC,D,DrV,MV,i,j,q1,q2,q3,x1,y1,x2,y2,x3,y3,k : integer;
x0,y0,amax,max,fi1,fi,a,r1,r2,r3,x,y,pi: real; Label metka;
Procedure Raschet;
begin Repeat
r1:=sqrt((x-x1)*(x-x1)+(y-y1)*(y-y1)); r2:=sqrt((x-x2)*(x-x2)+(y-y2)*(y-y2));
r3:=sqrt((x-x3)*(x-x3)+(y-y3)*(y-y3)); fi:=(q1/r1)+(q2/r2)+(q3/r3);
max:=0; x0:=x; y0:=y;
For i:=1 to 90 do begin a:=2*pi*i/90;
x:=x0+cos(a); y:=y0+sin(a); r1:=sqrt((x-x1)*(x-x1)+(y-y1)*(y-y1));
r2:=sqrt((x-x2)*(x-x2)+(y-y2)*(y-y2)); r3:=sqrt((x-x3)*(x-x3)+(y-y3)*(y-y3));
fi1:=(q1/r1)+(q2/r2)+(q3/r3);
If fi1-fi>max then begin max:=fi1-fi; amax:=a; end;

```

```

end; k:=k+1; x:=x0+cos(amax); y:=y0+sin(amax);
circle(round(x),round(y),1); until k>500;
end;
BEGIN DrV:=Detect; InitGraph(DrV,MV,'c:\bp\bgi');
pi:=arctan(1)*4; x1:=250; y1:=240; q1:=-10;
x2:=300; y2:=100; q2:=20; x3:=400; y3:=300; q3:=10;
circle(x1,y1,2); circle(x2,y2,2); circle(x3,y3,2);
For j:=1 to 20 do begin
x:=250+1*cos(0.314*j); y:=240+1*sin(0.314*j); Raschet; k:=0;
end; Repeat until Keypressed; CloseGraph;
END.

```

12. РАСЧЕТ МАГНИТНОГО ПОЛЯ

Рассмотрим виток с током радиусом r , лежащий в плоскости xOy (рис. 12.1.1). Разобьем его на элементы $\Delta l_s = r \Delta \varphi_s$ и введем вектора $\Delta \vec{l}_s = \Delta l_s \sin \varphi_s \vec{i} - \Delta l_s \cos \varphi_s \vec{j}$, сонаправленные с током. Координаты вектора $\Delta \vec{l}_s$ (рис. 12.1.2) равны $(r \sin \varphi_s \Delta \varphi_s, -r \cos \varphi_s \Delta \varphi_s, 0)$. Расположение элемента витка $\Delta \vec{l}_s$ и точки A , в которой определяется индукция магнитного поля \vec{B} , задаются векторами $\vec{r}(r \cos \varphi_s, r \sin \varphi_s, 0)$ и $\vec{R}(R_x, R_y, R_z)$. По закону Био–Савара–Лапласа

$$\vec{B}(x, y, z) = \frac{\mu \mu_0}{4\pi} \sum_{s=1}^N \frac{I[\Delta \vec{l}_s, (\vec{r} - \vec{R})]}{|\vec{r} - \vec{R}|^3},$$

где μ_0 – магнитная постоянная, I – сила тока.

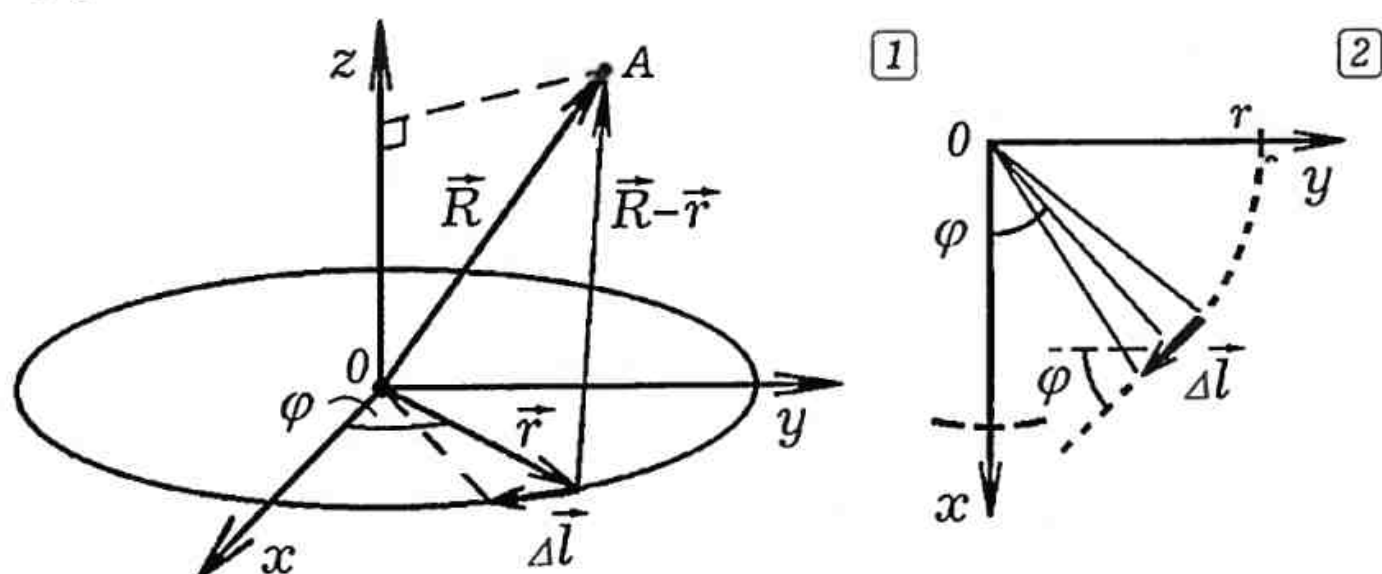


Рис. 12.1.

Задача 12.1. Имеется соленоид из 6 витков, расположенных параллельно плоскости xOy . Рассчитайте индукцию магнитного поля в плоскости yOz .

В представленной ниже программе Пр–12.1 перебираются узлы двумерной сетки и для каждого узла вычисляются проекции B_z и B_y :

$$B_z = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \sum_{s=1}^N \frac{(\Delta l_{sx}\Delta y_s - \Delta l_{sy}\Delta x_s)}{\Delta R_s^3}, \quad B_y = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \sum_{s=1}^N \frac{(\Delta l_{sz}\Delta x_s - \Delta l_{sx}\Delta z_s)}{\Delta R_s^3},$$

где $\Delta x_s = r \cos \varphi_s - R_x$, $\Delta y_s = r \sin \varphi_s - R_y$, $\Delta z_s = 0 - R_z$ — проекции вектора $\Delta \vec{R}_s = \vec{R} - \vec{r}_s$, длина которого равна $\Delta R_s = \sqrt{\Delta x_s^2 + \Delta y_s^2 + \Delta z_s^2}$, $\varphi_s = s\Delta\varphi$. Задача решается для каждого витка, результаты суммируются (рис. 12.2.1). На рис. 12.2.2 показан результат вычислений для случая, когда соленоид из 6 витков расположен соосно с одиночным витком с током (программа Пр-12.1).

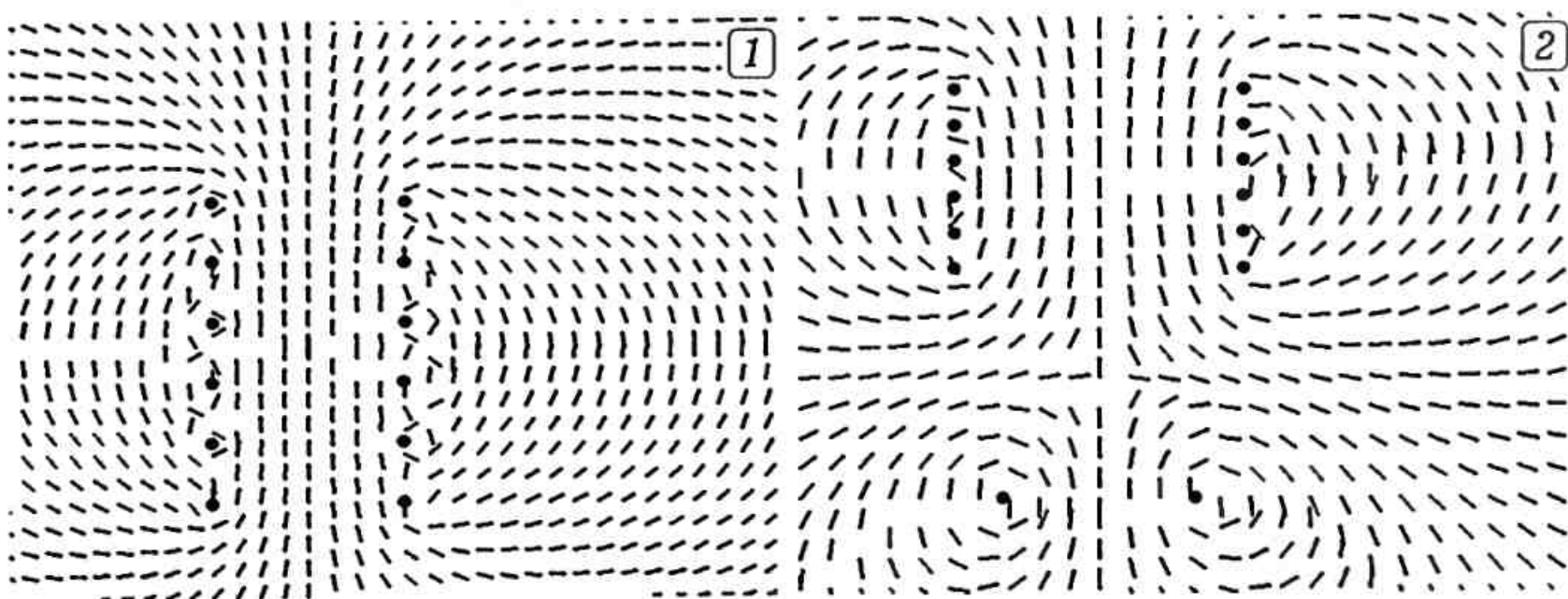


Рис. 12.2.

Пр-12.1.

```

Uses crt, graph;
Const N=100; pi=3.1415; r=80;
Var S,k, ii,jj,i,j,DV, MV : integer; Rx,Ry,Rz: integer;
Bx,By,Bz,dfi,deltax,deltay,deltaz,deltaR,dlx,dly,dlz, alpha: real;
BEGIN DV:=Detect; InitGraph(DV,MV,'c:\bp\bgi');
  For ii:=-25 to 25 do For jj:=-10 to 30 do begin
    Rx:=0; Ry:=20*ii; Rz:=20*jj; Bz:=0; By:=0;
    For k:=0 to 5 do For i:=1 to N do begin
      dfi:=2*pi/N; dlx:=r*sin(dfi*i)*dfi; dly:=-r*cos(dfi*i)*dfi;
      deltax:=r*cos(dfi*i)-Rx; deltay:=r*sin(dfi*i)-Ry; deltaz:=50*k-Rz;
      deltaR:=sqrt(deltax*deltax+deltay*deltay+deltaz*deltaz);
      Bz:=(dlx*deltay-dly*deltax)/(deltaR*deltaR*deltaR)+Bz;
      By:=(dlz*deltax-dlx*deltaz)/(deltaR*deltaR*deltaR)+By;
      If By<>0 then alpha:=arctan(Bz/By); end;
      line(250+Ry,400-Rz,250+round(Ry+12*cos(alpha)),
          400-round(Rz+12*sin(alpha))); end;
    For k:=0 to 5 do begin
      circle(250+r,400-50*k,3); circle(250-r,400-50*k,3); end;
  Repeat until KeyPressed; CloseGraph;
END.

```

13. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ОПТИКИ

Основная задача геометрической оптики состоит в расчете хода лучей в различных оптических средах с заданным показателем преломления $n(x, y, z)$. При наличии прозрачных тел с сильно отличающимися показателями преломления, эта задача может быть решена путем использования законов отражения и преломления, согласно которым: 1) угол падения равен углу отражения; 2) отношение синусов углов падения и преломления равно отношению показателей преломления сред; 3) падающий, отраженный и преломленный лучи лежат в одной плоскости, перпендикулярной границе раздела двух сред и проходящей через точку падения. Компьютер позволяет без труда рассчитать углы преломления и отражения, вычислить угол отклонения луча, построить ход лучей в призме, линзе и т.д. В качестве примера рассмотрим задачу на расчет хода лучей в капле воды.

Задача 13.1. На шарообразную каплю воды падает параллельный световой пучок. Изучите зависимость угла φ отклонения световых лучей от прицельного параметра ρ . Объясните возникновение радуги.

Пусть луч света падает на шарообразную каплю (рис. 13.1.1), преломляется в точке A , входит внутрь капли, отражается в точке B , и выходит из капли, преломляясь в точке C . При этом угол $AO'C$ составляет $\varphi = 4\beta - 2\alpha$. В самом деле, в точках A и C луч дважды поворачивается на $(\alpha - \beta)$, а в точке B — на угол $(\pi - 2\beta)$ по часовой стрелке. Общий угол поворота составляет $(\pi - \varphi)$. Углы α и β равны:

$$\alpha = \arctg\left(\frac{\rho}{\sqrt{R^2 - \rho^2}}\right), \quad \beta = \arcsin\left(\frac{\sin \alpha}{n}\right).$$

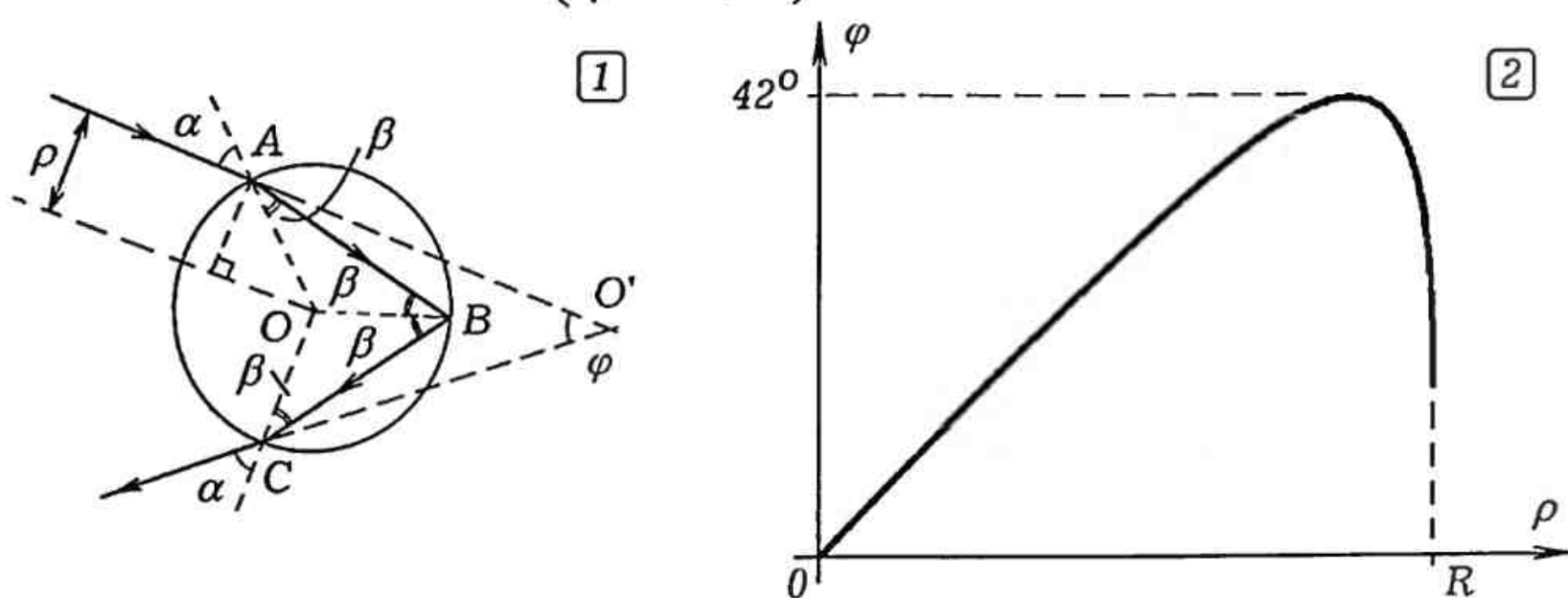


Рис. 13.1.

Чтобы на компьютере построить график зависимости $\varphi = \varphi(\rho)$, необходимо организовать цикл, в котором с заданным шагом изменяется прицельный параметр ρ , вычисляются углы α , β , φ и ставится точка в системе координат φ и ρ . Запишем основные расчетные формулы:

$$\alpha = \arctg\left(\frac{\rho}{\sqrt{R^2 - \rho^2}}\right), \quad \sin \beta = \frac{\sin \alpha}{n}, \quad \cos \beta = \sqrt{1 - \sin^2 \beta},$$

$$\beta = \arctg\left(\frac{\sin \beta}{\cos \beta}\right) = \arctg\left(\frac{\sin \beta}{\sqrt{1 - \sin^2 \beta}}\right), \quad \varphi = 4\beta - 2\alpha.$$

Для решения задачи используется программа Пр-13.1. Получающийся график представлен на рис. 13.1.2. Видно, что при некотором прицельном параметре угол отклонения лучей достигает экстремального (максимального) значения $\approx 42^\circ$. Это означает, что именно под этим углом и будут выходить большинство преломленных лучей, которые окажутся параллельными друг другу. Представим себе большое количество капель, на которые падает параллельный пучок монохроматического света с длиной волны λ . Если встать спиной к источнику света, то можно увидеть светлое кольцо с угловым размером $\approx 42^\circ$. В случае, когда источник испускает белый свет, в котором представлены все цвета от красного до фиолетового, из-за дисперсии наблюдается кольцо окрашенное в "цвета радуги".

SCREEN 12

'QBasic

Пр-13.1.

n = 1.33: R = 100000

LINE (0, 440)-(640, 440)

FOR rho = 1 TO 99999 STEP 1

a = ATN(rho / SQR(R * R - rho * rho))

sinb = SIN(a) / n: cosb = SQR(1 - sinb * sinb)

b = ATN(sinb / cosb): fi = -2 * a + 4 * b

'PRINT rho, fi * 180 / 3.1415926#, fi

CIRCLE (10 + INT(rho / 200), 440 - INT(fi * 500)), 2

NEXT: END

Задача 13.2. Изучите зависимость максимального угла отклонения света шарообразной каплей жидкости от показателя преломления жидкости для данной длины волны. Какая часть радуги красная: внешняя или внутренняя?

Для электромагнитных волн оптического диапазона вода представляет собой среду с нормальной дисперсией, то есть показатель преломления для фиолетовой части спектра больше, для красной. Будем с шагом 0,1 изменять показатель преломления в интервале от 1,30 до 1,41 и вычислять угол максимального отклонения при преломлении света на шарообразной капле при различных прицельных параметрах ρ . Для этого организуем цикл, в котором ρ с некоторым шагом увеличивается от 0 до R и каждый раз вычисляется угол отклонения φ . Цикл должен содержать условный оператор, проверяющий неравенство $\varphi > \text{max}$, где max — некоторая переменная, которой вначале было присвоено значение 0. Если условие выполняется, то переменной max присваивается данное значение φ , в противном случае значение max остается не-

изменным. По окончании цикла максимальное значение φ выводится на экран.

Все это можно поместить внутрь цикла по n (программа Пр-13.2).

SCREEN 12: R = 100

'Qbasic

Пр-13.2.

LINE (0, 440)-(640, 440)

FOR n = 1.2 TO 1.6 STEP .01

FOR rho = 50 TO 99 STEP 1

a = ATN(rho / SQR(R * R - rho * rho))

sinb = SIN(a) / n: cosb = SQR(1 - sinb * sinb)

b = ATN(sinb / cosb): fi = -2 * a + 4 * b

IF fi > max THEN max = fi

NEXT: CIRCLE (10 + INT((n - 1.1) * 1000), 440 - INT(max * 250)), 2

'PRINT n, max * 180 / 3.1415926#:

max = 0

NEXT: END

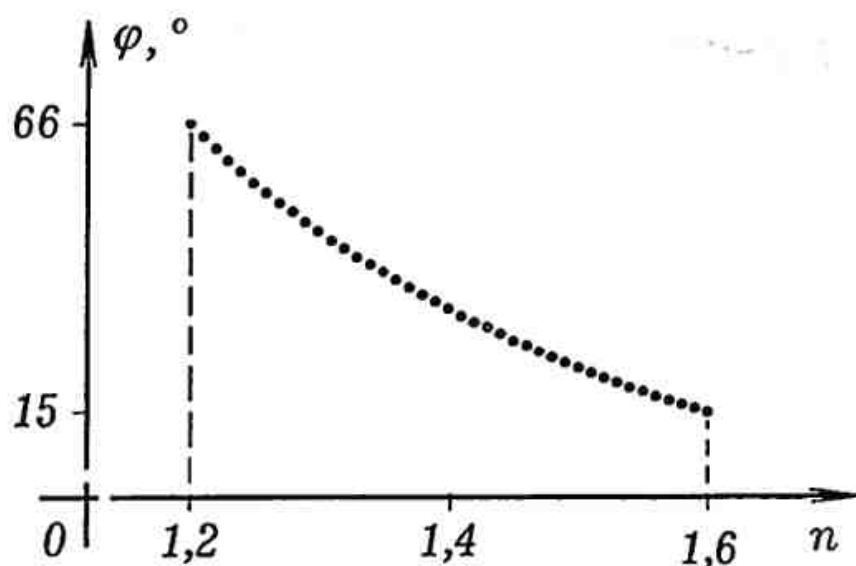


Таблица 1

n	φ	n	φ
1,30	47,1	1,36	38,3
1,31	45,5	1,37	37,0
1,32	44,0	1,38	35,7
1,33	42,5	1,39	34,5
1,34	41,1	1,40	33,2
1,35	39,7	1,41	32,1

Рис. 13.2.

Получающаяся зависимость максимального угла отклонения светового луча от показателя преломления показана на рис. 13.2 и в таблице 1. Видно, что по мере увеличения показателя преломления максимальный угол отклонения уменьшается. Следовательно, “красным” лучам, для которых показатель преломления воды меньше, соответствует больший угол φ . Угловой размер красной части радуги будет больше, чем синей, красная часть радуги внешняя.

Рассмотрим распространение светового луча в плоско-слоистой среде, у которой показатель преломления зависит от одной координаты y : $n = n(y)$ (рис. 13.3.1). Разрежем среду горизонтальными плоскостями $y_i = i\Delta y$, где $i = 0, 1, 2, \dots$, а шаг Δy настолько мал, что внутри каждого слоя оптическая плотность среды постоянна и свет распространяется прямолинейно. Запишем закон преломления для точки $A_i(x_i, y_i)$:

$$\frac{\sin \alpha_i}{\sin \alpha_{i+1}} = \frac{n_{i+1}}{n_i}, \quad n_i \sin \alpha_i = n_{i+1} \sin \alpha_{i+1} = \text{const}.$$

Задача 13.3. Рассчитайте траекторию луча, распространяющегося в среде с показателем преломления $n(y) = k\sqrt{y}$. Луч выходит из точки с координатами $A_0(x_0, y_0)$ и составляет угол α_0 с осью Oy .

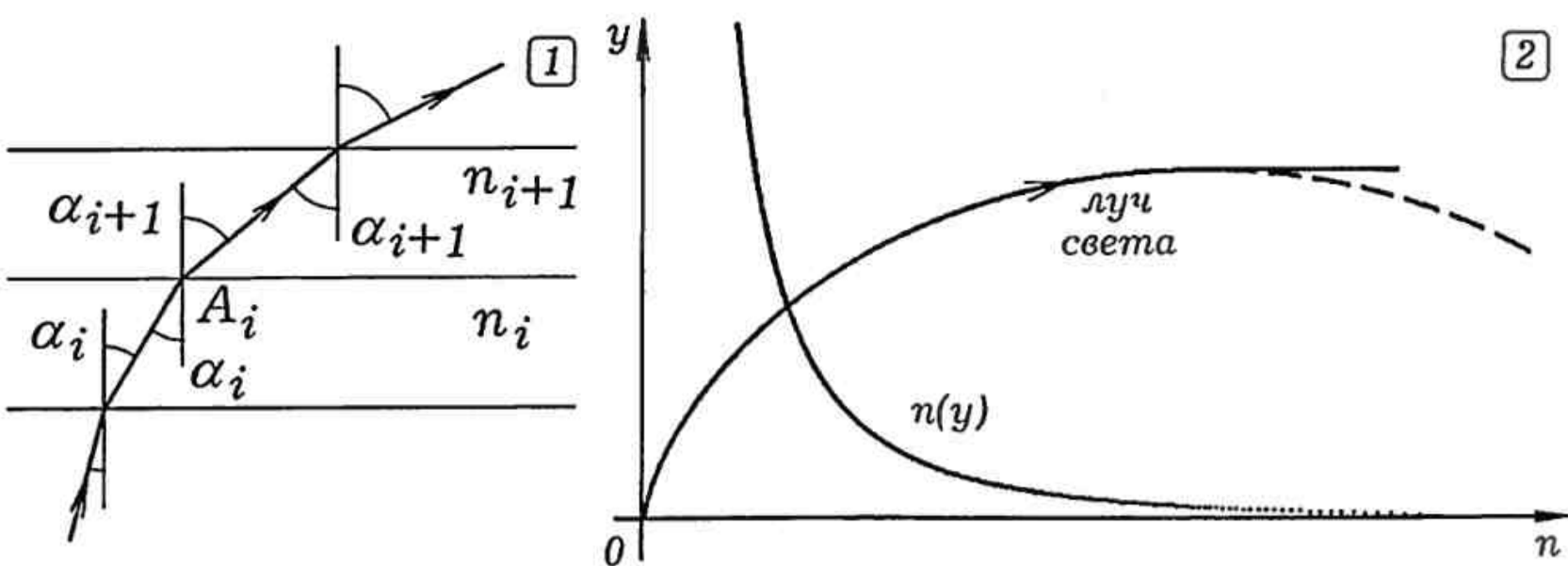


Рис. 13.3.

Среда, показатель преломления которой зависит от одной координаты y , является плоско-неоднородной. Она может быть разрезана горизонтальными плоскостями $y = y_i$ на столь тонкие слои, что можно считать, что внутри каждого слоя свет распространяется прямолинейно. Из закона преломления света следует, что $n(y_i) \sin \alpha_i = n(y_{i+1}) \sin \alpha_{i+1} = \text{const}$, поэтому, зная координату y_i и угол α_i , можно вычислить α_{i+1} по следующим формулам:

$$\sin \alpha_{i+1} = \frac{n(y_i)}{n(y_{i+1})} \sin \alpha_i, \quad \cos \alpha_{i+1} = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha_{i+1}},$$

$$\alpha_{i+1} = \arctg \frac{\sin \alpha_{i+1}}{\cos \alpha_{i+1}} = \arctg \frac{\sin \alpha_{i+1}}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha_{i+1}}}.$$

После этого следует построить точку $A_{i+1}(x_{i+1}, y_{i+1})$ с координатами: $x_{i+1} = x_i + l \sin \alpha_{i+1}$, $y_{i+1} = y_i + l \cos \alpha_{i+1}$ отстоящую от $A_i(x_i, y_i)$ на шаг l , а затем повторить все снова.

Программа Пр-13.3, строящая луч света в плоско-слоистой среде, содержит цикл, в котором пересчитываются углы α_i и координаты x_i и y_i . Результат ее использования показан на рис. 13.3.2. и 13.4.1. Недостаток этого алгоритма в том, что при $\alpha_i = \pi/2$ программа выдает $\alpha_{i+1} = \pi/2$ (рис. 13.3.2). То есть получается, что луч, направленный параллельно оси Ox , должен распространяться прямолинейно, а на самом деле он искривляется в сторону увеличения показателя преломления.

Пр-13.3.

```
Uses crt, graph;
Var i, EC, D, DrV, MV : integer; s, sina, cosa, tga, n, n1, n2, l, a, x, y : real;
Function PPrel(y:real): real;
begin PPrel := 1/sqrt(0.1 * y + 0.01); end;
BEGIN DrV:=Detect; InitGraph(DrV, MV, 'c:\bp\bgi');
EC:=GraphResult; If EC<>grOK then Halt(1);
For i:=0 to 2000 do begin
circle(10 + round(500 * PPrel(i/4)), 400 - round(i/4), 1);
end; sina:=0.1; y:=1; x:=1; l:=0.1; n2:= PPrel(5*y);
For i:=1 to 15000 do begin n1:=PPrel(y); sina:=(n2 / n1) * sina;
```

```

If sina<1 then a := arctan(sina/sqrt(1 - sina * sina)) else a:=3.1415926/2;
If sina<1 then cosa:= sqrt(1 - sina * sina);
If sina>= 1 then begin sina:=sin(a); cosa:=cos(a); end;
n2:=PPrel(y); x := x + l * sina; y := y + l * cosa;
circle(10 + round(0.5 * x), 400 - round(0.5 * y), 1);
end; Repeat until Keypressed; CloseGraph;
END.

```

Рассмотренные выше методы не позволяют рассчитать ход луча в неоднородной среде. Представим себе оптическую среду, показатель преломления которой сложным образом зависит от двух или трех координат. Эта зависимость может быть плавной, например, как в случае с неоднородно нагретым воздухом или жидкостью, в которой происходит растворение соли. С другой стороны, среда может содержать резко выраженные неоднородности, ограниченные плоскими или изогнутыми поверхностями, на которых будут происходить отражение и преломление света.

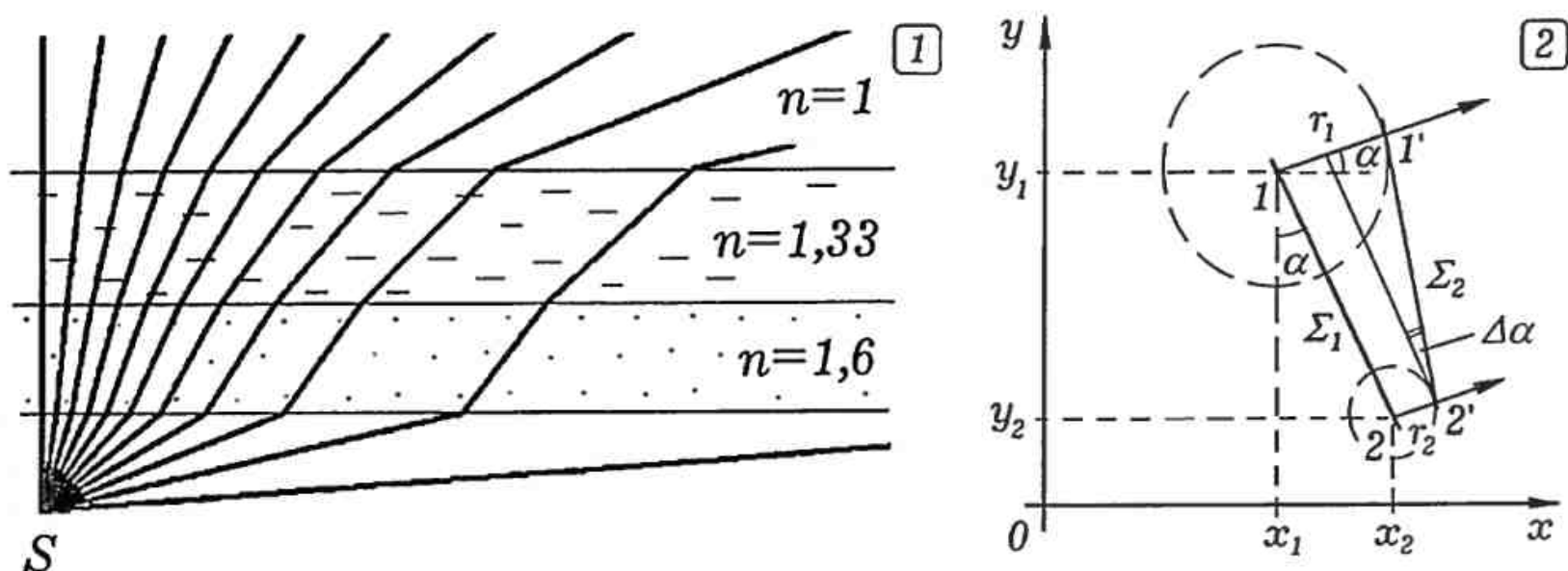
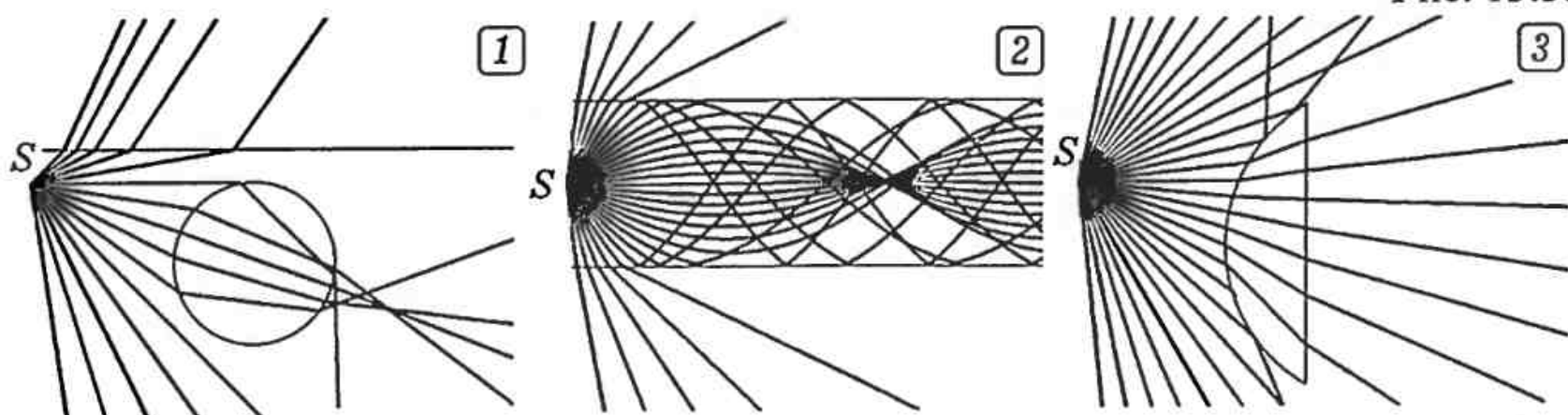


Рис. 13.4.

Универсальный метод расчета распространения волны состоит в последовательном определении положения волновой поверхности в моменты времени $\tau_i = i\Delta\tau$, $i = 0, 1, 2, \dots$ на основе принципа Гюйгенса-Френеля. Пусть известны точка, из которой выходит луч, и его направление. Заменим луч тонким пучком и определим координаты двух точек волновой поверхности. Зная показатель преломления в этих точках среды, можно определить положение волновой поверхности через промежуток $\Delta\tau$ и рассчитать новое направление луча. Затем следует сделать небольшой шаг в этом направлении и повторить все снова.

Рис. 13.5.



Задача 13.4. Оптическая среда содержит области, в которых показатель преломления изменяется плавно (световод) и резко (линза, призма). Напишите программу, вычисляющую ход произвольного луча света, проходящего через эту среду.

Рассмотрим распространение волны в двумерной среде с показателем преломления $n = n(x, y)$. Пусть в момент τ_1 луч проходит через точку 1 с координатами (x_{1i}, y_{1i}) и образует угол α_i с осью Ox (рис. 13.4.2). Найдем координаты (x_{2i}, y_{2i}) точки 2 волновой поверхности, отстоящей от точки 1 на малом расстоянии a : $x_{2i} = x_{1i} + a \sin \alpha_i$, $y_{2i} = y_{1i} - a \cos \alpha_i$. Вычислим радиусы вторичных волн $r_{1i} = cd\tau / n(x_{1i}, y_{1i})$, $r_{2i} = cd\tau / n(x_{2i}, y_{2i})$ и определим приращение угла α_i : $\Delta\alpha = \arctg((r_{2i} - r_{1i})/a)$. Это позволяет рассчитать величину угла $\alpha_{i+1} = \alpha_i + \Delta\alpha$ и найти положение точки 1' в следующий момент $\tau_2 = \tau_1 + \Delta\tau$ по формулам $x_{1,i+1} = x_{1i} + r_{1i} \cos \alpha_{i+1}$, $y_{1,i+1} = y_{1i} + r_{1i} \sin \alpha_{i+1}$, а затем определить координату точки 2':

$$x_{2,i+1} = x_{1,i+1} + a \sin \alpha_{i+1}, \quad y_{2,i+1} = y_{1,i+1} - a \cos \alpha_{i+1}.$$

После этого все повторяется снова.

На рис. 13.5 представлены результаты расчета распространения световых лучей в следующих ситуациях: 1) при наличии плоской и цилиндрической преломляющей поверхности (рис. 13.5.1); 2) в световоде с плавно изменяющимся показателем преломления (рис. 13.5.2); 3) при наличии цилиндрической плосковыпуклой линзы, показатель преломления которой меньше показателя преломления среды (рис. 13.5.3). Используется программа Пр-13.4.

Uses crt, graph;

Пр-13.4.

Const dt=0.01;

Var i, EC, D, DrV, MV : integer;

da, r1, r2, x1, x2, y1, y2, aa, pi, s, sina, cosa, alpha, c, n, n1, n2, l, a, x, y : real;

Function PPrel(x, y: real): real;

begin PPrel:=1; if ((x-150)*(x-150)+(y-50)*(y-50)<50*50) then PPrel:=1.7;

If y>120 then PPrel:=1.7; end;

BEGIN DrV:=Detect; InitGraph(DrV, MV, 'c:\bp\bgi');

EC:=GraphResult; If EC<>grOK then Halt(1);

pi:=arctan(1)*4; circle(310, 300, 100); circle(310, 300, 101);

For i:=1 to 15 do begin a:=-pi/2+i*pi/20;

x1:=10; y1:=100; x2:=x1+1*sin(a); y2:=y1-1*cos(a); c:=4;

Repeat If y1<>y2 then a:=arctan((x1-x2)/(y2-y1)) else a:=pi/2;

r1:=c*dt/PPrel(x1, y1); r2:=c*dt/PPrel(x2, y2); da:=arctan((r2-r1)/1); a:=a+da;

x1:=x1+r1*cos(a); y1:=y1+r1*sin(a); {x2:=x2+r2*cos(a); y2:=y2+r2*sin(a);}

x2:=x1+1*sin(a); y2:=y1-1*cos(a);

circle(10 + round(2*x1), 400 - round(2*y1), 1);

until (abs(x1)>320) or (abs(y1)>200) or (KeyPressed);

end; readkey; CloseGraph;

END.

14. МОДЕЛИРОВАНИЕ ЯВЛЕНИЙ ВОЛНОВОЙ ФИЗИКИ

К основным явлениям волновой физики относятся интерференция и дифракция. Рассмотрим наложение двух гармонических волн одинаковой частоты. Интенсивность волны в точке наблюдения зависит от разности хода Δx накладываются волн: $I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos(k\Delta x - \alpha)$. Происходит интерференция, — возникновение постоянного по времени перераспределения энергии в пространстве, при котором интенсивность I в точке наблюдения не равна сумме интенсивностей I_1 и I_2 . В некоторых точках — максимум, в других минимум, а в остальных — промежуточное значение интенсивности.

Задача 14.1. Два когерентных источника S_1 и S_2 колеблются с некоторым сдвигом фаз α . Рассчитайте смещение точек среды, лежащих на одной плоскости с источниками в некоторый момент времени τ .

Выберем систему координат так, что координаты источников (x_1, y_1) и (x_2, y_2) , причем $y = y_1 = y_2$. Тогда до произвольной точки $A(x, y)$ волны от источников проходят расстояния $l_1 = \sqrt{(x-d)^2 + y^2}$, $l_2 = \sqrt{(x+d)^2 + y^2}$. Результирующее смещение в момент $\tau = T$ находится по формуле:

$$\xi(x, y) = A_1 \sin(-kl_1 + \alpha) + A_2 \sin(-kl_2),$$

где $A_1 = A/l_1$, $A_2 = A/l_2$ — амплитуды колебаний в точке наблюдения, которые уменьшаются обратно пропорционально l (рис. 14.1).

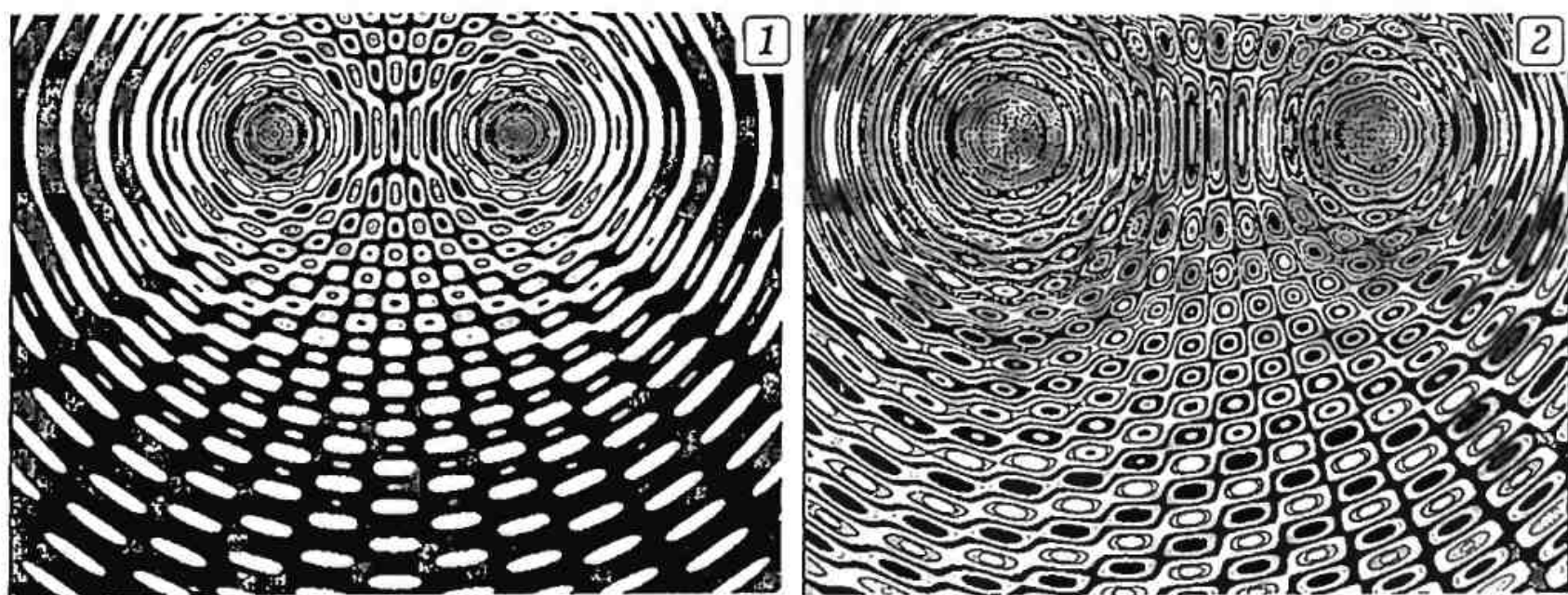


Рис. 14.1.

Задача 14.2. Рассчитайте интерференционную картину от двух источников, удаленных друг от друга на расстоянии $2d$, в плоскости, содержащей источники. Интенсивности волн равны I , длина волны λ .

Для произвольной точки наблюдения $A(x, y)$ разность хода волн равна $\Delta l = l_1 - l_2$, где $l_i = \sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2}$, $i = 1, 2$ (рис. 14.2.1). Интенсивность в точке наблюдения $I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos(2\pi\Delta l / \lambda)$, где $I_1 = b/l_1^2$, $I_2 = b/l_2^2$ — интенсивности обеих волн. Результат моделирования представлен на рис.

14.2.2. Видно, что при большой длине волны λ получаются максимумы -1, 0, 1 порядков, а при небольшой λ — максимумы -2, -1, 0, 1, 2 порядков.

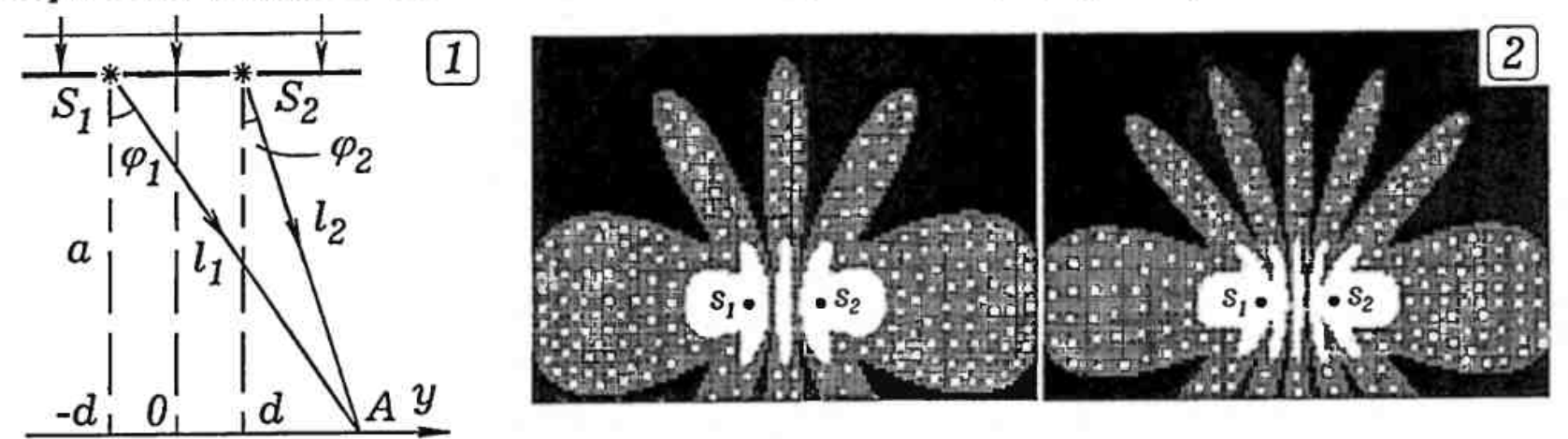


Рис.14.2.

Задача 14.3. Рассчитайте интерференционную картину, создаваемую двойной щелью, на экране, находящемся на расстоянии a .

Пусть на двойную щель нормально падает волна (рис. 14.2.1). В каждой щели — источники вторичных волн S_1 и S_2 . Вторичные волны проходят расстояние $l_1 = \sqrt{a^2 + (y - d)^2}$, $l_2 = \sqrt{a^2 + (y + d)^2}$, при этом возникает разность фаз $\Delta\alpha = 2\pi |l_2 - l_1| / \lambda$. Учтем, что интенсивность сферической волны обратно пропорциональна квадрату расстояния до источника. Результирующая интенсивность в точке наблюдения $A(y)$ (рис. 14.3):

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos(\Delta\alpha).$$



Рис. 14.3.

Дифракция Фраунгофера наблюдается в параллельных пучках, которые собираются линзой и создают дифракционную картину в ее фокальной плоскости. Рассмотрим дифракцию на щели. Пусть нормально к щели падает плоская волна. Мысленно разрежем площадь щели на N элементарных полосок шириной dx , каждая из которых сама является источником S_i элементарной волны.

Результат сложения всех волн в точке наблюдения можно представить с помощью векторной диаграммы, которую удобно построить на комплексной плоскости (рис. 14.4.1). От точки O отложим вектор \vec{a}_1 , длина которого пропорциональна амплитуде, а угол α_1 , образованный с осью действительных чисел, равен фазе колебаний, создаваемых в точке наблюдения источником S_1 . От конца вектора \vec{a}_1 отложим вектор \vec{a}_2 , соответствующий колебаниям, создаваемым в точке наблюдения источником S_2 и т.д. В соответствии с принципом суперпозиции, результирующая амплитуда $\vec{A} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \dots + \vec{a}_N$. Ей соответ-

вует комплекс амплитуды $\dot{A} = \dot{a}_1 + \dot{a}_2 + \dots + \dot{a}_N$, ее действительная и мнимая части равны:

$$A_{RE} = a_1 \cos \alpha_1 + a_2 \cos \alpha_2 + \dots + a_N \cos \alpha_N,$$

$$A_{IM} = a_1 \sin \alpha_1 + a_2 \sin \alpha_2 + \dots + a_N \sin \alpha_N.$$

Амплитуда результирующих колебаний в точке наблюдения равна

$$A = \sqrt{A_{RE}^2 + A_{IM}^2}, \text{ интенсивность пропорциональна } A^2 = A_{RE}^2 + A_{IM}^2.$$

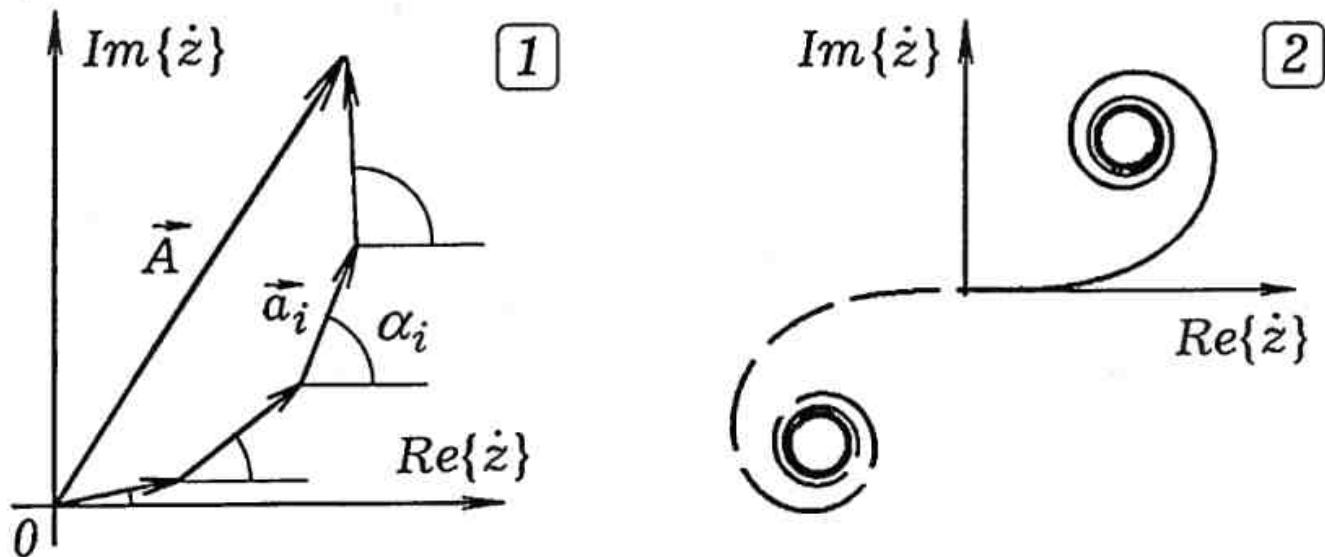


Рис. 14.4.

Задача 14.4. Плоская волна нормально падает на прямой край экрана. Постройте спираль Корню для точки M с заданной координатой y (рис. 14.5.1).

Разобьем волновую поверхность на элементарные полосы, каждая из которых может рассматриваться как источник вторичных волн. Определим амплитуду a_i и фазу α_i колебаний, создаваемых каждой вторичной волной в точке наблюдения M , и на комплексной плоскости последовательно отложим вектора соответствующей длины a_i , составляющие углы α_i с осью действительных чисел. Следует учесть, что вследствие сферичности вторичных волн, амплитуда колебаний в M обратно пропорциональна длине пути l . Кроме того, в направлении, образующем с направлением распространения волны угол φ , амплитуда меньше в $1/\cos \varphi$ раз. Действительная и мнимая части каждой комплексной амплитуды $\dot{a} = a_{RE} + ja_{IM}$ рассчитываются по формуле:

$$a_{RE} = (Ad/l^2) \cos 2\pi(l/\lambda), \quad a_{IM} = (Ad/l^2) \sin 2\pi(l/\lambda), \quad l = \sqrt{d^2 + (x-y)^2}.$$

В этих формулах учитывается фаза волны $2\pi(l/\lambda)$, обусловленная тем, что волна прошла расстояние l , а также уменьшение амплитуды вследствие сферичности вторичной волны и за счет того, что волна распространяется под углом φ (амплитуда умножается на $\cos \varphi = d/l$). Программа, рисующая спираль Корню, содержит цикл, в котором перебираются вторичные источники (элементарные полосы) и на комплексной плоскости последовательно откладываются вектора \vec{a}_i . Результат моделирования приведен на рис. 14.4.2.

Задача 14.5. Рассчитайте дифракционную картину, получающуюся в результате дифракции Френеля на краю пластины. Расстояние от пластины до экрана равно d .

Пусть плоская волна нормально падает на экран с прямым краем. Разобьем волновую поверхность на элементарные полоски шириной dx , параллельные краю экрана. Будем считать, что каждая полоска — элементарный источник волны. Воспользуемся методом комплексных амплитуд: будем последовательно откладывать от точки O вектора \vec{a}_i , соответствующие колебаниям, создаваемым в точке наблюдения каждой полоской по отдельности. Фаза этих колебаний зависит от длины пути $l = \sqrt{d^2 + (y-x)^2}$ и равна $\varphi = 2\pi(l/\lambda)$. Длина каждого вектора \vec{a}_i пропорциональна $\cos \varphi = d/l$ и обратно пропорциональна длине пути l . Колебаниям от i -ого элементарного источника соответствует комплексное число

$$\dot{a}_i = (\cos 2\pi(l_i/\lambda) + j \sin 2\pi(l_i/\lambda)) \cos \varphi_i / l_i.$$

Результирующие колебания в точке наблюдения соответствуют вектору на комплексной плоскости:

$$\dot{A} = \sum_{i=1}^N (\cos 2\pi(l_i/\lambda) + j \sin 2\pi(l_i/\lambda)) \cos \varphi_i / l_i = A_{RE} + jA_{IM}.$$

Модуль амплитуды равен $A = \sqrt{A_{RE}^2 + A_{IM}^2}$, а интенсивность — квадрату модуля амплитуды. Программа Пр-14.1, рассчитывающая дифракционную картину, должна содержать цикл, в котором перебираются точки экрана с различными координатами y , для каждой отдельно суммируются действительная и мнимая части чисел \dot{a}_i , после чего определяется модуль амплитуды A и интенсивность. Результаты моделирования представлены на рис. 14.5.2.

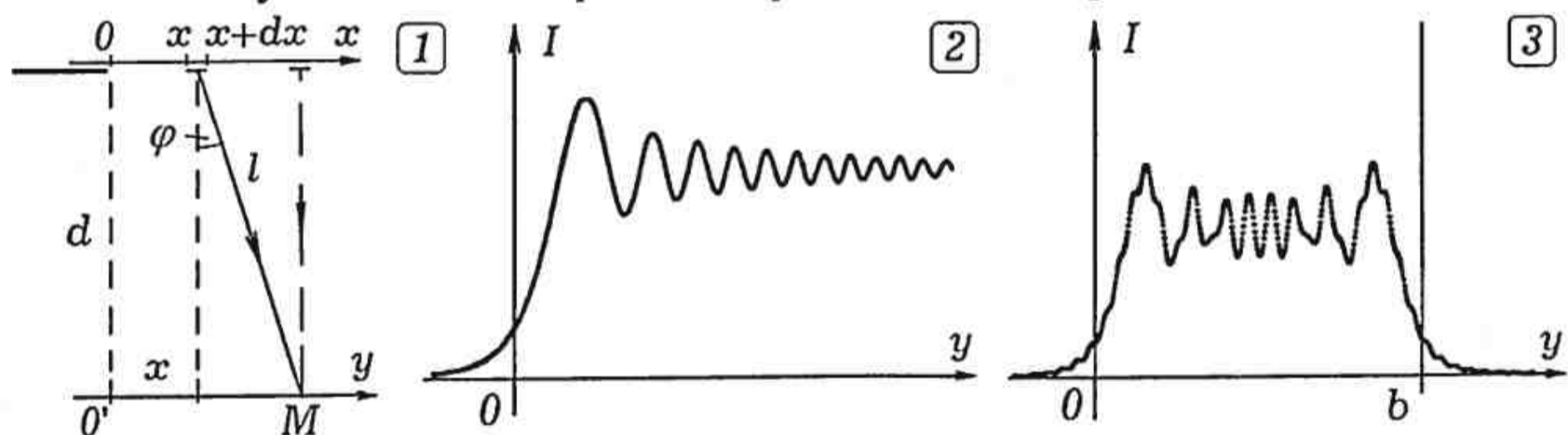


Рис. 14.5.
Пр-14.1.

```
Uses crt, graph; Const n=100; m=50; h=1;
Var i,ii,j,jj,k,DV, MV, EC : integer;
    Re,Im,y,d,l,dx,x,fi,S,pi,lambda : real;
BEGIN DV:=Detect; InitGraph(DV,MV,'c:\bp\bgi');
    a:=5; dx:=0.002; fi:=0; pi:=3.1415; lambda:=0.2;
    y:=-1; line(100,0,100,480);
    Repeat Re:=0; Im:=0; For i:=1 to 10000 do
    begin x:=dx*i; l:=sqrt(d*d+(x-y)*(x-y));
    Re:=Re+cos(2*pi*l / lambda)*d/(l*l);
    Im:=Im+sin(2*pi*l / lambda)*d/(l*l);
    end; S:=Re*Re+Im*Im; y:=y+0.02;
```

```
circle(round((1+y)*100),430-round(S*0.025),1);
```

```
until Keypressed; readkey; CloseGraph;
```

```
END.
```

Задача 14.6. Рассчитайте дифракционную картину, получающуюся в результате дифракции Френеля на щели шириной b , если длина волны равна λ . Волна падает нормально на щель, расстояние от щели до экрана равно l .

При суммировании колебаний в точках наблюдения следует учитывать волновую поверхность, проходящую через щель. Волна 2 отстает по фазе от волны 1 на величину $2\pi x \sin \varphi / \lambda$ (рис. 14.6.1). Используется программа Пр-14.2, результат — на рис. 14.6.2.

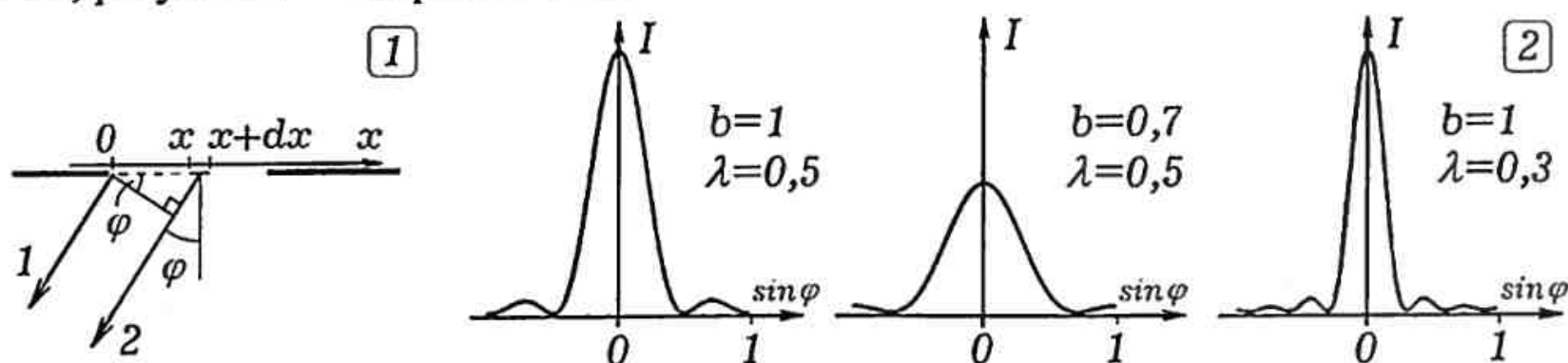


Рис. 14.6.

Пр-14.2.

```
Uses crt, graph; Var i,ii,j,jj,k,DV,MV : integer;
```

```
Im,Re,b,dx,x,fi,S,pi,lambd : real;
```

```
BEGIN DV:=Detect; InitGraph(DV,MV,'c:\bp\bgi');
```

```
b:=0.7; dx:=b/1000; fi:=0; pi:=3.1415; lambd:=0.2;
```

```
Repeat Re:=0; Im:=0;
```

```
For i:=1 to 1000 do begin x:=dx*i;
```

```
Re:=Re+cos(2*pi*x*sin(fi)/lambd)*dx;
```

```
Im:=Im+sin(2*pi*x*sin(fi)/lambd)*dx; end;
```

```
S:=Re*Re+Im*Im; fi:=fi+0.001;
```

```
circle(round(320+sin(fi)*200),450-round(S*400),1);
```

```
circle(round(320-sin(fi)*200),450-round(S*400),1);
```

```
until fi>pi/2; Repeat until Keypressed; CloseGraph;
```

```
END.
```

Задача 14.7. Плоская волна нормально падает на дифракционную решетку. Считая, что щели дифракционной решетки бесконечно узкие, рассчитайте дифракционную картину, получающуюся на бесконечности, постройте график зависимости интенсивности от синуса угла φ отклонения.

Заменим дифракционную решетку системой параллельных светящихся нитей, лежащих в одной плоскости и отстоящих друг от друга на расстоянии d . Все источники излучают когерентные волны с длиной λ . Рассмотрим параллельные лучи, идущие под углом φ к нормали к плоскости щелей. Они пересекаются в бесконечности; если использовать собирающую линзу, то точки их пересечения будут лежать в фокальной плоскости. Разность хода волн, идущих от соседних источников и собирающихся в бесконечности, равна $d \sin \varphi$. Эти волны приходят в точку наблюдения с разностью фаз $2\pi d \sin \varphi / \lambda$ и создают колебания, соответствующие комплексной амплитуде

$$\dot{a}_i = A_0 \left[\cos \left[\frac{2\pi}{\lambda} d \sin \varphi_i \right] + j \sin \left[\frac{2\pi}{\lambda} d \sin \varphi_i \right] \right].$$

Чтобы найти результирующие колебания необходимо просуммировать все комплексные амплитуды: $\dot{A} = \dot{a}_1 + \dot{a}_2 + \dots + \dot{a}_N$. Амплитуда результирующего колебания в точке наблюдения равна: $A = |\dot{A}|$, а интенсивность пропорциональна квадрату амплитуды. Для расчета дифракционной картины необходимо определить записанную выше величину для каждого угла φ и построить график зависимости получающейся интенсивности от $\sin \varphi$.

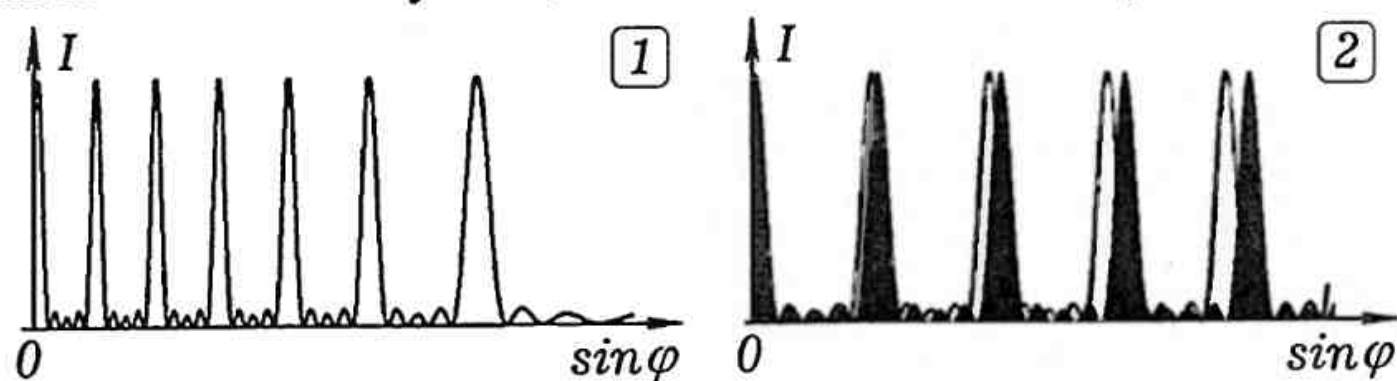


Рис. 14.7.

Результаты моделирования представлены на рис. 14.7. Проведя серию вычислительных экспериментов, можно убедиться в следующем: 1) чем больше длина волны λ , тем больше расстояние между главными дифракционными максимумами (рис. 14.7.2); 2) чем больше расстояние между щелями d , тем меньше расстояние между главными дифракционными максимумами; 3) чем больше количество щелей N , тем больше число побочных дифракционных максимумов между соседними главными дифракционными максимумами; 4) если дифракционную решетку осветить белым светом, то на бесконечно удаленном экране получится система максимумов, окрашенных в радужные цвета.

Задача 14.8. На экран с круглым отверстием нормально падает плоская волна. Исследуйте зависимость интенсивности в точке наблюдения M , находящейся на оси отверстия, от расстояния y до экрана (рис. 14.8.1).

Результаты моделирования — на рис. 14.8.2 и 14.8.3.

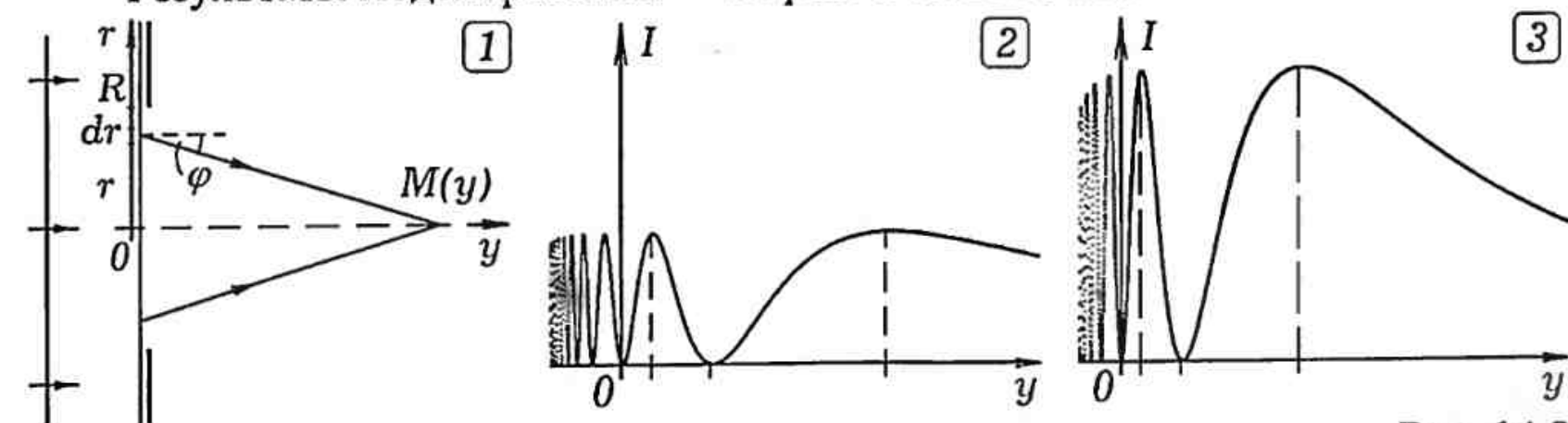


Рис. 14.8.

Задача 14.9. На экран с кольцом радиуса R и шириной ΔR нормально падает плоская волна. Исследуйте зависимость интенсивности в точке наблюдения M , находящейся на оси отверстия, от расстояния y до экрана. Убедитесь в том, что минимум (максимум) интенсивности соответствует четному (нечетному) числу зон Френеля.

Задача 14.10. В точку наблюдения приходят два цуга длиной $N\lambda$ с разностью хода Δl . Какова будет интенсивность? Постройте график зависимости интенсивности от разности хода.

Пусть имеются два источника периодически и одновременно излучающие цуги волн длительностью $\Delta\tau$ равной амплитуды и частоты. Длительность цуга $\Delta\tau$ называется временем когерентности, а длина цуга $L = \nu\Delta\tau$ — длиной когерентности. Придя в точку наблюдения, волны создают колебания s_1 и s_2 (рис. 14.9.1). Результирующее колебание находится в соответствии с принципом суперпозиции: $s = s_1 + s_2$. Средняя интенсивность в точке наблюдения пропорциональна интегралу от s^2 за время, много большее периода испускания цугов, отнесенное к этому времени:

$$I = \frac{k}{\tau_2 - \tau_1} \int_{\tau_1}^{\tau_2} (s_1 + s_2)^2 d\tau.$$

Таким образом, для решения задачи следует сложить s_1 и s_2 при заданной разности хода Δl , возвести в квадрат и проинтегрировать, после чего поставить точку на графике $I = I(\Delta l)$. Затем изменить разность хода Δl на некоторую величину, повторить все снова и т.д. Получающиеся графики зависимости $I = I(\Delta l)$ для цугов длиной 3λ и 4λ изображены на рис. 14.9.2 и 14.9.3. Если разность хода Δl равна 0, то цуги достигают точки наблюдения одновременно и в фазе, поэтому усиливают друг друга, получается максимум. Когда разность хода $\Delta l = \pm\lambda/2$, цуги практически полностью гасят друг друга, наблюдается минимум. Нескомпенсированными остаются только две крайние полуволны, поэтому результирующая интенсивность близка, но не равна 0. При разности хода $\Delta l = \pm\lambda$ перекрывающиеся части цуга усиливают друг друга и наблюдается максимум. Так как цуги приходят в точку наблюдения не одновременно, то они перекрываются не полностью, поэтому результирующая интенсивность меньше, чем в центральном максимуме.

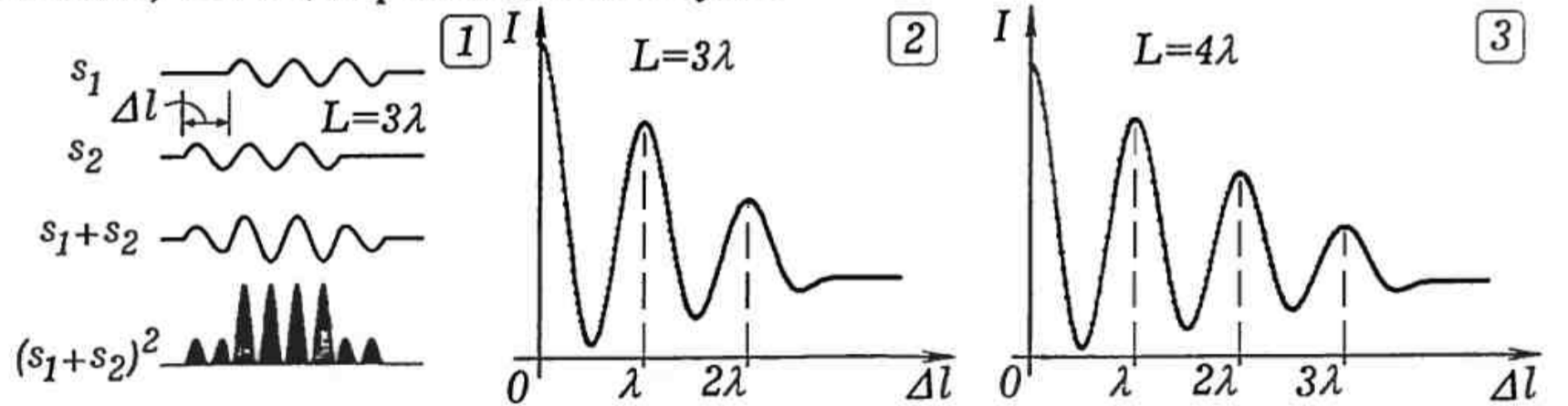


Рис. 14.9.

Если разность хода Δl превышает длину когерентности L , цуги проходят точку наблюдения в неперекрывающиеся интервалы времени, поэтому результирующая интенсивность равна сумме интенсивностей каждой волны по отдельности, интерференция не наблюдается. Условие временной когерентности можно сформулировать так: интерференция наблюдается тогда, когда разность хода Δl меньше длины когерентности L .

15. МОДЕЛИРОВАНИЕ ЯВЛЕНИЙ МИКРОМИРА

Динамическое состояние квантовой частицы описывается волновой функцией $\Psi(x, y, z, \tau)$, квадрат модуля которой равен плотности вероятности нахождения частицы в данной точке пространства. Вероятность нахождения частицы в элементарном объеме dV равна $|\Psi(x, y, z, \tau)|^2 dV$. Основным динамическим уравнением квантовой механики, изучающей явления микромира, является уравнение Шредингера

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial \tau} + \left(\frac{\hbar^2}{2m} \Delta - U(x, y, z) \right) \Psi = 0.$$

Его решение имеет вид: $\Psi(x, y, z, \tau) = \psi(x, y, z) \exp(-i\omega\tau)$, где $\omega = E/\hbar$, а функция $\psi(x, y, z)$ удовлетворяет уравнению:

$$\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi(x, y, z) + (E - U(x, y, z))\psi(x, y, z) = 0.$$

Рассмотрим одномерное движение частицы массой m в поле потенциала $U(x)$. Запишем стационарное уравнение Шредингера:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{2m}{\hbar^2} (E - U(x))\psi = 0.$$

Квантовая система может находиться в стационарных состояниях с энергией E , каждое из которых описывается волновой функцией стационарного состояния. Если частица находится в потенциальной яме, то значения энергии E_n образуют дискретный спектр. Численно решить уравнение Шредингера — значит подобрать такие значения энергии E_n , при которых функция $\psi(x)$ не расходится, то есть всюду сохраняет конечные значения. Только при этом интеграл от квадрата модуля $\Psi(x, \tau)$ будет конечной величиной.

Задача 15.1. Рассчитайте энергетические уровни частицы находящейся в одномерной прямоугольной потенциальной яме с высотой стенок U_1 и U_2 .

Стационарное уравнение Шредингера — дифференциальное уравнение второго порядка, которое может быть решено методом Эйлера. Задавая энергию частицы E , можно рассчитать функцию $\psi(x)$. Основная трудность состоит в том что далеко не любое решение уравнения имеет физический смысл, так как при произвольных значениях E функция $\psi(x)$ стремится к бесконечности, что противоречит условию нормировки: интеграл от $|\Psi(x, y, z, \tau)|^2 dV$ по всему пространству должен быть равен 1, так как частица существует и находится где-то внутри потенциальной ямы или рядом с ней. Поэтому, физический смысл имеют лишь некоторые дискретные значения энергии E_n , при которых волновая функция за пределами потенциальной ямы стремится к нулю. Задача в том, чтобы приближенно определить эти разрешенные уровни энергии E_n . Следует понимать, что найти точные значения E_n в принципе невозможно,

также как невозможно абсолютно точно установить, например, заряд или массу электрона.

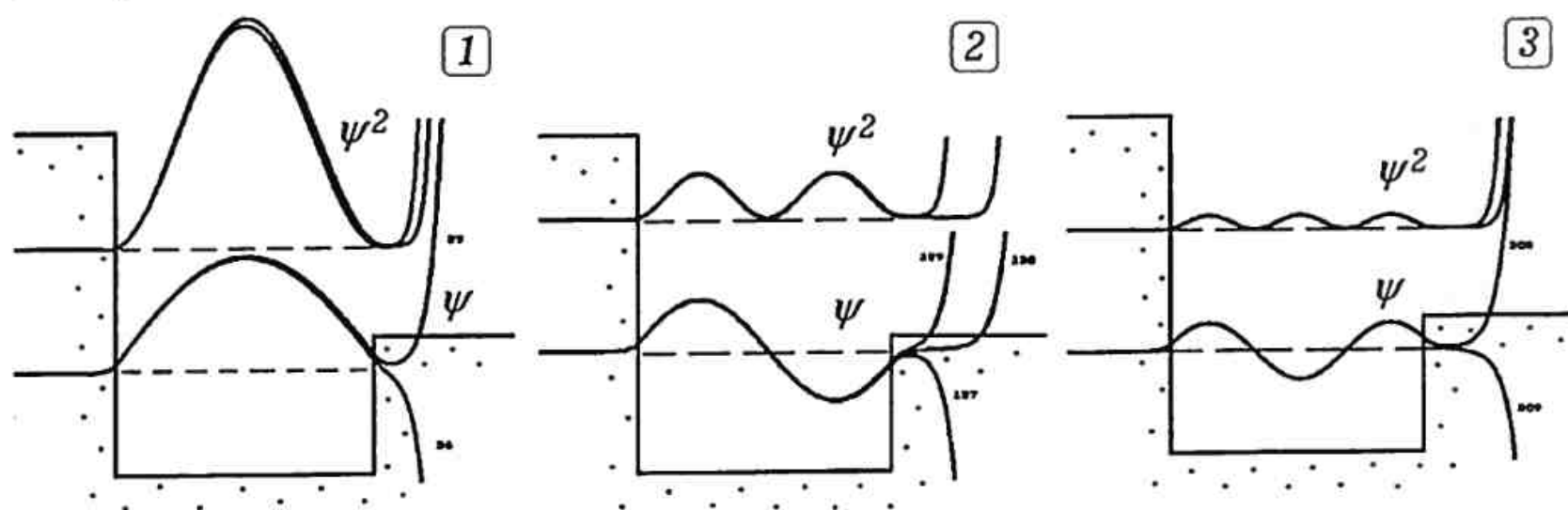


Рис. 15.1.

Ниже представлена программа Пр-15.1, решающая уравнение Шредингера для частицы в потенциальной яме $U(x)$, которая рисует графики зависимостей $\psi(x)$ и $|\psi(x)|^2$. При этом используется метод стрельбы: энергия частицы E увеличивается с некоторым шагом dE , и строится график зависимости $\psi(x)$, который при $x \rightarrow \infty$ стремиться к $+\infty$ либо к $-\infty$. Необходимо определить энергию частицы, при которой функция $\psi(x)$ на бесконечности будет стремиться к 0 (рис. 15.1). Все расчеты носят приближенный характер, точного совпадения с истинным значением энергии в стационарном состоянии не происходит. На рис. 15.1 приведены решения для стационарных значений энергии E_1, E_2, E_3 . Получающиеся решения устойчивы, то есть незначительные вариации E_n не приводят к существенным изменениям $\psi(x)$ вблизи потенциальной ямы. В программе Пр-15.1 переменной fi соответствует $\psi(x)$, а переменным $fi1$ и $fi2$ — первая и вторая производные $\psi(x)$ по координате x .

Пр-15.1.

```
Uses crt, graph;
Const dx=0.002; dE=1; aa=0.0001; U1=5000; U2=2000;
Var h, Gd, Gm : integer; U,E,x,a,fi,fi1,fi2 : real; EE: string;
BEGIN Gd := Detect; InitGraph(Gd, Gm, 'c:\bp\bgi');
E:=136; a:=50; x:=-20;
Repeat x:=x+0.2; U:=U1;
  If (x>0)and(x<a) then U:=0; If x>a then U:=U2;
  circle(100+round(x*5),470-round(U/15),1);
until x>80;
Repeat x:=-20; fi1:=0.0001; fi:=-0.0001;
Repeat x:=x+dx; U:=U1;
  If (x>0)and(x<a) then U:=0; If x>a then U:=U2;
  fi2:=-aa*(E-U)*fi; fi1:=fi1+fi2*dx; fi:=fi+fi1*dx;
  circle(100+round(x*5),220-round(fi*fi/500),1);
  circle(100+round(x*5),350-round(fi/3),1);
until (KeyPressed)or(abs(fi)>20000);
```

```

E:=E+dE; h:=h+10; Str(E:5:1,EE); OuttextXY(530,10+h,EE);
until KeyPressed; Repeat until KeyPressed;
END.

```

Результат расчетов зависит от краевых условий: координаты x и соответствующих значений f_i (функции $\psi(x)$) и f_{i1} (производной $\psi(x)$ по x) при x стремящимся к $-\infty$. На бесконечности $\psi(x)$ должна обращаться в 0; в программе же задаются малые, но отличные от 0 значения f_i и f_{i1} .

Туннельный эффект состоит в том, что частица, энергия которой меньше высоты потенциального барьера, имеет некоторую вероятность туннелирования, то есть прохождения через данный барьер. Из рис. 15.1 видно, что имеется отличная от нуля вероятность обнаружения частицы в классически запрещенной области, для которой $E < U$. Она по мере углубления частицы в стенку потенциальной ямы убывает по экспоненте. Если бы вместо стенки был потенциальный барьер, то микрочастица с некоторой вероятностью прошла бы через него! Понятно, что макроскопическая частица, энергия которой меньше высоты потенциального барьера, не сможет его преодолеть и отразится от него.

Теория туннельного эффекта предусматривает аналитическое решение уравнения Шредингера для трех областей: до потенциального барьера, внутри и после него. Получающиеся функции $\psi(x)$ в общем случае не смыкаются, в то время как состояние частицы должно описываться непрерывной и гладкой (без изломов) волновой функцией. Поэтому следует осуществить сопряжение этих решений, при котором выполнялись бы условия равенства волновых функций и их производных на обеих границах потенциального барьера. Кроме того, решение должно удовлетворять условию нормировки.

В результате получается, что коэффициент прозрачности D потенциального барьера, равный вероятности туннелирования частицы, тем больше, чем меньше ширина барьера d и высота барьера U , а также чем выше энергия частицы E . Туннельный эффект имеет место при альфа-распаде ядер, при термоядерных реакциях, при автоэлектронной эмиссии, при контакте двух полупроводников и т.д.

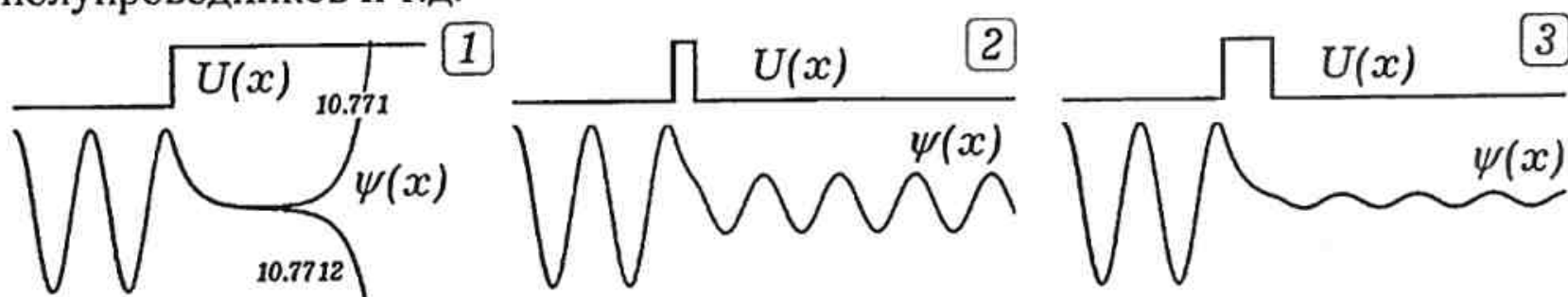


Рис. 15.2.

Задача 15.2. Методом компьютерного моделирования исследуйте туннельный эффект, — прохождение частицы через потенциальный барьер.

Необходимо написать программу, позволяющую рассчитать волновую функцию частицы с энергией E , проходящей через потенциальный барьер высотой U и шириной d . Решение задачи состоит из двух этапов. Сначала решают задачу для частицы падающей на потенциальный барьер высотой U бесконечной длины (одну стенку потенциальной ямы). При этом, изменяя фазу

волновой функции (то есть значения $\psi(x)$ и ее производной при $x = 0$) следует подобрать такое ее значение, при котором функция $\psi(x)$ внутри бесконечно длинного потенциального барьера по экспоненте стремится к нулю (рис. 15.2.1). Подбрав значения $\psi(0)$ и $\psi'(0)$ (переменные f_i и f_{i1}), повторяют запуск программы для потенциального барьера шириной d (рис. 15.2.2 и 15.2.3).

Задача 3. Проведите с рассмотренной выше компьютерной моделью серию вычислительных экспериментов и на качественном уровне изучите зависимость коэффициента прозрачности потенциального барьера от его высоты U , ширины d и энергии E частицы (рис. 15.2.2 и 15.2.3).

Для нахождения коэффициента прозрачности D достаточно определить отношение квадратов амплитуд прошедшей и падающей волн вероятности $\psi(x)$. Коэффициент отражения равен $R = 1 - D$.

Рассмотрим микрочастицу, находящуюся в потенциальной яме $U = m\omega_0^2 x^2 / 2 = ax^2$. В этом случае на нее действует квазиупругая возвращающая сила $F_x = -gradU = -ax$, величина которой пропорциональна координате x . Колебания гармонические и происходят вдоль оси x , их период не зависит от частоты, поэтому такая система называется одномерным гармоническим осциллятором. Запишем уравнение Шредингера:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{2m}{\hbar^2} \left(E - \frac{m\omega_0^2}{2} x^2 \right) \psi = 0.$$

Из теории известно, что стационарным состояниям соответствуют эквидистантные уровни энергии $E_n = \hbar\omega_0(n + 1/2)$, где $n = 0, 1, 2, \dots$

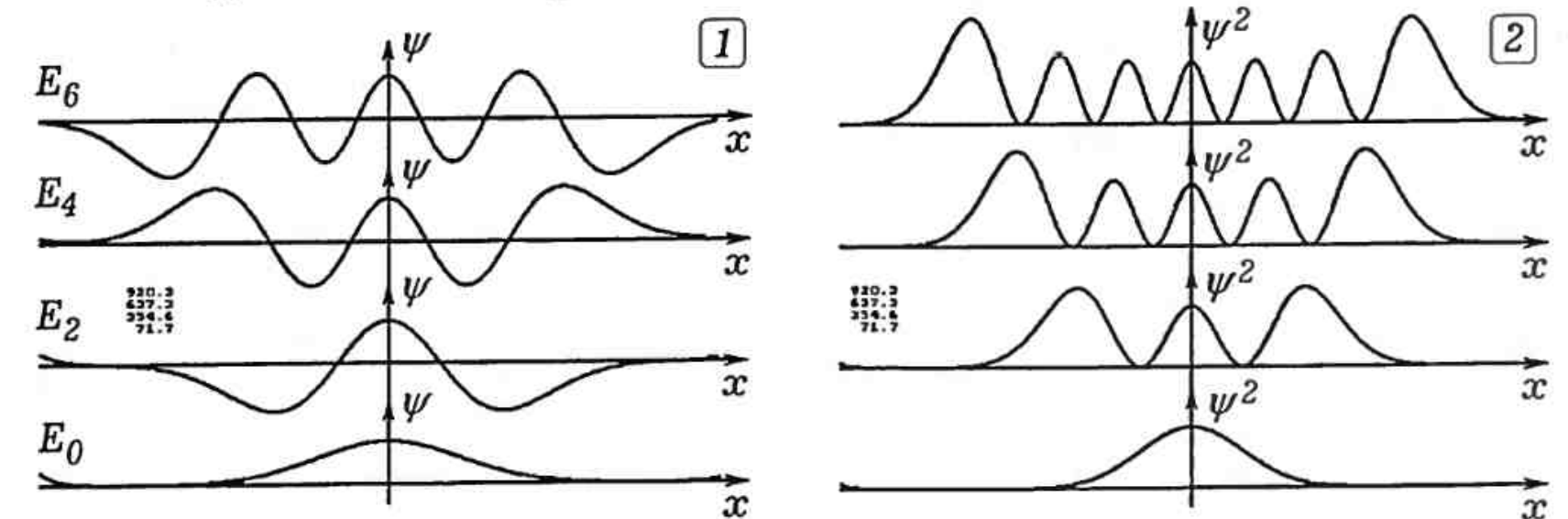


Рис. 15.3.

Задача 15.4. Исследуйте гармонический осциллятор, — микрочастицу находящуюся в потенциальной яме $U = ax^2$. Найдите значения энергии, соответствующие стационарным состояниям.

Эта задача аналогична задаче о частице в прямоугольной потенциальной яме, и отличается тем, что потенциальная энергия должна быть задана уравнением $U = ax^2$. Так как потенциальная яма симметрична, то для нахождения разрешенных уровней энергии вычисление волновой функции удобно начинать

с точки $x = 0$. При этом используется программа Пр-15.2. Для определения $\psi_n(x)$ для четных n задают начальные условия $\psi(0) \neq 0$ и $\psi'(0) = 0$. При этом получается симметричная относительно прямой $x = 0$ функция $\psi_n(x)$, $n = 0, 2, 4, \dots$ (рис. 15.3). Чтобы найти $\psi_n(x)$ для нечетных n , вычисления следует начинать с $\psi(0) = 0$ и $\psi'(0) \neq 0$. Получающиеся волновые функции $\psi_n(x)$, $n = 1, 3, 5, \dots$ обладают центральной симметрией относительно начала координат (рис. 15.4). На рисунках также приведены графики функций $|\psi_n(x)|^2$.

Найденные значения энергии (в условных единицах) действительно удовлетворяют формуле $E_n = E_0(n + 1/2)$. Программа не учитывает условие нормировки, поэтому амплитуды волновых функций получаются произвольными.

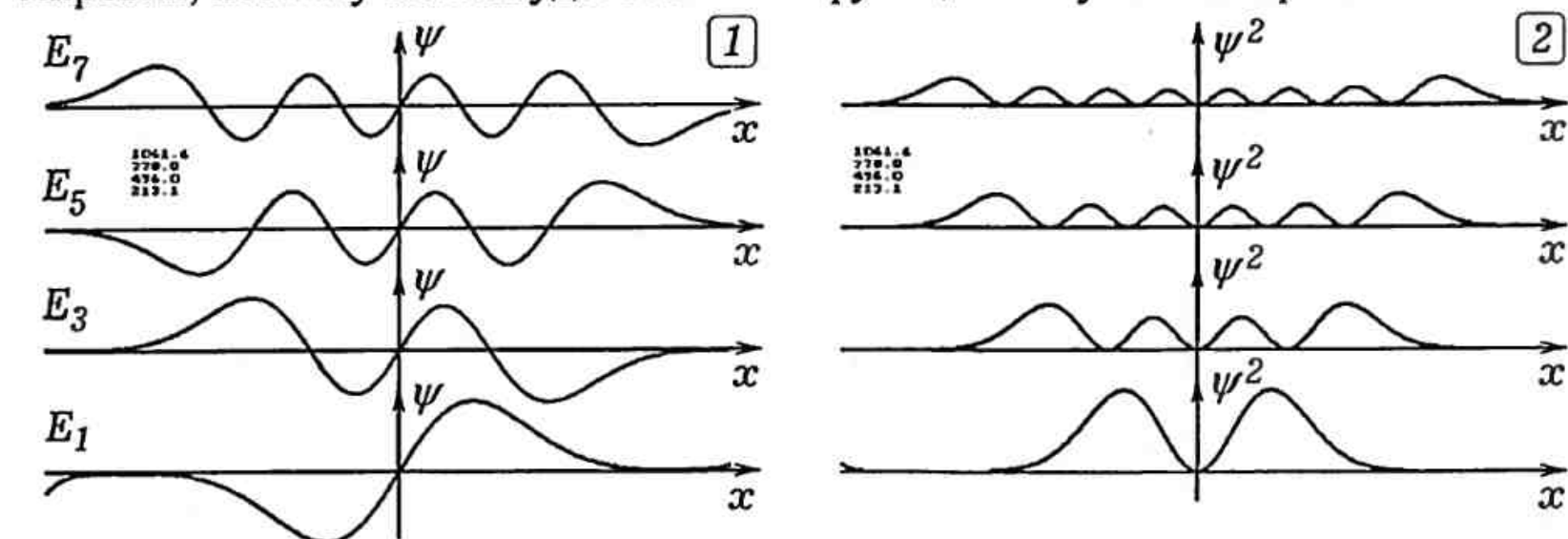


Рис. 15.4.
Пр-15.2.

```

Uses crt, graph;
Const dx=0.002; dE=1; aa=0.0001; U1=5000; U2=2000;
Var h,hh, Gd, Gm : integer; U,E,x,a,fi,fi1,fi2 : real; EE: string;
Procedure Raschet;
begin  a:=50; x:=-40;
Repeat x:=x+0.02; U:=U1; U:=5*x*x;
      circle(320+round(x*5),470-round(U/15),1); until x>180;
Repeat x:=0; {fi1:=0; fi:=50;} fi1:=8; fi:=0;
Repeat x:=x+dx; U:=0.5*x*x;
      fi2:=-aa*(E-U)*fi; fi1:=fi1+fi2*dx; fi:=fi+fi1*dx;
      circle(320+round(x*5),400-hh-round(fi*fi/50),1);
      circle(320-round(x*5),400-hh-round(fi*fi/50),1);
      circle(320-round(x*5),400-hh,1); circle(320+round(x*5),400-hh,1);
until (x*5>290)or(abs(fi)>1000000);
E:=E+dE; h:=h+10; Str(E:5:1,EE); OuttextXY(530,h,EE);
until x*5>250; end;
BEGIN Gd := Detect; InitGraph(Gd, Gm, 'c:\bp\bgi');
      hh:=300; E:=1060.6; Raschet; hh:=200; E:=777.8; Raschet;
      hh:=100; E:=495.0; Raschet; hh:=0; E:=212.15; Raschet;
      Repeat until KeyPressed;
END.
    
```

16. МОДЕЛЬ ИЗЛУЧЕНИЯ АБСОЛЮТНО ЧЕРНОГО ТЕЛА

Зависимость спектральной светимости абсолютно черного тела от частоты и температуры выражается формулой Планка:

$$r(\nu, T) = \frac{2\pi h \nu^3}{c^2 (\exp(h\nu / kT) - 1)}$$

От абсолютной температуры T и частоты ν перейдем к параметрам

$$T' = T \frac{k}{h} \cdot \left(\frac{2\pi h}{c^2} \right)^{1/3} \quad \text{и} \quad \nu' = \nu \left(\frac{2\pi h}{c^2} \right)^{1/3}.$$

Тогда формула Планка приобретет вид: $r(\nu', T') = \nu'^3 / (\exp(\nu' / T') - 1)$.

Задача 16.1. Построить график зависимости спектральной светимости абсолютно черного тела от частоты для разных температур.

Задача 16.2. Методом численного интегрирования определите интегральную светимость абсолютно черного тела для данной температуры. Найдите длину волны, на которую приходится максимум спектральной светимости.

Нахождение интегральной светимости черного тела может быть осуществлено с помощью метода прямоугольников (программа Пр-16.1).

CLS: T = 500: h = 1: max = 0 'Qbasic Пр-16.1.

FOR w = 1 TO 20000 STEP h

F = w * w * w / (EXP(w / T) - 1): R = R + F * h

IF F > max THEN wm = w: max = F

NEXT: PRINT "Интегральная светимость ", R

PRINT "Длина волны ", 1 / wm: END

Задача 16.3. Методом вычислительного эксперимента подтвердите закон Стефана–Больцмана: интегральная светимость абсолютно черного тела прямо пропорциональна четвертой степени абсолютной температуры: $R = \sigma T^4$.

Результаты вычислений представлены в таблице. Видно, что с ростом T увеличивается R , а величина σ остается постоянной.

T	R	λ_m	$\sigma = R/T^4$	$b = \lambda_m T$
100	$649 \cdot 10^6$	0,00355	6,49	0,355
200	$10400 \cdot 10^6$	0,00177	6,50	0,354
300	$52600 \cdot 10^6$	0,00118	6,49	0,354
400	$166000 \cdot 10^6$	0,000885	6,48	0,354
500	$405000 \cdot 10^6$	0,000709	6,48	0,355
600	$841000 \cdot 10^6$	0,00059	6,49	0,354

Задача 16.4. Подтвердите закон смещения Вина: длина волны, приходящаяся на максимум спектральной светимости абсолютно черного тела, обратно пропорциональна его температуре $\lambda_m = b/T$.

Из таблицы видно, что по мере увеличения T длина волны, соответствующая максимуму спектральной светимости, уменьшается так, что величина $b = \lambda_m T$ остается постоянной.

17. МОДЕЛИРОВАНИЕ ЯВЛЕНИЙ ПЕРЕНОСА

К явлениям переноса относятся диффузия, теплопроводность и вязкость. Рассмотрим неоднородную прямоугольную пластину, коэффициент теплопроводности которой зависит от координаты: $k = k(x, y)$. Пусть задано начальное распределение температуры $T = T(x, y)$, а также мощность q_k и координаты x_k, y_k источников тепла. Определены краевые условия: край пластины в некоторых точках поддерживается при постоянной температуре, а в некоторых точках теплоизолирован. Необходимо рассчитать распределение температуры по поверхности пластины в последующие моменты времени.

Запишем двумерное уравнение теплопроводности для пластины:

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = k_x \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{q(x, y)}{c\rho},$$

где k_x и k_y — коэффициенты теплопроводности вдоль осей Ox и Oy . Чтобы решить это уравнение численным методом, дискретизируем трехмерную область Ω , построив сетку $\Omega_{\Delta x, \Delta y, \Delta \tau}$ с пространственным шагом $h = \Delta x = \Delta y$ и шагом по времени $\Delta \tau$. При этом мы как бы разбиваем пластину на большое количество элементов квадратной формы, образующих N столбцов и M строк. Каждый элемент однозначно задается парой чисел i, j . От непрерывного времени τ переходим к дискретному времени t так, что $\tau = t\Delta \tau$, $t = 0, 1, 2, \dots$

Допустим, в некоторый дискретный момент времени t температура элемента i -ого столбца j -ой строки была равна $T'_{i,j}$. Чтобы найти ее значение в следующий момент времени $t+1$ (то есть $\tau + \Delta \tau$), запишем уравнение теплопроводности в конечных разностях:

$$\frac{T'_{i,j}{}^{t+1} - T'_{i,j}{}^t}{\Delta \tau} = k_x \frac{T'_{i-1,j}{}^t - 2T'_{i,j}{}^t + T'_{i+1,j}{}^t}{\Delta x^2} + k_y \frac{T'_{i,j-1}{}^t - 2T'_{i,j}{}^t + T'_{i,j+1}{}^t}{\Delta y^2} + \frac{q_{i,j}}{c\rho},$$

$$T'_{i,j}{}^{t+1} = T'_{i,j}{}^t + \left(k_x \frac{T'_{i-1,j}{}^t - 2T'_{i,j}{}^t + T'_{i+1,j}{}^t}{\Delta x^2} + k_y \frac{T'_{i,j-1}{}^t - 2T'_{i,j}{}^t + T'_{i,j+1}{}^t}{\Delta y^2} + \frac{q_{i,j}}{c\rho} \right) \Delta \tau.$$

В случае, когда пластина неоднородная, уравнение теплопроводности:

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k(x, y) \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k(x, y) \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{q(x, y)}{c\rho},$$

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = \frac{\partial k}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial x} + k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial k}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial y} + k \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{q}{c\rho}.$$

Для решения этой задачи необходимо задать три двумерных массива размерностью $N \times M$: один — для коэффициента теплопроводности $k_{i,j}$, другой — для температуры $T'_{i,j}$ в узлах сетки в момент t и третий — для температуры

$T_{i,j}^{t+1}$ в следующий момент $t+1$. Все эти величины должны быть действительного типа и при достаточно большом количестве узлов потребуют резервирования большого объема памяти. Выйти из создавшейся ситуации можно различными способами: 1) использовать указатели (пример рассматривается при решении волнового уравнения в двумерной среде); 2) если коэффициент теплопроводности меняется не плавно, а скачком, то объявить массив для $k_{i,j}$ массивом целых чисел; 3) записывать результаты расчета $T_{i,j}^{t+1}$ на следующем временном слое $t+1$ в тот же массив, что и на предыдущем слое t ; 4) использовать другую среду программирования, в которой возможно объявить достаточное количество элементов в массивах.

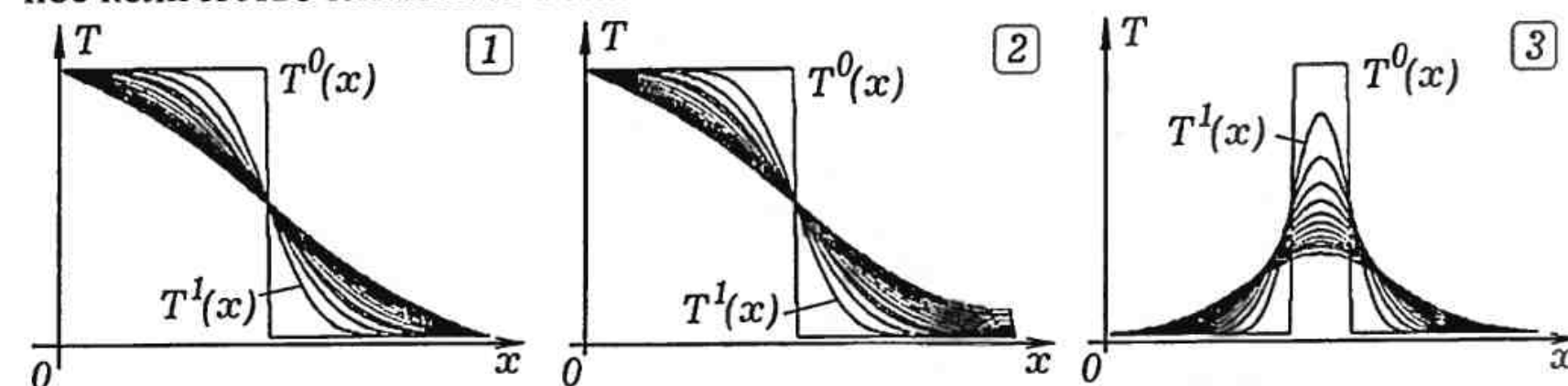


Рис. 17.1.

Задача 17.1. Однородный стержень разрезали на две половины, левую нагрели до температуры T_1 , а правую — до температуры T_2 , после чего половинки привели в соприкосновение. Рассчитайте температуру различных точек стержня в последующие моменты времени.

Рассматриваемое явление аналогично процессу выравнивания концентрации молекул одной из двух жидкостей за счет диффузии. Допустим, что оба конца стержня, получившегося после совмещения половинок, поддерживаются при постоянных температурах T_1 и T_2 . В этом случае система стремится к стационарному состоянию, в котором температура линейно зависит от координаты (рис. 17.1.1). Если правый конец стержня теплоизолирован, а левый поддерживается при фиксированной температуре T_1 , то температура всех точек стержня будет повышаться, стремясь к T_1 (рис. 17.1.2).

Задача 17.2. Температура средней части стержня равна T_1 , а во всех остальных точках — T_2 . Рассчитайте зависимость температуры от координаты в различные моменты времени.

Результат решения задачи представлен на рис. 17.1.3. Видно, что с течением времени за счет теплообмена происходит выравнивание температуры различных точек стержня. Аналогичное выравнивание концентраций молекул жидкости происходит в процессе диффузии.

Задача 17.3. Вблизи центра стержня имеется несколько источников тепла положительной и отрицательной мощности. Начальное распределение температуры вдоль стержня известно. Как изменяется температура различных точек стержня, если он: а) однороден; б) неоднороден?

Задача 17.4. Имеется неоднородный стержень, в центре — источник тепла известной мощности $q > 0$, температура левого конца увеличивается по закону $T(0, \tau) = \alpha\tau$, правый конец поддерживается при постоянной температуре: $T(l, \tau) = \text{const}$. Рассчитайте распределение температуры вдоль стержня.

Результаты расчета температуры различных точек стержня в последовательные моменты времени представлены на рис. 17.2.1. Видно, что с течением времени температура левого конца монотонно возрастает, температура средней части стержня, содержащей источники тепла, также увеличивается.

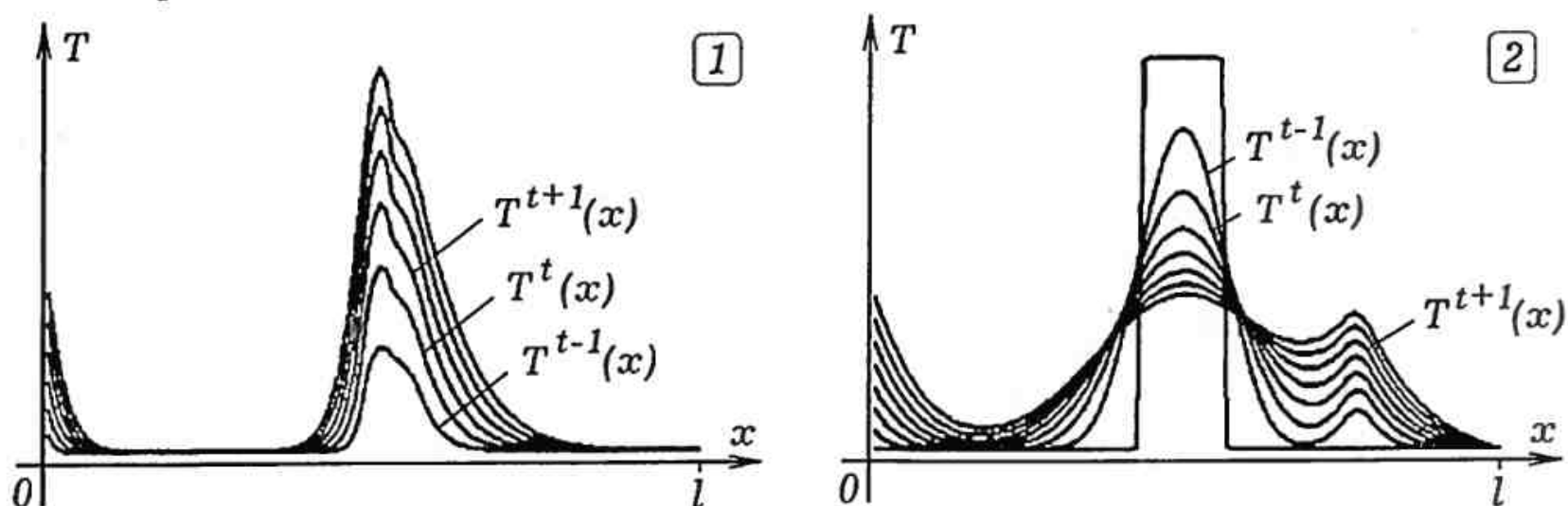


Рис. 17.2.

На рис. 17.2.2 приведен результат моделирования при других начальных условиях и ином расположении источников тепла. В начальный момент $\tau = 0$ средняя часть стержня имеет высокую температуру, источник тепла смещен вправо, температура левого конца стержня повышается.

Задача 17.5. Промоделируйте распространение тепла в однородной пластине с отверстием. Начальное распределение температуры и граничные условия заданы.

Для расчета распределения температуры по поверхности пластины используется программа Пр-17.1. Она содержит цикл по времени t с вложенными в него двумя циклами по i и по j , в которых перебираются все элементы пластины и вычисляются их температуры в следующий момент $\tau + \Delta\tau$.

Uses crt, graph; Const n=75; m=70; h=1; dt=0.1; Пр-17.1.

Var kk, i, j, DV, MV : integer; tt, t : array[1..N, 1..M] of real;

q, a : real; uslovie : boolean;

Procedure Istoch;

begin If ((i>20)and(i<35))and((j>20)and(j<30)) then q:=20 else q:=0;

If ((i>45)and(i<65))and((j>50)and(j<60)) then q:=-10; end;

Procedure Nach_uslov;

begin For i:=1 to N do For j:=1 to M do

begin uslovie:=((j>25)and(j<45)and(i>20)and(i<30));

If uslovie=true then t[i,j]:=80 else t[i,j]:=1; end; end;

Procedure Raschet;

begin Istoch; If (abs(i-40)<10)and(abs(j-40)<10) then a:=0 else a:=1;

tt[i,j]:=t[i,j]+a*(t[i,j+1]-2*t[i,j]+t[i,j-1])*dt/(h*h)+

a*(t[i+1,j]-2*t[i,j]+t[i-1,j])*dt/(h*h)+q; end;

```

BEGIN DV:=Detect; InitGraph(DV,MV,'c:\bp\bgi'); Nach_uslov;
Repeat kk:=kk+1;
For i:=2 to N-1 do For j:=2 to M-1 do begin Raschet; end;
For i:=2 to N-1 do For j:=2 to M-1 do t[i,j]:=tt[i,j];
If kk/5=round(kk/5) then For i:=2 to N-1 do For j:=2 to M-1 do
begin setcolor(round(t[i,j]/300+1)); rectangle(i*5+50,j*5,i*5+54,j*5+4);
rectangle(i*5+51,j*5+1,i*5+53,j*5+3); end; until KeyPressed; CloseGraph;
END.

```

Задача 17.6. Имеется неоднородная пластина. Задано начальное распределение температуры, известны координаты и мощности источников тепла и холода. Пластина имеет отверстие и (или) контактирует с другим телом, имеющим большую теплоемкость. Края пластины теплоизолированы (или поддерживаются при постоянной температуре). Необходимо рассчитать распределение температуры по поверхности пластины в последующие моменты времени.

Используется программа Пр-17.2. В ней результаты расчета температуры записываются в тот же массив $T_{i,j}$. Это не совсем правильно, так как для вычисления температуры 20-ого элемента 10 строки требуются значения $T_{19,10}$, $T_{20,10}$, $T_{21,10}$ на предыдущем временном слое t , а переменная $T_{19,10}$ уже содержит значение на слое $t+1$. Поэтому при многократном прохождении элементов 10 строки слева направо ошибки накапливаются, и при симметричном начальном распределении температуры и источников тепла получающиеся результаты моделирования не обладают симметрией. Исправить этот недостаток можно поочередно изменяя направление счета: сначала — строчки сверху вниз, элементы в строках — слева направо; затем — строчки снизу вверх, элементы справа налево и т.д.

Uses crt, graph; Const n=72; m=72; dx=1; dt=0.05; Пр-17.2.

Var ii,jj,kk,i,j,DV, MV, EC : integer;

k,t: array[1..N, 1..M] of real;

q,a,b,bb :real; naprav,uslovie: boolean;

Procedure Raschet;

begin If ((i>30)and(i<42))and((j>30)and(j<42)) then q:=50 else q:=0;

If naprav=true then t[i,j]:=t[i,j]+(k[i,j+1]-k[i,j-1])*(t[i,j+1]-t[i,j-1])*dt/(4*dx*dx)+

k[i,j]*(t[i,j-1]-2*t[i,j]+t[i,j+1])*dt/(dx*dx)+q*dt else

t[i,j]:=t[i,j]+(k[i+1,j]-k[i-1,j])*(t[i+1,j]-t[i-1,j])*dt/(4*dx*dx)+

k[i,j]*(t[i-1,j]-2*t[i,j]+t[i+1,j])*dt/(dx*dx)+q*dt;

end;

BEGIN DV:=Detect; InitGraph(DV,MV,'c:\bp\bgi');

For i:=1 to N do For j:=1 to M do

begin uslovie:=((j>30)and(j<40)and(i>20)and(i<30));

If uslovie=true then t[i,j]:=0 else t[i,j]:=0; end;

For i:=1 to N do For j:=1 to M do k[i,j]:=0.08*i+0.001*j*j;

Repeat kk:=kk+1;

For i:=2 to N-1 do For j:=2 to M-1 do begin naprav:=false; Raschet; end;

For j:=2 to M-1 do For i:=2 to N-1 do begin naprav:= true; Raschet; end;

```

For i:=2 to N-1 do For jj:=2 to M-1 do
  begin j:=M+1-jj; naprav:=false; Raschet; end;
For j:=2 to M-1 do For ii:=2 to N-1 do
  begin i:=N+1-ii; naprav:=true; Raschet; end;
If kk/10=round(kk/10) then For i:=2 to N-1 do For j:=2 to M-1 do begin
  setcolor(round(t[i,j]/50)+1); rectangle(i*5+50,j*5,i*5+54,j*5+4);
  rectangle(i*5+51,j*5+1,i*5+53,j*5+3);end;
until KeyPressed; CloseGraph;
END.

```

Результаты использования этой программы при различных граничных условиях и распределениях источников тепла показаны на рис. 17.3. Рассмотрены следующие случаи: 1) действуют источник тепла и источник холода; 2) в центральной части пластины имеется область с постоянной температурой; 3) пластина неоднородная; 4) нижний край пластины теплоизолирован, а остальные поддерживаются при постоянной температуре; 5) действуют источники тепла и холода, а в центре пластины – отверстие; 6) имеются два источника тепла и отверстие; 7) и 8) пластина неоднородная.

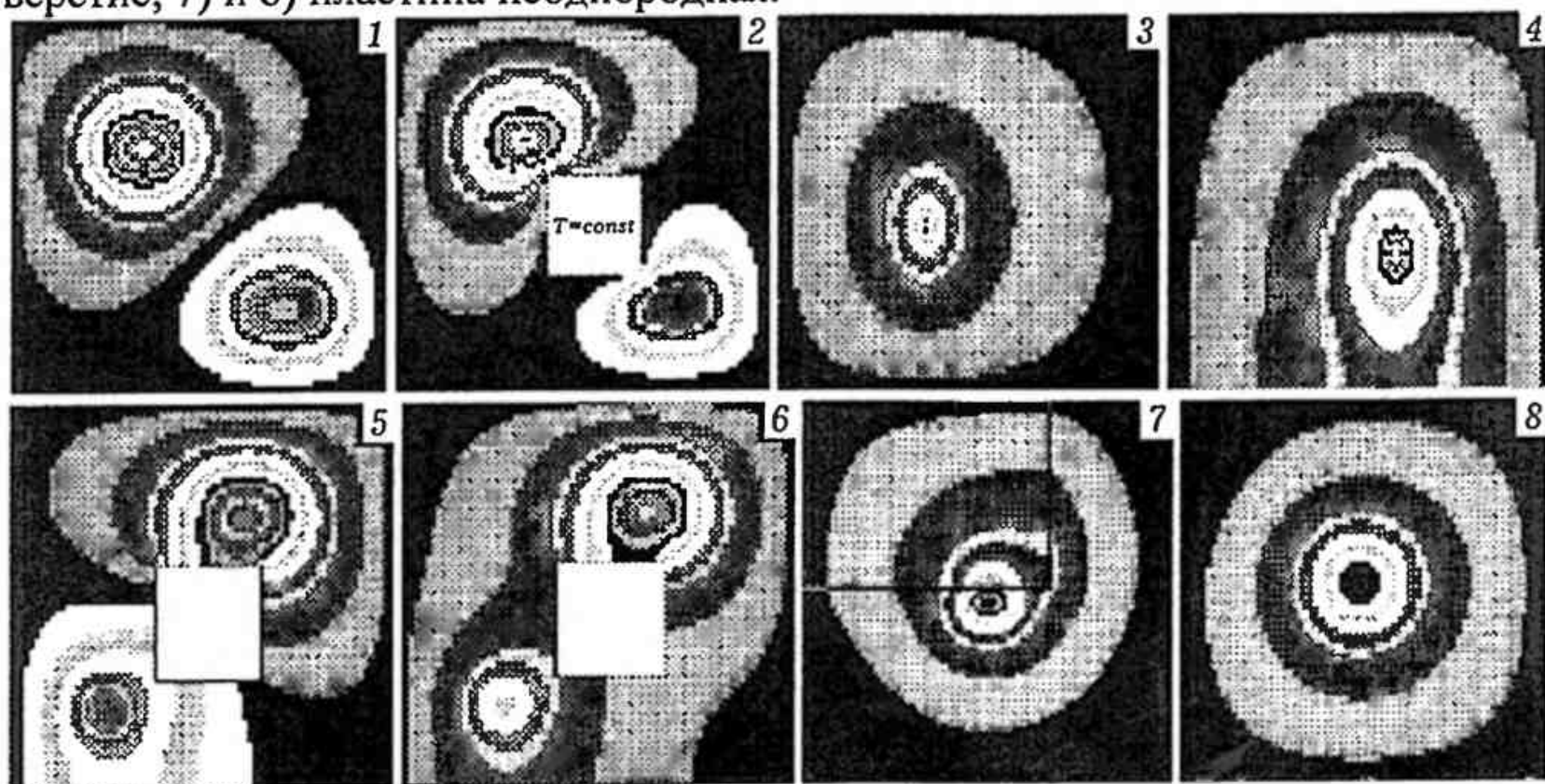


Рис.17.3.

Отдельно остановимся на ситуации, когда коэффициент теплопроводности является функцией температуры. Рассмотрим, например процесс горения (плазма, атмосфера звезд). Так как перенос тепла происходит в первую очередь за счет излучения, то обычно считают, что коэффициент теплопроводности $k(T) = k_0 T^\sigma$, а плотность мощности источников тепла $q(T) = q_0 T^\beta$, где $\sigma > 0$ и $\beta > 1$. Нелинейное уравнение теплопроводности имеет вид:

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k(T) \frac{\partial T}{\partial x} \right) + q_0 T^\beta = \frac{\partial k}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial x} + k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + q_0 T^\beta.$$

Запишем это уравнение в конечных разностях:

$$\frac{T_i^{t+1} - T_i^t}{\Delta \tau} = \frac{k_{i+1} - k_{i-1}}{2\Delta x} \cdot \frac{T_{i+1}^t - T_{i-1}^t}{2\Delta x} + k_i \frac{T_{i-1}^t - 2T_i^t + T_{i+1}^t}{\Delta x^2} + q_0 T_i^{t\sigma},$$

$$T_i^{t+1} = T_i^t + \left(\frac{k_{i+1} - k_{i-1}}{2\Delta x} \cdot \frac{T_{i+1}^t - T_{i-1}^t}{2\Delta x} + k_i \frac{T_{i-1}^t - 2T_i^t + T_{i+1}^t}{\Delta x^2} + q_0 T_i^{t\sigma} \right) \Delta \tau.$$

Задача 17.7. Промоделируйте процесс возгорания и горения однородного стержня, концы которого поддерживаются при постоянной температуре. Стержень нагревается в центральной части, мощность источника $q_1 = \text{const}$. При температуре ниже температуры возгорания T' коэффициент теплопроводности $k = 2$. После возгорания коэффициент теплопроводности пропорционален квадрату температуры $k(T) = 4T^2 + 2$. На горящих участках выделяется тепло; мощность источников пропорциональна кубу температуры: $q = 0,1(T - T')^3$. Используется программа Пр-17.3, результаты — на рис. 17.4.1.

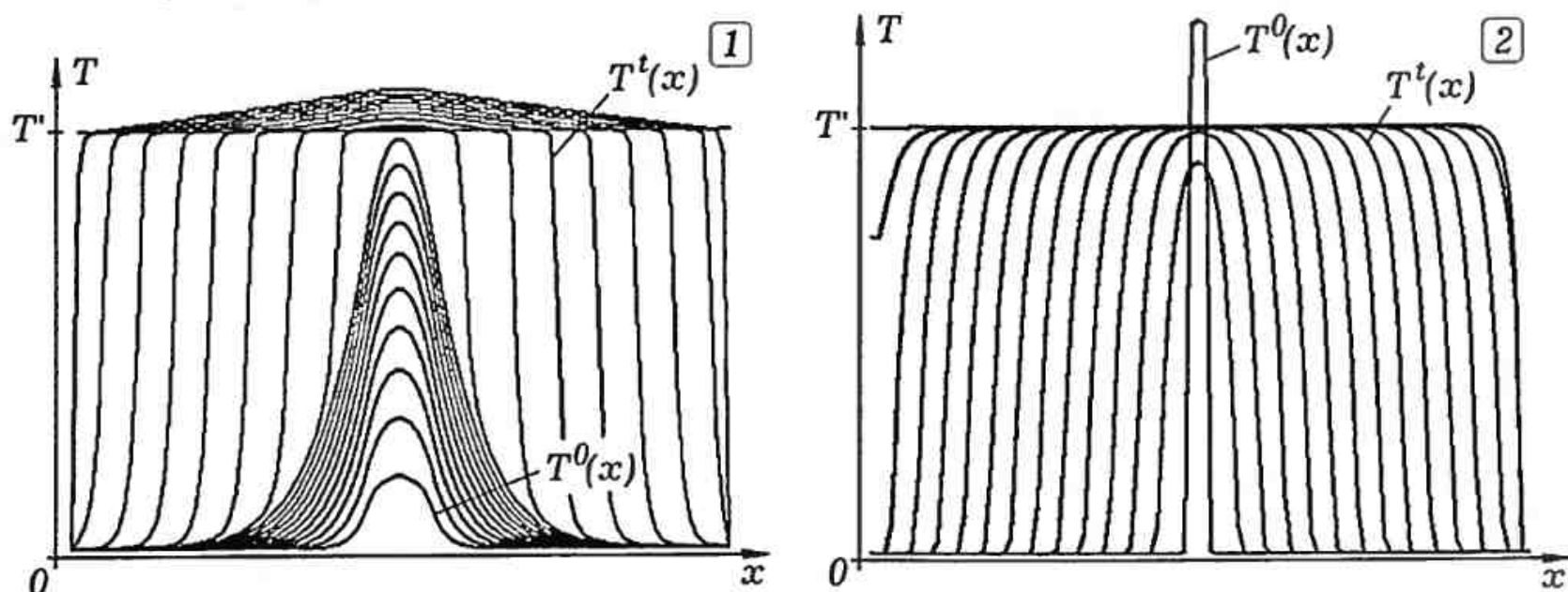


Рис. 17.4.
Пр-17.3.

```
Uses crt, graph; Const n=100; tk=5; h=1; dt=0.001;
Var ii,jj,kk,i,j,DV, MV, EC : integer; q,qq,a : real;
t: array[1..N] of real; k: array[1..N] of real;
Procedure Param_sred;
begin For j:=1 to N do begin
If t[j]>tk then a:=4 else a:=0; k[j]:=a*t[j]*t[j]+2; end; end;
Procedure Raschet;
begin If t[i]>tk then q:=0.1*(t[i]-tk)*(t[i]-tk)*(t[i]-tk) else q:=0;
If (i>45)and(i<56) then qq:=0.3 else qq:=0;
t[i]:=t[i]+k[i]*(t[i+1]-2*t[i]+t[i-1])*dt/(h*h)+
(k[i+1]-k[i-1])*(t[i+1]-t[i-1])/(4*h*h)*dt+(q+qq)*dt; end;
BEGIN DV:=Detect; InitGraph(DV,MV,'c:\bp\bgi');
EC:=GraphResult; if EC <> grOK then Halt(1);
Repeat kk:=kk+1; Param_sred; For i:=2 to N-1 do Raschet;
For ii:=2 to N-1 do begin i:=N+1-ii; Raschet; end;
If kk/1500=round(kk/1500) then begin {cleardevice;}
For i:=2 to N do begin line(i*4+20,400-round(50*t[i]),
```

```

      (i-1)*4+20,400-round(50*t[i-1])); end; end;
line(20,400-round(50*tk),400,400-round(50*tk));
t[1]:=0; t[N]:=0; {delay(10);}
until (kk>60000)or(KeyPressed);
Repeat until KeyPressed; CloseGraph;
END.

```

Задача 17.8. Промоделируйте процесс горения в одномерной нелинейной среде, левый конец которой теплоизолирован, а правый находится в тепловом контакте с термостатом (имеет постоянную температуру). Коэффициент теплопроводности прямо пропорционален температуре: $k(T) = aT$. Количество теплоты, выделяющееся при горении, пропорционально температуре, а тепло, теряемое вследствие теплообмена с внешней средой, — квадрату температуры: $q = b_1T - b_2T^2$. В начальный момент средняя часть стержня нагрета.

Программа Пр-17.4 приведена ниже, результаты моделирования — на рис. 17.4.2. Температура средней части стержня достаточно высока для того, чтобы начался процесс горения. С ростом температуры излучаемая в пространство мощность растет пропорционально T^2 , а выделяющаяся мощность — пропорционально T . Поэтому температура достигает некоторого значения, после чего остается постоянной. Процесс горения охватывает новые элементы стержня, область с высокой температурой расширяется.

```

Uses crt, graph; Const n=100; m=1; h=1; dt=0.001;
Var ii,jj,kk,i,j,DV,MV,EC: integer; q,q1:real;
t: array[1..N] of real; k: array[1..N] of real;
Procedure Raschet;
begin q:=2; q1:=0.5; t[i]:=t[i]+k[i]*(t[i+1]-2*t[i]+t[i-1])*dt/(h*h)+
      (k[i+1]-k[i-1])*(t[i+1]-t[i-1])*dt/(4*h*h)+q*t[i]*dt-q1*t[i]*t[i]*dt;
end;
BEGIN DV:=Detect; InitGraph(DV,MV,'c:\bp\bgi');
EC:=GraphResult; if EC <> grOK then Halt(1);
For i:=1 to N do If (i>48)and(i<52) then t[i]:=2 else t[i]:=0;
Repeat For j:=1 to N do k[j]:=t[j];
For i:=2 to N-1 do Raschet;
For ii:=2 to N-1 do begin i:=N+1-ii; Raschet; end;
t[1]:=t[2]; t[N-1]:=t[N];
If kk/1000=round(kk/1000) then begin {cleardevice;}
For i:=2 to N do begin {circle(i*5+20,400-round(40*t[i]),2);}
line(i*5+20,420-round(80*t[i]),(i-1)*5+20,420-round(80*t[i-1]));
end; end; delay(10); kk:=kk+1;
until KeyPressed; CloseGraph;
END.

```

Пр-17.4.

До сих пор нами рассматривалась теплопроводность в твердых телах. Решение аналогичной задачи в жидких и газообразных средах существенно сложнее, так как требует учета конвективных потоков вещества. Если нагретое тело или источник тепла поместить в газообразную среду, находящуюся в однород-

ном поле тяжести, то нагретые, а значит более легкие слои газа будут подниматься вверх. Если газ находится в закрытом сосуде, то возникнет его циркуляция; ее расчет достаточно сложен и нами рассматриваться не будет.

Ограничимся моделированием ситуации, в которой источник тепла внесен в безграничную газообразную (жидкую) среду. Пусть он имеет форму бесконечно длинного стержня, расположенного горизонтально. Ось Ox направим горизонтально, а ось Oy вертикально вверх так, чтобы нагретый стержень был перпендикулярен плоскости xOy . Это понижает размерность задачи до двух.

Построим сетку $\Omega_{\Delta x, \Delta y, \Delta \tau}$. Из-за подъема теплого воздуха вверх, тепло от нижних узлов сетки передается верхним лучше, чем от верхних нижним. Это можно учесть так: если градиент температуры направлен вниз, то есть $T_{i,j-1} > T_{i,j+1}$, то температура $T_{i,j}$ элемента с координатами i и j повышается на $b(T_{i,j-1} - T_{i,j+1})$, в противном случае она понижается на ту же величину.

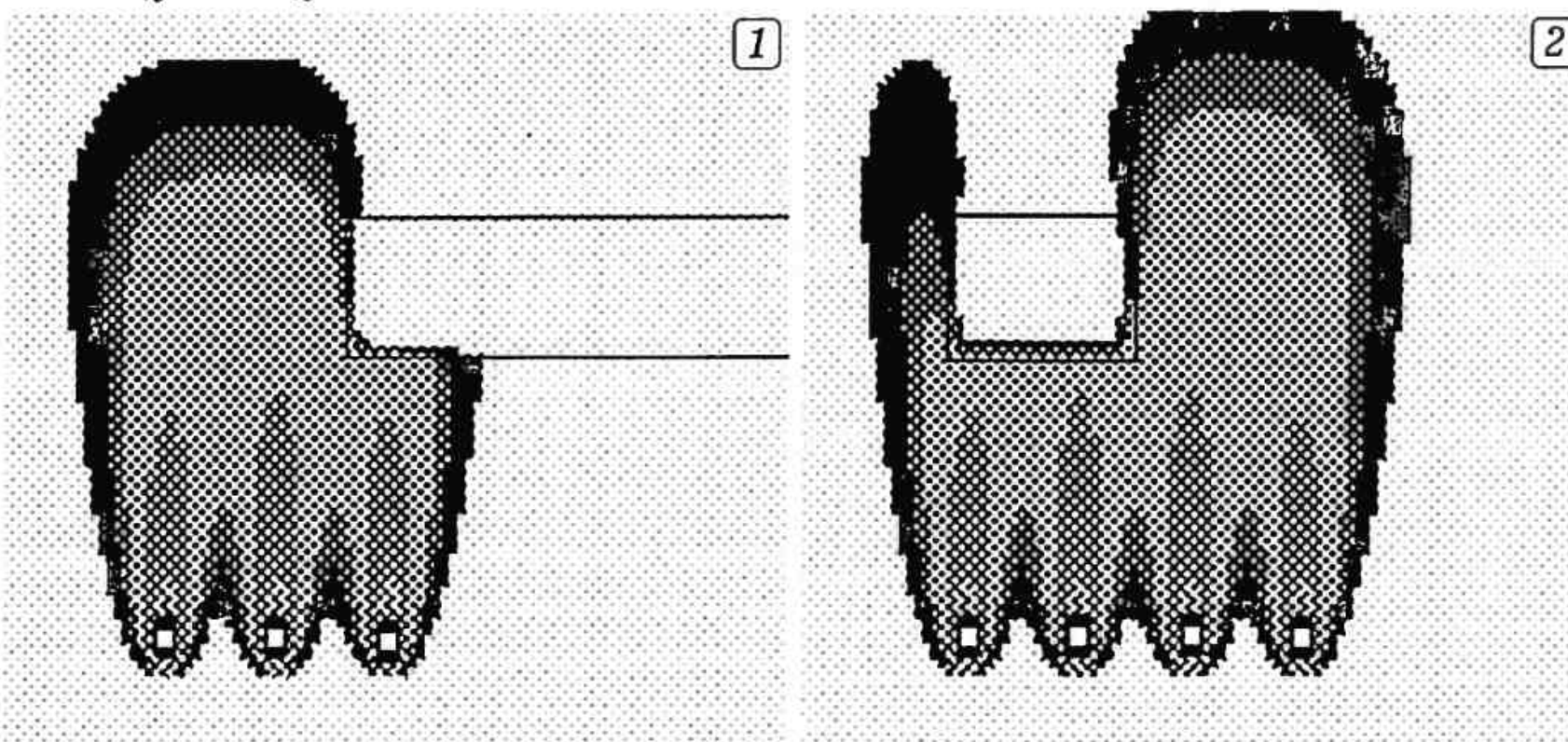


Рис. 17.5.

Задача 17.9. Нагреватель представляет собой систему параллельных стержней, лежащих в горизонтальной плоскости, и разогреваемых протекающим по ним током. Он установлен в газообразной (жидкой) среде, над ним находится твердое тело, имеющее форму прямоугольного параллелепипеда. Необходимо рассчитать поле температур в окружающем пространстве.

Запишем конечно-разностное уравнение:

$$\frac{T_{i,j}^{t+1} - T_{i,j}^t}{\Delta \tau} = k \left(\frac{T_{i-1,j}^t - 2T_{i,j}^t + T_{i+1,j}^t}{\Delta x^2} + \frac{T_{i,j-1}^t - 2T_{i,j}^t + T_{i,j+1}^t}{\Delta y^2} \right) + \frac{q_{i,j}}{c\rho} + b(T_{i,j-1}^t - T_{i,j+1}^t).$$

Алгоритм решения задачи во всем остальном остается прежним. В нашем случае для газообразной среды $k = 2$, $b = 1,6$, а для твердого тела $k = 0,1$, $b = 0$. Результаты моделирования (рис. 17.5) хорошо соответствуют результатам наблюдений, которые каждый из нас осуществлял в повседневной жизни.

18. МОДЕЛИРОВАНИЕ ВОЛНОВОГО ДВИЖЕНИЯ

Волновые процессы описываются волновым уравнением, которое в одномерном случае имеет вид:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial \tau^2} + \beta \frac{\partial \xi}{\partial \tau} - F(x, \tau),$$

где β — коэффициент затухания, $F(x, \tau)$ — внешняя сила, действующая на отдельные элементы среды. Это уравнение также называют уравнением вынужденных колебаний струны с затуханием. Волновое уравнение относится к диффуравнениям с частными производными гиперболического типа.

Сформулируем краевую задачу для колеблющейся мембраны. Пусть в положении покоя мембрана занимает прямоугольную область Ω , ограниченную контуром G , являющимся краем мембраны. На различные точки мембраны действуют вынуждающие силы, описываемые функцией $F(x, y, \tau)$. Необходимо рассчитать движение мембраны, то есть найти такую функцию $\xi(x, y, \tau)$, которая удовлетворяет волновому уравнению

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial \tau^2} - F(x, \tau)$$

и краевым условиям. К последним относятся начальные условия $\xi|_{\tau=0} = \varphi(x, y)$ и $\partial \xi / \partial \tau|_{\tau=0} = \psi(x, y)$, характеризующие смещение и скорость различных точек мембраны в момент времени $\tau = 0$, а также граничные условия $\xi_G = \varphi'(x, y, \tau)$ и $\partial \xi / \partial \tau_G = \psi'(x, y, \tau)$, определяющие смещение и скорость точек края мембраны в различные моменты времени.

Дискретизируем задачу, перейдем от непрерывной функции $\xi(x, y, \tau)$ к функции дискретного аргумента. Для этого создадим трехмерную сетку $\Omega_{\Delta x, \Delta y, \Delta \tau} = \{x_i = i\Delta x, y_j = j\Delta y, \tau = t\Delta \tau\}$, где $i = 0, 1, 2, \dots, N$, $j = 0, 1, 2, \dots, M$, $t = 0, 1, 2, \dots$. Запишем двумерное волновое уравнение в конечных разностях:

$$\frac{\xi_{i,j}^{t-1} - 2\xi_{i,j}^t + \xi_{i,j}^{t+1}}{\Delta \tau^2} = v^2 \left(\frac{\xi_{i-1,j}^t - 2\xi_{i,j}^t + \xi_{i+1,j}^t}{\Delta x^2} + \frac{\xi_{i,j-1}^t - 2\xi_{i,j}^t + \xi_{i,j+1}^t}{\Delta y^2} \right) + F_{i,j}^t$$

Отсюда смещение элемента с координатами i, j в момент $t+1$ равно:

$$\begin{aligned} \xi_{i,j}^{t+1} = & 2\xi_{i,j}^t - \xi_{i,j}^{t-1} + \\ & + v^2 \left(\frac{\xi_{i-1,j}^t - 2\xi_{i,j}^t + \xi_{i+1,j}^t}{\Delta x^2} + \frac{\xi_{i,j-1}^t - 2\xi_{i,j}^t + \xi_{i,j+1}^t}{\Delta y^2} \right) \Delta \tau^2 + F_{i,j}^t \Delta \tau^2. \end{aligned}$$

Для нахождения смещения элементов пластины на временном слое $t+1$ необходимо знать смещение элементов на слоях t и $t-1$. То есть компьютер должен работать с тремя массивами, в которых записаны $\xi_{i,j}^{t-1}$, $\xi_{i,j}^t$, $\xi_{i,j}^{t+1}$. Для решения задачи создается цикл, в котором перебираются все узлы пространст-

венной сетки и рассчитываются значения $\xi_{i,j}^t$ при $t = 1, 2, 3 \dots$. Отдельно следует предусмотреть цикл для переобозначения переменных $\xi_{i,j}^{t-1}$, $\xi_{i,j}^t$, $\xi_{i,j}^{t+1}$.

Запишем уравнение для расчета колебаний струны (одномерная среда):

$$\xi_i^{t+1} = 2\xi_i^t - \xi_i^{t-1} + v^2 \frac{\xi_{i-1}^t - 2\xi_i^t + \xi_{i+1}^t}{\Delta x^2} \Delta \tau^2 + F_{i,j}^t \Delta \tau^2.$$

Для получения движущегося профиля волны необходимо организовать цикл по i , в котором перебираются все элементы среды, вычисляются их смещения из положения равновесия. После этого стирается предыдущая моментальная фотография волны и строится новая. Все это должно находиться внутри цикла по времени.

Возможен несколько иной подход. Из волнового уравнения для одномерной среды $\partial^2 \xi / \partial \tau^2 = v^2 (\partial^2 \xi / \partial x^2)$ следует, что скорость данной точки в момент $t + 1$ составляет:

$$\eta(\tau + d\tau) = \dot{\xi}(\tau + d\tau) = \dot{\xi}(\tau) + d\left(\frac{\partial \xi}{\partial \tau}\right) = \eta(\tau) + v^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} d\tau.$$

Дискретизируя задачу, получаем, что скорость i -го элемента в момент $t + 1$ равна: $\eta_i^{t+1} = \eta_i^t + \theta_i^{t+1} \Delta \tau$, где θ_i^{t+1} — ускорение i -ого элемента:

$$\theta_i^{t+1} = v^2 \frac{\xi_{i+1}^t - 2\xi_i^t + \xi_{i-1}^t}{\Delta x^2}.$$

Тогда смещение i -ого элемента в момент времени $t + 1$ из положения равновесия равно: $\xi_i^{t+1} = \xi_i^t + \eta_i^{t+1} \Delta \tau$. Для моделирования распространения волны в одномерной среде используется программа Пр-18.1.

Uses crt, graph; Const n=200; h=1; dt=0.02; vv=8; Пр-18.1.
Var i, j, DV, MV, EC : integer; eta, xi, xi1, xi2 : array[1..N] of real; t, b : real;
BEGIN DV:=Detect; InitGraph(DV, MV, 'c:\bp\bgi');

Repeat t:=t+dt;
If t<6.28 then xi1[1]:=2*sin(t) else xi1[1]:=0;
For i:=2 to N-1 do xi2[i]:=2*xi1[i]-xi[i]+vv*(xi1[i-1]-2*xi1[i]+xi1[i+1])/h/h*dt*dt;
For i:=2 to N-1 do begin xi[i]:=xi1[i]; xi1[i]:=xi2[i]; end;
For i:=1 to N do begin
setcolor(black); circle(i*3-3, 240-round(xi[i-1]*50), 1);
setcolor(white); circle(i*3-3, 240-round(xi1[i-1]*50), 1); end;
until KeyPressed; CloseGraph;
END.

Рассмотренная компьютерная модель позволяет выполнить серию численных экспериментов и изучить следующие явления: 1) распространение и отражение волны (одиночного импульса, цуга) от закрепленного и незакрепленного конца упругой среды; 2) интерференция волн (одиночных импульсов, цугов), возникающая в результате отражения падающей волны либо излучения двух когерентных волн; 3) отражение и прохождение волны (одиночного им-

пульса, цуга) через границу раздела двух сред; 4) изучение зависимости длины волны от частоты и скорости распространения; 5) наблюдение изменения фазы отраженной волны на π при отражении от среды, в которой скорость волны меньше.

Program PR; {\$N+}

Пр-18.2.

Uses crt, graph;

Const N=100; M=100; NN=200; h=1; dt=0.2; SizeOfReal=6;

type RealPoint= ^real;

Var t : single; r,s,i, j, ii, jj, DriverVar, ModeVar, ErrorCode : integer;

xi : array[1..NN] of pointer; vv : real;

Function Ad(i,j: word) : RealPoint;

begin Ad:=Ptr(Seg(xi[i]^),ofs(xi[i]^)+(j-i)*SizeOfReal); end;

Procedure Raschet; begin

For i:=2 to N-1 do For j:=2 to M-1 do

begin If i<50 then vv:=4 else vv:=4; Ad(i+n,j)^:=Ad(i+n,j)^+

vv*(Ad(i,j+1)^-2*Ad(i,j)^+Ad(i,j-1)^)/h*dt+

vv*(Ad(i+1,j)^-2*Ad(i,j)^+Ad(i-1,j)^)/h*dt; end;

For i:=2 to N-1 do For j:=2 to M-1 do Ad(i,j)^:=Ad(i,j)^+Ad(i+n,j)^*dt;

For ii:=2 to N-1 do For jj:=2 to M-1 do

begin If i<50 then vv:=4 else vv:=4; j:=M+1-jj; i:=N+1-ii;

Ad(i+n,j)^:=Ad(i+n,j)^+vv*(Ad(i,j+1)^-2*Ad(i,j)^+Ad(i,j-1)^)/h*dt+

vv*(Ad(i+1,j)^-2*Ad(i,j)^+Ad(i-1,j)^)/h*dt; end;

For j:=2 to M-1 do For i:=2 to N-1 do Ad(i,j)^:=Ad(i,j)^+Ad(i+n,j)^*dt;

end;

Procedure Draw;

begin For i:=2 to N-1 do For j:=2 to M-1 do begin

setcolor(round(Ad(i,j)^/2)+5);

rectangle(10+i*4,450-j*4,13+i*4,453-j*4);

rectangle(11+i*4,451-j*4,12+i*4,452-j*4); end;

end;

BEGIN DriverVar:=Detect; InitGraph(DriverVar,ModeVar,'c:\bp\bgi');

setbkcolor(15); setcolor(8);

For i:=1 to NN do begin GetMem(xi[i], M*SizeOfReal);

For j:=1 to M do Ad(i,j)^:=0; end;

Repeat t:=t+dt; if 4*t>0*6.28 then begin

Ad(50,50)^:=30*sin(t*1); Ad(50,51)^:=30*sin(t*1);

Ad(21,50)^:=30*sin(t*1); Ad(21,51)^:=30*sin(t*1); end;

Raschet; Draw; until KeyPressed; Release(HeapOrg); CloseGraph;

END.

Выше представлена программа Пр-18.2, моделирующая распространение волны в двумерной среде, а также интерференцию и дифракцию волн.

Задача 18.1. Промоделируйте распространение импульса в одномерной упругой среде, его отражение и прохождение через границу раздела двух сред.

Используемая программа содержит цикл, в котором последовательно перебираются все элементы среды и вычисляются их смещения в следующий мо-

мент $t + 1$. Если левый конец струны совершит одно колебание, то вдоль струны побежит волна, которая отразится от границы раздела сред с различными скоростями U распространения волны (рис. 18.1). Можно убедиться в том, что при отражении от среды с меньшей скоростью происходит потеря полуволны.

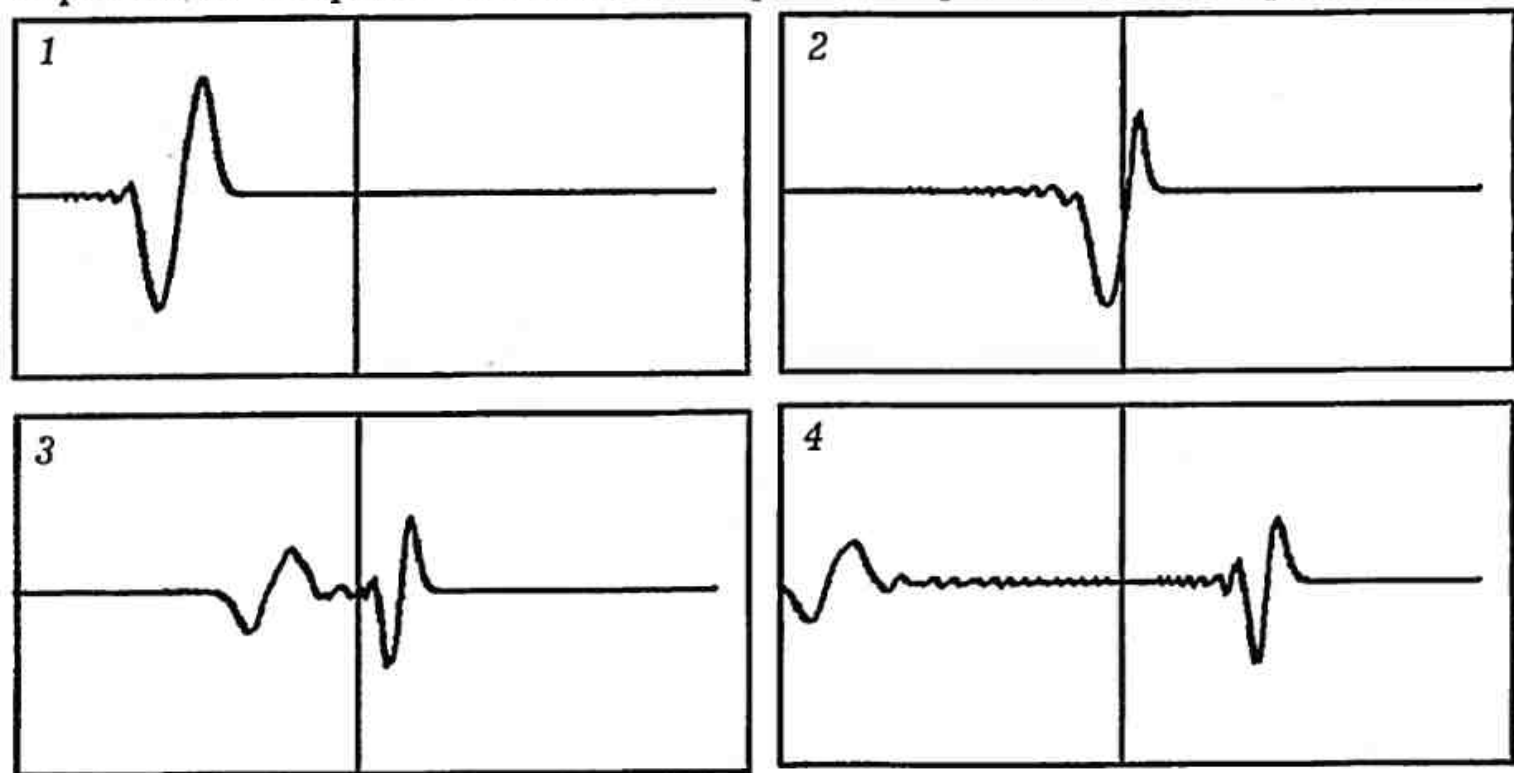


Рис. 18.1.

Задача 18.2. Используя рассмотренную выше модель одномерной волны, исследуйте интерференцию двух волн.

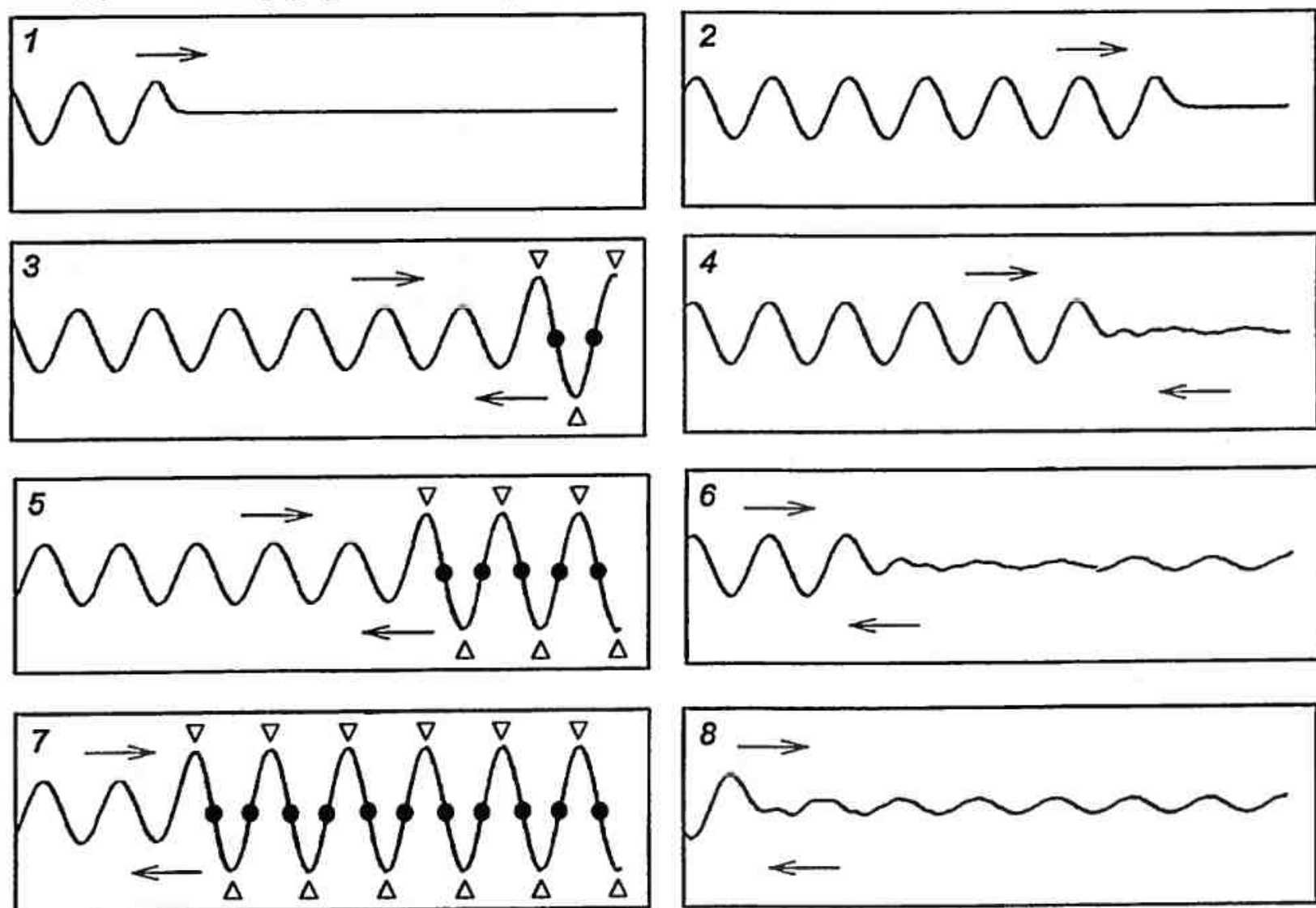


Рис. 18.2.

При длительных колебаниях левого конца струны возникает гармоническая волна, отражающаяся от правого незакрепленного (или закрепленного)

конца струны, которая интерферирует с падающей (рис. 18.2). В области наложения падающей и отраженной волн некоторые точки струны колеблются с максимальной амплитудой (пучности, показаны треугольниками), а некоторые не колеблются вообще (узлы, показаны точками).

Задача 18.3. Плоская гармоническая волна падает на слой поролона, имеющий высокий коэффициент поглощения. Исследуйте данное явление методом компьютерного моделирования.

Необходимо решить одномерное волновое уравнение с затуханием:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial \tau^2} + \beta \frac{\partial \xi}{\partial \tau}.$$

Заменим производные их конечно-разностными аппроксимациями и решим получающееся алгебраическое уравнение относительно ξ_i^{t+1} :

$$\xi_i^{t+1} = (2\xi_i^t - \xi_i^{t-1} + v^2 \frac{\xi_{i-1}^t - 2\xi_i^t + \xi_{i+1}^t}{\Delta x^2} \Delta \tau^2 + v^2 \beta_i \Delta \tau \xi_i^t) \frac{1}{1 + v^2 \beta_i \Delta \tau}.$$

В остальном задача решается традиционным способом. Результат приведен на рис. 18.3.1. Видно, что при прохождении среды с высоким коэффициентом поглощения амплитуда волны уменьшается по экспоненциальному закону Бугера: $A(x) = A_0 \exp(-\alpha x)$.

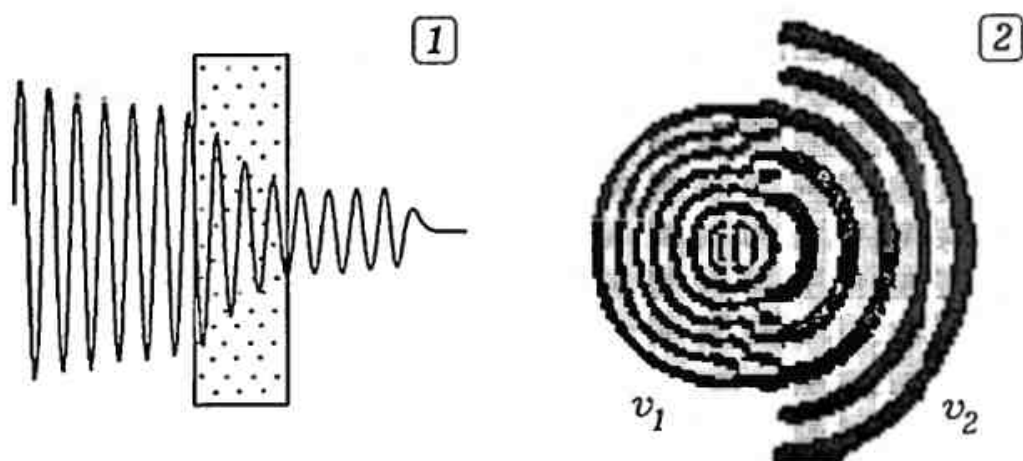


Рис. 18.3.

Задача 18.4. Изучите интерференцию двух цугов, распространяющихся навстречу друг другу.

Задача 18.5. Используя компьютерную модель, изучите зависимость длины волны от частоты.

Задача 18.6. Точечный источник двумерной волны расположен вблизи границы раздела двух сред с различными скоростями распространения волны. Исследуйте прохождение волны из одной среды в другую.

Используется рассмотренная выше программа для моделирования двумерной волны. Чтобы получить границу раздела двух сред, необходимо задать в узлах сетки, для которых $x < b$, скорость волны v_1 , а во всех остальных узлах — v_2 . Результат моделирования показан на рис. 18.3.2.

Задача 18.7. Имеется прямоугольная пластина, некоторые элементы которой совершают колебания (источники), а некоторые — не способны колебаться (препятствия). Края пластины закреплены. Изучите распространение, отражение, интерференцию и дифракцию упругой волны в двумерной среде.

Результаты моделирования излучения, распространения и отражения двумерной волны представлены на рис. 18.4. Источник И моделируется совокупностью элементов, колеблющихся по гармоническому закону, экран Э состоит из неподвижных элементов. Хорошо видно, что имеет место отражение волны от края пластины, и в области наложения падающей и отраженной волн наблюдается интерференция. На остальных рисунках приведены результаты моделирования дифракции волн на отверстиях и экране. Так как длина волны сравнима с размером препятствия, то волны их огибают и заходят в область геометрической тени.



Рис. 18.4.

Задача 18.8. Напишите программу, моделирующую отражение двумерной волны от вогнутого зеркала.

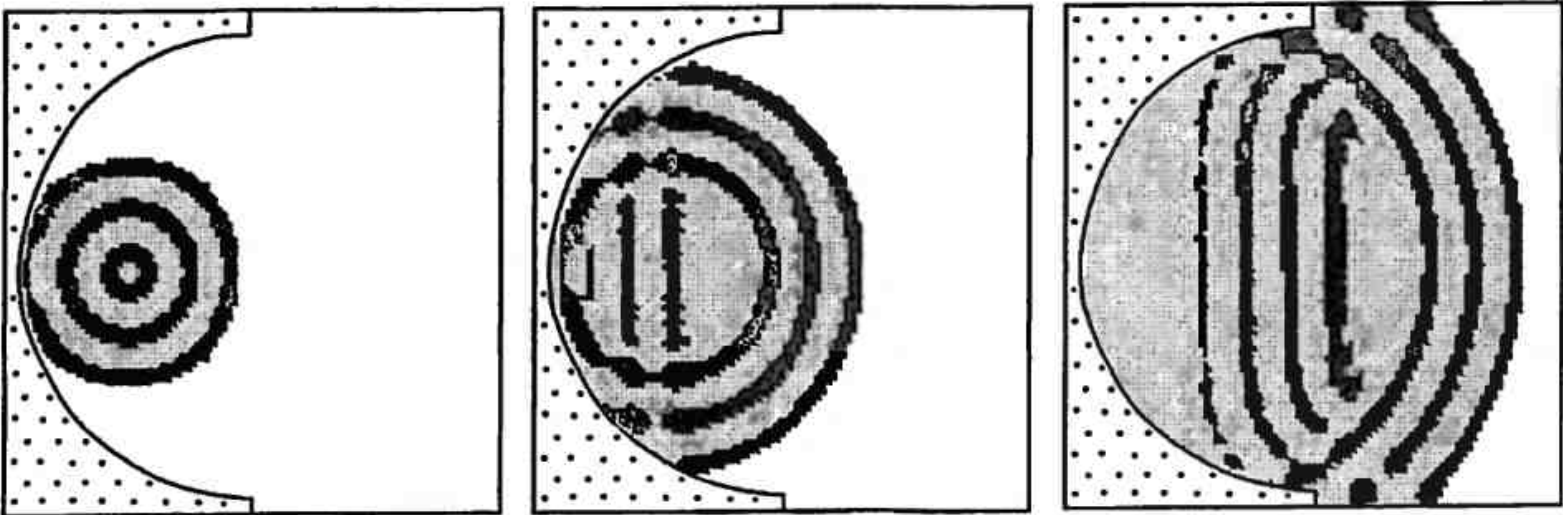


Рис. 18.5.

Используется программа для моделирования двумерной волны. Вблизи центра пластины создается источник гармонических волн (четыре соседних элемента совершают несколько гармонических колебаний). Вогнутая поверхность моделируется путем задания граничных условий: точки этой поверхности

должны оставаться неподвижными. То есть при выполнении вычислений смещения $\xi_{i,j}$ для всех узлов сетки, удовлетворяющих двум неравенствам $\sqrt{(50-i)^2 + (50-j)^2} > 2000$ и $i < 50$, должны приравняться к нулю. Результат моделирования — на рис.18.5. Видно, как образовавшаяся сферическая волна дошла до отражающей поверхности и, отразившись от нее, превратилась в плоскую волну.

Задача 18.9. Имеется упругая пластина квадратной формы, края которой закреплены. В центре — источник гармонических колебаний. Про моделируйте собственные колебания упругой пластины.

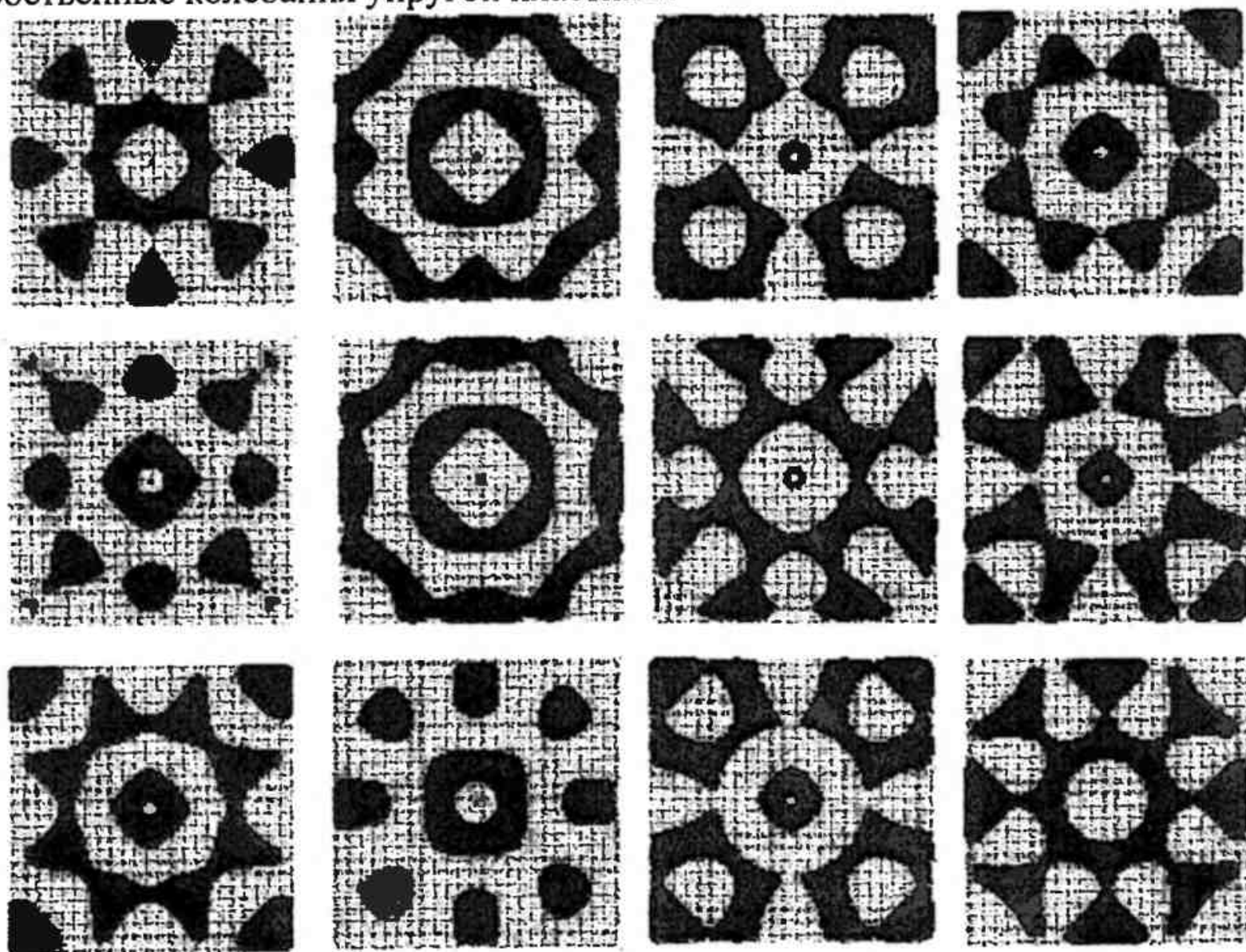


Рис. 18.6.

Задача решается с помощью программы, моделирующей распространение волн в двумерной среде. Источник необходимо расположить в центре пластины, частота его колебаний должна быть близка к собственной частоте пластины, в этом случае длина ее стороны будет примерно равна длине волны. Через некоторое время после начала колебаний источника, когда излучаемая волна многократно отразится от края пластины, на экране монитора наблюдаются картины, подобные изображенным на рис. 18.6. Они отдаленно напоминают фигуры Хладни, но не являются ими. На каждом из рисунков изображена "моментальная фотография" пластины; можно считать, что темные участки смещены к нам, а светлые — от нас. Изучите собственные колебания пластины в случае, когда источник не находится в центре.

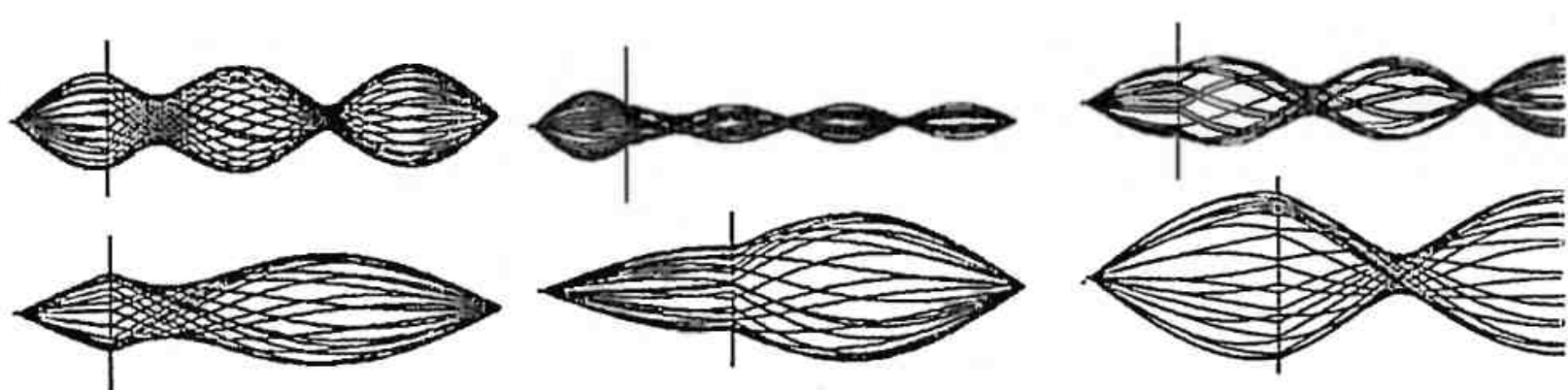


Рис. 18.7.

Задача 18.10. Промоделируйте вынужденные колебания струны, на одну из точек которой действует вынуждающая сила, изменяющаяся по гармоническому закону.

Запишем уравнение вынужденных колебаний струны с затуханием:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial \tau^2} = v^2 \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} - \beta \frac{\partial \xi}{\partial \tau} + F(x, \tau) \right).$$

В конечных разностях оно выглядит так:

$$\frac{\xi_i^{t-1} - 2\xi_i^t + \xi_i^{t+1}}{\Delta \tau^2} = v^2 \left(\frac{\xi_{i-1}^t - 2\xi_i^t + \xi_{i+1}^t}{\Delta x^2} - \beta \frac{\xi_i^{t+1} - \xi_i^t}{\Delta \tau} + F_i^t \right),$$

$$\xi_i^{t+1} = (2\xi_i^t - \xi_i^{t-1} + v^2 \frac{\xi_{i-1}^t - 2\xi_i^t + \xi_{i+1}^t}{\Delta x^2} \Delta \tau^2 + v^2 \beta \Delta \tau \xi_i^t + F v^2 \Delta \tau^2) \frac{1}{1 + v^2 \beta \Delta \tau}.$$

Программа Пр-18.3 для моделирования вынужденных колебаний струны представлена ниже, результаты моделирования приведены на рис. 18.7. Точка приложения вынуждающей силы показана вертикальным отрезком. Компьютерная модель позволяет изучить зависимость колебаний струны от точки приложения вынуждающей силы, скорости распространения возмущения, коэффициента затухания.

Uses crt, graph; Const n=100; h=1; dt=0.1; Пр-18.3.

Var k,i, j, DV, MV, EC : integer; eta,xi,xi1,xi2 : array[1..N] of real;

f, t, vv, b : real;

Procedure Raschet;

begin vv:=5; For i:=2 to N-1 do begin b:=0.03;

If i=20 then f:=0.01*sin(0.2*t) else f:=0;

xi2[i]:=(2*xi1[i]-xi[i]+vv*(xi1[i-1]-2*xi1[i]+xi1[i+1])/h/h*dt*dt
+b*xi1[i]*dt+F*dt)/(1+b*dt); end;

For i:=2 to N-1 do begin xi[i]:=xi1[i]; xi1[i]:=xi2[i]; end; end;

BEGIN DV:=Detect; InitGraph(DV,MV,'c:\bp\bgi');

EC:=GraphResult; If EC<>grOK then Halt(1);

Repeat t:=t+dt; xi1[N]:=xi1[N-1]; Raschet; k:=k+1;

If (k>1000)and(round(k/1500)=k/1500) then For i:=1 to N do
line(i*5-3,240-round(xi1[i-1]*200),i*5,240-round(xi1[i]*200));

until KeyPressed; CloseGraph;

END.

19. РАСЧЕТ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПОТЕНЦИАЛА ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОГО ПОЛЯ

Нахождение распределения потенциала в случае, когда поле создается протяженными заряженными телами, рядом с которыми находятся проводники, и известен потенциал вдоль границы рассматриваемой области, требует решения уравнения Пуассона. Запишем его для однородной двумерной среды:

$$\Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = -\frac{\rho(x, y)}{\varepsilon}.$$

При отсутствии зарядов получаем уравнение Лапласа: $\Delta\varphi = 0$.

Расчет электростатического поля требует определения функции $\varphi(x, y)$, превращающего уравнение Пуассона в истинное высказывание во всех точках вне проводников, стремящуюся к 0 на бесконечности и равную заданным значениям $\varphi_i = \text{const}$ на поверхностях проводников. Это задача Дирихле: необходимо решить дифференциальное уравнение в частных производных в замкнутой области Ω при известном распределении искомой функции $\varphi(x, y)$ на границе области. Используют метод сеток: 1) от непрерывной области Ω переходят к сеточной области $\Omega_{\Delta x, \Delta y}$; 2) для узлов сетки $\Omega_{\Delta x, \Delta y}$ составляют конечно-разностные уравнения; 3) исходя из начальных и граничных условий, задают начальные значения искомой функции $\varphi = \varphi(x, y)$ и ее значения в граничных узлах сетки $\Omega_{\Delta x, \Delta y}$; 4) решают получившуюся систему конечно-разностных уравнений, определяя значения функции в узлах сетки. Переход от решаемого ДУЧП к конечно-разностному уравнению осуществляется путем замены производных на их конечно-разностные аппроксимации:

$$\frac{\varphi_{i-1,j} - 2\varphi_{i,j} + \varphi_{i+1,j}}{h^2} + \frac{\varphi_{i,j-1} - 2\varphi_{i,j} + \varphi_{i,j+1}}{h^2} = -\frac{\rho_{i,j}}{\varepsilon},$$

$$\varphi_{i,j} = (\varphi_{i+1,j} + \varphi_{i-1,j} + \varphi_{i,j+1} + \varphi_{i,j-1} + \rho_{i,j}h^2 / \varepsilon) / 4.$$

Если среда неоднородная, то получаем:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\varepsilon(x, y) \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\varepsilon(x, y) \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) = -\rho(x, y),$$

$$\frac{\varepsilon_{i+1,j} - \varepsilon_{i-1,j}}{2h} \frac{\varphi_{i+1,j} - \varphi_{i-1,j}}{2h} + \varepsilon_{i,j} \frac{\varphi_{i-1,j} - 2\varphi_{i,j} + \varphi_{i+1,j}}{h^2} +$$

$$\frac{\varepsilon_{i,j+1} - \varepsilon_{i,j-1}}{2h} \frac{\varphi_{i,j+1} - \varphi_{i,j-1}}{2h} + \varepsilon_{i,j} \frac{\varphi_{i,j-1} - 2\varphi_{i,j} + \varphi_{i,j+1}}{h^2} = -\rho_{i,j},$$

$$\varphi_{i,j} = (\varphi_{i+1,j} + \varphi_{i-1,j} + \varphi_{i,j+1} + \varphi_{i,j-1} + \rho_{i,j}h^2 / \varepsilon_{i,j}) / 4 + [(\varepsilon_{i+1,j} - \varepsilon_{i-1,j}) \cdot (\varphi_{i+1,j} - \varphi_{i-1,j}) + (\varepsilon_{i,j+1} - \varepsilon_{i,j-1}) \cdot (\varphi_{i,j+1} - \varphi_{i,j-1})] / (16\varepsilon_{i,j}).$$

Для решения рассматриваемой стационарной задачи используется релаксационный метод последовательных приближений: во всех внутренних узлах сетки задаются произвольные исходные значения искомой функции $\varphi = \varphi(x_i, y_j)$; значения функции во внешних узлах должны соответствовать граничным условиям. Осуществляется первая итерация, в ходе которой перебираются все внутренние узлы сетки и исходя из начальных значений определяют новые уточненные значения функции $\varphi = \varphi(x_i, y_j)$. Затем осуществляется вторая, третья, ... и т.д. приближения, причем результаты i -ой итерации используются в качестве исходных для $i+1$ -ой итерации. В результате получающиеся значения $\varphi = \varphi(x_i, y_j)$ приближаются к истинному распределению потенциала $\varphi = \varphi(x, y)$.

Задача 19.1. Рассчитайте стационарное распределение потенциала электростатического поля между двумя бесконечно большими пластинами 1 и 3, расположенными перпендикулярно оси Ox на расстоянии b друг от друга. Потенциалы пластин φ_1 и φ_2 известны. Между ними расположена пластина 2 из диэлектрика, заряженная положительно (отрицательно). Рядом с пластиной 3 имеется слой диэлектрика с проницаемостью ε .

Это одномерная задача, так как потенциал зависит только от координаты x . Она решается релаксационным методом последовательных приближений. Необходимо задать потенциалы на границах области, плотность распределения заряда ρ и учесть, что среда неоднородная. На рис. 19.1.1 и 19.1.2 представлен результат решения задачи для двух различных случаев. На рис. 19.1.3 показано распределение потенциала вдоль оси Ox в случае, когда между металлическими пластинами имеется толстая пластина с диэлектрической проницаемостью ε , внутри которой равномерно "размазан" электрический заряд ($\rho = \text{const}$). Рис. 19.1.1 и 19.1.3 также помогают понять сущность метода последовательных итераций, — на них показаны не только искомый график $\varphi = \varphi(x)$, но и несколько предшествующих ему приближений.

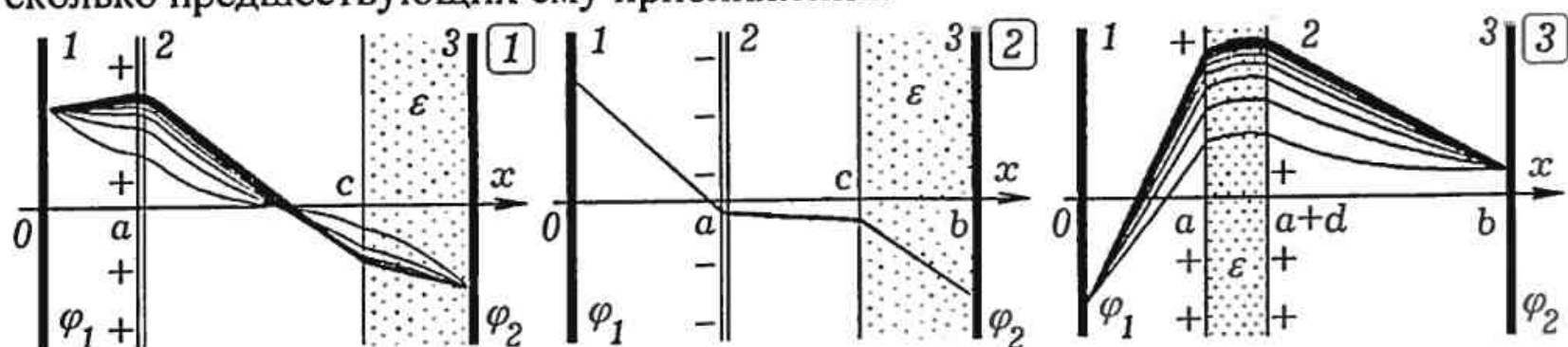


Рис. 19.1.

Задача 19.2. Дана однородная прямоугольная пластина из диэлектрика. Задана плотность распределения заряда $\rho(x, y)$ и граничные условия $\varphi(x, y)_S$. Рассчитайте распределение потенциала $\varphi(x, y)$ по поверхности пластины.

Задача сводится к решению конечно-разностного уравнения:

$$\varphi_{i,j} = (\varphi_{i+1,j} + \varphi_{i-1,j} + \varphi_{i,j+1} + \varphi_{i,j-1} + \rho_{i,j} h^2 / \varepsilon) / 4.$$

Используемая программа Пр-19.1 представлена ниже.

Uses crt, graph;

Const n=100; m=100;

Var i,ii,j,jj,k,DV, MV : integer;

fi: array[1..N, 1..M] of real; q :real;

Procedure Raschet;

begin If ((i>55)and(i<65)and(j>45)and(j<55))then q:=3 else q:=0;

If ((i>15)and(i<25)and(j>15)and(j<25))then q:=-4;

If ((i>35)and(i<45)and(j>15)and(j<20))then q:=-6;

fi[i,j]:=0.25*(fi[i+1,j]+fi[i-1,j]+fi[i,j+1]+fi[i,j-1])+q; end;

Procedure Gran_usl;

begin for i:=1 to N do

begin fi[i,2]:=0; fi[i,M-1]:=2*i; fi[2,i]:=0; fi[N-1,i]:=2*i; end;

For i:=60 to 65 do For j:=70 to 75 do fi[i,j]:=0; end;

BEGIN DV:=Detect; InitGraph(DV,MV,'c:\bp\bgi');

Repeat inc(k); For i:=2 to N-1 do For j:=2 to M-1 do Raschet;

Gran_usl; For j:=2 to M-1 do For i:=2 to N-1 do Raschet;

Gran_usl; For i:=2 to N-1 do For jj:=2 to M-1 do

begin j:=M+1-jj; Raschet; end;

Gran_usl; For j:=2 to M-1 do For ii:=2 to N-1 do

begin i:=N+1-ii; Raschet; end;

Gran_usl; If k/50=round(k/50) then For i:=2 to N-1 do For j:=2 to M-1 do

begin setcolor(round(fi[i,j]/20)); rectangle(i*4+50,j*4,i*4+54,j*4+4);

rectangle(i*4+51,j*4+1,i*4+53,j*4+3); end;

until KeyPressed; CloseGraph;

END.

Задача 19.3. Имеется неоднородная прямоугольная пластина из диэлектрика с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon = \varepsilon(x, y)$. Задана плотность распределения заряда $\rho(x, y)$ и граничные условия $\varphi(x, y)_S$. Рассчитайте потенциал $\varphi(x, y)$ во всех точках пластины.

Алгоритм состоит в последовательном переборе узлов сетки, в ходе которого вычисляются значения потенциала $\varphi_{i,j}$ по формуле:

$$\varphi_{i,j} = (\varphi_{i+1,j} + \varphi_{i-1,j} + \varphi_{i,j+1} + \varphi_{i,j-1} + \rho_{i,j} h^2 / \varepsilon_{i,j}) / 4 + [(\varepsilon_{i+1,j} - \varepsilon_{i-1,j}) \cdot (\varphi_{i+1,j} - \varphi_{i-1,j}) + (\varepsilon_{i,j+1} - \varepsilon_{i,j-1}) \cdot (\varphi_{i,j+1} - \varphi_{i,j-1})] / (16 \varepsilon_{i,j}).$$

Перед каждым проходом следует учитывать граничные условия задачи, допустим, приравнивать потенциалы на краю двумерной области к некоторой функции координат. Если внутри области имеются точки, потенциалы которых остаются неизменными и равными φ_0 , например, точки проводника, то необходимо их приравнять к φ_0 .

Программа Пр-19.2 содержит: 1) процедуру Sreda, в которой задается диэлектрическая проницаемость среды $\varepsilon_{i,j}$ в узлах сетки; 2) процедуру Gran, в которой учитывается распределение потенциала вдоль границы области; 3) процедуру Raschet, в которой задается распределение заряда и вычисляется по-

тенциал в различных узлах i, j ; 4) процедуру Draw, выводящую результат вычислений на экран; 5) основную часть программы, в которой осуществляется вызов перечисленных процедур в требуемом порядке.

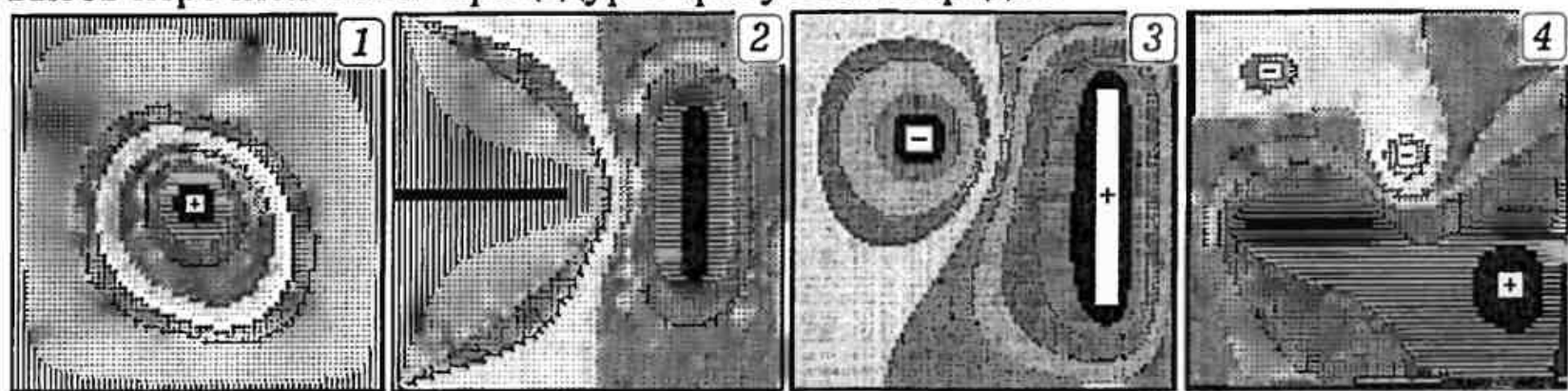


Рис. 19.2.

На рис. 19.2 показаны распределения потенциала двумерных полей: 1) поля точечного заряда в неоднородной среде; 2) поля, созданного острием и пластиной, имеющими разные потенциалы; 3) поля небольшого тела и пластины, заряженных разноименно; 4) поля нескольких заряженных тел вблизи, которых расположен заземленный проводник. В каждом случае заданы свои граничные условия.

Uses crt, graph; Const N=70; M=70;

Пр-19.2.

Var i, j, ii, jj, k, q, DV, MV :integer; fi, e: array[1..N, 1..M] of real;

Procedure Sreda;

begin For i:=1 to N do For j:=1 to M do e[i,j]:=1+0.015*j*i; end;

Procedure Gran;

begin For i:=1 to N do begin fi[i,1]:=-350; fi[i,M]:=350;

fi[i,2]:=-350; fi[i,M-1]:=350; fi[2,i]:=-350+10*i;

fi[N-1,i]:=-350+10*i; fi[1,i]:=-350+10*i; fi[N,i]:=-350+10*i;

end; For j:=15 to 25 do fi[55,j]:=0; end;

Procedure Raschet;

begin q:=0; If ((i>20)and(i<30)and(j>30)and(j<35))then q:=500;

If ((i>40)and(i<55)and(j>40)and(j<55))then q:=-300;

fi[i,j]:=(fi[i+1,j]+fi[i-1,j]+fi[i,j+1]+fi[i,j-1]+q/e[i,j])/4+

((e[i-1,j]-e[i+1,j])*(fi[i+1,j]-fi[i-1,j])+

(e[i,j-1]-e[i,j+1])*(fi[i,j+1]-fi[i,j-1]))/(16*e[i,j]); end;

Procedure Draw;

begin setcolor(round(fi[i,j]/30)); rectangle(i*4+50,j*4,i*4+54,j*4+4);

rectangle(i*4+51,j*4+1,i*4+53,j*4+3); end;

BEGIN DV:=Detect; InitGraph(DV,MV,'c:\bp\bgi'); Sreda;

Repeat inc(k);

For i:=2 to N-1 do For j:=2 to M-1 do Raschet;

Gran; For j:=2 to M-1 do For i:=2 to N-1 do Raschet;

Gran; For i:=2 to N-1 do For jj:=2 to M-1 do begin j:=M+1-jj; Raschet; end;

Gran; For j:=2 to M-1 do For ii:=2 to N-1 do begin i:=N+1-ii; Raschet; end;

Gran; If k/10=round(k/10) then For i:=2 to N-1 do For j:=2 to M-1 do Draw;

until KeyPressed; CloseGraph;

END.

20. РАСЧЕТ ТЕЧЕНИЯ ЖИДКОСТИ

Проанализируем установившееся потенциальное течение идеальной (невязкой) жидкости без источников. Потенциальный характер течения означает, что линии тока незамкнуты, то есть течение невихревое (во всех точках $\text{rot } \vec{v} = 0$). При этом поле скоростей является потенциальным, можно ввести функцию $\varphi(x, y, z)$, называемую потенциалом скорости, такую, что

$$\vec{v} = -\text{grad } \varphi = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} \vec{i} - \frac{\partial \varphi}{\partial y} \vec{j} - \frac{\partial \varphi}{\partial z} \vec{k} = -\frac{\partial \varphi}{\partial \vec{r}}.$$

Так как источники течения отсутствуют, то

$$\text{div } \vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0.$$

Отсюда следует $\text{div}(\text{grad } \varphi) = 0$, или

$$\Delta \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0.$$

Таким образом, потенциал скорости удовлетворяет уравнению Лапласа.

Даже под перечисленные ограничения попадает большой класс задач. Из них выберем простейшую: рассмотрим плоское течение жидкости, при котором все ее частицы перемещаются параллельно некоторой плоскости, причем те из них, что лежат на одном перпендикуляре к этой плоскости, имеют одинаковые скорости. Если совместить с этой плоскостью систему координат xOy , то получим $v_x = f_1(x, y, \tau)$, $v_y = f_2(x, y, \tau)$, $v_z = 0$. Представим себе такую функцию $\psi(x, y, \tau)$, что

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

Эту функцию называют функцией тока. Множество точек, для которых $\psi(x, y, \tau) = \text{const}$ при фиксированном τ в силу стационарности течения, образует линию тока. При этом семейство линий равного потенциала скорости $\varphi(x, y, \tau) = \text{const}$ ортогонально (перпендикулярно) совокупности линий тока $\psi(x, y, \tau) = \text{const}$. Для функции тока $\psi(x, y, \tau)$ также можно записать уравнение Лапласа:

$$\Delta \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0.$$

При расчете течения следует учитывать граничные условия: значения рассчитываемых функций и их производных на границах твердых тел, обтекаемых жидкостью. Для идеальной жидкости проекция v_n скорости жидкости на нормаль \vec{n} к поверхности тела, в системе отсчета связанной с телом, равна 0: $v_n = (\partial \varphi / \partial \vec{n})_S = 0$.

Рассмотрим течение вязкой жидкости. Если ось Oz совпадает с направлением течения, то можно показать, что выполняется соотношение:

$$\frac{\partial v_z}{\partial \tau} = \nu \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} \right) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z},$$

где $\nu = \eta / \rho$ — кинематическая вязкость жидкости, $\partial p / \partial z$ — градиент давления. В случае стационарного течения $\partial v_z / \partial \tau = 0$.

Задача 20.1. В плоском сосуде две несмешивающиеся жидкости с вязкостями ν_1 и ν_2 ; толщина слоя первой жидкости d_1 , а второй — d_2 . На свободной поверхности второй жидкости находится пластина. Определите распределение скоростей по слоям жидкости в сосуде $v(x)$, если: 1) пластина движется равноускоренно с ускорением $a = \text{const}$; 2) пластина сначала движется равноускоренно с ускорением $a = \text{const}$, а затем равномерно со скоростью $v = \text{const}$; 3) пластина совершает гармонические колебания влево–вправо; 4) пластина движется влево, а дно сосуда — вправо.

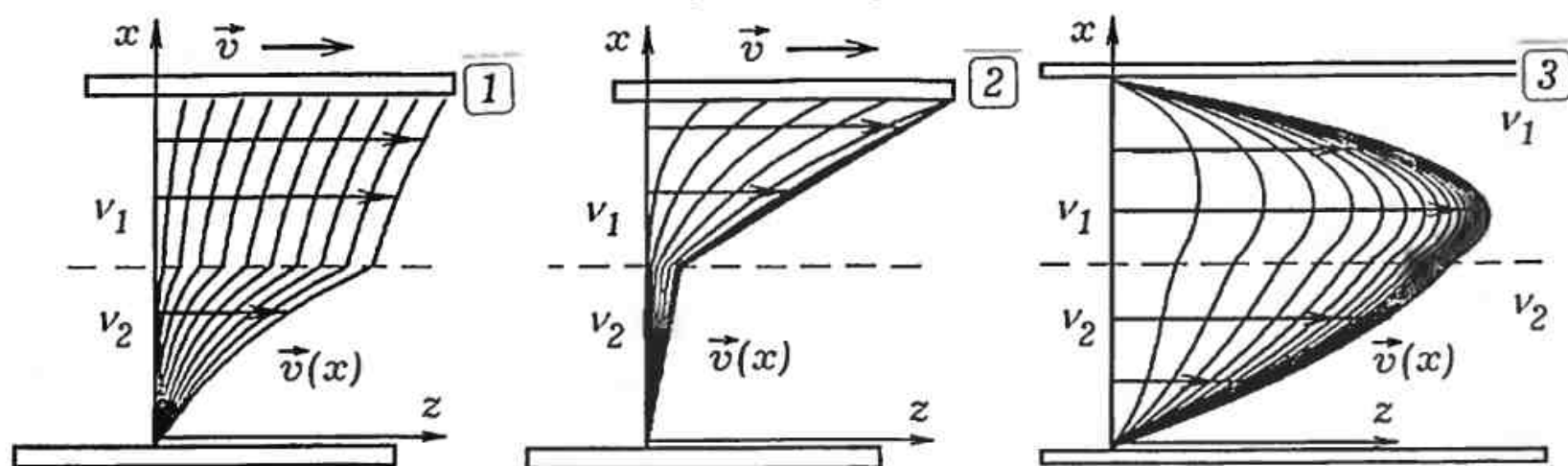


Рис. 20.1.

Рассмотрим результаты вычислений для двух случаев: 1) скорость верхней пластины растет пропорционально времени (рис. 20.1.1); 2) верхняя пластина движется равномерно (рис. 20.1.2). Используется программа Пр-20.1.

Задача 20.2. В пространстве между двумя горизонтальными широкими пластинами находится вязкая жидкость. Рассчитайте скорости различных слоев жидкости, если на концах канала поддерживается постоянная разность давлений. Решите задачу для случая, когда между пластинами две несмешивающиеся жидкости с различными вязкостями и плотностями. Течение ламинарное.

Чтобы решить задачу, запишем уравнение движения вязкой жидкости для одномерного случая в конечных разностях:

$$\frac{\partial v_z}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\nu(x) \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial \nu}{\partial x} \cdot \frac{\partial v_z}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z},$$

$$\frac{v_i^{t+1} - v_i^t}{\Delta \tau} = \frac{\nu_{i+1} - \nu_{i-1}}{2\Delta x} \cdot \frac{v_{i+1}^t - v_{i-1}^t}{2\Delta x} + \nu_i \frac{v_{i+1}^t - 2v_i^t + v_{i-1}^t}{\Delta x^2} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z},$$

$$v_i^{t+1} = v_i^t + \frac{\nu_{i+1} - \nu_{i-1}}{2\Delta x} \cdot \frac{v_{i+1}^t - v_{i-1}^t}{2\Delta x} \Delta \tau + \nu_i \frac{v_{i+1}^t - 2v_i^t + v_{i-1}^t}{\Delta x^2} \Delta \tau - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \Delta \tau.$$

Используется программа ПР–20.1. Результаты представлены на рис. 20.1.3.

Uses crt, graph;

Пр-20.1.

Const n=90; h=1; dt=0.05; Var k, ii, i, DV, MV, EC : integer;

rho, t : real; nu, v, vv: array[1..N] of real;

Procedure Raschet;

begin If (i<45) then rho:=0.7 else rho:=1.4;

v[i]:=vv[i]+(nu[i+1]-nu[i-1])*(vv[i+1]-vv[i-1])*dt/h/h/4+

nu[i]*(vv[i+1]-2*vv[i]+vv[i-1])*dt/h/h+0.02*dt/rho; end;

BEGIN DV:=Detect; InitGraph(DV,MV,'c:\bp\bgi');

For i:=1 to N do if (i<45) then nu[i]:=0.7 else nu[i]:=1.3;

Repeat t:=t+0.01; v[1]:=0; v[N]:=0;

For i:=1 to N do vv[i]:=v[i]; For i:=2 to N-1 do Raschet;

For i:=1 to N do vv[i]:=v[i]; For ii:=2 to N-1 do begin i:=N+1-ii; Raschet; end;

If k/2000=round(k/2000) then For i:=1 to N do begin

line(round(100+v[i]*16),i*4+50,round(100+v[i+1]*16),i*4+54); end;

k:=k+1; until KeyPressed; CloseGraph;

END.

Задача 20.3. Изучите установившееся потенциальное течение идеальной жидкости по трубе прямоугольного сечения. Внутри трубы имеются выступы и различные препятствия. Постройте линии тока.

Рассматриваемое течение является плоским, характеризуется потенциалом скорости $\varphi(x, y)$ и функцией тока $\psi(x, y)$, которые удовлетворяют уравнению Лапласа. Получаем:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0, \quad \psi_{i+1,j} - 2\psi_{i,j} + \psi_{i-1,j} + \psi_{i,j+1} - 2\psi_{i,j} + \psi_{i,j-1} = 0.$$

Семейство линий равного потенциала скорости $\varphi(x, y) = const$ ортогонально совокупности линий тока $\psi(x, y) = const$. Значения функции тока находят с помощью уравнения $\psi_{i,j} = (\psi_{i+1,j} + \psi_{i-1,j} + \psi_{i,j+1} + \psi_{i,j-1})/4$. В основной части программы последовательно перебираются все элементы во всех 4 направлениях, при этом пересчитываются значения $\psi_{i,j}$ и через каждые 50 итераций результат вычислений выводится на экран. Используется программа Пр–20.2, результат моделирования показан на рис. 20.2.

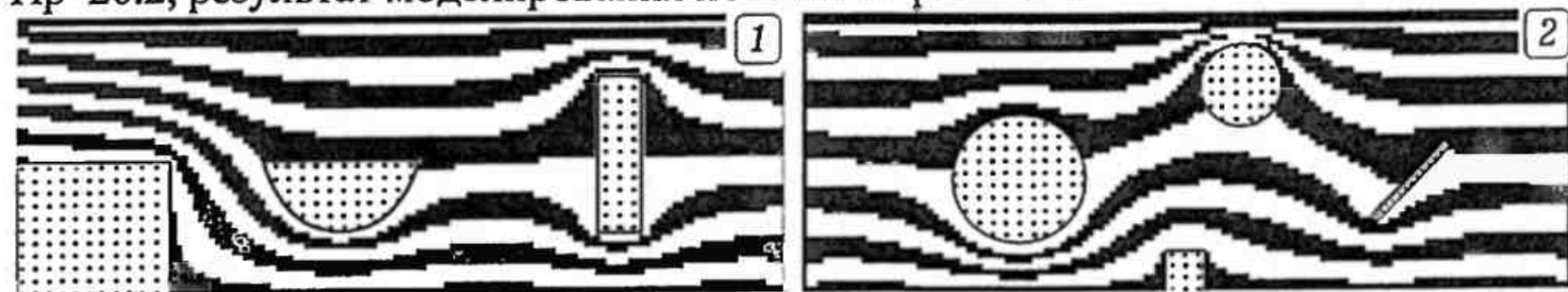


Рис. 20.2.

Uses crt, graph; Const n=140; m=50;

Пр-20.2.

Var i,ii,j,jj,k, DV, MV, EC : integer; psi: array[1..N, 1..M] of real;

Procedure Raschet;

begin psi[i,j]:=(psi[i+1,j]+psi[i-1,j]+psi[i,j+1]+psi[i,j-1])/4; end;

```

Procedure Gran_usl;
begin For i:=1 to N do begin psi[i,2]:=-200; psi[i,M-1]:=200;
psi[i,1]:=-200; psi[i,M]:=200; end;
For j:=1 to M do begin psi[N-1,j]:=-204+8*j; psi[N,j]:=-204+8*j; end;
For j:=1 to 25 do begin psi[2,j]:=-204+16*j; psi[N-1,j]:=-204+8*j;
psi[1,j]:=-204+16*j; psi[N,j]:=-204+8*j; end;
For i:=1 to N do For j:=1 to M do
If (j>25)and((i-60)*(i-60)+(j-25)*(j-25)<200) then psi[i,j]:=0;
For i:=1 to N do for j:=1 to M do
If (abs(j-25)<15)and(abs(i-110)<5) then psi[i,j]:=0;
For i:=1 to N do for j:=1 to M do if (j>25)and(i<30) then psi[i,j]:=200; end;
Procedure Draw; {---- Вывод на экран ----}
begin setcolor(round((psi[i,j]+200)/20));
If ((j>25)and((i-60)*(i-60)+(j-25)*(j-25)<200)) or
((j>25)and(i<30))or((abs(j-25)<15) and(abs(i-110)<5)) then setcolor(0);
rectangle(i*4+50,j*4,i*4+53,j*4+3); end;
BEGIN DV:=Detect; InitGraph(DV,MV,'c:\bp\bgi');
Repeat inc(k); Gran_usl; for i:=2 to N-1 do for j:=2 to M-1 do Raschet;
Gran_usl; for jj:=2 to M-1 do
For ii:=2 to N-1 do begin i:=N+1-ii; j:=M+1-jj; Raschet; end;
If k/10=round(k/10) then begin cleardevice;
For i:=2 to N-1 do For j:=2 to M-1 do Draw; end;
until KeyPressed; CloseGraph;
END.

```

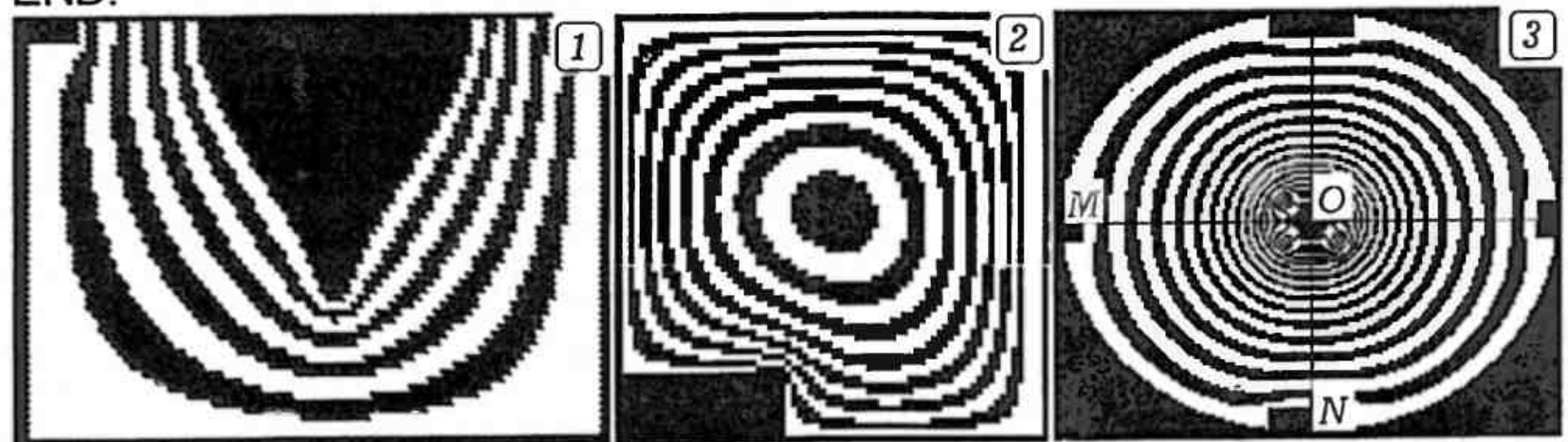


Рис. 20.3.

Задача 20.4. Исследуйте установившееся безвихревое течение вязкой жидкости в длинной трубе (канале) постоянного сечения, внутри которой движется бесконечно длинное тело.

Это течение инвариантно по отношению к переносам в направлении движения. Для его расчета следует определить скорости в сечении, перпендикулярном направлению течения (оси z), то есть решить уравнение:

$$\frac{dv_z}{d\tau} = \nu \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} \right) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}.$$

Если $\partial p / \partial z = 0$, то в конечных разностях получаем:

$$v_{i,j}^{l+1} = v_{i,j}^l + v \left(\frac{v_{i-1,j}^l - 2v_{i,j}^l + v_{i+1,j}^l}{\Delta x^2} + \frac{v_{i,j-1}^l - 2v_{i,j}^l + v_{i,j+1}^l}{\Delta y^2} \right) \Delta \tau.$$

Необходимо правильно задать граничные условия. Слои вязкой жидкости, прилегающие к поверхности твердого тела, имеют одинаковую с ним скорость. Если жидкость имеет свободную поверхность, то скорость частиц этой поверхности равна скорости частиц, расположенных слоем ниже. Выше представлены результаты расчета обтекания длинного корпуса корабля (рис. 20.3.1, 20.4), течения в трубе при разности давлений (рис. 20.3.2), движения жидкости в трубе в случае, когда вдоль ее оси протягивается нить (рис. 20.3.3). В последнем случае расчет осуществлялся для четверти рисунка; граничные условия по вертикали и горизонтали задавались как для свободной поверхности жидкости.

Uses crt, graph; Const n= 90; m=58; h=1; dt=0.02; Пр-20.3.

Var ii,jj,kk,i,j,DV, MV, EC : integer; vv, v: array[1..N, 1..M] of real;

Procedure Gr_usl;

begin For i:=1 to N do For j:=1 to M do v[i,j]:=vv[i,j]; For i:=2 to N-1 do

For j:=2 to M-1 do begin if (j<5)and(abs(5-i)<5) then v[i,j]:=0;

If (j<40)and(abs(i-50)<1+20*sqr(cos(j/25))) then v[i,j]:=300; end;

For i:=1 to N do v[i,M]:=0;

For j:=1 to M do begin v[1,j]:=0; v[N,j]:=0; end; end;

Procedure Raschet;

begin vv[i,j]:=v[i,j]+(v[i,j+1]-2*v[i,j]+v[i,j-1])*dt/(h*h)

+(v[i+1,j]-2*v[i,j]+v[i-1,j])*dt/(h*h); end;

procedure Draw;

begin setcolor(round(v[i,j]/40)); If v[i,j]<1 then setcolor(9);

{If round(v[i,j]/60)<v[i,j]/60 then setcolor(15) else setcolor(8);}

rectangle(i*3+9,j*3,i*3+2,j*3+2); rectangle(i*3+10,j*3,i*3+1,j*3+1); end;

BEGIN DV:=Detect; InitGraph(DV,MV,'c:\bp\bgi');

Repeat Gr_usl; For i:=1 to N-1 do For j:=2 to M-1 do Raschet;

Gr_usl; For jj:=2 to M-1 do For ii:=1 to N-1 do

begin i:=N+1-ii; j:=M+1-jj; Raschet; end;

For i:=1 to N do vv[i,1]:=vv[i,2]; kk:=kk+1;

If kk/30=round(kk/30) then For i:=2 to N-1 do For j:=2 to M-1 do Draw;

until KeyPressed; CloseGraph;

END.

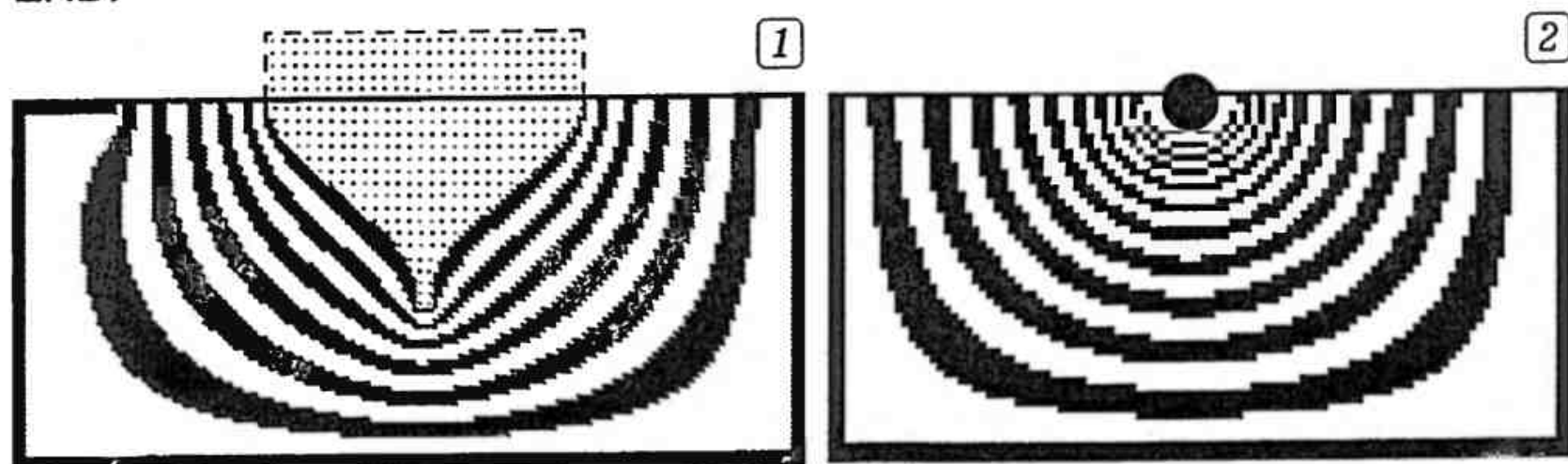


Рис. 20.4.

Задача 20.5. Рассчитайте течение вязкой жидкости в бесконечно длинной трубе произвольного сечения при наличии разности давлений на концах трубы. Из решения предыдущей задачи, полагая, что $\partial p / \partial z = a \neq 0$, получаем:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{a}{\rho}, \quad \frac{v_{i-1,j}^t - 2v_{i,j}^t + v_{i+1,j}^t}{\Delta x^2} + \frac{v_{i,j-1}^t - 2v_{i,j}^t + v_{i,j+1}^t}{\Delta y^2} = \frac{a}{\rho},$$

$$v_{i,j} = (v_{i+1,j} + v_{i-1,j} + v_{i,j+1} + v_{i,j-1} - ah^2 / \rho) / 4,$$

где $h = \Delta x = \Delta y$ — шаг сетки. Так как жидкость вязкая, то вблизи стенки трубы (на границе рассматриваемой области) $v = 0$. Результат решения задачи приведен на рис. 20.3.2.

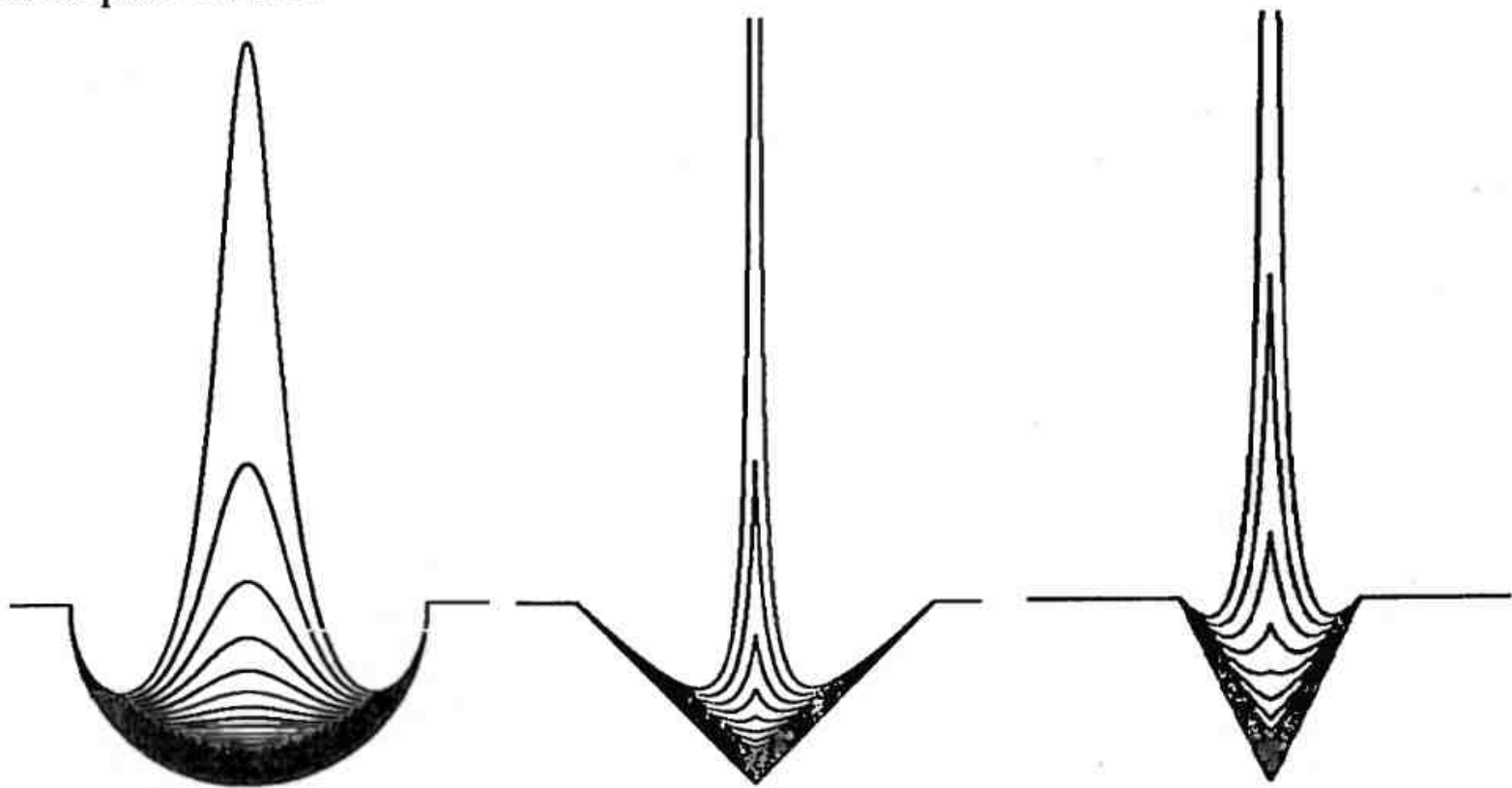


Рис. 20.5.

Задача 20.6. Промоделируйте возникновение кумулятивной струи.

Рассмотрим наполненную водой пробирку, которая вертикально падает на твердую поверхность. В момент удара образуется тонкая струя, которая поднимается вверх на несколько метров. Представим себе, что в момент $\tau = 0$ жидкость имеет на своей поверхности выемку в форме полушария, после чего она переходит из состояния невесомости в обычное весомое состояние, как бы становясь мгновенно тяжелой. Как показано в книге М.А.Лаврентьева и Б.В.Шабата [11], приближенное решение этой задачи для вертикального сечения кумулятивной струи сводится к уравнению:

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{v^2}{2} - gz \quad \text{или} \quad \frac{\varphi_i^{t+1} - \varphi_i^t}{\Delta \tau} = \frac{(v_i^t)^2}{2} - gz_i^t, \quad \varphi_i^{t+1} = \varphi_i^t + \left[\frac{(v_i^t)^2}{2} - gz_i^t \right] \Delta \tau.$$

Результат численного решения этого уравнения для сферической и конической кумуляции представлен на рис. 20.5. На нем видно образование кумулятивной струи в последовательные моменты времени.

21. МОДЕЛИРОВАНИЕ АВТОВОЛНОВЫХ ПРОЦЕССОВ

Рассмотрим двумерную активную среду, состоящую из элементов, каждый из которых может находиться в трех различных состояниях: покое, возбуждении и рефрактерности. При отсутствии внешнего воздействия элемент находится в состоянии покоя. В результате воздействия элемент переходит в возбужденное состояние, приобретая способность возбуждать соседние элементы. Через некоторое время после возбуждения элемент переключается в состояние рефрактерности, находясь в котором он не может быть возбужден. Затем элемент сам возвращается в исходное состояние покоя, снова приобретая способность переходить в возбужденное состояние. Необходимо промоделировать процессы, происходящие в двумерной активной среде при различных параметрах среды и начальном распределении возбужденных элементов.

Будем использовать обобщенную модель Винера–Розенблюта. Мысленно разобьем экран компьютера на элементы, определяемые индексами i, j и образующие двумерную сетку. Пусть состояние каждого элемента описывается фазой $y_{i,j}^t$ и концентрацией активатора $u_{i,j}^t$, где t — дискретный момент времени. Если элемент находится в покое, то будем считать, что $y_{i,j}^t = 0$. Если вследствие близости возбужденных элементов концентрация активатора $u_{i,j}^t$ достигает порогового значения h , то элемент возбуждается и переходит в состояние 1. Затем на следующем шаге он автоматически переключается в состояние 2, после этого — в состояние 3 и т.д., оставаясь при этом возбужденным. Достигнув состояния r , элемент переходит в состояние рефрактерности. Через s ($s > r$) шагов после возбуждения элемент возвращается в состояние покоя. При этом реализуется следующее правило:

$$y_{i,j}^{t+1} = \begin{cases} y_{i,j}^t + 1, & \text{если } 0 < y_{i,j}^t < s, \\ 0, & \text{если } y_{i,j}^t = s, \\ 0, & \text{если } y_{i,j}^t = 0, \quad u_{i,j}^t < h, \\ 1, & \text{если } y_{i,j}^t = 0, \quad u_{i,j}^t \geq h. \end{cases}$$

Будем считать, что при переходе из состояния s в состояние покоя 0 концентрация активатора становится равной 0. При наличии соседнего элемента, находящегося в возбужденном состоянии, она увеличивается на 1. Если l ближайших соседей возбуждены, то на соответствующем шаге к предыдущему значению концентрации активатора прибавляется число возбужденных соседей: $u_{i,j}^{t+1} = u_{i,j}^t + l$. Можно ограничиться учетом восьми соседних элементов.

Для моделирования автоволновых процессов в активной среде необходимо составить цикл по времени, в котором вычисляются фазы элементов среды в последующие моменты времени и концентрация активатора, стирается преды-

дущее распределение возбужденных элементов и строится новое. Алгоритм состоит в следующем:

1. Задают число элементов активной среды, ее параметры s , r , h , начальное распределение возбужденных элементов.

2. Начало цикла по t . Дают приращение по времени: переменной t присваивают значение $t + 1$.

3. Перебирают все элементы активной среды, определяя их фазы $y_{i,j}^{t+1}$ и концентрацию активатора $u_{i,j}^{t+1}$ в момент $t + 1$.

4. Очищают экран и строят возбужденные элементы активной среды.

5. Переход к операции 2. Если цикл по t закончился, — выход из него.

Ниже представлена программа, моделирующая активную среду и происходящие в ней процессы. В программе заданы начальные значения фазы $y_{i,j}^{t+1}$ всех элементов активной среды, а также имеется цикл по времени, в котором рассчитываются значения $y_{i,j}^{t+1}$ в следующий момент $t + 1$ и осуществляется графический вывод результатов на экран. Параметры среды $r = 6$, $s = 13$, $h = 5$, то есть каждый элемент кроме состояния покоя может находиться в 6 возбужденных состояниях и 7 состояниях рефрактерности. Пороговое значение концентрации активатора равно 5. Программа Пр-21.1 строит однорукавную волну, двuruкавную волну, осциллятор и препятствие.

Uses dos, crt, graph; Const N=110; M=90; s=13; r=6; h=5; Пр-21.1.

Var y, yy, u : array [1..N,1..M] of integer;

ii, jj, j, k, Gd, Gm : integer; i : Longint; Label met;

BEGIN Gd:= Detect; InitGraph(Gd, Gm, 'c:\bp\bgi');

setcolor(8); setbkcolor(15);

(* y[50,50]:=1; { Одиночная волна } *)

For j:=1 to 45 do { Однорукавная волна }

For i:=1 to 13 do y[40+i,j]:=i;

(* For j:=1 to M do { Двuruкавная волна }

For i:=1 to 13 do begin y[40+i,j]:=i;

If j>40 then y[40+i,j]:=14-i; end; *)

Repeat

If k=round(k/20)*20 then y[30,30]:=1; {Осциллятор 1}

(* If k=round(k/30)*30 then y[20,50]:=1; {Осциллятор 2} *)

For i:=2 to N-1 do For j:=2 to M-1 do begin

If (y[i,j]>0) and (y[i,j]<s) then yy[i,j]:=y[i,j]+1;

If y[i,j]=s then begin yy[i,j]:=0; u[i,j]:=0; end;

If y[i,j] <> 0 then goto met;

For ii:=i-1 to i+1 do For jj:=j-1 to j+1 do begin

If (y[ii,jj]>0) and (y[ii,jj]<=r) then u[i,j]:=u[i,j]+1;

If u[i,j]>=h then yy[i,j]:=1; end;

met: end; Delay(2000); cleardevice;

For i:=21 to 70 do begin

```

yy[i,60]:=0; yy[i,61]:=0;
circle(6*i-10,500-6*60,3); circle(6*i-10,500-6*61,3); end;
For i:=1 to N do For j:=1 to M do
begin y[i,j]:=yy[i,j]; setcolor(12);
If (y[i,j]>=1) and (y[i,j]<=r) then circle(6*i-10,500-6*j,3); setcolor(8);
If (y[i,j]>6) and (y[i,j]<=s) then circle(6*i-10,500-6*j,2);
end;
until KeyPressed; CloseGraph;
END.

```

Задача 21.1. Создайте модель одиночной волны возбуждения. Для этого один из элементов среды переведите в возбужденное состояние.

Задача 21.2. Промоделируйте серию автоволн. Для этого необходимо, чтобы один из элементов совершал периодические колебания, то есть автоматически через заданное число шагов переходил в возбужденное состояние 1. Такой элемент называется осциллятором. Для получения серии автоволн следует активизировать строку с пометкой "Осциллятор 1".

Задача 21.3. Изучите распространение автоволн в двумерной среде, содержащей два параллельно расположенных экрана или экран с отверстием. Получите аннигиляцию автоволн, распространяющихся навстречу друг другу.

Задача 21.4. Получите однорукавную спиральную волну, возникающую на краях фронта. Для этого необходимо в блоке начальных условий задать плоскую волну, фронт которой обрывается в середине экрана (рис. 21.1.1).

Задача 21.5. Получите двухрукавную спиральную волну (рис. 21.1.2).

Задача 21.6. Исследуйте эффект синхронизации, состоящий в том, что при наличии двух или более источников автоволн высокочастотные источники подавляют низкочастотные. В результате наступает синхронизация элементов среды: колебания происходят с частотой, равной частоте высокочастотного источника (рис. 21.2.1). Чтобы пронаблюдать это явление на экране компьютера, следует смоделировать два осциллятора, работающих на разных частотах (активизировать операторы с пометками "Осциллятор 1" и "Осциллятор 2").

Задача 21.7. Промоделируйте взаимодействие спиральных автоволн с автоволнами, вырабатываемыми осциллятором, колеблющимся с низкой частотой (рис. 21.2.2).

Задача 21.8. Промоделируйте дифракцию автоволн. Для этого необходимо создать волну, на пути которой расположено препятствие (непрозрачный экран), состоящее из невозбуждающихся элементов, расположенных вдоль прямой и всегда находящихся в состоянии 0 (рис. 21.3).

Задача 21.9. Исследуйте распространение и аннигиляцию одиночного импульса в одномерной активной среде.

Задача 21.10. Изучите распространение автоволн в одномерной активной среде при наличии осциллятора.

Задача 21.11. Изучите распространение одиночного импульса в одномерной активной среде, последний элемент которой контактирует с первым.

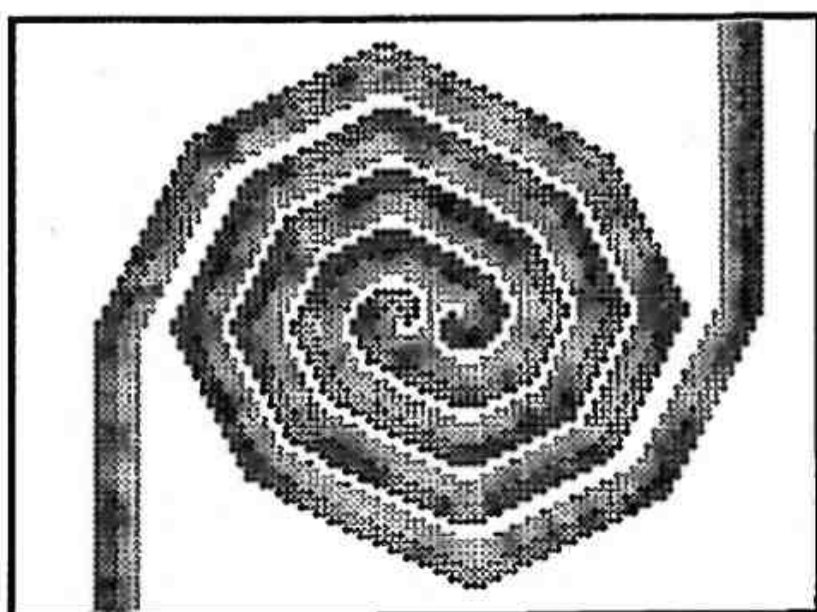
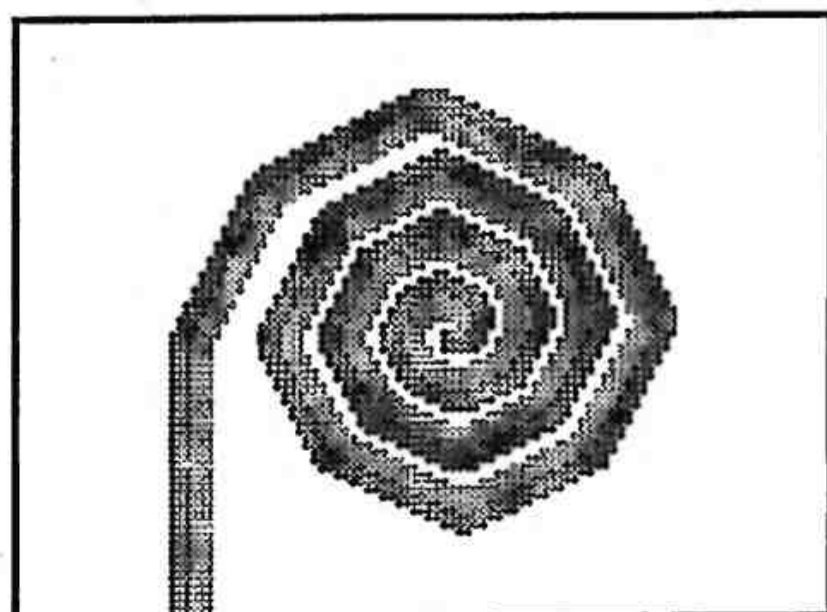
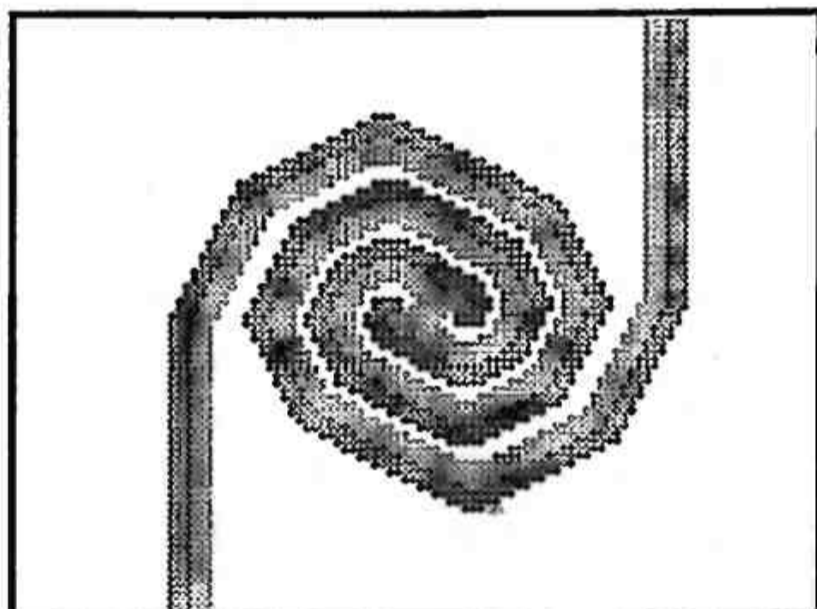
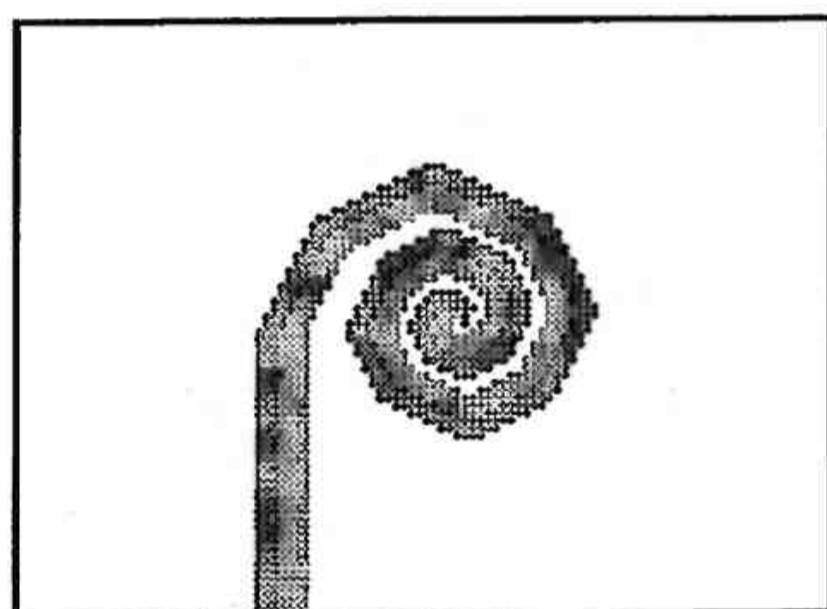
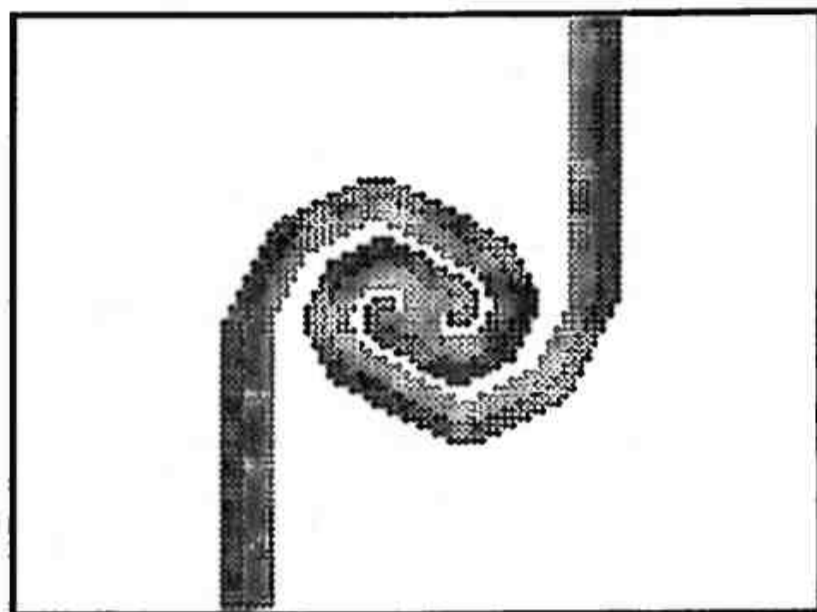
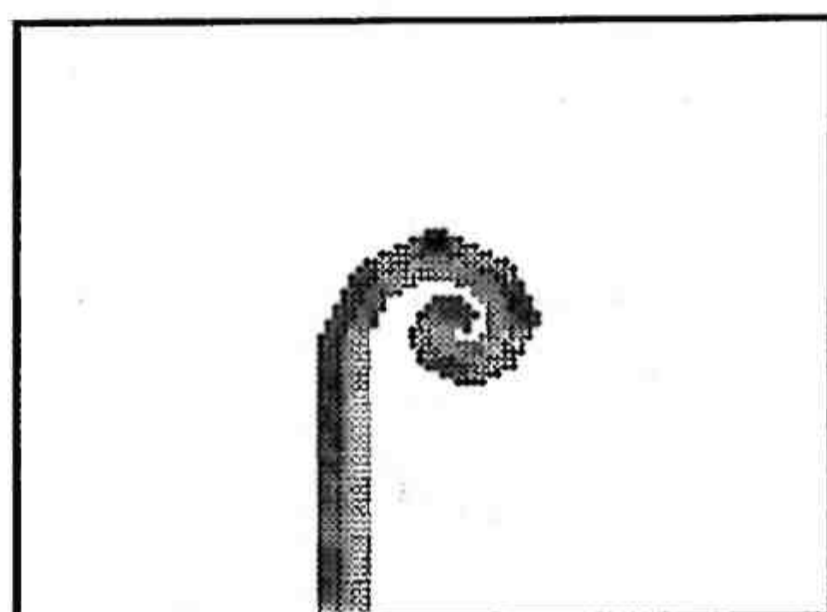
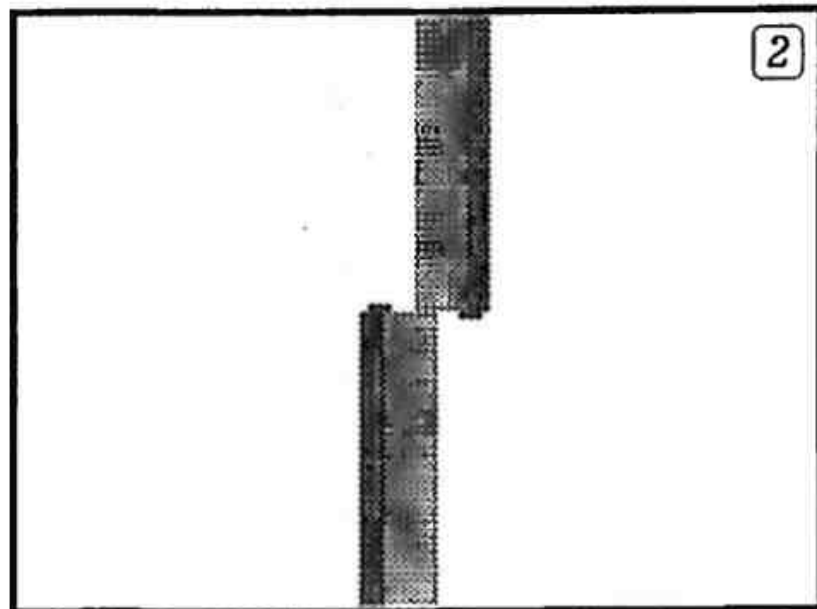
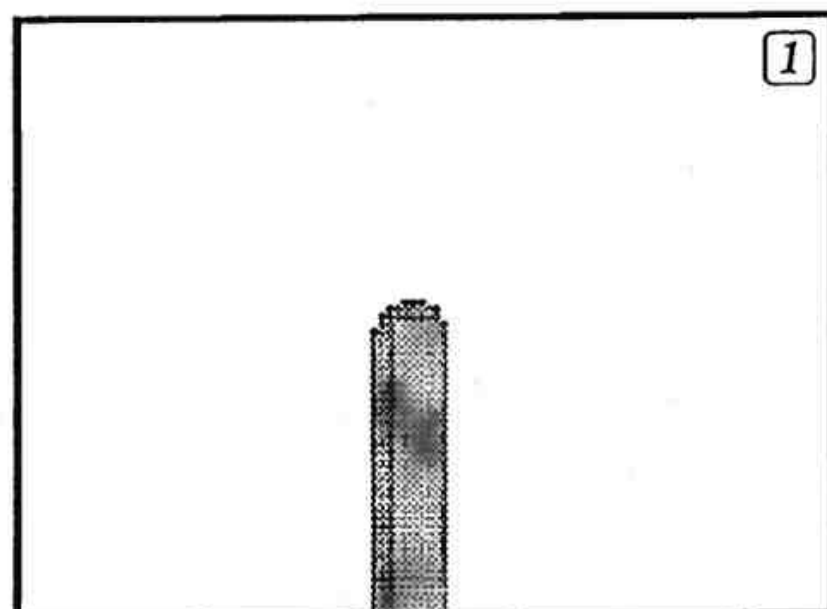


Рис. 21.1.

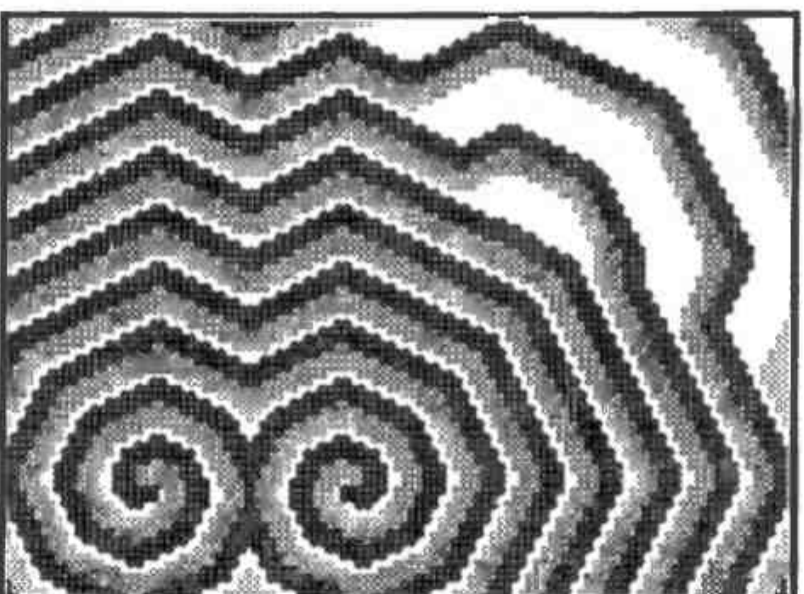
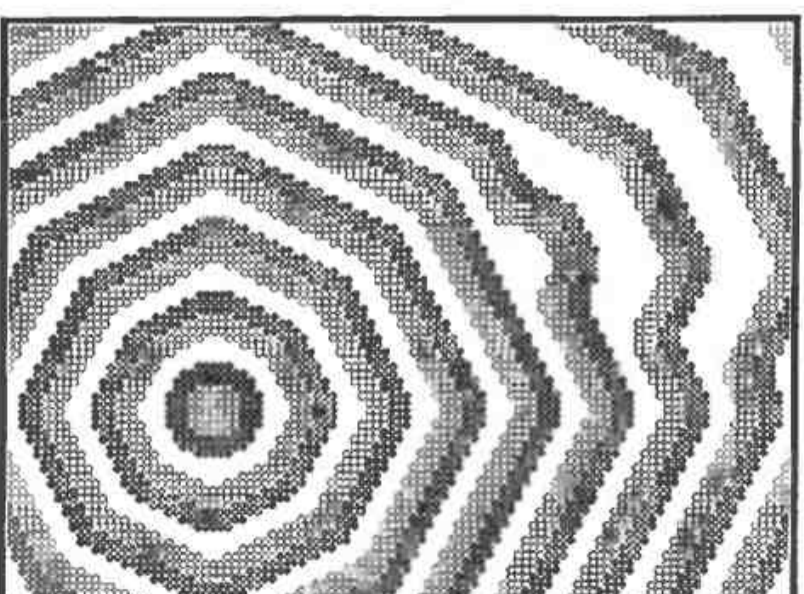
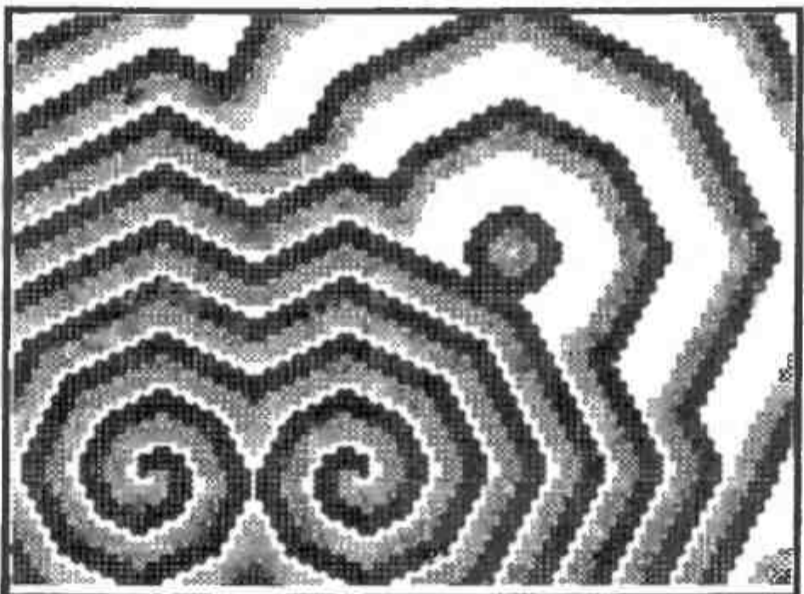
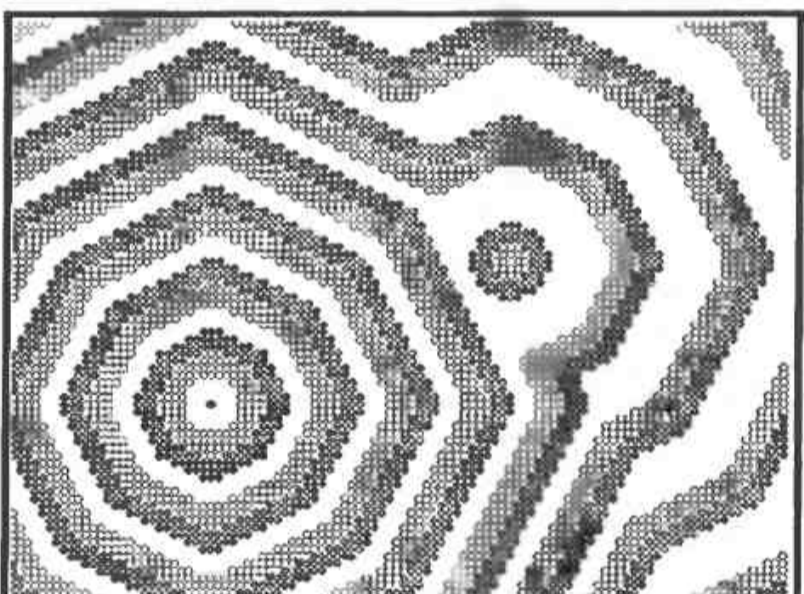
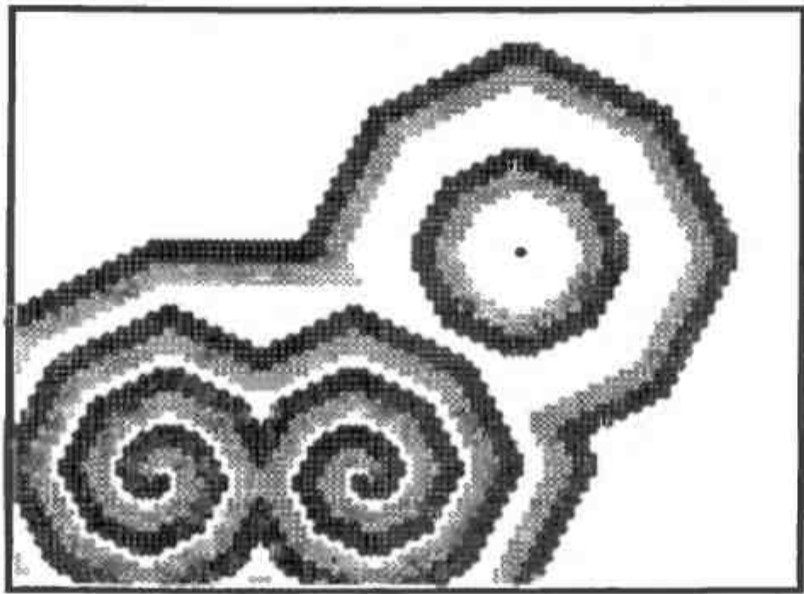
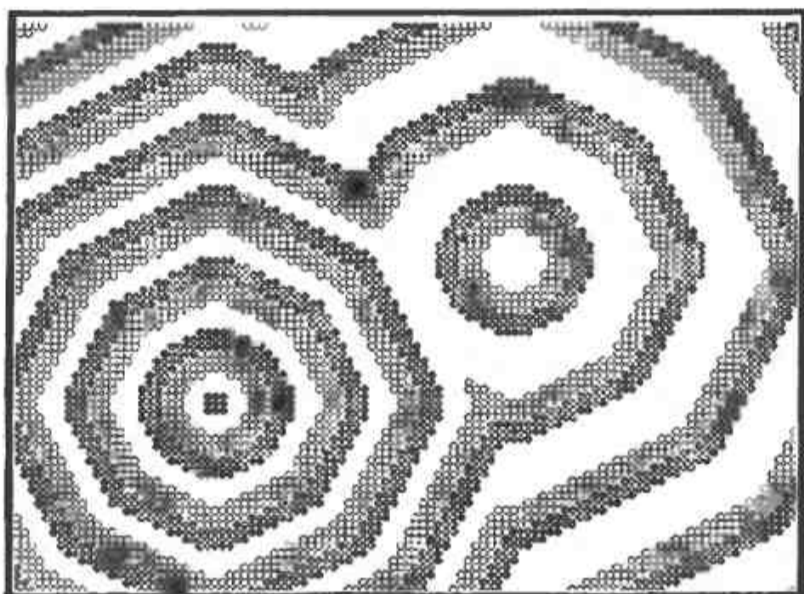
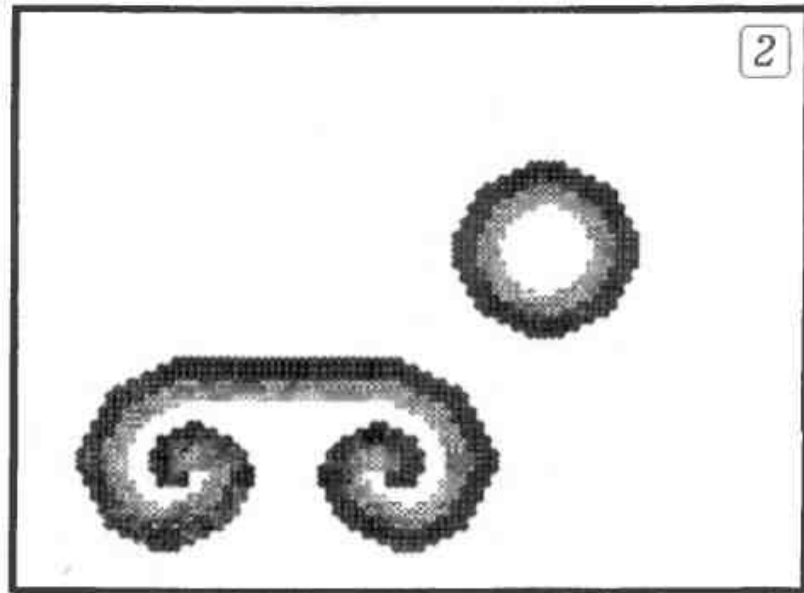
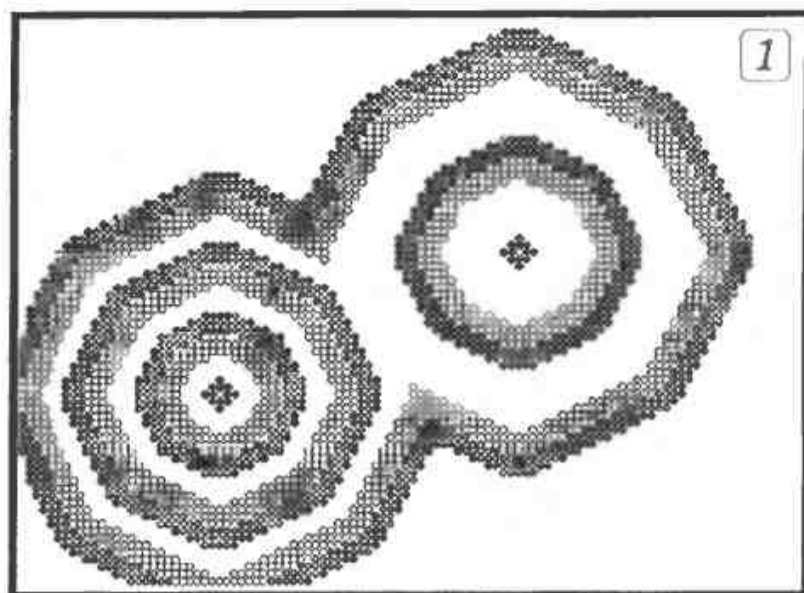


Рис. 21.2.

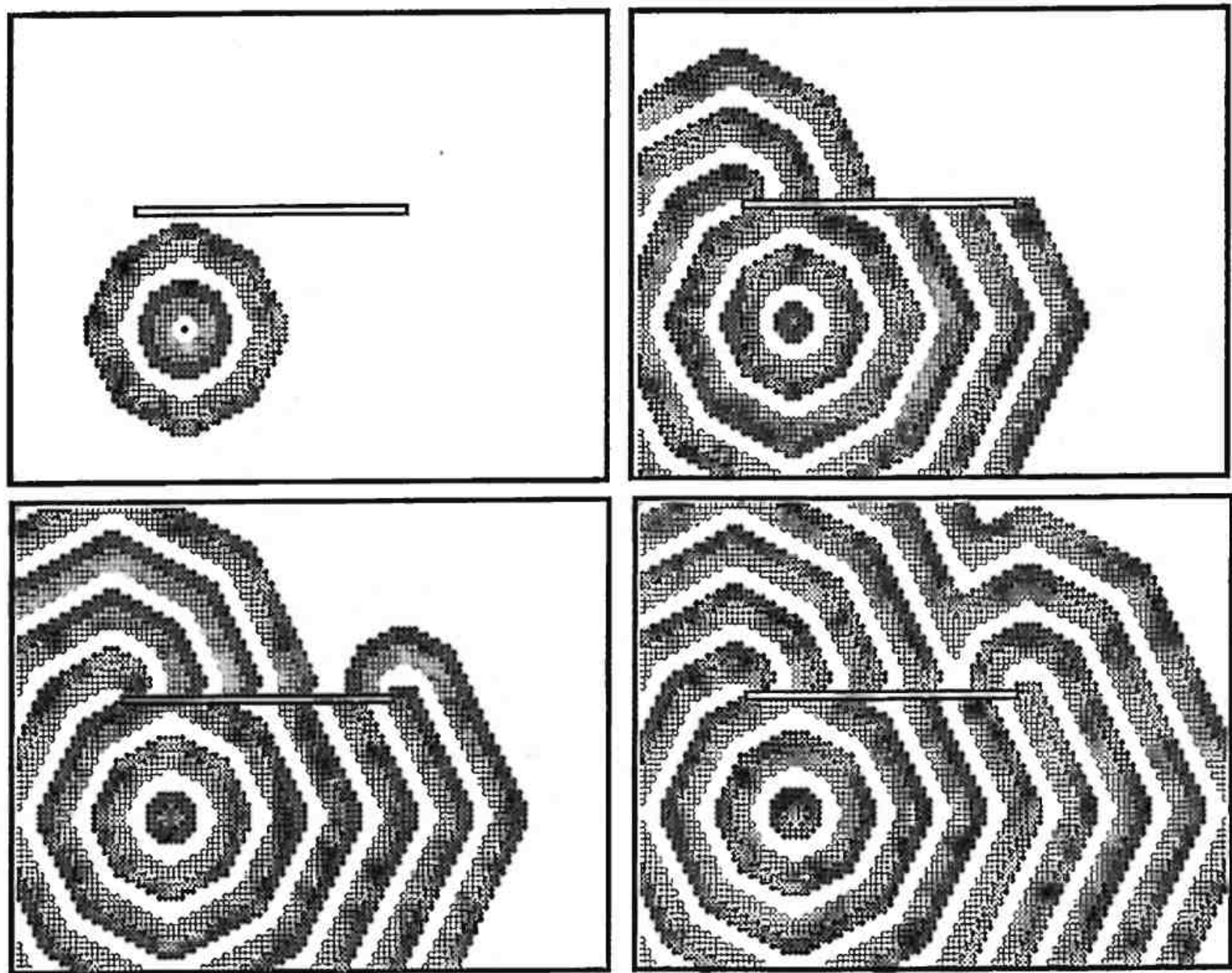


Рис. 21.3.

* * * * *

Дальнейшее движение к информационному обществу требует формирования у школьников и студентов умения работать с информацией, используя для ее получения, обработки и передачи современные компьютерные технологии. Одним из направлений формирования информационной культуры является изучение метода компьютерного моделирования и вычислительного эксперимента, осуществляемое в школе на уроке информатики. В вузах при прохождении курса "Компьютерное моделирование" студенты на более высоком уровне знакомятся с численными методами решения дифференциальных уравнений, учатся писать программы, методом вычислительного эксперимента исследуют различные явления и системы. В настоящей работе рассмотрены наиболее фундаментальные компьютерные модели физических явлений, с которых, по всей видимости, и следует начать изучение основ вычислительной физики.

Идея написания монографии возникла в процессе работы на физическом факультете ГГПИ, руководимом профессором В.В.Майером. Автор выражает благодарность и другим преподавателям факультета: Е.С.Агафоновой, О.Е. Данилову, Р.В.Майеру (Акатову), А.В.Проказову, А.С.Рудину, В.А. Саранину, которые в той или иной степени способствовали написанию этой работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Берковский Б.М., Полевилов В.К. Вычислительный эксперимент в конвекции. — Мн.: Университетское, 1988. — 167 с.
2. Галагер Р. Метод конечных элементов: Основы. — М.: Мир, 1984. — 428 с.
3. Гулд Х., Тобочник Я. Компьютерное моделирование в физике: В 2-х частях. Часть 2. — М.: Мир, 1990. — 400 с.
4. Дульнев Г.Н., Парфенов В.Г., Сигалов А.В. Применение ЭВМ для решения задач теплообмена: Учеб. пособие для теплофизич. и теплоэнергетич. спец. вузов. — М.: Высш. шк., 1990. — 207 с.
5. Иванов В.В. Методы вычислений на ЭВМ: Справочное пособие. — Киев: Наук. думка, 1986. — 584 с.
6. Ильина В.А., Силаев П.К. Численные методы для физиков-теоретиков. II. — Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004. — 118 с.
7. Компьютеры и нелинейные явления: Информатика и современное естествознание. — М.: Наука, 1988. — 192 с.
8. Компьютеры, модели, вычислительный эксперимент. Введение в информатику с позиций математического моделирования. — М.: Наука, 1988. — 176 с.
9. Коханер Д., Моулер К. Численные методы и программное обеспечение. — М.: Мир, 2001. — 575 с.
10. Кунин С. Вычислительная физика. — М.: Мир, 1992. — 518 с.
11. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Проблемы гидродинамики и их математические модели. — М.: Наука, 1973. — 416 с.
12. Майер В.В. Свет в оптически неоднородной среде: учебные исследования. — М.: Физматлит, 2007. — 232 с.
13. Мудров А.Е. Численные методы для ПЭВМ на языках Бейсик, Фортран и Паскаль. — Томск: МП "РАСКО", 1991. — 272 с.
14. Поттер Д. Вычислительные методы в физике. — М.: Мир, 1975. — 392 с.
15. Полянин А.Д., Зайцев В.Ф. Справочник по нелинейным уравнениям математической физики: точные решения. — М.: Физматлит, 2002. — 432 с.
16. Ракитин В.И., Первушин В.Е. Практическое руководство по методам вычислений с приложением программ для персональных компьютеров: Учеб. пособие. — М.: Высшая. шк., 1998. — 383 с.
17. Роуч П. Вычислительная гидродинамика. — М.: Мир, 1980. — 616 с.
18. Рябенский В.С. Введение в вычислительную математику: Учеб. пособие. — М.: Физматлит, 2000. — 296 с.
19. Самарский А.А., Вабищевич П.Н., Самарская Е.А. Задачи и упражнения по численным методам: Учеб. пособие. — М.: Эдиторал УРСС, 2000. — 208 с.
20. Самарский А.А., Михайлов А.П. Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры. — М.: Физматлит, 2001. — 320 с.
21. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1966. — 724 с.
22. Федоренко Р.П. Введение в вычислительную физику: Учеб. пособие: Для вузов. — М.: Изд-во Моск. физ.-техн. ин-та, 1994. — 528 с.
23. Эксперимент на дисплее: Первые шаги вычислительной физики. — М.: Наука, 1989. — 175 с.

СОДЕРЖАНИЕ

Вступление	3
1. Численное решение дифференциальных уравнений	7
2. Моделирование систем с одной степенью свободы	11
3. Моделирование колебательного движения	15
4. Двумерное движение материальной точки	20
5. Модель двумерного движения системы частиц	27
6. Модель одномерной упругой среды	32
7. Решение задач аналитической механики	37
8. Хаос в детерминированных системах	42
9. Решение задач статистической физики	48
10. Модель магнетика Изинга	50
11. Расчет электрического поля	53
12. Расчет магнитного поля	57
13. Решение задач геометрической оптики	59
14. Моделирование явлений волновой физики	65
15. Моделирование явлений микромира	72
16. Модель излучения абсолютно черного тела	77
17. Моделирование явлений переноса	78
18. Моделирование волнового движения	86
19. Расчет распределения потенциала электрического поля	94
20. Расчет течения жидкости	98
21. Моделирование автоволновых процессов	104
Литература	110

Учебное издание

Майер Роберт Валерьевич

Компьютерное моделирование физических явлений

Отпечатано с оригинал–макета автора
в авторской редакции

Издательская лицензия ИД N 06035 от 12.10.2001.
Подписано в печать 18.03.09. Напечатано на ризографе.
Формат 60 x 90 1/16. Усл. печ. л. 7,0. Учетн.–изд. л. 7,4.
Тираж 300 экз. Заказ N 3429 .

ГОУ ВПО “Глазовский государственный педагогический институт
им. В.Г.Короленко”
427621, Удмуртия, г. Глазов, ул. Первомайская, 25.
